

**SESSION DE 1995**

---

---

**concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés**

---

---

**section : sciences physiques**

option : physique

épreuve A : composition de physique

**Durée : 5 heures**

*L'usage de calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*Tout document est interdit.*

*Les différentes parties, A1, A2, A3, B1, B2, B3, B4, B5 et B6 sont très largement indépendantes.*

## ONDES STATIONNAIRES, MODES PROPRES ET RÉSONANCE

Lorsque l'énoncé demande de décrire brièvement une expérience, il s'agit d'indiquer sur une figure le schéma du dispositif, d'indiquer ce que fait l'expérimentateur, ce qu'il observe et les conclusions qu'il tire de ses observations.

Données numériques.

Célérité des ondes électromagnétiques dans le vide :  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Permittivité diélectrique du vide :  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$ .

Perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$ .

Constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Constante de Planck :  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ .

Constante de Planck réduite :  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ .

Masse de l'électron :  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

Quelques formules utiles.

Trigonométrie :  $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin(3x)$ .

Double produit vectoriel :  $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$ .

Double rotationnel :  $\overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{A}) = \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$ .

Laplacien-vecteur d'un vecteur :  $\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$   
 $\Delta(\vec{A}) = (\Delta A_x) \vec{u}_x + (\Delta A_y) \vec{u}_y + (\Delta A_z) \vec{u}_z$ .

## PARTIE A

## ONDES STATIONNAIRES, MODES PROPRES ET RÉSONANCE EN MÉCANIQUE

## A.1. OSCILLATEURS COUPLÉS.

- A.1.a. Décrire brièvement une expérience mettant en évidence les régimes libres d'oscillation de deux oscillateurs couplés en mécanique. Dégager la notion de **mode propre** (définition et mise en évidence). Dans le cas d'oscillateurs faiblement couplés qu'observe-t-on lorsque à la date  $t = 0$ , on écarte un seul des oscillateurs de sa position de repos ; qu'illustre cette observation ? Quelle est l'influence qualitative des frottements (supposés faibles) ?
- A.1.b. Décrire brièvement une expérience permettant d'étudier la réponse en régime sinusoïdal forcé de fréquence  $f$  de deux oscillateurs couplés en mécanique. Tracer l'allure des graphes donnant l'amplitude des oscillateurs en fonction de la fréquence  $f$  et dégager la notion de **résonance** et d'**antirésonance**. Quelle est l'influence qualitative des frottements (supposés faibles) ?
- A.1.c. On considère la chaîne d'oscillateurs couplés représentée sur la figure 1. Tous les points matériels  $M_n$  ont même masse  $m$  ; à l'équilibre ils sont confondus avec les points  $A_n$  d'abscisse  $na$  où  $n$  est un entier quelconque et  $a$  une constante donnée ; hors d'équilibre, ils sont susceptibles de se déplacer le long de  $Ox$  et on note leur abscisse  $x_n(t) = na + u_n(t)$ .

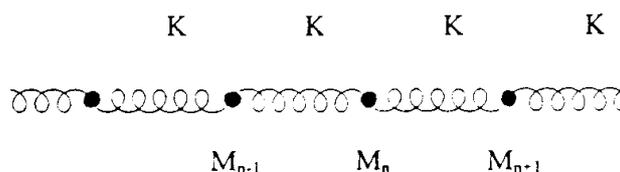


Figure 1

Chaque masse est reliée à ses deux voisines par des ressorts de même longueur à vide égale à  $a$  et de même raideur  $K$ . On ne tient pas compte de la pesanteur.  $u_n$  est assez petit pour qu'il n'y ait pas de choc entre deux points matériels  $M_n$  voisins.

A.1.c.1. Établir l'équation différentielle du mouvement de  $M_n$  et la mettre sous la forme

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + \omega_0^2 \frac{2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}}{2} = 0. \text{ Donner l'expression de } \omega_0 \text{ (en fonction de } m$$

et  $K$ ) et sa dimension.

A.1.c.2. La chaîne est infinie ( $-\infty < n < +\infty$ ). On fait l'**approximation des milieux continus**, c'est-à-dire qu'on définit une fonction  $u(x, t)$  variant très peu à l'échelle de  $a$  et telle que  $u_n(t) = u(x = na, t)$ .

En faisant un développement de Taylor pour  $u_{n+1}(t) - u_n(t) = u(x + a, t) - u(x, t)$  et pour  $u_{n-1}(t) - u_n(t) = u(x - a, t) - u(x, t)$  (à l'ordre 2 en  $a$ ), montrer que  $u(x, t)$  est solution d'une équation de propagation de d'Alembert de la forme

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \text{ où } c \text{ est une constante à exprimer en fonction de } a \text{ et } \omega_0.$$

## A.2. CORDE VIBRANTE.

## A.2.a. Expérience de la corde de Melde.

Décrire brièvement le dispositif de l'expérience de la corde de Melde. Qu'observe-t-on suivant les valeurs de la fréquence  $f$  d'excitation de la corde ?

À quelles(s) mesure(s) quantitative(s) peut donner lieu cette expérience ?

## A.2.b. Équation des cordes vibrantes.

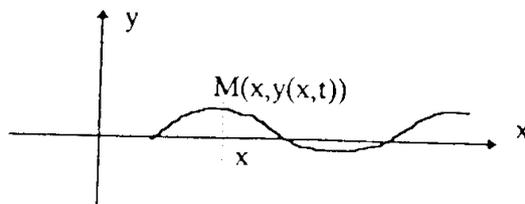


Figure 2

On considère (fig. 2) une corde vibrante de masse linéique  $\mu$ , sans élasticité et sans torsion, se déformant faiblement au voisinage d'un axe  $Ox$  : à l'ordre d'approximation considéré, le point  $M$  qui a pour coordonnées  $(x, 0)$  au repos passe au point de coordonnées  $(x, y(x, t))$  : le déplacement  $y(x, t)$  est un infiniment petit d'ordre un ainsi que l'angle  $\alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}$  que fait la corde au point d'abscisse  $x$  avec l'axe  $Ox$ .

Si on coupe fictivement la corde au point d'abscisse  $x$  (fig. 3), la partie droite de la corde exerce sur la partie gauche une force  $T(x)$  tangente à la corde et la partie gauche exerce sur la partie droite la force opposée  $-T(x)$ .

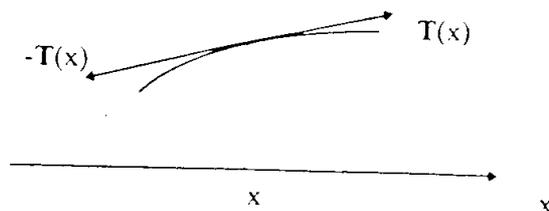


Figure 3

On ne tient pas compte de la pesanteur.

A.2.b.1. En exploitant le principe fondamental de la dynamique pour un élément de corde compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , montrer que  $T_1(x)$  est indépendante de  $x$  (on note sa valeur constante  $T$ ) et que  $y(x, t)$  est solution d'une équation de

propagation de d'Alembert de la forme  $c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$  où  $c$  est une constante

à exprimer en fonction de  $T$  et  $\mu$ .

A.2.b.2. Donner, *sans démonstration*, la forme générale des solutions de cette équation. Définir la notion d'onde *progressive* et donner dans ce cas la signification physique de  $c$ .

A.2.b.3. Proposer des valeurs numériques réalistes pour  $T$  et  $\mu$  et calculer un ordre de grandeur de  $c$ .

### A.2.c. Modes propres.

Dans cette question, la corde est fixée à ses deux extrémités  $x = 0$  et  $x = L$ . Elle n'est soumise à aucune excitation aux dates positives, mais on lui donne une forme  $y(x, t = 0)$  à la date 0 et on l'abandonne sans vitesse initiale, c'est-à-dire que  $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0$ .

A.2.c.1. On cherche une solution du type **mode propre**, c'est-à-dire de la forme  $y(x, t) = f(x) \cdot \cos(\omega t)$ .

Montrer que  $f(x)$  est de la forme  $A \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)$  et que les seules pulsations possibles sont de la forme  $\omega_n = n \cdot \omega_1$  avec  $n$  entier : exprimer la pulsation  $\omega_1$  du mode fondamental en fonction de  $L$  et  $c$ .

Quel lien peut-on faire avec la notion de mode propre pour des oscillateurs couplés ?

A.2.c.2. Écrire une superposition quelconque de modes propres à la date  $t = 0$  et vérifier que l'expression de  $y(x, t)$  prend la forme d'une série de Fourier en  $x$  de période  $2L$  et impaire.

Si on suppose par exemple que  $y(x, 0) = 4b \sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ , déterminer  $y(x, t)$ .

Plus généralement pour  $y(x, 0)$  quelconque, comment construit-on  $y(x, t)$  à partir des modes propres ? Comment expliquez-vous que le mode fondamental domine assez rapidement les harmoniques ?

### A.2.d. Ondes stationnaires — Résonance.

Dans cette question, la corde est fixée à l'extrémité  $x = L$  et on impose avec un vibreur un déplacement sinusoïdal  $y(0, t) = b \cos(\omega t)$  à l'extrémité  $x = 0$ . On cherche en régime sinusoïdal forcé des solutions du type **ondes stationnaires**, c'est-à-dire de la forme  $y(x, t) = f(x) \cdot \cos(\omega t)$ .

A.2.d.1. Comparer brièvement les ondes progressives et les ondes stationnaires.

A.2.d.2. On suppose d'abord que  $\sin\left(\frac{\omega L}{c}\right) \neq 0$ .

Écrire l'équation différentielle dont est solution  $f(x)$  et les conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = L$  ; en déduire l'expression de  $f(x)$  en fonction de  $\omega$ ,  $c$ ,  $b$ ,  $L$  et  $x$ .

Définir la notion de nœud et de ventre de vibration ; quelle est la distance entre deux nœuds successifs ? Le point d'abscisse  $x = 0$  est-il un nœud ?

Montrer que ces solutions sont aussi la superposition de deux ondes planes progressives et interpréter concrètement.

A.2.d.3. Montrer que pour certaines valeurs particulières de la pulsation qu'on précisera, il y a **résonance**. Justifier qu'alors on peut considérer que l'extrémité  $x = 0$  est un nœud de vibration.

Comparer les pulsations de résonance aux pulsations des modes propres et commenter en liaison avec A.1.a. et A.1.b.

Quelle est l'amplitude des ventres à la résonance ? Indiquer brièvement comment il faut améliorer le modèle pour interpréter de manière plus réaliste l'expérience de la corde de Melde.

### A.3. Puits DE POTENTIEL EN MÉCANIQUE QUANTIQUE.

On envisage le mouvement en mécanique quantique d'une particule de masse  $m$  dans un potentiel  $V(x)$  à une dimension ; ce mouvement est décrit par la fonction d'onde  $\psi(x, t)$ .

#### A.3.a. États stationnaires.

Rappeler l'équation de Schrödinger dont est solution  $\psi(x, t)$ .

On s'intéresse à un état tel que  $\psi(x, t) = \phi(x) \cdot \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$ . Pourquoi dit-on d'un tel état qu'il est *stationnaire* ?

Établir l'équation de Schrödinger dont est solution  $\phi(x)$ .

#### A.3.b. Puits de potentiel infini.

On suppose le puits de potentiel infini, c'est-à-dire que  $V(x < 0) = V(x > L) = +\infty$  et  $V(0 < x < L) = 0$  conformément à la figure 4.

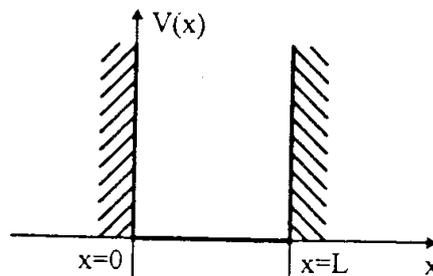


Figure 4

- A.3.b.1. Quelles sont les conditions aux limites imposées en  $x = 0$  et en  $x = L$  ? Déterminer les états propres, c'est-à-dire les solutions  $\phi_n(x)$  et les énergies correspondantes  $E_n$  en faisant apparaître un nombre quantique  $n$ . On normalisera les fonctions  $\phi_n(x)$ .
- A.3.b.2. Représenter les graphes de  $\phi_1(x)$ ,  $\phi_2(x)$  et  $\phi_3(x)$  ; comparer avec les modes propres de la corde de Melde obtenus en A.2.c. pour  $n = 1$ ,  $n = 2$  et  $n = 3$ .
- A.3.b.3. On envisage la superposition  $\psi(x, t) = \frac{\psi_1(x, t) + \psi_3(x, t)}{2}$  des deux états stationnaires  $n = 1$  et  $n = 3$ . Décrire brièvement l'évolution temporelle de la densité de probabilité de présence de la particule au point d'abscisse  $x = \frac{L}{2}$ .
- A.3.b.4. Calculer l'énergie, en électronvolts, du niveau fondamental de l'électron dans les deux cas suivants :
- atome d'hydrogène : on supposera que  $L = 0,1 \text{ nm}$  ;
  - puits quantique semi-conducteur : on supposera que  $L = 10 \text{ nm}$  et que la masse effective de l'électron dans le semi-conducteur est  $m' = 0,07 m_e$ . Comparer cette seconde valeur à l'énergie thermique  $k_B T$  à  $300 \text{ K}$ . Quelle serait la longueur d'onde d'un rayonnement électromagnétique correspondant à une transition entre les deux premiers niveaux électroniques dans le puits ?

## A.3.c. Puits de potentiel fini.

Dans le cas d'un puits de potentiel fini, c'est-à-dire tel que  $V(x < -\frac{L}{2}) = V(x > \frac{L}{2}) = V_0$  et  $V(-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}) = 0$  (cf. fig. 5), on s'intéresse aux états stationnaires liés, c'est-à-dire d'énergie  $E < V_0$ .

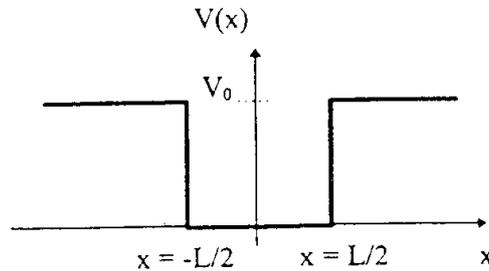


Figure 5

On donne (fig. 6) ci-dessous l'allure du graphe de  $\phi(x)$  pour l'état fondamental :

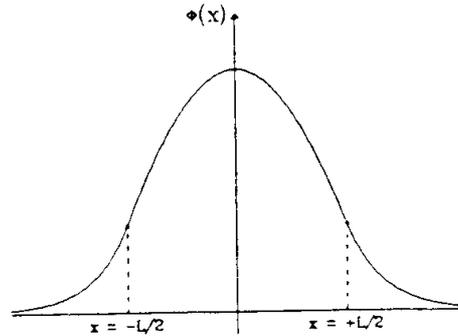


Figure 6

A.3.c.1. Résoudre l'équation de Schrödinger pour  $x < -\frac{L}{2}$  et  $x > \frac{L}{2}$  et justifier l'allure du graphe de  $\phi(x)$  pour  $x < -\frac{L}{2}$  et  $x > \frac{L}{2}$ .

A.3.c.2. Quelles sont les conditions aux limites en  $x = -\frac{L}{2}$  et  $x = \frac{L}{2}$  ? Comment se traduisent-elles sur le graphe de  $\phi(x)$  ?

A.3.c.3. Pour  $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$ , on admet *en première approximation* que  $\phi(x) = A \cos(kx)$  avec  $E_F = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ . À l'aide du graphe de  $\phi(x)$ , prévoir si l'énergie  $E_F$  de l'état fondamental est plus faible ou plus forte que dans le cas d'un puits infini.

A.3.c.4. On suppose que  $V_0 - E_F = 0.4 \text{ eV}$ . Évaluer la largeur de la barrière séparant deux puits identiques successifs pour que ceux-ci présentent un couplage significatif (la particule est un électron). Qu'advient-il du niveau  $E_F$  si les puits sont couplés ?

## PARTIE B

**ONDES STATIONNAIRES, MODES PROPRES  
ET RÉSONANCE EN ÉLECTROMAGNÉTISME**

## B.1. PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE.

## B.1.a. Équation d'ondes.

Rappeler les équations de Maxwell dans le vide en l'absence de toute densité volumique de charges ( $\rho = 0$ ) ou de courants ( $j = 0$ ).

Définir l'opérateur *d'Alembertien*  $\square$  et établir les équations de propagation des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

On s'intéresse à une quelconque des six composantes  $E_x(x, y, z, t)$ ,  $E_y(x, y, z, t)$ ,  $E_z(x, y, z, t)$ ,  $B_x(x, y, z, t)$ ,  $B_y(x, y, z, t)$ ,  $B_z(x, y, z, t)$ , qu'on note  $f(x, y, z, t)$ . De quelle équation (E) est solution  $f(x, y, z, t)$  ?

Définir pour  $f(x, y, z, t)$  la notion d'onde *plane* se propageant dans la direction  $\vec{u}$ . Exprimer sa célérité  $c$  en fonction de  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$ . Quel est le statut actuel de  $c$  en métrologie ? Quelle est l'unité du système SI qui est fixée par le choix de  $\mu_0$  ?

## B.1.b. Structure des ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement.

On s'intéresse dans cette partie à un cas particulier d'une onde électromagnétique plane progressive de la forme :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(\omega t - kx - \phi)$$

où  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{B}_0$  sont des vecteurs constants,  $\phi$  une constante donnée et  $k = \frac{\omega}{c}$ .

Définir la *direction de propagation*  $\mathbf{u}$  de cette onde.

Définir la *direction de polarisation* de cette onde.

En exploitant par exemple les équations de Maxwell en notation complexe, préciser la structure de cette onde : *transversalité* des ondes ; relation entre  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{u}$ . Faire une figure.

Définir l'impédance d'onde  $Z$  pour une telle onde. Calculer la valeur numérique de  $|Z|$ .

Citer un exemple usuel d'ondes *longitudinales* dans un autre domaine de la physique.

B.2. RÉFLEXION SUR UN PLAN MÉTALLIQUE CONDUCTEUR PARFAIT. ONDES STATIONNAIRES.

B.2.a. Effet de peau dans un conducteur.

Rappeler brièvement en quoi consiste l'effet de peau dans un conducteur métallique.

On rappelle que l'épaisseur de peau d'un métal de conductivité  $\gamma$  vaut  $\delta = \left(\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}\right)^{1/2}$ . Donner un ordre de grandeur de  $\gamma$  pour le cuivre et un ordre de grandeur de la longueur d'onde  $\lambda$  d'une onde radio ; calculer dans ce cas un ordre de grandeur de  $\delta$  et commenter.

Expliquer pourquoi il faut éviter d'utiliser des plats métalliques pour réchauffer des aliments dans un four à micro-ondes.

B.2.b. Conditions aux limites imposées par un conducteur parfait.

Définir la notion de conducteur *parfait*. Dans quel cas est-il réaliste de considérer un métal réel comme un conducteur parfait ?

Que peut-on dire des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  dans un conducteur parfait ?

On considère (fig. 7) une interface vide-conducteur parfait en présence de charges surfaciques  $\sigma$  et de courants surfaciques  $\mathbf{j}_s$  ; on note  $\mathbf{n}$  le vecteur normal. Donner sans démonstration les quatre relations de passage concernant les composantes tangentielle et normale des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  à l'interface. Comment se simplifient ces relations compte tenu des valeurs de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  dans le conducteur parfait ?

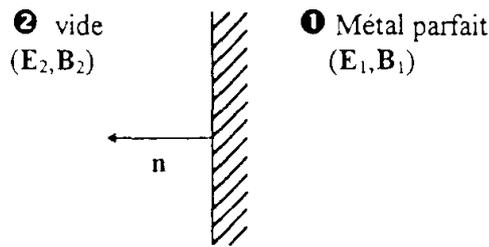


Figure 7

Les valeurs de  $\sigma$  et  $\mathbf{j}_s$  étant quelconques, quelles sont en définitive les seules conditions aux limites imposées par un conducteur parfait ?

B.2.c. Réflexion d'une OPPM sur un plan métallique conducteur parfait.

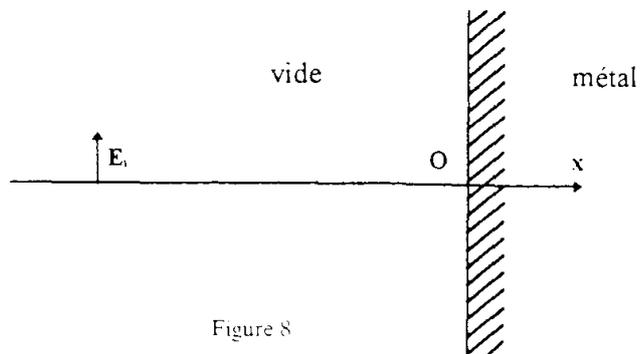


Figure 8

On considère (fig. 8) une onde électromagnétique plane progressive monochromatique polarisée rectilignement telle que  $\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{u}_y$ , incidente sur le plan métallique conducteur parfait confondu avec le plan  $x = 0$ . On cherche dans le domaine  $x < 0$  un champ  $E_0 \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{u}_y + \vec{E}'_0 \cos(\omega t + kx)$ .

Donner brièvement la signification physique de cette superposition d'ondes.

Déterminer  $\vec{E}'_0$  et en déduire une expression factorisée de  $\vec{E}$ .

Déterminer l'expression factorisée correspondante pour  $\vec{B}$ .

Préciser sur une figure la structure de ces ondes stationnaires : positions des nœuds et ventres de  $\vec{E}$ , des nœuds et ventres de  $\vec{B}$ .

Calculer le vecteur de Poynting en tout point, puis sa valeur moyenne temporelle sur une période et conclure.

### B.3. LIGNE BIFILAIRE : IMPÉDANCE ET TAUX D'ONDES STATIONNAIRES.

#### B.3.a. Dispositif expérimental : fils de Lècher.

Décrire brièvement l'expérience des fils de Lècher.

Préciser notamment le principe de fonctionnement du détecteur de champ électrique et du détecteur de champ magnétique.

À quelle(s) mesure(s) quantitative(s) peut donner lieu cette expérience ?

#### B.3.b. Équation d'ondes - Impédance.

Soit une ligne bifilaire d'axe  $x'x$ . On modélise (fig. 9) une tranche de ligne comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  par le schéma de la figure 9 comportant une inductance  $\Lambda dx$  et une capacité  $\Gamma dx$ . On admet que  $\Lambda\Gamma = \frac{1}{c^2}$ .

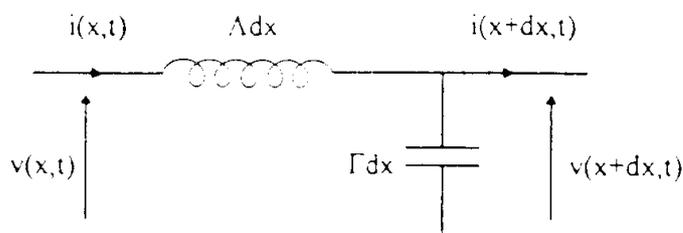


Figure 9

On traite ce circuit dans l'approximation des régimes quasi permanents avec des courants  $i(x,t)$  et  $i(x+dx,t)$  et des tensions  $v(x,t)$  et  $v(x+dx,t)$ .

À quelle condition peut-on faire cette approximation ?

Établir deux équations couplées, l'une entre  $\frac{\partial i}{\partial t}$  et  $\frac{\partial v}{\partial x}$  et l'autre entre  $\frac{\partial i}{\partial x}$  et  $\frac{\partial v}{\partial t}$ .

En déduire que  $i$  et  $v$  sont solutions d'une équation de d'Alembert avec la célérité  $c$ .

Montrer que pour des solutions de la forme  $i = f(x - ct)$  et  $v = g(x - ct)$ , le rapport  $\frac{v}{i}$  est une constante qu'on appelle *impédance caractéristique*  $Z_c$  de la ligne : exprimer  $Z_c$  en fonction de  $\Lambda$  et  $\Gamma$ .

## B.3.c. Réflexion sur une charge.

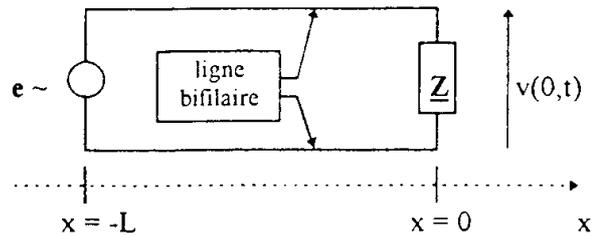


Figure 10

La ligne bifilaire est alimentée en  $x = -L$  en régime sinusoïdal de pulsation  $\omega$ . On cherche en notation complexe des solutions de la forme :

$$\underline{i}(x, t) = A \exp(j(\omega t - kx)) + \rho A \exp(j(\omega t + kx)).$$

La ligne se termine en  $x = 0$  sur une charge d'impédance complexe  $\underline{Z} = Z \exp(j\phi)$ , c'est-à-dire que  $\underline{v}(0, t) = \underline{Z} \underline{i}(0, t)$  (fig. 10).

## B.3.c.1. Coefficient de réflexion et taux d'ondes stationnaires.

Déterminer l'expression correspondante de  $\underline{v}(x, t)$ .

En traduisant la condition aux limites en  $x = 0$ , déterminer le coefficient de réflexion  $\rho$  en fonction de  $\underline{Z}$  et de  $Z_C$ .

Examiner les cas limites où  $Z = 0$  et  $Z = \infty$  ; dans quel cas a-t-on  $\rho = 0$  (on dit alors que la charge d'impédance  $\underline{Z}$  est *adaptée* à l'impédance de la ligne) ?

Expérimentalement, on accède plutôt au *taux d'ondes stationnaires* (TOS) mesuré en décibels. Donner la définition *opérationnelle* du TOS (on ne demande pas d'établir son expression en fonction de  $|\rho|$ ). La mesure du TOS ne suffit pas pour accéder à  $\underline{Z}$  ; pourquoi ? Quelle mesure complémentaire peut-on mettre en œuvre pour accéder à  $\underline{Z}$  ?

## B.3.c.2. Ligne quart d'onde.

On suppose que la ligne est quart d'onde, c'est-à-dire que  $L = \frac{\lambda}{4}$ . On définit l'impédance équivalente  $\underline{Z}_{eq}$  à la ligne quart d'onde fermée sur R par :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{v}\left(-\frac{\lambda}{4}, t\right)}{\underline{i}\left(-\frac{\lambda}{4}, t\right)}$$

Montrer que  $\underline{Z}_{eq} = \frac{Z_C^2}{R}$

## B.3.c.3. Adaptation d'impédance.

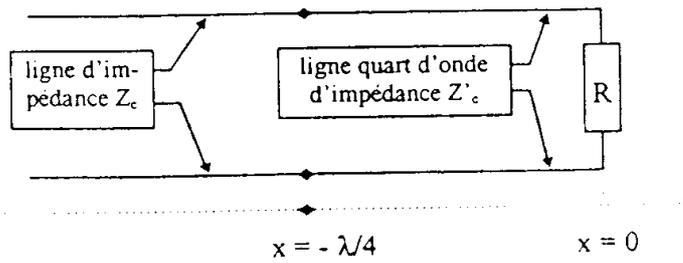


Figure 11

Soit une ligne d'impédance  $Z_C$  fermée sur une impédance  $\underline{Z} = R$  purement résistive et non adaptée. On intercale une ligne quart d'onde d'impédance  $Z'_C$  qui s'étend entre  $x = -\frac{\lambda}{4}$  et  $x = 0$  (fig. 11).

Exprimer en fonction de  $R$  et  $Z_C$  la valeur de  $Z'_C$  qu'il faut choisir pour que la ligne principale d'impédance  $Z_C$  soit adaptée, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'onde réfléchie sur cette ligne.

Citer un exemple concret de problème analogue d'adaptation d'impédance en optique ou en acoustique.

## B.4. CAVITÉ ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

On adopte pour simplifier dans cette partie une théorie scalaire où une onde électromagnétique est décrite par l'amplitude  $E(M, t)$  d'un champ électrique, sans qu'on se préoccupe de sa direction. On admettra que ce champ doit s'annuler à la surface d'un conducteur parfait.

## B.4.a. Modes propres d'une cavité parallélépipédique.

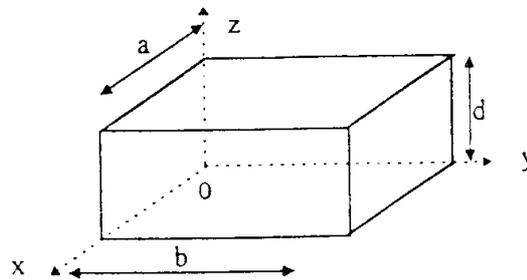


Figure 12

On considère (fig. 12) un parallélépipède tel que  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ ,  $0 < z < d$  dont les faces sont assimilées à des conducteurs parfaits. L'intérieur en est vide.

On cherche des solutions de la forme  $E = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cdot \cos(\omega t)$ .

On définit le vecteur  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{u}_x + k_y \mathbf{u}_y + k_z \mathbf{u}_z$  et on pose  $k = \|\mathbf{k}\|$ . On admet que l'équation de propagation de  $E$  impose alors  $k = \frac{\omega}{c}$ .

B.4.a.1. Montrer que les conditions aux limites imposées à  $E$  par les parois de la cavité imposent une quantification de  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$ , qu'on exprimera en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $d$  et de trois nombres entiers  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$ .

Déterminer la pulsation  $\omega_C$  du mode fondamental. Calculer numériquement la fréquence  $f_C$  correspondante pour une cavité ayant les dimensions suivantes :  $a = 2$  cm,  $b = 4$  cm,  $d = 3$  cm.

B.4.a.2. En utilisant une analogie avec un circuit résonant R. L. C. donner une définition énergétique du coefficient de qualité  $Q$  d'une cavité réelle. D'où proviennent les pertes d'une telle cavité ?

Le coefficient de qualité  $Q$  d'une cavité ayant les dimensions données en B.4.a.1. a pour valeur  $Q = 25\,000$ . Calculer la bande passante du mode fondamental.

#### B.4.b. Densité de modes.

On suppose désormais que  $\omega \gg \omega_c$ . On raisonne dans l'espace des vecteurs  $\mathbf{k}$ . On cherche le nombre  $dN$  de modes dont la pulsation est comprise entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$ , en supposant a priori  $dN$  élevé.

Quelle est, compte tenu de la relation en  $k$  et  $\omega$ , la forme géométrique du domaine de l'espace des  $\mathbf{k}$  où sont situés les modes dont la pulsation est comprise entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$  ? Quel est son volume ?

Quel est, compte tenu des relations de quantification, le volume de l'espace des  $\mathbf{k}$  occupé par un mode ?

En déduire l'expression de  $dN$  en fonction du volume  $V = abd$  de la cavité, de  $\omega$ ,  $d\omega$  et  $c$ .

#### B.5. GUIDE D'ONDES.

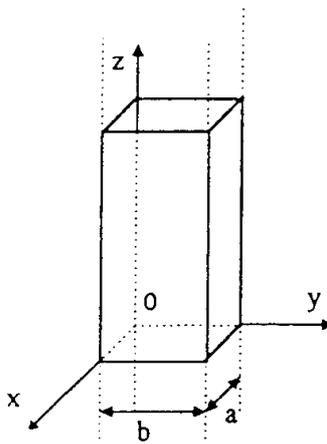


Figure 13

Un guide d'ondes est constitué (fig. 13) d'un cylindre infini de génératrices parallèles à  $zz'$  et de section rectangulaire de côtés  $a$  selon  $\mathbf{u}_x$  et  $b$  selon  $\mathbf{u}_y$ , dont les parois sont assimilées à des conducteurs parfaits.

On cherche dans ce guide d'ondes des ondes électromagnétiques particulières appelées modes  $TE_n$ , telles que :  $\mathbf{E} = E_0 \sin(\alpha x) \cdot \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_y$  ; ces ondes sont progressives pour  $x$  fixé dans la direction  $\mathbf{u}_z$  et stationnaires pour  $z$  fixé dans la direction  $\mathbf{u}_x$ .

On admet que l'équation de propagation de  $\mathbf{E}$  impose la relation :  $k^2 + \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  et que les conditions

aux limites sur les parois imposent la relation  $\alpha = \frac{n\pi}{a}$  avec  $n$  entier quelconque. On a donc la **relation**

$$\text{de dispersion : } k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

### B.5.a. Fréquence de coupure.

Montrer que les modes  $TE_n$  ne peuvent se propager que si  $\omega$  est supérieure à une pulsation de coupure  $\omega_c$  ; exprimer  $\omega_c$  en fonction de  $a$  et  $c$ .

Calculer la fréquence  $f_c$  associée à  $\omega_c$  pour  $a = 2$  cm. Pourquoi les fréquencemètres usuels ne peuvent-ils plus opérer à de telles fréquences ?

Expliquer brièvement comment une cavité électromagnétique comme celle étudiée en B.4.a., de section donnée et de longueur  $l$  réglable, branchée en dérivation sur le guide d'ondes (fig. 14) peut permettre de mesurer la fréquence  $f$  de l'onde.

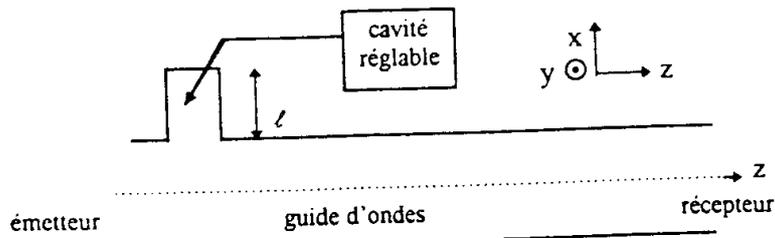


Figure 14

### B.5.b. Polarisation des ondes dans un guide d'ondes.

B.5.b.1. On suppose  $b > a$ . Montrer, à l'aide de B.5.a., que pour une pulsation  $\omega$  comprise entre  $\frac{\pi c}{b}$  et  $\frac{\pi c}{a}$ , l'onde se propageant dans un guide d'ondes est polarisée rectilignement, parallèlement à un côté du guide d'ondes. Préciser s'il s'agit du grand côté ou du petit côté.

B.5.b.2. Pour vérifier la polarisation de l'onde, on place (fig. 15) à la sortie une grille constituée de fils métalliques parallèles à une direction  $v$  perpendiculaire à  $u_z$ , de longueur  $D$  et équidistants de  $d$ , puis un détecteur sensible à la valeur moyenne temporelle  $\langle E^2 \rangle$  du carré du champ  $E$ .

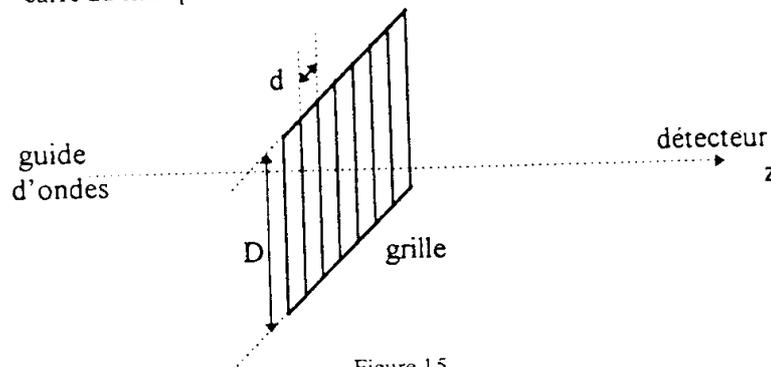


Figure 15

La pulsation  $\omega$  étant fixée, pour  $d$  suffisamment faible, on constate que  $\langle E^2 \rangle$  varie lorsqu'on fait tourner la grille dans son plan, autour de la direction de propagation  $u_z$  des ondes.

Comparer le résultat de la mesure lorsque les fils sont parallèles au petit côté du guide d'ondes et lorsqu'ils sont parallèles au grand côté du guide d'ondes ; interpréter qualitativement.

Quelle loi peut-on illustrer avec ce dispositif ?

Pour  $d$  trop élevé,  $\langle E^2 \rangle$  est indépendant de l'orientation de la grille. Interpréter cette observation et déterminer la valeur critique de  $d$ , en considérant la grille comme un ensemble de guides d'ondes en parallèle, de côtés  $d$  et  $D$ .

### B.5.c. Vitesse de phase — Vitesse de groupe.

Définir la vitesse de phase  $v_p$  et la vitesse de groupe  $v_g$  associées à la relation de dispersion du guide d'ondes et les exprimer en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_c$ ,  $c$  et  $n$ .

Représenter graphiquement les variations de  $v_g$  et  $v_p$  en fonction de  $\omega$ .

Qu'est-ce qu'un paquet d'ondes ? Quelle est la signification physique de la vitesse de groupe pour un paquet d'ondes ? Vérifier que  $v_g$  est inférieure à  $c$ .

On constate ici que la vitesse de phase est supérieure à  $c$  ; cela est-il contradictoire avec les postulats de la relativité restreinte ? Pourquoi ?

### B.5.d. Structure des modes TE.

Justifier l'appellation de mode *transversal électrique* (TE).

À l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, établir l'expression de  $\mathbf{B}$  en éliminant les éventuels champs statiques. Vérifier que le champ magnétique n'est pas transversal.

Les modes  $TE_n$  sont-ils des ondes *planes* ? Montrer que ces modes sont la superposition de deux ondes électromagnétiques planes progressives et interpréter sur une figure la non-transversalité de  $\mathbf{B}$ .

Calculer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting sur une période. Commenter le résultat.

### B.5.e. Dispersion modale.

Une onde électromagnétique se propage dans un guide d'ondes de longueur finie  $L$  selon  $\mathbf{u}_z$  à la pulsation  $\omega$ . Compte tenu de la condition aux limites imposée par l'excitateur de pulsation  $\omega$  en  $z = 0$ , cette onde est une combinaison linéaire des modes  $TE_1$  et  $TE_2$  à la pulsation  $\omega$ .

Comparer les temps de parcours des deux modes dans le guide d'ondes. Que peut-on en conclure quant à la déformation du signal à la sortie  $z = L$  ?

Montrer que pour une pulsation donnée, un choix convenable de  $a$  permet d'obtenir un guide d'ondes monomode où seul le mode  $TE_1$  existe. Quel est l'intérêt de ce choix ? Citer un problème analogue en optique.

Citer une autre géométrie de guide d'ondes permettant la propagation sans dispersion de modes où à la fois  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont transverses.

### B.5.f. Expérience : TOS dans un guide d'ondes.

On place à l'extrémité d'un guide d'ondes successivement :

- i. une plaque de cuivre,
- ii. rien,
- iii. un cornet,
- iv. une charge adaptée.

Par analogie avec la ligne bifilaire étudiée en B.3.c.1., que peut-on dire de l'ordre de grandeur du TOS dans le guide d'ondes dans chacun des cas ? Expliquer brièvement.

Pourquoi un guide ouvert (cas ii.) n'est-il pas l'analogue exact d'une ligne bifilaire ouverte ( $Z$  infinie) ?

Quel est l'intérêt du cornet (cas iii.) ?

À quoi peut servir en pratique une charge adaptée (cas iv.) dans le cas d'un guide d'ondes possédant plusieurs dérivations ?

## B.6. INTERFÉROMÈTRE DE FABRY-PÉROT ET LASER.

Dans cette partie, on adopte le modèle des ondes scalaires en optique, représentées par une amplitude complexe  $\underline{a}$ . Les ondes sont issues d'une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ .

### B.6.a. Interféromètre de Fabry-Pérot.

Un interféromètre de Fabry-Pérot est modélisé (fig. 16) par deux lames planes semi-réfléchissantes  $L_1$  et  $L_2$ , infiniment minces, parallèles et distantes de  $e$ .

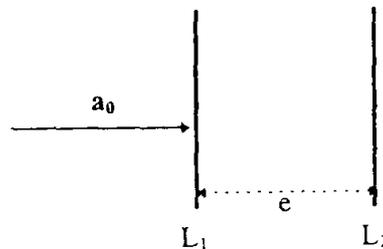


Figure 16

Une onde plane d'amplitude  $\underline{a}$  incidente sur  $L_1$  (respectivement  $L_2$ ) donne naissance à une onde transmise d'amplitude  $t_1 \cdot \underline{a}$  (respectivement  $t_2 \cdot \underline{a}$ ) et à une onde réfléchie d'amplitude  $r_1 \cdot \underline{a}$  (respectivement  $r_2 \cdot \underline{a}$ ).

On suppose que l'interféromètre de Fabry-Pérot est éclairé sous incidence normale par une onde d'amplitude  $a_0$ . Les ondes émergentes successives, d'amplitudes complexes  $\underline{a}_k$  (l'indice  $k = 0$  correspond à l'onde n'ayant subi aucune réflexion) interfèrent à l'infini pour donner une onde d'amplitude  $\underline{a}$ .

- B.6.a.1. Déterminer le déphasage  $\phi$  entre deux ondes émergentes successives en fonction de  $e$  et  $\lambda$ , puis en fonction de  $e$ ,  $c$  et  $\omega$ .
- B.6.a.2. Déterminer  $\underline{a}_k$  en fonction de  $a_0$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $\phi$  et  $k$ . Vérifier que  $\frac{\underline{a}_{k+1}}{\underline{a}_k}$  est une constante qui s'exprime en fonction de  $r_1$ ,  $r_2$  et  $\phi$ .
- B.6.a.3. En déduire que l'intensité  $I$  transmise se met sous la forme :

$$I = \frac{I_{\max}}{1 + m \sin^2 \left( \frac{\phi}{2} \right)}$$

Donner l'expression de  $m$ .

- B.6.a.4. L'allure du graphe de  $I(\omega)$  est donnée sur la figure 17. Il fait apparaître des pulsations de résonance  $\omega_n$  et une largeur à mi-hauteur  $\frac{\Delta\omega}{2}$ .  $\frac{\Delta\omega}{2}$  est dans la pratique très inférieure à l'écart entre deux pulsations de résonance successives. À quelle condition (portant sur  $r_1$  et  $r_2$ ) en est-il ainsi ? En quoi cela est-il intéressant ?

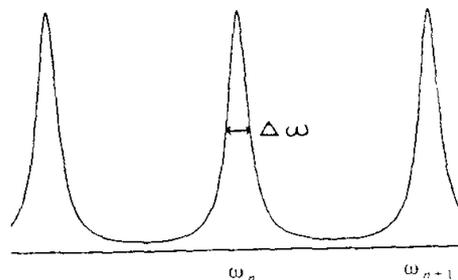


Figure 17

Vérifier que les pulsations  $\omega_n$  pour lesquelles il y a résonance sont égales aux pulsations des modes propres de la cavité électromagnétique fictive qu'on obtiendrait avec :

$$r_1 = r_2 = 1, \quad t_1 = t_2 = 0.$$

B.6.b. Laser.

La cavité de l'interféromètre de Fabry-Pérot précédent est remplie d'un milieu amplificateur dont le gain  $g$  dépend de la pulsation  $\omega$ . Dans ces conditions, on admet que tout revient à remplacer, dans les calculs de B.6.a.,  $r_1 r_2$  par  $g(\omega) \cdot r_1 r_2$ .

Le graphe de  $g(\omega)$  est représenté ci-dessous (fig. 18) et fait apparaître une pulsation de résonance  $\omega_M$  et une largeur à mi-hauteur  $\Gamma$ . Sa valeur maximale  $g_M$  est réglable. On suppose que  $\Gamma \gg \Delta\omega$ .

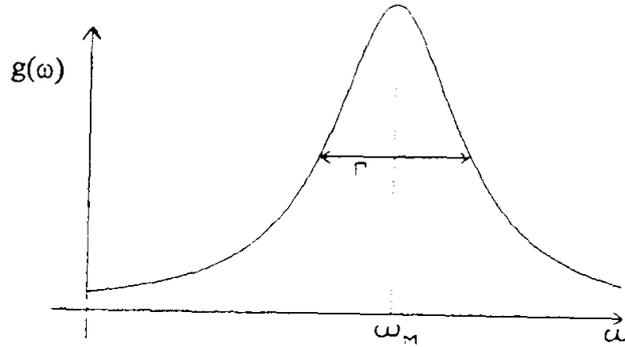


Figure 18

Montrer qu'on peut obtenir une onde lumineuse de pulsation  $\omega_n$  en sortie ( $a \neq 0$ ) sans onde lumineuse à l'entrée ( $a_0 = 0$ ) si  $g(\omega_n)$ ,  $r_1$  et  $r_2$  vérifient une inégalité à préciser (*condition d'accrochage*).

Si cette inégalité est vérifiée, la théorie précédente ne donne pas accès à l'amplitude de l'onde émise par le laser. Par quoi est-elle fixée en réalité ?

Pour modéliser la cavité d'un laser, on a pris un interféromètre de Fabry-Pérot dissymétrique, c'est-à-dire tel que  $r_1 \neq r_2$ ; justifier brièvement ce choix.

B.6.c. Polarisation de certains lasers.

B.6.c.1. Qu'appelle-t-on *angle de Brewster*? Décrire une expérience le mettant en évidence; on ne demande aucune théorie.

B.6.c.2. Dans de nombreux lasers (cf. fig. 19), une ampoule de gaz, de longueur  $L'$  et d'extrémités  $A_1$  et  $A_2$ , est placée entre les plans  $M_1$  et  $M_2$  distants de  $L > L'$  formant la cavité laser proprement dite. Dans ce cas, on réalise dans chacune des extrémités  $A_1$  et  $A_2$  de l'ampoule une *fenêtre de Brewster* de telle sorte que le rayon moyen traverse  $A_1$  et  $A_2$  sous l'angle de Brewster.

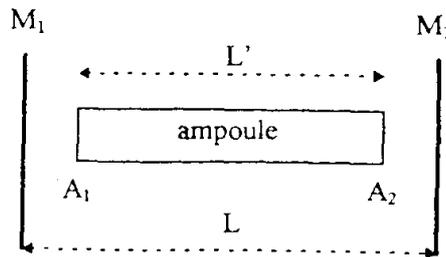


Figure 19

Quel est l'intérêt de ces fenêtres de Brewster? Pourquoi la lumière émise par le laser est-elle alors polarisée? Dans quelle direction? Comment le vérifier expérimentalement?

### B.6.d. Laser à verrouillage de modes.

On se place dans la situation d'un laser multimode où  $\Gamma = 10^{12} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $e = 10 \text{ cm}$ ; les pulsations de résonance de la cavité sont  $\omega_n = \frac{n\pi c}{e}$ ,  $n$  entier; on suppose pour simplifier que la pulsation  $\omega_{n_1}$  est confondue avec la pulsation  $\omega_{n_0}$  du mode  $n = n_0$ .

En outre, on suppose que les modes vérifiant la condition d'accrochage sont les modes dont la pulsation  $\omega_n$  est comprise entre  $\omega_{n_0} - \frac{\Gamma}{2}$  et  $\omega_{n_0} + \frac{\Gamma}{2}$ .

B.6.d.1. Calculer le nombre de modes dont la pulsation  $\omega_n$  est comprise entre  $\omega_{n_0} - \frac{\Gamma}{2}$  et  $\omega_{n_0} + \frac{\Gamma}{2}$ ; dans la suite, on suppose ce nombre suffisamment grand pour pouvoir le remplacer par l'entier impair  $2N + 1$  le plus proche.

B.6.d.2. Pour décrire simplement un laser à verrouillage de modes, on adopte le modèle suivant : on excite dans la cavité laser tous les modes de pulsations  $\omega_n$  tels que  $n_0 - N \leq n \leq n_0 + N$ ; tous ces modes sont en phase et ont même amplitude.

Si  $\mathbf{u}_x$  désigne la normale aux lames  $L_1$  et  $L_2$  de la cavité, chaque mode se décompose en deux ondes progressives se propageant dans les directions  $\mathbf{u}_x$  et  $-\mathbf{u}_x$ .

On admet que dans ces conditions, l'amplitude complexe de l'onde émise à la sortie du laser s'écrit  $\underline{a}(t) = \sum A \exp\left(j\omega_n\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$  où la somme porte sur les  $n$  définis ci-dessus.

Montrer que  $\underline{a}(t)$  se met sous la forme  $\underline{a}(t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \cdot \exp\left(j\omega_{n_0}\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$

où  $f(u)$  est une fonction classique dont la largeur  $\Delta u$  est de l'ordre de  $\frac{1}{\Gamma}$ .

En calculant  $\Delta u$ , dégager le contenu physique de l'expression de  $\underline{a}(t)$ . Quel est l'intérêt d'un tel laser ?

20.

co  
de

épre

et a  
men