

# Agrégation de sciences physiques

## Concours externe

### OPTION PHYSIQUE

Problème de physique ♦ Session : 2004

## Conducteurs quantiques

### PARTIE A

#### Conductivité d'un gaz d'électrons à 2 dimensions

#### I Niveaux d'énergie et statistique des électrons

I.1) L'équation de Schrödinger est séparable en  $x$  et  $y$ . On cherche donc de solutions de la forme  $\varphi(x)\psi(y)$  où :

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) = \varepsilon_x \varphi(x) \quad \text{et} \quad -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(y) = \varepsilon_y \psi(y)$$

Si  $\varepsilon_x < 0$ , il vient  $\varphi(x) = A \exp(\alpha x) + B \exp(-\alpha x)$  avec  $\alpha^2 = -2m^* \varepsilon_x / \hbar^2$ . Une telle solution ne peut satisfaire des conditions aux limites périodiques (fonction et dérivée). Le raisonnement est le même pour la direction  $y$ . On a donc  $\varepsilon_x \geq 0$  et  $\varepsilon_y \geq 0$ . On écrit alors :  $\varphi(x) = A \exp(ik_x x) + B \exp(-ik_x x)$  avec  $k_x^2 = 2m^* \varepsilon_x / \hbar^2$ . Il est immédiat de vérifier que  $\varphi$  et ses dérivées sont périodiques de période  $L$  si et seulement si  $k_x = 2\pi n_x / L$  où  $n_x \in \mathbb{Z}$ . En faisant le même raisonnement pour  $y$  et en remarquant que 2 ondes planes de vecteurs différents sont orthogonales, on voit que l'on peut former une base orthogonale des solutions avec les fonctions  $C \exp(ik_x x) \exp(ik_y y)$  où  $k_x = 2\pi n_x / L$ ,  $k_y = 2\pi n_y / L$  avec  $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$ . La normalisation de ces fonctions entraîne alors immédiatement  $C = 1/L$ . L'énergie  $\varepsilon$  est reliée à  $k_x$  et  $k_y$  par :

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2)$$

$$I.2) \vec{J}_p(k_x, k_y) = \frac{1}{m^*} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{L^2} \hbar \vec{k} \right\} = \frac{\hbar \vec{k}}{m^* L^2}$$

où  $\vec{k}$  est le vecteur de coordonnées  $k_x$  et  $k_y$ .  $\vec{J}_p$  a pour dimension  $L^{-1} T^{-1}$ .

La contribution d'un électron de vecteur d'onde  $\vec{k}$  à la densité surfacique de courant électrique est donc :

$$\vec{J}_e(k_x, k_y) = -e \vec{J}_p(k_x, k_y) = -\frac{e\hbar}{m^* L^2} \vec{k}$$

I.3) Le "volume" de l'espace des  $\vec{k}$  occupé par un état électronique est :  $(1/2)(2\pi/L)^2$  (le facteur 1/2 vient du spin). Dans un "volume"  $\Delta k_x \Delta k_y$  grand devant  $2\pi^2/L^2$ , il y a donc  $L^2 \Delta k_x \Delta k_y / 2\pi^2$  états.

Dans l'espace des  $\vec{k}$ , la "surface" d'énergie constante égale à  $\varepsilon$  est un cercle de rayon  $k = \sqrt{2m^* \varepsilon} / \hbar$ . Le "volume" compris entre les surfaces d'énergie constante  $\varepsilon$  et  $\varepsilon + d\varepsilon$  est  $2\pi k dk$ . Comme  $k = \sqrt{2m^* \varepsilon} / \hbar$ ,  $dk = \sqrt{m^*} d\varepsilon / \hbar \sqrt{2\varepsilon}$  et ce "volume" vaut  $2\pi m^* d\varepsilon / \hbar^2$ .

Le nombre d'états électroniques d'énergie comprise entre  $\varepsilon$  et  $\varepsilon + d\varepsilon$  est donc  $L^2 m^* d\varepsilon / \pi \hbar^2$  (à condition que ce nombre soit grand devant 1). La densité d'états en énergie est donc :

$$N(\varepsilon) = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} L^2$$

I.4) A température nulle, le nombre d'électrons  $N_{e^-}$  du gaz est obtenu par :

$$N_{e^-} = \int_0^{\epsilon_F} N(\epsilon) d\epsilon$$

On en déduit  $\epsilon_F = N_{e^-}/N(\epsilon)$  et comme  $n_s = N_{e^-}/L^2$  :

$$\epsilon_F = \frac{n_s \pi \hbar^2}{m^*}$$

Pour  $n_s = 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ , un échantillon de  $1 \text{ mm}^2$  contient  $10^9$  électrons. Il y a donc  $10^9$  états d'énergie inférieure à  $\epsilon_F$ . La notion de densité d'états est donc pertinente et le calcul ci-dessus est valable.

I.5)  $\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*}$  et  $\lambda_F = \frac{2\pi}{k_F} \Rightarrow \lambda_F = \sqrt{\frac{2\pi}{n_s}}$

$\sqrt{1/n_s}$  est la distance moyenne entre électrons du gaz, du même ordre de grandeur que  $\lambda_F$ .

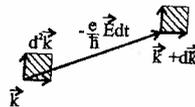
$$\epsilon_F = \frac{1}{2} m^* v_F^2 \Rightarrow v_F = \frac{\hbar}{m^*} \sqrt{2\pi n_s}$$

II Equation de Boltzmann. Conductivité électrique

II.1) On suppose que le mouvement des électrons peut être décrit classiquement. En l'absence de collisions, on peut donc écrire  $d\vec{p}/dt = -e\vec{E}$  avec  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ . On en déduit :

$$\hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = -e\vec{E}$$

On considère un élément de volume  $d^2\vec{k}$  centré autour du point  $\vec{k}$  de l'espace des vecteurs d'onde. Il contient  $(L^2/2\pi^2)d^2\vec{k}$  états. Le nombre d'électrons qui s'y trouvent à l'instant  $t$  est donc  $f(\vec{k}, t)(L^2/2\pi^2)d^2\vec{k}$ . A l'instant  $t + dt$ , cet élément de volume s'est déplacé au point  $\vec{k} + d\vec{k}$ ,  $d\vec{k}$  se déduisant de  $\hbar d\vec{k}/dt = -e\vec{E}$ . Cette dernière relation prouve par ailleurs que l'élément de volume  $d^2\vec{k}$  s'est déplacé sans déformation (voir figure 1).



- Figure 1 -

La conservation du nombre de particules impose :

$$f(\vec{k}, t) d^2\vec{k} = f(\vec{k} + d\vec{k}, t + dt) d^2\vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} dt + \vec{\nabla}_{\vec{k}} f \cdot d\vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{e}{\hbar} \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f = 0$$

Une autre façon de faire consiste à écrire directement une équation de conservation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\vec{k}} \cdot \left( f \frac{d\vec{k}}{dt} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\vec{k}} f \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} = 0 \text{ car } \vec{\nabla}_{\vec{k}} \cdot \left( \frac{d\vec{k}}{dt} \right) = -\frac{e}{\hbar} \vec{\nabla}_{\vec{k}} \cdot \vec{E} = 0$$

II.2) La durée d'une collision est très courte devant les temps caractéristiques de l'évolution du système (temps de relaxation). Les collisions modifient donc "instantanément" le vecteur d'onde des électrons. Elles peuvent donc créer ou enlever "instantanément" des particules au point  $\vec{k}$ . Il est donc légitime de les traiter à l'aide d'un terme source dans le second membre de l'équation précédente qui s'écrit maintenant :

$$\frac{df}{dt} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$$

Par ailleurs, les collisions ont tendance d'équilibre de Fermi-Dirac, d'où la forme

II.3) L'équation de Boltzmann s'écrit en régime

$$-\frac{e}{\hbar} \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} (f_0 + f_1) = -\frac{f_1}{\tau(\epsilon)}$$

soit en négligeant  $\vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_1$  par rapport

$$f_1 = \frac{e}{\hbar} \tau(\epsilon) \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0$$

Par ailleurs  $\vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0 = \vec{\nabla}_{\vec{k}} \epsilon \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = \frac{\hbar^2 \vec{k}}{m^*}$

$$f_1(\vec{k}) = \frac{e\hbar}{m^*} \tau(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \vec{k} \cdot \vec{E}$$

$f_1$  est du premier ordre en  $\vec{E}$ , le terme nul faible l'approximation ci-dessus est donc

II.4) On obtient la densité surfacique de cour possibles, la contribution calculée au A.I.

$$\vec{j} = \int \frac{L^2}{2\pi^2} f(\vec{k}) \vec{v}(\vec{k}) d^2\vec{k}$$

densité d'états    probabilité d'occupa

$$\Rightarrow \vec{j} = -e \frac{L^2}{2\pi^2} \int (f_0 + f_1) \frac{\hbar \vec{k}}{m^* L^2} d^2\vec{k}$$

Par parité, la contribution du terme en  $f_0$  sur tout l'espace est nulle. On a donc :

$$\vec{j} = -e \frac{L^2}{2\pi^2} \int f_1 \frac{\hbar \vec{k}}{m^* L^2} d^2\vec{k}$$

II.5) On choisit d'abord  $\vec{E}$  parallèle à  $x$ . En l'intégrale donnant  $j_x$  contient des termes on a donc  $j_y = 0$ .

$$j_x = -e \frac{L^2}{2\pi^2} \int \frac{e\hbar}{m^*} \tau(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\hbar}{m^* L^2} k_x^2 E_x d^2\vec{k}$$

$$\Rightarrow j_x = -\frac{e^2}{m^* L^2} \frac{L^2}{2\pi^2} \int \tau(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2) E_x d^2\vec{k}$$

car l'intégrale de  $k_x^2$  et celle de  $k_y^2$  sont égales

$$\Rightarrow j_x = -\frac{e^2 E_x}{m^* L^2} \frac{L^2}{2\pi^2} \int \tau(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \epsilon d^2\vec{k}$$

$$\Rightarrow j_x = -\frac{e^2 E_x}{m^* L^2} \int \tau(\epsilon) N(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \epsilon d\epsilon$$

par définition de la densité d'états. D'où  $j_x$

$$\sigma = -\frac{e^2}{m^* L^2} \int \epsilon \tau(\epsilon) N(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} d\epsilon$$

u gaz est obtenu par :

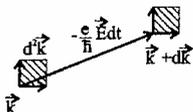
$\cdot/L^2$  :

tient  $10^9$  électrons. Il y a donc  $10^9$  états d'énergie onc pertinente et le calcul ci-dessus est valable.

u gaz, du même ordre de grandeur que  $\lambda_F$ .

être décrit classiquement. En l'absence de collisions, . On en déduit :

autour du point  $(2\pi)^2 d^2 \vec{k}$  états. ant  $t$  est donc nent de volume t de  $\hbar d\vec{k}/dt =$  que l'élément de figure 1).



- Figure 1 -

nent une équation de conservation :

$$\vec{\nabla}_{\vec{k}} \cdot \vec{E} = 0$$

s temps caractéristiques de l'évolution du système c "instantanément" le vecteur d'onde des électrons. ent" des particules au point  $\vec{k}$ . Il est donc légitime econd membre de l'équation précédente qui s'écrit

Par ailleurs, les collisions ont tendance à ramener la distribution électronique vers la distribution d'équilibre de Fermi-Dirac, d'où la forme choisie pour  $(\frac{\partial f}{\partial t})_{coll}$

II.3) L'équation de Boltzmann s'écrit en régime stationnaire et en posant  $f = f_0 + f_1$  :

$$-\frac{e}{\hbar} \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} (f_0 + f_1) = -\frac{f_1}{\tau(\epsilon)}$$

soit en négligeant  $\vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_1$  par rapport à  $\vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0$  ( $f$  s'écarte peu de sa valeur d'équilibre  $f_0$ ) :

$$f_1 = \frac{e}{\hbar} \tau(\epsilon) \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0$$

Par ailleurs  $\vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0 = \vec{\nabla}_{\vec{k}} \epsilon \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = \frac{\hbar^2 \vec{k}}{m^*} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon}$ , donc :

$$f_1(\vec{k}) = \frac{e\hbar}{m^*} \tau(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \vec{k} \cdot \vec{E}$$

$f_1$  est du premier ordre en  $\vec{E}$ , le terme négligé est donc du second ordre en  $\vec{E}$ . Pour  $\vec{E}$  suffisamment faible l'approximation ci-dessus est donc légitime (technique classique de linéarisation).

II.4) On obtient la densité surfacique de courant électrique en sommant, sur tous les états électroniques possibles, la contribution calculée au A.I.2, pondérée par la probabilité d'occupation de l'état :

$$\vec{j} = \int \underbrace{\frac{L^2}{2\pi^2}}_{\text{densité d'états}} \underbrace{f(\vec{k})}_{\text{probabilité d'occupation de l'état } \vec{k}} \underbrace{\frac{-e\hbar \vec{k}}{m^* L^2}}_{\text{contribution de l'état } \vec{k}} d^2 \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = -e \frac{L^2}{2\pi^2} \int (f_0 + f_1) \frac{\hbar \vec{k}}{m^* L^2} d^2 \vec{k}$$

Par parité, la contribution du terme en  $f_0$  est nulle ( $f_0 \vec{k}$  est une fonction impaire de  $\vec{k}$ , son intégrale sur tout l'espace est nulle). On a donc :

$$\vec{j} = -e \frac{L^2}{2\pi^2} \int f_1 \frac{\hbar \vec{k}}{m^* L^2} d^2 \vec{k}$$

II.5) On choisit d'abord  $\vec{E}$  parallèle à  $x$ . En utilisant l'expression de  $f_1$  trouvée au A.II.3, on voit que l'intégrale donnant  $j_x$  contient des termes en  $k_x^2$  et celle donnant  $j_y$  des termes en  $k_x k_y$ . Par symétrie, on a donc  $j_y = 0$ .

$$j_x = -e \frac{L^2}{2\pi^2} \int \frac{e\hbar}{m^*} \tau(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\hbar}{m^* L^2} k_x^2 E_x d^2 \vec{k}$$

$$\Rightarrow j_x = -\frac{e^2}{m^* L^2} \frac{L^2}{2\pi^2} \int \tau(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2) E_x d^2 \vec{k}$$

car l'intégrale de  $k_x^2$  et celle de  $k_y^2$  sont égales par symétrie.

$$\Rightarrow j_x = -\frac{e^2 E_x}{m^* L^2} \frac{L^2}{2\pi^2} \int \tau(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \epsilon d^2 \vec{k}$$

$$\Rightarrow j_x = -\frac{e^2 E_x}{m^* L^2} \int \tau(\epsilon) N(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \epsilon d\epsilon$$

par définition de la densité d'états. D'où  $j_x = \sigma E_x$  avec :

$$\sigma = -\frac{e^2}{m^* L^2} \int \tau(\epsilon) N(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \epsilon d\epsilon$$

Pour un champ  $\vec{E}$  parallèle à  $y$ , on trouve de même que  $\vec{j}$  est dans la direction  $y$  avec  $j_y = \sigma E_y$ .  
 La relation entre  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  étant linéaire, on a  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  pour toutes les directions de  $\vec{E}$ .

II.6) A température nulle,  $\partial f_0 / \partial \epsilon$  tend vers la distribution  $-\delta(\epsilon - \epsilon_F)$ . On a donc :

$$\sigma = \frac{e^2}{m^* L^2} \epsilon_F \tau(\epsilon_F) N(\epsilon_F)$$

soit, en utilisant les résultats des questions A.I.3 et A.I.4 :

$$\sigma = \frac{e^2}{m^* L^2} \frac{n_s \pi \hbar^2}{m^*} \tau(\epsilon_F) \frac{m^* L^2}{\pi \hbar^2} = \frac{n_s e^2 \tau(\epsilon_F)}{m^*}$$

On retrouve le même résultat que celui du modèle de Drude. Cependant, on a supposé un temps de relaxation dépendant de l'énergie et on a montré que la conductivité ne dépend que du temps de relaxation au niveau de Fermi (dans Drude, on suppose un temps de relaxation indépendant de l'énergie). Seuls les électrons au niveau de Fermi participent à la conduction (voir question II.7).

$$\vec{j} = \frac{n_s e^2 \tau(\epsilon_F)}{m^*} \vec{E} = -n_s e \left\{ -\frac{e \tau(\epsilon_F)}{m^*} \vec{E} \right\}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = -n_s e \vec{v}_d \text{ avec } \vec{v}_d = -\frac{e \tau(\epsilon_F)}{m^*} \vec{E}$$

Tout se passe comme si on avait un mouvement de tous les électrons du gaz à la vitesse  $\vec{v}_d$ . La mobilité du gaz définie par  $\vec{v}_d = -\eta \vec{E}$  vaut :

$$\eta = \frac{e \tau(\epsilon_F)}{m^*}$$

II.7)  $f_1 = \frac{e}{\hbar} \tau(\epsilon) \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0$

On a vu qu'à température nulle,  $f_1$  n'est non nulle que pour  $\epsilon = \epsilon_F$ . On peut donc écrire :

$$f_1 = \frac{e}{\hbar} \tau(\epsilon_F) \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0$$

Comme  $f(\vec{k}) = f_0(\vec{k}) + f_1(\vec{k})$ , il vient :

$$f(\vec{k}) = f_0(\vec{k}) + \frac{e}{\hbar} \tau(\epsilon_F) \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0(\vec{k})$$

On reconnaît un développement de Taylor au premier ordre et on peut écrire :

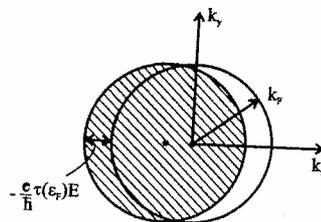
$$f(\vec{k}) \approx f_0 \left( \vec{k} + \frac{e \tau(\epsilon_F)}{\hbar} \vec{E} \right)$$

La relation précédente montre que sous l'action du champ électrique, la sphère de Fermi est translatée de  $-e \tau(\epsilon_F) \vec{E} / \hbar$ . La figure 2 présente les sphères de Fermi obtenues pour un champ électrique nul (sphère non hachurée) et pour un champ électrique  $E$  dans la direction  $x$  (sphère hachurée). On retrouve sur la figure que seuls vont contribuer à la conduction les points proches de la sphère de Fermi. En effet, pour un point  $\vec{k}$  proche du centre de la sphère, les états  $\vec{k}$  et  $-\vec{k}$  sont peuplés et donnent des contributions opposées au courant électrique.

La relation  $j = -n_s e v_d$  peut se réécrire :

$$j = -n_s e \frac{v_d}{v_F} v_F$$

Le traitement ci-dessus montre qu'on a une meilleure représentation du transport électronique en imaginant que seule une fraction  $v_d/v_F$  des électrons participent à la conduction en se déplaçant à la vitesse de Fermi.



- Figure 2 -

II.8) Le libre parcours moyen des électrons

$$\sigma = \frac{n_s e^2 \tau(\epsilon_F)}{m^*} = \frac{n_s e^2 l}{m^* v_F}$$

Par ailleurs, d'après la question A

$$n_s = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{m^* v_F}{\hbar} \right)^2$$

On a donc :

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{(m^* v_F)^2}{\hbar^2} \frac{e^2 l}{m^* v_F} = \frac{e^2}{2\pi \hbar}$$

$k_F l$  est sans dimension.  $e^2/h$  a donc dimension d'une résistivité à 2 dim

### III Données numériques

III.1) Avec les données numériques de l'é  $\epsilon_F = 12,7 \text{ meV}$ ,  $\lambda_F = 42,0 \text{ nm}$ ,  $v_F$ . Par rapport à un métal comme l' (l'interaction coulombienne est beaucoup plus grand : dans un gaz bidimensionnel d'électrons, il y a des systèmes que l'on sait fabriquer par échantillons où les électrons sont bidimensionnels). La conductivité du gaz bidimensionnel est  $1250$ .

III.2) La valeur numérique de la résistance

III.3)  $R_{\square} = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{n_s e \eta}$

$$\Rightarrow R_{\square} = \frac{1}{n_s \times 10^{15} \times \eta \times 10^2 \times 1,6}$$

où  $n_s$  est la densité électronique en  $\text{cm}^{-2}$

$$\Rightarrow R_{\square} = \frac{62,5}{n_s \eta} \Omega$$

### Quantification

1) L'hamiltonien est séparable en  $x$  et  $y$  et s

$$H = H_x + H_y \text{ avec } H_x = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Ses fonctions propres s'écrivent donc  $\Psi(x)$  fonction propre de  $H_y$ .

Pour  $H_x$ , le problème a déjà été résolu au conditions aux limites périodiques imposer  $k_x$  est  $\hbar^2 k_x^2 / 2m^*$ .

Dans la direction  $y$ ,  $\Phi(y)$  s'annule pour  $y = 0$  et  $y = W$ . La normalisation des fonctions propres de  $H_y$  sont donc :

$$\Phi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{W}} \sin \frac{n\pi y}{W} \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

L'énergie  $\epsilon_n$  associée à  $\Phi_n(y)$  est :

$$\epsilon_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m^* W^2}$$

me que  $\vec{j}$  est dans la direction  $y$  avec  $j_y = \sigma E_y$ .  
 :  $\sigma \vec{E}$  pour toutes les directions de  $\vec{E}$ .  
 tion  $-\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$ . On a donc :

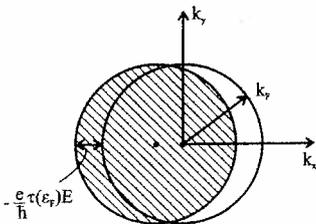
st A.I.4 :

le de Drude. Cependant, on a supposé un temps  
 tré que la conductivité ne dépend que du temps  
 i suppose un temps de relaxation indépendant de  
 articipent à la conduction (voir question II.7).

de tous les électrons du gaz à la vitesse  $\vec{v}_d$ . La

que pour  $\varepsilon = \varepsilon_F$ . On peut donc écrire :

nier ordre et on peut écrire :



- Figure 2 -

eure représentation du transport électronique en  
 ons participent à la conduction en se déplaçant à

II.8) Le libre parcours moyen des électrons au niveau de Fermi est donné par  $l = v_F \tau(\varepsilon_F)$ . On a donc :

$$\sigma = \frac{n_s e^2 \tau(\varepsilon_F)}{m^*} = \frac{n_s e^2 l}{m^* v_F}$$

Par ailleurs, d'après la question A.I.5 :

$$n_s = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{m^* v_F}{\hbar} \right)^2$$

On a donc :

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{(m^* v_F)^2}{\hbar^2} \frac{e^2 l}{m^* v_F} = \frac{e^2}{2\pi \hbar} \frac{m^* v_F}{\hbar} l = \frac{e^2}{\hbar} k_F l$$

$k_F l$  est sans dimension.  $e^2/\hbar$  a donc la dimension d'une conductivité à 2 dimensions.  $\hbar/e^2$  a donc la dimension d'une résistivité à 2 dimensions, soit celle d'une résistance.

### III Données numériques

III.1) Avec les données numériques de l'énoncé, on trouve :

$$\varepsilon_F = 12,7 \text{ meV}, \lambda_F = 42,0 \text{ nm}, v_F = 2,58 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}, \tau(\varepsilon_F) = 3,24 \cdot 10^{-11} \text{ s et } l = 8,36 \mu\text{m}.$$

Par rapport à un métal comme l'or, les électrons sont beaucoup plus éloignés les uns des autres (l'interaction coulombienne est donc beaucoup moins importante) et le libre parcours moyen est beaucoup plus grand : dans un métal, il est de l'ordre de la maille atomique alors que dans un gaz bidimensionnel d'électrons, il peut être de quelques microns, nettement supérieur à la taille des systèmes que l'on sait fabriquer par lithographie électronique. On a donc la possibilité de réaliser des échantillons où les électrons sont balistiques, c'est à dire qu'ils ne subissent aucune collision.

La conductivité du gaz bidimensionnel vaut avec les données de l'énoncé  $\sigma = 4,84 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1}$  ( $k_F l = 1250$ ).

III.2) La valeur numérique de la résistance  $h/e^2$  est  $25,9 \text{ k}\Omega$ . Celle de la conductance  $e^2/h$  est  $3,87 \cdot 10^{-5} \Omega^{-1}$ .

$$\text{III.3) } R_{\square} = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{n_s e \eta}$$

$$\Rightarrow R_{\square} = \frac{1}{\tilde{n}_s \times 10^{15} \times \tilde{\eta} \times 10^2 \times 1,6 \times 10^{-19}}$$

où  $\tilde{n}_s$  est la densité électronique en unité  $10^{11} \text{ cm}^{-2}$  et  $\tilde{\eta}$  la mobilité en unité  $10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

$$\Rightarrow R_{\square} = \frac{62,5}{\tilde{n}_s \tilde{\eta}} \Omega$$

## PARTIE B

### Quantification de la conductance

1) L'hamiltonien est séparable en  $x$  et  $y$  et s'écrit :

$$H = H_x + H_y \text{ avec } H_x = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ et } H_y = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \tilde{V}(y)$$

Ses fonctions propres s'écrivent donc  $\Psi(x,y) = \varphi(x)\Phi(y)$  où  $\varphi(x)$  est fonction propre de  $H_x$  et  $\Phi(y)$  est fonction propre de  $H_y$ .

Pour  $H_x$ , le problème a déjà été résolu au A.I.1 : les fonctions propres sont  $\varphi(x) = \exp(ik_x x)/\sqrt{L}$  et les conditions aux limites périodiques imposent  $k_x = 2\pi n_x/L$  où  $n_x \in \mathbb{Z}$ . L'énergie associée au vecteur d'onde  $k_x$  est  $\hbar^2 k_x^2 / 2m^*$ .

Dans la direction  $y$ ,  $\Phi(y)$  s'annule pour  $y \leq 0$  et pour  $y \geq W$ . Pour  $0 \leq y \leq W$ , on a donc :  $\Phi(y) = A \sin(n\pi y/W)$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . La normalisation  $\int_0^W |\Phi(y)|^2 dy = 1$  entraîne  $A = \sqrt{2/W}$ . Les fonctions propres de  $H_y$  sont donc :

$$\Phi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{W}} \sin \frac{n\pi y}{W} \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

L'énergie  $\varepsilon_n$  associée à  $\Phi_n(y)$  est :

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m^* W^2}$$

L'énergie associée à un vecteur d'onde  $k_x$  et à un indice  $n$  est :

$$\epsilon_{n,k_x} = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} + \epsilon_n$$

2) Comme  $\Phi_n(y)$  est une fonction réelle, la formule donnée à la question A.I.2 montre que la composante selon  $y$  du courant de probabilité associé à la fonction d'onde correspondant à  $k_x$  et  $n$  est nulle. Sa composante suivant  $x$  vaut :

$$J_{px} = \frac{\hbar k_x}{m^* L} |\Phi_n(y)|^2$$

Le flux de ce courant de probabilité à travers une section transverse du conducteur est donc :

$$\int_0^W J_{px} dy = \frac{\hbar k_x}{m^* L} \int_0^W |\Phi_n(y)|^2 dy = \frac{\hbar k_x}{m^* L}$$

= 1 car  $\Phi_n(y)$  est normée

3) Pour  $n$  donné, on doit sommer les contributions de tous les vecteurs d'onde  $k_x > 0$  tels que  $\epsilon \leq \epsilon_n + \hbar^2 k_x^2 / 2m^* \leq \epsilon + \Delta\epsilon$ .

$$J_{\epsilon, \epsilon + \Delta\epsilon}^{n,+} = \sum_{\text{spin}} \underbrace{\frac{L}{2\pi}}_{\text{densité d'états}} \int_{k_x(\epsilon)}^{k_x(\epsilon + \Delta\epsilon)} \frac{\hbar k_x}{m^* L} dk_x$$

Comme dans la partie A, on souhaite remplacer l'intégrale sur  $k_x$  par une intégrale sur l'énergie. Il s'agit à nouveau d'un problème de densité d'états en énergie, cette fois-ci à une dimension.

Posons :  $\epsilon' = \epsilon_n + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*}$ . Comme  $k_x > 0$ , on a  $\hbar k_x = \sqrt{2m^*} \sqrt{\epsilon' - \epsilon_n}$  et  $dk_x = \frac{\sqrt{2m^*}}{\hbar} \frac{1}{2\sqrt{\epsilon' - \epsilon_n}} d\epsilon'$ .

$$\Rightarrow J_{\epsilon, \epsilon + \Delta\epsilon}^{n,+} = 2 \frac{L}{2\pi} \int_{\epsilon}^{\epsilon + \Delta\epsilon} \frac{\sqrt{2m^*}}{m^* L} \frac{\sqrt{2m^*}}{\hbar} \frac{1}{2\sqrt{\epsilon' - \epsilon_n}} d\epsilon'$$

$$\Rightarrow J_{\epsilon, \epsilon + \Delta\epsilon}^{n,+} = \frac{2}{2\pi\hbar} \int_{\epsilon}^{\epsilon + \Delta\epsilon} d\epsilon'$$

$$\Rightarrow J_{\epsilon, \epsilon + \Delta\epsilon}^{n,+} = \frac{2\Delta\epsilon}{h}$$

Le calcul ci-dessus vaut pour  $\epsilon_n \leq \epsilon \leq \epsilon + \Delta\epsilon$ . Si  $\epsilon + \Delta\epsilon \leq \epsilon_n$ , il est clair que  $J_{\epsilon, \epsilon + \Delta\epsilon}^{n,+} = 0$  (il n'y a aucun état électronique correspondant au mode  $n$  dans la tranche  $\epsilon, \epsilon + \Delta\epsilon$ ). Si  $\epsilon \leq \epsilon_n \leq \epsilon + \Delta\epsilon$ , il faut faire attention à la borne inférieure de l'intégrale et  $J_{\epsilon, \epsilon + \Delta\epsilon}^{n,+} = 2(\epsilon + \Delta\epsilon - \epsilon_n)/h$ . Il est clair que la contribution des états de vecteurs d'onde  $k_x < 0$  est l'opposée de celle des états de vecteurs d'onde  $k_x > 0$ . On a donc  $J_{\epsilon, \epsilon + \Delta\epsilon}^{n,-} = -J_{\epsilon, \epsilon + \Delta\epsilon}^{n,+}$ .

4) Les réservoirs d'électrons définis dans cette question sont aux électrons ce que le corps noir est aux photons. Pour que la thermalisation de ces réservoirs soit possible, il faut qu'il existe des collisions inélastiques. Celles-ci sont en effet nécessaires pour ramener la distribution d'énergie vers celle de Fermi-Dirac.

5)  $\mu_2 - \mu_1 = eV$

Si  $\epsilon_n \leq \mu_1 \leq \mu_2$ , la définition des réservoirs montre qu'à température nulle, les états du mode  $n$  de vecteur d'onde  $k_x > 0$  sont tous peuplés jusqu'à l'énergie  $\mu_1$  tandis que ceux de vecteur d'onde  $k_x < 0$  sont tous peuplés jusqu'à l'énergie  $\mu_2$ . On a donc :

$$I_n = -e [J_{\epsilon_n, \mu_1}^{n,+} + J_{\epsilon_n, \mu_2}^{n,-}]$$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{2e}{h} (\mu_1 - \epsilon_n + \epsilon_n - \mu_2)$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2e}{h} (\mu_2 - \mu_1)$$

Si  $V > 0$ , les électrons vont du contact 2 vers le contact 1 (le champ électrique est dans le sens des potentiels décroissants) et l'intensité est positive (c'est à dire dans le sens des  $x$  croissants). C'est bien ce qu'on trouve, puisque  $V > 0$  entraîne  $(\mu_2 - \mu_1) > 0$ .

Si  $\epsilon_n \leq \mu_2$ , à suffisamment faible tension on a aussi  $\epsilon_n \leq \mu_1 = \mu_2 - eV$  et :

$$I_n = \frac{2e^2}{h} V$$

La conductance associée à un mode est d

6) D'après ce qui précède, la conductance à  $2e^2/h$  fois le nombre de modes d'énergie  $2e^2/h$ .

On a  $\epsilon_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m^* W^2}$  et  $\mu_2 = \epsilon_F = \frac{n_s}{n}$

$$\epsilon_n \leq \mu_2 \Leftrightarrow \frac{n^2 \pi^2}{2W^2} \leq n_s \Leftrightarrow n \leq \sqrt{\frac{2n_s}{\pi}} W \Leftrightarrow$$

Le nombre de modes d'énergie  $\epsilon_n \leq \mu_2$  est

$$G = \frac{2e^2}{h} \text{Int} \left[ \frac{2W}{\lambda_F} \right]$$

Les effets de quantification sont facilement numériques du A.III, on voit qu'il faut réaliser des dispositifs de nanomètres. On sait maintenant disposées à la surface de l'échantillon (à TYP permettent, en chassant les électrons du gaz question B.8).

Pour pouvoir observer la quantification de la des niveaux soit nettement inférieur à leur s

7) La différence de potentiel entre les 2 réservoiri donc une dissipation d'énergie (effet Joule) e

La résistance du conducteur (inverse de sa c La dissipation mentionnée ci-dessus peut sem

ballistique, c'est à dire que les électrons n'y su lieu dans les contacts : les électrons injectés pa

l'énergie une fois parvenus dans le contact 1 p chimique  $\mu_1$  et de température  $\theta$ . La dissipa

inélastiques dans les réservoirs. On comprend longueur du conducteur et qu'elle soit appelé

Si l'on veut pouvoir supposer les réservoirs .  $eV \ll k_B\theta$ . L'énergie amenée par un électro

thermique caractéristique du réservoir et sa di On doit avoir  $k_B\theta \ll (\epsilon_{n+1} - \epsilon_n)$ ; on peut pe

a alors  $\epsilon_2 - \epsilon_1 = 3\pi^2 \hbar^2 / 2m^* (5\lambda_F)^2 = 0,38 m$  la conductance, il faut donc des températures

températures dans des cryostats à dilution H réservoirs, on doit alors avoir  $eV \ll k_B\theta$ , donc

8) Sur la figure présentée, on observe la quantifi  $V_G < -2V$ , il y a un seul mode dans le conc

faible). Quand on augmente  $V_G$ , la largeur du à la conduction augmente progressivement. D

largeur du conducteur a augmenté de  $\lambda_F/2 \approx$  très marqués. Au fur et à mesure qu'on augmen

visibles à 4,2K. Ceci est en bon accord avec les

lice  $n$  est :

$$I_n = \frac{2e^2}{h} V$$

ée à la question A.I.2 montre que la composante selon  $k_x$  et  $n$  est nulle. Sa composante

La conductance associée à un mode est donc  $G = \frac{2e^2}{h}$ .

- 6) D'après ce qui précède, la conductance à suffisamment faible tension et à température nulle est égale à  $2e^2/h$  fois le nombre de modes d'énergie  $\epsilon_n \leq \mu_2$ . La conductance est donc quantifiée en multiples de  $2e^2/h$ .

$$\text{On a } \epsilon_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m^* W^2} \text{ et } \mu_2 = \epsilon_F = \frac{n_s \pi \hbar^2}{m^*}$$

ction transverse du conducteur est donc :

$$\epsilon_n \leq \mu_2 \Leftrightarrow \frac{n^2 \pi}{2W^2} \leq n_s \Leftrightarrow n \leq \sqrt{\frac{2n_s}{\pi}} W \Leftrightarrow n \leq \frac{2W}{\lambda_F}$$

Le nombre de modes d'énergie  $\epsilon_n \leq \mu_2$  est donc  $\text{Int} \left[ \frac{2W}{\lambda_F} \right]$  et on a :

$$G = \frac{2e^2}{h} \text{Int} \left[ \frac{2W}{\lambda_F} \right]$$

tous les vecteurs d'onde  $k_x > 0$  tels que  $\epsilon \leq \epsilon_n +$

Les effets de quantification sont facilement observés si  $W$  est de l'ordre de  $\lambda_F$ . En utilisant les résultats numériques du A.III, on voit qu'il faut réaliser des conducteurs dont la largeur est de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres. On sait maintenant réaliser de tels conducteurs à l'aide de grilles électrostatiques disposées à la surface de l'échantillon (à typiquement une centaine d'Angstroms du gaz d'électrons) qui permettent, en chassant les électrons du gaz, de définir des conducteurs de géométrie bien contrôlée (voir question B.8).

égrale sur  $k_x$  par une intégrale sur l'énergie. Il s'agit de, cette fois-ci à une dimension.

$$= \sqrt{2m^*} \sqrt{\epsilon' - \epsilon_n} \text{ et } dk_x = \frac{\sqrt{2m^*}}{\hbar} \frac{1}{2\sqrt{\epsilon' - \epsilon_n}} d\epsilon'$$

$$\frac{1}{\epsilon' - \epsilon_n} d\epsilon'$$

Pour pouvoir observer la quantification de la conductance, il faut également que l'élargissement thermique des niveaux soit nettement inférieur à leur séparation, c'est à dire  $k_B \theta \ll (\epsilon_{n+1} - \epsilon_n)$ .

- 7) La différence de potentiel entre les 2 réservoirs est  $V$  et le courant qui circule dans le système est  $I$ . On a donc une dissipation d'énergie (effet Joule) associée à ce processus de conduction égale à  $VI$ .

La résistance du conducteur (inverse de sa conductance) est indépendante de sa longueur.

La dissipation mentionnée ci-dessus peut sembler paradoxale puisqu'on a supposé le conducteur en régime balistique, c'est à dire que les électrons n'y subissent aucune collision. Cette dissipation d'énergie a en fait lieu dans les contacts : les électrons injectés par le contact 2 à une énergie supérieure à  $\mu_1$  doivent perdre de l'énergie une fois parvenus dans le contact 1 pour que celui-ci garde sa distribution d'équilibre, de potentiel chimique  $\mu_1$  et de température  $\theta$ . La dissipation d'énergie a donc lieu par l'intermédiaire des collisions inélastiques dans les réservoirs. On comprend donc que la résistance du système soit indépendante de la longueur du conducteur et qu'elle soit appelée résistance de contact.

Si l'on veut pouvoir supposer les réservoirs à l'équilibre thermodynamique à la température  $\theta$ , il faut  $eV \ll k_B \theta$ . L'énergie amenée par un électron dans un réservoir est alors faible par rapport à l'énergie thermique caractéristique du réservoir et sa distribution d'équilibre est peu perturbée.

On doit avoir  $k_B \theta \ll (\epsilon_{n+1} - \epsilon_n)$ ; on peut par exemple évaluer  $\epsilon_2 - \epsilon_1$  pour  $W = 5\lambda_F$  (10 modes). On a alors  $\epsilon_2 - \epsilon_1 = 3\pi^2 \hbar^2 / 2m^* (5\lambda_F)^2 = 0,38 \text{ meV} = 4,4 \text{ K}$ . Pour observer clairement la quantification de la conductance, il faut donc des températures très inférieures au degré Kelvin (on peut obtenir de telles températures dans des cryostats à dilution  $\text{He}^3 - \text{He}^4$ ). Pour ne pas perturber l'équilibre thermique des réservoirs, on doit alors avoir  $eV \ll k_B \theta$ , donc  $V$  de l'ordre de 1 à 10  $\mu\text{V}$ .

- 8) Sur la figure présentée, on observe la quantification de la conductance étudiée dans cette partie. Pour  $V_G < -2V$ , il y a un seul mode dans le conducteur qui participe à la conduction (sa largeur est très faible). Quand on augmente  $V_G$ , la largeur du conducteur augmente et le nombre de modes participant à la conduction augmente progressivement. D'après ce qui précède, entre 2 paliers de conductance, la largeur du conducteur a augmenté de  $\lambda_F/2 \approx 20 \text{ nm}$ . Pour une température de 0,3 K, les paliers sont très marqués. Au fur et à mesure qu'on augmente la température, ceux-ci s'arrondissent pour devenir peu visibles à 4,2 K. Ceci est en bon accord avec les estimations faites à la question précédente.

contact 1 (le champ électrique est dans le sens des  $x$  croissants). C'est bien ce

$$\epsilon_n \leq \mu_1 = \mu_2 - eV \text{ et :}$$

**PARTIE C**

**Conducteur quantique et désordre**

**I Transmission et réflexion d'une barrière de potentiel**

I.1) La particule de vecteur d'onde  $k > 0$  est supposée arriver de la région G. On ne peut donc avoir de terme en  $\exp(-ikx)$  dans la région D (un tel terme correspondrait à une particule arrivant de D).  $r$  et  $t$  sont respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de la barrière de potentiel.

I.2) Le courant de probabilité associé à la fonction d'onde donnée question C.I.1 est, d'après la question A.I.2 :

- dans la région G :

$$J_p = \frac{1}{m^*} \text{Re} \{ A^* ( e^{-ikx} + r^* e^{ikx} ) \hbar k ( e^{ikx} - r e^{-ikx} ) \}$$

$$\Rightarrow J_p = \frac{|A|^2 \hbar k}{m^*} (1 - |r|^2) + \frac{|A|^2 \hbar k}{m^*} \text{Re} \left( \underbrace{r^* e^{2ikx} - r e^{-2ikx}}_{\text{imaginaire pur}} \right)$$

$$\Rightarrow J_p = \frac{|A|^2 \hbar k}{m^*} (1 - |r|^2)$$

- dans la région D :

$$J_p = \frac{|A|^2 \hbar k}{m^*} |t|^2$$

Comme la fonction d'onde considérée est indépendante du temps, l'équation de conservation locale de la probabilité s'écrit  $\text{div} J_p = dJ_p/dx = 0$ .  $J_p$  est donc constant, ce qui entraîne  $1 - |r|^2 = |t|^2$  d'où :

$$|r|^2 + |t|^2 = 1$$

I.3) Les relations  $|r|^2 = |r'|^2$  et  $|t|^2 = |t'|^2$  indiquent que les probabilités que la particule soit réfléchi ou transmise par la barrière de potentiel ne dépendent pas du sens dans lequel cette particule arrive sur la barrière.

**II Conductance versus transmission**

II.1) Le conducteur n'a qu'un seul mode transverse d'énergie  $\epsilon_1$ . Dans la région située à droite de la barrière, le flux du courant de probabilité dans le sens positif  $J_D^+$  est dû aux particules émises par le contact 1 et transmises par la barrière mais aussi aux particules émises par le contact 2 et réfléchies par la barrière. En reprenant le raisonnement de la partie B et les résultats de C.I.2, on voit donc que :

$$J_D^+ = \frac{2}{h} (\mu_1 - \epsilon_1) T + \frac{2}{h} (\mu_2 - \epsilon_1) (1 - T)$$

A droite de la barrière, le flux du courant de probabilité dans le sens négatif  $J_D^-$  est dû aux particules émises par le contact 2 et vaut :

$$J_D^- = -\frac{2}{h} (\mu_2 - \epsilon_1)$$

On a donc  $I = -e (J_D^+ + J_D^-) = \frac{2e}{h} (\mu_2 - \mu_1) T$ .

A suffisamment faible tension on a donc  $I = \frac{2e^2}{h} TV$  et  $G = \frac{2e^2}{h} T$ .

A gauche de la barrière, on a de mêm

$$J_G^+ = \frac{2}{h} (\mu_1 - \epsilon_1)$$

particules émises par 1

$$J_G^- = -\frac{2}{h} (\mu_1 - \epsilon_1) (1 - T)$$

particules émises par 1 et réfléchies

$$\Rightarrow J_G^+ + J_G^- = J_D^+ + J_D^-$$

On trouve bien sûr le même courant à la conductance d'un mode est la cc transmission du conducteur.

II.2)  $G = \frac{2e^2}{h} T \Rightarrow R = \frac{h}{2e^2} \frac{1}{T}$  ce que l'on i

$$R = \frac{h}{2e^2} + \frac{h}{2e^2} \left( \frac{1}{T} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow R = \frac{h}{2e^2} + \frac{h}{2e^2} \frac{1 - T}{T}$$

Le premier terme est la résistance de le conducteur. Le second terme, nul en conducteur.

II.3) Dans le cas d'un conducteur possédant la barrière peut coupler les modes les incidente dans le mode 1 vers un état barrière, on doit définir une matrice de utilisée est ensuite tout à fait similaire

**III Conducteur incohérent. Loi d'Ohm**

III.1) Les 2 barrières constituent l'équivalent barrières étant plus grande que la long a pas d'interférences et on doit somme un certain nombre d'allers et retours de l'amplitude) de l'onde directement trans est  $T_1 T_2 (1 - T_1) (1 - T_2)$ , celle de l'onde La transmission (en intensité) du systè

$$T(2) = T_1 T_2 \{ 1 + (1 - T_1) (1 - T_2) + (1 - T_1)^2 (1 - T_2)^2 + \dots \}$$

$$\Rightarrow T(2) = \frac{T_1 T_2}{1 - (1 - T_1) (1 - T_2)}$$

$$\frac{1 - T(2)}{T(2)} = \frac{1 - (1 - T_1) (1 - T_2) - T_1 T_2}{T_1 T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - T(2)}{T(2)} = \frac{1 - T_1}{T_1} + \frac{1 - T_2}{T_2}$$

On a vu au C.II que  $(h/2e^2) (1 - T)/T$  est  $T$ . Le résultat ci-dessus montre que si il résistances intrinsèques s'additionnent, c

III.2) Le nombre de diffuseurs dans une longue D'après la question précédente, on a :

$$\frac{1 - T(N)}{T(N)} = N \frac{1 - T}{T}$$

C

ue et désordre

tentiel

ée arriver de la région G. On ne peut donc avoir de me correspondrait à une particule arrivant de D). r on et de transmission en amplitude de la barrière de

onde donnée question C.I.1 est, d'après la question

$$-re^{-ikx}\}$$

$$\underbrace{e^{2ikx} - re^{-2ikx}}_{\text{imaginaire pur}}$$

ndante du temps, l'équation de conservation locale , est donc constant, ce qui entraîne  $1 - |r|^2 = |t|^2$

ue les probabilités que la particule soit réfléchi e ou nt pas du sens dans lequel cette particule arrive sur

d'énergie  $\epsilon_1$ . Dans la région située à droite de la sens positif  $J_D^+$  est dû aux particules émises par le aux particules émises par le contact 2 et réfléchies la partie B et les résultats de C.I.2, on voit donc

abilité dans le sens négatif  $J_D^-$  est dû aux particules

$$V \text{ et } G = \frac{2e^2}{h} T.$$

A gauche de la barrière, on a de même :

$$J_G^+ = \underbrace{\frac{2}{h}(\mu_1 - \epsilon_1)}_{\text{particules émises par 1}}$$

$$J_G^- = \underbrace{\frac{2}{h}(\mu_1 - \epsilon_1)(1 - T)}_{\text{particules émises par 1 et réfléchies}} + \underbrace{\frac{2}{h}(\mu_2 - \epsilon_1)T}_{\text{particules émises par 2 et transmises}}$$

$$\Rightarrow J_G^+ + J_G^- = J_D^+ + J_D^-$$

On trouve bien sûr le même courant à gauche et à droite de la barrière.

La conductance d'un mode est la conductance en l'absence de désordre  $2e^2/h$  multipliée par la transmission du conducteur.

$$\text{II.2) } G = \frac{2e^2}{h} T \Rightarrow R = \frac{h}{2e^2} \frac{1}{T} \text{ ce que l'on peut aussi écrire :}$$

$$R = \frac{h}{2e^2} + \frac{h}{2e^2} \left( \frac{1}{T} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow R = \frac{h}{2e^2} + \frac{h}{2e^2} \frac{1 - T}{T}$$

Le premier terme est la résistance de contact déterminée partie B, indépendante du désordre dans le conducteur. Le second terme, nul en l'absence de désordre, est donc la résistance intrinsèque du conducteur.

II.3) Dans le cas d'un conducteur possédant plusieurs modes transverses, il faut tenir compte du fait que la barrière peut coupler les modes les uns aux autres (en réfléchissant par exemple une particule incidente dans le mode 1 vers un état du mode 2 de même énergie...). Pour décrire correctement la barrière, on doit définir une matrice de diffusion qui précise ces couplages entre modes. La démarche utilisée est ensuite tout à fait similaire et les résultats sont qualitativement les mêmes.

### III Conducteur incohérent. Loi d'Ohm

III.1) Les 2 barrières constituent l'équivalent d'un interféromètre de Fabry-Pérot. La distance entre les 2 barrières étant plus grande que la longueur de cohérence de phase des ondes électroniques, il n'y a pas d'interférences et on doit sommer les "intensités" des ondes transmises après avoir effectué un certain nombre d'allers et retours dans la cavité formée par les 2 barrières. L'intensité (carré de l'amplitude) de l'onde directement transmise est  $T_1 T_2$ , celle de l'onde qui a effectué un aller et retour est  $T_1 T_2 (1 - T_1)(1 - T_2)$ , celle de l'onde qui a effectué 2 allers et retours est  $T_1 T_2 (1 - T_1)^2 (1 - T_2)^2 \dots$  La transmission (en intensité) du système formé par les 2 barrières est donc :

$$T(2) = T_1 T_2 \{ 1 + (1 - T_1)(1 - T_2) + (1 - T_1)^2 (1 - T_2)^2 + \dots \}$$

$$\Rightarrow T(2) = \frac{T_1 T_2}{1 - (1 - T_1)(1 - T_2)}$$

$$\frac{1 - T(2)}{T(2)} = \frac{1 - (1 - T_1)(1 - T_2) - T_1 T_2}{T_1 T_2} = \frac{T_1 + T_2 - 2T_1 T_2}{T_1 T_2} = \frac{T_2(1 - T_1)}{T_1 T_2} + \frac{T_1(1 - T_2)}{T_1 T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - T(2)}{T(2)} = \frac{1 - T_1}{T_1} + \frac{1 - T_2}{T_2}$$

On a vu au C.II que  $(h/2e^2)(1 - T)/T$  est la résistance intrinsèque d'un conducteur de transmission  $T$ . Le résultat ci-dessus montre que si il n'y a pas d'interférences entre les ondes électroniques, les résistances intrinsèques s'additionnent, comme on en a l'habitude dans les conducteurs classiques.

III.2) Le nombre de diffuseurs dans une longueur  $L$  de conducteur qui en contient beaucoup est  $N = \nu L$ . D'après la question précédente, on a :

$$\frac{1 - T(N)}{T(N)} = N \frac{1 - T}{T}$$

$$\Rightarrow T(N) = \frac{T}{N(1-T) + T}$$

$$\Rightarrow T(L) = \frac{T}{\nu L(1-T) + T} = \frac{L_0}{L + L_0} \quad \text{où } L_0 = \frac{T}{\nu(1-T)}$$

III.3) Si  $T \approx 1$ , la relation ci-dessus montre immédiatement que  $L_0 \nu(1-T) \approx 1$ .  $(1-T)$  est la probabilité qu'un électron soit réfléchi par un diffuseur.  $L_0$  est donc la distance au bout de laquelle un électron a une probabilité 1 d'avoir été réfléchi.  
De C.II.2, on déduit :

$$R(L) = \frac{h}{2e^2} + \frac{h}{2e^2} \frac{1-T(L)}{T(L)} = \frac{h}{2e^2} + \frac{h}{2e^2} \frac{1 - \frac{L_0}{L+L_0}}{\frac{L_0}{L+L_0}}$$

$$\Rightarrow R(L) = \frac{h}{2e^2} + \frac{h}{2e^2} \frac{L}{L_0}$$

Le premier terme est la résistance de contact rencontrée partie B, le second terme est la résistance intrinsèque du conducteur qui domine dès que  $L \gg L_0$ . On obtient alors une résistance qui varie proportionnellement à la longueur. On retrouve donc la loi d'Ohm. C'est un régime classique de conduction (pas d'interférences entre les ondes électroniques). A partir de l'équation de Boltzmann, on obtiendrait :

$$R = \frac{1}{\sigma_{1D}} L \quad (\text{système unidimensionnel})$$

$$\text{Comme } \lambda_F = \frac{4}{n_l}, \text{ on déduit } v_F = \frac{\hbar k_F}{m^*} = \frac{\hbar n_l}{4m^*}, \text{ d'où comme } \sigma_{1D} = \frac{n_l e^2 \tau(\epsilon_F)}{m^*} :$$

$$R = \frac{\hbar L}{4e^2 v_F \tau(\epsilon_F)} = \frac{\hbar L}{4e^2 l} \quad \text{où } l \text{ est le libre parcours moyen défini au A}$$

$L_0$  est la distance au bout de laquelle un électron a une probabilité 1 d'avoir été réfléchi.  $L_0$  est donc à peu près égal au libre parcours moyen  $l$ . Les 2 modèles donnent donc des résultats tout à fait comparables même quantitativement.

#### IV Conducteur cohérent. Localisation

IV.1) Le calcul est le même qu'au C.III.1 mais, puisque la distance entre les 2 barrières est plus courte que la longueur de cohérence de phase des ondes électroniques, il faut cette fois-ci tenir compte des interférences et commencer par sommer les amplitudes des différentes ondes transmises par la cavité formée par les 2 barrières. La transmission en amplitude du système s'écrit :

$$t(2) = t_1 t_2 \{ 1 + |r_1||r_2|e^{i\alpha} + |r_1|^2|r_2|^2e^{2i\alpha} + \dots \}$$

puisque  $\alpha$ , déphasage total subi par une onde pendant un aller et retour dans la cavité, incorpore les déphasages se produisant aux réflexions sur les barrières.

$$\Rightarrow t(2) = \frac{t_1 t_2}{1 - |r_1||r_2|e^{i\alpha}}$$

$$\Rightarrow T(2) = t(2)t(2)^* = \frac{T_1 T_2}{1 + |r_1|^2|r_2|^2 - 2|r_1||r_2|\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow T(2) = \frac{T_1 T_2}{1 - 2\sqrt{(1-T_1)(1-T_2)}\cos\alpha + (1-T_1)(1-T_2)}$$

$$\text{IV.2) } R(\alpha) = \frac{1-T(2)}{T(2)} \frac{h}{2e^2} = \frac{h}{2e^2} \frac{1 - 2\sqrt{(1-T_1)(1-T_2)}\cos\alpha + (1-T_1)(1-T_2) - T_1 T_2}{T_1 T_2}$$

$$\Rightarrow R(\alpha) = \frac{h}{2e^2} \frac{(T_1 + T_2 - 2T_1 T_2) + (2 - 2T_1 - 2T_2 + 2T_1 T_2) - 2\sqrt{(1-T_1)(1-T_2)}\cos\alpha}{T_1 T_2}$$

$$\Rightarrow R(\alpha) = \frac{h}{2e^2} \left\{ \frac{1-T_1}{T_1} + \frac{1-T_2}{T_2} + 2 \frac{(1-T_1)(1-T_2)}{T_1 T_2} \right\}$$

$$\Rightarrow R(\alpha) = R_1 + R_2 + \frac{4e^2}{h} R_1 R_2 - \frac{h}{e^2} \frac{\sqrt{(1-T_1)(1-T_2)}}{T_1 T_2}$$

$R(\alpha) \neq R_1 + R_2$ . Il n'y a plus additivité

IV.3) Un morceau de conducteur qui ne contient pas de diffuseur a une résistance intrinsèque de ce morceau  $R_0$ . La résistance intrinsèque de ce morceau  $R$  contenant qu'un seul diffuseur est en moyenne  $R_0$ .

IV.4) La longueur moyenne du conducteur obtenue

$$R(L) + R(\Delta L) + \frac{4e^2}{h} R(L)R(\Delta L) \quad \text{où}$$

En effet, le diffuseur étant placé aléatoirement dans le morceau de longueur  $L$ , on a donc :

$$R(L + \Delta L) = R(L) + \frac{h}{2e^2} \left[ 1 + \frac{4e^2}{h} R(L) \right]$$

IV.5) L'équation ci-dessus apparaît comme un problème de récurrence. Pour trouver une solution, on peut chercher une

$$\frac{dR}{dL} = \frac{h}{2e^2} \frac{1}{L_0} \left[ 1 + \frac{4e^2}{h} R(L) \right]$$

La solution de cette équation est :

$$R(L) = A e^{2\frac{L}{L_0}} - \frac{h}{4e^2}$$

Compte tenu de la condition aux limites  $R(0) = 0$

$$R(L) = \frac{h}{4e^2} \left[ e^{2\frac{L}{L_0}} - 1 \right]$$

On peut facilement vérifier que cette solution satisfait l'équation ci-dessus pour toute valeur de  $L$ .

IV.6) Pour  $L \gg L_0$ , on trouve :

$$R(L) = \frac{h}{4e^2} e^{2\frac{L}{L_0}}$$

La résistance croît exponentiellement avec la longueur  $L$ , on voit qu'un conducteur grand devant le libre parcours moyen électronique

IV.7) a) La longueur  $L$  du conducteur étant supposée grande devant le libre parcours moyen électronique, on suppose qu'il y a beaucoup de diffuseurs. On suppose de plus que la transmission d'un diffuseur est compatible avec la transmission d'un autre diffuseur (si la transmission d'un diffuseur est alors très faible).  
b) Pour  $L \ll L_0$ , on a d'après la question (c) :

$$R(L) = \frac{h}{4e^2} \left[ \frac{2L}{L_0} + \frac{2L^2}{L_0^2} \right] = \frac{h}{2e^2} \frac{L}{L_0} \left[ 1 + \frac{2e^2 L}{h L_0} \right]$$

$$\Rightarrow R(L) = R_{cl}(L) \left[ 1 + \frac{2e^2 L}{h} R_{cl}(L) \right]$$

$$0 = \frac{T}{\nu(1-T)}$$

ement que  $L_0\nu(1-T) \approx 1$ .  $(1-T)$  est la probabilité est donc la distance au bout de laquelle un électron

$$\frac{L_0}{L+L_0}$$

encontrée partie B, le second terme est la résistance  $L \gg L_0$ . On obtient alors une résistance qui varie  $L$  donc la loi d'Ohm. C'est un régime classique de électroniques). A partir de l'équation de Boltzmann,

$$\sigma_{1D} = \frac{n_1 e^2 \tau (\epsilon_F)}{m^*}$$

urs moyen défini au A

tron a une probabilité 1 d'avoir été réfléchi.  $L_0$  est Les 2 modèles donnent donc des résultats tout à fait

que la distance entre les 2 barrières est plus courte électroniques, il faut cette fois-ci tenir compte des litudes des différentes ondes transmises par la cavité mplitude du système s'écrit :

ndant un aller et retour dans la cavité, incorpore les barrières.

s  $\alpha$

$$\frac{T_1(1-T_2)}{T_2} \cos \alpha + \frac{(1-T_1)(1-T_2) - T_1 T_2}{T_1 T_2}$$

$$\frac{T_2 + 2T_1 T_2 - 2\sqrt{(1-T_1)(1-T_2)} \cos \alpha}{T_1 T_2}$$

$$\Rightarrow R(\alpha) = \frac{\hbar}{2e^2} \left\{ \frac{1-T_1}{T_1} + \frac{1-T_2}{T_2} + 2 \frac{(1-T_1)(1-T_2)}{T_1 T_2} - 2 \frac{\sqrt{(1-T_1)(1-T_2)}}{T_1 T_2} \cos \alpha \right\}$$

$$\Rightarrow R(\alpha) = R_1 + R_2 + \frac{4e^2}{h} R_1 R_2 - \frac{\hbar}{e^2} \frac{\sqrt{(1-T_1)(1-T_2)}}{T_1 T_2} \cos \alpha$$

$R(\alpha) \neq R_1 + R_2$ . Il n'y a plus additivité des résistances à cause des effets d'interférences.

**IV.3)** Un morceau de conducteur qui ne contient qu'un seul diffuseur a en moyenne une longueur  $\Delta L = 1/\nu$ . La résistance intrinsèque de ce morceau de conducteur est  $(\hbar/2e^2)(1-T)/T \approx (\hbar/2e^2)(1-T)$  car  $T \approx 1$ . Comme  $1-T = 1/(L_0\nu) = \Delta L/L_0$ , la résistance intrinsèque d'un morceau de conducteur ne contenant qu'un seul diffuseur est en moyenne  $(\hbar/2e^2)(\Delta L/L_0)$ .

**IV.4)** La longueur moyenne du conducteur obtenu est  $L + \Delta L$ . Sa résistance est en moyenne, d'après C.IV.2 :

$$R(L) + R(\Delta L) + \frac{4e^2}{h} R(L)R(\Delta L) \quad \text{où} \quad R(\Delta L) = \frac{\hbar}{2e^2} \frac{\Delta L}{L_0}$$

En effet, le diffuseur étant placé aléatoirement, l'opération de moyennage fait disparaître le terme en  $\cos \alpha$ . On a donc :

$$R(L + \Delta L) = R(L) + \frac{\hbar}{2e^2} \left[ 1 + \frac{4e^2}{h} R(L) \right] \frac{\Delta L}{L_0}$$

**IV.5)** L'équation ci-dessus apparaît comme un développement de Taylor au premier ordre en  $\Delta L$ . Pour lui trouver une solution, on peut chercher une solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dR}{dL} = \frac{\hbar}{2e^2} \frac{1}{L_0} \left[ 1 + \frac{4e^2}{h} R(L) \right]$$

La solution de cette équation est :

$$R(L) = A e^{2\frac{L}{L_0}} - \frac{\hbar}{4e^2}$$

Compte tenu de la condition aux limites  $R(0) = 0$ , on trouve :

$$R(L) = \frac{\hbar}{4e^2} \left[ e^{2\frac{L}{L_0}} - 1 \right]$$

On peut facilement vérifier que cette solution vérifie l'équation obtenue à la question C.IV.4 pour toute valeur de  $\Delta L$ .

**IV.6)** Pour  $L \gg L_0$ , on trouve :

$$R(L) = \frac{\hbar}{4e^2} e^{2\frac{L}{L_0}}$$

La résistance croît exponentiellement avec la longueur.  $L_0$  étant de l'ordre de grandeur du libre parcours moyen  $l$ , on voit qu'un conducteur cohérent monomode devient isolant lorsqu'il devient grand devant le libre parcours moyen électronique. C'est le phénomène de localisation forte.

**IV.7)** a) La longueur  $L$  du conducteur étant supposée grande devant la distance entre diffuseurs, le conducteur contient beaucoup de diffuseurs. On suppose par ailleurs  $L \ll L_0$ ,  $L_0$  étant la longueur au bout de laquelle un électron a une probabilité 1 d'avoir été réfléchi (voir C.III.3). Ces 2 hypothèses ne sont compatibles que si la transmission d'un diffuseur est très voisine de 1 (la probabilité qu'un diffuseur réfléchisse un électron est alors très faible).

b) Pour  $L \ll L_0$ , on a d'après la question C.IV.5,

$$R(L) = \frac{\hbar}{4e^2} \left[ \frac{2L}{L_0} + \frac{2L^2}{L_0^2} \right] = \underbrace{\frac{\hbar}{2e^2} \frac{L}{L_0}}_{R_{cl}(L)} \left[ 1 + \frac{2e^2}{h} \frac{\hbar}{2e^2} \frac{L}{L_0} \right]$$

$$\Rightarrow R(L) = R_{cl}(L) \left[ 1 + \frac{2e^2}{h} R_{cl}(L) \right]$$

c) La résistance intrinsèque du conducteur est, avec les hypothèses faites, très petite devant  $h/2e^2$ . La conductance intrinsèque du conducteur est définie par  $G = 1/R(L)$ .

On a  $R(L) = R_{cl}(L) + \Delta R$  avec  $\Delta R = \frac{2e^2}{h} R_{cl}(L)^2 \ll R(L)$ .

La correction à la conductance intrinsèque due aux effets d'interférences quantiques est donc :

$$\Delta G = -\frac{\Delta R}{R(L)^2} = -\frac{2e^2}{h}$$

Cet effet est appelé localisation faible.

### PARTIE D

#### Electronique à un électron

##### I Blocage de Coulomb de l'effet tunnel

I.1) La charge électrique de l'îlot métallique est due aux électrons qui ont traversé la jonction par effet tunnel. A chaque événement tunnel, une charge égale à la charge de l'électron  $-e$  passe à travers la jonction. La charge de l'îlot est donc quantifiée en un multiple entier de la charge élémentaire  $e$ . Ce n'est pas le cas de la charge présente sur l'une des armatures d'une capacité: ceci est dû au caractère non localisé des électrons qui forment un fluide quantique que l'on peut déplacer d'une quantité arbitrairement petite. Ainsi la charge de l'armature d'une capacité (capacité  $C$ , surface  $S$ ) résulte du déplacement relatif de la densité électronique par rapport aux charges positives. Si  $\rho$  est la densité électronique dans le métal, un déplacement d'ensemble  $\delta = e\rho/(\rho S)$  par rapport aux charges positives dans la direction perpendiculaire à l'armature produit une charge  $Q = e\epsilon$  sur l'armature.

I.2) On a:  $V = \frac{q}{C} + \frac{q'}{C}$  et  $-q + q' = -ne$

$$\Rightarrow V = \frac{2q}{C} - \frac{ne}{C} \Rightarrow q = \frac{1}{2}(CV + ne)$$

I.3) L'énergie électrostatique  $U_e$  du système formé par les 2 capacités est :

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} \frac{q'^2}{C}$$

Comme  $q = (CV + ne)/2$  et  $q' = (CV - ne)/2$ , on trouve :

$$U_e = \frac{CV^2}{4} + \frac{n^2 e^2}{4C}$$

Le premier terme correspond à l'énergie électrostatique de 2 capacités  $C$  en série. Le second est l'énergie électrostatique des charges en excès sur l'îlot.

I.4) Lors d'une transformation du système qui fait varier de  $\Delta n$  le nombre d'électrons en excès sur l'îlot, on a, d'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_e = W + Q$$

où  $W$  et  $Q$  sont respectivement le travail et la chaleur reçus par le système au cours de la transformation. Le système étant au contact d'un thermostat à la température  $\theta$ , le second principe de la thermodynamique permet d'affirmer que sa variation d'entropie  $\Delta S$  satisfait :

$$-\frac{Q}{\theta} + \Delta S \geq 0$$

$$\text{On a donc: } \Delta U_e - Q \geq \Delta U_e - \theta \Delta S$$

$$\Rightarrow W \geq \Delta U_e - \theta \Delta S$$

$$\Rightarrow \Delta U_e - W - \theta \Delta S \leq 0$$

$W$  est le travail fourni par le générateur  $e\Delta n/2$ . On a donc :

$$\Delta \left[ U_e - \frac{eVn}{2} - \theta S \right] \leq 0$$

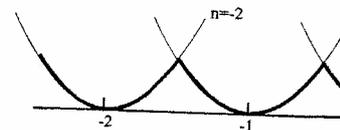
car  $V$  et  $\theta$  sont des constantes. Le potentiel  $\theta$  est donc :

$$U_e - \frac{eVn}{2} - \theta S \quad (\Leftrightarrow \text{enthalpie libre})$$

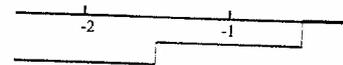
A température nulle, il vaut  $U_e - eVn$ , minimum la fonction :

$$U_e - \frac{eVn}{2} = \frac{CV^2}{4} + \frac{n^2 e^2}{4C} - \frac{eVn}{2} = \frac{1}{2} \left( n - \frac{CV}{e} \right)^2$$

I.5) La figure 3 présente  $\frac{1}{2} \frac{e^2}{2C} \left\{ n - \frac{CV}{e} \right\}^2$

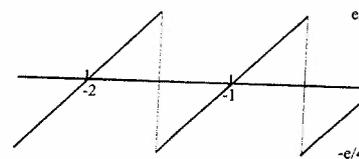


Pour obtenir  $\bar{n}$ , on doit, pour chaque valeur indiquée en gras sur la figure 3. On voit que 4 présente la courbe  $\bar{n}(V)$  à  $\theta = 0 K$ .



La valeur entière du nombre d'électrons en  $V$ .

La figure 5 présente en fonction de  $V$  et à la jonction tunnel  $q' = 1/2(CV - \bar{n}e)$ .



- Fig 4

avec les hypothèses faites, très petite devant  $h/2e^2$ . définie par  $G = 1/R(L)$ .

$$R(L)^2 \ll R(L).$$

aux effets d'interférences quantiques est donc :

D

in électron

aux électrons qui ont traversé la jonction par effet égale à la charge de l'électron  $-e$  passe à travers la en un multiple entier de la charge élémentaire  $e$ . 'une des armatures d'une capacité: ceci est dû au t un fluide quantique que l'on peut déplacer d'une le l'armature d'une capacité (capacité  $C$ , surface  $S$ ) onique par rapport aux charges positives. Si  $\rho$  est la ent d'ensemble  $\delta = \epsilon e / (\rho S)$  par rapport aux charges armature produit une charge  $Q = \epsilon e$  sur l'armature.

ar les 2 capacités est :

on trouve :

statique de 2 capacités  $C$  en série. Le second est l'îlot.

rier de  $\Delta n$  le nombre d'électrons en excès sur l'îlot, namique :

aleur reçus par le système au cours de la transfor- rostat à la température  $\theta$ , le second principe de la tion d'entropie  $\Delta S$  satisfait :

$W$  est le travail fourni par le générateur lors de la transformation. Il vaut  $V\Delta q$  avec  $\Delta q = -\Delta q' = e\Delta n/2$ . On a donc :

$$\Delta \left[ U_e - \frac{eVn}{2} - \theta S \right] \leq 0$$

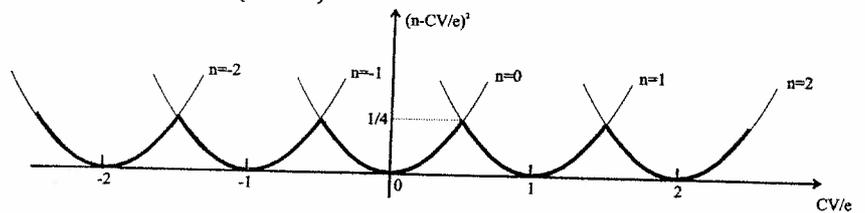
car  $V$  et  $\theta$  sont des constantes. Le potentiel thermodynamique qui régit l'évolution du système à température  $\theta$  est donc :

$$U_e - \frac{eVn}{2} - \theta S \quad (\Leftrightarrow \text{enthalpie libre})$$

A température nulle, il vaut  $U_e - eVn/2$ . L'équilibre est alors atteint pour la valeur  $\bar{n}$  de  $n$  qui rend minimum la fonction :

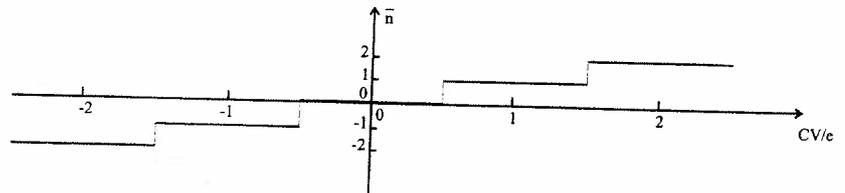
$$U_e - \frac{eVn}{2} = \frac{CV^2}{4} + \frac{n^2 e^2}{4C} - \frac{eVn}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{2C} \left\{ n - \frac{CV}{e} \right\}^2$$

1.5) La figure 3 présente  $\frac{1}{2} \frac{e^2}{2C} \left\{ n - \frac{CV}{e} \right\}^2$  en fonction de  $V$  pour les différentes valeurs de  $n$ .



- Figure 3 -

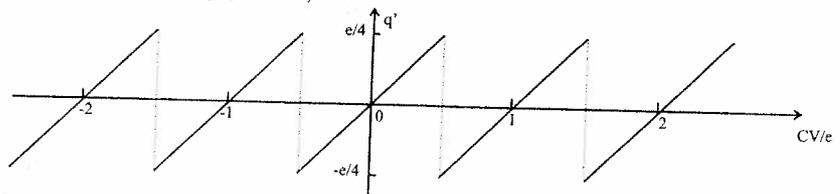
Pour obtenir  $\bar{n}$ , on doit, pour chaque valeur de  $V$ , chercher la parabole la plus basse. Le résultat est indiqué en gras sur la figure 3. On voit que  $\bar{n} = n$  pour  $(n - 1/2)e/C \leq V \leq (n + 1/2)e/C$ . La figure 4 présente la courbe  $\bar{n}(V)$  à  $\theta = 0 K$ .



- Figure 4 -

La valeur entière du nombre d'électrons en excès sur l'îlot peut être contrôlée au moyen de la tension  $V$ .

La figure 5 présente en fonction de  $V$  et à température nulle, la charge à l'équilibre de la capacité de la jonction tunnel  $q' = 1/2(CV - \bar{n}e)$ .



- Figure 5 -

Quand le nombre d'électrons en excès sur l'îlot augmente d'une unité, un électron traverse la jonction de la droite vers la gauche. Pour cela la charge  $-q'$  de l'armature externe de la jonction augmente de  $e/2$  et le générateur fait passer  $-e/2$  du potentiel  $V$  au potentiel 0 (la charge  $q$  augmente de  $e/2$ ).

I.6) A température nulle, lorsqu'on augmente  $V$  à partir de 0,  $n$  reste égal à 0 jusqu'à ce que  $V$  soit égal à  $e/2C$ . Il y a donc blocage de l'effet tunnel (blocage de Coulomb).

$$V = \frac{e}{2C} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{e^2}{2C} = \frac{V}{2}$$

Dans cette dernière relation, le premier terme est l'énergie électrostatique de l'îlot avec un électron en excès (voir question D.I.3). Le second terme est l'énergie potentielle gagnée par un électron qui traverse la barrière par effet tunnel. Pour que l'effet tunnel puisse avoir lieu il faut donc que l'énergie potentielle gagnée par un électron qui traverse la barrière soit supérieure à l'énergie électrostatique nécessaire pour ajouter un électron sur l'îlot. Lorsqu'on passe de  $n$  à  $n+1$  électrons en excès sur l'îlot, la variation d'énergie électrostatique de l'îlot est :

$$\frac{(n+1)^2 e^2}{4C} - \frac{n^2 e^2}{4C} = (n + \frac{1}{2}) \frac{e^2}{2C}$$

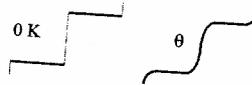
Le raisonnement ci-dessus permet de retrouver immédiatement que cela ne se produit que si  $V \geq (n + 1/2)e/C$ .

I.7) Si on reprend le raisonnement précédent, on voit qu'à  $V = 0V$  l'agitation thermique sera insuffisante pour permettre de passer sur les plateaux  $n = 1$  ou  $n = -1$  si  $k_B \theta \ll 1/2(e^2/2C)$ . De manière plus générale, pour discuter du passage du plateau  $n$  au plateau  $n+1$ , il faut tenir compte du travail des générateurs (nul à  $V = 0V$ ) et raisonner sur le potentiel thermodynamique discuté à la question D.I.4. A  $V$  donné, la différence entre les potentiels thermodynamiques obtenus pour  $n$  et  $n+1$  s'écrit :

$$\frac{1}{2} \frac{e^2}{2C} \left\{ n + 1 - \frac{CV}{e} \right\}^2 - \frac{1}{2} \frac{e^2}{2C} \left\{ n - \frac{CV}{e} \right\}^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{2C} + \frac{e^2}{2C} \left\{ n - \frac{CV}{e} \right\}$$

Cette différence vaut  $(1/2)(e^2/2C)$  au milieu du plateau  $n$  ( $V = ne/C$ ) et évidemment 0 au bord supérieur de ce plateau ( $V = (n + 1/2)e/C$ ). De même pour passer du plateau  $n$  au plateau  $n - 1$ , le saut de potentiel thermodynamique vaut  $(1/2)(e^2/2C)$  au milieu du plateau  $n$  et 0 à son bord inférieur. On voit que le blocage de Coulomb associé au plateau  $n$  sera observable si  $k_B \theta \ll 1/2(e^2/2C)$ .

Les plateaux seront alors bien marqués en leur centre et arrondis sur les bords (voir figure 6). Si la condition ci-dessus est respectée, au milieu d'un plateau les fluctuations de  $n$  sont thermiquement bloquées (la valeur de  $n$  ne peut pas fluctuer car le saut de potentiel thermodynamique pour passer aux valeurs voisines est très supérieur à l'énergie thermique).



- Figure 6 -

Au contraire, lorsqu'on s'approche d'un bord du plateau, ce saut de potentiel tend vers 0 et  $n$  peut se mettre à fluctuer entre les valeurs  $n$  et  $n+1$  pour le bord supérieur,  $n$  et  $n-1$  pour le bord inférieur. Ces fluctuations pourraient être calculées facilement à l'aide de la thermodynamique statistique. Pour pouvoir observer des effets de blocage de Coulomb à température ambiante, il faut  $C \ll e^2/(4k_B \theta)$  avec  $\theta = 300 K$ , soit  $C \ll 1,5 \cdot 10^{-18} F$ . La capacité d'une sphère métallique de rayon  $R$  est  $C = 4\pi\epsilon_0 R$ . Pour avoir  $C \approx 10^{-18} F$ , il faut  $R \approx 10^{-8} m$ . Pour pouvoir observer des effets de blocage de Coulomb à température ambiante, il faut donc que le système ait une taille caractéristique de l'ordre du nanomètre. Ce type d'effets est effectivement observé dans des molécules conductrices, comme par exemple les nanotubes de carbone.

Pour une capacité de l'ordre de  $10^{-15} F$ , le blocage de Coulomb peut être observé pour des températures très inférieures à quelques dixièmes de Kelvin. De telles températures sont couramment obtenues dans des cryostats à dilution.

Pour ajouter un électron sur l'îlot, on doit appliquer une différence de potentiel  $e/2C = 80 \mu V$ . Il s'agit d'une faible différence de potentiel, cependant aisément contrôlable et mesurable.

I.8) Pour une différence de potentiel égale à  $e/C$ , le courant tunnel qui traverse une barrière de conductance  $G$  est  $I = eG/C$ . Le nombre d'électrons qui traversent la barrière par seconde est donc

$I/e = G/C$  et le temps qui sépare les relations d'Heisenberg permet la possibilité qu'a l'électron de s'en affranchir. Les effets de blocage de Coulomb ne sont pas caractéristiques du phénomène  $e^2/C$ .

$$\Delta E \ll \frac{e^2}{C} \Rightarrow \Rightarrow G \ll \frac{e^2 h}{h \tau} \ll \frac{e^2}{C}$$

Il faut donc que les barrières tunnel de Coulomb puissent être observées

## II Le transistor à un électron

II.1) La loi des mailles donne :

$$\frac{V}{2} = \frac{q_1}{C} - \frac{q}{C} + U \quad \text{et} \quad \frac{V}{2} = \frac{q_1}{C} + \frac{q}{C}$$

et la charge de l'îlot est  $-ne = -q + C$ . On déduit aisément de ces 3 relations

$$q_1 = \frac{CV}{2} - \frac{CU}{3} + \frac{ne}{3}$$

$$q_2 = \frac{CV}{2} + \frac{CU}{3} - \frac{ne}{3}$$

$$q = \frac{2CU}{3} + \frac{ne}{3}$$

L'énergie électrostatique globale des 3

$$U_e = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2C} + \frac{q^2}{2C}$$

$$\Rightarrow U_e = \frac{1}{2C} \left\{ \frac{C^2 V^2}{2} + \frac{2C^2 U^2}{3} + \frac{n^2 e^2}{3} \right\}$$

II.2) Lors de la transformation envisagée, le travail de tension  $V/2$  a fourni  $(\Delta q_1 + \Delta n_1)e$ ,  $\Delta n_2 e V/2$ . Le travail total fourni par le

$$W = U \left[ \frac{\Delta n_1 e}{3} \right] + \frac{V}{2} \left[ \frac{\Delta n_1 e}{3} + \Delta n_1 e \right] + \frac{1}{2} \Delta n_2 e V$$

Comme  $\Delta n = \Delta n_2 - \Delta n_1$ , on déduit :

$$W = -\Delta n_1 e \left[ \frac{U}{3} - \frac{V}{2} \right] + \Delta n_2 e \left[ \frac{U}{3} + \frac{V}{2} \right]$$

II.3) Par un raisonnement identique à celui de la question II.1, on déduit la relation suivante qui régit l'évolution du système à

$$U_e + n_1 e \left[ \frac{U}{3} - \frac{V}{2} \right] - n_2 e \left[ \frac{U}{3} + \frac{V}{2} \right]$$

soit à une constante près :

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{n^2 e^2}{3C} \right] - n_1 e \left[ \frac{V}{2} - \frac{U}{3} \right] - n_2 e \left[ \frac{V}{2} + \frac{U}{3} \right]$$

II.4) Puisqu'on néglige les événements où 2 électrons traversent la barrière, on a deux possibilités pour passer de  $n$  à  $n+1$  électrons :

- $n_2 \rightarrow n_2 + 1$  et  $n_1 \rightarrow n_1$
- $n_2 \rightarrow n_2$  et  $n_1 \rightarrow n_1 - 1$

Augmente d'une unité, un électron traverse la jonction de l'armature externe de la jonction augmente de 1 V au potentiel 0 (la charge q augmente de e/2). À partir de 0, n reste égal à 0 jusqu'à ce que V soit égal au cage de Coulomb).

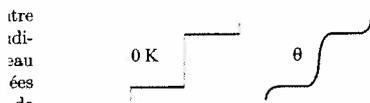
À l'énergie électrostatique de l'îlot avec un électron est l'énergie potentielle gagnée par un électron qui peut tunnel puisse avoir lieu il faut donc que l'énergie de la barrière soit supérieure à l'énergie électrostatique lorsqu'on passe de n à n + 1 électrons en excès sur l'îlot est :

Immédiatement que cela ne se produit que si  $V \geq$

qu'à  $V = 0$  V l'agitation thermique sera insuffisante ou  $n = -1$  si  $k_B \theta \ll 1/2(e^2/2C)$ . De manière plus au plateau n + 1, il faut tenir compte du travail et potentiel thermodynamique discuté à la question thermodynamiques obtenus pour n et n + 1 s'écrit :

$$\frac{e^2}{2C} + \frac{e^2}{2C} \left\{ n - \frac{CV}{e} \right\}$$

plateau n ( $V = ne/C$ ) et évidemment 0 au bord. De même pour passer du plateau n au plateau n + 1 (à  $1/2(e^2/2C)$  au milieu du plateau n et 0 à Coulomb associé au plateau n sera observable si



- Figure 6 -

plateau, ce saut de potentiel tend vers 0 et n peut se le bord supérieur, n et n - 1 pour le bord inférieur. On peut passer à l'aide de la thermodynamique statistique.

Coulomb à température ambiante, il faut  $C \ll F$ . La capacité d'une sphère métallique de rayon R  $\approx 10^{-8}$  m. Pour pouvoir observer des effets de Coulomb il faut donc que le système ait une taille caractéristique plus petit que le libre parcours moyen des électrons. Ceci a été observé dans des molécules conductrices,

de Coulomb peut être observé pour des températures de l'ordre de quelques kelvins. Ces températures sont couramment obtenues dans

pour une différence de potentiel  $e/2C = 80 \mu V$ . Il est donc aisément contrôlable et mesurable.

Un tunnel qui traverse une barrière de conductivité qui traversent la barrière par seconde est donc

$I/e = G/C$  et le temps qui sépare 2 événements tunnel est  $\tau = e/I = C/G$ .

Les relations d'Heisenberg permettent d'affirmer que l'élargissement des niveaux de l'îlot dû à la possibilité qu'a l'électron de s'en échapper par effet tunnel est  $\Delta E \approx h/\tau$ . On voit alors que les effets de blocage de Coulomb ne sont observables que si cet élargissement est faible devant l'énergie caractéristique du phénomène  $e^2/C$ . On doit donc avoir :

$$\Delta E \ll \frac{e^2}{C} \Rightarrow G \ll \frac{e^2 h}{h \tau} \ll \frac{e^2}{C} \Rightarrow G \ll \frac{e^2}{h}$$

Il faut donc que les barrières tunnel soient suffisamment "opaques" pour que les effets de blocage de Coulomb puissent être observés (de résistance grande devant  $h/e^2 \approx 25,8 k\Omega$ ).

## II Le transistor à un électron

II.1) La loi des mailles donne :

$$\frac{V}{2} = \frac{q_1}{C} - \frac{q}{C} + U \quad \text{et} \quad \frac{V}{2} = \frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{C} - \frac{V}{2}$$

et la charge de l'îlot est  $-ne = -q + q_2 - q_1$ .

On déduit aisément de ces 3 relations :

$$q_1 = \frac{CV}{2} - \frac{CU}{3} + \frac{ne}{3}$$

$$q_2 = \frac{CV}{2} + \frac{CU}{3} - \frac{ne}{3}$$

$$q = \frac{2CU}{3} + \frac{ne}{3}$$

L'énergie électrostatique globale des 3 capacités est :

$$U_e = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2C} + \frac{q^2}{2C}$$

$$\Rightarrow U_e = \frac{1}{2C} \left\{ \frac{C^2 V^2}{2} + \frac{2C^2 U^2}{3} + \frac{n^2 e^2}{3} \right\}$$

II.2) Lors de la transformation envisagée, le générateur de tension U a fourni le travail  $U \Delta q$ , le générateur de tension V/2 a fourni  $(\Delta q_1 + \Delta n_1 e)V/2$  et le générateur de tension -V/2 a fourni  $-(\Delta q_2 - \Delta n_2 e)V/2$ . Le travail total fourni par les générateurs est donc, d'après la question précédente :

$$W = U \left[ \frac{\Delta n e}{3} \right] + \frac{V}{2} \left[ \frac{\Delta n e}{3} + \Delta n_1 e \right] + \frac{V}{2} \left[ -\frac{\Delta n e}{3} + \Delta n_2 e \right]$$

Comme  $\Delta n = \Delta n_2 - \Delta n_1$ , on déduit :

$$W = -\Delta n_1 e \left[ \frac{U}{3} - \frac{V}{2} \right] + \Delta n_2 e \left[ \frac{U}{3} + \frac{V}{2} \right]$$

II.3) Par un raisonnement identique à celui de la question D.I.4, on montre que le potentiel thermodynamique qui régit l'évolution du système à température nulle est :

$$U_e + n_1 e \left[ \frac{U}{3} - \frac{V}{2} \right] - n_2 e \left[ \frac{U}{3} + \frac{V}{2} \right]$$

soit à une constante près :

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{n^2 e^2}{3C} \right] - n_1 e \left[ \frac{V}{2} - \frac{U}{3} \right] - n_2 e \left[ \frac{V}{2} + \frac{U}{3} \right]$$

II.4) Puisqu'on néglige les événements où 2 électrons traversent simultanément une barrière, il y a 2 possibilités pour passer de n à n + 1 électrons sur l'îlot :

- $n_2 \rightarrow n_2 + 1$  et  $n_1 \rightarrow n_1$
- $n_2 \rightarrow n_2$  et  $n_1 \rightarrow n_1 + 1$

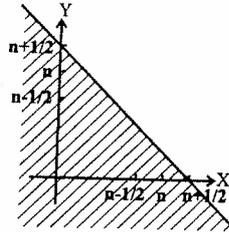
Pour que la première transition soit thermodynamiquement bloquée, il faut :

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{(n+1)^2 e^2}{3C} \right] - n_1 e \left[ \frac{V}{2} - \frac{U}{3} \right] - (n_2 + 1) e \left[ \frac{V}{2} + \frac{U}{3} \right] > \frac{1}{2} \left[ \frac{n^2 e^2}{3C} \right] - n_1 e \left[ \frac{V}{2} - \frac{U}{3} \right] - n_2 e \left[ \frac{V}{2} + \frac{U}{3} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[ n + \frac{1}{2} \right] \frac{e^2}{3C} - e \left[ \frac{V}{2} + \frac{U}{3} \right] > 0$$

$$\Leftrightarrow X + Y < n + \frac{1}{2} \quad \text{où } X = \frac{CU}{e} \quad \text{et } Y = \frac{3CV}{2e}$$

Sur le diagramme X,Y présenté figure 7, la zone où cette transition est thermodynamiquement bloquée est le demi-plan hachuré.

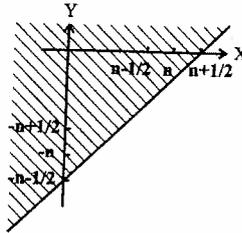


- Figure 7 -

De même on trouve que la transition  $n \rightarrow n+1$  avec  $n_2 \rightarrow n_2$  et  $n_1 \rightarrow n_1 - 1$  est bloquée si :

$$X - Y < n + \frac{1}{2}$$

ce qui correspond au demi-plan hachuré sur la figure 8.



- Figure 8 -

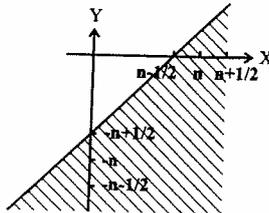
On considère ensuite le passage de  $n$  à  $n-1$  électrons sur l'îlot. Il y a à nouveau 2 possibilités :

- $n_1 \rightarrow n_1 + 1$  et  $n_2 \rightarrow n_2$
- $n_1 \rightarrow n_1$  et  $n_2 \rightarrow n_2 - 1$

La première est thermodynamiquement bloquée si :

$$X - Y > n - \frac{1}{2}$$

ce qui correspond au demi-plan hachuré sur la figure 9.



- Figure 9 -

Enfin la transition  $n \rightarrow n-1$  avec  $n_1 \rightarrow n_1$  et  $n_2 - 1$  est bloquée si :

$$X + Y > n - \frac{1}{2}$$

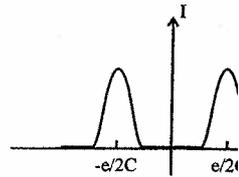
ce qui correspond au demi-plan hachuré sur la figure 10.

La zone de stabilité d'un îlot avec  $n$  électrons est l'intersection des zones hachurées sur les diagrammes précédents (toutes les transitions allant à  $n+1$  ou  $n-1$  électrons doivent être bloquées). Sur le diagramme X,Y il s'agit de l'intérieur du carré représenté sur la figure 11.

II.5) A  $V < e/3C$ , si on augmente progressivement  $U$  sur le diagramme X,Y telle que celle représentée

Tant qu'on n'a pas atteint le bord du carré de stabilité de l'îlot avec 0 électrons (point A), aucun courant ne traverse la structure.

Lorsqu'on arrive au point A (voir figure 12) la jonction 2 ( $n_2 \rightarrow n_2 + 1$ ) devient possible. La jonction 1 ( $n_1 \rightarrow n_1 + 1$ ) est alors également possible (dans le sens opposé à celui des électrons, c'est-à-dire qu'on augmente encore  $U$  et qu'on atteint le point B). On traverse alors l'îlot avec un électron en excès et le courant est représenté sur la figure 13.

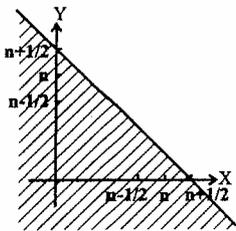


- Figure 13 -

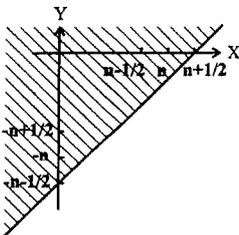
Plus  $V$  est proche de  $e/3C$ , plus le courant est grand. Plus  $U$  à partir de 0 et plus les pics de conductance sont élevés.

quement bloquée, il faut :

$$\frac{U}{3} > \frac{1}{2} \left[ \frac{n^2 e^2}{3C} \right] - n_1 e \left[ \frac{V}{2} - \frac{U}{3} \right] - n_2 e \left[ \frac{V}{2} + \frac{U}{3} \right]$$

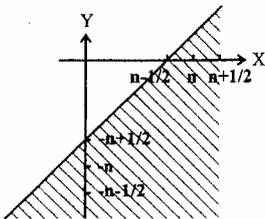


- Figure 7 -



- Figure 8 -

ns sur l'îlot. Il y a à nouveau 2 possibilités :

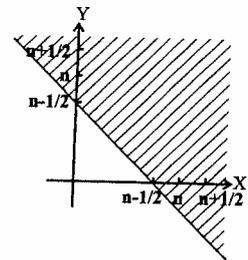


- Figure 9 -

Enfin la transition  $n \rightarrow n - 1$  avec  $n_1 \rightarrow n_1$  et  $n_2 \rightarrow n_2 - 1$  est bloquée si :

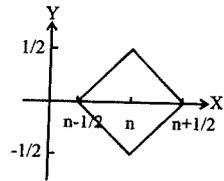
$$X + Y > n - \frac{1}{2}$$

ce qui correspond au demi-plan hachuré sur la figure 10.



- Figure 10 -

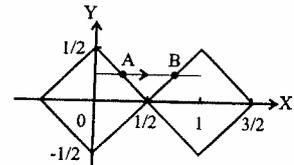
La zone de stabilité d'un îlot avec  $n$  électrons en excès est l'intersection des zones hachurées sur les 4 diagrammes précédents (toutes les transitions conduisant à  $n+1$  ou  $n-1$  électrons doivent être bloquées). Sur le diagramme X,Y il s'agit de l'intérieur du carré représenté sur la figure 11.



- Figure 11 -

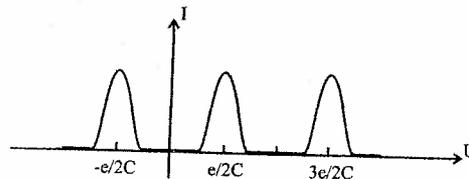
II.5) A  $V < e/3C$ , si on augmente progressivement la tension  $U$ , on se déplace sur une horizontale du diagramme X,Y telle que celle représentée figure 12.

Tant qu'on n'a pas atteint le bord du carré de stabilité de l'îlot avec 0 électrons (point A), aucun courant ne traverse la structure.



- Figure 12 -

Lorsqu'on arrive au point A (voir figure 12), la transition  $n = 0 \rightarrow n = 1$  où un électron traverse la jonction 2 ( $n_2 \rightarrow n_2 + 1$ ) devient possible. Mais la transition  $n = 1 \rightarrow n = 0$  où un électron traverse la jonction 1 ( $n_1 \rightarrow n_1 + 1$ ) est alors également possible. Il y a donc un courant qui traverse la structure (dans le sens opposé à celui des électrons, c'est à dire de la jonction 1 vers la jonction 2). Lorsqu'on augmente encore  $U$  et qu'on atteint le point B (voir figure 12), on rentre dans la zone de stabilité de l'îlot avec un électron en excès et le courant redevient nul...L'allure de la courbe  $I(U)$  est présentée sur la figure 13.



- Figure 13 -

Plus  $V$  est proche de  $e/3C$ , plus le transistor se met à conduire rapidement lorsqu'on augmente  $U$  à partir de 0 et plus les pics de conductance sont larges. Le courant maximum qui traverse le conducteur est de l'ordre de :

$$I_{max} \approx \frac{VG}{2}$$

car il y a 2 jonctions de conductance  $G$  en série. Pour  $V \approx e/3C$ , on obtient :

$$I_{max} \approx \frac{eG}{6C}$$

Pour  $G = 10^{-5} \Omega^{-1}$  et  $C = 10^{-15} F$ , on trouve  $I_{max} \approx 0,27 \cdot 10^{-9} A$ .

II.6) Il y a 2 façons de faire :

- La première consiste à reprendre le raisonnement des questions D.II.1 à D.II.4. A la question D.II.1, il faut remplacer  $-ne = -q + q_2 - q_1$  par  $-ne = -Q - q + q_2 - q_1$ . Dans les expressions des charges  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q$  il faut donc remplacer  $n$  par  $n - Q/e$ . De même, à une constante près, l'énergie électrostatique s'écrit maintenant :

$$U_e = \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^2}{3C} \left( n - \frac{Q}{e} \right)^2 \right\}$$

Le travail total fourni par les générateurs lors de la transformation envisagée n'est pas modifié et le potentiel thermodynamique à minimiser est donc :

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\left( n - \frac{Q}{e} \right)^2 e^2}{3C} \right] - n_1 e \left[ \frac{V}{2} - \frac{U}{3} \right] - n_2 e \left[ \frac{V}{2} + \frac{U}{3} \right]$$

Les 4 droites qui entourent la zone de stabilité de l'îlot avec  $n$  électrons en excès ont maintenant pour équation :

$$X + Y < n - \frac{Q}{e} + \frac{1}{2} \quad X - Y < n - \frac{Q}{e} + \frac{1}{2} \quad X - Y > n - \frac{Q}{e} - \frac{1}{2} \quad X + Y > n - \frac{Q}{e} - \frac{1}{2}$$

En remplaçant  $X$  par  $X + Q/e$ , on voit que le diagramme des différentes configurations de l'îlot est inchangé. Cela revient à remplacer  $U$  par  $U + Q/C$ .

- On peut également considérer que sur les  $n$  électrons en excès présents sur l'îlot,  $Q/e$  sont figés sur l'armature interne de la capacité rajoutée et donc spectateurs du fonctionnement du transistor. On doit donc remplacer  $n$  par  $n - Q/e$  ce qui revient à remplacer  $CU/e$  par  $CU/e + Q/e$ .

Pour passer d'un pic de conductance au suivant, il faut faire varier  $Q$  de  $\pm$  un électron.

La conductance du transistor est donc extrêmement sensible à la charge  $Q$ . On peut donc utiliser le transistor comme un électromètre extrêmement sensible (voir question suivante).

- II.7) a) Lors d'une demi-période du signal triangulaire, la charge  $Q$  varie d'un peu plus de 5 électrons (en valeur absolue) : il y a en effet défilement d'un peu plus de 5 pics de conductance.  
b) Si l'on veut que la sensibilité de l'électromètre soit maximale, il faut que la conductance varie le plus rapidement possible avec la charge  $Q$ . Il faut donc se placer à mi-pente d'un pic de conductance. Pour une fréquence  $\nu$  séparée de  $\nu_0$  de plus de  $\Delta\nu$  :

$$A(\nu) = \int_{\nu - \Delta\nu/2}^{\nu + \Delta\nu/2} S(\nu) d\nu = b^2 \Delta\nu \quad \text{et} \quad B = B_1 = \log \frac{b\sqrt{\Delta\nu}}{A_0}$$

$B$  n'est définie qu'à une constante près d'où l'introduction de la constante  $A_0$ . A la fréquence  $\nu_0$ ,

$$A(\nu_0) = \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} a^2 \delta(\nu - \nu_0) d\nu + b^2 \Delta\nu \quad \text{et} \quad B = B_2 = \log \frac{\sqrt{a^2 + b^2 \Delta\nu}}{A_0}$$

On voit sur la figure 11 de l'énoncé que  $b^2 \Delta\nu \ll a^2$ . On a donc :

$$B_1 - B_2 = \log \frac{b\sqrt{\Delta\nu}}{a}$$

On mesure  $B_1 - B_2 \approx -1,7$ , on en déduit :

$$b = \frac{a}{\sqrt{\Delta\nu}} 10^{-1,7}$$

On sait par ailleurs que  $a$  correspond à une charge  $b$  représente la sensibilité de l'électromètre, noté la mesure, il faut augmenter le temps de mesure. Si la bande passante est de  $1 Hz$  (temps de mesure Avec une bande passante de  $1 MHz$  (temps de toujours nettement inférieur à 1 électron.

$$c) \delta E = \frac{S_q^2}{2C}$$

$\delta E$  a la dimension d'une énergie divisée par une la même unité que  $h$ . On trouve  $\delta E/h \approx 116$ . L'ordres de grandeur plus grande que la limite que système pendant  $\Delta t$ , on ne peut pas connaître s

d) La bande passante du transistor est d'environ : sante, le bruit de charge est d'environ 0,5 électrons ailleurs, un courant de  $10 pA$  correspond à un : ron  $60 MHz$ . L'électromètre étudié permet donc courant de  $10 pA$  (puisque la bande passante est : que le niveau de bruit est inférieur à un électron,  $600 \cdot 10^6 \sim 10^9$  électrons que l'on va compter à pl de mesurer en une dizaine de secondes des cour de l'ordre de  $10^{-9}$ .

On peut envisager utiliser ce dispositif pour réal

Pour  $V \approx e/3C$ , on obtient :

$$I_{max} \approx 0,27 \cdot 10^{-9} \text{ A.}$$

Pour les questions D.II.1 à D.II.4. A la question D.II.1 par  $-ne = -Q - q_1 + q_2 - q_3$ . Dans les expressions D.II.2 et D.II.3 par  $n - Q/e$ . De même, à une constante près,

lors de la transformation envisagée n'est pas modifiée,  $r$  est donc :

$$r = \frac{U}{3}$$

Les électrons de l'îlot avec  $n$  électrons en excès ont maintenant

$$\frac{1}{2} X - Y > n - \frac{Q}{e} - \frac{1}{2} \quad X + Y > n - \frac{Q}{e} - \frac{1}{2}$$

Le diagramme des différentes configurations de l'îlot en fonction de  $U + Q/C$ .

Les électrons en excès présents sur l'îlot,  $Q/e$  sont figés sur l'îlot ; donc spectateurs du fonctionnement du transistor. On revient à remplacer  $CU/e$  par  $CU/e + Q/e$ .

Il faut faire varier  $Q$  de  $\pm$  un électron. On peut donc utiliser le transistor sensible à la charge  $Q$ . On peut donc utiliser le transistor sensible (voir question suivante).

Si la charge  $Q$  varie d'un peu plus de 5 électrons (en fait un peu plus de 5 pics de conductance).

Si la charge  $Q$  est maximale, il faut que la conductance varie le moins ; donc se placer à mi-pente d'un pic de conductance.

$\nu$  :

$$B = \log \frac{b\sqrt{\Delta\nu}}{A_0}$$

Introduction de la constante  $A_0$ . A la fréquence  $\nu_0$ ,

$$B = B_2 = \log \frac{\sqrt{a^2 + b^2\Delta\nu}}{A_0}$$

$a^2$ . On a donc :

On sait par ailleurs que  $a$  correspond à une charge  $Q$  de 0,01 électrons. On en déduit  $b \approx 5,2 \cdot 10^{-5} e^- / \sqrt{Hz}$ .  $b$  représente la sensibilité de l'électromètre, notée  $S_q$ . Pour augmenter le rapport signal sur bruit de la mesure, il faut augmenter le temps de mesure (ce qui est équivalent à réduire la bande passante). Si la bande passante est de 1 Hz (temps de mesure de 1 s), on a un niveau de bruit de  $5,2 \cdot 10^{-5} e^-$ . Avec une bande passante de 1 MHz (temps de mesure de 1  $\mu$ s), le niveau de bruit est  $5,2 \cdot 10^{-2} e^-$ , toujours nettement inférieur à 1 électron.

$$c) \delta E = \frac{S_q^2}{2C}$$

$\delta E$  a la dimension d'une énergie divisée par une fréquence (puisque  $S_q$  est en  $e^- / \sqrt{Hz}$ ). Elle a donc la même unité que  $h$ . On trouve  $\delta E/h \approx 116$ . La sensibilité en énergie de l'électromètre n'est que 2 ordres de grandeur plus grande que la limite quantique ultime fixée par  $\Delta E \Delta t \approx h$  (si on mesure un système pendant  $\Delta t$ , on ne peut pas connaître son énergie à mieux que  $h/\Delta t$ ).

d) La bande passante du transistor est d'environ 100 MHz. Même si on utilise toute la bande passante, le bruit de charge est d'environ 0,5 électrons. Il reste donc toujours inférieur à un électron. Par ailleurs, un courant de 10 pA correspond à une fréquence moyenne de passage des électrons d'environ 60 MHz. L'électromètre étudié permet donc de mesurer les électrons individuellement pour un courant de 10 pA (puisque la bande passante est supérieure à la fréquence de passage des électrons et que le niveau de bruit est inférieur à un électron). Si on mesure pendant 10 s, on voit passer environ  $600 \cdot 10^6 \sim 10^9$  électrons que l'on va compter à plus ou moins un électron près. On est donc capable de mesurer en une dizaine de secondes des courants de l'ordre de 10 pA avec une précision relative de l'ordre de  $10^{-9}$ .

On peut envisager d'utiliser ce dispositif pour réaliser un étalon de courant électrique.