

# Bulletin de l'Union des Physiciens

Association de professeurs de Physique et de Chimie

---

---

## Agrégation

---

OPTION PHYSIQUE

SESSION DE 1979

---

Epreuve C

PROBLEME DE PHYSIQUE

(Durée : 6 heures)

---

*Il n'y a pas à distribuer de papier millimétré.*

*Les trois parties peuvent être abordées indépendamment.*

Ce problème étudie des exemples de phénomènes de transport dans le formalisme de l'équation de BOLTZMANN que l'on va préciser dans cette introduction.

On donne une population d'un très grand nombre de particules identiques de masse  $m$ . La position et la vitesse d'une particule dans le référentiel (L) du laboratoire, supposé inertiel, sont respectivement notées  $\vec{r} = \vec{OM}$  et  $\vec{v}$ . La population est décrite en chaque point M et à chaque instant  $t$  par la fonction de distribution  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  telle que  $\iiint f d^3 v = n$  où  $n$  est le nombre de particules par unité de volume en M et à l'instant  $t$  et où l'intégration porte sur l'espace des vitesses ( $d^3 v$  est une notation condensée pour l'élément de volume de cet espace).

A l'équilibre, la population étant homogène et à température T uniforme, la fonction  $f$  est égale à une fonction  $f_0$ .

En statistique de MAXWELL-BOLTZMANN, on prendra :

$$f_0 = n \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m v^2}{2 k_B T}}$$

où  $k_B$  est la constante de BOLTZMANN (distribution maxwellienne).

En statistique de FERMI-DIRAC :

$$f_0 = 2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu(T)}{k_B T}} + 1}$$

où  $\varepsilon = \frac{1}{2} m v^2$  et où  $\mu(T)$  est le potentiel chimique ( $\mu$  à 0 K est le niveau de FERMI  $E_F$ ).

A partir d'une situation d'équilibre décrite par la fonction  $f_0$ , une petite perturbation quelconque modifie la distribution décrite par  $f_0$ , de sorte que la nouvelle fonction de distribution est :

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f_0 + \delta f(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

où  $\delta f$  est la modification apportée par la perturbation sur la distribution d'équilibre  $f_0$ .

La fonction  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  satisfait à l'équation de BOLTZMANN qui, dans l'approximation dite « du temps de relaxation », s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}} f + \vec{\gamma} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{v}} f = -\frac{f - f_0}{\tau}$$

où  $\vec{\gamma}$  est l'accélération d'une particule et où  $\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{r}} f$  et  $\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{v}} f$  correspondent respectivement à des dérivations par rapport aux coordonnées de  $\vec{r}$  et aux coordonnées de  $\vec{v}$ . Le temps de relaxation  $\tau$  dépend, en général, de la vitesse  $\vec{v}$ .

L'équation de BOLTZMANN sert de base à chacune des trois parties du problème.

Pour les calculs d'intégration, on utilisera les résultats suivants :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \left( \frac{\pi}{a^{2n+1}} \right)^{1/2}$$

$$\text{et } I_0 = \left( \frac{\pi}{a} \right)^{1/2}$$

## I. OSCILLATIONS DE PLASMA

On considère, dans cette partie, un plasma homogène et à température uniforme  $T$  constitué d'une population d'électrons (masse  $m$ , charge  $-e$ ), le nombre d'électrons par unité de volume étant  $n$ , et d'une population ionique de même densité particulaire, le plasma étant ainsi neutre; la masse des ions est très supérieure à celle des électrons. La fonction de distribution  $f_0$  des électrons à l'équilibre est supposée maxwellienne, de même que celle des ions.

On étudie la perturbation apportée sur la distribution d'équilibre des électrons par un champ électrique  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$  où  $\vec{E}_0$  est un vecteur indépendant de  $\vec{r}$  et  $t$  supposé en outre parallèle au vecteur  $\vec{k} = k\vec{u}_x$  ( $\vec{u}_x$  étant le vecteur unitaire de l'axe  $Ox$ ). Le champ  $\vec{E}$  est de la sorte longitudinal. La température du plasma reste uniforme et le plasma reste homogène, mais la fonction de distribution  $f_0$  des électrons est perturbée par le champ  $\vec{E}$ , de sorte que la nouvelle fonction de distribution est  $f = f_0 + \delta f$  où  $\delta f$  est considéré comme petit devant  $f_0$ .

I.1. a) Ecrire à partir de l'équation de BOLTZMANN, l'équation satisfaite par  $\delta f$ , l'accélération  $\vec{\gamma}$  étant due au seul champ électrique  $\vec{E}$ . A quelle condition peut-on négliger le terme de relaxation  $\frac{\delta f}{\tau}$ ? On supposera dans toute cette partie I que cette approximation supplémentaire est valable.

b) On pose  $\delta f = F(\vec{v}) e^{i(kx-\omega t)}$ . Etablir la relation entre  $F(\vec{v})$  et  $\vec{E}_0$ . On exprimera  $\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{v}} f_0$  en fonction de  $f_0$  et on négligera ici le terme en  $\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{v}} \delta f$  en expliquant cette approximation.

c) Montrer que la densité volumique de charge  $q$  du plasma est égale à  $\iiint -e \delta f d^3 v$ .

On pose  $q = -n_1 e e^{i(kx-\omega t)}$ . Etablir en utilisant une des équations de MAXWELL, la relation entre  $\vec{k}$ ,  $n_1$  et  $\vec{E}_0$  ( $\vec{E}_0$  est parallèle à  $\vec{k}$ ).

On tiendra compte du fait que la densité volumique de charge des ions reste pratiquement constante (expliquer rapidement pourquoi).

I.2. a) Exprimer la relation entre  $F(\vec{v})$ ,  $k v_x$ ,  $n_1$ ,  $\omega$ ,  $T$ ,  $f_0$  et les constantes  $e$ ,  $k_B$  et  $\epsilon_0$ .

b) En déduire la relation de dispersion liant  $\omega$  et  $k$ , soit :

$$n k_B T k^2 = m \omega_p^2 \iiint \frac{f_0 k v_x}{\omega - k v_x} d^3 v$$

où  $\omega_p^2 = \frac{n e^2}{\epsilon_0 m}$ .

I.3. On suppose que la vitesse de phase  $v_\phi$  du champ  $\vec{E}$  est très supérieure à la vitesse moyenne des électrons. De la sorte, on peut négliger dans une première approximation les électrons dont la vitesse

est supérieure ou égale à  $v_\phi$  et considérer en outre le rapport  $\frac{v_x}{v_\phi}$  comme petit.

a) Montrer que dans cette approximation, la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 u^2$$

où  $u$  est la vitesse quadratique moyenne des électrons.

b) Donner la relation entre la vitesse de phase, la vitesse de groupe et  $u$ . Interpréter le résultat.

c) On donne  $n = 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  et l'énergie cinétique moyenne d'agitation thermique d'un électron est 3 eV. Calculer numériquement  $\omega_p$  et  $u$ . On prendra  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ .

On impose la condition  $\frac{v_\phi}{u} > 10$ . A quel domaine appartient  $\omega$

dans ce cas ? Calculer numériquement la longueur d'onde minimale  $\lambda_m$  et la vitesse de groupe correspondante.

Dans les conditions décrites ci-dessus,  $\tau \simeq 10^{-7} \text{ s}$  ; est-il légitime de négliger le terme de relaxation ?

d) Montrer que la densité de courant électronique  $\vec{j}$  dans le plasma est de la forme  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  avec  $\sigma = i \epsilon_0 \omega$ . Calculer numériquement l'ordre de grandeur du module de  $\sigma$ ,  $\omega$  appartenant au domaine défini en I.3. c.

## II. CONDUCTIBILITE ELECTRIQUE DES METAUX. EFFET DE PEAU ANORMAL. MAGNETORESISTANCE

Dans cette partie, on étudie la conductibilité électrique des métaux non ferromagnétiques dans différentes conditions.

II.1. a) On considère un métal homogène à température uniforme  $T$  dont les électrons de conduction (masse  $m$ , charge  $-e$ ) sont soumis à un champ électrique uniforme stationnaire  $\vec{E}$ . La fonction de dis-

tribution  $f_0$  étant supposée maxwellienne, écrire l'équation satisfaite par  $\delta f$  supposée stationnaire en considérant l'action de  $\vec{E}$  comme une perturbation. On exprimera  $\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{v}} f_0$  en fonction de  $f_0$  et on négligera ici le terme en  $\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{v}} \delta f$  en expliquant la raison de cette approximation.

b) Calculer la densité de courant  $\vec{j}$  des électrons en fonction de  $\vec{E}$ . On mettra  $\vec{j}$  sous la forme  $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}$  et on supposera  $\tau$  indépendant de la vitesse  $\vec{v}$  des électrons. On exprimera  $\sigma_0$  en fonction de  $n$ ,  $\tau$ ,  $e$ ,  $m$ .

c) Pour le cuivre à la température ordinaire  $T = 300$  K, on a  $\sigma_0 = 5 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . On suppose qu'il y a un électron de conduction par atome. La masse volumique du cuivre est  $\mu_v = 8,93 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  et sa masse molaire atomique  $A = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . On donne la constante d'Avogadro  $\mathcal{N} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . Calculer numériquement  $\tau$ . Donner dans ce modèle une estimation numérique du libre parcours moyen des électrons du métal à cette température. On donne  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  et  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ .

II.2. a) On suppose maintenant que le champ électrique  $\vec{E}$  est toujours uniforme mais dépend du temps. Ecrire l'équation vérifiée par  $\delta f$  en supposant toujours  $f_0$  maxwellienne.

b) En prenant  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$  où  $\vec{E}_0$  est uniforme et indépendant de  $t$ , trouver la solution particulière telle que  $\delta f = F e^{-i\omega t}$  et donner l'expression de  $F$ . En déduire que  $\vec{j} = \sigma_0^* \vec{E}$  et calculer le module de  $\sigma_0^*$  en fonction de  $\sigma_0$ ,  $\omega$  et  $\tau$ .

II.3. On revient maintenant au cas où  $\vec{E}$  est uniforme et indépendant de  $t$ , mais on suppose que  $f_0$  est une distribution de FERMIDIRAC (voir introduction).

$$\text{On posera : } w = \frac{\varepsilon - \mu(T)}{k_B T}$$

a) Etablir à partir de l'équation de BOLTZMANN, l'équation satisfaite par  $\delta f$  en négligeant toujours le terme en  $\overrightarrow{\text{grad}}_{\vec{v}} \delta f$ . On fera

$$\text{intervenir la dérivée } \frac{dg_0}{dw} \text{ où } g_0 = \frac{1}{e^w + 1}$$

b) On suppose que  $\tau$  dépend de façon isotrope de la vitesse  $\vec{v}$ .

En outre, on se place dans le cas où  $k_B T \ll \mu(T)$ , de sorte que

$$-\frac{1}{k_B T} \frac{d g_0}{d v} \text{ peut être approximé par la « fonction » de DIRAC } \delta(\varepsilon - \mu).$$

Expliquer rapidement ce dernier résultat. Calculer la densité de courant  $\vec{j}$  et en déduire l'expression de la conductivité électrique  $\sigma_0$  en fonction de  $e$ ,  $m$ ,  $h$ ,  $\mu(T)$  et de la valeur  $\tau_F$  de  $\tau$  pour  $v = v_F$

$$\text{tel que } \mu = \frac{1}{2} m v_F^2.$$

c) Pour des températures moyennes, on peut assimiler  $\mu(T)$  au niveau de FERMÍ,  $E_F$  valeur de  $\mu$  à 0 K. Calculer  $E_F$  en fonction de  $h$ ,  $m$  et  $n$  nombre d'électrons de conduction par unité de volume. On rappelle que dans l'espace des quantités de mouvement, pour un cristal de volume  $V$ , le nombre d'états par unité de volume en

tenant compte du spin est égal à  $\frac{2V}{h^3}$ . En déduire  $\sigma_0$  en fonction de

$n$ ,  $m$ ,  $e$  et  $\tau_F$  et comparer ce résultat avec celui obtenu pour  $f_0$  maxwellienne (voir II.1. b).

d) On donne pour le cuivre  $n = 8,5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ . Calculer  $E_F$  et le rapport  $\frac{E_F}{k_B T}$ . On prendra  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ .

Pour  $T = 300 \text{ K}$ , on a pour le cuivre  $\sigma_0 = 5 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ . Calculer numériquement le libre parcours moyen  $\Lambda_F$  des électrons qui interviennent dans la conductibilité électrique et comparer au résultat du II.1. c).

II.4. On suppose maintenant dans le métal (homogène à température uniforme  $T$ ) un champ électrique  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ , l'axe  $Oz$  étant perpendiculaire à la surface (plane) du métal et dirigé vers l'intérieur ;  $\vec{E}_0$  est un vecteur uniforme et indépendant du temps, parallèle à  $Ox$  (perpendiculaire à  $Oz$ ). La fonction  $f_0$  est une distribution de FERMÍ-DIRAC et on recherche des solutions de l'équation de BOLTZMANN telles que  $\delta f = F e^{i(kz - \omega t)}$ .

a) En supposant que  $k_B T \ll \mu(T)$  et que  $\tau$  est une fonction isotrope de  $\vec{v}$ , écrire l'expression de  $\delta f$  en fonction de  $\delta(\varepsilon - \mu)$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{k} = k \vec{u}_z$ ,  $\omega$ ,  $\tau$ ,  $m$  et  $h$ .

b) En déduire l'expression de la conductivité électrique  $\sigma(\omega, k)$ . On écrira  $\sigma(\omega, k) = \sigma_0 \Phi(\omega, k)$  où  $\sigma_0$  est la conductivité calculée en II.3. c) et  $\Phi(\omega, k)$  une fonction qu'on laissera sous la forme d'une intégrale en  $\vartheta$ ,  $\vartheta$  étant l'angle entre  $\vec{u}_z$  et  $\vec{v}$ .

II.5. a) Rappeler qualitativement en quoi consiste l'effet de peau dans un métal.

b) On considère un métal de conductivité  $\sigma(\omega, k)$ , c'est-à-dire dans les conditions de la question II.4. Ecrire l'équation de propagation dans le métal du champ électrique  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ .

c) En supposant que  $\frac{\mu_0 |\sigma| c^2}{\omega} \gg 1$  (on justifiera cette hypothèse), montrer que  $k \simeq \frac{1}{\delta_p} (1 + i)$  et calculer  $\delta_p$  en fonction de  $\mu_0, \sigma, \omega$  (on rappelle que  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ ).

d) En utilisant cette expression de  $k$ , donner sous forme d'une intégrale portant sur la variable  $\phi$  l'expression  $\Phi(\omega, k)$  en fonction de  $\omega, \tau_F, \delta_p$  et du libre parcours moyen  $\Lambda_F$  des électrons.

II.6. a) A quelles conditions sur  $\tau_F$  et  $\frac{\Lambda_F}{|\delta_p|}$  retrouve-t-on la conductivité  $\sigma_0$ ? Interpréter.

b) On suppose  $\Lambda_F \ll |\delta_p|$  mais pas nécessairement  $\tau_F \ll \frac{1}{\omega}$ . En déduire dans ce cas l'expression de  $\sigma$  et retrouver le résultat obtenu en II.2. b).

II.7. a) On suppose  $\tau_F \ll \frac{1}{\omega}$  mais au contraire  $\Lambda_F \gg |\delta_p|$ .

On donne :

$$\int \frac{(1-u^2) du}{1+au} = \frac{1}{a} \text{Log}(1+au) - \dots$$

$$\dots - \frac{1}{a^3} \left[ \frac{1}{2} (1+au)^2 - 2(1+au) + \text{Log}(1+au) \right] + C.$$

Exprimer  $\sigma$  en fonction de  $\sigma_0, \delta_p$  et  $\Lambda_F$ . Calculer  $\delta_p$  en fonction de  $\mu_0, n, e, m, \omega$  et  $v_F$  vitesse des électrons qui ont l'énergie  $\mu$ . La conductivité  $\sigma$  dépend-elle du libre parcours moyen des électrons?

Quelle est la signification physique de  $\delta_p$ ?

b) Pour le cuivre, on donne  $n = 8,5 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$  et  $E_F = 7 \text{ eV}$ . La température est basse et telle que  $\sigma_0 = 5 \cdot 10^{10} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . On prend

$\omega = 10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Calculer  $\delta_p, \Lambda_F, \frac{\delta_p}{\Lambda_F}$  puis  $\sigma$  et conclure. On pourra

utiliser les résultats numériques du II.3. d). Est-il légitime de négliger  $\omega \tau_F$ ?

II.8. On revient au cas où  $\vec{E}$  est un champ électrique uniforme indépendant du temps ou pour lequel on peut négliger les variations spatiales et temporelles. Le métal homogène est toujours supposé à température  $T$  uniforme. On applique au métal supposé non ferro-

magnétique un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et indépendant du temps.

a) En supposant la distribution  $f_0$  maxwellienne, écrire l'équation satisfaite par  $\delta f$ .

b) On suppose  $\vec{B}$  parallèle à Oz. En considérant  $\tau$  indépendant de la vitesse des électrons, montrer en utilisant l'expression de  $\delta f$  que les composantes  $j_x$  et  $j_y$  de la densité de courant satisfont aux relations :

$$j_x = \sigma_0 E_x - \tau \omega_C j_y$$

$$j_y = \sigma_0 E_y + \tau \omega_C j_x$$

et donner les expressions de  $\sigma_0$  et de  $\omega_C$  (on effectuera des intégrations par parties).

En déduire l'expression vectorielle de  $\vec{j}_\perp$ , densité de courant perpendiculaire à  $\vec{B}$  en fonction de  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\sigma_0$ ,  $\tau$  et  $\omega_C$ .

c) En quoi consiste le phénomène de magnétorésistance ? A partir de quelles valeurs de  $\vec{B}$  intervient-il ? Interpréter physiquement ce résultat.

d) On utilise un long ruban métallique dont le plan est perpendiculaire à  $\vec{B}$  et qui est allongé suivant Ox. Il est parcouru par un courant permanent de densité uniforme  $\vec{j} = j_x \vec{u}_x$ . Calculer la constante de HALL  $R_H = \frac{E_y}{j_x B}$ . Donner la relation entre  $j_x$  et  $E_x$  et en

déduire que le phénomène de magnétorésistance n'intervient pas. L'expérience ne vérifie en général pas ce dernier résultat. A quoi attribuez-vous le désaccord ?

On donne  $a = 0,5$  cm,  $b = 0,1$  mm (fig. 1),  $n = 8,5 \cdot 10^{22}$  cm<sup>-3</sup>; l'intensité dans le ruban est  $i = 0,5$  A et  $B = 0,2$  T. Calculer la différence de potentiel de HALL.

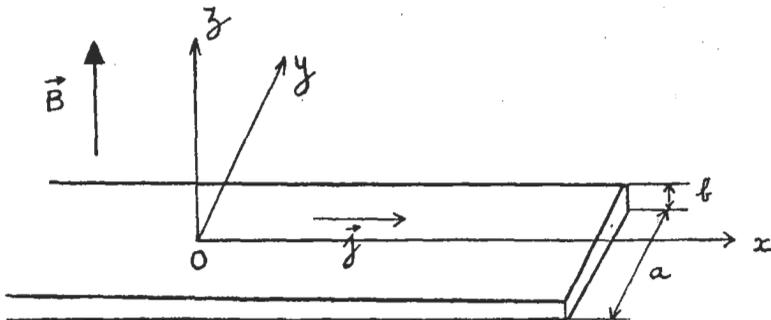


Fig. 1

## III. EFFETS THERMOELECTRIQUES

III.1. On considère un métal homogène où il existe un champ électrique  $\vec{E}$  ainsi qu'un gradient de température supposés uniformes et stationnaires.

On prend pour  $f_0$  une distribution de FERMÍ-DIRAC et on suppose que le temps de relaxation  $\tau$  dépend de la vitesse  $\vec{v}$  des électrons de façon isotrope. Outre le vecteur densité de courant électrique  $\vec{j}$ , on définit le vecteur densité de courant d'énergie :

$$\vec{j}_e = \iiint \frac{1}{2} m v^2 f \vec{v} d^3 v$$

et le vecteur densité de courant thermique :

$$\vec{j}_Q = \iiint \left( \frac{1}{2} m v^2 - \mu \right) f \vec{v} d^3 v$$

où  $\mu(T)$  est le potentiel chimique. La densité de courant thermique  $\vec{j}_Q$  permet de calculer la variation d'entropie d'origine électronique par unité de volume.

a) Démontrer que  $\vec{j}_Q = \vec{j} + \frac{\mu}{e} \vec{j}$  ( $-e$  est la charge de l'électron);

b) Calculer  $\delta f$  créé par le champ  $\vec{E}$  et le gradient de température.

On fera intervenir la dérivée  $\frac{df_0}{dw}$  avec  $w = \frac{\varepsilon - \mu(T)}{k_B T}$  et on gardera cette dérivée dans les équations sans l'explicitier ni l'approximer. On négligera les termes en  $\overrightarrow{\text{grad}}_r \delta f$  et  $\overrightarrow{\text{grad}}_v \delta f$  en justifiant cette approximation.

c) Exprimer  $\vec{j}$  et  $\vec{j}_Q$  en fonction de  $\vec{E}$  et de  $\overrightarrow{\text{grad}} T$ . On est ainsi amené à écrire :

$$\vec{j} = L_{11} \vec{E} + L_{12} \overrightarrow{\text{grad}} T$$

$$\vec{j}_Q = L_{21} \vec{E} + L_{22} \overrightarrow{\text{grad}} T$$

On pose :

$$H_n = - \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty v^{2n} \tau(v) \frac{df_0}{dw} dv.$$

Exprimer les coefficients  $L_{ij}$  en fonction de  $e$ ,  $m$ ,  $\mu$ ,  $\frac{d\mu}{dT}$ ,  $k_B$ ,  $T$  et des intégrales de type  $H_n$ .

III.2. a) En l'absence de courant électrique, on introduit le coefficient de conductibilité thermique électronique  $K$ , tel que

$\vec{j}_Q = -K \overrightarrow{\text{grad}} T$ . Exprimer  $K$  en fonction des coefficients  $L_{ij}$ .

b) Montrer que si l'on suppose  $\frac{df_0}{dw}$  proportionnel à la « fonction » de DIRAC  $\delta(\varepsilon - \mu)$  (comme il a été fait en première approximation dans la question II.3. b) lorsque  $k_B T \ll \mu$ ), on trouve  $K = 0$ . Cette approximation n'est donc pas suffisante.

c) Etablir que 
$$K = -\frac{m^2}{4 k_B T^2} \frac{H_3^2 - H_2 H_4}{H_2}$$

III.3. a) On définit les coefficients  $\Omega_{ij}$  d'ONSAGER par :

$$\begin{aligned}\vec{j} &= \Omega_{11} \vec{X}_1 + \Omega_{12} \vec{X}_2 \\ \vec{j}_Q &= \Omega_{21} \vec{X}_1 + \Omega_{22} \vec{X}_2\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\vec{X}_1 &= \frac{\vec{E}}{T} + \frac{\overrightarrow{\text{grad } T}}{e} \frac{1}{T} \frac{d\mu}{dT} \\ \vec{X}_2 &= -\frac{1}{T^2} \overrightarrow{\text{grad } T}.\end{aligned}$$

Calculer les coefficients  $\Omega_{ij}$  en fonction de  $e$ ,  $m$ ,  $\mu$ ,  $\frac{d\mu}{dT}$ ,  $T$  et des intégrales  $H_n$  et vérifier la relation de réciprocité d'ONSAGER  $\Omega_{12} = \Omega_{21}$ .

b) On a approximativement pour l'expression du potentiel chimique en fonction de la température :

$$\mu(T) \simeq E_F - \frac{\pi^2}{12} \frac{k_B^2 T^2}{E_F}.$$

On suppose que  $\overrightarrow{\text{grad } T}$  est réduit à une seule composante  $\frac{dT}{dx}$ .

Calculer en fonction de  $\frac{dT}{dx}$  le terme homogène à un champ électrique introduit dans  $X_1$  par le terme dépendant de  $\mu$ . Pour le cuivre  $E_F = 7$  eV. Peut-on en général négliger ce terme ?

III.4. a) Montrer que la variation locale d'énergie par unité de volume et par unité de temps dans le conducteur a pour expression :

$$\frac{du}{dt} = -\text{div } \vec{j}_\varepsilon + \vec{E} \cdot \vec{j}.$$

b) Montrer que la variation locale d'entropie par unité de volume et par unité de temps dans le conducteur vaut :

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{T} \text{div } \vec{j}_Q + \vec{j} \cdot \vec{X}_1$$

où  $\vec{X}_1$  est défini à la question III.3. a), cette relation étant valable même si on ne suppose pas la stationnarité du courant électrique.

En supposant la stationnarité du courant électrique et  $\vec{\text{grad}} T$  uniforme, montrer que :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{TL_{11}} \vec{j}^2 + \frac{1}{T} \frac{dK}{dT} (\vec{\text{grad}} T)^2 - \alpha \vec{j} \cdot \vec{\text{grad}} T$$

où K est le coefficient de conductibilité thermique (voir III.2. a) et  $\alpha$  un coefficient qu'on calculera en fonction de :

$$\frac{d}{dT} \left( \frac{\mu}{T} \right), \quad \frac{d}{dT} \left( \frac{1}{T} \frac{H_3}{H_2} \right), \quad m, e.$$

c) On définit la densité de courant d'entropie  $\vec{j}_s$  par  $\vec{j}_Q = T \vec{j}_s$  en un point où la température est T. Etablir que :

$$\text{div} \vec{j}_s + \frac{ds}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{X}_1 + \vec{j}_Q \cdot \vec{X}_2 > 0$$

et discuter la signification physique de cette relation. On établira en particulier que le signe du second membre est positif.

III.5. On considère maintenant un contact entre deux conducteurs cylindriques d'axe Ox constitués par des métaux différents. On admet que les propriétés de cette jonction varient en fait de façon continue entre deux sections d'abscisses  $x_1$  et  $x_2$  où on passe progressivement du métal 1 au métal 2. La température est supposée uniforme dans la jonction et il règne dans cette zone de contact un champ élec-

trique uniforme stationnaire  $\vec{E}$  parallèle à Ox. La fonction  $f_0$  est toujours supposée être une distribution de FERMI-DIRAC.

a) Etablir l'équation vérifiée par  $\delta f$ . On fera apparaître  $\frac{df_0}{dw}$

avec  $w = \frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}$  et on notera que  $\mu$  dépend de  $x$ .

b) Exprimer  $\vec{j}$  et  $\vec{j}_Q$  en fonction de  $\vec{E}$  et de  $\vec{\text{grad}} \mu$ . On fera intervenir les coefficients  $L_{ij}$  définis en III.1. c). Montrer que  $\vec{j}_Q = \Pi \vec{j}$  où  $\Pi$  est un coefficient que l'on exprimera en fonction  $L_{11}$  et  $L_{21}$ . Quel phénomène décrit cette dernière relation ?

c) Vérifier que :  $\alpha = \frac{d}{dT} \left( \frac{\Pi}{T} \right)$  où  $\alpha$  est le coefficient

défini en III.4. b).

### SOLUTION

#### I. OSCILLATIONS DE PLASMA

I.1. a) L'équation de BOLTZMANN s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (f_0 + \delta f) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_r (f_0 + \delta f) + \vec{\gamma} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_v (f_0 + \delta f) = - \frac{\delta f}{\tau}$$

Soit, compte tenu de ce que  $f_0$  ne dépend pas de  $t$ , ni de  $\vec{r}$

(puisque T est uniforme) et avec  $\vec{\gamma} = - \frac{e\vec{E}}{m}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\delta f) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_r \delta f - \frac{e\vec{E}}{m} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_v (f_0 + \delta f) = - \frac{\delta f}{\tau} \quad (1)$$

Pour pouvoir négliger le terme de relaxation, il faut que :

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} (\delta f) \right| \gg \frac{|\delta f|}{\tau}, \text{ soit pour des phénomènes harmoniques}$$

de pulsation  $\omega$  :  $\omega |\delta f| \gg \frac{|\delta f|}{\tau}$  ou :  $\omega \tau \gg 1$ . Cette condition

signifie que la période du phénomène étudié est petite devant le temps de relaxation du plasma.

I.1. b) On pose :  $\delta f = F(\vec{v}) e^{i(kx - \omega t)}$  d'où :  $\overrightarrow{\text{grad}}_r \delta f = i k \delta f \vec{u}_x$ .

Pour une fonction  $f_0$  maxwellienne :  $\overrightarrow{\text{grad}}_v f_0 = - \frac{m}{k_B T} f_0 \vec{v}$ ,

$\delta f$  est la perturbation apportée par le champ  $\vec{E}$ , donc  $|\delta f| \sim |\vec{E}|$

et le terme  $-\frac{e\vec{E}}{m} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_v \delta f$  est de l'ordre de  $E^2$ , donc négligeable.

Dans un calcul au 1<sup>er</sup> ordre en  $|\vec{E}|$ , après simplification par  $e^{i(kx - \omega t)}$  :

$$-i\omega F + i k v_x F - \frac{e\vec{E}_0}{m} \cdot \left( - \frac{m}{k_B T} f_0 \vec{v} \right) = 0$$

d'où :

$$F = \frac{\frac{eE_0}{k_B T} v_x f_0}{i(\omega - k v_x)} \quad (2)$$

I.1. c) La densité volumique de charge  $q$  du plasma vaut :

$$q = -e \iiint f_{\text{electrons}} d^3 v + e \iiint f_{\text{ions}} d^3 v.$$

On peut considérer, que du fait de leur masse élevée, la perturbation de la densité volumique de charge des ions est négligeable, de sorte que :

$$\iiint f_{\text{ions}} d^3 v \simeq \iiint f_0 d^3 v = n$$

d'où :

$$q = q_{\text{ions}} + q_{\text{ei}} = -e \iiint \delta f d^3 v.$$

*Remarque :* D'après (2), on pourrait penser, à première vue, que  $\delta f$  ne dépend pas de la masse des particules considérées, ce qui rendrait caduc le raisonnement précédent. En fait, la masse intervient dans la relation par l'intermédiaire de la fonction  $f_0$ .

Si on suppose par exemple  $\frac{\omega}{k} \gg v_x$  comme il est fait en I.3,

on trouve que la perturbation apportée à la densité volumique de charge  $q$  d'un certain type de particules varie comme  $m^{-1}$ , où  $m$  est la masse du type de particules considéré. Ainsi, si la masse des ions du plasma est environ 2000 fois celle des électrons, on

a dans le cas étudié :  $|\delta q_{\text{ions}}| \simeq \frac{1}{2000} |\delta q_{\text{elec}}|$ . (Le calcul sera présenté à la fin de la question I.3).

L'équation de MAXWELL-GAUSS :  $\text{div } \vec{E} = q/\epsilon_0$  avec ici :

$q = -n_1 e e^{i(kx - \omega t)}$  donne :  $E_x = -\frac{n_1 e}{\epsilon_0} \frac{1}{ik} e^{i(kx - \omega t)}$  soit :

$$\vec{E}_0 = i \frac{n_1 e}{\epsilon_0 k^2} \vec{k}. \quad (3)$$

I.2. a) En remplaçant dans (2) la valeur de  $E_0$  donnée par (3) :

$$F = \frac{n_1 e^2}{\epsilon_0 k^2 k_B T} \frac{k v_x f_0}{\omega - k v_x}. \quad (4)$$

I.2. b) On a :  $-n_1 e = -e \iiint F d^3 v$  d'où la relation de dispersion demandée reliant  $\omega$  et  $k$  :

$$n k_B T k^2 = m \omega_p^2 \iiint \frac{f_0 k v_x}{\omega - k v_x} d^3 v \quad (5)$$

avec :  $\omega_p^2 = \frac{n e^2}{\epsilon_0 m}$  ( $\omega_p$  est la « pulsation de plasma »).

I.3. a) La vitesse de phase de l'onde est :  $v_\omega = \frac{\omega}{k}$ . On suppose donc  $\omega \gg k v_x$ .

La relation (5) s'écrit en effectuant un développement limité en  $\frac{k v_x}{\omega}$  :

$$n k_B T k^2 = m \omega_p^2 \left[ \frac{k}{\omega} \iiint v_x f_0 d^3 v + \frac{k^2}{\omega^2} \iiint v_x^2 f_0 d^3 v + \frac{k^3}{\omega^3} \iiint v_x^3 f_0 d^3 v + \frac{k^4}{\omega^4} \iiint v_x^4 f_0 d^3 v + \dots \right].$$

Les intégrales de degré impair sont nulles.

$$\text{On a : } \iiint v_x^2 f_0 d^3 v = \frac{1}{3} n u^2 \text{ avec } \frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

( $u$  est la vitesse quadratique moyenne des électrons) et :

$$\iiint v_x^4 f_0 d^3 v = \frac{1}{3} n u^4.$$

On en déduit :

$$n \frac{m u^2}{3} k^2 = m \omega_p^2 \left[ \frac{k^2}{\omega^2} \frac{1}{3} n u^2 + \frac{k^4}{\omega^4} \frac{1}{3} n u^4 + \dots \right]$$

$$\text{d'où : } \omega^2 = \omega_p^2 \left[ 1 + \frac{k^2 u^2}{\omega^2} + \dots \right] \simeq \omega_p^2 + k^2 u^2 \quad (6)$$

Complément : Dans cette approximation :

$$\delta Q_{ei} = -e \iiint \delta f d^3 v = -e \iiint F d^3 v e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\text{avec : } \iiint F d^3 v = \iiint \frac{e E_0}{k_B T} f_0 \frac{v_x}{i(\omega - k v_x)} d^3 v.$$

En effectuant un développement limité au 1<sup>er</sup> ordre en  $\frac{k v_x}{\omega}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \iiint F d^3 v &= \iiint \frac{e E_0}{i k_B T} f_0 \frac{1}{\omega} v_x \left( 1 + \frac{k v_x}{\omega} \right) d^3 v \\ &= \frac{e E_0}{i k_B T} \frac{k}{\omega^2} \frac{1}{3} n u^2 = \frac{n e E_0 k}{i m \omega^2} \end{aligned}$$

où  $k$  est donné en fonction de  $\omega$  par (6).

Pour les ions, l'intégrale correspondante serait égale de la même façon à  $\frac{ne E_0 k}{i M \omega^2}$  ( $M$  : masse d'un ion). On vérifie bien

que  $|\delta\varphi_{\text{ions}}| \ll |\delta\varphi_{\text{el}}|$ . L'approximation faite, consistant à négliger  $\delta\varphi_{\text{ions}}$  et conduisant de la sorte à la relation de dispersion (5) est donc justifiée.

I.3. b) On a :  $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$  et  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ . En différentiant (6) :

$$\omega d\omega = k dk u^2, \text{ d'où :}$$

$$v_g v_\varphi = u^2 \quad (7)$$

Dans l'approximation considérée  $v_\varphi \gg u$ , d'où  $v_g \ll u$ , ce qui signifie que l'énergie se transporte dans le plasma à une vitesse très inférieure à la vitesse moyenne d'agitation thermique des électrons.

$$\begin{aligned} \text{I.3. c) } \omega_p &= e \sqrt{\frac{n}{\epsilon_0 m}} = 1,6 \cdot 10^{-19} \sqrt{\frac{10^{18} \cdot 36 \pi \cdot 10^9}{9 \cdot 10^{-31}}} \dots \\ &\dots = 5,67 \cdot 10^{10} \text{ rad. s}^{-1} \end{aligned}$$

$$u = \sqrt{\frac{2 \epsilon}{m}} \text{ avec } \epsilon = 3 \text{ eV}$$

$$\text{d'où : } u = \sqrt{\frac{2 \cdot 3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9 \cdot 10^{-31}}} = 1,03 \cdot 10^6 \text{ m. s}^{-1}.$$

La condition  $v_\varphi > 10 u$  conduit à :

$$\omega > 10 k u \text{ soit } \omega^2 > 100 k^2 u^2 \text{ ou } \omega^2 > 100 (\omega^2 - \omega_p^2)$$

$$\text{d'où : } \omega < \sqrt{\frac{100}{99}} \omega_p = 1,0050 \omega_p.$$

On considère donc des ondes de pulsation très voisine de la pulsation de coupure  $\omega_p$  :  $\omega_p < \omega < 1,0050 \omega_p$ .

$$\text{On a : } k_{\text{max}} = \sqrt{\frac{100}{99}} \frac{\omega_p}{10 u}$$

$$\text{d'où : } \lambda_{\text{min}} = \frac{2 \pi}{k_{\text{max}}} = 2 \pi \sqrt{\frac{99}{100}} \frac{10 u}{\omega_p}$$

$$\lambda_m = 2\pi \sqrt{\frac{99}{100}} \sqrt{\frac{3,2}{3}} \frac{1}{3,2 \sqrt{\pi}} 10^7 \cdot 10^{-10} \simeq 1,14 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Le domaine correspondant des longueurs d'onde est donc compris entre le mm et l'infini ( $\omega = \omega_p \Rightarrow \lambda$  infini).

$\omega \tau \sim 10^3$ , donc il est légitime dans ces conditions de négliger le terme de relaxation.

I.3. La densité de courant électronique a pour expression :

$$\vec{j} = -e \iiint \vec{v} F d^3 v e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } j_y = j_z = 0 \quad \text{et} \quad j_x &= -e \iiint v_x F d^3 v e^{i(kx - \omega t)} \\ &= -\frac{e}{E_0} \iiint v_x F E d^3 v \end{aligned}$$

$$E_0 = i \frac{n_1 e}{\epsilon_0 k} \quad \text{et} \quad n_1 = \iiint F d^3 v$$

$$\text{d'où finalement :} \quad \vec{j} = i k \epsilon_0 \frac{\iiint v_x F d^3 v}{\iiint F d^3 v} \vec{E}$$

La conductivité  $\sigma$  a donc pour expression :

$$\begin{aligned} \sigma &= i k \epsilon_0 \frac{\iiint v_x F d^3 v}{\iiint F d^3 v} \dots \\ &= i k \epsilon_0 \frac{\frac{k}{\omega} \iiint v_x^2 f_0 d^3 v + \frac{k^3}{\omega^3} \iiint v_x^4 f_0 d^3 v + \dots}{\frac{k^2}{\omega^2} \iiint v_x^2 f_0 d^3 v + \frac{k^4}{\omega^4} \iiint v_x^4 f_0 d^3 v + \dots} \end{aligned}$$

soit :  $\sigma = i \varepsilon_0 \omega$  ;  $|\sigma| \sim \frac{10^{10}}{10^{11}} = 0,1 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .

*Remarque sur la partie I :* La relation de dispersion (5) (équation de VLASOV) fait apparaître une divergence pour  $\omega = k v_x$ , c'est-à-dire pour les électrons dont la vitesse  $v_x$  est égale à la

vitesse de phase de l'onde  $\frac{\omega}{k}$ , du moins si on suppose  $\omega$  et  $k$  réels.

Cette description est en fait insuffisante pour ces électrons. Une étude plus approfondie montre que l'action des électrons tels

que  $v_x \sim \frac{\omega}{k}$  se traduit par une absorption dite « absorption

LANDAU ». Cette absorption est d'autant plus faible que la longueur d'onde est grande devant la longueur de DEBYE du plasma,

$\delta = \left( \frac{\varepsilon_0 k_B T}{n e^2} \right)^{1/2}$  ( $\delta = 10^{-5}$  m avec les données numériques

du problème). Pour les longueurs d'onde considérées :

$$(\lambda > \lambda_m = 10^{-3} \text{ m}),$$

on a bien  $\lambda \gg \delta$  et l'absorption LANDAU est négligeable.

## II. CONDUCTIBILITE ELECTRIQUE DES METAUX. EFFET DE PEAU ANORMAL. MAGNETORESISTANCE

II.1. a) En négligeant le terme en  $\overrightarrow{\text{grad}}_v \delta f$  du 2<sup>me</sup> ordre (voir I.1. b), l'équation (1) s'écrit simplement ici :

$$-\frac{e\vec{E}}{m} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_v f_0 = -\frac{\delta f}{\tau}$$

car  $\frac{\partial}{\partial t} (\delta f) = 0$  (stationnarité) et  $\overrightarrow{\text{grad}}_r \delta f = \vec{0}$  ( $\vec{E}$  uniforme,  $T$  uniforme).

On a :  $\overrightarrow{\text{grad}}_v f_0 = -\frac{m}{k_B T} f_0 \vec{v}$  ( $f_0$  maxwellienne)

d'où :  $\frac{e\vec{E}}{k_B T} \cdot f_0 \vec{v} = -\frac{\delta f}{\tau}$ .

$$\text{II.1. b) } \vec{j} = -e \iiint \vec{v} \delta f d^3 v = \frac{e^2 \tau}{k_B T} \iiint (\vec{E} \cdot \vec{v}) \vec{v} f_0 d^3 v$$

Posant  $\vec{E} = E \vec{u}_x$  et notant que les intégrales du type :

$$\iiint v_x v_y f_0 d^3 v$$

sont nulles, on obtient :  $\vec{j} = j_x \vec{u}_x$  avec :

$$j_x = \frac{e^2 \tau}{k_B T} E_x \iiint v_x^2 f_0 d^3 v = \sigma_0 E_x.$$

L'intégrale vaut  $\frac{1}{3} n u^2$  avec  $\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T$ . On en déduit le résultat très classique :

$$\sigma_0 = \frac{n e^2 \tau}{m}. \quad (8)$$

$$\text{II.1. c) } n = \mathcal{O} \frac{\mu}{A} = 6,02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{8,93 \cdot 10^6}{63,5} \simeq 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$\tau = \frac{m \sigma_0}{n e^2} = \frac{9 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^7}{8,5 \cdot 10^{28} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2} \sim 2 \cdot 10^{-14} \text{ s.}$$

Le libre parcours moyen a pour ordre de grandeur :

$$\Lambda_0 = \tau u = \tau \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} = \dots$$

$$\dots 2 \cdot 10^{-14} \sqrt{\frac{3 \times 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^2}{9 \cdot 10^{-31}}} \simeq 2,35 \cdot 10^{-9} \text{ m.}$$

II.2. a) Il faut garder dans l'équation de BOLTZMANN le terme  $\frac{\partial \delta f}{\partial t}$ , ce qui donne :

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \frac{e}{k_B T} \vec{E} \cdot \vec{v} f_0 = - \frac{\delta f}{\tau}.$$

II.2. b) Avec  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i \omega t}$  et  $\delta f = F e^{-i \omega t}$ , l'équation précédente conduit à :  $F = \frac{\tau e}{k_B T} \vec{E}_0 \cdot \vec{v} f_0 \frac{1}{1 - i \tau \omega}$ , d'où  $\vec{j} = \sigma_0^* \vec{E}$

$$\text{avec : } \sigma_0^* = \frac{\sigma_0}{1 - i \tau \omega} \quad |\sigma_0^*| = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}.$$

II.3. a) On a :

$$\vec{\text{grad}}_v f_0 = 2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \frac{dg_0}{dw} \vec{\text{grad}}_v w = 2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \frac{dg_0}{dw} \frac{m\vec{v}}{k_B T}$$

et l'équation de BOLTZMANN s'écrit :

$$\frac{\delta f}{\tau} = \frac{2e}{k_B T} \left( \frac{m}{h} \right)^3 \frac{dg_0}{dw} \vec{E} \cdot \vec{v} \quad \left( w = \frac{\epsilon - \mu}{k_B T} \right)$$

$$\text{II.3. b) } \frac{dg_0}{dw} = \frac{-e^w}{(1 + e^w)^2} = -\frac{1}{4ch^2 \frac{w}{2}} \quad \text{d'où :}$$

$$-\frac{1}{k_B T} \frac{dg_0}{dw} = \frac{1}{4k_B T} \frac{1}{ch^2 \frac{w}{2}}. \quad \text{Si } k_B T \ll \mu, \text{ la fonction}$$

$-\frac{1}{k_B T} \frac{dg_0}{dw}$  présente un pic centré sur  $\epsilon = \mu$ , de largeur très inférieure à  $\mu$  et tel que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{k_B T} \frac{dg_0}{dw} d\epsilon = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dg_0}{dw} dw = -\left[ g_0 \right]_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

assimilable à la « fonction » de DIRAC :  $\delta(\epsilon - \mu)$ .

On a :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= -e \iiint \vec{v} \delta f d^3 v \dots \\ &= -e \frac{2e}{k_B T} \left( \frac{m}{h} \right)^3 (-k_B T) \iiint \tau \vec{v} \delta(\epsilon - \mu) \vec{E} \cdot \vec{v} d^3 v \end{aligned}$$

Supposant  $\vec{E}$  parallèle à  $Ox$ ,  $\vec{j}$  se réduit à sa seule composante sur cet axe car les intégrales en  $v_x v_y$ ,  $v_x v_z$  sont nulles. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= 2e^2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \tau_F E_x \iiint v_x^2 \delta(\epsilon - \mu) dv_x dv_y dv_z \vec{u}_x \\ &= 2e^2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \tau_F E_x \cdot \frac{1}{3} \int_0^\infty v^2 \delta(\epsilon - \mu) 4\pi v^2 dv \vec{u}_x. \end{aligned}$$

L'intégration se fait en prenant pour variable  $\epsilon = \frac{1}{2} mv^2$ ,

et on trouve pour valeur de l'intégrale :  $2 \pi \left( \frac{2}{m} \right)^{5/2} \mu^{3/2}$ , d'où :

$$\sigma_0 = \frac{8 \pi e^2 \tau_F}{3 h^3} (2 \mu)^{3/2}$$

II.3.c) En raisonnant dans l'espace des quantités mouvement :

$n = \frac{N}{V} = 2 \times \frac{4}{3} \pi p_F^3 \frac{1}{h^3}$  où  $p_F$  est le rayon de la sphère de FERMI. La quantité de mouvement  $p_F$  est reliée à  $E_F$  par :  $E_F = \frac{p_F^2}{2m}$  soit, compte tenu de la relation entre  $n$  et  $p_F$  :

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3} \quad (9)$$

d'où :

$$\sigma_0 = \frac{8 \pi e^2 \tau_F \sqrt{m}}{3 h^3} \left( \frac{h^2}{m} \right)^{3/2} \frac{3n}{8\pi} = \frac{n e^2 \tau_F}{m} \quad (10)$$

expression de même forme que l'expression classique (8), mais dans laquelle  $\tau$  est remplacé par  $\tau_F$ .

II.3.d) Avec les données numériques :

$$E_F = 7,05 \text{ eV} \quad v_F = 1,57 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1} \quad \Lambda_F = v_F \tau_F \approx 300 \text{ \AA}$$

valeur très supérieure au résultat classique (II.1.c). On notera aussi que  $\Lambda_F$  est très supérieur à l'ordre de grandeur des distances interatomiques du métal. Tout se passe comme si les électrons de conduction ne « voyaient » pas le réseau ionique du métal.

II.4.a) L'équation de BOLTZMANN s'écrit ici :

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}_r \delta f - \frac{e \vec{E}}{m} \cdot \text{grad}_v f_0 = - \frac{\delta f}{\tau}$$

dans laquelle apparaît un terme en  $\text{grad}_r \delta f$  car le champ  $\vec{E}$ , donc

$\delta f$  dépendent de  $z$ . On en déduit par substitution, et compte tenu de l'approximation  $k_B T \ll \mu(T)$  :

$$\delta f = - 2 e \tau \left( \frac{m}{h} \right)^3 \delta(\epsilon - \mu) \vec{E} \cdot \vec{v} \frac{1}{1 - i \tau (\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})}$$

II.4. b) On en déduit :

$$\vec{j} = -e \iiint \vec{v} \delta f d^3 v = 2e^2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \iiint \frac{\tau \vec{v} (\vec{E} \cdot \vec{v}) \delta(\epsilon - \mu)}{1 - i\tau(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})} d^3 v$$

d'où :

$$j_x = 2e^2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \iiint \frac{\tau E_x (v_x^2 + v_x v_y + v_x v_z)}{1 - i\tau\omega + i\tau k v_z} \delta(\epsilon - \mu) dv_x dv_y dv_z$$

et :  $j_y = j_z = 0.$

La conductivité a pour expression :

$$\begin{aligned} \sigma &= 2e^2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \iiint \frac{\tau (v_x^2 + v_x v_y + v_x v_z) \delta(\epsilon - \mu)}{1 - i\tau\omega + i\tau k v_z} dv_x dv_y dv_z \\ &= 2e^2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \iiint \frac{\tau v_x^2 \delta(\epsilon - \mu)}{1 - i\tau\omega + i\tau k v_z} dv_x dv_y dv_z. \end{aligned}$$

On a :

$$v_x^2 + v_y^2 = v^2 \sin^2 \vartheta \quad \text{et} \quad v_z = v \cos \vartheta$$

d'où, après intégration sur la variable angulaire  $\varphi$  :

$$\sigma = 2e^2 \left( \frac{m}{h} \right)^3 \iint \frac{1}{2} \frac{v^2 \sin^2 \vartheta \delta(\epsilon - \mu) 2\pi v^2 \sin \vartheta dv d\vartheta}{1 - i\tau\omega + i\tau k v \cos \vartheta}$$

$$(d^3 v = v^2 \sin \vartheta dv d\vartheta d\varphi),$$

On en déduit :

$$\sigma = \frac{2\pi e^2 \tau_F \sqrt{m}}{h^3} (2\mu)^{3/2} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \vartheta d\vartheta}{1 - i\tau_F(\omega - k v_F \cos \vartheta)}$$

de la forme :

$$\sigma = \sigma_0 \Phi(\omega, k)$$

avec :

$$\Phi(\omega, k) = \frac{3}{4} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \vartheta d\vartheta}{1 - i\tau_F(\omega - k v_F \cos \vartheta)}. \quad (11)$$

II.5. a) L'effet de peau consiste en la non pénétration d'un champ électrique variable dans un métal. La profondeur de pénétration est d'autant plus faible que la fréquence du champ est plus grande et que le métal est plus conducteur. L'effet de peau est une conséquence des phénomènes d'induction électromagnétique.

II.5. b) A partir des équations de MAXWELL :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0,$$

on obtient l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \text{ soit, compte tenu de la loi d'Ohm :}$$

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (12)$$

II.5. c) Posant :  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ , on obtient ; en remplaçant dans (12) :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + i \frac{\mu_0 \sigma c^2}{\omega} \right) \quad (13)$$

prenant  $|\sigma| = 5 \cdot 10^7 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$ ,  $\mu_0 |\sigma| c^2 \sim 5 \cdot 10^{18} \gg \omega$  usuel. L'équation de dispersion (13) prend donc la forme plus simple :

$$k \simeq i \mu_0 \sigma \omega$$

soit :

$$k = \sqrt{\mu_0 \sigma \omega} \sqrt{i} = \sqrt{\mu_0 \sigma \omega} \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \quad (14)$$

d'où :

$$\delta_p = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

$e^{ikz}$  contient ainsi un facteur d'atténuation  $e^{-\frac{z}{\delta_p}}$ .

On notera que d'après (14),  $\sigma$  et donc  $\delta_p$  sont ici complexes. Le choix du signe + dans (14) en extrayant la racine respecte la continuité avec le cas où  $\sigma$  est réel ; dans ce dernier cas, il faut effectivement choisir un tel signe si l'on veut qu'il y ait

atténuation du champ  $\vec{E}$ .

$|\delta_p|$  est l'épaisseur de peau.

II.5. d) En utilisant (11), on obtient :

$$\Phi(\omega, k) = \frac{3}{4} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \vartheta d\vartheta}{1 - i \tau_F \omega + i(1+i) \frac{\Lambda_F}{\delta_p} \cos \vartheta}$$

II.6. a) Pour retrouver la valeur  $\sigma = \sigma_0$ , il faut à la fois que :

$$\omega \tau_F \ll 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{\Lambda_F}{\delta_p} \right| \ll 1.$$

La première inégalité impose que la période de l'onde soit beaucoup plus grande que  $\tau_F$  : sur un intervalle temps de l'ordre du temps de libre parcours des électrons de conduction, la variation du champ est négligeable.

La seconde inégalité impose que le libre parcours moyen  $\Lambda_F$  soit très inférieur à l'épaisseur de peau.

II.6. b) Si  $\Lambda_F \ll |\delta_p|$ ,  $\Phi(\omega) = \frac{1}{1 - i \tau_F \omega}$  et on retrouve le résultat II.2. b) avec  $\tau = \tau_F$ , soit :

$$\sigma = \sigma_0 \frac{\sigma_0}{1 - i \omega \tau_F}.$$

II.7. a) On a, dans cette approximation :

$$\Phi(k) = \frac{3}{4} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \vartheta \, d\vartheta}{1 - (1 - i) \frac{\Lambda_F}{\delta_p} \cos \vartheta}.$$

L'intégrale est de la forme :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1 - u^2) \, du}{1 + au}$$

en posant :  $u = \cos \vartheta$  et  $a = \frac{\Lambda_F}{\delta_p} (i - 1)$ .

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1 - u^2) \, du}{1 + au} = \frac{2}{a^3} + \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a^3} \right) \text{Log} \frac{1 + a}{1 - a}$$

lorsque :  $|a| \gg 1$ ,  $\text{Log} \frac{1 + a}{1 - a} \simeq \text{Log}(-1) = e^{i\pi}$  et :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1 - u^2) \, du}{1 + au} \simeq \frac{1}{a} e^{i\pi} = \frac{\pi \delta_p}{\Lambda_F} \frac{1}{1 + i}.$$

On en déduit :

$$\sigma = \frac{3}{4} \pi \sigma_0 \frac{\delta_p}{\Lambda_F} \frac{1}{1 + i} \quad (15)$$

$$\text{comme } \delta_p^2 = \frac{2}{\mu_0 \sigma \omega} :$$

$$\delta_p^3 = \frac{8}{3\pi} \frac{(1+i)\Lambda_F}{\mu_0 \omega \sigma_0} \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{n e^2 \tau_F}{m},$$

compte tenu de ce que  $\Lambda_F = v_F \tau_F$  :

$$\delta_p^3 = \frac{8}{3\pi} \frac{(1+i)m v_F}{\mu_0 \omega n e^2}. \quad (16)$$

II.7. b) Avec les valeurs numériques :

$$\tau_F = \frac{m \sigma_0}{n e^2} \simeq 2 \cdot 10^{-11} \text{ s}, \quad v_F = \sqrt{\frac{2 E_F}{m}} = 1,57 \cdot 10^6 \text{ m. s}^{-1}$$

$$\Lambda_F \simeq 3,1 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$|\delta_p| = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot \sqrt{2}}{3\pi} \frac{\Lambda_F}{\mu_0 \omega \sigma_0}} \simeq 8 \cdot 10^{-7} \text{ m.}$$

$$\frac{|\delta_p|}{\Lambda_F} \simeq 2,5 \cdot 10^{-2} \quad |\sigma| = \sigma_0 \cdot \frac{3}{4} \pi \frac{|\delta_p|}{\Lambda_F} \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 4,5 \cdot 10^{-2} \sigma_0$$

On a en outre  $\omega \tau_F \simeq 2 \cdot 10^{-2} \ll 1$  ; il est légitime de négliger  $\omega \tau_F$ . Lorsque  $|\delta_p| \ll \Lambda_F$ , on constate donc que la conductivité  $|\sigma|$  est très inférieure à  $\sigma_0$  (effet de peau anormal). Dans ce cas, les électrons qui participent le plus à la conduction du courant sont ceux pour lesquels le libre parcours moyen est situé dans l'épaisseur de peau. Ces électrons sont d'autant moins nombreux que

$\frac{|\delta_p|}{\Lambda_F}$  est plus faible. Tout se passe comme si on avait une densité volumique  $n_{eff}$  de tels électrons telle que :

$$|\sigma| = n_{eff} \cdot \frac{e^2 \tau_F}{m} \ll \sigma_0 = n \frac{e^2 \tau_F}{m}.$$

Avec les résultats numériques précédents :  $n_{eff} = 4,5 \cdot 10^{-2} n$ .

II.8. a) Dans l'équation de BOLTZMANN, il est cette fois indispensable de tenir compte du terme en  $\overrightarrow{\text{grad}}_v \delta f$  si l'on veut que le champ magnétique intervienne.

$\delta f$  obéit ainsi à l'équation :

$$-\frac{\delta f}{\tau} = -\frac{e}{m} (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_v f_0 - \frac{e}{m} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_v \delta f$$

où : 
$$\overrightarrow{\text{grad}}_v f_0 = -\frac{m \vec{v}}{k_B T} f_0 \quad (f_0 \text{ maxwellienne}).$$

Soit :

$$-\frac{\delta f}{\tau} = \frac{e \vec{v} \cdot \vec{E}}{k_B T} f_0 - \frac{e}{m} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_v \delta f. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{II.8. b) } \vec{j} &= -e \iiint \vec{v} \delta f d^3 v = \frac{e^2 \tau}{k_B T} \iiint (\vec{E} \cdot \vec{v}) \vec{v} f_0 d^3 v \\ &\quad - \frac{e^2 \tau}{k_B T} \iiint \vec{v} [(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_v \delta f] d^3 v \end{aligned} \quad (18)$$

Le premier terme de la somme est précisément égal à  $\sigma_0 \vec{E}$ .

On obtient à partir de (18) ; pour  $\vec{B} // \text{à } Oz$  :

$$j_x = \sigma_0 E_x - \frac{e^2 \tau B}{m} \iiint \left[ v_x v_y \frac{\partial \delta f}{\partial v_x} - v_x^2 \frac{\partial \delta f}{\partial v_y} \right] dv_x dv_y dv_z$$

d'où, en intégrant par parties (variable  $v_x$ ) :

$$\begin{aligned} j_x &= \sigma_0 E_x - \frac{e^2 \tau B}{m} \left\{ \left[ \iint v_x v_y \delta f dv_y dv_z \right]_{v_x = -\infty}^{v_x = +\infty} \right. \\ &\quad \left. - \iint \iint v_y \delta f dv_x dv_y dv_z - \left[ \iint v_x^2 \delta f dv_x dv_z \right]_{v_y = -\infty}^{v_y = +\infty} \right\} \end{aligned}$$

Considérons dans l'équation (17) le terme  $\frac{e}{k_B T} \vec{v} \cdot \vec{E} f_0$  ; ce

terme tend vers 0 lorsque  $|\vec{v}|$  devient infini. On en déduit que  $\delta f \rightarrow 0$  lorsque  $|v| \rightarrow \infty$ . Le même raisonnement montre qu'il en est de même d'un terme tel que  $v_x \delta f$ . Pour cette raison, les termes à intégrer sous les intégrales doubles sont nuls, de sorte que :

$$j_x = \sigma_0 E_x + \frac{e^2 \tau B}{m} \iiint v_y \delta f dv_x dv_y dv_z$$

soit encore :

$$\left\{ \begin{aligned} j_x &= \sigma_0 E_x - \tau \omega_c j_y \\ j_y &= \sigma_0 E_y + \tau \omega_c j_x \end{aligned} \right. \quad \text{et de même :} \quad (19)$$

avec :  $\omega_c = \frac{eB}{m}$  (pulsation cyclotron de l'électron dans le champ B).

On en déduit :

$$j_x = \frac{\sigma_0 (E_x - \tau \omega_c E_y)}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

$$j_y = \frac{\sigma_0 (E_y + \tau \omega_c E_x)}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

soit :

$$\vec{j}_\perp = \sigma_0 \frac{\tau \omega_c}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \frac{\vec{B}}{B} \wedge \vec{E} \quad (20)$$

II.8. c) Les expressions précédentes des composantes de  $\vec{j}$  expriment le phénomène de magnétoconductivité : la densité de courant dépend du champ magnétique.  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  ne sont plus colinéaires. Ce phénomène traduit l'action du champ magnétique sur le mouvement des électrons de conduction ; il intervient lorsque l'on a au moins  $\omega_c \tau \sim 1$ . En gros, cette condition exprime qu'en moyenne entre deux chocs successifs, l'électron décrit au moins une orbite cyclotron autour d'une ligne de champ magnétique ( $\tau \simeq T_c$  période cyclotron).

II.8. d) Dans les conditions imposées :  $j_y = 0$ . On en déduit :

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B} = - \frac{\tau \omega_c}{\sigma_0 B} = - \frac{1}{n e}$$

et

$$j_x = \sigma_0 E_x.$$

Le phénomène de magnétorésistance n'intervient pas pour cette géométrie particulière.

Le modèle utilisé ici est trop sommaire : il s'agit d'un modèle de gaz d'électrons libres obéissant à la statistique de MAXWELL-BOLTZMANN. En réalité, il faudrait utiliser la statistique de FERMI-DIRAC et considérer les orbites électroniques des électrons au voisinage de la surface de FERMI du métal.

On a :

$$E_y = - \frac{\tau \omega_c}{\sigma_0} j_x = - \tau \frac{e B}{m} \frac{1}{\sigma_0} \frac{i}{a b} = - \frac{i B}{n e a b}.$$

La d.d.p. de HALL vaut :

$$|\Delta V| = |E_y| a = \frac{i B}{n e b} \simeq 10^{-8} \text{ V (résultat classique).}$$

III. EFFETS THERMOELECTRIQUES

III.1. a) On a :  $\vec{j}_0 = \vec{j}_e - \mu \iiint f \vec{v} d^3 v = \vec{j}_e + \frac{\mu}{e} \vec{j}$ .

Remarque. — On notera que le transfert de chaleur défini par le vecteur  $\vec{j}_0$  (densité de courant thermique) ne se réduit pas à un transfert d'énergie cinétique. Si on considère l'énergie interne U comme fonction des variables extensives S (entropie) et N (nombre de particules du système) (on néglige la variation de volume), on a :

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_N dS + \left( \frac{\partial U}{\partial N} \right)_S dN = T dS + \mu dN \quad (21)$$

par définition de la température T et du potentiel chimique  $\mu$ .

De cette relation, on déduit en termes de densités :

$$\vec{j}_e = \vec{j}_0 + \mu \vec{j}_N \quad \text{avec} \quad \vec{j}_0 = T \vec{j}_S$$

( $\vec{j}_S$  : densité de courant entropique)

qui est la définition proposée. Le terme  $\mu \vec{j}_N$  n'intervient que si le système considéré échange des particules avec l'extérieur (système ouvert). Dans le cas considéré, il s'agit d'un échange d'électrons. On notera aussi que les relations précédentes n'impliquent pas nécessairement la réversibilité des transformations.

III.1. b) L'équation de BOLTZMANN s'écrit :

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_r f_0 - \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_v f_0 = - \frac{\delta f}{\tau}$$

les termes  $\overrightarrow{\text{grad}}_r \delta f$  et  $\overrightarrow{\text{grad}}_v \delta f$  sont du second ordre en  $\overrightarrow{\text{grad}} T$  et  $\vec{E}$  respectivement.

On a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_v f_0 = \frac{m\vec{v}}{k_B T} \frac{df_0}{dw} \quad \text{et} :$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}_r f_0 = - \frac{\varepsilon - \mu}{k_B T^2} \frac{df_0}{dw} \overrightarrow{\text{grad}} T - \frac{1}{k_B T} \frac{d\mu}{dT} \frac{df_0}{dw} \overrightarrow{\text{grad}} T$$

d'où finalement :

$$\delta f = \frac{\tau e}{k_B T} \frac{df_0}{dw} \vec{E} \cdot \vec{v} + \frac{\tau}{k_B T} \frac{df_0}{dw} \left[ \frac{\varepsilon - \mu}{T} + \frac{d\mu}{dT} \right] \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

III.1. c) On a pour la densité de courant  $\vec{j}$  :

$$\vec{j} = -e \iiint \vec{v} \delta f d^3 v = L_{11} \vec{E} + L_{12} \overrightarrow{\text{grad}} T$$

avec :

$$L_{11} = -\frac{e^2}{k_B T} \iiint v_x^2 \tau(v) \frac{df_0}{dw} d^3 v = \frac{e^2}{k_B T} H_2$$

(après intégration sur les variables angulaires).

et de même :

$$L_{12} = -\frac{e}{k_B T} \iiint v_x^2 \tau(v) \frac{df_0}{dw} \left[ \frac{\varepsilon - \mu}{T} + \frac{d\mu}{dT} \right] d^3 v \quad \text{soit :}$$

$$L_{12} = \frac{e}{k_B T} \left[ \left( -\frac{\mu}{T} + \frac{d\mu}{dT} \right) H_2 + \frac{m}{2T} H_3 \right]$$

La densité de courant thermique  $\vec{j}_0$  s'écrit :

$$\vec{j}_0 = \iiint (\varepsilon - \mu) \vec{v} \delta f d^3 v = L_{21} \vec{E} + L_{22} \overrightarrow{\text{grad}} T$$

avec :

$$L_{21} = \frac{e}{k_B T} \iiint v_x^2 \tau(v) [\varepsilon - \mu] \frac{df_0}{dw} d^3 v = \frac{e\mu}{k_B T} H_2 - \frac{em}{2k_B T} H_3$$

et :

$$L_{22} = -\frac{1}{k_B T} \left[ \frac{m^2}{4T} H_4 - \frac{\mu m}{T} H_3 + \frac{\mu^2}{T} H_2 + \frac{m}{2} \frac{d\mu}{dT} H_3 - \mu \frac{d\mu}{dT} H_2 \right]$$

soit :

$$L_{22} = -\frac{m^2}{4k_B T} H_4 - \frac{m}{k_B T} \left( -\frac{\mu}{T} + \frac{1}{2} \frac{d\mu}{dT} \right) H_3 \dots$$

$$\dots + \frac{\mu}{k_B T} \left( -\frac{\mu}{T} + \frac{d\mu}{dT} \right) H_2.$$

III.2. a) En l'absence de courant électrique,  $\vec{j} = \vec{0}$ , d'où :

$$\vec{E} = -\frac{L_{12}}{L_{11}} \overrightarrow{\text{grad}} T$$

$$\text{et :} \quad \vec{j}_0 = -\left( \frac{L_{12} L_{21}}{L_{11}} - L_{22} \right) \overrightarrow{\text{grad}} T$$

soit, pour le coefficient de conductibilité thermique :

$$K = \frac{L_{12} L_{21} - L_{11} L_{22}}{L_{11}}. \quad (22)$$

III.2. b)  $L_{21}$  et  $L_{22}$  contiennent  $\varepsilon - \mu$  en facteur sous le signe somme et s'annulent donc si on approxime  $\frac{df_0}{dw}$  par une « fonction » proportionnelle à  $\delta(\varepsilon - \mu)$ . Il en est de même de  $K$ . Une telle approximation ne convient donc pas pour rendre compte de la conductibilité thermique.

III.2. c) On remplace les coefficients  $L_{ij}$  par leurs expressions en fonction de  $H_m$ , dans l'expression (22) de  $K$ .

Le calcul donne l'expression demandée :

$$K = - \frac{m^2}{4 k_B T^2} \frac{H_3^2 - H_2 H_4}{H_2}. \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{III.3. a) On a posé : } \vec{j} &= \varrho_{11} \vec{X}_1 + \varrho_{12} \vec{X}_2 \\ \vec{j}_0 &= \varrho_{21} \vec{X}_1 + \varrho_{22} \vec{X}_2 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{X}_1 &= \frac{\vec{E}}{T} + \frac{\overrightarrow{\text{grad T}}}{e} \frac{1}{T} \frac{d\mu}{dT} \quad \text{et :} \\ \vec{X}_2 &= - \frac{1}{T^2} \overrightarrow{\text{grad T}} = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{T}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \frac{e^2}{k_B T} H_2 \vec{E} + \frac{e}{k_B T} \left[ \left( - \frac{\mu}{T} + \frac{d\mu}{dT} \right) H_2 + \frac{m}{2T} H_3 \right] \overrightarrow{\text{grad T}} \\ &= \frac{e^2 H_2}{k_B} \left[ \frac{\vec{E}}{T} + \frac{1}{T} \frac{d\mu}{dT} \frac{\overrightarrow{\text{grad T}}}{e} \right] + \frac{e}{k_B} \left( \mu H_2 - \frac{m}{2} H_3 \right) \left[ \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{T} \right] \end{aligned}$$

d'où, par identification :

$$\varrho_{11} = \frac{e^2 H_2}{k_B} \quad \text{et} \quad \varrho_{12} = \frac{e}{k_B} \left( \mu H_2 - \frac{m}{2} H_3 \right).$$

De même :

$$\begin{aligned} \vec{j}_0 = & \left( \frac{e\mu}{k_B T} H_2 - \frac{em}{2k_B T} H_3 \right) \vec{E} \dots \\ & \dots + \left[ -\frac{m^2}{4k_B T^2} H_4 - \frac{m}{k_B T} \left( -\frac{\mu}{T} + \frac{1}{2} \frac{d\mu}{dT} \right) H_3 \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{k_B T} \left( -\frac{\mu}{T} + \frac{d\mu}{dT} \right) H_2 \right] \overrightarrow{\text{grad T}} \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \vec{j}_0 = & \frac{e}{k_B} \left( \mu H_2 - \frac{m}{2} H_3 \right) \left( \frac{\vec{E}}{T} + \frac{1}{T} \frac{d\mu}{dT} \frac{\overrightarrow{\text{grad T}}}{e} \right) \\ & + \left( -\frac{m^2}{4k_B} H_4 - \frac{m\mu}{k_B} H_3 + \frac{\mu^2}{k_B} H_2 \right) \left( \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{T} \right) \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \quad \mathcal{L}_{21} = \frac{e}{k_B} \left( \mu H_2 - \frac{m}{2} H_3 \right) = \mathcal{L}_{12}$$

$$\text{et : } \quad \mathcal{L}_{22} = \frac{m^2}{4k_B} H_4 - \frac{m\mu}{k_B} H_3 + \frac{\mu^2}{k_B} H_2.$$

On vérifie effectivement la *relation de réciprocité* d'ONSAGER  $\mathcal{L}_{12} = \mathcal{L}_{21}$  (noter qu'une telle relation n'est pas satisfaite par les coefficients  $L_{12}$  et  $L_{21}$ ).

III.3. b) Le terme homogène à un champ électrique dans  $\vec{X}_1$  est :

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dT} \frac{\overrightarrow{\text{grad T}}}{e} &= \frac{\pi^2 k_B^2 T}{6 E_F} \frac{1}{e} \frac{dT}{dx} \dots \\ &\dots = \frac{\pi^2 k_B}{6} \left( \frac{k_B T}{E_F} \right) \frac{1}{e} \frac{dT}{dx} \sim 10^{-4} \left( \frac{k_B T}{E_F} \right) \frac{dT}{dx}. \end{aligned}$$

Pour  $T = 300 \text{ K}$  :  $\frac{k_B T}{E_F} \simeq 3,7 \cdot 10^{-3}$ . Le terme considéré est

donc de l'ordre de  $10^{-7} \frac{dT}{dx}$  en général négligeable.

Dans la littérature, on trouve souvent écrites les relations (23)

$$\text{avec : } \quad \vec{X}_1 = \frac{\vec{E}}{T} \quad \text{et} \quad \vec{X}_2 = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{T}, \text{ soit :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{j} = \mathcal{L}'_{11} \frac{\vec{E}}{T} + \mathcal{L}'_{12} \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{T} \\ \vec{j}_0 = \mathcal{L}'_{21} \frac{\vec{E}}{T} + \mathcal{L}'_{22} \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{T} \end{array} \right. \quad (24)$$

pour lesquelles, en toute rigueur,  $\mathcal{L}'_{12} \neq \mathcal{L}'_{21}$  (contrairement à ce qui est parfois écrit). Si le terme  $\frac{d\mu}{dT} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} T}{e}$  est effectivement

négligeable devant  $\vec{E}$ , il n'y a alors pas d'inconvénient à confondre les  $\mathcal{L}'_{ij}$  et les  $\mathcal{L}_{ij}$ . Dans ces conditions, on peut écrire  $\mathcal{L}'_{12} \simeq \mathcal{L}'_{21}$ .

III.4. a) La relation :  $\frac{du}{dt} = -\text{div} \vec{j}_e + \vec{E} \cdot \vec{j}$  exprime le bilan d'énergie par unité de temps et par unité de volume. Le terme  $-\text{div} \vec{j}_e$  correspond à l'énergie transférée (par unité de temps et de volume) par les électrons du fait de leur mouvement ; le terme  $\vec{E} \cdot \vec{j}$  est égal à la puissance volumique fournie par le champ électrique  $\vec{E}$  aux charges en mouvement.

III.4. b) De la relation  $T dS = dU - \mu dN$  (rappelée en III.1. a), on déduit la relation locale :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{du}{dt} - \frac{\mu}{T} \frac{dn}{dt}$$

par unité de temps et par unité de volume.

$n$  est le nombre d'électrons par unité de volume, d'où :

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{1}{e} \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{e} \text{div} \vec{j} \quad \left( \text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right).$$

On en déduit, compte tenu de l'expression de  $\frac{du}{dt}$  :

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{T} (\text{div} \vec{j}_e + \frac{\mu}{e} \text{div} \vec{j}) + \frac{1}{T} \vec{E} \cdot \vec{j}$$

soit :

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{T} (\text{div} \vec{j}_0 - \frac{\vec{j}}{e} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \mu) + \frac{1}{T} \vec{E} \cdot \vec{j}$$

(puisque  $\vec{j}_e = \vec{j}_0 - \frac{\mu}{e} \vec{j}$ ).

On a donc :

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{j}_0 + \vec{j} \cdot \vec{X}_1 \quad (25)$$

qui exprime le bilan entropique.

Nous supposons  $\vec{j}$  stationnaire et  $\overrightarrow{\operatorname{grad}} T$  uniforme.

La relation :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{j}_0 + \vec{j} \cdot \vec{X}_1 \quad \text{s'écrit :} \\ \frac{ds}{dt} &= -\frac{1}{T} \operatorname{div} \left( \vec{j}_e + \frac{\mu}{e} \vec{j} \right) + \dots \\ &\dots j \cdot \left( \frac{\vec{E}}{T} + \frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}} T}{e} \frac{1}{T} \frac{d\mu}{dt} \right) \\ \frac{ds}{dt} &= -\frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{j}_e + \vec{j} \cdot \frac{\vec{E}}{T} \end{aligned} \quad (26)$$

compte tenu de  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  puisque, dans ces conditions :

$$\operatorname{div} \frac{\mu}{e} \vec{j} = \frac{1}{e} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \mu \cdot \vec{j} = \frac{1}{e} \frac{d\mu}{dt} \overrightarrow{\operatorname{grad}} T \cdot \vec{j}$$

On a :

$$\begin{aligned} \vec{j}_e &= (L_{21} - \frac{\mu}{e} L_{11}) \vec{E} + (L_{22} - \frac{\mu}{e} L_{12}) \overrightarrow{\operatorname{grad}} T \\ &= -\frac{em}{2 k_B T} H_3 \vec{E} + \dots \\ &\dots \left[ -\frac{m^2}{4 k_B T^2} H_4 - \frac{m}{2 k_B T} \left( -\frac{\mu}{T} + \frac{d\mu}{dT} \right) H_3 \right] \overrightarrow{\operatorname{grad}} T \end{aligned}$$

et :

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{L_{11}} - \frac{L_{12}}{L_{11}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} T \quad (27)$$

d'où :

$$\vec{j}_e = -\frac{m}{2e} \frac{H_3}{H_2} \vec{j} + \dots$$

$$\dots \frac{em}{2k_B T} H_3 \frac{\left(-\frac{\mu}{T} + \frac{d\mu}{dT}\right) H_2 + \frac{m}{2T} H_3}{e H_2} \overrightarrow{\text{grad T}}$$

soit :

$$\vec{j}_e = -\frac{m}{2e} \frac{H_3}{H_2} \vec{j} + \left(-\frac{m^2}{4k_B T^2} H_4 + \frac{m^2}{4k_B T^2} \frac{H_3^2}{H_2}\right) \overrightarrow{\text{grad T}}.$$

Compte tenu de ce que  $\text{div } \vec{j} = 0$  et que  $\overrightarrow{\text{grad T}}$  ne dépend pas des variables spatiales, la relation (26) s'écrit :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{m}{2e} \frac{d}{dT} \left(\frac{H_3}{H_2}\right) \vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad T}} + \dots$$

$$\dots \frac{m^2}{4k_B T^3} \frac{d}{dT} \left(H_4 - \frac{H_3^2}{H_2}\right) (\overrightarrow{\text{grad T}})^2$$

$$+ \frac{1}{TL_{11}} \vec{j}^2 - \frac{1}{T} \frac{L_{12}}{L_{11}} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad T}}$$

où on a utilisé l'expression (27) de  $\vec{E}$ .

On en déduit la relation demandée :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{TL_{11}} \vec{j}^2 + \frac{1}{T} \frac{dK}{dT} (\overrightarrow{\text{grad T}})^2 - \alpha \vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad T}} \quad (28)$$

avec :

$$\alpha = \frac{1}{T} \left[ \frac{L_{12}}{L_{11}} - \frac{m}{2e} \frac{d}{dT} \left(\frac{H_3}{H_2}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{T} \left[ \frac{m}{2e} \left( \frac{1}{T} \frac{H_3}{H_2} - \frac{d}{dT} \left(\frac{H_3}{H_2}\right) \right) \right] + \frac{1}{e} \left( -\frac{\mu}{T} + \frac{d\mu}{dT} \right)$$

soit encore :

$$\alpha = \frac{1}{e} \frac{d}{dT} \left( \frac{\mu}{T} - \frac{m}{2} \frac{H_3}{TH_2} \right) \quad (29)$$

On remarque que le signe des deux premiers termes est indépendant du sens de  $\vec{j}$  et de  $\overrightarrow{\text{grad T}}$  (termes d'irréversibilité) alors que le signe du 3<sup>me</sup> terme change avec le sens de  $\vec{j}$  ou de  $\overrightarrow{\text{grad T}}$  (réversibilité).

III.4. c) La densité de courant entropique  $\vec{j}_s$  est liée à  $\vec{j}_0$  par la relation :  $T \vec{j}_s = \vec{j}_0$  au point M où la température est T.

On a :

$$\operatorname{div} \vec{j}_s = \operatorname{div} \left( \frac{1}{T} \vec{j}_0 \right) = \frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{j}_0 + \vec{j}_0 \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{1}{T}$$

soit :

$$\operatorname{div} \vec{j}_s = - \frac{ds}{dt} + \vec{j} \cdot \vec{X}_1 + \vec{j}_0 \cdot \vec{X}_2 \text{ [en utilisant (25)].}$$

Le bilan entropique local, se met donc sous la forme :

$$\operatorname{div} \vec{j}_s + \frac{ds}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{X}_1 + \vec{j}_0 \cdot \vec{X}_2 \quad (30)$$

Le terme :

$$\sigma_s = \vec{j} \cdot \vec{X}_1 + \vec{j}_0 \cdot \vec{X}_2 \quad (31)$$

représente l'entropie créée par unité de temps et de volume au point considéré du fait de l'irréversibilité (terme de source entropique). Le terme  $\operatorname{div} \vec{j}_s$  correspond au transfert d'entropie lié à l'échange thermique ( $\vec{j}_s = \frac{1}{T} \vec{j}_0$ ). Le second principe de la thermodynamique exige que  $\sigma_s \geq 0$ . Vérifions-le par le cas particulier présent.

On a :

$$\sigma_s = \varrho_{11} X_1^2 \left[ 1 + 2 \frac{\varrho_{12}}{\varrho_{11}} \frac{X_2}{X_1} + \frac{\varrho_{22}}{\varrho_{11}} \left( \frac{X_2}{X_1} \right)^2 \right]$$

avec :

$$\varrho_{11} = \frac{e^2 H_2}{k_B} > 0$$

( $\varrho_{11} = T L_{11}$  ;  $L_{11}$  représente la conductivité électrique, nécessairement positive).

Pour que le trinôme en  $\frac{X_2}{X_1}$  soit toujours positif, il est nécessaire que son discriminant  $\Delta'$  soit négatif, soit :

$$\varrho_{12}^2 < \varrho_{11} \varrho_{22}$$

ou :

$$\frac{e^2}{k_B^2} \left( \mu H_2 - \frac{m}{2} H_3 \right)^2 < \frac{e^2 H_2}{k_B^2} \left( \frac{m^2}{4} H_4 - m \mu H_3 + \mu^2 H_2 \right)$$

ou encore :  $\frac{m^2}{4} (H_3^2 - H_2 H_4) < 0$ , soit compte tenu de l'expression du coefficient de conductibilité thermique  $K$  :  $-K < 0$ , ce qui est effectivement satisfait puisque  $K > 0$ .

La relation (30) établit sur un cas particulier, la forme du bilan entropique dans le formalisme général de la théorie d'ONSAGER.

III.5. a) L'équation de BOLTZMANN s'écrit ici :

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_r f_0 - \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_v f_0 = - \frac{\delta f}{\tau}$$

avec :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_r f_0 = - \frac{1}{k_B T} \frac{df_0}{dW} \overrightarrow{\text{grad}}_\mu \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{grad}}_v f_0 = \frac{m\vec{v}}{k_B T} \frac{df_0}{dW}$$

d'où :

$$\delta f = \frac{\tau e}{k_B T} \frac{df_0}{dW} \vec{E} \cdot \vec{v} + \frac{\tau}{k_B T} \frac{df_0}{dW} \overrightarrow{\text{grad}}_\mu \cdot \vec{v}.$$

III.5. b) On en déduit :

$$\vec{j} = -e \iiint \vec{v} \delta f d^3 v = L_{11} \left( \vec{E} + \frac{1}{e} \overrightarrow{\text{grad}}_\mu \right)$$

$$\vec{j}_0 = \iiint (\epsilon - \mu) \vec{v} \delta f d^3 v = L_{21} \left( \vec{E} + \frac{1}{e} \overrightarrow{\text{grad}}_\mu \right)$$

soit :  $\vec{j}_0 = \Pi \vec{j}$  avec  $\Pi = \frac{L_{21}}{L_{11}}$ .

Cette relation traduit l'effet PELTIER : dégagement de chaleur, ou absorption de chaleur, selon le sens du courant électrique à la traversée d'une jonction entre deux métaux.

III.5. c) On a :  $\Pi = \frac{1}{e} \left( \mu - \frac{m}{2} \frac{H_3}{H_2} \right)$  et un simple calcul

permet de vérifier la relation de THOMSON :

$$\alpha = \frac{d}{dT} \left( \frac{\Pi}{T} \right)$$

Le coefficient  $\alpha$  est lié à l'effet THOMSON qui est un effet de couplage entre le courant électrique et le gradient de température [terme en  $\vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T$  dans (28)].

Note sur les questions III.4.

On obtient une expression explicite de  $\sigma_s$  en fonction de la densité de courant  $\vec{j}$  et de  $\overrightarrow{\text{grad T}}$ . Le calcul (élémentaire) donne :

$$\sigma_s = \frac{1}{\text{TL}_{11}} \vec{j}^2 + \frac{K}{T^2} (\overrightarrow{\text{grad T}})^2 \quad (32)$$

$> 0 \qquad \qquad \qquad > 0$

Le premier terme (en  $\vec{j}^2$ ) traduit la création d'entropie liée à l'effet JOULE, qui comme l'on sait, est essentiellement irréversible.

Le second terme [en  $(\overrightarrow{\text{grad T}})^2$ ] traduit la création d'entropie liée à la conductibilité thermique qui est également un phénomène essentiellement irréversible.

On notera qu'il ne peut apparaître dans l'expression de  $\sigma_s$  de terme en  $\vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad T}}$ , dont le signe dépendrait du sens de  $\vec{j}$  ou de  $\overrightarrow{\text{grad T}}$ . Le coefficient  $\alpha$  n'apparaît pas dans  $\sigma_s$ , cela traduit le fait que l'effet THOMSON est un phénomène réversible.

Le fait qu'un terme en  $\vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad T}}$  apparaisse dans l'expression (28) de  $\frac{ds}{dt}$ , est lié à l'échange d'entropie accompagnant l'échange thermique. En comparant (28) et (32) et en utilisant la relation :

$$\frac{ds}{dt} + \text{div } \vec{j}_s = \sigma_s$$

on obtient :

$$\text{div } \vec{j}_s = \frac{d}{dT} \left( \frac{K}{T} \right) (\overrightarrow{\text{grad T}})^2 - \alpha \vec{j} \cdot \overrightarrow{\text{grad T}}$$

qui montre effectivement que le terme d'échange d'entropie (exprimé par  $\text{div } \vec{j}_s$ ) fait intervenir la conductibilité thermique et l'effet THOMSON.

G. AUBERT (Grenoble), H. GIÉ (Paris).

# Agrégation

OPTION CHIMIE \*  
SESSION DE 1979

## Epreuve C

### COMPOSITION DE CHIMIE

(Applications)

(Durée : 6 heures)

Matériel à prévoir : papier millimétré (3 feuilles).

#### DONNÉES

Constante des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J. mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Formule de STIRLING :  $\ln N! \simeq N \ln N - N$ .

Intégrales :

$$I_1 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\pi}$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi}$$

NOTA. — *Le jury ne prendra en considération que les valeurs numériques suivies d'une unité, pour tous les résultats qui doivent en comporter une.*

### A. THERMODYNAMIQUE DES SOLUTIONS

#### I

On réalise une solution binaire en mélangeant  $n_1$  moles du constituant liquide  $S_1$  et  $n_2$  moles du constituant liquide  $S_2$ .

1. On considère cette solution comme parfaite.

1.1. Donner l'expression des potentiels chimiques  $\mu_1$  et  $\mu_2$  de  $S_1$  et  $S_2$  dans la solution. On fera intervenir les fractions molaires  $X_1$  et  $X_2$  de  $S_1$  et  $S_2$ .

1.2. Comment peut-on montrer expérimentalement qu'une telle solution est parfaite ?

*N.D.L.R.* : Les auteurs de l'épreuve A de l'agrégation de chimie 1979 (question de cours portant sur les propriétés du zinc) ont établi un corrigé de cette épreuve. Il ne nous a pas été possible de joindre ce texte au présent bulletin. Par contre, nous avons fait faire une photocopie. Les collègues intéressés peuvent en recevoir un exemplaire en écrivant au secrétariat de l'U.d.P. Joindre un timbre à 3 francs pour les frais d'envoi.

1.3. Donner l'expression de l'enthalpie libre de mélange  $\Delta G_m$ .

1.4. En déduire l'expression et la valeur de l'enthalpie de mélange  $\Delta H_m$  et du volume de mélange  $\Delta V_m$ .

1.5. a) En déduire l'expression de l'entropie de mélange  $\Delta S_m$ .

b) Retrouver cette expression de  $\Delta S_m$  par un calcul de thermodynamique statistique.

2. Nous nous proposons d'étudier maintenant le cas des solutions pour lesquelles  $\Delta H_m$  n'est pas nul mais dont  $\Delta S_m$  a même valeur que pour les solutions parfaites correspondantes. Pour les calculs ultérieurs, les hypothèses suivantes doivent être faites : les tailles des molécules de  $S_1$  et  $S_2$  sont voisines ; dans les corps purs ou dans le mélange, une molécule quelle qu'elle soit a  $z$  voisins quels qu'ils soient ; les interactions sont limitées aux  $z$  plus proches voisins (modèle des solutions régulières).

On appellera respectivement  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$ ,  $\epsilon_{12}$  les enthalpies d'interaction (positives s'il y a attraction) par mole de liaisons intermoléculaires  $S_1-S_1$ ,  $S_2-S_2$ ,  $S_1-S_2$ .

2.1. a) Calculer les enthalpies d'interaction  $H_1$  et  $H_2$  de  $n_1$  moles de  $S_1$  pur d'une part et  $n_2$  moles de  $S_2$  pur d'autre part.

b) Calculer l'enthalpie d'interaction  $H_{12}$  du mélange de  $n_1$  moles de  $S_1$  et  $n_2$  moles de  $S_2$ .

c) En déduire que l'enthalpie de mélange est égale à :

$$\Delta H_m = z \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \Delta \epsilon \quad \text{avec} \quad \Delta \epsilon = \frac{1}{2} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) - \epsilon_{12}.$$

2.2. a) Donner l'expression de l'enthalpie libre de mélange  $\Delta G_m$ . On posera  $z\Delta\epsilon = RT\chi$ ,  $\chi$  étant le paramètre d'interaction  $S_1-S_2$ .

b) En raisonnant sur une mole de mélange, tracer le graphe  $\Delta G_m = f(X_2)$ . Le mélange est-il toujours possible ? Donner une interprétation qualitative.

## II

On considère une solution homogène de  $n_2$  moles de polymère P dans  $n_1$  moles de solvant S. Cette solution est supposée régulière. Chaque molécule de P est formée de  $x$  monomères. Comme précédemment, certaines hypothèses doivent être faites : les tailles des molécules de S d'une part et du motif monomérique d'autre part sont très voisines ; dans les corps purs ou dans la solution, une molécule ou un motif monomérique a  $z$  proches voisins quels qu'ils soient ; les interactions sont toujours limitées aux  $z$  proches voisins ; l'état de référence est  $n_1$  moles de S liquide et  $n_2$  moles de P liquide. Les notations sont celles de la partie I.

1.1. Calculer le rapport  $\frac{V_2}{V_1}$  des volumes molaires partiels  $V_2$  et  $V_1$  du polymère P et du solvant S.

1.2. Le nombre  $\Omega$  de complexions d'un mélange de  $N_1$  molécules de S et  $N_2$  molécules de P, calculé selon le modèle du réseau liquide de FLORY est donné par la formule :

$$\ln \Omega = -N_1 \ln \frac{N_1}{N_0} - N_2 \ln \frac{N_2 x}{N_0} + N_2 f(x, z)$$

où  $f(x, z)$  est une fonction indépendante de  $N_1$  et  $N_2$  et où  $N_0 = N_1 + N_2 x$ .

a) Donner l'expression de l'entropie de mélange  $\Delta S_m$ .

b) Si on prend comme variables les fractions volumiques  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  définies par :

$$\varphi_i = \frac{n_i V_i}{\sum_i n_i V_i}$$

montrer que l'expression précédente  $\Delta S_m$  peut se mettre sous la forme  $\Delta S_m = -R (n_1 \ln \varphi_1 + n_2 \ln \varphi_2)$ .

1.3. Montrer que l'on peut retrouver facilement les résultats de I.

2. On se propose de déterminer l'expression de l'enthalpie de mélange  $\Delta H_m$ . Les interactions solvant-solvant, solvant-motif monomérique, motif monomérique-motif monomérique, sont définies comme dans la partie I, en utilisant les mêmes notations. Montrer que :

$$\Delta H_m = RT \chi n_1 \varphi_2$$

où  $\chi$  est le paramètre d'interaction motif monomérique-solvant. On précisera qualitativement l'approximation relative à la valeur de  $z$ , que l'on est amené à faire pour obtenir cette valeur simple.

3.1. a) Donner l'expression de l'enthalpie libre de mélange  $\Delta G_m$ .

b) Montrer que  $\chi$  est une fonction simple de la température dont on donnera la forme.

3.2. a) Calculer  $\Delta \mu_1(\varphi_2) = \mu_1 - \mu_1^0$ , différence entre les potentiels chimiques de S dans la solution ( $\mu_1$ ) et à l'état pur ( $\mu_1^0$ ).

b) Que devient l'expression de  $\Delta \mu_1(\varphi_2)$  dans le cas de solutions diluées ( $\varphi_2 \ll 1$ ).

### III. APPLICATIONS

#### 1. Pression osmotique.

La solution macromoléculaire précédente est séparée de S pur par une membrane perméable au seul corps S.

1.1. a) Montrer que l'équilibre de S de part et d'autre de la membrane nécessite une différence de pression  $\Pi$ , appelée pression osmotique.

b) Exprimer  $\Pi$  en fonction de  $\Delta \mu_1$  (voir définition en II.3.2.).

c) Donner l'expression de  $\Pi$  en fonction de  $\varphi_2$  dans le cas de solutions macromoléculaires diluées.

1.2. La solution macromoléculaire est définie par sa concentration massique C en polymère P de masse molaire moléculaire M (nous avons vu que le degré de polymérisation est x).

a) Etablir la relation entre  $\varphi_2$  et C.

Montrer que l'expression de la pression osmotique peut se mettre sous la forme  $\Pi = RT (A_1C + A_2C^2)$ . Expliciter  $A_1$  et  $A_2$ .

b) Montrer que dans le modèle utilisé (partie II)  $A_2$  ne dépend ni de M ni de C.

1.3. L'étude expérimentale de solutions diluées d'un polystyrène dans le cyclohexane conduit aux résultats du tableau ci-après.

C (g.l <sup>-1</sup> )	$\Pi$ (Pa)		
	30 °C	40 °C	50 °C
3 .....	36,3	39,3	41,5
5 .....	59,5	66,5	72
8 .....	92,8	109,6	121,6
10 .....	113	139	157
15 .....	162	216	255

a) Calculer la masse molaire moléculaire M de ce polystyrène (on utilisera une méthode graphique).

b) Calculer les valeurs de  $A_2$  aux trois températures considérées.

c) En déduire la valeur de la température qui annule  $A_2$ . Cette température, notée  $\theta$ , est la température de FLORY.

Donner pour  $T = \theta$  la valeur du paramètre d'interaction  $\chi$ .

Calculer ce paramètre d'interaction  $\chi$  à 30, 40, 50 °C. La solution est-elle régulière ? Justifier votre réponse. On donne le volume molaire du solvant : 110 cm<sup>3</sup>.mol<sup>-1</sup> (on ne considère pas la variation de ce volume dans le domaine de température envisagé).

1.4. En fait, le polymère utilisé est polydispersé : les  $n_2$  moles de polystyrène ont des masses molaires moléculaires différentes ; la distribution des masses molaires est telle que  $n_i$  moles ont une masse  $M_i$  de degré de polymérisation  $x_i$ ,  $x_i$  variant de 1 à l'infini.

Montrer que la masse molaire moléculaire déterminée « par pression osmotique » est en fait la masse moyenne :

$$M_n = \frac{\sum_i n_i M_i}{\sum_i n_i}$$

## 2. Température critique de démixtion.

2.1. Donner l'allure du graphe  $\Delta\mu_1 = f(\varphi_2)$  pour deux valeurs particulières du paramètre d'interaction  $\chi$  ( $\chi_1 = 0$ ,  $\chi_2 = 0,6$ ) pour un polymère que l'on suppose monodispersé.

Montrer que dans un seul cas que l'on précisera, il y a possibilité de démixtion. A quel cas correspond la température la plus élevée pour un couple polymère-solvant donné ?

2.2. a) Que devient la courbe  $\Delta\mu_1 = f(\varphi_2)$  à la température critique  $T_C$  dont on rappellera la définition.

b) La valeur de  $\chi$  est alors  $\chi = \chi_C$ . Exprimer  $\chi_C$  en fonction de  $x$ .

c) Vers quelle limite tend  $\chi_C$  quand  $x$  devient très grand ?

Compte tenu des résultats précédents, montrer que  $T_C$  est alors égal à  $\vartheta$ .

2.3. On considère les résultats expérimentaux donnant la température critique de démixtion de solutions de polystyrène dans le cyclohexane en fonction de la masse molaire moléculaire :

$T_C$ (K)	293,1	296,0	300,0	303,0	304,4
$M \cdot 10^{-3}$ (g. mol <sup>-1</sup> )	0,85	1,40	3,20	7,0	11,0

a) Calculer  $\chi_C$  pour chacune des valeurs de  $T_C$ ; en déduire la valeur de la température  $\vartheta$ .

b) La solution est-elle régulière ?

#### IV. CHAÎNE MACROMOLÉCULAIRE

Une macromolécule linéaire, dans sa structure de chaîne flexible, est caractérisée, entre autres, par son écart quadratique moyen, racine carrée de la moyenne des carrés des distances qui existent entre les extrémités de la chaîne  $(\bar{s}^2)^{1/2}$ . A la température  $\vartheta$ , les dimensions macromoléculaires sont imperturbées (d'un point de vue physique il y a compensation des interactions entre polymère et solvant d'une part et entre motifs monomériques d'une même molécule d'autre part) : la probabilité pour que les deux extrémités de la chaîne soient séparées par une distance comprise entre  $s$  et  $s + ds$  est :

$$dP(s) = 4\pi s^2 \alpha \exp(-\beta^2 s^2) ds \quad (\text{statistique gaussienne})$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes ;  $\beta^2 = \frac{3}{2xl^2}$ ,  $l$  étant la « longueur » d'un motif monomérique.

1.1. Etablir la relation qui existe entre  $\alpha$  et  $\beta$ .

1.2. a) Calculer la distance  $s$  la plus probable.

b) Calculer l'écart quadratique moyen  $(\bar{s}^2)^{1/2}$ .

2. L'excès de viscosité d'une solution macromoléculaire par rapport au solvant pur, très important même aux faibles concentrations, est caractérisé par la viscosité intrinsèque :

$$[\eta] = \lim_{C \rightarrow 0} \frac{\eta_{\text{solution}} - \eta_0 \text{ solvant}}{\eta_0 \text{ solvant} \cdot C}$$

( $C$  est la concentration massique,  $\eta$  la viscosité de la solution,  $\eta_0$  celle du solvant).

Il a été montré que  $[\eta]_\theta$ , viscosité intrinsèque à la température  $\theta$ , égale  $\frac{\Phi (\bar{M})^{3/2}}{M}$  où  $\Phi$  est une constante indépendante du couple polymère-solvant considéré ;  $\Phi = 2,7 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

a) Selon quelle puissance de  $M$  varie  $[\eta]_\theta$  ?

b) Les résultats expérimentaux ci-après sont les variations de la viscosité intrinsèque de solutions de polystyrène dans le cyclohexane en fonction de la masse molaire moléculaire à la température  $\theta$  :

$[\eta]_\theta$ (cm <sup>3</sup> . g <sup>-1</sup> ) ..	22	36	44	52	116	184
$M \cdot 10^{-3}$ (g. mol <sup>-1</sup> )	63	180	280	350	1 600	4 400

Vérifier la relation de dépendance entre  $[\eta]_\theta$  et  $M$ .

Calculer  $l$  ; discuter.

## B. CHIMIE DE QUELQUES DERIVES PHOSPHORES

### I. SOLUTIONS AQUEUSES D'IONS PHOSPHORIQUES ET POLYPHOSPHORIQUES

On donne les  $pK$  suivants, à 300 K, en solution aqueuse de force ionique constante :

acide phosphorique  $H_3PO_4$  :

$$pK_1 = 1,9 \quad pK_2 = 6,8 \quad pK_3 = 12,5$$

acide diphosphorique  $H_4P_2O_7$  :

$$pK_1 = 0,9 \quad pK_2 = 1,5 \quad pK_3 = 5,8 \quad pK_4 = 8,2.$$

1. Montrer que pour  $pH \geq 4$ , il est inutile d'envisager tous les équilibres acido-basiques de  $H_3PO_4$ .

2. Ecrire la formule développée de l'acide diphosphorique. On ajoute à une solution 0,1 M de cet acide de la soude concentrée (volume pratiquement constant) jusqu'à  $pH = 7$ . Calculer, à l'équilibre, les molarités des espèces contenant l'élément phosphore ; regrouper les résultats dans un tableau.

3. En fait, l'acide diphosphorique et les diphosphates sont hydrolysés lentement en acide phosphorique et ions phosphates selon le schéma :



On désigne par  $[PP]$  la somme des molarités de toutes les espèces diphosphoriques et par  $[P]$  celle de toutes les espèces phosphoriques

à l'équilibre. A  $pH = 7$ ,  $\frac{[P]}{[PP]}$  est très grand.

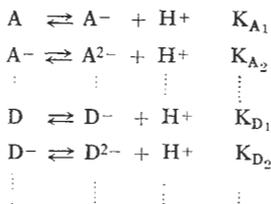
Déterminer, lorsqu'on part d'une solution de  $H_4P_2O_7$  0,1 M en tampon  $pH = 7$ , les formules et les molarités des deux espèces majoritaires à l'équilibre.

4. Le spectre RMN du phosphore 31 d'un ion polyphosphate linéaire ne contenant que P et O est constitué de deux doublets de même « poids » présentant des déplacements chimiques respectifs à 4,7 et  $16,9 \cdot 10^{-6}$  (référence : solution de  $H_3PO_4$  à 85 %). Quel est le nombre d'atomes de phosphore de l'ion considéré ? Justifier votre réponse.

5. On considère, en solution aqueuse, l'équilibre homogène :



En fait, les réactifs et les produits sont susceptibles de donner un ou plusieurs équilibres acido-basiques successifs symbolisés par :



On désigne par A' le mélange à l'équilibre A, A<sup>-</sup>, A<sup>2-</sup>, ..., par D' le mélange D, D<sup>-</sup>, D<sup>2-</sup>, ...

$$a) \text{ A pH donné, exprimer } K' = \frac{[C'] \cdot [D']}{[A'] \cdot [B']}$$
 en fonction de

K, [H<sup>+</sup>] et des constantes d'acidité :

$$K_{A_1} \dots K_{D_1} \dots, \text{ avec } [A'] = [A] + [A^-] + \dots, \text{ etc.}$$

b) On appelle enthalpie libre standard apparente de la réaction à pH donné la quantité  $\Delta G^{o'}$  = -RT ln K' ; celle-ci dépend bien évidemment du pH. Calculer lorsque le milieu passe de pH<sub>1</sub> à pH<sub>2</sub> ([H<sup>+</sup>]<sub>1</sub> = h<sub>1</sub> à [H<sup>+</sup>]<sub>2</sub> = h<sub>2</sub>) la variation  $\Delta G^{o'_2} - \Delta G^{o'_1}$  correspondante en fonction de h<sub>1</sub>, h<sub>2</sub> et des constantes d'acidité.

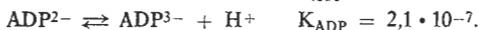
c) L'hydrolyse de l'adénosine triphosphate (noté ATP<sup>3-</sup>) est considérée par les biochimistes comme une source d'énergie irremplaçable ; elle fournit l'adénosine diphosphate (ADP<sup>2-</sup>) selon l'équilibre :



a) Exprimer pour la réaction (2) la variation :

$$\Delta G^{o'}_{pH} - \Delta G^{o'}$$

de l'enthalpie libre standard apparente, entre pH = 7 et un pH quelconque supérieur à 4, en fonction de [H<sup>+</sup>], de la température Kelvin T et des constantes d'acidité. On donne :



β) A 300 K,  $\Delta G^{o'}$  = -30,6 kJ.mol<sup>-1</sup>. Calculer, en kJ.mol<sup>-1</sup>, à 300 K,  $\Delta G^{o'}_{pH}$  aux pH 4, 5, 6 et 8. Grouper les résultats dans un tableau et tracer l'allure de la courbe  $\Delta G^{o'}_{pH} = f(\text{pH})$ . Conclure.

## II. PHOSPHORE PENTACOORDINÉ

A. *Stéréochimie statique.*

1. a) Calculer le nombre I d'isomères lorsque  $n$  ligands monodentés différents sont liés à un atome central dans une structure polyédrique déterminée sans élément de symétrie.

b) Dans le cas où la structure polyédrique présente des éléments de symétrie, indiquer le nombre d'isomères en fonction de l'ordre  $h$  du groupe de symétrie du polyèdre et du nombre  $n$  de ligands.

2. Dans le cas du phosphore pentacoordiné ( $n = 5$ ), la structure polyédrique envisagée est la bipyramide trigonale régulière (B.P.T.) où on distingue les ligands axiaux et équatoriaux.

Dénombrer et représenter, dans chacun des cas suivants, les isomères chiraux et achiraux :

- 3 ligands sont identiques (1, 1, 1, 2, 3) ;
- 2 couples de ligands sont identiques (1, 2, 2, 3, 3).

3. Dans la bipyramide trigonale (B.P.T.), les isomères n'ont pas tous la même stabilité. Ceci est dû à des effets électroniques et stériques. Pour les substituants les plus électro-négatifs les directions axiales sont privilégiées. Interpréter ce résultat. Représenter les isomères de  $P(CH_3)_2F_3$  et les classer par stabilité décroissante.

B. *Stéréochimie dynamique.*

1. a) L'étude structurale de  $PF_5$  par diffraction électronique et par infrarouge montre que ce composé a une structure B.P.T. A la température ordinaire, le spectre de RMN du  $^{19}F$  de  $PF_5$  ne présente qu'un seul doublet correspondant au couplage  $^{31}P - ^{19}F$ .

Montrer que ce résultat est compatible avec une permutation des ligands.

b) L'étude par RMN du  $^{31}P$  de  $(CH_3)_2NPF_4$  (N, N-diméthylamino tétrafluorophosphorane) a été effectuée à différentes températures. On obtient les résultats suivants :

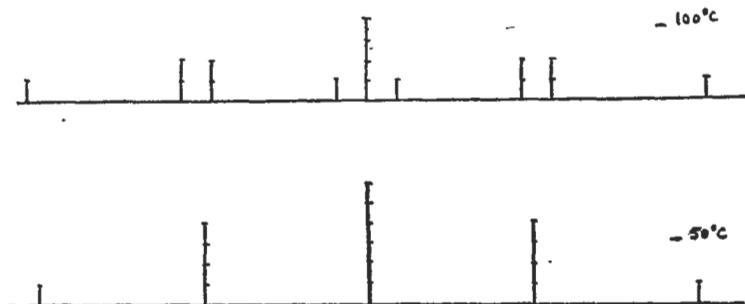


Fig. 1

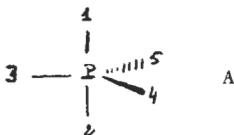
A  $-100^{\circ}\text{C}$ , le spectre se présente sous la forme d'un triplet de triplet ( $J_{\text{P-F}} = 750 \text{ Hz}$ ;  $J_{\text{P-F}'} = 900 \text{ Hz}$ ), et à  $-50^{\circ}\text{C}$ , sous la forme d'un quintuplet.

Justifier l'allure de ces spectres, c'est-à-dire le nombre et l'intensité relatives des raies à  $-100^{\circ}\text{C}$  et à  $-50^{\circ}\text{C}$ .

2. Différents mécanismes ont été proposés pour interpréter la permutation des ligands sans rupture de liaison autour d'une structure B.P.T. Examinons la pseudorotation de BERRY (P.R.B.).

Dans ce mécanisme, un ligand équatorial joue le rôle de *pivot* et ne se déplace pas. Les angles de liaison des quatre autres ligands se déforment, l'ensemble passe par un intermédiaire pyramide à base carrée. Par rotation de  $90^{\circ}$  autour de l'axe du pivot et déformation inverse de la pyramide carrée, on aboutit à une nouvelle B.P.T. dans laquelle les deux ligands axiaux de départ sont devenus équatoriaux.

a) Représenter dans l'espace le passage de l'isomère A à un autre isomère en choisissant la liaison 3—P comme pivot; dessiner cet isomère en disposant verticalement les liaisons axiales et en plaçant en haut le ligand d'indice le plus faible.



Proposer une représentation « de type NEWMAN » de la P.R.B. appliquée à l'isomère A.

b) Dessiner, en utilisant la convention ci-dessus, l'ensemble des isomères que l'on peut obtenir par une seule P.R.B. à partir de l'isomère A.

c) Un mécanisme de type P.R.B. pourrait être appliqué à une structure tétraédrique pour rendre compte d'une inversion de configuration de l'atome central sans rupture de liaison :

- représenter dans l'espace un tel mécanisme;
- indiquer, en justifiant la réponse, si un tel mécanisme est concevable pour le carbone.

### III. RÉACTIONS DE SUBSTITUTION NUCLÉOPHILE SUR LE PHOSPHORE TÉTRACOORDINÉ

Les réactions S.N. sur le phosphore tétracoordiné passent par un intermédiaire pentacoordiné de structure B.P.T. et suivent les règles ci-après :

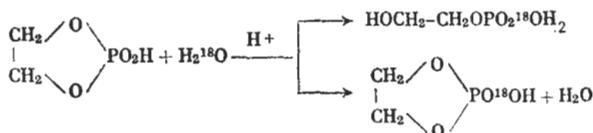
- le réactif nucléophile attaque sur une face du tétraèdre;
- le groupe partant quitte la B.P.T. selon une direction axiale.

1. Dans la substitution nucléophile résultant de l'attaque de N sur la face  $L_1 L_2 L_3$  de  $X P L_1 L_2 L_3$  où X est le groupe partant, montrer qu'au niveau de l'atome de phosphore, la réaction peut avoir lieu soit

avec une inversion de configuration sans P.R.B., soit avec rétention en mettant en jeu 3 P.R.B.

## 2. Hydrolyse de phosphate.

L'hydrolyse de l'éthylène phosphate a été étudiée en milieu acide dans  $H_2^{18}O$ .

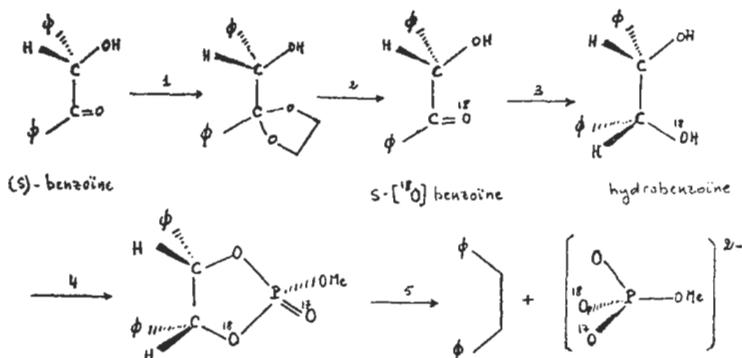


Ecrire, sans considérations stéréochimiques, le mécanisme de formation de chacun des produits.

Sachant que dans une B.P.T. ayant un ligand bidenté, engagé dans un cycle à 5 atomes, celui-ci occupe une position axiale et une position équatoriale, montrer que l'obtention de l'un des deux produits nécessite une P.R.B.

## IV. SYNTHÈSE D'UN PHOSPHATE CHIRAL : MÉTHYL (R) — ( $^{16}O$ , $^{17}O$ , $^{18}O$ ) PHOSPHATE

Pour permettre l'étude de la stéréochimie de la réaction de transfert d'un groupe phosphate, une méthode générale de synthèse des phosphates chiraux vient d'être publiée (1978).



1. Indiquer, pour les étapes 1 et 2, les réactifs utilisés, le mécanisme et les conditions de chaque réaction. Proposer une méthode de préparation de la benzoïne et indiquer une voie d'accès possible à la (S)-benzoïne.

2. L'étape 3 est une étape de réduction effectuée par  $\text{LiAlH}_4$ ; elle conduit au seul composé représenté.

a) Interpréter ce résultat.

b) L'hydrobenzoïne provenant de la réduction de la (S)-benzoïne par  $\text{LiAlH}_4$  présente, en spectrométrie de masse, un ion moléculaire à 214 et deux pics importants à 107 et 108 de structures  $\Phi\text{CHOH}^+$  et  $\Phi\text{CH}_2\text{OH}^+$ . L'hydro-benzoïne ( $^2\text{H}$ ,  $^{18}\text{O}$ ) provenant de la réduction de la (S)-[ $^{18}\text{O}$ ] benzoïne par  $\text{LiAlD}_4$  présente un pic à 217 et quatre pics à 107, 108, 110 et 111.

Déduire de ces résultats que le marquage à  $^{18}\text{O}$  de la (S)-[ $^{18}\text{O}$ ] benzoïne se situe exclusivement sur le carbonyle.

3. Dans l'étape 4, on isole le seul diastéréo-isomère représenté. Ce composé est obtenu par réaction de l'hydro-benzoïne marquée sur  $^{17}\text{O} = \text{PCl}_3$  en présence de pyridine, suivie d'une méthanolyse dans la pyridine.

Ecrire les différentes réactions de l'étape 4. On ne demande pas de justifier la formation d'un seul diastéréo-isomère.

4. L'étape 5 est effectuée par hydrogénolyse ( $\text{H}_2$ -Pd), et le méthyl (R)-[ $^{16}\text{O}$ ,  $^{17}\text{O}$ ,  $^{18}\text{O}$ ] phosphate chiral obtenu est isolé sous forme de sel de sodium. Le spectre de dichroïsme circulaire du sel de sodium est le suivant :

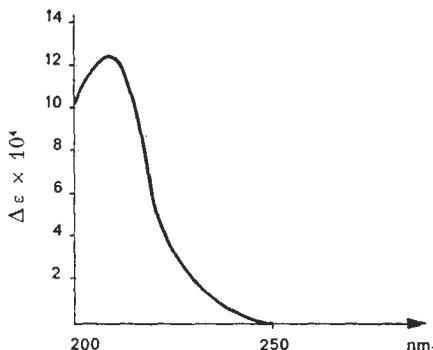


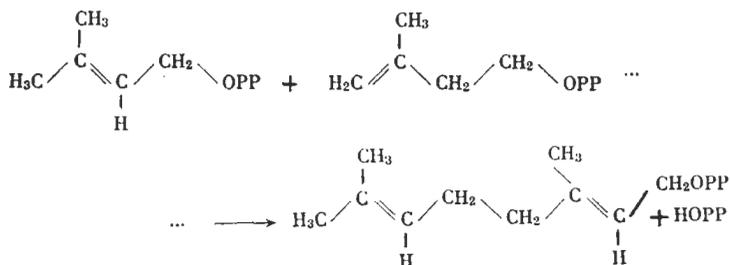
Fig. 2

a) Indiquer brièvement le principe du dichroïsme circulaire et définir la grandeur portée en ordonnée.

b) Calculer  $\Delta \epsilon_{\text{max}}$  pour le sel de sodium chiral optiquement pur sachant que l'oxychlorure de phosphore marqué provient de  $\text{PCl}_3$  qui a réagi avec un équivalent d'eau contenant, pour les atomes d'oxygène :  $^{16}\text{O}$  : 1,8 % ;  $^{17}\text{O}$  : 44 % ;  $^{18}\text{O}$  : 54,2 %.

## V. BIOSYNTHESE DU SQUALÈNE

1° Lors de la biosynthèse du squalène, la construction du squelette carboné est réalisée à partir d'esters diphosphoriques. C'est ainsi que le couplage des deux unités isopréniques ci-après conduit au diphosphate de géranyle.



Deux mécanismes ont été proposés pour ce couplage :

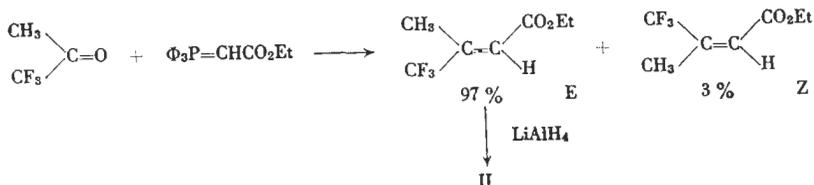
- SN<sub>1</sub> (ionisation - condensation) + élimination ;
- SN<sub>2</sub> + élimination.

Pour choisir entre ces deux mécanismes, des études cinétiques ont été effectuées sur des dérivés de I et de II.



a) Synthèse du E-trifluorométhyl-3 butène-2 ol-1 (II).

Le schéma de synthèse est le suivant :



Ecrire le mécanisme de chacune des étapes.

Pour la réaction de WITTIG, indiquer le mode de préparation du réactif phosphoré et interpréter la formation majoritaire de l'isomère E.

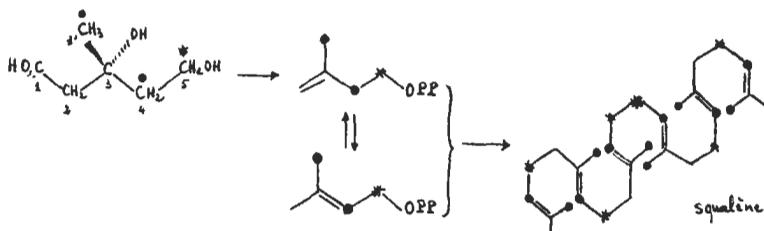
b) Etude cinétique à 20 °C.

Substrat	Réactif	Rapport des constantes de vitesse = $\frac{k_{\text{CF}_3}}{k_{\text{CH}_3}}$
Méthane sulfonate de I Méthane sulfonate de II	eau + acétone 92 % acétone/eau	$1,8 \cdot 10^{-6}$
Chlorure de I Chlorure de II	I- dans l'acétone anhydre	11

Lorsque le diphosphate de II est mis dans les conditions du couplage biologique, il est  $10^6$  fois moins réactif que le diphosphate de I.

Interpréter ces résultats et écrire un mécanisme pour le couplage conduisant au diphosphate de géranyle.

2. Les études de biosynthèse sont maintenant facilitées par l'utilisation de la RMN  $^{13}\text{C}$ . Partant de l'acide mévalonique marqué au  $^{13}\text{C}$  soit sur le carbone 5, soit sur les carbones 3' et 4, on obtient du squalène marqué. Sur le schéma suivant, le double marquage est indiqué :



Indiquer comment s'effectue l'enchaînement des unités isopréniques pour conduire au squalène.

## SOLUTION

---

### A. THERMODYNAMIQUE DES SOLUTIONS

#### I

1. 1.1. Par définition,

$$\mu_1 = \mu^0_1 + RT \ln X_1 \quad \text{et} \quad \mu_2 = \mu^0_2 + RT \ln X_2.$$

1.2. La solution est parfaite si elle vérifie la loi de **RAOULT** :  
 $P_i = P_i^0 X_i$ .

$$\begin{aligned} 1.3. \Delta G_m &= G_{\text{solution}} - G_{\text{initial}} \dots \\ &\dots = \sum_{ni} \mu_i - \sum_{ni} \mu^0_i = \underline{RT [n_1 \ln X_1 + n_2 \ln X_2]}. \end{aligned}$$

1.4. Les relations de la thermodynamique permettent d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\Delta G_m}{T} \right) = - \frac{\Delta H_m}{T^2} = 0$$

$$\dots \text{ soit : } \underline{\Delta H_m = 0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Delta G_m}{\partial P} = \underline{\Delta V_m = 0}.$$

$$1.5. a) \Delta S_m = - \frac{\partial \Delta G_m}{\partial T} = - R (n_1 \ln X_1 + n_2 \ln X_2).$$

b)  $S = k \ln W$ ,  $W$  étant le nombre de complexions.

Pour le mélange,  $S_{12} = k \ln \frac{(N_1 + N_2)!}{N_1! N_2!}$ ,  $N_1$  et  $N_2$  étant les

nombre de molécules. Pour  $S_1$  et  $S_2$  pris à l'état pur (référence) :

$S_1 = S_2 = 0$ , d'où :

$$\begin{aligned} \Delta S_m &= S_{12} - S_1 - S_2 \dots \\ &\dots = k [(N_1 + N_2) \ln (N_1 + N_2) - N_1 \ln N_1 - N_2 \ln N_2] \dots \\ &\dots = - R [n_1 \ln X_1 + n_2 \ln X_2]. \end{aligned}$$

2. 2.1. a) Une molécule  $S_1$  a  $z$  voisins soit une énergie d'interaction de  $\frac{z}{N} \epsilon_{11}$  ( $\epsilon_{11}$  étant relatif à une mole). Pour  $N_1$  molécules, il y a  $\frac{N_1}{2}$  paires, soit :  $H_1 = \frac{N_1}{2} \frac{z}{N} \epsilon_{11} = \frac{1}{2} z n_1 \epsilon_{11}$ .

De même,  $H_2 = \frac{1}{2} z n_2 \epsilon_{22}$ .

$$\begin{aligned}
 b) S_1 \text{ a } z \text{ voisins} &\rightarrow z \frac{n_1}{n_1 + n_2} S_1 \text{ d'où ...} \\
 &\dots \text{ une énergie } \frac{1}{2} z \frac{n_1^2}{n_1 + n_2} \varepsilon_{11} \\
 &\searrow z \frac{n_2}{n_1 + n_2} S_2 \text{ d'où ...} \\
 &\dots \text{ une énergie } \frac{1}{2} z \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \varepsilon_{12}.
 \end{aligned}$$

Le calcul est identique pour  $S_2$  et l'on obtient :

$$H_{12} = \frac{1}{2} z \frac{n_1^2}{n_1 + n_2} \varepsilon_{11} + \frac{1}{2} z \frac{n_2^2}{n_1 + n_2} \varepsilon_{22} + z \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \varepsilon_{12}.$$

$$\begin{aligned}
 c) \Delta H_m &= H_1 + H_2 - H_{12} = z \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \Delta \varepsilon \dots \\
 &\dots \text{ avec : } \Delta \varepsilon = \frac{1}{2} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \varepsilon_{12}.
 \end{aligned}$$

$$2.2. a) \Delta G_m = \Delta H_m - T \Delta S_m \dots$$

$$\dots = RT \left[ z \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \frac{\Delta \varepsilon}{RT} + n_1 \ln X_1 + n_2 \ln X_2 \right]$$

que l'on peut écrire :

$$\Delta G_m = RT \left[ \chi \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} + n_1 \ln X_1 + n_2 \ln X_2 \right]$$

b) On peut tracer :

$$\frac{\Delta G_m}{RT} = \chi X_1 X_2 + X_1 \ln X_1 + X_2 \ln X_2.$$

Si  $\chi < 0$ ,  $\Delta G_m$  est négatif et le mélange est toujours possible (cas sans intérêt). Si  $\chi > 0$ , soit  $\Delta H_m > 0$  (solutions endothermiques), ce cas correspond aux solutions macromoléculaires étudiées par FLORY.  $\Delta G_m$  est négatif si  $\chi < 2,77$ .

## II

$$1.1. \text{ On trouve facilement, } \chi = \frac{V_2}{V_1}.$$

$$1.2. a) \Delta S_m = S_m - S_1 - S_2 \quad \text{avec :} \quad S_m = k \ln \Omega \dots$$

$$\dots = -k \left[ N_1 \ln \frac{N_1}{N_0} + N_2 \ln \frac{x N_2}{N_0} - N_2 f(x, z) \right]$$

$S_1 = 0$ , mais  $S_2 = N_2 f(x, z)$  ( $S_2$  est l'entropie configurationnelle du polymère). On en déduit :

$$\Delta S_m = -k \left[ N_1 \ln \frac{n_1}{n_0} + N_2 \ln \frac{x n_2}{n_0} \right] \text{ soit : } (n_0 = n_1 + x n_2).$$

$$\boxed{\Delta S_m = -k \left[ n_1 \ln \frac{n_1}{n_0} + n_2 \ln \frac{x n_2}{n_0} \right]}$$

b) On calcule :

$$\varphi_1 = \frac{n_1 V_1}{n_1 V_1 + n_2 V_2} = \frac{n_1}{n_1 + x n_2} \dots$$

$$\dots \text{ et } \varphi_2 = \frac{x n_2}{n_1 + x n_2} = \frac{x n_2}{n_0}.$$

L'entropie de mélange peut alors s'écrire :

$$\boxed{\Delta S_m = -R [n_1 \ln \varphi_1 + n_2 \ln \varphi_2]}$$

1.3. Si l'on fait  $x = 1$ , S et P ont la même taille et l'on retrouve  $\varphi_1 = X_1$  et  $\varphi_2 = X_2$ , c'est-à-dire les résultats de I.

2. On avait trouvé,  $\Delta H_m = z \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \Delta \epsilon$ . Comme le polymère renferme  $x$  monomères, il suffit de remplacer  $n_2$  par  $x n_2$ , ce qui conduit à  $\Delta H_m = z \frac{n_1 x n_2}{n_1 + x n_2} \Delta \epsilon = \chi RT n_1 \varphi_2$ .

Ce calcul suppose en fait une approximation : en effet, dans le réseau liquide, un motif monomérique a  $z$  voisins, mais seulement  $z - 2$  molécules du solvant, de sorte que l'on est amené à remplacer  $z - 2$  par  $z$ , ce qui n'est valable que si  $z$  est élevé.

$$3.1. a) \Delta G_m = RT [x n_1 \varphi_2 + n_1 \ln \varphi_1 + n_2 \ln \varphi_2].$$

b) La relation fondamentale  $\Delta S_m = -\frac{\partial \Delta G_m}{\partial T}$  doit

toujours être vérifiée, ce qui entraîne  $\frac{\partial}{\partial T} (\chi T) = 0$  soit  $\chi = \frac{A}{T}$  :

le paramètre d'interaction est inversement proportionnel à  $T$ , dans le modèle du réseau liquide de FLORY.

3.2. a) Par définition, le potentiel chimique est défini par :

$$\mu_i = \left( \frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_j}$$

On en déduit :  $\Delta\mu_1 = \mu_1 - \mu_1^0 = \left( \frac{\partial \Delta G_m}{\partial n_1} \right)_{T, P, n_2}$

Le calcul conduit à :

$$\Delta\mu_1 = RT \left[ \ln \varphi_1 + \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \varphi_2 + x \varphi_2^2 \right]$$

b) Pour une solution diluée,  $\ln \varphi_1 = -\varphi_2 - \frac{\varphi_2^2}{2}$  et

$$\Delta\mu_1 = -RT \left[ \frac{\varphi_2}{x} + (0,5 - x) \varphi_2^2 \right]$$

### III. APPLICATIONS

#### 1. Pression osmotique.

1.1. a) La condition d'équilibre, de part et d'autre de la membrane, se traduit par l'égalité des potentiels chimiques du solvant S, seule substance pouvant diffuser à travers la membrane. L'activité du solvant n'est pas la même dans les deux compartiments (à cause de la présence du polymère dans un seul des compartiments), ce qui entraîne une différence de pression appelée pression osmotique (la température étant la même).

b) L'influence de la pression, sur le potentiel chimique se traduit par  $\frac{\partial \mu}{\partial P} = V_1$ ,  $V_1$  étant le volume molaire partiel du

solvant. Si celui-ci est supposé incompressible, on déduit :  $\mu = V_1 P + \varphi(T)$ , ce que l'on peut écrire :

$$\mu^0(T, P) = \mu^0(T, P_0) + V_1 (P - P_0)$$

pour le solvant pur,  $P_0$  étant la pression de référence ( $P_0 = 1 \text{ atm}$ ).

La condition d'équilibre de S se traduit par :

$$\mu^0(T, P_0) + V_1 (P_1 - P_0) = \mu^0(T, P_0) + V_1 (P_2 - P_0) + RT \ln a,$$

$a$  étant l'activité du solvant en présence du polymère P.

On déduit :

$$\Delta\mu_1 = RT \ln a = -V_1 (P_2 - P_1) = -\pi V_1 \quad \text{soit} \quad \underline{\Delta\mu_1 = -\pi V_1}$$

c) En remplaçant  $\Delta_{\mu_1}$  par son expression trouvée en II, on peut écrire :

$$\pi = \frac{RT}{V_1} \left[ \frac{\varphi_2}{x} + (0,5 - \chi) \varphi_2^2 \right]$$

1.2. a) On a  $C = \frac{m}{V}$  et l'on peut écrire :  $\varphi_2 = \frac{x V_1}{M} C$ .

L'expression de  $\pi$  peut ainsi s'écrire :

$$\pi = RT \left[ \frac{C}{M} + (0,5 - \chi) \frac{x^2}{M^2} V_1 C^2 \right]$$

On tire :

$$A_1 = \frac{1}{M} \quad \text{et} \quad A_2 = (0,5 - \chi) \frac{x^2}{M^2} V_1$$

b) M est proportionnel à  $x$ , donc  $A_2$  ne dépend pas de M, ni de C bien sûr.

1.3. a) On calcule  $\frac{\pi}{C} = RT(A_1 + A_2 c)$ . On peut donc tracer  $\frac{\pi}{C}$  en fonction de C. Dans les trois exemples donnés, on obtient trois droites (ce qui est une vérification expérimentale du modèle choisi) dont l'ordonnée à l'origine est égale à  $\frac{RT}{M}$ .

On trouve :

t, °C	30	40	50
M, g mol <sup>-1</sup>	203 000	203 000	206 000

Ces trois valeurs sont parfaitement cohérentes et nous prendrons :  $M = 204\,000 \text{ g mol}^{-1}$ .

b) Le calcul de la pente de chacune des droites est aisé. On trouve :

$$A_2(30) = -41,7 \cdot 10^{-9} \text{ g}^{-2} \text{ l} \quad A_2(40) = 38,4 \cdot 10^{-9} \text{ g}^{-2} \text{ l} \quad \text{et} \\ A_2(50) = 96,8 \cdot 10^{-9} \text{ g}^{-2} \text{ l}.$$

c) On trace  $A_2$  en fonction de  $t$ . On constate que  $A_2$  s'annule pour  $t = 34^\circ \text{C}$  soit  $\vartheta = 307 \text{ K}$ . Pour cette température,  $\chi = 0,5$ . On calcule  $\chi$  à partir de l'expression :

$$0,5 - x = \frac{A_2}{V_1} \left( \frac{M}{x} \right),$$

$\frac{M}{x} = m$  étant la masse moléculaire de motif styrène (soit 104 g mol<sup>-1</sup>). On trouve :  $x_{30} = 0,504$ ,  $x_{40} = 0,496$  et  $x_{50} = 0,490$ .

On constate que le produit  $xT$  n'est pas constant rigoureusement (153, 155 et 158) : la solution n'est pas rigoureusement régulière, mais l'écart est très faible.

1.4. On peut écrire :  $C = \Sigma C_i$  et  $\pi = RT \Sigma \frac{C_i}{M_i}$ , d'où :

$$\frac{\pi}{C} = RT \frac{\Sigma \frac{C_i}{M_i}}{\Sigma C_i}, \text{ or : } n_i = \frac{m_i}{M_i} \sim \frac{C_i}{M_i} \text{ et l'on peut écrire :}$$

$$\frac{\pi}{C} = RT \frac{\Sigma n_i}{\Sigma n_i M_i} = RT \frac{1}{\bar{M}} \quad \text{avec} \quad \bar{M} = \frac{\Sigma n_i M_i}{\Sigma n_i}$$

## 2. Température critique de démixtion.

2.1. Si  $x = 0$ , la pente de  $\Delta\mu_1$  en fonction de  $\varphi_2$  est constamment négative et il n'y a pas de démixtion.

Par contre, pour  $x = 0,6$ , la dérivée s'annule deux fois : pour  $\varphi_2 = \frac{5}{x}$  et pour  $\varphi_2 = 0,17 - \frac{4,17}{x} \Delta\mu_1$  ayant la même valeur pour deux valeurs de  $\varphi_2$ , il y a démixtion.

2.2. a) Pour  $T = T_C$ , il y a début de démixtion. Si, pour cette température  $T_C$ , on augmente  $x$  (à partir de la valeur 0), la démixtion apparaît à partir du moment où la courbe  $\Delta\mu_1 = f(\varphi_2)$  admet une tangente inflexionnelle horizontale.

b) Il faut traduire :  $\frac{\partial}{\partial \varphi_2} (\Delta\mu_1) = 0$  et  $\frac{\partial^2 (\Delta\mu_1)}{\partial \varphi_2^2} = 0$ ,

ce qui conduit à la valeur critique de  $x$  :

$$\boxed{x_C = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2}$$

c) Si  $x$  devient très grand,  $x_C = 0,5$  et  $T_C$  s'identifie avec la température de FLORY,  $\psi$ .

2.3. a) Pour chaque valeur de  $M$ , il faut calculer  $x = \frac{M}{m}$  ( $m = 104 \text{ g mol}^{-1}$ ) et en déduire ensuite  $\chi_c$ .

On trouve :

$T_C$	293	296	300	303	304
$\chi_c$	0,536	0,528	0,518	0,512	0,510

On trace  $\chi_c$  en fonction de  $T_C$  et par extrapolation, on lit, pour  $\chi_c = 0,5$ , la valeur  $\bar{\theta} = 308 \text{ K}$  (on note le bon accord avec la valeur précédente).

b) La constance du produit  $T_C \chi_c$  montre que la solution est régulière.

#### IV. CHAÎNE MACROMOLÉCULAIRE

1.1.  $dP(s)$  étant une probabilité, il en résulte que :

$$\int_0^{\infty} dP(s) = 4\pi\alpha \int_0^{\infty} s^2 \exp(-\beta^2 s^2) ds = 1 \quad \text{soit} \quad \alpha = \left[ \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \right]^3$$

1.2. a) La distance  $s$  la plus probable correspond au maximum de  $\frac{dP}{ds}$ , soit  $\frac{d^2P}{ds^2} = 0$ . On trouve :  $s = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2x}{3}} l$ .

b) Par définition,

$$\bar{s}^2 = 4\pi\alpha \int_0^{\infty} s^4 \exp(-\beta^2 s^2) ds = \frac{3}{2\beta^2} = x l^2$$

d'où :

$$\boxed{(\bar{s}^2)^{1/2} = l\sqrt{x}}$$

$$2. a) [\eta] = \Phi \frac{\bar{s}^2 3/2}{M} = \Phi l^3 \frac{x 3/2}{M}, \quad \text{or} \quad x = \frac{M}{m}, \quad \text{soit}$$

$$[\eta] = \Phi \frac{l^3}{m^{3/2}} \sqrt{M}. \quad [\eta] \text{ est donc proportionnel à } \sqrt{M}.$$

b) Il suffit de tracer  $[\eta]$  en fonction de  $\sqrt{M}$ . On obtient effectivement une droite d'équation  $[\eta] = 0,088 \sqrt{M}$  avec  $0,088 = \Phi \frac{l^3}{m^{3/2}}$ . On en déduit  $l = 7,0 \text{ \AA}$ .

Cette valeur est nettement supérieure à la distance entre deux carbones consécutifs (1,54 Å).

Il en résulte que, dans la théorie de FLORY, le motif n'est pas nécessairement le monomère de la chaîne macromoléculaire.

## BIBLIOGRAPHIE

« Chimie macromoléculaire » sous la direction de G. CHAMPETIER.

## CHIMIE DE QUELQUES DERIVES PHOSPHORES

## I. SOLUTIONS AQUEUSES D'IONS PHOSPHORIQUES ET POLYPHOSPHORIQUES

1. A pH = 4 :  $\frac{H_2PO_4^-}{H_3PO_4} = \frac{K_1}{H^+} = 126$  ; on peut considérer que la première ionisation de  $H_3PO_4$  est totale à pH  $\geq 4$ .

2. A pH = 7, on obtient le tableau des molarités suivant :

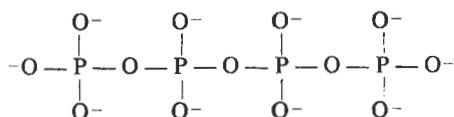
Espèces	$H_4P_2O_7$	$H_3P_2O_7^-$	$H_2P_2O_7^{2-}$	$HP_2O_7^{3-}$	$P_2O_7^{4-}$
Molarités	$1,4 \cdot 10^{-14}$	$1,8 \cdot 10^{-8}$	$5,6 \cdot 10^{-3}$	$8,9 \cdot 10^{-2}$	$5,6 \cdot 10^{-3}$

3.  $PP = H_2O \rightleftharpoons 2P$ .

A pH = 7, les deux espèces majoritaires sont :  $HPO_4^{2-}$  et  $H_2PO_4^-$ .  
 $\frac{HPO_4^{2-}}{H_2PO_4^-} = \frac{10^{-6.8}}{10^{-7}} = 1,58$  ; P/PP grand  $\rightarrow$  tout le phosphore est sous forme phosphorique  $\rightarrow 0,2 = H_2PO_4^- + HPO_4^{2-}$  ; d'où l'on tire :

$$HPO_4^{2-} = 0,12 \text{ M} ; \quad H_2PO_4^- = 0,08 \text{ M}.$$

4. Le spectre RMN du phosphore 31 est celui de l'anion :



5. a)  $[A'] = [A] + [A^-] + \dots \rightarrow [A'] \dots$

$$\dots = [A] \cdot \left[ 1 + \frac{K_{A1}}{H^+} + \frac{K_{A1} K_{A2}}{(H^+)^2} + \dots \right]$$

etc, pour B, C, D,...

$$\rightarrow K' = K \frac{\left(1 + \frac{K_{C_1}}{H^+} + \frac{K_{C_1} \cdot K_{C_2}}{(H^+)^2} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{K_{D_1}}{H^+} + \frac{K_{D_1} \cdot K_{D_2}}{(H^+)^2} + \dots\right)}{\left(1 + \frac{K_{A_1}}{H^+} + \frac{K_{A_1} \cdot K_{A_2}}{(H^+)^2} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{K_{B_1}}{H^+} + \frac{K_{B_1} \cdot K_{B_2}}{(H^+)^2} + \dots\right)}$$

$$b) \quad \Delta G^{\circ}_2 - \Delta G^{\circ}_1 = -RT \left[ \begin{array}{l} \ln \frac{\left(1 + \frac{K_{C_1}}{h_2} + \frac{K_{C_1} K_{C_2}}{h_2^2} + \dots\right) \cdot (\dots)}{\left(1 + \frac{K_{A_1}}{h_2} + \frac{K_{A_1} K_{A_2}}{h_2^2} + \dots\right) \cdot (\dots)} \dots \\ \dots - \ln \frac{\left(1 + \frac{K_{C_1}}{h_1} + \frac{K_{C_1} K_{C_2}}{h_1^2} + \dots\right) \cdot (\dots)}{\left(1 + \frac{K_{A_1}}{h_1} + \frac{K_{A_1} K_{A_2}}{h_1^2} + \dots\right) \cdot (\dots)} \end{array} \right]$$

$$c) \quad \Delta G^{\circ}_{pH} - \Delta G^{\circ}_7 = -RT \ln \frac{\left(1 + \frac{K_{ADP}}{H^+}\right) \cdot \left(1 + \frac{K_2}{H^+} + \frac{K_2 K_3}{(H^+)^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{K_{ATP}}{10^{-7}}\right)}{\left(1 + \frac{K_{ADP}}{10^{-7}}\right) \cdot \left(1 + \frac{K_2}{10^{-7}} + \frac{K_2 K_3}{10^{-14}}\right) \cdot \left(1 + \frac{K_{ATP}}{H^+}\right)}$$

D'où le tableau, où  $\Delta G^{\circ}_{pH}$  est exprimé en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  :

pH	4	5	6	7	8
$\Delta G^{\circ}_{pH}$	-27,3	-27,3	-27,8	-30,6	-35,8

La réaction d'hydrolyse de l'ATP est beaucoup plus importante à  $\text{pH} = 7$  (milieu vivant) qu'à  $\text{pH}$  acide.

## II. PHOSPHORE PENTACOORDINÉ

### A. Stéréochimie statique.

$$1. a) I = n!$$

$$b) I = \frac{n!}{h}$$

2, 3 ligands identiques : 4 isomères achiraux (fig. 1).

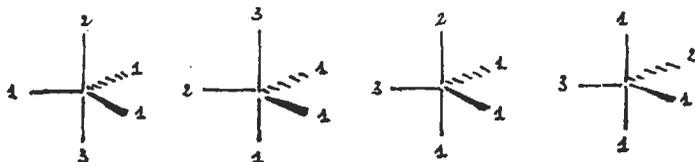


Fig. 1

2 couples de ligands identiques : 4 isomères achiraux (fig. 2 a) et un couple d'énantiomères (fig. 2 b).

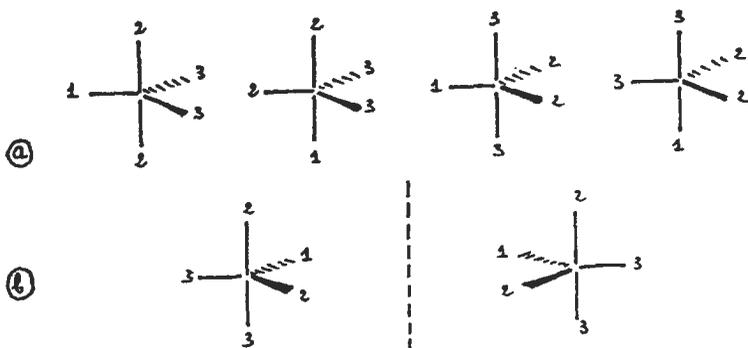


Fig. 2

3. Dans la B.P.T., les liaisons équatoriales ont « un caractère  $sp^2$  » et les liaisons axiales « un caractère  $pd$  ». Ces dernières, caractérisées par une forte densité électronique, assurent donc la liaison avec les atomes les plus électronégatifs. D'où le classement, par stabilité décroissante, des isomères de  $P(CH_3)_2F_3$  (fig.3) :

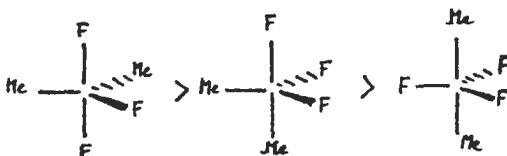


Fig. 3

### B. Stéréochimie dynamique.

1. a) L'existence d'un seul doublet indique que tous les fluorures sont équivalents. Comme cette équivalence ne résulte pas d'une symétrie interne à la molécule, c'est qu'il y a permutation des

ligands à une vitesse telle que la RMN ne voit qu'une position moyenne.

b) La molécule est dessinée à la fig. 4 : A — 100 °C, la molécule est figée :  $^{31}\text{P}$  est couplé avec deux F axiaux  $\rightarrow$  1<sup>er</sup> triplet détriplé par couplage avec 2 F équatoriaux. A — 50 °C : il y a permutation des fluors : P est couplé à 4 F identiques  $\rightarrow$  quintuplet 1 - 4 - 6 - 4 - 1.

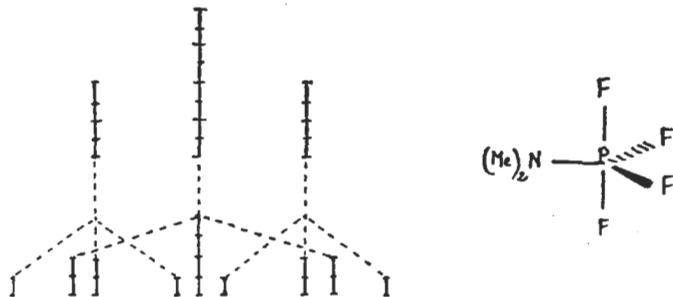


Fig. 4

2. a) On prend la liaison 3—P comme pivot (fig. 5) : on obtient deux isomères par 2 PRB successives.

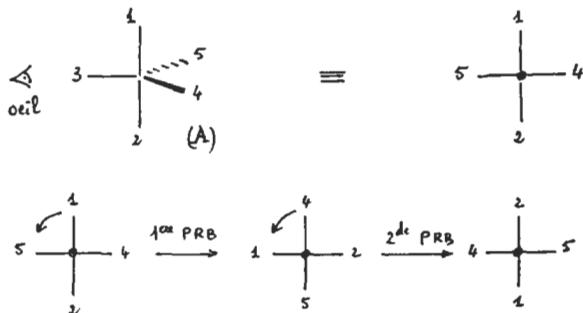


Fig. 5

b) La fig. 6 représente les isomères obtenus, à partir de A, par une seule PRB, soit en prenant 4—P comme pivot (fig. 6 a), soit en prenant 5—P (fig. 6 b).

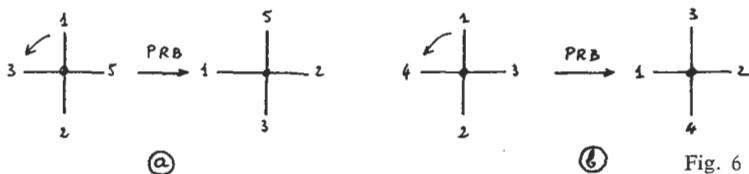


Fig. 6

c) L'inversion de la configuration du carbone, sans rupture de liaison, nécessiterait un passage par une configuration plan-carrée incompatible avec l'absence d'orbitales *d*.

### III. RÉACTIONS DE SUBSTITUTION NUCLÉOPHILE SUR LE PHOSPHORE TÉTRACOORDINÉ

1. La substitution s'accompagne, soit d'une inversion, soit d'une rétention de configuration (fig. 7) .

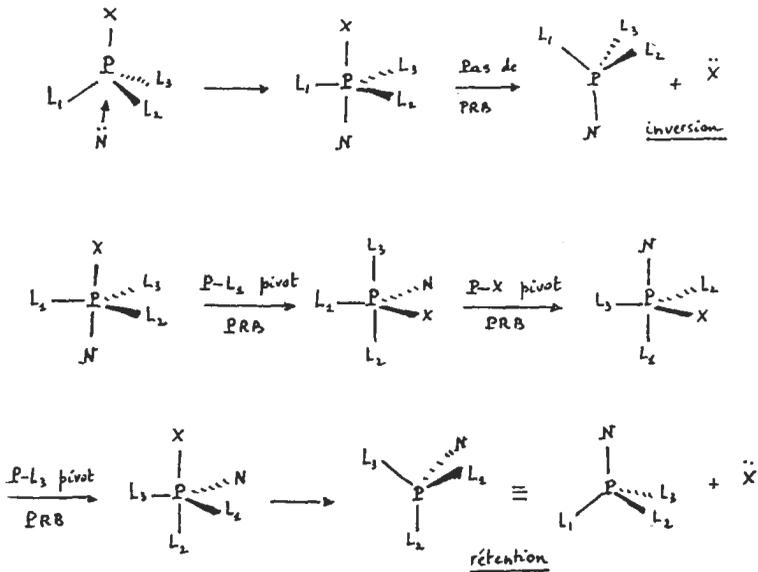
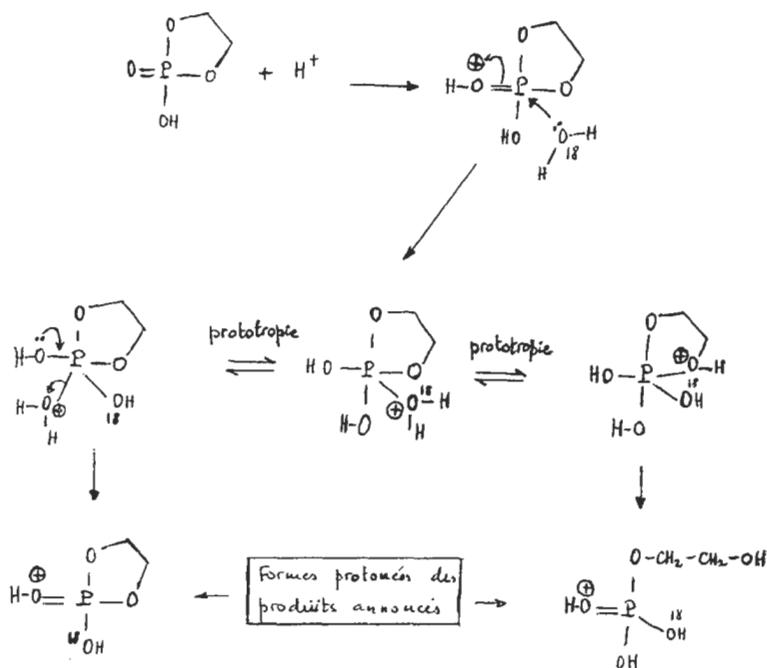


Fig. 7

## 2. Hydrolyse de phosphate.

Mécanisme :



Remarque : L'oxygène  $O = P$  du produit final peut être marqué à  $^{18}O$ .

Stereochimie : Les deux mécanismes passent par la forme protonée (I) de l'éthylène phosphate (fig. 8).

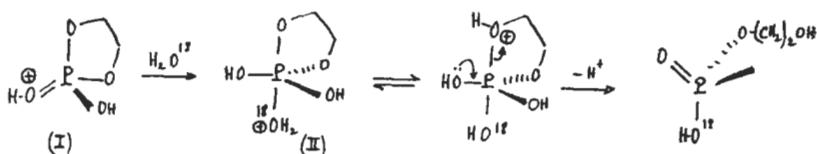


Fig. 8

(II) conduit, par expulsion de  $H_2O^{18}$  en position axiale, au phosphate cyclique non marqué, alors que le produit obtenu est marqué. Il faut donc appliquer une PRB à (II) pour que le substituant portant l'oxygène 18 quitte la position axiale (fig. 9).

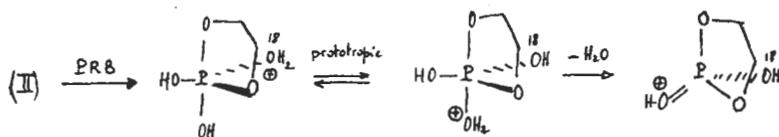


Fig. 9

## IV. SYNTHÈSE D'UN PHOSPHATE CHIRAL :

1. Etape 1 : Blocage classique avec l'éthylène glycol



Etape 2 : C'est l'ouverture acide d'un dioxolanne en milieu  $\text{H}^+/\text{H}_2\text{O}^{18}$ .

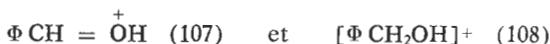
La (S)-benzoïne utilisée est obtenue par dédoublement du mélange d'énantiomères fourni par la réaction du cyanure de potassium sur le benzaldéhyde.

2. a) L'hydrobenzoïne obtenue résulte de l'attaque du carbonyle de la benzoïne, par l'ion  $\text{AlH}_4^-$ , du côté le moins encombré, comme l'indique la fig. 10.



Fig. 10

b) Les pics à 107 et 108 correspondent aux ions :



Ceux à 110 et 111 correspondent à :



Ceci montre que  ${}^2\text{H}$  et  ${}^{18}\text{O}$  sont portés par le même carbone, ce qui exclut la possibilité de benzoïne marquée à  ${}^{18}\text{O}$  sur  $\text{O}-\text{H}$ .

3. Les mécanismes demandés sont classiques et largement traités, à propos de la réactivité des alcools, dans de nombreux ouvrages.

4. a) Voir le dichroïsme dans les ouvrages de physique.

b) Désignons par les indices D et G les circulaires droite et gauche :

$$\epsilon_D = \frac{1}{l \cdot c} \text{Ln} \frac{I_0}{I_D}; \quad \epsilon_G = \frac{1}{l \cdot c} \text{Ln} \frac{I_0}{I_G} \rightarrow \dots$$

$$\dots \Delta\epsilon = \epsilon_D - \epsilon_G = \frac{1}{l \cdot c} \text{Ln} \frac{I_G}{I_D}$$

$$\Delta\epsilon \text{ (mesuré)} = \frac{1}{l \cdot c} \text{Ln} \left( \frac{I_G}{I_D} \right)_{\text{mesuré}} ; \text{ pour le mélange utilisé ici :}$$

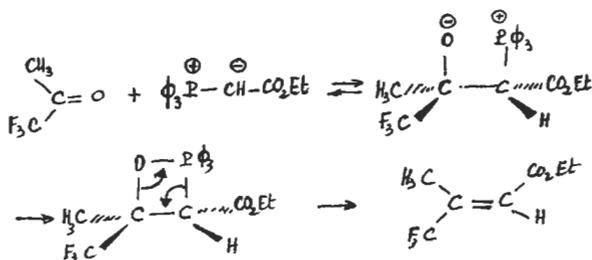
$C = C(\text{chiral}) + C(\text{achiral}) \rightarrow C(\text{chiral}) = kC \quad (k < 1)$ .  
Soit  $\Delta\epsilon$  pour le sel de sodium chiral optiquement pur :

$$\Delta\epsilon = \frac{1}{k \cdot l \cdot c} \text{Ln} \left( \frac{I_G}{I_D} \right)_{\text{mesuré}} = \frac{1}{k} \cdot \Delta\epsilon \text{ (mesuré)} ; \text{ on a } k = 0,44$$

$$\rightarrow \Delta\epsilon = 12,2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{0,44} = 2,77 \cdot 10^{-3}$$

## V. BIOSYNTHESE DU SQUALÈNE

1. a)



Du point de vue stéréochimique, les groupes électro-attracteurs (CF<sub>3</sub> et CO<sub>2</sub>Et) se placent le plus loin possible l'un de l'autre. Pour la préparation du réactif phosphoré, on utilise le mélange triphénylphosphine et bromacétate d'éthyle, puis traitement par une base (soude aqueuse ou NaH).

b) Résultats cinétiques : Le couplage conduisant au diphosphate de géranyle s'effectue vraisemblablement par un mécanisme SN<sub>1</sub>.

2. Le double marquage montre :

- Un enchaînement tête-queue :  $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ isoprène} + 1 \text{ isoprène} \rightarrow \text{géranyle} ; \\ 1 \text{ géranyle} + 1 \text{ isoprène} \rightarrow \text{farnésyle} . \end{array} \right.$
- Puis un enchaînement queue-queue : 2 farnésyles  $\rightarrow$  1 squalène.

J.-C. DEPEZAY (Université Paris),  
R. DIDIER (Lycée Thiers, Marseille),  
C. DUFOUR (Rectorat, Paris),  
G. FONTAINE (Lycée Charlemagne, Paris).

# Agrégation

SESSION DE 1979

---

## OPTION PHYSIQUE APPLIQUEE

Epreuve C

### PROBLEME D'ELECTRICITE, D'ELECTRONIQUE, D'ELECTROTECHNIQUE ET D'AUTOMATIQUE

(Durée : 6 heures)

---

*Matériel* : 4 feuilles de papier calque.

Le sujet aborde l'étude générale d'une boucle à verrouillage de phase. Les applications concernent surtout la démodulation d'une onde modulée en fréquence.

Le problème comporte 4 parties :

- I. *Détecteur de phase* : deux types de détecteurs sont étudiés.
- II. *Fonctionnement en petits signaux.*
- III. *Fonctionnement en grands signaux, pour une boucle de premier ordre, puis pour une boucle de second ordre, et un détecteur à caractéristique triangulaire.*
- IV. *Influence des imperfections des éléments constitutifs du filtre, pour une boucle fonctionnant en petits signaux ou en grands signaux.*

*Les quatre parties sont largement indépendantes ; toutefois les concepts traités dans l'ensemble du problème, ainsi que la terminologie utilisée sont définis dans la première et la seconde partie.*

*Les notations de l'énoncé devront impérativement être respectées.*

Une grandeur quelconque, de valeur instantanée  $y_E$ , faisant apparaître une valeur de référence  $Y_E$  et une variation  $y_e$ , sera notée :

$$y_E = Y_E + y_e.$$

Les transformées de Laplace seront notées avec des majuscules à indices minuscules ; exemple :

$$Y_e(p) = \text{Lap}[y_e(t)]$$

$p$  étant la variable complexe qui apparaît dans les fonctions de transfert des systèmes étudiés, la variable complexe normalisée, égale à

$$\frac{p}{\omega_n}, \text{ sera notée } s.$$

Dans tout le problème,  $u(t)$  désigne la fonction échelon unité, égale à zéro pour  $t < 0$ , à 1 pour  $t > 0$ .

On pourra éventuellement utiliser le formalisme de la distribution de Dirac :

$$\delta(t) = 0 \text{ si } t \neq 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = 1; \quad \delta(t) \text{ dérivée de } u(t)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{a} \cdot \delta(t) \text{ si } a > 0; \quad t \cdot \delta(t) = 0$$

Une boucle à verrouillage de phase comprend (fig. 1) :

- un détecteur de phase (D.P.) qui, s'il était parfait, élaborerait en toutes circonstances une tension proportionnelle à la différence des phases instantanées de ses entrées;
- un filtre (F) jouant le rôle de réseau correcteur;
- un oscillateur commandé par tension (O.C.T.), dont la fréquence instantanée de sortie varie proportionnellement à la tension issue du filtre. (Dans ce problème, on ne se préoccupera pas des limitations à cette proportionnalité.)

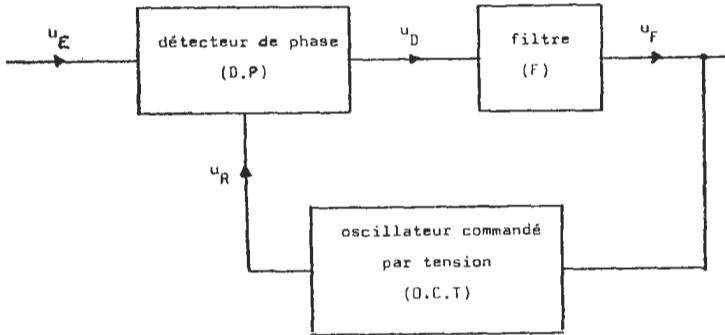


Fig. 1

On posera :

$$u_E = U_E \cdot \sin [\omega_0 t + \varphi_E(t)]$$

$$u_R = U_R \cdot \cos [\omega_0 t + \varphi_R(t)]$$

$$\varphi_{ER}(t) = \varphi_E(t) - \varphi_R(t).$$

L'oscillateur commandé en tension est tel que :

$$\frac{d\varphi_R}{dt}(t) = K_0 \cdot u_f$$

avec  $u_f = U_F + u_j$ .

Quand la boucle est « verrouillée », la différence  $\varphi_E(t) - \varphi_R(t)$  est constante ; les fréquences de  $u_E$  et de  $u_R$  sont donc égales.

Le point de repos est tel que la pulsation de l'oscillateur vaut  $\omega_0$  quand les tensions de sortie du détecteur de phase et du filtre F valent respectivement  $U_D$  et  $U_F$ .

On rappelle que la pulsation instantanée de  $x = X \cdot \cos [\beta(t)]$  est  $\frac{d[\beta(t)]}{dt}$ .

Sauf précision contraire, on supposera les conditions initiales (à  $t = 0^-$ ) nulles.

## I. DETECTEUR DE PHASE

I.1. Un premier type de détecteur (fig. 2) comporte un dispositif réalisant la multiplication des deux tensions d'entrée ( $u'_D = k_d \cdot u_E \cdot u_R$ ), suivi d'un filtre passe-bas tel que seules les composantes à basse fréquence (c'est-à-dire de pulsations très inférieures à  $\omega_0$ ) issues de  $u'_D$  composent le signal  $u_D$ .

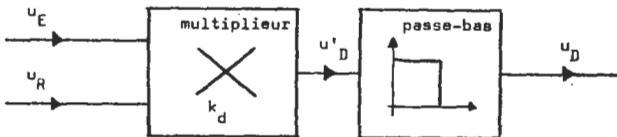


Fig. 2

La constante  $k_d$  est positive.

I.1.1. Exprimer  $u_D$  en fonction de  $U_E$ ,  $U_R$ ,  $\varphi_{ER}$  et  $k_d$ .

Tracer, pour  $\varphi_{ER}$  quelconque, la courbe représentative de la fonction  $\varphi_{ER} \rightarrow u_D = f(\varphi_{ER})$  lorsque  $\varphi_{ER}$  est constante.

Ce type de détecteur est appelé « à caractéristique sinusoïdale » ; pourquoi ?

I.1.2. Citer un montage permettant de réaliser ce type de détecteur

I.2. Un second type de détecteur constitué par :

— un dispositif de mise en forme qui transforme les tensions  $u_E(t)$  et  $u_R(t)$  :

$$v_E(t) = V_E \cdot \text{sign} [u_E(t)]$$

$$v_R(t) = V_R \cdot \text{sign} [u_R(t)]$$

par exemple (fig. 3) :

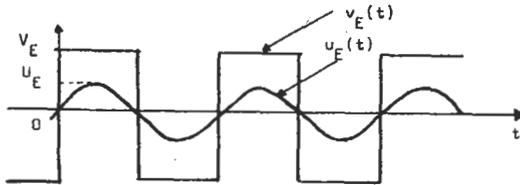


Fig. 3

— un multiplieur suivi d'un filtre passe-bas (fig. 4), comme pour le détecteur de phase décrit à la question I.1.

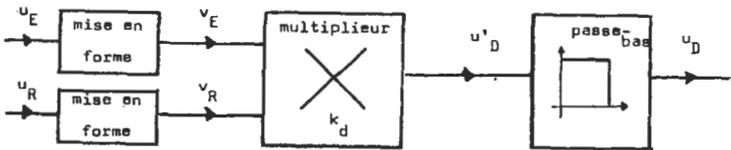


Fig. 4

I.2.1. Citer un dispositif permettant de réaliser la mise en forme.

I.2.2. Donner, pour  $-\frac{\pi}{2} < \varphi_{ER} < +\frac{\pi}{2}$ , l'expression de  $u_D$

lorsque  $\varphi_{ER}$  est constante, en fonction de  $V_E$ ,  $V_R$ ,  $k_d$ , et  $\varphi_{ER}$ .

I.2.3. Tracer, pour  $\varphi_{ER}$  quelconque, la courbe représentative de la fonction  $\varphi_{ER} \rightarrow u_D = f(\varphi_{ER})$ , lorsque  $\varphi_{ER}$  est constante.

Ce type de détecteur est appelé « à caractéristique triangulaire » ; pourquoi ?

I.3. Dans toute la suite du problème, on désignera par domaine A le domaine de définition de la variable  $\varphi_{ER}$  constitué par la réunion

de l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$  et de ceux qui s'en déduisent par des translations égales à un nombre entier de fois  $2\pi$ .

De même le domaine B sera constitué par la réunion des intervalles :

$$\left[+\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right], \dots \left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$$

On utilisera en outre le changement de variable suivant :

Dans le domaine A,  $x = \varphi_{ER}$ , modulo  $2\pi$ .

Dans le domaine B,  $x = \varphi_{ER} - \pi$ , modulo  $2\pi$ .

Le domaine de définition de  $x$  est donc  $\left[ -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$

(Pour  $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi_{ER} \leq \frac{5\pi}{2}$ , on a par exemple :  $x = \varphi_{ER} - 2\pi$ , tandis que pour  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi_{ER} \leq \frac{3\pi}{2}$ ,  $x = \varphi_{ER} - \pi$ .)

I.3.1. Pour un détecteur à caractéristique triangulaire, montrer que :

- dans le domaine A, on a  $u_D = K_d \cdot x$ ,
- dans le domaine B, on a  $u_D = -K_d \cdot x$ .

Exprimer  $K_d$  en fonction de  $k_d$ ,  $V_E$  et  $V_R$ .

I.3.2. Pour un détecteur à caractéristique sinusoïdale, montrer que l'on a des relations du même type, à condition que  $|x| \ll \frac{\pi}{2}$ .

I.3.3. On supposera que les relations précédentes sont encore valables lorsque  $\varphi_{ER}$  est une fonction du temps de la forme  $\varphi_{ER}(t) = \delta\omega \cdot t$  pourvu que  $\delta\omega \ll \omega_0$ .

Estimer la fréquence de coupure du filtre passe-bas du détecteur de phase pour qu'il en soit ainsi lorsque  $\delta\omega = 2\pi \cdot 10^5$  rad/s et

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 10,7 \text{ MHz.}$$

## II. FONCTIONNEMENT EN PETITS SIGNAUX

Dans toute cette partie, on considère que :

- avec un détecteur à caractéristique triangulaire,  $|\varphi_{ER}| < \frac{\pi}{2}$ .
- avec un détecteur à caractéristique sinusoïdale,  $|\varphi_{ER}| \ll \frac{\pi}{2}$ .

On considère donc un fonctionnement de la boucle en petits signaux.

Le point de repos choisi est caractérisé par  $U_D = 0$ .

II.1. La fonction de transfert du filtre est notée  $F(p)$ .

II.1.1. Donner, en fonction de  $F(p)$ ,  $K_0$  et  $K_d$ , l'expression des fonctions de transfert :

$$T(p) = \frac{\Phi_{er}}{\Phi_e} \quad \text{et} \quad H(p) = \frac{U_f}{\Phi_e}$$

On posera  $K = K_0 \cdot K_d$ .

Dessiner un schéma général de la boucle où ne figurent que les variables  $\Phi_e$ ,  $\Phi_r$ ,  $\Phi_{er}$  et  $U_f$ .

Montrer que les fonctions de transfert  $T(p)$  et  $H(p)$  ont un ordre supérieur de une unité à celui de  $F(p)$ .

II.1.2. Déterminer les erreurs de phase en régime permanent,  $\varphi_{ER}(\infty)$ , pour les entrées suivantes :

$$\varphi_{E1}(t) = \Delta\Phi \cdot u(t)$$

$$\varphi_{E2}(t) = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t)$$

$$\varphi_{E3}(t) = \gamma \cdot t^2 \cdot u(t).$$

A quelle(s) condition(s) doit obéir la fonction de transfert  $F(p)$  pour que l'erreur  $\varphi_{ER}(\infty)$  soit nulle :

- a) Pour l'entrée  $\varphi_{E1}(t)$ ,
- b) Pour les entrées  $\varphi_{E1}(t)$  et  $\varphi_{E2}(t)$ ,
- c) Pour les entrées  $\varphi_{E1}(t)$ ,  $\varphi_{E2}(t)$  et  $\varphi_{E3}(t)$  ?

II.1.3. Montrer que les filtres les plus simples conduisant à des erreurs  $\varphi_{ER}(\infty)$  nulles, et pouvant faire partie d'un système stable, pour les entrées a), b), c) de la question précédente sont :

— une liaison directe, c'est-à-dire  $F(p) = 1$  dans le cas a),

— un filtre « à action proportionnelle et intégrale » (« P.I. ») tel que

$$F(p) = a + \frac{A}{p} \text{ dans le cas b),}$$

— un filtre tel que  $F(p) = a + \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2}$  dans le cas c).

II.2. La fonction de transfert du filtre est  $F(p) = 1$ ; la boucle est donc du premier ordre.

II.2.1. Montrer que les grandeurs  $\varphi_{ER}$  et  $\varphi_E$  sont liés par l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{d\varphi_{ER}}{dt} + K \cdot \varphi_{ER} = \frac{d\varphi_E}{dt}.$$

Exprimer  $K$  en fonction de  $K_d$  et  $K_0$ .

Écrire de même l'équation différentielle vérifiée par  $u_F(t)$ .

II.2.2. Déterminer les réponses  $\varphi_{ER1}$  et  $\varphi_{ER2}$  respectivement aux entrées suivantes :

$$\varphi_{E1}(t) = \Delta\Phi \cdot u(t)$$

$$\varphi_{E2}(t) = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t).$$

Préciser dans les deux cas la valeur de l'erreur de phase en régime permanent  $\varphi_{ER}(\infty)$ .

II.2.3. Soit la nouvelle variable d'entrée  $\omega_E(t) = \frac{d\varphi_E(t)}{dt}$ .

a) Montrer que la fonction de transfert  $\frac{U_f(p)}{\Omega_e(p)}$  est la

même (à une constante multiplicative près) que celle du filtre passe-bas dessiné ci-après (fig. 5) :

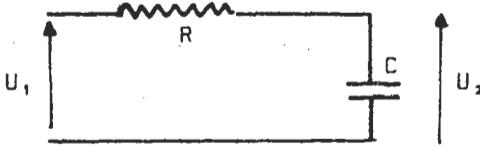


Fig. 5

b) La variation de fréquence  $\omega_E(t)$  de  $u_E(t)$  est proportionnelle à un signal modulant  $s(t)$  dont le spectre occupe la bande  $(0, f_M = 5 \text{ kHz})$ .

On a :  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 10,7 \text{ MHz}; \quad K = 1,4 \cdot 10^6 \text{ rad/s.}$

Montrer que la boucle à verrouillage de phase constitue un bon démodulateur de fréquence. (On s'attachera à démontrer que le signal de sortie  $u_F(t)$  n'est pas déformé par rapport à  $s(t)$ ).

c) Comparer les pulsations de coupure des filtres passe-bas successifs que sont : le filtre du détecteur, la boucle elle-même lorsque l'entrée en est  $\omega_E(t)$ , et le filtre que l'on place toujours à sa suite pour isoler le signal utile, lorsqu'elle est utilisée en démodulateur de fréquence. Commenter brièvement.

II.3. La fonction de transfert du filtre est :  $F(p) = a + \frac{A}{p}$ ; la

boucle est donc du second ordre. Les coefficients  $a$  et  $A$  sont des constantes positives.

II.3.1. Déterminer les équations différentielles liant les grandeurs  $\varphi_{ER}$  et  $\varphi_E$  d'une part,  $u_F$  et  $\varphi_E$  d'autre part.

II.3.2. Quelles sont les erreurs de phase en régime permanent,  $\varphi_{ER1}(\infty)$ ,  $\varphi_{ER2}(\infty)$ , et  $\varphi_{ER3}(\infty)$  pour des entrées :

$\varphi_{E1}(t) = \Delta\Phi \cdot u(t)$ ,  $\varphi_{E2}(t) = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t)$  et  $\varphi_{E3}(t) = \gamma \cdot t^2 \cdot u(t)$  ?

II.3.3. En considérant que la grandeur d'entrée est :

$$\omega_E(t) = \frac{d\varphi_E(t)}{dt}$$

montrer que les fonctions de transfert  $H'(p) = \frac{U_f}{\Omega_e}$  et  $T'(p) = \frac{\Phi_{er}}{\Omega_e}$

sont respectivement celles d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-bande.

Normaliser ces fonctions de transfert en posant :  $\omega_n^2 = A \cdot K$ .

Montrer que l'on obtient en particulier :  $T' = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{s}{s^2 + 2ms + 1}$ .

II.3.4. On choisit les valeurs numériques suivantes :

$m = 0,5$ ;  $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 225$  kHz;  $K_0 = 10^6$  Hz/V;  $K_D = 2$  V/rad.

Déterminer A et a.

Tracer, en amplitude seulement, les diagrammes de Bode de  $H'(s)$  et de  $T'(s)$ .

II.3.5. Le signal modulant,  $s(t) = a \cdot \cos(\omega_m \cdot t)$  a une fréquence maximale  $f_M$  égale à 5 kHz.

Justifier l'expression correspondante de  $\varphi_E(t)$ , qui est la phase du signal modulé  $u_E(t)$  reçu à l'entrée de la boucle :

$$\varphi_E(t) = \frac{\Delta\omega_e}{\omega_m} \cdot \sin(\omega_m \cdot t).$$

Quelle doit être l'excursion maximale de fréquence :

$$(\Delta f_e)_{\max} = \frac{(\Delta\omega_e)_{\max}}{2\pi}$$

correspondant à la fréquence  $f_M$ , qui permet d'obtenir une tension  $u_D(t)$  d'amplitude 1 V à la sortie de la boucle ?

Evaluer la largeur spectrale occupée, dans ces conditions, par  $u_E(t)$ .

Quelle est l'amplitude de l'erreur de phase correspondante ?

### III. FONCTIONNEMENT EN GRANDS SIGNAUX

On s'intéresse maintenant au comportement d'une boucle pour des signaux d'entrée pouvant conduire à des valeurs  $\varphi_{ER}$  telles que

$$|\varphi_{ER}| > \frac{\pi}{2}.$$

III.1. La boucle est du premier ordre; le détecteur est à caractéristique triangulaire.

Le filtre est une simple connexion :  $F(p) = 1$ .

III.1.1. Montrer que, dans le domaine A, pour une entrée  $\varphi_E(t)$  nulle et un coefficient K positif, les points  $x = 0, \frac{dx}{dt} = 0$  sont des points d'équilibre stables. Montrer par contre que dans le domaine B, dans les mêmes conditions, les points  $x = 0, \frac{dx}{dt} = 0$  sont des points d'équilibre instable.

(On rappelle que les domaines A et B ont été définis à la question I.3. et le coefficient K à la question II.2.).

III.1.2. On se propose de représenter, dans le plan  $\varphi_{ER}$ ,  $y = \frac{d\varphi_{ER}}{dt}$  (plan de phase), l'état de l'erreur  $\varphi_{ER}(t)$  accompagnant divers types d'entrées  $\varphi_E(t)$ , avec  $K > 0$ . On portera  $\varphi_{ER}$  en abscisses et y en ordonnée.

Quelle est, pour  $\varphi_E(t) = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t)$  la nature des trajectoires de phase dans les domaines A et B ?

Dans quel sens ces trajectoires sont-elles décrites ?

En application numérique, tracer les trajectoires correspondant à :

$$\varphi_{E1}(t) = \frac{K\pi}{4} \cdot t \cdot u(t); \quad \varphi_{E2}(t) = \frac{3K\pi}{4} \cdot t \cdot u(t)$$

avec  $K > 0$ , sachant que dans les deux cas  $\varphi_{ER}(0^-) = 0$ .

Dans le deuxième cas, on dit que l'acquisition n'est pas réalisée.

Quelle est, en fonction de K, la plus forte variation de fréquence  $\Delta f$  qui, dans le cas d'une entrée en échelon de fréquence, permette l'acquisition ?

Calculer  $\Delta f$  pour  $K = 1,4 \cdot 10^6$  rad/s.

III.1.3. On considère une entrée (fig. 6) définie par :

$$\varphi_E(0^-) = 0, \quad \frac{d\varphi_E}{dt} = \Delta\omega \cdot [u(t) - u(t - T)]$$

On prendra :  $\Delta\omega = K\pi$  avec  $K > 0$ .

a) Tracer les trajectoires du point représentatif de l'état de la boucle dans les deux cas suivants :

$$\frac{\pi}{2} < \varphi_{ER}(T) < \pi; \quad \pi < \varphi_{ER}(T) < \frac{3\pi}{2}$$

Dans les deux cas, on prendra  $\varphi_{ER}(0^-) = 0$ .

b) Calculer, dans le cas  $\pi < \varphi_{ER}(T) < \frac{3\pi}{2}$ , la date  $T'$  à laquelle  $\varphi_{ER}(T') = \pi$ .

Application numérique :  $K = 1,4 \cdot 10^6$  rad/s.

c) Dédire des trajectoires dans le plan de phase, dans les deux cas, la forme de la tension de sortie  $u_F(t)$ .

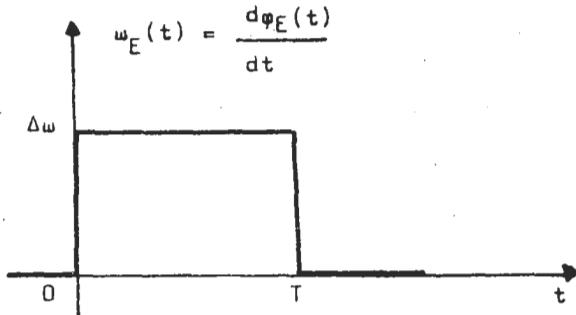


Fig. 6

N.B. — On peut, sur le plan de phase, superposer la courbe représentative de la fonction  $\varphi_{ER} \rightarrow u_F(\varphi_{ER})$ .

On indiquera la date  $T$  sur les courbes représentatives de  $u_{F1}(t)$  et  $u_{F2}(t)$ .

d) Compte tenu des spectres prévisibles de  $u_{F1}(t)$  et de  $u_{F2}(t)$ , montrer que le filtre passe-bas qui suit la boucle à verrouillage de phase donnera un signal de sortie beaucoup plus important

dans le cas où  $\frac{\pi}{2} < \varphi_{ER}(T) < \pi$  que celui qu'on obtiendra si

$$\pi < \varphi_{ER}(T) < \frac{3\pi}{2}.$$

III.1.4. Les entrées  $\varphi_E(T)$  ayant la forme envisagée précédemment constituent en réalité une forme de bruit gênante. On désire en éliminer les effets au niveau du filtre de sortie, donc se placer dans

le cas où :  $\pi < \varphi_{ER}(T) < \frac{3\pi}{2}$ .

Montrer que si toutes les entrées de bruit perturbatrices  $\varphi_E(t)$  avaient la même configuration caractérisée par  $\Delta w$  et  $T$ , il faudrait pour éliminer le bruit du démodulateur, que la constante  $K$  soit inférieure à une certaine valeur  $K_1$  que l'on ne cherchera pas à déterminer.

*Application numérique* : Montrer que pour  $K = 1,4 \cdot 10^6$  rad/s,  $\Delta\omega = 10^6 \pi$  rad/s et  $T = 2 \cdot 10^{-6}$  s, la condition précédente est réalisée.

III.1.5. La condition précédente étant réalisée, montrer que si l'état de repos de la boucle, avant arrivée de l'impulsion de fréquence, est caractérisé par  $\varphi_{ER}(0^-) \neq 0$ , plus particulièrement si  $\varphi_{ER}(0^-)$  est de signe contraire à celui de  $\Delta\omega$ , le bruit à la sortie du démodulateur ne sera pas éliminé.

III.2. La boucle est du deuxième ordre ; le détecteur est à caractéristique triangulaire. Le filtre est du premier ordre :  $F(p) = a + \frac{A}{p}$ .

III.2.1. Ecrire, pour les domaines A et B, l'équation différentielle reliant  $x(t)$  et  $\varphi_E(t)$ . (On rappelle que la variable  $x$  a été définie à partir de  $\varphi_{ER}$  à la question I.3.)

Normaliser ces équations en effectuant le changement de variable défini par :

$$\tau = \omega_n \cdot t \left( \text{correspondant à } s = \frac{p}{\omega_n} \right)$$

On conservera des notations analogues à celles de la question II.3. ; le facteur d'amortissement, notamment, sera noté  $m$ .

III.2.2. On se propose d'étudier, dans le plan de phase, les trajectoires du point représentatif de l'état de la boucle, pour des entrées en échelon de fréquence telles que  $\varphi_E(t) = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t)$ .

On pose pour cela :  $y = \frac{dx}{d\tau}$  et on considère le plan  $x, y$ .

a) Ecrire, pour  $\tau > 0$  les équations vérifiées par  $y(\tau)$  et  $x(\tau)$ .

Montrer que dans chacun des domaines A et B, les isoclines, c'est-à-dire les points des trajectoires  $y = f(x)$  ayant même pente,

$q = \frac{dy}{dx}$  sont des droites concourantes.

b) Montrer que l'on peut restreindre le domaine de définition de  $\varphi_{ER}$  à  $\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ , à condition de reprendre en  $\varphi_{ER} = -\frac{\pi}{2}$  toute trajectoire parvenue à  $\varphi_{ER} = \frac{3\pi}{2}$ , et de conserver en  $\varphi_{ER} = -\frac{\pi}{2}$  l'ordonnée de  $\varphi_{ER} = \frac{3\pi}{2}$ .

Montrer que dans le domaine B il existe toujours deux isoclines qui constituent elles-mêmes des trajectoires possibles, alors que ce n'est pas toujours le cas dans le domaine A.

c) On suppose que  $\varphi_{ER}(0^-) = 0$  et que  $y(0^-) = 0$ .

En déduire, pour les entrées  $\varphi_E(t)$  définies plus haut, la valeur de  $y(0^+)$  en fonction de  $\Delta\omega$  et de  $\omega_n$ .

III.2.3. L'annexe I donne, aux nœuds d'un réseau de maille élémentaire  $\frac{\pi}{10}$ , la direction des trajectoires de phase qui passent par ces points (on a choisi  $m = 0,5$ ).

a) Montrer que le point  $\varphi_{ER} = 0, y = 0$  est un point d'équilibre stable, tandis que le point  $\varphi_{ER} = \pi, y = 0$  est un point d'équilibre instable.

Utiliser l'annexe I pour tracer les trajectoires correspondant à :  $\varphi_E(t) = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t)$  avec  $\Delta\omega_1 = 0,9 \pi\omega_n$  puis  $\Delta\omega_2 = 1,1 \pi\omega_n$ .

Qu'en déduisez-vous ?

Esquisser  $u_{D2}(t)$ .

b) Comment se traduit, dans le plan de phase ( $\varphi_{ER}, y$ ) la réponse à une entrée du type :

$$\frac{d\varphi_E}{dt} = \Delta\omega \cdot [u(t) - u(t - T)] ?$$

Application :

$$\Delta\omega = 1,1 \omega_n; \quad \varphi_{ER}(0^-) = 0; \quad T \text{ tel que } \varphi_{ER}(T) = \frac{4\pi}{3}.$$

III.2.4. Quels avantages cette boucle présente-t-elle par rapport à une boucle d'ordre un ?

Quelle méthode proposeriez-vous pour étudier directement  $u_F(t)$  ?

#### IV. INFLUENCE DES IMPERFECTIONS DES ELEMENTS CONSTITUTIFS DU FILTRE F

IV.1. On cherche à réaliser une fonction de transfert du type

$$F(p) = a + \frac{A}{p}.$$

Montrer que le montage ci-après (fig. 7), dans lequel les amplificateurs utilisés seraient parfaits, permettrait d'obtenir le résultat cherché.

Application numérique : Sachant que  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ , calculer  $R_2$

et C pour avoir  $F(p) = \frac{U_f}{U_d}$  tel que  $A = 10^6 \text{ rad/s}$  et  $a = 0,7$ .

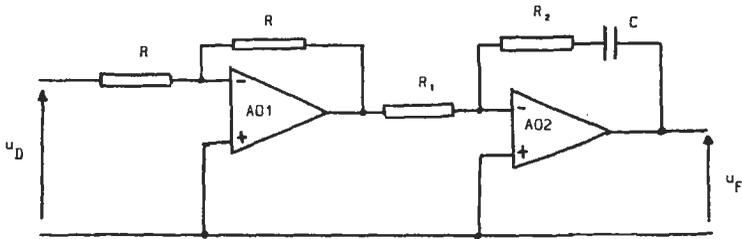


Fig. 7

IV.2. En fait, on réalise le montage ci-après (fig. 8) :

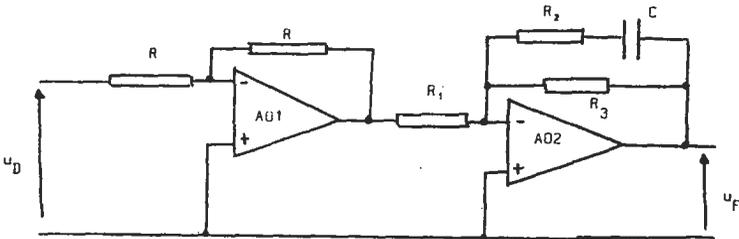


Fig. 8

Pour quelle(s) raison(s) ?

Préciser pour ce filtre, la fonction de transfert  $\frac{U_f}{U_d}$  ?

Montrer qu'elle peut être mise sous la forme :

$$F(p) = B \cdot \frac{1 + b_1 \cdot p}{1 + b_2 \cdot p}$$

IV.3. On utilise le montage de la question IV.2.

L'amplificateur opérationnel AO1 est supposé parfait. On prend comme modèle de l'amplificateur opérationnel AO2 le schéma ci-après (fig. 9), dans lequel  $i_d$  et  $e_d$  sont les courant et tension de décalages, non corrélés.

IV.3.1. Exprimer  $U_f$  en fonction de  $U_d$ ,  $E_d$ ,  $I_d$  et  $F(p)$ .

IV.3.2. Dans le schéma général de la boucle à verrouillage de phase, faire apparaître les entrées  $E_d$  et  $I_d$  comme des perturbations.

Exprimer  $\Phi_{er}$  en fonction de  $\Phi_e$ ,  $E_d$  et  $I_d$ .

En déduire l'erreur de phase en régime permanent, due à des entrées  $\varphi_E(t)$ ,  $i_d$  et  $e_d$  telles que :

$$\frac{d\varphi_E}{dt} = \Delta\omega; \quad i_d(\infty) = I_D; \quad e_d(\infty) = E_D.$$

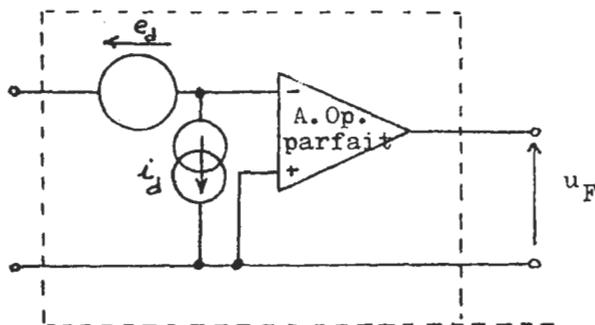


Fig. 9

Mettre cette erreur sous la forme :

$$\varphi_{ER}(\infty) = \varphi_{ER1}(\Delta\omega) + \varphi_{ER2}(E_D, I_D).$$

IV.3.3. Le constructeur indique :

$$|i_d|_{\max} = 1 \text{ nA}; \quad |e_d|_{\max} = 100 \text{ } \mu\text{V}.$$

On choisit  $R_1 = 10^3 \text{ } \Omega$  et  $K_0 = 10^6 \text{ rad/s/V}$ .

Calculer la valeur maximale de B qui, pour une excursion de pulsation  $\Delta\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ , conduit à un rapport :

$$|\varphi_{ER2}(E_d, I_d)/\varphi_{ER1}(\Delta\omega)|$$

toujours inférieur à 1/10.

On choisit  $B = 2,8$ .

IV.3.4. Quelle doit être la valeur minimale de  $K_d$  pour que l'erreur  $\varphi_{ER2}$  soit toujours inférieure à  $10^{-4} \text{ rad}$  ?

On choisit  $K_d = 2 \text{ V/rad}$ , et l'on considère dès lors que l'amplificateur opérationnel est parfait.

IV.4. La boucle fonctionne en petits signaux, dans les conditions de la question IV.3.

$$\text{IV.4.1. Calculer } H(p) = \frac{U_f}{\Phi_e} \text{ et } T(p) = \frac{\Phi_{er}}{\Phi_e}.$$

Calculer l'erreur de phase en régime permanent, pour une entrée en échelon de fréquence,  $\varphi_E(t) = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t)$ .

$$\text{IV.4.2. Calculer } H'(p) = \frac{U_f}{\Omega_e} \text{ et } T'(p) = \frac{\Phi_{er}}{\Omega_e}.$$

Normaliser ces fonctions en posant :

$$\omega_n^2 = \frac{K_0 \cdot K_d \cdot B}{b_2} = \frac{K \cdot B}{b_2}.$$

IV.4.3. La pulsation  $\omega_n$  est choisie égale à  $1,4 \cdot 10^6$  rad/s ; la boucle est réglée avec  $m = 0,5$ .

(Le dénominateur de  $T'(s)$  peut se mettre sous la forme de  $1 + 2ms + s^2$ .)

Calculer, en prenant pour autres valeurs numériques celles de la question IV.3., les valeurs de  $R_2$ ,  $R_3$  et  $C$  qui en découlent.

IV.4.4. Tracer, avec les valeurs numériques précédentes, les diagrammes de Bode des fonctions de transfert  $H'(s)$  et  $T'(s)$  (en amplitude seulement).

Y a-t-il des changements notables par rapport à la boucle obtenue avec  $F(p) = a + \frac{A}{p}$  ?

IV.5. La boucle fonctionne en grands signaux, dans les conditions de la question IV.3. ; le détecteur est à caractéristique triangulaire.

IV.5.1. Pour  $F(p) = B \cdot \frac{1 + b_1 \cdot p}{1 + b_2 \cdot p}$ , écrire, dans les domaines A et B, les équations différentielles reliant  $x(t)$  et  $\varphi_E(t)$ .

IV.5.2. Effectuer la normalisation définie par  $\omega_n t = \tau$ .

Que deviennent les équations reliant  $x(t)$  et  $\varphi_E(t)$  pour des entrées du type  $\varphi_E(t) = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t)$  ?

En posant  $y = \frac{dx}{d\tau}$ , montrer que pour  $t > 0$ , on peut écrire :

$$\frac{dy}{d\tau} + 2m \cdot y + x = \frac{\Delta\omega}{K \cdot B} \quad \text{dans le domaine A}$$

$$\frac{dy}{d\tau} - 2 \left( m - \frac{\omega_n}{K \cdot B} \right) \cdot y - x = \frac{\Delta\omega}{K \cdot B} \quad \text{dans le domaine B.}$$

On posera pour la suite :  $m' = m - \frac{\omega_n}{K \cdot B}$ .

IV.5.3. On s'intéresse aux trajectoires dans le plan de phase  $x, y$ . Caractériser les isoclines des domaines A et B.

Déterminer les points d'équilibre et leur stabilité.

IV.5.4. Montrer que, dans le domaine B, il existe toujours deux isoclines qui constituent elles-mêmes des trajectoires possibles, alors que ce n'est pas toujours le cas dans le domaine A. Montrer que ces isoclines sont des droites.

Dans le domaine B, on notera P le point où celle de ces droites qui a un coefficient angulaire positif coupe la verticale  $\varphi_E = \frac{3\pi}{2}$ .

et Q le point où celle qui a un coefficient angulaire négatif coupe la verticale  $\varphi_E = \frac{\pi}{2}$ . On notera par ailleurs P' le point d'abscisse

$\varphi_E = -\frac{\pi}{2}$  qui a même ordonnée que P, et Q' le point où la tra-

jectoire de phase qui part de P' coupe l'axe  $\varphi_E = \frac{\pi}{2}$  (le point Q' peut ne pas exister).

Placer ces points d'après les annexes II, III, IV qui correspondent aux cas :

$$m = 0,5 \quad \frac{\omega_n}{K \cdot B} = 0,25 \quad \Delta\omega = 0$$

$$m = 0,5 \quad \frac{\omega_n}{K \cdot B} = 0,25 \quad \frac{\Delta\omega}{K \cdot B} = 0,4 \frac{\pi}{2}$$

$$m = 0,5 \quad \frac{\omega_n}{K \cdot B} = 0,25 \quad \frac{\Delta\omega}{K \cdot B} = 0,6 \frac{\pi}{2}$$

IV.5.5. On suppose que  $\varphi_E(0^-) = 0$  et que  $y(0^-) = 0$ .

a) On applique une entrée  $\varphi_E(t) = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t)$ . Déterminer  $y(0^+)$ .

Tracer, dans les deux cas  $\frac{\Delta\omega}{K \cdot B} = 0,4 \frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\Delta\omega}{K \cdot B} = 0,6 \frac{\pi}{2}$

(annexes III et IV) les trajectoires correspondantes.

b) On applique une entrée  $\varphi_E = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t)$ . De plus, à l'instant  $t = 0$ , une perturbation amène le point figuratif, dans le plan  $\varphi_{ER}, y$ , au point  $\varphi_{ER}(0^+) = 0, y(0^+) = \frac{\pi}{2}$ .

Tracer, dans les trois cas définis à la question IV.5.4. les trajectoires correspondantes.

IV.5.6. On suppose que  $\varphi_E(0^-) = 0$  et que  $y(0^-) = 0$ .

On applique une entrée  $\varphi_E(t) = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t)$ .

Montrer que pour certaines valeurs de  $\Delta\omega$ , et même s'il existe des points d'équilibres stables, l'acquisition est impossible (on reliera ce phénomène aux ordonnées respectives des points Q et Q').

Estimer graphiquement (compte tenu des trajectoires trouvées précédemment), la valeur  $\Delta\omega_{\max}$  en-deçà de laquelle l'acquisition est toujours possible pour une boucle caractérisée par  $m = 0,5$ ;

$$\frac{\omega_n}{K \cdot B} = 0,25.$$

*Application numérique :*

$$K = 2 \cdot 10^6 \text{ rad/s} \quad B = 2,8.$$

IV.6. La boucle fonctionne en grands signaux, dans les conditions de la question IV.3 ; le détecteur est à caractéristique sinusoïdale.

Montrer qu'une normalisation portant sur la variable  $t$  permet de mettre l'équation différentielle non linéaire reliant les variables  $\varphi_{ER}$  et  $\varphi_E$  sous la forme :

$$\frac{d^2 \varphi_{ER}}{d\tau^2} + (\alpha + \beta \cdot \cos \varphi_{ER}) \cdot \frac{d \varphi_{ER}}{d\tau} + \sin \varphi_{ER} = \frac{d^2 \varphi_E}{d\tau^2} + \alpha \cdot \frac{d \varphi_E}{d\tau}.$$

Proposer une méthode permettant de déterminer les trajectoires correspondantes dans le plan de phase.




---

*N.D.L.R.* : Les annexes I, II, III, IV distribuées avec cet énoncé ont été reproduites avec le corrigé (voir p. 96, 104, 105, 106).

## SOLUTION

## I. DETECTEUR DE PHASE

$$\begin{aligned}
 \text{I.1.1. } u'_D &= \frac{1}{2} k_d \cdot U_E \cdot U_R \cdot \sin \varphi_{ER} \dots \\
 &\dots + \frac{1}{2} k_d \cdot U_E \cdot U_R \cdot \sin (2 \omega_0 t + \varphi_E + \varphi_R) \\
 u_D &= \frac{1}{2} k_d \cdot U_E \cdot U_R \cdot \sin \varphi_{ER}.
 \end{aligned}$$

La courbe  $\varphi_{ER} \rightarrow u_D$  est une sinusoïde passant par l'origine.

I.1.2. Des circuits multiplieurs à transistors, ou un modulateur en anneau permettent de réaliser ce type de détecteur.

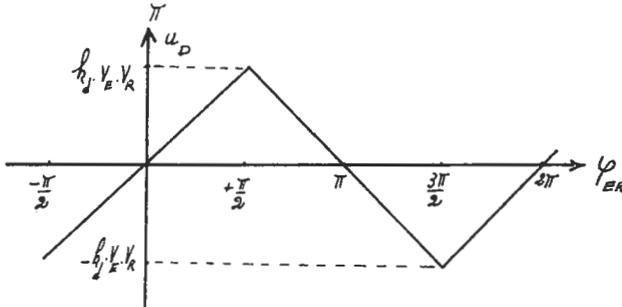
I.2.1. Un comparateur à faible hystérésis

I.2.2. On trouve sans peine, en dessinant les sinusoïdes  $u_E(t)$  et  $u_R(t)$ , et en tenant compte du fait que pour  $\varphi_{ER} = 0$ , soit  $\varphi_E = \varphi_R$ , ces courbes sont déjà en quadrature, que :

$$u_D = k_d \cdot V_E \cdot V_R \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \varphi_{ER} \quad \text{pour } -\frac{\pi}{2} < \varphi_{ER} < \frac{\pi}{2}.$$

$$u_D = -\frac{2}{\pi} \cdot k_d \cdot V_E \cdot V_R \cdot (\varphi_{ER} - \pi) \quad \text{pour } \frac{\pi}{2} < \varphi_{ER} < \pi.$$

I.2.3.



$$\text{I.3.1. } K_d = \frac{2 k_d \cdot V_E \cdot V_R}{\pi}.$$

$$\text{I.3.2. Pour } |x| \ll \frac{\pi}{2}, \quad u_D \approx \frac{k_d \cdot U_E \cdot U_R}{2}.$$

I.3.3. Les relations précédentes sont, effectivement, vraies si  $\varphi_{ER}$  est une fonction du temps du type  $\varphi_{ER}(t) = \delta\omega \cdot t$  avec  $\delta\omega \ll \omega_0$ .

Montrons-le dans le cas du détecteur à caractéristique triangulaire. Si  $u_E = U_E \cdot \sin \omega_0 t$ , alors :

$$v_E = \frac{4 V_E}{\pi} \cdot \left[ \sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3 \omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5 \omega_0 t + \dots \right]$$

$$u_R = U_R \cos [(\omega_0 + \delta\omega) t] \dots$$

$$\Rightarrow v_R = \frac{4 V_R}{\pi} \left[ \cos (\omega_0 + \delta\omega) t - \frac{1}{3} \cos (3 \omega_0 + 3 \delta\omega) t + \frac{1}{5} \cos (5 \dots) \dots \right]$$

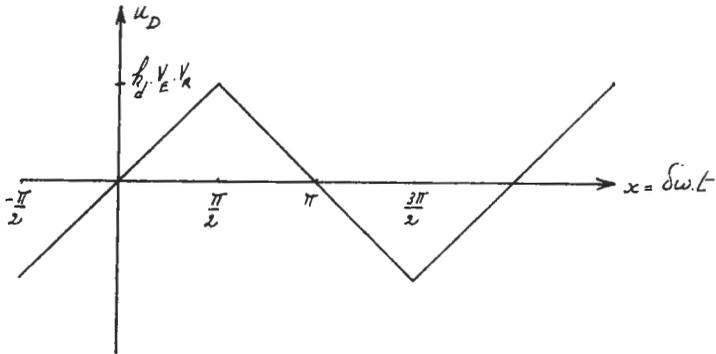
$$\text{D'où : } u'_D = \frac{8 k_d \cdot V_E \cdot V_R}{\pi^2} \dots$$

$$\left[ \sin (\delta\omega \cdot t) - \frac{1}{9} \sin (3 \delta\omega \cdot t) + \frac{1}{25} \sin (5 \delta\omega \cdot t) \dots \right]$$

- + des termes de pulsation  $2 \omega_0 - \delta\omega$  ;  $2 \omega_0 + \delta\omega$  ;  $2 \omega_0 + 3 \delta\omega$  ;  $2 \omega_0 - 3 \delta\omega$  ; ...
- + des termes de pulsation  $4 \omega_0 + \delta\omega$  ...

Toutes ces composantes, dont l'amplitude décroît avec le rang, sont arrêtées par le filtre passe-bas qui suit le multiplieur.

Or, l'expression de la partie basse-fréquence du spectre est très exactement le développement en série de FOURIER (série convergente) de la fonction représentée ci-après :



*Conclusion* : Il faut laisser passer les composantes de pulsation  $\delta\omega$ ,  $3\delta\omega$ ,  $5\delta\omega\dots$  et arrêter celles qui ont pour pulsation  $2\omega_0 - \delta\omega$ ,  $2\omega_0 - 3\delta\omega$ ,  $2\omega_0 - 5\delta\omega$ , etc.

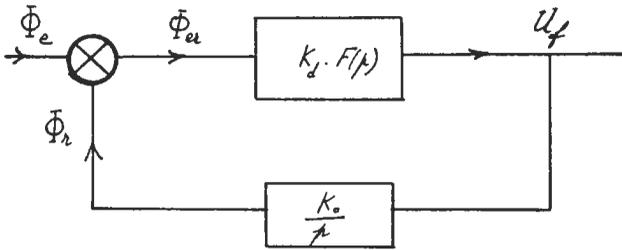
Un filtre passe-bas de pulsation de coupure égale à  $\omega_0$  paraîtrait sembler le meilleur ; en fait, une légère dissymétrie du multiplicateur fait apparaître un résidu de la porteuse de pulsation  $\omega_0$ .

Dans les conditions de l'application numérique, une fréquence de coupure comprise entre 2 et 8 MHz peut convenir.

II. FONCTIONNEMENT EN PETITS SIGNAUX

$$\text{II.1.1.} \quad T(p) = \frac{p}{p + K_o \cdot K_d \cdot F(p)} = \frac{p}{p + K \cdot F(p)}$$

$$H(p) = \frac{p \cdot K_d \cdot F(p)}{p + K \cdot F(p)} ; \quad \text{avec} \quad K = K_o \cdot K_d$$



En écrivant  $F(p)$  sous forme d'une fraction rationnelle  $\frac{N(p)}{D(p)}$ ,

on voit que les dénominateurs de  $T(p)$  et  $H(p)$  sont d'un degré supérieur de 1 unité au degré de  $F(p)$ .

$$\text{III.1.2.} \quad \Phi_{e1}(p) = \frac{\Delta\Phi}{p} ; \quad \Phi_{e2}(p) = \frac{\Delta\omega}{p^2} ; \quad \Phi_{e3}(p) = \frac{2\gamma}{p^3}$$

Par ailleurs :

$$\varphi_{ER}(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} [p \cdot \Phi_{ER}(p)]$$

On en déduit :

$$\varphi_{ER1}(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \cdot \Delta\Phi}{K \cdot F(p)}$$

$$\varphi_{ER2}(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{K \cdot F(p)}$$

$$\varphi_{ER3}(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{2\gamma}{K \cdot p \cdot F(p)}$$

Pour que ces erreurs soient nulles, il est nécessaire que  $F(p)$  vérifie les propriétés suivantes :

- a)  $F(0)$  définie.
- b)  $F(p) \rightarrow \infty$  lorsque  $p \rightarrow 0$ ,
- c)  $p \cdot F(p) \rightarrow \infty$  lorsque  $p \rightarrow 0$ .

II.1.3. Dans le cas a), si  $F(p) = 1$ , on a bien  $F(0) = 1$ . Une boucle du premier ordre ne présente donc pas d'erreur de phase en régime permanente à une entrée en échelon de phase.

Dans le cas b), on peut songer à une fonction de transfert  $F(p)$  de la forme  $F(p) = \frac{a}{p}$ , mais elle conduit à :  $T(p) = \frac{p^2}{p^2 + aK}$  qui est la fonction de transfert d'un système instable.

Le cas le plus simple est donc tel que  $F(p) = a + \frac{A}{p^2}$ .

De la même manière, la fonction  $F(p)$  la plus simple qui assure à la fois une erreur  $\varphi_{ER3}(\infty) = 0$  et une boucle stable est de la forme  $F(p) = a + \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2}$ .

$$\text{II.2.1.} \quad \varphi_{ER} = \varphi_E - \varphi_R \Rightarrow \frac{d\varphi_{ER}}{dt} = \frac{d\varphi_E}{dt} - \frac{d\varphi_R}{dt}$$

On sait que  $\frac{d\varphi_R}{dt} = K_o \cdot u_f$ ; d'après le texte  $U_D = 0$ , et puisque  $u_D = u_F$ , on en déduit  $u_F = u_f$ . Donc :

$$\frac{d\varphi_R}{dt} = K_o \cdot u_D = K_o \cdot K_d \cdot \varphi_{ER}$$

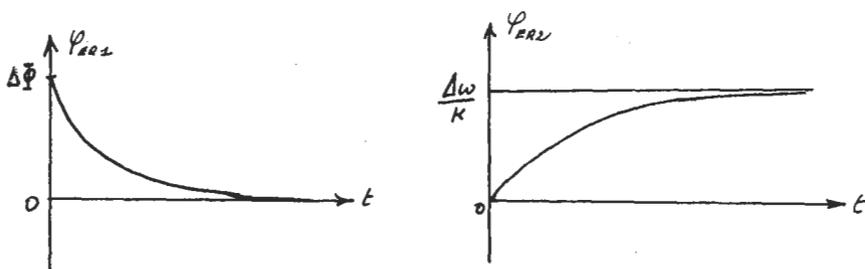
On en déduit :  $\frac{d\varphi_{ER}}{dt} + K \varphi_{ER} = \frac{d\varphi_E}{dt}$  avec  $K = K_o \cdot K_d$ .

$u_F$  étant relié à  $\varphi_{ER}$  par la relation  $u_F = K_d \cdot \varphi_{ER}$ , on obtient de même :

$$\frac{d u_F}{dt} + K u_F = K_d \frac{d \varphi_E}{dt}.$$

II.2.2. Soit, à partir de l'équation différentielle vérifiée par  $\varphi_{ER}$ , soit à partir de la fonction de transfert  $T(p)$ , on trouve facilement :

$$\begin{aligned} \varphi_{ER1}(t) &= \Delta\Phi \cdot e^{-Kt} \cdot u(t) & \text{et} & \quad \varphi_{ER1}(\infty) = 0 \\ \varphi_{ER2}(t) &= \frac{\Delta\omega}{K} (1 - e^{-Kt}) \cdot u(t), & \text{et} & \quad \varphi_{ER2}(\infty) = \frac{\Delta\omega}{K}. \end{aligned}$$



II.2.3.

$$\Omega_e = p \Phi_e.$$

$$a) \frac{U_f}{\Omega_e} = \frac{K_d}{p + K}; \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}.$$

Ces fonctions de transfert sont les mêmes si  $K_d = \frac{1}{RC}$  et  $K_o = 1$ .

$$b) \quad \omega_E(t) = \alpha s(t).$$

Le passage de la porteuse modulée en fréquence par  $s(t)$  à travers la boucle à verrouillage de phase, équivaut, en ce qui concerne  $s(t)$ , à un passage à travers un filtre passe-bas de pulsation de coupure égale à  $K$ , donc de fréquence de coupure  $f_c = 223$  kHz.

Le signal n'est pas déformé, mais, puisque la phase de  $H(p)$ , pour  $p = j\omega$ , vaut  $-\text{Arc tg } \frac{\omega}{K}$ , soit  $-\frac{\omega}{K}$  pour  $\omega \ll K$ , il est

retardé d'une durée  $\tau = -\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{1}{K} = 0,7 \mu\text{s}$ .

c) Filtre du détecteur : 2 à 8 M. Hz.

Boucle elle-même : 223 kHz .

Filtre passe-bas de sortie :  $\approx 5$  kHz.

La fréquence de coupure de chaque filtre est très supérieure à celle du filtre suivant, son influence est donc négligeable sur celui-ci.

II.3.1. On raisonnera par exemple à partir des fonctions de

transfert :  $T(p) = \frac{\Phi_{er}}{\Phi_e} = \frac{p}{p + K \cdot \left( a + \frac{A}{p} \right)}$  conduit à :

$$\frac{d^2 \varphi_{ER}}{dt^2} + K \cdot a \cdot \frac{d\varphi_{ER}}{dt} + K \cdot A \cdot \varphi_{ER} = \frac{d^2 \varphi_E}{dt^2}.$$

De même,  $H(p) = \frac{U_f}{\Phi_e} = \frac{p \cdot K_d \cdot \left( a + \frac{A}{p} \right)}{p + K \cdot \left( a + \frac{A}{p} \right)}$  conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_F}{dt^2} + K \cdot a \cdot \frac{du_F}{dt} + K \cdot A \cdot u_F &\dots \\ \dots &= K_d \cdot a \cdot \frac{d^2 \varphi_E}{dt^2} + K_d \cdot A \cdot \frac{d\varphi_E}{dt}. \end{aligned}$$

II.3.2. L'étude de la question II.1.2. montre que :

$$\varphi_{ER1}(\infty) = 0; \quad \varphi_{ER2}(\infty) = 0; \quad \varphi_{ER3}(\infty) = \frac{2\gamma}{KA}$$

II.3.3.  $H'(p) = \frac{U_f}{\Omega_e} = \frac{K_d \cdot (A + a \cdot p)}{K \cdot (a \cdot p + A) + p^2}$

c'est la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du 2<sup>me</sup> ordre.

$T'(p) = \frac{p}{p^2 + K \cdot a \cdot p + KA}$  est la fonction de transfert d'un filtre passe-bande du 2<sup>me</sup> ordre.

En posant  $s = \frac{p}{\sqrt{AK}}$ , on trouve :

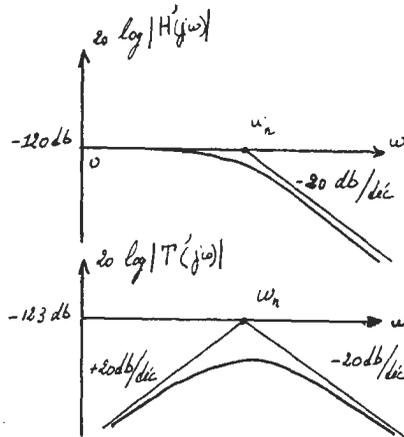
$$T'(s) = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{s}{1 + 2ms + s^2} \quad \text{et} \quad H'(s) = \frac{1}{K_0} \frac{1 + 2ms}{1 + 2ms + s^2},$$

$$\text{avec } 2m = \frac{a\omega_n}{A} = a \sqrt{\frac{K}{A}} = \frac{Ka}{\omega_n}.$$

$$\text{II.3.4.} \quad 2m = 1; \quad a = \frac{\omega_n}{K} = 0,71.$$

$$A = \frac{\omega_n^2}{K} \simeq 10^6 \text{ rad/s}; \quad H'(s) = 10^{-6} \frac{1+s}{1+s+s^2};$$

$$T'(s) = 0,7 \cdot 10^{-6} \frac{s}{1+s+s^2}.$$



$$\text{II.3.5.} \quad s(t) = a \cdot \cos(\omega_m \cdot t)$$

$$\frac{d\varphi_E}{dt} = \alpha s(t).$$

A une constante d'intégration près, on a donc :

$$\varphi_E(t) = \frac{\Delta\omega_e}{\omega_m} \cdot \sin(\omega_m \cdot t), \quad \text{avec} \quad \Delta\omega_e = \alpha a;$$

cela entraîne :  $\omega_E = \Delta\omega_e \cdot \cos \omega_m t$ .

Pour  $0 < f_m < f_M = 5 \text{ kHz}$ , soit  $0 < \frac{\omega_m}{\omega_n} < \frac{5}{225}$ , on a

$|\mathbf{H}'| \approx 10^{-6}$ , donc  $u_D = 10^{-6} \text{ V/rad/s}$ .

Pour avoir  $u_D = 1 \text{ V}$ , il faut donc  $\Delta\omega_e = 10^6 \text{ rad/s}$ , soit :  $(\Delta f_e)_{\max} = 159 \text{ kHz}$ . La largeur spectrale pratiquement nécessaire à la transmission de  $u_E(t)$  dans ces conditions, est donnée par la règle empirique de CARSON :

$$B = 2(\Delta f_e)_{\max} + f_m = 320 \text{ kHz}.$$

Pour :  $\omega_m \leq \omega_n, |\mathbf{T}'| \approx 0,7 \cdot 10^{-6} \frac{\omega_m}{\omega_n}$ .

Si  $\omega_E = \Delta\omega_e \cdot \cos \omega_m t$ ,

$$\varphi_{ER} = 0,7 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\omega_m}{\omega_n} \cdot \Delta\omega_e \cdot \cos(\omega_m t - \beta).$$

L'amplitude correspondant à  $(\Delta f_e)_{\max} = 159 \text{ kHz}$  vaut donc :

$$0,7 \cdot 10^{-6} \times \frac{5}{225} \times 10^6 = 0,9 \text{ degré}.$$

### III. FONCTIONNEMENT EN GRANDS SIGNAUX

III.1.1. Dans le domaine A, où  $x = \varphi_{ER}$  modulo  $2\pi$ , pour une

entrée  $\varphi_E = 0$ , l'équation à laquelle satisfait  $x$  est :  $\frac{dx}{dt} + Kx = 0$ .

C'est une équation d'équilibre stable car, quelles que soient les conditions initiales  $\dot{x}_0$  ou  $x_0$ , la solution de cette équation :

$x = x_0 e^{-Kt}$  ou  $x = -\frac{\dot{x}_0}{K} e^{-Kt}$ , conduit toujours au point

$x = 0, \dot{x} = 0$ .

Dans le domaine B, au contraire, l'évolution de  $x = \varphi_{ER} - \pi$

modulo  $2\pi$ , est régie par  $\frac{dx}{dt} - Kx = 0$  ; on a par exemple :

$x = x_0 e^{Kt}$ , un écart de phase par rapport au point d'équilibre  $x = 0, y = 0$  entraîne le point de fonctionnement encore plus loin. Le point  $x = 0, y = 0$  est donc un point d'équilibre instable.

III.1.2. Pour  $\varphi_E(t) = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t)$ , d'après les propriétés des

fonctions  $u(t)$  et  $\delta(t)$ ,  $\frac{d\varphi_E}{dt} = \Delta\omega \cdot u(t)$ ; donc, pour  $t > 0$ ,

on a :

$$y = -Kx + \Delta\omega \text{ dans le domaine A,}$$

$$y = Kx + \Delta\omega \text{ dans le domaine B.}$$

Les trajectoires sont donc des droites décrites vers les phases  $\varphi_{ER}$  croissantes lorsque  $y$  est positif, vers les phases  $\varphi_{ER}$

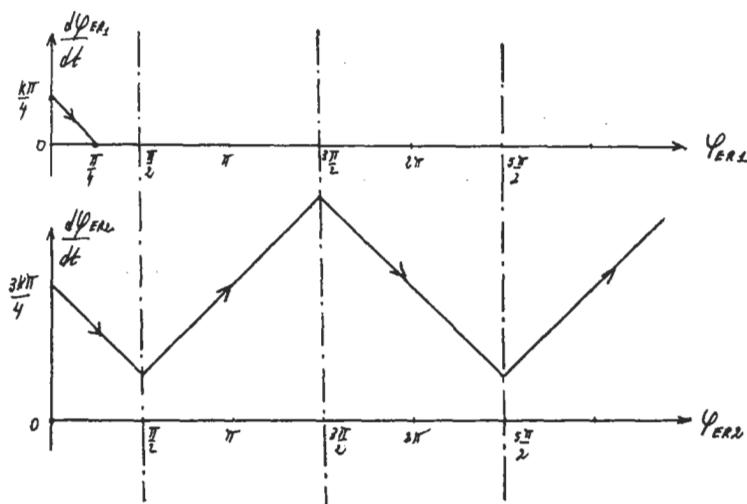
décroissantes lorsque  $y$  est négatif, puisque  $y = \frac{d\varphi_E}{d\tau}$ .

Application :

$$\frac{d\varphi_{ER}}{dt} \pm K\varphi_{ER} = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t).$$

On voit en intégrant cette équation entre  $0^-$  et  $0^+$  que  $\varphi_{ER}(0^+) = \varphi_{ER}(0^-)$ . On en déduit, dans le cas où  $\varphi_{ER}(0^-) = 0$

que  $\frac{d\varphi_{ER}}{dt}(0^+) = \Delta\omega$ . D'où les trajectoires dessinées ci-après :



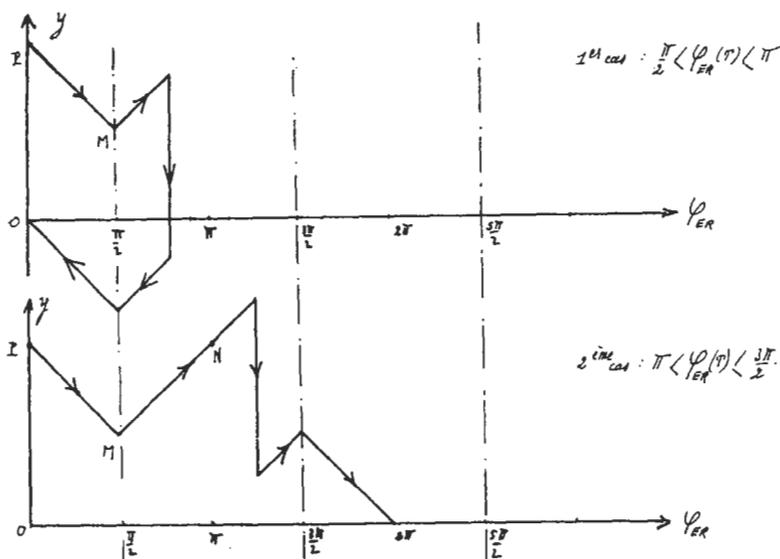
L'acquisition ne peut être réalisée que pour  $\Delta\omega < \frac{K\pi}{2}$ ,

soit  $\Delta f < \frac{K}{4}$ .

Application numérique :

Pour  $K = 1,4 \cdot 10^6$  rad/s,  $\Delta f$  doit être inférieur à 350 kHz.

III.1.3. a)



Dans le deuxième cas, le système revient à l'équilibre après un saut de phase de  $2\pi$ .

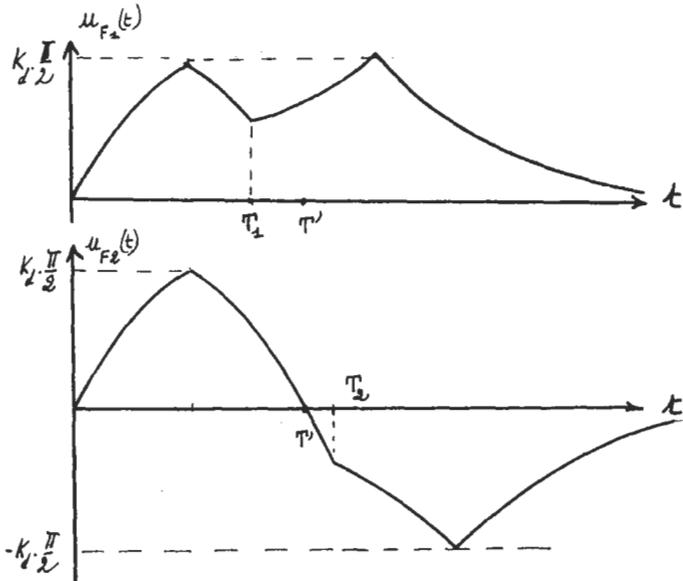
III.1.3. b) Lorsque le système évolue de P en M dans le plan de phase (voir les figures précédentes), la grandeur  $\varphi_{ER}$

est régie par l'équation :  $\varphi_{ER}(t) = \frac{\Delta\omega}{K} (1 - e^{-Kt})$ . La durée du trajet MN est égale à celle de PM.

On en déduit :  $T' = \frac{2}{K} \ln 2 \approx 1,0 \mu s$ .

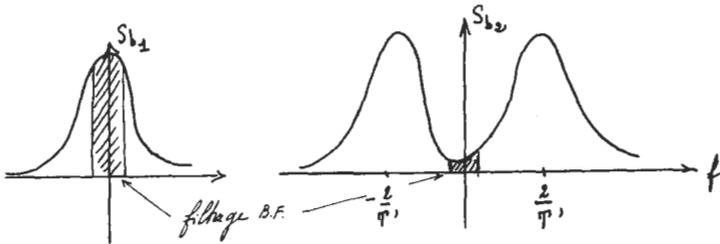
III.1.3. c) Les courbes donnant  $u_D$  en fonction de  $\varphi_{ER}$  ont été dessinées dans l'étude de la partie I.

La considération des trajectoires de phase permet de trouver les valeurs comparées de  $u_F(t)$  et de  $\frac{du_F(t)}{dt}$ . On en déduit les courbes ci-après :



On constate que la valeur moyenne de  $u_{F_1}(t)$  est importante, tandis que celle de  $u_{F_2}(t)$  est beaucoup plus réduite.

III.1.3. d) La densité spectrale d'un signal du genre  $u_{F_1}(t)$  a donc la forme  $S_{b_1}(f)$ , tandis que celle d'un signal du genre  $u_{F_2}(t)$  ressemble à  $S_{b_2}(f)$ , représentées ci-après.

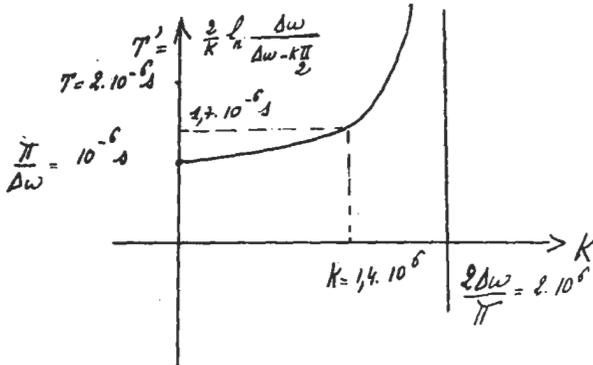


Le signal de sortie après filtrage est donc beaucoup plus important dans le cas où la perturbation cesse avant la date  $T'$  que dans le cas où elle disparaît un peu plus tard.

$$\text{III.1.4.} \quad T' = \frac{2}{K} \ln \left( \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega - K \frac{\pi}{2}} \right)$$

Il faut  $T > T'$ .

On peut représenter les variations de  $T'$  en fonction de  $K$  pour  $\Delta\omega = 10^6 \cdot \pi$  rad/s.



$T'(K)$  est une fonction croissante de  $K$ .

Pour  $\Delta\omega = 10^6 \cdot \pi$  rad/s et  $T = 2 \cdot 10^{-6}$  s. (on a affaire à un saut de phase  $\Delta\omega \cdot T = 2 \pi$  dû au bruit), on trouve  $T' = 1,7 \cdot 10^{-6}$  s.

On a bien  $T > T'$ .

La valeur de  $K$  est telle que :

$$T'(K_1) = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad \text{est} \quad K_1 = 1,59 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s.}$$

III.1.5. Si  $\varphi_{ER}(0^-)$  est de signe contraire à celui de  $\Delta\omega$ , cela recule la date à laquelle  $\varphi_{ER}$  atteint la valeur  $\pi$ . On risque donc de retrouver le premier cas étudié ci-dessus conduisant à un bruit appréciable en sortie. La boucle du deuxième ordre qui permet à l'erreur de phase  $\varphi_{ER}$  d'être en général plus proche de zéro (nous avons vu que l'erreur permanente correspondant à un échelon de fréquence est nulle dans le cas d'une boucle

du second ordre alors qu'elle est égale à  $\frac{\Delta\omega}{K}$  dans le cas d'une boucle du premier ordre), permet de remédier à cet état de choses.

III.2.1. Avec la variable  $x$ , on passe du domaine A au domaine B en changeant le signe de  $K_d$  et donc celui de  $K$ .

$$\text{Domaine A : } \frac{d^2x}{dt^2} + Ka \frac{dx}{dt} + AKx = \frac{d^2\varphi_E}{dt^2}$$

$$\text{Domaine B : } \frac{d^2x}{dt^2} - K a \frac{dx}{dt} - A K x = \frac{d^2 \varphi_E}{dt^2}.$$

On choisit  $\omega_n$  tel que  $\omega_n^2 = A K$ , et  $2 m = \frac{a \omega_n}{A}$ .

On trouve ainsi :

dans le domaine A :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2 m \frac{dx}{d\tau} + x = \frac{d^2 \varphi_E}{d\tau^2}$$

dans le domaine B :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2 m \frac{dx}{d\tau} - x = \frac{d^2 \varphi_E}{d\tau^2}.$$

III.2.2. a) Pour  $\tau > 0$ ,  $\frac{d^2 \varphi_E}{d\tau^2} = 0$ . On a donc :

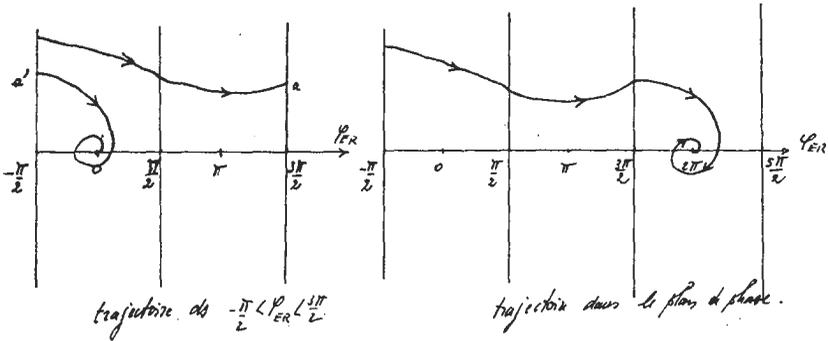
$$\begin{array}{l} \text{A} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{d\tau} = y \\ \frac{dy}{d\tau} = -2 my - x \end{array} \right. \\ \text{B} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{d\tau} = y \\ \frac{dy}{d\tau} = +2 my + x \end{array} \right. \end{array}$$

Si  $\frac{dy}{dx} = q$ , on a :  $y = -\frac{x}{2m + q}$  dans le domaine A,

$$y = \frac{x}{q - 2m} \text{ dans le domaine B.}$$

Ces droites passent par les points  $x = 0$ ,  $y = 0$  de chaque secteur de largeur  $\pi$ .

III.2.2. b) Il suffit, pour pouvoir représenter une trajectoire, de disposer de deux secteurs correspondant l'un au domaine A, l'autre, contigu, correspondant au domaine B. La correspondance entre une trajectoire réelle et le dessin obtenu est représentée ci-après :



Pour qu'une isocline constitue une trajectoire possible, il faut que sa pente soit égale à  $q$  :

$$q = \frac{1}{q - 2m} \Rightarrow q^2 - 2mq - 1 = 0.$$

Cette équation a toujours 2 racines.

Dans le domaine A, pour  $m < 1$ , l'équation correspondante  $q^2 + 2mq + 1 = 0$  n'a pas de racines réelles.

III.2.2. c)

$$\varphi_E = \Delta\omega \cdot t \cdot u(t); \quad \frac{d\varphi_E}{dt} = \Delta\omega \cdot u(t); \quad \frac{d^2\varphi_E}{dt^2} = \Delta\omega \cdot \delta(t)$$

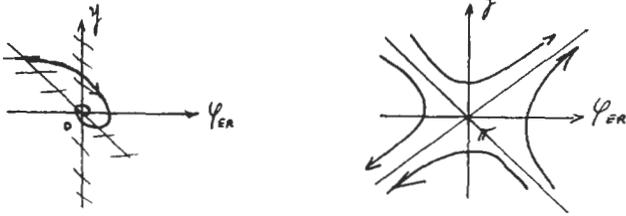
$$\frac{d^2\varphi_E}{d\tau^2} = \frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2\varphi_E}{dt^2} = \frac{\Delta\omega}{\omega_n^2} \delta(t) = \frac{\Delta\omega}{\omega_n} \delta(\tau).$$

On a donc, dans le domaine A :

$$\frac{dy}{d\tau} + 2my + x = \frac{\Delta\omega}{\omega_n} \delta(\tau).$$

En intégrant membre à membre cette équation entre  $\tau = -\varepsilon$  et  $\tau = +\varepsilon$ , on trouve, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , si  $y(0^-) = 0$  :  $y(0^+) = \frac{\Delta\omega}{\omega_n}$ .

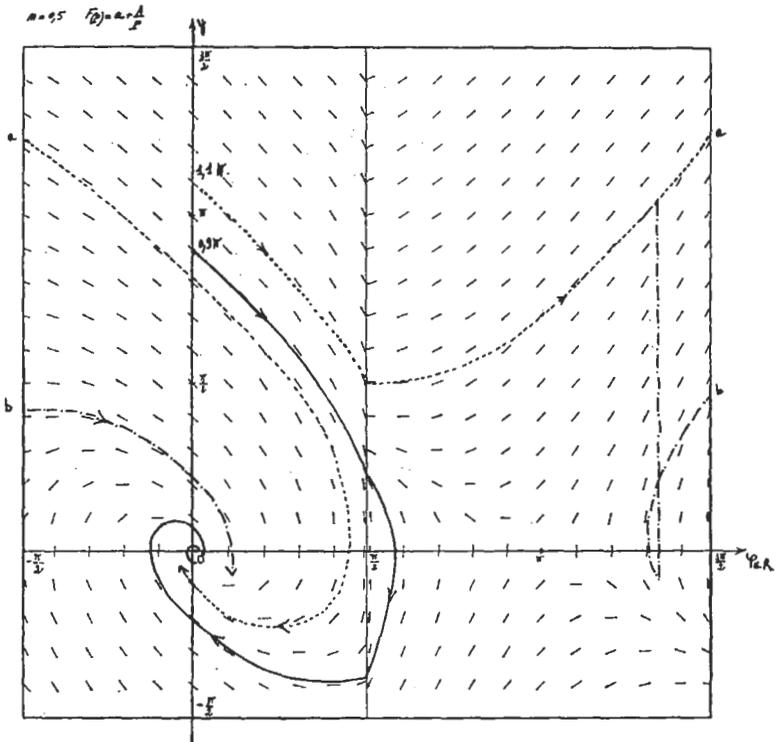
III.2.3. a) La réponse à cette question est donnée par l'étude des trajectoires.



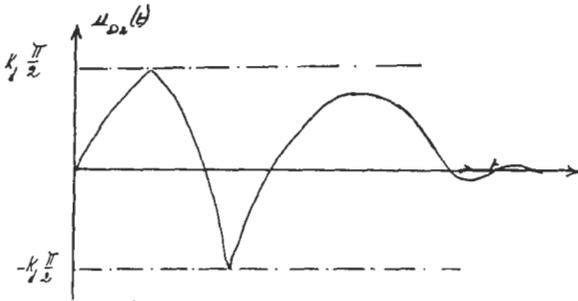
Pour  $\Delta\omega_1 = 0,9 \pi$ , l'acquisition est rapide.

Pour  $\Delta\omega_2 = 1,1 \pi$ , elle est lente, mais elle est toujours réalisée.

ANNEXE I



La trajectoire de phase permet d'esquisser  $u_{D_2}(t)$ .



$$\text{III.2.3. b) } \frac{d\varphi_E}{dt} = \Delta\omega [u(t) - u(t - T)],$$

$$\frac{d^2\varphi_E}{dt^2} = \Delta\omega [\delta(t) - \delta(t - T)].$$

Comme précédemment, on trouve :  $y(0^+) = \frac{\Delta\omega}{\omega_n} = 1,1 \pi$ .

La trajectoire est la même que pour l'entrée  $\frac{d\varphi_E}{dt} = \Delta\omega \cdot u(t)$  jusqu'en  $t = T$ .

A cet instant, on se trouve dans le domaine A, d'où :

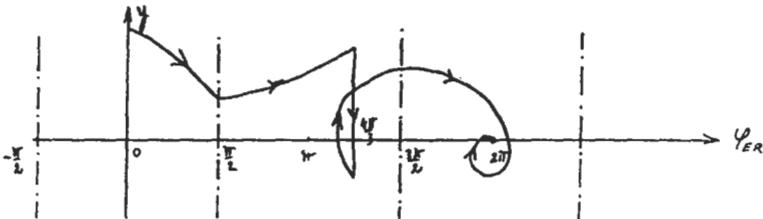
$$\frac{dy}{d\tau} - 2 m y - x = \frac{\Delta\omega}{\omega_n} [\delta(\tau) - \delta(\tau - \omega_n T)].$$

En intégrant entre  $\tau = \omega_n T - \varepsilon$  et  $\tau = \omega_n T + \varepsilon$ , on trouve :

$y(T + \varepsilon) - y(T - \varepsilon) = -\frac{\Delta\omega}{\omega_n}$ , autrement dit l'ordonnée  $y$  de la trajectoire (en traits-points) subit une discontinuité égale à

$$-\frac{\Delta\omega}{\omega_n}.$$

La trajectoire véritable aurait la forme suivante :



III.2.4. L'acquisition est toujours réalisée pour un échelon de fréquence.

La boucle présente une plus grande immunité au bruit que l'étude précédente n'a pas montré.

Pour étudier  $u_F(t)$  il faudrait étudier les trajectoires de cette grandeur dans son propre plan de phase.

#### IV. INFLUENCE DES IMPERFECTIONS DES ELEMENTS CONSTITUTIFS DU FILTRE F

$$\text{IV.1.} \quad \frac{U_f}{U_d} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_1 C p}$$

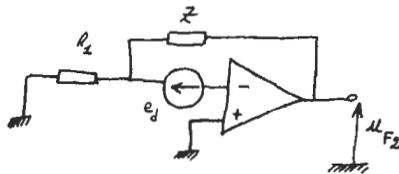
$$a = \frac{R_2}{R_1}, \quad A = \frac{1}{R_1 C} \Rightarrow R_2 = 0,7 \text{ k}\Omega; \quad C = 1 \text{ nF.}$$

IV.2. Aux très basses fréquences, le gain théorique est infini. Le gain réel de l'amplificateur opérationnel est fini. On préfère donc faire travailler l'amplificateur dans sa zone de linéarité en limitant le gain théorique du montage.

$$\text{On trouve : } \frac{U_f}{U_d} = \frac{R_3}{R_1} \cdot \frac{1 + R_2 C p}{1 + (R_2 + R_3) C p}$$

C'est la forme proposée avec  $B = \frac{R_3}{R_1}$ ;  $b_1 = R_2 C$ ;  
 $b_2 = (R_2 + R_3) \cdot C$ .

IV.3.1. On raisonne par superposition :

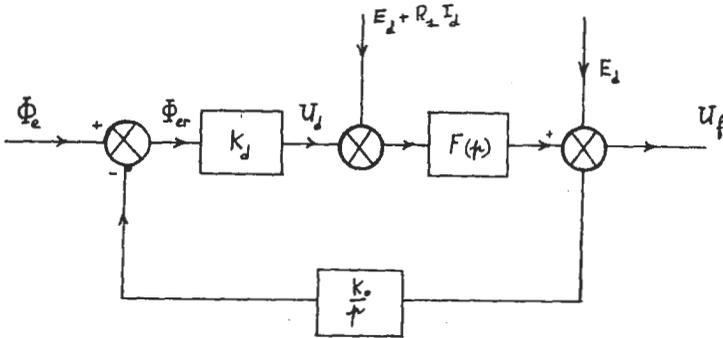


$$U_{f2} = E_d + \frac{Z}{R_1} E_d = [1 + F(p)] \cdot E_d$$

On trouverait de même :  $U_{f3} = Z I_d = R_1 F(p) I_d$ .

Finalement :  $U_f = F(p) U_d + [1 + F(p)] E_d + F(p) \cdot R_1 I_d$ .

IV.3.2.



$$\Phi_{er} = \frac{p \Phi_e}{p + K F(p)} - \frac{K_0 [1 + F(p)]}{p + K \cdot F(p)} \cdot E_d - \frac{K_0 R_1 F(p)}{p + K \cdot F(p)} \cdot I_d$$

On peut considérer que, lorsque  $p \rightarrow 0$ ,  $\Phi_e(p) = \frac{\Delta\omega}{p^2}$ ,

$E_d(p) = \frac{e_d}{p}$ ,  $I_d(p) = \frac{i_d}{p}$ . Par ailleurs  $F(p) \rightarrow B$  lorsque  $p \rightarrow 0$ .

On trouve :

$$\Phi_{ER}(\infty) = \underbrace{\frac{\Delta\omega}{K B}}_{\Phi_{ER 1}} - \underbrace{\frac{B + 1}{K_d \cdot B} \cdot e_d - \frac{R_1}{K_d} \cdot i_d}_{\Phi_{ER 2}}$$

IV.3.3.  $R_1 |i_d|_{\max} = 10^{-6} \text{ V}$  ;  $|e_d|_{\max} = 10^{-4} \text{ V}$  ; on peut donc négliger le premier terme devant le second.

$$\left| \frac{\Phi_{ER 2}}{\Phi_{ER 1}} \right| = \frac{K_0 (B + 1) \cdot |e_d|}{\Delta\omega}$$

Pour que ce rapport soit inférieur à  $\frac{1}{10}$ , il faut que B soit inférieur à 9.

IV.3.4.  $(\Phi_{ER 2})_{\max} = \frac{B + 1}{B \cdot K_d} \cdot 10^{-4}$ , il faut donc  $K_d > \frac{B + 1}{B}$ .

Puisqu'on a choisi  $B = 2,8$ , il faut  $K_d > 1,36 \text{ V/rad}$ .

Comme  $K_d = 2 \text{ V/rad}$ , on peut considérer l'amplificateur opérationnel comme parfait.

## IV.4.1.

$$H(p) = \frac{p}{K_0} \cdot \frac{1 + b_1 \cdot p}{1 + \left( b_1 + \frac{1}{K B} \right) p + \frac{b_2}{K B} p^2} ;$$

$$T(p) = \frac{p}{K B} \cdot \frac{1 + b_2 p}{1 + \left( b_1 + \frac{1}{K B} \right) p + \frac{b_2}{K B} p^2} ;$$

$$\Phi_e = \frac{\Delta\omega}{p^2} ; \quad \varphi_{ER}(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} [p \Phi_e T(p)] = \frac{\Delta\omega}{K B}.$$

*Remarque* : La boucle présente de nouveau une erreur de phase en régime permanent pour une entrée en échelon de fréquence. Cependant, avec les valeurs numériques du texte — choisies pour assurer la même bande passante à 3 db à la fonction de transfert  $H'$  — on constate que cette erreur est passée de

$$\frac{\Delta\omega}{1,4 \cdot 10^6} \text{ à } \frac{\Delta\omega}{5,6 \cdot 10^6}, \text{ elle est donc divisée par 4.}$$

## IV.4.2.

$$H'(p) = \frac{1}{K_0} \frac{1 + b_1 p}{1 + \left( b_1 + \frac{1}{K B} \right) p + \frac{b_2}{K B} p^2} ;$$

$$H'(s) = \frac{1}{K_0} \frac{1 + b_1 \cdot \omega_n s}{1 + \left( b_1 \omega_n + \frac{\omega_n}{K B} \right) s + s^2} ;$$

$$T'(s) = \frac{1}{K B} \cdot \frac{1 + b_2 \cdot \omega_n s}{1 + \left( b_1 \omega_n + \frac{\omega_n}{K B} \right) s + s^2}.$$

$$\text{IV.4.3.} \quad B = \frac{R_3}{R_1} = 2,8 \Rightarrow R_3 = 2,8 \text{ k}\Omega.$$

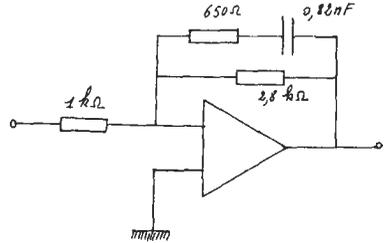
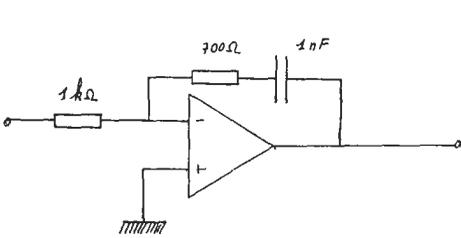
$$\frac{\omega_n}{K B} = 0,25 ; \quad b_1 \omega_n + \frac{\omega_n}{K B} = 1 \quad \text{puisque } 2m = 1, \text{ donc}$$

$b_1 \omega_n = 0,75 \cdot \omega_n^2 = \frac{KB}{b_2} \Rightarrow b_2 \omega_n = \frac{KB}{\omega_n} = 4$ . On en déduit

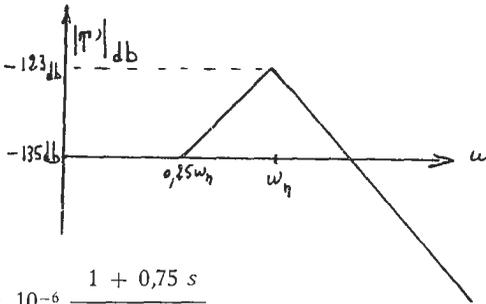
$\frac{b_2}{b_1} = 5,33$ . Or,  $\frac{b_2}{b_1} = 1 + \frac{R_3}{R_1}$ , donc  $R_2 = 650 \Omega$ .

$C = \frac{b_1}{R_2} = 0,82 \text{ nF}$ .

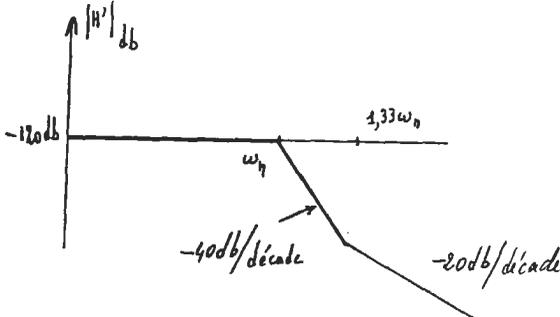
On est donc passé du premier des deux schémas ci-après, au second.



IV.4.4.  $T'(s) = \frac{1}{5,6 \cdot 10^6} \cdot \frac{1 + 4s}{1 + s + s^2}$ .



$H'(s) = 10^{-6} \frac{1 + 0,75s}{1 + s + s^2}$ .



Il n'y a pas de changement notable par rapport à la boucle idéale du second ordre.

## IV.5.1.

$$b_2 \frac{d^2x}{dt^2} + (1 + b_1 K_0 K_d B) \frac{dx}{dt} + K_0 K_d B x = \frac{d\varphi_E}{dt} + b_2 \frac{d^2\varphi_E}{dt^2}$$

dans le domaine A,

$$b_2 \frac{d^2x}{dt^2} + (1 - b_1 K_0 K B) \frac{dx}{dt} - K_0 K_d B x = \frac{d\varphi_E}{dt} + b_2 \frac{d^2\varphi_E}{dt^2}$$

dans le domaine B.

## IV.5.2.

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \left( b_1 \omega_n + \frac{\omega_n}{K B} \right) \frac{dx}{d\tau} + x = \frac{\Delta\omega}{K B} \cdot u(\tau) + \frac{\Delta\omega}{\omega_n} \delta(\tau),$$

dans A,

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \left( b_1 \omega_n - \frac{\omega_n}{K B} \right) \frac{dx}{d\tau} - x = \frac{\Delta\omega}{K B} \cdot u(\tau) + \frac{\Delta\omega}{\omega_n} \delta(\tau),$$

dans B.

Pour  $t > 0$   $u(\tau) = 1$ ,  $\delta(\tau) = 0$ .

On obtient bien les équations proposées en posant :

$$2m = b_1 \omega_n + \frac{\omega_n}{K B}.$$

Pour  $t > 0$ , on a ainsi :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2m \frac{dx}{d\tau} + x = \frac{\Delta\omega}{K B}$$

dans le domaine A,

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2m' \frac{dx}{d\tau} - x = \frac{\Delta\omega}{K B}$$

dans le domaine B.

IV.5.3. Les isoclines sont des droites passant par les points

$(x = \frac{\Delta\omega}{K B}, y = 0)$  dans le domaine A, et par les points

$(x = -\frac{\Delta\omega}{K B}, y = 0)$  dans le domaine B. Les premiers (par

exemple  $\varphi_{ER} = \frac{\Delta\omega}{K B}, \frac{d\varphi_{ER}}{dt} = 0$ ) sont des points d'équilibre stable. Les seconds (par exemple  $\varphi_{ER} = \pi - \frac{\Delta\omega}{K B}, \frac{d\varphi_{ER}}{dt} = 0$ ) sont des points d'équilibre instable.

IV.5.4. Dans le domaine B, les trajectoires de phase sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{d\tau} = 2m'y + x + \frac{\Delta\omega}{K B} \\ \frac{dx}{d\tau} = y \end{array} \right. \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2m' + \frac{x + \frac{\Delta\omega}{K B}}{y}$$

Si une isocline est une trajectoire possible, elle doit avoir pour équation  $y = q \left( x + \frac{\Delta\omega}{K B} \right)$  alors que l'équation précé-

dente établit  $q = 2m' + \frac{x + \frac{\Delta\omega}{K B}}{y}$ . C'est possible si  $\frac{1}{q} = q - 2m'$  soit si  $q$  satisfait à l'équation :

$$q^2 - 2m'q - 1 = 0.$$

Cette équation a toujours deux racines dont le produit vaut  $-1$ . Les deux isoclines en question sont donc perpendiculaires.

Pour  $m' = 0,25$ , les pentes en sont :  $q_1 = 1,281$  et  $q_2 = -0,780$ .

Sur les figures ci-après, correspondant effectivement à  $m' + m - \frac{\omega_n}{K B} = 0,25$ , on a placé les points P, P', Q et Q'. Dans le cas où  $\Delta\omega = 0$ , cependant, la trajectoire issue de P' ne coupe pas la verticale  $\varphi_{ER} = \frac{\pi}{2}$ , le point Q' n'existe donc pas.

IV.5.5. a) En intégrant l'équation :

$$\frac{dy}{d\tau} + 2m'y + x = \frac{\Delta\omega}{K B} u(\tau) + \frac{\Delta\omega}{\omega_n} \delta(\tau)$$

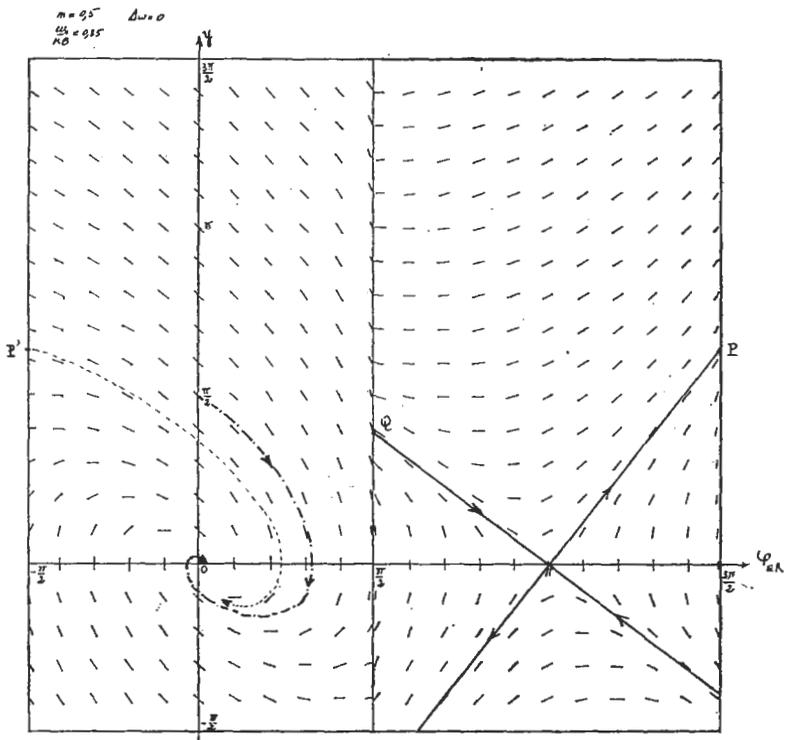
entre  $\tau = -\varepsilon$  et  $\tau = +\varepsilon$ , on trouve évidemment :

$$y(0^+) - y(0^-) = \frac{\Delta\omega}{\omega_n}$$

Or, 
$$\frac{\Delta\omega}{\omega_n} = \frac{\Delta\omega}{K B} \times \frac{K B}{\omega_n}$$

L'application numérique fixe  $\frac{K B}{\omega_n} = 4$ , donc  $\frac{\Delta\omega}{\omega_n} = 4 \frac{\Delta\omega}{K B}$ .

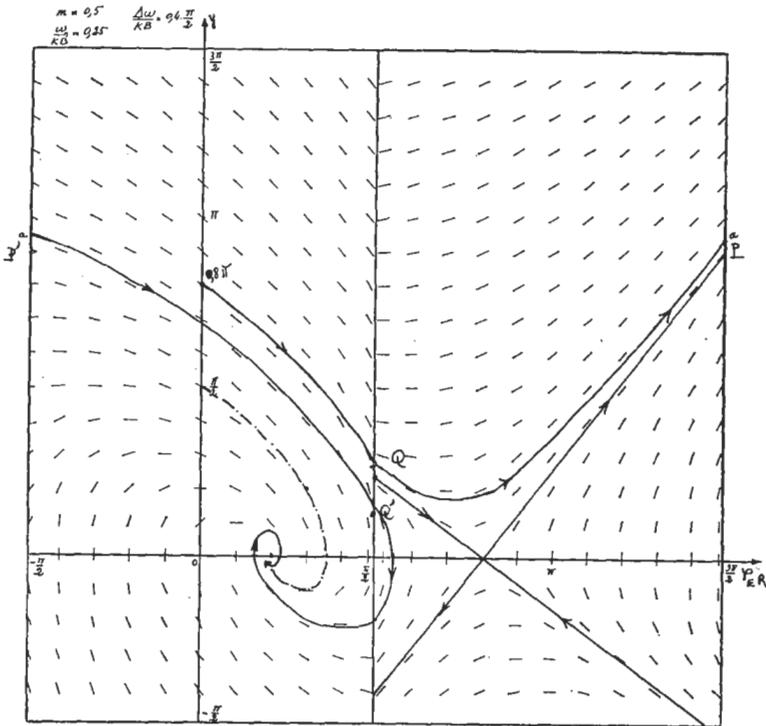
## ANNEXE II



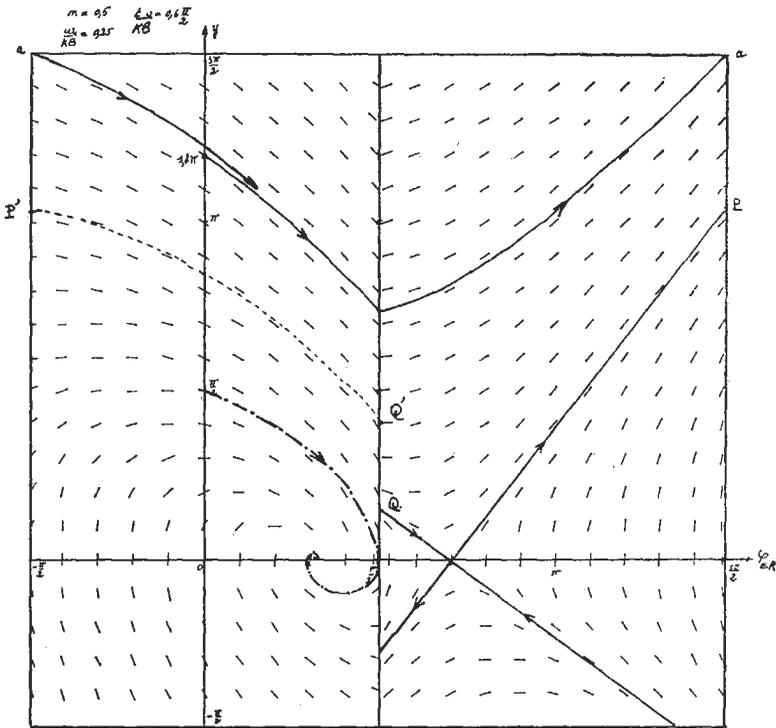
Lorsque  $\frac{\Delta\omega}{KB} = 0,4 \frac{\pi}{2}$ , on a  $\frac{\Delta\omega}{\omega_n} = 0,8 \cdot \pi$ . L'acquisition est réalisée pour  $\varphi_{ER} = 2\pi + 0,2\pi$ . La boucle a « sauté un cycle » avant de se stabiliser.

Lorsque  $\frac{\Delta\omega}{KB} = 0,6 \frac{\pi}{2}$ , on a  $\frac{\Delta\omega}{\omega_n} = 1,2 \pi$ . L'acquisition n'est jamais réalisée. La boucle décrit un cycle limite après avoir effectué quelques cycles transitoires.

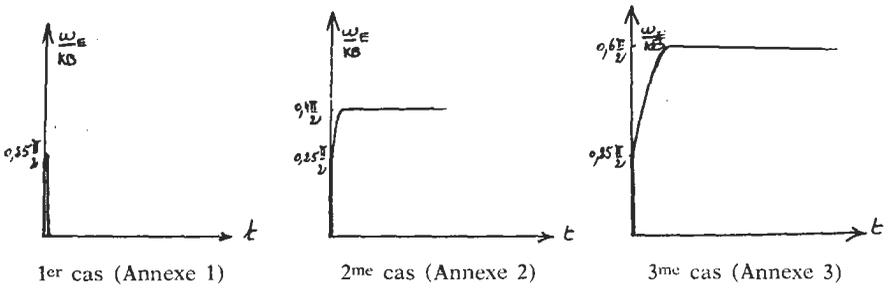
## ANNEXE III



ANNEXE IV



IV.5.5. b) Les conditions fixées par le texte reviennent aux suivantes, exprimées à partir de  $\omega_E(t) = \frac{d\varphi_E}{dt}$  (du moins elles en sont proches).



C'est-à-dire que, dans le troisième cas, on modifie bien la fréquence d'entrée de la tension  $u_E(t)$  de la même quantité (telle que  $\Delta\omega = 0,6 \cdot K \cdot B \cdot \frac{\pi}{2}$ ), mais en procédant plus lentement que précédemment.

Dans les trois cas, l'acquisition est rapidement réalisée, sans même qu'un cycle soit sauté.

IV.5.6. Nous venons de voir que :

$$\text{pour } \Delta\omega_{\text{final}} = 0,6 K \cdot B \cdot \frac{\pi}{2} \text{ par exemple,}$$

l'acquisition n'est pas réalisée si la variation de fréquence d'entrée est extrêmement brusque, mais qu'elle peut l'être si celle-ci est plus progressive, auquel cas les points ( $x = 0,3 \pi$  ;  $y = 0$ ) dans le domaine A, sont des points d'équilibre stable.

Il reste que dans ces conditions, les boucles présentent des caractères d'instabilité que des perturbations parasites peuvent mettre en évidence. (Une perturbation peut très bien amener le point représentatif de la boucle, dans le plan de phase, d'un point d'équilibre stable à un point où la boucle ne pourra plus se stabiliser et décrira un cycle limite).

Toute trajectoire qui pénètre dans le domaine B au-dessus de Q en ressort au-dessus de P. Si Q' est lui-même au-dessus de Q, le cycle recommence. Les cycles limites vers lesquels la boucle évolue passent par des points situés légèrement au-dessus des points P', Q' et P.

Si, au contraire, Q' est au-dessous de Q, la trajectoire, tôt ou tard, pénètre dans (B) au-dessous de Q'. Dès lors, elle ne peut que converger vers un point d'équilibre stable. (Attention des ordonnées de P et Q dépendant de  $\Delta\omega$ ).

La valeur limite  $\Delta\omega_{\text{max}}$  est située entre  $0,4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot K \cdot B$  et  $0,6 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot K \cdot B$ .

En procédant avec du papier calque sur lequel on dessine les trajectoires désirées en utilisant les annexes II ou IV, et qu'on peut faire glisser horizontalement, on trouve sensiblement :

$$(\Delta\omega)_{\text{max}} = 0,46 \frac{\pi}{2} \cdot K B, \text{ soit } 0,23 \pi K B.$$

Donc, pour des sauts de fréquence inférieurs à cette valeur, l'acquisition est toujours réalisée.

Dans les conditions de l'application numérique, cela correspond à un écart de fréquence maximal :

$$\Delta f_{\max} = \frac{0,23 \times \pi \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 2,8}{2 \pi} = 640 \text{ k. Hz.}$$

*Remarque :* La boucle du premier ordre ne réalisait l'acquisition que pour des échelons de fréquence d'amplitude inférieure à 350 kHz. Ici, on peut augmenter la fréquence maximale en prenant :

$$\frac{\omega_n}{K B} > 0,25.$$

IV.6. Nous disposons du système d'équations suivant :

$$(1) : u_D = K'_d \cdot \sin \varphi_{ER}$$

$$(2) : u_F + b_2 \frac{du_F}{dt} = B u_D + B \cdot b_1 \frac{du_D}{dt}$$

$$(3) : \frac{d \varphi_{ER}}{dt} + K_0 u_F = \frac{d \varphi_E}{dt}.$$

On en déduit :

$$b_2 \frac{d^2 \varphi_{ER}}{dt^2} + (1 + K' \cdot B \cdot b_1 \cos \varphi_{ER}) \frac{d \varphi_{ER}}{dt} + K' B \sin \varphi_{ER} \dots$$

$$\dots = \frac{d \varphi_E}{dt} + b_2 \frac{d^2 \varphi_E}{dt^2}.$$

(On a posé  $K' = K_0 \cdot K'_d$ ).

C'est très exactement l'équation trouvée à la question IV.5.1., (domaine A), si l'on fait  $\cos \varphi_{ER} = 1$  et  $\sin \varphi_{ER} = \varphi_{ER}$ , ce qui est tout à fait normal (il faut aussi changer  $K$  en  $K'$ ).

Posons  $\omega_n^2 = \frac{K' B}{b_2}$  et  $\tau = \omega_n t$ , on obtient bien l'équation

proposée dans le texte, avec  $\alpha = \frac{\omega_n}{K' B} = \frac{1}{b_2 \omega_n}$ ,

$$\beta = \frac{b_1 B K'}{b_2 \omega_n} = b_1 \omega_n.$$

Pour étudier les trajectoires dans le plan de phase, il faut poser :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{d\varphi_{ER}}{d\tau}, \text{ on obtient :} \\ \frac{dy}{d\tau} + (\alpha + \beta \cos \varphi_{ER}) y + \sin \varphi_{ER} = \frac{d^2 \varphi_E}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\varphi_E}{d\tau}. \end{array} \right.$$

Comme il n'y a pas d'isoclines simples, on calcule les trajectoires à l'ordinateur. Les résultats qu'on trouve sont très proches de ceux qui utilisent le modèle de la caractéristique ( $\varphi_{ER} \rightarrow u_d$ ) triangulaire.

R. MOREAU.





## Agrégation

SESSION DE 1978

### OPTION PHYSIQUE APPLIQUEE

#### Epreuve C

#### PROBLEME D'ELECTRICITE, D'ELECTRONIQUE, D'ELECTROTECHNIQUE ET D'AUTOMATIQUE

(Durée : 6 heures)

*Matériel : 3 feuilles de papier millimétré par candidat.*

On se propose d'examiner divers aspects du fonctionnement d'un turboalternateur triphasé de 600 mégawatts, 50 hertz, 3 000 t/mn,  $\cos \varphi = 0,9$ ; montage étoile (20 kilovolts entre phase) en utilisant successivement :

- les résultats des essais expérimentaux (première partie);
- les renseignements fournis par le bureau d'études (deuxième partie);
- avant de s'intéresser au circuit d'excitation et à la régulation (troisième partie).

Les trois parties de ce problème sont pratiquement indépendantes, le seul lien entre elles étant constitué par certaines comparaisons entre des paramètres prédéterminés et mesurés.

#### PREMIÈRE PARTIE

#### ETUDE DU TURBOALTERNATEUR A PARTIR DES RESULTATS D'ESSAIS

Sur cette machine, on a effectué les essais suivants :

- Essai à vide à 3 000 t/mn :  $E = f(i)$ ,  
E est la force électromotrice par phase en volts (tension simple à vide),  
i est le courant inducteur en ampères.

$E_{kV}$	5,2	9,1	11,5	13	14	15
$i_A$	400	700	963	1 200	1 450	1 900

- Essai en court-circuit à 3 000 t/mn : à un courant d'excitation de 1 180 A correspond dans les phases en court-circuit un courant égal à la moitié du courant nominal de la machine.

- Essai sur charge purement inductive : un courant d'excitation  $i = 2360$  ampères a été nécessaire pour obtenir une tension de 20 kilovolts entre phases et un courant dans les trois phases égal à la moitié du courant nominal.
- Pertes dans le fer pour  $U = 20$  kV,  $p_{fe} = 543$  kilowatts.
- Pertes mécaniques  $p_m = 1350$  kilowatts.
- Résistance à chaud du circuit d'excitation : 0,17 ohm.
- Rendement du système d'excitation :  $\eta = 0,92$  supposé indépendant du courant d'excitation qu'il fournit.
- Résistance à chaud à 50 hertz d'une phase du stator :  $R = 2,3$  milli-ohms. Cette résistance tient compte de la majoration due aux pertes supplémentaires par courants de FOUCAULT en alternatif dans le cuivre.
- Réactance transitoire  $X'_d = 35,2$  %.
- Réactance subtransitoire  $X''_d = 28,2$  %.

On rappelle que la valeur relative de l'impédance d'une machine (exprimée ici sous forme d'un pourcentage) est son rapport à l'impé-

dance de référence  $\frac{V_n}{J_n}$  (où  $V_n$  est la tension nominale d'une phase et  $J_n$  le courant nominal dans une phase).

### 1. Pertes et rendement.

1.1. Calculer les pertes totales et le rendement du turbo-alternateur pour le point de fonctionnement nominal sachant que le courant d'excitation mesuré correspondant est de 3200 ampères.

1.2. Calculer la puissance mécanique d'entraînement nécessaire au cours des essais précédents :

1.2.1. En court-circuit avec  $J = \frac{J_n}{2}$ .

1.2.2. A vide à la tension nominale.

1.2.3. Sur charge inductive  $\left( V = V_n, J = \frac{J_n}{2} \right)$ .

### 2. Réactance synchrone non saturée et autoamorçage synchrone.

2.1. Calculer la réactance synchrone non saturée  $X_d$  de la machine. L'exprimer en valeur relative.

2.2. Cet alternateur débite par l'intermédiaire d'un transformateur triphasé 20/220 kilovolts sur un réseau 220 kilovolts comportant un certain nombre de lignes identiques en parallèle. Lorsque ces lignes fonctionnent à vide, chaque phase de l'une de ces lignes peut être assimilée à un condensateur de valeur  $C = 3,4 \mu\text{F}$  branché entre fil de ligne et neutre.

Indiquer le nombre minimum de lignes en parallèle pour que l'auto-amorçage synchrone soit possible.

### 3. Diagramme de Potier.

3.1. A partir des essais expérimentaux, déterminer par la méthode de POTIER :

— la réactance de fuites partielles par phase de l'induit  $X_s$  ;

— le coefficient d'équivalence  $\alpha = \frac{i}{J}$  entre le courant inducteur  $i$  et le courant par phase dans l'induit  $J$ .

3.2.1. En négligeant la chute ohmique dans l'induit, tracer le diagramme de POTIER pour le point de fonctionnement nominal :

— tension simple ou f.é.m. par phase : 1 cm = 1 kilovolt ;

— intensité dans l'inducteur : 1 cm = 500 ampères.

En déduire le courant d'excitation correspondant au fonctionnement nominal.

3.2.2. Par une transformation géométrique appropriée, faire apparaître l'angle de décalage interne. Indiquer :

3.2.2.1. L'angle de décalage interne.

3.2.2.2. La valeur en volts de la f.é.m. synchrone par phase  $E_s$  (la rapporter à la tension nominale).

3.2.2.3. La valeur saturée de la réactance synchrone  $X_d$ .

### 4. Oscillations propres.

L'alternateur fonctionnant à sa charge nominale voit celle-ci brusquement réduite par disjonction d'une ligne du réseau aux 3/4 de sa valeur précédente en puissance active et réactive (donc en conservant le même facteur de puissance 0,9).

En admettant dans les premiers instants que :

— le couple mécanique d'entraînement de l'alternateur n'est pas modifié ;

— la f.é.m. synchrone et la réactance synchrone gardent la même valeur.

4.1.1. Ecrire l'équation de variation de l'angle de décalage interne  $\beta$ .

4.1.2. Décrire la nature du mouvement qui en résultera pour le rotor (oscillations propres).

4.2.1. Estimer la période de ces oscillations sachant que le temps de lancer du groupe est de 12 secondes. (On rappelle que le temps de lancer est le temps fictif que mettrait le groupe partant de l'arrêt pour atteindre sa vitesse nominale sous l'effet d'un couple d'entraînement égal au couple nominal, toutes les pertes étant négligées.)

### 5. Court-circuit brusque.

L'alternateur fonctionnant au régime nominal (courant d'excitation 3 200 ampères) est brusquement mis en court-circuit.

Indiquer l'amplitude maximum de crête du courant de court-circuit dans une phase en admettant que par suite de circonstances défavorables, la composante apériodique du courant dans cette phase a même amplitude que la composante symétrique.

#### 6. Ouverture d'un court-circuit.

L'alternateur fonctionnant en court-circuit triphasé dans les conditions de l'essai normal (courant dans l'induit égal à la moitié du courant nominal), on supprime le court-circuit. Indiquer la tension entre phases apparaissant :

- immédiatement à l'ouverture du court-circuit ;
- très longtemps après.

### DEUXIÈME PARTIE

#### ETUDE A PARTIR DES ELEMENTS FOURNIS PAR LE CONSTRUCTEUR

On dispose des renseignements suivants :

Puissance électrique nominale du turboalternateur 600 mégawatts pour une tension entre phases de 20 kilovolts, un facteur de puissance  $\cos \varphi = 0,9$ , une fréquence de 50 Hz et une vitesse de rotation de 3 000 t/mn.

#### STATOR :

Diamètre extérieur : 2,62 m.

Diamètre intérieur : 1,365 m.

48 encoches rectangulaires de largeur 41,5 mm et de hauteur 185 mm, et 2 conducteurs par encoche (bobinage en 2 couches).

Pas d'enroulement : 19 encoches (chaque spire embrasse donc  $\frac{19}{24}$  du pas polaire).

Chaque phase comporte deux parties en parallèle. Les trois phases sont montées en étoile.

La longueur totale du stator est de 6,1 m, mais il comporte 82 événements pour le passage du fluide de refroidissement du rotor (hydrogène sous pression de 3 bars). Il est constitué par un empilage de tôles normales à l'axe de la machine.

Les conducteurs statoriques sont refroidis par une circulation d'eau sous pression.

#### ROTOR :

Diamètre : 1,165 m.

Il comprend 32 encoches réparties sur deux zones de 120° chacune comportant 16 encoches équidistantes. Elles sont séparées par deux zones non bobinées occupant 60° chacune.

L'ensemble des conducteurs est monté en série pour former  $N_2 = 168$  spires, alimentées en courant continu à travers deux bagues.

En outre, chaque encoche comprend une barre, reliée à ses voisins pour former une cage d'écurie jouant le rôle d'amortisseur.

La longueur du rotor est de 6,2 m.

ENTREFER :

L'entrefer mécanique, égal à la demi-différence des diamètres du rotor et du stator est de 0,1 mètre. La présence d'encoches au stator et au rotor, introduit une correction. On pourra négliger leur présence en adoptant pour entrefer corrigé  $e_c = 0,11$  m.

Le diamètre moyen  $D$ , au niveau de l'entrefer, sera pris égal à 1,265 m.

Pour tous les calculs magnétiques, la longueur corrigée de l'entrefer sera prise égale à 6,10 m.

FORCE MAGNÉTOTRICE :

Dans tout ce qui suit, on appelle force magnétomotrice en un point A de l'entrefer le demi-flux du courant total à l'intérieur d'un contour tel que C embrassant un pas polaire (ci-après fig. 1 sur laquelle, pour simplifier, les encoches n'ont pas été représentées).

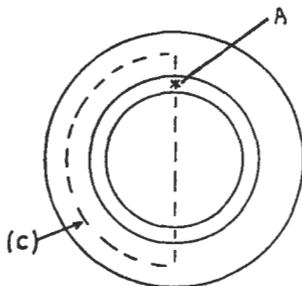


Fig. 1

C passant dans les couronnes statorique et rotorique englobe tous les conducteurs de ce pas polaire.

#### 1. Enroulement statorique.

1.1. Représenter la répartition des 16 conducteurs d'une phase (8 dans chaque couche) dans 13 encoches consécutives d'un pas polaire.

1.2. En déduire la valeur du facteur de bobinage pour le fondamental ( $k_b = 0,905$ ).

1.3. Calculer le flux par pôle correspondant à une force électromotrice à vide égale à la tension nominale.

1.4. En déduire l'amplitude de l'onde fondamentale de l'induction correspondante dans l'entrefer avec :  $D = 1,265$  m  $l_i = 6,10$  m.

1.5. Exprimer en fonction de la valeur efficace du courant par phase  $J$ , la valeur maximum de la force magnétomotrice de l'induit.

## 2. Enroulement rotorique.

2.1. L'inducteur étant seul alimenté par un courant continu  $i$ , esquisser la courbe de répartition de la f.é.m. réelle dans l'entrefer en fonction d'une abscisse angulaire  $\theta$  liée au rotor.

Préciser son amplitude maximum en fonction de  $i$ .

2.2. Pour simplifier, on remplace dans ce qui suit la courbe précédente par une courbe trapézoïdale (fig. 2) dont la petite base est le tiers de la grande  $\left(\gamma = \frac{1}{3}\right)$  et dont la grande base est égale au pas polaire.

2.2.1. Préciser l'amplitude de l'onde fondamentale en fonction du courant inducteur  $i$ .

2.2.2. Au-dessous de la saturation, la courbe précédente représente encore au changement d'unité près la courbe de répartition de l'induction dans l'entrefer :  $B = f(\theta)$ .

En déduire pour la f.é.m. à vide d'un unique conducteur statorique la contribution relative des harmoniques à la valeur efficace (distorsion). Il est conseillé de comparer la valeur efficace de la f.é.m. réelle à la valeur efficace de son fondamental.

Indiquer comment ce résultat se trouvera modifié dans la f.é.m. d'une phase statorique.

Préciser en fonction de  $i$ , la valeur efficace de l'onde fondamentale de la f.é.m. correspondante dans une phase statorique.

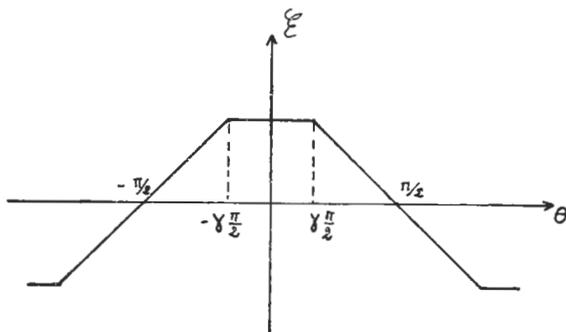


Fig. 2

## 3. Coefficient d'équivalence.

3.1. Par comparaison des réponses aux questions 1.5. et 2.2.1.,

déduire le coefficient d'équivalence  $\alpha = \frac{i}{J}$  des courants inducteurs  $i$

et induit  $J$  engendrant dans l'entrefer une force magnétomotrice fondamentale de même amplitude.

4. Réactance synchrone non saturée.

Calculer en fonction du courant  $J$  dans l'induit :

4.1. L'amplitude de l'onde fondamentale de l'induction dans l'entrefer pour une machine non saturée.

4.2. L'énergie magnétique correspondante.

4.3. La valeur non saturée de la réactance synchrone  $X_{ad}$ , de l'induit et la valeur de la réactance synchrone non saturée :  $X_d = X_{ad} + X_s$  avec  $X_s = 0,2 \Omega$ .

4.4. Indiquer approximativement le courant à vide en moteur synchrone ou asynchrone sous la tension nominale avec excitation nulle.

5. Influence de la saturation sur la f.é.m. à vide.

5.1. Tracer un contour d'Ampère embrassant un pas polaire et indiquer comment calculer en général la relation  $B = f(i)$  dans la machine saturée.

5.2. Pour une induction de 0,8 tesla dans l'entrefer, indiquer approximativement :

5.2.1. Le flux dans le pas dentaire statorique correspondant.

5.2.2. L'induction dans la dent statorique correspondant :

- au niveau de l'entrefer ;
- au milieu de la hauteur de la dent ;
- à la base de la dent,

en admettant que la longueur axiale réelle du fer dans la dent est de 5,10 mètres. En déduire approximativement les ampère-tours nécessaires dans cette dent sachant que la courbe d'aimantation de la tôle passe par :

$B_T$	1	1,2	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$H_{A/m}$	300	600	2 000	4 000	7 000	12 000	22 000

TROISIÈME PARTIE

EXCITATION ET REGULATION

Le courant d'excitation nominal de l'alternateur est de 3 200 ampères, mais lorsqu'un court-circuit se produit sur le réseau, la régulation doit pouvoir augmenter rapidement le courant inducteur jusqu'à une valeur plafond de 5 050 ampères.

1. Justifier l'intérêt de cette opération.

2. Le courant d'excitation  $i$  de l'alternateur de 600 MW est produit par deux machines électriques, montées en cascade, sur le même arbre que l'alternateur et tournant à la même vitesse que lui (fig. 3) :

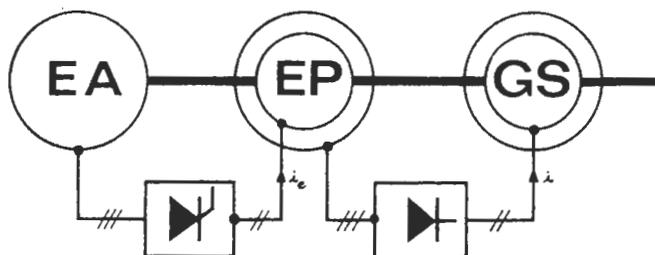


Fig. 3

— Un excitateur principal (EP) qui est un alternateur triphasé 200 Hz dont les tensions sinusoïdales sont redressées par un pont de diodes, la sortie de ce pont étant appliquée aux bagues de l'alternateur de 600 MW (GS).

— Un excitateur auxiliaire (EA) qui est un alternateur triphasé 400 Hz à excitation par aimants permanents, fournissant des tensions sinusoïdales de valeur pratiquement constante, redressées par un pont triphasé à thyristors. La sortie de ce pont est appliquée aux bagues d'excitation de l'excitateur principal et permet ainsi de faire varier le courant  $i$  d'excitation de l'alternateur de 600 MW, dont la résistance de l'enroulement rotorique est de  $0,17 \Omega$ .

On pourra négliger l'ondulation résiduelle des courants d'excitation et admettre que :

- Les deux ponts redresseurs sont constitués d'éléments semi-conducteurs parfaits ;
- Les commutations sont instantanées.

2.1. Indiquer pourquoi on n'envisage pas l'alimentation par génératrice à courant continu.

2.2. Justifier le choix de fréquences plus élevées que 50 Hz pour les excitateurs.

2.3. Pour le point de fonctionnement nominal (3 200 ampères), indiquer :

- la tension entre phases de l'excitateur principal ;
- la valeur efficace du courant par phase de la machine et sa puissance apparente nominale ;
- son courant inducteur, sachant que :
  - sa réactance synchrone est de 106 % ;
  - la machine n'est pas saturée et qu'un courant inducteur de 85 ampères correspond à une tension entre phases à vide de 400 volts.

2.4. Pour le point de fonctionnement en plafond de tension (5 050 ampères dans l'inducteur) :

2.4.1. Préciser la valeur moyenne et la valeur efficace du courant dans un bras du pont de diodes.

2.4.2. Représenter en fonction du temps :

$$1 \text{ cm} = \frac{1}{600} \text{ seconde}, \quad 1 \text{ cm} = 100 \text{ volts}$$

la tension inverse aux bornes d'un bras de pont.

2.4.3. En admettant qu'on dispose de diodes :

- intensité efficace : 1 000 ampères ;
- tension inverse : 1 500 volts ;

et qu'on adopte :

- un coefficient de sécurité de 2,5 sur la tension inverse ;
- un fonctionnement normal de chaque bras avec une diode hors service ;

indiquer le nombre de diodes nécessaires pour constituer le pont redresseur.

2.5. La réactance de fuites de l'excitateur principal est en valeur relative de 21 %. Calculer la chute inductive de tension due à l'empiétement et l'exprimer en valeur relative par rapport à la tension continue calculée précédemment.

2.6. Lors de certains incidents, la régulation doit procéder à la désexcitation rapide du turboalternateur. Quel serait l'intérêt dans ce cas de disposer à la place du pont de diodes d'un pont de thyristors ?

3. Une autre solution utilisée pour l'excitation consiste à réaliser l'excitation par soutirage d'un alternateur. L'inducteur de l'alternateur est alimenté par un pont de thyristors et un pont de diodes en série. Le pont de thyristors est alimenté par transformateur shunt sur les bornes 20 kilovolts de l'alternateur. Le pont de diodes est alimenté par un transformateur série dont le primaire est parcouru par le courant d'induit de l'alternateur.

3.1. Représenter le schéma trifilaire correspondant.

3.2. En fonctionnement normal au régime nominal, le pont de thyristors fournit une tension correspondant au courant inducteur à vide de l'alternateur (985 A) et le pont de diodes la tension complémentaire pour obtenir le courant inducteur nécessaire (3 200 A).

Afin de faciliter la désexcitation, on impose que le pont de thyristors fonctionnant en onduleur avec un retard  $\delta = 165^\circ$  puisse absorber l'énergie du pont de diodes lorsque le courant dans l'induit du turboalternateur est égal au courant nominal.

Indiquer, dans ces conditions, en supposant les commutations instantanées :

3.2.1. La tension continue aux bornes du pont de diodes.

3.2.2. La tension secondaire entre phases du transformateur shunt d'alimentation du pont de thyristors.

3.3.3. Le retard  $\delta$  avec lequel les thyristors fonctionnent au régime nominal.

## SOLUTION

### ETUDE DU TURBOALTERNATEUR A PARTIR DES RESULTATS D'ESSAIS

#### PREMIÈRE PARTIE

##### 1. Pertes et rendement.

Puissance consommée dans le circuit d'excitation pour le point de fonctionnement nominal : 1741 kW.

Puissance nécessaire à l'excitation :  $1741/0,92 = 1892$  kW.

Pertes Joule au stator : 2556 kW (le courant nominal dans une phase du stator vaut 19245 A).

Pertes totales (excitation, Joule, fer et mécaniques) : 6,34 MW.

Rendement nominal :  $600/(600 + 6,34) = 0,9895 \approx 0,99$ .

##### 1.2.

1.2.1. En court-circuit, avec  $J = J_n/2$ , la puissance nécessaire à l'excitation vaut 257 kW.

Les pertes Joule dans les enroulements statoriques : 639 kW.

Les pertes fer, proportionnelles, en gros, au carré du champ magnétique dans le fer (donc au carré de la force électromotrice interne  $\underline{V} + r \cdot \underline{J} \approx \underline{V}$ ), sont négligeables dans l'essai en court-circuit.

Les pertes totales, dans cet essai, s'élèvent donc à 2,25 MW.

1.2.2. A vide, pour obtenir la tension nominale (11,55 kV par phase), il faut un courant d'excitation de 968 A.

Les pertes dues à l'excitation s'élèvent donc à 173 kW.

Il n'y a pas de pertes Joule dans l'induit.

Les pertes fer sont les mêmes que dans le fonctionnement nominal.

La puissance mécanique d'entraînement, compensant la somme des pertes, vaut donc, dans cet essai : 2,07 MW.

1.2.3. Sur charge inductive  $\left( V = V_n, J = \frac{J_n}{2} \right)$ , le

courant d'excitation valant 2360 A, la puissance nécessaire à l'excitation est de 1,029 MW.

Les pertes Joule dans l'induit : 639 kW.

Les pertes fer : 543 kW.

Au total, sans oublier les pertes mécaniques (1,35 MW) : 3,56 MW.

## 2. Réactance synchrone non saturée et autoamorçage synchrone.

La caractéristique en court-circuit est linéaire ; si, à un courant d'excitation de 1180 A correspond, dans les phases en court-circuit un courant de 9620 A, alors à un courant d'excitation de 400 A, par exemple (partie linéaire de la caractéristique à vide) correspond un courant de court-circuit de 3261 A.

La f.é.m. à vide due à ce courant d'excitation vaut 5,2 kV.

La relation  $\underline{E}_v = r \cdot \underline{J} + j \cdot X_d \cdot \underline{J}$  dans laquelle le terme  $r \cdot \underline{J}$  est négligeable, donne  $\bar{X}_d = 1,595 \Omega$ .

L'impédance de référence ayant la valeur  $V_n/J_n$ , soit  $0,591 \Omega$ , la réactance synchrone non saturée de la machine, exprimée en valeur relative, est 270 %.

### 2.2.

Ce nombre minimal de lignes qui rend possible l'autoamorçage synchrone, ne dépend pas du mode de couplage du transformateur. Il suffit en effet, pour le déterminer, de raisonner sur la puissance réactive.

La puissance réactive absorbée par une phase de l'alternateur vaut  $V^2/X_d \cdot (\text{Var})$ .

Le rapport de transformation global du transformateur étant de 11, la puissance réactive fournie par phase par une ligne vaut :  $C \cdot \omega \cdot (11 V)^2 (\text{Var})$ , soit  $0,129 V^2$ .

En l'absence d'excitation, toute la puissance réactive nécessaire à un amorçage doit être fournie par les  $n$  lignes sur lesquelles débite l'alternateur.

On doit donc avoir :  $0,129 \cdot n \cdot V^2 = V^2/X_d$ .

C'est pour la valeur maximale de  $X_d$ , correspondant à la valeur non saturée de la réactance synchrone, que cette équation est le plus facilement réalisée. De plus, au départ, la machine est non saturée.  $X_d$  prend donc sa valeur maximale, soit  $1,595 \Omega$ . L'équation est satisfaite dès que  $n = 5$ .

(L'autoamorçage est un phénomène dangereux au cours duquel on perd le contrôle de la tension de l'alternateur).

## 3. Diagramme de Potier.

3.1. La détermination, par la méthode de POTIER, de la réactance de fuites partielles  $X_s$  par phase de l'induit, et du coefficient d'équivalence  $\alpha = i/J$  entre le courant inducteur  $i$  et le courant par phase dans l'induit  $J$  (coefficient qui sera calculé à partir des éléments de la machine fournis par le constructeur, dans la deuxième partie du problème), est tout à fait classique et nous en donnons seulement les résultats (fig. 1) :

On trouve :  $X_s = 0,223 \Omega$  soit 37,7 %,

$$\alpha = 0,106.$$

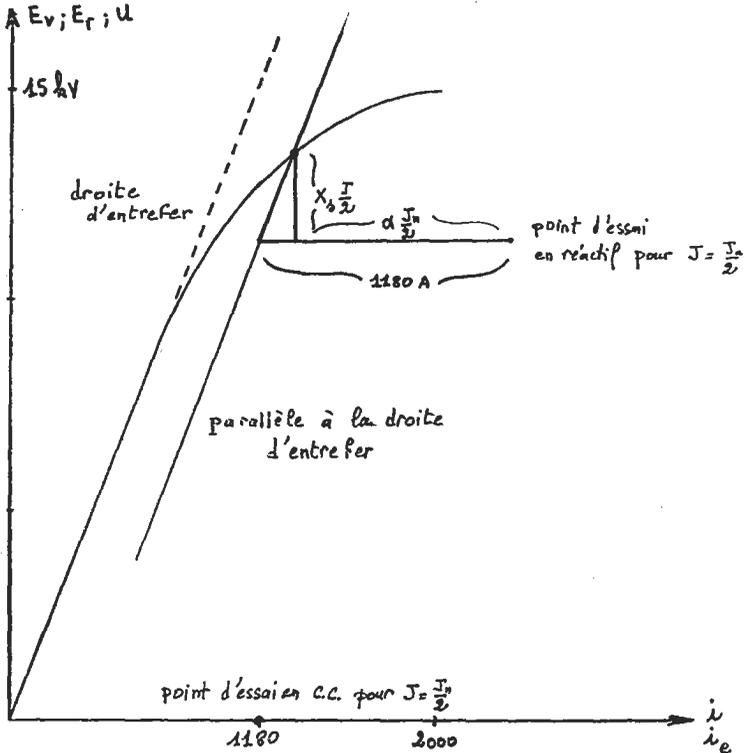


Fig. 1

3.2.1. Pour le fonctionnement nominal, la f.é.m. résultante  $E_r$  est égale à 14 kV (fig. 2).

En assimilant, selon l'hypothèse de POTIER, la courbe  $E_v = f(i)$  fournie par l'énoncé, et la courbe  $E_r = f(i_c)$  où  $i_c$  est le courant continu fictif, circulant dans l'inducteur, équivalent à l'action conjuguée du courant inducteur réel  $i$  et du courant  $\underline{J}$  de l'induit, on trouve  $i_c = 1450$  A.

La fig. 2 est à la fois un diagramme temporel et un diagramme spatial.

Les vecteurs  $\vec{V}$ ,  $\vec{E}_r$ ,  $\vec{X}_s \cdot \vec{J}$ , sont des vecteurs de FRESNEL (diagramme temporel).

Les vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{i}_c$ ,  $a\vec{J}$  représentent la valeur (scalaire) des forces magnétomotrices mesurées dans l'axe d'une phase du stator. (La définition d'une force magnétomotrice est donnée plus

loin dans le texte). A ce titre, il s'agit bien de vecteurs de FRESNEL, car en un point du stator, la valeur d'une force magnétomotrice, ou plutôt de son fondamental, est bien une grandeur sinusoïdale dans le temps.

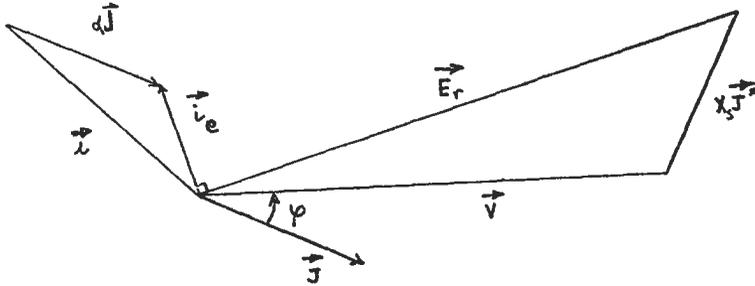


Fig. 2

Mais ces derniers vecteurs ont aussi une signification spatiale. Ils représentent, notamment en direction, les axes des champs tournants de l'inducteur, de l'induit, ainsi que celui du champ tournant résultant dans l'entrefer (dans une phase du stator, le flux dû au champ tournant est en avance d'un quart de période sur la f.é.m. qu'il induit dans cette phase).

La relation  $\vec{i}_e = \vec{i} + \alpha \vec{J}$  permet de déterminer le courant inducteur correspondant au fonctionnement nominal.

On trouve bien entendu 3 200 A.

3.2.2.1. La transformation géométrique qui permet de faire apparaître sur le diagramme, le paramètre fondamental qu'est l'angle de décalage interne, est une rotation de  $-\pi/2$ , de la partie du diagramme relative aux forces magnétomotrices.

Ainsi se trouve artificiellement supprimé le décalage d'un quart de période entre les forces magnétomotrices (ou les flux qu'elles créent) et les forces électromotrices induites dans une phase.

Le vecteur  $\vec{V}$  étant pris pour origine des phases, on voit ainsi que la force magnétomotrice de l'inducteur, donc la roue polaire elle-même, doit, entre la marche à vide et la marche en charge, avancer d'un angle  $\phi$ . (A vide, en effet, la force magnétomotrice de l'inducteur, mesurée dans l'axe d'une phase de l'induit, est une grandeur sinusoïdale en quadrature avance sur la f.é.m. induite dans cette phase ; la rotation de  $-\pi/2$  que nous avons opéré la représente donc en phase avec  $\vec{V}$ ).

Cet angle  $\phi$  de décalage interne est très important pour caractériser le fonctionnement de l'alternateur. Au laboratoire, on peut le mettre en évidence par stroboscopie, en synchronisant les éclairs sur le réseau dans lequel débite l'alternateur, et en obser-

vant un disque solidaire de l'arbre. Lorsque la charge de l'alternateur augmente (par action sur le moteur d'entraînement), on voit le disque avancer dans le sens de la marche.

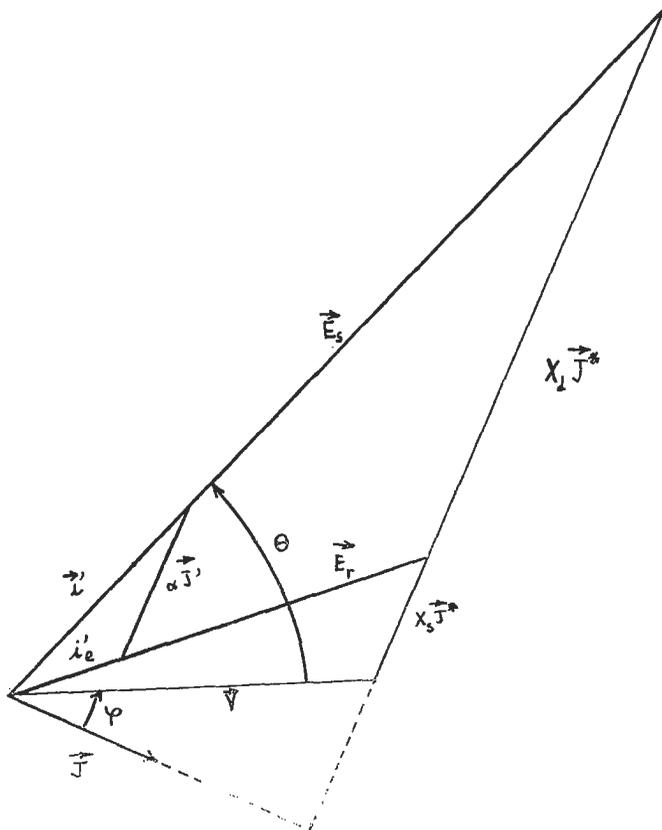


Fig. 3

Le diagramme de la fig. 3 montre que pour le fonctionnement nominal, cet angle  $\theta$  vaut  $45^\circ$ .

3.2.2.2. La f.é.m. synchrone a même phase que la f.é.m. fictive créée par l'inducteur seul.

Pour un fonctionnement caractérisé par  $\underline{V}$ ,  $\underline{J}$  et  $\theta$ , la f.é.m. synchrone  $\underline{E}_s$  et la réactance synchrone  $X_d$  sont définies par :

$$\underline{E}_s = \underline{V} + r \cdot \underline{J} + j \cdot X_d \cdot \underline{J}.$$

La fig. 3 montre qu'on obtient  $E_s = 32$  kV, soit  $2,77$  V<sub>n</sub>.

3.2.2.3. De la même manière, on trouve  $X_d \cdot J_n = 24 \text{ kV}$ .  
On en déduit :  $X_d = 1,25 \Omega$  ; soit  $X_{d(\text{sat})} = 208 \%$ .

#### 4. Oscillations propres.

Les phénomènes qui accompagnent un brusque changement de régime sont complexes. L'alternateur lui-même ne peut plus être décrit par les seuls paramètres caractérisant un régime permanent (apparition de réactances transitoires). De plus, des dispositifs de protection des lignes, de régulation (au niveau de l'excitation de l'alternateur, mais aussi et surtout au niveau du moteur d'entraînement de l'alternateur) interviennent lors de l'apparition d'un défaut.

Nos raisonnements, en fait, ne seront que schématiques.

La puissance délivrée par l'alternateur vaut  $3 \cdot V \cdot J \cdot \cos \varphi$ , mais la fig. 3 montre que l'on peut également l'écrire en faisant apparaître l'angle  $\beta$  (égal à  $\vartheta$  lors du fonctionnement nominal) ; on obtient :

$$P = \frac{3 \cdot E_s \cdot V \cdot \sin \beta}{X_d}$$

Le rotor qui est soumis au couple mécanique d'entraînement  $\Gamma_{me}$ , est donc également le siège d'un couple électromagnétique résistant,  $\Gamma_r$ , égal à

$$\frac{3 \cdot E_s \cdot V \cdot \sin \beta}{X_d \cdot \Omega}, \text{ soit } \Gamma_r = \Gamma_o \cdot \sin \beta.$$

4.1.1. L'abscisse angulaire du rotor est égale à  $\Omega \cdot t + \beta$ .

Sa dérivée seconde se réduit donc à  $\frac{d^2 \beta}{dt^2}$ .

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc :

$$K \cdot \frac{d^2 \beta}{dt^2} = \Gamma_{me} - \Gamma_o \cdot \sin \beta.$$

4.1.2. Si la charge de l'alternateur varie brusquement et de manière durable (un dispositif de protection peut très bien, au contraire, éliminer le défaut au bout d'un temps voisin de 0,1 seconde), le couple électromagnétique résistant varie et devient égal à  $\Gamma_o \cdot \sin \beta$ .

L'angle  $\beta$ , primitivement égal à  $\vartheta = 45^\circ$ , ne varie que lentement par rapport à la fréquence du réseau (sa période d'oscillation est de l'ordre de la seconde).

Entre l'instant d'apparition du défaut et celui où les divers éléments de régulation de vitesse permettront de réduire la puissance mécanique, il s'écoulera environ 0,2 seconde (valeur moyenne pour les grandes centrales thermiques ou nucléaires). Pendant ce temps, nous supposons que l'angle  $\beta$  ne s'est pas notablement éloigné de sa valeur  $\vartheta = 45^\circ$  ; nous poserons donc  $\beta = \vartheta + \delta$ , et  $\sin \beta = \sin \vartheta + \cos \vartheta \cdot \delta$ .

L'équation de variation de l'angle  $\beta$  s'écrit donc :

$$K \cdot \frac{d^2 \delta}{dt^2} = \Gamma_{me} - \Gamma'_o \cdot \sin \vartheta - \Gamma'_o \cdot \cos \vartheta \cdot \delta.$$

Avec :

$$\Gamma'_o \cdot \sin \vartheta = \Gamma'_o \cdot \cos \vartheta = (3/4) \cdot (6 \cdot 10^8 / 314) \text{ N. m} = 1,43 \cdot 10^6 \text{ N. m.}$$

Il reste à déterminer le moment d'inertie K.

Soit  $P_n$  la puissance nominale ;  $\Omega$  la vitesse angulaire nominale. Le couple nominal  $\Gamma_n$  vaut  $\frac{P_n}{\Omega}$ .

Lors d'un lancer fictif, sous l'action d'un couple constant, la vitesse angulaire du rotor croît linéairement en fonction du temps. La vitesse nominale  $\Omega$  serait atteinte au bout d'un temps  $t_l$  tel que :

$$K \cdot \Omega = \frac{P_n}{\Omega} \cdot t_l.$$

On a donc :  $K = 7,3 \cdot 10^4 \text{ kg. m}^2$ .

L'équation précédente devient :

$$7,3 \cdot 10^4 \frac{d^2 \delta}{dt^2} + 1,43 \cdot 10^6 \delta = 0,48 \cdot 10^6.$$

On en déduit, pour  $t$  inférieur à 0,2 seconde, que le rotor va esquisser un mouvement oscillatoire sinusoïdal décrit par l'équation :  $\delta = 0,34 (1 - \cos \omega t)$ , dans laquelle  $\delta$  est exprimé en radians ; en l'exprimant en degrés, on a :  $\delta = 19 \cdot (1 - \cos \omega t)$ .

4.2.1. La période de ces oscillations est égale à :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{\Gamma'_o \cdot \cos \vartheta}} = 1,42 \text{ seconde.}$$

Dans les 200 premières millisecondes, la roue polaire avance ainsi de 7 degrés, ensuite, les dispositifs régulateurs qui prennent en compte, à chaque instant, la puissance électrique, la dérivée

de l'angle de décalage interne  $\frac{d\beta}{dt}$ , etc. sont à même, en jouant sur l'entraînement et sur l'excitation, d'agir sur le mouvement du rotor en vue de le stabiliser.

### 5. Court-circuit brusque.

Bien qu'il soit assez rare, le court-circuit triphasé est généralement choisi comme défaut-type, car la puissance active normalement transmise par les lignes étant brusquement annulée, l'arbre de l'alternateur transforme alors en énergie cinétique le surcroît d'énergie mécanique qui lui est fournie : il accélère pendant les premiers instants.

Le problème essentiel consiste à éviter la perte de synchronisme. Pour cela, le réglage de l'excitation, et notamment son augmentation dans la toute première phase suivant le court-circuit (en vue de contribuer d'abord au maintien du synchronisme, puis de manière à évacuer le plus de puissance possible dès la disparition du défaut) a des conséquences sur la valeur des courants de court-circuit.

L'alternateur doit donc être dimensionné de manière à pouvoir supporter de larges courants de court-circuit.

La valeur de ces courants est déterminée par les coefficients phénoménologiques que sont les réactances transitoire  $X'_d$  et subtransitoire  $X''_d$ .

Le courant d'une phase du stator est, comme l'indique le texte, la somme d'une composante apériodique amortie (sa constante de temps est de l'ordre de 0,2 seconde) et d'un terme sinusoïdal amorti (l'amortissement est à deux modes : subtransitoire avec une constante de temps de l'ordre de 0,05 seconde, puis transitoire avec une constante de temps de l'ordre de la seconde).

Tout au début du court-circuit, l'amplitude de la composante alternative du courant dans une phase, est égale à  $\frac{E_s \cdot \sqrt{2}}{X''_d}$ ,

$$\text{soit : } \frac{2,77 V_n \sqrt{2}}{0,282 \left( \frac{V_n}{J_n} \right)} = 9,82 J_n \cdot \sqrt{2}.$$

Si, par suite de circonstances défavorables, la composante apériodique du courant a même amplitude que cette composante alternative (ce qui constitue sa valeur maximale), l'amplitude de crête de l'intensité du courant de court-circuit s'élève à  $27,8 J_n$ , soit 534 000 ampères.

#### 6. Ouverture d'un court-circuit.

Immédiatement après l'ouverture du court-circuit, la tension entre phases est limitée (en valeur efficace), à  $\sqrt{3} \cdot X''_d \cdot J_c$ , soit : 4,7 kV.

Longtemps après l'ouverture du court-circuit, la tension est celle qui existe normalement à vide lorsque le courant d'excitation a une intensité de 1 180 A, soit  $12,8 \text{ kV} \cdot \sqrt{3} = 22,2 \text{ kV}$ .

### DEUXIÈME PARTIE

#### ETUDE A PARTIR DES ELEMENTS FOURNIS PAR LE CONSTRUCTEUR

##### 1. Enroulement statorique.

1.1. La fig. 4 représente, en vue panoramique, la totalité de l'enroulement d'une phase du stator.

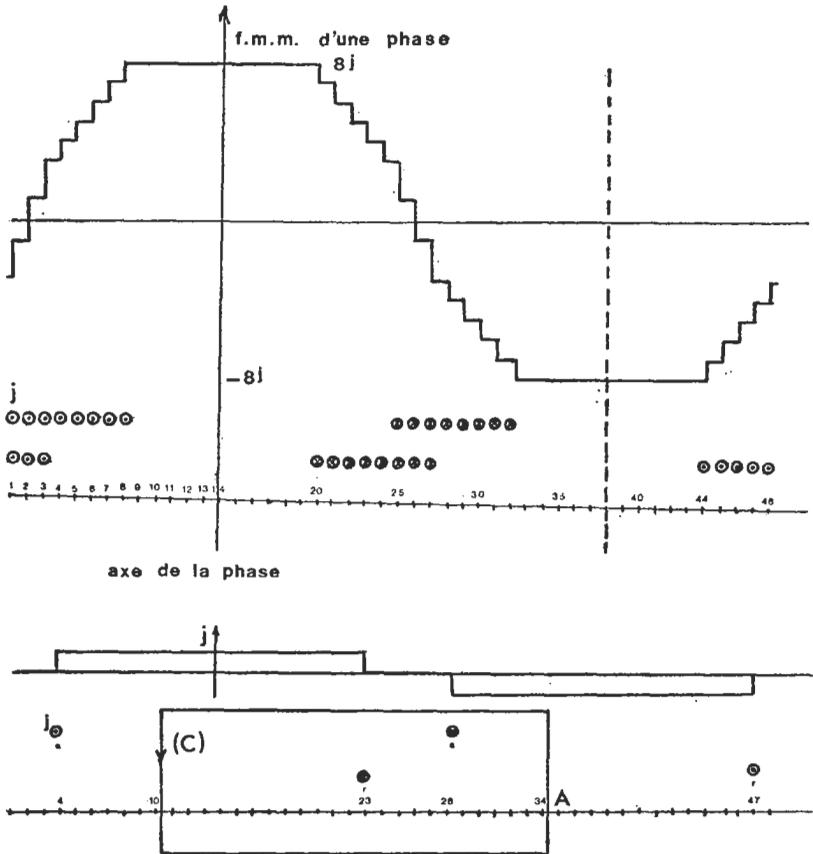


Fig. 4

Les conducteurs d'aller (par exemple), sont représentés en haut, et les conducteurs de retour, en bas.

Les deux parties en parallèle sont, d'une part les spires formées des conducteurs d'aller numérotés de 1 à 9 et des conducteurs de retour numérotés de 20 à 27 [spires (1 a, 20 r), (2 a, 21 r), etc.], et d'autre part les spires formées par les conducteurs d'aller numérotés de 25 à 33 et des conducteurs de retour numérotés de 44 à 3 [spires (25 a, 44 r), (26 a, 45 r), ..., (30 a, 1 r), (31 a, 2 r) et (32 a, 3 r)].

Les enroulements des deux autres phases se logeraient dans les encoches restées partiellement ou totalement vides après le dessin du premier enroulement.

1.2. Le facteur de bobinage pour le fondamental est le rapport entre la f.é.m. théorique que l'on obtiendrait avec le bobinage réel si la répartition du champ magnétique dans l'entrefer était parfaitement sinusoïdale (et bipolaire) et la f.é.m. qu'on obtiendrait si, avec le même champ et le même nombre de conducteurs, on concentrait ceux-ci dans deux encoches diamétrales.

Il se compose ici de deux facteurs.

Les spires n'étant pas diamétrales, le flux embrassé par chacune d'elles est réduit dans le rapport de :

$$1 \text{ à } \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{19}{24}\right) = 0,947 = k'_b.$$

Les f.é.m. des huit spires de chaque voie étant décalées dans le temps, l'amplitude totale, est affectée, par rapport à un enroulement concentré, d'un facteur  $k''_b$  tel que :

$$k''_b = \frac{\sin 8 \frac{\pi}{48}}{8 \cdot \sin \frac{\pi}{48}} = 0,956.$$

Le facteur de bobinage  $k_b$  vaut donc :  $k_b = k'_b \cdot k''_b = 0,905$ .

1.3. Chaque voie d'enroulement d'une phase comporte  $N_s = 8$  spires. La valeur efficace de la tension nominale, par phase, est 11,55 kV. La valeur efficace de la f.é.m. induite dans une phase est reliée au flux (fondamental) par pôle par l'expression :

$$E = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \cdot \Phi \cdot N_s \cdot k_b.$$

On en déduit :  $\Phi = 7,18 \text{ W}$ .

1.4.  $\Phi = D \cdot l_i \cdot B_m$ , d'où  $B_m = 0,93 \text{ T}$ .

1.5. La fig. 4 (en bas), représente, avec la définition du texte (demi-flux du courant à travers le contour orienté C, ce flux étant rapporté au point A) la variation spatiale de la force magnétomotrice due à deux spires homologues sous des pôles opposés. Nous avons noté  $j$  la valeur instantanée du courant qui parcourt chaque conducteur. La valeur maximale de  $j$  est donc

égale à  $\frac{J \cdot \sqrt{2}}{2}$  soit  $J/\sqrt{2}$ .

La fig. 4 (en haut) représente par ailleurs la force magnétomotrice totale d'une phase du stator, constituée de huit couples de spires homologues.

Dès lors, pour déterminer la valeur maximale de la f.m.m. de l'induit, nous avons le choix entre deux méthodes :

Une méthode graphique. A un instant donné, la f.m.m. de l'induit s'obtient en faisant la somme, en chaque point, des f.m.m. dues à chacune des phases.

Choisissons l'instant où le courant est maximal dans la phase 1, représentée sur la fig. 4. Dans cette phase, les conducteurs sont parcourus par un courant d'intensité  $J/\sqrt{2}$ . Les deux autres phases, décalées dans l'espace respectivement de  $2\pi/3$  et de  $4\pi/3$ , sont parcourues par des courants d'intensité  $-\frac{J}{2\sqrt{2}}$ .

En faisant la somme des 3 f.m.m., on constate que la f.m.m. totale de l'induit est maximale (fig. 5) dans l'axe de la phase 1 (au moment où le courant est maximal dans cette phase, ce qui constitue un résultat classique).

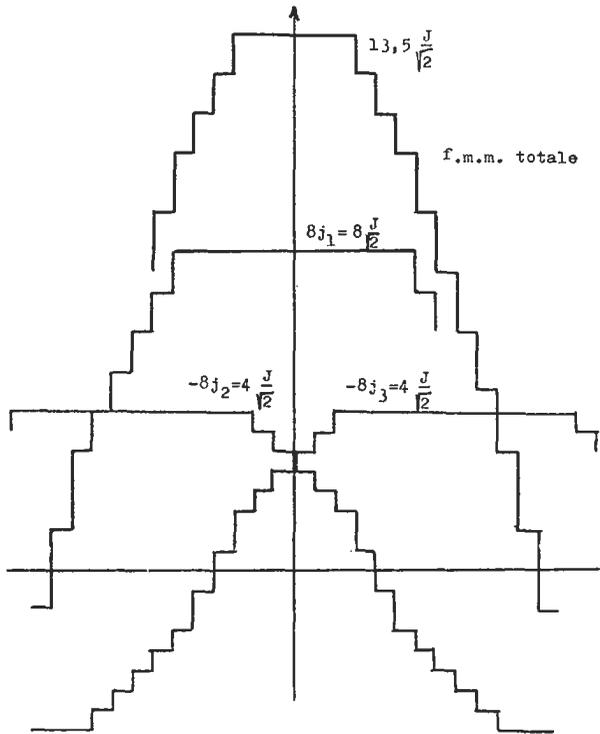


Fig. 5

La fig. 5 montre que la valeur maximale de cette force magnétomotrice est égale à  $13,5 \frac{J}{\sqrt{2}}$  (elle varie légèrement au cours d'une période et vaut, par exemple  $13,86 \frac{J}{\sqrt{2}}$ ,  $1/12^{\text{me}}$  de période plus tard).

Une autre méthode consiste à décomposer la f.m.m. produite par un couple de spires telles que celles qui sont représentées sur la fig. 4 en série de FOURIER, puis à tenir compte, pour chaque système de forces magnétomotrices polyphasées, des théorèmes classiques.

Nous nous limiterons au terme fondamental.

Le terme fondamental de la f.m.m. élémentaire représentée sur la fig. 4, a pour amplitude :

$$\frac{4}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{19}{24} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot j = \frac{4}{\pi} \cdot k'_b \cdot j.$$

Le fondamental de la f.m.m. d'une phase de l'induit s'obtient en ajoutant  $N_s = 8$  f.m.m. décalées les unes par rapport aux autres d'une encoche.

Lorsque la phase est parcourue par le courant d'intensité  $j$  (au niveau de chaque conducteur), l'amplitude maximale (lorsque la variable est l'abscisse angulaire), vaut :

$$\frac{4}{\pi} \cdot k'_b \cdot N_s k''_b \cdot j.$$

Lorsque l'enroulement total est parcouru par des courants triphasés d'amplitude  $J/\sqrt{2}$ , la f.m.m. tournante obtenue, à répartition sinusoïdale dans l'espace, a elle-même pour amplitude :

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot N_s k'_b \cdot k''_b \cdot \frac{J}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\pi} \cdot k_b \cdot N_s \cdot J = 9,78 J.$$

Ce résultat  $\left(13,86 \frac{J}{\sqrt{2}}\right)$  est à rapprocher avec ceux qui peuvent être obtenus graphiquement, avec lesquels il est en très bon accord.

## 2. Enroulement rotorique.

2.1. La courbe donnant la répartition de la f.m.m. dans l'entrefer est une courbe en escalier, comportant autant de marches qu'il y a d'encoches sur le rotor.

La hauteur de chacune de ces marches est proportionnelle au nombre de conducteurs de l'encoche et à l'intensité du courant qui les parcourt.

La fig. 6 montre que la f.m.m. est extrême au milieu des zones non bobinées. C'est l'axe des pôles, la zone où le champ magnétique est également maximal.

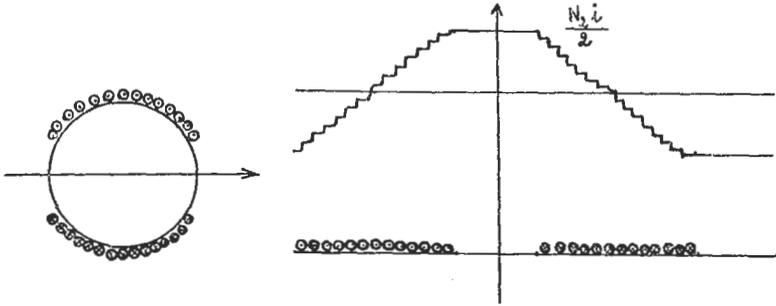


Fig. 5

L'amplitude maximale de la f.m.m. est évidemment  $\frac{N_2 \cdot i}{2}$ .

2.2.1. La fonction  $\mathcal{E}(\vartheta)$  est paire et alternative. Son développement en série de FOURIER est de la forme :

$$\mathcal{E} = a_1 \cos \vartheta + a_3 \cos 3\vartheta + \dots$$

La dérivée seconde de  $\mathcal{E}(\vartheta)$ , ou plutôt, compte tenu de ses symétries et de sa périodicité, sa restriction à l'intervalle  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,

s'écrit simplement :  $-\frac{N_2 \cdot i}{\pi \cdot (1 - \gamma)} \delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)$ , où  $\delta(\vartheta)$  est la fonction de DIRAC.

Par ailleurs  $\mathcal{E}''(\vartheta) = -a_1 \cos \vartheta - 9 \cdot a_3 \cos(3\vartheta) + \dots$

Et l'on a les relations classiques :

$$-a_1 = \frac{4}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \mathcal{E}''(\vartheta) \cdot \cos \vartheta \cdot d\vartheta \quad \text{et}$$

$$-9 a_3 = \frac{4}{\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \mathcal{E}''(\vartheta) \cdot \cos(3\vartheta) \cdot d\vartheta.$$

Compte tenu de la propriété de  $\delta(\vartheta)$  selon laquelle

$$\int_0^{\infty} \delta(\vartheta - x) \cdot f(\vartheta) \cdot d\vartheta = f(x),$$

on a très simplement :

$$-a_1 = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{3 N_2 \cdot i}{2\pi} \cdot \cos(\pi/6), \quad \text{et :}$$

$$-9 a_3 = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{3 N_2 \cdot i}{2\pi} \cdot \cos(\pi/2).$$

$$\text{On en déduit : } a_1 = \frac{3 \cdot \sqrt{3} N_2 \cdot i}{\pi^2} \quad \text{et} \quad a_3 = 0.$$

(C'est la valeur particulière  $\gamma = 1/3$  qui entraîne la nullité de  $a_3$ ). Ainsi, le premier harmonique non nul de la fonction  $\mathcal{E}(\vartheta)$ , est le cinquième.

Quant à l'onde fondamentale, elle a pour expression numérique :  $\mathcal{E}_f = 88,45 \cdot i \cdot \cos \vartheta$ .

2.2.2. Pour passer de la courbe  $\mathcal{E}(\vartheta)$  à la courbe  $E(t)$ , il suffit de remplacer la valeur maximale  $\frac{N_2 \cdot i}{2}$  de la force magnétomotrice par la valeur maximale  $E_M$  de la f.é.m. induite dans un conducteur statorique.

L'amplitude du fondamental de cette f.é.m. est ainsi :

$$\frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\pi^2} \cdot E_M.$$

Le premier harmonique non nul est le cinquième, son amplitude vaut  $\frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{E_M}{25}$ .

Ainsi, la contribution de l'harmonique 5 à la valeur efficace de la f.é.m. est-elle limitée à  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(25)^2} = 0,08 \%$  de la valeur efficace totale.

En ce qui concerne le calcul précis de cette valeur efficace, la fig. 7 montre que l'on peut se limiter à un quart de période. La valeur moyenne de  $E^2(t)$  sur cet intervalle vaut :

$$\frac{E_M^2}{3} (1 - \gamma) + \gamma \cdot E_M^2 = E_M^2 \cdot \left( \frac{1 + 2\gamma}{3} \right).$$

La valeur efficace de la f.é.m. induite dans un conducteur vaut donc  $E_M \frac{\sqrt{5}}{3} = 0,74536 E_M$ .

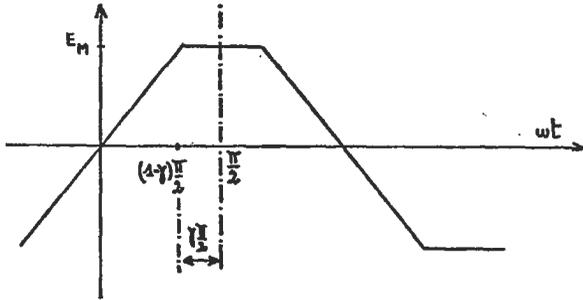


Fig. 7

La valeur efficace du fondamental, soit  $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot E_M$ , vaut 0,74456  $E_M$ . Elle ne diffère, et c'était prévisible que très peu (0,10 %) de la valeur efficace totale.

En ce qui concerne la f.é.m. d'une phase statorique, la différence entre la f.é.m. totale et l'onde fondamentale serait encore réduite. En effet, les facteurs de bobinage  $k'_b$  et  $k''_b$  qui, pour le fondamental valent respectivement 0,947 et 0,956, sont, pour l'harmonique 5, réduits à :

$$k'_{b5} = \sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{19}{24}\right) = -0,065 \dots$$

$$\dots k''_{b5} = \frac{\sin\left(8 \cdot \frac{5\pi}{48}\right)}{8 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{48}\right)} = 0,194.$$

(L'étude précédente ne tient pas compte des harmoniques de denture).

Au-dessous de la saturation, on peut négliger la réluctance du fer devant celle de l'entrefer, si bien que la f.m.m. en un point de l'entrefer est égale à la circulation  $H \cdot e_c$  de l'excitation magnétique dans l'entrefer, dans la zone considérée.

Puisque le fondamental de la f.m.m. s'écrit :

$$\mathcal{G}_f = 88,45 \cdot i \cdot \cos \vartheta,$$

le champ magnétique  $B$  =  $\mu_0 \cdot H$  a pour expression, dans l'entrefer :

$$B(\vartheta) = \frac{\mu_0 \cdot \mathcal{G}_f(\vartheta)}{e_c} = 1,011 \cdot 10^{-3} \cdot i \cdot \cos \vartheta$$

Nous avons vu, à la question 1 de cette deuxième partie qu'avec une amplitude de l'induction  $B_M$  égale à 0,93 T, on obtiendrait une f.é.m. de 11,55 kV par phase.

L'expression théorique de la valeur efficace de l'onde fondamentale de cette f.é.m., en l'absence de saturation, est donc :

$$E = \frac{11,55 \cdot 10^3 \cdot 1,011 \cdot 10^{-3}}{0,93} \cdot i = 12,56 i.$$

En fait, la caractéristique à vide, qui dans sa partie linéaire est telle que  $E = 5,2$  kV pour  $i = 400$  A, indique que la relation réelle est  $E = 13 \cdot i$ .

La différence entre valeur réelle et valeur théorique peut difficilement s'expliquer par la présence d'harmoniques (fussent-ils de denture). C'est plutôt la valeur corrigée  $e_c$  de l'entrefer (11 cm au lieu de 10 cm réels, ceci pour tenir compte des dents), qui est légèrement trop forte.

### 3. Coefficient d'équivalence.

Nous avons vu qu'un courant  $i$ , parcourant l'enroulement rotorique, donne naissance à une f.m.m. dont l'harmonique fondamental a pour amplitude :  $88,45 \cdot i$ .

Par ailleurs, des courants triphasés, d'intensité efficace  $J$ , parcourant le bobinage polyphasé du stator, créent une f.m.m. dont le fondamental a une amplitude égale à  $9,78 \cdot J$ .

Le coefficient d'équivalence a donc pour valeur :

$$9,78/88,45 = 0,111.$$

Ce résultat est à rapprocher de la valeur déterminée expérimentalement ( $\alpha = 0,106$ ), avec laquelle il est en bon accord.

### 4. Réactance synchrone non saturée.

$$4.1. H_{\max} \cdot e_c = 9,78 J.$$

$$B_M = \mu_0 \cdot H_{\max}; \quad \text{on trouve : } B_M = 1,12 \cdot 10^{-4} J.$$

4.2. Dans l'entrefer, l'énergie par unité de volume est égale à  $\frac{B^2}{2\mu_0}$ . En supposant le champ à répartition sinusoïdale, l'énergie moyenne par unité de volume vaut donc :

$$\frac{B_M^2}{4\mu_0}.$$

L'énergie magnétique emmagasinée dans l'entrefer vaut donc :

$$W = \frac{B_M^2}{4\mu_0} \cdot \pi \cdot D \cdot l_i \cdot e_c = 6,684 \cdot 10^{-3} \cdot J^2 \text{ joules.}$$

4.3. En notant  $L$  l'inductance propre principale d'une phase du stator (celle qui correspond au flux envoyé dans l'entrefer), et  $M$  l'inductance mutuelle entre deux phases du stator, l'énergie magnétique localisée dans l'entrefer est à chaque instant, si  $j_1, j_2$ , et  $j_3$  sont les intensités des courants qui parcourent les trois phases :

$$W = \frac{1}{2} L (j_1^2 + j_2^2 + j_3^2) + M (j_1 \cdot j_2 + j_2 \cdot j_3 + j_1 \cdot j_3)$$

Lorsque les courants  $j_1, j_2, j_3$  sont des courants triphasés équilibrés de valeur efficace  $J$ , il est très facile de montrer que l'énergie  $W$  est une grandeur indépendante du temps, de valeur :

$$W = \frac{3}{4} \cdot (L - M) \cdot (J \sqrt{2})^2.$$

Or, l'expression  $(L - M) \cdot \omega$  est justement la réactance cyclique principale non saturée, notée  $X_{ad}$  dans le texte :

$$W = \frac{3 X_{ad} J^2}{2 \omega}.$$

On en déduit la valeur de  $X_{ad}$ , soit 1,40  $\Omega$ .

Compte tenu de la réactance de fuites partielles par phase, soit  $X_s = 0,2 \Omega$ , la réactance synchrone non saturée a pour valeur :  $X_d = 1,6 \Omega$ . (Expérimentalement, nous avons trouvé 1,595  $\Omega$ .)

#### Remarque.

On peut calculer  $X_{ad}$  sans passer par l'intermédiaire de l'énergie.

L'amplitude de la f.m.m. statorique vaut en effet :

$$\frac{3 \sqrt{2}}{\pi} \cdot k_b \cdot N_s \cdot J$$

( $N_s$  représentant le nombre de spires par voie d'enroulement d'une phase).

On en déduit  $B_M$  lorsque le stator est seul alimenté :

$$B_M = \frac{\mu_0}{e_c} \cdot \frac{3 \sqrt{2}}{\pi} \cdot k_b \cdot N_s \cdot J.$$

Le flux correspondant dans une spire diamétrale est :

$$\Phi_M = B_M \cdot D \cdot l_i.$$

Et, dans une voie d'enroulement d'une phase :

$$\Phi_M = \frac{3 \mu_0 \sqrt{2}}{\pi} \cdot (k_b \cdot N_s)^2 \cdot \frac{D \cdot l_i}{e_c} \cdot J = \frac{X_{ad}}{\omega} \cdot J \sqrt{2}.$$

D'où :

$$X_{ad} = \frac{3 \mu_0}{\pi} \cdot (k_b N_s)^2 \cdot \frac{D \cdot l_i}{e_c}$$

Numériquement, on retrouve :  $X_{ad} = 1,40 \Omega$ .

$$4.4. \frac{V_n}{X_d} = 7200 \text{ A.}$$

### 5. Influence de la saturation sur la f.é.m. à vide.

5.1. Lorsque la machine est saturée, on ne peut négliger la consommation d'ampères-tours dans le fer du circuit magnétique. On procède en général de la manière suivante : Pour une répartition sinusoïdale fictive  $B(\theta)$  dans l'entrefer, on calcule, en utilisant la propriété de conservation du flux du champ magnétique  $B$ , la valeur de l'excitation  $H$  en chaque point d'un contour d'Ampère. La circulation de  $H$  détermine la valeur de la force magnétomotrice au point où le contour d'Ampère coupe le circuit magnétique.

5.2.1. La fig. 8 montre que la section d'une dent est une fonction de la hauteur  $x$  à laquelle on la détermine.

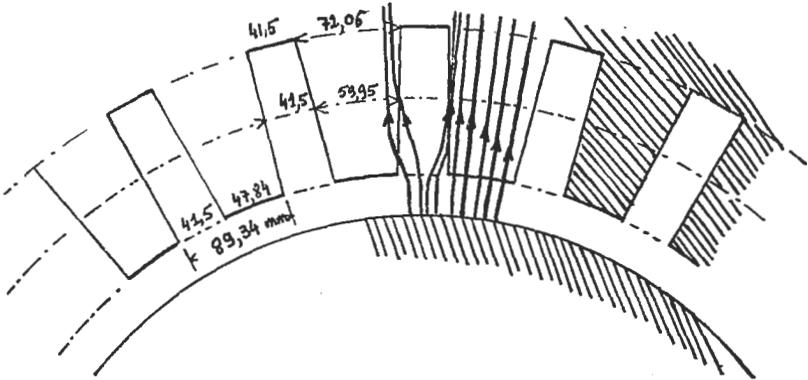


Fig. 8

Nous noterons  $S_{dx}$  la section d'une dent à la côte  $x$ , tandis que  $S_e$  sera la section (constante) d'une encoche.

$$S_e = 2,532 \cdot 10^{-1} \text{ m}^2.$$

Au niveau de l'entrefer, ( $x = 0$ ),  $S_{d0} = 0,2318 \text{ m}^2$ .

Au milieu de la hauteur de la dent,  $S_{d1} = 0,2905 \text{ m}^2$ .

A la base de la dent,  $S_{d2} = 0,349 \text{ m}^2$ .

(Pour le calcul de ces trois sections, nous avons supposé que les tôles avaient un coefficient de foisonnement de 0,95, non donné dans le texte).

Au niveau de l'entrefer, le pas dentaire est de 89,34 mm. Pour un champ magnétique de 0,8 tesla, le flux dans le pas dentaire vaut :

$$\varphi = 0,8934 \cdot 10^{-1} \cdot 6,1 \cdot 0,8 = 0,436 \text{ Wb.}$$

5.2.2. Pour calculer le champ magnétique dans la dent, nous supposons que les différents cylindres concentriques centrés sur l'axe du rotor, sont des équipotentielles magnétiques. Le rotor étant lui-même, au niveau de l'entrefer, une équipotentielle magnétique, cela signifie que la composante radiale de  $H$ , à une certaine côte  $x$ , est la même dans l'encoche et dans la dent voisine.

Le flux  $\varphi$  passe à la fois dans le fer de la dent et dans l'air de l'encoche. Nous poserons  $\varphi = \varphi_d + \varphi_e$ .

$$\frac{\varphi}{S_{dx}} = \frac{\varphi_d}{S_{dx}} + \frac{\varphi_e}{S_{dx}} = B_{dx} + \frac{\varphi_e}{S_{ex}} \cdot \frac{S_{cx}}{S_{dx}} = B_{dx} + \mu_0 H_{ex} \frac{S_{ex}}{S_{dx}}.$$

Mais nous avons vu que  $H_{dx} = H_{ex} = H_x$ .

Nous définissons donc un champ magnétique fictif,

$$B'_{dx} = \frac{\varphi}{S_{dx}}, \text{ tel que } B'_{dx} = B_{dx} + \mu_0 \cdot H_x \cdot \frac{S_{ex}}{S_{dx}}.$$

Comme nous connaissons la relation entre  $B_{dx}$  et  $H_{dx}$  (donnée dans le texte), nous pouvons, pour chaque valeur de  $x$ , connaître le rapport  $S_{ex}/S_{dx}$  et donc construire la courbe  $B'_{dx} = f_x(H_x)$ .

Au niveau de l'entrefer,  $B'_{d0} = 1,881 \text{ T} = B_{d0} + 1,37 \cdot 10^{-6} \cdot H$ .

La construction de la courbe  $B'_d = f_0(H)$ , montre que  $H_0 = 16\,800 \text{ At/m}$ . Ainsi, sur un flux de 0,436 Wb, 0,431 Wb passe dans la dent et le reste dans l'encoche.

Si le champ magnétique considéré était non pas 0,8 T, mais 0,93 T, correspondant à la tension nominale, en extrapolant la courbe  $B_d = f(H_d)$  et en construisant la courbe  $B'_{d0} = f(H)$ , on trouverait que 10 % du flux correspondant au pas dentaire (0,475 Wb), passent dans l'air de l'encoche.

Au milieu de la hauteur de l'encoche :

$$B'_{d1} = B_{d1} + 1,09 \cdot 10^{-6} \cdot H.$$

Par ailleurs :  $B'_{d1} = 1,50 \text{ T}$ .

La correction apportée par la présence de l'encoche est négligeable (tout le flux passe dans la dent), et l'on trouve :  $H_1 = 2\,000 \text{ At/m}$ .

Enfin, à la base de la dent, tout le flux passe dans celle-ci, le champ magnétique y vaut 1,25 T, et l'excitation magnétique :  $H_2 = 750 \text{ At/m}$ .

La règle de SIMPSON permet alors de calculer l'excitation moyenne dans une dent :

$$H_m = \frac{H_0 + 4 H_1 + H_2}{6} ; \text{ ici, } H_m = \frac{1}{6} (16\,800 + 2\,000 + 750),$$

soit  $H_m = 4\,260 \text{ At/m}$ .

Les ampères-tours consommés dans la denture s'élèvent donc, pour ce champ magnétique relativement faible, à 788 At, alors que dans l'entrefer, il en faut :  $8 \cdot 10^5 \cdot 0,8 \cdot 0,11 = 70\,000$ .

### TROISIÈME PARTIE

#### EXCITATION ET REGULATION

1. Nous avons déjà vu, dans la première partie, à propos de l'étude d'un court-circuit, que le rôle de l'excitation est de contribuer d'abord au maintien du synchronisme : on augmente la f.é.m.  $E_s$  pour pouvoir évacuer, dès la disparition du défaut sur le réseau, le maximum de puissance sur la ligne (en tout cas, une puissance supérieure à la puissance mécanique reçue par l'alternateur, de manière à ce que la roue polaire reprenne sa place.) Lorsque ce premier coup de frein est donné, il arrive qu'on utilise encore l'action sur le courant inducteur pour amortir plus rapidement les grandes oscillations consécutives à l'apparition du défaut. Cela peut être réalisé, surtout sur les systèmes où l'excitation est prélevée par soutirage aux bornes de l'alternateur, en inversant le sens du courant d'excitation à des instants déterminés par la prise en compte de l'angle de décalage interne  $\beta$ .

2.1. La puissance des turboalternateurs modernes a évidemment tendance à augmenter (elle dépasse couramment 1 000 MW). Dans le même temps, leur inertie est relativement plus faible, tandis que la longueur des lignes de transport des unités de production aux zones de consommation s'accroît (et donc avec elle, le risque de défaut).

Il faut donc augmenter la rapidité des systèmes de lutte contre les perturbations, ainsi que leur efficacité. L'alimentation du rotor par génératrice à courant continu (excitatrice placée en bout d'arbre) donne lieu à de trop grandes constantes de temps pour la croissance (ou la décroissance) du courant inducteur. De plus, l'inertie mécanique est prohibitive car la puissance spécifique (W/kg) d'une telle machine est bien inférieure à celle d'un groupe alternateur-redresseur.

2.2. Le choix de fréquences plus élevées que 50 Hz permet, là encore, de réduire le temps de réponse de l'excitation. On ne peut espérer approcher les 20 ms qu'en diminuant la période des excitateurs au-dessous de cette valeur.

De plus, en travaillant à fréquence plus élevée, on peut diminuer la masse de fer des alternateurs d'excitation, puisque une même f.é.m. est obtenue pour un flux plus faible.

2.3. La tension continue appliquée sur les bagues du rotor de l'alternateur est de 544 V.

Soit  $U$  la tension entre phases de l'alternateur exciteur principal. La tension  $U$  et la tension continue issue du pont de diodes sont liées par la relation :

$$U_c = \frac{3 \cdot U \cdot \sqrt{2}}{\pi}$$

On en déduit :  $U = 403$  V.

Chaque phase fournit le courant continu de 3 200 A pendant un tiers de période et le reçoit également pendant un tiers de période. Ces deux alternances étant séparées par  $T/2$ .

La valeur efficace du courant par phase est donc égale à :

$$3\,200 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 2\,610 \text{ A.}$$

La puissance apparente nominale de cet alternateur est donc égale à :  $403 \cdot 2\,610 \cdot 3 = 1,82$  MVA.

La relation  $\underline{E}_s = \underline{V}_n + j \cdot \underline{X}_d \cdot \underline{J}_n$  s'écrit encore, en multipliant chacun de ses membres par  $\sqrt{3}$ , et en tenant compte du fait que  $\underline{X}_d = 1,06 \underline{V}_n / \underline{J}_n$  :

$$\underline{E}_s \cdot \sqrt{3} = \underline{U}_n + j \cdot 1,06 \cdot \underline{U}_n$$

Soit :  $\underline{E}_s \cdot \sqrt{3} = \underline{U}_n \cdot \sqrt{2,124} = 403 \cdot 1,457 = 587$  V.

Le courant inducteur vaut donc :  $\frac{85 \cdot 587}{400} = 125$  A.

2.4.1. Valeur moyenne du courant dans un bras du pont de diodes :  $5050 : 3 = 1683$  A.

Valeur efficace de ce courant :  $5050 : \sqrt{3} = 2916$  A.

2.4.2. La fig. 9 représente la tension inverse aux bornes d'un bras de pont (en supposant les commutations instantanées). La tension entre phases étant de 635 V, la tension inverse maximale supportée par un bras de pont est de 900 V (c'est-à-dire  $635 \cdot \sqrt{2}$ ).

2.4.3. Un pont de diodes (ou de thyristors), est formé de 6 bras (fig. 10). D'après les spécifications du texte, chaque bras doit comporter 2 diodes en série pour supporter la tension inverse, et de deux circuits parallèles pour acheminer le

courant. Un troisième circuit est nécessaire si l'on désire que chaque bras ait un fonctionnement normal alors qu'une diode est hors service. Chaque bras comporte donc 6 diodes, et le pont complet : 36.

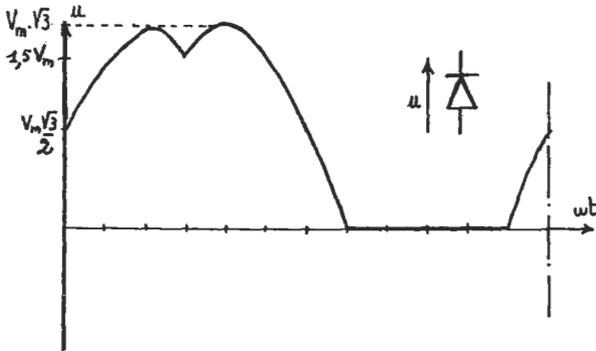


Fig. 9

2.5. La chute de tension due à la réactance de fuites d'un alternateur ou d'un transformateur débitant sur un pont redresseur (de diodes ou de thyristors), procède d'un calcul classique (voir le corrigé du Problème de 1974, dans le B.U.P. n° 572, page 736).

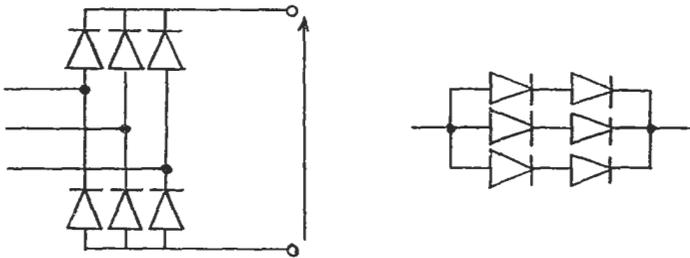


Fig. 10

La chute de tension est égale à  $R_c \cdot I_c$ , avec  $R_c = \frac{3 l \omega}{\pi}$ .

$$\text{Ici, } l \omega = 0,21 \cdot \left( \frac{403}{\sqrt{3} \cdot 2610} \right) = 19 \text{ m}\Omega.$$

Pour  $I_c = 5050 \text{ A}$ , la chute de tension s'élève à :

$$\Delta U_c = 19 \cdot 10^{-3} \cdot 5050 \cdot \frac{3}{\pi} = 92 \text{ V.}$$

La tension continue  $U_c$  d'excitation correspondant à un courant de 5050 A, valant, elle, 858 V, cette chute de tension d'origine inductive en représente 11 %.

2.6. La décroissance de  $U_c$  à la sortie d'un pont de diodes ne peut être due qu'à une baisse de la tension de l'alternateur principal, et donc à une action sur l'alternateur auxiliaire commandant à son tour le courant d'excitation de l'alternateur principal. Au contraire, à la sortie d'un pont de thyristors, on peut agir sur la tension  $U_c$  en réglant l'angle de commande des thyristors. On gagne donc en rapidité, mais il semble bien que, de toute manière, ce soit la méthode d'excitation par soutirage qui soit la plus rapide.

3.1. La fig. 11 donne le schéma trifilaire demandé.

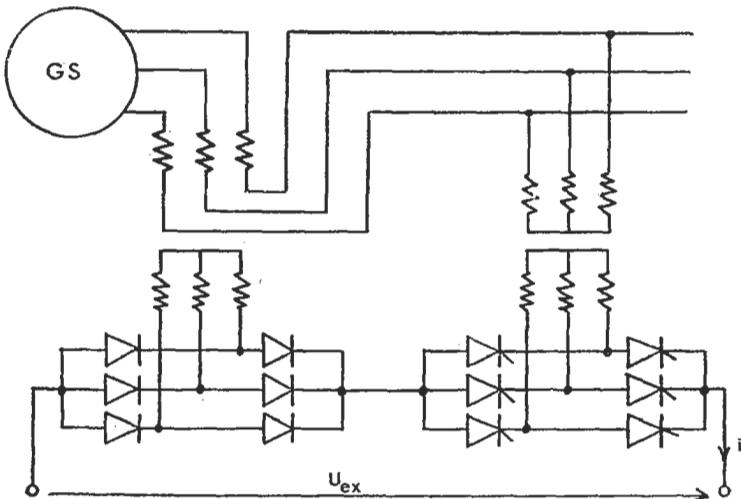


Fig. 11

3.2.1. En fonctionnement normal au régime nominal, nous avons vu que le circuit inducteur de l'alternateur doit être alimenté sous 544 V. Le pont de thyristors doit fournir  $0,17 \cdot 985 = 167$  V, et le pont de diodes,  $544 - 167 = 377$  V.

3.2.2. Soit  $U$  la tension efficace entre phases, au secondaire du transformateur alimentant le pont de thyristors. La tension continue maximale  $U_{cm}$  que peut fournir un tel pont

vaut  $U_{cm} = \frac{3U\sqrt{2}}{\pi}$ , et pour un retard  $\delta$  à l'amorçage des thyristors, la tension continue obtenue vaut :

$$U_c = U_{cm} \cdot \cos \delta.$$

Pour que le pont de thyristors absorbe l'énergie du pont de diodes, il faut, puisque ces deux éléments sont en série, que sa tension soit l'opposée de la tension de ce dernier.

On doit donc avoir :

$$U_{cm} \cdot \cos(165^\circ) = -377 \text{ V, soit : } U_{cm} = 389 \text{ V.}$$

$$\text{On en déduit : } U = U_{cm} \cdot \frac{\pi}{3 \cdot \sqrt{2}} = 288 \text{ V.}$$

3.2.3. Au régime nominal,  $U_c \cdot \cos \delta_n = 167 \text{ V.}$

On en déduit :  $\delta_n = 64,6^\circ.$

R. MOREAU.

---



**C.A.P.E.S.**

SESSION DE 1979

**COMPOSITION DE PHYSIQUE AVEC APPLICATIONS**

(Durée : 5 heures)

On se propose ici d'étudier le principe de fonctionnement de différents types de petits moteurs électriques. Aucune connaissance technique particulière des moteurs n'est nécessaire pour la résolution des différentes parties de ce problème (qui sont, par ailleurs, indépendantes).

Il sera tenu compte, bien évidemment, de la rigueur du raisonnement et de la netteté de la présentation de la solution.

**I. ETUDE ELECTROMAGNETIQUE (sur 70 points)****A. Moteur continu à aimant inducteur.**

1° Soit un conducteur filiforme rectiligne MN astreint à tourner autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire  $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$  (fig. 1).

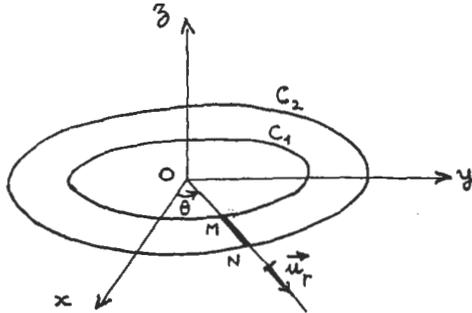


Fig. 1

On pose  $\vec{OM} = a\vec{u}_r$ ,  $\vec{ON} = b\vec{u}_r$ ,  $(Ox, \vec{u}_r) = \vartheta$ .

Dans tout l'espace balayé par MN règne un champ magnétique uniforme et indépendant du temps :  $\vec{B} = -B_0\vec{z}$  ( $B_0 > 0$ ),  $\vec{z}$  étant le vecteur unitaire sur Oz.

Calculer, en fonction de  $B_0$ ,  $a$ ,  $b$  et  $\omega$ , la différence de potentiel entre M et N.

2° Les extrémités M et N glissent sans frottement sur deux circonférences conductrices de résistance électrique négligeable,  $C_1$  de rayon  $a$ ,  $C_2$  de rayon  $b$ . MN est parcouru par un courant d'intensité  $I$ , de M vers N ; calculer, en fonction de  $B_0$ ,  $a$ ,  $b$  et  $I$ , le moment par rapport à Oz des forces magnétiques exercées sur MN.

3° Au lieu d'un conducteur unique MN, on en utilise un nombre  $k$  ; ils sont tous identiques à MN et régulièrement répartis autour de Oz.

a) Le système tournant autour de Oz avec la vitesse  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ,

quelle différence de potentiel apparaît entre  $C_1$  et  $C_2$  ?

b) Chaque conducteur étant parcouru de  $C_1$  vers  $C_2$  par un courant d'intensité  $\frac{I}{k}$ , calculer le moment des forces magnétiques par rapport à Oz.

4° Le dispositif décrit en A.3° constitue le rotor d'un moteur tournant à la vitesse angulaire constante  $\omega$ . Calculer, en fonction de  $u$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $B_0$ ,  $R$  et  $\omega$ , le moment  $\Gamma_{0z}$  par rapport à Oz des forces exercées sur la partie mobile lorsqu'on branche entre  $C_1$  et  $C_2$  un générateur continu de force électromotrice  $u$  et de résistance intérieure  $R$ , dont la borne positive est reliée à  $C_1$ . (La résistance électrique de chaque conducteur MN est supposée négligeable.)

*Application numérique :*

Calculer  $\Gamma_{0z}$  pour  $u = 4$  V,  $R = 1$   $\Omega$ ,  $B_0 = 1$  T,  $a = 1$  cm et  $b = 5$  cm ; vitesse de rotation du rotor : 100 tours/s.

**B. Moteur alternatif asynchrone.**

1° Soit un solénoïde S constitué de deux demi-solénoïdes  $S_1$  et  $S_2$  coaxiaux et réunis par une connexion n'introduisant aucune perturbation (fig. 2). Chacun des demi-solénoïdes  $S_1$  et  $S_2$  comporte  $N$  spires circulaires de rayon  $r$ , et a une longueur  $D$ . Les centres  $O_1$  et  $O_2$  des faces en regard sont distants de  $O_1O_2 = 2d$ . Soit O le

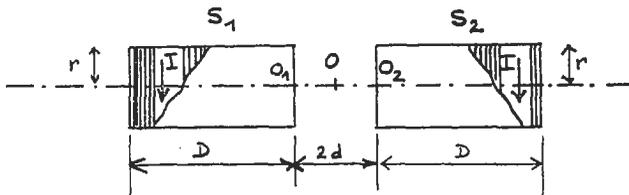


Fig. 2

milieu de  $O_1O_2$ .  $S_1$  et  $S_2$  sont parcourus par un courant d'intensité  $I$  de telle sorte que les champs créés en O par  $S_1$  et  $S_2$  soient de même sens.

Le champ magnétique total en O est de la forme  $B = kI$  ; calculer  $k$  en fonction des caractéristiques géométriques de S.

Application numérique :

$$r = 4 \text{ cm}, \quad d = 4 \text{ cm}, \quad D = 30 \text{ cm}, \quad N = 600.$$

2° Soit R la résistance électrique totale de S et L son coefficient d'auto-induction. On met en place deux solénoïdes identiques, du type précédent, selon la disposition de la fig. 3. Les axes  $O_1 O_2$  de S et  $O'_1 O'_2$  de S' sont orthogonaux et se coupent en O, milieu commun de  $O_1 O_2$  et  $O'_1 O'_2$ .

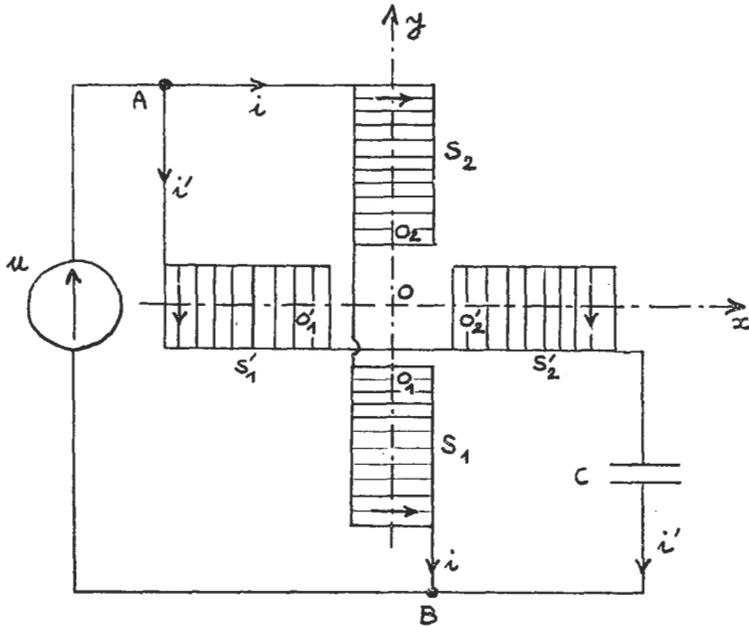


Fig. 3

Entre les points A et B, on branche en parallèle :

— un générateur de tension « idéal » de force électromotrice sinusoïdale  $U \sqrt{2} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right) = u$  ;

$$U \sqrt{2} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right) = u ;$$

— le solénoïde S ( $S_1$  et  $S_2$ ) ;

— le solénoïde S' ( $S'_1$  et  $S'_2$ ) monté en série avec un condensateur parfait de capacité C.

a) Déterminer les intensités instantanées  $i$  dans S, et  $i'$  dans S' et C ;

b) A quelle condition doivent satisfaire  $L$ ,  $C$ ,  $\omega$  pour que les déphasages respectifs  $\varphi$  et  $\varphi'$  des courants  $i$  et  $i'$  avec la tension  $u$  soient opposés ?

c) A quelle condition doivent satisfaire  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $\omega$  pour que le déphasage entre  $i$  et  $i'$  soit  $\frac{\pi}{2}$  en valeur absolue ?

d) Les deux conditions b) et c) étant satisfaites simultanément, quelles sont les intensités efficaces  $I$  et  $I'$  dans  $S$  et  $S'$  ? Déterminer le vecteur représentant le champ magnétique en  $O$ . Montrer qu'il s'agit d'un champ tournant de module constant  $B_0$ , tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  dans le plan de figure  $xOy$ .

*Application numérique :*

En plus des données du § B.1°, ajouter :

$$R = 31,1 \Omega, \quad \omega = 100 \pi \text{ rad/s}, \quad U = 110 \text{ V.}$$

Calculer  $L$ ,  $C$ ,  $I$ ,  $I'$ ,  $B_0$ .

3° On admettra que dans un certain domaine d'espace autour de  $O$ , le champ magnétique  $\vec{B}$  est un champ tournant dans le plan  $xOy$  à la vitesse angulaire  $\omega$  et de module  $B_1$ . Soit une petite bobine plate, fermée sur elle-même, de résistance totale  $\rho$ , de coefficient d'auto-induction  $\lambda$ , constituée par  $m$  spires planes, circulaires, chacune de ces spires ayant une surface  $s$  (fig. 4). On désigne par  $\vec{n}$  un vecteur unitaire porté par l'axe des spires. Cette bobine peut tourner à la vitesse angulaire  $\Omega$  autour de l'axe  $Oz$  passant par  $O$  et orthogonal au plan  $xOy$ ,  $\vec{n}$  restant dans ce plan. (La bobine tourne ainsi autour de son diamètre dirigé suivant  $Oz$ .) Soit  $\vec{z}$  le vecteur unitaire de  $Oz$ .

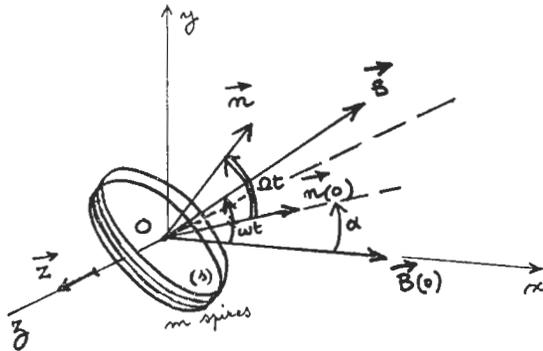


Fig. 4

a) Montrer qualitativement que ce système peut fonctionner en moteur.

b) A partir de cette question, on se place en régime permanent, la bobine tournant à une vitesse angulaire invariable  $\Omega$ . On choisit l'origine des temps ( $t = 0$ ) de telle sorte que  $\vec{B}(0)$  soit porté par Ox, et que l'angle  $[\vec{B}(0), \vec{n}(0)]$  pour  $t = 0$  soit égal à  $\alpha$ .

$\alpha$ ) Déterminer le courant circulant dans la bobine plate, et le moment magnétique  $\vec{M}$  de la bobine.

$\beta$ ) Calculer la composante  $\Gamma_z$  suivant l'axe Oz du moment du couple  $\vec{\Gamma}$  exercé sur la bobine. Calculer sa valeur moyenne temporelle  $\langle \Gamma_z \rangle$ .

$\gamma$ ) Etudier les variations de  $\langle \Gamma_z \rangle$  en fonction de  $(\omega - \Omega)$ . Tracer la courbe représentative correspondante.

*Application numérique :*

On donne  $B_1 = 10^{-2}$  T,  $m = 100$ ,  $s = 10$  cm<sup>2</sup>,  $\omega = 100 \pi$  rad/s,  $q = 2 \Omega$ ,  $\lambda = 80$  mH.

Calculer la valeur numérique de l'extremum de  $\langle \Gamma_z \rangle$  et la valeur correspondante de  $\omega$ .

$\delta$ ) Le moteur peut-il démarrer seul ? Quelle est la portion de la courbe représentative correspondant à un régime stable ?

C. *Principe d'un moteur linéaire.*

Un système de bobines non représentées, fixes dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , crée un champ magnétique  $\vec{B}$  dont les coordonnées dans le repère d'espace Oxyz du référentiel  $\mathcal{R}$  sont à l'instant  $t$  :

$$B_x = 0, \quad B_y = B_0 \cos(\omega t - kz), \quad B_z = 0.$$

1° Déterminer un potentiel vecteur  $\vec{A}$  en admettant que ses coordonnées ne dépendent que de  $z$  et de  $t$ ; montrer qu'une solution possible est  $A_x(z, t)$ ,  $A_y = 0$ ,  $A_z = 0$ . Calculer le champ électrique  $\vec{E}$  en admettant que le potentiel électrique  $V$  est nul en tout point.

Quelle structure reconnaissez-vous ? Quelle en est la vitesse de propagation  $\vec{v}$  ?

2° Un parallélépipède rectangle P, constitué d'un métal de conductivité  $\gamma$ , a pour dimensions  $a$  selon Ox,  $b$  selon Oy,  $c$  selon Oz (fig. 5). On admettra que la présence du métal, non magnétique, ne modifie pas la structure du champ électromagnétique, ce qui constitue une approximation grossière.

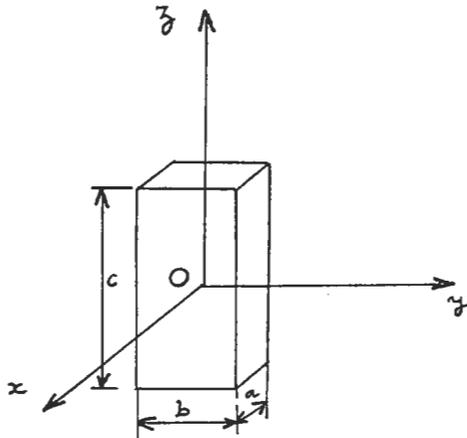


Fig. 5

a) Le parallélépipède est immobile dans  $\mathcal{R}$ , son centre d'inertie en O. Déterminer le vecteur densité de courant  $\vec{j}(x, y, z, t)$ .

Calculer la force élémentaire  $d^3\vec{f}$  exercée sur un élément  $dx \cdot dy \cdot dz$  de parallélépipède centré en M  $(x, y, z)$ , puis la force  $d\vec{f}$  exercée sur une longueur élémentaire  $dz$  du parallélépipède. Quelle est la valeur moyenne  $\langle d\vec{f} \rangle$  de cette force ? En déduire la force moyenne  $\langle \vec{f} \rangle$  exercée sur le parallélépipède.

Application numérique :

$B_0 = 10^{-2} \text{ T}$ ,  $a = 1 \text{ cm}$ ,  $b = 10 \text{ cm}$ ,  $c = 1 \text{ m}$ ,  $\gamma = 5 \cdot 10^7 \text{ S.I.}$ ,  
 $v = 3 \text{ m.s}^{-1}$ ; calculer  $\langle \vec{f} \rangle$ .

b) Le parallélépipède précédent est animé d'une vitesse  $\vec{u}$  constante par rapport à  $\mathcal{R}$  :  $\vec{u} (u_x = 0, u_y = 0, u_z = u)$ . Calculer, en fonction de B, v et u, l'intensité E du champ électrique dans P. En déduire la force moyenne exercée sur le parallélépipède.

En admettant que le solide P ne soit soumis qu'à cette force, quelle serait la valeur limite de sa vitesse ?

3° Comment raisonnerait-on qualitativement si on supposait le parallélépipède fixe et le système de bobines mobile ?

## II. ETUDE MECANIQUE (sur 50 points)

On considère un moteur dont l'ensemble des parties mobiles (rotor, arbre, accessoires) a un moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation Oz et dont le moment du couple moteur par rapport à Oz

est  $\Gamma_m$ . On néglige tous les frottements au niveau du moteur. On repère la rotation par l'angle  $\vartheta$  que fait avec Ox un segment OM lié aux parties mobiles. Soit  $\omega(t) = \frac{d\vartheta}{dt}$  la vitesse angulaire des parties mobiles.

A. Le moment  $\Gamma_m$  est de la forme  $\alpha u(t) - \beta \omega(t)$ , où  $u(t)$  est la tension d'alimentation (fonction du temps comme  $\omega$ ),  $\alpha$  et  $\beta$  des constantes caractéristiques du moteur.

1° Ecrire l'équation différentielle du mouvement.

2° On prend  $u(t) = u_0 = \text{Cste}$ . Quelle est la vitesse en régime permanent ?

3° On suppose que pour  $t < 0$ , on a  $u = u_0$  et que le régime permanent est établi (fig. 6). A l'instant  $t = 0$ ,  $u$  passe de la valeur  $u_0$  à la valeur  $u_1 = \text{Cste}$ .

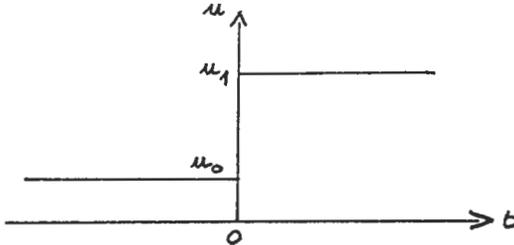


Fig. 6

Donner pour  $t > 0$  l'expression de  $\omega$  en fonction du temps, en introduisant une constante de temps  $\tau$  dont on donnera l'expression littérale.

*Application numérique :*

Au bout de combien de temps peut-on considérer que le nouveau régime permanent (que l'on précisera) est pratiquement atteint si  $\tau = 0,1$  s ? Justifier ce choix.

B. Grâce à un dispositif d'asservissement électronique, on peut obtenir un moment  $\Gamma_m$  de la forme  $\Gamma_m = \alpha u - \beta \omega - \gamma \vartheta$ ,  $u$  étant la tension d'alimentation et  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  des constantes caractéristiques du moteur et du dispositif d'asservissement.

1° Quelle est la position d'équilibre du système pour  $u = u_0 = \text{Cste}$  ? Indiquer quels sont les types de mouvement possibles pour atteindre cette position d'équilibre ?

*Cas particulier.* — On donne en unités S.I. :  $\beta = 0,96 \cdot 10^{-2}$ ,  $\gamma = 0,0576$ ,  $J = 4,0 \cdot 10^{-4}$ .

On prend  $u(t) = 0$  quel que soit  $t$  ; à  $t = 0$ , on a  $\vartheta = \vartheta_0$  et on abandonne le système sans vitesse initiale. Quelle est l'équation du mouvement ? Déterminer la position à l'instant  $t = 0,5$  s. Conclure.

2° On prend à présent  $u = At$ ,  $A$  étant une constante. Montrer que, en régime permanent,  $\phi$  varie « linéairement » comme  $u$  mais avec un retard dans le temps  $\tau'$  que l'on calculera littéralement en fonction de  $\beta$  et de  $\gamma$ .

3° On choisit maintenant  $u = U_0 \cos \omega t$  et on se place en régime permanent. Tracer la courbe donnant l'amplitude du mouvement en fonction de  $\omega$ ; discuter la forme de la courbe selon la valeur de  $\beta$ , pour  $\alpha, \gamma, J, U_0$  donnés.

C. On utilise cette fois un moteur pour lequel on a  $\Gamma_m = \Gamma_0 = \text{Cste}$  lorsque le moteur est alimenté, et  $\Gamma_m = 0$  si le moteur n'est pas alimenté. (Ceci peut être réalisé grâce à des dispositifs spéciaux.)

1° On applique sur les parties mobiles, par utilisation de frottements solides, un couple résistant dont le moment  $\Gamma$  par rapport à l'axe de rotation est tel que  $|\Gamma| = |\Gamma_r|$  si le moteur tourne et  $|\Gamma| < |\Gamma_r|$  si le moteur, alimenté, est immobile,  $|\Gamma_r|$  étant une constante.

a) A quelle condition le moteur, immobile pour  $t < 0$  et alimenté pour  $t \geq 0$ , peut-il démarrer? Quelle est alors l'accélération angulaire des parties mobiles?

b) On suppose que le moteur est alimenté et a une vitesse angulaire  $\omega_0$  pour un instant choisi « initial » :  $t = 0$ . Discuter selon les valeurs de  $\Gamma_0$  et  $|\Gamma_r|$  la loi du mouvement. Le moteur s'arrête-t-il éventuellement? Si oui, à quel instant?

#### Application numérique :

On donne, en unités S.I. :

$$\Gamma_0 = 4 \cdot 10^{-3}, \quad |\Gamma_r| = 6 \cdot 10^{-3}, \quad J = 10^{-4} \quad \text{et} \quad \omega_0 = 50.$$

2° On complète le moteur par un système d'engrenages (fig. 7).

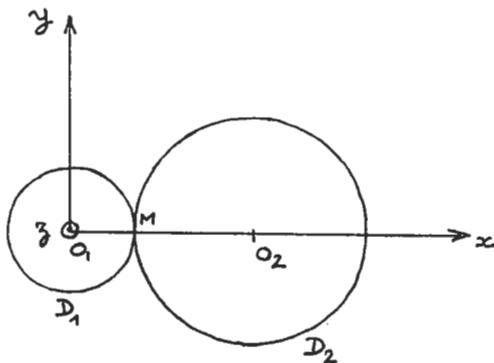


Fig. 7

L'arbre du moteur porte une roue dentée  $D_1$  d'axe  $O_1z$ ; le moment d'inertie de l'ensemble des parties mobiles (rotor, arbre, accessoires

et  $D_1$ ) par rapport à  $O_1z$  est  $J_1$ . La roue dentée  $D_1$  entraîne sans glissement une roue dentée  $D_2$  d'axe  $O_2z$  et dont le moment d'inertie par rapport à  $O_2z$  est  $J_2$ . Soient  $R_1$  et  $R_2$  les rayons des roues dentées,  $R_1 = O_1M$  et  $R_2 = O_2M$ ,  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$  les angles de rotation des deux roues autour de  $O_1z$  et  $O_2z$  à partir de leur position initiale ( $t = 0$ ). L'orientation des angles est déterminée par le trièdre direct de référence.

Le moment du couple moteur par rapport à  $O_1z$  est  $\Gamma_{1m} > 0$ . Le couple résistant est maintenant exercé sur  $D_2$ ; son moment par rapport à  $O_2z$  est  $\Gamma_{2r}$ ; il est toujours du type frottement solide défini précédemment (§ C.1°).

a) A l'instant  $t = 0$ , on alimente le moteur, jusqu'alors immobile. Celui-ci démarre. Calculer les accélérations angulaires de  $D_1$  et  $D_2$ . Calculer, en fonction de  $\Gamma_{1m}$ ,  $|\Gamma_{2r}|$ ,  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $R_1$ , et  $R_2$ , la composante tangentielle  $f_t$  de la force de contact exercée par  $D_2$  sur  $D_1$ .

Application numérique :

En unités S.I. :

$$\begin{aligned} \Gamma_{1m} &= 4,0 \times 10^{-3}, & J_1 &= 1,5 \times 10^{-4}, & R_1 &= 1,0 \times 10^{-2} \\ |\Gamma_{2r}| &= 1,0 \times 10^{-3}, & J_2 &= 4,5 \times 10^{-4}, & R_2 &= 2,0 \times 10^{-2}. \end{aligned}$$

b) Le moteur est alimenté en permanence. Il tourne à la vitesse  $\omega_0$  à une date prise comme nouvelle origine  $t = 0$ . A ce moment-là, on applique à  $D_2$  un couple résistant supplémentaire de moment  $\Gamma'_{2r}$  dont le module varie périodiquement (période  $2\pi$ ) selon la loi :

$$|\Gamma'_{2r}| = \Gamma'_{0r} \text{ pour } \vartheta_2 \in [0, \Theta] \text{ modulo } 2\pi,$$

$$\text{et } |\Gamma'_{2r}| = 0 \text{ pour } \vartheta_2 \in ]\Theta, 2\pi[ \text{ modulo } 2\pi.$$

Déterminer  $\Theta$  pour que le mouvement puisse être périodique.

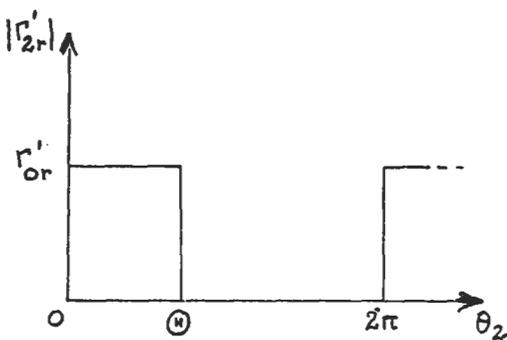


Fig. 8

Montrer que, dans ce cas,  $\omega_0$  doit être supérieur à une certaine valeur, que l'on calculera littéralement, et que les modules  $|\Gamma_{1m}|$ ,  $|\Gamma_{2r}|$ ,  $|\Gamma'_{2r}|$  doivent satisfaire à certaines conditions, que l'on écrira.

## SOLUTION

---

### Préambule.

Le problème de physique de C.A.P.E.S. de l'année 1979 porte sur l'étude électromagnétique et mécanique de certains moteurs électriques.

Ces sujets sont certes bienvenus car cet enseignement est plus ou moins délaissé à l'Université et il est bon que de futurs professeurs de physique aient quelques lumières sur les moteurs tournants classiques et les moteurs linéaires plus modernes.

Avant de faire l'analyse du problème, remarquons une fois de plus, la longueur excessive de l'épreuve.

Le principe de fonctionnement des moteurs tournants à courant continu et à champ tournant asynchrone présenté dans les paragraphes I.A. et B. correspond à un exposé classique. La progression proposée se suit aisément et la description schématique sur laquelle elle est basée n'est pas trop éloignée des réalisations pratiques.

Par contre, deux critiques peuvent être faites à l'égard du 3<sup>me</sup> paragraphe de la première partie concernant le moteur linéaire. En premier, la description est tellement schématique, que l'on n'a aucune idée d'une réalisation pratique éventuelle. En deuxième lieu, l'ultra schématisation conduit à présenter une onde électromagnétique plane progressive sans déformation et qui se propage avec une vitesse de phase de  $3 \text{ m.s}^{-1}$ . Il y a de quoi se poser des questions, surtout lorsqu'on est un candidat devant sa feuille. Bien entendu, la réponse est connue : la propagation des ondes électromagnétiques dans les métaux réels est liée à une constante diélectrique imaginaire due à la fréquence de plasma et à la fréquence de relaxation qui permet à peu près tous les cas de figures suivant les matériaux et les fréquences. Lorsque l'onde possède une partie propagative (qui est tout de même amortie), la vitesse de phase de cette propagation peut alors être très différente de celle de la propagation dans le vide. On conçoit, après ce bref rappel qu'il eut été préférable soit de poser une question concernant la propagation dans un métal, soit de donner en quelques mots une justification de la valeur numérique.

La deuxième partie du problème traite de l'aspect mécanique de certains moteurs tournants associés à des dispositifs qui permettent de se trouver dans des situations très variées.

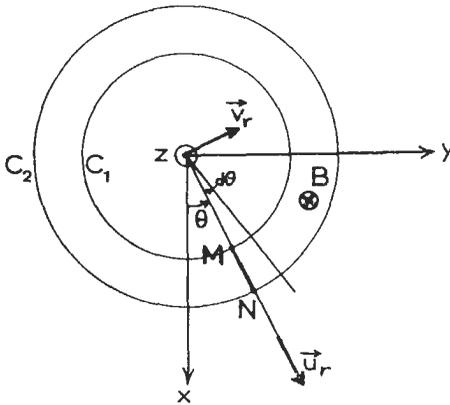
L'ensemble paraît donc très cohérent et satisfaisant. Pourtant là encore, une critique s'impose très vite à la lecture du texte. Aucun élément, dans le grand nombre de cas proposés, ne permet de savoir à quel dispositif on a à faire. C'est tout à fait dommage car le problème (sauf dans la dernière question C.2. *a*) et *b*) se réduit à une succession de résolutions d'équations différentielles simples dans lesquelles on envisage successivement tous les cas connus et résolubles facilement de seconds membres. Les applications numériques laissent entrevoir que les moteurs décrits sont des petits engins développant des couples faibles (équivalents à quelques dizaines de grammes suspendus autour d'une poulie de 1 cm de rayon). Il eut été intéressant d'en savoir davantage sur les applications pratiques (moteurs pas à pas, utilisés dans des dispositifs d'automatisation dans le cas B peut-être ?), cela permet, au fur et à mesure de la résolution de tester le réalisme du résultat obtenu.

Le corrigé qui suit s'est efforcé de rester aussi près que possible de ce que l'on attend d'un candidat, mais quelques commentaires ou remarques ont été ajoutés lorsqu'il nous a paru nécessaire de montrer le rapport avec les nouveaux programmes (I.B.) ou d'insister sur les justifications physiques de la méthode proposée (I.C.). La longueur du texte n'en est que peu augmentée et le lecteur pourra vérifier qu'elle est, sans démagogie, excessive pour une épreuve de 5 heures.

## I. ETUDE ELECTROMAGNETIQUE

### A. Moteur continu à aimant inducteur.

1° Le sens de rotation positif est le sens conventionnel du trièdre direct  $xyz$ .



— Surface balayée par l'élément de courant MN lorsqu'il tourne d'un angle  $d\theta$  :  $\frac{1}{2} (b^2 - a^2) d\theta = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \omega dt$ .

— Flux magnétique « balayé » par MN dans le champ uniforme  $\vec{B} = -B_0 \vec{z}$  :

$$d\Phi = -\frac{1}{2} B_0 (b^2 - a^2) \omega dt.$$

— La force électromotrice d'induction est donnée « traditionnellement » par :

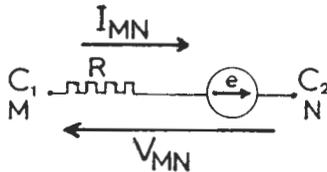
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} B_0 (b^2 - a^2) \omega.$$

Dans quel sens se trouve placé  $e$  : est-ce  $V_{MN}$  ou  $V_{NM}$  ? ou, en d'autres termes, que signifie le signe — dans  $-\frac{d\Phi}{dt}$  ?

C'est la loi de LENZ qui permet de répondre à cette question : fermons le dipôle MN par un circuit qui ne contient pas de force électromotrice et qui ne coupe pas de lignes de champ magnétique ; le courant qui passe dans ce circuit est dû uniquement à la f.é.m. induite dans le dipôle MN, l'action de  $\vec{B}$  sur ce courant doit s'opposer à la cause (mouvement de rotation avec  $\omega > 0$  par exemple) qui l'a produit : la force de LAPLACE mesurée sur  $\vec{v}$ , doit être négative, ce qui montre que le courant induit est dirigé de  $N \rightarrow M$  pour  $\omega > 0$ . La question suivante impose de prendre comme sens positif des courants dans le dipôle  $i_{MN}$  et nous prendrons donc la tension aux bornes  $V_{MN} = V_M - V_N$ , de façon à écrire :

$$V_{MN} = RI_{MN} - e$$

où  $e$  est la force électromotrice du dipôle MN (voir programme de 1<sup>re</sup>). Pour avoir une vraie force électromotrice, il faut  $e I_{MN} > 0$  (ainsi elle fournit de l'énergie au dipôle).



Le courant induit  $I_{MN}$  étant négatif,  $e$  y est aussi, soit :

$$e = -\frac{1}{2} B_0 (b^2 - a^2) \omega \quad \text{mais}$$

$$V_{MN} = -e = \frac{1}{2} B_0 (b^2 - a^2) \omega$$

en circuit ouvert.

2° Moment des forces de LAPLACE sur l'élément MN parcouru par le courant  $i_{MN} = I$ .

Sur un élément de longueur  $dl$  situé à la distance  $l$  de 0,  $d\vec{F} = I dl (\vec{u}_r \wedge \vec{B})$  et  $d\vec{\Gamma} = l \vec{u}_r \wedge d\vec{F}$ , on trouve immédiatement  $d\vec{F} = I dl B_0 \vec{v}_r$  et  $d\vec{\Gamma} = I B_0 l dl \vec{z}$ , d'où :

$$\vec{\Gamma}_{MN} = \int_a^b d\vec{\Gamma} = \frac{1}{2} I B_0 (b^2 - a^2) \vec{z}$$

3° a) La différence de potentiel est la même pour les  $k$  éléments  $M_i N_i$ , ils sont tous en parallèle entre  $C_1$  (sur lequel se trouvent les points  $M_i$ ) et  $C_2$  (points  $N_i$ ) donc :

$$V_{C_1 C_2} = V_{MN} = \frac{1}{2} B_0 (b^2 - a^2) \omega$$

3° b) Chaque conducteur est parcouru par  $I_{M_i N_i} = \frac{I}{k}$ , ce qui conduit à un moment des forces magnétiques :

$$\vec{\Gamma}_{M_i N_i} = \frac{1}{2} \frac{I}{k} B_0 (b^2 - a^2) \vec{z}$$

sur  $M_i N_i$  et à un moment total :

$$\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^k \vec{\Gamma}_{M_i N_i} = \frac{1}{2} I B_0 (b^2 - a^2) \vec{z}$$

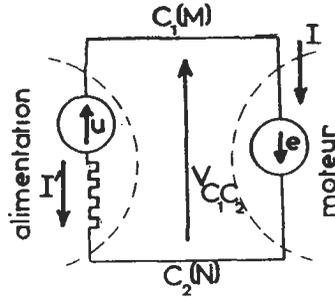
4° A. Le circuit équivalent à l'ensemble moteur + alimentation est donné ci-après, en prenant soin de garder pour les deux dipôles la convention récepteur.

$V_{C_1 C_2} = u + RI'$  pour l'alimentation,

$V_{C_1 C_2} = -e$  pour le moteur,

et  $I' = -I$ .

$$\text{D'où : } I = \frac{u}{R} - \frac{1}{2} B_0 (b^2 - a^2) \frac{\omega}{R}.$$



En portant cette valeur dans  $\Gamma$  (de I.A.3° b), on obtient :

$$\Gamma = \frac{1}{2} B_0 (b^2 - a^2) \frac{u}{R} - \frac{1}{4} B_0^2 (b^2 - a^2)^2 \frac{\omega}{R}.$$

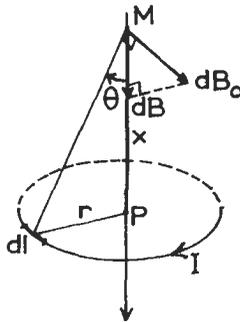
*Application numérique :*

$$|e| = 0,75 \text{ V}, \quad I = 3,25 \text{ A}, \quad \Gamma = 0,39 \cdot 10^{-2} \text{ Nm}.$$

### B. Moteur alternatif synchrone.

1° Calcul du champ sur l'axe d'un solénoïde.

On rappelle rapidement le champ sur l'axe d'une spire circulaire. Les variables sont clairement définies sur la figure ci-après :



$dB_0$ , créé par l'élément de courant  $Idl$  de la spire, se projette en  $dB$  sur l'axe :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2 + x^2} \sin \vartheta$$

avec :

$$\sin \vartheta = \frac{r}{(x^2 + r^2)^{1/2}}$$

tous les éléments de courants  $I dl$  créent les champs dont les composantes sur l'axe s'ajoutent et dont les composantes normales à l'axe ont une résultante nulle, d'où :

$$B = \frac{\mu_0}{2} I \frac{r^2}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2r} \sin^3 \vartheta.$$

On divise le solénoïde en tranches d'épaisseur  $dx$  situées en P et contenant  $n dx$  spires ; le champ créé sur l'axe en M par cette tranche est :



$$dB = \frac{\mu_0 n I}{2r} \sin^3 \vartheta dx$$

la relation entre  $x$  et  $\vartheta$  donnée précédemment (ou  $x = r \cotg \vartheta$ )

donne en différentiant :  $dx = -\frac{r d\vartheta}{\sin^2 \vartheta}$ .

Le champ total sur l'axe en M est alors obtenu par l'intégrale :

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin^3 \vartheta d\vartheta$$

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_1).$$

Remarques :

(1) Pour retrouver le champ sur l'axe d'un solénoïde infini, faire  $\vartheta_2 = 0$  et  $\vartheta_1 = \pi$  ;  $B = \mu_0 n I$ .

(2) Certains ont pu penser utiliser le potentiel scalaire  $\varphi = -\mu_0 \frac{I \Omega}{4\pi}$  pour  $\vec{B}$  dans le vide. Ceci est possible mais la

justification correcte de son emploi n'est pas tout à fait élémentaire et peut conduire, si le candidat ne la maîtrise pas, à des raisonnements faux (voir les ouvrages d'électromagnétisme classiques).

Pour les deux solénoïdes, les champs s'ajoutent et les données géométriques donnent :

$$n = \frac{N}{D} \quad \cos \vartheta_1 = \frac{d}{\sqrt{d^2 + r^2}} \quad \cos \vartheta_2 = \frac{d + D}{\sqrt{(d + D)^2 + r^2}}$$

soit :

$$k = \mu_0 \frac{N}{D} (\cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_1)$$

Application numérique :

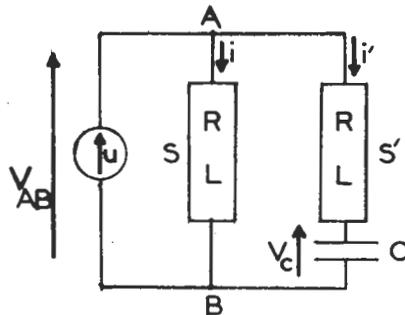
$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \quad \cos \vartheta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \vartheta_2 = \frac{34}{\sqrt{34^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{17}\right)^2}} \approx 1$$

$$k = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{6 \cdot 10^2}{30 \cdot 10^{-2}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$k = 7,35 \cdot 10^{-4} \text{ Tesla/Ampère.}$$

2° a) Le montage représenté par la fig. 3 du texte correspond au schéma électrique équivalent :



$i$  et  $i'$  sont les courants dans  $S$  et  $S'$ .

La tension  $V_{AB}$  est la même dans les trois branches et les courants sont tous orientés de  $A \rightarrow B$ , ce qui conduit aux deux équations :

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri$$

$$u = L \frac{di'}{dt} + Ri' + V_c$$

avec :

$$i' = C \frac{dV_c}{dt}.$$

Les solutions des régimes permanents de ces deux équations différentielles dans le cas où  $u = U\sqrt{2} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right)$  sont sinusoïdales.

On posera :

$$i = I \sqrt{2} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} - \varphi \right) = \Re e I \sqrt{2} \exp j \left( \omega t - \frac{\pi}{4} - \varphi \right)$$

$$i' = I' \sqrt{2} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} - \varphi' \right) = \Re e I' \sqrt{2} \exp j \left( \omega t - \frac{\pi}{4} - \varphi' \right)$$

en portant ces quantités dans les équations, on obtient :

$$I (j L\omega + R) \exp (-j\varphi) = U$$

soit :

$$i = \frac{U \sqrt{2}}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} - \varphi \right)$$

avec :

$$\varphi = \text{Arg} (R + j L\omega)$$

et :

$$I' \left[ R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \exp (-j\varphi') = U$$

soit :

$$i' = \frac{U \sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} - \varphi' \right)$$

avec :

$$\varphi' = \text{Arg} \left[ R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right]$$

2° b) Pour que les déphasages  $\varphi$  et  $\varphi'$  soient opposés, il faut :

$$L\omega = -\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{2L C\omega^2 = 1}$$

2° c) On cherche à obtenir :

$$|\varphi - \varphi'| = \frac{\pi}{2} \quad \text{tg } \varphi = -\text{cotg } \varphi',$$

$$\text{soit} \quad \frac{L\omega}{R} = -\frac{R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{C}{L} = L^2\omega^2 + R^2}$$

2° d) Si les deux conditions sont satisfaites simultanément, on a :

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = -\varphi' \\ |\varphi - \varphi'| = +\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 2|\varphi| = \frac{\pi}{2} \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ car Arg}(R + jL\omega) \text{ est } > 0$$

$$\text{et } \varphi' = -\frac{\pi}{4}.$$

La condition  $L\omega = -\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$  montre que  $i$  et  $i'$  ont même amplitude. La deuxième condition donne alors  $L\omega = R$  d'où :  $I = I' = \frac{U}{R\sqrt{2}}$

$$\text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = \frac{U}{R} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ i' = \frac{U}{R} \cos \omega t. \end{array} \right.$$

— Le champ  $\vec{B}'$  créé en O par l'ensemble S' est porté par Ox et vaut  $B_x = k \frac{U}{R} \cos \omega t.$

— Le champ  $\vec{B}$  créé en O par l'ensemble S est porté par

$$Oy \text{ et vaut } B_y = k \frac{U}{R} \sin \omega t.$$

Ce sont les deux composantes d'un champ tournant de module  $B_0$  et faisant l'angle  $\omega t$  avec  $Ox$  ; on a donc :

$$B_0 = k \frac{U}{R}.$$

*Application numérique :*

$$\text{Avec } R = 31,1 \, \Omega, \quad \omega = 100 \pi \text{ rad/s,} \quad \text{et } U = 110 \text{ V,}$$

$$\text{on obtient : } L = \frac{R}{\omega} = 0,1 \text{ H ;} \quad C = \frac{1}{2 \omega R} \simeq 52 \, \mu\text{F ;}$$

$$I = I' = \frac{U}{R \sqrt{2}} = 2,5 \text{ A ;}$$

$$B_0 = k I \sqrt{2} = k \frac{U}{R} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ Tesla.}$$

3° a) Si la bobine tourne avec une vitesse angulaire  $\Omega \neq \omega$  vitesse angulaire de  $\vec{B}$ , alors le circuit qu'elle constitue est soumis à un flux magnétique variable. Il s'y développe une f.é.m. induite et un courant induit qui obéit à la loi de LENZ : ce courant d'un sens tel, que le couple magnétique auquel est soumis la bobine dans le champ tournant  $\vec{B}$ , tend à diminuer la cause qui l'a créé ; la bobine va donc tourner dans le même sens que  $\vec{B}$  de façon à diminuer la variation de flux magnétique ; elle constitue donc le rotor d'un moteur. La suite de la question va traiter du couple moteur que l'appareil ainsi construit peut développer.

$$3^\circ \text{ b) a) La f.é.m. induite sera prise égale à } - \frac{d\Phi}{dt} \text{ et ferait}$$

passer, si elle était seule, un courant positif dans la bobine, compté sur le sens  $> 0$  d'orientation de la bobine, corrélé à la normale  $\vec{n}$  donnée. On aura alors  $\Phi = m s \vec{n} \cdot \vec{B}$ .

$$(\vec{n}, \vec{B}) = \dots$$

$$\dots (\vec{n}, \vec{n}(0)) + (\vec{n}(0), \vec{B}(0)) + (\vec{B}(0), \vec{B}(t)) = -\Omega t - \alpha + \omega t$$

$$\text{donc :} \quad \Phi = m s B_1 \cos [(\omega - \Omega) t - \alpha]$$

$$\text{et : } e = -\frac{d\Phi}{dt} = ms B_1 (\omega - \Omega) \sin [(\omega - \Omega) t - \alpha]$$

Le courant instantané permanent  $i$  est la solution particulière de l'équation  $e = \lambda \frac{di}{dt} + \rho i$ . La résolution est calquée sur celle de la question I.B.2° a) :

$$i = i_0 \sin [(\omega - \Omega) t - \alpha - \varphi] \quad \text{où} \quad i_0 = \frac{ms B_1 (\omega - \Omega)}{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2 (\omega - \Omega)^2}}$$

$$\text{et : } \varphi = \text{Arg} [\rho + j\lambda (\omega - \Omega)].$$

Le moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  est simplement  $\vec{\mathcal{M}} = m s i \vec{n}$ .

3° b)  $\beta) \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = m s i \vec{n} \wedge \vec{B}$  n'a qu'une composante :

$$\Gamma_z = m s i B_1 \sin(\vec{n}, \vec{B})$$

$$\Gamma_z = \frac{m^2 s^2 B_1^2 (\omega - \Omega)}{\sqrt{\rho^2 + \lambda^2 (\omega - \Omega)^2}} \dots$$

$$\dots \sin [(\omega - \Omega) t - \alpha - \varphi] \sin [(\omega - \Omega) t - \alpha]$$

La moyenne temporelle est définie par :

$$\langle \Gamma_z \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} \Gamma_z dt \quad \text{où} \quad \omega - \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

La transformation du produit des sinus, après avoir posé  $u = \omega - \Omega$  :

$$\sin^2(ut - \alpha) \cos \varphi - \sin(ut - \alpha) \cos(ut - \alpha) \sin \varphi$$

donne les intégrales :

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} \sin^2(ut - \alpha) dt = \dots$$

$$\dots \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} \frac{1}{2} (1 - \cos 2(ut - \alpha)) dt = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} \sin(ut - \alpha) \cos(ut - \alpha) dt = \dots$$

$$\dots \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} \frac{1}{2} \sin(2ut - 2\alpha) dt = 0.$$

Par ailleurs, d'après la définition de  $\varphi$  :

$$\cos \varphi = \frac{q}{\sqrt{q^2 + \lambda^2 (\omega - \Omega)^2}}$$

d'où :

$$\langle \Gamma_z \rangle = \frac{1}{2} \frac{m^2 s^2 B_1^2 (\omega - \Omega) q}{q^2 + \lambda^2 (\omega - \Omega)^2}$$

3° b)  $\gamma$ ) Pour étudier  $\langle \Gamma_z \rangle$  en fonction de  $(\omega - \Omega) = u$ , il suffit d'étudier la fonction  $f = \frac{u}{q^2 + \lambda^2 u^2}$  — Fonction impaire mais seule la partie  $\omega - \Omega > 0$  a un sens physique.

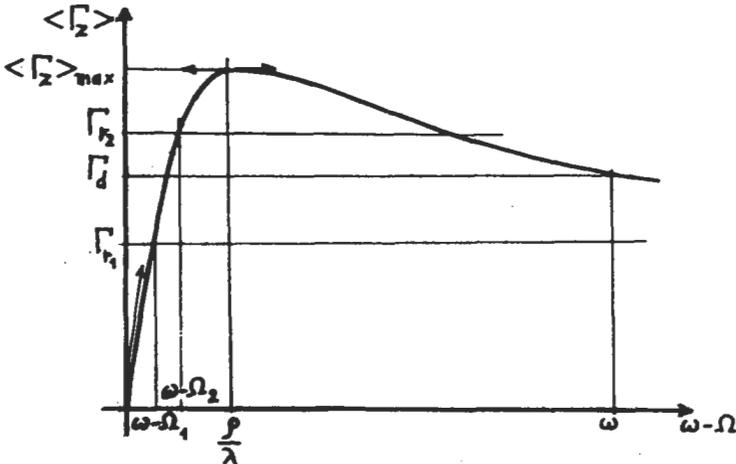
$$\text{Dérivée : } \frac{df}{du} = \frac{1}{q^2 + \lambda^2 u^2} - \frac{u \times 2\lambda^2 u}{(q^2 + \lambda^2 u^2)^2} = \frac{q^2 - \lambda^2 u^2}{(q^2 + \lambda^2 u^2)^2}$$

Fonction croissante pour  $-\frac{q}{\lambda} < u < +\frac{q}{\lambda}$  décroissante ailleurs.

L'axe des abscisses est asymptote.

La valeur du maximum pour  $u = \frac{q}{\lambda}$  donne :

$$\langle \Gamma_z \rangle_{\max} = \frac{1}{4} \frac{m^2 s^2 B_1^2}{\lambda}$$



Pente à l'origine :  $\lim \left( \frac{f}{u} \right)$  pour  $u \rightarrow 0$ , soit :

$$\frac{1}{2} \frac{m^2 s^2 B_1^2}{\rho}$$

Si  $\rho$  (résistance intérieure du moteur) augmente, le maximum a une ordonnée inchangée mais il se déplace vers des valeurs plus grandes de  $\omega - \Omega$  et la pente à l'origine diminue corrélativement.

Application numérique :

$$\langle \Gamma_z \rangle_{\max} = \frac{1}{4} \frac{(10^2)^2 \times (10^{-3})^2 \times (10^{-2})^2}{80 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ N.m}$$

l'abscisse du maximum correspond à  $\Omega = \omega - \frac{\rho}{\lambda}$  avec :

$$\frac{\rho}{\lambda} = \frac{2}{8 \cdot 10^{-2}} = 25 \text{ rad/s} \quad \Omega = 314 \cdot 25 = 289 \text{ rad/s.}$$

Remarquons que le moteur tourne à une vitesse à peine inférieure à celle du champ tournant qui est  $\omega = 100 \pi$  rad/s, ce qui est la fréquence 50 Hz ou encore 3 000 tours/mn. La vitesse du rotor calculée ci-dessus, correspond à 2 760 tours/mn et c'est en fait la vitesse minimale du rotor lorsqu'il est en régime stable (voir question suivante).

3° b)  $\delta$ ) Pour que le moteur démarre seul, il faut que, au repos ( $\Omega = 0$  soit  $\omega - \Omega = \omega$ ) le couple  $\langle \Gamma_z \rangle$  soit positif et que ce couple augmente lorsque  $\Omega$  augmente (soit  $\omega - \Omega$  diminue).

Or, d'après le calcul numérique précédent  $\omega > \frac{\rho}{\lambda}$ . Pour

cette abscisse, il y a bien un couple de démarrage  $\Gamma_d > 0$  qui se trouve sur la partie à pente  $< 0$  de la courbe, ce qui fait que le moteur a tendance à accélérer après son démarrage.

Pour que le régime soit stable, il faut que, lorsque  $\Omega$  tend à diminuer (décrochage), le couple moteur augmente, ce qui se produit dans la partie à pente positive de la courbe, soit :

$$0 < \omega - \Omega < \frac{\rho}{\lambda}$$

ou :

$$\Omega_{\max} < \Omega < \omega.$$

REMARQUES : Si le couple résistant  $\Gamma_r$  appliqué au moteur est inférieur à  $\Gamma_d$ , celui-ci démarre effectivement seul et va se stabiliser à une vitesse  $\Omega_1$  qui correspond à l'abscisse du point  $\langle \Gamma_z \rangle = \Gamma_{r1}$  dans la partie à pente positive.

— Si le couple  $\Gamma_r$  est compris entre  $\Gamma_d$  et  $\langle \Gamma_z \rangle_{\max}$ , il faut lancer le moteur et celui-ci se stabilisera à une vitesse  $\Omega_2$  avec  $\Omega_{\max} < \Omega_2 < \Omega_1$ . On voit que le couple résistant ne peut dépasser  $\langle \Gamma_z \rangle_{\max}$  et que la vitesse la plus basse est  $\Omega_{\max}$ .

### C. Principe d'un moteur linéaire.

1° Ecrivons que le rotationnel du potentiel vecteur cherché  $\vec{A}$ , de coordonnées  $A_x, A_y, A_z$ , est bien égal au champ magnétique  $\vec{B}$  proposé par l'énoncé. On obtient les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} &= 0 ; \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} &= B_0 \cos(\omega t - kz) ; \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

En supposant que  $A_x, A_y, A_z$  ne dépendent que de  $z$  et  $t$ , il reste :

$$-\frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 ; \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = B_0 \cos(\omega t - kz).$$

Comme le suggère l'énoncé, nous retenons la solution particulière :

$$A_x = -\frac{B_0}{k} \sin(\omega t - kz) ; \quad A_y = A_z = 0.$$

Dans le cas général, le champ électrique  $\vec{E}$  est donné par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Si l'on suppose que le potentiel scalaire  $V$  est nul en tout point, nous obtenons :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'expression de  $\vec{A}$  :

$$E_x = \frac{\omega}{k} B_0 \cos(\omega t - kz) ; \quad E_y = E_z = 0.$$

Le champ  $\vec{E}$ , porté par  $Ox$ , et le champ  $\vec{B}$ , porté par  $Oy$ , forment un trièdre trirectangle avec la direction de propaga-

tion Oz : nous retrouvons la structure d'une onde électromagnétique de vitesse de propagation :

$$v_x = v_y = 0 ; \quad v_z = \frac{\omega}{k}.$$

On retrouve que le module de la vitesse est aussi le rapport des amplitudes des champs électriques et magnétiques.

REMARQUE : *Compte tenu du champ  $\vec{B}$  donné par l'énoncé, une autre solution pour le potentiel vecteur pourrait être obtenue en ajoutant à la solution particulière  $\vec{A}$  ci-dessus le gradient d'une fonction scalaire quelconque :*

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} \psi.$$

On obtient alors le même champ électrique  $\vec{E}$  si l'on remplace  $V$  par :

$$\vec{V}' = V - \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Pour toute fonction scalaire  $\psi$  donnée, on définit ainsi une transformation  $A, V \rightarrow A', V'$  appelée changement de jauge, qui laisse invariante la structure du champ électromagnétique (invariance de jauge).

2° a) On obtient le vecteur densité de courant au moyen de la loi d'OHM :  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  ; soit :

$$j_x = \gamma v B_0 \cos(\omega t - kz) ; \quad j_y = j_z = 0.$$

Un élément parallélépipédique de volume  $d\tau = dx dy dz$  centré en  $M(x, y, z)$  peut être considéré comme une portion de circuit de longueur  $dx$  et de section  $dy dz$ , parcourue par un courant  $\delta I = j_x dy dz$  parallèlement à  $\vec{u}_x$ , vecteur unitaire de Ox. Cette portion de circuit dont le «  $I d\vec{l}$  » vaut :  $\delta I \cdot dx \cdot \vec{u}_x = j_x d\tau \vec{u}_x$ , plongée dans le champ magnétique  $\vec{B}$ , est soumise à la force de LAPLACE :

$$d\vec{f} = j_x d\tau \vec{u}_x \wedge \vec{B}$$

soit :

$$df_x = df_y = 0 \quad df_z = \gamma v B_0^2 \cos^2(\omega t - kz) d\tau.$$

On obtient une force oscillante dont la moyenne sur le temps est obtenue en remplaçant le cosinus carré par 1/2 (voir aussi question I.B.3° b)  $\beta$ ).

$$\langle df_x \rangle = \langle df_y \rangle = 0 \quad \langle df_z \rangle = \frac{1}{2} \gamma v B_0^2 d\tau.$$

En sommant alors sur tout le volume du conducteur, on obtient la force moyenne résultante :

$$f_x = f_y = 0 \quad f_z = \frac{1}{2} v B_0 abc.$$

Application numérique :  $f_z = 7,5 \text{ N}$ .

REMARQUE : L'énoncé aurait dû justifier la valeur très faible donnée pour la vitesse de propagation.

2° b) Imaginons une particule chargée  $q$  fixe par rapport à P. Cette particule animée d'une vitesse  $\vec{u}$  dans  $\mathcal{R}$  est soumise dans  $\mathcal{R}$  (où règne le champ électromagnétique  $\vec{E}, \vec{B}$ ) à une « force de LORENTZ » :

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})$$

(nous rappelons que cette formule n'est valable que si la vitesse de la particule est très inférieure à la vitesse de la lumière).

Dans un repère lié à P, où la charge est immobile, l'expression de la force de LORENTZ se réduit à :

$$\vec{F} = q \vec{E}_p$$

où  $\vec{E}_p$  est l'expression du champ électrique dans ce repère mobile.

On obtient donc :

$$\vec{E}_p = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}$$

soit, compte tenu des expressions en cartésiennes,

$$E_{p_x} = B_0 (v - u) \cos(\omega t - kz), \quad E_{p_y} = E_{p_z} = 0.$$

Le calcul précédent peut être alors refait en remplaçant  $v$  par  $v - u$ , ce qui donne :

$$f_x = f_y = 0 \quad f_z = \frac{1}{2} \gamma (v - u) B_0^2 abc.$$

Si P n'est soumis qu'à cette force, on voit que le mouvement ne sera plus accéléré pour  $u = v$  (vitesse limite).

REMARQUE : Nous nous sommes volontairement placés dans une hypothèse non relativiste, guidés par l'application numérique de la question précédente. Dans le cas général, on n'aurait pu éviter de faire appel aux formules de transformation des champs.

La formule donnant  $\vec{E}_p$  devrait être alors remplacée par :

$$\vec{E}_p = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})$$

(valable pour des champs perpendiculaires à la vitesse, comme c'est le cas ici).

3° Les bobines n'étant plus fixes, mais se déplaçant à la vitesse  $-\vec{u}$ , elles créent dans  $\mathcal{R}$ , une onde se déplaçant à la vitesse  $\vec{v} - \vec{u}$ . Le calcul précédent peut alors être refait en analysant l'action de cette onde sur P fixe comme dans I.C.2° a).

## II. ETUDE MECANIQUE

A. 1° La loi fondamentale de la dynamique appliquée au rotor du moteur de moment d'inertie J s'écrit :  $J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma_m$ , soit, avec  $\Gamma_m = \alpha u(t) - \beta \omega(t)$  et en remarquant que :

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}.$$

$$\boxed{J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta \frac{d\theta}{dt} = \alpha u(t)} \quad \text{ou} \quad \boxed{J \frac{d\omega}{dt} + \beta \omega = \alpha u(t)}$$

REMARQUE : La loi du couple moteur qui est donnée ici est celle qui a été démontrée pour le moteur à courant continu, question I.A.4°.

A. 2° Si  $u(t) = u_0$  indépendant du temps, le régime permanent est donné par  $\omega = \text{constante}$ , donc  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ . La deuxième équation ci-dessus donne :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{\alpha u_0}{\beta}}$$

Cela revient évidemment au fait que la vitesse atteinte annule le couple moteur.

A. 3° L'équation différentielle du mouvement est maintenant  $J \frac{d\omega}{dt} + \beta \omega = \alpha u_1$  qui donnera le régime permanent  $\omega_1 = \frac{\alpha u_1}{\beta}$ .

C'est la solution complète de l'équation qui donne le régime transitoire, en tenant compte de la condition initiale :

$$\omega(t = 0) = \omega_0 = \frac{\alpha u_0}{\beta}.$$

L'équation sans second membre a pour solution générale :

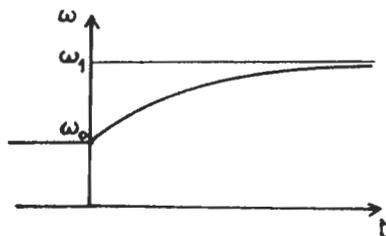
$$\omega = C e^{-\frac{\beta}{J} t}$$

l'équation complète a donc pour solution générale :

$$\omega = C e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\alpha u_1}{\beta} \quad \text{où} \quad \tau = \frac{J}{\beta}$$

et C est déterminé par la condition initiale, soit :

$$\omega(t) = \frac{\alpha}{\beta} (u_0 - u_1) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\alpha u_1}{\beta}$$



*Application numérique :*

On admettra que le régime permanent est pratiquement atteint si le terme dépendant du temps est réduit à  $10^{-3}$  de sa valeur initiale, soit :

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 10^{-3}$$

soit :

$$t = \frac{3 \tau}{\log e} \simeq 7 \tau$$

soit  $t \simeq 0,7$  s.

B. 1° L'équation différentielle du système est maintenant :

$$J \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \beta \frac{d\vartheta}{dt} + \gamma \vartheta = \alpha u(t).$$

Pour  $u = u_0 = \text{constante}$ , il existe une position d'équilibre définie par :

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 0 \quad \vartheta_{\text{equ.}} = \frac{\alpha u_0}{\gamma}.$$

Pour atteindre cette position d'équilibre, le dispositif effectuera un mouvement donné par la solution générale de l'équa-

tion sans second membre. Elle est du type  $\vartheta = e^{rt}$ , où  $r$  est solution de l'équation  $J r^2 + \beta r + \gamma = 0$  obtenue en portant  $\vartheta$  dans l'équation sans second membre. Trois cas sont à envisager suivant la nature des solutions de cette équation du 2<sup>me</sup> degré.

1<sup>er</sup> cas :  $\beta^2 - 4 J \gamma > 0$  deux solutions réelles  $r_1$  et  $r_2$  :

$$-\frac{\beta}{2J} \pm \sqrt{\frac{\beta^2 - 4 J \gamma}{4 J^2}}, \text{ le mouvement transitoire est du}$$

type  $\vartheta = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$  ( $A$  et  $B$  sont des constantes qui peuvent être déterminées dans la solution générale de l'équation complète par les conditions initiales).

Dans ce 1<sup>er</sup> cas, le mouvement est amorti non oscillant.

2<sup>me</sup> cas :  $\beta^2 - 4 J \gamma < 0$ , les deux solutions sont imaginaires de la forme :

$$r = -\frac{1}{\tau'} \pm jh \quad \text{d'où :} \quad \vartheta = e^{-\frac{t}{\tau'}} \times A \sin(ht + \varphi)$$

c'est un mouvement sinusoïdal amorti.

3<sup>me</sup> cas :  $\beta^2 - 4 J \gamma = 0$ , cela correspond à un coefficient d'amortissement dit critique  $\beta_c = 2 \sqrt{J \gamma}$ , le mouvement est de la forme :

$$\vartheta = e^{-\frac{t}{\tau_c}} (A + Bt) \quad \text{avec} \quad \tau_c = \sqrt{\frac{J}{\gamma}}$$

Cas particulier proposé :

$\beta^2 - 4 J \gamma = (0,96 \cdot 10^{-2})^2 - 4 \times 0,0576 \times 4 \cdot 10^{-4} = 0$ , cela correspond donc à l'amortissement critique.

Avec  $u_0 = 0$ , la solution générale de l'équation complète s'écrit donc :

$$\vartheta = e^{-\frac{t}{\tau_c}} (A + Bt) \quad \text{avec} \quad \tau_c = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{0,0576} = \frac{1}{12} \text{ s.}$$

$$\text{Les conditions initiales sont à } t = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta = \vartheta_0 \\ \text{et} \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \vartheta_0 \\ \text{et} \quad B - \frac{A}{\tau_c} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{soit} \quad \boxed{\vartheta = \vartheta_0 \left( 1 + \frac{t}{\tau_c} \right) e^{-\frac{t}{\tau_c}}}$$

Application numérique :

A l'instant  $t = 0,5$  s, soit  $\frac{t}{\tau_c} = 6$ ,  $\vartheta$  sera revenu à sa position d'équilibre  $\vartheta = 0$  à moins de 1 % de  $\vartheta_0$  près.

B. 2° L'équation différentielle complète :

$$J \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \beta \frac{d\vartheta}{dt} + \gamma \vartheta = \alpha A t$$

a pour solution générale : la solution générale de l'équation sans second membre, qui est d'un des types décrits dans la question précédente (quel qu'il soit, il s'amortit complètement : régime transitoire), plus une solution particulière de l'équation complète. Nous chercherons cette dernière de la forme  $\vartheta = at + b$  qui, reportée dans l'équation complète donne :

$$\beta a + \gamma(at + b) \equiv \alpha A t$$

ou encore :

$$\begin{aligned} a &= \alpha A / \gamma \\ b &= -\frac{\alpha \beta A}{\gamma^2}. \end{aligned}$$

Le régime permanent du moteur est donc un mouvement correspondant à une loi linéaire de l'angle de rotation :

$$\vartheta = \frac{\alpha A}{\gamma} \left( t - \frac{\beta}{\gamma} \right) :$$

le moteur « suit » son alimentation avec un retard  $\tau' = \frac{\beta}{\gamma}$ .

B. 3° Pour  $u = U_0 \cos \omega t$ , le régime permanent est sinusoidal de même fréquence mais présente une différence de phase.

En passant en formalisme imaginaire :

$$u = \Re e U_0 e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \vartheta = \Re e \vartheta_0 e^{j(\omega t - \varphi)},$$

on obtient en portant dans l'équation complète du mouvement :

$$(-J \omega^2 + j \omega \beta + \gamma) \vartheta_0 e^{-j\varphi} = \alpha U_0$$

l'égalité des modules donne :

$$\vartheta_0 = \frac{\alpha U_0}{\sqrt{(\gamma - J \omega^2)^2 + \omega^2 \beta^2}}$$

et celle des phases donne :

$$\varphi = \text{Arg} (-J \omega^2 + \gamma + j \omega \beta)$$

Etude de la courbe  $\vartheta_0$  en fonction de  $\omega$  pour différents coefficients d'amortissement :

$$\frac{d\vartheta_0}{d\omega} = -\alpha U_0 [(\gamma - J \omega^2)^2 + \omega^2 \beta^2]^{-3/2} \times \omega [2J(J \omega^2 - \gamma) + \beta^2]$$

ses racines sont :  $\omega = 0$  et  $\omega^2 = \frac{\gamma}{J} - \frac{\beta^2}{2J^2}$ , cette dernière ne

donnant une valeur réelle de  $\omega$  que si  $\beta < \sqrt{2\gamma J} = \beta_c / \sqrt{2}$ .

D'où les trois zones de  $\beta$  caractérisant la forme de  $\theta_0(\omega)$ .

1<sup>er</sup> cas :  $\beta = \beta_c / \sqrt{2}$   $\frac{d\theta_0}{d\omega} < 0$  sauf en  $\omega = 0$  où le maximum est très plat car la 1<sup>re</sup> dérivée non nulle en  $\omega = 0$  est la dérivée 4<sup>me</sup>.

2<sup>me</sup> cas :  $\beta < \beta_c / \sqrt{2}$  minimum en  $\omega = 0$ ,

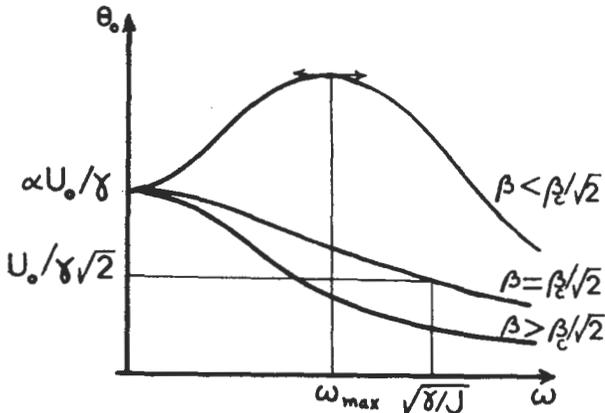
$$\text{maximum en } \omega_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma}{J} - \frac{\beta^2}{2J^2}};$$

la valeur du maximum étant :

$$\theta_{0\max} = \frac{\alpha U_0}{\beta \sqrt{\frac{\gamma}{J} - \frac{\beta^2}{4J^2}}} = \frac{\alpha U_0}{\beta \sqrt{\omega_{\max}^2 + \frac{\beta^2}{4J^2}}}$$

3<sup>me</sup> cas :  $\beta > \beta_c / \sqrt{2}$  un seul maximum en  $\omega = 0$ .

Toutes les courbes passent par le point  $\omega = 0 \quad \theta_0 = \alpha U_0 / \gamma$ .



C. 1<sup>o</sup> a) Le couple moteur  $\Gamma_m = \Gamma_0 = \text{constante}$  lorsque le moteur est alimenté et est nul autrement. Un couple  $\Gamma$  est appliqué au moteur, c'est donc un couple résistant. L'équation différentielle du mouvement devient :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma_0 - |\Gamma|.$$

Pour que le moteur démarre, il faut  $\frac{d^2\theta}{dt^2} > 0$  donc  $\Gamma_0$  doit

être supérieur à  $|\Gamma|$ . Comme  $|\Gamma| = |\Gamma_r|$  dès que le moteur démarre, la condition de démarrage est donc  $\Gamma_0 > |\Gamma_r|$ . L'accélération angulaire est alors, d'après l'équation ci-dessus :

$$\frac{\Gamma_0 - |\Gamma_r|}{J}$$

C. 1° b) Le moteur étant en marche avec une vitesse angulaire  $\omega_0$  à  $t = 0$ , le moteur a un mouvement uniformément accéléré puisque l'accélération est constante d'après la question précédente :

$$\vartheta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma_0 - |\Gamma_r|}{J} t^2 + \omega_0 t + \vartheta_0$$

on prendra  $\vartheta = 0$  à l'instant initial, ce qui implique  $\vartheta_0 = 0$ .

$\omega$  est déterminé par  $\dot{\vartheta}(0) = \omega_0$ , soit :

$$\vartheta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma_0 - |\Gamma_r|}{J} t^2 + \omega_0 t.$$

Ce mouvement est accéléré si  $\Gamma_0 > |\Gamma_r|$ , retardé si  $\Gamma_0 < |\Gamma_r|$  (cas du moteur lancé puisque dans ce cas, il ne peut démarrer seul) et uniforme si  $\Gamma_0 = |\Gamma_r|$ .

$\dot{\vartheta} = \frac{\Gamma_0 - |\Gamma_r|}{J} t + \omega_0$  pourra devenir nul à un instant

$t > 0$  tel que  $t = \frac{\omega_0 J}{|\Gamma_r| - \Gamma_0}$ , ce qui impose  $|\Gamma_r| > \Gamma_0$  pour  $\omega_0 > 0$ .

*Application numérique :*

Les données correspondent à  $|\Gamma_r| > \Gamma_0$ ; l'instant d'arrêt est alors :

$$t = \frac{50 \times 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-3}} \quad t = 2,5 \text{ s.}$$

C. 2° a) Pour décrire le mouvement du rotor du moteur muni de son engrenage, il faut écrire séparément les équations des deux systèmes :

1 rotor + arbre + accessoires + roue  $D_1$  sur lequel s'exercent les couples  $\Gamma_{1m}$  moteur et celui de la force tangentielle  $\vec{F}_t$  de contact exercée par  $D_2$  sur  $D_1$  :

$$J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \Gamma_{1m} + \mathcal{M}_{Oz_1}^t(\vec{F}_t)$$

2 roue  $D_2$  sur laquelle s'exerce le moment résistant  $\Gamma_r$  et celui de la force tangentielle  $-\vec{F}_t$  de contact exercée par  $D_1$  sur  $D_2$  :

$$J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \Gamma_r + \mathfrak{N}_{Oz_2}^t (-\vec{F}_t).$$

L'écriture des valeurs algébriques des couples demande du soin. En effet,  $\Gamma_r$  étant un couple de frottement solide, son écriture algébrique dépend du sens de rotation. Supposons  $\theta_1 > 0$

puisque  $\Gamma_{1m}$  est donné  $> 0$  donc  $\theta_2 < 0$ , donc  $\frac{d^2\theta_2}{dt^2} < 0$  au démarrage : ceci impose :  $\Gamma_r = + \Gamma_{2r} > 0$ .

On appellera  $f_t$  le module de  $F_t$  soit  $\mathfrak{N}_{Oz_1}^t (\vec{F}_t) = -R_1 f_t$ ,  
résistant pour  $D_1$

et  $\mathfrak{N}_{Oz_2}^t (-\vec{F}_t) = -R_2 f_t$ ,  
moteur pour  $D_2$ .

De plus,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont liés par la relation  $R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2 = 0$  qui tient compte des valeurs algébriques.

Les deux équations du mouvement deviennent alors le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \Gamma_{1m} - R_1 f_t \\ J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \Gamma_{2r} - R_2 f_t \\ R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2 = 0. \end{array} \right.$$

On élimine d'abord  $f_t$  entre les deux premières équations et on remplace  $\theta_2$  par  $-R_1 \frac{\theta_1}{R_2}$  :

$$J_1 R_2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + J_2 \frac{R_1^2}{R_2} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = R_2 \Gamma_{1m} - R_1 \Gamma_{2r}$$

d'où on tire l'accélération angulaire de  $D_1$  :

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{\Gamma_{1m} - \frac{R_1}{R_2} \Gamma_{2r}}{J_1 + J_2 \frac{R_1}{R_2}}$$

puis celle de  $D_2$  par :

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = - \frac{R_1}{R_2} \frac{d^2\theta_2}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = - \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \Gamma_{1m} - \Gamma_{2r}}{J_1 \left(\frac{R_2}{R_1}\right) + J_2}$$

puis la valeur de  $f_t$  à l'aide d'une des deux premières équations :

$$f_t = \frac{1}{R_1} \times \frac{\Gamma_{1m} + \frac{J_1}{J_2} \frac{R_2}{R_1} \Gamma_{2r}}{1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \frac{J_1}{J_2}} \dots$$

$$\dots = \frac{1}{R_2} \times \frac{\Gamma_{2r} + \frac{J_2}{J_1} \frac{R_1}{R_2} \Gamma_{1m}}{1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \frac{J_2}{J_1}}$$

La formulation de chacune des expressions ci-dessus a été choisie de façon à favoriser l'interprétation physique.

Ainsi  $\frac{d^2\theta_1}{dt^2}$ , accélération de l'ensemble moteur + arbre + disque  $D_1$ , est due au « couple efficace »  $\Gamma_{1m} - \frac{R_1}{R_2} \Gamma_{2r}$  dans lequel apparaît le couple de frottement efficace  $\frac{R_1}{R_2} \Gamma_{2r}$ , tandis que l'inertie au lieu d'être  $J_1$ , est augmentée de  $J_2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$  due à

l'engrenage avec la roue  $D_2$ . L'interprétation de l'accélération angulaire de  $D_2$  est similaire. La force de contact tangentielle est due, quant à elle, aux deux couples moteur et résistants, qui ajoutent leurs effets moyennant un terme géométrique et

dynamique qui corrige  $\Gamma_{2r}$  et  $R_1$  pour tenir compte de l'engrenage (ou dans l'autre expression  $\Gamma_{1m}$  et  $R_2$ ).

Application numérique :

$$\frac{R_2}{R_1} = 2$$

$$J_1 \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 + J_2 = 7 \times 1,5 \cdot 10^{-4} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = - \frac{7 \cdot 10^{-3}}{7 \times 10 \cdot 10^{-4}} = -6,67 \text{ rads}^{-2} \\ \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -2 \times \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = 13,3 \text{ rad}^{-2} \end{array} \right.$$

$$\frac{R_2}{R_1} \Gamma_{1m} - \Gamma_{2r} = 7 \cdot 10^{-3}$$

Pour le calcul de  $f_t$  :

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{1}{3}$$

$$\Gamma_{1m} + \frac{J_1}{J_2} \times \frac{R_2}{R_1} \Gamma_{2r} \dots$$

$$\dots = \left( 4 + \frac{1}{3} \times 2 \times 1 \right) 10^{-3} = \frac{14}{3} \cdot 10^{-3}$$

$$1 + \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 \frac{J_1}{J_2} = 1 + 4 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$f_t = \frac{1}{1 \times 10^{-2}} \times \frac{14}{3} \times \frac{3}{7} 10^{-3} = 0,2 \text{ N.}$$

C. 2° b) Lorsqu'on a ajouté au couple résistant  $\Gamma_{2r}$ , un autre couple résistant  $\Gamma'_{2r}$ , périodique en  $\theta_2$  de période  $2\pi$ , on réécrit l'équation du mouvement de  $D_2$  de la façon suivante, en tenant compte des valeurs numériques qui simplifient l'écriture :

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -A \gamma_2 + A f(\theta_2) \quad \text{où} \quad \gamma_2 = 2\Gamma_{1m} - \Gamma_{2r} \dots$$

$$\dots A = \frac{1}{J_2 + 4J_1}$$

et  $f(\theta_2)$  est la fonction  $\Gamma'_{2r}(\theta_2)$ .

Multiplions les deux membres de l'équation par  $\frac{d\theta_2}{dt}$  et intégrons de 0 à T où T est la période du mouvement si elle existe,

$$\text{avec :} \quad \left( \frac{d\theta_2}{dt} \right)_{t=0} = -\frac{\omega_0}{2} = \left( \frac{d\theta_2}{dt} \right)_{t=T}$$

(rappelons que  $\theta_2$  est toujours  $< 0$  si  $\theta_1$  est  $> 0$  donc  $\omega_0 > 0$ )

$$\int_0^T \frac{d\vartheta_2}{dt} \frac{d^2\vartheta_2}{dt^2} dt = -A \gamma_2 \int_0^T d\vartheta_2 + A \int_0^T f(\vartheta_2) \frac{d\vartheta_2}{dt} dt$$

$$\left| \frac{1}{2} \left( \frac{d\vartheta_2}{dt} \right)^2 \right|_0^T = -A \gamma_2 (-2\pi - 0) + A \int_0^{2\pi} f(\vartheta_2) d\vartheta_2$$

L'intégrale du membre de droite vaut  $A \Gamma'_{0r} \times \Theta$ .

Le membre de gauche vaut 0 ; il s'ensuit que le membre de droite doit être nul :

$$\gamma_2 = -\Gamma'_{0r} \frac{\Theta}{2\pi} \quad \text{ou} \quad \boxed{\Theta = -2\pi \frac{2\Gamma_{1m} - \Gamma_{2r}}{\Gamma'_{0r}}}$$

ce qui s'interprète en disant que la valeur moyenne du couple supplémentaire sur une période est égale à la valeur moyenne du « couple efficace » défini dans II.C. 2° a).

Pendant la première phase du mouvement, l'accélération est :

$$\gamma^{(1)} = - \frac{2\Gamma_{1m} - (\Gamma_{2r} + \Gamma'_{0r})}{J_2 + 4J_1}$$

Le mouvement du moteur doit être retardé puisqu'on a rajouté un frottement, ce qui correspond, pour  $D_2$ , à une accélération positive, soit  $\Gamma_{2r} + \Gamma'_{0r} > 2\Gamma_{1m}$ .

Pendant la 2<sup>me</sup> phase :

$$\gamma^{(2)} = - \frac{2\Gamma_{1m} - \Gamma_{2r}}{J_2 + 4J_1}$$

doit être  $< 0$  car il faut permettre une nouvelle accélération pour rattraper la vitesse  $\omega_0$  de départ, soit  $\Gamma_{2r} < \Gamma_{1m}$ .

L'ensemble des deux conditions donne :

$$\boxed{\Gamma_{2r} < 2\Gamma_{1m} < \Gamma_{2r} + \Gamma'_{0r}}$$

Notons que la deuxième condition traduit également le fait que  $\Theta$  est  $< 0$ .

Intégrons maintenant l'équation pendant la 1<sup>re</sup> phase du mouvement pour calculer l'instant  $t$  au bout duquel  $\vartheta_2 = \Theta$  :

$$\vartheta_2 = -\frac{1}{2} A (\gamma_2 - \Gamma'_{0r}) t^2 - \frac{\omega_0 t}{2}$$

qui tient compte des conditions initiales. Pour  $\vartheta_2 = \Theta$  l'instant  $t$  est solution de l'équation du 2<sup>me</sup> degré :

$$\frac{1}{2} A (\gamma_2 - \Gamma'_{0r}) t^2 + \frac{\omega_0}{2} t + \Theta = 0$$

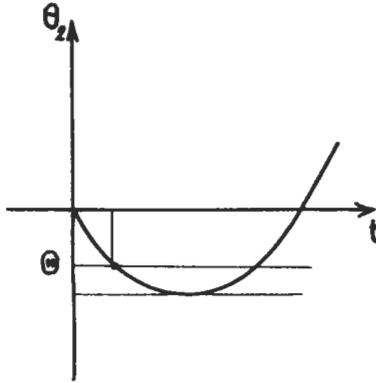
Cette équation n'aura des racines réelles que si :

$$\omega_0^2 > 8 \Theta A (\gamma_2 - \Gamma'_{0r}) \quad \Theta \text{ étant } < 0$$

$$\omega_0^2 > 8 |\Theta| \frac{\Gamma_{2r} + \Gamma'_{0r} - 2 \Gamma_{1m}}{J_2 + 4 J_1}$$

cette quantité est positive d'après les conditions précédentes.

Remarquons que le produit et la somme des deux racines de l'équation sont positifs, ce qui implique que l'équation a deux racines positives, mais évidemment c'est la plus petite des deux racines qui est la solution physiquement acceptable. La figure ci-après illustre la condition que doit remplir  $\omega_0^2$ ; elle revient à dire que  $\Theta$  se situe au-dessus du minimum de la fonction  $\Phi_2(t)$ .



R. JULLIEN,

A.-M. QUITTET,

*Maîtres-Assistants*

(Université Paris-Sud - Orsay).

**C.A.P.E.S.**

SESSION DE 1979

**OPTION PHYSIQUE ET CHIMIE****COMPOSITION DE CHIMIE**

(Durée : 4 heures)

*Il est recommandé d'adopter dans les calculs numériques une précision raisonnable et compatible avec les données de l'énoncé.*

*Le sujet peut paraître long, aussi est-il demandé aux candidats de répondre avec précision et concision aux questions posées.*

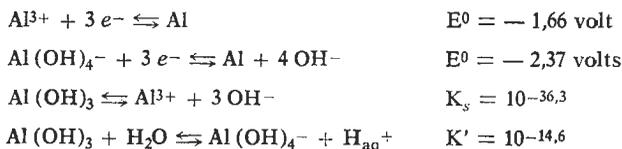
*En ce qui concerne la question B.II. (diagramme potentiel pH de Al), joindre à la copie le diagramme donné avec l'énoncé et compléter avec les indications de la question B.II.2° a).*

## DONNÉES NUMÉRIQUES

*Données relatives à l'aluminium :*

- numéro atomique  $Z = 13$ ,
- arête de la maille du cristal  $a = 4,041 \text{ \AA}$ ,
- rayon de l'ion aluminium  $r = 0,51 \text{ \AA}$ ,
- masse atomique  $M = 26,98 \text{ g}$ ,
- température de fusion  $= 666 \text{ °C}$ .

*Données relatives à la chimie ionique de l'aluminium :*



*Données thermodynamiques :*

Les conventions « de zéro » sont les conventions habituelles (les valeurs numériques sont arrondies).

CORPS	ÉTAT	H <sup>0</sup> kJ. mole <sup>-1</sup>	S <sup>0</sup> J. mole <sup>-1</sup> . K <sup>-1</sup>
Al .....	Solide	0	28,3
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .....	Solide	- 1 670	51,0
O <sub>2</sub> .....	Gaz	0	205,0
Fe .....	Solide	0	27,1
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> .....	Solide	- 822	90,0
C graphite .....	Solide	0	5,7
CO .....	Gaz	- 110	197,9
CO <sub>2</sub> .....	Gaz	- 393	213,7
Al <sub>4</sub> C <sub>3</sub> .....	Solide	- 129	104,6

Enthalpie de fusion de l'aluminium : L = 10,9 kJ. mole<sup>-1</sup>.

Données générales :

- nombre d'Avogadro N = 6,02 • 10<sup>23</sup>,
- constante des gaz parfaits R = 8,32 J. mole<sup>-1</sup>. K<sup>-1</sup>,
- 2,3 RT/F = 0,06 volt à 25 °C,
- produit ionique de l'eau K<sub>e</sub> = 10<sup>-14</sup> à 25 °C.

#### A. GENERALITES SUR LE METAL (sur 10 points)

##### I. PROPRIÉTÉS PHYSIQUES. ALLIAGES.

1° L'aluminium solide cristallise dans le système cubique à faces centrées :

- a) Tracer un schéma CLAIR et SOIGNÉ de ce réseau cristallin.
- b) Calculer la compacité du réseau. Définir au préalable cette grandeur.
- c) Calculer la masse volumique de l'aluminium.
- d) Citer un métal courant cristallisant dans le même système.
- e) Citer un autre système cristallin accompagné d'un exemple choisi parmi les métaux.

2° Propriétés physiques et mécaniques :

- a) Citer deux propriétés physiques intéressantes de l'aluminium. Faire un commentaire succinct.
- b) Citer deux propriétés mécaniques intéressantes de l'aluminium. Faire un commentaire succinct.

3° Alliages de l'aluminium :

- a) Citer trois alliages courants de l'aluminium en précisant pour chacun d'eux la composition qualitative.
- b) Comparer brièvement pour chacun des alliages cités les propriétés mécaniques à celles de l'aluminium pur.

## II. GÉNÉRALITÉS SUR LES PROPRIÉTÉS CHIMIQUES.

Le candidat se limitera à développer les points suivants :

1° Structure électronique du métal.

2° Structure électronique de l'ion aluminium. Préciser la nature de l'ion observé en solution aqueuse. Justifier sommairement.

3° Existence de l'ion aluminate. Préciser la structure de cet ion en solution aqueuse.

4° Existence de liaison de covalence. Conséquence sur la dimérisation de certains composés de l'aluminium et sur les propriétés acido-basiques au sens de LEWIS de ces composés.

5° Exercices d'application :

a) Le fluorure d'aluminium est un composé qui se sublime à 1 291 °C alors que le chlorure d'aluminium a un point de fusion peu élevé (193 °C). Proposer une explication qualitative de ce phénomène.

b) Proposer une explication de l'existence de l'ion  $\text{AlH}_4^-$  que l'on observe dans le composé  $\text{Li}(\text{AlH}_4)$ .

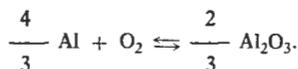
### B. ETUDE PLUS DÉTAILLÉE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS CHIMIQUES DE L'ALUMINIUM

(sur 55 points)

## I. OXYGÈNE.

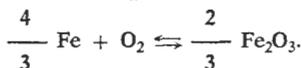
1° A l'aide des valeurs numériques rassemblées en annexe au début du sujet, tracer le diagramme d'ELLINGHAM de l'aluminium dans l'intervalle 300 K, 2 500 K.

On rappelle que le diagramme d'ELLINGHAM représente la variation, en fonction de la température, de l'enthalpie libre standard pour une réaction d'oxydation faisant intervenir une mole de molécules d'oxygène. On se réfère par conséquent à la réaction :



On néglige par ailleurs l'influence de la température sur les grandeurs thermodynamiques données en annexe.

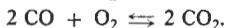
2° Tracer sur la même feuille de papier millimétré le diagramme d'ELLINGHAM du fer relatif à l'équation :



Le fer a un point de fusion de 1 536 °C, mais on pourra négliger son enthalpie de fusion.

Conséquences : En particulier, décrire une « expérience de cours » que l'on justifiera aisément en comparant ces deux diagrammes.

3° Tracer, sur la même feuille de papier millimétré que précédemment, les diagrammes d'ELLINGHAM du carbone et du monoxyde de carbone, relatifs aux deux équations suivantes :



*Conséquences.*

4° En fait, l'étude du système Al, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, C, CO est plus complexe dans le domaine de température compris entre 1 500 K et 2 500 K. En effet, on peut montrer que ce système est le siège, selon les conditions expérimentales, des deux réactions suivantes :



On admettra que dans tout le domaine de température étudié, la tension de vapeur de l'aluminium est négligeable.

a) Donner la variance du système si (1) a lieu seule. Conclusion.

b) Donner la variance du système si (1) a lieu seule. Conclusion.

c) Donner la variance du système si (1) et (2) ont lieu ensemble. En déduire que dans ces conditions, le système est le siège d'une troisième réaction non indépendante des deux premières et ne faisant intervenir que des phases condensées. On notera (3) cette réaction.

d) Le diagramme  $\text{Log } P/P_0 = f(1/T)$  [Log = logarithme népérien ; P<sub>0</sub> est une pression de référence égale à une atmosphère] a l'allure suivante dans le domaine de température étudié (fig. 1).

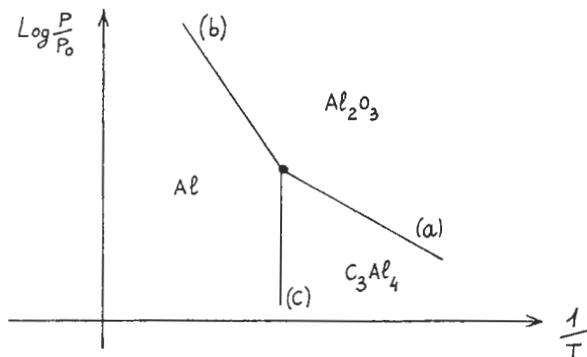


Fig. 1

Le plan  $\text{Log } P/P_0, 1/T$  est divisé en trois domaines et l'on indique dans chaque domaine quelle est l'espèce chimique prépondérante.

— Préciser la signification chimique des demi-droites (a), (b) et (c).

— Indiquer, sans effectuer le calcul numérique, la méthode de détermination des équations des demi-droites. On négligera toujours

l'influence de la température sur les grandeurs thermodynamiques données en annexe et l'influence de la pression sur les phases condensées.

e) Les équations des demi-droites sont les suivantes :

$$(a) \quad \text{Log } P/P_0 = -\frac{51\,100}{T} + 22,7$$

$$(b) \quad \text{Log } P/P_0 = -\frac{53\,700}{T} + 23,8$$

$$(c) \quad 1/T = 4,23 \cdot 10^{-4}.$$

— Donner les coordonnées du point triple.

— Conclusion pratique quant à la possibilité d'obtenir de l'aluminium métal par réduction de l'alumine  $\text{Al}_2\text{O}_3$  par le carbone ?

## II. ETUDE DU DIAGRAMME POTENTIEL. pH DE L'ALUMINIUM.

On donne le diagramme potentiel pH de l'aluminium pour une concentration en espèces dissoutes de  $10^{-2}$  mole par litre. Par ailleurs, ce diagramme est limité aux espèces suivantes : aluminium métal, ion aluminium, ion aluminate, hydroxyde d'aluminium.

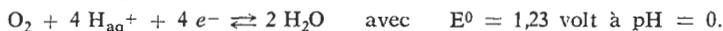
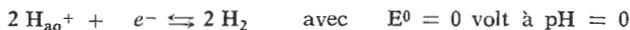
1° Retrouver à l'aide des données figurant en annexe les équations des droites (1), (2) et (3).

Le diagramme proposé étant tracé à l'échelle, le candidat pourra contrôler les solutions proposées : toute solution inexacte sera par conséquent sanctionnée. Par ailleurs, on donne à titre indicatif les équations des droites (4) et (5).

$$(4) \quad \text{pH} = 12,6$$

$$(5) \quad E_{(\text{volt})} = -1,29 - 0,08 \text{ pH}.$$

2° On rappelle les deux couples rédox principaux où l'eau intervient :



a) Etablir le diagramme potentiel pH de l'eau relatif à ces deux couples rédox. Superposer ce diagramme à celui de l'aluminium.

b) Dédire de ce diagramme l'action de l'eau sur l'aluminium en milieu acide et milieu basique.

c) Ecrire les équations des réactions chimiques observées en milieu fortement acide et en milieu fortement basique.

d) Qu'observe-t-on pour des valeurs moyennes du pH ? Pourquoi ?

e) Qu'appelle-t-on protection anodique de l'aluminium ? En proposer une explication. Intérêt ?

N.B. — Joindre à la copie le diagramme complété selon les indications de la question B.II.2° a).

## III. RÉACTIONS AVEC L'ACIDE NITRIQUE.

1° Réaction de l'aluminium avec l'acide nitrique concentré ou « fumant ». Donner une application pratique du phénomène.

2° L'acide nitrique dilué (de l'ordre de 20 %) réagit lentement à froid avec l'aluminium, plus rapidement à chaud, et conduit l'azote du degré d'oxydation + V (nitrate) au degré d'oxydation — III (ammoniac).

Ecrire l'équation chimique de la réaction.

3° L'action de l'ion nitrate en milieu alcalin (pH de l'ordre de 14) et à chaud conduit de façon quantitative à l'ammoniac.

Ecrire l'équation chimique de la réaction.

4° *Exercice d'application* : Dosage d'un nitrate.

On fait bouillir 100 ml d'une solution de nitrate de sodium en présence d'un excès de poudre d'aluminium et en milieu fortement alcalin. Le gaz qui se dégage est envoyé dans 100 ml d'une solution normale d'acide chlorhydrique additionnée de quelques gouttes de bleu de bromothymol. Lorsque le dégagement gazeux est terminé, on constate qu'il faut ajouter 18,6 ml d'une solution normale de soude pour obtenir le virage de l'indicateur.

a) Proposer une explication succincte du mode opératoire qui vient d'être décrit.

b) Donner la concentration de la solution de nitrate de sodium en mole/litre.

## IV. QUELQUES RÉACTIONS DE L'ALUMINIUM MÉTAL EN CHIMIE ORGANIQUE.

Pour les questions 1° et 2° ci-après, il est recommandé de s'appuyer sur les propriétés chimiques générales de l'aluminium.

1° Réaction avec les alcools en présence d'une solution diluée de chlorure mercurique :

a) Donner l'équation de la réaction et le nom du produit obtenu.

b) Ce produit organique peut être obtenu également à partir de chlorure d'aluminium agissant sur un composé organique. Lequel ? Ecrire l'équation de la réaction correspondante.

c) Indiquer, en les justifiant, les propriétés de ce produit, en se limitant à :

- action de l'eau ;
- polymérisation dans un solvant non polaire ;
- propriétés catalytiques.

2° Réaction avec les dérivés monohalogénés (en particulier les dérivés bromés) :

a) Donner la formule du produit obtenu.

b) Indiquer la réaction que donne ce produit avec une cétone.

3° a) Qu'appelle-t-on « catalyseur de ZIEGLER et NATTA » ? Donner la composition qualitative et citer une application précise.

b) Les catalyseurs de ZIEGLER et NATTA sont des catalyseurs employés, en particulier, dans les réactions de polymérisation : polymérisation dite « coordinative » dont le mécanisme est encore mal élucidé. Citer deux autres types de mécanisme de polymérisation des alcènes.

En s'appuyant sur un exemple PRÉCIS, indiquer pour chaque type de mécanisme les différentes étapes de la réaction.

c) Après avoir défini ce qu'est un polymère :

- isotactique,
- syndiotactique,
- atactique,

donner un exemple pour chacun d'eux.

## C. ETUDE DE QUELQUES COMPOSES DE L'ALUMINIUM

(sur 15 points)

### 1° ION ALUMINIUM, HYDROXYDE D'ALUMINIUM, ION ALUMINATE.

a) Comment passer de l'ion aluminium à l'hydroxyde d'aluminium ? On précisera la nature du réactif employé et on justifiera sommairement.

b) Comment passer de l'ion aluminium à l'ion aluminate ?

c) *Application* : On dispose d'une solution contenant des ions aluminium et des ions ferriques, proposer une méthode très simple de séparation de ces deux ions.

d) Donner deux caractères analytiques de l'ion aluminium : en particulier la formation de « bleu de THÉNARD » dont on précisera la formule et le groupe important de cristaux auquel il appartient.

D'autres cristaux ont une structure identique, donner un exemple pris dans la chimie du fer.

### 2° CHLORURE D'ALUMINIUM.

a) Le chlorure d'aluminium est un catalyseur employé en chimie organique. C'est un acide au sens de LEWIS : citer deux autres composés ayant un comportement identique et pouvant être utilisés comme catalyseur.

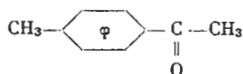
b) Donner un exemple précis (en citant les noms des produits utilisés et obtenus) de réaction d'alcoylation.

c) Donner un exemple précis (en citant les noms des produits utilisés et obtenus) de réaction d'acylation.

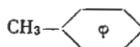
d) L'expérience montre que la réaction d'alcoylation ne nécessite que très peu de catalyseur, alors que la réaction d'acylation nécessite de grandes quantités de catalyseur (pratiquement une mole de chlorure d'aluminium pour une mole de réactif). Justifier cette dif-

férence en proposant un mécanisme pour chacune des réactions citées plus haut (alcoylation et acylation).

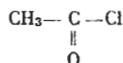
e) On se propose de préparer la « *p* méthylacétophénone » :



à partir de toluène



et de chlorure d'acétyl :



en présence de chlorure d'aluminium.

— Préciser le mécanisme de la réaction d'acylation du toluène par le chlorure d'acétyl. En particulier, pour quelle raison l'orientation a-t-elle lieu en *para* ?

— Pourquoi faut-il opérer en milieu rigoureusement anhydre ?

— Par quel autre composé pourrait-on remplacer le chlorure d'acétyl ?

— Proposer une méthode d'identification du produit obtenu.

## SOLUTION

---

### A. GENERALITES SUR LE METAL

#### I. PROPRIÉTÉS PHYSIQUES. ALLIAGES.

1° *Caractéristiques du réseau :*

a) Schéma du réseau C.F.C.

b) Compacité :  $C = \frac{\text{volume des atomes}}{\text{volume de la maille}}$

$$c = \frac{n \times \frac{4}{3} \cdot \pi r^3}{a^3}$$

si  $\left\{ \begin{array}{l} n : \text{nombre d'atomes dans la maille} \\ r : \text{rayon d'un atome} \end{array} \right.$

• détermination de  $n$  :  $n = \frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4,$

• détermination de  $r$  : dans le plan d'une face du cube, les atomes sont en contact sur la diagonale du carré :

$$4r = a \sqrt{2} \rightarrow r = 1,43 \text{ \AA}$$

donc :  $\boxed{c = 0,74.}$

c)  $\rho = \frac{n \cdot \frac{M}{\mathcal{N}}}{a^3}$  si  $\left\{ \begin{array}{l} M : \text{masse d'une mole d'atome} \\ \mathcal{N} : \text{nombre d'Avogadro} \end{array} \right.$

$$\boxed{\rho = 2,72 \text{ kg. m}^{-3}}$$

d) Système de cristallisation C.F.C. : Fe  $\gamma$  ; Cu ; Ag...

e) Autres systèmes :

- hexagonal compact : Zn, Mg ; Cd...
- C.C. : Fe  $\alpha$  ; alcalins...

2° a) Propriétés physiques intéressantes : faible masse volumique ; faible résistivité électrique ; bonne conductivité thermique...

b) Propriétés mécaniques : malléabilité, ductilité ; résistance à la traction et dureté seulement moyennes (intérêt des alliages).

3° Alliages : Duralumin - Alpac - Almélec...

Duralumin : meilleure tenue mécanique.

Alpac : utilisation en fonderie.

Almélec : utilisation en électricité : meilleure qualité mécanique mais encore bonne conductibilité électrique.

## II. GÉNÉRALITÉS SUR LES PROPRIÉTÉS CHIMIQUES.

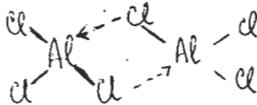
1° Structure électronique :  $1s^2$  ;  $2s^2 2p^6$  ;  $3s^2 3p^1$  (surtout pas de dessin avec les cercles concentriques!...)

2° Ion  $Al^{3+}$  :  $1s^2$  ;  $2s^2 2p^6$  ;  $3s^0 3p^0$  ; en solution aqueuse : solvation qui conduit à  $[Al(H_2O)_6]^{3+}$ .

3° En milieu basique, l'aluminium est présent sous forme d'ion aluminate  $[Al(OH)_4(H_2O)_2]^-$  qui, par simplification d'écriture, est parfois représenté par  $AlO_2^-$  qui, évidemment, ne correspond pas à la structure.

4° Trois liens de covalence : entre chlore et aluminium : l'hybridation  $sp^2$  laisse une case quantique vide d'où les propriétés d'acide de LEWIS responsables d'un certain nombre de propriétés :

— la dimérisation de  $AlCl_3$  en  $Al_2Cl_6$  :



structure covalente

— la formation de complexes :  $AlCl_4^-$  (voir chimie organique).

5° Exercice d'application :

a) • Fluorure d'aluminium : structure ionique donc liaisons fortes difficiles à rompre.

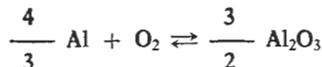
• Chlorure d'aluminium : structure covalente : cohésion assurée par des liaisons de VAN DER WAALS faibles.

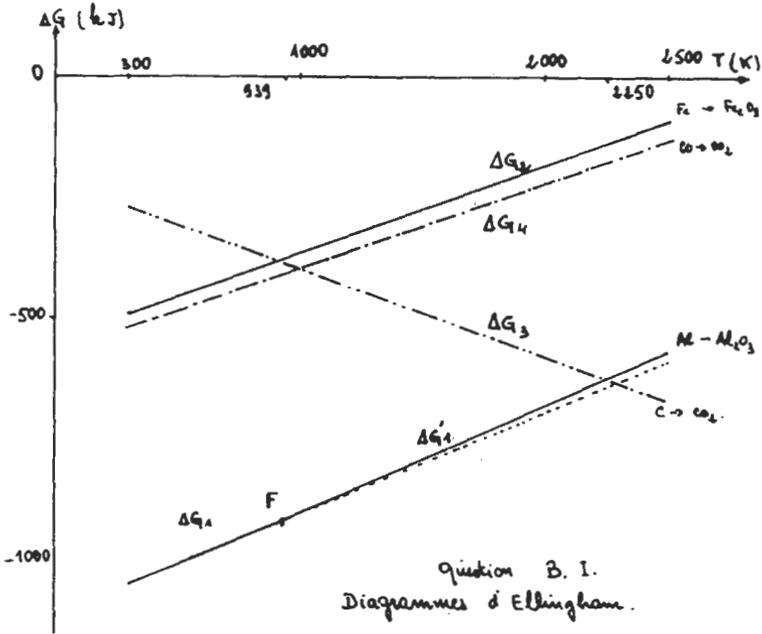
b)  $LiH \rightarrow Li^+ + H^-$  : il y a réaction entre l'acide de LEWIS  $AlCl_3$  et la base de LEWIS  $H^-$  pour former le complexe  $[AlH_4]^-$ .

## B. ETUDE PLUS DÉTAILLÉE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS CHIMIQUES DE L'ALUMINIUM

### I. ACTION DE L'OXYGÈNE.

1° Diagramme d'Ellingham :  $\Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S$ .





il faut fractionner l'intervalle de température : de 300 à 939 K (fusion de l'aluminium), puis de 939 K à 2500 K,

— avant la fusion de Al, pour Al :  $\begin{cases} H^0 = 0 \\ S^0 = 28,3 \text{ J. mole}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \end{cases}$

donc :

$$\Delta G = \frac{2}{3} (-1670) - T \left[ \frac{2}{3} \times 51 - \frac{4}{3} \times 28,3 - 205 \right] \cdot 10^{-3}$$

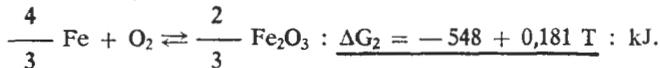
en kJ  $\underline{\Delta G_1 = -1113 + 0,209 T}$  pour  $T < 939 \text{ K}$  ;

— après la fusion de Al, pour Al :  $\begin{cases} H^0 = 10,9 \text{ kJ mole}^{-1} \\ S^0 = 28,3 + 11,61 \text{ J. mole}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \end{cases}$

ce qui conduit à :

en kJ  $\underline{\Delta G'_1 = -1128 + 0,2242 T}$  pour  $939 < T < 2500 \text{ K}$ .

2° Pour le fer :



Si on passe à la représentation graphique, on constate que l'enthalpie libre de formation de  $\text{Al}_2\text{O}_3$  est toujours très inférieure à celle de formation de  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  donc la thermodynamique prévoit la réduction de  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  par Al. L'expérience « d'aluminothermie » confirme que la cinétique de cette réaction est également très favorable.

3° Pour la famille du carbone :



Conséquences : La construction des courbes sur la même feuille de papier millimétré permet de conclure quant aux possibilités thermodynamiques suivantes :

- CO réducteur industriel, ne réduit pas  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,
- C ne réduit pas  $\text{Al}_2\text{O}_3$  tant que  $T < 2250 \text{ K}$  environ,
- C réduit  $\text{Al}_2\text{O}_3$  pour  $T > 2250 \text{ K}$  environ.

4° a) Si (1) seule : variance  $v = 1$  donc  $P = f(T)$ .

b) Si (2) seule : variance  $v = 1$  donc  $P = g(T)$ .

c) Si (1) et (2) ont bien ensemble :  $v = 0$  P et T sont imposées.

La réaction (3) est alors :  $3 \text{ C} + 4 \text{ Al} \rightleftharpoons \text{Al}_4\text{C}_3$ .

d) La courbe (a) correspond à l'équilibre (1),

La courbe (b) correspond à l'équilibre (2),

La courbe (c) correspond à l'équilibre (3).

On sait que, à l'équilibre :

$$\Delta G(T) = \Delta G^0(T) + RT \text{ Log } K_p = 0 :$$

(1) :  $K_p = \left( \frac{P}{P_0} \right)^6$  si P représente la pression de CO seul  
phase gazeuse.

donc :

$$\text{pour (a)} \quad \text{Log} \frac{P}{P_0} = - \frac{\Delta H}{6 RT} + \frac{\Delta S}{6 R},$$

de même :

$$\text{pour (b)} \quad \text{Log} \frac{P}{P_0} = - \frac{\Delta H}{3 RT} + \frac{\Delta S}{3 R},$$

pour (3), il n'y a pas de phase gazeuse, donc :  $\Delta G^0(T) = 0$ ,

$$\text{donc} \quad \frac{1}{T} = \frac{\Delta S}{\Delta H}.$$

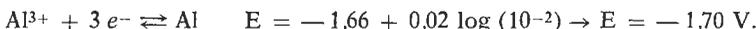
e) *Coordonnées du point triple :*

$$\begin{cases} (1/T) = 4,23 \cdot 10^{-4} \text{ donc } T = 2365 \text{ K} \\ P = 2,96 \text{ atmosphères.} \end{cases}$$

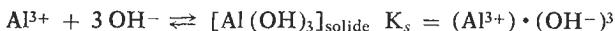
Pour obtenir Al de façon prépondérante, il faut donc opérer à :  $T > 2365 \text{ K}$  soit  $t < 2100 \text{ }^\circ\text{C}$  environ.

## II. DIAGRAMME (POTENTIEL - pH) DE L'ALUMINIUM.

1° Pour (1) :



Pour (2) :



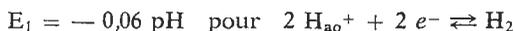
soit en remplaçant  $(\text{Al}^{3+})$  et  $K_s$  par leur valeur  $(\text{OH}^-) = 10^{-11,43}$

soit :  $\text{pH} = 2,57$

Pour (3) :

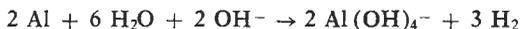
$$E = -1,55 - 0,06 \text{ pH.}$$

2° a) Pour l'eau :



en supposant la pression des gaz égale à 1 atmosphère.

b) Thermodynamiquement, il y a oxydation de l'aluminium en milieu acide ou basique car les couples faisant intervenir Al solide sont plus réducteurs que ceux de l'eau (courbes situées en dessous, pour Al, dans le diagramme).

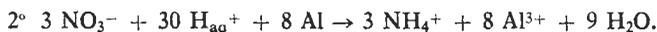


d) Pour les valeurs moyennes du pH, on n'observe pas d'attaque du métal : il y a passivation par formation d'une couche d'alumine protectrice.

e) La protection anodique consiste en la formation d'une couche suffisante d'alumine en plaçant l'aluminium comme anode d'une cuve électrolytique.

## III. RÉACTION AVEC L'ACIDE NITRIQUE.

1° Avec l'acide fumant il y a passivation ; ce qui est utilisé pour le transport de l'acide nitrique.



4<sup>o</sup> a) Le mode opératoire décrit est celui d'un dosage en retour.

b) La concentration est :  $C = 0,814$  mole/litre.

#### IV. QUELQUES RÉACTIONS DU MÉTAL EN CHIMIE ORGANIQUE.

1<sup>o</sup> a)  $\text{Al} + 3 \text{ROH} \rightarrow (\text{RO})_3 \text{Al} + 3/2 \text{H}_2$  (le produit est l'alcoolate d'aluminium ou alcoxyde d'Al.

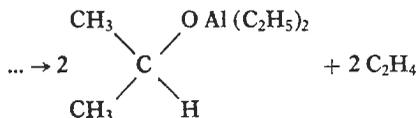
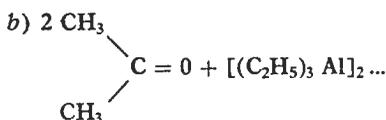
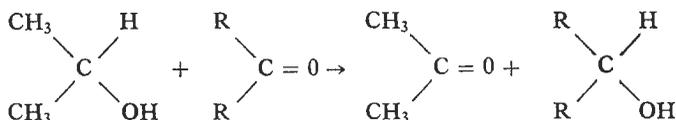
b)  $\text{AlCl}_3 + 3 \text{RONa} \rightarrow (\text{RO})_3 \text{Al} + 3 \text{NaCl}$  (alcoolate de sodium).

c) Propriétés :

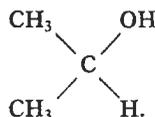
— action de l'eau : phénomène de nivellement sur la base très forte  $\text{RO}^-$  :  $(\text{RO})_3 \text{Al} + 3 \text{H}_2\text{O} \rightarrow 3 \text{ROH} + \text{Al}(\text{OH})_3$  ;

— polymérisation : réaction à rapprocher de la dimérisation de  $\text{AlCl}_3$  ;

— propriétés catalytiques : oxydation d'un alcool par une cétone pour obtenir l'alcool correspondant à cette dernière.



puis l'hydrolyse conduit à l'alcool secondaire



3<sup>o</sup> a) Catalyseur de « ZIEGLER et NATTA » : complexes insolubles obtenus par réactions de  $[(\text{C}_2\text{H}_5)_3 \text{Al}]_2$  et  $\text{TiCl}_4$  : utilisé

pour des polymérisations, en particulier pour l'obtention de polyéthylène « basse pression ».

b) Polymérisations :

- cationiques (catalyseurs :  $H^+$  ;  $AlCl_3$  ;  $BF_3...$ ),  
*exemple* : polymérisation du méthyl-propène ;
- anioniques ( $NH_2^-$ ) : ne marche pour les éthyléniques que s'ils sont substitués par des groupements fort attracteurs,  
*exemple* :  $CH_2 = CH - C \equiv N$  ;
- radicalaires :  
*exemple* : éthylène « haute pression ».

c) Un schéma simple était préférable à un long texte !

### C. ETUDE DE QUELQUES COMPOSES

1° a) Précipitation par un tampon : ammoniacal, par exemple, pour éviter le passage à l'aluminate : calculer les pH limites grâce aux deux  $K_s$ .

b) Par une base forte.

c) Action d'une base forte :  $Fe(OH)_3$  précipite. Filtration :  $Fe(OH)_3$  restera sur le filtre et l'aluminium passe dans la solution sous forme d'aluminate.

d) Précipitation d'une laque par précipitation de  $Al(OH)_3$  en présence d'alizarine, d'aluminon...

— « bleu de THÉNARD » :  $CoAl_2O_4$  ( $Co^{2+}$ ,  $2 Al^{3+}$ ,  $4 O^{2-}$ )  
groupe des spinelles (\*) comme  $Mg Al_2O_4$ ,  $Mg Fe_2O_4$ ,  
 $Fe_3O_4$ ,  $Zn Fe_2O_4$ .

2° Chlorure d'aluminium.

a)  $BF_3$  ;  $Fe Cl_3$  ;  $Zn Cl_2...$

b) Alcoylation :  $C_6H_6 + RCl \rightarrow C_6H_5R + HCl$ .

c) Acylation :  $C_6H_6 + R - \begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{C} \\ \diagdown \\ \text{Cl} \end{array} \dots$   
 $\dots \rightarrow C_6H_5 - \begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{C} - R \end{array} + HCl$ ,

exemples variés au choix avec nomenclature...

(\*) N.D.L.R. : Ces oxydes ont soit la structure spinelle (exemple  $Mg AlO_4$ ), soit la structure spinelle inverse (exemple  $Fe_3O_4$ ).

*d)* Réaction de substitution électrophile :  $\text{AlCl}_3$  favorisant la production de l'agent électrophile.

Dans le cas de l'acylation,  $\text{AlCl}_3$  peut former un complexe avec la cétone produite, ce qui bloque le catalyseur et nécessite son utilisation en quantité suffisante.

- e)*
- Orientation (voir mécanisme détaillé du *d*).  
 $\text{CH}_3$  conduit à ortho ou para mais l'encombrement stérique privilégie le composé para ;
  - milieu anhydre sans quoi hydrolyse des réactifs  
 $\text{CH}_3 - \underset{\text{O}}{\underset{\parallel}{\text{C}}} - \text{Cl}$  et  $\text{AlCl}_3$  ;
  - on peut remplacer le chlorure d'acétyle par l'anhydride acétique ;
  - identification du produit par préparation de la 2,4 dinitrophényl hydrazone, sa purification par recristallisation et la détermination de son point de fusion.

Claude ANDRÉ,  
(Lycée de Nancy).

---

Le Directeur de la Publication : Ph. FLEURY

Imprimerie Hallépée - 169, rue Lecourbe, Paris

Dépôt légal : 2<sup>me</sup> trimestre 1980

Numéro Commission paritaire : 29937