

0242

95443

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2004

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés**

section : sciences physiques

option : physique

problème de physique

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tournez la page S.V.P.

Conducteurs quantiques

Introduction

Depuis les années 1980, on a assisté au développement considérable d'une branche de la physique des solides, appelée physique mésoscopique, qui s'intéresse à une échelle intermédiaire entre l'échelle atomique et l'échelle macroscopique. Les progrès énormes dans la réalisation de dispositifs électroniques à base de semiconducteurs ou de métaux, de plus en plus petits et de mieux en mieux contrôlés, ont permis l'observation expérimentale de nouveaux effets réellement quantiques à l'échelle mésoscopique du système étudié.

Les trois premières parties du problème s'intéressent à divers aspects du phénomène de conduction électrique dans les systèmes mésoscopiques. La première rappelle la description classique de ce phénomène en termes de diffusion des électrons, ignorant leur nature ondulatoire. Les deux suivantes étudient respectivement la quantification de la conductance et les phénomènes de localisation qui sont deux des manifestations expérimentales les plus frappantes d'effets quantiques à l'échelle mésoscopique. Même si ces trois parties sont très largement indépendantes, il est de loin préférable de les traiter dans l'ordre. **La lecture attentive du préambule est par ailleurs indispensable pour aborder le problème dans les meilleures conditions.**

La dernière partie, **totalemt indépendante des autres**, aborde certains aspects de l'électronique à un électron basée sur la quantification de la charge électrique.

On utilisera les notations suivantes :

- si A est un nombre complexe, A^* désigne son complexe conjugué et $\text{Re}(A)$ sa partie réelle.
- i désigne le nombre complexe de partie imaginaire positive et tel que $i^2 = -1$.
- $\vec{\nabla}$ désigne l'opérateur gradient.
- $\text{Int}(x)$ désigne la partie entière de x et $\log(x)$ son logarithme décimal.
- $\delta(\nu)$ désigne la distribution delta de Dirac de la variable ν .

On donne :

- la valeur absolue de la charge de l'électron $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et sa masse $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- la constante de Planck $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
- la constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
- la permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

On rappelle que la conductance d'un dipôle électrique résistif est l'inverse de sa résistance.

On rappelle que la probabilité pour qu'un fermion occupe un état d'énergie ε à la température θ et pour un potentiel chimique μ est donnée par la distribution de Fermi Dirac :

$$f_0(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B\theta} + 1}$$

On rappelle également que $\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}(\varepsilon)$ tend vers la distribution $-\delta(\varepsilon - \mu)$ lorsque θ tend vers 0 à μ fixé.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Tournez la page S.V.P.

Préambule aux parties A,B,C

Les progrès réalisés dans la croissance et le dopage des cristaux semiconducteurs permettent de confiner des électrons dans un plan défini à l'interface de deux semiconducteurs, par exemple GaAs et GaAlAs. On réalise ainsi un véritable gaz bidimensionnel d'électrons. A l'aide de grilles métalliques polarisées, on peut définir dans ces gaz bidimensionnels des conducteurs de géométrie bien contrôlée. Le transport électronique dans ce type de conducteurs, qui sera étudié dans ce problème, est gouverné par les collisions que subissent les électrons du gaz bidimensionnel. Plusieurs temps permettent de le caractériser :

- Le temps de collision élastique τ_e est le temps moyen séparant deux collisions conservant l'énergie d'un même électron (par exemple les collisions sur les impuretés). La longueur caractéristique associée à τ_e est le libre parcours moyen élastique l_e .
- Le temps de collision inélastique τ_{in} est le temps moyen séparant deux collisions modifiant l'énergie de l'électron (collisions électron-phonon et électron-électron). La longueur caractéristique associée à τ_{in} est le libre parcours moyen inélastique l_{in} .
- Le temps de collision τ est défini par :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_e} + \frac{1}{\tau_{in}}$$

On lui associe le libre parcours moyen l .

- Le temps de cohérence de phase de la fonction d'onde d'un électron τ_φ , tout à fait analogue au temps de cohérence rencontré en optique, conditionne l'observation d'interférences quantiques. Dans les systèmes que nous considérerons, $\tau_\varphi = \tau_{in}$ car seules les diffusions inélastiques modifient la phase de la fonction d'onde électronique. On associe à τ_φ la longueur de cohérence de phase l_φ , confondue avec l_{in} .

Aux très basses températures qui seront étudiées dans ce problème, le nombre de phonons est petit et le mécanisme définissant le temps de collision est la diffusion sur les impuretés, de sorte que :

$$l = l_e \ll l_{in} = l_\varphi$$

On peut alors définir différents régimes de transport suivant la taille caractéristique L du conducteur :

- Pour $l \ll l_\varphi \ll L$, on a le régime diffusif classique qui sera étudié dans la partie A et dans la partie C.III. Aucun effet d'interférences quantiques n'est observé.
- Pour $l \ll L \ll l_\varphi$, on a le régime diffusif cohérent qui sera étudié dans les parties C.II et C.IV. Chaque électron subit de nombreuses collisions lors de la traversée de l'échantillon mais, la cohérence de phase étant maintenue sur toute la longueur de l'échantillon, la conductance devient sensible aux interférences entre les divers chemins de propagation possibles.
- Pour $L \ll l \ll l_\varphi$, on a le régime balistique étudié dans la partie B. L'électron ne subit aucune collision et l'échantillon peut alors être considéré comme un guide d'onde électronique.

PARTIE A

Conductivité d'un gaz d'électrons à 2 dimensions

Dans cette partie, on considère un gaz bidimensionnel d'électrons. Ce gaz occupe un carré de côté L dont on note x et y les deux directions principales. Le nombre d'électrons par unité de surface est n_s . Pour tenir compte des interactions du gaz d'électrons avec le réseau qui le supporte, on attribue aux électrons une masse m^* appelée masse effective. On néglige l'interaction coulombienne entre les électrons.

I Niveaux d'énergie et statistique des électrons

- I.1) On rappelle que l'équation de Schrödinger satisfaite par la fonction d'onde $\Psi(x,y)$ d'un électron du gaz est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \Psi(x,y) = \varepsilon \Psi(x,y)$$

où ε est l'énergie de l'état électronique correspondant.

On impose à la fonction d'onde et à ses dérivées d'être périodiques dans les directions x et y avec une période L (conditions aux limites périodiques). Montrer que l'ensemble des fonctions :

$$\Psi_{k_x, k_y}(x,y) = \frac{1}{L} e^{ik_x x} e^{ik_y y}$$

avec $k_x = n_x \frac{2\pi}{L}$ et $k_y = n_y \frac{2\pi}{L}$ où n_x et n_y sont des entiers relatifs, forment une base orthonormée de l'ensemble des solutions. Préciser l'expression de ε en fonction de k_x et k_y .

- I.2) Calculer le courant de probabilité $\vec{J}_p(k_x, k_y)$ associé à la fonction d'onde Ψ_{k_x, k_y} . On rappelle que le courant de probabilité \vec{J}_p associé à une fonction d'onde Ψ s'écrit :

$$\vec{J}_p = \frac{1}{m^*} \text{Re} \left\{ \Psi^* \left[-i\hbar \vec{\nabla} \right] \Psi \right\}$$

Quelle est la dimension de $\vec{J}_p(k_x, k_y)$?

Montrer qu'un électron occupant l'état quantique décrit par Ψ_{k_x, k_y} a une contribution à la densité surfacique de courant électrique égale à :

$$\vec{J}_e(k_x, k_y) = -\frac{e\hbar}{m^* L^2} \vec{k}$$

où \vec{k} est le vecteur de coordonnées k_x et k_y .

- I.3) En tenant compte du spin de l'électron, montrer que le nombre d'états électroniques contenus dans un grand "volume" $\Delta k_x \Delta k_y$ de l'espace des \vec{k} est $\Delta k_x \Delta k_y L^2 / 2\pi^2$ (on précisera la notion de grand volume). En calculant le "volume" de l'espace des \vec{k} compris entre les surfaces d'énergie constante ε et $\varepsilon + d\varepsilon$, montrer que pour $d\varepsilon$ suffisamment grand, le nombre d'états d'énergie comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ s'écrit $N(\varepsilon)d\varepsilon$ où la densité d'états $N(\varepsilon)$ est donnée par :

$$N(\varepsilon) = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} L^2$$

- I.4) En déduire qu'à température nulle, les niveaux électroniques du gaz sont peuplés jusqu'à l'énergie de Fermi :

$$\varepsilon_F = \frac{n_s \pi \hbar^2}{m^*}$$

Tournez la page S.V.P.

Discuter la validité de ce calcul, sachant que pour les gaz d'électrons considérés, la densité électronique n_s est de l'ordre de 10^{11} cm^{-2} .

- I.5) Déterminer l'expression de la longueur d'onde λ_F d'un électron d'énergie ε_F . Montrer que λ_F , appelée longueur d'onde de Fermi, est de l'ordre de grandeur de la distance moyenne entre électrons.

Déterminer également l'expression de la vitesse v_F , appelée vitesse de Fermi, d'un électron d'énergie ε_F .

II Equation de Boltzmann. Conductivité électrique

On se propose de calculer la conductivité d'un tel gaz d'électrons en prenant en compte les collisions que subissent les électrons. On suppose le gaz d'électrons plongé dans un champ électrique \vec{E} uniforme. On introduit la probabilité $f(\vec{k}, t)$ qu'un état électronique de vecteur d'onde \vec{k} soit occupé à l'instant t .

- II.1) En supposant que le mouvement des électrons sous l'influence du champ \vec{E} peut être décrit classiquement, préciser l'évolution du vecteur d'onde d'un électron en l'absence de collision. Déterminer le nombre d'électrons dont le vecteur d'onde à l'instant t est \vec{k} à $d^2\vec{k}$ près. Montrer qu'en l'absence de collision, la conservation du nombre de particules conduit à :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{e}{\hbar} \vec{E} \cdot \nabla_{\vec{k}} f = 0$$

où $\nabla_{\vec{k}}$ désigne le gradient par rapport aux coordonnées du vecteur \vec{k} .

- II.2) Pour tenir compte de l'effet des collisions, on introduit au second membre de l'équation précédente un terme source :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = -\frac{f - f_0}{\tau(\varepsilon)}$$

où f_0 désigne la distribution de Fermi-Dirac et où τ , appelé temps de relaxation, ne dépend que de l'énergie de l'électron ε .

Justifier cette procédure et commenter la forme particulière choisie pour $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$. L'équation obtenue est appelée équation de Boltzmann.

- II.3) On suppose en plus le champ électrique stationnaire et suffisamment faible pour que la distribution f s'écarte très peu de sa valeur d'équilibre f_0 . En posant $f = f_0 + f_1$ et en linéarisant l'équation de Boltzmann, montrer que :

$$f_1(\vec{k}) = \frac{e\hbar}{m^*} \tau(\varepsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \vec{k} \cdot \vec{E}$$

- II.4) En utilisant le résultat de la question A.I.2 montrer que la densité surfacique de courant électrique s'écrit :

$$\vec{j} = -e \frac{L^2}{2\pi^2} \int f_1 \frac{\hbar \vec{k}}{m^* L^2} d^2 \vec{k}$$

- II.5) A partir d'arguments de symétrie, montrer que \vec{j} est parallèle à \vec{E} et que la conductivité σ vaut :

$$\sigma = -\frac{e^2}{m^* L^2} \int \varepsilon \tau(\varepsilon) N(\varepsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\varepsilon$$

On pourra par exemple commencer par choisir \vec{E} parallèle à x ou à y .

- II.6) Dédurre du comportement de $\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$ qu'à température nulle, la conductivité ne dépend que des propriétés du gaz d'électrons à l'énergie de Fermi et qu'elle vaut :

$$\sigma = \frac{n_s e^2 \tau(\varepsilon_F)}{m^*}$$

Commenter. Montrer que l'on peut écrire :

$$\vec{j} = -n_s e \vec{v}_d$$

où \vec{v}_d est appelée vitesse de dérive. Donner l'expression de \vec{v}_d et l'interpréter physiquement. Déterminer la mobilité η définie par $\vec{v}_d = -\eta \vec{E}$.

- II.7) En utilisant la relation entre f_1 et $\nabla_{\vec{k}} f_0$, montrer qu'à température nulle :

$$f(\vec{k}) \approx f_0 \left(\vec{k} + \frac{e\tau(\varepsilon_F)}{\hbar} \vec{E} \right)$$

Représenter à température nulle et dans le cas d'un champ \vec{E} parallèle à x les portions du plan k_x, k_y où les fonctions f et f_0 prennent des valeurs non nulles. Expliquer pourquoi les propriétés de conduction du gaz d'électrons ne dépendent que de ses propriétés au niveau de Fermi.

Montrer que pour la conduction, tout se passe comme si seule une fraction des électrons participait à la conduction en se déplaçant à la vitesse de Fermi v_F . Evaluer cette fraction en fonction de v_d et v_F .

- II.8) Donner l'expression du libre parcours moyen l des électrons au niveau de Fermi et montrer que :

$$\sigma = \frac{e^2}{h} k_F l$$

où k_F désigne le vecteur d'onde de Fermi.

En déduire que h/e^2 a la dimension d'une résistance.

III Données numériques

On considère un gaz bidimensionnel d'électrons de densité électronique $n_s = 3,56 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ et de mobilité $\eta = 0,85 \cdot 10^6 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$. La masse effective des électrons est $m^* = 0,067 m_0$ où m_0 est la masse de l'électron libre.

- III.1) Déterminer les valeurs numériques de ε_F , λ_F , v_F , $\tau(\varepsilon_F)$ et l .

Comparer les à celles obtenues dans un métal habituel comme l'or pour lequel on a une densité volumique d'électrons $\approx 6 \cdot 10^{28} \text{ cm}^{-3}$, $\varepsilon_F = 5,5 \text{ eV}$, $\lambda_F = 5,2 \text{ \AA}$, $v_F = 1,4 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$ et, à température ambiante, $l \approx 20 \text{ nm}$. On admettra qu'à 3 dimensions, λ_F reste de l'ordre de la distance entre électrons.

Evaluer également numériquement la conductivité σ du gaz bidimensionnel.

- III.2) Donner les valeurs numériques de la résistance h/e^2 et de la conductance e^2/h .

- III.3) Montrer que si l'on exprime la mobilité en unité $10^6 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ et la densité électronique en unité 10^{11} cm^{-2} , la résistance d'un carré du gaz d'électrons est indépendante de la dimension du carré et vaut :

$$R_{\square} = \frac{62.5}{n_s \eta} \Omega$$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE B

Quantification de la conductance

On considère dans cette partie un conducteur rectiligne de longueur L (direction x) et de largeur W (direction y) très petite par rapport à L . On suppose L et W très inférieurs au libre parcours moyen l défini dans la partie précédente de sorte que les électrons du conducteur ne subissent aucune collision. On parle alors d'un régime de transport balistique. Dans la direction y , les bords du conducteur sont modélisés par une énergie potentielle abrupte $\tilde{V}(y)$ donnée par :

$$\tilde{V}(y) = 0 \text{ pour } 0 < y < W \quad \tilde{V}(y) = +\infty \text{ pour } y \leq 0 \text{ et } y \geq W$$

Comme dans la partie A, on néglige les interactions entre électrons et on affecte aux électrons une masse effective m^* .

- 1) Ecrire l'hamiltonien électronique et montrer que ses fonctions propres s'écrivent :

$$\Psi(x, y) = \varphi(x)\Phi(y)$$

les fonctions $\varphi(x)$ et $\Phi(y)$ étant fonctions propres de deux hamiltoniens à une dimension H_x et H_y que l'on déterminera.

Comme au A.I.1, montrer que l'application de conditions aux limites périodiques dans la direction x conduit à :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_x x}$$

où k_x prend des valeurs discrètes que l'on précisera.

Quelles sont les conditions aux limites dans la direction y ? Montrer que le spectre de H_y est composé de valeurs discrètes ε_n et déterminer les fonctions propres $\Phi_n(y)$ correspondantes.

Donner l'expression de l'énergie de l'électron associée à un vecteur d'onde k_x et à l'indice n .

- 2) En utilisant la formule rappelée à la question A.I.2, calculer le courant de probabilité associé à la fonction d'onde correspondant à k_x et n .

Montrer que le flux de ce courant de probabilité à travers une section transverse du conducteur est :

$$\frac{\hbar k_x}{m^* L}$$

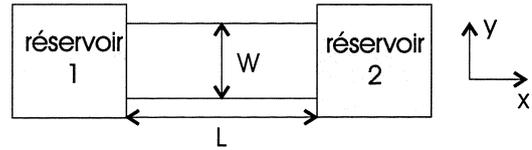
- 3) Par définition (et par analogie avec un guide d'onde électromagnétique), on associe à chaque fonction d'onde $\Phi_n(y)$ un mode transverse du guide d'onde électronique que constitue le conducteur.

On considère uniquement le mode électronique d'indice n et on cherche à calculer, en tenant compte du spin, le flux du courant de probabilité transporté par les états électroniques de vecteur d'onde $k_x > 0$ et d'énergie comprise entre ε et $\varepsilon + \Delta\varepsilon$, noté $J_{\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon}^{n,+}$. Dans un premier temps, on considère le cas où $\varepsilon_n \leq \varepsilon$. Exprimer $J_{\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon}^{n,+}$ comme une intégrale sur k_x puis comme une intégrale sur l'énergie. En déduire que pour $\varepsilon_n \leq \varepsilon$:

$$J_{\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon}^{n,+} = \frac{2\Delta\varepsilon}{h}$$

Préciser ensuite ce que vaut $J_{\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon}^{n,+}$ pour $\varepsilon + \Delta\varepsilon \leq \varepsilon_n$ puis pour $\varepsilon \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon + \Delta\varepsilon$. Que vaut le flux du courant de probabilité transporté par les états électroniques du mode n de vecteur d'onde $k_x < 0$ et d'énergie comprise entre ε et $\varepsilon + \Delta\varepsilon$, noté $J_{\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon}^{n,-}$?

- 4) On place maintenant le conducteur défini ci-dessus entre deux réservoirs d'électrons identiques constitués de deux gaz bidimensionnels d'électrons de densité électronique n_s et de masse effective m^* (voir figure 1). Ces deux réservoirs, également appelés contacts et notés 1 et 2, possèdent les propriétés suivantes :



- Figure 1 -

- Ils absorbent tous les électrons quittant le conducteur sans discrimination de leur énergie ou de leur état quantique.
- Ils émettent en direction du conducteur des électrons suivant une population d'états correspondant à un équilibre thermodynamique bien défini : distribution de Fermi-Dirac avec un potentiel chimique μ et une température θ .

Quel est l'analogie de ce type de réservoir pour des photons? Quels types de collisions doivent exister dans les réservoirs pour qu'ils puissent atteindre l'équilibre thermodynamique?

- 5) Dans la suite de cette partie, le contact 1 est porté à un potentiel électrique $V > 0$ tandis que l'on applique un potentiel nul au contact 2. On note μ_1 le potentiel chimique du réservoir 1 et μ_2 celui du réservoir 2.

Donner l'expression de la différence $\mu_2 - \mu_1$ en fonction de V .

On considère un mode transverse du conducteur, d'indice n , pour lequel $\varepsilon_n < \mu_2$. Montrer que si $\varepsilon_n < \mu_1$, le courant électrique total transporté par ce mode lorsque les réservoirs sont maintenus à température nulle est :

$$I_n = \frac{2e}{h}(\mu_2 - \mu_1)$$

Discuter le signe de I_n .

Montrer qu'à suffisamment faible différence de potentiel et à température nulle, la conductance associée à un mode est :

$$G = \frac{2e^2}{h}$$

- 6) En utilisant les résultats des questions A.I.5 et B.1, montrer que la conductance du conducteur à suffisamment faible tension et à température nulle est quantifiée et vaut :

$$G = \frac{2e^2}{h} \text{Int} \left[\frac{2W}{\lambda_F} \right]$$

où λ_F est la longueur d'onde de Fermi du gaz bidimensionnel d'électrons. Quel doit être l'ordre de grandeur de la largeur W du conducteur pour que cet effet de quantification puisse être observé? Commenter à l'aide des données numériques de la partie A.III.

A quelle condition sur la température θ du système peut on observer ces effets de quantification?

- 7) Montrer qu'une dissipation d'énergie que l'on évaluera est associée au processus de conduction décrit ci-dessus.

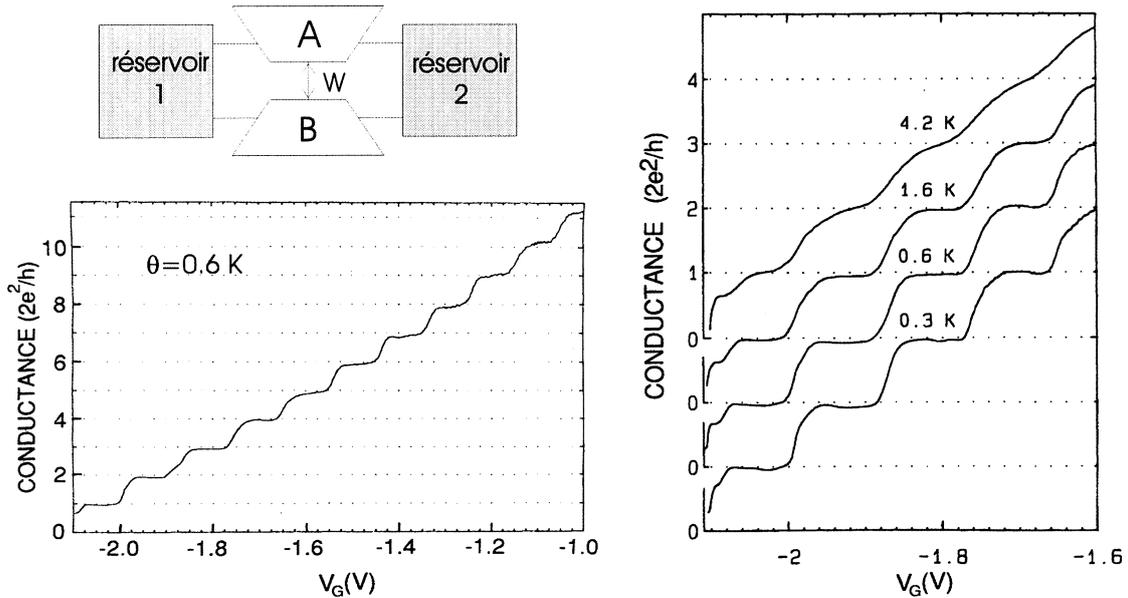
Comment varie la résistance du conducteur avec sa longueur L ?

Interpréter ces 2 résultats et proposer une explication pour cette dissipation apparemment paradoxale puisque l'on a supposé le conducteur en régime balistique.

Pourquoi parle-t-on de résistance de contact?

Quelle condition doit satisfaire la différence de potentiel V pour que l'on puisse supposer les réservoirs à l'équilibre thermique à la température θ ? Commenter à l'aide de la question précédente et des données numériques de A.III.

Tournez la page S.V.P.



- Figure 2 -

- 8) La figure 2 présente les résultats expérimentaux obtenus par B.J. Van Wees et ses collaborateurs en 1988¹. Le conducteur quantique et les réservoirs sont définis dans le même gaz bidimensionnel d'électrons de densité $n_s = 3,56 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$, de mobilité $\eta = 0,85 \cdot 10^6 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ et de masse effective $m^* = 0,067 m_0$. Une tension négative V_G appliquée sur les électrodes A et B (grilles) permet de contrôler par un effet électrostatique non décrit ici la largeur W du conducteur défini entre ces deux électrodes.

Commenter la courbe donnant la conductance mesurée en fonction de la tension grille appliquée à $\theta = 0,6 \text{ K}$.

Comment varie la largeur du fil en fonction de la tension grille V_G ? Evaluer numériquement la variation de la largeur du fil entre deux paliers de conductance.

Commenter également la variation de la conductance avec la température.

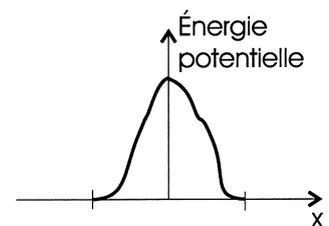
PARTIE C

Conducteur quantique et désordre

Dans cette partie, on souhaite tenir compte de la présence de désordre dans le conducteur quantique, associé par exemple à la présence d'impuretés. On se propose d'utiliser le formalisme de transmission des ondes électroniques développé dans la partie précédente et on modélise le désordre dans une tranche de conducteur par la transmission T de cette tranche qui décrit la probabilité qu'un électron injecté à l'un de ses bouts soit transmis à l'autre. Dans un premier temps, on rappelle quelques propriétés essentielles des coefficients de réflexion et de transmission d'une barrière de potentiel.

I Transmission et réflexion d'une barrière de potentiel

On étudie ici une géométrie unidimensionnelle et on considère la barrière de potentiel représentée sur la figure 3. On définit des régions appelées G et D situées respectivement à gauche et à droite de cette barrière, où l'énergie potentielle est nulle.



- Figure 3 -

1. B.J. Van Wees et al., Phys.Rev.Lett. 60, 848 (1988) et Phys.Rev.B. 43, 12431 (1991)

- I.1) On considère l'équation de Schrödinger associée à cette barrière de potentiel pour une particule de masse m^* . Montrer qu'un état stationnaire décrivant une particule de vecteur d'onde $k > 0$ arrivant de la région G vers la barrière s'écrit :

$$A \left\{ e^{ikx} + r e^{-ikx} \right\} \text{ dans G}$$

$$A \left\{ t e^{ikx} \right\} \text{ dans D}$$

où A est une constante. Que représentent r et t ?

- I.2) En utilisant la formule donnée à la question A.1.2, calculer le courant de probabilité associé à la fonction d'onde ci-dessus dans la région G et dans la région D. En déduire :

$$|r|^2 + |t|^2 = 1$$

$T = |t|^2$ est appelée transmission de la barrière.

- I.3) De la même façon, la fonction d'onde qui décrit une particule de vecteur d'onde $k < 0$ arrivant de la région D vers la barrière s'écrit :

$$A \left\{ e^{-ikx} + r' e^{ikx} \right\} \text{ dans D}$$

$$A \left\{ t' e^{-ikx} \right\} \text{ dans G}$$

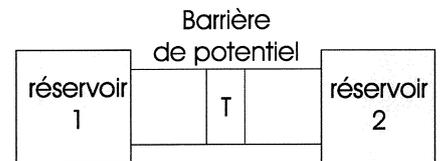
On admettra sans chercher à les démontrer les propriétés suivantes :

$$|r|^2 = |r'|^2 \text{ et } |t|^2 = |t'|^2$$

Quelle est la signification physique de ces relations?

II Conductance versus transmission

On considère un conducteur quantique similaire à celui décrit dans la partie B mais **mais pour lequel un seul mode transverse participe à la conduction**. Comme dans la partie B, ce conducteur est placé entre deux réservoirs d'électrons identiques notés 1 et 2. On applique au réservoir 1 un potentiel $V > 0$ et un potentiel nul au réservoir 2. On modélise les collisions élastiques que peuvent subir les électrons dans le conducteur par une barrière de potentiel dont les paramètres r et t (cf. C.I) sont supposés, pour simplifier, indépendants de l'énergie (voir figure 4).



- Figure 4 -

- II.1) En reprenant les grandes lignes du raisonnement de la partie B et en utilisant les résultats de la partie C.I, calculer le courant dans le conducteur à droite de la barrière pour une faible différence de potentiel V . Calculer de même le courant à gauche de la barrière. Commenter. En déduire qu'à suffisamment faible différence de potentiel V , la conductance du système vaut :

$$G = \frac{2e^2}{h} T$$

où T a été défini au C.I.2. Interpréter cette relation.

Tournez la page S.V.P.

II.2) Montrer que la résistance du conducteur s'écrit :

$$R = \frac{h}{2e^2} + \frac{h}{2e^2} \frac{1-T}{T}$$

A l'aide des résultats de la partie B, déterminer le sens physique du premier terme de la somme ci-dessus. En déduire que le second terme de cette somme représente la résistance intrinsèque du conducteur considéré.

II.3) Comment faudrait-il modifier la démarche utilisée ci-dessus pour l'adapter à un conducteur pour lequel plusieurs modes transverses participent à la conduction?

Dans les deux parties suivantes, on s'intéresse à un conducteur rectiligne **monomode transverse** contenant un grand nombre de diffuseurs (des impuretés par exemple) répartis aléatoirement. Chaque diffuseur est modélisé par une barrière de potentiel et on s'intéresse à la transmission du système ainsi formé ou, ce qui revient au même d'après la partie précédente, à la résistance du conducteur.

III Conducteur incohérent. Loi d'Ohm

Dans toute cette partie, **on suppose que la longueur de cohérence de phase des ondes électroniques est inférieure à la distance entre les diffuseurs.**

III.1) Dans un premier temps, on s'intéresse à la transmission $T(2)$ du système formé par deux barrières de transmission T_1 et T_2 séparées d'une distance plus grande que la longueur de cohérence de phase des ondes électroniques. Montrer que :

$$T(2) = \frac{T_1 T_2}{1 - (1 - T_1)(1 - T_2)}$$

Montrer que $(1 - T)/T$ est une grandeur additive c'est à dire que :

$$\frac{1 - T(2)}{T(2)} = \frac{1 - T_1}{T_1} + \frac{1 - T_2}{T_2}$$

Commenter ce résultat à l'aide de la question C.II.2.

III.2) On appelle ν la densité linéique de diffuseurs dans le conducteur. On suppose tous les diffuseurs identiques, chacun pouvant être modélisé par une barrière de transmission T . Montrer que la transmission d'une longueur L de conducteur contenant beaucoup de diffuseurs s'écrit :

$$T(L) = \frac{L_0}{L + L_0}$$

où l'on exprimera L_0 en fonction de T et ν .

III.3) Dans le cas, supposé réalisé par la suite où $T \approx 1$, montrer que :

$$L_0 \nu (1 - T) \approx 1$$

A partir de cette dernière relation, donner un sens physique à la longueur L_0 .

A l'aide du C.II.2, montrer que la résistance d'un conducteur de longueur L s'écrit :

$$R(L) = R_{cl}(L) + \frac{h}{2e^2}$$

Préciser le sens physique de chacun de ces termes. Commenter la dépendance de R_{cl} avec L . Comparer $R_{cl}(L)$ à la résistance que l'on obtiendrait à partir de l'équation de Boltzmann par un traitement analogue à celui réalisé au A, sachant qu'une telle approche donne pour la conductivité d'un système à une dimension :

$$\sigma_{1D} = \frac{n_l e^2 \tau(\varepsilon_F)}{m^*}$$

où n_l est la densité électronique linéique. On précise d'autre part qu'à une dimension, la longueur d'onde de Fermi est donnée par $\lambda_F = 4/n_l$.
Conclure.

IV Conducteur cohérent. Localisation

On reprend le problème de la partie précédente, **en supposant cette fois-ci la longueur de cohérence de phase des ondes électroniques plus grande que la longueur du conducteur.**

IV.1) Reprendre la première question de la partie précédente et montrer que dans ce cas :

$$T(2) = \frac{T_1 T_2}{1 - 2\sqrt{(1-T_1)(1-T_2)} \cos \alpha + (1-T_1)(1-T_2)}$$

où α est le déphasage total subi par une onde électronique après un aller et retour entre les deux barrières.

IV.2) On considère un morceau de conducteur de transmission T_1 , dont la résistance intrinsèque vaut :

$$R_1 = \frac{h}{2e^2} \frac{1-T_1}{T_1}$$

d'après les résultats du C.II.2.

On rajoute à la suite de ce morceau un autre morceau de transmission T_2 et de résistance intrinsèque :

$$R_2 = \frac{h}{2e^2} \frac{1-T_2}{T_2}$$

On suppose que le déphasage subi par une onde électronique après un aller et retour entre les deux barrières de transmissions T_1 et T_2 est α . Calculer la résistance intrinsèque $R(\alpha)$ du conducteur ainsi formé. Comparer $R(\alpha)$ et $R_1 + R_2$. Commenter.

IV.3) Montrer que la résistance intrinsèque d'un morceau de conducteur ne contenant qu'un seul diffuseur (de transmission $T \approx 1$) est en moyenne :

$$\frac{h}{2e^2} \frac{\Delta L}{L_0}$$

où ΔL est l'inverse de la densité linéique de diffuseurs ν .

On utilisera la relation $\nu L_0(1-T) \approx 1$ établie à la question C.III.3.

IV.4) On considère un conducteur de longueur L et de résistance intrinsèque $R(L)$. On réalise un grand nombre de fois la même expérience : on rajoute au conducteur de longueur L un morceau de conducteur ne contenant qu'un seul diffuseur placé aléatoirement. Montrer qu'en moyenne, la résistance intrinsèque du conducteur ainsi formé est :

$$R(L + \Delta L) = R(L) + \frac{h}{2e^2} \left[1 + \frac{4e^2}{h} R(L) \right] \frac{\Delta L}{L_0}$$

IV.5) Montrer que la résistance intrinsèque $R(L)$ d'un conducteur plus court que la longueur de cohérence de phase des ondes électroniques vaut :

$$R(L) = \frac{h}{4e^2} \left[e^{2\frac{L}{L_0}} - 1 \right]$$

IV.6) Comment varie $R(L)$ pour $L \gg L_0$? Commenter ce résultat connu sous le nom de localisation forte.

IV.7) On considère maintenant un conducteur monomode transverse dont la longueur, bien que grande devant la distance entre diffuseurs, est très inférieure à la longueur de localisation L_0 .

IV.7.a) Montrer que cette hypothèse revient à supposer que la transmission de chaque diffuseur est très voisine de 1.

IV.7.b) Montrer à l'aide des résultats de la partie précédente que la résistance intrinsèque du conducteur est :

$$R(L) = R_{cl}(L) \left[1 + \frac{2e^2}{h} R_{cl}(L) \right]$$

où $R_{cl}(R)$ a été défini au C.III.3.

IV.7.c) En déduire que la correction à la conductance intrinsèque due aux effets d'interférences quantiques est :

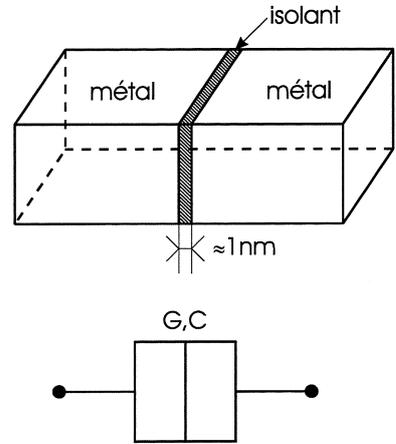
$$\Delta G = -\frac{2e^2}{h}$$

Cet effet est appelé localisation faible.

PARTIE D

Electronique à un électron

Dans cette partie, on s'intéresse à des dispositifs dont le composant de base est la jonction tunnel. Celle-ci est composée de deux électrodes métalliques séparées par une couche isolante d'épaisseur suffisamment faible pour que les électrons puissent la traverser par effet tunnel. Cette jonction peut être caractérisée par une conductance G dépendant de la transmission de la barrière de potentiel formée par la couche isolante. D'autre part, les deux électrodes métalliques forment également un condensateur de capacité C . La jonction tunnel et le schéma électrique que l'on utilisera pour la modéliser sont présentés sur la figure 5.

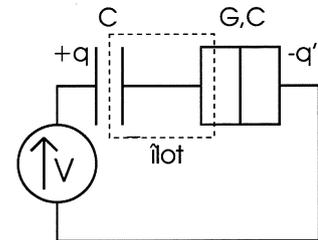


- Figure 5 -

L'électronique à un électron repose sur le caractère discret de la charge qui traverse la jonction tunnel : **à chaque événement tunnel, une charge égale à la charge de l'électron e passe à travers la jonction** (on néglige dans ce problème les événements où deux électrons traverseraient simultanément la barrière).

I Blocage de Coulomb de l'effet tunnel

Dans un premier temps, on considère le dispositif, représenté sur la figure 6, appelé "boîte à un électron", constitué d'une jonction tunnel en série avec un condensateur, l'ensemble étant polarisé par un générateur délivrant la tension V . Pour simplifier les calculs, on supposera que les capacités de la jonction et du condensateur sont toutes deux égales à C .



- Figure 6 -

- I.1) Montrer que la charge électrique de l'îlot métallique, formé par les armatures internes des capacités et représenté en pointillé sur la figure 6 est quantifiée et ne peut être qu'un multiple entier n de la charge de l'électron $-e$.
Expliquer pourquoi il n'en est pas de même des charges q et q' présentes sur les armatures du condensateur ou de la jonction?
- I.2) Exprimer la charge q du condensateur en fonction de n , V et C .
- I.3) Calculer l'énergie électrostatique U_e du système formé par les deux capacités en fonction de la capacité C , de la tension V et du nombre n d'électrons en excès sur l'îlot. Vérifier qu'elle s'écrit comme la somme de deux termes, l'un dépendant de V , l'autre de n et donner une interprétation physique de chacun de ces termes.
- I.4) On suppose que le système formé par les deux capacités est maintenu à température constante θ par un thermostat et qu'il est polarisé à tension constante V par le générateur. On cherche à calculer le nombre \bar{n} d'électrons en excès sur l'îlot à l'équilibre. En appliquant

les deux premiers principes de la thermodynamique au système formé des deux capacités, montrer qu'à $\theta = 0 K$, le potentiel thermodynamique qui régit son évolution est :

$$U_e - \frac{neV}{2}$$

En déduire que l'équilibre du système à $\theta = 0 K$ est atteint pour la valeur \bar{n} de n qui rend minimum la fonction :

$$\frac{1}{2} \frac{e^2}{2C} \left\{ n - \frac{CV}{e} \right\}^2$$

- I.5)** Tracer sur un même graphe les courbes représentant la fonction ci-dessus en fonction de V pour différentes valeurs de n .
En déduire le nombre entier \bar{n} en fonction de V . Tracer la courbe $\bar{n}(V)$. Commenter.
Tracer également la courbe donnant, à $\theta = 0 K$, la charge q' de la capacité de la jonction tunnel en fonction de V .

- I.6)** Montrer qu'à $\theta = 0 K$, lorsqu'on augmente la tension V à partir de 0, l'effet tunnel est bloqué (blocage de Coulomb) jusqu'à ce que V soit égal à $e/2C$.
Vérifier que cette dernière condition s'écrit également :

$$\frac{1}{2} \frac{e^2}{2C} = e \frac{V}{2}$$

Quelle est la signification physique de chacun des termes de cette équation? Proposer une interprétation physique simple du blocage de Coulomb.

- I.7)** Montrer que cet effet ne peut-être observé que si la température θ est suffisamment basse pour que :

$$k_B \theta \ll \frac{1}{2} \frac{e^2}{2C}$$

On suppose la condition ci-dessus vérifiée. Discuter qualitativement les fluctuations thermiques de n pour les différentes valeurs de la tension V . Préciser en particulier les valeurs de V pour lesquelles ces fluctuations sont thermiquement bloquées.

Evaluer l'ordre de grandeur des capacités nécessaires pour pouvoir observer des effets de blocage de Coulomb à température ambiante. En utilisant par exemple l'expression de la capacité d'une sphère métallique, évaluer un ordre de grandeur de la taille caractéristique des systèmes correspondants. Commenter.

On sait fabriquer par nanolithographie des jonctions tunnel dont la capacité est de l'ordre du femtofarad ($10^{-15} F$). Quelle température faut-il atteindre pour pouvoir observer des effets de blocage de Coulomb dans de tels systèmes? Comment peut-on obtenir une telle température? Quelle est la différence de potentiel qui permet d'ajouter un électron sur l'îlot? Commenter.

- I.8)** Dans cette question, on s'intéresse aux fluctuations quantiques de n . On cherche un critère pour que ces fluctuations, associées à la délocalisation des fonctions d'ondes électroniques de part et d'autre de la barrière, soient suffisamment faibles pour que la charge soit complètement localisée sur l'îlot et que les raisonnements ci-dessus restent valables.
On se place en régime de blocage de Coulomb maximal, par exemple à $V = e/C$. Montrer

que le temps qui sépare deux événements tunnel est relié à la conductance G de la jonction par :

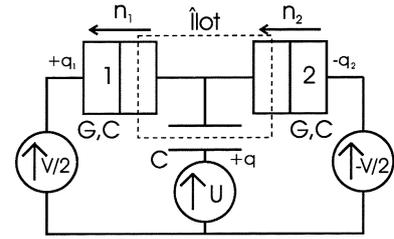
$$\tau = \frac{e}{GV} = \frac{C}{G}$$

En déduire l'élargissement ΔE des niveaux d'énergie de l'îlot. Vérifier que les effets de blocage de Coulomb ne sont observables que si :

$$G \ll \frac{e^2}{h}$$

II Le transistor à un électron

Dans cette partie, on considère le dispositif, présenté figure 7, contenant deux jonctions tunnel (notées 1 et 2) et un condensateur. Ce dispositif est appelé transistor à un électron. Pour simplifier les calculs, on supposera les deux jonctions tunnel identiques de capacité C égale à celle du condensateur. Comme dans la partie précédente, on cherche le nombre n d'électrons en excès sur l'îlot métallique formé par les armatures internes des trois capacités.



- Figure 7 -

II.1) Exprimer les charges individuelles q_1 , q_2 et q et l'énergie électrostatique globale des trois capacités en fonction de U , V , n et C .

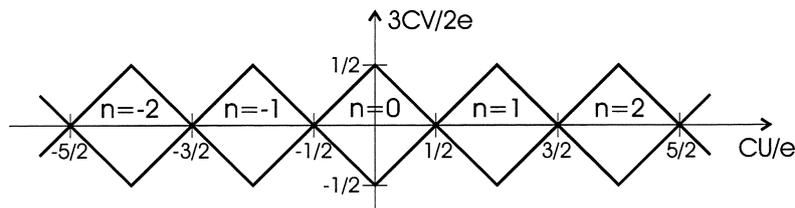
II.2) On caractérise le système par le nombre n d'électrons en excès sur l'îlot, par le nombre n_1 d'électrons qui ont quitté l'îlot en traversant la jonction 1 et par le nombre n_2 d'électrons qui y sont arrivés en traversant la jonction 2 (voir figure 7).

Exprimer en fonction de U , V , Δn_1 et Δn_2 , le travail fourni par l'ensemble des trois générateurs lors d'une transformation du système qui le conduit de l'état (n, n_1, n_2) à l'état $(n + \Delta n, n_1 + \Delta n_1, n_2 + \Delta n_2)$ à tensions U et V constantes.

II.3) Comme dans la partie précédente, montrer qu'à température θ nulle et à tension U et V constantes, le potentiel thermodynamique qui régit l'évolution du système est à une constante près :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{n^2 e^2}{3C} \right] - n_1 e \left[\frac{V}{2} - \frac{U}{3} \right] - n_2 e \left[\frac{V}{2} + \frac{U}{3} \right]$$

II.4) A $\theta = 0 K$, on envisage la situation où n électrons en excès sont présents sur l'îlot. Etablir les conditions, portant sur U , V et n , pour que les transitions conduisant à $n - 1$ ou $n + 1$ électrons sur l'îlot soient thermodynamiquement bloquées. Montrer que la zone de stabilité de la configuration à n électrons sur l'îlot est le carré représenté pour $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ sur le diagramme ($Y = 3CV/2e$, $X = CU/e$) de la figure 8.



- Figure 8 -

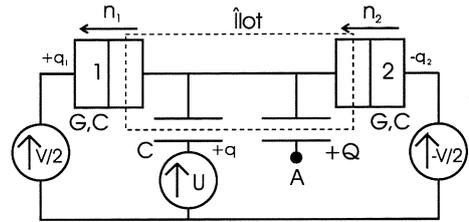
Tournez la page S.V.P.

- II.5)** A $\theta = 0 K$, on se place à une tension V inférieure à $e/3C$ et on augmente progressivement la tension U à partir de 0. Montrer qu'un courant électrique I traverse le dispositif lorsqu'on sort de la zone de stabilité d'un îlot à 0 électron? Que se passe-t-il si on augmente encore la tension U ?

Tracer qualitativement l'allure du courant en fonction de U .

Montrer que les pics de conductance sont d'autant plus larges que V est proche de $e/3C$ et évaluer le courant maximum qui traverse le transistor pour $V \approx e/3C$ en fonction de G et C . L'évaluer numériquement pour les valeurs typiques $G = 10^{-5} \Omega^{-1}$ et $C = 10^{-15} F$.

- II.6)** On modifie légèrement le schéma de la figure 7 en rajoutant un condensateur dont une des armatures est reliée à l'îlot métallique. Sur l'autre armature de ce condensateur on impose une charge constante égale à Q (voir figure 9).



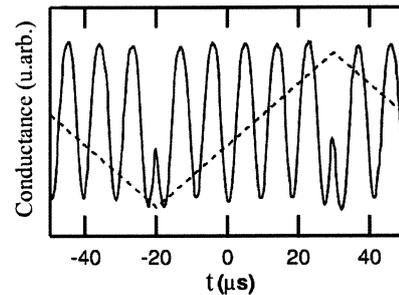
- Figure 9 -

Montrer que le diagramme de stabilité des différentes configurations de l'îlot est celui présenté figure 8 à condition de remplacer CU/e par $CU/e + Q/e$.

On part d'une situation où le transistor est polarisé au maximum d'un pic de conductance. De combien faut-il modifier Q pour atteindre le pic de conductance voisin, les générateurs de tension étant maintenus à tension constante? En déduire que le transistor à un électron peut-être utilisé comme un électromètre extrêmement sensible.

- II.7)** Dans cette question, on s'intéresse aux performances d'un électromètre réalisé en 1998 par R.J. Schoelkopf et ses collaborateurs² à l'aide d'un transistor à un électron à base d'aluminium. Toutes les mesures présentées ont été effectuées à très basse température ($\approx 45 mK$). Le schéma de principe du transistor est celui de la figure 9.

- II.7.a) La figure 10 présente la conductance mesurée du transistor lorsqu'une tension triangulaire (représentée en pointillés) de fréquence $10 kHz$ est appliquée au point A. Lors de cette expérience, quelle est la variation de la charge Q ?



- Figure 10 -

- II.7.b) Expliquer qualitativement comment régler le générateur de tension U pour que la sensibilité de l'électromètre soit maximale. On étudie maintenant la réponse en fréquence de l'électromètre ainsi polarisé lorsqu'on applique au point A une tension sinusoïdale de fréquence $\nu_0 = 1,1 MHz$ et dont la valeur efficace est ajustée en utilisant les résultats de l'expérience précédente pour correspondre à une charge de 0,01 électron. Pour cela, on utilise un analyseur de spectre qui mesure la transformée de Fourier $S(\nu)$ de la fonction d'autocorrélation du signal qu'il reçoit. Ce signal est la somme d'un signal sinusoïdal de fréquence ν_0 et de valeur efficace a et d'un bruit, blanc dans la bande de mesure (c'est à dire indépendant de la fréquence). Le signal sinusoïdal et le bruit

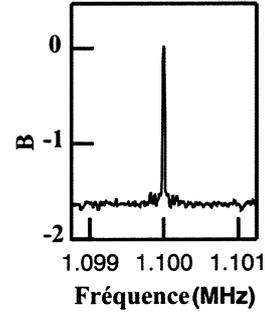
2. R.J. Schoelkopf et al., Science 280, 1238 (1998)

n'étant pas corrélés, leurs fonctions d'autocorrélation s'ajoutent de sorte que :

$$S(\nu) = a^2\delta(\nu - \nu_0) + b^2$$

où le premier terme correspond à la sinusoïde et le second, constant, est caractéristique d'un bruit blanc.

Le temps de mesure fini T de l'analyseur fixe la résolution spectrale de sorte que l'on a accès à la quantité $A(\nu)$ égale à l'intégrale de $S(\nu)$ sur une bande de largeur $\Delta\nu = 1/T$ centrée autour de ν . La figure 11 présente, à une constante près, $B = \log(\sqrt{A(\nu)})$ en fonction de ν . Sachant que $\Delta\nu = 23 \text{ Hz}$, montrer que le bruit du système est caractérisé par la sensibilité $S_q = b \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ électrons}/\sqrt{\text{Hz}}$. Commenter en particulier l'unité de la quantité précédente et ses conséquences expérimentales.



- Figure 11 -

- II.7.c) Sachant que la capacité du condensateur de charge Q est $0,45 \cdot 10^{-15} \text{ F}$, calculer la sensibilité en énergie du transistor $\delta E = S_q^2/2C$. Montrer qu'elle a la même unité que la constante de Planck h et calculer le rapport $\delta E/h$. Commenter.
- II.7.d) L'étude en fréquence révèle par ailleurs que la bande passante du transistor est d'environ 100 MHz . Montrer que même si l'on souhaite effectuer des mesures rapides en utilisant toute la bande passante du transistor, le bruit de charge reste inférieur à 1 électron. Calculer la fréquence moyenne de passage des électrons pour un courant de 10 pA . En déduire que le transistor à un électron ci-dessus permet de mesurer, en une dizaine de secondes, des courants de l'ordre de 10 pA avec une précision relative de l'ordre de 10^{-9} .
 Quel peut être l'intérêt métrologique d'un tel système?