

4355

28533

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2003

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés**

section : sciences physiques

option : physique

problème de physique

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

Tournez la page S.V.P.

Les planètes extra – solaires

Introduction

Depuis la découverte, en 1995, de la première planète extra - solaire autour d'une étoile très analogue à notre Soleil, Pégase 51, les détections se sont multipliées pour atteindre maintenant plus d'une centaine d'objets, de propriétés très diverses. Après une première partie consacrée aux caractéristiques de l'interaction gravitationnelle à deux corps, nous examinerons diverses méthodes de détection des planètes extra - solaires et leurs limitations. La dernière partie du problème sera consacrée à l'examen des propriétés des planètes extra - solaires détectées.

Une grande attention sera portée aux applications numériques, pour lesquelles nous recommandons d'utiliser les unités familières aux astronomes, telles que le parsec, ou l'unité astronomique, bien adaptées aux ordres de grandeur du problème, dont les définitions et les valeurs en unités du système international sont données ci-après (les résultats exprimés en unités SI ne seront évidemment pas pénalisés pour autant).

Données numériques

unité astronomique : $1 \text{ ua} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$
parsec : $1 \text{ pc} = 3,1 \cdot 10^{16} \text{ m}$
vitesse de la lumière : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
constante de gravitation : $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
constante de Stefan : $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
masse du Soleil : $M_{\odot} = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
rayon du Soleil : $R_{\odot} = 7,0 \cdot 10^8 \text{ m}$
masse de la Terre : $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
masse de Jupiter : $M_J = 2,0 \cdot 10^{27} \text{ kg}$
période de Jupiter : $P_J = 12 \text{ ans}$

Rappels concernant les ellipses

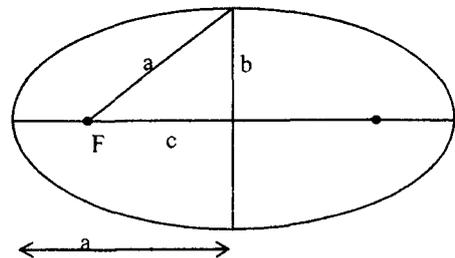
En coordonnées polaires avec origine au foyer, l'équation d'une ellipse peut se mettre sous la forme : $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ où p est le paramètre de

l'ellipse et e son excentricité.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$e = \frac{c}{a} \text{ et } p = \frac{b^2}{a}$$

L'aire de l'ellipse est : $S = \pi ab$



Rappels de cinématique

Pour un mouvement à accélération centrale, on peut établir une formule de Binet donnant l'accélération en coordonnées polaires :

$$\vec{a} = -\frac{C^2}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \vec{u}_r, \text{ où } C \text{ désigne la constante des aires.}$$

1. Interaction gravitationnelle à deux corps

On considère un système isolé constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 , de centre de masse G , repérés par les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$; O étant une origine fixe de l'espace. On note : $\vec{r}_1 = \overrightarrow{GM_1}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{GM_2}$

Les deux points matériels sont en interaction ; on désigne par $E_p(r)$ l'énergie potentielle d'interaction correspondante, en notant : $r = \|\vec{r}\| = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$.

1.1 Mouvement dans un potentiel central

Donner les équations différentielles donnant accès au mouvement des deux masses. Montrer qu'il est possible de découpler ces deux équations de telle sorte que l'une traduise une loi de conservation que l'on précisera et que l'autre soit l'équation du mouvement d'un point particulier dont on précisera les caractéristiques. Connaissant les conditions initiales du mouvement, montrer que la détermination de $\vec{r}(t)$ permet de connaître les positions de M_1 et M_2 à tout instant.

1.2 Première et deuxième lois de Kepler

Soit la grandeur $\vec{C} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ où $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ et où le symbole \times désigne le produit vectoriel.

Vérifier que cette grandeur est constante. On notera $C = \|\vec{C}\|$ la constante des aires. A quelle loi de conservation est associée cette constante ? Quelles sont les conséquences géométriques et horaires sur le vecteur $\vec{r}(t)$?

1.3 Cas particulier du potentiel gravitationnel

On se place désormais dans le cadre d'un potentiel de gravitation ; par ailleurs, on se limite à des états liés. Etablir que la trajectoire $\vec{r}(t)$ est une ellipse et préciser le lien entre le paramètre de l'ellipse p , la constante des aires C et les paramètres physiques du problème.

Quelle relation lie l'aire de l'ellipse et la période P du mouvement ? En déduire la relation liant la période P du mouvement au demi - grand axe a de l'ellipse, connue sous le nom de troisième loi de Kepler.

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

1.4 Cas des orbites circulaires

Dans le cas simplifié où la courbe $\vec{r}(t)$ est un cercle, établir les caractéristiques (rayon et vitesse) des trajectoires des deux points M_1 et M_2 dans le référentiel barycentrique. Les résultats seront exprimés en fonction des masses m_1 et m_2 et de la période P du mouvement. Faire un schéma représentant les deux points à un instant donné, le centre de masse, les trajectoires et les vecteurs vitesse.

1.5 Applications numériques

Pour les deux couples (Soleil, Terre) et (Soleil, Jupiter), et dans l'hypothèse de trajectoires circulaires, donner les valeurs des rayons des trajectoires et des vitesses dans leur référentiel barycentrique.

2. Détection des planètes extra - solaires par observation directe

2.1 Définition et valeur du parsec

On appelle parsec (symbole pc) la distance d à laquelle le rayon moyen de l'orbite terrestre autour du Soleil a (appelé unité astronomique, symbole ua) est vu sous un angle θ de 1 seconde d'arc. Exprimer d en fonction de a et θ . Quelle approximation est-il raisonnable de faire ? En déduire la valeur du parsec en mètres et en ua.

2.2 Séparation angulaire entre l'étoile et sa planète

On considère une planète située à la distance a de son étoile. Quelle est la séparation angulaire θ entre les deux objets pour un observateur situé à la distance D du système telle que $D \gg a$? Calculer et exprimer en secondes d'arc la valeur de θ pour un système de type Soleil - Terre ($a = 1$ ua) puis pour un système de type Soleil - Jupiter ($a = 5$ ua), situés l'un et l'autre à $D = 10$ pc de l'observateur.

2.3 Puissance rayonnée par l'étoile

L'étoile, assimilée à une sphère de rayon R^* , rayonne comme un corps noir de température T^* . Exprimer la puissance L^* qu'elle émet (on note σ la constante de Stefan).

2.4 Puissance interceptée par la planète

La planète est assimilée à une sphère de rayon R , située à la distance a de l'étoile. On suppose qu'elle intercepte la puissance émise par l'étoile comme un disque de rayon R , perpendiculaire à l'axe étoile - planète et uniformément éclairé. Quelle est la puissance L ainsi interceptée ?

Calculer la fraction L/L^* de puissance stellaire interceptée par une planète de type Jupiter ($R = 0,1 R^*$, $a = 5$ ua) et par une planète de type Terre ($R = 0,01 R^*$, $a = 1$ ua).

2.5 Température d'équilibre de la planète

La planète réfléchit une fraction A (appelée albédo) de la puissance incidente. On suppose qu'elle se comporte comme un corps noir de température T . Exprimer T en fonction de T^* . Pour une étoile de type solaire, $T^* = 6000$ K ; en prenant $A = 0,3$ calculer T pour une planète de type Jupiter et pour une planète de type Terre.

2.6 Maximum d'émission de la planète

Le maximum d'émission de l'étoile se situe à la longueur d'onde $\lambda^* = 0,5 \mu\text{m}$, quelles sont alors les longueurs d'onde du maximum d'émission d'une planète de type Jupiter et d'une planète de type Terre ?

2.7 Limitations observationnelles

Qu'appelle-t-on la résolution spatiale d'un instrument d'optique ?

Rappeler, sans démonstration, l'expression du diamètre angulaire β de la tache centrale de diffraction à l'infini d'une pupille circulaire de diamètre b , éclairée par un rayonnement de longueur d'onde λ . Pourquoi considère-t-on qu'un télescope de diamètre b a une résolution spatiale β ?

Calculer les résolutions spatiales d'un télescope de 8m de diamètre lorsqu'il opère dans le visible ($\lambda = 0,5 \mu\text{m}$) et lorsqu'il opère dans l'infrarouge ($\lambda = 20 \mu\text{m}$). A ces longueurs d'onde, un tel instrument peut-il résoudre un système de type Soleil - Jupiter, situé à 10 pc du télescope ? Qu'en est-il d'un système de type Soleil - Terre, à la même distance ?

La deuxième limitation observationnelle provient des détecteurs, qui ne permettent pas actuellement d'atteindre une dynamique (c'est à dire un rapport entre les intensités maximale et minimale détectables) supérieure à 10^4 . Comparez cette limite avec le rapport des puissances rayonnées par l'étoile et par la planète. Qu'en concluez-vous sur la détectabilité directe actuelle des systèmes planétaires ? Expliquez pourquoi la détection par observation directe est plus prometteuse en infrarouge qu'en visible.

3. Détection indirecte des planètes via le déplacement de l'étoile

On suppose désormais que les planètes ont des orbites circulaires autour de leur étoile.

3.1 Orbite de l'étoile

On note m^* et m les masses de l'étoile et de sa planète (avec $m^* \gg m$) et P la période de leur mouvement relatif. Donner une expression approchée du rayon a de l'orbite de la planète autour du centre de masse du système, en fonction de m^* et de P . Quelle relation peut-on écrire entre a et le rayon a^* de l'orbite de l'étoile autour du centre de masse du système ?

3.2 Caractéristiques de la planète déduites par cette méthode

La masse m^* et la distance de l'étoile à l'observateur, D , étant connues par ailleurs, montrer que le suivi au cours du temps de la position de l'étoile sur le ciel permet de déterminer la masse m de la planète et son rayon orbital a . Cette méthode est-elle applicable quelle que soit l'orientation de l'orbite par rapport à l'observateur ?

3.3 Planètes privilégiées par cette méthode

En termes de masse m et de rayon orbital a quel type de planète est-il le plus facile de détecter par cette méthode ?

3.4 Limitations observationnelles

Sur quelle durée faut-il suivre le mouvement d'une étoile de type Soleil pour détecter une planète de type Terre ? Même question pour une planète de type Jupiter ? Expliquer pourquoi cette méthode est, de fait, limitée pour la détection des planètes très distantes de leur étoile.

Calculer le rayon angulaire θ^* du mouvement d'une étoile de type Soleil située à la distance $D = 10$ pc de l'observateur, selon qu'elle est accompagnée d'une planète de type Jupiter ($a = 5$ ua, $m = 10^{-3} m^*$) ou d'une planète de type Terre ($a = 1$ ua, $m = 3 \cdot 10^{-6} m^*$), la trajectoire étant dans un plan perpendiculaire à la direction d'observation. Ces observations sont-elles accessibles à un télescope de 8m de diamètre ?

Les meilleurs télescopes optiques actuels, fonctionnant en mode interférométrique, permettront d'atteindre dans un avenir proche des résolutions spatiales de 50

microsecondes d'arc. Jusqu'à quelle distance permettront-ils de détecter des planètes de type Jupiter via le mouvement de leur étoile ?

Plusieurs missions spatiales en projet visent à atteindre des résolutions spatiales de l'ordre de la microseconde d'arc. Permettront-elles la mise en évidence de planètes de type Terre via le mouvement de leur étoile ?

4. Détection indirecte des planètes via la vitesse de l'étoile

On suppose désormais que les planètes ont des orbites circulaires autour de leur étoile.

4.1 Vitesse orbitale de l'étoile

Exprimer la vitesse V de la planète sur son orbite en fonction de m^* et de P et en fonction de m^* et de a . Quelle relation peut-on écrire entre V , la vitesse V^* de l'étoile sur son orbite, et le rapport des masses m/m^* ? Calculer V^* pour un système de type Soleil – Jupiter ($a = 5 \text{ ua}$, $m = 10^{-3} m^*$), puis de type Soleil – Terre ($a = 1 \text{ ua}$, $m = 3.10^{-6} m^*$).

4.2 Vitesse longitudinale de l'étoile

On note i l'inclinaison de l'orbite de l'étoile par rapport à l'observateur, c'est à dire l'angle entre la normale à l'orbite et la direction étoile – observateur.

4.2.1 On considère un système étoile - planète vu "par la tranche" (c'est-à-dire correspondant à un angle $i = 90^\circ$). Exprimer en fonction de V^* et P la loi de variation temporelle $U(t)$ de la vitesse longitudinale de l'étoile (c'est-à-dire de la projection de la vitesse orbitale V^* sur la direction étoile - observateur).

4.2.2 Comment suffit-il de modifier l'expression de $U(t)$ si le système est vu sous une inclinaison $i < 90^\circ$?

4.3 Effet Doppler longitudinal

Une source émettant un signal de fréquence ν et de célérité c se déplace à la vitesse longitudinale (algébrique) U , telle que $|U| \ll c$, en direction d'un observateur. On note ν' la fréquence perçue par l'observateur.

Etablir l'expression du décalage Doppler $\Delta\nu = \nu' - \nu$, en accompagnant le calcul d'un schéma clair, où apparaîtront les positions relatives de l'observateur et de la source, ainsi que l'orientation des grandeurs algébriques utilisées.

4.4 Caractéristiques de la planète déduites par cette méthode

Le spectre d'une étoile de type solaire présente des raies de fréquences au repos bien connues si bien qu'il est possible d'en déterminer avec précision le décalage Doppler.

La masse de l'étoile étant connue par ailleurs, montrer que le suivi au cours du temps du décalage Doppler du spectre de l'étoile permet de déterminer son rayon orbital a et une limite inférieure de la masse de la planète. Cette méthode est-elle applicable quelle que soit l'orientation i de l'orbite par rapport à l'observateur ?

4.5 Planètes privilégiées par cette méthode

Donner l'expression approchée de la vitesse orbitale V^* de l'étoile en fonction des masses m^* et m (avec $m^* \gg m$) et du rayon orbital a de la planète.

En termes de masse, de rayon orbital et d'inclinaison de l'orbite, quel type de planète est-il le plus facile de détecter par cette méthode ?

5. Limitations des détections par mesure de l'effet Doppler du spectre stellaire

La détection des variations de vitesse radiale de l'étoile représente actuellement la méthode la plus efficace de recherche de planètes extra - solaires. Nous allons examiner ici les principaux facteurs, instrumentaux et intrinsèques, qui limitent cette méthode.

5.1 Résolution du spectrographe

5.1.1 Les spectrographes utilisés pour la recherche des planètes extra - solaires ont des pouvoirs de résolution de l'ordre de 50000. Quel effet Doppler en longueur d'onde, $\Delta\lambda$, permettent-ils de mesurer dans le domaine visible ($\lambda = 0,5 \mu\text{m}$) ? A quelle amplitude de variation de la vitesse longitudinale de l'étoile cela correspond-il ?

5.1.2 Pour améliorer significativement la résolution de la mesure, la détermination de l'effet Doppler ne se fait pas sur une raie unique du spectre stellaire mais par la comparaison simultanée, par une méthode de corrélation croisée, d'un très grand nombre de raies stellaires avec un spectre de référence. En effectuant ainsi $N \gg 1$ mesures indépendantes de l'effet Doppler, par quel facteur améliore-t-on la précision de la mesure ? Combien de raies faut-il observer simultanément pour mesurer une variation de vitesse stellaire de 10 m s^{-1} ?

5.2 Limitation intrinsèque à l'étoile

5.2.1 Certaines étoiles sont animées d'un mouvement de pulsation interne, responsable d'une variation périodique de leur rayon, avec des périodes de l'ordre de quelques mois. En supposant que le rayon d'une étoile varie suivant une loi sinusoïdale entre les valeurs extrêmes $R^* - \delta R^*$ et $R^* + \delta R^*$ avec une période τ , quelle est la loi de variation de la vitesse radiale V_r de la surface de l'étoile ?

5.2.2 Quel est l'effet de ce mouvement de pulsation sur les raies stellaires ? Dans le cas où $\delta R^* = 0,01 R^*$ et $\tau = 30$ jours, ce phénomène peut-il se confondre avec l'effet perturbateur d'une planète ?

5.2.3 Lors de ces pulsations, la température T^* (définie en 2.3) varie peu. Qu'en est-il de la puissance L^* rayonnée par l'étoile ? Que peut-on vérifier pour éviter de chercher des planètes autour d'étoiles pulsantes ?

6. Transit de la planète devant son étoile

6.1 Condition de transit

Lorsque le mouvement orbital de la planète l'amène à passer intégralement entre l'étoile et l'observateur, on dit qu'il y a *transit* de la planète devant l'étoile. On note toujours i ($0 \leq i$

$\leq 90^\circ$) l'inclinaison de l'orbite (supposée circulaire) de la planète par rapport à l'observateur. A quelle condition sur a , i , R , R^* , y-a-t-il transit ?

6.2 Probabilité de transit

Si l'orientation de l'orbite planétaire est aléatoire, quelle est la probabilité qu'elle présente une inclinaison supérieure ou égale à une valeur i_0 donnée ? En déduire la probabilité d'observer un transit pour un système constitué d'une étoile de type Soleil et d'une planète de type Jupiter ($R = 0,1 R^*$) orbitant à $a = 0,05$ ua de celle-ci.

6.3 Courbe de lumière de l'étoile lors d'un transit de la planète

On considère un système étoile – planète, vu sous une inclinaison $i = 90^\circ$, situé à la distance $D \gg a$ de l'observateur. Donner l'allure de la variation temporelle de puissance (appelée courbe de lumière de l'étoile) reçue par l'observateur (on ne demande pas de formule exacte). Exprimer en fonction des paramètres R , R^* , a , P , D la fraction maximale de puissance interceptée par la planète lors de son transit, la durée totale τ_t du transit et la durée τ_m du minimum de la courbe de lumière. Quel paramètre supplémentaire peut-on déduire de l'observation du transit d'une planète déjà caractérisée par la mesure de la vitesse orbitale de l'étoile ?

7. Propriétés des planètes détectées

7.1 Un « Jupiter chaud » typique : la planète de l'étoile HD209458

7.1.1 Les mesures de vitesse longitudinale de l'étoile HD209458 effectuées en 1999 par trois équipes ont fourni les valeurs représentées dans la *Figure 1*. Quelle est la nature de la courbe que l'on peut ajuster aux données expérimentales ? En déduire la période P et la vitesse longitudinale U de l'étoile.

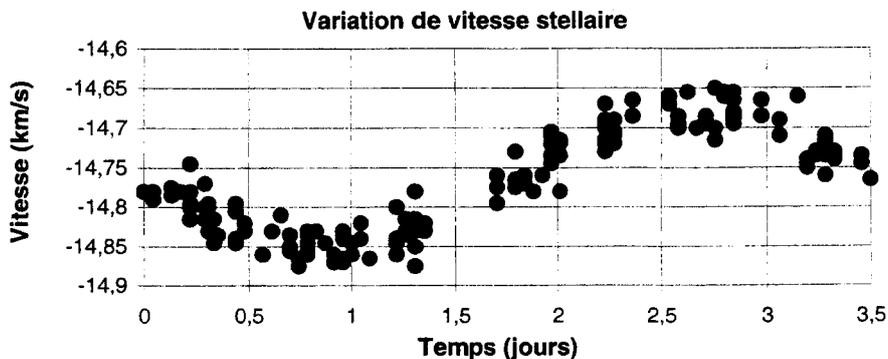


Figure 1 : Vitesse longitudinale de l'étoile HD209458 en fonction du temps (ramené à une période) (d'après *Mazeh et al., 2000*).

7.1.2 La masse m^* de l'étoile HD209458 est estimée à $1,1 \pm 0,1 M_\odot$. Que vaut le rayon orbital de sa planète et la masse minimum de celle-ci ? Estimer les incertitudes relatives sur ces valeurs en supposant que la détermination de la vitesse orbitale est effectuée avec une précision de 2% et celle de la période avec une précision de 0,01 %.

7.1.3 Le transit de la planète devant l'étoile HD209458 a pu être observé à plusieurs reprises, conduisant à la courbe de lumière présentée dans la *Figure 2*. Le rayon R^* de

l'étoile HD209458 est estimée à $1,2 \pm 0,1 R_{\odot}$. Expliquer comment déduire de la courbe de lumière le rayon R de la planète en supposant que l'inclinaison de l'orbite vaut 90° (en fait, pour ce système, on mesure $i = 86,1^{\circ}$).

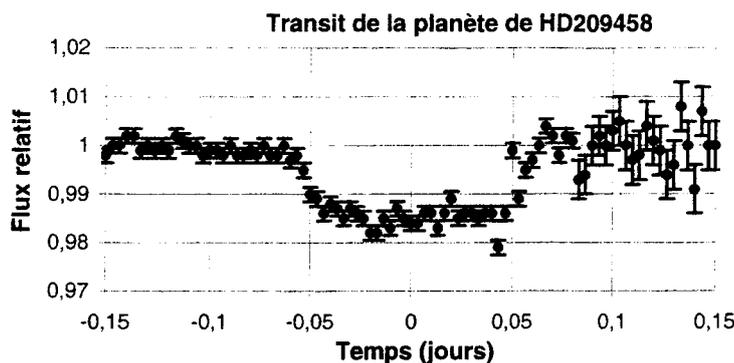


Figure 2 : Variation relative au cours du temps du flux de l'étoile HD209458 lors du transit de sa planète (d'après Charbonneau et al., 2000).

7.1.4 En déduire la masse volumique ρ (supposée uniforme) de la planète. Que peut-on en conclure sur sa nature (solide ou gazeuse) ?

7.1.5 L'étoile HD209458 rayonne comme un corps noir de température $T^* = 6030 \pm 140$ K. Déterminer la température d'équilibre T de la planète (en faisant les hypothèses décrites en 2.4 et 2.5).

7.1.6 Pourquoi a-t-on baptisé « Jupiter chaud » ce type de planète ?

7.2 Etude statistique des propriétés des 50 premières planètes détectées

NB : Dans les Figures 3, 4, 5, « Log » désigne le logarithme décimal.

7.2.1 La Figure 3 présente les mesures de vitesses longitudinales et de périodes des 50 premières « étoiles à planètes » détectées. Dans quelles gammes de valeurs $[V_{\min}, V_{\max}]$ et $[P_{\min}, P_{\max}]$ se situent ces paramètres ? Quelles sont les zones de ce diagramme qui n'ont pas encore pu être explorées en raison de limitations observationnelles ?

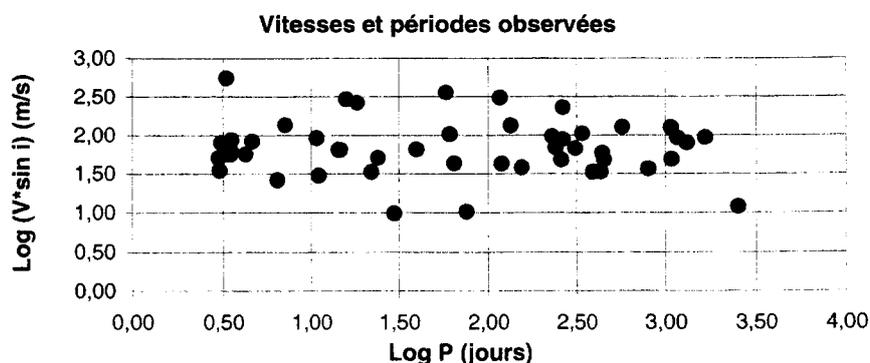


Figure 3 : Répartition des vitesses orbitales et des périodes des 50 premières étoiles à planètes observées (d'après Udry 2000).

7.2.2 La *Figure 4* présente les mesures de période P et les rayons orbitaux a calculés pour ces mêmes planètes. Quelle est la signification de la très forte corrélation qui apparaît entre ces deux paramètres ?

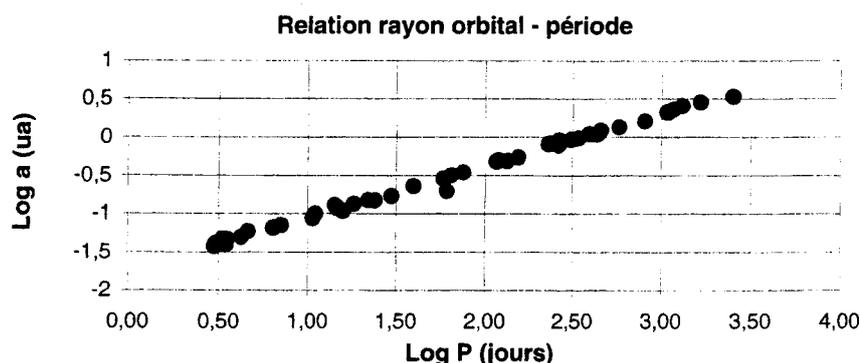


Figure 4 : Répartition des rayons orbitaux et des périodes des 50 premières étoiles à planètes observées (*d'après Udry 2000*).

7.2.3 La *Figure 5* présente les rayons orbitaux a et les masses minimales déduits des mesures de vitesses et de périodes.

Comment sont représentées, pour une masse stellaire m^* donnée, les courbes de vitesse V^* constante et de période P constante dans ce diagramme ? En déduire les zones de ce diagramme qui n'ont pas encore pu être explorées en raison de limitations observationnelles ?

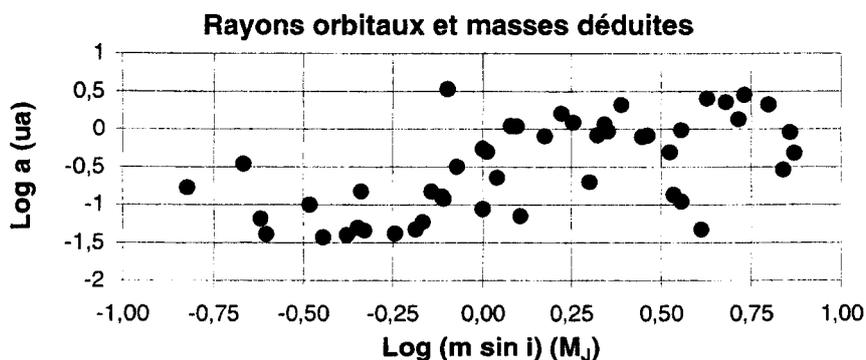


Figure 5 : Répartition des rayons orbitaux stellaires et des masses planétaires (exprimées en masse de Jupiter) des 50 premières étoiles à planètes observées (*d'après Udry 2000*).

7.2.4 Quels phénomènes peut-on évoquer pour expliquer que l'on n'observe pas de planètes sur des orbites plus petites que $a_{\min} \approx 0,04$ ua ?