1987

écrit

épreuve A

Sujet (durée : 5 heures)

COMPOSITION DE PHYSIQUE

L'épreuve n'exige pas de papier millimétré.

Les calculatrices électroniques sont autorisées.

Le sujet de la composition est extrait du programme défini dans la note du 5 juillet 1979.

Les candidats doivent exposer avec concision, sans limitation de niveau, toutes leurs connaissances dans le cadre précis des questions posées, en veillant à équilibrer leurs développements.

Il sera tenu le plus grand compte des qualités d'exposition et de soin.

QUELQUES ASPECTS DE LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

Données numériques :

- Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8\ \mathrm{m.s^{-2}}$.
- Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}32\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$.
- Constante d'Avogadro : $N = 6{,}02.10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$.
- Constante de Planck : $h = 2\pi\hbar = 6{,}62.10^{-34}\ \mathrm{J.s}$.
- Masse de l'électron : $m = 9{,}1.10^{-31}\ \mathrm{kg}$.
- Charge élémentaire : $e = 1{,}6.10^{-19}\ \mathrm{C}$.
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3.10^{8}\ \mathrm{m.s^{-1}}$.
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ S.I.

A. Énergie mécanique en mécanique newtonienne (*sur 65 points*)

A. I. *Énergie cinétique.*

A. I. 1. Énergie cinétique d'un point matériel.

a. Établir le théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel en mouvement dans un référentiel galiléen. Le théorème est-il toujours valable si l'on rapporte le mouvement à un référentiel non galiléen ?

b. Exercice.

Un mobile, assimilé à un point matériel M de masse m, se déplace sur un rail situé dans un plan vertical. Le rail comporte une partie circulaire, de diamètre BC = 2 a, que le mobile parcourt à l'intérieur du cercle. Le mobile est libéré sans vitesse initiale en A, à la hauteur h au-dessus de B, point le plus bas du cercle. On néglige tous les frottements (cf. fig. 1).

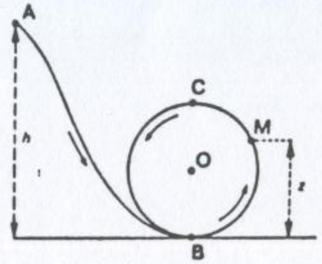

Figure 1

A quelle condition doit satisfaire h pour que le mobile « boucle la boucle » sans quitter la piste circulaire ? Si cette condition n'est pas remplie, décrire qualitativement les différents mouvements possibles.

Application numérique : $h = 3\,a$, avec $a = 10$ m et $m = 350$ kg. Calculer les vitesses de passage en B et C et les réactions du rail lors des passages en ces points.

A.I.2. Énergie cinétique d'un système de points matériels.

a. Définir le référentiel du centre de masse (ou barycentrique) pour un système de points matériels. Énoncer et démontrer le théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique du système.

b. Énoncer et démontrer le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen, puis dans le référentiel du centre de masse.

c. Exercice.

Un enfant se balance sans aide extérieure sur une escarpolette dont il amplifie les oscillations en s'accroupissant et se relevant alternativement. On assimile son mouvement à celui d'une tige rigide OA, oscillant sans frottement dans un plan vertical autour du point fixe O. La position du centre de gravité G de la tige et son moment d'inertie I par rapport à O varient avec la position de l'enfant. A un instant où la vitesse angulaire de la tige est ω, l'enfant change de position en un temps suffisamment bref pour que le déplacement correspondant de la tige puisse être négligé. Montrer qu'il se produit une variation brusque de la vitesse angulaire; calculer la variation d'énergie cinétique de la tige et en préciser l'origine. L'enfant se lève et se baisse une fois pour chaque demi-oscillation; quand doit-il de préférence modifier sa position?

Initialement, l'escarpolette est écartée de la direction verticale d'un angle θ_0 faible et la vitesse angulaire est nulle. Au bout de combien de passages par la position d'équilibre peut-elle, dans ces conditions, atteindre la direction horizontale ? On exprimera le résultat en fonction de θ_0 et du rapport $K = \dfrac{I_2 \times OG_2}{I_1 \times OG_1}$, où l'indice 1 se rapporte à la situation « enfant accroupi » et l'indice 2 à la situation « enfant redressé ».

A.I.3. Cas particulier d'un solide indéformable.

a. Établir l'expression de la puissance des forces appliquées à un solide en fonction du torseur de ces forces et du torseur cinématique (ou des vitesses). Quelle est la puissance des forces intérieures ?

b. Établir l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en fonction du torseur cinétique (ou des quantités de mouvement) et du torseur cinématique (ou des vitesses).

c. Exercice.

Un cylindre de révolution S, homogène, de masse M, de rayon a, est posé sur un plan horizontal xOy, le contact se faisant le long d'une génératrice (cf. fig. 2). A l'instant $t = 0$, son axe de révolution est parallèle à Oy et son mouvement se réduit à une rotation à la vitesse angulaire ω_0 positive autour de cet axe. Le coefficient de frottement dynamique du cylindre sur le plan est f; on néglige le frottement de roulement.

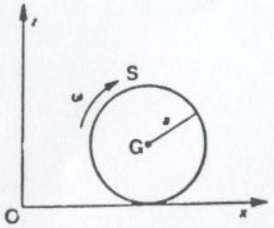

Figure 2

A quel instant t_1 la vitesse de glissement de S sur le plan s'annule-t-elle ? Quelle est la distance parcourue entre $t = 0$ et $t = t_1$? Quel est le mouvement de S après t_1 ?

Évaluer le travail, entre $t = 0$ et $t = t_1$, des actions de contact exercées par le plan sur S d'abord directement, puis par application du théorème de l'énergie cinétique.

A. II. *Énergie potentielle, énergie mécanique totale.*

A.II.1. Champ de force dérivant d'un potentiel.

Rappeler ce que l'on entend par « particule soumise à un champ de force ». Quand dit-on que le champ de force « dérive d'un potentiel »?

Quelle forme particulière prend alors le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen?

A.II.2. Système isolé de deux particules en interaction.

a. Un système isolé de deux particules, de masses m_A et m_B, est en mouvement dans un référentiel galiléen (R). On désigne par A et B les positions respectives des deux particules à un instant donné. Chaque particule exerce sur l'autre une action qui se réduit à une force colinéaire à AB, ne dépendant que de la distance $AB = r$. La force qui s'exerce sur la particule en B est $\vec{F}_B = f(r)\,\vec{u}$, avec : $\vec{u} = \dfrac{\vec{AB}}{r}$.

Évaluer le travail des forces d'interaction au cours du mouvement.

Définir l'énergie potentielle $E_p(r)$ et l'énergie mécanique totale E du système et établir la loi de conservation de E.

b. Montrer que l'étude du mouvement des deux particules dans le référentiel du centre de masse (K) se ramène à celle du mouvement d'une particule fictive dont on précisera la masse μ. A quel champ de force est soumise cette particule fictive? Comment peut-on, de son mouvement, déduire celui des deux particules?

c. Montrer que, dans le référentiel (K), la particule de masse m_B est soumise à un champ de force dérivant du potentiel $\dfrac{m_A}{m_A + m_B}\,E_p(r)$.

Commenter ce résultat.

d. Quelles sont les propriétés générales du mouvement de la particule fictive? Montrer en particulier que l'étude peut se ramener à celle du mouvement d'un point matériel sur un demi-axe Or, sous l'action d'une force dérivant d'une énergie potentielle effective $E'_p(r)$ dont on donnera l'expression. Étudier qualitativement le mouvement de la particule fictive lorsque la variation de $E'_p(r)$ en fonction de r est donnée par la courbe de la figure 3; on examinera les différents cas possibles selon la valeur de l'énergie mécanique totale du mouvement de la particule fictive. Citer quelques exemples de ce type de problème.

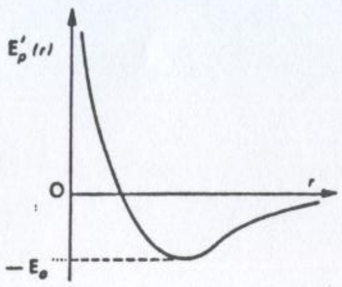

Figure 3

B. Thermodynamique (*sur 40 points*)

B.I. *Premier principe de la thermodynamique : énergie interne, travail, quantité de chaleur.*

B.II. *Détentes de gaz.*

B.II.1. Énergie interne et enthalpie d'un gaz.

Dans un certain domaine de température et de pression, une mole d'un gaz réel a une équation d'état du type :

$$f(p, V, T) = \left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) - RT = 0. \quad \text{(Équation de Van der Waals.)}$$

Utiliser les principes de la thermodynamique pour déterminer les expressions de l'énergie interne molaire U(T, V) et de l'enthalpie molaire H(p, T) de ce gaz; on admettra que sa capacité calorifique molaire à volume constant C_V ne dépend pas de T et on exprimera H sous forme d'un développement en fonction de p limité au premier ordre. Que deviennent ces expressions pour un gaz parfait?

B.II.2. Détentes de Joule et de Joule-Thomson.

On fait subir à une mole du gaz réel précédent, pour lequel on donne :

$$C_V = \frac{5}{2}R, \quad a = 0{,}138\ \text{J.m}^3\,\text{mol}^{-2}, \quad b = 3{,}18.10^{-5}\ \text{m}^3\,\text{mol}^{-1},$$

les deux détentes suivantes :

a. Détente de Joule;

b. Détente de Joule-Thomson.

Rappeler les conditions expérimentales de ces détentes et calculer la variation de température subie par le gaz pour chacune d'elles.

Application numérique : dans les deux cas, la température initiale est : $T_1 = 300$ K.

a. Détente de Joule : volume initial : $V_1 = 2$ l, volume final $V_2 = 20$ l.

b. Détente de Joule-Thomson : pression initiale $p_1 = 10^{6}$ Nm^{-2}, pression finale $p_2 = 10^{6}$ Nm^{-2}.

B.II.3. Détente adiabatique irréversible.

On fait subir à une mole d'un gaz parfait, dont la capacité calorifique molaire à volume constant vaut: $C_V = \frac{5}{2} R$, une détente adiabatique irréversible, en faisant passer brusquement la pression extérieure de la valeur initiale p_1 à la valeur finale p_2 que l'on maintient ensuite constante. Calculer la variation de température; la température initiale est : $T_1 = 300$ K; on donne : $p_1 = 10^6$ Nm^{-2}, $p_2 = 10^5$ Nm^{-2}. Quelles remarques peut-on faire en comparant ce résultat à ceux de la question précédente?

B.III. *Modèle microscopique du gaz parfait.*

B.III.1. Décrire le modèle utilisé pour l'étude microscopique (ou statistique) du gaz parfait.

B.III.2. *a.* Rappeler l'expression $f(v_x)\, dv_x$ de la fraction $\frac{dN}{N}$ de molécules d'un gaz parfait, en équilibre thermique à la température thermodynamique T, dont la vitesse a une composante sur un axe Ox comprise entre v_x et $v_x + dv_x$. On calculera la constante de normalisation en utilisant l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$$

b. Calculer l'énergie cinétique moyenne de translation d'une molécule dans un gaz parfait en équilibre thermique.

c. Qu'est-ce que le théorème de l'équipartition de l'énergie? Comment le justifie-t-on? Quelles sont ses limites de validité?

C. L'énergie en relativité restreinte (*sur 50 points*)

C.I. *Cas d'une particule unique.*

C.I.1. *a.* On considère, dans un référentiel galiléen (R), une particule relativiste de masse m, de vitesse $\vec{v}$, soumise à une force $\vec{f}$. Calculer le travail de la force $\vec{f}$ dans (R) entre les instants t et $t + dt$. En déduire l'expression de l'énergie cinétique de la particule dans (R). Que devient cette expression si $v \ll c$?

b. Qu'appelle-t-on énergie E de la particule dans (R)? Définir le quadrivecteur impulsion-énergie de la particule et établir la relation existant entre E, m, et la quantité de mouvement $\vec{p}$.

C.I.2. *Application.*

Un électron, de vitesse initiale nulle, est accéléré par une différence de potentiel V. Calculer la vitesse atteinte v et comparer sur un même graphique la variation $v = f(V)$ à celle que l'on obtiendrait en mécanique newtonienne. Pour quelles valeurs de V peut-on utiliser la mécanique newtonienne si l'on tolère une erreur relative de 1 % sur la vitesse?

C.II. *Cas d'un système de particules.*

C.II.1. On considère un système isolé Σ de n particules, de masses m_i, dont les vitesses sont $\vec{v_i}$ dans un référentiel galiléen (R) lorsque leurs distances sont assez grandes pour qu'on puisse négliger leurs interactions.

En utilisant la conservation de la quantité de mouvement totale de ce système isolé dans un référentiel galiléen quelconque, montrer que la quantité $\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_i^2}{c^2}}}$ se conserve également. Que représente cette grandeur?

Que donnerait, en mécanique newtonienne, l'utilisation de la même loi de conservation?

C.II.2. *a.* Montrer qu'on peut, en général, définir un référentiel du centre de masse (K) pour le système des n particules. Cette définition peut-elle être impossible?

b. On considère le système isolé Σ comme une particule unique de masse M. Donner la valeur de M en fonction des m_i et des v_i si l'on suppose que les mouvements des particules sont rapportés au référentiel (K).

C.II.3. On suppose maintenant que le système Σ n'est plus isolé, mais peut échanger de l'énergie avec le milieu extérieur sans modifier sa quantité de mouvement. Comment un tel échange peut-il se produire? Établir la relation entre l'énergie totale E du système Σ dans le référentiel (K) avant l'échange d'énergie, l'énergie reçue E_{ext} et la masse M′ du système après l'échange. En déduire, pour tout échange ultérieur, la relation entre l'énergie reçue et la variation correspondante de la masse.

C.II.4. *Applications.*

a. En donnant des exemples et des ordres de grandeur numériques, expliquer pourquoi la loi de conservation de la masse est vérifiée lors de la plupart des transformations physiques et chimiques.

b. Définir et étudier les principales propriétés de l'énergie de liaison des noyaux. Interprétation et applications (fission, fusion).

D. L'énergie en mécanique quantique (*sur 45 points*)

D.I. *La quantification de l'énergie.*

D.I.1. Citer, en les commentant très brièvement, quelques phénomènes qui mettent en évidence la quantification de l'énergie à l'échelle de la molécule, de l'atome ou du noyau.

D.I.2. Exercice.

Par désintégration radioactive α, l'isotope $^{212}_{83}$Bi du bismuth donne l'isotope $^{A}_{Z}$Tl du thallium. Dans le référentiel du laboratoire où le noyau initial est au repos, la mesure de l'énergie des particules α émises fournit les deux seules valeurs : 6,622 MeV et 6,278 MeV.

Préciser quel est l'isotope du thallium obtenu et calculer les énergies de désintégration libérées. Montrer que l'on peut s'attendre à une émission de photons γ dont on précisera l'énergie.

D.II. *Niveaux d'énergie d'un puits de potentiel unidimensionnel infiniment profond.*

D.II.1. Une particule de masse m se déplace sur un axe fixe $x'Ox$; elle est soumise au champ de force qui dérive de l'énergie potentielle $U(x)$.

Écrire l'équation de Schroedinger indépendante du temps qui permet d'étudier ce problème. Quels résultats peut-on tirer de sa résolution?

D.II.2. On suppose $U(x) = 0$ pour $|x| < a$; $U(x)$ est infini pour $|x| > a$. Déterminer les niveaux d'énergie E_n de ce puits et donner, en les normalisant, les fonctions d'onde $\psi_n(x)$ correspondantes.

D.II.3. Exercice.

On admet que chacun des électrons π de la molécule d'hexatriène $H_2C{=}CH{-}CH{=}CH{-}CH{=}CH_2$ est totalement délocalisé et se meut dans un puits de potentiel unidimensionnel infiniment profond de largeur $2a = 7{,}3$ Å. La configuration fondamentale du système d'électrons π satisfait au principe d'exclusion de Pauli. Calculer la longueur d'onde, prévue par ce modèle, du rayonnement électromagnétique susceptible de faire passer le système d'électrons π de la molécule de la configuration fondamentale à la première configuration excitée. Comparer le résultat à la valeur expérimentale $\lambda = 2\,580$ Å.

D.II.4. On rappelle que l'état quantique le plus général de la particule soumise au champ de force précédent est décrit par la fonction d'onde dépendant du temps : $\Phi(x, t) = \sum_n c_n\, \psi_n(x)\, e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$; les coefficients constants c_n, liés par la relation $\sum_n |c_n|^2 = 1$, sont définis par la donnée de conditions initiales.

a. Quelle est l'évolution au cours du temps de l'état quantique de la particule si $\Phi(x,0) = \psi_n(x)$? Que vaut dans ce cas l'énergie de la particule?

b. On donne : $\Phi(x, 0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x) + \psi_2(x)\right)$. Comment varie au cours du temps la probabilité de présence de la particule dans l'intervalle $(x, x + \Delta x)$? Quels résultats peut fournir la mesure de l'énergie de la particule et avec quelles probabilités?

c. La particule est une molécule dans un gaz, de sorte que la largeur $2a$ du puits a un ordre de grandeur macroscopique.

Montrer, par une application numérique de votre choix, que les niveaux d'énergie sont alors très « serrés ».

On suppose que la fonction d'onde $\Phi(x, t)$ qui décrit l'état quantique de la molécule est une somme portant sur un nombre limité de valeurs de n, pour lesquelles E_n est très voisin d'une valeur $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ correspondant à une valeur élevée n_0 de n. Montrer que la densité de probabilité de présence de la molécule est très voisine d'une fonction périodique de période $T = \dfrac{4a}{v_0}$. Conclure quant à la validité des résultats de la mécanique newtonienne.

D.III. *La conservation de l'énergie en mécanique quantique.*

D.III.1. Radioactivité α.

Le rayon du noyau ${}^{A}_{Z}\mathrm{Tl}$ résultant de la désintégration du noyau ${}^{211}_{83}\mathrm{Bi}$ (cf. D.I.2.) est $r_n = 8.10^{-15}$ m (les forces nucléaires n'interviennent entre ce noyau et une particule α que si leur distance est inférieure à r_n). Quelle serait (en MeV) l'énergie d'interaction électrostatique entre ce noyau et une particule α à la distance r_n ?

Quelle serait la distance minimale d'approche lors d'une collision frontale entre un noyau ${}^{A}_{Z}\mathrm{Tl}$, initialement immobile dans le laboratoire, et une particule α envoyée sur ce noyau avec une énergie cinétique de 6,88 MeV?

Expliquer quel phénomène spécifiquement quantique est responsable de la radioactivité α.

D.III.2. Émission spontanée de rayonnement.

Un atome émet un photon d'énergie $h\nu$ par passage spontané d'un état d'énergie E_1 et de durée de vie τ_1 à un état d'énergie E_2, inférieure à E_1, et de durée de vie τ_2. Rappeler ce qu'est la durée de vie d'un état. Quelle est la largeur de la courbe donnant la distribution des valeurs de ν possibles? Cette largeur peut-elle être mise en évidence expérimentalement?