écrit

1979

épreuve A

Sujet (durée : 5 heures)

COMPOSITION DE PHYSIQUE

N.B. — *L'épreuve n'exige pas de papier millimétré.*

Les calculatrices électroniques sont autorisées.

On rappelle quelques données numériques utiles dans la suite :

masse de l'électron : $m = 0{,}91.10^{-30}$ kg

charge élémentaire : $e = 1{,}60.10^{-19}$ C

constante de Planck : $h = 6{,}62.10^{-34}$ J s

constante diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi}\,10^{9}$ SI.

célérité de la lumière dans le vide : $c = 3.10^{8}$ m s^{-1}.

A. OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE (*sur 70 points*)

L'étude est limitée au cas des milieux isotropes

A.I. COURS.

Rappeler l'énoncé du Principe de Fermat; en déduire les lois de Descartes et le théorème de Malus.

A.II. APPLICATIONS.

A.II.1. *Condition de stigmatisme.*

Un dioptre (Σ) sépare deux milieux homogènes d'indices de réfraction n et n'. Soit un point A de l'espace objet (milieu d'indice n), I un point quelconque de (Σ). Montrer qu'un point A' de l'espace image (milieu d'indice n'), est l'image de A à travers (Σ) si et seulement si le chemin optique L = (AIA') est indépendant de I.

A.II.2. *Dioptre sphérique.*

On considère un dioptre sphérique (Σ) de centre C, d'axe principal $z'z$ traversant le dioptre au sommet S; ce dioptre sépare deux milieux homogènes d'indices de réfraction n et n'. Un rayon lumineux monochromatique issu d'un point A de l'axe $z'z$ rencontre (Σ) en I et se réfracte suivant IA' (voir fig. 1).

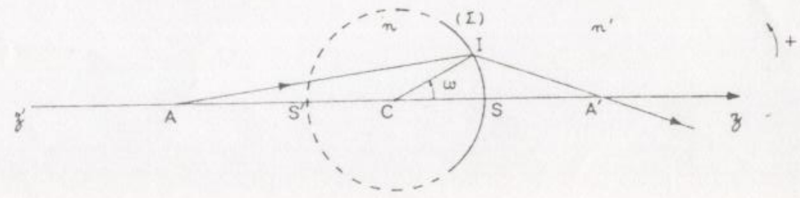

Figure 1

A.II.2.a. Montrer qu'il existe un couple de points conjugués, non confondus, A_1 et A'_1 situés sur l'axe $z'z$, tels que le chemin optique $(A_1IA'_1)$ soit nul quel que soit $\omega = (\vec{Cz}, \vec{CI})$. Calculer $\overline{CA_1}$, $\overline{CA'_1}$ en fonction de n, n', $R = \overline{SC}$. Représenter le faisceau lumineux utilisable issu de A_1 pour $n = 1{,}5$, $n' = 1$, $R < 0$.

A.II.2.b. Calculer le chemin optique $L = (AIA')$ en fonction de n, n', R, ω, $z = \overline{SA}$, $z' = \overline{SA'}$ en supposant l'angle $\omega = (\vec{Cz}, \vec{CI})$ petit.

Déduire de l'expression de L la formule dite « formule de conjugaison avec origine au sommet » pour un dioptre sphérique, dans les conditions de l'approximation de Gauss.

Déterminer, dans les mêmes conditions de Gauss, la « formule du grandissement », en prenant toujours l'origine des abscisses au sommet du dioptre.

A.II.2.c. En déduire la position des foyers principaux, des plans principaux du dioptre sphérique et la valeur des distances focales.

A.II.3. *Courbure des rayons lumineux dans un milieu non homogène.*

Un rayon lumineux monochromatique (R) se propage dans un milieu dont l'indice de réfraction dépend du point M considéré : n (M). On choisit sur (R) une origine A des abscisses curvilignes, et on désigne par :

— s l'abscisse curviligne d'un point M sur (R);
— $\vec{u}_t$ le vecteur unitaire tangent en M à (R) orienté dans le sens de propagation de la lumière;
— $\vec{u}_n$ le vecteur unitaire normal, situé dans le plan osculateur en M à (R), orienté vers le centre de courbure de (R).

A.II.3.a. Montrer que l'accroissement infinitésimal $d(n\,\vec{u}_t)$ le long du rayon (R) est normal en M à la surface équi-indice passant par ce point.

En déduire que :

$$\frac{d(n\,\vec{u}_t)}{ds} = \overrightarrow{\text{grad}}\ n$$

A.II.3.b. Montrer que le rayon de courbure ρ de (R) en M est donné par :

$$\frac{n}{\rho} = (\overrightarrow{\text{grad}}\ n)\cdot\vec{u}_n$$

On considère le cas d'un milieu « stratifié », c'est-à-dire tel que, par un choix convenable des axes orthogonaux Ox, Oy, Oz, l'indice n ne dépend que de la coordonnée z. Exprimer ρ en fonction de n, $\frac{dn}{dz}$ et de l'angle $\alpha = (\vec{u}_z, \vec{u}_n)$, $\vec{u}_z$ étant le vecteur unitaire sur la direction $z'z$.

A.II.3.c. Dans certaines conditions, pour une épaisseur très limitée de l'atmosphère terrestre au voisinage du sol, on peut admettre que la température décroît très rapidement en fonction de l'altitude z, et que l'indice de l'air est lié à sa masse volumique μ par la relation $(n - 1) = k\mu$, k étant constant pour une longueur d'onde donnée.

Interpréter, à l'aide des résultats de A.II.3.b, le phénomène de mirage optique.

On suppose que la température de l'air, voisine de 300 K, décroît linéairement de 10 K si l'on s'élève de 0,5 m à partir du sol horizontal. Au-dessus de 0,5 m, la température est supposée pratiquement uniforme. Un observateur dont l'œil est à 1,70 m au-dessus du sol voit devant lui un reflet sur le sol. A quelle distance minimale l'observateur peut-il situer approximativement ce reflet? On prendra pour l'indice de l'air à la pression atmosphérique et à 300 K : $n = 1{,}0003$.

B. MOUVEMENTS D'ÉLECTRONS DANS UN CHAMP ÉLECTROSTATIQUE (*sur 60 points*)

Les applications de cette partie B seront à traiter dans le cadre de la mécanique newtonienne.

B.I. Mouvement d'électrons dans un champ électrostatique uniforme.

Une cathode, dont le potentiel est pris égal à zéro, émet des électrons de charge $-e$, de masse m, sans vitesse initiale.

Deux grilles métalliques G_1 et G_2, à mailles fines, planes et parallèles sont à une distance l l'une de l'autre, très inférieure à leurs dimensions. Elles sont portées respectivement aux potentiels constants V_1 et V_2 ($V_1 > 0$, $V_2 < V_1$); elles délimitent ainsi trois régions :

— région (I) dans laquelle se trouve la cathode, en avant de G_1,
— région (II) entre les grilles, on admet que le champ électrostatique y est uniforme,
— région (III) au-delà de G_2.

On choisit des axes orthogonaux : Ox et Oz dans le plan de G_1, Oy perpendiculaire à G_1 et à G_2.

On étudie le mouvement d'un électron qui, venant de la région (I), traverse le plan de G_1 en O avec une vitesse $\vec{v}_1$, contenue dans le plan xOy; on pose $-i_1 = (\vec{Oy}, \vec{v}_1)$ [*voir fig. 2*].

On néglige tout effet de charge d'espace dû aux électrons.

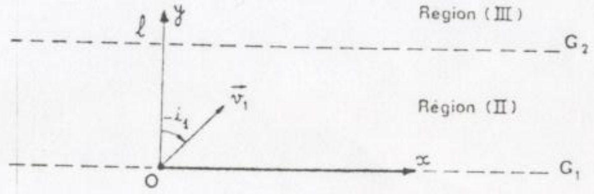

Figure 2

B.I.1. Établir l'équation de la trajectoire de cet électron dans la région (II).

B.I.2. En un point de la région (II) où le potentiel est V, l'électron a une vitesse v, et on pose $-i = (\vec{Oy}, \vec{v})$. Établir une relation simple entre V, V_1, i, i_1.

Montrer que, si V_2 est supérieur à une limite V_{2M} que l'on exprimera en fonction de V_1 et i_1, l'électron traverse la région (II) et parvient dans la région (III) et que, si V_2 est inférieur à V_{2M}, l'électron revient dans la région (I).

B.I.3. Quelle est l'analogie optique du phénomène?

B.I.4. On suppose $V_2 < V_{2M}$. Déterminer l'abscisse x_1 du point de retour des électrons sur le plan de G_1. Comment faut-il choisir i_1 pour que x_1 soit indépendant des petites variations de i_1 ? Indiquer une application de ce dispositif.

B.II. Mouvement d'électrons dans un champ électrostatique à symétrie de révolution.

On considère une région de l'espace vide où existe un champ électrostatique à symétrie de révolution autour d'un axe Oz. On utilisera des coordonnées cylindriques (r, θ, z) [voir fig. 3, p. 4]. Le potentiel V(r, z) dont dérive le champ est indépendant de la coordonnée θ. On notera U(z) = V(0, z) le potentiel sur l'axe Oz.

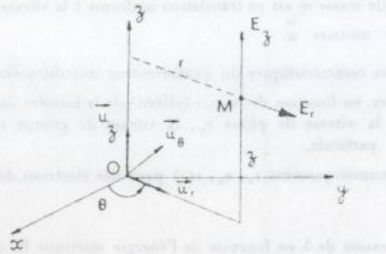

Figure 3

On rappelle, au cas où leur usage faciliterait les démonstrations, les expressions de la divergence et du rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{h}$ et celles du laplacien et du gradient d'un champ scalaire F en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div} \vec{h} = \frac{\partial h_r}{\partial r} + \frac{1}{r} h_r + \frac{1}{r}\frac{\partial h_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial h_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{h} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial h_z}{\partial \theta} - \frac{\partial h_\theta}{\partial z}\right]\vec{u}_r + \left[\frac{\partial h_r}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial r}\right]\vec{u}_\theta + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial (r h_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial h_r}{\partial \theta}\right]\vec{u}_z$$

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, F = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z$$

B.II.1. Montrer qu'en un point M voisin de l'axe Oz, de coordonnées (r, θ, z), les composantes axiale $E_z(r, z)$ et radiale $E_r(r, z)$ du champ électrostatique sont données par les relations approchées :

$$E_z(r, z) = -\frac{dU}{dz}$$

$$E_r(r, z) = \frac{r}{2}\frac{d^2U}{dz^2}$$

On précisera l'ordre infinitésimal en r des termes négligés.

B.II.2. Des électrons, de masse m, de charge $-e$, sont émis sans vitesse initiale par une cathode dont le potentiel est pris comme zéro. On négligera dans ce qui suit tout effet de charge d'espace dû à ces électrons et on se limitera à des trajectoires situées dans des plans méridiens et qui restent très voisines de Oz, avec des vitesses très peu inclinées par rapport à Oz.

B.II.2.a. Montrer que ces trajectoires sont données par les solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dz}\left[\sqrt{U(z)}\,\frac{dr}{dz}\right] = -\frac{r}{4\sqrt{U(z)}}\,\frac{d^2U}{dz^2} \qquad (1)$$

B.II.2.b. En utilisant les résultats du A.II.3.a, étudier une analogie optique de ce problème.

B.II.3. L'équation (1) admettant deux solutions linéairement indépendantes $f(z)$ et $g(z)$, on peut, dans les conditions du paragraphe précédent, en déduire toutes les autres trajectoires électroniques par combinaison linéaire : $r = \alpha f(z) + \beta g(z)$ où α et β sont des constantes arbitraires.

B.II.3.a. Montrer que, si une trajectoire électronique passant par un point A de Oz recoupe Oz en un point A', toutes les trajectoires passant par A passent également par A'. On admettra qu'il n'est pas possible que les deux solutions linéairement indépendantes $f(z)$ et $g(z)$ s'annulent pour une même valeur de z.

Montrer que, si un ensemble de trajectoires passe en un point B voisin de A et tel que AB soit perpendiculaire à Oz, ces trajectoires se recoupent en un point B' voisin de A' et tel que A'B' soit perpendiculaire à Oz.

B.II.3.b. Quelle est l'analogie optique?

B.II.4. On se place maintenant dans le cas de « l'approximation des lentilles minces ». On considère toujours des électrons émis par une cathode à potentiel nul, dont les trajectoires satisfont aux conditions du paragraphe B.II.2. Ils pénètrent dans la région (I) [espace objet réel] de potentiel constant et égal à V_1, située en avant d'un plan P_1 perpendiculaire à Oz d'abscisse $z = -\varepsilon$. Le potentiel est constant et égal à V_2 dans la région (III) [espace image réel] située en arrière d'un plan P_2 perpendiculaire à Oz d'abscisse $z = +\varepsilon$. La variation du potentiel de V_1 à V_2 se fait dans la région (II), située entre P_1 et P_2, d'épaisseur 2ε très petite.

B.II.4.a. On note z et z' les abscisses des points de concours sur l'axe d'un ensemble de trajectoires dans les espaces objet et image et J l'intégrale définie par :

$$J = \frac{1}{4}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{U(z)}}\,\frac{d^2U}{dz^2}\,dz$$

Établir la « relation de conjugaison » liant z, z', V_1, V_2 et J.

Définir les distances focales objet f et image f' du système. Exprimer f, f' et le rapport f/f' en fonction de V_1, V_2 et J.

Déterminer le grandissement pour les « images électroniques » de petits « objets » plans perpendiculaires à l'axe Oz au point d'abscisse z.

Comparer avec le problème optique analogue.

B.II.4.b. *Application numérique* :

$V_1 = 16$ V, $V_2 = 900$ V ; pour $z = -8$ cm on obtient $z' = +15$ cm.

Calculer f et f'. Où converge un faisceau électronique incident parallèle à Oz?

C. DUALITÉ ONDE-PARTICULE (*sur 70 points*)

C.I. Cours.

C.I.1. Décrire et interpréter l'effet Compton.

C.I.2. Calculer, en fonction de la fréquence ν du photon incident, la quantité de mouvement et l'énergie de l'électron émis par effet Compton, lorsque celui-ci est émis dans la même direction et le même sens que le photon incident.

Application numérique : On prendra $\nu = 4{,}88.10^{20}$ Hz.

C.I.3. Citer et résumer en une phrase d'autres phénomènes mettant en évidence le caractère corpusculaire du rayonnement électromagnétique.

C.II. Applications.

C.II.1. *Interférences à ondes multiples.*

On considère une lame d'air à faces parallèles, d'épaisseur e, comprise entre les faces en regard F_1 et F_2 semi-réfléchissantes de deux lames de verre L_1 et L_2. Un rayon lumineux SI_1, arrivant sous l'incidence i pratiquement normale, peut donner naissance à une série de rayons transmis conformément à la figure 4, p. 6.

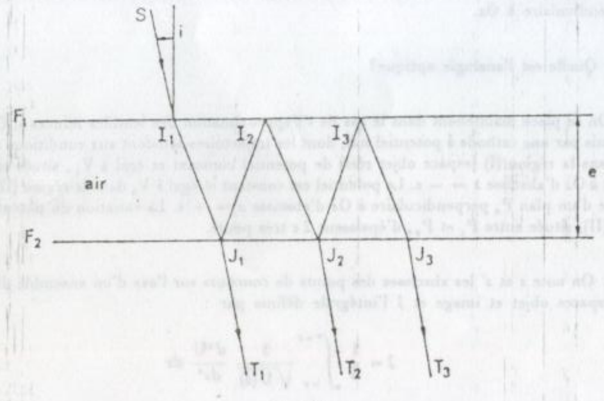

Figure 4

On note : r le coefficient de réflexion pour l'énergie sur la face F_1 ;
t le coefficient de transmission pour l'énergie sur la face F_1.

On admet que ces coefficients ont même valeur sur la face F_2. La réflexion sur chacune des faces F_1 et F_2 peut éventuellement s'accompagner d'un retard de phase noté ψ (ou d'un allongement de chemin optique noté δ). On suppose que, dans le domaine étudié, les quantités r, t, δ ne dépendent pas de la longueur d'onde λ. L'indice de réfraction de l'air est pris égal à 1.

C.II.1.*a*. Dans le cas de l'incidence normale, exprimer, en fonction de r et de la quantité $\varphi = \dfrac{4\pi}{\lambda}(e+\delta)$, le rapport A_n/A_{n-1}, A_n (resp. A_{n-1}) désignant l'amplitude complexe de la vibration associée au rayon $J_n T_n$ (resp. $J_{n-1} T_{n-1}$), (voir fig. 4). On ne tient pas compte des réflexions partielles sur les autres faces de L_1 et L_2.

C.II.1.*b*. Toujours dans le cas de l'incidence normale, exprimer, en fonction de r, t, φ, le rapport $\mathcal{I}/\mathcal{I}_0$, $\mathcal{I}$ désignant l'intensité de la vibration transmise et $\mathcal{I}_0$ celle de la vibration incidente.

C.II.1.*c*. Calculer, en fonction de $\mathcal{I}_0$, r, t, la valeur maximale $\mathcal{I}_M$ et la valeur minimale $\mathcal{I}_m$ de $\mathcal{I}$ si φ varie, par suite des variations de λ. En déduire le contraste C de ces interférences à ondes multiples, C étant défini par :

$$C = \frac{\mathcal{I}_M - \mathcal{I}_m}{\mathcal{I}_M + \mathcal{I}_m}$$

Calculer, en fonction de r, le coefficient de finesse $\mathcal{F}$ défini comme le rapport de la « distance » entre deux maximums consécutifs à la « largeur » d'un maximum. Le centre d'un maximum correspond à une valeur $\mathcal{I}_M$ de $\mathcal{I}$, et sa largeur s'obtient en évaluant la variation $\Delta\varphi$ de φ qui sépare les points d'intensité $\mathcal{I}_M/2$ de part et d'autre d'un maximum.

Calculer numériquement C et $\mathcal{F}$ pour $r = 0{,}85$ et $r = 0{,}98$.

C.II.2. *Caractères généraux de l'association onde-particule.*

C.II.2.*a*. On considère un faisceau de lumière, parallèle, monochromatique, de fréquence ν, se propageant dans le vide dans une direction définie par un vecteur unitaire $\vec{u}$.

Donner les caractéristiques :
— du quadrivecteur d'onde K de ce faisceau,
— du quadrivecteur impulsion-énergie P des photons du faisceau.

Écrire la relation liant P et K.

C.II.2.*b*. Une particule de masse m est en translation uniforme à la vitesse $\vec{v} = v \cdot \vec{u}$ dans une direction définie par un vecteur unitaire $\vec{u}$.

Donner les caractéristiques du quadrivecteur impulsion-énergie de cette particule.

Déterminer, en fonction de m, v, c (célérité de la lumière dans le vide), h (constante de Planck), la pulsation ω, la vitesse de phase v_φ, la vitesse de groupe v_g, la longueur d'onde λ de l'onde associée à cette particule.

Calculer numériquement v_φ, v_g, et λ pour des électrons de vitesse $v = 0{,}5\,c$.

C.II.2.*c*. Donner l'expression de λ en fonction de l'énergie cinétique E_c de la particule dans l'approximation non relativiste ($v \ll c$). S'il s'agit d'un électron émis avec une vitesse nulle en un point dont le potentiel est pris comme zéro, quelle est l'expression de λ dans une région de l'espace où le potentiel est V? Calculer numériquement λ pour V = 1 V, V = 10 V, V = 100 V.

C.II.3. *Transmission d'une particule par un « puits de potentiel ».*

Une particule non relativiste, de masse m, se déplace suivant la direction d'un axe $x'x$. L'énergie potentielle $E_p(x)$ varie suivant cette direction conformément à la figure 5, « puits de potentiel » carré de largeur $2a$, de profondeur W_0 :

$$\begin{cases} E_p(x) = 0 & \text{si } x < -a \text{ (région I)} \quad \text{ou} \quad x > +a \text{ (région III)} \\ E_p(x) = -W_0 & \text{si } -a < x < +a \text{ (région II)} \end{cases}$$

a et W_0 sont des constantes positives.

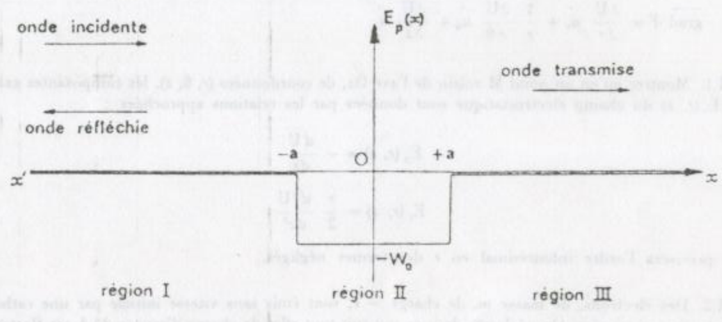

Figure 5

C.II.3.*a*. Calculer la valeur que donne la mécanique quantique pour le coefficient de transmission T de ce puits de potentiel, probabilité pour que la particule, arrivant de la région I avec l'énergie E > 0 traverse le puits et atteigne la région III. On exprimera T sous la forme :

$$T = \frac{1}{1 + f(E)\ \sin^2 g(E)}$$

$f(E)$ et $g(E)$ étant des fonctions de E, dépendant des autres paramètres, que l'on explicitera.

C.II.3.*b*. Montrer que T est égal à 1 pour certaines valeurs, que l'on déterminera, de l'énergie E de la particule.

Interpréter à l'aide de l'onde associée à la particule et de la valeur de sa longueur d'onde dans la région II.

Étudier sommairement la variation de T avec E. Peut-il arriver qu'il existe des « pics de transmission »? Peut-il arriver que T reste voisin de 1 dès que E dépasse la première valeur pour laquelle T = 1 ?

C.II.3.*c*. Indiquer un phénomène illustrant cet effet dans le cas d'un puits de potentiel à trois dimensions à symétrie sphérique.

C.II.3.*d*. Dans le cas où la particule est un électron, et en prenant $W_e = 16$ eV, $a = 1{,}5$ Å, calculer numériquement la plus petite valeur de E pour laquelle T = 1 et donner l'allure de la variation de T quand E varie de 0 à 10 eV.