SESSION DE 1978

Épreuve A

COMPOSITION DE PHYSIQUE

DURÉE : 5 heures

N. B. — *L'épreuve n'exige pas de papier millimétré.*

Les calculatrices électroniques ne sont pas autorisées. La précision de la règle à calcul suffit.

Le sujet de la composition est extrait du programme prévu dans la note du 16 juin 1977.

Les candidats doivent exposer avec concision, sans limitation de niveau, toutes leurs connaissances dans le cadre précis des questions posées.

Il sera tenu le plus grand compte des qualités d'exposition et de soin.

D'assez nombreuses questions peuvent être traitées sans avoir résolu les questions précédentes. Le numéro précis de la question à laquelle on répond (ex. : A. I. 2. c) doit être nettement indiqué.

A. DIÉLECTRIQUES (*sur 85 points*)

A. I. *Cours :* ÉLECTROSTATIQUE DES DIÉLECTRIQUES.

A. I. 1. *Étude macroscopique :*

A. I. 1. *a.* Définir le phénomène de polarisation des diélectriques et classer sommairement les principaux types de polarisation.

A. I. 1. *b.* Définir le vecteur polarisation $\vec{P}$. Montrer qu'un diélectrique ne comportant pas de charges libres est équivalent à une distribution volumique de charges de densité ρ_P et à une distribution surfacique de densité σ_P. Relier ρ_P et σ_P au vecteur polarisation $\vec{P}$.

Tournez la page S. V. P.

A. I. 1. *c.* Introduire les grandeurs suivantes : excitation électrique $\vec{D}$ (encore appelée induction électrique ou déplacement électrique), susceptibilité électrique, permittivités.

A. I. 1. *d.* Préciser les conditions imposées aux vecteurs champ électrique $\vec{E}$ et excitation électrique $\vec{D}$ à la surface (supposée dépourvue de charges libres) séparant deux diélectriques homogènes, linéaires et isotropes (1) et (2) de permittivités absolues ε_1 et ε_2 respectivement. En déduire la relation entre les angles φ_1 et φ_2 que font, avec la normale à la surface de séparation, les vecteurs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ en des points M_1 et M_2 très voisins appartenant aux milieux (1) et (2) respectivement.

A. I. 2. *Étude microscopique :*

On se limitera à la polarisation électronique étudiée dans le cadre du modèle ci-dessous.

On considère l'espace compris entre les armatures d'un condensateur plan; il est rempli d'un diélectrique gazeux (comme l'azote) de permittivité relative ε_r. On admet que ce diélectrique acquiert une polarisation uniforme $\vec{P}$, parallèle au champ électrique uniforme $\vec{E}_0$ créé par les charges libres portées par les armatures du condensateur.

A. I. 2. *a.* Définir et calculer, en fonction de $\vec{E}_0$ et $\vec{P}$, le champ dépolarisant $\vec{E}_d$ et le champ macroscopique $\vec{E}$ en un point du diélectrique.

A. I. 2. *b.* Définir en un point du diélectrique le champ local $\vec{E}_l$. Le relier à $\vec{E}$ et $\vec{P}$ en utilisant le calcul de Lorentz. On précisera dans quelles conditions ce calcul est valable.

A. I. 2. *c.* On suppose qu'une molécule d'azote est assimilable à une sphère de centre O et de rayon R. En l'absence de champ électrique se trouvent en O la charge $+q$ et, dans la sphère, une charge totale $-q$ uniformément répartie. Sous l'effet d'un champ local permanent $\vec{E}_l$, la charge $-q$ uniformément répartie reste indéformable, mais la charge $+q$ subit le déplacement, supposé constant, $\vec{d}$. Calculer $\vec{d}$ et la polarisabilité α de la molécule d'azote.

A. I. 2. *d.* Établir la relation, dite de Clausius-Mossotti, liant les grandeurs α, ε_r et n, nombre de molécules par unité de volume.

A. I. 2. *e.* *Application numérique.* — Calculer le rayon R pour l'azote, sachant que la masse de sa mole est $M = 28$ g, et que, dans les conditions de l'expérience réalisée, sa masse volumique vaut $\rho = 1{,}3\ \text{kg.m}^{-3}$ et $\varepsilon_r - 1$ vaut 6.10^{-4}.

A. II. Applications.

A. II. 1. On considère un diélectrique dont la polarisation n'est pas instantanée. On admet que sa permittivité relative ε_r est une fonction du temps, et que, en prenant pour origine des temps l'instant où l'on soumet le diélectrique à un champ électrique, ε_r varie selon la loi : $\varepsilon_r = a\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ avec $a = 45$ et $\tau = 1{,}0.10^{-8}$ s.

Ce diélectrique remplit entièrement l'espace compris entre les armatures d'un condensateur plan. La surface de chaque armature est $S = 100\ \text{cm}^2$, leur distance est $h = 1{,}0$ cm.

A. II. 1. *a.* A l'instant pris pour origine des temps, on établit et maintient entre les armatures du condensateur une différence de potentiel constante U. Montrer que le condensateur se comporte comme un condensateur parfait de capacité C_0 en série avec une résistance R. Déterminer littéralement et numériquement C_0 et R.

A. II. 1. *b.* Le condensateur précédent est alimenté par un générateur délivrant une tension sinusoïdale de valeur efficace U, de pulsation ω. En admettant que le condensateur soit convenablement représenté par le modèle de la question précédente, étudier sommairement, en fonction de ω, les variations de la puissance moyenne $\mathfrak{P}$ dissipée sous forme de chaleur dans le diélectrique. Calculer numériquement la limite $\mathfrak{P}_l$ de $\mathfrak{P}$ lorsque ω devient très grand; on prendra $U = 10$ volts.

A. II. 1. *c.* Discuter brièvement la validité du modèle utilisé dans cette question A.II.1.*b*.

A. II. 2. *Étude d'un milieu ferroélectrique :*

Dans le cas où le champ électrique $\vec{E} = E\,\vec{u}_x$ et la polarisation $\vec{P} = P\,\vec{u}_x$ sont dirigés suivant un axe cristallographique convenablement choisi d'un cristal diélectrique, axe défini par le vecteur unitaire $\vec{u}_x$, l'état thermodynamique de ce diélectrique homogène, de volume invariable V, peut être décrit au moyen de deux variables indépendantes : P (polarisation) et T (température thermodynamique).

On note U l'énergie interne, et S l'entropie de l'échantillon considéré.

A. II. 2. *a.* Relier l'énergie libre volumique F aux grandeurs U, S, T, V.

Tournez la page S. V. P.

On admet que F a pour expression : $F(P, T) = F_0(T) + A(T - T_C)P^2 + BP^4$.
$F_0(T)$ est une fonction continue de la température seulement;
A et B sont des constantes positives;

T_C est la température de Curie : pour $T < T_C$, le corps est ferroélectrique, et peut posséder une polarisation spontanée P_s pour un champ électrique nul; pour $T > T_C$, le corps se comporte comme un diélectrique linéaire : on dit qu'il est alors dans l'état « paraélectrique ».

A. II. 2. *b*. Montrer que, pour faire passer la polarisation de la valeur $\vec{P}$ à la valeur $\vec{P} + d\vec{P}$, il faut fournir au diélectrique un travail $\delta W = V\,\vec{E}.d\vec{P}$, $\vec{E}$ désignant le champ électrique appliqué.

A. II. 2. *c*. Établir une relation entre E et F, et une relation entre S et F. On admet que, à température constante, il peut exister un état d'équilibre du diélectrique correspondant à $E = 0$; montrer que cet état est stable ou instable suivant le signe de la quantité $\frac{\partial^2 F}{\partial P^2}$.

A. II. 2. *d*. Le diélectrique étant dans un champ électrique nul, vérifier qu'il peut s'établir une polarisation spontanée P_s pour $T < T_C$ et établir l'expression de P_s en fonction de T.

A. II. 2. *e*. Le diélectrique est placé dans un champ électrique E non nul, à une température $T < T_C$. Représenter, directement sur la copie, l'allure des isothermes $P = f(E)$ et distinguer les parties de ces isothermes correspondant à des états stables et celles correspondant à des états instables.

A. II. 2. *f*. Le diélectrique est soumis à un champ électrique sinusoïdal de basse fréquence variant de $+E_0$ à $-E_0$ (E_0 suffisamment grand pour qu'il ne lui corresponde qu'une valeur de la polarisation). Expliquer comment le diélectrique peut présenter de l'hystérésis et donner l'allure du cycle d'hystérésis. Déterminer les valeurs du champ coercitif et de la polarisation rémanente en fonction de A, B, T, T_C. Indiquer comment on pourrait calculer l'énergie dissipée dans le diélectrique au cours d'un cycle d'hystérésis, et donner une valeur approchée de cette énergie en fonction de A, B, V, T, T_C.

A. II. 2. *g*. Pouvez-vous citer un exemple concret de substance ferroélectrique?

B. Cinématique relativiste *(sur 65 points)*

B. I. Expérience de Michelson.

B. I. 1. Faire un croquis de principe de l'interféromètre de Michelson.

B. I. 2. Expliquer le but de l'expérience historique réalisée en 1881 avec cet appareil. On évaluera un ordre de grandeur de l'effet qui était attendu dans cette expérience.

B. II. Énoncé du principe dit de relativité restreinte.

B. III. Transformation de Lorentz.

R désigne un repère galiléen lié à des axes cartésiens $Oxyz$; R' un repère lié à des axes $O'x'y'z'$; $O'y'$ et $O'z'$ sont respectivement parallèles à Oy et Oz; $O'x'$ glisse sur Ox ; O' est confondu avec O à la date $t = t' = 0$ prise comme origine dans les deux repères; O' se déplace à la vitesse constante u par rapport à R. On pose :

$$\beta = \frac{u}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

c étant la célérité de la lumière dans le vide.

B. III. 1. *Écrire* la transformation, dite « transformation spéciale de Lorentz », reliant (x', y', z', t') à (x, y, z, t) pour un même événement. On ne demande pas d'établir la forme de cette transformation à partir du principe de relativité.

B. III. 2. Dilatation des durées.

B. III. 3. Calculer la distance que peut parcourir un neutron cosmique d'énergie 10^{15} eV, sachant que la durée de vie propre du neutron est 1 000 secondes, et que sa masse m est telle que $mc^2 \# 1$ GeV. Un tel neutron pourrait-il provenir de l'étoile α du Centaure dont la distance à la Terre est de 4 années-lumière ?

Tournez la page S. V. P.

B. III. 4. Le mouvement par rapport à R' d'une particule de charge q est défini par les équations :

$$\begin{cases} x' = a \cos \omega' t' \\ y' = a \sin \omega' t' \\ z' = 0 \end{cases}$$

a et ω' étant des constantes.

B. III. 4. *a*. Exprimer, en fonction de a, ω', u et c, la valeur moyenne $< y >$ de y calculée dans R sur une durée très longue.

B. III. 4. *b*. On considère le système S constitué par la particule précédente et par une particule de charge $-q$ fixe dans R' et située en O'. Calculer le moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}'$ associé à S dans R'. Montrer que, dans R, on peut associer à S un moment électrique $\vec{p}$, de valeur moyenne $< \vec{p} >$ non nulle. Exprimer $< \vec{p} >$ en fonction de $\vec{\mathfrak{M}}'$, u et c.

C. Électromagnétisme et Relativité (*sur 50 points*)

C. I. Quadrivecteurs.

C. I. 1. Avec les notations précisées en B. III., on pose :

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = i\,ct \quad (i^2 = -1).$$

Écrire la transformation spéciale de Lorentz sous la forme :

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} L_{\mu\nu} \cdot x_\nu$$

μ ou ν désignant l'un quelconque des indices (1, 2, 3, 4).

Écrire la matrice, notée [L], des coefficients $L_{\mu\nu}$ (matrice spéciale de Lorentz).

C. I. 2. Définir ce qu'on appelle un quadrivecteur.

Dans la suite, un quadrivecteur de composantes W_μ sera noté :

$$\vec{W} = (W_1, W_2, W_3, W_4) = (\vec{w}, W_4).$$

C. I. 3. On considère une distribution de charges caractérisée, dans le repère R, par la densité volumique de charge $\rho\ (x, y, z, t)$ et par la densité de courant $\vec{j}\ (x, y, z, t)$.

Montrer que :

$$\vec{J} = (j_x, j_y, j_z, ic\rho) = (\vec{j}, ic\rho)$$

est un quadrivecteur.

C. II. Formulation relativiste de l'électromagnétisme du vide.

On note $\vec{\square}$ l'opérateur quadridimensionnel de composantes $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$, soit :

$$\vec{\square} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right) = \left(\vec{\nabla}, \frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

C. II. 1. On note respectivement $\vec{E}$ et $\vec{B}$ le champ électrique et le champ magnétique engendrés par une distribution de charges caractérisée par la densité volumique de charge ρ et la densité de courant $\vec{j}$. Soient $\vec{A}$ et V un potentiel-vecteur et un potentiel-scalaire dont dérive ce champ électromagnétique. V et $\vec{A}$ étant supposés reliés par la condition de jauge de Lorentz. Dans le cas le plus général (régime dépendant du temps), établir les équations, dites de Poisson, reliant V et $\vec{A}$ à ρ et $\vec{j}$. Montrer que, en introduisant un quadrivecteur $\vec{\mathcal{A}}$ dont on précisera les composantes, les équations de Poisson peuvent être rassemblées sous la forme :

$$\square^2 \vec{\mathcal{A}} = -\mu_0 \vec{J}$$

($\square^2 = \vec{\square} \cdot \vec{\square}$ désignant le carré scalaire de l'opérateur $\vec{\square}$).

C. II. 2. Montrer que le formalisme quadridimensionnel introduit ci-dessus permet d'écrire la condition de jauge de Lorentz d'une façon particulièrement simple.

C. II. 3. On considère la matrice (4 × 4) notée [B] de composantes :

$$B_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\nu}$$

Écrire [B] sous forme de tableau en fonction des composantes E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$.

Tournez la page S. V. P.

C. III. Transformation du champ électromagnétique dans un changement de repère galiléen.

Les indices // et ⊥ notant respectivement les composantes parallèles et perpendiculaires à la vitesse relative $\vec{u}$ des deux repères galiléens R et R′ définis en B. III., on rappelle les formules (qu'on ne demande pas d'établir) :

$$\begin{cases} \vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//} \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma\,(\vec{E}_{\perp} + \vec{u} \wedge \vec{B}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{B}'_{//} = \vec{B}_{//} \\ \vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \dfrac{\vec{u}}{c^2} \wedge \vec{E}\right) \end{cases}$$

C. III. 1. On considère une distribution (D) constituée de charges fixes dans R′. Montrer que, dans R, le champ magnétique $\vec{B}$ créé par (D) s'exprime simplement en fonction de $\vec{u}$, c et du champ électrique $\vec{E}$ que crée (D) dans R.

C. III. 2. Déduire de ce qui précède l'expression du champ magnétique créé dans un repère R par une particule de charge q en mouvement par rapport à R à la vitesse $\vec{u}$, de norme faible devant c. (On admettra que le champ électrique créé dans R par la particule est donné dans ce cas, avec une bonne approximation, par les lois de l'électrostatique). Commenter le résultat obtenu.

C. IV. Transformation de la polarisation et de l'aimantation dans un changement de repère galiléen.

C. IV. 1. On note respectivement $\vec{D}$ et $\vec{H}$ les vecteurs excitation électrique et excitation magnétique. On pose :

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{bmatrix}$$

Quelle relation y a-t-il, dans le vide, entre cette matrice et la matrice [B] introduite en C. II. 3. ?

C. IV. 2. On forme la matrice :

$$[M] = \frac{1}{\mu_0}[B] - [H]$$

Écrire [M] en fonction des composantes de la polarisation $\vec{P}$ et de l'aimantation (ou intensité d'aimantation) que l'on notera $\vec{M}$.

C. IV. 3. On considère un milieu caractérisé dans R′ par une aimantation $\vec{M}'$ non nulle et par une polarisation $\vec{P}'$ nulle. Montrer que ce milieu possède dans R une polarisation $\vec{P}$ non nulle que l'on exprimera en fonction de $\vec{u}$ et de l'aimantation $\vec{M}$ du milieu mesurée dans R. Comparer ce résultat à celui de la question B.III.4.*b*.

C. IV. 4. La figure 1 représente un long barreau aimanté, conducteur, parallélépipédique, d'aimantation $\vec{M}$ uniforme. Ce barreau est en mouvement à la vitesse $\vec{u}$ par rapport à un pont conducteur H. Il est relié à deux frotteurs A et A′ qui glissent sur les flancs du barreau (voir figure).

C. IV. 4. *a.* Étudier *qualitativement* l'expérience en raisonnant dans le repère R′ lié au barreau.

C. IV. 4. *b.* Reprendre cette étude dans le repère R du pont H. On pourra s'aider du résultat des questions B. III. 4. et C. IV. 3.

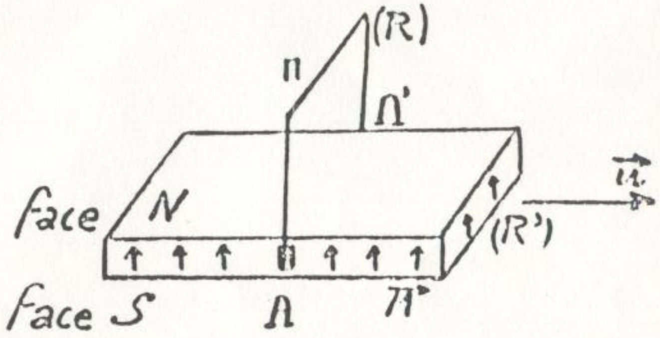

Figure 1