

SESSION DE 1986

Sciences physiques. — Option : PHYSIQUE

Épreuve A

COMPOSITION DE PHYSIQUE

DURÉE : 5 heures

Il n'y a pas à distribuer de papier millimétré

AVERTISSEMENT AUX CANDIDATS.

Le but de cette étude est de passer en revue diverses questions sur l'énergie en électromagnétisme.

Dans les parties I et II, il est demandé aux candidats de définir soigneusement et d'expliciter différentes grandeurs relatives à des systèmes de charges ou de courants en régime statique ou permanent; pour ce faire un plan classique leur est proposé.

Tous les milieux considérés sont supposés dépourvus de propriétés diélectriques ou magnétiques.

NOTATIONS ET FORMULAIRE.

Les candidats respecteront l'ensemble des notations traditionnelles en électromagnétisme, ainsi que les autres notations introduites par l'énoncé. (Les seuls champs considérés sont le champ électrique \vec{E} et le champ \vec{B} qu'on appellera « champ magnétique ».)

Ils pourront, en mentionnant leur numéro de référence, utiliser les identités suivantes :

$$(1) \quad \vec{\text{rot}}(f\vec{A}) = f \vec{\text{rot}} \vec{A} + \vec{\text{grad}} f \wedge \vec{A}$$

$$(2) \quad \iint_S \vec{A} \wedge \vec{n} \, dS = - \iiint_V \vec{\text{rot}} \vec{A} \, d\tau$$

Tournez la page S. V. P.

(La surface fermée S , dont la normale orientée vers l'extérieur a pour vecteur unitaire \vec{n} , enclose le volume V)

$$(3) \quad \text{rot}_z (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} A_z - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} B_z + A_z \text{div } \vec{B} - B_z \text{div } \vec{A}$$

$$(4) \quad \text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B}$$

Données numériques :

On a :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

On prendra pour célérité de la lumière dans le vide :

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

et pour charge et masse de l'électron :

$$-e, e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_e, m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.

I. ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE

1. Systèmes de charges dans le vide.

1.1. Établir l'expression de l'énergie potentielle U_p d'une charge ponctuelle q placée dans un champ électrostatique imposé.

1.2. Déterminer l'énergie potentielle U_p d'un dipôle électrique rigide, de moment dipolaire \vec{p} , placé dans un champ électrostatique imposé. En déduire la somme et le moment des forces exercées par le champ sur le dipôle.

1.3. Déterminer l'énergie potentielle d'interaction U_p d'un système de n charges ponctuelles fixes.

1.4. Définir l'expression de l'énergie électrostatique U_e d'un système de charges réparties continûment en volume ou en surface. Cette notion d'énergie électrostatique U_e diffère-t-elle de la notion d'énergie d'interaction U_p de charges ponctuelles?

1.5. Établir l'expression de l'énergie électrostatique U_e en fonction du champ électrostatique \vec{E} . Notion de densité d'énergie électrostatique.

2. Application.

2.1. Calculer l'énergie électrostatique d'une boule sphérique, de rayon R , chargée en volume avec la densité volumique uniforme ρ .

2.2. Un électron de masse m_e et de charge $-e$ ($e > 0$) est assimilé à une telle distribution. Définir et calculer le rayon classique de l'électron R_e . Commenter la valeur numérique ainsi obtenue.

2.3. En fait, bien avant d'arriver à des distances de l'ordre de R_e , d'autres phénomènes sont à prendre en compte : en préciser la nature.

Quelle longueur caractéristique fixe la limite inférieure de validité de la théorie classique des champs pour un électron? En donner l'ordre de grandeur.

3. *Systèmes de conducteurs.*

- 3.1. Définir et établir l'expression de l'énergie électrostatique U_e d'un système de n conducteurs rigides; on supposera connues la matrice $[C_{ij}]$ des coefficients d'influence C_{ij} , et la matrice inverse $[D_{ij}]$. Expliciter, en particulier, les expressions de U_e en fonction des charges Q_i ou des potentiels V_i .
- 3.2. Étudier le cas particulier d'un condensateur constitué de deux armatures A_1 et A_2 en influence totale, A_1 étant l'armature « interne ».
- 3.3. Pour un système de deux conducteurs C_1 et C_2 , déduire de considérations énergétiques la symétrie des coefficients d'influence C_{ij} et celle des D_{ij} . En déduire aussi des inégalités satisfaites par les coefficients diagonaux C_{ii} , et d'autres inégalités satisfaites par l'ensemble des C_{ij} . Préciser leur signification physique.
- 3.4. On note δW_G et δW_D les travaux élémentaires reçus par un système de n conducteurs rigides : δW_G travail électrique des générateurs externes au système, δW_D travail mécanique de déplacement fourni par un « opérateur externe ».

Écrire le bilan énergétique lors d'une transformation élémentaire réversible à partir d'une situation d'équilibre.

Utiliser ce bilan pour le calcul de la somme et du moment des forces électrostatiques s'exerçant sur l'un des conducteurs. Préciser, dans les deux cas particuliers des transformations élémentaires à charges $\{Q_i\}$ constantes ou à potentiels $\{V_i\}$ constants, la fonction (des Q_i ou des V_i) qui joue le rôle d'une énergie potentielle pour ces actions électrostatiques.

4. *Applications.*

- 4.1. On considère un condensateur cylindrique formé de deux cylindres coaxiaux dont les caractéristiques sont précisées sur la figure 1.

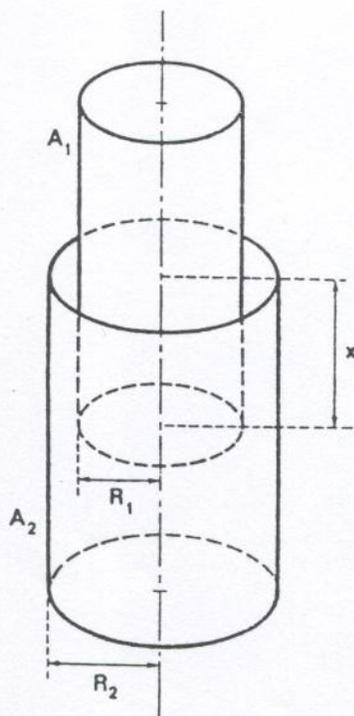


Figure 1

Calculer la capacité $C(x)$ en négligeant les effets de bord.

4.2. On fixe l'armature interne A_1 du condensateur au fléau d'une balance suivant le montage décrit sur la figure 2.

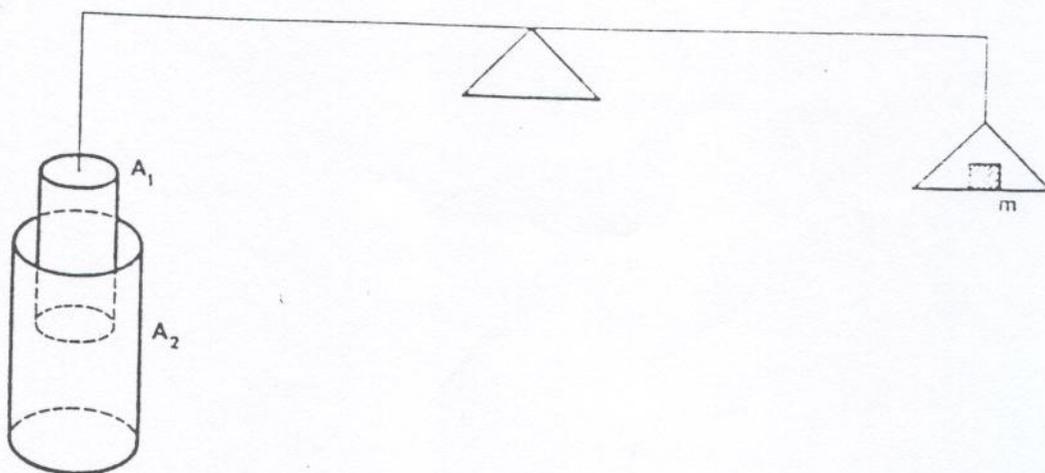


Figure 2

Les deux bras du fléau sont égaux, sa masse est négligeable, toutes les liaisons sont sans frottements, et, lorsque le condensateur est déchargé, l'équilibre horizontal de la balance est réalisé pour $m = 0$ et $x = x_0$.

- Le condensateur est chargé dans la position $x = x_0$, sous la différence de potentiel V , puis isolé; le fléau est alors libéré. Calculer la masse m à ajouter pour rétablir l'équilibre; en préciser la stabilité vis-à-vis des mouvements verticaux. Quelles considérations énergétiques permettent de retrouver ces résultats?
- Reprendre les mêmes questions si on laisse branché le générateur aux bornes du condensateur.
- Discuter la validité du calcul précédent. Donner quelques précisions sur la localisation des forces en jeu.

5. Cadre de l'électrostatique.

5.1. Préciser la propriété analytique du champ de vecteurs constitué par le champ électrique \vec{E} qui est à la base de la construction des grandeurs énergétiques en électrostatique.

5.2. Montrer que cette propriété du champ électrique est rigoureusement valable pour un système avec courants en régime continu et approximativement valable en régime quasi stationnaire dans la « limite électrique » caractérisée par les hypothèses :

- i) L'intervalle de temps caractéristique des variations temporelles des grandeurs, soit T , vérifie : $T \gg l/c$, où l fixe la dimension caractéristique du système.
- ii) L'interaction électrique est prédominante, soit $\|\vec{E}\| \gg c \cdot \|\vec{B}\|$.

5.3. Dédire de ce qui précède le domaine dans lequel les grandeurs énergétiques définies en électrostatique restent utilisables.

II. ÉNERGIE MAGNÉTIQUE

1. Cadre de l'étude.

Dans cette partie, on suppose que le système étudié est en régime continu ou quasi stationnaire dans la « limite magnétique » caractérisée par (cf. I.5) :

- i) $T \gg l/c$
- ii) $c \cdot \|\vec{B}\| \gg \|\vec{E}\|$

Quelles sont les équations locales satisfaites par le champ magnétique lorsque ces conditions sont réalisées?

2. Force de Lorentz et force de Laplace.

Soit un conducteur ohmique, parcouru par un courant stationnaire de densité volumique $\vec{j}(M)$, placé dans un champ magnétique constant $\vec{B}(M)$.

- 2.1. Rappeler les expressions de la force dite de Lorentz, s'exerçant sur un porteur de charge, de charge q et de vitesse \vec{v} , et de la force dite de Laplace, s'exerçant sur un élément de volume $d\tau$ du conducteur.
- 2.2. Pour interpréter le transfert des forces magnétiques s'exerçant sur les porteurs de charge, de vitesse moyenne \vec{v} , au « cristal » constituant le conducteur, on envisage souvent, pour les conducteurs métalliques, un modèle simplifié dans lequel intervient un champ électrique \vec{E}_H , transversal par rapport à \vec{j} , dit « champ de Hall ». Dans le cas particulier schématisé par la figure 3, où le conducteur, parallélépipédique d'axes Ox, Oy, Oz , contient, par unité de volume, n porteurs de charge q et où les champs : $\vec{j} = j \cdot \vec{e}_x$ et $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_y$ sont uniformes ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ étant les vecteurs unitaires du trièdre $Oxyz$), préciser l'origine et la valeur du champ électrique transversal $\vec{E}_H = E_H \cdot \vec{e}_z$ et montrer comment il permet d'interpréter le transfert des forces magnétiques.

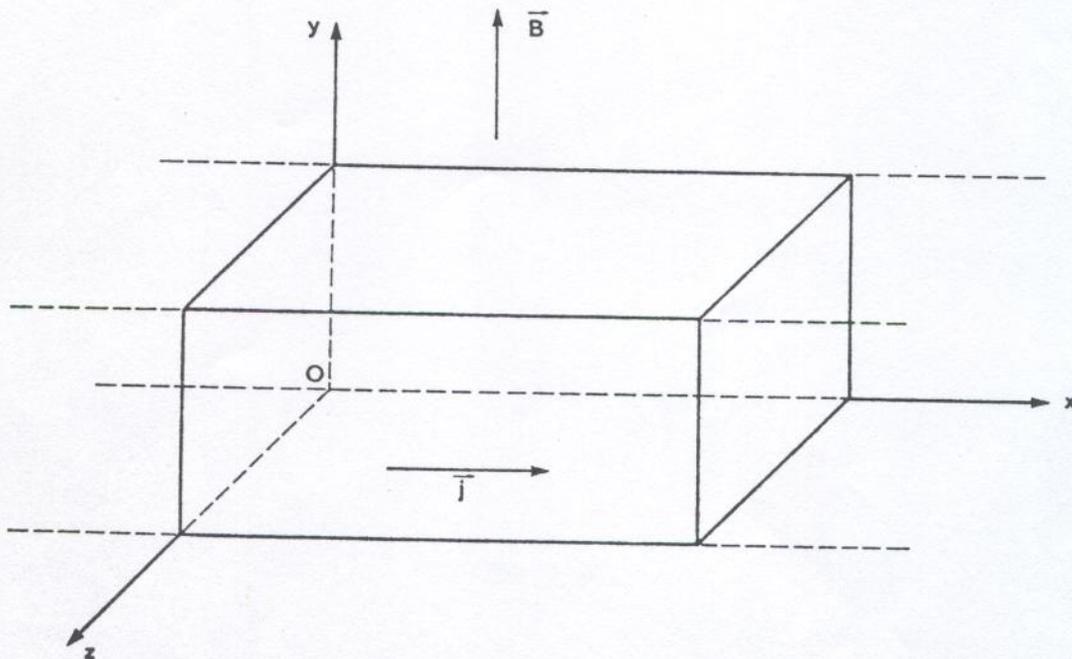


Figure 3

- 2.3. Soit $R_H = E_H / (j \cdot B)$ le coefficient de Hall. Préciser comment on peut mesurer expérimentalement R_H . A priori, quel est le signe prévu pour R_H par le modèle précédent? Comment justifier néanmoins l'existence de métaux pour lesquels R_H est de signe contraire? Doit-on alors modifier le mécanisme proposé pour le transfert des forces magnétiques?
- 2.4. On considère maintenant un semi-conducteur intrinsèque dans lequel les électrons et les « trous » ont la même mobilité. Quelle est la valeur du champ de Hall E_H ? Quel(s) autre(s) phénomène(s) doit-on prendre en compte pour interpréter le transfert des forces magnétiques?

3. Travail mécanique des forces de Laplace.

- 3.1. Travail des forces de Laplace s'exerçant sur un circuit filiforme placé dans un champ magnétique imposé, lors d'un déplacement élémentaire du circuit.

En précisant bien leurs conditions de validité, donner les expressions reliant ce travail $\delta \mathcal{E}_D$ au « flux coupé » $\delta \Phi_c$ par le circuit lors de son déplacement ainsi qu'à la variation $d\Phi$ du flux magnétique à travers le circuit.

Tournez la page S. V. P.

- 3.2. En déduire l'existence d'une énergie potentielle magnéto-statique U_p d'un circuit filiforme rigide parcouru par un courant constant et placé dans un champ magnétique extérieur constant et imposé.
Application à la détermination du torseur résultant des forces de Laplace s'exerçant sur un circuit rigide placé dans un champ magnétique constant.
- 3.3. Énergie potentielle d'interaction U_p d'un dipôle magnétique placé dans un champ magnétique extérieur constant. Actions mécaniques exercées par le champ sur le dipôle.

4. Énergie magnétique.

Dans cette partie, on suppose connus, pour un système de circuits filiformes, les coefficients d'inductance M_{jk} (avec $j \neq k$) et d'auto-inductance $L_k = M_{kk}$.

- 4.1. Mise en évidence expérimentale de l'énergie magnétique U_p d'un circuit filiforme parcouru par un courant I .
Expression de cette énergie.
- 4.2. Énergie magnétique U_p d'un système de deux circuits filiformes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 rigides et fixes. Pour ce système, justifier la décomposition de l'énergie magnétique en la somme des énergies magnétiques propres de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 et de l'énergie mutuelle des deux circuits. Y a-t-il une décomposition analogue en électrostatique (cf. I.3)?
- 4.3. Soit un système de deux circuits filiformes rigides \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 ; en considérant les générateurs qui les alimentent à l'extérieur du système, établir un bilan énergétique pour les deux transformations suivantes :
- i) Les circuits sont fixés dans les positions b_1 et b_2 ; on établit alors les courants I_1 et I_2 dans ces circuits.
 - ii) Les circuits sont infiniment éloignés l'un de l'autre et occupent les positions a_1 et a_2 ; on établit alors les courants I_1 et I_2 . On rapproche ensuite les circuits, en maintenant les intensités I_1 et I_2 constantes, des positions a_1 et a_2 aux positions finales b_1 et b_2 .

Comparer les résultats obtenus.

- 4.4. Généralisation : énergie magnétique d'un système de n circuits filiformes. Pour un tel système, exprimer un bilan énergétique lors d'un transfert élémentaire virtuel à partir d'une configuration d'équilibre mécanique; on notera δW_G le travail élémentaire fourni par les générateurs contre les f.e.m. d'induction et δW_D le travail élémentaire mécanique de déplacement fourni par un opérateur externe.

En déduire une méthode de calcul du torseur résultant des actions électromagnétiques (forces de Laplace) s'exerçant sur l'un des circuits rigides d'un système de n circuits. Comparer aux résultats obtenus en 3.2.

- 4.5. Énergie magnétique U_p d'un système englobant tous les courants agissants, répartis continûment en volume (on procédera directement à partir de l'énergie cédée aux courants dans la phase d'établissement de ces courants).

Montrer que le formalisme permet d'étendre les résultats établis en 4.1. et 4.2. à des circuits filiformes déformables.

- 4.6. Expression de l'énergie magnétique en fonction du champ magnétique \vec{B} . Notion de densité volumique d'énergie magnétique.

Déduire de considérations énergétiques certaines inégalités satisfaites par les M_{jk} .

5. Applications.

- 5.1. Soit un circuit unique, déformable, d'auto-inductance L . Déduire du bilan énergétique le travail des forces intérieures magnétiques lors d'une déformation élémentaire du circuit, dans laquelle son auto-inductance varie de dL .

Montrer que, même si l'intensité est maintenue constante à la valeur I , ce travail n'est pas égal à $I \cdot d\Phi$, où $d\Phi$ est la variation du flux à travers le circuit; interpréter.

5.2. On considère deux solénoïdes S_1 et S_2 , circulaires, coaxiaux, de longueurs l_1 et l_2 ($l_2 < l_1$), de rayons a_1 et a_2 ($a_2 < a_1$), de nombres totaux de spires N_1 et N_2 . Ils sont parcourus par des intensités I_1 et I_2 positives pour les sens indiqués sur la figure 4. On repère la position relative des solénoïdes par l'abscisse x du point A (fig. 4).

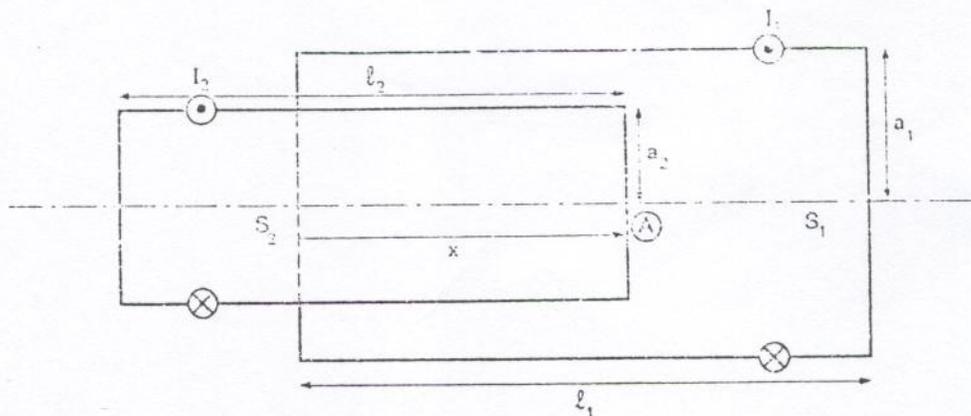


Figure 4

On admettra la validité des approximations concernant les solénoïdes très longs; on les assimilera d'autre part à des nappes surfaciques de courant.

- 5.2.1. Calculer directement l'énergie magnétique totale du système $S_1 \cup S_2$. Pour ce calcul, on considérera \vec{B} créé par chaque solénoïde comme nul à son extérieur.
- 5.2.2. En déduire les coefficients d'inductance M_{jk} ; vérifier qu'ils satisfont aux propriétés générales obtenues en 4.6.
- 5.2.3. Calculer la force magnétique $F(x)$ s'exerçant sur le solénoïde S_2 . Représenter le graphe de $F(x)$ pour $x \in]-\infty, +\infty[$.
Commenter le résultat obtenu compte tenu des approximations utilisées. Proposer un graphe, qualitatif, plus réaliste.

III. ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Dans cette partie, on ne fait aucune hypothèse a priori quant aux régimes considérés.

1. Densité et flux d'énergie électromagnétique.

- 1.1. Montrer, au moyen de considérations qualitatives sur des exemples simples, qu'il est naturel d'associer à la présence d'un champ électromagnétique une densité volumique d'énergie $u(M, t)$ et à la propagation du champ un flux, de densité de courant d'énergie $\vec{R}(M, t)$.

Les questions qui suivent ont pour but de préciser les expressions de u et \vec{R} .

- 1.2. Montrer que des considérations relativistes conduisent à envisager des bilans locaux pour la charge ou l'énergie. En prenant comme exemple la conservation de la charge électrique, rappeler la structure mathématique d'une loi de conservation locale pour une grandeur scalaire.
- 1.3. Écrire, à l'aide des densités u et \vec{R} , le bilan local de l'énergie électromagnétique, en présence de charges électriques en mouvement.
- 1.4. Montrer que les équations de Maxwell sont compatibles avec un tel bilan local et en déduire les expressions « habituelles » de u et \vec{R} (vecteur de Poynting) en fonction des champs \vec{E} et \vec{B} , de ϵ_0 et μ_0 .

Tournez la page S. V. P.

- 1.5. Pour illustrer ce qui précède, on considère le système constitué d'un conducteur cylindrique, homogène, de conductivité γ , de rayon a ; il relie deux plans parallèles, parfaitement conducteurs, portés à des potentiels différents (fig. 5). On admettra que le régime est stationnaire et que la densité volumique de courant dans le cylindre est uniforme.

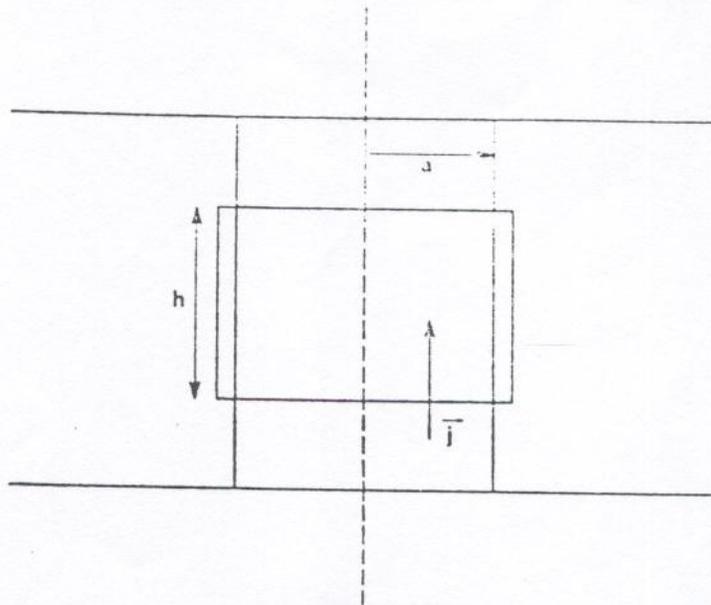


Figure 5

Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers la surface limitant un tronçon de hauteur h du conducteur cylindrique (fig. 5). Interpréter le résultat.

2. Application.

On considère une onde électromagnétique se propageant dans le vide, parallèlement à Oy , entre deux plans infiniment conducteurs d'abscisses $x = 0$ et $x = a$ et dont le champ électrique au point M , à l'instant t , est :

$$\vec{E}(M, t) = E(M, t) \cdot \vec{e}_z \quad \text{où} \quad E(M, t) = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos(\omega t - ky)$$

- 2.1. Calculer k en fonction de ω ; en déduire la vitesse de phase v_ϕ de l'onde.
- 2.2. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ de l'onde. Pour toute grandeur $f(M, t)$ associée à cette onde, on note \bar{f} la moyenne temporelle sur une période et $\langle f \rangle$ la moyenne spatiale par rapport à la variable x sur l'intervalle $(0, a)$.
- 2.3. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique de l'onde $u(M, t)$ puis les moyennes : \bar{u} et $\langle \bar{u} \rangle$.
- 2.4. Calculer le vecteur de Poynting \vec{R} puis les moyennes temporelles de ses composantes : $\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z$; discuter les résultats obtenus.
- 2.5. On pose : $v_e = \frac{\langle \bar{R}_y \rangle}{\langle \bar{u} \rangle}$. Interpréter v_e comme vitesse de propagation de l'énergie. Calculer explicitement v_e en fonction de c, ω et a . Comparer v_e et v_ϕ et commenter le résultat obtenu.

IV. ASPECTS THERMODYNAMIQUES

1. Soit à nouveau le système de n conducteurs dans le vide, décrit en I.3.; on le considère ici comme un système thermodynamique en équilibre thermique avec un thermostat à la température T . Les générateurs, auxquels sont éventuellement reliés les conducteurs, sont à l'extérieur du système.

1.1. Appliquer au système précédent les deux principes de la thermodynamique pour une transformation élémentaire et réversible dans laquelle il y a à la fois échange de chaleur δq , de travail électrique des générateurs δW_G et de travail mécanique de déplacement δW_D .

Préciser les conditions à imposer pour qu'il y ait réversibilité.

1.2. Montrer que, pour une transformation élémentaire, réversible, isotherme et dans laquelle la géométrie du système est conservée (conducteurs rigides et fixes), on a :

$$dF = \sum_i V_i dQ_i$$

où F est l'énergie libre du système thermodynamique.

1.3. En déduire que l'énergie électrostatique U_e du système de conducteurs peut être considérée comme la variation de son énergie libre lors de la charge réversible, isotherme, à géométrie fixée, des conducteurs.

2. Soit, dans le vide, une sphère conductrice métallique, incompressible mais dont le rayon R est fonction de la température T .

2.1. Exprimer l'énergie libre $F(Q, T)$ de la sphère chargée en fonction de sa charge Q et de son énergie libre $F(0, T)$ quand elle n'est pas chargée.

2.2. En déduire l'entropie S de la sphère chargée ainsi que son énergie interne U .

2.3. Montrer que lors d'une charge isotherme et réversible de la sphère, il y a échange de chaleur avec le milieu extérieur. Soit q la quantité de chaleur reçue par la sphère lors de la charge et U_e l'énergie électrostatique; calculer le rapport q/U_e en fonction de la température T et du coefficient de dilatation linéaire λ de la sphère.

2.4. *Application numérique* : calculer le rapport q/U_e pour une sphère de cuivre à $T = 300$ K, sachant que $\lambda = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Conclusion.

3. La sphère conductrice précédente est supposée compressible et parfaitement élastique : pour faire passer son rayon de la valeur initiale R à une valeur r il faut exercer, en chaque point de sa surface, une contrainte normale :

$$p = k \cdot \frac{(r - R)}{R}, \text{ où } k \text{ est une constante (à température fixée).}$$

3.1. Montrer qu'une charge isotherme et réversible de la sphère est accompagnée d'une variation de son rayon de R à R' ; calculer $\Delta R = R' - R$. (On supposera $\Delta R \ll R$.)

3.2. Peut-on écrire à nouveau l'égalité de la variation de l'énergie libre de la sphère entre les états non chargé et chargé et de son énergie électrostatique U_e ?

Soit $F(0, T, r)$ l'énergie libre de la sphère non chargée; calculer la variation : $F(0, T, R') - F(0, T, R)$ associée à la variation du rayon de la sphère de R à R' sous l'effet d'une contrainte normale.

En déduire le rapport de cette variation à l'énergie électrostatique U_e de la sphère chargée en fonction de k , R , ϵ_0 et du potentiel V de la sphère.

3.4. *Application numérique*.

Calculer le rapport précédent pour une sphère de cuivre de rayon $R = 2$ cm portée au potentiel $V = 10^5$ volts.

On donne $k = 4 \cdot 10^{11}$ Pa.

Conclusion.

4. En généralisant ce qui précède, justifier le « découplage » de l'énergie électrostatique d'un système de conducteurs des autres formes d'énergie intervenant dans l'analyse thermodynamique du système.