

Journée de rencontre LIP-d'Alembert

Caractérisation ultrasonore de tubes anisotropes à gradient de propriétés radial.

Un exemple : l'os cortical

Cécile Baron

19 mars 2010

Journée de
rencontre
LIP-d'Alembert

Cécile Baron

Milieux
hétérogènes

FGM

Caractérisation US &
hétérogénéité

C'est du béton !

Anisotropie,
hétérogénéité & tube

Dans la Nature...

Matériaux vivants
FGM

Et l'os cortical ?

US & os long

Un modèle d'os

Résultats

Critique &
Perspectives

Annexes

Mise en équation

Propriétés de l'os

Functionally Graded Materials : matériaux à gradient de propriétés.

Functionally Graded Materials : matériaux à gradient de propriétés.

- Variation progressive des propriétés mécaniques et/ou thermiques du matériau selon une direction de l'espace.
 - variation de la (micro)structure (porosité)
 - variation de la composition du matériau.

- Intérêt des Functionally Graded Materials :

Functionally Graded Materials : matériaux à gradient de propriétés.

- Variation progressive des propriétés mécaniques et/ou thermiques du matériau selon une direction de l'espace.
 - variation de la (micro)structure (porosité)
 - variation de la composition du matériau.
- Intérêt des Functionally Graded Materials :
 - $[\sigma]$ & interfaces
 - Association de matériaux  améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces

Domaines d'application : Aéronautique et aérospatiale, automobile, biomatériaux prothétiques etc.

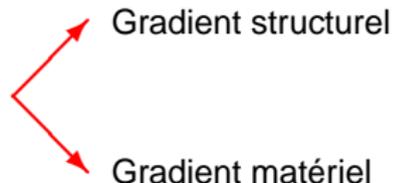
Functionally Graded Materials : matériaux à gradient de propriétés.

- Variation progressive des propriétés mécaniques et/ou thermiques du matériau selon une direction de l'espace.
 - variation de la (micro)structure (porosité)
 - variation de la composition du matériau.
- Intérêt des Functionally Graded Materials :
 - $[\sigma]$ & interfaces
 - Association de matériaux  améliorer les propriétés mécaniques et thermiques des pièces

Domaines d'application : Aéronautique et aérospatiale, automobile, biomatériaux prothétiques etc.

Pourquoi “stratification continue” ?

- Milieux naturels
(Terre, atmosphère, océans, os, bambou) ;
- Matériaux industriels
(FGM, structures assemblées,
dégradations)

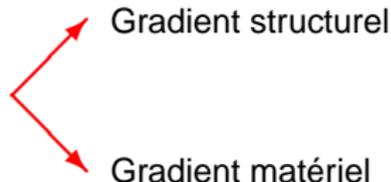


Méthode **originale** de résolution de l'équation d'onde pour la caractérisation de guides d'ondes anisotropes plans et cylindriques à hétérogénéité unidirectionnelle continue :

Solution formelle exacte :
Développement en série de Peano du matricant (formalisme de Stroh)

Pourquoi "stratification continue" ?

- Milieux naturels
(Terre, atmosphère, océans, os, bambou) ;
- Matériaux industriels
(FGM, structures assemblées,
dégradations)



Méthode **originale** de résolution de l'équation d'onde
pour la caractérisation de guides d'ondes anisotropes plans et
cylindriques à hétérogénéité unidirectionnelle continue :

Solution formelle exacte :

Développement en série de Peano du matricant (formalisme de Stroh)



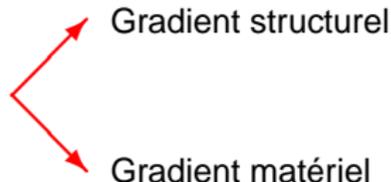
Mise en œuvre expérimentale
avantages analytiques et numériques

Baron et al. Ultrasonics (2007) ;

Baron et al., Chapitre 4 in « Matériaux et Acoustique 2 » (2006).

Pourquoi “stratification continue” ?

- Milieux naturels
(Terre, atmosphère, océans, os, bambou) ;
- Matériaux industriels
(FGM, structures assemblées,
dégradations)



Méthode **originale** de résolution de l'équation d'onde pour la caractérisation de guides d'ondes anisotropes plans et cylindriques à hétérogénéité unidirectionnelle continue :

Solution formelle exacte :

Développement en série de Peano du matricant (formalisme de Stroh)



Mise en œuvre expérimentale
avantages analytiques et numériques

Baron et al. Ultrasonics (2007) ;

Baron et al., Chapitre 4 in « Matériaux et Acoustique 2 » (2006).

Mise en œuvre expérimentale

Journée de
rencontre
LIP-d'Alembert

Cécile Baron

Milieux
hétérogènes

FGM

Caractérisation US &
hétérogénéité

C'est du béton!

Anisotropie,
hétérogénéité & tube

Dans la Nature...

Matériaux vivants
FGM

Et l'os cortical ?

US & os long

Un modèle d'os

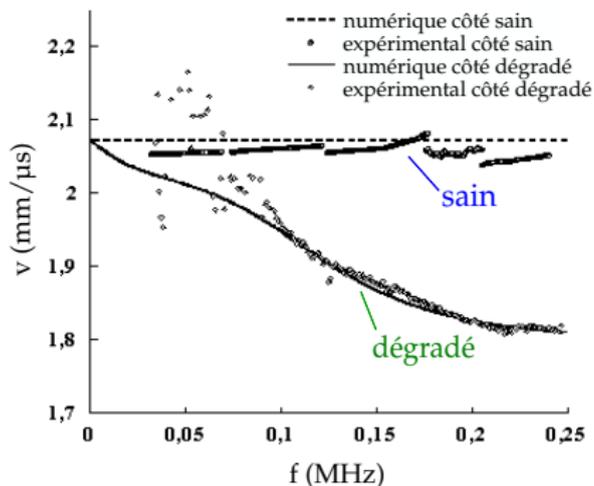
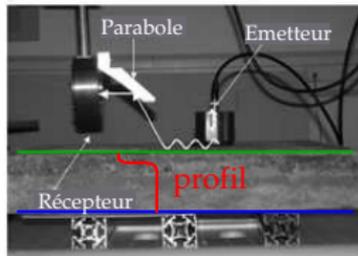
Résultats

Critique &
Perspectives

Annexes

Mise en équation

Propriétés de l'os



Caractérisation du profil de
propriétés

• épaisseur de la zone dégradée ;

Mise en œuvre expérimentale

Journée de
rencontre
LIP-d'Alembert

Cécile Baron

Milieux
hétérogènes

FGM

Caractérisation US &
hétérogénéité

C'est du béton!

Anisotropie,
hétérogénéité & tube

Dans la Nature...

Matériaux vivants
FGM

Et l'os cortical ?

US & os long

Un modèle d'os

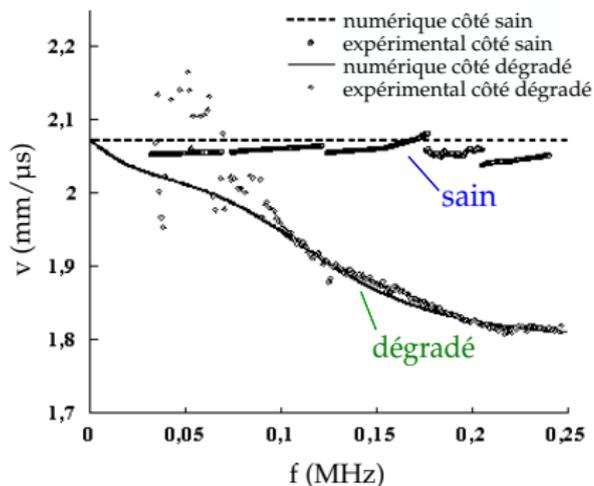
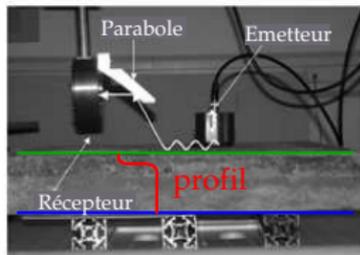
Résultats

Critique &
Perspectives

Annexes

Mise en équation

Propriétés de l'os



Caractérisation du profil de
propriétés

- épaisseur de la zone dégradée ;
- localisation du gradient ;

Mise en œuvre expérimentale

Journée de
rencontre
LIP-d'Alembert

Cécile Baron

Milieux
hétérogènes

FGM

Caractérisation US &
hétérogénéité

C'est du béton!

Anisotropie,
hétérogénéité & tube

Dans la Nature...

Matériaux vivants
FGM

Et l'os cortical ?

US & os long

Un modèle d'os

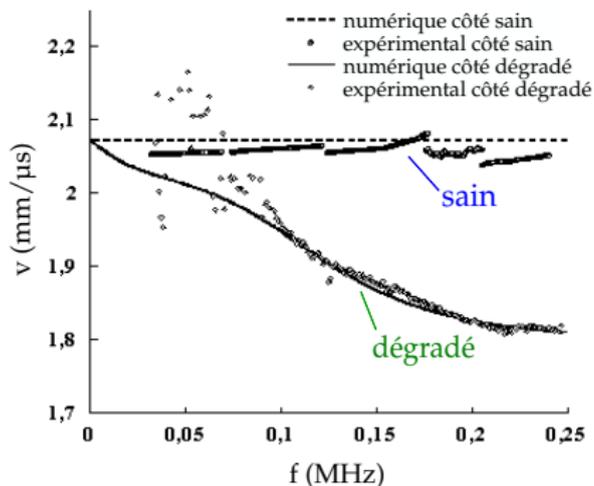
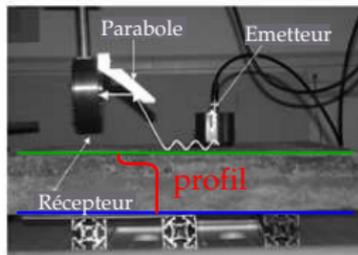
Résultats

Critique &
Perspectives

Annexes

Mise en équation

Propriétés de l'os



Caractérisation du profil de
propriétés

- épaisseur de la zone dégradée ;
- localisation du gradient ;
- pente du gradient.

Mise en œuvre expérimentale

Journée de
rencontre
LIP-d'Alembert

Cécile Baron

Milieux
hétérogènes

FGM

Caractérisation US &
hétérogénéité

C'est du béton!

Anisotropie,
hétérogénéité & tube

Dans la Nature...

Matériaux vivants
FGM

Et l'os cortical ?

US & os long

Un modèle d'os

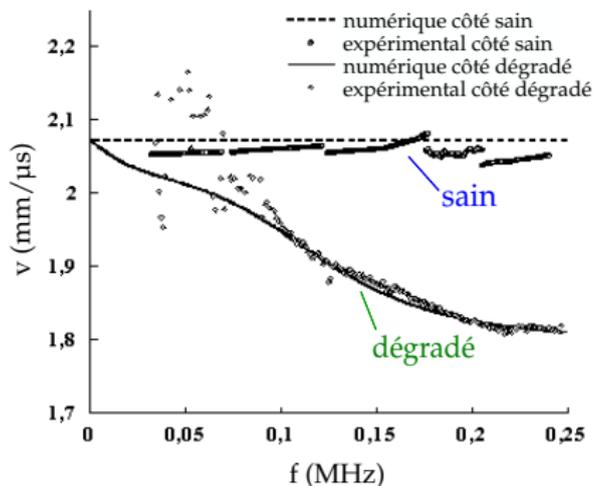
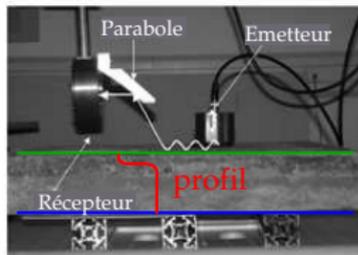
Résultats

Critique &
Perspectives

Annexes

Mise en équation

Propriétés de l'os



Caractérisation du profil de
propriétés

- épaisseur de la zone dégradée ;
- localisation du gradient ;
- pente du gradient.

Caractérisation d'un tube anisotrope et hétérogène

Journée de
rencontre
LIP-d'Alembert

Cécile Baron

Milieux
hétérogènes

FGM

Caractérisation US &
hétérogénéité

C'est du béton !

Anisotropie,
hétérogénéité & tube

Dans la Nature...

Matériaux vivants
FGM

Et l'os cortical ?

US & os long

Un modèle d'os

Résultats

Critique &
Perspectives

Annexes

Mise en équation

Propriétés de l'os

Anisotropie
+
géométrie cylindrique



inefficacité des
méthodes classiques



Développement en série
de Peano du matricant
(formalisme de Stroh)

Tube placé dans le vide



modes propres

- ondes axiales
 - modes longitudinaux $L(0, m)$
 - modes de torsion $T(0, m)$
 - modes de flexion $F(n, m)$
- ondes circonférentielles

Caractérisation d'un tube anisotrope et hétérogène

Journée de
rencontre
LIP-d'Alembert

Cécile Baron

Milieux
hétérogènes

FGM

Caractérisation US &
hétérogénéité

C'est du béton !

Anisotropie,
hétérogénéité & tube

Dans la Nature...

Matériaux vivants
FGM

Et l'os cortical ?

US & os long

Un modèle d'os

Résultats

Critique &
Perspectives

Annexes

Mise en équation

Propriétés de l'os

Anisotropie
+
géométrie cylindrique



inefficacité des
méthodes classiques

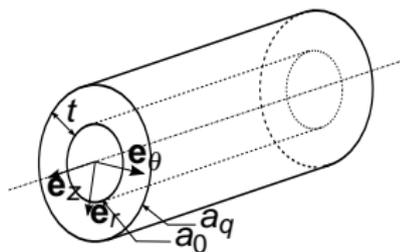


Développement en série
de Peano du matricant
(formalisme de Stroh)

Tube placé dans le vide



modes propres



- ondes axiales

- modes longitudinaux $L(0, m)$
- modes de torsion $T(0, m)$
- modes de flexion $F(n, m)$

- ondes circonférentielles

Caractérisation d'un tube anisotrope et hétérogène

Journée de
rencontre
LIP-d'Alembert

Cécile Baron

Milieux
hétérogènes

FGM

Caractérisation US &
hétérogénéité

C'est du béton !

Anisotropie,
hétérogénéité & tube

Dans la Nature...

Matériaux vivants
FGM

Et l'os cortical ?

US & os long

Un modèle d'os

Résultats

Critique &
Perspectives

Annexes

Mise en équation

Propriétés de l'os

Anisotropie
+
géométrie cylindrique



inefficacité des
méthodes classiques

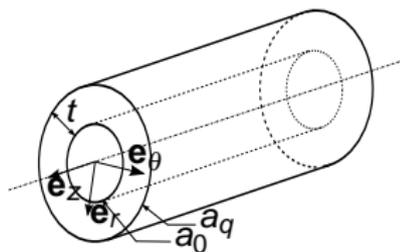


Développement en série
de Peano du matricant
(formalisme de Stroh)

Tube placé dans le vide



modes propres



- ondes axiales

- modes longitudinaux $L(0, m)$
- modes de torsion $T(0, m)$
- modes de flexion $F(n, m)$

- ondes circonférentielles

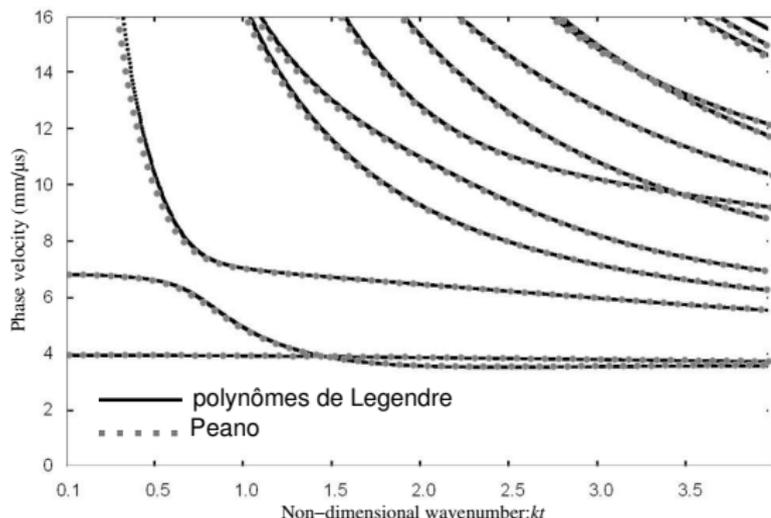
Tube FGM isotrope : Han et al. (2002), El Maimouni et al. (2003, 2005)

Profil : $f(r) = f_{ext} + (f_{in} - f_{ext})(r - a_0)/(a_q - a_0)$

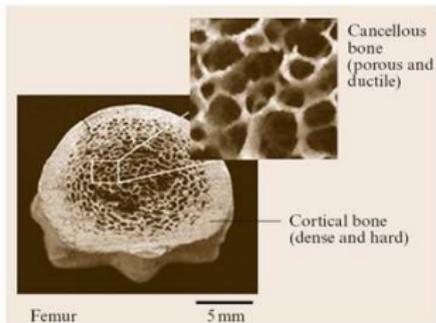
	E (GPa)	ν	ρ (kg/m ³)
Stainless steel (outer)	207.82	0.317	8166
Silicon nitride (inner)	322.4	0.24	2370

TABLE: Propriétés élastiques aux 2 interfaces du tube.

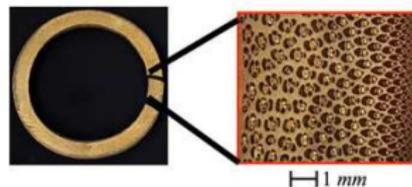
Courbes de dispersion des modes longitudinaux $L(0, m)$



- Les milieux biologiques, après des millions d'années d'évolution présentent des (micro)structures à gradient de propriétés. Les milieux vivants sont des milieux adaptatifs / environnement.



Os



Bambou

Mais aussi, le coquillage, les dents, les ailes de certains insectes etc.

Journée de
rencontre
LIP-d'Alembert

Cécile Baron

Milieux
hétérogènes

FGM

Caractérisation US &
hétérogénéité

C'est du béton !

Anisotropie,
hétérogénéité & tube

Dans la Nature...

Matériaux vivants
FGM

Et l'os cortical ?

US & os long

Un modèle d'os

Résultats

Critique &
Perspectives

Annexes

Mise en équation

Propriétés de l'os

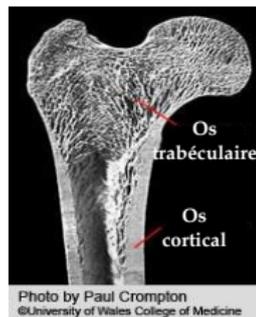
Caractérisation ultrasonore de tubes anisotropes à gradient de propriétés radial.
Un exemple : l'os cortical

Deux types d'os :

Caractérisation ultrasonore de tubes anisotropes à gradient de propriétés radial. Un exemple : l'os cortical

Deux types d'os :

- trabéculaire
- cortical

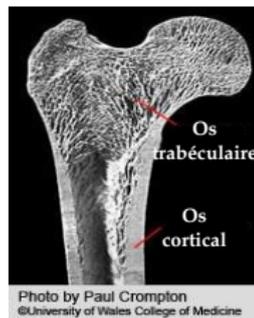


Caractérisation ultrasonore de tubes anisotropes à gradient de propriétés radial. Un exemple : l'os cortical

Deux types d'os :

- trabéculaire
- **cortical**

Méthode de référence :



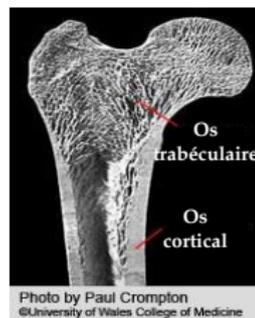
Caractérisation ultrasonore de tubes anisotropes à gradient de propriétés radial. Un exemple : l'os cortical

Deux types d'os :

- trabéculaire
- **cortical**

Méthode de référence :

- densitométrie RX → quantité d'os



Caractérisation ultrasonore de tubes anisotropes à gradient de propriétés radial. Un exemple : l'os cortical

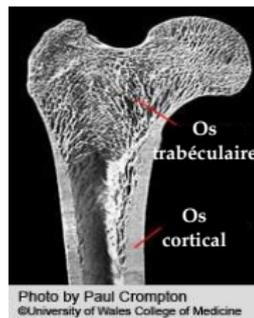
Deux types d'os :

- trabéculaire
- **cortical**

Méthode de référence :

- densitométrie RX → quantité d'os
-  **INSUFFISANT**

BESOIN : qualité mécanique de l'os



Caractérisation ultrasonore de tubes anisotropes à gradient de propriétés radial. Un exemple : l'os cortical

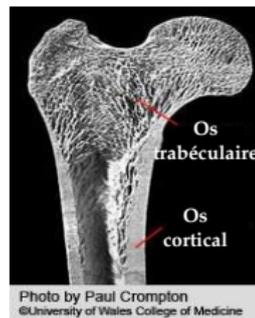
Deux types d'os :

- trabéculaire
- **cortical**

Méthode de référence :

- densitométrie RX → quantité d'os
☹️ **INSUFFISANT**

BESOIN : qualité mécanique de l'os → US



Caractérisation ultrasonore de tubes anisotropes à gradient de propriétés radial. Un exemple : l'os cortical

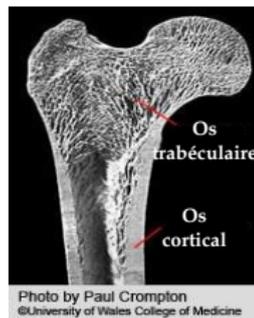
Deux types d'os :

- trabéculaire
- **cortical**

Méthode de référence :

- densitométrie RX → quantité d'os
☹️ **INSUFFISANT**

BESOIN : qualité mécanique de l'os → US 😊



Paramètres déterminants de la résistance osseuse :

- géométrie : *épaisseur corticale*
- structure et microstructure : *porosité*
- matériau : *élasticité, masse volumique*

Caractérisation ultrasonore de tubes anisotropes à gradient de propriétés radial. Un exemple : l'os cortical

Deux types d'os :

- trabéculaire
- **cortical**

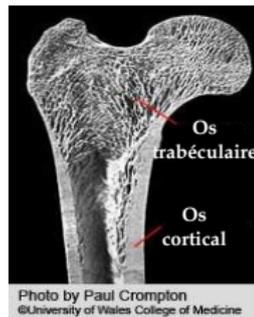
Méthode de référence :

- densitométrie RX → quantité d'os
- ☹️ **INSUFFISANT**

BESOIN : qualité mécanique de l'os → US 😊

Paramètres déterminants de la résistance osseuse :

- géométrie : *épaisseur corticale*
- structure et microstructure : *porosité*
- matériau : *élasticité, masse volumique*



Objectif à atteindre
CARACTÉRISATION
MULTIPARAMÉTRIQUE

Caractérisation ultrasonore de tubes anisotropes à gradient de propriétés radial. Un exemple : l'os cortical

Deux types d'os :

- trabéculaire
- **cortical**

Méthode de référence :

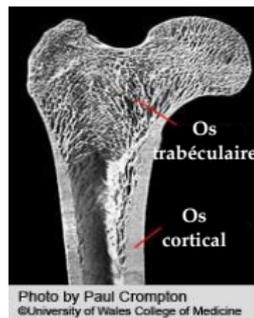
- densitométrie RX → quantité d'os
☹️ **INSUFFISANT**

BESOIN : qualité mécanique de l'os → US 😊

Paramètres déterminants de la résistance osseuse :

- géométrie : *épaisseur corticale*
- structure et microstructure : *porosité*
- matériau : *élasticité, masse volumique*

Objectif à atteindre
CARACTÉRISATION
MULTIPARAMÉTRIQUE



Journée de rencontre LIP-d'Alembert

Cécile Baron

Milieux hétérogènes

FGM

Caractérisation US &
hétérogénéité

C'est du béton !

Anisotropie,
hétérogénéité & tube

Dans la Nature...

Matériaux vivants
FGM

Et l'os cortical ?

US & os long

Un modèle d'os

Résultats

Critique &
Perspectives

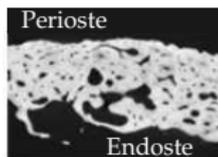
Annexes

Mise en équation

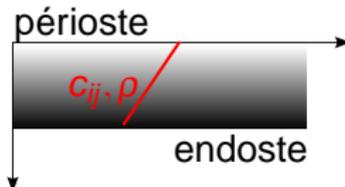
Propriétés de l'os

- L'os cortical : un milieu hétérogène et multi-échelle.
 - Porosité (micro) / comportement mécanique de l'os cortical (macro)
 - Variation de la porosité dans le cortex
- milieu effectif à gradient de propriétés macroscopiques (c_{ij} et ρ).

échelle micro



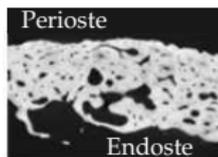
échelle macro



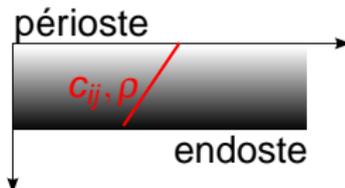
- Caractérisation non-destructive de milieux à gradient de propriétés élastiques : propagation d'ondes élastiques

- L'os cortical : un milieu hétérogène et multi-échelle.
 - Porosité (micro) / comportement mécanique de l'os cortical (macro)
 - Variation de la porosité dans le cortex
- milieu effectif à gradient de propriétés macroscopiques (c_{ij} et ρ).

échelle micro

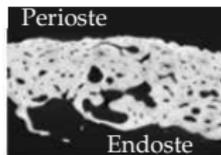


échelle macro

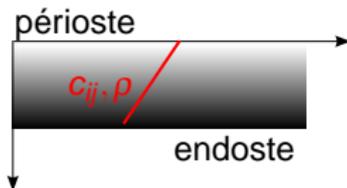


- Caractérisation non-destructive de milieux à gradient de propriétés élastiques : propagation d'ondes élastiques

échelle micro

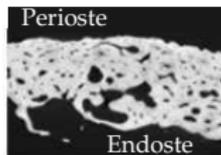


échelle macro

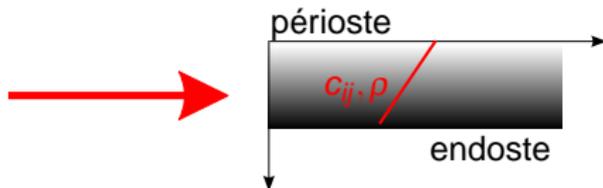


- **IDÉE** : gradient de propriétés macroscopiques = paramètre pertinent déterminant de la résistance osseuse
- **OBJECTIF** : construire un modèle mécanique d'os cortical (anisotropie, géométrie, hétérogénéité) pour établir un critère de diagnostic clinique.

échelle micro



échelle macro



- **IDÉE** : gradient de propriétés macroscopiques = paramètre pertinent déterminant de la résistance osseuse
- **OBJECTIF** : construire un modèle **mécanique** d'os cortical (anisotropie, géométrie, hétérogénéité) pour établir un critère de diagnostic clinique.

Journée de
rencontre
LIP-d'Alembert

Cécile Baron

Objectif : Application clinique \longrightarrow modèle *in-vivo*

Milieus
hétérogènes

FGM

Caractérisation US &
hétérogénéité

C'est du béton !

Anisotropie,
hétérogénéité & tube

Dans la Nature...

Matériaux vivants
FGM

Et l'os cortical ?

US & os long

Un modèle d'os

Résultats

Critique &
Perspectives

Annexes

Mise en équation

Propriétés de l'os

Objectif : Application clinique  modèle *in-vivo*

- Présence des tissus mous

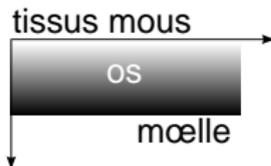
Modèle de plaque anisotrope à gradient de propriétés latéral sous chargement asymétrique fluide

Baron et al. CRM (2008) et Baron et al. JASA (2010).

Objectif : Application clinique \longrightarrow modèle *in-vivo*

- Présence des tissus mous

Modèle de plaque anisotrope à gradient de propriétés latéral sous chargement asymétrique fluide



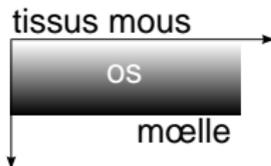
Baron et al. CRM (2008) et Baron et al. JASA (2010).

- Géométrie tubulaire & anisotropie
Modèle de tube anisotrope à gradient de propriétés radial

Objectif : Application clinique \longrightarrow modèle *in-vivo*

- Présence des tissus mous

Modèle de plaque anisotrope à gradient de propriétés latéral sous chargement asymétrique fluide

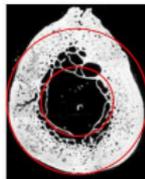


Baron et al. CRM (2008) et Baron et al. JASA (2010).

- Géométrie tubulaire & anisotropie

Modèle de tube anisotrope à gradient de propriétés radial

\longrightarrow influence de la courbure

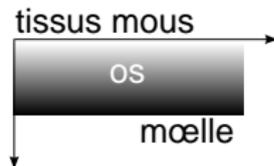


Baron Ultrasonics (soumis).

Objectif : Application clinique \longrightarrow modèle *in-vivo*

- Présence des tissus mous

Modèle de plaque anisotrope à gradient de propriétés latéral sous chargement asymétrique fluide

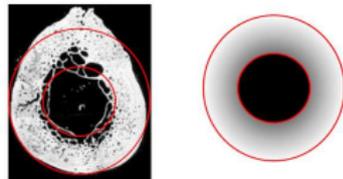


Baron et al. CRM (2008) et Baron et al. JASA (2010).

- **Géométrie tubulaire & anisotropie**

Modèle de tube anisotrope à gradient de propriétés radial

\longrightarrow **influence de la courbure**



Baron Ultrasonics (soumis).

Modèle de plaque vs modèle de tube

Journée de
rencontre
LIP-d'Alembert

Cécile Baron

Milieux
hétérogènes

FGM

Caractérisation US &
hétérogénéité

C'est du béton !

Anisotropie,
hétérogénéité & tube

Dans la Nature...

Matériaux vivants
FGM

Et l'os cortical ?

US & os long

Un modèle d'os

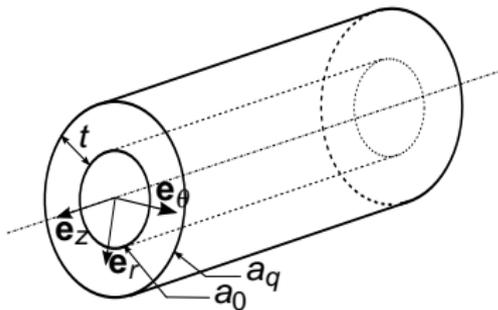
Résultats

Critique &
Perspectives

Annexes

Mise en équation

Propriétés de l'os



$t/a_q < 0.5$ \longrightarrow Plaque - ondes de Lamb et SH

$t/a_q > 0.5$ \longrightarrow Tube - ondes axiales

modes longitudinaux

Journée de
rencontre
LIP-d'Alembert

Cécile Baron

Milieux
hétérogènes

FGM

Caractérisation US &
hétérogénéité

C'est du béton !

Anisotropie,
hétérogénéité & tube

Dans la Nature...

Matériaux vivants
FGM

Et l'os cortical ?

US & os long

Un modèle d'os

Résultats

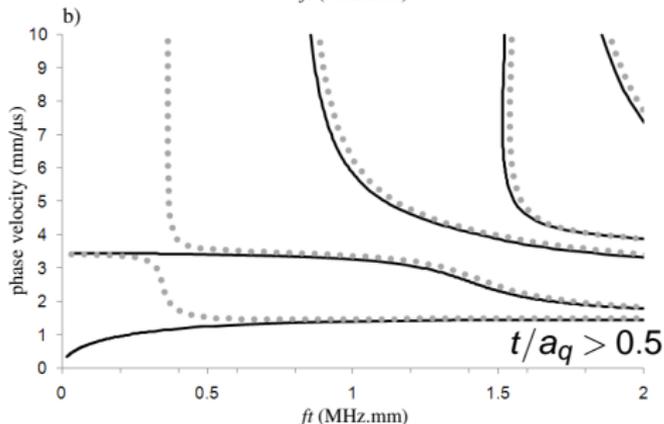
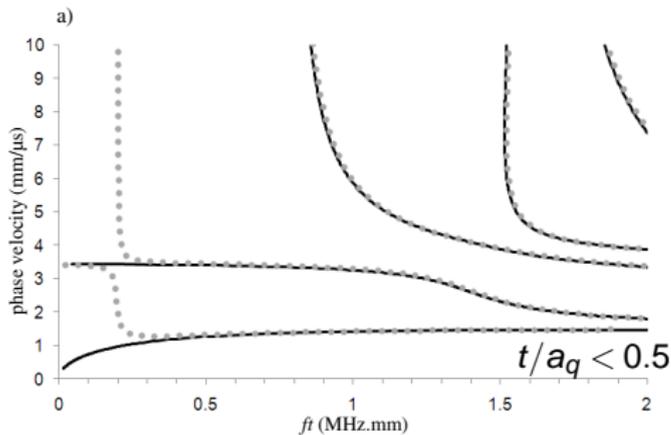
Critique &
Perspectives

Annexes

Mise en équation

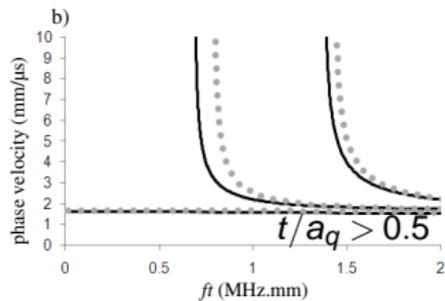
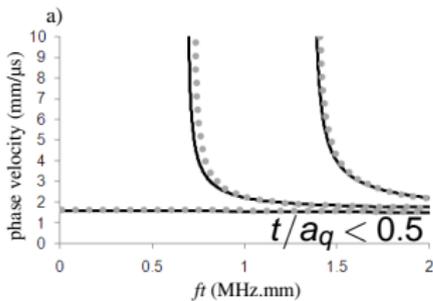
Propriétés de l'os

— Lamb
..... $L(0, m)$



modes de torsion

— SH
..... $T(0, m)$



modes de flexion

Journée de
rencontre
LIP-d'Alembert

Cécile Baron

Milieux
hétérogènes

FGM

Caractérisation US &
hétérogénéité

C'est du béton!

Anisotropie,
hétérogénéité & tube

Dans la Nature...

Matériaux vivants
FGM

Et l'os cortical ?

US & os long

Un modèle d'os

Résultats

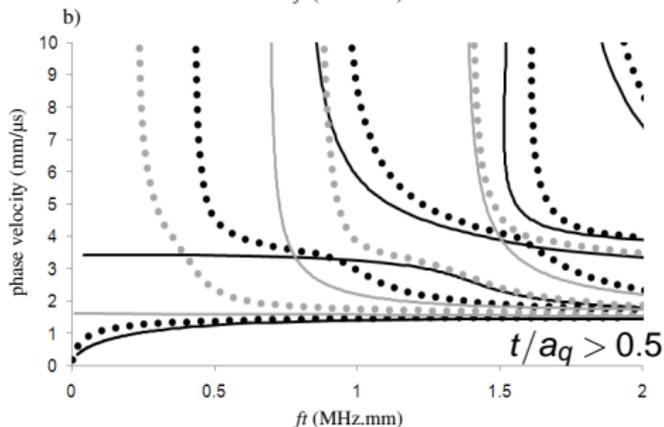
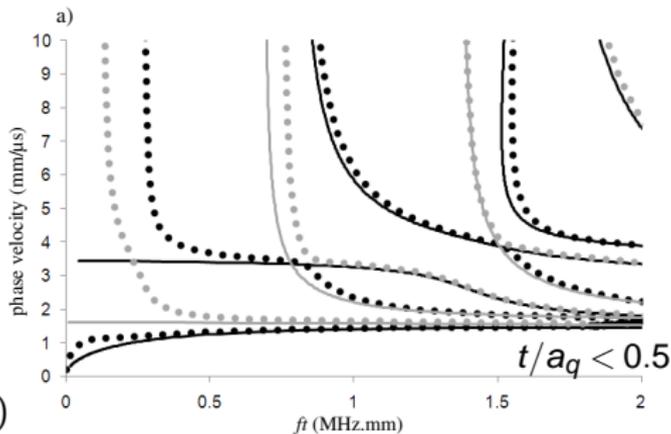
Critique &
Perspectives

Annexes

Mise en équation

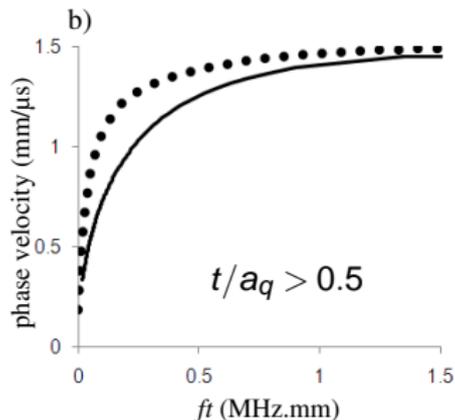
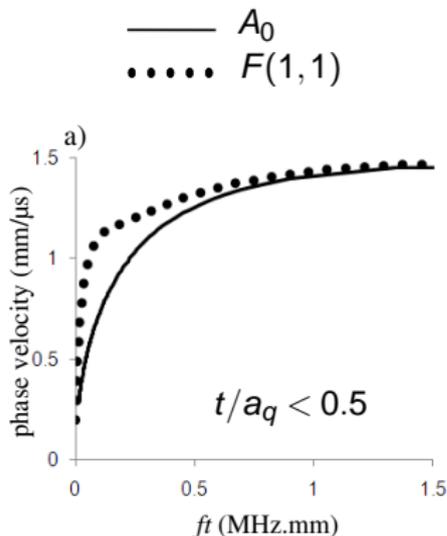
Propriétés de l'os

- Lamb
- SH
- $F(1, 2m - 1)$
- $F(1, 2m)$



Estimation de l'épaisseur corticale : A_0 vs $F(1,1)$

Dans Moilanen et al., UMB (2007) : estimation de l'épaisseur corticale
 A_0 vs $F(1,1)$



Baron, Ultrasonics (soumis)

Journée de
rencontre
LIP-d'Alembert

Cécile Baron

Milieux
hétérogènes

FGM

Caractérisation US &
hétérogénéité

C'est du béton !

Anisotropie,
hétérogénéité & tube

Dans la Nature...

Matériaux vivants
FGM

Et l'os cortical ?

US & os long

Un modèle d'os

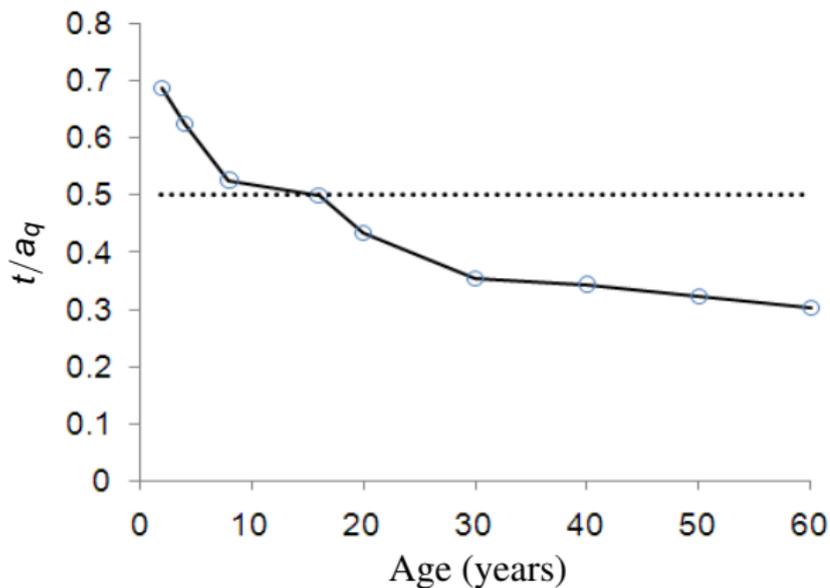
Résultats

Critique &
Perspectives

Annexes

Mise en équation

Propriétés de l'os



- Intérêt des ultrasons

- méthode qualitative
- non-invasif et non-nocif → applications pédiatriques

Pourquoi pas encore de débouchés cliniques ?

- Intérêt des ultrasons

- méthode qualitative
- non-invasif et non-nocif → applications pédiatriques

Pourquoi pas encore de débouchés cliniques ?

Critère clinique fiable difficile à établir...

● Intérêt des ultrasons

- méthode qualitative
- non-invasif et non-nocif → applications pédiatriques

Pourquoi pas encore de débouchés cliniques ?

Critère clinique fiable difficile à établir...

● Intérêt du gradient

- caractérisation multiparamétrique : géométrie, structure et matériau
→ qualité osseuse
- mesure relative / variabilité inter-site et inter-individu

● Intérêt des ultrasons

- méthode qualitative
- non-invasif et non-nocif → applications pédiatriques

Pourquoi pas encore de débouchés cliniques ?

Critère clinique fiable difficile à établir...

● Intérêt du gradient

- caractérisation multiparamétrique : géométrie, structure et matériau
→ qualité osseuse
- mesure relative / variabilité inter-site et inter-individu

Complémentarité des techniques
(histologie, RX, US, etc.)

→ PLATE-FORME MULTI-MODALITÉS.

● Intérêt des ultrasons

- méthode qualitative
- non-invasif et non-nocif → applications pédiatriques

Pourquoi pas encore de débouchés cliniques ?

Critère clinique fiable difficile à établir...

● Intérêt du gradient

- caractérisation multiparamétrique : géométrie, structure et matériau
→ qualité osseuse
- mesure relative / variabilité inter-site et inter-individu

Complémentarité des techniques

(histologie, RX, US, etc.)

→ PLATE-FORME MULTI-MODALITÉS.

the wave equation $\frac{d}{dr}\eta(r) = \frac{1}{r}Q(r)\eta(r).$

Expression of the vector $\eta(r)$ and of the matrix $Q(r)$ for a material with orthorhombic crystallographic symmetry (9 independent stiffness coefficients). The symbol $\hat{\cdot}$ represents the quantities in the Fourier domain.

$$\eta(r) = \left(\hat{u}_r(r), \hat{u}_\theta(r), \hat{u}_z(r), r\hat{\sigma}_{rr}(r), r\hat{\sigma}_{r\theta}(r), r\hat{\sigma}_{rz}(r) \right)^T,$$

$$Q(r) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\frac{c_{12}}{c_{11}} & -m\frac{c_{12}}{c_{11}} & -ik_z r \frac{c_{13}}{c_{11}} & -\frac{i}{c_{11}} & 0 & 0 \\ -m & 1 & 0 & 0 & -\frac{i}{c_{66}} & 0 \\ -ik_z r & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{c_{55}} \\ i(\gamma_{12} - r^2\rho\omega^2) & -n\gamma_{12} & -k_z r \gamma_{23} & \frac{c_{12}}{c_{11}} & -m & -ik_z r \\ n\gamma_{12} & m^2\gamma_{12} + r^2(k_z^2 c_{44} - \rho\omega^2) & mk_z r(\gamma_{123} + c_{44}) & -m\frac{c_{12}}{c_{11}} & -1 & 0 \\ k_z r \gamma_{23} & mk_z r(\gamma_{23} + c_{44}) & m^2 c_{44} + r^2(k_z^2 \gamma_{13} - \rho\omega^2) & -ik_z r \frac{c_{13}}{c_{11}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

with $\gamma_{12} = c_{22} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}}$; $\gamma_{13} = c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}}$; $\gamma_{23} = c_{23} - \frac{c_{12}c_{13}}{c_{11}}$.

	C_{11} (GPa)	C_{13} (GPa)	C_{33} (GPa)	C_{44} (GPa)	C_{66} (GPa)	ρ (g.cm ⁻³)
C_M	25.9	11.1	29.6	5.5	4.4	1.753
C_m	11.8	5.1	17.6	3.3	2.2	1.66

TABLE: Les valeurs minimale et maximale [C_m, C_M] de chaque propriété avec $c_{12} = c_{11} - 2c_{66}$. A noter que la correspondance entre les directions de l'espace et la notation indicelle est $1 \leftrightarrow r; 2 \leftrightarrow \theta; 3 \leftrightarrow z$.

$$C(r) = C_m + (C_M - C_m)(r - a_0)/(a - q - a_0),$$