



MINISTÈRE  
DE L'ÉDUCATION  
NATIONALE

EAE PHP 1

SESSION 2018

---

## AGREGATION CONCOURS EXTERNE

Section : PHYSIQUE-CHIMIE  
Option : PHYSIQUE

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

---

*Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.**

**Tournez la page S.V.P.**

# Interactions dans le système solaire

Le système solaire est un ensemble dynamique, avec une histoire complexe dont certains aspects sont encore l'objet de recherches. Il est le lieu d'une physique riche et diverse.

Dans la première partie de cette composition, on développe une première approche simple du mouvement des planètes dans le champ de gravitation du soleil et on détermine quelques caractéristiques liées au "fonctionnement" d'une étoile à l'aide d'ordres de grandeurs.

La deuxième partie traite du système solaire primordial et notamment du disque protoplanétaire qui a précédé les planètes dans l'histoire. Les équations qui déterminent les caractéristiques de ce disque - sa distribution de matière et de température ainsi que son opacité - mêlent des considérations mécaniques, thermodynamiques et électromagnétiques.

La troisième partie se focalise d'abord sur l'interaction entre une planète et un disque de matière issu du disque protoplanétaire - interaction qui explique les phénomènes de migration ayant eu lieu à une certaine époque au sein du système solaire - et s'achève sur l'étude d'une résonance orbite-orbite, qui permet d'expliquer quelques configurations actuelles du système solaire.

Pour les applications numériques, on prendra :

- charge élémentaire :  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  ;
- masse d'un électron :  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$  ;
- vitesse de la lumière :  $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;
- constante de Boltzmann :  $k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  ;
- nombre d'Avogadro :  $N_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  ;
- constante de Planck :  $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  ;
- permittivité diélectrique du vide :  $\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  ;
- perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  ;
- constante de gravitation universelle :  $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  ;
- constante de Stefan :  $\sigma = 5,7 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  ;
- masse d'un atome d'hydrogène :  $m_H = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$  ;
- masse de la Terre :  $M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$  ;
- rayon moyen de la Terre :  $R_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$ .

Par ailleurs, on rappelle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-x^2] dx = \sqrt{\pi}$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{A})) = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta \vec{A}$$

$$\text{si } x \ll 1, \arcsin(x) \sim x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

# Première partie

## Première approche

Cette partie constitue une première approche de quelques aspects de la physique du système solaire. La première section s'intéresse à la théorie classique du mouvement d'une planète dans le champ de gravité solaire. La deuxième, indépendante de la première, permet d'estimer quelques ordres de grandeur pour décrire le "fonctionnement" d'une étoile et ainsi retrouver certaines caractéristiques physiques du Soleil.

### 1 Mouvement d'une planète

#### 1.1 Préliminaires

##### 1.1.1 Référentiel utilisé

1 - Définir un référentiel. Définir un référentiel galiléen.

##### 1.1.2 Champ de gravitation créé par le Soleil

On assimile le Soleil à une sphère de rayon  $R_S$  et de masse volumique uniforme  $\rho_S$ . On repère la position d'un point dans un système de coordonnées sphériques, d'origine  $O$ , confondue avec le centre du Soleil. On notera  $R$  le rayon et  $\vec{e}_R$  le vecteur unitaire radial, de sorte qu'un point  $M$  est repéré par le rayon vecteur  $\vec{OM} = R\vec{e}_R$ .

2 - Rappeler le théorème de Gauss pour la gravitation. En déduire le champ gravitationnel  $\vec{g}_S$  créé par le Soleil en un point extérieur à l'étoile. Montrer que ce champ est le même que celui créé par une masse ponctuelle  $M_S$  placée au centre de la distribution, où l'on exprimera  $M_S$  en fonction de  $\rho_S$  et  $R_S$ . Aurait-on eu le même résultat si la répartition avait été non-uniforme, mais à symétrie sphérique ?

##### 1.1.3 Modèle simplifié du mouvement d'une planète

Dans toute la suite, on se place dans le référentiel héliocentrique considéré comme galiléen. On étudie le mouvement d'une planète de masse  $m$  dans le champ gravitationnel newtonien du Soleil de masse  $M_S$  supposé fixe. On néglige toute autre action que celle de ce champ sur la planète.

3 - Montrer que le mouvement de la planète est plan. Comment caractériser ce plan ?

On paramètre la trajectoire de la planète dans ce plan en coordonnées polaires, avec les notations  $(r, \theta)$ . On notera  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$  et  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ . De manière générale, dans toute la suite, quelle que soit la grandeur  $A$ , on notera  $\dot{A} = \frac{dA}{dt}$ .

4 - Rappeler l'expression du vecteur vitesse et du vecteur accélération dans ce système de coordonnées. En déduire les deux équations différentielles couplées vérifiées par  $r$  et  $\theta$ .

5 - Pour cette question uniquement, on se restreint à une trajectoire circulaire de rayon  $r_C$ . Exprimer la vitesse angulaire de rotation de  $m$ ,  $\Omega(r_C)$ , dans ce cas. Dans la suite de l'énoncé, cette vitesse angulaire sera appelée vitesse angulaire képlérienne.

6 - On revient au cas général. Montrer que, dans ce système de coordonnées, la grandeur  $C = r^2\dot{\theta}$  est une constante du mouvement.

7 - Montrer que l'énergie mécanique de  $m$  est une constante du mouvement. En prenant comme origine des énergies potentielles la situation où la planète est à une distance infinie du Soleil, exprimer cette énergie mécanique  $E_m$  et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :  $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{P_{\text{eff}}}(r)$

où  $E_{P_{\text{eff}}}(r)$  est une fonction uniquement de  $r$ ,  $C$ ,  $m$ ,  $G$  et  $M_S$ . Quelle interprétation physique peut-on donner à  $E_{P_{\text{eff}}}(r)$  ?

8 - Tracer l'allure de  $E_{P_{\text{eff}}}(r)$ . Montrer qu'elle permet d'identifier plusieurs types de mouvements radiaux possibles selon la valeur de l'énergie mécanique  $E_m$ .

9 - On effectue le changement de variable de Binet en posant  $u(\theta)$  telle que  $u = 1/r$ . Exprimer  $\dot{r}$  puis  $\ddot{r}$  en fonction de  $C$ , de  $u$  et/ou de dérivées de  $u$  par rapport à  $\theta$ . En déduire que l'une des équations différentielles établies précédemment peut se réécrire :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM_S}{C^2}$$

10 - En déduire que la trajectoire d'une planète est une conique dont le Soleil est un foyer. Donner l'équation polaire  $r(\theta)$  de cette conique - on choisira l'origine des angles de sorte que l'expression soit la plus simple possible et on notera l'excentricité  $e$ , sans chercher à l'exprimer. Exprimer le paramètre  $p$  en fonction de  $G$ ,  $M_S$  et  $C$ . Donner la signification de  $e$ . Que peut-on dire du mouvement radial selon sa valeur ? Représenter graphiquement la trajectoire dans le cas  $0 < e < 1$ .

11 - Exprimer l'énergie mécanique  $E_m$  en fonction de  $u$  et de  $\frac{du}{d\theta}$  notamment. Montrer que sa conservation implique une relation entre  $e$ ,  $E_m$ ,  $p$ ,  $G$ ,  $M_S$  et  $m$  que l'on mettra sous la forme  $e = f(E_m, p, G, M_S, m)$ . Expliquer en quoi cette relation permet de faire le lien quantitatif entre la discussion de la question 8 et celle de la question 10.

## 1.2 Autour de la notion de référentiel galiléen

Dans la sous-section précédente, nous avons considéré le référentiel héliocentrique comme galiléen. L'objectif de cette sous-section est de justifier cette hypothèse.

### 1.2.1 Passage d'un référentiel à un autre, composition des mouvements

Soient un référentiel  $\mathcal{R}$  d'origine  $O$  et un référentiel  $\mathcal{R}'$  d'origine  $O'$ , dont le mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$  est caractérisé par la donnée de la vitesse  $\vec{v}(O')_{|\mathcal{R}}$  et d'un vecteur rotation  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}}$  supposé constant. On rappelle que la loi vectorielle de composition des vitesses, qui lie les vitesses d'un point  $M$  dans  $\mathcal{R}$  et dans  $\mathcal{R}'$ ,  $\vec{v}(M)_{|\mathcal{R}}$  et  $\vec{v}(M)_{|\mathcal{R}'}$ , est :

$$\vec{v}(M)_{|\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{|\mathcal{R}'} + \vec{v}_e = \vec{v}(M)_{|\mathcal{R}'} + \vec{v}(O')_{|\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

12 - Commenter brièvement cette relation, en donnant notamment la signification physique de la vitesse  $\vec{v}_e$ . On pourra illustrer les différents termes grâce à des schémas décrivant des situations simples.

De même, la loi vectorielle de composition des accélérations, qui lie les accélérations d'un point  $M$  dans  $\mathcal{R}$  et dans  $\mathcal{R}'$ ,  $\vec{a}(M)_{|\mathcal{R}}$  et  $\vec{a}(M)_{|\mathcal{R}'}$ , s'écrit :

$$\vec{a}(M)_{|\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{|\mathcal{R}'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\text{avec } \vec{a}_e = \vec{a}(O')_{|\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \left( \vec{\omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right)$$

$$\text{et } \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{|\mathcal{R}'}$$

13 - Commenter cette relation et donner la signification physique des accélérations  $\vec{a}_e$  et  $\vec{a}_c$ .  $\mathcal{R}$  étant supposé galiléen, en déduire les conditions pour que  $\mathcal{R}'$  le soit aussi.

## 1.2.2 Cas d'un référentiel en translation accéléré par gravité

Soit un référentiel  $\mathcal{R}$  supposé galiléen. On considère à présent que le référentiel  $\mathcal{R}'$ , d'origine  $O'$ , est attaché à un solide de masse  $m_{\mathcal{R}'}$ , ce solide étant, dans  $\mathcal{R}$ , en mouvement de translation accélérée par un champ de gravité extérieur  $\vec{\mathcal{G}}_{\text{ext}}(M)$ . A priori, la condition établie précédemment n'est donc pas respectée et  $\mathcal{R}'$  n'est pas galiléen. On cherche ici à établir un deuxième critère moins restrictif et applicable en pratique, pour que  $\mathcal{R}'$  puisse malgré tout être considéré comme galiléen. Pour cela, on étudie dans  $\mathcal{R}'$  le mouvement d'un point  $M$  de masse  $m$  soumis uniquement à  $\vec{\mathcal{G}}_{\text{ext}}$ .

**14** - Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à  $M$  dans  $\mathcal{R}$ . Montrer à l'aide d'une des formules de composition que l'on peut réécrire cette équation de sorte qu'elle soit formellement équivalente à un principe fondamental de la dynamique écrit dans  $\mathcal{R}'$ .

**15** - Exprimer  $\vec{a}(O')_{/\mathcal{R}}$ . En déduire que tout se passe comme si  $M$  subissait dans  $\mathcal{R}'$  une force effective  $m(\vec{\mathcal{G}}_{\text{ext}}(M) - \vec{\mathcal{G}}_{\text{ext}}(O'))$ . Comment appelle-t-on ce terme? Comment est modifiée l'équation précédente si l'on considère en plus l'action d'autres forces que la gravitation, notées  $\vec{F}$ ?

**16** - Quel critère pratique peut-on dès lors donner pour qu'un référentiel en translation accéléré par gravité puisse être considéré comme galiléen? Présenter succinctement le référentiel héliocentrique. En utilisant le critère précédent, expliquer qualitativement mais précisément pourquoi on peut considérer ce référentiel comme galiléen avec une excellente approximation pour l'étude des mouvements dans le système solaire.

## 2 "Fonctionnement" d'une étoile

Quelques idées simples permettent d'expliquer qu'avec un peu de matière et sans énergie, on peut "construire" un objet dense et chaud ayant les caractéristiques d'une étoile. Dans cette section, on cherche uniquement à établir quelques ordres de grandeur de ces caractéristiques, et le candidat pourra ainsi omettre les préfacteurs numériques adimensionnés qui apparaissent éventuellement dans les expressions qu'il emploie et utiliser la notation  $\simeq$  qui signifiera dans cette section "de l'ordre de".

### 2.1 Température typique d'une étoile

Une étoile est le produit de la contraction gravitationnelle d'un nuage de gaz. L'image suivante a été réalisée par le satellite Hubble. On y voit de jeunes étoiles d'une nébuleuse entourées d'un nuage de poussières et de gaz.

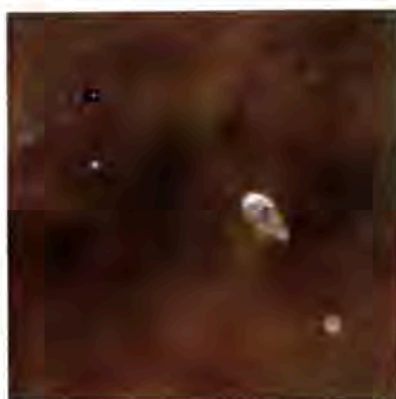


Figure 1 - Nuages protostellaires et jeunes étoiles (détail de la nébuleuse d'Orion), D'après : <http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2001/13/video/b/still/4/>

Soit un nuage de très grande taille, de masse totale  $M_E$ , contenant des atomes d'hydrogène de masse  $m_H$  à une température négligeable. On cherche à montrer que, sans apport extérieur d'énergie, la contraction de ce nuage en un corps de rayon  $R_E$  peut conduire à une température finale de ce corps importante.

17 - Rappeler l'expression de l'énergie potentielle de gravitation associée à l'interaction entre deux corps ponctuels de masses  $m_1$  et  $m_2$  distants de  $r$  - par convention, on prendra cette énergie potentielle nulle quand  $m_1$  et  $m_2$  sont à distance infinie. Proposer un ordre de grandeur de l'énergie potentielle de gravitation propre d'une étoile de masse  $M_E$  et de rayon  $R_E$ .

18 - Proposer une estimation de l'énergie totale liée à l'agitation thermique microscopique dans une étoile de masse  $M_E$ , de température  $T_E$ , composée essentiellement d'atomes d'hydrogène de masse  $m_H$ .

19 - On considère un nuage de gaz de masse  $M_E$ , de rayon infini et dont la température est négligeable; montrer qu'après contraction gravitationnelle, sa température typique est de la forme  $T_E \simeq \alpha M_E / R_E$ , où  $\alpha$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $k_B$ ,  $m_H$  et  $G$ . Comparer cette estimation à la température du coeur du Soleil, de l'ordre de  $T_S = 15 \times 10^6$  K, sachant que  $M_S = 2 \times 10^{30}$  kg et  $R_S = 7,5 \times 10^8$  m. Quelles critiques majeures peut-on faire à ce modèle simple?

On cherche à valider une des hypothèses du modèle simple précédent consistant à négliger la rotation propre du Soleil.

20 - A l'aide de la série de photographies ci-après, estimer grossièrement la vitesse angulaire de rotation propre du Soleil. Rappeler la définition du moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe. Quelle est la signification physique de cette grandeur? Proposer des estimations du moment d'inertie du Soleil et de son énergie cinétique de rotation propre. L'hypothèse qui consiste à négliger cette forme d'énergie dans le bilan précédent est-elle justifiée?

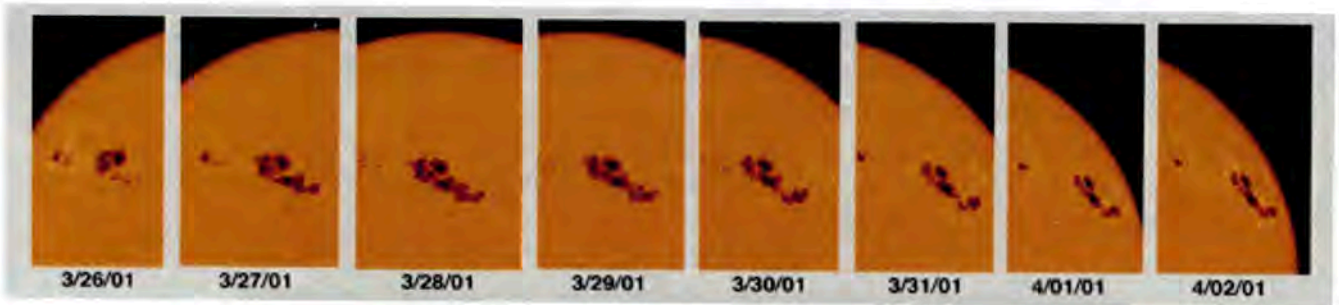


Figure 2 - Évolution d'une tache solaire au cours du temps. Série de photographies prises par le satellite SOHO. D'après : <https://soho.cnes.fr>. Attention : les dates sont notées en convention anglo-saxonne : mois/jour/année.

## 2.2 Luminosité typique d'une étoile

En astronomie, la luminosité est la puissance totale rayonnée par une étoile, une galaxie ou un objet astronomique quelconque.

21 - Rappeler la loi de Stefan et donner les restrictions habituelles pour son application. A l'aide des résultats précédents, en supposant que la masse volumique  $\rho$  est sensiblement la même d'une étoile à une autre, montrer que la luminosité totale  $L_E$  d'une étoile est environ proportionnelle à  $M_E^{3,3}$ . Comparer à la loi de puissance observée expérimentalement, représentée ci-après, et commenter.

$$L = P \times S \quad P_{\text{Max}} = \sigma \cdot T^4 \quad \sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \quad M_E = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R_E^3$$

$$= \sigma T^4 \cdot S = 5,7 \cdot 10^{-8} \cdot T_e \cdot 4\pi R_e^2 \quad T_e \simeq \alpha \frac{M_e}{R_e} \quad S = 4\pi R_e^2$$

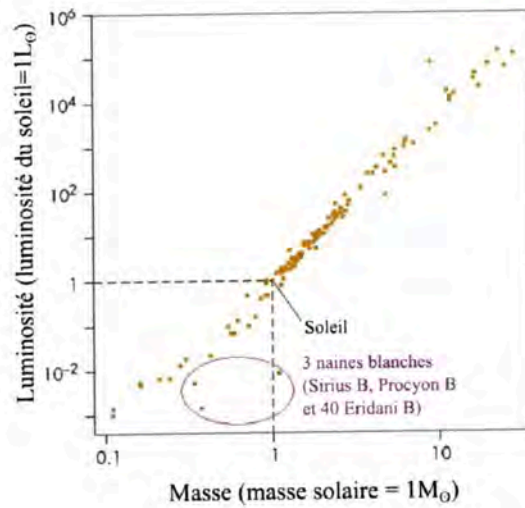


Figure 3 - Luminosité d'étoiles en fonction de leurs masses - luminosités et masses étant rapportées aux grandeurs mesurées pour le Soleil. D'après : <https://media4.obspm.fr/>

## Deuxième partie

# Etude du système solaire primordial

Toute la matière du nuage de gaz qui a donné naissance à l'étoile ne s'agrège pas pour la former. Une partie de celle-ci adopte dans un premier temps la forme d'un disque : le disque protoplanétaire dont la sédimentation progressive peut conduire à la formation de planètes. En pratique, un tel disque protoplanétaire apparaît comme un disque obscur légèrement évasé, entouré par deux halos, comme on le voit sur la photographie ci-après. On cherche dans cette partie à modéliser la répartition de matière dans le disque primordial du système solaire.

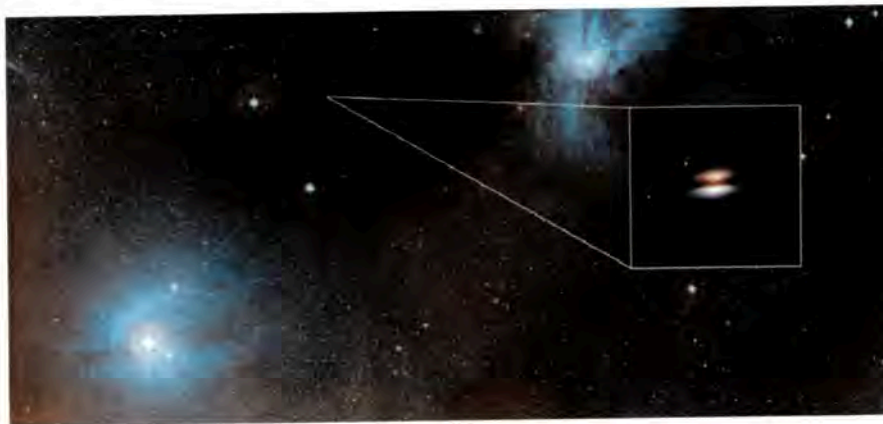


Figure 4 - La jeune étoile 2MASS J16281370-2431391 (dans l'encart) est entourée d'un disque protoplanétaire qui, vu de profil, lui donne l'aspect d'une soucoupe volante en lumière visible. D'après : Digitized Sky Survey 2, Nasa, Esa

### 3 Structure verticale du disque primordial

Le Soleil contient à lui seul 99,9% de la masse du système solaire. Dans tout ce qui suit, on va donc négliger le champ gravitationnel créé par le disque devant le champ créé par le Soleil  $S$ . On admet que ce champ est newtonien et on note  $M_S$  la masse du Soleil. On repère la position d'un point à l'intérieur du disque à l'aide des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , le plan  $z = 0$  correspondant au plan médian du disque.

**22** - Faire un schéma sur lequel on placera les grandeurs de repérages cylindriques  $(r, \theta, z)$ , avec une origine en  $S$ , centre du Soleil. Placer sur le schéma la base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ , ainsi que le rayon vecteur  $R\vec{e}_R$  des coordonnées sphériques. Exprimer le champ  $\vec{g}_S$  du Soleil en  $M$  dans le système de coordonnées cylindriques.

On modélise le disque par un fluide de masse volumique  $\rho(r, z)$  et de pression locale  $P(r, z)$ , en rotation à la vitesse angulaire képlérienne locale  $\Omega(r) = \sqrt{\frac{GM_S}{r^3}}$ , définie à la question 5, autour d'un axe passant par le Soleil et perpendiculaire au plan  $z = 0$ . On se place dans le référentiel centré sur  $S$  et tournant à la vitesse angulaire  $\Omega(r)$ . On admet que le disque est en équilibre hydrostatique dans ce référentiel.

**23** - Ecrire le principe fondamental de la statique des fluides dans ce référentiel. Rappeler la signification des différents termes qui interviennent dans cette équation. En déduire, dans le système de coordonnées cylindriques, deux équations différentielles aux dérivées partielles scalaires vérifiées par les champs de pression  $P(r, z)$ , masse volumique  $\rho(r, z)$  et vitesse angulaire  $\Omega(r)$ .

On s'intéresse dans la suite à l'équilibre vertical du disque.

**24** - Le disque, majoritairement composé d'hydrogène gazeux, est assimilé à un gaz parfait monoatomique de température  $T(r)$  - on suppose qu'à une distance  $r$  fixée,  $T$  ne varie pas en fonction de  $z$ . En déduire une équation différentielle liant  $\rho(r, z)$  et  $\frac{\partial \rho}{\partial z}$  notamment. Montrer que si l'on considère le disque comme fin ( $z \ll r$  pour tout point du disque), on peut mettre cette équation sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} \simeq -\frac{m_H \Omega^2(r)}{k_B T(r)} \rho z$$

**25** - En déduire que l'on peut exprimer la masse volumique sous la forme :

$$\rho(z, r) = \rho_0(r) \cdot e^{\frac{-z^2}{2H^2(r)}}$$

où l'on exprimera  $H(r)$  en fonction de  $T(r)$ ,  $m_H$ ,  $k_B$ , et  $\Omega(r)$  et où  $\rho_0(r)$  est la masse volumique du disque de gaz dans le plan médian. Quelle interprétation physique peut-on donner de  $H(r)$  ?

### 4 Structure radiale du disque, profil de température

Pour déterminer le profil du disque et donc  $H(r)$ , il est nécessaire de déterminer le profil de température,  $T(r)$ . Pour cela, dans toute la suite, nous allons nous intéresser à la caractérisation radiale du disque. On définit ainsi un ensemble de grandeurs moyennées sur la hauteur du disque. En premier lieu, on définit la densité de masse surfacique,  $\Sigma(r)$ , par la relation :

$$\Sigma(r) = \int_{z=-\infty}^{\infty} \rho(r, z) dz.$$

**26** - Exprimer  $\Sigma(r)$  à l'aide du modèle précédent, en fonction uniquement de  $\rho_0(r)$  et  $H(r)$ .



## 4.1 Bilan de masse

La densité surfacique de masse est susceptible de varier dans le temps. On la notera désormais  $\Sigma(r, t)$  et on cherche à déterminer les équations qui caractérisent son évolution. On s'intéresse pour cela à un anneau de disque compris entre les rayons  $r$  et  $r + dr$ , comme représenté ci-après.

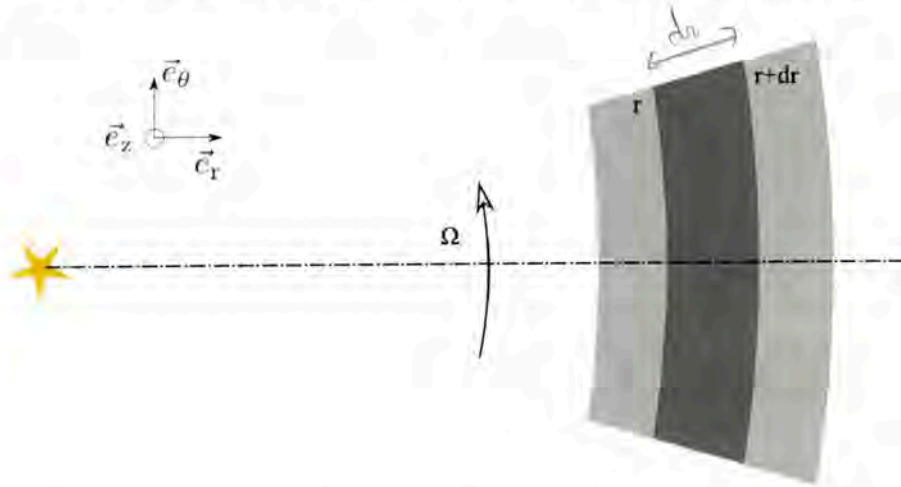


Figure 5 - Représentation d'une portion d'un anneau de largeur  $dr$ . D'après la thèse de C. Cossou : *Effet de la structure du disque sur la formation et la migration des planètes*. Other. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2013. French. <NNT : 2013BOR14910>. <tel-00949904>

**27** - Exprimer la masse  $\delta m(r)$  de cet anneau en fonction de  $dr$ ,  $\Sigma(r, t)$  et  $r$ .

Soit  $v_r(r)\vec{e}_r$  la vitesse radiale du gaz. Cette composante radiale de la vitesse conduit à une variation au cours du temps de la masse de l'anneau étudié.

**28** - Montrer par un bilan précis que :

$$\frac{\partial \Sigma(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r(r) \Sigma(r, t)) = 0$$

## 4.2 Bilan de moment cinétique

On fait maintenant un bilan des variations de moment cinétique pour l'anneau de gaz étudié précédemment. On suppose toujours que l'anneau tourne autour du centre du Soleil,  $S$ , à une vitesse angulaire  $\Omega(r)$ .

**29** - Exprimer le moment cinétique de l'anneau  $\delta \vec{L}_a$  par rapport au point  $S$  en fonction de  $r$ ,  $dr$ ,  $\Sigma(r, t)$ ,  $\Omega(r)$  et  $\vec{e}_z$  le vecteur unitaire normal au disque, défini figure précédente.

L'anneau considéré possède notamment une surface latérale située en  $r$ . Comme vu précédemment, cette surface est traversée par de la masse avec une vitesse radiale  $v_r(r)\vec{e}_r$ . On définit le flux de moment cinétique à travers cette surface comme le moment cinétique de la masse traversant cette surface par unité de temps.

**30** - Exprimer le flux de moment cinétique  $\frac{d\vec{L}_e(r)}{dt}$  emporté par la matière qui traverse la surface latérale intérieure de l'anneau considéré, en fonction de  $v_r(r)$ ,  $r$ ,  $\Sigma(r, t)$ ,  $\Omega(r)$  et  $\vec{e}_z$ .

Au delà du transfert de moment cinétique par les faces internes et externes, les variations du moment cinétique de l'anneau considéré sont aussi dues au couple des forces de viscosité exercées par les anneaux internes et externes sur celui considéré. La force visqueuse par unité de longueur de contact est définie par :  $f_{vis} = \nu \Sigma(r, t) r \frac{d\Omega}{dr} = \nu \Sigma(r, t) A$  où  $A = r \frac{d\Omega}{dr}$  est le taux de cisaillement et où  $\nu$  est la viscosité typique du disque.

**31** - Commenter physiquement l'expression de  $f_{vis}$ . A l'aide d'un schéma, expliquer succinctement le mécanisme à l'origine de la viscosité d'un gaz (On pourra se placer dans une configuration plus simple). Exprimer  $\vec{\Gamma}_{int}$ , le moment par rapport à  $S$  de la force visqueuse exercée par la partie interne du disque sur l'anneau considéré, en fonction de  $\nu$ ,  $r$ ,  $A$  et  $\Sigma(r, t)$  en précisant sa direction et son sens.

A l'aide de ces deux expressions, un bilan non demandé permet d'établir la relation :

$$\frac{\partial \Sigma(r, t)}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma(r, t) \nu \sqrt{r}) \right)$$

Cette dernière équation permet de prévoir numériquement l'évolution d'un anneau de matière de masse  $m$  et de rayon initial  $r_0$ . On obtient les courbes radiales ci-après.

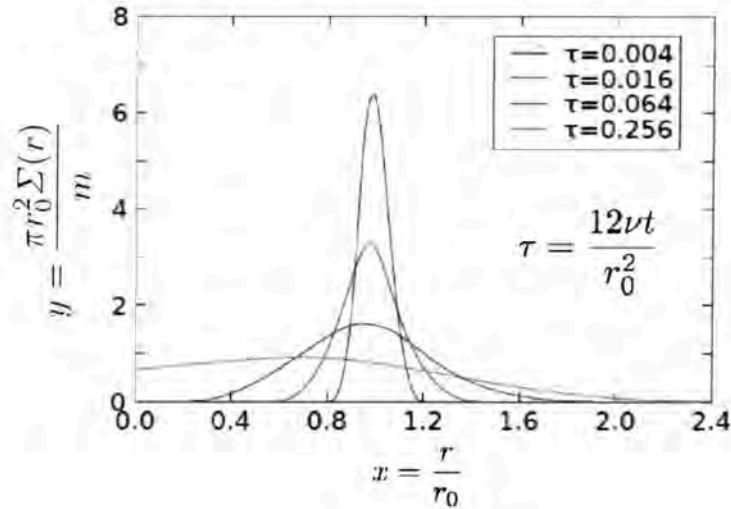


Figure 6 - Évolution visqueuse d'un anneau de matière de masse  $m$  et de rayon  $r_0$ . La densité de surface est adimensionnée et montrée comme une fonction de la longueur adimensionnée  $x = r/r_0$  et du temps adimensionné  $\tau = 12\nu t/r_0^2$ . D'après la Thèse de C. Cossou : *Effet de la structure du disque sur la formation et la migration des planètes. Other. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2013. French. <NNT : 2013BOR14910>. <tel-00949904>*

**32** - Commenter physiquement cette évolution temporelle. On suppose qu'après un certain temps, le disque atteint un régime permanent du point de vue de sa distribution de masse. On admet que la viscosité du disque est alors uniforme. A l'aide de l'équation précédente, montrer que dans cette hypothèse,  $\Sigma(r, t)$  est uniforme. Commenter en rapport avec la simulation précédente.

### 4.3 Bilan thermique, modèle du disque plat passif

La température du disque détermine, on l'a vu, son épaisseur locale notée  $H(r)$ . Elle est elle-même conditionnée par l'équilibre entre le refroidissement par rayonnement et l'échauffement du disque par le Soleil. Le modèle le plus simple consiste à considérer un disque fin pratiquement plat qui absorbe tout le rayonnement incident et le réémet localement comme un corps noir. On modélise le Soleil par une sphère de centre  $S$ , de rayon  $R_S$  de luminosité surfacique constante  $I_S$ . On considère un point  $M$  à la surface du plan du disque à une distance  $r$  du Soleil et un élément infinitésimal de surface du disque  $dS(M)$  centré sur  $M$ . On considère un élément infinitésimal à la surface du Soleil  $dS'(P)$ , centré sur un point courant noté  $P$ . On repère ce point  $P$  en coordonnées sphériques  $(\rho, \theta, \varphi)$  centrées sur  $M$ . On notera que ces coordonnées ne sont pas les mêmes que celles utilisées précédemment.

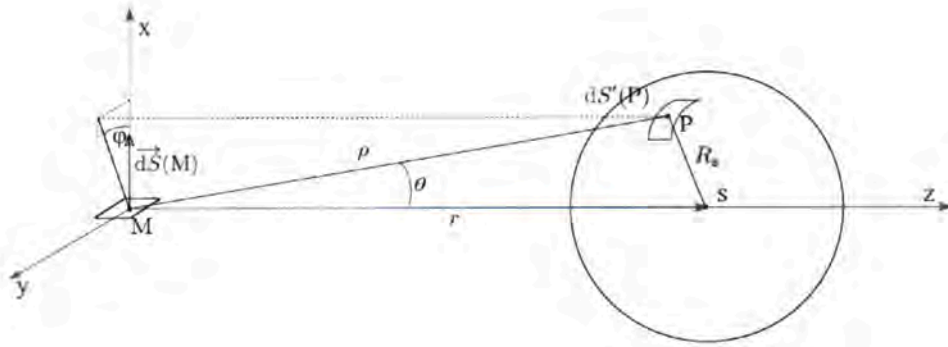


Figure 7 - Représentation des deux éléments de surface infinitésimaux  $dS$  et  $dS'$ .

Avec les notations précédentes, on peut montrer que le flux reçu par  $dS$  de la part de  $dS'(P)$  est :

$$dF = I_S \sin^2 \theta d\theta \cos \varphi d\varphi dS$$

**33** - On cherche à déterminer le flux total reçu par l'élément  $dS(M)$  de la part de toute la partie supérieure du Soleil. Préciser les bornes de l'intégrale pour la variable  $\varphi$  et pour la variable  $\theta$ . Pour cette dernière variable, exprimer  $\theta_{max}$  en fonction de  $R_S$  et  $r$  uniquement. En déduire que le flux total reçu par l'élément  $dS(M)$  de la part de la partie supérieure du Soleil est :

$$dF_{tot} = I_S \left[ \arcsin \left( \frac{R_S}{r} \right) - \left( \frac{R_S}{r} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{R_S}{r} \right)^2} \right] dS.$$

**34** - On admet que les échanges thermiques par rayonnement suivent la loi de Stefan. Faire un bilan énergétique pour l'élément de surface  $dS$  et en déduire la température locale du disque plat  $T(r)$ .

**35** - On se place assez loin de l'étoile, de manière à ce que  $\frac{R_S}{r} \ll 1$ . Montrer que l'expression de la température se simplifie et que  $T(r) \sim \kappa r^{-3/4}$  où  $\kappa$  est une constante.

**36** - En déduire le facteur d'échelle  $H(r)$ , introduit à la question **25**. Des simulations numériques fournissent la courbe  $H(r)$  tracée en Figure 8. Cette courbe est-elle cohérente avec l'expression précédente de  $H(r)$ ? Avec l'observation de disques légèrement évasés ?

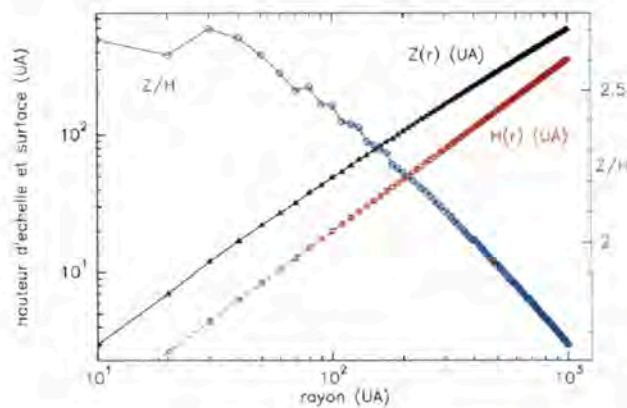


Figure 8 - Hauteur d'échelle  $H(r)$  en fonction du rayon (en rouge). On ne prendra pas en compte les deux autres courbes. D'après E. Chapillon. *Physico-chimie des disques protoplanétaires. Astrophysique [astro-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. Français. <tel-00549741>*

## 5 Absorption du rayonnement stellaire par le disque

Maintenant que la distribution de matière dans le disque est connue, on s'intéresse au phénomène d'absorption par le disque du rayonnement émis par l'étoile.

**37** - Rappeler les équations de Maxwell vérifiées par les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans le cas d'un milieu linéaire homogène non magnétique caractérisé par une polarisation volumique  $\vec{P}$ , sans charge et sans courant libre.

On admet que la polarisation volumique est proportionnelle au champ électrique  $\vec{E}$  et l'on pose :  $\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$ . On s'intéresse à la propagation d'une onde monochromatique de pulsation  $\omega$ , telle que la grandeur complexe associée est  $\vec{E} = \vec{E}_0(M) e^{-i\omega t}$  et  $\vec{B} = \vec{B}_0(M) e^{-i\omega t}$ .

**38** - Montrer que :  $\Delta \vec{E}_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r \vec{E}_0 = \vec{0}$  où l'on exprimera  $\varepsilon_r$  en fonction de  $\chi$ .

On examine le cas d'une onde plane progressive monochromatique telle que la grandeur complexe associée soit de la forme :  $\vec{E}_0(M) = \vec{E}_m e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ , avec  $\vec{r}$  le rayon vecteur et  $\vec{k}$  le vecteur d'onde.

**39** - En déduire la relation entre  $k$ ,  $\omega$ ,  $c$  et  $\varepsilon_r$ .

**40** - Dans le cas général,  $\chi$  est complexe et  $k$  l'est aussi *a priori*. On peut l'écrire sous la forme  $k = k' + ik''$ . À quels aspects du comportement de l'onde se rapportent respectivement  $k'$  et  $k''$  ?

On envisage une propagation dans une direction notée  $\vec{u}_z$ , selon les  $z$  croissants.

**41** - Expliciter la structure du champ électrique et faire apparaître l'indice de réfraction  $n$  du milieu en fonction de  $k'$ ,  $c$  et  $\omega$ , ainsi qu'un coefficient d'atténuation en amplitude, que l'on notera  $1/d$ . À quoi correspond physiquement la grandeur  $d$  ? En supposant que l'absorption du rayonnement de l'étoile par le disque peut être décrite par un modèle tel que celui-ci, que peut-on dire de la grandeur  $d$ , au vu de la photographie de disque présentée en début de partie ?

### Troisième partie

## Planètes : migration et résonances

Dans le disque protoplanétaire, des phénomènes de sédimentation et d'accrétion complexes peuvent conduire à la formation de planètes. On s'intéresse au phénomène de migration des planètes au cours de l'histoire du système solaire puis à un phénomène de résonance encore à l'oeuvre actuellement.

## 6 Interaction disque-planète

Au début de l'évolution du système solaire, les interactions gravitationnelles entre le disque primordial et les planètes ont conduit à des transferts de moment cinétique entre les planètes et le disque, transferts qui sont à l'origine, soit de la stabilisation des planètes - comme c'est le cas pour Saturne et Jupiter dans la simulation numérique suivante - soit de la migration de ces planètes vers l'intérieur ou l'extérieur du disque.

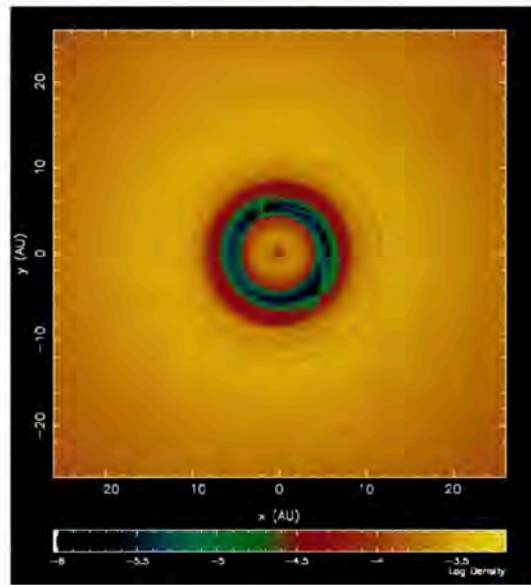


Figure 9 - Jupiter et Saturne dans un disque protoplanétaire. Simulation de la densité de matière. On distingue les sillons formés par les deux planètes dans le disque (anneaux verts et bleus), ainsi qu'un sillage (spirale jaune). D'après la thèse de A. Crida : Planetary migration in Solar System formation. Astrophysics [astro-ph]. Université Nice Sophia Antipolis, 2006. English. <tel-00330414>

## 6.1 Déviation d'un corps au voisinage d'une planète

Soit une particule-test de masse  $\delta m$ , repérée par le point  $M$ , arrivant de l'infini avec une vitesse relative de norme  $v$  et un paramètre d'impact  $b$  par rapport à une planète de masse  $m_P$ . On note  $\beta$  l'angle de déviation correspondant.

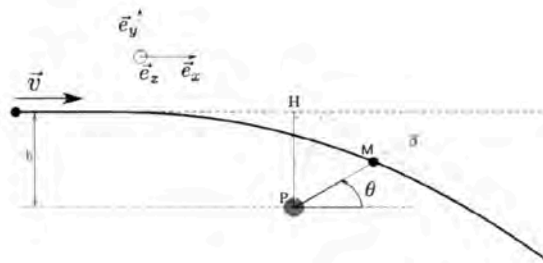


Figure 10 - Déviation d'une masse-test par une masse fixe et notations utilisées. D'après la thèse de A. Crida : Planetary migration in Solar System formation. Astrophysics [astro-ph]. Université Nice Sophia Antipolis, 2006. English. <tel-00330414>

Jusqu'à précision du contraire, on suppose que le référentiel lié à la planète est galiléen et on fait abstraction de l'attraction du Soleil. L'angle  $\theta$  utilisé dans cette partie est l'angle orienté  $(\vec{e}_x, \overrightarrow{PM})$ . Le mouvement de la masse-test étant plan, on repère la position de cette masse-test en coordonnées polaires, de coordonnées  $(r, \theta)$  centrées sur la planète. On a déjà montré que pour un mouvement dans un champ central, la grandeur  $C = r^2 \dot{\theta}$  est une constante du mouvement.

42 - Montrer que  $C = -bv$ .

43 - Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse-test  $\delta m$ . On note  $\vec{e}_y$  le vecteur unitaire fixe dans la direction perpendiculaire à la direction initiale de  $\vec{v}$ , comme on le voit

figure précédente. Projeter l'équation précédente sur ce vecteur et en déduire  $\frac{dv_y}{dt}$  en fonction de  $G$ ,  $m_P$ ,  $C$ ,  $\theta$  et  $\dot{\theta}$ .

44 - Montrer que la norme de la vitesse finale,  $v_f$ , est égale à celle de la vitesse initiale,  $v$ . Intégrer l'équation obtenue à la question précédente entre la situation initiale et la situation finale et en déduire une équation vérifiée par  $\beta$ ,  $G$ ,  $m_P$ ,  $b$  et  $v$ . Montrer que cette équation peut-être mise sous la forme :

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{Gm_P}{bv^2}$$

Vérifier la cohérence des dépendances de l'angle de déviation avec les divers paramètres.

## 6.2 Couple exercé par la masse-test sur la planète

La déviation de la masse-test par la planète s'accompagne d'un transfert de moment cinétique de la planète vers celle-ci. On cherche à présent à quantifier ce transfert. La planète est en fait mobile et orbite autour d'une étoile, à une distance  $r_P$  supposée constante pour l'instant. La masse test  $\delta m$  orbite initialement à une distance  $r$  de la même étoile, sur une orbite initialement circulaire, dans le "voisinage lointain" de la planète, de telle sorte que  $r = r_P + b$ . On admet que les mouvements de la planète et de la masse se font dans le même plan, qui est le plan moyen du disque. On notera  $\vec{e}_z$  le vecteur unitaire perpendiculaire à ce plan, toujours tel que  $\vec{e}_z = \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$ .

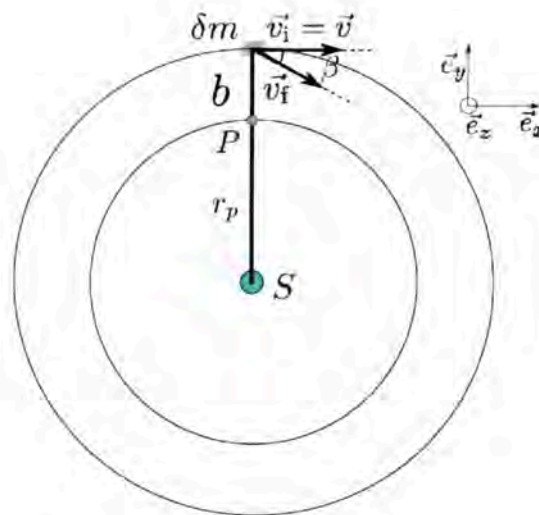


Figure 11 - Vitesses initiale et finale de la masse-test lors de son interaction avec la planète. On a représenté la planète et la masse  $\delta m$  avant et après le passage au voisinage de la planète. La position n'a que peu varié, puisque la masse  $\delta m$  reste dans le voisinage lointain de la planète. Par contre, la vitesse a tourné de  $\beta$  par rapport à la vitesse initiale, qui était orthoradiale. On a représenté ces vitesses dans le référentiel où la planète est fixe.

45 - Exprimer, dans le référentiel où la planète est fixe, la variation de moment cinétique  $\delta \vec{L}$  de  $\delta m$  par rapport à  $S$  en fonction de  $\delta m$ ,  $r$ ,  $v$  et  $\beta$ . Expliquer qualitativement pourquoi cette variation est la même dans le référentiel lié à  $S$ . Montrer que si l'on considère la déviation comme faible, cette variation est :

$$\delta \vec{L} \simeq \frac{2rG^2m_P^2}{b^2v^3} \delta m \vec{e}_z.$$

**46** - La planète et la masse  $\delta m$  évoluent globalement sur la même orbite de rayon  $r$  par rapport au Soleil ( $r = r_P + b \sim r_P$ ). On note  $\Omega$  la vitesse angulaire de  $\delta m$  et  $\Omega_P$  celle de la planète. Exprimer  $v$  en fonction de  $r$ ,  $\Omega$  et  $\Omega_P$ . En déduire  $\delta \vec{L}$  en fonction  $\delta m$ ,  $G$ ,  $m_P$ ,  $b$ ,  $r$ ,  $\Omega$ ,  $\Omega_P$  et  $\vec{e}_z$

**47** - Construire le temps  $\tau$  typique séparant deux rencontres entre la planète et la masse  $\delta m$  en fonction  $\Omega$  et  $\Omega_P$ . On note  $\vec{L}_P$  le moment cinétique de la planète par rapport à  $S$ . En déduire qu'une estimation de la variation de moment cinétique de la planète par unité de temps, est :

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} \simeq -\delta m \frac{G^2 m_P^2}{b^2 r^2 \pi (\Omega - \Omega_P)^2} \vec{e}_z .$$

Cette variation par unité de temps est le couple que semble exercer  $\delta m$  sur la planète.

**48** - Estimer  $\Omega - \Omega_P$  en fonction de  $b$  et  $\frac{d\Omega_P}{dr}$ . Pour une planète en rotation képlérienne autour du Soleil de masse  $M_S$ , montrer que  $\Omega - \Omega_P \sim \frac{-3\Omega_P}{2r} b$ .

En fait, la masse  $\delta m$  est la masse d'un morceau de disque, supposé plan et confondu avec le plan de la trajectoire de la planète. On admet que la masse du disque est uniformément répartie et on note  $\Sigma$  la masse par unité de surface du disque. On note  $\Delta$  la plus petite distance possible entre un morceau de disque et la planète. A partir des expressions précédentes, une sommation non demandée permet de montrer que le couple total exercé par le disque sur la planète se met sous la forme :

$$\Gamma_t \simeq -\xi \left( \frac{m_p}{M_S} \right)^2 \Sigma r_P^4 \frac{GM_S}{\Delta^3}$$

où  $\xi$  est une constante numérique de l'ordre de 1.

## 7 Migration d'une planète

On cherche maintenant à quantifier l'effet du couple  $\Gamma_t$  vu précédemment sur la trajectoire de la planète.

**49** - Exprimer le moment cinétique orbital d'une planète gravitant autour du Soleil, à une distance constante  $r_P$  de celui-ci, en fonction de  $r_P$ ,  $M_S$ ,  $m_p$  et  $G$ .

En fait, la planète migre et voit le rayon de sa trajectoire varier lentement à la vitesse  $\frac{dr_P}{dt}$ . On suppose que cette variation est suffisamment lente pour que l'on puisse assimiler le moment cinétique orbital de la planète à celui déterminé précédemment.

**50** - En déduire l'équation d'évolution de  $r_P$ . Soit une planète de rayon orbital initial  $r_0$ . Déterminer  $r_P(t)$  et en déduire le temps typique de migration  $\tau_m$  défini par le temps nécessaire pour voir diminuer son rayon d'un facteur 2. Estimer numériquement le temps de migration de Jupiter avec  $m_P \simeq 1,9 \cdot 10^{27}$  kg,  $r_0 \simeq 7,8 \cdot 10^{11}$  m,  $M_S = 2 \cdot 10^{30}$  kg,  $\Sigma \simeq 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$  et  $\Delta \simeq 10^9$  m. Vérifier que ce modèle simplifié donne un temps typique très différent de celui retenu usuellement pour les migrations dites de type I, de l'ordre du million d'années. Proposer une ou des améliorations à ce modèle.

## 8 Résonances dans le système solaire

Après la disparition du disque protoplanétaire, les interactions gravitationnelles entre les astres - planètes, astéroïdes et Soleil - façonnent la configuration du système solaire. De nombreux phénomènes de résonances peuvent apparaître du fait de ces interactions, qui conduisent à des configurations spécifiques. On étudie ici un type de résonance : la résonance orbite-orbite, qui permet par exemple d'expliquer l'existence des lacunes de Kirkwood dans la ceinture d'astéroïdes.

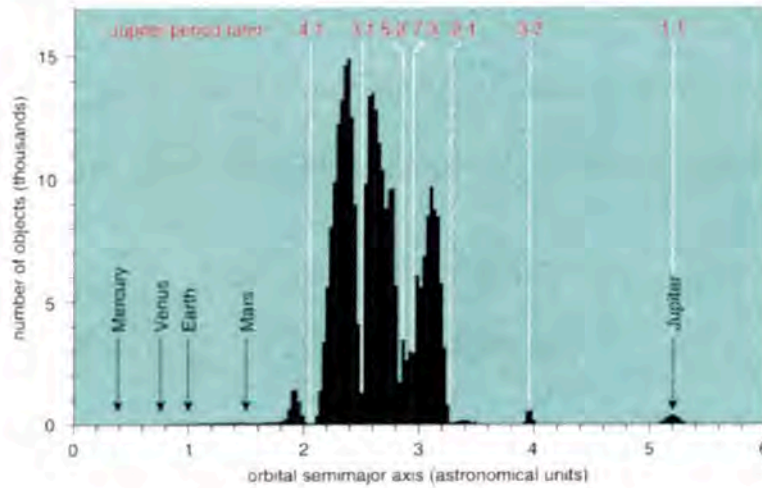


Figure 12 - Nombre d'objets en fonction de la distance au Soleil. D'après Gareth Williams/Minor Planet Center.

On se place à nouveau dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. Soient le Soleil  $S$  de masse  $M_S$  et Jupiter de masse  $M_J$  en orbite supposée circulaire uniforme de rayon  $r_J$  autour du Soleil, à la vitesse angulaire de rotation képlérienne  $\Omega_J = \Omega(r_J)$ . On suppose que cette orbite n'est pas perturbée par les autres corps du système solaire. On notera  $\vec{r}_J = \vec{S}J$  le vecteur position de Jupiter. On s'intéresse au mouvement d'une masse  $m$  dans le champ de gravité créé par le Soleil et par Jupiter. On note  $\vec{r}_m$  le vecteur position de  $m$  dans son mouvement circulaire uniforme non-perturbé par Jupiter (c'est-à-dire en faisant abstraction du champ de Jupiter),  $r_m$  le rayon correspondant et  $\Omega_m = \Omega(r_m)$  la vitesse angulaire képlérienne correspondante. On note  $\vec{r}$  le vecteur position réel de  $m$  par rapport au Soleil. La perturbation de la trajectoire de  $m$  par Jupiter est caractérisée par le fait que  $\vec{r}$  est différent de  $\vec{r}_m$ .

51 - Montrer que le mouvement de  $m$  est régi par l'équation :

$$\ddot{\vec{r}} + GM_S \frac{\vec{r}}{r^3} = -GM_J \frac{\vec{r} - \vec{r}_J}{\|\vec{r} - \vec{r}_J\|^3}$$

Le second membre de cette équation est un terme perturbatif à une orbite képlérienne classique. S'il est suffisamment faible, on peut utiliser une méthode perturbative pour l'estimer. La position non-perturbée de  $m$  permet de fonder une base polaire  $(\vec{e}_{r_m}, \vec{e}_{\theta_m})$  où  $\vec{e}_{r_m}$  est le vecteur unitaire dans la direction de  $\vec{r}_m$  et où  $\vec{e}_{\theta_m}$  est perpendiculaire à  $\vec{e}_{r_m}$ . Dans cette base, le mouvement non perturbé de  $m$  est donc repéré par  $\vec{r}_m = r_m \vec{e}_{r_m}$ . On définit les écarts  $x$  et  $y$  de  $m$  par rapport à sa position sans perturbation,  $r_m$  et  $\theta_m = \Omega_m t$ . On se place dans une configuration où  $x, y \ll r_m$ , figurée ci-après.

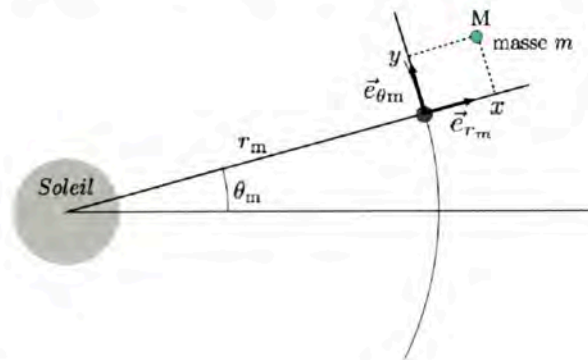


Figure 13 - Notations utilisées pour la méthode perturbative



52 - Exprimer  $\vec{r}$  en fonction de  $r_m$ ,  $x$  et  $y$  dans la base  $(\vec{e}_{r_m}, \vec{e}_{\theta_m})$ . En déduire  $\dot{\vec{r}}$  puis  $\ddot{\vec{r}}$  dans cette même base.

53 - Exprimer de même la grandeur  $GM_S \frac{\vec{r}}{r^3}$  toujours dans la base  $(\vec{e}_{r_m}, \vec{e}_{\theta_m})$ . Simplifier cette grandeur à l'ordre 1 en  $x$  et  $y$ .

54 - En déduire que le terme de gauche de l'équation du mouvement peut être approché à l'ordre 1 en  $x$  et  $y$  par :

$$\ddot{x} - 2\Omega_m \dot{y} - 3\Omega_m^2 x \text{ selon } \vec{e}_{r_m}$$

$$\ddot{y} + 2\Omega_m \dot{x} \text{ selon } \vec{e}_{\theta_m}$$

On définit la pulsation de battement :  $\Omega = \Omega_m - \Omega_J$ .

55 - Expliquer qualitativement le principe d'une méthode perturbative. Exprimer, dans le repère polaire précédent, les composantes de  $\vec{r}_J(t)$  en fonction de  $r_J$  et  $\Omega$ . En déduire l'estimation perturbative des composantes polaires de  $\vec{r}(t) - \vec{r}_J(t)$  en fonction de  $r_m$ ,  $r_J$  et  $\Omega$ .

56 - Déduire de ce qui précède que les expressions des composantes de la force massique  $\vec{f} = -GM_J \frac{\vec{r} - \vec{r}_J}{\|\vec{r} - \vec{r}_J\|^3}$ , peuvent être estimée par :

$$f_x = \alpha \frac{\cos \Omega t - \beta}{(1 - 2\beta \cos \Omega t + \beta^2)^{3/2}}$$

et

$$f_y = \frac{-\alpha \sin \Omega t}{(1 - 2\beta \cos \Omega t + \beta^2)^{3/2}}$$

où l'on exprimera  $\beta$  et  $\alpha$  en fonction de  $G$ ,  $M_J$ ,  $r_J$  et  $r_m$ .

A l'aide de tout ce qui précède, on établit un système d'équations vérifié par  $x(t)$  et  $y(t)$ . On s'intéresse désormais à la solution particulière de ce système d'équations différentielles. Les fonctions  $f_x$  et  $f_y$  étant périodiques, on utilise leur développement en série de Fourier et on écrit les grandeurs complexes associées sous la forme  $\underline{f}_x = \sum_n \underline{f}_{x,n} \exp(in\Omega t)$  et  $\underline{f}_y = \sum_n \underline{f}_{y,n} \exp(in\Omega t)$ . On s'intéresse à une excitation correspondant à la  $n^{\text{ème}}$  harmonique du développement :  $\underline{f}_x = \underline{f}_{x,n} \exp(in\Omega t)$  et  $\underline{f}_y = \underline{f}_{y,n} \exp(in\Omega t)$ . On cherche une solution de la forme  $\underline{x}_n = \underline{x}_{0,n} \exp(in\Omega t)$  et  $\underline{y}_n = \underline{y}_{0,n} \exp(in\Omega t)$ .

57 - Déterminer à l'aide de ce qui précède le système d'équations algébriques vérifiées par  $\underline{x}_n$  et  $\underline{y}_n$ .

58 - Montrer que ces deux équations impliquent que :

$$\underline{x}_n = \frac{n^2 \Omega^2 \underline{f}_{x,n} - 2i\Omega_m n \underline{f}_{y,n}}{[\Omega_m^2 n^2 \Omega^2 - n^4 \Omega^4]} \exp(in\Omega t)$$

Commenter la Figure 12. à la lumière de ce dernier résultat et expliquer qualitativement le phénomène, à l'aide de schémas.

- Fin de l'énoncé -