

**SESSION DE 1998****concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques**

option : physique

épreuve A : composition de physique

**Durée : 5 heures**

*L'usage d'une calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable et alphanumérique - à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*Tout document est interdit.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

**AVERTISSEMENT**

Le thème de cette épreuve est l'**Acoustique**. Les parties II, III.A, III.B, IV.A et IV.B sont indépendantes entre elles. En revanche, il est nécessaire d'avoir traité la partie I avant d'aborder la partie II.

Les questions qualitatives et les applications numériques sont nombreuses dans cet énoncé ; il est fortement conseillé de ne pas les ignorer. Rappelons qu'il faut répondre de manière succincte et pertinente à ces questions et qu'un résultat numérique donné sans unité ou avec une unité fautive n'est pas pris en considération.

Par ailleurs lorsqu'il est demandé de décrire une expérience, les candidats voudront bien faire un schéma du montage, préciser la liste du matériel nécessaire à sa réalisation ainsi que le mode opératoire.

### Valeurs numériques

- Constante des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ;
- Eau : masse volumique :  $\rho_0 = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ;  
coefficient de compressibilité :  $\chi = 4,5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ ;
- Air à température  $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  et pression  $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$  :  
masse molaire :  $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ;  
capacité calorifique à pression constante :  $c_p = 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ ;  
rapport :  $\gamma = c_p/c_v = 1,4$ ;  
conductivité thermique :  $\lambda = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### Rappel

Si  $f(t)$  et  $h(t)$  sont deux fonctions sinusoïdales de même pulsation,  $\underline{f}$  et  $\underline{h}$  leur représentation complexe associée, alors en notant par  $\langle \rangle$  la valeur moyenne temporelle et par  $\underline{f}^*$  le complexe conjugué de  $\underline{f}$  :

$$\langle f \cdot h \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{f} \cdot \underline{h}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{f}^* \cdot \underline{h}) \quad \text{et en particulier} \quad \langle f^2 \rangle = \frac{1}{2} |\underline{f}|^2.$$

Cette  
en se limit  
sonore » et  
Les s  
Dans  
et la tempé  
Soit  
Dans  
repos à l'ab

11. L'équ

a. Con  
dans

b. En c  
qui

c. Trac  
en d

d. Le f  
expl

et e

e. Rap  
com  
gran

f. Cite  
élect

PARTIE I

LES FONDEMENTS DE L'ACOUSTIQUE LINÉAIRE  
DANS UN FLUIDE

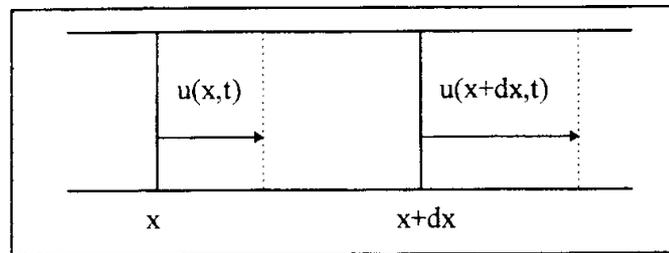
Cette partie étudie la propagation dans un fluide qui remplit un long cylindre, de section  $S$  constante, en se limitant à des perturbations unidimensionnelles ne dépendant que de l'abscisse  $x$  le long du « tuyau sonore » et du temps  $t$ .

Les effets de pesanteur ou les causes d'amortissement ne sont pas pris en compte.

Dans l'état non perturbé du fluide,  $P_0$ ,  $\rho_0$  et  $T_0$  désignent respectivement la pression, la masse volumique et la température du fluide, grandeurs uniformes dans l'espace et constantes dans le temps.

Soit une tranche de fluide comprise au repos entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ .

Dans le milieu perturbé,  $u(x, t)$  représente le déplacement à l'instant  $t$  de la tranche de fluide située au repos à l'abscisse  $x$  et  $p(x, t) = P(x, t) - P_0$  la pression acoustique.



1.1. L'équation de d'Alembert.

- a. Commenter sans la justifier l'hypothèse  $|\partial u / \partial x| \ll 1$  dite de « l'approximation acoustique », retenue dans tout ce problème : tout terme d'ordre supérieur ou égal à 2 en  $\partial u / \partial x$  est négligé.
- b. En exprimant la conservation de la masse, établir la relation liant  $\rho(x, t)$  à  $\partial u / \partial x$ . Commenter le signe qui apparaît dans cette relation.
- c. Traduire, au même ordre, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la tranche considérée et en déduire la relation liant  $\partial^2 u / \partial t^2$  à  $\partial P / \partial x$ .
- d. Le fluide est supposé subir une transformation réversible d'équation d'évolution notée  $P(\rho)$  et non explicitée pour le moment. Montrer que  $u(x, t)$  satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \text{ (équation de d'Alembert)}$$

et exprimer la grandeur  $c$  en fonction de la dérivée  $\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{\nu=\nu_0}$ .

- e. Rappeler sans démonstration la forme générale des solutions de l'équation de d'Alembert et la commenter. Justifier l'appellation de « vitesse du son » ou « célérité des ondes » pour la grandeur  $c$ . Vérifier à partir de son expression que  $c$  a effectivement la dimension d'une vitesse.
- f. Citer, outre leur célérité, deux différences essentielles entre les ondes acoustiques et les ondes électromagnétiques en espace libre.

### 1.2. La célérité du son.

- a. Exprimer la célérité  $c$  en fonction de  $\rho_0$  et du coefficient de compressibilité  $\chi$  correspondant à la transformation subie par le fluide et défini par la relation  $\chi = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP}$ .  
Relier alors la surpression  $p$  à  $\partial u / \partial x$ , relation utile par la suite.
- b. Application numérique : calculer la vitesse du son dans l'eau.
- c. Le fluide est l'air, à température  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , assimilé à un gaz parfait.
  - L'évolution de la tranche de fluide est d'abord supposée isotherme réversible. Rappeler la relation  $P(\rho)$ , calculer le coefficient  $\chi_T$  et en déduire l'expression puis la valeur numérique de la célérité isotherme  $c_T$ . Comment dépend-elle de la pression ?
  - L'évolution de la tranche de fluide est ensuite supposée adiabatique réversible. Rappeler la relation  $P(\rho)$ , calculer le coefficient  $\chi_S$  et en déduire l'expression puis la valeur numérique de la célérité adiabatique  $c_S$ .
- d. Décrire précisément une expérience de cours qui permette de déterminer la vitesse du son dans l'air. Que trouve-t-on,  $c_T$  ou  $c_S$ ? Commenter alors, en évoquant et justifiant la nature des transformations thermodynamiques, l'évolution thermodynamique la plus réaliste des tranches de gaz.
- e. Sans calculs, donner l'ordre de grandeur de la vitesse du son dans un solide.

### 1.3. Impédance d'une onde plane progressive.

Une onde plane progressive acoustique se propageant dans le sens des  $x$  croissants est prise sous la forme  $u(x, t) = f(t - x/c)$ .

On notera  $f'$  la dérivée de  $f$  par rapport à la variable  $(t - x/c)$ .

- a. Exprimer la vitesse particulaire  $v(x, t)$  [vitesse de déplacement de la tranche de fluide] et la pression acoustique  $p(x, t)$  en fonction de  $f'$  et des constantes.
- b. Justifier à l'aide d'une analogie le terme d'impédance acoustique pour la grandeur  $Z = p/v$ .  
Pourquoi ce rapport ne dépend-il pas de la variable  $t - x/c$ ?  
Exprimer  $Z$  en fonction de  $\rho_0$  et  $c$  et donner son unité.
- c. Quelles inégalités existent entre les impédances acoustiques d'un gaz, d'un liquide et d'un solide ?
- d. Obtient-on la même expression de l'impédance acoustique pour une onde plane progressive se propageant dans le sens des  $x$  décroissants de la forme  $u(x, t) = g(t + x/c)$ ? Justifier la réponse.

### 1.4. Énergie acoustique et intensité sonore.

- a. En considérant l'énergie cinétique  $dE_c$  de la tranche de fluide comprise au repos entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , exprimer la densité volumique d'énergie cinétique  $e_c$  en fonction de  $\rho_0$  et  $v$ , vitesse particulaire.
- b. Calculer l'énergie potentielle  $dE_p$  acquise par l'élément de fluide comme travail reçu de la surpression  $p$  pendant la compression du fluide de l'état de repos à l'état actuel.  
En déduire que la densité volumique d'énergie potentielle acoustique s'écrit  $e_p = p^2 / 2\rho_0 c^2$ .
- c. Que vaut la densité volumique d'énergie totale  $e(x, t)$  dans le cas d'une onde plane progressive en fonction de  $p$ ?  
Donner sa valeur moyenne temporelle  $\langle e \rangle$  pour une onde plane progressive sinusoïdale de type  $p = \sqrt{2} p_{\text{eff}} \cos(\omega t - kx)$  où  $p_{\text{eff}}$  représente la valeur efficace de la pression acoustique.

d. L'intensité acoustique  $I$  est l'énergie acoustique (travail de la surpression fourni par la tranche à gauche de  $x$  sur la tranche à droite de  $x$ ) qui traverse l'unité de surface par unité de temps.

Exprimer  $I(x, t)$  en fonction de  $p$  et  $v$  et donner son unité.

Que vaut l'intensité  $I(x, t)$  dans le cas d'une onde plane progressive en fonction de  $p$  et  $Z$ ?

Donner sa valeur moyenne temporelle  $\langle I \rangle$  dans le cas d'une onde plane progressive sinusoïdale de type  $p = \sqrt{2} p_{\text{eff}} \cos(\omega t \pm kx)$  en distinguant les deux cas  $+$  et  $-$ .

e. Montrer que la vitesse de propagation de l'énergie est donnée par le rapport  $\langle I \rangle / \langle e \rangle$  et interpréter le résultat obtenu.

f. En effectuant un bilan énergétique sur la tranche située entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , établir la relation locale de conservation à une dimension entre les dérivées spatio-temporelles de  $I$  et  $e$ .

Vérifier explicitement que cette relation est satisfaite avec les expressions précédentes de  $I$  et  $e$ .

g. L'intensité sonore  $I_{\text{dB}}$  (grandeur non temporelle) est définie en décibel par l'expression :

$$I_{\text{dB}} = 20 \log \frac{P_{\text{eff}}}{2 \cdot 10^{-5}}$$

où  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa représente la valeur en Pascal de la pression acoustique efficace fixant, pour le seuil d'audibilité, une intensité de référence à 0 dB (pour une fréquence de 1 000 Hz).

Justifier la présence du facteur 20 dans cette expression.

Donner pour l'air à 20 °C les valeurs de  $\langle I \rangle$  (définie à la question I.4.d.), soient  $\langle I \rangle_{\text{min}}$  et  $\langle I \rangle_{\text{max}}$  pour les seuils d'audibilité (0 dB) et de douleur (120 dB).

Deux sources indépendantes d'intensité sonore 60 dB chacune émettent simultanément : quelle est en décibels, l'intensité sonore résultante ?

### I.5. Ordres de grandeur en acoustique.

a. L'oreille humaine entend des sons depuis 20 Hz jusqu'à 20 kHz. Combien cela représente-t-il d'octaves ? Donner dans l'air les longueurs d'onde correspondantes ainsi que celle de la fréquence 1 000 Hz.

À quelles perceptions physiologiques correspondent la fréquence et l'amplitude d'un son ?

Un violoncelle et une clarinette jouent la même note avec la même intensité. Quelles caractéristiques du son permettent de distinguer les deux instruments ?

b. Soit une source sonore d'intensité 60 dB et de fréquence 1 000 Hz dans l'air à  $T_0 = 20$  °C.

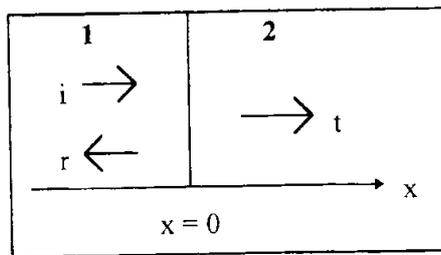
Calculer numériquement :

- la pression acoustique  $p_{\text{eff}}$  ;
- la vitesse particulaire  $v_{\text{eff}}$  ;
- le déplacement particulaire  $u_{\text{eff}}$  ;
- l'écart de température acoustique  $\Delta T_{\text{eff}} = T_{\text{eff}} - T_0$ .

c. Commenter les applications numériques précédentes et en particulier :

- conclure quant aux hypothèses  $p_{\text{eff}} \ll P_0$  et  $|\partial u / \partial x| \ll 1$  à justifier : pourquoi l'épaisseur  $dx$  de la tranche doit-elle vérifier  $u_{\text{eff}} \ll dx \ll \lambda$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde ?
- peut-on négliger  $\Delta T_{\text{eff}}$  devant  $T_0$  ?

1.6. Réflexion et transmission sur une interface.



Le plan  $x = 0$  sépare deux milieux matériels d'impédances caractéristiques  $Z_1$  pour  $x < 0$  et  $Z_2$  pour  $x > 0$ . On note  $\alpha = Z_2/Z_1$ .

Une onde plane progressive incidente se propage dans le sens des  $x$  croissants dans le milieu 1 ; sa pression acoustique s'écrit :

$$p_i(x, t) = f(t - x/c_1).$$

Elle donne naissance à une onde réfléchie dans le milieu 1 et une onde transmise dans le milieu 2 de pressions acoustiques :

$$p_r(x, t) = g(t - x/c_1) \quad \text{et} \quad p_t(x, t) = h(t - x/c_2).$$

a. Justifier physiquement les conditions de passage et en déduire les équations qui conduisent à la détermination des fonctions  $g$  et  $h$ .

Si l'onde est sinusoïdale, la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$  dépendent-ils du milieu ?

b. Montrer que  $g(t) = r_p f(t)$  et  $h(t) = t_p f(t)$  et exprimer les coefficients de réflexion  $r_p$  et de transmission  $t_p$  en amplitude de pression en fonction du rapport  $\alpha$ .

c. Sans refaire de calculs, obtenir les coefficients de réflexion  $r_v$  et de transmission  $t_v$  en amplitude de vitesse en fonction de  $r_p$ ,  $t_p$  et  $\alpha$ .

d. Donner les intensités acoustiques  $I_r$ ,  $I_i$  et  $I_t$  liées à chaque onde et en déduire les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$  en énergie à travers l'interface en fonction du seul coefficient  $\alpha$ .

Quelle relation existe-t-il entre  $R$  et  $T$  ? Que traduit-elle ?

e. Calculer  $\alpha$  lorsque le milieu 1 est de l'air et le milieu 2 de l'eau ; conclusion quant à la réflexion ?

La valeur de  $t_p$  concorde-t-elle avec celle de  $r_p$  ?

En déduire la valeur de  $T$  et donner l'atténuation correspondante en dB.

f. Par analogie avec l'optique, signaler, sans faire de calculs, si l'on obtient les mêmes coefficients dans le cas où l'onde incidente est inclinée d'un angle  $i$  sur la normale. Qu'appelle-t-on dans ce cas « facteur d'obliquité » ? Où intervient-il ?

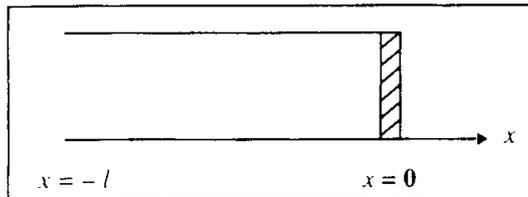
PARTIE II

DÉVELOPPEMENTS ET APPLICATIONS

Les cinq sections de cette partie sont indépendantes entre elles, mais utilisent certains résultats de la partie I. Les hypothèses de départ et notations sont, sauf mention contraire, celles de la partie I.

Pour l'air on prend dorénavant les valeurs numériques suivantes :  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

II.1. La cavité sonore.



Le tuyau sonore de la question I.1. est à présent rigidement fermé en  $x = 0$  par un matériau de très grande impédance.

Les notations de la question I.6. donnent alors :

$$Z_2 \gg Z_1 \text{ avec } Z_1 \text{ notée } Z.$$

a. Qu'en déduit-on pour les coefficients  $r_p, t_p, r_v, t_v, R$  et  $T$ ? Commenter.

L'onde de pression incidente est sinusoïdale, soit en notation complexe :

$$\underline{p}_i(x, t) = p_0 \exp i(\omega t - kx).$$

b. Exprimer alors les grandeurs complexes  $\underline{v}_1, \underline{p}_1$  et  $\underline{v}_r$  et en déduire pour  $x < 0$ , les expressions réelles du champ total de pression  $p(x, t)$  et de vitesse  $v(x, t)$ .

Décrire le type d'onde obtenu et en particulier la situation en  $x = 0$ .

c. L'autre extrémité du tuyau en  $x = -l$  ( $l > 0$ ) est ouverte sur l'air libre. Que peut-on dire de la pression  $p$  et de la vitesse  $v$  en ce point ?

Montrer que ces conditions définissent des modes et qu'elles ne sont satisfaites que si la longueur  $l$  du tuyau est liée, dans le mode d'ordre  $n$ , à la longueur d'onde  $\lambda_n$  correspondante (on choisira  $n = 1$  pour le mode fondamental).

d. Application 1. Pour faire « mieux sonner » un diapason, on a l'habitude de le fixer sur une cavité de type précédent (ouverte d'un côté, fermée de l'autre). Quelle est la taille  $l_{\text{min}}$  de la plus petite cavité utilisable (le La<sub>3</sub> musical est à une fréquence  $f = 440 \text{ Hz}$ ) ?

Comment la cavité modifie-t-elle la bande passante du son émis ? Expliquer.

Représenter sur le même graphe les distributions de pression (en trait plein) et de vitesse (en pointillé) sur une cavité de taille  $l_{\text{min}}$  fermée à droite.

Pour une cavité de même taille mais ouverte aux deux extrémités, comparer la fréquence du mode fondamental par rapport au cas précédent ; quel est l'intervalle musical entre les notes émises par ces deux tuyaux ?

e. Application 2. Le tube de Kundt fonctionne suivant le principe vu en II.1.c. avec en  $x = -l$  un haut-parleur et en  $x$  un petit microphone fixé à l'extrémité d'une tige mobile. Le déplacement mesuré du microphone entre 7 nœuds consécutifs est de 51,5 cm dans l'air à 20 °C. Quelle est la fréquence d'émission du haut-parleur ?

**II.2. Transmission à travers une cloison. Isolation.**

Dans le plan  $x = 0$  se trouve à présent une cloison et le milieu unique de part et d'autre (pour  $x < 0$  et  $x > 0$ ) est de l'air d'impédance  $Z_0$ .

Une onde plane progressive harmonique décrite par  $p_1(x, t) = p_0 \exp i(\omega t - kx)$  arrive dans la région  $x < 0$  sur la cloison. L'amplitude de l'onde de pression transmise est cherchée sous la forme  $\underline{t} p_0$ .

- a. Pourquoi prévoir un coefficient de transmission  $\underline{t}$  a priori complexe ?
- b. La cloison est d'épaisseur  $a$  et de masse volumique  $\rho$ . À quelle condition, à expliciter et supposée vérifiée par la suite, peut-on la décrire par un modèle surfacique de masse surfacique  $\sigma$  à déterminer ?

c. Indiquer, en les justifiant, les relations permettant d'établir l'expression  $\underline{t} = \frac{1}{1 + i \frac{\omega \sigma}{2 Z_0}}$ .

d. En déduire le coefficient de transmission  $T$  en énergie, rapport des flux moyens d'énergie transmise et incidente.

e. Tracer l'allure de la courbe  $G_{dB} = 10 \log T(\omega)$  en fonction de  $\log \omega$ .  
Quelle est la nature du filtre, la fréquence de coupure  $f_c$  à -3 dB et la pente pour  $f > f_c$  ?

- f. On souhaite un affaiblissement de 40 dB pour une fréquence de 200 Hz.  
Dans quel domaine se situe la fréquence de coupure  $f_c$  ?  
Conclure quant à l'atténuation entre deux pièces voisines, pour un son grave ou un son aigu.  
En déduire la masse surfacique  $\sigma$ , puis l'épaisseur  $a$  de la cloison sachant que sa masse volumique est  $\rho = 1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . L'hypothèse envisagée à la question II.2.b. est-elle vérifiée ?  
Quels sont les facteurs permettant d'améliorer l'isolation phonique ?

**II.3. Temps de réverbération d'une salle.**

L'acoustique des salles est un domaine complexe qui ne se traite pas avec des ondes planes progressives comme en espace illimité.

On admettra dans ce cas que la relation  $I = ce$  de la question I.4.d. doit être remplacée par  $I = \frac{ce}{4}$  où

$I$  et  $e$  représentent les valeurs moyennes temporelles de l'intensité acoustique et de la densité volumique d'énergie acoustique. Ces valeurs moyennes s'entendent sur une période de l'onde, mais sont susceptibles de varier sur une échelle de temps plus grande, comme dans l'exemple traité ci-dessous, où il s'agit d'établir la loi  $I(t)$  de l'extinction d'un signal acoustique après la suppression de la source. Dans un modèle simple  $I$  et  $e$  sont considérées comme uniformes dans le volume de la salle ainsi que sur les frontières.

- a. Exprimer l'énergie acoustique  $E$  contenue dans la salle de volume  $V$ .
- b. L'absorption de l'air est négligée, mais pas celle au niveau des parois (sol, plafonds et murs); on note  $S$  leur surface totale et  $\alpha$  leur coefficient d'absorption moyen (fraction de la puissance incidente dissipée au niveau des parois).  
Exprimer la puissance totale  $\mathcal{P}$  absorbée par les parois.

c. Obtenir la loi d'évolution de  $I(t)$  en régime transitoire, l'intégrer avec la condition  $I(t=0) = I^0$ .

d. Donner l'intensité en décibel, notée  $I_{dB}$  et en déduire le temps de réverbération  $T$  au bout duquel le niveau sonore a chuté de 60 dB.

Semi-numériquement, montrer que cela conduit à la formule de Sabine :  $T = 0,16 \frac{V}{\alpha S}$ .

e. Pour une application numérique rapide, considérer la salle de forme cubique d'arête  $a$ .  
Comparer les temps de réverbération dans une cathédrale où  $a = 30 \text{ m}$  et  $\alpha = 0,05$  et dans un studio d'enregistrement où  $a = 4 \text{ m}$  et  $\alpha = 0,1$ .

Quel type de salle proposez-vous pour y jouer de la musique de chambre baroque ? de la musique orchestrale romantique ?

#### 11.4. Rayonnement d'une sphère pulsante.

a. Comment s'écrit l'équation de d'Alembert à trois dimensions dans un problème à symétrie sphérique

où le Laplacien se réduit à  $\Delta p = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r p}{\partial r^2}$  ?

Donner et interpréter la solution générale  $p(r, t)$ .

b. Montrer que pour une onde sphérique divergente harmonique de la forme  $\underline{p} = p_0 \frac{e^{-ikr}}{r} e^{i\omega t}$ , le champ des vitesses  $\underline{v}$  est la somme de deux termes. Justifier les dénominations de champ proche et de champ lointain et examiner leur contribution à l'intensité moyenne  $I = \frac{1}{2} \text{Re} (\underline{p} \cdot \underline{v}^*)$  de l'onde.

Exprimer l'impédance  $\underline{Z} = \underline{p} / \underline{v}$  d'une telle onde en fonction de  $\rho_0 c$  et  $kr$ . Commenter.

Estimer la limite entre les deux champs.

c. La surface d'une sphère, de rayon moyen  $r_0$  petit devant la longueur d'onde  $\lambda$ , effectue un petit mouvement radial harmonique  $a e^{i\omega t}$  d'amplitude  $a \ll r_0$ .

Exprimer  $p_0$  en fonction de  $a$ ,  $\rho_0$ ,  $\omega$  et  $r_0$  et en déduire l'amplitude  $a$  avec laquelle doit vibrer une membrane de haut-parleur en forme de calotte sphérique de rayon  $r_0 = 5$  cm pour produire un son grave de fréquence  $f = 50$  Hz et de forte intensité  $I_{dB} = 90$  dB à une distance  $r = 1$  m.

d. Déduire la puissance d'émission sonore  $\mathcal{P}$  de la sphère pulsante en fonction des données  $a$ ,  $\omega$  et  $r_0$  entre autres. Les sources de petite taille sont-elles adaptées à produire des sons graves ?

e. Décrire une expérience de cours permettant une facile mise en évidence des mouvements de vibration d'une membrane de haut-parleur.

#### 11.5. Absorption par conduction thermique.

La vitesse particulière  $\bar{v}$ , l'écart de masse volumique  $\rho' = \rho - \rho_0$  et la surpression acoustique  $p = P - P_0$  sont toujours des infiniment petits du même ordre justifiant une linéarisation des équations.

a. Écrire, sans les démontrer, dans le cadre de l'hydrodynamique, et à l'ordre le plus bas :

- l'équation locale de conservation de la masse entre  $\bar{v}$  et  $\rho'$  : relation (1) ;

- l'équation d'Euler pour un fluide parfait, entre  $\bar{v}$  et  $p$  : relation (2).

En déduire une équation aux dérivées partielles entre  $p$  et  $\rho'$ .

À quelle expression de  $\frac{p}{\rho'}$  conduit-elle en régime harmonique de la forme  $\exp i(\omega t - kx)$  ?

b. L'hypothèse de la transformation adiabatique est une approximation car il existe toujours un léger transfert thermique entre tranches de gaz comprimées ( $T > T_0$ ) et dilatées ( $T < T_0$ ) par le passage de l'onde sonore.

Le fluide considéré est un gaz parfait de conductivité thermique  $\lambda$  et  $T' = T - T_0$  représente l'écart de température.

Donner deux expressions différentes de la chaleur  $\delta Q$  reçue par l'unité de masse d'un gaz parfait pendant l'intervalle de temps  $dt$ , l'une avec  $c_v$  (chaleur massique à volume constant, en variables  $T'$  et  $\rho'$ ) et l'autre avec  $c_p$  (chaleur massique à pression constante, en variables  $T'$  et  $p$ ).

c. Justifier la loi de Fourier relative à la conduction de la chaleur :  $\frac{\delta Q}{dt} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ .

d. Montrer qu'en régime harmonique de la forme  $\exp i(\omega t - kx)$ , ces expressions donnent accès à une nouvelle expression du rapport  $\frac{p}{p'}$  traduisant l'existence de transferts thermiques :

$$\frac{p}{p'} = \frac{P_0}{\rho_0} \cdot \frac{c_p - i \frac{\lambda k^2}{\omega}}{c_v - i \frac{\lambda k^2}{\omega}} : \text{relation (3)}$$

e. Dédire de ce qui précède l'équation de dispersion en introduisant  $c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ , la célérité isentropique

Que traduisent physiquement les cas limites  $\lambda \rightarrow 0$  et  $\lambda \rightarrow \infty$ ? Que vaut la célérité dans chacun des deux cas? (voir également la question I.2.).

f. Montrer que grâce à une approximation à justifier,  $k$  peut se mettre sous la forme  $k = k_0 - i\alpha$ . Que vaut la vitesse de phase à cet ordre?

Exprimer  $\alpha$  en fonction de  $\gamma$ ,  $\lambda$ ,  $c_p$ ,  $c$  et  $\omega$ . Comment varie l'absorption lorsque  $\omega$  augmente?

*Application numérique.* Calculer  $\alpha$  pour l'air à 20 °C aux fréquences  $f = 1$  kHz, puis  $f = 40$  kHz, et en déduire dans chaque cas la distance  $d$  sur laquelle l'onde est amortie d'un facteur  $e$ .

g. Citer deux autres causes physiques d'absorption du son conduisant à des résultats comparables. Dans chacun de ces cas, quelle équation (1), (2) ou (3) aurait-il fallu modifier?

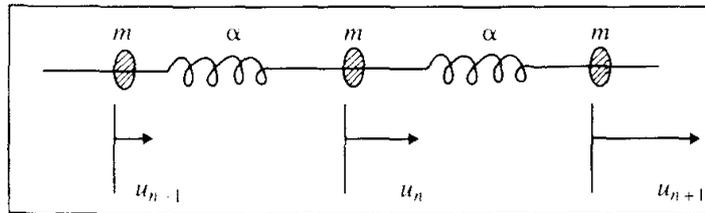
LE DOMAINE DE L'ULTRA-ACOUSTIQUE

III. Questions préliminaires.

- a. Citer deux espèces animales capables de détecter et/ou d'émettre des ultrasons.
- b. Pourquoi les communications dans l'eau de mer ne se font-elles pas à l'aide d'ondes hertziennes comme dans l'air ? Pourquoi choisit-on le domaine ultrasonore pour le fonctionnement des sonars ? Citer quelques applications.  
Estimer en degrés le demi-angle  $\theta$  au sommet du cône de diffraction d'un sonar de rayon  $r = 5$  cm qui émet des ultrasons de fréquence  $f = 40$  kHz dans l'eau où la célérité est  $c = 1\,500$  m · s<sup>-1</sup>. Commentaire. Quels sont les deux phénomènes à concilier et qui conduisent à un nécessaire compromis sur le choix de la fréquence ?
- c. En quoi consiste le « contrôle non destructif » des matériaux ? Quel est son intérêt dans le domaine industriel ?  
Quelle fréquence préconisez-vous pour la mise en évidence de détails de l'ordre du millimètre ?
- d. Dans un solide existent non seulement des ondes acoustiques longitudinales, mais également des transversales. Expliquer simplement la raison de l'existence de ces dernières.

III.A. ACOUSTIQUE DANS UN SOLIDE

Un réseau unidimensionnel est représenté par une chaîne linéaire constituée d'atomes identiques de masse  $m$ , disposés suivant un axe  $Ox$ . À l'équilibre, ils sont équidistants, séparés par une distance  $a$  et l'atome de rang  $n$  a pour abscisse  $x_n^0 = na$ . Lorsqu'une perturbation longitudinale modifie suivant l'axe  $Ox$  la position de l'atome de rang  $n$  d'une quantité algébrique  $u_n$  avec  $|u_n| \ll a$ , on admet que celui-ci n'interagit alors qu'avec ses deux plus proches voisins auxquels il est lié élastiquement : il est soumis de la part de ces atomes à une force de rappel proportionnelle aux variations de longueur des liaisons correspondantes et à la constante de raideur  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) : cette force est nulle à l'équilibre.



III.A.1. Ondes élastiques sur une chaîne d'atomes.

La chaîne est d'abord supposée infinie, c'est-à-dire illimitée.

- a. Écrire l'équation du mouvement de l'atome de rang  $n$ , liant  $u_n$  aux déplacements  $u_{n-1}$  et  $u_{n+1}$  de ses voisins.
- b. On veut montrer qu'il existe des ondes élastiques longitudinales de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k} = k \vec{u}_1$  pouvant se propager le long de la chaîne. En notation complexe elles sont caractérisées par  $\underline{u}_n = A \exp i(kx_n^0 - \omega t)$ .  
Pourquoi  $A$  ne dépend-il pas de  $n$  ?  
Déterminer en fonction de  $k$  les valeurs possibles de  $\omega$  des ondes susceptibles de se propager sur la chaîne. Que déduit-on de la non-linéarité de cette relation ?

c. Indiquer la parité de fonction  $\omega(k)$  et l'expliquer physiquement.

Donner la pulsation maximale  $\omega_M$  des ondes qui peuvent se propager dans la chaîne ; préciser dans ce cas le type de mouvement des atomes. Comment peut-on qualifier le type d'ondes ainsi obtenu ?

Les valeurs de  $k > \pi/a$  sont-elles physiquement justifiées ?

Tracer dans l'intervalle  $[-\pi/a, \pi/a]$  le graphe  $\omega = \omega(k)$ .

d. Définir et calculer les vitesses de phase  $v_p(k)$  et de groupe  $v_g(k)$ .

Donner leur limite pour  $ka \rightarrow 0$  et  $ka \rightarrow \pi$  et les commenter.

Dans quel cas peut-on parler d'ondes acoustiques comme dans un fluide ?

e. *Application numérique* : Calculer la fréquence maximale  $f_M$  (liée à  $\omega_M$ ) pour  $a = 4 \cdot 10^{-10}$  m,  $m = 2 \cdot 10^{-25}$  kg et  $\alpha = 25$  N · m<sup>-1</sup>. Dans quel domaine se trouve-t-elle ? Que vaut alors la longueur d'onde  $\lambda_M$  ? Commenter.

On estime à  $f_l = f_M/100$  la fréquence en dessous de laquelle la relation  $\omega(k)$  peut être considérée comme linéaire. Quelles sont la célérité  $c_l$  des ondes et la longueur d'onde  $\lambda_l$  correspondante ? Commenter.

f. Dans ce dernier cas ( $ka \ll \pi$ ) justifier que l'ensemble des  $u_n$  puisse être représenté par une fonction continue  $u(x, t)$  où la variable  $x$  représente l'emplacement au repos d'un atome.

Établir l'équation à laquelle satisfait  $u(x, t)$ . Retrouver dans ces conditions la célérité  $c_l$  des ondes.

g. Dans cette question, il peut être utile de revenir à la notation réelle  $u_n = A \cos(kna - \omega t)$ .

Déterminer la valeur moyenne temporelle :

$\langle T_n \rangle$  de l'énergie cinétique de l'atome de rang  $n$  ;

$\langle V_n \rangle$  de l'énergie potentielle de l'atome de rang  $n$ , en prenant la demi-somme des énergies potentielles des deux liaisons de l'atome de rang  $n$  ; la comparer à  $\langle T_n \rangle$  ;

$\langle E_n \rangle$  de l'énergie mécanique de l'atome de rang  $n$ . À quoi s'identifie ce résultat ? Pourquoi est-il indépendant de  $n$  ?

### III.A.2. Modes stationnaires sur une chaîne limitée.

La chaîne est à présent de longueur finie, composée de  $N + 1$  atomes identiques, numérotés de  $n = 0$  à  $n = N$ . Des conditions aux limites imposent aux atomes extrêmes d'être immobiles soit  $u_0 = u_N = 0, \forall t$ .

a. On envisage une onde sinusoïdale progressive incidente  $(\underline{u}_n)_i = A \exp i(kx_n^0 - \omega t)$  ; montrer qu'il est nécessaire d'envisager une onde réfléchie. Comment peut-on qualifier la réflexion en  $n = N$  ?

Donner l'expression globale de  $\underline{u}_n(x, t)$  et commenter.

b. Quelle relation déduit-on de la condition en  $x = 0$  ? Montrer qu'il existe un entier  $p$  tel que  $k = k_p$  à exprimer en fonction de  $p, N$  et  $a$ .

Compte tenu de l'intervalle de variation de  $k$  obtenu à la question III.A.1.c., dénombrer les états stationnaires (non nuls) possibles, appelés modes propres. Ce résultat était-il prévisible ?

c. Exprimer en notation réelle le mode propre  $p$  de l'atome  $n$  soit  $u_{n,p}(t)$  en fonction de  $A_p, \omega_p$  et  $k_p n a$ .

Ce résultat permet de comprendre qu'à présent l'énergie du réseau est quantifiée. Quel nom donne-t-on au quantum d'énergie correspondant ?

### III.B. ASPECTS DE L'ÉCHOGRAPHIE

Le but de l'échographie médicale est de donner sur écran des images d'organes du corps humain, obtenues par détection d'échos ultrasonores. Le transducteur électromécanique qui émet les ondes acoustiques ultrasonores par impulsions de courte durée sert également de récepteur, l'intensité de l'onde réfléchie sur un organe étant liée à son coefficient de réflexion.

#### III.B.1. Le rôle de la couche de gel.

Le transducteur à ultrasons est une céramique piézo-électrique ; les propriétés physiques du corps humain peuvent être assimilées à celle de l'eau ( $c = 1500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

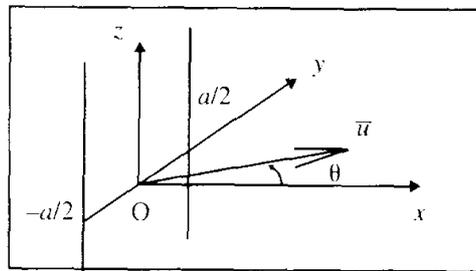
Quelles sont les deux raisons pour lesquelles le contact direct transducteur-peau n'est pas efficace ?

Dire en quoi l'interposition d'une couche de gel améliore ces deux points.

#### III.B.2. Directivité de la source ultrasonore.

a. Quelle est la longueur d'onde  $\lambda$  dans l'eau d'une onde ultrasonore de fréquence  $f = 3 \text{ MHz}$  ?

Décrire brièvement une expérience permettant de la mesurer.

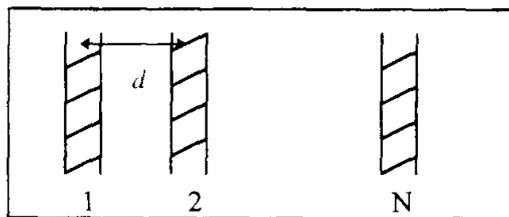


b. Le transducteur est d'abord une source cohérente rectangulaire de largeur  $a = 0,4 \text{ mm}$  suivant  $Oy$  et de longueur suivant  $Oz$  grande devant  $a$  et émettant une onde suivant le principe d'Huygens-Fresnel.

Pourquoi peut-on se limiter à la diffraction dans le plan  $Oxy$  ?

Exprimer l'intensité acoustique  $I(\theta)$  dans la direction  $\vec{u}$  formant un angle  $\theta$  avec l'axe  $Ox$  en fonction de  $I_0 = I(\theta = 0)$ . Tracer l'allure de la courbe  $I(\theta)/I_0$  en fonction de  $\sin \theta$ . Commenter.

Comment augmenter la directivité en agissant sur  $a$  ou  $\lambda$  ? Est-ce possible ?



c. Le transducteur est à présent constitué de  $N$  éléments identiques à celui de la question précédente, équidistants et séparés par une distance  $d$ , et émettant des ondes en phase les unes avec les autres.

Quelle est l'intensité  $I'(\theta)$  totale dans une direction faisant l'angle  $\theta$  avec l'axe  $Ox$  ?

Tracer qualitativement  $I'(\theta)/N^2 I_0$  en fonction de  $\sin \theta$  en mentionnant les points d'abscisses remarquables dans le cas  $d = 0,7 \text{ mm}$  et  $N = 10$ . Commenter cette nouvelle répartition.

### III.B.3. Réalisation technique de l'exploration.

Cette section se traite avec le transducteur multi-éléments de la question III.B.2.c.

Les déphasages entre les différents éléments sont commandés par l'électronique du transducteur.

a. On introduit un déphasage  $\phi$  constant entre les ondes acoustiques émises par deux éléments consécutifs ; plus précisément, si  $n$  est le numéro d'un élément, son déphasage par rapport à un signal de référence est  $\varphi_n = n \phi$ .

Avec très peu de calculs, dire comment est modifiée la courbe  $I(\theta)/N^2 I_0$  précédente et en particulier indiquer dans quelle direction  $\theta_M$  est donné son maximum.

Dégager l'intérêt de cette technique en s'appuyant sur une analogie en optique géométrique préciser.

Qu'obtient-on avec un déphasage  $\phi(t)$  variant lentement par rapport à la période ultrasonore ?

b. Toujours avec le même dispositif, le déphasage de l'élément  $n$  est à présent du type  $\varphi_n = n^2 \phi$ .

Sans calculs, mais en s'appuyant sur une analogie en optique géométrique du type précédent, préciser, dire ce qu'il est possible de réaliser avec ce dispositif.

Qu'obtient-on avec un déphasage  $\phi(t)$  variant lentement par rapport à la période ultrasonore ?

tandis  
plan le  
de tem

IV.A.1

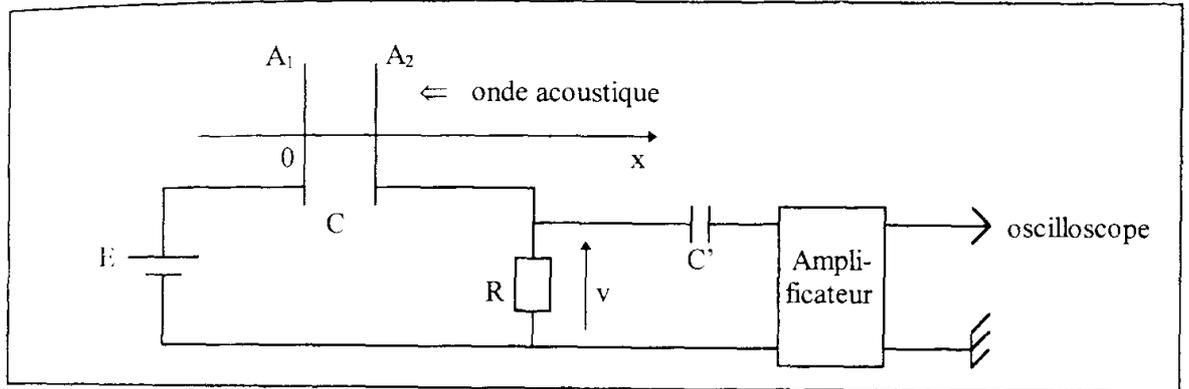
IV.A.2

PARTIE IV

ÉLÉMENTS D'ÉLECTRO-ACOUSTIQUE

IV.A. LE MICROPHONE ÉLECTROSTATIQUE

Un microphone électrostatique est composé d'un condensateur plan dont l'une des armatures  $A_1$  est fixe tandis que l'autre  $A_2$  réagit aux variations de pression dues à une onde acoustique ; son déplacement est supposé plan le long d'un axe  $Ox$ . Ce condensateur de capacité  $C$  est relié par une résistance  $R$  à un générateur continu de tension  $E$ .



IV.A.1. Étude qualitative.

Expliquer brièvement et sans calcul le fonctionnement du dispositif, le rôle du condensateur de capacité  $C'$  et le type de tension observée à l'oscilloscope lorsque l'onde acoustique est sinusoïdale.

IV.A.2. Calcul de la tension  $v(t)$ .

Les armatures du condensateur ont une surface  $S$ , le diélectrique qui compose l'espace interarmature a une permittivité  $\epsilon$ . Si  $d_0$  est la distance au repos entre les deux armatures, on admet qu'une surpression sinusoïdale de pulsation  $\omega$  sur  $A_2$  conduit à une épaisseur  $d = d_0 - a \sin \omega t$ .

a. Sachant que  $a \ll d_0$ , montrer que la capacité peut s'écrire, au premier ordre en  $a/d_0$ ,

$$C(t) = C_0 + C_1 \sin \omega t.$$

Exprimer  $C_0$  et  $C_1$ . Quelle signification attribuer à  $C_0$ ? Que vaut le rapport  $\frac{C_1}{C_0}$ ?

b. Donner l'équation différentielle vérifiée par la tension  $v(t)$  aux bornes de la résistance  $R$ .

c. Quelle est la tension  $v(t)$  en régime forcé, à l'ordre le plus faible en  $C_1/C_0$ ?

L'écrire sous la forme  $v(t) = V \sin(\omega t + \varphi)$ , et donner les expressions de  $V$  et  $\varphi$ .

d. Comment a-t-on intérêt à choisir la résistance  $R$  pour que l'amplitude  $V$  dépende le moins possible de la fréquence? Interpréter cette condition et donner alors la nouvelle expression de  $v(t)$ .

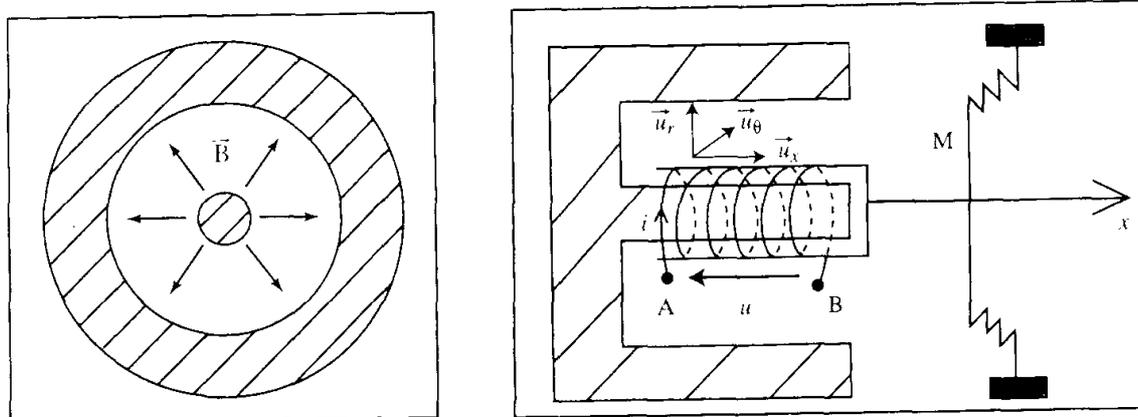
Quels autres avantages apporte cette condition?

e. Quel est le principe du microphone piézo-électrique?

### IV.B. LE HAUT-PARLEUR ÉLECTRODYNAMIQUE

Schématiquement, un haut-parleur électrodynamique est composé :

- d'un aimant permanent (parties hachurées sur la figure), qui fournit un champ magnétique  $\vec{B}$  radial dans l'entrefer en forme de cavité annulaire ;
- d'une bobine de longueur de fil  $l$ , de résistance  $R$ , d'inductance  $L$ , située dans l'entrefer de l'aimant et soumise à la tension  $u(t)$  d'un amplificateur entre ses deux extrémités A et B ;
- d'une membrane M solidaire de la bobine. L'ensemble mobile possède une masse  $m$  et peut osciller autour d'une position moyenne ( $x = 0$ ) suivant l'axe Ox grâce à un dispositif de rappel schématisé par un ressort de raideur  $k$ . La transmission acoustique de la membrane à l'air environnant se traduit par une force de frottement fluide  $-r\vec{v}$  ( $r > 0$ ) opposée à la vitesse de la membrane, et dont la puissance correspond à la puissance sonore émise.



Les grandeurs électriques sont définies algébriquement comme l'indique la figure. Tout vecteur devra être exprimé sur la base directe  $\vec{u}_x, \vec{u}_\theta, \vec{u}_r$ .

#### IV.B.1. Étude qualitative.

Expliquer brièvement et sans calculs le fonctionnement du haut-parleur et en particulier par quels mécanismes une tension  $u(t)$  peut engendrer une onde acoustique.

Pourquoi parle-t-on de couplage et de transducteur électrodynamiques ?

#### IV.B.2. Les équations du système.

a. La bobine est parcourue par un courant  $i(t)$ . Écrire l'équation différentielle reliant le déplacement  $x(t)$  de l'ensemble membrane et bobine et leur vitesse  $v(t) = dx(t)/dt$  à  $i(t)$ .

b. La bobine est soumise à une tension  $u(t)$ . Écrire l'équation différentielle reliant  $u(t)$ ,  $i(t)$  et  $v(t)$ .

IV.B.3. Bilan de puissance et rendement.

a. Quelle relation existe-t-il entre la puissance de la force de Laplace  $P_{Lapl}$  et la puissance de la force électromotrice  $P_{em}$  ?

Ce « bilan auxiliaire » de puissance est-il général dans les couplages électromécaniques ? Comment s'interprète-t-il au niveau microscopique ?

b. Établir le bilan de puissance global sous la forme :  $ui = \frac{d}{dt}(E_r) + P_1(i) + P_2(v)$ .

Donner les expressions de  $E_r$ ,  $P_1$  et  $P_2$  et interpréter physiquement chacun des termes du bilan.

c. Que devient ce bilan de puissance en valeur moyenne temporelle pour un régime périodique ? Interpréter physiquement le résultat.

En déduire une définition du rendement  $\eta$  du haut-parleur. Comment améliorer ce rendement ?

d. Expliquer le rôle du champ magnétique dans le transfert de la puissance électrique à la puissance acoustique. Intervient-il dans  $\eta$  ?

IV.B.4. Utilisation en régime sinusoïdal.

La tension appliquée à la bobine est à présent sinusoïdale de pulsation  $\omega$  ; seul le régime forcé lié à cette pulsation est étudié et en notation complexe, la tension est écrite  $\underline{u} = u_0 e^{j\omega t}$ .

a. Montrer que l'on peut écrire  $\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$  avec  $\underline{Z} = \underline{Z}_e + \underline{Z}_{am}$ , où  $\underline{Z}_e$  représente l'impédance électrique de la bobine et  $\underline{Z}_{am}$  l'impédance acousto-mécanique (ou motionnelle) du haut-parleur.

Donner les expressions de  $\underline{Z}_e$  et  $\frac{1}{\underline{Z}_{am}}$ .

b. Montrer que dans l'hypothèse simplificatrice où  $r$  ne dépend pas de  $\omega$ , l'impédance acousto-mécanique peut être modélisée par trois composants électriques notés  $R'$ ,  $L'$  et  $C'$  à déterminer en fonction des données. Quelle caractéristique mécanique représente chacun de ces composants ?

*Application numérique.* Calculer la valeur de ces composants pour  $B = 0,2 \text{ T}$  ;  $l = 20 \text{ m}$  ;  $m = 120 \text{ g}$  ;  $k = 43 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  ;  $r = 6 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  et proposer le schéma électrique équivalent à l'ensemble du haut-parleur.

c. Donner l'expression du rendement  $\eta$  défini à la question IV.B.3.c. en fonction des données. Pour quelle valeur  $\omega_0$  de la pulsation est-il maximal ?

Calculer numériquement la fréquence  $f_0$  correspondante ainsi que la valeur  $\eta_0$  du rendement sachant qu'en plus des valeurs numériques précédentes,  $R = 2 \Omega$ .

Sachant qu'à cette fréquence  $f_0$ , la puissance moyenne reçue par le haut-parleur est  $P = 15 \text{ W}$  et que le courant efficace est  $i_{\text{eff}} = 1,8 \text{ A}$ , calculer la vitesse efficace  $v_{\text{eff}}$  et le déplacement efficace  $x_{\text{eff}}$  de la membrane.

Donner ensuite la valeur du rendement  $\eta$  pour une fréquence  $f = 300 \text{ Hz}$ .

Ce haut-parleur permet-il une restitution fidèle des sons audibles ? Comment procèdent les fabricants d'enceintes ?

d. Pourquoi les haut-parleurs sont-ils fixés dans des enceintes ?

magnétique  $\vec{B}$  radial dans  
fer de l'aimant et soumise  
 $m$  et peut osciller autour  
ématisé par un ressort de  
ar une force de frottement  
ond à la puissance sonore

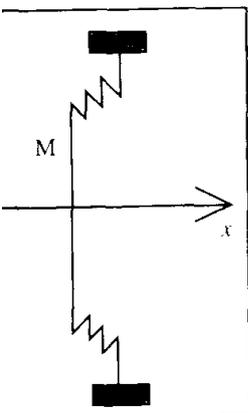


figure.

et en particulier par quels

elle reliant le déplacement  
(t).

e reliant  $u(t)$ ,  $i(t)$  et  $v(t)$ .