

SESSION DE 1982

ÉPREUVE A

COMPOSITION DE PHYSIQUE

DURÉE : 5 heures

L'épreuve n'exige pas de papier millimétré.

Les candidats doivent exposer avec concision, sans limitation de niveau, toutes leurs connaissances dans le cadre précis des questions posées, en veillant à équilibrer leurs développements.

Il sera tenu le plus grand compte des qualités d'exposition et de soin.

OSCILLATEURS

Données numériques :

Masse de l'électron $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Célérité de la lumière dans le vide $c = 3,0 \cdot 10^8$ ms⁻¹.

Constante d'Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹.

Constante de Planck $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js⁻¹.

Constante de Boltzmann $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ JK⁻¹.

Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$ S.I.

Permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = \frac{1}{36 \pi} \cdot 10^{-9}$ S.I.

Tournez la page S. V. P.

A. OSCILLATEURS A UN DEGRÉ DE LIBERTÉ (sur 75 points)

A. I. Oscillations libres.

A. I. 1. Oscillateur harmonique non amorti.

a. Qu'appelle-t-on oscillateur harmonique?

b. Une particule ponctuelle de masse m , mobile sans frottement sur un axe $x'Ox$ est soumise au champ de force qui dérive du potentiel $V(x)$. Le point O est une position d'équilibre stable. Montrer que le mouvement de la particule au voisinage de ce point est assimilable à une oscillation harmonique. Calculer, en fonction de l'amplitude x_0 de l'oscillation, les valeurs moyennes dans le temps de l'énergie potentielle, de l'énergie cinétique et de l'énergie totale de la particule.

c. Exercice.

Un résonateur de Helmholtz est constitué par une sphère creuse de volume intérieur $v_0 = 1$ litre, munie d'un ajutage court de section $s = 5 \text{ cm}^2$ et de longueur $l = 5 \text{ cm}$. L'air contenu dans l'ajutage est animé d'un mouvement d'ensemble oscillant de faible amplitude; parallèlement, l'air enfermé dans la cavité évolue de façon adiabatique réversible, sa pression ayant même valeur en tout point. On donne : pression atmosphérique extérieure $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$; masse volumique de l'air de l'ajutage $\rho = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$; $\gamma = 1,4$.

Calculer la fréquence d'oscillation du résonateur pour le type de vibration considéré.

A. I. 2. Amortissement de type fluide.

a. Définir ce que l'on entend par frottement fluide (ou visqueux) et donner des exemples.

b. Étudier la loi $x(t)$ du mouvement d'un point matériel de masse m , mobile sur un axe $x'Ox$ et soumis aux deux forces : $-Kx$ et $-\lambda \frac{dx}{dt}$, avec $K > 0$ et $\lambda > 0$. On introduira les grandeurs $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ et $\tau = \frac{2m}{\lambda}$.

Établir le bilan énergétique entre les instants t et $t + dt$.

Dans le cas d'un amortissement faible, calculer en fonction de ω_0 et τ le facteur de qualité Q de l'oscillateur, défini par $Q = 2\pi \left| \frac{E}{\Delta E} \right|$ où ΔE représente la perte d'énergie, en une pseudo-période, d'un oscillateur d'énergie initiale E .

c. Montrer qu'un circuit électrique constitué d'une résistance R , d'un condensateur de capacité C et d'une bobine de coefficient d'auto-induction L disposés en série, est du type oscillateur amorti par frottement fluide.

Quel est l'analogie de l'énergie potentielle? De l'énergie cinétique?

Application : $L = 100 \mu \text{ H}$; $C = 100 \text{ pF}$; $R = 20 \Omega$. Calculer la fréquence propre ν_0 et le facteur de qualité Q du circuit dont on vérifiera qu'il est faiblement amorti.

A. II. Oscillations forcées.

A. II. 1. Excitation sinusoïdale : régime permanent, résonance.

a. Qu'appelle-t-on régime permanent pour un oscillateur amorti?

b. Un oscillateur mécanique soumis à un amortissement de type fluide et caractérisé par les paramètres m , K et λ (avec $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ et $\tau = \frac{2m}{\lambda}$) est excité par une force sinusoïdale d'amplitude f_0 et de pulsation ω .

Définir l'impédance de l'oscillateur. Représenter graphiquement la variation, en fonction de ω , des amplitudes et des phases de sa vitesse et de son élongation.

Qu'est-ce que le phénomène de résonance? Établir la relation entre bande passante et facteur de qualité Q (défini en A. I. 2 b). Montrer que lorsque Q est de valeur élevée, l'impédance de l'oscillateur au voisinage de la résonance s'exprime de façon simple en fonction de λ , Q , ω_0 et de l'écart $\delta\omega = \omega - \omega_0$.

Calculer la puissance moyenne \bar{P} absorbée par l'oscillateur et tracer la courbe $\bar{P}(\omega)$.

c. Exercice.

Un plasma neutre contient par unité de volume N électrons libres de charge $-e$ et de masse m , ainsi que des ions positifs beaucoup plus lourds et que l'on suppose donc immobiles. Il est soumis à un champ électrique sinusoïdal \vec{E} de pulsation ω . Calculer la polarisation $\vec{\mathcal{P}}$ du plasma due au déplacement des électrons et sa constante diélectrique ϵ . On introduira la pulsation de plasma ω_p définie par $\omega_p^2 = \frac{N e^2}{m \epsilon_0}$.

Quelle est la vitesse V de propagation dans le plasma d'une onde électromagnétique plane de pulsation ω , en admettant que la perméabilité magnétique du milieu est celle du vide? A quelle condition cette propagation est-elle possible?

Pour l'ionosphère, à un certain moment de la journée, $N = 2,8 \cdot 10^{13}$ par mm^3 . Décrire le comportement, à son arrivée au niveau de l'ionosphère, d'une onde électromagnétique plane se propageant initialement dans l'atmosphère et de longueur d'onde λ dans l'air, pour $\lambda = 1500$ m et $\lambda = 1$ m (on précisera la nature de ces deux rayonnements électromagnétiques).

A. II. 2. Étude expérimentale d'un circuit résonant parallèle.

a. Un circuit (fig. 1) est constitué d'une bobine de caractéristiques $L = 50 \mu\text{H}$, $r = 4 \Omega$ et d'un condensateur de capacité $C = 506$ pF, montés en parallèle. Montrer qu'il est équivalent, au voisinage de la résonance, au montage représenté sur la fig. 1 bis; exprimer R en fonction de r et du facteur de qualité Q du circuit et calculer sa valeur numérique.

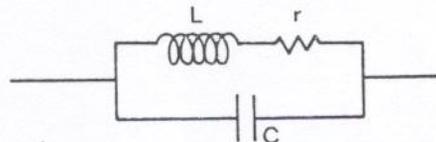


Figure 1

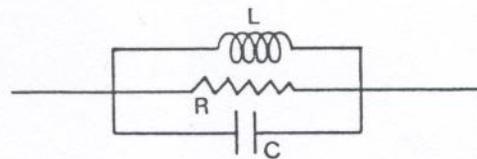


Figure 1 bis

Donner l'allure du graphe $Z_0(\omega)$ représentant la variation, en fonction de la pulsation imposée ω , du module Z_0 de l'impédance du circuit.

b. Le circuit est alimenté par un générateur de courant délivrant une intensité $i(t) = i_0 \cos(2\pi\nu t + \varphi)$ dont l'amplitude i_0 est constante et dont la fréquence ν varie au cours du temps comme indiqué sur la figure 2. Le générateur (wobulateur) produit également une tension en dents de scie proportionnelle à la variation de fréquence. On applique cette tension sur l'amplificateur horizontal d'un oscillographe cathodique, tandis que la tension $v(t)$ aux bornes du circuit oscillant est envoyée sur l'amplificateur vertical. On suppose que l'excursion en fréquence est $\Delta\nu = \frac{2\nu_0}{Q}$ autour de la fréquence propre ν_0 du circuit, ce balayage étant effectué en un temps θ .

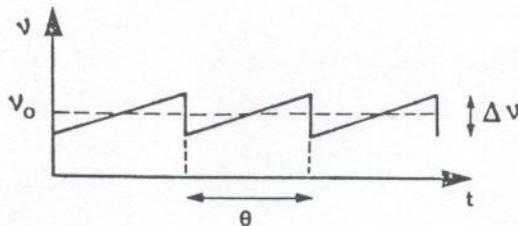


Figure 2

Montrer que le montage réalisé permet de visualiser la courbe $Z_0(\nu)$ à condition que le balayage en fréquence ne soit pas trop rapide. Proposer, en justifiant succinctement votre réponse, un ordre de grandeur du temps minimal θ_m à respecter. Décrire (sans calcul) la figure observée pour une vitesse de balayage trop élevée.

Tournez la page S. V. P.

A. II. 3. Excitation par choc.

Le mouvement d'un oscillateur de vitesse v est régi par l'équation :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{2}{\tau} v + \omega_0^2 \int_0^t v dt = \frac{f_0}{m} s(t)$$

où $s(t)$ est une fonction impulsion.

a. L'oscillateur est excité par une impulsion unique de durée très brève θ , la fonction $s(t)$ ayant alors l'allure représentée sur la figure 3.

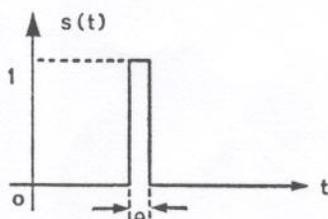


Figure 3

Quelle est l'influence de l'impulsion sur la vitesse de l'oscillateur? Citer des applications de ce résultat.

b. L'oscillateur de période propre T_0 et de facteur de qualité Q élevé est excité par des impulsions périodiques de durée θ et de période T , avec $\theta \ll T$ et $\theta \ll T_0$. La figure 4 donne l'allure de la fonction $s(t)$ correspondante.

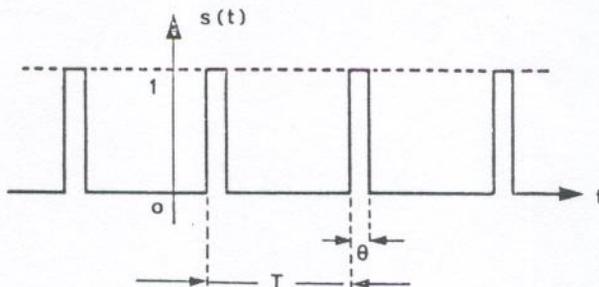


Figure 4

Montrer qu'il y a résonance de l'oscillateur lorsque $T = nT_0$ (n entier).

On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$; donner l'allure de la variation $v_0(\omega)$ du module de la vitesse de l'oscillateur au voisinage de $\omega = \omega_0$. Quelle est l'influence de n sur la réponse de l'oscillateur?

A. III. L'oscillateur harmonique en mécanique quantique.

A. III. 1. Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour un point matériel de masse m se déplaçant sur un axe $x'Ox$ dans le puits de potentiel $V(x) = \frac{1}{2} Kx^2$.

Sans chercher à résoudre cette équation, préciser les différences fondamentales qui apparaissent entre les résultats auxquels elle conduit et ceux obtenus en mécanique newtonienne.

Montrer que les relations d'incertitude d'Heisenberg permettent de prévoir l'existence d'un état fondamental d'énergie non nulle.

A. III. 2. Exercice.

Un solide comportant N atomes est assimilable, du point de vue thermique, à un ensemble de $3N$ oscillateurs harmoniques unidimensionnels dont l'énergie d'interaction est négligeable. On admet (modèle d'Einstein) que tous les atomes vibrent à la même fréquence ν .

a. Montrer que l'énergie interne U du solide en équilibre thermique à la température T s'exprime de façon simple en fonction de :

$$z \text{ (fonction de partition d'un oscillateur)} = \sum_i e^{-\beta \varepsilon_i}$$

où ε_i est l'énergie du $i^{\text{ème}}$ état quantique d'un oscillateur harmonique et $\beta = \frac{1}{kT}$.

b. On pose $\theta = \frac{h\nu}{k}$. Donner l'expression de z en fonction de T et θ . En déduire la valeur de l'énergie interne U du solide. Donner des expressions approchées de U pour $T \ll \theta$ et $T \gg \theta$. Représenter graphiquement la variation de U en fonction de T .

c. Calculer la capacité calorifique molaire C_v du solide et représenter graphiquement sa variation en fonction de la température. Quelle est la loi de variation pour $T \ll \theta$? Vers quelle limite tend C_v pour $T \gg \theta$?

Retrouver cette valeur limite à partir du théorème de l'équipartition de l'énergie.

d. Une estimation de la température caractéristique θ peut être faite comme suit. On suppose que les atomes du solide sont situés aux nœuds d'un réseau cubique dont la maille est de dimension a et on admet que lorsqu'un atome est écarté de Δa de sa position d'équilibre, il est soumis à la force de rappel $-f \cdot \Delta a$. Soit $\chi = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T$ le coefficient de compressibilité du solide.

Montrer que $f = \frac{a}{\chi}$. En déduire la valeur de θ pour le cuivre, sachant que :
masse atomique du cuivre = 63,5 g; $a = 2,3 \text{ \AA}$; $\chi = 4,5 \cdot 10^{-12} \text{ S.I.}$

e. Critiquer le modèle utilisé.

B. OSCILLATEURS A DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ (sur 50 points)

B. I. Phénomènes de couplage.

B. I. 1. En prenant appui sur un exemple de votre choix, exposer rapidement les résultats généraux relatifs aux oscillations libres : coordonnées normales (ou propres), pulsations propres, modes propres.

B. I. 2. Exercice.

Soit le montage mécanique de la figure 5 où les solides de masses M_1 et M_2 sont guidés en translation verticale. La masse M_1 suspendue à un bâti fixe par un système de caractéristiques (K_1, λ) est soumise à une force verticale d'intensité $f(t) = f_0 \cos \omega t$. Montrer que le fait d'installer l'ensemble (M_2, K_2) sur le dispositif principal, la masse M_2 étant réglable, permet d'obtenir un régime permanent où la vitesse du solide de masse M_1 est négligeable.

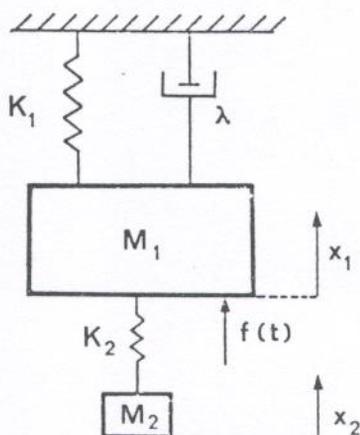


Figure 5

Imaginer un système électrique simple, analogue de ce système mécanique.

B. I. 3. Exercice.

On considère le système électrique représenté sur la figure 6, constitué de deux circuits oscillants identiques de facteur de qualité Q , couplés par la capacité γ équivalente aux deux condensateurs en série de la figure.

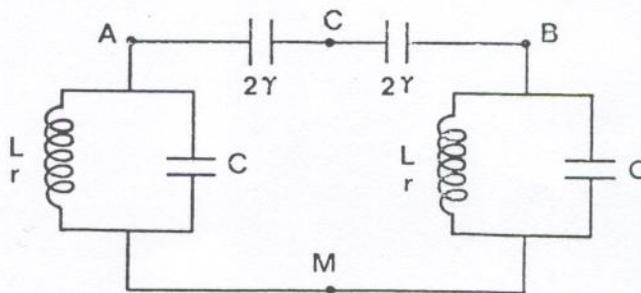


Figure 6

On donne : $L = 2,2 \text{ mH}$; $C = 10 \text{ nF}$; $Q \simeq 50$; $\gamma = 1 \text{ nF}$.

On procédera aux approximations justifiées par ces valeurs numériques.

Les résultats seront obtenus et présentés en tenant compte des propriétés de symétrie du système et sans mener d'étude générale.

a. Calculer les pulsations propres ω_1 et ω_2 correspondant respectivement aux modes symétrique et anti-symétrique.

b. On pose $v_1(t) = V_A - V_M$ et $v_2(t) = V_B - V_M$ et l'on désigne par $i_1(t)$ et $i_2(t)$ les intensités des courants qui circulent dans les deux bobines. Montrer que les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} i_1(0) = 0 ; & v_1(0) = V \\ i_2(0) = 0 ; & v_2(0) = 0 \end{cases}$$

entraînent l'excitation simultanée des deux modes avec des amplitudes initiales égales. Quelle est alors la forme des réponses $v_1(t)$ et $v_2(t)$?

Ces conditions initiales étant réalisées, on branche une résistance $R = 1 \text{ k}\Omega$ en dérivation entre A et B. Qu'observe-t-on en visualisant $v_1(t)$ et $v_2(t)$? Même question si R est branchée entre C et M.

c. Le système précédent est excité (fig. 7) par une intensité $i(t) = i_0 \cos \omega t$.

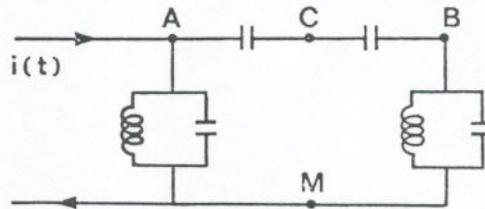


Figure 7

Comment varient avec ω les amplitudes v_{10} et v_{20} des tensions $v_1(t)$ et $v_2(t)$?

On se contentera de représenter, sans calculs détaillés, l'allure des courbes $v_{10}(\omega)$ et $v_{20}(\omega)$. Comparer les phases de $v_1(t)$ et $v_2(t)$ pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$.

Faire la même étude succincte lorsqu'une résistance $R = 1 \text{ k}\Omega$ est branchée en dérivation entre A et B ou entre C et M.

B. II. Couplage par effet tunnel dans un système quantique.

Une particule de masse m se déplace le long de l'axe $x'Ox$ dans un double puits de potentiel symétrique, son énergie potentielle $V(x)$ variant comme indiqué sur la figure 8.

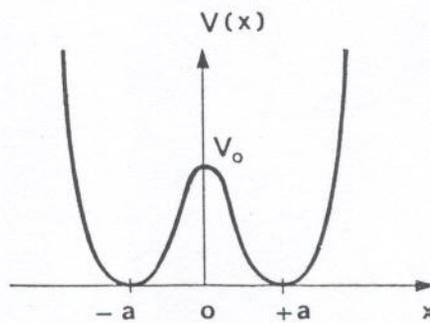


Figure 8

Les données (m , a , V_0) sont telles que l'énergie des premiers états quantiques est très inférieure à V_0 .

On représente l'opérateur hamiltonien de la particule par l'expression :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$$

a. \hat{W} est défini de telle sorte qu'il s'annule lorsque la grandeur V_0 est infinie. Les niveaux quantiques E_n sont alors tous doublement dégénérés. Représenter l'allure des fonctions d'onde $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$, supposées ortho-normées, correspondant au niveau E_0 de plus basse énergie.

Tournez la page S. V. P.

b. On suppose que le niveau E_0 est nettement séparé des autres niveaux E_n . Lorsque V_0 est de valeur finie, on peut alors définir un hamiltonien de couplage \hat{W} qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i^* \hat{W} \varphi_j dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } i = j \\ -A & (A \text{ réel } > 0) \text{ pour } i \neq j \end{cases}$$

φ_i et φ_j étant les deux fonctions d'onde $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ précédemment définies.

Montrer qu'on peut décrire les deux premiers états stationnaires de la particule par des fonctions d'onde normées $\psi_a(x)$ et $\psi_b(x)$ de la forme : $\psi_k = c_{k1} \varphi_1 + c_{k2} \varphi_2$ où c_{k1} et c_{k2} sont deux constantes.

Déterminer les expressions de $\psi_a(x)$ et $\psi_b(x)$ et les valeurs des énergies E_a et E_b correspondantes.

c. Si on se limite toujours à l'étude des deux niveaux très proches E_a et E_b , l'état quantique le plus général de la particule est décrit par la fonction d'onde dépendant du temps :

$$\Psi(x, t) = C_a e^{-\frac{i}{\hbar} E_a t} \psi_a(x) + C_b e^{-\frac{i}{\hbar} E_b t} \psi_b(x)$$

les coefficients C_a et C_b sont déterminés par les conditions initiales et satisfont à la relation $|C_a|^2 + |C_b|^2 = 1$.

A l'instant $t = 0$, on a $\psi(x, 0) = \varphi_1(x)$. Comment varie au cours du temps la probabilité de présence de la particule?

d. Pourquoi dit-on qu'il y a « couplage par effet tunnel »?

A quelle étude physique ce modèle peut-il être appliqué?

C. OSCILLATEURS A N DEGRÉS DE LIBERTÉ (sur 40 points)

C. I. Chaîne d'oscillateurs.

On se propose d'étudier sur un modèle simple les propriétés d'une chaîne d'oscillateurs couplés d'amortissement négligeable.

C. I. 1. Propagation d'une onde de déformation le long d'une file infinie.

Soit une file infinie de pendules simples identiques (longueur l , masse m) dont les oscillations sont supposées harmoniques (fig. 9). Ces pendules sont régulièrement espacées de a . Ils sont reliés entre eux par des ressorts sans masse de raideur K . L'amplitude de leurs oscillations est suffisamment petite pour que l'on puisse considérer que les masses m se déplacent sur un axe $x'Ox$; on désigne par x_n le déplacement de la $n^{\text{ème}}$ masse par rapport à sa position d'équilibre.

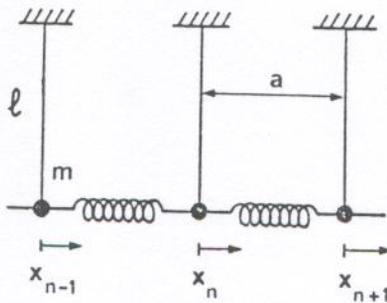


Figure 9

a. Écrire l'équation qui régit le mouvement de la $n^{\text{ème}}$ masse.

b. Montrer que des ondes progressives de la forme :

$x_n = \text{partie réelle de } X_n \text{ avec } X_n = x_{0n} \cdot e^{\pm j \cdot 2\pi\sigma a n} \cdot e^{-j\omega t}$ peuvent se propager sans affaiblissement le long de la file d'oscillateurs.

Quelles sont les conditions que doit, pour cela, vérifier la pulsation ω ?

c. Quelle est la signification physique de σ ?

Quelle est la relation de dispersion pour ces ondes? Représenter l'allure du diagramme de dispersion.

Rappeler les définitions des vitesses de phase (v) et de groupe (u). Donner les expressions de v et u , et indiquer comment ces grandeurs sont mises en évidence sur le diagramme de dispersion.

C. I. 2. Régime libre d'un système de N-1 oscillateurs couplés.

Montrer que la superposition de deux ondes du type précédent, de même pulsation ω et se propageant en sens inverse, peut laisser immobiles les pendules numérotés 0 et N.

En déduire les valeurs des pulsations propres d'une file finie de N-1 oscillateurs couplés par N ressorts de raideur K (fig. 10). Dans le cas d'une file de 5 oscillateurs ($N = 6$), représenter graphiquement, pour chaque mode propre, la variation $x_{0n} = f(n)$ de l'amplitude du $n^{\text{ème}}$ oscillateur.

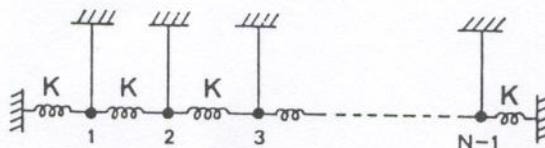


Figure 10

Tournez la page S. V. P.

C. II. *Système électromécanique : étude d'un exemple.*

Un vibreur électrodynamique, du type haut-parleur, excite une file d'oscillateurs, analogues à ceux décrits en C. I, dont on étudie les oscillations forcées.

Il sera commode de considérer (fig. 11) qu'à chaque oscillateur sont associés deux ressorts identiques, sans masse et de raideur $2K$.

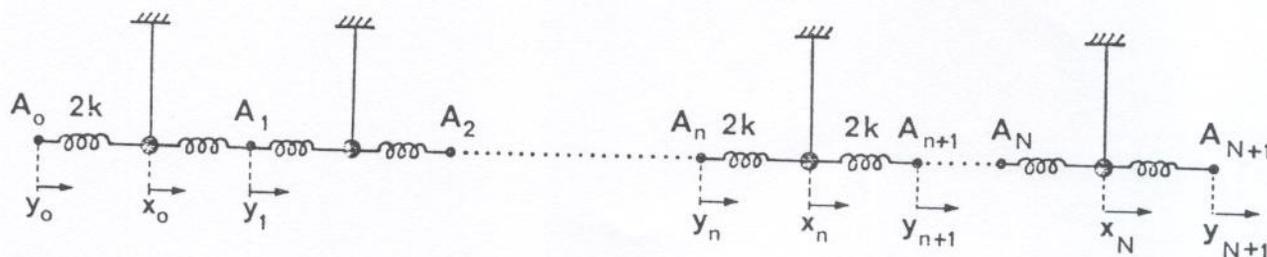


Figure 11

On note : x_n l'élongation du $n^{\text{ème}}$ oscillateur;

y_n et v_n le déplacement et la vitesse du point intermédiaire A_n ;

τ_n la tension algébrique des ressorts d'extrémité A_n , avec $\tau_n > 0$ si ces ressorts sont comprimés.

On utilisera la notation complexe suivante :

Soit $v_n = v_{on} \cos(\omega t + \varphi_n)$ la vitesse du point A_n . La vitesse complexe associée est $V_n = V_{on} e^{-j\omega t}$ avec $V_{on} = v_{on} e^{-j\varphi_n}$ de même, si $\tau_n = \tau_{on} \cos(\omega t + \psi_n)$, la tension complexe associée est $T_n = T_{on} e^{-j\omega t}$ avec $T_{on} = \tau_{on} \cdot e^{-j\psi_n}$.

C II. 1. Étude du vibreur.

Le point A_0 (y_0, v_0) soudé au premier ressort de la file d'oscillateurs est par ailleurs solidaire d'un équipement comprenant notamment une bobine mobile dans l'entrefer d'un aimant (fig. 12). Cet équipement de masse M est soumis à une force de rappel élastique $-k'y_0$ et à une force de frottement fluide $-\lambda v_0$.

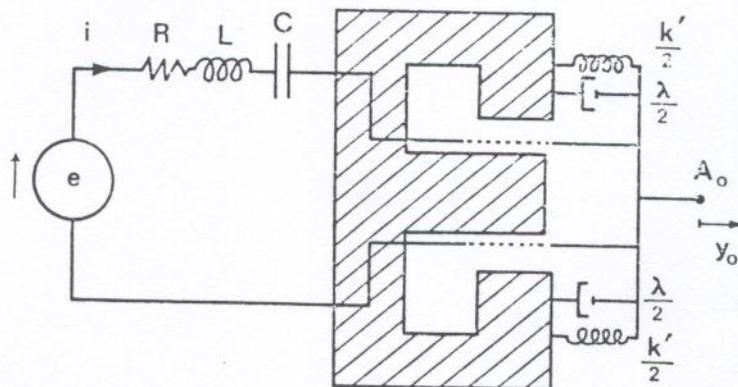


Figure 12

Le circuit électrique du vibreur comprend un générateur de f.é.m. $e = e_0 \cos \omega t$ et des éléments passifs R, L, C tenant compte des caractéristiques de la bobine et du générateur, ainsi que des pertes électriques dans le circuit magnétique. On pose $Z_e = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$.

Le déplacement de la bobine dans le champ radial de l'aimant crée une f.é.m. d'induction $e' = -A v_0$, comptée positivement dans le même sens que e .

Écrire les équations électrique et mécanique du système. On posera $Z_m = \lambda + j \left(M\omega - \frac{k'}{\omega} \right)$

Montrer que la tension τ_0 du premier ressort de la file a une amplitude complexe T_{00} de la forme : $T_{00} = BE_0 - ZV_{00}$, où E_0 est l'amplitude complexe associée à la f.é.m. e ; exprimer les constantes B et Z en fonction du terme de couplage A et des impédances électrique Z_e et mécanique Z_m . Que représente la grandeur Z ?

Quelle est la grandeur relative à la file d'oscillateurs que l'on doit déterminer pour calculer la vitesse V_{00} du point A_0 ?

C. II. 2. Étude de l'état vibratoire de la file d'oscillateurs.

a. Une onde progressive incidente de pulsation ω et d'amplitude complexe $X_{on}^{(i)} = X^{(i)} \cdot e^{j2\pi\sigma an}$ se propage le long de la file d'oscillateurs. Montrer que le rapport $Z_c = \frac{T_{on}}{V_{on}}$ est réel et indépendant de n .

Que vaut le rapport $\frac{T_{on}}{V_{on}}$ lorsque la file d'oscillateurs est parcourue par une onde réfléchie de pulsation ω et d'amplitude complexe $X_{on}^{(r)} = X^{(r)} \cdot e^{-j2\pi\sigma an}$?

Que représente la grandeur Z_c ?

b. En régime sinusoïdal de pulsation ω , l'état vibratoire de la file d'oscillateurs dépend en particulier de la nature du dispositif terminal au point A_{N+1} (fig. 11). Ce dispositif caractérisé par son impédance $Z_{N+1} = \frac{T_{0,N+1}}{V_{0,N+1}}$ provoque en général la réflexion partielle d'une onde progressive incidente. On note $T_{0,N+1}^{(i)}$ l'amplitude complexe de la tension du dernier ressort due à la seule onde incidente, et $T_{0,N+1}^{(r)}$ l'amplitude complexe de la tension de ce même ressort due à la seule onde réfléchie. On adopte une notation analogue pour les vitesses. Expliciter la relation qui existe entre l'impédance terminale Z_{N+1} , la grandeur Z_c et le coefficient de réflexion complexe de la vitesse :

$$\rho_{N+1} = r e^{j\theta} = \frac{V_{0,N+1}^{(r)}}{V_{0,N+1}^{(i)}}.$$

c. Montrer que $\rho_N = \frac{V_{0N}^{(r)}}{V_{0N}^{(i)}}$ s'exprime simplement en fonction de ρ_{N+1} et de $\alpha = 2\pi\sigma a$, et qu'il en est de même pour ρ_n . Que vaut ρ_0 ?

Relier $Z_n = \frac{T_{on}}{V_{on}}$ à Z_c et ρ_n .

Montrer que la connaissance des grandeurs caractéristiques du vibreur (B , E_0 et Z) et de celles caractéristiques de la file d'oscillateurs (N , α , Z_c et Z_{N+1}) permet de déterminer pour une pulsation ω donnée, l'état vibratoire de l'ensemble du dispositif.

Quel intérêt y a-t-il à réaliser l'égalité $Z = Z_c$? Que peut-on dire du cas où $Z = Z_c = Z_{N+1}$?

D. MILIEUX CONTINUS (sur 35 points)

D. I. Équation de propagation.

D. I. 1. Corde vibrante.

Une corde sans raideur de masse linéique μ , de poids négligeable et dont la tension a même intensité T en tout point, effectue des mouvements transversaux de faible amplitude dans le plan xOy (fig. 13).

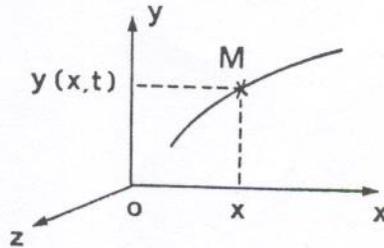


Figure 13

Soit $y(x,t)$ l'élongation au temps t du point $M(x)$.

Établir la relation $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ en précisant la valeur de V .

Donner l'intégrale générale de cette équation différentielle. Quelle est la signification physique de V ? Peut-on définir une impédance caractéristique pour un tel système?

D. I. 2. Ondes électromagnétiques dans le vide.

Établir, à partir des équations de Maxwell que l'on rappellera sans démonstration, les équations de propagation dans le vide des champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} .

En déduire les propriétés d'une onde électromagnétique plane sinusoïdale se propageant dans le vide : vitesse de phase; vecteur d'onde \vec{k} ; relation entre \vec{E} , \vec{B} et \vec{k} . Évaluer pour cette onde la valeur du vecteur de Poynting $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ et préciser le rôle de ce vecteur dans la description de la propagation de l'onde.

D. II. Rayonnement d'un dipôle électrique.

On considère un exemple de deux charges ponctuelles : $-q$ ($q > 0$) fixe en O dans un référentiel galiléen et $+q$ en O' , se déplaçant sur Oz à une vitesse $v \ll c$ en effectuant autour de O des oscillations périodiques de très faible amplitude (fig. 14).

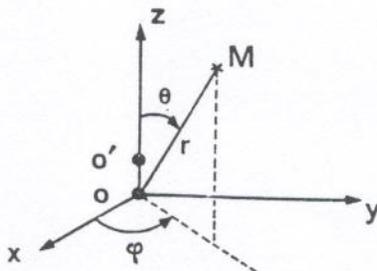


Figure 14

Soit $\vec{p}(t) = p_0 \cos \omega t \cdot \vec{u}_z$ le moment dipolaire instantané du système, \vec{u}_z étant le vecteur unitaire de l'axe Oz .

On étudie l'action du dipôle oscillant en un point M (x,y,z) éloigné.

On admet que le potentiel vecteur créé en M est le potentiel retardé :

$$\vec{A}(M, t) = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}\left(O', t - \frac{O'M}{c}\right)}{O'M} d\tau_{O'}$$

et que l'on peut, dans cette expression, supposer $O'M \simeq OM = r$.

a. Calculer $\vec{A}(M, t)$. En déduire le potentiel scalaire $V(M, t)$ en utilisant la condition de jauge de Lorentz :

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

b. On se place en un point M tel que $r \gg \frac{2\pi c}{\omega}$, cette condition étant supposée vérifiée par la suite. Donner les expressions des composantes en M des champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$. Montrer que l'on obtient localement la structure d'une onde plane polarisée rectilignement.

On rappelle les expressions en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} h = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot h_\varphi) - \frac{\partial h_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial h_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot h_\varphi) \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot h_\theta) - \frac{\partial h_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\varphi.$$

c. Calculer la puissance moyenne $\overline{P}(\theta, \varphi)$ rayonnée par unité d'angle solide dans la direction (θ, φ) et tracer le diagramme de rayonnement du dipôle.

Montrer que la puissance moyenne rayonnée dans tout l'espace est proportionnelle à λ^{-4} , λ étant la longueur d'onde du rayonnement émis. Citer une application de ce résultat.