

J. 4434

**78.0.3**

repère à reporter sur la copie

**SESSION DE 2001**

**concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés**

**section : sciences physiques**

**option : physique**

problème de physique

**Durée : 6 heures**

*Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*Tout document et de tout autre matériel électronique sont interdits.*

**Tournez la page S.V.P.**

## DETECTION D'ONDES GRAVITATIONNELLES PAR METHODE INTERFEROMETRIQUE

*Les cinq parties de ce problème sont indépendantes.*

On rappelle la valeur des constantes fondamentales utiles pour ce problème :

- constante de Planck :  $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
- constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
- vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .

On utilisera la notation complexe  $E(\vec{r}, t) = E e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$  pour le champ électrique d'une onde électromagnétique plane de vecteur d'onde  $\vec{k}$  et de pulsation  $\omega$ .  $E$  est l'amplitude complexe de l'onde plane, et  $|E|^2$  sera appelé « intensité » de l'onde.

On rappelle d'autre part que dans un processus aléatoire obéissant à la statistique de Poisson, l'écart-type  $\Delta N$  du nombre d'événements mesuré pendant un intervalle de temps donné est égal à la racine carrée de sa valeur moyenne  $\langle N \rangle$  :

$$\Delta N = \sqrt{\langle N \rangle}$$

### PREAMBULE

Les équations d'Einstein de la relativité générale montrent que lorsque des masses sont en mouvement relatif, elles peuvent rayonner dans certaines conditions des **ondes gravitationnelles** (abréviation : **OG**) qui se propagent dans toutes les directions à la vitesse  $c$  de la lumière, de la même manière que des charges en mouvement sont susceptibles de rayonner des ondes électromagnétiques. Lorsqu'elles sont produites par des masses en mouvement à l'échelle terrestre, ces ondes sont extrêmement faibles et ont un effet totalement négligeable. Lorsqu'elles sont produites par des événements stellaires « catastrophiques », comme des supernovae, elles produisent sur les masses terrestres un effet très faible, mais mesurable par des méthodes d'interférométrie optique poussées à leurs limites extrêmes de sensibilité. De tels détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles (abréviation : **DIOG**) sont à l'heure actuelle en construction dans différents pays (projet américain LIGO, projet franco-italien VIRGO). L'objet de ce problème est de décrire dans ses grandes lignes le fonctionnement de ces détecteurs et d'étudier les facteurs qui limitent leur sensibilité.

#### *Caractérisation d'une onde gravitationnelle*

Un des effets d'une OG est de modifier la propagation des ondes électromagnétiques : *l'OG modifie très légèrement l'indice de réfraction* en tout point  $M$  de l'espace. Cet effet est anisotrope : une onde lumineuse qui se propage dans la direction de vecteur unitaire  $\vec{u}$  voit un indice égal à

$$n(\vec{r}, t) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} u_i u_j h_{ij}(\vec{r}, t) \quad (1)$$

où  $u_i$  ( $i=x,y,z$ ) désigne les coordonnées cartésiennes du vecteur  $\vec{u}$ . Les quantités  $h_{ij}(\vec{r},t)$  caractérisent l'amplitude de l'OG. Par exemple, une supernova se produisant dans l'amas de la Vierge engendre une onde gravitationnelle sous la forme d'un « train d'onde » oscillant à une fréquence  $\nu_{OG}$  voisine de 1kHz pendant quelques millisecondes. Lorsque l'OG arrive au voisinage de la terre, les amplitudes  $h_{ij}(\vec{r},t)$  de cette onde sont de l'ordre de  $10^{-21}$ . De tels trains d'onde se reproduisent au rythme moyen de quelques événements par an.

#### *Schéma général de l'interféromètre*

La figure 1 donne une vue générale d'un DIOG (en l'occurrence VIRGO, en cours de construction en Italie). Il s'agit essentiellement d'un interféromètre de Michelson dont les bras, formés de tuyaux sous vide de 1m de diamètre, ont une longueur  $L=3\text{ km}$ , et qui est éclairé par un laser de grande pureté spectrale et de forte puissance contenu dans le bâtiment central. Les miroirs extrêmes  $M_1$  et  $M_2$ , et la séparatrice  $S$ , sont isolés des vibrations terrestres. L'anisotropie de l'effet d'indice provoqué par le passage de l'OG provoque une variation de la figure d'interférence qui est mesurée en sortie de l'interféromètre.



*Figure 1: Vue générale d'un détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles.*

### **I. PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT DU DISPOSITIF**

1) La figure 2 donne un schéma d'un interféromètre de Michelson, dont les bras OA et OB, de directions respectives  $Ox$  et  $Oy$  ont pour longueurs géométriques  $L_1$  et  $L_2$ , éclairé par un laser de pulsation  $\omega$  et de longueur d'onde dans le vide  $\lambda = 1,0\ \mu\text{m}$ . On suppose qu'il est soumis à une OG se propageant le long de l'axe Oz, qui s'écrit de manière générale :

**Tournez la page S.V.P.**

$$[h_{ij}(\vec{r}, t)] = [h_{ij}] \cos \left[ 2\pi\nu_{OG} \left( t - \frac{z}{c} \right) \right] \quad \text{avec} \quad [h_{ij}] = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & 0 \\ h_2 & -h_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

avec  $\nu_{OG} = 1\text{kHz}$ . L'OG a ainsi deux polarisations possibles, d'amplitudes  $h_1$  et  $h_2$ .

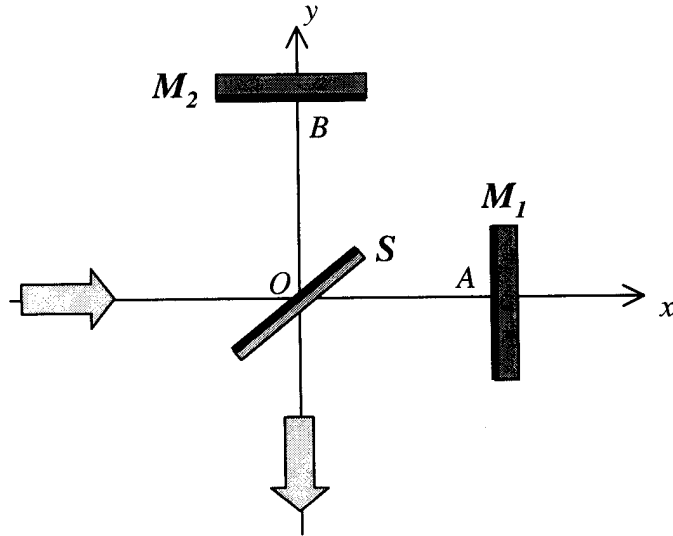


Figure 2 Interféromètre de Michelson

Quelle est la différence de chemin optique  $\delta(t)$  entre les deux bras de l'interféromètre ? Montrer qu'elle ne dépend que de la polarisation  $h_1$ . On suppose  $L_1 = L_2 = L = 3\text{km}$  et  $h_1 = 10^{-21}$ . Comparer la valeur maximale de  $\delta(t)$  avec la taille d'un atome, puis d'un noyau d'atome. Quelle est l'ordre d'interférence maximal ?

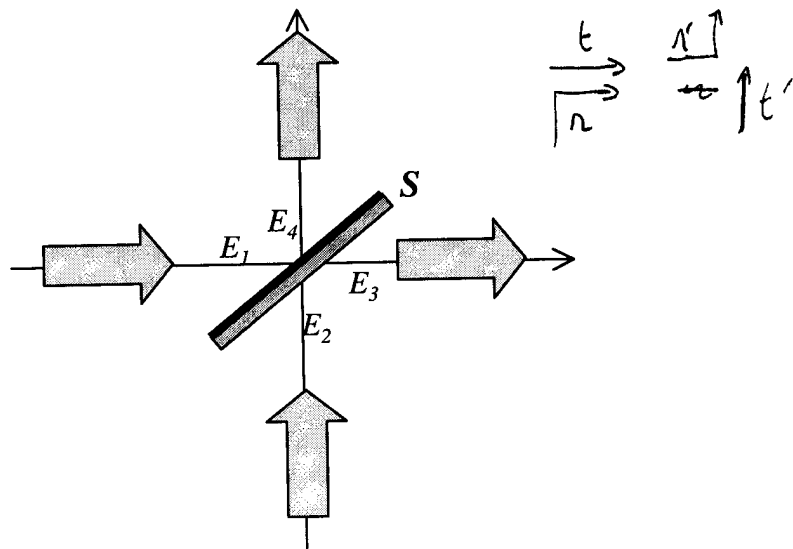


Figure 3 lame séparatrice

2) La lame séparatrice S couple de manière générale deux champs incidents, d'amplitude complexe  $E_1$  et  $E_2$  immédiatement avant la traversée de la face supérieure de la lame, à deux champs sortants  $E_3$  et  $E_4$  immédiatement après celle-ci (voir figure 3). Sa face inférieure a subi un traitement antireflet et transmet parfaitement les champs. Les relations générales entre les amplitudes complexes de ces champs s'écrivent

$$\begin{aligned} E_3 &= tE_1 + rE_2 \\ E_4 &= r'E_1 + t'E_2 \end{aligned} \quad (3)$$

où  $r$ ,  $r'$ ,  $t$ ,  $t'$  sont les coefficients complexes de réflexion et de transmission en amplitude de S. La séparatrice étant supposée sans pertes, que peut-on dire de la somme des puissances lumineuses incidentes par unité de surface et de la somme des puissances lumineuses sortantes par unité de surface ? En déduire trois relations reliant entre eux les différents coefficients complexes. Quelles sont les relations déduites du fait que la lame est supposée **semi-réfléchissante** ? Montrer que le choix :

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}, t' = \frac{1}{\sqrt{2}}, r = \frac{1}{\sqrt{2}}, r' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

est compatible avec l'ensemble de ces relations.

On supposera enfin que les relations (3) avec les coefficients (4) sont aussi utilisables quand on inverse les sens de propagation des différents champs.

3) Le faisceau laser est envoyé selon l'axe  $Ox$  sur la lame séparatrice S de l'interféromètre de la figure 2, qui est située à l'origine des coordonnées, fait un angle de  $45^\circ$  avec l'axe  $Ox$ , et est caractérisée par les coefficients (4). Le faisceau laser est assimilable localement à une onde électromagnétique plane scalaire  $E_1 e^{i(kx - \omega t)}$  avec  $k = 2\pi/\lambda$ . Les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  sont supposés parfaitement réfléchissants, de coefficient de réflexion en amplitude égaux à  $-1$ . Ils sont situés à des distances respectives  $L_1$  et  $L_2$  de la séparatrice située en O. Ils sont perpendiculaires à la direction de propagation des ondes incidentes.

**3.a)** Montrer qu'on peut supposer avec une bonne approximation que l'OG a une amplitude constante sur l'ensemble de l'interféromètre ainsi que pendant sa propagation dans l'interféromètre.

*Dans toute la suite du problème, on supposera que cette valeur constante est l'amplitude maximale de l'OG, dont la valeur numérique sera prise égale à  $h_1 = 10^{-21}$ .*

**3.b)** En utilisant les relations (3) et (4), déterminer l'amplitude du champ de sortie de l'interféromètre  $E_2 e^{i(-ky - \omega t)}$  se propageant le long des  $y$  négatifs et résultant de l'interférence entre les ondes se propageant dans les deux bras OA et OB en présence de l'OG. On négligera dans ce calcul les effets liés à l'épaisseur de la lame séparatrice. En déduire l'intensité correspondante  $I_2 = |E_2|^2$  en fonction de l'intensité incidente  $I_1 = |E_1|^2$ .

**3.c)** Mêmes questions pour le champ  $E_1' e^{i(-kx - \omega t)}$  revenant vers le laser, le long des  $x$  négatifs, et son intensité  $I_1'$ . Vérifier que l'ensemble de l'interféromètre est toujours un système sans pertes.

**4.a)** On appelle  $\varphi_0$  le déphasage des rayons qui interfèrent sur la lame semi-réfléchissante en l'absence d'OG. Montrer qu'en présence de l'OG, la relation donnant l'intensité en sortie de l'interféromètre  $I_2$  en fonction de l'intensité entrante  $I_1$  s'écrit, à l'ordre le plus bas en  $h_1$  :

$$I_2 \approx I_1 \left( \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - kLh_1 \sin \varphi_0 \right) \quad (5)$$

avec  $L = (L_1 + L_2)/2$ . En déduire la relation liant la puissance lumineuse totale  $P_2$  mesurée en sortie de l'interféromètre en fonction de la puissance  $P_1$  du faisceau laser incident (les faisceaux lumineux sont supposés garder une section droite constante dans tout le dispositif).

**4.b)** Pour quelle valeur de  $\varphi_0$  la variation de puissance mesurée lors du passage de l'OG est-elle maximale ? Calculer numériquement la valeur de cette variation pour  $P_1 = 10W$ .

**5)** Le signal caractéristique de l'OG, très faible, peut être masqué par des fluctuations incontrôlables, ou bruit, de l'intensité de la lumière. Le niveau de ce bruit va limiter la sensibilité ultime du dispositif.

**5.a)** Tout faisceau lumineux est constitué de photons d'énergie  $\hbar\omega$ . Déterminer le nombre moyen  $N$  de photons qui traversent pendant un intervalle de temps  $T$  tout plan perpendiculaire à la direction de propagation pour un faisceau de puissance  $P$ . Application numérique pour  $P = 10W, T = 10^{-4}s$ .

**5.b)** On suppose que les photons du faisceau de sortie sont aléatoirement répartis dans celui-ci, et obéissent à une loi statistique de Poisson : le nombre de photons mesuré présente donc des fluctuations, appelées « bruit de photons », qui vont affecter la précision de la mesure. Quel est l'écart type  $\Delta N_2$  des fluctuations du nombre de photons mesuré en sortie de l'interféromètre pendant un temps de mesure  $T$  en fonction de la puissance  $P_2$  ? En déduire l'écart type  $\Delta W_2$  des fluctuations de l'énergie lumineuse mesurée en sortie d'interféromètre en intégrant pendant le temps  $T$  la puissance lumineuse  $P_2$  en l'absence d'OG.

**5.c)** On utilise un temps de mesure  $T$  petit par rapport à la période de l'OG. Quelle est la variation de l'énergie lumineuse moyenne  $\delta W_{OG}$  mesurée pendant le temps  $T$  et provoquée par l'OG ?

La plus petite valeur de  $h_1$  mesurable, notée  $h_{\min}$ , est celle qui donne lieu à un signal  $\delta W_{OG}$  égal au bruit  $\Delta W_2$  (rapport signal à bruit égal à 1). Calculer  $h_{\min}$  pour un déphasage quelconque  $\varphi_0$  de l'interféromètre

**5.d)** Montrer que la plus grande sensibilité de l'interféromètre est atteinte pour  $\varphi_0 = 0$ , où l'on a :

$$h_{\min} = \frac{1}{4\pi L} \sqrt{\frac{hc\lambda}{P_1 T}} \quad (6)$$

(où  $h$  est la constante de Planck). Quelle est alors la puissance  $P_2$  mesurée en l'absence d'OG ?

**5.e)** Déterminer numériquement  $h_{\min}$  donnée par la relation (6) pour les valeurs précédemment données des différents paramètres. Le dispositif étudié ici permet-il de détecter les OG provoquées par les supernovae de l'amas de la Vierge, situées à environ 100 années-lumière, d'amplitude  $h_1 = 10^{-21}$  ? Sachant que l'amplitude d'une OG décroît, comme une onde électromagnétique, de manière inversement proportionnelle à la distance à la source, en déduire la distance à laquelle doit se produire une supernova pour qu'elle soit détectable par ce dispositif.

## II. AMELIORATION DE LA SENSIBILITE DU DISPOSITIF INTERFEROMETRIQUE

1) Passer en revue les différents paramètres susceptibles de diminuer le signal minimum détectable. Donner les raisons physiques ou économiques pour lesquelles il n'est pas possible de les modifier pour améliorer la sensibilité du dispositif d'un ordre de grandeur ou plus.

La solution adoptée dans les DIOG, et étudiée dans les questions suivantes de cette partie, consiste à inclure des interféromètres de Fabry-Perot dans chacun des bras de l'interféromètre de la figure 2 pour augmenter sa sensibilité.

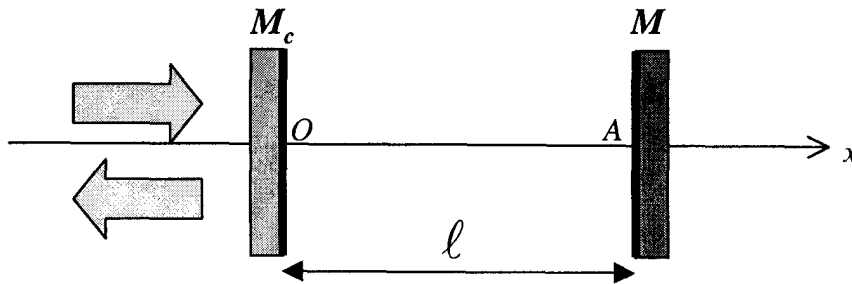


Figure 4 Interféromètre de Fabry-Perot

2) On considère l'interféromètre de Fabry-Perot de la figure 4.  $M_c$  est le miroir de couplage, supposé sans pertes, situé en  $x=0$ , dont le coefficient de réflexion en amplitude vaut  $r$ , supposé réel positif, pour une onde venant des  $x$  négatifs et  $-r$  pour une onde venant des  $x$  positifs. Son coefficient de transmission vaut  $t = \sqrt{1-r^2}$  pour les ondes se propageant dans les deux sens.  $M$  est un miroir parfaitement réfléchissant, situé à l'abscisse  $\ell$ , de coefficient de réflexion égal à  $-1$  pour une onde venant des  $x$  négatifs. Les deux miroirs sont perpendiculaires à l'axe  $Ox$  et l'ensemble est soumis à l'OG.

2.a) On envoie sur le dispositif une onde plane venant des  $x$  négatifs, de pulsation  $\omega$  et d'amplitude complexe  $E$  en  $x = 0^-$ , juste avant le miroir  $M_c$  supposé infiniment mince. On appelle  $\varphi$  le déphasage subi par l'onde lumineuse lorsqu'elle se propage sur la longueur  $\ell$ . En resommant les ondes partielles ayant effectué des nombres différents d'aller-retour dans la cavité, donner l'expression de l'amplitude complexe  $E_r$  en  $x = 0^-$  de l'onde sortant du dispositif. Comparer l'intensité de cette onde à l'intensité de l'onde incidente. Ce résultat pouvait-il être prévu ? Quel est alors l'effet du Fabry-Perot sur l'onde réfléchie ?

2.b) On se place dans le cas où la longueur  $\ell$  est un multiple de la demie longueur d'onde du laser. Montrer qu'à l'ordre le plus bas en  $h_1$  on a

$$E_r = -E \left[ 1 - ik\ell h_1 \left( \frac{1+r}{1-r} \right) \right] \quad (7)$$

Comparer avec l'expression que l'on aurait dans la même géométrie en l'absence du miroir  $M_c$  (cas où  $r = 0$ ).

3) Le DIOG complet est décrit schématiquement sur la figure 5. Il comporte dans chacun de ses bras un interféromètre de Fabry-Perot de longueur  $\ell$  analogue à celui considéré dans la

**Tournez la page S.V.P.**

question II.2. On appelle  $\ell_1$  et  $\ell_2$  les distances (de l'ordre du mètre) séparant le point O de la lame S des points A' et B' où se trouvent les miroirs de couplage  $M_{c1}$  et  $M_{c2}$ . On éclaire le dispositif par un faisceau laser analogue à celui de la question I.3.

3.a) En utilisant des expressions dérivées de la formule (7) pour déterminer les ondes réfléchies aux points A' et B' à partir des ondes incidentes en ces mêmes points et de la valeur des amplitudes de l'OG dans chacun des deux bras de l'interféromètre de Michelson, déterminer la nouvelle expression de l'amplitude du champ  $E_2$  sortant de l'interféromètre par les y négatifs. On négligera l'effet de l'OG sur les trajets très courts  $OA' = \ell_1$  et  $OB' = \ell_2$ .

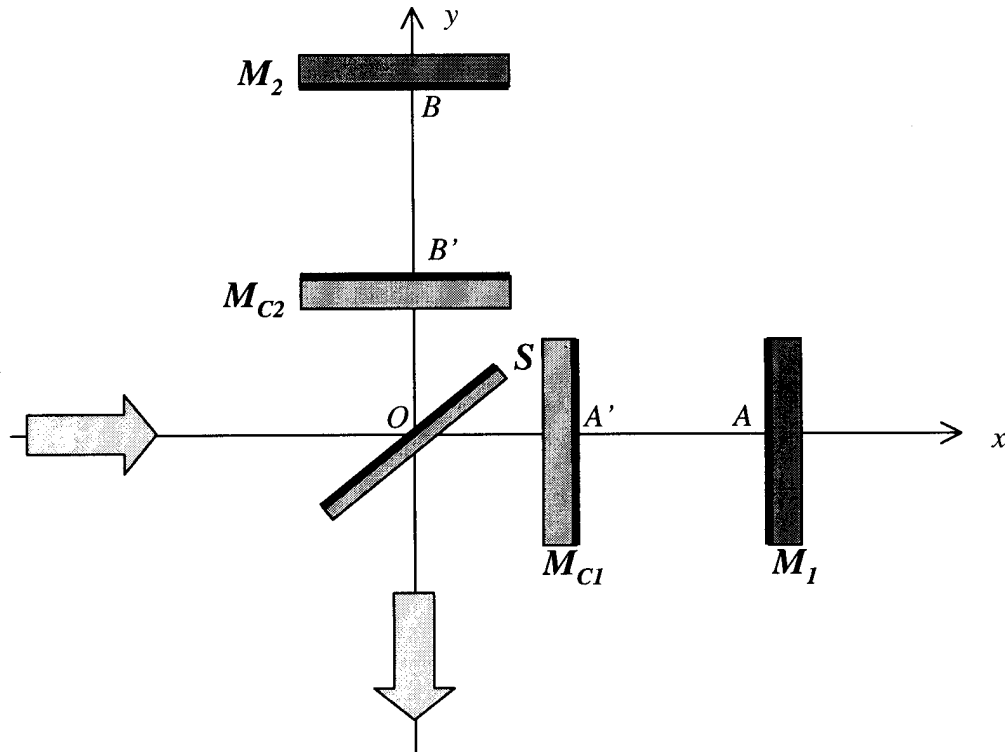


Figure 5 Interféromètre DIOG

3.b) Montrer que, quel que soit le déphasage  $\varphi_0$  entre les deux bras de l'interféromètre, la variation d'énergie lumineuse provoquée par une OG,  $\delta W_{OG}$ , est multipliée par un facteur  $F$  par rapport à l'interféromètre de Michelson simple de la question I.4.b, avec :

$$F = \frac{1+r}{1-r} \quad (8)$$

L'ajout des interféromètres de Fabry-Perot modifie-t-il le bruit  $\Delta W_2$  en l'absence d'OG, pour une puissance incidente constante ? Qu'en résulte-t-il pour  $h_{\min}$  ?

3.c) Donner la valeur de  $F$  dans le cas où les miroirs de couplage ont un facteur de transmission *en intensité* de 1%. Quelle est maintenant la nouvelle valeur de  $h_{\min}$  ? Conclusion ?



### III. ISOLATION SISMIQUE DES ELEMENTS D'OPTIQUE

Si les différents miroirs sont liés rigidement à la terre, l'interféromètre détectera essentiellement des phénomènes d'origine sismique. Les miroirs sont donc reliés à la terre par des isolateurs mécaniques, dont cette partie donne une idée du fonctionnement.

1) Le miroir, d'abscisse  $x_1(t)$ , de masse  $fm$ , où  $f$  est un nombre sans dimensions, est suspendu par un fil sans raideur et de masse négligeable à un support en un point d'abscisse  $x_0(t)$ , et soumis à une force d'amortissement  $-\frac{fm}{\tau} \frac{dx_1}{dt}$ . On assimilera l'ensemble à un pendule simple de longueur  $L_p$  et on appelle  $g$  l'accélération de la pesanteur, dirigée selon l'axe  $Oz$  dans le sens négatif (voir figure 6).

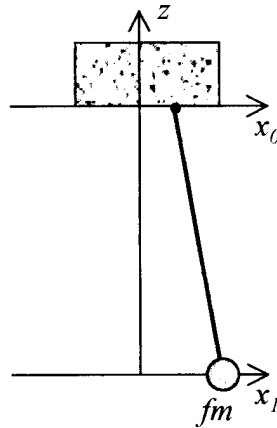


Figure 6 Suspension simple du miroir

1.a) Établir l'équation permettant de déterminer  $x_1(t)$  connaissant  $x_0(t)$  à la limite des petits déplacements. On introduira la pulsation propre d'oscillation du système, notée  $\omega_0$ .

1.b) On introduit les transformées de Fourier temporelles de ces abscisses

$$\tilde{x}_i(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i(t) e^{i\omega t} dt \quad (9)$$

avec  $i=0,1$ . Trouver la relation liant  $\tilde{x}_0(\omega)$  et  $\tilde{x}_1(\omega)$ . Expérimentalement, la pulsation de mesure est la pulsation d'oscillation de l'onde gravitationnelle ( $\omega/2\pi = 1\text{kHz}$ ), et on a  $\omega_0/2\pi = 0.2\text{Hz}$ ,  $\tau \approx 100\text{s}$ . Donner une valeur approchée de l'amplitude de l'oscillation du miroir pour une oscillation purement sinusoïdale du support d'amplitude  $1\mu\text{m}$ . Cette isolation est-elle suffisante pour que l'oscillation du miroir ne perturbe pas l'observation de la différence de marche induite par l'OG ?

2) Le DIOG contient en fait un dispositif d'isolation formé de  $N$  pendules, tous assimilables à des pendules simples de longueur  $L_p$ , de masse  $m$ , et de temps d'amortissement  $\tau$ , à l'exception du dernier, toujours de même longueur et même temps d'amortissement, mais dont la masse, égale à  $fm$  ( $f$ : nombre sans dimension), est celle du miroir, assimilé à une masse ponctuelle (voir figure 7). Soient  $x_0(t)$  la position du support,  $x_j(t)$  la position de la  $j^{\text{ème}}$  masse ( $j = 1, \dots, N-1$ ) et  $x_N(t)$  la position du miroir.  $\tilde{x}_j(\omega)$  désigne la transformée de Fourier de ces quantités.

**Tournez la page S.V.P.**

2.a) Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la  $j^{\text{ème}}$  masse, ainsi que celle du mouvement du miroir, à la limite des petits déplacements. En déduire les relations algébriques reliant  $\tilde{x}_{j+1}(\omega)$ ,  $\tilde{x}_j(\omega)$  et  $\tilde{x}_{j-1}(\omega)$ , ainsi que celle reliant  $\tilde{x}_N(\omega)$  et  $\tilde{x}_{N-1}(\omega)$ . On utilisera les notations

$$A_0 = \frac{-\omega^2 + i\omega/\tau}{\omega_0^2}, \quad A_j = A_0 + 2(N + f - j) - 1 \quad \text{et} \quad A_N = A_0 + 1 \quad (10)$$

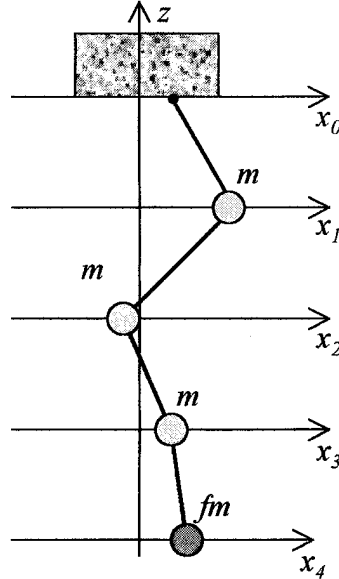


Figure 7 Suspensions multiples du système d'isolation sismique

2.b) En déduire que l'on peut écrire

$$\tilde{x}_j(\omega) = B_j \tilde{x}_N(\omega) \quad \text{pour } j = 0, \dots, N \quad (11a)$$

avec

$$B_N = 1, \quad B_{N-1} = A_N, \quad B_{j-1} = \frac{A_j B_j - (N + f - j - 1) B_{j+1}}{N + f - j} \quad (11b)$$

2.c) On se place dans le cas où  $\omega \gg \omega_0$ , et  $N \approx 1$ ,  $f \approx 1$ . Montrer qu'alors  $A_j \approx A_0 \gg 1$ . En déduire l'expression approchée de  $B_0$ . Dans le DIOG VIRGO,  $N = 7$  et  $f = 4$ . Donner une limite inférieure de l'atténuation en amplitude du dispositif au dessus de 10Hz. Conclusion ?

#### IV. CARACTERISTIQUES DU LASER UTILISE

1) La source laser présente, outre les fluctuations d'intensité dues au bruit de photon mentionnées à la question I.5, des fluctuations  $\delta\omega$  non nulles, mais très faibles, de sa pulsation d'émission. En déduire les fluctuations résultantes du signal mesuré en l'absence d'onde gravitationnelle. Montrer que les fluctuations de pulsation  $\delta\omega$  ont un effet négligeable sur le rapport signal à bruit dans les conditions optimales définies au paragraphe I.5.d, mais qu'elles peuvent perturber la mesure du signal venant d'une OG si les deux bras de l'interféromètre ont une longueur légèrement différente en l'absence d'onde gravitationnelle.

2) Le laser utilisé dans l'expérience, schématisé sur la figure (8), est constitué d'un cristal de Nd : YAG, de longueur  $\ell_c$  et d'indice supposé égal à 1 pour simplifier, inséré dans une cavité optique en anneau, formée de miroirs parfaitement réfléchissants (coefficients de réflexion en amplitude +1), à l'exception du miroir de sortie  $M_s$  (coefficient de réflexion en amplitude réel  $r_s$ ).

2.a) Lorsque le cristal est pompé optiquement par un laser à semi-conducteur d'intensité  $I_P$ , qui crée une inversion de population sur une transition  $T$  de l'ion  $\text{Nd}^{3+}$ , de pulsation  $\omega_{Nd}$ , il devient un *amplificateur optique* : tout champ incident de pulsation  $\omega$ , d'amplitude complexe  $E_0 e^{-i\omega t}$  à l'entrée A du cristal, est amplifié à la traversée du cristal. Il a pour amplitude complexe à la sortie B de celui-ci :

$$E_1 = E_0 e^{g(I)\ell_c} e^{i\frac{\omega}{c}\ell_c} e^{-i\omega t} \quad (12)$$

où  $I = |E_0|^2$ . Le nombre positif  $g(I)$  est le gain par unité de longueur du cristal, proportionnel à la puissance de pompage  $I_P$ , et qui est donné par

$$g(I) = \frac{\alpha I_P}{(\omega - \omega_{Nd})^2 + \gamma^2 (1 + I/I_{sat})} \quad (13)$$

Dans cette expression,  $\alpha$  est un paramètre qui dépend des caractéristiques du pompage,  $\gamma$  caractérise la largeur de la transition et  $I_{sat}$  l'intensité de saturation de la transition T. Indiquer physiquement pourquoi  $g$  diminue lorsque l'intensité de l'onde incidente augmente. Pour quelle valeur de la pulsation du champ  $g$  est-il maximum ? Quelle est la largeur à mi-hauteur de la courbe de gain, et comment varie t'elle avec  $I$  ?

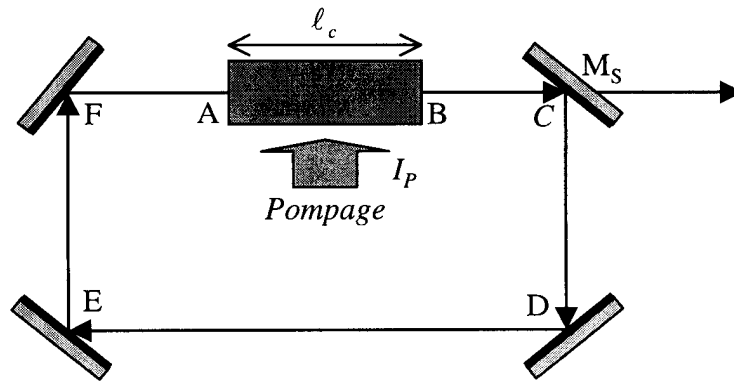


Figure 8 Schéma d'un laser en anneau

2.b) Soit  $E_2$  l'amplitude complexe du champ intracavité en C, juste après la réflexion sur le miroir  $M_s$ , comme indiqué sur la figure (8). Donner la relation donnant  $E_2$  en fonction du champ  $E_1$  juste après le cristal, de  $r_s$  et de la distance  $L' = BC$  entre la sortie du cristal et le miroir, puis celle donnant l'amplitude complexe  $E'_0$  du champ à l'entrée du cristal en fonction de  $E_2$  et de la longueur  $L''$  de propagation sur le trajet CDEFA depuis le miroir  $M_s$  jusqu'à l'entrée A du cristal. En déduire l'équation complexe permettant de déterminer  $\omega$  et  $E_0$  pour

le laser en régime stationnaire. On appellera  $L_\ell = \ell_c + L' + L''$  la longueur totale du trajet optique intracavité.

2.c) Montrer qu'outre la solution triviale  $E_0 = 0$ ,  $\omega$  et  $I$  sont donnés par les équations :

$$\begin{aligned} \omega &= m\Delta\omega, \quad m \text{ entier} \\ |E_0|^2 &= I = a(I_P - I_{seuil}) \end{aligned} \quad (14)$$

où  $\Delta\omega$ ,  $a$  et  $I_{seuil}$  sont des grandeurs que l'on déterminera. Interpréter physiquement la première équation. Montrer l'existence d'un seuil d'oscillation, et tracer la variation de l'intensité de sortie du laser  $I_{sortie}$ , après transmission à travers le miroir  $M_S$  en fonction du pompage  $I_P$ . Pourquoi l'équation du régime stationnaire ne permet-elle pas de déterminer la phase du champ laser  $E_0$  ? Qu'appelle-t-on modes propres d'oscillation du laser ? Comment varie le nombre de ces modes lorsque, toutes choses égales par ailleurs, on augmente l'intensité du pompage ?

3) Un DIOG a besoin d'un laser à la fois très puissant et très monochromatique, donc monomode. La question précédente a montré que ces exigences sont contradictoires : un laser de forte puissance de sortie est en général multimode. Le laser **M** utilisé dans le DIOG fonctionne à une puissance suffisamment faible pour être monomode. Quel est alors le lien entre les fluctuations de la longueur de la cavité laser et les fluctuations de pulsation  $\omega$  du laser ? Donner une limite supérieure à ces fluctuations de longueur pour que la fréquence de sortie du laser fluctue de moins de  $1\text{kHz}$ , lorsque  $L_\ell = 30\text{cm}$ . Ce type de stabilité est obtenu dans le dispositif réel par des méthodes d'asservissement électronique sur une cavité optique ultra-stable.

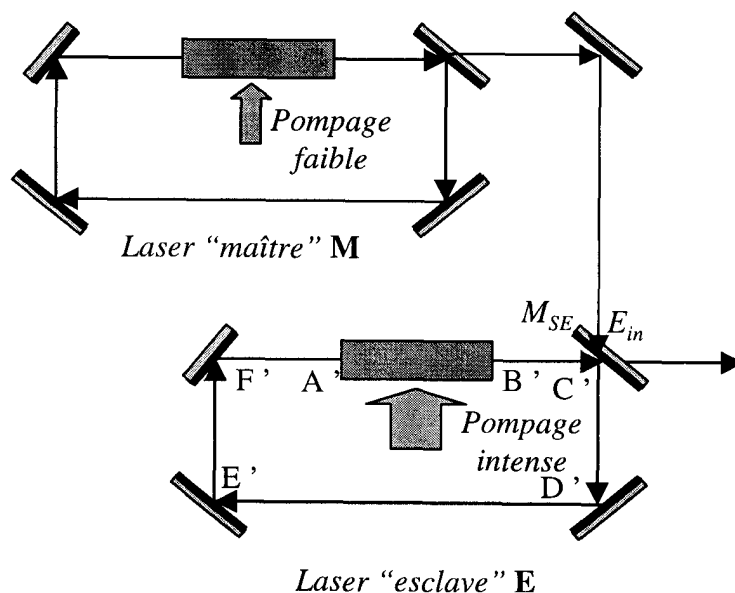


Figure 9 Schéma d'un système d'injection.

4) On suppose que le laser **M** oscille à une pulsation égale à  $\omega_{Nd}$ , pulsation de la transition T. Pour obtenir la puissance nécessaire au fonctionnement de l'interféromètre, il faut amplifier le faisceau de sortie du laser **M** sans détériorer les propriétés de stabilité en fréquence du laser initial. La technique utilisée est celle de l'« injection » (figure 9) : le faisceau de sortie du laser

**M** (« maître ») pénètre par le miroir de couplage  $M_{SE}$  dans la cavité optique d'un deuxième laser **E** (« esclave ») comportant les mêmes éléments que le laser **M** et pompé optiquement avec une grande intensité. Par contre les longueurs  $L_\ell$  et  $L'_\ell$  des lasers **M** et **E** ne sont pas nécessairement strictement égales.

**4.a)** Soient  $E_{in} e^{-i\omega_{Nd}t}$  l'amplitude complexe de l'onde issue du laser **M** en  $C'$ , à l'entrée du laser **E** (juste avant le miroir  $M_{SE}$ ),  $r_s$  et  $t_s$  les coefficients de réflexion et de transmission de ce miroir,  $L'_\ell$  la longueur totale de la cavité du laser **E**,  $L''$  la distance  $C'D'E'F'A'$  parcourue par la lumière depuis  $M_{SE}$  jusqu'à l'entrée du cristal. En utilisant la relation liant les différents champs sur le miroir  $M_{SE}$ , et en analysant comme dans la question IV.2.c la propagation du champ à l'intérieur de la cavité du laser **E**, trouver la relation reliant l'amplitude  $E_0$  du champ du laser **E** à l'entrée  $A'$  de son milieu amplificateur, et *supposé osciller à la même fréquence que le champ injecté*, à  $E_{in}$ ,  $\omega_{Nd}$  et aux paramètres du laser **E**.

**4.b)** Par un choix approprié de l'origine des phases, on suppose que le champ injecté s'écrit :  $E_{in} = \sqrt{I_{in}} e^{-i\frac{\omega_{Nd}}{c} L''} e^{-i\omega_{Nd}t}$ , et on écrit le champ  $E_0$  du laser esclave en  $A'$  sous la forme  $E_0 = \sqrt{I_0} e^{-i\varphi_e} e^{-i\omega_{Nd}t}$ . Dédurre de l'équation trouvée en IV.4.a la relation suivante permettant de déterminer la phase  $\varphi_e$  du champ intracavité  $E_0$  :

$$\sin \varphi_e = -\frac{r_s}{t_s} e^{g(I_0)L_c} \sqrt{\frac{I_0}{I_{in}}} \sin \frac{\omega_{Nd} L'_\ell}{c} \quad (15)$$

**4.c)** En l'absence d'injection par le laser **M**, le laser **E** est très au dessus de son seuil d'oscillation, et a pour intensité en  $A'$ , à l'entrée du milieu amplificateur, la quantité  $I_0^{libre}$ . On suppose que le champ injecté est faible ( $t_s^2 I_{in} \ll r_s^2 I_0^{libre}$ ), de sorte que l'intensité du laser **E** s'écarte peu de la valeur  $I_0^{libre}$  lors de l'injection. Montrer qu'il existe des domaines de longueur pour la cavité du laser **E**, dont on déterminera les caractéristiques, pour lesquels l'équation (15) a une solution en  $\varphi_e$ . Montrer que le laser **E** peut ainsi fonctionner à la pulsation  $\omega_{Nd}$  imposée par le laser **M** même en présence de petites fluctuations de la longueur  $L'_\ell$  de la cavité du laser **E**. Dédurre de la relation (15) l'amplitude maximale des fluctuations « admissibles » de  $L'_\ell$ .

## V. EFFETS PARASITES POUVANT MASQUER LE PASSAGE D'UNE OG

L'interféromètre présenté dans la partie II est un dispositif extraordinairement sensible à toute modification de la différence de marche entre ses deux bras, quelle qu'en soit l'origine. Nous allons passer en revue dans cette partie quelques effets physiques susceptibles de modifier très légèrement cette différence de marche, et donc de simuler le passage d'une OG.

**1)** Les bras de l'interféromètre du DIOG sont des tubes métalliques dans lesquels, grâce à un pompage énergétique, subsiste un gaz qu'on assimilera à de l'air, supposé être un gaz parfait, ayant une pression uniforme et très basse, appelée  $\Pi$ . On supposera pour simplifier que le faisceau lumineux dans l'interféromètre est un cylindre de section droite  $S$  dans lequel l'amplitude de l'onde électromagnétique est constante. L'indice de l'air pour une longueur d'onde  $\lambda = 1\mu m$ , une pression  $\Pi_0 = 1,013 \times 10^5 Pa$  et une température  $T_0 = 273K$  vaut

$n_0 = 1 + 2,4 \times 10^{-4}$ . On rappelle que dans un gaz parfait, l'écart à 1 de l'indice de réfraction peut être considéré comme proportionnel à la masse volumique  $\rho$  de ce gaz.

**1.a)** On suppose que les deux bras du DIOG ont respectivement une température  $T$  et  $T + \Delta T$  avec  $\Delta T \ll T$ . Déterminer l'expression de la pression  $\Pi$  pour laquelle cette différence de température induit dans le DIOG un signal égal à l'OG cherchée, d'amplitude  $h_1$ . Application numérique pour  $T = 300K$ ,  $\Delta T = 10^{-3} K$ ,  $h_1 = 10^{-21}$ .

**1.b)** La pression qui règne dans les tubes du DIOG est en fait de  $10^{-5} Pa$ . Pourquoi l'effet de variation de température du gaz résiduel ne peut-il pas être confondu avec le signal de l'OG ?

**1.c)** Tout comme les photons, le nombre de molécules d'un gaz parfait à pression constante dans un sous-volume donné est une quantité fluctuante obéissant à une statistique de Poisson. Déterminer le nombre de molécules de gaz dans le volume occupé par les faisceaux lumineux, puis son écart type. En déduire l'écart type des fluctuations d'indice de l'air dans l'interféromètre en fonction de sa pression moyenne et de sa température. A partir de quelle pression résiduelle  $\Pi$  ces fluctuations empêchent-elles la mesure d'une OG d'amplitude  $h_1$  ? Application numérique pour  $h_1 = 10^{-21}$ ,  $S = 0,1m^2$ .

**2.a)** Trouver par un raisonnement simple utilisant la quantité de mouvement des photons le lien entre la puissance  $P$  transportée par un faisceau lumineux et la force de pression de radiation  $F$  exercée par le faisceau sur un miroir parfait sur lequel il se réfléchit.

En utilisant le fait que les temps d'arrivée des photons sur le miroir obéissent à une statistique de Poisson, en déduire l'écart type  $\Delta F$  des fluctuations de cette force mesurées pendant un temps de mesure  $T_m$ .

**2.b)** On suppose pour simplifier que le DIOG a la forme de la figure 2, et que les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  sont assimilables à des pendules simples dont le point de suspension est immobile. Calculer le déplacement moyen de chacun des miroirs, puis les fluctuations de leur position provoquées par les fluctuations de la pression de radiation. On donne la masse du miroir  $m = 400kg$ , le temps de mesure  $T_m = 0,1ms$ , et on rappelle la pulsation propre  $\omega_0/2\pi = 0,2Hz$  le temps d'amortissement du miroir  $\tau \approx 100s$ , et la puissance du faisceau lumineux  $P = 10W$ . Le déplacement moyen est-il gênant pour la détection d'une OG ? Les fluctuations de ce déplacement sont-elles susceptibles de masquer le passage de l'OG recherchée ?

**3)** Faites une liste d'autres effets physiques susceptibles, selon vous, de simuler sur le DIOG le passage d'une onde gravitationnelle, et indiquer qualitativement comment réduire ces effets.