écrit

1976

épreuve A

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Sujet (durée : 5 heures)

N. B. — *Le sujet de cette composition est extrait du programme des classes préparatoires aux Grandes Écoles et du premier cycle de l'Enseignement supérieur, conformément à la note du 16 juillet 1975.*

Les candidats doivent exposer avec concision, sans limitation de niveau, toutes leurs connaissances dans le cadre précis des questions posées. Un barème est indiqué pour permettre aux candidats de juger de l'importance relative des différentes parties. Il sera tenu le plus grand compte des qualités d'exposition et de soin. Le numéro précis de la question à laquelle on répond (ex. : II.B.2.) doit être nettement indiqué.

La précision des calculs numériques est celle de la règle.

L'épreuve n'exige pas de papier millimétré.

I. ONDES PROGRESSIVES ONDES STATIONNAIRES SUR UNE CORDE

(*sur 55 points*)

(Ce qui suit n'exige que des connaissances élémentaires de mécanique.)

Une corde sans raideur (c'est-à-dire pouvant être déformée par un couple négligeable) de longueur l, de masse linéique μ constante, est tendue entre deux points fixes O et A de l'axe Ox distants de l.

On étudie les petits mouvements transversaux dans le plan xOy. L'élongation d'un point M de la corde à la date t sera notée $y(x, t)$. La tangente en M à la corde fait avec Ox un angle $\alpha\ (x, t)$ qui reste petit (fig. 1). On notera F la tension de la corde et l'on négligera l'action du champ de pesanteur sur le mouvement ainsi que toute cause d'amortissement.

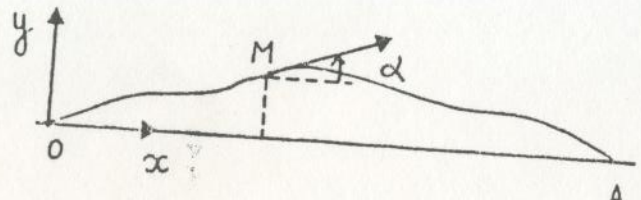

Figure 1

I. A. *Équation de propagation.*

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un élément de la corde, établir l'équation différentielle :

(1)
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Exprimer v en fonction de F et μ et donner sa signification.

I. B. *Étude énergétique.*

La corde étant animée de l'un quelconque des mouvements régis par l'équation de propagation (1), calculer le travail élémentaire entre les dates t et $t + dt$ des forces de tension s'exerçant sur un élément de la corde.

Montrer qu'il est une différentielle.

En déduire que l'on peut définir une énergie potentielle pour cet élément. Vérifier la conservation de l'énergie.

I. C. *Onde stationnaire à un seul fuseau.*

La corde est attachée en O à un support fixe et tendue par un poids P = F (fig. 2 ci-contre). La poulie utilisée est mobile sans frottement autour de son axe. A la distance OA = l, la corde passe à travers un petit anneau qui est supposé immobile. L'ouverture de l'anneau est assez petite pour que le point de la corde situé en A soit immobile. Le mouvement de la portion OA est donné par :

$$y(x, t) = b \sin \omega \frac{x}{v} \sin \omega t .$$

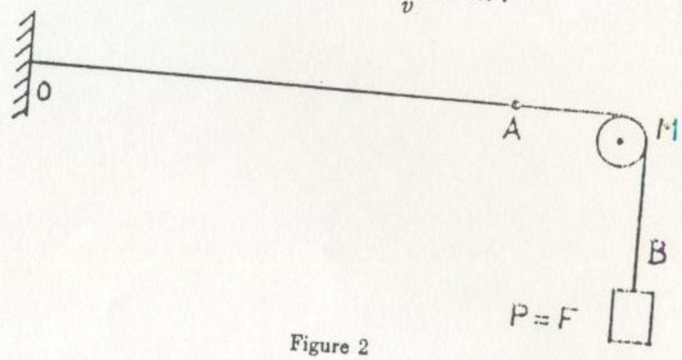

Figure 2

On reste dans le cadre de l'approximation des petits mouvements et l'on admet que la portion AMB de la corde reste immobile.

I. C. 1. Vérifier que la fonction $y(x, t)$ proposée est solution de l'équation (1).

I. C. 2. Calculer à la date t la projection R_x sur Ox de la résultante des forces exercées par l'anneau sur la corde. Calculer sa valeur moyenne dans le temps $< R_x >$.

I. C. 3. On choisit comme origine de l'énergie potentielle définie en I. B. l'énergie potentielle de la corde quand elle passe par sa position d'équilibre (corde rectiligne). Calculer l'énergie totale de la corde, somme de son énergie cinétique et de l'énergie potentielle définie ci-dessus. Comparer la densité moyenne d'énergie par unité de longueur et $< R_x >$.

I. D. *Ondes stationnaires générales.*

Les extrémités O et A de la corde sont fixes.

I. D. 1. On cherche des solutions de (1) sous la forme

$$y(x, t) = f(x)\ g(t) .$$

Montrer que $f(x)$ et $g(t)$ doivent être des fonctions sinusoïdales.

En notant ω la pulsation de $g(t)$, quelle est la pulsation k de $f(x)$? Quelles sont les valeurs possibles de ω?

I. D. 2. Montrer que :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi v}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi v}{l} t \right] \sin \frac{n\pi x}{l}$$

est solution de (1). Interpréter physiquement l'expression ci-dessus.

I. D. 3. A la date $t = 0$, la corde est dans la position d'équilibre $y(x, 0) = 0$. On la frappe avec un petit marteau de largeur e situé à l'abscisse a. On admettra que, dans ces conditions, la vitesse de chaque point de la corde est donnée par la fonction $h(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)$ telle que : $h(x) = u$ pour $a < x < a + e$, $h(x) = 0$ pour toute autre valeur de x; u est une constante, e est très petit par rapport à a (ceci est une schématisation de la réalité).

Exprimer les coefficients a_n et b_n en fonction de u, e, n, l, v et a. Déduire une application musicale du fait que a_n et b_n dépendent de a.

Dans le cas où $a = l/2$, quels sont les harmoniques présents dans le son émis par la corde? Comparer entre elles les amplitudes des différents harmoniques.

II. PROPAGATION DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES STATIONNAIRES

(sur 60 points)

II. A. *Propagation dans le vide.*

II. A. 1. Écrire les équations de Maxwell (dites « dans le vide ») vérifiées par le champ électrique $\vec{E}$ et par le champ magnétique $\vec{B}$ créés par une distribution de charges de densité ρ et une distribution de courants de densité $\vec{j}$.

II. A. 2. Montrer que, dans le vide, en l'absence de charges et de courants ($\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$), chacune des composantes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vérifie une équation du type :

$$(2) \qquad \nabla^2 g - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \text{ étant l'opérateur laplacien.}$$

Exprimer c en fonction de la constante diélectrique du vide ε_0 et de sa perméabilité magnétique μ_0.

II. A. 3. Définir ce qu'on appelle une onde plane. Dans la suite nous nous limiterons à l'étude d'ondes planes; établir que la solution générale de l'équation (2) peut être considérée comme la superposition de deux ondes progressives.

II. A. 4. Soit une onde plane progressive (non nécessairement harmonique) se propageant dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u}$. Montrer que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transversaux et vérifient la relation :

$$\vec{B} = \vec{u} \wedge \frac{\vec{E}}{c}.$$

II. B. *Propagation dans un plasma.*

Un plasma contient par m^3 : $n = 10^{10}$ ions de masse M et de charge $e = 1,6.10^{-19}$ coulomb et n électrons libres de masse : $m = 9,1.10^{-31}$ kg et de charge $- e$.

On admettra que les ions du plasma restent immobiles.

II. B. 1. Écrire l'équation différentielle du mouvement d'un électron libre que l'on supposera uniquement soumis à la force exercée par le champ électrique d'une onde harmonique plane de pulsation ω et dont le vecteur d'onde $\vec{k}$ est parallèle à l'axe Ox. On supposera que l'onde est polarisée rectilignement et l'on utilisera la notation complexe :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i(kx - \omega t)}.$$

Établir la relation existant, en régime forcé (dit permanent), entre la densité de courant $\vec{j}$ et le champ électrique.

II. B. 2. Dans quelle mesure est-il légitime de négliger l'action du champ magnétique de l'onde? Préciser l'ordre de grandeur de cette approximation avec :

$$E_0 = 1 \text{ V.m}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\omega}{2\pi} = 100 \text{ kHz}.$$

II. B. 3. La densité de charge ρ reste nulle (pouvez-vous le justifier?).

Écrire dans ces conditions les équations de Maxwell auxquelles satisfont $\vec{E}$ et $\vec{B}$. En déduire la relation entre k et ω (dite relation de dispersion) et montrer que seules peuvent se propager dans le plasma des ondes dont la pulsation est supérieure à une valeur ω_p que l'on déterminera.

Application numérique :

Calculer $\frac{\omega_p}{2\pi}$ avec les valeurs numériques données plus haut.

II. B. 4. Oscillations libres du plasma précédent.

Le plasma précédent n'est maintenant plus soumis à un champ extérieur. A la suite d'une perturbation initiale, ses électrons effectuent des oscillations longitudinales unidimensionnelles : une « tranche d'électrons » située initialement à l'abscisse x se trouve, à la date t, à l'abscisse $x + s(x, t)$. On observe que s est une fonction périodique de t.

a. Expliquer qualitativement comment de telles oscillations peuvent exister.

b. Se limitant à l'étude d'une faible perturbation, on considère que $\frac{\partial s}{\partial x}$ est constamment faible devant un. Exprimer la densité volumique de charge $\rho(x, t)$ du plasma à l'abscisse x et à la date t en fonction de $\frac{\partial s}{\partial x}(x, t)$.

c. En exprimant le principe fondamental de la dynamique, établir une équation différentielle du second ordre vérifiée par la fonction s.

d. Déduire de ce qui précède la signification physique de ω_p et interpréter qualitativement les résultats de II. B. 3.

II. C. *Réflexion sur un conducteur parfait.*

II. C. 1. Rappeler (sans démonstration) les expressions des discontinuités de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ à la surface de séparation du vide et d'un conducteur non magnétique; on notera σ une densité superficielle de charge et $\vec{j}_s$ une densité superficielle de courant.

II. C. 2. Une onde électromagnétique plane harmonique de pulsation ω polarisée rectilignement dans la direction Oy se propage dans le vide dans le sens Ox. Cette onde $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$ dite « onde incidente », caractérisée par l'amplitude E_0 de son champ électrique, aborde en $x = 0$ le demi-espace $x > 0$ occupé par un conducteur. On se placera dans l'approximation dite du « conducteur parfait » ($\vec{E}$ et $\vec{B}$ nuls dans le conducteur).

Montrer que l'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie $(\vec{E}_r, \vec{B}_r)$ que l'on précisera. Déterminer la structure de l'onde résultante $(\vec{E}, \vec{B})$. On exprimera $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en fonction de E_0, ω, x, t et des vecteurs unitaires $\vec{y}$ et $\vec{z}$.

II. C. 3. Calculer la densité $\vec{j}_s$ de la nappe de courant qui parcourt le conducteur. Montrer que l'existence de cette nappe implique que le conducteur est soumis à une pression p (pression de radiation) dont on calculera la valeur moyenne dans le temps $\langle p \rangle$.

II. C. 4. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde résultante et étudier les densités d'énergie électrique u_E et magnétique u_B. En quoi les résultats obtenus diffèrent-ils qualitativement de ceux obtenus dans le cas de l'onde progressive? Comparer $\langle p \rangle$ avec la somme des moyennes dans le temps des densités d'énergie.

III. APPLICATION DES ONDES STATIONNAIRES À LA PHOTOGRAPHIE DES COULEURS (Lippmann 1891)

(sur 25 points)

Une plaque photographique P porte une couche sensible d'épaisseur $a = 50\ \mu m$; elle est posée sur un miroir M parfaitement réfléchissant.

On impressionne P en éclairant l'ensemble par un faisceau monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 0{,}6\ \mu m$ normal à P et à M (fig. 3).

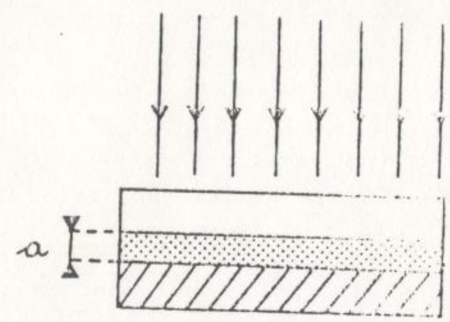

Figure 3

On admettra que chaque plan ventral du système d'ondes stationnaires réalisé au cours de l'impression donne naissance, après développement, à une strate se comportant comme un miroir de très faible pouvoir réflecteur. On négligera le rôle optique du verre de la plaque et l'on confondra l'indice de la couche sensible avec un. Dans toute la suite, la plaque ayant été impressionnée, on retire M et l'on observe P par réflexion.

III. 1. P est éclairée en lumière blanche, quelle couleur voit-on en observant P normalement? (On ne demande pas ici de calculs mais un raisonnement qualitatif précis.)

III. 2. P étant éclairée en lumière blanche, on l'observe dans une direction faisant un angle α avec la normale; comment se modifie la couleur observée? Application numérique : $\alpha = 30°$. Quelle couleur voit-on?

III. 3. P est éclairée normalement par un faisceau monochromatique de longueur d'onde λ.

a. Exprimer l'intensité lumineuse I réfléchie par P en fonction de λ, λ_0, α et de l'intensité lumineuse I_0 réfléchie pour $\lambda = \lambda_0$.

b. Représenter graphiquement l'allure des variations de $\frac{I}{I_0}$ en fonction du paramètre $u = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1$.

c. Définir et calculer une largeur de raie $\delta\lambda$ caractéristique du procédé.

III. 4. A l'aide des résultats précédents, commenter les avantages et les inconvénients du procédé utilisé.

IV. ENTROPIE, CAS D'UN GAZ PARFAIT

(*sur 60 points*)

IV. A. *Calcul macroscopique de l'entropie d'un gaz parfait.*

IV. A. 1. Donner une définition purement macroscopique de l'entropie.

IV. A. 2. Un bloc solide de capacité calorifique C est porté uniformément à la température thermodynamique T_0 puis abandonné au contact de « l'atmosphère » considérée comme une source de température constante $T_a > T_0$.

Au bout d'un temps très long, calculer la variation d'entropie ΔS_1 du bloc et celle ΔS_2 de l'atmosphère. On exprimera ΔS_1, ΔS_2 et $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$ en fonction de C et de $x = \frac{T_0}{T_a}$.

On examinera le signe des trois quantités obtenues.

IV. A. 3. Calculer (à une constante près) l'entropie S d'une kilomole de gaz parfait dont on supposera la capacité calorifique kilomolaire à volume constant C_v indépendante de la température thermodynamique T. On donnera l'expression de S en fonction de T, du volume V du gaz et de la constante kilomolaire R des gaz parfaits.

IV. B. *Quelques évaluations numériques relatives à un gaz parfait monoatomique.*

On ne demande dans cette partie ni démonstrations ni développements.

Le candidat se bornera à fournir l'expression littérale et la valeur numérique de chaque grandeur demandée.

On donne :

— constante des gaz parfaits :

$$R = 8\,310 \text{ Joule.Kelvin}^{-1}\text{. kilomole}^{-1} ;$$

— constante de Boltzman :

$$k_B = 1{,}381.10^{-23} \text{ Joule.Kelvin}^{-1} ;$$

— constante de Planck normalisée :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}055.10^{-34} \text{ Joule.seconde.}$$

Un récipient cubique contient sous la pression $P_0 = 1$ atmosphère et à la température $T_0 = 273{,}15$ K une kilomole d'argon de masse M = 39,9 kg. Le gaz placé dans ces conditions sera désigné par G dans la suite et considéré comme parfait.

Calculer :

— Le nombre d'atomes N de G.
— La masse m d'un atome.
— Le volume V du récipient et son arête a.
— Le nombre moyen ν d'atomes par m^3.

— L'ordre de grandeur s de l'espacement moyen entre deux atomes voisins de G.

— L'énergie cinétique moyenne $\bar{\varepsilon}$ d'un des atomes de G.

— Leur vitesse quadratique moyenne u.

— La capacité calorifique à volume constant C_v de G.

— Sa capacité calorifique à pression constante C_p.

— La longueur d'onde de De Broglie λ d'un atome de G se déplaçant à la vitesse u.

Que peut-on déduire de la comparaison entre λ et a d'une part, entre λ et s d'autre part?

IV. C. *Étude microscopique d'un gaz parfait monoatomique, calcul de son entropie.*

IV. C. 1. Particule évoluant dans une « boîte à une dimension ».

Une particule P de masse m astreinte à se déplacer le long de l'axe Ox est soumise à l'action du potentiel $V(x)$ représenté sur la figure 4 (puits de potentiel infini).

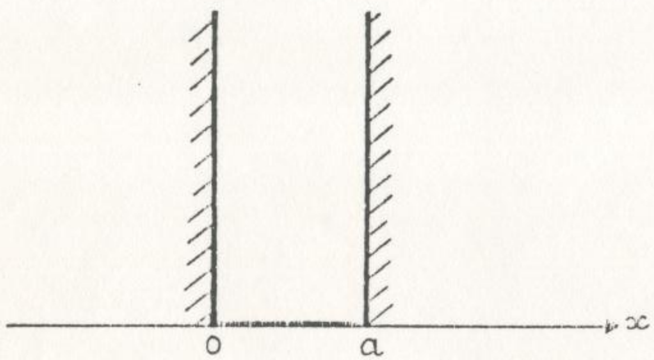

Figure 4

a. Écrire l'équation de Schrödinger pour P.

b. Déterminer, sans chercher à les normer, les fonctions d'onde des mouvements stationnaires possibles de P (états quantiques de P). Représenter graphiquement l'allure de quelques fonctions d'onde de la particule.

c. Déterminer l'énergie de P dans chacun des états stationnaires (spectre d'énergie de la particule). Donner l'expression du niveau d'énergie fondamentale ε_1. Calculer numériquement ε_1 en prenant pour valeurs de m et a celles obtenues en IV. B.

IV. C. 2. Particule placée dans une boîte cubique.

P évolue maintenant dans un « puits de potentiel infini à trois dimensions » défini par :

$$V = 0 \quad \text{pour} \quad 0<x<a, \quad 0<y<a, \quad 0<z<a$$
$$V \quad \text{infini partout ailleurs.}$$

a. Déterminer les fonctions d'onde des états quantiques de P.

On pourra chercher ces fonctions sous la forme :

$$\psi = \psi_1(x)\,\psi_2(y)\,\psi_3(z).$$

b. Déterminer le spectre d'énergie de P.

IV. C. 3. Fonction de partition d'une molécule de G.

On admettra qu'il est légitime d'étudier une molécule particulière de G et que, à l'équilibre thermique, la probabilité d'un état d'énergie ε_i est proportionnelle à :

$$e^{-\beta\varepsilon_i} \qquad \text{avec} \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

a. On note :

$$Z = \sum_i e^{-\beta\varepsilon_i}$$

la fonction de partition d'une molécule de G. Expliciter Z en utilisant les résultats de IV. C. 2. En tenant compte des ordres de grandeur respectifs de $\bar{\varepsilon}$ et ε_1 calculés précédemment, exprimer Z en fonction de V, β, m et $\hbar$.

On donne

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

b. Exprimer l'énergie interne U de G en fonction de Z et de β. Utiliser l'expression obtenue pour retrouver la valeur de l'énergie moyenne $\bar{\varepsilon}$ d'une molécule.

IV. C. 4. Échanges énergétiques de G.

L'énergie interne d'un système peut s'exprimer sous la forme :

$$U = \sum_i n_i \varepsilon_i$$

n_i étant la population du niveau d'énergie ε_i. Au cours d'une transformation infinitésimale, on peut écrire :

$$\begin{aligned} dU &= \sum_i n_i \, d\varepsilon_i + \sum_i \varepsilon_i \, dn_i \\ &= dU_1 + dU_2 \end{aligned}$$

a. Écrire sans démonstration l'équation d'état d'un gaz parfait monoatomique sous la forme d'une relation entre sa pression P, son volume V et son énergie interne U.

b. Calculer dU_1 pour une transformation au cours de laquelle chaque arête du récipient contenant G varie de da. Exprimer dU_1 en fonction de P et de la variation dV du volume V de G.

Commenter le résultat.

c. On admet que le résultat établi dans la question précédente est général, c'est-à-dire que dU_1 et dU_2 représentent, dans tous les cas, le travail et la chaleur échangés par le système. Par suite, dans une transformation adiabatique, les populations des divers niveaux d'énergie restent constantes.

Utiliser les résultats de IV. C. 2. *b* pour retrouver la relation qui existe entre la pression P et le volume V au cours d'une transformation adiabatique et réversible de G.

IV. C. 5. Entropie de G.

a. Montrer à l'aide des expressions de dU, dU_1 et dU_2 que $\frac{dU_2}{T}$ est la différentielle d'une fonction S.

b. Dans le cas particulier du gaz G, exprimer cette fonction S en fonction de Z.

c. Utiliser le résultat de IV. C. 3. *a.* pour obtenir l'expression (à une constante près) de l'entropie de G. Exprimer S en fonction de T et de V et comparer avec le résultat de IV. A. 3.