

SESSION DE 1985

ÉPREUVE A

COMPOSITION DE PHYSIQUE

DURÉE : 5 heures

Il n'y a pas à distribuer de papier millimétré

AVERTISSEMENT AUX CANDIDATS.

Le but de cette étude est de passer en revue diverses questions d'électromagnétisme.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.

NOTATIONS ET FORMULAIRE.

Les candidats respecteront l'ensemble des notations traditionnelles en électromagnétisme, ainsi que les autres notations introduites par l'énoncé. (Les seuls champs considérés sont le champ électrique \vec{E} et le champ \vec{B} qu'on appellera « champ magnétique ».)

Ils pourront, en mentionnant leur numéro de référence, utiliser les identités suivantes :

$$(1) \quad \text{rot} (f \vec{A}) = f \text{rot} \vec{A} + \text{grad} f \wedge \vec{A}$$

$$(2) \quad \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = - \iiint_V \text{rot} \vec{A} \, d\tau$$

(La surface fermée S , dont la normale orientée vers l'extérieur a pour vecteur unitaire \vec{n} , enclose le volume V .)

$$(3) \quad \text{rot}_z (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{grad} \Lambda_z - \vec{A} \cdot \text{grad} B_z + \Lambda_z \text{div} \vec{B} - B_z \text{div} \vec{A}$$

$$(4) \quad \text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}$$

Données numériques :

On a :

$$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$$

On prendra pour célérité de la lumière dans le vide :

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Tournez la page S. V. P.

I. ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE ET RAYONNEMENT ÉLECTROMAGNÉTIQUE

- I.1. Soit un référentiel R dans lequel les charges et les courants considérés, de densités volumiques $\rho(M, t)$ et $\vec{j}(M, t)$, sont situés dans le vide, ou, éventuellement, dans des milieux tels que les conducteurs non ferromagnétiques que l'on pourra traiter comme le vide.

Écrire, dans le référentiel R — (en supposant qu'elles y sont valables) —, les équations de Maxwell relatives au champ électrique \vec{E} et au champ magnétique \vec{B} , dus aux sources $\rho(M, t)$ et $\vec{j}(M, t)$.

1. Préciser succinctement, grâce aux expressions intégrales équivalentes, le contenu physique de chacune d'elles. Montrer que les équations de Maxwell impliquent l'équation de conservation locale de la charge électrique. Préciser dans quels référentiels ces équations sont valables.

Quelle est la différence fondamentale entre régimes indépendants du temps et régimes variables en ce qui concerne le couplage des sources et des champs ?

- I.2. Montrer que les champs \vec{E} et \vec{B} peuvent se déduire des potentiels V (potentiel scalaire) et \vec{A} (potentiel-vecteur). Faire le choix d'un couple de potentiels s'appelle « choisir une jauge »; montrer que ce choix n'est pas unique et qu'un changement de jauge peut être défini à l'aide d'une fonction arbitraire $\psi(M, t)$.

Rappeler la condition que l'on peut imposer aux potentiels et qui définit la jauge dite « de Lorentz ». Cette condition assure-t-elle l'unicité du couple (V, \vec{A}) ?

- I.3. Déterminer l'ensemble des potentiels scalaires dont dérive un champ électrostatique uniforme \vec{E} .

Montrer qu'un champ magnétostatique uniforme $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$ dérive des potentiels vecteurs suivants :

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{2} (\vec{B} \wedge \vec{r}); \quad \vec{A}_2 = -B \cdot y \cdot \vec{e}_x$$

($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est le rayon vecteur du point M de coordonnées cartésiennes x, y, z , et $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont les vecteurs unitaires du trièdre orthonormé $Oxyz$).

Préciser l'allure des lignes de champ des potentiels \vec{A}_1 et \vec{A}_2 . Compte tenu de leurs symétries respectives, à quelles distributions de courants pourrait-on éventuellement les associer ?

- I.4. On impose aux potentiels la condition de jauge de Lorentz.

Déterminer les équations reliant V et \vec{A} aux sources ρ et \vec{j} .

Montrer que dans ce cadre le choix du couple (V, \vec{A}) n'est pas unique, et que l'on peut passer d'un couple à un autre à l'aide d'une fonction $\chi(M, t)$ obéissant à une équation aux dérivées partielles que l'on déterminera.

- I.5. Soit une onde électromagnétique plane et uniforme, progressive, se propageant dans le vide, en dehors des sources, dans la direction Ox .

Justifier la forme des potentiels associés à cette onde, soit :

$$V(M, t) = V \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad \text{et} \quad \vec{A}(M, t) = \vec{A} \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

On pose :

$$\vec{A}_{//} = A_x \cdot \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{A}_{\perp} = A_y \cdot \vec{e}_y + A_z \cdot \vec{e}_z$$

Montrer que $\vec{A}_{//}$ s'exprime en fonction de V . Montrer que les champs \vec{E} et \vec{B} de l'onde plane s'expriment en fonction de \vec{A}_{\perp} et en déduire la structure de l'onde plane uniforme et progressive. Montrer qu'un autre couple de potentiels utilisables est donné par :

$$\vec{A}'(M, t) = \vec{A}_{\perp} \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad \text{et} \quad V'(M, t) = 0$$

Caractériser le changement de jauge permettant de passer du couple (V, \vec{A}) au couple (V', \vec{A}')

I.6. Donner, sans démonstration, les expressions des « potentiels retardés » correspondant aux sources $\rho(M, t)$ et $\vec{j}(M, t)$. (On admettra que ces solutions satisfont à la condition de jauge de Lorentz.)

Quelle est la différence fondamentale entre ces expressions et celles de potentiels d'une situation indépendante du temps?

Existe-t-il d'autres solutions des équations, reliant les potentiels aux sources, obtenues au § I.4?

Pourquoi les élimine-t-on habituellement?

I.7. Soit un repère galiléen R d'origine O . Dans ce repère on considère un volume constitué d'un cube d'arête a , dont le centre, à l'instant $t = 0$, se trouve à l'origine O , et qui se déplace à la vitesse uniforme v , suivant l'axe Ox parallèle à l'une de ses arêtes. Dans R , ce cube est uniformément chargé, et sa densité volumique de charge vaut ρ .

Calculer, en appliquant les expressions des « potentiels retardés », les potentiels $V(x, t)$ et $\vec{A}(x, t)$ en un point P , fixe, situé sur l'axe Ox , d'abscisse x très grande devant a et vt ; on explicitera soigneusement d'abord le domaine d'intégration.

En déduire la valeur du champ électrique $\vec{E}(x, 0)$ en P à l'instant $t = 0$.

La dépendance en x de ces potentiels fait apparaître une position de la charge; laquelle?

Est-ce celle qu'on s'attendait a priori à obtenir, à partir de la notion de potentiel retardé, pour une charge quasi ponctuelle? Commenter.

I.8. Soit un dipôle oscillant, constitué de deux charges ponctuelles $-q(t)$ et $+q(t)$, situées sur l'axe Oz , aux cotes $-\frac{s}{2}$ et $+\frac{s}{2}$, et reliées par un fil conducteur de longueur s (fig. 1). Les charges varient sinusoidalement dans le temps, avec la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$: $q(t) = q_0 \cos \omega t$. On supposera que l'on a : $\lambda = cT \gg s$.

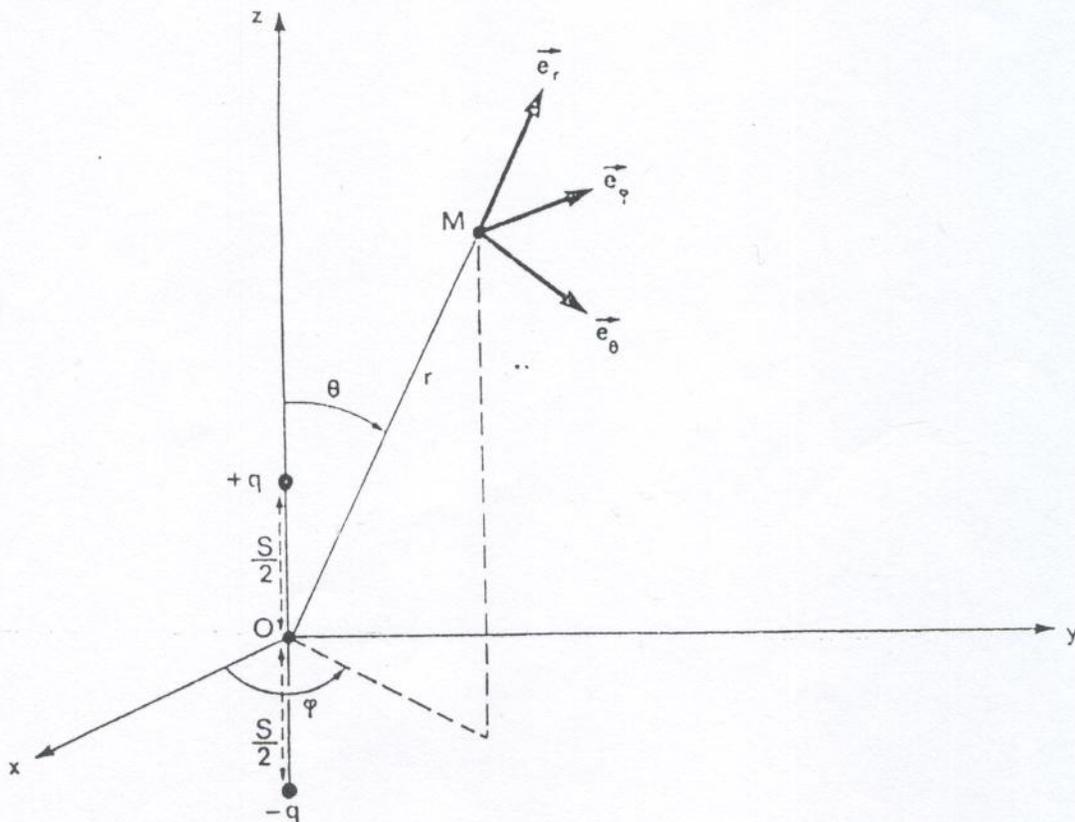


Figure 1

Tournez la page S. V. P.

En un point M, de coordonnées sphériques r, θ, φ , situé à grande distance du dipôle ($r \gg \lambda$), on observe un champ électromagnétique qui, à l'ordre le plus bas en $\frac{1}{r}$, est donné par :

$$(5) \quad \begin{cases} \vec{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0 s \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\sin\theta}{r} \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \vec{e}_\theta \\ \vec{B}(M, t) = \frac{1}{c} \vec{e}_r \wedge \vec{E}(M, t) \end{cases}$$

Montrer que ces expressions des champs sont compatibles avec les symétries du problème.

Quelle est la différence fondamentale, au niveau de la dépendance en r , entre ces champs et les champs créés par des sources indépendantes du temps ?

Indiquer, de manière concise, où, dans le passage des potentiels retardés aux champs \vec{E} et \vec{B} , interviennent les éléments qui introduisent cette différence. (Un calcul complet et explicite est inutile.)

I.9. On désire compléter l'étude du dipôle électrique oscillant, faite au paragraphe précédent, par son aspect énergétique.

Calculer la valeur moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$ du vecteur de Poynting \vec{R} en un point M quelconque très éloigné du dipôle ($r \gg \lambda$).

Dans un plan méridien, tracer le diagramme de rayonnement du dipôle, lieu des points de coordonnées polaires : $\theta = (\vec{Oz}, \vec{OM})$ et $\rho = \|\langle \vec{R} \rangle\| / \|\langle \vec{R} \rangle\|_{\max}$ pour $r = \|\vec{OM}\|$ fixé. Préciser en particulier les directions pour lesquelles l'émission d'énergie électromagnétique est maximale et minimale.

Calculer la puissance moyenne totale rayonnée par le dipôle dans tout l'espace et montrer que, d'un point de vue énergétique et électrocinétique, le dipôle est équivalent à une résistance pure, dite résistance de rayonnement R_r , que l'on exprimera en fonction de μ_0, c, s et λ .

II. TRANSFORMATIONS DES CHAMPS \vec{E} ET \vec{B} PAR CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIEL GALILÉEN

II.1. Transformation des sources du champ électromagnétique.

On rappelle les formules de transformation lorentzienne du quadrivecteur $(\vec{r}, t) = (x, y, z, t)$ d'un référentiel galiléen orthonormé $R = (Oxyz)$ au quadrivecteur $(\vec{r}', t') = (x', y', z', t')$ d'un référentiel galiléen R' , d'axes parallèles à ceux de R , en mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse \vec{v}_e par rapport à R . ($\vec{v}_e = v_e \cdot \vec{e}_z$ est parallèle à la direction commune des deux axes Ox et $O'x'$. Les origines O et O' des deux repères coïncident au temps $t (= t') = 0$. Cette disposition des deux repères galiléens sera, sauf mention contraire, implicitement réutilisée dans toute la suite de l'épreuve.)

$$(6) \quad \begin{cases} x' = \gamma_e (x - v_e t) ; & y' = y ; & z' = z \\ t' = \gamma_e \left(t - \frac{v_e x}{c^2} \right) \\ \text{avec :} \\ \gamma_e = \left(1 - \beta_e^2 \right)^{-1/2} , & \beta_e = \frac{v_e}{c} \end{cases}$$

II.1.1. On rappelle que la densité volumique de courant \vec{j} et la densité volumique de charge ρ forment un quadrivecteur. Quelles sont, de ce fait, les composantes j'_x, j'_y, j'_z de la densité de courant et la densité de charge ρ' dans R' , ces quantités étant exprimées en fonction de leurs homologues dans R ?

II.1.2. Pour des surfaces parallèles ou perpendiculaires au vecteur vitesse \vec{v}_e de R' par rapport à R , et dont le mouvement éventuel se fait parallèlement à \vec{v}_e , déduire de ce qui précède les formules de transformation pour leur densité surfacique de charge σ et les composantes de leur densité surfacique de courant \vec{j}_s , dans le passage du repère R au repère R' .

II.2. Transformation des champs électrique et magnétique.

On se propose d'établir les formules de transformation des champs \vec{E} et \vec{B} grâce à des raisonnements élémentaires.

II.2.1. Rappeler les expressions du champ électrostatique créé par deux plans parallèles, portant les densités surfaciques de charge uniformes σ et $-\sigma$, et du champ magnétique créé par deux nappes de courant, planes et parallèles, de densités surfaciques $-\vec{j}_s$ et $+\vec{j}_s$.

II.2.2. En déduire les champs \vec{E} et \vec{B} créés dans le référentiel galiléen $R = (Oxyz)$ par l'ensemble de deux plans parallèles à xOz , uniformément chargés avec les densités surfaciques propres $-\sigma_0$ et $+\sigma_0$, en mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à R à la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{e}_x$ (fig. 2).

(On rappelle que les densités propres sont relatives au référentiel propre R_0 lié aux plans chargés.)

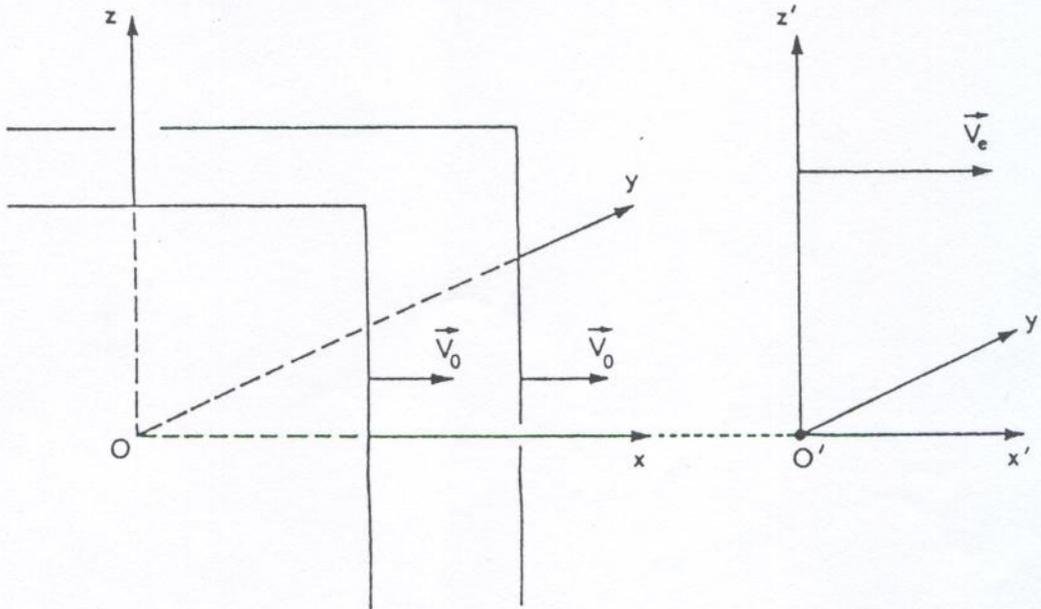


Figure 2

II.2.3. Soit $R' = (O'x'y'z')$ le référentiel galiléen en translation rectiligne et uniforme à la vitesse $\vec{v}_e = v_e \cdot \vec{e}_x$ par rapport à R (fig. 2).

Déterminer relativement au référentiel R' :

- les densités surfaciques de charge des plans chargés;
- les densités surfaciques de courant des plans chargés;
- les champs \vec{E}' et \vec{B}' .

En déduire les deux relations :

$$E'_y = \gamma_e \cdot (E_y - v_e \cdot B_z) \quad B'_z = \gamma_e \cdot \left(B_z - \frac{v_e}{c^2} \cdot E_y \right)$$

II.2.4. Résoudre le même problème en prenant les plans chargés parallèles à xOy et montrer que si l'on note \perp l'ensemble des composantes des champs orthogonales à la direction de la vitesse d'entraînement \vec{v}_e de R' par rapport à R on a :

$$(7) \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma_e \cdot (\vec{E}_{\perp} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}) \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma_e \cdot \left(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v}_e \wedge \vec{E}}{c^2} \right)$$

II.2.5. Proposer des raisonnements simples analogues aux précédents et permettant de montrer l'invariance des composantes des champs \vec{E} et \vec{B} parallèles à la vitesse d'entraînement \vec{v}_e .

Justifier enfin la généralité des formules de transformation des champs établies précédemment dans des cas particuliers :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//} \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma_e \cdot (\vec{E}_{\perp} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}) \\ \vec{B}'_{//} = \vec{B}_{//} \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma_e \cdot \left(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v}_e \wedge \vec{E}}{c^2} \right) \end{array} \right.$$

Connaissez-vous des invariants par transformation de Lorentz construits à partir des champs \vec{E} et \vec{B} ?

II.3. Transformation des champs aux faibles vitesses.

On se propose maintenant de rechercher si, pour des vitesses d'entraînement v_e de R' par rapport à R faibles (devant la vitesse de la lumière), une approximation des lois de transformation des champs \vec{E} et \vec{B} peut être obtenue, qui soit compatible avec la relativité galiléenne (en particulier avec la loi « classique » d'addition des vitesses), et d'en préciser les conditions de validité.

II.3.1. On rappelle que, pour les deux repères R et R' définis au début du paragraphe II.1., les formules galiléennes de transformation des coordonnées spatiales et du temps ont la forme :

$$(9) \quad x' = x - v_e t ; \quad y' = y ; \quad z' = z ; \quad t' = t$$

Établir les formules correspondantes de transformation des opérateurs différentiels, c'est-à-dire le passage de $\vec{\nabla} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ à $\vec{\nabla}' \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right)$ et $\frac{\partial}{\partial t'}$.

Montrer que les relations galiléennes (9) représentent une approximation des relations lorentziennes (7) obtenue quand on peut se prévaloir des inégalités :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_e \ll c \\ x \ll ct \end{array} \right.$$

(cette dernière supposant qu'on s'intéresse uniquement à des événements voisins de « l'événement origine » constitué par la coïncidence de O et O' à l'instant $t = t' = 0$).

Montrer enfin que les transformations définies par (9) forment un groupe.

II.3.2. Écrire les lois de transformation galiléenne des densités de charge et de courant; montrer que la relation locale de conservation de la charge est vérifiée dans R' si elle l'est dans R .

Montrer que ces lois peuvent être obtenues à partir des lois de transformation lorentziennes en supposant non seulement $v_e \ll c$ mais de plus $j = \|j\| \ll \rho c$. On parlera dans ce cas de « limite électrique ».

II.3.3. L'inégalité $j \ll \rho c$ implique la suivante :

$$(11) \quad E \gg cB$$

Justifier brièvement cette affirmation.

En admettant les inégalités (10) et (11), établir une forme approchée des formules (8) de transformation lorentzienne des champs \vec{E} et \vec{B} , de manière à ce que les formules obtenues définissent un groupe pour les changements de repère.

Dans cette « limite électrique », l'une des équations de Maxwell doit être modifiée de manière à ce que ces équations soient invariantes dans les changements de repère : laquelle et comment?

Toujours dans cette limite, l'invariance galiléenne de la force de Lorentz sur une particule chargée est-elle exactement assurée lors du passage de R à R' ?

II.3.4. Un autre choix, toujours dans la limite $v_e \ll c$, consiste à imposer l'invariance de la force de Lorentz dans les changements de repère. Quelles sont les lois de transformation des champs, associées aux relations galiléennes (9), qui en résultent?

Montrer que ces relations peuvent s'obtenir en simplifiant les relations lorentziennes (8) de transformation des champs, cette simplification étant obtenue en supposant les inégalités $v_e \ll c$ et $E \ll cB$, et en s'imposant d'obtenir une loi de groupe.

On définit ainsi la « limite magnétique ». Dans le cadre de cette limite, on a aussi $\rho c \ll j$.

En s'appuyant sur cette inégalité, définir des formules de transformation des « sources » du champ électromagnétique, c'est-à-dire des quantités ρ et j , telles que ces transformations dans les changements de repère forment un groupe.

La relation de conservation de la charge est-elle exactement assurée quel que soit le repère galiléen utilisé?

Si l'on impose que les équations de Maxwell soient invariantes par changement de repère dans le cadre de cette « limite magnétique », l'une d'entre elles doit être modifiée : laquelle et de quelle manière?

II.3.5. Connaissez-vous des situations expérimentales importantes où cette « limite magnétique » est celle à prendre en considération? (Justifier ce choix.)

II.4. Rayonnement électromagnétique et limites galiléennes.

Dans le cadre de chacune des deux limites, électrique et magnétique, conserve-t-on la possibilité de rendre compte de l'existence et des propriétés du rayonnement électromagnétique?

III. INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

III.1. Loi de Faraday.

Présenter clairement mais succinctement, en choisissant des situations expérimentales typiques, les divers aspects du phénomène d'induction électromagnétique. Énoncer la loi de Faraday; préciser son domaine d'application.

Pour les diverses situations expérimentales présentées, expliciter l'interprétation locale de la loi de Faraday, pour un observateur fixe dans le référentiel galiléen où sont observés les phénomènes.

III.2. Exemple : barreau en translation.

III.2.1. Dans un référentiel galiléen R , un barreau conducteur $A'B'$ est animé d'un mouvement de translation, de vitesse \vec{v} ($\|\vec{v}\| \ll c$), parallèlement à deux rails conducteurs, distants de d , avec lesquels il est en contact permanent; une barre fixe AB ferme le circuit (fig. 3).

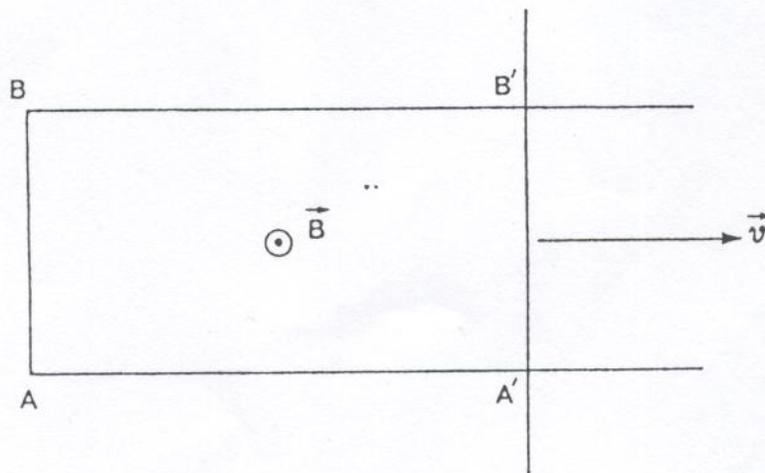


Figure 3

L'ensemble du circuit est plongé dans un champ magnétique uniforme et constant \vec{B} (créé par des sources fixes dans R), perpendiculaire au plan des rails et dirigé vers l'avant de la figure.

Préciser le sens du courant induit en le justifiant. Expliciter la f.é.m. d'induction. Quelle est, pour un observateur fixe dans R , son origine et où la localise-t-il?

Tournez la page S. V. P.

- III.2.2. Soit R' un référentiel galiléen, en translation à la vitesse \vec{v} par rapport à R ; le barreau $A'B'$ y est immobile.
Quels sont, pour un observateur de ce référentiel, les phénomènes électromagnétiques observés ? Comment interprète-t-il la f.é.m. d'induction et où a-t-il tendance à la localiser ?
- III.2.3. Dans R , le barreau $A'B'$ est toujours en mouvement dans une zone de champ \vec{B} uniforme et constant ; par contre l'extrémité fermée par la barre AB est dans une zone de champ nul.
La f.é.m. induite et son interprétation sont-elles différentes, pour un observateur de R , de celles données dans la situation précédente ?
Mêmes questions pour un observateur de R' .
- III.2.4. Le barreau $A'B'$ est maintenant isolé électriquement, toujours en translation, à la vitesse \vec{v} dans le champ \vec{B} uniforme et constant, par rapport à R . Y a-t-il pour un observateur de R phénomène d'induction et, si oui, comment se manifeste-t-il ? Mêmes questions pour un observateur de R' .

III.3. Application.

Un solénoïde de section circulaire (rayon a), de très grande longueur, comporte n spires jointives par unité de longueur.

- III.3.1. Il est entouré par une boucle conductrice, circulaire, coaxiale au solénoïde, de rayon b ($b > a$), d'inductance L et de résistance R . L'intensité qui parcourt le solénoïde est ramenée de la valeur I_0 à zéro. Déterminer la charge électrique totale qui a traversé une section droite de cette boucle à la suite de cette action.
Comment ce résultat est-il modifié si l'axe de la boucle, tout en lui restant parallèle, ne coïncide plus avec celui du solénoïde, puis s'il forme avec ce dernier un angle α non nul ?
- III.3.2. La boucle circulaire est remplacée par un conducteur en forme de demi-cercle, centré sur l'axe du solénoïde, d'extrémités A et B que l'on relie aux bornes d'un voltmètre de très grande impédance. Le courant dans le solénoïde est sinusoïdal, d'intensité $i = I \cos \omega t$. Quelle indication du voltmètre prévoyez-vous ? Dépend-elle de son mode de branchement ?
- III.3.3. Une particule ponctuelle de charge q est au repos à la distance b de l'axe du solénoïde ; celui-ci est parcouru par un courant continu I_0 . Cette intensité est ramenée brusquement à zéro, suffisamment rapidement pour que, durant cette opération, la position de la particule puisse être considérée comme inchangée.
Déterminer sa quantité de mouvement à la fin de l'opération.
Évaluer l'intégrale sur tout l'espace de $\epsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B})$ avant le début de l'expérience. Que vous suggère ce résultat ? (Indication pour le calcul de l'intégrale : exprimer \vec{E} en fonction de son potentiel V ; remplacer l'intégrale de volume par une intégrale de surface en s'aidant du formulaire donné au début de l'énoncé ; introduire la densité surfacique de courant \vec{j}_s équivalente à la bobine solénoïdale.)

IV. AUTO-INDUCTION

- IV.1. Présenter le phénomène d'auto-induction. Définir le coefficient d'auto-inductance d'un circuit. Montrer que ce coefficient ne peut être calculé en se tenant au modèle d'un circuit filiforme. Indiquer le principe de son calcul en faisant intervenir les dimensions transversales finies du circuit.

IV.2. Application n° 1 : calcul d'une auto-inductance.

Calculer la contribution au coefficient d'inductance linéique liée au flux magnétique traversant l'intérieur du conducteur, soit l_1 , pour un conducteur cylindrique à section circulaire de rayon r_0 , parcouru par un courant continu de densité uniforme.

Calculer ensuite le coefficient d'inductance linéique totale, l_t , d'une ligne bifilaire dont les conducteurs ont un rayon r_0 et sont séparés, entre axes, par une distance a . (On admettra pour cela que le flux « extérieur » aux conducteurs est celui qui traverse la surface comprise entre leurs axes parallèles.)

Calculer l_1 et l_t pour $r_0 = 1 \text{ cm}$ et $a = 1 \text{ m}$.

IV.3. Application n° 2 : étude d'une bobine d'allumage.

Une bobine d'allumage d'automobile est montée comme l'indique la figure 4.

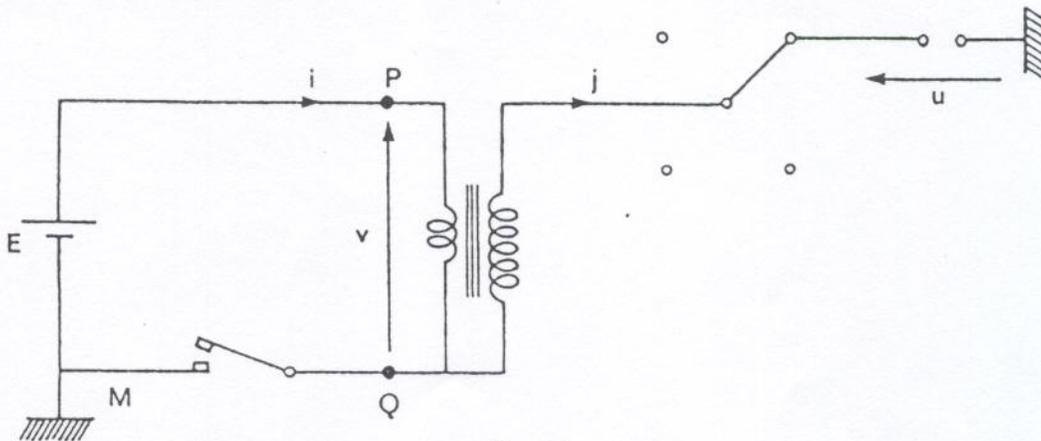


Figure 4

L'enroulement primaire, d'extrémités P et Q, a une résistance de 3Ω .

Lorsque le rupteur est fermé, il est alimenté par une batterie d'accumulateurs de f.é.m. $E = 12 \text{ V}$ et de résistance interne négligeable.

On considère qu'à chaque cycle d'allumage (avec allumage d'un cylindre et passage au cylindre suivant), l'intensité $i(t)$ dans le circuit primaire doit pouvoir atteindre 95 % de sa valeur maximale I_m , et ceci jusqu'à une fréquence de fonctionnement du rupteur égale à 200 Hz.

IV.3.1. Sachant que le rupteur est fermé pendant 60 % de chaque cycle, calculer la valeur maximale L_m du coefficient d'auto-inductance du circuit primaire.

Dans la suite de cette application, on supposera que $L = L_m$ et on étudiera des régimes transitoires survenant lorsque l'on ouvre le rupteur alors que $i = I_m$.

IV.3.2. On suppose tout d'abord que le dispositif est celui de la figure 4 ci-dessus. On admet dans un premier temps que les languets du rupteur peuvent s'écarter assez rapidement pour ne pas donner lieu à une étincelle de rupture entre eux. On considère par ailleurs que le secondaire de la bobine ne débite pas et qu'il n'y a donc pas d'étincelle au secondaire.

A l'ouverture du circuit primaire, l'évolution de la tension $v(t)$ est donc entièrement déterminée par les caractéristiques du bobinage primaire et notamment sa capacité parasite, C_p , égale à 150 pF , que l'on modélisera par une capacité localisée entre P et Q, et branchée en parallèle sur le primaire. En négligeant toutes les causes de déperdition d'énergie, préciser la loi d'évolution de $v(t)$ à l'ouverture du rupteur.

L'hypothèse selon laquelle il peut ne pas exister d'étincelle de rupture est-elle plausible? Quel(s) type(s) de pertes sont susceptibles d'affecter l'évolution de $v(t)$?

IV.3.3. On place en parallèle entre P et Q une résistance R égale à 100Ω .

Préciser, en justifiant vos approximations, l'allure de la loi d'évolution de la tension $v(t)$. Quelle est celle de la tension $v'_{QM}(t)$ aux bornes du rupteur?

Les sens des enroulements primaire et secondaire sont tels que les effets magnétiques des intensités i et j se renforcent si ces intensités sont de même signe.

Exprimer $u(t)$, tension d'allumage, en fonction de E , v et du rapport de transformation $m = \frac{n_2}{n_1}$ de la bobine.

Tournez la page S. V. P.

IV.3.4. Tous les constructeurs placent, en fait, entre les bornes Q et M du rupteur un condensateur de capacité C que l'on prendra égale à $0,27 \mu\text{F}$. (On ne place pas de résistance R entre P et Q.)

Donner, en justifiant encore vos approximations, l'allure de $v(t)$.

Quel doit être le rapport de transformation m pour que la valeur maximale u_m de la tension $u(t)$ soit, dans ces conditions, voisine de 25 kV ?

Expliquer pourquoi la présence de C supprime pratiquement l'étincelle aux bornes du rupteur et réduit considérablement certaines pertes d'énergie.

IV.4. Application n° 3 : effet de peau.

Soit un milieu conducteur, non magnétique, homogène, isotrope, de conductivité σ , de permittivité et de perméabilité égales à celles du vide. On cherche à étudier les régimes harmoniques pour lesquels le champ électrique et la densité volumique de courant sont représentés en notation complexe par :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad \vec{j} = \vec{j}_0 e^{-i\omega t}$$

Jusqu'à quelle valeur $\nu_m = \omega_m/2\pi$ de la fréquence, le terme de « courant de déplacement » dans les équations de Maxwell est-il inférieur en module au centième du terme de courant de charges ? Déterminer ν_m dans le cuivre pour lequel $\sigma = 5,8 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$; dans quel domaine du spectre électromagnétique cette fréquence ν_m est-elle située ?

Dans la suite de cette étude, on se limitera à des fréquences industrielles et radio. Dans ce cadre, établir l'équation aux dérivées partielles satisfaite par \vec{j} .

Le conducteur occupe le demi-espace défini par la condition $z > 0$. Il est parcouru par des courants parallèles à Ox :

$$\vec{j} = j(z) e^{-i\omega t} \vec{e}_x$$

Déterminer la forme de $j(z)$. A quelle distance δ de la surface le module de la densité de courant est-il réduit par le facteur $1/e$? Quel est le déphasage correspondant ?

Évaluer numériquement δ pour le cuivre, aux fréquences de 10^2 et 10^6 Hz.

IV.5. Prolonger l'étude précédente : sur le demi-espace conducteur de conductivité σ tombe normalement une onde électromagnétique plane polarisée rectilignement. Définir les conditions de réflexion et d'absorption. Mettre en évidence une « pression de radiation ».

Généraliser au cas d'un rayonnement électromagnétique monochromatique se propageant toujours suivant l'axe Oz, mais de cohérence temporelle finie et sans polarisation définie.

Relier pression de radiation et densité volumique d'énergie électromagnétique.

Présenter les éléments fondamentaux d'une généralisation à un rayonnement polychromatique, en précisant en particulier les contraintes imposées à la conductivité considérée comme fonction de la fréquence.