

SESSION DE 1980

Épreuve A

COMPOSITION DE PHYSIQUE

DURÉE : 5 heures

L'épreuve n'exige pas de papier millimétré.

Les calculatrices électroniques sont autorisées.

Le sujet de la composition est extrait du programme défini dans la note du 5 juillet 1979.

Les candidats doivent exposer avec concision, sans limitation de niveau, toutes leurs connaissances dans le cadre précis des questions posées, en veillant à équilibrer leurs développements.

Il sera tenu le plus grand compte des qualités d'exposition et de soin.

D'assez nombreuses questions peuvent être traitées sans avoir résolu les questions précédentes. Le numéro précis de la question à laquelle on répond (ex. : A.II.2.b) doit être nettement indiqué.

ÉTUDE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'ÉLECTRON

Données numériques :

- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
- Masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.
- Constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s.
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹.
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$ S.I.
- Constante d'Avogadro : $\mathcal{N} = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹.
- La charge de l'électron sera notée $-e$.

$$\frac{h}{mc}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2 \mu_0}$$

On dira que l'électron est « non relativiste » ou « relativiste » selon que son énergie cinétique est très petite ou non, vis-à-vis de son énergie au repos.

A. L'ÉLECTRON LIBRE (sur 110 points)

A.I. LA CHARGE ÉLÉMENTAIRE.

A.I.1. Cours.

Citer quelques phénomènes mettant en évidence la structure discontinue de l'électricité. Décrire le principe de l'expérience dite de Millikan permettant la mesure de la charge élémentaire.

Tournez la page S. V. P.

A.I.2. Application.

Au cours d'une expérience de Millikan, on observe le mouvement rectiligne et uniforme suivant la verticale d'une gouttelette d'huile sphérique de rayon r . En l'absence de champ électrique, la gouttelette tombe à la vitesse constante $v_0 = 0,392 \text{ mm.s}^{-1}$. En présence d'un champ électrique uniforme \vec{E} , de direction verticale, de grandeur $E = 4000 \text{ V.cm}^{-1}$, la gouttelette remonte à la vitesse v ; une observation prolongée montre que cette vitesse subit par instants des variations brusques; on mesure en particulier les valeurs suivantes exprimées en mm.s^{-1} :

$$v_1 = 0,270 ; v_2 = 0,080 ; v_3 = 0,175 ; v_4 = 0,363 ; v_5 = 0,458.$$

0,85
On admet que la force \vec{f} opposée par l'air au mouvement de la gouttelette de vitesse \vec{v} est donnée par : $\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$ (loi de Stokes), où $\eta = 1,8.10^{-6} \text{ Pa.s}$ est le coefficient de viscosité de l'air. On donne en outre :

Masse volumique de l'air dans les conditions de l'expérience : $\rho' = 1,21 \text{ g.l}^{-3}$;

Masse volumique de l'huile : $\rho = 0,810 \text{ g.cm}^{-3}$;

Accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

Montrer que les mesures décrites ci-dessus permettent de conclure à l'existence d'une charge élémentaire; quelle valeur numérique conduisent-elles à lui attribuer?

A.II. MOUVEMENTS D'ÉLECTRONS DANS UN CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

A.II.1. Cours.

Écrire l'expression de la force de Lorentz \vec{f} agissant sur un électron de vitesse \vec{v} par rapport à un référentiel galiléen (R), en un point M de (R) où existent un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} .

Exprimer \vec{E} et \vec{B} en fonction du potentiel vecteur \vec{A} et du potentiel scalaire V du champ électromagnétique.

Donner les expressions des composantes par rapport à un référentiel galiléen (R) du quadrivecteur impulsion-énergie d'un électron en fonction de sa vitesse \vec{v} dans (R). Exprimer les dérivées par rapport au temps de ces composantes à partir du champ électromagnétique \vec{E}, \vec{B} .

A.II.2. Mouvement dans un champ électrique uniforme.

A.II.2.a. Étudier le mouvement d'un électron pouvant devenir relativiste dans un champ électrique \vec{E} uniforme et indépendant du temps, en se limitant au cas où sa vitesse initiale est nulle. On donnera les lois de variation de la vitesse v en fonction du temps et en fonction du potentiel accélérateur V . Commenter le résultat et montrer en particulier qu'on retrouve les résultats de la mécanique newtonienne si v reste très inférieure à c .

A.II.2.b. En se limitant au cas non relativiste, déterminer la trajectoire d'un électron dans un champ électrique \vec{E} uniforme et indépendant du temps lorsque sa vitesse initiale \vec{v}_0 a une direction quelconque. Étudier en particulier la déviation de la trajectoire de l'électron lorsque \vec{v}_0 est perpendiculaire à \vec{E} .

Indiquer une application de ce phénomène.

A.II.3. Mouvement dans un champ magnétique uniforme.

Déterminer la trajectoire d'un électron pouvant être relativiste dans un champ magnétique \vec{B} uniforme et indépendant du temps.

Étudier en particulier le cas où un électron pénètre dans la région où existe ce champ \vec{B} avec une vitesse initiale \vec{v}_0 perpendiculaire à \vec{B} ; calculer la déviation de sa trajectoire lorsque les dimensions de cette région sont petites devant le rayon de courbure de la trajectoire.

A.II.4. *Mouvement dans un champ électrique et un champ magnétique uniformes et parallèles.*

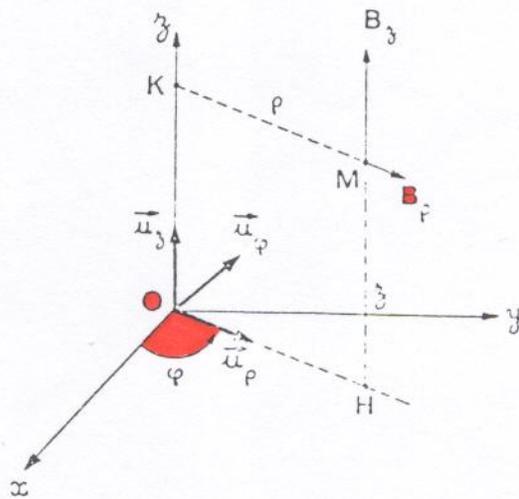
On rapporte l'espace à trois axes orthogonaux Ox, Oy, Oz . Entre les deux plans parallèles à Oyz d'abscisses $x = 0$ et $x = l$ ($l > 0$), existent un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} uniformes et indépendants du temps, parallèles à Oz ; les champs sont supposés nuls partout ailleurs.

Des électrons, non relativistes et qui le resteront, pénètrent dans cette région au point O avec des vitesses v_0 , parallèles à Ox , de grandeur variable. Le rayon de courbure de leurs trajectoires est grand devant l . Les impacts des électrons sur un écran (P) , perpendiculaire à Ox au point d'abscisse $x = L$, se répartissent sur une courbe (C) dont on établira l'équation et dont on donnera l'allure. Quel est l'intérêt de cette expérience?

A.II.5. *Principe du bétatron.*

Un électro-aimant présente la symétrie de révolution autour d'un axe Oz et admet le plan Oxy , perpendiculaire à Oz , comme plan de symétrie. Le champ magnétique \vec{B} créé en un point M est dans le plan OMz ; en un point du plan Oxy , il est en outre parallèle à Oz .

On utilisera dans cette question des coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) ; cf. figure ci-dessous).



Handwritten notes:
 $\sigma_{\rho} = \frac{1}{\rho}$
 $\sigma_{\varphi} = \frac{1}{\rho^2}$
 $34 eV$
 $10^{-12} \times$

Pour un champ de vecteurs $\vec{h} = h_{\rho}\vec{u}_{\rho} + h_{\varphi}\vec{u}_{\varphi} + h_z\vec{u}_z$, on rappelle les formules suivantes :

$$\text{div } \vec{h} = \frac{\partial h_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} h_{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial h_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial h_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{h} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial h_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial h_{\varphi}}{\partial z} \right] \vec{u}_{\rho} + \left[\frac{\partial h_{\rho}}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial \rho} \right] \vec{u}_{\varphi} + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho h_{\varphi})}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial h_{\rho}}{\partial \varphi} \right] \vec{u}_z$$

A.II.5.a. On choisit un potentiel vecteur $\vec{A} = A(\rho, z)\vec{u}_{\varphi}$. Justifier ce choix.

A.II.5.b. En un point $M(\rho, \varphi, 0)$ du plan Oxy , le champ magnétique est : $\vec{B}(M) = b(\rho)\vec{u}_z$. On désigne par $b_m(\rho)$ la valeur moyenne de sa grandeur dans le cercle de centre O de rayon ρ ; elle est définie par :

$$b_m(\rho) = \frac{1}{\pi \rho^2} \int_0^{\rho} b(\rho') \cdot 2\pi \rho' d\rho'$$

Exprimer le potentiel vecteur en ce point M du plan Oxy en fonction de $b_m(\rho)$.

A.II.5.c. On suppose qu'à partir de l'instant $t = 0$, on fait varier le champ magnétique lentement en maintenant sa topographie, c'est-à-dire qu'à tout instant t , le vecteur champ magnétique en un point M quelconque de l'espace est le produit du vecteur champ magnétique $\vec{B}(M)$ à l'instant 0 par une fonction $f(t)$, telle que $f(t) = 1$ pour $t \leq 0$. Déterminer le champ électromoteur d'induction créé par cette variation du champ magnétique en un point M du plan Oxy .

Tournez la page S. V. P.

A.II.5.d. Pour $t \leq 0$, un électron (qui peut être relativiste) décrit un cercle de centre O , de rayon a , dans le plan Oxy . Montrer que sa trajectoire reste inchangée pour $t > 0$, à condition qu'une relation simple existe entre $b(a)$ et $b_m(a)$.

A.II.5.e. Application numérique. On donne :

$$a = 50 \text{ cm} ; b(a) = 10^{-3} \text{ T (valeur du champ pour } t \leq 0)$$

On suppose que la condition établie en A.II.5.d est vérifiée.

Calculer la vitesse et l'énergie cinétique de l'électron pour $t \leq 0$.

Calculer son énergie cinétique à l'instant $t > 0$ pour lequel $f(t) = 500$.

On exprimera les énergies cinétiques en eV.

A.II.5.f. Quel phénomène physique limite l'énergie qu'un tel dispositif peut communiquer à un électron?

A.III. RAYON CLASSIQUE DE L'ÉLECTRON.

On considère dans cette partie l'électron comme une particule de masse m , de charge $-e$ uniformément répartie dans une sphère de centre O , de rayon a .

A.III.1. L'électron est au repos par rapport à un référentiel galiléen (R) .

A.III.1.a. Calculer le champ et le potentiel électriques $\vec{E}(r)$ et $V(r)$ créés par cette distribution de charge en un point M à la distance r de O .

A.III.1.b. Calculer l'énergie électrostatique W_e de cette distribution.

A.III.1.c. En admettant que l'énergie de repos de l'électron est tout entière d'origine électrostatique, donner la valeur de a en fonction de e , m , et μ_0 .

A.III.2. L'électron est en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à (R) , avec une vitesse \vec{v} dont la grandeur est très inférieure à c .

A.III.2.a. Montrer que le potentiel vecteur créé par l'électron peut être pris égal à $\vec{A} = \frac{V}{c^2} \vec{v}$ en un point où le potentiel électrique est V , et que le champ magnétique \vec{B} créé est alors donné par $\vec{B} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{E}}{c^2}$ en un point où le champ électrique est \vec{E} .

A.III.2.b. En déduire l'énergie magnétostatique W_m emmagasinée dans le champ magnétique créé par l'électron.

A.III.2.c. Exprimer, en fonction de e , m et μ_0 , la valeur qu'il convient de donner à a , si l'on identifie W_m à l'énergie cinétique de l'électron.

A.III.3. On appelle « rayon classique de l'électron » la quantité $r_c = \frac{\mu_0 e^2}{4 \pi m}$. Calculer numériquement r_c .

Que peut-on penser du résultat et de la valeur des modèles précédents?

A.IV. PRODUCTION DE PAIRES.

On étudie les conditions de la création d'une paire électron-positron (particules de même masse m et de charges opposées $-e$ et $+e$) par matérialisation d'un photon.

A.IV.1. Montrer que la réaction de matérialisation :



est impossible dans le vide.

A.IV.2. On se propose de montrer que cette matérialisation est possible lors du choc d'un photon incident, de fréquence ν par rapport au référentiel (R) du laboratoire, sur une cible A, de masse M, au repos par rapport à (R), à condition que la fréquence ν soit supérieure à une fréquence seuil ν_s :



A.IV.2.a. Rappeler la définition du référentiel du centre de masse d'un système de particules. Calculer l'énergie E' du système initial (photon + A) dans le référentiel (R') du centre de masse de ce système; on exprimera E' en fonction de h, c, ν, M .

A.IV.2.b. En déduire la valeur de la fréquence seuil ν_s et de la longueur d'onde correspondante λ_s en fonction de h, c, m, M .

A.IV.2.c. Calculer l'énergie $h\nu_s$ (exprimée en eV) et la longueur d'onde λ_s dans les deux cas suivants :

1^{er} cas : A est un noyau, $M \gg m$;

2^e cas : A est un électron, $M = m$.

A quel domaine spectral appartiennent les photons de fréquence ν_s ?

offensive

B. L'ÉLECTRON DANS L'ATOME (sur 90 points)

Dans toute cette partie, on considère l'électron comme une particule ponctuelle non relativiste.

B.I. QUANTIFICATION DE L'ÉNERGIE ÉLECTRONIQUE D'UN ATOME.

carp du système doit rassembler.

B.I.1.a. Rappeler quelles propriétés des spectres atomiques ont conduit à la notion de niveaux d'énergie discrets pour un atome. On se limitera aux spectres optiques.

B.I.1.b. Citer, sans développement, d'autres phénomènes corroborant la quantification de l'énergie électronique d'un atome.

Expériences de Franck et Hertz

B.I.2. *Modèle de Bohr pour un atome hydrogénoïde.*

B.I.2.a. Décrire le modèle de Bohr pour un atome hydrogénoïde, en se limitant aux orbites circulaires et en admettant que la masse du noyau est assez élevée pour qu'on puisse le considérer comme immobile. Donner les expressions, pour un noyau de numéro atomique Z, du rayon de l'orbite n, de l'énergie et de la vitesse angulaire de l'électron sur cette orbite.

L'intérêt du modèle et ses insuffisances seront discutés; la résolution de l'équation de Schrödinger pour un atome hydrogénoïde est strictement hors sujet.

B.I.2.b. Calculer numériquement en électron-volt l'énergie de liaison de l'électron dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène, ainsi que le rayon de l'orbite correspondante, la vitesse et la vitesse angulaire de l'électron sur cette orbite.

B.II. THÉORÈME DE LARMOR. APPLICATIONS.

B.II.1. *Théorème de Larmor.*

Un électron est soumis à un champ de forces centrales \vec{F} , de centre O origine d'un référentiel galiléen (R) rapporté aux axes orthogonaux Ox, Oy, Oz . On suppose qu'il existe en outre un champ magnétique \vec{B} , uniforme, indépendant du temps et parallèle à Oz .

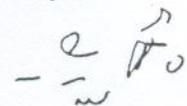
Tournez la page S. V. P.

$$\vec{v} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{v}) =$$

$$m \vec{F} = F - e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

- B.II.1.a. Donner l'expression de l'accélération $\vec{\Gamma}$ de l'électron par rapport à (R).
- B.II.1.b. On note $\vec{\omega}$ le vecteur rotation instantanée d'un référentiel (R') qui se déduit de (R) par rotation uniforme autour de Oz. On désigne par ρ la distance de l'électron à l'axe Oz. Donner l'expression de l'accélération $\vec{\Gamma}$ de l'électron par rapport à (R'); on fera apparaître la vitesse \vec{v} de l'électron par rapport à (R).
- B.II.1.c. On prend pour $\vec{\omega}$ la valeur $\vec{\omega}_L = \frac{e}{2m} \vec{B}$; le référentiel (R') ainsi défini sera appelé dans la suite « référentiel de Larmor ». On suppose ω_L assez petit pour qu'on puisse négliger les termes en ω_L^2 . Que peut-on dire de l'équation du mouvement de l'électron par rapport à (R')?
- B.II.1.d. *Application numérique.* Calculer ω_L et $v_L = \frac{\omega_L}{2\pi}$ pour $B = 1$ T. Justifier l'approximation faite en B.II.1.c, dans le cas où le champ de forces centrales est celui auquel est soumis un électron dans un atome, en comparant ω_L aux vitesses angulaires qui interviennent dans les systèmes atomiques.

B.II.2. *Diamagnétisme.*



- B.II.2.a. Un électron décrit dans un atome une orbite circulaire dont le centre O est le noyau de l'atome, supposé ponctuel et fixe par rapport à un référentiel galiléen (R). Dans son mouvement par rapport à (R), l'électron a, par rapport au point O, un moment cinétique constant $\vec{\sigma}_0$. Calculer, en fonction de e , m et $\vec{\sigma}_0$, le moment magnétique \vec{M}_0 associé à ce mouvement orbital.
- B.II.2.b. On soumet l'atome à un champ magnétique \vec{B} uniforme et constant. On admet qu'en présence de \vec{B} , les trajectoires des électrons de l'atome par rapport au référentiel de Larmor (défini en B.II.1.c) sont les mêmes que les trajectoires des électrons par rapport à (R) quand $\vec{B} = \vec{0}$. En un point M de sa trajectoire par rapport à (R), l'électron a par rapport au point O un moment cinétique $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_0 + \delta\vec{\sigma}$. Exprimer $\delta\vec{\sigma}$ en fonction de e , \vec{B} et $\vec{OM} = \vec{r}$. Calculer $\delta\sigma_z$, projection de $\delta\vec{\sigma}$ sur l'axe Oz parallèle à \vec{B} , en fonction de e , B et de la distance ρ de M à l'axe Oz.
- B.II.2.c. On admet que, pour l'ensemble des Z électrons de l'atome $\sum \vec{\sigma}_0 = \vec{0}$ et par conséquent $\sum \vec{M}_0 = \vec{0}$. Calculer le moment magnétique moyen induit dans l'atome par le champ \vec{B} : on introduira $\langle r^2 \rangle$, moyenne par rapport au temps et par rapport à tous les électrons de l'atome, des carrés des distances des électrons au noyau, et on supposera que la répartition des électrons dans l'atome a la symétrie sphérique.
- B.II.2.d. Donner l'expression de la susceptibilité magnétique d'un corps pur monoatomique, de numéro atomique Z , comportant n atomes par unité de volume.
- B.II.2.e. *Application numérique.* Pour le bismuth, $Z = 83$, la masse de la mole est $M = 209$ g, la masse volumique est $\mu = 9,8$ g.cm⁻³, la susceptibilité magnétique est $\chi = -1,5 \cdot 10^{-4}$. Calculer $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$.

B.II.3. *Théorie de Lorentz de l'effet Zeeman.*

On se propose d'étudier les modifications des raies spectrales émises par un atome, résultant de l'application d'un champ magnétique uniforme et constant \vec{B} . On modélise l'émission d'une onde électromagnétique de fréquence ν en admettant qu'un électron de l'atome émetteur a, par rapport au référentiel galiléen du laboratoire (R), un mouvement circulaire uniforme de fréquence ν , centré sur le noyau O supposé ponctuel et fixe. On admet aussi que, après l'établissement du champ \vec{B} , le mouvement de l'électron par rapport au référentiel de Larmor (défini en B.II.1.c) est le même que son mouvement par rapport à (R) lorsque $\vec{B} = \vec{0}$.

- B.II.3.a. Montrer que, en présence du champ \vec{B} , le mouvement de l'électron par rapport à (R) résulte de la superposition d'un mouvement rectiligne parallèle à \vec{B} et de deux mouvements circulaires uniformes de sens opposés dans un plan perpendiculaire à \vec{B} . Calculer les fréquences de ces mouvements. Quelles conclusions en tire-t-on pour la décomposition de la raie émise et la polarisation de ses composantes?

B.II.3.b. On observe la raie de l'atome de mercure, de longueur d'onde $\lambda = 4916 \text{ \AA}$, à l'aide d'un spectroscopie à réseau. Le réseau plan, comportant N traits par unité de longueur, travaille par réflexion dans le premier ordre. Il reçoit un faisceau parallèle sous l'angle d'incidence θ ; le faisceau diffracté, dont la direction coïncide pratiquement avec celle du faisceau incident, est focalisé à l'aide d'un miroir sphérique concave de distance focale f . Calculer l'angle θ , et le déplacement Δx de l'image de la fente source dans le plan focal du miroir quand la longueur d'onde varie de $\Delta\lambda$; on exprimera Δx en fonction de θ , N , f et $\Delta\lambda$.

On donne : $N = 2\,200$ traits/mm, $f = 2$ m. Quand la source émettrice est placée dans un champ magnétique $B = 1,5$ T, on observe un écartement $\Delta x = 0,175$ mm entre les composantes extrêmes de la raie. Quelle valeur en déduit-on pour le rapport e/m ?

B.III. INSUFFISANCE DES MODÈLES CLASSIQUES.

L'expérience montre que le modèle développé à la question B.II.3 n'est pas satisfaisant, car il ne permet pas de rendre compte de la décomposition des raies spectrales observée, dans la plupart des cas, en présence d'un champ magnétique. Quelle notion fondamentale nouvelle doit-on faire intervenir pour interpréter correctement l'effet Zeeman?

Indiquer les principales conséquences qui résultent de l'introduction de cette notion pour la structure des atomes et les propriétés de leurs niveaux d'énergie, compte tenu du principe de Pauli que l'on énoncera. La réponse à cette question doit être essentiellement qualitative et ne devra pas dépasser 2 à 3 pages.