0240

95441
repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2004

concours externe de recrutement de professeurs agrégés

section : sciences physiques

option : physique

composition de physique

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

Tournez la page S.V.P.

PROPAGATION DANS LES FLUIDES

PREAMBULE

Le sujet traite de quelques aspects des phénomènes de propagation dans les fluides. La partie A privilégie l'étude des caractéristiques générales des phénomènes ondulatoires en faisant appel à différents domaines de la physique. La partie B aborde les équations fondamentales de la dynamique des fluides. Les parties C et D enfin s'intéressent à différents types d'ondes rencontrées dans les fluides : ondes acoustiques en partie C, ondes capillaires, ondes de gravité, solitons en partie D.

Pour l'ensemble du sujet, la plus grande importance sera accordée à la qualité de la rédaction et de la présentation.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit son travail en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

REMARQUE IMPORTANTE

Tout au long des différentes parties, l'épreuve comporte de nombreuses questions qualitatives auxquelles il est attendu une brève réponse de quelques lignes, claire, argumentée, pouvant s'appuyer sur un ou plusieurs exemples.

PARTIE A - ONDES ET PROPAGATION

Dans un référentiel R d'origine O, un point M de l'espace est défini par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) . On pose en outre $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{OM}}$.

1. Célérité

a) Définir le phénomène de propagation d'une grandeur physique ondulatoire, scalaire s(M, t), ou vectorielle $\vec{\mathbf{s}}$ (M, t), de façon purement qualitative et en s'appuyant sur des exemples.

b) Écrire l'équation de propagation sans amortissement (équation de d'Alembert) satisfaite par une grandeur physique ondulatoire.

c) Cette équation fait intervenir une constante c caractéristique du milieu de propagation. Quelle en est la signification physique ? Citer des exemples d'expression de cette grandeur et les ordres de grandeur numériques associés.

2. Propagation, diffusion, convection

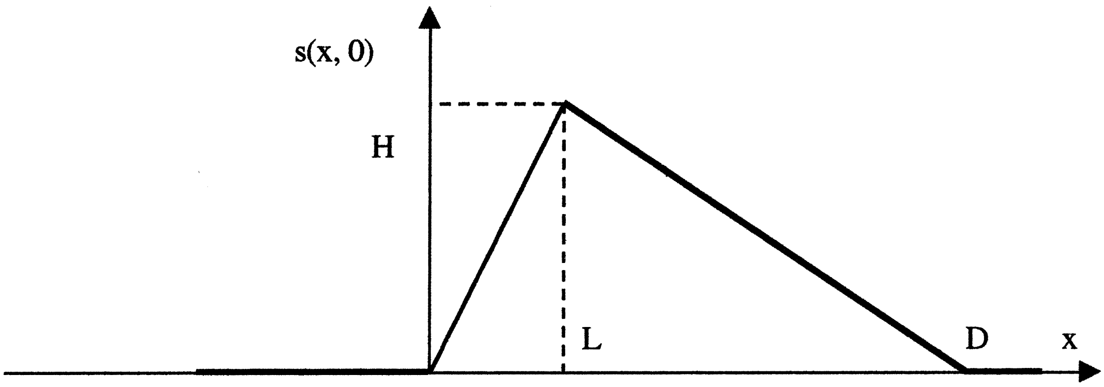
Définir les phénomènes de diffusion et convection en comparant leurs principales caractéristiques à celles du phénomène de propagation.

Tournez la page S.V.P.

3. Ondes planes harmoniques - Impédance

a) Dans le cas d'un problème unidimensionnel où la grandeur s(x, t) ne dépend spatialement que d'une coordonnée cartésienne, pourquoi parle-t-on d'onde plane ? Quelle est alors la forme générale de cette grandeur solution de l'équation de d'Alembert ? Commenter.

b) Une onde plane progressive s(x, t) se déplaçant à la célérité c dans le sens des x positifs, représentée à la date t = 0 en fonction de x, a la forme suivante :



Représenter la fonction $s(x, t_0)$ en fonction de x à la date t_0, et la fonction $s(x_0, t)$ en fonction de t à l'abscisse $x_0 = ct_0$.

c) Dans le cas d'un problème à symétrie sphérique où la distance à l'origine est notée r, la grandeur s(M, t), qui peut s'écrire s(r, t), est appelée onde sphérique. La dépendance en r de cette fonction se distingue du cas précédent par l'existence d'un facteur décroissant en fonction de r. Quelle est l'origine physique de ce facteur ? Justifier sans réel calcul et par un argument physique que ce facteur est en 1/r. Pourquoi et dans quelles conditions une onde sphérique peut-elle être qualifiée de " localement plane " ?

d) Les solutions sinusoïdales de l'équation de propagation jouent un rôle essentiel. Pourquoi ?

e) Une onde plane s(M, t) peut alors, en notation complexe, s'écrire :

$$s(M, t) = s_0 \, e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)}$$

Comment est appelé le vecteur $\vec{\mathbf{k}}$? Préciser sa direction, son sens et son lien avec la pulsation ω. Quelle est la définition de la longueur d'onde λ associée ?

f) En relation avec l'onde plane progressive, on associe au milieu de propagation une autre grandeur appelée impédance caractéristique. Quelle en est la définition et l'interprétation physique ? Donner des exemples.

g) Ainsi, pour les ondes électromagnétiques, l'impédance caractéristique du vide est $Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$. Justifier cette expression.

Qu'est-ce qu'un conducteur parfait ? Quelle est l'impédance associée ?

4. Ondes et conditions aux limites

a) Dans la plupart des situations physiques, le milieu ne peut pas être considéré comme infini : l'onde rencontre une limite. Que se passe-t-il quand une onde plane rencontre cette limite ?

b) Qu'appelle-t-on onde stationnaire, par opposition avec l'onde progressive ? Caractériser brièvement les différences entre ces deux types d'onde. Qu'appelle-t-on nœud ou ventre d'une onde stationnaire ?

c) Donner des exemples physiques aboutissant à la création d'une onde stationnaire.

d) Quelle relation doit satisfaire la longueur d'onde dans un milieu doublement limité orthogonalement à la direction de propagation, les deux limites, distantes de D, imposant chacune un nœud pour une grandeur ondulatoire associée ? Quelle est la dénomination d'un tel milieu ? Justifier celle-ci et donner un exemple simple correspondant.

5. Dispersion et absorption

a) Le milieu de propagation peut aussi être dispersif et absorbant. Définir et décrire qualitativement les deux phénomènes associés.

b) Qu'est-ce qu'un paquet d'ondes ? Comment un milieu dispersif agit-il sur un paquet d'ondes ?

c) Qu'appelle -t-on relation de dispersion, vitesse de phase, vitesse de groupe ?

d) Dans l'exemple des ondes électromagnétiques dans un conducteur ohmique de conductivité γ, écrire l'équation d'évolution du champ électrique et comparer les ordres de grandeur des différents termes. A quelle condition sur la fréquence peut-on parler de diffusion plutôt que de propagation ? Ecrire dans ce cas l'équation satisfaite par le champ électrique.

e) Pour un champ électrique de la forme $\vec{E} = \vec{E_0} e^{i(kx-\omega t)}$, résoudre l'équation précédente en faisant apparaître une distance caractéristique δ. Quelles en sont la dénomination et la signification physique ? Comment varie-t-elle avec la conductivité ? Avec la fréquence de l'onde ? Quelle est la valeur de δ pour le fer ($\gamma = 10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$) à 50 Hz et pour le cuivre ($\gamma = 5{,}9.10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1}$) à 1kHz ? Citer des phénomènes analogues dans d'autres domaines de la physique.

f) Dans l'exemple des ondes électromagnétiques dans un plasma comme l'ionosphère, la modélisation aboutit à la relation :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}$$ où ω_p est une pulsation caractéristique du plasma.

Montrer alors que le plasma est dispersif mais non absorbant dans un certain domaine de fréquences. Que valent alors la vitesse de phase et la vitesse de groupe ? Quelle relation lie ces deux grandeurs ?

Quel type d'onde (nom, forme mathématique) observe-t-on en dehors de ce domaine ? En utilisant la notion de filtrage, comment qualifier le plasma vis-à-vis des ondes électromagnétiques qui peuvent le traverser ?
Que se passe-t-il alors quand une onde venant de la basse atmosphère arrive à la limite de l'ionosphère ? Donner une application possible de ce phénomène.

Tournez la page S.V.P.

6. Guides d'onde

a) Qu'est-ce qu'un guide d'ondes ? Quel en est l'intérêt ? En quoi un guide d'onde peut-il influer sur la structure de l'onde ? Donnez des exemples de guide d'ondes.

b) Une onde électromagnétique de fréquence f = 30 GHz se propage dans le vide limité par deux plans conducteurs parfaits, infinis, parallèles à la direction de propagation, distants de L = 1 m. S'agit-il a priori d'une propagation libre ou guidée ?

PARTIE B – ELEMENTS DE DYNAMIQUE DES FLUIDES

1. Description d'un fluide en mouvement

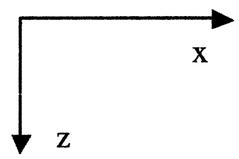
À un fluide en mouvement est associé, au point M et à la date t, le champ des vitesses $\vec{\mathbf{v}}\,(M, t)$.

a) Comment s'écrit l'accélération d'une particule de fluide à partir du champ $\vec{\mathbf{v}}\,(M, t)$? Donner la signification de chacun des termes de cette accélération. Citer des exemples d'écoulements où l'accélération se réduit à l'un ou l'autre de ces deux termes.

b) On peut « visualiser » le mouvement d'un fluide par les trajectoires ou les lignes de courant : donner la définition de ces deux termes. Comment déterminer leur équation ? Peut-il y avoir identité entre elles ? Comment peut-on visualiser expérimentalement le mouvement d'un fluide ?

c) Le mouvement de houle, en forte profondeur, peut être approché par un champ des vitesses de la forme :

$$\vec{\mathbf{v}}\,(z, t) = V_0 . e^{-\frac{z}{a}}(\cos\omega t\, \vec{\mathbf{e}}_x + \sin\omega t\, \vec{\mathbf{e}}_z)$$



où V_0, a et ω sont des constantes.

Déterminer les lignes de courant et la trajectoire d'une particule en admettant qu'elle reste au voisinage d'un point de profondeur z_0.
Représenter lignes de courant et trajectoires sur un même graphique.

2. Les forces de pression

a) Quelle est l'origine physique de la pression au sein d'un fluide ? Comment définir une force de pression ?

b) Donner des ordres de grandeur de pression. Quelles sont notamment les valeurs des pressions extrêmes évaluées ou mesurées ?

c) Donner l'expression de la densité volumique des forces de pression.

d) Quelle relation traduit l'équilibre d'un fluide, de masse volumique constante et uniforme ρ_0, soumis aux seules forces de pression et au champ de pesanteur terrestre $\vec{\mathbf{g}}$, le référentiel terrestre étant supposé galiléen ?

e) Cette relation est-elle modifiée si on prend en compte le caractère non galiléen du référentiel terrestre ? Que se passe-t-il si le fluide est en mouvement ? Commenter.

f) Enoncer le théorème d'Archimède. Celui-ci est-il valide au sein d'un fluide en mouvement ?

3. La viscosité

a) Quelle est l'origine physique de la viscosité au sein d'un fluide ? Comment définit-on une force de viscosité ?

b) Donner les ordres de grandeur de la viscosité dynamique de quelques fluides.

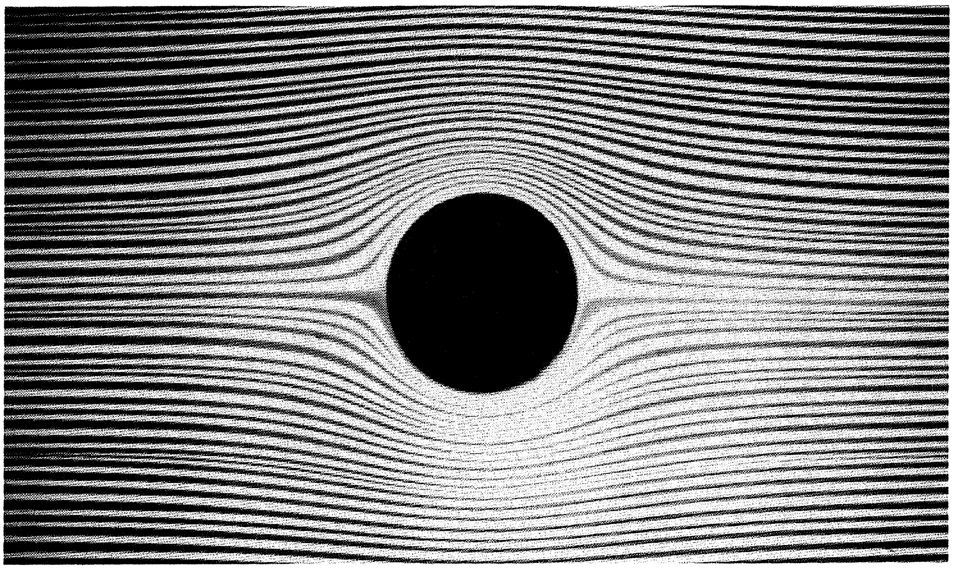
c) Décrire succinctement une ou plusieurs expériences simples permettant de déterminer la viscosité d'un fluide.

d) Quelle est la densité volumique des forces de viscosité pour un fluide newtonien en écoulement incompressible ? Qu'est ce que la viscosité cinématique ?

e) Pour un écoulement de fluide de viscosité cinématique ν (dont l'unité est le $m^2.s^{-1}$), de vitesse V et dimension L caractéristiques, retrouver par simple analyse dimensionnelle l'expression du nombre sans dimension de Reynolds.

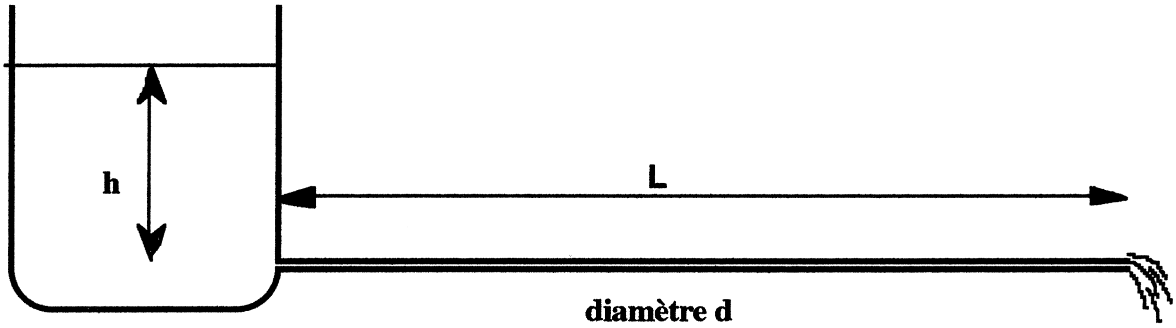
f) Donner deux interprétations équivalentes de ce nombre faisant intervenir des grandeurs caractéristiques de l'écoulement. Quel en est l'intérêt pratique ?

g) La photo ci-dessous montre un écoulement autour d'un obstacle circulaire, à très faible nombre de Reynolds, dans une cellule de Hele-Shaw : l'écoulement est bidimensionnel, le système étant enserré entre deux plaques transparentes parallèles au plan de l'écoulement, distantes de 1 mm environ.



Cet écoulement est bien représenté par le modèle mathématique d'un écoulement potentiel d'un fluide parfait autour du même obstacle. En quoi est-ce paradoxal ?

Un viscosimètre à écoulement, destiné à mesurer la viscosité d'un liquide, peut être schématiquement représenté sur la figure ci-dessous :



où h désigne la hauteur de liquide dans le réservoir, d le diamètre du tube capillaire d'écoulement et L sa longueur.

h) L'écoulement dans le tube suit le modèle de Poiseuille. Quelles sont les caractéristiques principales de ce modèle ?

i) L'évaluation du nombre de Reynolds est-elle ici judicieuse ?

Dans le modèle de Poiseuille, le débit volumique Q dans le tube est donné par la formule :

$$Q = \frac{1}{128}\frac{\pi \rho g h d^4}{\eta L}$$ où ρ est la masse volumique du liquide et η sa viscosité dynamique.

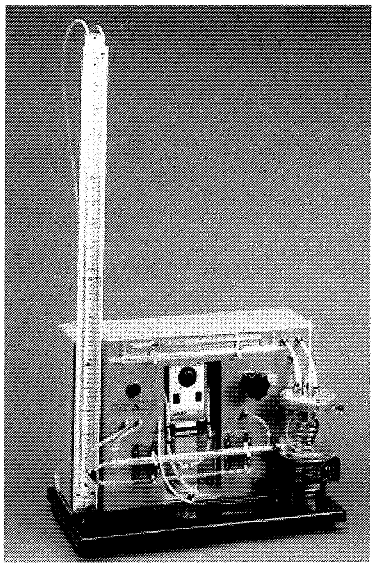
j) La viscosité ne peut maîtriser l'écoulement dès l'entrée du tube. Évaluer alors, en fonction des mêmes grandeurs, une longueur ℓ nécessaire à l'établissement du régime de Poiseuille.

Le constructeur propose deux diamètres possibles pour l'écoulement avec les données :

d_1 = 0,2 mm ou d_2 = 0,4 mm et L = 400 mm.

Pour l'eau, et avec h = 20 cm, on recueille une masse m_1 = 350 mg pendant 30 min d'écoulement dans le tube de diamètre d_1 et m_2 = 5,6 g pour la même durée dans le tube de diamètre d_2. (La hauteur h est supposée maintenue constante grâce à un dispositif approprié).

k) D'après les expressions précédentes, en déduire la viscosité dynamique de l'eau ainsi que la valeur numérique de la longueur ℓ pour les écoulements dans les tubes 1 et 2. Commenter les résultats obtenus.



Un viscosimètre à écoulement

4. Capillarité

a) Qu'est-ce que le phénomène de capillarité ? Quelle en est l'origine physique ? Comment définit-on une force de tension superficielle ?

b) Exprimer le travail élémentaire des forces de capillarité. Citer des expériences simples le mettant en évidence.

c) Décrire succinctement une ou plusieurs expériences simples permettant de déterminer le coefficient de tension superficielle A d'un fluide.

d) Pour un fluide de masse volumique ρ_0, de constante de tension superficielle A (dont l'unité est le $N.m^{-1}$), soumis au champ de pesanteur g, déterminer, par simple analyse dimensionnelle, la longueur capillaire l_c. Évaluer l_c pour l'eau dont $A = 70\ mN.m^{-1}$. Quel est l'intérêt de cette grandeur ? Peut-on la « visualiser » expérimentalement ?

e) Quelle est la différence de pression ΔP_1 entre l'intérieur et l'extérieur d'une goutte sphérique de rayon R de ce fluide ?

f) Quelle est la différence de pression ΔP_2 entre le haut et le bas de la même goutte soumise au champ de pesanteur g ?

g) On définit le nombre de Bond B_o comme le rapport $\frac{\Delta P_2}{\Delta P_1}$. Quel est l'intérêt de ce nombre ? Montrer qu'il permet de retrouver l'expression de l_c.

5. Équations fondamentales de la dynamique des fluides

On associe au fluide en mouvement les champs de vitesse, de pression et de masse volumique respectivement notés $\vec{v}(M, t)$, $P(M, t)$ et $\rho(M, t)$.

a) Écrire l'équation dite de continuité liant les grandeurs $\rho(M, t)$ et $\vec{v}(M, t)$. Quelle est l'interprétation physique de cette équation ?

b) Définir un écoulement incompressible et déduire de l'équation précédente une propriété caractéristique de son champ des vitesses.

c) Dans le cas général, appliquer la relation fondamentale de la dynamique à une particule de fluide et en déduire l'équation d'Euler.

d) Les deux équations écrites en a) et c) suffisent-elles a priori à la détermination de ρ, P et $\vec{v}$? Quel type d'hypothèse(s) supplémentaire(s) peut-on suggérer ? Une hypothèse retenue dans certains cas est celle d'écoulements isentropiques : comment discuter de la pertinence de ce modèle ?

Au fluide est alors associé son coefficient de compressibilité isentropique χ_S, supposé en être une constante caractéristique, donné par la relation :

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$$

e) En adoptant pour le fluide le modèle d'un gaz parfait diatomique, donner l'expression de χ_S en fonction de la pression du gaz. Calculer χ_S dans le cas de l'air à $P_0 = 10^5$ Pa.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE C - ONDES ACOUSTIQUES

1. Équations des ondes acoustiques

Le fluide, supposé parfait et soumis aux seules forces de pression, est à l'équilibre caractérisé par des valeurs uniformes P_0 de la pression et ρ_0 de la masse volumique. Du point de vue thermodynamique, ses évolutions seront considérées comme isentropiques, auxquelles correspond le coefficient de compressibilité χ_S.

On étudie ici des mouvements du fluide au sein duquel pression et masse volumique sont écrites sous la forme :

$$P(M, t) = P_0 + \delta P(M, t) \qquad \rho(M, t) = \rho_0 + \delta\rho(M, t)$$

a) Qu'appelle-t-on approximation acoustique ? Quel est l'ordre de grandeur de δP pour des ondes acoustiques dans l'air ?

b) À partir des équations de la dynamique des fluides linéarisées au 1^{er} ordre, établir l'équation de propagation des ondes acoustiques relative à la surpression δP. Quelle est la célérité de ces ondes ? Dans le modèle du gaz parfait, établir la loi de variation de la célérité avec la température. Comparer les ordres de grandeur de c dans les gaz et dans les liquides.

c) Quels phénomènes, dont on n'a pas ici tenu compte, pourraient rendre le fluide absorbant et dispersif ?

d) À partir des mêmes relations établir l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\chi_S \delta P^2\right) + \mathrm{div}(\delta P\,\vec{v}\,) = 0.$$

Quelle est la signification physique de cette équation ? Identifier et interpréter chacun de ses termes. Citer une équation analogue dans un autre domaine de la physique.

e) On définit l'impédance acoustique liée à une onde plane progressive comme le quotient $Z = \dfrac{\delta P}{v}$ où v est la valeur algébrique de la vitesse dans la direction de propagation. Dans un fluide illimité, montrer que cette impédance ne dépend que des caractéristiques du fluide et l'exprimer en fonction de la masse volumique ρ_0 et de la célérité c.

f) L'onde acoustique est caractérisée par une vitesse du fluide de la forme $\vec{v} = v_0 e^{i(kx-\omega t)}\,\vec{e}_x$. Définir et exprimer l'intensité moyenne associée à cette onde.

g) Le seuil minimal d'audition correspond à l'intensité $I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2}.
La célérité du son dans l'air étant $c \approx 340$ m.s^{-1}, quelle serait alors dans ce modèle l'amplitude de déplacement du tympan au seuil d'audition pour une fréquence de 440 Hz ?

h) Quelle est l'expression I_{dB} de l'intensité sonore en décibels ?
À quelle valeur, en décibels, l'intensité du seuil de douleur $I_s = 1$ W.m^{-2} correspond-elle ?

i) Le prix d'un appareil ménager peut varier du simple au triple quand, entre autres caractéristiques, le niveau sonore annoncé passe de 55 à 44 dB. Cela paraît-il justifié ?

2. Onde acoustique et conditions aux limites

Un tuyau cylindrique est rempli d'air. Une onde acoustique plane harmonique, de fréquence $f = 440$ Hz se propage dans la direction de l'axe du tuyau.

a) Comment " fermer " le tuyau à l'une de ses extrémités sur une impédance nulle, infinie ou égale à l'impédance caractéristique du fluide ? Quels sont, dans chacun de ces cas, les coefficients de réflexion pour les grandeurs associées à l'onde ?

Un plan infini sépare l'espace en deux régions occupées par deux fluides parfaits dont les impédances caractéristiques seront indicées 1 (pour le fluide s'étendant de $-\infty$ à $x = 0$) et 2 (pour le fluide s'étendant de $x = 0$ à $+\infty$).

b) Quelles relations les grandeurs liées à une onde acoustique doivent-elles vérifier à la traversée de l'interface ?

c) Déterminer les coefficients de réflexion r et de transmission t pour la surpression d'une onde acoustique plane progressive se propageant dans le sens des x positifs et provenant de $-\infty$.

d) Calculer R et T, coefficients de réflexion et de transmission relatifs à l'intensité sonore I. Quelle relation les lie ? Pourquoi ?

e) L'impédance caractéristique de l'air à 20°C est $Z_{air} = 450\ kg.m^{-2}.s^{-1}$. Les impédances caractéristiques des constituants du corps humain (eau, graisse , muscle, os) sont toutes du même ordre de grandeur $Z_{corps} \approx 10^6\ kg.m^{-2}.s^{-1}$. Calculer T dans ce cas et en déduire le rôle du stéthoscope du médecin.

f) Par quel procédé pourrait-on diminuer r ? Quelles en sont les applications, dans le domaine des ondes acoustiques, dans un autre domaine ?

g) Pourquoi entend-on bien mieux le son d'un diapason si celui-ci est placé sur une boîte associée ? Quelle devrait être la plus grande dimension de la boîte pour un diapason donnant le La de fréquence 440 Hz ? La dimension réelle est L = 17,5 cm. Comment interpréter la différence avec le résultat estimé précédemment ?

h) En utilisant le modèle précédent pour le conduit externe de l'oreille, de longueur 2,5 cm, calculer la fréquence à laquelle elle est la plus sensible.

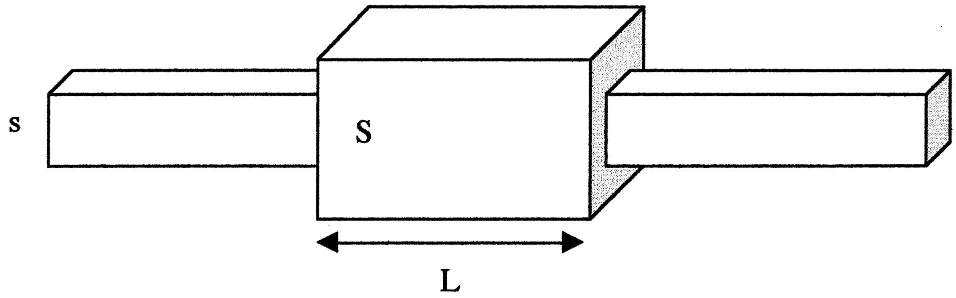
i) Une salle a la forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions L_x, L_y, L_z. Qu'appelle-t-on fréquences propres de la salle ? Calculer ces fréquences propres en fonction de la célérité du son c et des dimensions de la salle. Quelle différence y a-t-il alors entre une cathédrale et une petite pièce ?

3. Filtre acoustique

Dans une conduite d'air de section s, un système de ventilation engendre des ondes acoustiques de fréquences élevées indésirables pour l'oreille humaine.

On dispose alors un filtre acoustique constitué d'une cellule de longueur L et de section S ($S > s$) intercalé dans la conduite :

Tournez la page S.V.P.



a) En s'inspirant de la méthode de résolution utilisée à la question 2c, établir l'expression des coefficients de réflexion et transmission r et t de la surpression d'une onde acoustique incidente de fréquence f à l'interface s-S, de même que celle des coefficients r' et t', à l'interface S-s.

b) En déduire que le coefficient de transmission en énergie T du filtre est donné par :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{S}{s} - \frac{s}{S}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi f}{f_0}\right)}$$

où f_0 est une fréquence caractéristique qui s'exprime en fonction de L et de la célérité c de l'onde acoustique.

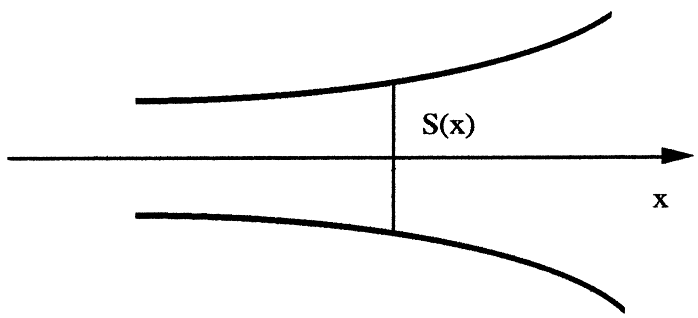
c) Tracer l'allure de la fonction T(f) en précisant en particulier les valeurs des maxima et minima et des fréquences correspondantes. Examiner le cas où S >>s.
Citer un système analogue dans un autre domaine de la physique ?

d) Comment définir le facteur de qualité (ou finesse) de ce filtre ? Donner son expression en fonction du rapport $\frac{S}{s}$.

e) Sur quels paramètres du filtre faut-il agir pour atténuer effectivement les fréquences indésirables ?

4. Propagation d'une onde acoustique dans un pavillon

On s'intéresse ici à la propagation d'une onde acoustique dans un pavillon à symétrie de révolution, de section variable S(x) :



On suppose le problème unidimensionnel, avec une vitesse de la forme :

$$\vec{v} = v_0 . e^{i(kx-\omega t)} \, \vec{e}_x$$

a) Pourquoi cette solution ne peut-elle être qu'approchée ?

b) La section du pavillon est de la forme $S = S_0\ e^{\frac{x}{a}}$. Quelle condition la longueur d'onde $\lambda_0 = \dfrac{2\pi c}{\omega}$ (où c est la célérité de l'onde dans l'espace illimité) doit-elle respecter pour que la solution précédente reste approximativement valide ?

c) Quelle équation, parmi celles qui sont écrites dans la question C1b, n'est plus vérifiée par la vitesse ainsi modélisée ? À partir d'un bilan de masse portant sur une « tranche élémentaire » de fluide, établir une nouvelle équation la remplaçant.

d) En déduire la relation liant k et ω :

$$k^2 - \frac{ik}{a} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

e) Montrer alors que le pavillon ne laisse se propager que des ondes de fréquences supérieures à une fréquence de coupure qu'on exprimera en fonction de a et de c.

f) Le pavillon modélise un porte-voix de longueur L. Que se passe-t-il quand l'onde, émise à l'embouchure, parvient à l'extrémité du porte-voix ? Quel est l'intérêt d'un tel dispositif ?

g) Le porte-voix est-il absorbant, dispersif ? (justifier votre réponse).

h) Que peut-on dire de la voix transmise par l'appareil ?

5. Effet Doppler

a) Qu'est-ce que l'effet Doppler ?

b) Une source S en mouvement de vitesse instantanée $\vec{\mathbf{v}}$ émet, à deux instants séparés de δt, un « bip » sonore qui se propage à la célérité c dans le milieu considéré. Montrer que l'intervalle de temps de réception pour un observateur fixe O est :

$$\delta t' = \delta t \left(1 - \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{c} \right)$$

où $\vec{\mathbf{u}}$ est le vecteur unitaire de la direction SO, dirigé de S vers O. À quelle condition ce résultat est-il valable ?

c) La source émet à présent un son continu de fréquence f. Quelle est la fréquence f' perçue par l'observateur ? Commenter ce résultat en le confrontant à une situation de la vie courante. Citer une application de l'effet Doppler dans le cadre des ondes acoustiques.

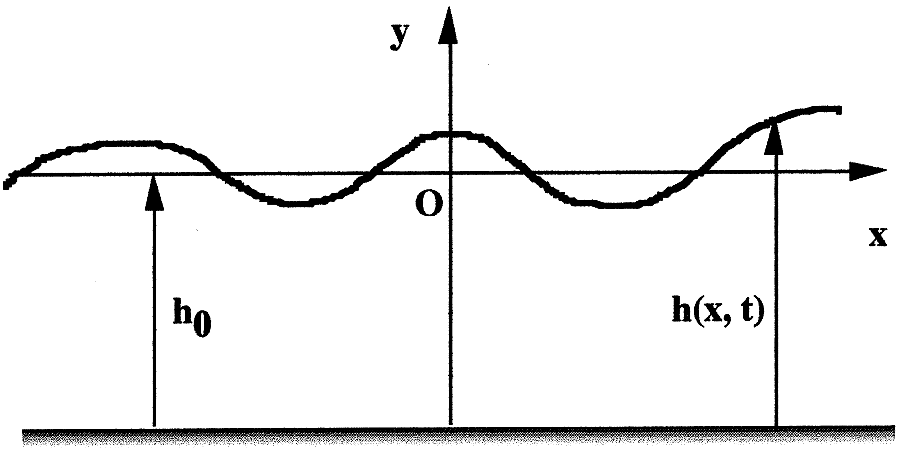
d) Montrer que les calculs précédents permettent d'approcher le phénomène de « bang » perçu lors d'un vol supersonique.

e) Décrire une manifestation de l'effet Doppler dans un autre domaine de la physique.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE D
ONDES DE GRAVITE, ONDES CAPILLAIRES, SOLITONS

On étudie dans cette partie les ondes de surface à l'interface de l'air et d'un fluide liquide tel que l'eau. L'espace est rapporté au repère R (O, x, y, z) et le problème est invariant par translation suivant z. L'axe Ox est confondu avec la trace de la surface du fluide au repos. L'épaisseur de la couche de fluide au repos est h_0. La trace de la surface libre du fluide en mouvement est représentée par h(x, t) :



Les hypothèses d'étude sont les suivantes :

- Le fluide est parfait incompressible de masse volumique ρ_0.
- Il est soumis aux forces de pression, de pesanteur et de tension superficielle.
- Les mouvements sont suffisamment petits pour permettre une linéarisation au premier ordre des équations.
- L'écoulement est supposé potentiel, de potentiel des vitesses $\Phi(x, y, t)$.
- La pression à la surface du fluide est donnée par $P = P_0 - \frac{A}{R}$ où P_0 est la pression atmosphérique uniforme, A est la constante de tension superficielle du fluide et R le rayon de courbure local instantané de la surface, lui-même tel que :

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

1. Équations des ondes de surface

a) Qu'est-ce qu'un écoulement potentiel ? Quelle équation la fonction Φ doit-elle ici vérifier ?

b) Montrer que l'intégration de l'équation d'Euler permet d'établir, pour ces ondes de surface, la relation :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho_0} + gy = F(t) \qquad (1)$$

où F(t) est une fonction du temps

c) Montrer que le champ des vitesses $\vec{v}$ n'est pas modifié si on remplace la fonction F(t) par une constante, ce qu'on fera dans la suite.

d) Déduire alors de la relation (1) une équation satisfaite par Φ en $y = h - h_0$.

2. Célérité

a) La fonction $\Phi(x, y, t)$ de cet écoulement potentiel est cherchée sous la forme :

$$\Phi(x, y, t) = f(x - ct).\, g(y)$$

où f est une fonction périodique de la variable $x - ct$. Interpréter physiquement cette solution et déterminer la forme générale des fonctions f et g (on remarquera que le cas h_0 infiniment grand correspond à une situation physique réelle).

b) Montrer que l'existence du fond à la profondeur $y = -h_0$ permet d'écrire finalement la fonction Φ sous la forme :

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0.\mathrm{ch}[k(y+h_0)].\, e^{i(kx-\omega t)} \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

c) Déterminer h(x, t) et en déduire la forme de la surface libre.

d) En utilisant l'équation trouvée au 1d et en remplaçant h par sa valeur moyenne h_0, montrer que la célérité des ondes de surface s'écrit :

$$c^2 = gh_0 \frac{\tanh(kh_0)}{kh_0} \left(1 + k^2 l_c^2\right)$$

où l_c est la longueur capillaire caractéristique du fluide fonction de A, ρ_0, g, déjà définie au B4d.

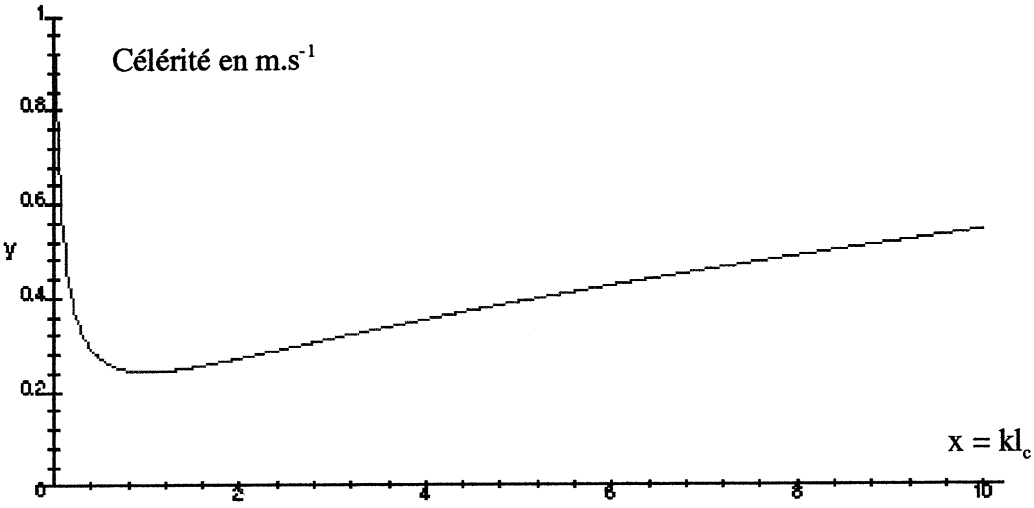
3. Des ronds dans l'eau...

Trois longueurs caractéristiques interviennent dans les ondes de surface : la longueur d'onde λ de l'onde, la profondeur h_0 et la longueur capillaire l_c.

Au bord d'une mare de faible profondeur, les valeurs numériques de h_0 et l_c sont $h_0 = 10$ cm et $l_c = 3$mm (longueur capillaire de l'eau). Les variations de la célérité c en fonction de la variable réduite $x = kl_c$ sont représentées sur la figure en haut de page suivante dans l'intervalle $x = [0, 10]$, en prenant $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.

a) En utilisant l'expression de la célérité trouvée au D2d, montrer que cette courbe fait apparaître deux domaines où domine soit la gravité, soit la capillarité. Calculer la valeur λ_m de la longueur d'onde séparant ces deux domaines.

Tournez la page S.V.P.



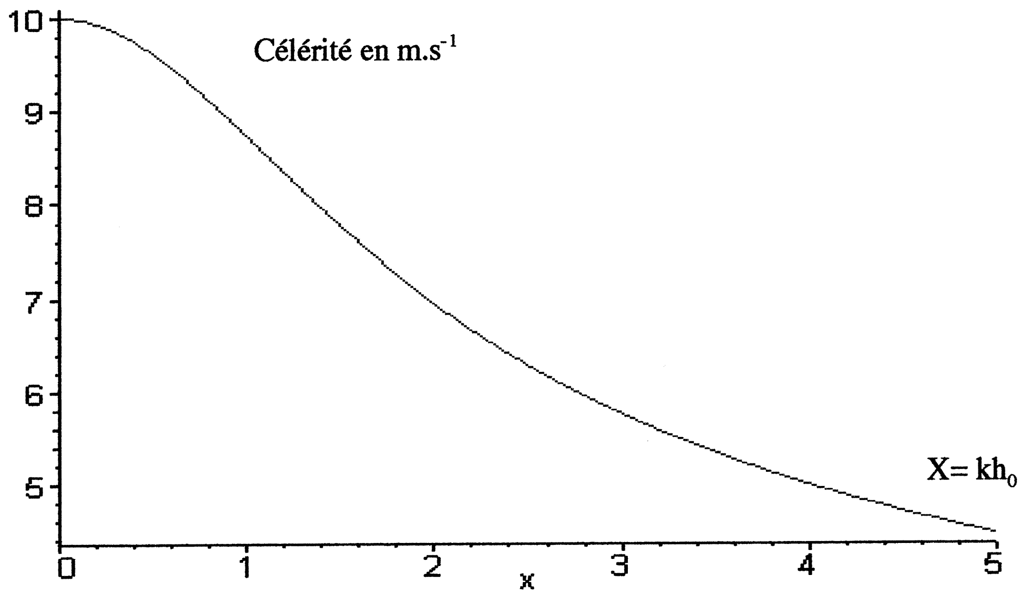
b) Déterminer dans chacun des domaines l'expression approchée de la célérité en fonction de la longueur d'onde.

c) Quand on jette un petit caillou dans une mare, on voit tout d'abord se propager des rides fines et serrées, distantes d'environ 2 mm, puis des ondes de plus grande amplitude et longueur d'onde, distantes de 5 cm environ.

Montrer que les résultats de la question précédente sont compatibles avec ces observations et calculer les célérités des deux types d'onde.

4. La houle

On étudie à présent des ondes de surface en mer, où on garde la même valeur de l_c, mais avec $h_0 = 10$ m.
On représente alors ci-dessous les variations de la célérité en fonction de $X = kh_0$ dans l'intervalle $X = [0,5]$:



a) Montrer que dans cet intervalle, les phénomènes de capillarité peuvent être négligés.

b) Montrer que la courbe présente à nouveau deux domaines dits « en eau profonde » ou « en eau peu profonde ».

c) Déterminer la forme simplifiée prise par la célérité c en eau profonde. Calculer cette célérité pour une houle dont les vagues sont espacées de 5 m.

d) Montrer que le milieu est dispersif et établir la relation simple liant vitesse de phase et vitesse de groupe.

5. Solitons

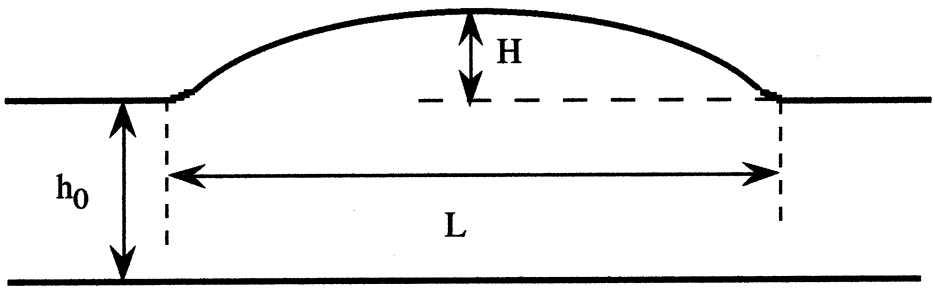
On se place à présent dans le domaine des eaux peu profondes.

a) Montrer qu'à faible profondeur, l'expression de la célérité des ondes de surface devient :

$$c = \sqrt{gh_0}\,.$$

Commenter ce résultat. En quoi permet-il de mieux comprendre le déferlement des vagues sur le rivage ?

On considère alors une onde solitaire dont la forme est donnée par la figure suivante :



b) Donner un ordre de grandeur de la différence de célérité δc_1 entre le sommet et la base de la vague. Comment cet effet déforme-t-il la vague au cours de sa propagation ?

c) Un développement limité plus poussé permet d'obtenir une expression corrigée de c sous la forme :

$$c = \sqrt{gh_0}\left(1 - \frac{k^2 h_0^2}{6}\right)$$

Comment la dispersion ainsi mise en évidence déforme-t-elle la vague ? Plus précisément évaluer l'intervalle de variation de k et en déduire un ordre de grandeur de la variation extrême de célérité δc_2.

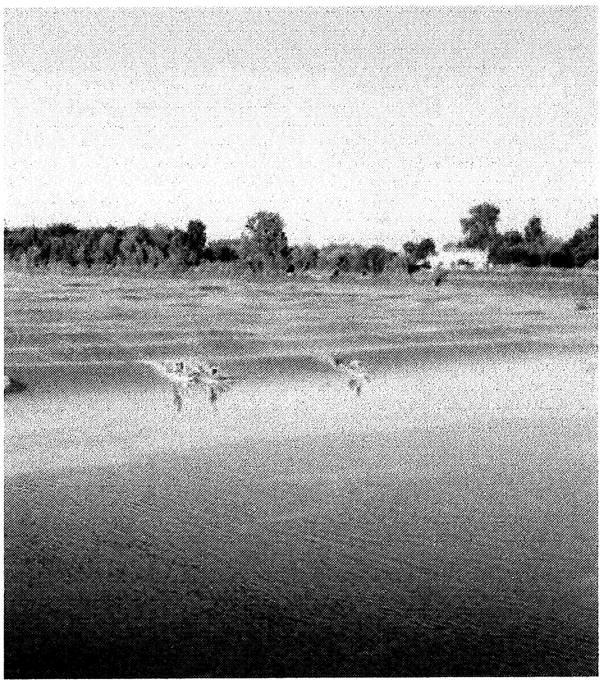
d) Déduire des calculs précédents que la vague pourra se propager sans déformations si les ordres de grandeur de H, L et h_0 sont liés par une relation que l'on déterminera.

Tournez la page S.V.P.

e) Ce modèle de soliton peut représenter le phénomène réel d'un mascaret non turbulent, vague unique (ou série limitée de 5 à 10 vagues) remontant le cours de certains estuaires peu profonds à l'occasion de fortes marées.

Pour des profondeurs typiques de 2 à 4 m, ces mascarets, dont la hauteur peut atteindre jusqu'à 2 m, remontent les estuaires à des vitesses de 15 à 30 km/h.

En prenant $h_0 = 3$ m et $L = 5$ m, et en estimant d'après les questions précédentes les valeurs de H et c correspondantes, vérifier que le modèle est compatible avec les observations faites sur les mascarets.



Photos du mascaret de la Gironde