

72.0.3

**SESSION DE 1995**

---

---

**concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés**

---

---

**section : sciences physiques****option : physique****épreuve C  
problème de physique****Durée : 6 heures**

*L'usage de calculatrices électroniques de poche — y compris calculatrices programmables et alphanumériques — à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*Tout document interdit.*

Cette épreuve comporte six parties largement indépendantes. Bien qu'elles constituent une progression logique, elles peuvent néanmoins être abordées dans un ordre indifférent.

La longueur de l'énoncé est destinée à faciliter la compréhension physique des phénomènes abordés et à guider les candidats par des étapes intermédiaires.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

## PHYSIQUE DE LA COMBUSTION

Ce problème traite de divers aspects de la physique des phénomènes de combustion en phase gazeuse et, en particulier, de la propagation d'une interface, appelée front de flamme. Cette interface sépare le milieu initial, appelé gaz frais et composé de substances réactives prémélangées, du milieu final composé de gaz brûlés. Son évolution est régie par un couplage de phénomènes de diffusion, convection et réaction. On s'intéressera principalement à la structure et la vitesse de flamme, aux conditions d'allumage et à la nature fractale des fronts de flamme plissés par la turbulence.

### Données

Constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Nombre d'Avogadro :  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

Charge de l'électron :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

1 atm  $\approx 10^5 \text{ Pa}$ .

### Modélisation

On modélise un système réactif par un mélange de combustible et de comburant susceptible d'induire la réaction :



dans laquelle le nombre de moles est préservé. Les symboles F, O et P représentent les molécules de combustible, de comburant et de produits de réaction. Le mélange contient par ailleurs une espèce inerte notée N, largement prédominante.

Avant réaction, les gaz frais sont à température uniforme et, sauf mention explicite, au repos dans le référentiel du laboratoire. On admet que les gaz sont parfaits et le mélange idéal. On considère la pression  $p$ , la capacité calorifique massique à pression constante  $c_p$  ainsi que la conductivité thermique du milieu  $\lambda$ , constantes, uniformes et indépendantes de la température. On néglige les pertes radiatives. On suppose enfin que la structure et la vitesse de flamme ne varient pas au cours de la propagation.

### Notations

Les symboles  $\Delta$  et  $\nabla$  représentent l'opérateur laplacien et l'opérateur gradient.

Les vecteurs  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{n}$  représentent des vecteurs unitaires.

On indice par  $i = F, O, P, N$  les variables relatives aux espèces F, O, P et N.

On note  $T_f$  et  $T_b$  la température des gaz frais et des gaz brûlés loin de la flamme.

Les vecteurs seront notés en gras.

## I. PREMIÈRE PARTIE

## ÉNERGIE D'ACTIVATION ET TAUX DE RÉACTION

La voie suivie par le système réactif pour réaliser la réaction chimique consiste en une collision de molécules de combustible et de comburant suffisamment énergétique pour franchir, dans le référentiel barycentrique de ces molécules, un seuil en énergie, appelé énergie d'activation et noté  $E_a$  ( $E_a > 0$ ).

On cherche à déterminer, d'après la thermodynamique statistique, le taux volumique de réaction du système, c'est-à-dire le taux volumique de passage de la barrière d'énergie d'activation. Les molécules obéissent à la statistique de Maxwell-Boltzmann, dont la fonction de distribution dans l'espace des vitesses, normalisée à 1, a pour expression :

$$f(\mathbf{v}) = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m\mathbf{v}^2}{2k_B T}}$$

$m$  étant la masse des molécules de l'espèce concernée,  $\mathbf{v}$  leur vitesse dans le référentiel barycentrique du système,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température, uniforme, du système. On notera  $f_F$  et  $f_O$  les fonctions de distribution relatives aux molécules de combustible  $F$  et de comburant  $O$ .

L'étude détaillée des collisions moléculaires montre que, toutes choses égales par ailleurs, la réaction chimique s'effectue de manière nettement préférentielle lorsque la molécule  $O$  rencontre la molécule  $F$  selon une direction  $\mathbf{e}_F$  relative à celle-ci. On modélise cette situation en considérant que :

- la section efficace de collision dans le référentiel de  $F$  est celle d'un disque de surface  $\sigma$  et de normale  $\mathbf{e}_F$  ;
- le seuil en énergie  $E_a$  ne concerne que la part de l'énergie cinétique associée, dans le référentiel barycentrique de  $F$  et  $O$ , au mouvement projeté selon la direction  $\mathbf{e}_F$ .

On note  $M$  la masse totale des molécules  $F$  et  $O$  et  $\mu$  leur masse réduite :

$$M = m_F + m_O$$

$$\mu = \frac{m_F m_O}{m_F + m_O}$$

- On considère une population de molécules  $F$  correspondant à une même direction  $\mathbf{e}_F$ .

Montrer, par raison d'isotropie, que son taux de réaction est indépendant de  $\mathbf{e}_F$ .

En déduire que l'on peut considérer, sans modifier le calcul du taux de réaction, que toutes les molécules  $F$  possèdent la même orientation.

Dans la suite de l'énoncé, on se restreindra ainsi à une direction  $\mathbf{e}_F$  unique, égale à  $\mathbf{e}_1$ .

- L'ensemble de cette question se limite à des populations de molécules  $F$  et  $O$  appartenant à des cellules de l'espace des vitesses centrées sur  $\mathbf{v}_F$  et  $\mathbf{v}_O$  et d'extension  $d^3\mathbf{v}_F$  et  $d^3\mathbf{v}_O$ .

On note  $d n_F(\mathbf{v}_F)$  et  $d n_O(\mathbf{v}_O)$  les nombres de telles particules par unité de volume dans l'espace réel. Déterminer ces densités.

Déterminer, dans le référentiel du centre de masse d'une molécule  $F$ , la densité de courant  $\mathbf{J}(\mathbf{v}_F, \mathbf{v}_O)$  de molécules  $O$ .

Déterminer le nombre moyen de collisions  $d n_c(\mathbf{v}_F, \mathbf{v}_O)$  dans l'espace réel par unité de volume et de temps de molécules  $F$  et  $O$  appartenant aux cellules considérées de l'espace des vitesses.

- On considère deux molécules  $F$  et  $O$ . On note  $E_{cF}$  et  $E_{cO}$  leurs énergies cinétiques dans le référentiel barycentrique du système,  $\mathbf{v}_C$  la vitesse de leur centre de masse,  $\mathbf{v}_r$  leur vitesse relative.

Rappeler, en utilisant le théorème de Koenig, l'expression de l'énergie cinétique totale  $E_c = E_{cF} + E_{cO}$  de ces deux molécules en fonction de  $M$ ,  $\mu$ ,  $\mathbf{v}_C$  et  $\mathbf{v}_r$ .

d. Montrer que le nombre de collisions réactives  $\nu_r$  par unité de volume et de temps s'écrit formellement :

$$\nu_r = \int_{\nu_r, v_i > v_a} d n_C (\nu_r, v_i)$$

où on donnera l'expression de  $\nu_a$ .

e. Montrer que  $d^3 \nu_r d^3 v_O = d^3 v_G d^3 \nu_r$ .

En déduire :

$$\nu_r = n_F n_O \sigma \left( \frac{2 k_B T}{\pi \mu} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-E_a / k_B T}$$

et donner la signification physique de la vitesse  $\left( \frac{2 k_B T}{\pi \mu} \right)^{\frac{1}{2}}$

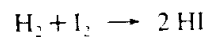
À quel type de loi l'expression de  $\nu_r$  fait-elle référence ?

f. On introduit le taux de consommation volumique de combustible  $W_F = -dn_F/dt$ , par ailleurs égal ici à  $\nu_r$  :  $W_F = \nu_r$ .

Lorsque le comburant O est en large excès, montrer que le temps caractéristique  $\tau_r(T)$  de disparition du combustible, encore appelé temps de réaction, vérifie :

$$\tau_r(T) = \frac{n_F}{\nu_r}$$

g. On considère la réaction en phase gazeuse :



à une pression  $p_0$  de 1 atm.

Son taux volumique de réaction  $\nu_r$  vaut, expérimentalement :

$$\nu_r = n_{\text{H}_2} n_{\text{I}_2} 1,48 \cdot 10^{-6} (k_B T)^{1,2} e^{-E_a / k_B T} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

où  $E_a = 1,68 \text{ eV}$ .

On suppose le dihydrogène en large excès. Déterminer le temps caractéristique de disparition du diiode aux trois températures suivantes :

$$T_1 = 273 \text{ K}, \quad T_2 = 2 T_1, \quad T_3 = 3 T_1.$$

Que peut-on en conclure pratiquement quant à l'évolution naturelle du mélange initial ?

autour  
tion, fr

contig  
(fig. 1)  
d'activ  
structu  
propag

## II. DEUXIÈME PARTIE

## STRUCTURE ET VITESSE DE FLAMME

On désire étudier un mode de mise à l'équilibre chimique usuellement plus efficace que les fluctuations autour d'états thermiquement homogènes : la propagation d'une interface réactive encore appelée, en combustion, front de flamme.

Cette interface consiste en une zone étroite, appelée zone de réaction, où l'énergie chimique est libérée, contiguë à une zone non réactive plus étendue, appelée zone de préchauffage, où cette énergie est transportée (fig. 1). La libération puis le transport de l'énergie permet de franchir de proche en proche la barrière d'énergie d'activation et ainsi de propager la flamme dans les gaz frais. On se propose de déterminer plus précisément la structure des champs de température (fig. 2) et de concentration à l'intérieur de la flamme ainsi que la vitesse de propagation de celle-ci.

On se restreindra, sauf mention explicite, à une interface plane.

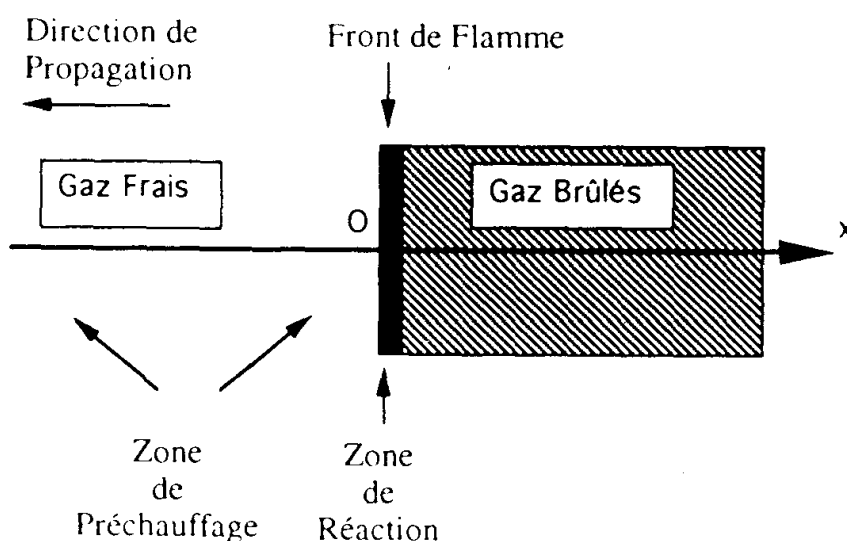


Figure 1

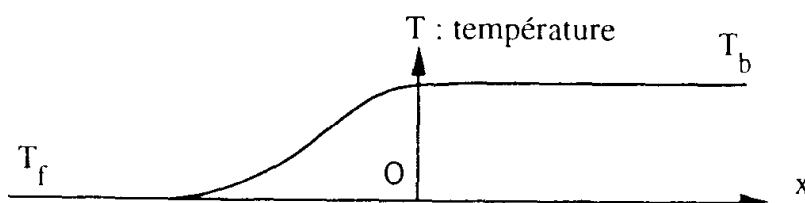


Figure 2

On note  $Ox$  l'axe défini par la normale à la flamme orientée vers les gaz brûlés et  $m_i, \rho_i, n_i$ , la masse moléculaire, la masse volumique et la densité particulaire de l'espèce  $i$ . On appelle  $W_F = -\frac{dn_F}{dt}$  le taux volumique de consommation de l'espèce  $F$ .

On rappelle l'expression  $J_s^a$  de la densité de courant d'origine advective, induite par un transport de matière à vitesse  $v$ :

$$J_s^a = \rho \sigma_s v$$

où  $s$  est la quantité scalaire transportée,  $\sigma_s$  la concentration massique de  $s$  et  $\rho$  la masse volumique du milieu.

On admettra enfin que les densités de courant d'origine diffusive sont données par :

– la loi de Fourier reliant la densité de courant de chaleur  $J_Q^d$  au gradient de température :

$$J_Q^d = -\rho \kappa \nabla (c_p T)$$

où  $\kappa = \lambda / (\rho c_p)$  est la diffusivité thermique ;

– la loi de Fick appliquée aux mélanges dilués, reliant, dans le référentiel du centre de masse du mélange, la densité de courant de masse  $J_i^d$  de l'espèce  $i$  au gradient de sa concentration massique  $\rho_i/\rho$  :

$$J_i^d = -\rho D \nabla \left( \frac{\rho_i}{\rho} \right)$$

la diffusivité massique  $D$  étant supposée indépendante des espèces.

## II.A. BILANS

### II.A.1. Chaleur de réaction.

a. On considère la quantité de chaleur  $Q_p(T_f)$  dégagée par la combustion, à pression constante  $p$ , d'une mole de combustible  $F$  initialement à température des gaz frais  $T_f$ .

Pour quelle transformation  $Q_p(T_f)$  serait-elle la chaleur effectivement reçue par le milieu extérieur au milieu brûlé ?

Montrer que  $Q_p$  ne dépend pas du mode de réaction suivi et est indépendante de la température  $T_f$  des gaz frais.

Par quelle procédure pourrait-on en principe la mesurer ?

b. On note  $W_Q$  le taux volumique de production de chaleur.

Montrer que  $W_Q = q_p W_F$  où  $q_p = \frac{Q_p}{\Delta H^0}$ .

### II.A.2. Équations de bilan.

On se place dans le référentiel  $R_0$  se déplaçant avec la flamme et on note  $v$  la vitesse des écoulements.

En admettant que les gaz frais ne réagissent pas spontanément, ( $W_F(x = -\infty) = 0$ ), on supposera que les champs qui caractérisent la flamme sont stationnaires dans  $R_0$ .

a. Montrer que le bilan d'une quantité scalaire  $s$  se réduit à :

$$\frac{dJ_s^t}{dx} = W$$

où  $J_s^t$  est la densité totale de courant de la quantité  $s$ , somme de ses densités de courant advective et diffusive,  $J_s^t$  sa composante sur l'axe  $Ox$  et  $W$  le taux de production volumique de  $s$ .

$m_i, \rho_i, n_i$ , la masse  
 $W_F = - \frac{dn_F}{dt}$  le taux

par un transport de

masse volumique du

masse du mélange, la  
 $\rho_i/\rho$  :

pression constante  $p$ ,

par le milieu extérieur

de la température  $T_f$

asse des écoulements.

) = 0), on supposera

e courant advective et  
 ue de  $s$ .

- b. Montrer que la résultante des densités de courant de masse d'origine diffusive est globalement nulle en chaque point.

En déduire, en utilisant le principe de conservation de la masse, que la quantité  $\rho v_x$ , où  $v_x$  est la composante de  $\mathbf{v}$  sur l'axe  $Ox$ , est une constante.

On note  $\rho_i U_L$  la constante  $\rho v_x$  où  $\rho_i$  est la masse volumique des gaz frais loin de la flamme :  $\rho_i = \rho(x = -\infty)$ . Montrer que  $U_L$ , appelée vitesse laminaire de flamme, représente le module de sa vitesse par rapport aux gaz frais.

- c. On note  $Y_F = \frac{\rho_F}{\rho}$  la concentration massique de F.

Montrer que les densités totales de courant de chaleur et de masse de combustible F s'écrivent :

$$\mathbf{J}_Q = \rho c_p T \mathbf{v} - \lambda \nabla(T)$$

$$\mathbf{J}_F = \rho Y_F \mathbf{v} - \rho D \nabla(Y_F)$$

- d. En déduire les équations de bilan de T et de  $Y_F$  :

$$\rho_i U_L \frac{d}{dx} [c_p T] - \frac{d}{dx} \left[ \lambda \frac{dT}{dx} \right] = q_p W_F \quad (1)$$

$$\rho_i U_L \frac{dY_F}{dx} - \frac{d}{dx} \left[ \rho D \frac{dY_F}{dx} \right] = -m_F W_F \quad (2)$$

### II.A.3. Bilan d'enthalpie.

- a. Montrer que l'enthalpie massique du milieu s'écrit :

$$h = c_p T + \frac{q_p}{m_F} Y_F \quad (3)$$

- b. Déterminer, en utilisant les relations (1) (2) et (3), l'équation régissant le bilan de  $h$  dans le référentiel de flamme  $R_0$ .

- c. Montrer, en intégrant cette équation entre  $x = -\infty$  et  $x = +\infty$ , que les enthalpies massiques des gaz frais et des gaz brûlés ont même valeur.

En déduire la température  $T_b$  des gaz brûlés en fonction de celle des gaz frais  $T_f$ , de  $m_F$ ,  $c_p$ ,  $q_p$  et de la valeur  $Y_{F_f}$  de  $Y_F$  dans les gaz frais.

- d. On se place dans le cas particulier où  $\kappa = D$ .

Déterminer l'équation régissant le bilan de  $h$  dans ce cas.

Montrer, en intégrant cette équation et en éliminant les divergences, que l'enthalpie massique reste uniforme dans le milieu.

## II.B. STRUCTURE DE FLAMME

On se place dans le cas particulier où  $\kappa = D$ .

## II.B.1. Équation de structure.

a. On définit ainsi la concentration massique réduite  $Y$  et la température réduite  $\theta$  :

$$Y = \frac{Y_F}{Y_{r,F}}$$

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_b - T_1}$$

En utilisant le résultat de la question II.A.3.d, montrer que  $Y = 1 - \theta$ .

b. La relation précédente montre que l'étude de la structure de flamme peut se réduire à celle d'une seule variable, la température réduite  $\theta$  par exemple. Montrer que  $\theta$  vérifie :

$$U_1 \frac{d\theta}{dx} - D_1 \frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{\epsilon(\theta)}{\tau}$$

où

$$\frac{\epsilon(\theta)}{\tau} = \frac{m_t W_t}{\rho_1 Y_{r,t}}$$

$D_1$  étant la diffusivité massique des gaz frais, avec, pour conditions aux limites :

$$\theta(-\infty) = 0 \text{ et } \theta(+\infty) = 1.$$

En introduisant la différence de température réduite  $\alpha = 1 - \frac{T_1}{T_b}$  et l'énergie d'activation réduite

$\beta = \frac{E_a}{k_B T_b} \alpha$ , les résultats de la partie I. conduisent aux expressions suivantes de  $\epsilon(\theta)$  et  $\tau^{-1}$  :

$$\epsilon(\theta) = (1 - \theta) \exp \left[ - \frac{\beta(1 - \theta)}{1 + \alpha(1 - \theta)} \right]$$

$$\tau^{-1} = \frac{T_1}{T} n_0 \sigma \left( \frac{2k_B T}{\pi \mu} \right)^{1/2} \exp \left( - \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

c. On se place dorénavant dans le cas où  $\alpha$  est voisin de 1 et où  $\beta$  est grand devant l'unité :  $\alpha \approx 1$ ,  $\beta \gg 1$ . On se propose alors de simplifier l'étude de la structure de flamme en négligeant les variations non pertinentes du terme de production  $\frac{\epsilon(\theta)}{\tau}$ . On introduit pour cela la fonction  $\hat{\epsilon}(\theta)$  :

$$\hat{\epsilon}(\theta) = (1 - \theta) \exp \{-\beta(1 - \theta)\}.$$

Montrer que, lorsque  $\beta(1 - \theta)$  est inférieur à quelques unités,  $\epsilon(\theta)$  et  $\hat{\epsilon}(\theta)$  sont très voisines en valeur relative et que, dans le cas opposé, elles sont toutes deux de valeur négligeable.

Représenter graphiquement l'allure des fonctions  $\epsilon(\theta)$  et  $\hat{\epsilon}(\theta)$ .

On substitue la fonction  $\hat{\epsilon}(\theta)$  à  $\epsilon(\theta)$  et le nombre  $\tau(T_b)$  à la fonction  $\tau$ . Justifier la validité de cette approximation.

Montrer que  $\tau(T_b) = \tau_r(T_b)(1 - \alpha)^{-1}$  où l'expression du temps de réaction  $\tau_r$  est donnée dans la partie I.

Déterminer, dans le cadre de la substitution précédente, le rapport des valeurs de  $W_t$  dans les gaz frais et brûlés.

On négligera par la suite la valeur non nulle de  $W_t$  dans les gaz frais, en accord avec les hypothèses utilisées. Cette approximation est-elle justifiée ?



### H.B.2. Champ de température.

La température réduite  $\theta$  satisfait dans le référentiel de flamme l'équation suivante que l'on se propose de résoudre dans un cas simplifié :

$$U_L \frac{d\theta}{dx} - D_t \frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{\hat{\varepsilon}(\theta)}{\tau(T_b)}$$

On modélise dans ce but le membre de droite par une fonction créneau  $c(\theta)/\tau_t$ , de même intégrale entre  $\theta = 0$  et  $\theta = 1$  que la fonction  $\frac{\hat{\varepsilon}(\theta)}{\tau(T_b)}$ ,  $c(\theta)$  étant la fonction suivante :

$$0 \leq \theta < 1 - \beta^{-1} : c(\theta) = 0$$

$$1 - \beta^{-1} \leq \theta < 1 : c(\theta) = \beta$$

$$\theta = 1 : c(\theta) = 0$$

a. Montrer que dans la limite  $\beta \gg 1$  :  $\beta^2 \int_0^1 \hat{\varepsilon}(\theta) d\theta \rightarrow 1$ .

En déduire :  $\tau_t = \beta^2 \tau(T_b)$ .

On fixe à 0 l'abscisse du point où  $\theta = 1 - \beta^{-1}$  et on appelle  $\delta$  celle du point où  $\theta$  devient juste égal à 1. On définit ainsi trois domaines,  $x < 0$ ,  $0 < x < \delta$ ,  $\delta < x$ , numérotés 1, 2, 3 respectivement et dont les variables seront indicées en conséquence (fig. 3).

On utilisera les longueurs suivantes :  $d = D_t/U_L$  et  $\ell = U_L \tau_t$ .

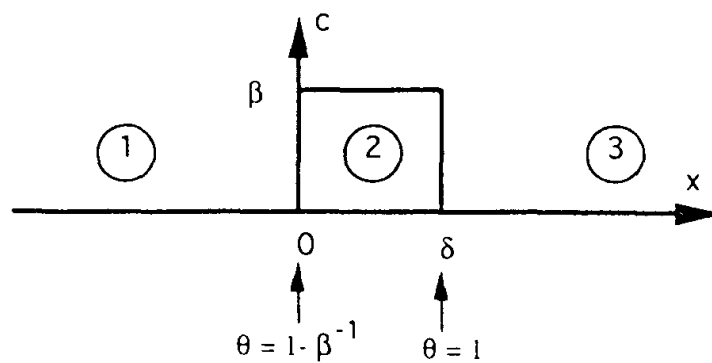


Figure 3

b. Montrer que dans chacun des trois domaines, la fonction  $\theta(x)$  est de la forme :

$$\theta_i(x) = a_i e^{x/d} + b_i x + c_i$$

où  $i$  est l'indice des domaines.

c. Montrer que, par définition de  $c(\theta)$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = \beta/d$ ,  $b_3 = 0$ .

d. Montrer, en imposant les valeurs de  $\theta$  en  $x = 0$  et  $x = -\infty$ , puis en  $x = +\infty$  que :

$$\theta_1(x) = \frac{\beta - 1}{\beta} e^{x/d}$$

$$\theta_3 = 1$$

e. Quelles conditions de compatibilité entre les solutions doit-on imposer en  $x = 0$  et  $x = \delta$  ?

- 10 -

f. Montrer, en appliquant ces conditions en  $x = \delta$ , que :

$$\theta_2(x) = 1 + \beta \frac{x - \delta}{\ell} + \beta \frac{d}{\ell} \{1 - e^{-\delta/d}\}.$$

g. Montrer, en appliquant ces mêmes conditions en  $x = 0$ , que :

$$\frac{\delta}{\ell} = \frac{1}{\beta}$$

$$\beta \frac{1}{\beta} = \frac{d}{\delta} [1 - e^{-\delta/d}].$$

h. En déduire, dans la limite  $\beta \gg 1$  :

$$\ell = 2d$$

$$U_L^2 = 2 \frac{D_f}{\tau_f}$$

$$d^2 = \frac{D_f \tau_f}{2}$$

Justifier l'appellation d'épaisseur de flamme et de temps de transit pour  $d$  et  $\tau_f$ .

i. Représenter sur un même graphe et avec des échelles arbitraires en ordonnées, les allures du champ de température réduite  $\theta$ , de la concentration réduite  $Y$  et du terme de production  $c(\theta)\tau_f$  en fonction de  $x/d$ .

Indiquer l'emplacement de la zone de réaction et de la zone de préchauffage ainsi que les principales dimensions caractéristiques.

j. Calculer  $U_L$  dans le cas où  $T_f = 300$  K,  $T_b = 1500$  K,  $\beta = 8$ ,  $\tau_f(T_b) = 2 \cdot 10^{-6}$  s et  $D_f = 1 \cdot 10^{-5}$  m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>.

## II.C. VITESSE DE FLAMME

On s'intéresse maintenant à une flamme sphérique. En négligeant les effets de courbure et de gradient d'écoulement, on supposera que sa vitesse normale par rapport aux gaz frais reste en tout point égale à la vitesse laminaire de flamme  $U_L$  définie en II.A.2.b. On se place dans le référentiel  $R$  où le centre de la sphère définie par la flamme est au repos.

On note  $\mathbf{n}$ , la normale au front de flamme orientée dans le sens de la propagation,  $\mathbf{v}_n$  la vitesse normale d'un élément du front de flamme,  $\mathbf{v}_f$  la vitesse des gaz frais et  $\mathbf{v}_b$  celle des gaz brûlés.

1. La vitesse  $U_L \mathbf{n}$  est la vitesse normale d'un élément du front de flamme par rapport à des gaz frais au repos. Déterminer une relation entre  $\mathbf{v}_n$ ,  $\mathbf{v}_f$ ,  $U_L$  et  $\mathbf{n}$ .
2. En utilisant la symétrie sphérique et la loi de conservation de la masse dans un milieu incompressible, montrer que les gaz contenus à l'intérieur de la sphère définie par la flamme sont au repos dans  $R$ .
3. En utilisant le résultat établi en II.A.2.b. dans le référentiel de flamme, déterminer une relation entre  $\mathbf{v}_n$ ,  $\mathbf{v}_f$ ,  $\mathbf{v}_b$  et  $\chi = T_b/T_f$ .
4. En déduire les vitesses  $\mathbf{v}_n$ ,  $\mathbf{v}_f$  et  $\mathbf{v}_b$  dans les deux cas suivants :
  - la flamme avance vers l'intérieur de la sphère ;
  - la flamme avance vers l'extérieur de la sphère.
5. Calculer  $\chi$  et les vitesses de flamme dans les deux cas précédents lorsque  $U_L = 0,35$  m · s<sup>-1</sup>,  $T_f = 300$  K et  $T_b = 1500$  K.  
À quel phénomène physique peut-on attribuer cette différence de vitesse de flamme ?

## III. TROISIÈME PARTIE

## POTENTIEL HORS ÉQUILIBRE

On se propose d'étendre le concept de potentiel thermodynamique à des états hors équilibre d'un système réactif, puis d'utiliser cet outil pour déterminer l'évolution suivie par le système. On cherche ainsi à identifier une fonction scalaire de l'état du système, décroissant au cours de l'évolution. Cette fonction sera appelée potentiel d'évolution du système.

On considère à cette fin un système de volume fini  $V$  constant, dont l'état est représenté par une variable unique  $\theta$  dépendant de l'espace et du temps et satisfaisant, dans le référentiel du laboratoire, une équation de réaction-diffusion :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \Delta \theta + W(\theta) \quad (4)$$

La variable  $\theta$ , sans dimension, est comprise entre les valeurs 0 et 1 correspondant à l'état initial du système et à son état final après réaction. Le coefficient de diffusion  $D$ , constant, et le terme de production  $W(\theta)$  sont tous les deux positifs. Par analogie avec la combustion, on appellera  $\theta$  et  $\mathbf{J}_\theta^d = -D \nabla \theta$  température et densité de courant de chaleur.

Deux types de conditions aux limites sont considérés :

— condition adiabatique : la densité de courant de chaleur sur la surface  $\Sigma$ , de normale  $\mathbf{n}$ , qui limite le système est nulle :

$$\mathbf{J}_\theta^d \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Sigma ;$$

— condition stationnaire : la température est stationnaire sur  $\Sigma$  :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0 \text{ sur } \Sigma .$$

## III.A. POTENTIEL

À un instant  $t$ , on associe à l'état  $\theta(x, y, z, t)$ , *a priori* quelconque, du système  $V$ , le nombre  $K(t)$  :

$$K(t) = \iiint_V \left[ \frac{D}{2} (\nabla \theta)^2 - G(\theta) \right] d\tau$$

où

$$G(\theta) = \int_0^\theta W(\xi) d\xi .$$

1. Montrer que :

$$\frac{dK}{dt} = \iint_\Sigma \left[ D \frac{\partial \theta}{\partial t} \nabla \theta \right] \cdot d\mathbf{S} - \iiint_V \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 d\tau .$$

En déduire que, pour les deux types de conditions aux limites considérés,  $K$  est un potentiel d'évolution du système, applicable à tout état, même hors équilibre.

2. Montrer qu'il existe un minimum absolu de  $K$ .

En déduire que toute évolution du système relaxe nécessairement vers un état stationnaire.

### III.B. DIFFUSION PURE

On se restreint à un système purement diffusif en imposant  $W = 0$ .

1. On se place dans le cadre de conditions aux limites adiabatiques.

Montrer, en utilisant une analogie électrostatique, que les états stationnaires  $\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0\right)$  sont forcément homogènes ( $\nabla \theta = 0$ ).

En déduire, en utilisant la partie III.A., que la diffusion pure conduit nécessairement ici à un état stationnaire et homogène.

Quelle est alors la valeur de  $K$  ?

2. On se place dans le cadre de conditions aux limites stationnaires.

Montrer, en utilisant la partie III.A., que la diffusion pure conduit nécessairement ici à un état stationnaire, *a priori* inhomogène.

Montrer que, dans un système unidimensionnel, la densité de courant  $J_{\theta}^d(x, t)$  dans un état stationnaire est une constante qu'on appellera  $J_{\theta}$ . Déterminer la valeur de  $K$  en fonction de  $D$ ,  $J_{\theta}$  et  $V$  et donner un exemple physique simple de cette situation.

### III.C. DIFFUSION-RÉACTION

Le terme de production  $W$ , positif, est une fonction non nulle de  $\theta$ .

On se place dans le cadre de conditions aux limites adiabatiques.

1. Décrire l'état correspondant au minimum absolu de  $K$ .
2. Montrer, en utilisant le théorème de Gauss, que, pour des états stationnaires, le terme de production  $W$  est nul dans le volume  $V$ .

En déduire, en utilisant la partie III.B.1., que l'évolution du mélange réactif aboutit nécessairement à un état stationnaire et homogène.

3. On se restreint à des états homogènes :  $\nabla \theta = 0$ .

Soient les fonctions :

$$W_1(\theta) = \frac{1}{\tau} (1 - \theta) \exp[-\beta (1 - \theta)]$$

$$W_2(\theta) = \theta W_1(\theta)$$

dans lesquelles  $\tau$  et  $\beta$ , constants, représentent un temps caractéristique de réaction et une énergie d'activation réduite.

Quels sont les états d'équilibre du système et leur type de stabilité lorsque  $W = W_1$  et  $W = W_2$  ?

4. On considère l'analogie d'une flamme plane, à savoir une interface plane, d'aire  $A$  et d'épaisseur  $d$ , séparant un domaine homogène de température  $\theta = 0$ , d'un autre domaine homogène de température  $\theta = 1$ . On suppose qu'elle avance sans déformation de structure à une vitesse  $v_n$ .

La vitesse  $v_n$  peut-elle être nulle ?

Déterminer le sens de propagation de l'interface et montrer que le module  $U_t$  de sa vitesse vérifie :

$$\frac{dK}{dt} = -U_t A [G(1) - G(0)].$$

5. On se place dans le cas où  $W = W_1$  et où  $\beta \gg 1$ .

Déterminer, en utilisant la relation ci-dessus, une expression approchée de  $dK/dt$  en fonction de  $U_t$ ,  $A$ ,  $\tau$  et  $\beta$ .

Déterminer, en utilisant la relation obtenue en III.A., une expression approchée de  $dK/dt$  en fonction de  $U_t$ ,  $A$  et  $d$ .

En conclure que  $U_t$  est de l'ordre de  $d/\tau_1$  où  $\tau_1 = \beta^2 \tau$ .

) sont forcément

à un état stationnaire

un état stationnaire,

l'état stationnaire est  
et  $V$  et donner un

le production  $W$  est

nécessairement à un état

ction et une énergie

$W = W_2$  ?

## IV. QUATRIÈME PARTIE

## ALLUMAGE

On se propose de déterminer les conditions d'allumage d'une flamme par un dépôt d'énergie ponctuel, puis de les appliquer à la réalisation pratique d'un allumage commandé de moteur à combustion interne d'automobile.

## IV.A. SEUIL D'ALLUMAGE

On admet qu'un dépôt local d'énergie a permis de brûler une sphère de rayon  $r_f$  et de donner ainsi naissance à une flamme sphérique dont on cherche à déterminer l'évolution (fig. 4).

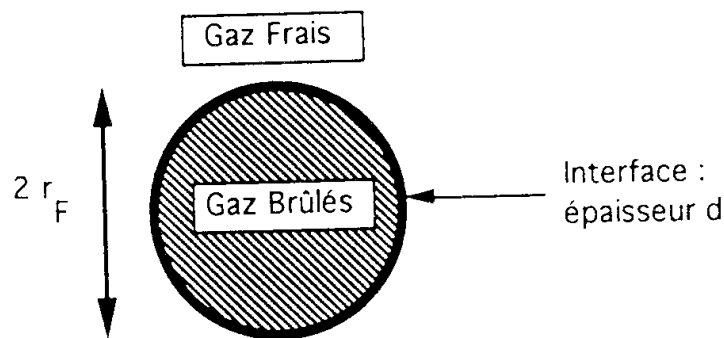


Figure 4

On se place dans le cadre du formalisme de la partie III selon lequel le milieu est décrit par un champ de température réduite  $\theta$ , satisfaisant l'équation de réaction-diffusion (4). On n'utilisera cependant pas cette relation explicitement par la suite. On admet que l'évolution du système est gouvernée par le potentiel  $K$  défini en III.A., dont les valeurs ne peuvent que décroître au cours du temps. On prendra pour  $W(\theta)$  l'expression :

$$W(\theta) = \frac{1}{\tau} (1 - \theta) \exp[-\beta (1 - \theta)]$$

où  $\tau$  et  $\beta$  sont des constantes. On modélise de manière grossière la flamme par le champ de température réduite suivant en coordonnées sphériques :

$$r < r_f \quad : \quad \theta = 1$$

$$r > r_f + d \quad : \quad \theta = 0$$

où  $d$  est l'épaisseur de flamme vérifiant la relation  $d^2 = D\tau_f/2$  obtenue en II.B.2.h. dans le cas d'une flamme plane avec  $D_f = D$  et  $\tau_f = \beta^2 \tau$ . On note  $\delta G$  la valeur, positive, de  $G(1) - G(0)$  et  $K(r_f)$  la valeur du potentiel  $K$  lorsque la flamme a un rayon  $r_f$ .

1. Justifier l'approximation suivante du gradient de température radial,  $\partial\theta/\partial r$ :

$$r < r_f \text{ ou } r > r_f + d \quad : \quad \partial\theta/\partial r = 0$$

$$r_f < r < r_f + d \quad : \quad \partial\theta/\partial r = -1/d.$$

2. En déduire une approximation de  $K^2(r_f)$  en fonction de  $d$ ,  $r_f$ ,  $D$  et  $\delta G$ .

3. Déterminer  $dK(r_f)/dt$  en fonction de  $dr_f/dt$ ,  $r_f$ ,  $d$ ,  $D$  et  $\delta G$ .
4. En déduire, en fonction de  $D$ ,  $d$  et  $\delta G$ , une valeur critique  $r_c$  de  $r_f$  en dessous de laquelle la flamme s'éteint et au-dessus de laquelle elle envahit le milieu.
5. Montrer que, dans la limite  $\beta \gg 1$ ,  $r_c = \frac{D \tau_f}{d}$ .

En déduire que  $r_c = 2d$ .

Commenter le résultat obtenu au vu de la modélisation adoptée dans ce problème.

#### IV.B. ALLUMAGE COMMANDÉ

Le résultat précédent montre que, pour réussir un allumage, il suffit de réaliser un noyau de flamme suffisamment grand, par exemple en brûlant en un temps court un volume de dimension de l'ordre de  $r_c$ . L'apport minimal d'énergie nécessaire pour cela est appelé énergie d'allumage  $E$ . On se propose de l'évaluer dans le cadre d'un moteur d'automobile à combustion interne et de déterminer les caractéristiques principales d'un dispositif électrique susceptible de le fournir.

##### IV.B.1. Énergie d'allumage et tension de claquage.

On assimile l'énergie d'allumage  $E$  à l'énergie nécessaire pour obtenir, à pression constante, une sphère de gaz frais de température  $T_b$  et de rayon  $r_c$  à partir d'une sphère de gaz frais de température  $T_f$ . Cette énergie est délivrée par la création d'une étincelle entre les deux électrodes d'une bougie pour une certaine tension, appelée tension de claquage  $U_c$ . On suppose que le milieu est composé de gaz parfaits diatomiques.

On admet, en négligeant l'avance à l'allumage du moteur, que la décharge électrique se produit à la fin de la phase de compression des gaz frais dans la chambre de combustion.

- a. Déterminer l'énergie d'allumage  $E$  en fonction de  $r_c$ ,  $T_f$ ,  $T_b$ , de la capacité calorifique molaire à pression constante  $C_p$  des gaz frais et de leur volume molaire  $V_M$  à  $T_b$ .
- b. Quelle est la nature de la compression des gaz frais sachant que le moteur effectue plusieurs milliers de tours par minute ?

Déterminer la pression  $p_f$  et la température  $T_f$  des gaz frais à l'instant d'allumage en fonction de la pression  $p_i$  et de la température  $T_i$  avant compression et du rapport volumique de compression  $\omega = V_i/V_f$  où  $V_i$  et  $V_f$  sont les volumes initial et final des gaz frais.

- c. On donne  $p_i = 1 \text{ atm}$ ,  $T_i = 300 \text{ K}$ ,  $\omega = 8$  et  $r_c = 1 \text{ mm}$ .

On néglige la variation d'enthalpie massique avec la température, de sorte que  $T_b - T_f$  est une constante égale à  $1200 \text{ K}$ .

Calculer la température  $T_f$ , la pression  $p_f$  et l'énergie d'allumage  $E$ .

- d. On suppose que le mécanisme d'ionisation qui préside à l'étincelle correspond à des chocs suffisamment énergétiques entre molécules et électrons libres présents dans le milieu, ces derniers étant accélérés dans le champ électrique régnant entre électrodes. On adopte le critère énergétique suivant : l'ionisation d'une molécule ne survient que si l'énergie cédée par le champ électrique à l'électron concerné depuis son précédent choc est égale à une valeur seuil,  $E_i$ , appelée énergie d'ionisation.

Déterminer la tension de claquage  $U_c$  en fonction de  $E_i$ , de la charge  $-e$  de l'électron, du libre parcours moyen  $\ell$  des électrons libres dans le milieu et de la distance  $\delta$  entre électrodes.

e. On donne  $\bar{l} = \frac{1}{n\sigma}$  où  $n$  est la densité volumique de molécules et  $\sigma$  la section efficace moyenne de collision pour ce processus.

Montrer que  $U_c$  est proportionnel au produit  $\delta\omega$  à  $p_1$ ,  $T_1$ ,  $\sigma$  et  $E_1$  fixés.

Calculer  $U_c$  pour  $\delta = r_c = 1 \text{ mm}$ ,  $p_1 = 1 \text{ atm}$ ,  $T_1 = 300 \text{ K}$ ,  $\omega = 8$ ,  $\sigma = 4 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$  et  $E_1 = 5 \text{ eV}$ .

#### IV.B.2. Dispositif d'allumage.

Le dispositif électrique d'allumage est schématisé sur la figure ci-dessous :

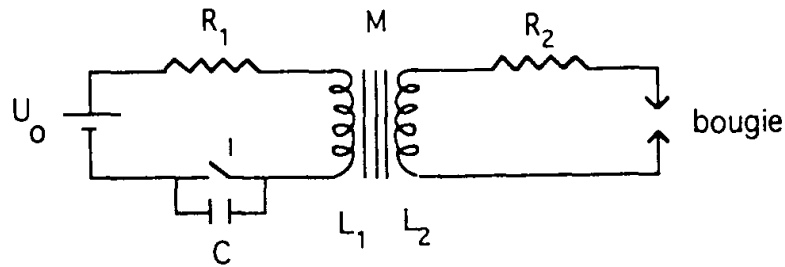


Figure 5

Il consiste en deux circuits inductifs, primaire et secondaire, couplés. Le circuit primaire comporte en série un générateur de tension  $U_0$ , une bobine  $B_1$  et un condensateur de capacité  $C$  pouvant être shunté par un dispositif symbolisé par l'interrupteur  $I$ . Le circuit secondaire comporte en série une bobine  $B_2$  et la bougie. On note  $i_1$  et  $i_2$  les courants électriques dans les circuits primaire et secondaire,  $L_1$  et  $L_2$  les coefficients de self-induction des deux bobines  $B_1$  et  $B_2$ ,  $R_1$  et  $R_2$  leurs résistances et  $M$  leur coefficient d'induction mutuelle.

L'énergie nécessaire à la formation d'une étincelle puis de l'allumage est délivrée à la bougie via la bobine  $B_2$  grâce à la décharge de la bobine  $B_1$  lors de l'ouverture de l'interrupteur  $I$ . Ce processus comporte trois phases :

- Phase I : l'interrupteur  $I$  est fermé; la bobine  $B_1$  acquiert de l'énergie magnétique; le circuit secondaire est ouvert car il n'y a pas d'étincelle. On note  $\tau_0$  le temps caractéristique d'évolution du courant  $i_1$ ;
- Phase II : l'interrupteur  $I$  est ouvert à  $t = n\tau_0$ ; le condensateur n'est alors plus shunté; la décharge ne se produit pas ( $i_2 = 0$ ) tant que la tension  $U_2$  aux bornes de la bougie est inférieure à la tension de claquage  $U_c$ ;
- Phase III : à l'instant où  $U_2$  devient égal à  $U_c$ , la décharge électrique par étincelle s'amorce; le courant  $i_2$  devient non nul et une partie de l'énergie correspondante est transmise au gaz. Cette phase n'est pas étudiée dans la suite.

a. Établir les équations d'évolution des courants  $i_1$  et  $i_2$  dans les deux circuits.

b. On se restreint à la phase I. La condition initiale est  $i_1 = 0$  à  $t = 0$ .

Déterminer le courant  $i_1(t)$  dans le circuit primaire, son temps caractéristique d'évolution  $\tau_0$ , l'énergie magnétique  $E_1(t)$  emmagasinée par la bobine et la tension  $U_2(t)$  aux bornes de la bougie.

Donner les valeurs de  $\tau_0$ ,  $i_1(3\tau_0)$  et  $E_1(3\tau_0)$  lorsque  $L_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ H}$ ,  $R_1 = 2 \Omega$  et  $U_0 = 12 \text{ V}$ .



fficace moyenne de

$$\sigma = 4 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$$

- c. On se restreint à la phase II. On fixe l'origine des temps à l'instant où l'interrupteur K est ouvert. On admet que  $n$  est suffisamment grand pour que la phase I ait abouti à un équilibre de sorte qu'une condition initiale de la phase II soit  $i_1 = \frac{U_0}{R_1}$ . On note  $\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C}$  et on se place dans le cas  $\omega_0 \tau_0 \gg 1$ .

Déterminer le courant  $i_1(t)$  dans le circuit primaire.

En déduire la tension  $U_2(t)$  aux bornes de la bobine  $B_2$  et sa valeur maximale  $U_{2m}$ .

Quelle valeur prend  $U_{2m}$  lorsque  $L_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ H}$ ,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $C = 0,4 \mu\text{F}$  et  $M = 0,2 \text{ H}$  ?

- d. Représenter l'allure de  $i_1$  et  $U_2$  au cours des phases I et II en supposant qu'il n'y ait pas d'étincelle.
- e. En pratique, on observe qu'une tension de l'ordre de  $\frac{U_0}{2}$  suffit pour initier une étincelle et que les énergies consommées dans les résistances ou rayonnées sont au plus de l'ordre de celle apportée à la bougie. Dans le cadre des valeurs numériques données pour les différentes variables du problème, est-il alors possible de réaliser l'allumage du mélange réactif par le dispositif étudié ?

imaire comporte en  
ité C pouvant être  
nporte en série une  
circuits primaire et  
 $B_2$ ,  $R_1$  et  $R_2$  leurs

e à la bougie via la  
ur I. Ce processus

gnétique; le circuit  
mps caractéristique

ors plus shunté; la  
nes de la bougie est

incelle s'amorce; le  
nte est transmise au

que d'évolution  $\tau_0$ ,  
bornes de la bougie.  
 $2 \Omega$  et  $U_0 = 12 \text{ V}$ .

## V. CINQUIÈME PARTIE

## MESURE OPTIQUE DE LA VITESSE DE FLAMME

On se propose d'étudier la possibilité de mesure optique de la vitesse de flamme en considérant la propagation d'un rayon lumineux dans un milieu d'indice optique variable.

On se restreint à une flamme plane d'épaisseur  $d$ , de structure stationnaire représentée en figure 2, se propageant à vitesse  $U_L$  dans le référentiel du laboratoire dans un tube de section carrée de côté  $L$  et d'axe  $Ox$  (fig. 6).

On utilise un faisceau laser incident de direction  $Oy$ , de puissance  $I_0$ , de largeur  $a$ , formé de rayons parallèles et dont on supposera la distribution de puissance homogène. L'éclairement incident  $\Phi$  selon la direction  $Ox$  normale au faisceau sera ainsi décrit, par unité de longueur sur  $Oz$ , par la fonction :

$$\Phi(x) = \frac{I_0}{a} \Pi_a(x)$$

où  $\Pi_a$  est la fonction « rectangle » définie par :

$$\Pi_a(x) = 1 \quad \text{pour} \quad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$$

$$\Pi_a(x) = 0 \quad \text{ailleurs.}$$

On rappelle la loi de Gladstone reliant l'indice optique  $n$  d'un gaz à sa masse volumique  $\rho$  :  $(n - 1)\rho^{-1}$  est une constante. On se place dans le cas où les variations relatives d'indice optique au cours de la traversée du milieu sont faibles :  $|\nabla n| \ll \frac{n}{L}$ . On néglige enfin le phénomène de diffraction.

## V.A. PROPAGATION DE LA LUMIÈRE DANS UN MILIEU D'INDICE VARIABLE

On se restreint à un milieu d'indice optique  $n(x)$  variable suivant une seule direction  $e_x$  de l'espace. On note  $L$  son extension suivant la direction orthogonale  $e_y$ .

1. Rappeler le théorème de Malus.
2. Déterminer qualitativement l'évolution d'une surface d'onde plane parallèle à  $e_x$ .  
En déduire que tout rayon lumineux subit une déviation à la traversée de ce milieu.  
Citer un phénomène atmosphérique mettant en jeu ce phénomène.
3. On considère un rayon lumineux de direction  $e_y$  à l'entrée du milieu.  
Déterminer l'angle  $\theta$  dont on a tourné sa direction de propagation à la traversée du milieu.  
En déduire le rayon de courbure  $R$  de la trajectoire du rayon lumineux dans le milieu.  
Représenter sur un schéma les constructions géométriques relatives aux deux questions précédentes.
4. On rappelle que les gaz sont supposés parfaits et la pression constante.  
Montrer que  $(n - 1)T$  est une constante du milieu, que l'on notera  $b$ .
5. On identifie le gradient de température à sa moyenne :  $\frac{T_b - T_f}{d}$ .

Déterminer la valeur de  $\theta$  et  $R$  au voisinage des gaz brûlés lorsque  $d = 7 \cdot 10^{-4}$  m,  $L = 5 \cdot 10^{-2}$  m,  $b = 10^{-1}$  K,  $T_f = 300$  K et  $T_b = 1500$  K.

V.B. MESURE DE VITESSE DE FLAMME

En l'absence de flamme, on focalise le faisceau laser grâce à une lentille de focale  $f$  en un point  $(x, z) = (0, 0)$  d'un écran plan P normal à  $e_x$  et on y place, de manière centrée, un photodétecteur rectangulaire H de largeur  $2r_0$  suivant Ox (fig. 6).

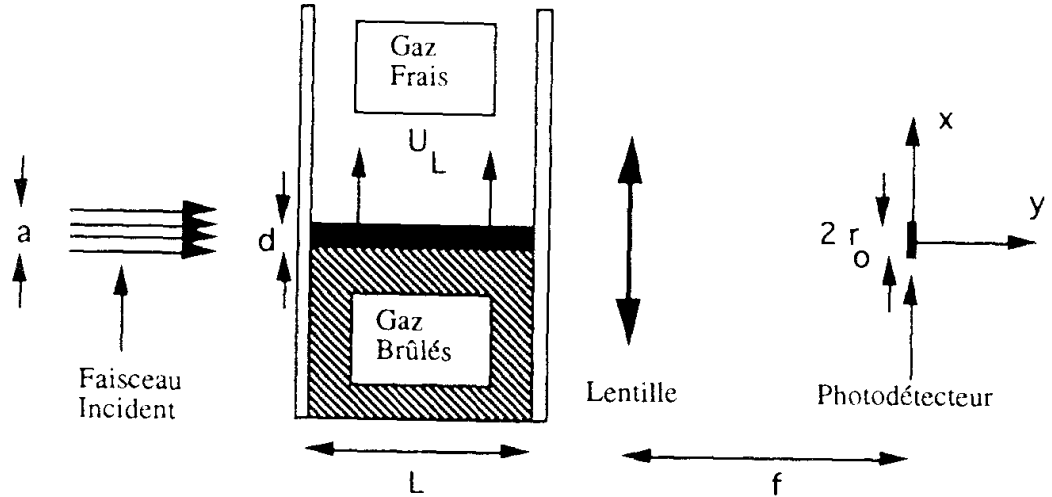


Figure 6

1. Soit un rayon lumineux de direction  $e_x$  avant traversée de la flamme. Déterminer, en fonction de  $n$ ,  $L$ ,  $T$  et  $\frac{dT}{dx}$ , son point d'impact sur le plan P.

En déduire que seuls les rayons traversant les zones où  $\frac{dT}{dx}$  est inférieur en module à une valeur-seuil  $A$  sont reçus par le détecteur.

2. On se place dans le cas où certains rayons ne sont pas reçus par le détecteur. Montrer que, sur tout axe de direction  $e_x$  traversant le front de flamme, il existe, à tout instant, deux points d'abscisses  $x_b(t)$  et  $x_f(t)$  entre lesquels la valeur-seuil  $A$  est franchie.

On note  $x_0$  leur abscisse médiane et  $\delta$  leur distance. Déterminer  $\frac{dx_0}{dt}$  et  $\frac{d\delta}{dt}$ .

Montrer que la puissance reçue par le détecteur,  $I_H$ , s'écrit :

$$I_H = \frac{I_0}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_a(x) [1 - \Pi_\delta(x - x_0)] dx.$$

En déduire que, pour une certaine origine des temps :

$$I_H = \frac{I_0}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_a(x) [1 - \Pi_\delta(x - U_F t)] dx.$$

me en considérant la  
présentée en figure 2,  
carrée de côté  $L$  et

ur  $a$ , formé de rayons  
it incident  $\Phi$  selon la  
onction :

asse volumique  $\rho$  :  
optique au cours de la  
ction.

VARIABLE

ction  $e_x$  de l'espace.

milieu.

ns précédentes.

$10^{-4}$  m,  $L = 5 \cdot 10^{-2}$  m,

3. Déterminer qualitativement l'allure de  $\frac{I_H(t)}{I_0}$  au cours du temps dans les trois cas,  $\delta \ll a$ ,  $\delta = a$ ,  $\delta \gg a$ . Préciser, pour chacun d'eux, le minimum de puissance relative reçue  $\frac{I_H}{I_0}$ , la durée de décroissance jusqu'à ce minimum et la durée totale de modification du flux  $I_H$ .
4. Lequel de ces trois cas est le mieux adapté aux mesures des caractéristiques de flamme ?
5. Représenter, sur un schéma, un dispositif permettant de mesurer  $\delta$  et  $U_1$ .
6. Quelle focale  $f$  faut-il utiliser pour que la valeur-seuil de détection  $A$  soit égale au gradient moyen de  $T^{-1}$  ?

On assimile dans ce cas  $\delta$  à  $\frac{d}{2}$ . Déterminer le minimum de puissance relative reçue  $\frac{I_H}{I_0}$ , la durée de décroissance jusqu'à ce minimum et la durée totale de modification du flux  $I_H$  lorsque  $d = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ,  $a = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ,  $r_0 = 10^{-3} \text{ m}$ ,  $L = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ ,  $b = 10^{-1} \text{ K}$ ,  $T_1 = 300 \text{ K}$ ,  $T_2 = 1500 \text{ K}$  et  $U_1 = 4 \cdot 10^{-1} \text{ ms}^{-1}$ .

U  
détermi  
gaz frais

O  
gene, rel  
pend  
O  
breuses

l'indice

O  
de U v

O  
la flamm

1. Mon

2. End

VI. SIXIÈME PARTIE

FLAMME TURBULENTE

Une flamme se propage dans un milieu gazeux agité de mouvements turbulents (fig. 7). On se propose de déterminer, en fonction des caractéristiques de la turbulence, sa vitesse moyenne  $U_T$  dans le référentiel où les gaz frais sont globalement au repos ainsi que sa dimension fractale.

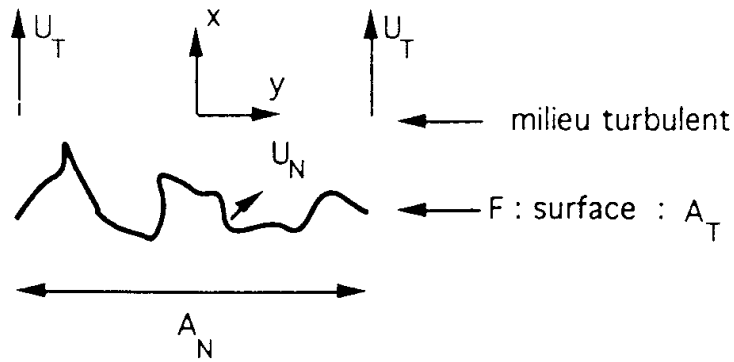


Figure 7

On modélise la flamme par une surface  $F$  avançant à vitesse normale  $U_N$ , supposée constante et homogène, relativement au milieu turbulent. On note  $Ox$  sa direction moyenne de propagation et  $Oy$  une direction perpendiculaire.

On modélise les mouvements du milieu turbulent par un écoulement permanent  $v_i$  comportant de nombreuses composantes de Fourier  $v_i$  de période spatiale  $2L_i$  :

$$v_i = U_i' \sqrt{2} \left[ \sin \left( 2\pi \frac{x}{2L_i} \right) \cos \left( 2\pi \frac{y}{2L_i} \right) e_i - \cos \left( 2\pi \frac{x}{2L_i} \right) \sin \left( 2\pi \frac{y}{2L_i} \right) e_i \right]$$

l'indice  $i$  variant de 0 à  $n$ .

On appelle  $L_i$  l'échelle de l'écoulement  $v_i$ . On admet que, dans un écoulement turbulent, les valeurs de  $U_i'$  varient selon la loi de Kolmogorov en puissance de  $L_i$  :

$$\frac{U_i'}{U_0'} = \left( \frac{L_i}{L_0} \right)^{1/3}$$

VIA. RUGOSITÉ ET VITESSE

On note  $A_T$  l'aire de la surface  $F$  et  $A_N$  celle de sa surface projetée selon  $Ox$ . On appelle rugosité de la flamme le rapport  $R = A_T / A_N$ .

1. Montrer que  $U_T A_N = U_N A_T$ .
2. En déduire que  $R = U_T / U_N$ .

### VI.B. INTERACTION AVEC UN ÉCOULEMENT À UNE ÉCHELLE

Une flamme plane de direction normale  $Ox$  rencontre à un instant donné l'écoulement  $\mathbf{v}$  suivant :

$$\mathbf{v} = U' \sqrt{2} \left[ \sin \left( 2\pi \frac{x}{2L} \right) \cos \left( 2\pi \frac{y}{2L} \right) \mathbf{e}_x + \cos \left( 2\pi \frac{x}{2L} \right) \sin \left( 2\pi \frac{y}{2L} \right) \mathbf{e}_y \right].$$

On note  $v_x$  et  $v_y$  les composantes de  $\mathbf{v}$  suivant les axes  $Ox$  et  $Oy$ .

On se place dans le cas où  $U'$  est très petit devant  $U_\infty$  :  $U' \ll U_\infty$ .

1. Montrer que, en l'absence de composante  $v_x$ , la composante  $v_y$  de  $\mathbf{v}$  n'induit aucune déformation de la flamme.

On négligera son influence par la suite.

2. Déterminer les points du plan  $xOy$  où la composante  $v_x$  de  $\mathbf{v}$  s'annule.

Ces points délimitent des domaines fermés qui seront appelés dans la suite « tourbillons ».

3. Déterminer, en fonction de  $L$  et  $U_\infty$ , le temps caractéristique de séjour  $T$  de la flamme sur un tourbillon.

Pendant ce temps, chaque partie de la flamme est advectée par le tourbillon d'une quantité algébrique  $\delta x$  dans la direction  $Ox$ .

Déterminer les extréma de  $\delta x$  et les points  $P$  correspondants du front de flamme.

4. On néglige les ondulations du front de flamme entre les points  $P$  déterminés précédemment au même titre que ceux produits par la composante  $v_x$  de  $\mathbf{v}$ .

En déduire les valeurs approchées suivantes :

$$- \text{angle moyen } \alpha \text{ dont tournent les plans de flamme : } \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{U'}{U_\infty}$$

$$- \text{rugosité de la flamme : } R^2 = 1 + \frac{32}{\pi^2} \left( \frac{U'}{U_\infty} \right)^2$$

$$- \text{vitesse de flamme : } U_f^2 = U_\infty^2 + \frac{32}{\pi^2} U'^2. \quad (5)$$

### VI.C. INTERACTION AVEC UN ÉCOULEMENT À PLUSIEURS ÉCHELLES

La flamme interagit avec l'écoulement  $\mathbf{v}$  superposition des écoulements  $v_i$  d'échelle  $L_i$ . Elle présente de ce fait des plissements de toutes tailles  $L_i$ .

La portion de flamme contenue dans un tourbillon de taille  $L_i$  ne présente cependant que des plissements de taille inférieure ou égale à  $L_i$ . On note  $U_{f,i}$  sa vitesse moyenne. On admet que, pour ce tourbillon, les flammes ne présentant pas de plissement de taille  $L_i$  sont analogues à des flammes planes, de vitesse notée  $U_{\infty,i}$ .

On suppose que, à chaque échelle  $L_i$ ,  $U'_i$  est très petit devant  $U_{\infty,i}$  :  $U'_i \ll U_{\infty,i}$ .

1. Montrer que  $U_{\infty,i} = U_{f,i-1}$ .

En déduire, en utilisant VI.B., une relation entre  $U_{f,i}$ ,  $U_{f,i-1}$  et  $U'_i$ .

2. Démontrer, en sommant la relation ainsi obtenue depuis l'indice 0, jusqu'à l'indice  $j$ , la relation :

$$U_{1,j}^2 = U_{\infty,j}^2 + \frac{32}{\pi^2} \sum_{i=0}^j U_i^2.$$

3. On définit l'intensité de turbulence  $U'$  d'un écoulement  $\mathbf{v}$  par l'écart type :

$$U' = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \langle \mathbf{v} \rangle^{1/2}$$

où l'opérateur  $\langle \rangle$  symbolise la moyenne volumique sur un volume  $V$ , grand devant les échelles caractéristiques de variation de  $\mathbf{v}$  :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_V f d\tau.$$

Montrer que l'intensité de turbulence de chaque écoulement  $\mathbf{v}_i$  est  $U'_i$ .

Déterminer l'intensité de turbulence  $U'$  de l'écoulement  $\mathbf{v}$ , somme des écoulements  $\mathbf{v}_i$ .

4. Exprimer  $U_{1,\infty}$  et  $U_{\infty,\infty}$  en fonction des vitesses moyenne et normale  $U_1$  et  $U_\infty$  de la flamme dans l'écoulement  $\mathbf{v}$ .

5. En déduire la relation :

$$U_1^2 = U_\infty^2 + \frac{32}{\pi^2} U'^2. \quad (6)$$

Son domaine de validité est-il borné à une valeur finie du rapport  $U'/U_\infty$  ?

6. Quel type de propriété d'invariance se manifeste dans l'identité des relations (5) et (6) ?

7. Montrer que, pour  $U' \gg U_\infty$ , la vitesse moyenne de flamme  $U_1$  peut être considérée comme proportionnelle à l'intensité de turbulence  $U'$ .

## VLD. DIMENSION FRACTALE

On définit la rugosité  $R_i$  d'un objet à l'échelle  $L_i$  comme celle résultant des plissements à des tailles inférieures ou égales à  $L_i$ .

On se restreint dorénavant à une suite géométrique d'échelles :

$$\frac{L_{i+1}}{L_i} = \alpha, \quad \alpha > 1.$$

Un objet est appelé fractal si sa rugosité  $R_i$  s'accroît d'un facteur constant à chaque introduction d'échelle supplémentaire :

$$\frac{R_{i+1}}{R_i} = \beta, \quad \beta > 1.$$

1. Montrer que, dans un objet fractal, il existe un exposant  $\gamma$  tel que :  $\frac{R_{i+1}}{R_0} = \left( \frac{L_{i+1}}{L_0} \right)^\gamma$ .

2. Montrer que si l'objet n'est fractal qu'au-delà d'une échelle  $L_k$ , sa rugosité vérifie :  $\frac{R_{i+1}}{R_0} = \mu \left( \frac{L_{i+1}}{L_0} \right)^\gamma$  pour  $i > k$ ,  $\mu$  étant un préfacteur constant.

On appelle dimension fractale  $d_f$  d'une surface le nombre  $d_f = 2 + \gamma$ .

Quelle est la nature de l'objet lorsque  $\gamma = 0$  ?

3. Montrer, en utilisant la question VI.A., que la rugosité  $R_f$  du front de flamme est :  $R_f = \frac{U_f}{U_\infty}$ .

En déduire, en utilisant les questions VI.C.2. et VI.C.4., que plus le nombre d'échelles augmente, plus la flamme se rapproche d'un objet fractal.

4. Montrer que, dans la limite d'un grand nombre d'échelles, la dimension fractale d'une flamme turbulente est  $d_f = \frac{7}{3}$ .