79e Année Publication mensuelle Supplément au n° 672

Bulletin de l'Union des Physiciens

Association de professeurs de Physique et de Chimie

AVERTISSEMENT AUX LECTEURS

Nous avons décidé, pour l'impression de ce bulletin, de respecter les normes de la typographie nouvelle et de noter les grandeurs vectorielles en caractères gras sans les surmonter de flèches. Ces normes ont surtout comme intérêt de simplifier la tâche de composition.

D. MAURAS.

Concours Général 1984

COMPOSITION DE SCIENCES PHYSIQUES
(Classes terminales C, D et E)

(Durée : 6 heures)

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants :

I. Premier problème

QUELQUES EFFETS LIÉS A LA ROTATION DE LA TERRE

Données numériques :

Rayon terrestre : $R = 6\,400$ km ;

Période de rotation terrestre : $T = 86\,160$ s ;

Intensité de la pesanteur au sol : $g \simeq 9{,}8$ m. s^{-2}.

La Terre est assimilée à une sphère de rayon R en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω par rapport au référentiel géocentrique (R_c). On réalise des expériences de chute des corps d'abord en un lieu situé à l'équateur (questions I.1, I.2, I.3) puis en un lieu de latitude quelconque λ. On néglige l'influence du vent et des frottements dans l'air.

1. On laisse tomber un corps de la hauteur h et sans vitesse initiale par rapport au référentiel terrestre dans un puits de mine. On suppose $h \ll R$.

a) *En raisonnant dans le référentiel* (R_c), et en supposant le champ de pesanteur **g** uniforme, étudier le mouvement de chute du corps dans (R_c). Calculer le déplacement horizontal du corps *dans* (R_c) sur la durée Δt de la chute.

Y a-t-il lieu de tenir compte de la courbure terrestre au sol ?

Application numérique : $h = 150$ m.

b) En déduire que l'observateur terrestre devra observer une « déviation vers l'est » dont on donnera l'expression en fonction de g, ω et Δt. Calculer numériquement cette « déviation » pour $h = 150$ m et conclure.

2. En fait, la théorie donne une valeur plus faible de cette déviation (soit les 2/3 de la valeur calculée précédemment).

a) Expliquer *qualitativement* la raison de ce résultat. On pourra, pour cela, considérer le résultat numérique obtenu en I.1. *a*).

b) Justifier par le calcul, moyennant une approximation légitime qu'on explicitera, le rapport 2/3 indiqué précédemment.

3. *a*) A partir du sol, on lance verticalement vers le haut un boulet de canon avec la vitesse initiale v_0 par rapport à la Terre (expérience réalisée par le Père Mersenne au XVIIe siècle). En utilisant astucieusement le résultat de la question I.2., déterminer *très simplement* la déviation qu'on devrait théoriquement observer. S'agit-il d'une déviation vers l'est, vers l'ouest ou bien nulle ? Qu'en est-il dans la réalité ?

Application numérique : $v_0 = 300$ m. s^{-1}.

b) Reprendre la question précédente si le lancement est effectué à la hauteur h au-dessus du sol. Quelle doit être, exprimée en fonction de g et h, la vitesse $v_{0\,m}$ minimale de lancement pour observer une déviation vers l'*ouest* au point de chute au sol ?

4. Comment sont modifiés les résultats qui précèdent en un lieu de latitude λ ?

5. Vérifier qu'on retrouve bien tous les résultats qui précèdent en raisonnant dans le *référentiel terrestre* à condition de faire intervenir une force supplémentaire, dite « *force d'inertie de Coriolis* », de la forme $\mathbf{f}_i \simeq -2\,m\,\vec{\omega} \wedge (\mathbf{v}_0 + \mathbf{g}\,t)$ où $\vec{\omega}$ est le vecteur rotation de la Terre [dans (R_c)], $\mathbf{v}_0$ la vitesse initiale de lancement (éventuellement nulle) et m la masse du corps. On expliquera en particulier, pourquoi dans cette expression de $\mathbf{f}_i$, il est licite de supposer **g** uniforme.

6. *a*) En un lieu O de latitude λ et à partir du sol on lance un obus dont la vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ fait l'angle α avec l'axe Ox horizontal dirigé vers le *sud*. Le vecteur $\mathbf{v}_0$ est en outre dans le plan vertical Oxz. L'axe Oy du trièdre Oxyz est dirigé d'*ouest* en *est*. En utilisant l'expression donnée en I.5. de la force de Coriolis, calculer la déviation Y observée lors de la chute au sol de l'obus, due à la rotation terrestre. S'agit-il d'une déviation vers l'ouest ou vers l'est ? Discuter. Pour quelle valeur de α a-t-on Y = 0 ?

Application numérique : Calculer Y pour $v_0 = 700$ m. s^{-1}, $\lambda = 45°$ Nord, $\alpha = 30°$.

b) Le lancement est effectué au pôle Nord. Expliquer simplement le résultat obtenu.

7. La fig. 1 indique dans le plan horizontal d'un lieu donné de l'hémisphère boréal les lignes d'égale pression atmosphérique et la vitesse **V** supposée horizontale du vent. En admettant qu'il y a équilibre entre les forces de pression et la composante horizontale de la force de Coriolis, indiquer en le justifiant le sens des pressions croissantes. En déduire le sens de parcours du vent autour d'un centre anticyclonique. Reprendre la question pour un lieu de l'hémisphère austral.

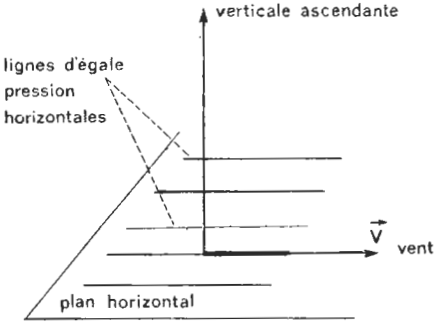


Fig. 1

II. **Deuxième problème**

ENERGIE RÉTICULAIRE DU CRISTAL DE CHLORURE DE SODIUM

Données numériques :

Constante d'Avogadro : $\mathcal{N} = 6{,}02\ 10^{23}$;

Charge élémentaire : $e = 1{,}60\ 10^{-19}$ C ;

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\,\pi\,10^9}$ SI.

1. Soient deux charges électriques ponctuelles de valeurs q_1 et q_2 et distantes de r.

a) L'énergie potentielle d'interaction U_{12} des deux charges est l'opposé du travail W qu'il faut fournir pour séparer les deux charges de la distance r à l'infini (travail de dissociation). Interpréter le signe de U_{12}. ($U_{12} > 0$ ou $U_{12} < 0$).

b) Le calcul indique que $U_{12} = \dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\dfrac{q_1\,q_2}{r}$. Pouvez-vous établir rapidement cette expression ? Le travail de séparation des charges dépend-il de la manière dont on a éloigné les charges ? Justifier votre réponse.

2. On considère une file rectiligne régulière d'ions équidistants alternativement positifs et négatifs de charges respectives e et $-e$. On désigne par a la distance de deux ions consécutifs assimilés à des charges ponctuelles.

a) On suppose d'abord la file infinie. Calculer l'énergie potentielle d'interaction U_0 d'un ion donné avec l'ensemble de tous les autres ions. Cette énergie dépend-elle de l'ion considéré ?

On donne : $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2 = 0{,}693.$

b) Combien faut-il comptabiliser d'ions de part et d'autre de l'ion considéré pour obtenir un résultat à 1 % près ?

c) La file n'est, en fait, pas infinie mais comporte N ions au total, N étant un *nombre très grand*. Calculer l'énergie potentielle d'interaction totale de la file U_T c'est-à-dire la somme des énergies potentielles d'interaction de tous les couples d'ions de la file. On sera amené à faire une approximation que l'on justifiera avec soin. En déduire que l'énergie potentielle moyenne par « atome » a pour valeur $U_a = \frac{U_0}{2}$ où U_0 est l'énergie potentielle d'interaction calculée au 2. *a*).

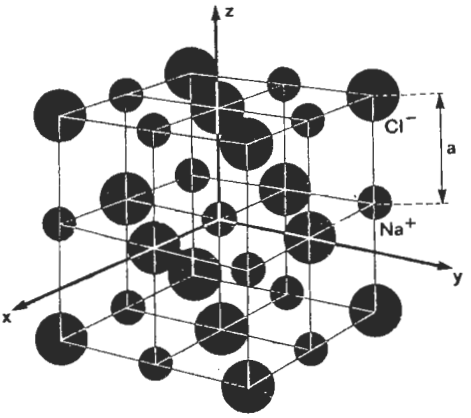


Fig. 2

3. La fig. 2 rappelle la structure cristalline du chorure de sodium. La distance de deux ions Na+ et Cl− les plus proches est a. Un ion quelconque aura pour coordonnées : $x = n_1 a$, $y = n_2 a$, $z = n_3 a$ où n_1, n_2 et n_3 sont des entiers *relatifs*.

a) Exprimer la distance r d'un ion quelconque à l'ion Na+ central. Quelle est la nature de l'ion considéré selon que la somme $n_1 + n_2 + n_3$ est paire ou impaire ?

b) Compléter le tableau suivant :

r.....	a	$a\sqrt{2}$	$a\sqrt{3}$	$2a$	$a\sqrt{5}$	$a\sqrt{6}$	$a\sqrt{7}$	$2a\sqrt{2}$	$3a$	$a\sqrt{10}$	$a\sqrt{11}$	$2a\sqrt{3}$
Nombre d'ions concernés .	...			..	....	...	...	. ..	...	....	.	...

c) En déduire l'énergie potentielle d'interaction de l'ion origine avec tous les ions comptabilisés dans le tableau précédent. On comparera avec la valeur $U_0 = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \times 3{,}4952$ qui représente l'énergie potentielle d'interaction de l'ion origine avec tous les ions du cristal supposé macroscopique.

4. Le cristal comporte N ions au total (soit N/2 ions de chaque sorte). Calculer l'énergie potentielle d'interaction totale U_T du cristal ou *énergie réticulaire* du cristal. On fera une approximation de même nature qu'en II. 2. *c*). En déduire l'énergie potentielle d'interaction moyenne par atome, soit U_a.

Applications numériques :

Calculer U_T en kJ pour une mole de NaCl ; calculer U_a en électron-volts.

On donne : $a = 0{,}2814$ nm.

5. On dispose par ailleurs des données expérimentales suivantes. Pour 1 mole :

$\underset{solide}{Na} + 1/2\ \underset{gaz}{Cl_2} \rightarrow \underset{solide}{NaCl}$	409,64 kJ libérés
$\underset{gaz}{Cl} \rightarrow \underset{gaz}{1/2\ Cl_2}$	121,22 kJ libérés
$\underset{gaz}{Na} \rightarrow \underset{solide}{Na}$	108,68 kJ libérés
$\underset{gaz}{Cl^-} \rightarrow \underset{gaz}{Cl} + e^-$	347,72 kJ absorbés
$\underset{gaz}{Na^+} + e^- \rightarrow \underset{gaz}{Na}$	493,24 kJ libérés

En déduire une valeur expérimentale du travail de dissociation d'une mole de cristal. Comparer ce résultat à celui obtenu en II.4. Quel phénomène traduit la différence des valeurs obtenues (voir II.1. *a*) ?

6. *a*) En adoptant le résultat de la question II.4., quelle serait la valeur de a qui assurerait la stabilité maximale du cristal ? Que se passerait-il si des forces coulombiennes intervenaient seules dans la liaison du cristal ?

b) Dans un modèle plus réaliste, on fait intervenir outre l'énergie potentielle coulombienne une énergie potentielle d'interaction dont la valeur moyenne *par atome* est :

$$U'_a = z\lambda e^{-a/\rho} > 0$$

où λ et ϱ sont deux constantes et z le nombre des plus proches voisins d'un ion donné.

Montrer que dans ce nouveau modèle il existe effectivement une valeur de a pour laquelle le cristal est en équilibre.

Calculer la nouvelle énergie réticulaire du cristal en fonction de U_T déterminée en II.4 et du rapport ϱ/a. Quelle valeur numérique faut-il attribuer à ϱ pour obtenir la valeur expérimentale de l'énergie réticulaire ?

SOLUTION

I. Premier problème

1. *a*) Dans le référentiel R_c pratiquement galiléen, on observe un mouvement de chute dans le champ de pesanteur **g** et avec la vitesse initiale $\mathbf{v}_0 = (R + h)\,\omega\,\mathbf{u}_y$ dirigée vers l'est. Le champ **g** étant uniforme, on observe ainsi dans R_c un mouvement parabolique d'équations :

$$\begin{cases} y = \omega(R + h)\,t \\ z = h - 1/2\ g\,t^2. \end{cases}$$

Pour $z = 0$, $\Delta t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ (durée de chute) d'où :

$$\overline{OH} = y_1 = \omega(R + h)\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

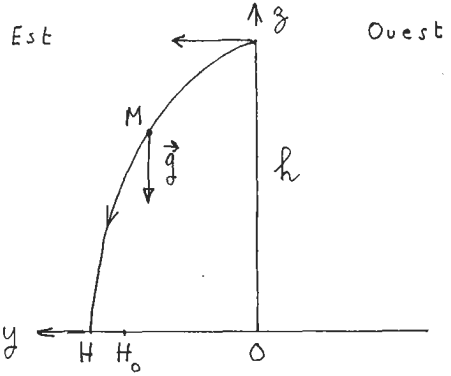


Fig. 1

Application numérique : Pour $h = 150$ m, $y_1 = 2{,}6$ km.

Sur une distance de cet ordre, on peut tout à fait négliger l'effet de courbure terrestre.

b) Pendant ce temps, l'observateur se sera lui aussi déplacé vers l'est de :

$$\overline{OH_0} = y_0 = \omega R\,\Delta t$$

et observera ainsi une déviation vers l'est :

$$\Delta y = y_1 - y_0 = \omega h\,\Delta t$$

soit :

$$\Delta y = 1/2\ g\,\omega\,(\Delta t)^3.$$

Application numérique : $\Delta y = 6$ cm donc très petit par rapport à y_0 et y.

2. *a*) En fait, sur des distances de l'ordre de y_0, il n'est pas légitime de considérer **g** comme uniforme. Le champ **g** est radial et possède sur Oy une composante qui a un effet décélérateur sur le mouvement selon Oy, d'où une valeur plus faible de y et de Δy.

b) L'inclinaison de **g** introduit la composante :

$$\mathbf{g}_y = -g \sin\alpha\ \mathbf{u}_y$$

avec :

$$\sin\alpha \simeq \alpha \simeq \frac{y}{\mathrm{R}} \qquad \text{(fig 2).}$$

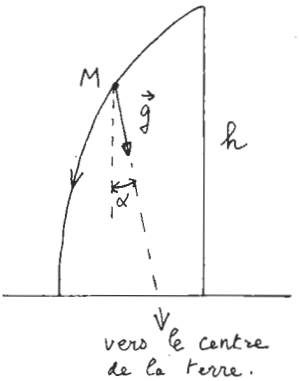


Fig. 2

En première approximation :

$$y \simeq (\mathrm{R} + h)\,\omega t \simeq \mathrm{R}\,\omega t, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha \simeq \omega t$$

et :

$$\mathbf{g}_y = -g\,\omega t\ \mathbf{u}_y.$$

On en déduit par intégration, compte tenu de la vitesse initiale dans R_c :

$$y = (\mathrm{R} + h)\,\omega t - 1/6\ g\,\omega t^3$$

et une déviation vers l'est :

$$\Delta y' = \Delta y - 1/6\ g\,\omega\,(\Delta t)^3 = 1/3\ g\,\omega\,(\Delta t)^3 = 2/3\ \Delta y.$$

3. *a*) L'étude précédente montre que la déviation observée résulte de deux effets :

* l'effet d'entraînement dû à la rotation de la terre et qui conduit à comparer les vitesses initiales (dirigées vers l'est) du corps et de l'observateur ;

* l'effet d'inclinaison de **g** qui se traduit par une déviation vers l'*ouest* de $1/6\ g\,\omega\,(\Delta t)^3$.

Dans le cas étudié ici l'effet d'entraînement donne un résultat nul, les vitesses d'entraînement étant égales puisque le point de lancement et l'observateur coïncident. Il reste donc à prendre en compte seulement l'effet d'inclinaison de **g**, ce qui se traduit par une déviation vers l'*ouest* de $1/6\ g\,\omega\,(\Delta t)^3$ où Δt est la durée totale du mouvement, soit :

$$\Delta t \simeq \frac{2\,v_0}{g},$$

d'où :

$$\Delta y = 1/6\ g\,\omega\,(\Delta t)^3 = 4/3\ \omega\,\frac{v_0^3}{g^2}.$$

Application numérique : Avec $v_0 = 300$ m. s^{-1}, $\Delta y = 26$ m.

L'expérience fut tentée au XVIIe siècle par le père Mersenne. On ne retrouva même pas le boulet... Le moindre défaut de verticalité, le moindre souffle de vent conduisent à des écarts (aléatoires) nettement supérieurs à celui de l'effet que l'on veut tester !

b) La déviation vers l'est due à l'effet d'entraînement est $\omega h\,\Delta t$ et la déviation vers l'ouest due à l'effet d'inclinaison de **g** vaut $1/6\ g\,\omega\,\Delta t^3$ où Δt est la durée totale du mouvement.

On observera une déviation vers l'ouest si :

$$1/6\ \ g\,\omega\,\Delta t^3 > \omega\,h\,\Delta t$$

soit :

$$\Delta t^2 > 6\,\frac{h}{g}.$$

La durée du mouvement a pour expression :

$$\Delta t = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2\,h}{g}}$$

d'où, finalement, la condition demandée :

$$v_0^2 > 2/3\ \ g\,h.$$

4. En un lieu de latitude λ les vitesses initiales vers l'est sont $\omega\,(R + h)\cos\lambda$ et $\omega\,R\cos\lambda$. Il suffit de changer ω en $\omega\cos\lambda$.

5. On raisonne dans le référentiel terrestre. Dans ce référentiel, les déviations observées sont très faibles, de l'ordre du centimètre. Il est donc légitime, sur des distances horizontales aussi faibles, de ne pas tenir compte de l'inclinaison de **g** et de considérer ce champ comme uniforme. La force de Coriolis $\mathbf{f}_i$ tient compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre.

Dans le repère cartésien $Oxyz$, en un lieu de latitude λ, les vecteurs $\vec{\omega}$, $\mathbf{v}_0$ et **g** ont pour coordonnées :

$$\vec{\omega}\begin{cases} -\omega\cos\lambda \\ 0 \\ \omega\sin\lambda \end{cases} \qquad \mathbf{v}_0\begin{cases} v_0\cos\alpha \\ 0 \\ v_0\sin\alpha \end{cases} \qquad \mathbf{g}\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -g \end{cases}$$

où α est l'angle de $\mathbf{v}_0$ avec Ox.

L'équation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre s'écrit, après simplification par m :

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - 2\vec{\omega}\wedge(\mathbf{v}_0 + \mathbf{g})$$

d'où :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -2\omega\,[v_0\sin\lambda\cos\alpha + v_0\sin\alpha\cos\lambda - (g\cos\lambda)\,t] \\ \ddot{z} = -g. \end{cases}$$

Avec les conditions initiales : $x = y = 0$, $z = h$; $\dot{x} = v_0\cos\alpha$, $\dot{y} = 0$, $\dot{z} = v_0\sin\alpha$.

On en déduit par intégration :

$$y = -2\omega\left[[v_0\sin(\alpha+\lambda)]\frac{t^2}{2} - (g\cos\lambda)\frac{t^3}{6}\right]$$

$$z = h - 1/2\ g\,t^2 + (v_0\sin\alpha)\,t.$$

Revenons aux cas particuliers étudiés précédemment.

Questions 1 et 2.

$$v_0 = 0, \qquad \lambda = 0$$

soit :

$$y = 1/3\ g\,\omega t^3$$

$$z = h - 1/2\ g\,t^2$$

résultats effectivement déjà obtenus par le raisonnement direct.

Question 3.

$$v_0 \neq 0, \qquad \lambda = 0, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$y = -2\,\omega \left(v_0 \frac{t^2}{2} - g \frac{t^3}{6} \right).$$

On a $y < 0$ (déviation vers l'ouest) si $\Delta t < \dfrac{3\,v_0}{g}$ avec :

$\Delta t = \dfrac{v_0}{g} + \sqrt{\dfrac{v_0^2}{g^2} + \dfrac{2\,h}{g}}$, soit tous calculs faits $v_0^2 > 2/3\ g\,h$.

6. *a*) La durée totale de chute de l'obus est $\Delta t = \dfrac{2\,v_0 \sin\alpha}{g}$; on en déduit :

$$Y = -4\,\frac{\omega\,v_0^3 \sin^2\alpha}{g^2}\,(1/3 \sin\alpha \cos\lambda + \sin\lambda \cos\alpha).$$

Dans l'hémisphère boréal ($\sin\lambda > 0$).

— Pour un tir dirigé vers le sud $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$, on a $Y < 0$ et la déviation est toujours dirigée vers l'ouest.

— Pour un tir dirigé vers le nord $\left(\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, $Y = 0$ pour $\alpha = \alpha_0$ tel que $\operatorname{tg}\alpha_0 = -3\operatorname{tg}\lambda$. Si $\alpha < \alpha_0$, $Y < 0$ (déviation vers l'ouest) ; si $\alpha > \alpha_0$, $Y > 0$ (déviation vers l'est).

Application numérique : $v_0 = 700$ m. s^{-1}, $\lambda = 45°$ Nord, $\alpha = 30°$: $Y \simeq -180$ m, $\alpha_0 = 108°,4$.

Dans l'hémisphère austral ($\sin\lambda < 0$).

— Pour un tir dirigé vers le nord $\left(\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, on a $Y < 0$ et la déviation est toujours dirigée vers l'ouest.

— Pour un tir dirigé vers le sud $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$, $Y = 0$ pour $\alpha = \alpha_0$ tel que $\operatorname{tg}\alpha_0 = -3\operatorname{tg}\lambda > 0$. Si $\alpha < \alpha_0$, $Y > 0$ (déviation vers l'est) ; si $\alpha > \alpha_0$, $Y < 0$ (déviation vers l'ouest).

On note la continuité des résultats lorsqu'on passe d'un hémisphère à l'autre.

b) Au pôle nord (le tir étant nécessairement dirigé vers le sud !) :

$$Y = -4 \frac{\omega\, v_0^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{g^2} \quad \text{(vers l'ouest).}$$

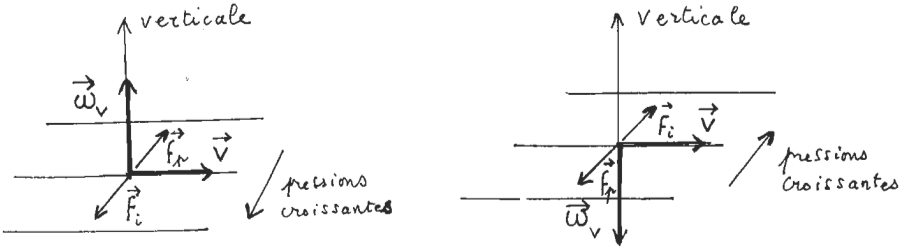
Dans le référentiel galiléen, il n'y a pas de vitesse initiale due à la rotation de la Terre. L'effet observé est dû uniquement au mouvement de l'observateur terrestre situé à la distance $r = (v_0 \cos \alpha)\Delta t$ du pôle et qui se déplace (dans le référentiel galiléen) vers l'est à la vitesse $r\,\omega = (\omega\, v_0 \cos \alpha)\,\Delta t$. Le projectile tombera donc à l'ouest de l'observateur à la distance :

$$(\omega\, v_0 \cos \alpha)\,\Delta t \cdot \Delta t \quad \text{avec} \quad \Delta t = \frac{2\, v_0 \sin \alpha}{g}$$

soit :

$$4 \frac{\omega\, v_0^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{g^2}.$$

7. A l'équilibre, la composante horizontale de la force de Coriolis doit compenser les forces de pression. La composante horizontale de la force de Coriolis fait intervenir la composante verticale $\vec{\omega}_V$ du vecteur rotation terrestre $\vec{\omega}$. $\vec{\omega}_V$ est dirigé vers le haut dans l'hémisphère boréal, vers le bas dans l'hémisphère austral. Les fig. (3 *a*, *b*) résument la situation. On en déduit facilement le sens de parcours du vent autour d'un centre anticyclonique (fig. 4 *a*, *b*).



a) hémisphère boréal *b*) hémisphère austral

$\mathbf{f}_i$: force de Coriolis, $\mathbf{f}_p$: force de pression.

Fig. 3

a) hémisphère boréal *b*) hémisphère austral

Fig. 4

II. Deuxième problème

1. *a*) Si $U_{12} < 0$, $W > 0$: il faut fournir du travail pour séparer les charges, ce qui traduit une interaction attractive.

Si $U_{12} > 0$, $W < 0$: l'interaction est répulsive, les charges se séparant spontanément et l'opérateur recevant le travail $|W|$.

b) La force de Coulomb s'exerçant sur chacune des particules est :

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\mathbf{r} \qquad \mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1$$

où $\mathbf{r} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$. Pour des déplacements élémentaires $d\mathbf{r}_1$ et $d\mathbf{r}_2$ de chacune des particules, le travail δW_{el} des forces électrostatiques est :

$$\delta W_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\mathbf{r}\cdot(d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}r\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}dr$$

car $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ avec $\mathbf{r}_1 = \mathbf{OM}_1$ et $\mathbf{r}_2 = \mathbf{OM}_2$ où O est un point pris comme origine.

Lorsqu'on sépare les particules de la distance r à une distance infinie, le travail W_{el} des forces électrostatiques est :

$$W_{el} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

On a ainsi : $W_{el} = -W = U_{12} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ valeur indépendante de la manière dont on a séparé les charges.

2. *a*) En utilisant l'expression précédente de U_{12} pour chaque couple d'ions considéré :

$$U_0 = -\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}(1 - 1/2 + 1/3 + \ldots) = -\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\ln 2$$

le facteur 2 traduisant le fait que les ions situés d'un côté de l'ion de référence ont même contribution totale à l'interaction que les ions situés de l'autre côté (file infinie). L'énergie U_0 est évidemment indépendante de l'ion référence considéré.

b) On peut résoudre la question demandée par voie numérique (calculette). On trouve $n = 72$, valeur pour laquelle

$1 - 1/2 + 1/3 \ldots - 1/72 = 0{,}68625$, soit $72 \times 2 = 144$ ions au total en interaction avec l'ion considéré. Pour $n = 73$, on trouve pour somme 0,69995 ; la valeur exacte est proche de la moyenne arithmétique $\dfrac{0{,}68625 + 0{,}69995}{2} = 0{,}69310$ (à comparer à $\ln 2 = 0{,}693147\ldots$).

A mesure que n augmente, les valeurs de la somme oscillent de part et d'autre de la valeur exacte en se resserrant. L'entier n doit satisfaire à l'inégalité : $\dfrac{1}{n+1} < 2 \cdot \dfrac{\ln 2}{100}$ soit $n + 1 > 72{,}13$. Le plus petit entier satisfaisant à cette condition est effectivement $n = 72$.

c) Le résultat précédent montre qu'on obtient U_0 avec une très bonne précision en ne considérant l'interaction d'un ion qu'avec quelques centaines d'ions proches voisins. Dans ces conditions, U_0 garde une même valeur quel que soit l'ion de référence sauf pour les quelques centaines d'ions de part et d'autre des bords de la chaîne. Si N est très grand, on peut négliger la contribution de ces ions marginaux de sorte que : $U_T = 1/2\ N\ U_0$. Le facteur 1/2 tient compte du fait qu'en sommant sur tous les ions référence de la file, on compte deux fois l'interaction d'un couple donné d'ions, alors que bien évidemment l'énergie d'interaction d'un couple ne doit être comptabilisée qu'une fois. On en déduit l'énergie potentielle moyenne *par atome* $U_a = U_T/N = U_0/2$.

3. *a*) La distance est : $r = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}\ a$

* si $n_1 + n_2 + n_3$ est pair on trouve un ion Na^+,
* si $n_1 + n_2 + n_3$ est impair on trouve un ion Cl^-.

b)

r	a	$a\sqrt{2}$	$a\sqrt{3}$	$2a$	$a\sqrt{5}$	$a\sqrt{6}$	$a\sqrt{7}$	$2a\sqrt{2}$	$3a$	$a\sqrt{10}$	$a\sqrt{11}$	$2a\sqrt{3}$
Nombre d'ions concernés	6	12	8	6	24	24	0	12	30	24	24	8

c) On en déduit en sommant sur les ions comptabilisés dans le tableau précédent :

$$U'_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(-6 + \frac{12}{\sqrt{2}} - \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{6}{2} - \frac{24}{\sqrt{5}} + \frac{24}{\sqrt{6}} \ldots + \frac{12}{\sqrt{8}} - \frac{30}{3} + \frac{24}{\sqrt{10}} - \frac{24}{\sqrt{11}} + \frac{8}{2\sqrt{3}}\right)$$

soit :

$$U'_0 = -3{,}1635 \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \text{ à comparer avec la valeur exacte,}$$

$$U_0 = -1{,}7476 \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

On voit que le mode de comptabilité adopté converge très mal. Il existe en fait des modes de calcul mieux adaptés qui permettent une convergence plus rapide en prenant mieux en compte les effets de compensation entre les ions positifs et négatifs (méthode de Ewald par exemple).

4. Le raisonnement est le même que pour une file linéaire d'ions. En négligeant les « effets de bord » :

$$U_T = \frac{N}{2} U_0 \quad \text{soit} \quad U_a = \frac{U_0}{2}.$$

Application numérique : Pour 1 mole : $U_T = \mathcal{N} U_0 = -861$ kJ soit : $2\,U_a = -8{,}94$ eV.

5. Le travail de dissociation demandé correspond à une énergie E (pour 1 mole) absorbée par le cristal :

$$\underset{solide}{NaCl} \rightarrow \underset{gaz}{Na^+} + \underset{gaz}{Cl^-} \qquad E \text{ absorbée}$$

Cette transformation peut être considérée comme la somme des transformations suivantes indiquées dans l'énoncé :

Pour 1 mole :

$\underset{solide}{NaCl} \rightarrow \underset{solide}{Na} + 1/2\,\underset{gaz}{Cl^2}$	409,64 kJ absorbés
$\underset{solide}{Na} \rightarrow \underset{gaz}{Na}$	108,68 kJ absorbés
$\underset{gaz}{Na} \rightarrow \underset{gaz}{Na^+} + e^-$	493,24 kJ absorbés
$1/2\,\underset{gaz}{Cl^2} \rightarrow \underset{gaz}{Cl}$	121,22 kJ absorbés
$\underset{gaz}{Cl} + e^- \rightarrow \underset{gaz}{Cl^-}$	347,22 libérés
soit au total :	785 kJ absorbés

d'où : E = 785 kJ. Le calcul de la question 4 conduit à une énergie de 861 kJ nécessaire pour disloquer le cristal en ses ions. La différence traduit l'existence d'une interaction répulsive supplémentaire (ce qui facilite la dislocation) dont le modèle théorique utilisé, basé sur la seule interaction coulombienne entre particules ponctuelles n'a pas tenu compte.

6. *a*) L'énergie U_T tend à devenir minimale, ce qui assure la stabilité maximale. U_T étant négative, cela implique $a \to 0$ ($U_T \to -\infty$), le cristal s'effondrant sur lui-même. Ce résultat montre l'insuffisance du modèle, déjà soulignée par le résultat expérimental de la question 5. Lorsque les ions se rapprochent, il apparaît, en fait, des forces répulsives qui empêchent le cristal de s'effondrer, d'où une distance inter-ionique optimale pour laquelle l'énergie réticulaire du cristal est minimale.

b) L'énergie potentielle $U'_a > 0$ traduit cette interaction répulsive. On a ainsi pour l'énergie potentielle par atome :

$$U_a = z\lambda e^{-a/\varrho} - 1{,}7476 \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Cette énergie est minimale pour :

$$\frac{dU_a}{da} = 0 \quad \text{soit} \quad a \text{ tel que :}$$

$$\frac{z\lambda}{\varrho} e^{-a/\varrho} = 1{,}7476 \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

d'où la valeur minimale de U_a :

$$U_{am} = -1{,}7476 \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{\varrho}{a}\right)$$

On en déduit l'énergie réticulaire U'_T du cristal :

$$U'_T = U_T\left(1 - \frac{\varrho}{a}\right).$$

Application numérique : $785 = 861\left(1 - \frac{\varrho}{a}\right)$ d'où :

$$\frac{\varrho}{a} = 0{,}0883 \quad \text{et} \quad \varrho = 0{,}248 \text{ Å}.$$

H. GIÉ, A. TSCHUDY,
et les membres du jury.

C.A.P.E.S de sciences physiques

Option : Physique et Chimie

PROBLEME DE PHYSIQUE

SESSION DE 1984

COMPOSITION DE PHYSIQUE AVEC APPLICATIONS

(Durée : 5 heures)

Le problème porte sur quelques questions relatives à la fusion thermonucléaire contrôlée. Liées entre elles par le sujet traité, les différentes parties sont malgré tout assez largement indépendantes. A l'intérieur d'une même partie, les questions, de difficulté variable, sont parfois indépendantes.

Il sera tenu compte des qualités d'exposition. Les candidats doivent présenter leurs connaissances avec concision et rigueur dans le cadre des questions posées.

Données :

Constante de Boltzmann : $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K ;

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00\ 10^{8}$ m/s ;

Charge élémentaire : $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C ;

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi}\ 10^{-9}$ F/m ;

Constante d'Avogadro : $\mathfrak{N}_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1} ;

1 électronvolt (ou 1 eV) = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ J et 1 MeV = 10^{6} eV ;

1 unité de masse atomique (ou 1 u) = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg = 931 MeV/c^2 ; (Cette dernière égalité signifie que pour une masse m égale à l'unité de masse atomique, mc^2 = 931 MeV) ;

Masse du noyau de deutérium : $m_D = 2{,}01410$ u ;

Masse du noyau de tritium : $m_T = 3{,}01605$ u ;

Masse du neutron : $m_n = 1{,}00866$ u ;

Masse de la particule α : $m_\alpha = 4{,}00260$ u ;

Energie d'ionisation de l'atome H : 13,6 eV ;

Energie de dissociation des molécules H_2 : 430 kJ/mol ;

Dans tout le problème, la norme (ou module) du vecteur **Y** sera notée Y.

A. GENERALITES

A.I. On représente le noyau d'un atome par ${}^{A}_{Z}X$. (L'atome particulier étudié appartient à l'élément de symbole X.)

A.I.1. Quels noms donne-t-on à A et à Z ? Quels sont les nombres de protons et de neutrons dans le noyau ? Quel est le nombre d'électrons dans l'atome non ionisé ?

A.I.2. Qu'entend-on par isotopes d'un élément ? Citer deux isotopes naturels de l'élément carbone (de numéro atomique 6) d'une part, de l'élément uranium (de numéro atomique 92) d'autre part. Donner la représentation du noyau dans chaque cas.

A.II. Au cours d'une réaction de fusion nucléaire, deux noyaux N et N' donnent naissance à un noyau N'' contenant un nombre de nucléons supérieur à celui de chacun des noyaux initiaux, ainsi qu'à une autre particule *b*.

Cette réaction est représentée par : $N + N' \rightarrow N'' + b$.

A.II.1. De telles réactions se produisent-elles dans l'univers ? Où ?

A.II.2. Enoncer quatre lois de conservation vérifiées dans de telles réactions.

A.III. On étudie le cas où les deux noyaux réagissant sont deux noyaux d'atomes d'hydrogène 2 (ou noyaux de deutérium) représentés par ${}^{2}_{1}H$ ou D. Ils donnent les réactions suivantes :

$$ {}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{3}_{1}H + c \qquad (1) $$

$$ {}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{3}_{2}He + c' \qquad (2) $$

Les deux réactions (1) et (2) sont équiprobables. Elles libèrent en moyenne l'énergie $Q_0 = 3{,}6$ MeV par couple D-D disparaissant.

A.III.1. Identifier les particules *c* et *c'* (avec justifications).

A.III.2. Dans les calculs qui suivent, on confondra masse d'un atome et masse de son noyau. Pour quelle raison ?

A.III.3. Calculer l'énergie w_0 qu'on pourrait ainsi obtenir à partir d'un litre d'eau de mer (sachant qu'un litre d'eau de mer contient 33 mg de deutérium). Calculer le volume V d'un supercarburant de pouvoir calorifique $q_0 = 3{,}0\ 10^7$ J/l qui donnerait la même énergie.

B. ENERGIE LIBEREE PAR LA REACTION D-T

B.I. QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET ÉNERGIE CINÉTIQUE D'UNE PARTICULE DE MASSE m ET DE VITESSE $\mathbf{v}$.

B.I.1. Rappeler l'expression de la quantité de mouvement $\mathbf{p}^*$ et de l'énergie cinétique E_c^* de cette particule dans le cadre de la mécanique newtonienne (ou galiléenne ou « classique »).

B.I.2. Rappeler l'expression de la quantité de mouvement **p**, de l'énergie totale, de l'énergie cinétique E_c de cette même particule, dans le cadre de la mécanique d'Einstein (ou « relativiste »).

B.I.3. Etablir une relation donnant le rapport $\beta = \frac{v}{c}$ en fonction de $\eta = \frac{E_c}{mc^2}$, valable pour toute valeur de β. Si η est petit devant 1, montrer que cette relation prend une forme simple et que β est lui aussi petit devant 1.

B.I.4. Dans le cas où β est petit devant 1, montrer que p et p^* d'une part, E_c et E_c^* d'autre part sont voisines. Exprimer, en fonction de β, l'écart relatif entre p et p^* ainsi que l'écart relatif entre E_c et E_c^*.

B.I.5. *Application numérique :* $\eta = 2 \cdot 10^{-2}$.

Calculer β, ainsi que les écarts relatifs entre p et p^* et entre E_c et E_c^*.

B.II. On étudie la réaction entre un noyau de deutérium D et un noyau d'atome d'hydrogène 3 (ou noyau de tritium) noté ${}^3_1H$ ou T. Elle est appelée réaction D-T et représentée par :

$$ {}^2_1H + {}^3_1H \rightarrow {}^4_2He + n \qquad \text{ou} \qquad D + T \rightarrow \alpha + n $$

n représente un neutron.

Les particules (D, T, α et n) ont pour masses respectives m_D, m_T, m_α, m_n. On désigne par $\mathbf{p}_D$, $\mathbf{p}_T$, $\mathbf{p}_\alpha$, $\mathbf{p}_n$ leurs quantités de mouvement, par E_{cD}, E_{cT}, $E_{c\alpha}$, E_{cn} leurs énergies cinétiques dans le référentiel du laboratoire.

B.II.1. Ecrire le bilan énergétique et établir une relation entre les masses et les énergies cinétiques. Calculer en MeV l'énergie Q libérée par la réaction D-T.

B.II.2. Quelle relation lie les quantités de mouvement ?

B.II.3. On suppose que les énergies cinétiques des particules qui réagissent sont négligeables devant celles des particules formées.

a) Montrer qu'il est possible d'utiliser les expressions newtoniennes de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique pour chaque particule.

b) Montrer qu'il est possible de négliger les quantités de mouvement des particules réagissantes en regard de celles des particules formées.

c) Exprimer E_{cn} et $E_{c\alpha}$ en fonction de Q, m_n, m_α.

d) *Application numérique :* Calculer E_{cn} et $E_{c\alpha}$ en MeV.

B.III. Un neutron produit par une réaction D-T subit un choc élastique sur un noyau de masse m_N. On étudie ce choc dans le référentiel du laboratoire. Avant le choc, le noyau est immobile ; après le choc, les quantités de mouvement du neutron et du noyau sont respectivement $\mathbf{p}'_n$ et $\mathbf{p}'_N$. La mécanique newtonienne est utilisable.

B.III.1. Quelles lois de conservation sont vérifiées dans ce choc ?

B.III.2. Les vecteurs $\mathbf{p}_n$ et $\mathbf{p'}_N$ définissent un angle dont la mesure est ϑ. Exprimer l'énergie cinétique S perdue par le neutron en fonction de ϑ. Dans quel cas cette perte est-elle maximale ? Quelle est alors l'expression de $\dfrac{S}{E_{cn}}$?

C. FUSION THERMONUCLEAIRE ENTRE DES NOYAUX DE DEUTERIUM ET DE TRITIUM :

CONDITIONS A REMPLIR (*température et durée de confinement*)

Pour que des réactions D-T se produisent, les noyaux doivent pouvoir se rapprocher suffisamment l'un de l'autre malgré la répulsion coulombienne. La température du mélange contenant les noyaux doit être élevée pour que l'agitation thermique permette ce rapprochement.

Un mélange initial, constitué de molécules diatomiques, à une température voisine de 300 K, est porté à une température suffisamment élevée. Les molécules sont alors totalement dissociées et leurs atomes totalement ionisés. Le mélange est devenu un gaz ionisé, appelé plasma, constitué de noyaux de deutérium, de noyaux de tritium et d'électrons. Ce plasma, homogène, occupe le volume V ; il est en équilibre thermodynamique à la température T. La concentration des noyaux de deutérium (nombre de noyaux de deutérium par unité de volume) est désignée par n_{D0}. De même la concentration des noyaux de tritium est n_{T0}, celle des électrons est n_{e0}. On pose $n_{D0} + n_{T0} = n_0$. On se place dans le cas où $n_{D0} = n_{T0}$.

On admet que le plasma peut être considéré comme un « gaz parfait » constitué de particules indépendantes, de dimensions négligeables, et possédant trois degrés de liberté de translation.

C.I.1. Quelle relation lie n_{D0}, n_{T0} et n_{e0} ?

C.I.2. Exprimer, en fonction de T, l'énergie cinétique moyenne $< E_c >$ des noyaux de deutérium. Quelles sont les énergies cinétiques moyennes des noyaux de tritium et des électrons ? Justifier la réponse.

C.I.3. Montrer que l'énergie interne U du plasma peut s'écrire $U = 3\, n_0\, V\, kT$.

C.I.4. Il existe dans le plasma un nombre non négligeable de noyaux de deutérium qui possèdent une énergie cinétique supérieure à $< E_c >$. Pourquoi ?

C.I.5. Quelles interactions entre les particules du plasma néglige-t-on en considérant le plasma comme un gaz parfait ? Comment peut-on justifier cette approximation ?

C.II. TEMPÉRATURE DU PLASMA.

C.II.1. Un noyau T, de charge q_1, est considéré comme ponctuel et immobile en O, dans le référentiel du laboratoire. Quels sont le

champ électrostatique **E** (M) et le potentiel électrostatique V (M) créés par ce noyau en un point M, situé à la distance r du point O ?

C.II.2. Un noyau D, de charge q_2, considéré lui aussi comme ponctuel, vient de l'infini avec une énergie cinétique initiale E_{ci}. Il se rapproche de O, jusqu'à la distance d. Quelle est la variation d'énergie cinétique de ce noyau pendant son mouvement (en considérant qu'il est soumis à la seule action du noyau T) ?

C.II.3. Quand le noyau D est en un point M quelconque, représenter la force **F** exercée sur lui par le noyau T. Exprimer le module de cette force en fonction de r.

C.II.4. Pour que la réaction D-T se produise, il faut que la distance d soit voisine de $d_0 = 10 \cdot 10^{-15}$ m. Quelle interaction supplémentaire permet d'expliquer le fait qu'à partir de la valeur d_0, la force **F** cesse d'être prépondérante ?

C.II.5. Montrer que E_{ci} doit être supérieure à une limite E_{c0}. Calculer E_{c0} en MeV.

C.II.6. En fait, des réactions D-T se produisent dans un plasma dont les noyaux possèdent une énergie cinétique moyenne bien inférieure à E_{c0}.

a) Quelle (s) explication (s) peut-on donner ?

b) Les expériences montrent qu'une température $T = T_0$ telle que $kT_0 = 0{,}010$ MeV suffit. Calculer numériquement T_0, appelée dans la suite température de fusion. Calculer, en MeV, l'énergie cinétique moyenne des noyaux à cette température.

C.II.7. Ces résultats sont-ils compatibles avec l'hypothèse faite dans la question B.II.3. ?

C.II.8. Justifier l'emploi des termes « fusion thermonucléaire ».

C.III. Energie nécessaire.

On désire obtenir un plasma de volume V, à la température de fusion T_0, avec la concentration des noyaux n_0, en parlant de molécules diatomiques prises à une température voisine de 300 K.

C.III.1. Montrer qu'on peut négliger l'énergie nécessaire à la dissociation des molécules et à l'ionisation des atomes devant l'énergie d'agitation thermique des particules du plasma.

C.III.2. Exprimer l'énergie E nécessaire à l'obtention de ce plasma.

C.IV. Durée de confinement du plasma.

Le plasma de température T_0 est maintenu dans le volume V pendant une durée τ, appelée durée de confinement.

Au départ (date $t = 0$) les concentrations des noyaux de deutérium et de tritium sont n_{D0} et n_{T0} ($n_{D0} = n_{T0} = \frac{n_0}{2}$). Elles sont n_D et

n_T à la date t. La seule cause de disparition des noyaux est la réaction D-T. Le nombre de réactions se produisant par unité de volume entre les dates t et $t + dt$ voisines est $\Omega\, n_D n_T\, dt$, Ω ne dépendant que de la température du plasma. Q est l'énergie libérée par une réaction D-T (question B.II.1.).

C.IV.1. Justifier l'emploi du « m^3/s » comme unité pour Ω.

C.IV.2. Exprimer l'énergie w libérée par les réactions de fusion, pendant la durée de confinement, en supposant que n_D et n_T restent voisines de n_{D0} et n_{T0}.

C.IV.3. On désire que l'énergie libérée w soit supérieure à l'énergie E nécessaire pour obtenir le plasma (question C.III.2.). Montrer que le produit $n_0 \tau$ doit être supérieur à une limite L. Exprimer L en fonction de Q, Ω, T_0.

Application numérique : $kT_0 = 0{,}010$ MeV et $\Omega = 1 \cdot 10^{-22}\ m^3\, s^{-1}$. Calculer L.

C.IV.4. Ce bilan énergétique ne prend en compte aucune perte d'énergie. Citer une ou plusieurs de ces pertes.

C.V. Le nombre de noyaux D dans le plasma est N_{D0} à la date $t = 0$ et N_D à la date t. La fraction des noyaux utilisée à la date t est :

$$\varepsilon = \frac{N_{D0} - N_D}{N_{D0}}, \text{ pour } 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

C.V.1. Exprimer ε en fonction des concentrations n_{D0} et n_D.

C.V.2. Etablir une équation différentielle liant ε et la date t. En déduire la relation donnant ε en fonction de t, n_0 et Ω.

C.V.3. *a*) Exprimer $\varepsilon = \varepsilon_f$ à la fin du confinement.

b) Calculer numériquement ε_f dans deux cas :

$$n_0 \tau = L \quad \text{et} \quad n_0 \tau = 10\ L.$$

Quelle (s) conclusion (s) peut-on tirer ?

c) Quelle doit être la valeur numérique de $n_0 \tau$ pour réaliser $\varepsilon_f = 0{,}2$?

C.V.4. Exprimer en fonction de ε_f le gain $G = \dfrac{w}{E}$.

Calculer numériquement G si $\varepsilon_f = 0{,}2$.

D. CONFINEMENT INERTIEL PAR FAISCEAUX LASER

Plusieurs faisceaux laser sont focalisés pendant une durée courte sur une petite cible sphérique contenant un mélange deutérium-tritium qu'ils échauffent et compriment. On suppose qu'on obtient ainsi un plasma totalement ionisé, à la température de fusion T_0, occupant un volume sphérique de rayon R, de masse volumique ϱ_0 élevée ; les concentrations des noyaux de deutérium et de tritium n_{D0} et n_{T0} y

sont telles que $n_{D0} = n_{T0} = \dfrac{n_0}{2}$.

D.I. INTÉRÊT DES MASSES VOLUMIQUES ÉLEVÉES.

D.I.1. Ce plasma très comprimé évolue ensuite librement et se détend. La durée du confinement τ est la durée nécessaire à cette détente. On adopte la valeur $\tau = \dfrac{R}{v_s}$ où v_s est la célérité du son dans le plasma. Justifier par un raisonnement physique simple l'expression choisie pour τ.

D.I.2. Calculer numériquement la masse m_0 d'un couple D-T.

D.I.3. Montrer que la condition $n_0 \tau \geqslant L$ (énoncée en C.IV.3.) peut s'écrire $\varrho_0 R \geqslant C$. Exprimer C.

Application numérique : $v_s = 2{,}8 \cdot 10^{13}\ (kT_0)^{1/2}$ avec les unités du Système International.

Calculer v_s et C si $kT_0 = 0{,}010$ MeV.

D.I.4. Pour que la condition $\varrho_0 R \geqslant C$ soit satisfaite, on s'efforce de réaliser $\varrho_0 R = K$ avec $K > C$.

Soient deux sphères de plasma S_I et S_{II}, à la température T_0, décrites dans le tableau ci-après.

Sphères	Masse	Rayon R	Masse volumique ρ_0
S_I	m_1	R_1	ρ_1
S_{II}	m_2	R_2	$\rho_2 = \alpha\, \rho_1$ $\alpha > 1$

E_1 et E_2 sont les énergies nécessaires pour obtenir S_I et S_{II} respectivement (question C.III.2.).

a) Exprimer E_1 et E_2.

b) Exprimer $\dfrac{E_2}{E_1}$ en fonction de α. Quelle conclusion peut-on tirer ?

c) Exprimer $\dfrac{m_2}{m_1}$ en fonction de α.

D.I.5. On choisit $K = 2$ kg. m^{-2}. On se propose d'évaluer numériquement l'énergie et la puissance apportées par les faisceaux laser pour obtenir le plasma dans deux cas.

Le rendement de la transformation de l'énergie rayonnante en énergie d'agitation thermique dans le plasma est 10 %. L'énergie est apportée en 1 ns.

a) Si $\varrho_0 = 200$ kg. m^{-3} (masse volumique voisine de celle d'un mélange deutérium-tritium liquide), donner les valeurs numériques de R_1, de E_1. Quelles doivent être l'énergie W_1 et la puissance P_1 apportées ?

b) Si $\varrho_0 = 200 \cdot 10^3$ kg. m^{-3}, quelles doivent être les valeurs de W_2 et P_2 (énergie et puissance apportées) ? Calculer le rayon R_2 et la durée de confinement τ.

c) Cette dernière sphère a été obtenue en comprimant une cible ayant au départ la masse volumique $\varrho_i = 200$ kg. m^{-3} et le rayon R_i. Evaluer numériquement R_i.

D.II. Les faisceaux de fréquence ν convergent au centre d'une cible sphérique de diamètre $d = 250$ µm. Ils apportent la puissance $P = 10 \cdot 10^{12}$ W sur la cible dont la surface est uniformément éclairée (fig. 1).

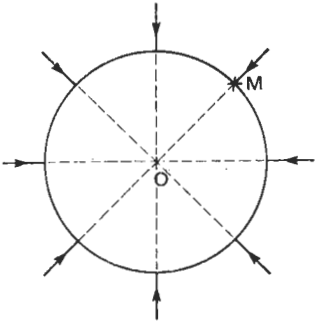


Fig. 1

D.II.1. Calculer numériquement l'éclairement énergétique $\mathcal{E}$ sur la cible (puissance reçue par unité de surface de la cible).

D.II.2. Rappeler l'expression de la quantité de mouvement et de l'énergie d'un photon des faisceaux en fonction de ν.

D.II.3. Etablir une relation entre $\mathcal{E}$, ν et Φ (nombre de photons arrivant sur la cible par unité de durée et par unité de surface de la cible).

D.II.4. En supposant que tous les photons sont absorbés, établir l'expression de la force et de la pression π exercées sur un élément de surface ds autour du point M (fig. 1). Quelle est la valeur numérique de π ? La comparer à la pression atmosphérique.

D.III. L'énergie apportée par les faisceaux laser transforme la périphérie de la cible en un plasma de haute température. Ce plasma se détend vers l'extérieur de la cible et son départ provoque une compression de la partie centrale. On compare souvent le mécanisme de cette compression à la propulsion d'une fusée. Justifier cette compa-

raison. A quel principe physique fait-on appel pour expliquer cette compression ?

D.IV. FOCALISATION DES FAISCEAUX SUR LA CIBLE.

Chacun des faisceaux éclaire entièrement une lentille mince convergente, d'axe Δ, de distance focale $f' = 180$ mm, de diamètre $D = \frac{f'}{2}$.

D.IV.1. En supposant que tous les rayons incidents sont parallèles à l'axe Δ, représenter les rayons émergents sur un schéma. Calculer leur inclinaison maximale α_M sur l'axe.

D.IV.2. Les rayons incidents ne sont pas rigoureusement parallèles. Leur inclinaison δ sur l'axe Δ ne dépasse pas $\delta_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ rad.

a) Construire les rayons émergents issus de rayons incidents caractérisés par δ (fig. 2). Justifier la construction.

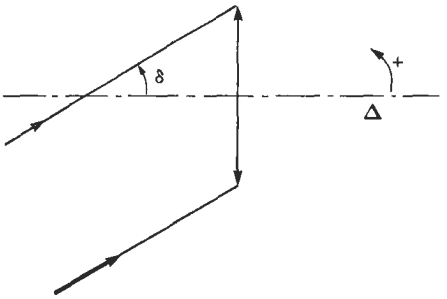


Fig. 2

b) Montrer que les divers rayons incidents convergent sur une surface circulaire dont on donnera le plan, le centre et dont on calculera le rayon.

E. CONFINEMENT PAR « DES MIROIRS MAGNETIQUES »

On étudie le mouvement d'un noyau, de charge q et de masse m, placé dans un champ magnétique indépendant du temps, dans un repère d'espace constitué de l'origine O et de la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ orthonormée.

La mécanique newtonienne est utilisable.

E.I. CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME.

En tout point M, de coordonnées cartésiennes x, y, z ($\mathbf{OM} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$), le champ magnétique est défini par $\mathbf{B}(M) = B\,\mathbf{k}$, avec $B > 0$ et uniforme (fig. 3).

A la date $t = 0$, le noyau arrive en O avec la vitesse $\mathbf{v}_0$. On étudie son mouvement ultérieur.

E.I.1. La vitesse $\mathbf{v}_0$ s'écrit $\mathbf{v}_0 = v_0\,\mathbf{i}$ ($v_0 > 0$).

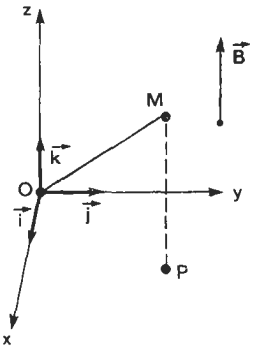


Fig. 3

a) Montrer que le mouvement est plan, puis que la trajectoire est un cercle de rayon R. Exprimer R en fonction de v_0 et de $\omega = \dfrac{qB}{m}$.

b) Exprimer la norme de la quantité de mouvement du noyau en fonction de q, R et B. Quelle est la vitesse angulaire de la particule ?

c) Citer quelques appareils utilisant l'action sur une particule chargée d'un champ magnétique, uniforme ou non uniforme.

E.I.2. La vitesse $\mathbf{v}_0$ s'écrit $\mathbf{v}_0 = a_0\,\mathbf{i} + b_0\,\mathbf{k}$ (a_0 et b_0 positifs). On pose $\mathbf{OM} = \mathbf{OP} + z\,\mathbf{k}$. Le point P est la projection orthogonale de M sur le plan O, **i**, **j** (fig. 3).

a) Etablir la relation liant z et t, pour $t \geqslant 0$.

b) Montrer que le point P se déplace sur un cercle dont on donnera le rayon.

c) Montrer sur un schéma que la trajectoire du noyau reste dessinée sur un tube de champ unique.

E.II. Champ magnétique non uniforme : « miroir magnétique ».

Par commodité, un point M sera repéré par ses coordonnées cylindriques (r, ϑ, z) telles que $\mathbf{OP} = r\,\mathbf{u}$ et $\mathbf{OM} = r\,\mathbf{u} + z\,\mathbf{k}$ (fig. 4). La base (**u**, **w**, **k**) est orthonormée directe.

En M, pas trop éloigné de l'axe,

$$\mathbf{B}(\mathrm{M}) = \mathrm{B}_z\,\mathbf{k} + \mathrm{B}_r\,\mathbf{u} + \mathrm{B}_\vartheta\,\mathbf{w}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \mathrm{B}_z = \mathrm{B}_z(z) \\ \mathrm{B}_r = -\dfrac{r}{2}\,\dfrac{d\,\mathrm{B}_z}{d_z} \\ \mathrm{B}_\vartheta = 0. \end{cases}$$

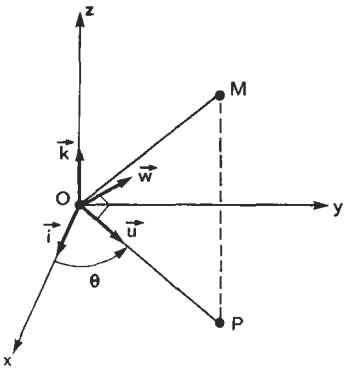


Fig. 4

La fig. 5 représente les variations de B_z en fonction de z pour $0 \leqslant z \leqslant H$, entre les plans $\mathcal{P}_1$ ($z = z_1 = 0$) et $\mathcal{P}_2$ ($z = z_2 = H$) perpendiculaires à l'axe Oz en O et I.

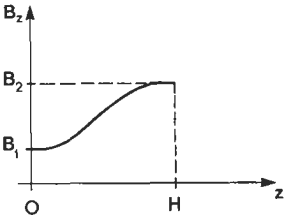


Fig. 5

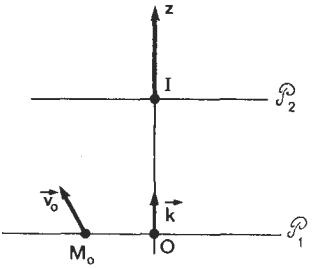


Fig. 6

On étudie un noyau particulier qui traverse le plan $\mathcal{P}_1$ en M_0 avec la vitesse $\mathbf{v}_0$ dirigée du côté des z positifs (fig. 6). Il se déplace ensuite dans le sens des z croissants, au voisinage de l'axe Oz, en tournant autour de cet axe. Il est repéré par r, ϑ et z. La coordonnée r varie lentement dans le temps ; on négligera $\dot{r}$ devant $r\dot{\vartheta}$ et $\ddot{r}$ devant $r\dot{\vartheta}^2$.

[Les notations $\dot{r}$, $\dfrac{dr}{dt}$, $r'(t)$ sont équivalentes ; il en est de même pour $\ddot{r}$, $\dfrac{d^2r}{dt^2}$, $r''(t)$.].

E.II.1. Exprimer la vitesse **v** et l'accélération **a** du noyau dans la base **u**, **w**, **k**.

I.II.2. La force **f** exercée sur le noyau s'écrit :

$$\mathbf{f} = f_r\,\mathbf{u} + f_\vartheta\,\mathbf{w} + f_z\,\mathbf{k}.$$

Exprimer f_r et f_z.

E.II.3. En utilisant les expressions de f_r et f_z évaluer $\dot{\vartheta}$ et $\ddot{z}$ en fonction de B_z, $\dfrac{d\,B_z}{dz}$, r.

E.II.4. Montrer que l'énergie cinétique E_c du noyau reste constante.

E.II.5. On écrit $E_c = W_\perp + W_{//}$, avec $W_{//} = \dfrac{1}{2}\,m\,\dot{z}^2$. On pose $\mu = \dfrac{W_\perp}{B_z}$. Etablir une relation entre $W_\perp$ et $\ddot{z}$. Montrer que μ reste constant.

E.II.6. Montrer que la particule se rapproche de l'axe Oz quand z augmente.

E.II.7. $W_{//0}$ et $W_{\perp 0}$ sont les valeurs de $W_{//}$ et $W_\perp$ en M_0. Montrer que $W_{//} = W_{//0} + W_{\perp 0}\left[1 - \dfrac{B_z(z)}{B_z(0)}\right]$, et que $\dot{z}$ diminue quand z augmente.

E.II.8. La vitesse $\mathbf{v}_0$ détermine avec **k** un angle dont la mesure est φ $\left(0 \leqslant \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Le noyau arrive au point J tel que $z = l$ $(0 < l < H)$ et repart ensuite vers le plan $\mathfrak{S}_1$.

a) Quelle relation lie φ, $B_z(0)$ et $B_z(l)$?

b) Pourquoi peut-on dire qu'il y a confinement du noyau par le champ magnétique ?

c) Montrer que la trajectoire reste dessinée sur un tube de champ unique. La dessiner.

E.II.9. Si ce noyau traverse le plan P_2 sans subir de réflexion, quelle condition est vérifiée par φ ? Dessiner la trajectoire entre $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$.

SOLUTION

A. GENERALITES

A.I.

A.I.1. A : nombre de masse,

Z : nombre de charge,

nombre de protons : Z,

nombre de neutrons : N = A — Z,

nombre d'électrons dans l'atome non ionisé : Z (dans ce cas, Z s'appelle numéro atomique).

A.I.2. Isotopes d'un élément : nucléides ayant même nombre de charge Z et des nombres de masse A différents (même nombre de protons mais nombres de neutrons différents).

Quelques isotopes de l'élément carbone : ${}^{12}_{6}C$, ${}^{14}_{6}C$.

Remarque :

L'âge des composés carbonés ayant fait partie d'organismes vivants se déduit de leur teneur en radiocarbone ${}^{14}_{6}C$, dont la demi-vie est de 5 570 ans.

Quelques isotopes de l'élément uranium : ${}^{238}_{92}U$, ${}^{235}_{92}U$.

Remarques :

L'uranium naturel est formé en majorité de l'isotope 238, avec un peu d'isotope 235 (0,7 %) et des traces de l'isotope 234. Seul, l'uranium 235 est fissile. La fission se fait, par capture d'un neutron thermique, en deux nucléides dont les nombres de masse sont compris pour l'un, entre 85 et 105, et pour l'autre, entre 150 et 130. En plus, il y a production de quelques neutrons rapides.

Exemple : ${}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{94}_{38}Sr + {}^{140}_{54}Xe + 2\ {}^{1}_{0}n + 200$ MeV.

Dans *les réacteurs nucléaires, la fission est contrôlée ;* le combustible utilisé est l'uranium naturel ou de l'uranium enrichi jusqu'à 3 % en ${}^{235}U$.

On distingue les réacteurs thermiques et les réacteurs rapides.

Dans les réacteurs thermiques, un ralentisseur de neutrons ou modérateur (H dans H_2O, D dans D_2O, C graphite) réduit

l'énergie cinétique des neutrons rapides formés et les transforme en neutrons thermiques seuls capables d'induire la fission de l'uranium 235. Chaque neutron thermique pouvant induire une fission, si aucun n'est absorbé, la réaction en chaîne susceptible de se produire est divergente. On empêche le réacteur de diverger à l'aide de barres de contrôle (bore, cadmium), absorbant fortement les neutrons, et qu'on peut déplacer pour contrôler la réaction.

Dans les réacteurs rapides, sans ralentisseur, les neutrons rapides réalisent la réaction concurrente :

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{239}_{94}\mathrm{Pu} + 2\,{}^{0}_{-1}e$$

et en plus, il subsiste des neutrons thermiques qui induisent la fission de l'uranium 235. Le facteur de conversion :

$$\frac{\text{nombre de noyaux de } {}^{239}\mathrm{Pu} \text{ formés}}{\text{nombre de noyaux de } {}^{235}\mathrm{U} \text{ transformés}}$$

est variable selon l'enrichissement de l'uranium et peut être supérieur à 1. Le plutonium formé étant fissile, le réacteur est dans ce cas un surgénérateur : il produit plus de noyaux fissiles qu'il n'en consomme. Remarquons que, pour cette raison, l'uranium 235 non fissile, est dit fertile.

Dans tous les réacteurs, le combustible (par exemple de l'oxyde d'uranium) est contenu dans une gaîne et trempe dans un fluide en circulation dit fluide caloporteur (He ou CO_2 gaz, eau liquide dans un réacteur thermique, sodium liquide dans un surgénérateur). Il a pour rôle d'évacuer la chaleur produite par la réaction. Il l'échange avec un autre fluide (eau en général) qui, vaporisé, actionne une turbine et un alternateur.

La *fission non contrôlée peut être réalisée dans la bombe atomique :* on met en contact très rapide, à l'aide d'un explosif classique, deux masses de combustible nucléaire (uranium 235 très enrichi par exemple), toutes les deux inférieures à la masse critique (nécessaire à l'obtention de neutrons thermiques), mais de somme supérieure à la masse critique. La réaction en chaîne divergente se produit en moins d'une micro-seconde.

A.II.

A.II.1. La fusion *nucléaire* de l'hydrogène se produit dans les étoiles (réaction proton-proton dans les étoiles les moins massives et dont la température est la moins élevée ; cycle carbone-azote ou cycle de Bethe dans les étoiles plus massives et chaudes).

Réaction proton-proton :

$$^{1}_{1}H + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{2}_{1}D + ^{0}_{1}\beta^{+} + \nu$$

$$^{1}_{1}H + ^{2}_{1}D \rightarrow ^{3}_{2}He$$

$$^{3}_{2}He + ^{3}_{2}He \rightarrow ^{4}_{2}He + 2\,^{1}_{1}H$$

(β^{+} désigne un positron).

Cycle de Bethe :

$$^{1}_{1}H + ^{12}_{6}C \rightarrow ^{13}_{7}N + \gamma$$

$$^{13}_{7}N \rightarrow ^{13}_{6}C + ^{0}_{1}\beta^{+} + \nu$$

$$^{1}_{1}H + ^{13}_{6}C \rightarrow ^{14}_{7}N + \gamma$$

$$^{1}_{1}H + ^{14}_{7}N \rightarrow ^{15}_{8}O + \gamma$$

$$^{15}_{8}O \rightarrow ^{15}_{7}N + ^{0}_{1}\beta^{+} + \nu$$

$$^{1}_{1}H + ^{15}_{7}N \rightarrow ^{12}_{6}C + ^{4}_{2}He.$$

Globalement, la fusion de quatre protons se fait en un noyau d'hélium avec un dégagement d'énergie de 25,7 *MeV.*

La fusion *thermonucléaire* se réalise dans les bombes à hydrogène. L'énergie cinétique nécessaire à la pénétration des noyaux (légers et chargés de même signe), est fournie par l'explosion initiale d'une bombe à fission.

A.II.2. *Pour un système isolé,* il y a conservation :

— de l'énergie totale,

— de la quantité de mouvement,

— de la somme des nombres de charge,

— de la somme des nombres de masse (en fait, conservation du nombre de nucléons).

Remarque :

La conservation du nombre de nucléons est contenue dans une loi de conservation plus vaste, celle du nombre baryonique.

Les baryons constituent une classe de particules fondamentales subissant des interactions fortes. Ce sont des fermions (spin demi-entier). Leur nombre de charge baryonique B est égal à + 1 pour un baryon et à — 1 pour un antibaryon. Pour les particules qui ne sont pas des baryons ou leurs antiparticules, le nombre baryonique est nul. Ils se divisent en nucléons (d'étran-

geté nulle) et hypérons (d'étrangeté non nulle, de masses supérieures à celles des nucléons).

A.III.

A.III.1. Du fait de la conservation du nombre de masse et de celle du nombre de charge :

* $c = {}^1_1p$. Il s'agit du proton.

* $c' = {}^1_0n$. Il s'agit du neutron.

A.III.2. La masse du proton est 1 836 fois celle de l'électron ; la masse des électrons est donc négligeable devant celle du noyau.

A.III.3. Un litre d'eau de mer contient 33 mg de deutérium de masse 2,01410 u par atome. Sachant que la masse d'un atome en u est égale à la masse atomique en g. mol^{-1}, l'énergie que fourniraient les réactions de fusion est :

$$w_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{33 \cdot 10^{-3}}{2{,}01410} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 3{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

soit : $w_0 = 2{,}8 \cdot 10^9$J.

Le volume de supercarburant de pouvoir calorifique $q_0 = 3{,}0 \cdot 10^7$ J. l^{-1} donnant la même énergie est :

$$V = \frac{2{,}84 \cdot 10^9}{3{,}0 \cdot 10^7} = 94{,}7 \text{ l.}$$

B. ENERGIE LIBEREE PAR LA REACTION D-T

B.I.

B.I.1. $\mathbf{p}^* = m\mathbf{v}$. et $E^*_c = \frac{1}{2} mv^2$.

B.I.2. $\mathbf{p} = \gamma(v) m\mathbf{v}$ avec $\gamma(v) = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ et $\beta = \frac{v}{c}$.

$$E_c = mc^2 (\gamma(v) - 1).$$

B.I.3. $\eta = (1 - \beta^2)^{-1/2} - 1$.

Si $\eta \ll 1$, $(1 - \beta^2)^{-1/2}$ est aussi une quantité voisine de 1 (mais supérieure à 1) et, de ce fait :

$$\beta \ll 1$$

d'où :

$$\eta \simeq \frac{\beta^2}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{2\eta}.$$

B.I.4. $p = (1-\beta^2)^{-1/2}$. p^* voisin de p^*.

$$p \simeq (1 + \frac{\beta^2}{2})\, p^*$$

$$\frac{p-p^*}{p^*} = \frac{\beta^2}{2} = \eta$$

$E_c = E_c^*(1 + \frac{3}{4}\beta^2)$ voisine de E_c.

$$\frac{E_c - E_c^*}{E_c^*} = \frac{3}{4}\beta^2 = \frac{3}{2}\eta.$$

B.I.5. *Application numérique :*

$$\frac{p-p^*}{p^*} = 2 \cdot 10^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{E_c - E_c^*}{E_c^*} = 3 \cdot 10^{-2}.$$

B.II.

B.II.1. Conservation de l'énergie totale :

$$m_D c^2 + E_{cD} + m_T c^2 + E_{cT} = m_\alpha c^2 + E_{c\alpha} + m_n c^2 + E_{cn}$$

$$[(m_D + m_T) - (m_\alpha + m_n)]\, c^2 = E_{c\alpha} + E_{cn} - (E_{cD} + E_{cT}).$$

L'énergie libérée sous forme cinétique est :

$$Q = (E_{c\alpha} + E_{cn}) - (E_{cD} + E_{cT})$$

soit :

$$Q = [(m_D + m_T) - (m_\alpha + m_n)]\, c^2.$$

Avec $1\ u = 931$ MeV, on trouve $Q = 17{,}6$ MeV.

Remarque :

La relation établie peut s'écrire : $\Delta E_c = \delta m . c^2$ où ΔE_c est la variation d'énergie cinétique et δm le défaut de masse (diminution algébrique de masse).

Elle montre qu'une perte de masse (défaut de masse positif) s'accompagne d'une libération d'énergie sous forme cinétique et qu'un gain de masse (défaut de masse négatif) s'accompagne d'une diminution d'énergie cinétique.

L'équivalence masse-énergie prend toute sa signification au niveau des réactions nucléaires.

Si la réaction se fait avec production d'un photon γ d'énergie $h\nu$, la relation précédente s'écrit : $\Delta E_c = h\nu = \delta m c^2$, ce qui

montre que l'énergie libérée par une réaction exoénergétique (défaut de masse positif) se retrouve sous formes cinétique et radiative.

B.II.2. La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\mathbf{p}_D + \mathbf{p}_T = \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_n.$$

B.II.3. *a*) Les énergies cinétiques des particules qui réagissent étant supposées négligeables devant celles des particules formées :

$$E_{c\alpha} + E_{cn} \simeq 17{,}6 \text{ MeV}.$$

Or, l'énergie au repos de chaque particule formée est bien supérieure à 17,6 MeV (3,73 GeV pour une particule α et 939 MeV pour un neutron). D'où :

$$E_{c\alpha} \ll m_\alpha c^2$$

$$E_{cn} \ll m_n c^2.$$

En conséquence :

$$E_{cD} \ll m_D c^2 \quad \text{et} \quad E_{cT} \ll m_T c^2.$$

Il est donc possible d'utiliser les expressions newtoniennes de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique pour chaque particule.

B.II.3. *b*) Pour une particule :

$$E_c = \frac{p^2}{2m} \quad \text{ou} \quad p = (2\,m\,E_c)^{1/2}.$$

Si E_{cD} et E_{cT} sont très inférieures à $E_{c\alpha} + E_{cn}$, alors p_D et p_T sont très inférieures à p_α et p_n et en norme : $p_\alpha \simeq p_n$.

B.II.3. *c*)

$$\frac{E_{c\alpha}}{E_{cn}} = \frac{m_n}{m_\alpha}.$$

Or $E_{cn} + E_{c\alpha} \simeq Q$ d'après la loi de conservation de l'énergie.

On en déduit :

$$E_{c\alpha} = \frac{Q\,m_n}{m_n + m_\alpha} \quad \text{et} \quad E_{cn} = \frac{Q\,m_\alpha}{m_n + m_\alpha}.$$

B.II.3. *d*) *Application numérique :*

$$E_{c\alpha} = 3{,}5 \text{ MeV} \quad \text{et} \quad E_{cn} = 14{,}1 \text{ MeV}.$$

B.III.

B.III.1. n + noyau N immobile $\rightarrow$ n + noyau N en mouvement.

$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}'_n + \mathbf{p}'_N$ et $E'_{cn} + E'_{cn} + E'_{cN}$ (conservation de l'énergie cinétique).

B.III.2.

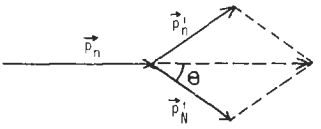


Fig. 1

Avec l'expression $p = (2\,mE_c)^{1/2}$, valable pour chaque particule, en isolant $\mathbf{p}'_n$ dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, puis en élevant au carré :

$$m_n(E'_{cn} - E_{cn}) = m_N E'_{cN} - 2(m_n m_N E_{cn} E'_{cN})^{1/2} \cdot \cos\vartheta$$

soit :

$$E'_{cN} = \frac{4\,m_n m_N E_{cn}}{(m_n + m_N)^2} \cdot \cos^2\vartheta.$$

Or :

$$S = E_{cn} - E'_{cn} = E'_{cN}$$

$$\frac{S}{E_{cn}} = \frac{4\,m_n m_N}{(m_n + m_N)^2} \cdot \cos^2\vartheta.$$

Cette perte est maximale pour $\cos^2\vartheta = 1$ ($\vartheta = 0$, c'est-à-dire pour un choc de plein fouet ; le noyau est projeté en avant ; le neutron, léger, part en arrière).

$$\frac{S_{max}}{E_{cn}} = \frac{4\,m_n m_N}{(m_n + m_N)^2}$$

et pour $m_N = m_n$, soit si N est un proton.

Alors :

$$S_{max} = E_{cn}.$$

C. FUSION THERMONUCLEAIRE ENTRE DES NOYAUX DE DEUTERIUM ET DE TRITIUM :

CONDITIONS A REMPLIR

C.I.

C.I.1. $n_{D0} + n_{T0} = n_{e0}$.

C.I.2. Chaque degré de liberté possède l'énergie $\frac{1}{2}\,kT$,

en supposant l'équipartition de l'énergie réalisée. D'où :

$$< E_c > = \frac{3}{2} kT.$$

Les noyaux de tritium et les électrons ont même énergie cinétique moyenne que les noyaux de deutérium, du fait que l'équilibre thermique est réalisé et que chaque degré de liberté possède l'énergie $\frac{1}{2} kT$.

C.I.3.
$$U = \sum_i E_{ci}.$$
$$= (n_{D0} + n_{T0} + n_{e0}) V < E_c >.$$
$$= 2 n_0 V < E_c >.$$
$$U = 3 n_0 V kT.$$

C.I.4. $< E_c >$ étant l'énergie cinétique moyenne, un bon nombre de noyaux de deutérium, de tritium ou d'électrons ont une énergie cinétique supérieure à $< E_c >$. La loi de distribution des vitesses de Maxwell - Boltzmann permet de déterminer le nombre de noyaux ayant une énergie cinétique supérieure à $< E_c >$.

C.I.5. En considérant que le plasma forme un gaz parfait, on néglige les forces d'interaction à distance (attraction ou répulsion coulombienne) à grand rayon d'action, par rapport aux dimensions du noyau, et à court rayon d'action (forces d'attraction nucléaires). Dans un plasma, très dense, la distance entre les noyaux reste en moyenne bien supérieure au diamètre des noyaux ; l'énergie potentielle d'interaction nucléaire est donc tout à fait négligeable.

L'énergie d'interaction électrostatique d'un noyau avec un autre noyau peut être compensée par l'énergie d'interaction du noyau considéré avec un électron, en admettant qu'un électron a la même probabilité qu'un noyau de se trouver à la même distance du noyau considéré.

Il ne reste à évaluer que l'énergie d'interaction électrostatique du noyau considéré avec l'électron en excès (le plasma étant neutre), soit, en appelant d la distance moyenne entre particules :

$$|W| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{d} \text{ au maximum.}$$

Avec un plasma de densité 10^{23} particules par m³, d est de l'ordre de 10^{-8} m, ce qui donne $|W|$ de l'ordre de 0,1 eV, valeur bien inférieure à l'énergie d'agitation thermique d'un noyau :

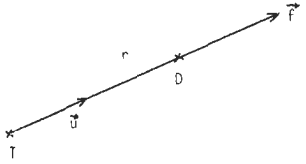


Fig. 2

$\frac{3}{2}$ kT pour un plasma chaud ($4 \cdot 10^{-2}$ eV à 300 K ; $1{,}3 \cdot 10^{3}$ eV à 10^{7} K).

C.II.

C.II.1. $\mathbf{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r^2} \cdot \mathbf{u}$ (en posant $\mathbf{OM} = r\,\mathbf{u}$).

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r}.$$

C.II.2. Le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire :

$$E_c - E_{ci} = W = -E_p = -q_2 \cdot V(M) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

L'énergie cinétique minimale est obtenue pour $r = d$:

$$E_{c\,min} = E_{ci} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d}.$$

C.II.3. $\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \mathbf{u}$.

C.II.4. $d_0 = 10 \cdot 10^{15}$ m est de l'ordre de grandeur des dimensions du noyau. Dès lors, les deux noyaux vont s'interpénétrer : les forces électrostatiques interviennent encore, mais il n'est plus possible de considérer les noyaux ponctuels. Les forces d'attraction nucléaires commencent à intervenir.

C.II.5. Il faut $E_{c\,min}$, prise pour $d = d_0$, positive, d'où :

$$E_{ci} \geqslant \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d_0} \quad \text{et} \quad E_{c0} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d_0}.$$

Numériquement : $E_{c0} = 0{,}144$ MeV.

C.II.6. *a*) Dans la population de noyaux considérée, de nombreux noyaux ont une énergie cinétique bien supérieure à l'énergie cinétique moyenne et peuvent induire des fusions nucléaires, en étant capables de franchir la barrière de potentiel entre les deux noyaux. Par ailleurs, l'effet tunnel peut intervenir. Il admet une probabilité non négligeable de franchissement de la barrière de potentiel, même si l'énergie cinétique est insuffisante.

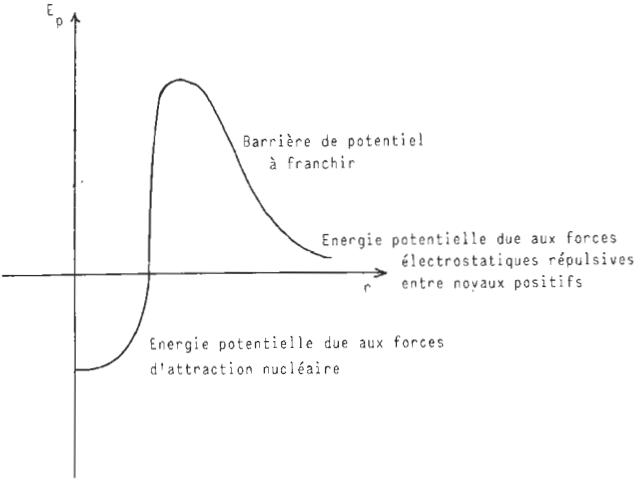


Fig. 3

C.II.6. *b*) Avec $kT_0 = 0{,}010$ MeV, $T_0 = \dfrac{0{,}010 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}}$

$$T_0 = 1{,}2 \cdot 10^8 \text{ K}$$

$$< E_c > = \frac{3}{2} kT_0$$

$$< E_c > = 0{,}015 \text{ MeV}.$$

C.II.7. Ce résultat est compatible avec l'hypothèse faite dans la question B.II.3., car la variation d'énergie cinétique est de 17,6 MeV pour la réaction D-T.

C.II.8. La fusion des noyaux n'est possible que si l'énergie cinétique des noyaux est suffisamment élevée pour permettre le franchissement de la barrière de potentiel entre eux.

Dans la fusion *thermonucléaire*, l'énergie cinétique est due à l'agitation thermique et donc à l'échauffement du plasma à des températures élevées.

C.III.

C.III.1. D'après les données du texte, l'énergie de dissociation d'une molécule H_2 en deux atomes H est de 4,46 eV et l'énergie d'ionisation d'un atome H de 13,6 eV. Or à T_0, $< E_c > = 0{,}015$ MeV.

L'énergie de dissociation d'une molécule et *l'énergie d'ionisation* d'un atome sont négligeables devant l'énergie cinétique moyenne d'une particule du plasma.

C.III.2. E = U (en négligeant l'énergie initiale de la population de molécules H_2 et les énergies nécessaires à la dissociation et à l'ionisation).

$$E = 3\, n_0\, V\, kT_0.$$

C.IV.

C.IV.1. $$\frac{dn_D}{dt} = \frac{dn_T}{dt} = -\Omega\, n_D\, n_T.$$

Ω s'exprime en (nombre de particules par $m^3)^{-1} \times$ (secondes)$^{-1}$ donc en $m^3\, s^{-1}$.

C.IV.2. $w = Q \cdot \Delta n \cdot V$ (Δn, nombre de fusions par unité de volume pendant la durée de confinement).

$$\Delta n = \Omega n_{D0}\, n_{T0}\, \tau = \Omega\, \frac{n_0^2}{4}\, \tau$$

$$w = \frac{1}{4} \cdot \Omega\, Q n_0^2\, V\, \tau.$$

On veut : $w > E$ soit $n_0\, \tau > L$ avec $L = \dfrac{12\, kT_0}{\Omega Q}$.

Numériquement : $L = 6{,}8 \cdot 10^{19}$ s. m^{-3}.

C.IV.3. Fuite de particules chargées hors du dispositif de confinement ; recombinaison de particules chargées en particules neutres ; instabilités ; oscillations indésirables ; rayonnement de freinage.

C.V.

C.V.1.

$$\varepsilon = \frac{n_{D0} - n_D}{n_{D0}}.$$

C.V.2.

$$\frac{dn_D}{dt} = -\Omega\, n_D\, n_T$$

$$n_{D0} - n_D = n_{T0} - n_T = \varepsilon\, n_{D0}.$$

$$n_D = n_{D0}(1-\varepsilon) \quad \text{et} \quad n_T = n_{T0} - \varepsilon\, n_{D0}.$$

D'où :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (1-\varepsilon)(n_{T0} - \varepsilon\, n_{D0}).$$

Avec : $n_{T0} = n_{D0} = \dfrac{n_0}{2}, \quad \dfrac{d\varepsilon}{dt} = \dfrac{n_0}{2}\,\Omega\,(1-\varepsilon)^2.$

En séparant les variables et en intégrant entre $\varepsilon = 0$ et ε quelconque, on obtient :

$$\varepsilon = \frac{n_0\,\Omega t}{2 + n_0\,\Omega t}.$$

C.V.3. *a*) Pour $t = \tau$, $E_f = \dfrac{n_0\,\Omega\,\tau}{2 + n_0\,\Omega\,\tau}.$

C.V.3. *b*) Si $n_0\,\tau = L$, $\varepsilon_f = \dfrac{L\,\Omega}{2 + L\,\Omega}$, $\varepsilon_f = 3{,}4 \cdot 10^{-3}$.

Si $n_0\,\tau = 10\,L$, $\varepsilon_f = \dfrac{10\,L\,\Omega}{2 + 10\,L\,\Omega}$, $\varepsilon_f = 3{,}3 \cdot 10^{-2}$.

Ces résultats justifient les calculs faits en C.IV.2.

C.V.3. *c*) Si $\varepsilon_f = 0{,}2$, $n_0\,\tau = 5 \cdot 10^{21}\ \text{s.m}^{-3}$.

C.V.4. $G = \dfrac{w}{E}$ avec $w = Q \cdot \Delta n \cdot V$; $E = 3\,n_0\,V\,kT_0$ et

$$\Delta n = n_{D0} - n_D = \varepsilon\, n_{D0} = \varepsilon\,\frac{n_0}{2}, \quad \text{d'où :} \quad G = \frac{\varepsilon\,Q}{6\,kT_0}.$$

Numériquement : $G = 59$.

D. CONFINEMENT INERTIEL PAR FAISCEAUX LASER

D.I.

D.I.1. La durée τ représente le temps nécessaire pour qu'une onde de choc se propage du centre de la sphère à sa périphérie ; la vitesse de propagation est évidemment celle du son dans le plasma.

D.I.2.

$$m_0 = m_D + m_T$$

$$m_0 = 5{,}03015\ u.$$

D.I.3.

$$n_0 \tau \geqslant L$$

$$\varrho_0 = \frac{1}{2}(n_0 m_D + n_0 m_T) \quad \text{ou} \quad \varrho_0 = \frac{n_0 m_0}{2}$$

d'où :

$$\varrho_0 R \geqslant \frac{m_0 v_s L}{2} = C$$

$$C = \frac{6 m_0 v_s k T_0}{\Omega Q}.$$

Application numérique :

$v_s = 2{,}8 \cdot 10^{13} (kT_0)^{1/2}$; $kT_0 = 0{,}010$ MeV $= 1{,}6 \cdot 10^{-15}$ J

$$v_s = 1{,}1 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$$

$$C = 0{,}32 \text{ kg m}^{-2}.$$

D.I.4. *a*) $\varrho_0 R = K$ avec $K > C$ et $E = 3 n_0 V k T_0$.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3$$

$$n_0 = \frac{2 \varrho_0}{m_0}.$$

On en déduit : $E_i = \dfrac{8 \pi \varrho_i R_i^3 k T_0}{m_0}$ avec $i = 1$ ou 2.

D.I.4. *b*) $$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 \cdot \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

or : $\varrho_0 R = K$ implique $\varrho_1 R_1 = \varrho_2 R_2$, d'où :

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 \quad \text{soit} \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{\alpha^2} \quad (\text{avec } \varrho_2 = \alpha \varrho_1).$$

Si $\alpha > 1$, $E_2 < E_1$.

Plus le plasma est dense, plus l'énergie nécessaire à sa formation est faible.

D.I.4. *c*)

$$m_i = \varrho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi R_i^3 \quad \text{avec } i = 1 \text{ ou } 2.$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

D.I.5. *a*)

$$R_1 = 0{,}01 \text{ m}$$

$$E_1 = 9{,}6 \cdot 10^8 \text{ J}$$

$$W_1 = 10\ E_1 = 9{,}6 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$P_1 = \frac{W_1}{10^{-9}} = 9{,}6 \cdot 10^{18} \text{ W}.$$

D.I.5. *b*)

$$E_2 = \frac{E_1}{\alpha^2} \quad \text{avec} \quad \alpha = 10^3 \quad \text{d'où :} \quad E_2 = 10^{-6}\ E_1$$

$$E_2 = 9{,}6 \cdot 10^2 \text{ J}$$

$$W_2 = 9{,}6 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$P_2 = 9{,}6 \cdot 10^{12} \text{ W}$$

$$R_2 = 10^{-5} \text{ m}$$

$$\tau = \frac{R}{v_s} \quad \text{avec} \quad v_s = 1{,}1 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$\tau = 8{,}9 \cdot 10^{-12} \text{ s}.$$

D.I.5. *c*) La masse de matière reste constante.

$$\varrho_i R_i^3 = \varrho_0 R^3$$

$$R_i = (1\,000)^{1/3} \cdot 10^{-5}$$

$$R_i = 10^{-4} \text{ m}.$$

D.II.

$$d = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ m} \quad \text{et} \quad P = 10 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

$$\mathcal{E} = \frac{P}{\pi d^2}$$

$$\mathcal{E} = 5{,}1 \cdot 10^{19} \text{ W. m}^{-2}.$$

D.II.2.

$$\mathbf{p} = \frac{h\nu}{c} \cdot \mathbf{u} \quad \text{et} \quad E = h\nu.$$

D.II.3.

$$P = \Phi \cdot 4\pi R^2 \cdot h\nu$$

$$\mathcal{E} = \Phi h\nu.$$

D.II.4. La force élémentaire **df** qui s'exerce sur un élément de surface dS est égale à la variation de quantité de mouvement de cet élément par unité de temps, donc à l'opposé de la variation de la quantité de mouvement des photons incidents sur dS par unité de temps. Chacun voit sa quantité de mouvement passer de $\frac{h\nu}{c}$ à 0, du fait qu'il est absorbé, d'où :

$$\mathbf{df} = -\frac{h\nu}{c} \cdot \Phi\, dS\, \mathbf{n} \quad (\mathbf{n} \text{ unitaire extérieur}).$$

$$\pi = \frac{\|\mathbf{df}\|}{dS} \quad \text{soit} \quad \pi = \frac{\Phi h\nu}{c} \quad \text{ou} \quad \pi = \frac{\mathcal{E}}{c}$$

Numériquement : $\pi = 1{,}7 \cdot 10^{11}$ Pa

$\pi = 1{,}7 \cdot 10^{6}$ atm.

D.III. On peut supposer que les échanges de quantité de mouvement sont radiaux. Après réception d'impulsions laser, la sphère constitue un système isolé. La quantité de mouvement d'un cône de sommet O, d'axe OM, doit rester égale à la quantité de mouvement fournie par le faisceau laser sur la surface dS entourant M.

Comme la matière périphérique est transformée en plasma et qu'elle se détend vers l'extérieur, elle emporte de la quantité de mouvement vers l'extérieur.

En conséquence, la partie intérieure du cône doit emporter de la quantité de mouvement vers le centre O. Il y a donc déplacement de matière vers la partie centrale et compression.

La propulsion d'une fusée résulte de la mise en œuvre du principe de conservation de la quantité de mouvement.

D.IV.

D.IV.1.

$$\alpha_M \simeq \operatorname{tg} \alpha_M = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \alpha_M \simeq 14°.$$

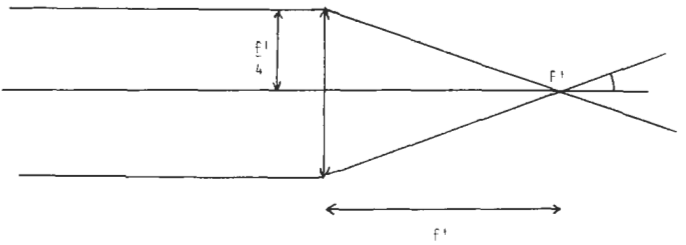


Fig. 4

D.IV.2. *a*)

$$\delta < \delta_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ rad.}$$

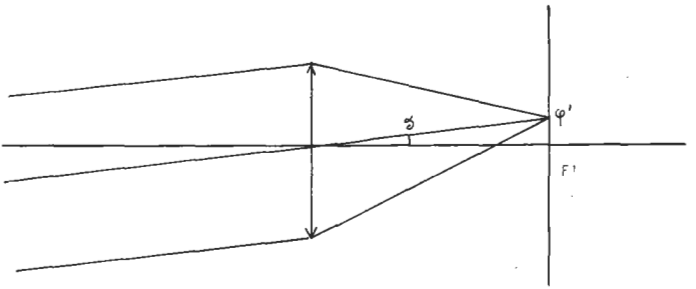


Fig. 5

Les rayons incidents inclinés de δ sur l'axe principal vont converger en un foyer secondaire déterminé par l'intersection de l'axe secondaire parallèle aux rayons incident et du plan focal image.

D.IV.2. *b*) L'ensemble des foyers secondaires φ' forme un disque dans le plan focal image, de centre F', foyer image, de rayon $r = \delta_0 f'$.

Numériquement : $r = 90$ µm.

E. CONFINEMENT PAR DES MIROIRS MAGNETIQUES

E.I.

E.I.1. *a*) D'après le principe fondamental de la dynamique du point et l'expression de la force de Lorentz, en appelant **a** le vecteur accélération de la particule :

$$m\mathbf{a} = q\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}.$$

En projection sur Oz, on obtient : $\dfrac{d^2z}{dt^2} = 0$ puis $\dfrac{dz}{dt} = 0$ (à $t = 0$, la vitesse est selon Ox) et $z = 0$ (à $t = 0$, $z = 0$).

En conséquence, le mouvement est plan et se fait dans le plan xOy.

D'après le théorème de l'énergie cinétique : $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \dfrac{dE_c}{dt}$.

Or $\mathbf{f}$ est perpendiculaire à $\mathbf{v}$, donc E_c est constante. De même pour $v = \|\mathbf{v}\| = v_0$.

Comme $\mathbf{a} = \dfrac{dv}{dt} \cdot \mathbf{t} + \dfrac{v^2}{R} \cdot \mathbf{n}$ avec :

$\mathbf{t}$ vecteur unitaire tangent,

$\mathbf{n}$ vecteur unitaire normal centripète,

R rayon de courbure,

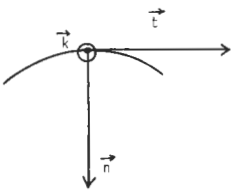


Fig. 6

on obtient :

$$m \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \mathbf{n} = q\, v\, \mathbf{t} \wedge B\, \mathbf{k}$$

soit : $R = \dfrac{m\, v_0}{q\, B}$.

Le rayon de courbure étant constant, la trajectoire est un cercle de rayon R décrit dans le sens négatif associé à $\mathbf{k}$.

On a : $R = \dfrac{v_0}{\omega}$ avec $\omega = \dfrac{q\, B}{m}$.

E.I.1. b) $p = m\, v$ d'où $p = q\, B\, R$ (cette relation reste valable en mécanique relativiste).

La vitesse angulaire est : $\omega = \dfrac{v_0}{R}$, soit $\omega = \dfrac{q\, B}{m}$.

E.I.1. *c*) Exemples :

— cyclotron, synchrocyclotron ;

— spectrographe de masse ;

— microscope électronique (lentille magnétique) ;

— dispositifs à confinement magnétique des plasmas : tokamak, bouteille magnétique ;

— tube cathodique d'un appareil de télévision, oscillographe cathodique.

E.I.2. *a*) Comme en E.I.1. *a*), on a : $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$, mais la vitesse ayant une composante selon Oz à $t = 0$, égale à b_0, on a :

$$\frac{dz}{dt} = b_0$$

d'où :

$$z = b_0 t \qquad (\text{à} \quad t = 0, \quad z = 0).$$

E.I.2. *b*) On pose $v = a\mathbf{t} + b\mathbf{k}$ ($\mathbf{t}$, vecteur unitaire tangent à la projection de la trajectoire sur le plan xOy).

D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a encore :

$$v = \|\mathbf{v}\| = v_0.$$

Comme $b = b_0$, on a : $a = a_0$.

L'équation du mouvement, en projection sur le plan xOy s'écrit :

$$m \frac{d(a_0 \mathbf{t})}{dt} = q\, a_0\, \mathbf{t} \wedge \mathrm{B}\, \mathbf{k}.$$

Si on appelle R le rayon de courbure de la projection de la trajectoire sur le plan xOy :

$$m = \frac{a_0^2}{\mathrm{R}} = q\, a_0\, \mathrm{B}$$

$$\mathrm{R} = \frac{m\, a_0}{q\, \mathrm{B}}.$$

Le rayon de courbure de la projection de la trajectoire sur le plan xOy étant constant, il s'agit d'un cercle de rayon R.

E.I.2. *c*) La trajectoire est une hélice circulaire de pas constant dessinée sur un tube de champ magnétique de section droite circulaire de rayon R.

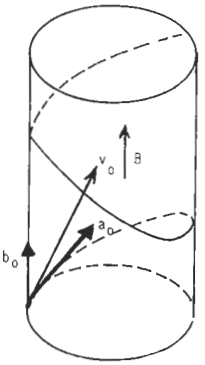


Fig. 7

E.II.

E.II.1. En coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{u} + r\,\dot{\vartheta}\,\mathbf{w} + \dot{z}\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\vartheta}^2)\,\mathbf{u} + \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\vartheta})\,\mathbf{w} + \ddot{z}\,\mathbf{k}.$$

E.II.2.

$$\mathbf{f} = q\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

$$f_r = q\,r\,\dot{\vartheta}\,B_z \quad \text{et} \quad f_z = -q\,r\,\dot{\vartheta}\,B_r.$$

E.II.3. D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$m\,(\ddot{r} - r\,\dot{\vartheta}^2) = q\,r\,\dot{\vartheta}\,B_z \quad \text{et} \quad m\,\ddot{z} = -q\,r\,\dot{\vartheta}\,B_r.$$

Or : $r\,\dot{\vartheta}^2 \gg |\ddot{r}|$ par hypothèse, d'où :

$$m\,r\,\dot{\vartheta}^2 = -q\,r\,\dot{\vartheta}\,B_z \quad \text{soit} \quad \dot{\vartheta} = -\frac{q}{m}\cdot B_z$$

et avec $B_r = -\dfrac{r}{2}\cdot\dfrac{dB_z}{dz}$, on a : $m\,\ddot{z} = -\dfrac{q^2\,r^2}{2\,m^2}\cdot B_z\cdot\dfrac{dB_z}{dz}$.

E.II.4. D'après le théorème de l'énergie cinétique, comme en E.I.1. *a*), E_c est constante.

E.II.5. $$E_c = W_{//} + W_{\perp}$$

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = -\frac{dW_{//}}{dt} \quad \text{avec} \quad W_{//} = \frac{1}{2}\cdot m\dot{z}^2$$

d'où :

$$\frac{dW_\perp}{dz} = -m\ddot{z}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot mv^2 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2)$$

or $|\dot{r}| \ll |r\dot{\vartheta}|$ d'où : $E_c \simeq \frac{1}{2} m(r^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2)$.

On en déduit : $W_\perp = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\vartheta}^2$.

En remplaçant $\dot{\vartheta}$ par sa valeur : $W_\perp = \frac{q^2}{2m} r^2 B_z^2$.

En comparant à $m\ddot{z}$, on obtient : $\frac{1}{W_\perp} \cdot \frac{dW_\perp}{dz} = \frac{1}{B_z} \cdot \frac{dB_z}{dz}$.

Par intégration : $\frac{W_\perp}{B_z}$ = constante soit μ = constante.

E.II.6. D'après l'expression de μ, on a : $r^2 B_z$ = constante.

Comme B_z augmente quand z augmente, r diminue. Réciproquement, quand la particule se rapproche de l'axe, z augmente.

E.II.7.

$$W_{//0} + W_{\perp 0} = W_{//} + W_\perp$$

$$\frac{W_\perp}{B_z(z)} = \frac{W_{\perp 0}}{B_z(0)}$$

d'où :

$$W_{//} = W_{//0} + W_{\perp 0}\left(1 - \frac{B_z(z)}{B_z(0)}\right)$$

$B_z(z) > B_z(0)$ d'où : $W_{//} < W_{//0}$ et $\dot{z} > \dot{z}_0$; $\dot{z}$ diminue quand z augmente.

E.II.8. *a*) En J, $\dot{z}$ s'annule, $W_{//}$ aussi. On a donc :

$$0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m \dot{z}_0^2 \cdot \frac{B_z(l)}{B_z(0)}.$$

Or : $\dot{z}_0 = v_0 \sin\varphi$ d'où : $\sin^2\varphi = \frac{B_z(0)}{B_z(l)}$.

E.II.8. *b*) Le noyau repart vers l'arrière.

Si, pour z compris entre 0 et $-H$, on a une structure du champ, symétrique par rapport au plan xOy, le noyau se réfléchit aux deux extrémités de la bouteille magnétique ainsi formée. Les extrémités constituent des miroirs magnétiques.

E.II.8. *c*) La particule se déplace sur une surface de révolution d'axe Oz dont la section par un plan perpendiculaire à Oz, à l'abscisse z, est un cercle de rayon r, délimitant la surface πr^2.

Le flux du champ magnétique à travers ce disque est celui de B_z : $\Phi = \pi r^2 B_z$. Or, $\mu = \dfrac{q^2}{2m} r^2 B_z$ est une constante. On a : $\mu = \dfrac{q^2}{2\pi m}\Phi$, ce qui montre que Φ est indépendant de z.

On sait que *le long d'un tube de champ magnétique, le flux du champ magnétique se conserve,* ce qui prouve que la trajectoire est dessinée sur un tube de champ unique, de révolution autour de Oz.

Puisque $\dot{\vartheta} = -\dfrac{q}{m} B_z$ est négatif à tout instant, le noyau tourne toujours dans le même sens autour de Oz, le sens négatif associé à Oz.

Remarque :

Là où le champ magnétique est intense, les lignes de champ sont serrées et là où le champ est faible, les lignes de champ sont peu serrées. En $z = 0$, les lignes de champ sont les plus écartées et en $z = H$, les plus serrées.

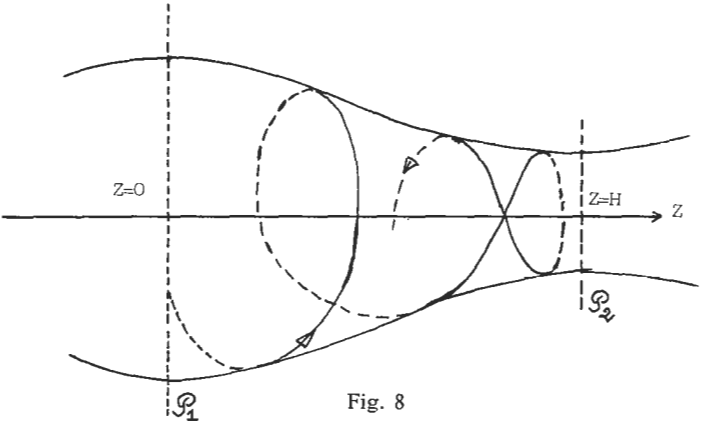


Fig. 8

E.II.9. S'il n'y a pas réflexion avant de traverser P_2, $\dot{z}$ ne s'annule pas et $W_{//}$ reste une quantité positive, entre $z = 0$ et $z = H$. D'où :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m \dot{z}_0^2 \frac{B_z(H)}{B_z(0)} > 0$$

et :

$$\sin^2 \varphi < \frac{B_z(0)}{B_z(H)}.$$

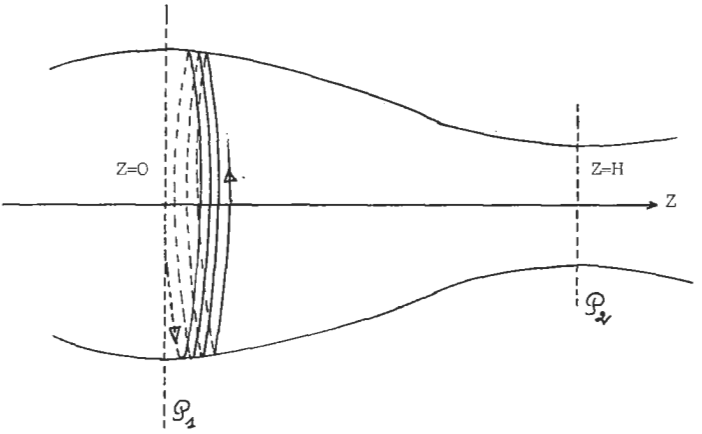


Fig. 9

D. MAURAS, J.-C. HERPIN.

C.A.P.E.S de sciences physiques

Option : Physique et Chimie

PROBLEME DE CHIMIE

SESSION DE 1984

COMPOSITION DE CHIMIE

(Durée : 4 heures)

Matériel : 5 feuilles de papier millimétré.

Le thème choisi pour ce sujet, l'étude des halogènes, est très vaste.

Les candidats auront donc intérêt à répondre avec précision et concision aux questions posées, dont beaucoup sont indépendantes les unes des autres.

Les calculs numériques seront effectués avec une précision raisonnable grâce aux données rassemblées au début du texte. Les échelles indiquées dans l'énoncé seront impérativement respectées.

NOTE : *L'épreuve comporte* quatre parties entièrement indépendantes *que les candidats pourront traiter dans l'ordre qui leur plaira. Mais, à l'intérieur de chaque partie, ils sont invités à respecter l'ordre des paragraphes et à reporter sur leur copie la numérotation (chiffres et lettres) de l'énoncé.*

DONNÉES NUMÉRIQUES

Données générales :

Constante d'Avogadro, $\mathcal{N}_A$	$\mathcal{N}_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Célérité de la lumière dans le vide, c .	$c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ m. s^{-1}
Constante de Planck, h	$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J. s^{-1}
Constante des gaz parfaits, R	$R = 8{,}31 \cdot$ J. K^{-1}. mol^{-1}
Charge de l'électron, $-e$	$e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C.

Le facteur $\dfrac{R \cdot T}{\mathcal{N}_A \cdot e} \cdot \ln 10$ sera, à 25 °C, pris égal à 0,059 V.

1 atm = 1 013 mbars = $1{,}013 \cdot 10^{5}$ Pa.

Masses molaires atomiques (g. mol^{-1}) :

H	C	O	Cl	Br
1,01	12,01	16,00	35,45	79,91.

Potentiels normaux d'oxydo-réduction à 25 °C Π^o (V) :

c : cristal *g* : gaz *l* : liquide *aq* : en solution.

Couple	Π^o	Couple	Π^o
$F_2(g)/F^-$	2,87	$Br_2(aq)/Br^-$	1,09
H_2O_2/H_2O	1,77	Ag^+/Ag	0,80
$HClO/Cl_2(g)$	1,62	Fe^{3+}/Fe^{2+}	0,77
$Cl_2(aq)/Cl^-$	1,39	$I_2(aq)/I^-$	0,62
$Cl_2(g)/Cl^-$	1,36	$S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}$	0,08
$O_2(aq)/H_2O$	1,26	$Na^+/Na(c)$	—2,71
$O_2(g)/H_2O$	1,23	$K^+/K(c)$	—2,91

Produit de solubilité à 25 °C.

Le produit de solubilité, K_s, de Ag Br est tel que :

$$pK_s = 12{,}3.$$

Grandeurs thermodynamiques standard :

Les conventions de zéro sont les conventions habituelles. Les différentes grandeurs qui figurent ci-après seront considérées comme constantes dans l'intervalle [0 °C, 400 °C].

Corps pur	H_f^0, enthalpie standard de formation (kJ. mol^{-1})	S^0, entropie standard (J. K^{-1}. mol^{-1})
$Cu(c)$		33,5
$CuCl(c)$	—134,8	87,0
$CuCl_2(c)$	—205,9	113,0
$Cl_2(g)$		221,8

Autres données thermodynamiques (kJ. mol^{-1}) :

Enthalpie de dissociation du difluor, ΔH_{F_2}	$\Delta H_{F_2} = 80$
Enthalpie standard de formation du fluorure de sodium (c), H_f^0	$H_f^0 = -569$
Energie de 1re ionisation de l'atome de sodium (g), E_i	$E_i = 496$
Enthalpie de sublimation du sodium (c), ΔH_s	$\Delta H_s = 108$
Energie de 1re ionisation de l'ion fluorure (g), E'_i	$E'_i = 333$.

Numéro atomique, Z, de quelques éléments :

B	P	Br
5	15	35

A. L'ELEMENT, L'ATOME, LE CORPS SIMPLE (*25 points*)

I. L'ATOME.

1. Indiquer dans quelle colonne de la classification périodique se trouvent les halogènes. Quelle est la structure électronique externe de leurs atomes dans l'état fondamental ? Préciser la structure électronique de l'atome de brome (Z = 35) en énonçant les différentes règles qui la déterminent.

2. L'élément brome naturel est représenté par deux isotopes ^{79}Br et ^{81}Br. En utilisant la masse molaire atomique du brome, calculer les proportions des différents isotopes dans le brome naturel. Comment pourrait-on améliorer la précision du résultat obtenu ?

II. LA MOLÉCULE.

1. Indiquer quelle est, dans la théorie de Lewis, la structure de la molécule de dibrome.

2. Donner le diagramme des orbitales moléculaires de la molécule Br_2. On se limitera aux orbitales atomiques de la couche la plus externe et on précisera la signification des différents termes utilisés : σ, σ^*, π^*, π... Quelle est la structure électronique de la molécule de dibrome dans l'état fondamental ?

Quelles sont les propriétés que l'on peut déduire de cette structure : magnétisme, indice de liaison... ?

III. LE CORPS SIMPLE.

1. Les halogènes existent-ils à l'état de corps simples dans la nature ? Sous quelle forme les rencontre-t-on ? Par quel (s) type (s) de réactions les prépare-t-on ?

2. Préciser l'état physique, dans les conditions ordinaires de température et de pression, des différents corps simples. Justifier l'évolution des températures de fusion et d'ébullition lorsqu'on descend dans la colonne de la classification périodique.

3. *Composition et stabilité d'une eau de chlore.*

a) Déterminer la valeur des constantes des équilibres suivants à 25 °C :

$$Cl_2\,(g) \rightleftarrows Cl_2\,(aq) \qquad \text{constante } K_1 \qquad (1)$$

$$Cl_2\,(aq) + 2\,H_2O \rightleftarrows Cl^- + H_3O^+ + HClO \qquad \text{constante } K_1 \qquad (2)$$

b) On fait barboter du dichlore dans l'eau pure jusqu'à ce que la solution soit saturée. La pression de dichlore au-dessus de la phase aqueuse est constante et égale à 1 013 mbars. Calculer, dans ces conditions, la composition de la phase aqueuse en ne considérant que les équilibres (1) et (2). Calculer le potentiel d'oxydo-réduction des couples faisant intervenir l'élément chlore.

c) La solution précédente est introduite dans un flacon qui est ensuite fermé hermétiquement de manière à ce qu'aucune phase gazeuse ne surmonte la solution. Le système ainsi réalisé est-il en équilibre ?

Sinon par quelle réaction évolue-t-il ? Calculer sa composition à l'équilibre en supposant toujours qu'aucune phase gazeuse ne surmonte la solution.

d) « L'eau de chlore » existe-t-elle néanmoins ? Expliquer.

4. *Action du dichlore sur le métal cuivre.*

On étudie les deux réactions équilibrées :

$$2\,Cu\,(c) + Cl_2\,(g) \rightleftarrows 2\,CuCl\,(c) \qquad (1)$$

$$2\,CuCl\,(c) + Cl_2\,(g) \rightleftarrows 2\,CuCl_2\,(c). \qquad (2)$$

a) Quelle est la variance de chacun des systèmes correspondants ? Quelle conclusion en tire-t-on ?

b) Etablir, pour les deux réactions précédentes, l'expression de la variation d'enthalpie libre standard en fonction de la température T. Tracer les courbes correspondantes.

Echelle imposée :

$\begin{cases} \text{1 cm pour 40 K en abscisses ;} \\ \text{1 cm pour 20 kJ. mol}^{-1} \text{ en ordonnées.} \end{cases}$

On se limitera à l'intervalle [0 °C ; 400 °C].

c) Quel est le sens physique des différents domaines et droites du plan ainsi déterminés ? Justifier succinctement votre réponse.

d) Du dichlore, sous la pression constante de 0,03 bar, circule dans une canalisation en cuivre. La température est de 80 °C. Le métal est-il attaqué ? Si oui quels sont les (ou le) produit (s) formé (s) ?

B. HALOGENURES (*12 points*)

I. Halogénures ioniques.

1. *Structure cristalline.*

De très nombreux halogénures cristallisent soit dans le système du chlorure de sodium, soit dans celui du chlorure de césium. Faire un schéma de la maille pour ces deux systèmes. Préciser dans chaque cas la coordinence et la relation entre la longueur a de l'arête de la maille et les rayons ioniques r_+ et r_-.

2. *Energie réticulaire.*

Définir l'énergie réticulaire d'un cristal ionique. Comment peut-on la calculer ? Un cristal ionique peut-il être en équilibre sous l'action des seules forces électrostatiques ?

Application : Calculer l'énergie réticulaire du cristal de fluorure de sodium.

II. Halogénures covalents.

1. Indiquer la structure géométrique des molécules suivantes :

BCl_3 ; NF_3 ; CCl_4 ; PCl_5 ; SF_4 ; SF_6.

2. Interpréter la structure géométrique de ces molécules.

C. RELATIONS EN SOLUTION AQUEUSE (*18 points*)

I. ASPECT QUALITATIF.

Décrire et interpréter soigneusement les expériences suivantes. Etablir dans chaque cas l'équation-bilan des réactions observées.

1. On ajoute de l'eau de chlore fraîchement préparée à une solution de bromure de potassium.

2. On électrolyse, entre des électrodes de graphite, une solution de fluorure de sodium.

3. On électrolyse, entre des électrodes de graphite, une solution de chlorure de potassium.

4. On ajoute une solution d'iodure de potassium à une solution de sulfate de fer III.

II. DOSAGE DES IONS BROMURE.

Dans une solution de bromure de potassium de concentration C_1, on ajoute lentement une solution de nitrate d'argent de même concentration. Soit v_1 le volume de la solution de bromure utilisé et v le volume de la solution de nitrate d'argent ajouté.

1. *a*) Quelle est la réaction de dosage ?

b) Intervient-elle dès que l'on ajoute la solution de nitrate d'argent ?

2. On pose :

$$* \quad x = \frac{v}{v_1};$$

$$* \quad pAg = -\log_{10} \frac{[Ag^+]}{C_0}$$

[Ag+] concentration volumique en ions argent I,
C_0 concentration de 1 mol. l^{-1}.

a) Ecrire les relations existant entre les concentrations des différents ions présents dans la solution.

b) Montrer que, selon la valeur de x, ces relations peuvent se simplifier. Expliquer le sens physique des approximations faites.

c) Etablir l'expression de pAg en fonction de x.

3. Tracer la courbe représentant les variations de pAg en fonction de x lorsque les deux solutions ont pour concentration 0,05 mol. l^{-1}.

Echelle imposée :

en abscisses 10 cm pour $\Delta x = 1$,
en ordonnées 10 cm pour ΔpAg = 10.

4. Comment peut-on tracer la courbe expérimentalement ? Faire un schéma du montage nécessaire en précisant soigneusement les éléments utilisés. Quelle est la grandeur que l'on mesure ? Comment calculer pAg à partir de la grandeur mesurée ?

III. CINÉTIQUE DE LA RÉACTION DES IONS IODURE SUR LE PEROXYDE D'HYDROGÈNE.

1. Ecrire l'équation-bilan de la réaction.

2. Le dosage du diiode en solution est habituellement réalisé par une solution tirée de thiosulfate de sodium. Ecrire l'équation-bilan de la réaction de dosage. Comment repère-t-on le point d'équivalence ? Qu'utilise-t-on pour améliorer la précision avec laquelle on détemine ce point ?

3. Dans un bécher, on introduit 500 cm^3 d'une solution aqueuse suffisamment acidifiée et 10 cm^3 d'une solution d'iodure de potassium contenant 0,1 mol. l^{-1}. On ajoute ensuite de l'empois d'amidon et 0,5 cm^3 d'une solution de thiosulfate de potassium contenant 1 mol. l^{-1}. On ajoute enfin 10 cm^3 d'une solution de peroxyde d'hydrogène à 0,5 mol. l^{-1} et on déclenche le chronomètre. Au bout de 5,02 minutes apparaît une couleur bleue. Expliquer l'apparition tardive de cette couleur bleue.

4. Au moment où apparaît la couleur bleue, on effectue à nouveau l'addition de 0,5 cm^3 de la solution de thiosulfate. Qu'observe-t-on ? La coloration bleue réapparaît au bout de 10,32 minutes. On ajoute à nouveau 0,5 cm^3 de la solution de thiosulfate... On dresse ainsi le tableau des dates des instants où réapparaît la couleur bleue :

t (min) :	5,02	10,32	15,92	21,88	28,20.

Quelle particularité présente la concentration en ions iodure au cours de la réaction ? Montrer que ces données permettent de déterminer l'ordre partiel de la réaction par rapport au peroxyde d'hydrogène.

5. Vérifier, *par une méthode graphique que l'on justifiera,* que cet ordre partiel est un.

D. LES HALOGENES EN CHIMIE ORGANIQUE (*25 points*)

I. ACTION DU DIBROME SUR LE MÉTHANE ET LES ALCANES.

1. *Bromation photochimique du méthane.*

On fait réagir photochimiquement le dibrome à l'état gazeux sur le méthane. L'expérience se déroule dans un récipient de volume constant, maintenu à température constante. L'utilisation d'un grand excès de méthane permet d'admettre qu'il se forme uniquement du monobromométhane.

a) Ecrire l'équation-bilan de la réaction. La longueur d'onde des radiations utilisées est voisine de 500 nm. Montrer que, compte tenu de l'aspect des réactifs, il est raisonnable de penser que la lumière n'est absorbée que par les molécules de dibrome. Quel (s) type (s) de transition peuvent provoquer les photons utilisés ?

b) On admet qu'au début de l'expérience la réaction se déroule selon le mécanisme suivant :

$$Br_2 + \text{photon} \rightarrow Br^\bullet + Br^\bullet \qquad (1)$$

$$Br^\bullet + CH_4 \rightarrow HBr + CH_3^\bullet \quad \text{constante de vitesse } k_2 \qquad (2)$$

$$CH_3^{\bullet} + Br_2 \rightarrow CH_3Br + Br^{\bullet} \quad \text{constante de vitesse } k_3 \qquad (3)$$

$$Br^{\bullet} + Br^{\bullet} + M \rightarrow Br_2 + M \quad \text{constante de vitesse } k_4. \qquad (4)$$

On suppose que la quantité de molécules Br_2 photolysées par unité de temps et de volume est proportionnelle au flux lumineux incident Φ et à la concentration en molécules Br_2. Soit k_1 le coefficient de proportionnalité. Exprimer la vitesse de disparition des molécules Br_2 par le processus (1).

c) Dans la réaction (4), le symbole M représente une molécule quelconque du mélange réactionnel. Expliquer quel est son rôle.

d) Au début de l'expérience, la vitesse de disparition des molécules de dibrome est assez bien représentée par l'expression :

$$-\frac{d\,P_{Br_2}}{dt} = \frac{k \cdot P_{CH_4} \cdot P_{Br_2}^{1/2}}{P^{1/2}}$$

dans laquelle P et P_i désignent respectivement, à la température T de l'expérience, la pression totale régnant dans le récipient et la pression partielle du constituant *i*, considéré comme un gaz parfait.

Montrer que le schéma réactionnel proposé permet, moyennant l'utilisation de l'*approximation des états stationnaires pour les intermédiaires réactionnels*, de retrouver la loi cinétique expérimentale. Donner l'expression de k en fonction de k_1, Φ et des constantes de vitesse k_2, k_3...

2. *Bromation du propane.*

On envisage à présent la réaction du dibrome sur le propane. Quels sont les formules et les noms des dérivés monobromés que l'on peut obtenir ? Si la réaction s'effectuait au hasard, quelles seraient les fractions molaires de chacun des dérivés monobromés que l'on obtiendrait ?

L'expérience, conduite à 330 °C, fournit 92 % de bromure secondaire et 8 % de bromure primaire. Comment peut-on expliquer ce résultat ? En attribuant 1 à la réactivité relative d'un atome d'hydrogène primaire, quelle réactivité relative faut-il attribuer à un atome d'hydrogène secondaire ?

II. Action des halogènes sur les autres carbures d'hydrogène.

1. *Action sur les alcènes.*

Préciser le mécanisme de la réaction du dichlore ou du dibrome sur un alcène et justifier les observations suivantes :

— la bromation de l'éthylène par une solution de dibrome dans l'eau salée fournit un mélange de dibromo-1,2 éthane, de bromo-1, chloro-2 éthane, et de bromo-2 éthanol ;

— la bromation du cyclopentène fournit le trans, dibromo-1,2 cyclopentane.

2. *Action sur les carbures aromatiques.*

a) Montrer que, selon des conditions expérimentales que l'on précisera,, l'action du dichlore sur le benzène a un déroulement très différent. Préciser le mécanisme des réactions, la formule et le nom des produits obtenus.

b) Etudier de même l'influence des conditions expérimentales sur le déroulement et les produits de la réaction du dichlore sur le toluène. Indiquer les mécanismes réactionnels ainsi que la formule et le nom des produits obtenus.

III. SYNTHÈSE DU DDT.

1. En présence d'un catalyseur à base de chlorure de cuivre II et de palladium, l'éthylène réagit sur le dioxygène de l'air pour donner un corps *A* dont le spectre infrarouge présente une bande d'absorption intense à 1 730 cm^{-1}.

Une autre réaction de préparation de *A*, longtemps utilisée dans l'industrie, consiste à faire réagir l'acétylène sur une solution aqueuse contenant de l'acide sulfurique et du sulfate de mercure II.

a) Identifier *A* et écrire les équations-bilans des deux réactions décrites précédemment.

b) Interpréter le renseignement que fournit le spectre infrarouge.

2. La chloration de *A* conduit à un composé *B* dont le pourcentage massique en chlore est 72,2. Donner le nom et la formule développée de *B*.

3. *B*, en présence d'acide sulfurique, réagit sur le chlorobenzène pour donner un mélange de deux isomères de position, *C* et *D* de formule :

$$C_6H_4Cl - CHOH - CCl_3.$$

a) Ecrire les formules développées de *C* et *D*. Quel est le plus abondant ? Pourquoi ?

b) Préciser le rôle de l'acide sulfurique et le mécanisme de la réaction.

4. En présence d'un excès de chlorobenzène, une deuxième substitution intervient qui conduit à un mélange. Combien de produits différents peut-on obtenir ? Le plus abondant est le DDT. Quelle est sa formule développée ?

SOLUTION

A. L'ELEMENT, L'ATOME, LE CORPS SIMPLE

I. L'ATOME.

1. Les halogènes se trouvent dans la colonne VII.A. de la classification. Tous leurs atomes ont, dans l'état fondamental, une structure externe $n\,s^2\,n\,p^5$.

Règles :

* Les électrons étant des fermions, la fonction d'onde décrivant l'ensemble des électrons d'un atome (ou d'une molécule) doit être anti symétrique par rapport à la permutation de deux d'entre eux. Il en résulte la « règle d'exclusion de Pauli » : deux électrons d'un même atome ne peuvent avoir leurs quatre nombres quantiques (n, l, m, m_s) identiques. Cette règle ne peut être transgressée.

* Par définition, l'état fondamental d'un système est celui où l'énergie est minimale. Afin de déterminer cette structure, il faut déterminer l'ordre dans lequel les orbitales atomiques se remplissent quand on ajoute successivement les 35 électrons de l'atome de brome : la règle empirique de Klechkowski est utilisée : l'énergie d'une orbitale croît avec la somme $(n+l)$. En cas d'égalité, l'orbitale de plus basse énergie est celle de nombre quantique principal n le plus petit : c'est ainsi que le niveau $4\,s$ se remplit avant le niveau $3\,d$. Néanmoins, quand le niveau $3\,d$ est saturé, son énergie devient inférieure à celle du niveau $4\,s$.

** La structure de l'atome de brome dans l'état fondamental est donc :

$$1\,s^2\ 2\,s^2\ 2\,p^6\ 3\,s^2\ 3\,p^6\ 3\,d^{10}\ 4\,s^2\ 4\,p^5.$$

2. Soient M_1 et X_1 la masse molaire atomique et la fraction molaire du ^{79}Br dans le brome naturel ; M_2 et X_2 celles de ^{81}Br.

Ces quatre grandeurs sont liées par :

$$X_1 + X_2 = 1$$

$M_1 X_1 + M_2 X_2 = M$ masse molaire atomique de brome naturel.

L'énoncé ne fournissant pas M_1 et M_2, on peut obtenir un résultat approché en confondant masse molaire atomique et nombre de masse : on trouve ainsi $X_1 \approx 0{,}55$.

La connaissance de M_1 et M_2 permettrait d'améliorer le résultat.

II. La molécule.

1.

$$\left|\overline{\underline{Br}}\text{——}\overline{\underline{Br}}\right|$$

Dans ce modèle, chaque atome de brome est entouré de huit électrons, les deux atomes étant unis par une simple liaison.

2.

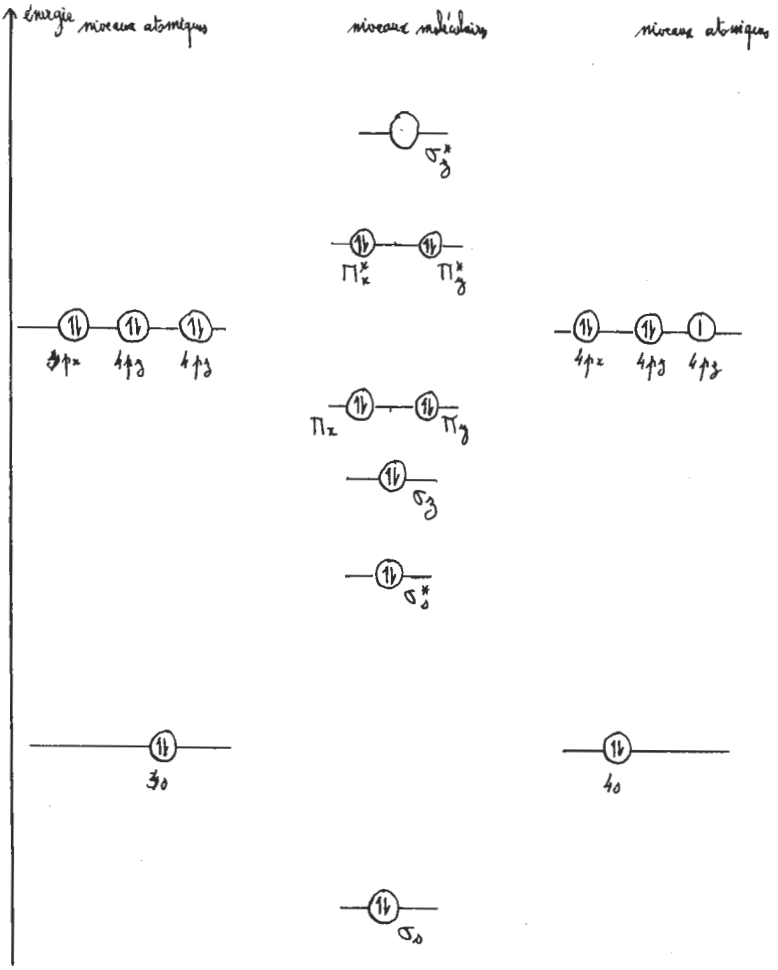


Fig. 1. — Diagramme d'orbitales moléculaires de Br_2.
L'axe internucléaire est confondu avec l'axe $z'z$.

$$* \begin{cases} \sigma : \text{orbitale moléculaire admettant l'axe internucléaire comme axe de révolution,} \\ \pi : \text{orbitale moléculaire admettant un plan nodal contenant l'axe internucléaire.} \end{cases}$$

* Une orbitale moléculaire liante a une énergie inférieure à celle des orbitales atomiques dont elle dérive.

Une orbitale moléculaire anti-liante — notée avec une « étoile » — a une énergie supérieure à celle des orbitales atomiques dont elle dérive.

* La structure électronique de la molécule de dibrome dans l'état fondamental peut être représentée par :

$$(\sigma_s)^2 (\sigma_s^*)^2 (\sigma_z)^2 (\pi_x)^2 (\pi_y)^2 (\pi_x^*)^2 (\pi_y^*)^2.$$

L'indice de liaison est de 1 ; la molécule est diamagnétique puisque tous les électrons ont leurs spins appariés.

III. Le corps simple.

1. Dans les conditions ordinaires de température et de pression, les corps simples correspondants sont des molécules diatomiques X_2. Aucun de ces corps simples ne se rencontre dans la nature car ils sont trop réactifs.

On trouve les halogènes sous forme d'ions halogénures X^-. L'iode existe aussi sous forme d'ion iodate IO_3^-.

Le passage de X^- à X_2 correspond à une oxydation : elle est électrolytique pour le fluor et le chlore, chimique pour le brome et l'iode. Le diiode I_2 peut aussi être préparé par réduction de l'ion IO_3^-.

2. Dans les conditions ordinaires de température et de pression, le difluor F_2 et le dichlore Cl_2 sont gazeux, le dibrome Br_2 est liquide et le diiode cristallisé.

T_f et T_e croissent lorsqu'on passe de F_2 à I_2 *i.e* quand le nombre d'électrons passe de 3 à 53 : les atomes sont de plus en plus gros et donc de plus en plus polarisables. Or, les interactions entre dipôles instantanés (forces de « dispersion ») sont proportionnelles au carré de la polarisabilité.

L'augmentation des forces intermoléculaires stabilise les phases condensées, liquide et solide, et provoque une croissance des températures d'ébullition (et aussi de fusion).

3. *Composition d'une eau de chlore.*

a) * L'expression littérale de K_1 est :

$$K_1 = \frac{[Cl_{2\,aq}]}{c_0} \frac{p_0}{p_{Cl_2}}.$$

Lorsque l'équilibre (1) est établi, les potentiels des couples $Cl_2(g)/Cl^-$ et $Cl_2(aq)/Cl^-$ sont égaux.

$$1{,}36 + \frac{0{,}059}{2} \lg \frac{p_{Cl_2}}{p_0} \frac{c_0^2}{[Cl^-]^2} = 1{,}39 + \frac{0{,}059}{2} \lg \frac{[Cl_{2\,aq}] \cdot c_0}{[Cl^-]^2}.$$

D'où $\lg K_1 = \dfrac{(1{,}36 - 1{,}39) \cdot 2}{0{,}059}$ et $K_1 = 9{,}6 \cdot 10^{-2}$.

* L'équilibre (2) est celui de la dismutation du dichlore : il fait intervenir les couples $Cl_2(aq)/Cl^-$ et $HClO/Cl_2(aq)$.

Lorsque l'équilibre (2) est établi, les potentiels des 2 couples participants sont égaux. L'énoncé fournit le potentiel du couple $HClO/Cl_2(g)$ et non celui de $HClO/Cl_2(aq)$ que nous allons calculer.

$$\Pi_{HClO/Cl_2\,(g)} = 1{,}62 + \frac{0{,}059}{2} \lg \frac{[HClO]^2\, h^2}{c_0^4} \cdot \frac{p_0}{p_{Cl_2}} \text{ avec ...}$$

$$\text{... } h = [H_3O^+]$$

correspond à la demi-réaction d'équation :

$$2\,HClO + 2\,H_3O^+ + 2\,e^- \rightleftarrows \overset{\nearrow}{Cl_2} + 4\,H_2O.$$

D'après l'étude de l'équilibre (1) : $\dfrac{p_0}{p_{Cl_2}} = K_1 \dfrac{c_0}{[Cl_2]}$.

$$\Pi_{HClO/Cl_2\,(g)} = \underbrace{1{,}62 + \frac{0{,}059}{2} \lg K_1}_{\Pi^0_{HClO/Cl_2\,(aq)}} + \frac{0{,}059}{2} \lg \frac{[HClO]^2\, h^2}{c_0^3 \cdot [Cl_2]}$$

D'où :

$$\Pi^0_{HClO/Cl_2\,(aq)} = 1{,}59 \text{ V}.$$

$$K_2 = \frac{[Cl^-] \cdot h \cdot [HClO]}{[Cl_{2\,aq}] \cdot c_0^2} \quad \text{et} \quad \lg K_2 = \frac{(1{,}39 - 1{,}59)}{0{,}059}.$$

Soit :

$$K_2 = 4{,}1 \cdot 10^{-4}.$$

b) * Puisque la solution est saturée en dichlore, sa concentration en dichlore est fixée par K_1. Sous une pression

d'une atmosphère (1 013 mbars), la concentration à saturation est de $9{,}6 \cdot 10^{-2}$ mol. l^{-1}.

$$[Cl_2(aq)] = 9{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ mol.} l^{-1} = K_1 \cdot c_0.$$

* En négligeant les ions H_3O^+ fournis par l'autoprotolyse de l'eau devant ceux provenant de la dismutation du dichlore, on obtient d'après (2) :

$$[Cl^-] = [HClO] = h.$$

En reportant dans l'expression de K_2, on en tire :

$$\frac{h}{c_0} = (K_1 \cdot K_2)^{1/3}.$$

** $[H_3O^+] = [Cl^-] = [HClO] = 3{,}4 \cdot 10^{-2}$ mol. l^{-1}

$[Cl_{2\,aq}] = 9{,}6 \cdot 10^{-2}$ mol^{-1} pH $\approx$ 1,5

Tous les couples où intervient l'élément chlore ont le même potentiel Π une fois les équilibres (1) et (2) établis. En utilisant le couple $Cl_2(ag)/Cl^-$: $\Pi \approx 1{,}45$ V.

c) Le système réalisé est à présent un système fermé où la quantité d'élément chlore est constante. Pour savoir si ce système est en équilibre, il faut considérer les différentes réactions qui peuvent s'y dérouler : celle de dismutation du dichlore a atteint son point d'équilibre ; par contre, le dichlore est susceptible d'oxyder l'eau en dioxygène, selon :

$$Cl_{2\,aq} + 3\,H_2O \rightleftarrows 2\,Cl^- + 2\,H_3O^+ + 1/2\ O_{2\,aq}. \qquad (3)$$

La constante de cet équilibre, K_3, se calcule à partir des Π^0 :

$$K_3 = 10\ \frac{(\Pi^0{}_{Cl_2/Cl^-} - \Pi^0{}_{O_2/H_2O})^2}{0{,}059} = 2{,}55 \cdot 10^4.$$

La réaction (3) est pratiquement totale. Au fur et à mesure que le dichlore est réduit en ions Cl^-, l'équilibre (2) régresse. Néanmoins comme l'eau est en excès par rapport à l'élément chlore, celui-ci est presque totalement transformé en ion Cl^-. Les concentrations finales (indicées *f*) et initiales (*i*) satisfont aux relations :

conservation de l'élément chlore :

$$[Cl^-]_f = [Cl^-]_i + [HClO]_i + 2\,[Cl_2]_i = 26 \cdot 10^{-2} \text{ mol.} l^{-1}$$

bilan de (3) :

$$[H_3O^+]_f = [Cl^-]_f = 4\,[O_2]_f \qquad [O_2]_f = 6{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.} l^{-1}.$$

On peut calculer $[Cl_2]_f$ et $[HClO]_f$.

$$[Cl_2]_f = \frac{[Cl^-]_f^2 \cdot [H_3O^+]_f^2 \, [O_2]_f^{1/2}}{K_3 \quad c_0^{7/2}} = 4{,}6\ 10^{-8}\ \text{mol.l}^{-1}$$

$$[HClO]_f = K_2 \frac{[Cl_2]_f \quad c_0^2}{[H_3O^+]_f \cdot [Cl^-]_f} = 2{,}75\ 10^{-10}\ \text{mol.l}^{-1}.$$

On vérifie bien le caractère total de la réduction de Cl_2 et HClO par l'eau.

d) D'après les calculs précédents, une « eau de chlore » se transforme en une solution d'acide chlorhydrique. Néanmoins, l'oxydation de l'eau se déroule très lentement surtout en l'absence de lumière. On peut conserver quelque temps de « l'eau de chlore » dans un flacon teinté.

4. *a*) La variance v, nombre de paramètres intensifs indépendants d'un système, peut être calculée par la formule :

$$v = (c - k) + 2 - \varphi \qquad \text{où} \quad \left.\begin{matrix} c \\ k \\ \varphi \end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{désigne} \\ \text{le nombre de}\end{matrix} \left\{\begin{matrix}\text{corps purs} \\ \text{équilibres chimiques} \\ \text{phases.}\end{matrix}\right.$$

$$= (3 - 1) + 2 - 3 = 1$$

Chacun des deux systèmes est donc monovariant : il existe donc une relation entre la température et la pression en dichlore régnant au-dessus des deux solides.

b) $\Delta G^0_1 = (-269{,}6 + 114{,}8 \cdot 10^{-3}\ T)\ \text{kJ.mol}^{-1}$

$\Delta G^0_2 = (-142{,}2 + 169{,}8 \cdot 10^{-3}\ T)\ \text{kJ.mol}^{-1}$.

c) * Une droite $\Delta G^0(T)$ représente un état d'équilibre chimique où coexistent du dichlore et deux solides.

* Une portion de plan représente un état d'équilibre où coexistent du dichlore et un seul solide.

d) Calculons la pression d'équilibre du dichlore au-dessus de ($CuCl + CuCl_2$) à 80 °C :

$$p_{eq} = p_0 \cdot e^{+\Delta G^0_2 (T)/RT} = 6{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{atm.}$$

La pression de dichlore étant très supérieure à la pression d'équilibre, le cuivre est attaqué et il se forme du chlorure de cuivre II $CuCl_2$.

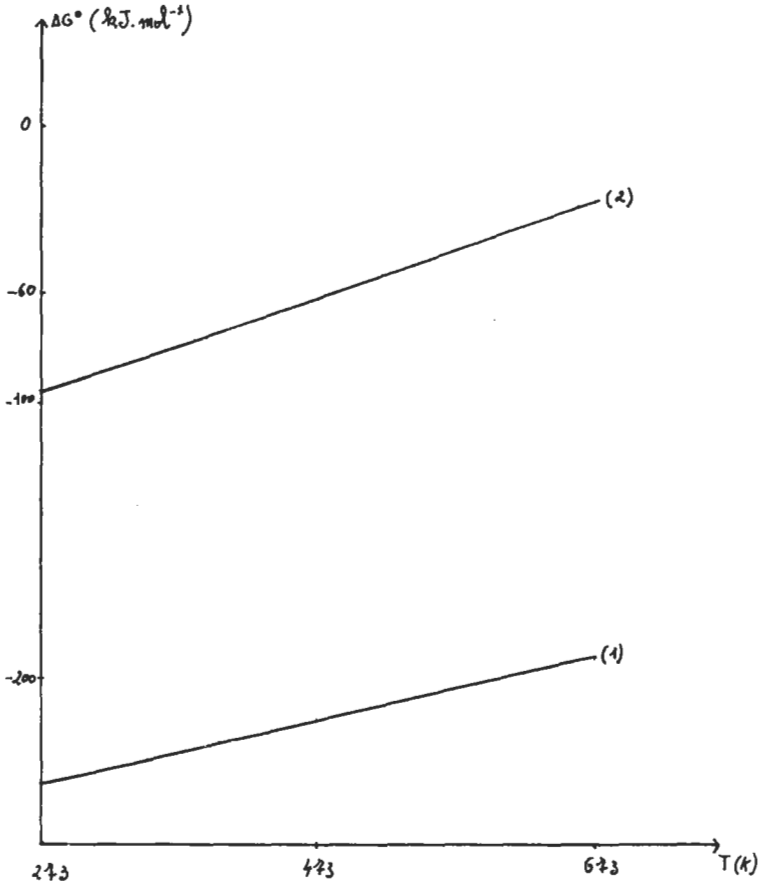


Fig. 2. — $\Delta G^0 = f(T)$.

B. HALOGENURES

I. Halogénures ioniques.

1. * Le cristal de chlorure de sodium est constitué de 2 réseaux cubiques à faces centrées décalés l'un par rapport à l'autre de la moitié de l'arête de la maille. La coordinence est 6/6.

$$a = 2(r_+ + r_-).$$

* Le cristal de chlorure de césium est constitué de 2 réseaux cubiques simples décalés l'un par rapport à l'autre de la

moitié de la diagonale principale de la maille. La coordinence est 8/8.

$$a\sqrt{3} = 2(r_+ + r_-).$$

2. L'énergie réticulaire est l'énergie nécessaire pour passer, à pression constante, du cristal ionique aux ions à l'état gazeux sans interaction.

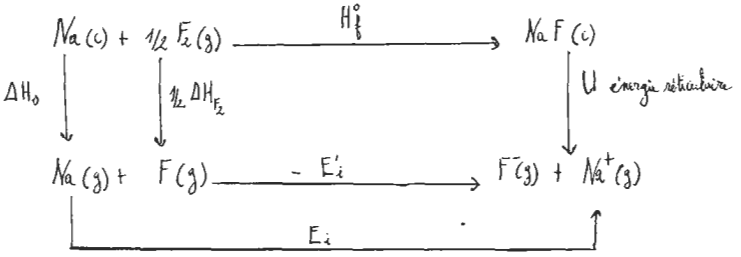
La cohésion d'un cristal ionique provient :

— de forces électrostatiques (attractives entre ions de signe contraire, répulsives entre ions de même signe) qui s'exercent entre les ions supposés sphériques ;

— de forces répulsives entre ions voisins qui rendent compte de la non-interpénétration des nuages électroniques.

L'évaluation des énergies correspondant à ces deux types d'interaction permet de calculer l'énergie réticulaire du cristal.

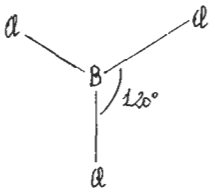
Un autre moyen de la calculer est le cycle de Born-Haber.

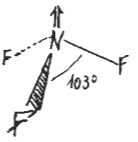


$$U = -H_f^0 + \Delta H_0 + 1/2\ \Delta H_{F_2} - E'_i + E_i = 880\ \text{kJ.mol}^{-1}.$$

II. HALOGÉNURES COVALENTS.

1.



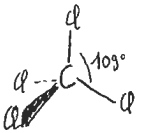


triangulaire équilatéral

$d_{B-Cl} = 174$ pm.

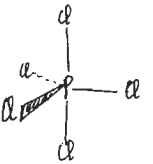
pyramide à base triangulaire

$d_{N-F} = 137$ pm

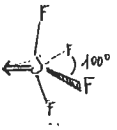


tétraèdre régulier

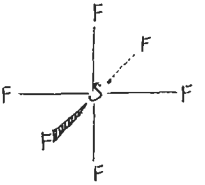
d_{C-Cl} = 176 pm



bipyramide à base triangulaire



$d_{SF} = \begin{cases} = 165 \text{ pm (axial)} \\ = 155 \text{ pm (équatorial)} \end{cases}$



octaèdre régulier

Fig. 3. — Structure géométrique de quelques halogénures.

2. L'interprétation la plus simple de la structure géométrique de ces molécules repose sur la théorie de « répulsion des électrons de valence » : la géométrie adoptée par une molécule est celle qui rend minimale les répulsions entre doublets d'électrons liants ou non-liants.

Une fois la géométrie connue, on peut décrire la structure électronique de la molécule soit par des orbitales moléculaires délocalisées soit par une hybridation de l'atome central puis des orbitales dicentriques σ et des orbitales π éventuellement délocalisées.

C. REACTIONS EN SOLUTION

I. Aspect qualitatif.

La valeur des potentiels normaux utiles est donnée dans la table.

1. $\Pi^0_{Cl_2\,aq/Cl^-}$ étant supérieurs à $\Pi^0_{Br_2\,aq/Br^-}$, la constante de l'équilibre :

$$Cl_2 + 2\,Br^- \rightleftarrows 2\,Cl^- + Br_2$$

est très supérieure à l'unité. En effet, à 25 °C :

$$K = 10^{\frac{(1{,}39 - 1{,}09)\cdot 2}{0{,}059}} \approx 1{,}5 \cdot 10^{10}.$$

L'oxydation des ions bromure par l'eau de chlore fournit du dibrome qui colore en brun-jaune la solution. La réaction est quasi instantanée.

2. A la cathode, on peut observer soit la réduction de Na^+, soit celle de l'eau.

A l'anode, on peut observer soit l'oxydation de F^-, soit celle de l'eau.

Lorsqu'on fait croître, à partir d'une tension nulle, la d.d.p. entre les électrodes, on observe :

— à la cathode, la réduction du meilleur oxydant, l'eau selon :

$$2\,H_2O + 2\,e^- \rightarrow \overset{\nearrow}{H_2} + 2\,OH^-$$

— à l'anode, l'oxydation du meilleur réducteur, l'eau selon :

$$3\,H_2O \rightarrow 2\,e^- + 2\,H_3O^+ + 1/2\ \overset{\nearrow}{O_2}.$$

La tension minimale théorique pour observer l'électrolyse de l'eau est de 1,23 V mais la présence d'une forte surtension pour l'oxydation de l'eau porte la d.d.p. nécessaire aux environs de 2 V.

3. Si l'on fait abstraction de la surtension, on devrait, dans ce cas aussi, observer l'électrolyse de l'eau. Mais l'écart des potentiels O_2/H_2O et Cl_2/Cl^- est beaucoup plus faible que celui des couples O_2/H_2O et F_2/F^-. Cet écart est en fait inférieur à la surtension anodique pour l'oxydation de l'eau ; on observe donc :

— à la cathode, la réduction de l'eau en dihydrogène ;

— à l'anode, l'oxydation des ions chlorure en dichlore.

A noter que si la d.d.p. appliquée est suffisante, on observe à l'anode l'oxydation simultanée de l'eau et des ions Cl^-.

4. $\Pi^0_{I_2/I^-}$ étant inférieur à $\Pi^0_{F^{3+}/F^{2+}}$, la constante de l'équilibre :

$$2\,Fe^{3+} + 2\,I^- \rightleftarrows 2\,Fe^{2+} + I_2$$

est supérieure à 1.

On observe donc l'apparition de la couleur brun-jaune du diiode (et de l'ion I_3^-) en solution.

II. Dosage des ions bromure.

1. $$Ag^+ + Br \rightarrow AgBr.$$

Le précipité apparaît dès que le produit de solubilité est atteint. Comme il est très petit, on observe la précipitation du bromure d'argent dès que l'on ajoute une goutte de nitrate d'argent dans la solution de bromure.

2. * Electroneutralité : $[NO_3^-] + [Br^-] = [Ag^+] + [K^+]$,

* Conservation des espèces autres que Ag^+ et Br^- :

$$[NO_3^-] = \frac{C_1 x}{1 + x} \qquad [K^+] = \frac{C_1}{1 + x},$$

* Produit de solubilité en présence de précipité :

$$K_s . c_0^2 = [Ag^+] \cdot [Br^-].$$

b) Compte tenu de la valeur de K_0, l'espèce qui est en défaut est pratiquement éliminée de la solution :

$$pAg = \begin{cases} 0 < x < 1 & [Ag^+] \text{ négligeable devant } [Br^-] & = pK_s - p\left(\dfrac{C_1}{C_0}\right) + \lg \dfrac{1 - x}{1 + x} \\ x = 1 & [Ag^+] \text{ égal à } [Br^-] & = 1/2\, pK_s \\ x > 1 & [Br^-] \text{ négligeable devant } [Ag^+] & = p\left(\dfrac{C_1}{C_0}\right) - \lg \dfrac{x - 1}{x + 1} \end{cases}$$

3.

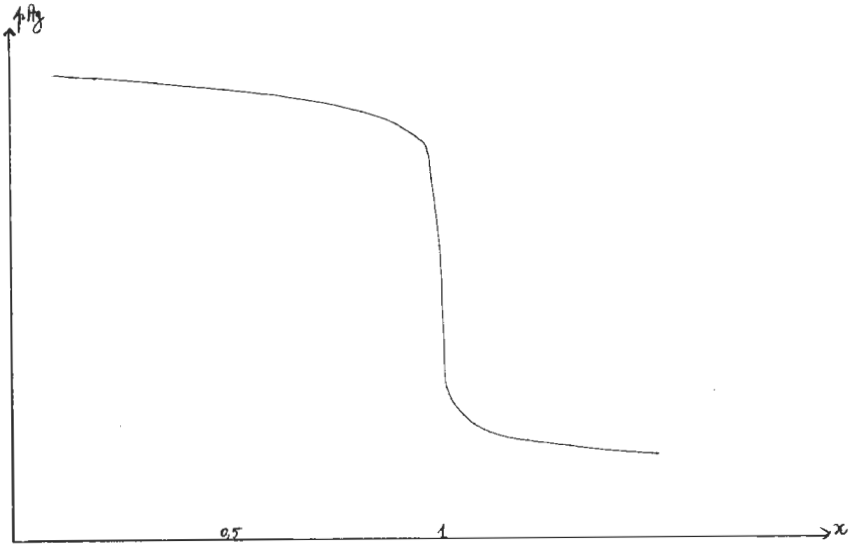


Fig. 4

4. On constitue une pile avec une électrode indicatrice : une électrode d'argent et une électrode de référence, par exemple au

sulfate mercureux qui plongent dans la solution de bromure. On mesure la f.é.m. E, de cette pile avec un voltmètre électronique.

$$E = \Pi_{Ag} - \Pi_{ref} = \Pi^0_{Ag^+/Ag} - \Pi_{ref} - \frac{RT}{\mathfrak{F}} \cdot \ln 10 \cdot pAg.$$

III. Réaction des ions I^- sur H_2O_2.

1. $$H_2O_2 + 2\,H_3O^+ + 2\,I^- \rightleftarrows 4\,H_2O + I_2$$

réaction quasi totale mais lente.

2. $$2\,S_2O_3^{2-} + I_2 \rightleftarrows 2\,I^- + S_4O_6^{2-}$$

réaction quasi totale et quasi instantanée.

Le point d'équivalence est repéré par la disparition de la couleur brune de I_2 et I_3^- dans l'eau. On améliore la précision en ajoutant quelques gouttes d'empois d'amidon dans le bécher. I_2 donne avec l'amidon un complexe coloré en bleu-violet qui absorbe fortement la lumière. On observe donc la disparition de cette coloration avec plus de netteté.

3. Les ions I^- sont oxydés lentement par H_2O_2 en I_2. Dès sa formation I_2 est réduit en I^- par le thiosulfate. Quand la totalité du thiosulfate a été oxydée, le diiode qui se forme reste dans la solution et y donne le complexe bleu avec l'empois d'amidon : 5,02 minutes représentent donc le temps nécessaire pour que disparaisse le thiosulfate ajouté.

4. L'ajout de thiosulfate permet de réduire le diiode formé, la coloration bleue disparaît jusqu'à ce que $S_2O_3^{2-}$ ait été consommé : elle réapparaît alors...

Si l'on néglige la variation de volume provoqué par l'ajout de 0,5 cm³ de solution de thiosulfate, la concentration en ions I^- reste constante pendant toute l'expérience.

Si l'on admet que la réaction d'oxydation des ions iodure par le peroxyde d'hydrogène a un ordre, sa vitesse peut être écrite :

$$-\frac{d\,[H_2O_2]}{dt} = k\,[I^-]^p \cdot [H_2O_2]^q$$

$[I^-]$ étant constant, il y a dégénérescence de l'ordre par rapport aux ions iodure et la vitesse s'exprime par :

$$-\frac{d\,[H_2O_2]}{dt} = k' \cdot [H_2O_2]^q.$$

D'après les proportions de réactifs, on peut calculer que la durée entre deux apparitions successives de la coloration bleue correspond à la consommation de 0,25 mmol de peroxyde d'hydrogène : on en déduit la concentration en H_2O_2 aux instants où réapparaît la couleur bleue.

5. D'après l'énoncé, $q = 1$. Donc :

$$-\frac{d\,[H_2O_2]}{dt} = k'\,[H_2O_2].$$

L'intégration de cette équation différentielle fournit, en notant $[H_2O_2]_0$ la concentration initiale en peroxyde :

$$[H_2O_2]\,(t) = [H_2O_2]_0 \cdot e^{-k't} \quad \text{ou} \quad \ln[H_2O_2]\,(t) = \ln\,[H_2O_2]_0 - k't.$$

Si l'hypothèse $q = 1$ est exacte, la courbe $\ln\,[H_2O_2]$ en fonction de t est une droite de pente $-k'$.

On vérifie que c'est bien le cas avec $k' = 1 \cdot 10^{-2}\ \text{min}^{-1}$.

D. LES HALOGENES EN CHIMIE ORGANIQUE

I. Action de Br_2 sur CH_4 et les alcanes.

1. *a*) $$CH_4 + Br_2 \rightarrow CH_3Br + HBr.$$

500 nm est la longueur d'onde d'une radiation visible correspondant au vert. Elle ne peut être absorbée que par un réactif lui-même coloré, plus précisément par un réactif possédant la couleur complémentaire c'est-à-dire rouge. La vapeur de dibrome est rougeâtre alors que le dihydrogène est incolore.

L'énergie associée à des photons visibles correspond à l'écart énergétique entre les niveaux électroniques : l'absorption d'un photon vert induit donc un changement d'état électronique de la molécule de dibrome auquel se superposent aussi des changements dans son état de rotation et de vibration.

b) $$-\left(\frac{d\,[Br_2]}{dt}\right) = k_1\,\Phi\,[Br_2].$$

c) M joue le rôle de « partenaire de choc » : elle absorbe une part de l'énergie que libère la recombinaison des atomes de brome pour donner une molécule de dibrome.

d) $$-\frac{d\,[Br_2]}{dt} = \ldots$$

$$\ldots k_1\,\Phi\,[Br_2] + k_3\,[CH_3^{\bullet}]\,[Br_2] - k_4\,[Br^{\bullet}]^2\,[M]$$

représente la vitesse globale de disparition du dibrome.

$$\frac{d\,[Br^\bullet]}{dt} = \begin{cases} = 0 \text{ car } Br^\bullet \text{ est un intermédiaire réactionnel} \\ = 2\,k_1\,\Phi\,[Br_2] - k_2\,[Br^\bullet]\,[CH_4] + k_3\,[CH_3^\bullet]\,[Br_2] \\ \qquad\qquad - 2\,k_4\,[Br^\bullet]^2\,[M] \end{cases}$$

$$\frac{d\,[CH_3^\bullet]}{dt} = \begin{cases} = 0 \\ = k_2\,[Br^\bullet]\,[CH_4] - k_3\,[CH_3^\bullet]\,[Br_2]. \end{cases}$$

On en tire :

$$-\frac{d\,[Br_2]}{dt} = k_2\left(\frac{k_1\,\Phi}{k_4}\right)^{1/2}\frac{[CH_4]\,[Br_2]^{1/2}}{[M]}.$$

En remarquant que la concentration et la pression partielle d'un constituant sont liées :

$$C_i = \frac{P_i}{RT} \quad \text{et} \quad [M] = \Sigma\,C_i = \frac{P}{RT}$$

on arrive à l'expression de l'énoncé.

2. $CH_3 - CH_2 - CH_2\,Br$ monobromo-1 propane,

$CH_3 - CH\,Br - CH_3$ monobromo-2 propane.

Si l'on admet que la vitesse de substitution d'un proton est indépendante du proton considéré, la proportion d'un isomère est proportionnelle au nombre d'atomes d'hydrogène dont la substitution fournit l'isomère concerné : 6 atomes d'hydrogène peuvent conduire au bromo-1 et 2 seulement au bromo-2.

On devrait donc obtenir 75 % de bromo-1 et 25 % de bromo-2 propane.

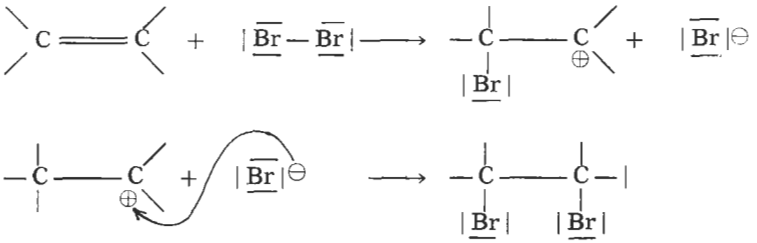
Les résultats expérimentaux contredisent l'hypothèse faite : la réaction est sous contrôle cinétique car les deux radicaux qui se forment au cours de la réaction ont des stabilités très différentes ; le radical primaire $CH_3CH_2\dot{C}H_2$ est beaucoup moins stable que le secondaire $CH_3\dot{C}H\,CH_3$.

$$\frac{\varrho_{II}}{\varrho_I} = \frac{92}{8}\cdot\frac{6}{2} = 34{,}5.$$

Un atome d'hydrogène secondaire est 34,5 fois plus réactif qu'un atome d'hydrogène primaire.

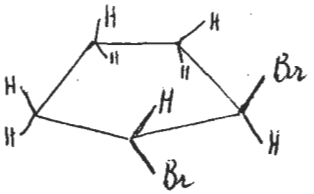
II. ACTION DES HALOGÈNES SUR LES AUTRES CARBURES D'HYDROGÈNE.

1. *Action sur les alcènes.*

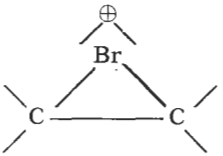


Ce mécanisme en deux étapes rend compte de la première série d'observations : une fois le cation formé, il peut être attaqué par l'ion Br^- mais aussi par d'autres nucléophiles présents en particulier l'ion Cl^- ou la molécule d'eau ; on obtient ainsi soit le bromo-1 chloro-2 éthane soit le bromo-2 éthanol-CH_2Br-CH_2OH.

La structure du trans dibromo-1,2 cyclopentane est :

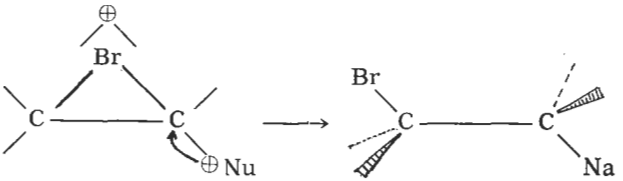


Le fait que le seul produit obtenu soit l'isomère trans peut être justifié si l'on admet que le cation résultant de la première étape est en réalité un « cation ponté ». L'atome de brome y est lié simultanément aux deux atomes de carbone de la double liaison :



ion bromonium

L'attaque du nucléophile se fait du côté opposé.



2. *Action sur les carbures aromatiques.*

a) * En présence de lumière, on observe une addition radicalaire du dichlore sur le benzène :

$$C_6H_6 + 3\,Cl_2 \longrightarrow C_6H_6Cl_6 \text{ hexachlorocyclohexanes.}$$

Mécanisme :

$$Cl_2 + h\nu \longrightarrow 2\,Cl^{\bullet}$$

$$Cl^{\bullet} + C_6H_6 \longrightarrow C_6H_6Cl^{\bullet}$$

$$C_6H_6Cl^{\bullet} + Cl_2 \longrightarrow C_6H_6Cl_2 + Cl^{-}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

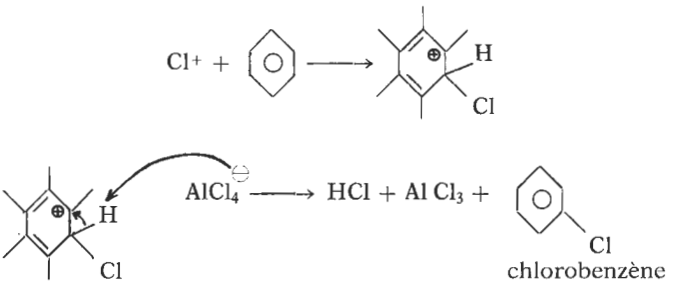
$$C_6H_6Cl_5^{\bullet} + Cl_2 \longrightarrow C_6H_6Cl_6$$

* En présence d'un acide de Lewis tel que $AlCl_3$, on observe une réaction de substitution électrophile :

$$C_6H_6 + Cl_2 \longrightarrow C_6H_5Cl + HCl.$$

Mécanisme :

$$Cl_2 + Al\,Cl_3 \rightleftarrows Cl^{+} + Al\,Cl_4^{-}$$



La réaction peut se poursuivre et l'on obtient d'abord des dichlorobenzènes principalement l'ortho et le para-.

b) * En présence de lumière, le dichlore réagit sur le toluène par une réaction de substitution radicalaire portant sur le groupement méthyle ; on obtient :

$$C_6H_5CH_2Cl \text{ puis } C_6H_5CH\,Cl_2 \text{ et enfin } C_6H_5\,CCl_3.$$

Mécanisme :

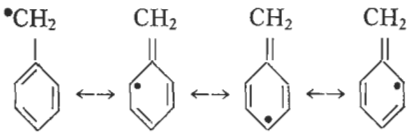
$$Cl_2 + h\nu \longrightarrow 2\,Cl^{\bullet}$$

$$Cl^{\bullet} + C_6H_5CH_3 \longrightarrow HCl + C_6H_5\dot{C}H_2$$

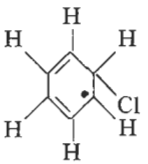
$$C_6H_5\dot{C}H_2 + Cl_2 \longrightarrow C_6H_5CH_2Cl + Cl^{\bullet}$$

$$2\,Cl^{\bullet} + M \longrightarrow Cl_2 + M.$$

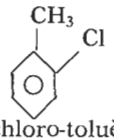
L'attaque du radical $Cl^{\bullet}$ porte sur le groupement CH_3 et non sur le cycle : le radical benzyle obtenu est stabilisé par conjugaison :



alors que le radical que l'on obtiendrait par insertion de l'atome de chlore dans le nuage π serait très instable :



* En présence d'un acide de Lewis, on observe une réaction de substitution électrophile en ortho et para du groupement méthyle qui fournit donc :



ortho chloro-toluène

para chloro-toluène

III. Synthèse du DDT.

1.

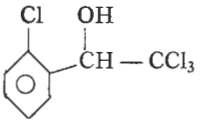
a) $CH_2 = CH_2 + 1/2\,O_2$
$CH \equiv CH + H_2O$ $\Big\} \longrightarrow CH_3CHO$ éthanal

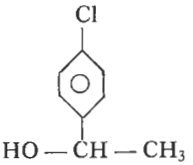
b) 1 730 cm^{-2} est le nombre d'onde de la radiation infrarouge absorbée par le groupement carboxyle $>C = 0$ lorsqu'il change d'état vibrationnel.

2. B est le trichloro éthanal CCl_3CHO.

3.

a)

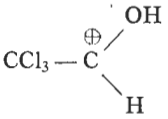




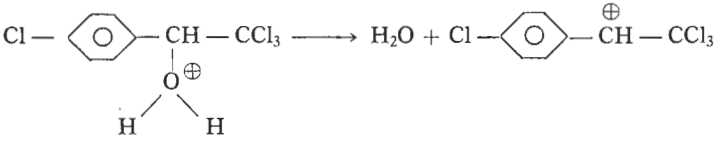
est le plus abondant à cause de l'encombrement stérique.

b) En présence d'acide sulfurique, le trichloro-éthanal se protone et le carbocation obtenu effectue une attaque électrophile sur le noyau benzénique. On observe une réaction de substitution électrophile en ortho et para de l'atome de chlore.

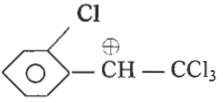
La formule de l'électrophile est :



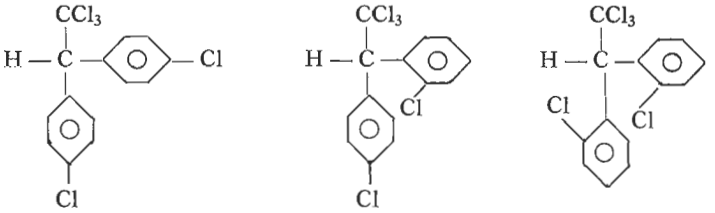
4. L'alcool formé se protone puis se déshydrate pour fournir un carbocation :



L'isomère le moins abondant conduit à :



L'attaque de ces carbocations sur le chlorobenzène peut se faire en ortho ou para de l'atome de chlore. On peut donc obtenir 3 produits différents (en ne tenant pas compte des isomères optiques).



« DDT ».

A JAUBERT.

REFERENCES

Sur les problèmes de géométrie moléculaire et de structure électronique, on pourra consulter avec profit les articles suivants du Bulletin de l'Union des Physiciens :

— G. FONTAINE, n° 591 (février 1977), p. 559.

— J. SALA-PALA, n° 648 (novembre 1982), p. 201.

— J.-C. MALLET, n° 654 (mai 1983), p. 1057.

C.A.P.E.S. de sciences physiques

Option : Physique appliquée

SESSION DE 1984

COMPOSITION D'ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE AVEC APPLICATIONS

(Durée : 4 heures)

Les candidats doivent indiquer sur leur copie la numérotation exacte des questions traitées et respecter les notations de l'énoncé.

Il est recommandé de lire complètement le sujet car de nombreuses questions peuvent être abordées sans que les précédentes aient été totalement résolues.

Les données sont réparties dans l'ensemble de l'énoncé.

Il sera tenu le plus grand compte des qualités d'exposition et de soin.

ETUDE DE DIVERS CAS D'ASSOCIATION GENERATEUR-MOTEUR A COURANT CONTINU

I

I.1. On dispose d'un générateur G_1 à courant continu (fig. 1 *a*).

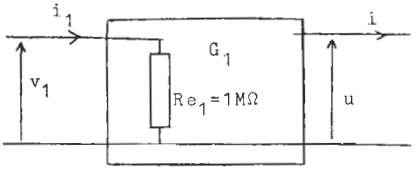


Fig. 1 *a*

Les caractéristiques de ce générateur de puissance (fig. 1 *b*) indiquent que la tension de sortie u dépend de la tension continue d'entrée v_1.

I.1.1. Montrer que ce générateur, lorsqu'il fonctionne en source de tension, est équivalent à un amplificateur de tension continue. Quelle est son amplification en tension ?

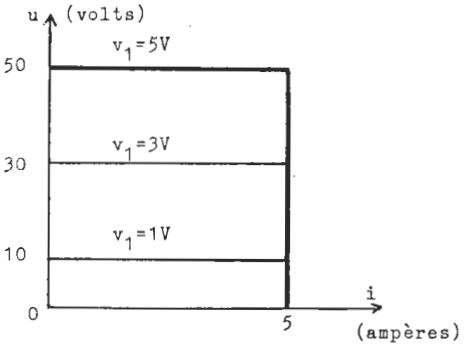


Fig. 1 *b*

I.1.2. Donner un schéma équivalent de cet amplificateur, pour les conditions normales de fonctionnement. Quelle est la valeur maximale de son amplification de puissance ?

I.2. On considère à présent un générateur G_2 dont le schéma représentatif et les caractéristiques sont donnés, respectivement, par les fig. 2 *a* et 2 *b*.

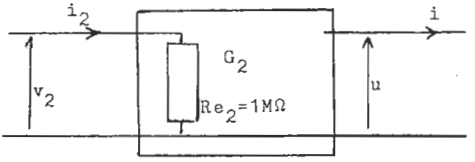


Fig. 2 *a*

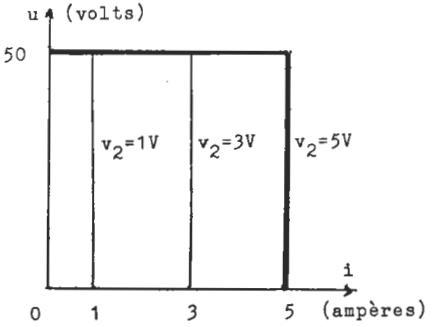


Fig. 2 *b*

I.2.1. Montrer que G_2, lorsqu'il fonctionne en source de courant, peut être considéré comme un amplificateur caractérisé par le rapport :

$$s = \frac{i}{v_2}.$$

Calculer s.

I.2.2. Donner, pour le continu, un schéma équivalent de G_2 correspondant aux conditions normales de fonctionnement. Quelle est la valeur maximale de son amplification de puissance ?

I.3. Le générateur G_1 est incorporé dans le montage G'_2 (fig. 3).

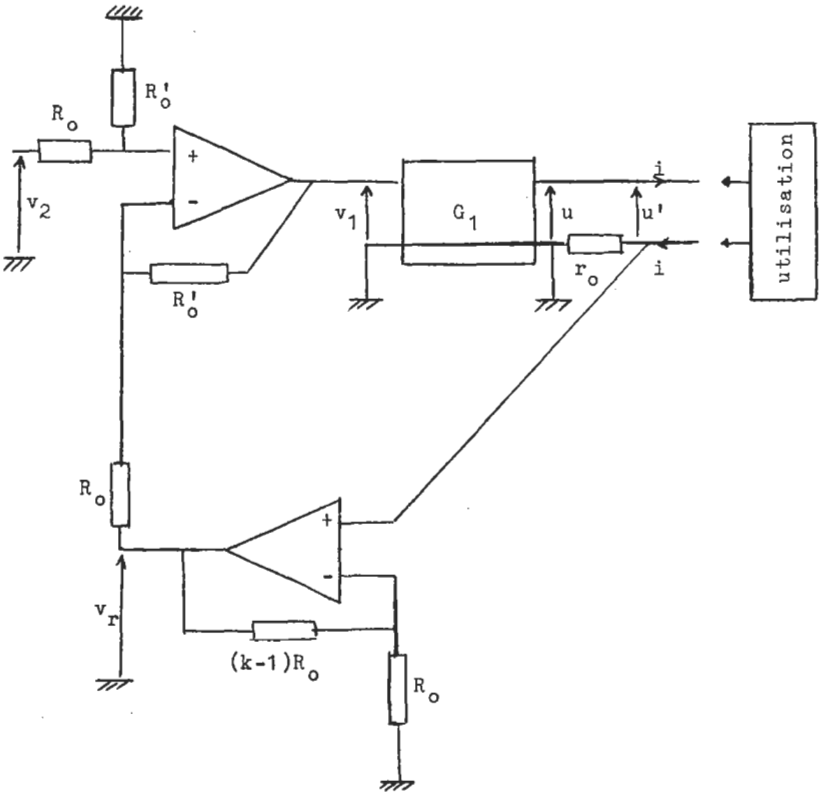


Fig. 3

Les deux amplificateurs opérationnels (circuits intégrés linéaires) sont considérés comme parfaits : amplification et résistance en mode différentiel infinies.

On donne :

$$r_0 = 0{,}1\ \Omega\,; \qquad k = 10\,; \qquad R_0 = 10\ \text{k}\Omega\,; \qquad R'_0 = 1\ \text{M}\Omega.$$

I.3.1. Exprimer v_r. Montrer que $v_1 = 100\ (v_2 - kr_0 i)$.

I.3.2. Caractéristiques du montage G'_2 :

I.3.2.1. Quelle est la valeur v_{25} de v_2 pour $i = 5$ A et $u' = 0$? Calculer l'intensité i pour $u = 50$ V et $v_2 = v_{25}$. En déduire la caractéristique $u' = f(i)$ pour $v_2 = v_{25}$.

I.3.2.2. Quelle est la valeur v_{23} de v_2 pour $u' = 0$ et $i = 3$ A ? Pour cette même valeur de v_2, que devient i lorsque $u = 50$ V ?

Tracer, sur une même feuille, les courbes $u' = f(i)$ pour $v_2 = v_{25}$ et pour $v_2 = v_{23}$. Donner un modèle équivalent de G'_2.

I.3.2.3. Comparer les caractéristiques de G'_2 à celles de G_2. Comparer également les deux schémas équivalents. Conclure.

II

Etude d'un moteur à courant continu à aimant permanent, en régime permanent puis en régime transitoire.

Le moteur (fig. 4), alimenté par le générateur G, entraîne une charge mécanique dont la caractéristique $C_r(\omega)$, couple résistant-vitesse angulaire, est donnée par la fig. 5.

Tension nominale d'induit : U = 50 V ; résistance d'induit $r = 2\,\Omega$.

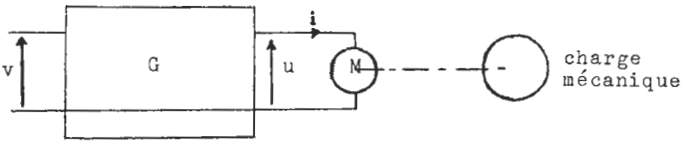


Fig. 4

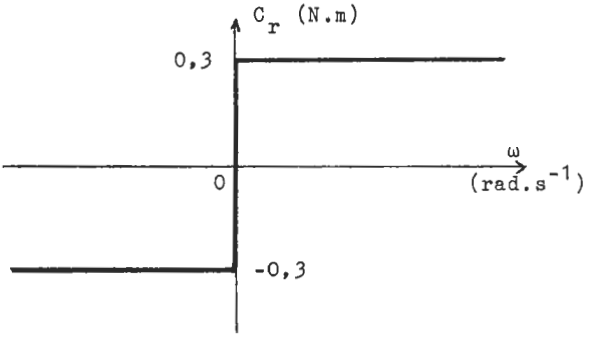


Fig. 5

F.é.m. $E = K\omega$; lorsque la vitesse angulaire ω est exprimée en radians par seconde, la constante K a la valeur $K = 0{,}1$ V. s. rad^{-1}.

Moment d'inertie de la partie tournante : $J = 5 \cdot 10^{-3}$ kg. m^2.

On néglige :

— La chute de tension due aux lames du collecteur ;
— La chute de tension due à la réaction magnétique d'induit ;
— L'inductance propre du circuit d'induit ;
— Les pertes dans le fer et les pertes mécaniques du moteur.

II.1. Etude de la vitesse en régime permanent. Comme alimentation, on utilise successivement G_1, G_2 et G'_2 étudiés dans la partie I.

II.1.1. G est le générateur G_1.

Expliquer pourquoi le courant i circulant dans le moteur est constant, quelle que soit la vitesse ω. Calculer sa valeur I.

Déterminer et tracer la caractéristique $\omega = f(v_1)$ du moteur ainsi chargé ; quelle est la valeur u_0 de u pour $\omega = 0$?

Quelle est la valeur ω_n de ω pour $u = U = 50$ V ?

II.1.2. G est à présent le générateur G_2.

Expliquer pourquoi, en régime permanent, une seule valeur de v_2 peut, théoriquement, convenir. Peut-on alors déterminer la vitesse ? Conclusion.

II.1.3. G est maintenant le générateur G'_2.

Déterminer et tracer $\omega = f(v_2)$ dans l'intervalle de fonctionnement. Conclusion. Indiquer succinctement les compléments à apporter à ce montage pour améliorer le réglage de la vitesse.

II.2. Etude du régime transitoire de la vitesse du moteur alimenté par G_1. Le générateur G_1 est commandé par $v_1(t)$, qui est nulle pour $t < 0$ et égale à 5 V pour $t \geqslant 0$ (fig. 6).

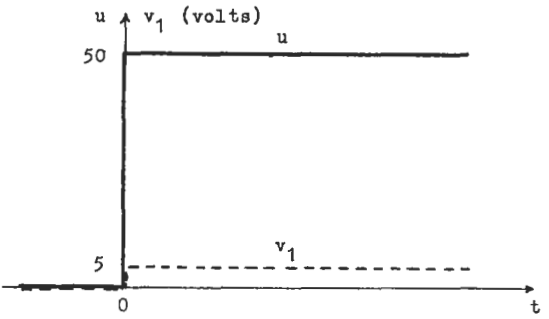


Fig. 6

II.2.1. On admet de même que $u(t)$, nulle pour $t < 0$, égale 50 V pour $t \geqslant 0$ (fig. 6).

Donner les expressions de la vitesse angulaire $\omega(t)$ et du courant $i(t)$ dans les deux cas suivants :

— le générateur G_1 n'a pas de limitation de courant ;

— le générateur G_1 est bien celui étudié au § I.1.

Calculer, pour chaque cas, la durée t_d de la phase de démarrage.

On pose $\tau = \dfrac{rJ}{K^2}$ et l'on considère, dans cette question et dans toute la suite du problème, que la phase de démarrage est terminée lorsque la vitesse ω atteint 95 % de sa valeur finale.

II.2.2. Une variation brutale de u à la date $t = 0$ n'est pas possible physiquement. En réalité, $u(t)$ s'établit à $u = U$ après un régime transitoire que l'on suppose du premier ordre (fig. 7) avec $\tau_1 = 0{,}1$ s.

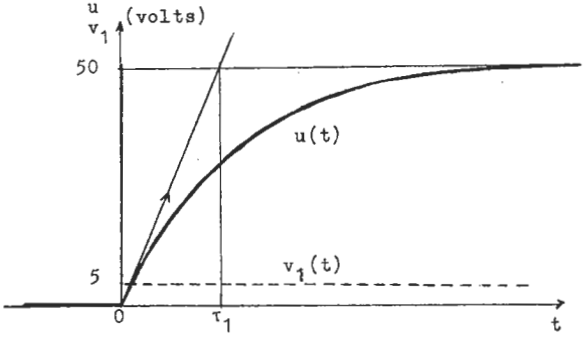


Fig. 7

Sachant que les caractéristiques statiques de G_1 sont celles de la fig. 1 *b*, donner les expressions de $\omega(t)$ et de $i(t)$ dans ces conditions. Expliquer pourquoi le temps de démarrage n'est presque pas modifié.

II.3. Etude du régime transitoire du moteur alimenté par G_2, dont les caractéristiques sont celles de la fig. 2 *b*.

II.3.1. Le générateur impose un courant $i(t)$, commandé par $v_2(t)$ (fig. 8).

Comparer ce mode de fonctionnement à l'un de ceux du § II.2.1. En déduire la durée de la phase de démarrage.

II.3.2. En réalité, le courant fourni par G_2 n'atteint 5 A qu'après un régime transitoire du premier ordre (fig. 9), avec $\tau_2 = 0{,}2$ s.

Indiquer les diverses phases de fonctionnement du moteur, depuis la date $t = 0$ jusqu'à ce que la vitesse approche de sa valeur finale.

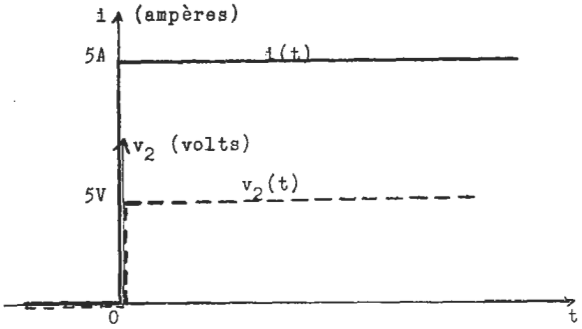


Fig. 8

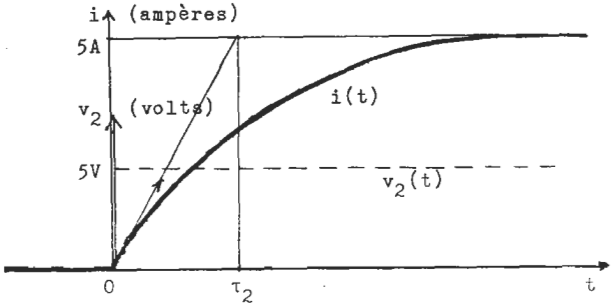


Fig. 9

III

Etude plus complète du fonctionnement de l'ensemble générateur G_1-moteur.

Le générateur G_1 est en réalité une alimentation à découpage dont le schéma est représenté par la fig. 10. Pour simplifier, on admet que le limiteur de courant n'intervient dans aucune des phases de fonctionnement.

La bobine, d'inductance L, a une résistance nulle. Le condensateur, de capacité C, cst parfait.

Sur l'entrée inverseuse de l'A.O. on applique la tension $e(t)$ dont les variations en fonction du temps sont représentées par la fig. 11.

On a : $V_s = +14$ V lorsque $v_1 > e$ et $V_s = -14$ V lorsque $v_1 < e$.

Les diodes D et D' sont supposées parfaites. Pour chacun des trois transistors :

— l'état bloqué est obtenu pour $V_{BE} \leqslant 0$ et $I_B = 0$; alors : $I_C = 0$;

— l'état saturé est obtenu pour $I_B = \dfrac{I_C}{10}$ et $V_{BE} = 0{,}6$ V ; alors : $V_{CE} = 0$.

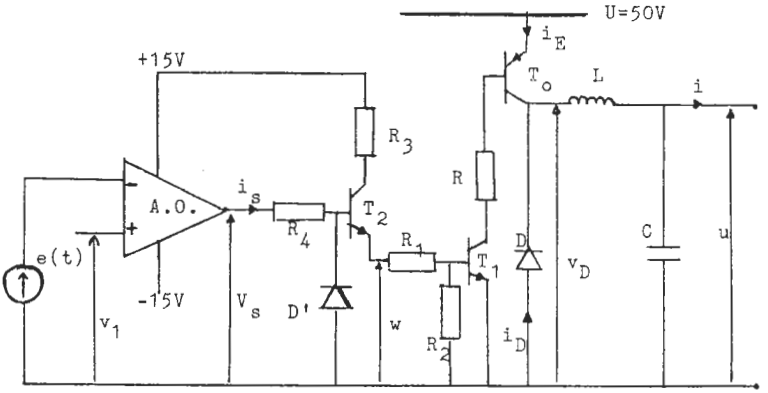


Fig. 10

III.1.1. Expliquer pourquoi, en régime permanent, $u = 0$ si $v = 0$.

III.1.2. Détermination des résistances R, R_1, R_2, R_3, R_4.

III.1.2.1. Déterminer R pour que T_0 soit saturé quand $i = 5$ A. Quelle est alors la puissance dissipée dans R ?

III.1.2.2. Quand T_0 et T_1 sont saturés, on choisit pour w la valeur $w = 3{,}6$ V. Le courant passant dans R_2 est alors de 10 mA. A quoi sert R_2 ? Calculer les valeurs de R_1 et R_2. En déduire les valeurs de R_3 et R_4.

III.1.2.3. i_s, le courant de sortie de l'amplificateur opérationnel, peut être positif ou négatif, mais, en valeur absolue, il ne peut pas dépasser 10 mA. La résistance R_4 convient-elle (la réponse doit être justifiée) ?

III.2. On admet que le flux magnétique dans la bobine et la charge stockée dans le condensateur restent sensiblement constants en régime permanent.

III.2.1. Montrer que la tension u est proportionnelle à v_1. Quelle valeur doit-on prendre pour e_{max} (fig. 11) si l'on désire que $u = U$ quand $v_1 = 5$ V ?

III.2.2. Représenter, pour $v_1 = 3$ V et $i = I = 3$ A, les graphes de $v_D(t)$, $i_E(t)$, $i_D(t)$.

III.3. Détermination des valeurs numériques de L et C.

III.3.1. On impose que le courant i ne varie que de 5 % autour de $I = 3$ A lorsque $v_1 = 3$ V. Déterminer la valeur de L, en supposant

$T = 10^{-4}$ S

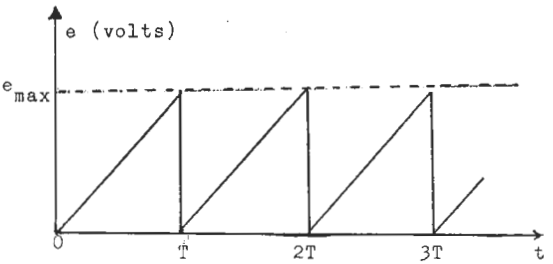


Fig. 11

que la résistance d'induit r et le condensateur de capacité C jouent un rôle négligeable dans la variation de $i(t)$.

III.3.2. Le rôle du condensateur de capacité C est de limiter la surtension en sortie en cas d'annulation brutale de l'intensité du courant circulant dans la charge. Quelle doit être la valeur de la capacité C pour que la tension u ne dépasse pas 55 V lorsque i s'annule brusquement, dans l'hypothèse la plus défavorable qui correspond, avant rupture du courant, à $i = 5$ A et $u = U = 50$ V ?

III.4. On étudie le comportement de G_1 associé au moteur, quand v_1 passe brutalement de 0 à 5 V. On admet que les temps de réponse de l'amplificateur opérationnel et des transistors sont très courts, en regard des durées des régimes transitoires intervenant dans L, C et le moteur.

III.4.1. Phase de décollage du moteur.

A la date $t = 0$, le moteur est arrêté et $u = 0$. Déterminer l'équation différentielle relative à $u(t)$ permettant d'établir le régime transitoire du système. Résoudre cette équation. Expliquer pourquoi ce régime se termine lorsque u atteint 6 V ?

III.4.2. Phase de démarrage proprement dite.

Etablir le système différentiel relatif aux deux variables u et ω. Peut-on obtenir l'allure de $u(t)$ et de $\omega(t)$ dans des conditions ? Conclusion.

SOLUTION

I

Dans cette partie, on étudie les caractéristiques de divers générateurs à courant continu, limités en puissance, et commandés par tension.

I.1.1. et I.1.2. Le générateur G_1 est une parfaite source de tension, c'est-à-dire un générateur de Thévenin avec une résistance de sortie nulle, et ceci seulement si le courant de sortie a une valeur inférieure à $i = 5$ A.

Cette source est commandée par une tension : $u = 10 \cdot v_1$.

L'amplification en puissance est obtenue en faisant le rapport :

$$A_p = \frac{u \cdot i}{v_1^2} \cdot R_e ;$$

sa valeur maximale est 10^7.

I.2.1. et I.2.2. Le générateur G_2 est une parfaite source de courant, commandée par une tension, c'est-à-dire un générateur de Norton avec une résistance de sortie infinie.

La valeur de s est de : $s = 1$ S.

La valeur maximale de l'amplification en puissance est 10^7.

La limite en tension de ce générateur est $u = 50$ V.

I.3.1. Le montage de l'amplificateur opérationnel dont la tension de sortie est v_1 est un montage amplificateur de différence :

$$v_1 = \frac{R'_0}{R_0} (v_2 - v_r).$$

On obtient facilement : $v_r = k\, r_0\, i$ et comme $R'_0/R_0 = 100$, d'où le résultat demandé.

I.3.2.1. Le calcul de v_{25} donne : $v_{25} = 5{,}0005$ V.

Pour $u = 50$ V, $v_1 = 5$ V et $i = 4{,}95$ A.

La caractéristique $u' = f(i)$ est une droite passant par les points ($i = 4{,}95$ A ; $u' = 49{,}5$ V) et ($i = 5$ A ; $u' = 0$ V).

I.3.2.2. On reprend les mêmes calculs.

$v_{23} = 3{,}0003$ V ; la nouvelle caractéristique $u' = f(i)$ passe par les points : ($i = 2{,}95$ A ; $u' = 49{,}7$ V) et ($i = 3$ A ; $u' = 0$ V).

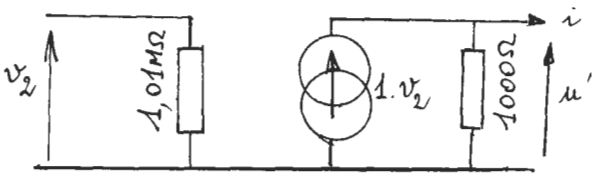
Pour toute valeur de v_2 comprise entre 0 et v_{25}, la caractéristique est une droite d'équation :

$$u' \approx 1\,000\,(v_2 - 1 \cdot i),$$

ou encore :

$$i \approx 1 \cdot v_2 - \frac{u'}{1\,000}.$$

La résistance interne de sortie du générateur de courant est de 1 000 ohms. G'_2 est donc une source de Norton réelle. La résistance d'entrée est sensiblement la même que celle de G_2.



I.3.2.3. Les caractéristiques de G_2 et G'_2 sont très voisines, surtout pour ce qui concerne la résistance d'entrée et la transconductance s.

II

II.1.1. Le couple résistant étant constant, et le moteur fonctionnant à vitesse constante, le couple moteur est égal au couple résisant et reste alors constant :

$$C_m = C_r = K \cdot i \; ; \qquad \text{d'où :} \qquad I = 3 \text{ A}.$$

En écrivant que $E = u - r\,i$, on obtient :

$$\omega = 100\, v_1 - 60.$$

Pour $\omega = 0$, $\quad u = 6$ V.

Pour $u = 50$ V, $\quad \omega = 440$ rad/s.

II.1.2. La seule valeur de v_2 pouvant convenir est $v_2 = 3$ V ; mais la tension u ne pouvant pas être déterminée, la vitesse ne peut pas l'être non plus ; il y a alors instabilité de la vitesse.

II.1.3. La caractéristique $\omega = f(v_2)$ est une droite caractérisant un réglage difficile de la vitesse :

$$\omega = 10^4 \cdot v_2 - 30\,060.$$

Pour $\omega = 0$, $v_2 = 3{,}006$ V.

Pour $\omega = 440$ rad/s, $v_2 = 3{,}05$ V.

Pour améliorer le réglage de vitesse de ce montage, la solution la plus intéressante est l'asservissement de vitesse. Une dynamo tachymétrique (ou tout autre capteur) fournit une tension proportionnelle à la vitesse qui est comparée à une tension de consigne, et le résultat de cette comparaison intervient sur la tension de commande du générateur, v_2.

Si l'asservissement est bien réglé, on peut obtenir de cette manière un réglage assez précis de la vitesse.

II.2.1. Equations de fonctionnement du moteur en régime transitoire :

$$J \frac{d\omega}{dt} = K \cdot i - C_r$$

$$u = K \cdot \omega + r \cdot i.$$

Si la limitation de courant n'intervient pas :

L'intensité du courant à l'instant du démarrage atteint 25 A.

L'équation différentielle à résoudre est :

$$\frac{rJ}{K^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{U}{K} - \frac{r \cdot C_r}{K^2}.$$

On pose $\tau = \dfrac{r \cdot J}{K^2}$ et on obtient : $\omega = 440\,(1 - e^{-t/\tau})$.

Le temps de démarrage t_d est peu différent de $t_d = 3\,\tau = 3$ s.

Si la limitation de courant intervient :

$i \leqslant 5$ A pendant la phase du démarrage.

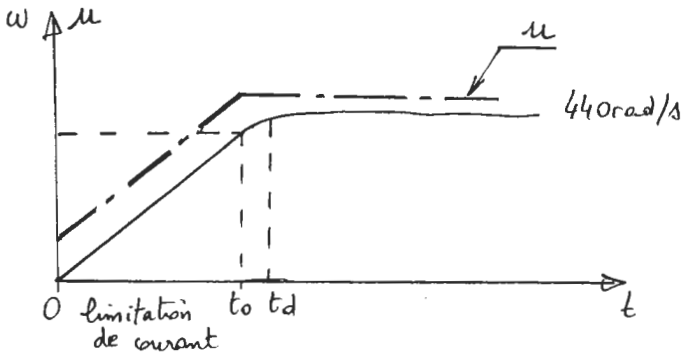
$$J \frac{d\omega}{dt} = K \cdot i - C_r = 0{,}2\,; \qquad \frac{d\omega}{dt} = 40 \text{ rad/s}^2.$$

L'accélération du moteur est constante tant que l'intensité i du courant ne descend pas au-dessous de 5 A, et ceci intervient quand $u = 50$ V, la vitesse étant alors de 400 rad/s.

Au-delà de cette vitesse, l'équation différentielle du cas précédent s'applique, avec des valeurs initiales différentes.

La limitation de courant intervient pendant $t = t_0 = 10$ s ; on désigne t' par $t' = t - t_0$; alors :

$$\omega = 440 - 40\ e^{-t'/\tau}.$$



Le temps de démarrage t_d est alors de 10,6 s.

II.2.2. La croissance de la tension n'étant pas instantanée, il faut calculer le temps t_1 nécessaire pour obtenir le décollage du moteur et le temps t_2 pour que l'intensité i passe de la valeur 3 A (phase de décollage du moteur) à 5 A (limitation de courant).

Calcul de t_1 :

$r\,i = 6$ V $= 50\,(1 - e^{-t_1/\tau_1})$ soit $t_1 = 13$ ms.

Durée de la phase t_2 :

i passe de 3 à 5 A.

On aboutit à l'équation différentielle :

$$i + \tau \cdot \frac{di}{dt} = \frac{C_r}{K} + \frac{\tau}{r} \cdot \frac{du}{dt} = 3 + 500 \cdot e^{-t/\tau_1}$$

ce qui permet de déterminer l'expression de i :

$$i = 3 + 55{,}5\ (e^{-t/\tau} - e^{-t/\tau_1}).$$

En faisant un développement limité autour de $t = 0$, on trouve : $t_2 \simeq 4$ ms.

Par rapport au cas précédent, le temps de démarrage n'est modifié que de $t_1 + t_2 = 17$ ms, ce qui est fort peu devant 10,6 s.

II.3.1. L'étude de ce cas est identique à celle du § II.2.1. et le temps de démarrage est le même.

II.3.2. Le moteur ne démarre que pour i supérieur à 3 A. Pendant cette phase de décollage, la variation de i est donnée par :

$$i = 5\,(1 - e^{-t/\tau_2}).$$

La durée de cette phase est $t_0 = 0{,}183$ s.

Phase de démarrage : on pose $t' = t - t_0$.

L'équation différentielle sera :

$$\frac{d\omega}{dt'} = 40 - 40\,e^{-t'/\tau_2}.$$

La solution de cette équation est alors :

$$\omega = 40\,t' + 8\,(e^{-t'/\tau_2} - 1).$$

La valeur de i devient inférieure à 5 A dès que la tension u atteint la valeur $u = 50$ V ; la vitesse est alors de $\omega = 400$ rad/s.

Le temps t'_0 nécessaire pour atteindre cette vitesse ne peut être directement déterminé par le calcul. On peut le trouver graphiquement, ou par le calcul numérique, de manière approximative :

$$t'_0 \simeq 10{,}2 \text{ s}.$$

La phase suivante dure 0,6 s comme pour le démarrage étudié au § II.2.1.

Le temps total de démarrage sera :

$$t_d = t_0 + t'_0 + 0{,}6 = 11 \text{ s}.$$

Conclusion :

Les régimes transitoires des sources étant très rapides devant la constante de temps τ du moteur, ils n'ont que peu d'influence sur le temps de démarrage de celui-ci. Par contre, la limitation du courant d'une source de tension augmente le temps de démarrage.

III

III.1. Si $v_1 = 0$, alors V_s a une valeur négative ; les transistors T_2, T_1, T_0 sont alors bloqués. La valeur de u est nulle.

III.1.2.1. Valeur de R : 100 ohms. Puissance dissipée : P = 25 W.

III.1.2.2. La résistance R_2 sert à l'évacuation des charges stockées dans la base du transistor T_1 au moment de la commutation saturation - blocage.

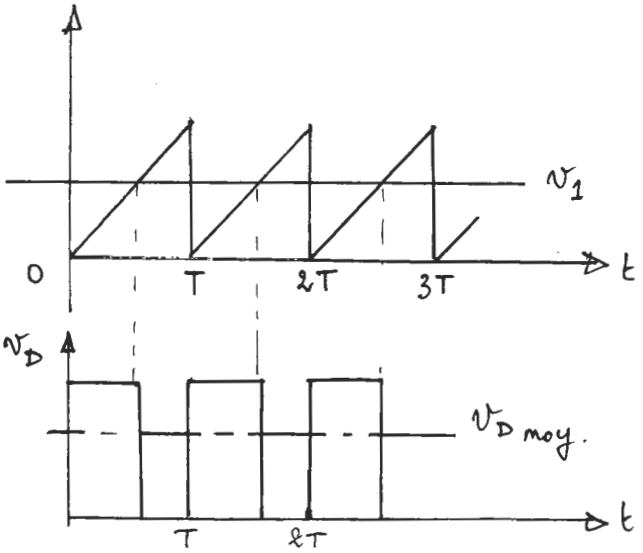
Les calculs donnent les résultats suivants :

$R_2 = 60$ ohms ; $R_1 = 50$ ohms ; $R_3 = 211$ ohms ;

$R_4 = 1{,}63$ kΩ.

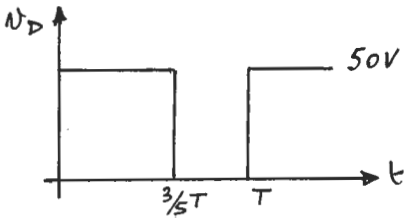
III.1.2.3. Quand la tension V_s a une valeur négative de -14 V, l'intensité du courant i est de $-8{,}5$ mA. Le limiteur de courant de l'amplificateur opérationnel n'intervient pas.

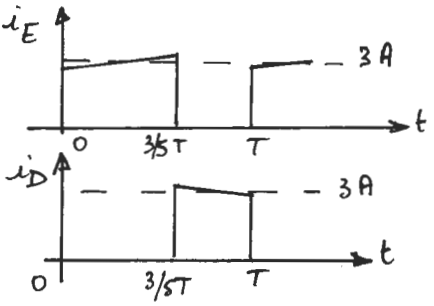
III.2.1. La valeur de u est la valeur moyenne de la tension $v_D(t)$, car le circuit L-C réalise un filtrage passe-bas (parfait). La valeur moyenne de V_D est elle-même proportionnelle à v_1 comme le montrent les courbes suivantes :



Pour $u = U = 50$ V, $v_1 = 5$ V $= e_{max}$.

III.2.2. Graphes de $v_D(t)$, $i_E(t)$ et $i_D(t)$.





Valeur moyenne de $V_D = u = 30$ V.

III.3.1. $u = 30$ V et le rapport cyclique est 0,6. D'où : $L \dfrac{di}{dt} = 20$ V.

La croissance de i est linéaire, ce qui donne encore :

$$\boxed{L = 20 \cdot \frac{\Delta t}{\Delta i} = 40 \cdot T} \quad (\Delta t = 0{,}6\ T\ ;\ \ \Delta i = 0{,}3\ A).$$

Pour $T = 10^{-4}$ s, $L = 4$ mH.

III.3.2. Dans la bobine d'inductance L, l'énergie stockée est :

$$W_s = 0{,}5 \cdot L\, i^2 = 0{,}05\ J.$$

Au moment de l'annulation du courant, cette énergie est transférée au condensateur C. La variation d'énergie électrostatique du condensateur est égale à W_s :

$$\Delta W_c = \Delta W_s = 0{,}5\ C\,(U + 5)^2 - 0{,}5\ C\ U^2$$

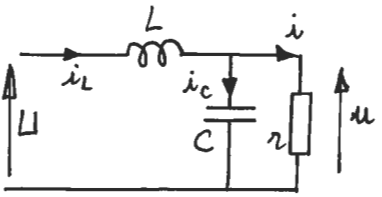
avec $U = 50$ V ; on en déduit :

$$\boxed{C = 190\ \mu F.}$$

III.4.1. Phase de décollage du moteur :

$$U = L\,(di_L/dt) + u$$

$$i_L = i_c + i.$$



L'équation différentielle est alors :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{r} \frac{du}{dt} + u = U.$$

La solution de cette équation différentielle avec les valeurs initiales $u = 0$ et $i = 0$ à $t = 0$:

$$u(t) = -127\,[\exp(-1{,}51 \cdot 10^{-3}\,t)] + 77\,[\exp(-2{,}5 \cdot 10^{-3}\,t)]. + 50$$

Pour u ayant une valeur supérieure à 6 V, le couple moteur devient supérieur au couple résistant C_r.

III.4.2. Deux équations différentielles sont nécessaires pour déterminer le fonctionnement du système.

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{r} \frac{du}{dt} + u = U + \frac{LK}{r} \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$$K \frac{u}{r} = J \frac{d\omega}{dt} + \frac{K^2}{r} \omega + C_r.$$

En utilisant la transformation de Laplace, on constate que le déterminant du système est du 3e ordre. On ne peut donc pas trouver directement la solution pour $u(t)$ et $\omega(t)$. Une approche de la solution est possible par calcul numérique.

Mais, en constatant que les régimes transitoires intervenant dans L, r et C sont très rapides devant τ, on peut simplifier cette étude en séparant les deux régimes transitoires c'est-à-dire considérer que la f.é.m. du moteur reste constante quand les courants i_L et i_C évoluent, et que, seule la variation en moyenne de i_L (et de i) va intervenir pour le démarrage du moteur.

Michel PINARD.

Agrégation de sciences physiques

PROBLEME DE PHYSIQUE

SESSION DE 1984

Option : Physique

Epreuve C

COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 6 heures)

Il n'y a pas à distribuer de papier millimétré.

L'épreuve est divisée en deux parties, A et B, complètement indépendantes :

— la première est constituée par un problème de formulation classique ; il réunit un certain nombre de questions qu'un professeur peut se poser à l'occasion de la lecture de différents ouvrages traitant de l'expérience de Fizeau ;

— la partie B propose en fait un thème d'étude : en l'occurrence un appareil de mesure des vitesses verticales, utilisé en aéronautique, et connu sous le nom de « variomètre ». Contrairement aux problèmes traditionnels, il est ici demandé aux candidats d'analyser eux-mêmes le dispositif en question, d'en offrir une modélisation mathématique simple, puis de tirer de celle-ci diverses conséquences quant au fonctionnement de l'appareil et à l'influence sur ses performances de diverses grandeurs qui le caractérisent. Un tel exercice demande donc aux candidats de manifester un esprit certain d'initiative dans la conduite de leur étude.

Signalons qu'il est prévu de réserver à la partie A environ 70 % des points et, par suite, à la partie B sensiblement 30 % de la note totale.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives personnelles qu'il est amené à prendre pour cela.

PARTIE A

Il s'agit de discuter de certains aspects théoriques et expérimentaux de l'expérience bien connue de Fizeau (1851) sur la propagation de

la lumière dans un liquide en mouvement. Rappelons que les résultats de Fizeau ont servi d'abord à corroborer une formule heuristique établie par Fresnel dans le cadre de la théorie de l'Ether. Cette formule a ensuite été justifiée par Lorentz (1895) dans le cadre de la théorie électromagnétique de Maxwell. Retrouvée par von Laue (1907) comme conséquence de la cinématique relativiste d'Einstein, elle a été considérée par Einstein lui-même comme « un test crucial en faveur de la Relativité ».

La partie I est consacrée à une étude expérimentale de l'expérience originale de Fizeau dans ses aspects optiques et hydrodynamiques. La partie II reprend le calcul de Lorentz tel qu'il est expliqué dans certains ouvrages d'électromagnétisme. La partie III reprend celui de von Laue et s'intéresse à une polémique qui concerne l'effet de la dispersion. Dans la partie IV on se demande si le résultat de l'expérience de Fizeau ne peut pas être expliqué dans le cadre de la cinématique galiléenne. L'ensemble des questions posées correspond à peu près aux questions que rencontre un professeur à la lecture des différents livres sur le sujet.

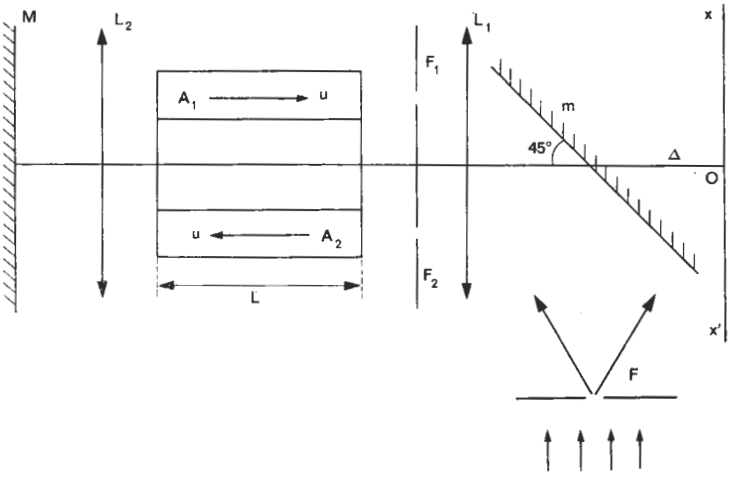


Fig. 1

I. L'expérience de Fizeau

Le dispositif de Fizeau est représenté sur la fig. 1. Il comporte une fente source très fine F, disposée perpendiculairement au plan de figure ; une glace sans tain *m* incliné à 45° sur la direction Δ en donne une image située dans le plan focal de l'objectif L_1 d'une lunette. F_1 et F_2 représentent deux fentes perpendiculaires au plan de figure, disposées symétriquement par rapport à Δ et dans l'axe de deux tubes de verre cylindriques A_1 et A_2, identiques, de diamètre intérieur 5,3 mm, fermés à chaque extrémité par une seule glace fixée avec de la gomme

laque dans une position perpendiculaire à Δ. Les tubes A_1 et A_2 sont parcourus par des courants d'eau sur une longueur $L = 1{,}487$ m, identique pour A_1 et A_2, de vitesses opposées et de valeur arithmétique commune u. L'entrée et la sortie de l'eau pour chaque tube ne sont pas représentées sur la fig. 1. M est un miroir plan orthogonal à Δ et situé dans le plan focal de la lentille convergente L_2. La largeur commune des fentes F_1 et F_2 est $b = 1{,}5$ mm ; la distance d qui sépare leurs centres est de 9 mm. La distance focale image de L_1 est $f' = 1$ m.

I.1. On suppose d'abord que l'eau est immobile dans les deux tubes A_1 et A_2 et que la fente source F est éclairée avec une lumière monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 0{,}5$ µm.

I.1. *a*) Tracer qualitativement une courbe représentant la distribution de l'intensité lumineuse dans le voisinage de O, foyer principal image de L_1, le long d'une droite $x'Ox$ appartenant à la fois au plan focal de la lentille L_1 et au plan de la fig. 1. L'axe $x'Ox$ sera gradué en tenant compte des données expérimentales et on indiquera les abscisses de quelques points remarquables.

I.1. *b*) Quel est le dispositif commode pouvant être employé pour observer les franges dans ce plan ?

I.2. Afin de rendre les franges plus larges qu'elles ne le sont avec la distance de 9 mm, Fizeau place devant l'une des fentes une lame de verre très épaisse qu'il peut incliner à volonté et comme il l'écrit : « on peut ainsi donner aux franges des dimensions variables et choisir celle qui est la plus convenable pour les observations ».

I.2. *a*) Calculer un couple de valeurs numériques raisonnables pour l'épaisseur e de la lame (indice 1,5) et son angle d'inclinaison qui permet de rendre les franges deux fois plus larges. On rappelle qu'une lame à faces parallèles d'épaisseur e, d'indice n, introduit une différence de marche optique supplémentaire $\delta = e\,(\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i)$ pour un rayon lumineux d'angle d'incidence i.

I.2. *b*) Dans les ouvrages d'optique de l'époque, l'effet de la lame n'est pas analysé, comme en I.2. *a*), en termes de déphasage supplémentaire. On se borne à indiquer que l'introduction de la lame revient à rapprocher (ou écarter) les fentes. Justifier sommairement cette indication à l'aide d'une figure.

I.3. Dans son compte rendu de 1851, Fizeau indique que son dispositif est éclairé avec la lumière solaire et que l'établissement des courants d'eau provoque un déplacement des franges expérimentalement proportionnel à la vitesse u. Il donne comme valeurs des déplacements, toutes ramenées à une même vitesse $u = 7{,}069$ m. s^{-1} et rapportées à la largeur d'une frange prise comme unité, la suite ci-après relative à 19 expériences : 0,200 - 0,220 - 0,240 - 0,167 - 0,171 - 0,225 - 0,247 - 0,225 - 0,214 - 0,230 - 0,224 - 0,247 - 0,224 - 0,307 - 0,307 - 0,256 - 0,240 - 0,240 - 0,189. Il utilise ces valeurs pour tester deux expressions différentes proposées avant lui et donnant la vitesse de la lumière v dans le laboratoire, lorsque le milieu d'indice n dans lequel elle se propage est entraîné à la vitesse u. Ces expressions sont respectivment

$v = \dfrac{c}{n} + u$ et $v = \dfrac{c}{n} + u\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$, cette dernière formule étant due à Fresnel ; (c représente la vitesse de la lumière en l'absence de milieu matériel). Il prend comme longueur d'onde la valeur $\lambda = 0{,}526$ µm (raie E du soleil) et pour indice de l'eau $n = 1{,}337$.

I.3. *a*) Montrer que les résultats expérimentaux favorisent la formule de Fresnel.

I.3. *b*) A votre avis quelle est la raison du choix par Fizeau de la valeur $\lambda = 0{,}526$ µm sachant que pour des expériences similaires faites antérieurement avec de l'air, il retenait la valeur $\lambda = 0{,}589$ µm (raie D du soleil) ? Dans quel domaine pensez-vous qu'il est raisonnable de choisir λ ?

I.4. On veut étudier l'écoulement de l'eau dans l'un des tubes cylindriques A_1 ou A_2 de rayon a, disposé horizontalement. On suppose qu'un régime moyen indépendant du temps est établi. L'eau est incompressible, de masse volumique ϱ et de coefficient de viscosité η. On désigne par v_0 la vitesse de l'eau sur l'axe du tube. On montre que, dans les conditions précisées précédemment, la loi de répartition de la vitesse d'écoulement de l'eau $v(r)$ en fonction de la distance r à l'axe du tube ne dépend que de ϱ, η, a et v_0. Avec ces quatre dernières quantités on peut former un nombre R_e sans dimension et proportionnel à v_0, appelé nombre de Reynolds. L'expérience montre que pour $R_e < 10^3$ l'écoulement est laminaire et que pour $R_e > 10^3$ l'écoulement laminaire est instable et devient turbulent ; dans le premier cas la loi de répartition est $v(r) = v_0\left(1 - \dfrac{r^2}{a^2}\right)$ et dans le second elle peut être approchée par une loi de la forme $v(r) = v_0\left(1 - \dfrac{r}{a}\right)^n$ avec n de l'ordre de 1/6 pour $R_e < 10^4$ et n de l'ordre de 1/7 pour $10^4 < R_e < 10^5$.

I.4. *a*) On pose $E_c = \dfrac{1}{2}\varrho\, v_0^2\, a^3$. Interpréter physiquement cette grandeur. Le nombre de Reynolds peut se mettre sous la forme $R_e = \dfrac{2\,E_c}{W}$.

Exprimer W et l'interpréter physiquement.

I.4. *b*) Quelle est la nature de l'écoulement dans l'expérience de Fizeau sachant qu'il a utilisé des vitesses comprises entre 3,7 m. s^{-1} et 7 m. s^{-1} ? On donne la valeur du coefficient de viscosité cinématique de l'eau à 20 °C $\nu = \eta/\varrho = 10^{-6}$ m^2. s^{-1} ; on rappelle que $2\,a = 5{,}3$ mm.

I.4. c) Fizeau mesure en fait une vitesse moyenne de l'eau à partir du débit et estime que pour calculer une meilleure valeur théorique du déplacement des franges il faut multiplier cette vitesse par un facteur de l'ordre de 1,15 à 1,23. Que pensez-vous de cette correction ?

II. Dérivation de la formule de Fresnel a partir des équations de Maxwell

On rappelle les équations de Maxwell écrites, avec les notations usuelles, dans un référentiel d'inertie R :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \mathbf{rot}\ \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \end{cases}$$

P est le vecteur polarisation et **M** le vecteur intensité d'aimantation.

On considère un milieu diélectrique homogène, linéaire, parfaitement transparent, d'indice n. Lorsque ce milieu est au repos, on a $\varrho \equiv 0$, $\mathbf{j} \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{M} \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$ ($\varepsilon_r = n^2$). Lorsque ce milieu auquel on attache le référentiel R*, est en mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse **u** par rapport à R, on a encore $\varrho \equiv 0$, $\mathbf{j} \equiv \mathbf{0}$. On suppose que $\|\mathbf{u}\| = u$ est petit devant c ; dans ces conditions les dipôles électriques en mouvement voient dans leur référentiel R* un champ électrique $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}$ (loi de transformation des champs) et la polarisation dans R* est donc $\mathbf{P}^* = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}^*$.

II.1. *a*) Dire pourquoi la polarisation **P** (densité de vecteurs dipolaires) dans R est égale à $\mathbf{P}^*$.

II.1. *b*) Expliquer, au besoin avec l'exemple le plus simple, que des dipôles électriques en mouvement à la vitesse **u** font apparaître dans R des moments magnétiques et que plus précisément l'intensité d'aimantation dans R est $\mathbf{M} = \mathbf{P}^* \wedge \mathbf{u}$.

II.2. Les équations de Maxwell dans le milieu sont donc devenues dans le référentiel R :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \qquad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0$$

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \mathbf{rot}\ \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{P} \wedge \mathbf{u} \\ \mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)(\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \end{cases}$$

La dépendance spatio-temporelle des vecteurs **E**, **B**, **D**, **H**, **P**, **M** est supposée de la forme $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$.

II.2. *a*) Montrer que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$.

II.2. *b*) En exprimant **E**, **P**, **H** en fonction de **D**, **B** et **u** et en négligeant des termes en $\dfrac{u^2}{c^2}$, établir les relations :

$$-\mathbf{k} \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left[\omega - \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{D}$$

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \left[\omega - \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{B}$$

II.2. *c*) Montrer que lorsque **k** est parallèle à **u**, on retrouve la formule de Fresnel.

III. Dérivation de la formule de Fresnel a partir de la relativité d'Einstein

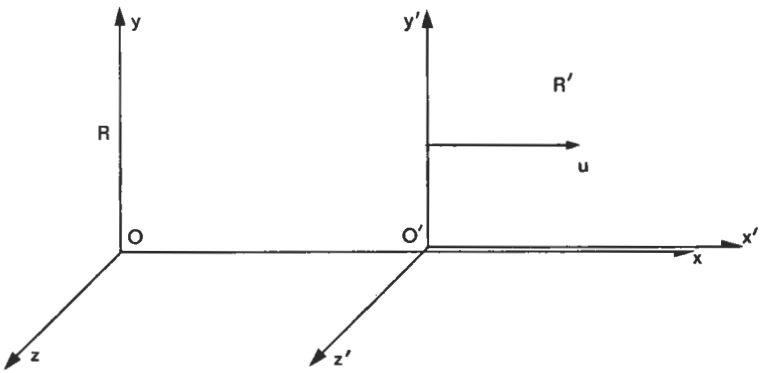


Fig. 2

On considère un milieu transparent d'indice n en mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse u le long de l'axe Ox du référentiel du laboratoire R (Oxyz). On désigne par R' (O'$x'y'z'$) le référentiel attaché à ce milieu, l'axe O'x' étant confondu avec Ox. Une onde lumineuse plane progressive harmonique se propage dans le milieu et dans la direction Ox ; son champ électrique s'écrit dans le référentiel R : $\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$ et dans le référentiel R': $\mathbf{E}'(x', t') = \mathbf{E}'_0 e^{i(k'x' - \omega' t')}$.

On rappelle les formules de la transformation spéciale de Lorentz :

$$x = \gamma (x' + u' t'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma \left(t' + \frac{ux'}{c^2} \right)$$

en posant $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$.

III.1. *a*) Montrer que dans ce problème particulier de propagation à une dimension la loi de transformation des vitesses de phase est la même que celle des vitesses d'une particule matérielle.

III.1. *b*) On suppose que u est petit devant c ; retrouver la formule de Fresnel donnée en I.3.

III.2. La formule de Fresnel ne tient pas compte de la dispersion. Selon les auteurs, on rencontre les formules suivantes pour la vitesse de phase v_φ dans le laboratoire :

$$v_\varphi = \frac{c}{n(\lambda)} + u\left(1 - \frac{1}{n^2(\lambda)} - \frac{\lambda}{n(\lambda)}\frac{\partial n(\lambda)}{\partial \lambda}\right) \qquad (1)$$

$$v_\varphi = \frac{c}{n(\lambda)} + u\left(1 - \frac{1}{n^2(\lambda)} - \frac{\lambda}{n^2(\lambda)}\frac{\partial n(\lambda)}{\partial \lambda}\right) \qquad (2)$$

$\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$ étant la longueur d'onde de l'onde lumineuse dans le référentiel du laboratoire et dans le vide.

III.2. *a*) La correction introduite par les effets de dispersion peut-elle être testée sur les résultats expérimentaux obtenus par Fizeau ? (On donne pour l'eau entre $\lambda = 0{,}670$ µm et $\lambda = 0{,}420$ µm, $n(\lambda) = 1{,}3610 - 4{,}51 \cdot 10^{-2}\,\lambda$.)

III.2. *b*) Une très grande majorité d'auteurs (Pauli, Becker, Synge, Sommerfeld, Laub, Möller) affirment que la formule (1) est celle qui s'appliquerait à l'expérience de Fizeau. L'argumentation donnée est la suivante : dans le référentiel R du laboratoire et dans l'eau, la pulsation de l'onde lumineuse garde la valeur ω, c'est-à-dire la valeur de la pulsation dans le laboratoire et dans l'air avant qu'elle ne pénètre dans les tubes A_1 et A_2 décrits au I ; elle devient :

$$\omega'_1 = \omega\left(1 - \frac{nu}{c}\right)$$

dans le référentiel R' lié à l'eau et dans l'eau. Justifier ces deux affirmations et retrouver la formule (1).

III.2. *c*) Laub (1908) et Synge (1955) affirment que la formule (2) doit être appliquée si le milieu en mouvement se déplace en bloc comme un solide (fig. 3), car alors la pulsation dans le référentiel R' vaut, que ce soit dans le vide ou dans le milieu, $\omega'_2 = \omega\,(1 - u/c)$.

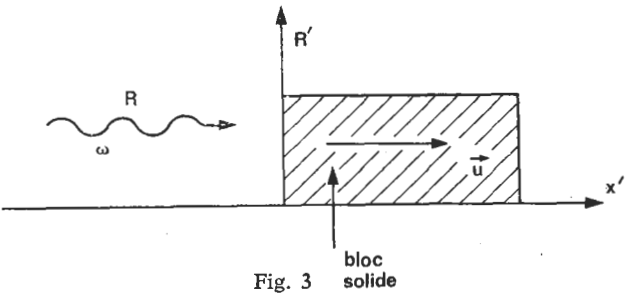


Fig. 3

Justifier les affirmations de Laub.

III.2. *d*) Plus récemment Lerche (1977) dans la revue *American Journal of Physics* a mis en doute le raisonnement de Laub parce que, dit-il en particulier, « on ne voit pas pourquoi il peut y avoir une différence pour un solide en mouvement uniforme et pour un liquide en mouvement uniforme ».

Quelle est en fait la différence fondamentale entre l'expérience (pensée) de Laub et l'expérience de Fizeau qui explique l'écart entre les formules (1) et (2) ? Calculer, pour l'expérience de Laub, la pulsation dans le milieu, en un point fixe, par rapport à R et expliquer pourquoi elle n'est pas égale à ω.

IV. Dérivation de la formule de Fresnel a partir de la cinématique galiléenne et d'un modèle atomique. Discussion

On appelle R ($Oxyz$) un référentiel où la lumière (photons) se propage à la vitesse c en l'absence de milieu matériel.

On adopte pour le milieu (référentiel R_0 d'axe x'_0x_0 confondu avec Ox) un modèle simplifié à une dimension. Les atomes réduits à des points sont régulièrement espacés d'une longueur l_0 (dans R_0) le long de l'axe x'_0x_0 et sont rigidement liés. Les photons se déplacent le long de Ox en allant d'un atome à l'autre et lorsqu'un atome reçoit un photon, il ne le réémet qu'après un intervalle de temps τ_0 (dans R_0).

IV.1. Le milieu est au repos dans R. La vitesse de la lumière est la vitesse moyenne des photons. Exprimer l'indice n du milieu en fonction de l_0, c et τ_0.

IV.2. Le milieu a une vitesse u par rapport à R et on adopte la cinématique galiléenne.

IV.2. *a*) Calculer la vitesse moyenne des photons dans R et montrer qu'elle est égale au premier ordre en u/c à celle donnée par la formule de Fresnel $\left[v = \dfrac{c}{n} + u\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)\right]$.

IV.2. *b*) Montrer que dans un référentiel R' (laboratoire) en mouvement le long de Ox à la vitesse w par rapport à R, la vitesse moyenne des photons peut s'écrire $v' = \dfrac{c'}{n'} + u'\left(1 - \dfrac{1}{n'^2}\right)$ avec $u' = u - w$, c' désignant la vitesse de la lumière dans R' en l'absence de milieu matériel ; (on suppose w, comme u petit devant c). Que représente n' ?

IV.3. On reprend le modèle atomique précédent dans le cadre de la cinématique relativiste d'Einstein. Calculer la vitesse moyenne des photons dans le référentiel R.

IV.4. L'expérience de Fizeau vous paraît-elle constituer un test crucial pour la relativité d'Einstein ?

PARTIE B

Comme on l'a annoncé en introduction, cette deuxième partie de l'épreuve innove en ce qu'elle ne fournit pas le canevas habituel d'un ensemble de questions arrangées en séquence : c'est aux candidats eux-mêmes qu'il appartient d'organiser l'étude du thème soumis à leur réflexion, et la présentation des résultats obtenus. L'énoncé ne précise que les objectifs à atteindre et n'impose que quelques contraintes de formes, indispensable à la compréhension des correcteurs.

THÈME DE L'EXERCICE.

Le dispositif étudié est le « variomètre » auquel on demande une mesure de la vitesse verticale d'un avion $v_z = \dfrac{dz}{dt}$, vitesse qui sera supposée ne pouvoir atteindre que quelques mètres par seconde tout au plus.

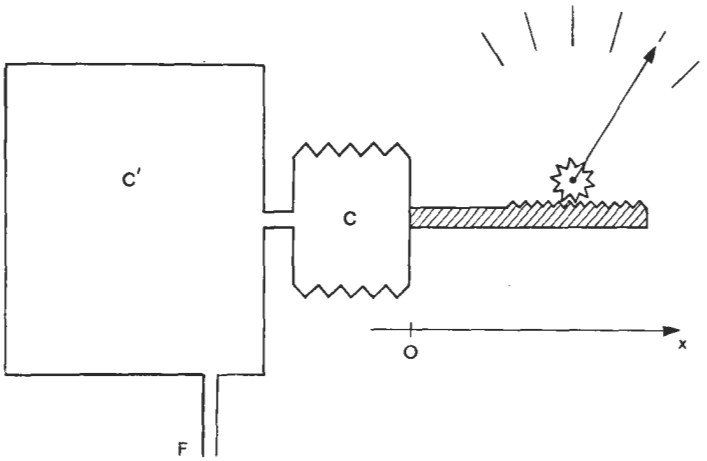


Fig. 4

Le schéma de principe est donné sur la fig. 4 : une capsule manométrique C est connectée à un réservoir rigide C' qui communique avec l'atmosphère extérieure par une fuite F, constituée par un tube capillaire cylindrique. Les déplacements x du fond mobile de la capsule sont transcrits sur le cadran de lecture de l'appareil après une amplification mécanique adéquate (schématisée ici par un système crémaillère-roue dentée).

Pour mieux se représenter l'appareil, on pourra assimiler la capsule C à celle d'un baromètre anéroïde du commerce. On supposera naturellement qu'elle fonctionne sans sortir de son domaine d'élasticité.

Le principe de l'appareil est de profiter des variations de la pression atmosphérique p_a avec l'altitude z : on admettra que ces variations sont linéaires et caractérisées par la dérivée $\frac{dp_a}{dz} \approx -12$ Pascal. m^{-1}. On supposera en outre l'atmosphère isotherme.

ETUDE A EFFECTUER.

a) Faire d'abord une analyse qualitative succincte pour montrer que le dispositif va effectivement donner une déviation si la vitesse verticale de l'avion passe de la valeur $v_z = 0$ à une valeur $v_z \neq 0$. Indiquer, de nouveau qualitativement, comment cette déviation s'établit au cours du temps.

b) Passer à une *analyse quantitative*, en lui fixant comme buts de :

(*i*) Caractériser le dispositif par une sensibilité et un temps de réponse que l'on définira.

A cette fin, on établira une relation différentielle simplifiée entre la fonction $v_z(t)$ et la fonction $x(t)$ qui va définir la « réponse » du variomètre comme instrument de mesure de v_z.

L'écoulement de l'air dans le capillaire F sera décrit comme un écoulement laminaire d'un fluide visqueux incompressible ; la « loi de Poiseuille » correspondante est rappelée à la fin du présent texte. On reviendra sur cette description pour en discuter la validité, mais en fin d'épreuve seulement.

On supposera de plus que les transformations de l'air contenu dans l'ensemble de C et C' sont isothermes ; de nouveau cette hypothèse sera réexaminée à la fin de l'étude.

(*ii*) Indiquer comment on doit faire évoluer la sensibilité et le temps de réponse pour améliorer les performances de l'appareil, et comment l'on doit, en conséquence, choisir ses différentes caractéristiques. Des compromis doivent-ils être admis ? Si oui, lesquels ?

(*iii*) Proposer finalement un ensemble de valeurs optimisées au mieux pour les diverses caractéristiques de l'appareil (volumes, surface de la partie mobile de la capsule, dimensions du capillaire, etc.), et préciser les performances correspondantes (sensibilité, temps de réponse).

Il conviendra de préciser soigneusement les conditions de cette analyse et, en particulier :

— d'indiquer clairement les éléments de modélisation qui ont été retenus et les raisons d'être de cette modélisation ;

— de définir les grandeurs que l'on fait intervenir et indiquer le plus tôt possible leurs ordres de grandeur provisoirement adoptés, en ayant constamment le souci que les valeurs numériques soient compatibles avec une réalisation concrète du dispositif ;

— d'établir les équations qui lient ces grandeurs, en précisant leurs conditions d'intervention et leurs limites de validité éventuelles ;

— de justifier les approximations faites, en particulier en discutant des ordres de grandeur relatifs de diverses grandeurs comparables ; (on rappelle qu'il est courant pour un physicien de faire des approximations, compte tenu des objectifs poursuivis, et de ne les justifier qu'à la fin de son calcul).

Il est demandé aux candidats d'expliciter clairement comment ils placent les uns par rapport aux autres, par ordre de grandeur, le volume du réservoir C', celui de la capsule C, et les variations du volume de C. Constate-t-on des différences qui induisent certaines approximations ? On justifiera celles-ci en en précisant soigneusement les limites éventuelles.

La rédaction peut fournir tous les éléments nécessaires sans atteindre un développement indû : 1 500 à 2 500 mots suffisent parfaitement à la présentation d'une analyse qui satisfasse pleinement les attentes des correcteurs compte tenu des conditions de l'épreuve.

c) Terminer en réexaminant :

1° L'hypothèse d'un régime d'écoulement laminaire de fluide visqueux et incompressible dans la fuite capillaire F. Cette hypothèse est-elle admissible et, si oui, pourquoi ?

2° L'hypothèse de transformations isothermes du gaz contenu dans la capsule. Est-elle justifiée ? Que deviendraient les résultats précédemment obtenus si ces transformations étaient adiabatiques et réversibles ?

Indications complémentaires.

On rappelle la relation suivante, caractéristique de l'écoulement dans un tuyau cylindrique, en régime laminaire, d'un fluide visqueux et incompressible : si Δp est la différence de pression entre les deux extrémités du tuyau (Δp étant très inférieure à la pression moyenne dans le fluide), si l'on note l et d respectivement la longueur et le diamètre de celui-ci, et si l'on désigne par Q le débit en volume — c'est-à-dire la quantité $\frac{dV}{dt}$ où dV est le volume de fluide qui traverse une section droite dans le temps dt —, alors on peut poser :

$$Q = \frac{\pi}{128} \frac{d^4}{\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l}.$$

Dans le cas de l'air sous les conditions normales, la viscosité η est de l'ordre de $1{,}8\ 10^{-5}$ SI. On sait que la stabilité d'un écoulement laminaire n'est assurée que lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à une valeur de l'ordre de 10^2.

On rappelle par ailleurs, à toutes fins utiles, que la « masse molaire » de l'air est de 29 grammes environ, et que la conductivité thermique de ce gaz est de $2{,}4\ 10^{-2}$ SI.

SOLUTION

Les auteurs de cette solution remercient M. l'Inspecteur Général GIÉ pour avoir relu ce texte et en avoir amélioré la rédaction par des remarques pertinentes.

Afin de ne pas alourdir le texte, certaines remarques, éclaircissant des points du corrigé, mais non exigées de la part des candidats, ont été reportées à la fin.

PARTIE A

I. L'EXPÉRIENCE DE FIZEAU

I.1. *a*) On suppose que la diffraction par les fentes F_1 et F_2 lors du parcours aller de la lumière peut être négligée (voir *Remarque 1*). On observe alors, dans le plan focal image $x'Ox$ de la lentille L_1, la figure d'interférences - diffraction « à l'infini » des deux fentes d'Young F_1 et F_2. Dans la direction caractérisée par l'angle $\alpha = \dfrac{x}{f'}$ (fig. 1), l'intensité lumineuse est le produit d'un terme d'interférence $1 + \cos\varphi$ [$\varphi = 2\pi \dfrac{\alpha d}{\lambda}$: dépha-

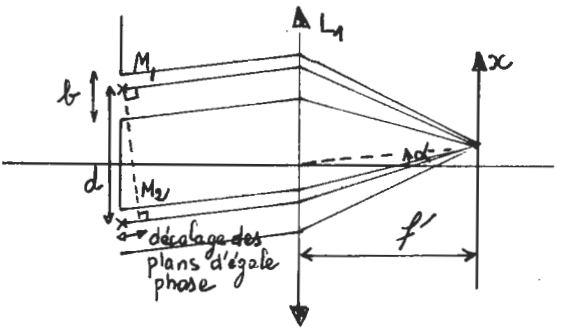


Fig. 1

sage entre les amplitudes associées à deux éléments correspondants M_1 et M_2 distants de d des fentes F_1 et F_2] et d'un terme de diffraction proportionnel à $\sin c^2 \left(\pi \dfrac{\alpha b}{\lambda}\right)$ (ce terme s'annule chaque fois que αb, différence de marche associée aux deux extrémités d'une fente, est multiple de λ).

L'interfrange i est tel que $\frac{i}{f'} d = \lambda$, soit $i = \frac{\lambda f'}{d} = 55\ \mu\text{m}$.

La demi-largeur de la tache de diffraction vérifie : $\frac{x_0}{f'} b = \lambda$, soit : $x_0 = \frac{\lambda f'}{b} = 6\,i$. Le graphe de l'intensité $I(x)$ est représenté sur la fig. 2.

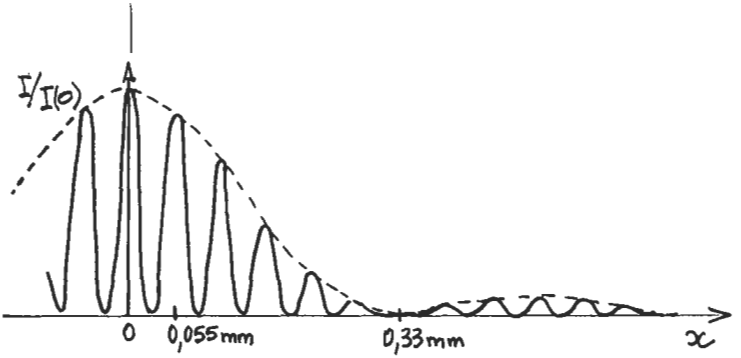


Fig. 2

I.1. *b*) Pour observer commodément les franges, on peut utiliser un oculaire micrométrique.

I.2. *a*) Supposons la lame à faces parallèles placée devant la fente F_1, sous l'incidence ϑ (fig. 3), et considérons les déphasages dans la direction $\alpha = \frac{x}{f'}$. La lumière entrant dans le dispositif

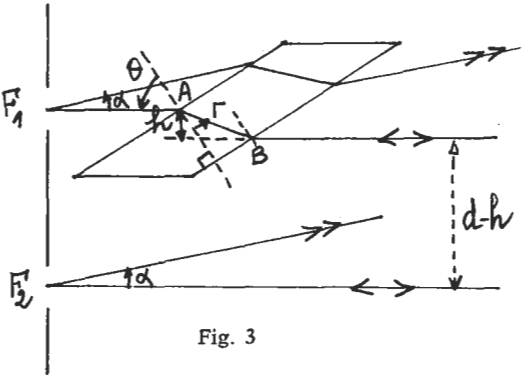


Fig. 3

par la fente F_2, et sortant donc par F_1, traverse la lame sous l'incidence $i_1 = \vartheta + \alpha$, ce qui conduit à la différence de marche supplémentaire $\delta(\vartheta + \alpha)$. La lumière entrant dans le dispositif par la fente F_1 traverse la lame sous l'incidence $i_2 = \vartheta$, ce qui conduit à la différence de marche supplémentaire $\delta(\vartheta)$. Le déphasage entrant dans le terme d'interférence est donc maintenant :

$\phi = \varphi + 2\pi \dfrac{\delta(\vartheta) - \delta(\vartheta + \alpha)}{\lambda}$. Pour des angles α petits, on obtient :

$$\phi = \varphi - \frac{2\pi}{\lambda} \alpha \delta'(\vartheta) = \frac{2\pi\alpha}{\lambda} [d - \delta'(\vartheta)]$$

$\delta'(\vartheta) = e \sin\vartheta \left(1 - \dfrac{\cos\vartheta}{\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta}}\right)$ étant la dérivée de $\delta(\vartheta) = e(\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta} - \cos\vartheta)$.

L'introduction de la lame équivaut donc à rapprocher les fentes de la quantité $\delta'(\vartheta)$. L'interfrange est multiplié par deux lorsque : $\delta'(\vartheta) = \dfrac{d}{2}$. Cette relation permet de calculer l'épaisseur de la lame selon l'inclinaison ϑ choisie, par exemple : $\vartheta = 45°$, $e = 13{,}7$ mm ou encore $\vartheta = 10°$, $e = 76{,}4$ mm. On remarquera que, comme la lame est traversée par les deux faisceaux interférant, la frange centrale n'est pas déplacée.

I.2. *b*) Si on raisonne en termes de rayon, la fig. 3 montre que la lame rapproche effectivement les faisceaux sortant de F_1 et F_2, d'une quantité $h = AB \sin(\vartheta - r) = \dfrac{e}{\cos r} \sin(\vartheta - r)$. A l'aide de la loi de Descartes ($\sin\vartheta = n \sin r$), on retrouve quantitativement le résultat de la question I.2. *a*). En effet :

$$h = e \sin\vartheta \left[1 - \frac{\cos\vartheta}{n \cos r}\right] \ldots$$

$$\ldots = e \sin\vartheta \left[1 - \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta}}\right] = \delta'(\vartheta).$$

En pratique, les lames utilisées à l'époque étaient biseautées.

I.3. *a*) Lorsque les courants d'eau sont établis, la phase lumineuse, dans le plan de la fente F_2, de la lumière qui a pénétré

dans le dispositif par F_1, est $\varphi_2(t) = \varphi_{1i}\left(t - \frac{2L}{v_-} - \tau\right)$ où $\varphi_{1i}(t)$ représente la phase de l'onde lumineuse incidente dans le plan de la fente F_1, v_- la vitesse de phase dans le laboratoire de la lumière qui progresse dans l'eau, à contre-courant, et τ la durée du parcours entre F_1 et F_2 effectué hors de l'eau en mouvement. De même la lumière, qui a pénétré par F_2 avec la phase $\varphi_{2i}(t)$, a la phase $\varphi_1(t) = \varphi_{2i}\left(t - \frac{2L}{v_+} - \tau\right)$, v_+ représentant la vitesse de phase de la lumière qui progresse dans l'eau dans le sens du courant.

Il faut donc rajouter au déphasage ϕ calculé au I.2. *a*) un déphasage $\Delta\varphi = \omega\left(\frac{2L}{v_-} - \frac{2L}{v_+}\right)$.

On doit prendre : $v_\pm = \frac{c}{n} \pm \alpha u$ avec $\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}$ (Fresnel) ou $\alpha = 1$.

La vitesse de l'eau étant petite comparée à $\frac{c}{n}$, on peut écrire : $\Delta\varphi = 2L\omega\left(\frac{n}{c}\right)^2 2\alpha u$. La variation de l'ordre d'interférence au centre est $\Delta p = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{4L}{\lambda}\alpha n^2 \frac{u}{c}$ où $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ représente la longueur d'onde de la lumière dans le vide.

Avec $\lambda = 0{,}526\ \mu m$ et $u = 7{,}069\ m.s^{-1}$, on obtient :

$$\Delta p = 0{,}210\ (\text{Fresnel})\ ; \qquad \Delta p = 0{,}476 \qquad (\alpha = 1)$$

Δp mesure en interfrange le déplacement de la figure d'interférence, et doit être comparé aux déplacements X_i donnés par Fizeau. La moyenne $\overline{X} = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{19} X_i$ de ces déplacements vaut 0,230 ; l'écart-type σ défini par $\sigma^2 = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{19}(X_i - \overline{X})^2$ vaut 0,035. Par conséquent, le cas $\alpha = 1$ peut être pratiquement écarté et la formule de Fresnel est favorisée.

I.3. *b*) La longueur d'onde 0,526 μm correspond au minimum d'absorption de l'eau dans le domaine optique. Rappelons que les ondes lumineuses peuvent traverser 3 m d'eau !) ; la précision $2\,10^{-3}$ donnée par Fizeau est illusoire. On peut se contenter de $\lambda = 0{,}53$ μm, et même $\lambda = 0{,}5$ μm.

Pour des expériences dans l'air (absorption négligeable), le choix de la raie D correspond au maximum d'intensité de la lumière solaire.

I.4. *a*) Pour obtenir le nombre de Reynolds, on utilise sa proportionnalité à une vitesse typique v_0 du fluide : $R_e = k\,v_0$. L'expression de k en fonction des paramètres a, ϱ, η s'obtient de manière unique à l'aide des équations aux dimensions : $[k] = L^{-1}T$ (R_e est sans dimension) ; $[a] = L$; $[\varrho] = M\,L^{-3}$; $[\eta] = M\,L^{-1}T^{-1}$ (relation déduite par exemple de la relation « force par unité de surface = $\eta \times$ gradient de vitesse » soit $(M\,L\,T^{-2})\,L^{-2} = [\eta]\,(L\,T^{-1})\,(L^{-1})$.

On obtient : $[k] = \dfrac{[\varrho]\,[a]}{[\eta]}$; $R_e = \dfrac{a\,\varrho\,v_0}{\eta}$. La quantité $E_c = 1/2\ \varrho\,v_0^2\,a^3$ est l'énergie cinétique d'un volume a^3 de fluide. La quantité $W = \dfrac{2\,E_c}{R_e} = \eta\,v_0\,a^2$, qui s'écrit aussi $W = \left(\dfrac{\eta\,v_0}{a} \times a^2\right) a$ représente le travail de la force de viscosité lorsque la quantité de fluide de volume a^3 s'est déplacée de a (dimension longitudinale du volume). W peut donc être interprété comme de l'énergie cinétique macroscopique dissipée en frottements, ou ce qui revient au même, de l'énergie interne créée.

I.4. *b*) Le nombre de Reynolds s'écrit aussi : $R_e = \dfrac{a\,v_0}{\nu}$. Il vaut : $R_e = 9{,}8\,10^3$ ($v_0 = 3{,}7$ m. s^{-1}) ; $R_e = 18{,}6\,10^3$ ($v_0 = 7$ m. s^{-1}). On a donc : $R_e > 10^3$. Par suite, l'écoulement de l'eau est un écoulement turbulent. On remarquera que les deux tubes étant traversés par les deux faisceaux, l'effet de la turbulence ne brouille pas la figure d'interférence.

I.4. *c*) La vitesse moyenne u mesurée à partir du débit volumique Q vérifie par définition la relation :

$$Q = (\pi\,a^2)\,u = \int_0^a 2\,\pi\,r\,dr\,v_0\left(1 - \frac{r}{a}\right)^n$$

Elle se calcule à l'aide du changement de variable $r = a\,(1 - x)$:

$$u = 2\,v_0 \int_0^1 (1-x)\,x^n\,dx = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\,v_0.$$

La vitesse v_0 au centre des tubes vaut donc $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\,u$,

soit 1,26 u pour $n = 1/6$ et 1,22 u pour $n = 1/7$, valeurs proches des corrections indiquées par Fizeau (pour un écoulement laminaire, on trouverait une valeur très différente :

$$u = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a 2\,\pi\,r\,v_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)dr = \frac{v_0}{2}, \quad \text{soit} \quad v_0 = 2\,u\,!)$$

II. Dérivation de la formule de Fresnel a partir des équations de Maxwell

II.1. *a*) Etablissons l'égalité des polarisations dans deux référentiels galiléens. Pour une répartition de charges q_i ($\sum_i q_i = 0$) localisées en A_i et occupant un volume macroscopique Δv, la polarisation est : $\mathbf{P}(t) = \dfrac{1}{\Delta v}\sum_i q_i\,\mathbf{r}_i(t)$. Comme la charge est un invariant relativiste, et comme en relativité galiléenne, on a : $\mathbf{r}'_i(t) = \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{V}t$ et $\Delta v' = \Delta v$, la polarisation $\mathbf{P}$ est un invariant galiléen (ce n'est pas le cas en relativité d'Einstein : *Remarque 2*).

II.1. *b*) Comme exemple simple, considérons deux fils parallèles à l'axe x, distants de l, portant des densités de charge linéiques λ et $-\lambda$ en mouvement à la vitesse u (fig. 4 *a*). Le

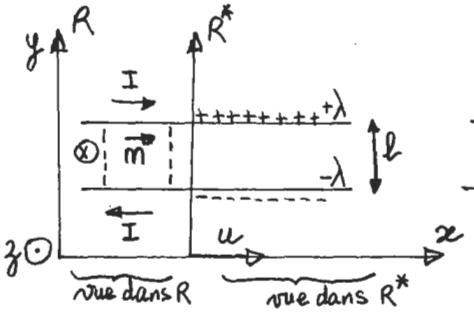


Fig. 4 *a*.

Fig. 4 *b*.

moment dipolaire par unité de longueur est : $\mathbf{P}^* = \lambda\,l\,\mathbf{e}_y$. L'ensemble des deux fils peut être considéré dans R comme un seul

conducteur parcouru par un courant $I = \lambda u$ ou encore un ensemble de boucles de courant parcourues par I (fig. 4 *b*), le moment magnétique par unité de longueur est alors :

$$\mathbf{M} = IS\,(-\mathbf{e}_z) = -\lambda\, l\, u\, \mathbf{e}_z = \lambda\, l\, \mathbf{e}_y \wedge u\, \mathbf{e}_x = \mathbf{P}^* \wedge \mathbf{u}.$$

Une discussion plus générale est faite à la remarque 2.

II.2. *a*) Pour des ondes de la forme : $\exp i\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$, on a l'équivalence : $\vec{\nabla} \longleftrightarrow i\,\mathbf{k}$; $\dfrac{\partial}{\partial t} \longleftrightarrow -i\,\omega$. Par conséquent : $\operatorname{div} \mathbf{B} = \vec{\nabla}\cdot\mathbf{B} = i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0$; $\operatorname{div} \mathbf{D} = i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{D} = 0$. Les champs **B** et **D** sont transverses (comme dans le vide).

II.2. *b*) Afin d'obtenir les égalités demandées entre **D** et **B**, écrivons **E** et **H** en fonction de ces vecteurs.

On a :

$$\varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)(\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}).$$

D'où :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\, \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}. \qquad (1)$$

De même :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{P} \wedge \mathbf{u} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)(\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{u},$$

soit :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\, \mathbf{D} \wedge \mathbf{u} - \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\, (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{u}. \qquad (2)$$

L'équation $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ s'écrit : $\mathbf{k} \wedge \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$ d'où :

$\mathbf{k} \wedge \mathbf{D} - \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)\, \mathbf{k} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r\, \omega \mathbf{B}$ et compte tenu que $\mathbf{k} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{u} - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{B} = -(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{B}$, on obtient :

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \left[\omega - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} (\mathbf{k}\cdot\mathbf{u})\right] \mathbf{B}. \qquad (3)$$

L'équation $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ s'écrit : $\mathbf{k} \wedge \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}$. Dans (2), le terme en $\varepsilon_0 \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{u}$ est négligeable devant :

$\dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0 \mathbf{B} c^2 \left(\dfrac{u^2}{c^2} \ll 1\right)$; ceci permet d'écrire :

$$\mathbf{k} \wedge \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \mathbf{k} \wedge (\mathbf{D} \wedge \mathbf{u}) = -\omega \mathbf{D}.$$

La transversalité de **D** impliquant l'égalité :

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{D} \wedge \mathbf{u}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{D}, \text{ on obtient :}$$

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left[\omega - \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})\right] \mathbf{D} \qquad (4)$$

II.2. *c*) Les équations (3) et (4) montrent que les vecteurs **k**, **D** et **B** sont deux à deux perpendiculaires. Ces équations n'ont de solution non nulle que pour une relation entre ω et **k** bien définie (relation de dispersion). Multipliant (3) à gauche vectoriellement par $-\mathbf{k}$, et utilisant (4), il vient :

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0) : k^2 \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \left[\omega - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})\right]^2 \mathbf{D}.$$

D'où la relation : $(\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \; ; \; \varepsilon_r = n^2)$:

$$k = \pm \frac{n}{c} \left[\omega - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}\right].$$

Dans le cas où **k** et **u** sont parallèles et de même sens, en choisissant le sens de la propagation comme sens positif, on obtient la vitesse de propagation (vitesse de phase) :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} + u \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

qui n'est autre que la formule de Fresnel (établie par Fresnel, comme on s'en doute, dans un tout autre contexte que celui des équations de Maxwell : *Remarque 3*).

III. Dérivation de la formule de Fresnel a partir de la relativité d'Einstein

III.1. *a*) Les quantités $\left(\mathbf{k}, \dfrac{\omega}{c}\right)$ sont les composantes d'un quadrivecteur (ceci peut se déduire de la propriété d'invariance de la phase). On a donc :

$$k_x = \gamma\left(k'_x + u\frac{\omega'}{c^2}\right) \; ; \quad k_y = k'_y \; ; \quad k_z = k'_z \; ;$$

$$\frac{\omega}{c} = \gamma\left(\frac{\omega'}{c} + u\frac{k'_x}{c}\right).$$

Pour une onde se propageant dans la direction x : $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$; $\mathbf{k}' = (k, 0, 0)$. La relation entre les vitesses de phase (parallèles à Ox) s'écrit : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\omega' + u\,k'}{k' + u\,\omega'/c} = \dfrac{v'_\varphi + u}{1 + u\,v_\varphi/c^2}$. Elle est identique à la loi de composition relativiste de vitesses parallèles : $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx'/dt' + u}{1 + u/c^2\; dx'/dt'}$ (voir *Remarque 4*).

III.1. *b*) Dans R', référentiel attaché au milieu, la vitesse de phase est $v'_\varphi = \dfrac{c}{n}$. On retrouve la formule de Fresnel (telle qu'elle est démontrée dans tous les livres sur la relativité) en se limitant au premier ordre en $\dfrac{u}{c}$:

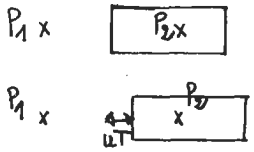
$$v'_\varphi = \frac{c/n + u}{1 + u/n\,c} \ldots$$

$$\ldots \cong \left(\frac{c}{n} + u\right)\left(1 - \frac{u}{nc}\right) \cong \frac{c}{n} + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

III.2. *a*) Posons $v_\varphi = \dfrac{c}{n} + u\left(1 - \dfrac{1}{n^2} + \varepsilon\right)$ $(\varepsilon > 0)$. Le résultat établi en I.3. *a*) devient : $\Delta p = \dfrac{4\,\mathrm{L}}{\lambda}\,\dfrac{u}{c}\,n^2\left[1 - \dfrac{1}{n^2} + \varepsilon\right]$. La correction en valeur relative vaut $\dfrac{\varepsilon}{1 - 1/n^2}$, soit respectivement 3,8 % [cas (1)] et 2,9 % [cas (2)]. Comme les résultats expérimentaux donnent $\dfrac{\sigma}{\overline{\mathrm{X}}} = 15\,\%$, les effets de dispersion ne peuvent pas être testés avec les résultats de Fizeau.

III.2. *b*) Considérons deux points fixes dans le référentiel R, l'un P_1 dans l'air, l'autre P_2 dans l'eau, situés sur le trajet de la lumière (fig. 5 *a*).

(*a*) Dispositif de Fizeau à tout instant.



(*b*) Dispositif de Laub à deux instants séparés de T.

Fig. 5

Comme le régime d'écoulement de l'eau est un régime permanent (stationnaire), la lumière met toujours le même temps (peu importe lequel) pour aller de P_1 à P_2. Si $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ est l'intervalle de temps qui sépare deux états consécutifs de phases décalées de 2π en P_1, cet intervalle est encore T en P_2. La pulsation ω de la lumière prend donc partout dans R la même valeur. Ce résultat serait faux si le régime n'était pas stationnaire ; (*cf.* III.2. *c*).

La loi de transformation $\omega = \gamma\,(\omega' + u\,k')$ et la relation $\dfrac{\omega'}{k'} = \dfrac{c}{n}$ (R' : référentiel attaché au milieu) donnent :

$\omega' = \omega\left[\gamma\left(1 + \dfrac{nu}{k'}\right)\right]^{-1}$. Au premier ordre en $\dfrac{u}{n}$, la pulsation de la lumière mesurée dans R' vaut ($\gamma \simeq 1$) :

$$\omega'_1 = \left(1 - \frac{nu}{c}\right)\omega\,;$$

cette formule est celle de l'effet Doppler non relativiste. La relation de dispersion de l'eau étant donnée pour un milieu au repos, la pulsation ω'_1 est celle qui doit être retenue pour calculer l'indice de l'eau intervenant dans la formule de Fresnel :

$v = \dfrac{c}{n\,(\omega'_1)} + u\left(1 - \dfrac{1}{n^2\,(\omega'_1)}\right)$. Appelons n la valeur de l'in-

dice pour la longueur d'onde λ (dans R) ; au premier ordre en $\frac{u}{c}$,

on a : $v = \frac{c}{n} + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{c}{n^2}\left(\frac{\partial n}{\partial \omega}\right)(\omega'_1 - \omega)$.

Comme $\omega = \frac{c}{2n\lambda}$ et donc que $\omega \frac{\partial}{\partial \omega} = -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}$, le terme correctif $\frac{-c}{n^2}\left(\frac{\partial n}{\partial \omega}\right) \times \frac{-nu}{c}\omega$ s'écrit aussi :

$\frac{-\lambda}{n}\left(\frac{\partial n}{\partial \lambda}\right)u$. Il correspond à la valeur généralement donnée dans les ouvrages pour l'expérience de Fizeau.

III.2. *c*) Dans le vide, et dans R', référentiel lié au bloc solide, la pulsation de l'onde incidente est :

$$\omega'_2 = \gamma(\omega - uk) = \gamma\omega\left(1 - \frac{u}{c}\right) \simeq \omega\left(1 - \frac{u}{c}\right).$$

Le bloc étant fixe dans R', ω'_2 est aussi la pulsation de la lumière mesurée dans R' et dans le milieu. La différence $\omega'_2 - \omega$ est plus petite par le facteur n^{-1} que la différence $\omega'_1 - \omega$. Le terme correctif à la formule de Fresnel devient donc (même raisonnement qu'en III.2. *b*) $\frac{-\lambda}{n^2}\left(\frac{\partial n}{\partial \lambda}\right)u$.

III.2. *d*) La différence fondamentale entre l'expérience (pensée) de Laub et celle de Fizeau réside dans le fait que, dans le laboratoire, la situation du bloc solide n'est pas stationnaire (fig. 5 *b*) : L'interface air-solide se déplace dans R à la vitesse u. Reprenons par exemple le raisonnement fait en III.2. *b*), P_1 et P_2 désignant toujours des points fixes par rapport à R, l'un dans l'air, l'autre dans le solide. Dans l'intervalle de temps T séparant deux états de même phase en P_1, l'interface air-solide s'est déplacé de uT. Il y correspond un gain de temps pour la propagation de P_1 à P_2

$$\frac{u\mathrm{T}}{c/n} - \frac{u\mathrm{T}}{c} = \frac{u\mathrm{T}}{c}(n-1)$$

[au premier ordre en u, $n = n(\lambda)$]. Deux états de même phase en P_2 sont maintenant séparés par l'intervalle de temps :

$$T - \frac{uT}{c}(n-1) = T\left(1 - \frac{u(n-1)}{c}\right).$$

La pulsation en P_2 vaut $\omega_2 \simeq \omega\left(1 + \frac{u(n-1)}{c}\right) \neq \omega$.

Cette valeur de ω_2 peut être aussi déduite du calcul effectué en III.2. *c*), en utilisant la loi de transformation de R' à R :

$$\omega_2 = \gamma(\omega'_2 + uk') = \gamma\omega'_2\left(1 + \frac{un}{c}\right),$$

soit :

$$\omega_2 \cong \omega\left(1 - \frac{u}{c}\right)\left(1 + \frac{un}{c}\right) = \omega\left(1 + \frac{u(n-1)}{c}\right).$$

IV. Dérivation de la formule de Fresnel a partir de la cinématique galiléenne et d'un modèle atomique

IV.1. Entre deux émissions consécutives du photon s'est écoulé le temps $\frac{l_0}{c}$ (« temps de vol ») + τ_0 (temps de « rétention » par l'atome). La vitesse moyenne du photon vaut $v = \frac{l_0}{l_0/c + \tau_0}$.

Si l'indice est défini par $n = \frac{c}{v}$, on obtient : $n = 1 + \frac{c\,\tau_0}{l_0}$. Ce modèle fort simple peut être raffiné en supposant une répartition statistique des grandeurs l_0 et τ_0 (introduction d'un libre parcours moyen et d'un déphasage moyen de diffusion par l'atome).

IV.2. *a*) Le temps de vol Δt du photon dans R est obtenu en tenant compte du fait que les atomes se déplacent à la vitesse u : $c\,\Delta t = l_0 + u\,\Delta t$. Entre deux émissions consécutives du photon, il s'est donc écoulé l'intervalle de temps $\frac{l_0}{c-u} + \tau_0$. Dans cet intervalle, le photon s'est déplacé de $c\,\Delta t + u\,\tau_0$; la vitesse moyenne du photon est :

$$v = \frac{c\,l_0/c - u + u\,\tau_0}{l_0/c - u + \tau_0}$$

avec $\dfrac{c\,\tau_0}{l_0} = n-1$, d'où : $v = \dfrac{c + u(n-1)(1-u/c)}{1+(n-1)(1-u/c)}$. Au premier ordre en $\dfrac{u}{c}$, on retrouve la formule de Fresnel :

$$v \cong \frac{c}{n}\left[1+\frac{(n-1)\,u}{c}\right]\left[1+\frac{n-1}{n}\,\frac{u}{c}\right]\ldots$$

$$\ldots = \frac{c}{n}\left[1+\frac{u}{c}\left(n-\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{c}{n}+u\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Remarque : La vitesse v s'obtient encore plus simplement en calculant la vitesse moyenne dans R_0 et en utilisant la loi de composition galiléenne des vitesses. Les photons allant à la vitesse $c-u$ dans R_0, on a :

$$v = \frac{l_0}{l_0/c-u+\tau_0}+u.$$

IV.2. *b*) La partie IV du problème fait implicitement référence à la théorie de l'éther (référentiel privilégié R où la propagation de la lumière est isotrope). Ce référentiel n'est pas connu. Quand, dans un laboratoire (référentiel R'), on mesure l'indice d'un milieu, ce milieu est fixe par rapport à R'. et bouge donc par rapport à R. Dans R' et « dans le vide », la lumière se propage à la vitesse $c' = c-w$; l'indice mesuré est $n' = 1+\dfrac{c'\,\tau_0}{l_0}$ (question IV.1). Lorsque le milieu se déplace dans R' à la vitesse u' ($u' = u-w$), le raisonnement effectué en IV.2. *a*) s'applique toujours et on peut alors écrire pour la vitesse de la lumière dans R' : $v' = \dfrac{c'}{n'}-u'\left(1-\dfrac{1}{n'^2}\right)$. Autrement dit, l'ignorance du référentiel de l'éther est cachée dans la définition de l'indice.

IV.3. Comme la vitesse de la lumière dans R est encore égale à c, la vitesse moyenne des photons dans R vaut :

$\dfrac{l_0}{l_0/c+\tau_0} = \dfrac{c}{1+\tau_0\,c/l_0}$, soit, compte tenu de la définition de l'indice choisie en IV.1. : $\dfrac{c}{n}$. La loi de transformation des

vitesses donne alors : $v = \dfrac{c/n + u}{1 + u/c\,n}$ formule déjà établie en III.1. *a*) et qui conduit à la formule de Fresnel.

Remarque : On peut aussi reprendre le raisonnement fait en IV.2. *a*), en remplaçant l_0 par $l_0 \sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}$ (distance géométrique entre deux atomes voisins, pris au même instant dans R) et τ_0 par $\dfrac{\tau_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$ (τ_0 est un intervalle de temps propre associé à l'atome en mouvement) ; ceci revient aussi à remplacer, dans la formule donnant v la quantité :

$$\frac{c\,\tau_0}{l_0} = n - 1 \text{ par } (n-1)\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1}.$$

On obtient :

$$v = \frac{c + u\,(n-1)\,(1 + u/c)^{-1}}{1 + (n-1)\,(1 + u/c)^{-1}} = \frac{c + n\,u}{n + u/c} = \frac{c/n + u}{1 + u/c\,n}.$$

IV.4. On voit donc que l'expérience de Fizeau peut s'interpréter dans le cadre des hypothèses suivantes : Existence d'un référentiel R absolu pour la propagation de la lumière et composition galiléenne des vitesses ; modèle atomique simple (pouvant être raffiné). Le résultat établi en IV.2. *b*) montrant l'invariance galiléenne de la formule de Fresnel (sous réserve que les vitesses considérées soient petites devant c) assure que l'interprétation reste correcte si le laboratoire n'est pas le référentiel absolu.

L'expérience de Fizeau n'est donc pas un test crucial pour la relativité d'Einstein (Einstein pensait le contraire car son jugement s'appuyait sur le calcul de Lorentz (partie II) basée sur l'électromagnétisme qui est une théorie relativiste).

Partie B

a) Analyse qualitative.

La capsule C se comportant comme celle d'un baromètre, l'indication de l'appareil sera proportionnelle à la différence de pression $p(t) - p_a(t)$ entre l'air situé à l'intérieur de la capsule et l'air situé à l'extérieur (pression p_a). A cause de la présence de

la fuite, la pression intérieure p suit avec quelque retard la pression extérieure (fig. 6).

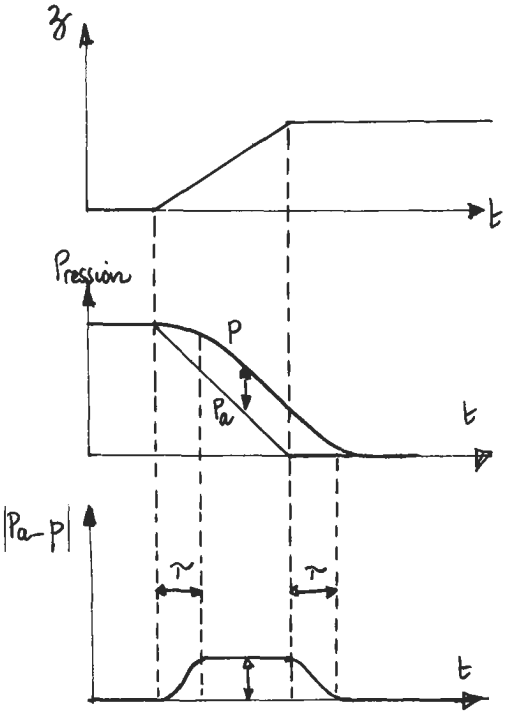


Fig. 6

Si l'altitude de l'avion varie, on a donc $p_{int} \neq p_{ext}$.

Si P_{ext} se stabilise, alors au bout d'un certain temps $p = p_a$, il n'y a pas de déviation. Si on suppose, comme il est suggéré dans l'énoncé, que la fuite introduit un temps de retard τ (temps de réponse de l'appareil), la déviation est proportionnelle à $p(t) - p_a(t) = p_a(t - \tau) - p_o(t) \simeq$ ...

$$\ldots \tau \frac{dp_a}{dz} \frac{dz}{dt} \left(\frac{dp_a}{dz} = -12 \text{ P.m}^{-1} \right),$$

c'est-à-dire proportionnelle à la vitesse ascensionnelle $v_z = \dfrac{dz}{dt}$.

L'appareil mérite donc bien le nom de variomètre. La sensibilité étant proportionnelle à τ, on s'attend à ce qu'il faille faire un compromis entre des valeurs de τ petites (pour connaître une vitesse instantanée) et grandes (pour améliorer la sensibilité).

b) ANALYSE QUANTITATIVE.

(*i*) Posons : $x(t) = k[p(t) - p_a(t)]$. (1)

$x(t)$, réponse du variomètre, sera le déplacement du fond de la capsule. Soit S la surface du fond de la capsule C, $V(t)$ le volume de l'enceinte formée par C et le réservoir C', $n(t)$ le nombre de moles de gaz qu'elle contient, $V_0 = \frac{RT}{p}$ le volume molaire de ce gaz. On a :

$$\frac{dV}{dt} = S\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Le débit volumique gazeux $Q = V_0 \frac{dn}{dt}$ (à ne pas confondre avec $\frac{dV}{dt}$ de l'équation précédente) obéit à la loi de Poiseuille, d'où :

$$Q = V_0 \frac{dn}{dt} = \frac{\pi}{128}\frac{d^4}{\eta l}(p_a - p). \tag{3}$$

La loi des gaz parfaits donne : $pV = nRT$. (4)

Pour une transformation isotherme du gaz contenu dans C + C', et des variations infinitésimales, on peut écrire :

$$\frac{dn}{n} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V}. \tag{5}$$

$$V_0\frac{dn}{dt} = \frac{V}{p}\frac{dp}{dt} + \frac{dV}{dt} = \frac{V}{p}\frac{dp_a}{dt} + \left(\frac{V}{kp} + S\right)\frac{dx}{dt}$$

[utilisation de (1) (2)].

A l'aide de la loi de Poiseuille (3) et de (1), on obtient :

$$\frac{\pi}{128}\frac{d^4}{\eta l k}x + \frac{V}{kp}\left(1 + \frac{Skp}{V}\right)\frac{dx}{dt} = -\frac{V}{p}\frac{dp_a}{dz}v_z. \tag{6}$$

équation différentielle du premier ordre qu'on peut mettre sous la forme demandée :

$$x + \tau \frac{dx}{dt} = \sigma\, v_z$$

$$\text{avec } \tau = \frac{128\,\eta\, l}{\pi\, d^4} \frac{V}{p}\left(1 + \frac{kSp}{V}\right);$$

$$\sigma = \tau \left(\frac{-dp_a}{dz}\right) \frac{k}{1 + Skp/V}.$$

τ caractérise le temps de réponse de l'appareil, et σ sa sensibilité.

(*ii*) σ étant proportionnel à τ, un compromis doit être trouvé. Il est naturel de se fixer le temps de réponse. La sensibilité est alors d'autant plus grande que le coefficient k est important.

Si le fond de la capsule a une force de rappel $-Kx$, on a : $k = \frac{S}{K}$; il faut donc essayer d'augmenter S et de diminuer K.

(*iii*) Nous allons prendre pour les quantités dont il faut choisir l'ordre de grandeur une valeur égale à 1 dans une unité elle aussi choisie (ceci permet, le cas échéant de revenir simplement sur le choix effectué). Prenons par exemple $\tau = 1$ s pour le temps de réponse. Pour la surface S, qui se chiffre probablement en cm², choisissons S = 1 cm².

La constante K ne peut pas, en fait, être diminuée arbitrairement. Il convient en effet de considérer le fond de la capsule comme un système mécanique (masse m) ; soit T le temps d'amortissement de ce système. Si on veut que l'équation (1) soit valable à tout instant, on doit vérifier la condition $T \ll \tau$ soit, pour un amortissement critique :

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \ll \tau \qquad \text{ou} \qquad K \gg \frac{4\pi^2 m}{\tau^2}.$$

Prenons un exemple : $m = 1$ g, avec la valeur $\tau = 1$ s, déjà retenue, on obtient : $K \gg 4\,10^{-2}$ N m^{-1}.

Il semble raisonnable de retenir comme valeur de K, la valeur $K_0 = 4$ Nm^{-1} (ce qui correspond à $T = \tau/10$).

Pour évaluer la sensibilité pour $K = K_0$, considérons le terme correctif :

$$\frac{Skp}{V} = \frac{pS^2}{KV} \simeq \frac{10^5 \cdot 10^{-8}}{4\ V} = \frac{10^{-3}}{4\ V}.$$

Pour un volume total de l'ordre du litre (il ne faut pas un instrument trop encombrant !), ce terme est de l'ordre de l'unité.

La sensibilité vaut alors : $\sigma \simeq \tau \left(\frac{-dp_a}{dz} \right) \frac{S}{K} \simeq 3\,10^{-4}$, soit environ 0,3 mm par m. s^{-1}, ce qui paraît convenable.

On vérifie alors que les variations de volume de la capsule sont très petites devant le volume de l'ensemble C + C' ($Sx \ll V$), ce qui légitime l'écriture de l'équation (5). (Si cela n'avait pas été le cas, on aurait choisi V plus grand).

Enfin, une valeur de τ de l'ordre de 1 s peut être obtenue par $\frac{d^4}{l} \simeq \frac{128}{\pi} \eta \frac{V}{P} \simeq 10^{-11}$.

Pour $l = 1$ cm, on trouve : $d \simeq 0{,}5$ mm.

c) Réexamen des hypothèses.

1° Le nombre de Reynolds est : $R_e = \frac{\varrho\, d\, v_e}{2\,\eta}$, la vitesse d'écoulement v_e s'obtient à partir de la relation qui exprime le débit volumique Q sous la forme $Q = \frac{\pi d^2}{4} v_e$. On a écrit au *b* :

$Q = V_0 \frac{dn}{dt} = \frac{V}{P} \frac{dp_a}{dt} + \left(\frac{V}{kp} + S\right) \frac{dx}{dt}$, on a donc en régime permanent $\left(\frac{dx}{dt} = 0\right)$ $Q = \frac{V}{P} \frac{dp_a}{dt} = \left(\frac{-dp_a}{dz}\right) v_z$,

on en déduit :

$$R_e = \frac{2}{\pi} \frac{\varrho V}{\eta dp} \left(\frac{-dp_a}{dz}\right) v_z \simeq \frac{10^{-3}}{10^{-5}\,10^{-3}\,10^5} \simeq 10.$$

L'écoulement peut être considéré comme laminaire.

2° Pour étudier l'hypothèse d'isothermalité des transformations du gaz, on peut introduire l'équation de « propagation » de la température, $c \frac{\partial T}{\partial t} = -K\,\Delta T$ (c : capacité calorifique volu-

mique, K coefficient de conductivité thermique). Cette équation montre qu'un temps caractéristique τ^* d'équilibrage thermique dans une région de dimension caractéristique l^* est donné par $\tau^* = \dfrac{c\,l^{*2}}{K}$. Pour retrouver ce résultat, sans utiliser l'équation différentielle, on peut utiliser les équations aux dimensions de c et K.

Pour obtenir une application numérique, remarquons que, $C_p = \dfrac{5}{2}$ R étant la capacité calorifique molaire d'un gaz parfait, on a : $c = \dfrac{5}{2} R \dfrac{\varrho}{M}$ ou $\left(\varrho = \dfrac{MP}{RT}\right)$ $c = \dfrac{5}{2}\dfrac{P}{T}$. On obtient donc, dans des conditions normales :

$$\tau^* = \frac{5}{2}\,\frac{10^5}{300}\,\frac{1}{2{,}4\;10^{-2}}\,l^{*2} = 3\;10^4\;l^{*2},$$

soit : $\tau^* \simeq 300$ s pour $l^* = 1$ dm. τ^* est plus grand que le temps de réponse calculé. On peut donc conclure que l'hypothèse d'une transformation isotherme est certainement fausse.

Pour une transformation adiabatique réversible, il faut remplacer l'équation (4) par :

$$\frac{dn}{n} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} - \frac{dT}{T}.$$

La transformation isentropique donne :

$$\frac{dT}{T} + \frac{(1-\gamma)}{\gamma}\,\frac{dp}{p} = 0 \qquad \gamma = \frac{C_p}{C_v}. \qquad \text{D'où } \frac{dn}{n} = \frac{\gamma\,dp}{p} + \frac{dV}{V}.$$

L'équation (5) doit donc être modifiée par le seul remplacement de la pression p par $\gamma^{-1}\,p$. En particulier, la sensibilité est multipliée par γ.

REMARQUES

Remarque 1 :

L'amplitude lumineuse dans le plan d'une fente, lors du retour de la lumière, est pratiquement constante. En effet, comme le

système catadioptrique ϱ formé par la lentille L_2 et le miroir M est afocal, la figure de diffraction dans le plan des fentes est du type de Fresnel, diffraction dont les effets s'observent en dehors ou aux bords des faisceaux de l'optique géométrique. Ceci a peu d'influence dans le montage de Fizeau parce que, le grandissement du système ϱ étant égal à -1, les fentes sont juste couvertes par ces faisceaux (en toute rigueur, et si on néglige la diffraction par les tubes, l'amplitude en un point de coordonnée X dans le plan des fentes, et dans le plan de figure, est du type :

$$\int_{F_1 + F_2} e^{i\,k\,(X+x)^2/2\,a}\,dx,$$

a désignant la distance du plan F_1, F_2 à son plan conjugué par rapport à ϱ).

Remarque 2 :

a) On peut également considérer un très long barreau de diélectrique de forme parallélépipédique et dont la grande dimension est parallèle à l'axe x qui porte le vecteur vitesse **u**, mais les calculs ne sont très simples que si sa polarisation $\mathbf{P}^*$ est uniforme.

Dans ce dernier cas les densités de charges équivalentes dans R^* sont en volume $\varrho^* = -\operatorname{div} \mathbf{P}^* = 0$ et sur les faces parallèles au vecteur **u**) une densité surfacique $\vartheta_i^* = \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{n}_i$, $\mathbf{n}_i$ vecteur normal à la face i considérée. Dans R il apparaît des courants surfaciques (de convection) $\mathbf{j}_{si} = \sigma_i^* \mathbf{u} = (\mathbf{P}^* \cdot \mathbf{n}_i)\,\mathbf{u}$ et il n'y a pas de courant volumique. On vérifie facilement qu'une densité de moments magnétiques $\mathbf{M} = \mathbf{P}^* \wedge \mathbf{u}$ donne les mêmes courants équivalents : en volume $\mathbf{j} = \mathbf{rot}\,\mathbf{M} = \mathbf{0}$, en surface $\mathbf{j}_{si} = \mathbf{M} \wedge \mathbf{u}_i = (\mathbf{P}^* \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{n}_i = (\mathbf{P}^* \cdot \mathbf{n}_i)\,\mathbf{u}$ car $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u} = 0$.

b) Dans le cas général $\mathbf{P}^*$ n'est plus uniforme et dépend du temps. Dans R^*, les différents points M sont repérés à partir de l'origine O^*, liée à R^*, par le vecteur $\Gamma^* = O^*M$ et $\mathbf{P}^*$ est fonction de Γ^* et de t^*, la distribution équivalente est :

$$\varrho^* = -\vec{\nabla}^* \cdot \mathbf{P}^* \text{et } \mathbf{j}^* = \frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial t^*}(\Gamma^*, t^*).$$

Dans R il apparaît un courant volumique $\mathbf{j} = \mathbf{j}^* + \varrho^* \mathbf{u}$ et on aura :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}^*(r^*, t^*)}{\partial t^*} - \mu_0 (\vec{\nabla}^* \cdot \mathbf{P}^*)\,\mathbf{u} \qquad (1)$$

que l'on veut comparer à l'équation bien connue $\mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

qui s'explicite encore sous la forme :

$$\mathbf{rot\ B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{rot\ M} \qquad (2)$$

Γ repérant les divers points M à partir de l'origine O de R, utilisons les relations :

$$\mathbf{P}^*(\mathbf{r}^*, t^*) = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \text{ (invariance du moment dipolaire)}$$

et $\vec{\nabla}^* = \vec{\nabla}, \left(\frac{\partial}{\partial t^*}\right)_{\Gamma^*} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\Gamma} + \mathbf{u} \cdot \vec{\nabla}$ (conséquences de $t = t^*$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}^* + \mathbf{u}\, t^*$).

On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \mathbf{P}^*(\mathbf{r}^*, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{u} \cdot \vec{\nabla})\, \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$$

(dériver par rapport au temps en un point fixe de R* revient à dériver en suivant le mouvement de ce point dans R).

(1) se met alors sous la forme :

$$\mathbf{rot\ B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mu_0 [(\mathbf{u} \cdot \vec{\nabla})\, \mathbf{P} - (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{P})\, \mathbf{u}].$$

Le crochet vaut $\vec{\nabla} \wedge (\mathbf{P} \wedge \mathbf{u})$ compte tenu du fait que $\mathbf{u}$ est uniforme ; on voit donc que (2)est équivalent à (1) en posant $\mathbf{M} = \mathbf{P} \wedge \mathbf{u}$.

c) Les calculs précédents ne sont en fait valables qu'à la limite classique $u \ll c$.

L'invariance des équations de Maxwell par les transformations de Lorentz suggèrent plus généralement que $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}/\varepsilon_0 c$ se transforment comme $\mathbf{E}$ et $c\mathbf{B}$. Il en est donc de même pour $\mathbf{P}$ et $-\mathbf{M}/c$:

$$\mathbf{P}^*_{//} = \mathbf{P}_{//}, \quad \mathbf{M}^*_{//} = \mathbf{M}_{//}, \quad \mathbf{P}^*_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{P}_{\perp} - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \wedge \mathbf{M}\right),$$

$$\mathbf{M}^*_{\perp} = \gamma\, (\mathbf{M}_{\perp} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{P}).$$

Pour le problème examiné $\mathbf{M}^* = \mathbf{0}$ (milieu non magnétique), d'où : $\mathbf{M} = \mathbf{P} \wedge \mathbf{u}$ (rigoureux) ; avec $u^2/c^2 \ll 1$, $\gamma \sim 1$. On retrouve $\mathbf{P}^* \simeq \mathbf{P}$ et $\mathbf{M} \simeq \mathbf{P}^* \wedge \mathbf{u}$.

Remarque 3 (explication de Fresnel d'après Fizeau).

Fresnel se place, bien sûr, dans le cadre de la théorie de l'éther et interprète le fait que la lumière se propage moins vite (vitesse v) à l'intérieur d'un corps au repos dans le référentiel absolu que dans le vide (vitesse c) en supposant que l'éther y possède une masse volumique ϱ plus grande que dans le vide (ϱ_0). Pour des milieux de même élasticité, la vitesse de propagation des ondes varie comme $1/\sqrt{\varrho}$; on a donc $n^2 = \dfrac{c^2}{v^2} = \dfrac{\varrho}{\varrho_0}$ et l'excès de masse volumique d'éther $\varrho - \varrho_0$ est donné par l'expression

$$\varrho - \varrho_0 = \varrho\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Si le corps est mis en mouvement, Fresnel admet que seul l'excès de masse volumique d'éther est entraîné à la vitesse u du corps, et il lui faut exprimer la vitesse de propagation des ondes dans un milieu constitué d'une partie mobile et d'une partie immobile. Il admet, dans le cas simple où le corps se meut dans le sens de propagation des ondes, que la vitesse que prend le centre de gravité v_G du système s'ajoute à la vitesse des ondes.

D'où : $v = v_G + \dfrac{c}{n}$ avec $v_G = \dfrac{\varrho - \varrho_0}{\varrho} u$, ce qui donne :

$$v = \frac{c}{n} + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Remarque 4 :

La grandeur vectorielle $\mathbf{v} = \dfrac{\omega}{k}\dfrac{\mathbf{k}}{k}$ associée à une onde plane caractérisée par le quadrivecteur $\left(\dfrac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right)$ n'a pas la loi de transformation d'une vitesse (sauf dans le cas particulier étudié : $\mathbf{k}$ parallèle à la vitesse relative $\mathbf{u}$ des vitesses). En effet $\mathbf{v}$ n'apparaît pas comme le rapport de la composante spatiale et de la composante temporelle d'un quadrivecteur. Par contre, la vitesse de groupe $\dfrac{d\omega}{d\mathbf{k}}$ se transforme bien comme une vitesse :

en effet, soit $f(\omega, \mathbf{k}) = 0$ la relation de dispersion dans un référentiel ; comme $df = \frac{\partial f}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} d\mathbf{k} = 0$, on a :

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = -\frac{\partial f / \partial \mathbf{k}}{\partial f / \partial \omega}.$$

Le lecteur réfléchira au fait que f est une grandeur scalaire et donc que $\left(c \frac{\partial f}{\partial \omega}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} \right)$ est un quadrivecteur.

(Solution rédigée
par J.-P. PROVOST et E.-R. TANTART).

Agrégation de sciences physiques

PROBLEME DE CHIMIE

SESSION DE 1984

Epreuve C

COMPOSITION DE CHIMIE

(Applications)

(Durée : 6 heures)

Matériel à prévoir : 10 feuilles de papier millimétré.

SOLUTIONS ELECTROLYTIQUES

(ASPECTS THERMODYNAMIQUES, ASPECTS CINÉTIQUES, APPLICATIONS)

* *L'attention du candidat est attirée sur le fait que dans ce texte, volontairement détaillé, de nombreuses questions sont indépendantes les unes des autres.*

* *Le candidat respectera les notations de grandeurs données dans l'énoncé.*

* *Il utilisera les symboles mathématiques suivants :*

Logarithme népérien : ln ;

Logarithme décimal : lg ;

Exponentielle : exp.

* *La concentration en quantité de matière (ou concentration molaire) d'une substance* B *dissoute sera notée* c_B *ou* [B] *et son activité* a_B.

T *représentera la température absolue.*

* *Pour la commodité, l'écriture de certains groupes organiques sera abrégée :*

méthyle	: Me	*pentyle*	: Pe
éthyle	: Et	*hexyle*	: He
propyle	: Pr	*octyle*	: Oct
butyle	: Bu	*phényle*	: Ph

* *Les valeurs numériques des constantes d'équilibre données dans l'énoncé utilisent les conventions suivantes :*

— *pour le solvant, les états standard et de référence sont le liquide pur ;*

— *pour les solutés, l'état de référence correspond à la solution infiniment diluée et l'état standard à la solution idéale hypothétique de concentration en quantité de matière une mole par litre.*

* *Dans tout le problème, on considèrera que l'activité du solvant est égale à 1 et que le facteur d'activité des paires d'ions est égal à 1.*

* *On donne :*

Constante d'Avogadro	N_A	$= 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Constante des gaz parfaits	R	$= 8{,}31$ J K^{-1} mol^{-1}
Charge élémentaire	e	$= 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C
Constante de Boltzmann	k	$= 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1}

A. SYSTEMES MONOPHASIQUES

I. Aspects thermodynamiques

1. *Introduction à la théorie des paires d'ions dans le modèle de Bjerrum.*

Soit une solution d'un électrolyte AB, de concentration molaire initiale c^0, contenant des ions A^+ et B^-. Bjerrum admet que, si la distance séparant, dans la solution, deux ions de charges opposées devient inférieure à une certaine valeur q, ceux-ci forment une entité appelée paire d'ions, au sein de laquelle la force de cohésion est d'origine coulombienne. Cette paire d'ions sera notée $(A^+ B^-)$. On étudie l'équilibre de dissociation de la paire d'ions :

$$(A^+ B^-) \rightleftarrows A^+ + B^-.$$

Cet équilibre est caractérisé par la constante d'équilibre K_{AB}.

a) On considère une cavité sphérique centrée sur un ion A^+ et remplie d'un diélectrique de permittivité ε. Exprimer, en fonction du nombre n_B d'anions B^- contenus dans l'unité de volume de solution, le nombre dn_B d'ions B^-, dont le centre est situé à une distance comprise entre r et $r + dr$ de A^+. On rappelle que le facteur de distribution de Boltzmann pour l'énergie électrostatique est donné par l'expression :

$$\exp \frac{e^2}{4 \pi \varepsilon k T r}.$$

Donner l'allure de la courbe représentant les variations de la fonction $P(r) = \dfrac{dn_B}{dr}$ en fonction de r. Cette courbe présente un extremum. Quelle est sa signification physique ? Calculer q la valeur correspondante de r.

b) On appelle a la somme des rayons r_{A^+} et r_{B^-} des ions A^+ et B^-. Définir, à partir de la courbe précédente, le domaine d'existence

des paires d'ions, c'est-à-dire les valeurs de r pour lesquelles on peut considérer qu'un ion B− est associé à l'ion central A+.

Exprimer le degré d'association ϑ des ions, c'est-à-dire la fraction de l'électrolyte AB existant sous la forme de paire d'ions. On introduira pour cela la fonction $Q\left(\frac{2q}{a}\right)$ tabulée ci-après en A.I.1. *d*), et définie par :

$$\int_a^q \exp\left[\frac{2q}{r}\right] r^2\,\mathrm{d}r = 8\,q^3\,Q\left(\frac{2q}{a}\right)$$

En déduire la concentration molaire [(A+ B−)] des paires d'ions dans la solution considérée.

c) Donner l'expression de la constante de dissociation K_{Bj} de la paire d'ions (A+ B−) à laquelle conduit le modèle étudié dans le cas d'une solution infiniment diluée.

d) On étudie la dissociation des *p*-nitrophénates de tétraalkylammoniums QY dans les deux solvants suivants à 25 °C :

— le dichloro-1,2 éthane : $\varepsilon = 9{,}15 \cdot 10^{-11}$ F m^{-1}

— la méthyléthylcétone : $\varepsilon = 1{,}38 \cdot 10^{-10}$ F m^{-1}.

Les rayons ioniques des ions considérés sont les suivants :

p — O_2N — $C_6H_4O^-$: 63 pm ; Et_4N^+ : 285 pm ; Bu_4N^+: 437 pm.

Le tableau ci-après regroupe quelques valeurs de la fonction $Q\left(\frac{2q}{a}\right)$.

$\frac{2q}{a}$	7	8	9	10	11	12	15	15,6	16
$Q\left(\frac{2q}{a}\right)$	1,42	2,00	2,95	4,62	7,70	13,4	93	142	189

Calculer les constantes K_{Bj} des deux sels d'onium envisagés dans les deux solvants.

Quels sont les principaux facteurs dont dépend K_{Bj} ? Discuter leur importance relative. Les valeurs expérimentales K_{QY} observées sont en fait inférieures aux valeurs théoriques K_{Bj} précédentes, en particulier dans le cas des solvants de faible permittivité. Quels sont les motifs possibles de ces écarts ?

2. *Etude de la dissociation de composés ioniques en solution.*

2.1. Calcul du coefficient d'activité des ions dans l'approximation de Debye-Hückel.

a) Rappeler les hypothèses de base du modèle de Debye-Hückel.

La distribution ionique autour d'un ion central j peut être déterminée à partir de l'équation de Poisson :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{d\varphi_j(r)}{dr}\right) = -\frac{\varrho_j(r)}{\varepsilon} \qquad (1)$$

$\varrho_j(r)$ est la charge volumique moyenne à la distance r de l'ion central, $\varphi_j(r)$ est le potentiel électrostatique moyen à cette même distance r.

On a :

$$\varrho_j(r) = -\sum_{i \neq j} \frac{n_i z_i^2 e^2}{kT} \varphi_j(r)$$

où n_i est le nombre d'ions i, de charge $z_i e$, par unité de volume de solution.

On pose :

$$\chi^2 = \frac{e^2}{\varepsilon kT} \sum_{i \neq j} n_i z_i^2.$$

Donner la dimension de χ et sa signification physique.

Déduire de l'équation (1) l'expression du potentiel électrostatique $\varphi_j(r)$ en fonction de χ, de la charge $z_j e$ de l'ion j et de la distance minimale d'approche a entre les ions A^+ et B^-.

Déterminer le potentiel $\varphi'_j(a)$ créé par l'atmosphère ionique à la distance a de l'ion central.

b) L'énergie d'interaction W entre l'ion central et son atmosphère ionique peut se calculer par un processus imaginaire dans lequel la particule centrale est soumise au potentiel $\varphi'_j(a)$ et voit sa charge croître de 0 à $z_j e$. Donner l'expression de W.

c) Pour une mole d'ions j dans la solution, la variation d'enthalpie libre due aux interactions ioniques est $\Delta G_j = \dfrac{N_A W}{2}$.

On considère que l'écart à l'idéalité de la solution résulte essentiellement des interactions ioniques.

Donner les expressions du potentiel chimique de l'ion j en fonction du coefficient (ou facteur) d'activité γ_j de cet ion d'une part, et en fonction de ΔG_j d'autre part.

En déduire $\ln \gamma_j$ en fonction de $z_j e$, ε, k, T, χ et a.

Donner l'expression du coefficient d'activité moyen $\gamma\pm$ de l'électrolyte AB dissocié en ions A^+ et B^-, en fonction de q, χ et a.

2.2. Application de la conductimétrie à la mesure expérimentale des constantes de dissociation des sels d'onium.

a) Donner l'expression de la constante de dissociation K_{QY} d'un électrolyte faible QY de concentration molaire *c*, en fonction du coefficient de dissociation α, de *c* et de $\gamma_{\pm}$. On rappelle que $\gamma_{(Q^+ Y^-)} = 1$.

b) On se propose de déterminer la constante de dissociation K_{QY} par un calcul itératif reposant sur la loi limite de Onsager.

On rappelle que la conductivité molaire d'un électrolyte peut s'exprimer comme celle d'un électrolyte entièrement dissocié, mais engagé à la concentration αc, α étant le degré de dissociation, soit :

$$\Lambda = \alpha \Lambda^0 T(Z) \quad \text{où} \quad T(Z) = 1 - Z[1 - Z)^{-1/2}]^{-1/2}$$

avec :

$$Z = \left(\frac{\alpha_R \Lambda^0 + \beta_E}{\Lambda^0}\right)\sqrt{\frac{\Lambda c}{\Lambda^0}}$$

Λ^0 est la conductivité molaire limite.

α_R et β_E sont des paramètres exprimant respectivement les effets de relaxation et d'électrophorèse :

$$\alpha_R = \frac{2{,}157 \cdot 10^{-11}}{(\varepsilon T)^{3/2}} \qquad \beta_E = \frac{2{,}453 \cdot 10^{-9}}{\eta (\varepsilon T)^{1/2}}$$

lorsque les grandeurs ε, T et η (viscosité) sont exprimées en unités du système international et *c* en mol. l^{-1}.

Les valeurs Λ mesurées de la conductivité molaire de solutions de concentrations variables de *p*-nitrophénate de tétrabutylammonium dans l'acétone à 25 °C sont indiquées dans le tableau suivant :

$10^3 c$ mol . l^{-1}	5	3,33	2,50	1	0,5	0,333	0,25
$10^4 \Lambda$ S m^2 mol^{-1}	107,92	115,50	119,80	132,60	139,22	143,27	145,24

Sachant que la permittivité de l'acétone est égale à $1{,}83 \cdot 10^{-10}$ Fm^{-1} et que sa viscosité η vaut $3{,}06 \cdot 10^{-4}$ Pa s, déterminer la conductivité molaire Λ^0 du *p*-nitrophénate de tétrabutylammonium dans l'acétone, puis calculer la constante de dissociation K_{QY} de cet électrolyte dans le même solvant.

c) Dans les solvants de faible permittivité tels que le dichloro-1,2 éthane, les ions simples sont susceptibles de s'assembler avec les paires d'ions pour former des ions triples.

A l'équilibre de dissociation de la paire d'ions dont la constante d'équilibre est notée ici K_2 :

$$(Q^+ X^-) \rightleftarrows Q^+ + X^- \qquad K_2$$

il faut superposer les équilibres de dissociation des ions triples :

$$(Q^+ X^- Q^+) \rightleftarrows (Q^+ X^-) + Q^+ \qquad K_3$$

$$(X^- Q^+ X^-) \rightleftarrows (Q^+ X^-) + X^- \qquad K_3$$

On assimilera l'activité à la concentration des espèces dissoutes. Soit Λ^0_{tr} la conductivité molaire limite des ions triples. On considère que $\Lambda^0_{tr} = \frac{1}{3} \Lambda^0$, Λ^0 étant la conductivité molaire limite des ions simples.

Donner l'expression de la conductivité molaire Λ en fonction de la concentration c en sel, quand il y a coexistence des trois espèces, ions simples, paires d'ions et ions triples (on pourra considérer que QX est présent en solution essentiellement à l'état de paires d'ions).

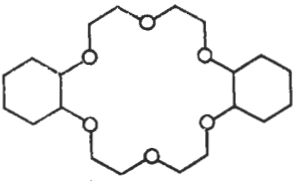
La conductivité molaire d'une solution de concentration variable en perchlorate de tétrabutylammonium dans le benzène à 25 °C est donnée dans le tableau ci-après :

$10^6\ c$ mol . l^{-1}	8	9,4	10	13,3	14,3	16,0	17,8	20,0	22,8	25,8	28,6	32	42,2
$10^{10}\ \Lambda$ S . m^2 mol^{-1} . .	236	220	209	190	177	171	166	161	153	159	168	173	177

En déduire les valeurs correspondantes de K_2 et K_3 sachant que $\Lambda^0 = 107\ 10^{-4}$ S m^2 mol^{-1}.

2.3. Influence de la complexation par les éthers-couronne.

On s'intéresse au titrage conductimétrique du chlorure de potassium en solution à la concentration c dans un solvant, par le dicyclohexyle-18-couronne 6 (L) dissous dans le même solvant.



(L)

On sait que la réaction qui intervient est la complexation de K+ selon l'équilibre :

$$KL_n^+ \rightleftharpoons K^+ + {}_nL$$

Sur la fig. 1 suivante, la courbe *a* est obtenue quand le solvant est le méthanol et la courbe *b* est obtenue lorsque les produits sont dissous dans un mélange de chloroforme et de méthanol dans les proportions 90 : 10.

Déduire de ces courbes la stoechiométrie du complexe.

Proposer une explication à la décroissance de la conductivité observée dans le cas *a* et à l'augmentation de la conductivité observée sur la courbe *b*.

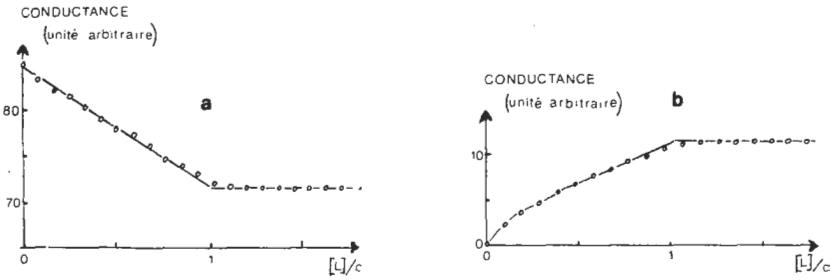


Fig. 1

II. Aspects cinétiques

1. *Réactivités des ions et des paires d'ions.*

La réaction de méthylation par l'iodométhane du *p*-nitrophénate en *p*-nitroanisole en présence de cations tétrabutylammonium Q^+ est étudiée dans des solvants de permittivité ε supérieure à 10^{-10} F m^{-1}, dans lesquels les seules espèces réactives sont les ions Y^- et les paires d'ions ($Q^+ Y^-$). Il se produit donc deux réactions parallèles, du premier ordre en chacun des réactifs :

$$Y^- + CH_3I \xrightarrow{k_i} YCH_3 + I^-$$

$$(Q^+ Y^-) + CH_3I \xrightarrow{k_{pi}} YCH_3 + (Q^+ I^-).$$

a) Exprimer la vitesse v de consommation totale de CH_3I en fonction de k_i, k_{pi}, du degré de dissociation α des paires d'ions ($Q^+ Y^-$), de la concentration totale c de Y et de la concentration $[CH_3I]$ de l'iodométhane. En déduire $k = \dfrac{v}{c \cdot [CH_3I]}$.

b) Afin de préciser la réactivité des espèces, la réaction est étudiée dans le dichloro-1,2 éthane, à 25 °C, en présence d'un excès d'iodométhane ($[CH_3I] = 12{,}85 \cdot 10^{-2}$ mol. l^{-1}).

On examine les variations du rapport k en fonction de la concentration c du *p*-nitrophénate de tétrabutylammonium (α est le degré de dissociation des paires d'ions).

c mol . l^{-1}	2,74 . 10^{-4}	2,61 . 10^{-3}	6,54 . 10^{-3}	1,22 . 10^{-2}	1,63 . 10^{-2}	2,43 . 10^{-2}	2,95 . 10^{-2}
α	0,673	0,382	0,293	0,241	0,220	0,194	0,182
k mol^{-2} l min^{-1}	0,908	0,678	0,564	0,516	0,500	0,495	0,450

Déterminer les valeurs respectives de k_i et k_{pi}.

2. *Facteurs influençant la vitesse de réaction en système monophasique.*

a) Présence d'un sel étranger à ion commun.

On veut déterminer la grandeur k dans le cas où la réaction de méthylation est conduite dans le dichloro-1,2 éthane avec une concentration $c = 2{,}43 \cdot 10^{-2}$ mol l^{-1} en *p*-nitrophénate de tétrabutylammonium QY et en présence de tétraphénylborure de tétrabutylammonium QZ à la concentration $c' = 2{,}50 \cdot 10^{-2}$ mol l^{-1}.

On donne $K_{QY} = 2{,}25 \cdot 10^{-4}$ et $K_{QZ} = 10^{-3}$. On considérera que le coefficient d'activité moyen est égal à 0,440. Donner l'expression littérale de l'équation du troisième degré permettant de calculer la valeur α du coefficient de dissociation des paires d'ion ($Q^+ Y^-$). On posera $\dfrac{K_{QY}}{K_{QZ}} = \omega$ et $\dfrac{K_{QY}}{\gamma^2} = u$.

On trouve $\alpha = 0{,}1$. En déduire la valeur correspondante de k. Commenter le résultat.

b) Influence du cation.

La réaction de méthylation est conduite à l'aide de *p*-nitrophénate de tétraéthylammonium PY. On donne $K_{PY} = 1{,}87 \cdot 10^{-4}$.

Les résultats cinétiques sont rassemblés dans le tableau ci-après :

$10^2\, c_{PY}$ mol l^{-1}	k l mol^{-1} min^{-1}	α
2,5	0,558	0,176
1,61	0,575	0,203
0,49	0,650	0,292
2,66 10^{-2}	0,930	0,648

Calculer k_i et k_{pi}. Commenter le résultat.

c) Influence du solvant.

A partir des résultats expérimentaux ci-après, discuter l'influence du solvant sur la cinétique de la réaction de méthylation du *p*-nitrophénate.

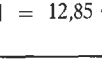
Solvant	Benzène	Méthyl-1 naphtalène	Dichloro-1,2 éthane	Acétone	Diméthyl sulfoxyde	Diméthyl formamide (DMF)	DMF + benzène 50 %
ε 10^{10} Fm^{-1}	0,20	0,24	0,92	1,83	4,12	3,24	1,78
k l mol^{-1} min^{-1}.....	0,34	0,65	0,62	1,72	0,95	1,51	3,03
α	–	2,13 10^{-3}	0,103	0,659	0,988	0,930	0,622

d) Influence de l'eau et des solvants protiques.

Les solvants protiques sont en général des milieux peu favorables aux réactions anioniques. A partir des résultats expérimentaux ci-après, expliquer l'inhibition en présence d'eau ou de composés protiques RH, de la réaction de méthylation du *p*-nitrophénate de tétrabutylammonium dans le dichloro-1,2 éthane à 298 K.

[*p*-nitrophénate de tétrabutylammonium] = $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ mol l^{-1}.

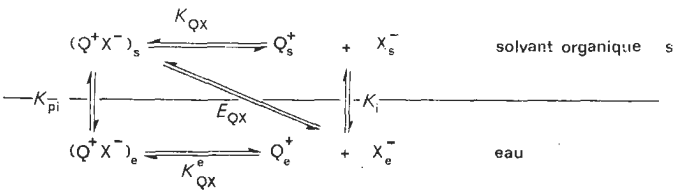
$[CH_3I]$ = $12{,}85 \cdot 10^{-2}$ mol l^{-1}.

RH	c_{RH} mol l^{-1}	k l mol^{-1} min^{-1}	Conductance $10^3\chi$ S
-	-	0,529	0,331
CH_3OH	0,149	0,076	0,368
CH_3OH	2,47	0	0,615
O_2N–  –OH	$5 \cdot 10^{-2}$	0	0,465
H_2O	$8{,}75 \cdot 10^{-2}$	0,134	0,395

B. SYSTEMES BIPHASIQUES

I. Aspects thermodynamiques

On considère deux solvants peu miscibles au contact l'un de l'autre, par exemple un solvant organique et de l'eau. On se propose d'étudier le comportement d'un sel QX introduit dans ce système. Les équilibres y intervenant peuvent être résumés par le schéma général suivant :



Les indices ou exposants *s* sont relatifs aux espèces dissoutes dans le solvant organique, *e* se rapporte aux espèces dans l'eau.

Les différents équilibres sont caractérisés par des constantes ainsi définies :

$$E_{QX} = \frac{a_{(Q^+X^-)_s}}{a_{Q^+_e} \cdot a_{X^-_e}}$$ constante thermodynamique d'extraction de paire d'ions ;

$$K_{QX} = \frac{a_{Q^+_s} \cdot a_{X^-_s}}{a_{(Q^+X^-)_s}}$$ constante thermodynamique de dissociation de la paire d'ions dans *s*. Pour des raisons de simplification l'exposant *s* est, ici, omis ;

$$K^{e}_{QX} = \frac{a_{Q^+_e} \cdot a_{X^-_e}}{a_{(Q^+X^-)_e}}$$ constante de dissociation de la paire d'ions dans l'eau.

Les équilibres de partage des paires d'ions et des ions entre les deux solvants sont caractérisés par :

$$K_{pi} = \frac{a_{(Q^+X^-)_s}}{a_{(Q^+X^-)_e}} \qquad K_i = \frac{a_{Q^+_s} \cdot a_{X^-_s}}{a_{Q^+_e} \cdot a_{X^-_e}}$$

Enfin on sera conduit à utiliser :

$$e_{QX} = \frac{[(Q^+X^-)_s]}{[Q^+_e] \cdot [X^-_e]}$$ constante expérimentale d'extraction de paire d'ions.

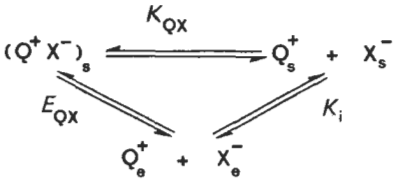
1. *Généralités.*

1.1. Exprimer simplement K_i en fonction de E_{QX} et K_{QX}.

1.2. Soient $\Delta G_t^0(Q^+)$ et $\Delta G_t^0(X^-)$ les enthalpies libres molaires standard de transfert de l'eau vers *s* des ions Q+ et X−. Exprimer la somme $\Delta G_t^0(Q^+) + \Delta G_t^0(X^-)$ en fonction de K_{pi}, K_{QX} et K^{e}_{QX}.

2. *Etude expérimentale des sels d'onium.*

On considère par la suite que l'eau ne contient pas de paires d'ions et que seuls interviennent donc les équilibres :



On a déterminé pour un certain nombre de sels d'onium la constante d'extraction de paires d'ions E_{QX} et la constante d'extraction d'ions K_i dans le cas où le solvant est le dichloro-1,2 éthane saturé d'eau.

		Cl^-	Br^-	I^-	p^-
Bu_4N^+	E_{QX}	0,13	6,54	830	247
	K_i	$2,99.10^{-6}$	$9,16.10^{-4}$	$7,18.10^{-2}$	$6,42.10^{-2}$
Bu_4P^+	E_{QX}	0,57	28,4	3730	610
	K_i	$1,5.10^{-4}$	$4,83.10^{-3}$	0,391	0,363
Ph_4As^+	E_{QX}	5,06	349	$4,3.10^4$	$1,9.10^4$
	K_i	$5,0.10^{-3}$	0,178	20	16

p^- = *p*-nitrophénate

2.1. A chaque sel de ce tableau, on fait correspondre un point sur un diagramme que l'on construit en portant en abscisse lg K_i pour Bu_4NX et en ordonnée lg K_i pour QX, pour les différents Q^+ et X^-. Justifier par des considérations thermodynamiques, après l'avoir vérifié graphiquement, que les points correspondants à un même cation sont alignés.

2.2. Montrer que le produit $E_{QX} \cdot K_{QX}$ peut se mettre sous la forme du produit de deux termes f_Q et f_X dépendant chacun du cation et de l'anion seul.

2.3. On considère quatre ions Q^+, M^+, X^- et Y^- susceptibles d'être extraits de l'eau selon le schéma donné ci-dessus (§ B.I.2.).

2.3.1. Donner l'expression de lg E_{MY} en fonction des constantes E et K relatives à QX, QY et MX, ainsi que de la constante de dissociation K_{MY}.

2.3.2. En déduire que si les composés appartiennent à une même famille, les constantes de dissociation des paires d'ions étant très voisines, on attend :

$$\lg E_{MY} - \lg E_{MX} \approx \lg E_{QY} - \lg E_{QX}.$$

Que doit-on observer si l'on trace alors, dans cette approximation, un diagramme construit avec lg E de façon analogue à ce qui a été fait précédemment (B.I.2.1.) avec lg K_i ? Est-ce vérifié dans le cas des données du tableau précédent ?

2.4. Les logarithmes des constantes expérimentales d'extraction lg e de divers picrates d'ammonium quaternaires dans divers solvants sont regroupés ci-après :

Solvant \ Q^+	Me_4N^+	Et_4N^+	Pr_4N^+	Bu_4N^+	Pe_4N^+
CH_2Cl_2	0,18	2,34	4,46	6,68	8,39
$CHCl_3$	−0,65	1,32	3,64	5,91	–
C_6H_6	–	−0,65	1,54	3,59	5,90

2.4.1. Tracer sur un graphique, pour chaque solvant, lg e en fonction du nombre n d'atomes de carbone du cation. En déduire, pour chaque solvant, une expression numérique simple de lg e en fonction de n.

2.4.2. A la vue de ces seuls résultats, quels critères pourrait-on retenir pour choisir un cation assurant un transfert efficace des picrates de la phase aqueuse à la phase organique ?

3. *Mesure des constantes d'extraction et des grandeurs de transfert des sels d'onium.*

3.1. Solubilité : on considère une solution saturée d'un sel QX dans le solvant s sec. La solubilité σ_s y est faible et le sel est dissous

sous forme de paires d'ions $(Q^+ X^-)_s$ et d'ions libres (constante d'équilibre K_{QX}).

Par ailleurs, on considère une solution aqueuse saturée en QX uniquement dissous sous forme d'ions libres : la solubilité est σ_e.

3.1.1. Déterminer la relation existant entre le produit de solubilité S_s de QX dans s, K_{QX}, σ_s et le coefficient d'activité moyen γ_s.

3.1.2. Exprimer le produit de solubilité S_e de QX dans l'eau en fonction de σ_e.

3.1.3. Donner l'expression de K_i en fonction de S_s et S_e. En déduire celle de $[\Delta G_t^0(Q^+) + \Delta G_t^0(X^-)]$ en fonction de S_s et S_e.

3.1.4. *Application :* lorsque QX est le *p*-nitrophénate de tétrabutylammonium et s le dichloro-1,2 éthane, on a mesuré :

$$S_s = 3 \cdot 10^{-2} \text{ mol l}^{-1}, \quad K_{QX} = 2{,}1 \cdot 10^{-4} \quad \text{et} \quad S_e = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ mol l}^{-1}.$$

Sachant que γ_s est de l'ordre de 0,2, calculer S_s et S_e. Si l'on donne $\Delta G_t^0(Bu_4N^+) = -17{,}56$ kJ mol^{-1} en déduire l'enthalpie libre molaire standard de transfert de l'ion *p*-nitrophénate.

3.1.5. Moyennant certaines hypothèses, on a pu déterminer les enthalpies libres molaires standard de transfert d'un certain nombre de cations et d'anions :

— d'une part de l'eau vers le solvant sec ${}_s\Delta G_t^0$;

— d'autre part de l'eau vers le solvant saturé d'eau ${}_h\Delta G_t^0$.

Solvant : dichloro-1,2 éthane.

	I	Br	Cl	p⁻	Bu_4N^+
${}_s\Delta G_t^0$ kJ mol^{-1}	25,16	39,29	53,50	26,33	−17,56
${}_h\Delta G_t^0$ kJ mol^{-1}	23,83	35,53	45,14	25,50	−19,60

Comment peut-on interpréter les différences entre ces deux grandeurs ?

3.2. Partage : on considère les équilibres proposés sur le schéma du § B.I.2. On pose $c_s = [(Q^+ X^-)_s] + [Q_s^+]$, concentration de l'espèce Q dans le solvant s, et c_e la concentration de Q dans l'eau. Ces deux grandeurs sont mesurables expérimentalement et on définit le coefficient de partage $D = \dfrac{c_s}{c_e}$. On définit également $D' = \dfrac{\gamma_s c_s}{\gamma_e c_e}$, γ_s et γ_e étant les facteurs d'activité moyens des ions dans le solvant et dans l'eau.

3.2.1. Montrer que :

$$D = e_{QX}\, c_e + \frac{\sqrt{e_{QX}\, K_{QX}}}{\gamma_s}. \qquad (2)$$

3.2.2. Exprimer D' sous une forme analogue en fonction de c_e et E_{QX} notamment.

3.2.3. On a relevé, dans le cas du transfert eau/dichloro-1,2 éthane, les valeurs suivantes de c_e et c_s (en mol l^{-1}) pour divers sels :

$Bu_4N^+ Br^-$	$10^3.c_e$	6,64	12,6	21,9	31,3	
	$10^3.c_s$	0,49	1,29	3,13	5,82	$\bar{\gamma}_s = 0{,}650$
$Bu_4N^+ I^-$	$10^3.c_e$	0,62	1,06	1,51	3,29	
	$10^3.c_s$	0,54	1,24	2,18	9,44	$\bar{\gamma}_s = 0{,}650$
$Bu_4N^+ p^-$	$10^3.c_e$	1,60	2,47	4,55	9,40	
	$10^3.c_s$	1,16	2,21	6,35	22,3	$\bar{\gamma}_s = 0{,}600$
$Bu_4p^+ Br^-$	$10^3.c_e$	2,77	5,12	9,58	13,2	
	$10^3.c_s$	0,44	1,09	3,01	5,23	$\bar{\gamma}_s = 0{,}675$

Montrer que la relation (2) est généralement vérifiée.

En déduire, pour chaque sel, e_{QX} et K_{QX}, si on suppose γ_s constant, et prenant les valeurs moyennes γ_s indiquées dans le tableau.

3.2.4. On se propose de déterminer une méthode de calcul de E_{QX}. On dispose (fig. 2) de courbes donnant les facteurs d'activité dans l'eau (*a*) et le solvant (*b*) en fonction de la concentration ionique.

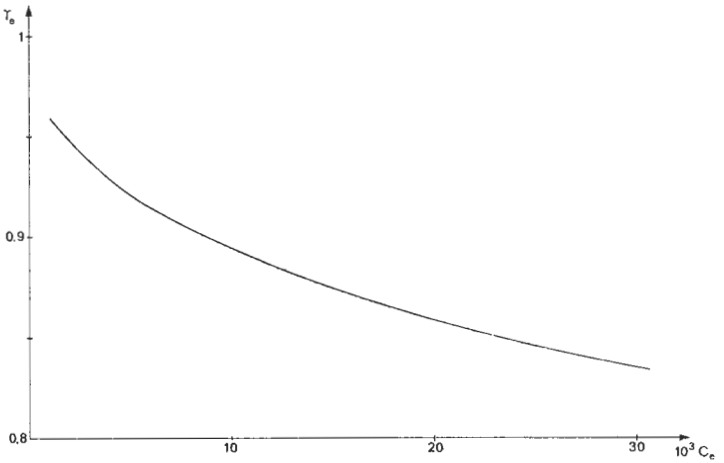


Fig. 2 *a*

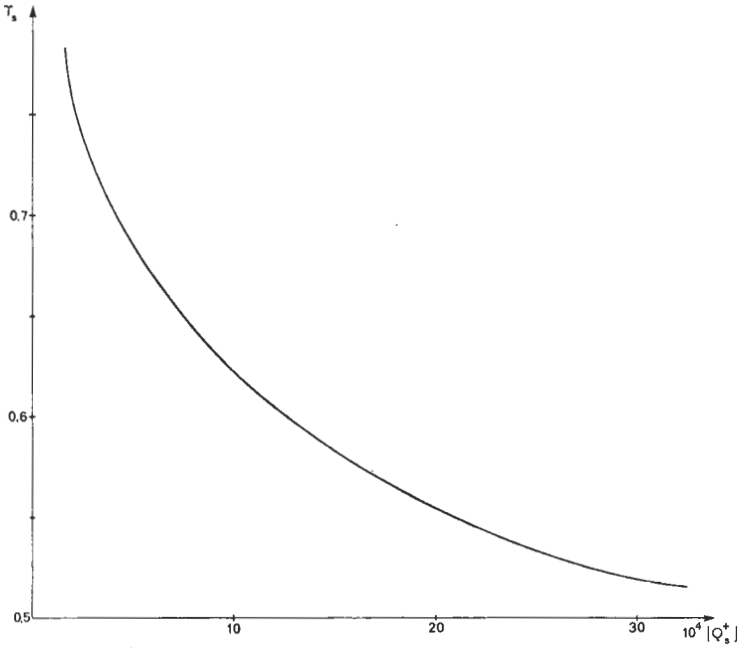


Fig. 2 *b*

Montrer qu'en assimilant, dans un premier temps, E_{QX} à e_{QX}, on peut déterminer $a_{(Q^+ X^-)s}$ puis $[Q_s+]$ et en déduire K_{QX}.

Effectuer le calcul dans le cas du bromure de tétrabutylammonium pour les quatre valeurs des concentrations indiquées en B.3.2.3. Que peut-on penser de la valeur de E_{QX} ainsi choisie ?

Proposer un algorithme permettant de déterminer une valeur exacte de E_{QX}.

On dispose des valeurs de E_{QX} ainsi obtenues :

$Bu_4N^+ Br^-$: $E_{QX} = 6{,}54$ $\quad$ $Bu_4N^+ I^-$: $E_{QX} = 830$

$Bu_4N^+ p^-$: $E_{QX} = 247$ $\quad$ $Bu_4P^+ Br^-$: $E_{QX} = 28{,}4$.

Expliquer le sens des écarts entre e_{QX} (déterminé en 3.2.3.) et E_{QX}.

3.2.5. On dispose des valeurs de K_{QX} déterminées, pour un certain nombre de sels, dans deux conditions différentes, le solvant étant le même (dichloro-1,2 éthane). Pour chaque sel, la première ligne est relative au cas du solvant sec, la seconde au cas du solvant saturé d'eau.

Cation \ Anion	Cl^-	Br^-	I^-
Bu_4N^+	9.10^{-5} $2,3.10^{-4}$	$1,2.10^{-4}$ $2,0.10^{-4}$	$1,4.10^{-4}$ $1,6.10^{-4}$

Anion \ Cation	Bu_4N^+	Pe_4N^+	Bu_4P^+	Ph_4P^+
NO_2 $-O^-$	$2,1.10^{-4}$ $3,1.10^{-4}$	$2,3.10^{-4}$ $4,4.10^{-4}$	$1,6.10^{-4}$ $2,6.10^{-4}$	$7,4.10^{-4}$ $9,1.10^{-4}$

a) Que peut-on dire de l'influence de la présence d'eau dans le solvant ? Comment l'interpréter ?

b) Si l'on étudie la famille des halogénures d'onium, on constate une différence sensible entre le cas du solvant sec et celui du solvant saturé d'eau. Quelle est-elle ? Proposer une explication.

4. *Extraction par les éthers-couronnes.*

4.1. On considère un cation A^+ susceptible de donner des complexes dans le solvant s et dans l'eau avec un éther couronne L selon :

$$(AL_n^+)_s \underset{}{\overset{K^s_{(AL_n^+)}}{\rightleftharpoons}} A_s^+ + nL_s$$

$$(AL_n^+)_o \underset{}{\overset{K^e_{(AL_n^+)}}{\rightleftharpoons}} A_e^+ + nL_e$$

Exprimer la différence entre les enthalpies libres molaires standard de transfert $[\Delta G_t^0(A^+) - \Delta G_t^0(AL_n^+)]$ de l'eau vers s des cations A^+ et AL_n^+, en fonction des constantes de dissociation $K^s_{(AL_n^+)}$ et $K^e_{(AL_n^+)}$ des complexes dans les deux solvants et de la constante de partage K_L de L $\left(K_L = \dfrac{a_{L_s}}{a_{L_e}} \right)$.

4.2. Des mesures de voltammétrie cyclique ont permis de calculer, à différentes températures, les constantes de dissociation $K^s_{(NaL^+)}$ dans le cas où s est le nitrobenzène et L le dibenzo-18-couronne-6.

t (°C)	5	20	35	50	65
$-\lg K^s_{(NaL^+)}$	6,81	6,43	6,09	5,79	5,51

4.2.1. En déduire la valeur de la constante $K^s_{(NaL^+)}$ de dissociation du complexe dans le nitrobenzène à 25 °C. Calculer les enthalpie libre, enthalpie et entropie molaires standard de dissociation de NaL^+ dans le nitrobenzène.

4.2.2. On a déterminé par ailleurs à 25 °C l'enthalpie libre molaire standard de transfert de l'eau vers le nitrobenzène du cation Na^+ :

$$\Delta G_t^0(Na^+) = 34{,}2 \text{ kJ mol}^{-1}$$

— la constante de partage $\lg K_L = 4{,}4$;

— la constante de dissociation dans l'eau de NaL^+ $\lg K^e_{(NaL^+)} = -1{,}2$.

En déduire l'enthalpie libre molaire standard de transfert du complexe NaL^+ $\Delta G_t^0(NaL^+)$. Quelle conclusion peut-on en tirer quant à l'influence de la présence de L sur la répartition du sodium entre les deux phases ?

5. *Préparation des sels d'onium par extraction par paire d'ions et échange d'anion.*

On considère le cas où les sels d'onium sont exclusivement sous forme de paires d'ions dans le solvant organique et sous forme d'ions libres dans l'eau.

Dans ce paragraphe, on assimilera activité et concentration des espèces dissoutes.

5.1. Séparation quantitative d'anions : on dispose d'un mélange de deux sels QX et QY, et l'on appelle D_X et D_Y les coefficients de partage de X et Y, définis au § B.I.3.2.

Ecrire les expressions simplifiées de D_X et D_Y en fonction respectivement de E_{QX} et E_{QY}, ainsi que $[Q^+_e]$.

Dans le cas où les deux phases ont le même volume, quelle condition doit respecter le rapport $\dfrac{E_{QX}}{E_{QY}}$ pour que le solvant utilisé contienne plus de 99 % de X et l'eau plus de 99 % de Y ?

5.2. Pour obtenir un composé QX hydrophile à partir d'un composé QY lipophile, on utilise un cation auxiliaire BH^+ qui met en jeu l'équilibre :

$$(HB^+ X^-)_s + (Q^+ Y^-)_s \rightleftarrows (HB^+ Y^-)_s + Q^+_e + X^-_e .$$

On souhaite que cette réaction soit suffisamment quantitative pour la synthèse de QX.

5.2.1. On place dans la phase organique le composé QY à la concentration c^0 et B, la base conjuguée de BH^+ (pour lesquels on a l'équilibre $B_s + HX_e \rightleftarrows (BH^+ X^-)_s$ à la concentration $c^0_B > c^0$.

On place dans la phase aqueuse l'acide HX à la concentration c^0_B, puis on ajoute ces deux solutions volume à volume, et on considère le cas où $c^0_B = 2\,c^0$.

Exprimer les deux constantes d'extraction E_{HBX} et E_{HBY} ; en déduire le rapport $\frac{[Y^-_e]}{[X^-_e]}$. Quelle condition doit vérifier $\frac{E_{HBY}}{E_{HBX}}$ pour que $\frac{[Y^-_e]}{[X^-_e]} < 10^{-2}$?

On souhaite également que la perte de Q sous forme de $(Q^+ X^-)$ en phase organique soit faible. Quelle relation doit-il exister entre lg E_{QX} et lg c^0 pour que $\frac{[(Q^+ X^-)_s]}{[Q^+_e]} < 10^{-2}$?

Quelle condition doit satisfaire E_{HBX} pour que moins de 1 % de B ne passe en phase aqueuse (sous forme de BH^+) ?

5.2.2. Cette méthode est utilisée pour synthétiser l'hydrogénosulfate de tétrabutylammonium à partir de l'iodure de ce cation, à l'aide de trioctylamine, selon le schéma suivant :

$$H_2SO_4 + Bu_4N^+I^- + Oct_3N \xrightarrow{\text{eau + toluène}} \text{phase organique}_1 + \text{phase aqueuse}_2.$$

$Bu_4N^+ HSO^-_4$ est extrait de la phase aqueuse (après lavages) par évaporation de l'eau. Quelle est l'espèce principale contenue dans la phase organique$_1$? Cette phase organique$_1$ est traitée par une solution de soude. Quels produits attend-on dans chacune des phases après agitation ?

II. Aspects cinétiques

Soit un volume V_e d'une solution aqueuse d'un sel de sodium NaA et un volume V_s de solution d'un composé RX dans un solvant organique non miscible à l'eau.

On envisage la réaction suivante, où RX et RA sont insolubles dans l'eau :

$$RX_s + A^-_e \rightarrow RA_s + X^-_e.$$

Cette réaction peut être effectuée à l'aide d'un cation lipophile Q^+, dit catalyseur de transfert de phase, qui assure l'extraction de A^+ sous forme de paires d'ions $(Q^+ A^-)_s$ selon l'équilibre, instantanément établi :

$$(Q^+ X^-)_s + A^-_e \rightleftarrows (Q^+ A^-)_s + X^-_e$$

de constante K_a. On négligera les corrections d'activité et on supposera que Q^+ existe uniquement sous forme de paires d'ions et uniquement dans la phase organique.

On admet que la réaction de substitution se déroule dans la phase organique et que seules les paires d'ions sont réactives selon :

$$RX_s + (Q^+ A^-)_s \rightarrow RA_s + (Q^+ X^-)_s.$$

Cette réaction, du premier ordre en chacune des espèces réactives, est caractérisée par une constante de vitesse k_0.

On se propose d'étudier la cinétique de la réaction en utilisant les notations suivantes :

x fraction de RX initial transformé en RA à l'instant t ;

R_0 quantité de matière de RX à l'instant $t = 0$;

N_0 quantité de matière de A_e^- à l'instant $t = 0$;

C_0 quantité de matière de X_e^- à l'instant $t = 0$;

Q_0 concentration du catalyseur en phase organique.

1. Exprimer $[(Q^+ A^-)_s]$ en fonction de K_a, Q_0, $[A_e^-]$ et $[X_e^-]$. En déduire $v = \dfrac{d\,[(RX)_s]}{dt}$.

2. On suppose que le catalyseur est engagé en quantité négligeable par rapport aux autres espèces présentes. On pose :

$$\alpha = \frac{c_0}{N_0} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{R_0}{N_0}.$$

Exprimer $\dfrac{dx}{dt}$ en fonction de k_0, K_a, Q_0, α, β et x.

3. Vérifier que la solution de l'équation différentielle précédente correspondant aux conditions initiales $x = 0$ pour $t = 0$ peut être présentée, lorsque $\beta \neq 1$, sous la forme :

$$A \ln (1 - \beta x) - B \ln (1 - x) = (1 - \beta) D t \qquad (3)$$

avec $D = k_0 K_a Q_0$. Calculer A et B en fonction de α, β et K_a.

4. Lors de la cyanuration du chloro-1 octane par le cyanure de sodium en présence d'un catalyseur de transfert de phase, on a relevé les données suivantes :

masse initiale de chloro-1 octane : 132 g ;

masse initiale de cyanure de sodium : 100 g ;

concentration en catalyseur introduit en phase organique : $3{,}25 \cdot 10^{-2}$ mol l^{-1} ;

constante de vitesse de la réaction : $k_0 = 0{,}08$ $mol^{-1}\,s^{-1}\,l$;

à l'instant $t = 0$, il n'y a pas d'ions chlorure dans l'eau.

On appelle y le pourcentage de chloro-1 octane n'ayant pas réagi à l'instant t. Tracer les courbes $\lg y = f(t)$ pour les valeurs de K_a suivantes :

50 ; 5 ; 0,5 ; 0,05

(on limitera l'axe des temps à 1,2 h).

On admettra que l'équation (3) décrit dans ce cas la cinétique de la réaction.

5. On se place maintenant dans le schéma réactionnel donné précédemment, mais on suppose :

(*i*) que les conditions sont telles que la cinétique est du premier ordre, en fonction de $[(Q^+ A^-)_s]$;

(*ii*) que $\alpha = 0$ et que $\beta = 1$.

5.1. Relier K_a aux constantes d'extraction.

5.2. On appelle μ la vitesse relative de réaction (vitesse rapportée à la vitesse initiale). Exprimer μ en fonction de K_a et x.

5.3. On donne, pour le même cation tétrabutylammonium, les valeurs de lg e_{QX} pour trois anions halogénures lors du transfert de l'eau dans un même solvant (e_{QX} est défini au B.I.) :

X^-	Cl^-	Br^-	I^-
lg e_{QX}	– 0,46	1,23	3,24

Les vitesses initiales des réactions des halogénures d'alkyle dépendent de l'halogène : si on prend pour base 1 celle des chlorures, elles sont respectivement 40 pour les bromures et 100 pour les iodures.

Calculer, pour $x = 0$; 0,01 ; 0,1 ; 0,5, les vitesse relatives pour les trois halogénures dans les deux cas suivants :

$$\frac{e_{QX}}{e_{QA}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{e_{QX}}{e_{QA}} = 10.$$

A fin de comparaison, on rapportera toutes ces vitesses relatives à la vitesse initiale du chlorure : $\mu_{QCl}(x = 0) = 1$; $\mu_{QBr}(x = 0) = 40$, etc.

Qu'en conclure quant au choix du dérivé halogéné RX pour préparer RA dans ces conditions ?

SOLUTION

A. SYSTEMES MONOPHASIQUES

I. Aspects thermodynamiques

1. *Introduction à la théorie des paires d'ions dans le modèle de Bjerrum.*

On étudie l'équilibre de dissociation :

$$(A^+ B^-) \rightleftarrows A^+ + B^-.$$

a) La probabilité pour que le centre d'un ion B^- soit situé à une distance comprise entre r et $r + dr$ de l'ion A^+ considéré est proportionnelle :

— au rapport du volume $4\pi r^2 dr$ au volume total V de la solution,

— au nombre total N d'ions B^- présents,

— au facteur de Boltzmann.

Or, $n_B = N/V$ d'où :

$$dn_B = P(r)\,dr = 4\pi n_B r^2 \exp(e^2/4\pi\varepsilon k T r)\,dr.$$

Pour les faibles valeurs de r, la fonction P est dominée par le terme exponentiel, et elle augmente lorsque r décroît. Pour les grandes valeurs de r, P croît avec r car le volume de la couche sphérique augmente en r^2. Il s'ensuit que P passe par un minimum (fig. 1) pour la valeur particulière q de r :

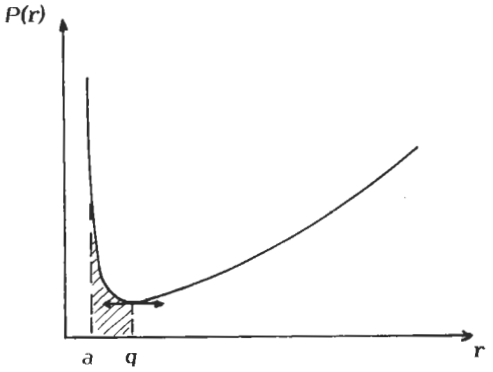


Fig. 1. — Densité de probabilité de trouver un ion de signe opposé à celui de l'ion central en fonction de la distance entre ces deux ions (d'après Bjerrum).

$$q = e^2/8\pi\varepsilon kT.$$

A cette distance, l'énergie électrostatique d'interaction des ions est égale au double de l'énergie d'agitation thermique kT.

b) D'après la définition de Bjerrum, les paires d'ions correspondent aux cas où l'anion B^- est situé à une distance de l'ion central inférieure à q (mais nécessairement supérieure à $a = r_{A^+} + r_{B^-}$).

Le degré d'association ϑ est égal à la probabilité d'existence d'une paire d'ions formée avec l'ion central A^+ :

$$\vartheta = \int_a^q P(r)\,dr$$

soit :

$$\vartheta = 32\pi n_B q^3 Q(2q/a).$$

La concentration molaire des paires d'ions est donnée par :

$$[(A^+B^-)] = \vartheta c^0$$

or :

$$n_B = N_A \cdot c^0$$

d'où :

$$[(A^+B^-)] = 32\pi N_A c^{0\,2} q^3 Q(2q/a).$$

c) Dans le cas d'une solution infiniment diluée :

$$[A^+] = [B^-] = c^0$$

donc :

$$K_{Bj} = [A^+][B^-]/[(A^+B^-)] = 1/[32\pi N_A q^3 Q(2q/a)].$$

d) Pour calculer les valeurs numériques des constantes K_{Bj} correspondant aux conventions thermodynamiques définies en tête de l'énoncé, il convient d'exprimer q en dm (et les concentrations molaires en mol. dm^{-3}).

solvant	Q^+	$10^{10} \cdot a$ (m)	10^{10} q (m)	$2q/a$	Q	K_{Bj}
dichloro-1,2 éthane	Et_4N^+	3,48	27,1	15,6	14,2	$5{,}9 \cdot 10^{-6}$
	Bu_4N^+	5,00		10,8	6,9	$1{,}2 \cdot 10^{-4}$
méthyléthylcétone	Et_4N^+	3,48	17,9	10,3	5,3	$5{,}4 \cdot 10^{-4}$
	Bu_4N^+	5,00		7,2	1,5	$1{,}9 \cdot 10^{-3}$

K_{Bj} est fonction de la permittivité du solvant, dont dépend q, et de la distance minimale d'approche a : K_{Bj} est d'autant plus

faible que la permittivité du solvant est plus faible et les rayons ioniques plus petits.

Remarque :

Dans le cas plus général d'ions de charges z_+ et z_-, K_{Bj} est plus faible pour les grandes valeurs de z_+ et z_-.

Les écarts entre les valeurs de K_{Bj} et de K_{QY} expérimentales sont liées à la valeur de la distance minimale d'approche a qui est utilisée dans le calcul de K_{Bj}. Cette distance peut en effet varier selon le solvant ; en particulier, dans les milieux de faible permittivité, l'énergie d'interaction électrostatique augmente et a décroît, d'où une plus faible valeur de la constante de dissociation. Un second motif d'écart entre K_{Bj} et K_{QY} réside, dans le cas de solvants de permittivité élevée, dans l'existence de paires d'ions séparées par le solvant (a est alors plus grand).

2. *Etude de la dissociation de composés ioniques en solution.*

2.1. Calcul du coefficient d'activité des ions dans l'approximation de Debye-Hückel.

a) Debye et Hückel admettent que, dans une solution diluée d'électrolyte fort, la dissociation est complète, et que les écarts à l'idéalité de cette solution sont dus uniquement aux interactions électrostatiques enre les ions. Pour calculer les actions électrostatiques sur un ion, il faut prendre en compte la totalité des autres ions de la solution :

$$\chi^2 = \frac{e^2}{\varepsilon\, kT} \sum_{i=j} n_i\, z_i^2.$$

La dimension de χ est l'inverse d'une longueur : $1/\chi$ est le rayon de l'atmosphère ionique.

L'équation de Poisson s'écrit :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\,\varphi_j(r)}{dr}\right) = -\frac{\varrho_j(r)}{\varepsilon}$$

par le changement de variable $u = \varphi \cdot r$, elle se réduit à :

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \chi^2 u$$

dont la solution générale est :

$$u = A\,e^{-\chi r} + B\,e^{\chi r}$$

d'où :

$$\varphi_j(r) = \frac{A}{r} e^{-\chi r} + \frac{B}{r} e^{\chi r} .$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées par les deux conditions :

— pour r ∞, φ_j doit rester fini : $B = 0$;

— l'électroneutralité de la solution impose que la charge de l'atmosphère ionique de l'ion j soit l'opposée de celle de cet ion j, soit :

$$\int_a^\infty 4\pi r^2 \varrho_j(r)\, dr = -z_j e$$

or :

$$\varrho_j(r) = -\sum_{i \neq j} \frac{n_i z_i^2 e^2}{kT} \varphi_j(r) = -\varepsilon \chi^2 \varphi_j(r)$$

soit :

$$4\pi A \varepsilon \chi^2 \int_a^\infty r e^{-\chi r}\, dr = z_j e.$$

L'intégration par parties donne :

$$\int_a^\infty r e^{-\chi r}\, dr = \frac{e^{-\chi a}(1 + \chi a)}{\chi^2}$$

d'où :

$$A = \frac{z_j e}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{e^{\chi a}}{1 + \chi a}$$

et :

$$\varphi_j(r) = \frac{z_j e}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{e^{\chi a}}{1 + \chi a} \cdot \frac{e^{-\chi r}}{r}.$$

Le potentiel $\varphi_j(r)$ peut être considéré comme la superposition du potentiel créé par l'ion, $\varrho''_j = \dfrac{z_j e}{4\pi\varepsilon r}$ et du potentiel φ'_j créé par l'atmosphère ionique de l'ion j :

$$\varphi_j = \varphi'_j + \varphi''_j$$

d'où :

$$\varphi'_j(r) = \frac{z_j e}{4\pi\varepsilon r}\left(\frac{e\chi a}{1+\chi a}\cdot e^{-\chi r} - 1\right)$$

soit, quand $r = a$:

$$\varphi'_j(a) = -\frac{z_j e \chi}{4\pi\varepsilon(1+\chi a)}.$$

$$b)\ W = \int_0^{z_j e} \varphi'_j(a)\,\mathrm{d}x = \varphi'_j(a)\,z_j e = -\frac{z_j^2 e^2 \chi}{4\pi\varepsilon(1+\chi a)}.$$

c) Le potentiel chimique de l'ion j peut s'exprimer, en fonction de γ_j ou de ΔG_j :

$$\mu_j = \mu_j(\text{idéal}) + \mathrm{RT}\ln\gamma_j = \mu_j(\text{idéal}) + \Delta G_j$$

d'où :

$$\ln\gamma_j = \frac{\Delta G_j}{\mathrm{RT}}$$

étant donné que $\Delta G_j = \dfrac{N_A W}{2}$:

$$\ln\gamma_j = -\frac{z_j^2 e^2 \chi}{8\pi\varepsilon kT(1+\chi a)}.$$

Le coefficient d'activité moyen de l'électrolyte AB est défini par $\gamma_\pm = \sqrt{\gamma_+\gamma_-}$, d'où :

$$\ln\gamma_\pm = -\frac{e^2\chi}{8\pi\varepsilon kT(1+\chi a)}.$$

En introduisant la distance q définie précédemment :

$$\ln\gamma_\pm = -\frac{\chi q}{1+\chi a}.$$

2.2. Application de la conductimétrie à la mesure expérimentale des constantes de dissociation de sels d'onium.

a) $K_{QY} = \alpha^2\gamma_\pm^2 c/(1-\alpha)$.

b) Λ^0 est déterminée par extrapolation de la droite représentant les variations de Λ en fonction de $\sqrt{c}$:

$$\Lambda^0 = 157\ 10^{-4}\ \mathrm{S\,m^2\,mol^{-1}}.$$

$\gamma_{\pm}^2$ doit être une fonction affine de $(1-\alpha)/\alpha^2$, la pente étant K_{QY}.

Pour les différentes solutions étudiées, on calcule Z puis T (Z) et l'on déduit α. D'autre part, on calcule $\chi = \sqrt{\frac{N_A e^2}{\varepsilon kT}} \sqrt{\alpha c}$ puis $\gamma_{\pm}$ connaissant q dans l'acétone et a pour le p-nitrophénate de tétrabutylammonium.

Dans l'exemple étudié, K_{QY} est voisin de $1{,}6 \cdot 10^{-2}$.

c) On considère les équilibres :

$$(Q^+ X^-) \rightleftarrows Q^+ + X^- \qquad K_2$$

$$(Q^+ X^- Q^+) \rightleftarrows (Q^+ X^-) + Q^+ \qquad K_3$$

$$(X^- Q^+ X^-) \rightleftarrows (Q^+ X^-) + X^- \qquad K_3$$

les paires d'ions étant majoritaires :

$$\frac{[(Q^+ X^- Q^+)]}{c} = \alpha_{tr} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{[Q^+]}{c} = \alpha \ll 1$$

d'où :

$$K_2 = [Q^+][X^-]/[(Q^+ X^-)] = \alpha^2 c \Rightarrow \alpha = \sqrt{K_2/c}$$

$$K_3 = [(Q^+ X^-)][Q^+]/[Q^+ X^- Q^+)] = \alpha c/\alpha_{tr} \Rightarrow \alpha_{tr} = \sqrt{K_2 c}/K_3$$

La conductivité molaire Λ vaut :

$$\Lambda = \alpha \Lambda^0 + \alpha_{tr} \Lambda^0_{tr}$$

$$\Lambda = \sqrt{K_2} \Lambda^0 c^{-1/2} + \frac{\sqrt{K_2}}{K_3} \Lambda^0_{tr} c^{1/2}$$

K_2 et K_3 sont déterminés en traçant la droite $\Lambda c^{1/2} = f(c)$; $K_2 = 2 \cdot 10^{-17}$; $K_3 = 1{,}1\ 10^{-5}$.

2.3. Complexation par les éthers-couronne.

La valeur du rapport $[L]/c$ à l'équivalence indique la stoechiométrie 1/1 ; le complexe est KL^+.

Dans le méthanol, le chlorure de potassium est à l'état d'ions libres. L'addition de l'éther-couronne implique le remplacement de K^+ libre par le cation KL^+ moins mobile ; on observe donc une décroissance de la conductivité.

En revanche, dans le cas *b*), le chlorure de potassium est initialement sous forme de paires d'ions, et l'addition de L se traduit par l'apparition de cations KL^+ et d'anions Cl^- selon :

$$(K^+ Cl^-) + L \rightarrow KL^+ + Cl^-$$

d'où une augmentation de la conductivité.

II. Aspects cinétiques

1. *Réactivités des ions et des paires d'ions.*

$$Y^- + CH_3 I \xrightarrow{k_i} YCH_3 + I^-$$

$$(Q^+ Y^-) + CH_3 I \xrightarrow{k_{pi}} YCH_3 + (Q^+ I^-).$$

a) Les vitesses des deux réactions parallèles s'écrivent :

$$v_i = k_i\ [Y^-]\ [CH_3I]$$

$$v_{pi} = k_{pi}\ [(Q^+ Y^-)]\ [CH_3I]$$

or :

$$[Y^-] = \alpha c,\ [(Q^+ Y^-)] = (1-\alpha) c \quad \text{et} \quad v = v_i + v_{pi}$$

donc :

$$v = [CH_3I]\ c\ [\alpha k_i + (1-\alpha) k_{pi}]$$

soit :

$$k = \alpha k_i + (1-\alpha)\ k_{pi}.$$

b) Le tracé de la droite $k/\alpha = f[(1-\alpha)/\alpha]$ donne :

$$k_i = 1{,}2\ \text{mol}^{-1}\,\text{l}\,\text{min}^{-1} \quad \text{et} \quad k_{pi} = 0{,}29\ \text{mol}^{-1}\,\text{l}\,\text{min}^{-1}.$$

Dans un solvant peu polaire comme le dichloro-1,2 éthane, les espèces actives sont à la fois les ions et les paires d'ions ; ces dernières ont ici une réactivité quatre fois moindre que celle des ions.

2. *Facteurs influençant la vitesse de réaction.*

a) Présence d'un sel étranger à ion commun.

$$(Q^+ Y^-) \rightleftarrows Q^+ + Y^- \qquad K_{QY} = [Q^+]\,[Y^-]\,\gamma^2/[(Q^+ Y^-)].$$

$$(Q^+ Z^-) \rightleftarrows Q^+ + Z^- \qquad K_{QZ} = [Q^+]\,[Z^-]\,\gamma^2/[(Q^+ Z^-)].$$

Les équations de conservation de la matière sont :

$$\begin{cases} [Y^-] = c\alpha \\ [(Q^+ Y^-)] = c(1-\alpha) \end{cases}$$

$$[(Q^+ Z^-)] + [Z^-] = c'$$

$$[(Q^+ Y^-)] + [(Q^+ Z^-)] + [Q^+] = c + c'.$$

De l'expression de K_{QY}, on tire $[Q^+] = u(1-\alpha)/\alpha$.

De celle de K_{QZ} : $[(Q^+ Z^-)] = c'\omega(1-\alpha)/(\omega - \alpha\omega + \alpha)$.

En reportant dans la dernière équation, on obtient :

$$\alpha^3 c(\omega - 1) + \alpha^2(u\omega - u - c\omega - c') + \alpha(u - 2u\omega) + u\omega = 0$$

$\alpha = 0{,}1$ est bien la seule solution acceptable, d'où :

$$k = k_i\alpha + k_{pi}(1-\alpha) = 0{,}39 \text{ mol}^{-1}\,\text{l min}^{-1}.$$

Cette valeur est inférieure à celle (0,495) donnée dans le tableau de l'énoncé en l'absence de QZ. Ceci est en accord avec le recul de la dissociation de $(Q^+ Y^-)$, entraîné par la présence de QZ, et la plus faible réactivité des paires d'ions.

b) Le tracé de la droite $k/\alpha = f[(1-\alpha)/\alpha]$ donne :

$$k_i = 1{,}2 \text{ mol}^{-1}\,\text{l min}^{-1} \quad \text{et} \quad k_{pi} = 0{,}42 \text{ mol}^{-1}\,\text{l min}^{-1}.$$

Le cation n'a évidemment pas d'influence sur la réactivité de l'anion, mais la paire d'ions est plus réactive.

c) Dans les solvants de permittivité élevée, les ions sont les seules espèces actives. Le solvant intervient par son pouvoir accepteur et sa polarité (effet de solvatation des ions) : k diminue lorsque cet effet augmente. La dilution par un solvant inerte élimine cet effet (k croît, bien que α diminue).

d) Lors de l'addition de composé protique, la conductivité augmente : il n'y a donc pas recul de l'ionisation. La diminution de k doit s'interpréter par la fixation d'eau, ou du composé protique, sur l'anion.

B. SYSTEMES BIPHASIQUES

I. Aspects thermodynamiques

1. *Généralités.*

1.1. D'après les définitions des constantes d'équilibre :

$$K_i = \frac{a_{Q^+s} \cdot a_{X^-s}}{a_{Q^+e} \cdot a_{X^-e}} = E_{QX} \cdot K_{QX}.$$

1.2. En utilisant les potentiels chimiques standard des différentes espèces dans chaque phase :

$$\Delta G_t^0(Q^+) = \mu^0_{Q^+s} - \mu^0_{Q^+e}$$

$$\Delta G_t^0(X^-) = \mu^0_{X^-s} - \mu^0_{X^-e}$$

$$-RT \ln K_{pi} = \mu^0_{(Q^+X^-)s} - \mu^0_{(Q^+X^-)e}$$

$$-RT \ln K_{QX} = \mu^0_{Q^+s} + \mu^0_{X^-s} - \mu^0_{(Q^+X^-)s}$$

$$-RT \ln K^e_{QX} = \mu^0_{Q^+e} + \mu^0_{X^-e} - \mu^0_{(Q^+X^-)e}$$

d'où :

$$\Delta G_t^0(Q^+) + \Delta G_t^0(X^-) = RT \ln \frac{K^e_{QX}}{K_{QX} \cdot K_{pi}}.$$

2. *Etude expérimentale des sels d'onium.*

2.1. La fig. 2 montre que les points correspondant à un même cation sont effectivement alignés.

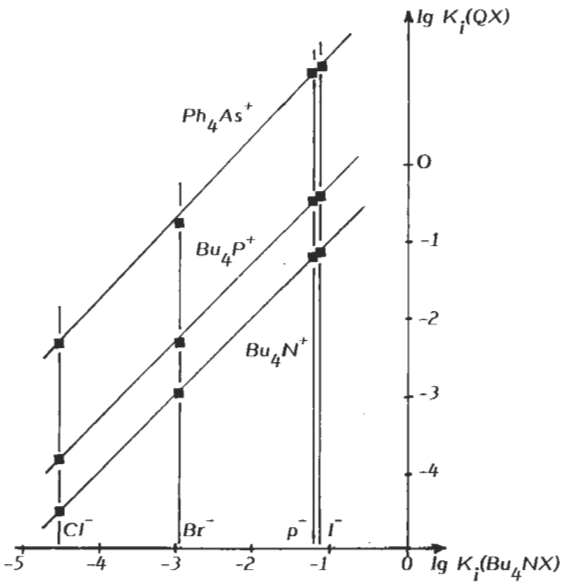


Fig. 2

Quel que soit le sel QX considéré,

$$\Delta G_t^0(Q^+) + \Delta G_t^0(X^-) = -RT \ln K_{i(QX)}$$

donc, quel que soit le cation Q^+,

$$\lg K_{i\,(QX)} - \lg K_{i\,(QY)} = -\frac{1}{2{,}3\ RT}\,[\Delta G_t^0(X^-) - \Delta G_t^0(Y^-)].$$

Cela est vrai en particulier pour $Q^+ = Bu_4N^+$; les points sont alignés, les pentes des droites sont égales à 1.

2.2. $$E_{QX} \cdot K_{QX} = K_i = \exp\left(\frac{-\Delta G_t^0(Q^+) - \Delta G_t^0(X^-)}{RT}\right)$$

$$\ldots = f_Q \cdot f_X \quad \text{avec} \quad f_Q = \exp\frac{-\Delta G_t^0(Q^+)}{RT} \quad \text{et}$$

$$f_X = \exp\frac{-\Delta G_t^0(X^-)}{RT}.$$

2.3.1. D'après le résultat précédent,

$$\log K_i = \lg f_Q + \lg f_X = \lg E_{QX} + \lg K_{QX}.$$

On peut donc exprimer les quatre constantes d'extraction de paires d'ions envisageables en fonction des quatre constantes de dissociation des paires dans s, selon :

$$\lg E_{QX} = \lg f_Q + \lg f_X - \lg K_{QX}$$

$$\lg E_{QY} = \lg f_Q + \lg f_Y - \lg K_{QY}$$

$$\lg E_{MX} = \lg f_M + \lg f_X - \lg K_{MX}$$

$$\lg E_{MY} = \lg f_M + \lg f_Y - \lg K_{MY}.$$

En combinant ces quatre équations, on obtient :

$$\lg E_{MY} = \lg E_{MX} + \lg E_{QY} - \lg E_{QX} + \Delta pK$$

avec :

$$\Delta pK = (pK_{MY} - pK_{MX}) + (pK_{QX} - pK_{QY}).$$

2.3.2. Si les pK sont très voisins, $\Delta pK \approx 0$, et :

$$\lg E_{MY} - \lg E_{MX} \approx \lg E_{QY} - \lg E_{QX}.$$

On peut vérifier sur la fig. 3 que si l'on porte en ordonnée $\lg E_{QX}$ pour les différents QX et en abscisse $\lg E_{Bu_4NX}$ pour les différents X, on obtient des alignements comme en B.I.2.1. (mais approximation).

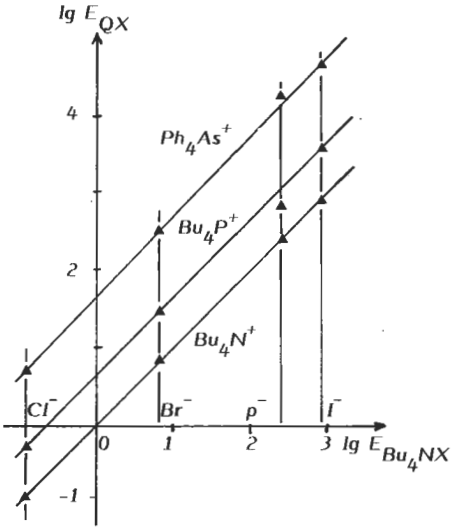


Fig. 3

2.4.1. La fig. 4 montre que lg e varie linéairement avec le nombre n d'atomes de carbone du cation :

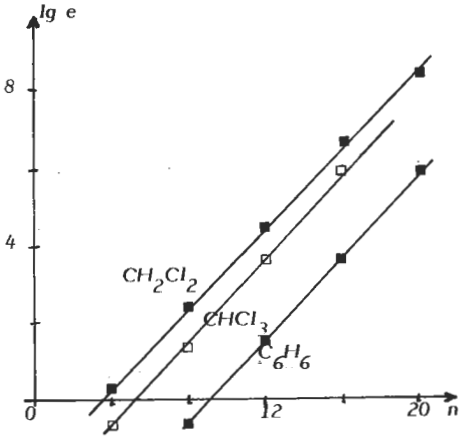


Fig. 4

dans le dichlorométhane : $\lg e = -1{,}82 + 0{,}52\ n$
dans le chloroforme : $\lg e = -2{,}95 + 0{,}55\ n$
dans le benzène : $\lg e = -5{,}00 + 0{,}54\ n$.

2.4.2. Le transfert des picrates de la phase aqueuse à la phase organique est d'autant plus efficace que n est plus grand. D'autre part, à n donné, e augmente, en fonction du solvant, dans l'ordre :

$$C_6H_6 < CHCl_3 < CH_2Cl_2.$$

3. *Mesure des constantes d'extraction et des grandeurs de transfert des sels d'onium.*

3.1. Solubilité.

3.1.1. Par définition du produit de solubilité :

$$S_s = a_{Q^+s} \cdot a_{X^-s} = a^2_{Q^+s}$$

or :

$$K_{QX} = S_s/[(Q^+ X^-)_s] = S_s/(\sigma_s - a_{Q^+}/\gamma_s).$$

Soit :

$$S_s + \frac{K_{QX}}{\gamma_s}\sqrt{S_s} - K_{QX}\,\sigma_s = 0.$$

3.1.2. $S_e = a_{Q^+e} \cdot a_{X^-e} = \sigma_e^2$.

3.1.3. $K_i = a_{Q^+s} \cdot a_{X^-s}/a_{Q^+e} \cdot a_{X^-e} = S_s/S_e$.

D'où :

$$\Delta G_t^0(Q^+) + \Delta G_t^0(X^-) = RT \ln S_e/S_s.$$

3.1.4. La résolution de l'équation du second degré du § 3.1.1. donne : $S_s = 4{,}2\ 10^{-6}$.

Dans l'eau : $S_e = 1{,}44 \cdot 10^{-4}$, d'où :

$$\Delta G_t^0(X^-) = 17{,}56 + 8{,}8 = 26{,}4 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

3.1.5. Ces différences sont liées aux interactions entre les ions et l'eau dans le solvant saturé d'eau. Ce phénomène a déjà été signalé à la dernière question de la partie A (*cf.* aussi le § B.I.3.2.5.).

3.2. Partage.

3.2.1. D'après les définitions :

$$e_{QX} = \frac{[(Q^+ X^-)_s]}{[Q^+_e]\,[X^-_e]} \quad \text{et} \quad K_{QX} = \frac{[Q^+_s]\,[X^-_s]\,\gamma_s^2}{[(Q^+ X^-)_s]}$$

or :

$$c_e = [Q^+{}_e] = [X^-{}_e] \quad \text{et} \quad [Q^+{}_s] = [X^-{}_s]$$

d'où :

$$[(Q^+ X^-)_s] = e_{QX}\, c_e^2$$

$$[Q^+{}_s]^2 = K_{QX} \frac{[(Q^+ X^-)_s]}{\gamma_s^2} = K_{QX} \frac{e_{QX}\, c_e^2}{\gamma_s^2}$$

soit :

$$c_s = e_{QX}\, c_e^2 + \sqrt{K_{QX}\, e_{QX}}\, \frac{c_e}{\gamma_s}$$

$$D = \frac{c_s}{c_e} = e_{QX}\, c_e + \frac{\sqrt{K_{QX}\, e_{QX}}}{\gamma_s}. \qquad (2)$$

3.2.2. $D' = \dfrac{\gamma_s}{\gamma_e} D = \dfrac{\gamma_s}{\gamma_e} e_{QX}\, c_e + \dfrac{\sqrt{K_{QX}\, e_{QX}}}{\gamma_e}$, or :

$e_{QX} = \gamma_e^2 E_{QX}$, donc :

$$D' = \gamma_e \gamma_s\, E_{QX}\, c_e + \sqrt{K_{QX}\, E_{QX}}.$$

3.2.3. On trace (fig. 5), pour les exemples donnés, les droites $D = f(c_e)$; la pente est égale à e_{QX} et l'ordonnée à l'origine vaut $\sqrt{K_{QX} \cdot e_{QX}}/\gamma_s$.

	Bu_4 N Br	Bu_4 N I	Bu_4 N p	Bu_4 P Br
e_{QX}	4,5	755	212	22,7
$10^4 \cdot K_{QX}$	1,8	0,75	2,6	1,9

3.2.4. De la connaissance de la concentration c_e et de la courbe (a), on déduit $a_{Q^+{}_e} = \gamma_e\, c_e$. Or :

$$[(Q^+ X^-)_s] = a_{(Q^+X^-)s} = E_{QX}\, a^2{}_{Q^+{}_e} = E_{QX}\, \gamma_e^2\, c_e^2.$$

En assimilant, dans un premier temps, E_{QX} à e_{QX} que l'on connaît, on détermine une valeur de $a_{(Q^+X^-)s}$:

$$a_{(Q^+X^-)s} = e_{QX}\, \gamma_e^2\, c_e^2.$$

De la valeur de c_s donnée dans le tableau précédent, on tire $[Q^+{}_s] = c_s - e_{QX}\, \gamma_e^2\, c_e^2$, ce qui permet, à l'aide de la courbe (b) d'obtenir γ_s.

En utilisant la relation (2) (§ 3.2.1.), on détermine :

$$K_{QX} = \gamma_s^2 (D - e_{QX}\, c_e)^2 / e_{QX}.$$

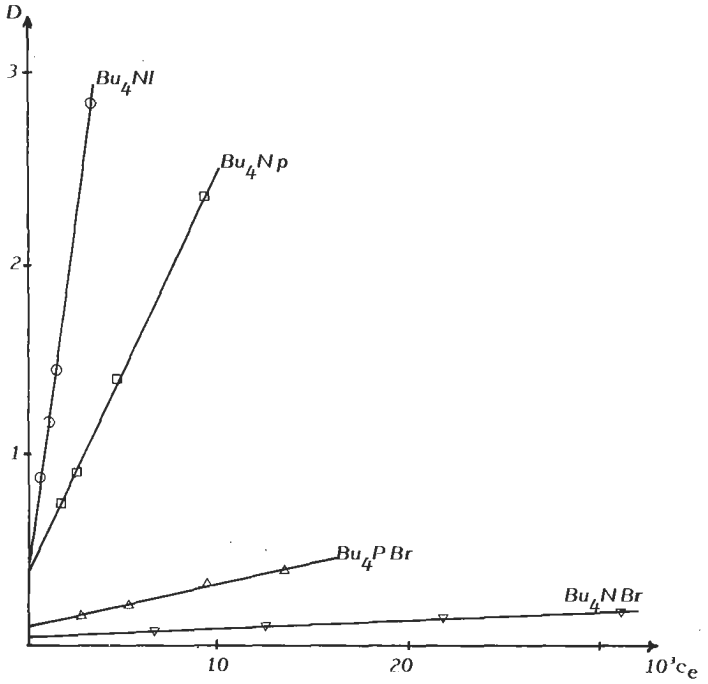


Fig. 5

$10^3\ c_e$	6,64	12,6	21,9	31,3
$10^4\ K_{QX}$	2,2	1,9	1,4	1,2

La valeur e_{QX} attribuée à E_{QX} n'est pas satisfaisante puisque K_{QX} n'est pas constant.

Il convient donc de faire varier la valeur attribuée à E_{QX} jusqu'à ce que K_{QX} soit constant quelle que soit c_e.

On remarque que systématiquement $e_{QX} < E_{QX}$; ceci est en accord avec les relations $e_{QX} = E_{QX} \cdot \gamma_e^2$ et $\gamma_e < 1$.

3.2.5. *a*) Dans tous les cas, les valcurs de K_{QX} mesurées dans le solvant saturé d'eau sont plus grandes que celles mesurées dans le solvant sec : la présence d'eau exalte la dissociation des paires d'ions (solvatation des ions).

3.2.5. *b*) Dans la famille des halogénures, l'ordre des constantes K_{OX} est différent selon que le solvant est sec ou saturé d'eau : la solvatation de l'anion est plus importante dans le cas de Cl^- que dans celui de Br^- et que dans celui de I^- (*cf.* aussi le § B.I.3.1.5.).

4. *Extraction par les éthers-couronnes.*

4.1. Les équilibres de dissociation du complexe sont :

$$(AL_n^+)_s \rightleftarrows A_s^+ + n\,L_s \qquad K^s_{(AL_n^+)} = \frac{a_{A^+_s} \cdot a^n_{L_s}}{a_{(AL_n^+)_s}}$$

$$(AL_n^+)_e \rightleftarrows A_e^+ + n\,L_e \qquad K^e_{(AL_n^+)} = \frac{a_{A^+_e} \cdot a^n_{L_e}}{a_{(AL_n^+)_e}}.$$

Les enthalpies libres molaires standard de transfert de A^+ et de AL_n^+ s'écrivent :

$$\Delta G_t^0(A^+) = -RT \ln \frac{a_{A^+_s}}{a_{A^+_e}}$$

$$\Delta G_t^0(AL_n^+) = -RT \ln \frac{a_{(AL_n^+)_s}}{a_{(AL_n^+)_e}}$$

d'où :

$$\Delta G_t^0(A^+) - \Delta G_t^0(AL_n^+) = -RT \ln \frac{K^s_{(AL_n^+)}}{K^e_{(AL_n^+)}} + n\,RT \ln K_L.$$

4.2.1. Une simple interpolation donne la valeur de $K^s_{(NaL^+)}$ à 298 K :

$$\lg K^s_{(NaL^+)} = -6{,}34 \quad \text{soit} \quad K^s_{(NaL^+)} = 4{,}5 \cdot 10^{-7}.$$

On en déduit les grandeurs thermodynamiques standard de dissociation du complexe dans le nitrobenzène à 298 K :

$$\Delta G^0_{298} = -RT \ln K^s_{(NaL^+)\,298} = 36{,}2 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

ΔH^0 est donné par la loi de Van t'Hoff : la pente de la droite $\ln K = f(1/T)$ n'est autre que $\Delta H^0/R$, soit $\Delta H^0_{298} = 39{,}1$ kJ. mol^{-1},

$$\text{d'où : } \Delta S^0_{298} = \frac{\Delta H^0_{298} - \Delta G^0_{298}}{298} = 9{,}7 \text{ J. K}^{-1}\text{. mol}^{-1}.$$

4.2.2. D'après le résultat du § 4.1 :

$$\Delta G_t^0(\text{NaL}^+) = \Delta G_t^0(\text{Na}^+) - \text{RT} \ln K^e_{(\text{NaL}^+)}/K^s_{(\text{NaL}^+)} - \text{RT} \ln K_L$$

$$= 34{,}2 \cdot 10^3 + 6{,}8 \cdot 10^3 - 36{,}2 \cdot 10^3 - 25{,}1 \cdot 10^3$$

$$\Delta G_t^0(\text{NaL}^+) = -20{,}3 \text{ kJ mol}^{-1}.$$

D'après les valeurs de ΔG_t^0, on trouve :

— en l'absence de L, $a_{\text{Na}^+_s}/a_{\text{Na}^+_e} \sim 10^{-6}$,

— en présence de L, $a_{\text{NaL}^+_s}/a_{\text{NaL}^+_e} \sim 10^{+3{,}5}$.

L'éther-couronne L permet donc au cation Na^+ de passer dans la phase organique (accompagné évidemment de l'anion correspondant).

5. *Préparation de sels d'onium.*

5.1.

$$D_X = [(Q^+ X^-)_s]/[X^-_e] = E_{QX}[Q^+_e]$$

$$D_Y = [(Q^+ Y^-)_s]/[Y^-_e] = E_{QY}[Q^+_e].$$

Pour que $D_X \geqslant 10^2$ et $D_Y \leqslant 10^{-2}$, étant donné que :

$$\lg D_X - \lg D_Y = \lg E_{QX} - \lg E_{QY},$$

il faut que $E_{QX}/E_{QY} \geqslant 10^4$.

5.2.1.

$$E_{HBX} = \frac{[(H^+ B X^-)_s]}{[HB^+_e][X^-_e]} \qquad E_{HBY} = \frac{[(H^+ B Y^-)_s]}{[HB^+_e][Y^-_e]}$$

$$\frac{[Y^-_e]}{[X^-_e]} = \frac{[(H^+ B Y^-)_s]}{[(H^+ B X^-)_s]} \cdot \frac{E_{HBX}}{E_{HBY}}.$$

Puisque la réaction est quantitative à 1 % près :

$$[(H^+ B Y^-)_s] \simeq c^0$$

et :

$$[(H^+ B X^-)_s] \sim c_B{}^0 - c^0 \sim c^0.$$

Pour que $[Y_e^-]/[X_e^-] \leqslant 10^{-2}$, lorsque $c_B{}^0 = 2\,c^0$, il faut donc que $E_{HBY}/E_{HBX} \geqslant 10^2$.

$$[(Q^+ X^-)_s]/[Q_e^+] = E_{QX} \cdot [X_e^-].$$

La réaction étant pratiquement quantitative, $[X_e^-] \sim c^0$; pour que $[(Q^+ X^-)_s]/[Q_e^+] \leqslant 10^{-2}$, il faut donc que :

$$\lg E_{QX} + \lg c^0 \leqslant -2.$$

D'après la définition de E_{HBX} :

$$[HB_e^+] = \frac{[(H^+ B X^-)_s]}{[X_e^-] \cdot E_{HBX}} = \frac{c_B{}^0 - c^0}{c^0 E_{HBX}}.$$

Avec $c_B{}^0 = 2\,c^0$, $\quad E_{HBX} = \dfrac{1}{[HB_e^+]}$, soit $\quad E_{HBX} \geqslant 10^2\, c_B{}^0$.

5.2.2. La phase organique$_1$ contient ($Oct_3HN^+ I^-$). Après traitement par la soude, on obtient :

— une phase organique$_2$ contenant la trioctylamine,

— une phase aqueuse$_2$ qui contient Na^+ et I^-.

II. Aspects cinétiques

1. En exprimant la constante de l'équilibre :

$$(Q^+ X^-)_s + A_e^- \rightleftarrows (Q^+ A^-)_s + X_e^-$$

et la conservation de Q :

$$\begin{cases} K_a = [(Q^+ A^-)_s]\,[X_e^-]/[(Q^+ X^-)_s]\,[A_e^-] \\ Q_o = [(Q^+ A^-)_s] + [(Q^+ X^-)_s] \end{cases}$$

on trouve :

$$[(Q^+ A^-)_s] = \frac{K_a\, Q_o\, [A_e^-]}{K_a\, [A_e^-] + [X_e^-]}.$$

On en déduit :

$$-v = -\frac{d\,[(RX)_s]}{dt} = k_o\, [(Q^+ A^-)_s]\,[(RX)_s]$$

$$= \frac{k_o K_a Q_o [A_e^-] [(RX)_s]}{K_a [A_e^-] + [X_e^-]}.$$

2.

	RX_s	$+ A_e^-$	$\longrightarrow$ RA_s	$+ X_e^-$
$t = 0$	R_o	N_o	0	c_o
t	$R_o(1-x)$	$N_o - R_o x$	$R_o x$	$c_o + R_o x.$

En reportant ces quantités de matière dans l'expression obtenue pour v, et en introduisant les volumes de solutions :

$$\frac{R_o}{V_s}\frac{dx}{dt} = \frac{k_o K_a Q_o \left(\frac{N_o - R_o x}{V_e}\right)\left(\frac{R_o(1-x)}{V_s}\right)}{K_a\left(\frac{N_o - R_o x}{V_e}\right) + \frac{c_o}{V_e} + \frac{R_o x}{V_e}}$$

soit :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k_o K_a Q_o (1-\beta x)(1-x)}{K_a(1-\beta x) + \alpha + \beta x}.$$

3. Pour vérifier que (3) est solution de l'équation précédente, on procède par identification :

$$A \ln(1-\beta x) - B \ln(1-x) = (1-\beta) D t$$

$$\Rightarrow \frac{-A\beta\, dx}{(1-\beta x)} + \frac{B\, dx}{(1-x)} = (1-\beta) D\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{-A\beta(1-x) + B(1-\beta x)}{D(1-\beta)(1-\beta x)(1-x)}$$

or :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{K_a(1-\beta x) + \alpha + \beta x}{k_o K_a Q_o (1-\beta x)(1-x)}.$$

Avec $D = k_o K_a Q_o$, on obtient : $A = 1 + \alpha$,

$$B = \alpha + K_a + \beta(1 - K_a).$$

4. Application : cyanuration du chloro-1 octane.

Les courbes représentant lg y en fonction de t sont définies par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ A \ln(1-\beta x) - B \ln(1-x) = (1-\beta) D t \end{cases} \qquad (3)$$

Les valeurs numériques de l'énoncé conduisent à :
$A = 1$; $\alpha = 0$; $\beta = 0{,}436$; $B = 0{,}564\ K_a + 0{,}436$; $D = 2{,}6 \cdot 10^{-3}\ K_a$.

Les courbes $\lg y = f(t)$ sont représentées, pour les quatre valeurs de K_a proposées, sur la fig. 6, qui montre clairement que la substitution est plus rapide si K_a est plus grand.

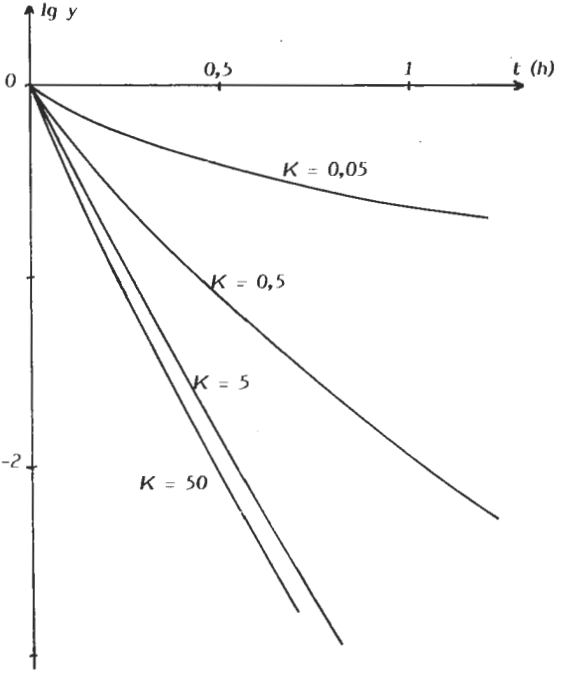


Fig. 6

5.1. $$(Q^+ X^-)_s + A_e^- \rightleftarrows (Q^+ A^-)_s + X_e^-$$

$$K_a = \frac{E_{QA}}{E_{QX}} \approx \frac{e_{QA}}{e_{QX}}.$$

5.2. Les conditions sont telles que :

$$\frac{dx}{dt} = k\,[(Q^+ A^-)_s] = \frac{k\,K_a\,Q_o\,[A_e^-]}{K_a\,[A_e^-] + [X_e^-]}$$

$$= k\,K_a\,Q_o \cdot \frac{(1-x)}{K_a\,(1-x) + x}.$$

La vitesse initiale vaut $k\,Q_o$, d'où la vitesse relative :

$$\mu = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{K_a\,(1 - x)}}.$$

5.3. Les vitesses relatives pour les trois halogénures s'écrivent :

$$\mu_{Cl} = \frac{1}{1 + \dfrac{e_{QCl}\,x}{e_{QA}\,(1 - x)}} = \frac{1}{1 + \nu\,\dfrac{x}{1 - x}}$$

$$\mu_{Br} = \frac{40}{1 + \dfrac{E_{QBr}\,x}{e_{QA}\,(1 - x)}} = \frac{40}{1 + \dfrac{e_{QBr}}{e_{QCl}}\,\nu\,\dfrac{x}{1 - x}}$$

$$\mu_{I} = \frac{100}{1 + \dfrac{e_{QI}\,x}{e_{QA}\,(1 - x)}} = \frac{100}{1 + \dfrac{e_{QI}}{e_{QCl}}\,\nu\,\dfrac{x}{1 - x}}.$$

$\nu = \dfrac{e_{QCl}}{e_{QA}}$	1			10		
x \ X^-	Cl^-	Br^-	I^-	Cl^-	Br^-	I^-
0	1	40	100	1	40	100
0,01	0,99	23	1,3	0,91	6,8	0,12
0,10	0,90	6,3	0,1	0,47	0,72	0,01
0,50	0,50	0,8	0,01	0,09	0,08	0,001

Les variations de μ en fonction de x sont représentées sur la fig. 7. Elle montre que la vitesse de substitution de l'iode diminue très rapidement, que celle correspondant au chlore varie peu mais est faible. Le plus efficace est l'utilisation d'un dérivé bromé.

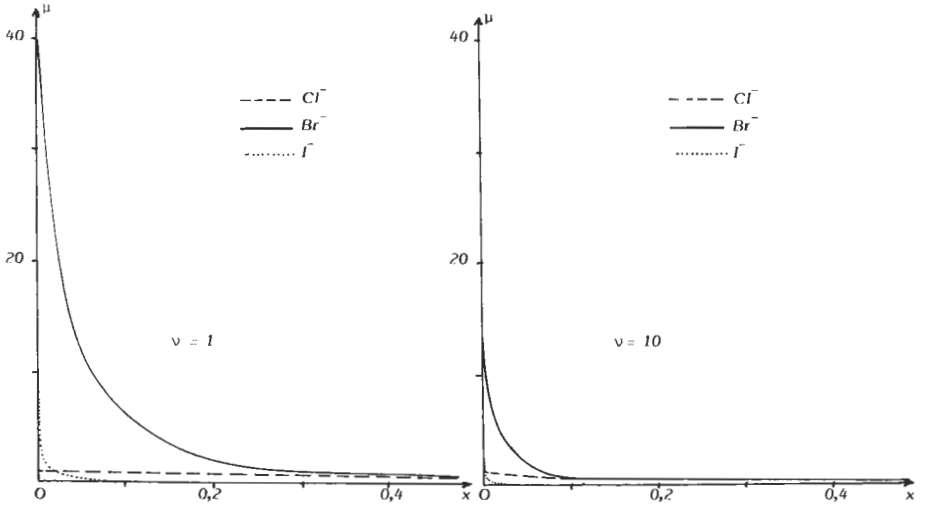


Fig. 7

D. OLIVIER, R. PRUNET,
J. SARRAZIN, A. TSCHUDY.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. O'M. Bockris and A.K.N. Reddy. — *Modern electrochemistry*, Plenum Rosetta Ed, New York (1970).

[2] M. Quintin. — *Electrochimie*, P.U.F., Paris (1970).

[3] R.A. Robinson and R.H. Stokes. — *Electrolyte solutions*, Butterwoths Scientific Publication, London (1959).

[4] C.B. Monk. — *Electrolytic dissociation*, Academic Press, London (1961).

[5] A. Brandstrom. — *Preparative ion pair extraction : an introduction to theory and practice*, Swedish Academy of Pharmaceutical Sciences (1974).

[6] J.P. Antoine. — *Aspects physicochimiques de la catalyse par transfert de phase*, Thèse Louvain Belgique (1979).

[7] J.P. Antoine, I. de Aguirre, F. Janssens et F. Thyrion. — *Bull. Soc. Chim. Fr*, II-207 (1980).

[8] P. Caubère. — *Le transfert de phase et son utilisation en chimie organique*, Masson, Paris (1982).

[9] C.M. Starks et C. Liotta. — *Phase Transfer Catalysis : principles and techniques*, Academic Press, New York (1978).

[10] E.V. Demlhov and S.S. Demlhov. — *Phase transfer Catalysis, Monographs in Modern Chemistry*, Vol. 11, Verlag Chemie, Weinhem, 1983.

[11] C.J. Pedersen and H.K. Frensdorff. — *Angew. Chem. internat. Edit., 11*, 16 (1972).

[12] E. Makrlik. — *Electrochim. acta, 28*, 573 (1983).

[13] E. Makrlik. — *Electrochim. acta, 28*, 847 (1983).

[14] J. Rais. — *Coll. Czech. Chem. Commun., 36*, 3253 (1971).

Agrégation de sciences physiques

PROBLEME D'ELECTRICITE, D'ELECTRONIQUE, D'ELECTROTECHNIQUE ET D'AUTOMATIQUE

SESSION DE 1984

Option : Physique appliquée

Epreuve C

(Durée : 6 heures)

GÉNÉRALITÉS

Le problème comporte trois parties qui abordent respectivement l'étude :

— *d'un moteur à courant continu ;*

— *d'un redresseur triphasé à thyristors ;*

— *de la régulation de courant et de vitesse d'un moteur à courant continu alimenté par un redresseur triphasé à thyristors.*

Ces trois parties sont numériquement indépendantes.

PREMIERE PARTIE

On se propose, dans cette partie du problème, d'étudier un moteur à courant continu. Cette machine comporte un stator portant l'enroulement inducteur alimenté par une source de courant continu et un rotor portant un enroulement alimenté, à travers un système balais-collecteur, par une source de tension continue.

Notations employées : Dans toute cette partie du problème, les indices 1 et 2 seront affectés respectivement aux grandeurs relatives à l'inducteur et à l'induit. Les intensités des courants dans ces enroulements et les tensions à leurs bornes seront désignées par I et U respectivement, les résistances par R, la force électromotrice d'induit par E et la fréquence angulaire de rotation par Ω. Le moment du couple du moteur sera noté Γ. D'autre part, l'indice n sera affecté aux valeurs nominales des différentes grandeurs.

Hypothèses simplificatrices : Dans tout ce qui suit, on supposera les balais calés sur la ligne neutre, on négligera les phénomènes d'hystérésis, de saturation et de réaction magnétique d'induit ; on négligera les chutes de tension aux contacts balais-collecteur et l'on admettra que R_2 est constante. Les phénomènes de commutation du courant au

passage des balais d'une lame de collecteur à la suivante seront supposés instantanés.

Les seules pertes prises en considération seront les pertes par effet Joule, les pertes par courants de Foucault (on les supposera proportionnelles au carré de la fréquence des courants dans les matériaux conducteurs de l'induit) et les pertes par « frottements fluides » (proportionnelles au carré de Ω).

Valeurs numériques principales :

$$U_{2n} = 220 \text{ volts}, \qquad I_{2n} = 22 \text{ ampères},$$
$$\Omega_n = 157 \text{ radians par seconde.}$$

D'autre part, un essai en régime « génératrice à vide » à $\Omega = \Omega_n$ a donné $U_2 = 220$ volts pour $I_1 = 1{,}1$ ampère.

QUESTION 1.1. On effectue un essai de cette machine en régime moteur, sans couple résistant, avec $\Omega = \Omega_n$ et $E = E_n$. Le courant I_2 vaut alors 2 ampères et le courant I_1 a une intensité qui sera désignée par I_{10} par la suite.

Sachant qu'au régime nominal les pertes par effet Joule dans l'induit et dans l'inducteur valent respectivement 5 % et 3 % de la puissance absorbée par l'induit du moteur, déterminer R_1, R_2, E_n et la tension U_2 aux bornes de l'induit lors de l'essai décrit précédemment. Quel est le rendement η_n de ce moteur au régime nominal ?

QUESTION 1.2. Le moteur fonctionnant initialement à vide dans les conditions décrites à la question 1.1 on effectue deux essais de ralentissement :

— premier essai : on coupe brusquement le courant dans l'induit et l'on constate que la vitesse de rotation du moteur décroît de 10 % en six secondes ;

— deuxième essai : on coupe brusquement les deux courants I_1 et I_2, la vitesse de rotation du moteur diminue alors de 10 % en dix secondes.

A quoi correspond, dans chacun de ces deux essais, le couple de ralentissement du moteur ? Ecrire, pour ces deux essais, les équations régissant la variation de Ω. Déterminer le moment d'inertie J du rotor de la machine. Calculer les valeurs respectives des pertes par courants de Foucault et des pertes par frottements fluides au régime nominal de fonctionnement du moteur.

QUESTION 1.3. On veut faire démarrer le moteur sous sa tension nominale d'induit sans que I_2 ne dépasse 1,5 I_{2n}, I_1 étant constant et ayant la valeur I_{10} définie à la question 1.1. On utilise dans ce but un rhéostat dont la résistance maximale vaut R_d. Calculer R_d.

Le rhéostat ayant la résistance R_d, on fait démarrer le moteur à vide. Déterminer la valeur Ω_d de Ω qui serait obtenue en régime permanent ainsi que le temps t_d nécessaire pour que la vitesse de rotation atteigne 1 000 tours par minute.

QUESTION 1.4. Le moteur entraîne maintenant une charge caractérisée par son moment d'inertie $J' = 0{,}5\ m^2.kg$ et le moment de son couple résistant Γ_c proportionnel à Ω et tel que, pour $\Omega = \Omega_n$, $\Gamma_c = 15$ N. m.

Le moteur démarre sous sa tension d'induit nominale, avec le rhéostat de démarrage de résistance R_d et $I_1 = I_{10}$. Calculer les nouvelles valeurs Ω'_d et t'_d de Ω_d et t_d respectivement.

Le moteur est maintenant alimenté par une source de courant d'intensité égale à $1{,}5\ I_{2\,n}$. Le courant dans l'inducteur ayant toujours l'intensité I_{10}, déterminer les nouvelles valeurs Ω''_d et t''_d de Ω_d et t_d respectivement.

DEUXIEME PARTIE

Dans cette partie, on s'intéressera au fonctionnement du redresseur triphasé à thyristors représenté sur la fig. 1. Ce redresseur, généralement appelé « Pont de Graetz », est alimenté par une source triphasée équilibrée et sa charge est constituée d'une force contre-électromotrice E, d'une résistance R et d'une inductance L. On admettra que la source triphasée, connectée en étoile, peut être représentée par un système de trois forces électromotrices équilibrées V_1, V_2 et V_3, chacune d'entre elles étant en série avec une résistance r et une inductance l.

Dans toute cette partie du problème, on négligera l'impédance des thyristors, on admettra que leur débloquage est instantané et que leur courant de maintien est négligeable. De plus, on considèrera que les phases de la source sont totalement découplées magnétiquement.

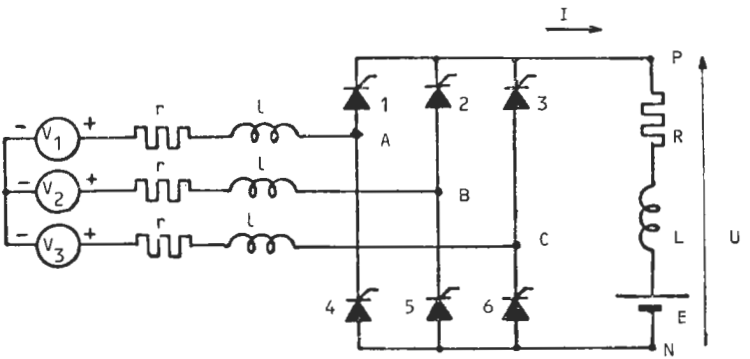


Fig. 1

Notations : Dans toute la suite, on posera :

$$V_1 = V\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$V_2 = V\sqrt{2}\cos(\omega t - \pi)$$

$$V_3 = V\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right).$$

On désignera respectivement par Id et Ud les valeurs moyennes du courant I dans la charge et de la tension U à ses bornes.

Le dispositif de commande des différents thyristors leur envoie des impulsions d'amorçage à des instants t_a repérés par l'angle $\alpha = \omega t_a$ de retard par rapport aux instants d'allumage naturel de ces thyristors. Les thyristors sont numérotés de 1 à 6 comme sur la fig. 1.

Valeurs numériques : Dans toute cette partie, on prendra :

$$V = 220 \text{ volts} \quad \text{et} \quad \omega = 100\,\pi \text{ radians par seconde.}$$

Les autres grandeurs du système auront des valeurs précisées dans les différentes questions.

QUESTION 2.1. En supposant que r et l sont négligeables, décrire de façon concise le principe de fonctionnement du système considéré. Dans le cas où $\alpha < \frac{\pi}{3}$ préciser, pour $\omega t \in [0, 2\pi]$ les instants auxquels les impulsions sont envoyées aux différents thyristors. En supposant que les impulsions sont infiniment brèves, donner la relation que doivent vérifier V, E et α pour que les thyristors puissent s'amorcer.

Quels sont les différents régimes de conduction que l'on peut rencontrer ? Préciser la période du courant dans la charge.

QUESTION 2.2. Dans toute cette question, on supposera que le système est en « conduction continue », c'est-à-dire que le courant n'est jamais nul dans la charge. Décrire ce régime de fonctionnement et préciser, pour $\omega t \in \left[\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{3}\right]$, les différentes combinaisons de thyristors en conduction. Ecrire les différentes équations régissant le comportement du système en précisant leur domaine de validité.

En supposant que r est négligeable et L très grande, établir l'équation de la caractéristique reliant Ud à Id pour une valeur donnée de α.

Dans le cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{4}$, Id = 20 A et $l\omega = 0{,}1\ \Omega$, calculer la valeur de Ud. Représenter sur l'une des feuilles jointes à l'énoncé, l'allure de la tension aux bornes de la charge (si la clarté du dessin l'impose, il sera possible, en le précisant, d'augmenter la durée relative de certaines parties de la période).

QUESTION 2.3. Les thyristors sont commandés par un générateur d'impulsions dit « à coïncidence » dont le principe de fonctionnement est le suivant : ce générateur est commandé par une tension v_e appelée « tension de commande du redresseur » et piloté par des tensions périodiques dites « de référence de phase » notées u_{rij} et synchronisées sur les tensions composées $(V_i - V_j)$ d'alimentation du redresseur. Chaque tension u_{rij} est associée à une paire de thyristors dont les amorçages doivent être simultanés (thyristors i et $j + 3$). Les impulsions sont générées aux instants où v_e coupe u_{rij} (fig. 2).

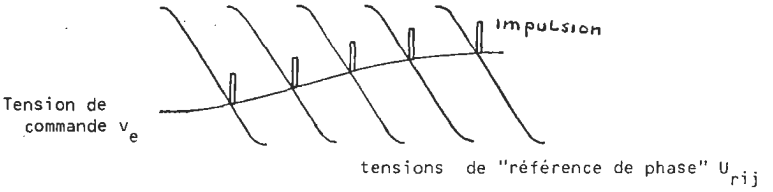


Fig. 2

On désire tout d'abord obtenir une relation linéaire entre α et v_e avec $\alpha = 0$ pour $v_e = + v_m$ et $\alpha = \pi$ pour $v_e = - v_m$. En déduire les équations des différentes tensions de « référence de phase » u_{rij} et établir la relation liant Ud à v_e dans le cas où le courant dans la charge est supposé parfaitement constant et égal à Id. Pour quelle valeur de v_e obtient-on Ud = 220 volts avec Id = 20 ampères, $l = 3{,}2 \times 10^{-4}$ henrys et $v_m = 10$ volts ?

On désire maintenant obtenir une relation linéaire entre v_e et Ud. Comment doit-on choisir les tensions de référence de phase u_{rij} avec toujours $\alpha = 0$ pour $v_e = v_m$ et $\alpha = \pi$ pour $v_e = - v_m$? Préciser la relation obtenue entre v_e et Ud et calculer la valeur de v_e conduisant au même point de fonctionnement que précédemment.

QUESTION 2.4. On se propose maintenant d'étudier le comportement du redresseur en « régime haché » ou « conduction discontinue », c'est-à-dire dans le cas où le courant de charge est nul pendant une partie de la période. On désignera par $\dfrac{\beta - \alpha}{\omega}$ le temps pendant lequel le courant de charge est non nul dans chaque période.

Ecrire les relations régissant l'évolution du courant dans la charge et en déduire une expression de celui-ci en fonction de α et des paramètres du système.

En supposant que $R + 2r \ll (L + 2l)\omega$, donner une expression simplifiée du courant dans la charge et calculer β pour V = 220 volts, E = 467 volts et $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Représenter dans ce cas l'allure de la

tension aux bornes de la charge en utilisant l'une des feuilles jointes à l'énoncé.

En supposant toujours que $R + 2r \ll (L + 2l)\omega$, exprimer Id et Ud en fonction de α, β et V.

TROISIEME PARTIE

Cette partie du problème concerne la commande d'un moteur à courant continu analogue à celui étudié dans la première partie et dont l'induit est alimenté, à travers une inductance de lissage, par un redresseur du même type que celui décrit dans la deuxième partie.

Le circuit de commande comprend deux régulateurs : un régulateur de courant et un régulateur de vitesse ; les deux boucles de régulation sont imbriquées et agissent sur la tension de commande v_e du générateur d'impulsions du pont de thyristors.

L'ensemble du système étudié peut être représenté par le schéma fonctionnel de la fig. 3.

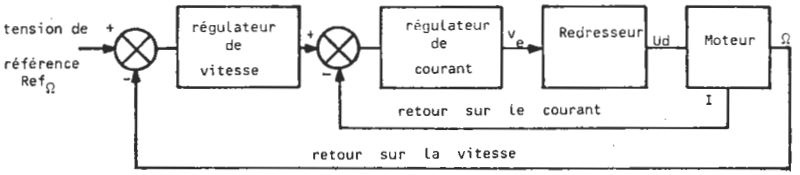


Fig. 3

On peut décrire rapidement le principe de fonctionnement de ce système de la façon suivante. On part d'un régime de fonctionnement établi, défini par :

— la valeur Ω_0 de la pulsation angulaire de rotation Ω (Ω_0 est déterminée par la tension de référence Réf$_\Omega$) ;

— la valeur I_0 du courant d'induit I du moteur.

Après une variation soudaine $\Delta\Gamma_c$ du moment du couple résistant Γ_c, l'ensemble des deux régulateurs a pour fonction de ramener Ω à sa valeur Ω_0 de façon « aussi rapide et précise que possible » en maintenant les variations du courant I dans des « limites admissibles ».

Hypothèses de travail :

Pour le moteur, toutes les hypothèses simplificatrices introduites dans la première partie du problème restent valables ; de plus on négligera toutes les pertes mécaniques et électromagnétiques. L'inducteur du moteur étant alimenté par un courant d'intensité I_1 constante, on admettra que la force électromotrice E et le moment du couple moteur Γ sont respectivement proportionnels à Ω et à I et que l'on pourra poser $E = k\Omega$ et $\Gamma = kI$.

Pour le redresseur, on négligera les résistances et inductances du réseau triphasé d'alimentation. On admettra que le courant dans la charge est constant en régime établi ; quant à la tension redressée, on ne s'intéressera qu'à sa valeur moyenne que l'on supposera proportionnelle à la tension de commande v_e pour de petites variations de celle-ci autour d'un point de fonctionnement.

Notations utilisées :

On désignera respectivement par R et L la résistance et la somme de l'inductance de lissage et de l'inductance de l'induit du moteur, par U la tension aux bornes de l'induit de celui-ci et l'on posera $U = G \cdot v_e$, G étant le gain du redresseur.

Le moment d'inertie de l'ensemble des parties tournantes du moteur et de sa charge sera désigné par J. On appellera respectivement k_1 et k_Ω les gains des capteurs de courant et de vitesse.

D'autre part, on désignera par $F(p)$ la transformée de Laplace de l'écart Δf de la grandeur $f(t)$ à l'instant t par rapport à la valeur $f(t_0)$ à l'instant t_0.

Valeurs numériques :

$R = 0{,}5\ \Omega$, $L = 0{,}5 \times 10^{-2}$ H, $k = 1{,}3$ N.m/A (ou V.s/radian),

$J = 1$ kg.m^2, $k_i = 0{,}333 \times 10^{-2}$, $k_\Omega = 6 \times 10^{-3}$, $G = 100$.

La fréquence des tensions d'alimentation du redresseur est de 50 Hz.

QUESTION 3.1. Ecrire les équations régissant le comportement du moteur en régime transitoire et les représenter sous forme d'un bloc-diagramme en utilisant les transformées de Laplace des différentes grandeurs.

Montrer que, pour des petites variations autour du régime défini par Ω_0, Γ_{c0}, U_0, I_0, on peut écrire :

$$\Omega(p) = \frac{\dfrac{U(p)}{k} - \dfrac{R}{k^2}(1 + T_e \cdot p)\,\Gamma_c(p)}{1 + T_{em} \cdot p + T_e \cdot T_{em} \cdot p^2}$$

$$I(p) = \frac{\dfrac{T_{em}}{R} \cdot p \cdot U(p) + \dfrac{\Gamma_c(p)}{k}}{1 + T_{em} \cdot p + T_e \cdot T_{em} \cdot p^2}.$$

Exprimer T_e et T_{em} en fonction des paramètres du moteur. Dans toute la suite du problème, on prendra $T_e = 0{,}01$ s et $T_{em} = 0{,}3$ s.

QUESTION 3.2. On désire que le régulateur de courant permette d'obtenir les performances suivantes :

— erreur statique nulle ;

— dépassement inférieur à 5 % ;

— réponse aussi rapide que possible ;

— intensité du courant inférieure à une valeur I_{max} ;

— dérivée du courant limitée à une valeur $\left(\frac{dI}{dt}\right)_{max}$.

Justifier ces divers objectifs par des considérations physiques. En se fondant sur les trois premiers objectifs énoncés précédemment, déterminer un type possible de correcteur. Montrer que la nature même de l'alimentation du moteur impose une valeur minimale du temps de réponse, valeur que l'on précisera.

QUESTION 3.3. On propose, pour le régulateur de courant, la structure représentée par le bloc-diagramme de la fig. 4.

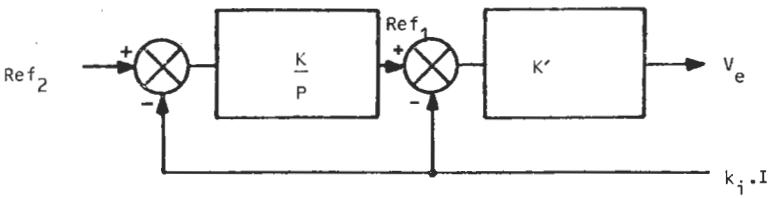


Fig. 4

Dans toute cette question, on admettra que la vitesse de rotation du moteur est constante. Montrer que la fonction de transfert en boucle fermée $H'(p)$ reliant Ref_1 à I peut se mettre sous la forme :

$$H'(p) = \frac{G_i}{1 + \tau_i \cdot p}.$$

Exprimer G_i et τ_i en fonction des paramètres du système et de K'. On veut obtenir $\tau_i = 1$ ms, en déduire K' et la valeur de G_i. Donnez l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H(p)$ reliant Ref_2 à I et en déduire la valeur de K.

On pourra pour cela utiliser l'abaque ci-après, qui donne les courbes de réponse $c(t)$ d'un système du second ordre, de fonction de transfert :

$$\gamma(p) = \frac{1}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

à une entrée en échelon unité et pour différentes valeurs de ξ :

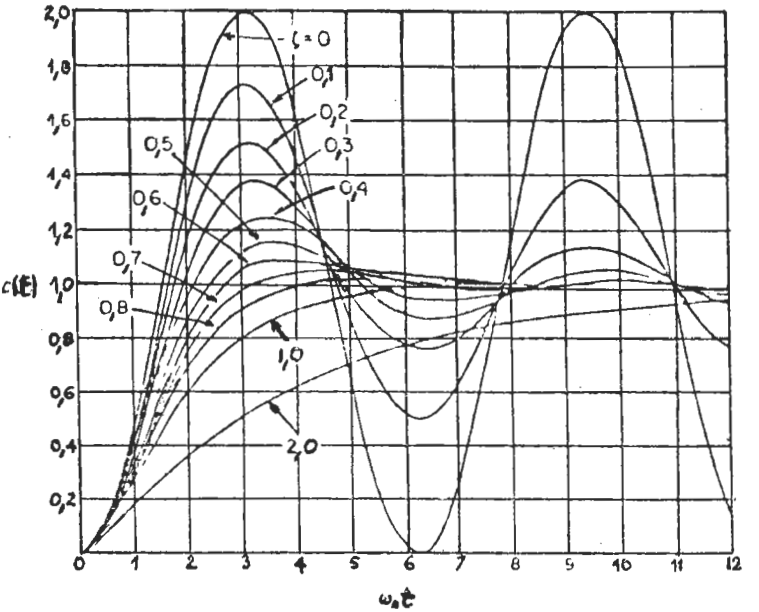


Fig. 5

QUESTION 3.4. On propose de réaliser l'action intégrale $\frac{K}{p}$ du régulateur de courant de la façon représentée sur la fig. 6.

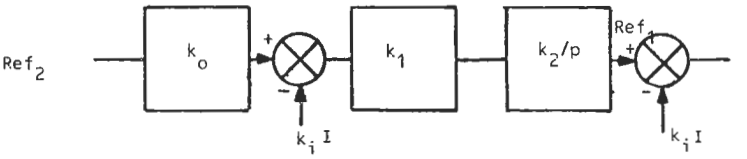


Fig. 6

On utilise pour cela deux amplificateurs opérationnels afin de réaliser, d'une part k_0 et k_1, et d'autre part $\frac{k_2}{p}$. Ces amplificateurs ayant une tension de sortie saturée à $\pm$ 10 volts, montrer que cette structure permet de limiter simplement la dérivée du courant I par rapport au temps.

Calculer la valeur de k_2 correspondant à $\left(\frac{dI}{dt}\right)_{max} = 500$ A/s.

Montrer que, si Ref_2 est également limité à ± 10 volts, on peut limiter la valeur maximale I_{max} de l'intensité du courant d'induit. Déterminer la valeur de k_0 conduisant à $I_{max} = 30$ ampères.

QUESTION 3.5. On s'intéresse maintenant au régulateur de vitesse et, dans cette étude, on supposera que le régulateur de courant a été mis au point au préalable. On propose d'utiliser un correcteur de type « proportionnel intégral » dont la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$C_{(p)} = K_\Omega \cdot \frac{1 + T \cdot p}{p}.$$

Ecrire la fonction de transfert en boucle ouverte du système muni du correcteur et tracer le diagramme asymptotique de Bode.

Montrer qu'il existe une valeur limite de T en dessous de laquelle il est impossible d'obtenir la stabilité du système.

Montrer que, pour obtenir la stabilité du système, T et K_Ω doivent vérifier une relation que l'on écrira.

SOLUTION

PREMIERE PARTIE

1.1.

$$R_2 I_{2n}^2 = \frac{5}{100} \cdot U_{2n} I_{2n} = 242 \text{ W},$$

d'où :

$$R_2 = 0{,}5\ \Omega.$$

$$E_n = U_{2n} - R_2 I_{2n} = 209 \text{ V}.$$

$$I_{1n} = I_{10} = 1{,}1 \times \frac{209}{220} = 1{,}05 \text{ A}.$$

$$R_1 I_{1n}^2 = \frac{3}{100} \cdot (220 \times 22) = 145 \text{ W}.$$

On en déduit : $R_1 = 133\ \Omega$.

$$U_2 = E_n + R_2 I_{20} = 210 \text{ V}.$$

Pour la vitesse et l'excitation nominales, les pertes fer et de frottements fluides s'élèvent à : $E_{2n} \times I_{20} = 418$ W, soit 8,6 % de la puissance absorbée par l'induit du moteur en fonctionnement nominal.

Le rendement du moteur vaut donc :

$$\eta_n = \frac{4840 - 242 - 418}{4840 + 145} = \frac{1 - 5/100 - 8{,}6/100}{1 + 3/100} = 0{,}84.$$

1.2. Lors du premier essai, l'énergie cinétique initiale du moteur est transformée en pertes fer et pertes par frottements fluides.

Les seules pertes retenues (par courants de Foucault et par frottements fluides) étant proportionnelles au carré de la fréquence de rotation Ω, le moment du couple de pertes est proportionnel à Ω. Il n'en aurait pas été de même si l'on avait tenu compte des pertes par hystérésis ($p = k' B^n f$) ou des frottements secs pour lesquels le moment du couple de pertes serait indépendant de Ω.

Lors du deuxième essai, seules les pertes par frottements fluides ralentissent la rotation du rotor.

$$J\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_1 = -k_1\,\Omega, \qquad \text{soit} \left(\frac{d\Omega}{\Omega}\right)_1 = -\frac{k_1\,dt_1}{J} : (1)$$

$$J\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_2 = -k_2\,\Omega, \qquad \text{soit} \left(\frac{d\Omega}{\Omega}\right)_2 = -\frac{k_2\,dt_2}{J} : (2)$$

$$k_1\,\Omega^2 = 418 \text{ W}, \quad \text{donc} \quad k_1 = \frac{418}{(157)^2} = 1{,}70 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-1}.$$

De la relation (1), on tire alors : $J = 1{,}02$ kg. m².

En combinant les relations (1) et (2), il est visible que k_1 et k_2 sont liés par la relation $k_2 = 0{,}6\ k_1$.

Sur les 418 W de pertes nominales, on a donc : $0{,}6 \times 418 = 251$ W de pertes par frottements fluides et 167 W de pertes par courants de Foucault.

1.3. $I_{2\,max} = 33$ A ; $R_{max} = 6{,}67\ \Omega$, donc $R_{h\,max} = 6{,}17\ \Omega = R_d$.
$U_n = R_{max}\,I + E = R_{max}\,I + K\,I_{1_0}\,\Omega$,

$$\text{avec} \quad K\,I_{1_0} = \frac{209}{157} = 1{,}33 \text{ V.s.}$$

Ecrivons qu'en régime permanent, il y a égalité des couples moteur et résistant : $K\,I_{1_0}\,I = k_1\,\Omega_d$; on en déduit la relation suivante entre l'intensité I du courant absorbé par l'induit en régime permanent et la vitesse de rotation Ω : $I = 1{,}28 \cdot 10^{-2}\ \Omega_d$.

D'où la relation :

$$U_n = \left(R_{max}\,\frac{k_1}{K\,I_{1_0}} + K\,I_{1_0}\right)\Omega_d = 1{,}42\ \Omega_d.$$

Soit :

$$\Omega_d = 155{,}4 \text{ rad/s.}$$

(On aurait alors $I_2 = 1{,}99$ A ; $E = 207$ V et $R_2\,I_2 = 13$ V).

En ce qui concerne la durée t_d nécessaire pour que la vitesse de rotation atteigne 1 000 tours par minute, soit 104,7 rad/s, nous écrirons les deux équations, électrique et mécanique, qui régissent le fonctionnement du moteur :

Equation électrique : (3) $\quad U_n = R_{max}\,I + K\,I_{1_0}\,\Omega.$

Equation mécanique : (4) $\quad J\,\dfrac{d\Omega}{dt} = K\,I_{1_0}\,I - k_1\,\Omega.$

De (3) et (4) on tire (5) :

$$J\frac{d\Omega}{dt} = \frac{K\,I_{10}\,U_n}{R_{max}} - \left(k_1 + \frac{(K\,I_{10})^2}{R_{max}}\right)\Omega,$$

soit :

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\Omega - \Omega_d}{\tau}, \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{J}{k_1 + \dfrac{(K\,I_{10})^2}{R_{max}}} = 3{,}61 \text{ s}$$

et :

$$\Omega_d = \frac{U_n}{K\,I_{10} + \dfrac{k_1\,R_{max}}{K\,I_{10}}} = 155{,}4 \text{ rad/s.}$$

D'où la solution : $\Omega = \Omega_d(1 - e^{-t/\tau})$ satisfaisant à la condition initiale $\Omega(0) = 0$.

Pour $\Omega = 1\,000$ tr/min, on a $\dfrac{\Omega}{\Omega_d} = 0{,}674$, soit $e^{-t_d/\tau} = 0{,}326$.

On en déduit la valeur de $t_d = 1{,}12\,\tau = 4{,}04$ s.

Remarque :

A 1 000 tr/min, l'intensité I n'est plus égale qu'à 12,1 A ; elle est donc descendue au-dessous de la valeur I_{2n} et c'est le signe que l'on a attendu trop longtemps pour changer de plot.

Si l'on change de plot lorsque $I = I_{2n}$, c'est-à-dire pour $\Omega = 55{,}1$ rad/s, cela sera effectué au bout de 1,58 s seulement.

1.4. $\Gamma_c = k'_1\Omega$, avec $k'_1 = \dfrac{15}{157} = 9{,}55 \cdot 10^{-2}$ kg. m². s⁻¹. La question précédente permet d'écrire :

$$\Omega'_d = \frac{U_n}{K\,I_{10} + \dfrac{(k_1 + k'_1)\,R_{max}}{K\,I_{10}}} = 116{,}1 \text{ rad/s}$$

$$\tau' = \frac{J + J'}{k_1 + k'_1 + \dfrac{(K\,I_{10})^2}{R_{max}}} = 4{,}02 \text{ s.}$$

$$\Omega = \Omega'_d(1 - e^{-t/\tau'}), \qquad \text{donc} \qquad t'_d = \tau' \, l_n \left(\frac{\Omega'_d}{\Omega'_d - \Omega} \right).$$

Pour $\Omega = 104{,}7$ rad/s, on trouve $t'_d = 9{,}33$ s.

Remarque :

Là encore, attendre que la vitesse de 1 000 tours par minute soit atteinte en laissant le rhéostat de démarrage sur le premier plot, ne constitue pas la manière correcte d'effectuer un démarrage classique. Des calculs un peu plus détaillés, mais basés sur les modèles précédents, montrent que l'intensité $I = I_{2n}$ est obtenue lors de cette première phase au bout de 2,58 s, alors que la vitesse de rotation atteint 491 tr/min. On change alors de plot, de manière à ramener l'intensité à sa valeur $I' = 1{,}5 \cdot I_{2n}$, avec $R'_{max} = \dfrac{R_{max}}{1{,}5} = 4{,}44\ \Omega$, et, sur le second plot du rhéostat de démarrage, la vitesse évolue de 491 tr/min à 877 tr/min en 2,06 s. Au bout de cette deuxième phase, l'intensité a de nouveau décru jusqu'à $I_{2n} = 22$ A. En changeant de plot une nouvelle fois ($R''_{max} = 2{,}96\ \Omega$), on atteint finalement la vitesse de 1 000 tr/min au bout de 0,68 s.

Au total, en agissant sur le rhéostat de démarrage de manière à garder l'intensité I toujours comprise entre $1{,}5\ I_{2n}$ et I_n, on amène le groupe à la vitesse de 1 000 tr/min en 5,32 s.

Si on alimente le moteur à intensité constante telle que $I_2 = 1{,}5\ I_{2n}$ pendant la phase de démarrage, la mise en vitesse sera encore plus rapide.

La nouvelle équation mécanique s'écrit :

$$(J + J') \cdot \frac{d\Omega}{dt} = K\, I_{10}\, I - (k_1 + k'_1)\,\Omega, \quad \text{avec} \quad I = \text{cste}.$$

La vitesse limite vers laquelle on tendrait si l'on conservait cette valeur de I vaudrait : $\Omega'' = 390$ rad/s soit 3 725 tr/min !

La nouvelle constante de temps τ'' vaut :

$$\tau'' = \frac{J + J'}{k_1 + k'_1} = 13{,}5 \text{ s}.$$

La durée de la phase de démarrage (passage à $\Omega = 1\,000$ tr/min) vaut alors :

$$t''_d = 13{,}5 \cdot l_n \left(\frac{390}{390 - 105} \right) = 4{,}23 \text{ s}.$$

DEUXIEME PARTIE

2.1. Notons O le point commun aux trois sources de f.é.m. respectives V_1, V_2 et V_3. Dans ce qui suit, le potentiel du point O sera le potentiel de référence. Dans ces conditions, $V_A = V_1$; $V_B = V_2$; $V_C = V_3$.

A chaque instant, l'un des potentiels V_A, V_B ou V_C est plus élevé que les autres. Si les trois thyristors T_{h1}, T_{h2} et T_{h3} étaient remplacés par des diodes, ce serait la diode dont l'anode A, B ou C serait au potentiel le plus élevé qui conduirait (si cela était possible).

Les instants de début de conduction de ces diodes seraient les suivantes : $t_1 = 0$ pour D_1 ; $t_2 = \frac{2\pi}{3\omega}$ pour D_2 et $t_3 = \frac{4\pi}{3\omega}$ pour D_3.

Mais il est possible, avec des thyristors, de retarder leurs amorçages respectifs par rapport à ces instants. Ainsi, si la conduction est ininterrompue ($I > 0$ à tout instant), T_{h1} conduit de t_a à $t_a + \frac{2\pi}{3\omega}$; T_{h2} conduit de $t_a + \frac{2\pi}{3\omega}$ à $t_a + \frac{4\pi}{3\omega}$, et T_{h3} de $t_a + \frac{4\pi}{3\omega}$ à $t_a + \frac{2\pi}{\omega}$.

En ce qui concerne l'autre groupe de thyristors (T_{h4}, T_{h5}, T_{h6}), on définit, là, encore, leurs instants d'amorçages « naturels » en les remplaçant par la pensée par des diodes. Dans ce cas, à chaque instant, c'est la diode dont la cathode A, B, ou C, est au potentiel le plus bas, qui conduit. Les instants d'amorçages correspondants sont $t_6 = \frac{2\pi}{6\omega}$ pour D_6, $t_4 = \frac{\pi}{\omega}$ pour D_4 et $t_5 = \frac{5\pi}{3\omega}$ pour D_5.

Lorsque l'on utilise des thyristors, ces instants de débuts respectifs de conductions sont décalés de t_a, et, si le circuit de charge le permet, la durée t_a peut approcher la demi-période $\frac{\pi}{\omega}$ (fonctionnement en onduleur assisté).

Choisissons comme nouvelle variable la grandeur angulaire $\vartheta = \omega t$.

Les angles d'allumages respectifs des thyristors sont, pour $\alpha < \frac{\pi}{3}$:

$$\vartheta_1 = \alpha \text{ pour } T_{h_1} ;$$

$$\vartheta_6 = \alpha + \frac{\pi}{3} \text{ pour } T_{h_6} ; \qquad \vartheta_2 = \alpha + \frac{2\pi}{3} \text{ pour } T_{h_2} ;$$

$\vartheta_4 = \alpha + \pi$ pour T_{h_4}, et ensuite, évidemment,

$$\vartheta_3 = \alpha + \frac{4\pi}{3} \quad \text{et} \quad \vartheta_5 = \alpha + \frac{5\pi}{3}.$$

La valeur $\alpha = \frac{\pi}{3}$ n'a rien de remarquable, à part le fait que, pour $\alpha > \frac{\pi}{3}$, avec l'origine des durées imposée par le texte, le premier thyristor à s'amorcer sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, n'est plus T_{h_1} mais T_{h_5} pour $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ et T_{h_3} pour $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$.

A l'instant t_a où l'on envoie une impulsion sur la gâchette de T_{h_1}, les tensions à prendre en compte sont $V_1 = V\sqrt{2} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$, et, en gardant $\alpha < \frac{\pi}{3}$, $V_2 = V\sqrt{2} \cos (\omega t - \pi)$.

S'il y a amorçage, la tension u qui est appliquée à la charge vaut :

$$u = V_1 - V_2 = -V\sqrt{6} \sin \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) \text{ pour } \alpha < \vartheta < \alpha + \frac{\pi}{3}.$$

Pour l'instant d'amorçage, en particulier, on doit avoir :

$$u(\alpha) = V\sqrt{6} \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) > E.$$

Si cette condition est réalisée (et si l'on a pris toutes les dispositions nécessaires pour que T_{h_1} et T_{h_5} conduisent effectivement), il y a bien début de conduction.

Cette conduction est régie par l'équation :

$$u = V\sqrt{6} \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{3}\right) = E + RI + L\frac{dI}{dt}.$$

On peut encore écrire cette équation sous la forme :

$$RI + L\frac{dI}{dt} = \hat{U}\sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{3}\right) - E, \text{ avec } \hat{U} = V\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}.$$

On sait que la solution générale de cette équation revêt la forme suivante :

$$I = -\frac{E}{R} + \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\sin\left(\omega t - \varphi - \frac{5\pi}{3}\right) + A\,e^{-t/\tau}$$

avec :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{L}{R}; \quad \text{posons} \quad I_m = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

La constante A est déterminée en écrivant qu'à l'instant $t_a = \frac{\alpha}{\omega}$, l'intensité I est nulle.

On trouve ainsi :

$$I(t) = I_m \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{5\pi}{3}\right) - \frac{E}{R} + \ldots$$

$$\ldots \left[\frac{E}{R} + I_m \sin\left(\alpha - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\right]\cdot e^{-(\omega t - \alpha)/\omega\tau}.$$

Comme la période de $u(t)$ vaut $\frac{\pi}{\omega}$, on n'aura une conduction continue que si, au terme d'une période de $u(t)$, soit pour $t = \frac{\pi}{3\omega} + \alpha$, l'expression précédente conserve une valeur positive.

Cette condition de conduction continue s'écrit :

$$I_m \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha - \varphi\right) - \frac{E}{R} + \ldots$$

$$\ldots \left[\frac{E}{R} + I_m \sin\left(\alpha - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\right]\cdot e^{-\pi/3\omega\tau} > 0.$$

Elle n'est pas très difficile à réaliser, en effet, avec V = 220 V et ω = 314 rad/s, si l'on prend pour valeurs numériques R = 1 Ω

et $L\omega = 3\,\Omega$, avec $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, on constate que la conduction reste continue tant que E n'excède pas la valeur de 350 V, alors que la tension moyenne U_{moy} aux bornes de la charge est alors égale à 364 V.

Si elle n'est pas réalisée, la conduction est discontinue. L'amorçage des thyristors, doit, six fois par période des sources primaires, être double (fig. 3) (T_{h_1} et T_{h_5}, ou T_{h_2} et T_{h_6}, ou T_{h_3} et T_{h_4}, ou T_{h_6} et T_{h_1}, etc.).

Dans la charge, que la conduction soit ou non continue, la période du courant est évidemment égale à $\dfrac{2\pi}{6\omega}$.

2.2. Pour $\alpha < \omega t < \alpha + \dfrac{\pi}{3}$, les thyristors en fonctionnement sont T_{h_1} et T_{h_5}. La source de f.é.m. V_1 fournit une intensité $i_1(t) = I$, et la source V_2 fournit $i_2(t) = -I$ (avec les conventions générateur pour ces deux sources).

On a :

$$V_P = V_1 - ri_1 - l\frac{di_1}{dt} \quad \text{et} \quad V_N = V_B = V_2\, ri_2 - l\frac{di_2}{dt}.$$

Donc :

$$u(t) = V_P - V_N = V_1 - V_2 - r(i_1 - i_2) - l\frac{d}{dt}(i_1 - i_2).$$

Pour $\alpha + \dfrac{\pi}{3} < \omega t < \alpha + \dfrac{2\pi}{3}$, ce sont T_{h_1} et T_{h_6} qui conduisent. L'intensité I qui se refermait par T_{h_5} avant l'instant $\dfrac{\alpha + \frac{\pi}{3}}{\omega}$ passe par T_{h_6} après cet instant.

Mais la commutation n'est pas instantanée. Supposons qu'elle s'étale sur une durée δt telle que $\omega\,\delta t = \mu$, c'est-à-dire pour t vérifiant $\alpha + \dfrac{\pi}{3} \leqslant \omega t \leqslant \alpha + \dfrac{\pi}{3} + \mu$.

Pendant cette durée, on a : $i_1(t) = I(t)$ et $i_2 + i_3 = -I(t)$.

L'expression précédente de $u(t)$ est encore valable, mais on a également :

$$u(t) = V_1 - V_3 - r(i_1 - i_3) - l\,\frac{d(i_1 - i_3)}{dt}.$$

Autrement dit, pendant la commutation, on peut, en faisant la différence de ces deux expressions, écrire la relation :

$$O = V_3 - V_2 + r(i_2 - i_3) + l\,\frac{d}{dt}(i_2 - i_3).$$

Si l'on suppose que la résistance r est négligeable, on a ainsi :

$$l\,\frac{d(i_2 - i_3)}{dt} = V_2 - V_3 = V\sqrt{6}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Les deux équations :

$$i_2 + i_3 = -I \quad \text{et} \quad l\,\frac{d(i_2 - i_3)}{dt} = V\sqrt{6}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

jointes aux conditions initiales :

$$i_2\left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{3}}{\omega}\right) = -I \quad \text{et} \quad i_3\left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{3}}{\omega}\right) = 0,$$

permettent de calculer les valeurs de $i_2(t)$ et de $i_3(t)$ pendant la commutation et de déterminer l'angle d'empiètement μ tel que :

$$i_2\left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{3} + \mu}{\omega}\right) = 0 \quad \text{et} \quad i_3\left(\frac{\alpha + \frac{\pi}{3} + \mu}{\omega}\right) = -I.$$

Après la commutation, c'est-à-dire pour t tel que :

$$\alpha + \frac{\pi}{3} + \mu < \omega t < \alpha + \frac{2\pi}{3},$$

on a, de nouveau :

$$u(t) = V_1 - V_3 - r(i_1 - i_3) - l\,\frac{d(i_1 - i_3)}{dt},$$

avec $i_1 = I$ et $i_3 = -I$.

Si l'inductance L est très grande, on peut légitimement supposer que, pour tous les phénomènes laissant de côté la bobine d'inductance L, l'intensité I est constante : $I = I_d$.

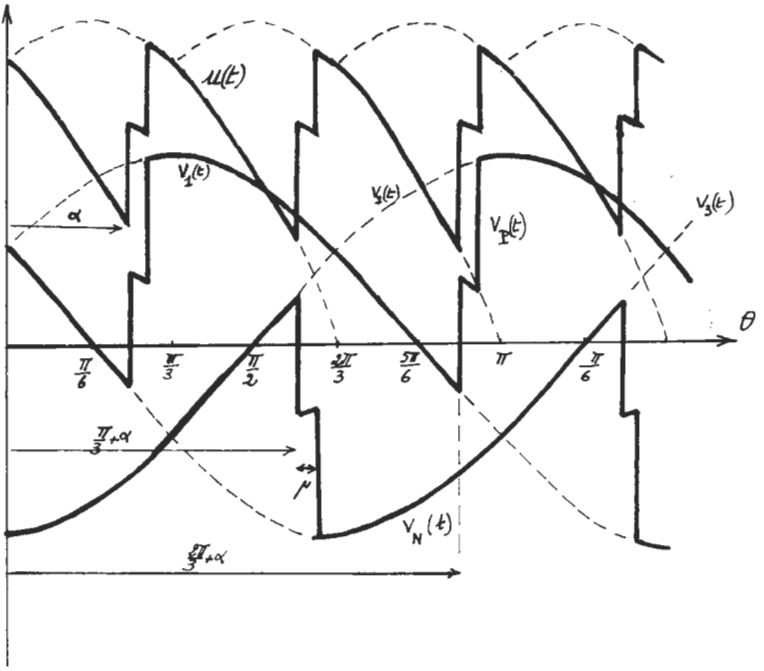


Fig. 1

On a donc :

Pour $\alpha + \mu < \omega t < \alpha + \dfrac{\pi}{3}$,

$$u(t) = V\sqrt{6}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Pour $\alpha + \dfrac{\pi}{3} < \omega t < \alpha + \dfrac{\pi}{3} + \mu$,

$$u(t) = V\sqrt{6}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + l\frac{di_2}{dt}.$$

ou encore $u(t) = V\sqrt{6}\sin\omega t + l\dfrac{di_3}{dt}$, et donc, puisque pendant cette durée $i_2 + i_3 = -I = \text{cste}$, en écrivant que $u(t)$ est égale à la demi-somme de ses deux expressions équivalentes, on trouve :

$$u(t) = \frac{3\,V}{\sqrt{2}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{Pour } \alpha + \frac{\pi}{3} + \mu < \omega t < \alpha + \frac{\pi}{3}, \quad u(t) = V\sqrt{6}\sin(\omega t).$$

La fig. 1 illustre ces diverses expressions.

Sans le phénomène d'empiètement, on aurait :

$$U_d = U_{d0} = \frac{3}{\pi}\int_{\alpha+\pi/3}^{\alpha+2\pi/3} V\sqrt{6}\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{3\,V\sqrt{6}}{\pi}\cos\alpha.$$

Avec le phénomène d'empiètement, on a :

$$U_d = \frac{3}{\pi}\int_{\alpha+\pi/3}^{\alpha+2\pi/3} V\sqrt{6}\sin\vartheta\, d\vartheta + \frac{3}{\pi}\int_{\alpha+\pi/3}^{\alpha+\pi/3+\mu} l\omega\frac{di_3}{d\vartheta}\, d\vartheta,$$

soit :

$$U_d = U_{d0} + \frac{3\,l\omega}{\pi}\cdot\left[\, i_3\left(\frac{\alpha+\pi/3+\mu}{\omega}\right) - i_3\left(\frac{\alpha+\pi/3}{\omega}\right)\right]$$

$$= U_{d0} - \frac{3\,l\omega}{\pi} I_d$$

$$\boxed{U_d = \frac{3\,V\sqrt{6}}{\pi}\cos\alpha - \frac{3\,l\omega}{\pi} I_d.}$$

La valeur de μ se détermine, comme nous l'avons dit précédemment, à partir des deux équations donnant $i_2 + i_3$ d'une part et $i_2 - i_3$ d'autre part.

On trouve :

$$I_d = \frac{V\sqrt{6}}{2\,l\omega}\,[\cos\alpha - \cos(\alpha+\mu)].$$

Application numérique :

$$U_d = 364 - 2 = 362 \text{ V}.$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha+\mu) + \frac{2\,l\omega\, I_d}{V\sqrt{6}} = \cos(\alpha+\mu) + 7{,}423\cdot 10^{-3}.$$

On trouve un angle d'empiètement μ égal à 0,6 degré, ce qui est très faible.

2.3. Le thyristor 1 doit être commandé à l'angle $\vartheta_a = \alpha$, variable de zéro à π. Or la tension composée :

$$u_{13} = V_1 - V_3 = V\sqrt{6}\sin\vartheta.$$

A partir de cette tension $u_{13}(\vartheta)$, il est facile de construire une tension variant de manière affine par morceaux, comme le montre la fig. 2 ci-après.

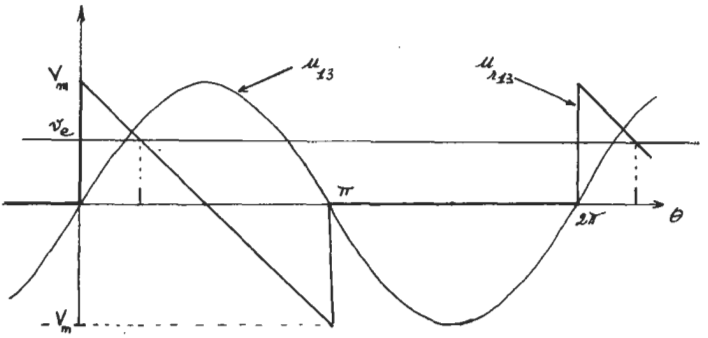


Fig. 2

L'équation de u_{r13} est ainsi : $u_{r13} = V_m\left(1 - \dfrac{2\vartheta}{\pi}\right)$ pour $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$ et $u_{r13} = 0$ pour $\pi \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$; il s'agit d'une fonction périodique.

Les impulsions nécessaires à T_{h1} doivent également être appliquées à T_{h5} de manière à pouvoir assurer le démarrage du pont en conduction ininterrompue ou son fonctionnement en conduction interrompue. En contrepartie, Th_1 doit aussi recevoir les impulsions « normales » de T_{h6} de manière à pouvoir entrer en conduction en même temps que celui-ci.

La fig. 3 représente les trois tensions sinusoïdales V_1, V_2 et V_3, et, dans le cas où $\alpha = 0$, les impulsions qui doivent être envoyées sur les divers thyristors. Les impulsions « normales » sont en traits gras, et les impulsions de confirmation, décalées de $\dfrac{\pi}{3}$, en traits légers.

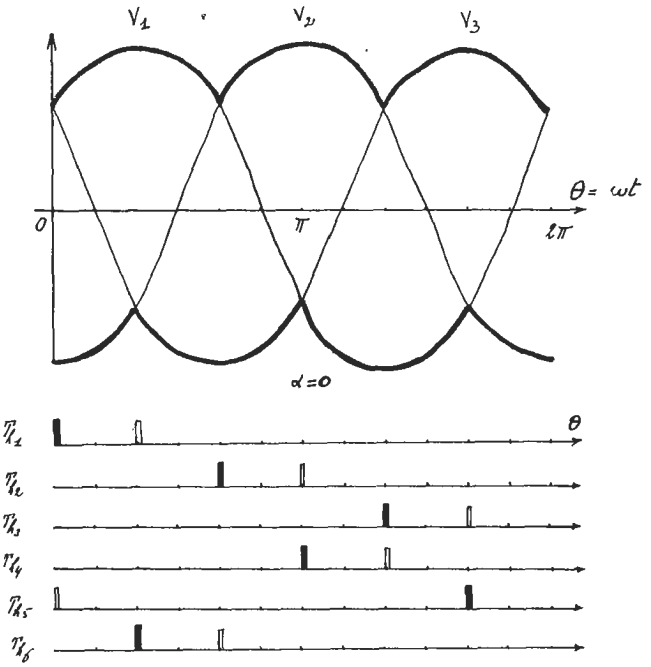


Fig. 3

La tension u_{13} permet d'élaborer u_{r13} à partir de laquelle, par comparaison avec la tension de commande v_e on génère l'impulsion de commande de T_{h1} et l'impulsion de confirmation de T_{h5}.

De même $u_{21} = V\sqrt{6}\sin\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right)$, qui s'annule pour $\vartheta = \frac{2\pi}{3}$, permet d'élaborer facilement u_{r21} à partir de laquelle seront générées l'impulsion de commande de T_{h2} et l'impulsion de confirmation de T_{h6}, etc.

Il faut remarquer qu'il n'est pas nécessaire d'élaborer six tensions de références u_{rij}, car, en effet, les impulsions envoyées sur les thyristors T_{h4}, T_{h5} et T_{h6} sont respectivement décalées de π par rapport à celles qui sont adressées à T_{h1}, T_{h2} et T_{h3}.

La tension u_{r13}, légèrement modifiée, permet, comme le montre la fig. 4, d'obtenir les impulsions de commande de T_{h1} et de T_{h4}. Il suffit qu'un dispositif logique inhibe les impulsions

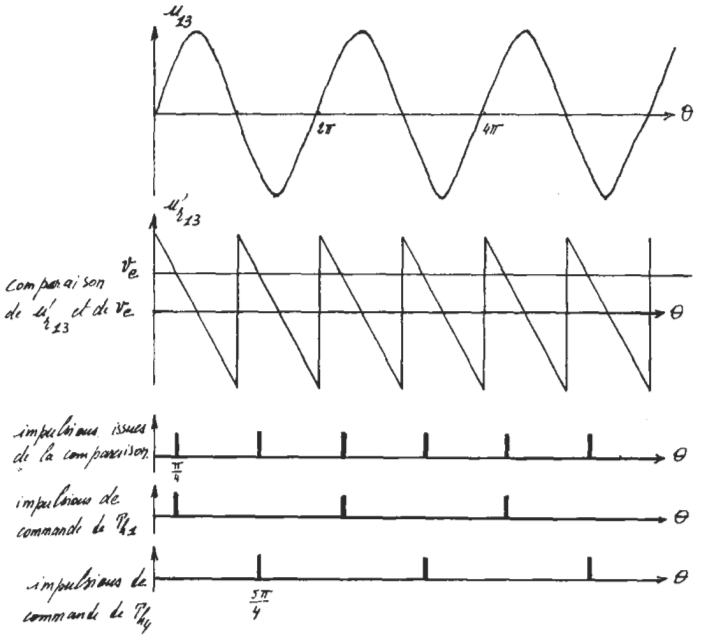


Fig. 4

produites par le comparateur lorsque u_{13} est négative en ce qui concerne T_{h1} et lorsque u_{13} est positive pour ce qui a trait à T_{h4}.

Le générateur d'impulsions à coïncidence pourra donc avoir, par exemple, la structure représentée sur la fig. 5.

A l'intérieur de chaque bloc sont effectuées les opérations représentées sur la figure précédente (4) : élaboration de u'_{rij}, comparaison avec v_e, création d'impulsions de coïncidence, annihilation de certaines d'entre elles par un dispositif logique (fonctions ET par exemple). Nous avons supposé que la borne de sortie supérieure de chaque bloc correspondait à l'impulsion de commande « normale » de thyristor i (T_{h1} pour u_{13}, T_{h2} pour u_{21}...) et que l'impulsion de commande normale du thyristor $i + 3$ (T_{h4} pour u_{13}, etc.) était disponible sur la borne inférieure.

Puisque nous avons établi la relation :

$$U_d = \frac{3\,V\sqrt{6}}{\pi}\cos\alpha - \frac{3\,l\omega}{\pi}\,I_d,$$

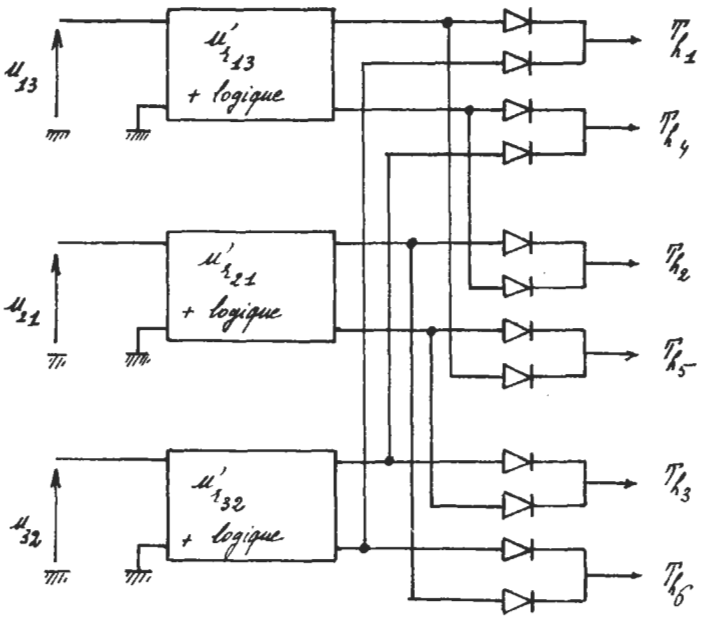


Fig. 5

et que l'on a, de manière évidente : $\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{v_m - v_e}{v_m}$, on en déduit l'égalité :

$$U_d = \frac{3\,V\sqrt{6}}{\pi} \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{v_m - v_e}{v_m}\right)\right] - \frac{3\,l\omega}{\pi} I_d.$$

Pour obtenir $U_d = 220$ V, il faut régler v_e à la valeur 2,83 V.

En agissant de manière à ce que la relation $v_m \cos\alpha = v_e$ soit vérifiée, on aura bien $\alpha = 0$ pour $v_e = v_m$ et $\alpha = \pi$ pour $v_e = -v_m$.

Du même coup, on obtiendra la relation :

$$U_d = \frac{3\,V\sqrt{6}}{\pi} \cdot \frac{v_e}{v_m} - \frac{3\,l\omega}{\pi} I_d,$$

qui est la relation recherchée.

Ce résultat sera obtenu en choisissant pour tension u_{r13} de référence de phase, la tension $u_{r13} = v_m \cos\omega t$. Ainsi, l'impulsion

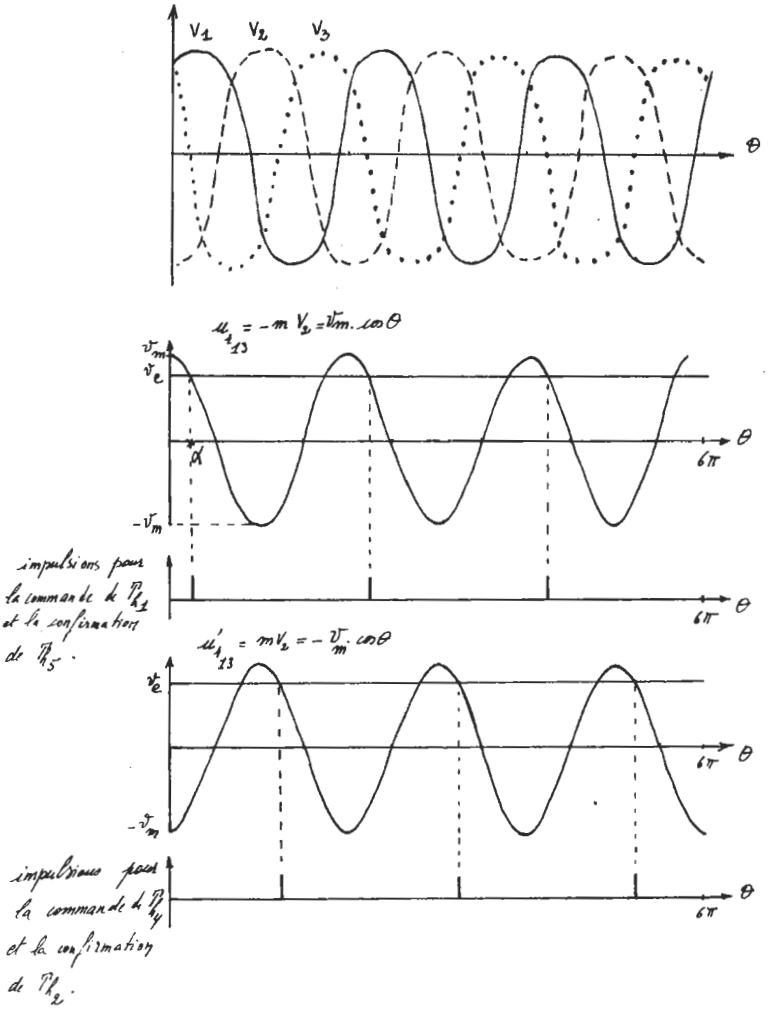


Fig. 6

générée à l'instant t_a, tel que $\omega t_a = \alpha$, et vérifiant $u_{r13} = v_e$, soit $v_m \cos \alpha = v_e$, satisfera bien à la condition exigée. Cette impulsion devra être acheminée vers la gâchette de T_{h1}, pour sa commande normale, et vers T_{h5} pour confirmation.

Il faut remarquer que la tension u_{r13} n'est autre, au signe et à un facteur constant près, que la tension $V_2(t) = -V\sqrt{2}\cos\omega t$.

Un transformateur de rapport $m = \dfrac{v_m}{V\sqrt{2}}$ permet donc très facilement de réaliser cette tension de référence. Si ce transformateur possède deux enroulements secondaires identiques, on pourra réaliser en même temps la tension de référence permettant d'élaborer les impulsions de commande de T_{h4} qui sont décalées de π par rapport aux précédentes, comme nous l'avons déjà vu.

Il apparaît donc que ce deuxième générateur d'impulsions à coïncidence, permettant une commande proportionnelle, est de facture plus simple que le premier.

La fig. 6 montre en effet que les seules fonctions mises en œuvre pour générer les impulsions sont des comparaisons et des bascules monostables. Avec ce type de commande, on obtiendra $U_d = 220$ V pour $I_d = 20$ A avec $v_e = 4{,}31$ V.

2.4. Nous avons déjà donné, à la question 2.1, l'expression de $I(t)$, valable pour $\alpha < \omega t < \beta$, soit :

$$I(t) = I_m \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{E}{R'} + \left[\frac{E}{R'} - I_m \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3} - \varphi\right)\right] \cdot e^{(\alpha-\omega t)/\mathrm{tg}\,\varphi}.$$

Il suffit, en effet, par rapport à l'expression donnée en 2.1, où l'on négligeait r et l, de poser :

$$R' = R + r \quad \text{et} \quad L' = L + 2l, \quad \text{avec} \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{L'\omega}{R'}$$

pour obtenir l'expression correcte lorsque l'on renonce à ces premières approximations.

Si on suppose que $R + 2r \ll (L + 2l)\omega$, cela revient à supposer que l'angle φ est très proche de $\dfrac{\pi}{3}$, donc :

$$\sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{3}\right) \simeq -\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3} - \varphi\right) \simeq -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$$

et :

$$e^{(\alpha-\omega t)/\mathrm{tg}\,\varphi} \simeq 1 + \frac{R'}{L'\omega} \cdot (\alpha - \omega t).$$

De plus, comme E et $V\sqrt{6}$ sont comparables, on peut négliger

$$I_m = \frac{V\sqrt{6}}{\sqrt{R'^2 + (L'\omega)^2}} \text{ devant } \frac{E}{R'}.$$

Dans ces conditions,

$$I(t) \simeq I_m\left[\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)\right] + \frac{E}{L'\omega}(\alpha - \omega t).$$

La valeur de ωt qui correspond à β est celle qui annule $I(t)$.

On a donc, après quelques transformations, et en remarquant que $467 = V\sqrt{6} \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$:

$$\sin\left[\frac{\pi}{3} + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] \cdot \frac{\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = \sin\frac{\pi}{3}.$$

La résolution numérique de cette équation donne $\beta \simeq 73{,}2°$, mais, en supposant que $\frac{\beta-\alpha}{2}$ est un angle x suffisamment faible pour que $\frac{\sin x}{x}$ puisse être assimilé à l'unité (ce facteur vaut en réalité 0,99), on est conduit à rechercher une solution de l'équation : $\sin\left[\frac{\pi}{3} + \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] = \sin\frac{\pi}{3}$.

On voit immédiatement que la solution $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{3}$ convient, ce qui correspond à $\alpha + \beta = 120°$ et donc à $\beta = 75°$. Cette valeur, obtenue très rapidement est convenable.

L'allure de la tension aux bornes de la charge est représentée sur la fig. 7.

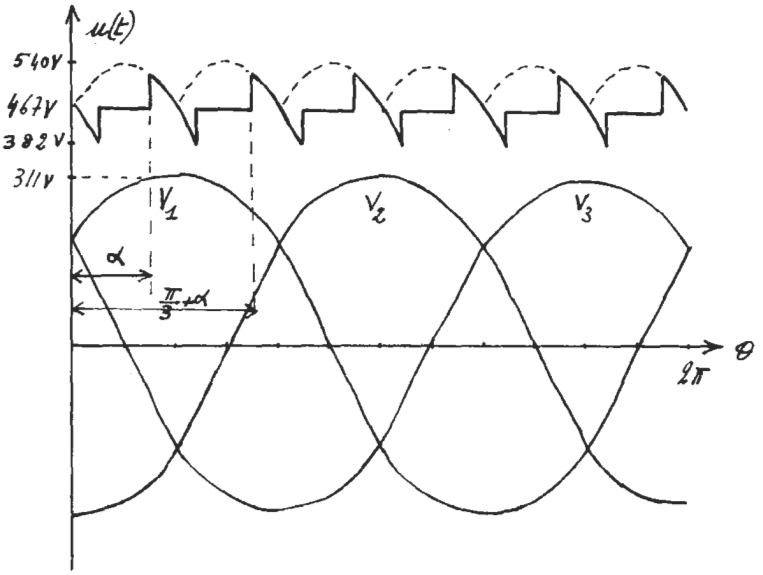


Fig. 7

Sa période est évidemment $\frac{2\pi}{6}$ (avec pour variable $\vartheta = \omega t$).

La conduction est assurée pour $\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta$. Pendant ce temps, on a approximativement $u = V\sqrt{6}\sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right)$. Puis elle cesse, et jusqu'à ce que le second couple de thyristors (T_{h6} et T_{h1}) soit amorcé, on a $u = E = 467$ V.

L'expression simplifiée que nous avons donnée de $I(t)$, soit :

$$L'\omega\, I(t) = E(\alpha - \omega t) + V\sqrt{6}\left[\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

permet non pas d'exprimer I_d en fonction de α, β et V, comme le demande le texte, mais de réaliser ceci pour $L'\omega\, I_d$.

On a en effet : $L'\omega\, I_d = L'\omega \times \frac{3}{\pi} \int_{\beta}^{\alpha} I(t) \cdot dt.$

Les calculs sont simples et conduisent à :

$$L\omega\, I_d = \frac{3\,V\sqrt{6}}{\pi}(\beta - \alpha)\left[\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \frac{E(\beta-\alpha)}{2\,V\sqrt{6}}\right].$$

Quant à U_d, il nous faut remarquer qu'en régime de conduction interrompue, il n'y a pas de phénomène d'empiètement lié à la commutation des thyristors.

On a donc :

pour $\alpha < \vartheta < \beta$

$$u(t) = V\sqrt{6}\sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{3}\right) - 2\,l\omega\frac{dI}{d\vartheta}$$

pour $\beta < \vartheta < \frac{\pi}{3} + \alpha$

$$u(t) = E.$$

Donc :

$$U_d = \frac{3}{\pi}\left[E \cdot \left(\frac{\pi}{3} + \alpha - \beta\right) + V\sqrt{6}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right)\right].$$

(En effet la contribution de l'intégrale de $2\,l\omega\frac{dI}{d\vartheta}$ sur $[\alpha, \beta]$ est nulle).

La valeur de U_d, pour les valeurs numériques proposées dans le texte, est extrêmement proche de E, comme cela est d'ailleurs visible sur la fig. 7.

TROISIEME PARTIE

3.1.

$$J \frac{d\Omega}{dt} = kI - \Gamma_c$$

$$U = RI + L \frac{dI}{dt} + k\Omega.$$

On en déduit les relations proposées dans le texte, avec $T_e = \frac{L}{R}$ et $T_{em} = \frac{RJ}{k^2}$, soit $T_e = 10^{-2}$ s et $T_{em} = 0{,}3$ s.

Les diagrammes qui représentent le comportement du moteur en régime transitoire, et, notamment, les deux équations que nous venons d'écrire, sont les suivants :

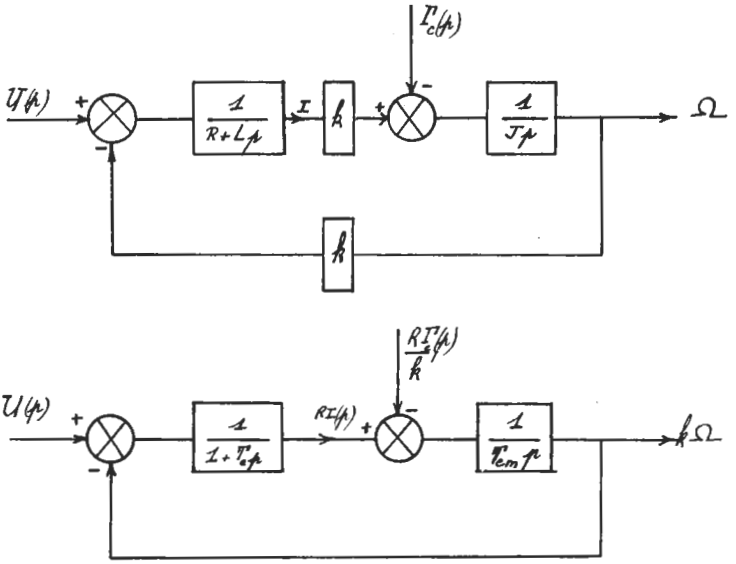


Fig. 8

3.2. Les trois premiers objectifs sont communs à la plupart des systèmes asservis.

Le quatrième et le dernier sont liés au fonctionnement du moteur.

L'intensité maximale doit être limitée, pour des questions d'échauffement, de densité de courant aux contacts balais-

collecteur et d'efforts mécaniques. Le taux de variation $\frac{dI}{dt}$ du courant doit être limité pour que la commutation de la machine (renversement du courant dans les sections reliées aux lames du collecteur se trouvant sous les balais) puisse s'effectuer normalement.

On obtiendra une erreur statique nulle en plaçant une intégration dans la chaîne directe $\left(\frac{K}{p}\right)$.

Une première boucle interne est en général réalisée pour améliorer la linéarité du fonctionnement du pont redresseur (propriété générale de la réaction négative). On a vu, en effet que le passage de la conduction ininterrompue à la conduction interrompue provoque un changement dans la caractéristique $U_d = f_\alpha(I_d)$ du pont, et donc une non linéarité.

Ensuite, les considérations d'optimisation et de stabilité peuvent imposer la présence d'un réseau correcteur dans la boucle de retour externe. Cela donne le diagramme ci-après (fig. 9).

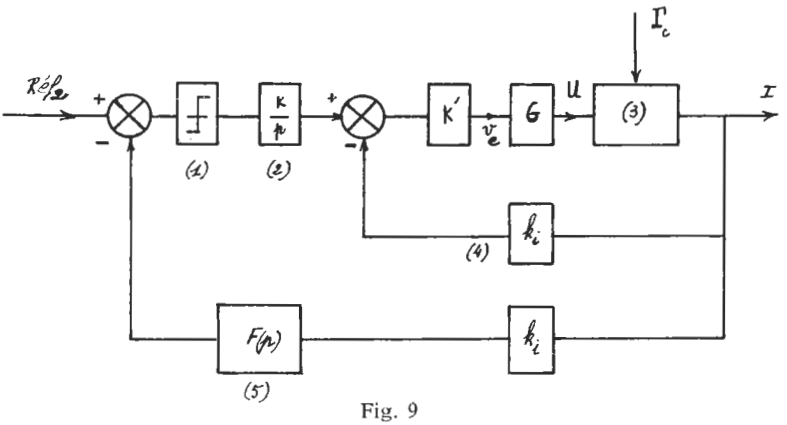


Fig. 9

Dans ce schéma, où la limitation en courant n'est pas mentionnée (on peut pour cela songer à limiter $Réf_2$, comme le propose le texte, un peu plus loin), le limiteur (1) assure, comme nous le verrons, la limitation en $\frac{dI}{dt}$. L'intégration $\frac{K}{p}$ assure la nullité de l'erreur statique.

Le bloc (3) est décrit par la relation établie précédemment, et reliant $I(p)$ à $U(p)$ et $\Gamma_c(p)$, soit :

$$I(p) = \frac{T_{em}/R \cdot p \cdot U(p) + \Gamma_c(p)/k}{1 + T_{em}\, p + T_e \cdot T_{em} \cdot p^2}.$$

La boucle 4 assure la linéarisation de l'ensemble pont + moteur.

Le réseau correcteur (5) a souvent une fonction de transfert de la forme $\dfrac{a}{1 + \tau p}$ ($F(p)$ peut être plus complexe, ou au contraire, se réduire à l'identité).

Nous avons vu que le pont triphasé alimentant le moteur, génère un courant ondulé, périodique, de période $\dfrac{20}{6} = 3{,}33$ ms. En régime de conduction interrompue, cette durée constitue la valeur minimale du temps de réponse. En régime de conduction ininterrompue, deux ou trois périodes, soit 10 ms, peuvent être nécessaires à l'établissement du courant sous sa forme définitive.

3.3. Dans une régulation à boucles multiples (système en cascade), les boucles internes doivent être plus rapides que les boucles externes. Cela assure une « séparation dynamique » des boucles. Ici, effectivement, on admet que la boucle de régulation de vitesse n'a pas le temps d'opérer pendant une évolution de la boucle de régulation de courant.

Dans ces conditions, la relation temporelle entre les *variations* de $U(t)$ et celles de $I(t)$ est limitée à :

$$\delta\, U(t) = \left(R + L \frac{d}{dt} \right) \delta\, I(t).$$

Soit :

$$I(p) = \frac{U(p)}{R \cdot (1 + T_e\, p)} ;$$

dans l'expression générale reliant $I(p)$ à $U(p)$ établie précédemment, cela revient à négliger 1 et Γ_c devant les termes en p et p^2 symbolisant les variations rapides.

Dans ces conditions, la chaîne entre $Réf_1$ et I peut être représentée selon la figure.

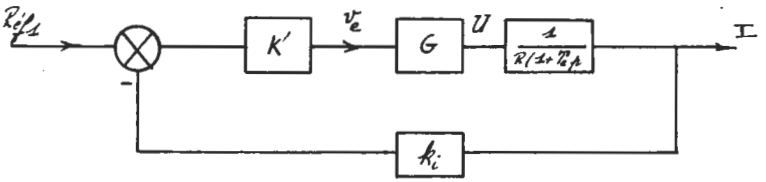


Fig. 10

On a :

$$H'(p) = \frac{I(p)}{Réf_1(p)} = \frac{G_i}{1 + \tau_i p} \quad \text{avec} \quad G_i = \frac{K'G}{k_i K'G + R}$$

et :

$$\tau_i = \frac{R}{R + k_i K'G} T_e.$$

Pour obtenir $\tau_i = 1$ ms (boucle intérieure rapide), il faut avoir $K' = 13{,}5\ \Omega$. Cela entraîne $G_i = 270$.

Le diagramme reliant $Réf_2(p)$ à $I(p)$ est le suivant :

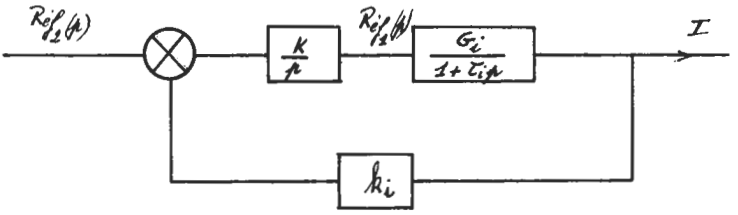


Fig. 11

La fonction de transfert correspondante vaut :

$$\frac{\dfrac{1}{k_i}}{1 + \dfrac{p}{k_i K G_i} + \dfrac{\tau_i p^2}{k_i K G_i}}.$$

C'est une fonction de transfert du deuxième ordre, avec :

$\omega_n^2 = \dfrac{k_i K G_i}{\tau_i}$ et $2\dfrac{\xi}{\omega_n} = \dfrac{1}{k_i K G_i}$. Si nous réglons le para-

mètre d'amortissement ξ à la valeur 0,7, de manière à obtenir le système le plus rapide possible, cela nous impose $\omega_n = 1{,}4 \cdot k_i \, K \, G_i$, soit une deuxième valeur de ω_n^2 : $1{,}96 \; k_i^2 K^2 G_i^2$.

On en déduit $K = \dfrac{1}{1{,}96 \cdot k_i \, \tau_i \, G_i} = 567 \text{ s}^{-1}$.

La valeur de la pulsation de résonance, ω_n est égale à 714 rad/s, et le graphe de la fig. 3 du texte, nous indiquant que la réponse à un échelon d'un système du deuxième ordre dont le paramètre ξ vaut 0,7, est terminée au bout d'une durée égale à $\dfrac{7}{\omega_n}$ secondes, soit ici, environ 10 ms, nous en déduisons, compte tenu de ce qui a été dit sur la durée minimale du temps, de réponse due au pont d'alimentation, (10 ms), que la boucle de courant pourra, effectivement, réagir sur cette durée.

3.4. Soit v la tension de sortie du premier amplificateur opérationnel réalisant l'opération $v = k_i \cdot (k_o \, \text{Réf}_2 - k_i \, I)$.

Les diagrammes permettent d'établir la transmittance :

$$\frac{I(p)}{v(p)} = \frac{G_i \, k_2}{p(1 + \tau_i \, p)}.$$

Cela signifie :

$$\frac{dI}{dt} + \tau_i \frac{d^2 I}{dt^2} = G_i \, k_2 \, v.$$

La croissance de $\dfrac{dI}{dt}$ n'est assurée que si $\dfrac{d^2 I}{dt^2}$ est une quantité positive.

Pendant une telle phase, on a bien $\dfrac{dI}{dt} < G_i \, k_2 \, v_{max}$. De même, si $\dfrac{dI}{dt} < 0$, ce taux de variation ne peut s'accroître en valeur absolue que si $\dfrac{d^2 I}{dt^2} < 0$. Là encore $\left| \dfrac{dI}{dt} \right| < G_i \, k_2 \, v_{max}$.

Pour avoir $\left| \dfrac{dI}{dt} \right|_{max} = 500$ A/s, il faut, puisque $G_i = 270$, donner à k_2 la valeur $k_2 = 0{,}185$. Compte tenu de ce que $K = k_1 \, k_2 = 567$, cela impose $k_1 = 3\,150$. En régime permanent,

$$I = \frac{k_o}{k_i} \text{Réf}_2.$$

Pour obtenir $I_{max} = 30$ A, on devra régler k_o à la valeur $1{,}0 \cdot 10^{-2}$.

3.5.

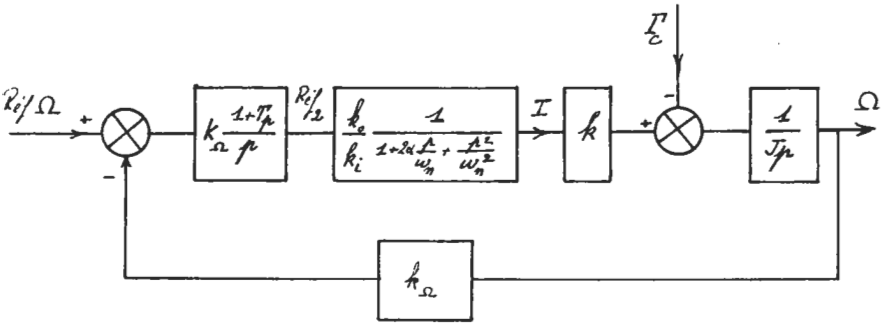


Fig. 12

La fig. 12 fait apparaître la fonction de transfert en boucle ouverte du système :

$$H(p) = k_\Omega \cdot K_\Omega \cdot \frac{k_0}{k_i} \cdot \frac{k}{J} \cdot \frac{1 + Tp}{p^2} \cdot \frac{1}{1 + 2\alpha \dfrac{p}{\omega_n} + \dfrac{p^2}{\omega_n^2}}$$

$$k_\Omega = 6 \cdot 10^{-3}; \quad k_0 = 10^{-2}; \quad k_i = \frac{1}{3} \cdot 10^{-2}; \quad k = 1{,}3 \text{ N.m/A};$$

$$J = 1 \text{ kg.m}^2.$$

Le coefficient numérique placé en tête a donc pour valeur $0{,}0234 \cdot K_\Omega$.

Le diagramme asymptotique de Bode peut être obtenu en additionnant les ordonnées de trois diagrammes élémentaires :

celui de $\dfrac{0{,}0234\ K_\Omega}{p^2}$, c'est une droite de pente — 40 db/décade ;

celui de $1 + Tp$ et celui de la fonction de transfert du deuxième ordre.

Représentons ces deux derniers et leur somme :

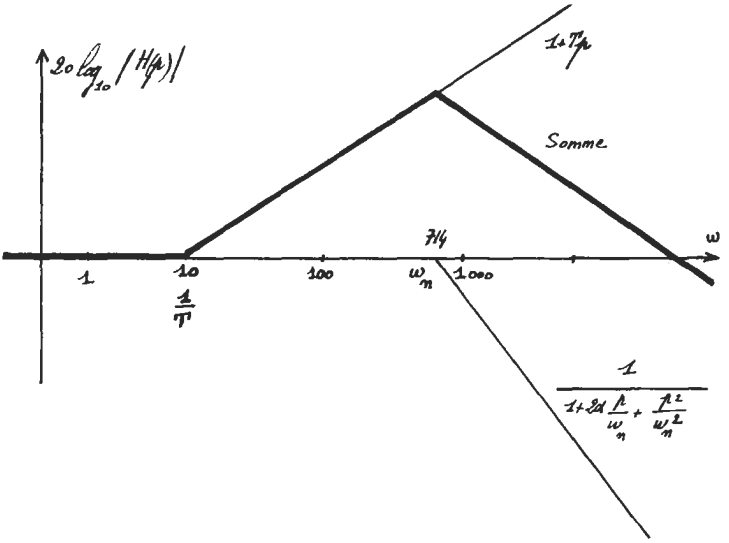


Fig. 13

Nous avons choisi, pour cette représentation, la valeur $T = 0{,}1$ s.

Nous voyons apparaître, sur le diagramme somme, une portion de pente positive (20 db/décade) qui, après l'ultime addition, donnera une portion de pente négative limitée à — 20 db/décade.

Cette portion est nécessaire car il faut que la pente du diagramme asymptotique soit de — 20 db/décade lorsque $H(j\omega)$ a pour module l'unité.

Or, cette portion n'existe que si $\frac{1}{T}$ est inférieure à la pulsation ω_n. On doit donc veiller à assurer $T > \frac{1}{\omega_n}$.

Supposons que ce soit très nettement le cas.

Il faut alors que l'égalité $|H(j\omega)| = 1$ soit réalisée pour $\frac{1}{T} < \omega < \omega_n$. Cela impose $\left| H\left(j\frac{1}{T}\right) \right| > 1$ et $|H(j\omega_n)| < 1$.

Pour $\omega = \dfrac{1}{T}$, on a $\left| \dfrac{1 + Tp}{1 + 2\alpha \dfrac{p}{\omega_n} + \dfrac{p^2}{\omega_n^2}} \right| \simeq 1$, comme on doit, pour obtenir $|H(j\omega)|$, multiplier ce facteur par $\dfrac{0{,}0234\ K_\Omega}{\omega^2}$, cela impose :

$$0{,}0234 \cdot K_\Omega \cdot T^2 > 1.$$

Pour $\omega = \omega_n$, on a sensiblement :

$$\left| \frac{1 + Tp}{1 + 2\alpha \dfrac{p}{\omega_n} + \dfrac{p^2}{\omega_n^2}} \right| = \omega_n T.$$

Cela entraîne l'inégalité : $0{,}0234 \cdot K_\Omega \dfrac{T}{\omega_n} < 1.$

Exemple : choisissons $T = 0{,}1$ s, cela entraîne $\omega_n T = 71$.

Comme l'on passe de l'expression $0{,}0234\ K_\Omega T^2$, qui doit être supérieure à 1, à $0{,}0234 \dfrac{K_\Omega T}{\omega_n}$, qui doit être, elle, inférieure à 1, en divisant par $\omega_n T$, nous choisissons de réaliser :

$$0{,}0234 \cdot K_\Omega \cdot T^2 = \sqrt{\omega_n T} = 8{,}4.$$

Cela donne : $K_\Omega = 3{,}6 \cdot 10^4$.

La fonction de transfert :

$$H(p) = H_0 \frac{1 + Tp}{p^2 \cdot \left(1 + 2\alpha \dfrac{p}{\omega_n} + \dfrac{p^2}{\omega_n^2} \right)}$$

avec $H_0 = 842$, $T = 0{,}1$ s ; $\alpha = 0{,}7$ et $\omega_n = 714$ rad/s, possède alors le diagramme asymptotique de Bode ci-après :

C'est la fonction de transfert d'un système stable dont la marge de phase est de 73 degrés.

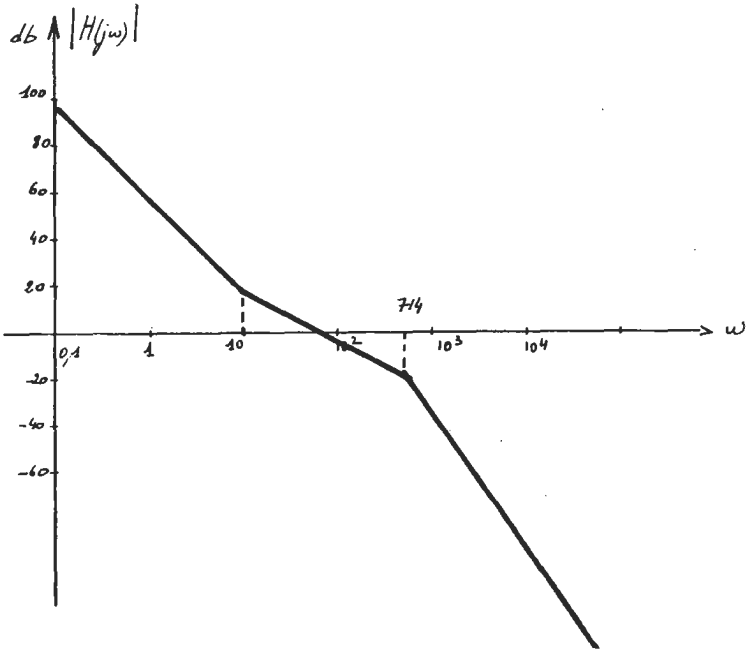


Fig. 14

R. MOREAU (*Bordeaux*).

Le Directeur de la Publication : D. MAURAS

Numéro Commission paritaire : 62628
Dépôt légal : 1er trimestre 1985
Imprimerie Hallépée - 169, rue Lecourbe, Paris