

10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

Propagation of elastic waves in an anisotropic radially graded cylindrical waveguide: application to the bone evaluation

Cécile Baron^{1,2}

¹ UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France.

² CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France, cecile.baron@upmc.fr

Non-destructive evaluation of heterogeneous materials is of major interest not only in industrial but also in biomedical fields. A special case is the functionally graded material. This case is particularly interesting in modeling biological media such as the bone tissue, the skin or the arterial wall. A lot of works have been done considering the propagation of elastic waves in a laterally varying plate waveguide. However all the above-mentioned biological media are curved and a more realistic model could be a cylindrical waveguide. In this presentation, an original method is proposed to solve the wave equation in the frequency domain in an anisotropic radially graded tube without using a multilayered model. This method is based on an analytical solution, the matricant, explicitly expressed under the Peano series expansion form. The dispersion curves of the different types of modes (longitudinal, flexural) propagating in a cylindrical waveguide are calculated. They can be compared to the results - dispersion curves of the "Lamb waves" - obtained with the same method applied to the elastic wave propagation in a plate with laterally varying elastic properties. Then the influence of the curvature could be evaluated and the criteria of relevancy of a plate model investigated. Furthermore, there is a major issue in characterizing cylindrical structures with radially varying properties in order to assess the bone strength evaluation using the phalanx as the anatomical measurement site; in this context, the present study is promising.

1 Introduction

L'observation des milieux et matériaux naturels et en particulier celle des tissus vivants constitue une source d'inspiration pour les scientifiques. Le développement des matériaux à gradient fonctionnel ou FGM (Functionally Graded Materials) dans les années 80 en est un bon exemple. Ces matériaux reproduisent une caractéristique observée dans le bois, l'os ou les coquillages : une variation continue des propriétés mécaniques qui confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie. Par conséquent, la caractérisation non-destructive de ces structures est devenue un enjeu majeur.

Les ondes de surface et les ondes guidées sont un vecteur d'information important dans l'évaluation de structures complexes. La résolution de l'équation d'onde au sein d'un guide d'onde cylindrique devient délicate. En effet, dans le cas d'un matériau anisotrope quelconque, il n'existe pas de solution analytique à l'exception de quelques configurations particulières [1]. Le travail présenté ici propose une méthode générale basée sur le formalisme de Stroh [2] pour résoudre l'équation d'onde dans un guide d'onde anisotrope à hétérogénéité unidirectionnelle sans passer par une modélisation multicouche. Cette méthode fournit une solution analytique de l'équation d'onde, le matricant, sous la forme explicite de son développement en série de Peano. Cette méthode présente un certain nombre d'avantages : i) prendre en compte l'anisotropie générale ; ii) étudier l'in-

fluence d'un gradient de propriétés sur le comportement mécanique du guide d'onde ; iii) évaluer l'influence de la courbure sur la réponse ultrasonore. Sur ce dernier point, on compare ici les courbes de dispersion obtenues pour un guide d'onde tubulaire à celles obtenues pour une plaque présentant les mêmes propriétés et de même épaisseur. Enfin, on teste la pertinence du modèle de tube anisotrope à gradient de propriétés radial pour la caractérisation ultrasonore de l'os cortical.

2 Formulation

On considère un tube élastique d'épaisseur t placé dans le vide. Le rayon r varie de a_0 , le rayon intérieur

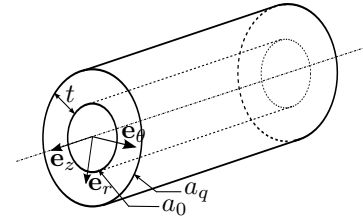


FIGURE 1 – Géométrie du guide d'onde.

du tube, à a_q , le rayon extérieur du tube (Figure 1). La matériau constituant le tube est supposé anisotrope et susceptible de présenter une variation continue de ses propriétés mécaniques selon la direction radiale ($\mathbf{e}_r$). Ces propriétés mécaniques sont représentées par le tenseur des rigidités $\mathbb{C} = \mathbb{C}(r)$ et la densité massique

$$\rho = \rho(r).$$

2.1 Système d'équations

La conservation de la quantité de mouvement associée à la loi de comportement en élasticité linéaire (loi de Hooke) fournit les équations suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \\ \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \mathbb{C} (\operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad}^T \mathbf{u}), \end{cases} \quad (1)$$

où $\mathbf{u}$ est le vecteur des déplacements et $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes. On cherche des solutions de l'équation d'onde pour le déplacement ($\mathbf{u}$) et le vecteur de traction radiale ($\boldsymbol{\sigma}_r = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r$) exprimées en coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans la base $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(r, \theta, z; t) &= \mathbf{U}^{(n)}(r) \exp i(n\theta + k_z z - \omega t), \\ \boldsymbol{\sigma}_r(r, \theta, z; t) &= \mathbf{T}^{(n)}(r) \exp i(n\theta + k_z z - \omega t); \end{aligned} \quad (2)$$

avec k_z le nombre d'onde axial, n le nombre d'onde circulaire et ω la fréquence angulaire.

On distingue deux types d'ondes se propageant dans un guide d'onde cylindrique : les *ondes circonférentielles* et les *ondes axiales*. Les *ondes circonférentielles* sont les ondes se propageant dans les plans perpendiculaires à l'axe du cylindre. Elles correspondent à un champ de déplacement vérifiant $u_z(r) = 0 (\forall r)$, $k_z = 0$ et $n = k_\theta a_q$. Les *ondes axiales* sont les ondes qui se propagent le long de l'axe du cylindre, le nombre d'onde circulaire est un entier $n = 0, 1, 2, \dots$. Dans la suite on s'intéressera uniquement aux *ondes axiales*. Ces ondes sont classées en trois types de modes définis par deux paramètres (n, m) qui représentent le nombre d'onde circulaire et l'ordre des branches : les modes longitudinaux (L), de flexion (F) et de torsion (T). L'étude se restreint ici à l'étude des modes L et F . Les modes L sont à symétrie axiale ($n = 0$), ils sont notés $L(0, m)$. Les modes F sont les modes vérifiant $n \neq 0$.

2.2 Le matricant : solution analytique

On introduit l'expression (2) dans l'équation (1), on obtient une équation d'onde sous la forme d'une équation différentielle du second ordre à coefficients non-constants. Dans le cas général, il n'y a pas de solution analytique au problème ainsi formulé. Les méthodes classiques utilisées pour la résolution de l'équation d'onde dans les milieux à hétérogénéité unidirectionnelle reposent sur la méthode Thomson-Haskell [3, 4]. Ces méthodes sont particulièrement appropriées pour traiter le cas de structures multicouches [5, 6, 7, 8]. En revanche, dans le cas d'une variation continue des propriétés, le recours à ces techniques implique de remplacer les profils continus par des fonctions constantes par morceaux. Le problème étudié alors n'est qu'une approximation du problème réel avant même de procéder à sa résolution, ce qui rend difficile l'évaluation de sa précision et du domaine de validité des résultats obtenus. De plus, le modèle multicouche d'un milieu à stratification continue crée des interfaces "virtuelles" susceptibles de générer des artefacts. Enfin, dans une structure anisotrope à géométrie cylindrique, les solutions de

l'équation d'onde ne peuvent pas être exprimées analytiquement y compris au sein d'une couche homogène [1, 9].

Afin de traiter le problème exact, on réécrit l'équation d'onde sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires à coefficients non-constants (formalisme de Stroh [2]) pour lequel il existe une solution analytique : le matricant [10].

Forme hamiltonienne de l'équation d'onde Dans le domaine de Fourier, l'équation d'onde s'écrit :

$$\frac{d}{dr} \boldsymbol{\eta}(r) = \frac{1}{r} \mathbf{Q}(r) \boldsymbol{\eta}(r). \quad (3)$$

Les composantes du vecteur d'état $\boldsymbol{\eta}(r)$ sont les trois composantes du champ de déplacement et les trois composantes du vecteur de traction exprimées en coordonnées cylindriques $\boldsymbol{\eta}(r) = (\hat{u}_r(r), \hat{u}_\theta(r), \hat{u}_z(r), r\hat{\sigma}_{rr}(r), r\hat{\sigma}_{r\theta}(r), r\hat{\sigma}_{rz}(r))^T$. La matrice $\mathbf{Q}(r)$ contient toutes les informations à propos de l'hétérogénéité; elle est exprimée à partir des coefficients de rigidité et de deux paramètres acoustiques k_z et ω (n étant fixé). On donne une expression détaillée de $\mathbf{Q}(r)$ pour le cas d'un matériau à symétrie cristallographique orthorhombique :

$$\mathbf{Q}(r) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\frac{c_{12}}{c_{11}} & -in\frac{c_{12}}{c_{11}} & 0 & 0 \\ -in & 1 & 0 & 0 \\ -ik_z r & 0 & -\frac{2}{c_{66}} & 0 \\ i(\gamma_{12} - r^2 \rho \omega^2) & -n\gamma_{12} & 0 & \frac{2}{c_{55}} \\ n\gamma_{12} & in^2 \gamma_{12} + ir^2 (k_z^2 c_{44} - \rho \omega^2) & -in & -ik_z r \\ k_z r \gamma_{23} & in k_z r (\gamma_{23} + c_{44}) & 0 & 0 \\ -ik_z r \frac{c_{13}}{c_{11}} & -\frac{2}{c_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{c_{66}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{c_{55}} \\ -k_z r \gamma_{23} & \frac{c_{12}}{c_{11}} & -in & -ik_z r \\ in k_z r (\gamma_{123} + c_{44}) & -in \frac{c_{12}}{c_{11}} & -1 & 0 \\ in^2 c_{44} + ir^2 (k_z^2 \gamma_{13} - \rho \omega^2) & -ik_z r \frac{c_{13}}{c_{11}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

avec $\gamma_{12} = c_{22} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}}$; $\gamma_{13} = c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}}$; $\gamma_{23} = c_{23} - \frac{c_{12}c_{13}}{c_{11}}$. Le symbole $\hat{\cdot}$ représente les quantités considérées dans le domaine de Fourier.

Le développement en série de Peano du matricant : solution explicite L'équation d'onde ainsi formulée (3) a une solution analytique exprimée entre un point de référence (r_0, θ, z) et un point quelconque du cylindre (r, θ, z) . Cette solution est appelée le matricant et peut être écrite sous une forme explicite *via* son développement en série de Peano :

$$\mathbf{M}(r, r_0) = \mathbf{I} + \int_{r_0}^r \mathbf{Q}(\xi) d\xi + \int_{r_0}^r \mathbf{Q}(\xi) \int_{r_0}^\xi \mathbf{Q}(\xi_1) d\xi_1 d\xi + \dots, \quad (4)$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité de dimension $(6, 6)$. Dans le cas d'un intervalle d'étude borné (ici l'épaisseur du tube), les composantes de la matrice $\mathbf{Q}$ étant continues, cette série est toujours convergente [10]. On remarque que le matricant est un propagateur :

$$\boldsymbol{\eta}(r) = \mathbf{M}(r, r_0) \boldsymbol{\eta}(r_0). \quad (5)$$

Conditions aux limites Le cylindre est dans le vide, par conséquent le vecteur de traction σ_r défini dans (2) est nul aux deux interfaces $r = a_0$ et $r = a_q$. En utilisant la propriété de propagateur du matricant sur toute l'épaisseur du tube, l'équation (5) devient $\eta(a_q) = \mathbf{M}(a_q, a_0)\eta(a_0)$ soit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}(r = a_q) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(r = a_0) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

L'équation (6) admet des solutions non-triviales pour $\det \mathbf{M}_3 = 0$. Comme on le voit dans l'expression (4) et d'après l'équation (4), les composantes de $\mathbf{M}_3$ sont des polynômes à deux variables en (k_z, ω) . Par conséquent, la recherche des zéros de $\det \mathbf{M}_3$ correspond à la détermination des couples de valeurs (k_z, ω) qui décrivent les courbes de dispersion.

3 Résultats

Afin de calculer les courbes de dispersion, on évalue numériquement le matricant $\mathbf{M}(a_q, a_0)$ en utilisant l'expression (4). Cette étape impose de tronquer la série de Peano et d'évaluer numériquement les intégrales. Ainsi, l'erreur commise peut être estimée et contrôlée [10]. Pour les calculs de modes dans la plaque, on retient 70 termes dans la série et on évalue les intégrales par la méthode de Simpson (méthode d'intégration d'ordre 4) en prenant 100 points pour décrire le domaine d'intégration (l'épaisseur) ; pour le tube on retient 33 termes dans la série et on intègre sur 30 points. Ces choix ne sont pas optimisés mais assurent la convergence de la solution et la précision des résultats sur le domaine fréquence-épaisseur considéré et pour des temps de calculs raisonnables (quelques dizaines de minutes sur un ordinateur de bureau).

3.1 Validation

Nos résultats sont comparés avec les courbes de dispersion obtenues pour un tube FGM isotrope étudié dans la littérature par plusieurs auteurs [11, 12, 13]. Les propriétés du tube (module de Young E , rapport de Poisson ν et masse volumique ρ) varient des propriétés du nitrure de silicium ($E = 322.4$ GPa, $\nu = 0.24$ et $\rho = 2370$ kg/m³) à l'interface ($r = a_0$) aux propriétés de l'acier inoxydable ($E = 207.82$ GPa, $\nu = 0.317$ et $\rho = 8166$ kg/m³) à l'interface ($r = a_q$). On compare les courbes de dispersion obtenues pour un profil de propriétés affine en r :

$$f(r) = f_{ext} + (f_{in} - f_{ext})(r - a_0)/(a_q - a_0), \quad (7)$$

où $f \equiv E, \nu, \rho$.

Figure 2, les courbes de dispersion obtenues pour le tube FGM isotrope à partir des deux schémas de résolution, sont en parfait accord.

3.2 L'os cortical : un tube anisotrope à gradient de propriétés radial

L'os cortical, comme la majorité des tissus biologiques, est un milieu complexe. Il est anisotrope et

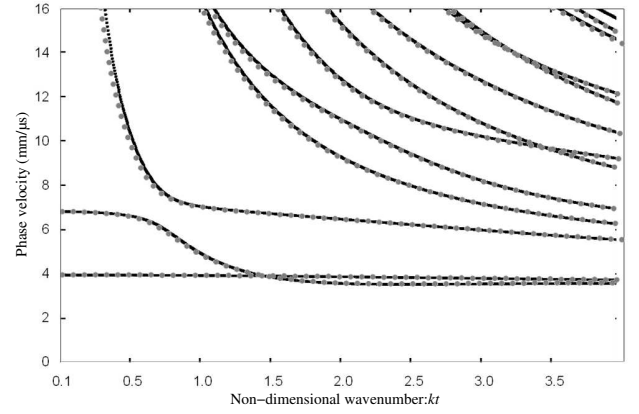


FIGURE 2 – Résultats obtenus par le développement en série de Peano du matricant (points gris) comparés à ceux publiés dans [12] (points noirs).

hétérogène. Il peut être considéré comme un milieu bi-phasique : une phase solide, la matrice osseuse et une phase fluide, la moelle contenue dans les pores. La taille caractéristique des pores est inférieure à quelques centaines de micromètres. Dans le domaine de fréquence usuel de l'ultrasonographie quantitative les longueurs d'ondes sont millimétriques, donc bien supérieures à la taille des pores. Les ondes ultrasonores traversent donc un milieu macroscopique effectif dont les propriétés dépendent évidemment des propriétés microscopiques telles que la porosité ou les propriétés intrinsèques de la matrice osseuse. Plusieurs articles récents ont souligné la nécessité de prendre en compte les hétérogénéités de l'os à différentes échelles et en particulier la variation de ces propriétés dans l'épaisseur du cortex afin d'améliorer l'évaluation de la résistance osseuse par technique ultrasonore [14, 15, 16]. Dans ce contexte, le modèle proposé ici représente un os long sous la forme d'un tube anisotrope dont les propriétés (coefficients de rigidité et masse volumique) varient de façon continue à travers l'épaisseur corticale. Cette variation reflète notamment l'augmentation progressive de la porosité du périoste vers l'endoste. Des études ont démontré le lien existant entre la résistance osseuse et la distribution de la porosité dans la corticale [17]. Ces observations tendent à prouver que le gradient de propriétés élastiques au sein de la paroi corticale est représentatif des mécanismes biologiques du remodelage osseux et un paramètre déterminant de la fragilité osseuse.

En première approche, on considère que l'on peut déduire un profil de propriétés effectives à partir de la distribution de porosité. A notre connaissance, on ne connaît pas avec précision l'évolution de la porosité dans la corticale, cependant quelques études sont permises de décrire des tendances générales [18, 19]. D'après ces résultats, un des profils réalistes les plus simples à considérer est une fonction affine de r de la forme :

$$C(r) = C_m + (C_M - C_m)(r - a_0)/(a - q - a_0), \quad (8)$$

où C représentent les différentes propriétés qui varient dans l'épaisseur (coefficients de rigidité et masse volumique). Une attention particulière a été apportée afin d'attribuer des valeurs réalistes aux propriétés de l'os, nous avons choisi d'utiliser celles récemment publiées

dans [16, 20]. Les valeurs de C_m et C_M sont reportées dans la Table 1. Les courbes de dispersion des modes

	c_{11} (GPa)	c_{13} (GPa)	c_{33} (GPa)	c_{44} (GPa)	c_{66} (GPa)	ρ (g.cm ⁻³)
C_M	25.9	11.1	29.6	5.5	4.4	1.753
C_m	11.8	5.1	17.6	3.3	2.2	1.66

TABLE 1 – Les valeurs minimale et maximale [C_m, C_M] de chaque propriété correspond au domaine de variation indiqué dans [20] avec $c_{12} = c_{11} - 2c_{66}$. A noter que la correspondance entre les directions de l'espace et la notation indicielle est
1 $\leftrightarrow$ r ; 2 $\leftrightarrow$ θ ; 3 $\leftrightarrow$ z .

longitudinaux $L(0, m)$ et de flexion $F(1, m)$ calculées pour un tube anisotrope à gradient de propriétés radial (Table 1) d'épaisseur t sont comparées aux courbes de dispersion obtenues pour une plaque (modes de Lamb) de même épaisseur et présentant la même variation de propriétés. Tous les résultats présentés (plaque et tube) ont été obtenus à partir du développement en série de Peano du matricant (4).

Figures 3, on remarque une tendance déjà rapportée

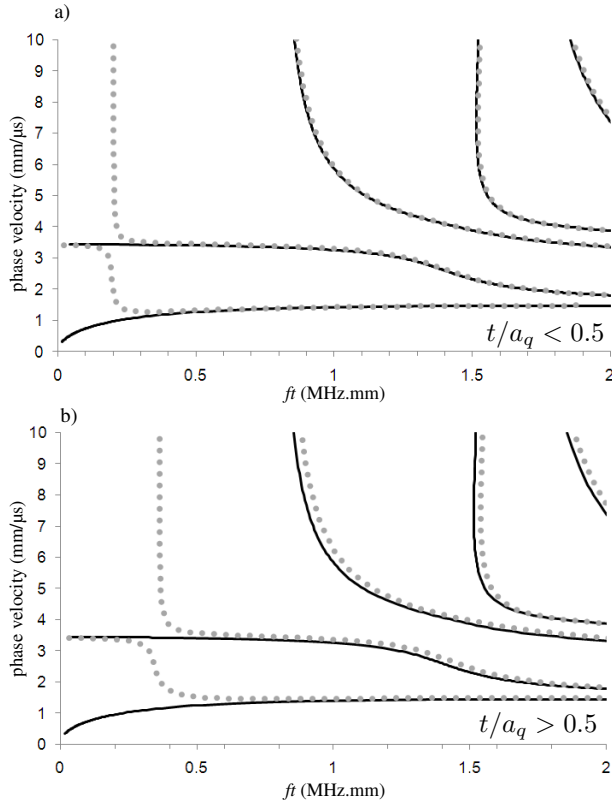


FIGURE 3 – Influence du rapport t/a_q pour un tube dont les propriétés sont celles de la Table 1. Les modes de Lamb (trait noir) sont comparés aux modes longitudinaux $L(0, m)$ (points gris) $m = 1, \dots, 5$.

dans de nombreux articles de la littérature [21, 22, 15] : lorsque le rayon externe a_q est grand devant l'épaisseur t de la paroi ($t/a_q < 0.5$), les modes longitudinaux sont très similaires aux modes de Lamb pour une plaque de même épaisseur et présentant les mêmes propriétés. Cependant pour des produits fréquence-épaisseur faibles ($ft < 0.3$ MHz.mm), les différences entre les modes se

propageant dans la tube et ceux de la plaque sont significatives. Les écarts entre les deux séries de courbes augmentent avec le rapport t/a_q .

En ce qui concerne les modes de flexion, l'anisotropie rend la comparaison entre les modes du tube et ceux de la plaque plus délicate. En effet les modes de flexion sont alors des “longitudinal shear waves” selon les termes de Gazis [23]. On observe Figure 4 cependant que l'effet du rapport t/a_q est le même que pour les modes longitudinaux.

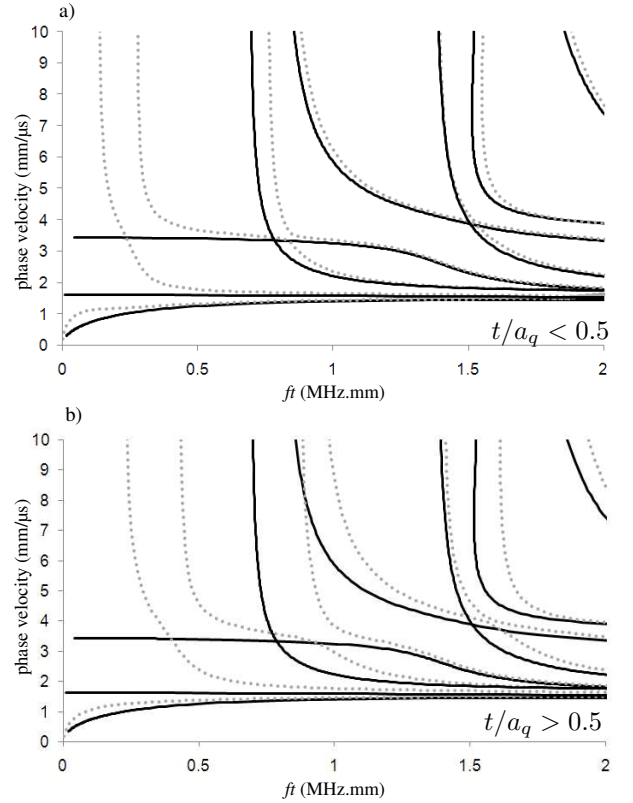


FIGURE 4 – Influence du rapport t/a_q pour un tube dont les propriétés sont celles de la (Table 1). Les modes de Lamb (trait noir) sont comparés aux modes de flexion $F(1, m)$ (points gris) $m = 1, \dots, 8$.

4 Discussion

L'évaluation non-destructive des guides cylindriques anisotropes reste un sujet majeur. La méthode présentée ici permet de résoudre l'équation d'onde dans un tube anisotrope à gradient de propriétés radial. Elle présente un intérêt dans de nombreux domaines d'applications industrielles de pointe mais également pour l'évaluation non-destructive de tissus biologiques tels que l'os. La caractérisation de la résistance osseuse reste un enjeu, en particulier dans le contexte du diagnostic de l'ostéoporose. Au cours des dernières années il a été établi que l'évaluation de la densité osseuse ne suffisait pas à déterminer la fragilité du squelette et le risque de fracture. La géométrie, la microstructure ainsi que les propriétés matérielles de l'os doivent également rentrer en considération [14, 24]. C'est pourquoi il est primordial de développer des modèles mécaniques pertinents susceptibles de refléter la complexité du tissu osseux

et considérant les différents facteurs déterminants de la résistance osseuse. C'est dans cette perspective que s'inscrit le travail présenté ici, en proposant un modèle qui prend en compte la géométrie tubulaire, l'anisotropie et l'hétérogénéité de l'os, paramètres qui influencent le comportement mécanique de l'os et par conséquent la réponse ultrasonore.

Points prometteurs pour l'évaluation de la qualité osseuse Un site d'évaluation prometteur dans le diagnostic du risque fracturaire est celui de la phalange [25, 26]. Le rapport t/a_q pour cet os long est supérieur à 0.5. Il semble donc probable (mais une étude expérimentale reste à mener pour le confirmer) que la courbure aura une influence notable sur la réponse ultrasonore à la phalange.

Par ailleurs, un des avantages de l'ultrasonographie est d'être non-irradiante et non-ionisante et donc utilisable en pédiatrie. Les patients dont le squelette est en croissance sont susceptibles de présenter des rapports t/a_q supérieur à 0,5 pour l'ensemble des os longs [27]. Dans ce cas, à nouveau, l'influence de la courbure pourrait s'avérer non négligeable.

Un autre point à considérer vient d'une étude récente menée sur le radius humain [28]. Ce travail démontre que le mode de flexion $F(1, 1)$ est un meilleur indicateur que le mode A_0 pour évaluer l'épaisseur corticale, paramètre fortement corrélé à la fragilité osseuse [29, 30]. Notre étude confirme que sur le domaine fréquence-épaisseur considéré ($2 < t < 5$ mm and $50 < f < 350$ kHz) les courbes de dispersion de ces deux modes présentent des écarts significatifs (Figure 5). Cela tend à prouver que le

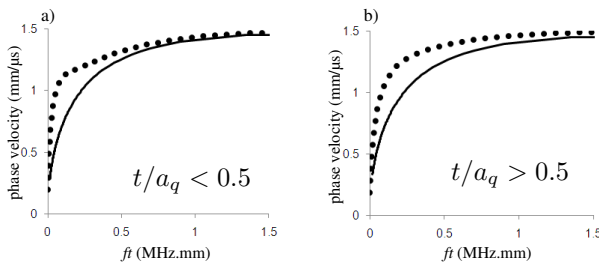


FIGURE 5 – Comparaison entre la courbe de dispersion du mode A_0 (trait noir) et celle du mode $F(1, 1)$ (points noirs) pour les propriétés reportées Table 1.

modèle de plaque appliqué à l'évaluation de la résistance des os longs peut être source d'erreurs.

Limitations pour l'évaluation de la fragilité osseuse *in vivo* Une des premières limitations de cette étude porte sur le choix des valeurs des propriétés élastiques et de leur évolution à travers la corticale. Les valeurs utilisées dans nos calculs sont différentes d'autres données trouvées dans la littérature [31, 32, 33, 34]. Cependant elles sont basées sur des mesures expérimentales publiées dans [35] et le respect des lois de la thermodynamique. De plus elles prennent en compte l'anisotropie de l'os cortical. En ce qui concerne le choix d'une variation linéaire des propriétés, c'est un premier modèle destiné à fournir une idée de l'influence du gradient de propriétés radial. Des données expérimentales nouvelles

sont indispensables afin de connaître la façon dont la porosité et les propriétés intrinsèques de la matrice osseuse évoluent dans l'épaisseur.

Une deuxième limitation est le choix du chargement du tube placé dans le vide. La présence des tissus mous a une influence évidente et démontrée sur les mesures cliniques. Il est donc nécessaire de poursuivre notre étude en intégrant un chargement fluide du tube comme cela a déjà été fait sur le modèle du guide plan anisotrope [20].

5 Conclusion

Dans le cadre de l'évaluation ultrasonore de milieux complexes, la méthode décrite ici présente plusieurs avantages et en particulier celui de résoudre l'équation d'onde dans un guide d'onde cylindrique y compris dans le cas d'un matériau anisotrope quelconque. L'étude de l'influence de la courbure sur la propagation ultrasonore pour un guide d'onde anisotrope à gradient de propriétés radial rejoint les analyses antérieures effectuées sur des guides d'ondes homogènes isotropes ou transverse isotropes : pour des rapports épaisseur/rayon extérieur inférieur à 0.5, le modèle de guide d'onde plan est suffisant excepté pour des produits fréquence-épaisseur faibles. Dans le contexte de l'évaluation ultrasonore des os longs, le modèle de tube anisotrope à gradient de propriétés radial développé ici est prometteur. Cependant de nombreux points restent à approfondir : pertinence du gradient de propriétés en tant que paramètre déterminant de la résistance osseuse, accessibilité *in-vivo* de la mesure du gradient macroscopique par ultrasons, problème inverse. Autant de points qui nécessitent de plus amples investigations notamment expérimentales.

Références

- [1] I. Mirsky, Axisymmetric vibrations of orthotropic cylinders, *Journal of the Acoustical Society of America* 36 (1964) 2106–2112.
- [2] A. N. Stroh, Steady state problems in anisotropic elasticity, *Journal of Mathematics and Physics* 41 (1962) 77–103.
- [3] W. T. Thomson, Transmission of elastic waves through a stratified solid medium, *Journal of Applied Physics* 21 (1950) 89–93.
- [4] N. A. Haskell, The dispersion of surface waves on multilayered media, *Bulletin of the Seismological Society of America* 43 (1953) 377–393.
- [5] E. G. Kenneth, A propagator matrix method for periodically stratified media, *Journal of Acoustical Society of America* 73 (1) (1982) 137–142.
- [6] D. Lévesque, L. Piché, A robust transfer matrix simulation for ultrasonic response of multilayered absorbing media, *Journal of Acoustical Society of America* 92 (1992) 452–467.
- [7] L. Wang, S. I. Rokhlin, Stable reformulation of transfer matrix method for wave propagation in layered anisotropic media, *Ultrasonics* 39 (2001) 413–424.

- [8] B. Hosten, M. Castaings, Surface impedance matrices to model the propagation in multilayered media, *Ultrasonics* 41 (2003) 501–507.
- [9] K. Soldatos, Y. Jianqiao, Wave propagation in anisotropic laminated hollow cylinders of infinite extent, *Journal of the Acoustical Society of America* 96 (1994) 3744–3752.
- [10] C. Baron, Le développement en série de Peano du matricant pour l'étude de la propagation d'ondes en milieux continûment variables, Ph.D. thesis, Université Bordeaux 1, France (2005).
- [11] X. Han, G. R. Liu, Z. C. Xi, K. Y. Lam, Characteristics of waves in a functionally graded cylinder, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53 (2002) 653–676.
- [12] L. Elmaimouni, J. E. Lefebvre, T. Gryba, V. Zhang, Polynomial method applied to acoustic waves in inhomogeneous cylinders, in : *IEEE Ultrasonics Symposium*, 2003.
- [13] L. Elmaimouni, J. E. Lefebvre, V. Zhang, T. Gryba, Guided waves in radially graded cylinders : a polynomial approach, *NDT&E International* 38 (2005) 344–353.
- [14] P. H. F. Nicholson, P. Moilanen, T. Kärkkäinen, J. Timonen, S. Cheng, Guided ultrasonic waves in long bones : modelling, experiment and *in vivo* application, *Physiological Measurement* 23 (2002) 755–768.
- [15] V. Protopappas, D. Fotiadis, K. Malizos, Guided ultrasound wave propagation in intact and healing long bone, *Ultrasound in Medicine and Biology* 32 (2006) 693–708.
- [16] G. Haiat, S. Naili, Q. Grimal, M. Talmant, Influence of a gradient of material properties on ultrasonic wave propagation in cortical bone : Application to axial transmission, *Journal of Acoustical Society of America* 125 (2009) 4043–4052.
- [17] C. D. L. Thomas, S. A. Feik, J. G. Clement, Regional variation of intracortical porosity in the midshaft of the human femur : age and sex differences, *Journal of Anatomy* 206 (2005) 115–125.
- [18] V. Bousson, A. Meunier, C. Bergot, E. Vicaut, M. A. Rocha, M. H. Morais, A.-M. Laval-Jeantet, J.-D. Laredo, Distribution of intracortical porosity in human midfemoral cortex by age and gender, *Journal of Bone and Mineral Research* 16 (2001) 1308–1317.
- [19] S. Bensamoun, J.-M. Gherbezze, J.-F. de Belleval, M.-C. Ho Ba Tho, Transmission scanning acoustic imaging of human cortical bone and relation with the microstructure, *Clinical Biomechanics* 19 (2004) 639–647.
- [20] C. Baron, S. Naili, Propagation of elastic waves in a fluid-loaded anisotropic functionally graded waveguide : Application to ultrasound characterization, *Journal of Acoustical Society of America* *in press*.
- [21] H. Nishino, S. Takashina, F. Uchida, M. Takemoto, K. Ono, Modal analysis of hollow cylindrical guided waves and applications, *Japanese Journal of Applied Physics* 30 (1) (2001) 364–370.
- [22] F. Lefebvre, Y. Deblock, P. Campistron, D. Ahite, J. J. Fabre, Development of a new ultrasonic technique for bone and biomaterials *in vitro* characterization, *Journal of Biomedical Material Research, Part B* 63 (2002) 441–446.
- [23] D. C. Gazis, Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. I. Analytical foundation, *Journal of Acoustical Society of America* 31 (1959) 568–573.
- [24] J. F. Griffith, H. K. Genant, Bone mass and architecture determination : state of the art, *Best Practice & Research Clinical Endocrinology & Metabolism* 22 (2008) 737–764.
- [25] C. Njeh, C. Wu, B. Fan, D. Hans, T. Fuerst, Y. He, H. Genant, Estimation of wrist fracture load using phalangeal speed of sound : An *in vitro* study, *Ultrasound in Medicine & Biology* 26 (2000) 1517–1523.
- [26] R. Barkmann, S. Lüsse, S. Sakata, M. Heller, C.-C. Glüer, Assessment of the geometry of human finger phalanges using quantitative ultrasound *in vivo*, *Osteoporosis International* 11 (2000) 745–755.
- [27] D. R. Carter, G. S. Beaupré, *Skeletal function and form*, University Press, Cambridge, 2001.
- [28] P. Moilanen, P. H. F. Nicholson, V. Kilappa, S. Cheng, J. Timonen, Assessment of the cortical thickness using ultrasonic guided waves : Modeling and *in vitro* study, *Ultrasound in Medicine and Biology* 33 (2007) 254–262.
- [29] P. Augat, H. Reeb, L. E. Claes, Prediction of fracture load at different skeletal sites by geometric properties of the cortical shell, *Journal of Bone and Mineral Research* 11 (1996) 1356–1363.
- [30] C. H. Turner, Biomechanics of bone : Determinants of skeletal fragility and bone quality, *Osteoporosis International* 13 (2002) 97–104.
- [31] S. B. Lang, Ultrasonic method for measuring elastic coefficients of bone and results on fresh and dried bovine bones., in : *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol. 17, 1970.
- [32] R. B. Ashman, A continuous wave measurement of the elastic properties of cortical bone., *Journal of Biomechanics* 17 (1984) 349–361.
- [33] M. Pithioux, P. Lasaygues, P. Chabrand, An alternative ultrasonic method for measuring the elastic properties of cortical bone, *Journal of Biomechanics* 35 (2002) 961–968.
- [34] C. Baron, M. Talmant, P. Laugier, Effect of porosity on effective diagonal stiffness coefficients (c_{ii}) and anisotropy of cortical at 1 MHz : A finite-difference time domain study, *Journal of Acoustical Society of America* 122 (2007) 1810–1817.
- [35] X. N. Dong, X. E. Guo, The dependence of transversely isotropic elasticity of human femoral cortical bone on porosity, *Journal of Biomechanics* 37 (2004) 1281–1287.