J. 5383

SESSION DE 1997

concours externe
de recrutement de professeurs agrégés

section : sciences physiques

option : physique

épreuve A : composition de physique

Durée : 5 heures

L'usage de calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable et alphanumérique - à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986 et à la note de service n° 95-129 du 17 mai 1995.

Tout document est interdit.

Lorsque l'énoncé demande de décrire une expérience, il s'agit de représenter par un schéma le dispositif utilisé, d'indiquer ce que fait l'expérimentateur, ce qu'il observe et les conclusions qu'il tire de ses observations.

On portera une grande attention à la qualité et à la logique du raisonnement, en particulier lorsque la question est qualitative.

Pour certaines applications numériques, le candidat devra, en le signalant, utiliser des « valeurs typiques » pour les grandeurs physiques intervenant.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Données numériques

- célérité des ondes électromagnétiques dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$;
- perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$;
- charge de l'électron (en valeur absolue) : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$;
- Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Quelques relations utiles

- Potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique permanent :
  si $\vec{\mathcal{M}}$ est son moment dipolaire, O sa position et $\vec{r}$ le vecteur position d'un point M :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

ANALYSE VECTORIELLE

$\vec{u}$ et $\vec{E}$ étant des champs vectoriels, f un champ scalaire

- Rotationnel en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(E_\varphi \sin\theta) - \frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\right) \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\theta} \end{pmatrix}$

- Divergence d'un produit : $\text{div}(f\vec{u}) = f\,\text{div}(\vec{u}) + \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(f)$

- Gradient d'un carré scalaire : $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{E^2}{2}\right) = \vec{E} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) + (\vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\,\vec{E}$

- Laplacien scalaire : $\Delta f = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}(f)\right)$

  en coordonnées cylindriques, si f ne dépend que de la distance ρ à l'axe Oz : $\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)$

  en coordonnées sphériques, si f ne dépend que de la distance r au point O : $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf)$

- Théorème de la divergence : $\iiint_V \text{div}(\vec{u})\,dV = \oiint_S \vec{u} \cdot d\vec{S}$ (S est la surface fermée entourant le volume V)

QUELQUES ASPECTS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

PARTIE I

ÉLECTROSTATIQUE DU VIDE ET DES CONDUCTEURS

Sauf précision explicite, les charges et les champs étudiés dans cette partie I sont indépendants du temps (régime permanent).

I.A. Champs créés par les charges.

I.A.1. *Loi de force de Coulomb.*

a. Donner l'expression vectorielle de la force électrostatique subie par une particule chargée (de charge q_2) soumise à l'action d'une autre particule chargée (de charge q_1).

b. Décrire le dispositif expérimental ayant permis à Coulomb d'établir cette loi (balance de Coulomb). Quelle est la date approximative de cette expérience ?

c. Dégager de la loi de Coulomb la notion de champ électrique $\vec{E}$ créé par la charge q_1. Énoncer le principe de superposition.

I.A.2. *Champs créés par des distributions continues de charges.*

Les charges étudiées sont maintenant décrites par des distributions volumiques dont on suppose connue en tout point la densité ρ.

a. Donner les quatre équations de Maxwell dans le cas général d'un régime dépendant du temps.

b. Dans le cas d'un régime permanent, écrire les équations contenant le champ électrostatique $\vec{E}$. Laquelle permet de déduire l'existence du potentiel électrostatique V ? Le potentiel V est-il unique ? À part l'équation locale liant V et $\vec{E}$, donner un intérêt physique à l'introduction de V.

c. Démontrer l'équation aux dérivées partielles reliant V et ρ (équation de Poisson). De quelle propriété de cette équation le principe de superposition est-il une conséquence ?

d. Énoncer puis démontrer le théorème de Gauss. Ce théorème est-il valable en dehors du cadre de l'électrostatique ?

e. On se place dans le cas où la densité volumique de charge n'est non nulle que dans un domaine borné de l'espace. Donner, en la justifiant brièvement, l'expression de la solution de l'équation de Poisson tendant vers 0 à l'infini.

f. Donner l'expression générale du champ électrostatique $\vec{E}$ en fonction des densités volumiques de charge.

g. On utilise parfois des modélisations superficielles ou filiformes des distributions de charges (densités notées σ ou λ). Comment faut-il alors modifier les expressions donnant $\vec{E}$ et V ? Donner avec précision les conséquences de ces modélisations sur le comportement des champs $\vec{E}$ et V au voisinage des surfaces ou courbes chargées.

h. Exemple : un plan (illimité) est chargé uniformément en surface avec une densité σ. Calculer le champ $\vec{E}$ qu'il crée en un point quelconque de l'espace :
- par utilisation des expressions du I.A.2.*g.* ;
- par une autre méthode.

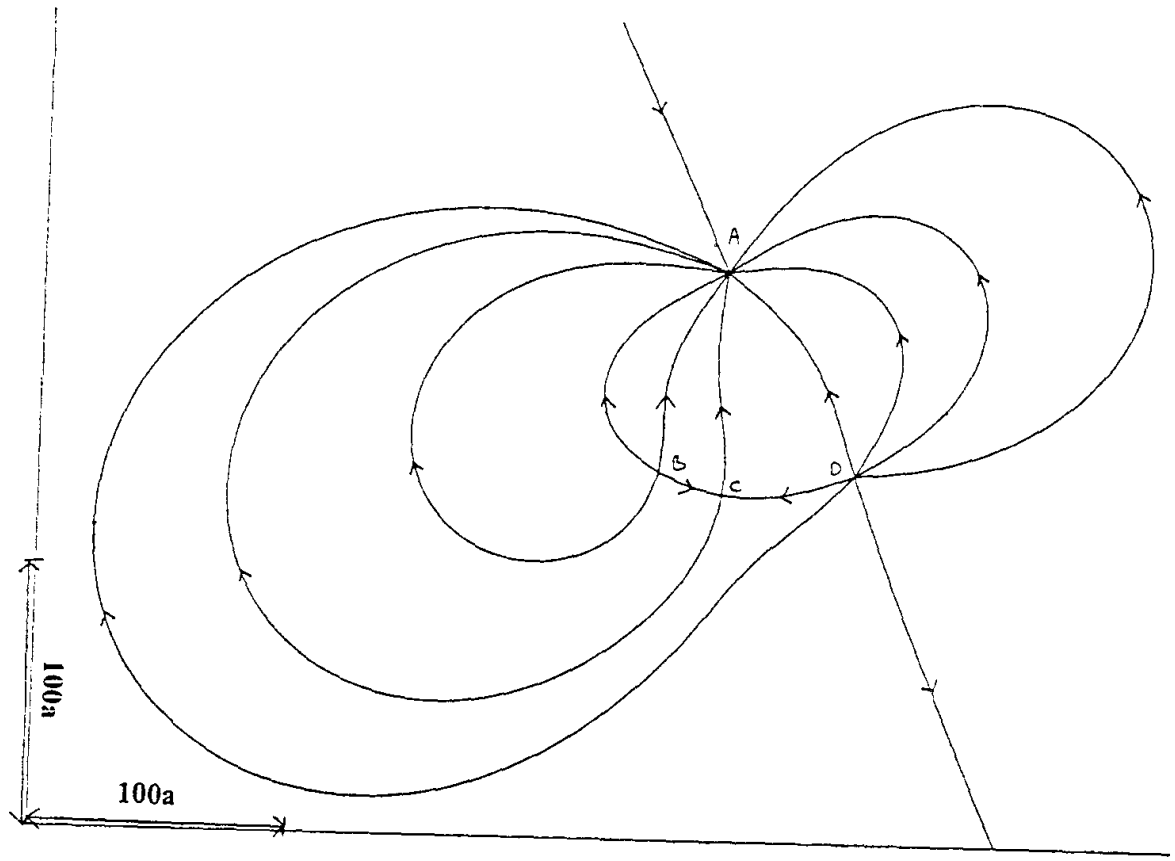

Figure 1*a*

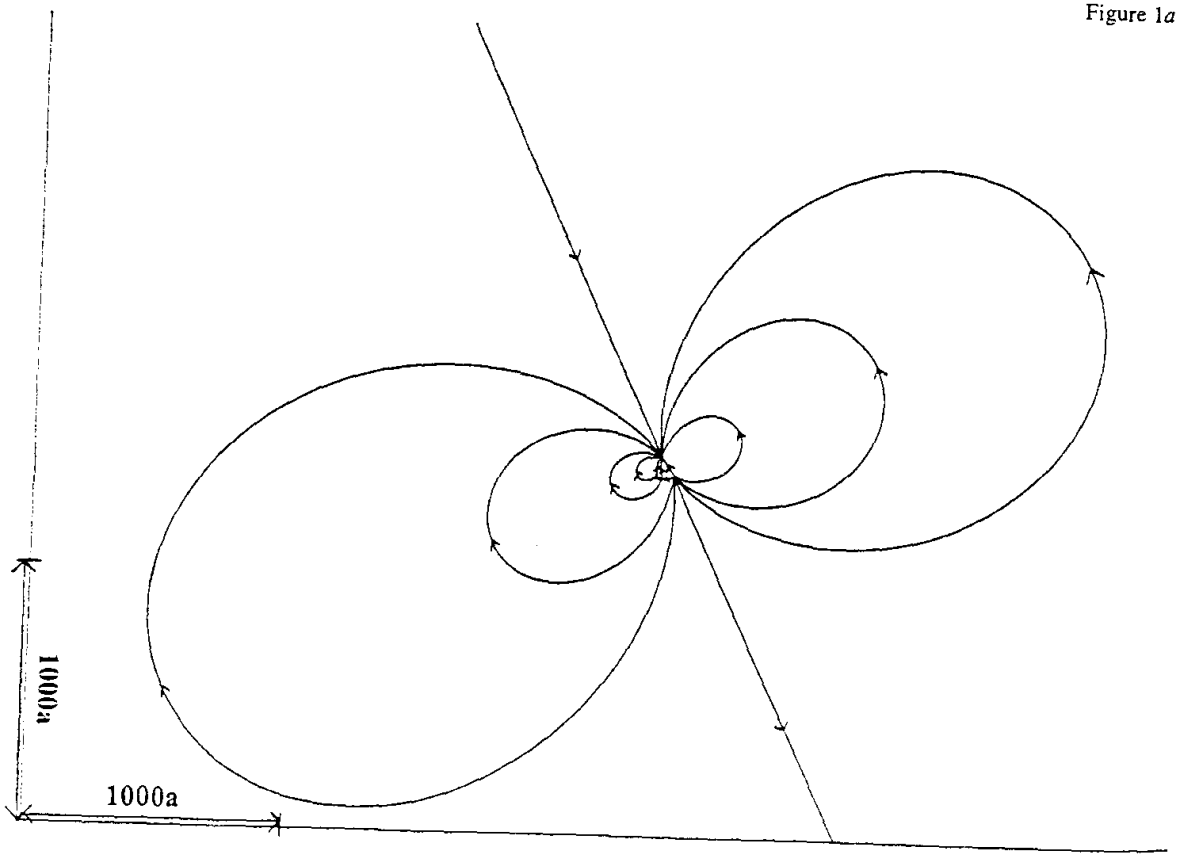

Figure 1b

I.A.3. *Topographie du champ électrostatique.*

a. Quel est le lien géométrique entre les surfaces équipotentielles et les lignes de champ ?

b. Peut-il y avoir un extremum local de potentiel dans une zone sans charges ? Pourquoi ?

c. Les figures 1*a* et 1*b* montrent à deux échelles différentes les lignes (orientées par $\vec{E}$) du champ créé par un ensemble de charges ponctuelles. Toutes les charges créant ce champ sont dans le plan de la figure. Au moins un exemple de chaque type de ligne de champ est dessiné. On note q la valeur de la plus petite (en module) des charges. Les autres valeurs sont des multiples entiers (positifs ou négatifs) de q. On donne les coordonnées cartésiennes des points A ($24a$,$75a$), B (0, 0), C ($24a$, $-8a$), D ($75a$, 0) où a est l'unité de longueur. Déterminer d'après ces figures :
- le nombre et la position des charges utilisées ;
- les valeurs des charges en fonction de q ;
- le signe de q.

I.A.4. *Vérification expérimentale de la loi de Coulomb.*

On postule dans cette partie I.A.4. que le potentiel δV créé en un point M par une charge quasi ponctuelle δQ située en P s'écrit (en désaccord avec la loi de Coulomb si ε est non nul) :

$$\delta V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\delta Q}{(MP)^{1+\varepsilon}}.$$

a. Calculer alors le potentiel créé en un point quelconque de l'espace par une sphère creuse de rayon R_0 chargée en surface avec une densité uniforme σ. (On pourra exprimer la surface élémentaire sur la sphère en fonction de MP et de sa variation élémentaire d(MP) lorsque P se déplace sur la sphère ; voir la figure 2).

b. Calculer la différence de potentiel $V_0 - V_1$ entre la sphère chargée et une sphère de rayon $R_1 < R_0$. Quelle valeur obtient-on si $\varepsilon = 0$? En supposant ε petit devant 1, donner une expression approchée de $\frac{V_0 - V_1}{V_0}$.

c. On choisit $R_1 = 1$ m, $R_0 = 1{,}5$ m et $V_0 = 10^4$ V. Expérimentalement on constate que $|V_1 - V_0| < 10^{-12}$ V. En déduire une majoration de $|\varepsilon|$.

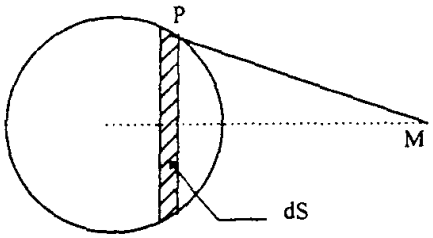

Figure 2

Figure 1*a*

Figure 1b

I.B. Équations de Laplace et de Poisson dans d'autres domaines de la physique.

I.B.1. *Hydrodynamique : écoulement laminaire d'un fluide visqueux.*

Un fluide incompressible s'écoule dans une conduite cylindrique (de section droite de forme quelconque pour l'instant : voir par exemple la figure 3). On note Oz l'axe du cylindre. En tout point, le champ des vitesses du fluide est colinéaire à Oz et l'écoulement est permanent : $\vec{v} = v(x, y, z)\,\vec{u}_z$. On néglige l'influence des forces de pesanteur. On note η la viscosité et μ la masse volumique du fluide.

a. Rappeler l'équation de Navier-Stokes dans le cas d'un fluide incompressible.

b. Montrer que v est indépendant de z.

c. Montrer que la pression P est indépendante de x et y et que $\dfrac{dP}{dz}$ est indépendant de z.

d. Montrer qu'alors v vérifie une équation de Poisson : $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + K = 0$ et préciser l'expression de la constante K.

e. Quelles sont les conditions aux limites que v doit respecter ?

f. Résoudre cette équation dans le cas d'une conduite à base circulaire de diamètre d. En déduire la loi de Poiseuille donnant la chute de pression en fonction du débit volumique D dans une conduite de longueur L : $|P_B - P_A| = \alpha \dfrac{L\eta D}{d^4}$ où α est un coefficient sans dimension à préciser.

g. Décrire un dispositif expérimental permettant la vérification de cette loi. On introduit le nombre $R_e = \dfrac{\mu v_{typique} d}{\eta}$. Quelle est sa dimension ? Comment le nomme-t-on usuellement ? À quelle condition (grossière) portant sur R_e a-t-on effectivement un écoulement laminaire permanent ?

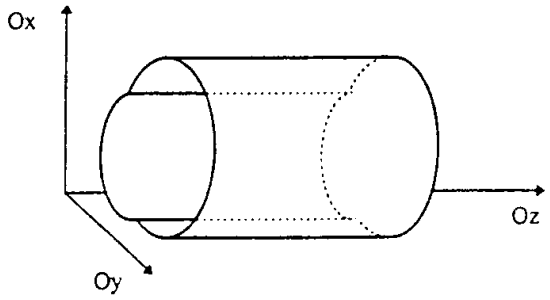

Figure 3

I.B.2. *Diffusion de la chaleur.*

Une sphère radioactive de rayon R est immobile au milieu d'un récipient plein d'eau dont les dimensions sont grandes devant R. L'eau est immobile. Les réactions nucléaires dégagent dans la sphère une énergie par unité de volume et de temps α que l'on suppose uniforme et indépendante de t. On note λ_1 et c_1 (respectivement λ_2 et c_2) la conductivité thermique et la capacité thermique volumique de la sphère (resp. de l'eau). La température de l'eau loin de la sphère est indépendante du temps (T_0) et on s'intéresse à un régime permanent.

a. Montrer que le champ de température vérifie dans la sphère une équation de Poisson $\Delta T + K = 0$ (déterminer K) et dans l'eau une équation de Laplace $\Delta T = 0$.

b. Quelles sont les conditions aux limites que doit respecter le champ de température ?

c. Résoudre les équations en supposant le champ de température à symétrie sphérique. Exprimer la température au centre de la sphère en fonction des données du problème.

I.B.3. *Autres situations*

Citer une ou deux autres situations physiques où intervient l'équation de Poisson ou l'équation de Laplace.

I.C. Conducteurs en équilibre électrostatique.

On s'intéresse dans cette partie à un ensemble de conducteurs électriques placés dans le vide.

I.C.1. *Lois générales.*

a. Donner la définition de l'équilibre électrostatique d'un conducteur. Que peut-on dire alors du comportement à l'intérieur du conducteur :
- de $\vec{E}$?
- de V ?
- de la densité volumique de charge ρ ?

b. On suppose (dans cette question *b* seulement) que le régime d'équilibre électrostatique n'est pas atteint et que le conducteur suit la loi d'Ohm avec une conductivité électrique γ. Montrer que la densité volumique ρ vérifie une équation différentielle du type $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$.

Exprimer τ en fonction de γ et des constantes fondamentales de l'électromagnétisme. Quelle est la signification physique de τ ? Donner un ordre de grandeur de γ pour un métal usuel. En déduire une valeur typique de τ. Discuter le résultat.

c. Un conducteur est chargé. Où sont localisées les charges portées par ce conducteur ? Quelle est l'expression du champ électrique en un point du vide très proche de la surface du conducteur ? (Théorème de Coulomb).

d. La figure 4 représente trois conducteurs. Le plus grand est creux, porté au potentiel 0, et entoure complètement une zone contenant les deux autres. Le conducteur 1 porte une charge positive. Le conducteur 2 porte une charge globale nulle. Il n'y a pas de charges en dehors de celles qui sont portées par les conducteurs. Un certain nombre de courbes orientées sont dessinées. Certaines peuvent être des lignes de champ orientées par $\vec{E}$. Les autres ne peuvent pas l'être. Donner les listes des bonnes et des mauvaises lignes en justifiant les réponses. En déduire les signes des potentiels V_1 et V_2 de chacun des conducteurs et comparer $|V_1|$ à $|V_2|$.

e. Calculer la force électrique subie par les charges portées par une surface élémentaire du conducteur. Pourquoi parle-t-on de *pression électrostatique* ? Donner l'expression de la pression électrostatique en fonction du champ électrostatique dans le vide au voisinage du conducteur.

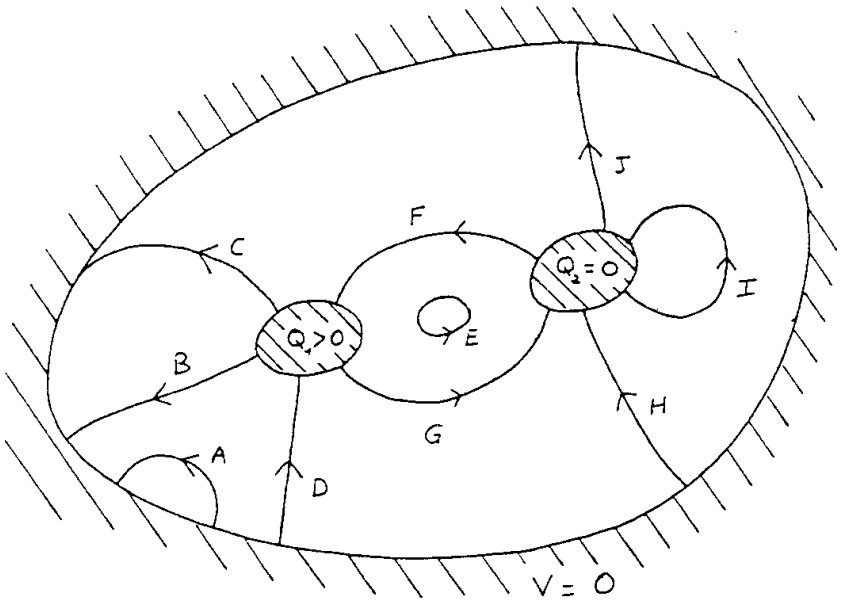

Figure 4

I.C.2. *Exemple d'utilisation du pouvoir des pointes.*

Expliquer ce qu'on appelle le *pouvoir des pointes.*

Le microscope à émission ionique utilise l'ionisation d'atomes d'hélium au voisinage d'une fine pointe métallique. Une différence de potentiel V est imposée entre cette pointe et un conducteur sphérique de grande taille qui l'entoure, sur lequel les ions He^+ recueillis forment une image de la pointe. Sachant que la pointe se comporte comme une sphère de rayon environ 100 nm, quelle différence de potentiel faut-il appliquer pour obtenir l'ionisation au voisinage de la pointe ?

I.C.3. *Condensateurs.*

I.C.3.*a.* Définitions.

Qu'appelle-t-on un condensateur dans le cadre de l'étude des conducteurs en équilibre électrostatique ? Définir sa capacité.

I.C.3.*b.* Condensateur plan.

Donner l'expression de la capacité d'un condensateur plan en précisant les hypothèses simplificatrices permettant de l'établir. À quelles conditions peut-on utiliser cette expression pour le calcul de la capacité de condensateurs réels de forme quelconque ?

I.C.3.*c.* Condensateur réel.

On utilise au laboratoire un condensateur électrolytique de capacité 1 F. Une des armatures est constituée d'aluminium recouvert d'une couche d'alumine en contact avec un électrolyte qui constitue une partie de l'autre armature. L'ensemble est contenu dans un boîtier cylindrique de diamètre 3 cm, de hauteur 2 cm. La permittivité relative de l'alumine est 8 et sa rigidité diélectrique est $K = 7 \cdot 10^8\ V \cdot m^{-1}$ (champ électrique à ne pas dépasser dans le diélectrique pour ne pas risquer de claquage). Par ailleurs, il est indiqué sur le boîtier que la tension maximale d'utilisation est de 5,5 V. Déduire de ces données un encadrement de l'épaisseur de la couche d'alumine.

I.C.3.*d.* Exemple de capacimètre.

La figure 5 est un schéma de principe d'une partie d'un capacimètre numérique. R est une résistance connue, V_1, V_2 et V_{ref} sont des potentiels constants ($0 < V_1 < V_2 < V_{ref}$). C est un condensateur de capacité à déterminer. I est un interrupteur commandé qui est initialement fermé. Le montage comporte également deux comparateurs. À un moment donné l'interrupteur s'ouvre. Tracer sur un même graphe l'allure des courbes donnant s_1, s_2 et la tension aux bornes du condensateur au cours du temps. Soit δt l'intervalle de temps séparant le basculement des sorties des deux comparateurs. Exprimer δt en fonction des caractéristiques du montage.

Comment faut-il compléter l'appareil pour réaliser un capacimètre numérique ?

Décrire une autre méthode de mesure de capacité.

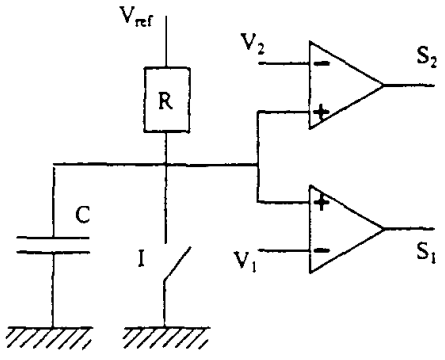

Figure 5

I.C.4. *Étude d'une machine électrostatique.*

Une machine électrostatique est constituée par un condensateur cylindrique à base circulaire. Un opérateur déplace l'armature centrale par un va-et-vient entre les deux positions P_1 et P_2 (voir la figure 6). En position P_1, le conducteur entre en contact avec la borne positive d'un générateur de force électromotrice constante E. En position P_2, il entre en contact avec l'une des armatures d'un condensateur de capacité C. On note C_1 et C_2 les valeurs de la capacité du condensateur cylindrique en position P_1 et P_2. Le condensateur C est initialement déchargé. On note Q_n et V_n la charge et la différence de potentiel aux bornes de C au bout de n aller-retour (en partant de la position P_1). Montrer que Q_n et V_n augmentent lorsque n augmente. Exprimer la limite de V_n lorsque n tend vers l'infini en fonction de E, C_1 et C_2. Quel est l'intérêt de cette machine ?

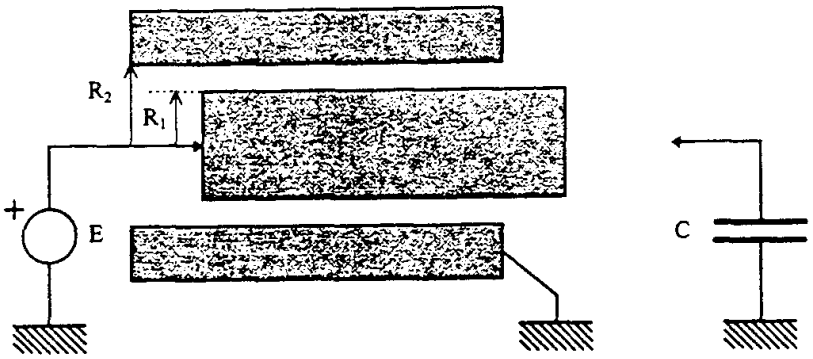

Figure 6

I.D. Énergie électrostatique.

I.D.1. *Expressions générales.*

Définir l'énergie électrostatique d'un ensemble de charges ponctuelles et donner son expression. Généraliser au cas d'une distribution continue de charges. Dans le cas d'une distribution bornée, mettre l'énergie sous forme d'une intégrale ne faisant intervenir que le champ électrique $\vec{E}$, en justifiant avec précision les étapes du calcul.

I.D.2. *Exemples.*

I.D.2.*a.* Cas d'une sphère.

Déterminer l'énergie électrostatique d'une sphère de rayon R portant une charge Q dans les deux cas suivants :

- Q est répartie uniformément sur la surface sphérique ;
- Q est répartie uniformément dans le volume intérieur à la sphère.

I.D.2.*b.* Rayon classique de l'électron

L'électron est modélisé par une boule chargée uniformément en volume. Quel doit être son rayon pour que son énergie au repos soit entièrement d'origine électrostatique ?

Application numérique. Commenter le résultat.

I.D.2.*c.* Stabilité d'une gouttelette chargée.

L'expérience montre qu'une goutte d'eau chargée tend, si elle porte une charge trop élevée, à se scinder en plusieurs gouttes plus petites. Pour étudier quantitativement ce phénomène, on doit prendre en compte la tension superficielle de l'eau : l'énergie libre d'une goutte s'écrit $u_v \mathcal{V} + A \mathcal{S}$ où $\mathcal{V}$ et $\mathcal{S}$ sont respectivement le volume et l'aire de la surface de la goutte, u_v est l'énergie volumique et A la tension superficielle. Les gouttes étudiées sont supposées sphériques, on ne tient pas compte des effets de la pesanteur et on considère que l'eau est incompressible. Déterminer la charge limite Q_c d'une goutte de rayon R telle que la séparation en deux gouttes identiques soit favorisée. À quel potentiel de la goutte initiale cela correspondait-il ?

Application numérique. La tension superficielle de l'eau est $73 \cdot 10^{-3}$ N · m^{-1} ; R = 5 mm. Plus généralement, une goutte de charge $Q \gg Q_c$ se scinde en n gouttes identiques. Évaluer n en fonction de Q/Q_c .

I.D.2.*d.* Énergie de cohésion d'un métal.

On modélise un métal par un ensemble de cellules formant un cristal de réseau cubique. Chaque cellule contient un ion quasi ponctuel de charge + e, qui est le centre d'un nuage électronique sphérique de charge – e, de diamètre 2R égal au côté *a* de la maille cubique, de densité volumique de charge uniforme (voir figure 7).

Calculer, pour une cellule, la différence entre son énergie électrostatique et celle de l'état où la charge – e est dispersée à grande distance de la charge ponctuelle + e. Montrer que l'énergie électrostatique associée à la dispersion des charges de l'ensemble des cellules peut être obtenue en multipliant l'énergie associée à une cellule par le nombre des cellules.

Application numérique. Pour le sodium $a = 4{,}29 \cdot 10^{-10}$ m. Calculer cette énergie pour une mole de sodium.

N.B. Dans un souci de simplification on ne tiendra pas compte du fait que le réseau du sodium est en réalité cubique centré.

II.A.

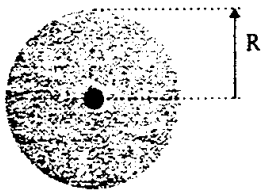

Figure 7

PARTIE II

ÉLECTROSTATIQUE DES SEMI-CONDUCTEURS

II.A. Modèles de distributions de charges dans un conducteur.

Un milieu conducteur homogène, de permittivité relative ε_r, est séparé du vide ou de l'air par une surface plane suffisamment grande pour pouvoir négliger les effets de bord : on considère qu'il occupe le volume $x > 0$ (l'origine O est sur la surface) et que les grandeurs physiques ne sont fonctions que de x. Loin de l'interface dans le conducteur, le champ électrique est nul et le potentiel y est pris pour origine. On désigne par V_S le potentiel électrique et par E_S la composante sur x du champ électrique *au voisinage et à l'extérieur* du conducteur, par Q_S la charge totale portée par le conducteur par unité d'aire de sa surface et par $C_S = -dQ_S/dV_S$ sa capacité surfacique différentielle.

II.A.1. *Conducteurs à un seul type de porteurs.*

On considère un milieu conducteur contenant un seul type de porteurs mobiles de charge q avec la densité N (nombre de porteurs par unité de volume).

a. Montrer que, selon le signe de qV_S, on peut considérer que la charge du conducteur occupe la surface ou bien une épaisseur x_d du milieu dans laquelle on admettra qu'elle est uniformément distribuée (zone de charge d'espace). Quel est le signe de cette charge d'espace, par rapport à celui de q ?

b. Dans ce dernier cas, donner l'expression de Q_S en fonction de l'épaisseur x_d de la zone de charge d'espace. Établir les expressions de $E(x)$ et $V(x)$, en déduire les valeurs de E_S et V_S en fonction de x_d, puis celle de la capacité C_S en fonction de V_S et du paramètre

$$K = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r |q| N .$$

c. Comparer les valeurs numériques de x_d dans un conducteur métallique ($N = 10^{29}$ m^{-3}) et dans du silicium dopé ($N = 10^{21}$ m^{-3}) pour $|E_S| = 1$ V · µm^{-1}. Dans les deux cas $|q| = e$.

Préciser le modèle de distribution de charge que l'on peut adopter pour les conducteurs métalliques.

II.A.2. *Conducteurs à deux types de porteurs.*

Le matériau est un semi-conducteur (du silicium) dopé P contenant une densité de centres accepteurs N, tous ionisés à la température de fonctionnement ($T \approx 300$ K). Les trous ainsi créés (porteurs majoritaires) se comportent comme des charges libres de valeur $q = e$. On tient compte de l'existence de porteurs minoritaires, les électrons libres. On rappelle que le produit $n \cdot p$ de la densité d'électrons libres n par la densité de trous libres p est égal au carré de la densité intrinsèque n_i et que la densité d'un type de porteurs dans un matériau homogène non-équipotentiel est proportionnelle au facteur de Boltzmann exp ($-\beta W$) où W est l'énergie potentielle électrostatique de ces porteurs et $\beta = \dfrac{1}{k_B T}$.

Pour les *applications numériques* on prendra : $N = 10^{21}$ m^{-3}, $n_i = 10^{16}$ m^{-3}, $\varepsilon_r = 12$.

a. Déterminer la densité d'électrons libres n_0 dans le semi-conducteur en dehors de la zone de charge d'espace, puis calculer sa valeur numérique.

Les porteurs minoritaires doivent-ils être pris en compte quand V_S est négatif ?

Dans la suite de cette partie on étudie le cas où V_S est positif.

b. En utilisant l'expression du potentiel valable pour la charge uniforme étudiée en II.A.1.*b.*, déterminer la densité de trous libres *p* et d'électrons libres *n* dans la zone de charge d'espace en fonction de *x* et simplifier les expressions en introduisant la longueur de Debye $L_D = \sqrt{\frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0 k_B T}{e^2 N}}$ dont on calculera la valeur numérique pour le semi-conducteur considéré.
Expliquer pourquoi l'approximation consistant à prendre une charge d'espace (charge totale incluant charges libres et charges liées) uniforme et égale à – eN pour le calcul du potentiel est légitime dans un certain domaine de *x*.

c. Dans le cadre d'un modèle très simplifié, on utilise l'approximation précédente jusqu'à l'abscisse où la densité *n* des porteurs minoritaires égale la densité N des centres accepteurs. Pour quelle valeur x_1 de $x_d - x$ cette limite est-elle atteinte ?
Calculer sa valeur numérique ainsi que celle du potentiel V_1 au point correspondant.

d. Pour $x < x_d - x_1$ estimer seulement l'ordre de grandeur numérique de $(x_d - x)/x_1$ pour lequel $n = 100$ N dans le semi-conducteur, en utilisant encore l'expression du potentiel du II.A.1.*b.*
En déduire le modèle simple de distribution de charge que l'on peut adopter pour $x < x_d - x_1$. Que devient alors l'épaisseur de la charge d'espace quand le champ E_S augmente ?

II.A.3. *Récapitulatif des modèles pour un semi-conducteur dopé.*

Récapituler les résultats précédents pour le semi-conducteur dopé P à l'aide de trois graphiques représentant en fonction de *x* l'allure des distributions de charge selon la valeur de V_S : $V_S < 0$, $0 < V_S < V_1$, $V_1 < V_S$.

II.B. **Structure capacitive C-I-SC.**

On considère une structure du type conducteur (C) - isolant (I) - semi-conducteur (SC) disposés en couches planes (fig. 8).

Le substrat **SC**, d'épaisseur très supérieure à toutes les longueurs caractéristiques du problème, est constitué de silicium dopé P contenant une densité de centres accepteurs $N = 10^{21}$ m^{-3}, tous ionisés à la température de fonctionnement. La permittivité relative du silicium est $\varepsilon_r = 12$.

Le diélectrique isolant **I**, d'épaisseur $d = 0{,}1$ µm, a une permittivité relative $\varepsilon'_r = 4$ et un champ de claquage $R = 600$ V · µm^{-1}.

La couche conductrice **C** constitue la grille, polarisée au potentiel V_G par rapport au substrat par l'intermédiaire de contacts ohmiques.

On néglige les effets de bords de sorte que les grandeurs physiques ne sont fonctions que de la coordonnée *x*, dont l'origine est placée à l'interface **I-SC**.

La charge d'espace sera modélisée par une distribution uniforme et on négligera l'épaisseur des couches chargées concentrées au voisinage des interfaces.

On désigne par Q la charge de la grille par unité d'aire et par $C = dQ/dV_G$ sa capacité surfacique différentielle.

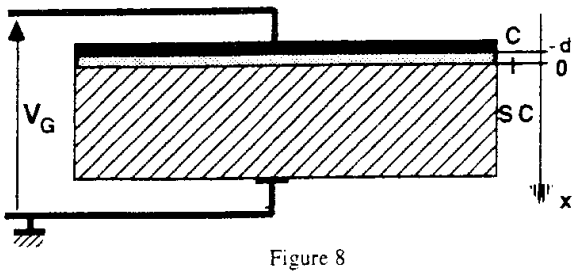

Figure 8

II.B.1. *Régime d'accumulation.*

La grille est polarisée négativement.

a. Expliquer pourquoi la structure peut être modélisée par un condensateur.
Donner l'expression C_A de la capacité surfacique C dans ce cas, puis calculer sa valeur numérique. Quelle serait la capacité d'une structure carrée de côté 10 µm ?

b. Quelle est la valeur maximale de $|V_G|$ à ne pas dépasser ?

II.B.2. *Régime de désertion.*

La grille est polarisée positivement à un potentiel suffisamment faible pour que le potentiel V_0 à l'interface **I-SC** soit inférieur à la valeur V_I définie en II.A.2.*c*.

a. Quelle est la valeur de la charge surfacique Q portée par la grille ? En déduire l'expression de V_G en fonction de l'épaisseur x_d de la zone désertée.

Calculer la valeur numérique de la borne supérieure V_{GI} du domaine de validité de cette expression.

b. Donner l'expression de l'inverse $1/C_D$ de la capacité différentielle surfacique de la structure dans ce régime en fonction de C_A et de C_S défini en II.A.1.*b*., puis en fonction de C_A, de V_G et de K défini en II.A.1.*b*.

Calculer C_D pour V_G égal à 0,1 V, 1 V, ainsi que, formellement, pour V_G égal à 5 V.

II.B.3. *Régime d'inversion.*

La grille est polarisée positivement à un potentiel supérieur à V_{GI}.

a. Donner l'expression C_I de la capacité surfacique en fonction de C_A.

b. On peut déterminer expérimentalement la durée τ_I nécessaire pour passer du régime de désertion au régime d'inversion à saturation quand on applique à la grille un échelon de potentiel de valeur $V_G > V_{GI}$. Calculer la densité de courant constante J_S qui engendrerait la même évolution. Calculer numériquement J_S pour $V_G = 5$ V et $\tau_I = 20$ ms.

c. Quelle explication donneriez-vous à l'existence de la constante de temps τ_I ?

II.C. **Application : dispositif à transfert de charge (DTC).**

On considère un ensemble de capacités du type précédent à grilles polarisées positivement, implantées sur un même substrat et alignées selon un axe parallèle aux couches. Ces capacités sont réalisées alternativement avec deux épaisseurs d'isolant d_a et d_b ($d_a > d_b$) et les potentiels d'inversion correspondants sont respectivement V_{Ga} et V_{Gb}. Chaque grille *a* est connectée à la grille *b* située immédiatement à sa droite sur la figure pour former une paire équipotentielle. Deux paires contiguës sont portées à des potentiels différents V_1 et V_2. La figure 9 ne représente qu'une faible longueur d'une coupe d'un registre à décalage de DTC.

a. On étudie tout d'abord l'influence de l'épaisseur d'isolant. Comparer V_{Ga} et V_{Gb}. Tracer **sans calcul l'allure** de la courbe donnant l'énergie potentielle d'un électron à l'interface **I-SC** le long de l'alignement des capacités, quand $V_1 = V_2$, puis quand V_1 est nettement plus grand que V_2 de sorte que les énergies sous une paire sont plus faibles que sous l'autre. Indiquer par des flèches la composante parallèle aux couches de la force exercée sur un électron en différents points de l'interface **I-SC** et par des points les positions possibles d'électrons libres à l'interface.

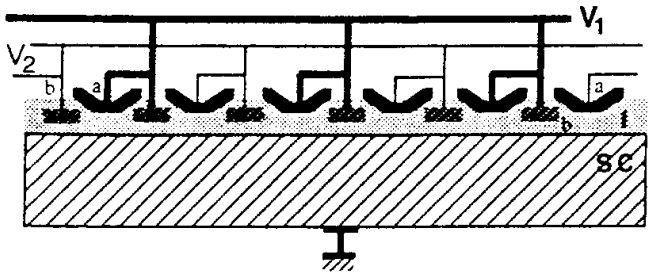

Figure 9

b. On utilise ce dispositif pour collecter localement à l'interface **I-SC** les électrons provenant de la création de paires électron-trou par absorption de lumière dans le semi-conducteur. Préciser les conditions sur les potentiels V_1 et V_2 avant et après le début de la collecte.

La durée de cette collecte étant bien plus faible que le temps τ_I défini plus haut, quelle est la charge maximale collectée à saturation par une capacité ?

Effectuer *l'application numérique* avec les valeurs données précédemment en II.B. ($d = 0{,}1$ µm), un potentiel de grille égal à 5 V et une électrode carrée de côté $c = 10$ µm.

Si le semi-conducteur est du silicium, à quelle longueur d'onde d'un rayonnement électromagnétique le dispositif présentera-t-il le maximum de sensibilité ?

c. La collecte terminée, on fait varier périodiquement les potentiels V_1 et V_2 selon une séquence à deux phases de durée une demi-période chacune :

phase 1 : $V_1 = V_H$ et $V_2 = V_B$, avec $V_B < V_{Gb} < V_H < V_{Ga}$ vérifiant la condition du II.C.*a*.

phase 2 : $V_1 = V_B$ et $V_2 = V_H$.

Expliquer sur une figure les transferts de charges au cours de l'enchaînement des phases.

d. Un cycle de mesure consiste à collecter les charges dans les différents compartiments du registre (les pixels) puis à les transférer à une extrémité où elles sont détectées successivement. Combien y a-t-il d'éléments capacitifs par pixel ? Quelle est la bande passante spatiale du dispositif, que l'on exprimera en mm^{-1}, quand les électrodes de côté $c = 10$ µm sont pratiquement jointives ?

e. La cinétique de création des porteurs, associée à d'autres phénomènes parasites, correspond à l'alimentation de l'interface **I-SC** par une densité de courant de valeur $J_S = 10^{-9}$ A·cm^{-2}, pour les matériaux et les dimensions considérés. En considérant un registre de 128 pixels, et en conservant les valeurs données précédemment, estimer une fréquence minimale de mesure pour que le courant J_S ne fasse pas varier la charge collectée de plus du millième de la charge de saturation.

Quelle est alors la fréquence de commande des tensions V_1 et V_2 ?

f. Citer des applications des dispositifs à transfert de charges.

g. Donner le schéma d'un montage permettant de visualiser sur l'écran d'un oscilloscope la figure de diffraction d'une fente.

III.A.

PARTIE III

QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET MOMENT CINÉTIQUE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Dans cette partie III, les champs étudiés pourront dépendre du temps.

III.A. Étude d'un système particulier.

Un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{u}_z$ (où $\vec{u}_z$ est le vecteur unitaire de l'axe Oz) est placé en un point O. Deux charges ponctuelles identiques (de charge q) sont placées symétriquement par rapport à O dans le plan xOy à une distance a du point O (voir figure 10).

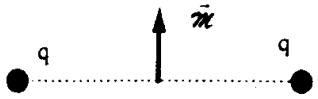

Figure 10

III.A.1. *Approximation des régimes quasi permanents.*

On se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi permanents. Rappeler les hypothèses associées à cette approximation et les conséquences relatives aux calculs des champs magnétique $\vec{B}$ et électrique $\vec{E}$.

III.A.2. *Étude d'une première situation.*

Aucune force autre que les forces électromagnétiques n'agit sur les charges ponctuelles. Elles sont initialement immobiles. $\vec{\mathcal{M}}$ est constant.

a. Montrer qu'elles se mettent en mouvement. Dessiner (sans calcul) l'allure de leurs trajectoires. Montrer qu'elles acquièrent un moment cinétique non nul par rapport au point O.

b. Étudier l'évolution de ce moment cinétique et vérifier qu'on peut le calculer à l'instant t en fonction de la distance des particules par rapport au point O à cette date.

c. Calculer le vecteur moment cinétique final $\vec{\sigma}_1$ du système (lorsque les deux charges sont infiniment éloignées).

III.A.3. *Étude d'une deuxième situation.*

Les deux charges sont maintenant fixées sur une barre rigide qui peut pivoter librement autour du point fixe O. $\vec{\mathcal{M}}$ dépend du temps : il garde une direction constante mais son module décroît à partir d'une valeur initiale $\mathcal{M}_0$ pour tendre vers 0. La barre est initialement immobile.

a. Montrer que la barre se met à tourner autour de l'axe Oz.

b. Étudier l'évolution du moment cinétique en O de l'ensemble barre + charges et vérifier qu'on peut l'exprimer en fonction de la valeur de $\vec{\mathcal{M}}$.

c. Calculer le moment cinétique final $\vec{\sigma}_2$ du système.

III.A.4. *Interprétation.*

Comparer $\vec{\sigma}_1$ et $\vec{\sigma}_2$. Comment interpréter l'apparition d'un moment cinétique pour le système global formé du dipôle et des charges ponctuelles que l'on peut considérer comme un système isolé ? Que représente donc $\vec{\sigma}_1$?

III.B. **Étude générale.**

III.B.1. *Équation-bilan d'une grandeur physique extensive.*

Une grandeur extensive A (telle que la masse ou l'énergie) vérifie les propriétés suivantes :

- elle est localisée : elle peut être décrite par une densité volumique a telle que la quantité de A contenue dans un volume V peut s'écrire $\iiint_V a \, dV$;
- elle peut être échangée entre différents systèmes séparés par une surface S, le débit associé à ce transfert s'écrivant sous la forme $\iint_S \vec{j}_A \cdot d\vec{S}$ où $\vec{j}_A$ est la densité de courant associée à A ;
- elle peut être créée dans le volume d'un système. Cette création étant décrite par le taux de création α par unité de volume et de temps tel que, dans le volume V, $\frac{\delta A_{\text{création}}}{\delta t} = \iiint_V \alpha \, dV$

En faisant un bilan de la grandeur A, démontrer l'équation-bilan locale reliant a, α et div $(\vec{j}_A)$.

III.B.2. *Quantité de mouvement du champ électromagnétique.*

On se place maintenant en régime variable quelconque. On utilise les équations de Maxwell dans le vide en présence de charges et de courants décrits par des densités volumiques.

a. Densité volumique de force.

On étudie un volume élémentaire $d\tau$ dans lequel existe une densité volumique de charge ρ et une densité volumique de courant $\vec{j}$. Calculer la force électromagnétique subie par ce volume $d\tau$. Exprimer la densité volumique de force $\frac{\vec{df}}{d\tau}$ en fonction de ρ, $\vec{j}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

b. Équation-bilan de quantité de mouvement.

À l'aide des équations de Maxwell mettre l'expression $\vec{V} = \frac{\vec{df}}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})$ sous une forme où n'apparaissent que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ainsi que certaines de leurs dérivées spatiales.

Soit $\vec{u}$ un vecteur constant quelconque. $\vec{V} \cdot \vec{u}$ comporte deux termes, l'un faisant intervenir uniquement $\vec{E}$ et l'autre $\vec{B}$ uniquement. Comparer le terme contenant $\vec{E}$ avec $\text{div}\left(\frac{\vec{u}E^2}{2} - (\vec{u}\cdot\vec{E})\vec{E}\right)$. Montrer alors que l'expression complète de $\vec{V} \cdot \vec{u}$ peut s'écrire sous la forme de la divergence d'un champ de vecteur.

c. Interprétation.

i. Interpréter alors l'équation obtenue à la question précédente. Montrer que $\varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$ peut s'interpréter comme une densité volumique de quantité de mouvement associée au champ électromagnétique.

i.i. Montrer que les résultats du III.A. sont compatibles avec cette interprétation.

III.C. **Application aux ondes électromagnétiques.**

On étudie une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans le vide dans la direction de l'axe Ox. On s'intéresse uniquement à la quantité de mouvement selon Ox. Dans cette partie III.C., l'expression *quantité de mouvement* signifiera *mesure algébrique de la projection sur Ox du vecteur quantité de mouvement.*

III.C.1. *Structure de l'onde.*

Rappeler l'expression du champ magnétique en fonction du champ électrique pris au même point à la même date.

III.C.2. *Quantité de mouvement.*

Déterminer en fonction de $\vec{E}$ et $\vec{u}_x$ (vecteur unitaire de l'axe Ox) la densité volumique de *quantité de mouvement* ainsi que le vecteur densité de courant $\vec{j}_P$ associé à la *quantité de mouvement*. Quel est le lien entre les deux ? Comment peut-on interpréter le résultat ?

III.C.3. *Lien avec l'énergie électromagnétique.*

Quel est le vecteur densité de courant associé à l'énergie électromagnétique ? Quel lien présente-t-il ici avec $\vec{j}_P$? Cela est-il en accord avec l'interprétation de la lumière en terme de photons ?

III.C.4. *Pression de radiation, voile solaire.*

Au voisinage de l'orbite terrestre, la puissance du rayonnement solaire est de l'ordre de $1\,500\ W \cdot m^{-2}$. En déduire la pression exercée sur une surface réfléchissante plane orientée vers le soleil.

Un satellite déploie une voile solaire dont la masse surfacique est de $10\ g \cdot m^{-2}$. Calculer le rapport entre la force de pression de radiation et l'attraction gravitationnelle qu'exerce le soleil sur la voile. La navigation à voile solaire est-elle réaliste ?

PARTIE IV

TÉLÉTRANSMISSION DE SIGNAL

IV.A. Émission.

IV.A.1. *Émission dipolaire.*

a. Potentiels retardés.

Rappeler la définition du potentiel électromagnétique {potentiel scalaire V, potentiel-vecteur $\vec{A}$}, les équations le régissant en présence de distributions continues de sources {charge volumique $\rho(P, t)$, densité de courant $\vec{j}(P, t)$} et la solution de ces équations dite des potentiels retardés $\{V(M, t), \vec{A}(M, t)\}$, en précisant la jauge utilisée.

b. Doublet.

On considère deux charges ponctuelles opposées $+q(t)$ et $-q(t)$ placées aux points respectifs A et B distants de $AB = a$, entre lesquelles circule un courant rectiligne filiforme d'intensité $i(t)$ définie de B vers A dans le sens du vecteur unitaire $\vec{u_z}$.

Décrire un exemple de réalisation d'un doublet de ce type dans le domaine radioélectrique.

Établir la relation entre $i(t)$ et le moment dipolaire électrique $\vec{p}(t)$ du doublet.

c. Rayonnement dipolaire.

Le doublet est placé à l'origine O dans le vide ou dans l'air et sa longueur a est très petite devant le produit cT où T est le temps caractéristique de variation de $i(t)$.

On désigne par $\vec{r}$ le rayon-vecteur $\overrightarrow{OM}$ de norme r, par θ l'angle $(\overrightarrow{BA}, \vec{r})$ et par $\vec{u_r}$ le vecteur $\frac{\vec{r}}{r}$.

i. Exprimer, à grande distance du doublet, le potentiel-vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$ et le champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ en fonction du moment dipolaire $\vec{p}(t)$, puis le champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ en fonction de $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

On rappelle que, pour une fonction vectorielle $\vec{f}(x)$ de dérivée $\vec{f}'(x)$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{f}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)=\vec{f}'\left(t-\frac{r}{c}\right)\wedge\frac{\vec{u_r}}{c}.$$

Signaler les termes qui ne sont pas calculés dans le cadre de l'approximation des grandes distances et donner un ordre de grandeur de r à partir duquel cette approximation est valable.

ii. Montrer que l'onde a localement la structure d'une onde plane.

iii. Calculer la puissance électromagnétique rayonnée $P(r, t)$.

En étudiant l'influence de r sur P, préciser les significations physiques de cette expression.

d. Émission d'une porteuse sinusoïdale.

i. Dans le cas où l'intensité est fonction sinusoïdale du temps, de valeur complexe $I_0\sqrt{2}\exp(-j\omega t)$, calculer la valeur moyenne P_0 de la puissance rayonnée en fonction des caractéristiques du doublet et de la longueur d'onde λ.

ii. Définir et exprimer la résistance de rayonnement du doublet. Calculer la valeur numérique du coefficient indépendant des caractéristiques du doublet et de la longueur d'onde.

IV.A.2. *Antenne filaire demi-onde.*

On considère une antenne filaire rectiligne de longueur $2l$, parallèle à l'axe Oz, alimentée en courant sinusoïdal de valeur complexe $i(z = 0, t) = I_0\sqrt{2}\exp(-j\omega t)$, par un câble coaxial connecté au centre O de l'antenne.

a. Courant dans l'antenne.

Dessiner le schéma de connexion des différents conducteurs.

En prenant une distribution sinusoïdale des grandeurs électriques selon l'axe Oz, établir l'expression de l'intensité complexe dans l'antenne $i(z, t)$ dans le cas où l est égale au quart de la longueur d'onde λ.

b. Rayonnement de l'antenne.

On ne tient pas compte dans cette question de l'influence du sol.

i. En utilisant les notations introduites dans la partie IV.A.1., établir l'expression complexe du champ magnétique à grande distance.

On appelle diagramme de rayonnement, la courbe donnant $|\vec{E}|$ en fonction de θ en coordonnées polaires. Tracer les diagrammes du dipôle et de l'antenne demi-onde sur le même graphique.

ii. Déterminer la valeur moyenne de la puissance rayonnée ainsi que la résistance de rayonnement et sa valeur numérique.

On pourra utiliser le résultat suivant : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\,d\theta = 1{,}22$.

iii. Quels avantages peut présenter l'un de ces émetteurs sur l'autre ?

c. Réalisation pratique.

Une antenne filaire de longueur $\lambda/4$, dressée verticalement au-dessus du sol, est alimentée par l'une de ses extrémités, placée au niveau du sol supposé parfaitement conducteur. L'écran du câble coaxial d'alimentation est connecté au sol.

Dessiner le schéma des connexions des conducteurs.

Comparer le champ magnétique de cette antenne quart-d'onde avec celui de l'antenne demi-onde. En déduire sa résistance de rayonnement.

IV.B. **Transmission de signal.**

On veut transmettre par voie hertzienne un signal $m(t)$ dont la bande occupée se situe dans la gamme des audiofréquences : $F_m \approx 50$ Hz $< F <$ $F_M \approx 6$ kHz.

IV.B.1. *Modulation.*

a. Intérêt de la modulation.

i. Pourquoi, du point de vue physique, n'utilise-t-on pas une antenne, analogue à l'une de celles étudiées précédemment, alimentée avec une intensité proportionnelle à $m(t)$ [émission en bande de base] ?

ii. Pour inclure le signal à transmettre $m(t)$ dans un signal $s(t)$ de bande occupée relativement étroite située à la pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0$ adaptée à l'émission, on utilise la modulation d'une porteuse $p(t) = p_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Citer différents types de modulation en représentant pour chacun d'eux l'allure du signal modulé $s(t)$.

Quels avantages présente cette méthode pour le transport de l'information ?

On s'intéresse dans toute la suite à un signal modulé de la forme $s(t) = p_0(a + k \cdot m(t))\cos\omega_0 t$. Si $a = 0$, la modulation est dite à porteuse supprimée.

Si $a \neq 0$, le rapport $\mu = \left(\frac{k}{a} \cdot \text{amplitude de } m(t)\right)$ est appelé taux de modulation.

b. Étude temporelle du signal modulé.

i. Donner un exemple de schéma fonctionnel (ou de graphe) des opérations permettant d'obtenir ce signal modulé et réalisables avec des composants électroniques de fabrication courante.

ii. Montrer sur des graphiques l'influence des valeurs de μ sur l'enveloppe du signal modulé.

c. Étude spectrale du signal modulé.

Tracer le spectre du signal $s(t)$, d'abord dans le cas où $m(t)$ est sinusoïdal, puis dans le cas général, en précisant avec soin les grandeurs portées sur les axes. Déterminer la bande occupée par le signal modulé.

Quel intérêt peut présenter la modulation à porteuse supprimée ?

Comment modifier le signal modulé $s(t)$ transportant le signal à transmettre $m(t)$ pour qu'il occupe une bande plus étroite ?

IV.B.2. *Démodulation.*

a. Méthode de la détection d'amplitude.

Le signal modulé est obtenu sous forme d'une tension $s(t)$, est redressé par une diode et envoyé sur un condensateur de capacité C placé en parallèle avec une résistance R. Dessiner le schéma du montage.

Établir les conditions sur l'ordre de grandeur de $\tau = RC$ pour que la tension aux bornes du condensateur puisse donner une image acceptable de l'enveloppe de $s(t)$. Comment peut-on améliorer cette image ?

Pour quelles valeurs de μ obtient-on ainsi le signal recherché $m(t)$?

b. Méthode de la démodulation synchrone.

Le signal $s(t)$ est multiplié par le signal de la porteuse $p(t)$ puis filtré. Établir les conditions pour que le signal de sortie du filtre soit le signal recherché $m(t)$.

Comparer dans l'espace des fréquences cette méthode de démodulation au procédé de modulation étudié plus haut : quelle est la transformation utilisée dans les deux cas ?

Quand on ne dispose pas du signal $p(t)$, peut-on le reconstituer simplement à partir du signal reçu $s(t)$? Le cas de la modulation à porteuse supprimée est-il particulier ?