

**SESSION DE 1999**

**concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés**

**section : sciences physiques**

**option : physique**

problème de physique

**Durée : 6 heures**

*Calculatrice électronique de poche - y compris programmable et alphanumérique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.*

*De très nombreuses questions sont indépendantes. D'autres peuvent être résolues en admettant les résultats donnés aux questions qui les précèdent.*

*Compte tenu du caractère métrologique du sujet, il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à effectuer les applications numériques proposées et à établir les ordres de grandeur demandés. On associera aux constantes physiques fondamentales les valeurs numériques suivantes :*

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1} \\ \epsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1} \\ m_e &= 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ e &= 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ h &= 2\pi \hbar = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \\ k_B &= 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \\ \mathcal{N}_A &= 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}\end{aligned}$$

peuvent être  
cèdent.

plus grand  
posées et à  
constantes

Parmi les différentes unités de base du Système international d'unités, seul le kilogramme est aujourd'hui encore relié à un prototype, c'est-à-dire un objet matériel particulier « arbitrairement » choisi à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle par les experts du Comité international des poids et mesures. Pour les physiciens, le caractère non pérenne d'une telle référence n'est pas satisfaisant, bien que les performances actuellement atteintes lors des comparaisons soient spectaculaires. Plusieurs expériences de haute exactitude ont donc été entreprises pour tenter de matérialiser différemment l'unité de masse.

L'objet du présent problème est de présenter l'une de ces expériences, schématisée sur la figure 1 : celle-ci cherche à relier une masse macroscopique à la masse d'un ion. Dans la partie I sont discutés différents effets susceptibles d'introduire des biais dans les comparaisons, ce qui permet de fixer quelques ordres de grandeur pour les performances à atteindre. L'expérience proprement dite est étudiée dans les parties II, III, IV : elle consiste à former et diriger un faisceau homocinétique  $\mathcal{F}$  d'ions (partie II) vers un collecteur  $C$ , suspendu à une balance  $\mathcal{B}$ , sur lequel les ions sont rassemblés et sont « pesés »... Simultanément la mesure  $\mathcal{M}$  (partie IV) du courant  $I$  créé par ces ions est réalisée en comparant la charge reçue sur le collecteur à des références électriques  $\mathcal{R}$  (partie III), ce qui doit permettre d'accéder, par un simple comptage des charges, au nombre d'ions nécessaires à un accroissement de masse donné.

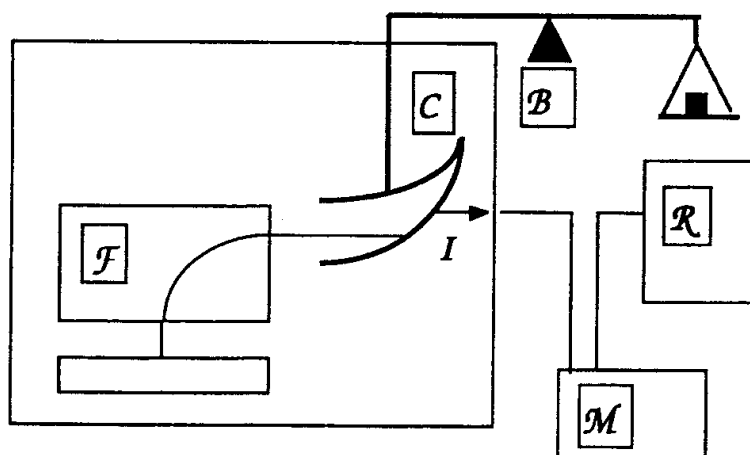


Figure 1 : Schéma de principe du montage expérimental.

### Première partie

#### Quelques propriétés des étalons de masse de 1 kilogramme.

Le prototype international du kilogramme  $\mathcal{K}$  est un objet en platine iridié, alliage de platine (90%) et d'iridium (10%). D'autres objets servant de références secondaires, fabriqués dans le même alliage ou avec d'autres matériaux, sont également utilisés pour procéder à l'étalonnage de masses à l'aide de balances. Ces dernières, quelle que soit leur complexité, fonctionnent selon un principe revenant à comparer l'action sur ces masses du champ de pesanteur lorsque celles-ci sont posées sur des plateaux situés sur une même droite horizontale. Elles permettent aujourd'hui de comparer des masses de 1 kg à quelques microgrammes près à condition de tenir compte des causes d'erreur analysées dans cette partie.

#### I. 1°. Propriétés géométriques.

- a.) Il est souhaitable (voir I.5) de donner aux objets matériels servant d'étalons une forme susceptible de rendre minimale la surface de ces objets. Pour un matériau homogène, quelle est la forme géométrique assurant, à masse donnée, la surface extérieure minimale ? Commenter le résultat.
- b.) Par commodité, les étalons effectivement réalisés sont des cylindres droits à base circulaire, de hauteur  $h$  et de diamètre  $D$ . Comment choisir le cylindre pour obtenir, à masse donnée, une surface extérieure  $S_{\text{ext}}$  minimale ? Dans toute la suite de cette partie les étalons employés satisfont cette condition.

#### c.) Application numérique :

- i) Pour obtenir des étalons de masse nominale 1 kg, quelles valeurs doit-on donner à  $D$  et  $h$  dans le cas d'un étalon en platine iridié de masse volumique  $\rho_{\text{Pt-Ir}} = 21500 \text{ kg m}^{-3}$  ? Calculer dans ces conditions la surface extérieure  $S_{\text{ext}}$  et le volume  $V_{\text{kg}}$  du cylindre obtenu ? Pour quelle variation relative de  $h$  ou  $D$  la masse varie-t-elle de  $\Delta m_1 = 10 \mu\text{g}$  ? Que conclure pour de tels étalons ?
- ii) Mêmes questions pour un objet en alliage d'acier inoxydable de masse volumique  $\rho_{\text{Inox}} = 8000 \text{ kg m}^{-3}$ .

#### I.2°. Poussée d'Archimède. En général, les comparaisons entre étalons de masse et les étalonnages ne sont pas effectués dans le vide mais dans l'air.

- a.) Comment s'exprime la force totale exercée par l'air sur l'étalon ? On notera  $\rho_{\text{air}}$  la masse volumique de l'air et  $g_0$  l'accélération de la pesanteur.
- b.) Cette force contribue-t-elle à augmenter ou à diminuer la force de pesanteur ? À augmenter ou diminuer la masse apparente de l'étalon ? Exprimer la variation de masse apparente  $\Delta m_2$  associée à cet effet, c'est-à-dire la variation de masse qui serait nécessaire pour, en l'absence de cet effet, obtenir la même force.
- c.) Application numérique : l'air sec à la pression  $p_{\text{air}}$  et à la température  $T_{\text{air}}$ , supposées uniformes, peut être assimilé à un mélange idéal de gaz parfaits de masse molaire  $M$ .
- i) En déduire la valeur de la masse volumique  $\rho_{\text{air}}$  pour  $p_{\text{air}} = 1013 \text{ hPa}$  et  $T_{\text{air}} = 293 \text{ K}$ . On donne  $M = 28,9 \text{ g mol}^{-1}$ .
- ii) Déterminer  $\Delta m_2$  dans le cas de l'étalon en platine iridié et dans le cas de l'étalon en acier inoxydable. Quelle variation relative de  $\rho_{\text{air}}$  provoquerait un décalage de  $10 \mu\text{g}$ , sachant que  $g_0 = 9,809 \text{ m s}^{-2}$  ?

**I.3°. Propriétés magnétiques.** Le matériau employé est un milieu linéaire paramagnétique, de susceptibilité magnétique  $\chi$  petite devant 1, placé dans un champ magnétique d'origine extérieure.

- a.) Exprimer l'aimantation en un point du matériau ( $\mu_0$  désigne la perméabilité magnétique du vide). En déduire la densité d'énergie magnétique associée à l'interaction avec le champ extérieur.
- b.) Dans le cas où le champ n'est pas uniforme, écrire sous la forme d'une intégrale volumique la composante sur l'axe vertical de la résultante des forces magnétiques exercées sur l'étalon de masse. En déduire l'expression de cette force lorsque les variations du champ prises en compte sont limitées au seul gradient vertical de la composante verticale du champ, gradient supposé constant sur le cylindre constituant l'étalon.
- c.) Exprimer, lorsque l'étalon est placé dans le champ de pesanteur  $g_0$ , la variation  $\Delta m_3$  de la masse apparente correspondant à la prise en compte de cette force magnétique.
- d.) *Application numérique* : les pièces magnétiques d'une balance électronique assez éloignée créent à l'endroit où est situé l'étalon un champ magnétique et un gradient principalement dirigés selon la verticale ascendante. Exprimer  $\Delta m_3$  pour un champ de  $5 \cdot 10^{-4}$  T et un gradient de  $2 \cdot 10^{-3}$  T m<sup>-1</sup> avec, pour l'air,  $\chi_{\text{air}} = 4 \cdot 10^{-7}$ ,
  - i) dans le cas de l'étalon en platine iridié ( $\chi = 0,0003$ );
  - ii) dans le cas de l'étalon en acier inoxydable ( $\chi = 0,04$ ).

**I.4°. Gravité.** Au cours du raccordement d'un étalon en acier inoxydable, effectué en comparant la masse de celui-ci à celle d'un étalon en platine iridié à l'aide d'une balance (voir introduction de la partie I), la taille différente des deux objets place généralement le centre de masse de chacun d'eux à une altitude différente.

- a.) Cette situation introduit-elle un biais dans la comparaison ? Dans quel sens ?
- b.) Déterminer, pour une différence d'altitude  $\delta h_0$ , la variation  $\delta g_0$  du champ de pesanteur.
- c.) *Application numérique* : calculer la différence apparente de masse  $\Delta m_4$  induite par ce biais. La longueur du rayon terrestre est  $R_T = 6371$  km.

**I.5°. Adsorption d'atomes ou de molécules à la surface des étalons de masse.**

a.) Interaction entre une molécule et une paroi diélectrique.

- i) Une molécule A dépourvue de moment dipolaire permanent mais de polarisabilité  $\alpha_A$  est située à la distance  $d$  d'une unique molécule B d'un type différent, dépourvue elle aussi de moment dipolaire permanent mais de polarisabilité  $\alpha_B$ .  
Montrer que les fluctuations du moment dipolaire de A permettent de supposer qu'il existe entre A et B des forces d'origine électrostatique dont l'intensité varie selon une loi du type  $K_{AB}/d^7$ , où  $K_{AB}$  est une constante dont l'expression n'est pas demandée. Justifier soigneusement votre réponse.  
S'agit-il d'une force attractive ou d'une force répulsive ?

- ii) La molécule de type A précédente est maintenant placée seule dans le demi-espace  $z > 0$  limité par le plan  $xOy$ , à une distance  $z > 0$  de ce plan. Le demi-espace  $z < 0$  est entièrement occupé par des molécules du type de B, fixes, uniformément réparties dans le volume du demi-espace avec une densité particulière  $n_{\text{mol.B}}$  (figure 2).  
Montrer que, si l'on néglige d'éventuels effets collectifs, l'énergie d'interaction  $W_{\text{ad1}}(z)$  entre la molécule A et l'ensemble du demi-espace de molécules B peut s'écrire :

$$W_{\text{ad1}}(z) = K_{\text{ad1}} / z^3 .$$

Exprimer la constante  $K_{\text{ad1}}$  en fonction de  $K_{\text{AB}}$  et  $n_{\text{mol.B}}$ .

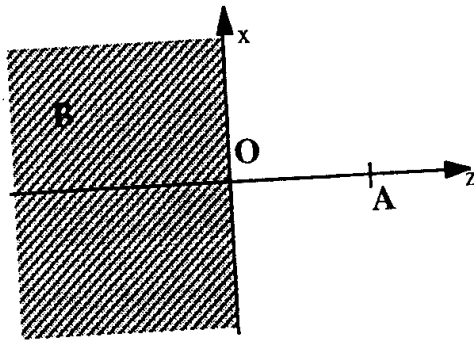


Figure 2 : Adsorption d'un atome sur une paroi.

- b.) Interaction entre une molécule et une paroi conductrice. On considère dans cette question la situation d'une molécule C isolée, pourvue d'un moment dipolaire électrique permanent de module  $p_{\text{dip}}$ , située à la distance  $z > 0$  du demi-espace  $z < 0$  supposé fixe et totalement rempli par un métal parfaitement conducteur.

- i) Donner sans démonstration, et représenter sur une figure, l'image de ce dipôle électrostatique dans le conducteur.
- ii) Soit  $\theta$  l'angle que fait le dipôle avec la perpendiculaire à la paroi. Exprimer l'énergie d'interaction entre le dipôle et son image en fonction de  $z$  et  $\theta$ .
- iii) On fait l'hypothèse que, compte tenu de l'agitation thermique, l'orientation du dipôle est quelconque. Montrer qu'on peut alors considérer que l'énergie d'interaction entre la molécule C et le métal s'écrit :

$$W_{\text{ad2}}(z) = K_{\text{ad2}} / z^3 .$$

Justifier soigneusement votre réponse. Exprimer  $K_{\text{ad2}}$  en fonction de la permittivité diélectrique du vide  $\epsilon_0$  et de  $p_{\text{dip}}$ . Cette relation correspond-elle à une force attractive ou à une force répulsive ?

- iv) *Application numérique* : quel est l'ordre de grandeur de  $p_{\text{dip}}$  et donc de  $K_{\text{ad2}}$  pour une molécule comme l'eau ou le dioxyde de carbone ?
- c.) Ainsi, quelle que soit le type de paroi, les interactions entre une molécule A isolée située à la distance  $z > 0$  du demi-espace  $z < 0$  supposé fixe et totalement rempli par un milieu homogène peuvent être convenablement décrites par une énergie d'interaction du type  $W_{\text{ad}}(z) = K_{\text{ad}} / z^3$ . On considère dans cette question que ce milieu est un gaz de molécules toutes identiques à celles qui possèdent les propriétés précédentes, supposées ponctuelles et sans interaction entre elles, occupant le demi-espace  $z > 0$ . La température  $T_0$  est supposée uniforme dans tout l'espace.

i) Com  
dist  
à un  
puis  
z =  
ii) A l'  
dési  
iii) En  
iv) Qu  
t-il  
tem  
don

dan  
v) App  
et K  
telle  
vi) Que  
plat

I.6°. Co  
piori con

- i) Compte tenu de l'interaction avec la paroi, la densité dans le gaz et la pression  $p(z)$  à la distance  $z$  de la paroi ne peuvent être uniformes pour  $z > 0$ . En assimilant localement le gaz à un gaz parfait, rappeler l'expression de l'enthalpie libre molaire  $\mu(z)$  en fonction de  $p(z)$ , puis  $z$ , en notant  $p(\infty)$  la pression et  $\mu_0(\infty)$  l'enthalpie libre molaire à  $T_0$  en un point  $z = +\infty$  infiniment éloigné de la paroi.
- ii) A l'équilibre thermodynamique à  $T_0$ , pourquoi la quantité  $(W_{ad}(z) + \mu(z) / \mathcal{N}_A)$ , où  $\mathcal{N}_A$  désigne la constante d'Avogadro, doit-elle ne pas dépendre de  $z$  ?
- iii) En déduire l'expression de la pression  $p(z)$  à la distance  $z$  de la paroi.
- iv) Quelle est, dans l'expression trouvée, la limite de  $p(z)$  lorsque  $z$  tend vers 0 ? Qu'arrive-t-il lorsque  $p(z)$  devient supérieure à  $p_s(T_0)$ , pression de vapeur saturante du gaz à la température  $T_0$  ? En déduire qu'il existe à la surface de la paroi une « couche liquide » dont l'épaisseur  $d_{liq}$  est donnée par la relation de Frenkel, Halsey, Hill :

$$d_{liq} = \left[ \frac{-K_{ad}}{k_B T_0 \ln \left( \frac{p_s(T_0)}{p(\infty)} \right)} \right]^{1/3}$$

dans laquelle  $k_B$  désigne la constante de Boltzmann.

- v) *Application numérique* : pour les molécules envisagées,  $p_s(T_0) = 24$  hPa à  $T_0 = 293$  K, et  $K_{ad} = -3 \cdot 10^{-49}$  J m<sup>3</sup>. Par ailleurs  $p(\infty) = 8$  hPa. Déterminer  $d_{liq}$ . Que penser, avec de telles valeurs, du modèle continu précédent ?
- vi) Quelle serait la masse excédentaire  $\Delta m_s$  adsorbée sur toute la surface de l'étalon de platine, si le fluide adsorbé a une densité de  $10^3$  kg m<sup>-3</sup> ? et sur l'étalon d'acier ?

**I.6°. Comparaison.** Parmi les effets perturbateurs évoqués ci-dessus, quels sont ceux qui *a priori* contribuent le plus à l'incertitude des étalonnages de masses ?

## Deuxième partie

### Création et manipulation d'un faisceau d'ions Au<sup>+</sup>.

Cette partie concerne l'étude des conditions de création, de guidage et de focalisation d'un jet intense d'ions or (Au<sup>+</sup>) à l'aide de dispositifs électrostatiques ou magnétostatiques. Un tel jet d'ions lourds peut être utilisé dans l'expérience de « comptage » et de « pesage » d'ions évoquée en introduction. L'action des forces de pesanteur est ici supposée négligeable.

#### II.1°. Ordres de grandeur.

a.) Pour effectuer une comparaison entre masses macroscopiques à quelques millionnièmes près, il est nécessaire de disposer d'une masse de matière  $\delta M$  d'au moins 1 g. Combien faut-il accumuler d'ions Au<sup>+</sup> de masse individuelle  $m_{Au}$  pour parvenir à une telle masse ? *Application numérique* : l'or ne présente qu'un seul nucléide naturel, de masse molaire  $M_{Au} = 0,197 \text{ kg mol}^{-1}$ .

b.) Les dérives à long terme des instruments interdisent d'envisager l'accumulation des ions pendant une durée supérieure à un an pour constituer la masse  $\delta M$ . Quel doit être alors le courant minimal  $I_{min}$  transporté par le faisceau d'ions ? *Application numérique* : exprimer le résultat en ampères, puis en ions par seconde ; commenter.

II.2°. **Constitution du faisceau.** Le faisceau d'ions est extrait à l'aide d'une haute tension accélératrice de la zone Z où les ions ont été créés, selon un mécanisme qui ne sera pas précisé. Cette zone occupe par hypothèse le demi-espace  $z < 0$  ; elle est limitée par une plaque G percée en O et placée au potentiel nul dans le plan xOy ; une autre plaque G<sub>0</sub> parallèle à l'axe xOy, placée en  $z = \ell_0 > 0$  dans le vide et percée autour du point I ( 0, 0,  $\ell_0$  ), est portée au potentiel  $V_0 < 0$  (figure 3). Toutes les propriétés du système sont invariantes par translation dans le plan xOy. On considère uniquement les mouvements dans la direction Oz, en se limitant à l'approximation non relativiste.

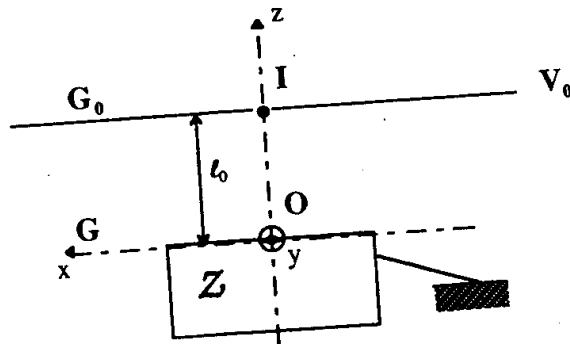


Figure 3: Accélération du faisceau d'ions.

- a.) Mouvement d'un ion unique. Un ion est extrait en  $z = 0$  avec une vitesse initiale supposée négligeable. Donner l'expression de la vitesse  $v_0$  dont il est animé lorsqu'il parvient à la grille en  $z = \ell_0$ , en fonction de  $V_0$ ,  $m_{Au}$  et  $e$ , valeur absolue de la charge de l'électron.
- b.) Pour des jets intenses et en régime permanent il n'est pas possible de négliger les effets d'influence électrostatique entre les différents ions présents dans la zone comprise entre les grilles, où réside une charge d'espace. On appelle respectivement  $\rho(z)$ ,  $V(z)$  et  $v(z)$  la densité volumique de charge, le potentiel électrostatique et la valeur du champ de vitesse des ions à la distance  $z$  du plan xOy.



- i) Ecrire les équations devant être vérifiées par  $\rho(z)$ ,  $V(z)$  et  $v(z)$  et en déduire l'équation différentielle satisfaite par  $V(z)$ .
- ii) Résoudre celle-ci en cherchant pour  $V(z)$  une solution variant comme  $(z/\ell_0)^\gamma$ , où  $\gamma$  est une constante numérique à déterminer, et en déduire la relation de Child-Langmuir, donnant la densité de courant  $j_z$  :

$$j_z = \frac{4}{9} \epsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m_{Au}}} \frac{(-V_0)^{3/2}}{\ell_0^2}$$

- iii) *Application numérique* : pour obtenir le courant  $I_{min}$  déterminé au II.1.b. avec une distance d'accélération  $\ell_0$  de l'ordre de 0,1 m et un faisceau supposé d'intensité homogène sur une section droite de surface  $S_0 = 4 \text{ mm}^2$ , quelle valeur minimale faut-il donner au module de la tension accélératrice  $V_0$  ? L'hypothèse d'un mouvement non relativiste est-elle justifiée ?

On fixe, sauf indication contraire, le courant d'ions à  $I_0 = 15,5 \mu\text{A}$  et la tension accélératrice à  $V_0 = -46,3 \text{ kV}$  dans toute la suite de cette partie.

**II.3°. Sélecteur de masse.** Le jet fabriqué au II.2. traverse la plaque  $G_0$  au point I. Il atteint alors une zone équipotentielle, puis pénètre à l'intérieur du secteur angulaire limité par deux demi-plans  $\mathcal{P}$  (parallèle à  $xOy$  en  $z = \ell_1$ ) et  $\mathcal{P}'$  faisant avec  $\mathcal{P}$  un angle  $\Phi < \pi$ , selon une arête commune parallèle à  $Oy$  dont le point K est la trace dans le plan  $xOz$  (figure 4). Dans le dièdre limité par  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  règne uniquement un champ magnétique uniforme de module  $B_0$  et de direction parallèle à  $Oy$  : aucun champ électrique n'est appliqué dans cette zone. Soit P l'intersection de l'axe  $Oz$  portant  $OI$  et du plan  $\mathcal{P}$  ; soit  $r_0 = KP$ .

On néglige, dans cette question, toute interaction entre les ions du faisceau.

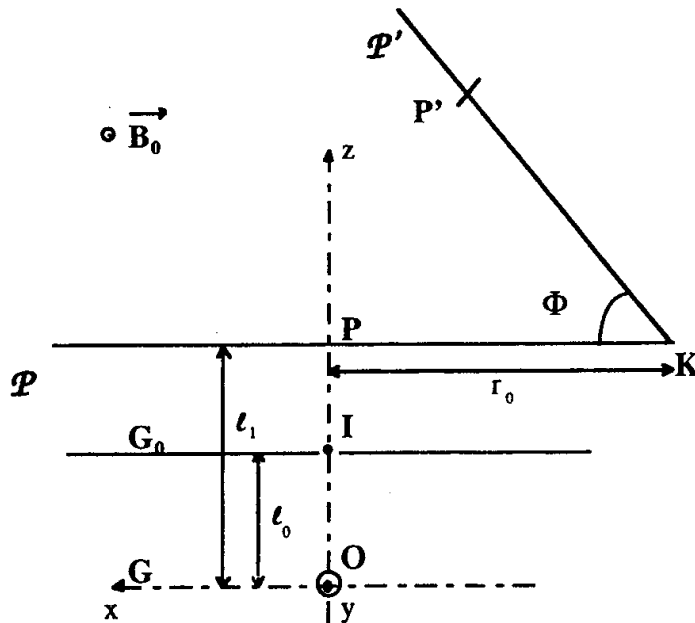


Figure 4 : Sélecteur de masse à secteur magnétique.

- a.) Jet homocinétique. Un ion, animé lorsqu'il est en I d'une vitesse portée par  $Oz$  de module  $v_0$ , entre en P avec la même vitesse dans le secteur où règne le champ magnétique.

- i) Ecrire l'équation du mouvement de cet ion entre les demi-plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$ . Montrer que sa trajectoire est plane. Quelle est la nature de celle-ci ? Selon quelle loi horaire est-elle décrite ? La vitesse, l'énergie cinétique de l'ion sont-elles modifiées ?
- ii) Comment faut-il choisir le module  $B_0$  et le sens du champ magnétique (en fonction des paramètres  $r_0$ ,  $v_0$ ,  $m_{Au}$  et  $e$ ) pour que  $K$  soit le centre de la trajectoire de l'ion ? Cette condition est désormais supposée satisfaite. *Application numérique* avec  $r_0 = 0,5$  m.
- iii) Soit  $P'$  le point du demi-plan  $\mathcal{P}'$  appartenant à la trajectoire de l'ion. Quelle est l'allure de la trajectoire de l'ion dans le volume situé au-delà de  $P'$ , supposé équipotentiel et dépourvu de champ magnétique ?
- b.) Sélection. Il peut exister dans le jet des ions de même charge que les atomes d'or mais de masse différente, qui ont été extraits et accélérés sous la tension  $V_0$  du II.2° en même temps que ces derniers.
- i) Expliquer en quoi le système d'accélération et de déflexion étudié joue un rôle de sélecteur de masse.
- ii) On place autour de  $P'$  une fente symétrique de largeur totale  $D_0$ . Quelle est la plus petite variation de masse par rapport à  $m_{Au}$  pour laquelle une particule est éliminée du jet émergent ? Estimer la valeur de  $D_0$  qui permet de ne sélectionner que des ions  $Au^+$ . *Application numérique*.
- c.) Jet divergent. Certains ions du jet ne se déplacent pas exactement sur l'axe  $Oz$ . Soit un ion  $Au^+$  animé, lorsqu'il est en  $I$ , d'une vitesse de module  $v_0$  qui fait, dans le plan  $xOz$ , un petit angle  $\alpha$  avec l'axe  $Oz$ .
- i) La trajectoire du mouvement de cet ion entre les demi-plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  reste-t-elle plane ? On repère, dans la suite de cette question, sa position entre  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  à l'aide de coordonnées polaires paramétriques  $(r(t), \phi(t))$  d'axe  $KP$  et de pôle  $K$ . A la date  $t=0$ , l'ion franchit le demi-plan  $\mathcal{P}$ . On définit  $\gamma(t) = r(t) - r_0$ ,  $\omega(t) = \partial\phi/\partial t - v_0/r_0$ ; comme l'angle  $\alpha$  est petit, la trajectoire reste proche de l'arc  $PP'$  et  $\gamma$ ,  $\omega$  et  $\partial\gamma/\partial t$  restent petits devant  $r_0$ ,  $v_0/r_0$  et  $v_0$ . Montrer que, à l'ordre le plus bas, les équations différentielles vérifiées par  $\gamma$  et  $\omega$  s'écrivent :

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \ddot{\gamma} = v_0\omega$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} = -\frac{r_0^2}{v_0} \frac{d\omega}{dt}$$

- ii) Déterminer les conditions initiales  $\gamma_0$ ,  $\dot{\gamma}_0$ ,  $\phi_0$ ,  $\dot{\phi}_0$  du mouvement. En ne conservant que les termes du premier ordre en  $\alpha$ , exprimer  $\gamma(t)$  et  $\phi(t)$  en fonction de  $t$ ,  $r_0$ ,  $v_0/r_0$ ,  $\alpha$  et  $IP=(\ell_1 - \ell_0)$ . En déduire la position et la direction de la vitesse de l'ion lorsque celui-ci traverse le demi-plan  $\mathcal{P}'$  et sort de la zone où règne le champ magnétique. Montrer que l'angle  $\alpha_s$  que fait la trajectoire ultérieure de l'ion avec la trajectoire centrale correspondant au parcours  $PP'$  s'écrit :

$$\alpha_s = \alpha \left[ -\cos \Phi + \frac{\ell_1 - \ell_0}{r_0} \sin \Phi \right].$$

- iii) Déterminer le point  $I'$  au delà de  $P'$  pour lequel le support de la trajectoire de l'ion recoupe la trajectoire centrale. Ce lieu est dit réel si l'ion  $Au^+$  y passe effectivement, virtuel dans le cas contraire. Calculer  $\ell' = P'I'$ . Ce point dépend-il, à l'ordre le plus bas, de l'angle  $\alpha$  ? Le secteur magnétique peut-il modifier la divergence du jet d'ions ?

iv) Montrer que les points I, I' et K sont alignés.

v) Quelle condition les paramètres doivent-ils vérifier pour qu'un faisceau d'ions faiblement divergent sorte parallèle du secteur magnétique ? *Application numérique* : déterminer  $\Phi$  pour obtenir un faisceau parallèle en sortie, sachant que  $IP=(\ell_1 - \ell_0) = 0,2$  m et  $r_0 = 0,5$  m.

**II.4°. Élargissement du faisceau.** Cette question étudie l'évolution spontanée dans le vide du faisceau d'ions homocinétique *sous le seul effet de la charge d'espace*. En  $t=0$ , les ions évoluent dans le vide avec la même vitesse initiale  $v_0$  parallèle à Oz, issue de l'accélération préalable des ions sous une tension  $V_0$ . Le faisceau d'ions conserve par hypothèse la symétrie de révolution autour de l'axe Oz, et la densité volumique de charge  $\rho(z)$  reste uniforme dans une section droite quelconque du faisceau. Chaque ion est soumis au champ électrique et au champ magnétique créés par l'ensemble du jet qui, compte tenu des conditions initiales, lui confèrent une vitesse  $v$  qui ne dépend que de  $z$  et de la distance de l'ion à l'axe du faisceau.

a.) Approximation cylindrique. Le faisceau peut être assimilé, sur toute sa longueur, à un cylindre homogène d'axe Oz, de rayon extérieur  $r$ , de vitesse uniforme  $v$ .

i) Exprimer la densité volumique de charge  $\rho$  dans le jet en fonction de l'intensité  $I_0$  du faisceau, de  $r$  et de  $v$ . En déduire l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  créé à la surface du jet, à la distance  $r$  de l'axe Oz. Préciser l'orientation de ce champ.

ii) Déterminer également le champ magnétique  $\vec{B}$  créé à la distance  $r$  de l'axe Oz. Préciser l'orientation de ce champ.

iii) En déduire l'expression de la force de Lorentz exercée sur un ion situé à la périphérie du jet, à la distance  $r$  de l'axe Oz. Quelle approximation, faite dans toute la suite, permet de négliger la force magnétique ?

b.) Divergence faible. En  $z = 0$ , les ions forment un faisceau dont la section a pour rayon  $r_0$ . Les forces étudiées ici ne modifient pas, par hypothèse, la composante  $v_z$  de la vitesse des ions, qui reste égale à  $v_0$ . Sous l'effet de la force calculée ci-dessus, la vitesse d'un ion situé à la périphérie du jet acquiert pendant une composante radiale  $v_r$ , *a priori* non nulle.

i) En supposant que la force subie est constante, déterminer pour un ion donné l'expression de  $v_r(t)$ , qui reste par hypothèse petite devant  $v_0$ . En déduire l'expression du petit angle  $\beta$  dont a tourné la vitesse de l'ion lorsqu'il a parcouru une distance  $z_0$ .

ii) La divergence est caractérisée par la « dilatation relative » du faisceau à la distance  $z_0$  ; elle est définie par la quantité  $(r(z_0) - r_0) / r_0$ , dans laquelle  $r(z)$  désigne la largeur du faisceau à la distance  $z$  de l'origine. Montrer que, dans l'hypothèse étudiée, on peut écrire :

$$\frac{(r(z_0) - r_0)}{r_0} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} I_0 \left( \frac{z_0}{r_0} \right)^2 \sqrt{\frac{m_{Au}}{2e}} (-V_0)^{-3/2} = \frac{z_0^2}{R_0^2} .$$

où la longueur  $R_0$  caractérise l'état du jet en  $z = 0$ .

iii) *Application numérique* : on suppose  $r_0 = 1,25$  mm et  $z_0 = 0,2$  m. Calculer  $R_0$  et la dilatation relative du faisceau.

c.) Cas réel. En fait, lorsque le courant est important, la force électrique n'est pas constante lorsque  $z$  augmente car la charge d'espace dans le jet évolue. Néanmoins la composante  $v_z$  de la vitesse des ions reste égale à  $v_0$  et  $\rho(z)$  reste uniforme dans une tranche du jet.

i) Exprimer l'accélération radiale communiquée aux ions extérieurs et en déduire l'équation différentielle régissant le mouvement de ces ions.

ii) Montrer que, par une première intégration simple tenant compte des conditions initiales en  $t=0$ , puis par une seconde intégration où il convient de poser  $r = r_0 \exp(\xi^2)$ , il est possible de résoudre l'équation obtenue et d'établir une équation pour la courbe enveloppe du faisceau sous la forme :

$$z = R_0 \int_0^{\xi} \sqrt{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)} \exp(u^2) du .$$

iii) En pratique (figure 5), de sévères contraintes dimensionnelles viennent fixer les valeurs des paramètres : la sélection des ions est d'autant meilleure que, en sortie du sélecteur (II.3), le faisceau est fin ; la section de capture des ions par le collecteur suspendu à la balance est également limitée ; pourtant, on souhaite disposer d'une intensité élevée, ce qui accroît la divergence... En négligeant les dispositifs intermédiaires, il est possible, pour fixer la valeur optimale du rayon  $r_0$ , de se ramener au problème suivant : le faisceau, « cylindrique » à la sortie du sélecteur, de rayon  $r_0$ , doit pénétrer en  $z = L$  dans le diaphragme d'entrée du collecteur d'ions, de rayon  $r_1$  fixé.

Quelle est la valeur maximale pouvant être donnée au courant  $I_0$ , et que vaut alors  $r_0 / r_1$ , sachant que le maximum de la fonction  $\left[ \exp(-\xi^2) \int_0^{\xi} \exp(u^2) du \right]$  vaut 0,54 pour  $\xi=0,92$  ? Application numérique :  $L = 0,5$  m ,  $r_1 = 5$  mm et  $V_0 = - 46,3$  kV.

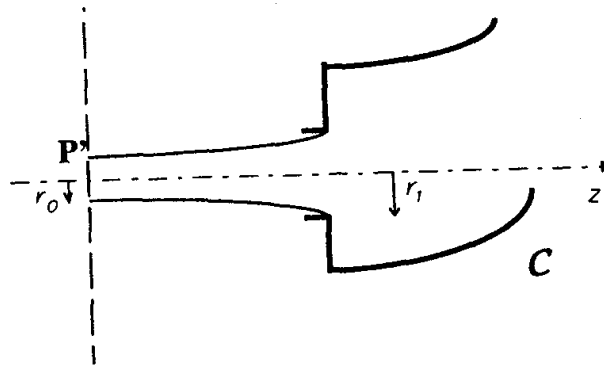


Figure 5 : Géométrie d'entrée dans le collecteur.

pou  
prof  
isola  
  
III.  
s  
«  
d  
s:  
c  
a  
2  
st  
d  
v  
l'  
a.) A  
E  
m  
b.)  
u  
u  
i)  
  
ii  
  
v)  
  
III.2  
suit,  
à un  
W(x)

### Troisième partie

#### Supraconductivité ; étalon de tension à effet Josephson.

Cette partie décrit la réalisation d'un étalon de tension à effet Josephson, qui est utilisé pour évaluer le courant associé à la capture des ions par le collecteur ; une telle référence met à profit les propriétés particulières de la caractéristique « tension-courant » d'une mince jonction isolante séparant deux matériaux supraconducteurs.

**III. 1°. Conduction dans un matériau supraconducteur.** Dans un matériau supraconducteur homogène la résistivité devient nulle en dessous d'une certaine « température critique ». Ce phénomène est la manifestation macroscopique d'un effet d'origine quantique. *On admet* qu'un grand nombre des propriétés d'un supraconducteur simple, à température suffisamment basse, peuvent être retrouvées à l'aide du modèle de conduction suivant : l'interaction entre les électrons par l'intermédiaire du réseau cristallin est attractive ; les électrons sont regroupés en paires, de spin total nul, de charge  $-2e$  et de masse  $2m_e$ , qui possèdent de nombreuses caractéristiques analogues à celles de particules suivant une statistique de Bose-Einstein ; l'état fondamental du supraconducteur (système de paires d'électrons assimilées à des particules uniques) peut être décrit par la fonction d'onde  $\psi(\vec{r}, t) = n_0^{1/2}(\vec{r}, t) \exp[i\theta(\vec{r}, t)]$ , où  $n_0$  et  $\theta$  sont des fonctions réelles. La densité de paires à l'instant  $t$  au point  $\vec{r}$  est donnée par  $\langle \psi | \psi \rangle = |\psi(\vec{r}, t)|^2$ .

a.) A température nulle, tous les électrons participant à la conduction sont regroupés en paires. En déduire que  $2n_0$  est la densité volumique des électrons dans la bande de conduction du métal dans l'état non supraconducteur. Donner un ordre de grandeur de  $n_0$ .

b.) Densité de courant. Le matériau homogène est placé dans une région de l'espace où règne un champ magnétique stationnaire  $\vec{B}(\vec{r})$  (associé au potentiel vecteur  $\vec{A}(\vec{r})$ ).  $n_0$  est alors uniforme et  $\psi$  ne dépend pas de  $t$ .

i) En désignant par  $\hbar = 2\pi\hbar$  la constante de Planck, rappeler l'expression de l'impulsion en mécanique quantique non relativiste en présence d'un potentiel  $\vec{A}(\vec{r})$ . Exprimer l'opérateur qui s'y rapporte. En déduire, en fonction de  $e$ ,  $m_e$  et  $\vec{A}(\vec{r})$  la « vitesse » d'une paire.

ii) Le flux des paires dans le matériau, c'est-à-dire le nombre de paires traversant par unité de temps une section de surface unité perpendiculaire à la vitesse, est donné par  $\langle \psi | \vec{v} | \psi \rangle$ .

En déduire que la densité de courant s'écrit :

$$\vec{j}(\vec{r}) = -\frac{en_0}{m_e} \left\{ \hbar \overrightarrow{\text{grad}}(\theta(\vec{r})) + 2e\vec{A}(\vec{r}) \right\}.$$

iii) Retrouver l'équation phénoménologique de London :  $\overrightarrow{\text{rot}} [\vec{j}(\vec{r})] = -2 \frac{e^2 n_0}{m_e} \vec{B}(\vec{r})$ .

v) On pose  $\lambda_0 = \sqrt{\frac{m_e}{2n_0 e^2 \mu_0}}$ . Montrer que  $\lambda_0$  est une longueur, et préciser pour celle-ci un ordre de grandeur.

**III.2°. Effet Tunnel.** Cette question, largement indépendante de ce qui précède et de ce qui suit, décrit le comportement d'une particule de masse  $m$  placée dans le champ de potentiel  $W(x)$  à une dimension représenté sur la figure 6 ( $W(x) = 0$  sauf pour  $-a \leq x \leq a$  où  $W(x) = W_0 > 0$ , avec  $a > 0$ ), venant des  $x$  négatifs avec une énergie  $E_0$ .

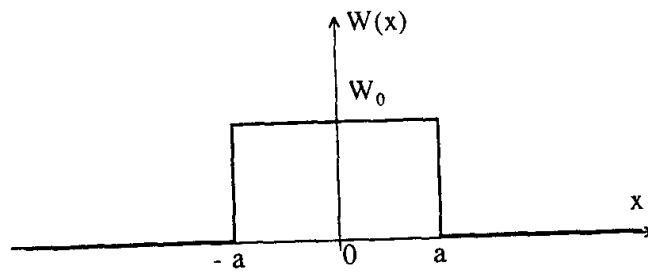


Figure 6 : Barrière de potentiel.

- a.) Approche qualitative. Préciser brièvement, pour les différentes valeurs possibles de  $E_0$ , le comportement de la particule vis à vis de la barrière. Identifier quel(s) paramètre(s) permettent d'apprécier si la particule a, ou non, une probabilité non négligeable de « traverser » la barrière bien que  $E_0 < W_0$ , ou d'être réfléchi bien que  $E_0 > W_0$ .
- b.) Application numérique. En réalité, le « facteur de transmission »  $\mathcal{T}$  de la barrière pour l'énergie  $E_0 < W_0$ , c'est-à-dire la probabilité qu'une mesure permette de localiser la particule en  $x \gg a$  aux temps longs est, lorsque  $E_0$  n'est « pas trop proche » de  $W_0$ , donné par :

$$|\mathcal{T}|^2 \cong \frac{16 E_0 (W_0 - E_0)}{W_0^2} \exp\left\{-\frac{4}{\hbar} a \sqrt{2m(W_0 - E_0)}\right\}$$

Pour une paire d'électrons de masse  $2m_e$ , d'énergie cinétique  $E_0 = 0,5 \text{ eV}$  face à une barrière de largeur  $2a = 1 \text{ nm}$  et de hauteur  $W_0 = 1 \text{ eV}$ , que vaut le facteur de transmission ?

**III.3°. Effet Josephson.** Deux matériaux supraconducteurs identiques A et B (figure 7) sont séparés l'un de l'autre par une couche d'isolant de faible épaisseur (1 nm), formant une « jonction Josephson ».  $\psi_A(t) = n_A^{1/2}(t) \exp[i\theta_A(t)]$  et  $\psi_B(t) = n_B^{1/2}(t) \exp[i\theta_B(t)]$  sont les fonctions d'onde des matériaux supraconducteurs A et B,  $n_A$  et  $n_B$  étant les densités de paires d'électrons supposées uniformes de part et d'autre de la jonction. Les porteurs de charge peuvent traverser la jonction par effet tunnel, ce qui introduit un couplage entre  $\psi_A$  et  $\psi_B$  que l'on décrit à l'aide d'une « interaction de transfert »  $\hbar\omega_T$ . La pulsation  $\omega_T$  résulte de l'effet tunnel mentionné au III.2°; elle est supposée connue.

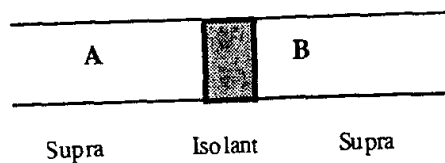


Figure 7 : Jonction Josephson ; schéma de principe.

- a.) Polarisation nulle. A et B sont maintenus au même potentiel. L'équation de Schrödinger pour  $\psi_A$  (resp.  $\psi_B$ ) peut alors se ramener à :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_A(t) = \hbar\omega_T \psi_B(t) \quad \left( \text{resp. } i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_B(t) = \hbar\omega_T \psi_A(t) \right).$$

- i) Écrire les équations qui régissent l'évolution des fonctions  $n_A, n_B, \theta_A, \theta_B$ . Par définition  $\delta(t) = \theta_A(t) - \theta_B(t)$ .
- ii) En supposant que les écarts de  $n_A$  et  $n_B$  à leur valeur stationnaire commune (supraconducteurs identiques) sont très faibles, montrer que  $\delta$  est stationnaire; comment s'exprime, à partir de  $n_A, n_B$ , la densité du flux de paires d'électrons passant de B vers A ?
- iii) En déduire qu'il existe, en l'absence de toute polarisation, un courant  $I_p$  créé par les paires d'électrons au travers de la jonction, de la forme  $I_p = I_0 \sin(\delta)$ , où  $I_0$  est une constante dépendant du matériau dont l'expression n'est pas demandée.
- b.) Jonction polarisée. Une différence de potentiel constante  $V = V_A - V_B$  est désormais maintenue entre A et B, A étant porté par hypothèse au potentiel  $+V/2 > 0$  et B au potentiel  $-V/2$ . Il convient donc d'introduire le terme d'énergie électrostatique associé à une paire dans l'équation de Schrödinger pour  $\psi_A$  et  $\psi_B$  écrite au III.3.a.
- i) Écrire les nouvelles équations qui régissent l'évolution des fonctions  $n_A, n_B, \theta_A, \theta_B$ .
- ii) En supposant à nouveau que les écarts de  $n_A$  et  $n_B$  à leur valeur stationnaire commune sont très faibles, déterminer l'expression du flux de paires d'électrons passant de B vers A en fonction de  $\delta(t)$ . La différence de phase  $\delta(t)$  est-elle stationnaire ?
- iii) En déduire que le courant  $I_p$  créé par les paires d'électrons au travers de la jonction peut s'écrire  $I_p(t) = I_0 \sin(\delta(0) + 2eVt/\hbar)$  où  $\delta(0)$  est la différence de phase à l'instant pris pour origine des temps. Ce courant a-t-il une composante continue ?
- iv) *Application numérique* : déterminer la fréquence d'oscillation de  $I_p$  si  $V = 1$  mV.
- c.) Jonction polarisée et irradiée. En envoyant sur la jonction une onde électromagnétique dans le domaine des radiofréquences, une modulation de la différence de potentiel  $V_A - V_B$  peut être superposée à la polarisation. Alors  $V(t) = V_0 + V_1 \cos(\omega_{RF}t)$ .
- i) Les conclusions obtenues au III.3.b.i et ii restent-elles valables ? Sans reprendre l'analyse détaillée, écrire l'expression de la densité du courant de paires d'électrons.
- ii) Pour qu'il existe dans  $I_p$  une composante continue,  $\omega_{RF}$  doit être un sous-multiple entier de  $2eV_0/\hbar$ . Pourquoi ? Interpréter physiquement ce résultat.
- iii) Les mesures de fréquence peuvent être effectuées avec une grande exactitude. Montrer que l'observation de la caractéristique statique d'une jonction Josephson irradiée permet de matérialiser des références de tension dont l'exactitude est liée à la détermination de constantes physiques fondamentales.

**III.4°. Étalon de courant.** Un autre effet macroscopique d'origine quantique permet d'obtenir des références de résistance de haute stabilité (effet Hall quantique). En combinant l'une de celles-ci avec une référence de tension à effet Josephson, il est possible de construire une référence matérialisant l'unité de courant avec une incertitude relative aujourd'hui proche de  $5 \cdot 10^{-7}$ . Une telle référence est utilisée au IV.

### Quatrième partie

#### Comparateur de courants ; détecteur « SQUID ».

Cette partie se propose de décrire les différentes étapes de la mesure du courant d'ions  $I_0$ , effectuée par comparaison avec l'intensité de référence  $I_{ref}$  obtenue au III. Un comparateur de courant à blindage supraconducteur est utilisé ; la résolution est améliorée par l'emploi d'un détecteur quantique de flux magnétique, le SQUID (acronyme de l'expression anglaise *Superconducting QUantum Interference Device*).

#### IV. 1°. Blindage magnétique par un matériau supraconducteur.

a.) Effet Meissner. Un matériau supraconducteur homogène remplit tout le demi-espace  $z \geq 0$  ; dans l'autre demi-espace vide règne un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B}_a$  dirigé suivant l'axe  $Ox$ , d'orientation parallèle à la surface du matériau.

i) Écrire dans chacune des régions de l'espace les équations satisfaites par  $\vec{B}(\vec{r})$ . Le supraconducteur est un milieu de perméabilité  $\mu_0$  dans lequel est, de plus, vérifiée l'équation de London obtenue au III.1.b :  $\vec{rot} [\vec{j}(\vec{r})] = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_0^2} \vec{B}(\vec{r})$ .

ii) En déduire les expressions de  $\vec{B}(\vec{r})$  et  $\vec{j}(\vec{r})$  dans le supraconducteur et montrer en particulier que  $\vec{j}$  et  $\vec{B}$  peuvent être considérés comme nuls, sauf dans une zone proche de la surface ; exprimer l'épaisseur de cette zone à l'aide de  $\lambda_0$  ; rappeler l'ordre de grandeur obtenu (III.1.b).

iii) Quelle est la direction de la densité de courant au voisinage de la surface dans le supraconducteur ?

b.) Blindage. On considère dans cette question un très long cylindre droit d'axe  $Oz$ , réalisé en matériau supraconducteur, creux, de rayons intérieur et extérieur  $R_{int}$  et  $R_{ext}$  et d'épaisseur grande devant  $\lambda_0$ . Un fil coïncidant avec l'axe  $Oz$  est parcouru par un courant  $I$  non nul et constant.

i) Comment est le champ  $\vec{B}(\vec{r})$  à la surface intérieure du cylindre ? Que valent  $\vec{j}$  et  $\vec{B}$  à l'intérieur du matériau, loin de la surface intérieure ? Quelle est la direction de  $\vec{j}(\vec{r})$  à une distance de l'axe de l'ordre de  $R_{int}$  ? Quelle est l'intensité totale du courant traversant une couronne circulaire centrée sur  $Oz$ , de plan perpendiculaire à l'axe, de rayon intérieur  $R_{int}$  et de largeur égale à quelques  $\lambda_0$  ? (Les résultats obtenus dans la géométrie simple étudiée au IV.1.a peuvent être appliqués sans reprendre les calculs).

ii) Pourquoi est-il nécessaire que, au voisinage immédiat de  $R_{ext}$ , la densité de courant dans le cylindre supraconducteur ne soit pas nulle ? Quelle est l'intensité totale du courant traversant une couronne circulaire centrée sur  $Oz$ , de plan perpendiculaire à l'axe, de rayon extérieur  $R_{ext}$  et de largeur égale à quelques  $\lambda_0$  ? Quelles propriétés de symétrie possède la distribution extérieure de la densité de courant ?

iii) Déterminer l'expression du champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r})$  en un point extérieur au cylindre supraconducteur. On admet dans toute la suite que, compte tenu de l'effet Meissner, cette expression  $\vec{B}(\vec{r})$  est indépendante de la forme et de la position précise du fil à l'intérieur du cylindre.



- iv) Le cylindre contient désormais deux fils distincts parcourus par des courants  $I_1$  et  $I_2$  (comptés algébriquement selon l'orientation de l'axe Oz). Quelle relation  $I_1$  et  $I_2$  doivent-ils satisfaire pour que  $\vec{B}(\vec{r})$  à l'extérieur soit identiquement nul ?

**IV.2°. SQUID.** Il est possible de mettre à profit les propriétés des jonctions supraconductrices pour former un détecteur de flux magnétique de haute résolution.

a.) Quantification du flux. On considère dans cette question un anneau supraconducteur de révolution autour de Oz ; C désigne le cercle central de cet anneau, dont le rayon d'une section méridienne est supposé grand devant  $\lambda_0$ . Soit  $\Phi_i$  le flux magnétique au travers de la surface limitée par C

i) Quelles sont, avec IV.1.a.ii, les valeurs de  $\vec{j}$  et  $\vec{B}$  en un point de C ?

ii) En utilisant l'expression de la densité de courant obtenue au III.1.b, exprimer  $\Phi_i$  à l'aide de la fonction  $\theta$  décrivant la phase de la densité des paires dans le matériau.

iii) En déduire que  $\Phi_i$  doit être un multiple entier d'une quantité  $\Phi_0$ . Donner l'expression de  $\Phi_0$ .

iv) *Application numérique :* quel est l'ordre de grandeur de  $\Phi_0$  ?

v) A une température supérieure à la température critique (état normal), l'anneau métallique est plongé dans un champ magnétique stationnaire d'origine extérieure créant au travers de C un flux  $\Phi_a$ . Lorsque la température est ensuite abaissée en dessous du seuil d'apparition de la supraconductivité, montrer que la condition trouvée au IV.2.a.iii ne peut être satisfaite que s'il existe dans l'anneau un courant permanent d'intensité  $I_s$  permettant d'assurer l'égalité :  $\Phi_i = \Phi_a + L I_s = q \frac{h}{2e}$ , où q est un entier et où L désigne le coefficient d'auto-induction de l'anneau.

b.) SQUID unijonction. Un anneau filiforme analogue à celui du IV.2.a est interrompu parallèlement à une section méridienne et refermé par une zone isolante de très faible épaisseur constituant une jonction Josephson non polarisée (III.3.a).

i) Comment s'écrit, en régime stationnaire, la condition de quantification du flux magnétique total  $\Phi_i$  au travers de la surface limitée par C ? Comme au III.3,  $\delta = \theta_A - \theta_B$  désigne la différence de phase de part et d'autre de la jonction.

ii) En supposant que le courant  $I_s$  dans l'anneau est entièrement dû aux paires d'électrons, en déduire :  $\frac{\Phi_a}{\Phi_0} + \frac{1}{2\pi} [\mathcal{L} \sin(\delta) + \delta] = q$ , où q est un entier, où  $I_0$ , défini au III.3.a, vérifie

$$I_s = I_0 \sin(\delta) \text{ et où } \mathcal{L} = 2\pi L I_0 / \Phi_0 \quad (\mathcal{L} > 0).$$

iii) La détermination du flux  $\Phi_i$  n'est donc plus aussi simple qu'au IV.2.a. Pour une valeur donnée de  $\Phi_a$ , les équations ci-dessus donnent  $\delta$  et  $I_s$  et permettent de déterminer  $\Phi_i$  pour une valeur donnée de q. Représenter graphiquement, en unités  $\Phi_0$ , l'allure des variations de  $\Phi_i$  en fonction de  $\Phi_a$  pour q=0, en montrant successivement que :

- $\Phi_i(\Phi_a)$  est impaire pour q=0 ;
- pour tout  $\Phi_a$  et tout p entier,  $\Phi_i(\Phi_a + p\Phi_0) = \Phi_i(\Phi_a) + p\Phi_0$ ,  
(ce qui limite l'étude de la courbe à l'intervalle  $[0, 1/2]$  (en unités  $\Phi_0$ )) ;
- la courbe comprend tous les points de la première bissectrice de coordonnées demi-entières ou entières ;

- pour  $\mathcal{L} \ll 1$ , la courbe suit la première bissectrice ;
- pour  $0 < \mathcal{L} \leq 1$ ,  $\Phi_1(\Phi_2)$  est une fonction monotone ;
- pour  $1 < \mathcal{L}$ , un phénomène de bistabilité se manifeste, et la courbe a l'allure représentée sur la figure 8, qui a été tracée dans le cas particulier  $\mathcal{L} = 5$ .

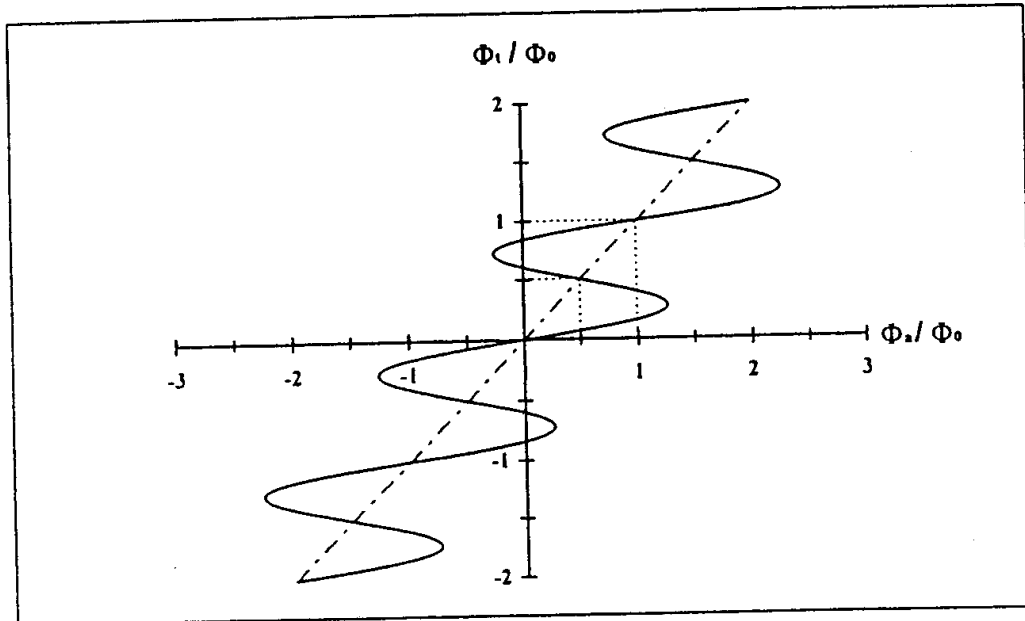


Figure 8 : Caractéristique du SQUID.

- iv) L'anneau s'appelle un SQUID. Son comportement dans le cas particulier  $q=0$  et  $\mathcal{L} = 5$  peut être déduit de la figure 8. Lorsque le flux appliqué  $\Phi_2$  croît lentement d'une valeur nulle à une valeur égale à  $1,5 \Phi_0$ , puis diminue jusqu'à une valeur opposée, avant de revenir à la valeur 0, décrire, pas à pas, l'évolution de la valeur du flux magnétique  $\Phi_1$  au travers du circuit. Comment qualifier le comportement d'un tel système ?
- c.) Utilisation du SQUID. Le circuit étudié est représenté sur la figure 9. Un générateur de courant sinusoïdal, d'intensité  $I_\omega$  et de pulsation  $\omega_0$ , alimente un circuit résonnant représenté par une bobine d'inductance  $L_0$  et de résistance  $r_0$  en parallèle avec un condensateur de capacité  $C_0$ . Ce circuit a un coefficient de qualité  $Q_0$  très élevé ( $Q_0 \gg 1$ ). Un amplificateur opérationnel supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire permet de mesurer la tension  $V_\omega$  aux bornes du circuit. Un faible couplage inductif, caractérisé par un coefficient d'inductance mutuelle  $M$ , est réalisé entre un anneau SQUID  $S$  (représenté par l'anneau interrompu d'une croix, et dont les paramètres correspondent à  $\mathcal{L} = 5$ ) et la bobine.
- i) En l'absence du SQUID, comment s'écrit la condition de résonance du circuit ? Lorsque  $\omega_0$  vérifie cette condition, comment s'écrit la tension  $V_\omega$  détectée en fonction de  $I_\omega$ ,  $r_0$  et  $Q_0$  ?

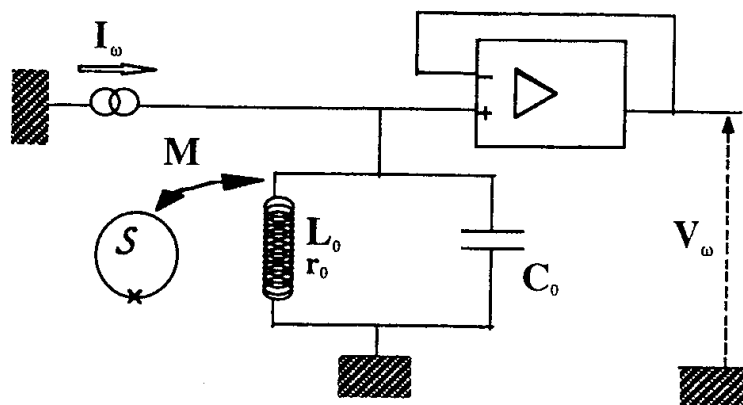


Figure 9 : Circuit de détection associé au SQUID.

- ii) En présence de  $S$ , la condition de résonance n'est pas significativement modifiée, et reste satisfaite par  $\omega_0$ . Exprimer l'amplitude du flux  $\Phi_\omega$  appliqué à  $S$  par le couplage avec le circuit résonnant. Donner, à partir du comportement du SQUID décrit sur la figure 8, l'allure des variations de la tension  $V_\omega$  détectée lorsque  $I_\omega$ , initialement nulle, devient supérieure à la valeur  $I_\omega^{(0)}$  pour laquelle  $\Phi_\omega$  devient égal à  $\Phi_0$ .
- iii) Désormais, la condition  $I_\omega = I_\omega^{(0)}$  est supposée vérifiée. Un flux magnétique supplémentaire constant  $\Phi_{ext}$  d'origine externe est appliqué à  $S$ . Montrer qualitativement que la tension  $V_\omega$  mesurée dépend de  $\Phi_{ext}$  selon une fonction périodique dont l'allure sera précisée.  $S$  peut-il être considéré comme un détecteur de flux ? Comment obtenir la meilleure sensibilité ?
- iv) Le système étudié ici peut également être utilisé comme détecteur de « zéro » pour le flux magnétique. Dans quelles conditions faut-il se placer pour obtenir la meilleure limite de résolution ?
- v) Quels phénomènes limitent, en pratique, les performances de tels détecteurs ?

#### IV.3°. Comparateur de courants.

Les propriétés étudiées au IV.1. restent vraies lorsque le cylindre supraconducteur de grande longueur étudié est remplacé par un grand tore creux de rayon intérieur  $R_T$ , dans lequel les deux fils parcourus par les courants évoqués au IV.1.b.iv peuvent effectuer plusieurs tours. Des dispositifs spécifiques non décrits ici permettent d'introduire, sans dommage pour le blindage, les fils à l'intérieur du tore.

Le premier fil, qui comporte  $N_0$  tours, est parcouru par le courant à mesurer  $I_0$  étudié au II, permettant le comptage des ions. Le second fil ( $N_{ref}$  tours) est parcouru par un courant ajustable  $I_{ref}$  obtenu à partir des étalons étudiés au III. Une bobine circulaire de rayon inférieur à  $R_T$  mais très proche de  $R_T$ , comportant  $n_T$  tours, est placée hors du blindage sur l'axe du tore et dans le plan médian de celui-ci, afin de détecter le flux créé au travers de la surface centrale. L'inductance de cette bobine est notée  $L_T = \mu_0 k_T n_T^2$  (où  $k_T$  ne dépend que de la géométrie). Elle est montée en série dans un circuit couplé au SQUID  $S$  inclus dans le système étudié au IV.2.c, par l'intermédiaire d'une autre bobine d'inductance  $L'$  dont le coefficient d'induction mutuelle avec  $S$  est noté  $M'$  (figure 10).

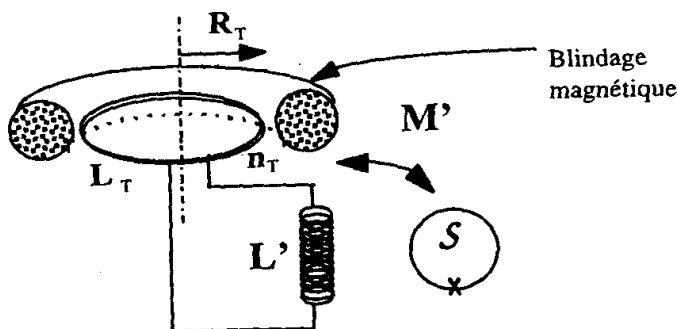


Figure 10 : Comparateur de courants ; capteur de flux à SQUID.

a) Choix de  $n_T$ . Soit  $\delta I = N_0 I_0 + N_{ref} I_{ref}$  le courant total (compté algébriquement) dans le tore.

i) Exprimer successivement, en faisant les hypothèses nécessaires :

- \* le flux créé par  $\delta I$  dans la bobine d'inductance  $L_T$  ;
- \* le courant dans le circuit assurant le couplage :
- \* le flux  $\Phi_{ext}$  appliqué à  $S$ .

ii) Comment faut-il choisir  $n_T$  pour que  $\Phi_{ext}$  soit maximal ? Cette condition est supposée réalisée dans la suite.

iii) Application numérique : déterminer  $n_T$  si  $L' = 2 \mu H$ ,  $R_T = 6 \text{ cm}$ . Une valeur approchée, même grossière, convient pour estimer  $k_T$ .

b) Mesure de  $I_0$ . Le bruit propre du SQUID limite, en pratique, la résolution du système. Ce bruit est caractérisé par sa densité spectrale de puissance, ou plus simplement par la valeur efficace  $\Phi_b^*$  des fluctuations spontanées du flux dans  $S$  à une fréquence donnée : la valeur efficace des fluctuations du flux lorsque  $S$  est associé à un système de détection de bande passante  $\Delta$  est donc  $(\Phi_b^* \Delta^{1/2})$ .

i) Quelle est la valeur minimale du courant pouvant être détecté par le système étudié au IV.2°.c ? Application numérique:  $\Phi_b^*/\Phi_0 = 10^{-4} \text{ Hz}^{-1/2}$ ,  $M' = 10 \text{ nH}$ ,  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^4 \text{ Hz}$  et  $Q_0 = 10^3$ .

ii) L'utilisation de  $S$  en « détecteur de zéro » permet d'imposer  $N_0 I_0 + N_{ref} I_{ref} = 0$ . Une référence de courant de valeur  $I_{ref} = 1 \text{ mA}$ , dont l'exactitude correspond aux meilleures performances réalisables (III.4), est disponible ; compte tenu de l'ordre de grandeur de  $I_0$  obtenu au II, comment faut-il choisir  $N_0/N_{ref}$  ? Quelle valeur minimale convient-il de donner à  $N_0$  pour que la contribution à l'incertitude de mesure de  $I_0$  apportée par le comparateur de courants ne soit pas la contribution dominante ?

con  
de r

comp

C  
fonction  
28 juillet

L'u  
rigoureux

Si, u  
sa copie et p