Licence de Mécanique

L3 : Module LA 307

Solides, Structures

Devoir d'entraînement du 17 Mars 2009

Durée : 2 heures (sans document ni calculatrice)

On propose, dans cet exercice, de calculer l'état de contrainte dans un tube fendu auquel on a fait subir une déformation.

Plus précisement, on désigne par (T) un tube cylindrique (Figure 1) limité par deux cylindres circulaires (Σ_0) et (Σ_1) coaxiaux d'axe $0\overrightarrow{e_3}$, de rayons respectifs R_0 et R_1 distincts ($R_0 < r < R_1$) et par les deux plans d'équations $x_3 = 0$ et $x_3 = h$, ($h \gg R_1$). On désigne par (Γ_0) et (Γ_h) les bases correspondantes du tube.

La pièce est constituée d'un matériau élastique linéaire, homogène et isotrope, obéissant à la loi de Hooke de coefficients de Lamé λ et μ.

Dans tout le problème les forces volumiques sont supposées nulles.

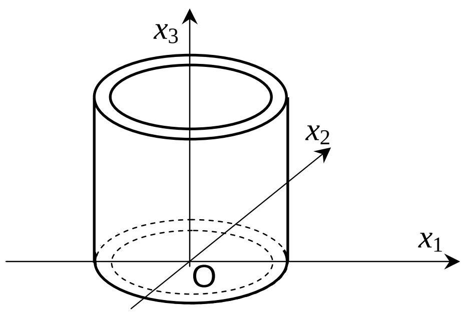

Figure 1 – Schéma du tube non fendu (T)

1ère PARTIE : Le tube n'est pas fendu

1.1 Formuler le problème classique de torsion en termes de la fonction de torsion Φ pour cet arbre cylindrique, et vérifier que l'on peut prendre pour fonction de torsion la fonction $\Phi = k(R_1^2 - r^2)$, k étant un scalaire constant que l'on calculera en fonction de l'angle de torsion unitaire α et de $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$.

Ecrire le champ des contraintes en chaque point du tube (pour ce point précis, il est préférable de travailler en coordonnées cartésiennes).

1.2 Calculer le couple de torsion $M\,\overrightarrow{e_3}$ en fonction de μ et de α.

1.3 Calculer le champ des déformations puis, par intégration, le champ des déplacements en chaque point du tube. Montrer que si l'on suppose que la base (Γ_0) ne subit pas de translation ni de rotation, ce champ s'écrit : $\vec{u}(x_1, x_2, x_3) = -\alpha x_2 x_3\,\overrightarrow{e_1} + \alpha x_1 x_3\,\overrightarrow{e_2}$.

On désigne par (E$_1$) ce premier état d'équilibre.

2ème PARTIE : Le tube est fendu

On suppose le tube fendu suivant le demi-plan méridien $O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}$ avec $x_1 < 0$ (Figure 2).

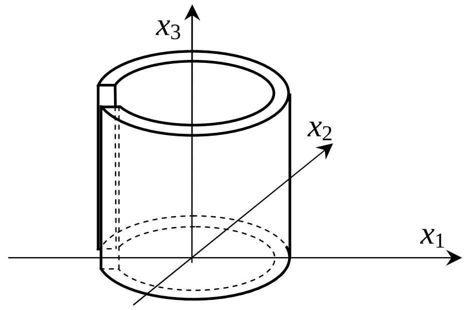

Figure 2 – Schéma du tube fendu

On considère le champ de déplacements défini dans la pièce par (en coordonnées polaires):

$$\vec{u}(r,\theta,x_3) = C\,\theta\,\vec{e_3}\,, \qquad (-\pi < \theta < \pi) \qquad (1)$$

C étant un scalaire constant non nul.

2.1 Comment se déforment les deux faces de la fente (points $\theta = \pm\pi$, $r \in [R_0, R_1]$ et $x_3 \in [0,h]$) ? Et les faces supérieure et inférieure du tube fendu (points $z = 0$ ou $z = h$, $r \in [R_0, R_1]$ et $\theta \in [-\pi, \pi]$) ? Dessiner le schéma du tube fendu dans sa configuration déformée correspondante au champ de déplacements (1).

En passant à la représentation dans un système de coordonnées cartésiennes, le champ de déplacements (1) s'écrit :

$$\vec{u}(x_1, x_2, x_3) = C\ Arc\,tg\,\frac{x_2}{x_1}\ \vec{e_3}$$

2.2 Calculer les composantes cartésiennes du tenseur des déformations et le tenseur des contraintes associé à ce champ de déplacements. (On rappelle que : $d(\,Arc\,tg\,u\,) = \dfrac{du}{1+u^2}$)

2.3 Montrer que le champ de contraintes obtenu vérifie l'équilibre local. Ensuite on calculera les densités surfaciques d'efforts à exercer sur les surfaces latérales (Σ_0) et (Σ_1), sur les bases (Γ_0) et (Γ_h), et les deux lèvres de la fente (points $x_2 = 0$, $x_1 \in [-R_1, -R_0]$ et $x_3 \in [0,h]$) pour que les conditions d'équilibre soient vérifiées à la frontière du tube.

On désigne par (E_2) ce deuxième état d'équilibre.

2.4 Calculer le moment au centre de la section du torseur résultant des efforts s'exerçant sur la base supérieure (Γ_h). Quelle est la nature de ces efforts globaux ?

3ème PARTIE (ATTENTION : les questions 3.2 et 3.3 sont notées hors barème)

Le tube étant dans l'état *(E_2)* on soude les deux lèvres de la coupure, puis ***on supprime toute action extérieure***. *Soit (E_3) ce nouvel état d'équilibre.*

3.1 Montrer par application du principe de Saint-Venant que l'on peut obtenir une solution approchée correspondant à *(E_3)* en superposant à la solution donnée en 2ème partie une solution convenablement choisie du problème de torsion (partie 1).
Quel est alors le champ des déplacements des points du tube ?

3.2 Exprimer les contraintes dans le tube et en particulier sur les lèvres de la coupure soudée, en fonction de C, μ, R_0, R_1, h.

3.3 Déterminer, en un point donné de la pièce, le module de la contrainte tangentielle maximale, puis les points du tube en lesquels ce module est le plus grand.