SESSION DE 1989

SCIENCES PHYSIQUES. - Option : PHYSIQUE

Épreuve A

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

FORMULAIRE

Les candidats pourront utiliser les identités suivantes, en donnant leur numéro de référence.

(1) $$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$$

(2) $$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \wedge \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$$

(3) Laplacien d'un champ scalaire U en coordonnées cylindriques r, θ, z :

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \vec{\nabla}^2 U$$

(4) Formule du gradient :

$$\oiint_{(\Sigma)} U\,\overrightarrow{dS} = \iiint_{(V)} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U\,d\tau\,.$$

(Σ) est une surface fermée limitant un volume (V).

U est un champ scalaire.

Tournez la page S.V.P.

I. LOIS GÉNÉRALES DE LA MÉCANIQUE NEWTONIENNE DES SYSTÈMES MATÉRIELS CONTINUS

1. Éléments d'inertie d'un système matériel continu.

1.1. Masse d'un système matériel ; centre d'inertie.

1.2. Moments d'inertie d'un solide.

1.2.1. Définition du moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe Δ .
Unités.

1.2.2. Établir le théorème d'Huygens.

1.2.3. *Exercice.*
Calculer les moments d'inertie d'un cylindre plein, homogène de masse m, de section droite circulaire de rayon R , par rapport à son axe et par rapport à une génératrice.

2. Cinétique des systèmes matériels continus fermés.

2.1. Champ des quantités de mouvement d'un système matériel *continu.*

2.1.1. Définir la résultante cinétique (ou quantité de mouvement) d'un système matériel par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$, à une date t; l'exprimer en fonction du mouvement du centre d'inertie.

2.1.2. Définir le référentiel barycentrique d'un système matériel fermé, relatif à un référentiel $\mathcal{R}$.

2.1.3. Définir le moment cinétique en P d'un système matériel par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$, à une date t ainsi que le moment cinétique d'un système matériel par rapport à un axe Δ fixe.
Énoncer le théorème de Kœnig pour le moment cinétique.

2.1.4. Établir l'expression du moment cinétique par rapport à un axe Δ d'un solide en rotation de vitesse angulaire ω autour de Δ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$.

2.1.5. *Exercice.*

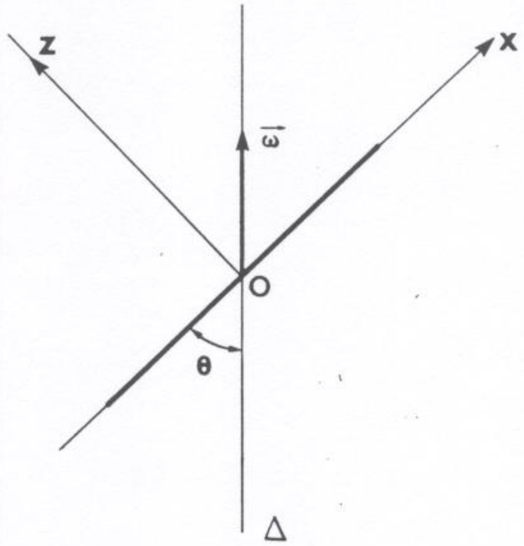


Figure 1

Une tige homogène de masse m, de longueur $2L$, de dimensions transversales négligeables, tourne à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe Δ fixe par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$.

L'axe Δ, dans le plan ZOX (fig. 1), passe par le centre d'inertie O de la tige avec laquelle il fait un angle θ constant.

a. Calculer les composantes sur les axes orthogonaux OXYZ liés à la tige du moment cinétique $\vec{\sigma}_0$ en O par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. En déduire le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Δ.

b. Les deux vecteurs $\vec{\omega}$ et $\vec{\sigma}_0$ ($\vec{\omega}$ = vecteur rotation de la tige dans $\mathcal{R}$) sont-ils colinéaires pour θ quelconque ?

Déduire des calculs précédents les valeurs de θ pour lesquelles les deux vecteurs $\vec{\sigma}_0$ et $\vec{\omega}$ sont colinéaires.

c. Dans le cas plus général du mouvement d'un solide autour d'un point O fixe dans un référentiel $\mathcal{R}$, préciser, sans la démontrer, la relation entre les vecteurs $\vec{\sigma}_0$ et $\vec{\omega}$.

Définir les axes principaux et les moments principaux d'inertie d'un solide en un point O.

2.2. Énergie cinétique d'un système matériel.

2.2.1. Définir l'énergie cinétique d'un système matériel en mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$.

2.2.2 Établir le théorème de Kœnig pour l'énergie cinétique d'un système matériel fermé.

2.2.3. Établir l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en rotation de vitesse angulaire ω autour d'un axe Δ fixe par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$.

3. Principes et théorèmes fondamentaux de la mécanique newtonienne.

3.1. Référentiel galiléen. Système matériel fermé.

3.1.1. Définir un référentiel galiléen.

Tournez la page S.V.P.

3.1.2. Énoncer les relations fondamentales de la dynamique par rapport à un référentiel galiléen.

3.1.3. Établir et énoncer le théorème de l'énergie cinétique pour un système matériel fermé, par rapport à un référentiel galiléen.

3.1.4. *Exercice.*

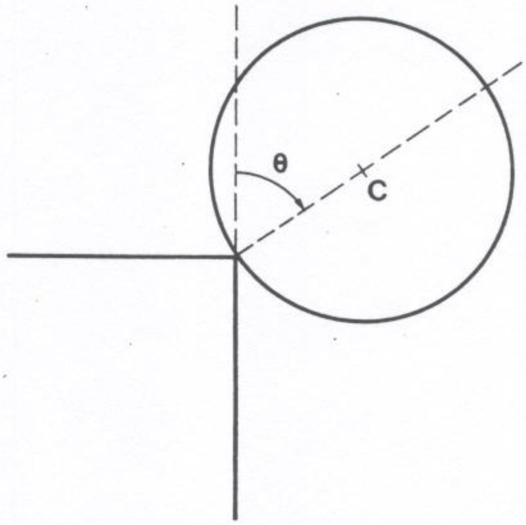


Figure 2

Un cylindre plein homogène, de rayon R, de masse m, est lâché sans vitesse initiale à partir de la position caractérisée par l'angle $\theta = 0$, sur l'arête rectiligne horizontale d'une table.

Le contact cylindre-arête de la table est caractérisé par le coefficient de frottement de glissement f. On néglige tout phénomène de frottement de roulement.

Déterminer les composantes normale et tangentielle de la réaction de l'arête sur le cylindre.

Le mouvement de glissement s'amorce-t-il toujours avant la rupture du contact entre le cylindre et la table ?

3.2. Référentiel galiléen. Système matériel *ouvert*.

3.2.1. Relativement à un référentiel galiléen, le mouvement du centre d'inertie d'un système matériel *ouvert* ne satisfait pas à l'équation vectorielle demandée en 3.1.2.

On se propose d'établir cette relation à partir de l'exemple d'une fusée.

Une fusée se propulse en éjectant vers l'arrière des gaz produits par une réaction chimique avec un débit massique constant a positif et une vitesse d'éjection $\vec{v}_e$ constante par rapport à la fusée.

Montrer que le mouvement du centre d'inertie de la fusée par rapport à un référentiel galiléen obéit, à une date t où la masse et la vitesse de la fusée sont respectivement $m(t)$ et $\overrightarrow{v(t)}$, à une relation de la forme :

$$m(t)\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}_E + \vec{f}_p\,.$$

$\vec{f}_E$ représente la résultante des actions mécaniques extérieures appliquées à la fusée (force de pesanteur, résultante aérodynamique...).

$\vec{f}_p$ représente une force supplémentaire appelée force de poussée dont on donnera l'expression en fonction de a et $\vec{v}_e$.

3.2.2. Transformer la relation établie en 3.2.1. pour en déduire une forme de la relation fondamentale de la dynamique applicable à un système matériel ouvert.

Interpréter cette relation.

3.3. Référentiel non galiléen. Système matériel fermé.

3.3.1. Donner l'expression du principe fondamental de la dynamique pour un système fermé en mouvement par rapport à un référentiel non galiléen. Notion de forces d'inertie ; exemples.

3.3.2. Le théorème de l'énergie cinétique est-il applicable dans un référentiel non galiléen ?

3.3.3. Donner une définition pratique d'un référentiel galiléen.

Le référentiel géocentrique peut-il être considéré comme galiléen ? Citer un exemple de mouvement pour lequel l'approximation n'est pas valable.

4. Lois de conservation en mécanique newtonienne.

4.1. Conservation de l'énergie mécanique.

4.1.1. Notion d'énergie potentielle d'un système matériel ; exemple.

4.1.2. Établir et énoncer la loi de conservation de l'énergie mécanique pour un système matériel fermé, isolé.

Est-elle toujours vérifiée ?

4.2. Conservation des grandeurs cinétiques d'un système isolé.

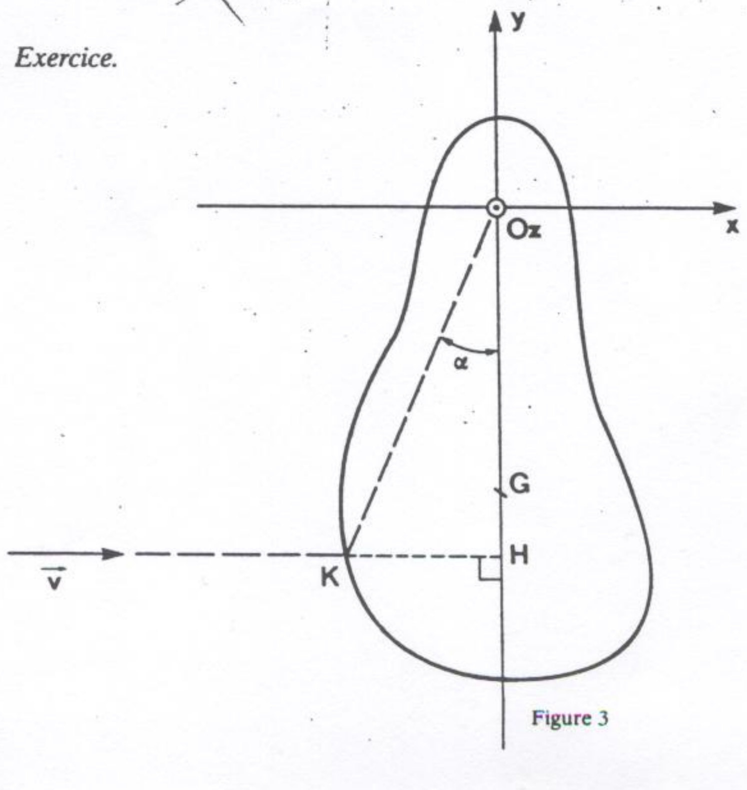
4.2.1. Énoncer la loi de conservation de la quantité de mouvement.

Donner un exemple.

4.2.2. Énoncer la loi de conservation du moment cinétique.

Donner un exemple.

4.3. *Exercice.*



on note $OH = \ell$

$OG = a$

Figure 3

Un solide peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal Oz fixe par rapport au référentiel terrestre. On désigne par M sa masse, G son centre d'inertie et J son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz.

À une date $t = 0$, un projectile de dimensions négligeables, de masse m, de vitesse $\vec{v}$ horizontale, orthogonale à Oz, heurte le solide au repos, en un point K où il reste collé.

a. Déterminer la vitesse angulaire ω de l'ensemble, immédiatement après le choc, en fonction de m, l, v, J et α.

b. Exprimer les composantes, sur les axes Ox et Oy, de la quantité de mouvement du système projectile-solide, immédiatement après le choc, en fonction de M, a, ω, m, l et α.

c. Pour quelles valeurs de l et α la réaction du solide sur l'axe est-elle nulle ?

Déterminer alors l'énergie cinétique du système, immédiatement après le choc, en fonction de m, v, l et J.

En déduire l'expression de la vitesse v du projectile en fonction de g, l, J, m et θ l'élongation angulaire maximale après le choc.

II. MÉCANIQUE DES FLUIDES

Dans cette partie, on se propose d'appliquer les théorèmes fondamentaux de la mécanique à un système fluide dont on étudie le mouvement par rapport à un référentiel galiléen.

Les grandeurs relatives à un élément de fluide appelé particule fluide qui se trouve en un point M à une date t sont :

- sa vitesse $\vec{v}(M, t) = \vec{v}$;
- sa masse volumique $\rho(M, t) = \rho$;
- sa pression $p(M, t) = p$;
- la force volumique extérieure agissant sur le fluide $\vec{f}_v(M, t) = \vec{f}_v$.

1. Introduction à la mécanique des fluides.

1.1. Établir la relation de continuité qui traduit localement la loi de conservation de la masse d'un système fluide.

1.2. Quelle forme prend cette relation dans le cas d'un fluide homogène, incompressible ?

1.3. On isole fictivement un volume de fluide limité par une surface fermée. Pourquoi les actions mécaniques exercées par le fluide extérieur sur le fluide intérieur peuvent-elles être schématisées par des actions de surface ?

1.3.1. Dans le cas d'un fluide au repos ou d'un fluide sans viscosité, ces actions se limitent aux forces de pression.

a. Définir la pression en un point d'un fluide.

b. Montrer que les forces de pression exercées sur une particule fluide en M par le fluide qui l'entoure, sont équivalentes à une distribution volumique de forces dont la densité volumique $\vec{f}(M, t)$ est donnée par la relation :

$$\vec{f}(M, t) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}_M \, p(M, t).$$

1.3.2. Un fluide réel présente de la viscosité.

a. Définir la force de viscosité et la force de pression exercées sur un élément de surface dS au sein d'un fluide en mouvement.

Préciser leurs caractères essentiels (direction, sens, effet) ainsi que leur origine.

b. Définir le coefficient de viscosité η en un point d'un fluide incompressible, en écoulement laminaire.

Préciser ses dimensions et ses unités dans le système SI.

Comment varie η avec la température ?

Donner des ordres de grandeurs pour quelques fluides usuels.

2. **Statique des fluides par rapport à un référentiel galiléen.**

2.1. Établir la relation fondamentale de la statique des fluides dans un champ de forces extérieures de densité volumique $\vec{f}_v(\mathrm{M})$.

2.2. *Exercice.*

L'air atmosphérique est assimilé à un gaz parfait dont la température T_0 est supposée uniforme (atmosphère isotherme). On désigne par p_0, T_0, ρ_0 ses caractéristiques au niveau du sol à l'altitude $z = 0$.
Établir la loi de répartition de la pression $p(z)$ avec l'altitude dans l'atmosphère en équilibre dans le champ de pesanteur terrestre supposé uniforme d'intensité $g > 0$.

Application numérique.

Calculer la diminution de pression en millimètre de mercure par mètre d'altitude au voisinage de la pression normale.

On donne : $p_0 = 1{,}01 . 10^5$ Pa,
$\rho_0 = 1{,}225\ \mathrm{kg.m^{-3}}$,
masse volumique du mercure : $\rho_{Hg} = 13{,}6 . 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$.

Discuter les hypothèses de l'exercice.

3. **Dynamique des fluides incompressibles, non visqueux.**

3.1. Établir l'équation locale du mouvement d'un fluide incompressible, non visqueux (équation d'Euler).

3.2. Fluide incompressible, non visqueux, en écoulement permanent.

3.2.1. Déduire de l'équation d'Euler la relation de Bernoulli pour un écoulement dans un champ de pesanteur uniforme.

Donner une interprétation énergétique de cette équation.

Tournez la page S.V.P.

3.2.2. *Exercice.*

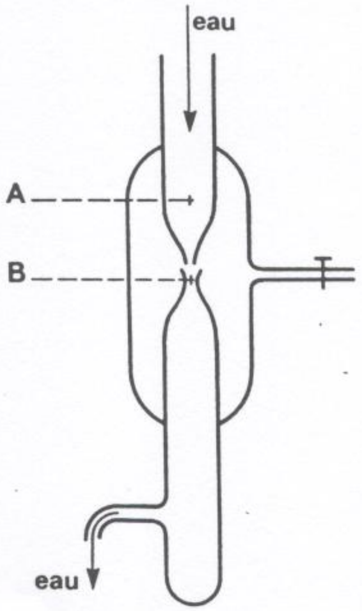


Figure 4

Expliquer le principe de fonctionnement d'une trompe à eau schématisée sur la figure 4.

En négligeant la dénivellation entre les points A et B et en supposant l'écoulement laminaire, exprimer la dépression $p_B - p_A$ dans l'eau en écoulement permanent en fonction du rapport $\frac{S_A}{S_B}$ des aires des sections droites de la veine d'eau en A et B, de la masse volumique ρ de l'eau et de la vitesse d'écoulement v_A au niveau de la section A.

Application numérique.

Calculer cette dépression pour $\frac{S_A}{S_B} = 5$, $v_A = 1\ \mathrm{m.s^{-1}}$, $\rho = 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$

4. **Dynamique des fluides visqueux incompressibles.**

4.1. L'équation du mouvement d'un fluide homogène, incompressible, de viscosité η , en l'absence de forces extérieures s'écrit :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p + \eta\, \overrightarrow{\Delta v} \text{ (équation de Navier-Stokes)} .$$

L'intégration de cette équation nécessite la connaissance de conditions aux limites.

Préciser les conditions aux limites au contact d'une paroi dans un fluide visqueux.

4.2. On considère un écoulement laminaire permanent d'un tel fluide dans une canalisation horizontale rectiligne, de section circulaire de rayon R, d'axe Oz. La longueur de la canalisation est L, les pressions en amont et en aval étant respectivement P_1 et P_2.

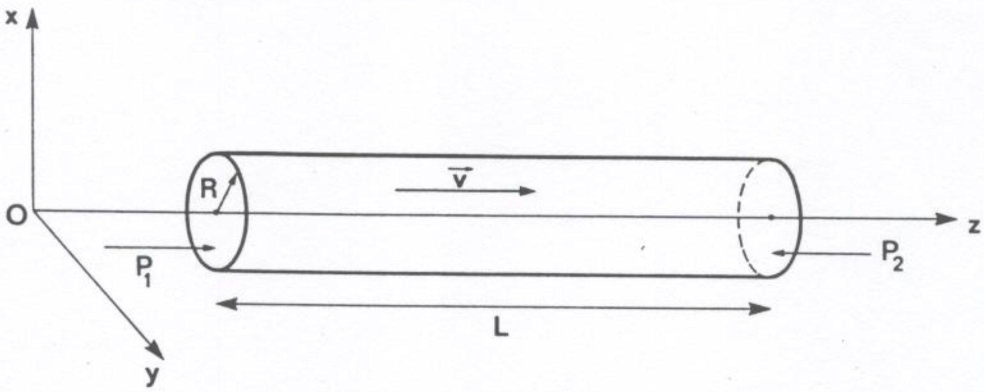


Figure 5

4.2.1. Montrer que la pression du fluide ne dépend que de la coordonnée z et que la vitesse d'écoulement v ne dépend que de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4.2.2. Montrer que la composante de $\overrightarrow{\text{grad}}\, p$ suivant l'axe Oz est constante le long de la canalisation.

En déduire la vitesse $v(r)$ du fluide à la distance r de l'axe en fonction de $P_1 - P_2$, L, η, R et r.

Donner l'expression de la vitesse moyenne dans la canalisation.

4.2.3. Exprimer le débit en volume D_v en fonction de L, $P_1 - P_2$, η et R.

En déduire une méthode de mesure de la viscosité d'un fluide.

Citer d'autres méthodes.

4.3. Définir le nombre de Reynolds pour un écoulement donné.

Préciser l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds critique séparant le régime laminaire du régime turbulent pour une canalisation cylindrique parcourue par un fluide visqueux incompressible.