

**Agrégation**

(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE

Épreuve A : Composition de physique - Session : 1997

**QUELQUES ASPECTS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME**

**PARTIE I**

**ÉLECTROSTATIQUE DU VIDE ET DES CONDUCTEURS**

Ce recueil des solutions de la plupart des épreuves écrites des concours de recrutement de professeurs en physique et chimie est destiné à faciliter le travail de toutes les personnes intéressées par ces épreuves et notamment des candidats à ces concours.

Nous remercions les collègues qui ont accepté de se charger de la rédaction des solutions. Ces solutions peuvent être plus ou moins détaillées selon les épreuves. En aucun cas elles ne constituent un modèle des méthodes ni des rédactions que les jurys pourraient souhaiter mais une simple aide permettant en particulier de contrôler la validité des résultats.

Ces épreuves de concours peuvent fournir l'occasion de prolongements et d'approfondissements qu'il n'est généralement pas possible aux auteurs de signaler ici autrement que par une bibliographie sommaire. Les candidats aux concours doivent trouver ces incitations à d'intéressantes études en participant aux préparations ouvertes dans les diffèrentes académies.

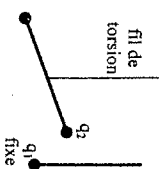
Afin de faciliter l'utilisation de ce numéro spécial, son service est inclus dans l'abonnement collectif, tout en demeurant hors abonnement individuel. Il en est de même pour le numéro spécial comportant les énoncés correspondants. Les numéros des concours sont disponibles par correspondance au siège de l'U.d.P.

Pour le bureau de l'U.d.P.  
André BOUSSIE

1.A.1. 
$$\vec{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

Dans la balance de Coulomb (1785), une barre qui porte à une de ses extrémités une boule chargée soumise à l'action électrostatique d'une autre charge est suspendue et maintenue à l'équilibre vis à vis de la rotation par un fil de torsion. La mesure de l'angle de rotation du fil donne accès à la force électrostatique.

Si un point matériel de charge  $q$  est soumis à l'action d'autres charges, le rapport  $\frac{\vec{f}}{q}$  ne dépend que de la répartition de ces autres charges et du point  $M$  où est placée la charge  $q$ . Ce rapport est le champ électrique en  $M$ . Le champ créé par la réunion de systèmes disjoints est la somme des champs créés par chacun des systèmes. (Principe de superposition)



1.A.2. En régime permanent,  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ . Le potentiel électrostatique  $V$  est défini à une constante additive près. Pour une particule de charge  $q$  soumise à un champ électrostatique, le produit  $qV$  est l'énergie potentielle associée aux forces électriques (qui sont conservatives dans le cas statique). Le principe de superposition est une conséquence de la linéarité de ces équations. Le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge intérieure à cette surface divisée par  $\epsilon_0$  (théorème de Gauss valable en toutes circonstances).

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{MP} \frac{\rho(P)}{r} d\tau \quad \left( \text{Car } \Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(r) \right) \quad \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{MP} \frac{\rho(P)}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} d\tau$$

Dans le cas de modèles surfaciques ou filiformes, il suffit de remplacer dans les expressions précédentes la charge élémentaire  $\rho d\tau$  par  $\sigma ds$  ou  $\lambda dl$ . Dans le cas surfacique, le champ électrique  $\vec{n}$  est alors plus continu (il subit une discontinuité de  $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$  à la traversée de la surface). Dans le cas filiforme, le champ et le potentiel divergent à l'approche de la courbe chargée. Par exemple, le champ créé par le plan  $x=0$  uniformément chargé vaut  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sgn}(x)\vec{n}_x$ . (Les invariances par translation selon les axes  $Oy$  et  $Oz$  et par

rotation autour de  $Ox$  permettent de montrer que  $\vec{E} = E(x)\vec{n}_x$ . La symétrie par rapport au plan  $x=0$  montre que  $E(x)$  est impaire. Enfin le théorème de Gauss permet de donner l'expression de  $E(x)$ .)

1.A.3. Les lignes de champ sont les courbes orthogonales aux équipotentielles. Il ne peut y avoir d'extremum local de potentiel dans une zone sans charge (où d'après l'équation de Poisson  $\Delta V=0$ ) car un minimum par exemple nécessiterait des dérivées secondes positives par rapport à  $x, y$  et  $z$  ce qui est contradictoire avec l'équation de Poisson.

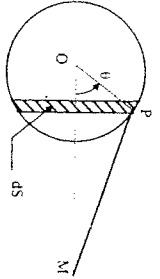
Les points où passent plusieurs lignes de champ ne peuvent être que les emplacements des charges (ou le champ n'est pas défini) et les points de champ nul. Au point C certaines lignes arrivent, d'autres repartent. Il ne peut donc pas y avoir de charge en ce point ; c'est un point de champ nul. D'après les orientations des lignes, il y a une charge positive en B et D et une charge négative en A. L'allure du champ à grande distance est dipolaire (une seule ligne va à l'infini, les autres forment des boucles) donc la somme des charges est nulle :  $q_A = (q_B + q_D)$ . On peut obtenir une seconde relation entre ces charges soit en écrivant que le champ est nul en C projeté sur Ox (ce qui conduit à l'équation

$$\frac{24q_B}{(8^2 + 24^2)^{3/2}} + \frac{51q_D}{(8^2 + 51^2)^{3/2}} = 0 \text{ c'est à dire } q_D = 4q_B \text{ ou sur } Oy \text{ (ce qui conduit à l'équation } (8^2 + 24^2)^{3/2} + \frac{8q_B}{(8^2 + 51^2)^{3/2}} + \frac{q_A}{83^2} = 0 \text{ c'est à dire } 3,4q_B + 0,4q_D + q_A = 0) \text{ soit en mesurant sur le dessin la pente à grande distance de la ligne de champ qui part à l'infini qui donne la direction du moment dipolaire et donc la position du barycentre des charges positives } q_B \text{ et } q_D \text{ (on trouve que sa coordonnée selon } x \text{ vaut } 60a \text{ donc } q_D = 4q_B). \text{ Finalement } [q_B = q > 0, q_D = 4q \text{ et } q_A = -5q].$$

1.A.4. La surface horizontale a pour aire  $2\pi R_0^2 \sin \theta d\theta$ . Or, en notant  $r/a$  distance  $OM$ ,  $PM^2 = r^2 - 2rR_0 \cos \theta + R_0^2$  donc, en différentiant,  $PM d(PM) = R_0 \sin \theta d\theta$ . La contribution élémentaire  $\delta V$  s'écrit

alors  $\delta V = \frac{qR_0 d(PM)}{2\epsilon_0 r^2 (PM)^2}$ . La sommation pour  $\delta V$  variant entre  $R_0/a$  et  $R_0/r$  rest alors immédiate et conduit à :

$$V = \frac{qR_0}{2\epsilon_0(1-\epsilon)} \left[ \frac{(R_0+r)^{1-\epsilon}}{r} - \frac{(R_0-r)^{1-\epsilon}}{r} \right]$$



Alors  $V_0 - V_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0(1-\epsilon)} \left[ \frac{R_0(R_0+R_1)^{1-\epsilon}}{R_1} + \frac{R_0(R_0-R_1)^{1-\epsilon}}{R_1} \right]$  qui est nul si  $\epsilon$  est nul et dont un développement limité à l'ordre 1 en  $\epsilon$  conduit à :

$$V_0 - V_1 \approx -\epsilon \left[ \ln 2 - \frac{R_0}{2R_1} \left( 1 + \frac{R_0}{R_0} \right) \ln \left( 1 + \frac{R_0}{R_0} \right) - \left( 1 - \frac{R_0}{R_0} \right) \ln \left( 1 - \frac{R_0}{R_0} \right) \right] \approx 0,22\epsilon$$

On obtient donc numériquement  $|\epsilon| < 4,5 \cdot 10^{-6}$ . La loi de Coulomb est très bien vérifiée.

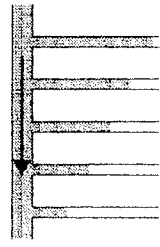
1.B.1.  $\vec{u} = \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \text{ grad } \vec{v} = -g \vec{a}_D + \eta \Delta \vec{v}$  (Navier-Stokes). Pour un fluide incompressible  $\text{div } \vec{v} = 0$  donc, avec une vitesse de la forme  $\vec{v} = \frac{dP}{dz} \vec{e}_z$ ,  $\frac{dP}{dz} = 0$

avec  $Ox$  et  $Oy$  à  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}$  (donc  $Z$  est constant que  $z$  et sur  $Oz$  à  $\frac{dP}{dz} = \eta \Delta v$  (donc, tout comme  $K$  au dépend pas  $z$ ). On peut alors écrire  $\frac{dP}{dz} = C r e^{-\frac{r}{L}}$  et  $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{C r e^{-\frac{r}{L}}}{L}$  qui est de la forme proposée par l'énoncé avec  $K = -\frac{1}{\eta} \frac{dP}{dz} = \frac{P_1 - P_2}{\eta L}$ . Sur les parois de la conduite, la vitesse doit être nulle.

Dans le cas d'un cylindre à base circulaire et en utilisant  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right)$  on obtient alors

$$v = K \left( \frac{d^2}{4} - r^2 \right) \text{ Le débit s'exprime par } D = \int_0^{d/2} v(r) 2\pi r dr. \text{ On démontre alors la loi de Poiseuille avec } K = \frac{128}{\pi}$$

On peut la vérifier expérimentalement par le dispositif ci-contre. La mesure de la hauteur du liquide (immobile) dans les tubes verticaux permet d'avoir accès à la pression le long du tube horizontal où le liquide s'écoule. On détermine par ailleurs le débit en mesurant le volume sortant du tube et on assure une alimentation permanente du dispositif. L'écoulement reste laminaire si le nombre de Reynolds (sans dimension)  $R_n$  n'est pas trop grand (typiquement  $R_n < 1000$ ).



1.B.2. La loi de Fourier  $\vec{j}_0 = -\lambda \text{ grad } T$  combinée à l'équation de bilan local d'énergie  $\text{div } \vec{j}_0 + c \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha$  conduit, en régime permanent, à l'équation de Poisson dans la sphère avec  $K = \frac{\alpha}{\lambda}$  et à l'équation de Laplace dans l'eau (en prenant  $\alpha=0$ ). Les conditions aux limites sont la continuité de  $T$  et de la composante

composante radiale de  $\vec{j}_0$  c'est à dire  $-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$  à l'interface  $r=R$  entre la sphère et l'eau. Par ailleurs, pour  $r$  tendant vers l'infini,  $T$  doit tendre vers  $T_0$ . On obtient alors :

$$\begin{cases} r < R \Rightarrow T = T_0 + \frac{\alpha R^2}{3\lambda} + \frac{\alpha(R^2 - r^2)}{6\lambda} \\ r > R \Rightarrow T = T_0 + \frac{\alpha R^3}{3\lambda r} \end{cases}$$

1.B.3. Les équations de Laplace ou de Poisson interviennent en électrostatique (ou le potentiel vecteur joue un rôle analogue au potentiel électrostatique étudié ici), en mécanique des fluides par exemple pour l'étude des écoulements irrotationnels de fluides incompressibles, dans les problèmes de diffusion de particules ...

1.C.1.a. Un conducteur est en équilibre électrostatique s'il n'y a aucun courant ( $\vec{j} = \vec{0}$ ). Dans le cas où il est homogène (composition chimique, température uniformes), cela impose que  $\vec{E}$  soit nul à l'intérieur et donc que le potentiel électrostatique  $y$  soit uniforme. De plus, d'après l'équation de Maxwell-Gauss,  $\rho$  doit y être nul.

b. En régime variable, en combinant la loi d'Ohm ( $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ), la loi de conservation de la charge  $\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  et l'équation de Maxwell-Gauss ( $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ) on obtient  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$  avec  $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \approx 10^{-11}$  s. La densité de charge tendrait donc exponentiellement vers 0 avec une constante de temps de l'ordre de  $10^{-11}$  s. Cela n'est qu'approximatif car la loi d'Ohm ne peut s'appliquer pour des évolutions aussi rapides. Le temps de relaxation de  $\rho$  est plutôt de l'ordre de  $10^{-14}$  s (« temps de collision » des porteurs de charge dans un conducteur métallique).

c. Les charges portées par un conducteur en équilibre ne peuvent alors être qu'à sa surface. Comme le champ est nul à l'intérieur, il doit valoir  $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$  juste à l'extérieur du conducteur.

d. Une ligne de champ doit arriver normalement sur un conducteur (sauf point où  $\sigma=0$ ) ; la courbe C est donc impossible. Le potentiel décroissant sur une ligne de champ, il ne peut y avoir de « circuit fermé » de lignes de champ. Donc E, A et I sont impossibles. De même (H et J) sont incompatibles tout comme (F et G) et comme (D et B). Par ailleurs H et G (ou J et F) sont incompatibles car, la charge  $Q_1$  étant nulle,  $\sigma$  doit prendre sur le conducteur 2 des valeurs positives et négatives. Donc, soit les lignes B,G,J sont correctes, soit les lignes D,F,H le sont, les deux situations s'excluent. Mais F et D sont impossibles car la charge  $Q_1$  étant positive, les lignes de champ ne peuvent toutes arriver sur le conducteur I.

Finalement, les bonnes lignes sont donc **B**, **G** et **J**. Les autres sont incorrectes. Alors  $V_1 > V_2 > 0$  car le potentiel décroît sur les lignes de champ **G** et **J**.

e. La force électrostatique subie par  $dS$  est  $d\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{n} dS$ . Elle a les caractéristiques d'une force de pression (normale à la surface, proportionnelle à l'aire de la surface) de valeur  $p = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ .

1.C2. Pour un conducteur en équilibre, la charge superficielle (et le champ dans le milieu isolant près du conducteur) est d'autant plus grande (en valeur absolue) que la courbure de la surface est grande. Cela cause en particulier le claquage (ionisation) d'un diélectrique au voisinage de cette partie courbée du conducteur.

Dans le microscope à émission ionique, le conducteur sphérique de grande taille peut être considéré à l'infini et son potentiel pris comme origine. Alors, sur la petite sphère,  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$  et  $E_{vide} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$  donc  $V = RE$ . On peut évaluer le champ nécessaire pour ioniser un atome d'hélium à  $10\text{V}\cdot\text{Å}^{-1}$  (énergie d'ionisation de l'ordre de 10 eV et dimension de l'atome de l'ordre de 0.5 Å). Alors  $V \approx 50\text{V}$ .

1.C3.a. Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs en influence totale : toute ligne de champ partant d'un des conducteurs arrive sur l'autre (autrement dit, la surface d'un conducteur admet un élément correspondant sur celle de l'autre). Dans la pratique cette condition est remplie si un des conducteurs est dans une cavité à l'intérieur de l'autre. Soit (1) ce conducteur entoure par l'autre. On peut montrer qu'alors le rapport  $C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$  est indépendant des potentiels des conducteurs. C est la capacité du condensateur.

b. Pour un condensateur plan sans diélectrique, (deux conducteurs dont les surfaces en regard sont planes, parallèles, distantes de  $e$  et illimitées dans la pratique de dimensions grandes devant  $e$ ) la capacité vaut  $\epsilon_0 e$  par unité de surface en regard. Cette expression est valable pour des condensateurs réels de forme quelconque, du moment que la distance entre les armatures est constante ( $e$ ) et que  $e$  est petite devant les rayons de courbure des surfaces et les dimensions de ces surfaces. (effets de bord négligés)

c. En utilisant l'expression de la capacité d'un condensateur plan avec diélectrique,  $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e}$ . Or le volume du diélectrique est  $\mathcal{V}_e$  et est bien sûr inférieur au volume  $\mathcal{V}$  du condensateur  $\frac{\mathcal{V}_e}{\mathcal{V}} < 1$ . Avec l'expression de la capacité, on obtient la condition  $e < \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r \mathcal{V}}{C}} = 32\text{nm}$ . Par ailleurs le champ entre les armatures est  $V/e$ . Pour éviter le claquage du diélectrique, il faut que  $\frac{V}{e_{max}} < K$  soit  $e > 8\text{nm}$ .

d. Le condensateur se charge avec la constante de temps  $\tau = RC$ . La tension à ses bornes suit donc la loi  $V_C = V_{raf} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ . Les comparateurs basculent lorsque  $V_C$  prend les valeurs  $V_1$  et  $V_2$ . L'intervalle de temps entre les basculements est  $\Delta t = RC \ln \frac{V_{raf} - V_2}{V_{raf} - V_1}$ . Un compteur électronique, déclenché par le basculement de  $s_1$  et arrêté par celui de  $s_2$ , peut mesurer cette durée et un système d'affichage peut directement donner la valeur de  $C$  qui est proportionnelle à cette durée. Une modification de la base de temps du compteur ou de  $R$  permet de mesurer des capacités dans des gammes de valeur variées. On peut aussi mesurer des capacités en utilisant des points de mesure en alternatiif.

1.C4. Soient  $q$  et  $v$  la charge et le potentiel de l'armature mobile.  $q$  est constante pendant le déplacement (armature isolée). Or en position  $P_1$ ,  $q = C_1 E$  et juste avant la position  $P_2$ ,  $q = C_2 v$  donc, juste avant le contact avec  $C$ ,  $v = \frac{C_1}{C_2} E$ . On note  $V_\infty = \frac{C_1}{C_2} E$ . Supposons  $V_n < \frac{C_1}{C_2} E$  (ce qui est vrai au départ). Alors, lors du contact en position  $P_n$ , le potentiel de l'armature mobile étant supérieur à celui de  $C$ , l'armature mobile va donner des charges à  $C$  et les potentiels vont s'équilibrer à une valeur intermédiaire entre  $V_n$  et  $V_\infty$ . Donc  $V_n < V_{n+1} < V_\infty$ ,  $V_n$  augmente donc bien en restant inférieur à  $V_\infty$ ; donc  $V_n$  tend vers une limite inférieure ou égale à  $V_\infty$ . Soit  $l$  cette limite. Elle doit vérifier  $V_n = l \Rightarrow V_{n+1} = l$ . Cela n'est

possible que s'il n'y a pas de transfert de charge au contact en  $P_2$ , donc si juste avant le contact, les potentiels sont égaux, c'est à dire  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V_\infty$ . On peut facilement s'arranger pour que  $C_1 \gg C_2$  (partie mobile complètement sortie). Alors le condensateur  $C$  est finalement chargé sous une tension très largement supérieure à  $E$ . On a créé une source de très haute tension.

1.D.1. L'énergie électrostatique  $W_e$  est l'énergie minimale qu'il faut fournir à un système de charges dispersées (infinitement éloignées les unes des autres) pour les amener dans une position déterminée. Elle est indépendante du trajet suivi pour arriver à la situation considérée.

On peut mettre cette dernière expression sous la forme  $W_e = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$  ou l'intégrale écrite sur l'espace entier dans le cas où la distribution de charge est bornée (déterminée du potentiel à l'infini au moins en 1/r).

1.D.2. Dans le cas surfacique  $V$  est uniforme là où sont les charges et vaut  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$  donc  $W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ .

Dans le cas volumique on trouve  $W_e = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$  (calcul classique). Dans le cas de l'électron, son énergie électrostatique vaut  $m_e c^2 = 511\text{keV}$  si  $R = 1.7\text{fm}$ . Lorsqu'on arrive à de telles dimensions, il n'est plus possible d'utiliser les modélisations classiques employées jusqu'à présent. Seule la mécanique quantique permet de décrire cela. Le résultat trouvé n'est donc guère significatif.

L'eau est supposée incompressible donc son volume ne varie pas, les termes d'énergie volumique seront constants et non pris en compte par la suite. Si la goutte initiale se scinde en  $n$  gouttes identiques, le rayon de ces dernières sera  $R_n = \frac{R}{n^{1/3}}$  (conservation du volume) et leur charge  $\frac{Q}{n}$ . L'énergie électrostatique totale est alors  $W_{en} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{n}\right)^2 \frac{1}{R_n} = n^{-2/3} \frac{1}{R} = n^{-2/3} W_{e1}$ . De même, on montre

que l'énergie de tension superficielle s'écrit  $W_{A,n} = n^{1/3} 4\pi R^2 = n^{1/3} W_{A1}$  et  $W_{rad}(n) = n^{-2/3} W_{A1} + n^{1/3} W_{A1}$ . La séparation en deux gouttes est favorisée si  $W_{rad}(2) < W_{rad}(1)$ , c'est à dire si  $\frac{W_{A1}}{W_{A1}} \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} > \frac{2^{2/3}}{2^{1/3} + 1}$  soit  $Q > Q_c$  avec  $Q_c = \sqrt{\frac{2^{2/3}}{2^{1/3} + 1}} 32\pi^2 \epsilon_0 R^3 = 4.2 \cdot 10^{-9} C$ . Alors

$V_C = \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_0 R} = 7600\text{V}$  (Remarque pour la suite  $\frac{W_{e1}}{W_{A1}} = \left(\frac{Q}{Q_c}\right)^2 \frac{2^{2/3}}{2^{1/3} + 1}$ ). Si  $Q \gg Q_c$ , la goutte risque de se scinder en un grand nombre de gouttelettes, les nombres les plus probables correspondent aux valeurs de  $n$  proches du minimum de l'énergie.  $\frac{dW_{rad}(n)}{dn} = -\frac{2}{3} n^{-5/3} W_{A1} + \frac{1}{3} n^{-2/3} W_{A1}$  est nul pour

$$n = 2 \frac{W_{e1}}{W_{A1}} = \left(\frac{Q}{Q_c}\right)^2 \frac{2^{5/3}}{2^{1/3} + 1}$$

d. On constitue progressivement une cellule en amenant une charge  $dq = 4\pi r^2 dr \rho = -3e \frac{r^2}{R^2}$  sur une sphère partiellement constituée qui crée le potentiel  $\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$ . Le travail total à fournir est alors

$\int_0^R 3e \frac{r^2}{R^3} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) dr$  qui vaut  $\frac{9}{10} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ . (On peut aussi ajouter l'énergie de la sphère uniformément chargée calculée au 1.D.2.a. et l'énergie d'interaction entre cette sphère et la charge ponctuelle  $+e$ ; et pour ce dernier terme, on pourrait calculer le potentiel créé par  $-e$  au centre de la sphère). Chaque cellule étant globalement neutre et à symétrie sphérique, crée à l'extérieur un champ nul. L'énergie d'interaction entre les cellules est donc nulle et l'énergie de l'ensemble est la somme des énergies des cellules.  $W_e = -580\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

PARTIE II

ELECTROSTATIQUE DES SEMI-CONDUCTEURS

II.A. Modèles de distributions de charges dans un conducteur.

II.A.1. Conducteurs à un seul type de porteurs.

a. A l'instant où l'on applique le potentiel  $V_s$  à la surface du conducteur, les porteurs sont soumis à la force électrique  $q\vec{E} = -q \text{grad } V$ . La mesure algébrique de cette force sur l'axe Ox est du signe de  $qV_s$ .

Si  $qV_s < 0$ , les porteurs vont vers l'interface où ils s'accumulent ; il y apparaît une charge de surface qui, à l'équilibre, annule le champ à l'intérieur du conducteur (l'étude de la distribution au voisinage de la surface relève de la physique quantique).

Si  $qV_s > 0$ , les porteurs s'éloignent de l'interface et désertent une couche superficielle du conducteur. A l'équilibre le conducteur est divisé en deux zones : une zone profonde où subsistent des porteurs et dans laquelle le champ électrique et la charge volumique sont nuls et la zone désertée superficielle où ni le champ ni la charge ne sont nuls et où il ne reste aucun porteur (dans la limite du modèle envisagé dans cette question). L'absence de porteurs impose une charge volumique uniforme  $-qN$ , de signe opposé à  $q$ , dans toute une épaisseur  $x_d$ .

b. On a donc :

$$Q_s = -qNx_d$$

Le champ électrique s'obtient simplement en appliquant le théorème de Gauss à un cylindre dont une extrémité est placée dans la zone de champ et de potentiel nuls et l'autre à l'abscisse  $x$ , en tenant compte de la permittivité  $\epsilon_0$  du milieu :

$$E(x \geq x_d) = 0 \quad ; \quad E(0 < x \leq x_d) = -\frac{qN}{\epsilon_0 \epsilon_r} (x - x_d)$$

Le champ à l'extérieur s'obtient en utilisant la continuité de la composante normale de l'excitation électrique  $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$  :

$$E(x < 0) = \frac{qN}{\epsilon_0} x_d$$

Le potentiel est calculé par sommation de  $-E(x)dx$  entre la zone de potentiel nul et l'abscisse  $x$  :

$$V(x \geq x_d) = 0$$

$$V(0 \leq x \leq x_d) = \frac{qN}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (x - x_d)^2$$

$$V(x < 0) = \frac{qN}{\epsilon_0} x_d \left( \frac{x_d}{2\epsilon_r} - x \right)$$

On en déduit :

$$E_s = \frac{qNx_d}{\epsilon_0}$$

et :

$$V_s = \frac{qNx_d^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r}$$

En tirant  $x_d$  de cette expression, on peut calculer la capacité surfacique  $C_s = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{x_d} = \sqrt{\frac{\epsilon_r K}{V_s}}$ .

c. Pour un métal (bon conducteur)  $x_d = 5,5 \cdot 10^{-16}$  m ; pour le silicium dopé  $x_d = 5,5 \cdot 10^{-8}$  m. Pour un conducteur métallique la valeur de  $x_d$  (dans ce modèle non quantique) est inférieure aux dimensions des noyaux (quelque  $10^{-15}$  m) et l'on peut utiliser un modèle où les charges sont distribuées en surface.

II.A.2. Conducteurs à deux types de porteurs.

a.  $n_0 = \frac{n_i^2}{N} = 10^{11} \text{ m}^{-3} \ll N = 10^{21} \text{ m}^{-3}$

Dans le cas où  $V_s < 0$ , les trous sont concentrés à la surface, les électrons minoritaires y sont en densité encore plus faible et négligeable.

b. Avec :

$$V = \frac{qN}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (x - x_d)^2$$

on obtient :  $p = N \exp\left(-\frac{eV}{k_B T}\right) = N \exp\left(-\left(\frac{x - x_d}{L_D}\right)^2\right)$

et :  $n = n_0 \exp\left(+\frac{eV}{k_B T}\right) = \frac{n_i^2}{N} \exp\left(\left(\frac{x - x_d}{L_D}\right)^2\right)$

Valeur numérique :  $L_D = 1,9 \cdot 10^{-7}$  m. La charge volumique  $p = e(p - n - N)$  est voisine de  $-eN$  pour  $p - n \ll N$  soit (compte tenu de  $\frac{n_i}{n_0} = 10^5 = \frac{N}{n_0}$ ) :

$$L_D \ll |x - x_d| \ll L_D \sqrt{2 \ln \frac{N}{n_i}} = 4,8 L_D$$

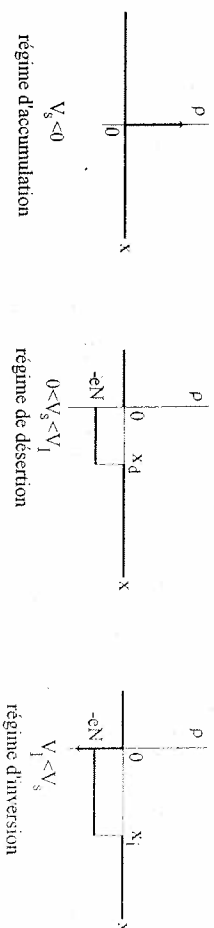
c.  $n = N$  pour  $|x - x_d| = x_i = L_D \sqrt{2 \ln \frac{N}{n_i}} = 0,89 \mu\text{m}$ .

$$V_i = \frac{qN}{\epsilon_0 \epsilon_r} L_D^2 \ln \frac{N}{n_i} = \frac{2k_B T}{e} \ln \frac{N}{n_i} = 0,60 \text{ V}$$

d.  $n = 100 N$  pour  $|x - x_d|/x_i = \sqrt{\ln 10 \frac{N}{n_i} / \ln \frac{N}{n_i}} = 1,1$ .

Les grandes charges négatives sont concentrées sur de faibles épaisseurs, ce qui permet de les modifier par une distribution surfacique. La charge d'espace garde alors l'épaisseur constante  $x_i$ .

II.A.3. Récapitulatif des modèles pour un semi-conducteur dopé.



II.B. Structure capacitive C-I-SC.

II.B.1. Régime d'accumulation.

a. Les charges des deux conducteurs se trouvent en surface et la structure est équivalente à c d'un condensateur plan de capacité  $C_A = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{d} = 3,5 \cdot 10^{-14} \text{ F} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Pour une surface de  $100 \mu\text{m}^2$ , la capacité vaut  $3,5 \cdot 10^{-14} \text{ F}$ .

b. Pour éviter le claquage du diélectrique il faut que  $|E| = \frac{|V_G|}{d} < R$  soit  $|V_G| < Rd = 60 \text{ V}$ .

II.B.2. Régime de désertion.

a.  $Q = -Q_S = eN x_d$

On calcule  $V_G$  en additionnant les différences de potentiel dans l'isolant et dans le semi-conducteur :

$$V_G = \frac{Q}{C_A} + V_S = \frac{eN x_d}{\epsilon_0} \left( \frac{d}{\epsilon_r} + \frac{x_d}{2\epsilon_r} \right)$$

On reste dans le régime de désertion tant que  $x_d < x_c$ , soit :

$$V_G < V_{G1} = V_c \left( 1 + \frac{2\epsilon_r}{\epsilon_r' x_c} \right) = 1,00 \text{ V}$$

b. Par le même type de raisonnement  $\frac{dV_G}{dQ} = \frac{1}{C_A} + \frac{dV_S}{-dQ_S}$  soit  $\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_A} + \sqrt{\frac{V_S}{K}} \frac{d^2 a_f}{dQ}$

II.A.1.b. En éliminant  $x_d$  entre les expressions de  $V_S$  et de  $V_G$ , on obtient :

$$\sqrt{\frac{V_S}{K}} = -\frac{1}{C_A} + \sqrt{\frac{1}{C_A^2} + \frac{V_G}{K}}, \text{ d'où } \frac{1}{C_0} = \sqrt{\frac{1}{C_A^2} + \frac{V_G}{K}}$$

Application Numérique :

$V_G \text{ (V)}$	0,1	1	5	10
$C_0 \text{ (fF} \cdot \text{m}^{-2}\text{)}$	225	89	41	354

II.B.3. Régime d'inversion.

a. La charge d'espace ne varie plus pour  $V_G > V_{G1}$  : les charges supplémentaires  $dQ$  et  $-dQ_S$  accumulent sur le condensateur défini en II.B.1.a. On a donc  $C_1 = C_A$ .

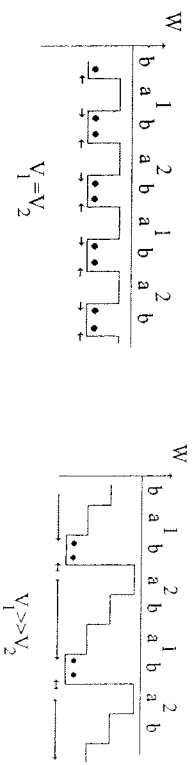
b. Le courant  $J_s$  servirait à fournir la charge négative accumulée en surface  $Q_1 = C_1 (V_G - V_{G1})$ , soit

$$J_s = C_A \frac{V_G - V_{G1}}{\tau_1} = 7,1 \cdot 10^{-7} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

c. Temps nécessaire à la création des paires électrons-trous permettant d'alimenter la surface semi-conducteur jusqu'à l'équilibre.

II.C. Application : dispositif à transfert de charge (DTC).

a. L'expression de  $V_{G1}$  (II.B.2.a) montre que  $d_a > d$ , entraîne  $V_{G1} > V_{G0}$ . Pour  $V_1 = V_2 = V_G$ , le potentiel à l'interface  $V_{G1}$  est inférieur à  $V_{G0}$  et l'énergie potentielle d'un électron  $W = -eV_S$  y est plus grande. Quand  $V_1 >> V_2$ , les énergies sous les paires 1 sont plus faibles que sous les paires 2.



b. Avant la collecte il ne faut pas accumuler d'électrons et donc être en régime de désertion partout :

$$V_1 < V_{G0} < V_{G1}$$

$$V_2 < V_{G0} < V_{G1}$$

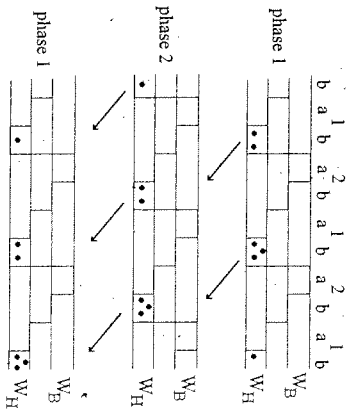
et :

$$V_{G1} < (V_1 \text{ ou } V_2) < V_{G0}$$

Après le début de la collecte, il faut être en régimes de désertion et d'inversion alternés pour pouvoir conserver localement les électrons collectés :

La charge maximale accumulée sous une électrode de collecte est celle calculée en II.B.3.b.  $Q_{M1} = C_1 (V_G - V_{G1})^2 = 142 \cdot 10^{-15} \text{ C}$  soit un peu moins de  $10^6$  électrons.

c. Représentons les énergies des électrons au cours de trois phases consécutives. On constate que le déplacement des puits d'énergie consécutifs (dissymétriques) entraîne les électrons d'une électrode b à l'électrode b suivante (à droite sur la figure).



d. Le pixel est une période du registre, formée de quatre éléments capacitifs. La période minimale détectable correspond à deux pixels soit huit électrodes et une bande passante spatiale allant de 0 à  $\sigma_x = \frac{1}{8c} = 12,5 \text{ nm}^{-1}$ .

e. A la fréquence minimale  $f_m$ , pendant la durée d'une mesure  $\frac{1}{f_m}$ , le courant  $J_s c^2$  fournit une charge

$$10^{-3} Q_M \text{ sous les électrodes b au potentiel } V_H : f_m = \frac{10^3 J_s c^2}{Q_M} = \frac{10^3 J_s}{C_1 (V_G - V_{G1})}$$

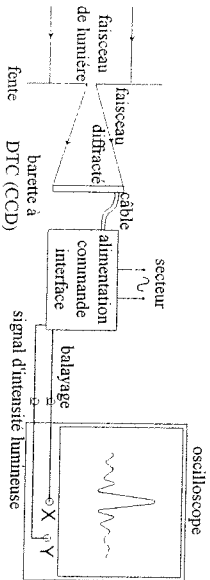
Avec les valeurs du II.C.b. on obtient  $f_m = 7,0 \text{ Hz}$ .

Une charge avançant de un pixel par période de  $V_y$  et  $V_z$ , la fréquence de commande des tensions  $f_c = 128 f_m = 901 \text{ Hz}$ .

PARTIE III

f. Capteurs de distributions spatiale de lumière. Capteurs d'image par exemple, caméras CCD...

g.



QUANTITÉ DE MOUVEMENT  
ET MOMENT CINÉTIQUE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

III.A.1. On néglige le courant de déplacement  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  dans les équations de Maxwell ce qui conduit à négliger tout phénomènes de propagation. Dans le cadre de la jauge de Coulomb ( $\text{div } \vec{A} = 0$ ), les potentiels et le champ magnétique se calculent comme en statique. Le champ électrique se calcule pour sa part suivant

$$\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

III.A.2. On choisit des coordonnées cylindriques d'axe Oz porté par  $\vec{u}_z$ . Les deux charges se repoussent et tendent à s'éloigner avec une vitesse radiale. Mais, étant en mouvement, elles sont soumises à la force magnétique due au dipôle qui a une composante orthoradiale. Les trajectoires s'infléchissent alors et ont une allure de spirale dans un plan perpendiculaire à  $\vec{u}_z$ . La vitesse ayant alors une composante orthoradiale, il y a apparition d'un moment cinétique en O selon Oz. Dans le plan de la trajectoire, le champ du dipôle est  $\frac{q\mu_0 \vec{u}_z}{4\pi r^3} (-\vec{u}_z)$  et la composante orthoradiale de la force magnétique subie par une

particule est  $\frac{q\mu_0 q \vec{u}_z}{4\pi r^3} \frac{d\vec{r}}{dt}$ . Le moment par rapport à Oz en est alors  $\frac{H_0 q^2 \vec{u}_z}{4\pi r^2} \frac{d\vec{r}}{dt}$  et le moment cinétique en O

$$\vec{\sigma}_1 = \frac{H_0 q^2 \vec{u}_z}{2\pi r} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

des deux charges vérifie  $\frac{d\vec{\sigma}_1}{dt} = 2 \frac{H_0 q^2 \vec{u}_z}{4\pi r^2} \frac{d\vec{r}}{dt}$ . Par intégration (r variant entre a et l'infini)

III.A.3. Cette fois ci, la force orthoradiale est due à la composante orthoradiale du champ électrique  $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  qui

$$\text{vaut } -\frac{\mu_0}{4\pi r^2} \frac{d\vec{u}_z}{dt} u_z. \text{ L'équation vérifiée par } \vec{\sigma}_2 \text{ est alors } \frac{d\vec{\sigma}_2}{dt} = -2 \frac{H_0 q^2 \vec{u}_z}{4\pi r} \frac{d\vec{u}_z}{dt}. \text{ Par intégration on}$$

$$\text{obtient alors } \vec{\sigma}_2 = \frac{H_0 q^2 \vec{u}_z}{2\pi r} \frac{d\vec{u}_z}{dt}$$

III.A.4. Cette apparition de moment cinétique mécanique correspond en fait à un transfert de moment cinétique du champ électromagnétique vers le système mécanique. Le moment cinétique du champ existe en présence simultanée d'un champ électrique et d'un champ magnétique (voir question III.B.2.). Dans les situations précédentes, on a fait disparaître soit le champ électrique (III.A.2.), soit le champ magnétique (III.A.3.) et donc le moment cinétique initial du champ a été transféré au système mécanique.  $\vec{\sigma}_1 = \vec{\sigma}_2$  et correspond au moment cinétique initial du champ.

III.B.1.  $\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} + \vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{a}$

III.B.2.

a. Par sommation des forces  $q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$  et utilisation de  $\sum q_i \vec{v}_i = \vec{j} dt$  on obtient  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$ .

b. On remplace  $\rho$  par  $\epsilon_0 \text{div } \vec{E}$ ,  $\vec{j}$  par  $\frac{r \partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  et  $\vec{B}$  par  $-\text{rot } \vec{E}$  pour obtenir :

$$\vec{V} = \epsilon_0 (\vec{E} \text{ div } \vec{E} + \text{rot } \vec{E} \wedge \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } \vec{B} \wedge \vec{B})$$

qui est une expression parfaitement symétrique en champs électrique et magnétique car on peut toujours rajouter un terme en  $\vec{B} \text{ div } \vec{B}$  qui est identiquement

nul. Le terme contenant le champ électrique dans  $\vec{r} \cdot \vec{u}$  est égal à  $-\epsilon_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{u} E^2}{2} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{E} \right)$  ce qui se

justifie en utilisant les formules d'analyse vectorielle portant sur  $\text{div}(\vec{u})$  et  $\text{grad} \left( \frac{E^2}{2} \right)$  données dans l'énoncé et le fait que  $\vec{u}(\vec{E} \cdot \text{grad}(\vec{E})) = \vec{E} \cdot \text{grad}(\vec{u} \cdot \vec{E})$ . Finalement :

$$\frac{d}{dt} \left[ \epsilon_0 \left( \frac{\vec{u} E^2}{2} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{E} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\vec{u} B^2}{2} - (\vec{u} \cdot \vec{B}) \vec{B} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}) = - \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{u}$$

c. Cette équation est l'équation bilan locale de la projection sur  $\vec{u}$  de la quantité de mouvement du champ électromagnétique. Le terme en  $\frac{d\vec{j}}{dt}$  correspond bien à la création par unité de temps de quantité de mouvement (le signe - signifie que ce terme est cédé à la matière).

$\epsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B})$  est alors la densité volumique associée à la quantité de mouvement. On peut lui associer une densité volumique de moment cinétique en O de la forme  $\vec{r} \wedge \epsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B})$ . Une étude de la direction de ce vecteur en quelques points dans les situations du III.A. montre que le moment cinétique du champ est bien nul et dirigé selon Oz tant que les champs électrique et magnétique coexistent.

III.C.1.  $\vec{B} = \vec{u}_x \wedge \vec{E}/c$

III.C.2. En utilisant les projections sur Ox, la densité volumique de quantité de mouvement est  $\epsilon_0 E^2/c$  et le vecteur densité de courant de quantité de mouvement est  $\vec{j}_p = \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \vec{u}_x = \epsilon_0 E^2 \vec{u}_x = \epsilon_0 \frac{E^2}{c} c \vec{u}_x$ . La dernière égalité est de la forme  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  et s'interprète en considérant que la quantité de mouvement est transportée à la vitesse c selon l'axe Ox (par les photons).

III.C.3. Le vecteur de Poynting est le vecteur densité de courant d'énergie et vaut  $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x = c \vec{j}_p$ . Le rapport c entre les vecteurs densité de courant d'énergie et de quantité de mouvement, correspond au rapport c entre l'énergie et la quantité de mouvement des photons.

III.C.4. La pression (quantité de mouvement cédée par unité de surface et de temps) et la puissance surfacique (énergie apportée par unité de temps et de surface) sont alors dans un rapport  $2/c$  (le facteur 2 vient du caractère réfléchissant de la surface - « rebond des photons »).  $P = \frac{2}{c} 1500 = 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ . Ceci communique à la voile une accélération de  $10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} / 10 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2} = 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . L'accélération due à l'attraction gravitationnelle solaire est  $\Omega^2 R$  ou  $\Omega$  est la pulsation associée à une année et R le rayon de l'orbite terrestre (150 millions de km).  $\Omega^2 R = 6 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  est 6 fois plus grand que le terme associé à la pression de radiation. Ce rapport n'est pas très grand et la voile solaire peut donc jouer un rôle non négligeable.

PARTIE IV  
TÉLÉTRANSMISSION DU SIGNAL

A. Émission.

IV.A.1. Émission dipolaire.

a. Potentiels retardés.

$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

$\vec{E} = - \text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

$\vec{A} + \mu_0 \vec{j} = 0$

$V(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho \left( P, t - \frac{PM}{c} \right) \frac{\delta t}{PM}$

$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j} \left( P, t - \frac{PM}{c} \right) \frac{\delta t}{PM}$

et :  
vérifient la condition de jauge de Lorentz  $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ .

b. Doublet.



Exemple du doublet de Hertz :  
 $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dq}{dt} a \vec{u}_x = i a \vec{u}_x = i B \vec{A}$

c. Rayonnement dipolaire.

i.  $r \gg \lambda$  permet l'approximation :

$\frac{1}{r} = \frac{1}{PM}$

$cT \gg \lambda$  permet l'approximation :

$\frac{PM}{c} = \frac{r}{c}$

D'où :  $\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} i \left( t - \frac{r}{c} \right) B \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\vec{p}}{dt} \left( t - \frac{r}{c} \right)$

et :  $\vec{B}(M,t) = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{1}{c} \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \left( t - \frac{r}{c} \right) \wedge \vec{u}_r$

en négligeant les dérivations de  $\frac{1}{r}$  qui conduisent à des termes de l'ordre de  $\frac{\mu_0}{4\pi r^2} \frac{d\vec{p}}{dt}$

Cette expression est négligeable devant la précédente si  $\frac{1}{r} \ll \frac{1}{PM}$ , soit  $r \gg cT$ .





IV.B. Transmission de signal.

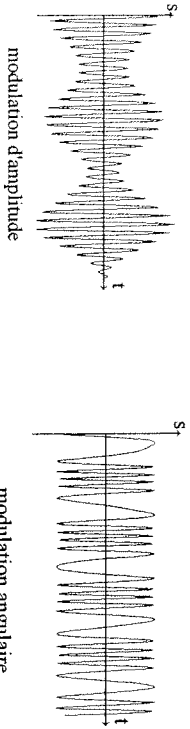
IV.B.1. Modulation.

a. Intérêt de la modulation.

- i. Aux audiofréquences les longueurs d'ondes  $\lambda$  sont très grandes et la puissance émise sera en  $\frac{1}{\lambda^2}$  (IV.A.1.d) et donc très faible : les antennes réalisables ( $a \ll \lambda$ ) ne sont pas adaptées à ces fréquences.

- ii. On peut utiliser la modulation d'amplitude ( $s = p_0 (a + k m(t)) \cos \omega_0 t$ ), la modulation de fréquence ( $s = p_0 \cos 2\pi (f_0 t + k \int m(t) dt)$ ), la modulation de phase ( $s = p_0 \cos (\omega_0 t + k m(t))$ ) les deux dernières étant des cas de modulation angulaire.

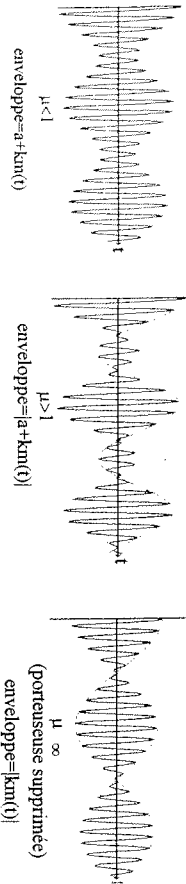
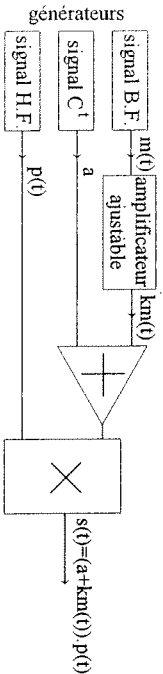
Allure des signaux :



Cette méthode présente deux avantages :  
 - émission à des fréquences adaptées à l'antenne,  
 - transport d'un grand nombre d'informations sur des canaux différents.

b. Étude temporelle du signal modulé.

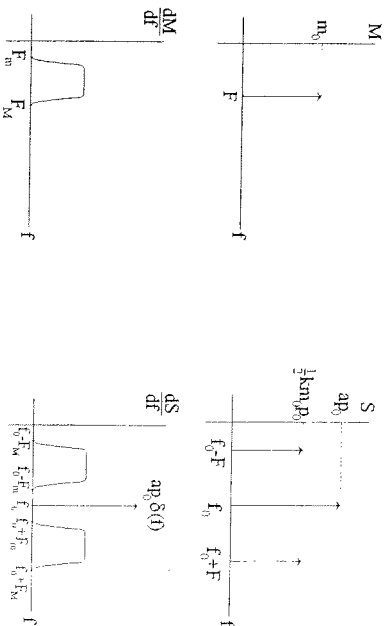
- i. Les composants multiplicateurs de qualité étant de fabrication courante, leur utilisation conduit à un schéma fonctionnel simple :



ii.

c. Étude spectrale du signal modulé.

Pour  $m(t)$  sinusoïdal, on désigne par des capitales les amplitudes des différentes composantes sinusoïdales des signaux à la fréquence  $f$  (tracées pour  $f > 0$ ) :



Avec  $m(t) = m_0 \cos \Omega t$ , on obtient :

$$s(t) = a p_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} k m_0 p_0 (\cos(\omega_0 + \Omega)t + \cos(\omega_0 - \Omega)t)$$

Pour un signal quelconque, le spectre est continu et il faut porter en ordonnées les densités spectrales  $\frac{dM}{df}$  et  $\frac{dS}{df}$ . A chaque fréquence de  $m(t)$  correspondent les deux fréquences de  $s(t)$  symétriques par rapport à  $f_0$ .

Le signal modulé  $s(t)$  occupe la bande comprise entre  $f_0 - F_M$  et  $f_0 + F_M$  de largeur  $2F_M$ , centrée sur  $f_0$ .

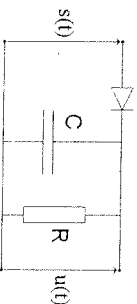
Dans la modulation à porteuse supprimée la fréquence  $f_0$  de densité  $a p_0 \delta(f)$  (où  $\delta(f)$  est la distribution de Dirac ou impulsion-unité) disparaît et toute la puissance du signal  $s(t)$  est concentrée dans les composantes de  $m(t)$  : cette modulation est énergétiquement plus efficace.

A chaque fréquence  $F$  du signal à transmettre correspondent deux fréquences  $f_0 \pm F$  du signal modulé. Une seule est suffisante pour transmettre l'information contenue dans  $m(t)$  et l'on peut supprimer les fréquences inférieures (ou supérieures) à  $f_0$ . La bande occupée est alors divisée par deux, ce qui permet de dégager des fréquences pour transmettre d'autres informations. C'est la modulation à bande latérale unique.

IV.B.2. Démonstration.

a. Méthode de la détection de crête.

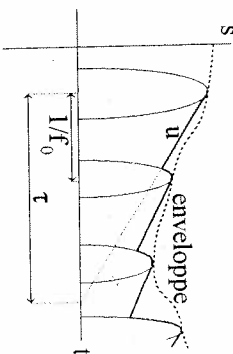
Quand  $s(t) < u(t)$  la diode est bloquée et le condensateur se décharge dans la résistance  $R$  avec la constante de temps  $\tau$ . Cette situation se produit quand  $s(t)$  est décroissante.  $u(t)$  redevient égale à  $s(t)$  au cours de l'alternance suivante (voir les courbes de  $s(t)$  et  $u(t)$ ).



Pour que  $u(t)$  suive au plus près l'enveloppe, il faut d'une part que  $\tau = RC \gg \frac{1}{f_0}$ , d'autre part que la pente de la décharge de l'ordre de  $\frac{\Delta p_0}{\tau}$  (si  $\mu < 1$ ) soit supérieure à la pente de l'enveloppe de l'ordre de  $k m_0 P_0 2\pi F$ , soit  $RC < \frac{1}{2\pi F \mu}$ . On trouve donc comme ordres de grandeur (pour  $\mu \approx 1$ ) :

$$\frac{1}{f_0} \ll RC \ll \frac{1}{F}$$

Cette condition étant réalisée, il reste dans  $u(t)$  des oscillations à des fréquences  $f_0$  et ses multiples que l'on peut éliminer par filtrage passe-bas de fréquence de coupure  $f_c$  telle que  $F \ll f_c \ll f_0$ .



D'après les courbes tracées en IV.B.1.b. on voit que l'enveloppe ne concorde avec le signal à transmettre que si  $\mu < 1$ .

b. Méthode de la démodulation synchrone.

Le signal  $m(t)$  pouvant être considéré comme une somme de signaux sinusoïdaux de type  $m_0 \cos 2\pi Ft$ , on fait d'abord l'étude dans ce cas simple. Le signal  $s(t)$  contenant les fréquences  $\{f_0 - F, f_0, f_0 + F\}$ , le signal produit  $s(t)p(t)$  contient les fréquences  $\{0, F, 2f_0 - F, 2f_0, 2f_0 + F\}$ . Le filtre ne doit laisser passer que la fréquence  $F$ . C'est donc un passe-bande de fréquences de coupure  $f_1$  et  $f_2$  qui, pour le signal quelconque  $m(t)$  doivent satisfaire les conditions :  $0 \ll f_1 < F_m, F_m < f_2 \ll 2f_0 - F_m$ .

Dans les deux cas, le multiplicateur effectue une translation du signal  $m(t)$  dans l'espace des fréquences : de  $+f_0$  à la modulation, de  $-f_0$  à la démodulation.

Si le signal  $s(t)$  contient la porteuse à la fréquence  $f_0$ , on peut récupérer cette dernière en utilisant une boucle à verrouillage de phase. Si la modulation est à porteuse supprimée, il est cependant possible de régénérer la phase de celle-ci par un traitement plus complexe.

**Agrégation**  
(Concours Externe)

OPTON : PHYSIQUE

Épreuve B : Composition de chimie - Session : 1997

A. ÉLÉMENTS, ATOMES, MOLÉCULES

I. Définitions.

1. Dix-septième colonne. Avant-dernière à droite.

2. F :  $1s^2 2s^2 2p^5$  Cl :  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$

Br :  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^5$  I : ...  $4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^5$

3.  $X^-$  ns<sup>2</sup> mp<sup>6</sup> octet, type gaz rare, très stable.

4. EI : réaction  $X_{\text{atome gaz}} \rightarrow X_{\text{gaz}}^+ + e^-$

AE :  $X_{\text{gaz}}^- \rightarrow X_{\text{atome gaz}} + e^-$   $r_X = \frac{d(X-X)}{2}$  (d dans molécule  $X_2$ ).

5.  $E_X : X_{2\text{gaz}} \rightarrow 2X_{\text{atome gazaux}} ; Cl_2 \rightarrow 2Cl \quad \lambda = 490 \text{ nm.}$

II. Électronégativité des éléments.

1. Tendence à attirer les électrons de liaison  $\Rightarrow$  liaison polarisée.

2. EN  $\swarrow$  de gauche à droite et  $\nearrow$  de bas en haut ; Fluor.

3. Échelle d'Alfred-Rochow.

a.  $Z^*$  : pour les atomes polyélectroniques, un  $e^-$  est soumis à l'attraction du noyau (proportionnelle à Z) et aux répulsions des autres électrons  $\Rightarrow$  globalement attraction centrale plus faible proportionnelle à  $Z^* = Z - \sigma$  ( $\sigma$  effet d'écran des  $e^-$ ).

b.  $Z^* = 5,2$  (F) 6,1 (Cl) 7,6 (Br) 7,6 (I)

c.  $\chi_{AR} = 4,45$  (F) 2,98 (Cl) 2,84 (Br) 2,29 (I)

4. Échelle de Pauling.

a. Pauling =  $\chi(Cl) = 3,15$   $\chi(Br) = 2,99$

b.  $E_{BrCl} = 2,27 \text{ eV}$   $D_{BrCl} = 218,8 \text{ kJ mol}^{-1}$

c. Bromure de chlore correspondrait à la polarisation  $\overset{\delta+}{Cl}-\overset{\delta-}{Br}$ , soit à  $\chi_{Br} > \chi_{Cl}$ .