

Bulletin de l'Union des Physiciens

Association de professeurs de Physique et de Chimie

AVERTISSEMENT AUX LECTEURS

Nous avons décidé, pour l'impression de ce bulletin, de respecter les normes de la typographie nouvelle et de noter les grandeurs vectorielles en caractères gras sans les surmonter de flèches. Ces normes ont surtout comme intérêt de simplifier la tâche de composition.

Il n'est évidemment pas souhaitable d'essayer de les introduire dans les textes destinés à nos élèves.

Ph. FLEURY.

Concours Général 1980

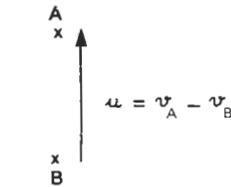
COMPOSITION DE SCIENCES PHYSIQUES

(Classes terminales C, D et E)

(Durée : 6 heures)

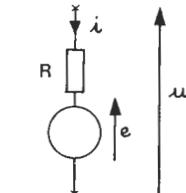
NOTATIONS ET CONVENTIONS DE SIGNE

Dans tout le problème, les lettres minuscules désigneront des grandeurs algébriques, tandis que les majuscules correspondantes représenteront les valeurs absolues de ces mêmes grandeurs. Une tension u (différence de potentiel), ou une force électromotrice, sera associée, sur le schéma correspondant, à une flèche, comme le représentent les figures 1 a et 1 b. De même, sur la figure 1 c, la lettre i représente l'intensité du courant ; celle-ci est positive si le sens conventionnel du courant est celui de la flèche placée sur le conducteur.



$$u = U \quad \text{si} \quad u > 0$$

Fig. 1 a



$$u = e + R i$$

Fig. 1 b

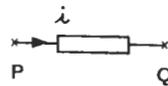


Fig. 1 c

Le sens de rotation du moteur étudié dans le problème sera invariable tout au long de celui-ci. Ce sens est le sens positif choisi pour mesurer algébriquement :

1° La vitesse angulaire du rotor ; on aura donc toujours $\omega = \Omega$.

2 Les moments, par rapport à l'axe de rotation du moteur, des différentes catégories d'actions mécaniques s'exerçant sur le rotor. Ces moments seront, selon la terminologie habituelle, appelés « couples ».

AVERTISSEMENT

Il est demandé aux candidats de mettre l'accent sur les questions traitant des échanges d'énergie.

A. ETUDE MECANIQUE PRELIMINAIRE

Le moteur étudié actionne une voiture. Lorsqu'il tourne à sa vitesse nominale $N = 1500$ tr/mn, la voiture se déplace à la vitesse $V = 20$ km/h. On posera :

$$V_{(m. s^{-1})} = \lambda \Omega_{(rad. s^{-1})}$$

Calculer λ .

Le mouvement de rotation du moteur est transmis aux roues motrices par un ensemble de pièces mécaniques dont on n'étudiera qu'un modèle très simplifié, limité à un réducteur de rapport μ .

1° Le moment d'inertie du rotor du moteur et de l'arbre correspondant, par rapport à leur axe de rotation commun, est $J_1 = 0,15$ kg. m². Ce rotor est soumis, de la part du stator, à un couple électromagnétique noté c_p . Il subit, en outre, un couple de pertes internes au moteur (pertes mécaniques et pertes fer), noté c_p . Ce couple c_p , de signe contraire à ω est donc toujours négatif : $c_p = -C_p$. Le réducteur, de son côté, exerce sur le rotor un couple c_r .

Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique, appliquée au rotor.

2° La masse de la voiture est $M = 1,5$ t. On considère que celle-ci est animée d'un mouvement de translation rectiligne de vecteur vitesse \mathbf{V} . On pose $\mathbf{V} = v \mathbf{k}$, \mathbf{k} étant un vecteur unitaire de même sens que \mathbf{V} . On admettra que les différentes actions mécaniques qui déterminent le mouvement de la voiture sont caractérisées par les éléments mathématiques suivants (fig. 2) :

- \mathbf{P} correspond au poids de la voiture ; g étant l'accélération de la pesanteur, on prendra $|g| = 10$ m. s⁻².
- $\mathbf{F}_r = -F_r \mathbf{k}$ décrit les effets de l'ensemble des forces dissipatives extérieures au moteur, qui s'exercent sur le véhicule ou au sein de celui-ci. De ce fait, on suppose que les organes de transmission, de transformation et d'utilisation du mouvement sont parfaits et ne consomment pas de puissance.
- \mathbf{R} traduit la réaction du sol au poids de la voiture et à l'action des roues motrices solidaires du moteur. Cette réaction, bien

que répartie sur les quatre roues, est, pour simplifier, supposée appliquée au seul point I de contact avec le sol de la roue motrice représentée sur la figure 2. On notera $f_t \mathbf{k}$ la composante de \mathbf{R} sur \mathbf{k} .

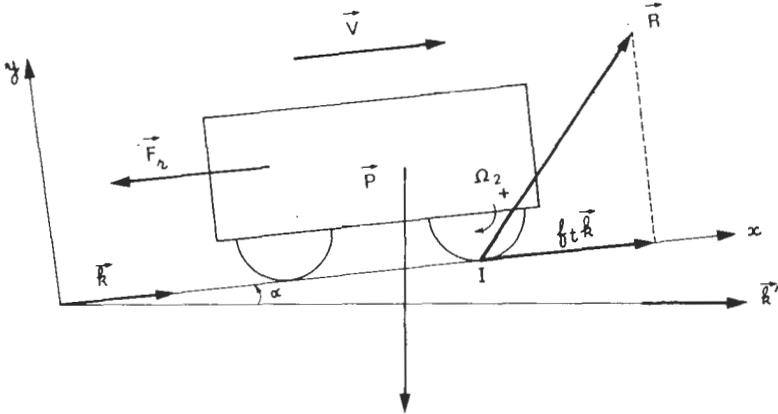


Fig. 2

Ecrire, en considérant comme galiléen le référentiel terrestre, l'équation vectorielle fondamentale de la dynamique, déterminant l'évolution du vecteur \mathbf{V} . On caractérise la pente du sol, par rapport à l'horizontale, par l'angle des vecteurs $(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \alpha$; déduire de l'équation précédente l'équation différentielle scalaire à laquelle satisfait la vitesse v .

3° Le réducteur, entraîné par l'arbre rotorique de pulsation angulaire Ω , commande à son tour, sans perte de puissance, les roues motrices, de pulsation angulaire Ω_2 . On posera $\Omega_2 = \mu \Omega$. Le rayon effectif de ces roues vaut $l = 0,22$ m, et le moment d'inertie total de l'ensemble essieu-roues motrices par rapport à leur axe commun de rotation vaut $J_2 = 0,32$ kg. m².

Ecrire la relation entre λ , μ et l . Donner la valeur numérique de μ . Exprimer, en fonction de c_t et μ , le couple mécanique c_m exercé par le réducteur sur l'essieu moteur. Ecrire l'équation fondamentale de la dynamique appliquée à cet essieu.

4° Déduire des résultats des questions précédentes l'équation mécanique du rotor en charge, relation entre $\frac{d\Omega}{dt}$, c_e , C_p , λ , F_r , M , g , α et J .

On posera : $J = J_1 + \mu^2 J_2 + \lambda^2 M$.

Calculer J .

B. FONCTIONNEMENT D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU ALIMENTE SOUS TENSION CONSTANTE

I. Etude physique du système électromécanique constitué par le moteur

La figure 3 représente le schéma équivalent du moteur, du point de vue électrocinétique.

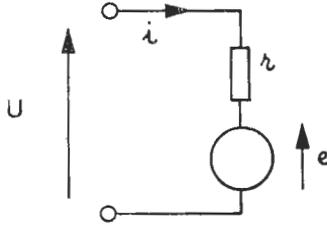


Fig. 3

r est la résistance du circuit induit, composé de spires qui se meuvent dans un champ magnétique fixe, créé par des pôles inducteurs, eux-mêmes alimentés par un circuit d'excitation. La force électromotrice E de la machine est reliée au flux magnétique Φ issu d'un pôle inducteur et à la vitesse angulaire du rotor par la relation :

$$E = K_1 \Phi \Omega.$$

Par ailleurs :

$$C_e = K_2 \Phi I.$$

1° Montrer rapidement que ces deux expressions sont cohérentes avec les lois simples de l'électromagnétisme que vous connaissez.

2° Ecrire l'équation électrique du moteur. Par des considérations énergétiques élémentaires, ayant trait à un fonctionnement particulier du moteur (fonctionnement normal, par exemple, dans lequel le moteur fournit de la puissance mécanique à la machine entraînée), montrer que l'ensemble des conventions de signe déjà choisies, (notamment celles de la fig. 3) permettent d'écrire :

$$e = E = K_1 \Phi \Omega \quad c_e = K_2 \Phi i.$$

3° Montrer que $K_1 = K_2$. Le flux par pôle étant, dans tout le problème, supposé invariable, on posera :

$$K_1 \Phi = K_2 \Phi = K.$$

4° Exprimer le couple électromagnétique c_e en fonction de U , Ω , K et r .

5° La machine électrique fonctionnant normalement en moteur (on suppose que la voiture gravit une rampe, pendant une phase d'accélération), établir, en rapprochant les équations électrique et mécanique de la machine, un bilan complet de l'énergie élémentaire u i dt absorbée par celle-ci pendant la durée dt .

J. 1157-B

C=0.6

Ω (rad/A)

150

100

50

Figure A

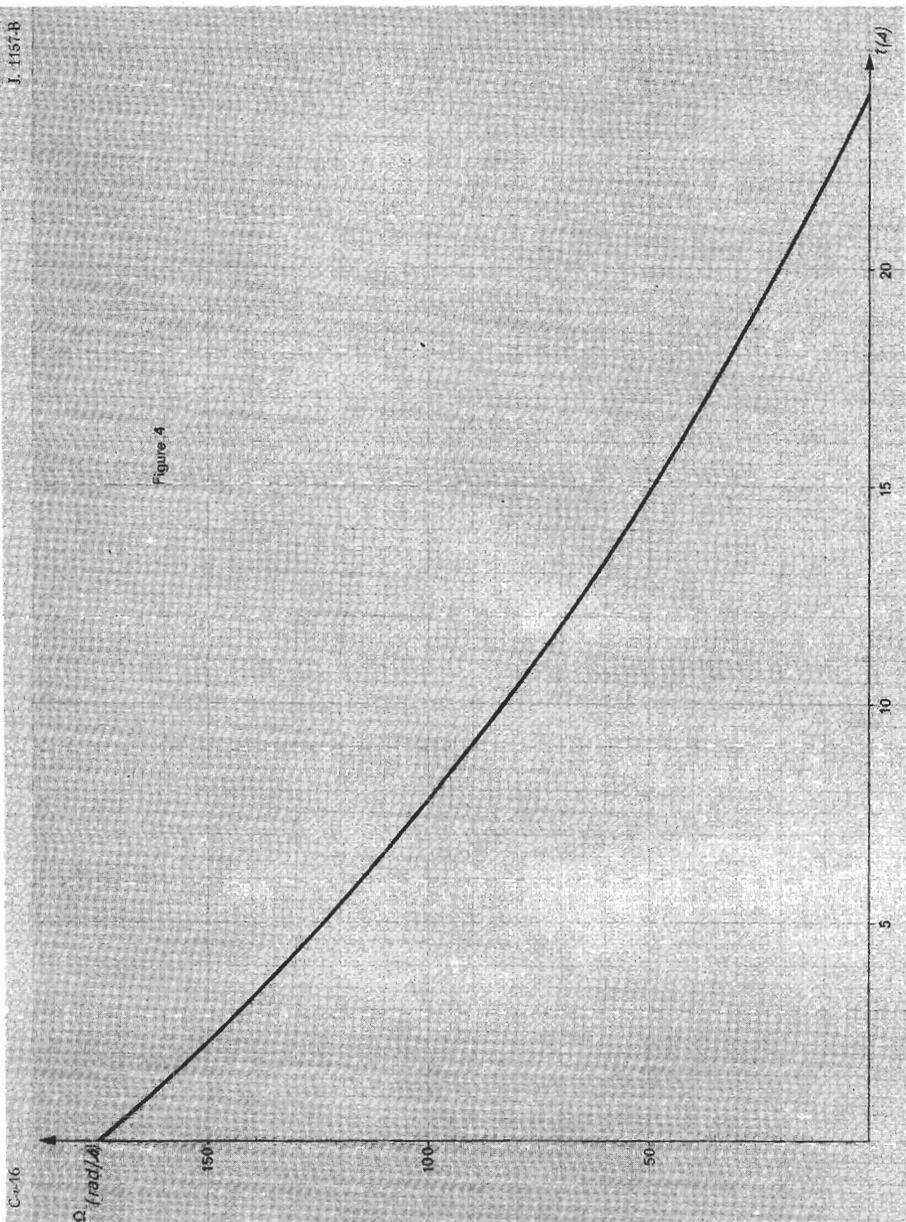
t (A)

20

15

10

5



II. Essais de laboratoire : applications numériques

1° Alimenté sous la tension U , à vide, c'est-à-dire désaccouplé, le moteur tourne à 1665 tr/mn. En coupant alors son alimentation et en enregistrant sa courbe de ralentissement, on obtient le document représenté sur la figure 4.

Par ailleurs, le moteur étant toujours à vide, on obtient, en régime permanent, la vitesse de 1500 tr/mn en abaissant la tension d'alimentation U à la valeur $U_1 = 65,3$ V. Le moteur absorbe alors 3,6 A. Quelle est l'équation différentielle à laquelle satisfait Ω pendant la phase de ralentissement ? La résistance r vaut $r = 7,8 \cdot 10^{-2}$ ohm. Calculer K . Calculer également C_p pour $\Omega = 157$ rad. s⁻¹. Montrer que les résultats précédents permettent de donner pour J_1 une valeur proche de 0,15 kg. m². Montrer qu'ils permettraient également de déterminer la

fonction $\Omega \xrightarrow{C_p} C_p(\Omega)$.

Pour la suite du problème, on prendra $C_p = A_1 + B_1 \Omega$ avec $A_1 = 0,7$ N. m et $B_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ N. m. s.

2° Le point de fonctionnement nominal du moteur (point de fonctionnement standard, pour lequel il a été dimensionné) est : $U_n = 72$ V ; $N_n = 1500$ tr/mn ; $I_n = 90$ A. Calculer, pour ce point, le rendement du moteur, c'est-à-dire le quotient de la puissance mécanique fournie à la charge par la puissance électrique totale consommée par la machine, sachant que le circuit d'excitation, alimentant les pôles inducteurs, absorbe un courant d'intensité $I_{ex} = 2$ A sous 72 V.

3° Lors du démarrage du moteur, on utilise un rhéostat composé de plusieurs résistances en série, séparées par des plots (fig. 5).

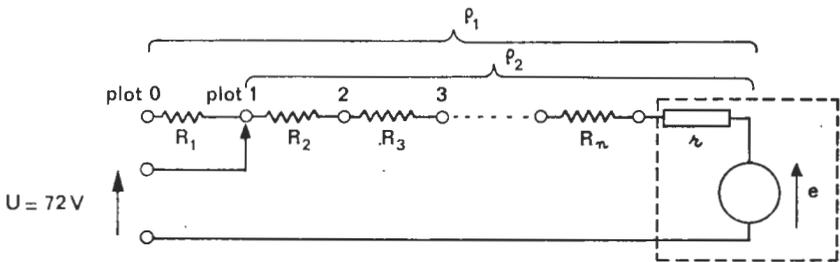


Fig. 5

On désigne par ρ_1 la somme $R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n + r$; par ρ_2 la somme $R_2 + R_3 + \dots + R_n + r$; etc. Calculer la résistance ρ_1 qui permet de limiter l'intensité initiale à $1,5 I_n$.

Lorsque la vitesse angulaire Ω du moteur atteint la valeur Ω_1 correspondant à l'intensité I_n , la résistance R_1 est mise hors circuit, de manière quasi instantanée, par passage d'un contacteur du plot zéro au plot n° 1. La résistance ρ_2 est telle que l'intensité i reprend alors la valeur $1,5 I_n$ et ainsi de suite.

Montrer que pour $i = 1,5 I_n$, la vitesse angulaire Ω ne dépend que de la résistance totale ϱ . Soit $D(1,5 I_n)$ la courbe représentant Ω en fonction de ϱ pour $i = 1,5 I_n$. Tracer $D(1,5 I_n)$ ainsi que son homologue $D(I_n)$. Tracer dans le même plan (Ω, ϱ) le graphe représentatif de l'état du moteur au cours de son démarrage.

Montrer que cette construction permet de déterminer graphiquement, et très simplement les valeurs $R_1, R_2 \dots R_n$ des différentes résistances constituant le rhéostat de démarrage, ainsi que les vitesses angulaires intermédiaires obtenues lors des changements de plots.

Donner les valeurs $R_1, R_2, \dots R_n$.

III. Fonctionnement du moteur actionnant la voiture sur sol horizontal

La force F_r a pour expression :

$$F_r = (A_2 + B_2 \Omega) / \lambda$$

$$A_2 = 2,8 \text{ N. m.} \quad B_2 = 45 \cdot 10^{-3} \text{ N. m. s}$$

On posera : $A = A_1 + A_2$ $B = B_1 + B_2$.

1° Calculer, lorsque le régime permanent est atteint, l'intensité absorbée par le moteur et la vitesse de rotation de celui-ci ($U = 72 \text{ V}$). Calculer également le rendement du moteur pour ce fonctionnement à puissance réduite. (On rappelle que l'excitation du moteur est constante dans tout le problème.)

2° Pour les démarrages de la voiture, on utilise le rhéostat calculé à la question B.II.3°. La résistance totale du circuit électrique, lorsque le contacteur du rhéostat de démarrage est sur le plot zéro, a la valeur ϱ_1 définie précédemment.

Déterminer pour cette position du contacteur, les expressions littérales et les valeurs numériques des coefficients α et β de l'équation

différentielle $\frac{d\Omega}{dt} = \alpha - \beta \Omega$ qui régit les variations de Ω .

3° Déterminer la fonction $t \rightarrow \Omega(t)$ correspondante, en admettant que $\Omega(t)$ est de la forme :

$$\Omega(t) = \Omega_A + \Omega_B e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Exprimer τ en fonction de J, K, ϱ_1 et B . Donner l'expression de $i(t)$. Quelle est la durée de stationnement sur le plot zéro ?

Quelle est l'accélération linéaire initiale de la voiture ?

IV. Fonctionnement de la machine en génératrice

Après un fonctionnement en palier ayant permis l'acquisition du régime permanent, la voiture aborde une descente dont la pente ($|\sin \alpha|$) est de $4 \cdot 10^{-2}$.

1° Trouver la nouvelle valeur de la vitesse angulaire Ω lorsque le nouveau régime permanent est établi. Quelle est la valeur correspondante de l'intensité i ? Dans quel sens le transfert d'énergie s'effectue-t-il?

2° Esquisser les représentations graphiques des fonctions $t \rightarrow i(t)$ et $t \rightarrow \Omega(t)$ lors du changement de régime, en graduant sommairement l'échelle des temps.

3° La machine fonctionnant dans les conditions précédentes — vitesse limite atteinte —, on désire la freiner électriquement. Pour cela, on coupe son alimentation à partir de la batterie d'accumulateurs et on la fait débiter dans une résistance R' . Quelle est la valeur de R' qui permet de ramener la vitesse de la voiture à 10 km/h? Quelle est la puissance électrique que doit alors dissiper R' ?

C. FONCTIONNEMENT D'UNE MACHINE A COURANT CONTINU ASSOCIEE A UNE SOURCE DE TENSION CONSTANTE (BATTERIE D'ACCUMULATEURS) PAR L'INTERMEDIAIRE D'UN HACHEUR

Aucune connaissance en électronique n'est nécessaire pour traiter cette partie.

I. Hacheur série et moteur

On considère le dispositif schématisé ci-après (fig. 6) comportant un interrupteur unidirectionnel T_1 , une diode D_1 , une bobine d'inductance L et un dipôle de force électromotrice e .

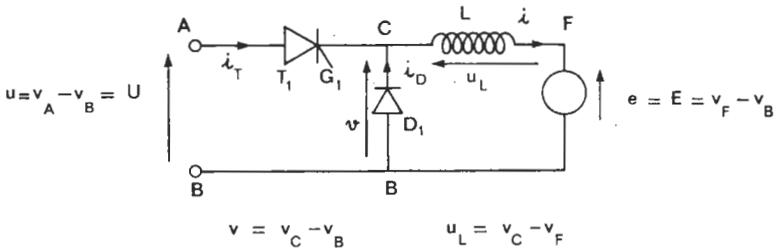


Fig. 6

T_1 est commandé par des signaux électroniques appliqués à une électrode de commande G_1 . Fermé, cet interrupteur (thyristor ou transistor) ne peut être parcouru que par un courant d'intensité i_T positive. La tension à ses bornes peut alors être négligée. La diode D_1 est, elle aussi, supposée parfaite. Elle est bloquée ($i_D = 0$) pour $v > 0$. Dès que la tension v devient négative, un courant d'intensité i_D peut y circuler. Cependant, lorsque D_1 conduit, la tension v peut être considérée comme égale à zéro. On néglige la résistance de la bobine d'inductance L ainsi que celle du moteur de f.é.m. On supposera $E < U$.

Les signaux appliqués sur G_1 sont périodiques et de période T . La figure 7 indique, en zones hachurées, les intervalles de temps pen-

dant lesquels T_1 est susceptible de conduire. Ces intervalles constituent une fraction xT de chaque période, avec $0 < x < 1$.

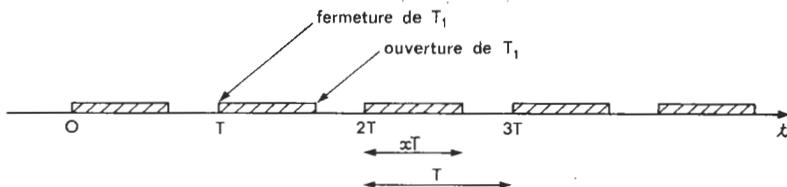


Fig. 7

1° Ecrire l'équation différentielle à laquelle satisfait $i(t)$ lorsque T_1 est fermé.

2° On ouvre T_1 après une période de conduction de durée xT , à un instant où i est positive. Quel est le phénomène qui se produit? Montrer qu'il entraîne la conduction de D_1 . Quelle est l'équation différentielle à laquelle satisfait alors $i(t)$?

3° A la date $t_n = nT$ marquant le début d'une période de conduction de T_1 , on a $i = I_n$. Calculer la valeur I'_n de i à la date $t'_n = nT + xT$, puis la valeur I_{n+1} de i à la date $t_{n+1} = (n+1)T$, en supposant que i ne s'annule pas (conduction continue).

4° Quelle est la relation qui lie U et E lorsque, en régime permanent de conduction continue, i est une fonction périodique du temps, de période T ?

5° Calculer, dans le cas de la conduction continue, l'ondulation ΔI de l'intensité i ($\Delta I = i_{\max} - i_{\min}$) en régime permanent. On exprimera ΔI en fonction de U , x , L et T . Pour quelle valeur de x , ΔI est-elle maximale?

Dans toute la suite du problème, on désigne par $\langle v \rangle$ la valeur moyenne, sur une durée T , d'une grandeur $v(t)$ dépendant du temps :

$$\langle v \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_n = nT}^{t_{n+1} = (n+1)T} v(t) dt.$$

Quelle est la condition qui doit être vérifiée par $\langle i \rangle$, U , x , L et T pour que la conduction soit continue en régime permanent?

6° Représenter graphiquement $v(t)$, $i(t)$, $i_D(t)$ pour $\langle i \rangle = 20$ A, $U = 96$ V, $x = \frac{1}{2}$, $T = 0,5$ m.s et $L = 5 \cdot 10^{-3}$ H. On supposera atteint le régime permanent.

Préciser quels sont les échanges énergétiques entre les deux sources et la bobine pendant les deux fractions de chaque période. Calculer $\langle i_T \rangle$ en fonction de $\langle i \rangle$ et de x .

7° Calculer $\langle u_L \rangle$ en régime permanent périodique. Montrer que dans ce cas, $\langle v \rangle = \langle e \rangle = E$. Retrouver rapidement le résultat de la question 4° précédente.

8° Dans le cas où la conduction est discontinue, l'intensité s'anule périodiquement aux dates $t''_n = nT + \vartheta T$ avec $x < \vartheta < 1$. Représenter graphiquement, dans ce cas, $i(t)$ et $v(t)$ en régime permanent périodique. Exprimer $\langle i \rangle$ en fonction de ϑ , U , E , x , L et T . Montrer que ce fonctionnement est caractérisé par la relation $Ux = E\vartheta$. En déduire l'expression de $\langle i \rangle$ en fonction de U , E , x , L et T .

9° On cherche à représenter dans le plan $\langle i \rangle$, E (fig. 8) les caractéristiques de sortie du hacheur précédent, alimenté par la source U , paramétrées par x .

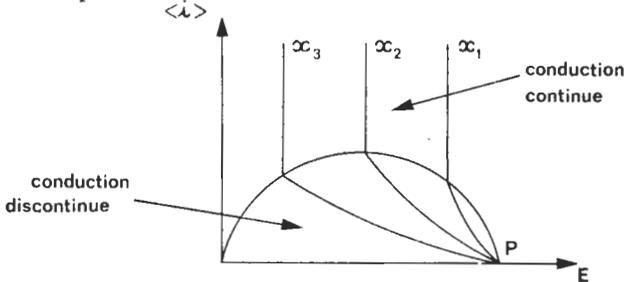


Fig. 8

Montrer qu'on obtient un réseau de courbes tel que celui qui est dessiné sur la fig. 8. Quelle est, dans la zone de conduction discontinue, la nature des courbes caractérisées par $x = \text{cste}$? Quelle est l'abscisse du point P commun à toutes ces courbes? Quelle est l'équation de la courbe qui sépare les zones de conduction continue et discontinue? Quelle est la valeur de $\langle i \rangle$ assurant la conduction quelle que soit la valeur de x choisie?

Application numérique :

$$U = 96 \text{ V}; \quad L = 5 \cdot 10^{-3} \text{ H}; \quad T = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

10° Le dispositif étudié ci-dessus est un hacheur. Il met en relation deux sources de courant continu, de caractéristiques $\{U, \langle i_T \rangle\}$ et $\{E, \langle i \rangle\}$. Dans quel sens le transfert d'énergie entre les deux sources s'effectue-t-il? Quelle est la condition portant sur E et U pour qu'il y ait transfert d'énergie? Dans le cas où la « source » $\{E, \langle i \rangle\}$ est une machine à courant continu, montrer qu'elle ne peut fonctionner qu'en moteur.

Le type de machine étudié au § B est tel que $E = K \Omega$.

Montrer qu'un hacheur série du type précédent ne permet de fixer la vitesse d'une telle machine à l'aide du paramètre x que dans certaines limites que l'on précisera.

II. Hacheur parallèle et génératrice

Le hacheur de la figure 9 met en relation deux sources :

$$\{U, \langle j_D \rangle\} \quad \text{et} \quad \{E, \langle j \rangle\}$$

La diode D_2 est considérée comme parfaite.

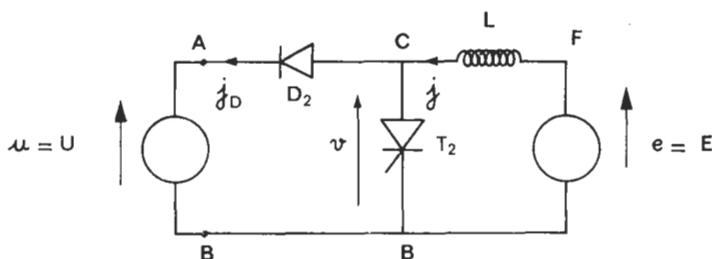


Fig. 9

L'interrupteur unidirectionnel T_2 est commandé périodiquement (fig. 10). Il est conducteur dans les intervalles $[(n-x')T, nT]$ où $0 < x' < 1$.

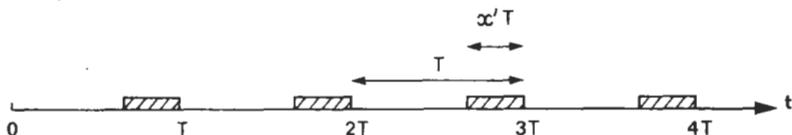


Fig. 10

1° Ecrire les équations différentielles vérifiées par $j(t)$ pendant chacune des phases d'une période T . (On supposera que j ne s'annule pas).

2° On pose $J_n = j(nT)$, exprimer $J'_n = j[(n+1)T - x'T]$, et $J_{n+1} = j[(n+1)T]$ en fonction de J_n , U , E , L , T et x' , en supposant la conduction continue.

Quelle est, dans ce cas, la relation entre U , E et x' en régime périodique permanent? Caractériser les échanges énergétiques entre les deux sources et la bobine pendant chacune des deux phases d'une période T .

3° Lorsque l'intensité moyenne $\langle j \rangle$ diminue, la conduction devient discontinue; en régime périodique permanent, j s'annule aux dates $t''_n = nT - \vartheta'T$ avec $x' < \vartheta' < 1$. Représenter dans ce cas l'allure de $j(t)$ et $v(t)$, tension aux bornes de T_2 . Exprimer $\langle j \rangle$ en fonction de E , x' , T , L et ϑ' . Etablir la relation entre U , ϑ' , x' et E , et en déduire l'expression de $\langle j \rangle$ en fonction de E , x' , T , L et U .

4° On cherche à représenter dans le plan $\langle j \rangle$, E les caractéristiques d'entrée du hacheur précédent débitant dans la source de tension U . Montrer que, pour x' fixé, les courbes obtenues sont des portions de droites raccordées à des arcs d'hyperboles. Donner l'équation et préciser la nature de la courbe séparant dans le plan $\langle j \rangle$, E les zones de conduction continue et discontinue.

5° Le hacheur précédent met en relation deux sources. Dans quel sens s'effectue le transfert d'énergie?

Lorsque la source $\{E, \langle j \rangle\}$ est une machine à courant continu dont la f.é.m. est liée à la vitesse angulaire par la relation $E = K\Omega$, alors que la source $\{U, \langle j_D \rangle\}$ est une batterie d'accumulateurs, montrer que le réglage du paramètre x' permet de fixer Ω , lorsque certaines conditions, que l'on précisera qualitativement, sont réunies.

III. Hacheur complet et voiture électrique

La figure 11 représente un hacheur complet, mettant en relation une batterie d'accumulateurs ($U = 96$ V) et une machine à courant continu de f.é.m. E . Les éléments T_1 et T_2 sont commandés de manière complémentaire, c'est-à-dire que T_1 peut conduire pendant la première fraction xT de chaque période, alors que T_2 est bloqué; réciproquement, pendant la deuxième fraction $x'T$, (avec $x + x' = 1$), T_1 est bloqué et T_2 fermé.

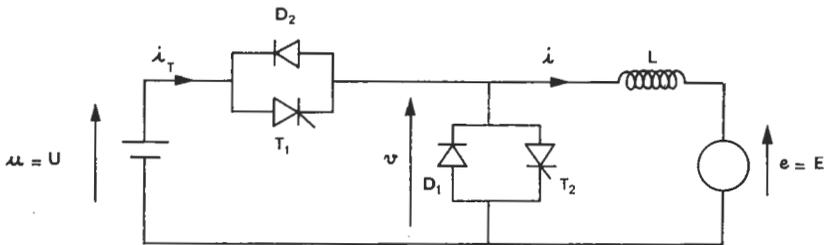


Fig. 11

1° Montrer que pour i constamment positif ou constamment négatif, le fonctionnement du hacheur complet reproduit exactement les fonctionnements en conduction continue, respectivement, des hacheurs série et parallèle.

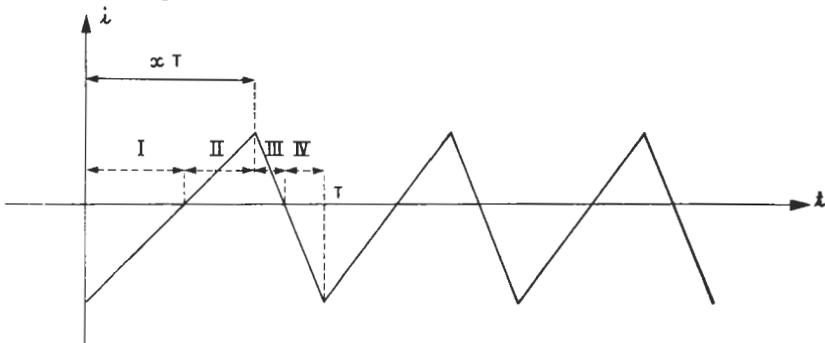


Fig. 12

2° Pour un fonctionnement tel que $\Delta I > | \langle i \rangle |$, (qui, pour des hacheurs du type série ou parallèle, correspond à une conduction discontinue), le hacheur complet permet la présence de formes d'ondes de courant du type représenté sur la figure 12.

Quels sont, parmi les éléments D_1 , D_2 , T_1 et T_2 , ceux qui conduisent pendant chacune des phases I, II, III et IV ?

3° Tracer la forme de l'onde $v(t)$ correspondant à la figure 12. Quelle est, en régime permanent périodique, la relation simple existant entre les grandeurs E , U et x , indépendamment des valeurs comparées de $\langle i \rangle$ et de ΔI ? Tracer sur un même graphique les caractéristiques $\langle i \rangle = f_x(E)$ du hacheur complet pour deux ou trois valeurs de x , et les caractéristiques qu'on obtiendrait en commandant, selon le cas, soit l'interrupteur unidirectionnel T_1 , soit T_2 . (On utilisera pour cela les résultats des questions C.I.9° et C.II.4°). Quelle est la relation entre $\langle i_T \rangle$, $\langle i \rangle$ et x pour le hacheur complet ? A quel appareil simple classique, utilisé en courant alternatif, le hacheur complet précédent vous fait-il penser ?

4° Le hacheur précédent est placé sur la voiture électrique étudiée dans la partie B (entre la batterie d'accumulateurs et la machine à courant continu). Le moteur à courant continu actionnant la voiture est tel que $E = K\Omega$ et $c_e = K \langle i \rangle$. On prendra $K = 0,414 \text{ V.s et}$, pour simplifier, on négligera la résistance interne r du moteur. On a, en outre, $U = 96 \text{ V}$; $L = 5 \text{ mH}$; $T = 0,5 \text{ ms}$. Avec les notations de la partie A, on a $C_p = 0,7 + 5 \cdot 10^{-3} \Omega$ avec C_p en N.m et Ω en rad.s^{-1} . Sur sol horizontal, lorsque la vitesse de la voiture est constante, on a en outre, avec les mêmes unités, $c_t = -(2,8 + 4,5 \cdot 10^{-2} \Omega)$.

On désire que la voiture se déplace à la vitesse de 20 km/h.

Calculer la valeur de x et le taux d'ondulation $\Delta I / \langle i \rangle$ correspondant à ce régime.

5° La voiture est en descente. Toutes les autres valeurs numériques étant conservées, la nouvelle expression de c_t est :

$c_t = 18,4 - 4,5 \cdot 10^{-2} \Omega$ (avec les mêmes unités que précédemment).
La valeur de x est 0,68.

Quelle est la vitesse de la voiture ? Quelle est la valeur correspondante de $\langle i \rangle$? Quelle est la puissance récupérée par la batterie d'accumulateurs ? Comment peut-on ralentir la voiture ?

Voyez-vous des avantages à l'utilisation d'un tel hacheur ?

SOLUTION

A. ETUDE MECANIQUE PRELIMINAIRE

$$\lambda = 3,54 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

$$1^\circ \quad J_1 \frac{d\Omega}{dt} = c_e - C_p + c_t.$$

$$2^\circ \quad M \frac{dv}{dt} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_r + \mathbf{R}.$$

En considérant que g est une grandeur positive, on déduit de cette équation vectorielle l'équation différentielle suivante :

$$M \frac{dv}{dt} = -M g \sin \alpha - F_r + f_t.$$

$$3^\circ \quad V = \Omega_2 l = \mu \Omega l, \quad \text{donc} \quad \lambda = \mu l; \quad \mu = 0,161.$$

Le réducteur ne consomme pas de puissance. Puisqu'il exerce le couple c_t sur le rotor, celui-ci lui applique le couple $-c_t$ et lui transmet donc la puissance $-c_t \Omega$. A son tour, le réducteur fournit cette puissance à l'essieu moteur, soit $c_m \Omega_2$.

On a donc : $c_m = -c_t/\mu.$

On a par ailleurs :

$$J_2 \frac{d\Omega_2}{dt} = c_m - f_t \cdot l, \quad \text{soit :} \quad c_m = J_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + f_t \cdot l.$$

$$4^\circ \quad J_1 \frac{d\Omega}{dt} = c_e - C_p - \mu c_m = c_e - C_p - \mu J_2 \frac{d\Omega_2}{dt} - \mu l f_t.$$

$$(J_1 + \mu^2 J_2) \frac{d\Omega}{dt} = c_e - C_p - \lambda f_t = \dots$$

$$\dots c_e - C_p - \lambda M \frac{dv}{dt} - \lambda F_r - \lambda M g \sin \alpha.$$

Compte tenu de ce que $v = \lambda \Omega$, on trouve :

$$J = \frac{d\Omega}{dt} = c_e - C_p - \lambda F_r - \lambda M g \sin \alpha.$$

$$J = 2,03 \text{ kg. m}^2.$$

B. FONCTIONNEMENT D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU ALIMENTÉ SOUS TENSION CONSTANTE

I. Etude physique du système électromécanique constitué par le moteur

1° Les forces électromotrices induites dans les spires sont de la forme $e = \pm \frac{d\varphi}{dt}$. Les flux φ sont proportionnels au flux par pôle Φ ; leur taux de variation est en outre proportionnel à la vitesse de rotation Ω du rotor. La somme de ces f.é.m. est donc donnée par $K_1 \Phi \Omega$.

L'expression générale des forces de Laplace qui s'exercent sur les conducteurs est $F = B I l$; les moments de ces forces sont donc de la forme $B.l.r.I$, et dans chacun de ces termes, le champ magnétique B est proportionnel à Φ . Le couple total est donc donné par $K_2 \Phi.I$.

$$2^\circ \quad U = e + ri.$$

Avec les conventions de la figure 3, lorsque la machine absorbe de la puissance électrique, le produit Ui doit être positif, donc $i = I$.

La puissance électrique susceptible d'être transformée en puissance mécanique est ei ; si la machine fonctionne effectivement en moteur $ei > 0$ avec $i > 0$ entraîne $e > 0$, donc : $e = E = K \Phi \Omega$.

Le couple électromagnétique c_e est alors positif; c_e est donc du même signe que i :

$$c_e = K_2 \Phi i.$$

3° La conservation de la puissance électrique non dépensée en effet Joule s'écrit : $E I = C_e \Omega$. Il en résulte l'égalité $K_1 = K_2$.

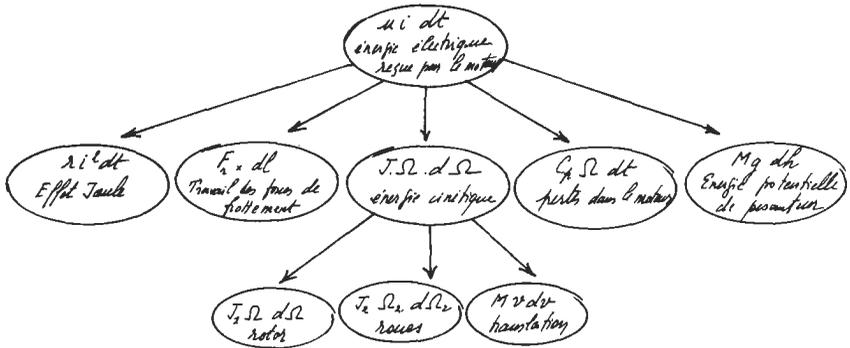
$$4^\circ \quad c_e = K i = K \left(\frac{U - E}{r} \right) = \frac{K U}{r} - \frac{K^2 \Omega}{r}.$$

$$5^\circ \quad ui dt = ei dt + ri^2 dt = K \Omega i dt + ri^2 dt.$$

Soit encore : $ui dt = ri^2 dt + c_e \Omega dt.$

En remplaçant, dans cette expression, la variable c_e par son développement tiré de l'équation mécanique de la partie A, on obtient :

$$ui dt = ri^2 dt + J \Omega d\Omega + C_p \Omega dt + \dots \\ \dots \lambda F_r \Omega dt + \lambda \Omega dt M g \sin g \sin \alpha ;$$



II. Essais de laboratoire : applications numériques

1° Le moteur est désaccouplé, mais son inducteur est toujours excité, aussi le couple de pertes internes au moteur est-il le seul qui freine le moteur pendant la phase de ralentissement :

$$J_1 \frac{d\Omega}{dt} = -C_p$$

Quand $\Omega = 157 \text{ rad. s}^{-1}$ (1500 tr/mn),

$$E = U_1 - rI = 65,3 - 7,8 \cdot 10^{-2} \times 3,6 = 65,0 \text{ V.}$$

Or : $E = K\Omega$. On en déduit : $K = 0,414 \text{ V. s.}$

A 1500 tr/mn, la puissance correspondant aux seules pertes vaut :

$$65,0 \text{ V} \times 3,6 \text{ A} = 234 \text{ W} = C_p(157) \times 157.$$

On en déduit : $C_p(157) = 1,49 \text{ N. m.}$

Le tracé de la tangente à la courbe de ralentissement, au point d'ordonnée $\Omega = 157 \text{ rad. s}^{-1}$, permet d'estimer $\frac{d\Omega}{dt}$ (157) à une valeur proche de 10 rad. s^{-2} . On en déduit pour J_1 une valeur proche de $0,15 \text{ kg. m}^2$.

Une fois connu J_1 , le calcul de la pente $\frac{d\Omega}{dt}$ pour différentes valeurs de Ω permet effectivement de montrer que $C_p(\Omega) = A_1 + B_1\Omega$, avec $A_1 = 0,7 \text{ N. m}$ et $B_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ N. m. s.}$

D'une manière générale, le terme $B_1\Omega$ correspond à des pertes dues aux courants de Foucault, et à la ventilation, tandis

que le terme A_1 correspond à des frottements secs sur les paliers et aux pertes par hystérésis.

2° Puissance mécanique fournie à la charge pour le point nominal : $(C_e - C_p) \cdot \Omega = 5,62 \text{ kW}$.

Puissance électrique absorbée : $U(I + I_{ex}) = 6,62 \text{ kW}$.

Rendement nominal : $\eta = 0,849$.

3° Lors du démarrage, la f.é.m. E est initialement nulle : $U = \varrho_1 \cdot 1,5 I_n$. On trouve $\varrho_1 = 0,533 \Omega$.

D'une manière générale, $U = K\Omega + \varrho I$; pour I fixé, Ω ne dépend que de ϱ .

$D_{(1,5 I_n)}$ est une droite d'équation : $\Omega = 174 - 326 \varrho$, tandis que $D_{(I_n)}$ a pour équation : $\Omega = 174 - 217 \varrho$.

La figure 1 ci-après montre qu'on peut, au cours du démarrage, représenter l'état du moteur par une succession de segments verticaux (la vitesse du moteur augmente) et horizontaux

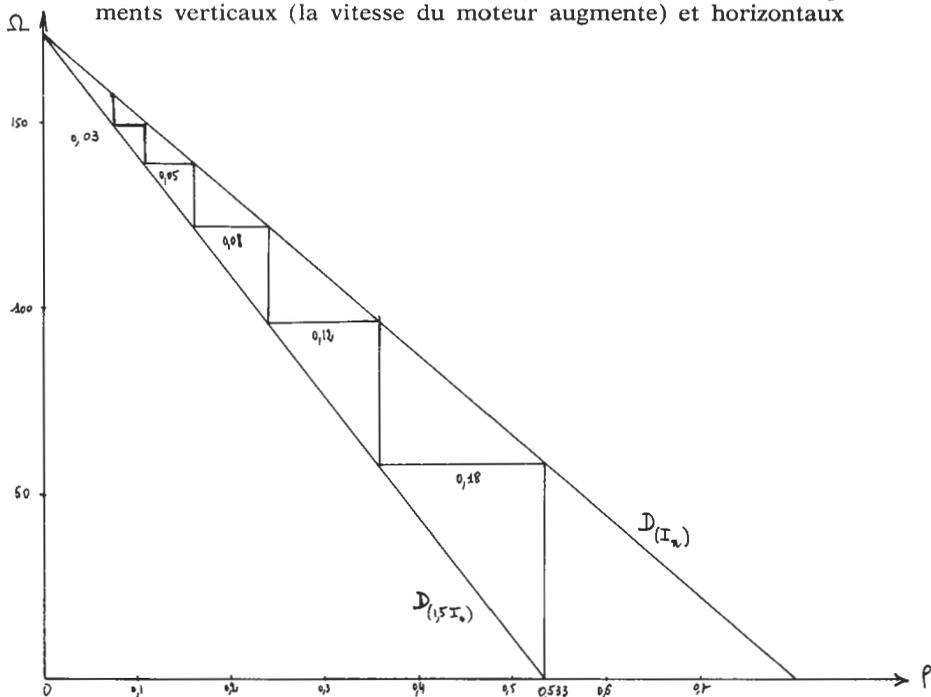


Fig. 1

(elle reste constante pendant le temps très court où l'on change de plot).

La construction graphique permet ainsi de trouver les valeurs $R_1 = 0,18 \Omega$; $R_2 = 0,12 \Omega$, $R_3 = 0,08 \Omega$; $R_4 = 0,05 \Omega$ et $R_5 = 0,03 \Omega$ des différentes résistances constituant le rhéostat de démarrage.

De nombreux candidats ont, à juste titre, noté que les valeurs $q_1, q_2 \dots q_n$ formaient une suite géométrique de raison $\frac{1}{1,5}$.

Le graphique, ou encore l'écriture des différentes égalités : $U = q_1 \times 1,5 \cdot I_n$; $U = K\Omega_1 + q_1 I_n = K\Omega_1 + 1,5 \cdot q_2 \cdot I_n$; $U = K\Omega_2 + q_2 I_n = K\Omega_2 + 1,5 \cdot q_3 \cdot I_n \dots$ etc., montrent bien que $q_2 = q_1/1,5$, $q_3 = q_2/1,5$, etc. De ce fait, les résistances $R_1 = q_1 - q_2$; $R_2 = q_2 - q_3$, etc. sont également en progression géométrique, de même que les accroissements successifs de vitesse. La valeur de la dernière résistance, R_5 s'obtient par la différence $R_5 = q_5 - r$.

Le calcul donne : $R_5 = \frac{0,533}{(1,5)^4} - 0,078 = 0,027 \Omega$.

III. Fonctionnement du moteur actionnant la voiture sur sol horizontal

$$1^\circ \quad A = 3,5 \text{ N.m}; \quad B = 5 \cdot 10^{-2} \text{ N.m.s.}$$

En régime permanent, $J \frac{d\Omega}{dt} = 0 = c_e - (A + B\Omega)$, car

$\sin \alpha = 0$ sur sol horizontal. Or, $c_e = \frac{KU}{r} - \frac{K^2\Omega}{r}$. On trouve

$\Omega = 168,5 \text{ rad.s}^{-1}$, ceci en résolvant l'équation $382 - 2,20 \Omega = 3,5 + 5 \cdot 10^{-2} \Omega$.

L'intensité absorbée se déduit de l'égalité $C_e = Ki$; $I = 29 \text{ A}$.

Pour ce point de fonctionnement, $C_p = 1,54 \text{ N.m}$ et $C_e - C_p = 10,4 \text{ Nm}$.

La puissance mécanique utile est donc : $10,4 \times 168 = 1,75 \text{ kW}$.

La puissance électrique absorbée : $72 \times (29 + 2) = 2,23 \text{ kW}$.

Le rendement : $\eta = \frac{1,75}{2,23} = 0,785$ est, comme cela est normal,

plus faible que le rendement nominal.

$$2^\circ \quad J \frac{d\Omega}{dt} = c_e - C_p - \lambda F_r = \frac{KU}{q_1} - \frac{K^2\Omega}{q_1} - A - B\Omega.$$

$$\alpha = \left(\frac{KU}{\varrho_1} - A \right) / J = 25,8 \text{ rad. s}^{-1}; \quad \beta = \left(\frac{K^2}{\varrho_1} + B \right) / J = 0,183 \text{ s}^{-1}.$$

3° Pour $t = 0$, $\Omega = 0$. Donc : $\Omega_A = -\Omega_B$.

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\Omega_A}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{\Omega_A}{\tau} - \frac{\Omega}{\tau}$$

d'après le texte, mais par ailleurs : $\frac{d\Omega}{dt} = \alpha - \beta \Omega$. Donc :

$$\Omega_A = \tau \cdot \alpha = \frac{\alpha}{\beta}.$$

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{J}{\frac{K^2}{\varrho_1} + B} = 5,46 \text{ s.}$$

$$\Omega(t) = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-t/\tau}) = 141 (1 - e^{-t/5,46}).$$

$$i = \frac{U}{\varrho_1} - \frac{K\alpha}{\beta\varrho_1} (1 - e^{-\beta t}) = 25 + 110 e^{-t/5,46}.$$

La durée de stationnement du rhéostat de démarrage sur le plot zéro correspond au temps nécessaire à la décroissance du courant de la valeur $I_1 = 1,5 I_n = 135 \text{ A}$ à la valeur $I_2 = I_n = 90 \text{ A}$.

L'expression de i conduit à une durée de 2,9 s.

On a : $\frac{d\Omega}{dt}(0) = \alpha$, et donc : $\gamma(0) = \lambda\alpha = 0,91 \text{ m s}^{-2}$.

IV. Fonctionnement de la machine en génératrice

1° $\sin \alpha = -4 \cdot 10^{-2}$.

L'équation générale : $J \frac{d\Omega}{dt} = c_e - C_p - \lambda F_r - \lambda M g \sin \alpha$,

s'écrit, numériquement :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = 382 - 2,20 \Omega - 3,5 - 5 \cdot 10^{-2} \Omega + 21,2.$$

En régime permanent, $\frac{d\Omega}{dt} = 0$ et on trouve $\Omega = 178 \text{ rad. s}^{-1}$.

L'intensité correspondante vaut $i = -21,3$ A, ce qui signifie que la machine électrique, fonctionnant en génératrice, recharge la batterie en lui fournissant une puissance de 1,53 kW. Cette puissance provient de la transformation partielle d'énergie potentielle (4,32 kW) en énergie électrique.

Il faut remarquer que cela s'effectue sans discontinuité, sans changement de sens de rotation, etc., seul le sens du courant a changé, parce que la f.é.m. de la machine est devenue plus grande que celle de la batterie.

2° Les changements de régimes sont décrits par des équations différentielles du type rencontré à la question III.3°, mais la constante de temps τ est modifiée parce que la résistance du circuit électrique n'est plus $r_1 = 0,533 \Omega$, mais $r = 0,078 \Omega$. On

$$a \tau = \frac{J}{\frac{K^2}{r} + B} = 0,9 \text{ s, d'où la figure suivante (2) :}$$

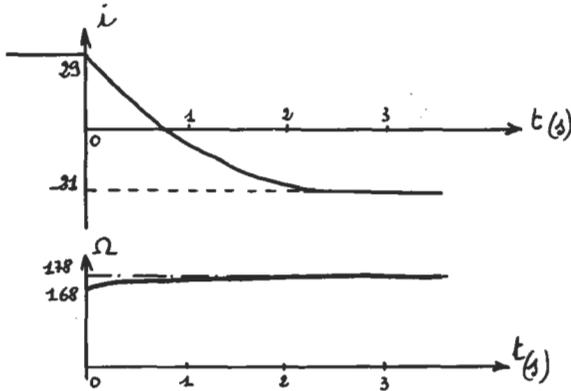


Fig. 2

3° $c_e = Ki$; or, avec les conventions précédentes, l'équation électrique du système s'écrit : $E = K\Omega = -(R' + r) \cdot i$.

$$\text{Donc } c_e = -\frac{K^2\Omega}{R' + r}, \text{ et, en régime permanent :}$$

$$c_e - A - B\Omega - \lambda M g \sin \alpha = 0.$$

Or, 10 km/h correspondent à une vitesse angulaire de 78,5 rad. s⁻¹. On en déduit : $c_e = -13,8$ N.m et $R' + r = 0,975 \Omega$, soit : $R' = 0,90 \Omega$.

L'intensité du courant est alors de 33,3 A et la puissance dissipée dans la résistance de freinage de 1,0 kW.

C. Alimentation d'un moteur par une batterie associée à un hacheur série

1° Avec les définitions de $i(t)$, u , et e , on peut écrire :

$$U = L \frac{di}{dt} + E.$$

2° Si l'on ouvre T_1 , on isole la bobine de la source d'énergie qui rend i positive ; cette intensité décroît donc et la tension

$$u_L = L \frac{di}{dt} \text{ est négative, c'est-à-dire de signe opposé à celui de } e.$$

On ne peut d'ailleurs, sans contradiction, supposer que l'intensité i s'annule instantanément. En effet, dans ce cas, on aurait

$$L \frac{di}{dt} \text{ qui aurait une valeur absolue infinie, et donc cette force}$$

électromotrice créerait un courant se refermant par la diode D_1 , d'où l'absurdité. Par conséquent, sitôt que T_1 est ouvert, D_1 conduit, et, la tension v à ses bornes étant alors nulle, on a : $u_L + e = 0$, soit :

$$L \frac{di}{dt} = -E.$$

3° Les deux équations différentielles précédentes permettent d'écrire :

$$I'_n = I_n + \frac{U-E}{L} xT$$

$$I_{n+1} = I'_n - \frac{E}{L} (1-x)T,$$

soit :

$$I_{n+1} = I_n + \frac{U-E}{L} xT - \frac{E}{L} (1-x)T = I_n + \frac{UxT}{L} - \frac{ET}{L}.$$

4° En régime permanent de conduction continue, l'égalité $I_{n+1} = I_n$ entraîne :

$$E = Ux.$$

$$5^\circ \Delta I = \frac{U-E}{L} \cdot xT = \frac{U(1-x)xT}{L}, \text{ maximale pour :}$$

$x = \frac{1}{2}$. Pour que la conduction soit continue, il faut que l'in-

tensité ne s'annule pas, il faut donc que la valeur moyenne $\langle i \rangle$ soit supérieure à $\frac{\Delta I}{2}$, plus précisément : $\langle i \rangle > \frac{U(1-x) \cdot x \cdot T}{2L}$,

6° Les représentations graphiques demandées découlent des considérations précédentes et de l'observation de la fig. 6 du texte.

De 0 à xT , la batterie que nous noterons $\{ U \}$ fournit de l'énergie à la bobine ($1/2 Li^2$), et à la machine électrique, ici un moteur, que nous noterons $\{ E \}$.

De xT à T , au contraire, la bobine fournit de l'énergie à $\{ E \}$.

Comme on néglige les pertes d'énergie dans les semi-conducteurs T_1 et D_1 , ainsi que dans la bobine, la puissance moyenne $U \langle i_T \rangle$ fournie par la source $\{ U \}$ est égale à la puissance moyenne $E \langle i \rangle$ reçue par $\{ E \}$. On en déduit :

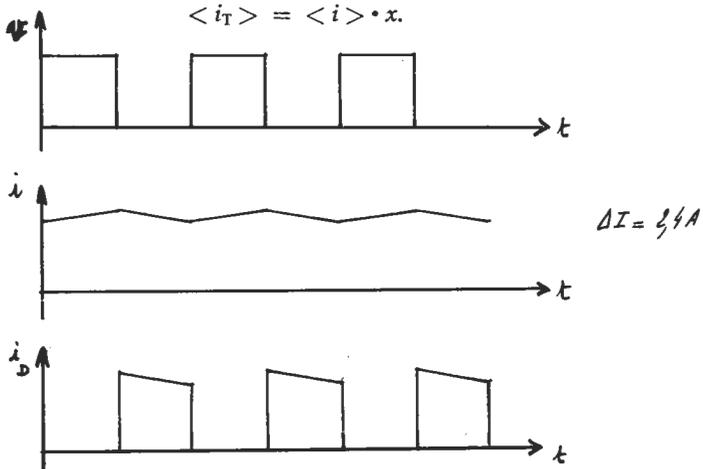


Fig. 3

$$7^\circ \langle u_L \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L \frac{di}{dt} dt = \dots$$

$$\dots \frac{1}{T} \cdot L \cdot \left\{ i([n+1]T) - i(nT) \right\} = 0.$$

Or, on a en permanence $v = u_L + e$, soit :

$$\langle v \rangle = \langle u_L \rangle + \langle e \rangle,$$

et, d'après le résultat précédent : $\langle v \rangle = \langle e \rangle = E.$

Or, v est égal à U quand T_1 est ouvert (de 0 à xT), et à zéro quand T_1 est fermé. On a par conséquent : $\langle v \rangle = xU$, et donc $E = U \cdot x$.

8° La valeur maximale de i est évidemment $\left(\frac{U-E}{L} \right) xT$,

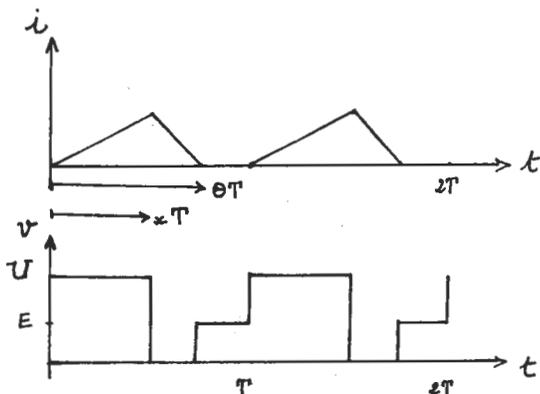


Fig. 4

la valeur moyenne, s'en déduit : $\langle i \rangle = \frac{\phi}{2} \left(\frac{U-E}{L} \right) xT$.

La figure 3 montre par ailleurs que $\langle v \rangle = Ux + (1-\phi)E$. Ce dernier terme est dû au fait que lorsque l'intensité i est nulle (pendant une durée égale à $(1-\phi)T$ par période), la tension v est évidemment égale à E . Comme on a toujours $\langle v \rangle = E$ en régime périodique, on en déduit bien la relation $Ux = E\phi$.

D'où l'expression de $\langle i \rangle$: $\langle i \rangle = \frac{Ux^2 T}{2L} \left(\frac{U}{E} - 1 \right)$.

9° En régime de conduction continue, $E = Ux$, donc E ne dépend pas de $\langle i \rangle$ lorsque x est fixé : les caractéristiques de sortie du hacheur précédent sont donc des verticales.

En régime de conduction discontinue, l'expression de $\langle i \rangle$, établie précédemment, montre que les courbes $\langle i \rangle = f_x(E)$ sont des hyperboles équilatères passant toutes par le point P : $\langle i \rangle = 0$; $E = U$.

Si, par suite d'une cause extérieure, la tension E devenait supérieure à U (voiture électrique en descente, par exemple), il est bien évident que le courant $\langle i \rangle$ correspondant serait nul puisque la fermeture de T_1 ne pourrait amener un courant à circuler dans la bobine L .

Au-delà du point P, par conséquent, les hyperboles sont prolongées par l'axe $\langle i \rangle = 0$. (Cela n'était pas demandé aux candidats). Dans la zone de séparation entre conduction continue

et discontinue, on a à la fois $\langle i \rangle = \frac{Ux^2 T}{2L} \left(\frac{U}{E} - 1 \right)$ et

$$x = \frac{E}{U}.$$

On en déduit : $\langle i \rangle = \frac{T}{2UL} \cdot E \cdot (U - E)$, ce qui est l'équa-

tion d'une parabole de valeur maximale $\frac{T \cdot U}{8L}$.

Une valeur de $\langle i \rangle$ supérieure à cette valeur assure donc toujours une conduction continue. (Il faut avoir présent à l'esprit, dans le cas où E est un moteur, que $\langle i \rangle$ est directement lié au couple électromagnétique : $c_e = K \langle i \rangle$; c'est donc, avec ce montage, lorsque le moteur peine qu'on a conduction continue et $E = Ux$).

Application numérique :

$$\langle i \rangle_{\text{minimal}} = \frac{0,5 \times 96}{8 \cdot 5} = 1,2 \text{ A};$$

C'est une valeur très faible; nous avons vu, en particulier, que sur sol horizontal, le moteur absorbait 29 A en régime permanent.

10° L'énergie passe uniquement de $\{U\}$ vers $\{E\}$; et ce transfert, nous l'avons vu, nécessite $E < U$.

Si la « source » $\{E\}$ est une machine électrique, recevant de l'énergie électrique, elle fonctionne en moteur.

Le paramètre x fixe la valeur de E uniquement lorsque la conduction est continue, c'est-à-dire, pour x fixé, lorsque le courant absorbé est assez élevé. On a alors $E = Ux$, et comme $E = K\Omega$, la vitesse Ω est alors proportionnelle à x ; mais en descente, par exemple, le courant absorbé par le moteur d'une voiture électrique, diminue et tend même à s'inverser — ce qui ici, est impossible — et le réglage du paramètre x est alors insuffisant pour contrôler la vitesse de la machine.

II. Hacheur parallèle et génératrice

1° De 0 à $(1-x') \cdot T$:

$$E = L \frac{dj}{dt} = U.$$

De $(1-x')T$ à T :

$$E = L \frac{dj}{dt}$$

$$2^\circ \quad J'_n = J_n + \frac{E-U}{L} (1-x')T;$$

$$J_{n+1} = J_n + \frac{E-U}{L} (1-x')T + \frac{E}{L} x'T.$$

En régime périodique permanent de conduction continue, $J_{n+1} = J_n$, ce qui entraîne :

$$E = U(1-x'), \text{ donc : } E < U \text{ (fig. 5).}$$

Ce type de hacheur permet, globalement, d'envoyer de l'énergie d'une source $\{E\}$ vers une source $\{U\}$ dont la tension est supérieure.

Lorsque T_2 est ouvert $\{E\}$ et la bobine fournissent de l'énergie à $\{U\}$, lorsque T_2 est fermé $\{E\}$ fournit de l'énergie à la bobine.

3° En régime de conduction discontinue, lorsque le courant j s'annule, on a $v = E$ comme le montre la fig. 6.

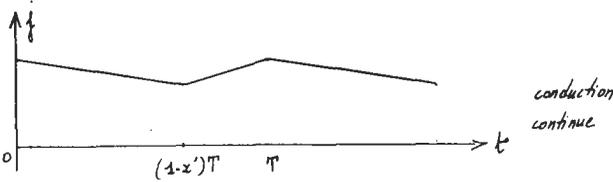


Fig. 5

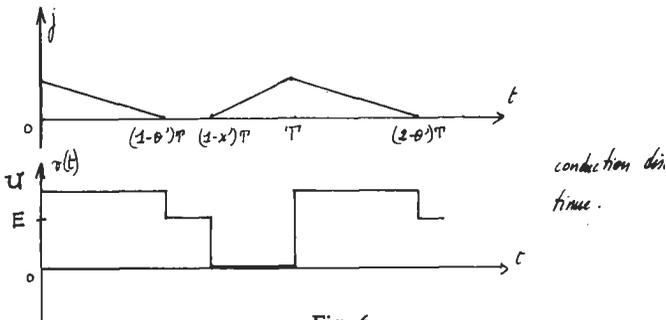


Fig. 6

Bien entendu, puisque $e = L \frac{dj}{dt} + v$, on a :

$$\langle e \rangle = E = \langle v \rangle.$$

On trouve facilement, dans ce cas :

$$\langle j \rangle = \frac{(1 + x' - \theta')}{2} \frac{E x' T}{L}$$

$E x' = (U - E) (1 - \theta')$, et, finalement :

$$\langle j \rangle = \frac{U T x'^2}{2 L} \cdot \frac{E}{U - E}.$$

4° En conduction continue, $\langle j \rangle$ est indépendant de E , les courbes $x' = c^{ste}$ sont des verticales.

En conduction discontinue, ce sont, comme l'expression de $\langle j \rangle$ le montre, des portions d'hyperboles passant par l'origine.

L'équation de la séparatrice est : $\langle j \rangle = \frac{T}{2 UL} E \cdot (U - E)$, c'est donc une parabole.

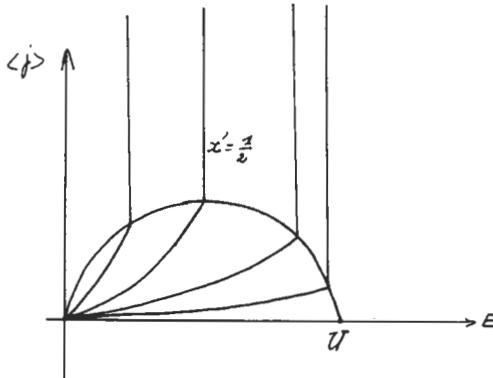


Fig. 7

5° Dans ce type de hacheur, l'énergie est uniquement transmise de $\{ E \}$ vers $\{ U \}$, puisque j_D ne peut être que positif.

$\{ U \}$ peut d'ailleurs être constituée d'un condensateur de forte capacité mis en parallèle avec une résistance de charge; on obtient ainsi à la sortie du hacheur une tension plus élevée que la tension E d'alimentation initiale. Dans le cas où $\{ E \}$ est une génératrice débitant sur une batterie d'accumulateurs de

tension U , on n'a $E = U(1 - x')$, c'est-à-dire $\Omega = \frac{U(1 - x')}{K}$,

que si l'intensité moyenne, $\langle j \rangle$, débitée par la génératrice, est assez grande pour qu'il y ait conduction continue. Ce régime, dans le cas d'une voiture électrique, peut être obtenu dans les descentes à forte déclivité, et l'on contrôle alors facilement Ω par le paramètre de réglage x' . Il n'en est pas de même si $\langle j \rangle$ est faible. Il faut d'autre part que la force électromotrice E initiale soit plus faible que U .

III. Hacheur complet et voiture électrique

1° Les définitions de i et de i_T sont les mêmes que dans la partie I relative au hacheur série (l'interrupteur commandé T_1 est en série avec le moteur placé à la sortie du hacheur).

Il suffit alors de remarquer que si T_1 conduit, D_2 ne peut conduire (si faible que soit la différence de potentiel aux bornes d'un interrupteur fermé, elle existe) et *vice versa*; de même pour D_1 et T_2 .

Donc, si $i > 0$, le courant sera acheminé soit par T_1 , soit par D_1 comme dans le hacheur série.

Si $i < 0$ (ce qui correspondrait à $j > 0$ dans le schéma du hacheur parallèle, puisque $i = -j$), le courant passera par T_2 ou D_2 comme dans le hacheur parallèle. Dans chacun de ces cas, on a : $E = Ux$ ou $E = U(1-x')$, ce qui revient au même.

2° Pendant la phase I, i croît, donc $v = U$, et $U > E$. D_2 ou T_1 conduit. C'est D_2 puisque $i < 0$.

Phase II : c'est T_1 puisque $i > 0$, de plus c'est la fraction xT de la période T pendant laquelle T_1 peut conduire.

Phase III : i décroît, donc $v = 0$; D_1 ou T_2 conduit. C'est D_1 puisque $i > 0$.

Phase IV : même chose, mais T_2 conduit puisque i est négative.

3° $v(t) = U$ pendant les phases I et II ; $v(t) = 0$ pendant les phases III et IV. Donc $E = Ux$ puisque, comme précédemment, $E = \langle v \rangle$.

Les caractéristiques $\langle i \rangle = f_x(E)$ deviennent de simples verticales alors qu'en utilisant soit un hacheur série, soit un hacheur parallèle (c'est-à-dire en ne pratiquant pas la commande dite complémentaire décrite dans le texte), on obtient une figure (fig. 8) qui est la réunion de la fig. 8 du texte et de la fig. 7 du présent corrigé.

Pour les raisons expliquées à la question C.I.6°, on a toujours $U \langle i_T \rangle = E \langle i \rangle$. Puisque $E = U \cdot x$, pour le hacheur complet, on a :

$$\langle i_T \rangle = \langle i \rangle \cdot x.$$

Ces équations rappellent celles d'un transformateur ; la puissance électrique est conservée (aux pertes près, que nous avons

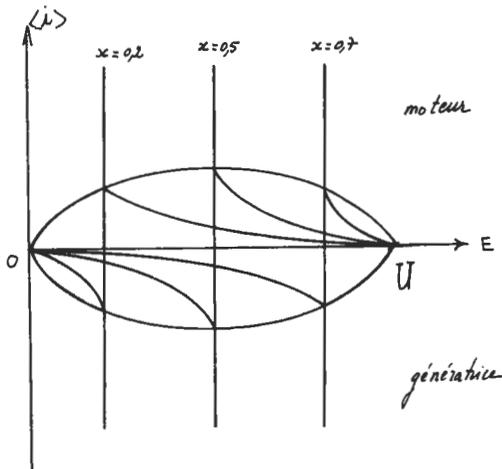


Fig. 8

négligées), mais les caractéristiques de l'onde sont changées. Pour un transformateur, qui opère sur du courant alternatif (alors que le hacheur assure une liaison continu-continu), les relations entre valeurs efficaces d'entrée et de sortie sont $U_2 = m U_1$; $I_1 = m I_2$, m étant le rapport de transformation dont l'analogie ici, est le paramètre x qui est facilement réglable par des moyens électroniques.

4° En régime permanent, $c_e = C_p - c_t = 3,5 + 5 \cdot 10^{-2} \Omega$. A 20 km/h, dans ces conditions, $c_e = 11,35 \text{ N.m}$ et $E = 65 \text{ V}$. Comme $c_e = K \langle i \rangle$, on a : $\langle i \rangle = 27,4 \text{ A}$.

La relation $E = U \cdot x$ entraîne $x = 0,68$.

$$\Delta I = \frac{U - E}{L} \cdot x \cdot T = \frac{U x (1 - x) \cdot T}{L} = 2,1 \text{ A}; \text{ donc :}$$

$$\frac{\Delta I}{I} = 8 \%, \text{ ce qui est assez faible.}$$

5° La vitesse de la voiture est inchangée puisque x conserve la même valeur. $c_t = 11,3 \text{ N.m}$; $c_e = C_p - c_t = -9,8 \text{ N.m}$, donc $\langle i \rangle = -23,7 \text{ A}$.

La machine électrique fonctionne donc en génératrice; sa force électromotrice E vaut 65 V et elle débite un courant $\langle j \rangle = -\langle i \rangle = 23,7 \text{ A}$.

Le hacheur permet de récupérer cette énergie en chargeant une batterie de 96 V sous un courant I_T de 16,1 A.

La puissance ainsi récupérée vaut :

$$P = 65 \times 23,7 = 96 \times 16,1 = 1,55 \text{ kW.}$$

Pour ralentir la voiture, il suffit de diminuer x .

Le hacheur complet, avec commande complémentaire permet le réglage de la vitesse sans perte de puissance, il permet aussi la récupération de l'énergie lors du freinage.

Quelques remarques supplémentaires à propos de ce problème

1. C'est pour que les équations électriques soient simples ($E = K\Omega$; $C_e = KI$), que le moteur décrit dans le problème a été choisi du type à excitation séparée et constante. En fait, ce type de moteur n'est pas, en général, adapté à la traction électrique.

Expliquons brièvement pourquoi sur l'exemple même du problème.

Nous avons vu que lorsque la voiture passe d'un sol plat à une descente de 4 %, sa vitesse n'augmente que très peu (de 21,5 à 22,7 km/h) ; de la même manière, dans une montée de 4 %, la vitesse ne diminuerait que faiblement (de 21,5 à 20,2 km/h). Cependant, l'intensité absorbée varie beaucoup, dans le même temps. De 29 A en palier, elle passerait à 79 A dans la montée, et, s'inversant, se fixerait à 21 A dans la descente. On préfère en général une machine qui « encaisse la charge », c'est-à-dire, ici, qui ralentirait substantiellement dans les montées (et accélérerait aussi dans les descentes), mais qui, du coup, absorberait un courant variant dans de plus faibles limites. Ce type de machine, qui équipe les locomotives et les véhicules électriques de tous ordres est le moteur série.

2. Dans la partie B qui traitait du moteur directement alimenté par une batterie d'accumulateurs de 72 V, nous nous sommes préoccupés des régimes transitoires de la machine (questions B III. et B IV.). Nous avons vu qu'ils étaient régis par des fonctions de la forme $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 e^{-t/\tau}$.

En fait, dans la partie C, à part la légère ondulation de l'intensité, dont nous avons vu qu'elle est relativement faible, les régimes transitoires, aussi bien qualitativement que quantitativement, seraient très peu modifiés, et, dans le cas rencontré à la question B.IV.2°, si l'on excepte l'ondulation de $i(t)$, les graphiques donnant $i(t)$ et $\Omega(t)$ seraient sensiblement les mêmes.

Montrons rapidement pourquoi :

Lorsque l'on interpose un hacheur, l'équation électrique du moteur est changée. De $U = ri + E$, elle devient, dans le cas du hacheur complet :

$$U = ri + L \frac{di}{dt} + E \quad \text{de } 0 \text{ à } xT$$

$$0 = ri + L \frac{di}{dt} + E \quad \text{de } xT \text{ à } T$$

En prenant les valeurs moyennes de chacun des termes sur un intervalle de temps T , on obtient :

$$xU = r \langle i \rangle + L \frac{d \langle i \rangle}{dt} + \langle E \rangle.$$

Tout se passe donc, en moyenne, comme si la machine était alimentée par une source de tension de valeur xU , en série avec une inductance L .

En toute rigueur, dès lors, l'équation différentielle vérifiée par Ω est du second ordre, mais les deux racines de son équation caractéristique étant très différentes, tout se passe pratiquement, en ce qui concerne les variations de $\langle i \rangle$ et de Ω , comme si l'inductance L n'existait pas ; ceci est dû au fait qu'elle est

faible (la constante de temps $\frac{L}{r}$ vaut 0,064 s, alors que celle

du moteur proprement dit, $\tau = \frac{J}{\frac{K^2}{r} + B}$, vaut 0,9 s).

Cela montre que le choix d'une inductance L faible permet de ne pas affecter la rapidité de réponse du système commandé par le hacheur, mais cela pose par contre le problème du choix de L .

Terminons donc ces quelques réflexions par des considérations énergétiques :

Le hacheur permet le passage d'une puissance P d'une source $\{U, \langle i_T \rangle\}$ à une source $\{E, \langle i \rangle\}$, mais seule la fonction xP passe directement, par conduction, de $\{U\}$ à $\{E\}$. La fraction $(1-x) \cdot P$, elle, provient de ce que, pendant chaque partie xT de T , la bobine accumule $L \langle i \rangle \Delta I$ qu'elle restitue ensuite pen-

nant $(1-x)T$. Autrement dit, $\frac{L \cdot \langle i \rangle \cdot \Delta I}{T} = (1-x)P$.

Les grandeurs $\langle i \rangle$, ΔI , P , $x = \frac{E}{U}$, dépendent des deux systèmes électriques que l'on rapproche, mais le rapport $\frac{L}{T}$, lui, ne dépend que du hacheur.

Pour diminuer L , il faut donc diminuer T , c'est-à-dire augmenter la fréquence du hacheur.

R. MOREAU,
et les membres du Jury.

Agrégation (OPTION PHYSIQUE)

SESSION DE 1980

Epreuve C

PROBLEME DE PHYSIQUE

(Durée : 6 heures)

Il n'y a pas à distribuer de papier millimétré.

Le problème s'intéresse à des atomes situés dans des états de Rydberg, c'est-à-dire dont l'électron externe est très éloigné du noyau. De tels états sont observés au laboratoire et en astrophysique dans le milieu interstellaire.

Les propriétés générales de ces atomes excités sont examinées dans la partie I, tandis que l'influence d'un plasma est traitée dans la partie II. Dans la partie III, on cherche à comprendre l'observation de certains de ces états en astrophysique (sphère de Strömgren), tandis que la partie IV montre l'intérêt de ces atomes au laboratoire (maser millimétrique).

On pourra aborder la partie II après avoir traité les questions I.1 et I.2.

Les parties III et IV sont indépendantes entre elles et indépendantes des parties I et II.

Certaines constantes fondamentales de la physique sont supposées connues des candidats.

I. ETUDE DES PROPRIETES GENERALES D'UN ATOME DANS UN ETAT DE RYDBERG

I.1. On considère une particule de masse m que l'on supposera ponctuelle, animée par rapport à un référentiel galiléen d'origine O ,

d'une vitesse $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ et soumise à une force newtonienne dérivant

de l'énergie potentielle $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ avec α négatif. Le vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$

est le vecteur position de la particule.

a) Montrer que la trajectoire de la particule est plane.

b) On pose $(\mathbf{Ox}, \mathbf{OM}) = \vartheta$ et $|\mathbf{OM}| = r$. Etablir les équations différentielles du mouvement de la particule.

c) On se limite au cas des trajectoires elliptiques. Calculer en fonction de l'énergie E , du moment cinétique L par rapport à O (on prendra $L > 0$) et des données m et α , les divers éléments de l'orbite : paramètre p_0 ; excentricité ξ et période T .

Montrer que le vecteur $\mathbf{A} = \left(\frac{-m}{2E} \right)^{1/2} \left(\mathbf{v} \wedge \mathbf{L} + \alpha \frac{\mathbf{r}}{r} \right)$ (appelé

vecteur de Runge-Lenz) est conservé au cours du mouvement. On calculera explicitement \mathbf{A} en fonction de α et ξ ainsi que m et E . Quelle propriété traduit la conservation du vecteur \mathbf{A} ?

I.2. On suppose que la particule est un électron de charge $-e$ ($e > 0$) tournant autour d'un noyau de charge Ze dont la masse est supposée grande devant la masse m de l'électron.

a) Montrer que l'on peut négliger les forces de gravitation devant les forces électriques, ce que l'on fera dans toute la suite du problème.

b) Du fait de son accélération \mathbf{a} , l'électron rayonne. On admettra que la puissance rayonnée est $P(t) = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (\mathbf{a})^2$ et que l'énergie

E et le moment cinétique \mathbf{L} ne changent d'une façon appréciable qu'au bout d'un temps long devant la période T . Les variations à long terme de E et \mathbf{L} pourront donc être évaluées en calculant des valeurs moyennes temporelles notées $\langle E \rangle$ et $\langle \mathbf{L} \rangle$ sur l'orbite non perturbée (moyennes séculaires). Montrer que la variation de l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ obéit à la relation :

$$\frac{d \langle E \rangle}{dt} = - \frac{\tau_0}{m} \alpha^2 \left\langle \frac{1}{r^4} \right\rangle$$

où on a posé $\tau_0 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3}$ (c est la vitesse de la lumière dans le vide.)

c) A partir du calcul de l'énergie rayonnée lorsque l'électron effectue un tour sur son orbite non perturbée, montrer que le rayonnement équivaut à l'action d'une force perturbatrice $\mathbf{F}_{\text{ray}} = m \tau_0 \frac{d\mathbf{a}}{dt}$.

En déduire que la variation du moment cinétique moyen $\langle \mathbf{L} \rangle$ obéit à la relation :

$$\frac{d \langle \mathbf{L} \rangle}{dt} = \frac{\tau_0}{m} \left\langle \frac{\alpha}{r^3} \right\rangle \mathbf{L}$$

d) En utilisant, dans l'approximation indiquée, la relation

$\mathbf{L} = m r^2 \frac{d\phi}{dt}$ (on prendra $L > 0$), établir les relations :

$$\frac{d \langle E \rangle}{dt} = -\frac{2^{3/2}}{3} Z^3 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^4 \frac{m^{1/2}}{c^3} \frac{(-E)^{3/2}}{L^5} \left(3 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2} \right)$$

et :

$$\frac{d \langle L \rangle}{dt} = \frac{2^{5/2}}{3} Z \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{(-E)^{3/2}}{m^{1/2} c^3 L^2}$$

e) Si E_0 et L_0 sont respectivement les valeurs de E et L à la date $t = 0$, montrer que :

$$E = \frac{m\alpha^2}{2L^2} \left(\frac{L^3}{L_0^3} - 1 \right) + E_0 \frac{L}{L_0} \quad \left(\alpha = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right).$$

En déduire que l'excentricité ξ de l'orbite est donnée par la relation :

$$\xi^2 = \xi_0^2 \frac{L^3}{L_0^3}$$

où ξ_0 est la valeur de ξ à la date $t = 0$. Montrer qu'une orbite elliptique tend vers une orbite circulaire.

f) Pour une orbite non perturbée circulaire, montrer que l'équation d'évolution de $r(t)$ est :

$$r^3(t) = r_0^3 - 9Z(c\tau_0)^3 \frac{t}{\tau_0}$$

où r_0 est la valeur initiale de r à la date $t = 0$.

I.3. a) Pour une orbite circulaire, calculer à partir du modèle de Bohr le rayon $r(n)$ et la vitesse $v(n)$ pour cette orbite, n étant le nombre quantique principal. On prendra dans cette question I.3. $Z = 1$.

Application numérique :

Dans le milieu interstellaire, on a observé des états de Rydberg avec $n = 200$, tandis qu'au laboratoire $n = 60$ est obtenu facilement. Calculer $r(n)$ et $v(n)$ pour ces deux valeurs de n .

On donne :

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \quad h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J. s.}$$

b) Soit $\mathfrak{F}(n, n-1)$ la probabilité de transition par unité de temps du niveau n au niveau $n-1$. On définit $\mathfrak{F}(n, n-1)$ par la rela-

tion $\mathfrak{F}(n, n-1) = -\frac{dn}{dt}$. Calculer $\mathfrak{F}(n, n-1)$ à partir de l'équation

d'évolution de $r(t)$ obtenue en I.2. f). On exprimera $\mathfrak{F}(n, n-1)$ en fonction de n , τ_0 , c et a_0 rayon de Bohr pour $n = 1$, puis on donnera l'expression numérique de $\mathfrak{F}(n, n-1)$ en fonction de la seule variable n .

c) Le principe de correspondance de Bohr stipule que pour n grand, la puissance rayonnée par l'électron sur l'orbite de rayon $r(n)$

est égale au produit de $\mathfrak{S}(n, n-1)$ par l'énergie séparant les deux niveaux n et $n-1$. Vérifier que l'on obtient bien ainsi pour $\mathfrak{S}(n, n-1)$ la même valeur qu'en b).

d) En fait, les calculs exacts de la mécanique quantique donnent pour \mathfrak{S} les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{Transitions : } 2p \rightarrow 1s & 4f \rightarrow 3d & 6h \rightarrow 5g \\ 1/\mathfrak{S} & : 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ s} & 7,3 \cdot 10^{-8} \text{ s} \quad 6,1 \cdot 10^{-7} \text{ s.} \end{array}$$

Quelle conclusion en tirez-vous sur la validité du modèle classique ?

e) Lorsque l'électron passe de $r(n)$ à $r(m)$ il émet un photon ($n > m$) de fréquence $\nu_{n,m}$. On étudie les transitions :

$$n = 200 \rightarrow m = 199 \text{ des atomes H et He.}$$

A quel domaine de longueurs d'onde appartiennent les rayonnements émis ?

Si on veut séparer les transitions des atomes H et He, quelle résolution spectrale $\frac{\lambda}{\delta\lambda}$ est nécessaire ? Une telle résolution est-elle actuellement obtenue en Radioastronomie ?

I.4. On revient au traitement classique où une correction relativiste est nécessaire pour les orbites fortement elliptiques. On se limitera au cas de l'hydrogène ($Z = 1$).

Deux minimums successifs du rayon-vecteur sont maintenant obtenus pour une variation de l'angle polaire ϑ égale à $2\pi + \delta\varphi$ (avance du périhélie). On se propose de calculer $\delta\varphi$ supposé petit. L'électron

ayant la vitesse \mathbf{v} , on posera $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$.

a) Montrer que le moment cinétique \mathbf{L} se conserve.

b) Si \mathbf{p} désigne la quantité de mouvement de l'électron, établir la relation :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{L^2}{\gamma m r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \mathbf{u}_r$$

où \mathbf{u}_r est le vecteur unitaire radial.

c) On pose $W = (\gamma - 1) m c^2 + \frac{\alpha}{r}$ ($\alpha = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$). Etablir la relation :

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{L^2 c^2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{m\alpha}{L^2} \left(1 + \frac{W}{m c^2} \right)$$

On donnera la signification physique de W .

d) En recherchant une solution de la forme :

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \xi \cos \Omega \theta}{p_0}$$

exprimer $\delta\varphi$ en fonction de L et des constantes α et c .

Cette correction permet-elle de lever la dégénérescence des niveaux du nombre quantique principal n ?

II. ATOMES DE RYDBERG DANS UN PLASMA PEU DENSE

II.1. On considère un plasma *peu dense* formé d'ions et d'électrons et de charge électrique globale nulle. L'équilibre thermodynamique du plasma est réalisé, la température thermodynamique étant T . On supposera que les distributions obéissent à la loi de Boltzmann.

a) Montrer que l'on peut négliger le mouvement des ions devant celui des électrons.

b) Soit n_0 le nombre d'électrons par unité de volume à l'équilibre (densité électronique). On écarte une tranche de plasma d'une longueur x , déplaçant ainsi en bloc les électrons associés à cette tranche, les ions restant en place. On supposera x petit. Montrer qu'il

apparaît dans la tranche un champ électrique : $\mathbf{E} = \frac{n_0 e x}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x$ où $-e$

est la charge de l'électron ($e > 0$) et \mathbf{u}_x le vecteur unitaire de l'axe Ox parallèlement auquel se fait le déplacement. En déduire que la tranche de plasma est soumise à des oscillations de pulsation ω_p que l'on calculera en fonction de n_0 , e , m (masse électronique) et ϵ_0 .

II.2. On se propose de calculer le potentiel réel $V(r)$ créé par une particule (ion ou électron) du plasma à la distance r de celle-ci. On supposera l'énergie potentielle $|eV(r)|$ très faible devant l'énergie cinétique moyenne d'une particule du plasma. On cherchera une solu-

tion de la forme $V(r) = \frac{1}{r} \Phi \left(\frac{r}{D} \right)$ où D est une longueur constante caractéristique.

On donne le laplacien en coordonnées sphériques d'une fonction $V(r)$:

$$\Delta V(r) = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$$

On exprimera D (longueur de Debye du plasma) en fonction de ϵ_0 , T , e , n_0 et k_B constante de Boltzmann. Interpréter physiquement le résultat.

II.3. On se propose dans la suite de cette partie d'étudier l'effet des collisions des électrons du plasma sur un atome dans un état de Rydberg situé dans ce plasma.

On considère d'abord l'effet exercé sur l'électron de cet atome par un champ électrique $\vec{\varepsilon}$ uniforme et indépendant du temps. On considérera que l'action de $\vec{\varepsilon}$ est faible de sorte que l'orbite électronique est peu modifiée sur la durée d'une période. On introduit donc des moyennes séculaires notées $\langle \rangle$ calculées sur la trajectoire non perturbée comme il a été expliqué dans la question I.2. Les trajectoires non perturbées seront supposées elliptiques.

a) Montrer que :
$$\frac{d \langle \mathbf{E} \rangle}{dt} = 0.$$

b) Soit :
$$\mathbf{A} = \left(\frac{-m}{2E} \right)^{1/2} \left(\mathbf{v} \wedge \mathbf{L} + \alpha \frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$
 le vecteur de Runge-Lenz.

Etablir que :

$$\frac{d \langle \mathbf{A} \rangle}{dt} = \left(\frac{-1}{2mE} \right)^{1/2} (-e) \left[\langle \mathbf{r} (m\mathbf{v} \cdot \vec{\varepsilon}) \rangle - \langle \vec{\varepsilon} (\mathbf{r} \cdot m\mathbf{v}) \rangle + \vec{\varepsilon} \wedge \mathbf{L} \right]$$

et que :

$$\frac{d \langle \mathbf{L} \rangle}{dt} = -e \langle \mathbf{r} \rangle \wedge \vec{\varepsilon}.$$

c) Etablir que :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \rangle &= 0 & \langle \mathbf{r} \rangle &= -\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2mE} \right)^{1/2} \mathbf{A} \\ \langle \mathbf{r} (m\mathbf{v} \cdot \vec{\varepsilon}) \rangle &= \frac{1}{2} \vec{\varepsilon} \wedge \mathbf{L}. \end{aligned}$$

Pour calculer $\langle \mathbf{r} \rangle$, on pourra introduire la variable u (anomalie excentrique) telle que :

$$\cos \vartheta = \frac{\cos u - \xi}{1 - \xi \cos u}.$$

Déduire des résultats précédents les équations :

$$\frac{d \langle \mathbf{A} \rangle}{dt} = -\frac{3e}{2} \sqrt{\frac{-1}{2mE}} \vec{\varepsilon} \wedge \mathbf{L}$$

et :

$$\frac{d \langle \mathbf{L} \rangle}{dt} = -\frac{3e}{2} \sqrt{\frac{-1}{2mE}} \vec{\varepsilon} \wedge \mathbf{A}.$$

d) On pose :

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{A})$$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{A}).$$

Montrer que :

$$\frac{d \langle \mathbf{X} \rangle}{dt} = -\vec{\omega}_S \wedge \mathbf{X}$$

et :

$$\frac{d \langle \mathbf{Y} \rangle}{dt} = \vec{\omega}_S \wedge \mathbf{Y}.$$

L'énergie E est celle d'un état de Rydberg de nombre quantique principal n . Exprimer le vecteur $\vec{\omega}_S$ en fonction de e , $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, n , a demi-grand axe de l'ellipse et $\vec{\varepsilon}$.

e) Décrire par une représentation géométrique l'évolution de $\langle \mathbf{X} \rangle$ et de $\langle \mathbf{Y} \rangle$.

Dans la suite, on admettra que les résultats précédents restent exacts si le champ $\vec{\varepsilon}$ varie lentement au cours du temps, c'est-à-dire qu'on peut le considérer comme stationnaire sur un temps de l'ordre de la période du mouvement de l'électron.

II.4. On étudie l'effet du champ électrique créé par un électron incident du plasma sur l'atome dans un état de Rydberg. L'électron incident décrit une trajectoire rectiligne uniforme dont l'équation du mouvement est donnée par :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{R}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{V}t \quad \text{avec} \quad \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{V} = 0$$

O est le centre de l'atome considéré et est supposé fixe. Le paramètre d'impact $\|\mathbf{b}_0\|$ est supposé grand devant les dimensions atomiques. On suppose que le mouvement de l'électron incident n'est pas perturbé par l'atome.

a) On admet que le champ électrique $\vec{\varepsilon}$ créé par l'électron et vu par l'atome est approximativement tel que :

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad \text{si} \quad R > D$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad \text{si} \quad R < D$$

où D est la longueur de Debye du plasma. Expliquer cette hypothèse simplificatrice.

b) On pose $T_0 = \frac{\|\mathbf{b}_0\|}{\|\mathbf{V}\|}$. Que représente l'ordre de grandeur de T_0 ?

Quelle est l'influence du champ électrique $\vec{\epsilon}$ sur l'évolution de $\langle \mathbf{X} \rangle$ et de $\langle \mathbf{Y} \rangle$ (voir question II.3.) lorsque :

$$\omega_S T_0 \gg 1$$

et :

$$\omega_S T_0 \ll 1.$$

c) On se limite au cas $\omega_S T_0 \ll 1$. Calculer l'angle ϑ dont tournent les vecteurs $\langle \mathbf{X} \rangle$ et $\langle \mathbf{Y} \rangle$ autour d'un axe parallèle à \mathbf{b}_0 . On montrera que :

$$|\vartheta| = \left\| \int_{-T_D}^{T_D} \vec{\omega}_S(t) dt \right\| = \frac{3a}{b_0} \frac{\langle v^2 \rangle^{1/2}}{V} \sqrt{1 - \frac{b_0^2}{D^2}}$$

où $2T_D$ est le temps passé par l'atome à l'intérieur de la sphère de Debye de l'électron incident, et où on a posé :

$$\langle v^2 \rangle^{1/2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n \hbar} \quad (n : \text{nombre quantique principal}).$$

(On interprétera ce paramètre.)

d) Après chaque collision $\langle \mathbf{X} \rangle$ et $\langle \mathbf{Y} \rangle$ ont tourné d'un angle ϑ . Que se passe-t-il après un grand nombre de collisions et comment évolue la trajectoire de l'électron lié à l'atome de Rydberg ?

e) Soit χ l'angle $\langle \mathbf{X} \rangle$ et $\langle \mathbf{Y} \rangle$. On pose $\mu = \cos \chi$. Calculer l'excentricité ξ de l'ellipse en fonction de μ et déterminer l'équation d'évolution de μ . En déduire la variation $\delta\mu$ de μ , due à une collision. On introduira le vecteur unitaire \mathbf{n} du produit $\langle \mathbf{X} \rangle \wedge \langle \mathbf{Y} \rangle$.

Calculer la valeur quadratique moyenne de $\delta\mu$ en fonction de μ et de la valeur quadratique moyenne de ϑ .

III. ETATS DE RYDBERG DANS LE MILIEU INTERSTELLAIRE

Une étoile dont les dimensions seront considérées comme négligeables devant les distances intervenant dans cette partie, émet un rayonnement isotrope qu'on assimilera au rayonnement du corps noir à la température T^* . Cette étoile est entourée par un nuage d'hydrogène neutre de densités volumiques particulières uniformes constitué de n_H atomes d'hydrogène neutre par unité de volume et de traces d'éléments (carbone, soufre) dont les rapports d'abondance n_C/n_H et n_S/n_H sont constants. On négligera leur présence sauf à la question III.4. On désigne par σ_i et σ_T les sections efficaces d'ionisation de l'hydrogène neutre et de diffusion Thomson sur les ions H^+ .

On donne :

$$n_H = 10^{10} \text{ m}^{-3}, \quad \frac{n_C}{n_H} = 10^{-4}, \quad \frac{n_S}{n_H} = 5 \cdot 10^{-5},$$

$$\sigma_i = 10^{-21} \text{ m}^2, \quad \sigma_T = 7 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2.$$

III.1. Le rayonnement émis par l'étoile ionise l'hydrogène du nuage. On admet qu'il va se former ainsi autour de l'étoile une sphère totalement ionisée (*sphère de Strömgen*) dont le rayon $R(t)$ augmente avec le temps.

a) Expliquer pourquoi le modèle de la sphère de Strömgen est réaliste. On pourra utilement comparer les grandeurs $\frac{1}{n_H \sigma_i}$ et

$$\frac{1}{n_H \sigma_T}.$$

b) Si on néglige les recombinaisons proton-électron, calculer la vitesse d'expansion $\frac{dR}{dt}$ de la sphère de rayon R à l'intérieur de

laquelle tout l'hydrogène est ionisé. On exprimera $\frac{dR}{dt}$ en fonction uniquement de R , n_H et de N_i (nombre de photons ionisant l'hydrogène émis par unité de temps par l'étoile).

III.2. On tient maintenant compte des recombinaisons qui se produisent à l'intérieur de la sphère de rayon R . On appellera α_T le taux de recombinaison proton-électron par unité de temps : si le milieu ionisé contient n_e électrons et n_i ions par unité de volume, on a $\alpha_T n_e n_i$ recombinaisons par unité de temps et par unité de volume.

Etablir la nouvelle équation différentielle liant $\frac{dR}{dt}$ à N_i . Montrer

que lorsque t devient très grand, R tend vers une valeur limite R_H que l'on calculera. On supposera N_i indépendant du temps.

III.3. a) On considère la recombinaison d'un proton et d'un électron d'énergie cinétique E_C . Si la recombinaison conduit à l'état de niveau n de l'atome H, calculer l'énergie du photon émis lors de cette recombinaison. On désignera par $E_0 > 0$ l'énergie d'ionisation de l'atome H ($E_0 = 13,6 \text{ eV}$).

b) A quelle condition sur n le proton ainsi émis peut-il être ionisant ? Examiner le cas particulier $n = 1$ (niveau fondamental).

Application numérique :

On prend pour valeur de E_C l'énergie cinétique moyenne d'agitation thermique des électrons du milieu ionisé supposé à la température T_k . Calculer les valeurs de n telles que le photon émis lors de la recombinaison soit ionisant pour $T_k = 10^4 \text{ K}$ et pour $T_k = 10^5 \text{ K}$. On donne la constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

c) Expliquer pourquoi la valeur du taux de recombinaison α_T est affectée par les photons émis lors de ces recombinaisons. Dans quel sens α_T et R_H sont-ils modifiés ?

III.4. On considère le cas stationnaire, c'est-à-dire tel que $\frac{dR}{dt} = 0$

et on s'intéresse aux rayons des sphères ionisées de l'hydrogène, du carbone et du soufre que l'on désignera respectivement par R_H , R_C et R_S . Les énergies d'ionisation de l'hydrogène, du carbone et du soufre sont respectivement :

$$E_0 = 13,6 \text{ eV}, \quad E'_0 = 11,3 \text{ eV} \quad \text{et} \quad E''_0 = 10,4 \text{ eV}.$$

a) On désigne par N_i , N'_i et N''_i respectivement le nombre de photons émis PAR UNITÉ DE TEMPS par l'étoile ionisant H, C et S (N_i), ionisant uniquement C et S (N'_i) enfin ionisant seulement S (N''_i).

Calculer les rapports $\frac{N_i}{N'_i}$ et $\frac{N'_i}{N''_i}$. On prendra dans tous les cas une même valeur du taux de recombinaison α_T .

Application numérique :

$$R_H = 10^{15} \text{ m}, \quad R_C = 10^{17} \text{ m}, \quad R_S = 1,4 \cdot 10^{17} \text{ m},$$

$$\frac{n_C}{n_H} = 10^{-4}, \quad \frac{n_S}{n_H} = 5 \cdot 10^{-5}.$$

b) Montrer que la connaissance des rapports précédents permet de déterminer la température T^* , donc le type spectral de l'étoile et également de contrôler s'il est légitime d'assimiler le rayonnement de l'étoile à celui d'un corps noir. Le calcul explicite n'est pas demandé. On rappelle que la densité volumique d'énergie par unité de fréquence du rayonnement d'un corps noir à la température T^* est :

$$u_\nu(\nu, T^*) = \frac{8 \pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\left[e^{-\frac{h\nu}{k_B T^*}} - 1 \right]}$$

où ν est la fréquence considérée.

c) La distance de l'étoile considérée au système solaire est de l'ordre de $1,5 \cdot 10^{19}$ m. On mesure les rayons R_H , R_C et R_S en observant le rayonnement émis à partir des états de recombinaison des atomes H, C et S sur des niveaux de n élevé ($n \geq 150$). Expliquer pourquoi on peut mesurer ces rayons en utilisant par exemple une transition du type $n = 200 \rightarrow m = 199$.

III.5. On se propose d'étudier dans cette question le front d'ionisation qui sépare le gaz neutre et le gaz ionisé. On suppose que le front est stationnaire et que c'est le gaz qui s'écoule. L'écoulement sera supposé permanent.

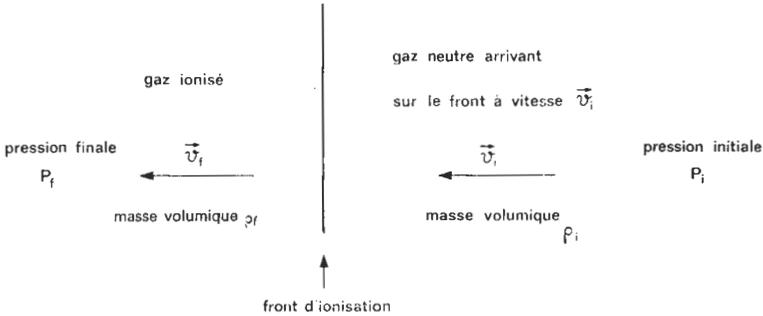


Fig. 1

On désigne par U_i et U_f respectivement les énergies internes massiques du gaz neutre et du gaz ionisé et par $Q > 0$ l'énergie transférée à travers le front d'ionisation par unité de masse du gaz neutre.

a) Quelle est l'origine de l'énergie Q ?

Ecrire trois équations scalaires exprimant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Sachant que les gaz neutre et ionisé sont monoatomiques et parfaits, montrer que l'équation de conservation de l'énergie prend la forme :

$$\frac{v_i^2}{2} + \frac{5}{2} \frac{P_i}{\rho_i} - \left(\frac{v_f^2}{2} + \frac{5}{2} \frac{P_f}{\rho_f} \right) + Q = 0.$$

b) On pose $\psi = \frac{Q_f}{Q_i}$. Montrer que ψ obéit à l'équation :

$$\left(5 \frac{P_i}{\rho_i} + v_i^2 + 2Q \right) \psi^2 - 5 \left(\frac{P_i}{\rho_i} + v_i^2 \right) \psi + 4v_i^2 = 0.$$

c) On introduit les paramètres :

$$C_i = \left(\frac{\gamma P_i}{\rho_i} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad u_i = \sqrt{2Q}.$$

Donner la signification physique de C_i et de u_i . A quelles conditions sur v_i l'équation donnant ψ a-t-elle des racines réelles ? On supposera que $v_i > C_i$ (interpréter) et on montrera que v_i doit être soit supérieur à une valeur v_d , soit inférieur à une valeur v_D et on exprimera v_d et v_D uniquement en fonction des paramètres C_i et u_i .

IV. MASER MILLIMETRIQUE

On considère un jet atomique constitué d'atomes de sodium qui se propagent suivant l'axe Ox . Ces atomes sont excités par un laser peuplant le niveau (n, l) . Les atomes excités traversent une cavité micro-

onde suivie d'un condensateur entre les armatures duquel on peut faire varier le champ électrique $\vec{\varepsilon}(t)$. L'ensemble est représenté sur les fig. 2 et 3.

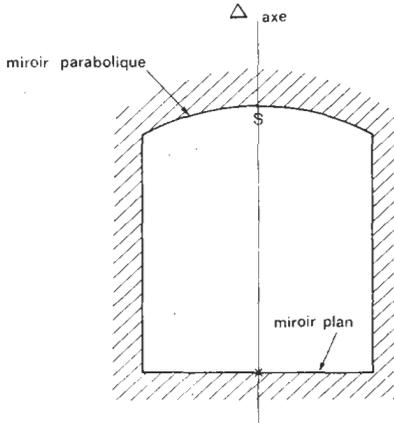


Fig. 2. — Coupe de la cavité de révolution autour de Δ .

IV.1. Calculer l'ordre de grandeur du champ électrique ε nécessaire à l'ionisation d'un atome dans un niveau de nombre quantique principal n . On utilisera le modèle de Bohr et on exprimera ε en fonction de n , de a_0 rayon de Bohr pour $n = 1$ et de E_0 énergie d'ionisation du niveau fondamental. Ce champ est-il facilement réalisable dans un laboratoire ?

IV.2. On fait varier ε linéairement en fonction du temps de façon à détecter les ions produits lorsque $\varepsilon(t)$ atteint la valeur correspondant à l'énergie d'ionisation du niveau (n, l) . Montrer qu'un tel dispositif permet de mesurer simplement la population des niveaux voisins de celui peuplé par le laser.

IV.3. La cavité est composée d'un miroir plan et d'un miroir parabolique de révolution, l'ensemble étant dans un cylindre conducteur (fig. 2). Où faut-il placer le miroir plan pour qu'un rayon parallèle à l'axe puisse revenir sur lui-même (après plusieurs réflexions) ?

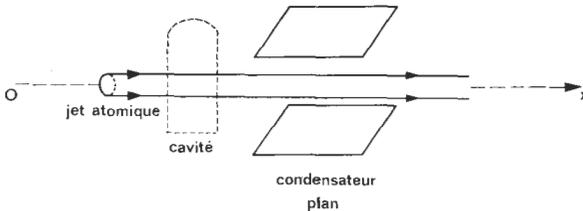


Fig. 3

IV.4. Soit Q_0 le coefficient de surtension de la cavité.

a) Donner la signification physique de Q_0 . On indiquera comment Q_0 dépend du volume V de la cavité et de l'épaisseur de peau δ (à la fréquence considérée) du conducteur entourant la cavité.

b) Montrer que l'énergie à l'intérieur de la cavité décroît comme $e^{-\frac{\omega_0 t}{Q_0}}$ et que le champ électrique à l'intérieur de la cavité

est de la forme $\mathcal{E}_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q_0}} e^{-i\omega_0 t}$. Que représente ω_0 ? Montrer que la distribution des fréquences du champ \mathcal{E} est lorentzienne et retrouver la valeur habituelle de Q_0 faisant intervenir la largeur $\Delta\omega$ à mi-puissance.

IV.5. En l'absence de rayonnement dans la cavité autre que le rayonnement thermique à la température thermodynamique T , on constate à 300 K une désexcitation des atomes situés sur le niveau (25,1) vers le niveau (25,2), alors que ce niveau ne peut pas être peuplé par émission spontanée. Le même transfert s'effectuerait-il si l'ensemble de l'expérience était refroidi de 300 K à 4 K ?

On rappelle la relation entre les coefficients d'Einstein, soit :

$$\frac{A_{nm}}{B_{nm}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \text{ pour la fréquence } \nu.$$

IV.6. a) On injecte dans la cavité microonde un rayonnement de fréquence moitié de celle de la transition étudiée (40 s \rightarrow 39 s). En utilisant le résultat de la question IV.3., montrer qu'il est possible de susciter cette transition à l'aide de 2 photons et que cette méthode permet de s'affranchir de l'effet Doppler du premier ordre.

b) Examiner la polarisation nécessaire à chacun des photons pour permettre la transition. On fera intervenir les propriétés de la réflexion métallique d'une onde électromagnétique.

IV.7. On considère la transition précédente 40 s \rightarrow 39 s dont la largeur à mi-puissance est $\Delta\nu_0$. Quel champ électrique maximal doit-il y avoir dans le laboratoire pour que l'effet du déplacement Stark soit négligeable devant cette largeur ?

On donne le déplacement énergétique Stark ΔE du niveau n, l sous l'effet d'un champ électrique ε :

$$\Delta E = -\frac{3}{2} \frac{a_0}{Z'} e n l \varepsilon - \frac{1}{2} 4\pi \varepsilon_0 \frac{a_0^3}{Z'^4} \frac{n^4}{8} [17n^2 - 3l^2 + 19] \varepsilon^2$$

où a_0 est le rayon de l'orbite de Bohr pour $n = 1$.

Application numérique :

On prend $\Delta\nu_0 = 10$ kHz, $Z' \simeq 1$ (expliquer ce choix pour les atomes de sodium). Calculer l'ordre de grandeur du champ ε maximal.

IV.8. Si l'on supprime tout rayonnement incident et que l'on accorde la cavité sur la transition $27 s \rightarrow 26 p^{1/2}$, l'expérience montre que l'on récupère un fort signal correspondant au peuplement du niveau $26 p^{1/2}$, alors que seul $27 s$ avait été peuplé initialement. Que se passe-t-il ?

Donner un ordre de grandeur de l'énergie émise par les atomes alors qu'il y en a environ 10^3 qui participent à la transition.

IV.9. Si on supprime la cavité, on constate une désexcitation simultanée de tous les atomes du niveau (n, l) vers le niveau (n', l') à condition qu'il y ait plus de 10^6 atomes simultanément dans l'état (n, l) . Que vous suggère une telle expérience ?

SOLUTION

I. ETUDE DES PROPRIETES GENERALES D'UN ATOME DANS UN ETAT DE RYDBERG

I.1. a) La planéité de la trajectoire découle de la conservation du moment cinétique \mathbf{L} . Si $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$, le plan de la trajectoire est perpendiculaire à \mathbf{L} et est défini par les vecteurs \mathbf{r}_0 et \mathbf{v}_0 ($\mathbf{L} = m \mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{v}_0$).

b) Il s'agit d'un résultat très classique : en coordonnées polaires planes r, ϑ les équations différentielles du mouvement s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2) = F_r = \alpha r^{-2} \\ m(2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta})r^{-1} = m r^{-1} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\vartheta}) = F_\vartheta = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

La seconde équation exprime la conservation du moment cinétique, ce qui se traduit par la loi des aires : $r^2 \dot{\vartheta} = C = \frac{L}{m}$.

c) Le calcul des divers éléments de l'orbite est classique également. Différentes méthodes conduisent au résultat. Utilisons les formules de Binet ; posant $u = r^{-1}$ et prenant pour variable ϑ , elles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} -m C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u \right) = F_r = \alpha u^2 \quad a) \\ v^2 = C^2 \left[\left(\frac{du}{d\vartheta} \right)^2 + u^2 \right]. \quad b) \end{array} \right. \quad (2)$$

La relation (2. a) s'écrit :

$$\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u = -\frac{\alpha}{m C^2} = -\frac{m \alpha}{L^2}$$

qui admet pour solution générale :

$$u = r^{-1} = A \cos(\vartheta - \vartheta_0) - \frac{m \alpha}{L^2}$$

où A et ϑ_0 sont des constantes fixées par les conditions initiales, soit :

$$r = \frac{-L^2/m\alpha}{1 - \frac{AL^2}{m\alpha} \cos(\vartheta - \vartheta_0)} \quad (3)$$

équation polaire d'une conique de foyer O.

Posant :

$$p_0 = -\frac{L^2}{m\alpha} > 0 \quad (\alpha < 0)$$

et :

$$\xi = -\frac{AL^2}{m\alpha} > 0$$

(on choisit $A > 0$, ce qui ne diminue pas la généralité), (3) s'écrit sous la forme habituelle :

$$r = \frac{p_0}{1 + \xi \cos(\vartheta - \vartheta_0)} \quad (4)$$

p_0 étant le paramètre et ξ l'excentricité de la conique. Dans la suite, nous prendrons $\vartheta_0 = 0$. L'énergie mécanique :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{\alpha}{r}$$

est également une constante du mouvement. Utilisant (2. b) :

$$E = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{du}{d\vartheta} \right)^2 + u^2 \right] + \frac{\alpha}{r}$$

En reportant (4) dans cette relation, et compte tenu de l'expression de p_0 , on obtient par identification :

$$\xi = \left(1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2} \right)^{1/2} \left(\text{ou encore : } \xi^2 - 1 = \frac{2Ep_0}{-\alpha} \right) \quad (5)$$

La trajectoire étant supposée elliptique, $\xi < 1$, ce qui impose $E < 0$. Si T est la période du mouvement, la loi des aires exprime que :

$$\frac{\pi a b}{T} = C = \frac{L}{m}$$

où a est la longueur du demi-grand axe et b , la longueur du demi-petit axe.

a , b et p_0 sont liés par la relation : $b = \sqrt{ap_0}$.

On en déduit :

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{-\alpha}} \quad (6)$$

D'autre part, en utilisant (4) :

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{p_0}{1 + \xi} + \frac{p_0}{1 - \xi} = \frac{p_0}{1 - \xi^2}$$

d'où l'importante relation :

$$E = \frac{\alpha}{2a}$$

et en reportant dans (6) :

$$T = \pi |\alpha| \left(\frac{m}{-2E^3} \right)^{1/2}$$

Calculons explicitement le vecteur de Runge-Lenz (appelé aussi vecteur de Laplace) :

$$\mathbf{A} = \left(\frac{-m}{2E} \right)^{1/2} [(L r \dot{\vartheta} + \alpha) \mathbf{u}_r - L \dot{r} \mathbf{u}_\vartheta]$$

avec : $L r \dot{\vartheta} = \frac{L^2}{m p_0} (1 + \xi \cos \vartheta) = -\alpha (1 + \xi \cos \vartheta)$

et : $L \dot{r} = \frac{p_0 \xi \sin \vartheta \dot{\vartheta}}{(1 + \xi \cos \vartheta)^2} = \frac{L^2}{m p_0} \xi \sin \vartheta = \alpha \xi \sin \vartheta$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left(\frac{-m}{2E} \right)^{1/2} (-\alpha \xi) (\mathbf{u}_r \cos \vartheta - \mathbf{u}_\vartheta \sin \vartheta) \\ &= \left(\frac{-m}{2E} \right)^{1/2} (-\alpha \xi) \mathbf{u}_x = \mathbf{Cte} \end{aligned} \quad (6)$$

On notera que \mathbf{A} est homogène à un moment cinétique.

Le vecteur \mathbf{A} est effectivement une constante du mouvement ; il est dirigé selon \mathbf{OP} si \mathbf{P} désigne le périhélie de la trajectoire ($\mathbf{OP} // \mathbf{u}_x$). L'existence d'une troisième constante du mouvement (outre E et \mathbf{L}) est liée à la forme particulière du potentiel d'interaction.

Le mouvement est *dégénéré*.

Si on introduit les moments conjugués des variables ϑ et r :

$$p_\vartheta = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{\vartheta}} = m r^2 \dot{\vartheta} = \mathbf{L}$$

et : $p_r = \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$

(où $\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 - \frac{\alpha}{r}$ est le Lagrangien).

On définit :

$$I_{\vartheta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{\vartheta} d\vartheta = L \quad \text{et} \quad I_r = \frac{2}{2\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} p_r dr,$$

soit :

$$\begin{aligned} I_r &= \frac{2}{2\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left[2m \left(E - \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{L^2}{r} \right]^{1/2} dr \\ &= -L - \alpha \left(\frac{m}{-2E} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

L'énergie E s'exprime simplement en fonction de I_{ϑ} et I_r par :

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2(I_{\vartheta} + I_r)^2}. \quad (7)$$

Les « fréquences » fondamentales du mouvement sont définies

par : $\omega_1 = \frac{\partial E}{\partial I_1}$, $\omega_2 = \frac{\partial E}{\partial I_2}$. Dans le cas présent, elles sont égales :

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{m\alpha^2}{(I_{\vartheta} + I_r)^3} = m|\alpha| \left(\frac{-2E}{m} \right)^{3/2} = \frac{2\pi}{T}.$$

C'est cette égalité qui traduit la dégénérescence. Plus généralement, un mouvement est dégénéré lorsque deux ou plusieurs

fréquences sont dans des rapports rationnels : $\frac{\omega_i}{\omega_k} = \frac{N_i}{N_k}$ où

N_i et N_k sont des entiers. On montre que la dégénérescence permet d'obtenir d'autres intégrales premières du mouvement (autres que L et E) (Landau, Mécanique, p. 220).

I.2. a) On compare la force gravitationnelle $\mathcal{G} \cdot \frac{mM}{r^2}$ à la

force de Coulomb $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$. Le rapport de ces forces est :

$$\frac{\mathcal{G} \cdot 4\pi\epsilon_0 m M}{e^2} \simeq 4 \cdot 10^{-40}$$

avec $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI, $4\pi\epsilon_0 = \frac{1}{9} 10^{-9}$ SI, $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg,

$M = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

b) L'accélération \mathbf{a} a pour expression à chaque instant :

$$\mathbf{a} = \frac{\alpha}{m r^2} \mathbf{u}_r.$$

L'énergie rayonnée sur un tour est :

$$W_r = \int_0^T P(t) dt = \frac{e^2}{6 \pi \epsilon_0 c^3} \int_0^T \mathbf{a}^2 dt = m \tau_0 \int_0^T \frac{\alpha^2}{m^2} \frac{1}{r^4} dt$$

d'où la puissance moyenne rayonnée sur une période :

$$\frac{W_r}{T} = \frac{\tau_0 \alpha^2}{m} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{r^4} dt = \frac{\tau_0 \alpha^2}{m} \left\langle \frac{1}{r^4} \right\rangle$$

en utilisant les notations de l'énoncé.

La conservation de l'énergie implique qu'à chaque instant :

$$\frac{dE}{dt} = -P, \text{ d'où la variation } \Delta E \text{ sur une période : } \Delta E = -W_r,$$

soit :

$$\frac{\Delta E}{T} = -\frac{\tau_0 \alpha^2}{m} \left\langle \frac{1}{r^4} \right\rangle.$$

La variation ΔE étant supposée faible, on assimile le rap-

port $\frac{\Delta E}{T}$ à une dérivée $\frac{d\langle E \rangle}{dt}$, d'où la relation demandée :

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = -\frac{\tau_0 \alpha^2}{m} \left\langle \frac{1}{r^4} \right\rangle \quad (8)$$

c) Calculons l'énergie rayonnée sur un tour, soit :

$$W_r = \oint P(t) dt = m \tau_0 \oint \mathbf{a}^2 dt = m \tau_0 \oint \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt$$

Intégrons par parties :

$$\oint \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = \oint \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} dt - \left[\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \right]_0^T$$

le dernier terme est nul, puisque dans l'approximation considérée on intègre sur une orbite non perturbée.

On en déduit :

$$W_r = m \tau_0 \oint \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt$$

Tout se passe comme si le rayonnement était équivalent à une force \mathbf{F}_{ray} telle que :

$$\oint \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt = W_r = m \tau_0 \oint \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt$$

d'où, par identification, l'expression classique de la force de freinage par rayonnement :

$$\mathbf{F}_{\text{ray}} = m \tau_0 \frac{d\mathbf{a}}{dt}. \quad (9)$$

L'application du théorème du moment cinétique donne :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_{\text{ray}} = m \tau_0 \mathbf{r} \wedge \frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (10)$$

Dans l'approximation de l'orbite non perturbée :

$$\mathbf{a} = \frac{\alpha}{m r^2} \mathbf{u}_r$$

d'où :

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\frac{2\alpha}{m r^3} \dot{r} \mathbf{u}_r + \frac{\alpha}{m r^2} \frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$$

où :

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \dot{\vartheta} \mathbf{u}_\vartheta = \frac{\mathbf{L}}{m r^2} \mathbf{u}_\vartheta.$$

En reportant cette expression de $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ dans (10), il vient :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{\tau_0}{m} \frac{\alpha}{r^3} \mathbf{L}.$$

Soit en moyenne séculaire :

$$\frac{d\langle \mathbf{L} \rangle}{dt} = \frac{\tau_0}{m} \left\langle \frac{\alpha}{r^3} \right\rangle \mathbf{L} \quad (11)$$

compte tenu du fait que \mathbf{L} est une constante du mouvement sur une orbite non perturbée.

d) D'après (8) :

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = -\frac{\tau_0}{m} \alpha^2 \left\langle \frac{1}{r^4} \right\rangle.$$

On a :

$$\left\langle \frac{1}{r^4} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{r^4} = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{m}{L r^2} d\theta \quad \left(r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{m} \right)$$

avec :

$$r = \frac{p_0}{1 + \xi \cos \theta}$$

d'où :

$$\left\langle \frac{1}{r^4} \right\rangle = \frac{1}{T} \frac{m}{L p_0^2} \int_0^{2\pi} (1 + \xi \cos \theta)^2 d\theta = \frac{2\pi}{T} \frac{2m}{L p_0^2} (2 + \xi^2)$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{d\langle E \rangle}{dt} &= -\frac{2\pi}{T} \frac{2\tau_0 \alpha^2}{L p_0^2} (2 + \xi^2) \dots \\ &\dots = -\frac{2\pi}{T} \frac{2\tau_0 \alpha^2}{L p_0^2} \left(3 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2} \right) \end{aligned}$$

avec :

$$\alpha = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}, \quad p_0 = -\frac{L^2}{m\alpha}, \quad T = \pi |\alpha| \left(\frac{m}{-2E^3} \right)^{1/2}$$

d'où en définitive :

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = -\frac{2^{3/2}}{3} Z^3 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^4 \frac{m^{1/2}}{c^3} \frac{(-E)^{3/2}}{L^5} \left(3 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2} \right) \quad (12)$$

De même, en utilisant (11) :

$$\frac{d\langle L \rangle}{dt} = \frac{\tau_0}{m} \left\langle \frac{\alpha}{r^3} \right\rangle L = \frac{\tau_0 \alpha}{m} L \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{r^3}$$

où :

$$\int_0^T \frac{dt}{r^3} = \int_0^{2\pi} \frac{m}{L} \frac{d\theta}{r} = \frac{m}{L p_0} \int_0^{2\pi} (1 + \xi \cos \theta) d\theta = 2\pi \frac{m}{L p_0}$$

d'où :

$$\frac{d\langle L \rangle}{dt} = \frac{2\pi}{T} \frac{\tau_0 \alpha}{L p_0} L = -\frac{2\pi}{T} \frac{\tau_0 m \alpha^2}{L^3} L$$

soit :

$$\frac{d\langle L \rangle}{dt} = -\frac{2^{5/2}}{3} Z \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{(-E)^{3/2}}{m^{1/2} c^3 L^3} \quad (13)$$

En divisant (12) par (13) :

$$\frac{d\langle E \rangle}{d\langle L \rangle} = \frac{3}{2} \frac{m \alpha^2}{L^3} + \frac{E}{L}. \quad (14)$$

En fait, il n'y a pas lieu de distinguer dans l'écriture $\langle E \rangle$ et E ou $\langle L \rangle$ et L , étant entendu que ces grandeurs sont dans ces équations des moyennes séculaires.

L'équation (14) s'écrit encore :

$$\frac{dE}{dL} - \frac{E}{L} = \frac{3}{2} \frac{m \alpha^2}{L^3}$$

soit :

$$\frac{d}{dL} \left(\frac{E}{L} \right) = \frac{3}{2} \frac{m \alpha^2}{L^4}$$

d'où par intégration :

$$\frac{E}{L} = -\frac{1}{2} \frac{m \alpha^2}{L^3} + \text{Cte}$$

soit, avec les données initiales :

$$E = E_0 \frac{L}{L_0} + \frac{m \alpha^2}{2 L^2} \left(\frac{L^3}{L_0^3} - 1 \right). \quad (15)$$

Compte tenu de la relation :

$$\xi^2 = 1 + \frac{2 E L^2}{m \alpha^2};$$

on obtient :

$$\xi^2 = 1 + \frac{2 L^2}{m \alpha^2} \left[E_0 \frac{L}{L_0} + \frac{m \alpha^2}{2 L^2} \left(\frac{L^3}{L_0^3} - 1 \right) \right] = \frac{L^3}{L_0^3} \left(1 + \frac{2 E L_0^2}{m \alpha^2} \right)$$

soit :

$$\xi^2 = \xi_0^2 \frac{L^3}{L_0^3}. \quad (16)$$

L'équation (13) montre que L décroît $\left(\frac{dL}{dt} < 0 \right)$; l'excentricité tend donc vers zéro, et une trajectoire elliptique tend vers une trajectoire circulaire du fait du rayonnement. En fait, cette trajectoire circulaire n'est pas atteinte car $\xi = 0$ suppose $L = 0$ soit : $r = 0$.

b) Pour une orbite non perturbée circulaire :

$$L = m v r \quad \text{et} \quad m v^2 = -\alpha r^{-1}$$

d'où :
$$L = m^{1/2} (-\alpha)^{1/2} r^{1/2}$$

en reportant cette expression dans l'équation d'évolution (11), on obtient :

$$\frac{1}{2 r^{1/2}} \frac{dr}{dt} = \frac{\tau_0}{m} \frac{\alpha}{r^3} r^{1/2}$$

soit :
$$r^2 dr = \frac{2 \tau_0}{m} \alpha dt$$

d'où par intégration :
$$\frac{r^3}{3} = \frac{2 \tau_0}{m} \alpha t + \text{Cte}$$

et compte tenu de la condition initiale : $r = r_0$ pour $t = 0$:

$$r^3 = r_0^3 + \frac{2 \tau_0}{m} \alpha t$$

avec : $\alpha = -\frac{Z e^2}{4 \pi \epsilon_0}$, on en déduit la relation demandée :

$$r^3 = r_0^3 - 9 Z C^3 \tau_0^2 t. \quad (17)$$

I.3. a) Les formules demandées sont très classiques. Dans le modèle de Bohr, on pose la relation de quantification :

$$I_\theta = L = n \hbar$$

où n est un entier strictement positif.

La relation (7) donne ainsi ($I_r = 0$) :

$$E = -\frac{m \alpha^2}{2 I_\theta^2} = -\frac{m \alpha^2}{2 \hbar^2 n^2}.$$

D'autre part :

$$E = \frac{\alpha}{2 r} \quad \text{d'où :} \quad r = n^2 \frac{\hbar^2}{m |\alpha|}$$

et :

$$E = -\frac{1}{2} m v^2 \quad \text{d'où :} \quad v = \frac{|\alpha|}{n \hbar} \quad \text{avec} \quad |\alpha| = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0}.$$

Application numérique :

$$n = 200 \quad r = 2,1 \text{ } \mu\text{m} \quad v = 1,1 \cdot 10^4 \text{ m. s}^{-1} \quad E = 0,00034 \text{ eV}$$

$$n = 60 \quad r = 0,19 \text{ } \mu\text{m} \quad v = 3,6 \cdot 10^4 \text{ m. s}^{-1} \quad E = 0,0038 \text{ eV}$$

ce qui fixe l'ordre de grandeur (le micromètre) de la distance de l'électron au noyau pour un état de Rydberg. Noter également les faibles valeurs des énergies de liaison, très inférieures à l'électron-volt, ce qui rend l'électron très sensible aux perturbations extérieures.

b) La dérivation de (17) donne :

$$3 r^2 \frac{dr}{dt} = -9 c^3 \tau_0^2 \quad \text{où} \quad r = n^2 \frac{\hbar^2}{m |\alpha|}$$

soit :

$$3 r^2 \times 2 n \frac{dn}{dt} \cdot \frac{\hbar^2}{m |\alpha|} = -9 c^3 \tau_0^2$$

et remplaçant, dans cette dernière relation, r , par sa valeur en fonction de n :

$$-\frac{dn}{dt} = \frac{3}{2} c^3 \tau_0^2 \frac{m^3 |\alpha|^3}{\hbar^6} \frac{1}{n^5}. \quad (18)$$

Posons $a_0 = \frac{\hbar^2}{m |\alpha|}$ rayon de la 1^{re} orbite de Bohr ; il vient ainsi :

$$\mathfrak{F}(n, n-1) = -\frac{dn}{dt} = \frac{3 c^3 \tau_0^2}{2 a_0^3} \frac{1}{n^5} \quad (19)$$

Application numérique :

On trouve :

$$\mathfrak{F}(n, n-1) = \frac{1,07 \cdot 10^{10}}{n^5}.$$

c) Cette application du principe de correspondance (d'autant mieux vérifié que n est grand) justifie la relation

$$\mathfrak{F}(n, n-1) = -\frac{dn}{dt}.$$

Pour une transition $n \rightarrow n-1$:

$$\Delta E = -\frac{m \alpha^2}{2 \hbar^2} \left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right] \simeq -\frac{m \alpha^2}{\hbar^2} \frac{1}{n^3} \text{ pour } n \text{ grand.}$$

D'autre part, la puissance rayonnée P a pour expression :

$$P = m \tau_0 a^2 = m \tau_0 \frac{v^4}{r^2}$$

avec : $r = n^2 \frac{\hbar^2}{m |\alpha|}$ et $v = \frac{|\alpha|}{n \hbar}$ (I.3. a)

d'où : $P = \frac{\tau_0 m^3 \alpha^6}{\hbar^8} \frac{1}{n^8}$.

D'autre part, en utilisant (18) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(n \rightarrow n-1) \times |\Delta E| &= \left(\frac{m \alpha^2}{\hbar^2} \frac{1}{n^3} \right) \times \left(\frac{3}{2} c^3 \tau_0^2 \frac{m^3 |\alpha|^3}{\hbar^6} \frac{1}{n^5} \right) \\ &= \frac{3}{2} \frac{m^4 |\alpha|^5 c^3 \tau_0^2}{\hbar^8} \frac{1}{n^8} = \frac{\tau_0 m^3 \alpha^6}{\hbar^8} \frac{1}{n^8} = P \end{aligned}$$

compte tenu de la définition de τ_0

d) *Application numérique :*

Transitions : $2p \rightarrow 1s$	$4f \rightarrow 3d$	$6h \rightarrow 5g$
$1/\mathfrak{F}$ mesuré : $1,6 \cdot 10^{-9} s$	$7,3 \cdot 10^{-8} s$	$6,1 \cdot 10^{-7} s$
$1/\mathfrak{F}$ calculé : $3 \cdot 10^{-9} s$	$9,7 \cdot 10^{-8} s$	$7,2 \cdot 10^{-7} s$

L'accord est d'autant meilleur que n est plus grand en accord avec le fait que le principe de correspondance s'applique d'autant mieux que n est grand.

e) Pour l'hydrogène, par exemple :

$$\Delta E_H = h \nu_H = - \frac{m \alpha^2}{2 \hbar^2} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2} \right] \simeq E_0 \times \frac{2}{n^3}$$

où $E_0 = \frac{m \alpha^2}{2 \hbar^2}$ est l'énergie d'ionisation de l'atome H ($E_0 \simeq 13,6$ eV).

On en déduit la longueur d'onde $\lambda_H = \frac{c}{\nu_H} = \frac{h c n^3}{2 E_0}$ soit environ $\lambda_H \simeq 0,4$ m.

Deux types de raies de recombinaison sont observés en astrophysique :

- les raies fortement ionisées (hélium 2 fois ionisé, fer 11 fois ionisé) pour lesquelles on doit prendre $Z = 2$ ou $Z = 11$. Ces raies sont observées dans les régions les plus proches d'étoiles très chaudes ou dans la couronne solaire ;
- les raies traduisant la recombinaison d'un électron : on observe par exemple des raies de l'hydrogène, l'hélium, le carbone et le soufre. Ces raies sont observées dans les « nuages molé-

culaires denses » de notre Galaxie. Dans ce cas, on doit prendre $Z = 1$ et le calcul doit tenir compte de la masse M de l'atome : il faut remplacer la masse électronique m par la masse réduite

$$\text{duite } \frac{mM}{m+M}.$$

On a :

$$\frac{v_H - v_{He}}{v_H} \simeq m \left(\frac{1}{M_{He}} - \frac{1}{M_H} \right) \simeq -\frac{3}{4} (1837)^{-1} \simeq -4 \cdot 10^{-4}$$

soit une résolution de 2500 (très facile à obtenir en radioastronomie où les résolutions de 10^5 à 10^6 sont fréquentes).

I.4. a) En Relativité restreinte, la relation de la dynamique s'écrit :

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}.$$

Le moment cinétique par rapport à O a pour expression :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$$

$$\text{et : } \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{p} + \mathbf{r} \wedge \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{f} \text{ et } \mathbf{r} \text{ colinéaires})$$

d'où la loi de conservation de \mathbf{L} .

b) En mécanique newtonienne, \mathbf{p} a pour expression :

$$\mathbf{p} = m \dot{r} \mathbf{u}_r + m r \dot{\vartheta} \mathbf{u}_\vartheta = L \frac{\dot{r}}{r^2 \dot{\vartheta}} \mathbf{u}_r + \frac{L}{r} \mathbf{u}_\vartheta$$

ce qui conduit à la formule de Binet :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{L^2}{m r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\vartheta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \mathbf{u}_r.$$

En mécanique relativiste :

$$\mathbf{p} = \gamma m \dot{r} \mathbf{u}_r + \gamma m r \dot{\vartheta} \mathbf{u}_\vartheta = L \frac{\dot{r}}{r^2 \dot{\vartheta}} \mathbf{u}_r + \frac{L}{r} \mathbf{u}_\vartheta \quad (L = \gamma m r^2 \dot{\vartheta})$$

formellement identique à l'expression classique.

La formule de Binet relativiste est donc tout à fait analogue à la formule classique, à la seule différence près que puisque

$$\dot{\vartheta} = \frac{L}{\gamma m r^2}, \text{ il faut remplacer } m \text{ par } \gamma m \text{ dans l'expression finale,}$$

soit :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{L^2}{\gamma m r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \mathbf{u}_r. \quad (20)$$

c) $W = (\gamma - 1) m c^2 + \frac{\alpha}{r}$ est l'énergie mécanique du système.

La relation de la dynamique s'écrit ainsi :

$$-\frac{L^2}{\gamma m r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] = \frac{\alpha}{r^2} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{W}{m c^2} + 1 + \frac{\alpha}{m c^2 r}.$$

On en déduit facilement par substitution la relation demandée :

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{L^2 c^2} \right) \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{m \alpha}{L^2} \left(1 + \frac{W}{m c^2} \right) \quad (21)$$

d) On substitue dans (21) une solution de la forme :

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \xi \cos \Omega \theta}{p_0}$$

d'où, par identification :

$$\Omega = \left(1 - \frac{\alpha^2}{L^2 c^2} \right)^{1/2} \quad (22)$$

Deux minimums successifs de r sont obtenus pour $\theta = 0$ et

$$\theta = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi + \delta\varphi, \text{ d'où :}$$

$$\delta\varphi = 2\pi \left(\frac{1}{\Omega} - 1 \right) = 2\pi \left[\left(1 - \frac{\alpha^2}{L^2 c^2} \right)^{-1/2} - 1 \right]$$

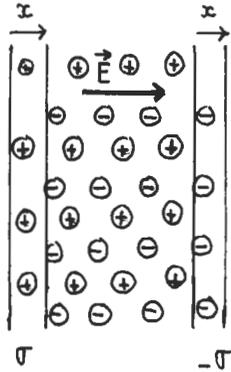
Cette correction relativiste lève la dégénérescence. En particulier, la relation (7) exprimant simplement l'énergie en fonction de I_3 et I_1 , n'est plus valable. Du point de vue quantique, la conséquence est qu'il n'est plus possible d'exprimer les niveaux d'énergie à l'aide du seul nombre quantique n . La levée de la dégénérescence se traduit également par le fait qu'il n'existe plus de constante du mouvement supplémentaire : le vecteur \mathbf{A} n'est plus constant. Une manière simple de le constater est de noter que le grand axe de l'ellipse tourne (de $\delta\varphi$ entre deux passages successifs au périhélie).

II. ATOMES DE RYDBERG DANS UN PLASMA PEU DENSE

II.1. a) Le mouvement des ions dans le plasma peut être négligé à cause de leur masse très supérieure à celle de l'électron. Pour une étude détaillée de cette question, on pourra se rapporter par exemple au Problème 1979 (supplément du B.U.P. n° 622, p. 13).

b) Il apparaît sur les bords de la tranche des charges de densités superficielles σ et $-\sigma$ (figure) avec :

$$\sigma = n_0 e x$$



d'où le champ électrique :

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x = \frac{n_0 e x}{\epsilon_0} \mathbf{u}_x.$$

L'équation du mouvement parallèlement à Ox d'un électron du plasma est :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -e E = -\frac{n_0 e^2 x}{\epsilon_0}$$

d'où un mouvement de pulsation :

$$\omega_p = \left(\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \right)^{1/2} \quad (21)$$

(oscillation de plasma).

Pour une étude plus complète des oscillations de plasma, on se reportera au problème 1979, partie I.

II.2. En un point où le potentiel est V , le rapport des densités particulières n_e et n_i des électrons et des ions est :

$$\frac{n_e}{n_i} = \frac{e^{-(-eV/k_B T)}}{e^{-(eV/k_B T)}} \quad (22)$$

rapport des facteurs de Boltzmann respectifs, $-eV$ et eV représentant les énergies potentielles respectives d'un électron et d'un ion au point où le potentiel est V .

Prenons une origine O coïncidant avec la position d'un ion positif. Au voisinage de O , le potentiel V sera déterminé par la charge de l'ion considéré et par un nuage d'électrons entourant l'ion et formant « écran ». Si n_0 désigne le nombre moyen d'ions et d'électrons par unité de volume, le nombre n_e d'électrons par unité de volume au voisinage de O sera légèrement supérieur à n_0 et de même nombre n_i d'ions par unité de volume sera légèrement inférieur à n_0 , soit :

$$n_e = n_0 e^{eV/k_B T} \quad \text{et} \quad n_i = n_0 e^{-eV/k_B T}$$

en accord avec (22). La constante multiplicative est n_0 , car lorsqu'on s'éloigne de O , $V \rightarrow 0$ et n_e et $n_i \rightarrow n_0$.

On en déduit les densités volumiques de charge :

$$q_e = -n_e e \quad \text{et} \quad q_i = n_i e.$$

L'équation de Poisson s'écrit ainsi, au point M , à la distance $r = OM$ de O :

$$\Delta V(r) = -\frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad q = q_e + q_i$$

soit :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{n_0 e}{\epsilon_0} \left(e^{eV/k_B T} - e^{-eV/k_B T} \right) \simeq \frac{2 n_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T} V$$

si on suppose $|eV| \ll k_B T$.

Posant $V(r) = \frac{1}{r} \Phi(r)$, l'équation devient :

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} = \frac{2 n_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T} \Phi$$

qui admet pour solution générale :

$$\Phi = \alpha e^{r/D} + \beta e^{-r/D}$$

où on a posé :

$$D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2 n_0 e^2}} \quad (23)$$

Le potentiel a pour expression :

$$V(r) = \frac{1}{r} (\alpha e^{r/D} + \beta e^{-r/D})$$

Lorsque $r \rightarrow \infty$, $V(r)$ doit tendre vers zéro, ce qui implique $\alpha = 0$. D'autre part, lorsque $r \rightarrow 0$, $V(r)$ doit tendre vers le potentiel créé par l'ion, soit $\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$, ce qui implique que $\beta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Le potentiel $V(r)$ est de type « Yukawa », soit :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/D} \quad (24)$$

où D est la « longueur de Debye » du plasma. L'atténuation du potentiel coulombien $\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$ par le facteur exponentiel $e^{-r/D}$ traduit l'effet d'écran provoqué par l'entourage de l'ion considéré par un nuage de charges avec prédominance des électrons. Pratiquement, du fait de cet écrantage, pour $r > D$, le potentiel $V(r)$ devient négligeable.

II.3. Un électron est soumis à la force électrique $\mathbf{f} = -e\vec{\epsilon}$ et le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = -e\mathbf{r} \wedge \vec{\epsilon}$$

(la force centrale exercée par le noyau de l'atome n'intervenant pas).

a) Sur une orbite non perturbée, le travail de la force \mathbf{f} est nul. En effet :

$$W = \oint -e\vec{\epsilon} \cdot \mathbf{v} dt = 0$$

car les contributions en deux points symétriques par rapport au centre de l'ellipse sont opposées (changement de \mathbf{v} en $-\mathbf{v}$, $\vec{\epsilon}$ étant uniforme).

On en déduit la relation demandée : $\frac{d\langle E \rangle}{dt} = 0$. On peut donc considérer $\langle E \rangle$ (que nous noterons E) comme constante.

b) • Sur une période du mouvement non perturbé :

$$\Delta \mathbf{L} = \oint -e \mathbf{r} \wedge \vec{\varepsilon} dt$$

d'où :

$$\frac{\Delta \mathbf{L}}{\mathbf{T}} = \frac{d \langle \mathbf{L} \rangle}{dt} = \frac{1}{\mathbf{T}} \oint -e \mathbf{r} \wedge \vec{\varepsilon} dt = -e \langle \mathbf{r} \rangle \wedge \vec{\varepsilon}$$

• Calculons $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$, soit :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{-m}{2E} \right)^{1/2} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \wedge \mathbf{L} + \mathbf{v} \wedge \frac{d\mathbf{L}}{dt} + \frac{\alpha}{r} \mathbf{v} - \frac{\alpha}{r^2} \mathbf{r} \frac{dr}{dt} \right) \quad (25)$$

où E peut être considéré comme constant dans ce calcul en vertu du résultat a). En outre :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m} \left(-e \vec{\varepsilon} + \frac{\alpha}{r^2} \mathbf{u}_r \right) \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = -e \mathbf{r} \wedge \vec{\varepsilon}.$$

En remplaçant dans (25) :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{-m}{2E} \right)^{1/2} & \left[\frac{1}{m} \left(-e \vec{\varepsilon} + \frac{\alpha}{r^2} \mathbf{u}_r \right) \wedge \mathbf{L} \dots \right. \\ & \left. \dots + \mathbf{v} \wedge (-e \mathbf{r} \wedge \vec{\varepsilon}) + \frac{\alpha}{r} \mathbf{v} - \frac{\alpha}{r^2} \mathbf{r} \frac{dr}{dt} \right] \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{-m}{2E} \right)^{1/2} & \left[\frac{1}{m} (-e \vec{\varepsilon}) \wedge \mathbf{L} + \frac{\alpha}{m r^2} \mathbf{u}_r \wedge (m \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) \dots \right. \\ & \left. \dots + \mathbf{v} \wedge (-e \mathbf{r} \wedge \vec{\varepsilon}) + \frac{\alpha}{r} \mathbf{v} - \frac{\alpha}{r^2} \mathbf{r} \frac{dr}{dt} \right] \end{aligned}$$

et, après simplification :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{-1}{2mE} \right)^{1/2} (-e) [\mathbf{r} (m \mathbf{v} \cdot \vec{\varepsilon}) - \vec{\varepsilon} (\mathbf{r} \cdot m \mathbf{v}) + \vec{\varepsilon} \wedge \mathbf{L}].$$

Calculant :

$$\frac{\Delta \mathbf{A}}{\mathbf{T}} = \frac{d \langle \mathbf{A} \rangle}{dt} = \frac{1}{\mathbf{T}} \oint \frac{d\mathbf{A}}{dt} dt$$

on obtient la relation demandée :

$$\frac{d\langle \mathbf{A} \rangle}{dt} = \left(\frac{-1}{2mE} \right)^{1/2} (-e) [\langle \mathbf{r}(m\mathbf{v} \cdot \vec{\varepsilon}) \rangle - \langle \vec{\varepsilon}(\mathbf{r} \cdot m\mathbf{v}) \rangle \dots \\ \dots + \vec{\varepsilon} \wedge \langle \mathbf{L} \rangle]$$

(il vaut mieux écrire $\langle \mathbf{L} \rangle$ plutôt que \mathbf{L}).

$$c) \cdot \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{T} \oint \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} dt \dots$$

$$\dots = \frac{1}{T} \oint (x \dot{x} + y \dot{y}) dt = \frac{1}{T} \oint \frac{d}{dt} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) dt = 0$$

(x et y représentant les coordonnées cartésiennes de \mathbf{r}).

En moyenne, sur une orbite non perturbée, le vecteur \mathbf{r} a une composante nulle sur la direction perpendiculaire au grand axe de l'ellipse (propriété évidente par symétrie).

$$\text{On a donc : } \langle \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{T} \oint r \cos \vartheta dt \mathbf{u}_x.$$

En introduisant, par exemple, l'anomalie excentrique u :

$$r = a(1 - \xi \cos u) \quad \text{et} \quad t = T(u - e \sin u)$$

d'où :

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \int_0^{2\pi} a(1 - \xi \cos u)(\cos u - \xi) du \mathbf{u}_x$$

soit :

$$\langle \mathbf{r} \rangle = -\frac{3}{2} \xi a \mathbf{u}_x = -\frac{3}{2} \xi \frac{\alpha}{2E} \mathbf{u}_x \left(a = \frac{\alpha}{2E} \right)$$

et compte tenu de l'expression (6) de \mathbf{A} :

$$\langle \mathbf{r} \rangle = -\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2mE} \right)^{1/2} \mathbf{A}.$$

• Pour calculer $\langle \mathbf{r}(m\mathbf{v} \cdot \vec{\varepsilon}) \rangle$, utilisons les coordonnées cartésiennes. On a :

$$\langle \mathbf{r}(m\mathbf{v} \cdot \vec{\varepsilon}) \rangle_x = \left[\frac{1}{T} m \oint x \dot{y} dt \right] \varepsilon_y$$

$$\langle \mathbf{r}(m\mathbf{v} \cdot \vec{\varepsilon}) \rangle_y = \left[\frac{1}{T} m \oint y \dot{x} dt \right] \varepsilon_x$$

avec, en outre :

$$m \oint x \dot{y} dt = -m \oint \dot{x} y dt = \frac{L}{2} T$$

d'où l'égalité demandée :

$$\langle \mathbf{r} (m \mathbf{v} \cdot \vec{\varepsilon}) \rangle = \frac{1}{2} \vec{\varepsilon} \wedge \mathbf{L}.$$

Remarque.

Dans les calculs d'intégration précédente, il est indifférent de confondre \mathbf{L} et $\langle \mathbf{L} \rangle$ ou \mathbf{A} et $\langle \mathbf{A} \rangle$, étant entendu que ces grandeurs varient lentement avec le temps mais doivent être considérées comme constantes dans les calculs d'intégration qui utilisent l'orbite *non perturbée*. Il en sera de même dans la suite avec les vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{Y} .

Des résultats précédents, il découle facilement les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d \langle \mathbf{A} \rangle}{dt} = -\frac{3e}{2} \left(\frac{-1}{2mE} \right)^{1/2} \vec{\varepsilon} \wedge \mathbf{L} \quad a) \\ \frac{d \langle \mathbf{L} \rangle}{dt} = -\frac{3e}{2} \left(\frac{-1}{2mE} \right)^{1/2} \vec{\varepsilon} \wedge \mathbf{A} \quad b) \end{array} \right. \quad (25)$$

d) En additionnant et en soustrayant les équations (25 a) et (25 b), il vient :

$$\begin{array}{l} \frac{d \langle \mathbf{X} \rangle}{dt} = -\vec{\omega}_S \wedge \mathbf{X} \\ \frac{d \langle \mathbf{Y} \rangle}{dt} = -\vec{\omega}_S \wedge \mathbf{Y} \end{array} \quad \text{et} \quad \vec{\omega}_S = -\frac{3e}{2} \left(\frac{-1}{2mE} \right)^{1/2} \vec{\varepsilon}$$

Pour des orbites elliptiques, dans le modèle de Sommerfeld, on quantifie I_ϑ et I_r (voir I.1, page 47), soit :

$$I_\vartheta = n_\vartheta \hbar \quad \text{et} \quad I_r = n_r \hbar,$$

d'où en utilisant (7) :

$$E = -\frac{m a^2}{2 n^2 \hbar^2}$$

en posant : $n = n_\vartheta + n_r$ (26)

expression de E formellement identique à celle du modèle de

Bohr. En outre, on a : $E = \frac{\alpha}{2a}$. On en déduit, à l'aide de (26) :

$$E = -\frac{n^2 \hbar^2}{2 m a^2}$$

et en remplaçant dans l'expression de $\vec{\omega}_S$:

$$\vec{\omega}_S = -\frac{3 e}{2} \frac{a}{n \hbar} \vec{\varepsilon}. \quad (27)$$

e) Les équations d'évolution de $\langle \mathbf{X} \rangle$ et $\langle \mathbf{Y} \rangle$ ont une forme très classique en physique. Ces vecteurs ont un même module constant et précessent à la vitesse angulaire ω_S autour de la direction fixe du vecteur $\vec{\omega}_S$, donc du vecteur champ électrique $\vec{\varepsilon}$. $\langle \mathbf{X} \rangle$ précesse dans le sens direct autour de $\vec{\varepsilon}$, $\langle \mathbf{Y} \rangle$ dans le sens opposé. $\langle \mathbf{X} \rangle$ et $\langle \mathbf{Y} \rangle$ font respectivement un angle constant avec $\vec{\varepsilon}$.

II.4. Cette question étudie l'interaction d'un atome de Rydberg avec un plasma. Comme nous l'avons souligné, l'électron dans un état de Rydberg est très peu lié au noyau ($E \approx 10^{-3}$ eV) et est donc très sensible aux perturbations extérieures, par exemple au champ électrique créé par un électron d'un plasma.

a) Le champ électrique $\vec{\varepsilon}$ créé par un électron du plasma et vu par l'atome de Rydberg est un champ de type coulombien écranté (voir question II.2). En première approximation, on peut modéliser le champ comme il est proposé dans l'énoncé :

$$\vec{\varepsilon} = \vec{0} \quad \text{si} \quad R > D, \text{ longueur de Debye du plasma,}$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{e}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad \text{si} \quad R < D, \text{ ce qui revient à confondre } \vec{\varepsilon}$$

avec le champ coulombien créé par l'électron s'il était seul.

$$b) T_0 = \frac{\|\mathbf{b}_0\|}{\|\mathbf{V}\|} \text{ représente un ordre de grandeur de la durée}$$

d'interaction de l'électron du plasma avec l'atome (temps de collision).

Si $\omega_S T_0 \gg 1$, les vecteurs $\langle \mathbf{X} \rangle$ et $\langle \mathbf{Y} \rangle$ effectuent un très grand nombre de précessions au cours de la collision, d'où un effet moyen de rotation nul.

Si $\omega_S T_0 \ll 1$, les vecteurs $\langle \mathbf{X} \rangle$ et $\langle \mathbf{Y} \rangle$ tournent d'un même angle $|\vartheta|$ petit autour d'une direction fixe (voir question

suiivante), les rotations de $\langle \mathbf{X} \rangle$ et $\langle \mathbf{Y} \rangle$ s'effectuent, comme nous l'avons indiqué, en sens contraires.

c) Le champ électrique créé sur l'atome par l'électron du plasma a pour expression :

$$\vec{\varepsilon}(t) = \frac{e}{4 \pi \varepsilon_0 R^3} (\mathbf{b}_0 + \mathbf{V}t)$$

et :

$$\vec{\phi} = \int_{-T_D}^{T_D} \vec{\omega}_S dt = \frac{3 a}{2 n \hbar} \frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{-T_D}^{T_D} \frac{\mathbf{b}_0 + \mathbf{V}t}{(b_0^2 + \mathbf{V}^2 t^2)^{3/2}} dt$$

Le terme en $\mathbf{V}t$ s'annule par symétrie, de sorte que :

$$\vec{\phi} = \left[\frac{3 a}{2 n \hbar} \frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_0} \int_{-T_D}^{T_D} \frac{dt}{(b_0^2 + \mathbf{V}^2 t^2)^{3/2}} \right] \mathbf{b}_0$$

soit :

$$\vec{\phi} = \frac{3 a}{n \hbar} \frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{1}{b_0^2 V} \left(1 - \frac{b_0^2}{D^2} \right)^{1/2} \mathbf{b}_0$$

compte tenu de ce que :

$$V T_D = (D^2 - b_0^2)^{1/2}.$$

En posant : $\langle v^2 \rangle^{1/2} = \frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_0 n \hbar}$, il vient :

$$|\phi| = \frac{3 a}{b_0} \frac{\langle v^2 \rangle^{1/2}}{V} \left(1 - \frac{b^2}{D^2} \right)^{1/2} \quad (28)$$

la rotation s'effectuant autour du vecteur \mathbf{b}_0 , qu'on peut appeler « vecteur d'impact », le module b_0 étant le paramètre d'impact de la collision. $\langle v^2 \rangle^{1/2}$ représente la vitesse de l'électron sur l'orbite de Bohr correspondant au niveau d'énergie :

$$E = - \frac{m \alpha^2}{2 n^2 \hbar^2} \left(\alpha = \frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_0} \right).$$

d) Le vecteur \mathbf{b}_0 varie aléatoirement en module et direction lors des collisions successives de l'atome avec les électrons du plasma. A chaque collision $\langle \mathbf{X} \rangle$ et $\langle \mathbf{Y} \rangle$ tournent d'un angle $|\phi|$ autour de \mathbf{b}_0 . Représentons $\langle \mathbf{X} \rangle$ et $\langle \mathbf{Y} \rangle$ à partir d'une même origine C. Après plusieurs collisions, les extrémités des vecteurs $\langle \mathbf{X} \rangle$ et $\langle \mathbf{Y} \rangle$ ainsi représentés, se sont déplacées sur

une même sphère de centre C suivant une succession de petits arcs, chaque arc étant décrit par rotation autour d'un axe fixe \mathbf{b}_0 . Les directions de \mathbf{b}_0 étant totalement aléatoires, donc distribuées de manière isotrope, on a un mouvement au hasard (brownien) sur une sphère. Au bout d'un grand nombre de collisions, les vecteurs $\langle \mathbf{X} \rangle$ et $\langle \mathbf{Y} \rangle$ ont tourné d'un grand angle autour d'un axe aléatoire dans l'espace. Noter que les rotations élémentaires de $\langle \mathbf{X} \rangle$ et $\langle \mathbf{Y} \rangle$ étant corrélées, leurs mouvements ne peuvent être traités indépendamment.

e) • On a :

$$\mu = \cos \chi = \frac{\langle \mathbf{X} \rangle \cdot \langle \mathbf{Y} \rangle}{\|\langle \mathbf{X} \rangle\| \cdot \|\langle \mathbf{Y} \rangle\|} = \frac{\mathbf{L}^2 - \mathbf{A}^2}{\mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2}$$

où on a utilisé les définitions de \mathbf{X} et \mathbf{Y} .

En outre, en utilisant les résultats de la question I.1 :

$$\mathbf{L}^2 = \frac{m \alpha^2}{2 |E|} (1 - \xi^2) \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^2 = \frac{m \alpha^2}{2 |E|} \xi^2$$

d'où : $\mu = \cos \chi = 1 - 2 \xi^2$ soit :

$$\xi = \sin \frac{\chi}{2} \quad (29)$$

• On a :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X} \rangle \wedge \langle \mathbf{Y} \rangle &= \|\langle \mathbf{X} \rangle\| \cdot \|\langle \mathbf{Y} \rangle\| \sin \chi \mathbf{n} \\ &= \|\langle \mathbf{X} \rangle\| \cdot \|\langle \mathbf{Y} \rangle\| \sqrt{1 - \mu^2} \mathbf{n} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, compte tenu de la propriété du produit mixte en permutant les vecteurs :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X} \rangle \cdot \frac{d \langle \mathbf{Y} \rangle}{dt} + \langle \mathbf{Y} \rangle \cdot \frac{d \langle \mathbf{X} \rangle}{dt} &= \dots \\ &\dots - 2 \vec{\omega}_S \cdot \mathbf{n} \|\langle \mathbf{X} \rangle\| \cdot \|\langle \mathbf{Y} \rangle\| \sqrt{1 - \mu^2} \quad (30) \end{aligned}$$

où on a utilisé les expressions de $\frac{d \langle \mathbf{Y} \rangle}{dt}$ et de $\frac{d \langle \mathbf{X} \rangle}{dt}$ (II.2. d).

L'équation (30) s'écrit encore, compte tenu de ce que $\|\langle \mathbf{X} \rangle\|$ et $\|\langle \mathbf{Y} \rangle\|$ restent constant :

$$\|\langle \mathbf{X} \rangle\| \cdot \|\langle \mathbf{Y} \rangle\| \frac{d\mu}{dt} = \dots$$

$$\dots - 2 \vec{\omega}_S \cdot \mathbf{n} \|\langle \mathbf{X} \rangle\| \cdot \|\langle \mathbf{Y} \rangle\| \sqrt{1 - \mu^2}$$

d'où l'équation d'évolution de μ :

$$\frac{d\mu}{dt} = -2 \sqrt{1 - \mu^2} \vec{\omega}_S \cdot \mathbf{n}. \quad (31)$$

• La durée d'une collision étant considérée comme petite, la variation $\delta\mu$ de μ dans une collision se déduit immédiatement de (31), soit :

$$\delta\mu = -2 \sqrt{1 - \mu^2} (\vec{\omega}_S dt) \cdot \mathbf{n} = -2 \sqrt{1 - \mu^2} \vartheta \cdot \mathbf{n}$$

ou encore :

$$\delta\mu = -2 \sqrt{1 - \mu^2} \vartheta \frac{\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{b}_0\|} \quad (32)$$

en négligeant les termes en ϑ d'ordre supérieur à 1.

Pour calculer $\langle \delta\mu^2 \rangle$, il faut remarquer que le module du vecteur d'impact \mathbf{b}_0 et sa direction varient aléatoirement de manières *indépendantes*. L'angle ϑ ne dépend que du module de \mathbf{b}_0

[formule (28)] ; d'autre part, $\frac{\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{b}_0\|} = \cos \varphi$ où φ est l'angle de

\mathbf{b}_0 avec \mathbf{n} . Les variables aléatoires ϑ et φ varient donc indépendamment.

Dans ces conditions :

$$\langle (\vartheta \cos \varphi)^2 \rangle = \langle \vartheta^2 \rangle \langle (\cos \varphi)^2 \rangle$$

d'où :

$$\langle \delta\mu^2 \rangle = 4 (1 - \mu^2) \langle \vartheta^2 \rangle \langle (\cos \varphi)^2 \rangle.$$

Du fait de l'isotropie de \mathbf{b}_0 :

$$\begin{aligned} \langle (\cos \varphi)^2 \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int (\cos \varphi)^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^r 2\pi (\cos \varphi)^2 \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

d'où, en définitive :

$$\langle \delta\mu^2 \rangle = \frac{4}{3} (1 - \mu^2) \langle \vartheta^2 \rangle. \quad (33)$$

L'intérêt de $\langle \delta\mu^2 \rangle$ concerne l'évolution à long terme du système. On peut en déduire la *constante de diffusion* λ_D du milieu.

III. ETATS DE RYDBERG DANS LE MILIEU INTERSTELLAIRE

III.1. a) La probabilité p de collision d'un photon avec un atome d'hydrogène est liée à la section efficace σ (pour une interaction donnée) par la relation :

$$p = \sigma n_H l \quad (34)$$

qui découle de la définition de σ . l représente la longueur du trajet du photon dans le milieu.

De la relation (34), il découle que la grandeur $\frac{1}{\sigma n_H}$ représente la longueur de traversée du milieu pour que la probabilité collisionnelle soit égale à 1.

Pour l'ionisation des atomes d'hydrogène : $\frac{1}{\sigma_i n_H} = 10^{11}$ m,

alors que pour la diffusion Thomson $\frac{1}{\sigma_T n_H} = 1,4 \cdot 10^{18}$ m.

La comparaison de ces deux longueurs indique que le phénomène de diffusion Thomson par les ions H^+ formés n'intervient pratiquement pas sur des distances de parcours inférieures à 10^{17} m. On pourra considérer qu'intervient seul le phénomène d'ionisation des atomes H. Il se formera autour de l'étoile dans le milieu interstellaire une sphère totalement ionisée (sphère de Strömngren) qui va grandir continûment (le rayon R de la sphère étant supposé très supérieur à 10^{11} m).

b) Pendant l'intervalle de temps dt , le rayon de la sphère de Strömngren augmente de dR . On choisit dt de sorte que dR soit au moins égal à 10^{11} m de sorte que la probabilité d'ionisation soit égale à 1. L'utilisation des différentielles se justifie par

le fait que $\frac{dR}{R}$ est petit.

Dans le volume de la couronne sphérique d'épaisseur dR , le nombre d'atomes neutres H est égal à $4 \pi R^2 n_H dR$. Le nombre de photons arrivant dans cette couronne est $N_i dt$, les photons émis par l'étoile ne subissant pratiquement aucune diffusion Thomson sur les ions H^+ lors de la traversée de la sphère de Strömngren. Dans la couronne sphérique, la probabilité d'ionisation étant égale à 1, on a l'égalité :

$$N_i dt = 4 \pi R^2 n_H dR$$

soit :

$$\frac{dR}{dt} = \frac{N_i}{4 \pi R^2 n_H} \quad (35)$$

III.2. a) Si on tient compte des recombinaisons proton-électron reformant des atomes H, le bilan se traduit par l'équation :

$$N_i dt = 4 \pi R^2 n_H dR + \frac{4 \pi}{3} R^3 \alpha_T n_i n_e dt \quad (36)$$

le terme supplémentaire représentant le nombre d'atomes reformés pendant l'intervalle de temps dt à l'intérieur de la sphère de Strömngren. La totalité de ces atomes de recombinaison sont ionisés à nouveau par les photons, ce que traduit le bilan (36).

b) $\frac{dR}{dt}$ s'annule lorsque $R = R_H$ tel que :

$$R^3_H = \frac{3 N_i}{4 \pi \alpha_T n_i n_e}. \quad (37)$$

L'intégration de l'équation différentielle (36) conduit à une solution de la forme : $R^3 = R^3_H (1 - e^{-t/\tau})$, le rayon R_H étant atteint au bout d'un temps très grand. La constante de temps a pour

valeur : $\tau = \frac{n_H}{\alpha_T n_i n_e}$; elle est indépendante de N_i .

III.3. a) Dans l'état de niveau n , l'énergie d'un atome est : $-\frac{E_0}{n^2}$ où $E_0 > 0$ est l'énergie d'ionisation de l'atome. La conservation de l'énergie se traduit par :

$$E_C = -\frac{E_0}{n^2} + h\nu. \quad (38)$$

b) Le photon émis peut être ionisant si : $h\nu > E_0$, soit :

$$n < \left(1 - \frac{E_C}{E_0} \right)^{-1/2} \quad (39)$$

Application numérique :

Pour $T_k = 10^4$ K, on trouve la seule valeur $n = 1$.

Pour $T_k = 10^5$ K, il faut $n = 1, 2, 3, 4$.

Pour l'état fondamental ($n = 1$), l'inégalité (39) est toujours satisfaite et le photon émis est toujours ionisant.

c) Les photons ainsi émis ont pour effet de diminuer le taux de recombinaison, donc de diminuer α_T et d'augmenter le rayon R_H .

III.4. a) Les photons d'énergie supérieure à $E_0 = 13,6$ eV ionisent les atomes H mais aussi les atomes C et S. Dans ce cas : $n_i = n_e = n_H + n_C + n_S$ et la relation (37) donne :

$$R^3_H = \frac{3 N_i}{4 \pi \alpha_T (n_H + n_C + n_S)^2}.$$

Pour les photons d'énergie supérieure à E'_0 mais inférieure à E_0 il y a ionisation uniquement des atomes de carbone et de soufre d'où : $n_i = n_e = n_C + n_S$ et :

$$R^3_C = \frac{3 N'_i}{4 \pi \alpha_T (n_C + n_S)^2}.$$

Enfin, les photons d'énergie inférieure à E''_0 n'ionisent que les atomes de soufre, d'où :

$$R^3_S = \frac{3 N''_i}{4 \pi \alpha_T n_S^2}.$$

On ne trouve l'hydrogène ionisé qu'à l'intérieur de la sphère de rayon R_H , le carbone ionisé qu'à l'intérieur de la sphère de rayon R_C , enfin le soufre ionisé qu'à l'intérieur de la sphère de rayon R_S (ce qui suppose en fait $R_H < R_C < R_S$).

On obtient ainsi :

$$\frac{N_i}{N'_i} = \left(\frac{R_H}{R_C} \right)^3 \frac{(n_H + n_C + n_S)^2}{(n_C + n_S)^2} \quad \text{et} \quad \frac{N'_i}{N''_i} = \left(\frac{R_C}{R_S} \right)^3 \frac{(n_C + n_S)^2}{n_S^2}$$

Application numérique :

Avec les valeurs numériques données :

$$n_H + n_C + n_S = n_H (1 + 15 \cdot 10^{-5})$$

$$n_C + n_S = 15 \cdot 10^{-5} n_H \quad \text{et} \quad n_S = 5 \cdot 10^{-5} n_H$$

d'où :

$$\frac{N_i}{N'_i} \simeq 10^{-6} \cdot \frac{1}{(15)^2 10^{-10}} = 44 \quad \text{et} \quad \frac{N'_i}{N''_i} = \left(\frac{1}{1,4} \right)^3 \times 9 = 3,28.$$

b) Désignons par ν_H, ν_C, ν_S les fréquences respectives correspondant à des photons d'énergies E_0, E'_0, E''_0 .

D'après la loi du rayonnement du corps noir supposée applicable au rayonnement de l'étoile, on a :

$$N_i = C \int_{\nu_H}^{\infty} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T^*}} - 1}$$

$$N'_i = C \int_{\nu_C}^{\nu_H} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T^*}} - 1}$$

$$N''_i = C \int_0^{\nu_C} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T^*}} - 1}$$

où C est une même constante multiplicative. La connaissance des rapports N_i/N'_i et N'_i/N''_i permet d'évaluer la température T^* par inversion de fonction. La comparaison des 2 valeurs trouvées permet de tester la validité de l'hypothèse faite d'un rayonnement de corps noir.

c) La transition $n = 200 \rightarrow m = 199$ a une longueur d'onde décimétrique. On utilisera donc des radiotélescopes de pouvoir de résolution différents pour mesurer le diamètre respectif des sphères d'hydrogène, de carbone et de soufre ionisés. Ces mesures ont été faites sur le nuage moléculaire de rho Ophiucus en utilisant les instruments suivants :

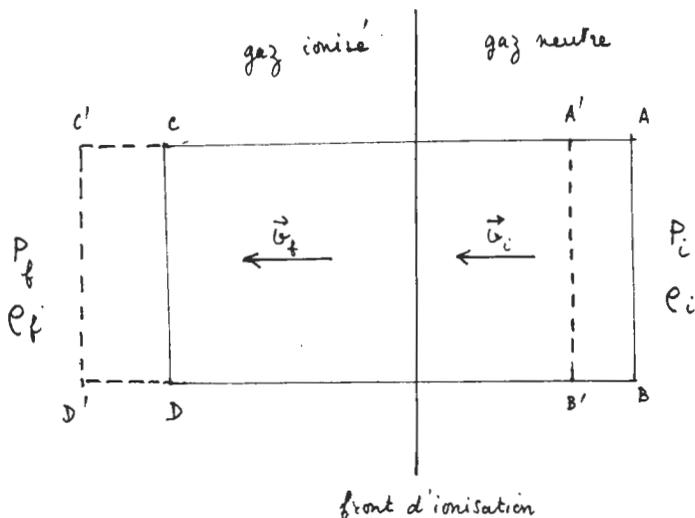
	dimension de l'antenne (D)	résolution pouvoir de $\left(\sim \frac{\lambda}{D} \right)$
— Nançay	200 m	5'
— Westubork	1 600 m	37''
— Interféromètre de Green Bank	11 000 m	5,5''

Les observations de ce nuage situé à $1,5 \times 10^{19}$ m ont permis de déterminer le type spectral de l'étoile excitatrice : il s'agit d'une étoile de type B 5 de température de surface 15 000 K (le soleil est une étoile G 5 de température de surface 6 000 K).

III.5. a) L'énergie Q provient du rayonnement de l'étoile.

b) On raisonne sur un volume cylindrique ABCD de section unité, se déplaçant en A'B'C'D' pendant l'intervalle de temps dt . La stationnarité implique que la matière contenue dans le volume A'B'CD n'intervient pas dans les bilans considérés.

Il suffit de comparer les éléments de volume $ABA'B'$ et $CDC'D'$.



• *Conservation de la masse.* Elle se traduit par l'égalité des masses contenues dans les éléments de volume $ABA'B'$, $CDC'D'$, soit :

$$dm = \rho_i v_i dt = \rho_f v_f dt$$

ou :

$$\rho_i v_i = \rho_f v_f \quad (40)$$

$v_i dt$ et $v_f dt$ étant respectivement les volumes de ces éléments.

• *Bilan de quantité de mouvement.* La variation de quantité de mouvement de la portion $ABCD$ pendant l'intervalle de temps dt vaut :

$$dm(v_f - v_i) = (\rho_f v_f^2 - \rho_i v_i^2) dt.$$

Cette variation est égale à l'impulsion $F dt$ de la force extérieure F appliquée. La force F est égale aux forces de pression, soit :

$$F = P_i - P_f$$

d'où l'équation exprimant le bilan de quantité de mouvement :

$$P_f + \rho_f v_f^2 = P_i + \rho_i v_i^2. \quad (41)$$

• *Bilan d'énergie.* La variation d'énergie de la portion $ABCD$ pendant l'intervalle de temps dt vaut :

$$dm \left[\frac{1}{2} v_f^2 + U_f - \left(\frac{1}{2} v_i^2 + U_i \right) \right].$$

(Noter que, dans l'énergie interne, on comptabilise l'énergie cinétique microscopique mais non l'énergie cinétique macroscopique).

Cette variation d'énergie est égale à l'apport d'énergie extérieure, somme du travail δW des forces de pression et de l'énergie provenant du rayonnement de l'étoile, soit :

$$P_i v_i dt - P_f v_f dt + Q dm \quad (dm = \rho_i v_i dt).$$

On notera que le travail des éventuelles forces d'interaction intérieures au système est déjà comptabilisé dans l'énergie interne. Le bilan d'énergie se traduit finalement par l'équation :

$$\frac{v_f^2}{2} + U_f + \frac{P_f}{\rho_f} = \frac{v_i^2}{2} + U_i + \frac{P_i}{\rho_i} + Q \quad (42)$$

(compte tenu de ce que : $dm = \rho_i v_i dt = \rho_f v_f dt$).

La relation (42), très classique en mécanique des fluides, fait apparaître les enthalpies massiques :

$$H_i = U_i + \frac{P_i}{\rho_i} \quad \text{et} \quad H_f = U_f + \frac{P_f}{\rho_f}$$

et s'écrit plus simplement :

$$\frac{v_f^2}{2} + H_f = \frac{v_i^2}{2} + H_i + Q.$$

Pour un gaz parfait monoatomique :

$$U = \frac{R}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} \quad \left(\gamma = \frac{5}{3} \right).$$

L'équation de conservation de l'énergie prend ainsi la forme :

$$\frac{v_f^2}{2} + \frac{5}{2} \frac{P_f}{\rho_f} = \frac{v_i^2}{2} + \frac{5}{2} \frac{P_i}{\rho_i} + Q. \quad (43)$$

La relation (40) donne : $v_f = \frac{v_i}{\psi}$ et la relation (41) :

$$P_f = P_i + \rho_i v_i^2 \left(1 - \frac{1}{\psi} \right).$$

En substituant ces valeurs dans (43), on obtient la relation demandée :

$$\left(5 \frac{P_i}{\varrho_i} + v_i^2 + 2Q\right) \psi^2 - 5 \left(\frac{P_i}{\varrho_i} + v_i^2\right) \psi + 4 v_i^2 = 0 \quad (44)$$

$$c) C_i = \left(\frac{\gamma P_i}{\varrho_i}\right)^{1/2} \text{ représente la célérité du son dans}$$

le gaz neutre. $u_i = \sqrt{2Q}$ est la vitesse quadratique moyenne des ions correspondant à l'énergie Q apportée par le rayonnement.

Avec ces notations, l'équation (44) s'écrit :

$$(3 C_i^2 + u_i^2 + v_i^2) \psi^2 - (3 C_i^2 + 5 v_i^2) \psi + 4 v_i^2 = 0 \quad (45)$$

Cette équation admet deux racines réelles si :

$$9(C_i^2 - v_i^2)^2 \leq 16 u_i^2 v_i^2.$$

Si on suppose $C_i < v_i$, l'égalité précédente se réduit à :

$$3(C_i^2 - v_i^2) \leq -4 u_i v_i$$

$$\text{soit : } 3 v_i^2 - 4 u_i v_i - 3 C_i^2 \geq 0.$$

Cette condition est satisfaite si :

$$v_i \geq v_d = \frac{1}{3} \left(2 u_i + \sqrt{4 u_i^2 + 9 C_i^2} \right)$$

ou si :

$$v_i \leq v_D = \frac{1}{3} \left(-2 u_i + \sqrt{4 u_i^2 + 9 C_i^2} \right).$$

A ces deux valeurs de la vitesse correspondent deux masses volumiques ϱ_d et ϱ_D critiques (puisque ϱv est une constante à travers le front d'ionisation). Si initialement $\varrho < \varrho_d$ ou $\varrho > \varrho_D$, il y a deux solutions possibles pour ψ , mais si $\varrho_d < \varrho < \varrho_D$, aucune solution n'est acceptable : le front d'ionisation ne peut pas être en contact direct avec la région d'hydrogène neutre non perturbé.

Le scénario du développement d'une région d'hydrogène ionisé autour d'une étoile que l'on suppose passer instantanément de l'état éteint à l'état normal est le suivant :

- initialement, l'interface entre les régions ionisées et neutre est très proche de l'étoile. Le flux ionisant est très important et on a l'évolution suivant l'équation (35),
- au fur et à mesure que le front ionisé s'éloigne de l'étoile, il se ralentit jusqu'à ce que la vitesse critique v_d soit atteinte.

Le front se déplace alors suffisamment lentement pour qu'une onde de choc précède le front d'ionisation. Cette onde se propage dans le milieu neutre à une vitesse légèrement supersonique et modifie la masse volumique ρ du milieu neutre de façon à ce que la condition de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie) soient satisfaites,

- enfin, lorsque le front est encore plus éloigné de l'étoile, $v < v_D$. Une expansion graduelle a lieu et le front est de nouveau en contact direct avec le milieu neutre.

Ces équations sont très générales (la seule différence entre le front d'ionisation et l'onde de choc est la valeur de Q : $Q = 0$ pour l'onde de choc). Toutefois, il existe un champ magnétique dans un tel milieu, et il faudrait compléter les équations par les contributions de l'énergie magnétique.

IV. MASER MILLIMETRIQUE

IV.1. Le champ $\vec{\varepsilon}$ nécessaire à l'ionisation de l'atome dans l'état de niveau n est tel que :

$$e \varepsilon = \frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_0 r_n^2} \quad \text{avec} \quad r_n = n^2 a_0$$

soit :

$$\varepsilon = \frac{e}{4 \pi \varepsilon_0 n^4 a_0^2}$$

L'énergie d'ionisation dans le niveau $n = 1$ a pour expression :

$$E_0 = \frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{1}{2 a_0}$$

d'où l'expression demandée de ε :

$$\varepsilon = \frac{2 E_0}{e a_0 n^4}. \quad (46)$$

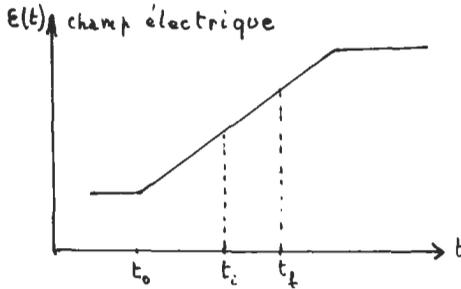
Application numérique :

$$\frac{E_0}{e} = 13,6 \text{ eV}, \quad a_0 = 5 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad \text{d'où :} \quad \varepsilon \simeq \frac{5 \cdot 10^{11}}{n^4} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Pour $n = 100$, $\varepsilon \simeq 5000 \text{ V m}^{-1}$ facilement réalisable au laboratoire.

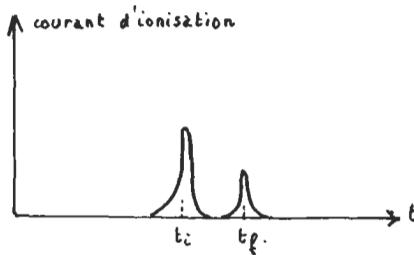
IV.2. S'il y a transfert de population des atomes peuplant le niveau (n, l) vers les niveaux (n', l) ou (n, l') avec $n' \sim n$ ou

$l' \sim l$, on peut ioniser les atomes peuplant ces niveaux avec un champ électrique différent de celui nécessaire à l'ionisation des atomes dans le niveau (n, l) . Ce champ électrique est obtenu à une date différente puisque $\varepsilon(t)$ varie linéairement en fonction du temps.



à t_i , le champ $\varepsilon(t_i)$ ionise (n, l)

à t_f , le champ $\varepsilon(t_f)$ ionise (n', l)



En mesurant le courant apparaissant aux bornes du condensateur, on mesure le nombre d'atomes qui étaient dans l'état (n, l) et (n', l) .

IV.3. Un rayon parallèle à l'axe de révolution du miroir parabolique se réfléchit sur ce miroir de telle sorte qu'il passe par le foyer. De cette propriété classique, il découle qu'il faut placer le miroir plan au foyer du miroir parabolique, perpendiculairement à l'axe.

IV.4. a) Le coefficient de surtension (ou de qualité) Q_0 de la cavité exprime le rapport de l'énergie contenue dans la cavité à l'énergie dissipée par unité de temps, soit :

$$Q_0 = \omega_0 \frac{\text{énergie contenue dans la cavité}}{\text{perte d'énergie par unité de temps}}$$

où ω_0 est la pulsation du champ électromagnétique. Il est équivalent d'écrire :

$$Q_0 = 2\pi \frac{\text{énergie contenue dans la cavité}}{\text{perte d'énergie par période}} \quad (\omega_0 T = 2\pi)$$

Q_0 est proportionnel au volume V de la cavité et inversement proportionnel à l'épaisseur de peau δ , l'énergie étant dissipée du fait des courants induits dans les parois de la cavité.

b) Soit $W(t)$ l'énergie électromagnétique contenue à la date t dans la cavité. Entre les dates t et $t + dt$, l'énergie dW dissipée a pour valeur :

$$dW = -\frac{\omega_0}{Q_0} W dt$$

expression qui découle directement de la définition de Q_0 .

On en déduit par intégration :

$$W = W_0 e^{-\frac{\omega_0}{Q_0} t}$$

W étant proportionnel à \mathcal{E}^2 , le champ électrique \mathcal{E} dans la cavité

a une amplitude de la forme $\mathcal{E}_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q_0} t}$, d'où l'expression de \mathcal{E} :

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q_0} t} e^{-i\omega_0 t} \quad (47)$$

en choisissant : $t \geq 0$ et $\mathcal{E}(t) = 0$ pour $t < 0$.

Le champ $\mathcal{E}(t)$ peut être exprimé par l'intégrale de Fourier :

$$\mathcal{E}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

où la fonction $\mathcal{E}(\omega)$, qui représente le spectre de fréquences du champ, est donnée par la T.F. inverse :

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(t) e^{i\omega t} dt$$

soit :

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{E}_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q_0} t} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt$$

d'où :

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{2\pi} \frac{1}{\frac{\omega_0}{2Q_0} + i(\omega_0 - \omega)}$$

et :

$$\mathcal{E}(\omega) \mathcal{E}^*(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{4\pi^2} \frac{1}{\frac{\omega_0^2}{4Q_0^2} + (\omega_0 - \omega)^2}$$

Le profil de cette dernière fonction est lorentzien et la largeur à mi-hauteur de ce profil est :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

d'où la valeur habituelle du coefficient de qualité : $Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

IV.5. La probabilité par unité de temps de désexcitation des atomes induite par le seuil rayonnement thermique est égale à :

$$\mathfrak{F}_{nm} = B_{nm} u(\nu)$$

où $u(\nu)$ est la densité volumique d'énergie du rayonnement thermique.

Compte tenu des expressions de B_{nm} et $u(\nu)$:

$$\mathfrak{F}_{nm} = A_{nm} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

À 4 K, le facteur exponentiel est très grand et $\mathfrak{F}_{nm} \simeq 0$.

IV.6. a) Lors d'un choc photon-atome, les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie conduisent à la relation :

$$\Delta E_a = E \left(1 - \frac{v_x}{c} - \frac{E}{2mc^2} \right) \simeq E \left(1 - \frac{v_x}{c} \right) \quad (48)$$

E est l'énergie du photon, v_x la composante de la vitesse de l'atome sur le directeur de propagation des photons, m la masse de l'atome et ΔE_a la variation d'énergie de l'atome due à la transition d'un niveau E_{a_1} à un niveau E_{a_2} . En physique atomique, le

terme de recul de l'atome $\frac{E}{2mc^2}$ est tout à fait négligeable.

La relation (48) traduit un effet Doppler du 1^{er} ordre lié au mouvement de l'atome (agitation thermique). Cet effet est gênant puisque v_x est aléatoire, d'où l'idée d'utiliser une transition à

deux photons de même énergie $\frac{E}{2}$ et se propageant dans des

directions opposées. La relation devient dans ce cas :

$$\Delta E_a = \frac{E}{2} \left(1 - \frac{v_x}{c} \right) + \frac{E}{2} \left(1 + \frac{v_x}{c} \right) = E = h\nu$$

faisant disparaître l'effet Doppler du 1^{er} ordre.

b) La transition envisagée s'effectue sans variation de moment cinétique ($s \rightarrow s$). La conservation du moment cinétique implique que les deux photons transportent des moments cinétiques opposés. Un photon de polarisation circulaire transporte un moment cinétique $\pm h$. Par réflexion sur un miroir métallique, une polarisation circulaire droite est transformée en polarisation circulaire gauche et réciproquement.

Il est facile de voir qu'un photon de la cavité revient au même point après un nombre impair de réflexions, donc avec un changement de polarisation, en supposant sa polarisation circulaire. On peut donc provoquer ainsi une transition à deux photons se propageant dans des directions opposées et possédant des moments cinétiques opposés.

IV.7. Pour la transition considérée, l'effet Stark se traduit par un terme de perturbation $\delta(\Delta E)$ ($n, 0 \rightarrow n-1, 0$ avec $n = 40$).

En négligeant les puissances de n inférieures à 5, un calcul immédiat donne :

$$|\delta(\Delta E)| \simeq \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 \frac{a_0^3}{Z^4} \frac{51}{4} n^5 \epsilon_{\max}^2 = h \Delta \nu_0$$

d'où la valeur de ϵ_{\max} :

$$\epsilon_{\max} = \left(\frac{8}{51} \frac{h \Delta \nu_0 Z^4}{4\pi\epsilon_0 a_0^3 n^5} \right)^{1/2}$$

Application numérique :

La valeur $Z' \simeq 1$ est due à l'effet d'écran des électrons formant des couches complètes. Numériquement : $\epsilon_{\max} = 27 \text{ V m}^{-1}$.

IV.8. C'est un effet maser millimétrique : on observe une impulsion correspondant à l'émission simultanée de 1 000 photons

27 s \rightarrow 26 p^{1/2}. L'énergie émise mesurée (à l'aide d'un récepteur de radioastronomie) est de l'ordre de l'électron-volt. Cet effet maser présente un intérêt considérable pour les détecteurs en ondes millimétriques et sub-millimétriques, domaine où les détecteurs traditionnels (à diode Skottky) ne sont guère utilisables (il n'existe pas de klystron à $\nu > 170$ GHz, et les carcinotrons sont fort coûteux).

IV.9. C'est le phénomène de super-radiance : les atomes évoluent simultanément vers le niveau (n', l') tels que le gain soit maximum. Toutefois, il faut faire intervenir les dimensions comparées de l'échantillon avec la longueur d'onde émise. Ce problème est actuellement étudié par 3 groupes de physiciens atomiques dans le monde.

P. ENCRENAZ (*Meudon*), H. GIÉ (*Paris*).

QUELQUES REFERENCES

1. Thèse Etat - Claude FABRE. Avril 1980. Laboratoire de spectroscopie hertzienne de l'E.N.S. (états de Rydberg).
Thèse Etat - Michel GROSS. Juin 1980. Laboratoire de spectroscopie hertzienne de l'E.N.S. (super-radiance).
Thèse Etat - Edith FALGARONE. Juin 1978. Laboratoire de radioastronomie (états de Rydberg dans le milieu interstellaire).
2. Astrophysical concepts par M. HARWITT, édité par J. Wiley & Sons.
3. Transitions between degenerate states of excited hydrogen atoms in Plasma, par I.-C. PERCIVAL et D. RICHARDS. Queen Mary College - London.

Agrégation

(OPTION CHIMIE) (*)

SESSION DE 1980

Epreuve C

COMPOSITION DE CHIMIE (Applications)

(Durée : 6 heures)

Matériel à prévoir : papier millimétré.

Cette épreuve comporte deux parties distinctes.

La première est consacrée à l'étude de produits naturels, les prostaglandines.

La seconde porte sur quelques aspects de la réactivité des carbonyles.

La longueur du texte ne doit pas effrayer ; les énoncés sont volontairement très détaillés et certaines questions peuvent être abordées sans que les précédentes aient été complètement résolues.

A. STRUCTURE ET SYNTHÈSE DE PROSTAGLANDINES

Les parties I et II sont indépendantes.

Les prostaglandines sont des acides gras, hydroxylés, insaturés, ayant un squelette à 20 atomes de carbone ; elles jouent un rôle d'hormones locales.

L'importance de ces substances en physiologie et en médecine, et les difficultés que présentent leurs synthèses suscitent de nombreuses recherches en chimie et en biochimie.

I. STRUCTURE D'UNE PROSTAGLANDINE P

La prostaglandine P est un monoacide, optiquement actif, de formule $C_{20}H_{34}O_5$ et qui possède deux fonctions alcool, une fonction cétone et une double liaison. L'examen des spectres infrarouge et ultraviolet montre que la structure comporte une cyclopentanone et que les fonctions cétone et acide ne sont pas conjuguées avec la double liaison.

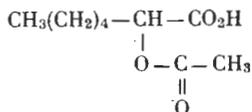
1. La réduction de la fonction cétone par le borohydrure de sodium $NaBH_4$ conduit à deux isomères α et β .

1.1. Représenter dans l'espace l'action du borohydrure de sodium sur une fonction cétone.

1.2. Justifier la formation de deux isomères. De quel type d'isomérisation s'agit-il ?

(*) Les auteurs de l'épreuve A de ce concours en ont établi le corrigé. Il ne nous a pas été possible de le publier dans ce bulletin. Vous pouvez en obtenir une copie en vous adressant au secrétariat de l'U.d.P. (Joindre 5 F en timbres). Cette offre est valable jusqu'en décembre 1981.

2. L'oxydation poussée de P par l'acide chromique dans l'acide acétique permet de montrer qu'une chaîne latérale a pour structure $-(CH_2)_6CO_2H$. P est estérifié par le diazométhane et les deux fonctions alcool sont ensuite facilement bloquées sous forme d'acétate. Le produit ainsi obtenu est ozonolysé dans des conditions oxydantes pour former, entre autres produits :

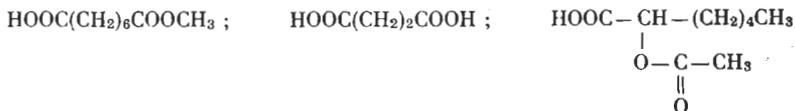


2.1. Ecrire le mécanisme de l'estérification par le diazométhane.

2.2. Proposer une structure partielle pour la deuxième chaîne latérale de P et montrer que l'on peut répartir les 20 atomes de carbone entre le cycle et les deux chaînes latérales.

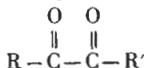
2.3. Montrer qu'un des hydroxyles est porté par un carbone du cycle. Indiquer la classe de l'alcool correspondant.

3. Le traitement de P par la soude aqueuse 0,5 M à la température ordinaire entraîne une déshydratation suivie d'isomérisation. Il se forme B dont l'examen des spectres IR et UV montre que le carbonyle est conjugué avec une double liaison située dans le cycle. B est estérifié par le diazométhane et la fonction alcool est transformée en acétate C. Après ozonolyse de C, dans des conditions oxydantes, les produits suivants ont été identifiés par chromatographie et par spectrométrie de masse :



Le vingtième atome de carbone de B a été éliminé sous forme de CO_2 .

Dans les conditions de l'ozonolyse, les composés α -dicarbonylés



subissent une coupure oxydante conduisant à deux acides : $RCOOH$ et $R'COOH$.

3.1. Proposer un schéma de mécanisme interprétant le résultat de l'ozonolyse des composés α -dicarbonylés.

3.2. Etablir la structure de B. Justifier la formation de CO_2 lors de l'ozonolyse.

3.3. Donner la formule développée plane de P.

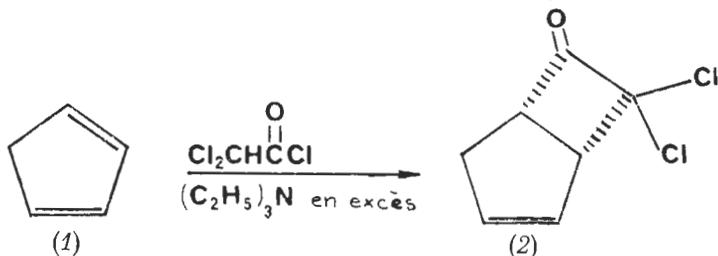
Ecrire le mécanisme des réactions de la transformation $P \xrightarrow{HO-} B$.

3.4. Calculer le nombre de stéréo-isomères correspondant à la formule de P.

La synthèse de ce produit naturel a été décrite par E.-J. Corey et collaborateurs en 1970.

1. Quelle est la configuration des atomes de carbone 9 et 15 ? Justifier.

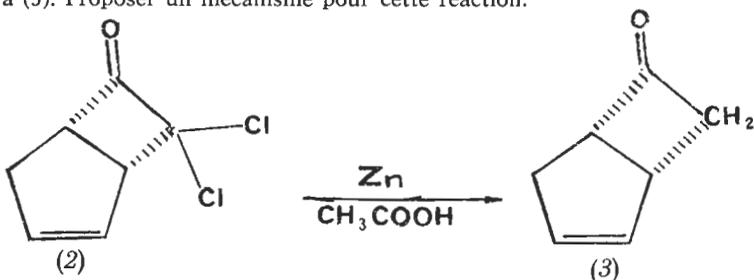
2. La première étape de la synthèse de la $\text{PGF}_{2\alpha}$ est une cycloaddition concertée 2 + 2 du dichlorocétène sur le cyclopentadiène (1).



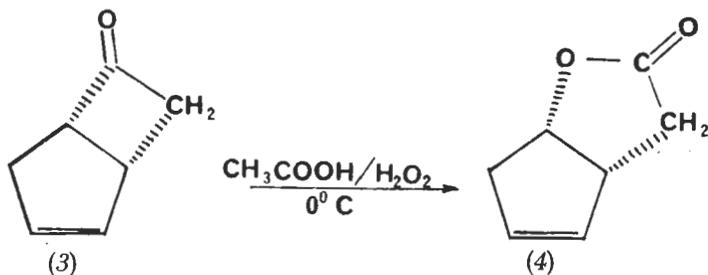
2.1. Ecrire le mécanisme de formation du dichlorocétène à partir du chlorure de l'acide dichloroacétique.

2.2. Montrer que la cycloaddition concertée 2 + 2 du dichlorocétène sur une double liaison éthylénique, conduite par voie thermique, est impossible par un processus supra-supra, mais peut avoir lieu par un processus supra-antara résultant de l'approche orthogonale des deux doubles liaisons.

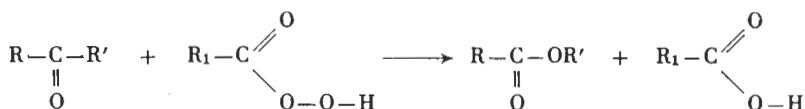
3. (2), soumis à l'action du zinc dans l'acide acétique pur, conduit à (3). Proposer un mécanisme pour cette réaction.



4. (3), en présence d'un mélange d'eau oxygénée et d'acide acétique, subit une réaction de Baeyer-Villiger et conduit à la lactone (4).

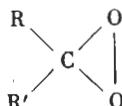


On se propose de faire l'étude de la réaction de Baeyer-Villiger qui est représentée, de façon générale, par le schéma ci-après :

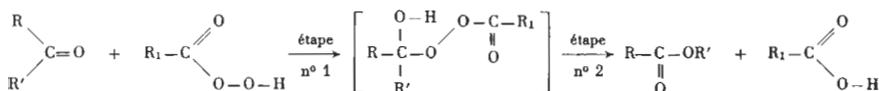


Si l'oxygène du carbonyle de départ est l'oxygène 18, cet isotope se retrouve intégralement dans le carbonyle de l'ester final.

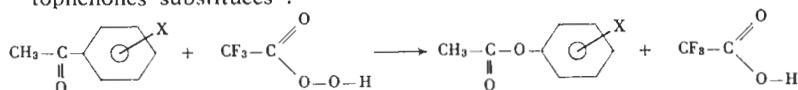
4.1. Montrer que ce résultat exclut la possibilité d'un intermédiaire cyclique tel que :



4.2. Un autre mécanisme proposé est indiqué ci-après. Est-il compatible avec les résultats expérimentaux relatifs au marquage ?



4.3. On étudie l'oxydation par l'acide trifluoroperacétique d'acétophénonnes substituées :



La réaction, effectuée dans l'acétonitrile, donne les résultats cinétiques consignés dans le tableau ci-après (les lettres *p* ou *m* indiquent la position para ou méta du substituant X; σ est la constante de Hammett du substituant X; k' est la constante de vitesse de la réaction de Baeyer-Villiger).

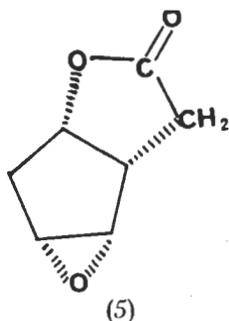
X.....	<i>p</i> - CH ₃	H	<i>p</i> - Br	<i>p</i> - Cl	<i>m</i> - NO ₂	<i>p</i> - NO ₂
σ	- 0,17		0,23	0,23	0,71	0,78
$5 + \log_{10} k'$	2,47	2,23	1,88	1,73	1,23	1,04

$\log_{10} k'$ est déterminé à $\pm 0,08$ près.

Montrer que ces résultats permettent d'établir une corrélation de Hammett. Déterminer la valeur de ρ pour la réaction étudiée.

Sachant que l'étape n° 2 est cinétiquement limitante, déduire des résultats précédents la nature de son état de transition. Proposer un mécanisme pour cette étape.

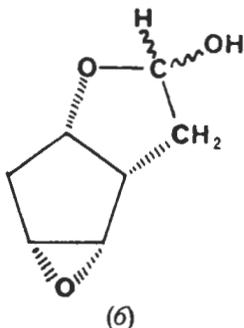
5. L'époxydation de la lactone (4), à 25°C, par acide peracétique conduit principalement à l'époxyde syn (5).



5.1. Ecrire le mécanisme de la réaction d'époxydation qui conduit de (4) à (5).

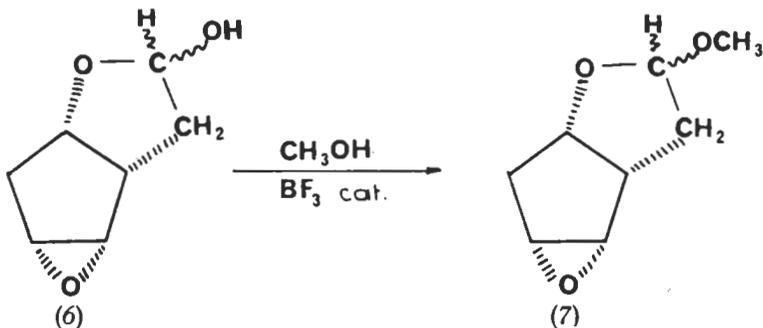
5.2. Interpréter la formation majoritaire de l'époxyde syn (5).

6. (5) est réduit, dans des conditions modérées, par l'hydruure de diisobutylaluminium de formule $(C_4H_9)_2AlH$; dans ces conditions, on obtient un mélange de diastéro-isomères α et β de l'hémicétal (6).



Le symbole \sim indique que la configuration n'est pas précisée.

Le traitement de (6) par le méthanol, en présence de trifluorure de bore comme catalyseur, conduit à l'acétal (7) (mélange de diastéro-isomères α et β).

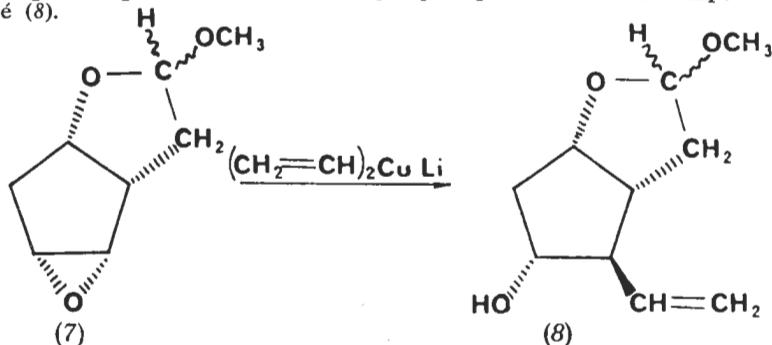


6.1. Indiquer le mécanisme de formation de l'acétal.

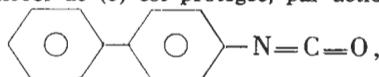
6.2. L'action d'un nucléophile X^- sur (7) peut conduire à la formation de deux alcools régio-isomères, dans le cas d'une ouverture par un mécanisme bimoléculaire.

Représenter la structure des deux alcools ainsi obtenus en justifiant leur stéréochimie.

6.3. Si on fait agir sur (7) le divinyllithiumcuprate, de formule $(CH_2=CH)_2CuLi$, on obtient de façon pratiquement totale le composé (8).



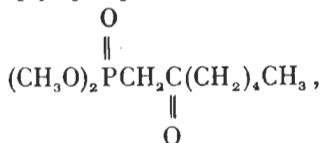
La fonction alcool de (8) est protégée, par action de l'isocyanate



en présence de triéthylamine pour former (9). Ecrire la formule de (9) ainsi que le mécanisme de sa formation.

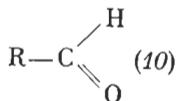
7. 7.1. (9) traité par le periodate de sodium, en présence d'oxyde d'osmium OsO_4 , en milieu acide, conduit à l'aldéhyde (10). Ecrire les étapes de la formation de (10).

7.2. L'oxo-2 heptyl phosphonate de diméthyle :



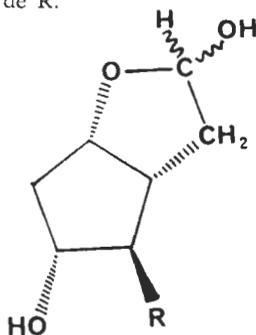
traité par l'hydrure de sodium HNa , est opposé à (10). Il se forme alors la cétone α, β -insaturée (11) dont la double liaison est de configuration E.

Ecrire le mécanisme de la formation de (11) et justifier la configuration E de la double liaison disubstituée : il est d'abord demandé d'écrire en détail le mécanisme des différentes étapes conduisant de l'aldéhyde :



à la cétone α, β -insaturée (11), puis de préciser les facteurs qui permettent d'interpréter l'orientation de la réaction vers la formation de doubles liaisons disubstituées de configuration Z ou E.

7.3. (11) est réduit par le borohydure de sodium NaBH_4 et il se forme deux alcools épimères (12) et (12'). L'alcool majoritaire (12) a la configuration 1S-S. L'hydrolyse acidocatalysée de (12) conduit à (13). Préciser la nature de R.

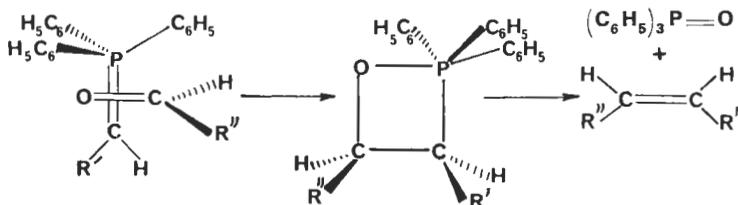


(13)

8. (13) réagit avec l'ylure de formule $(\text{C}_6\text{H}_5)_3\text{P}^+\text{CH}(\text{CH}_2)_3\text{CO}_2^-$ en solution dans le diméthylsulfoxyde, et, après passage en milieu acide, on obtient la prostaglandine $\text{PGF}_2\alpha$.

8.1. Ecrire les réactions qui conduisent de (13) à la $\text{PGF}_2\alpha$.

8.2. Le mécanisme représenté ci-après propose une interprétation de la formation d'une double liaison de configuration Z. (Pour simplifier, on admettra que l'ylure peut aussi s'écrire :



Apporter des arguments dans les domaines orbitaire, stérique, électronique en faveur de cette interprétation.

B. REACTIVITE DES CARBONYLES

Les parties I et II sont indépendantes.

I. CINÉTIQUE DE QUELQUES RÉACTIONS D'UN ALDÉHYDE

1. On étudie l'équilibre, noté (1), en solution aqueuse diluée :



(i Pr — CHO est le méthyl-2 propanal ou isobutanal).

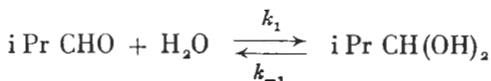
Des études de RMN montrent que les proportions d'aldéhyde hydraté sont respectivement 38 % et 30 % à 25 °C et 35 °C.

1.1. Calculer la constante d'équilibre ainsi que l'enthalpie libre standard de la réaction (1) pour ces deux températures.

1.2. En déduire les grandeurs thermodynamiques ΔH^0_1 et ΔS^0_1 de la réaction (1).

On donne : $R = 8,31 \text{ J. K}^{-1}. \text{ mol}^{-1}$.

2. k_1 et k_{-1} sont les constantes de vitesse pour les réactions d'hydratation et de déshydratation. (La concentration de l'eau est incluse dans la constante k_1 .)



Au temps $t = 0$ on introduit l'aldéhyde dans l'eau ; les molarités initiales (également appelées concentrations molaires volumiques) sont a pour l'aldéhyde et zéro pour le diol. On pose :

$$x = [i \text{ Pr} - \text{CHO}] \text{ et } x_\infty = [i \text{ Pr} - \text{CHO}]_\infty,$$

molarité de l'aldéhyde à l'équilibre.

2.1. Etablir l'expression de $\frac{dx}{dt}$ et en déduire l'expression de

$x = x(t)$. On posera $k = k_1 + k_{-1}$.

2.2. La cinétique est suivie en mesurant la densité optique D de la solution à 300 nm (pour cette longueur d'onde, seule la fonction carbonyle absorbe l'ultraviolet).

a) Montrer que la connaissance de $D = D(t)$ permet de calculer k ;

b) On trouve expérimentalement, à 35 °C :

t (s).....	1	5	10	15	20	25
D ,.....	1,08	1,05	1,02	0,98	0,95	0,92

Par ailleurs, on donne $D_\infty = 0,44$ (valeur de D à l'équilibre).

Montrer que ces valeurs expérimentales rendent bien compte du modèle cinétique.

Calculer la valeur numérique de k .

En déduire les valeurs numériques de k_1 et k_{-1} .

2.3. On étudie la cinétique précédente en milieu acide fort ou base forte. On a pu établir que la constante k , exprimée en s^{-1} , se met sous la forme :

$$k = 7,7 \cdot 10^{-3} + 1\,440 [\text{H}_3\text{O}^+] + 3,16 \cdot 10^4 [\text{OH}^-].$$

- a) Représenter $\log k$ en fonction du pH. Calculer, en particulier, le pH pour lequel l'activité catalytique est minimale.
- b) Proposer un mécanisme réactionnel pour chacun des trois termes de l'expression de k .

2.4. Les résultats de l'étude cinétique en milieu tamponné morpholine - ion morpholinium (morpholine, notée B et ion morpholinium, noté BH⁺) sont les suivants, à 35 °C :

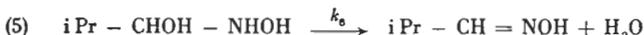
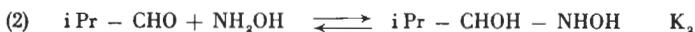
[B] (mol.l ⁻¹)	[BH ⁺] (mol.l ⁻¹)	pH	100 k (s ⁻¹)
0,0075	0,0118	7,2	2,73
0,0150	0,0236	7,2	3,36
0,0374	0,059	7,2	5,42
0,0138	0,0059	7,8	6,81
0,0276	0,0118	7,8	8,13
0,069	0,0295	7,8	10,73

- a) Montrer qu'il s'agit d'une catalyse acide-base généralisée.
- b) Donner l'expression de k en fonction de [B] et [BH⁺].

3. On étudie, en solution aqueuse, la réaction d'oximation, à 35 °C :

$$i\text{Pr} - \text{CHO} + \text{NH}_2\text{OH} \rightarrow i\text{Pr} - \text{CH} = \text{NOH} + \text{H}_2\text{O}.$$

On propose le mécanisme réactionnel suivant :



Les équilibres (1) et (2), de constantes K_1 et K_2 sont supposés instantanés. La réaction (5) a une constante de vitesse k_5 .

3.1. Etablir l'expression de la vitesse d'oximation de l'isobutanal en fonction des molarités des produits de départ.

3.2. On réalise la réaction avec un grand excès d'hydroxylamine par rapport à l'aldéhyde.

- a) Montrer que, dans ces conditions, on peut écrire :

$$\frac{d[\text{ox}]}{dt} = k'([\text{ox}]_\infty - [\text{ox}]) \quad \text{ox étant l'oxime ;}$$

- b) Donner l'expression de k' .

3.3. La réaction est suivie par spectrophotométrie U.V. à 220 nm (seule l'oxime absorbe l'U.V. à cette longueur d'onde) en mesurant la densité optique D de la solution.

Etablir la relation entre D et t . On notera D_{∞} la valeur de D au bout d'un temps infini.

3.4. Au cours d'une expérience, on trouve :

t (s).....	10	20	30	40	50	60
$D_{\infty} - D$	0,407	0,355	0,309	0,263	0,229	0,196

En déduire la valeur de k' .

3.5. On effectue une série de mesures avec les mêmes molarités initiales en aldéhyde et hydroxylamine mais pour différents pH, en utilisant des tampons appropriés.

On trouve les résultats suivants :

pH.....	7,1	7,5	7,7	8,0	8,3	8,6	9,0	9,4	9,8
$10^3 k'$ (s ⁻¹).....	17	12,9	8,0	5,7	3,0	3,4	3,5	6,0	9,7

a) Tracer $\log k'$ en fonction du pH.

b) Préciser s'il s'agit d'une catalyse acide-base spécifique ou généralisée.

4. L'oximation de l'isobutanol, catalysée par la méthylamine, à 35 °C, met en jeu, en plus des étapes (1), (2), (5) les étapes (3), (4), (6) ci-après :



4.1. Etablir l'expression donnant la vitesse de formation de l'oxime. On se placera dans le cas où l'hydroxylamine est en grand excès par rapport à l'aldéhyde et on supposera $K_3 [MeNH_2] \ll 1$.

$$4.2. \text{ Montrer que } \frac{d[ox]}{dt} = k'' ([ox]_{\infty} - [ox]).$$

Etablir l'expression de k'' et la comparer à l'expression de k' obtenue à la question 3.

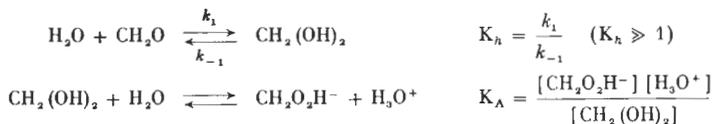
II. RÉDUCTION ÉLECTROCHIMIQUE DU MÉTHANAL.

APPLICATION A L'ÉTUDE CINÉTIQUE DE LA RÉACTION D'HYDRATATION

N.B. — Le Faraday sera noté \mathcal{F} .

1. Ecrire les différentes étapes de la réduction électrochimique du méthanal sachant qu'elle met en jeu deux électrons par molécule et qu'il y a successivement fixation d'électron, protonation, fixation d'électron, protonation.

2. On considère une solution aqueuse de méthanal ; le milieu est tamponné. Dans le modèle proposé, on admettra que seules les réactions suivantes ont lieu :



(k_1 et k_{-1} sont les constantes de vitesse pour les réactions d'hydratation et de déshydratation ; la concentration de l'eau est incluse dans la constante k_1 .)

On étudie la cinétique de la réaction de déshydratation par polarographie. Seule la forme non hydratée est électroactive. Dans les conditions de l'expérience, le polarogramme, qui correspond aux réactions de la question 1, est constitué par une vague à deux électrons. Le courant i_M du palier de la vague est la somme d'un courant i_D contrôlé par diffusion et d'un courant limite i_l cinétiquement contrôlé.

2.1. Donner les expressions de $[\text{CH}_2\text{O}]_i$ et $[\text{CH}_2(\text{OH})_2]_i$ en fonction de $[\text{CH}_2\text{O}]_i$, K_A , K_h . ($[\text{CH}_2\text{O}]_i$ est la concentration molaire initiale en méthanal.)

2.2. Donner l'expression du courant i_D en fonction de $[\text{CH}_2\text{O}]_i$ sachant que le flux molaire f de la substance électroactive X, de la solution vers l'électrode, est donné par $f = \mathcal{K} [X] - [X]_e$; $[X]$ et $[X]_e$ sont respectivement les concentrations molaires de X dans la solution et au voisinage de l'électrode ; \mathcal{K} est une constante dans les conditions de l'expérience ; la surface moyenne de l'électrode est S.

2.3. Le courant i_l est dû à la réduction de CH_2O qui provient de la déshydratation de $\text{CH}_2(\text{OH})_2$. On admet que la réaction de déshydratation a lieu dans une « couche de réaction », notée Λ , d'épaisseur λ , adjacente à l'électrode ; les concentrations molaires en $\text{CH}_2(\text{OH})_2$ et CH_2O dans Λ sont constantes et désignées par $[\text{CH}_2(\text{OH})_2]_\Lambda$ et $[\text{CH}_2\text{O}]_\Lambda$. La diffusion de $\text{CH}_2(\text{OH})_2$ de la solution vers Λ obéit à la loi précédente (même constante \mathcal{K}) et constitue la seule source de $\text{CH}_2(\text{OH})_2$ dans cette couche de réaction.

- Sachant que la concentration molaire $[\text{CH}_2\text{O}]_\Lambda$, qui correspond au courant limite i_l , est nulle, donner l'expression de $[\text{CH}_2(\text{OH})_2]_\Lambda$.
- Donner l'expression de i_l en fonction de $[\text{CH}_2(\text{OH})_2]_\Lambda$.
- Montrer que :

$$i_l = i_{D_0} \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_A + [\text{H}_3\text{O}^+]} \frac{\beta \sqrt{k_{-1}/K_h}}{\beta \sqrt{k_{-1}/K_h} + 1}$$

Expliciter β .

(i_{D_0} est le courant de diffusion prévu théoriquement en supposant que la solution ne contient que CH_2O .)

Par ailleurs, on admet que $\lambda = C k_1^{-1/2}$; C, homogène au produit d'une longueur par l'inverse de la racine carrée d'un temps, est constant dans les conditions de l'expérience.

2.4. Donner l'expression du courant total correspondant au palier de la vague. Dans la suite, on négligera le terme i_D devant i_l .

3. Application.

En milieu basique tamponné, l'effet catalytique de OH^- est largement prédominant et l'expression de k_{-1} peut simplement s'écrire $k_{-1} = k_{\text{OH}} [\text{OH}^-]$.

3.1. Exprimer i_l en fonction de $[\text{H}_3\text{O}^+]$. On posera :

$$\alpha = \beta \sqrt{k_{\text{OH}} K_e / K_h}, \quad K_e \text{ est le produit ionique de l'eau } (10^{-14})$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = h.$$

3.2. Montrer que i_l passe par un maximum i'_l pour une valeur de h que l'on désignera par h_m .

Donner l'expression de K_A en fonction de α et h_m .

Donner l'expression reliant α , h_m , R ($R = i_{D_0}/i'_l$); l'ordonner en α .

3.3. Application numérique.

Les valeurs expérimentales sont les suivantes :

pH.....	12,05	12,40	12,75	13,05	13,25	13,60	13,90
$10^4 i_l (\text{A})$	2,74	3,83	5,18	5,68	5,82	4,90	3,69

Le calcul donne : $i_{D_0} = 3,25 \cdot 10^{-5} \text{ A}$.

La valeur de β est 1,42 S.I.

Calculer α , K_A , k_{OH} en admettant la valeur 10^4 pour K_h .

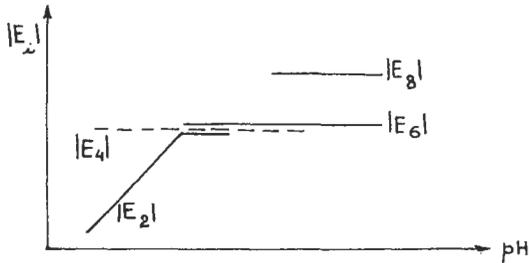
III. RÉDUCTION ÉLECTROCHIMIQUE DES CÉTONES AROMATIQUES EN SOLUTION AQUEUSE

Au cours de la réduction électrochimique de ces composés carbonylés, les réactions possibles sont les suivantes (Ar est un groupement aromatique; R peut être aromatique ou non) :

- (1) $\text{Ar COR} + \text{H}_3\text{O}^+ \rightleftharpoons \text{Ar}^{(+)}\text{COHR} + \text{H}_2\text{O}$ Réaction rapide en milieu acide, moins rapide en milieu neutre et à *fortiori* basique.
- (2) $\text{Ar}^{(+)}\text{COHR} + e^- \rightleftharpoons \text{Ar}^{\dot{\text{C}}}\text{OHR}$ E_2 Processus souvent réversible.
- (3) $\text{Ar}^{\dot{\text{C}}}\text{OHR} \longrightarrow \text{Dimère}$
- (4) $\text{Ar}^{\dot{\text{C}}}\text{OHR} + e^- \longrightarrow \text{Ar}^{(-)}\text{COHR}$ E_4
- (5) $\text{Ar}^{(-)}\text{COHR} + \text{H}_3\text{O}^+ \rightleftharpoons \text{Ar CHOHR} + \text{H}_2\text{O}$
- (6) $\text{Ar COR} + e^- \longrightarrow \text{Ar}^{(-)}\text{COR}$ E_6



E_i est le potentiel de demi-vague de la réaction de réduction correspondante. Les potentiels varient en fonction du pH selon les courbes ci-après ($|E_i|$ est la valeur absolue de la valeur du potentiel E_i) :



Le mécanisme de la réduction peut être partiellement élucidé grâce aux mesures polarographiques. Les polarogrammes examinés ici comportent généralement deux vagues. On rappelle que, si E_i dépend du pH, la réduction est précédée d'une protonation.

1. En milieu acide, les polarogrammes sont constitués de deux vagues de même hauteur, contrôlées par diffusion. Chacune correspond à la mise en jeu d'une mole d'électrons par mole de l'espèce réagissante. Les potentiels de demi-vague sont donnés par les courbes figure A : les courbes α et β correspondent respectivement aux première et deuxième vagues.

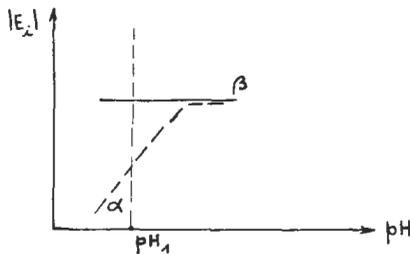


Fig. A

1.1. Quel est le mécanisme de la réduction à $\text{pH} = \text{pH}_1$? Montrer soigneusement comment les différentes hypothèses peuvent être retenues ou rejetées.

1.2. Expliquer l'évolution du polarogramme quand le pH croît (figure B).

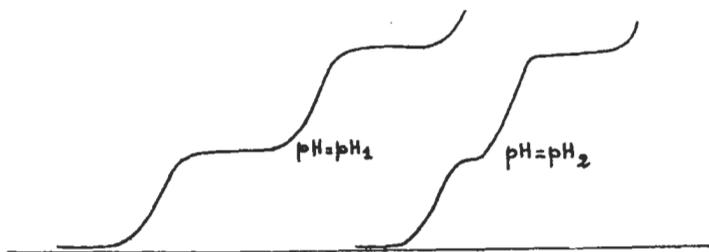


Fig. B. — Evolution du polarogramme quand le pH croît ($\text{pH}_1 < \text{pH}_2$).

2. Pour un pH compris entre 6 et 10, on observe un polarogramme constitué d'une vague à deux électrons; le potentiel de demi-vague est indépendant du pH.

Quel est le mécanisme de la réduction ?

3. En milieu basique ($\text{pH} > 12$), on observe deux vagues à un électron dont chaque potentiel de demi-vague est indépendant du pH.

3.1. Donner le mécanisme de la réduction.

3.2. En milieu intermédiaire, quand le pH croît, l'évolution du polarogramme est donnée par la figure C ci-après.

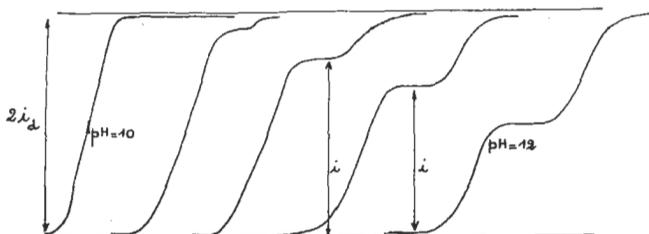


Fig. C

Justifier cette évolution.

Montrer que l'écart entre les deux potentiels de demi-vague est constant.

Montrer que le rapport $\frac{i}{i_d}$ (les courants i et i_d sont définis sur la figure C) est donné par :

$$\frac{i}{i_d} = 1 + \frac{K [\text{H}_3\text{O}^+]}{1 + K [\text{H}_3\text{O}^+]}$$

K est une expression indépendante du pH. On pourra utiliser, en les adaptant, les résultats de II.2.3., p. 94.

4. Dans certains cas, une réaction chimique peut entrer en compétition avec la réaction de transfert électronique correspondant à la deuxième réduction. Cette réaction est en général trop lente pour alté-

rer les polarogrammes ; elle peut être mise en évidence lors de l'électrolyse à potentiel contrôlé.

On réduit par cette méthode une solution de benzophénone en milieu acide. Le nombre de moles d'électrons mis en jeu par mole de benzophénone est 1,15.

Quels sont les produits de la réduction ? Quel nombre de moles de chaque produit obtient-on par mole de benzophénone ?

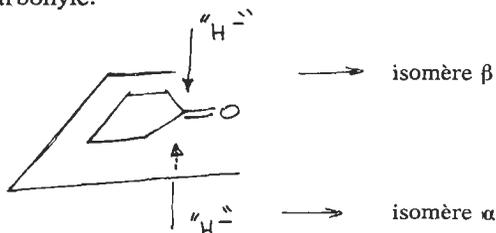
SOLUTION

A. STRUCTURES ET SYNTHÈSE DE PROSTAGLANDINES

I. STRUCTURE D'UNE PROSTAGLANDINE P

Réf. : *Acta chemica scandinavica* 16 (1962) 501 ; 17 (1963) 810, 2271.
S. BERGSTRÖM, B. SAMUELSSON et coll.

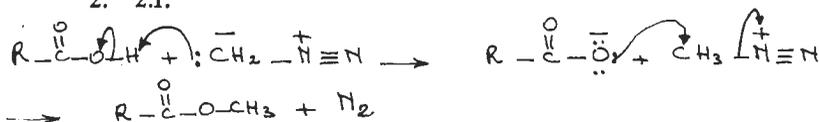
1. 1.1. NaBH_4 fournit « H^- ». Attaque perpendiculaire au plan du carbonyle.



1.2. Le composé P est optiquement actif. L'action de « H^- » introduit un nouveau carbone asymétrique qui peut exister sous deux configurations résultant de l'attaque sur la face α ou sur la face β .

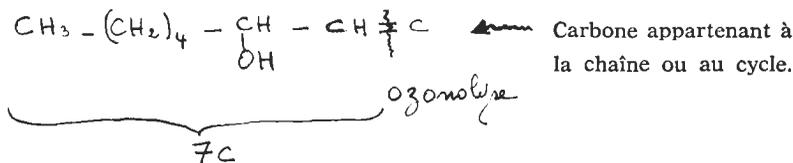
Les deux isomères sont des diastéréo-isomères.

2. 2.1.

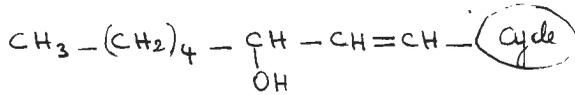


2.2. Il y a 5 C dans un cyclopentanone,

7 C dans la chaîne latérale $(\text{CH}_2)_6\text{COOH}$ (fonction de P). La coupure par ozonolyse donne un fragment qui a 7 C dans lequel la fonction acide résulte de l'ozonolyse et qui a une fonction alcool bloquée sous forme d'acétate. Ce fragment ne vient pas du cycle qui a 5 C sans double liaison ni de la première chaîne latérale qui n'a pas de double liaison ni de fonction alcool. Ce fragment appartient à la deuxième chaîne latérale qui a comme amorce de structure :



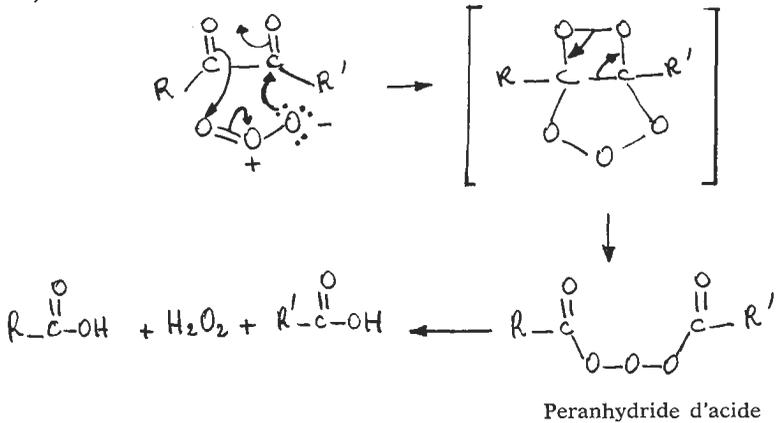
Il y a $5 + 7 + 7 = 19$ atomes de C de placés, d'où le dernier appartient à la chaîne latérale qui s'écrit :



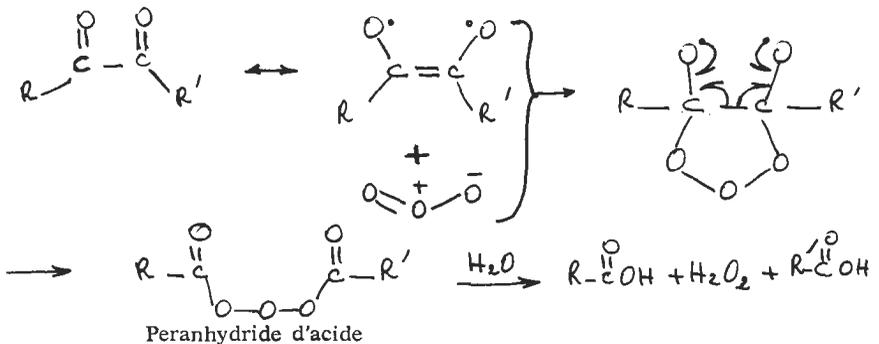
2.3. Des résultats précédents, il apparaît une seule fonction alcool dans les chaînes latérales, la deuxième est dans le cycle. Les fonctions alcool de P étant *facilement* bloquées sous forme d'acétate, la fonction alcool du cycle est secondaire.

3. 3.1. Il n'y a pas de mécanisme écrit pour une telle réaction. On peut proposer les schémas suivants :

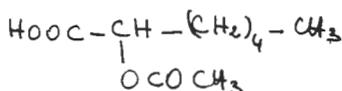
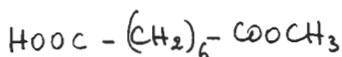
a)



b)



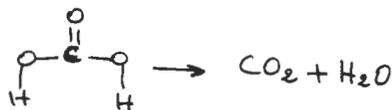
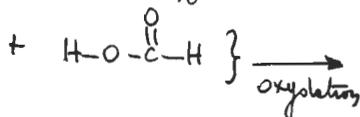
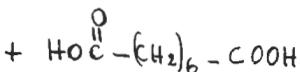
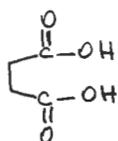
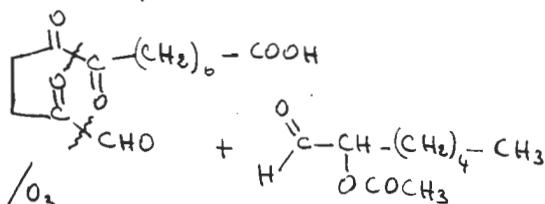
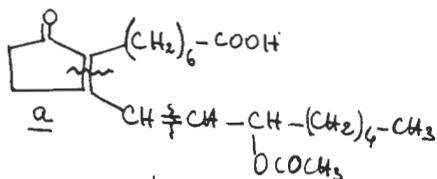
3.2. On reconnaît dans les fragments de l'ozonolyse de C les fragments des chaînes latérales puisqu'ils ont plus de 5 C :



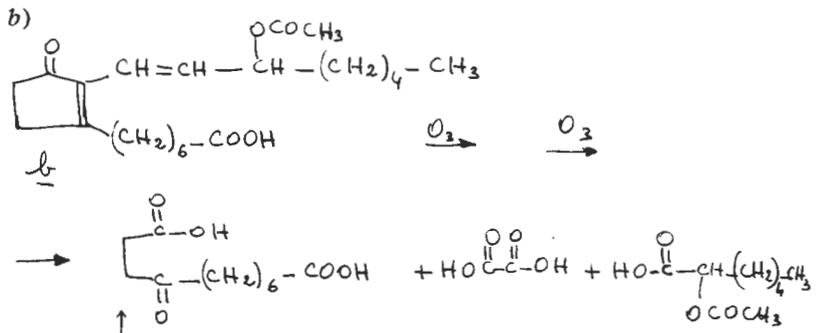
$\text{HOOC} - (\text{CH}_2)_2 - \text{COOCH}_3$ provient du cycle de C qui est une cyclopentanone conjuguée résultant de la déshydratation de la fonction alcool du cycle de P et isomérisation. La fonction alcool restant est dans une chaîne latérale.

On a cherché pour C les structures capables par ozonolyse de fournir $\text{HOOC} - (\text{CH}_2)_2 - \text{COOH}$.

a)

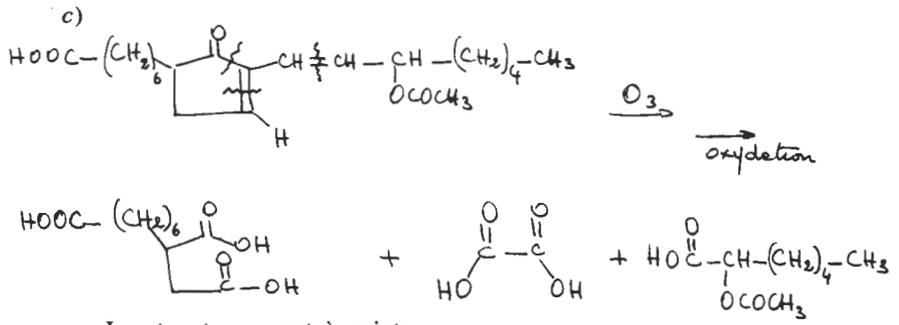


La structure a est compatible avec les résultats de l'ozonolyse et la formation de CO_2 .

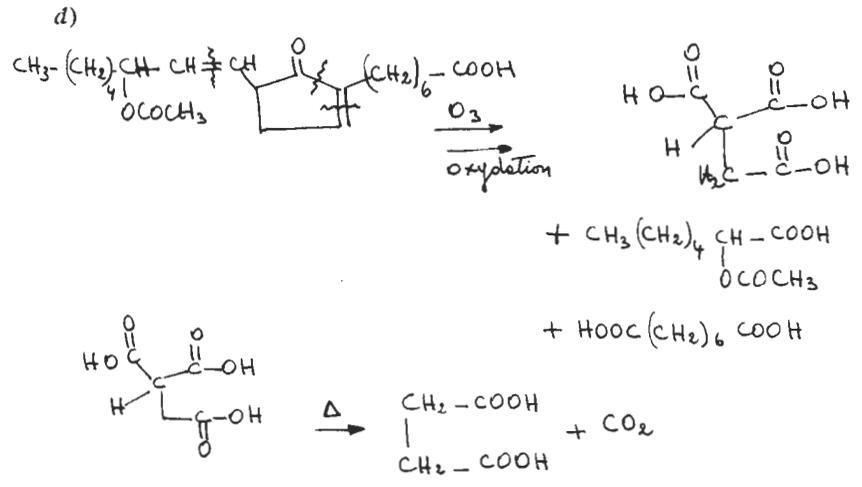


Ce fragment ne peut pas évoluer vers la formation de $\text{HOOC}-(\text{CH}_2)_2-\text{COOH}_3$.

La structure *b* est à rejeter.



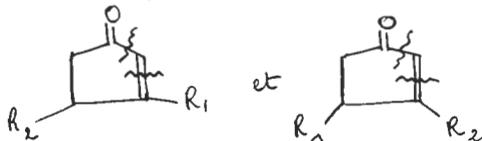
La structure *c* est à rejeter.



Une telle décarboxylation a lieu en général dans des conditions de température bien différentes de celles d'une ozonolyse et la structure *d* n'est pas à retenir.

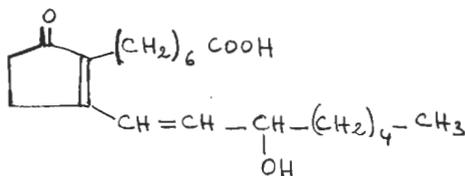
(Dans le cadre de la correction de l'épreuve, cette structure *d* a été notée comme juste ainsi que les réponses logiques aux questions ultérieures).

Les structures du type



sont incompatibles avec la formation de $\text{HOOC}(\text{CH}_2)_4\text{COOH}$.

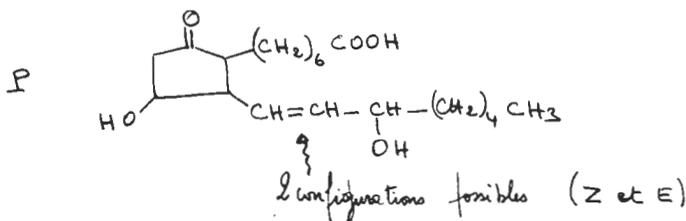
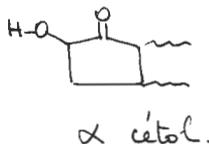
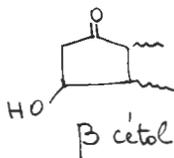
Structure de B.



On ne peut indiquer ni la configuration de la double liaison de la chaîne, ni celle du carbone portant la fonction alcool.

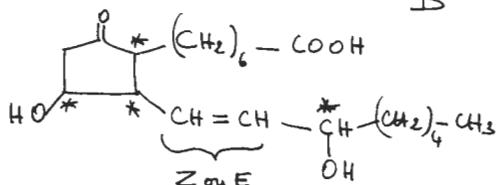
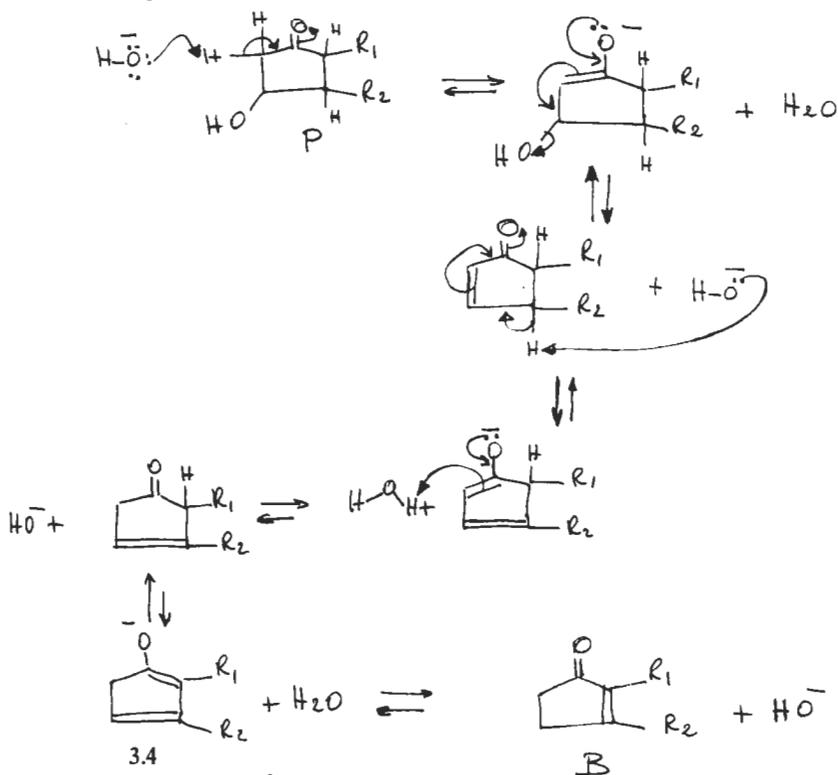
3.3. B provient de P par déshydratation suivie d'isomérisation. La déshydratation concerne la fonction alcool *secondaire* du cycle. P est donc un β cétole ou un α cétole. La déshydratation étant facile (soude 0,5 M - température ordinaire) P est un β cétole.

On a donc pour P :

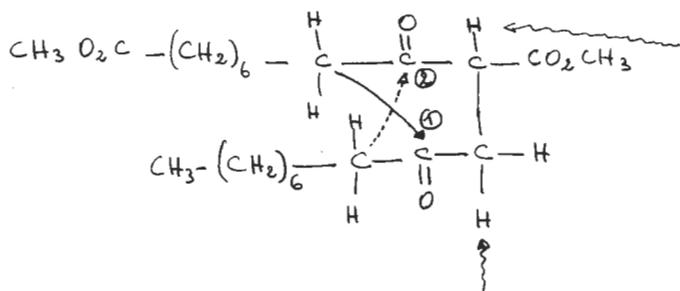


Mécanisme P $\xrightarrow{\text{HO}^-}$ B.

Crotonisation d'un β céto suivie d'isomérisation mettant en jeu des énolates. Formation du système thermodynamiquement le plus stable : double liaison la plus substituée conjuguée avec le carbonyle.



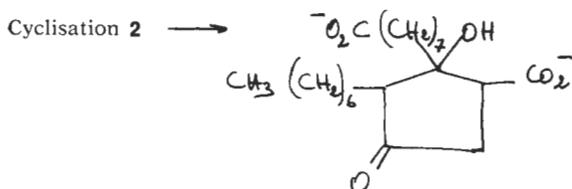
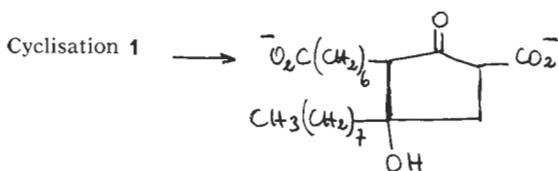
— 4 C asymétriques à 2 configurations chacun,
 — 1 double liaison à 2 configurations,
 d'où 2^5 stéréo-isomères possibles.



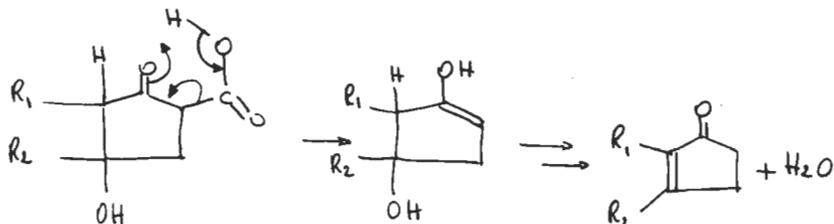
H le plus acide mais conduit à des cycles à 3 ou à 10.
Peu probable.

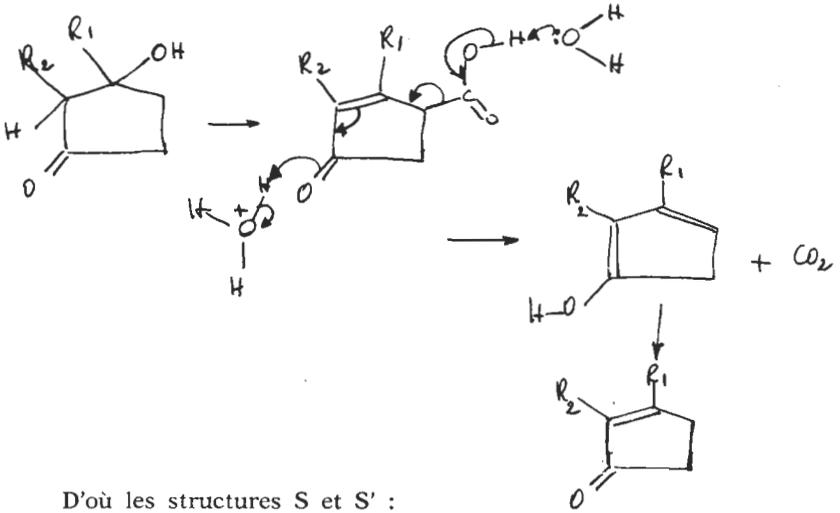
conduit à des cycles à 3 ou à 11.
Peu probable.

Les deux possibilités 1 et 2 conduisent à des cycles à 5. En milieu soude hydroalcoolique, il y a en même temps que l'aldolisation, saponification des fonctions esters.

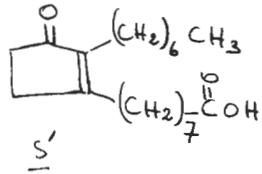
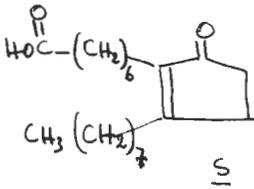


Lors du traitement en milieu acide il y a, en même temps, déshydratation des cétoles et décarboxylation d'un β cétoacide et d'un vinylogue de β cétoacide.





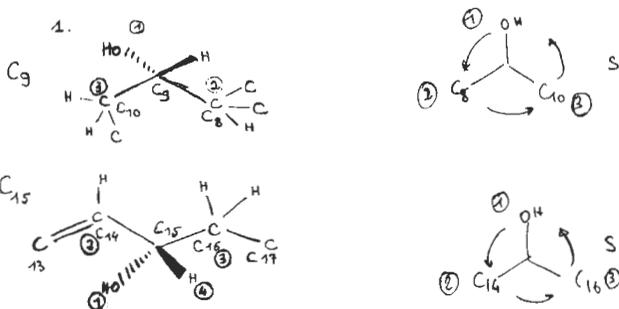
D'où les structures S et S' :



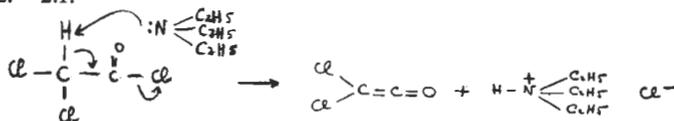
R provient de P dont on connaît la formule plane d'où R a même structure plane que S.

II. SYNTHÈSE STÉRÉOCONTRÔLÉE DE LA PROSTALGLANDINE PGF_{2α}Réf. : E.-J. COREY et al. *Tetr. Lett.* 307 (1970), 311 (1970).

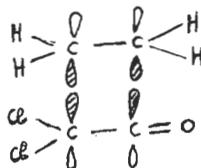
1.



2. 2.1.



Réaction de β élimination $\left\{ \begin{array}{l} \text{H acide : il a 2 Cl pour voisins et} \\ \text{est en } \alpha \text{ d'un C = O} \\ \text{Cl est un bon groupe partant.} \end{array} \right.$

2.2. Cycloaddition $\pi_{2s} + \pi_{2s}$ de processus supra-supra.

Ce processus est « interdit » :

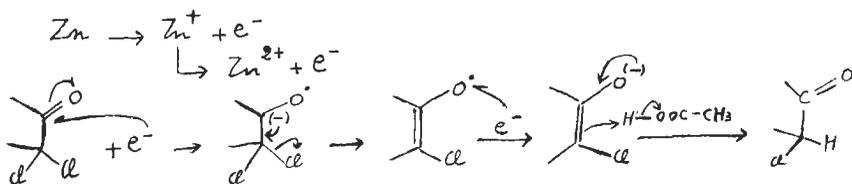
- par HOMO-LUMO + +,
+ -,
- ou par les règles de Hückel : le système à 4 électrons, sans nœud, est de type antiaromatique.

Cycloaddition $\pi_2_s + \pi_2_a$ de processus supra-antara.

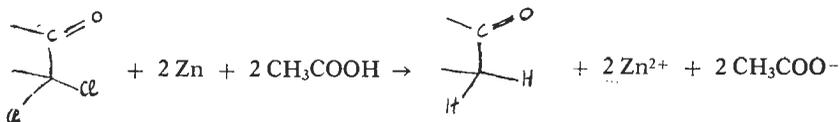


Etat de transition cyclique de type Moebius.

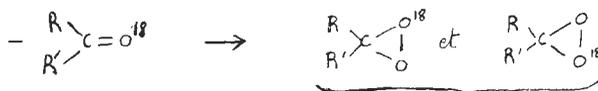
Le processus est permis (4 électrons, un nœud).



Le mécanisme recommence ; le deuxième Cl est remplacé par H ; le bilan sera le suivant :



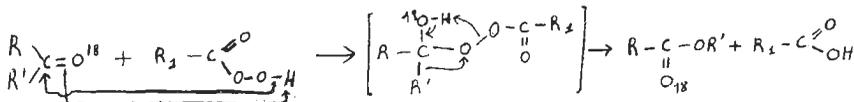
4. 4.1.



L'intermédiaire cyclique peut être marqué indifféremment sur l'un ou l'autre oxygène ; il fournit donc un mélange équitable de :

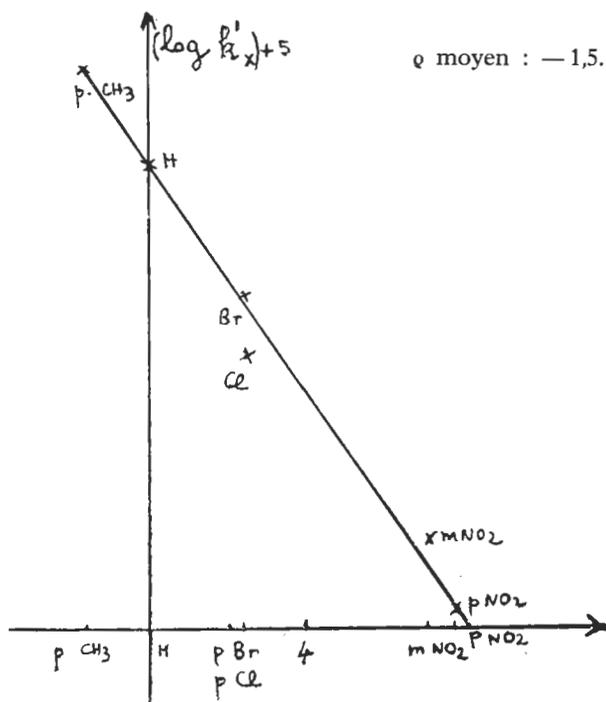


4.2.

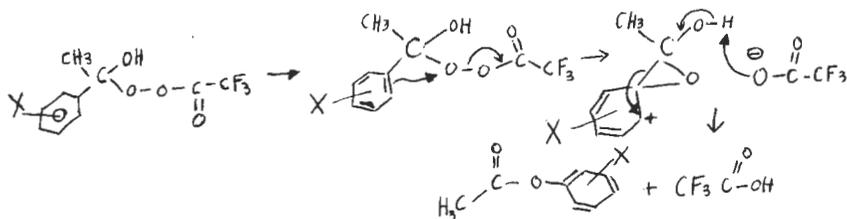


Le mécanisme est représenté par les flèches, le résultat obtenu est bien conforme au marquage.

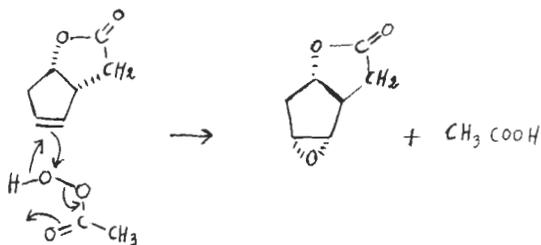
$$\log_{10} \frac{k'_X}{k'_H} = \rho (\sigma_X - \sigma_H) = \rho \sigma_X \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \text{caractéristique du substituant} \\ \swarrow \text{caractéristique de la réaction.} \end{array} \right.$$



L'état de transition a un caractère de carbocation; les groupes donneurs accélèrent, les groupes attracteurs ralentissent.

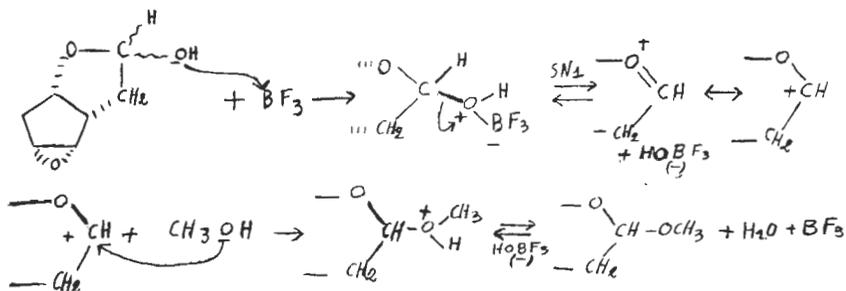


5. 5.1.

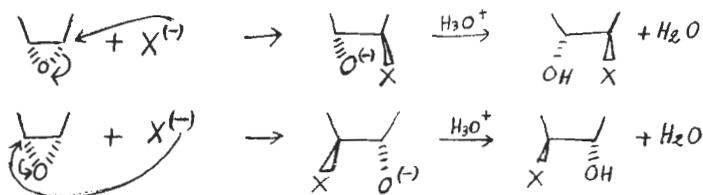


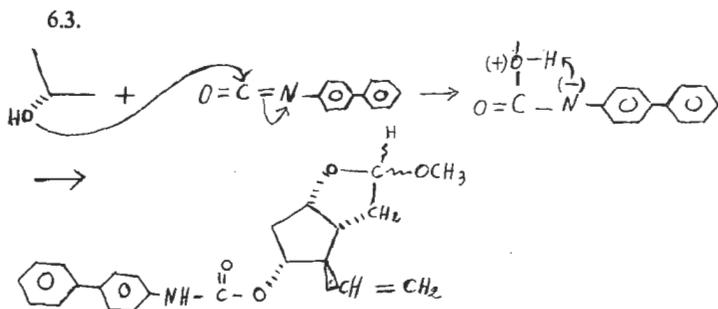
5.2. Comme il y a des interactions entre la lactone et l'acide peracétique (liaison hydrogène, liaison dipôle-dipôle), l'approche de l'acide se fait du côté de la lactone, on obtient l'époxyde syn.

6. 6.1.

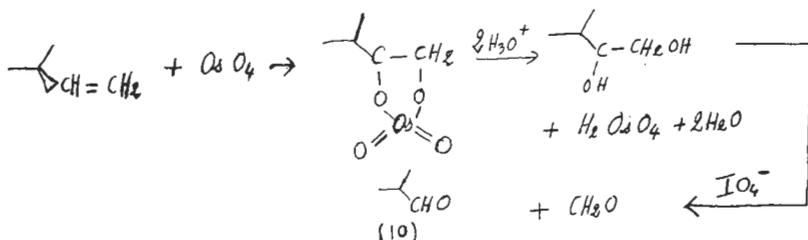


6.2.

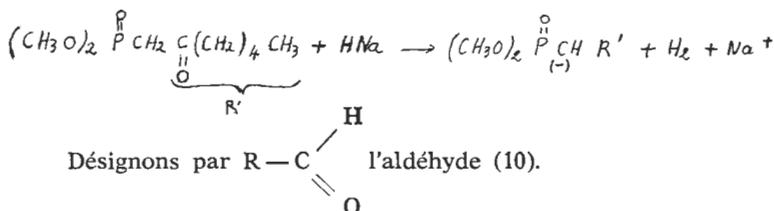




7. 7.1.



7.2.



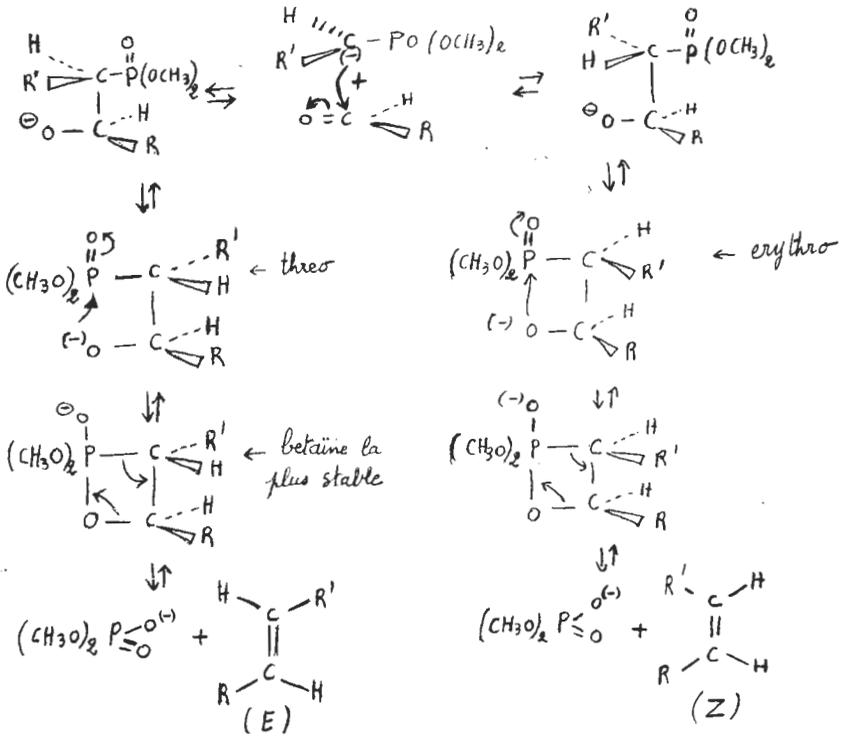
(10) réagit sur l'ylure suivant les réactions ci-après :

Le composé erythro se forme le plus rapidement ; s'il n'existe aucun facteur stabilisant, la bêtaïne se décompose conduisant à l'oléfine Z.

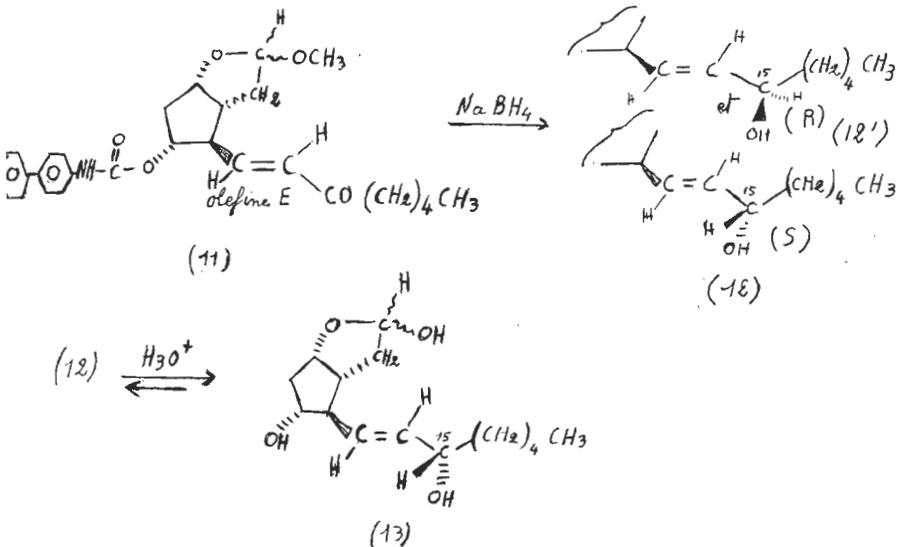
En présence de facteur stabilisant, comme dans le cas précédent où il y a stabilisation par résonance du CO :



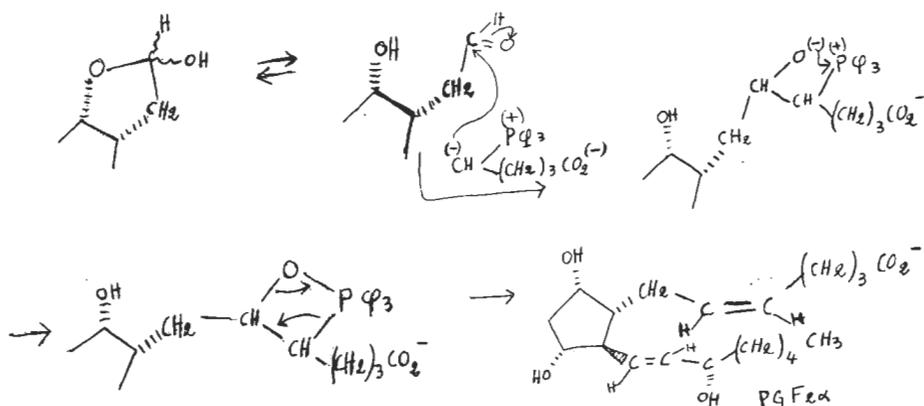
le produit cinétique erythro est en équilibre avec le produit threo qui donne la bêtaïne la plus stable qui, en se décomposant, conduit à l'oléfine E.



7.3.



8. 8.1.



Comme l'ylure n'est pas stabilisé, on obtient l'oléfine Z.

8.2. La réaction d'addition 2 + 2 permise aura lieu selon $\pi_{2s} + \pi_{2a}$ dans une approche orthogonale des doubles liaisons telle que les interactions stériques soient minimales (R" le plus éloigné possible de l'ylure).

B. REACTIVITE DES CARBONYLES

I. CINÉTIQUE DE QUELQUES RÉACTIONS D'UN ALDÉHYDE

1. 1.1. Les deux constantes d'équilibre valent respectivement à 25 °C et 35 °C :

$$K_1 = \frac{38}{62} = 0,61 \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{30}{70} = 0,43.$$

La condition d'équilibre chimique, $\Delta G^0 + RT \ln K = 0$ entraîne $\Delta G^0_1 = 1210 \text{ J}$ et $\Delta G^0_2 = 2170 \text{ J}$.

1.2. De $\Delta G^0 = \Delta H^0 - T \Delta S^0$, on calcule :

$$\Delta H^0 = -27,4 \text{ kJ} \quad \text{et} \quad \Delta S^0 = -96 \text{ J. K}^{-1}.$$

2. 2.1. La loi cinétique s'écrit :

$$-\frac{d}{dt} [\text{i Pr CHO}] = k_1 [\text{i Pr CHO}] - k_{-1} [\text{i Pr CH(OH)}_2]$$

soit $-\frac{dx}{dt} = k_1 x - k_{-1} (a - x) = kx - k_{-1} a$, en posant :

$$k = k_1 + k_{-1} :$$

$$x = (a - x_{\infty}) e^{-kt} + x_{\infty}.$$

2.2. a) Seule, la fonction carboxyle absorbant à 300 nm, la densité optique mesurée D est proportionnelle à la molarité de l'aldéhyde soit $D \sim x$. On établit aisément :

$$\ln \frac{D - D_{\infty}}{D_0 - D_{\infty}} = -kt$$

La connaissance de $D(t)$ permet donc de calculer k .

b) On trace le graphe de $\ln(D - D_{\infty})$ en fonction de t . L'obtention d'une droite valide bien le modèle cinétique proposé. La pente de cette droite permet de calculer k : $k = 0,012 \text{ s}^{-1}$.

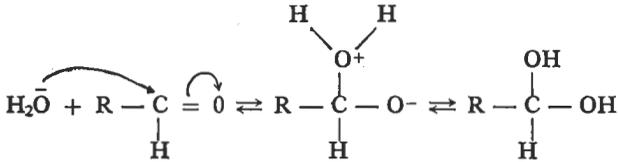
Par ailleurs, $K = \frac{k_1}{k_{-1}} = 0,43$ à 35 °C soit $k_1 = 0,0036 \text{ s}^{-1}$
et $k_{-1} = 0,0084 \text{ s}^{-1}$.

2.3. a) $\log k$ est une fonction linéaire du pH en milieu acide et en milieu basique. La valeur de k est minimale pour

pH = 6,3 (en milieu de $\text{pH} < 6,3$, on a $\log k = 3,16 - \text{pH}$ et en milieu de $\text{pH} > 6,3$ on a $\log k = -9,5 + \text{pH}$).

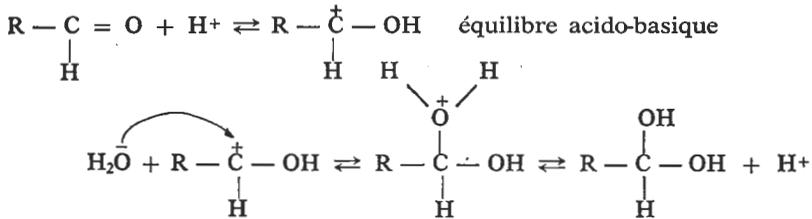
b) Cette expression de k traduit une catalyse acide-base spécifique.

Le 1^{er} terme correspond à :



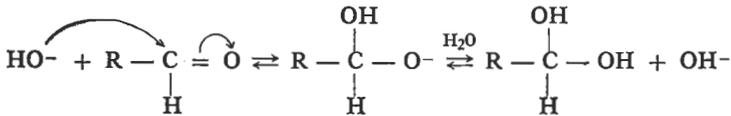
Il s'agit de la réaction non catalysée.

Le 2^{me} terme correspond à la catalyse acide. Notons H^+ le catalyseur :



Le catalyseur H^+ est régénéré.

Le 3^{me} terme correspond à la catalyse basique :



Le catalyseur OH^- est également régénéré.

2.4. a) Si l'on a une catalyse acide-base généralisée, on peut écrire, pour la constante de vitesse k :

$$k = k_0 + k_{\text{H}}[\text{H}_3\text{O}^+] + k_{\text{OH}}[\text{OH}^-] + k_{\text{B}}[\text{B}] + k_{\text{BH}}[\text{BH}^+].$$

Pour pH = 7,2 par exemple, on constate que k varie avec $[\text{B}]$ et $[\text{BH}^+]$.

$$b) \text{ En posant } \alpha = \frac{[\text{B}]}{[\text{BH}^+]}, \text{ on peut écrire :}$$

$$k = C + (k_{\text{BH}} + \alpha k_{\text{B}})[\text{BH}^+]$$

avec : $C = k_0 + k_{\text{H}}[\text{H}_3\text{O}^+] + k_{\text{OH}}[\text{OH}^-]$.

En traçant k en fonction de $[\text{BH}^+]$, on trouve :

$$k = 0,0207 + 0,565 [\text{BH}^+] \text{ à pH} = 7,2 \quad (\alpha = 0,636)$$

$$k = 0,060 + 1,63 [\text{BH}^+] \text{ à pH} = 7,8 \quad (\alpha = 2,34)$$

d'où $k_B = 0,63 \text{ M}^{-1} \text{ s}^{-1}$ et $k_{BH} = 0,17 \text{ M}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

$$3. \quad 3.1. \quad v = \frac{d[\text{ox}]}{dt} = k_5 [\text{i Pr} - \text{CHOH} - \text{NHOH}] \dots$$

$$\dots = k_5 K_2 [\text{i Pr} - \text{CHO}] [\text{NH}_2\text{OH}].$$

3.2. a) Ecrivons l'équation de conservation :

$$[\text{i Pr} - \text{CHO}]_0 = [\text{i Pr} - \text{CHO}] + [\text{i Pr} - \text{CH}(\text{OH})_2] + \dots$$

$$\dots + [\text{i Pr} - \text{CHOH} - \text{NHOH}] + [\text{ox}] = [\text{ox}]_-$$

$$= [\text{i Pr} - \text{CHO}] (1 + K_1 + K_2 [\text{NH}_2\text{OH}]) + [\text{ox}] = [\text{ox}]_-$$

soit :

$$[\text{i Pr} - \text{CHO}] = \frac{[\text{ox}]_- - [\text{ox}]}{1 + K_1 + K_2 [\text{NH}_2\text{OH}]}$$

$$v = \frac{k_5 K_2 [\text{NH}_2\text{OH}]}{1 + K_1 + K_2 [\text{NH}_2\text{OH}]} ([\text{ox}]_- - [\text{ox}]).$$

b)

$$k' = \frac{k_5 K_2 [\text{NH}_2\text{OH}]}{1 + K_1 + K_2 [\text{NH}_2\text{OH}]}$$

$[\text{NH}_2\text{OH}]$ étant constant à cause de l'excès d'hydroxylamine.

3.3. Comme la densité optique D est proportionnelle à $[\text{ox}]$, on établit :

$$\ln \frac{D_- - D}{D_-} = -k't.$$

3.4. On trace $\ln(D_- - D)$ en fonction de $t \rightarrow k' = 0,015 \text{ s}^{-1}$.

3.5. a) Le graphe ressemble à celui de la question 2.3.

b) Il s'agit par conséquent de la catalyse acide-base spécifique avec :

$$\log k' = 5,5 - \text{pH} \text{ en milieu acide}$$

et $\log k' = -2,8 + \text{pH}$ en milieu basique.

k' est de la forme :

$$k' = k_0 + k_H [\text{H}_3\text{O}^+] + k_{\text{OH}} [\text{OH}^-].$$

$$4. \quad 4.1. \quad v = \frac{d[\text{ox}]}{dt} = k_5 [\text{i Pr} - \text{CHOH} - \text{NHOH}] \dots \\ \dots + k_6 [\text{i Pr} - \text{CH} = \text{NMe}] [\text{NH}_2\text{OH}].$$

On applique le principe de l'état stationnaire à l'amine, soit :

$$k_4 [\text{i Pr} - \text{CHOH} - \text{NHMe}] - k_6 [\text{i Pr} - \text{CH} = \text{NMe}] \dots \\ \dots [\text{NH}_2\text{OH}] = 0.$$

On peut alors écrire :

$$v = \frac{(k_5 K_2 [\text{NH}_2\text{OH}] + k_4 K_3 [\text{MeNH}_2]) [\text{i Pr} - \text{CHO}]}{1 + K_1 + K_2 [\text{NH}_2\text{OH}] + K_3 [\text{MeNH}_2]}$$

4.2. L'équation de conservation de l'aldéhyde conduit à :

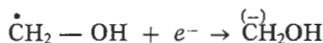
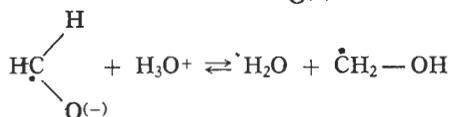
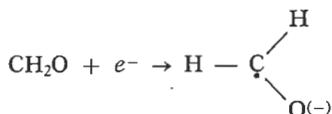
$$[\text{i Pr} - \text{CHO}] = \frac{[\text{ox}]_0 - [\text{ox}]}{1 + K_1 + K_2 [\text{NH}_2\text{OH}] + K_3 [\text{MeNH}_2]}$$

expression dans laquelle on a négligé $K_3 [\text{MeNH}_2]$ devant 1.

On déduit :

$$k'' = \frac{k_5 K_2 [\text{NH}_2\text{OH}] + k_4 K_3 [\text{MeNH}_2]}{1 + K_1 + K_2 [\text{NH}_2\text{OH}] + K_3 [\text{MeNH}_2]} \\ = k' + \frac{k_4 K_3 [\text{MeNH}_2]}{1 + K_1 + K_2 [\text{NH}_2\text{OH}] + K_3 [\text{MeNH}_2]}$$

II. RÉDUCTION ÉLECTROCHIMIQUE DU MÉTHANAL.
APPLICATION A L'ÉTUDE CINÉTIQUE DE LA RÉACTION D'HYDRATATION



$$2.1. [\text{CH}_2\text{O}]_i = [\text{CH}_2\text{O}] + [\text{CH}_2(\text{OH})_2] + [\text{CH}_2\text{O}_2\text{H}^-]$$

$$= [\text{CH}_2\text{O}] \left[1 + K_h + K_h \frac{K_a}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \right]$$

Calcul valable en solution, loin de l'électrode.

$$[\text{CH}_2\text{O}] = \frac{[\text{CH}_2\text{O}]_i}{1 + K_h + K_h \frac{K_a}{[\text{H}_3\text{O}^+]}} \approx \frac{[\text{CH}_2\text{O}]_i}{K_h \left(1 + \frac{K_a}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \right)}$$

parce que $K_h \gg 1$ et $K_a \gg [\text{H}_3\text{O}^+]$.

$$[\text{CH}_2(\text{OH})_2] \approx \frac{[\text{CH}_2\text{O}]_i}{1 + \frac{K_a}{[\text{H}_3\text{O}^+]}}$$

2.2. Courant de diffusion : $i = K[(X) - (X)_e]$ S. n. §.

Ici, on considère le courant i_D correspondant au palier de la vague, $[X]_e$ est donc nul. L'espèce active est CH_2O et $n = 2$.
Donc :

$$\begin{aligned} i_D &= 2 \mathcal{K} [\text{CH}_2\text{O}] S \mathcal{F} \\ &= 2 \mathcal{K} S \mathcal{F} \frac{[\text{CH}_2\text{O}]_i}{K_h \left(1 + \frac{K_a}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \right)} \end{aligned}$$

2.3. a) Dans la couche de réaction $[\text{CH}_2(\text{OH})_2]_\Lambda$ est constant : $\text{CH}_2(\text{OH})_2$ qui disparaît par déshydratation est remplacé par le flux venant de la solution (seule source de $\text{CH}_2(\text{OH})_2$) ; comme le courant a la valeur limite i_l , $[\text{CH}_2\text{O}]_\Lambda$ est nul ; CH_2O formé par déshydratation est immédiatement réduit : c'est donc la vitesse de formation de CH_2O qui limite le courant de réduction i_l . $[\text{CH}_2(\text{OH})_2]_\Lambda = \text{const.}$ donc :

$$S \mathfrak{K} ([\text{CH}_2(\text{OH})_2] - [\text{CH}_2(\text{OH})_2]_\Lambda) = S \lambda k_{-1} [\text{CH}_2(\text{OH})_2]_\Lambda$$

$$[\text{CH}_2(\text{OH})_2]_\Lambda = \mathfrak{K} \frac{\text{CH}_2(\text{OH})_2}{\mathfrak{K} + \lambda k_{-1}}$$

b) La quantité de CH_2O formé par unité de temps est

$k_{-1} [\text{CH}_2(\text{OH})_2]_\Lambda \lambda S$, donc :

$$i_l = n \mathfrak{F} \lambda S k_{-1} [\text{CH}_2(\text{OH})_2]_\Lambda = n \mathfrak{F} \lambda S k_{-1} [\text{CH}_2(\text{OH})_2] \mathfrak{K} / (\mathfrak{K} + \lambda k_{-1})$$

$$c) i_l = n S \mathfrak{F} \mathfrak{K} \frac{[\text{CH}_2\text{O}]_i}{1 + \frac{K_a}{[\text{H}_3\text{O}^+]}} \frac{k_{-1} \lambda}{k_{-1} \lambda + \mathfrak{K}}$$

On remarque que $n S \mathfrak{F} \mathfrak{K} [\text{CH}_2\text{O}]_i$ est l'expression du courant de diffusion prévu en supposant que tout CH_2O reste sous cette forme dans la solution. D'autre part :

$$\lambda = C k_1^{-1/2} = C k_h^{-1/2} k_{-1}^{-1/2}$$

$$i_l = i_{D_0} \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_3\text{O}^+] + K_a} \cdot \frac{C K_h^{-1/2} k_{-1}^{1/2}}{C K_h^{-1/2} k_{-1}^{1/2} + \mathfrak{K}}$$

$$= i_{D_0} \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_3\text{O}^+] + K_a} \cdot \frac{\beta \sqrt{k_{-1}/K_h}}{\beta \sqrt{k_{-1}/K_h} + 1} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{C}{\mathfrak{K}}$$

$$2.4. \quad i_M = i_D + i_l$$

remplacer i_D , i_l par leur valeur.

$$3.1. i_M \approx i_l = i_{D_0} \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_3\text{O}^+] + K_a} \frac{\beta \sqrt{k_{\text{OH}} \frac{K_e}{(\text{H}_3\text{O}^+) K_h} \frac{1}{K_h}}}{\beta \sqrt{\frac{k_{\text{OH}} K_e}{(\text{H}_3\text{O}^+) K_h} + 1}}$$

$$i_l = i_{D_0} \frac{h}{h + K_a} \frac{\alpha/h^{1/2}}{\alpha/h^{1/2} + 1} = i_{D_0} \frac{h^{1/2}}{(h + K_a)(\alpha h^{-1/2} + 1)}$$

$$3.2. h^{1/2} \alpha = (h + \alpha h^{1/2} + K_a + K_a \alpha h^{-1/2}) i_l / i_{D_0}$$

$$\frac{d i_l}{i_l} = dh \left[\frac{1/2 h^{-1/2}}{h^{1/2}} - \frac{1 + 1/2 \alpha h^{-1/2} - 1/2 K_a \alpha h^{-3/2}}{h + \alpha h^{1/2} + K_a + K_a \alpha h^{-1/2}} \right]$$

i_l passe par un maximum quand $d i_l$ s'annule : quand $h \nearrow d i_l$, d'abord positif devient négatif.

$$- d i_l = 0 \quad \text{si} \quad h_m^{1/2} \left(-\frac{1}{2} \right) + h_m^{-1/2} \frac{K_a}{2} + h_m^{-1} \alpha K_a = 0$$

$$\text{soit :} \quad K_a = \frac{h_m^{3/2}}{h_m^{1/2} + 2 \alpha}$$

— La relation demandée peut s'obtenir en éliminant K_a entre les expressions de i_l et K_a :

$$K_a = \frac{h_m^{3/2}}{h_m^{1/2} + 2 \alpha} = \frac{h_m^{1/2} \alpha (i_{D_0} / i'_l - 1) - h_m}{1 + \alpha h_m^{-1/2}}$$

D'où en ordonnant en α , et en multipliant les 2 membres par $h_m^{-1/2}$:

$$\alpha^2 2(R - 1) + \alpha h_m^{1/2} (-4 + R) - 2 h_m = 0.$$

3.3. Application numérique :

(Les concentrations sont exprimées en mol.l⁻¹. D'après la courbe : $i = f(\text{pH})$, on tire : $h_m = 6,3 \cdot 10^{-14}$ M (pH = 13,2),

$$i'_l = 5,85 \cdot 10^{-6} \text{ A.}$$

$$R = i_{D_0} / i'_l = 5,6$$

$$\text{d'où :} \quad \alpha^2 9,2 + \alpha 4,04 \cdot 10^{-7} - 12,6 \cdot 10^{-14} = 0$$

$$\alpha = 0,97 \cdot 10^{-7} \quad (\sqrt{\Delta} = 21,90 \cdot 10^{-7})$$

$$K_a = \frac{15,81 \cdot 10^{-21}}{(2,51 + 1,94) \cdot 10^{-7}} \simeq 3,6 \cdot 10^{-14}$$

$$\beta = 1,42 \text{ S.I.}$$

$$k_{\text{OH}} = \left(\frac{0,97}{1,42} \right)^2 10^4 \simeq 4700 \text{ M}^{-1} \text{ s}^{-1}.$$

BIBLIOGRAPHIE

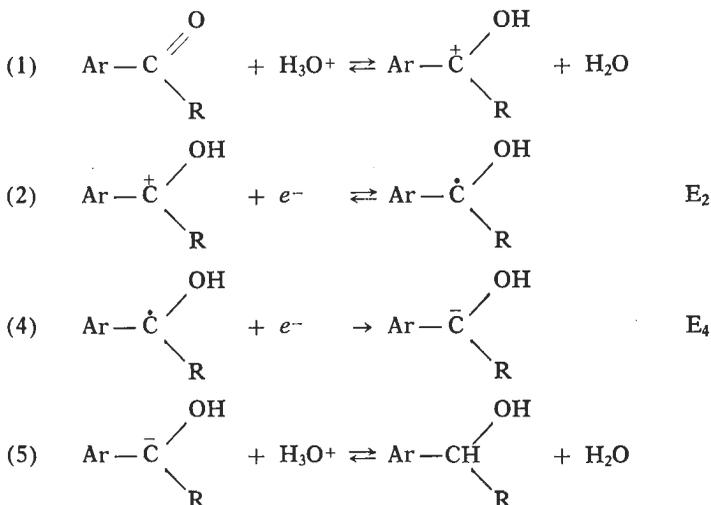
VESELY et BRDICKA, Coll. — *Czech. Chem. Comm.* 12, 313 (1947).

III. RÉDUCTION ÉLECTROCHIMIQUE
DES CÉTONES AROMATIQUES EN SOLUTION AQUEUSE

1.1. Le potentiel de demi-vague de la première vague dépend du pH; d'après les données, la réaction correspondante ne peut être que la réaction (2). En effet, cette réaction est précédée d'une protonation, représentée par l'équation (1); elle ne limite pas la hauteur de la vague, mais déplace simplement $E^{1/2}$.

La deuxième vague correspond à la réduction de $\text{Ar}\overset{\cdot}{\text{C}}\text{OHR}$; le potentiel de demi-vague étant indépendant du pH, cette réduction n'est pas précédée d'une protonation; elle est représentée par l'équation (4); évidemment, l'anion obtenu est ensuite protoné (équation 5).

En conclusion à $\text{pH} = \text{pH}_1$ (milieu acide), la réduction est expliquée par les réactions ci-après :



1.2. D'après la figure B, les deux vagues se rapprochent quand le pH croît. Nous avons vu (fig. A) que le potentiel de demi-vague de la deuxième vague est indépendant du pH. La deuxième vague ne se déplace pas; c'est la première vague qui se rapproche de la deuxième; la réduction est plus difficile quand le pH croît. Remarquons qu'à un pH suffisamment élevé, les deux vagues sont confondues.

2. Comme on est en milieu neutre ou basique la réaction (1) est lente. La vague correspondante aurait une hauteur négligeable. On élimine donc le mécanisme (1) (2).

Nous devons envisager un mécanisme suffisamment rapide en milieu basique, donc une première réduction non précédée d'une protonation; ceci est en accord avec le fait que le potentiel de demi-vague est indépendant du pH; la réduction représentée par l'équation (6) répond à la question.

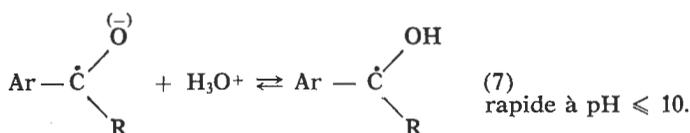
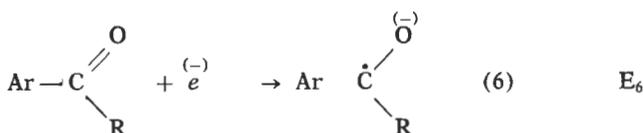
Le radical-anion ainsi obtenu est ensuite réduit.

Deux mécanismes sont possibles : (8) (9) ou (7) (4) (5). Le mécanisme (8) (9) doit être éliminé, car le potentiel de demi-vague correspondant à la réaction (8) est inférieur à celui de la réaction (6), le polarogramme présenterait donc deux vagues à un électron distinctes. Seul, le mécanisme (7) (4) (5) répond à la question.

Remarque.

Le polarogramme (une vague à deux électrons) montre simplement que $|E_4|$ n'est pas supérieur à $|E_6|$; $|E_4|$ peut être inférieur ou égal à $|E_6|$.

En conclusion :



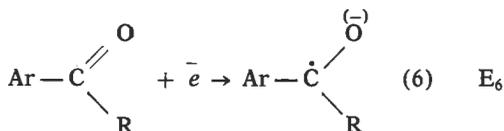
puis réactions (4) et (5).

3.1. La première vague doit être interprétée par le même mécanisme qu'en 2., c'est-à-dire par la réaction (6).

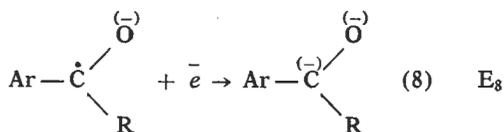
La deuxième vague est caractérisée par un potentiel de demi-vague indépendant du pH, et plus négatif que celui de la première vague. Elle ne peut être interprétée que par la réaction (8).

En conclusion :

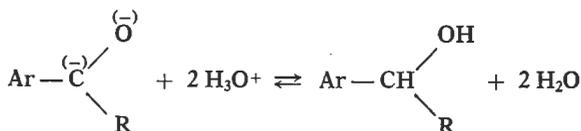
Première réduction :



Deuxième réduction :



Puis, protonation :



3.2. Evolution du polarogramme entre pH = 10 et pH = 12. On passe progressivement du mécanisme (6) (7) (4) (5) au mécanisme (6) (8) (9). Autrement dit, la fraction du

constituant $\text{Ar}-\overset{\text{O}^{(-)}}{\dot{\text{C}}}-\text{R}$ [entièrement protoné avant d'être

réduit à pH = 10 selon les réactions (7) et (4)] réduite directement [réaction (8)] croît. Nous avons vu que, à pH = 10, la vague unique à « deux électrons » correspond à deux réductions successives (6) et (4), contrôlées l'une et l'autre par diffusion. Quand le pH croît, la réaction de protonation (7) devient plus lente; la vitesse de la réaction de réduction (4) est donc cinétiquement contrôlée; la hauteur de la vague décroît; elle devient $i = i_d + i_l$; i_d est la partie du courant qui correspond à la réduction (6) contrôlée par diffusion; i_l est la partie du courant correspondant à la réduction (4) cinétiquement contrôlée quand le pH est suffisamment élevé, sa hauteur varie de i_d (pH = 10) à 0 (pH = 12). L'espèce $\text{Ar}\overset{\text{O}^{(-)}}{\text{C}}\text{OHR}$ se réduit au moins aussi facilement que $\text{Ar}\overset{\text{O}^{(-)}}{\text{C}}\text{O}\text{R}$; le potentiel de demi-vague est toujours contrôlé par la première réduction (E_6).

Entre pH = 10 et pH = 12, les deux espèces $\text{Ar}\overset{\text{O}^{(-)}}{\dot{\text{C}}}\text{O}\text{R}$ et $\text{Ar}\overset{\text{O}^{(-)}}{\text{C}}\text{OHR}$, qui sont l'une et l'autre électroactives, peuvent être réduites. Nous avons traité précédemment la réduction de

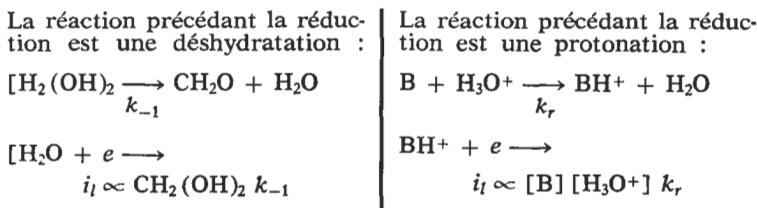
Ar \dot{C} OH R (4). La réduction de Ar $\overset{(-)}{C}$ OR (8) correspond à une vague dont le potentiel de demi-vague est E₈, inférieur à E₆. Cette vague sera donc séparée de la vague étudiée précédemment. Sa hauteur est déterminée par diffusion ; elle est proportionnelle à

la fraction restante de Ar $\overset{(-)}{C}$ OR qui sera réduite par le mécanisme (8) (9) ; sa hauteur varie donc de i₂ = 0 à pH = 10 à i₂ = i_d à pH = 12.

Les potentiels de demi-vague sont E₆ et E₈, indépendants du pH.

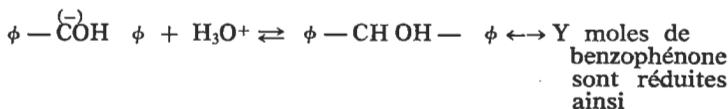
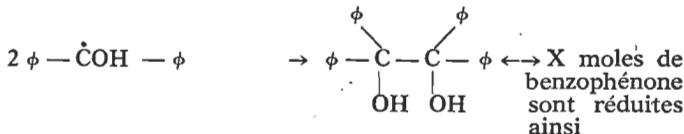
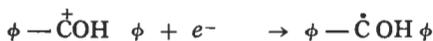
Etude du rapport $i/i_d = 1 + i_l/i_d = 1 + \frac{K(H_3O^+)}{1 + K(H_3O^+)}$.

Comparons avec les résultats de II.2.3. :



Le résultat de II.2.3. pourra être utilisé ici en remarquant que [H₃O⁺] k_r remplace k₋₁ :

$$\frac{i_l}{i_d} = \frac{[H_3O^+] k_r \lambda}{[H_3O^+] k_r \lambda + \mathcal{K}} = \frac{k_r \lambda / \mathcal{K} [H_3O^+]}{1 + k_r \lambda / \mathcal{K} [H_3O^+]} = \frac{K [H_3O^+]}{1 + K [H_3O^+]}$$

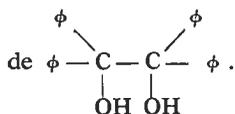


Les produits obtenus sont l'hydrobenzoïne mettant en jeu une mole d'électrons par mole de benzophénone et diphényl méthanol mettant en jeu deux moles d'électrons par mole de benzophénone.

Nous avons :

$$\left. \begin{array}{l} 1,15 = 2Y + X \\ 1 = Y + X \end{array} \right\} \begin{array}{l} X = 0,85 \\ Y = 0,15 \end{array}$$

On obtient donc 0,85 mole de $\phi - \text{CHOH} - \phi$ et 0,075 mole



J. BOTTIN, J.-C. DEPEZAY,
R. DIDIER, C. DUFOUR.

BIBLIOGRAPHIE

P. ZUMAN, Coll. — *Czech. Chem. Commun.* 33 2548 (1968).

Agrégation

SESSION DE 1980

(OPTION PHYSIQUE APPLIQUEE)

Epreuve C

PROBLEME D'ELECTRICITE, D'ELECTRONIQUE, D'ELECTROTECHNIQUE ET D'AUTOMATIQUE

(Durée : 6 heures)

Matériel : 4 feuilles « Tracé de fonctions sinusoïdales ».

MACHINE SYNCHRONE AUTOPILOTEE

Cette étude comporte quatre parties.

La partie I (échanges d'énergie entre deux réseaux triphasés) et la partie II (moteur synchrone) sont complètement indépendantes.

La partie III (étude élémentaire d'une machine synchrone autopilotée) et la partie IV (commutation) constituent une synthèse des deux premières, mais en sont dans une certaine mesure numériquement indépendantes.

ECHANGES D'ÉNERGIE ENTRE DEUX RÉSEAUX TRIPHASÉS

Deux réseaux délivrant des tensions sinusoïdales, triphasées équilibrées de fréquences différentes, sont reliés entre eux par l'intermédiaire de deux ponts de Graetz à six thyristors comme l'indique la fig. 1.

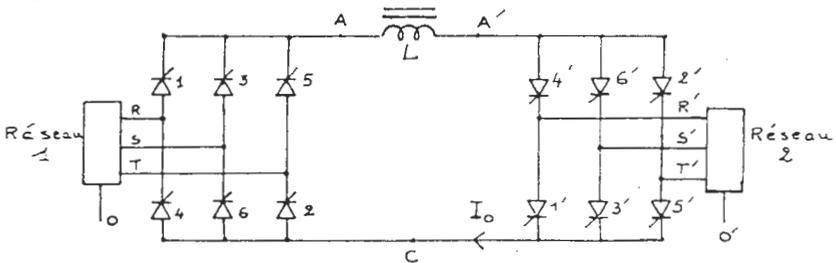


Fig. 1

On néglige les impédances internes des deux réseaux. On désigne par V_1 et V_2 les valeurs efficaces de leurs tensions simples, par f_1 et f_2 leurs fréquences.

α_1 et α_2 sont respectivement les angles de commande des ponts 1 et 2 (retards angulaires par rapport à la commutation naturelle, variant de 0 à 180°).

On supposera d'autre part que la bobine réalisant la liaison entre les deux ponts a une résistance négligeable et une réactance assez grande pour que l'on puisse négliger l'ondulation résiduelle du courant I_0 .

1. Pour $\alpha_1 = 30^\circ$ et une valeur donnée de I_0 ,

1.1. Tracer sur une même feuille, en fonction du temps, les formes d'onde :

- de la tension entre le point A et le neutre O du réseau ;
- de la tension entre le point C et le neutre O du réseau ;
- du courant dans le thyristor 1 ;
- du courant dans le fil de ligne R.

1.2. En déduire le déphasage entre la tension du fil R par rapport à O, et le terme fondamental du courant dans ce même fil, ainsi que la valeur efficace de ce courant et de son terme fondamental en fonction de I_0 .

2. Pour $\alpha_2 = 120^\circ$ et I_0 donné, répondre aux mêmes questions concernant le pont 2 et le réseau 2, le point de référence des tensions étant O' (neutre du réseau 2, non relié).

3. Exprimer, en fonction de V_1 et α_1 , la valeur moyenne U_0 de la tension entre les points A et C, puis en fonction de V_2 et α_2 , la valeur moyenne U'_0 de la tension entre les points A' et C.

Puisqu'on néglige la résistance de la liaison A-A', U'_0 égale U_0 . En déduire la relation qui doit exister entre V_1 , V_2 , α_1 et α_2 et montrer que nécessairement un pont doit fonctionner en redresseur et l'autre en onduleur. Quelle conséquence peut-on en déduire sur la réversibilité du montage ?

4. Pour un fonctionnement déterminé (V_1 , V_2 , α_1 , α_2 et I_0 fixés), calculer l'expression des puissances actives et réactives P_1 , P_2 , Q_1 , Q_2 absorbées ou fournies par les réseaux 1 et 2.

Application :

$$V_1 = 127 \text{ volts, } \alpha_1 = 60^\circ, \alpha_2 = 150^\circ \text{ et } I_0 = 20 \text{ A.}$$

Calculer V_2 , P_1 , P_2 , Q_1 et Q_2 .

On indiquera pour chacun des réseaux si les puissances sont fournies ou absorbées.

Justifier les termes d'onduleur non autonome (ou assisté, ou à commutation naturelle) parfois utilisé.

5. Pour $V_1 = 127$ volts et une valeur maximale de I_0 égale à 30 A, calculer pour le pont 1 :

- les tensions directe et inverse maximales que doit supporter un thyristor ;
- les valeurs moyenne et efficace maximales du courant traversant un thyristor.

II. ETUDE D'UN MOTEUR SYNCHRONE

Une machine synchrone triphasée, 4 pôles, 50 hertz à entrefer constant a les caractéristiques suivantes :

- puissance nominale : 10 kVA ;
- tension nominale entre phases : 220 volts ;
- réactance synchrone (supposée constante) : $X_d = 4,5$ ohms ;
- réactance transitoire : $X'_d = 1$ ohm ;
- réactance subtransitoire : $X''_d = 0,85$ ohm ;
- courant d'excitation correspondant à une tension à vide de 220 volts entre phases : $i = 4,6$ A.

Pour simplifier, on admettra dans la suite du problème, que :

- le flux inducteur est proportionnel au courant d'excitation ;
- les pertes par effet Joule, les pertes mécaniques et les pertes dans le fer peuvent être négligées ;
- l'excitation est assurée par un réseau à courant continu indépendant.

On tracera le diagramme à réactance synchrone de la machine, en désignant par E la force électromotrice par phase, par V la tension simple, par I le courant en ligne, par ψ le déphasage entre \bar{I} et \bar{E} , par φ le déphasage entre \bar{I} et \bar{V} , et par θ le déphasage entre \bar{E} et \bar{V} .

A condition de préciser explicitement son choix, le candidat pourra utiliser indifféremment la convention récepteur ou la convention générateur.

1. La machine est couplée à un réseau triphasé 50 hertz dont la tension entre fils de ligne est de 220 volts.

1.1. Exprimer en fonction de E , X_d , I , V et ψ les puissances active et réactive échangées entre la machine synchrone et le réseau.

Exprimer ces mêmes grandeurs en fonction de E , V , X_d et θ .

1.2. La machine fonctionne en moteur et délivre une puissance mécanique de 8,5 kW, calculer E et i pour avoir $\varphi = -30^\circ$ (courant en avance en convention récepteur) et $\varphi = +30^\circ$. En déduire, pour chaque cas, la puissance réactive Q , le couple mécanique Γ , les angles θ et φ .

1.3. i conservant la valeur obtenue pour $\varphi = -30^\circ$, montrer que la puissance mécanique que peut fournir le moteur est limitée à une valeur P_{\max} que l'on précisera. Calculer dans ce cas limite Q , θ , ψ et φ . Que se passe-t-il si la charge correspond à une puissance mécanique supérieure à P_{\max} ?

2. La machine est maintenant couplée à une source de tensions triphasées, de tension et fréquence réglables, telles que :

$$\frac{V}{f} = \frac{127}{50} = \text{constante}$$

tant que la fréquence est suffisante pour que les résistances soient effectivement négligeables devant les réactances.

2.1. Montrer que si i et I sont constants, le diagramme de fonctionnement de la machine a des propriétés remarquables lorsque la fréquence varie.

En déduire les grandeurs invariables dans ce type de fonctionnement.

Commenter les résultats lorsque la fréquence tend vers 0. Quelle conséquence peut-on en déduire quant au démarrage de la machine ?

2.2. La machine entraîne une charge ayant une grande inertie mécanique, et on double brusquement la fréquence de la source.

Que se passe-t-il ? Justifier votre réponse.

III. ETUDE ÉLÉMENTAIRE D'UNE MACHINE SYNCHRONE AUTOPILOTÉE

On considère à nouveau le montage de la fig. 1, mais le réseau 2 est maintenant la machine synchronisée considérée dans la partie II.

Afin d'assurer le synchronisme des impulsions de commande du pont 2, et de la tension d'alimentation de la machine, un capteur de position est fixé sur l'arbre de la machine et délivre des impulsions rigoureusement synchrones de la rotation de la machine.

L'information issue de ce capteur, une fois traitée, fournit les ordres d'aiguillage des impulsions vers les gâchettes des thyristors du pont 2 (fig. 2). De cette façon, la fréquence des courants alimentant la machine est asservie à la vitesse de rotation (conservant ainsi le synchronisme des champs tournants de l'inducteur et de l'induit), et leur phase à la position du capteur par rapport aux axes polaires de la machine.

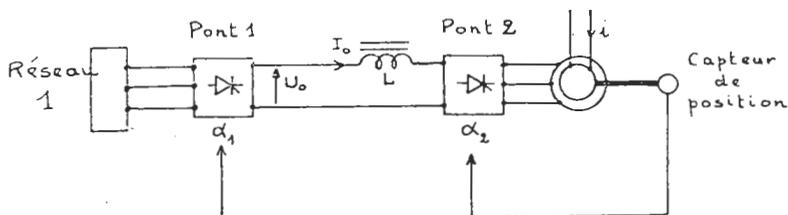


Fig. 2

On peut faire varier cette phase en modifiant la position angulaire du capteur ou plus simplement en décalant (par un circuit logique adéquat) les impulsions issues de ce capteur. On dit alors que la machine est autopilotée.

Nous admettrons, pour cette étude élémentaire, que les commutations des deux ponts sont instantanées, que les tensions aux bornes de la machine sont sinusoïdales et que l'on peut rendre compte du fonctionnement de celle-ci en ne considérant que le terme fondamental des courants de l'induit.

1. Montrer que cette constitution impose un déphasage ψ constant (mais réglable) entre le terme fondamental \bar{I} du courant et la force électromotrice \bar{E} intervenant dans le diagramme de la machine et qu'il existe une relation entre α_2 et φ (φ déphasage entre \bar{I} et \bar{V}).

Exprimer la valeur moyenne U_0 de la tension à l'entrée du pont 2 en fonction de E et ψ .

2. Posant $E = ki\Omega$, avec i courant d'excitation et Ω vitesse angulaire de rotation, établir les expressions de Ω et du couple Γ en fonction de ki , ψ , U_0 et I_0 .

Montrer que pour des valeurs données de i et ψ , Ω est proportionnel à U_0 et que Γ est indépendant de Ω .

3. Pour $\psi = -60^\circ$ (convention récepteur) et $i = 9$ A, tracer les réseaux de caractéristiques :

— $\Gamma(\Omega)$ pour $V_1 = 127$ volts, $\alpha_1 = 0$ et $I_0 = 10$ A, 20 A, et I_{0n} . (I_{0n} est la valeur de I_0 correspondant à un courant dans les fils de phase dont la valeur efficace est égale au courant nominal de la machine);

— $\Omega(I_0)$ pour $\alpha_1 = 0^\circ, 30^\circ$ et 60° .

4. L'ensemble machine — pont 2 — capteur, vu des bornes de sortie du pont 1, constitue une machine à courant continu alimentée par la tension U_0 .

A quel type de machine à courant continu correspond le montage étudié? Justifier votre réponse.

Quel serait le nombre de balais et de lames au collecteur de la machine à courant continu équivalente?

5.1. Etablir la relation (inégalité) qui doit nécessairement exister entre X_d , I , E et ψ afin de pouvoir assurer les commutations de la pont 2.

5.2. En déduire que le courant d'excitation doit avoir une valeur minimum qu'on exprimera en fonction de Γ , ψ et des paramètres de la machine.

Remarque.

La fréquence d'alimentation de la machine étant liée à sa vitesse de rotation, la réaction synchrone X_d varie avec cette dernière.

5.3. Sachant que l'on désire que la machine puisse délivrer un couple de 50 N.m. quelle que soit la vitesse, calculer la valeur minimale de i pour $\psi = -60^\circ$ (convention récepteur).

6. La machine peut-elle décrocher au sens de la question II.1.3?

7. Quelles opérations doit-on réaliser :

- pour inverser le couple (passage du fonctionnement moteur au fonctionnement générateur en conservant le même sens de rotation, par exemple) ?
- pour inverser le sens de rotation (en conservant le fonctionnement moteur par exemple) ?

IV. ETUDE DE LA COMMUTATION ET DE SES CONSÉQUENCES

1. On considère l'ondulateur de la fig. 3, qui alimente un réseau triphasé formé de trois tensions sinusoïdales par l'intermédiaire de trois bobines de résistance négligeable et d'inductance L_C .

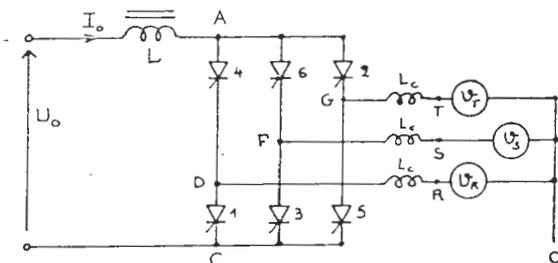


Fig. 3

On négligera l'ondulation du courant I_0 et de la tension U_0 ainsi que les impédances internes des sources de tension v_R , v_S et v_T dont la valeur efficace commune est V .

1.1. Pour $\alpha = 120^\circ$ et en supposant que la durée τ des commutations soit telle qu'elle entraîne un angle d'empiètement $\omega\tau = 30^\circ$, représenter en fonction du temps sur la même feuille :

- la tension entre le point A et le neutre O du réseau ;
- la tension entre le point C et le neutre O du réseau ;
- la tension entre le point D et le neutre O du réseau ;
- le courant dans le fil de phase R.

1.2. En déduire :

1.2.1. Que l'inductance L_C n'a d'influence que pendant les commutations ;

1.2.2. La relation entre U_0 , la valeur efficace V de la tension simple, I_0 , L_C et ω ;

1.2.3. La relation qui existe entre L_C , I_0 , V , ω , α et $\delta = \omega\tau$;

1.2.4. Le temps t_r pendant lequel un thyristor est soumis à une tension inverse (on posera $\omega t_r = \beta$ est appelé l'angle de garde) et la relation entre α , δ et β ;

1.2.5. L'évolution du courant I_o lorsque :

- t_r devient inférieur à la durée minimale d'application de la tension inverse, t_q , des thyristors utilisés,
- l'impulsion que reçoit un thyristor est insuffisante pour provoquer son amorçage.

Pour pallier ces inconvénients, il est impératif de pouvoir limiter I_o , jusqu'au rétablissement des conditions normales.

Quel moyen peut être utilisé à cette fin ? (autre qu'un fusible).

2. On considère à nouveau la machine synchrone autopilotée du paragraphe III.

2.1. La fig. 4 montre la tension enregistrée entre une phase et le neutre de la machine. Interpréter cct enregistrement.

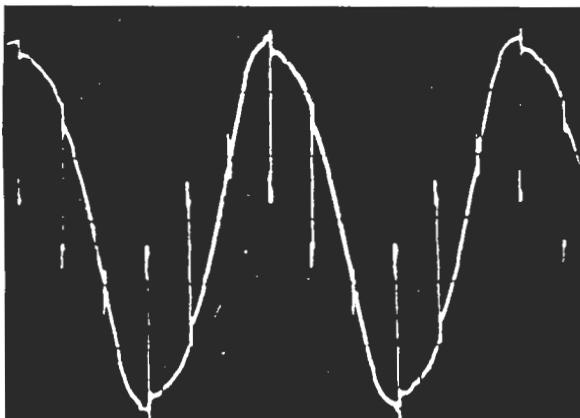


Fig. 4

2.2. Un essai en charge a permis d'effectuer les mesures suivantes : $V = 108$ volts, $I_o = 18$ A, $\alpha_2 = 120^\circ$, $f = 50$ Hz et $\tau = 0,45$ ms.

Calculer la réactance de commutation $X_C = L_C \omega$ et l'inductance correspondante L_C .

2.3. Le transfert du courant de la phase R à la phase S par exemple, se faisant pendant le temps τ , évaluer approximativement la vitesse du champ tournant de l'induit pendant ce temps, en la comparant à la vitesse (constante) de ce même champ tournant pour une alimentation sinusoïdale.

On remarquera qu'entre les commutations, deux enroulements sont parcourus par le courant constant I_o , et que le champ qu'ils créent a une vitesse nulle.

Comparer X_C aux diverses réactances de la machine et interpréter cette comparaison.

3. Le modèle adopté maintenant pour la machine est le suivant :
- Pour le calcul de la durée des commutations et de la chute de tension que provoquent celles-ci, on considère les réactances $X_C = L_C \omega$, la relation existant entre U_o , I_o , V et α_2 étant celle établie au § IV.1.2.2. ;
 - Les commutations n'affectent ni la relation entre l'amplitude du terme fondamental du courant dans les phases de la machine et I_o , ni la relation entre α_2 et le déphasage de ce terme fondamental par rapport à la tension aux bornes de la machine (relations établies au § I.2.).
 - On rend compte du fonctionnement de la machine (Γ , Ω , i , φ et θ) à l'aide du terme fondamental des courants, de la réactance X_d , et des tensions V et E supposées sinusoïdales.

3.1. On désire maintenant que lorsque $\alpha_1 = 0$, la vitesse de rotation de la machine soit de 1500 tr/mn lorsque la puissance mécanique délivrée à la charge est de 8,5 kW. Déterminer les valeurs de ψ , E et i nécessaires et pour cela :

3.1.1. Calculer U_o et I_o .

3.1.2. En tenant compte de la chute de tension due aux commutations, calculer $V \cos \varphi$ et $E \cos \psi$.

3.1.3. On désire que pour ce fonctionnement, l'angle de garde β soit de 15° . A l'aide de la relation établie en IV.1.2.3., calculer les valeurs de V , φ et α_2 .

3.1.4. Par l'intermédiaire de la relation établie en II.1.1., calculer E , i et ψ .

3.2. E , i et ψ conservant les valeurs précédemment calculées :

3.2.1. La puissance mécanique passe brusquement à 12 kW. Que se passe-t-il ? Justifier votre réponse.

3.2.2. La puissance mécanique passe à 4 kW, et U_o est modifiée de sorte que la vitesse se rétablisse à 1500 tr/mn. Calculer les valeurs de I_o , V , θ et φ .

3.2.3. U_o est modifiée de sorte que la vitesse soit 750 tr/mn, le couple conservant cependant la valeur précédente (4 kW à 1500 tr/mn). Calculer I_o , θ et φ .

3.3. L'expérience montre que ce n'est que lorsque la machine tourne à environ 10% de sa vitesse nominale que sa force électromotrice est suffisante pour assurer les commutations et la marche du pont 2 en onduleur assisté.

Au-dessous de cette vitesse, pour bloquer les thyristors conducteurs du pont 2, on fait fonctionner pendant un court instant le pont 1 en onduleur, ce qui permet d'annuler I_o .

Ensuite, on fait à nouveau fonctionner le pont 1 en redresseur et on envoie l'impulsion de commande sur les thyristors du pont 2 qui doivent conduire pendant le sixième de période suivant des tensions appliquées à la machine.

L'inductance de lissage ayant une valeur $L = 30$ mH, calculer approximativement la durée nécessaire pour annuler, puis rétablir le courant I , et le temps pendant lequel il doit rester nul (on prendra $I_0 = 20$ A).

On explicitera les diverses hypothèses nécessaires à ce calcul.

Représenter le courant dans un enroulement de la machine pendant une période, en supposant que sa fréquence f_2 soit de 5 Hz.

SOLUTION

Préambule.

Sauf pour des usages très spécifiques, on ne construit plus de génératrices à courant continu. Le merveilleux système électromécanique qu'est l'ensemble balais-collecteur, constitue la solution que le XIX^{me} siècle a su donner au redressement des forces électromotrices alternatives induites dans une machine à courant continu. Mais, actuellement, comme cela est réalisé sur nos voitures, lorsqu'on désire produire du courant continu, on utilise un alternateur (le plus souvent triphasé) et on redresse les tensions alternatives qu'il produit grâce à un pont de diodes (ou de thyristors si l'on désire avoir une tension continue réglable).

Cependant, un tel ensemble n'est pas directement réversible et le moteur à courant continu, avec son collecteur coûteux, volumineux, et fragile est encore très utilisé lorsqu'on désire obtenir une vitesse variable ou facilement réglable.

Le problème de l'Agrégation de Sciences physiques, option Physique appliquée, de l'année 1980, se propose d'étudier un ensemble constitué de deux ponts de Graetz et d'une machine synchrone qui constitue l'équivalent d'un moteur à courant continu et de son alimentation réglable (comme le célèbre groupe Ward-Léonard).

De telles machines, parfaitement réversibles, existent déjà depuis quelques années dans le domaine des fortes puissances (plusieurs mégawatts) et des vitesses maximales élevées.

C'est la partie III, qui, aux lecteurs que cette question intéresse, apparaîtra comme la plus enrichissante.

MACHINE SYNCHRONE AUTOPILOTEE

I. ECHANGES D'ÉNERGIE ENTRE DEUX RÉSEAUX TRIPHASÉS

1. 1.1.

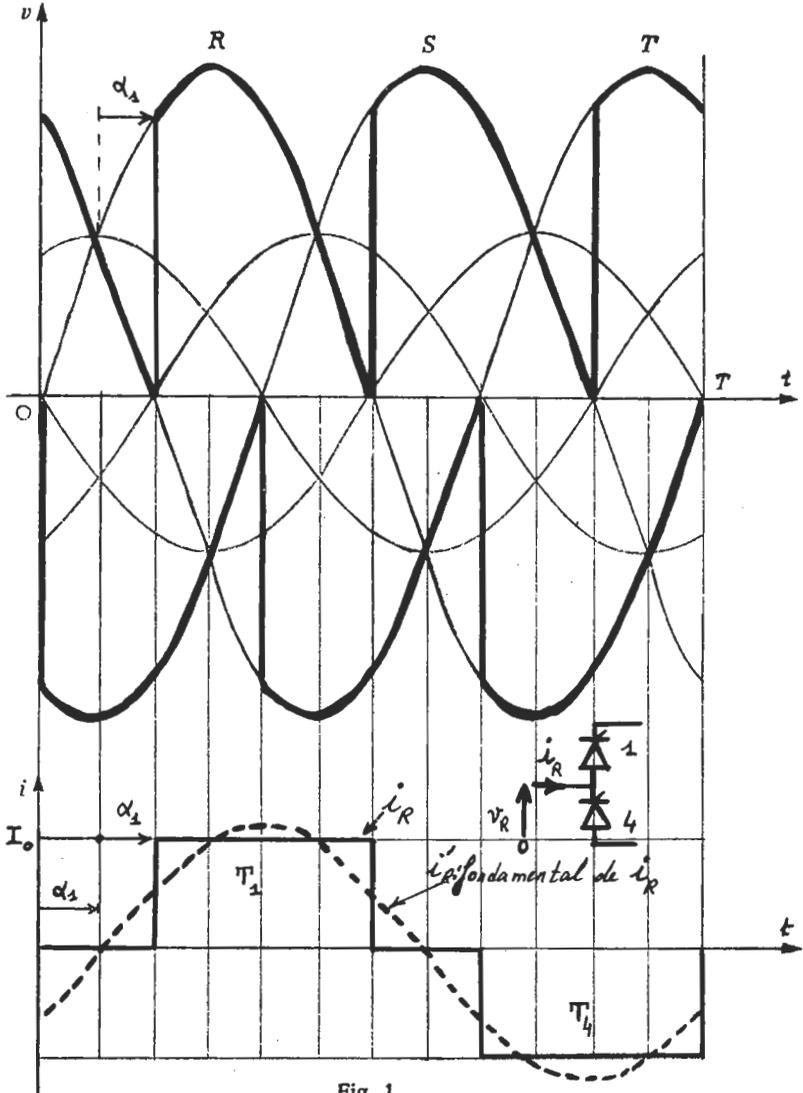


Fig. 1

1.2. Soit i'_R le fondamental de i_R , i'_R est en retard d'un angle α_1 sur v_R :

$$I_R = \frac{\sqrt{6}}{\pi} I_0 = 0,78 I_0.$$

2. Il en est de même pour le pont 2 :

$$I_{R'} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} I_0 ; i'_{R'} \text{ en retard de } \alpha_2 \text{ sur } v_{R'}$$

$$3. U_0 = \overline{v_A - v_c} = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} \cdot V_1 \cdot \cos \alpha_1 = 2,34 \cdot V_1 \cdot \cos \alpha_1$$

$$U'_0 = \overline{v_{A'} - v_{c'}} = -\frac{3\sqrt{6}}{\pi} \cdot V_2 \cdot \cos \alpha_2 = -2,34 \cdot V_2 \cdot \cos \alpha_2.$$

$$\text{D'où : } V_1 \cdot \cos \alpha_1 + V_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0.$$

L'un des deux termes $\cos \alpha_1$ ou $\cos \alpha_2$ est positif tandis que l'autre est négatif. Or, I_0 est positif avec le sens positif choisi sur la fig. 1 du texte. Si $\overline{v_A - v_c}$ est positif, le réseau 1 fournit de l'énergie, tandis que le réseau 2, aux pertes près, reçoit cette même énergie. Il suffit pour cela que $\cos \alpha_1$ soit positif ($\alpha_1 < 90^\circ$) et que $\cos \alpha_2$ soit égal à :

$$-\frac{V_1}{V_2} \cos \alpha_2.$$

De la même manière, on peut transférer de la puissance du réseau 2 au réseau 1 ; le montage est donc réversible.

4.

$$\text{Réseau 1 } \left\{ \begin{array}{l} P_1 = 3 V_R I_R \cos \varphi = 3 V_1 \frac{\sqrt{6}}{\pi} I_0 \cos \alpha_1 \dots \\ Q_1 = 2,34 V_1 I_0 \sin \alpha_1. \end{array} \right. \dots = 2,34 V_1 I_0 \cos \alpha_1$$

$$\text{Réseau 2 } \left\{ \begin{array}{l} P_2 = 2,34 V_2 I_0 \cos \alpha_2 \\ Q_2 = 2,34 V_2 I_0 \sin \alpha_2. \end{array} \right.$$

Ces expressions sont celles des puissances fournies par chaque réseau, étant entendu que si l'un des termes P_1 , Q_1 , P_2 ou Q_2 est négatif, le réseau concerné reçoit en réalité une puissance égale à l'opposé de la quantité considérée.

Application : $V_2 = 73 \text{ V.}$

R_1 fournit 2970 W et 5 150 V.A.R.

R_2 absorbe 2970 W et fournit 1 715 V.A.R.

Cette dernière assertion s'explique de la manière suivante :

Nous avons trouvé (question 1.2.) que, avec la convention générateur, le fondamental $i'_{R'}$ de $i_{R'}$ est en retard de α_2 sur $v_{R'}$ (fig. 2).

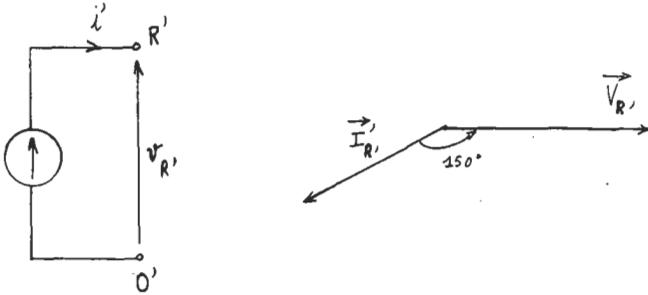


Fig. 2

Il est évident qu'en adoptant pour le réseau 2, la convention récepteur (fig. 3), avec $j' = -i'$, on aurait une intensité absorbée

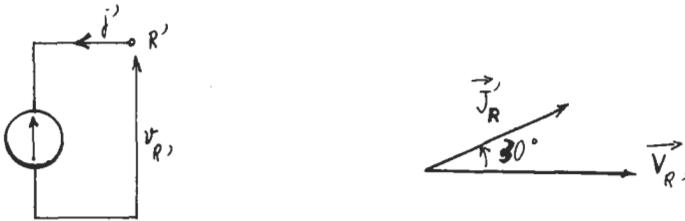


Fig. 3

par le réseau II, en avance de 30° sur la tension simple de chaque phase : vu des points R', S' et T', le réseau 2 apparaît dès lors comme ayant un comportement capacitif : il fournit de la puissance réactive.

Bien que la notion de puissance réactive devienne floue lorsque ni la tension aux bornes d'un élément, ni l'intensité qui le parcourt ne sont sinusoïdales, on peut se demander quel est l'élément qui « consomme » les puissances réactives fournies par les deux réseaux.

C'est bien évidemment la bobine qui est soumise à la tension $v_A - v_{A'}$ telle que $v_A - v_{A'} = (v_A - v_c) - (v_{A'} - v_c)$ (fig. 4).

Si f est la fréquence du réseau 1, la tension $v_A - v_c$ est périodique ($6f$), tandis que $v_{A'} - v_c$ est de fréquence $6f'$. Sous l'action de la tension $(v_A - v_{A'})$, l'intensité i_o varie quelque peu, ainsi, par

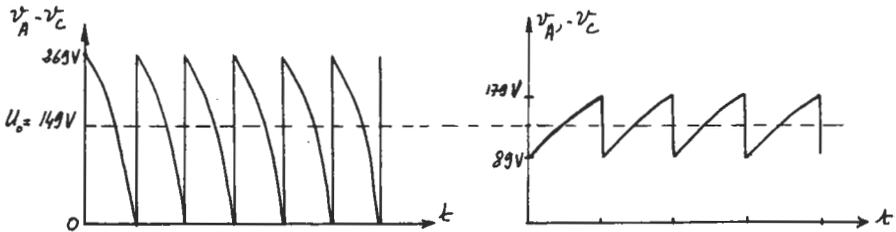


Fig. 4

conséquent que l'énergie emmagasinée, d'où la « consommation » d'énergie réactive.

Le pont 2 fonctionne en onduleur. La commande des thyristors est évidemment synchrone du réseau 2, d'où le terme « assisté » ou non autonome. La commutation est naturelle en ce sens que lorsqu'un thyristor s'amorce, la tension anode-cathode de celui qui conduisait précédemment devient instantanément négative et il cesse de conduire sans qu'on ait besoin d'un système annexe de blocage du courant.

5. Lorsqu'un thyristor ne conduit pas, il est soumis à une tension qui est la différence de 2 tensions sinusoïdales déphasées d'un tiers de période, soit : $V_1 \sqrt{2} \sin x - V_1 \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{2\pi}{3} \right)$.

Cette tension est de la forme : $V_1 \sqrt{6} \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$.

Donc : $V_{\text{inverse maximale}} = V_{\text{directe maximale}} = V_1 \sqrt{6} = 311 \text{ V}$.

L'intensité I_0 parcourt un transistor pendant :

$$\frac{T}{3} \Rightarrow I_{\text{moy}} = \frac{30}{3} = 10 \text{ A.}$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{30}{\sqrt{3}} = 17,3 \text{ A.}$$

II. ETUDE D'UN MOTEUR SYNCHRONE

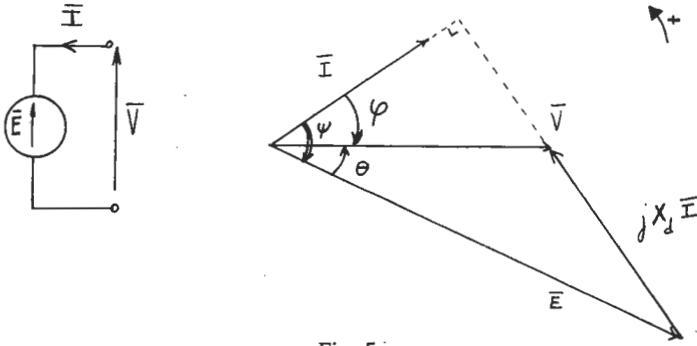


Fig. 5

1.1. Convention récepteur :

$$\bar{V} = \bar{E} + j X_d \bar{I}; \quad P = 3 V I \cos \varphi = 3 E I \cos \psi = \frac{3 E V}{X_d} \sin \theta$$

$$Q = 3 V I \sin \varphi = 3 (E I \sin \psi + X_d I^2) = \frac{3 V^2}{X_d} - \frac{3 E V}{X_d} \cos \theta$$

Remarque.

(Il est plus facile, pour retrouver rapidement ces expressions, de dessiner un diagramme dans lequel les angles ψ , θ et φ sont à la fois positifs et inférieurs à $\frac{\pi}{2}$).

1.2. a) $\varphi = -30^\circ$: $Q = -4,9$ k.V.A.R. Cela signifie que le moteur synchrone crée de la puissance réactive et fournit 4,9 k.V.A.R. au réseau.

$$P = \Gamma \Omega = \Gamma \frac{\omega}{2} \quad \text{donc} \quad \Gamma = 54,1 \text{ N.m.}$$

$$\theta = 29^\circ; \quad \psi = -59^\circ; \quad E = 210 \text{ V}; \quad i = 7,6 \text{ A.}$$

b) $\varphi = 30^\circ$: $Q = 4,9$ k.V.A.R. (absorbée).

$$\Gamma = 54,1 \text{ N.m.}; \quad \theta = 56^\circ; \quad \psi = -26^\circ; \quad E = 121,5 \text{ V}; \\ i = 4,4 \text{ A.}$$

De tous ces résultats, nous retiendrons que c'est la machine entraînée par le moteur qui fixe la puissance électrique absorbée

par celui-ci, tandis que le courant d'excitation règle le facteur de puissance de la machine. Un fort courant d'excitation, notamment, amène le moteur à fournir de la puissance réactive au réseau, de plus il permet de réduire l'angle θ de décalage interne.

$$1.3. P = \frac{3 E V}{X_d} \sin \theta. \quad P_{\max} = \frac{3 E V}{X_d} \text{ lorsque } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

On trouve : $P_{\max} = 17,8 \text{ kW}$.

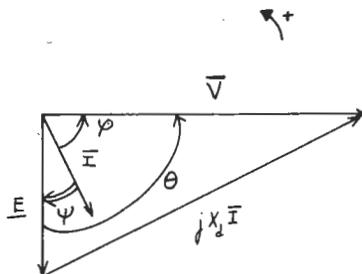


Fig. 6

$$Q = \frac{3 V^2}{X_d} = 10,8 \text{ k.V.A.R.}; \quad \theta = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi = 31^\circ; \\ \psi = -59^\circ.$$

Si la charge augmente, le moteur décroche (la valeur 90° constitue la valeur maximale de l'angle de décalage interne pour un fonctionnement stable).

2.1. Le diagramme traduit graphiquement l'équation :

$$\bar{V} = \bar{E} + j X_d \bar{I},$$

et, dans cette équation, si i et I sont constants, les modules des 3 nombres complexes sont proportionnels à la fréquence f . Le triangle reste donc homothétique à lui-même, et tous les angles sont conservés. Comme $P = 3 V I \cos \varphi = \Gamma \Omega_s$, le couple Γ , quotient de deux grandeurs proportionnelles à f est lui-même constant.

Lorsque la fréquence tend vers zéro, V tend vers zéro, et comme les résistances ne peuvent plus être négligées, I ne peut demeurer constant : le couple s'annule donc et le moteur ne peut démarrer.

2.2 Si on double brusquement la fréquence, l'inertie étant très grande, Ω ne varie pas. Le couple, pulsatoire, a une valeur moyenne nulle (certains phénomènes annexes tels que celui de

Gorges, dus aux champs tournants créés par le courant, induits dans le circuit rotorique, peuvent se manifester. Ils dépendent des amortisseurs). Normalement, la machine décroche et ralentit. La réactance à prendre en considération est X'_d ou X''_d et l'intensité absorbée par le moteur augmente.

III. ETUDE ÉLÉMENTAIRE D'UNE MACHINE SYNCHRONE AUTOPILOTÉE

La force électromotrice \bar{E} est une grandeur sinusoïdale dont le retard θ sur \bar{V} est lié à la position de l'arbre de la machine (soient deux moteurs synchrones identiques qu'on couple sur le réseau au même instant, en respectant à ce moment-là la condition $\bar{V} = \bar{E}_1 = \bar{E}_2$. Supposons qu'on charge ensuite le moteur 1, que l'on modifie son excitation, etc., et qu'on ne touche pas au moteur 2 qui continuerait à ne mettre en jeu ni puissance active, ni puissance réactive : l'angle θ serait alors égal au décalage angulaire entre le rotor du moteur 1 et celui du moteur témoin 2).

Comme le capteur dont les indications permettent d'élaborer les impulsions de commande des thyristors est sensible également à la position du rotor, la phase du fondamental \bar{I}_R , et celle de \bar{E} sont déterminées par la même grandeur. L'angle ψ est donc constant.

Dans la première partie, alors que nous avons adopté pour le réseau 2 la convention générateur, nous avons $\alpha_2 = \varphi_2$. Ici, nous prenons la convention récepteur pour le moteur synchrone.

Si φ représente l'angle de vecteurs \mathbf{I} , \mathbf{V} , comme sur les fig. 5 et 6 (lorsque φ est positif, \bar{I} est en retard sur \bar{V}), on a donc $\varphi = \alpha_2 - \pi$.

La relation générale $U'_0 = -2,34 \cdot V_2 \cdot \cos \alpha_2$ devient :

$$U'_0 = U_0 = 2,34 \cdot V_2 \cdot \cos \varphi.$$

D'autre part, puisque $V \cos \varphi = E \cos \psi$, on a :

$$U_0 = 2,34 \cdot E \cdot \cos \psi.$$

2. De la relation précédente, on tire : $\Omega = \frac{U_0}{2,34 \cdot k \cdot i \cdot \cos \psi}$.

Le couple Γ s'obtient à partir de l'expression :

$$\Gamma \Omega = 3 E I \cos \psi.$$

Comme nous avons négligé toutes les pertes (aussi bien celles de la machine synchrone que celles du pont 2), on doit également pouvoir écrire : $U_0 I_0 = \Gamma \Omega$.

En effet : $U_o = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} E \cos \psi$ d'après (I.3°) et $I = \frac{\sqrt{6}}{\pi} I_o$

d'après (I.1.2). Donc $I_o = \frac{\pi}{\sqrt{6}} I$, ce qui entraîne bien la relation

précédente. De là, on tire : $\Gamma = 3 \cdot k \cdot i \cdot I \cdot \cos \psi$, ou encore :

$$\Gamma = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} \cdot k \cdot i \cdot I_o \cos \psi = 2,34 \cdot k \cdot i \cdot I_o \cos \psi$$

On voit sur ces expressions que Ω ne dépend pas de l'intensité I_o circulant entre les deux ponts et que le couple Γ est indépendant de la vitesse Ω .

Par contre, U_o étant fixé (par V_1 et α_1), ainsi que ψ (par le dispositif électronique réglant la position des impulsions élaborées à partir du signal donné par le capteur), on peut agir sur la vitesse de rotation en modifiant le courant d'excitation i . La question suivante montrera toutefois que ce paramètre est à manier avec prudence.

3.

$$I_N = 26,3 \text{ A}; \quad I_{on} = \sqrt{\frac{3}{2}} I_N = 32,2 \text{ A}; \quad \cos \psi = 0,5;$$

$$k = 0,176 \text{ u.S.I.} = 1,84 \text{ ohm. min/tr.}$$

$\psi = -60^\circ$	}	Pour $\alpha_1 = 0^\circ$	{	I_o (A)	:	10	20	32,2	
				Γ (N.m)	:	18,5	37,1	59,7	
		Pour $i = 9 \text{ A}$	{	α_1	:	0°	30°	60°	
				Ω (tr/min)	:	1 533	1 327	766	

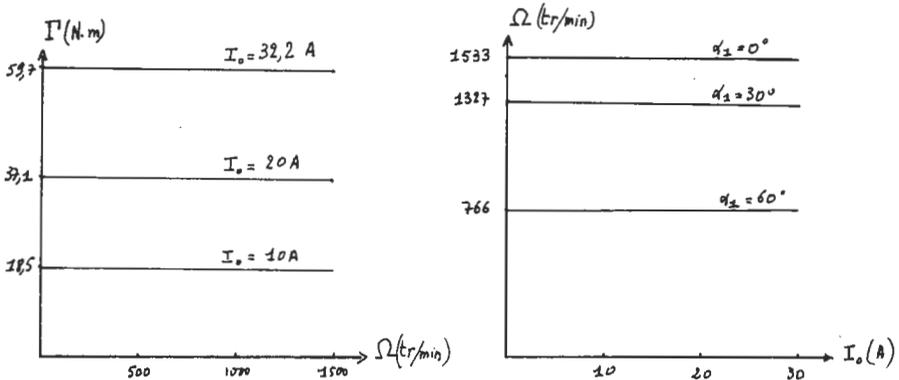
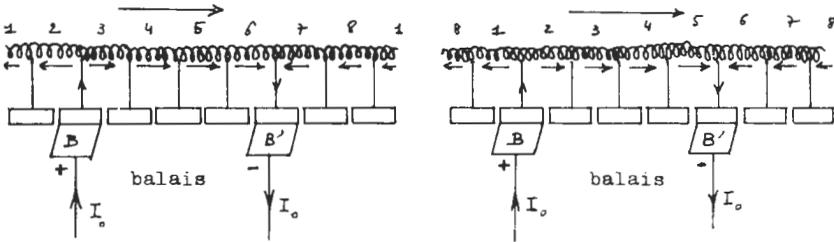


Fig. 7

4. Cette machine à courant continu est à excitation indépendante. Grâce au pont 2 et au capteur de position, à chaque demi-tour du rotor, le courant dans chaque phase change de sens (fig. 8). De la même manière, dans un moteur à courant continu, grâce au système balais-collecteur, le courant change de sens dans chaque section (portion de bobinage située entre deux lames consécutives du collecteur) chaque fois que les lames correspondantes passent sous un balai.

sens de rotation



Le courant dans les sections 2 et 6 change de sens.

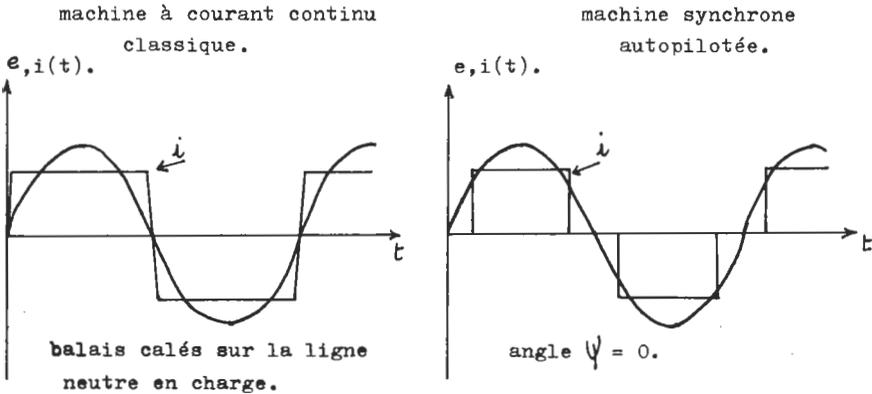


Fig. 8

Ainsi la machine synchrone autopilotée est-elle tout à fait comparable à une machine à courant continu classique, à excitation indépendante, possédant deux balais et 3 lames au collecteur (l'enroulement de chaque phase constituant l'équivalent d'une section).

5.1 Que le pont 2 fonctionne en onduleur (machine synchrone = moteur) ou en redresseur (machine synchrone = alter-nateur), il faut, avec les conventions générateur pour le réseau 2, que le courant \bar{I}_R (fig. 2) soit en retard sur la tension \bar{V}_R . Avec les conventions récepteur qui sont les nôtres dans cette partie (fig. 3 et 5), il faut que le fondamental \bar{I} du courant dans une phase de la machine synchrone soit en avance sur \bar{V} . Avec les conventions exprimées sur les fig. 5 et 6 [$\varphi = (\mathbf{I}, \mathbf{V})$; $\varphi = (\mathbf{I}, \mathbf{E})$; $\vartheta = \mathbf{E}, \mathbf{V}$], Q , la puissance réactive absorbée par la machine, doit être négative, puisque φ est négatif.

Or, $Q = 3 (E I \sin \psi + X_d I^2)$, d'après la question II.1.1. On en déduit :

$$-E \sin \psi > X_d I.$$

5.2. Dans l'inégalité précédente, qui s'écrit $E > -\frac{X_d}{\sin \psi}$,

faisons apparaître, au numérateur du second membre, l'expression de Γ .

$$\text{On trouve : } E > \frac{X_d \Omega \Gamma}{3 E \sin \psi \cos \psi}.$$

Et, puisque $E = k \cdot i \cdot \Omega$, avec $X_d = L_d \omega$ et $\Omega = \frac{\omega}{p}$:

$$i^2 > -\frac{p \cdot L_d \cdot \Gamma}{3 k^2 \cdot \sin \psi \cdot \cos \psi}.$$

5.3. $L_d = 14,3$ mH ; $p = 2$ puisque le moteur a deux paires de pôles ; $k = 0,176$ u. S.I.

Pour $\Gamma = 50$ N.m et $\psi = 60^\circ$, on trouve $i > 6,0$ A.

6. Que se passerait-il si, avec ces valeurs, jointes à $V_1 = 127$ V et $\alpha_1 = 0$, conduisant à $U_o = 297$ V, on diminuait le courant d'excitation de la valeur $i_1 = 9$ A à la valeur $i_{\min} = 6,0$ A ?

La f.é.m. E est invariable. Par la relation $U_o = 2,34 E \cdot \cos \varphi$, on trouve $E = 254$ V. L'expression de Ω trouvée à la question 2 donne $\Omega_1 = 1535$ tr/mn pour $i_1 = 9$ A et $\Omega_2 = 2311$ tr/mn pour $i = 6,0$ A.

On en déduit la puissance mécanique $\Gamma \Omega = U_o I_o$, donc la valeur efficace I du fondamental.

pour $i_1 = 9$ A ; $P_1 = 8,0$ kW ; $I_{o1} = 27$ A ; $I_1 = 21$ A ;

$$X_d I_1 = 97$$

pour $i_2 = 6,1$ A ; $P_2 = 12,1$ kW ; $I_{o2} = 40,7$ A ; $I_2 = 31,8$ A ;

$$X_d I_2 = 220$$

Connaissant E , ψ et $X_d I$, on en déduit V et φ (fig. 9).

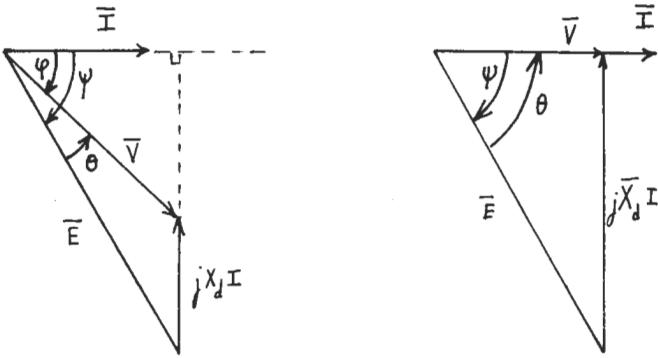


Fig. 9

On voit que la diminution de i a pour effet : 1° d'augmenter la vitesse ; 2° d'augmenter les intensités I_0 et I ; 3° de diminuer V qui passe de 177 V pour $i_1 = 9$ A à 127 V pour $i_2 = 6,0$ A ; 4° de diminuer l'avance de \bar{I} sur \bar{V} qui passe de 43° à 0° . (La condition $-E \sin \psi > X_d I$ traduisait le fait que les grandeurs φ ou Q devaient être négatives. Il est normal que pour la valeur minimale de i , ici 6 A, on trouve ces mêmes grandeurs nulles et donc \bar{V} et \bar{I} en phase.)

Si, pour le même couple, on diminue encore i , ou si pour cette valeur de $i = 6$ A on augmente un peu le couple Γ , la machine synchrone ne décroche pas au sens de la question II.1.3. puisque l'angle θ de décalage interne est inférieur à 90° (il est proche de 60°). Cependant, puisque φ devient positif, il y a des ratés de commutation.

7. Pour inverser le couple, il faut changer le signe de l'expression $3 E I \cos \psi$. Donc changer celui de $\cos \psi$. On devra prendre $\psi < -90^\circ$.

Il faut d'autre part que le pont 1 puisse transférer au réseau 1 la puissance reçue de la machine synchrone devenue générateur. Comme le courant I_0 ne peut avoir que le sens indiqué sur la fig. 1 du texte, on doit avoir $U_0 < 0$ soit $\cos \alpha_1 < 0$. On doit donc prendre $\alpha_1 > 90^\circ$.

Pour inverser le sens de rotation, il faut changer l'ordre de distribution des impulsions sur les thyristors, ce qui revient à permuter deux fils de phases de la machine synchrone.

IV. ETUDE DE LA COMMUTATION ET DE SES CONSÉQUENCES

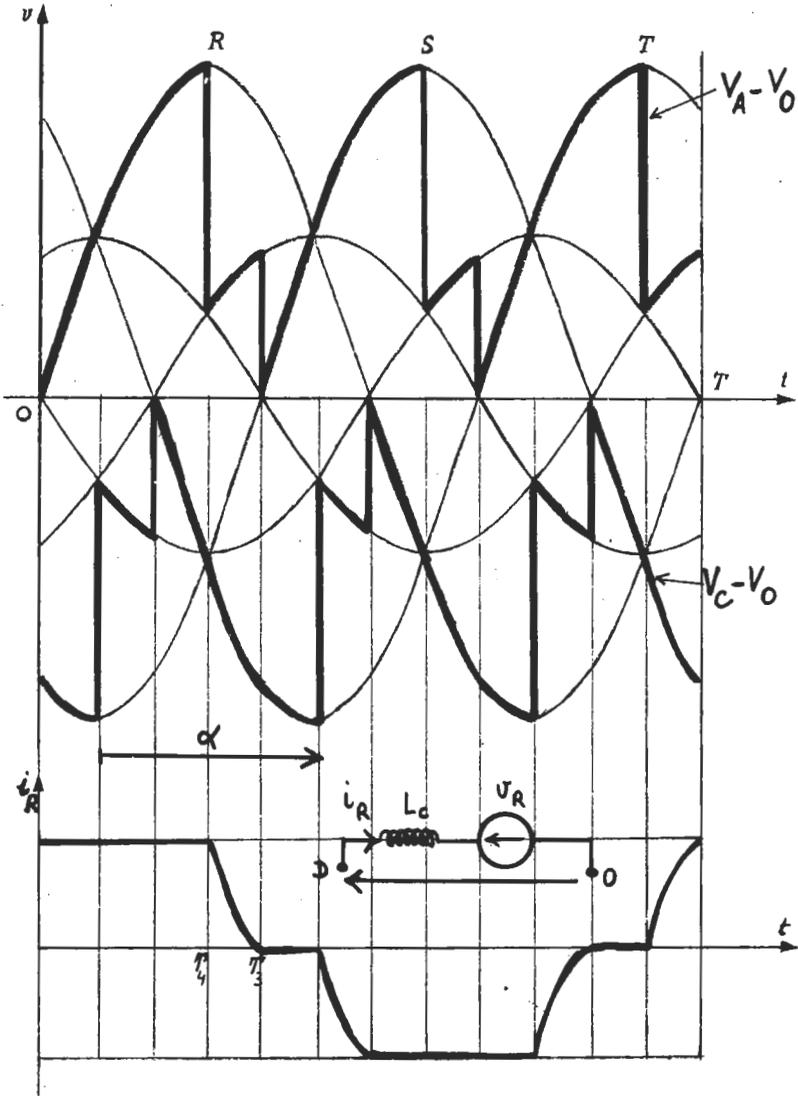


Fig. 10

1. 1.1. Les tensions $v_A - v_O$ et $v_C - v_O$ sont représentées sur la fig. 10 ainsi que l'intensité i_R comptée positivement quand le courant correspondant circule de D vers O, (convention récepteur).

La tension $v_D - v_O$ est représentée sur la fig. 11.

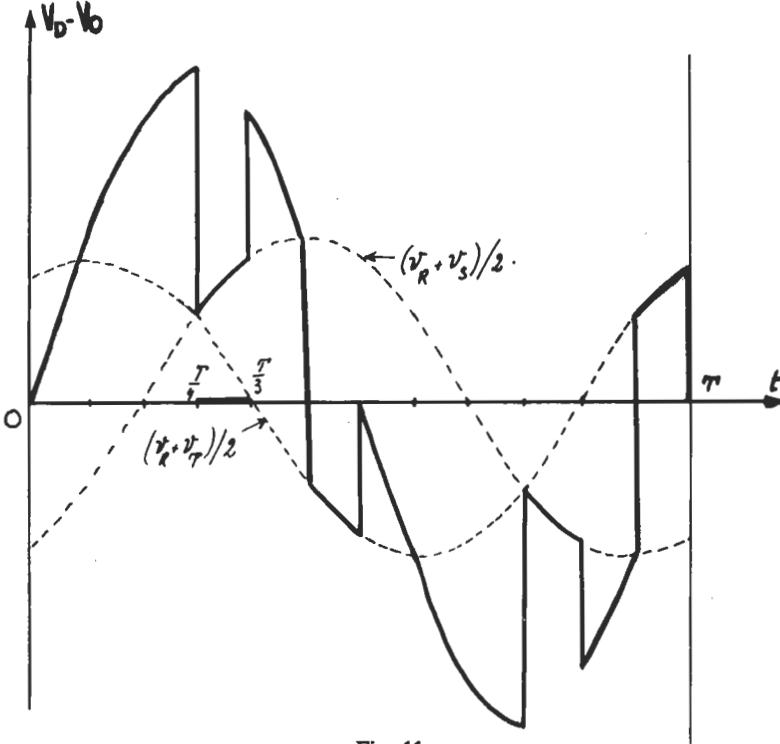


Fig. 11

1.2.1. En dehors des commutations $i_R = \text{cste}$ (I_o ou 0), donc l'inductance n'a pas de tension à ses bornes.

1.2.2. Le calcul de la chute de tension due à l'empîètement est classique. On sait que celle-ci vaut $\frac{3}{\pi} L_C \omega I_o$ si ω est la pulsation des tension v_R , v_S et v_T . Si $U_o = v_A - v_C$, on a donc : $U_o = -2,34 V \cos \alpha + \frac{3}{\pi} L_C \omega I_o$.

1.2.3. Etudions la commutation $R \rightarrow S$ (fig. 12), de $\frac{T}{4}$

à $\frac{T}{3}$ sur les fig. 10 et 11 :

$$v_R + L_C \frac{di_R}{dt} = v_A$$

$$v_S + L_C \frac{di_S}{dt} = v_A.$$

Pendant que i_R diminue et que i_S augmente, la somme $i_R + i_S$

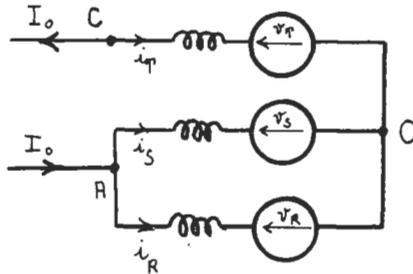


Fig. 12

vaut I_0 , donc $v_A = v_D = \frac{v_R + v_S}{2}$; d'autre part $L_C \frac{di_R}{dt} = \frac{v_S - v_R}{2}$.

La commutation que nous étudions débute lorsque $\omega t' = \alpha - \frac{\pi}{6}$,

elle s'achève lorsque $\omega t'' = \alpha - \frac{\pi}{6} + \omega\tau$. Pour $t = t'$, $i_R = I_0$,

tandis que pour $t = t''$, $i_R = 0$. L'équation $L_C \frac{di_R}{dt} = \frac{v_S - v_R}{2}$,

qui s'écrit encore :

$$di_R = -\frac{V\sqrt{6}}{2L_C} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) dt$$

donne, après intégration entre les dates t' et t'' :

$$I_0 = \frac{V\sqrt{6}}{2L_C \omega} [\cos \alpha - \cos(\alpha + \delta)]$$

Si δ est petit, le théorème des accroissements finis permet d'écrire, pour $\alpha \neq 0$

$$I_0 = \frac{V\sqrt{6}}{2L_C} \cdot \tau \cdot \sin \alpha \quad \text{soit} \quad \delta = \frac{2L_C \omega I_0}{V \cdot \sqrt{6} \cdot \sin \alpha}$$

1.2.4. Considérons le thyristor 1 de la fig. 3 du texte.

En commutation naturelle, il conduit de $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ à $\vartheta = \frac{5\pi}{6}$.

Ensuite, il serait soumis à une tension inverse parce que les tensions v_S , puis v_T sont supérieures à v_R (fig. 12).

L'angle α maximal dont on peut retarder la commutation naturelle, est égal à π , parce qu'ensuite (après $\vartheta = \frac{11\pi}{6}$), v_S redevient inférieure à v_R .

Prenons $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. La tension v_{DC} aux bornes du thyristor 1 n'est négative, après son temps de conduction, que jusqu'à $\vartheta = \frac{11\pi}{6}$, car, ensuite, le thyristor 3 conduit nécessairement et v_R est alors supérieur à v_S .

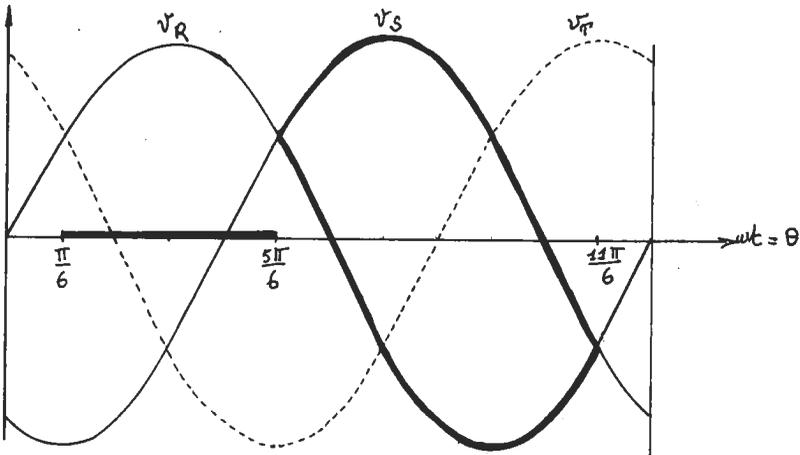


Fig. 12

On a donc : $\alpha + \delta + \beta = \pi$ ou encore $\beta = \pi - (\alpha + \delta)$.

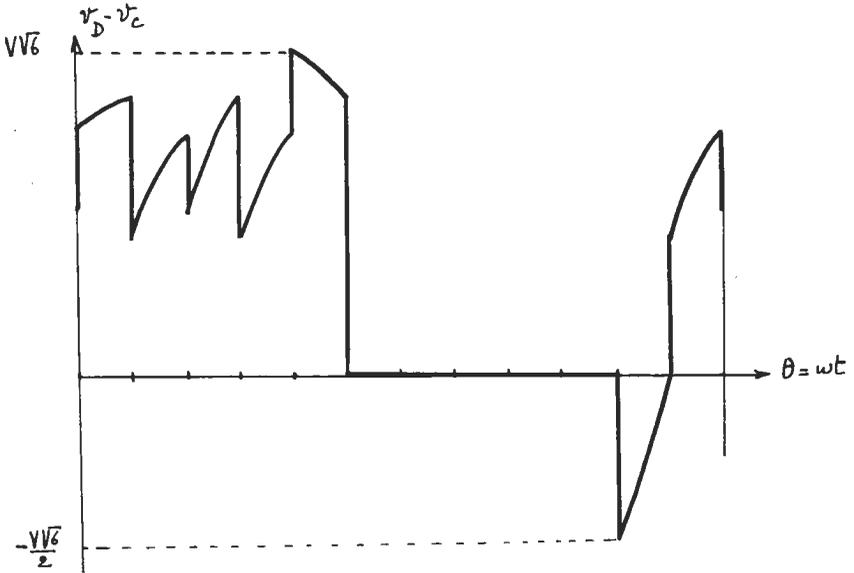


Fig. 13

La fig. 13 représente la tension v_{DC} aux bornes du thyristor 1 dans le cas où $\alpha = 120^\circ$ et $\delta = 30^\circ$. On vérifie qu'on a bien $\beta = 30^\circ$.

1.2.5. • Si $t_r = \frac{\beta}{\omega}$ devient inférieur à t_q , durée

minimale pendant laquelle il faut appliquer une tension inverse à un thyristor pour qu'il se désamorce, celui-ci devient à nouveau conducteur. Si deux thyristors tels que 1 et 4, conduisent en même temps, la source de tension U_0 est mise en court-circuit à travers la bobine L. L'intensité I_0 augmente et, en principe, on ne peut plus rétablir les commutations normales.

• Si un thyristor ne s'amorce pas, celui qui conduisait continue à conduire. Il devient impossible, jusqu'à la période suivante, de déclencher la conduction des thyristors homologues, soumis à des tensions négatives. L'intensité I_0 augmente, mais si, lors de la période suivante, les impulsions sont convenables, le processus reprend sa forme normale.

L'intensité I_0 est limitée par action sur l'angle de commande α_1 du pont 1.

2.1. C'est la forme qui est représentée sur la fig. 11 du présent corrigé. Mais les angles d'empîement, δ , sont faibles (5 à 10° au lieu de 30°).

2.2. A la question IV.1.2.3., nous avons trouvé :

$$L_C \omega = \frac{V \cdot \sqrt{6} \cdot \omega \tau \cdot \sin \alpha}{2 I_0}$$

Ici on obtient donc : $X_C = 0,9 \Omega$ ou $L_C = 2,86 \text{ mH}$.

2.3. Admettons que le champ magnétique créé par chaque phase, lorsqu'elle est parcourue par un courant d'intensité i , soit à répartition spatiale sinusoidale. Lorsque les 3 phases sont alimentées par des courants triphasés, un champ à répartition sinusoidale est créé ; il tourne à la vitesse angulaire $\Omega = \frac{\omega}{p}$. Ici,

entre deux commutations. Le champ dans l'entrefer est à répartition sinusoidale (d'amplitude maximale proportionnelle à $I_0 \sqrt{3}$ car deux phases seulement sont alimentées et parcourues par des courants de sens opposés).

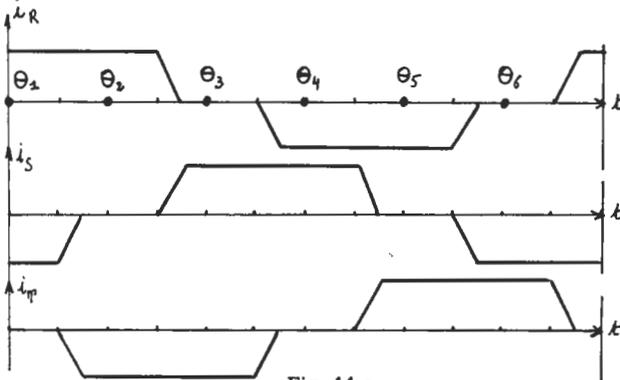


Fig. 14 a

Il prend ainsi, au cours d'une période, 6 configurations fixes comme le représente la fig. 14 b déduite de la fig. 14 a qui, elle-même représente les 3 courants i'_R , i'_S et i'_T dans le cas où $\alpha = 120^\circ$ et $\delta = 15^\circ$.

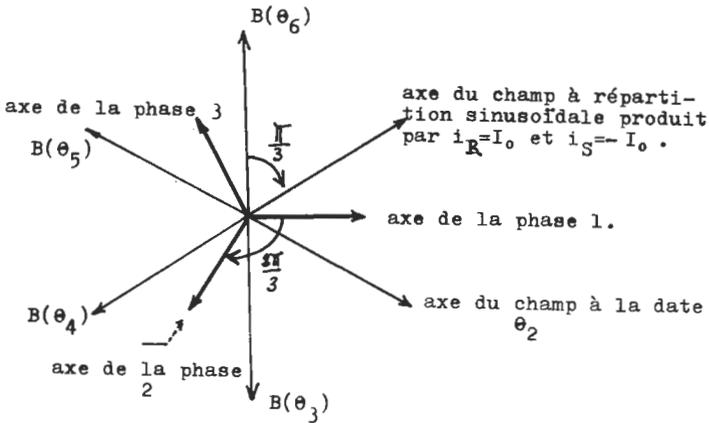


Fig. 14 b

C'est pendant la durée τ d'une commutation que le champ, en se déformant, passe d'une configuration à une autre dont l'axe

de symétrie a tourné de $\frac{\pi}{3p}$. Si on assimile cette déformation à une rotation, le champ de l'induit « tourne » uniquement pendant 6τ par période T . Sa « vitesse de rotation » est donc, pendant

les commutations, $\frac{T}{6\tau}$ fois plus élevée que celle de la roue polaire et des amortisseurs que porte celle-ci (avec l'exemple

précédent $\frac{T}{6\tau} = 7,4$). Des courants induits se développent donc

dans le circuit inducteur et les amortisseurs et s'opposent au flux qui les a créés. L'inductance à prendre en considération est donc plus faible que L_d . Il est donc normal que la réactance trouvée ($0,9 \Omega$) soit de l'ordre de X''_d qui, pour les mêmes raisons est plus faible que X_d .

3.1.1. $U_0 = 297 \text{ V}$. Si l'on néglige les pertes de la

machine, $I_0 = \frac{P}{U_0} = 28,6 \text{ A}$.

3.1.2. $V \cos \varphi = E \cos \psi = -V \cos \alpha_2$ puisque

$\varphi = \alpha_2 - \pi$.

D'après la question IV.1.2.2., on sait que :

$$V \cos \varphi = E \cos \psi = \frac{U_0 - \frac{3}{\pi} L_C \omega I_0}{\frac{3\sqrt{6}}{\pi}} = 116,4 \text{ V.}$$

3.1.3. La relation $V\sqrt{6} [\cos \alpha - \cos (\alpha + \delta)] = 2L_C \omega I_0$, établie à la question IV.1.2.3. s'écrit encore :

$$V\sqrt{6} [-\cos \varphi + \cos \beta] = 2L_C \omega I_0$$

ou : $V \cos \beta = V \cos \varphi + \frac{2L_C \omega I_0}{\sqrt{6}} = 137,4 \text{ V.}$

$$\text{Donc : } V = 142 \text{ V ; } \cos \varphi = \frac{116,4}{142} = 0,82 \text{ d'où : } \varphi = -35^\circ.$$

On en déduit : $\alpha_2 = 145^\circ$, l'angle d'empiètement δ étant, pour sa part, égal à : $180 - 145 - 15 = 20^\circ$.

$$3.1.4. P = \frac{3EV}{X_d} \sin \theta \quad \text{donc} \quad E \sin \theta = 89,6 \text{ V.}$$

$$\text{On a donc : } E \sin \theta = E \sin (\varphi - \psi) = 89,6 \text{ V}$$

$$\text{et : } E \cos \psi = 116,4 \text{ V.}$$

$$\text{De ces équations, on déduit : } \operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \varphi - 0,77}{\cos \varphi} = -1,65.$$

$$\text{Soit : } \psi = -59^\circ \quad \text{et} \quad E = 225 \text{ V.}$$

Pour obtenir cette force électromotrice, il faut régler i à

$$\frac{4,6 \times 225}{127} = 8,15 \text{ A.}$$

3.2.1. Nous avons vu que la vitesse du moteur synchrone autopiloté dépend très peu de la charge (quand α_1 , i et ψ sont fixés), et que cela lui confère les mêmes propriétés que celles d'un moteur à courant continu à excitation indépendante.

Si donc la puissance mécanique augmente I_0 et I augmentent, mais la force électromotrice E , fonction de i et de Ω reste constante.

Un diagramme tel que ceux de la fig. 9 montre alors que φ diminue (en valeur absolue). Or, $\alpha_2 = \pi + \varphi$; donc α_2 augmente.

Et puisque $\beta = \pi - \alpha_2 - \delta$, l'angle de garde diminue (l'angle δ d'empêtement augmente lui aussi).

On arrive rapidement à une situation comportant des ratés de commutation.

3.2.2. E n'est donc pas modifié; l'angle ψ non plus. (E $\cos \psi = 116,4$ V). P = 3 EI $\cos \psi$ donne I = 11,5 et

$$I_o = \frac{\pi \cdot I}{\sqrt{6}} = 14,7 \text{ A. Par le même diagramme que celui de la}$$

fig. 9, on trouve V = 183 V, $\varphi = -51^\circ$ et $\theta = 8^\circ$.

3.2.3. Nous avons vu que le couple Γ ne dépend que

de i et de I_o : $\Gamma = 3 ki I \cos \psi = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} ki I_o \cos \psi$. Si Γ est inchangé, ainsi que i et ψ , I_o est donc la même.

La question II.2.1. nous a montré que le diagramme se conserve lorsque i , ψ , I se conservent. φ et θ sont donc inchangés.

3.3. Si la vitesse de la machine est inférieure à $\Omega_n/10$, on peut, pratiquement, négliger sa force électromotrice. Nous considérerons donc que la tension aux bornes du pont 2 est nulle.

Nous négligeons également, devant l'inductance de lissage de 30 mH, la valeur de l'inductance de commutation de la machine (plus proche, aux faibles vitesses de la valeur $L_d = 14,3$ mH que de la valeur $L_c = 2,9$ mH).

Supposons que la machine tourne à 150 tours par minute. Il faut que la forme des courants dans les 3 phases R, S et T soit sensiblement celle de la figure 14 a, avec une période de

$$\frac{20 \times 1500}{150} = 200 \text{ ms.}$$

A l'instant qui est noté θ_1 sur la figure 14 a, les thyristors qui conduisent sont les thyristors 4 et 3 de la figure 15, tandis qu'à l'instant noté θ_2 sur la figure 14 a, ce sont les thyristors 4 et 5 de la figure 15 qui conduisent.

Il faut donc, au milieu de la durée de conduction du thyristor 4, c'est-à-dire au bout de $\frac{200}{6} = 33$ ms, arrêter la conduc-

tion de la paire (4,3) de thyristors pour mettre en service la paire (4,5).

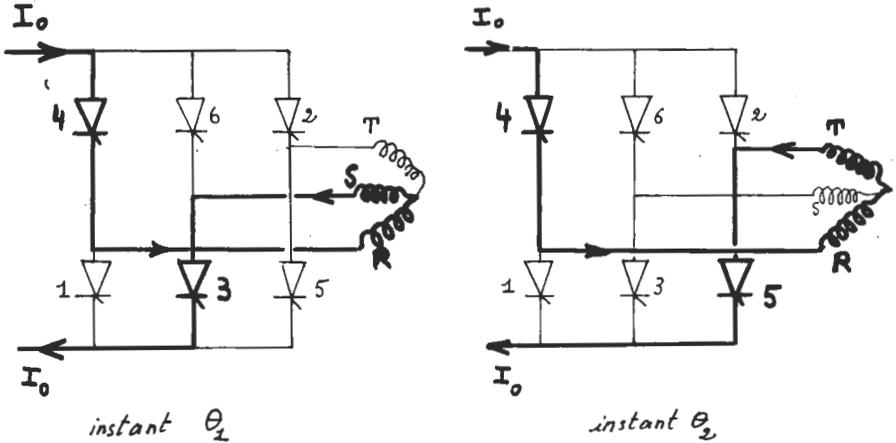


Fig. 15

Lorsque le courant I_o a pour intensité 20 A pour l'annuler en appliquant la tension inverse maximale ($U_o = -297$ V obtenue en faisant $\alpha_1 = \pi$), il faut un temps :

$$\Delta t = \frac{L \cdot I_o}{|U_o|} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \times 20}{297} \approx 2 \text{ ms.}$$

Ce temps est négligeable devant la durée de passage du courant dans un enroulement et le fonctionnement de l'ensemble du système n'est que légèrement perturbé.

La fig. 16 donne, en exagérant Δt par rapport à l'échelle du temps, l'allure de l'intensité du courant dans la phase R.

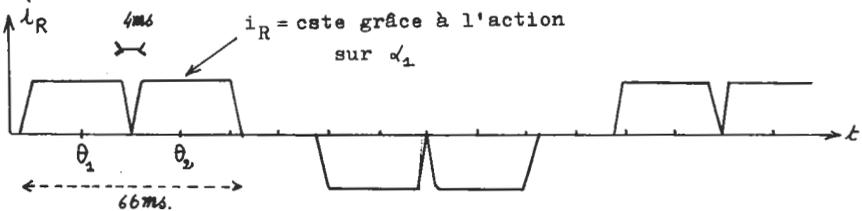


Fig. 16

R. MOREAU (Bordeaux).

CAPES

CORRIGE DU PROBLEME C.A.P.E.S. PHYSIQUE 1979

Erratum

L'explication donnée dans le préambule concernant la valeur de la vitesse de phase (3 m/s) d'une onde électromagnétique n'est pas, comme nous l'avions d'abord pensé, liée aux propriétés des métaux, mais essentiellement due à la configuration dans l'espace et dans le temps des sources de ce champ. En fait, l'expression analytique du champ magnétique donné dans le texte n'est *pas valable dans tout l'espace*; le champ n'occupe qu'une région limitée de l'espace, *les ondes ne sont pas planes* et la vitesse de phase, n'a plus de raison d'être « c ».

Nous nous excusons auprès des lecteurs de l'explication erronée que nous avons donnée à propos d'une question justifiée.

A.-M. QUITTET, R. JULLIEN.

SESSION DE 1980

COMPOSITION DE PHYSIQUE AVEC APPLICATIONS

(Durée : 5 heures)

Ce problème traite de diverses propriétés relatives à l'électron au repos ou en mouvement.

L'étude est faite dans un repère (\mathcal{R}) terrestre, supposé galiléen. Les diverses parties sont indépendantes et, dans chacune d'elles, de nombreuses questions sont elles-mêmes indépendantes ou peuvent être traitées à partir de résultats donnés dans le texte.

Données numériques générales :

Masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg ;

Charge de l'électron : $-e$ avec $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C ;

$(4 \pi \epsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9$ S.I. ;

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8$ m. s⁻¹.

A. PREMIÈRE PARTIE (sur 35 points)

A.1. Une sphère de centre O, de rayon a , portant la charge totale Q, est placée dans le vide, loin de toute autre charge électrique ; la distribution des charges élémentaires a , de la sorte, une symétrie sphérique.

A.1.1. Donner l'expression du champ électrique et du potentiel à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère :

- a) Dans le cas d'une sphère chargée uniformément en surface ;
- b) Dans le cas d'une sphère chargée uniformément en volume.

A.1.2. Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique et calculer l'énergie électrostatique totale :

- a) Pour la sphère chargée uniformément en surface ;
- b) Pour la sphère chargée uniformément en volume.

A.1.3. Dans un modèle simpliste de l'électron, on représente celui-ci comme une sphère chargée et l'on attribue à sa masse au repos une origine purement électrostatique au sens de l'équivalence d'Einstein entre masse et énergie.

Calculer littéralement et numériquement les rayons électrostatiques de l'électron pour les deux distributions envisagées précédemment.

A.2. Dans cette question, on étudie l'interaction électron-proton dans l'atome d'hydrogène et on se place dans l'hypothèse de Bohr où l'électron décrit une trajectoire circulaire de rayon r , le proton, de masse M, étant supposé fixe au centre O de la trajectoire.

A.2.1. Montrer que l'interaction gravitationnelle est négligeable devant l'interaction électrique (on donne la constante gravitationnelle $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ et, pour la masse du proton, $M = 1836 m$).

A.2.2. Calculer l'énergie cinétique de l'électron en le considérant comme non relativiste ; en déduire l'énergie mécanique totale E du système électron-proton.

A.2.3. En introduisant l'hypothèse de Bohr : $\|\vec{\sigma}_0\| = n \frac{h}{2\pi}$

(relation où $\vec{\sigma}_0$ désigne le moment cinétique en O de l'électron), montrer que l'énergie du système se met sous la forme $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$.

A.2.4. Application numérique : Calculer E_0 en électron-volt avec

$$h = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J.s.}$$

A.2.5. L'hypothèse de Bohr est-elle acceptable dans le cadre de mécanique quantique ?

A.3.A.3.1. Toujours dans l'hypothèse où un électron décrit autour du noyau une trajectoire circulaire, montrer que l'on peut associer au mouvement orbital de l'électron un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ que l'on écrira sous la forme $\vec{\mathcal{M}} = g \left(-\frac{e}{2m} \right) \vec{\sigma}_o$, g étant « le facteur de Landé » (que l'on calculera).

A.3.2. On note $\vec{\sigma}_l$ (l nombre quantique orbital) le moment cinétique orbital de l'électron et $\vec{\sigma}_s$ le moment cinétique de spin de l'électron. Rappeler les valeurs que peuvent prendre σ_{l_z} et σ_{s_z} composantes de $\vec{\sigma}_l$ et de $\vec{\sigma}_s$ sur un axe $z'z$. En déduire les valeurs que peut prendre σ_{j_z} composante sur $z'z$ du moment cinétique total $\vec{\sigma}_j$ de l'électron dans le cas où $l = 1$.

A.3.3. Quelle est, pour une sous-couche saturée, la contribution à la composante σ_z sur $z'z$, du moment cinétique total $\vec{\sigma}$ d'un atome ?

A.3.4. Application au sodium ($Z = 11$). Préciser la configuration électronique fondamentale pour l'atome de sodium ; donner les valeurs possibles de σ_z . En déduire que la composante sur $z'z$, \mathcal{M}_z du moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ de l'atome, ne peut prendre que deux valeurs $\mathcal{M}_z = \pm \mu_B$, μ_B étant le magnéton de Bohr que l'on exprimera en fonction de e , m , et \hbar (on prend le facteur de Landé de l'électron égal à 2).

A.3.5. Décrire l'expérience de Stern et Gerlach et dire ce que l'on observe dans le cas du sodium.

A.4. Donner l'expression de l'énergie cinétique relativiste d'un électron de vitesse v ; exprimer le développement limité au second ordre en $\frac{v^2}{c^2}$ de cette énergie cinétique ; quelle erreur commet-on en utilisant

la formule classique pour un électron qui a été accéléré à partir du repos par une tension $U = 20\,000$ V ?

Dans les parties B, C, D suivantes, nous considérerons l'électron comme une particule chargée, assimilable à un point matériel animé d'une vitesse non relativiste. Dans les parties B et C, on négligera les interactions entre électrons.

B. DEUXIÈME PARTIE (sur 20 points)

Des électrons émis par une cathode au potentiel zéro évoluent dans l'espace où l'on fait le vide, délimité par quatre grilles planes nor-

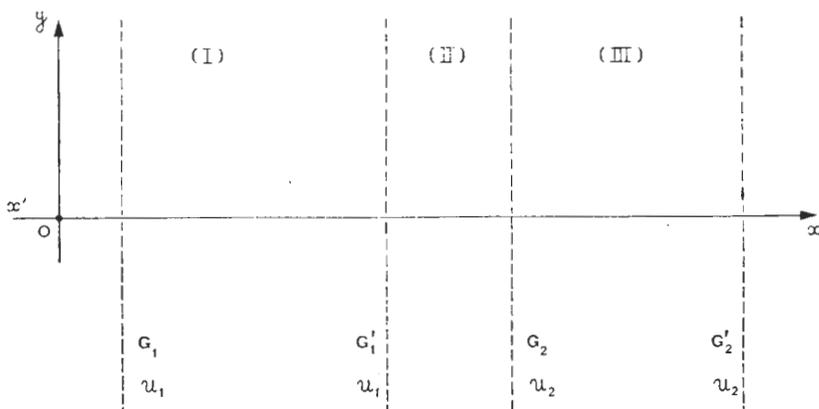


Fig. 1

males à l'axe $x'x$, représentées fig. 1. Ces grilles sont portées au potentiel U_1 pour G_1 et G'_1 et U_2 pour G_2 et G'_2 . Un électron atteint la grille G_1 avec le vecteur vitesse \mathbf{v}_1 situé dans le plan xOy . On pose $(\mathbf{Ox}, \mathbf{v}_1) = i_1$.

B.1. Quelle est la nature du mouvement d'un électron dans les zones (I) et (III), entre G_1 et G'_1 d'une part, et G_2 et G'_2 d'autre part ?

B.2. Lorsque l'électron peut gagner la zone (III), il passe la grille G_2 avec le vecteur vitesse \mathbf{v}_2 . On pose $(\mathbf{Ox}, \mathbf{v}_2) = i_2$.

B.2.1. Que vaut alors sa vitesse $v_2 = \|\mathbf{v}_2\|$?

B.2.2. Quelle relation existe-t-il entre i_1 , U_1 , U_2 , i_2 et v_1 ?

B.2.3. Si $0 < i_1 < \frac{\pi}{2}$, donner le domaine de variation de i_2

en fonction de $U_2 - U_1$. On calculera notamment la valeur minimale de $U_2 - U_1$ pour que i_2 existe.

B.3. On considère maintenant que les électrons sont émis par la cathode sans vitesse initiale.

B.3.1. Calculer la vitesse $v_1 = \|\mathbf{v}_1\|$ d'arrivée sur la grille G_1 .

B.3.2. Préciser la relation entre i_1 , U_1 , U_2 et i_2 lorsque l'électron atteint la zone (III).

B.3.3. Dans le cas où G'_1 et G_2 sont infiniment proches, quelle analogie peut-on faire avec un autre phénomène physique ? Quel rôle

joue la grandeur $\sqrt{\frac{U_2}{U_1}}$ dans cette analogie ?

B.3.4. *Application numérique* : Calculer l'angle i_1 limite permettant à l'électron d'atteindre la région (III).

On donne : $U_1 = 2500$ volts $U_2 = 900$ volts.

C. TROISIÈME PARTIE (sur 45 points)

On envisage maintenant un dispositif électrostatique créant un champ à symétrie de révolution autour d'un axe $z'z$, entre deux plans A et B d'équations $z = z_A$ et $z = z_B$ (fig. 2).

La position d'un point M sera repérée par ses coordonnées cylindriques r, ϕ, z et on utilisera la base de projection $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\phi, \mathbf{u}_z$ (fig. 3). Les composantes d'un vecteur \mathbf{A} dans cette base seront notées A_r, A_ϕ, A_z .

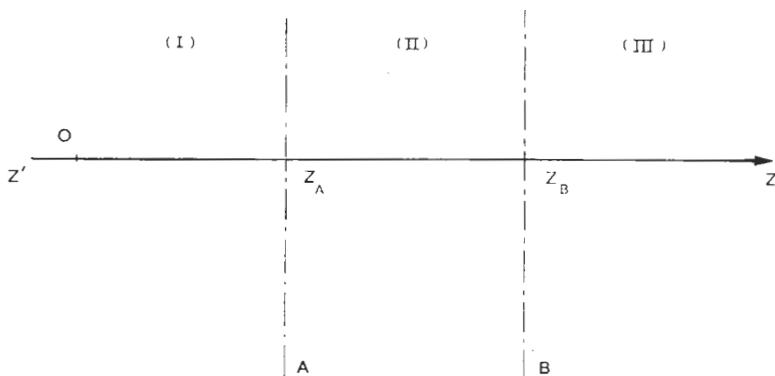


Fig. 2

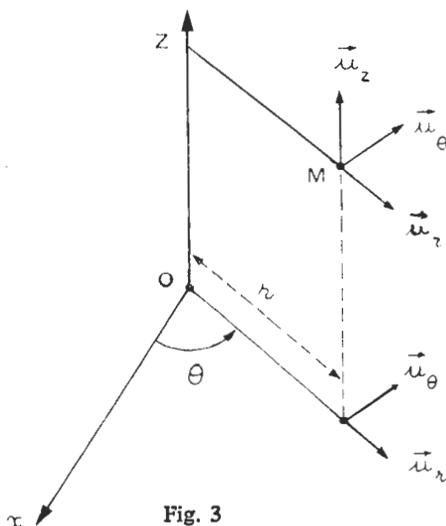


Fig. 3

Le potentiel U , continu, présente les caractéristiques suivantes :

$0 < z < z_A$, région (I) : U est constante ; on pose $U = U_1$.

$z_A < z < z_B$, région (II) : $U(r, z)$; on pose $U(0, z) = f(z)$
(la fonction $f(z)$ est connue).

$z > z_B$, région (III) : U est constante ; on pose $U = U_2$.

Dans tout ce qui suit, on se propose d'étudier les trajectoires paraxiales (faible inclinaison sur l'axe et r petit), dans le vide, d'électrons homocinétiques provenant de la région (I) avec une vitesse v_1 sans composante orthoradiale ($v_{1\theta} = 0$). (Ces électrons sont au départ émis sans vitesse initiale par une cathode au potentiel $U = 0$).

C.1. Montrer qu'en un point M voisin de l'axe, on peut prendre pour $E_r(r, z)$ et $E_z(r, z)$, les formules approchées suivantes :

$$(E) \quad E_r = \frac{r}{2} \cdot \frac{d^2f}{dz^2} \quad E_z = -\frac{df}{dz}$$

C.2. C.2.1. Rappeler l'expression de l'accélération d'un point mobile, exprimée dans la base u_r, u_θ, u_z , et donner les équations différentielles du mouvement pour un électron.

C.2.2. Montrer que la trajectoire est plane et représentable par une courbe $r(z)$.

C.2.3. Donner la valeur de la vitesse $v = \|\mathbf{v}\|$ au point $M(r, \theta, z)$. En déduire une valeur approchée de v_z en fonction de e, m , et

$f(z)$. Donner l'expression de $\frac{dr}{dt}$ en fonction de $\frac{dr}{dz}, f(z), e, m$.

C.2.4. A partir de l'équation donnant l'accélération radiale, montrer que $r(z)$ vérifie l'équation différentielle (E) :

$$\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{1}{2f} \cdot \frac{df}{dz} \cdot \frac{dr}{dz} + \frac{r}{4f} \cdot \frac{d^2f}{dz^2} = 0.$$

C.2.5. La trajectoire dépend-elle de la nature de la particule chargée ?

C.2.6. Que se passe-t-il si toutes les tensions sont multipliées par un même facteur ? Quelle est l'importance de cette remarque si toutes les tensions utilisées sont obtenues à partir d'une tension primaire mal stabilisée ?

C.3. On s'intéresse au cas particulier suivant : les électrons arrivent dans le plan $z = z_A$ parallèlement à l'axe avec la même vitesse v_1 qu'en C.2.

C.3.1. Le point B est rejeté à l'infini et, pour $z > z_A$,

$$f(z) = U_1 \cdot \exp \frac{4(z - z_A)}{a}.$$

- a) On pose $\eta = z - z_A$. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $r(\eta)$?
- b) Déterminer $r(\eta)$; montrer qu'il y a focalisation en des points que l'on précisera.
- c) *Application numérique* : Calculer la valeur de η ainsi que celle de $f(\eta)$ au premier point de focalisation pour $a = 1$ cm.

C.3.2. La répartition du potentiel est maintenant la suivante :

Pour $z < z_A$: $f(z) = U_1$ (on rappelle que U_1 est une constante);

Pour $z_A < z < z_B$: $f(z) = U_1 \cdot \exp \frac{4(z - z_A)}{a}$;

Pour $z > z_B$: $f(z) = U_2$, avec $U_2 = U_1 \times 2$.

- a) Calculer la position du plan B pour cette répartition du potentiel.
- b) Montrer que r varie de moins de 6 % entre les plans A et B.
- c) Calculer $\left(\frac{dr}{dz}\right)_B$ et montrer que le faisceau converge en un point F' que l'on précisera. Toujours avec $a = 1$ cm, calculer BF'.

C.4. On revient dans cette question et dans les suivantes à la répartition du potentiel décrit au début de C, $f(z)$ étant quelconque.

C.4.1. On considère un point P de l'axe $z'z$, dans la région (I), d'abscisse z_P . Soit $r_1(z)$ une solution particulière de (E) telle que

$$r_1(z_P) = 0 \text{ et } \left(\frac{dr_1}{dz}\right)_P = 1. \text{ On note } (C_1) \text{ la trajectoire associée.}$$

On suppose que dans la région (III), (C_1) ou son prolongement, recoupe l'axe $z'z$ en un point P' réel, ou virtuel, d'abscisse $z_{P'}$.

- a) Montrer que la trajectoire de tout électron passant par P a pour équation $r(z) = \lambda r_1(z)$; que représente λ ?
- b) En déduire que toutes les trajectoires issues de P émergent en passant par P'. Quelle propriété « optique » présente le système pour le couple de points P et P' ?

C.4.2. Considérons maintenant un point Q (r_Q, z_P) dans le plan frontal de P.

Notons $r_2(z)$ une solution mathématiquement possible de (E) telle que $r_2(z_P) = 1$ et $\left(\frac{dr_2}{dz}\right)_P = 0$.

Soit (C) une trajectoire électronique passant par Q, (C) recoupe le plan frontal de P' en un point Q' ($r_{Q'}, z_{P'}$).

- a) Montrer que la trajectoire de tout électron passant par Q a pour équation $r(z) = \lambda r_1(z) + \mu r_2(z)$; que représentent λ et μ ?

b) En déduire que toutes les trajectoires issues de Q émergent en passant par Q'. Quelle propriété « optique » possède le système ?

C.4.3. Calculer le rapport de convergence G et le grandissement linéaire γ pour le couple de plans z_p et z_p' .

C.4.4. Montrer que (E) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d\left(\sqrt{f(z)} \cdot \frac{dr}{dz}\right)}{dz} = -\frac{1}{4\sqrt{f(z)}} \cdot \frac{d^2 f(z)}{dz^2}$$

En appliquant cette relation aux solutions particulières $r_1(z)$ et $r_2(z)$, montrer que :

$$\frac{d}{dz} \left(r_2 \sqrt{f(z)} \cdot \frac{dr_1}{dz} - r_1 \sqrt{f(z)} \cdot \frac{dr_2}{dz} \right) = 0.$$

En déduire la « relation de Lagrange-Helmholtz » : $\gamma \cdot G = \sqrt{\frac{U_1}{U_2}}$.

C.5. Etude d'une lentille électronique électrostatique mince.

On suppose dans cette question qu'entre les plans A et B, $r(z)$ reste sensiblement constant et égal à r_0 .

C.5.1. Montrer que l'on a la relation :

$$\sqrt{U_2} \left(\frac{dr}{dz} \right)_B - \sqrt{U_1} \left(\frac{dr}{dz} \right)_A = -r_0 K,$$

avec :

$$K = \int_{z_A}^{z_B} \frac{1}{4\sqrt{f(z)}} \cdot \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \cdot dz.$$

C.5.2. On confond A et B avec le milieu Ω de AB. On pose $\overline{\Omega P} = p$; $\overline{\Omega P'} = p'$. Donner la formule de conjugaison de cette lentille mince électrostatique.

C.5.3. Quelle est la signification de $\frac{\sqrt{U_2}}{K}$ et de $\frac{\sqrt{U_1}}{K}$? Quel

serait l'analogie de cette lentille dans le domaine de l'optique ?

C.5.4. Calculer K pour la répartition de potentiel de C.3.2. En déduire la distance focale image f' et comparer les résultats.

C.5.5. Si les potentiels extrêmes U_1 et U_2 sont identiques, que devient la formule de conjugaison ?

C.6. Citer un appareil utilisant une ou plusieurs lentilles électrostatiques.

D. QUATRIÈME PARTIE (sur 20 points)

On étudie ici l'effet sur le faisceau de la charge d'espace. Soit un faisceau électronique ayant la symétrie de révolution autour de l'axe $z'z$. La section droite du faisceau à l'abscisse $z = 0$ est circulaire. Dans cette section droite, les électrons, initialement accélérés sous une différence de potentiel U , sont animés d'une vitesse \mathbf{v}_0 , parallèle à l'axe ; la densité volumique des charges ρ_0 y est uniforme ; le régime est permanent.

En l'absence de champ électromagnétique extérieur, et en négligeant le champ propre créé par le faisceau, la structure du faisceau serait un cylindre de rayon r_0 .

D.1. Etude du champ dans le cas théorique du faisceau cylindrique (r_0) :

D.1.1. Calculer le champ électrique radial E_r , à la périphérie du faisceau considéré comme infiniment long.

D.1.2. Calculer en fonction de r_0 , ρ_0 , v_0 , l'intensité I du courant transporté par le faisceau.

D.1.3.

a) Calculer le champ magnétique \mathbf{B} à la périphérie du faisceau.

b) Calculer le rapport de la force magnétique à la force électrique

exercée sur un électron périphérique dans le cas où $v_0 = \frac{c}{10}$

(c : célérité de la lumière dans le vide).

Par la suite, la force magnétique sera négligée.

D.2. On se propose d'étudier l'influence du champ propre sur la géométrie du faisceau, dans le cas où le faisceau se dilate peu et peut être considéré comme un « cylindre lentement variable ». On admet que la densité volumique des charges ρ est sensiblement constante dans un plan de section droite.

D.2.1. En utilisant ce qui précède, montrer que v_z est sensiblement constant. Montrer qu'avec nos hypothèses $v_r \ll v_z$. (\mathbf{v}_r et \mathbf{v}_z désignent respectivement les composantes, radiale et suivant Oz , du vecteur vitesse \mathbf{v} de l'électron).

D.2.2. En fonction de l , I , e , m , U , r_0 , calculer la vitesse radiale v_r d'un électron périphérique à l'abscisse l , et l'angle $\alpha = (\mathbf{Oz}, \mathbf{v})$.

D.2.3. Calculer le rapport $\frac{\Delta r}{r_0}$, dilatation relative du faisceau après un parcours longitudinal l . Que se passe-t-il si, sans modifier I , on veut diminuer r_0 ?

D.2.4. Application numérique : $I = 1 \text{ mA}$; $U = 20\,000 \text{ V}$;

$l = 20 \text{ cm}$; $r_0 = 1 \text{ mm}$. Que vaut $\frac{\Delta r}{r_0}$?

SOLUTION

Préliminaire.

La composition de Physique du C.A.P.E.S. de Sciences physiques de juin 1980 proposait une étude assez bien suivie de l'électron (première partie) et de l'optique électronique (deuxième partie) avec application à la lentille électrostatique du microscope électronique (troisième partie). La dernière partie décrivait les effets des interactions entre électrons dans les faisceaux électroniques. L'épreuve est assez progressive et de niveau adéquat mais malheureusement, cette année encore, on ne peut que regretter l'abondance des calculs et l'excessive longueur de l'énoncé.

Si la première partie (partie A) était relativement simple et très proche du cours, on doit cependant souligner plusieurs choses :

- Les premières questions du problème (calcul du potentiel, du champ et de l'énergie, créés par des sphères chargées uniformément en surface et en volume) ne contenaient que du calcul. On peut regretter l'absence de certaines remarques physiques, en particulier concernant le problème de la continuité (ou de la discontinuité) du champ ou du potentiel à la surface.
- La partie sur l'atome de Bohr était maladroitement posée. En effet, pour résoudre certaines questions, il fallait faire appel, en plus des résultats obtenus dans les questions précédentes, à des connaissances personnelles : on aboutit ainsi à un modèle fabriqué de morceaux disparates. D'autre part, on peut se demander s'il était judicieux de revenir sur l'atome de Bohr alors que les consignes officielles dans l'enseignement du second degré sont de ne pas le mentionner, car il risquerait de donner aux élèves une image fautive de la structure atomique, entravant par la suite la compréhension des structures moléculaires et cristallines.

Nous n'avons par contre aucune remarque à faire sur la deuxième partie (partie B) qui était relativement simple et bien posée.

La troisième partie (partie C) constituait, de loin, la partie la plus longue du problème. On aurait beaucoup gagné à supprimer toute la partie C.3. (en particulier la détermination des focalisa-

tions multiples). Ce calcul ne pouvait que décourager les candidats et user leurs nerfs avant d'aborder la partie C.4. plus formelle, qui demandait une certaine rigueur, mais qui était essentielle car elle jetait les bases de l'étude de la lentille électrostatique.

La quatrième partie (partie D) était étonnamment beaucoup plus simple que les précédentes. A tel point que, les approximations étant maladroitement précisées, on pouvait en venir à douter de cette simplicité. On aurait aimé que l'énoncé demande un calcul algébrique des différentes forces en jeu, car il est intéressant de vérifier que dans tous les cas la résultante des forces d'interaction est répulsive.

Dans la correction qui va suivre, les réponses correspondent à ce que l'on devrait attendre d'un bon candidat. Les compléments et les discussions ont été relégués dans des remarques comportant un filet vertical sur le côté.

A. PREMIÈRE PARTIE

A.1. Une répartition de charge à symétrie sphérique de centre O crée dans l'espace un champ électrique ayant la symétrie sphérique : les champs en deux points M et M' situés à la même distance r du centre se déduisent l'un de l'autre par toutes les opérations de symétrie de la sphère qui font passer M en M'. Il s'en suit que le champ électrique est radial, ne dépend que de

r et vaut en fonction du potentiel $-\frac{\partial V(r)}{\partial r}$. Dans tous les cas

proposés, on pourra le calculer en appliquant le théorème de Gauss à la sphère de rayon r :

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

où $Q(r)$ est la charge totale contenue dans la sphère de rayon r .

A.1.1. a) Cas d'une sphère de charge répartie uniformément sur la surface :

— point M extérieur à cette sphère $Q(r) = Q$

$$r > a \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

(avec $V(\infty) \rightarrow 0$)

— point M intérieur $Q(r) = 0$

$$E(r) = 0 \quad V_{\text{int.}}(r) = \text{constante}$$

Le potentiel étant continu à la traversée d'une couche de charge, on doit avoir :

$$V_{\text{int}}(a) = V_{\text{ext}}(a) \quad \text{d'où} \quad \boxed{V_{\text{int}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}}$$

Remarque.

Calcul direct de V_{int} au centre de la sphère : ce point est à égale distance de tous les points où se trouve la charge : dq crée

le potentiel $dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 a}$ d'où V créé par Q en O vaut $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$.

b) Cas d'une sphère de charge répartie uniformément en volume :

— point M extérieur à cette sphère : identique au cas précédent,

$$\boxed{V_{\text{ext}}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

— point M intérieur $Q(r) = Q \frac{r^3}{a^3}$

$$E(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad V(r) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \frac{r^2}{2} + \text{constante.}$$

Le potentiel étant continu en $r = a$, on peut calculer la constante par l'équation :

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \times \frac{1}{2} + \text{constante}$$

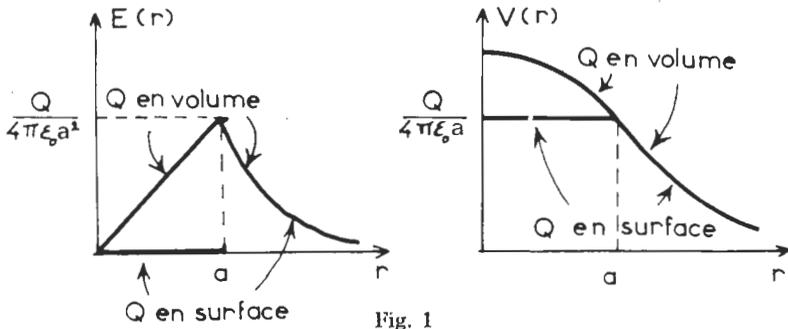
d'où :

$$\boxed{V_{\text{int}}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2} \right)}$$

Remarque.

Bien que cela ne soit pas explicitement demandé, un commentaire sur les discontinuités des champs et potentiels à la surface de la sphère chargée est utile :

- charge en surface : le champ est discontinu et la discontinuité vaut $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ici $\frac{Q}{4\pi a^2 \epsilon_0}$, le potentiel est continu (primitive d'une fonction ayant une discontinuité de première espèce est continue) ;
- charge en volume : le champ est continu ainsi que le potentiel. Cela traduit sur les courbes de $V(r)$: en $r = a$, il y a changement de pente dans le premier cas, pas dans le second.



A.1.2. La densité volumique d'énergie électrostatique est

$$\text{donnée par } W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2.$$

L'énergie électrostatique totale d'un système est donc :

$$\mathcal{E} = \int_{\text{espace}} W \, dv.$$

a) Cas de la sphère de charge Q en surface.

D'après A.1.1. a), $E(r) = 0$ pour $r < a$, il reste :

$$\mathcal{E} = \int_a^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 \times \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \quad \boxed{\mathcal{E} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 a}}$$

Remarque.

\mathcal{E} s'écrit $\frac{1}{2} QV$, qui est le même résultat que pour un conducteur isolé, la charge étant toujours surfacique pour un conducteur en équilibre.

b) Cas de sphère de charge Q en volume.

On découpe l'intégrale en 2 parties :

$$\mathcal{E} = \int_0^a \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_{\text{int.}})^2 dv + \int_a^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_{\text{ext.}})^2 dv$$

la seconde est la même que dans le cas a), la première vaut en

prenant le champ calculé en A.1.1. b). $\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \times \frac{1}{5}$,

l'énergie totale, dans ce cas, est :

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \times \frac{6}{5}$$

Remarque.

Dans les deux cas, on aurait pu faire autrement le calcul de l'énergie électrostatique du système en utilisant la définition suivante : \mathcal{E} = énergie qu'il faut fournir pour apporter progressivement la charge Q de l'infini où elle est dispersée, donc sans énergie, à la situation finale. Le système étant construit jusqu'à $q < Q$, et $V(q)$ étant le potentiel du point où l'on apporte la charge dq depuis l'infini, l'énergie du système augmente de

$$d\mathcal{E} = V(q) dq \text{ lorsqu'on fait cette opération et } \mathcal{E} = \int_0^Q V(q) dq.$$

Faisons ce calcul dans le cas de Q réparti en volume :

— lorsque q est en place, le rayon de la sphère est r tel que

$$q = \frac{r^3}{a^3} Q,$$

— lorsqu'on apporte dq , le rayon augmente de dr tel que

$$dq = \frac{Q}{a^3} 3 r^2 dr.$$

$$\text{Le potentiel } V(q) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} r^2$$

$$\text{et } \int_0^Q V(q) dq = \dots$$

$$\dots \int_0^a \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^6} \times 3 r^4 dr \quad \text{d'où} \quad \mathcal{E} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \times \frac{6}{5}.$$

A.1.3. Si cette énergie électrostatique est égale à l'énergie de masse de l'électron, on a la relation $\mathcal{E} = mc^2$ où m est la masse de l'électron et c la vitesse de la lumière.

On en déduit lorsque Q est réparti en surface :

$$a = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 mc^2}$$

et lorsque Q est réparti en volume :

$$a = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 mc^2} \times \frac{6}{5}$$

Application numérique :

$$a = 1,40 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 1,40 \cdot 10^{-5} \text{ \AA},$$

$$a = 1,68 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 1,68 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}.$$

Remarque.

Rappelons que 10^{-15} m est le Fermi, qui est l'ordre de grandeur de la taille attribuée aux noyaux atomiques.

A.2.1. Force d'interaction gravitationnelle entre deux masses ponctuelles à la distance r : $\frac{Gmm'}{r^2}$.

Force d'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles à la distance r : $\frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

En considérant 1 électron de masse m et de charge $-e$ et un proton de masse $m' \simeq 2 \cdot 10^3 m$ et de charge e , les deux interactions sont attractives et leur rapport vaut :

$$G \times (4\pi\epsilon_0) \times 2 \cdot 10^{+3} \left(\frac{m}{e} \right)^2.$$

Application numérique :

L'interaction gravitationnelle entre l'électron et le proton est égale à $5 \cdot 10^{-40}$ de l'interaction électrostatique ; elle est donc complètement négligeable.

A.2.2. Pour une trajectoire circulaire, la force est radiale ; la loi fondamentale de la dynamique donne : $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}$,

d'où on tire l'énergie cinétique : $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = E_c$.

L'énergie potentielle de l'attraction électrostatique est : $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = E_p$ (négative pour une force attractive avec potentiel nul à l'infini), d'où l'énergie mécanique totale :

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = E_c + E_p$$

Remarque.

On a ici la relation $E = \frac{1}{2} E_p = -E_c$ qui est un cas particulier du théorème du Viriel. De façon plus générale pour l'attraction en $\frac{1}{r^2}$, l'énoncé est le suivant : quelle que soit la trajectoire fermée, $E = \frac{1}{2} \langle E_p \rangle = -\langle E_c \rangle$ où $\langle E_p \rangle$ et $\langle E_c \rangle$ sont les moyennes dans le temps sur une période du mouvement de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique.

A.2.3. La définition du moment cinétique $\vec{\sigma}_o = m\mathbf{v} \wedge \mathbf{r}$ donne dans le cas du mouvement circulaire $\sigma_o^2 = m^2 v^2 r^2$; en prenant mv^2 dans la question A.2.2., on obtient :

$$\sigma_o^2 = \frac{me^2 r}{4\pi\epsilon_0}$$

En tirant r de cette expression et en le substituant dans l'expression E , on obtient :

$$E = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \times \frac{1}{n^2}$$

qui est bien de la forme $-\frac{E_o}{n^2}$ (on a écrit $\hbar = \frac{h}{2\pi}$).

A.2.4. Calcul de E_o en électron volt. Sachant que $1 \text{ eV} = (e) \text{ Joules}$ où e est la valeur numérique de la charge de l'électron :

$$E_o (\text{eV}) = \text{valeur numérique de } \frac{me^3}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = 13,56 \text{ eV.}$$

A.2.5. Si on appelle hypothèse de Bohr, l'expression de la quantification du moment cinétique d'une trajectoire, celle-ci est « presque » compatible avec la mécanique quantique. Celle-ci en effet impose une double quantification :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_o^2 = l(l+1)\hbar^2 \\ \sigma_{oz} = m\hbar \end{array} \right\} \text{ avec } m \text{ et } l \text{ entier}$$

$$-l \leq m \leq +l$$

$$0 \leq l \leq n-1, n \text{ nombre quantique principal.}$$

On voit alors que pour $l = n - 1$, $\sigma_o^2 = n(n-1)\hbar^2$, ce qui est assez voisin de l'hypothèse de Bohr surtout pour n assez grand.

Ce qui est plus grave est la notion de trajectoire qui est utilisée par Bohr. Pour être compatible avec la mécanique quantique, il faut vérifier l'inégalité de Heisenberg : $\Delta r \cdot \Delta p > \hbar$ où Δr est l'écart quadratique moyen sur la position et Δp celle sur la quantité de mouvement. On ne pourra parler de trajectoire que si : $\Delta r \ll r$ et $\Delta p \ll p$. Soit $\Delta r \cdot \Delta p \ll rp \sim n\hbar$, cette condition ne peut être compatible avec l'inégalité de Heisenberg que pour les grandes valeurs de n .

On arrive donc à la contradiction suivante, au mieux la théorie de Bohr pourrait être correcte pour les grands nombres quantiques. Il se trouve qu'elle donne le résultat de la mécanique quantique même pour les petites valeurs de n (succès dans l'explication des valeurs des raies de Balmer) : ce n'est qu'une coïncidence. Remarquons d'ailleurs que le nombre quantique n n'a pas le même sens dans la théorie de Bohr et dans la mécanique quantique.

A.3.1. L'électron en mouvement circulaire autour du noyau est équivalent à une boucle de courant située sur la trajectoire, donc le courant $i = eN$ où N est la fréquence du mouvement,

soit $N = \frac{v}{2\pi r}$. Cette boucle est équivalente à un mouvement

magnétique $\|\vec{\mathcal{M}}\| = iS = \frac{1}{2} evr$. $\vec{\mathcal{M}}$ est sur l'axe de la boucle.

Comme $\sigma_o = mvr$ et que, du fait de la charge négative $-e$ de l'électron $\vec{\sigma}_o$ et $\vec{\mathcal{M}}$ sont de sens contraire, on obtient :

$$\vec{\mathcal{M}} = \left(-\frac{e}{2m} \right) \vec{\sigma}_o$$

(soit $g = 1$)

A.3.2. La mécanique quantique impose que les valeurs propres des opérateurs σ_z sont $\sigma_{lz} = m\hbar$ avec $l \leq m \leq +l$ pour le moment orbital où m est entier, et $\sigma_{sz} = \pm \frac{1}{2} \hbar$.

Le moment cinétique total a pour composante z :

$$\sigma_{jz} = \left(m \pm \frac{1}{2} \right) \hbar$$

soit dans le cas où : $l = 1 \quad m = -1, 0, 1$

et :

$$\sigma_{jz}/\hbar = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}.$$

A.3.3. Une « sous-couche » représente l'ensemble des états correspondants à n et l donnés. Chaque état est caractérisé par une valeur de $-l \leq m \leq +l$ et une valeur de σ_{sz} . La sous-couche est saturée si tous ses états sont occupés par des électrons comme les valeurs positives et négatives de σ_{jz} sont en nombres égaux, le moment cinétique total dû à cette sous-couche est nul.

A.3.4. Application au sodium (Na, $Z = 11$).

Configuration électronique fondamentale :

couche (n)		sous-couches (l)						
K	$n = 1$	$l = 0$	$m = 0$	$\sigma_{jz} = \pm \frac{1}{2} \hbar$	2 électrons			
M	$n = 2$	$l = 0$	$m = 0$	$\sigma_{jz} = \pm \frac{1}{2} \hbar$	2 électrons			
				$l = 1$		$m = -1$	$\sigma_{jz} = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	6 électrons
	$m = 0$	$\sigma_{jz} = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$						
	$m = 1$	$\sigma_{jz} = +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}$						
N	$n = 3$	$l = 0$	$m = 0$	$\sigma_{jz} = \pm \frac{1}{2} \hbar$	1 électron			

sous-couche incomplète.

Cette configuration se note généralement :

$$n \nearrow 1 s^2, 2 s^2, 2 p^6, 3 s^1$$

$l \nearrow$
 nombre d'électrons

Le moment magnétique total est entièrement dû à la sous-couche non saturée où l'électron se trouve dans un état avec

$m = 0$ soit $\sigma_z = \pm \frac{1}{2} h$. Le moment magnétique associé à pour projection sur Oz :

$$\mathfrak{M}_z = g \left(-\frac{e}{2m} \right) \sigma_z \quad \text{avec } g = 2$$

(c'est le facteur de Landé à attribuer lorsque le moment magnétique est entièrement dû au spin).

Soit : $\mathfrak{M}_z = \pm \frac{eh}{2m} \quad \mu_B = \frac{eh}{2m}$.

Remarque.

Le niveau d'énergie, dans le modèle décrit précédemment, ne dépend que du nombre quantique principal n , et pas de l . Tous les états d'une même couche seraient donc de même énergie (états dégénérés) : dans ce cas, le dernier électron de l'atome de Na aurait la possibilité d'occuper, avec la même probabilité, tous les états possibles (s, p, d) de la couche N de l'atome.

Certains de ces états ont une composante $\sigma_{iz} \neq 0$, cela modifierait donc la valeur de σ_z de l'atome. En fait, le modèle est beaucoup trop simple et ne tient compte, ni de l'interaction spin-orbite, ni de l'interaction électron-électron qui lèvent la dégénérescence des sous-couches, il s'en suit que seul le remplissage indiqué précédemment pour le sodium correspond au niveau fondamental.

A.3.5.

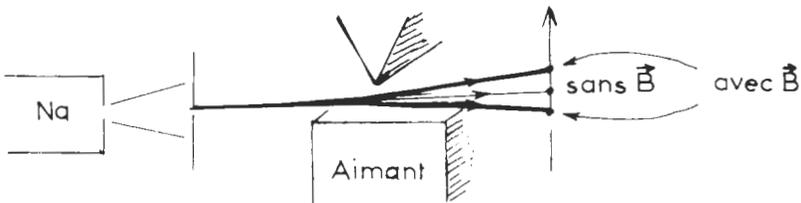


Fig. 2

L'expérience de Stern et Gerlach consiste à faire passer un faisceau d'atomes dans un champ magnétique inhomogène. Une particule porteuse d'un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ est alors sou-

mise à la force \mathbf{F} de composantes $F_i = \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\nabla} B_i$ (où $\vec{\nabla} B_i =$ gradient de la composante n° i); grâce aux symétries des armatures de l'électroaimant, seule la composante F_z (verticale sur la figure) n'est pas nulle et provoque une déviation de la trajectoire :

$F_z = \mathcal{M}_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$. Avant le passage dans le champ magnétique, l'isotropie de l'espace n'impose aucun axe privilégié sur lequel la mesure de la projection de $\vec{\mathcal{M}}$ est pertinente. Par contre, la géométrie du champ magnétique impose que la direction z le long de laquelle ∇B_z n'est pas nulle est celle sur laquelle la projection de $\vec{\mathcal{M}}$ des atomes doit être mesurée. Dans le cas du sodium $\vec{\mathcal{M}}_z$ pouvant prendre deux valeurs, on observe deux faisceaux d'atomes déviés en sens contraire dans lesquels tous les atomes ont respectivement la même valeur de \mathcal{M}_z . Les deux faisceaux sont de même intensité.

A.4. Energie cinétique relativiste d'un électron de vitesse v

à utiliser lorsque le rapport $\frac{v}{c}$ n'est pas très petit :

$$E_c = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

En développant au second ordre en $\frac{v^2}{c^2}$, on obtient :

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} + 0 \left(\frac{v^4}{c^4} \right) \right]$$

En utilisant la formule classique, on n'aurait que le premier terme.

Pour un électron accéléré à partir du repos par une tension U , on obtient par la formule classique une valeur v' telle

$$\text{que } \frac{1}{2} mv'^2 = eU.$$

En utilisant l'expression relativiste approchée de l'énergie cinétique, la valeur correcte de la vitesse serait v telle que

$$\frac{1}{2} m v^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{1}{2} m v'^2 \text{ ou encore :}$$

$$v' = v \left[1 + \frac{3}{8} \frac{v^2}{c^2} \right]^{1/2}$$

$$v' \simeq v \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} \right) \text{ soit une erreur relative}$$

$$\frac{\Delta v}{v} \simeq \frac{3}{8} \frac{v^2}{c^2} \text{ si on prend } v' \text{ au lieu de } v.$$

Le calcul se fait en remplaçant v par v' .

Application numérique :

$$v' = \sqrt{\frac{2 e U}{m}} \quad U = 2 \cdot 10^4 \text{ V} \quad v' = 8,4 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$\text{soit :} \quad \frac{v'}{c} = 0,28 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta v}{v} = 2,7 \%$$

Cette erreur est faible mais non négligeable.

Remarque.

On peut tirer facilement un ordre de grandeur de l'erreur faite en considérant que $\frac{3 v^2}{8 c^2} \simeq \frac{3}{4} \frac{e U}{m c^2}$ (en remplaçant v^2 par la valeur classique). A part le facteur $\frac{3}{4}$, il s'agit tout simplement de comparer la valeur de la tension accélératrice U à $\frac{m c^2}{e}$ qui est l'énergie de masse de l'électron exprimée en électron-volt qui est voisine de $\frac{1}{2}$ MeV. Les ordres de grandeurs des énergies de masse de l'électron et du proton (ou neutron) doivent maintenant faire partie du bagage culturel d'un futur professeur de physique.

B. DEUXIÈME PARTIE

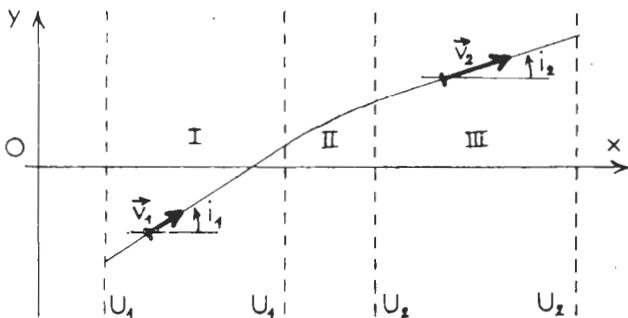


Fig. 3

B.1. Dans les deux zones I et III, le potentiel est constant et égal respectivement à U_1 et U_2 . Le gradient du potentiel est donc nul et aucune force ne s'applique à l'électron. Le mouvement est linéaire uniforme (trajectoire rectiligne).

B.2.1. La conservation de l'énergie mécanique totale, énergie cinétique plus énergie potentielle, entre un instant où l'électron est dans la zone I et un autre instant où il est dans la zone III s'écrit :

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - e U_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - e U_2$$

d'où :

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2e}{m} (U_2 - U_1)}$$

B.2.2. Dans la zone II, les équipotentielles sont toutes parallèles et perpendiculaires à Ox (autrement dit U ne dépend que de x). Il n'y a donc pas de composante du gradient du potentiel selon Oy . En projection sur Oy , le mouvement reste uniforme dans II comme dans I et III. La composante de la vitesse selon Oy est donc conservée entre I et III :

$$v_1 \sin i_1 = v_2 \sin i_2$$

soit encore, compte tenu de l'expression de v_2 :

$$\sin i_2 = \frac{v_1 \sin i_1}{\sqrt{v_1^2 + \frac{2e}{m}(U_2 - U_1)}}$$

B.2.3. Posons $u = \frac{2e}{mv_1^2}(U_2 - U_1)$ et $y = \sin i_2$.

L'expression précédente s'écrit encore :

$$y = \frac{\sin i_1}{\sqrt{1 + u}}$$

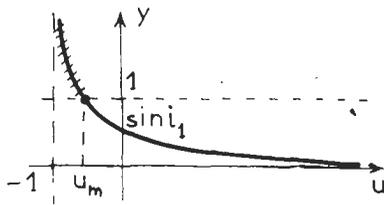


Fig. 4

Le graphe de la fonction $y(u)$ complète est représenté sur la figure. y n'est définie que pour $u > -1$ et décroît de façon monotone depuis $+\infty$ jusqu'à zéro quand u croît de -1 à l'infini. Il n'y aura un angle i_2 possible que lorsque $y < 1$, c'est-à-dire lorsque $u > u_m$ tel que :

$$1 = \frac{\sin i_1}{\sqrt{1 + u_m}}$$

$$u_m = -\cos^2 i_1.$$

A cette valeur de u_m correspond la valeur minimale de $U_2 - U_1$ pour qu'il y ait passage dans la région III :

$$(U_2 - U_1)_m = \frac{mv_1^2 \cos^2 i_1}{2e}$$

Pour $U_2 - U_1 = (U_2 - U_1)_m$, $i_2 = \frac{\pi}{2}$: juste à la frontière

entre II et III la trajectoire a une tangente verticale (c'est la limite entre un retour dans II et un passage dans III).

Lorsque $U_2 - U_1$ varie entre $(U_2 - U_1)_m$ et l'infini, i_2 décroît entre $\frac{\pi}{2}$ et 0, en passant évidemment par la valeur $i_2 = i_1$ pour $U_2 - U_1 = 0$ lorsqu'il n'y a pas de barrière de potentiel.

$U_2 - U_1$	$(U_2 - U_1)_m \nearrow 0 \nearrow +\infty$
u	$u_m \nearrow 0 \nearrow +\infty$
y	$1 \searrow \sin i_1 \searrow 0$
i_2	$\frac{\pi}{2} \searrow i_1 \searrow 0$

Remarque.

Cette valeur minimale aurait pu être trouvée immédiatement par la conservation de l'énergie qui, compte tenu de la conservation de v_y , s'écrit :

$$\frac{1}{2} m v_{1x}^2 - eU_1 = \frac{1}{2} m v_{2x}^2 - eU_2$$

pour avoir une solution v_{2x} , il faut donc que : $U_2 - U_1 > -\frac{m v_{1x}^2}{2e}$.

B.3.1. La conservation de l'énergie mécanique totale entre l'instant où l'électron est émis par la cathode ($v_0 = 0, U_0 = 0$) et un instant où il est dans I ($v = v_1, U = U_1$) s'écrit :

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - eU_1 = 0$$

soit :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2eU_1}{m}}$$

B.3.2. En reportant cette expression de v_1 dans la relation obtenue en B.2.2., on obtient :

$$\sqrt{U_2} \sin i_2 = \sqrt{U_1} \sin i_1.$$

B.3.3. Dans le cas où G_1 et G_2 sont infiniment proches, leur plan commun joue le rôle d'un « dioptré plan » pour les trajectoires électroniques. On a un phénomène analogue à la réfraction entre milieux d'indices différents. $\sqrt{U_1}$ et $\sqrt{U_2}$ jouent le rôle des indices des deux milieux dans l'analogie avec l'optique.

$\sqrt{\frac{U_2}{U_1}}$ est l'indice relatif de milieu 2 par rapport au milieu 1.

B.3.4. *Application numérique.* L'angle limite est tel que $\sin \lambda = \sqrt{\frac{U_2}{U_1}}$ pour $U_2 = 900 \text{ V}$, $U_1 = 2500 \text{ V}$,
 $\sin \lambda = \frac{3}{5}$ soit $\lambda = 36^\circ 52'$.

C. TROISIÈME PARTIE

C.1. Appliquons la formule $\mathbf{E} = -\text{grad } U$ au point r, z (ou encore calculons la circulation de \mathbf{E} sur deux trajets élémentaires, l'un parallèle à l'axe, l'autre radial); nous obtenons :

$$E_z(r, z) = -\frac{\partial U}{\partial z}(r, z) \quad E_r(r, z) = -\frac{\partial U}{\partial r}(r, z).$$

Nous supposons que, en symétrie cylindrique, le développement limité en r du potentiel est quadratique en r soit :

$$U(r, z) = f(z) + r^2 f_2(z) + r^4 f_4(z) \dots$$

Les composantes du champ admettent donc les débuts de développement en r suivants :

$$E_z = -\frac{df}{dz} + 0(r^2) \quad E_r = -2r f_2(z) + 0(r^3).$$

Le théorème de Gauss appliqué à un petit cylindre élémentaire d'axe Oz , de rayon r petit, et de hauteur dz permet (en négligeant les termes du second ordre de E_z) de préciser E_r :

$$\pi r^2 [E_z(z + dz) - E_z(z)] + 2\pi r dz E_r = 0$$

soit :

$$E_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{r}{2} \frac{d^2 f}{dz^2} + 0(r^3).$$

On obtient finalement aux ordres le plus bas en r :

$E_z = -\frac{df}{dz}$	$E_r = \frac{r}{2} \frac{d^2 f}{dz^2}$
------------------------	--

Remarque.

D'après le théorème d'unicité, la connaissance du potentiel sur l'axe, c'est-à-dire la connaissance de la fonction $f(z)$, est suffisante pour connaître la répartition du champ et du potentiel partout.

Tous les termes des développements de E_z et E_r sont en fait exprimables en fonction des dérivées successives de f .

Le développement du potentiel impose les développements suivants pour E_z et E_r :

$$E_z = h_0(z) + r^2 h_2(z) + r^4 h_4(z) \dots$$

$$E_r = r g_1(z) + r^3 g_3(z) + r^5 g_5(z) \dots$$

Les deux théorèmes généraux qui se traduisent ici par :

$$(\text{rot } \mathbf{E})_{u_\theta} = \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

permettent d'exprimer toutes les fonctions de z figurant dans les deux développements en fonction des dérivées successives de

la seule fonction $h_0(z)$. En remarquant que $h_0(z) = -\frac{df}{dz}$ (cir-

culation sur l'axe), on pourrait ainsi préciser tous les termes du développement.

$$E_z = -\frac{df}{dz} + \frac{r^2}{4} \frac{d^3 f}{dz^3} - \frac{r^4}{64} \frac{d^5 f}{dz^5}$$

$$E_r = \frac{r}{2} \frac{d^2 f}{dz^2} - \frac{r^3}{16} \frac{d^4 f}{dz^4} + \frac{r^5}{384} \frac{d^6 f}{dz^6} + \dots$$

C.2.1. Posant $\mathbf{OM} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$, on obtient par dérivations successives :

$$\frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + \frac{dz}{dt} \mathbf{u}_z$$

$$\frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left[r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \mathbf{u}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{u}_z.$$

L'équation fondamentale de la dynamique appliquée à l'électron se traduit par $-e\mathbf{E} = m \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2}$ soit en projection sur les trois axes :

$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = - \frac{er}{2m} \frac{d^2f}{dz^2}$ $r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0$ $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{e}{m} \frac{df}{dz}$

C.2.2. La deuxième équation s'écrit encore :

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \quad \text{soit} \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{constante.}$$

Puisque, au départ, la vitesse n'avait pas de composante orthoradiale, la constante est nulle et soit $r = 0$ (trajectoire le long de Oz) soit θ reste constante. Autrement dit, la trajectoire est plane et représentable par une courbe $r(z)$.

C.2.3. La conservation de l'énergie mécanique totale entre l'instant où les électrons sont lâchés par la cathode ($v = 0, U = 0$) et l'instant où les électrons se retrouvent avec une vitesse de module v dans le potentiel $U = f(z)$ s'écrit :

$$\frac{1}{2} mv^2 - ef = 0$$

soit :

$v = \sqrt{\frac{2ef}{m}}$

Le champ radial étant faible (premier ordre en r), on peut admettre que v_r restera faible devant v_z , ce qui nous permet de

supposer en première approximation $v_z \simeq v = \sqrt{\frac{2ef}{m}}$. On a alors :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dz} \frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{2ef}{m}} \frac{dr}{dz}$$

C.2.4. En utilisant cette expression dans l'équation du mouvement en projection radiale, on obtient :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = v_z \frac{d}{dz} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{2e}{m} \sqrt{f(z)} \frac{d}{dz} \left[\sqrt{f(z)} \frac{dr}{dz} \right] = -\frac{er}{2m} \frac{d^2f(z)}{dz^2}$$

soit, en exprimant la dérivée en z et en simplifiant :

$$\boxed{\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{1}{2f} \frac{df}{dz} \frac{dr}{dz} + \frac{r}{4f} \frac{d^2f}{dz^2} = 0}$$

C.2.5. Puisque ni la charge de la particule, ni la masse de la particule ne figurent dans cette équation, la trajectoire est indépendante de la nature de la particule chargée considérée (il peut s'agir aussi bien d'ions, de protons,... que d'électrons).

C.2.6. On remarque que si l'on change f en λf , λ s'élimine. La trajectoire est donc indépendante de la valeur absolue de la tension primaire qui alimente toutes les grilles du système. La tension primaire peut donc être mal stabilisée.

C.3.1.

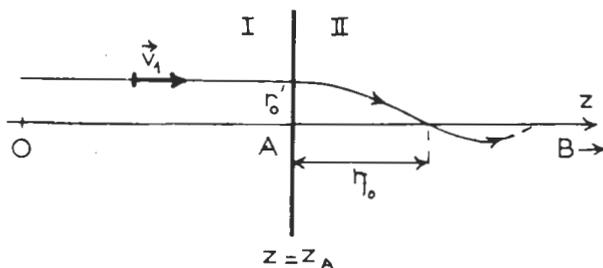


Fig. 5

a) En reportant l'expression de $f(z)$ proposée, on obtient l'équation linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$\frac{d^2r}{d\eta^2} + \frac{2}{a} \frac{dr}{d\eta} + \frac{4}{a^2} = 0$$

b) La solution générale de cette équation s'écrit :

$$r = A e^{-\frac{\eta}{a}} \cos \left(\frac{\eta\sqrt{3}}{a} - \varphi \right)$$

Les deux constantes A et φ sont déterminées par les conditions initiales :

$$r(\eta = 0) = r_0, \quad \frac{dr}{dz}(\eta = 0) = 0.$$

On obtient :

$$r = \frac{2r_0}{\sqrt{3}} e^{-\eta/a} \cos \left(\frac{\eta\sqrt{3}}{a} - \frac{\pi}{6} \right)$$

la trajectoire est oscillatoire amortie en z de période $\frac{2\pi a}{\sqrt{3}}$

(3,63 cm pour $a = 1$ cm). Lorsque le cosinus s'annule, toutes les trajectoires de r_0 différents coupent l'axe au même point : il y a focalisation. Les positions des points de focalisation sont données par :

$$\eta_n = \frac{a}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{(2n+1)\pi}{2} \right) = \frac{2\pi a}{3\sqrt{3}} + \frac{n\pi a}{\sqrt{3}}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

La première focalisation a lieu pour $\eta = \eta_0 = \frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}$.

Le potentiel vaut alors $f(\eta_0) = U_1 \exp \left(\frac{8\pi}{3\sqrt{3}} \right)$.

c) *Application numérique :*

$$\eta_0 = 1,21 \text{ cm} \quad f(\eta_0) = 315\,000 \text{ V.}$$

Remarque.

La valeur du potentiel obtenue est énorme. Il ne semble donc pas possible expérimentalement d'observer ce phénomène de focalisations successives car il faut stopper la croissance du potentiel bien avant η_0 .

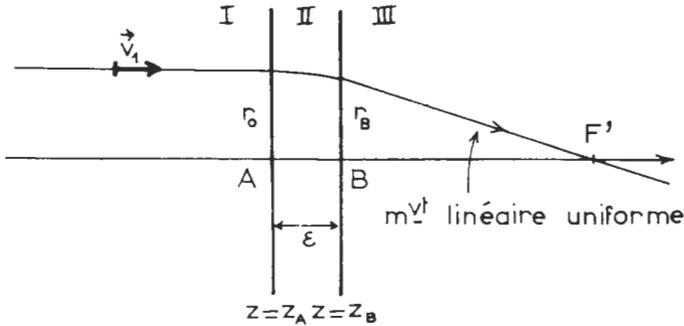
C.3.2.

Fig. 6

a) La position du plan B est telle que $z_B - z_A = \epsilon$

avec : $\exp \frac{4\epsilon}{a} = 2$, soit :

$$\epsilon = \frac{a}{4} \text{Log } 2.$$

Application numérique : $\epsilon = 0,17$ cm.

b) En $\eta = \epsilon$, on a $r = r_B$ donné par :

$$\frac{r_B}{r_0} = \frac{2}{\sqrt{3}} 2^{-1/4} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \log 2 - \frac{\pi}{6} \right)$$

le calcul numérique donne $\frac{r_B}{r_0} = 0,9468\dots$ soit :

$\frac{\Delta r}{r_0} = 5,3 \%$

Remarque.

On pourrait faire le calcul en supposant ϵ faible devant la période. On trouverait ainsi à l'ordre le plus bas :

$$\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{2\varepsilon^2}{a^2} = \frac{1}{8} (\text{Log } 2)^2 \simeq 6\%.$$

On trouve une légère différence avec le résultat plus précis obtenu précédemment.

c) En décrivant l'expression de r , on trouve :

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{r_0}{a} e^{-\eta/a} \sin \frac{\eta \sqrt{3}}{a}$$

soit, en faisant $\eta = \varepsilon = \frac{a}{4} \text{Log } 2$:

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_B = -\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{r_0}{a} 2^{-1/4} \sin\left(\frac{\sqrt{3} \text{Log } 2}{4}\right)$$

$\left(\frac{dr}{dz}\right)_B$ étant négatif, le faisceau est rabattu vers l'axe dans la

zone III (où le mouvement devient linéaire et uniforme) et va donc couper l'axe en un point F' tel que :

$$\begin{aligned} \overline{BF'} &= -\frac{r_B}{\left(\frac{dr}{dz}\right)_B} = \frac{a}{2} \frac{\cos\left(\frac{\sqrt{3} \text{Log } 2}{4} - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\sqrt{3} \text{Log } 2}{4}\right)} \dots \\ &\dots = \frac{a}{4} \left[1 + \sqrt{3} \cotg\left(\frac{\sqrt{3} \text{Log } 2}{4}\right) \right] \end{aligned}$$

L'application numérique donne :

$$\boxed{\overline{BF'} = 1,65 \text{ cm.}}$$

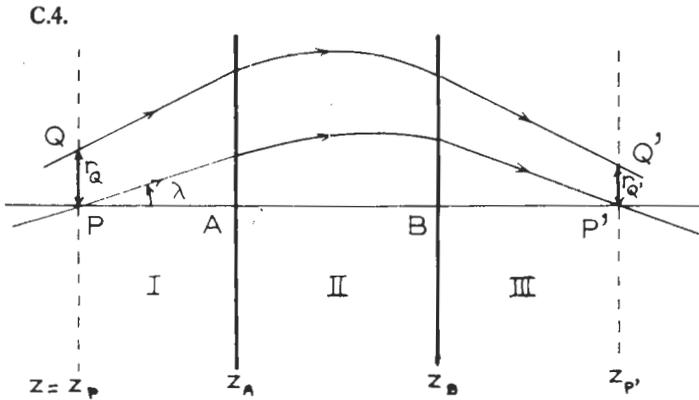


Fig. 7

Dans cette partie, nous appellerons trajectoire électronique la trajectoire complète contenant les parties linéaires dans les régions I et III, étant bien entendu que l'équation différentielle établie en C.2.4. est toujours valable dans ces régions avec

$$f = \text{Cste} = U_1 \quad \text{et} \quad f = \text{Cste} = U_2 \quad (\text{elle se réduit à } \frac{d^2r}{dz^2} = 0).$$

C.4.1. a) Puisque l'équation différentielle donnant $r(z)$ est du second ordre, la trajectoire d'un électron passant par P est définie de façon unique par la donnée de $r(z_p) = 0$ et de

$$\frac{dr}{dz}(z_p).$$

La courbe définie par $r(z) = \lambda r_1(z)$ est une solution

de l'équation différentielle puisque r_1 l'est et que l'équation est homogène en r ; c'est donc une trajectoire mathématiquement possible. D'autre part, cette trajectoire est telle que $r(z_p) = \lambda r_1(z_p)$

$$\text{et} \quad \frac{dr}{dz}(z_p) = \lambda \times \frac{dr_1}{dz}(z_p) = \lambda; \quad \text{c'est donc la trajectoire qui}$$

passé par P et dont l'inclinaison dans le milieu I vaut λ . En faisant varier λ , on obtient toutes les trajectoires qui passent par P. λ s'identifie à l'inclinaison dans I :

$$\lambda = \frac{dr}{dz}(z_p).$$

b) Puisque par définition $r_1(z_{p'}) = 0$, on aura : $r(z_{p'}) = \lambda r_1(z_{p'}) = 0$ quelque soit λ . Toutes les trajectoires passant par P passent donc par P'. Les points P et P' forment donc un couple de points « conjugués » pour le système dans l'analogie avec l'optique géométrique.

Remarque.

Apparemment, les deux points forment un couple de points stigmatiques ; mais en fait, l'équation différentielle a été établie dans l'hypothèse de faibles inclinaisons sur l'axe : ce qui est l'équivalent de l'approximation de Gauss en optique. Pour de fortes inclinaisons, les propriétés mathématiques de l'équation restent les mêmes (toute solution passant par P passe par P') mais c'est l'équation elle-même qui n'est pas valable. Comme en optique géométrique, un système optique électronique n'est stigmatique que pour des couples de points très particuliers.

C.4.2. a) Comme en C.4.1. a), la trajectoire d'un électron passant par Q est définie de façon unique par la donnée de

$r(z_0)$ et de $\frac{dr}{dz}(z_0)$. Les propriétés d'homogénéité de l'équation

différentielle entraînent que $r(z) = \lambda r_1(z) + \mu r_2(z)$ est une trajectoire possible puisque $r_1(z)$ et $r_2(z)$ le sont. D'autre part,

cette trajectoire est telle que : $r(z_p) = \mu$ et $\frac{dr}{dz}(z_p) = \lambda$; c'est

donc la trajectoire qui passe par Q tel que $r_Q = \mu$ dans le plan P et dont l'inclinaison dans le milieu I vaut λ . Pour μ donné égal à r_Q et λ variable, on obtient donc ainsi toutes les trajectoires qui passent par Q.

μ et λ sont donc respectivement l'ordonnée du point d'impact dans le plan frontal de P et l'inclinaison dans le milieu I :

$$\mu = r_Q \quad \lambda = \frac{dr}{dz}(z_p).$$

b) Appliquant la relation :

$$r(z) = \lambda r_1(z) + \mu r_2(z) \text{ en } z = z_{p'}$$

on obtient $r(z_{p'}) = \mu r_2(z_{p'})$, quelque soit λ . Toutes les trajectoires qui passent par Q passent donc par le point Q' du plan frontal de P' tel que $r_{Q'} = \mu r_2(z_{p'})$. Un objet dans le plan frontal de P aura donc une image dans le plan frontal de P' : les deux plans sont conjugués pour le système.

Remarque.

Pour les mêmes raisons que dans la remarque de C.4.1. b), il vaut mieux ne pas parler ici d'aplanétisme car le stigmatisme des points P et P' n'est qu'approché.

C.4.3. La relation obtenue précédemment $r_{Q'} = \mu r_2(z_{P'})$ s'écrit encore, compte tenu de la signification de μ :

$$\frac{r_{Q'}}{r_Q} = r_2(z_{P'}).$$

Ce rapport est par définition le grandissement linéaire :

$$\gamma = r_2(z_{P'}).$$

Le grossissement G, ou rapport de convergence, est défini par le rapport des inclinaisons pour un rayon qui passe par P ($\mu = 0$).

$$G = \frac{\frac{dr}{dz}(z_{P'})}{\frac{dr}{dz}(z_P)} = \frac{\frac{dr_1}{dz}(z_{P'})}{\frac{dr_1}{dz}(z_P)}$$

donc :

$$G = \frac{dr_1}{dz}(z_{P'}).$$

C.4.4. En C.2.4., nous avons obtenu l'équation intermédiaire suivante :

$$\frac{2e}{m} \sqrt{f} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{f} \frac{dr}{dz} \right) = -\frac{er}{2m} \frac{d^2f}{dz^2}$$

qui peut encore s'écrire :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{f} \frac{dr}{dz} \right) = -\frac{1}{4\sqrt{f}} \frac{d^2f}{dz^2}$$

Le deuxième membre ne dépend pas de la solution choisie ; on aura donc :

$$\frac{1}{r_1} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{f} \frac{dr_1}{dz} \right) = \frac{1}{r_2} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{f} \frac{dr_2}{dz} \right)$$

$$r_2 \frac{d}{dz} \left(\sqrt{f} \frac{dr_1}{dz} \right) = r_1 \frac{d}{dz} \left(\sqrt{f} \frac{dr_2}{dz} \right)$$

En ajoutant aux deux membres de cette équation le même terme $\frac{dr_1}{dz} \frac{dr_2}{dz} \sqrt{f}$, on obtient :

$$\frac{d}{dz} \left(r_2 \sqrt{f} \frac{dr_1}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left(r_1 \sqrt{f} \frac{dr_2}{dz} \right)$$

On en déduit :

$$r_2 \sqrt{f} \frac{dr_1}{dz} - r_1 \sqrt{f} \frac{dr_2}{dz} = \text{Cste.}$$

En explicitant cette relation pour $z = z_p$ où :

$$f = U_1, \quad r_1(z_p) = 0, \quad \frac{dr_1}{dz}(z_p) = 1, \quad r_2(z_p) = 1, \quad \frac{dr_2}{dz}(z_p) = 0.$$

Puis, pour $z = z_{p'}$ où :

$$f = U_2, \quad r_1(z_{p'}) = 0, \quad \frac{dr_1}{dz}(z_{p'}) = G, \quad r_2(z_{p'}) = \gamma$$

on obtient la relation de « Lagrange-Helmholtz » :

$$\gamma G = \sqrt{\frac{U_1}{U_2}}$$

où $\sqrt{\frac{U_1}{U_2}}$ tient lieu de rapport entre les indices optiques des milieux extrêmes, comme en B.3.3.

C.5.1.

Si l'on peut négliger les variations de r entre A et B, on peut remplacer r par r_0 dans la dernière relation encadrée qui devient alors :

$$\frac{d}{dz} \left(\sqrt{f} \frac{dr}{dz} \right) = -\frac{r_0}{4\sqrt{f}} \frac{d^2 f}{dz^2}$$

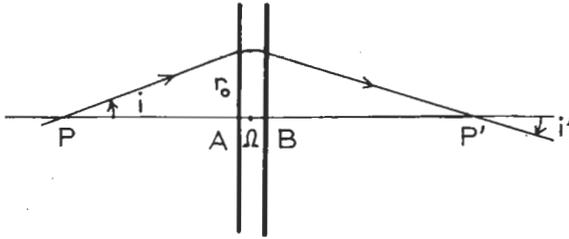


Fig. 8

En intégrant cette relation entre $z = z_A$ où $f = U_1$ et $z = z_B$ où $f = U_2$, on obtient :

$$\sqrt{U_2} \left(\frac{dr}{dz} \right)_B - \sqrt{U_1} \left(\frac{dr}{dz} \right)_A = -r_o \int_{z_A}^{z_B} \frac{1}{4\sqrt{f}} \frac{d^2f}{dz^2} dz = -r_o K.$$

C.5.2. $\left(\frac{dr}{dz} \right)_A$ et $\left(\frac{dr}{dz} \right)_B$ s'identifient avec les inclinaisons orientées dans les deux milieux extrêmes représentées par les angles i et i' sur la figure. On a algébriquement :

$$i = \left(\frac{dr}{dz} \right)_A = -\frac{r_o}{\overline{AP}} \approx -\frac{r_o}{\overline{\Omega P}} = -\frac{r_o}{p}$$

$$i' = \left(\frac{dr}{dz} \right)_B = -\frac{r_o}{\overline{BP'}} \approx -\frac{r_o}{\overline{\Omega P'}} = -\frac{r_o}{p'}$$

En reportant dans l'équation obtenue précédemment, on obtient la formule de conjugaison :

$$\boxed{-\frac{\sqrt{U_1}}{p} + \frac{\sqrt{U_2}}{p'} = K.}$$

C.5.3. Pour $p = -\infty$, on obtient la position du « foyer image » : $p' = f' = \frac{U_2}{K}$. Pour $p' = +\infty$ on obtient la position

du « foyer objet » : $p = f = -\frac{\sqrt{U_1}}{K}$. En valeur absolue $\frac{\sqrt{U_2}}{K}$

et $\frac{\sqrt{U_1}}{K}$ représentent respectivement la distance focale objet et

image du système. L'analogie optique est soit une lentille mince placée entre deux milieux d'indices extrêmes différents n et n' proportionnels à $\sqrt{U_1}$ et $\sqrt{U_2}$, soit un dioptré sphérique placé entre les mêmes milieux extrêmes et de rayon :

$$R = K / \left(\frac{U_2}{U_1} - 1 \right).$$

C.5.4. Pour $f = U_1 \exp \left[4 \frac{(z - z_A)}{a} \right]$, on a :

$$K = \int_{z_A}^{z_B} \frac{4}{a^2} \sqrt{U_1} \exp \frac{2(z - z_A)}{a} dz = \frac{2}{a} \sqrt{U_1} \left(\exp \frac{2\varepsilon}{a} - 1 \right)$$

d'où :

$$f' = \frac{\sqrt{U_2}}{K} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{U_2}{U_1}} \frac{1}{\exp \frac{2\varepsilon}{a} - 1}$$

Compte tenu de ce que $U_2 = 2U_1$ et $\varepsilon = \frac{a}{4} \text{Log } 2$, on trouve :

$$f' = \frac{a}{\sqrt{2} \left[\exp \frac{\text{Log } 2}{2} - 1 \right]} = \frac{a}{2 - \sqrt{2}}.$$

Application numérique :

$$f' = 1,71 \text{ cm.}$$

Pour comparer avec le résultat obtenu en C.3.2. c), il faudrait en toute rigueur augmenter $\overline{BF}' = 1,65$ cm de la moitié de l'épaisseur du système pour obtenir $\overline{\Omega F}' = 1,73$ cm. La comparaison est tout à fait satisfaisante.

Remarque.

D'un point de vue pratique, la formule : $K = \int_{z_A}^{z_B} \frac{1}{4\sqrt{f}} \frac{d^2f}{dz^2} dz$,

qui donne la convergence directement à partir de la distribution du potentiel, paraît séduisante. En fait, elle est peu utilisée

car elle n'est valable que dans le cas de lentilles minces peu convergentes. Dans les microscopes électroniques où l'on cherche à réduire la taille de l'enceinte à vide où se propagent les électrons, objet et image sont rapprochés et l'on utilise des lentilles fortes (surtout pour l'objectif).

C.5.5. Dans le cas de milieux extrêmes identiques, on retrouve la formule de conjugaison des lentilles minces :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}$$

C.6. Les lentilles électrostatiques sont utilisées dans les *microscopes électroniques*. Actuellement, ces lentilles sont de plus en plus remplacées par des lentilles magnétiques où la courbure des trajectoires est due à un champ magnétique à symétrie de révolution créé par des bobines. La théorie est sensiblement la même que celle développée ici pour les lentilles électrostatiques, en particulier dans l'hypothèse de Gauss on obtient une équation homogène en r , qui permet de retrouver toutes les propriétés de conjugaisons. Notons que dans le microscope électronique, les lentilles ne sont pas uniquement utilisées pour la formation d'images. L'analogie avec l'optique subsiste même à la limite de validité de l'optique géométrique et lorsque les détails de l'objet deviennent de l'ordre de la longueur d'onde associée à l'électron on observe un phénomène de diffraction. Cette propriété est plus spécialement utilisée dans les *diffractographes* qui permettent l'étude de structures (tout comme les rayons X). Les lentilles électromagnétiques sont aussi utilisées dans les *sondes ioniques* où, cette fois-ci, les particules chargées sont des ions. La remarque faite en C.2.5. permet de comprendre pourquoi ces lentilles ont pratiquement les mêmes caractéristiques que celles utilisées dans les microscopes électroniques. Enfin, signalons que des lentilles électromagnétiques fortes sont utilisées comme stabilisateurs dans les *accélérateurs de particules*, pour empêcher le faisceau de diverger.

On trouvera une étude détaillée des lentilles électromagnétiques dans le tome I de l'ouvrage de P. GRIVET : « optique électronique » (Bordas éd. 1955), et leurs applications dans le tome II.

D. QUATRIÈME PARTIE

D.1.1. Le théorème de Gauss appliqué à un cylindre de hauteur unité s'appuyant sur la surface latérale du faisceau

$$\text{donne : } 2\pi r_0 E_r = \pi r_0^2 \frac{\rho_0}{\epsilon_0}.$$

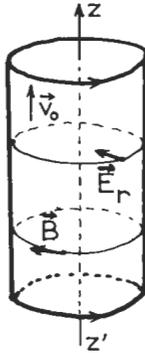


Fig. 9

Puisque ρ_0 est négatif (densité de charge électronique), E_r est centripète :

$$E_r = -\frac{|\rho_0| r_0}{2\epsilon_0}.$$

D.1.2. La densité de courant vaut $\mathbf{f} = \rho_0 \mathbf{v}_0$ et elle est uniforme dans toute l'épaisseur du faisceau. En multipliant la section droite, nous obtenons l'intensité qui vaut :

$$I = \pi r_0^2 \rho_0 v_0 = -\pi r_0^2 |\rho_0| v_0.$$

Dans cette expression, I et v_0 sont algébriques. I est de sens contraire à \mathbf{v}_0 .

D.1.3. a) Le théorème d'Ampère appliqué à la périphérie d'une section droite donne :

$$2\pi r_0 B = \mu_0 I \quad B = -\frac{\mu_0 |\rho_0| r_0 v_0}{2}$$

ici encore B et v_0 sont algébriques pour une orientation du contour en accord avec Oz .

$$b) \quad \mathbf{F}_{\text{mag}} = -e \mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{B} \quad \mathbf{F}_{\text{el}} = -e \mathbf{E}_r$$

les deux forces sont radiales et valent algébriquement :

$$F_{\text{mag}} = - \frac{e \mu_0 |q_0| r_0 v_0^2}{2}$$

$$F_{\text{el}} = \frac{e |q_0| r_0}{2 \epsilon_0}.$$

Il est intéressant de voir que la force magnétique est centripète (attraction entre les différents tubes de courant) alors que la force électrique est centrifuge (répulsion électrostatique entre les électrons). En module, on a :

$$\left| \frac{F_{\text{mag}}}{F_{\text{el}}} \right| = \epsilon_0 \mu_0 v_0^2 = \left[\frac{v_0}{c} \right]^2$$

Dans le cas où $v_0/c = 10\%$, ce rapport vaut 1% et on peut raisonnablement négliger la force magnétique.

Remarquons cependant que même pour des valeurs plus élevées de v_0 , la résultante est toujours centrifuge et tend à faire diverger le faisceau.

D.2.1. Dans l'hypothèse d'un cylindre lentement variable, il n'y a pas de composante du champ électrique suivant la direction du faisceau, donc pratiquement pas d'accélération suivant Oz : v_z peut être considéré comme constant et égal à v_0 . La même hypothèse suppose que le mouvement radial est négligeable donc $v_r \ll v_0$.

D.2.2. L'équation de la dynamique en projection radiale donne pour un électron périphérique :

$$m \frac{dv_r}{dt} = F_{\text{el}} = \frac{e |q_0| r_0}{2 \epsilon_0}$$

sur une distance l correspondant approximativement à un temps

$$t = \frac{l}{v_0}; \text{ on aura :}$$

$$v_r = \frac{e |q_0| r_0}{2 \epsilon_0 m} \frac{l}{v_0}$$

$$\alpha = \frac{v_r}{v_0} = \frac{e |q_0| r_0}{2 \epsilon_0 m} \frac{l}{v_0^2}.$$

Compte tenu de $|I| = \pi r_0^2 |q_0| v_0$ et de $eU = \frac{1}{2} m v_0^2$, on obtient :

$$v_r = \frac{|I|l}{4\pi\epsilon_0 r_0 U} \quad \alpha = \frac{|I|l\sqrt{m}}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 r_0 \sqrt{e}} U^{-3/2}$$

D.2.3. La dilatation relative vaut : $\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{l\alpha}{r_0}$,

soit :

$$\frac{\Delta r}{r_0} = \sqrt{\frac{m}{e}} \frac{|I|l^2}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 r_0^2} U^{-3/2}$$

Tout autre paramètre étant donné en particulier $|I|$, si l'on veut diminuer r_0 , $\frac{\Delta r}{r_0}$ va augmenter. Autrement dit, plus le pinceau est étroit, plus, à flux de particules donné, l'interaction électrostatique entre les particules tend à faire diverger le pinceau.

D.2.4. Application numérique : $\frac{\Delta r}{r_0} = 0,21$.

R. JULLIEN,
A.-M. QUITTET,
(Université Paris-Sud).

CAPES

(OPTION PHYSIQUE ET CHIMIE)

SESSION DE 1980

COMPOSITION DE CHIMIE

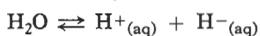
(Durée : 4 heures)

Le thème adopté pour ce sujet est à l'évidence très vaste. Les candidats auront donc tout intérêt à *répondre avec précision et concision aux questions posées, sans digression.*

Les calculs numériques seront effectués avec une précision raisonnable. Les échelles indiquées dans l'énoncé seront respectées.

DONNÉES NUMÉRIQUES

Équilibre ionique de l'eau :

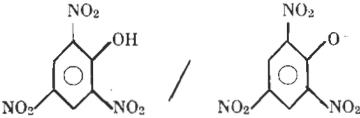


(écriture simplifiée)

$$\Delta H^0_{298} = 57,3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{pK}_e = 14,00 \text{ à } 25^\circ\text{C}$$

pK_a de quelques couples acide-base (relatifs au solvant H_2O)

Couple	pK_a
$\text{CH}_3\text{COOH} / \text{CH}_3\text{COO}^- \dots\dots\dots$	4,8
$\text{CH}_2\text{ClCOOH} / \text{CH}_2\text{ClCOO}^- \dots\dots\dots$	2,8
$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH} / \text{CH}_3\text{CH}_2\text{O}^- \dots\dots\dots$	18 environ
	9,8
	0,4
$\text{NH}_4^+ / \text{NH}_3 \dots\dots\dots$	9,2
	4,6
$\text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_3^+ / \text{C}_2\text{H}_5\text{NH}_2 \dots\dots\dots$	10,8

Domaines de virage de quelques indicateurs colorés

Nom usuel	Domaine de virage
Bleu de thymol	1,2 - 2,8
Hélianthine	3,2 - 4,5
Rouge de méthyle	4,4 - 6,2
Bleu de bromothymol	6,2 - 7,6
Bleu de thymol	8,0 - 9,6
Phénolphtaléine	8,0 - 10,0

TABLEAU I. — Quelques grandeurs thermodynamiques à 298 K
(Les conventions de « zéro » sont les conventions habituelles)

Corps	État	ΔH_f° kJ . mol ⁻¹	S° J . mol ⁻¹ . K ⁻¹
H ₂	gaz	-	130,5
N ₂	gaz	-	191,3
NH ₃	gaz	- 46,1	192,3

Enthalpies de dissociation (kJ . mol⁻¹) :

Cl ₂	242
H ₂	431

Données générales :

Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J . s

Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ mol⁻¹

Célérité de la lumière : $c = 3,00 \times 10^8$ m . s⁻¹

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31$ J . mol⁻¹ . K⁻¹.

ACIDES ET BASES

A. DÉFINITIONS (sur 5 points)

I. Définitions de Brönsted.

Définir et illustrer d'exemples chacun des termes suivants :

- « acide » et « base » ;
- « couple acide-base » ;
- « ampholyte ».

II. Les solvants acido-basiques.

1. Ecrire le bilan de la réaction traduisant l'équilibre d'autoprotolyse de l'eau en spécifiant les couples acide-base de l'eau. (On définira le terme « autoprotolyse »).

Comment peut-on montrer expérimentalement que l'eau pure est légèrement dissociée ? Expliquer.

2. Donner la définition du pH d'une solution aqueuse. Qu'est-ce, respectivement, qu'une solution aqueuse : « acide », « basique », « neutre » ?

3. Calculer le pH de l'eau pure à 20°C et à 30°C. Conclusion ?

4. Donner un autre exemple de solvant qui est le siège d'un équilibre d'auto-protolyse. Indiquer les couples acide-base du solvant.

III. Définitions de Lewis.

1. Donner les définitions respectives d'un acide et d'une base. Exemples.

2. Citez, en justifiant votre réponse, un composé que l'on peut classer dans la même catégorie (acide ou base) quelle que soit la définition adoptée (Brønsted ou Lewis).

B. SOLUTIONS AQUEUSES (sur 45 points)

I. Mesure du pH des solutions aqueuses.

Décrire *brèvement* le fonctionnement d'un pH-mètre. On précisera tout particulièrement le type de grandeur physique mesurée et la nature des réglages de l'appareil (standardisation) qui s'imposent avant toute mesure de pH.

Faire un schéma clair des électrodes de mesure, et en donner brièvement le principe de fonctionnement.

II. Comportement des acides et des bases en solution aqueuse.

1. Donner la définition d'une solution aqueuse d'acide fort et d'une solution aqueuse de base forte. Citer plusieurs exemples dans chaque cas.

2. Quelle est l'espèce chimique que l'on considère généralement comme étant l'acide le plus fort pouvant exister dans une solution aqueuse ? Même question pour l'espèce basique la plus forte.

(Justifier brièvement les deux réponses.)

3. Définir le pK_a d'un couple acide-base en solution aqueuse. Montrer comment l'on peut classer les couples acide-base à l'aide des pK_a .

4. Calculs de pH de solutions aqueuses.

a) Calculer le pH d'une solution aqueuse d'un acide fort de concentration molaire volumique c_0 .

Application numérique :

$$c_0 = 10^{-1} \text{ mol.l}^{-1}; \quad c_0 = 10^{-4} \text{ mol.l}^{-1}$$

b) Calculer le pH d'une solution aqueuse, de concentration molaire volumique c_0 , d'un monoacide faible dont on donne la valeur de la constante pK_a .

Application numérique :

$$pK_a = 3,6, \quad c_0 = 10^{-1} \text{ mol.l}^{-1}, \quad \text{puis} \quad c_0 = 10^{-4} \text{ mol.l}^{-1}.$$

Calculer le coefficient d'ionisation de l'acide faible dans les deux cas envisagés.

5. Dosage d'un acide fort par une base forte.

a) Qu'est-ce qu'un « dosage » ?

b) On verse progressivement une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium dans 20 cm³ d'une solution aqueuse d'acide nitrique. Les deux solutions sont décimolaires.

Tracer la courbe de variation du pH en fonction du volume v_b de la solution d'hydroxyde de sodium versé. On donnera les valeurs du pH pour des volumes v_b égaux à 0 cm³, 10 cm³, 19 cm³, 20 cm³, 21 cm³ et 25 cm³.

Echelle : 0,5 cm pour 1 cm³ et 1 cm pour une unité de pH.

c) Quel (s) indicateur (s) coloré (s) peut-on utiliser pour déterminer le volume v_b correspondant à l'« équivalence » ? L'emploi d'un indicateur coloré permet-il une détermination précise de l'équivalence ? Expliquer, éventuellement, pourquoi.

d) On prend 10 cm³ d'une solution environ décimolaire d'acide nitrique que l'on dilue pour amener le volume de la solution à 100 cm³. On verse progressivement dans les 100 cm³ de la solution diluée, une solution exactement décimolaire d'hydroxyde de sodium. On mesure au conductimètre la conductance du volume d'électrolyte délimité par la cellule de mesure. Les résultats expérimentaux sont rassemblés dans le tableau suivant :

Volume de la solution d'hydroxyde de sodium versé (cm ³).....	0	9,5	10,5	11,5	13,0
Conductance mesurée en millisiemens (mS).....	7,7	2,4	2,3	2,9	3,8

— tracer la courbe de variation de la conductance en fonction du volume d'hydroxyde de sodium versé.

Echelle : 1 cm pour 1 mS, 1 cm pour 1 cm³.

- justifier l'allure de la courbe ;
- calculer la normalité de la solution initiale de l'acide nitrique ;
- pourquoi a-t-on dilué la solution d'acide nitrique à doser ?

6. Dosage d'un acide faible par une base forte.

On veut déterminer la concentration molaire volumique d'une solution aqueuse d'acide éthanóique (acide acétique) à l'aide d'une solution d'hydroxyde de sodium. Les résultats expérimentaux sont rassemblés dans le tableau suivant.

Volume de la solution d'hydroxyde de sodium versé : v cm ³ .	0	1,0	3,0	6,0	9,0	9,5	9,9	10,0	10,1	11,0
pH de la solution	2,9	3,8	4,4	5,0	5,8	6,1	6,8	8,7	10,7	11,7

a) Tracer la courbe $\text{pH} = f(v)$.

Echelle : 1 cm pour 1 cm³; 1 cm pour une unité de pH.

b) Quelles particularités de la courbe indiquent que l'on a affaire à un acide faible ?

c) Déterminer à l'aide de la courbe la valeur du pK_a de l'acide utilisé. On justifiera la méthode de détermination.

d) La concentration molaire volumique de la solution d'hydroxyde de sodium est inconnue. Calculer la concentration initiale de la solution d'acide éthanoïque. Retrouver par le calcul, la valeur du pH à l'équivalence.

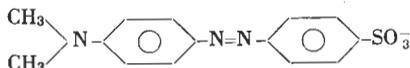
On démontrera les formules nécessaires.

e) En mélangeant judicieusement des solutions d'acide éthanoïque et d'hydroxyde de sodium, on peut réaliser des solutions « tampon » acide-base. Définir ce type de solution, et le pouvoir tampon (appelé quelquefois coefficient tampon) de telles solutions. De quels facteurs dépend le pouvoir tampon d'une solution ? Justifier.

7. Indicateurs colorés de pH.

a) Qu'est-ce qu'un indicateur coloré de pH (nature chimique, principe de « fonctionnement ») ?

b) Le diméthylamino-4' azobenzène sulfonate-4 de sodium (hélianthine) est constitué des ions sodium et des ions de formule :

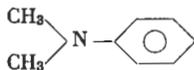


— Représenter les formules de la forme acide et de la forme basique de l'hélianthine.

La zone de virage de l'hélianthine est comprise entre $\text{pH} = 3,2$ et $\text{pH} = 4,5$. Donner l'ordre de grandeur du pK_a de cet indicateur.

— Expliquer le changement de coloration entre la forme acide et la forme basique de l'hélianthine.

— Proposer une synthèse de cet indicateur en utilisant en particulier :



N,N-diméthylaniline et Acide amino-4 benzène sulfonique

8. Action des solutions acides sur les métaux.

a) Comparer l'action des solutions diluées d'acide nitrique et de chlorure d'hydrogène sur les métaux suivants :

- cuivre ;
- fer ;
- or ;
- zinc.

b) Décrire et interpréter :

- l'action d'une solution très concentrée d'acide nitrique sur le fer ;
- l'action du mélange de solutions concentrées d'acide nitrique et de chlorure d'hydrogène sur l'or.

Expliquer.

9. Action des acides et des bases sur les solutions aqueuses.

a) Décrire et interpréter les phénomènes observés lors de l'action d'une solution d'acide sulfurique sur les solutions aqueuses suivantes :

- hydrogénocarbonate de sodium ;
- sulfite de sodium ;
- nitrite de potassium ;
- nitrate de baryum.

(On indiquera également comment on peut mettre en évidence les produits formés.)

b) Décrire et interpréter les phénomènes observés lors de l'action des solutions aqueuses d'hydroxyde de sodium d'une part, et d'ammoniac d'autre part, sur les solutions aqueuses suivantes :

- sulfate de fer (II) ;
- sulfate d'aluminium ;
- sulfate de zinc ;
- sulfate de cuivre (II).

c) Lorsque l'on veut doser les ions fer (II) par les ions permanganate, on opère en milieu acide. Pourquoi ?

Ecrire le bilan de la réaction de dosage.

Parmi les solutions aqueuses d'acide nitrique, d'acide sulfurique et de chlorure d'hydrogène, quelle est celle qu'il faut utiliser pour acidifier le milieu ? Expliquer.

10. Force des acides et des bases.

a) Acides.

Comparer la force de l'acide éthanoïque à celle de l'acide monochloroéthanoïque. Interpréter qualitativement.

Même question avec les *acides* suivants : éthanol, phénol, trinitro-2,4,6 phénol.

b) Bases.

Même question avec les bases suivantes : ammoniac, aniline, monoéthylamine.

C. SYNTHÈSE DES ACIDES ET DES BASES (sur 10 points)

I. Une synthèse industrielle : l'ammoniac.

Equilibre de formation de l'ammoniac :



1. Calculer la variation d'enthalpie standard ΔH_{298}^0 de la réaction (1) à 298 K. Prévoir le déplacement de l'équilibre lorsqu'on modifie la température d'une part, et la pression d'autre part.

2. On suppose que les grandeurs thermodynamiques rassemblées dans le tableau I sont indépendantes de la température. Calculer la température d'inversion de l'équilibre (1).

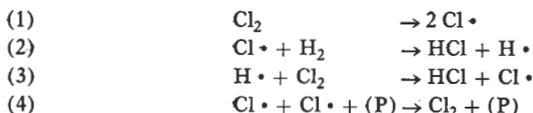
3. Donner les conditions expérimentales (P, T, catalyseurs...) lors de la synthèse industrielle de l'ammoniac. Justifier brièvement ces conditions.

4. Quelle est l'origine des gaz utilisés pour cette synthèse? En quelques lignes, décrire un mode d'obtention industriel de l'hydrogène. Pourquoi est-il nécessaire ici de purifier ce gaz?

II. Aspect cinétique : synthèse du chlorure d'hydrogène.

1. Quelle est l'importance de la synthèse directe pour la production industrielle du chlorure d'hydrogène? Citer un autre mode de production industrielle.

2. Le mécanisme de la réaction entre l'hydrogène et le chlore avec initiation photochimique est celui d'une réaction en chaîne :



où (P) représente un partenaire de choc (molécule du milieu ou paroi).

a) Calculer la longueur d'onde maximale des radiations électromagnétiques permettant la dissociation du chlore [réaction (1)].

Pourquoi n'envisage-t-on pas la réaction (1') suivante :



b) Justifier la nécessité d'un partenaire de choc (P) dans la réaction (4).

c) Les radicaux $\text{Cl} \cdot$ et $\text{H} \cdot$ étant particulièrement instables, on leur applique le principe des états quasi stationnaires.

Exprimer la vitesse de formation du chlorure d'hydrogène en fonction de $k_1, k_2, k_3, k_4, [\text{Cl}_2]$ et $[\text{H}_2]$. [On désigne par k_1, k_2, k_3 et k_4 les constantes de vitesses respectives des étapes (1), (2), (3), (4)].

D. ACIDES ET BASES EN CHIMIE ORGANIQUE (sur 20 points)

I. Addition du bromure d'hydrogène sur les alcènes.

1. Réaction hétérolytique.

a) Donner le mécanisme de la réaction.

b) Discuter l'orientation de l'addition en prenant l'exemple du propène.

2. Réaction radicalaire.

Discuter le mécanisme et l'orientation de l'addition lorsque la réaction se fait en présence d'initiateurs de radicaux (on pourra prendre l'exemple du peroxyde de benzoyle).

II. Réactions d'élimination.

1. Donner les mécanismes possibles de déshydrogénation des dérivés monohalogénés des alcanes.
2. Justifier la position de la double liaison formée.

III. Un exemple de réaction catalysée.

1. Ecrire le bilan de la réaction de formation de l'hydroxy-4 méthyl-4 pentanone-2 (« diacétone, alcool ») à partir de la propanone. Expliquer le rôle catalytique des ions hydroxyde dans cette réaction.

2. Un dispositif expérimental de laboratoire, utilisant un extracteur Soxhlet, permet de préparer le cétole à partir de la propanone. Décrire ce dispositif et les phénomènes qui s'y produisent. Pourquoi a-t-on, avec ce dispositif, un bon rendement, bien que la réaction de formation du cétole soit une réaction équilibrée ?

IV. Réactions de l'acide nitreux avec les amines.

1. Ecrire les équations-bilans des réactions mettant en jeu l'acide nitreux et les différentes classes d'amines.
2. Discuter la stabilité de l'ion diazonium obtenu soit à partir d'une amine primaire aliphatique, soit à partir de l'aniline.

V. Amino-acides, peptides, polyamides.

1. On se propose de faire la synthèse du plus simple des amino-acides, l'acide aminoéthanoïque (glycine).

a) Comment peut-on obtenir l'acide monochloroéthanoïque à partir de l'acide éthanoïque ?

b) On fait agir un grand excès d'ammoniac sur l'acide monochloroéthanoïque à 50°C. On acidifie le milieu, et on obtient l'acide aminoéthanoïque. Ecrire les bilans des réactions mises en jeu dans ce mode opératoire. Pourquoi acidifie-t-on le milieu en fin de réaction ?

2. a) Qu'est-ce qu'un peptide ?

b) Ecrire les formules des dipeptides que l'on peut obtenir à partir d'un mélange d'acide aminoéthanoïque et d'acide amino-2 propanoïque (alanine).

Quelle particularité présente l'alanine au point de vue de la structure ?

3. a) Qu'est-ce que le nylon-6, et le nylon-6,6 ?

Ecrire les formules.

b) A partir de quels réactifs prépare-t-on dans l'industrie le nylon-6,6 ? A partir de quels réactifs peut-on le préparer plus facilement au laboratoire ? Pourquoi ?

c) Le nylon-6,6 devient un polymère cristallin orienté lorsqu'il est soumis à une forte tension, la température étant supérieure à 50°C.

— Qu'est-ce qu'un polymère cristallin orienté ?

— A quelles particularités structurales peut-on lier l'existence de forces intermoléculaires importantes entre les chaînes de ce polymère ? (on pourra faire un schéma).

SOLUTION

Remarque préliminaire.

Le proton hydraté sera écrit H_3O^+ ; on pourrait l'écrire également H^+_{aq} .

ACIDES ET BASES

A. DÉFINITIONS

I. Définitions de Brönsted.

— Un acide de Brönsted est un composé (molécule ou ion) susceptible de libérer un proton H^+ ; par exemple l'acide nitrique HNO_3 , l'acide éthanoïque CH_3COOH , l'ion ammonium NH_4^+ .

— Une base de Brönsted est un composé (molécule ou ion) susceptible de capter un proton ; par exemple : l'ammoniac NH_3 , l'ion hydroxyle OH^- , l'ion cyanure CN^- .

— Un couple acide-base est constitué par un acide de Brönsted et l'espèce obtenue après le départ du proton (ou par une base de Brönsted et l'espèce obtenue après capture du proton). Il correspond à l'équilibre :



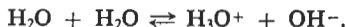
Par exemple :

le couple acide cyanhydrique/ion cyanure, HCN/CN^- ;
le couple ion ammonium/ammoniac $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$.

— Un ampholyte est un composé (molécule ou ion) susceptible de se comporter comme un acide et une base de deux couples différents ; par exemple l'ion dihydrogénophosphate H_2PO_4^- , acide du couple $\text{H}_2\text{PO}_4^-/\text{HPO}_4^{2-}$ et base du couple $\text{H}_3\text{PO}_4/\text{H}_2\text{PO}_4^-$.

II. Les solvants acido-basiques.

1. L'autoprotolyse d'un solvant est la réaction de transfert d'un proton entre deux molécules du solvant. Dans le cas de l'eau, elle s'écrit :



L'eau se comporte dans cette réaction comme un ampholyte correspondant aux couples $\text{H}_2\text{O}/\text{OH}^-$ et $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}$.

On peut montrer que l'eau est légèrement dissociée en mesurant sa conductivité. Elle devrait être nulle si l'eau n'était pas dissociée.

Cette conductivité est très faible ; elle vaut à 25°C :

$$\sigma = 5,5 \cdot 10^{-6} \text{ ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$$

2. On appelle pH d'une solution aqueuse la quantité :

$$\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}_3\text{O}^+]$$

où $[\text{H}_3\text{O}^+]$ représente l'activité du proton hydraté.

Dans la pratique, sauf en solutions assez concentrées, on peut confondre activité et concentrations. Si γ est le coefficient d'activité de H_3O^+ , on a $[\text{H}_3\text{O}^+] = \gamma (\text{H}_3\text{O}^+)$ où (H_3O^+) est sa concentration.

Pour les solutions de chlorure d'hydrogène, on trouve :

concentration en HCl	0,001	0,01	0,1
γ	0,967	0,914	0,83

En solution aqueuse, une solution sera :

neutre si $[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{OH}^-]$ ou $\text{pH} = \text{p}K_e/2$

acide si $[\text{H}_3\text{O}^+] > [\text{OH}^-]$ ou $\text{pH} < \text{p}K_e/2$

basique si $[\text{H}_3\text{O}^+] < [\text{OH}^-]$ ou $\text{pH} < \text{p}K_e/2$.

A 25°C, une solution acide aura un pH inférieur à 7 ; une solution basique aura un pH supérieur à 7.

3. Le pH de l'eau pure est $\text{pH} = \text{p}K_e/2$. Il faut donc calculer la constante d'ionisation de l'eau, K_e , à 20°C (293 K) et 30°C (303 K), connaissant sa valeur à 25°C (298 K). On utilise la loi de Van t'Hoff :

$$\frac{d \text{Log } K_e}{dT} = \frac{\Delta H^0}{RT^2}.$$

— Calcul simplifié : On suppose que, l'écart de température étant faible, on peut assimiler les quantités infiniment petites dT et $d \text{Log } K_e$ aux quantités finies ΔT et $\Delta \text{Log } K_e$; on a donc :

$$\Delta \text{Log } K_e = 2,3 \Delta \log_{10} K_e = \frac{\Delta H^0}{RT^2} \Delta T$$

$$\text{or : } \Delta \text{pH} = \frac{1}{2} \Delta \text{p} K_e = -\frac{1}{2} \Delta \log_{10} K_e$$

$$\text{d'où : } \Delta \text{pH} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta H^0}{2,3 R} \frac{\Delta T}{T^2}.$$

Pour $\Delta T = 5 \text{ K}$, on en déduit $|\Delta \text{pH}| = 0,08$.

Les valeurs demandées sont donc :

à 20°C $\text{pH} = 7,08$; à 30°C $\text{pH} = 6,92$.

— Calcul complet : on intègre la loi de Van t'Hoff en :

$$\text{Log} \frac{K_e(T)}{K_e(T_0)} = -\frac{\Delta H^0}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)$$

ce qui donne :

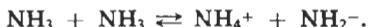
à 20°C $K_e = 6,73 \cdot 10^{-15}$ $\text{pH} = 7,09$,

à 30°C $K_e = 1,47 \cdot 10^{-14}$ $\text{pH} = 6,92$.

(on remarque que le calcul simplifié donne les mêmes résultats, ce qui justifie son utilisation).

Le pH de l'eau diminue quand la température augmente ; la variation est mesurable (environ 0,2 unités quand on passe de 20°C à 30°C). Il faut donc préciser les températures dans les mesures de pH.

4. L'ammoniac liquide est un solvant, siège d'un équilibre d'autoprotolyse :



Les couples de l'ammoniac sont $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$ et $\text{NH}_3/\text{NH}_2^-$. Par extension, le pH dans l'ammoniac liquide sera :

$$\text{pH} = -\log_{10} [\text{NH}_4^+].$$

III. Définitions de Lewis.

1. Un acide de Lewis est un composé susceptible d'accepter un doublet électronique ; par exemple BF_3 , AlCl_3 , Ag^+ .

Une base de Lewis est un composé susceptible de céder un doublet électronique ; exemple NH_3 .

2. L'ammoniac se comporte comme :

une base de Brönsted, selon : $\text{NH}_3 + \text{H}^+ \rightleftharpoons \text{NH}_4^+$.

une base de Lewis selon, par exemple :



B. SOLUTIONS AQUEUSES

I. Mesure du pH des solutions aqueuses.

Le pH-mètre est un millivoltmètre à grande impédance ; il mesure la différence de potentiel entre :

- une électrode de mesure, en général l'électrode de verre ;
- une électrode de référence, par exemple l'électrode au calomel.

La différence de potentiel est de la forme : $E = A - B(\text{pH})$,
A et B étant fonction de T.

Il sera donc nécessaire :

- de définir et d'afficher la température à laquelle on travaille ;
B est ainsi fixé ;
- de standardiser l'appareil, c'est-à-dire déterminer la valeur de
A à T donnée pour cela, on plonge les électrodes dans une
solution de pH connu qu'on affiche sur l'appareil.

— Une électrode de verre (fig. 1) est constituée par une boule de verre (épaisseur : 0,02 à 0,002 mm) dans laquelle plonge une électrode au chlorure d'argent (tige d'argent recouverte de AgCl

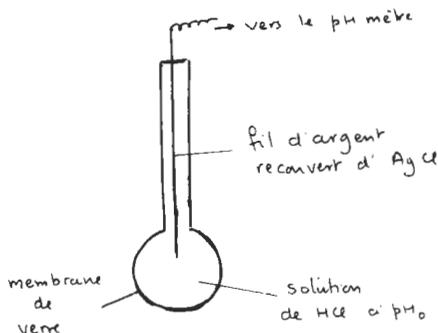


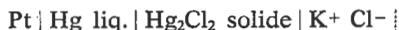
Fig. 1. — Schéma d'une électrode de verre.

solide, en contact avec HCl). On place dans la boule une solution d'acide chlorhydrique de pH connu (0 ou 7 en général). La paroi de verre introduit une discontinuité de potentiel qui vaut $-k(\text{pH}_0 - \text{pH})$.

— Une électrode au calomel (fig. 2) comprend :

- une pâte calomel (Hg_2Cl_2 solide) et mercure (liquide),
- un fil de platine servant de connection avec l'extérieur,
- un électrolyte, du chlorure de potassium (en général saturé).

Le couple qui intervient est le couple $\text{Hg}_2^{2+}/\text{Hg}$ et la chaîne électrolytique de l'électrode est :



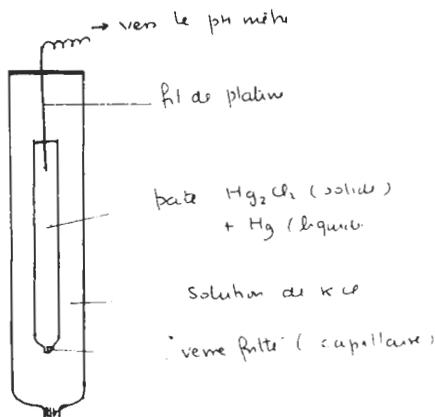


Fig. 2. — Schéma d'une électrode au calomel.

Son potentiel sera donc :

$$E = E^0 + \frac{RT}{2F} \text{Log} (Hg_2^{2+}).$$

Si $K_s = (Cl^-)^2(Hg_2^{2+})$ est le produit de solubilité de Hg_2Cl_2 , on aura :

$$E = E^0 + \frac{RT}{2F} \text{Log} \frac{K_s}{(Cl^-)^2}.$$

A 25°C, en solution KCl saturée, $E_{cal} = 0,244$ V.E.N.H.

II. Comportement des acides et des bases en solution aqueuse.

1. Un acide fort est un acide entièrement dissocié en solution aqueuse ; par exemple : HCl , HNO_3 , $HClO_4$.

Une base forte est une base entièrement dissociée en solution aqueuse (ou pour laquelle la réaction avec l'eau est totale) ; par exemple : l'hydroxyde de sodium, l'ion alcoxyde RO^- , l'ion amidure NH_2^- .

2. L'acide le plus fort pouvant exister en solution aqueuse est l'ion hydroxonium H_3O^+ ; en effet, pour un acide fort, la réaction :



sera totale et l'acide AH n'existera pas en solution.

De même, la base la plus forte pouvant exister en solution aqueuse sera l'ion hydroxyle OH^- ; la réaction :



sera totale.

3. Soit un couple acide-base AH/A^- ; en solution aqueuse, il existe l'équilibre.

On appellera constante d'acidité dans le solvant eau :

$$K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$$

où [] représente l'activité et $\text{p}K_a = -\log_{10} K_a$.

Dans le calcul des constantes, on fait en général intervenir les concentrations. Plus un acide sera fort, plus la réaction de dissociation sera avancée et plus K_a sera grand, donc plus $\text{p}K_a$ sera petit. Les valeurs des $\text{p}K_a$ peuvent donc servir à classer la force des acides.

4. a) Pour un acide fort, on écrit :

neutralité électrique de la solution : $(\text{H}_3\text{O}^+) = (\text{A}^-) + (\text{OH}^-)$,

dissociation totale : $(\text{A}^-) = c_0$,

produit ionique de l'eau : $K_e = (\text{H}_3\text{O}^+) (\text{OH}^-)$.

Si la concentration n'est pas trop faible, ce qui est le cas ici :

$(\text{OH}^-) \ll (\text{H}_3\text{O}^+)$ entraîne $(\text{H}_3\text{O}^+) = c_0$ et $\text{pH} = -\log c_0$

soit : $c_0 = 10^{-1} \text{ mol.l}^{-1}$ $\text{pH} = 1$,

$c_0 = 10^{-4} \text{ mol.l}^{-1}$ $\text{pH} = 4$.

Remarques.

— L'approximation est valable tant que $\text{pH} < 6,5$;

— Pour $c_0 = 0,1$, la mesure du pH donne un résultat voisin de 1,1 ; en effet, on est à la limite de l'approximation qui consiste à confondre les activités et les concentrations.

b) Pour un acide faible, il faut résoudre le système :

conservation de la masse : $c_0 = (\text{AH}) + (\text{A}^-)$,

neutralité électrique : $(\text{H}_3\text{O}^+) = (\text{A}^-) + (\text{OH}^-)$,

constante d'acidité : $K_a = \frac{(\text{H}_3\text{O}^+)(\text{A}^-)}{(\text{AH})}$,

produit ionique de l'eau : $K_e = (\text{H}_3\text{O}^+) (\text{OH}^-)$.

Si l'acide n'est pas trop faible, ni trop dilué, on peut négliger (OH^-) devant (H_3O^+) .

Pour un acide de force moyenne, en solution assez concentrée,

on peut poser :

$$(A^-) \ll (AH) \quad \text{ou} \quad (H_3O^+) \ll c_0$$

d'où :

$$K_a = \frac{(H_3O^+)^2}{c_0} \quad \text{pH} = \frac{1}{2} (pK_a - \log c_0).$$

Cette formule appliquée au cas où $c_0 = 10^{-1}$ mol.l⁻¹ conduit à : pH = 2,3 $(H_3O^+) = 5 \cdot 10^{-3}$ (approximation satisfaisante)

$$\text{et : } \alpha = \frac{(A^-)}{c_0} = 5 \cdot 10^{-2}.$$

Par contre, dans le cas où $c_0 = 10^{-4}$ mol.l⁻¹, on trouve que pH = 3,8 soit $(H_3O^+) = 1,6 \cdot 10^{-4}$, ce qui est impossible [$(H_3O^+) > c_0$].

On ne peut plus négliger (A^-) devant c_0 et il faut résoudre l'équation :

$$K_a = \frac{(H_3O^+)^2}{c_0 - (H_3O^+)}$$

soit, après calcul : pH = 4,12 $(H_3O^+) = 7,66 \cdot 10^{-5}$ $\alpha = 0,766$.

5. a) Un dosage est la détermination de la concentration d'une espèce chimique dans un mélange.

b) Pour $v = 0$, on a une solution 0,1 M d'acide nitrique. On a pH = 1 (avec les réserves du 4. a).

Pour $0 < v < 20$, il y a un excès d'acide ; les équations :

$$\begin{aligned} (NO_3^-) &= \frac{c_0 v_0}{v_0 + v} & (Na^+) &= \frac{c_0 v}{v_0 + v} & (H_3O^+) &+ (Na^+) \dots \\ & & & & \dots &= (NO_3^-) + (OH^-) \end{aligned}$$

conduisent à, en supposant $(OH^-) \ll (H_3O^+)$, c'est-à-dire tant que pH < 6,5,

$$(H_3O^+) = \frac{v_0 - v}{v_0 + v} c_0 \quad \text{pH} = -\log c_0 - \log \frac{v_0 - v}{v_0 + v}$$

soit pour : $v = 10$ pH = 1,48 ; $v = 19$ pH = 2,59.

Pour $v = 20$, on est au point d'équivalence ; la solution est équivalente à une solution d'ions Na^+ et NO_3^- ; on a donc pH = 7.

Pour $v > 20$, on est en milieu basique et donc $(H_3O^+) < (OH^-)$ si pH > 7,5. On en déduit :

$$(OH^-) = c_0 \frac{v - v_0}{v + v_0} \quad \text{pH} = 14 + \text{Log } c_0 + \log \frac{v - v_0}{v + v_0}$$

soit pour : $v = 21$ pH = 11,4 ; $v = 25$ pH = 12,05.

Le tracé de la courbe est donné par la fig. 3.

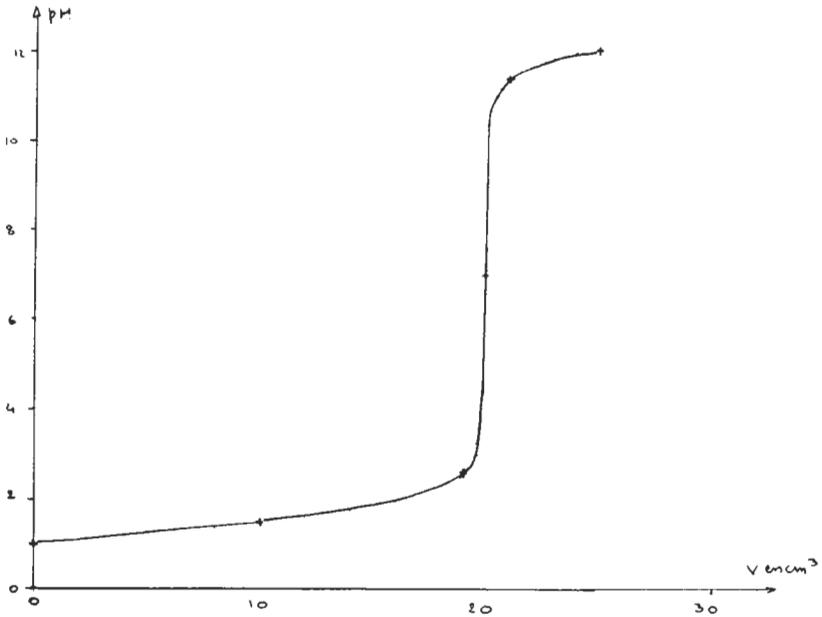


Fig. 3. — Dosage HNO_3 par la soude.

c) L'indicateur coloré doit changer de teinte dans le domaine de variation brusque du pH, c'est-à-dire pratiquement dans la zone $19,7 < v < 20,3$ (pour avoir une précision de l'ordre de 1,5 %); cela correspond à :

$$3,1 < \text{pH} < 10,9.$$

Le domaine de virage des indicateurs doit être inclus dans cet intervalle de pH. On pourra donc employer l'hélianthine, le rouge de méthyle, le bleu de bromothymol, le bleu de thymol, la phénolphaléine.

d) Le tracé de la courbe est donné par la fig. 4.

Quand on ajoute de la soude à la solution d'acide nitrique, on remplace les ions H_3O^+ (mobilité $34 \cdot 10^{-8}$ SI) par des ions Na^+ de mobilité inférieure ($5 \cdot 10^{-8}$); par suite, la conductance de la solution diminue. Au point équivalent, on a une solution qui ne contient pratiquement que des ions Na^+ et NO_3^- ; la conductance est minimale. L'addition de soude après le point équivalent conduit à ajouter des ions Na^+ et OH^- (mobilité $18 \cdot 10^{-8}$); la conductance augmente.

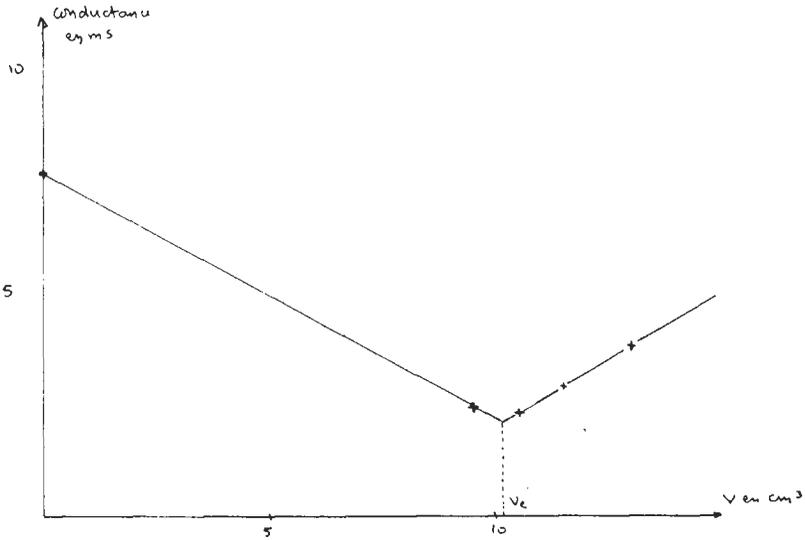


Fig. 4. — Dosage conductimétrique.

Le point équivalent est obtenu à l'intersection des deux demi-droites ; on trouve $v_e = 10,1 \text{ cm}^3$. La concentration de la solution est donc, après dilution $c' = 0,010 \text{ M}$ soit, puisqu'on avait dilué 10 fois :

$$c = 0,10 \text{ mole.l}^{-1}.$$

On a dilué la solution afin d'éviter les variations importantes de volume lors de l'addition de soude (on passe de 100 à 113 cm^3) ; de cette façon, la conductance est une fonction linéaire du volume versé, sauf au voisinage du point d'équivalence ; on se ramène à l'intersection de deux droites.

6. a) Voir fig. 5.

b) Les particularités de la courbe montrant qu'il s'agit d'un acide faible sont :

- une pente importante au voisinage de $v = 0$;
- l'existence d'un point d'inflexion au voisinage de la demi-équivalence et une variation faible du pH dans cette zone ;
- le pH du point d'équivalence supérieur à 7.

c) Les relations de conservation de la masse en acide :

$$(\text{AH}) + (\text{A}^-) = \frac{c_0 v_0}{v + v_0}$$

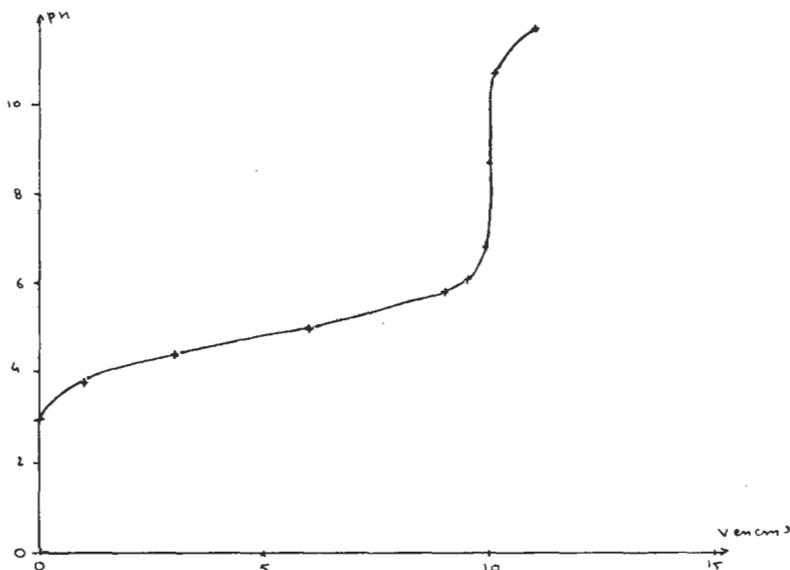


Fig. 5. — Dosage d'un acide faible par une base forte.

(avec c_0 concentration initiale de l'acide, v_0 volume initial d'acide, v volume de soude versée, c concentration de la soude, v_e volume de soude à l'équivalence) :

$$\text{la concentration des ions Na}^+ : (\text{Na}^+) = \frac{cv}{v_0 + v},$$

la neutralité électrique de la solution :

$$(\text{Na}^+) + (\text{H}_3\text{O}^+) = (\text{A}^-) + (\text{OH}^-)$$

permettent d'obtenir :

$$(\text{A}^-) = \frac{cv}{v_0 + v} + (\text{H}_3\text{O}^+) - (\text{OH}^-) \dots$$

$$\dots (\text{AH}) = \frac{c_0 v_0 - cv}{v_0 + v} + (\text{OH}^-) - (\text{H}_3\text{O}^+).$$

Dans le domaine $1,5 < v < 9,5$, on peut supposer que (OH^-) et (H_3O^+) sont négligeables devant (Na^+) et (A^-) . Ceci donne :

$$(\text{A}^-) = \frac{cv}{v_0 + v} \quad (\text{AH}) = \frac{c_0 v_0 - cv}{v_0 + v}.$$

En portant dans K_a et en remarquant que, à l'évidence, $c_0 v_0 = c \cdot v_e$, on en déduit :

$$K_A = (H_3O^+) \frac{(A^-)}{(AH)} = (H_3O^+) \frac{v_e - v}{v}$$

Si on se place à la demi-équivalence : $v = v_e/2$, d'où :

$$pK_a = (pH)_{1/2}$$

Sur la courbe proposée, le point d'équivalence est à : $v_e = 10 \text{ cm}^3$; on en déduit que :

$$pK_a = 4,8.$$

d) En utilisant la formule démontrée au II.4. b), on a pour $v = 0$ une solution d'acide faible et donc :

$$pH = \frac{1}{2} (pK_a - \log c_0).$$

En utilisant pour pK_a la valeur trouvée et en prenant : $pH = 2,9$, on obtient :

$$c_0 = 10^{-1} \text{ mol.l}^{-1}.$$

L'éthanoate de sodium étant une base faible, on a au point d'équivalence un pH supérieur à 7. Les relations entre les concentrations sont dans cette solution :

conservation de la masse : $(A^-) + (AH) = c' = (Na^+)$,
où c' représente la concentration totale au point équivalent,
neutralité électrique : $(A^-) + (OH^-) = (Na^+) + (H_3O^+)$,

$$\text{constante du couple } AH/A^- : K_A = \frac{(H_3O^+)(A^-)}{(AH)}$$

Si on suppose que (OH^-) et $(H_3O^+) \ll c'$, (ce qui semble vérifié par les valeurs), on aura, puisque : $(H_3O^+) \ll (OH^-)$:

$$(Ac^-) = c' \quad (AcH) = (OH^-) = \frac{K_e}{(H_3O^+)}$$

$$K_A = \frac{(H_3O^+)^2 c'}{K_e}$$

$$\text{soit } pH = \frac{1}{2} (pK_a + pK_e + \log c').$$

L'énoncé ne précisant pas le volume initial d'acide acétique employé et la concentration de la soude utilisée au dosage, il est impossible de connaître c' . Cependant, on peut supposer que la soude et l'acide sont de même molarité et donc que le volume au point équivalent est le double du volume initial soit $c' = c/2$. Ceci conduit à :

$$pH = 8,75.$$

On a trouvé, sur la courbe (donnée du texte) qu'à l'équivalence :

$$\text{pH} = 8,7$$

ce qui justifie les approximations faites.

e) On appelle solution tampon, un mélange d'acide faible et de sa base conjuguée, dans des proportions telles que son pH varie peu avec la température, la dilution ou l'apport d'acide ou de base.

Le pouvoir tampon est défini par : $t = \frac{dc_B}{d \text{pH}}$ où dc_B est la

variation de la concentration d'une base forte qui entraîne une variation $d \text{pH}$ du pH.

Ce pouvoir tampon dépend :

- des concentrations de l'acide faible et de sa base conjuguée,
- du rapport des concentrations.

Si on pose, dans une solution :

$$(\text{AH}) = c(1-x) \quad (\text{A}^-) = cx \quad \text{avec} \quad 0,1 < x < 0,9$$

le pH de la solution est donné par :

$$\text{pH} = \text{pK}_a + \log \frac{x}{1-x} \quad (\text{cf. II.6. c})$$

Si on ajoute $dc_B = cdx$ moles de base forte :

$$d \text{pH} = d \left(\frac{1}{2,30} \ln \frac{x}{1-x} \right) = \frac{1}{2,30} \frac{dx}{x(1-x)}$$

$$\text{et :} \quad t = \frac{dc_B}{d \text{pH}} = c \frac{dx}{d \text{pH}} \quad t = 2,30 \, cx(1-x)$$

t est fonction de $c = (\text{AH}) + (\text{A}^-)$; t passe par un maximum pour $x = 0,5$, c'est-à-dire pour un mélange équimolaire en acide et base faible.

7. a) Un indicateur coloré i est une substance organique, couple acide-base faible, dont les formes acide et basique ont des couleurs différentes.

Si on appelle HIn la forme acide, de couleur A, et In^- la forme basique de couleur B, on aura l'équilibre :



défini par une constante d'acidité :

$$K_I = \frac{(\text{H}_3\text{O}^+)(\text{In}^-)}{(\text{HIn})}$$

Si on impose un pH à la solution d'indicateur coloré, et en supposant que sa présence ne modifie pas la solution (d'où la nécessité de n'employer que de faibles quantités d'indicateur), on aura :

$$\log \frac{(\text{In}^-)}{(\text{HIn})} = \text{pH} - \text{pK}_I.$$

On admet qu'une teinte domine si la concentration de l'espèce correspondante est 10 fois plus grande que celle de l'autre espèce (en fait le rapport exact dépend de nombreux facteurs : observateur, couleurs des deux formes...). La teinte acide apparaîtra donc quand :

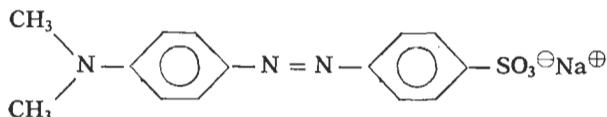
$$\frac{(\text{HIn})}{(\text{In}^-)} \geq 10 \quad \text{soit} \quad \text{pH} < \text{pK}_I - 1.$$

La teinte basique apparaîtra donc quand :

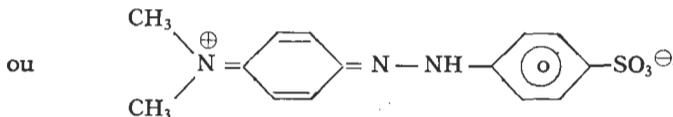
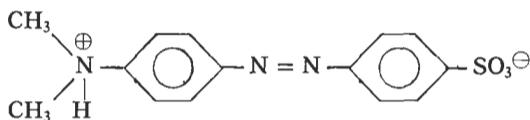
$$\frac{(\text{In}^-)}{(\text{HIn})} \geq 10 \quad \text{soit} \quad \text{pH} > \text{pK}_I + 1.$$

Entre ces deux valeurs de pH, on définit le domaine de virage de l'indicateur. Certains indicateurs, comme la phénolphaléine, sont unicolores.

b) La forme basique de l'hélianthine est la forme donnée dans l'énoncé :

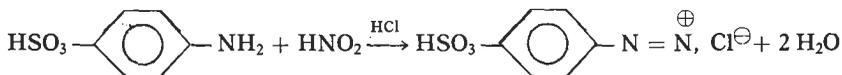


La forme acide de l'hélianthine est :

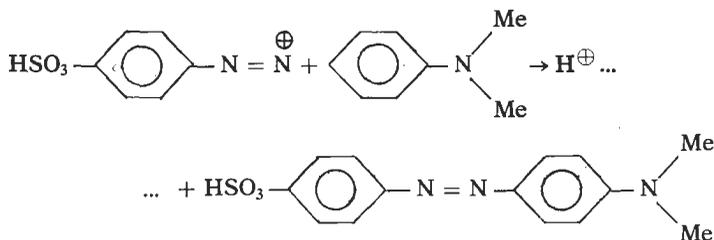


Le changement de teinte est dû à une modification des conjugaisons dans le passage d'une forme à l'autre, donc à des absorptions différentes. La synthèse de l'hélianthine peut se faire selon le schéma suivant :

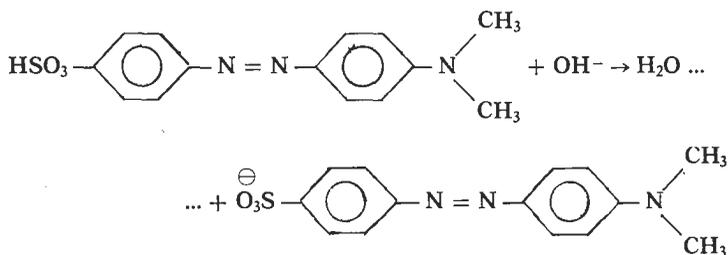
- diazotation de l'acide amino-4 benzène sulfonique, avec du nitrite de sodium en milieu acide chlorhydrique, vers 0° C :



- copulation du sel de diazonium obtenu avec la N,N diméthyl-aniline ; elle se fait en para de la fonction amine :

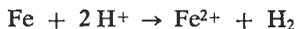


- addition de soude au milieu afin d'obtenir le sel de sodium (hélianthine) :



8. a) La solution diluée de chlorure d'hydrogène :

- ne réagit pas avec le cuivre et l'or ;
 — donne avec le fer et le zinc un dégagement d'hydrogène et la formation d'ions Fe^{2+} et Zn^{2+} (dans le cas, comme pour le fer, où l'on peut obtenir deux degrés d'oxydation différents, c'est toujours le composé de degré le plus bas qui se forme).



La solution diluée d'acide nitrique :

- ne réagit pas avec l'or ;

— oxyde le cuivre en ion Cu^{2+} avec dégagement de monoxyde d'azote à peu près pur :

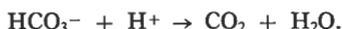


— oxyde le fer et le zinc en ion Fe^{3+} et Zn^{2+} avec dégagement d'oxydes d'azote ; les produits formés dépendent de la concentration de la solution d'acide nitrique ; avec un acide très dilué, il peut y avoir formation d'ion Fe^{2+} et d'ion NH_4^+ .

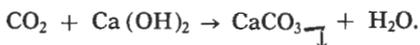
b) L'acide nitrique très concentré passive le fer ; il y a formation d'une couche protectrice d'oxyde à la surface du fer, ce qui le protège d'une attaque ultérieure d'un acide même dilué. Cette passivation cesse par mise en contact avec un métal moins oxydant que le fer (cuivre par exemple).

Le mélange de solutions très concentrées d'acide nitrique et de chlorure d'hydrogène constitue l'eau régale. Ce mélange attaque l'or. Les ions chlorure permettant la formation de l'ion complexe AuCl_4^- ; le potentiel du couple $\text{AuCl}_4^-/\text{Au}$ ($E^0 = 0,99\text{ V}$) est nettement inférieur à celui du couple Au^{3+}/Au ($E^0 = 1,50\text{ V}$). Cela permet l'oxydation de l'or par l'acide nitrique concentré.

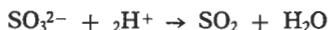
9. a) L'hydrogénocarbonate de sodium donne avec l'acide sulfurique un dégagement de dioxyde de carbone :



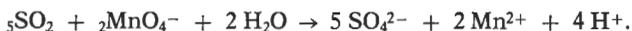
Le dioxyde de carbone est mis en évidence avec de l'eau de chaux : il se forme du carbonate de calcium qui précipite :



Le sulfite de sodium donne un dégagement de dioxyde de soufre :



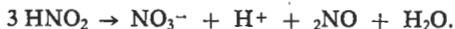
qu'on mettra en évidence par son action sur le permanganate de potassium (décoloration) :



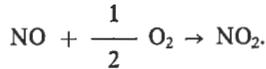
Le nitrite de sodium conduit à la formation d'acide nitreux HNO_2 :



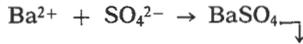
mais celui-ci est instable à la température ordinaire et se dismute,



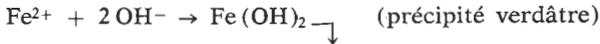
Il y a donc dégagement de monoxyde d'azote qui, à l'air, donne du dioxyde d'azote (vapeurs rousses) :



Le nitrate de baryum donne, avec l'acide sulfurique, du sulfate de baryum insoluble dans l'eau, blanc.



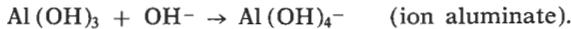
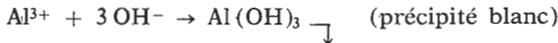
b) Le sulfate de fer (II) donne, avec la soude, un précipité d'hydroxyde de fer (II) :



Ce précipité est insoluble dans un excès de soude.

Avec l'ammoniac, il y a formation d'hydroxyde de fer (II). Les complexes de fer (II) avec l'ammoniac ont des constantes de formation trop faibles pour qu'il y ait redissolution dans un excès d'ammoniac.

Le sulfate d'aluminium donne, avec la soude, un précipité d'hydroxyde d'aluminium, soluble dans un excès de soude par suite de la formation de l'ion aluminate :

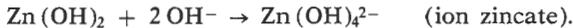


Avec l'ammoniac, il y a précipitation de l'hydroxyde d'aluminium, insoluble dans un excès d'ammoniac.

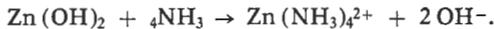
Le sulfate de zinc donne, avec la soude, un précipité d'hydroxyde de zinc :



Ce précipité est soluble dans un excès de soude par formation de l'ion zincate :



Avec l'ammoniac, il y a précipitation de l'hydroxyde de zinc, puis redissolution dans un excès d'ammoniac, par formation de l'ion complexe $\text{Zn}(\text{NH}_3)_4^{2+}$ (constante de formation $K_f = 5 \cdot 10^8$) tétrammino zinc (II) :



Avec le sulfate de cuivre (II), la soude donne un précipité d'hydroxyde de cuivre (II), insoluble dans un excès de soude :



Avec l'ammoniac, il se forme d'abord l'hydroxyde de cuivre (II), soluble dans un excès d'ammoniac par formation de l'ion complexe tétrammino cuivre $\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}$:



c) Le dosage des ions fer(II) par le permanganate de potassium doit se faire en milieu acide pour avoir une réaction quantitative (en milieu non acide il peut se former MnO_2).

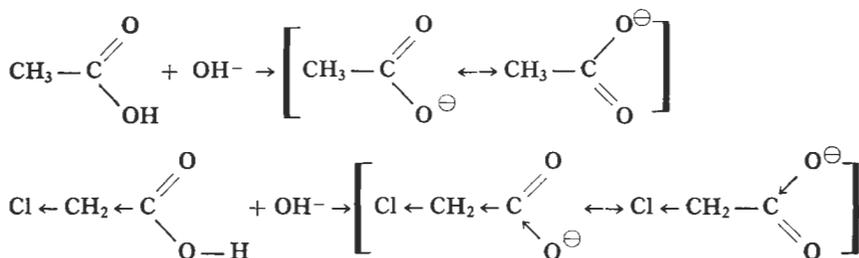
Le bilan de la réaction de dosage s'écrit :



Il faut utiliser l'acide sulfurique pour acidifier le milieu. En effet, l'acide chlorhydrique est oxydé par les ions permanganate avec dégagement de chlore ; l'acide nitrique lui, oxyde les ions fer(II) en ions fer(III).

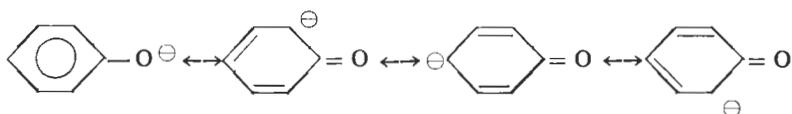
10. a) L'acide monochloroéthanoïque est un acide plus fort que l'acide éthanoïque ($\text{pK}_a = 2,8$ pour l'un, 4,8 pour l'autre).

Cette différence est due à l'effet inducteur attracteur de l'atome de chlore. Il y a affaiblissement de la liaison $\text{O}-\text{H}$, donc acidité accrue. En même temps, il y a stabilisation de l'ion carboxylate de l'acide monochloroéthanoïque par rapport à l'ion carboxylate de l'acide éthanoïque : en effet, l'effet inducteur attracteur du chlore réduit la charge négative qui doit s'accumuler sur cet ion :

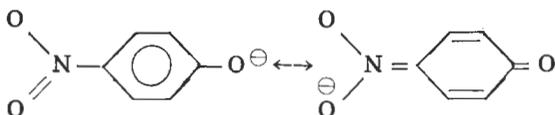


L'éthanol est un acide très faible : dans l'eau c'est la base EtO^- (éthanolate) qui est une base forte ; le phénol est un acide plus fort que l'alcool ; le trinitro-2-4-6 phénol est un acide presque fort.

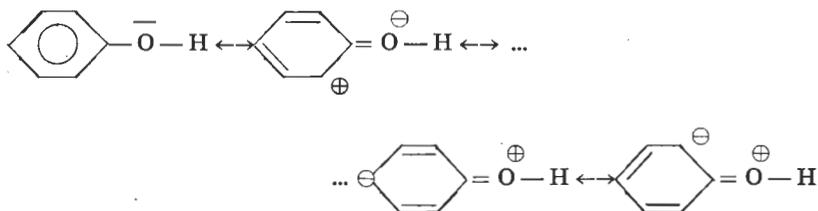
L'ion phénate est beaucoup plus stable que l'ion alcoolate ; en effet, il est stabilisé par l'existence de formes mésomères mettant en jeu le noyau benzénique (ce qui est impossible dans le cas de l'alcool) :



L'ion picrate (correspondant au trinitro phénol) est encore plus stable que l'ion phénate par suite de la présence des groupements NO_2 en ortho et para qui sont des attracteurs d'électrons :



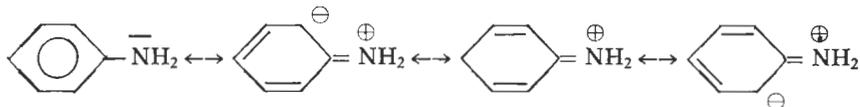
On peut aussi dire que l'ion phénate est plus stable que le phénol, parce que dans le phénol, la délocalisation implique une séparation des charges :



Par contre, l'ion alcoolate n'est pas plus stabilisé que l'alcool lui-même.

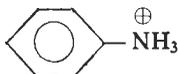
b) La méthylamine est une base plus forte que l'ammoniac : en effet, l'effet inducteur donneur du groupement méthyl rend l'atome d'azote plus négatif et donc augmente la tendance à capter un proton.

L'aniline est une base beaucoup plus faible que l'ammoniac. En effet, dans l'aniline, le doublet libre de l'azote peut conduire à des formes mésomères qui stabilisent la molécule :



Par contre, lorsque l'aniline a fixé un proton, l'ion formé ne peut pas conduire à de telles formes puisque le doublet libre de

l'azote est bloqué. L'aniline est donc plus stable que le cation anilinium et, par suite, celui-ci a peu de chances de se former ; l'aniline est donc une base très faible :



C. SYNTHÈSE DES ACIDES ET DES BASES

I. L'ammoniac.

1. Pour la réaction $3 \text{H}_2 + \text{N}_2 \rightleftharpoons 2 \text{NH}_3$, la variation d'enthalpie standard ΔH_{298}^0 est égale à :

$$\Delta H_{298}^0 = 2 \Delta H_f^0(\text{NH}_3) = -92,2 \text{ kJ.}$$

Les lois du déplacement de l'équilibre indiquent que :

- une élévation de température conduit à un déplacement dans le sens de la réaction endothermique, donc ici à la dissociation de l'ammoniac ;
- une élévation de pression conduit à un déplacement dans le sens d'une diminution du nombre de molécules gazeuses, donc ici à la formation de NH_3 .

2. La température d'inversion d'un équilibre est la température telle que :

$$\Delta G^0 = 0 \quad \text{ou} \quad K_p = 1 \quad (\text{pressions en atmosphères}).$$

Si on suppose ΔH^0 et ΔS^0 indépendants de T :

$$\Delta H^0 = -92200 \text{ J} \quad \text{et} \quad \Delta S^0 = -198,2 \text{ J. K}^{-1}.$$

D'où puisque :

$$\Delta G^0 = \Delta H^0 - T \Delta S^0$$

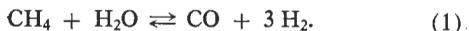
$$T_i = 465 \text{ K (192}^\circ\text{C)}.$$

3. La valeur de T_i montre qu'il faudrait se placer à basse température pour obtenir une réaction très déplacée dans le sens de la formation de l'ammoniac. Mais la vitesse de réaction est alors très faible et dans ces conditions, le rendement pratique quasi nul. On opère donc :

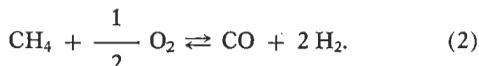
- à des températures moyennes (350 à 460°C), de manière à avoir une réaction assez rapide ;
- sous des pressions assez élevées (100 à 1 000 atm., en général 300 atm.) afin d'améliorer le rendement, par déplacement de l'équilibre ;

— avec un catalyseur pour augmenter la vitesse de réaction ; il est constitué par du fer (obtenu par réduction de Fe_3O_4 par l'hydrogène *in situ*) auquel on ajoute de petites quantités (quelques %) d'alumine et d'oxyde de potassium (augmentation de la surface active du catalyseur, amélioration de l'activité et augmentation de la durée de vie).

4. L'azote est obtenu à partir de l'air. L'hydrogène est obtenu par oxydation ménagée du méthane (ou du naphtha). On commence par une oxydation avec la vapeur d'eau (450°C , 35 atm., en présence de nickel) :



Le reste du méthane est éliminé par oxydation à l'air :



Cette réaction apporte l'azote nécessaire (*).

Le monoxyde de carbone est, à son tour, oxydé par l'eau :



On élimine CO_2 par lavage sous pression avec du carbonate de potassium ; les traces de CO et CO_2 sont éliminées par méthanation (action de l'hydrogène). Il faut purifier les gaz car CO est un poison de catalyseur (molécule isostère de l'azote : même configuration électronique, dimensions identiques) ; il bloque les sites actifs du catalyseur.

II. Le chlorure d'hydrogène.

1. Le chlorure d'hydrogène apparaît surtout aujourd'hui, comme un sous-produit dans les réactions de chloration en chimie organique.

On peut également en faire la synthèse directe.

2. a) Si ΔH^0 est l'enthalpie de dissociation d'une mole de chlore, il faut fournir à une molécule, pour la dissocier, une éner-

gie : $E = \frac{\Delta H^0}{N_A}$ (N_A : nombre d'Avogadro). Cette énergie est

fournie par un photon, de fréquence ν telle que :

$$h\nu > E$$

$$h\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad \text{d'où} \quad \frac{hc}{\lambda} > \frac{\Delta H^0}{N_A} \quad \text{et}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{hc N_A}{\Delta H^0} = 4,95 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 4950 \text{ \AA}.$$

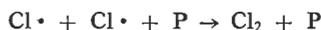
(*) *N.D.L.R.* : Il est nécessaire d'oxyder par l'air une partie de CH_4 car la réaction (1) est endothermique ; par contre la réaction (2) est exothermique ; on s'arrange pour que le bilan énergétique soit nul.

Pour que la réaction $H_2 \rightarrow 2 H \cdot$ puisse se faire, il faudrait que la longueur d'onde maximale des radiations soit :

$$\lambda'_{\max} = \lambda_{\max} \times \frac{\Delta H^0(H_2)}{\Delta H^0(Cl_2)} = \lambda_{\max} \times \frac{242}{431} \quad \lambda'_{\max} = 2780 \text{ \AA}$$

ce qui correspond à des longueurs d'onde beaucoup plus courtes que pour la dissociation du chlore.

b) Il est nécessaire qu'il y ait un partenaire de choc dans la réaction :



pour que soit absorbée l'énergie libérée dans cette réaction.

c) Le principe des états quasi stationnaires, ou principe de Bodenstein, pose que la concentration des espèces instables reste constante ; on a donc :

$$\frac{d(Cl \cdot)}{dt} = 0 \quad \frac{d(H \cdot)}{dt} = 0.$$

Si on applique ce principe aux réactions élémentaires du mécanisme proposé, on obtient :

$$(a) \quad \frac{d(Cl \cdot)}{dt} = 0 = 2 k_1 (Cl_2) - k_2 (Cl \cdot) (H_2) \dots \\ \dots + k_3 (H \cdot) (Cl_2) - 2 k_4 (Cl \cdot)^2$$

$$(b) \quad \frac{d(H \cdot)}{dt} = 0 = k_2 (Cl \cdot) (H_2) - k_3 (H \cdot) (Cl_2)$$

$$(c) \quad v = \frac{d(HCl)}{dt} = k_2 (Cl \cdot) (H_2) + k_3 (H \cdot) (Cl_2)$$

(a) et (b) conduisent à :

$$k_1 (Cl_2) = k_4 (Cl \cdot)^2 \quad \text{soit} \quad (Cl \cdot) = \left[\frac{k_1}{k_4} (Cl_2) \right]^{1/2}$$

(b) et (c) conduisent à :

$$v = 2 k_2 (Cl \cdot) (H_2)$$

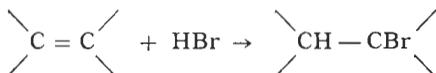
d'où :

$$v = 2 k_2 \sqrt{\frac{k_1}{k_4}} (H_2) (Cl_2)^{1/2}$$

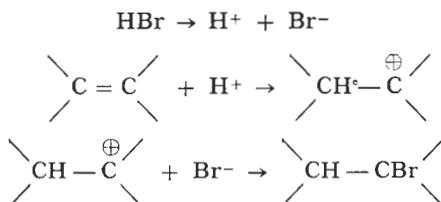
D. ACIDES ET BASES EN CHIMIE ORGANIQUE

I. Addition du bromure d'hydrogène sur les alcènes.

1. On étudie la réaction d'addition :



a) C'est une addition électrophile dont les étapes sont les suivantes :



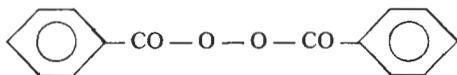
C'est une trans addition.

b) Dans le cas du propène $\text{CH}_3 - \text{CH} = \text{CH}_2$, on peut envisager l'obtention des deux carbocations suivants :

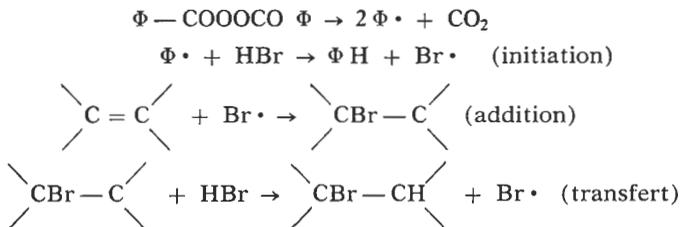


Le carbocation secondaire (1) étant plus stable que le carbocation primaire (2), l'addition conduira au bromo-2 propane : $\text{CH}_3 - \text{CHBr} - \text{CH}_3$. C'est la règle de Markovnikoff : l'anion se fixe sur le carbone le plus substitué.

2. Dans le cas de l'addition radicalaire de HBr, en présence de peroxyde de benzoyle



le mécanisme est le suivant :

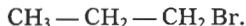


Le sens de l'addition dépend du carbone sur lequel se fixe le radical $\text{Br}\cdot$ dans l'étape d'addition.

Pour le propène, il peut se former :



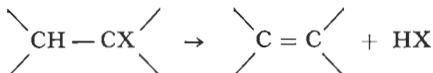
Le radical secondaire (2) étant plus stable que le radical primaire (1), on obtiendra le bromo-1 propane :



C'est l'effet Karash ou anti-Markovnikoff.

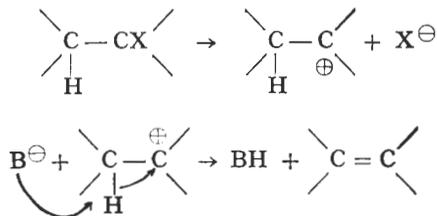
II. Réactions d'élimination.

1. Il y a deux mécanismes possibles pour la réaction de déshydrohalogénéation :

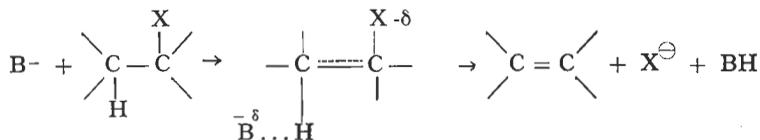


Ces réactions se font en présence d'une base forte symbolisée par B^- :

— l'élimination E1, monomoléculaire, se fait en deux étapes :



— l'élimination E2, bimoléculaire, se fait en une étape :

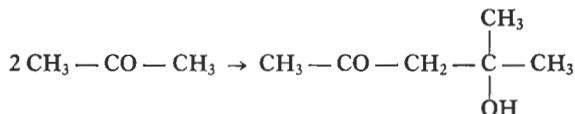


Elle se fait avec trans-élimination.

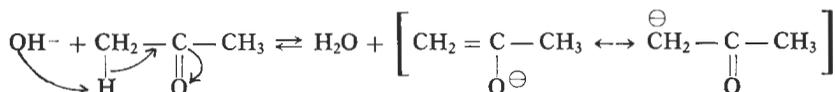
2. La position de la double liaison est donnée par la règle de Saytzeff : l'alcène le plus substitué se forme préférentiellement. Il y a cependant des exceptions (orientation d'Hoffmann).

III. Exemples de réaction catalysée.

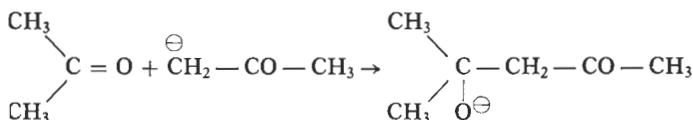
1. Le bilan de la réaction est :



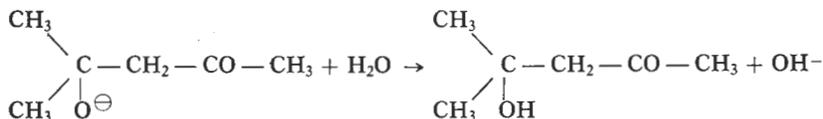
En milieu basique, il y a formation de l'ion énolate, stabilisé par mésomérie :



Il y a ensuite attaque de la fonction carbonyle par le carbanion ainsi obtenu :



suivie de l'action d'une molécule d'eau sur l'ion alcoolate :



Les ions OH^- sont régénérés : il y a bien catalyse par ces ions.

2. Schéma de l'extracteur de Soxhlet : voir fig. 6.

On place dans le ballon de la baryte : $\text{Ba}(\text{OH})_2$.

On place dans le ballon la propanone et dans la cartouche de l'extracteur de la baryte $\text{Ba}(\text{OH})_2$. La réaction de céto-lisation, équilibrée, se fait en présence de la baryte ; par contre, dans le ballon, il ne peut y avoir d'équilibre : le céto est stable. De plus, la propanone étant plus volatile que le céto, elle s'évapore par chauffage et va réagir dans la cartouche. Ainsi la réaction peut se poursuivre et le rendement peut atteindre 95 %.

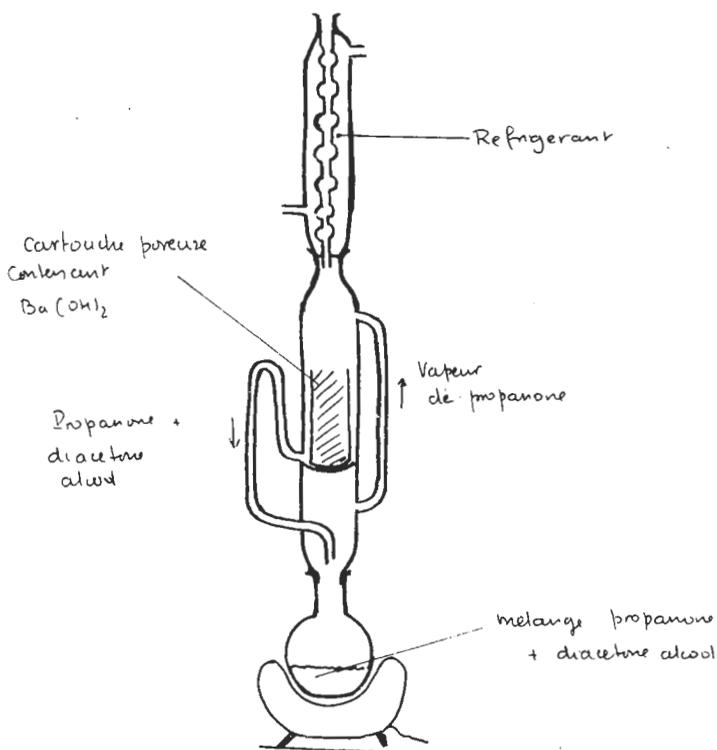
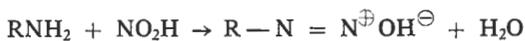


Fig. 6. — Schéma de l'extracteur de Soxhlet.

IV. Réactions de l'acide nitreux avec les amines.

1. Pour une amine primaire, on a :

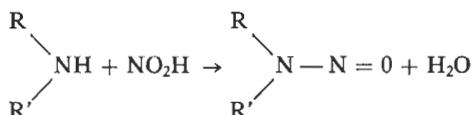


suivi de la décomposition de l'ion diazonium formé :

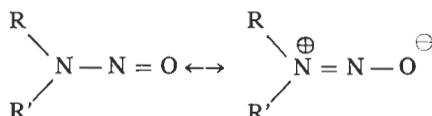


En réalité, on obtient de nombreuses espèces chimiques dans la décomposition de l'ion diazonium (alcènes, cyclanes, alcools, dérivés halogénés).

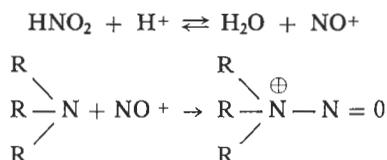
Une amine secondaire conduit à la formation d'une nitrosamine :



stabilisée par résonance :

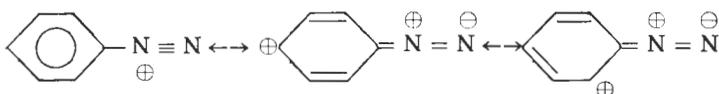


Avec les amines tertiaires, il peut y avoir formation de sels ($\text{R}_3\text{N}^{\oplus}$, NO_2^{\ominus}) ou bien d'ion nitrosammonium :



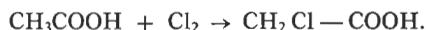
Cet ion peut être dégradé en aldéhyde et amine secondaire, qui donnera à son tour une nitrosamine.

2. L'ion diazonium obtenu à partir de l'aniline est beaucoup plus stable que celui obtenu avec une amine primaire aliphatique ; il est en effet stabilisé par résonance :



V. Amino-acides, peptides, polyamides.

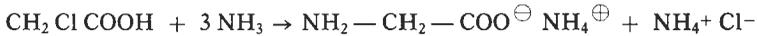
1. a) La chloration des acides carboxyliques sur le carbone en α se fait par le chlore en présence d'iode ou de phosphore :



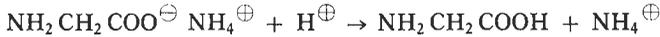
b) Il y a 3 étapes dans l'action de l'ammoniac sur l'acide monochloroéthanique :

- obtention d'un sel d'ammonium ;
- substitution de l'atome de chlore par $-\text{NH}_2$ et élimination de HCl ;
- formation de chlorure d'ammonium.

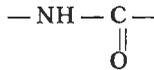
Le bilan réactionnel sera donc :



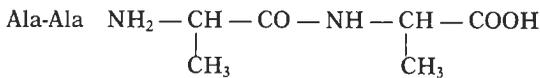
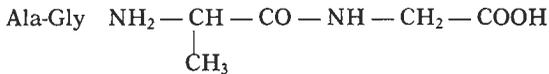
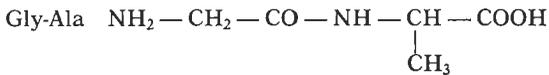
L'acidification permet de récupérer l'acide aminoéthanoïque à partir de son sel d'ammonium :



2. a) Un peptide est un composé obtenu par condensation de deux (dipeptides) ou plusieurs (polypeptides) molécules d'acides aminés (identiques ou non). Ils renferment donc une (dipeptides) ou plusieurs liaisons amide :

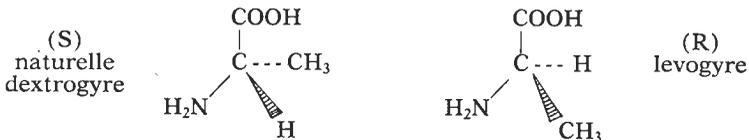


b) A partir de la glycine (symbolisée par Gly) et de l'alanine (Ala), on peut obtenir quatre dipeptides, symbolisés par :



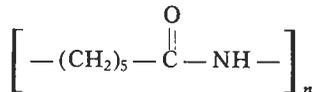
L'alanine, $\text{NH}_2-\underset{\text{CH}_3}{\text{CH}}-\text{COOH}$, présente un carbone asymétrique.

Il y aura donc : deux énantiomères (ou inverses optiques) : la R-alanine et la S-alanine :

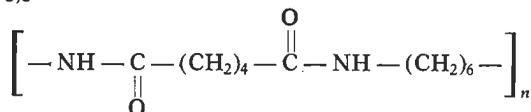


3. a) Le nylon-6 et le nylon-6,6 sont des polyamides de formules :

nylon-6



nylon-6,6



b) On prépare le nylon-6,6 dans l'industrie à partir de :

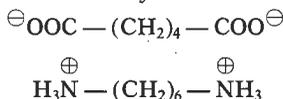
— l'hexaméthylène diamine (diamino-1,6 hexane) :



— l'acide adipique (acide butane dioïque-1,4) :



Il y a passage par le « sel nylon » :



puis déshydratation de ce composé.

Au laboratoire, on le prépare plus facilement à partir de l'hexaméthylène diamine et du chlorure d'adipyle :



La réaction est beaucoup plus rapide et totale.

c) Un polymère cristallin renferme, dans certains domaines, des chaînes parallèles entre elles : ce sont les cristallites (fig. 7).

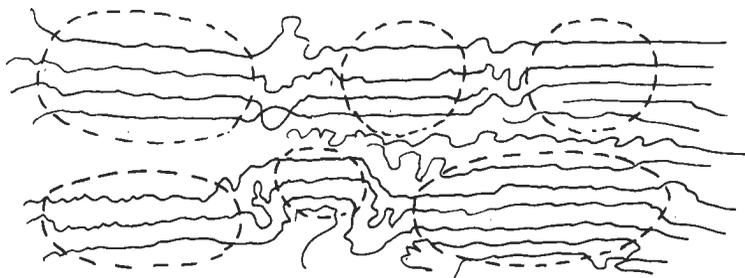
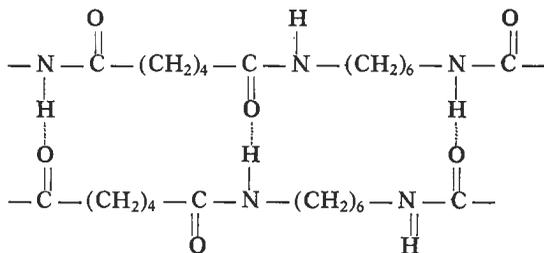


Fig. 7. — Schéma d'un polymère cristallin orienté.
Les cristallites sont délimitées par des pointillés.

Il sera orienté si une direction de cristallites est privilégiée.

Les forces intermoléculaires existant entre les chaînes d'un polymère cristallin correspondent à des liaisons hydrogène entre l'oxygène d'un carbonyle et l'hydrogène porté par un azote :



A. TRINQUIER,

(*Lycée Dumont-d'Urville - Toulon*).

SOMMAIRE du supplément au N° 632

(mars 1981)

	Pages
Concours général 1980 :	
Problème de sciences physiques (R. MOREAU et les membres du jury)	1
Agrégations :	
Option physique 1980 (P. ENCRENAZ, H. GIÉ)	33
Option chimie 1980 (J. BOTTIN, J.-C. DEPEZAY, R. DIDIER, C. DUFOUR)	83
Option physique appliquée 1980 (R. MOREAU)	127
C.A.P.E.S. 1980 :	
Problème de physique (R. JULLIEN, A.-M. QUITTET)	159
Problème de chimie (A. TRINQUIER)	201
Renseignements divers	I à IV

Le Directeur de la Publication : Ph. FLEURY

Imprimerie Hallépée - 169, rue Lecourbe, Paris

Dépôt légal : 1^{er} trimestre 1981

Numéro Commission paritaire : 62628

