

épreuve A : composition de physique

**Durée : 5 heures**

*L'usage de calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*Tout document est interdit.*

## EXEMPLES D'APPLICATIONS DE LA THERMODYNAMIQUE CLASSIQUE ET DES STATISTIQUES QUANTIQUES

*Il sera tenu le plus grand compte des applications numériques et de la description de dispositifs expérimentaux.*

*Rappel de quelques constantes et grandeurs physiques :*

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{ (constante de Boltzmann).}$$

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \text{ (constante de Planck).}$$

$$m = 0,9 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \text{ (masse de l'électron).}$$

$$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (vitesse de la lumière).}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \text{ (charge de l'électron).}$$

$$\mathcal{N} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \text{ (nombre d'Avogadro).}$$

$$\mu_B = 0,92 \cdot 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \text{ (magnéton de Bohr : } \frac{eh}{4\pi m} \text{).}$$

$$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{ (constante des gaz parfaits).}$$

$$R_S = 0,7 \cdot 10^6 \text{ km} \text{ (rayon du Soleil).}$$

$$D = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km} \text{ (distance Terre-Soleil).}$$

*Rappel de quelques intégrales :*

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} ; \quad \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} ; \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} ;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{3} ; \quad \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx = \frac{\pi^{1/2}}{2} .$$

## 1. THERMODYNAMIQUE CLASSIQUE

Nous nous limiterons à des systèmes thermodynamiques fermés, c'est-à-dire tels qu'aucune entrée (ou sortie) de matière ne se produit durant leur évolution. De plus nous supposons qu'aucune réaction chimique (ou nucléaire) ne s'y déroule.

### 1.1. Généralités.

Comment peut-on caractériser l'état d'équilibre d'un système thermodynamique ?

Qu'est-ce qu'une variable thermodynamique ?

Qu'appelle-t-on variables extensives, variables intensives ? Donnez des exemples.

Qu'appelle-t-on fonction thermodynamique ?

Les systèmes thermodynamiques peuvent subir des transformations. Comment caractériseriez-vous celles-ci ? Qu'appelle-t-on transformation infinitésimale ? transformation quasi statique ? transformation réversible ?

Un système fermé est-il forcément isolé ? Pourquoi ?

Comment définiriez-vous un système isolé ?

#### 1.1.1. *Premier principe de la thermodynamique.*

##### 1.1.1.1. Énergie interne.

Quelle est la définition de l'énergie interne  $U$  d'un système quelconque ?

Quelle en est la signification physique ?

Comment pourriez-vous faire comprendre rapidement cette notion à des étudiants, à l'aide d'un exemple simple ?

##### 1.1.1.2. Énoncé du premier principe.

Énoncez le premier principe de la thermodynamique.

En quoi ce principe s'avère-t-il expérimentalement nécessaire et quelle est sa signification physique ?

Les concepts de transformation quasi statique et de transformation réversible sont-ils liés à ce principe ? Pourquoi ?

Au cours d'une transformation quelconque, l'énergie interne évolue. Comment s'exprime sa variation ?

Comment feriez-vous comprendre à des étudiants, par un exemple simple, la différence entre « échange de travail » et « échange de chaleur » (ou « flux thermique ») ?

#### 1.1.2. *Second principe de la thermodynamique.*

##### 1.1.2.1. Énoncé du second principe.

Énoncez le second principe de la thermodynamique.

En quoi ce principe s'avère-t-il expérimentalement nécessaire et quelle est sa signification physique ?

Les concepts de transformation quasi statique et de transformation réversible sont-ils liés à ce principe ? Pourquoi ?

### 1.1.2.2. Entropie.

Quelle est la définition et la signification physique de l'entropie  $S$  d'un système quelconque?

Comment pourriez-vous faire comprendre rapidement, à des étudiants, cette notion à l'aide d'un exemple simple?

Qu'appelle-t-on :

- transformation adiabatique?
- transformation isentropique?

Quelles précautions expérimentales doit-on prendre pour réaliser de telles transformations?

### 1.1.3. Fonctions d'état.

Au cours d'une transformation réversible infinitésimale, le travail élémentaire reçu par le système s'exprime par  $\delta W = V_I \cdot dV_E$  (avec  $V_I$  variable intensive et  $V_E$  variable extensive conjuguée).

En utilisant ce résultat, comment pouvez-vous construire les fonctions thermodynamiques  $H$  (enthalpie),  $A$  (énergie libre) et  $G$  (enthalpie libre)?

## 1.2. Cas du gaz parfait.

### 1.2.1. Définition du gaz parfait.

Quelles définitions macroscopiques proposeriez-vous pour caractériser un gaz parfait?

Expliquez brièvement à quel comportement « microscopique » cela correspond.

Quelle est l'équation d'état d'un gaz parfait?

Dans quelles conditions une situation correspondant au gaz parfait peut-elle être observée expérimentalement?

### 1.2.2. Fonctions d'état.

#### 1.2.2.1 Énergie interne.

L'expérience appelée « détente de Joule et Gay-Lussac » consiste à effectuer une détente rapide d'un gaz comprimé d'une enceinte dans une autre enceinte, vide. L'ensemble est isolé thermiquement.

Décrivez brièvement le dispositif expérimental que vous envisageriez pour cette expérience.

Comment caractériseriez-vous une telle transformation : est-elle réversible, quasi statique, ou autre?

Qu'est-ce qui se conserve au cours de la transformation?

Comment se comporte un gaz parfait lors de cette détente?

Précisez ainsi la loi de Joule et Gay-Lussac (ou première loi de Joule) pour un gaz parfait.

Exprimez l'énergie interne molaire  $U$  d'un gaz parfait dont la capacité calorifique molaire à volume constant est  $c_v$  (indépendante de la température thermodynamique  $T$ ).

### 1.2.2.2. Détente de Joule et Gay-Lussac.

Nous faisons subir à un gaz quelconque une détente de Joule et Gay-Lussac; les variables et fonctions d'état initiales et finales du gaz sont exprimées dans le tableau suivant :

a. Le gaz est parfait.

	Volume	Température	Pression	Énergie interne	Enthalpie	Entropie
État initial .....	$V_1$	$T_1$	$P_1$	$U_1$	$H_1$	$S_1$
État final .....	$V_2 = 2V_1$	$T_2$	$P_2$	$U_2$	$H_2$	$S_2$

Déterminez les valeurs grisées, ainsi que  $\Delta S = S_2 - S_1$

b. Le gaz n'est pas parfait.

Précisez les évolutions de  $\Delta U = U_2 - U_1$ ,  $\Delta H = H_2 - H_1$  et  $\Delta S = S_2 - S_1$ .

### 1.2.2.3. Enthalpie.

L'expérience appelée « détente de Joule-Thomson » consiste à étudier les propriétés d'un gaz au cours de sa détente lente et stationnaire au travers d'un milieu poreux. L'ensemble est isolé thermiquement.

Comment se comporte un gaz parfait lors de cette détente ?

Précisez la loi de Joule-Thomson (ou seconde loi de Joule) pour un gaz parfait.

Décrivez brièvement le dispositif expérimental que vous envisageriez pour cette expérience.

Exprimez l'enthalpie molaire  $H$  d'un gaz parfait dont la capacité calorifique molaire à pression constante est  $c_p$  (indépendante de la température thermodynamique  $T$ ).

### 1.2.2.4. Détente de Joule-Thomson.

Nous faisons subir à un gaz une détente de Joule-Thomson. Les paramètres du gaz sont les suivants :

	Pression	Température	Énergie interne	Enthalpie	Entropie
État initial .....	$P_1$	$T_1$	$U_1$	$H_1$	$S_1$
État final .....	$P_2 = \frac{P_1}{2}$	$T_2$	$U_2$	$H_2$	$S_2$

a. Le gaz est parfait.

Déterminez les valeurs grisées, ainsi que  $\Delta S = S_2 - S_1$ .

b. Le gaz n'est pas parfait.

Précisez les évolutions de  $\Delta U = U_2 - U_1$ ,  $\Delta H = H_2 - H_1$  et  $\Delta S = S_2 - S_1$ .

### 1.2.2.5. Entropie.

Supposons qu'au cours d'une transformation infinitésimale réversible un volume de gaz parfait reçoive la quantité de chaleur élémentaire  $\delta Q$ . Donnez les expressions possibles de  $\delta Q$  en fonction des variables  $(T, V)$  et  $(T, P)$  où  $T$  est la température,  $V$  le volume et  $P$  la pression.

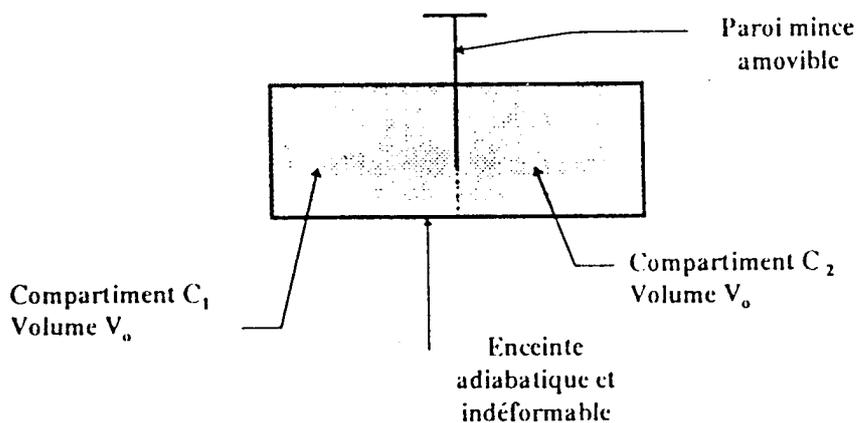
Donnez les expressions de l'entropie molaire  $S$  d'un gaz parfait en fonction des variables  $(T, V)$  puis  $(T, P)$ .

### 1.2.2.6. Énergie libre et enthalpie libre.

Donnez des expressions de l'énergie libre molaire  $A$ , et de l'enthalpie libre molaire  $G$  d'un gaz parfait, en fonction des couples de variables appropriés aux transformations étudiées.

### 1.2.3. Mélange de deux gaz.

On réalise le dispositif expérimental décrit dans la figure suivante. Initialement, les deux gaz  $G_1$  et  $G_2$ , supposés parfaits et de capacités calorifiques molaires  $C_v$  et  $C_p$ , sont respectivement situés dans les compartiments  $C_1$  et  $C_2$ , de même volume  $V_0$  et sont soumis à une même pression  $P_0$ . L'état final correspond à l'état d'équilibre obtenu une fois qu'on a enlevé la paroi séparant les deux compartiments.



	Gaz $G_1$ initialement dans $C_1$			Gaz $G_2$ initialement dans $C_2$		
	Pression	Température	Volume	Pression	Température	Volume
État initial .....	$P_0$	$T_0$	$V_0$	$P_0$	$T_0$	$V_0$
État final .....	$P_1$	$T_1$	$2V_0$	$P_2$	$T_2$	$2V_0$

Déterminez  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ , ainsi que les variations  $\Delta U$ ,  $\Delta H$  et  $\Delta S$ .

Que se passe-t-il si les deux gaz sont identiques ? Commentez.

Reliez la variation d'entropie  $\Delta S$  à la notion d'ordre dans le système considéré.

## 2. THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ

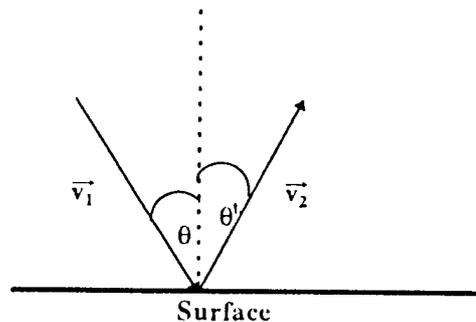
Soit un gaz de particules ponctuelles, indépendantes les unes des autres, et soumises à la loi de répartition suivante : la densité de probabilité de trouver une particule dont le module du vecteur vitesse est égal à  $v$  est donnée par une fonction  $f(v)$  (fonction ne dépendant que du module  $v$  de la vitesse  $v$ ).

Donnez les diverses expressions permettant d'obtenir la vitesse quadratique moyenne  $u$ , la vitesse moyenne  $v$  et la vitesse la plus probable  $v^*$  de ces particules.

### 2.1. Étude de la pression.

#### 2.1.1. Pression cinétique.

Nous supposons que lors de la collision d'une particule de ce gaz avec la surface de la paroi, le choc est élastique, et sans frottement.



Précisez les relations qui lient  $v_1$  et  $v_2$ .

Calculez la pression  $P$  exercée par ce gaz sur la paroi en fonction de la masse  $m$  des particules, de leur nombre  $n$  par unité de volume et de leur vitesse quadratique moyenne  $u$ .

Pourquoi cette pression porte-t-elle le nom de pression cinétique ?

Cette pression cinétique représente-t-elle la pression totale ?

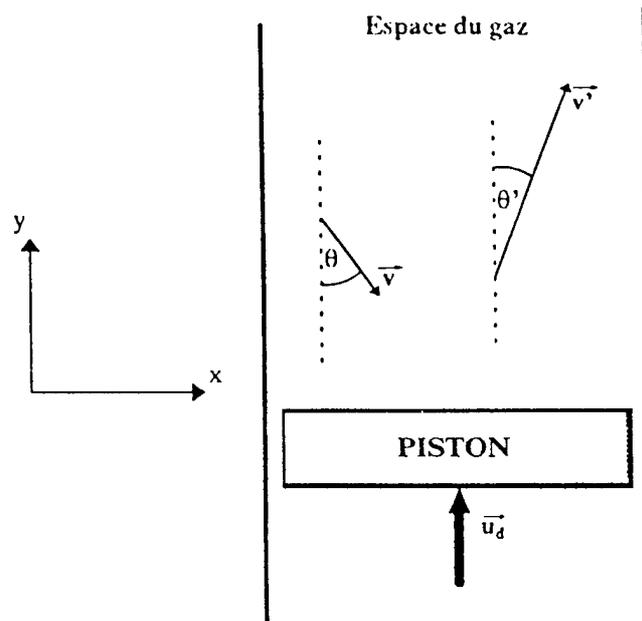
#### 2.1.2. Méthode du viriel.

Énoncez le théorème du viriel relatif à l'expression de l'énergie cinétique moyenne d'un ensemble de  $N$  particules ponctuelles en fonction des forces intérieures et extérieures subies par ces diverses particules.

Comment se transforme cette expression dans le cas d'un gaz parfait ?

En déduire l'expression de la pression cinétique.

### 2.1.3. Travail des forces de pression.



Le gaz obéit toujours à la même loi de répartition  $f(v)$ .

Soit un piston de masse  $M$  qu'un opérateur déplace lentement à la vitesse  $u_d$  constante. Par rapport au référentiel du laboratoire, une particule arrive avec la vitesse  $v$  faisant un angle  $\theta$  avec la normale à la surface. Les interactions particules-paroi et particules-piston sont supposées identiques.

Déterminez les composantes de la vitesse  $v'$  de cette particule après le choc.

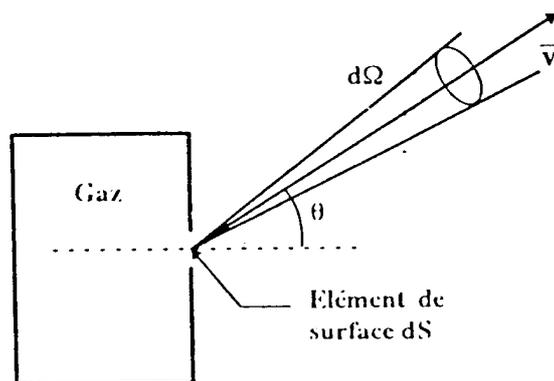
En déduire la variation d'énergie cinétique de cette particule dans le référentiel du laboratoire en faisant toutes les approximations justifiées.

Calculez la puissance que doit fournir l'opérateur au cours de cette transformation.

Retrouvez-vous une formule connue ?

Conclusions.

### 2.2. Jet de particules.



Considérons une enceinte de très grand volume, contenant un gaz, et située dans le vide. Ce gaz contient  $n$  particules par unité de volume et obéit toujours à la loi de répartition  $f(v)$ . Un faisceau de particules sort par un élément de surface  $dS$  de la paroi de l'enceinte.

Calculez le nombre  $dN$  de particules sortant par l'élément de surface  $dS$  pendant le temps  $dt$  avec un vecteur vitesse  $v$  de module  $v$ , localisé dans un angle solide élémentaire  $d\Omega$ , dont la direction fait un angle  $\theta$  avec la normale à  $dS$ .

## 2.3. Loi de distribution de Maxwell-Boltzmann.

### 2.3.1. Définition.

Quelle est la signification physique de la loi de répartition des vitesses dite de Maxwell-Boltzmann ?  
Comment pourriez-vous la faire comprendre à des étudiants ?

Exprimez la loi de répartition de Maxwell-Boltzmann.

Quelle est la probabilité de trouver une particule dont la composante suivant  $x$  du vecteur vitesse est comprise entre  $v_x$  et  $v_x + dv_x$  ?

Comment s'exprime alors la densité de probabilité  $f(v)$  pour un gaz à la température  $T$  ?

### 2.3.2. Conséquences.

Précisez les expressions de :

- la vitesse moyenne  $\bar{v}$  ;
- la vitesse la plus probable  $v^*$  ;
- la vitesse quadratique moyenne  $u$ .

En déduire l'expression de la pression.

Retrouvez-vous l'équation d'état du gaz parfait ?

*Application numérique :* donnez les valeurs de  $\bar{v}$ ,  $v^*$ ,  $u$  pour les gaz suivants :

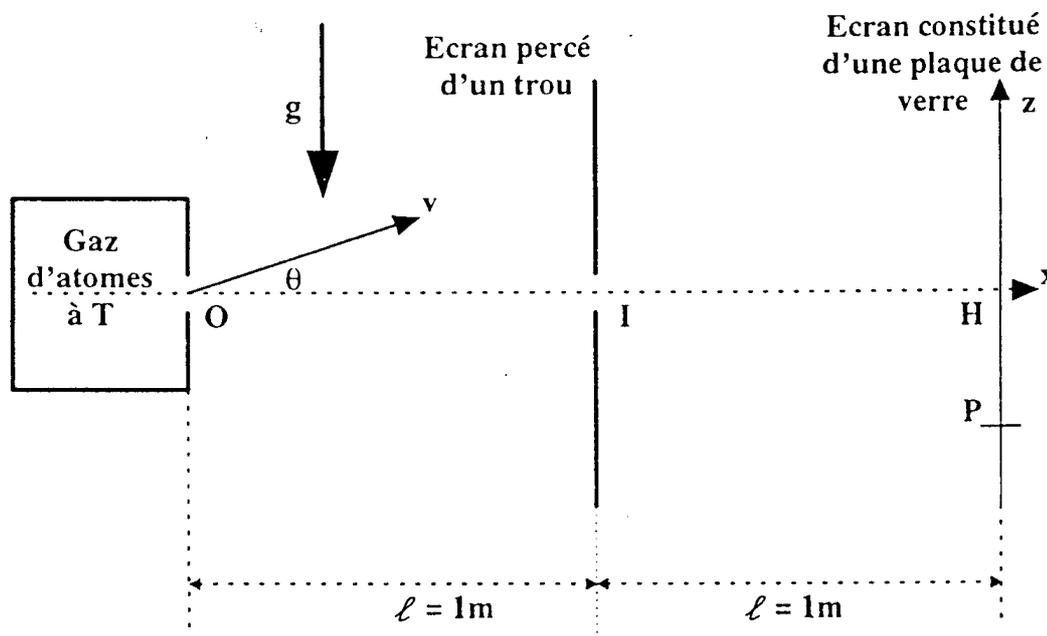
dihydrogène :  $M_{\text{H}_2} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$  à la température  $T = 300 \text{ K}$ .

diazote :  $M_{\text{N}_2} = 14,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$  à la température  $T = 300 \text{ K}$ .

### 2.3.3. Jet de particules.

Considérons à nouveau le dispositif présenté en 2.2. avec une enceinte à la température  $T$ .  
Exprimez la vitesse  $v_p^*$  la plus probable dans le jet de particules en fonction de  $T$ .

#### 2.3.3.1. Jet dans un champ de pesanteur.



Des atomes de césium ( $\text{Cs}$ , de masse atomique  $M_{\text{Cs}} = 0,133 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) sortent d'un four à température  $T$  ( $T = 400 \text{ K}$ ). Ils sont soumis au champ de pesanteur. Nous nous intéressons aux atomes qui sortent de  $O$  avec une vitesse  $v$  (faisant un angle  $\theta$  avec l'horizontale), passent par  $I$  (trou percé dans un écran) et atteignent la plaque de verre ( $OI = IH = \ell$  ;  $OIH$  est horizontal).

Quelle relation lie le module  $v$  de la vitesse  $v$ , l'angle  $\theta$ , la distance  $\ell$  et l'accélération de la pesanteur  $g$  pour ces atomes ?

Calculez la cote  $z$  du point  $P$  atteint par un de ces atomes en fonction de la vitesse  $v$ .

Calculez la valeur  $z^*$  de  $z$  correspondant à la vitesse la plus probable  $v_p^*$  dans le jet. Calculez numériquement  $z^*$ .

Trouvez la densité superficielle du dépôt d'atomes sur la plaque de verre, c'est-à-dire, si  $dn$  est le nombre d'atomes arrivant sur la plaque entre  $z$  et  $z + dz$  par unité de temps, la quantité  $\sigma(z) = \frac{dn}{dz}$ .

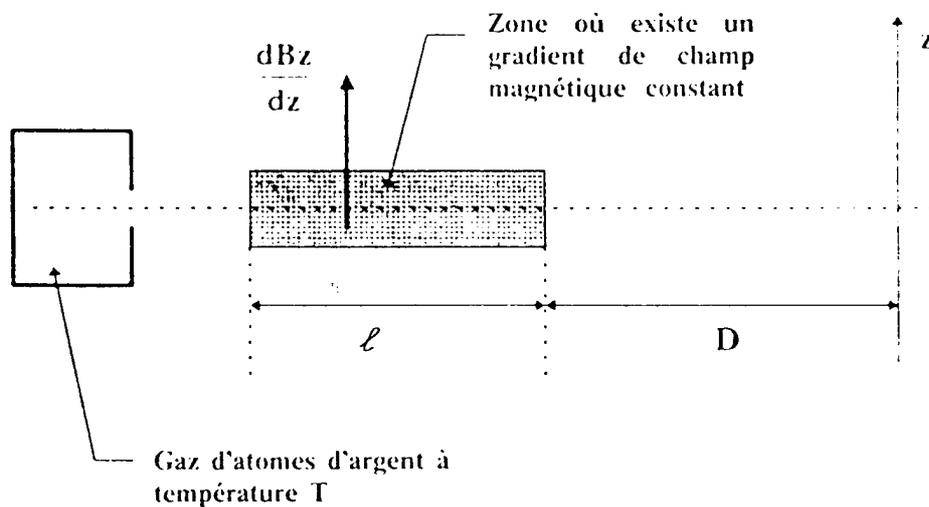
Pour quelle valeur  $z_m$  de  $z$ ,  $\sigma(z)$  est-il maximum? Exprimez  $z_m$  en fonction de  $z^*$ . Conclusions?

### 2.3.3.2. Expérience de Stern et Gerlach.

On considère un jet d'atomes d'argent (0,02 mm de largeur), collimaté dans un angle solide très étroit autour de  $\theta = 0$ , qui traverse, pendant une portion de son trajet hors du four, une région soumise à un champ magnétique inhomogène. Cette expérience, dite de Stern et Gerlach, a eu un rôle historique important.

Décrivez en quelques lignes les phénomènes qui se déroulent au cours de cette expérience, et expliquez ce qu'elle a permis de mettre en évidence.

On néglige cette fois-ci l'accélération de la pesanteur; pouvez-vous le justifier?



Température du gaz d'atomes :	$T = 1\,000\text{ K}$
Masse atomique de Ag :	$M_{\text{Ag}} = 0,108\text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Zone de champ non uniforme :	$\ell = 10\text{ cm}$
Distance à « l'écran » :	$D = 10\text{ cm}$
Moment magnétique de Ag :	$M_s = \mu_B$
Gradient de champ magnétique suivant $z$ :	$dB/dz = 10\text{ T} \cdot \text{cm}^{-1}$

Calculez le nombre  $dn$  d'atomes qui arrivent sur « l'écran » (cible à condensation) pendant l'unité de temps entre deux points de cote  $z$  et  $z + dz$ , puis la quantité  $\left(\frac{dn}{dz}\right)_q$ .

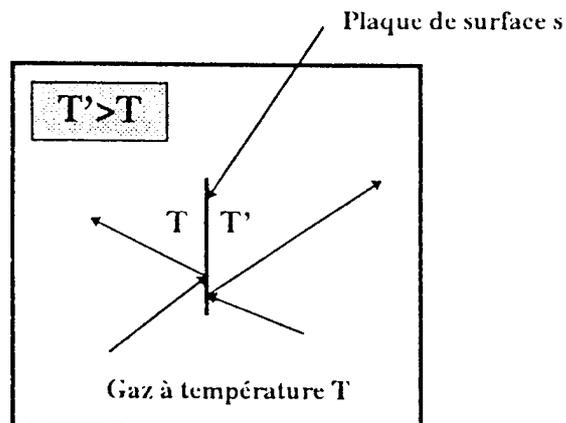
Pourquoi s'attend-on à trouver deux taches distinctes?

Tracez la courbe  $\left(\frac{dn}{dz}\right)_q$  en fonction de  $z$ . Pour quelles valeurs de  $z$ ,  $\left(\frac{dn}{dz}\right)_q$  est-il maximum?

Effectuez l'application numérique. Les deux taches sont-elles séparables expérimentalement?

Quel aurait été le résultat  $\left(\frac{dn}{dz}\right)_c$  si le moment magnétique n'était pas quantifié (hypothèse classique)? Cette différence peut-elle être mise en évidence expérimentalement avec le dispositif proposé? Tracez  $\left(\frac{dn}{dz}\right)_c$  en fonction de  $z$  sur le même graphique que précédemment.

2.3.4. « Équilibre » d'une plaque non isotherme dans un gaz.



Soit une plaque de surface  $s$  dans un gaz. Ses deux faces ne sont pas à la même température. Une des faces est à la température  $T$  (température du gaz) et l'autre à  $T' > T$ .

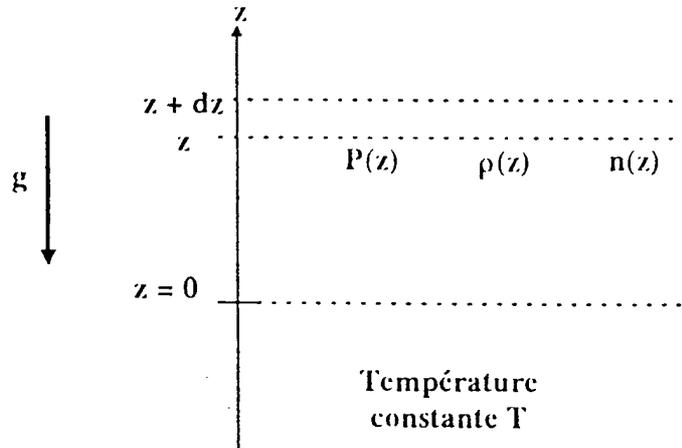
Proposez un modèle très simple permettant d'estimer la résultante des forces (due aux collisions des particules avec la plaque) s'exerçant sur la surface  $s$ .

Comment varie cette force en fonction de  $T$  et  $T'$  (*on ne cherchera pas à donner une expression précise de la constante multiplicative*).

Comment est orientée cette force sur la figure ?

### 3. LOI DE DISTRIBUTION DE BOLTZMANN

#### 3.1. Exemple simple : équilibre de l'atmosphère isotherme.



L'atmosphère en équilibre est supposée isotherme, à température  $T$ ; nous nous proposons de calculer ses caractéristiques à l'altitude  $z$ . L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait.

Nous poserons :

$P(z)$  : pression en  $z$ ,

$n(z)$  : nombre de particules par unité de volume en  $z$ ,

$\rho(z)$  : masse volumique en  $z$ ,

$v(z)$  : volume massique en  $z$ ,

$M$  : masse molaire de l'air,

$\mathcal{N}$  : nombre d'Avogadro.

Exprimez la loi de l'hydrostatique.

Résolvez l'équation différentielle et donnez l'expression de  $n(z)$ .

Exprimez  $n(z)$  en fonction de  $n_0$  ( $n$  en  $z=0$ ),  $m\left(\frac{M}{\mathcal{N}}\right)$ ,  $g$ ,  $z$  et  $T$ .

Conclusions. Interprétez.

#### 3.2. Loi de répartition de Boltzmann pour des systèmes « classiques ».

##### 3.2.1. Généralités.

Énoncez la loi de distribution de Boltzmann en exploitant l'analogie d'une part avec le résultat de la question précédente, et d'autre part avec la distribution de Maxwell-Boltzmann. On considérera des systèmes thermodynamiques à l'équilibre à la température  $T$ , et constitués d'entités microscopiques indépendantes, dont l'énergie individuelle est supposée régie par des lois classiques.

##### 3.2.2. Équipartition de l'énergie.

###### 3.2.2.1. Définition.

Énoncez et démontrez le théorème de l'équipartition de l'énergie.

Quelles en sont les conditions d'application ?

### 3.2.2.2. Applications.

#### a. Gaz monoatomique :

Soit un gaz parfait monoatomique constitué de  $N$  particules; l'énergie de ces particules n'est due qu'à leur mouvement de translation.

Calculez l'énergie interne  $U$  de ce gaz.

En déduire les valeurs des capacités calorifiques molaires à volume constant  $C_v$  et à pression constante  $C_p$ , ainsi que  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

#### b. Gaz de molécules diatomiques rigides :

Considérons un gaz de  $N$  molécules diatomiques rigides.

Combien de termes quadratiques l'énergie de chacune de ces molécules comporte-t-elle? Calculez l'énergie interne  $U$  de ce gaz.

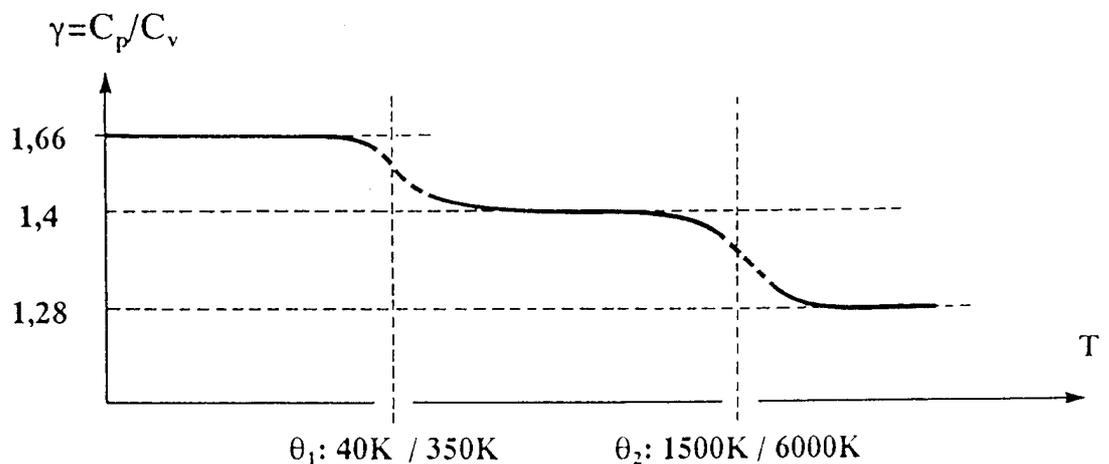
En déduire les valeurs des capacités calorifiques molaires à volume constant  $C_v$  et à pression constante  $C_p$ , ainsi que  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

#### c. Gaz de molécules diatomiques non rigides :

Considérons un gaz de  $N$  molécules diatomiques non rigides. Combien de termes quadratiques l'énergie de chacune de ces molécules comporte-t-elle? Calculez l'énergie interne  $U$  de ce gaz.

En déduire les valeurs des capacités calorifiques molaires à volume constant  $C_v$  et à pression constante  $C_p$ , ainsi que  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

#### d. Ordres de grandeurs :



Interprétez la courbe ci-dessus et comparez les domaines de validité des trois modèles précédents. On donnera en particulier la signification physique des températures caractéristiques  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

Pour le dihydrogène  $\text{H}_2$ ,  $\theta_1 = 85,5\text{ K}$  et  $\theta_2 = 6\,140\text{ K}$ . À quelles longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  du spectre électromagnétique ces températures correspondent-elles? Dans quel domaine du spectre ces valeurs sont-elles situées?

Sachant que la température caractéristique d'un rotateur rigide est  $\theta_r = \frac{\hbar^2}{2Ik_B}$ , où  $I$  est le moment d'inertie (dans le cas d'une molécule diatomique  $I = \mu r^2$ , où  $\mu$  est la masse réduite et  $r$  la distance interatomique), calculez la distance interatomique dans la molécule de dihydrogène.

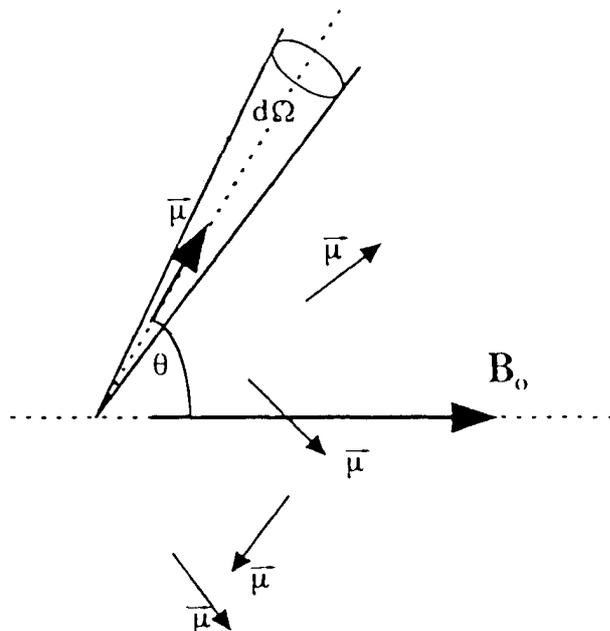
### 3.2.3. Paramagnétisme de Langevin.

Les ions ou atomes (au nombre de  $n$  par unité de volume) d'une substance paramagnétique sont assimilables à des dipôles magnétiques de moment dipolaire  $\mu$  constant en module. Ce gaz de dipôles, placé dans un champ magnétique extérieur permanent  $B_0$  uniforme (de norme  $B_0$ ), est en équilibre avec un thermostat à la température  $T$ . Nous négligerons les interactions entre dipôles.

- a. Rappelez l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre un dipôle et un champ magnétique extérieur permanent.

On posera  $x = \frac{\mu B_0}{k_B T}$ .

- b. Ces dipôles obéissent à la statistique de Maxwell-Boltzmann; calculez le nombre de dipôles dont le moment  $\mu$  pointe dans un angle solide  $d\Omega$ , repéré par  $\theta$  par rapport à la direction de  $B_0$ .



- c. Calculez le moment magnétique moyen  $\mathcal{M}$  de la substance en fonction de  $x$ .

Interprétez physiquement les limites hautes et basses températures.

- d. Montrez que, pour une induction magnétique faible, la substance suit la loi de Curie :

$$\mathcal{M} = \frac{CB_0}{T}. \text{ Calculez } C \text{ dans le cadre de ce modèle.}$$

Tracez l'allure de la courbe  $\frac{\mathcal{M}}{N\mu} = f(x)$ . Conclusions.

- e. Application numérique : cas de l'oxygène.

La susceptibilité paramagnétique de l'oxygène est égale à  $\chi_p = 1,8 \cdot 10^{-6}$ .

Calculez la constante de Curie molaire  $C$ , ainsi que le moment magnétique  $\mu$  de l'oxygène en fonction de  $\mu_B$  (magnéton de Bohr).

Quelle est l'origine de ce moment magnétique? Décrivez une expérience permettant de mettre en évidence le paramagnétisme de l'oxygène.

- f. Application numérique : cas du chlorure ferrique.

Décrivez, en vous appuyant sur un schéma, une manipulation permettant de mesurer la susceptibilité paramagnétique  $\chi_p$  du chlorure ferrique.

Les valeurs numériques sont les suivantes : avec une solution de  $FeCl_3$  diluée à 33 %, de masse volumique du liquide égale à  $10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , la dénivellation du fluide est voisine de 1,3 cm dans un champ de 0,6 T. Calculez la valeur numérique de  $\chi_p$  de la solution.

### 3.3. Loi de distribution de Boltzmann pour des systèmes à niveaux d'énergie discrets.

On considère, dans cette partie, des systèmes constitués « d'entités » microscopiques identiques mais néanmoins discernables (au nombre de  $N$  fini pour un système de volume  $V$ ), sans interactions entre elles, dont le comportement physique est régi par la mécanique quantique. Ces « entités » seront désignées comme des systèmes microscopiques, par opposition au système global, de taille macroscopique. Chaque système microscopique possède plusieurs niveaux  $i$  discrets, dont les énergies sont désignées par  $\epsilon_i$ . Chacun de ces niveaux pouvant être dégénéré, on appellera  $g_i$  le poids statistique du niveau  $i$ , c'est-à-dire le nombre d'états ayant la même énergie  $\epsilon_i$ . Un état énergétique du système global est ainsi défini par la donnée d'une suite de nombres  $\{n_i\}$  tels que  $n_i$  est le nombre d'entités microscopiques qui possèdent une énergie  $\epsilon_i$ . On a donc  $\sum n_i = N$ . L'ensemble est considéré comme étant à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ .

#### 3.3.1. Énoncé.

Énoncez la loi de distribution de Boltzmann pour un système microscopique.

Quelle est l'énergie d'un état du système macroscopique défini par la suite  $\{n_i\}$ ?

En explicitant le nombre de manières de placer, parmi les  $\{g_i\}$  « cases » des niveaux  $i$ , la suite de  $\{n_i\}$  éléments discernables choisis parmi les  $N$ , soit  $w(N, \{n_i\}, \{g_i\})$ , énoncez la loi de Boltzmann pour le système tout entier.

#### 3.3.2. Fonction de partition $Z$ .

Donnez la définition de la fonction de partition  $z$  d'un système microscopique. Comment s'exprime en fonction de  $z$  la fonction de partition  $Z$  du système thermodynamique global ?

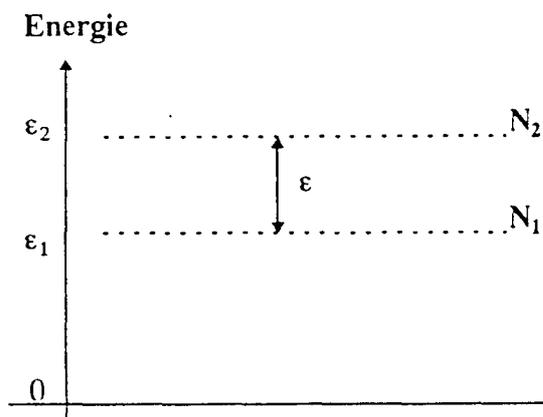
#### 3.3.3. Fonctions d'état.

Pour un tel système, déterminez à l'aide de la fonction  $Z$  et de la variable  $T$  (ou plutôt de la quantité  $\beta = 1/k_B T$ ) les expressions de :

- l'énergie interne  $U$ ;
- l'entropie statistique  $S$  définie par l'expression suivante :  $S = -k_B \sum (P_i \cdot \ln P_i)$ , où  $P_i$  est la probabilité d'occupation d'un état  $i$ ; on commentera brièvement cette expression;
- l'énergie libre  $A$ .

### 3.4. Applications directes.

#### 3.4.1. Système microscopique à deux niveaux.



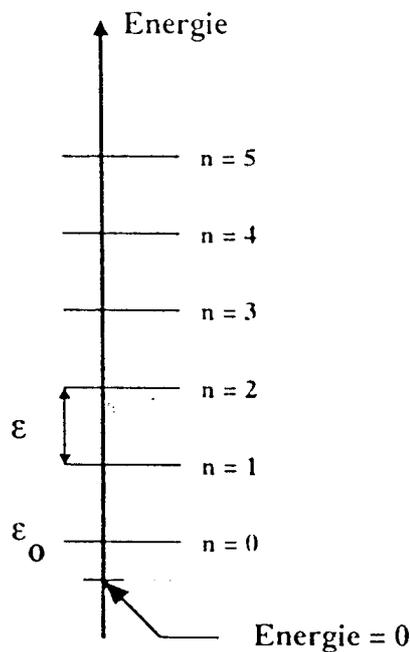
Soit un système, composé d'un grand nombre  $N$  d'entités microscopiques (par exemple de molécules), en équilibre avec un thermostat à la température  $T$ . Chacune de ces entités possède deux niveaux d'énergie  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  (de même poids statistique  $g_1 = g_2 = g$ ), tels que :

$$\epsilon_1 < \epsilon_2 \text{ et } \epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1.$$

On pose :  $\theta = \frac{\varepsilon}{k_B}$ .

- Donnez l'expression de la fonction de partition  $Z$ .
- Donnez le nombre  $N_1(\varepsilon_1)$  de molécules ayant l'énergie  $\varepsilon_1$ , ainsi que  $N_2(\varepsilon_2)$ . Calculez  $N_1(\varepsilon_1) - N_2(\varepsilon_2)$ .
- Établissez l'expression de l'énergie interne  $U$  du système étudié. Donnez l'allure de  $U\left(\frac{T}{\theta}\right)$ .
- Calculez la capacité calorifique à volume constant  $C_v$ , ainsi que  $\frac{C_v}{R}$ . Quelles sont les limites de  $\frac{C_v}{R}$  quand  $T \gg \theta$  et  $T \ll \theta$ ? Donnez l'allure de  $C_v\left(\frac{T}{\theta}\right)$ .
- Applications numériques* :  $N = 1$ .  
 Calculez  $N_1$  et  $N_2$  à 300 K pour  $\varepsilon = 2$  eV et  $\varepsilon = 10^{-4}$  eV. Commentez.  
 Calculez  $N_1$  et  $N_2$  pour  $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ . Où rencontre-t-on cette modélisation en physique?

### 3.4.2. Système à niveaux d'énergie équidistants non dégénérés.



Soit un système, composé d'un grand nombre  $N$  de particules, en équilibre avec un thermostat à la température  $T$ . Les niveaux d'énergies  $\varepsilon_n$  de ces particules sont donnés par la relation suivante :

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0 + n\varepsilon; \quad g_n = 1.$$

Donnez l'expression de la fonction de partition  $Z$ .

Donnez la valeur de l'énergie interne  $U$ , et celle de la capacité calorifique à volume constant  $C_v$ .

Expliquez ce qui se passe si  $\beta\varepsilon \ll 1$ .

Supposons  $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2}$ ; où rencontre-t-on cette modélisation en physique? Étudiez les variations de  $C_v$  avec la température. Interprétez.

### 3.4.3. Paramagnétisme de Brillouin.

Dans ce qui suit, on cherche à écrire l'équation d'une substance paramagnétique en utilisant la thermodynamique statistique. Soit  $J$  le nombre quantique de moment cinétique total d'un ion paramagnétique.  $J$  peut prendre des valeurs entières ou demi-entières. En présence d'un champ magnétique extérieur permanent uniforme  $B_0$ , les ions de la substance peuvent occuper  $2J + 1$  niveaux d'énergie non dégénérés. L'énergie  $\varepsilon_m$  du niveau  $m$  a pour expression :  $\varepsilon_m = m g \mu_B B_0$  pour  $m = -J, -J + 1, -J + 2, \dots, J - 2, J - 1, J$  ( $2J + 1$  valeurs de  $m$ ) où  $g$  est le facteur de Landé caractéristique de l'ion, et  $\mu_B$ , le magnéton de Bohr.

On négligera l'interaction entre les divers ions (au nombre de  $n$  par unité de volume), et on supposera qu'ils suivent la statistique de Maxwell-Boltzmann.

On posera :  $x = \frac{g \mu_B B_0}{k_B T}$ .

- Calculez la fonction de partition  $z$  d'un ion, ainsi que la probabilité  $p_m$  pour qu'il ait l'énergie  $\varepsilon_m$ .
- Sachant que la projection du moment magnétique d'un ion est  $-m g \mu_B (\mu_B > 0)$  suivant la direction de  $B_0$ , calculez le moment magnétique moyen  $\mathcal{M}$  par unité de volume de la substance suivant cette même direction.

Étudiez  $\mathcal{M}(x)$ . Tracer l'allure de  $\mathcal{M}(x)$  pour différentes valeurs de  $J$ . Expliquez le comportement de  $\mathcal{M}$  quand  $x \rightarrow \infty$  et  $x \rightarrow 0$ .

- Quand  $x \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{M} = \frac{C B_0}{T}$ ; calculez la constante de Curie  $C$  par unité de volume du système. Quelle différence existe-t-il avec le cas classique ?

## 4. STATISTIQUES QUANTIQUES

### 4.1. Généralités.

Les systèmes microscopiques quantiques considérés dans la partie précédente ne sont en fait pas discernables. De ce fait, comment s'exprime la fonction  $w(N, \{n_i\}, \{g_i\})$ , définie à la question 3.3.1. ?

Cela permet-il de relier aussi facilement que dans le cas discernable la fonction de partition  $Z$  du système global à la fonction de partition  $z$  d'un système individuel ?

De plus, dans la nature, on est amené à distinguer deux types de systèmes microscopiques quantiques dont les propriétés statistiques sont différentes, les bosons et les fermions.

Expliquez brièvement les principales différences entre ces deux types d'objets, en en donnant des exemples.

#### 4.1.1. Lois de répartition.

On considère des systèmes constitués de particules, fermions ou bosons, à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ . Le potentiel chimique des particules est  $\mu(T)$ . Expliquez brièvement quel est le sens physique de cette quantité.

Ces particules sont supposées indépendantes, c'est-à-dire sans interaction mutuelle. On montre que la probabilité  $p(N)$  pour que  $N$  particules occupent le même état quantique, d'énergie  $\epsilon$ , est donnée par :

$$p(N) = p_0 \exp\left(-\frac{N(\epsilon - \mu)}{k_B T}\right) = p_0 \exp(-\beta N(\epsilon - \mu))$$

où  $p_0$  est une constante de normalisation que l'on explicitera dans le cas de fermions, puis de bosons. Dans ce dernier cas quelle est la condition nécessaire sur  $\mu$  pour que  $p(N)$  soit définie ?

En quoi l'hypothèse d'indépendance des particules est-elle importante dans l'expression de  $p(N)$  ?

#### 4.1.2. Fermions.

Pour des fermions, calculez le nombre moyen  $\bar{N}(\epsilon)$  de particules dans l'état d'énergie  $\epsilon$ , à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ .

Commentez le résultat.

Tracez l'allure de variations de  $\bar{N}(\epsilon)$  en fonction de  $\epsilon$  dans la limite  $k_B T \ll \mu$ . Quel est l'ordre de grandeur de l'intervalle  $\Delta\epsilon$  sur lequel on observe des variations importantes de la distribution  $\bar{N}(\epsilon)$  ? Que devient  $\bar{N}(\epsilon)$  à  $T = 0$  ?

#### 4.1.3. Bosons.

Mêmes questions que précédemment dans le cas de bosons.

#### 4.1.4. Limite classique.

Montrez que les deux statistiques précédentes tendent vers la limite classique lorsque le nombre moyen de particules dans tous les états est très inférieur à l'unité :  $\bar{N}(\epsilon) \ll 1$ .

Montrez que ce résultat revient à écrire  $\frac{N}{z} \ll 1$ , où  $z$  est la fonction de partition d'une particule unique.

Dans le cas d'une assemblée de  $N$  particules indépendantes, contenues dans un volume  $V$  à la température  $T$ , montrez que cette condition revient à comparer la distance moyenne entre particules à une certaine longueur  $\bar{\lambda}(T)$ , dont on donnera l'expression.

*Application numérique* : la condition est-elle vérifiée pour le dihydrogène dans les conditions normales ? pour des électrons libres dans un métal ?

## 4.2. Rayonnement du corps noir.

### 4.2.1. Définition.

Définissez brièvement ce que l'on entend par corps noir idéal.

Décrivez un dispositif physique permettant de réaliser approximativement un tel objet. Quelles conditions devrait-il vérifier pour qu'il s'agisse d'un corps noir idéal ? En pratique, quelles sont les limitations physiques à cette réalisation ?

Décrivez qualitativement les propriétés d'un corps noir idéal.

### 4.2.2. Étude thermodynamique.

On considère le rayonnement électromagnétique à l'intérieur d'une enceinte de volume  $V$  assimilée à un corps noir idéal à la température  $T$ . Quelle doit être la propriété particulière de la paroi pour qu'un tel système constitue un corps noir parfait ?

Quelle est la relation entre la fréquence d'une onde électromagnétique plane et son vecteur d'onde ?

On considérera dans la suite que l'effet du rayonnement est équivalent à celui de particules, les photons.

Quelle est la relation entre l'énergie et l'impulsion des photons ?

On considère maintenant l'interaction des photons avec les parois de l'enceinte. Déterminez la composante normale de la force qui s'exerce sur une surface  $dS$  de paroi du fait des photons qui la percutent avec une incidence  $\theta$ .

En déduire une relation entre la densité volumique d'énergie  $u$  du gaz de photons et la pression  $P$  exercée sur une paroi de l'enceinte par le rayonnement électromagnétique, supposé en équilibre thermodynamique avec celle-ci.

Quelles sont les différences avec l'expression de la pression cinétique d'un gaz parfait, déterminée aux questions 2.1.1 et 2.1.2 ? Commentez.

En considérant des transformations infinitésimales du gaz de photons contenu dans l'enceinte et en utilisant des identités thermodynamiques classiques, montrez que la densité volumique d'énergie du gaz de photons à l'équilibre thermodynamique (ou rayonnement du corps noir) s'exprime par une expression du type  $u(T) = AT^4$ , où  $A$  est une constante.

On suppose, pour simplifier, que le rayonnement est confiné dans une boîte parallélépipédique de dimensions  $L_x$ ,  $L_y$  et  $L_z$ . Quelles conditions doivent vérifier les composantes  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  du vecteur d'onde  $k$  d'une onde électromagnétique d'un mode électromagnétique stationnaire de vecteur d'onde  $k$  ?

En déduire la densité  $g(\nu)$  de modes dans la cavité de volume  $V = L_x L_y L_z$  ( $g(\nu)d\nu$  est définie comme le nombre de modes de fréquence comprise entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$ ).

En mécanique statistique classique, quelles sont les conditions d'application du théorème d'équipartition de l'énergie aux modes du champ électromagnétique ?

En supposant que l'on puisse appliquer ici le théorème d'équipartition de l'énergie, démontré pour des systèmes non quantiques, montrez que la densité volumique classique  $u_c(\nu, T)$  d'énergie électromagnétique par unité de fréquence, s'écrit :

$$u_c(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} (k_B T).$$

Expliquez brièvement pourquoi ce résultat est physiquement inacceptable et quel rôle cette remarque a pu avoir dans l'histoire de la physique, à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et au début du XX<sup>e</sup> ? Dans quel domaine de fréquence peut-on néanmoins l'utiliser ?

#### 4.2.3. Étude statistique « quantique ».

À quelle statistique quantique obéissent les photons? Que vaut leur potentiel chimique et pourquoi?

Reprenez le calcul de la densité d'énergie  $u_q(\nu, T)$  dans le cadre quantique.

Tracez sur un même graphe l'allure de  $u_c(\nu, T)$  et  $u_q(\nu, T)$ . Commentez.

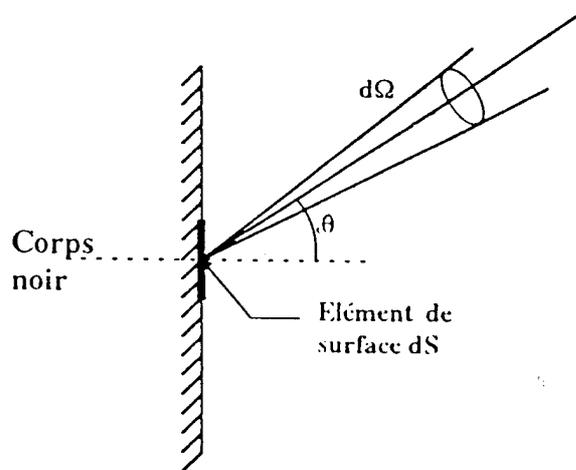
Pour quelle longueur d'onde  $\lambda_M$  observe-t-on un maximum de  $u_q(\nu, T)$ ?

*Application numérique* : donnez une valeur approchée de  $\lambda_M$  à  $T = 5\,700\text{ K}$ .

#### 4.2.4. Conséquence et applications.

##### 4.2.4.1. Puissance rayonnée par un élément de surface.

Retrouvez la loi établie précédemment pour la densité totale d'énergie. Exprimez littéralement la constante  $A$ ; calculez sa valeur numérique.



Calculez la puissance élémentaire  $d^2I$  rayonnée par un élément de surface  $dS$  du corps noir, dans l'angle solide  $d\Omega$  faisant un angle  $\theta$  avec la normale à  $dS$ .

Tracez le diagramme polaire d'émissivité de  $dS$ .

Calculez la puissance totale  $dI$  émise par l'élément de surface  $dS$  dans tout l'espace.

Retrouvez l'expression et la valeur numérique de la constante de Stefan-Boltzmann.

##### 4.2.4.2. Pyromètre optique.

Quel est le principe de fonctionnement d'un pyromètre optique?

Décrivez une manipulation d'optique permettant de montrer ce principe de fonctionnement.

Quels sont les critères d'un bon réglage?

Est-il important de « contrôler » l'angle solide sous lequel émettent les diverses sources?

Quelles sont les applications pratiques de la pyrométrie optique?

##### 4.2.4.3. Perte par rayonnement d'un être humain.

Évaluez les pertes par rayonnement d'un être humain (de corpulence moyenne, assimilé pour simplifier à un corps noir) à la température de  $37^\circ\text{C}$ , plongé dans un environnement à  $0^\circ\text{C}$ .

#### 4.2.4.4. Rayonnement solaire.

Calculez la puissance du rayonnement solaire reçue par unité de surface sur la Terre au niveau de l'équateur. On assimilera la surface du Soleil à un corps noir à la température  $T = 5\,700\text{ K}$ .

Pourquoi le disque solaire apparaît-il uniformément brillant ?

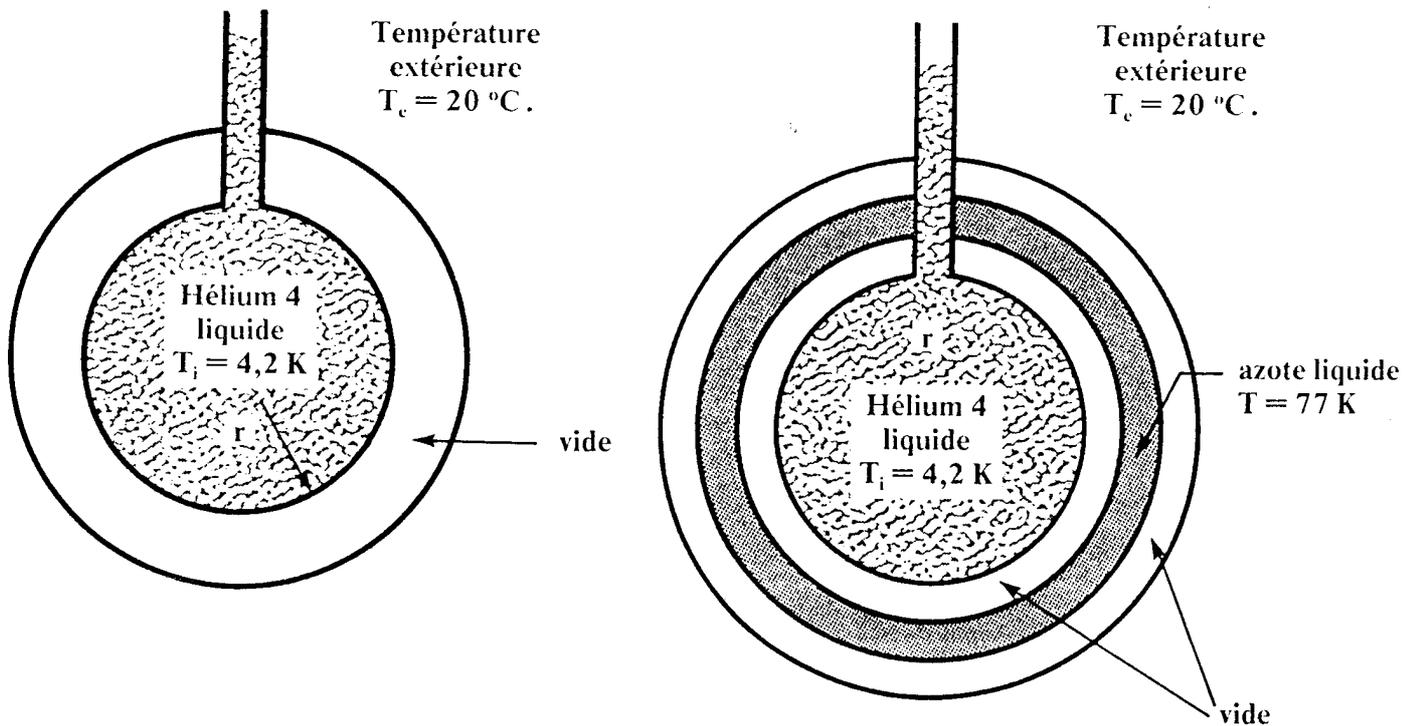
Quelle devrait être la température de la Terre, si on assimilait cette dernière à un corps noir ?

Commentez la valeur numérique ainsi obtenue.

#### 4.2.4.5. Cryostat à hélium.

Un cryostat à hélium est constitué de deux enceintes, supposées sphériques et concentriques pour simplifier. L'enceinte extérieure est à température ambiante  $T_c$  ( $T_c = 20^\circ\text{C}$ ). L'enceinte intérieure (de rayon  $r = 3\text{ cm}$ ) est en équilibre thermique avec l'hélium 4 liquide qu'elle contient, à la température de  $T_i = 4,2\text{ K}$ . Elle est ouverte sur l'extérieur par un petit tube pour permettre à l'hélium qui s'évapore de s'échapper. Le vide règne entre les deux enceintes, de sorte qu'on suppose les pertes uniquement dues au rayonnement thermique (nous négligerons les pertes par conduction le long du tube).

En assimilant les deux enceintes à des corps noirs, calculez la masse d'hélium qui s'évapore de l'enceinte intérieure en une heure.



Même question en interposant entre les deux enceintes une troisième enceinte en équilibre thermique avec un réservoir d'azote liquide à  $T = 77\text{ K}$ .

On donne : chaleur latente d'évaporation de l'hélium 4 :  $L = 82\text{ J/mole}$ .

### 4.3. Électrons dans les métaux et les semi-conducteurs.

#### 4.3.1. Gaz d'électrons libres.

On considère un gaz d'électrons libres et indépendants entre eux, confinés dans un puits de potentiel parallélépipédique : ce potentiel est nul à l'intérieur d'un volume  $V = L_x L_y L_z$ , et infini à l'extérieur.

Résolvez l'équation de Schrödinger pour un électron. Donnez la relation de dispersion entre l'énergie  $\epsilon$  de l'électron et son vecteur d'onde  $k$ . Quelles sont les valeurs permises pour les composantes de  $k$ ?

Calculez la densité d'états  $g(\epsilon)$  ( $g(\epsilon)d\epsilon$  est le nombre d'états accessibles d'énergie comprise entre  $\epsilon$  et  $\epsilon + d\epsilon$ ).

#### 4.3.2. Modèle de métal alcalin.

##### 4.3.2.1. Limites du modèle.

Qu'appelle-t-on bande de valence et bande de conduction dans un métal? Dans cette partie, on assimile les électrons de conduction d'un métal alcalin à un gaz d'électrons libres, décrit par le modèle ci-dessus. Pouvez-vous justifier une telle simplification? Quelles en sont les limites?

##### 4.3.2.2. Fonction de répartition.

À température nulle, tracez l'allure de la fonction de répartition  $\bar{N}(\epsilon)$  ( $g(\epsilon)$ ) des électrons en fonction de  $\epsilon$ . Qu'appelle-t-on niveau de Fermi  $\epsilon_F$ ? Exprimez  $\epsilon_F$  en fonction de la densité volumique d'électrons  $n$ . Calculez la densité d'énergie totale  $E_0$  en fonction de  $n$  et  $\epsilon_F$ .

*Application numérique* : le sodium est un métal alcalin qui cristallise dans le système cubique centré. La maille élémentaire a pour côté  $d = 4,28 \text{ \AA}$ . Calculez  $\epsilon_F$ , ainsi que la température  $T_F = \epsilon_F/k_B$  et la longueur d'onde  $\lambda_F$  associée aux électrons au niveau de Fermi. Dans quelle mesure peut-on assimiler la distribution électronique à température ambiante à celle à  $T = 0\text{K}$ ? Comparez  $\lambda_F$  à la distance moyenne entre électrons. Commentez le résultat.

#### 4.3.3. Modèle de semi-conducteur.

##### 4.3.3.1. Semi-conducteur pur.

Donnez pour un semi-conducteur pur (intrinsèque) un schéma de la structure de bande, et indiquez le remplissage à température nulle, puis à température ambiante.

Citez deux exemples de semi-conducteurs.

Indiquez l'ordre de grandeur, en eV, de l'énergie de bande interdite.

Quelle est, à 300 K, l'ordre de grandeur de la probabilité, pour un électron, de se trouver libre dans le solide?

##### a. Résistivité.

Tracez l'allure de la courbe donnant la variation thermique de la résistivité  $\rho(T)$  d'un semi-conducteur intrinsèque. Tracez sur le même graphique l'allure de la variation thermique de la résistivité d'un métal. Décrivez brièvement l'origine physique de ces variations.

##### b. Caractérisation expérimentale d'un semi-conducteur.

Décrivez un dispositif expérimental permettant de mesurer  $\rho(T)$ .

Décrivez, à votre choix, une méthode expérimentale permettant de mesurer l'énergie de la bande interdite d'un semi-conducteur.

##### 4.3.3.2. Semi-conducteur dopé.

##### a. Dopage.

Expliquez brièvement comment on réalise le dopage N ou P d'un semi-conducteur.

Donnez des exemples concrets.

b. Nombre moyen d'électrons dans un niveau donneur.

Nous considérons dans cette partie un semi-conducteur possédant un ensemble de niveaux donneurs d'électrons sous la bande de conduction. Ces niveaux, de densité volumique  $n_D$ , ont l'énergie :  $-E_D$  (le zéro d'énergie est pris par convention au bas de la bande de conduction). Ces niveaux sont discernables et chacun d'eux ne peut être occupé au maximum que par un seul électron, de spin indifférent.

En utilisant pour  $p(N)$  l'expression donnée à la question 4.1., montrez que le nombre moyen d'électrons dans un de ces niveaux donneurs est :

$$\bar{N} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_D + \mu}{k_B T}\right)}.$$

c. Densité volumique des électrons de conduction.

Les électrons de la bande de conduction sont assimilés à des électrons libres, comme dans la partie 4.3.2., la masse  $m$  des électrons libres dans le vide étant remplacée par une masse effective  $m^*$ , pour tenir compte en première approximation des interactions avec le réseau.

Au voisinage de  $T = 0$  K, où se situe le niveau de Fermi du semi-conducteur ?

À quelle condition a-t-on le droit de confondre la distribution des électrons de conduction avec la distribution classique de Boltzmann généralisée ? *Nous supposons cette condition réalisée dans la suite.*

Exprimez la densité volumique  $n$  des électrons de conduction sous la forme :

$$n = n_C \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right).$$

Calculez  $n_C$ .

d. Étude de la conductivité  $\sigma$ .

On néglige la contribution à la conduction due à l'excitation des électrons de valence. En utilisant la conservation de la charge, écrire l'équation permettant de calculer  $n$ , et la résoudre. En particulier, étudiez le comportement de  $\mu$  et de  $n$  dans la limite des basses, puis des hautes températures. Commentez le résultat dans chaque limite.

En supposant que la conductivité  $\sigma$  du semi-conducteur est proportionnelle à  $n$ , tracez grossièrement l'allure de  $\text{Log}(\sigma)$  en fonction de  $1/T$ . Quelle est, dans ce modèle, la limite de  $\sigma$  à haute température ?

Quel phénomène doit-on prendre en compte dans cette limite des hautes températures ?

e. Application numérique :

Pour le silicium,  $m^* = 0,2 m$ . Calculez  $n_C$  à  $T = 300$  K.

Le silicium est dopé par des impuretés donneuses d'électrons, pour lesquelles  $E_D = 0,02$  eV.

Déterminez la densité de porteurs libres  $n$  dans chacun des deux cas suivants :

- $n_D = 10^{20} \text{ m}^{-3}$  ;
- $n_D = 10^{24} \text{ m}^{-3}$ .