SESSION DE 1975

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

N. B. — *Le sujet de cette composition est extrait du programme des classes préparatoires aux Grandes Écoles et du premier cycle de l'Enseignement supérieur, conformément à la note du 28 mai 1974.*

Les candidats doivent exposer avec concision, sans limitation de niveau, toutes leurs connaissances dans le cadre précis *des questions posées. Un barème est indiqué pour permettre aux candidats de juger de l'importance relative des différentes parties. Il sera tenu le plus grand compte des qualités d'exposition. Le numéro précis de la question à laquelle on répond (ex :* III.1.*b.) doit être nettement indiqué.*

I. — QUELQUES LOIS DE CONSERVATION EN MÉCANIQUE

(*sur 55 points*)

A. *Mécanique newtonienne dans un référentiel galiléen.*

I.1. Dynamique newtonienne des *systèmes* matériels.

Théorème du mouvement du centre d'inertie (ou centre de masse). Théorème du moment cinétique.

Nota : *Le candidat postulera l'existence de référentiels galiléens (appelés aussi référentiels d'inertie). Toute liberté est laissée dans le choix du mode d'exposition, mais on indiquera nettement ce qui est postulé, ce qui s'en déduit.*

Conservation du moment cinétique au cours du mouvement d'un point matériel dans un champ de forces centrales.

Tournez la page S. V. P.

I.2. *Application :* Diffusion d'un proton par un noyau lourd.

Un proton P de charge e, de masse m, se déplace dans le champ d'un noyau O de charge Ze, de masse très supérieure à m. Dans ces conditions, on pourra négliger tout transfert de moment cinétique ou d'énergie au noyau; le noyau reste immobile dans un référentiel galiléen.

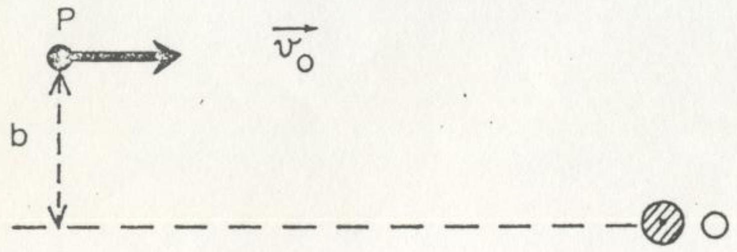

Fig. 1

Quand le proton est infiniment éloigné du noyau, sa vitesse par rapport au noyau est $\vec{v}_0$ et le paramètre d'impact est b (fig. 1). L'interaction entre les deux particules étant supposée purement coulombienne, calculer la distance minimale d'approche a.

I.3. *Application :* Mouvement d'un ballon.

Un ballon de rugby est assimilé à un solide indéformable de révolution de centre d'inertie G, d'axe de révolution G, $\vec{k}$. Soit G, $\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ une base orthonormée *liée à ce solide* (fig. 2). Les moments d'inertie par rapport à G, $\vec{i}$ et G, $\vec{j}$ sont égaux à I, le moment d'inertie par rapport à G, $\vec{k}$ est égal à J (J < I).

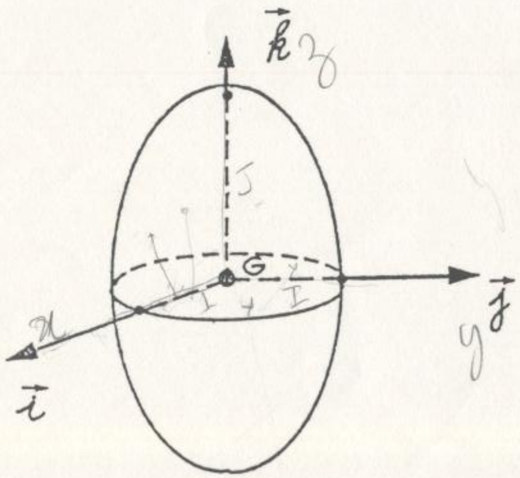

Fig. 2

Démontrer que les axes G, $\vec{i}$; G, $\vec{j}$; G, $\vec{k}$ sont principaux d'inertie.

Un repère lié à la Terre est supposé galiléen. Le ballon est lancé dans le champ de pesanteur supposé uniforme, et on veut étudier son mouvement dans le référentiel barycentrique (mouvement autour de G), la résistance de l'air étant négligée. Le vecteur rotation du solide à l'instant t sera noté $\vec{\Omega} = p\,\vec{i} + q\,\vec{j} + r\,\vec{k}$.

I.3.*a*. A l'instant initial, le vecteur rotation du ballon est $\vec{\Omega}_0 = \omega_0\,\vec{k}$. Montrer que $\vec{\Omega}$ reste constant au cours du mouvement.

I.3.*b*. A l'instant initial, $\vec{\Omega}_0$ fait maintenant avec $\vec{k}$ l'angle $\alpha_0 = (\vec{k}, \vec{\Omega}_0)$. Étudier les composantes p, q, r en fonction du temps et décrire brièvement le mouvement du ballon autour de G.

B. *Mécanique relativiste.*

I.4. Quadrivecteur impulsion-énergie d'une particule.

Expression du quadrivecteur impulsion-énergie.

Cas des particules de masse nulle.

Lois de conservation lors des chocs entre particules.

I.5. Effet Compton.

Expliquer brièvement ce qu'est l'effet Compton.

I.6. *Application.*

Une radiation électromagnétique de fréquence ν_0 subit une diffusion par des électrons de masse m, qu'on peut considérer comme libres et au repos. Un photon diffusé de fréquence ν est observé suivant une direction faisant l'angle θ avec le vecteur d'onde de la radiation incidente. Calculer ν.

Application numérique :

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

λ_0 (longueur d'onde de la radiation incidente) = 0,708 Å.

Calculer λ, longueur d'onde de la radiation diffusée.

Les grandeurs fondamentales nécessaires sont supposées connues du candidat, *au moins par leur ordre de grandeur.*

Tournez la page S. V. P.

II. — LOIS DE CONSERVATION EN ÉLECTROMAGNÉTISME
(*sur 60 points*)

A. *Conservation de la charge.*

II.1. Établir l'expression locale du principe de conservation de la charge (équation dite « de conservation de la charge » ou « de continuité » reliant la densité volumique de charge ρ à la densité de courant $\vec{j}$).

II.2. Écrire les quatre équations locales (dites équations de Maxwell dans le vide) vérifiées par le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ engendrés par une distribution de charges et de courants caractérisée par la densité de charge ρ et la densité de courant $\vec{j}$. Donner la forme intégrale et une brève interprétation physique de chaque équation. Établir l'équation locale aux dérivées partielles (dite équation de propagation) à laquelle satisfait le champ électrique $\vec{E}$ en un point de l'espace sans charges ni courants. Même question pour le champ magnétique $\vec{B}$.

II.3. Montrer que l'équation de conservation de la charge peut être déduite de deux des équations de Maxwell (considérées comme axiomes).

B. *Conservation de l'énergie.*

II.4. Écrire l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique u localisée au voisinage d'un point de l'espace où les champs électrique et magnétique sont $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

II.5. Qu'appelle-t-on vecteur de Poynting (ou vecteur radiant) $\vec{\Pi}$? Écrire son expression en fonction de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$. En quelle unité peut-on l'exprimer dans le système international (S.I.)?

II.6. *Application.*

Calculer le vecteur de Poynting pour le rayonnement solaire arrivant sur la Terre. La constante solaire est de 2 calories.cm^{-2}.mn^{-1}.

II.7. Établir une équation locale reliant u, $\vec{\Pi}$, $\vec{j}$ et $\vec{E}$. Quelle est la signification physique de cette équation?

II.8. *Application* : Étude d'un câble coaxial en tant que ligne de transport d'énergie.

Un câble coaxial est constitué par deux cylindres indéfinis conducteurs C_1 et C_2 d'épaisseurs très faibles, de même axe Oz et de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$) placés dans le vide. C_1 est parcouru par un courant continu d'intensité I dirigé dans le sens de Oz, C_2 par le courant de retour de même intensité et de sens opposé. On néglige toute chute de tension le long du câble et on note respectivement V_1 et V_2 les potentiels de C_1 et C_2. L'ensemble du système possède la symétrie cylindrique.

Calculer $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en tout point M de l'espace en fonction de R_1, R_2, I, $V_1 - V_2$ et de la distance r de M à Oz. Calculer le flux du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ à travers un plan normal à Oz et interpréter le résultat obtenu.

III. — UNE ÉQUATION DE CONSERVATION EN MÉCANIQUE QUANTIQUE (*sur 40 points*)

On considérera dans la suite une particule P non relativiste de masse m uniquement soumise à une action dérivant du potentiel V $(\vec{r}, t)$, $\vec{r}$ étant le vecteur position de P à la date t. La fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$ de P vérifie l'équation de Schrödinger qui s'écrit ici :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V.\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \qquad (\Delta \text{ étant l'opérateur laplacien et } i^2 = -1)$$

Les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger sont notées sous la forme :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) . e^{-i\omega t}$$

elles ne seront étudiées ci-dessous que dans le cas particulier d'un problème à une dimension.

III.1. Une particule d'énergie E se déplace le long de l'axe Ox, venant de la région (1) ($x < 0$) et se dirigeant vers la région (2) ($x > 0$). Elle aborde en $x = 0$ une « marche de potentiel » de hauteur $U < E$ (fig. 3).

Montrer que l'on peut écrire :

— dans la région (1) : $\varphi(x) = A\,[e^{ik_1x} + \alpha\, e^{-ik_1x}]$

— dans la région (2) : $\varphi(x) = A\,\beta\, e^{ik_2x}$

a. Exprimer k_1 et k_2 en fonction de m, E et U.

b. Exprimer α et β en fonction de k_1 et k_2.

Tournez la page S. V. P.

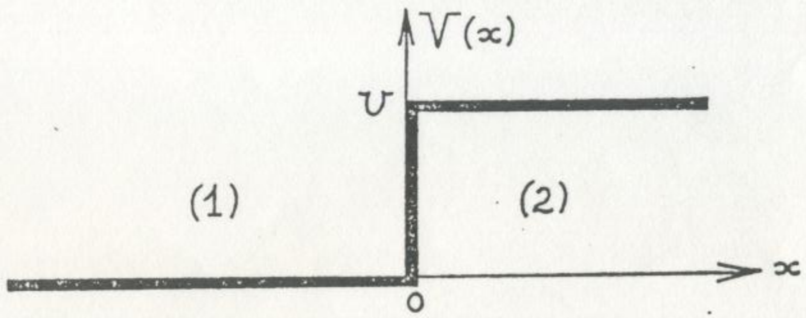

Fig. 3

$$\begin{cases} x < 0 & V(x) = 0 \quad (1) \\ x > 0 & V(x) = U \quad (2) \end{cases}$$

III.2. On note $\rho(\vec{r}, t)$ la densité de probabilité associée à une particule P soumise à l'action d'un potentiel $V(\vec{r}, t)$ *quelconque*. On définit le courant de probabilité $\vec{j}(\vec{r}, t)$ associé à cette particule par :

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im} (\Psi^* \overrightarrow{\text{grad}}\, \Psi - \Psi \overrightarrow{\text{grad}}\, \Psi^*) ;$$

Ψ^* étant le complexe conjugué de Ψ.

On rappelle que, U étant un champ scalaire et $\vec{a}$ un champ vectoriel :

$$\text{div}(U \vec{a}) = \vec{a} . \overrightarrow{\text{grad}}\, U + U \,\text{div}\, \vec{a}$$

Montrer que $\vec{j}(\vec{r}, t)$ est relié à $\rho(\vec{r}, t)$ par une équation de conservation (ou de continuité) semblable à celle qui a été établie en II.1.

III.3. Calculer $\rho(\vec{r}, t)$ et $\vec{j}(\vec{r}, t)$ dans le cas où la fonction d'onde de P est de la forme :

$$\Psi(\vec{r}, t) = A\, e^{i(\vec{k} . \vec{r} - \omega t)}$$

Interpréter les résultats obtenus. Que représente le vecteur

$$\frac{\vec{j}(\vec{r}, t)}{\rho(\vec{r}, t)} \;?$$

III.4. On revient au potentiel décrit en III.1. On désigne par J_1 et J_2 les valeurs prises dans les régions (1) et (2) par la mesure sur Ox du courant de probabilité $\vec{j}(x)$. On pose :

$$J_0 = \frac{\hbar}{m} k_1 A^2 \qquad R = \frac{J_0 - J_1}{J_0} \qquad T = \frac{J_2}{J_0}$$

Exprimer R et T en fonction de k_1 et k_2. Justifier la relation très simple qui existe entre R et T. Que représentent J_0, R et T?

IV. — CONSERVATION DE L'ÉNERGIE ET CONDUCTION THERMIQUE (*sur 25 points*)

(*Aucune connaissance particulière relative à ce domaine de la physique n'est nécessaire.*)

Soit $\theta(M, t)$ la température à la date t en un point M d'un domaine D. D est rempli d'un milieu continu isotrope dont on note $\mu(M)$ et $c(M)$ la masse volumique et la chaleur massique en un point M. μ et c seront supposés indépendants de θ. On admettra que la conduction thermique obéit à la loi de Fourier :

$$\vec{j} = - k\, \overrightarrow{\text{grad}}\, \theta$$

La densité de courant thermique $\vec{j}$ est un champ vectoriel dont le flux à travers une surface fermée est égal à la puissance thermique qui sort de cette surface; la conductivité thermique, notée k, est supposée uniforme dans D.

IV.1. En supposant qu'il n'y a pas d'énergie produite à l'intérieur de D et que le seul phénomène énergétique y est la conduction thermique, montrer que $\theta(M, t)$ vérifie l'équation locale dite équation de la chaleur :

$$\Delta\theta = h \frac{\partial \theta}{\partial t} \qquad (\Delta\theta \text{ étant le laplacien de } \theta)$$

On exprimera h en fonction de μ, c et k.

IV.2. *Application* : Évolution de la température dans le sol au cours de l'année.

On assimile localement le sol terrestre à un demi-espace $(x > 0)$ homogène de masse volumique μ, de chaleur massique c et de conductivité thermique k. On note $\theta(x, t)$ la température dans le sol à la date t et à la profondeur x. On supposera que la température à la surface du sol $(x = 0)$ évolue au cours de l'année suivant la loi :

$$\theta(0, t) = \theta_0 + a \cos \omega t \qquad (a \text{ constant et } T = \frac{2\pi}{\omega} = \text{un an})$$

On admettra que, à grande profondeur, la température du sol tend vers la moyenne annuelle : $\theta(\infty, t) = \theta_0$.

a. On pose $u = \dfrac{\theta - \theta_0}{a}$. Chercher une solution de l'équation de la chaleur sous la forme :

$$u(x, t) = \text{Re}\,[e^{\alpha x + \beta t}] \qquad (\text{Re signifiant « partie réelle de »}).$$

Tournez la page S. V. P.

Exprimer les constantes complexes α et β en fonction de μ, c, k et ω.

b. On pose :

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2k}{c\mu\omega}}$$

Exprimer $u(x, t)$ en fonction de $\frac{x}{\lambda}$ et de $\frac{t}{T}$. Décrire brièvement la signification physique de la solution obtenue.

c. En un lieu où $\lambda = 16$ mètres (pour T = 1 an), la température de la surface du sol passe vers le 1er janvier par un minimum égal à — 10 °C et vers le 1er juillet par un maximum égal à + 30 °C. Vers quelle date la température est-elle minimale à la profondeur $x = 2$ mètres et quelle est cette valeur minimale? Tirez-en quelques conséquences.

d. Pourquoi les variations de la température du sol qui correspondent à l'alternance des nuits et des jours sont-elles pratiquement sans influence sur la température du sol à la profondeur $x = 2$ mètres?

V. — CONSERVATION DE PARTICULES ET DIFFUSION

(sur 20 points)

Des neutrons sont produits dans certaines régions d'un réacteur nucléaire R. Cette production est caractérisée par la fonction « source de neutrons » :

$$s(M, t) \qquad \text{unité : neutron.m}^{-3}\text{.s}^{-1}$$

qui donne le nombre de neutrons produits par unité de volume et par unité de temps au voisinage d'un point M à la date t. La répartition des neutrons dans R est caractérisée par la fonction « densité neutronique » :

$$n(M, t) \qquad \text{unité : neutron.m}^{-3}$$

Par analogie avec la densité de courant électrique, on définit la « densité de courant neutronique » :

$$\vec{j}(M, t) \qquad \text{unité : neutron.m}^{-2}\text{.s}^{-1}$$

On admettra que la diffusion des neutrons obéit à la loi de Fick :

$$\vec{j} = -D\,\overrightarrow{\text{grad}}\,n$$

la constante D (diffusivité) ayant même valeur en tout point de R.

V.1. En négligeant tout phénomène d'absorption des neutrons, établir une équation locale vérifiée dans R par les fonctions n et s.

V.2. Les neutrons ne sont produits que dans une région de R, appelée « le cœur » C qui a la forme d'un cylindre plat de rayon a et de hauteur $h \ll a$. s est constant à l'intérieur de C, nul à l'extérieur; R fonctionne en régime permanent.

En admettant que R remplit tout l'espace et que n tend vers 0 loin de C :

a. Calculer n au centre de symétrie O de C.

b. Calculer n en un point de la surface cylindrique de C (situé à la distance a de O).