

CFA 2010



Propagation d'ondes élastiques dans un tube anisotrope à gradient de propriétés radial : application à l'évaluation de la qualité osseuse

Cécile Baron^{1, 2}

¹UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France.

²CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France.



13 avril 2010

UPMC
UNIVERSITÉ PARIS 6



Outline

- 1 **Caractérisation ultrasonore de milieux à gradient de propriétés**
 - FGM
 - Caractérisation US & FGM
 - C'est du béton !
 - Anisotropie, hétérogénéité & tube

- 2 **Evaluation de la résistance osseuse par ultrasons**
 - Dans la Nature...
 - Et l'os cortical ?
 - Un modèle d'os
 - Résultats
 - Critique & Perspectives



FGM : qu'est-ce que c'est ?

Functionally **G**raded **M**aterials : matériaux à gradient de propriétés.



FGM : qu'est-ce que c'est ?

Functionally **G**raded **M**aterials : matériaux à gradient de propriétés.

- Variation progressive des propriétés mécaniques et/ou thermiques du matériau selon une direction de l'espace.
 - ▶ variation de la (micro)structure (porosité)
 - ▶ variation de la composition du matériau.
- Intérêt des Functionally Graded Materials :



FGM : qu'est-ce que c'est ?

Functionally **G**raded **M**aterials : matériaux à gradient de propriétés.

- Variation progressive des propriétés mécaniques et/ou thermiques du matériau selon une direction de l'espace.
 - ▶ variation de la (micro)structure (porosité)
 - ▶ variation de la composition du matériau.
- Intérêt des Functionally Graded Materials :
 - ▶ $[\sigma]$ & interfaces
 - ▶ Association de matériaux → améliorer les propriétés mécaniques et thermiques

Domaines d'application : aéronautique et aérospatiale, automobile, biomatériaux prothétiques etc.



FGM : qu'est-ce que c'est ?

Functionally **G**raded **M**aterials : matériaux à gradient de propriétés.

- Variation progressive des propriétés mécaniques et/ou thermiques du matériau selon une direction de l'espace.
 - ▶ variation de la (micro)structure (porosité)
 - ▶ variation de la composition du matériau.
- Intérêt des Functionally Graded Materials :
 - ▶ $[\sigma]$ & interfaces
 - ▶ Association de matériaux → améliorer les propriétés mécaniques et thermiques

Domaines d'application : aéronautique et aérospatiale, automobile, biomatériaux prothétiques etc.



Ultrasons & milieux élastiques à gradient de propriétés

- Milieux naturels
(Terre, atmosphère, océans, os, bambou) ;
- Matériaux industriels
(FGM, structures assemblées, dégradations)

Méthode originale de résolution de l'équation d'onde pour la caractérisation de guides d'ondes anisotropes plans et cylindriques à hétérogénéité unidirectionnelle continue :

Solution formelle exacte :
Développement en série de Peano du matricant (formalisme de Stroh)



Ultrasons & milieux élastiques à gradient de propriétés

- Milieux naturels
(Terre, atmosphère, océans, os, bambou) ;
- Matériaux industriels
(FGM, structures assemblées, dégradations)

Méthode **originale** de résolution de l'équation d'onde pour la caractérisation de guides d'ondes anisotropes plans et cylindriques à hétérogénéité unidirectionnelle continue :

Solution formelle exacte :
Développement en série de Peano du matricant (formalisme de Stroh)



Mise en œuvre expérimentale
avantages analytiques et numériques

Baron et al. Ultrasonics (2007) ;

Baron et al., Chapitre 4 in « Matériaux et Acoustique 2 » (2006).



Ultrasons & milieux élastiques à gradient de propriétés

- Milieux naturels
(Terre, atmosphère, océans, os, bambou) ;
- Matériaux industriels
(FGM, structures assemblées, dégradations)

Méthode **originale** de résolution de l'équation d'onde pour la caractérisation de guides d'ondes anisotropes plans et cylindriques à hétérogénéité unidirectionnelle continue :

Solution formelle exacte :
Développement en série de Peano du matricant (formalisme de Stroh)



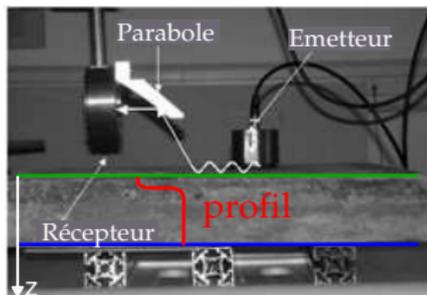
Mise en œuvre expérimentale
avantages analytiques et numériques

Baron et al. Ultrasonics (2007) ;

Baron et al., Chapitre 4 in « Matériaux et Acoustique 2 » (2006).



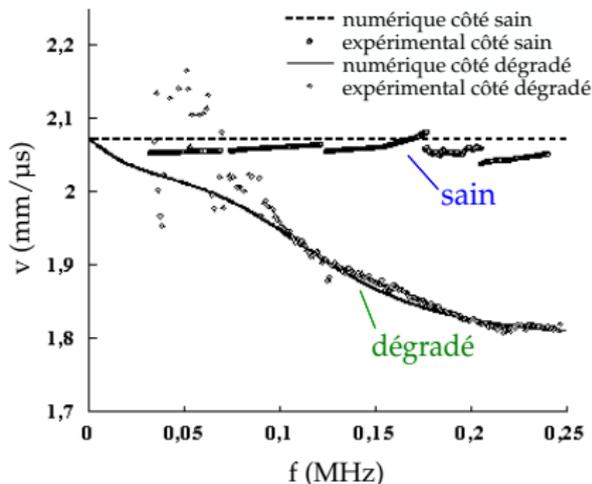
Mise en œuvre expérimentale : caractérisation du profil de propriétés



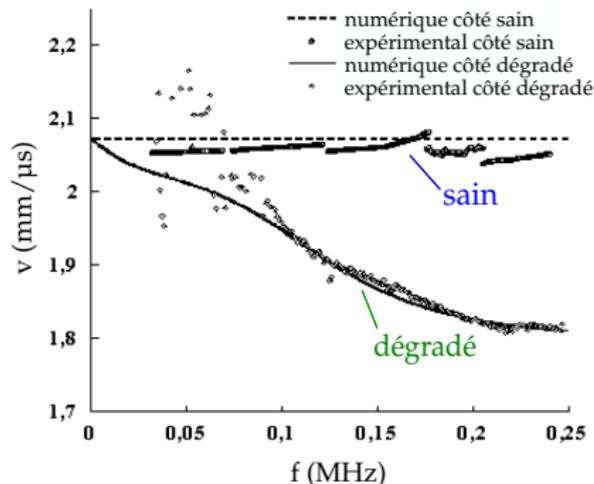
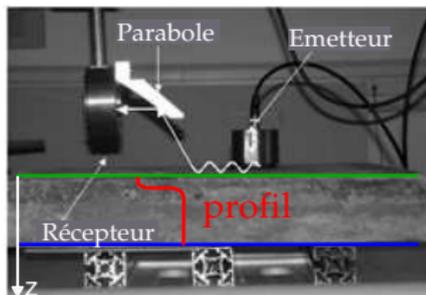
$$f(z) = f_0 + (f_d - f_0) \frac{\tanh \alpha (z - z_g) + \tanh \alpha z_g}{\tanh \alpha (d - z_g) + \tanh \alpha z_g}$$

$$f(z) \equiv c_{ij}(z) \text{ ou } \rho(z)$$

- épaisseur de la zone dégradée d ;
- localisation du gradient z_g ;
- pente du gradient α .



Mise en œuvre expérimentale : caractérisation du profil de propriétés



$$f(z) = f_0 + (f_d - f_0) \frac{\tanh\alpha(z - z_g) + \tanh\alpha z_g}{\tanh\alpha(d - z_g) + \tanh\alpha z_g}$$

$$f(z) \equiv c_{ij}(z) \text{ ou } \rho(z)$$

- épaisseur de la zone dégradée d ;
- localisation du gradient z_g ;
- pente du gradient α .



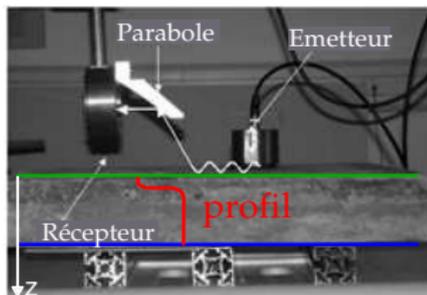
GÉOMETRIE



MATÉRIAU

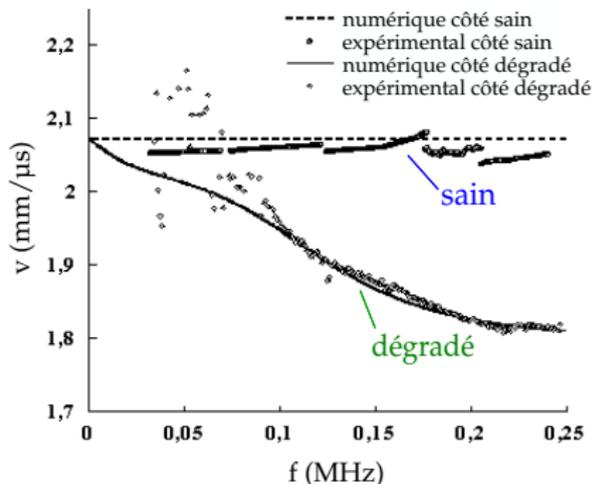


Mise en œuvre expérimentale : caractérisation du profil de propriétés



$$f(z) = f_0 + (f_d - f_0) \frac{\tanh \alpha(z - z_g) + \tanh \alpha z_g}{\tanh \alpha(d - z_g) + \tanh \alpha z_g}$$

$$f(z) \equiv c_{ij}(z) \text{ ou } \rho(z)$$



- épaisseur de la zone dégradée d ;
- localisation du gradient z_g ;
- pente du gradient α .



GÉOMETRIE



MATÉRIAU



Caractérisation d'un tube anisotrope et hétérogène

Anisotropie
+
géométrie cylindrique



inefficacité des
méthodes classiques



Développement en série
de Peano du matricant
(formalisme de Stroh)

Tube placé dans le vide



modes propres

- ondes axiales
 - ▶ modes longitudinaux $L(0, m)$
 - ▶ modes de torsion $T(0, m)$
 - ▶ modes de flexion $F(n, m)$
- ondes circonférentielles



Caractérisation d'un tube anisotrope et hétérogène

Anisotropie
+
géométrie cylindrique

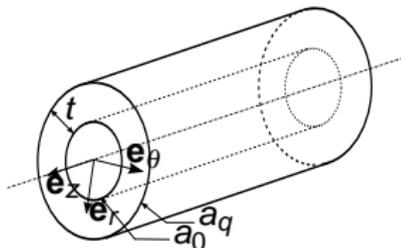


inefficacité des
méthodes classiques



Développement en série
de Peano du matricant
(formalisme de Stroh)

Tube placé dans le vide  modes propres



- ondes axiales
 - ▶ modes longitudinaux $L(0, m)$
 - ▶ modes de torsion $T(0, m)$
 - ▶ modes de flexion $F(n, m)$
- ondes circonférentielles



Caractérisation d'un tube anisotrope et hétérogène

Anisotropie
+
géométrie cylindrique

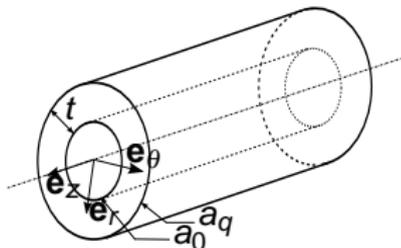


inefficacité des
méthodes classiques



Développement en série
de Peano du matricant
(formalisme de Stroh)

Tube placé dans le vide  modes propres



- ondes axiales
 - ▶ modes longitudinaux $L(0, m)$
 - ▶ modes de torsion $T(0, m)$
 - ▶ modes de flexion $F(n, m)$
- ondes circonférentielles



Validation

Tube FGM isotrope :

	r	E (GPa)	ν	ρ (kg/m ³)
acier inoxydable (extérieur)	a_q	207.82	0.317	8166
nitruure de silicium (intérieur)	a_0	322.4	0.24	2370

TABLE: Propriétés élastiques aux 2 interfaces du tube.

Profil :

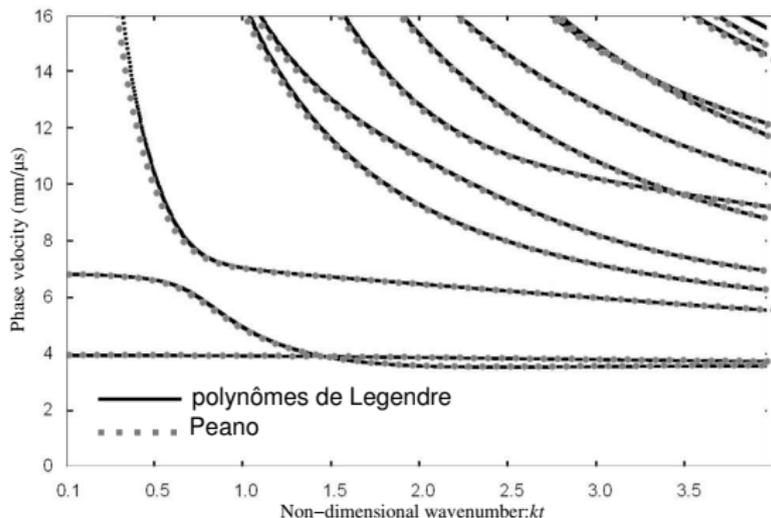
$$f(r) = f_{ext} + (f_{in} - f_{ext})(r - a_0)/(a_q - a_0) \text{ où } f = E, \nu, \rho$$

Han et al. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2002),
El Maimouni et al. *IEEE Ultrasonics Symposium* (2003), *NDT&E International* (2005)



Validation

Courbes de dispersion des modes longitudinaux $L(0, m)$



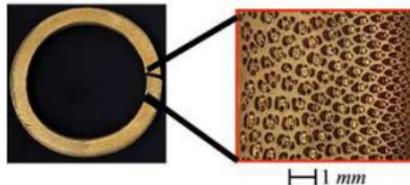
Application : évaluation de la résistance osseuse par ultrasons



Leçons de la nature

Les milieux biologiques, après des millions d'années d'évolution présentent des (micro)structures à gradient de propriétés. Les milieux vivants sont des milieux adaptatifs / environnement.

Bambou



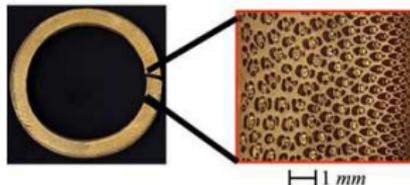
mais aussi, le coquillage, les dents, les ailes de certains insectes et...



Leçons de la nature

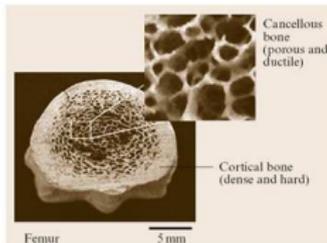
Les milieux biologiques, après des millions d'années d'évolution présentent des (micro)structures à gradient de propriétés. Les milieux vivants sont des milieux adaptatifs / environnement.

Bambou



mais aussi, le coquillage, les dents, les ailes de certains insectes et...

...l'os



Application à la caractérisation de la résistance osseuse

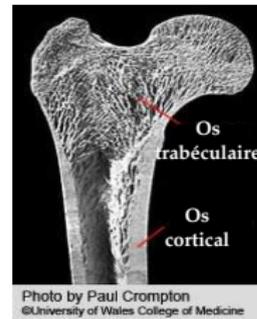
Deux types d'os :



Application à la caractérisation de la résistance osseuse

Deux types d'os :

- trabéculaire (porosité > 80%)
- cortical (porosité < 15%)

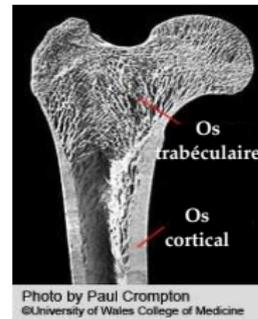


Application à la caractérisation de la résistance osseuse

Deux types d'os :

- trabéculaire (porosité > 80%)
- **cortical** (porosité < 15%)

Méthode de référence :



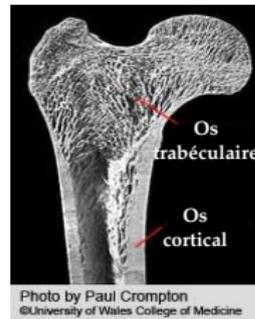
Application à la caractérisation de la résistance osseuse

Deux types d'os :

- trabéculaire (porosité > 80%)
- **cortical** (porosité < 15%)

Méthode de référence :

- densitométrie RX → quantité d'os



Application à la caractérisation de la résistance osseuse

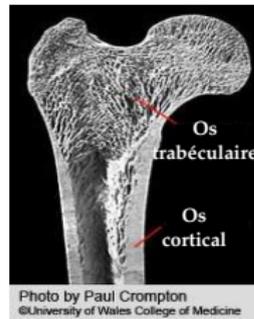
Deux types d'os :

- trabéculaire (porosité > 80%)
- **cortical (porosité < 15%)**

Méthode de référence :

- densitométrie RX → quantité d'os
☹️ **INSUFFISANT**

BESOIN : qualité mécanique de l'os



Application à la caractérisation de la résistance osseuse

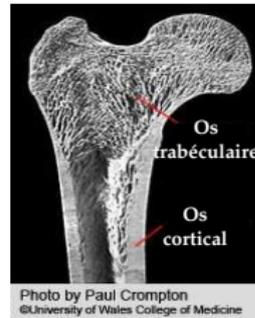
Deux types d'os :

- trabéculaire (porosité > 80%)
- **cortical** (porosité < 15%)

Méthode de référence :

- densitométrie RX → quantité d'os
☹️ **INSUFFISANT**

BESOIN : qualité mécanique de l'os → US



Application à la caractérisation de la résistance osseuse

Deux types d'os :

- trabéculaire (porosité > 80%)
- **cortical** (porosité < 15%)

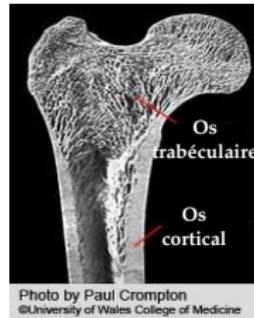
Méthode de référence :

- densitométrie RX → quantité d'os
☹️ **INSUFFISANT**

BESOIN : **qualité mécanique de l'os** → **US** 😊

Paramètres déterminants de la résistance osseuse :

- géométrie : *épaisseur corticale*
- structure et microstructure : *porosité*
- matériau : *élasticité, masse volumique*



Application à la caractérisation de la résistance osseuse

Deux types d'os :

- trabéculaire (porosité > 80%)
- **cortical** (porosité < 15%)

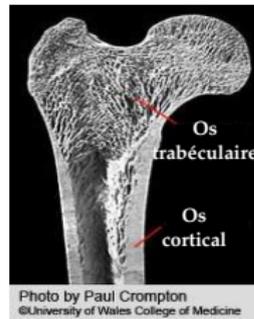
Méthode de référence :

- densitométrie RX → quantité d'os
☹️ **INSUFFISANT**

BESOIN : **qualité mécanique de l'os** → **US** 😊

Paramètres déterminants de la résistance osseuse :

- géométrie : *épaisseur corticale*
- structure et microstructure : *porosité*
- matériau : *élasticité, masse volumique*



Objectif à atteindre
CARACTÉRISATION
MULTIPARAMÉTRIQUE



Application à la caractérisation de la résistance osseuse

Deux types d'os :

- trabéculaire (porosité > 80%)
- **cortical** (porosité < 15%)

Méthode de référence :

- densitométrie RX → quantité d'os

☹️ **INSUFFISANT**

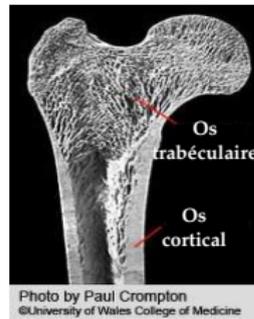
BESOIN : **qualité mécanique de l'os** → **US** 😊

Paramètres déterminants de la résistance osseuse :

- géométrie : *épaisseur corticale*
- structure et microstructure : *porosité*
- matériau : *élasticité, masse volumique*



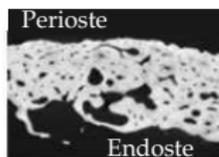
Objectif à atteindre
CARACTÉRISATION
MULTIPARAMÉTRIQUE



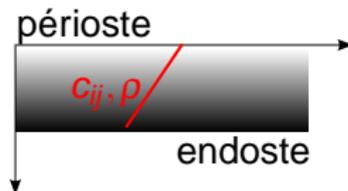
L'os : milieu FGM vivant

- L'os cortical : un milieu hétérogène et multi-échelle.
 - Porosité (micro) / comportement mécanique de l'os cortical (macro)
 - Variation de la porosité dans le cortex
- milieu effectif à gradient de propriétés macroscopiques (c_{ij} et ρ).

échelle micro



échelle macro



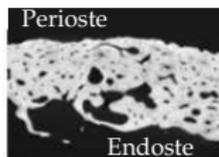
- Caractérisation non-destructive de milieux à gradient de propriétés élastiques : propagation d'ondes élastiques



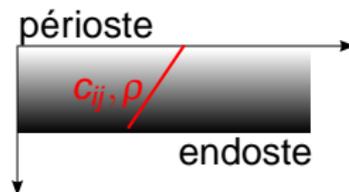
L'os : milieu FGM vivant

- L'os cortical : un milieu hétérogène et multi-échelle.
 - Porosité (micro) / comportement mécanique de l'os cortical (macro)
 - Variation de la porosité dans le cortex
- milieu effectif à gradient de propriétés macroscopiques (c_{ij} et ρ).

échelle micro



échelle macro



- Caractérisation non-destructive de milieux à gradient de propriétés élastiques : propagation d'ondes élastiques



L'os : milieu FGM vivant

- **IDÉE :**
gradient de propriétés macroscopiques = paramètre pertinent déterminant de la résistance osseuse
- **OBJECTIF :**
construire un modèle **mécanique** d'os cortical FGM (anisotropie, géométrie, hétérogénéité) adapté à la caractérisation ultrasonore.



L'os : milieu FGM vivant

- **IDÉE :**
gradient de propriétés macroscopiques = paramètre pertinent déterminant de la résistance osseuse

- **OBJECTIF :**
construire un modèle **mécanique** d'os cortical FGM (anisotropie, géométrie, hétérogénéité) adapté à la caractérisation ultrasonore.



Un modèle d'os réaliste

Application clinique → modèle *in-vivo*

- Présence des tissus mous
- Modèle de plaque anisotrope à gradient de propriétés latéral sous chargement asymétrique fluide

Baron et al. CRM (2008) et Baron et al. JASA (2010).

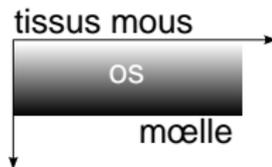


Un modèle d'os réaliste

Application clinique → modèle *in-vivo*

- Présence des tissus mous

Modèle de plaque anisotrope à gradient de propriétés latéral sous chargement asymétrique fluide



Baron et al. CRM (2008) et Baron et al. JASA (2010).

- Géométrie tubulaire & anisotropie
Modèle de tube anisotrope à gradient de propriétés radial

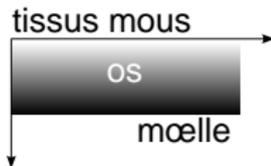


Un modèle d'os réaliste

Application clinique → modèle *in-vivo*

- Présence des tissus mous

Modèle de plaque anisotrope à gradient de propriétés latéral sous chargement asymétrique fluide

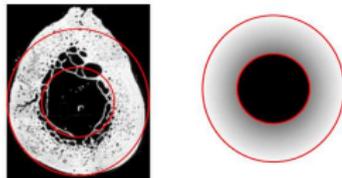


Baron et al. CRM (2008) et Baron et al. JASA (2010).

- Géométrie tubulaire & anisotropie

Modèle de tube anisotrope à gradient de propriétés radial

→ influence de la courbure



Baron Ultrasonics (soumis).

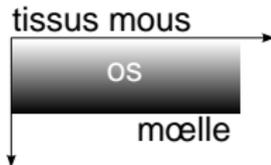


Un modèle d'os réaliste

Application clinique → modèle *in-vivo*

- Présence des tissus mous

Modèle de plaque anisotrope à gradient de propriétés latéral sous chargement asymétrique fluide

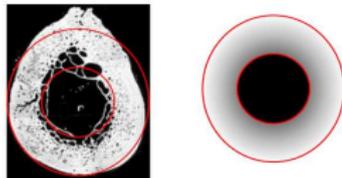


Baron et al. CRM (2008) et Baron et al. JASA (2010).

- **Géométrie tubulaire & anisotropie**

Modèle de tube anisotrope à gradient de propriétés radial

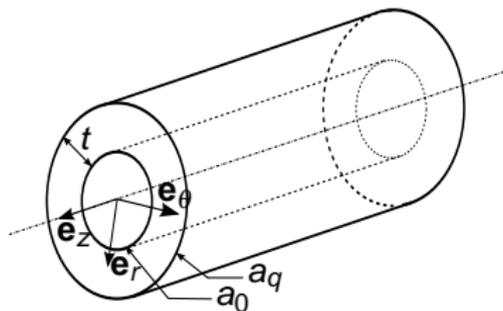
→ **influence de la courbure**



Baron Ultrasonics (soumis).



Modèle de plaque vs modèle de tube

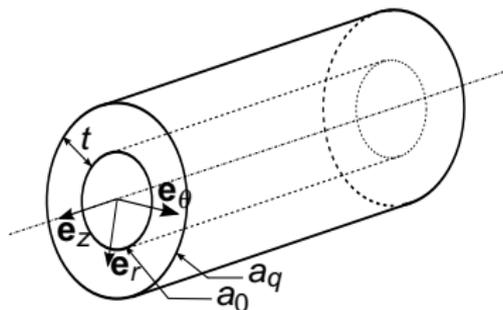


- $t/a_q < 0.5$ \rightarrow Plaque - ondes de Lamb et SH
 $t/a_q > 0.5$ \rightarrow Tube - ondes axiales

L'os cortical : tube anisotrope à gradient de propriétés radial.



Modèle de plaque vs modèle de tube



$t/a_q < 0.5$ \rightarrow Plaque - ondes de Lamb et SH

$t/a_q > 0.5$ \rightarrow Tube - ondes axiales

L'os cortical : tube anisotrope à gradient de propriétés radial.



Propriétés de l'os

	c_{11} (GPa)	c_{13} (GPa)	c_{33} (GPa)	c_{44} (GPa)	c_{66} (GPa)	ρ (g.cm ⁻³)
C_M	25.9	11.1	29.6	5.5	4.4	1.753
C_m	11.8	5.1	17.6	3.3	2.2	1.66

TABLE: Les valeurs minimale et maximale [C_m, C_M] de chaque propriété avec $c_{12} = c_{11} - 2c_{66}$. A noter que la correspondance entre les directions de l'espace et la notation indicielle est $1 \leftrightarrow r; 2 \leftrightarrow \theta; 3 \leftrightarrow z$.

Profil linéaire

$$C(r) = C_m + (C_M - C_m)(r - a_0)/(a_q - a_0),$$



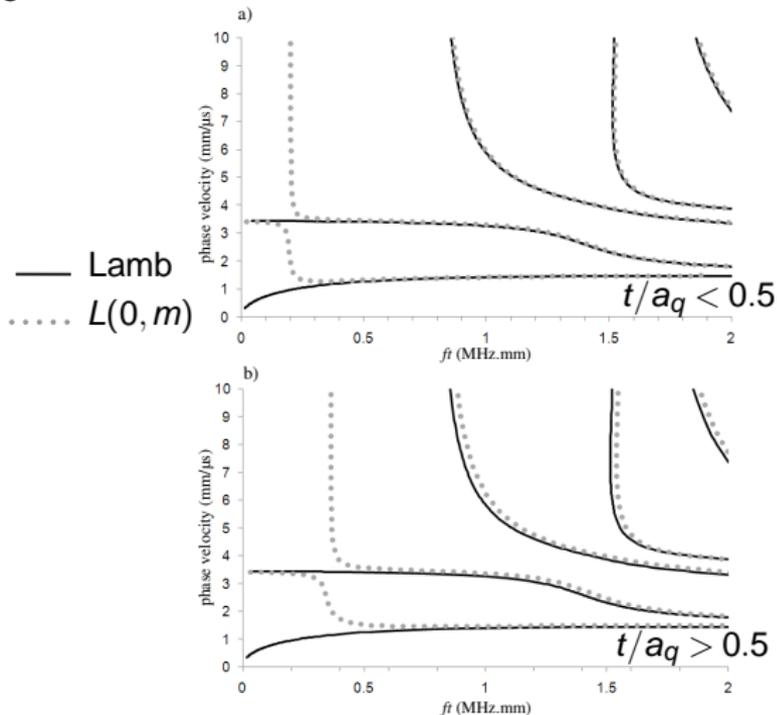
L'os : plaque ou tube

- Courbes de dispersion des modes de propagation :
 - plaque
 - tube
- 2 rapports : $t/a_q = 0.4 < 0.5$ et $t/a_q = 0.6 > 0.5$
- modes
 - ▶ longitudinaux
 - ▶ de torsion
 - ▶ de flexion



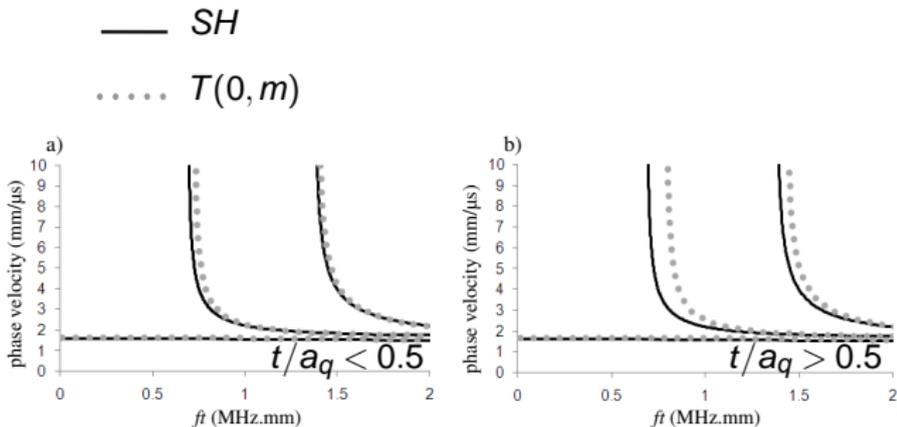
L'os : plaque ou tube

modes longitudinaux



L'os : plaque ou tube

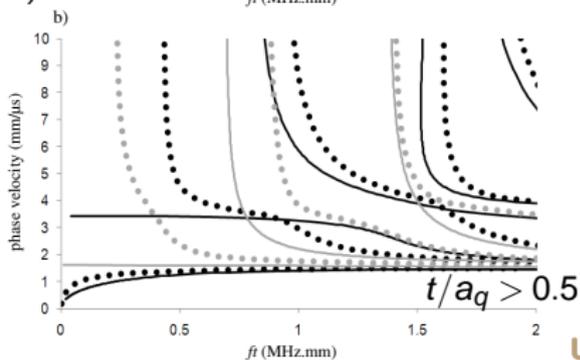
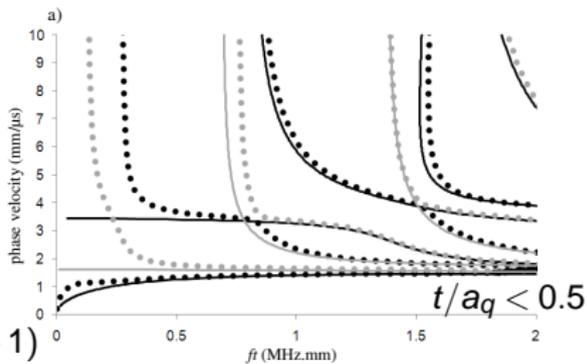
modes de torsion



L'os : plaque ou tube

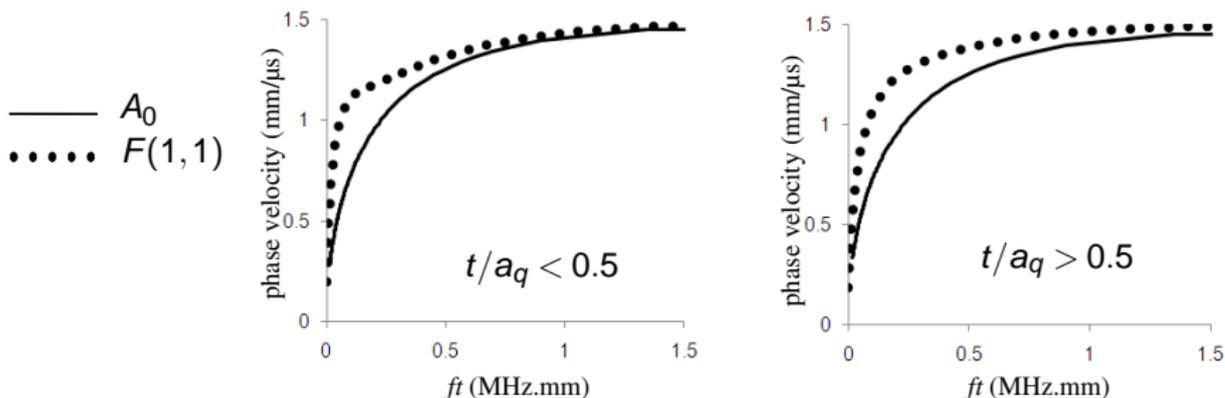
modes de flexion

- Lamb
- SH
- $F(1, 2m - 1)$
- $F(1, 2m)$



Estimation de l'épaisseur corticale : A_0 vs $F(1,1)$

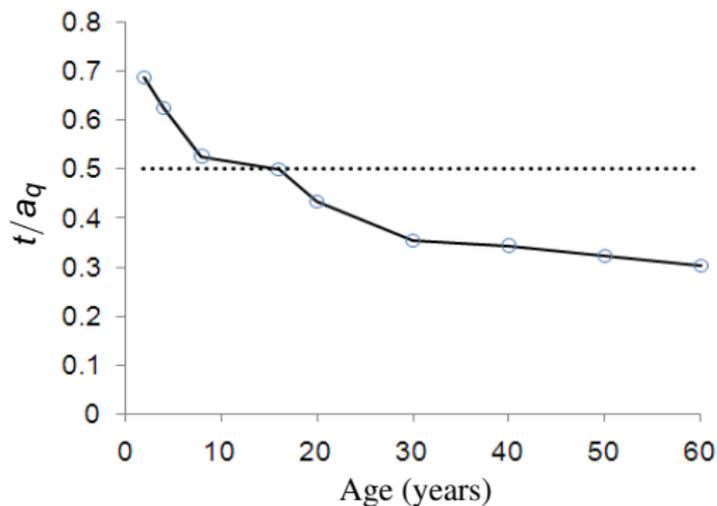
Dans Moilanen et al., UMB (2007) : estimation de l'épaisseur corticale
 A_0 vs $F(1,1)$



Baron, Ultrasonics (soumis)



t/a_q et âge



Carter & Beaupré *Skeletal function and form* (2001)



Regard critique et Perspectives

- Intérêt de la méthode du matricant : gérer anisotropie & géométrie tubulaire & hétérogénéité graduelle



Regard critique et Perspectives

- Intérêt de la méthode du matricant : gérer **anisotropie** & **géométrie tubulaire** & **hétérogénéité graduelle**

Pour l'évaluation de la résistance osseuse

- Intérêt des ultrasons
 - méthode qualitative
 - non-invasif et non-nocif → applications pédiatriques



Regard critique et Perspectives

- Intérêt de la méthode du matricant : gérer **anisotropie** & **géométrie tubulaire** & **hétérogénéité graduelle**

Pour l'évaluation de la résistance osseuse

- Intérêt des ultrasons
 - ▶ méthode qualitative
 - ▶ non-invasif et non-nocif → applications pédiatriques

Pourquoi pas encore de débouchés cliniques ?



Regard critique et Perspectives

- Intérêt de la méthode du matricant : gérer **anisotropie** & **géométrie tubulaire** & **hétérogénéité graduelle**

Pour l'évaluation de la résistance osseuse

- Intérêt des ultrasons
 - ▶ méthode qualitative
 - ▶ non-invasif et non-nocif → applications pédiatriques

Pourquoi pas encore de débouchés cliniques ?

Critère clinique fiable difficile à établir...



Regard critique et Perspectives

- Intérêt de la méthode du matricant : gérer **anisotropie** & **géométrie tubulaire** & **hétérogénéité graduelle**

Pour l'évaluation de la résistance osseuse

- Intérêt des ultrasons
 - ▶ méthode qualitative
 - ▶ non-invasif et non-nocif → applications pédiatriques

Pourquoi pas encore de débouchés cliniques ?

Critère clinique fiable difficile à établir...

- Intérêt du gradient
 - ▶ caractérisation multiparamétrique : géométrie, structure et matériau
→ qualité osseuse
 - ▶ mesure relative / variabilité inter-site et inter-individu



Regard critique et Perspectives

- Intérêt de la méthode du matricant : gérer **anisotropie** & **géométrie tubulaire** & **hétérogénéité graduelle**

Pour l'évaluation de la résistance osseuse

- Intérêt des ultrasons
 - ▶ méthode qualitative
 - ▶ non-invasif et non-nocif → applications pédiatriques

Pourquoi pas encore de débouchés cliniques ?

Critère clinique fiable difficile à établir...

- Intérêt du gradient
 - ▶ caractérisation multiparamétrique : géométrie, structure et matériau
→ qualité osseuse
 - ▶ mesure relative / variabilité inter-site et inter-individu



Merci !



Equation

the wave equation
$$\frac{d}{dr}\eta(r) = \frac{1}{r}Q(r)\eta(r).$$

Expression of the vector $\eta(r)$ and of the matrix $Q(r)$ for a material with orthorhombic crystallographic symmetry (9 independent stiffness coefficients). The symbol $\hat{\cdot}$ represents the quantities in the Fourier domain.

$$\eta(r) = \left(\hat{u}_r(r), \hat{u}_\theta(r), \hat{u}_z(r), r\hat{\sigma}_{rr}(r), r\hat{\sigma}_{r\theta}(r), r\hat{\sigma}_{rz}(r) \right)^T,$$

$$Q(r) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\frac{c_{12}}{c_{11}} & -m\frac{c_{12}}{c_{11}} & -ik_z r \frac{c_{13}}{c_{11}} & -\frac{1}{c_{11}} & 0 & 0 \\ -m & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{c_{66}} & 0 \\ -ik_z r & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_{55}} \\ i(\gamma_{12} - r^2\rho\omega^2) & -n\gamma_{12} & -k_z r \gamma_{23} & \frac{c_{12}}{c_{11}} & -m & -ik_z r \\ n\gamma_{12} & m^2\gamma_{12} + r^2(k_z^2 c_{44} - \rho\omega^2) & mk_z r(\gamma_{123} + c_{44}) & -m\frac{c_{12}}{c_{11}} & -1 & 0 \\ k_z r \gamma_{23} & mk_z r(\gamma_{23} + c_{44}) & m^2 c_{44} + r^2(k_z^2 \gamma_{13} - \rho\omega^2) & -ik_z r \frac{c_{13}}{c_{11}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

with $\gamma_{12} = c_{22} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}}$; $\gamma_{13} = c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}}$; $\gamma_{23} = c_{23} - \frac{c_{12}c_{13}}{c_{11}}$.

