SESSION DE 1990

SCIENCES PHYSIQUES. - Option : PHYSIQUE

Épreuve A

COMPOSITION DE PHYSIQUE

DURÉE : 5 heures

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

VIBRATIONS ET ONDES ÉLASTIQUES

1. **Oscillateurs à un degré de liberté.**

1.1. *Oscillateur harmonique non amorti.*

1.1.1. Fournir sa définition analytique et l'illustrer sur deux exemples simples choisis dans des domaines différents de la physique.

1.1.2. Rappeler la définition du régime d'oscillations libres.

Déterminer la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.

Tournez la page S.V.P.

1.1.3. Effectuer sur l'exemple du dispositif de Hooke (masse m, astreinte à se mouvoir en translation rectiligne sur un axe galiléen Ox et soumise à la seule action d'un ressort de raideur α) l'analyse énergétique du régime d'oscillations libres.

Préciser en particulier les notions de conversion et de conservation énergétiques.

Déterminer la relation entre énergie mécanique E_m et amplitude A de l'oscillation.

1.1.4. Exercice : *vibrations longitudinales de la molécule de monoxyde de carbone CO.*

La molécule de monoxyde de carbone CO, supposée isolée, est modélisée selon le schéma de la figure 1. La force exercée par l'atome de carbone, de masse m, sur celui d'oxygène, de masse M, est supposée élastique de constante de Hooke α.

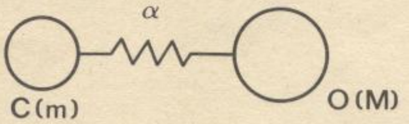

Figure 1

Rappeler, sans démonstration, la réduction canonique, en mécanique classique, du problème à deux corps.

On notera μ la masse réduite du système.

En déduire la fréquence propre de vibration longitudinale de la molécule CO, soit ν_0.

Application numérique.

On lit dans une table de données que le nombre d'ondes σ_0 (correspondant à ν_0) de $^{12}C^{16}O$ vaut 2 170 cm^{-1}. En déduire la constante de force α.

On donne le nombre d'Avogadro $N_A = 6{,}02.10^{23}$ mol^{-1} et la célérité de la lumière dans le vide $c = 3.10^8$ m . s^{-1}.

1.2. *Oscillateur avec frottement de type fluide visqueux.*

1.2.1. Établir à propos de l'exemple du dispositif de Hooke, soumis de plus à une force de frottement $F = -f\,dx/dt$, de type fluide visqueux, l'équation du régime d'oscillations libres, en utilisant la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement $\gamma = \dfrac{f}{2\,m\,\omega_0}$.

1.2.2. Définir en fonction de l'amortissement γ, les trois types analytiques de régime d'oscillations libres.

Donner l'expression de τ, temps de relaxation pour l'élongation.

Préciser alors dans quelle condition on peut parler de régime transitoire et de régime permanent dans l'étude d'un oscillateur forcé.

1.2.3. Qu'appelle-t-on réponse permanente sinusoïdale d'un oscillateur « forcé » harmoniquement ?

Calculer, en fonction de l'amortissement, la réponse fréquentielle en amplitude d'élongation.

1.2.4. Rappeler les caractéristiques essentielles de la réponse fréquentielle en vitesse (amplitude et déphasage par rapport à l'élongation).

Intérêt pratique ?

1.2.5. Calculer la puissance moyenne temporelle en régime sinusoïdal permanent $<P>(\omega)$ fournie par l'excitateur à l'oscillateur.

En déduire la condition de résonance de l'oscillateur.

1.2.6. Considérant le cas d'un oscillateur très peu amorti (notion à préciser par une inégalité forte), effectuer l'analyse énergétique des oscillations libres sur une durée intermédiaire entre le temps de relaxation τ et la pseudo-période T.

Préciser alors quantitativement l'évolution temporelle de l'énergie mécanique $E_m(t)$.

Définir le facteur de qualité énergétique Q et le calculer en fonction de γ.

On n'oubliera pas de fournir les différents types d'énergie mis en jeu sur l'exemple d'illustration choisi.

1.2.7. Exercice : *étude d'un séismographe élémentaire.*

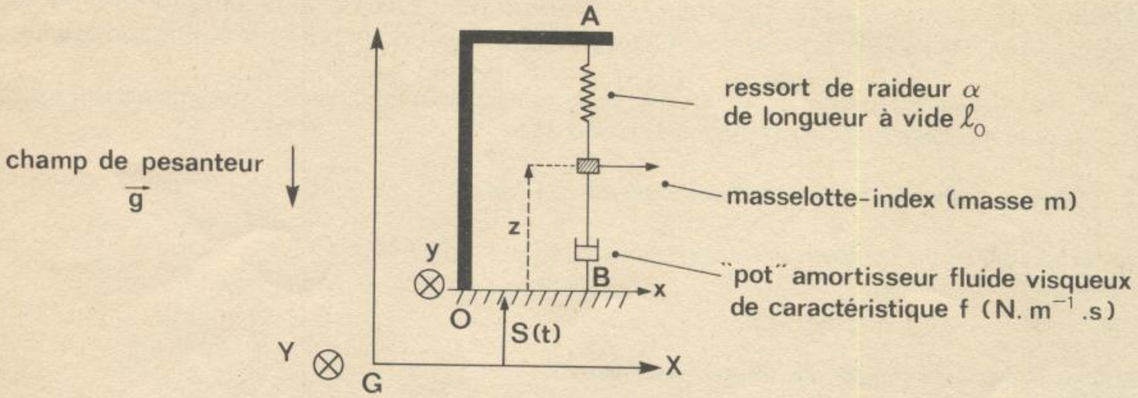

Figure 2

Le bâti rigide d'un séismographe est soudé en O au sol horizontal Oxy.

La masselotte dotée de son index, de masse m, est accrochée à un ressort sans masse de raideur α, de longueur à vide l_0.

Le ressort est fixé en A au bâti. ($AB = h > l_0$).

On note $z(t)$ l'altitude du centre d'inertie de la masselotte-index au-dessus du sol Oxy.

On suppose la masselotte astreinte à un mouvement de translation verticale.

Le tout est amorti de façon « fluide visqueux » (d'où la présence du pot amortisseur).

Le champ de pesanteur d'intensité g est supposé uniforme et constant.

Le mouvement de « tremblement » du sol est idéalisé par une vibration sinusoïdale : $S(t) = S_0 \cos \omega t$ avec $S_0 \geqslant 0$, $\omega \geqslant 0$, et où $S(t)$ représente la cote du sol Oxy, à la date t, au-dessus du plan galiléen GXY.

On notera $Z = z - z_0$, où z_0 représente l'altitude (par rapport au sol Oxy) d'équilibre de la masselotte-index en l'absence de tremblement du sol.

Déterminer l'amplitude complexe $\underline{Z}$ de Z en régime sinusoïdal permanent en fonction de S_0, de $x = \omega / \omega_0$ (où ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur non amorti) et de Q le facteur de qualité de l'oscillateur amorti.

Tracer le graphe de $|\underline{Z}| / S_0$ en fonction de x pour $Q = 1$.

Comment choisit-on ω_0 en pratique ?

2. **Système oscillant à deux degrés de liberté, non amorti.**

2.1. Donner deux exemples d'oscillateur à deux degrés de liberté, choisis dans des domaines différents de la physique.

2.2. Rappeler la définition des modes et pulsations propres de vibration.

Tournez la page S.V.P.

2.3. Exercice : *vibrations longitudinales de la molécule de dioxyde de carbone* CO_2.
On considère une molécule de CO_2 isolée, modélisée selon le schéma de la figure 3.

Les deux liaisons, identiques, C—O sont caractérisées par la même constante de Hooke α.

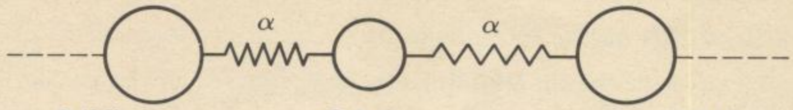

Figure 3

On note u_1, u_2, u_3 les écarts algébriques (comptés suivant l'axe de vibration) des positions actuelles des atomes O (masse M), C (masse m), O, respectivement par rapport à leurs positions d'équilibre.

a. Écrire dans le référentiel barycentrique de la molécule, le lagrangien L du système, en fonction de u_1, u_2 et des dérivées temporelles correspondantes.

b. Calculer analytiquement pulsations et modes propres.

c. Donner la forme la plus générale des vibrations longitudinales de CO_2.

3. **Système oscillant à N degrés de liberté, non amorti.**

3.1. *Cas d'un cristal monoatomique unidimensionnel infini.*

On considère une chaîne linéaire infinie d'atomes identiques, de masse m, qui au repos se trouvent sur l'axe des ξ à l'abscisse $\xi_{p,0} = p\,a$ (p entier relatif et $a > 0$).

On suppose que l'atome de numéro p est lié seulement à ses deux plus proches voisins par des forces de liaison, identiques, de Hooke, de raideur α.

On note x_p le déplacement longitudinal algébrique, par rapport à la position de repos, de l'atome de numéro p, soit $x_p = \xi_p(t) - \xi_{p,0}$.

3.1.1. Établir, dans le cadre de la mécanique classique, l'équation du mouvement vibrationnel longitudinal de l'atome de rang p.

3.1.2. Établir la relation de dispersion des ondes longitudinales de type :

$$x_p = A \exp\left[i(\omega t - kpa)\right]$$

qui peuvent se propager le long de la chaîne d'atomes.

3.1.3. Étudier la fonction $\omega(k)$, réduite à la première zone de Brillouin ($k \in [-\pi/a, \pi/a]$).

Tracer le graphe de la courbe de dispersion.

Signification physique de la parité de la fonction $\omega(k)$?

3.1.4. Expliquer le qualificatif de « filtre » de fréquences temporelles accordé à la chaîne.

Que se passe-t-il physiquement si on excite initialement la chaîne au point d'abscisse au repos $\xi_{p,0}$ avec une fréquence supérieure à la fréquence de coupure (dont on précisera la valeur littérale ν_0).

3.1.5. Définir et donner le contenu physique de la notion de vitesse de phase des ondes élastiques définies en 3.1.2.

Qu'appelle-t-on vitesse des ondes acoustiques dans la chaîne ?

3.1.6. Que devient l'équation de la question 3.1.1. dans le cadre de l'approximation de milieu continu pour la chaîne d'atomes (variations de x_p en fonction de ξ suffisamment lentes) ?

Quelle est la vitesse de propagation des ondes élastiques dans ce milieu continu ?

3.2. *Cas d'un cristal monoatomique unidimensionnel fini à N atomes.*

La chaîne de la question 3.1. est supposée, toutes choses égales par ailleurs, ne contenir que N atomes, numérotés de 1 à N.

3.2.1. Avec les notations de la question 3.1. écrire les équations différentielles auxquelles satisfont

$$x_1(t),\ x_p(t),\ x_N(t) \qquad \text{avec } 2 \leqslant p \leqslant N-1.$$

On ne cherchera pas à intégrer ces équations différentielles.

3.2.2. Born et Von Kárman ont montré en 1912 qu'on pouvait, sans affecter la distribution des fréquences de vibration longitudinale (pour peu que $N \gg 1$), rajouter virtuellement deux atomes, *fixes,* à gauche et à droite de la file, aux abscisses respectives (comptées le long de $O\xi$) 0 et $(N+1)\,a$.

Ces atomes de numéros 0 et $N+1$ sont supposés liés à ceux de numéro 1 et N respectivement par des forces de Hooke de « raideur » α.

Montrer, dans les conditions de Born et Von Kárman, que des ondes stationnaires de la forme

$$x_p = A \exp[i(\omega t - kpa)] + B \exp[i(\omega t + kpa)]$$

peuvent s'établir le long de la chaîne.

Déterminer les pulsations propres $\omega_r = 2\pi\nu_r$, $(r \in \mathbb{N})$ de cette chaîne linéaire de N atomes en fonction de α et m.

3.2.3. Énoncer l'autre hypothèse émise par Born et Von Kárman, dite « condition cyclique », pour déterminer le spectre des pulsations propres (elle conduit au même résultat que celui de la question 3.2.2.).

3.3. *Loi de Dulong et Petit pour un cristal monoatomique unidimensionnel.*

3.3.1. Rappeler le cadre de « l'approximation classique » de la thermodynamique statistique.

Énoncer dans ce cadre le théorème d'équipartition de l'énergie.

3.3.2. En déduire E, l'énergie vibrationnelle longitudinale, à la température d'équilibre thermodynamique T, du cristal monoatomique à N atomes ci-dessus, ainsi que sa capacité calorifique molaire C.

3.3.3. Ce modèle de cristal excité thermiquement permet-il d'expliquer le phénomène de dilatation ?

4. Aspect quantique de l'oscillateur harmonique.

4.1. *Spectre énergétique de l'oscillateur harmonique non amorti.*

4.1.1. Soit un oscillateur mécanique, de masse m, à une dimension, conservatif, de pulsation propre ω_0.

Écrire la forme de son hamiltonien H (on notera h la constante de Planck).

Écrire l'équation de Schrödinger et rappeler sans démonstration les énergies propres E_n des états stationnaires.

Quelle est la valeur littérale de l'énergie fondamentale vibrationnelle, notée E_0 ?

Expliquer pourquoi, quantiquement, l'oscillateur ne peut être au repos.

Tournez la page S.V.P.

4.1.2. En utilisant la loi de Boltzmann, déterminer la probabilité de trouver l'oscillateur dans son niveau d'énergie E_n à la température T.

On notera k_B la constante de Boltzmann et $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

Définir et calculer la fonction de partition Z_1 de l'oscillateur.

4.1.3. Quelle est l'énergie moyenne statistique $< E_1 >$ de cet oscillateur à un degré de liberté ?

4.2. *Cas de l'oscillateur à N degrés de liberté.*

4.2.1. On considère la chaîne de N atomes étudiée à la question 3.2.2.

On *admet* que l'halmitonien de la chaîne est équivalent à celui de N oscillateurs indépendants de pulsations propres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ (celles trouvées en 3.2.2.).

Quelles sont, dans cette hypothèse, les valeurs possibles de l'énergie E_R du réseau cristallin des N atomes ci-dessus ?

4.2.2. En déduire la fonction de partition Z_N de la chaîne et l'énergie moyenne $< E_R >$ du réseau cristallin unidimensionnel.

Montrer que les résultats précédents peuvent s'interpréter à partir d'un ensemble de bosons occupant les niveaux d'énergie $h\nu_r$.

4.2.3. Que devient $< E_R >$ si $h\nu_r \ll k_B T \cdot (\forall r)$?

En déduire la capacité calorifique molaire C de la chaîne d'atomes. Quel résultat retrouve-t-on ?

4.2.4. Comment varie dans la réalité physique C (T) pour $T \ll \frac{h\nu_r}{k_B} (\forall r)$?

5. **Ondes élastiques dans les milieux continus isotropes.**

5.1. *Approximation acoustique.*

5.1.1. On considère un fluide, isotrope, non visqueux, (dont l'équation d'état thermodynamique est supposée connue), qui, au repos dans un référentiel galiléen, est caractérisé par les champs uniformes ci-dessous :

— le champ vectoriel des vitesses macroscopiques des « particules » fluides, nul au repos, soit $\vec{v}_0 = \vec{0}$;

— les champs scalaires de pression, de masse volumique, de température, notés respectivement P_0, μ_0, T_0.

Lors de la perturbation acoustique, on notera

$$\vec{v}(\vec{r}, t), \qquad P(\vec{r}, t), \qquad \mu(\vec{r}, t), \qquad T(\vec{r}, t)$$

les champs variables spatio-temporellement. De plus :

— lors de la perturbation acoustique, seules les forces de pression interviennent, à l'exclusion de toutes autres;

— la perturbation est thermodynamiquement assimilable à une transformation isentropique, avec un coefficient de compressibilité χ.

Écrire l'équation d'Euler, la relation de continuité (conservation de la masse) et la relation de définition de χ.

5.1.2. Procéder à la linéarisation des équations précédentes dans le cadre de « l'approximation acoustique », celui des petits mouvements au voisinage du repos.

On posera :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1, \qquad P = P_0 + p_1, \qquad \mu = \mu_0 + \mu_1.$$

En déduire les équations différentielles fournissant $\vec{v}_1\,(\vec{r}, t)$, $p_1\,(\vec{r}, t)$, $\mu_1\,(\vec{r}, t)$.

Exprimer la vitesse du son dans le fluide en fonction des données.

5.1.3. Exercice : *vitesse du son dans l'air.*

L'air est assimilé à un gaz parfait diatomique de rapport γ indépendant de T, de masse molaire M.

La constante des gaz parfaits est notée R.

Fournir l'expression littérale de la vitesse c_0 du son dans l'air à la température T_0.

Application numérique.

Calculer c_0 à 0 °C (les autres valeurs numériques sont supposées connues des candidats).

5.2. *Ondes acoustiques planes.*

5.2.1. Soit une onde acoustique plane indépendante de y et z.

Démontrer qu'elle est longitudinale.

Écrire la forme générale de $p_1\,(\vec{r}, t)$.

En déduire $\vec{v}_1\,(\vec{r}, t)$, et $\mu_1\,(\vec{r}, t)$.

5.2.2. Exercice : *aspect énergétique de l'onde acoustique plane progressive harmonique* ω. *Niveau sonore et « conversation ».*

Rappeler les expressions de l'énergie cinétique volumique e_c, attachée à l'onde acoustique, plane, progressive, harmonique ω, ainsi que l'énergie potentielle élastique volumique, e_p, liée à la surpression vibratoire acoustique.

Rappeler la définition de l'intensité sonore I de l'onde acoustique (mesurée en $W \cdot m^{-2}$).

Le niveau sonore est défini en *décibels* (dB) par :

$$N = 10 \log_{10} (I / I_0) \quad \text{avec } I_0 = 10^{-12}\ W \cdot m^{-2}.$$

Quelle est l'amplitude de la surpression acoustique d'une telle onde au niveau du tympan d'une oreille qui perçoit un son de « hauteur » 2 kHz dans une conversation de 50 dB de niveau ?

On donne $\mu_0 = 1{,}2\ kg \cdot m^{-3}$ et $c_0 = 340\ m \cdot s^{-1}$.

Calculer enfin, numériquement, l'amplitude ξ_{1m} du déplacement acoustique.

Commentez les résultats obtenus.