Licence de Mécanique

L3 : Module LA 307

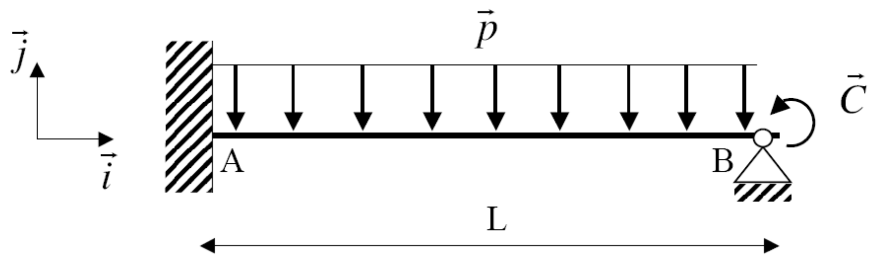
Solides, Structures

Examen du 28 Mai 2008 (1ère session)

Durée : 2 heures (sans document ni calculatrice). Merci de rédiger chaque exercice sur feuilles séparées.

EXERCICE 1

On considère une poutre rectiligne AB, de longueur L, élastique, homogène et isotrope de module d'Young E, dont la ligne moyenne a pour direction $\vec{i}$, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant une base orthonormée. La poutre est encastrée en A et repose en B sur un appui fixe (cf.figure). Sa section est rectangulaire, de largeur b (selon $\vec{k}$) et de hauteur h (selon $\vec{j}$). Elle est soumise à son poids schématisé par la répartition linéique uniforme $-p\vec{j}$ et à un couple extérieur $\vec{C} = C\vec{k}$ appliqué en B. Le problème étudié est plan.



1) Ecrire les équations d'équilibre de la poutre et déterminer le degré d'hyperstatisme du problème.
2) Calculer les composantes (N, T, M) du torseur des efforts de cohésion en fonction des inconnues hyperstatiques. On choisira comme inconnues hyperstatiques les efforts de liaison en B.
3) Pour déterminer les efforts de cohésion dans la poutre, on demande :
    a. Écrire l'énergie élastique de déformation de la poutre (on négligera les efforts de cisaillement).
    b. Utiliser une méthode énergétique pour déterminer les inconnues hyperstatiques.
    c. En déduire les efforts de cohésion en fonction de C, p et des caractéristiques géométriques et mécaniques de la poutre.
4) Calculer la rotation de la section droite en B en utilisant le théorème de Castigliano.
5) Utiliser les efforts de cohésion du 3), les lois de comportement de la poutre et les conditions aux limites pour déterminer la déformée de la poutre. Retrouver le résultat du 4) pour la rotation en B.

EXERCICE 2

Un disque de turbine constitue le support des aubes ou ailettes sur lesquelles s'exerce l'action du fluide pour transformer l'énergie thermodynamique du flux amont en énergie cinétique du rotor. L'architecture complexe du disque est schématisée ici par une plaque circulaire trouée en son centre O, d'épaisseur e, de rayon intérieur R_0 et de rayon extérieur R_1 ($R_0 < R_1$), l'épaisseur e étant supposée petite devant R_0 *et* R_1.

On désigne par $(O\,;\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})$ le repère associé aux coordonnées cylindriques, lié au disque en rotation au tour de l'axe $\overrightarrow{Oe_z}$. Dans ce repère le disque est en équilibre sous l'action :

- d'une densité volumique d'efforts constituée des efforts centrifuges dus à la vitesse de rotation ω du disque (on désigne par ρ la masse volumique du matériau) ,
- d'une densité surfacique d'efforts radiaux s'exerçant en chaque point du bord extérieur $r = R_1$, proportionnelle à ω^2, modélisant l'action des ailettes fixées sur le disque :

  $$\vec{q} = k\,\omega^2\,\overrightarrow{e_r} \quad (k \text{ scalaire constant positif}),$$
- le rayon intérieur $r = R_0$ est libre de contraintes ainsi que les deux faces du disque, d'équations $z = \pm\dfrac{e}{2}$.

Le matériau constituant le disque est supposé élastique linéaire, homogène et isotrope, de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν.

1°) Ecrire les équations et conditions aux limites du problème d'élasticité posé sur le disque. Justifier le fait que le problème posé est un problème de contraintes planes.

2°) On recherche la solution σ de la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})}$$

les composantes des contraintes sur la base des coordonnées cylindriques $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})$ n'étant fonctions que de r. Traduire les équations et conditions aux limites du problème. En déduire que $\sigma_{r\theta}$ est identiquement nulle.

3°) Exprimer ε_{zz} en fonction de ε_{rr} et $\varepsilon_{\theta\theta}$, puis exprimer σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction du déplacement radial $u(r)$ et de sa dérivée $u'(r) = \dfrac{du}{dr}$. En déduire l'équation différentielle (E) satisfaite par $u(r)$.

4°) Montrer que l'équation (E) se met sous la forme :

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru)\right] = -\frac{1-\nu^2}{E}\,\rho\,\omega^2\,r\,.$$

En déduire la forme de $u(r)$, puis celles de σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$.

5°) Achever la résolution du problème en traduisant les conditions aux limites. Qu'obtient-on pour $u(R_1)$? Commenter.

Relations liant les coefficients d'élasticité

$$3K = 3\lambda + 2\mu = \frac{E}{1-2\nu}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Formulaire en coordonnées cylindriques

Equations d'équilibre

$$\frac{\partial}{\partial r}\sigma_{rr} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\sigma_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{rz} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\sigma_{r\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{\theta z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + f_\theta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\sigma_{rz} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\sigma_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + f_z = 0$$

Champ des déformations $\quad \vec{U} = U_r \, \vec{e_r} + U_\theta \, \vec{e_\theta} + U_z \, \vec{e_z}$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right], \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r}\right], \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial \theta}\right]$$