

Bulletin de l'Union des Physiciens

Association de professeurs de Physique et de Chimie

AVERTISSEMENT AUX LECTEURS

Nous avons décidé, pour l'impression de ce bulletin, de respecter les normes de la typographie nouvelle et de noter les grandeurs vectorielles en caractères gras sans les surmonter de flèches. Ces normes ont surtout comme intérêt de simplifier la tâche de composition.

D. MAURAS.

Concours Général 1985

COMPOSITION DE SCIENCES PHYSIQUES

(Classes terminales C, D et E)

(Durée : 6 heures)

Ce problème propose l'étude de quelques questions relatives au mouvement des satellites et à leur utilisation pour l'observation de la Terre.

A l'exception des résultats généraux demandés dans la première partie (A), les autres questions sont largement indépendantes.

On rappelle que la force gravitationnelle exercée par une particule M de masse m sur une particule M' de masse m' a pour expression :

$$\mathbf{F} = - \frac{Gmm'}{r^2} \mathbf{u} \quad \text{avec} \quad \mathbf{MM}' = r \mathbf{u},$$

et G constante de gravitation universelle.

On admettra que le champ gravitationnel d'un système à symétrie sphérique (c'est-à-dire constitué de couches sphériques concentriques et homogènes) est, à l'extérieur de l'astre, identique à celui d'une masse ponctuelle égale à la masse totale de l'astre, et situé au centre de celui-ci.

Sauf lorsque ce sera spécifié explicitement (partie C.3), la Terre sera considérée comme à symétrie sphérique. On notera O son centre,

M_T sa masse, $R_T = 6,40 \cdot 10^6$ m son rayon. On prendra pour valeur du du champ gravitationnel à la surface de la Terre $g_0 = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

Dans tout le problème, on se placera dans le référentiel géocentrique, donc de centre O, par rapport auquel la Terre est en rota-

tion uniforme à la vitesse angulaire $\frac{2\pi}{86\,164} \text{ rad. s}^{-1}$, et on consi-

dérera ce référentiel comme galiléen (ce qui revient à ne pas tenir compte du mouvement de révolution de la Terre autour du Soleil). On ne tiendra compte que des interactions gravitationnelles entre la Terre et le satellite, en négligeant l'influence perturbatrice de la Lune et des autres astres.

A. MOUVEMENT GÉNÉRAL DES SATELLITES

A.1. *Le mouvement circulaire.*

On considère un satellite de masse m_S , de centre d'inertie S, en orbite circulaire à la distance $r_0 = R_T + h$ de O (centre de la Terre).

A.1.1. Calculer la vitesse du satellite sur son orbite, en fonction de G, M_T et r_0 .

A.1.2. Calculer, en fonction de G, M_T et r_0 la période T_0 de révolution du satellite sur son orbite.

A.1.3. Calculer, en fonction de G, M_T , m_S et r_0 l'énergie mécanique E totale du satellite, en prenant l'énergie potentielle gravitationnelle nulle pour une distance infinie. Préciser son signe. On montrera en particulier que $E = -E_C$ où E_C est l'énergie cinétique du satellite.

A.1.4. *Application numérique* : on désire réaliser un satellite d'observation de la Terre qui paraisse immobile pour un observateur situé à la surface de la Terre. Dans quel plan devra se trouver sa trajectoire ? Quelle devra être sa période de révolution ? Quelle sera alors son altitude h ? Connaissez-vous des exemples de tels satellites dits « géostationnaires ». (Pour faire le calcul numérique, il est recommandé d'utiliser les valeurs de g_0 et R_T données dans l'introduction et d'en déduire la valeur du produit GM_T).

A.2. *Mouvement elliptique des satellites.*

A.2.1. On appelle moment cinétique de S par rapport à O le produit vectoriel $\vec{\sigma}_0 = \mathbf{OS} \wedge \mathbf{p}$ où \mathbf{p} est la quantité de mouvement de S.

Montrer que si S n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle de la Terre de centre O, $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \mathbf{0}$. En déduire que la trajectoire

de S est plane, et préciser ce plan par rapport à la direction de $\vec{\sigma}_0$ lorsque ce vecteur est non nul.

A.2.2. Si le satellite reste à distance finie de O, sa trajectoire est alors une ellipse dont l'un des foyers est en O. On admettra que les

expressions obtenues en A.1.2. et A.1.3. pour la période et l'énergie restent valables à condition de remplacer le rayon r_0 par la longueur a du demi-grand axe de l'ellipse.

On rappelle les caractéristiques d'une ellipse (fig. 1) :

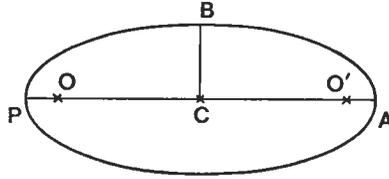


Fig. 1

O et O' foyers de l'ellipse ;

C centre de l'ellipse ;

$a = CA = CP$ demi-grand axe ;

$b = CB$ demi-petit axe ;

$c = OC$ $a^2 - b^2 = c^2$;

A apogée de la trajectoire ;

P périgée de la trajectoire ;

$e = \frac{c}{a}$ excentricité de l'ellipse.

A.2.2. a) Calculer la vitesse du satellite à son apogée et à son périgée en fonction de G , M_T , a et e .

A.2.2. b) Quelle est la direction de la vitesse en ces deux points ? En déduire une relation donnant σ_0 en fonction de G , M_T , m_s , a et e .

A.2.2. c) Une fusée largue un satellite S avec une vitesse \mathbf{v} perpendiculaire à OS, telle que le satellite décrive une trajectoire elliptique. En quel point de la trajectoire s'est situé le largage ? Discuter suivant la valeur de v .

B. LE SATELLITE EN VOL

B.1. Mouvements à l'intérieur du satellite.

On considérera ici le mouvement d'un point matériel M de masse m à l'intérieur du satellite, donc à une distance d de S toujours très petite devant r_0 . Dans toute cette question, le satellite sera supposé avoir un mouvement circulaire uniforme, de rayon r_0 et de période T_0 . On négligera toujours l'attraction gravitationnelle du satellite sur le point M.

B.1. a) M est placé au centre d'inertie S du satellite, et lâché en ce point avec la même vitesse que S. Quel sera son mouvement ultérieur :

— dans le référentiel géocentrique ?

— pour un observateur lié au satellite ?

B.1. b) On lâche maintenant le point matériel au point S' sur la droite OS tel que $\overline{SS'} = d$ ($d \leq 0$), avec la même vitesse que S dans le référentiel géocentrique. Quel sera son mouvement ultérieur dans le référentiel géocentrique ? On appellera T'_0 la période de ce mouvement. Où se trouve le point S' , toujours défini comme à la distance d

de S sur la droite OS , aux instants $t = \frac{T'_0}{2}$ et $t = T'_0$. Quelles sont alors les distances $S'M$? Conclure.

B.2. Arrimage de deux satellites.

On considère deux satellites S_1 et S_2 placés sur la même orbite circulaire de rayon r_0 , à la distance $l \ll r_0$ mesurée sur l'orbite, l'un de l'autre.

On veut que S_1 « rattrape » S_2 . Pour cela, on allume un moteur de fusée auxiliaire pendant un temps très court, ce qui communique à S_1 une petite vitesse \mathbf{q} supplémentaire, tangente à la trajectoire. En considérant le mouvement ultérieur de S_1 , calculer le module et le sens de \mathbf{q} pour que S_1 « rattrape » S_2 dans le laps de temps le plus court possible. En quel point et à quel instant l'arrimage pourra-t-il se faire ?

Application numérique : $r_0 = 42\,300$ km ; $l = 100$ km.

B.3. Action du freinage de l'atmosphère.

Jusqu'à des altitudes de 800 à 1000 km, l'action de freinage de l'atmosphère se fait sentir sur le satellite. On considérera qu'à ces altitudes, la vitesse du satellite reste grande devant la vitesse de l'atmosphère entraînée par la rotation de la Terre. On peut alors admettre que cette force de frottement est de la forme $-k(r)\mathbf{v}$, où \mathbf{v} est la vitesse du satellite dans le référentiel géocentrique, et $k(r)$ un fonction décroissante de la distance $r = OS$.

B.3.1. Justifier qualitativement cette expression.

B.3.2. On considère une trajectoire elliptique. En quel point de la trajectoire l'action de cette force est-elle maximale ? Pour simplifier on négligera l'action de cette force ailleurs qu'au voisinage de ce point. Montrer que, sous l'action de cette force, la trajectoire tend à devenir circulaire.

B.3.3. On considère maintenant une trajectoire circulaire. Exprimer

la variation relative $\frac{\Delta r}{r}$ par révolution du rayon de l'orbite, en fonc-

tion de $\mathcal{E} = \frac{m_S}{k(r)}$ et de la période T_0 du mouvement non perturbé.

Quelle est, par révolution, la variation relative de l'énergie cinétique du satellite ? Justifier le signe du résultat.

C. LES UTILISATIONS DU SATELLITE

C.1. Repérage du satellite.

On suppose que le satellite est en mouvement circulaire uniforme dans le plan équatorial, et qu'il survole un observateur M_0 situé à la surface de la Terre, dans ce même plan.

Pour simplifier les calculs, on supposera que, pendant la durée de l'observation par M_0 , on peut représenter la portion de trajectoire du satellite par une droite dont le point H le plus rapproché de l'observateur est à la distance h de celui-ci. On définira la position du satellite par la variable $x = \overline{HS}$. Le satellite émet en direction de M_0 un signal

périodique de fréquence $f = \frac{1}{T} = 20$ MHz se propageant à la vitesse c (on prendra $c = 3 \cdot 10^8$ m. s⁻¹) (fig. 2).

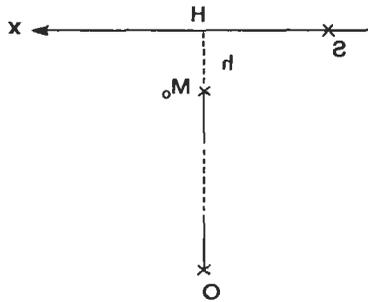


Fig. 2

C.1.1. Quel est l'intervalle de temps T' séparant la réception au sol des signaux émis aux instants t et $t + T$? Exprimer $\frac{T' - T}{T}$ en fonction de v_R vitesse relative de S par rapport à M_0 , c , h et x . En déduire la variation relative $\frac{f' - f}{f}$ de fréquence, en ne gardant que les termes du premier ordre en $\frac{v_R}{c}$. Les termes en $\frac{v_R^2}{c^2}$ obtenus ainsi auraient-ils un sens physique? Justifiez votre réponse. Tracer la courbe Δf en fonction de x .

C.1.2. Indiquer comment l'observation de cette courbe permet de déterminer les quantités h et v_R .

C.1.3. La fig. 3 représente une courbe expérimentale. Elle est obtenue en mesurant l'écart de fréquence entre le signal reçu et un signal

de référence obtenu à partir d'une source restée au sol, de fréquence f_0 , assez proche de la fréquence de la source embarquée à bord du satellite.

a) Expliquer qualitativement la différence de forme entre la courbe expérimentale et la courbe obtenue théoriquement en C.1.1.

b) En déduire des valeurs approchées de h et ν_R .

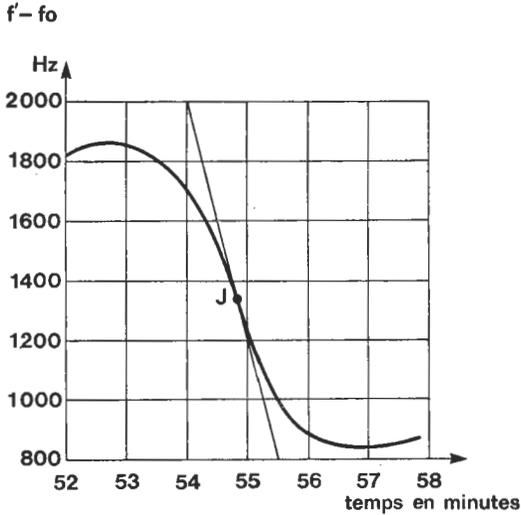


Fig. 3

C.2. Les orbites « circumpolaires ».

Pour observer la Terre, on utilise parfois des satellites dont les orbites circulaires sont dans un plan contenant l'axe des pôles. Ces orbites sont dites « circumpolaires ».

Le satellite d'observation « Spot » a, en première approximation, une trajectoire circumpolaire. Il effectue 369 révolutions en 26 jours exactement, c'est-à-dire qu'après un cycle d'observation de 26 jours, il repasse exactement au-dessus des mêmes points du globe terrestre.

C.2.1. Calculer l'altitude h de ce satellite circumpolaire. Comparer avec l'altitude de l'orbite géostationnaire.

C.2.2. A cause de la rotation de la Terre, l'ensemble des points survolés par le satellite forme un réseau de « traces ». Au bout de 26 jours le satellite survolera à nouveau les mêmes points exactement.

a) Calculer la distance sur l'équateur séparant deux traces correspondant à deux passages successifs du satellite.

b) Montrer que le choix de 369 périodes en 26 jours permet d'avoir un réseau de traces équidistantes. Calculer la distance, sur

l'équateur, entre deux traces voisines. Quel intervalle de temps sépare le survol de ces deux traces ? Quel doit être le champ angulaire α des appareils de détection (fig. 4) visant à la verticale, pour que la « couverture » de la Terre soit totale au bout d'un cycle de 26 jours ?

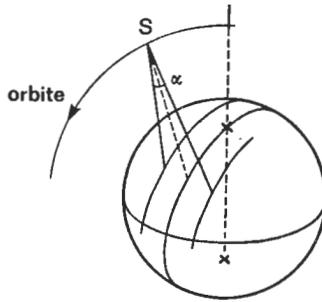


Fig. 4

C.2.3. L'appareil utilisé a une distance focale de 1 m et l'émulsion du film utilisé une finesse de grain de $2 \mu\text{m}$. Calculer la dimension minimum des détails observables à la surface de la Terre, si on suppose qu'on n'est pas limité par la diffraction.

C.2.4. On dispose en fait de deux appareils ayant chacun un champ de $4,13^\circ$, et visant à $+1,8^\circ$ et $-1,8^\circ$ de la verticale du satellite. Quelle est la largeur de la bande couverte par une photographie, et celle de la zone de recouvrement ?

C.3. Les orbites héliosynchrones.

Dans cette question, on utilise le fait que la Terre n'est pas vraiment sphérique, mais a plutôt la forme d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe des pôles.

C.3.1. Montrer que l'attraction gravitationnelle exercée sur S comporte alors une composante perpendiculaire au rayon vecteur \vec{OS} , et préciser sa direction.

C.3.2. Cette composante a un moment non nul par rapport à O, centre de la Terre. Montrer qualitativement que le plan de la trajectoire ne sera alors plus fixe.

C.3.3. Si on appelle ϑ l'angle entre $\vec{\sigma}_0$ et l'axe des pôles, on obtient, moyennant quelques approximations :

$$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma}_0 \quad \text{avec} \quad \vec{\Omega} = -\frac{3}{2} \mu \cdot \left(\frac{R_T}{r_0} \right)^2 \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{2\pi}{T_0} \mathbf{k},$$

où μ est un coefficient sans dimension caractéristique de l'aplatissement de la Terre : $\mu = 1,082\,63 \cdot 10^{-3}$, r_0 et T_0 sont le rayon et la période du mouvement circulaire du satellite lorsqu'on ne tient pas compte

de l'aplatissement de la Terre, et \mathbf{k} le vecteur unitaire suivant l'axe des pôles, du pôle Sud vers le pôle Nord. Montrer que :

— $\vec{\sigma}_0$ a un module constant,

— la projection de $\vec{\sigma}_0$ sur $\vec{\Omega}$ est constante, et que donc θ est constant.

C.3.4. Comparer cette équation à celle obtenue pour le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme.

En déduire l'évolution de $\vec{\sigma}_0$ au cours du temps.

C.3.5. En déduire que l'effet de l'aplatissement de la Terre est une rotation du plan de la trajectoire autour de l'axe de la Terre.

On veut que ce mouvement compense la révolution de la Terre autour du Soleil. Quelle doit être sa période ?

Une telle trajectoire est dite héliosynchrone. Ce phénomène a été utilisé pour « Spot ». Quel en est l'intérêt, étant donné que la mission de ce satellite est de photographier la Terre ?

Quelle valeur doit-on alors donner à θ pour obtenir ce résultat ? La trajectoire obtenue peut-elle être considérée comme ayant les propriétés d'une trajectoire circumpolaire ?

SOLUTION

A. MOUVEMENT GÉNÉRAL DES SATELLITES

A.1. *Le mouvement circulaire.*

A.1.1. Si le mouvement est circulaire, la relation fondamentale de la dynamique, appliquée, dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen, au centre d'inertie du satellite s'écrit, suivant la direction normale :

$$-\frac{m_S v^2}{r_0} = -\frac{G m_S M_T}{r_0^2}, \quad \text{soit} \quad v = \left(\frac{G M_T}{r_0} \right)^{1/2},$$

avec v constant.

A.1.2. La vitesse étant constante, $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v}$ et donc

$$T_0 = 2\pi \left(\frac{r_0^3}{G M_T} \right)^{1/2}.$$

A.1.3. L'énergie totale est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de gravitation : $-\frac{G M_T m_S}{r_0}$ si on prend l'origine des énergies potentielles nulle à l'infini.

$$E = E_C + E_P = \frac{1}{2} m_S v_0^2 - \frac{G M_T m_S}{r_0} = -\frac{G M_T m_S}{2 r_0}$$

E est négatif : Le satellite est astreint à rester à distance finie de la Terre tant qu'aucune énergie supplémentaire ne lui est communiquée.

On a : $E = -E_c$, résultat qui restera vrai pour la valeur moyenne au cours d'une période de l'énergie cinétique, dans le cas d'un mouvement elliptique.

A.1.4. La trajectoire du satellite est centrée au centre de la terre, et se fait donc dans le plan d'un des grands cercles. Le plan équatorial est le seul de ces plans qui soit fixe à la fois par rapport à la terre et par rapport au référentiel géocentrique. Donc le satellite doit avoir sa trajectoire dans ce plan et une période de révolution égale à celle de rotation de la terre autour de son axe.

$$T_0 = 86\,164 \text{ s} \quad r_0^3 = G M_T \frac{T_0^2}{4 \pi^2} = g_0 R_T^2 \frac{T_0^2}{4 \pi^2},$$

donc $h = r_0 - R_T = 35,9 \cdot 10^3 \text{ km}$.

Les satellites de télécommunication qui servent de relais hertziens sont de ce type. On peut encore citer des satellites d'observation comme « météosat » mais leur éloignement ne permet que l'étude de phénomènes à grande échelle.

A.2. Mouvement elliptique des satellites.

A.2.1.

$$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \frac{d \mathbf{OS}}{dt} \wedge \frac{d \mathbf{OS}}{dt} + \mathbf{OS} \wedge \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$$

puisque $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}$ est colinéaire à \mathbf{OS} . On en déduit que $\vec{\sigma}_0$ est un

vecteur constant. \mathbf{OS} passe par un point fixe et est perpendiculaire au vecteur $\vec{\sigma}_0$. S est donc dans le plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}_0$ passant par O, et qui contient donc O, S et la vitesse initiale \mathbf{v}_0 .

A.2.2.

$$a) E = -\frac{G M_T m_S}{2a} = \frac{1}{2} m_S v^2 - \frac{G M_T m_S}{r}, \text{ avec cette}$$

fois-ci v et r constants au cours du mouvement.

L'apogée correspond à $r_A = a + c = a(1 + e)$

Le périégée correspond à $r_P = a - c = a(1 - e)$.

Si on reporte ces valeurs dans l'expression précédente, il vient : $v_A = \left(\frac{G M_T}{a} \frac{1 - e}{1 + e} \right)^{1/2}$ et $v_P = \left(\frac{G M_T}{a} \frac{1 + e}{1 - e} \right)^{1/2}$

On peut remarquer qu'en changeant e en $-e$ on passe des formules valables à l'apogée à celles valables au périégée.

b) En ces deux points, la tangente à la trajectoire, et donc la vitesse, est perpendiculaire au rayon vecteur.

Donc, \mathbf{v}_A et \mathbf{v}_P sont orthogonaux à l'axe OO' . La vitesse au périégée est la plus grande, et ce d'autant plus que l'excentricité est proche de 1 (ellipse « très aplatie »). Ceci explique en particulier pourquoi la comète de Halley, qui n'est visible de la terre que lorsqu'elle est proche du soleil, donc au voisinage de son périhélie, ne l'est que pendant une fraction très courte de sa période de 76 ans.

$\vec{\sigma}_0$ étant constant, on peut calculer son module en n'importe quel point de la trajectoire. A l'apogée ou au périégée, les deux vecteurs \mathbf{OS} et $m_S \mathbf{v}$ étant orthogonaux, le produit vectoriel se calcule facilement :

$$|\vec{\sigma}_0| = \sigma_0 = m_S v_A a (1 + e) = m_S [G M_T a (1 - e^2)]^{1/2}.$$

c) Le largage s'est produit en A ou en P puisque \mathbf{v} et \mathbf{OS} sont orthogonaux. $v^2 = 2 G M_T \left[\frac{1}{OS} - \frac{1}{2a} \right]$; il s'est produit en A si $a < OS$, soit $v < \left(\frac{G M_T}{OS} \right)^{1/2}$, et en P si $v > \left(\frac{G M_T}{OS} \right)^{1/2}$.

Si $v = \left(\frac{G M_T}{OS} \right)^{1/2}$, le mouvement est circulaire.

B. LE SATELLITE EN VOL

B.1. *Mouvements à l'intérieur du satellite.*

Pour traiter cette question, il faut supposer que le satellite a la symétrie sphérique, de sorte que le centre d'inertie soit confondu avec le centre de gravité où est appliquée la résultante

des forces de gravitation $-\frac{G M_T m_S}{r^2} \mathbf{u}$.

a) Dans le référentiel galiléen géocentrique, le point matériel m est soumis à la force gravitationnelle de module $\frac{G M_T m}{r^2}$,

ce qui lui communique une accélération de module $\frac{G M_T}{r^2}$.

Le centre d'inertie du satellite et le point matériel ont donc des équations du mouvement identiques, avec les mêmes conditions initiales. Leurs mouvements ultérieurs sont donc identiques.

Dans le référentiel géocentrique, M a donc un mouvement circulaire uniforme de rayon r_0 autour de O. Pour un observateur lié au satellite, M semble rester immobile au centre d'inertie : c'est le phénomène d' « impesanteur ».

b) Le mouvement de M sera elliptique, avec pour conditions initiales $r = r_0 + d$ et $v = \left(\frac{GM_T}{r_0} \right)^{1/2}$, dans le référentiel géocentrique.

La vitesse étant perpendiculaire à OM, S' est soit l'apogée, soit le périégée. On utilisera (cf remarque du A.2.2. a) les formules relatives à une position initiale à l'apogée, en interprétant une éventuelle valeur négative de e comme correspondant en fait à une position initiale au périégée.

$$T'_0 = T_0 \left(\frac{a'_0}{r_0} \right)^{3/2} \quad \text{si } a'_0 \text{ est le demi-grand axe de l'el-}$$

lipse décrite par M : $(1 + e) a'_0 = r_0 \left(1 + \frac{d}{r_0} \right)$;

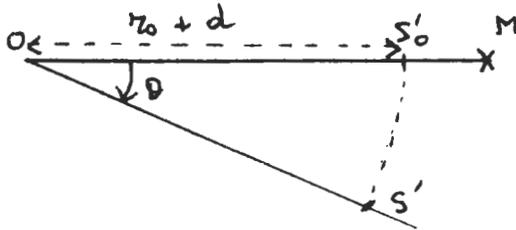
$$v = \left(\frac{GM_T}{r_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{GM_T}{a'_0} \frac{1 - e}{1 + e} \right)^{1/2} ; \text{ donc : } r_0 = a'_0 \frac{1 + e}{1 - e}.$$

$$\text{D'où : } e = -\frac{d}{r_0} \quad \begin{array}{l} d < 0 \text{ apogée} \\ d > 0 \text{ périégée} \end{array}$$

$$a'_0 \approx \left(1 + \frac{2d}{r_0} \right) r_0 \text{ en se limitant aux termes d'ordre 1 en}$$

$\frac{d}{r_0}$ puisque d est toujours petit devant r_0 . De même,

$$T'_0 \approx T_0 \left(1 + \frac{3d}{r_0} \right).$$



$$* \text{ A } t = \frac{T'_0}{2}, \text{ OM} = a'_0 (1 - e) = \left(1 + \frac{3d}{r_0} \right) r_0, \text{ S a une}$$

période T_0 différente de T'_0 . L'angle θ entre les deux rayons vecteurs OM et OS' vaut :

$$\theta = \pi - \frac{2\pi}{T_0} \frac{T'_0}{2} = -\frac{3\pi d}{r_0}.$$

La distance S'M vaut donc :

$$[(S'S'_0)^2 + (S'_0M)^2]^{1/2} = r_0 \left[\frac{9\pi^2 d^2}{r_0^2} + \frac{4d^2}{r_0^2} \right]^{1/2}$$

$$\underline{S'M = d\sqrt{4 + 9\pi^2} \approx 9,6 d.}$$

* A $t = T'_0$, $OM = r_0 + d$ puisque le satellite a effectué une révolution. S' est en « avance » d'un angle $\theta' = -\frac{6\pi d}{r_0}$ et donc $\underline{S'M = 6\pi d \approx 19 d.}$

Il y a donc, dans un référentiel lié au satellite, un mouvement apparent de M : l'état d'impesanteur n'est strictement réalisé qu'au centre d'inertie, et ce, si le satellite est à symétrie sphérique.

C'est pourquoi les spécialistes préfèrent utiliser le terme de « microgravité » pour les expériences réalisées à bord de satellites du type « Spacelab ».

B.2. Arrimage de deux satellites.

S₁ aura un mouvement elliptique, de conditions initiales $r = r_0$, $v = v_0 + q$, position initiale à l'apogée ou au périogée. On utilisera ici encore une valeur algébrique de l'excentricité : $(1 + e)a'_0 = r_0$,

$$v_0 \left(1 + \frac{q}{v_0}\right) = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}} \left(1 + \frac{q}{v_0}\right) = \sqrt{\frac{GM_T(1 - e)}{a'_0(1 + e)}}.$$

$$\text{Donc : } 1 + \frac{q}{v_0} = (1 - e)^{1/2}.$$

On ne garde que les termes du premier ordre en $\frac{q}{v_0}$

$$e \approx -\frac{2q}{v_0}, \text{ soit } a'_0 \approx r_0 \left(1 + \frac{2q}{v_0}\right).$$

Le point commun aux deux trajectoires est la position initiale de S₁. Pour que S₁ rattrape S₂, il faut que leurs positions coïncident au but d'un nombre entier de périodes de S₁. L'intervalle de temps le plus court correspondra à une période de S₁, soit :

$$T'_0 = T_0 \left(1 + \frac{3q}{r_0}\right); \text{ donc il faut que : } 2\pi \cdot \frac{3q}{v_0} = -\frac{l}{r_0},$$

$$q = -\frac{v_0 l}{6\pi r_0} = -0,39 \text{ m/s.}$$

Il faut « ralentir » S_1 pour qu'il rattrape S_2 .

Bien évidemment, on ne procède pas ainsi en réalité. Le rapprochement des satellites se fait en communiquant à l'un d'entre eux une accélération (propulsion par réaction grâce à un moteur auxiliaire) de direction convenable. L'intérêt du calcul est dans l'aspect paradoxal du résultat.

B.3. Action du freinage de l'atmosphère.

B.3.1. La force de frottement sera de sens opposé à la vitesse relative du satellite par rapport à l'atmosphère. Si la vitesse du satellite est grande devant cette dernière dans le référentiel géocentrique, on confondra la vitesse relative et la vitesse absolue. La force de frottement s'annule avec cette vitesse :

$$\mathbf{f} = -k(v, r)\mathbf{v} \text{ avec } k(v, r) \rightarrow 0 \text{ quand } v \rightarrow 0.$$

Si v n'est pas trop grand, le développement à l'ordre 1 s'écrit : $\mathbf{f} \approx -k(r)\mathbf{v}$. L'approximation est contestable, et on préfère souvent n'utiliser que le terme d'ordre 2. Cela n'a d'ailleurs pas d'importance pour les résultats demandés ensuite.

L'atmosphère est de moins en moins dense quand on s'élève en altitude, donc il est logique que $k(r)$ diminue quand r augmente.

B.3.2. L'action de la force sera d'autant plus importante que v sera plus grand et r plus petit, donc au voisinage du périhélie.

L'ellipse est ainsi modifiée par une diminution de l'énergie totale près du périhélie. Le périhélie reste ainsi à peu près fixe, tandis que le grand axe diminue. Donc l'ellipse tend à devenir circulaire, de rayon égal à la distance OP de O au périhélie.

La force de frottement s'exerce alors sur toute la longueur de la trajectoire, cas traité dans la question suivante.

Ce sont des arguments de ce type que l'on peut évoquer pour expliquer que les orbites des planètes sont quasi circulaires.

B.3.3. $\Delta E = -k v^2 T$ pour une période. $\Delta E_c = -\Delta E = +k v^2 T$
avec $E_c = \frac{1}{2} m_s v^2$. L'expression de E_c pour une trajectoire cir-

culaire : $E_c = \frac{G M_T m_S}{2 r}$, permet d'écrire : $\frac{\Delta E_c}{E_c} = -\frac{\Delta r}{r}$.

Donc :

$$\boxed{\frac{\Delta E_c}{E_c} = 2 \frac{k(r)}{m_S} T = 2 \frac{T}{\tau} = -\frac{\Delta r}{r}}$$

L'augmentation d'énergie cinétique s'explique aisément par le phénomène de « chute » du satellite sur la Terre.

C. LES UTILISATIONS DU SATELLITE

C.1.1. A l'instant t , S est au point défini par $\overline{HS} = x$.

A l'instant $t + T$, S est au point défini par $\overline{HS} = x + v_R T$.
Le premier signal est donc reçu à $t' = t + [(x^2 + h^2)/c^2]^{1/2}$, le suivant à l'instant $t' + T' = t + T + \left(\frac{(x + v_R t)^2 + h^2}{c^2} \right)^{1/2}$.

Donc $T' = T + \frac{1}{c} [[h^2 + (x + v_R T)^2]^{1/2} - (h^2 + x^2)^{1/2}]$. Le

développement limité au premier ordre en $\frac{v_R T}{h}$ permet d'écrire :

$$\boxed{\frac{T' - T}{T} = \frac{v_R}{c} \frac{x}{(x^2 + h^2)^{1/2}}}$$

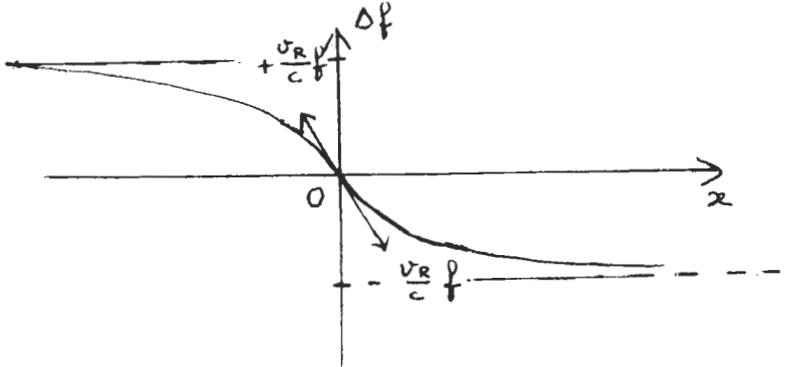
(On suppose la distance parcourue pendant une période du signal petite devant l'altitude du satellite).

Au premier ordre en $\frac{v_R}{c}$, $\frac{f' - f}{f} = -\frac{T' - T}{T}$. Les termes en $\frac{v_R^2}{c^2}$ n'auraient aucun sens puisque le traitement classique de l'effet Doppler est une approximation de cet ordre.

$$\Delta f = -\frac{v_R}{c} f \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

La tangente à l'origine a pour pente $-\frac{v}{c} \frac{1}{h} f$.

Les asymptotes sont horizontales, d'ordonnées $+\frac{v_R}{c} f$ et $-\frac{v_R}{c} f$.

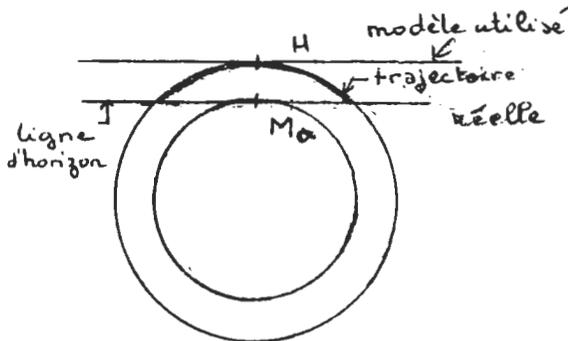


Il est donc possible de déduire de la courbe l'altitude R , comme rapport de l'ordonnée de l'asymptote sur la pente de la tangente à l'origine.

La valeur de l'ordonnée de l'asymptote fournit la valeur de v_R/c à partir de celle de f .

C.1.3.

a) La différence de forme provient de ce que le satellite décrit un cercle, et donc que l'approximation utilisée n'est valable qu'au voisinage de $x = 0$. La trajectoire réelle reste beaucoup plus proche de M_0 . En particulier, S disparaît sous la ligne d'horizon de M_0 en restant à distance finie de ce point.



Le calcul, plus compliqué, tenant compte de la trajectoire réelle, donne bien l'allure du signal observé.

b) La position de J sur le graphe donne la valeur f de la fréquence de la source embarquée : $f = f_0 + 1350$ Hz.

La pente de la tangente à l'origine a pour valeur :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta t} \frac{1}{v_R} \text{ en Hz/m avec } \frac{\Delta f}{\Delta t} \approx 13 \text{ s}^{-2}.$$

La valeur asymptotique peut être déterminée de façon approchée par extrapolation : $2 \frac{v_R}{c} f \approx 1100$ Hz.

Donc, la courbe fournit les valeurs approchées suivantes:

$$v_R \approx 8,3 \text{ km/s} \quad \text{et} \quad h \approx 350 \text{ km.}$$

Un satellite circulaire d'altitude 350 km a une vitesse de 7,7 km/s, et un point de l'équateur entraîné par le mouvement de rotation de la terre, une vitesse de 0,46 km/s.

Ces résultats sont donc cohérents. Une telle altitude est utilisée pour les satellites habités.

C.2. Les orbites circumpolaires.

C.2.1. L'utilisation des résultats obtenus en A.1.2. donne :

$$h = -R_T + (g_0 R_T^2 \frac{T_0^2}{4\pi^2})^{1/3} = 823 \text{ km.}$$

C'est donc un satellite sur orbite basse (altitude réelle 832 km). La plupart des satellites d'observation sont de ce type (satellites espions en particulier).

C.2.2.

a) Entre deux passages successifs, il y a eu une rotation de la terre de $2\pi \times \frac{26}{369}$ rad. Donc la distance entre deux traces est, à l'équateur, de :

$$2\pi \times \frac{26}{369} R_T = 2,83 \cdot 10^3 \text{ km.}$$

b) Il y a invariance du réseau de traces dans une rotation de la terre de $2\pi \times \frac{369}{26} n$ radians avec n entier ; 26 et

369 étant premiers entre eux, il y a 369 traces équidistantes sur la terre, de distance $l = \frac{2\pi}{369} \times R_T = 109$ km. Pour $n = 71$, la rotation est précisément de $2\pi \left(5 + \frac{1}{369}\right)$. Le survol de deux traces voisines est donc séparé par un temps de $\left(5 + \frac{1}{369}\right)$ jours.

On note ainsi que le choix de 369 révolutions en 26 jours n'est pas arbitraire. Sans demander une étude arithmétique complète, la question posée nécessitait un peu de recherche et d'intuition.

Pour que la « couverture » de la Terre soit complète, il faut que chaque passage permette d'observer une largeur équatoriale égale à la distance équatoriale entre deux traces voisines, soit 109 km, et donc que l'angle d'ouverture soit au minimum de :

$$\alpha = \frac{l}{h} = 7,6 \text{ degrés.}$$

C.2.3. L'appareil visant pratiquement à l'infini, le film est dans le plan focal image de l'appareil :

$$l = \frac{h}{f} \times \text{grain} = 1,65 \text{ m.}$$

Cette grande résolution n'est en fait atteinte que par photographie. Le problème de la transmission de la photo au sol se pose alors. C'est pourquoi on préfère utiliser des appareils de type radar qui envoient les images sous forme numérisée aux stations au sol. La résolution obtenue peut atteindre 10 m au sol.

C.2.4.

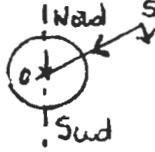
La bande de couverture est alors de $2 \times \left(1,8 + \frac{4,13}{2}\right) = 7,73$ degrés, ce qui correspond à une bande au sol de largeur 111 km. La couverture est donc complète. On a de plus une bande de recouvrement de $2 \times \left[\frac{4,13}{2} - 1,8\right] = 0,53$ degrés, ce qui permet d'assurer la continuité entre les photos de deux zones adjacentes. La bande de recouvrement a une largeur au sol de 7,6 km.

En fait, il y a en plus une possibilité de changer l'orientation moyenne des appareils d'observation pour étudier une bande

voisine. On peut donc réobserver ainsi une même zone sept fois au cours de la période de 26 jours, sous une inclinaison différente : évolution à court terme, ou images stéréoscopiques.

C.3. Les orbites héliosynchrones.

C.3.1. La symétrie de révolution autour de l'axe des pôles étant conservée, la force est dans le plan méridien.



C.3.2. $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \mathbf{OS} \wedge \mathbf{f}$ n'est alors plus nul. La direction du plan de la trajectoire, défini par $(\mathbf{OS}, \mathbf{v})$ (trajectoire approchée) perpendiculaire à $\vec{\sigma}_0$, n'est donc plus fixe.

C.3.3. $\vec{\sigma}_0 \cdot \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = 0$. Donc $\vec{\sigma}_0$ a un module constant.

$\frac{d}{dt} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_0) = \vec{\Omega} \cdot \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = 0$. $\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_0$ est donc constant :

l'angle entre les deux vecteurs $\vec{\Omega}$ et $\vec{\sigma}_0$ de normes constantes est constant.

C.3.4. $\vec{\sigma}_0$ tourne autour de la direction de $\vec{\Omega}$ en décrivant un cône. La période de ce mouvement, (analogie avec $\omega_0 = -\frac{qB}{m}$) vaut :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{3}{2} \mu \left(\frac{R_T}{r_0} \right)^2 \cos \vartheta \cdot \frac{2\pi}{T_0}$$

Pour obtenir $T = 365,25 \text{ j}$: $\cos \vartheta = -0,151$, soit $\vartheta = 98,7$ degrés. La trajectoire est donc alors à peu près circumpolaire.

L'intérêt de ces trajectoires héliosynchrones est que l'observation d'un lieu se fait toujours à la même heure locale, avec la même position par rapport au soleil. La comparaison de photographies successives en est ainsi grandement facilitée.

M.-Cl. HERPIN,
et les membres du Jury.

C.A.P.E.S.

SESSION DE 1985

COMPOSITION DE PHYSIQUE AVEC APPLICATIONS

(Durée : 5 heures)

Le problème, qui porte sur différents aspects de la production, des propriétés et de la focalisation des faisceaux d'ions, est divisé en quatre parties totalement indépendantes. Les différentes questions se situent dans un éventail ouvert de difficultés ; il est déconseillé de négliger celles qui paraissent faciles.

Les candidats doivent exposer leurs connaissances avec concision, dans le cadre des questions posées, en veillant à équilibrer leurs développements. Il sera tenu grand compte des qualités d'exposition et de soin.

DONNÉES NUMÉRIQUES :

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m.

Constante de PLANCK : $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J. s.

Constante de STÉFAN-BOLTZMANN : $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W. m⁻². K⁻⁴.

Charge élémentaire : $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C.

Masse de l'électron : $m = 0,911 \cdot 10^{-30}$ kg.

Masse d'un atome d'arsenic : $M = 12,45 \cdot 10^{-26}$ kg.

Constante de BOLTZMANN : $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J. K⁻¹.

I. ETUDE DE L'EMISSION D'ELECTRONS PAR UN METAL CHAUFFE AU MOYEN D'UNE DIODE A VIDE

I.1. Le montage utilisé est représenté sur la fig. 1. Les électrons émis par le filament de tungstène chauffé F sont collectés par la plaque P et donnent naissance à un courant d'intensité I.

Lorsque l'on fait croître la tension $U = V_A - V_B$ délivrée par le générateur G, on observe qu'au-delà d'une certaine valeur de U, I reste quasiment constante et égale à I_s , intensité du courant de saturation.

1.1. a) Rappeler la définition de W_s , travail d'extraction (ou de sortie) d'un métal. Quel est l'ordre de grandeur de W_s ?

Quelle relation existe-t-il entre le travail d'extraction W_s et le potentiel d'extraction Φ d'un métal ?

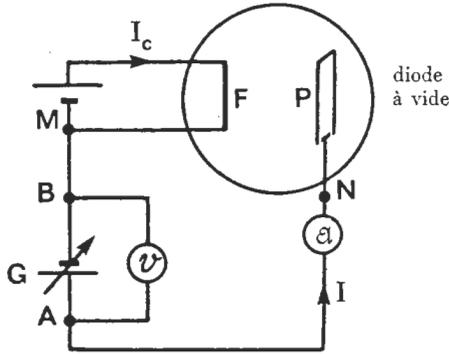


Fig. 1

b) Une augmentation de la température du filament favorise l'émission électronique ; justifier qualitativement et sommairement ce résultat.

c) Expliquer brièvement l'existence d'un courant de saturation.

1.2. On fixe l'intensité du courant de chauffage à $I_c = 3,0$ A et la tension délivrée par le générateur à $U = 200$ V. Les conditions de saturation sont alors réalisées et l'ampèremètre \mathcal{A} indique $I = I_s = 6,0$ mA.

Sans changer le calibre des appareils de mesure, on déplace le voltmètre v de manière à le brancher entre les points M et N ; l'ampèremètre indique alors une intensité I_s' et le voltmètre une tension U' .

Dans les conditions où ils sont utilisés (calibres 10 mA et 300 V) ampèremètre et voltmètre ont pour résistance interne, respectivement, $R_a = 17 \Omega$ et $R_v = 10^6 \Omega$.

a) Exprimer I_s' et U' en fonction de I_s , R_a , R_v et U .

b) Calculer numériquement I_s' et U' .

c) La valeur de I_s' est-elle modifiée si l'on effectue la mesure de la tension sur le calibre 1 000 V du voltmètre v ? Justifier sommairement la réponse.

d) Calculer numériquement la résistance spécifique du voltmètre exprimée en Ω/V .

1.2. 2.1. Le filament F est assimilable à un fil de tungstène, rectiligne, de longueur l et de diamètre $2r = 100 \mu\text{m}$.

On désire que la température d'équilibre du fil soit $T = 2600$ K et l'on admet que :

— la température du fil est uniforme,

— la résistivité ρ du tungstène est proportionnelle à la température thermodynamique du filament et vaut $\rho_0 = 5,65 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ à $T_0 = 300$ K,

- l'énergie échangée par conduction et l'énergie nécessaire pour extraire les électrons du filament sont négligeables en regard de l'énergie dissipée par le fil sous forme de rayonnement,
- les variations de l et r du fait de la dilatation sont négligeables .

La puissance P rayonnée par unité de surface est donnée par la relation $P = \sigma T^4$, dans laquelle σ est la constante de STÉFAN-BOLTZMANN.

- a) Exprimer la résistance R du filament en fonction de ϱ_0 , T_0 , T , l et r .
- b) Exprimer l'intensité du courant de chauffage I_c en fonction de σ , r , ϱ_0 , T_0 et T .
- c) Calculer numériquement I_c .

2.2. On atteint effectivement la température de 2 600 K lorsque la tension appliquée au filament est $U_c = 6,3$ V.

- a) En déduire la longueur l du filament.
- b) Calculer les valeurs de U_c donnant les températures de filament figurant dans le tableau ci-après ; calculer les intensités correspondantes du courant de chauffage.

T (K).....	2100	2300	2500	2600	2700
U_c (V).....				6,3	
I_c (A).....					

- c) Comment peut-on déterminer la température du filament afin de valider le tableau de correspondance ainsi établi ?

I.3. L'intensité du courant de saturation est donnée par l'équation de DUSHIMAN-RICHARDSON :

$$I_s = AST^2 \exp \left(- \frac{e\Phi}{kT} \right)$$

A est une constante dépendant de la nature de la surface émissive ; Φ est le potentiel d'extraction du métal ; S est l'aire de la surface émissive, c'est-à-dire, ici, la surface latérale du filament ; k est la constante de BOLTZMANN et e la charge élémentaire.

L'intensité du courant de saturation est $I_{s,1} = 6,0$ mA à $T_1 = 2 600$ K et $I_{s,2} = 0,35$ mA à $T_2 = 2 300$ K.

- a) Exprimer Φ en fonction de $I_{s,1}$, $I_{s,2}$, T_1 , T_2 , et des constantes e et k .
- b) Calculer numériquement Φ .
- c) Quels avantages et quels inconvénients voyez-vous à opérer avec une température de filament élevée ?

II. COLLISIONS ELECTRON-ATOME

Dans un implantateur d'ions utilisé pour doper un substrat semi-conducteur, les ions d'arsenic (dopant) sont obtenus par bombardement électronique d'un jet atomique. Cette partie du problème porte sur la production du jet atomique et les interactions électron-atome.

II.1. Une enceinte contient de la vapeur d'arsenic maintenue à une très basse pression et à une température $T = 500$ K. La communication entre cette enceinte et la chambre d'ionisation, où l'on maintient un vide poussé, s'effectue par un petit orifice à travers lequel s'échappe un jet atomique d'arsenic.

1.1. Donner l'expression littérale liant $\langle E_c \rangle$, l'énergie cinétique moyenne des atomes constituant le jet, à la température T de l'enceinte.

Quelle serait la vitesse V_1 d'un atome d'arsenic ayant cette énergie cinétique $\langle E_c \rangle$?

Calculer numériquement $\langle E_c \rangle$, exprimée en eV, et V_1 .

1.2. Les électrons, émis avec une énergie cinétique négligeable, sont soumis à une tension accélératrice U_a qui leur communique la vitesse v_1 en fin d'accélération ; ils pénètrent alors dans la chambre d'ionisation où ils interagissent avec les atomes d'arsenic.

La tension U_a est réglable entre 50 et 100 volts.

a) Ecrire la relation liant l'énergie cinétique E_c des électrons en fin d'accélération à U_a . Cette relation serait-elle encore valable pour une tension accélératrice de 10^6 V ?

b) Déterminer la valeur du rapport $\frac{E_c}{mc^2}$ pour une tension accélératrice de 100 V (m désigne la masse de l'électron). En

déduire que les électrons sont non relativistes en fin d'accélération.

II.2. Etude d'une collision élastique en mécanique non relativiste. On considère une collision élastique entre un électron et un atome

	Avant collision		Après collision	
	Électron	Atome d'arsenic	Électron	Atome d'arsenic
(RL).....	\vec{v}_1	\vec{V}_1	\vec{v}_2	\vec{V}_2
(RCM).....	\vec{v}'_1	\vec{V}'_1	\vec{v}'_2	\vec{V}'_2

d'arsenic de masses respectives m et M ; les notations retenues pour désigner la vitesse de chacune de ces particules avant et après collision, dans le référentiel du laboratoire (RL) et dans le référentiel du centre de masse (RCM) sont les suivantes :

2.1. Ecrire les équations de conservation satisfaites au cours du choc dans le référentiel du centre de masse.

2.2. a) Exprimer la vitesse \mathbf{v}_c du centre de masse dans le référentiel du laboratoire, puis \mathbf{v}'_1 et \mathbf{V}'_1 en fonction de m , M , \mathbf{v}_1 et \mathbf{V}_1 .

b) Exprimer en fonction de m , M et $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_1)$ l'énergie cinétique totale des deux particules, avant le choc, dans le référentiel du centre de masse.

c) Démontrer la relation :

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_1)^2 = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{V}_2)^2.$$

d) Montrer que les vecteurs \mathbf{v}'_1 et \mathbf{v}'_2 ont même forme.

2.3. Montrer que dans le référentiel du laboratoire la variation d'énergie cinétique de l'électron au cours du choc vérifie la relation :

$$\Delta E_c = m v_c (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1)^2.$$

2.4. Le choc électron-atome d'arsenic est tel que :

- l'atome d'arsenic a la vitesse V_1 calculée en II.1.1.;
- l'électron a la vitesse v_1 correspondant à la tension accélératrice $U_a = 100$ V ;
- les vecteurs \mathbf{v}_1 , \mathbf{V}_1 et \mathbf{v}'_2 sont coplanaires, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{V}_1) = \frac{\pi}{2}$ et $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_2) = \psi$ (fig. 2).

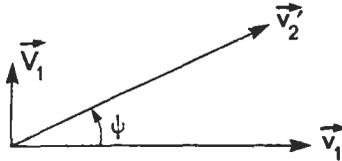


Fig. 2

a) On pose $\alpha = \frac{m}{M}$. Calculer numériquement α puis αv_1 .

En déduire que l'on a, avec une très bonne approximation :

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{V}_1 + \alpha \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 \quad \text{et} \quad v_1 = v'_2.$$

b) Exprimer ΔE_c en fonction de m , α , v_1 et ψ , dans le cadre des approximations précédentes.

c) Pour quelle valeur de ψ la perte d'énergie cinétique de l'électron est-elle maximale ?

Déterminer en fonction de α , v_1 et V_1 la perte relative d'énergie cinétique correspondante ; application numérique et conclusion .

II.3. Etude d'une collision inélastique en mécanique relativiste.

Un électron de masse m et d'énergie cinétique E_c heurte un atome d'arsenic de masse M et d'énergie cinétique E_{ca} ; E_{ca} est négligeable en regard de l'énergie de masse E_1 de l'atome. Avant la collision, électron et atome cible ont leurs vitesses orthogonales, et l'atome est dans son état fondamental.

Dans cette partie II.3., les calculs seront menés dans le cadre de la mécanique relativiste.

3.1. Déterminer l'énergie cinétique minimale $E_{c \min}$ que doit posséder l'électron pour porter l'atome cible dans un état excité correspondant à une énergie de masse de l'atome notée E_2 . On établira d'abord que cette énergie cinétique minimale correspond au cas où après la collision, les deux particules participant au choc sont au repos dans le référentiel du centre de masse. On exprimera $E_{c \min}$ en fonction de E_1 , E_2 , m et c .

3.2. Calculer numériquement l'énergie cinétique minimale que doivent posséder les électrons pour communiquer aux atomes d'arsenic une énergie d'excitation $E_2 - E_1 = 6,58$ eV.

Quelle est la longueur d'onde de la radiation émise lors de la désexcitation des atomes d'arsenic ; à quel domaine du spectre électromagnétique cette radiation appartient-elle ?

3.3. On bombarde un jet atomique d'arsenic par un faisceau d'électrons accélérés par une tension $U_a = 50$ V.

a) Quels sont les différents ions d'arsenic que l'on peut obtenir ? On donne les énergies d'ionisation successives de l'arsenic en eV : 9,81 - 18,63 - 28,34 - 50,1 et 62,6.

b) L'ionisation de certains atomes d'arsenic s'accompagne de l'émission d'électrons secondaires. Préciser qualitativement ce phénomène.

III. CHARGE D'ESPACE

On considère un faisceau homocinétique d'ions As^+ , de forme cylindrique, de rayon r_0 , d'axe Oz . Ce faisceau transporte un courant d'intensité $I = 0,100$ mA, uniformément réparti à travers une section droite quelconque du faisceau. Les ions As^+ , de charge $+e$ et de masse M sont animés d'une vitesse v_0 constante parallèle à Oz ; leur énergie cinétique est $E_{c_0} = 100$ keV.

III.1. Détermination des champs.

1.1. Calculer le rapport $\frac{v_0}{c}$. En déduire que l'on peut étudier

les propriétés électromagnétiques du faisceau à l'aide d'une analyse non relativiste.

1.2. Déterminer le champ magnétique \mathbf{B} créé à une distance x de l'axe Oz par le déplacement des ions As^+ . On distinguera les cas $0 \leq x \leq r_0$ et $x > r_0$ et on précisera la direction de \mathbf{B} à l'aide d'un schéma. Calculer numériquement B lorsque $x = r_0 = 1,00$ mm.

1.3. a) Exprimer en fonction de I , r_0 et v_0 la densité volumique de charge $\frac{dq}{d\tau}$ présente à l'intérieur du faisceau.

b) Déterminer le champ électrique \mathbf{E} créé par le faisceau d'ions en tout point de l'espace. On précisera la direction de \mathbf{E} à l'aide d'un schéma et on exprimera E en fonction ϵ_0 , v_0 , r_0 , I et x .

Calculer numériquement E lorsque $x = r_0 = 1,00$ mm.

c) Donner l'expression du potentiel électrique $V(x)$ dont dérive le champ \mathbf{E} . On choisira arbitrairement $V(0) = 0$ et on calculera numériquement $V(r_0)$ pour $r_0 = 1,00$ mm.

III.2. Effet de charge d'espace.

2.1. a) Déterminer vectoriellement la force électrostatique \mathbf{f}_e et la force magnétique \mathbf{f}_m s'exerçant sur un ion du faisceau situé à la distance x de l'axe Oz .

b) Exprimer le rapport $\frac{f_m}{f_e}$ en fonction de $\frac{v_0}{c}$. Montrer

que l'on peut négliger l'action du champ magnétique en regard de celle du champ électrostatique.

c) En déduire que le faisceau diverge sous l'effet de son propre champ (effet de charge d'espace).

2.2. Sous l'action de la charge d'espace, le faisceau d'ions As^+ se déforme ; sa section circulaire, de rayon r_0 dans le plan de cote $z = 0$, a pour rayon r dans le plan de cote z . On suppose que l'effet de la charge d'espace est suffisamment faible pour que la composante de la vitesse des ions suivant l'axe Oz reste égale à v_0 .

a) Montrer que l'enveloppe du faisceau a pour équation :

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{A}{r}$$

dans laquelle A est une constante que l'on exprimera en fonction de ϵ_0 , c , I , v_0 et M .

b) En déduire l'expression de $u = \frac{dr}{dz}$ en fonction de A , r et r_0 , dans le cas où $u(z = 0) = u_0 = 0$.

c) Déterminer la dilatation relative $\frac{r - r_0}{r_0}$ du faisceau à

la distance z de l'origine, en supposant que $\frac{r-r_0}{r_0} \ll 1$. On exprimera le résultat en fonction de A , r_0 et z .

d) *Applications numériques* : On donne $r_0 = 1,00$ mm : Calculer A ;

Calculer $\frac{r-r_0}{r_0}$, r et $\frac{dr}{dz}$ dans le plan de cote $z = 50$ mm.

e) Montrer que si on rend le faisceau faiblement convergent dans le plan de cote $z = 0$ ($|u_0| \ll 1$), r passe par une valeur minimale r_{min} que l'on exprimera en fonction de r_0 , u_0 et A .

Calculer numériquement r_{min} pour $u_0 = 7,5 \cdot 10^{-3}$.

Par quel facteur r_{min} est-il multiplié si :

- on double l'intensité du courant transporté ?
- on double $E_{c,0}$?
- on double r_0 ?

IV. FOCALISATION FORTE

On néglige désormais l'effet de la charge d'espace, en particulier le champ électrostatique propre du faisceau.

Des ions As^+ accélérés par une tension $U^* = 100$ kV forment un faisceau cylindrique homocinétique, d'axe Oz et de rayon r_0 . Ce faisceau transporte un courant d'intensité I , uniformément réparti à travers l'une quelconque de ses sections droites. Le faisceau pénètre dans une région de l'espace (fig. 3) où règne, entre les plans de cotes $z = 0$ et $z = l$, un champ électrostatique défini par $\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j}$, avec $E_x = -ax$ et $E_y = ay$.

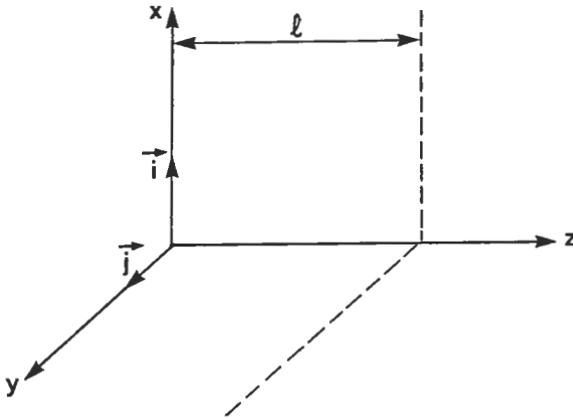


Fig. 3

a est une constante ; $l = 0,100$ m.

IV.1.

1.1. Ecrire l'équation des lignes de champ ; préciser la nature de leur forme géométrique ; représenter sommairement quelques lignes de champ, dans un plan de cote $0 < z < l$.

1.2. Déterminer l'équation des surfaces équipotentielles en posant que le potentiel est nul lorsque $x = y = 0$.

Préciser la nature de la forme géométrique des surfaces équipotentielles et représenter sommairement quelques lignes équipotentielles dans un plan de cote z ($0 < z < l$).

IV.2. Une lentille électrostatique quadrupolaire est constituée d'un système d'électrodes cylindriques dont la section par un plan perpendiculaire à l'axe Oz est formée d'hyperboles équilatères ayant pour asymptotes les droites d'équation $y = \pm x$ (fig. 4).

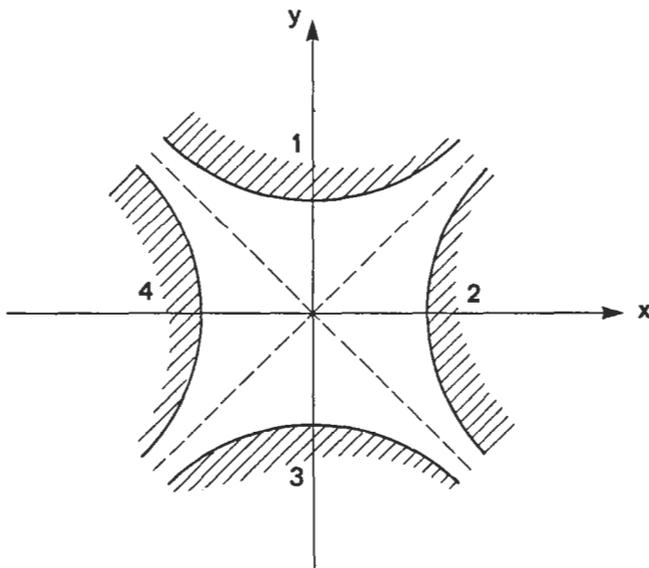


Fig. 4

Les électrodes 2 et 4 sont portées au potentiel $U_0 = 5$ kV et les électrodes 1 et 3 au potentiel $-U_0$. Les sommets des branches d'hyperbole sont à la distance $h = 25$ mm de l'axe.

2.1. Déterminer l'équation des hyperboles 1 et 3 d'une part, 2 et 4 d'autre part.

2.2. Montrer que la lentille permet de créer le champ électrostatique défini précédemment.

Exprimer a en fonction de U_0 et h .

Calculer numériquement a .

IV.3. Un ion As^+ pénètre dans la région où règne le champ électrostatique en un point M_0 de coordonnées $(x_0, y_0, 0)$; sa vitesse est alors parallèle à l'axe Oz . On désigne par x, y, z les coordonnées de l'ion à la date t , et on se borne, dans cette question à étudier le mouvement dans le champ, c'est-à-dire que $0 < z < l$.

3.1. Ecrire les équations différentielles régissant le mouvement de l'ion.

3.2. Exprimer x et y en fonction de x_0, y_0, z, h, U_c et U^* .

3.3. Déterminer, en fonction de h, U_0 et U^* la longueur d'onde λ_0 du mouvement périodique traduit par $x = f(z)$.

Calculer numériquement λ_0 .

IV.4. On étudie maintenant le mouvement de l'ion après sa sortie du champ, c'est-à-dire que $z > l$. On pose $\alpha = \frac{2\pi l}{\lambda_0}$.

4.1. Exprimer les coordonnées x et y de l'ion en fonction de z, x_0, y_0, l et α .

4.2. On désigne par M_1 le point où l'ion traverse le plan yOz .

a) Déterminer les coordonnées y_1 et z_1 de M_1 . On exprimera y_1 en fonction de y_0 et de α , et z_1 en fonction de l et de α .

b) En déduire que, dans le plan xOz , la lentille électrostatique quadrupolaire dévie la trajectoire de l'ion comme le ferait, pour un rayon lumineux, un système optique dont on précisera :

- la position du foyer image F' et celle du point principal image H' ,
- la distance focale image f' , exprimée en fonction de l et de α .

c) Calculer numériquement f' .

4.3. Montrer que, dans le plan \mathcal{S}' perpendiculaire en F' à l'axe Oz , la trace du faisceau d'ions est un segment de droite dont on précisera l'orientation et la longueur L . Exprimer L en fonction de r_0 et de α ; calculer numériquement L sachant que $r_0 = 1,00$ mm.

Calculer la densité linéique de courant le long de ce segment de droite.

IV.5. On considère maintenant une lentille magnétique quadrupolaire dans laquelle la topographie du champ magnétique est analogue à celle du champ électrostatique de la lentille électrostatique quadrupolaire.

5.1. Sur la fig. 5, représenter les polarités des différentes pièces polaires, ainsi que le sens du courant circulant dans les enroulements.

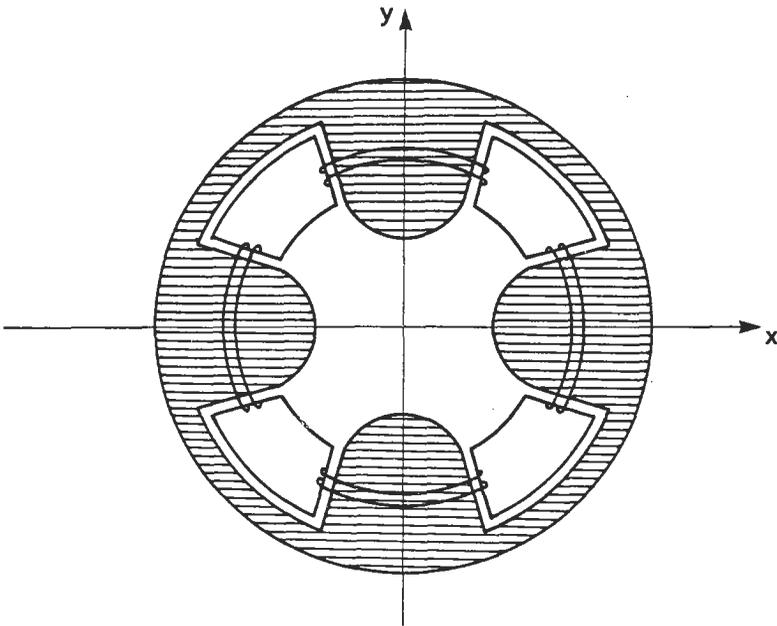


Fig. 5

5.2. Comparer qualitativement l'effet d'une lentille quadrupolaire magnétique à celui d'une lentille constituée d'une bobine parcourue par un courant, dont l'axe est confondu avec la direction du faisceau particulaire.

Justifier l'expression de « focalisation forte ».

SOLUTION

I. ETUDE DE L'EMISSION D'ELECTRONS PAR UN METAL CHAUFFE AU MOYEN D'UNE DIODE A VIDE

I.1.

1.1. a) Le travail d'extraction est l'énergie à fournir à un électron situé au niveau de FERMÍ pour l'obtenir, à l'infini, sans énergie cinétique.

W_s est de l'ordre de quelques électrons-volts.

Métal	Na	K	Cu	Ag
W_s (eV)	2,2	2,1	4,1	4,7

Entre potentiel d'extraction Φ et travail d'extraction, on a la relation :

$$W_s = e \Phi.$$

b) Au zéro absolu, tous les niveaux d'énergie inférieure à celle du niveau de FERMÍ sont occupés et tous ceux d'énergie supérieure sont vides.

Si la température augmente, des niveaux d'énergie inférieure à celle du niveau de FERMÍ se vident au profit de niveaux d'énergie supérieure.

Tous les électrons qui acquièrent une énergie cinétique supérieure à la profondeur W du puits d'énergie potentielle créé par les ions positifs du métal les contenant, pourront quitter le métal. Plus, la température est élevée, plus le nombre d'électrons capables de sortir du métal est élevé.

A température ordinaire, la distribution électronique n'est pas sensiblement modifiée par rapport à celle réalisée au zéro absolu.

Pour mettre en évidence l'effet thermoélectronique, il faut chauffer le métal à quelques milliers de degrés Celsius.

c) Tant que la différence de potentiel entre anode et cathode n'est pas assez grande, la charge d'espace électronique crée une barrière de potentiel qui s'oppose au passage des électrons sur l'anode. Quand la d.d.p. devient suffisante, tous les

électrons émis par le métal peuvent atteindre l'anode ; le courant qui traverse la cellule est égal au courant de saturation.

Voir en annexe I le calcul du courant de saturation (formule de DUSHMAN-RICHARDSON) et en annexe II la théorie de la diode plane donnant la caractéristique courant-tension de la cellule (formule de CHILD-LANGMUIR).

1.2. a) Le courant I_s garde une intensité constante. En supposant la résistance interne du générateur nulle et sa f.é.m. E , on a $U = E$.

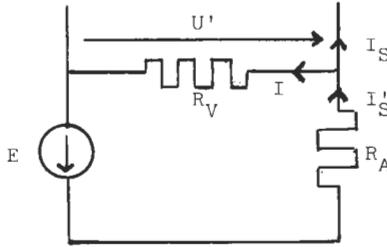


Fig. 1

D'après la fig. 1 :

$$U' = R_v I = E - R_a I'_s$$

$$I'_s = I + I_s.$$

On en déduit :

$$U' = \frac{R_v}{R_a + R_v} (U - R_a I_s)$$

et :

$$I'_s = \frac{U + R_v I_s}{R_a + R_v}.$$

b) $U' = 199,9 \text{ V}$
 $I'_v = 6,20 \text{ mA}.$

c) En passant sur le calibre 1 000 V, on passe d'une résistance interne $R_v = 10^6 \Omega$ à une résistance interne :

$$R'_v = \frac{R_v}{300} \times 1\,000 = 3,33 \cdot 10^6 \Omega.$$

D'où : $I'_s = 6,06 \text{ mA}.$

d) $R_s = \frac{R_v}{300} = \frac{10^6}{300}$ soit $R_s = 3\,333 \Omega/V.$

$$2.1. a) R = \varrho \frac{l}{s} \text{ avec } \varrho = \varrho_0 \frac{T}{T_0} \text{ et } s = \pi r^2$$

$$R = \frac{\varrho_0}{\pi r^2} \cdot \frac{T}{T_0} \cdot l.$$

$$b) P = R I_c^2$$

et :

$$P = 2 \pi r l \cdot \sigma T^4$$

d'où :

$$I_c = \left(\frac{2 \pi^2 r^3 \sigma T_0 T^3}{\varrho_0} \right)^{1/2}.$$

$$c) I_c = 3,61 \text{ A.}$$

$$2.2. a) \frac{U_c^2}{R} = 2 \pi r l \sigma T^4 = \frac{U_c^2}{P_0 \frac{T}{T_0} \cdot \frac{l}{s}}$$

$$l = \left(\frac{r T_0 U_c^2}{2 \sigma T^5 \varrho_0} \right)^{1/2} = 28,0 \text{ mm.}$$

b) I_c est proportionnelle à $T^{3/2}$, U_c est proportionnelle à $T^{5/2}$,

$$I_c = 3,61 \left(\frac{T}{2600} \right)^{3/2},$$

$$U_c = 6,3 \left(\frac{T}{2600} \right)^{5/2}.$$

D'où le tableau :

T (K)	2100	2300	2500	2600	2700
U_c (V)	3,69	4,64	5,72	6,3	6,92
I_c (A)	2,62	3,00	3,40	3,61	3,82

c) On peut mesurer la température apparente du filament à l'aide d'un pyromètre optique.

I.3.

$$a) \Phi = \frac{k}{e} \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \ln \frac{I_{s2}}{I_{s1}} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2$$

$$b) \Phi = + 4,46 \text{ V.}$$

c) En opérant avec une température de filament élevée :

- il y a risque de sublimation du métal, voire de fusion et d'usure précoce du filament,
- il y a un courant de saturation plus grand.

II. COLLISIONS ELECTRON-ATOME

II.1.1. L'équilibre thermique n'est pas réalisé dans le jet atomique. On ne peut calculer l'énergie cinétique moyenne en utilisant le théorème de l'équipartition de l'énergie.

On suppose le four émetteur en équilibre thermique. On appelle M la masse d'un atome.

On raisonne sur l'unité de volume.

D'après la loi de distribution des vitesses de MAXWELL-BOLTZMANN, le nombre d'atomes ayant, dans l'enceinte du four, une vitesse \mathbf{v} de composantes v_x, v_y, v_z à dv_x, dv_y, dv_z près est :

$$dN = A e^{-Mv^2/2 kT} dv_x dv_y dv_z.$$

Dans l'espace des vitesses, on repère un point par ses coordonnées sphériques v, ϑ, φ (fig. 2).

Le nombre d'atomes dont le vecteur vitesse a pour norme v , à dv près, dans la direction ϑ, φ à $d\vartheta$ et $d\varphi$ près est :

$$d'N = A e^{-Mv^2/2 kT} v^2 dv \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Les atomes qui vont passer à travers un trou (de petites dimensions pour ne pas perturber l'équilibre thermique du gaz dans l'enceinte) de surface dS en dt sont contenues dans un cylindre de volume $v \cos \vartheta dt dS$ (fig. 3).

Leur nombre est :

$$d_3n = dS \cos \vartheta \cdot v dt \cdot d'N$$

$$d_3n = dS dt \cdot A e^{-Mv^2/2 kT} v^3 dv \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

On intègre sur ϑ de 0 à $\pi/2$ et sur φ de 0 à 2π pour avoir tous les atomes sortis en dt :

$$dn = \pi A dS dt e^{-Mv^2/2 kT} v^3 dv.$$

La vitesse quadratique moyenne des atomes du faisceau est :

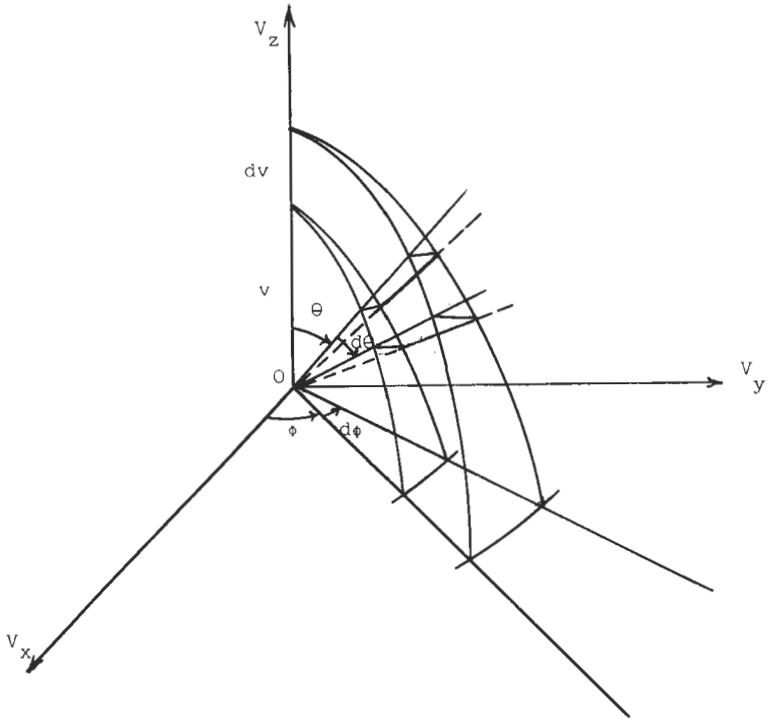


Fig. 2. — Élément de volume dans l'espace des vitesses ($v^2 dv \sin \theta d\theta d\phi$).

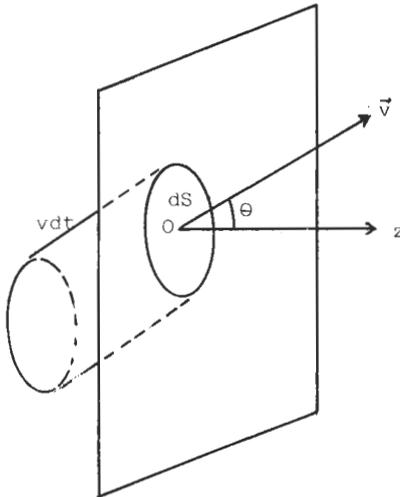


Fig. 3

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty v^2 dn}{\int_0^\infty dn} = \frac{\int_0^\infty v^5 e^{-Mv^2/2 kT} dv}{\int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/2 kT} dv}$$

Si on pose $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx$, un calcul élémentaire conduit

à $I_1 = 1/2$ et une intégration par parties donne :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$$

d'où :

$$I_3 = I_1 = 1/2 \quad \text{et} \quad I_5 = 2 I_3 = 1$$

et :

$$\langle v^2 \rangle = \frac{2 kT}{M} \frac{I_5}{I_3} = \frac{4 kT}{M}$$

$$\langle E_c \rangle = 1/2 M \langle v^2 \rangle$$

$$\langle E_c \rangle = 2 kT$$

(au lieu de $3/2 kT$ en supposant l'équilibre thermique réalisé dans le faisceau, ce qui n'est pas le cas).

$$\langle E_c \rangle = 8,63 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$$

$$V_1 = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 2 \sqrt{\frac{kT}{M}}$$

$$V_1 = 471 \text{ m. s}^{-1}.$$

$$1.2. a) \quad E_c = eU_a.$$

Cette relation reste valable pour toute valeur de U_a en particulier pour $U_a = 10^6 \text{ V}$, mais c'est l'expression de l'énergie cinétique qui change.

En mécanique classique : $E_c = 1/2 m V_1^2$.

En relativité restreinte : $E_c = mc^2 \left(\left(1 - \frac{V_1^2}{c^2} \right)^{-1/2} - 1 \right)$.

$$b) \quad \frac{E_c}{mc^2} = \frac{eU_a}{mc^2} = 1,95 \cdot 10^{-4} \ll 1.$$

On en déduit que les électrons sont non relativistes en fin d'accélération :

$$v_1 = \left(\frac{2 e U_a}{m} \right)^{1/2}$$

$$v_1 = 5,93 \cdot 10^6 \text{ m. s}^{-1}.$$

2.1. Conservation de la quantité de mouvement dans le RCM :

$$m \mathbf{v}'_1 + M \mathbf{V}'_1 = m \mathbf{v}'_2 + M \mathbf{V}'_2 = \mathbf{0}$$

(par définition du RCM).

Conservation de l'énergie cinétique dans le RCM :

$$1/2 m v_1'^2 + 1/2 M V_1'^2 = 1/2 m v_2'^2 + 1/2 M V_2'^2.$$

$$2.2. a) \quad \mathbf{v}_c = \frac{m \mathbf{v}_1 + M \mathbf{V}_1}{m + M}$$

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_c \quad \text{d'où} \quad \mathbf{v}'_1 = \frac{M(\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_1)}{m + M}$$

$$\mathbf{V}'_1 = \mathbf{V}_1 - \mathbf{v}_c \quad \text{d'où} \quad \mathbf{V}'_1 = \frac{m(\mathbf{V}_1 - \mathbf{v}_1)}{m + M}.$$

$$b) \quad E'_c = 1/2 m v_1'^2 + 1/2 M V_1'^2$$

$$E'_c = 1/2 \frac{m M}{m + M} (\mathbf{V}_1 - \mathbf{v}_1)^2.$$

$$c) \text{ On a encore : } \mathbf{v}_c = \frac{m \mathbf{v}_2 + M \mathbf{V}_2}{m + M}.$$

Par un calcul analogue au précédent, on a :

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_c = \frac{M(\mathbf{v}_2 - \mathbf{V}_2)}{m + M}$$

$$\mathbf{V}'_2 = \mathbf{V}_2 - \mathbf{v}_c = \frac{m(\mathbf{V}_2 - \mathbf{v}_2)}{m + M}$$

$$E'_c = 1/2 m v_2'^2 + 1/2 M V_2'^2 = 1/2 \frac{m M}{m + M} (\mathbf{V}_2 - \mathbf{v}_2)^2$$

$$\text{d'où :} \quad (\mathbf{V}_1 - \mathbf{v}_1)^2 = (\mathbf{V}_2 - \mathbf{v}_2)^2.$$

d) Du fait des expressions de \mathbf{v}'_1 et \mathbf{v}'_2 et de l'égalité démontrée en II.2.2. c), on obtient immédiatement : $v'_1 = v'_2$.

$$\begin{aligned}
 2.3. \Delta E_c &= 1/2 m (\mathbf{v}_2^2 - \mathbf{v}_1^2) \\
 &= 1/2 m [(\mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_c)^2 - (\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_c)^2].
 \end{aligned}$$

Avec $v'_1 = v'_2$.

$$\Delta E_c = m \mathbf{v}_c \cdot (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1).$$

$$\begin{aligned}
 2.4. \quad \alpha &= 7,32 \cdot 10^{-6} \\
 \alpha v_1 &= 43,4 \text{ m. s}^{-1} \\
 \mathbf{v}_c &= \frac{\mathbf{V}_1 + \alpha \mathbf{v}_1}{1 + \alpha}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_1 \ll v_1 \text{ et } \alpha \ll 1 \text{ d'où } \mathbf{v}_c = \mathbf{V}_1 + \alpha \mathbf{v}_1$$

avec une excellente approximation :

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_1}{1 + \alpha} \approx \mathbf{v}_1$$

et : $v'_1 = v'_2$ d'où $v_1 \approx v'_2$.

$$\begin{aligned}
 b) \Delta E_c &= m \mathbf{v}_c \cdot (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1) \\
 \Delta E_c &\approx m (\mathbf{V}_1 + \alpha \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1) \\
 &= m (\mathbf{V}_1 + \alpha \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_1) \\
 \Delta E_c &= m v_1 [V_1 \sin \psi + \alpha v_1 (\cos \psi - 1)]
 \end{aligned}$$

$$\frac{d\Delta E_c}{d\psi} = m v_1 [V_1 \cos \psi - \alpha v_1 \sin \psi] = 0$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{V_1}{\alpha v_1}$$

$$\Delta E_{c \max} = \alpha m v_1^2 \left(\frac{1}{\cos \psi} - 1 \right)$$

$$\Delta E_{c \max} = \alpha m v_1^2 \left[\left(1 + \left(\frac{V_1}{\alpha v_1} \right)^2 \right)^{1/2} - 1 \right]$$

Comme $1/2 m v_1^2 \gg 1/2 M V_1^2$:

$$\frac{\Delta E_{c \max}}{1/2 m v_1^2} = 2 \alpha \left[\left(1 + \left(\frac{V_1}{\alpha v_1} \right)^2 \right)^{1/2} - 1 \right].$$

Application numérique :

$$\operatorname{tg} \psi = 10,9 \quad \psi = 85^\circ \text{ ou } 265^\circ \quad \frac{\Delta E_c}{1/2 m v_1^2} = 1,5 \cdot 10^{-4}.$$

L'énergie cinétique de l'électron varie peu, comme on pouvait s'y attendre, vu sa très grande énergie cinétique initiale.

II.3. On exprime que la pseudo-norme du 4-vecteur impulsion énergie du système de particules avant choc, dans le laboratoire, est égale à la pseudo-norme du 4-vecteur impulsion énergie du système de particules après choc, dans le référentiel du centre de masse.

$$\left(\mathbf{p} + \mathbf{p}_a, \frac{mc^2 + E_1 + E_c + E_{ca}}{c} \right)^2 = \left(\mathbf{0}, \frac{mc^2 + E'_c + E_2 + E'_{ca}}{c} \right)^2$$

\mathbf{p} est perpendiculaire à \mathbf{p}_a .

$$E_c(E_c + 2mc^2) + E_{ca}(E_{ca} + 2E_1) - (mc^2 + E_1 + E_c + E_{ca})^2 \\ = -(mc^2 + E'_c + E_2 + E'_{ca})^2.$$

Soit :

$$E_c = \frac{(mc^2 + E'_c + E_2 + E'_{ca})^2 - m^2c^4 - E_1^2 - 2mc^2(E_1 + E_{ca})}{2(E_{ca} + E_1)}.$$

A E_{ca} donnée, E_c est minimale si $E'_c = E'_{ca} = 0$ soit si les particules obtenues sont au repos dans le référentiel du centre de masse.

Avec $E_{ca} \ll E_1$:

$$E_{c \min} \approx \frac{(mc^2 + E_2)^2 - (mc^2 + E_1)^2}{2E_1}.$$

Comme $|E_2 - E_1| \ll E_1$ et $mc^2 \ll E_1$, on a :

$$E_{c \min} \approx E_2 - E_1.$$

$$3.2. \quad E_{c \min} = 6,58 \text{ eV}$$

$$h\nu = E_2 - E_1$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E_2 - E_1}$$

$$\lambda = 1,89 \cdot 10^2 \text{ nm.}$$

La radiation appartient au domaine de l'ultraviolet.

$$3.3. a) E_c = eU_a = 50 \text{ eV.}$$

On peut obtenir les atomes d'arsenic une, deux ou trois fois ionisés.

b) L'excédent d'énergie cinétique, par rapport à l'énergie d'ionisation, sert à produire d'autres ionisations, responsables de l'émission d'électrons dits secondaires.

III. CHARGE D'ESPACE

$$1.1. \quad Mc^2 = 7,0 \cdot 10^7 \text{ keV} \gg E_{c0} = 10^2 \text{ keV.}$$

De ce fait la mécanique classique est utilisable :

$$v_0 = \left(\frac{2 E_{c0}}{M} \right)^{1/2} = 5,07 \cdot 10^5 \text{ m. s}^{-1}$$

$$\frac{v_0}{c} = 1,69 \cdot 10^{-3} \ll 1.$$

On peut utiliser une analyse non relativiste.

1.2. Par application du théorème d'AMPÈRE (fig. 4) à une circonférence d'axe l'axe du fil, de rayon x :

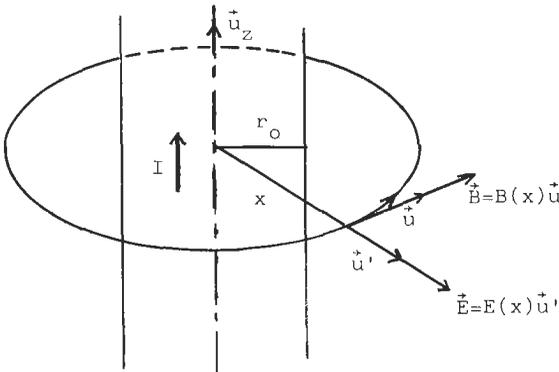


Fig. 4

$$2 \pi x B(x) = \mu_0 I_{int.}$$

$$\text{Si } x > r_0 \quad I_{int} = I \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi x} \mathbf{u}.$$

$$\text{Si } x < r_0 \quad I_{int} = \left(\frac{x}{r_0} \right)^2 I \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I x}{2 \pi r_0^2} \mathbf{u}.$$

Application numérique :

$$x = r_0 = 10^{-3} \text{ m} \quad B = 2 \cdot 10^{-8} \text{ T}.$$

$$1.3. a) \text{ Soit : } q = \frac{dq}{d\tau},$$

$$j = q v_0$$

$$I = j \cdot \pi r_0^2 = q v_0 \cdot \pi r_0^2$$

$$q = \frac{dq}{d\tau} = \frac{I}{\pi r_0^2 v_0}.$$

b) Par application du théorème de GAUSS à un cylindre d'axe, l'axe du fil, de rayon x , fermé aux extrémités.

$$E \cdot 2 \pi x \cdot l = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}.$$

$$\text{Si } x < r_0 \quad Q_{int} = q \cdot \pi x^2 l :$$

$$\mathbf{E} = \frac{q x}{2 \epsilon_0} \mathbf{u}' \quad \text{ou} \quad \mathbf{E} = \frac{I x}{2 \pi \epsilon_0 r_0^2 v_0} \mathbf{u}'.$$

$$\text{Si } x > r_0 \quad Q_{int} = q \cdot \pi r_0^2 l :$$

$$\mathbf{E} = \frac{q r_0^2}{2 x} \mathbf{u}' \quad \text{ou} \quad \mathbf{E} = \frac{I}{2 \pi \epsilon_0 v_0 x} \mathbf{u}'.$$

Application numérique :

$$x = r_0 = 10^{-3} \text{ m} \quad E = 3,55 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

$$c) \mathbf{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dx} \mathbf{u}' \Rightarrow dV = -E dx.$$

Si $x < r_0$, avec $V(0) = 0$, on obtient en intégrant :

$$V = -\frac{I x^2}{4 \pi \epsilon_0 r_0^2 v_0}$$

et si $x > r_0$, en assurant la continuité de la fonction potentiel en $x = r_0$, on obtient :

$$V = \frac{I}{4 \pi \epsilon_0 v_0} \left(2 \ln \frac{r_0}{x} - 1 \right).$$

Pour $x = r_0 = 10^{-3}$ m $V(r_0) = -1,77$ V.

$$2.1. a) \quad \mathbf{f}_e = e\mathbf{E}.$$

$$\text{Comme } x < r_0 \quad \mathbf{f}_e = \frac{eIx}{2\pi\epsilon_0 r_0^2 v_0} \mathbf{u}' :$$

$$\mathbf{f}_m = e\mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{B} \quad \text{avec } \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

$$\mathbf{f}_m = -\frac{e v_0 I x}{2\pi\epsilon_0 c^2 r_0^2} \mathbf{u}'.$$

$$b) \quad \frac{f_m}{f_e} = \left(\frac{v_0}{c}\right)^2 \ll 1 \quad f_m \ll f_e.$$

c) La force électrique, prépondérante, est radiale dirigée vers l'extérieur : le faisceau diverge sous l'effet de son propre champ électrique. Remarquons que la forme magnétique est en sens contraire de la force électrique.

2.2. a) D'après le principe fondamental de la dynamique, pour un ion As^+ :

$$\mathbf{f}_e = M\mathbf{a}$$

$$\frac{eIx}{2\pi\epsilon_0 r^2 v_0} \mathbf{u}' = M \left(\frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{u}' + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{u} \right)$$

doù :

$$\frac{dz}{dt} = v_0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{eIx}{2\pi\epsilon_0 M r^2 v_0}.$$

Pour un ion du pourtour : $x = r$:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{eI}{2\pi\epsilon_0 M r v_0}.$$

Or :

$$dz = v_0 dt \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2r}{dz^2} = \frac{A}{r}$$

avec :

$$A = \frac{eI}{2\pi\epsilon_0 M v_0^3}.$$

b) On multiplie les deux membres de l'équation précédente par $\frac{dr}{dz}$ et on intègre en tenant compte qu'en $z = 0$,

$$r = r_0 \text{ et } \frac{dr}{dz} = 0.$$

$$\text{On obtient : } u = \left[2A \ln \frac{r}{r_0} \right]^{1/2}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \ln \left(1 + \frac{r - r_0}{r_0} \right) &\approx \frac{r - r_0}{r_0} \\ \frac{dr}{dz} &= \left(2A \cdot \frac{r - r_0}{r_0} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En séparant les variables et en tenant compte qu'en $z = 0$, $r = r_0$:

$$\frac{r - r_0}{r_0} = \frac{Az^2}{2r_0^2}.$$

d) Application numérique : $r_0 = 10^{-3}$ m.

$$A = 1,773 \cdot 10^{-5} \text{ (sans dimension).}$$

$$\frac{r - r_0}{r_0} = 2,22 \cdot 10^{-2}$$

$$r = 1,022 \text{ mm}$$

$$\frac{dr}{dz} = 8,86 \cdot 10^{-4} \text{ (sans dimension).}$$

e) On a un calcul analogue à celui de III.2.2. b) mais la constante d'intégration est modifiée.

$$\text{En } z = 0 \text{ } r = r_0 \text{ et } \frac{dr}{dz} = -u_0 \text{ d'où :}$$

$$1/2 \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 = A \ln \frac{r}{r_0} + 1/2 u_0^2.$$

Si r est minimum pour une valeur donnée de z , alors

$$\frac{dr}{dz} = 0, \text{ d'où :}$$

$$r_{min} = r_0 e^{-u_0^2/2A}$$

$$r_{min} = 0,204 \text{ mm.}$$

Si I double, A est multiplié par 2 et r_{min} par 2,21.

Si E_{c_0} double, A est multiplié par $2^{-3/2}$ et r_{min} par 0,055.

Si r_0 double, r_{min} double.

IV. FOCALISATION FORTE

IV.1.

1.1. $\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}$ soit $-\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$

$$xy = \text{cste.}$$

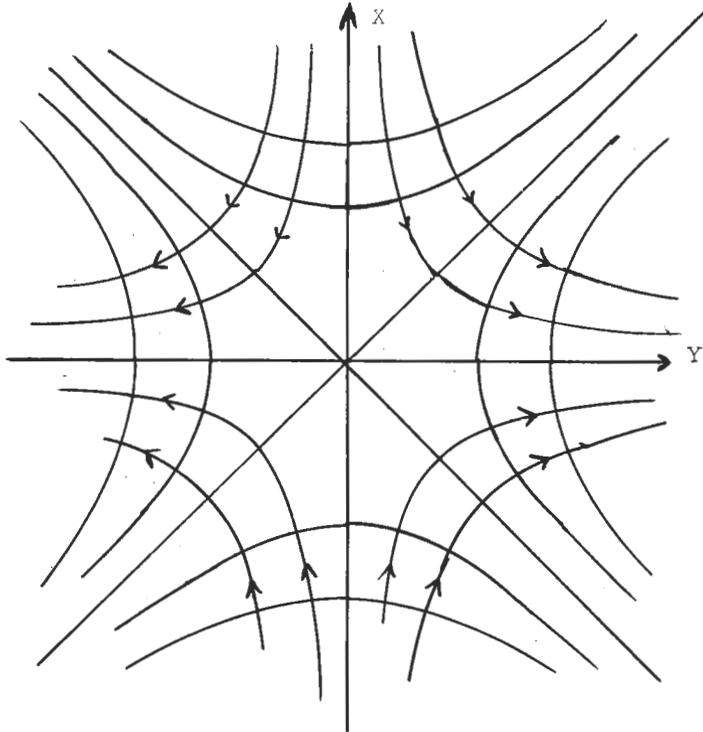


Fig. 5. — Réseau des lignes de champ et des lignes équipotentiels.

Les lignes de champ sont des hyperboles équilatères d'asymptotes Ox et Oy .

$$1.2. \quad dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -(E_x dx + E_y dy)$$

$$dV = a(x dx - y dy)$$

$$V = \frac{a}{2}(x^2 - y^2) \quad \text{avec} \quad V(0,0) = 0.$$

Les surfaces équipotentiellles sont cylindriques, de trace, dans le plan xOy , des hyperboles équilatères orthogonales aux précédentes, d'asymptotes les bissectrices des quadrants (fig. 5).

$$2.1. \quad \text{Pour 1 et 3 : } y^2 - x^2 = h^2.$$

$$\text{Pour 2 et 4 : } y^2 - x^2 = -h^2.$$

2.2. Ces surfaces se confondent avec des surfaces équipotentiellles du champ de IV.1.1.2.

$$\text{Pour 1 et 3 : } -U_0 = \frac{a}{2}(x^2 - y^2)$$

d'où :

$$a = \frac{2U_0}{h^2}.$$

$$\text{Pour 2 et 4 : } +U_0 = \frac{a}{2}(x^2 - y^2).$$

Application numérique : $a = 1,6 \cdot 10^7 \text{ V.m}^{-2}$.

3.1. D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\mathbf{f} = M\mathbf{a} \quad \text{avec} \quad \mathbf{f} = e\mathbf{E} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{a} = \frac{e}{M} \mathbf{E}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{e}{M} ax \quad \frac{d^2y}{dt^2} = +\frac{e}{M} ay \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

3.2. En multipliant la première équation par $\frac{dx}{dt}$ et la

seconde par $\frac{dy}{dt}$ et tenant compte des conditions initiales, on

obtient :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2eU_0}{Mh^2}(x_0^2 - x^2)$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2eU_0}{Mh^2}(y^2 - y_0^2)$$

$$\frac{dz}{dt} = v^* \text{ avec } v^* = \left(\frac{2 eU^*}{M} \right)^{1/2} \quad \text{d'où } z = \left(\frac{2 eU^*}{M} \right)^{1/2} t$$

$$x < x_0 \text{ car } \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 > 0$$

$$\frac{dx}{dt} = - \left(\frac{2 eU_0}{M h^2} \right)^{1/2} (x_0^2 - x^2)^{1/2}.$$

En séparant les variables et intégrant, on obtient :

$$x = x_0 \cos \left[\left(\frac{2 eU_0}{M h^2} \right)^{1/2} t \right] \quad (x = x_0 \text{ à } t = 0)$$

ou

$$x = x_0 \cos \left[\left(\frac{U_0}{U^*} \right)^{1/2} \cdot \frac{z}{h} \right]$$

$$y > y_0 \text{ car } \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 > 0$$

$$\frac{dy}{dt} = + \left(\frac{2 eU_0}{M h^2} \right)^{1/2} (y^2 - y_0^2)^{1/2}.$$

En séparant les variables et intégrant, on obtient :

$$y = y_0 \operatorname{ch} \left[\left(\frac{2 eU_0}{M h^2} \right)^{1/2} t \right]$$

ou

$$y = y_0 \operatorname{ch} \left[\left(\frac{U_0}{U^*} \right)^{1/2} \frac{z}{h} \right].$$

3.3. $x = f(z)$ est périodique en z de période spatiale ou longueur d'onde :

$$\lambda_0 = 2 \pi h \left(\frac{U^*}{U_0} \right)^{1/2}.$$

Application numérique :

$$\lambda_0 = 0,702 \text{ m.}$$

$$4.1. \quad \alpha = \frac{2 \pi l}{\lambda_0} = \frac{l}{h} \left(\frac{U_0}{U^*} \right)^{1/2} = 0,894 \text{ rd.}$$

$$\text{Pour } z < l \quad x = x_0 \cos \alpha \frac{z}{l} \quad y = y_0 \operatorname{ch} \alpha \frac{z}{l}.$$

$$\text{Pour } z = l \quad x_l = x_0 \cos \alpha \quad y_l = y_0 \operatorname{ch} \alpha.$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)_l = -\frac{\alpha}{l} x_0 \sin \alpha \quad \left(\frac{dy}{dz}\right)_l = \frac{\alpha}{l} y_0 \operatorname{sh} \alpha.$$

$$\text{Pour } z > l \quad \frac{x - x_l}{z - l} = \left(\frac{dx}{dz}\right)_l = -\frac{\alpha}{l} x_0 \sin \alpha.$$

$$x = x_0 \left(\cos \alpha + \frac{l - z}{l} \alpha \sin \alpha \right)$$

$$\frac{y - y_l}{z - l} = \left(\frac{dy}{dz}\right)_l = \frac{\alpha}{l} y_0 \operatorname{sh} \alpha$$

$$y = y_0 \left(\operatorname{ch} \alpha + \frac{(z - l)}{l} \alpha \operatorname{sh} \alpha \right).$$

4.2. a)

$$z_l = l \left(1 + \frac{1}{\alpha \operatorname{tg} \alpha} \right) \text{ et } y_l = y_0 \operatorname{sh} \alpha \left(\frac{1}{\operatorname{th} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right).$$

b) Sur la fig. 6, on a indiqué H' et F', respectivement point principal image et foyer image.

$$\text{Pour F'} : \quad x = 0 \quad z_{F'} = z_l = l \left(1 + \frac{1}{\alpha \operatorname{tg} \alpha} \right).$$

Pour H' : l'intersection de la droite $x = x_0$ et de la droite $x(z)$ donne un point du plan principal image.

$$x_0 = x_0 \left(\cos \alpha + \frac{(l - z)}{l} \alpha \sin \alpha \right)$$

$$z_{H'} = l \left(1 - \frac{1}{\alpha \sin \alpha} + \frac{1}{\alpha \operatorname{tg} \alpha} \right)$$

$$f' = \overline{H'F'} = z_{F'} - z_{H'}$$

$$f' = \frac{l}{\alpha \sin \alpha}.$$

c)

$$\alpha = 0,895$$

$$f' = 0,143 \text{ m.}$$

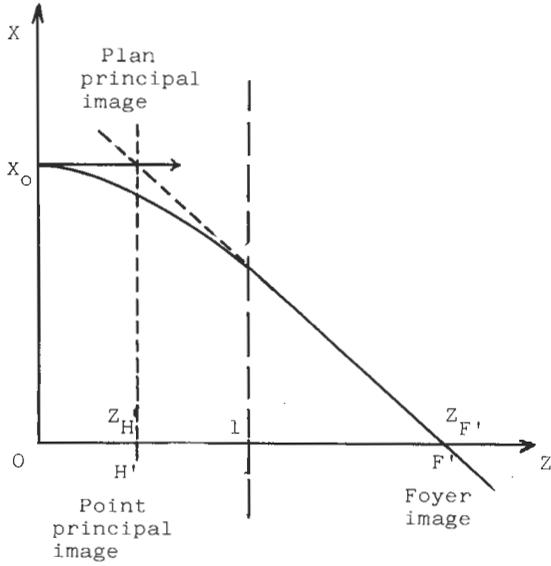


Fig. 6

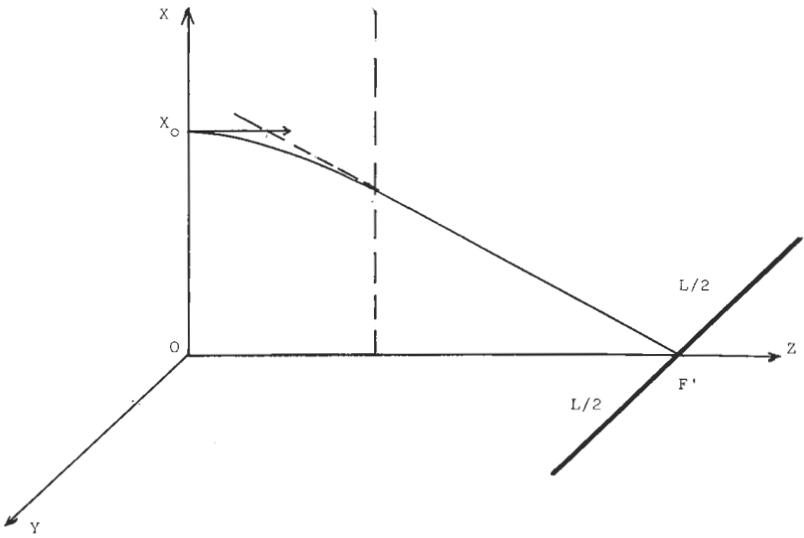


Fig. 7

4.3. Pour l , h , U_0 et U^* donnés, $\forall x_0$ et y_0 , donc $a \alpha$ donné, on a :

$$z_1 = l \left(1 + \frac{1}{\alpha \operatorname{tg} \alpha} \right).$$

La trace du faisceau d'ions est donc un segment de droite \perp à Oz dans le plan yOz (fig. 7), or :

$$y_1 = y_0 \left(\operatorname{ch} \alpha + \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$$

avec :

$$-r_0 \leq y_0 \leq +r_0$$

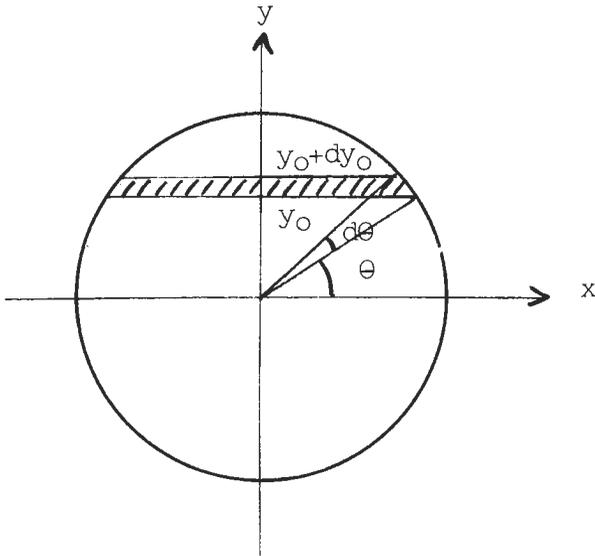
d'où :

$$L = 2 r_0 \left(\operatorname{ch} \alpha + \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)$$

$$L = 4,5 \text{ mm.}$$

Calcul de la densité de courant Λ :

Les ions qui arrivent entre y_1 et $y_1 + dy_1$ ont pénétré dans la lentille entre y_0 et $y_0 + dy_0$ et correspondent au courant :



$$dI = \frac{I}{\pi r_0^2} \cdot 2 r_0 \cos \vartheta dy_0$$

$$\Lambda = \frac{dI}{dy_1} = \frac{dI}{dy_0} \cdot \frac{dy_0}{dy_1}$$

$$\Lambda = \frac{dI}{dy_1} = \frac{2 I}{\pi r_0} \cdot \frac{\left[1 - \frac{y_1^2}{r_0^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \left(\frac{1}{\operatorname{th} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2} \right]^{1/2}}{\frac{1}{\operatorname{th} \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}$$

Au voisinage du milieu du segment,

$$\Lambda = \frac{dI}{dy_1} \sim \frac{2 I}{\pi L} = 25,4 \text{ mA} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Si l'on avait supposé la densité linéique uniforme, on aurait eu :

$$\Lambda = \frac{I}{L} = 22 \text{ mA} \cdot \text{m}^{-1}.$$

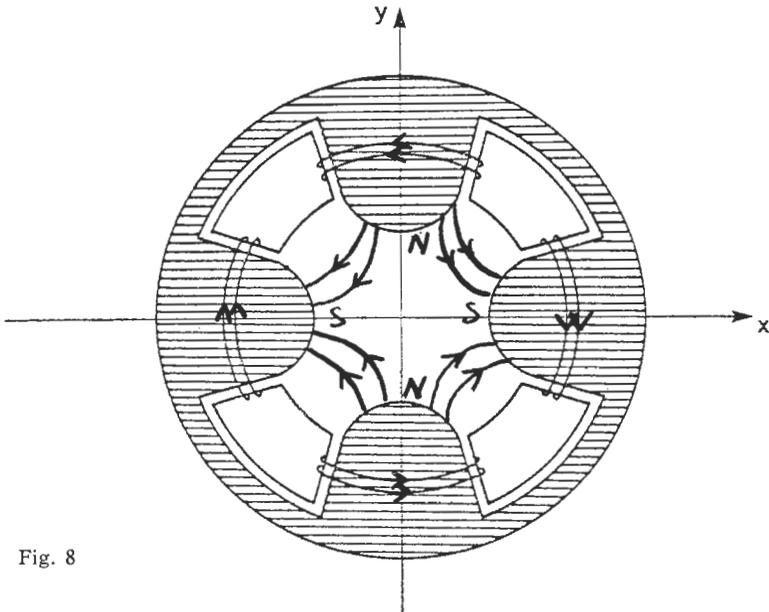


Fig. 8

5.1. La fig. 8 donne la forme et le sens des lignes de champ ainsi que les sens des courants.

5.2. La bobine n'exerce aucune force magnétique sur les ions du faisceau car \mathbf{v} est parallèle à \mathbf{B} .

La lentille quadrupolaire tend à élargir le faisceau selon la première bissectrice et à l'aplatir selon la seconde (pincement du faisceau) (fig. 8).

La focalisation est dite forte quand il n'y a pas rotation du faisceau (comme dans les prismes magnétiques) mais seulement pincement du faisceau sans déviation de sa direction.

ANNEXE I

ETABLISSEMENT DE LA FORMULE DE DUSHMAN-RICHARDSON

D'après la statistique de FERMI-DIRAC, le nombre d'électrons du métal ayant une énergie ϵ_i , à l'équilibre thermique est :

$$N_i = \frac{g_i}{\exp [\beta (\epsilon_i - \epsilon_F)] + 1}$$

où ϵ_F est l'énergie du niveau de FERMI (fig. 9) et $\beta = \frac{1}{kT}$.



Fig. 9. — Puits de potentiel dû aux ions positifs du réseau métallique contenant les électrons libres.

g_i est le nombre d'états dans un volume $dp_x dp_y dp_z$ de l'espace des phases.

Sachant que, d'après le théorème d'incertitude de HEISENBERG,

un état occupe un volume $\frac{V}{h^3}$ où V est le volume du métal et h la constante de PLANCK :

$$g_i = 2 \frac{V}{h^3} dp_x dp_y dp_z.$$

Le facteur 2 tient compte de la dégénérescence due au spin.

Le nombre d'électrons de quantité de mouvement égale à \mathbf{p} à $d\mathbf{p}$ près est donc :

$$d^3N = \frac{2V}{h^3} \frac{dp_x dp_y dp_z}{1 + \exp [\beta (\epsilon - \epsilon_F)]}$$

où ϵ est l'énergie cinétique des électrons dans cet état :

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m}.$$

La direction $x'x$ est normale à la surface du métal. En coordonnées cylindriques (fig. 10), q, ϑ, p_x , on a :

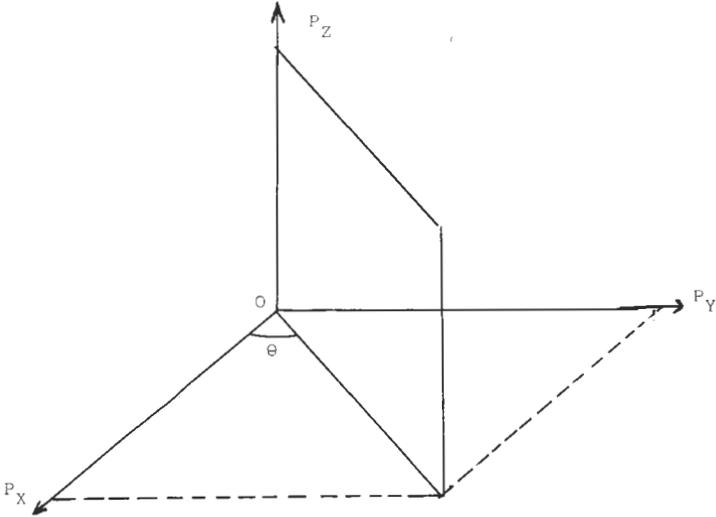


Fig. 10. — L'axe OX est normal à la surface du métal.

$$p_y = q \cos \vartheta \quad p_z = q \sin \vartheta$$

$$dp_x dp_y dp_z = dp_x \cdot q d\vartheta dq$$

$$\varepsilon = \frac{q^2 + p_x^2}{2m}$$

d'où :

$$d^3N = \frac{2V}{h^3} \cdot \frac{dp_x q d\vartheta dq}{1 + \exp(-\beta \varepsilon_F) \exp\left(\frac{\beta}{2m} p_x^2\right) \exp\left(\frac{\beta}{2m} q^2\right)}$$

On cherche le nombre d'électrons dN de quantité de mouvement p_x à dp_x près. On doit intégrer en ϑ de 0 à 2π et en q de 0 à l'infini.

$$\text{En posant : } a = \exp\left(-\beta \varepsilon_F + \frac{\beta}{2m} p_x^2\right)$$

$$\text{et : } u = \frac{\beta}{2m} q^2$$

on a :

$$du = \frac{\beta}{m} q dq$$

et :

$$dN = \frac{4\pi V m}{\beta h^3} dp_x \cdot \int_0^\infty \frac{du}{A e^u + 1}.$$

L'intégrale se calcule facilement et vaut $\ln\left(1 + \frac{1}{A}\right)$, d'où :

$$dN = \frac{4\pi m V kT}{h^3} \ln\left[1 + \exp\beta\left(\epsilon_F - \frac{p_x^2}{2m}\right)\right] dp_x.$$

Les électrons qui traversent la surface S du métal en dt , de composante de vitesse v_x , se trouvent dans un cylindre de hauteur $v_x dt$, de surface de base S, de volume $S v_x dt$. Leur densité est $\frac{dN}{V}$. La charge qu'ils emportent en dt est :

$$\delta Q = e \cdot \frac{dN}{V} \cdot S v_x dt.$$

Le courant qui en résulte est :

$$dI_S = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{e S}{V} v_x dN$$

$$dI_S = \frac{4\pi e S kT}{h^3} \ln\left[1 + \exp\beta\left(\epsilon_F - \frac{p_x^2}{2m}\right)\right] \cdot p_x dp_x.$$

Avec $\epsilon_x = \frac{p_x^2}{2m}$, on obtient :

$$dI_S = \frac{4\pi e S m kT}{h^3} \ln[1 + \exp\beta(\epsilon_F - \epsilon_x)] d\epsilon_x$$

On intègre sur ϵ_x de W , profondeur du puits de potentiel contenant les électrons, à l'infini, pour obtenir le courant de saturation :

$$I_S = \frac{4\pi e S m kT}{h^3} \int_0^\infty \ln[1 + \exp\beta(\epsilon_F - \epsilon_x)] d\epsilon_x$$

Dans l'hypothèse où $W \gg \varepsilon_F$, on a :

$$I_S = \frac{4 \pi e S m k T}{h^3} \int_W^\infty \exp [\beta (\varepsilon_F - \varepsilon_x)] d \varepsilon_x$$

$$I_S = \frac{[4 \pi e S m (kT)^2}{h^3} \exp [-(W - \varepsilon_F)/kT].$$

ANNEXE II

ETABLISSEMENT DE LA FORMULE DE CHILD-LANGMUIR (cas de la diode plane)

L'anode et la cathode émissive sont planes, parallèles, de surface S , distantes de L (fig. 11).

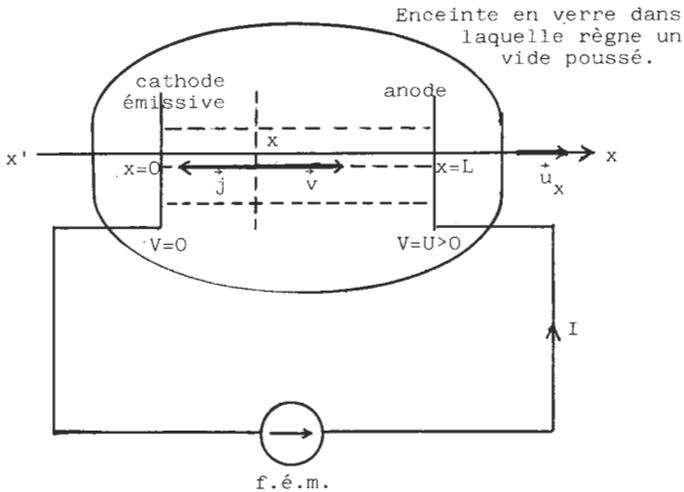


Fig. 11. — La diode plane à vide.

A la distance x de la cathode, un électron a la vitesse :

$$\mathbf{v} = v(x) \mathbf{u}_x.$$

La densité de courant est :

$$\mathbf{j} = j(x) \mathbf{u}_x \text{ avec } j(x) < 0.$$

La densité volumique de charge d'espace est $\varrho(x)$ et la fonction potentiel $V(x)$.

L'intensité du courant est :

$$I = -j(x) S \quad (1)$$

ce qui montre que la densité de courant est uniforme.

D'après la définition de la densité de courant,

$$j(x) = \varrho(x) v(x). \quad (2)$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$1/2 m v^2(x) = e V(x). \quad (3)$$

Enfin, en régime permanent, d'après l'équation de POISSON :

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\varrho(x)}{\epsilon_0} = 0. \quad (4)$$

On cherche une équation différentielle en $V(x)$. On a :

$$\varrho(x) = -\frac{I}{S v(x)} \text{ avec } v(x) = \left(\frac{2e}{m}\right)^{1/2} V(x)^{1/2}$$

d'où :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/2} \frac{I}{S} V(x)^{-1/2}.$$

On intègre en multipliant les deux membres par $\frac{dV}{dx}$.

$$1/2 \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/2} \frac{I}{S} \frac{1}{\sqrt{V(x)}} \frac{dV}{dx}.$$

En tenant compte que le potentiel est nul sur la cathode et que le champ électrique y est également nul, on obtient :

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = 4 \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/2} \cdot \frac{I}{S} V(x)^{1/2}.$$

En prenant la racine et en séparant les variables, on a :

$$\frac{dV}{V(x)^{1/4}} = \left[4 \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/2} \frac{I}{S} \right]^{1/2} dx.$$

L'intégration donne :

$$V(x)^{3/4} = \left[\frac{9}{4} \left(\frac{m}{2e} \right)^{1/2} \frac{I}{S} \right]^{1/2} x.$$

Avec $x = L$ et $V(L) = U$, on obtient pour équation de la caractéristique :

$$I = K U^{3/2}$$

avec :

$$K = \frac{4 S}{9 L^2} \left(\frac{2 e}{m} \right)^{1/2}$$

La caractéristique complète d'une diode à vide est donnée fig. 12.

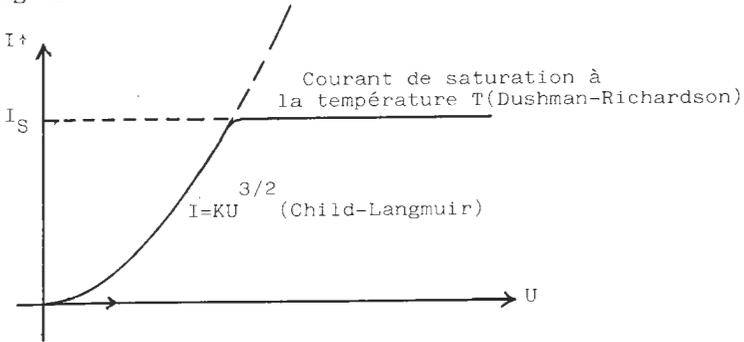


Fig. 12. — Caractéristique courant-tension de la diode à vide.

Pour une diode à vide cylindrique, l'équation de la caractéristique est la même ; seul le coefficient K change.

D. MAURAS, J.-C. HERPIN.

C.A.P.E.S.

SESSION DE 1985

OPTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

COMPOSITION DE CHIMIE

(Durée : 4 heures)

AVERTISSEMENT

Dans chaque partie numérotée en chiffres romains, les questions numérotées en chiffres arabes sont indépendantes les unes des autres. Chaque question n'appelle que des réponses JUSTIFIÉES simples : il est donc de l'intérêt des candidats de ne pas s'attarder outre mesure sur telle ou telle question.

Il est demandé aux candidats de numéroter leurs réponses en respectant la numérotation des questions posées.

BARÈME DE CORRECTION

Partie I	24 points
Partie II	8 points
Partie III	20 points
Partie IV	8 points
Partie V	20 points

I. CHIMIE ORGANIQUE

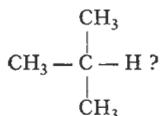
I.1. Quel produit spécifique utilise-t-on pour préparer le méthane au laboratoire ?

I.2.

- a) Quels sont les produits de la réaction du dichlore sur le méthane ?
- b) Cette réaction en chaîne a une phase d'initiation qu'on écrira en précisant les conditions expérimentales.

I.3.

- a) Quel est le nom de l'espèce représentée par la forme développée :



b) Quel(s) produit(s) fournit la réaction de ce composé avec le dibrome ? Justifier brièvement votre réponse.

I.4.

- a) Donner la formule développée du propène.
- b) Préciser le motif de la chaîne carbonée du polypropène.
- c) Donner une utilisation du polypropène obtenu par le procédé Ziegler-Natta et justifier votre réponse.

I.5. Nommer le produit de la réaction d'addition de HBr sur le propène en absence de peroxyde et dans l'obscurité.

I.6. Enoncer la règle de Markovnikov .

I.7. Nommer le produit de la réaction d'addition de HOCl sur l'éthylène.

I.8. Nommer le produit de la réaction d'addition de HBr sur le butène-1 en présence de peroxyde.

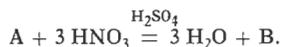
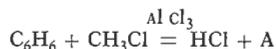
I.9. Nommer le produit de l'oxydation de l'éthylène par le permanganate de potassium dilué.

I.10. Nommer le produit de l'addition d'eau sur l'acétylène.

Quel est le catalyseur de cette réaction ?

I.11. L'acétylène donne un précipité rouge caractéristique avec un composé cuivreux. Quel est l'ion réactif ? Quels sont les produits formés ? Quelle précaution expérimentale doit-on prendre à leur égard ?

I.12. Trouver et nommer les composés A et B des réactions :



I.13. Quelle est la signification de : « une bombe nucléaire de 1 kt » ?

I.14. Donner le bilan et le mécanisme de la réaction du dichlore sur le benzène, en présence de chlorure d'aluminium.

I.15.

- a) Préciser la structure de la pyridine $\text{C}_5\text{H}_5\text{N}$.
- b) Quelles sont les propriétés de cette molécule dues à N ?
- c) Donner la formule développée du produit de la réaction du chlorure d'hydrogène sur la pyridine.
- d) Nommer ce produit.

I.16. Ecrire et nommer l'ester obtenu par action de l'acide acétique sur :

- a) le n-butanol-1 ;
- b) le n-butanol-2 ;
- c) le méthyl-2-propanol-2.
- d) Si le mélange initial acide, alcool est équimolaire, comparer les quantités des esters formés dans les trois cas précédents.

I.17. On peut obtenir le monochloroéthane par l'une ou l'autre des réactions suivantes, totales ou non selon le cas :

- a) $A + \text{HCl} = \text{CH}_3\text{CH}_2\text{Cl}$.
- b) $B + \text{HCl} = \text{CH}_3\text{CH}_2\text{Cl} + \text{H}_2\text{O}$.
- c) $C + \text{SOCl}_2 = \text{SO}_2 + \text{HCl} + \text{CH}_3\text{CH}_2\text{Cl}$.

Trouver A, B, C.

I.18..

- a) Comment obtenir $(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{N}$ à partir d'éthylamine et de chloroéthane ?
- b) En présence de Ag_2O en milieu aqueux basique, on obtient un composé organique, lequel ?
- c) Nommer les produits obtenus par chauffage du composé précédent.

I.19. De quelles fonctions est caractéristique le test à la 2-4 DNPH (2-4 dinitrophénylhydrazine). Préciser la procédure de caractérisation.

I.20. Indiquer par un astérisque le carbone asymétrique éventuel de :

- a) l'acide mandélique $\text{C}_6\text{H}_5\text{CHOHCOOH}$
- b) l'acide pyruvique CH_3COCOOH
- c) l'acide lactique $\text{CH}_3\text{CHOHCOOH}$.
- d) Quelle est la propriété caractéristique liée à la présence d'un carbone asymétrique ?

I.21.

- a) Exprimer en fonction des concentrations convenables les deux constantes d'acidité de la glycine :



- b) Qu'appelle-t-on point isoélectrique ?
- c) Exprimer le pH au point isoélectrique à 25 °C en fonction de pK_{a1} et pK_{a2} .

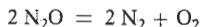
Application numérique : $\text{pK}_{a1} = 2,4$; $\text{pK}_{a2} = 9,8$.

- d) Donner rapidement le pH d'une solution aqueuse décimolaire de :

- $\text{ClNH}_3\text{CH}_2\text{CO}_2\text{H}$,
 - $\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CO}_2\text{Na}$,
 - glycine,
- à 25 °C.

II. CINETIQUE

II.1. Dans certaines conditions, la décomposition de N_2O se fait suivant la réaction :



que l'on suit à volume constant par des mesures de pression. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant, pour $T = 990^\circ\text{C}$,

$$(1 \text{ torr} = \frac{101325}{760} \text{ Pa}).$$

$\frac{t}{\text{min}}$	0	30	53	100
$\frac{p}{\text{Torr}}$	100	116	125	136

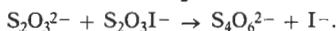
- a) Calculer la pression finale et déterminer le temps de demi-réaction.
- b) A la même température, mais pour une pression initiale de 400 torrs, le temps de demi-réaction est de 52 minutes. Quel est l'ordre de la réaction ?

II.2. Le mécanisme de la réaction de l'iode sur les thiosulfates comporte deux étapes :

1^{re} étape de constante de vitesse k_1 :



2^e étape de constante de vitesse k_2 :



- a) Préciser les déplacements de charges et les réactifs nucléophiles de ces deux étapes.

En admettant une loi de vitesse globale $v = k_1(\text{I}_2)(\text{S}_2\text{O}_3^{2-})$, avec (I_2) = concentration en diiode et $(\text{S}_2\text{O}_3^{2-})$ = concentration en ions thiosulfates.

- b) Dire quelle est l'étape déterminante.
- c) Trouver v à l'aide du principe de l'état stationnaire.

- d) Représenter par un schéma les variations de l'enthalpie libre standard de la réaction en cours d'évolution.
- e) Qu'appelle-t-on enthalpie libre d'activation ?

III.3. Tracer le profil réactionnel le plus simple d'une réaction utilisant une catalyse hétérogène avec chimisorption .

III. SOLUTIONS AQUEUSES

III.1. Soit un litre de solution aqueuse de sulfate de dihydrogène H_2SO_4 de fraction massique égale à 0,86. La masse volumique de la solution est $\rho = 1,78 \text{ kg. dm}^{-3}$.

- a) Quelle est la concentration massique en H_2SO_4 ?
- b) Quelle est sa concentration molaire ?
Les masses atomiques molaires relatives sont respectivement égales à 32, 16, 1 pour le soufre, l'oxygène, l'hydrogène.
- c) Quels volumes de cette solution et d'eau faut-il utiliser pour préparer un litre d'acide sulfurique 6 fois molaire ?

III.2. Donner avec un chiffre significatif le pH d'une solution aqueuse d'acide chlorhydrique de concentration C_0 dans les trois cas suivants, pour une température de 25°C :

$$C_0 = 10^{-1} \text{ mol. dm}^{-3} \quad C_0 = 10^{-4} \text{ mol. dm}^{-3} \quad C_0 = 10^{-8} \text{ mol. dm}^{-3}.$$

III.3. Calculer rapidement .

- a) le pH d'une solution aqueuse d'un litre contenant 0,05 mole d'ammoniac et 0,1 mole d'acide monochloracétique,
- b) le pH d'un litre d'une solution aqueuse contenant 0,05 mole d'acide chlorhydrique, 0,05 mole de monochloracétate de sodium et 0,10 mole d'ammoniac.

On donne : pour $\text{CH}_2\text{ClCOOH}/\text{CH}_2\text{ClCOO}^-$, $\text{p}K_a = 3,75$,
pour $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$, $\text{p}K_a = 9,25$.

III.4. On verse $13,4 \text{ cm}^3$ de soude décimolaire dans 10 cm^3 d'une solution aqueuse d'acide acétique avant d'obtenir le virage de la phénolphtaléine.

- a) Quelle est la concentration molaire de la solution initiale d'acide acétique ?
- b) Préciser les couleurs des formes acide et basique de la phénolphtaléine.
- c) Justifier l'emploi de la phénolphtaléine préférentiellement à celui de l'hélianthine, qualitativement.

III.5. A 25°C , une solution aqueuse centimolaire de méthylamine est ionisée à 22,4 %. Calculer le $\text{p}K_a$ du couple méthylammonium/méthylamine.

III.6. On définit le pH

dans l'eau par la relation $\text{pH} = -\log_{10}(\text{H}_3\text{O}^+)$

dans l'ammoniac liquide par $\text{pH} = -\log_{10}(\text{NH}_4^+)$.

Comment définirait-on le pH dans l'acétate d'hydrogène CH_3COOH ?

III.7. On considère l'orthophosphate de calcium $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$.

a) Exprimer le produit de solubilité P_s en fonction des concentrations en solution aqueuse des ions Ca^{2+} et PO_4^{3-} , (Ca^{2+} et PO_4^{3-}).

b) Exprimer la solubilité s en fonction des mêmes concentrations. On donne $P_s = 10^{-26}$ à 25°C .

c) Calculer s .

III.8. Le cuivre a pour numéro atomique $Z = 29$. L'ion cuivrique Cu^{2+} donne avec la molécule NH_3 un complexe tétracoordonné.

a) Ecrire sa formule et donner son nom en nomenclature officielle actuelle.

b) Donner sa structure géométrique et l'état d'hybridation du cuivre.

c) La constante de dissociation de ce complexe (en ions Cu^{2+} et molécule NH_3) vaut 10^{-12} à 25°C . Calculer rapidement la concentration en ions cuivriques restant dans une solution qui en contenait initialement $0,005 \text{ mol. dm}^{-3}$ et à laquelle on ajoute 1 mole par litre d'ammoniac.

d) Ecrire la formule du diamino-1,2 éthane.

e) Quels sont les atomes responsables du caractère bidentale de ce ligand ?

f) Donner la formule du complexe de Cu^{2+} tétracoordonné par le diamino-1,2 éthane.

g) Ce complexe est-il plus stable que celui précédemment envisagé ?

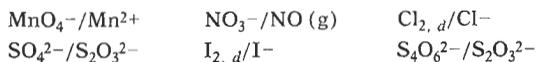
III.9. Déterminer le degré d'oxydation de l'azote dans les composés suivants :



III.10. Quel est le degré d'oxydation de l'oxygène dans le peroxyde d'hydrogène $\text{H}-\text{O}-\text{O}-\text{H}$?

III.11.

a) Ecrire les coefficients stoechiométriques des couples redox suivants en milieu acide ($d = \text{dissous}$) :



b) Ecrire la formule de Nernst pour les deux premiers couples, sachant que :

pour le premier, $E_1^0 = 1,50 \text{ V}$,

pour le second, $E_2^0 = 0,96 \text{ V}$.

III.1.2. Ecrire les réactions en solution aqueuse :

a) du dichlore dissous $\text{Cl}_{2,d}$ sur l'ion $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$,

b) du diiode dissous $\text{I}_{2,d}$ sur l'ion $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$. Quel est le nom de l'indicateur colorimétrique utilisé pour détecter la fin de la réaction ?

IV. STRUCTURE DE LA MATIERE

IV.1. Quelles sont les structures électroniques de :

a) l'atome d'oxygène (numéro atomique $Z = 8$),

b) l'atome de fer ($Z = 26$),

c) l'ion ferrique,

d) l'atome d'argent ($Z = 47$).

IV.2. Quel est l'élément qui a un numéro atomique Z compris entre 3 et 10 et qui a une réactivité chimique semblable à celle du silicium ($Z = 14$) ?

IV.3. Quels sont la place dans la classification périodique et le nom :

a) de l'élément le plus électronégatif,

b) de l'élément le moins électronégatif ?

IV.4. Le chlorure de potassium a la même structure cristalline que le chlorure de sodium. Les masses atomiques molaires relatives du chlore et du potassium valent respectivement 35,5 et 39 ; la constante d'Avogadro N_A a pour valeur $6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$; la masse volumique ρ du chlorure de potassium est égale à $1,988 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ à 15°C .

a) Quelle est, à cette température, la longueur a de l'arête de la maille élémentaire du chlorure de potassium ?

b) Quel est le rayon ionique $r(\text{K}^+)$ de l'ion potassium K^+ , sachant que le rayon ionique $r(\text{Cl}^-)$ de l'ion chlorure Cl^- est égal à $1,81 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

IV.5. La molécule de chlorure d'hydrogène HCl a un moment dipolaire $\mu_{\text{HCl}} = 1,070 \text{ D}$. On rappelle que $1 \text{ D} = 0,33 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$ et que $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Sachant que la distance internucléaire dans la molécule HCl est égale à $d = 1,31 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, calculer le pourcentage de caractère ionique de la liaison H-Cl .

IV.6. Sachant que le numéro atomique du béryllium est $Z = 4$,

a) quelle est la structure géométrique de la molécule BeH_2 ?

b) quel est l'état d'hybridation du béryllium dans cette molécule ?

IV.7.

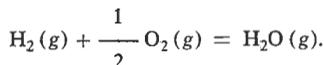
- a) Donner la structure géométrique de la molécule de fer-carbonyle $\text{Fe}(\text{CO})_5$.
- b) A quelle règle y satisfait la distribution électronique autour de l'atome de fer ?

IV.8. Quel est le type d'interaction existant entre les atomes d'argon ($Z = 18$) dans l'argon liquide ?IV.9. Justifier la possibilité d'une dimérisation de l'acide méthanoïque HCOOH . Faire un schéma simplifié représentatif du dimère.

V. THERMODYNAMIQUE CHIMIQUE

V.1. 250 g de phosphore à l'état gazeux occupent un volume de 50 dm^3 à 295 K et une pression de 1 atm (= 101 325 Pa). Sachant que la masse atomique molaire relative du phosphore vaut 31,

- a) calculer le volume qui serait occupé par cette quantité de phosphore supposé gaz parfait dans les conditions normales ;
- b) calculer le nombre d'atomes contenus dans une molécule de phosphore.

V.2. On verse 40 cm^3 d'un composé liquide « S » pur de masse molaire relative $M_r(\text{S}) = 60$ et de densité $d = 1,05$ dans 60 cm^3 d'eau ; on obtient ainsi 100 cm^3 d'une solution aqueuse. Donner la fraction molaire x_s de S dans cette solution. On considère S comme inerte vis-à-vis de l'eau.V.3. On donne l'enthalpie de formation standard de l'eau gazeuse à 298 K, $\Delta_f H^\circ_{298 \text{ K}}(\text{H}_2\text{O}, g) = -241,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ correspondant à la réaction :

- a) Calculer $\Delta_f H^\circ_{310 \text{ K}}(\text{H}_2\text{O}, g)$, sachant que les capacités calorifiques standards de l'hydrogène, de l'oxygène et de l'eau, à l'état gazeux, sont respectivement égales à $29,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$; $29,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $33,6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, dans l'intervalle de température envisagé. Comparer le résultat obtenu à la valeur pour 298 K.
- b) Déterminer l'énergie molaire E_{OH} de la liaison OH dans la molécule d'eau à l'état gazeux, sachant que les énergies molaires des liaisons HH et OO dans les molécules H_2 et O_2 sont respectivement égales à :

$$E_{\text{HH}} = -435,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$E_{\text{OO}} = -494,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

- c) Pourquoi y a-t-il une différence entre :

$$\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}, g) \quad \text{et} \quad 2 E_{\text{OH}} ?$$

V.4. On considère la dissociation thermique du carbonate de calcium

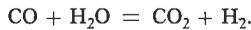


Les enthalpies et enthalpies libres de formation standards des composés en cause sont données dans le tableau suivant. On les supposera indépendantes de la température.

Composé	$\frac{\Delta_f H^\circ}{\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}}$	$\frac{\Delta_f G^\circ}{\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}}$
$\text{CO}_2(g)$	- 393,0	- 394,2
$\text{CaO}(s)$	- 635,0	- 603,6
$\text{CaCO}_3(s)$	- 1208	- 1128

- Comment s'appelle le composé CaO en nomenclature officielle et en pratique industrielle ?
- Calculer l'enthalpie standard de la réaction de dissociation du carbonate de calcium. S'agit-il d'une réaction endo ou exothermique ? La dissociation est-elle favorisée par une élévation ou une diminution de la température ?
- Calculer la constante de l'équilibre de dissociation à 25 °C ($R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$).
- Dans un récipient de volume constant, que se passe-t-il si l'on introduit, une fois l'équilibre précédent atteint :
 - du dioxyde de carbone,
 - une petite quantité de CaO,
 - de l'argon, gaz inerte vis-à-vis de tous les constituants présents.

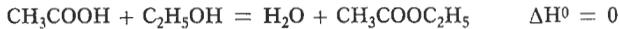
V.5. Soit l'équilibre en phase gazeuse :



Quelle est la variance

- dans le cas général,
- lorsque l'équilibre est obtenu à partir d'un mélange de monoxyde de carbone et d'eau en proportion quelconque,
- lorsque l'équilibre est obtenu à partir d'un mélange équimolaire de monoxyde de carbone et d'eau ?

V.6. On réalise à 25 °C l'estérification suivante :



à partir d'un mélange équimolaire d'éthanol et d'acide acétique. On atteint au bout d'un certain temps un état d'équilibre caractérisé par la disparition des deux tiers de l'acide initial.

- Quel serait alors l'effet d'une élévation de la température ?
- Dans quel sens se déplacerait l'équilibre si on ajoutait de l'acide acétique ?
- Calculer la constante d'équilibre à 25 °C.
- Quelles seraient les quantités des différents constituants à l'équilibre si l'on essayait de faire réagir à 25 °C une mole d'acétate d'éthyle et une mole d'eau ?

V.7. La concentration ($\text{O}_{2,d}$) de l'oxygène dissous $\text{O}_{2,d}$ dans le sang est proportionnelle à la pression $p(\text{O}_2)$ de l'oxygène gazeux en équilibre avec le sang :

$$(\text{O}_{2,d}) = kp(\text{O}_2).$$

- Comment s'appelle la loi dont on a fait ici application pour écrire la relation précédente ? Pensez-vous qu'elle soit valable quelle que soit la concentration en oxygène ?
- L'oxygène dissous se combine à l'hémoglobine Hb des globules rouges pour donner l'oxyhémoglobine HbO_2 suivant la réaction équilibrée :



dont la constante d'équilibre à 37 °C sera symbolisée par K_{c1} .

Exprimer l'avancement ξ_{eq} de la réaction à l'équilibre à 37 °C, en fonction de la pression d'oxygène en équilibre avec le sang. Tracer sommairement le graphe ξ_{eq} en fonction de $p(\text{O}_2)$. On appellera n_i la quantité d'hémoglobine présente dans le sang avant équilibre avec l'oxygène et par conséquent n_i/V la concentration en hémoglobine dans un volume V de sang.

Vérifier que la quantité d'oxyhémoglobine formée est une quantité continûment croissante de la pression d'oxygène.

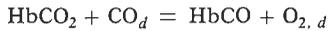
On admettra qu'à 37 °C l'hémoglobine est pratiquement totalement transformée en oxyhémoglobine lorsque $p(\text{O}_2) = 0,2$ atm.

- Le monoxyde de carbone dissous CO_d se combine à l'hémoglobine des globules rouges suivant la réaction équilibrée :



à laquelle correspond une constante d'équilibre K_{c2} à 37 °C. Nommer HbCO.

d) Calculer à 37 °C la constante K de l'équilibre :



en fonction de K_{c1} et de K_{c2} .

e) On donne $K = 210$ et l'on admettra que la concentration du monoxyde de carbone dissous (CO_d) est proportionnelle à la pression $p(\text{CO})$ du monoxyde de carbone gazeux en équilibre avec le sang,

$$(\text{CO}_d) = kp(\text{CO})$$

avec le même coefficient de proportionnalité k que pour l'oxygène dissous.

La pression partielle de l'oxygène étant égale à 0,2 atm, calculer la pression partielle en monoxyde de carbone $p(\text{CO})$ qui conduit à une diminution de 50 % de la concentration en oxyhémoglobine du sang.

SOLUTION

I. CHIMIE ORGANIQUE

I.1. Le carbure d'aluminium Al_4C_3 fournit CH_4 par hydrolyse.

I.2.

- a) Les produits sont CH_3Cl , CH_2Cl_2 , $CHCl_3$, CCl_4 , HCl .
 b) $Cl_2 \rightarrow 2 Cl$. L'initiation nécessite habituellement photons ou apport thermique.

I.3.

- a) Méthyl-2 propane, encore appelé isobutane dans l'industrie.
 b) $CH_3C(CH_3)_2Br$ nommé bromo-2 méthyl-2 propane. Ce produit unique passe par l'intermédiaire du radical t-butyle stable (par comparaison à des radicaux secondaires ou primaires).

I.4.

- a) $CH_3CH = CH_2$.
 b) $-CH_2CH(CH_3)-$.
 c) Les catalyseurs de Ziegler-Natta permettent la fabrication du polymère isotactique, ce qui autorise le moulage du polypropène.

I.5. $CH_3CHBrCH_3$, nommé bromo-2 propane.

I.6. Habituellement, le réactif électrophile se fixe sur le carbone le plus riche en hydrogène, le réactif nucléophile se fixant sur le deuxième carbone de la double liaison.

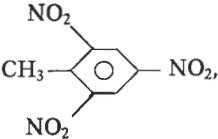
I.7. CH_2ClCH_2OH appelé chloro-2 éthanol-1.

I.8. $CH_3CH_2CH_2CH_2Br$ nommé bromo-1 butane.

I.9. $HOCH_2CH_2OH$ nommé éthanediol-1,2 (ou glycol).

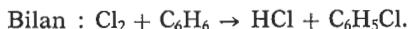
I.10. CH_3CHO nommé éthanol, produit en milieu sulfurique en présence d'ions mercuriques.

I.11. L'ion réactif est $Cu(NH_3)_2^+$, le diamminecuivre (I); le produit est $CuC \equiv CCu$, qui est instable à sec.

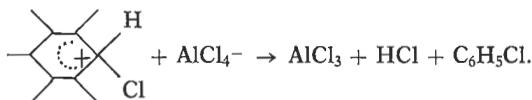
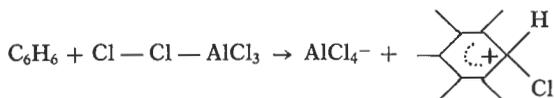
I.12. A est $C_6H_5CH_3$, le toluène; B est  le trinitro-2,4,6 toluène (T.N.T.).

I.13. Il s'agit d'une bombe ayant un pouvoir de destruction égal à celui de 1 kt de T.N.T., explosif de référence.

I.14.

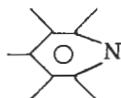


Mécanisme :

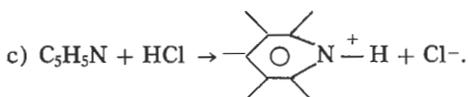


I.15.

a)



b) Ce sont des propriétés basiques et nucléophiles.



d) Chlorure de pyridinium.

I.16.

- On obtient l'éthanoate de butyle.
- On obtient l'éthanoate de sec-butyle.
- On obtient l'éthanoate de tertibutyle.
- La réaction *a* produit davantage d'ester que la réaction *b* qui en produit davantage que la réaction *c*.

I.17. A est l'éthylène ; B est l'éthanol, tout comme C.

I.18.

- On peut envisager la double éthylation de l'éthylamine par le chloroéthane.
- Ces substitutions successives permettent l'obtention de l'hydroxyde de tétraéthylammonium .

- c) La décomposition de l'ammonium quaternaire donne éthylène et triéthylamine.

I.19. Il s'agit du test caractérisant aldéhydes et cétones. Le précipité rouge ou jaune de dinitro-2,4 phénylhydrazone possède une température de fusion caractéristique, mesurable au banc Kofler.

I.20.

- a) $C_6H_5\dot{C}HOHCOOH$.
- b) $CH_3COCO\dot{O}H$; aucun carbone asymétrique.
- c) $CH_3\dot{C}HOHCOOH$.
- d) Une molécule possédant un (et un seul) carbone asymétrique possède deux isomères optiques, qui ont des pouvoirs rotatoires opposés.

I.21.

$$a) \quad K_{a_1} = \frac{(NH_2 CH_2 CO_2H) (H^+)}{(+NH_3 CH_2 CO_2H)} ;$$

$$K_{a_2} = \frac{(NH_2 CH_2 CO_2^-) (H^+)}{(NH_2 CH_2 CO_2H)} .$$

- b) On exprime l'électroneutralité en négligeant les espèces minoritaires :

$$(NH_2 CH_2 CO_2^-) = (+NH_3 CH_2 CO_2 H) .$$

- c) En formant le produit $K_{a_1} K_{a_2}$, on obtient :

$$pH = \frac{1}{2} (pK_{a_1} + pK_{a_2}) = 6,10 .$$

$$d) \alpha) pH_1 = \frac{1}{2} (pK_{a_1} + pc) = 1,70 .$$

$$\beta) pH_2 = \frac{1}{2} (pK_i + pK_{a_2} - pc) = 11,4 .$$

$$\gamma) pH_3 = \frac{1}{2} (pK_{a_1} + pK_{a_2}) = 6,10 .$$

II. CINETIQUE

II.1.

a) α) $P_f = 150$ torrs, car à la fin on a trois moles pour deux moles initiales.

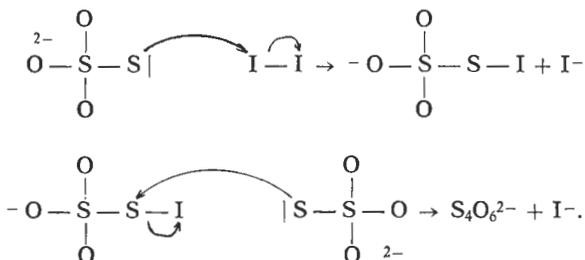
β) La lecture du tableau donne $\tau = 53$ min.

b) Le calcul donne les temps de demi-réactions associés aux pressions initiales :

$$\frac{\tau'}{\tau} = \left(\frac{p_0}{p'_0} \right)^{\alpha-1} \quad \text{d'où} \quad \alpha = 1 + \frac{\log(\tau'/\tau)}{\log(p_0/p'_0)} \simeq 1.$$

II.2.

a) $S_2O_3^{2-}$ est nucléophile dans les deux étapes :



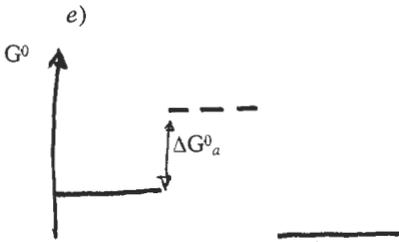
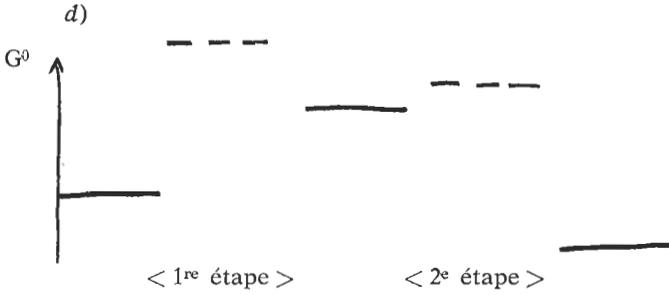
b) La première étape impose sa vitesse.

c) Appliquons le principe de Bodenstein à l'intermédiaire $S_2O_3I^-$:

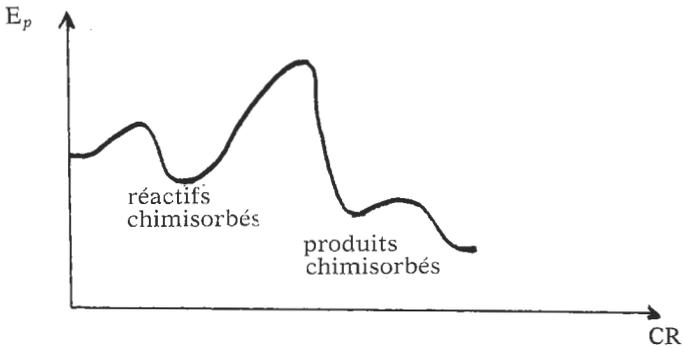
$$\frac{d}{dt} (S_2O_3I^-) = 0 = k_1(I_2)(S_2O_3^{2-}) - k_2(S_2O_3I^-)(S_2O_3^{2-})$$

or :

$$v = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (S_2O_3^{2-}) = \frac{1}{2} [k_1(I_2)(S_2O_3^{2-}) + \dots \\ \dots k_2(S_2O_3I^-)(S_2O_3^{2-})] = k_1(I_2)(S_2O_3^{2-}).$$



II.3.



III. SOLUTIONS AQUEUSES

III.1.

a) $(m) = \rho X_m = 1,530 \text{ kg dm}^{-3}$.

b) $(\text{H}_2\text{SO}_4) = \frac{m}{M} = 15,6 \text{ mol. dm}^{-3}$.

c) Si on note v_1 le volume d'eau et v_2 le volume de la solution initiale, on a :

$$v_1 + v_2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{v_2}{v_1 + v_2} (\text{H}_2\text{SO}_4) = 6.$$

On trouve : $v_1 = 0,62 \text{ dm}^3$; $v_2 = 0,38 \text{ dm}^3$.

III.2.

- a) $\text{pH}_1 = 1.$
- b) $\text{pH}_2 = 4.$
- c) $\text{pH}_3 = 7.$

III.3.

- a) On a une solution tampon $\text{pH} = \text{pK}_{a_1} = 3,75.$
- b) Il s'agit d'une autre solution tampon $\text{pH} = \text{pK}_{a_2} = 9,25.$

III.4.

- a) $c_1 = \frac{c_2 v_2}{v_1} = 0,134 \text{ mol. dm}^{-3}.$
- b) Pour simplifier, la forme acide est incolore ; la forme basique est violette.
- c) Le volume versé lors du virage (pH voisin de 9) est beaucoup plus voisin du volume nécessaire à l'équivalence que le volume versé lors du virage de l'hélianthine (pH voisin de 3,5) si on l'utilisait.

III.5. $\text{CH}_3\text{NH}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{CH}_3\text{NH}_3^+ + \text{OH}^-$; le bilan molaire à l'équilibre est :

$$K_a = \frac{c(1-\alpha)(\text{H}_3\text{O}^+)}{(\text{CH}_3\text{NH}_3^+)} = \frac{c\alpha}{(\text{CH}_3\text{NH}_3^+)} \frac{c\alpha}{(\text{OH}^-)} = \frac{1-\alpha}{c\alpha^2} K_i$$

$\text{pK}_a = 10,8.$

III.6. Par analogie formelle, $\text{pH} = -\log_{10} (\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}_2^+).$

III.7.

- a) $\text{P}_S = (\text{Ca}^{2+})^3 (\text{PO}_4^{3-})^2.$
- b) $s = \frac{1}{2} (\text{PO}_4^{3-}) = \frac{1}{3} (\text{Ca}^{2+}).$
- c) $s = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ mol. dm}^{-3}.$

III.8.

- a) $\text{Cu} (\text{NH}_3)_4^{2+}$ nommé tétramminecuire (II).
- b) Le complexe a une structure plan carrée compatible avec avec l'hybridation $d \text{ sp}^2.$

c) — la constante de dissociation :

$$K = 10^{-12} = \frac{(\text{Cu}^{2+})(\text{NH}_3)^4}{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}]}$$

— la conservation de l'élément cuivre donne :

$$(\text{Cu}^{2+}) + [\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}] = 5 \cdot 10^{-3};$$

— la conservation de NH_3 donne :

$$(\text{NH}_3) + 4 [\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}] = 1.$$

L'excès de NH_3 par rapport aux autres constituants permet de simplifier et d'obtenir :

$$(\text{Cu}^{2+}) = 5 \cdot 10^{-15} \text{ mol. dm}^{-3}.$$

d) $\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{NH}_2$.

e) Les deux atomes d'azote assurent le caractère bidentate de ce ligand par leurs doublets.

f) $\text{Cu}(\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{NH}_2)_2^{2+}$.

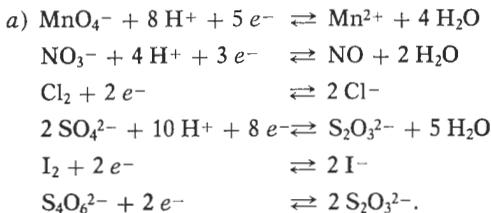
g) Ce dernier composé est le plus stable ; la comparaison des entropies permet de l'affirmer.

III.9.

	NH_3	NH_4^+	NO	NO_2	HNO_2	HNO_3
DO	— III	— III	+ II	+ IV	+ III	+ V

III.10. La symétrie dans la répartition des électrons permet de trouver un DO = — I.

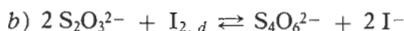
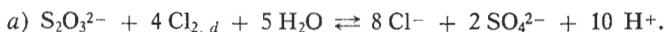
III.11.



$$b) E_1 = 1,50 + \frac{0,059}{5} \log_{10} \frac{(\text{MnO}_4^-)(\text{H}^+)^8}{(\text{Mn}^{2+})}$$

$$E_2 = 0,96 + \frac{0,059}{3} \log_{10} \frac{(\text{NO}_3^-)(\text{H}^+)^4}{P_{\text{NO}}}$$

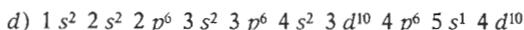
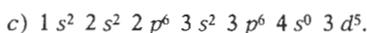
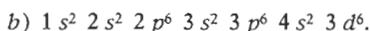
III.12.



l'empois d'amidon est l'indicateur colorimétrique usuel pour détecter la fin de la réaction.

IV. STRUCTURE DE LA MATIERE

IV.1.



anomalie de la structure électronique par rapport à la règle de Klechkovski.

IV.2. Le carbone C pour lequel $Z = 6$.

IV.3. Le fluor F de $Z = 9$.

Le césium Cs de $Z = 55$.

IV.4.

a) L'analyse de la structure donne :

$$\varrho = \frac{4}{a^3} \frac{(39 + 35,5) 10^{-3}}{N_A}$$

$$\text{d'où : } a = \left[(39 + 35,5) \frac{10^{-3}}{\varrho N_A} \right]^{1/3} = 6,28 \cdot 10^{-10} \text{ m.}$$

b) Or :

$$a = 2r_{(\text{K}^+)} + 2r_{(\text{Cl}^-)}$$

$$r_{(\text{K}^+)} = 1,33 \cdot 10^{-10} \text{ m.}$$

IV.5.

$$x = \frac{\mu_{\text{HCl}}}{ed} = 0,17 = 17 \%$$

IV.6.

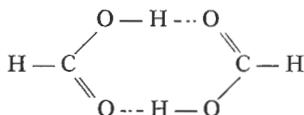
- a) La structure de BeH_2 est linéaire.
 b) *sp.*.

IV.7.

- a) Fe est au centre d'un hexaèdre dont les 5 sommets sont occupés par CO.
 b) L'atome de fer se trouve avec la même distribution électronique que le krypton Kr, gaz rare de la même ligne du tableau périodique ; c'est la règle de stabilité de Sigdwick.

IV.8. L'existence de l'argon liquide est due aux forces de Van der Waals (*cf.* étude de London sur les dipôles induits).

IV.9. Les liaisons hydrogènes permettent de comprendre l'existence du dimère :



V. THERMODYNAMIQUE CHIMIQUE

V.1.

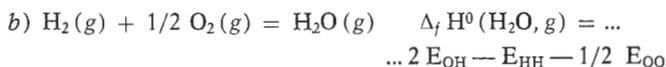
$$a) V_0 = V \frac{T_0}{T} = 46,2 \text{ dm}^3.$$

$$b) n = \frac{PV}{RT} = 2,06 ; \quad x = \frac{m}{31n} = 4.$$

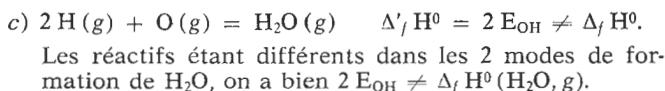
$$\left. \begin{array}{l}
 \text{V.2. } n_S = \frac{d \times 40}{M_r(S)} = 0,70 \\
 n_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{1 \times 60}{M_r(\text{H}_2\text{O})} = 3,33
 \end{array} \right\} x_S = \frac{n_S}{n_S + n_{\text{H}_2\text{O}}} = 0,17 = 17 \%.$$

V.3.

$$\begin{aligned}
 a) \Delta_f H_{310}^0 &= \Delta_f H_{298}^0 + (T_{310} - T_{298})(C_{p\text{H}_2\text{O}}^0 - C_{p\text{H}_2}^0 - \frac{1}{2} C_{p\text{O}_2}^0) \\
 &= -241,7 \text{ kJ mol}^{-1} ; \text{ l'écart entre les deux valeurs est } \\
 &\text{négligeable.}
 \end{aligned}$$

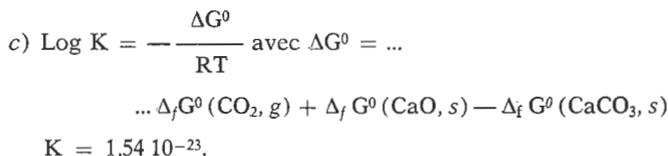
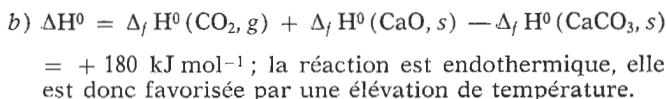


$$\text{d'où} : E_{\text{OH}} = \frac{1}{2} \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}, g) - \frac{1}{2} E_{\text{HH}} - \frac{1}{4} E_{\text{OO}} \\ = -462,2 \text{ kJ mol}^{-1}.$$



V.4.

a) L'oxyde de calcium, encore appelé chaux vive.



d) α) On favorise la formation de $\text{CaCO}_3(s)$.

β) On ne favorise aucune transformation car $p_{\text{CO}_2} = K$.

γ) De même.

V.2.

$$v = n - r - m + 2 - \varphi.$$

a) $m = 0$; ici $v = 4 - 1 + 1 - 1 = 3$ car ici la pression n'est pas un facteur de l'équilibre.

b) $m = 1$; $p_{\text{H}_2} = p_{\text{CO}_2}$ d'où $v = 2$.

c) $m = 2$; $p_{\text{H}_2} = p_{\text{CO}_2}$ et $p_{\text{CO}} = p_{\text{H}_2\text{O}}$ d'où $v = 1$.

V.6.

a) La réaction étant athermique, l'élévation de température n'a aucun effet.

b) L'équilibre se déplacerait dans le sens de la disparition de l'acide.

c) $K = 4$.

d) On retrouve le même équilibre après une attente.

V.7.

a) Il s'agit de la loi de Henry, valable pour les faibles concentrations en oxygène.

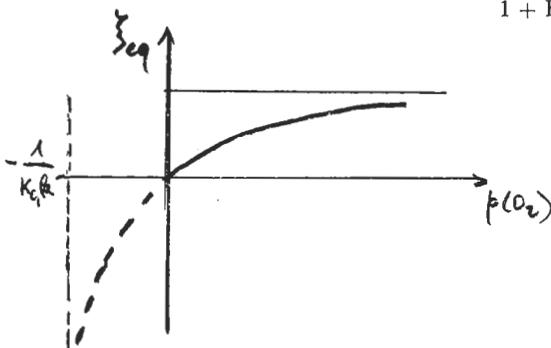
b)



$$\begin{array}{l} t_i \quad C \quad \quad \quad \text{O} \quad \quad \quad \text{O} \\ t_f \quad C(1 - \xi_{eq}) \quad \text{O}_{2,d_{eq}} \quad C\xi_{eq} \end{array} \quad \text{avec} \quad c = \frac{n_i}{V}$$

$$\text{On a : } K_{C1} = \frac{\xi_{eq}}{(1 - \xi_{eq}) k p_{(\text{O}_2)}} \quad \text{d'où :}$$

$$\xi_{eq} = \frac{K_{C1} k p_{(\text{O}_2)}}{1 + K_{C1} k p_{(\text{O}_2)}}$$



Le graphe est une hyperbole croissante car :

$$\frac{d\xi}{dp_{(\text{O}_2)}} = \frac{\xi(1 - \xi)}{p_{(\text{O}_2)}} > 0.$$

c) HbCO est la carboxyhémoglobine.

$$d) K = \frac{K_{C2}}{K_{C1}}$$

$$e) K = \frac{(\text{HbCO}) k p_{(\text{O}_2)}}{(\text{HbO}_2) k p_{(\text{CO})}} \quad \text{or} \quad (\text{HbCO}) + (\text{HbO}_2) = (\text{Hb})_0,$$

$$\text{soit : } (\text{HbO}_2) = \frac{(\text{Hb})_0}{2} = (\text{HbCO}).$$

$$K = \frac{p(\text{O}_2)}{p(\text{CO})} \quad \text{d'où} \quad p(\text{CO}) = \frac{p(\text{O}_2)}{K} = 0,00095 \text{ atm.}$$

Une faible pression de CO entraîne une forte diminution de l'oxyhémoglobine du sang.

S. SAVINEAU,
(*Salon-de-Provence*).

C.A.P.E.S.

SESSION DE 1985

COMPOSITION D'ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE AVEC APPLICATIONS

(Durée : 4 heures)

Les candidats devront remettre avec leurs copies les feuillets comportant les figures 2, 3, 4, 5 et 7.

Les parties A et B sont très largement indépendantes.

Les candidats doivent indiquer sur leur copie la numérotation exacte des questions traitées et respecter les notations de l'énoncé.

Il sera tenu le plus grand compte des qualités d'exposition et de soin.

A. ETUDE DE LA TENSION REDRESSEE A LA SORTIE D'UN MONTAGE EN PONT

Un transformateur triphasé alimente un pont de diodes associé à un récepteur fortement inductif. Le montage correspond au schéma de la fig. 1, où le transformateur est représenté par le modèle de THÉVENIN comprenant :

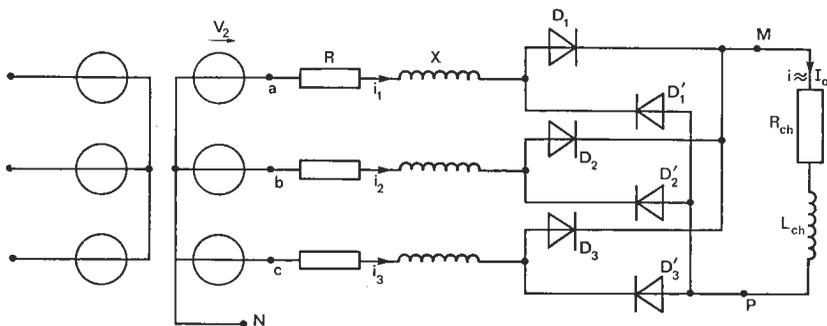


Fig. 1

— Trois sources de tension sinusoïdale, de fréquence f , de valeur efficace V_2 , qui forment un système triphasé à succession directe dans l'ordre a, b, c ;

- Les impédances ramenées au secondaire par colonne, de résistance R et de réactance X , à la pulsation $\omega = 2\pi f$;
- $V_2 = 127 \text{ V}$; $f = 50 \text{ Hz}$.

A.I. Dans une première étude, les diodes sont considérées comme parfaites et on néglige la résistance R et la réactance X .

A.I.1. Calculer la valeur moyenne de la tension redressée, notée $S_0 = (V_{MP})$ moyen.

A.I.2. Quelle inégalité les grandeurs L_{ch} , R_{ch} et ω doivent-elles satisfaire pour que l'intensité $i(t)$ du courant circulant dans la charge soit assimilable à l'intensité constante I_0 ?

A.I.3. On se place dans le cas où $i(t) = I_0$.

a) Dessiner sur la fig. 2 le graphe de la fonction $i_{D1}(t)$, intensité du courant traversant la diode $D1$.

Calculer sa valeur moyenne I_{D0} et sa valeur efficace I_D .

b) Dessiner sur la fig. 3 le graphe de la fonction $i_1(t)$, intensité du courant dans l'un des enroulements secondaires du transformateur.

Calculer sa valeur moyenne I_{I0} et sa valeur efficace I_I .

A.II. Nous allons maintenant calculer les chutes de tension moyenne dues au fait que les éléments du montage ne sont pas parfaits. Nous nous intéresserons successivement à l'influence des diodes, de R et de X ; les calculs seront conduits en supposant que chacune de ces influences est indépendante des deux autres.

Pour toutes les applications numériques : $I_0 = 20 \text{ A}$.

A.II.1. La caractéristique courant-tension d'un redresseur à l'état passant est modélisée sous la forme :

$$V_{AK} = V_s + r_d \cdot I_{AK}$$

avec $V_s = 1,0 \text{ V}$ et $r_d = 0,03 \Omega$.

Donner la signification physique de V_s et r_d .

Dessiner le schéma électrique équivalent du redresseur.

Calculer la perte de puissance ΔP_D dans le pont.

Calculer la diminution moyenne ΔV_D qui en résulte pour la tension aux bornes de la charge.

Application numérique.

A.II.2. Exprimer les pertes par effet Joule dans le transformateur. Ces pertes sont notées ΔP_J .

Exprimer la baisse moyenne correspondante ΔV_R de la tension aux bornes de la charge; montrer que l'on peut faire l'identification $\Delta P_J = \Delta V_R \cdot I_0$.

A.II.3. La réactance X est responsable du phénomène d'empatement anodique.

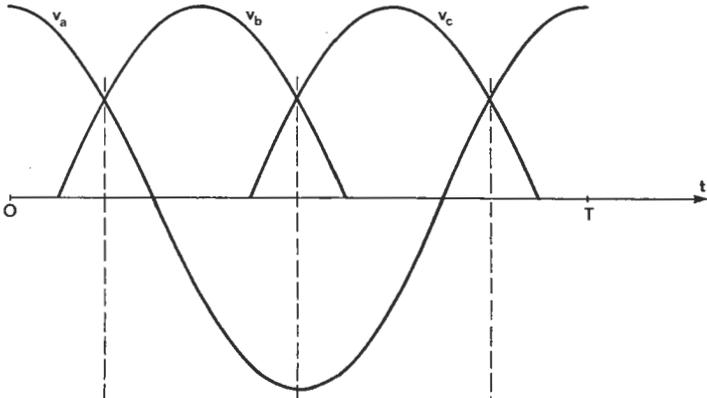


Figure 2

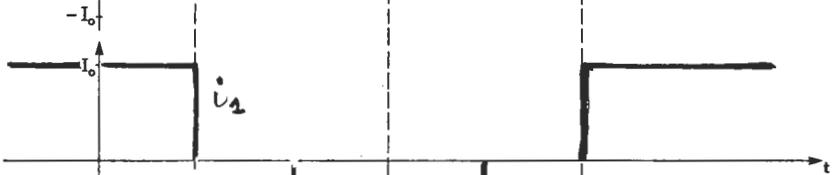


Figure 3

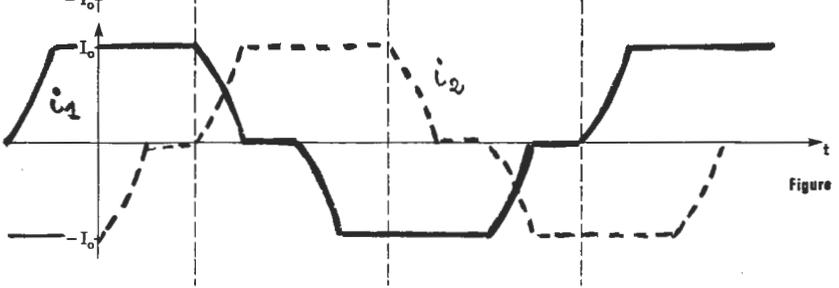


Figure 4

Décrire la commutation entre les diodes D 1 et D 2, en se limitant au cas où la valeur α_L de l'angle d'empiètement est inférieure à 60° .

Pour $\alpha_L = 30^\circ$:

- placer sur la fig. 4 les graphes des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$;
- placer sur la fig. 5 les graphes des tensions $v_{MN}(t)$ et $v_{MP}(t)$.

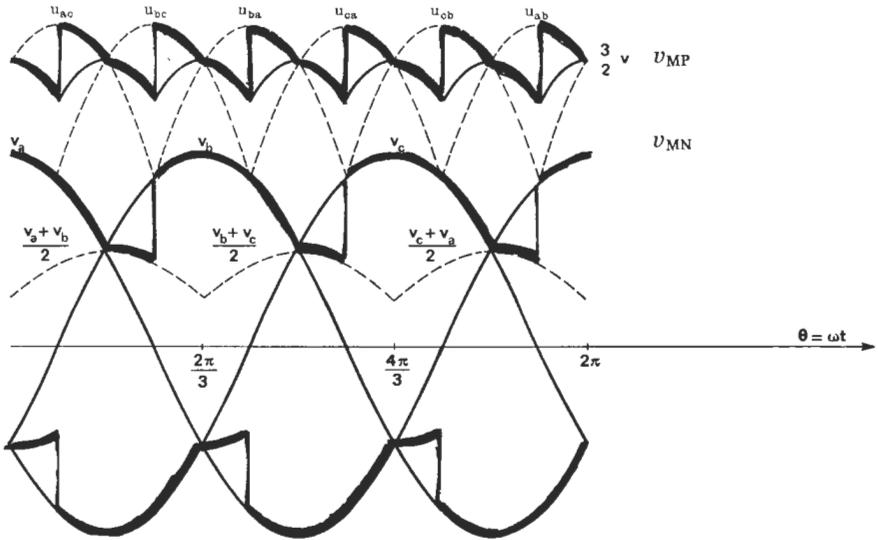


Fig. 5

Montrer que l'angle α_L est donné par la relation :

$$1 - \cos \alpha_L = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{XI_0}{V_2}}$$

Montrer que la tension moyenne aux bornes de la charge est diminuée de $\Delta V_L = \frac{3}{\pi} XI_0$.

Peut-on parler de perte de puissance active ?

A.II.4. Nous admettons que les quantités ΔV_R , ΔV_L et ΔV_D s'ajoutent indépendamment pour contribuer à la chute totale de tension.

La tension moyenne effectivement mesurée est $V_3 = (V_{MP})$ moyen. Montrer que :

$$V_0 = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} V_2 - 2 V_s - (2 r_d + 2 R + \frac{3}{\pi} X) I_0.$$

Donner le schéma de THÉVENIN correspondant.

A.III. Les diodes sont remplacées par des thyristors. On appelle δ leur angle de retard à l'amorçage par rapport à la commutation naturelle.

A même valeur de l'intensité I_0 , y a-t-il modification des chutes de tension ?

Montrer que $S_0 = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} V_2 \cos \delta.$

B. CASCADE HYPOSYNCHRONÉ

Le montage représenté sur la fig. 6 comprend :

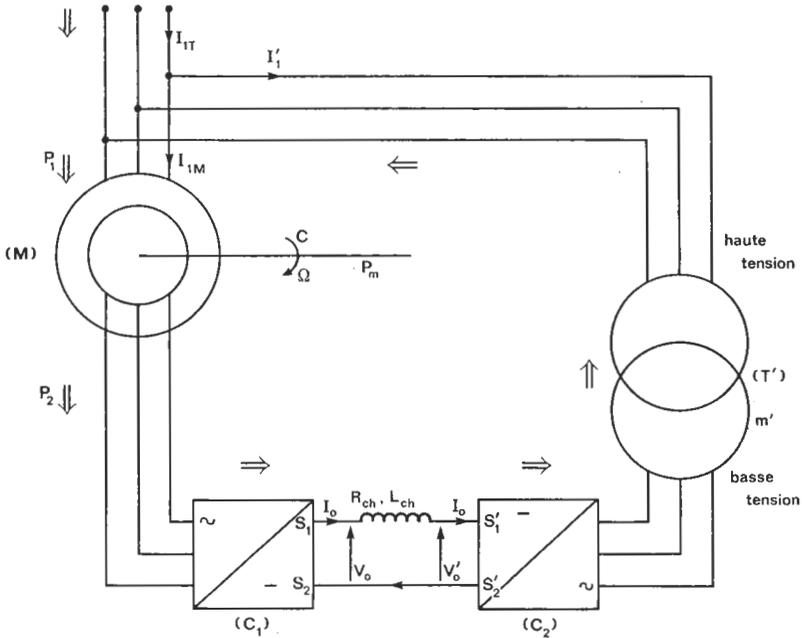


Fig. 6

- le réseau d'alimentation triphasé de fréquence $f = 50$ Hz et de valeur efficace V_1 en tension simple ;
- un moteur asynchrone triphasé (M), auquel se rapportent : P_1 , puissance électrique absorbée,

P_m , puissance mécanique fournie,

m , rapport de transformation, obtenu dans l'essai rotor calé en circuit ouvert,

p , nombre de paires de pôles,

R_1, R_2 , résistance de chaque enroulement statorique et rotorique,

L_2 , inductance équivalente côté rotor, intervenant lors de la commutation des diodes ;

- un pont redresseur (C_1) à six diodes ; la caractéristique directe d'une diode est donnée par $V_{AK} = V_s + r_d \cdot I_{AK}$;
- un pont à six thyristors (C_2) ; la caractéristique directe d'un thyristor amorcé est donnée par $V_{AK} = V'_s + r'_d \cdot I_{AK}$;
- un transformateur (T') caractérisé par :
 $m' < 1$, rapport de transformation,
 R' , résistance ramenée par colonne côté basse tension,
 X' , réactance de fuites ramenée par colonne côté basse tension, à la pulsation ω .

L'intérêt du montage est de mettre en jeu une puissance rotorique importante et de la restituer presque intégralement au réseau.

Les doubles flèches donnent le sens du transfert de la puissance.

B.I.1. Justifier que les enroulements rotoriques se comportent comme une source triphasée de tensions :

- de valeur efficace $V_2 = gmV_1$
 - de résistance interne $R = R_2 + gR_1m^2$
 - de réactance interne $X = g\omega L_2$
- g désigne le glissement du moteur.

B.I.2. Indiquer si les points S_1, S'_1, S_2, S'_2 sont reliés à un groupement anode commune ou à un groupement cathode commune, sachant que I_0 est positif.

B.I.3. Préciser le rôle de (C_1), puis celui de (C_2).

Quelle est la conversion réalisée par l'ensemble ($C_1 - C_2$) ?

Pourquoi l'inductance L_{ch} est-elle nécessaire ?

B.II. Etude en fonctionnement idéalisé. On néglige les chutes de tension et les pertes de puissance.

B.II.1. Montrer que le rendement du moteur vaut $1 - g$.

Que vaut le rendement de l'ensemble du montage ?

B.II.2. Comparer les tensions moyennes $S_0 = (V_{S_1 S_2})$ moyen et $S'_0 = (V_{S'_1 S'_2})$ moyen.

En déduire une relation entre g, m, m' et l'angle δ défini en A.III.

B.II.3. Quelles sont les limites théoriques de g et δ ?

Citer les contraintes technologiques qui obligent à modifier ces limites.

B.III. On tient compte maintenant des pertes. On désigne par p_M les pertes mécaniques de (M), par p_F et p'_F les pertes dans le fer de (M) et (T') respectivement.

B.III.1. En utilisant la relation du A.II.4, donner, en fonction de I_0 et de V_1 :

- la tension moyenne V_0 à la sortie du pont de diodes ;
- la tension moyenne V'_0 à l'entrée du pont de thyristors.

B.III.2. En déduire la relation (1) :

$$\frac{3\sqrt{6}}{\pi} V_1 (gm + m' \cos \delta) = A + (\lambda + \mu g) I_0$$

A, λ et μ sont des constantes que l'on déterminera par identification.

B.III.3. Exprimer en fonction de I_0 la somme p_{CA} de toutes les pertes électriques de la cascade, du rotor de (M) jusqu'à (T').

Donner l'expression du rendement global en fonction de P_1 , p_{CA} , p_M , p_F , p'_F et g .

B.III.4. Comparer qualitativement, en fonctionnement industriel, les valeurs possibles du glissement et les rendements pour :

- le moteur seul avec rotor en court-circuit,
- le moteur avec rhéostat de glissement,
- la cascade hyposynchrone.

Conclure.

B.IV. Etude du couple.

B.IV.1. Donner l'expression du couple moteur C_m en fonction de l'intensité I_0 et de V_1 , en l'absence de toutes pertes (voir B.II).

B.IV.2. En négligeant les pertes mais en tenant compte de l'empiètement anodique, exprimer la puissance mise en jeu dans le circuit rotorique :

- en fonction de S_0 , I_0 et ΔV_L ;
- en fonction de C_m et g .

En déduire par identification les coefficients α et β apparaissant dans la relation (2) :

$$C_m = \alpha I_0 - \beta I_0^2.$$

Comment s'appelle la courbe représentative de la fonction que l'on obtiendrait en éliminant I_0 entre les relations (1) et (2) ?

B.IV.3. Fonctionnement à couple C fixé. On reprend les hypothèses simplificatrices du paragraphe B.II.

a) Justifier que la valeur de C impose celle de l'intensité I_0 .

b) Démontrer que les composantes fondamentales des courants rotoriques de (M) et des courants dans l'enroulement basse tension de (T') ont même valeur efficace :

$$I_F = I'_F = 0,78 I_0.$$

c) Démontrer que, pour un enroulement de (T'), le déphasage entre la composante à 50 Hz du courant et la tension vaut $\phi = \delta$.

B.IV.4. On se sert du diagramme du cercle simplifié tracé fig. 7. Le moteur fournit un couple constant $C = 400$ N.m. Le déclenchement des thyristors est réglé à $\delta = 135^\circ$. Les rapports de transformations valent respectivement $m = 0,8$ et $m' = 0,4$.

Placer, sur la fig. 7, les vecteurs :

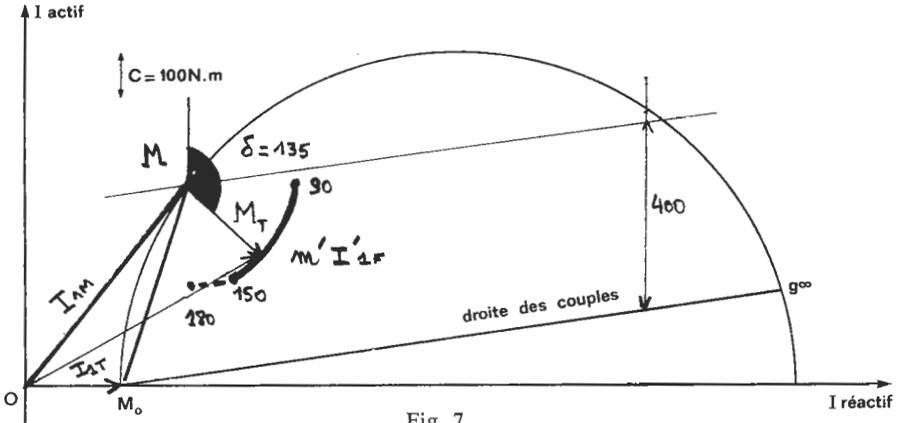


Fig. 7

$I_M = \mathbf{OM}$, courant absorbé par le moteur ;

$I_T = \mathbf{OM}_T$, courant fourni par le réseau.

Quel est l'ensemble géométrique décrit par le point M_T , quand δ varie entre 90° et 150° ? Comparer le facteur de puissance de la cascade et celui du moteur. Conclure.

B.V. Asservissement de vitesse.

B.V.1. δ étant limité à 150° , comment choisir m et m' pour que le démarrage du moteur ait lieu sans problème particulier ?

B.V.2. Donner le schéma synoptique d'un asservissement de vitesse, comportant de plus une limitation de l'intensité I_0 .

B.V.3. Fournir des exemples de capteurs à utiliser. Proposer une structure pour le déclenchement des thyristors.

B.V.4. Quels sont les inconvénients de la cascade hyposynchrone au cours de régimes transitoires ?

SOLUTION

A. ETUDE DE LA TENSION REDRESSEE A LA SORTIE D'UN MONTAGE EN PONT

A.I.

A.I.1. Le récepteur est un dipôle passif de nature inductive ; il sera traversé en permanence par un courant. Appliquons la formule du redressement polyphasé avec ici $m = 6$ ordre de l'ondulation, et $\hat{U} = (V_2\sqrt{3})\sqrt{2} = V_2\sqrt{6}$: amplitude de la tension redressée. On obtient :

$$S_0 = \hat{U} \frac{\sin \pi/m}{\pi/m} = \frac{3}{\pi} \sqrt{6} V_2 = 297 \text{ volts.}$$

Un calcul direct est également possible : intégration d'une tension composée sur un intervalle de 60° .

A.I.2. Il faut $L_{ch} \omega \gg R_{ch}$.

En effet, seule R_{ch} limite l'intensité moyenne, alors que l'ondulation de courant est fixée par $Z \approx 6L\omega$ (théorème de superposition).

A.I.3. $I_{D0} = I_0/3$; $I_D = I_0/\sqrt{3}$ (fig. 2).

Il s'agit d'une fonction créneau, positive, de rapport cyclique $1/3$,

$$I_{10} = 0 ; I_1 = I_0\sqrt{2/3} \text{ (fig. 3).}$$

Il s'agit d'une fonction créneau, alternative, de rapport cyclique $2/3$.

A.II.

A.II.1.

V_s : tension de seuil d'une diode,

R_d : résistance dynamique (ou différentielle) à l'état passant.

Il faut placer la résistance R_d en série avec une f.c.é.m. V_s .

A tout instant, il y a deux redresseurs en service, donc :

$$\Delta V_D = 2(V_s + R_d I_0),$$

$$\Delta P_D = \Delta V_D \cdot I_0.$$

Numériquement, on trouve : 64 W et 3,2 V.

Autre raisonnement :

$$p = v_{AK} i_{AK} \text{ et } \Delta P = \int p dt$$

$$\Delta P = V_s I_{D0} + R_d I_D^2 \text{ par redresseur,}$$

$$\Delta P_D = 6 \left(V_s \cdot \frac{I_0}{3} + R_d \frac{I_0^2}{3} \right).$$

A.II.2. Calculons l'effet Joule total dans le transformateur,

$$\Delta P_J = 3(R_1 m^2 + R_2) I_{eff}^2 = 3R I_0^2 (2/3) = 2R I_0^2.$$

L'identification $\Delta P_J = \Delta V_R \cdot I_0$ conduit à $\Delta V_R = 2R I_0$.

Autre raisonnement : le trajet du courant emprunte toujours deux enroulements primaires et deux enroulements secondaires ; les chutes ohmiques s'ajoutent (il faut « transformer » la chute au primaire) :

$$\Delta V_R = 2R_2 I_0 + m^2 2(R_1 m I_0) = 2(R_2 + R_1 m^2) I_0.$$

A.II.3. Pour $\pi/3 < \theta < \pi/3 + \alpha_L$, remplaçons les deux diodes par un court-circuit ; pour chaque enroulement concerné, écrivons la loi d'Ohm :

$$v_1 - X \frac{di_1}{d\theta} = v_M ; \quad v_2 - X \frac{di_2}{d\theta} = v_M$$

comme $I_0 = \text{cte}$, $\frac{di_1}{d\theta} + \frac{di_2}{d\theta} = 0$, d'où $v_M = (v_1 + v_2)/2$ quand deux diodes conduisent.

Cherchons l'évolution du courant :

$$X \frac{di_2}{d\theta} = \frac{v_2 - v_1}{2} = V_2 \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) ;$$

posons $\theta = \frac{\pi}{3} + \alpha$; $X i_2(\alpha) = V_2 \sqrt{\frac{3}{2}} (1 - \cos \alpha)$ d'où la concavité (fig. 4) avec $i_1(\alpha) = I_0 - i_2(\alpha)$ pendant la commutation (fig. 4).

La commutation se termine pour $\alpha = \alpha_L$.

$$X I_0 = V_2 \sqrt{\frac{3}{2}} (1 - \cos \alpha_L).$$

La tension redressée est donnée en valeur instantanée (fig. 5).

Il y a perte de tension moyenne à cause de la modification du graphe de la tension redressée, sans perte de puissance active :

$$\Delta V_L \cdot \frac{2\pi}{6} = \int \left(v_1 - \frac{v_1 + v_2}{2} \right) d\theta = \int \frac{v_1 - v_2}{2} d\theta$$

(car il y a empiètement tous les $T/6$ dans ce montage en pont) :

$$\Delta V_L \cdot \frac{\pi}{3} = X \int \frac{di_2}{d\theta} d\theta = X I_0.$$

A.III. Pas de modification des chutes de tension, à même valeur du courant dans le récepteur.

Calculons la tension moyenne redressée, par exemple directement :

$$S_0 = 2 \frac{1}{2\pi/3} \int_{-\pi/3+\delta}^{\pi/3+\delta} V_2 \sqrt{2} \cos \theta d\theta$$

$$S_0 = \frac{3}{\pi} \sqrt{6} V_2 \cos \delta.$$

On peut aussi faire la remarque qu'en débit ininterrompu, la tension moyenne est multipliée par $\cos \delta$ quand on passe d'un montage tout diodes au montage homologue tout thyristors.

B. CASCADE HYPOSYNCHRONNE

B.I.

B.I.1. Voir annexe : en ce qui concerne les grandeurs électriques, le moteur asynchrone est à la fois transformateur et changeur de fréquence.

Pour les tensions rotoriques :

$$f \rightarrow gf \quad \text{et} \quad V_1 \rightarrow gmV_1.$$

Pour les courants rotoriques :

$$f \rightarrow gf \quad \text{et} \quad I_1 \rightarrow I_1/m.$$

B.I.2. S_1 et S'_2 sont reliés à des groupements cathode commune : borne de sortie du courant continu.

S_2 et S'_1 sont reliés à des groupements anode commune : borne d'entrée du courant continu.

B.I.3. (C₁) redresse des tensions de fréquence gf .

(C₂) est un onduleur assisté à la fréquence f .

L'ensemble est un changeur de fréquence permettant la récupération d'énergie. L'inductance permet de lisser le courant ; sa

f.é.m. d'induction est la différence de deux tensions dont les ondu-
lations sont de fréquence f et gf .

B.II.

B.II.1. Par définition du glissement, la puissance roto-
rique mise en jeu vaut : $P_2 = g C \Omega_s$; par ailleurs : $P_1 = P_2 + P_m$.
En l'absence de pertes statoriques : $P_1 = C \Omega_s$. D'où la valeur du

$$\text{rendement du moteur seul : } \eta = \frac{P_m}{P_1} = 1 - g.$$

Si la puissance P_2 est restituée au réseau, le rendement global vaut 1.

B.II.2. L'inductance permet d'égaliser les potentiels moyens
sur ses extrémités. D'où $S_0 = -S'_0$ (attention : prendre d.d.p. ca-
thode commune - anode commune). Utilisons les relations données
en A.II. et A.III. :

$$\left. \begin{aligned} S_0 &= \frac{3}{\pi} \sqrt{6} (V_1 m g) \\ S'_0 &= \frac{3}{\pi} \sqrt{6} (V_1 m' \cos \delta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow g = -\frac{m'}{m} \cos \delta$$

B.II.3. $0 < g < 1$: marche en moteur.

$90^\circ < \delta < 180^\circ$: marche de (C_2) en onduleur assisté.

Il faut éviter $\delta > 150^\circ$ à cause du temps de désamorçage des
thyristors et de la durée d'empiètement anodique.

De plus, on peut justifier que pour δ trop grand, la stabilité
mécanique est moins bonne et le $\cos \varphi$ global trop faible.

B.III.

B.III.1.

$$\begin{aligned} V_0 &= \left(\frac{3\sqrt{6}}{\pi} g m V_1 - 2 V_s \right) - I_0 (2 r_d + 2 R + \frac{3}{\pi} g \omega L_2) \\ -V'_0 &= \left(\frac{3\sqrt{6}}{\pi} m' V_1 \cos \delta - 2 V'_s \right) - I_0 (2 r'_d + 2 R' + \frac{3}{\pi} X'). \end{aligned}$$

B.III.2. $V_0 = R_{ch} I_0 + V'_0$: d.d.p. continue aux bornes de
la bobine. On obtient ensuite par identification sur la relation (1) :

$$A = 2 V_s + 2 V'_s,$$

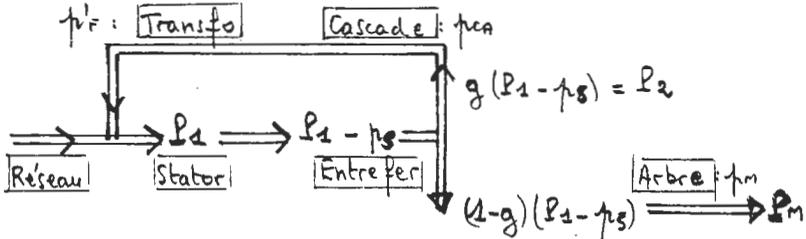
$$\mu = (3/\pi) L_2 \omega + 2 R_1 m^2,$$

$$\lambda = R_{ch} + 2 (r_d + r'_d + R_2 + R') + (3/\pi) \cdot X'.$$

B.III.3. Regroupons les pertes des redresseurs, du transformateur et de la bobine :

$$p_{CA} = 2(V_s + V'_s) I_0 + R_{ch} I_0^2 + 2(r_d + r'_d + R_2 + R') I_0^2.$$

Donnons le bilan des puissances sous forme schématique :



Posons : $p_s = p_F + p_{JS}$: pertes statoriques totales.

La puissance renvoyée sur le réseau vaut :

$$P_{retour} = g(P_1 - p_s) - p_{CA} - p'_F.$$

La puissance fournie par le réseau vaut $P_1 - P_{retour}$, d'où l'expression du rendement :

$$\eta = \frac{(1-g)(P_1 - p_s) - p_M}{(1-g)P_1 + p_{CA} + p'_F + g p_s}.$$

Cette relation est malgré tout approchée par excès car :

- il manque les pertes supplémentaires,
- les pertes fer-rotor ne sont pas négligeables pour toute valeur de g .

B.III.4. Pour le moteur seul, $\eta < 1 - g$, avec g compris entre 0 et 5 %. On peut espérer un rendement voisin de 85 %.

Pour le moteur avec rhéostat de glissement, et par exemple $g \approx 20\%$, le rendement vaudra : $\eta < 1 - g \approx 65\%$.

Avec la cascade hyposynchrone, g est compris entre 0 et 60 % et le rendement global retrouve la valeur 85 %.

B.IV.

B.IV.1. Dans le cas idéalisé, il y a égalité de la puissance électrique absorbée par le moteur et de la puissance électromagnétique traversant l'entrefer.

$$P_1 \approx P_{em} = C_m \Omega_s.$$

Par ailleurs, en l'absence de pertes dans les redresseurs, la puissance rotorique s'exprime par le produit des valeurs moyennes au niveau de l'inductance de lissage.

$$g C_m \Omega_s = S_0 I_0 = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} m g V_1 I_0.$$

D'où l'expression du couple électromagnétique :

$$C_m = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} \frac{m V_1}{\Omega_s} I_0.$$

B.IV.2. Si l'on continue à négliger les pertes statoriques, ce qui est légitime dès que la puissance rotorique mise en jeu est importante, alors :

$$P_1 \approx P_{em} \quad \text{et} \quad g P_{em} = V_0 I_0.$$

Compte tenu de la valeur rectifiée de la tension moyenne $V_0 = S_0 - \Delta V_L$, on obtient, en remarquant que $\omega = p\Omega$:

$$C_m = \frac{V_0 I_0}{g \Omega_s} = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} \frac{m V_1 I_0}{\Omega_s} - \frac{3}{\pi} L_2 p I_0^2.$$

L'élimination de I_0 entre les relations (1) et (2) fournit la caractéristique mécanique (couple - glissement) paramétré par δ dans les conditions imposées V et f de la tension d'alimentation.

B.IV.3.

Les valeurs de C et I_0 sont liées par (2), indépendamment de l'angle δ .

Pour le pont à diodes, le courant est une fonction créneau dont l'axe de symétrie paire coïncide avec celui d'une tension à la fréquence gf . Le terme fondamental de la décomposition en série de Fourier donne une amplitude égale à $I_0 \cdot 2 \sqrt{3}/\pi$, soit une valeur efficace de $I_0 \cdot \sqrt{6}/\pi = 0,78 I_0$.

Ramené côté stator, on obtient une composante de courant, à 50 Hz, et de valeur efficace $0,78 m I_0$.

Pour le montage à thyristors, on a un courant de forme créneau, de mêmes niveaux non nuls $\pm I_0$; le terme fondamental est de valeur efficace $0,78 I_0$; la valeur de la fréquence n'apparaît pas ici.

L'amorçage retardé des thyristors crée un retard forcé de $\varphi = \delta$ entre la sinusoïde fondamentale du courant et la tension correspondante.

On peut aussi remarquer que la fonction créneau et sa sinusoïde fondamentale possèdent les mêmes axes de symétrie.

B.IV.4. Ecrivons la loi des nœuds, en se restreignant aux composantes à 50 Hz :

$$I_{IT} = I_{IM} + I'_1 = I_{I0} + 0,78 m I_0 + 0,78 m' I_0$$

I_{I0} est le courant magnétisant : OM_0 sur le diagramme (fig. 7).

M_0M est le supplément « vectoriel » de courant statorique lorsque le moteur est en charge.

Pour placer le point M, on s'aide du diagramme circulaire ; ici, on recherche l'intersection du cercle avec une parallèle à la droite des couples ; on retient la plus petite valeur possible pour l'intensité, car elle correspond à la stabilité mécanique.

En module, on a : $M_0M = 0,78 m I_0$.

En ce qui concerne le courant renvoyé sur le réseau, il est connu par son module $MM_T = 0,78 m' I_0$, ce qui fait que le point M_T se déplace sur un arc de cercle vu sous un angle au centre de 60° (à cause de l'intervalle de valeurs $90^\circ - 150^\circ$ pour δ).

La composante active de ce dernier courant est négative, ce qui traduit bien une récupération d'énergie ; tandis que sa composante réactive est positive, ce qui fait que le facteur de puissance du montage complet est plus mauvais que celui du moteur seul.

B.V.

B.V.1. Dans la relation $g = -m' \cos \delta / m$, faisons $g = 1$, ce qui correspond au démarrage. On obtient $m = -m' \cos \delta$ avec $-\sqrt{3}/2 < \cos \delta < 0$.

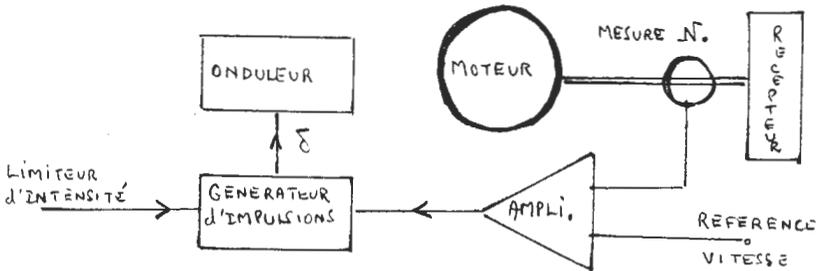
D'où $m \leq 0,866 m'$ pour un démarrage direct.

L'examen du diagramme circulaire montre que l'on a alors un facteur de puissance toujours médiocre puisque les longueurs M_0M et MM_T sont voisines.

Si $m' < m$ on est obligé d'avoir recours à un démarrage en plusieurs étapes :

- démarrage classique par rhéostat,
- couplage du pont de diodes quand une vitesse minimale est atteinte,
- élimination du rhéostat et réglage par la valeur de δ de la vitesse.

B.V.2



B.V.3.

Capteurs pour la vitesse :

- dynamo tachymétrique,
- détection optique et comptage.

Capteurs pour l'intensité :

- transformateur d'intensité et détecteur de crête (à partir de l'alternatif),
- shunt et photocoupleur (à partir du continu).

Déclencheur du pont tout thyristors :

- trois montages identiques alimentés par des tensions de synchronisation « triphasées » et réglés sur le même angle de retard,
- un déclencheur et deux circuits retardateurs de $T/3$ chacun.

Pour permettre la conduction du pont en débit interrompu, chaque thyristor doit recevoir une impulsion de confirmation 60° plus tard que l'impulsion « normale » qui suffirait en débit ininterrompu.

B.V.4. Une augmentation de la vitesse (baisse du glissement) s'obtient par diminution de l'angle δ donc de $|V'_0|$; comme V_0 ne dépend que la vitesse, l'inductance L_{ch} va être traversée par un courant important. Toutes les intensités vont être élevées et l'on obtiendra un couple mécanique provoquant une accélération brusque.

Une baisse de la vitesse s'obtient par augmentation de l'angle δ . La tension $|V'_0|$ tend à être supérieure à V_0 . Tous les redresseurs se bloquent et le groupe ralentit uniquement sur ses pertes mécaniques.

ANNEXE

REMARQUES SUR LE MOTEUR ASYNCHRONE

1) SCHEMAS ELECTRIQUES

Relations entre forces électromotrices.

$$e_1(t) = E_1 \sqrt{2} \cos \omega t \approx V_1 \sqrt{2} \cos \omega t,$$

au stator.

Dans l'hypothèse de KAPP, la tension d'alimentation impose l'évolution des grandeurs magnétiques (flux d'induction, courant magnétisant) à la fois en amplitude et en fréquence.

Au rotor, et avec un choix arbitraire de l'origine des temps :

$$e_2(t) = -g m E_1 \sqrt{2} \cos g \omega t = -E_2 \sqrt{2} \cos g \omega t$$

m : rapport de transformation de la machine à l'arrêt,

$g \omega$: pulsation du mouvement relatif du rotor par rapport au champ tournant statorique \times polarité.

Relations entre intensités.

La machine étant à flux forcé, les effets magnétiques des ampère-tours rotoriques sont compensés par ceux du supplément d'ampère-tours statoriques :

$$i_1(t) = i_{10}(t) - m i_2(t)$$

le terme $i_2(t)$ ayant même amplitude et même forme que les courants rotoriques ; mais sa pulsation vaut ω .

Le changement de fréquence est assuré par la composition des vitesses angulaires (mouvement relatif par rapport au rotor + mouvement d'entraînement du rotor dans l'entrefer).

Si le moteur fonctionne à sa charge nominale, on peut négliger l'importance du courant magnétisant et écrire :

$$i_1(t) \approx -m i_2(t).$$

Schéma équivalent à la fréquence fondamentale.

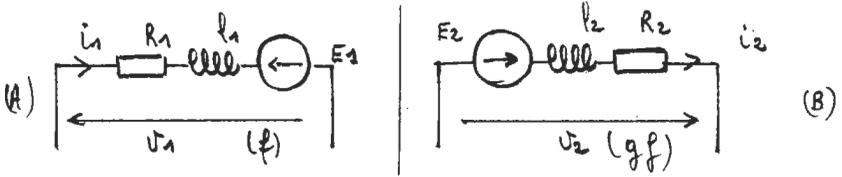
Avec la notation complexe, on a :

au stator :

$$\underline{V}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j l_1 \omega \underline{I}_1 + \underline{E}_1 \quad (\text{fig. A})$$

au rotor :

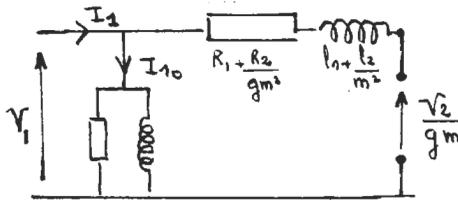
$$\underline{E}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j g l_2 \omega \underline{I}_2 + \underline{V}_2 \quad (\text{fig. B}).$$



Ramené côté stator, et à forte charge, on trouve une extension du théorème du transfert d'impédance, rencontré à propos du transformateur parfait : le coefficient de conversion est ici $g m^2 = g m$ (tensions) $\times m$ (intensités).

On divise formellement la relation (B) par g pour se ramener à la fréquence f et l'on tient compte des relations $E_2 = g m E_1$ et $I_1 = m I_2$ entre valeurs efficaces :

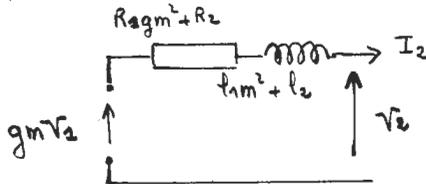
$$\underline{V}_1 = \left(R_1 + \frac{R_2}{g m^2} \right) \underline{I}_1 + j \omega \left(l_1 + \frac{l_2}{m^2} \right) \underline{I}_1 + \frac{\underline{V}_2}{g m} \quad (\text{fig. C}).$$



(C)

Ramené côté rotor, on obtient un autre schéma électrocinétique, ne contenant plus que des grandeurs à la fréquence $g f$:

$$\underline{V}_2 = -g m \underline{V}_1 - (R_1 g m^2 + R_2) \underline{I}_2 - j g \omega (l_1 m^2 + l_2) \underline{I}_2 \quad (\text{fig. D}).$$



(D)

2) ETUDE ENERGETIQUE

Le théorème de BOUCHEROT est ici inapplicable sans précautions ; en effet, la conservation des puissances active et réactive ne peut s'écrire que pour un circuit « tout électrique » et à fréquence unique.

Le moteur asynchrone constitue un contre-exemple.

Puissance réactive.

$$\begin{aligned}
 Q_{AB} &= l_1 \omega I_1^2 + l_2 g \omega I_2^2 \\
 Q_C &= (l_2 + l_1/m^2) \omega I_1^2 \neq Q_{AB} \\
 Q_D &= (l_2 + l_1 m^2) g \omega I_2^2 \neq Q_C \neq Q_{AB}.
 \end{aligned}$$

La quantité invariante est finalement $\Sigma Q_i/f_i$ avec Q_i : puissance réactive dépensée dans un sous-ensemble à la fréquence unique f_i .

Dans tous les cas,

$$\frac{1}{2\pi} \Sigma \frac{Q_i}{f_i} = l_1 I_1^2 + l_2 I_2^2.$$

Puissance active.

Par définition du glissement, la puissance rotorique totale vaut g fois la puissance traversant l'entrefer :

$$P_{(B)} = g P_{(A)}$$

$$3 \Re(\underline{V}_1 \underline{I}_1^*) = 3 R_1 I_1^2 + p_{fs} + P_{em} \quad (A)$$

$$g P_{em} = 3 R_2 I_2^2 + p_{fr} + 3 \Re(\underline{V}_2 \underline{I}_2^*). \quad (B)$$

En négligeant les pertes fer, et en éliminant la puissance électromagnétique entre les deux relations précédentes, on obtient :

$$\Re(\underline{V}_1 \underline{I}_1^*) = R_1 I_1^2 + \frac{R_2}{g} I_2^2 + \frac{1}{g} \Re(\underline{V}_2 \underline{I}_2^*) \quad (C)$$

$$\Re(\underline{V}_2 \underline{I}_2^*) = g \Re(\underline{V}_1 \underline{I}_1^*) - g R_1 I_1^2 - R_2 I_2^2 \quad (D)$$

Ramené côté stator (C) s'écrit aussi :

$$\Re(\underline{V}_1 \underline{I}_1^*) = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + \Re(\underline{V}_2 \underline{I}_2^*) + \frac{1-g}{g} [R_2 I_2^2 + \Re(\underline{V}_2 \underline{I}_2^*)]$$

On fait ainsi apparaître successivement :

- les pertes Joules totales,
- la puissance électrique évacuée par les enroulements rotoriques, et, éventuellement, recyclable dans le cas de la cascade,
- la puissance mécanique totale sur l'arbre (à cause du bilan global des puissances actives).

La résistance ramenée R_2/gm^2 consomme le tiers de la puissance électromagnétique — dans le cas du rotor en court-circuit — et apparaît dans la formule habituelle du couple moteur.

Ramené côté rotor (D) s'écrit aussi :

$$\Re(\underline{V}_2 \underline{I}_2^*) = g \Re(\underline{V}_1 \underline{I}_1^*) - (g R_1 m^2 + R_2) I_2^2$$

La puissance électrique mise en jeu au rotor vaut g fois la puissance statorique (à ses pertes près) moins ses propres pertes.

On retrouve bien la résistance équivalente $R = R_2 + R_1 g m^2$ dont la signification n'est pas immédiate !

3) COMPORTEMENT POUR UNE FREQUENCE HARMONIQUE

Alimentation par une tension non sinusoïdale.

Dans le cas d'une alimentation par onduleur triphasé de tension, il existe des harmoniques impairs de rang hf .

— Si $h = 5, 11, \dots$ il y a création d'un champ tournant inverse et apparition d'un couple résistant.

Le glissement vaut :

$$g_h = \frac{-h\Omega_s - \Omega}{-h\Omega_s} = \frac{h+1}{h} \approx 1.$$

d'où l'impédance apparente de chaque enroulement.

— Si $h = 7, 13, \dots$ il y a création d'un champ tournant direct et apparition d'un supplément de couple moteur.

Le glissement vaut :

$$g_h = \frac{h\Omega_s - \Omega}{h\Omega_s} = \frac{h-1}{h} \approx 1.$$

— Si $h = 3, 9$, les courants sont nuls, il n'y a pas d'effets magnétiques, ni mécaniques.

Existence de courants non sinusoïdaux.

C'est le cas de la cascade hyposynchrone, à cause de la présence des redresseurs. Si l'on admet que les tensions restent sinusoïdales pures, le bilan des puissances se réduit à la puissance transportée par le fondamental.

Claude NAUDET.

Agrégation

SESSION DE 1985

Epreuve C

PROBLEME DE PHYSIQUE

(Durée : 6 heures)

INTERFÉROMÉTRIE NEUTRONIQUE

On se propose d'étudier quelques expériences récentes (1974-1981) réalisées avec des faisceaux cohérents de neutrons et utilisant un interféromètre d'un type nouveau (1965) adapté à un domaine de longueurs d'onde voisin de l'angström.

La partie I est consacrée à l'étude de quelques analogies entre l'optique photonique « bien connue » et l'optique neutronique. La partie II étudie sommairement l'appareil et s'intéresse notamment à des expériences où des effets dus à la gravité et à la rotation de la terre ont été mis en évidence au niveau quantique. La partie III aborde la théorie dynamique de la diffraction des neutrons par les cristaux et l'applique à l'effet Borrmann utilisé dans l'interféromètre. La partie IV est consacrée au calcul du contraste de l'appareil.

Le problème est conçu de sorte que la résolution de chaque question ne nécessite au plus que la lecture des questions précédentes. De nombreuses questions portent sur des ordres de grandeur, appellent une réponse qualitative ou ne font intervenir que des calculs tout à fait élémentaires. Aussi sera-t-il largement tenu compte de la qualité de l'argumentation donnée. La partie III peut être abordée indépendamment des autres parties.

Quelques données :

Masse du neutron : $m = 1,675 \times 10^{-27}$ kg.

Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N} = 6,023 \times 10^{23}$;

Constante de Planck : $h = 6,626 \times 10^{-34}$ J. s.

$$\left(\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \times 10^{-34} \text{ J. s.}\right);$$

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 2,998 \times 10^8$ m. s⁻¹ ;

Accélération de la pesanteur au lieu considéré : $g = 9,800$ m. s⁻² ;

Vitesse angulaire de rotation de la terre : $\omega = 7,29 \times 10^{-5}$ s⁻¹ ;

Une seconde d'arc : $4,85 \times 10^{-6}$ rd.

On attend du candidat qu'il sache donner un ordre de grandeur typique d'une distance interatomique dans un solide (ou liquide), du rayon d'un noyau atomique, ou encore d'une énergie potentielle d'interaction dans un noyau.

Notations : Les ondes considérées dans le problème sont de la forme :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) \exp -i[\omega t - \Phi(\mathbf{r})] \quad (\omega > 0; A(\mathbf{r}) > 0; \Phi(\mathbf{r}) \text{ réel}).$$

Pour simplifier le langage, la quantité :

$$\psi(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp i \Phi(\mathbf{r})$$

sera appelé simplement l'onde.

Dans le cas d'une onde plane $\psi(\mathbf{r})$ se met sous la forme :

$$\psi(\mathbf{r}) = a \exp i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = A \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \Phi) \quad (A > 0; \Phi \text{ réel})$$

a sera appelé l'amplitude complexe de l'onde plane. Si l'onde plane subit un déphasage φ , dû par exemple à la traversée d'un milieu, Φ devient $\Phi + \varphi$. Si φ est positif, il s'agit d'un retard dans la propagation, et si φ est négatif, il s'agit d'une avance.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.

I. ETUDE DES PROPRIÉTÉS ONDULATOIRES D'UN FAISCEAU DE NEUTRONS

I.1. *Correspondance entre les grandeurs mécaniques et ondulatoires.*

On considère, dans le référentiel du laboratoire, un faisceau de neutrons cohérent, monocinétique (c'est-à-dire aussi monochromatique).

a) Etablir deux formules numériques, valables dans le domaine non relativiste, donnant respectivement la vitesse v des neutrons, exprimées en kilomètre par seconde, et leur énergie cinétique E_c , exprimée en électron-volt, en fonction de la longueur d'onde λ du faisceau, exprimée en angström. Calculer v et E_c pour $\lambda = 1 \text{ \AA}$.

b) Indiquer rapidement pourquoi ces formules peuvent être utilisées tant que la longueur d'onde est nettement plus grande qu'une longueur d'onde caractéristique λ_c , appelée généralement longueur d'onde Compton, dont on donnera une expression littérale et une valeur numérique.

Les faisceaux de neutrons considérés dans la suite du problème ont des longueurs d'onde de l'ordre de l'angström.

I.2. *Indice d'un milieu et énergie potentielle moyenne des neutrons.*

On rappelle que la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r})$ de neutrons d'énergie E , traversant une région où leur énergie potentielle est $V(\mathbf{r})$, obéit à l'équation de Schrödinger :

$$(1) \quad \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \psi = E \psi \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

On rappelle aussi qu'une onde lumineuse de pulsation ω , traversant une région d'indice variable $n(\mathbf{r})$, obéit à l'équation :

$$(2) \quad \left(\Delta + n^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi = 0.$$

a) En comparant les équations (1) et (2), justifier la définition

$$\text{suivante de l'indice d'un milieu pour les neutrons : } n = \left(1 - \frac{V}{E} \right)^{1/2};$$

montrer que, lorsque l'indice est proche de 1 :

$$n = 1 - \frac{mV\lambda^2}{\hbar^2}.$$

b) Dans un milieu matériel, l'énergie potentielle d'interaction $V(\mathbf{r})$ est essentiellement due aux noyaux des atomes du milieu. Elle peut donc prendre de grandes valeurs dans des régions de dimension très petite. On verra à la question III.2. d) que, les effets de diffraction mis à part, il est permis de remplacer $V(\mathbf{r})$ par sa moyenne spatiale. En précisant les ordres de grandeur choisis pour les quantités dont on aura besoin, évaluer (à un facteur 10 à 100 près) la différence $|n-1|$ pour un milieu dense (solide ou liquide) et pour $\lambda = 1 \text{ \AA}$.

I.3. Indice d'un milieu et longueur de diffusion des noyaux.

On admet qu'en présence d'un noyau atomique placé en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, l'onde de neutrons peut s'écrire de manière approchée comme la superposition d'une onde plane incidente se propageant dans la direction z et d'une onde sphérique sortante (diffusée par le noyau) :

$$f(\mathbf{r}) = A (\exp ikz - br^{-1} \exp ikr) \quad \left(r = \|\mathbf{r}\|; k = \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

Le paramètre b s'appelle la longueur de diffusion. Pour tous les noyaux considérés dans ce problème, b est positif.

a) Que représente la quantité $4\pi b^2$? A quel ordre de grandeur s'attend-on pour b ?

b) Dans le plan $z = 0$, on place une tranche infinitésimale, d'épaisseur dz , de matière de densité N (N : nombre de noyaux diffuseurs du milieu par unité de volume) (fig. 1). Les diffuseurs sont tous identiques. On suppose que, dans la région $z > 0$, l'onde est la somme de l'onde plane incidente et des ondes sphériques émises par chaque diffuseur. Calculer l'amplitude totale dans le plan $z = z_0$, ($z_0 > 0$). On admettra que tous les diffuseurs peuvent être considérés comme se trouvant dans le plan $z = 0$; pour éviter tout calcul d'intégration,

on rappelle que, d'après le principe d'Huygens-Fresnel, l'amplitude $A \exp ikz$ d'une onde plane en un point M du plan d'abscisse z , ($z > 0$) peut être obtenue comme la somme des contributions d'ondes sphériques émises par les points P du plan Π d'équation $z = 0$:

$$A \exp ikz = \iint_{\Pi} A (i\lambda \|\mathbf{PM}\|)^{-1} \exp ik \|\mathbf{PM}\| dx dy.$$

c) Etablir l'expression suivante de l'indice d'un milieu :

$$n = 1 - (2\pi)^{-1} N \lambda^2 b.$$

d) Retrouver l'ordre de grandeur obtenu à la question I.2. b) pour la différence $|n - 1|$.

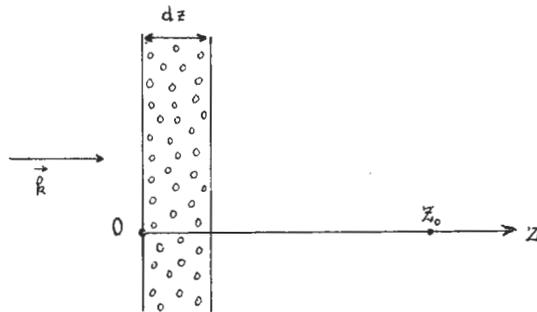


Fig. 1

I.4. Trois exemples de mesures de longueur de diffusion.

On rappelle que la différence $1 - n = (2\pi)^{-1} N \lambda^2 b$ est positive et très petite devant 1.

a) Un faisceau de neutrons de longueur d'onde $\lambda = 2,40 \text{ \AA}$ subit deux réflexions de Bragg successives de la part de deux cristaux parfaits de silicium dont les faces sont initialement parallèles (spectromètre à deux cristaux). On place entre les cristaux un prisme de germanium d'angle au sommet A . Montrer que la déviation minimale du faisceau

par le prisme est : $D = 2 |n - 1| \operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

Calculer la longueur de diffusion b du germanium sachant que la masse volumique vaut $5,46 \cdot 10^3 \text{ kg. m}^{-3}$, le poids atomique 72,6, et qu'on a $D = 1,18 \cdot 10^{-5} \text{ rd}$; $A = 120^\circ$.

b) On considère un faisceau de neutrons dont les vitesses initiales sont choisies parfaitement horizontales grâce à un système de fentes. Dans le champ de pesanteur terrestre, les neutrons décrivent une parabole; après être tombés d'une hauteur H , ils rencontrent un milieu liquide dont la surface est, elle aussi, horizontale. Montrer

qu'il y a réflexion totale du faisceau tant que la hauteur H est inférieure à une hauteur critique H_0 qu'on exprimera en fonction des quantités h , m , N , b et de l'intensité g de la pesanteur. Donner un ordre

de grandeur de la hauteur H_0 et du rapport $\frac{H_0}{b}$.

c) Deux faisceaux de neutrons assimilables à des ondes planes et mutuellement cohérents traversent une lame L d'épaisseur T sous des incidences θ et $-\theta$. Leurs directions de propagation, situées dans un plan orthogonal à la lame, sont numérotées 1 et 2 sur la fig. 2. Montrer que la rotation de la lame d'un angle δ autour d'un axe perpendiculaire au plan des faisceaux introduit une différence de phase supplémentaire entre le faisceau 2 et le faisceau 1 :

$$(3) \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\lambda N b T \sin \delta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \delta)^{-1}.$$

(Ce déphasage peut être mesuré par recombinaison des faisceaux : cf. partie II du problème.)

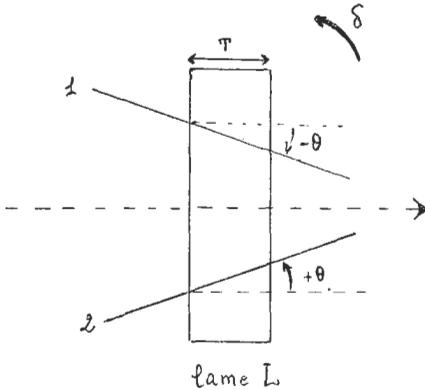


Fig. 2

I.5. Effets du champ de pesanteur et de la rotation de la terre.

Dans certaines expériences de laboratoire mettant en jeu les propriétés ondulatoires des neutrons et que l'on étudiera dans la partie II, il est nécessaire de tenir compte de deux facteurs que l'on néglige habituellement ; d'une part, le laboratoire est un référentiel non inerti-

el, en rotation (avec la terre) à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$; d'autre part, les neutrons sont soumis au champ de pesanteur.

a) Rappeler brièvement pourquoi l'équation de la dynamique dans le référentiel du laboratoire peut s'écrire :

$$(4) \quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = -2m\vec{\omega} \wedge \mathbf{v} - \mathbf{grad} V.$$

Quels effets prend en compte le terme d'énergie potentielle ? Montrer qu'il existe une énergie conservée.

b) En mécanique classique, le principe de Maupertuis énonce que la trajectoire neutronique Γ_0 , d'énergie E , joignant deux points fixes A et B , correspond à un extremum de la quantité $I(\Gamma)$, (Γ : chemin quelconque de A à B ; $d\mathbf{r}$: déplacement infinitésimal le long de Γ ; $dl = \|d\mathbf{r}\|$ élément de longueur de Γ) :

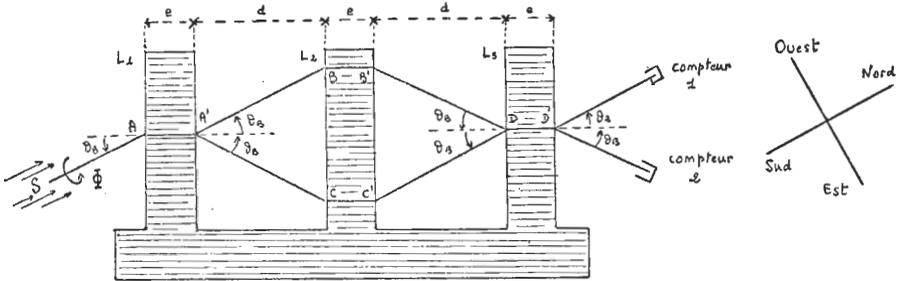
$$(5) \quad I(\Gamma) = \int_B^A ([2m(E - V(\mathbf{r}))]^{1/2} dl + m(\vec{\omega} \wedge \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}).$$

Justifier l'expression (5) en se limitant au cas $\vec{\omega} = \mathbf{0}$ et en s'aidant de l'analogie optique amorcée à la question I.2. Montrer que la différence de phase entre deux points A et B du faisceau vaut alors :

$$(6) \quad \Phi(B) - \Phi(A) = \hbar^{-1} I(\Gamma_0).$$

On admettra dans la suite du problème que la formule (6) s'étend au cas : $\vec{\omega} \neq \mathbf{0}$.

II. ETUDE DE QUELQUES EXPÉRIENCES RÉALISÉES AVEC UN INTERFÉROMÈTRE A NEUTRONS



Le plan de coupe de la figure est un plan horizontal vu de dessus.

Fig. 3

II.1. L'interféromètre.

L'interféromètre schématisé sur la fig. 3 est constitué de trois lames de silicium, L_1, L_2, L_3 , identiques, d'épaisseur e , découpées dans un même cristal de sorte que les faces des lames soient rigoureusement parallèles entre elles et soient perpendiculaires à une famille de plans réticulaires (représentés en coupe par des traits parallèles sur la fig. 3). Les lames sont séparées d'une même distance d .

Lorsqu'un faisceau cohérent monocinétique de neutrons (qu'on pourra assimiler à une onde plane) arrive sur une lame, avec un angle d'incidence égal à l'angle de Bragg θ_B correspondant aux plans réticu-

lares, il traverse d'abord la lame parallèlement à ces plans (effet Borrmann étudié à la question III.4), puis il donne naissance à la sortie de la lame à deux faisceaux mutuellement cohérents faisant un même angle ϑ_B avec la normale à la face de la lame; l'un des faisceaux est appelé le faisceau transmis, et l'autre est appelé le faisceau réfléchi (par les plans réticulaires). Le faisceau incident d'axe SA est séparé par la lame L_1 en deux faisceaux d'axes A'B et A'C. Les faisceaux réfléchis par la lame L_2 (d'axes B'D et C'D) se retrouvent dans la même région au niveau de la lame L_3 et la traversent selon la direction DD'. De la lame L_3 émergent deux faisceaux; l'un, parallèle à SA, est recueilli dans le compteur 1; l'autre, parallèle à B'D (ou A'C), est recueilli dans le compteur 2.

En l'absence de déformation de l'appareil, les longueurs des trajets A'BB'D et A'CC'D seront considérées comme rigoureusement égales. On donne : $e = 2,464$ mm ; $d = 34,518$ mm ; $n = 1 - 0,38 \times 10^{-6}$ (indice des lames pour $\lambda = 1,05$ Å) ; $\vartheta_B = 15,9^\circ$ (angle de Bragg pour $\lambda = 1,05$ Å). La largeur des faisceaux est de quelques millimètres.

Tous les faisceaux étant mutuellement cohérents, on appliquera le principe de superposition cohérente des ondes ; on négligera totalement l'absorption et la diffusion incohérente. On admettra que les propriétés de cohérence de l'interféromètre imposent aux conditions angulaires précédemment définies (parallélisme des lames, angle de Bragg) des écarts qui ne dépassent pas quelques dixièmes de seconde d'arc.

a) Comparer la dispersion angulaire des faisceaux due aux effets de dimension transverse finie et l'écart autorisé à la condition de Bragg.

b) Exprimer en fonction de λ et ϑ_B l'interfrange dans le plan de la face d'entrée de la lame L_3 . Cet interfrange est-il mesurable ?

c) Expliquer pourquoi, bien que les longueurs d'onde utilisées soient de l'ordre des distances interatomiques, un degré de polissage des surfaces au micron est suffisant.

II.2. Observation de déphasages.

L'interféromètre est utilisé principalement pour mettre en évidence, et mesurer, toute différence de phase $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ pouvant s'introduire entre les deux faisceaux le long de leurs parcours respectifs A'BB'D (faisceau 1) et A'CC'D (faisceau 2). On considère dans cette question un exemple de déphasage bien connu.

On place entre les lames L_2 et L_3 une lame de cuivre L d'épaisseur T, disposée initialement de façon symétrique sur les faisceaux B'D et C'D (comme sur la fig. 2). On tourne ensuite L d'un petit angle δ , ce qui introduit le déphasage φ dont l'expression a été donnée en (3) à la question I.4. c.

Les intensités observées respectivement dans chacun des compteurs 1 et 2 sont (I_0 , A, B : constantes positives) :

$$(7) \quad I_1(\varphi) = I_0 A (1 + \cos \varphi);$$

$$I_2(\varphi) = I_0 (B - A \cos \varphi); \left(\frac{B}{A} = 2,6 \right).$$

On admettra que la lame L ne fait qu'introduire le déphasage φ et on modélisera l'effet des lames L_1, L_2, L_3 de l'interféromètre en les caractérisant par des coefficients complexes relatifs aux amplitudes complexes des ondes et indépendants de φ : τ , coefficient de transmission ; ρ , coefficient de réflexion (par rapport aux plans réticulaires). Les effets dus à la pesanteur et à la rotation de la terre seront négligés.

a) Montrer que la dépendance en φ des intensités I_1 et I_2 peut être expliquée à condition que le rapport $\frac{\rho}{\tau}$ soit imaginaire pur.

b) Calculer les valeurs possibles de $|\rho|$ et $|\tau|$.

c) Quelle est la périodicité (exprimée en degrés) de la courbe représentant l'intensité I_1 en fonction de δ pour δ petit ? On donne $n_{Cu} = 1 - 1,14 \times 10^{-6}$ (indice du cuivre pour $\lambda = 1,05 \text{ \AA}$) ; $T = 1 \text{ cm}$.

II.3. Calcul des effets dus au champ de pesanteur et à la rotation de la terre.

La lame L introduite à la question II.2. est enlevée. \mathbf{g} désigne l'accélération de la pesanteur et $\vec{\omega}$ le vecteur rotation de la terre.

a) Montrer que la trajectoire classique d'un neutron entre deux lames consécutives de l'interféromètre s'écrit à l'ordre deux en t :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + t^2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{g} - \vec{\omega} \wedge \mathbf{v}_0 \right).$$

b) Vérifier que la prise en compte des effets de pesanteur et de la rotation terrestre n'entraîne qu'une modification négligeable des angles d'incidence des faisceaux avec les lames.

c) A l'aide des résultats de la question I.5, montrer que les déphasages φ_g et φ_ω associés respectivement aux facteurs \mathbf{g} , $\vec{\omega}$ valent :

$$\varphi_g = \frac{2\pi m^2 \lambda}{h^2} \mathbf{g} \cdot \left(\int_{A'CC'D} \mathbf{r} \, dl - \int_{A'BB'D} \mathbf{r} \, dl \right) \quad \left(\lambda = h(2mE)^{-1/2} \right);$$

$\varphi_\omega = \frac{4\pi m}{h} \vec{\omega} \cdot \mathbf{u}_0 S$ (S : surface $A'BB'DCC'A'$; \mathbf{u}_0 : vecteur unitaire dont on précisera la direction sur un dessin).

(Les chemins $A'CC'D$ et $A'BB'D$ sont les chemins non perturbés définis en II.1 et représentés sur la fig. 3.)

II.4. Mesure de l'effet dû au champ de pesanteur.

L'expérience est faite en un lieu de l'hémisphère nord de latitude $\theta_1 = 39,63^\circ$. Le plan des faisceaux est initialement horizontal ; la disposition de l'appareil par rapport aux points cardinaux est alors indi-

quée sur la fig. 3 (vue de dessus). A partir de cette position, l'appareil peut être tourné d'un angle Φ (algébrique) autour de l'axe **SA** orienté sud-nord.

a) Etablir les relations :

($g = \|\mathbf{g}\|$; $\omega = \|\vec{\omega}\|$); $\varphi_g = q_g \sin \Phi$; $\varphi_\omega = q_\omega \cos \Phi$
avec :

$$q_g = \frac{2 \pi m^2 g}{h^2} \lambda (2 d^2 + 2 e d \cos \vartheta_B) \operatorname{tg} \vartheta_B ;$$

$$q_\omega = \frac{4 \pi m}{h} \omega (2 d^2 + 2 e d) \operatorname{tg} \vartheta_B \sin \vartheta_I .$$

(On rappelle que les longueurs des trajets A'BB'D et A'CC'D sont rigoureusement égales ; pour calculer φ_g , on pourra, par exemple, regrouper deux à deux et symétriquement par rapport à A'D les points des deux trajets A'CC'D et A'BB'D.)

Pour $\lambda = 1,05 \text{ \AA}$, les valeurs numériques sont : $q_g = 29,1 \text{ rd}$; $q_\omega = 1,05 \text{ rd}$.

b) Aux déphasages précédents s'ajoute un terme φ_D dû à la déformation de l'appareil sous l'effet de son propre poids. φ_D est étudié en utilisant l'interféromètre avec des rayons X de longueur d'onde voisine de l'angström.

Comment nomme-t-on, dans la littérature scientifique, les effets analogues à l'apparition des déphasages φ_g et φ_ω , mais pour les photons ? Sachant que pour les photons les expressions de φ_g et φ_ω ne contiennent ni m , ni h , mais font intervenir la vitesse de la lumière dans le vide c , montrer que ces effets sont négligeables.

Les expériences avec les rayons X conduisent à la relation empirique :

$\varphi_D = q_D \sin \Phi$ avec (pour $\lambda = 1,05 \text{ \AA}$ et $\vartheta_B = 15,9^\circ$) : $q_D = 2,46 \text{ rd}$.

On considère à nouveau l'expérience réalisée avec des neutrons.

c) On pose : $\varphi_g + \varphi_\omega + \varphi_D = q \sin(\Phi - \Phi_0)$. Montrer que le paramètre positif q dépend très peu de ω . Le graphe de l'intensité $I_1(\Phi)$ mesurée par le compteur 1 est représenté sur la fig. 4 ci-après. Vérifier rapidement qu'il conduit à une valeur de q_g en bon accord avec la théorie (on ne considérera pas la perte de contraste en fonction de Φ due également à la déformation de l'appareil).

II.5. Mesure de l'effet de rotation de la Terre.

Pour mettre en évidence l'effet de rotation de la Terre, on place l'interféromètre de sorte que son axe de rotation **SA** soit vertical (fig. 5).

a) Justifier brièvement le choix de ce montage expérimental.

b) L'interféromètre est initialement placé de sorte que le vecteur \mathbf{u}_0 soit parallèle à la direction ouest-est et soit dirigé vers l'est.

On le tourne alors d'un angle Φ . Montrer que le déphasage s'écrit : $\varphi'_\omega = q'_\omega \sin \Phi$ avec : $q'_\omega = q_\omega \cdot \cotg \vartheta_l$.

Les résultats expérimentaux concernant $I_1(\Phi)$ ne permettent pas une vérification précise de la relation donnant φ'_ω : il apparaît en effet difficile en pratique de réaliser une même condition d'incidence du faisceau pour les différentes valeurs de Φ , ce qui a pour conséquence de faire varier de façon non négligeable (pour les effets mesurés) les coefficients A et B définis en (7).

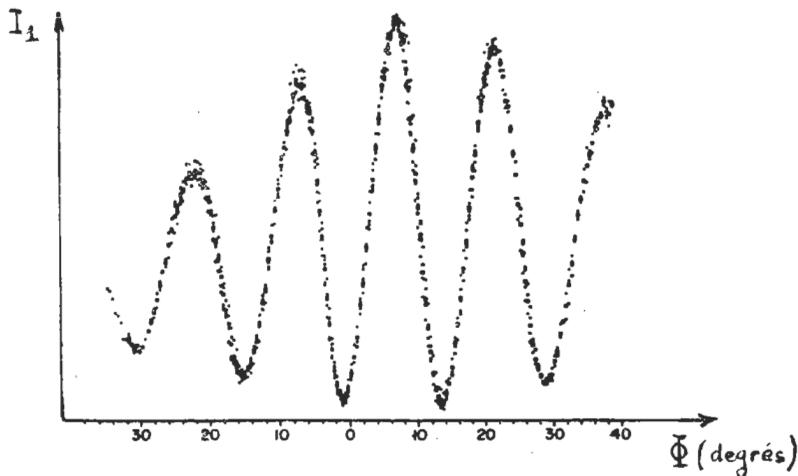


Fig. 4

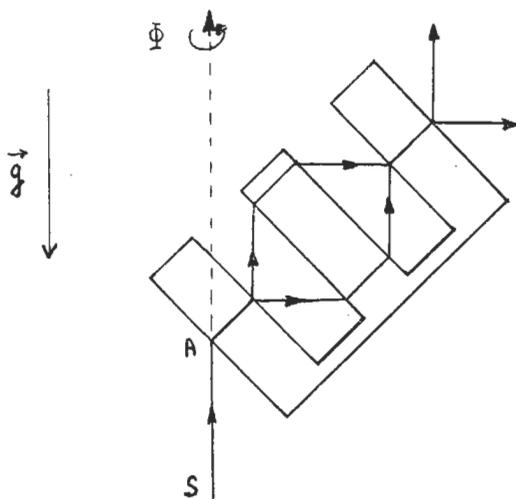


Fig. 5

c) Pour une meilleure vérification, on place la lame L décrite en II.2. Puis, pour chaque valeur de Φ , on trace expérimentalement la courbe représentant l'intensité I_1 en fonction de δ (δ variant environ de -8° à 8°). Comment déterminer φ'_ω à partir de ces courbes ? Quel est l'intérêt du procédé ?

III. THÉORIE DYNAMIQUE DE LA DIFFRACTION ET EFFET BORRMANN

III.1. *Plans réticulaires d'un cristal de silicium et théorie « classique » de la diffraction.*

Un cristal de silicium est un réseau à maille cubique de côté a , de vecteur translation :

$$\mathbf{t}_{n_1, n_2, n_3} = a(n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3)$$

($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$: base orthonormée ; $n_1 \in \mathbb{Z}, n_2 \in \mathbb{Z}, n_3 \in \mathbb{Z}$: entiers relatifs).

On appelle réseau réciproque l'ensemble des vecteurs définis par :

$$\mathbf{G}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = \frac{2\pi}{a}(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3) \quad (\alpha_1 \in \mathbb{Z}, \alpha_2 \in \mathbb{Z}, \alpha_3 \in \mathbb{Z}).$$

On désigne par $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ la famille des plans réticulaires d'équation :

$$\mathbf{G}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \cdot \mathbf{r} = 2p\pi \quad (p \in \mathbb{Z}).$$

a) Exprimer en fonction de $a, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ la distance $d_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ entre deux plans consécutifs ($p, p+1$) de la famille $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$.

On étudie la diffraction à l'infini d'une onde plane par le cristal de silicium. Les atomes sont supposés ponctuels. Soit \mathbf{k}_0 , et \mathbf{k} ($\|\mathbf{k}\| = \|\mathbf{k}_0\|$) les vecteurs d'onde de l'onde incidente et de l'onde diffractée (supposées monochromatiques). On rappelle que l'intensité diffractée est proportionnelle à la quantité :

$$\left| \sum_j \exp i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j \right|^2 \quad (\text{l'indice } j \text{ repère les différents atomes}).$$

b) Montrer que, s'il n'y avait qu'un atome par maille, l'intensité diffractée serait maximum chaque fois que le vecteur $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ appartient au réseau réciproque, ou encore lorsque l'angle 2θ entre les vecteurs \mathbf{k}_0 et \mathbf{k} vérifie la condition de Bragg $\theta = \theta_B$ avec :

$$(8) \quad \sin \theta_B = \frac{\|\mathbf{G}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}\|}{2k_0} = \frac{\lambda}{2d_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}}.$$

c) En fait la maille de silicium contient huit atomes dont les coordonnées respectives peuvent être choisies comme :

$$(0, 0, 0) ; \left(0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) ; \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right) ; \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right) ; \left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right) ; \left(\frac{3a}{4}, \frac{3a}{4}, \frac{3a}{4}\right) ; \left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right) ; \left(\frac{a}{4}, \frac{3a}{4}, \frac{a}{4}\right).$$

On considère l'onde diffractée de vecteur d'onde $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{G}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$.

A quelles conditions sur $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les contributions des différents atomes de la maille s'ajoutent-elles de façon constructive ? Vérifier que ces conditions sont satisfaites pour les plans réticulaires $[2, 2, 0]$ utilisés dans l'interféromètre.

III.2. Propagation d'ondes dans un cristal infini.

On considère à nouveau l'équation de Schrödinger (1) que vérifie la fonction d'onde des neutrons dans le cristal :

$$(9) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi = E \psi$$

en tenant compte maintenant de la structure périodique du cristal. L'énergie potentielle des neutrons $V(\mathbf{r})$, due à la présence des noyaux de silicium, admet alors une décomposition en série de Fourier de la forme :

$$(10) \quad V(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}} \exp i \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}$$

la somme portant sur les vecteurs du réseau réciproque. L'absorption des neutrons dans le silicium étant négligée, $V(\mathbf{r})$ est une quantité réelle ; on choisit l'origine du vecteur \mathbf{r} sur un atome de sorte que l'on ait $V(\mathbf{r}) = V(-\mathbf{r})$.

a) Montrer que les coefficients $V_{\mathbf{G}}$ vérifient $V_{\mathbf{G}} = V_{-\mathbf{G}}$ et sont réels.

Un théorème dû à Bloch montre que la solution de l'équation (9) doit être cherchée sous la forme :

$$(11) \quad \psi(\mathbf{r}) = \exp i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \left(\sum_{\mathbf{G}} \psi_{\mathbf{G}} \exp i \mathbf{G} \cdot \mathbf{r} \right).$$

La fonction d'onde ψ est donc le produit d'une onde plane (de vecteur d'onde \mathbf{k}) et d'une fonction ayant la périodicité du réseau ; elle peut être aussi considérée comme une somme d'ondes planes de vecteurs d'onde $\mathbf{k} + \mathbf{G}$ (\mathbf{k} fixé). On pose :

$$k_0^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E ; \quad w_{\mathbf{G}} = \frac{2m}{\hbar^2} V_{\mathbf{G}}.$$

Les quantités $|w_{\mathbf{G}}| k_0^{-2}$ sont de l'ordre de 10^{-6} .

b) En portant les expressions (10) de V et (11) de ψ dans l'équation (9) et en identifiant dans les deux membres de cette équation les termes en $\exp i (\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}$ (\mathbf{k}, \mathbf{G} fixés), établir les relations :

$$(12) \quad \psi_{\mathbf{G}} (k_0^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{G})^2) = \sum_{\vec{\mathbf{x}}} w_{\mathbf{G} - \vec{\mathbf{x}}} \psi_{\vec{\mathbf{x}}}$$

la somme sur $\vec{\mathbf{x}}$ portant sur les vecteurs du réseau réciproque.

c) En pratique la somme sur $\vec{\mathbf{x}}$ porte sur un nombre limité de termes. Expliquer, de manière qualitative, pourquoi, dans la solution

des équations (12), les composantes $\psi_{\mathbf{G}}$ les plus importantes sont celles pour lesquelles $(\mathbf{k} + \mathbf{G})^2$ est voisin de k_0^2 .

d) Dans le cas où la composante $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ est la seule importante, montrer que le cristal se comporte pour l'onde $\psi_0 \exp i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$

comme un milieu d'indice uniforme : $n = 1 - \frac{w_0}{2k_0^2}$; vérifier le résultat annoncé à la question I.2. b).

III.3. *Equation de dispersion du cristal près de la condition de Bragg. On suppose désormais que seules deux composantes ψ_0 et $\psi_{\mathbf{G}}$ (\mathbf{G} correspondant aux plans $[2, 2, 0]$) sont importantes dans le développement (11) de ψ . L'onde $\psi_0 \exp i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ sera interprétée comme l'onde transmise dans le cristal associée à une onde incidente. L'onde $\psi_{\mathbf{G}} \exp i(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}$ sera interprétée comme l'onde diffractée dans le cristal (ou onde réfléchie par les plans réticulaires).*

On pose : $w = w_{\mathbf{G}} = w_{-\mathbf{G}}$; $w_0 = w_0$. Pour les applications numériques, on prendra $w = \frac{w_0}{2}$. On rappelle que $1 - n = 0,38 \cdot 10^{-6}$ (pour $\lambda = 1,05 \text{ \AA}$).

a) Ecrire les deux équations (12) reliant les deux amplitudes ψ_0 et $\psi_{\mathbf{G}}$. Montrer que le vecteur \mathbf{k} vérifie l'équation :

$$(13) (k_0^2 - w_0 - \mathbf{k}^2) [k_0^2 - w_0 - (\mathbf{k} + \mathbf{G})^2] = w^2 \text{ (équation de dispersion).}$$

On désire étudier la disposition spatiale des vecteurs \mathbf{k} obéissant à l'équation (13). Une origine étant choisie dans l'espace, on pose $\mathbf{k} = \mathbf{MO}$ et on cherche le lieu du point M. Soit \mathbf{G} le point défini par $\mathbf{OG} = \mathbf{G}$.

b) Montrer que la surface décrite par le point M est une surface de révolution d'axe \mathbf{OG} .

On considère l'intersection de cette surface avec un plan xOy contenant \mathbf{OG} , l'axe y étant choisi de sorte que le point \mathbf{G} a pour coordonnées $(0, -\|\mathbf{G}\|)$ (fig. 6). On se limite au cas où la composante k_x du vecteur d'onde \mathbf{k} est positive. Soit XIY le système d'axes parallèle à xOy , d'origine \mathbf{I} définie par :

$$\mathbf{IO}^2 = \mathbf{IG}^2 = k_0^2 - w_0; x_1 < 0 \text{ (} x_1 \text{ : abscisse de I).}$$

L'équation (13) s'écrit $(\mathbf{IO}^2 - \mathbf{MO}^2) (\mathbf{IG}^2 - \mathbf{MG}^2) = w^2$. Près de la condition de Bragg (définie par le fait que seules les amplitudes ψ_0 et $\varphi_{\mathbf{G}}$ sont importantes, c'est-à-dire par les conditions :

$$\|\mathbf{k}\| \simeq \|\mathbf{k} + \mathbf{G}\| \simeq k_0,$$

le point M reste voisin du point I.

c) Montrer que, près de I, la courbe décrite par M est une hyperbole d'équation $(X, Y$ composantes de $\mathbf{IM})$:

$$(14) \quad \frac{X^2}{\sin^2 \vartheta_B} - \frac{Y^2}{\cos^2 \vartheta_B} = \varepsilon^2 k_0^2,$$

$$\left(\sin \vartheta_B = \frac{\|\mathbf{G}\|}{2k_0}; \varepsilon = \frac{w}{k_0^2 \sin 2\vartheta_B} \right)$$

(ϑ_B correspond à l'angle de Bragg de la théorie classique défini en (8); on remarquera que l'angle $(\mathbf{IX}, \mathbf{IO})$ est très proche de ϑ_B). Dessiner cette hyperbole. La branche la plus éloignée de O est appelée branche α ; l'autre branche est appelée branche β . Soit 2Δ l'écart entre les sommets de l'hyperbole.

Evaluer les quantités ε et Δ ($\lambda = 1,05 \text{ \AA}$, $\vartheta_B = 15,9^\circ$).

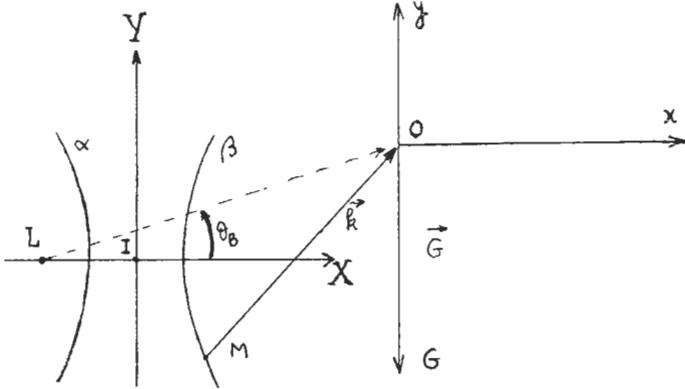


Fig. 6. — On fera attention au fait que la figure 6 ne représente pas à la même échelle les vecteurs \mathbf{k} , \mathbf{G} d'une part, et la région autour de I d'autre part (les échelles sont environ dans un rapport 10^6 à 1).

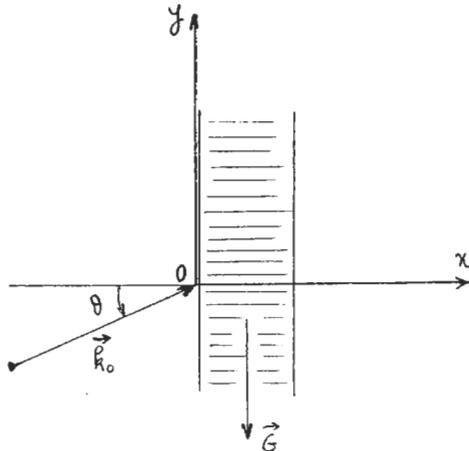


Fig. 7

a) On néglige toute onde réfléchie sur les faces d'entrée et de sortie de la lame et on admet la continuité des ondes à la surface du cristal. En s'appuyant sur cette continuité et sur le fait qu'on se place très près de la condition de Bragg, expliquer qualitativement pourquoi, dans le cristal l'onde, $\psi(\mathbf{r})$, est une somme de quatre ondes planes de vecteurs d'onde respectifs \mathbf{k}_α , $\mathbf{k}_\alpha + \mathbf{G}$, \mathbf{k}_β , $\mathbf{k}_\beta + \mathbf{G}$, les vecteurs \mathbf{k}_α et \mathbf{k}_β obéissant à l'équation de dispersion (13) et ayant la même composante y que le vecteur \mathbf{k}_0 :

$$(15) \quad \psi(\mathbf{r}) = \psi_0^\alpha \exp i \mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{r} + \psi_{\mathbf{G}}^\alpha \exp i (\mathbf{k}_\alpha + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r} + \psi_0^\beta \exp i \mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{r} + \psi_{\mathbf{G}}^\beta \exp i (\mathbf{k}_\beta + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}$$

A la question IV.1 (partie IV du problème) on établira les relations :

$$(16) \quad \psi_0^\alpha = a_0 \frac{-t + \sqrt{1+t^2}}{2\sqrt{1+t^2}}; \quad \psi_{\mathbf{G}}^\alpha = a_0 \frac{-1}{2\sqrt{1+t^2}};$$

$$\psi_0^\beta = a_0 \frac{t + \sqrt{1+t^2}}{2\sqrt{1+t^2}}; \quad \psi_{\mathbf{G}}^\beta = a_0 \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}.$$

b) Montrer que pour $\vartheta = \vartheta_B$ ($t = 0$), la lame se comporte comme un guide d'ondes plan. Expliquer l'effet Borrmann décrit dans la partie II lors de la présentation de l'interféromètre.

c) L'expression (15) de $\psi(\mathbf{r})$ étant écrite : $\psi(\mathbf{r}) = \psi^\alpha(\mathbf{r}) + \psi^\beta(\mathbf{r})$, préciser la position des nœuds et des ventres des ondes ψ^α et ψ^β par rapport aux atomes. En supposant que la théorie de la diffraction précédemment décrite pour les neutrons est également valable pour les rayons X, expliquer qualitativement pourquoi certaines lames cristallines épaisses, totalement opaques pour les rayons X (en raison d'une forte absorption photoélectrique), s'avèrent partiellement transparentes lorsqu'elles sont éclairées sous un angle d'incidence rigoureusement égal à l'angle de Bragg (effet dit de transmission anormale observé pour la première fois par Borrmann en 1943).

d) On suppose que le faisceau (parallèle) de neutrons incident sur la lame à faces parallèles n'est pas rigoureusement monochromatique (\mathbf{k}_0 fixé), mais correspond à une superposition cohérente d'ondes planes de même longueur d'onde ayant des angles d'incidence proches de l'angle de Bragg, la dispersion angulaire étant très petite ($\vartheta - \vartheta_B$ de l'ordre de 10 secondes d'arc), mais supérieure à l'angle ε défini en (14). Montrer que le faisceau dans la lame n'est plus parallèle mais conique. On rappelle l'expression de la vitesse de groupe en optique : $\mathbf{v}_{\text{groupe}} = \text{grad}_{\mathbf{k}} \omega$.

IV. CALCUL DU CONTRASTE DE L'INTERFÉROMÈTRE

IV.1. Etablissement des relations (16).

On considère à nouveau les ondes présentes dans une lame de l'interféromètre (question III, 4, fig. 8).

a) Soit M_α et M_β les points appartenant aux branches α et β de l'hyperbole des figures 6 et 8, définis par $\mathbf{k}_\alpha = M_\alpha \mathbf{O}$, $\mathbf{k}_\beta = M_\beta \mathbf{O}$. Exprimer les coordonnées (X_α, Y_α) et (X_β, Y_β) des vecteurs \mathbf{IM}_α et \mathbf{IM}_β en fonction des paramètres t , Δ et ϑ_B .

b) A l'aide des relations écrites en III.3. a), exprimer les rapports $\psi_G^\alpha / \psi_0^\alpha$ et $\psi_G^\beta / \psi_0^\beta$ en fonction du seul paramètre t .

c) En traduisant les conditions de continuité vues à la question III.4. a), écrire deux relations entre les amplitudes complexes a_0 , ψ_0^α , ψ_0^β , ψ_G^α , ψ_G^β de l'onde incidente, des ondes transmises et diffractées. (On néglige toute onde réfléchie sur les faces de la lame.)

d) Donner un argument qualitatif qui montre que les ondes réfléchies sur les faces de la lame sont négligeables.

IV.2. Traversée d'une lame de l'interféromètre.

Après avoir déterminé les ondes présentes dans la lame, on étudie les ondes sortantes.

a) On néglige la réflexion sur la face de sortie. Montrer que les vecteurs d'onde des deux ondes planes sortant de la lame (qu'on admettra parallèles au plan xOy) sont égaux respectivement à :

$$\mathbf{k}_0; \mathbf{k}_G = \mathbf{k}_0 + \mathbf{G} + 2t\Delta \mathbf{i} \quad (\mathbf{i} \text{ vecteur unitaire de l'axe } Ox).$$

Vérifier qu'ils sont déduits de \mathbf{LO} et \mathbf{LG} par une même rotation d'angle $\Delta\vartheta$.

b) L'onde sortante étant écrite :

$$\chi(\mathbf{r}) = a_0(\tau \exp i \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} + \varrho \exp i \mathbf{k}_G \cdot \mathbf{r}),$$

Montrer que les coefficients de transmission τ et de réflexion ϱ de la lame sont des fonctions de t données par :

$$\tau(t) = \left(\cos \xi(t) - i \frac{t \sin \xi(t)}{(1+t^2)^{1/2}} \right) \exp -i \delta_-(t);$$

$$\varrho(t) = \frac{-i \sin \xi(t)}{(1+t^2)^{1/2}} \exp -i \delta_+(t)$$

avec :

$$\xi(t) = e\Delta(1+t^2)^{1/2}; \quad \delta_\pm(t) = e(\overline{\Gamma} \pm t\Delta).$$

c) Vérifier la loi de conservation du flux de neutrons.

Montrer que $|\varrho|$ et $|\tau|$ dépendent de manière très sensible de la longueur d'onde.

IV.3. Calcul du contraste de l'interféromètre.

On considère l'interféromètre de la fig. 3 constitué des trois lames équidistantes L_1 , L_2 , L_3 d'épaisseur e et on se propose de retrouver la

valeur annoncée du rapport $\frac{B}{A}$.

a) Montrer que, pour une onde plane incidente d'intensité I_0 , l'expression des intensités I_1 et I_2 en fonction du déphasage φ entre les deux faisceaux (déphasage étudié dans la partie II) et de l'écart t à la condition de Bragg est :

$$I_1(\varphi, t) = I_0 A(t)(1 + \cos \varphi); \quad I_2(\varphi, t) = I_0 [B(t) - A(t) \cos \varphi]$$

avec :

$$A(t) = 2 \frac{\sin^4 \xi(t)}{(1+t^2)^3} [t^2 + \cos^2 \xi(t)];$$

$$B(t) = \frac{\sin^2 \xi(t)}{(1+t^2)^3} [t^2 + \cos^2 \xi(t)]^2 + \sin^4 \xi(t).$$

(On observera que, selon la façon dont le faisceau arrive sur les lames, il faut introduire les coefficients $\tau(t)$, $\varrho(t)$ ou $\tau(-t)$, $\varrho(-t)$.)

L'onde de neutrons incidente n'est pas rigoureusement plane, mais peut être considérée comme une superposition d'ondes planes de même amplitude dont le vecteur d'onde \mathbf{k}_0 (supposé toujours parallèle au plan xOy) fait avec l'axe x un angle $\theta = \theta_B + \varepsilon t$ proche de θ_B .

b) Justifier qualitativement la démarche qui consiste à calculer le contraste de l'interféromètre en remplaçant (à un facteur multiplicatif près) les fonctions $A(t)$ et $B(t)$ précédentes par leurs intégrales calculées pour t variant de $-\infty$ à $+\infty$.

c) En remarquant que pour $e = 0,246$ cm et $\lambda = 1,05$ Å, le produit $e\Delta$ est grand devant 1, et en utilisant les valeurs $K_1 = \pi$,

$$K_2 = \frac{\pi}{2}, \quad K_3 = \frac{3\pi}{8} \text{ des intégrales } K_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}, \text{ retrouver}$$

la valeur numérique du rapport $\frac{B}{A}$ donnée en (7). (On remplacera les

quantités du type $\sin^n \xi \cos^m \theta$ par leur moyenne prise pour une répartition uniforme en ξ .)

d) Quelle est la valeur du contraste de l'interféromètre lorsqu'on utilise le compteur 2 ?

SOLUTION

INTERFÉROMÉTRIE NEUTRONIQUE

Les auteurs de cette solution remercient M. l'Inspecteur Général GIÉ pour la relecture de ce corrigé et sa contribution à sa mise en forme.

Les annexes qui figurent à la fin de ce texte ont pour but de préciser certains points du problème.

I. ETUDE DES PROPRIÉTÉS ONDULATOIRES D'UN FAISCEAU DE NEUTRONS

I.1. *Correspondance entre les grandeurs mécaniques et ondulatoires.*

a) La relation de De Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$ et les définitions

galiléennes $p = m v$ de la quantité de mouvement et $E = \frac{1}{2} m v^2$ de l'énergie cinétique conduisent à :

$$v = \frac{h}{m} \lambda^{-1}; \quad E = \frac{1}{2} \frac{h^2}{m} \lambda^{-2}.$$

Avec les unités choisies :

$$v \text{ (km s}^{-1}\text{)} = 3,956 [\lambda \text{ (Å)}]^{-1}; \quad E \text{ (eV)} = 0,0818 [\lambda \text{ (Å)}]^{-2}.$$

b) Le calcul galiléen est valable pour :

$$v \ll c, \quad \text{ou} \quad \lambda \gg \frac{h}{mc} = \lambda_c,$$

avec : $\lambda_c = 1,32 \cdot 10^{-5} \text{ Å}$;

$$\left(\text{un calcul exact donne } v = \frac{h}{m} \lambda^{-1} \left(1 + \frac{\lambda_c^2}{\lambda^2} \right)^{-1/2} \right).$$

I.2. *Indice d'un milieu et énergie potentielle moyenne des neutrons.*

a) On compare les deux équations données, écrites respectivement :

$$\left[\Delta + \frac{2 m E}{\hbar^2} \left(1 - \frac{V}{E} \right) \right] \psi = 0 \quad \text{et}$$

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + (n^2 - 1) \right) \right] \psi = 0.$$

Comme d'une part E pour l'une et ω pour l'autre ne dépendent pas du milieu, et que, d'autre part, le « vide » correspond à $V = 0$ dans un cas, et $n = 1$ dans l'autre, il est naturel de poser

$$n^2 - 1 = -\frac{V}{E}, \text{ c'est-à-dire : } n^2 = 1 - \frac{V}{E} \text{ (cf. Annexe 1). } E \text{ est}$$

l'énergie cinétique des neutrons dans le vide (conservation de l'énergie).

$$\text{Pour } n \approx 1, \text{ on a : } n \approx 1 - \frac{V}{2E} = 1 - \frac{mV\lambda^2}{h^2}.$$

b) En choisissant pour distance interatomique typique 2 \AA , pour rayon d'un noyau 4 F et pour énergie potentielle nucléaire 10 MeV , on obtient l'énergie potentielle moyenne :

$$\bar{V} = 10^7 \frac{4}{3} \pi \left(\frac{4 \cdot 10^{-15}}{2 \cdot 10^{-10}} \right)^3 \text{ eV}$$

$$\text{et la différence } |n - 1| \approx \frac{\bar{V}}{2E} = \frac{32 \cdot 10^{-8}}{2 \times 8 \cdot 10^{-2}} \approx 2 \cdot 10^{-6}.$$

I.3. Indice d'un milieu et longueur de diffusion des noyaux.

a) $4\pi b^2$ est la section efficace de diffusion du noyau. b est de l'ordre du rayon du noyau (quelques Fermi).

b) Le nombre de diffuseurs par unité de surface est $N dz$. L'onde diffusée dans le plan z_0 vaut :

$$-A b \iint_{\Pi} N dz \frac{\exp i k \|\mathbf{PM}\|}{\|\mathbf{PM}\|} dx dy,$$

c'est-à-dire, en utilisant l'identité donnée dans le texte,

$-A b N dz i \lambda \exp(i k z_0)$. L'onde résultante est obtenue en ajoutant l'onde incidente, soit :

$$A(1 - i \lambda N b dz) \exp(i k z_0).$$

Remarque.

Le fait que les diffuseurs ne soient pas en $z = 0$ introduit des déphasages, au niveau de l'onde incidente et de l'onde émise par chaque noyau. Ces déphasages ne sont pas, chacun, négligeables ($\lambda \approx 1 \text{ \AA}$!), mais se compensent.

c) L'onde dans le plan z_0 s'écrit aussi $A \exp(i k z_0 + i d\varphi)$. Le déphasage $d\varphi = -\lambda N b dz$ doit être assimilé au déphasage $2\pi\lambda^{-1}(n-1) dz$ dû à une lame à faces parallèles d'indice n et d'épaisseur dz . On en déduit l'expression de l'indice :

$$n = 1 - (2\pi)^{-1} N \lambda^2 b ;$$

n est plus petit que 1 lorsque b est positif.

d) Comme ordre de grandeur, prenons : $N = (2 \text{ \AA})^{-3}$ (comme à la question I.2. b) ; $b = 4 \text{ F}$; on obtient à nouveau $|n-1| \approx 10^{-6}$.

I.4. Trois exemples de mesures de longueur de diffusion.

a) La déviation minimale d'un prisme correspond à la disposition symétrique de la fig. 1, pour laquelle l'angle de réfraction

$$\text{tion vaut : } r = \frac{A}{2}.$$

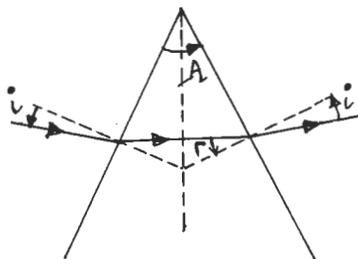


Fig. 1

Posons : $n = 1 - \epsilon$. La déviation $D = 2 |i - r|$ s'obtient en composant la loi de Descartes : $\sin i = (1 - \epsilon) \sin r$ et le développement :

($|i - r|$ est d'ordre ϵ) $\sin [r + (i - r)] = \sin r + (i - r) \cos r$,
soit :

$$D = 2 \epsilon \operatorname{tg} r = 2 |n - 1| \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

La densité d'atomes du germanium valant :

$$N = \frac{5,46 \cdot 10^3}{72,6 \cdot 10^{-3}} \times 6,02 \cdot 10^{23} = 4,53 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3},$$

la longueur de diffusion du noyau de germanium est :

$$b = \frac{2\pi}{N \lambda^2} \frac{D}{2 \operatorname{tg} A/2}, \text{ soit : } b = 8,2 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 8,2 \text{ F}.$$

b) L'équation de la parabole décrite par les neutrons (fig. 2) est : $z = H - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v} \right)^2$. D'autre part, l'angle de

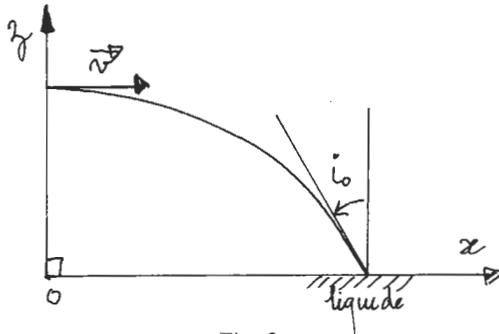


Fig. 2

réfraction limite vérifiée $\sin i_0 = n = 1 - \varepsilon$ (il peut y avoir réflexion totale parce que l'indice du liquide est plus petit que 1). On écrit que, au point de contact avec le liquide :

$$\left| \frac{dz}{dx} \right| = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - i_0 \right) \approx \cos i_0,$$

soit :

$$g \frac{x}{v^2} = \sqrt{\frac{2 H_0 g}{v^2}} \approx \sqrt{1 - (1 - \varepsilon)^2} = \sqrt{2 \varepsilon}.$$

$$\text{D'où : } H_0 = \frac{v^2}{g} \frac{1}{2\pi} N \lambda^2 b = N g^{-1} \frac{h^2}{2\pi m^2} b \text{ (autre démonstration à l'Annexe 2).}$$

Application :

$$\frac{H_0}{b} \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ pour } N = 10^{29}; \text{ ce rapport est}$$

considérable. H_0 est de l'ordre du mètre.

c) Comme l'indice est très proche de 1, il suffit de calculer la différence des épaisseurs traversées, soit approximativement :

$$\frac{T}{\cos(\theta - \delta)} - \frac{T}{\cos(\theta + \delta)} = \frac{-2 T \sin \theta \sin \delta}{\cos^2 \theta \cos^2 \delta - \sin^2 \theta \sin^2 \delta} \dots$$

$$\dots = \frac{-2 T \sin \theta \sin \delta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \delta}.$$

Le déphasage demandé s'obtient par multiplication par le fac-

$$\text{teur } \frac{2\pi}{\lambda} (n - 1) = -\lambda b N.$$

I.5. *Effets du champ de pesanteur et de la rotation de la terre.*

a) Dans le référentiel du laboratoire, l'équation de la dynamique fait intervenir les forces d'inertie. Le terme $-2m\vec{\omega} \wedge \mathbf{v}$ désigne la force de Coriolis. La force centrifuge dérive du poten-

tiel $\frac{1}{2} m \omega^2 d^2$ (d : distance à l'axe de rotation) et peut donc être pris en compte dans V . On pourra écrire localement $V(\mathbf{r}) = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$ car l'accélération de la pesanteur \mathbf{g} prend en compte, comme on le sait, l'accélération centrifuge.

L'énergie $E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r})$ est conservée car $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{\text{Coriolis}} = 0$.

b) Le terme $[2m(E - V)]^{1/2} = [2mE]^{1/2} n(\mathbf{r})$ est proportionnel à l'indice (E ne dépend pas du milieu). Pour $\vec{\omega} = \mathbf{0}$, le principe de Maupertuis s'identifie donc au principe de Fermat. On obtient le résultat (6) demandé en écrivant, comme en optique :

$$\Phi(B) - \Phi(A) = \frac{2\pi}{\lambda} \int_n^B n dl \text{ et en posant, comme en I.1. a) :}$$

$$\lambda = \left(\frac{h^2}{2mE} \right)^{1/2} \text{ (longueur dans le vide : } V = 0 \text{).}$$

Une discussion complémentaire est faite à l'Annexe 3.

II. ETUDE DE QUELQUES EXPÉRIENCES RÉALISÉES AVEC UN INTERFÉROMÈTRE A NEUTRONS

II.1. *L'interféromètre.*

a) La dispersion angulaire due à la diffraction (largeur finie du faisceau) :

$$\Delta\theta = \frac{\text{longueur d'onde}}{\text{dimension transverse}} \approx \frac{10^{-10}}{5 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ rd}$$

est inférieure à 10^{-2} seconde d'arc, donc bien inférieure à l'écart autorisé.

b) L'onde dans la région commune aux deux faisceaux (fig. 3) est proportionnelle à :

$$e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} [1 + e^{i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}}].$$

Dans le plan de la lame, la phase $(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}$ vaut :

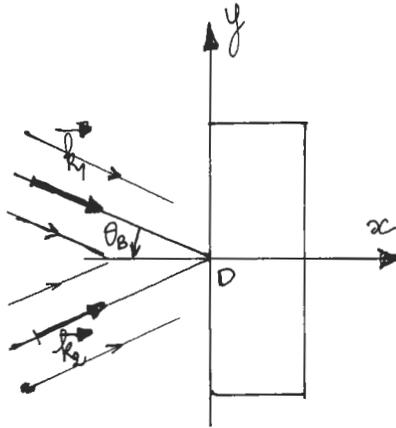


Fig. 3

$$(k_2 - k_1) \cdot r = 2 k y \sin \theta_B = \frac{4 \pi y}{\lambda} \sin \theta_B.$$

Elle varie de 2π pour un déplacement (interfrange) :

$$i = \frac{\lambda}{2 \sin \theta_B}.$$

Cet interfrange, de l'ordre des distances interatomiques dans la lame, est inobservable. On ne pourra donc pas déceler des déphasages dans l'appareil par un déplacement de ces franges. Le rôle de la lame L_3 est de traduire ces déphasages en des variations globales des intensités des faisceaux.

c) Les déphasages dus à des inégalités d'épaisseur très grandes devant la longueur d'onde correspondent cependant à des variations petites de l'ordre d'interférence parce que l'indice

$$\text{est très proche de un : } \frac{\delta\varphi}{2\pi} = |n-1| \frac{\delta e}{\lambda} \simeq 0,7 \cdot 10^{-6} \frac{10^{-6}}{10^{-10}} < 10^{-2}.$$

Les déphasages à mesurer devront être supérieurs à 0,06 rd.

II.2. Observation de déphasages.

a) D'après la modélisation proposée de l'effet des lames, par des coefficients de transmission τ et de réflexion ρ , les intensités dans les compteurs 1 et 2 valent respectivement :

$$I_1 = I_0 |\tau \rho^2 + \rho^2 \tau e^{i\varphi}|^2; \quad I_2 = I_0 |\tau \rho \tau + \rho^3 e^{i\varphi}|^2$$

(il suffit pour chaque trajet de compter le nombre de réflexions ou de transmissions et de tenir compte de la différence φ des déphasages dus à la lame). L'intensité $I_1 = I_0 2 |\tau|^2 |q|^4 (1 + \cos \varphi)$ présente bien la dépendance en φ observée, avec : $A = 2 |\tau|^2 |q|^4$.

L'intensité I_2 s'écrit aussi (en posant $\frac{q}{\tau} = a e^{i\alpha}$ avec $a > 0$) :

$$\begin{aligned} I_2 &= I_0 |\tau|^2 |q|^4 \left| \frac{\tau}{q} + \frac{q}{\tau} e^{i\varphi} \right|^2 = I_0 |\tau|^2 |q|^4 \left| \frac{1}{a} e^{-i\alpha} + a e^{i(\alpha+\varphi)} \right|^2 \\ &= I_0 |\tau|^2 |q|^4 \left[\left(\frac{1}{a^2} + a^2 \right) + 2 \cos(\varphi + 2\alpha) \right] = I_0 [B + A \cos(\varphi + 2\alpha)]. \end{aligned}$$

La dépendance en φ observée implique : $2\alpha = \pm \Pi$; le rapport $\frac{q}{\tau} = a e^{\pm i\pi/2}$ est donc imaginaire pur.

b) Comme $\frac{B}{A} = 2,6$, on doit avoir aussi : $a^2 + a^{-2} = 5,2$

c'est-à-dire $\left| \frac{q}{\tau} \right|^2 \approx 5$ (ou $\left| \frac{\tau}{q} \right|^2 \approx 5$). Pour obtenir le

couple (non ordonné) ($|q|$, $|\tau|$), il faut utiliser la loi de conservation du flux de neutrons qui s'écrit ici, les neutrons ayant même vitesse à l'entrée et à la sortie des lames : $|q|^2 + |\tau|^2 = 1$. Par conséquent, on a :

$$(|q|^2, |\tau|^2) = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right) \text{ et } (|q|, |\tau|) = (0,4; 0,9).$$

c) Pour δ petit, le déphasage obtenu en I.4. c) est :

$$\varphi = 4\pi \frac{|n-1|}{\lambda} T \delta \frac{\sin \theta_B}{\cos \theta_B}.$$

La périodicité de l'intensité vis-à-vis de l'angle de rotation δ correspond à $\varphi = 2\pi$, soit ($\cos \theta_B = 0,96$; $\sin \theta_B = 0,274$) :

$$\delta = \frac{\lambda \cos^2 \theta_B}{2T |n-1| \sin \theta_B} = 1,55 \cdot 10^{-2} \text{ rd} = 0,88^\circ.$$

II.3. *Calcul des effets dus au champ de pesanteur et à la rotation de la terre.*

a) Cherchons une solution de l'équation :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2m \vec{\omega} \wedge \mathbf{v} + m\mathbf{g}$$

à l'ordre deux en t pour $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{A} t^2; \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{A} t; \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}.$$

Cette solution portée dans l'équation donne le résultat demandé : $\mathbf{A} = -2 \vec{\omega} \wedge \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}$.

Toute correction à cette solution amènera des termes qui, en valeur relative, seront d'ordre ωt ou $\frac{g t}{v_0}$, seules grandeurs sans

dimension impliquant le temps. La vitesse des neutrons étant de $3,8 \text{ km s}^{-1}$ (cf. I.1. a), le temps de vol entre deux lames est ($\cos \theta_B = 0,9$),

$$t \simeq 0,9 \cdot 10^{-5} \text{ s}; \text{ d'où : } \omega t \approx 7 \cdot 10^{-10}; \quad \frac{g t}{v_0} \approx 3 \cdot 10^{-8}.$$

b) Comme $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + t(\mathbf{g} - 2 \vec{\omega} \wedge \mathbf{v}_0)$, on voit que les modifications des angles d'incidence sont analogues aux corrections précédemment calculées. Elles valent au plus $3 \cdot 10^{-8} \text{ rd} \approx 10^{-2}''$ soit dix fois moins que les écarts maximum autorisés.

c) L'indice n pour le champ de pesanteur est : ($V(\mathbf{r}) = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$) :

$$n = 1 - \frac{m V \lambda^2}{h} = 1 + \frac{m^2 \lambda^2}{h} \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}.$$

Le déphasage dû à la pesanteur s'écrit, pour chaque trajet :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \int (n-1) dl = \frac{2\pi m^2 \lambda}{h^2} \mathbf{g} \cdot \int \mathbf{r} dl.$$

D'où la différence des déphasages :

$$\varphi_g = \frac{2\pi m^2 \lambda}{h^2} \mathbf{g} \cdot \left[\int_{A'CC'D} \mathbf{r} dl - \int_{A'BB'D} \mathbf{r} dl \right].$$

Le déphasage dû à la rotation s'écrit, pour chaque trajet :

$$\varphi = \frac{2\pi m}{h} \int (\vec{\omega} \wedge \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi m}{h} \vec{\omega} \cdot \int \frac{\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}}{2}.$$

La quantité $\frac{\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}}{2}$ est une aire balayée par le rayon vec-

teur d'extrémités, l'origine choisie dans le laboratoire et le point courant du faisceau. Faire la différence des déphasages revient à intégrer le long du contour fermé $\gamma \equiv (A'CC'DBB'A')$. On a donc :

$$\int_{\gamma} \frac{\mathbf{r} \wedge d\mathbf{r}}{2} = S \mathbf{u}_0 \quad \text{et} \quad \varphi_{\omega} = \frac{4\pi m}{h} S \vec{\omega} \cdot \mathbf{u}_0$$

S est l'aire entourée par γ ; le vecteur \mathbf{u}_0 est représenté sur la figure 5.

Remarque.

Comme les longueurs des deux trajets A'CC'D et A'BB'D sont égales, le déphasage φ_g ne dépend pas de l'origine choisie pour définir le zéro d'énergie potentielle.

II.4. *Mesure de l'effet dû au champ de pesanteur.*

a) *Calcul de φ_{ω}* : L'aire S vaut :

$$\frac{1}{2} d^2 \operatorname{tg} \vartheta_B \times 4 + 2 d \operatorname{tg} \vartheta_B \times e = (2d^2 + 2ed) \operatorname{tg} \vartheta_B.$$

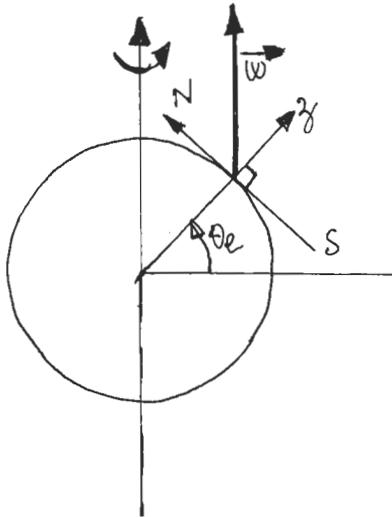


Fig. 4

Quand on tourne l'appareil autour de la direction SN, le vecteur \mathbf{u}_0 initialement parallèle à l'axe z de la figure 4 tourne dans un plan vertical contenant cet axe. La projection de $\vec{\omega}$ dans ce plan $\omega \sin \vartheta_1 \hat{z}$. Par suite : $\vec{\omega} \cdot \mathbf{u}_0 = \omega \sin \vartheta_1 \cos \Phi$. D'où :

$$\varphi_\omega = \frac{4 \pi m \omega}{h} (2 d^2 + 2 ed) \operatorname{tg} \vartheta_B \sin \vartheta_1 \cos \Phi = q_\omega \cos \Phi.$$

Calcul de φ_g : L'intégrale vectorielle entre crochets dans φ_g s'écrit (figure 5) :

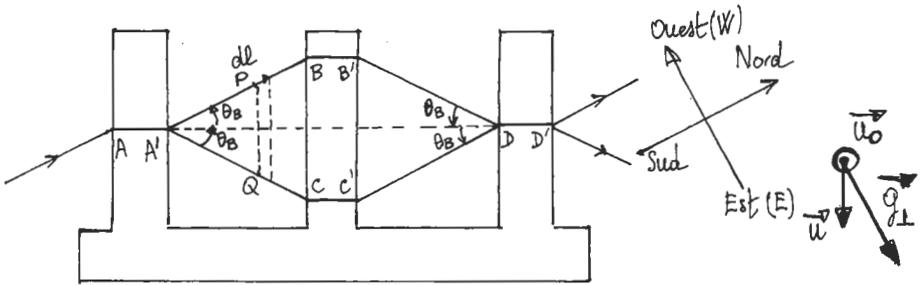


Fig. 5

$$\begin{aligned} \int_{A'B'D'} \mathbf{PQ} dl &= \mathbf{u} \left[\frac{\text{aire } A'BC}{\cos \vartheta_B} + \text{aire } (BB'C'C) + \frac{\text{aire } (B'DC')}{\cos \vartheta_B} \right] \\ &= \mathbf{u} \left[2 \frac{d^2 \operatorname{tg} \vartheta_B}{\cos \vartheta_B} + 2 ed \operatorname{tg} \vartheta_B \right]. \end{aligned}$$

Quand on tourne l'appareil, la projection \mathbf{g}_\perp de \mathbf{g} dans le plan de l'appareil, initialement nulle, est portée par la direction WE et vaut $g \sin \Phi$ (raisonner sur la fig. 4). Par conséquent : $\mathbf{g} \cdot \mathbf{u} = g \sin \Phi \cos \vartheta_B$

et :

$$\varphi_g = \frac{2 \pi m^2 \lambda}{h^2} g [2 d^2 + 2 ed \cos \vartheta_B] \operatorname{tg} \vartheta_B \sin \Phi.$$

b) L'effet de la gravité bien connu sur les photons est le « décalage vers le rouge » ; φ_g peut être en effet interprété comme dû à une variation de la fréquence avec le potentiel gravitationnel. L'influence de la rotation sur un interféromètre optique a été mise en évidence dans l'expérience de Sagnac. Pour éliminer

m et h et faire apparaître c , il suffit d'introduire la longueur d'onde de Compton. Par exemple, dans φ_g intervient la quantité

$$\frac{m^2}{h^2} = (c\lambda_c)^{-2};$$

comme pour les photons, il n'y a pas d'équivalent à λ_c , un argument dimensionnel indique que ce terme sera remplacé (à un facteur multiplicatif près) par $(c\lambda)^{-2}$; leur rapport vaut $\left(\frac{\lambda_c}{\lambda}\right)^2 \approx 10^{-10}$. L'effet pour les photons est donc 10^{10} fois plus petit que pour les neutrons. De même dans φ_ω intervient le rapport $\frac{m}{h}$; l'effet pour les photons sera 10^5 fois plus petit que pour les neutrons.

c) On pose :

$$\varphi = \varphi_g + \varphi_\omega + \varphi_D = q_\omega \cos \Phi + (q_g + q_D) \sin \Phi = q \sin (\Phi - \Phi_0).$$

Donc : $q = \sqrt{q_\omega^2 + (q_g + q_D)^2} \approx (q_g + q_D)$ avec une précision relative $\frac{1}{2} \left(\frac{q_\omega}{q_g + q_D} \right) = 5 \cdot 10^{-4}$.

Si on écrit encore plus simplement $\varphi = q \sin \Phi = 31,6 \sin \Phi$, on voit que φ varie de 2π lorsque Φ varie de $\frac{2\pi}{31,6}$ ou $\frac{360}{31,6} = 11,4^\circ$. Ce chiffre est comparable à la pseudo-période, 12° , de la courbe expérimentale.

II.5. Mesure de l'effet de rotation de la Terre.

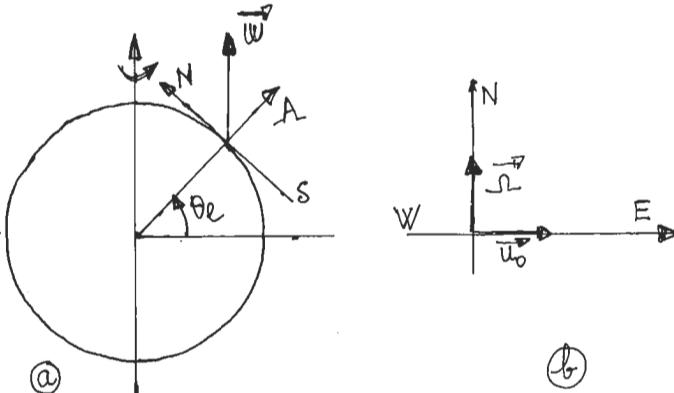


Fig. 6 a) - 6 b)

a) L'intérêt du montage est que les effets de déformation et de pesanteur (effets non nuls) ne dépendent pas de Φ .

b) *Calcul de φ'_ω* : Le vecteur \mathbf{u}_3 tourne maintenant dans un plan horizontal. Il est initialement dirigé vers l'est, donc vers l'arrière du plan de la fig. 6 a. La projection $\vec{\Omega}$ de $\vec{\omega}$ dans ce plan est dirigé vers le nord et a pour mesure $\omega \cos \theta_l$. Par suite :

$\vec{\omega} \cdot \mathbf{u}_3 = \vec{\Omega} \cdot \mathbf{u}_0 = \omega \cos \theta_l \sin \Phi$ alors qu'on avait obtenu $\omega \sin \theta_l \cos \Phi$ à la question II.4. a). Par conséquent : $\varphi'_\omega = q'_\omega \sin \Phi$ avec

$$q'_\omega = q_\omega \frac{\cos \theta_l}{\sin \theta_l} = 1,05 \times 1,2 \approx 1,2 \text{ rd.}$$

b) La dépendance de φ'_ω avec Φ est difficile à détecter si les coefficients A et B de l'appareil dépendent de Φ d'une manière non contrôlée. Par contre les courbes $I_1(\delta)$ pour chaque Φ sont des sinusôides, bien contrôlées par la rotation de la lame, de période $0,88^\circ$. Pour des Φ différents, ces courbes apparaîtront décalées en raison du déphasage φ'_ω . Si on remarque que $0,88^\circ$ correspond à peu près à un centième de q'_ω , on se rend compte du degré de sensibilité de la méthode. L'intérêt a donc été d'avoir remplacé une mesure d'intensité brouillée par une mesure directe de déphasage.

III. THÉORIE DYNAMIQUE DE LA DIFFRACTION ET EFFET BORRMANN

III.1. Plans réticulaires d'un cristal de silicium et théorie « classique » de la diffraction.

a) Les plans réticulaires $\mathbf{G} \cdot \mathbf{r} = 2p\pi$ sont à une distance $\frac{2p\pi}{\|\mathbf{G}\|}$ de l'origine. La distance entre deux plans consé-

cutifs est donc : $d = \frac{2\pi}{\|\mathbf{G}\|} = \frac{a}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}$.

b) Un maximum correspond au cas où les contributions des atomes ont même phase. Pour toute translation \mathbf{t} du réseau, $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{t}$ doit être multiplié de 2π . Une condition nécessaire et suffisante est qu'il en soit ainsi avec les vecteurs de base. Par conséquent, les projecteurs de $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ sur $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ doivent être multiples de 2π . On retrouve ainsi tous les vecteurs $\mathbf{G}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$.

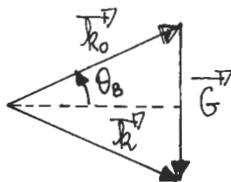


Fig. 7

Comme $\mathbf{k} - \mathbf{k}_0 = \mathbf{G}$ avec $\|\mathbf{k}\| = \|\mathbf{k}_0\|$, la fig. 7 montre que :

$$\sin \theta_B = \frac{\|\mathbf{G}\|}{2k_0} = \frac{2\pi/d}{2 \times 2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{2d}.$$

c) Soit x_i, y_i, z_i les composantes du vecteur $\vec{\varrho}_i$ qui joint l'origine de la maille à un atome i de la maille ; les contributions

des atomes ont même phase si $\mathbf{G} \cdot \vec{\varrho}_i = \frac{2\pi}{a} (\alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i + \alpha_3 z_i)$

est multiple de 2π . On en déduit les conditions :

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2}, \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}, \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{4} \in \mathbb{Z}.$$

Ceci implique que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ soient des nombres pairs et que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ soit multiple de 4. C'est effectivement le cas des plans utilisés dans l'interféromètre : $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [2, 2, 0]$.

III.2. Propagation d'ondes dans un cristal infini.

a) On a :

$$V(-\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}} \exp -i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r} = \sum_{\mathbf{G}} V_{-\mathbf{G}} \exp i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}$$

$$\text{et } \bar{V}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \bar{V}_{\mathbf{G}} \exp -i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r} = \sum_{\mathbf{G}} \bar{V}_{-\mathbf{G}} \exp i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}.$$

En identifiant les coefficients de $\exp i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}$ dans les membres de l'égalité $V(\mathbf{r}) = V(-\mathbf{r}) = \bar{V}(\mathbf{r})$, on obtient : $V_{\mathbf{G}} = V_{-\mathbf{G}} = \bar{V}_{-\mathbf{G}}$. Ces égalités étant vraies pour tout \mathbf{G} , on en déduit que $V_{\mathbf{G}} = V_{-\mathbf{G}}$ est une quantité réelle.

b) On a :

$$\Delta\psi = -\sum_{\mathbf{G}} \psi_{\mathbf{G}} (\mathbf{k} + \mathbf{G})^2 \exp i(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}$$

$$V\psi = \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'} V_{\mathbf{K}'} \psi_{\mathbf{K}} \exp i(\mathbf{k} + \mathbf{K} + \mathbf{K}') \cdot \mathbf{r} = \dots \\ \dots \sum_{\mathbf{G}} \exp i(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r} \left[\sum_{\mathbf{K}} V_{\mathbf{G}-\mathbf{K}} \psi_{\mathbf{K}} \right].$$

Les coefficients de $\exp i(\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}$ dans les membres de l'équation

de Schrödinger sont donc : $\frac{\hbar^2}{2m} (\mathbf{k} + \mathbf{G})^2 \psi_{\mathbf{G}} + \sum_{\mathbf{K}} V_{\mathbf{G}-\mathbf{K}} \psi_{\mathbf{K}}$ et

$\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \psi_{\mathbf{G}}$. Leur égalité conduit à :

$$[k_0^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{G})^2] \psi_{\mathbf{G}} = \sum_{\mathbf{K}} w_{\mathbf{G}-\mathbf{K}} \psi_{\mathbf{K}} \quad (w_{\mathbf{G}} = \frac{2m}{\hbar^2} V_{\mathbf{G}}).$$

$$c) \text{ Ecrivons : } \psi_{\mathbf{G}} \left(1 - \frac{(\mathbf{k} + \mathbf{G})^2}{k_0^2} \right) = \sum_{\mathbf{K}} \frac{w_{\mathbf{G}-\mathbf{K}}}{k_0^2} \psi_{\mathbf{K}}. \text{ Le}$$

membre de droite est d'ordre $10^{-6} \times \sup |\psi_{\mathbf{K}}|$; pour que $\psi_{\mathbf{G}}$ ne soit pas négligeable, $(\mathbf{k} + \mathbf{G})^2$ doit approcher k_0^2 à environ 10^{-6} près.

d) L'équation (12) devient $\psi_0 (k_0^2 - k^2 - w_0) = 0$, ce qui implique l'équation de dispersion $k^2 = k_0^2 - w_0$. k_0 est le module du vecteur d'onde en l'absence de milieu. L'indice n est donc :

$$n = \frac{k}{k_0} = \left(1 - \frac{w_0}{k_0^2} \right)^{1/2} \approx 1 - \frac{m V_0}{\hbar^2 k_0^2} = 1 - m \frac{\lambda^2}{\hbar^2} V_0.$$

Intégrons l'énergie potentielle $V(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} V_{\mathbf{G}} \exp i \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}$ dans le volume d'une maille; on obtient, par définition de l'énergie potentielle moyenne \bar{V} : $\int_{\text{maille}} V(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \bar{V} \times (\text{vol.})$. L'intégrale des exponentielles imaginaires est nulle sauf pour $\mathbf{G} = 0$, auquel cas on obtient $V_0 \times (\text{vol.})$. On a donc $V_0 = \bar{V}$ et on retrouve l'expression de l'indice obtenue en I.

III.3. Equation de dispersion du cristal près de la condition de Bragg.

a) Le système d'équations (12), écrit sous la forme développée :

$$\psi_0 (k_0^2 - k^2 - w_0) - w \psi_{\mathbf{G}} = 0;$$

$$-w \psi_0 + (k_0^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{G})^2 - w_0) \psi_{\mathbf{G}} = 0$$

n'a de solution non nulle que si le déterminant est nul :

$$(k_0^2 - k^2 - w_0) (k_0^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{G})^2 - w_0) = w^2.$$

Cette relation donne k en fonction k_0 , donc de l'énergie E . C'est bien une relation de dispersion.

b) Avec $\mathbf{k} + \mathbf{G} = \mathbf{MO} + \mathbf{OG} = \mathbf{MG}$, l'équation devient

$$(k_0^2 - w_0 - \mathbf{MO}^2) (k_0^2 - w_0 - \mathbf{MG}^2) = w^2,$$

O, G, \mathbf{MO}^2 et \mathbf{MG}^2 étant invariant par une rotation d'axe OG, le lieu du point M est une surface de révolution d'axe OG.

c) Soit x_0 l'abscisse de O dans le repère XIY , X, Y les composantes du vecteur IM . On a :

$$IO^2 - MO^2 = x_0^2 + \frac{G^2}{4} - \left(\frac{G}{2} - Y \right)^2 - (x_0 - X)^2 = GY + 2x_0 X$$

au premier ordre en X, Y . De même $IG^2 - MG^2 = -GY + 2x_0 X$. D'où l'équation de la courbe, limitée aux termes du second ordre en X, Y : $4x_0^2 X^2 - G^2 Y^2 = w^2$.

Comme IO est très proche (à 10^{-6} près) de k_0 , le sinus de l'angle (IX, IO) vaut $\frac{G}{2k_0}$ soit $\sin \vartheta_B$. On en déduit : $x_0 = k_0 \cos \vartheta_B$ et l'équation de la courbe :

$$4k_0^2 \cos^2 \vartheta_B X^2 - 4k_0^2 \sin^2 \vartheta_B Y^2 = w^2$$

ou encore ($\sin 2\vartheta_B = 2 \sin \vartheta_B \cos \vartheta_B$) :

$$\frac{X^2}{\sin^2 \vartheta_B} - \frac{Y^2}{\cos^2 \vartheta_B} = \frac{w^2}{4k_0^2 \sin^2 \vartheta_B \cos^2 \vartheta_B} = \varepsilon^2 k_0^2$$

avec :

$$\varepsilon = \frac{w}{k_0^2 \sin 2\vartheta_B}$$

La courbe est représentée sur la fig. 8.

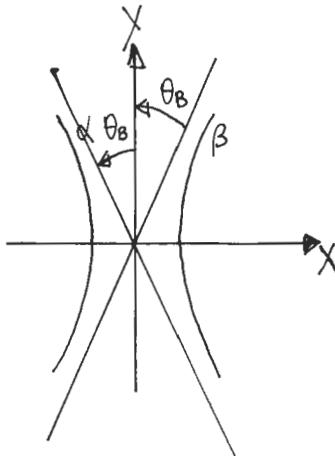


Fig. 8

ε , quantité sans dimension vaut :

$$\varepsilon = \frac{w_0}{2 k_0^2 \sin^2 \vartheta_B} = \frac{|n-1|}{\sin 2 \vartheta_B} = 8 \cdot 10^{-7} \approx 0,2''.$$

Les sommets de l'hyperbole ($Y = 0$) ont pour abscisses $\pm \Delta$ avec :

$$\Delta = \frac{w}{2 k_0 \cos \vartheta_B} = \varepsilon k_0 \sin \vartheta_B = \frac{\pi}{\lambda} \frac{|n-1|}{\cos \vartheta_B} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}.$$

III.4. Effet Borrmann.

a) La continuité des ondes implique que les ondes non réfléchies aient des vecteurs d'onde de même composante y (cf. Lois de Descartes); la présence des ondes de vecteurs $\mathbf{k}_\alpha + \mathbf{G}$ et $\mathbf{k}_\beta + \mathbf{G}$ est due au fait qu'on est près de la condition de Bragg.

b) Pour $\vartheta = \vartheta_B$, c'est-à-dire $t = 0$, l'onde dans le cristal s'écrit :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{a_0}{2} [\exp i \mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{r} - \exp i (\mathbf{k}_\alpha + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r} + \dots \\ \dots \exp i \mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{r} + \exp i (\mathbf{k}_\beta + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}]$$

$$\psi(\mathbf{r}) = a_0 \left(-i \sin \frac{\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}{2} \right) \exp i \left(\mathbf{k}_\alpha + \frac{\mathbf{G}}{2} \right) \cdot \mathbf{r} + \dots \\ \dots a_0 \cos \frac{\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}{2} \exp i \left(\mathbf{k}_\beta + \frac{\mathbf{G}}{2} \right) \cdot \mathbf{r}.$$

L'onde est donc la somme de deux ondes, stationnaires dans la direction \mathbf{G} , et propagatives dans la direction x (direction des

vecteurs $\mathbf{k}_\alpha + \frac{\mathbf{G}}{2}$ et $\mathbf{k}_\beta + \frac{\mathbf{G}}{2}$ lorsque $t = 0$). L'expression mathématique de chacune de ces ondes est analogue à celle des ondes

se propageant dans un guide d'onde plan, dont les plans sont séparés d'une distance réticulaire.

Remarque.

On peut dire aussi (voir plus loin) que dans la condition de Bragg, la vitesse de groupe est rigoureusement parallèle aux plans.

c) Pour les noyaux, $\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}_n$ est un multiple de 2π . L'onde α est nulle près des noyaux et a donc peu de chance d'être absorbée, alors que l'onde β y a une amplitude maximale et subit, de ce

fait, une grande absorption. A la sortie de la lame, l'onde α reste présente, ce qui explique l'effet Borrmann. En dehors de la condition de Bragg, les amplitudes des ondes α et β sont toutes deux non nulles près des noyaux. Les ondes sont absorbées.

d) Le rôle de ω en optique est joué ici par l'énergie des neutrons. Les vecteurs $\mathbf{v}_{\text{groupe}}$ sont perpendiculaires à la surface d'énergie constante dans l'espace \mathbf{k} , c'est-à-dire la surface de dispersion étudiée en III.3. Si $\Delta\theta$ est supérieur à ε , les points M_α et M_β balayent pratiquement toute l'hyperbole de la fig. 8 (voir aussi fig. 10); les vecteurs normaux sont alors situés dans un cône d'axe IX et d'angle au sommet θ_B .

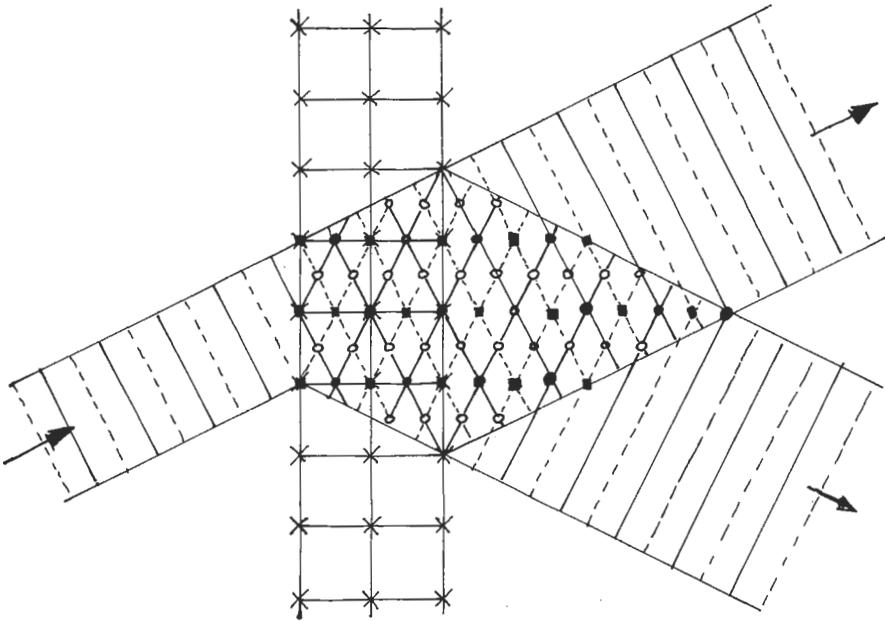


Fig. 9

Remarque.

La fig. 9 schématise la traversée d'une lame de l'interféromètre et l'effet Borrmann.

IV. CALCUL DU CONTRASTE DE L'INTERFÉROMÈTRE

IV.1. Etablissement des relations (16).

a) Soit $M_0O = \mathbf{k}_0$. Comme $LM_0 = k_0 \Delta\theta$, l'ordonnée du point M_0 , qui est celle aussi des points M_α et M_β vaut (fig. 10) :

$$Y_\alpha = Y_\beta = -k_0 \Delta \theta \cos \vartheta_B = -\varepsilon k_0 t \cos \vartheta_B.$$

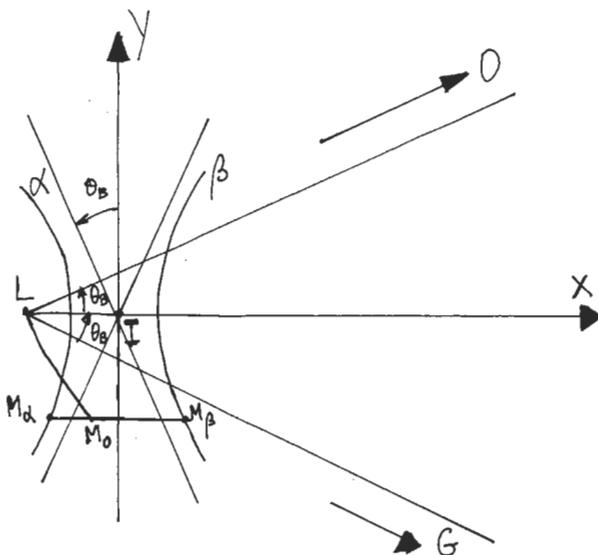


Fig. 10

L'équation de l'hyperbole s'écrit aussi :

$$X^2 = \operatorname{tg}^2 \vartheta_B Y^2 + \Delta^2 \text{ avec } \Delta = \varepsilon k_0 \sin \vartheta_B.$$

On a donc :

$$Y_\alpha = Y_\beta = -t \Delta \operatorname{cotg} \vartheta_B; \quad X_\beta = -X_\alpha = \Delta (1 + t^2)^{1/2}.$$

b) On calcule [voir question III.3. a) et b)] :

$$\frac{\psi_G}{\psi_0} = \frac{k_0^2 - k^2 - w_0}{w} = \frac{IO^2 - MO^2}{w} = \dots$$

$$\dots \frac{2 k_0}{w} (Y \sin \vartheta_B + X \cos \vartheta_B) = \frac{X + Y \operatorname{tg} \vartheta_B}{\Delta}.$$

Ce rapport vaut : $-(1 + t^2)^{1/2} - t$ pour la branche α ,

$(1 + t^2)^{1/2} - t$ pour la branche β .

c) Les relations de continuité sont au nombre de deux car il faut regrouper les ondes ayant même composante y du vecteur d'onde :

$$\psi_0^\alpha + \psi_0^\beta = a_0; \quad \psi_G^\alpha + \psi_G^\beta = 0.$$

La deuxième relation s'écrit :

$$\psi_0^\alpha (-t - (1 + t^2)^{1/2}) + \psi_0^\beta (-t + (1 + t^2)^{1/2}) = 0.$$

D'où :

$$\psi_0^\alpha \left[1 + \frac{t + (1 + t^2)^{1/2}}{-t + (1 + t^2)^{1/2}} \right] = a_0,$$

et finalement :

$$\psi_0^\alpha = a_0 \frac{-t + (1 + t^2)^{1/2}}{2(1 + t^2)^{1/2}}; \quad \psi_G^\alpha = a_0 \frac{-1}{2(1 + t^2)^{1/2}};$$

$$\psi_G^\beta = a_0 \frac{1}{2(1 + t^2)^{1/2}}; \quad \psi_0^\beta = \frac{t + (1 + t^2)^{1/2}}{2(1 + t^2)^{1/2}}.$$

d) Pour justifier l'oubli des ondes réfléchies, on peut arguer du fait qu'un coefficient de réflexion est sensiblement proportionnel à la différence des indices, soit ici $|n - 1| = 10^{-6}$ (écrire par exemple la continuité de la dérivée de l'onde).

IV.2. Traversée d'une lame de l'interféromètre.

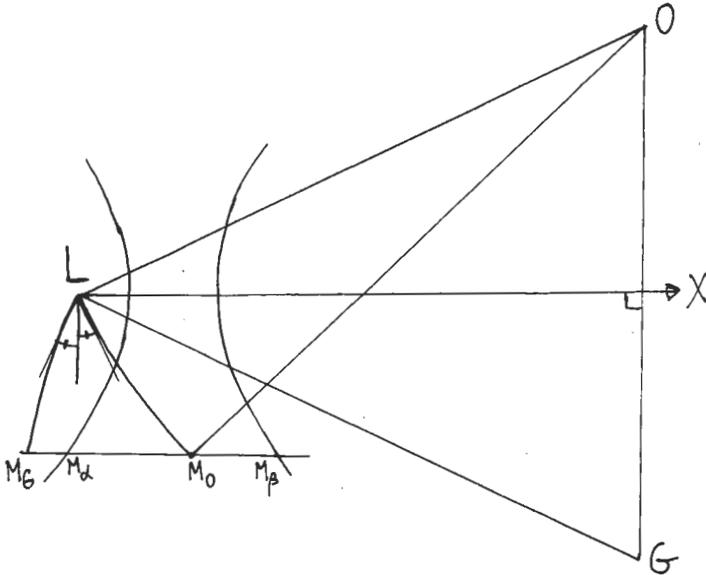


Fig. 11

a) Soit \mathbf{k} le vecteur d'onde d'une onde sortante. Sa composante y doit être égale, soit à celle de \mathbf{k}_α (ou \mathbf{k}_β), soit à celle de $\mathbf{k}_\alpha + \mathbf{G}$ (ou $\mathbf{k}_\beta + \mathbf{G}$). Si on pose $\mathbf{k} = \mathbf{M}\mathbf{O}$, le point \mathbf{M} doit donc se trouver sur la droite $\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_0 \mathbf{M}_\beta$ perpendiculaire à $\mathbf{O}\mathbf{G}$ (fig. 11). De plus, on doit avoir : $\|\mathbf{k}\| = k_0 = \mathbf{M}_0\mathbf{O}$. On voit sur la fig. 11 que deux positions conviennent : le point \mathbf{M}_0 lui-même, qui correspond à une onde sortante ayant le même vecteur d'onde que l'onde incidente ; le point \mathbf{M}_G , déduit de \mathbf{L} par une rotation de centre \mathbf{G} . Comme $\mathbf{L}\mathbf{M}_0$ et $\mathbf{L}\mathbf{M}_G$ sont perpendiculaires respectivement à $\mathbf{L}\mathbf{O}$ et $\mathbf{L}\mathbf{G}$, il apparaît que le triangle $\mathbf{L}\mathbf{M}_G \mathbf{M}_0$ est isocèle. D'où on déduit $\mathbf{L}\mathbf{M}_G = \mathbf{L}\mathbf{M}_0 = k_0 \Delta\theta$. Le vecteur $\mathbf{k}_G = \mathbf{M}_G \mathbf{G}$ est donc déduit de $\mathbf{L}\mathbf{G}$ par une rotation d'angle $\Delta\theta$. Comme :

$$\mathbf{M}_G \mathbf{M}_0 = 2 k_0 (\Delta\theta) \sin \theta_B = 2 \varepsilon k_0 t \sin \theta_B = 2 t \Delta$$

on a :

$$\mathbf{k}_G = \mathbf{M}_G \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_0 \mathbf{O} + \mathbf{O}\mathbf{G} = 2 t \Delta \mathbf{i} + \mathbf{k}_0 + \mathbf{G}.$$

b) Soit $x = e$ l'équation du plan de sortie de la lame, les deux équations de continuité s'écrivent :

$$\psi_0^\alpha \exp i e k_{\alpha x} + \psi_0^\beta \exp i e k_{\beta x} = a_0 \tau \exp i e k_{0x}$$

$$\psi_G^\alpha \exp i e k_{\alpha x} + \psi_G^\beta \exp i e k_{\beta x} = a_0 \varrho \exp i e k_{Gx}.$$

En utilisant les fig. 10 et 11, on établit les relations :

$$k_{\alpha x} - k_{0x} = \overline{\mathbf{M}_\alpha \mathbf{M}_0} = -X_\alpha + \overline{\mathbf{L}} + k_0 \Delta\theta \sin \theta_B = \dots \\ \dots \Delta (1 + t^2)^{1/2} - \overline{\mathbf{L}} + t\Delta$$

$$k_{\beta x} - k_{0x} = \overline{\mathbf{M}_\beta \mathbf{M}_0} = -\Delta (1 + t^2)^{1/2} - \overline{\mathbf{L}} + t\Delta$$

$$k_{Gx} - k_{0x} = 2 t\Delta.$$

D'où, en posant $\xi(t) = e \Delta (1 + t^2)^{1/2}$; $\delta_\pm(t) = e [\overline{\mathbf{L}} \pm t\Delta]$:

$$\tau = \left[\frac{-t + (1 + t^2)^{1/2}}{2(1 + t^2)^{1/2}} \exp i \xi(t) + \dots \right. \\ \left. \dots \frac{t + (1 + t^2)^{1/2}}{2(1 + t^2)^{1/2}} \exp -i \xi(t) \right] \exp -i \delta_-(t)$$

$$\varrho = \left[\frac{-1}{2(1 + t^2)^{1/2}} \exp i \xi(t) + \dots \right. \\ \left. \dots \frac{1}{2(1 + t^2)^{1/2}} \exp -i \xi(t) \right] \exp -i \delta_+(t)$$

ou encore :

$$\tau = \left[\cos \xi - i \frac{t \sin \xi}{(1+t^2)^{1/2}} \right] \exp -i \delta_- ;$$

$$\varrho = \frac{-i \sin \xi}{(1+t^2)^{1/2}} \exp -i \delta_+ .$$

c) La loi de conservation du flux de neutrons consiste ici à vérifier l'égalité $|\varrho|^2 + |\tau|^2 = 1$. Effectivement :

$$\cos^2 \xi + \frac{t^2 \sin^2 \xi}{1+t^2} + \frac{\sin^2 \xi}{(1+t^2)} = \cos^2 \xi + \sin^2 \xi = 1 .$$

Le produit $e\Delta$ qui s'écrit $\frac{ew}{2k_0 \cos \vartheta_B}$ est proportionnel à la longueur d'onde et vaut $2,46 \cdot 10^{-3} \times 1,2 \cdot 10^4 = 30$ pour $\lambda = 1 \text{ \AA}$. Il en résulte que quand la longueur d'onde λ , ou l'angle d'incidence, c'est-à-dire t , varient, les quantités

$$\cos e\Delta (1+t^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad \sin e\Delta (1+t^2)^{1/2},$$

et par voie de conséquence les coefficients ϱ et τ , varient très vite.

IV.3. Calcul du contraste de l'interféromètre.

a) Sur la fig. 12, on a schématisé l'effet des écarts angulaires [étudié en IV.2. a)].

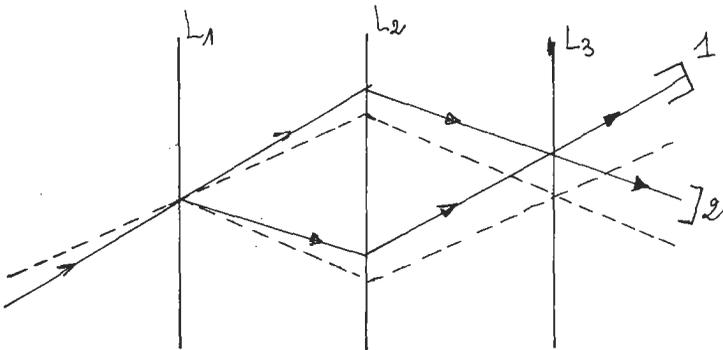


Fig. 12

L'intensité dans le compteur I est :

$$I_0 |\tau(t) \varrho(t) \varrho(-t) + \varrho(t) \varrho(-t) \tau(t) e^{i\varphi}|^2 .$$

L'intensité dans le compteur II est :

$$I_0 |\tau(t) \varrho(t) \tau(-t) + \varrho(t) \varrho(-t) \varrho(t) e^{i\varphi}|^2.$$

Compte tenu des expressions de $\tau(t)$ et $\varrho(t)$, on en déduit :

$$I_1 = 2 I_0 |\tau|^2 |\varrho|^4 (1 + \cos \varphi); \quad I_2 = I_0 |\varrho|^2 \left[|\tau|^2 - |\varrho|^2 e^{i\varphi} \right]^2$$

I_2 s'écrit aussi : $I_0 |\varrho|^2 (|\tau|^4 + |\varrho|^4 - 2 |\tau|^2 |\varrho|^2 \cos \varphi)$.

I_1 et I_2 sont bien de la forme $I_0 A (1 + \cos \varphi)$ et $I_0 (B - A \cos \varphi)$

avec :

$$A(t) = 2 |\varrho|^4 |\tau|^2 = 2 \frac{\sin^4 \xi}{(1 + t^2)^3} (t^2 + \cos^2 \xi);$$

$$B(t) = |\varrho|^2 (|\tau|^4 + |\varrho|^4) = \frac{\sin^2 \xi}{(1 + t^2)^3} [(t^2 + \cos^2 \xi)^2 + \sin^4 \xi].$$

b) Qu'il y ait superposition cohérente ou incohérente, le théorème de Parseval dans le premier cas, la règle d'addition des intensités dans le second, conduisent à ajouter les coefficients de réflexion (ou transmission) relatifs aux intensités. Cela suppose que les intensités incidentes sont également réparties (par rapport à t). La présence de termes oscillants et la rapide décroissance avec t des fonctions A et B entraîne que la valeur limite de

$$t = \frac{\Delta \theta}{\varepsilon}, \text{ égale à } \frac{10''}{0,2''}, \text{ soit } 50, \text{ peut être assimilée à l'infini.}$$

c) Remplaçons les fonctions trigonométriques par leurs moyennes :

$$\langle \sin^2 \xi \rangle = \frac{1}{2}; \quad \langle \sin^4 \xi \rangle = \left\langle \left(\frac{1 - \cos 2\xi}{2} \right)^2 \right\rangle = \frac{3}{8};$$

$$\begin{aligned} \langle \sin^4 \xi \cos^2 \xi \rangle &= \left\langle \frac{1 - \cos 2\xi}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin^2 \xi \right\rangle = \dots \\ &\dots \frac{1}{16} = \langle \sin^2 \xi \cos^4 \xi \rangle; \end{aligned}$$

$$\langle \sin^2 \xi \cos^2 \xi \rangle = \left\langle \frac{1}{4} \sin^2 2\xi \right\rangle = \frac{1}{8};$$

$$\langle \sin^6 \xi \rangle = \left\langle \left(\frac{1 - \cos 2\xi}{2} \right)^3 \right\rangle = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{3}{2} \right) = \frac{5}{16}.$$

Les coefficients A et B deviennent, en faisant apparaître $t^2 + 1$:

$$A(t) = \frac{2}{(1+t^2)^3} \left[\frac{3}{8} t^2 + \frac{1}{16} \right] = \frac{2}{16(1+t^2)^3} (6(t^2+1) - 5)$$

$$B(t) = \frac{1}{(1+t^2)^3} \left[\frac{1}{2} t^4 + \frac{2t^2}{8} + \frac{1}{16} + \frac{5}{16} \right] = \dots$$

$$\dots \frac{1}{16(t^2+1)^3} [8(t^2+1)^2 - 12(t^2+1) + 10].$$

Sous la forme écrite précédente, les fonctions A et B s'intègrent grâce aux formules données dans l'énoncé :

$$\frac{B}{A} = \frac{8K_1 - 12K_2 + 10K_3}{12K_2 - 10K_3} = \frac{8 - 6 + 15/4}{6 - 15/4} = 2,55 \approx 2,6.$$

d) Le contraste, pour le compteur 2 est :

$$c = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{(B+A) - (B-A)}{(B+A) + (B-A)} = \frac{A}{B} = 0,4.$$

ANNEXE 1

Les deux équations s'écrivent $\Delta\psi + k^2\psi = 0$, k désignant la norme du vecteur d'onde. Dans le vide, cette norme vaut

$$k_{0,N} = \left(\frac{2mE}{\hbar} \right)^{1/2} \text{ pour les neutrons et } k_{0,L} = \frac{\omega}{c} \text{ pour la}$$

lumière. L'indice est défini dans les deux cas par le rapport

$$n = \frac{k}{k_0}. \text{ En aucun cas, contrairement à ce qu'ont affirmé beau-}$$

coup de candidats, on n'a le droit d'écrire $k_{0,L} = k_{0,N}$. Les ondes neutroniques et électromagnétiques sont d'une nature totalement différente et conduisent à des équations de dispersion très différentes.

ANNEXE 2

Le mouvement parabolique des neutrons peut se comprendre comme une courbure des faisceaux dans un milieu d'indice variable, à condition d'inclure dans V l'énergie potentielle mgz . Dans la situation de réflexion totale limite les rayons en $z = H_0$ dans l'air et $z = 0$ dans le liquide sont parallèles entre eux (et horizontaux), ce qui correspond à des indices égaux. Il suffit, pour retrouver ce dernier résultat, de se souvenir que dans un milieu stratifié le produit $n \sin i$, où i est l'angle d'inclinaison du rayon avec la direction normale aux plans d'égal indice, est constant.

Avec ce raisonnement, on obtient le résultat cherché en écrivant :

$$1 - m \frac{\lambda^2}{\hbar^2} (mgH_0) = 1 - \frac{1}{2\pi} N \lambda^2 b$$

l'origine de l'énergie potentielle gravitationnelle a été choisie en $z = 0$ mais le résultat ne dépend pas de ce choix).

ANNEXE 3

Le principe de Maupertuis conduit à l'équation fondamentale de la dynamique. En effet, soit Γ_0 la trajectoire extrémale entre deux points A et B, d'équation paramétrique $\mathbf{r}(\alpha)$ ($\alpha \in [0, 1]$ par exemple), et soit Γ une trajectoire voisine, d'équation $\mathbf{r}(\alpha) + \vec{\varepsilon}(\alpha)$, de mêmes extrémités ($\vec{\varepsilon}(0) = \vec{\varepsilon}(1) = 0$). Posons :

$$\sqrt{2m[E - V(\mathbf{r})]} = p(\mathbf{r});$$

on a, au premier ordre en ε :

$$p(\mathbf{r} + \vec{\varepsilon}) = p(\mathbf{r}) + \mathbf{grad} p \cdot \vec{\varepsilon}$$

$$\|d\mathbf{r} + d\vec{\varepsilon}\| = (dr^2 + 2d\vec{\varepsilon} \cdot d\mathbf{r} + d\vec{\varepsilon}^2)^{1/2} = dl + \mathbf{u} \cdot d\vec{\varepsilon}$$

$$\left(\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} : \text{vecteur unitaire tangent à la trajectoire } \Gamma_0\right)$$

$$[\vec{\omega} \wedge (\mathbf{r} + \vec{\varepsilon})] \cdot (d\mathbf{r} + d\vec{\varepsilon}) = (\vec{\omega} \wedge \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + (\vec{\omega} \wedge \mathbf{r}) \cdot d\vec{\varepsilon} + (\vec{\omega} \wedge \vec{\varepsilon}) \cdot d\mathbf{r}.$$

On en déduit la variation de I au premier ordre :

$$I(\vec{\varepsilon}) - I(0) =$$

$$\int_0^1 \left[\mathbf{grad} p \frac{dl}{d\alpha} \cdot \vec{\varepsilon} + (\mathbf{p} + m \vec{\omega} \wedge \mathbf{r}) \frac{d\vec{\varepsilon}}{d\alpha} - m \left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\mathbf{r}}{d\alpha} \right) \cdot \vec{\varepsilon} \right] d\alpha$$

qui s'écrit aussi, par intégration par partie :

$$\int_0^1 \left[\mathbf{grad} p \frac{dl}{d\alpha} - \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\alpha} + 2m \vec{\omega} \wedge \frac{d\mathbf{r}}{d\alpha} \right) \right] \cdot \vec{\varepsilon} d\alpha.$$

Cette quantité est nulle au premier ordre en $\vec{\varepsilon}$ quelque soit la fonction $\vec{\varepsilon}(\alpha)$ si :

$$d\mathbf{p} = -2m \vec{\omega} \wedge d\mathbf{r} + dl \mathbf{grad} p.$$

Soit en remarquant que $\mathbf{p} \mathbf{grad} p = -m \mathbf{grad} V$ c'est-à-dire

$$\frac{dl}{dt} \mathbf{grad} p = -\mathbf{grad} V, \text{ il vient : } \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -2m \vec{\omega} \wedge \mathbf{v} - \mathbf{grad} V.$$

J.-P. PROVOST et E.-R. TANTART.

Agrégation

SESSION DE 1985

Epreuve C

COMPOSITION DE CHIMIE (Applications)

(Durée : 6 heures)

Matériel à prévoir : 8 feuilles de papier millimétré.

ELECTRODES SELECTIVES A MEMBRANE

ASPECTS THÉORIQUES ET APPLICATIONS

* L'attention du candidat est attirée sur le fait que de nombreuses questions sont indépendantes les unes des autres.

* Le candidat respectera les notations de grandeurs données dans l'énoncé.

* Il utilisera les symboles mathématiques suivants :

Logarithme népérien : \ln ;

Logarithme décimal : \lg .

* La concentration en quantité de matière (ou concentration molaire) d'une substance B dissoute sera notée c_B ou $[B]$ et son activité a_B .

T représentera la température absolue ; tous les systèmes étudiés sont à 298 K.

* Par convention, la différence de potentiel d'une cellule galvanique est égale en grandeur et en signe au potentiel électrique de la borne métallique conductrice de la droite moins celui de la borne similaire de gauche.

Données :

Masses molaires (g. mol ⁻¹)	{	O	F	S	Cl
	{	16	19	32	35,5

Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹.

Constante de Faraday : $F = 96\,500$ C. mol⁻¹.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31$ J. K⁻¹ mol⁻¹.

Intégrale :
$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{q}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{q}}{2ax + b + \sqrt{q}} \right|$$

avec $q = b^2 - 4ac$.

A. GENERALITES

1. LE POTENTIEL ÉLECTROCHIMIQUE.

1.1. Soit une espèce chimique I_i , de charge z_i . Cette entité est placée dans un milieu (α) en un point de potentiel électrique φ . On note μ_i son potentiel chimique, μ_i^0 son potentiel chimique standard en solution dans ce milieu, et a_i son activité. On définit le potentiel électro-

chimique $\bar{\mu}_i$ de I_i :

$$\bar{\mu}_i = \mu_i + z_i F\varphi.$$

Exprimer μ_i en fonction de μ_i^0 , a_i et φ .

1.2. On considère une deuxième phase (β), de potentiel électrique φ' , placée au contact de la précédente, aux mêmes température et pression, contenant également l'espèce I_i . Les grandeurs relatives à l'espèce I_i dans cette phase (β) seront notées avec un prime (μ_i' , μ_i^0' ...).

Donner l'expression, en fonction de μ_i et μ_i' , de la variation d'enthalpie libre mise en jeu lors du transfert de dn moles de I_i de la phase (α) à la phase (β). Calculer le travail électrique correspondant.

En déduire que la condition pour que l'équilibre de I_i entre les deux phases soit réalisé est :

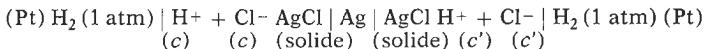
$$\bar{\mu}_i = \bar{\mu}_i'.$$

1.3. A quelle grandeur physique le « potentiel électrochimique » $\bar{\mu}$ est-il homogène ?

2. POTENTIEL DE DIFFUSION.

2.1. Pile sans jonction liquide.

Soit la pile schématisée ci-après :



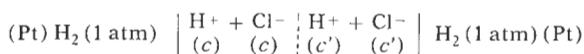
c et c' sont les concentrations molaires des deux solutions aqueuses de chlorure d'hydrogène. Le dihydrogène est considéré comme un gaz parfait.

Calculer, au moyen de la loi de NERNST donnant les potentiels d'oxydoréduction des couples mis en jeu, la force électromotrice E_1 de cette pile, en fonction des activités moyennes $a = c\gamma_{\pm}$ et $a' = c'\gamma'_{\pm}$, où γ_{\pm} et γ'_{\pm} représentent les coefficients d'activité moyens des ions H^+ et Cl^- dans les deux solutions.

Ecrire le bilan de la réaction qui se produit dans cette pile lorsqu'une mole de charge élémentaire positive traverse la cellule de gauche à droite. En déduire l'expression de la variation d'enthalpie libre ΔG_1 correspondante. Retrouver ainsi la valeur de E_1 .

2.2. Pile avec jonction liquide.

Soit la pile schématisée ci-après :



dans laquelle $\|$ représente un diaphragme poreux séparant les deux solutions aqueuses de chlorure d'hydrogène.

Ecrire le bilan de la réaction mise en jeu lorsqu'une mole de charge élémentaire positive traverse la cellule de gauche à droite (on notera t_+ et t_- les nombres de transport de H^+ et Cl^- que l'on supposera indépendants des concentrations des ions).

Exprimer la variation d'enthalpie libre ΔG correspondante. En déduire la force électromotrice E de cette pile.

Ecrire par ailleurs l'expression de E en fonction des activités moyennes a et a' des ions dans les deux solutions et de la différence de potentiel électrique (dite potentiel de diffusion ou potentiel de jonction liquide) E_j entre les deux phases aqueuses.

En déduire E_j en fonction de t_- , a et a' .

Application numérique :

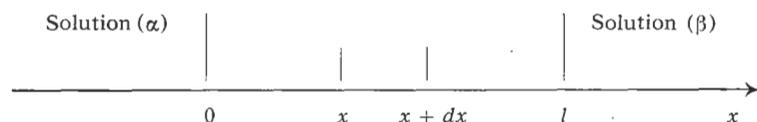
$$t_+ = 0,83; \quad t_- = 0,17; \quad a = 10^{-2}; \quad a' = 10^{-1}.$$

Calculer E et E_j . Quelle conclusion tire-t-on au sujet du potentiel de jonction ?

2.3. Potentiel de jonction liquide.

2.3.1. On envisage le cas, très général, de la jonction liquide entre deux solutions, (α) et (β) , contenant N types d'ions, I_1 à I_N , dont les concentrations dépendent du point de l'espace considéré. Il en va donc généralement de même pour les nombres de transport t_i .

On considère une tranche d'épaisseur dx à l'abscisse x à l'intérieur de laquelle le nombre de transport de I_i est t_i .



En x , la concentration et le potentiel chimique de I_i sont respectivement c_i et μ_i et le potentiel électrique φ . En $x + dx$, ces grandeurs sont respectivement $c_i + dc_i$, $\mu_i + d\mu_i$ et $\varphi + d\varphi$.

Quelle est la quantité d'ion I_i déplacée lorsqu'une quantité dn de charge élémentaire est transférée réversiblement de l'abscisse x à l'abscisse $x + dx$?

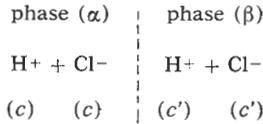
Exprimer, en fonction des $d\mu_i$, la variation d'enthalpie libre dG résultant de ce transfert, ainsi que, en fonction de $d\varphi$, le travail dû au déplacement des charges électriques. En déduire que si les potentiels chimiques standard des solutés sont les mêmes dans les deux solutions, le potentiel de jonction peut s'écrire :

$$E_J = \varphi^\beta - \varphi^\alpha = \frac{-RT}{F} \int_{x=0}^{x=l} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{t_i}{z_i} d \ln a_i$$

φ^α et φ^β étant les potentiels électriques des phases (α) et (β).

2.3.2. Cas particulier.

— Soit la jonction :



Retrouver le résultat du paragraphe 2.2.

2.3.3. Cas particulier.

On peut calculer l'intégrale précédente dans un modèle qui suppose les approximations suivantes :

- les solutions sont idéales : $a_i = c_i$;
- dans la zone de jonction ($0 \leq x \leq l$), la concentration des espèces varie linéairement avec x :

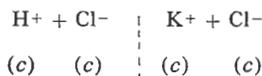
$$c_i = c_i^\alpha + \frac{x}{l} (c_i^\beta - c_i^\alpha)$$

c_i^α et c_i^β représentent les concentrations de I_i dans les phases (α) et (β).

Exprimer t_i en fonction des concentrations c_j , des charges z_j et des mobilités u_j des ions présents. En déduire que le potentiel de jonction liquide E_J peut s'écrire :

$$E_J = \varphi^\beta - \varphi^\alpha = \frac{RT}{F} \frac{\sum_{i=1}^N (c_i^\beta - c_i^\alpha) u_i \frac{|z_i|}{z_i}}{\sum_{i=1}^N (c_i^\beta - c_i^\alpha) |z_i| u_i} \ln \frac{\sum_{i=1}^N c_i^\alpha |z_i| u_i}{\sum_{i=1}^N c_i^\beta |z_i| u_i}$$

Dans le cas particulier de la jonction :

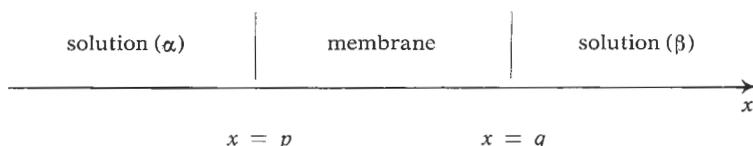


exprimer le potentiel de jonction en fonction des conductivités molaires limites des deux électrolytes.

2.3.4. Quelles sont les deux raisons pour lesquelles l'utilisation de « ponts » au chlorure ou au nitrate de potassium permet de minimiser le potentiel de jonction entre deux solutions ?

B. ETUDE THEORIQUE DES POTENTIELS DE MEMBRANE

On considère une membrane disposée entre deux solutions (α) et (β). Les propriétés de la membrane varient uniquement le long de l'axe x , perpendiculaire aux surfaces de contact membrane-solution.



Les notations des grandeurs relatives aux phases (α) et (β) seront affectées respectivement d'un exposant prime (μ_i' , φ' ...) et seconde (μ_i'' , φ'' ...) alors que celles afférentes à la membrane ne seront affectées d'aucun exposant (μ_i , t_i ...).

Cette étude concerne quatre types de membranes utilisées dans la conception d'électrodes spécifiques.

1. MEMBRANE SOLIDE, ÉCHANGEUSE D'IONS.

Soit une membrane échangeuse d'ions, dont les sites fixes sont monovalents, imperméable au solvant, perméable uniquement aux ions de charge de signe opposé à celui des sites fixes.

1.1. Potentiel de diffusion dans la membrane.

On suppose que le déplacement des ions à l'intérieur de la membrane est dû au gradient de potentiel électrochimique : la vitesse limite v_i de l'espèce I_i est alors donnée par :

$$v_i = -u_i \frac{\partial \bar{\mu}_i}{\partial x}$$

u_i étant la mobilité de I_i .

Exprimer le flux $J_i(x, t)$ de l'espèce I_i (en moles par unité de temps et de surface) à l'abscisse x à l'instant t en fonction de la concentration $c_i(x, t)$, de la mobilité $u_i(x)$, du potentiel chimique standard $\mu_i^0(x)$ dans la membrane, de l'activité $a_i(x, t)$, de la charge z_i et du potentiel électrique $\varphi(x, t)$.

En admettant la présence de N ions I_1 à I_N mobiles dans la membrane, exprimer, en fonction des flux de ces ions, la densité I du courant qui traverse la membrane à l'abscisse x .

On suppose que la différence des potentiels chimiques standard de deux quelconques des ions monovalents I_i et I_j est constante en tout point de la membrane. Quelle relation existe-t-il entre $d\mu_i^0/dx$ et $d\mu_j^0/dx$?

On suppose également que les rapports des mobilités u_i et u_j des deux ions monovalents I_i et I_j sont constants en tout point de la membrane, et l'on considère le cas particulier où :

- les ions mobiles sont tous monovalents ($z = \pm 1$);
- le système est supposé idéal ($a_i = c_i$);
- l'intensité qui traverse la membrane est nulle.

Montrer que, dans ces conditions :

$$\frac{\partial}{\partial x} [\mu_j^0 + zF \cdot \varphi] = -RT \frac{\partial}{\partial x} \ln \sum_{i=1}^N \frac{u_i}{u_j} c_i.$$

En déduire l'expression du potentiel de diffusion dans la membrane $E_D = \varphi(q) - \varphi(p)$.

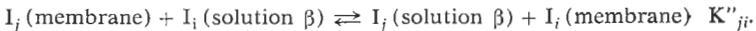
1.2. Interfaces membrane-solutions.

Les solutions (α) et (β) sont supposées équipotentielles, de potentiels électriques respectifs φ' et φ'' . L'équilibre thermodynamique est réalisé, pour chaque ion, aux interfaces membrane-solution. Quelles relations entre les potentiels chimiques standard en solution μ_i^0 , μ_i^{β} , μ_i^{α} , les activités a_i' , a_i , a_i'' , les potentiels électriques φ' , $\varphi(p)$, $\varphi(q)$, φ'' traduisent l'équilibre de l'ion I_i aux frontières entre la membrane et les solutions ? En déduire les différences de potentiels entre phases, $\varphi'' - \varphi(q)$ et $\varphi(p) - \varphi'$, aux abscisses q et p , en fonction des grandeurs relatives à l'ion I_i .

1.3. Potentiel de membrane.

Donner l'expression du « potentiel de membrane », $E = \varphi'' - \varphi'$, dans le cas des approximations énoncées dans les paragraphes B.1.1. et B.1.2.

On introduit les constantes thermodynamiques d'échanges d'ions K'_{ji} et K''_{ji} entre la membrane et les solutions (α) et (β) :



Montrer que E peut être mis sous la forme :

$$E = \frac{\mu_1^{\alpha} - \mu_1^{\beta}}{zF} + \frac{RT}{zF} \ln \frac{\sum_{i=1}^N \frac{u_i}{u_1} K'_{1i} a_i'}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i}{u_1} K''_{1i} a_i''}$$

1.4. On considère une électrode dans laquelle une telle membrane est mise en œuvre, la solution interne étant la solution (β). La réponse de cette électrode étant de la forme :

$$E = \text{constante} + \frac{RT}{zF} \ln [a_1' + \sum_i k_{1i} a_i']$$

où k_{1i} est une constante appelée coefficient de sélectivité de l'ion I_1 vis-à-vis de l'ion I_i . Donner l'expression de k_{1i} .

2. MEMBRANE SOLIDE SANS POTENTIEL DE DIFFUSION INTERNE.

Soit une membrane constituée d'un cristal d'un composé ionique peu soluble. Le comportement de ce type de membrane est étudié sur l'exemple d'une membrane cristalline de chlorure d'argent, de produit de solubilité P_{AgCl} . Cette membrane sépare deux solutions aqueuses (α) et (β) de concentrations molaires en anion Cl^- différentes, c' et c'' . On considère qu'elle est suffisamment conductrice (il n'y a pas de transfert de masse dans la membrane) et donc que $\varphi(p) = \varphi(q)$.

2.1. Potentiel de membrane.

Montrer que l'égalité des potentiels électrochimiques $\overline{\mu_{Ag^+}}$ et $\overline{\mu_{Ag^+}}$, ainsi que l'égalité de $\overline{\mu_{Cl^-}}$ et $\overline{\mu_{Cl^-}}$ en $x = p$ implique que le produit de solubilité de $AgCl$ est atteint dans la solution (α).

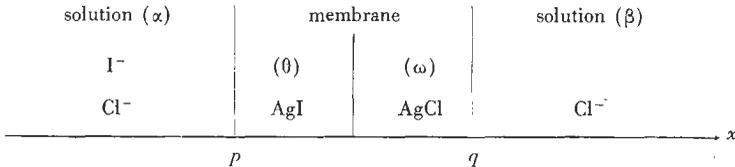
Déduire des conditions d'équilibre pour l'ion Cl^- , en p et en q , entre les différentes phases, l'expression de la différence de potentiel $E = \varphi'' - \varphi'$ en fonction des activités a'_{Cl^-} et a''_{Cl^-} de l'ion chlorure dans les solutions (α) et (β).

2.2. Interférence lors de la présence d'un second anion formant un sel insoluble.

On considère que l'équilibre de solubilité $Ag^+ + Cl^- \rightleftharpoons AgCl$ est réalisé en p et en q , que la solution (β) ne contient que l'anion Cl^- , mais que la solution (α) contient des ions chlorure et des ions iodure.

Calculer la valeur de l'activité a'_{I^-} pour laquelle le produit de solubilité P_{AgI} de AgI est atteint en p .

Au-delà de cette valeur, on suppose que la membrane est constituée de deux phases (ω) et (θ), équipotentielles, disposées comme suit :



Des conditions d'équilibre de Cl^- en q et de I^- en p , déduire l'expression de la différence de potentiel $E = \varphi'' - \varphi'$ en fonction de P_{AgCl} , P_{AgI} , a'_{I^-} et a''_{Cl^-} .

On donne $P_{\text{AgCl}} \simeq 1,5 \cdot 10^{-10}$, $P_{\text{AgI}} \simeq 10^{-16}$ et $a''_{\text{Cl}^-} = 1$.

Tracer l'allure des courbes représentant les variations de E en fonction de $(-\lg a'_{\text{I}^-})$ dans les trois milieux correspondant aux activités 10^{-1} , 10^{-2} et 10^{-3} en ions Cl^- (le domaine pris en considération s'étalera de $a'_{\text{I}^-} = 10^{-4}$ à $a'_{\text{I}^-} = 10^{-12}$ environ).

2.3. Applications.

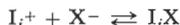
On envisage la construction d'une électrode spécifique à membrane cristalline. Pour la mesure de la concentration de quels ions choisira-t-on un cristal d'halogénure d'argent AgX ?

Quels types d'ions seront susceptibles de perturber les mesures ?

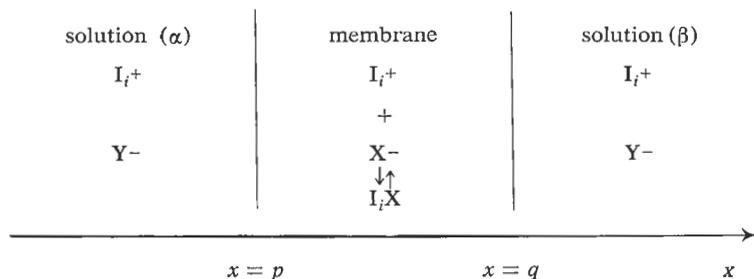
Même question dans le cas d'un cristal de sulfure d'argent.

3. MEMBRANE LIQUIDE A ÉCHANGEUR D'IONS.

Une telle membrane est constituée d'un film de solvant organique, non miscible à l'eau, dans lequel est dissous un composé ionogène I_iX . Les deux faces de la membrane sont immergées dans des solutions aqueuses contenant les cations I_i^+ ($i = 1, 2, \dots, k, \dots, N$) et l'anion Y^- . On suppose que l'anion X^- reste confiné dans la membrane et que Y^- n'y pénètre pas. En revanche, les cations sont susceptibles de traverser les interfaces membrane-solutions. Selon la nature du solvant organique et celle des cations I_i^+ , les ions sont plus ou moins associés sous forme de paires d'ions dans la membrane selon les équilibres d'association :



caractérisés par les constantes $K_{i\text{X}}$.



Dans la membrane, tous les coefficients d'activité sont considérés égaux à 1.

3.1. Exprimer la condition d'équilibre du cation I_i^+ en $x = p$, en fonction de a'_i , φ' , $c_i(p)$, $\varphi(p)$. En déduire que pour deux cations I_i^+ et I_j^+ :

$$\frac{a'_i}{c_i(p)} k_i = \frac{a'_j}{c_j(p)} k_j$$

relation dans laquelle k_i est la constante d'extraction du cation I_i^+ [caractérisant l'équilibre I_i^+ (solution) \rightleftharpoons I_i^+ (membrane)].

En prenant en considération l'électroneutralité de la phase organique, montrer que :

$$c_i(p) = c_X(p) \cdot \frac{a_i' k_i}{\sum_{i=1}^N a_i' k_i}$$

Quelle expression de $c_i(q)$ peut-on tirer des équilibres réalisés à l'interface situé en $x = q$?

Exprimer le potentiel de membrane $E = \varphi'' - \varphi'$ en fonction de $\varphi(q) - \varphi(p)$, du rapport $c_X(q)/c_X(p)$, des constantes k_i et des activités a_i' , a_i'' .

3.2. Ecrire les équations donnant les flux d'abscisse x dans la membrane, J_i , J_X et J_{iX} des cations I_i^+ , de l'anion X^- et des paires d'ions I_iX (la résolution de ce système d'équations différentielles n'est pas demandée).

Indiquer de quelles constantes physiques dépend la sélectivité d'une électrode, utilisant une telle membrane, pour l'ion I_i^+ vis-à-vis de l'ion I_j^+ .

Quelle différence fondamentale existe-t-il entre ce type de membrane et celui étudié au paragraphe B.1. ?

3.3. Peut-on concevoir une électrode à membrane liquide à échangeur d'ions qui soit sélective d'anions ? Proposer un type de composé susceptible d'être mis en œuvre pour la réalisation d'une telle électrode.

4. MEMBRANE LIQUIDE A PORTEURS NEUTRES.

Il s'agit d'un film de solvant organique, non miscible à l'eau, dans lequel est dissoute une molécule macrocyclique neutre, S, telle qu'un polyéther macrocyclique. Les deux faces de la membrane sont immergées dans des solutions aqueuses contenant les cations I_i^+ et l'anion X^- .

Indiquer quelles sont les espèces chimiques qui peuvent exister dans la membrane.

De quelles grandeurs le coefficient de sélectivité d'une électrode utilisant une telle membrane, pour l'ion I_i^+ vis-à-vis de l'ion I_j^+ , peut-il être fonction ?

5. APPLICATIONS.

A laquelle des quatre catégories de membranes évoquées précédemment sont rattachées les membranes de verre couramment utilisées pour des mesures de pH ?

Quel est le type de matériau utilisé dans la confection d'électrodes spécifiques des cations alcalins actuellement commercialisées ?

C. DETERMINATIONS EXPERIMENTALES D'UN COEFFICIENT DE SELECTIVITE D'UNE ELECTRODE A MEMBRANE

Considérons une électrode sélective des ions bromure, constituée d'une membrane hétérogène dont le bromure d'argent sous forme cristalline est l'agent actif, d'une solution interne contenant des ions bromure et d'une électrode de référence interne.

Cet ensemble est plongé dans une solution (externe) et on mesure la différence de potentiel entre cette électrode et une électrode de référence externe.

Lorsque la solution externe contient des ions chlorure et des ions bromure, la réponse de l'électrode sélective est donnée par la relation :

$$U = U_0 + p \lg (a_{\text{Br}^-} + K a_{\text{Cl}^-})$$

où K représente la constante de sélectivité de l'électrode pour l'ion Br⁻ vis-à-vis de l'ion Cl⁻.

1. La différence de potentiel U mesurée pour une activité en ion bromure fixée ($a_{\text{Br}^-} = 10^{-5}$) pour diverses activités en ion chlorure est reportée dans le tableau suivant :

U (mV)	38	52	63	75	85	102	109	112	116	118	119
$a_{\text{Cl}^-} \cdot 10^3$10	5,6	3,2	2	1	0,3	0,1	0,032	0,01	0,0032	0,001

Tracer la courbe $U = f(-\lg a_{\text{Cl}^-})$. Interpréter l'allure de cette courbe pour les faibles et fortes valeurs de a_{Cl^-} . En déduire les ordres de grandeur de p et de K.

2. Pour une activité $a_{\text{Br}^-} = 10^{-4}$, les résultats des mesures sont les suivants :

U (mV)	40	46	51	55	58	60	61	62	62
$a_{\text{Cl}^-} \cdot 10^3$	55,7	20,9	7,6	2,9	1,1	0,44	0,16	0,06	0,02

Tracer la courbe correspondante, en utilisant les mêmes échelles, sur la feuille utilisée au paragraphe C.1.

A partir de la position relative des deux graphes, retrouver l'ordre de grandeur de p. Indiquer comment les abscisses de deux points situés sur les deux courbes considérées et correspondant à une même valeur de U permettent de déterminer K. En déduire l'ordre de grandeur de K auquel conduit cette méthode.

3. Les produits de solubilité de AgCl et AgBr valent respectivement $1,5 \cdot 10^{-10}$ et $7 \cdot 10^{-13}$. Calculer la valeur théorique de K dans le modèle proposé au paragraphe B.2.2.

D. APPLICATIONS : UTILISATION D'ELECTRODES A MEMBRANES

1. DOSAGES.

On utilise des électrodes spécifiques pour déterminer la concentration de différents ions dans les eaux. On s'intéressera ici aux ions F^- , Cl^- et SO_4^{2-} .

1.1. Détermination des fluorures par lecture directe.

On mesure la différence de potentiel U entre une électrode au fluorure de lanthane et une électrode de référence pour diverses concentrations c en ions fluorure dans un tampon d'ajustement de la force ionique. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-après :

c (mol.l ⁻¹)	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
U (mV).....	-61	-121	-181	-241	-299

Tracer la courbe d'étalonnage $U = f(\lg [F^-])$. Commenter brièvement l'allure de cette courbe (échelles : 4 cm représentent $\lg 10^{-1}$ et 5 cm représentent 100 mV).

On choisit deux points (U_1, c_1) et (U_2, c_2) situés dans le domaine où la réponse U de l'électrode varie linéairement avec $\lg c$ et peut s'écrire $U = U_0 + p \lg \gamma c$, où γ représente le coefficient d'activité des ions F^- et p la pente de la droite. Donner l'expression littérale puis la valeur numérique pour l'exemple précédent de la pente p de cette droite.

Dans quelles conditions le résultat se simplifie-t-il et s'écrit-il simplement en fonction des concentrations ? Justifier la nécessité d'utiliser un tampon d'ajustement de la force ionique.

L'échantillon d'eau à analyser est mélangé volume à volume avec le tampon utilisé précédemment. En utilisant les mêmes électrodes, on trouve $U_s = -282$ mV. Déterminer la concentration des ions F^- dans l'eau en mol.l⁻¹ et $\mu\text{g.l}^{-1}$.

Donner l'expression de $\frac{d[F^-]}{[F^-]}$ en fonction de U . En déduire

l'ordre de grandeur de l'incertitude relative sur la concentration trouvée, si l'on admet que les mesures de différence de potentiel sont faites à ± 1 mV près.

1.2. Dosage des ions Cl^- par la méthode des ajouts dosés.

1.2.1. Principe.

On utilise une solution de concentration inconnue c_X située dans un domaine de concentration où la réponse de l'électrode est linéaire.

Le potentiel initial de l'électrode plongeant dans cette solution est donné par la relation :

$$U_i = U_0 + p \log \gamma c_X.$$

On ajoute alors un volume V_e d'une solution contenant les ions à étudier à la concentration connue c_e , ce qui entraîne une variation Δc de la concentration mais ne modifie pratiquement pas la force ionique. Ecrire l'expression du nouveau potentiel d'électrode U , en déduire la variation de potentiel ΔU puis l'expression de c_X en fonction de Δc , ΔU et p .

Exprimer c_X en fonction de c_e , V_e et du volume V_i de la solution étudiée.

Dans quelles conditions expérimentales cette méthode peut-elle être utilisée facilement ?

1.2.2. Dosage des ions Cl^- .

On constate, tout d'abord, que la différence des potentiels mesurés dans deux solutions dont les concentrations diffèrent d'un facteur de dilution 10 est égale à 50 mV.

Le dosage des ions Cl^- est effectué sur 20 ml d'eau de distribution urbaine non diluée. Les ajouts effectués sont de 20 μl d'une solution contenant 10^{-2} mol. l^{-1} d'ions Cl^- . Les résultats obtenus lors des divers ajouts sont résumés dans le tableau ci-après :

$10^3 \cdot \Delta c$ (mol. l^{-1})	0	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
U (mV)	175	185	186	186,8	187,5	188,2	188,9	189,6	190,3	190,9	191,5	192,1

Représenter la courbe $10 \Delta U/p = f(\Delta c)$.

En déduire la concentration en mol. l^{-1} et en mg. l^{-1} des ions Cl^- dans l'échantillon étudié.

1.3. Dosage des ions sulfate.

Le dosage de ces ions est effectué à l'aide d'une électrode sensible aux ions Pb^{2+} , sur un échantillon de 10 ml d'eau additionné de 40 ml d'éthanol pur. On y ajoute une solution titrante de $\text{Pb}(\text{ClO}_4)_2$ de concentration molaire 10^{-2} mol. l^{-1} .

On trace la courbe de titrage dérivée $dU/dV = f(V)$ où V représente le volume de solution titrante ajoutée (fig. 1).

Ecrire la réaction chimique intervenant au cours du dosage.

Calculer la concentration en ion SO_4^{2-} en mol. l^{-1} et en mg. l^{-1} dans l'eau étudiée.

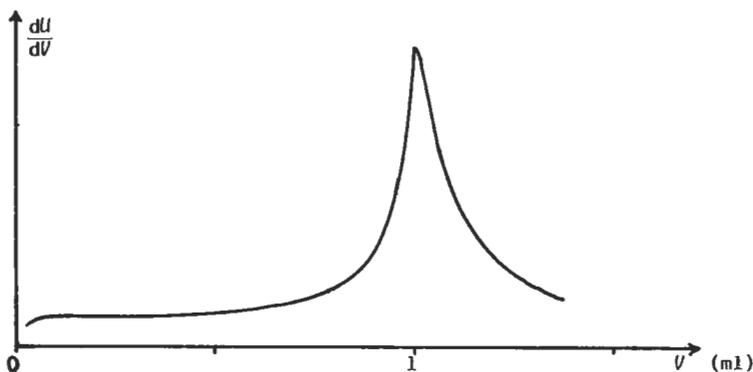
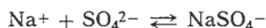


Fig. D.1.

2. DÉTERMINATION DE CONSTANTES THERMODYNAMIQUES.

2.1. Formation de paires d'ions : détermination de la constante d'association.

On se propose d'étudier l'équilibre, caractérisé par la constante d'association K :



dans des solutions aqueuses de sulfate de sodium.

On examine d'abord la réponse d'une électrode spécifique à l'ion Na^+ pour des solutions de concentrations connues en chlorure de sodium. Les résultats de ces expériences sont consignés dans le tableau ci-après :

$[\text{Na}^+] \text{ (mol.l}^{-1}\text{) } \dots$	0,10	0,15	0,20	0,30	0,50	0,74
$U \text{ (mV) } \dots \dots \dots$	69,7	76,6	85,8	92,8	105,6	115,5

Le tableau suivant donne les coefficients moyens d'activité pour des solutions de chlorure de sodium à 25°C :

$[\text{Na}^+] \text{ mol.l}^{-1} \dots$	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1
$\gamma_{\pm} \dots \dots \dots$	0,778	0,734	0,710	0,682	0,668	0,658

Représenter les variations de γ_{\pm} en fonction de c (échelle : 2 cm représentent 0,1 mol.l⁻¹ pour c ; 2 cm représentent 0,1 pour γ_{\pm}).

Tracer ensuite $U = f(-\lg a)$, a représentant l'activité des ions Na⁺ dans les solutions de chlorure de sodium considérées précédemment.

La mesure du potentiel d'une solution contenant 0,1 mol.l⁻¹ de sulfate de sodium a donné, dans les mêmes conditions, $U = 77,9$ mV. On estime, tout d'abord, que la concentration en ion sodium libres $[\text{Na}^+]_{\text{libre}}$ est égale à l'activité des ions Na⁺ dans la solution de sulfate de sodium divisée par 0,75. Cette valeur estimée de $[\text{Na}^+]_{\text{libre}}$ permet de calculer une valeur I_1 de la force ionique de la solution de sulfate de sodium. En admettant que le coefficient d'activité de Na⁺ dans la solution de sulfate de sodium est le même que dans une solution de chlorure de sodium de force ionique égale, on détermine une valeur γ_1 du coefficient d'activité de l'ion Na⁺, ce qui amène une nouvelle valeur I_2 de la force ionique, d'où une nouvelle valeur γ_2 du coefficient d'activité de l'ion Na⁺. Ce processus itératif est répété jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de variation sensible de la concentration $[\text{Na}^+]_{\text{libre}}$.

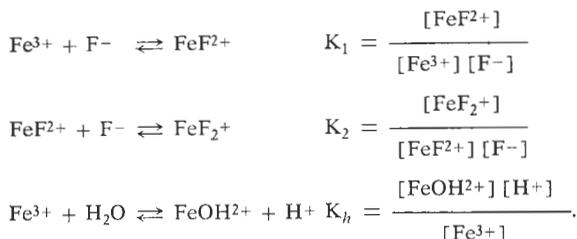
Déterminer $[\text{Na}^+]_{\text{libre}}$, $[\text{NaSO}_4^-]$, $[\text{SO}_4^{2-}]$ et l'ordre de grandeur de la constante K pour la solution de sulfate considérée.

Quelle autre méthode électrochimique est couramment utilisée pour étudier les associations ioniques en solution ?

2.2. Détermination de constantes de stabilité d'ions complexes.

On se propose d'étudier la formation du complexe FeF²⁺ en solution aqueuse en négligeant les corrections d'activité. Pour ce faire, on détermine, à l'aide d'une électrode au fluorure de lanthane, la concentration en ion F⁻ libres dans diverses solutions obtenues en mélangeant des solutions de perchlorate ferrique, de fluorure de sodium et de perchlorate de sodium, en présence d'acide perchlorique, de manière que la force ionique de l'échantillon obtenu soit égale à 1 mol.l⁻¹.

Il intervient alors les équilibres suivants :



On définit \bar{n} comme le rapport de la concentration des ions F⁻ liés aux ions ferriques à la concentration totale en ions du fer III ($[\text{Fe}^{3+}]_{\text{total}}$).

Exprimer \bar{n} en fonction des concentrations des diverses espèces ferriques présentes dans la solution et montrer que l'on a :

$$\frac{\bar{n} \left(1 + \frac{K_h}{[H^+]}\right)}{(2 - \bar{n}) [F^-]^2} = \frac{(1 - \bar{n}) K_1}{(2 - \bar{n}) [F^-]} + K_1 K_2.$$

Dans des solutions de force ionique égale à 1 mol.l⁻¹, $K_h = 1,66 \cdot 10^{-3}$. Les résultats de la détermination de \bar{n} et de la concentration des ions F⁻ libres pour deux valeurs de pH sont donnés dans le tableau suivant :

	pH = 1,42			pH = 0,88		
10 ⁶ [F ⁻] mol.l ⁻¹ .	0,2379	0,5458	0,7366	0,06731	0,06702	0,1005
\bar{n}	0,1880	0,3624	0,4425	0,07215	0,07235	0,1050

Tracer la courbe :

$$\frac{\bar{n} \left(1 + \frac{K_h}{[H^+]}\right)}{(2 - \bar{n}) [F^-]^2} = f \left\{ \frac{(1 - \bar{n})}{(2 - \bar{n}) ([F^-])} \right\}$$

(Echelles :

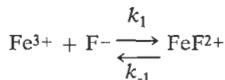
$$2 \text{ cm pour } \frac{(1 - \bar{n}) 10^{-5}}{(2 - \bar{n}) [F^-]} \quad \text{et} \quad \frac{\bar{n} \left(1 + \frac{K_h}{[H^+]}\right) 10^{-10}}{(2 - \bar{n}) [F^-]^2} = 1)$$

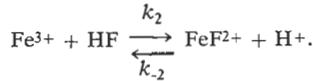
et en déduire K_1 .

3. ETUDE DE LA CINÉTIQUE DE FORMATION D'UN ION COMPLEXE.

On ajoute rapidement à des solutions analogues aux précédentes (paragraphe D.2.2.) contenant en quantités définies du fluorure de sodium et du perchlorate de sodium en présence d'acide perchlorique, maintenues agitées, une quantité connue de perchlorate ferrique. L'évolution en fonction du temps de la concentration des ions fluorures libres est mesurée à l'aide d'une électrode spécifique des ions F⁻. On admet que dans les conditions expérimentales de l'étude, le seul complexe fluoré du fer III qui se forme est FeF²⁺.

Le mécanisme réactionnel suivant a été proposé pour l'interprétation de sa formation :





On admet que l'équilibre acido-basique de HF et l'équilibre :



caractérisés respectivement par les constantes K_a et K_h (K_h étant défini au paragraphe D.2.2.), sont atteints instantanément. Donner

l'expression de $\frac{d[\text{FeF}^{2+}]}{dt}$ en fonction de k_1 , k_2 , des concentrations $[\text{Fe}^{3+}]$, $[\text{FeF}^{2+}]$, $[\text{H}^+]$, $[\text{HF}]$, de K_1 (défini au paragraphe D.2.2.) et de la constante K_a d'acidité du couple HF/F⁻.

En appelant :

$$m = [\text{Fe}^{3+}]_{\text{total}} = [\text{Fe}^{3+}] + [\text{FeOH}^{2+}] + [\text{FeF}^{2+}]$$

$$n = [\text{F}^-]_{\text{total}} = [\text{F}^-] + [\text{HF}] + [\text{FeF}^{2+}]$$

$$x = [\text{FeF}^{2+}] \text{ au temps } t$$

$$r = \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{3+}] + [\text{FeOH}^{2+}]} = \frac{[\text{H}^+]}{K_h + [\text{H}^+]}$$

$$s = \frac{[\text{F}^-]}{[\text{F}^-] + [\text{HF}]} = \frac{K_a}{K_a + [\text{H}^+]}$$

montrer que l'expression de $\frac{d[\text{FeF}^{2+}]}{dt}$ peut s'écrire :

$$\frac{dx}{dt} = \left(k_1 + \frac{1-s}{s} k_2 \right) \left[rs(m-x)(n-x) - \frac{x}{K_1} \right].$$

En intégrant cette équation différentielle entre les temps 0 et t , montrer que l'on a :

$$\frac{1}{rs} \cdot \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \ln \left| \frac{2x + b - \sqrt{q}}{2x + b + \sqrt{q}} \right| = K't + \text{constante}$$

avec $b = -m - n - \frac{1}{rs K_1}$; $c = mn$; $q = b^2 - 4c$

et $K' = k_1 + \frac{1-s}{s} k_2.$

La représentation de $\ln \left| \frac{2x + b - \sqrt{q}}{2x + b + \sqrt{q}} \right|$ en fonction du temps

donne pour chaque valeur de pH une droite. Que peut-on en conclure au sujet de la validité du modèle proposé. Comment peut-on trouver la valeur de K' relative à chacune des droites précédentes ?

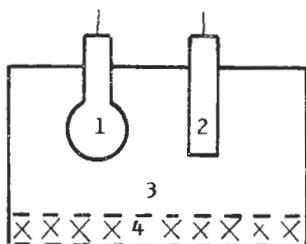
Le tableau ci-après donne les valeurs obtenues pour K' pour trois valeurs différentes de pH :

pH.....	0,88	1,17	1,45
$K' \cdot 10^{-3} \text{ (mol}^{-1} \cdot \text{l} \cdot \text{s}^{-1}) \dots$	10,75	7,55	5,49

Déterminer graphiquement k_1 et k_2 sachant que $K_a = 1,26 \cdot 10^{-3}$.

4. CAPTEUR A MEMBRANE DIT « ÉLECTRODE A GAZ ».

L' « électrode à gaz » sensible au dioxyde de carbone peut être schématisée comme suit :



- (1) est une électrode de verre sensible au pH ;
- (2) est une électrode de référence ;
- (3) est une solution d'électrolyte inerte additionné ou non d'hydrogénocarbonate de sodium ;
- (4) est une membrane hydrophobe perméable au dioxyde de carbone et imperméable à l'eau.

Du dioxyde de carbone traverse la membrane (4).

4.1. Ecrire les différents équilibres acido-basiques intervenant dans la solution (3). On notera α le coefficient de proportionnalité entre la pression partielle p_{CO_2} du dioxyde de carbone et la concentration molaire de CO_2 dissous, K_{a1} et K_{a2} les constantes d'acidité successives de CO_2 dissous et K_e la constante d'autoprotolyse de l'eau.

Exprimer la pression du dioxyde de carbone en fonction des activités des ions H^+ et Na^+ ainsi que des constantes α , K_{a1} , K_{a2} et K_e .

4.2. Donner les expressions approchées de p_{CO_2} dans le cas où la solution (3) contient de l'hydrogénocarbonate de sodium en quantité suffisante et dans le cas où elle n'en contient pas.

4.3. On définit la sensibilité S du capteur comme le rapport des variations du pH de la solution et du logarithme de p_{CO_2} .

Calculer les sensibilités de deux capteurs correspondant aux cas particuliers précédents. Quel est l'intérêt d'introduire de l'hydrogénocarbonate dans la solution (3) ?

4.4. Le capteur est-il spécifique du dioxyde de carbone ?

SOLUTION

A. GENERALITES

1. LE POTENTIEL ÉLECTROCHIMIQUE.

$$1.1. \bar{\mu}_i = \mu_i + z_i F \varphi = \mu_i^0 + RT \ln a_i + z_i F \varphi.$$

1.2. La variation d'enthalpie libre mise en jeu est $(\mu_i' - \mu_i) dn$ et le travail électrique correspondant $(\varphi' - \varphi) z_i F dn$. Pour qu'il y ait équilibre de I_i entre les deux phases, il faut que l'énergie totale soit nulle.

$$(\mu_i' - \mu_i) dn + (\varphi' - \varphi) z_i F dn = 0$$

soit :

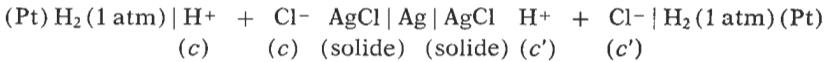
$$\mu_i' + z_i F \varphi' = \mu_i + z_i F \varphi$$

$$\bar{\mu}_i' = \bar{\mu}_i.$$

1.3. Le potentiel électrochimique est une énergie molaire.

2. POTENTIEL DE DIFFUSION.

2.1. Pile sans jonction liquide.



La loi de NERNST donne :

$$E_1 = \frac{RT}{F} \ln a'_{H^+} - E^0_{AgCl/Ag} + \frac{RT}{F} \ln a'_{Cl^-} \dots$$

$$\dots - E^0_{AgCl/Ag} - \frac{RT}{F} \ln a_{Cl^-} - \frac{RT}{F} \ln a_{H^+}$$

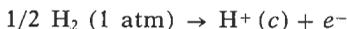
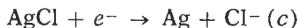
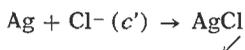
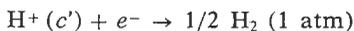
soit :

$$E_1 = \frac{RT}{F} \ln \frac{a'_{H^+} \cdot a'_{Cl^-}}{a_{H^+} \cdot a_{Cl^-}}.$$

En introduisant les activités moyennes :

$$E_1 = \frac{2 RT}{F} \ln \frac{a'}{a}.$$

Lors de la circulation d'une mole de charge élémentaire positive à travers la cellule, les réactions observées aux interfaces métal-solution sont :



soit au bilan :

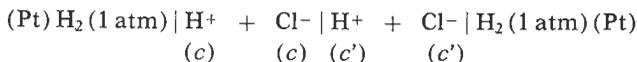


La variation d'enthalpie libre correspondante est :

$$\Delta G_1 = \mu - \mu' = RT \ln \frac{a^2}{a'^2} = 2 RT \ln \frac{a}{a'}$$

$$\text{On retrouve bien } E_1 = -\Delta G_1/F = \frac{2 RT}{F} \ln \frac{a'}{a}$$

2. PILE AVEC JONCTION LIQUIDE.



Lors de la circulation d'une mole de charge élémentaire positive de gauche à droite, on observe :

— dans le compartiment de droite : la réduction d'une mole de protons à l'électrode, l'apport de t_+ mole de protons à travers le diaphragme et le départ de t_- mole d'ions chlorure ;

— dans le compartiment de gauche : la formation électrochimique d'une mole de protons et, à travers le diaphragme, le départ de t_+ mole de protons et l'entrée de t_- mole d'ions chlorure.

Au bilan, il y a transfert de t_- mole de protons et de t_- mole d'ions chlorure du compartiment de droite (c') à celui de gauche (c).

La variation d'enthalpie libre correspondante est :

$$\Delta G = t_- (\mu - \mu') = 2 t_- RT \ln \frac{a}{a'}$$

et :

$$E = -\Delta G/F = 2 t_- \frac{RT}{F} \ln \frac{a'}{a}$$

Par ailleurs, la loi de NERNST donne, pour chaque électrode à hydrogène :

$$\pi_d = \frac{RT}{F} \ln a'_{\text{H}^+} \quad \text{et} \quad \pi_g = \frac{RT}{F} \ln a_{\text{H}^+}$$

Or, $E = \pi_d + E_J - \pi_g$ avec $E_J = \varphi' - \varphi$, soit :

$$E = E_J + \frac{RT}{F} \ln \frac{a'}{a}.$$

On en déduit donc :

$$E_J = (2t_- - 1) \frac{RT}{F} \ln \frac{a'}{a}.$$

Application numérique : $E \simeq 20$ mV ; $E_J \simeq -40$ mV : le potentiel de jonction n'est pas toujours négligeable !

2.3. Potentiel de jonction liquide.

2.3.1. Par définition du nombre de transport, la quantité d'électricité transportée par I_i est proportionnelle à t_i , donc la quantité d'ion I_i déplacée est :

$$\frac{t_i}{z_i} dn.$$

La variation d'enthalpie libre correspondant à ce déplacement est : $dG_i = \frac{t_i}{z_i} dn \cdot d\mu_i$, d'où :

$$dG_i = \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{z_i} dn \cdot d\mu_i.$$

Le travail des forces électriques est : $dW = dn \cdot F \cdot d\varphi$. La condition d'équilibre des ions I_i s'écrit :

$$dG + dW = 0,$$

soit :

$$d\varphi = -\frac{1}{F} \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{z_i} d\mu_i$$

d'où :

$$E_J = \varphi^\beta - \varphi^\alpha = \int_{x=0}^{x=l} d\varphi = -\frac{RT}{F} \int_{x=0}^{x=l} \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{z_i} d \ln a_i.$$

2.3.2. Cas particulier.

Lorsque deux ions seulement sont présents (H^+ et Cl^-), l'expression précédente devient :

$$E_J = \frac{RT}{F} \left(\int_{x=0}^{x=l} t_+ d \ln a_{H^+} - \int_{x=0}^{x=l} t_- d \ln a_{Cl^-} \right)$$

$$= \frac{RT}{F} (t_- - t_+) \ln \frac{a'}{a} = \frac{RT}{F} (2t_- - 1) \ln \frac{a'}{a}.$$

2.3.3. Cas particulier (modèle de HENDERSON).

Par définition du nombre de transport :

$$t_i = \frac{|z_i| u_i c_i}{\sum_j |z_j| u_j c_j}.$$

Compte tenu des hypothèses proposées :

$$E_J = - \frac{RT}{F} \int_{x=0}^{x=l} \sum_{i=1}^N \frac{1}{z_i} \frac{|z_i| u_i c_i d \ln c_i}{\sum_{j=1}^N |z_j| u_j c_j}$$

or :

$$c_j = c_j^\alpha + \frac{x}{l} (c_j^\beta - c_j^\alpha) \Rightarrow dc_j = \frac{c_j^\beta - c_j^\alpha}{l} dx$$

$$E_J = - \frac{RT}{F} \int_{x=0}^{x=l} \sum_{i=1}^N \frac{1}{z_i} \frac{|z_i| u_i (c_i^\beta - c_i^\alpha) dx}{l \sum_j |z_j| u_j c_j^\alpha + x \sum_j |z_j| u_j (c_j^\beta - c_j^\alpha)}.$$

Il s'agit d'intégrales de la forme :

$$\int_{y=0}^{y=1} \frac{A dy}{B + C_y} = \frac{A}{c} \ln \frac{B + c}{B},$$

d'où :

$$E_J = - \frac{RT}{F} \sum_{i=1}^N \frac{|z_i| u_i (c_i^\beta - c_i^\alpha)}{z_i \sum_{j=1}^N |z_j| u_j (c_j^\beta - c_j^\alpha)} \ln \frac{\sum_{j=1}^N |z_j| u_j c_j^\beta}{\sum_{j=1}^N |z_j| u_j c_j^\alpha}$$

soit :

$$E_J = + \frac{RT}{F} \frac{\sum_{i=1}^N \frac{|z_i|}{z_i} u_i (c_i^\beta - c_i^\alpha)}{\sum_{i=1}^N |z_i| u_i (c_i^\beta - c_i^\alpha)} \ln \frac{\sum_{i=1}^N |z_i| u_i c_i^\beta}{\sum_{i=1}^N |z_i| u_i c_i^\alpha}.$$

Dans le cas particulier de la jonction $H^+ Cl^- | K^+ Cl^-$, les concentrations étant égales :

$$E_J = \frac{RT}{F} \ln \frac{u_{H^+} + u_{Cl^-}}{u_{K^+} + u_{Cl^-}}$$

$$E_J = \frac{RT}{F} \ln \frac{\lambda_{HCl}^0}{\lambda_{KCl}^0}$$

2.3.4. Pour minimiser le potentiel de jonction, compte tenu de l'expression obtenue au paragraphe 2.3.1., on utilise des ponts au chlorure ou au nitrate de potassium car :

- ces ions ont alors des nombres de transport élevés,
- ces nombres de transport sont pratiquement égaux, les mobilités du cation et de l'anion étant très voisines.

B. ETUDE THEORIQUE DES POTENTIELS DE MEMBRANE

1. MEMBRANE SOLIDE, ÉCHANGEUSE D'IONS.

1.1. Potentiel de diffusion dans la membrane.

Le flux est donné par :

$$J_i(x, t) = v_i c_i = -u_i c_i \frac{\partial \bar{\mu}_i}{\partial x}$$

(équation de NERNST-PLANCK).

$$J_i(x, t) = -u_i c_i \frac{\partial}{\partial x} (\mu_i^0 + RT \ln a_i + z_i F \varphi)$$

La densité de courant est :

$$I = F \sum_{i=1}^N z_i J_i(x, t)$$

$$\mu_i^0 - \mu_j^0 = \text{cste} \Rightarrow \frac{d\mu_i^0}{dx} = \frac{d\mu_j^0}{dx} \quad \forall i, j$$

$$u_i/u_j = \text{cste} \Rightarrow d(u_i/u_j)/dx = 0 \quad \forall i, j$$

$$I = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N z_i J_i = 0$$

soit :

$$\sum_{i=1}^N u_i c_i \frac{\partial}{\partial x} [\mu_i^0 + RT \ln c_i + z_i F \varphi] = 0$$

$$\sum_{i=1}^N u_i c_i \frac{\partial \mu_i^0}{\partial x} + RT \sum_{i=1}^N u_i \frac{\partial c_i}{\partial x} + z_i F \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sum_{i=1}^N u_i c_i = 0$$

$$\left(\frac{\partial \mu_1^0}{\partial x} + z F \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \sum_{i=1}^N u_i c_i = -RT \sum_i u_i \frac{\partial c_i}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [\mu_1^0 + z F \varphi] = \frac{-RT \sum_i u_i \partial c_i / \partial x}{\sum_i u_i c_i} = -RT \frac{\sum_i \frac{u_i}{u_1} \frac{\partial x}{\partial x}}{\sum_i \frac{u_i}{u_1} c_i}$$

$$= -RT \frac{\partial}{\partial x} \ln \sum_{i=1}^N \frac{u_i}{u_1} c_i$$

car $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_i}{u_1} \right) = 0$.

En intégrant l'équation précédente entre $x = p$ et $x = q$:

$$\mu_1^0(q) - \mu_1^0(p) + z F [\varphi(q) - \varphi(p)] = -RT \ln \frac{\sum_{i=1}^N \frac{u_i}{u_1} c_i(q, t)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i}{u_1} c_i(p, t)}$$

d'où :

$$E_D = \frac{\mu_1^0(p) - \mu_1^0(q)}{z F} + \frac{RT}{z F} \ln \frac{\sum_{i=1}^N \frac{u_i}{u_1} c_i(p, t)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i}{u_1} c_i(q, t)}$$

1.2. Interfaces membrane-solutions.

Les conditions d'équilibre sont les égalités des potentiels électrochimiques dans les deux phases à chaque interface membrane-solution :

$$\mu_i^{0'} + RT \ln a_i' + z F \varphi' = \mu_i^0(p) + RT \ln a_i(p) + z F \varphi(p)$$

$$\mu_i^{0''} + RT \ln a_i'' + z F \varphi'' = \mu_i^0(q) + RT \ln a_i(q) + z F \varphi(q).$$

d'où :

$$\varphi(p) - \varphi' = \frac{1}{z F} \left[\mu_1^{0'} - \mu_1^0(p) + RT \ln \frac{a_1'}{a_1(p)} \right]$$

$$\varphi'' - \varphi(q) = \frac{1}{z F} \left[\mu_1^0(q) - \mu_1^{0''} + RT \ln \frac{a_1(q)}{a_1''} \right]$$

1.3. *Potentiel de membrane.*

$E = \varphi'' - \varphi'$ est la somme des deux termes calculés au paragraphe 1.2. et de E_D calculé au paragraphe 1.1.

$$E = \varphi'' - \varphi' = \frac{\mu_1^{0'} - \mu_1^{0''}}{zF} \dots$$

$$\dots + \frac{RT}{zF} \ln \frac{a'_1}{a''_1} + \frac{RT}{zF} \ln \frac{\sum_{i=1}^N \frac{u_i c_i(p)}{u_1 c_1(p)}}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i c_i(q)}{u_1 c_1(q)}}.$$

La membrane étant assimilée à un milieu idéal :

$$K'_{ji} = \frac{c_i(p) \cdot a'_j}{c_j(p) \cdot a'_i}$$

en particulier, avec $j = 1$: $K'_{1i} = \frac{c_i(p)}{c_1(p)} \cdot \frac{a'_1}{a'_i}$,

d'où :

$$\frac{c_i(p)}{c_1(p)} \cdot a'_1 = K'_{1i} a'_i.$$

De même, les équilibres en $x = q$ conduisent à :

$$\frac{c_i(q)}{c_1(q)} a_1'' = K''_{1i} a_i'',$$

d'où :

$$E = \frac{\mu_1^{0'} - \mu_1^{0''}}{zF} + \frac{RT}{zF} \ln \frac{\sum_{i=1}^N \frac{u_i}{u_1} K'_{1i} a'_i}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i}{u_1} K''_{1i} a_i''}.$$

1.4. L'expression précédente devient :

$$E = \text{cste} + \frac{RT}{zF} \ln \sum_{i=1}^N \frac{u_i}{u_1} K'_{1i} a'_i$$

$$= \text{cste} + \frac{RT}{zF} \ln [a_1' + \sum_{i \neq 1} \frac{u_i}{u_1} K'_{1i} a_i'].$$

Le coefficient de sélectivité k_{1i} est donc fonction de la mobilité des ions dans la membrane et de la constante d'équilibre d'échange à l'interface membrane-solution externe :

$$k_{1i} = \frac{u_i}{u_1} K'_{1i}.$$

2. MEMBRANE SOLIDE SANS POTENTIEL DE DIFFUSION INTERNE.

2.1. Potentiel de membrane.

$$\begin{aligned} \overline{\mu'_{Ag^+}} &= \overline{\mu_{Ag^+}} \Rightarrow \mu^{0'}_{Ag^+} + \\ &RT \ln a'_{Ag^+} + F \varphi' = \mu^0_{Ag^+} + F \varphi(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mu'_{Cl^-}} &= \overline{\mu_{Cl^-}} \Rightarrow \mu^{0'}_{Cl^-} + \\ &RT \ln a'_{Cl^-} - F \varphi' = \mu^0_{Cl^-} - F \varphi(p) \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} RT \ln a'_{Ag^+} \cdot a'_{Cl^-} &= \mu^0_{Ag^+} + \mu^0_{Cl^-} - \mu^{0'}_{Ag^+} - \mu^{0'}_{Cl^-} \\ &= \mu^0_{AgCl} - \mu^{0'}_{Ag^+} - \mu^{0'}_{Cl^-} \\ &= RT \ln P_{AgCl} \end{aligned}$$

donc :

$$a'_{Ag^+} \cdot a'_{Cl^-} = P_{AgCl}.$$

L'égalité des potentiels électrochimiques de Cl^- dans les différentes phases s'écrit :

$$\mu^{0'}_{Cl^-} + RT \ln a'_{Cl^-} - F \varphi' = \mu^0_{Cl^-} - F \varphi(p)$$

$$\mu^{0''}_{Cl^-} + RT \ln a''_{Cl^-} - F \varphi'' = \mu^0_{Cl^-} - F \varphi(q).$$

Avec $\varphi(p) = \varphi(q)$, il vient :

$$E = \varphi'' - \varphi' = \frac{RT}{F} \ln \frac{a''_{Cl^-}}{a'_{Cl^-}}.$$

2.2. Interférence.

En p , les activités de Ag^+ et de Cl^- sont liées par :

$$a'_{Ag^+} \cdot a'_{Cl^-} = P_{AgCl}.$$

Le produit de solubilité de AgI est atteint si :

$$a'_{I^-} = \frac{P_{AgI}}{a_{Ag^+}} = \frac{P_{AgI}}{P_{AgCl}} \cdot a'_{Cl^-}$$

en q :

$$\mu^{0''}_{Cl^-} + RT \ln a''_{Cl^-} - F \varphi'' = \mu^0_{Cl^-} - F \varphi(q)$$

soit :

$$\varphi'' - \varphi(q) = \frac{1}{F} (\mu^{0''}_{Cl^-} - \mu^0_{Cl^-} + RT \ln a''_{Cl^-})$$

en p :

$$\varphi(p) - \varphi' = \frac{1}{F} (\mu^0_{I^-} - \mu^{0'}_{I^-} - RT \ln a'_{I^-})$$

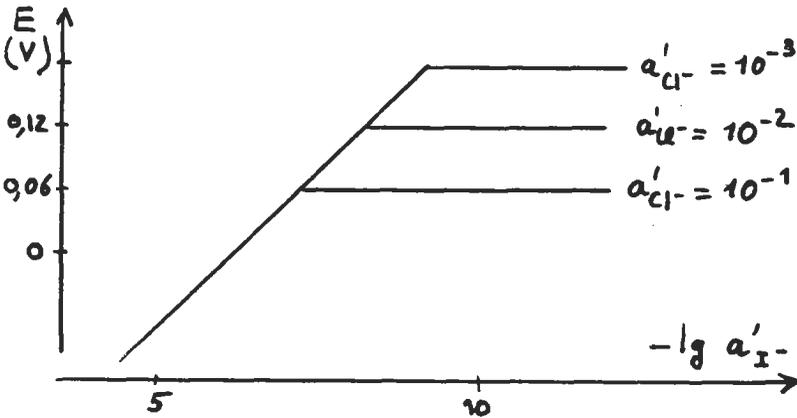
soit :

$$E = \varphi'' - \varphi' = \frac{1}{F} (RT \ln \frac{a''_{Cl^-}}{a'_{I^-}} + \mu^{0''}_{Cl^-} - \mu^0_{Cl^-} + \mu^0_{I^-} - \mu^{0'}_{I^-}).$$

En introduisant $\mu''_{Ag^+} = \mu'_{Ag^+}$:

$$E = \varphi'' - \varphi' = \frac{RT}{F} \ln \frac{P_{AgI}}{P_{AgCl}} \frac{a''_{Cl^-}}{a'_{I^-}}.$$

L'expression de E calculée au paragraphe 2.1. est valable tant qu'il n'y a pas précipitation de AgI. Lorsque AgI précipite, on utilise l'expression précédente.



2.3. Applications.

On pourra choisir un cristal de AgX pour les ions X⁻ ou pour les ions Ag⁺. Pour les mesures concernant X⁻, interféreront les anions donnant avec Ag⁺ des précipités ou des complexes (CN⁻). De même, Ag₂S conviendra pour Ag⁺ et S²⁻. Pour suivre Ag⁺, les ions donnant des précipités avec S²⁻ (Hg²⁺...) seront gênants.

3. MEMBRANE LIQUIDE A ÉCHANGEUR D'IONS.

3.1. La condition d'équilibre de I_i^+ en $x = p$ est :

$$\mu_i^{0'} + RT \ln a_i' + F \varphi' = \mu_i^0 + RT \ln a_i(p) + F \varphi(p)$$

de même :

$$\mu_i^{0''} + RT \ln a_i'' + F \varphi'' = \mu_i^0 + RT \ln a_i(p) + F \varphi(p)$$

d'où :

$$RT \ln \frac{a_i'}{c_i(p)} + \mu_i^{0'} - \mu_i^0 = RT \ln \frac{a_i'}{c_j(p)} + \mu_j^{0'} - \mu_j^0.$$

Avec $\mu_i^{0'} - \mu_i^0 = RT \ln k_i$,

$$\frac{a_i'}{c_i(p)} k_i = \frac{a_j'}{c_j(p)} k_j = \dots = \frac{\sum_i a_i' k_i}{\sum_i c_i(p)}.$$

L'électroneutralité de la phase organique en $x = p$ s'écrit :

$$c_X(p) = \sum_i c_i(p)$$

d'où :

$$c_i(p) = c_X(p) \frac{a_i' k_i}{\sum_{i=1}^N a_i' k_i}.$$

De même, en $x = q$, on a :

$$c_i(q) = c_X(q) \frac{a_i'' k_i}{\sum_{i=1}^N a_i'' k_i}.$$

Des égalités des potentiels électrochimiques de I_i^+ aux interfaces, on tire :

$$\varphi(p) - \varphi' = \frac{\mu_i^{0'} - \mu_i^0}{F} - \frac{RT}{F} \ln \frac{c_i(p)}{a_i'}$$

$$\varphi'' - \varphi(q) = \frac{\mu_i^0 - \mu_i^{0''}}{F} + \frac{RT}{F} \ln \frac{c_i(q)}{a_i''}$$

avec $\mu_i^{0'} = \mu_i^{0''}$:

$$E = \varphi'' - \varphi' = \varphi(q) - \varphi(p) + \frac{RT}{F} \ln \frac{c_X(q)}{c_X(p)} \frac{\sum_{i=1}^N a_i' k_i}{\sum_{i=1}^N a_i'' k_i}.$$

3.2. Les flux sont donnés par les relations de NERNST-PLANCK :

$$J_i = -u_i c_i \frac{\partial}{\partial x} [RT \ln c_i + F \varphi]$$

$$J_X = -u_X c_X \frac{\partial}{\partial x} [RT \ln c_X - F \varphi]$$

$$J_{iX} = -u_{iX} c_{iX} \frac{\partial}{\partial x} RT \ln c_{iX}$$

$\varphi(q) - \varphi(p)$ pourrait être obtenue par résolution de ce système d'équations. On voit donc que E sera fonction des constantes d'extraction k_i et des constantes d'association K_{iX} .

Dans le cas d'une telle membrane, les sites échangeurs d'ions sont mobiles, alors qu'ils sont fixes dans le cas étudié au paragraphe B.1.

3.3. On peut concevoir une électrode sélective d'anions : elle utiliserait un cation lipophile peu soluble en milieu aqueux (ammonium quaternaire).

4. MEMBRANE LIQUIDE A PORTEURS NEUTRES.

S est susceptible de former avec les cations I_i^+ des complexes I_iS^+ ; en milieu organique peu polaire, ces cations peuvent être associés aux anions. Dans la membrane, peuvent donc exister :

- les cations I_i^+ (minoritaires),
- les cations complexes I_iS^+ ,
- les macrocycles S ,
- les anions X^- ,
- les paires d'ions I_iSX .

Le coefficient de sélectivité d'une telle électrode serait fonction des constantes des équilibres entre les espèces indiquées précédemment (dans la membrane et aux interfaces) et de leurs mobilités dans la membrane.

5. APPLICATIONS.

Les membranes de verre utilisées dans les « électrodes de verre » pour les mesures de pH doivent être rattachées aux membranes décrites au paragraphe B.1. (influence des échanges d'ions et de la diffusion interne).

Les électrodes spécifiques des cations alcalins actuellement commercialisées utilisent généralement des membranes de verre de compositions particulières [5].

C. DETERMINATION EXPERIMENTALE D'UN COEFFICIENT DE SELECTIVITE D'UNE ELECTRODE A MEMBRANE

1.
$$U = U_0 + p \lg (a_{Br^-} + K a_{Cl^-}).$$

Pour les valeurs élevées de a_{Cl^-} , a_{Br^-} devient négligeable devant $K a_{Cl^-}$: U varie linéairement avec $\lg a_{Cl^-}$, la pente de la droite correspondante étant p . Les deux premiers points du tableau donnent $p = (53 - 38) / (\lg 5,6 - \lg 10) p \simeq 56$ (mV).

Pour les faibles valeurs de a_{Cl^-} , U est indépendant de a_{Cl^-} .

Au point d'intersection de ces deux droites, on a :

$$U_0 + p \lg K + p \lg a_{Cl^-} = U^0 + p \lg a_{Br^-}$$

soit :

$$\lg K = \lg a_{Br^-} - \lg a_{Cl^-}$$

d'où :

$$K \simeq 10^{-2,5}.$$

2. Dans le domaine de a_{Cl^-} pour lequel U est indépendant de a_{Cl^-} , les deux droites doivent être décalées de p puisque a_{Br^-} est 10 fois plus grand que dans le cas du paragraphe précédent : $119 - 62 = p = 57$ (mV).

En A (fig.) :

$$U = U_0 + p \lg (a_{Br^-} + K a_{Cl^-})$$

en B :

$$U = U_0 + p \lg (a'_{Br^-} + K a'_{Cl^-})$$

si les deux points sont à la même ordonnée U :

$$\lg (a_{Br^-} + K a_{Cl^-}) = \lg (a'_{Br^-} + K a'_{Cl^-})$$

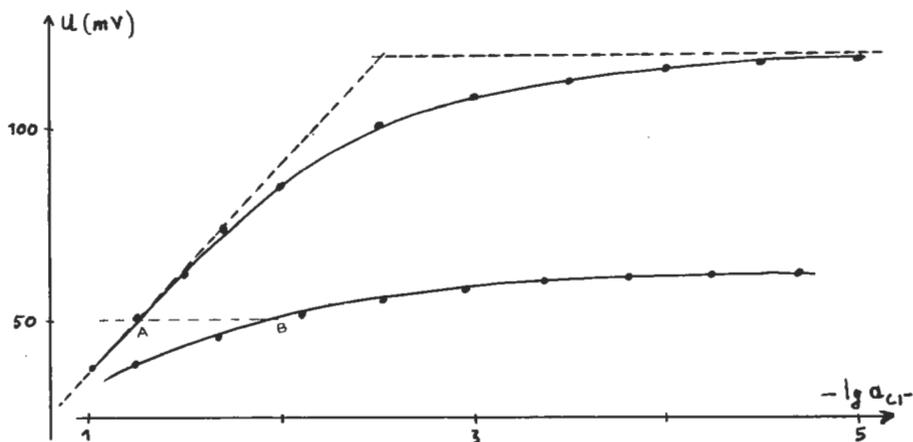
$$K = \frac{a_{Br^-} - a'_{Br^-}}{a'_{Cl^-} - a_{Cl^-}}.$$

Par exemple, pour $U = 50$ mV : $a_{Cl^-} = 10^{-1,22}$; $a_{Br^-} = 10^{-5}$; $a'_{Cl^-} = 10^{-2,05}$; $a'_{Br^-} = 10^{-4}$, d'où :

$$K \simeq 10^{-2,7}.$$

3. Dans le modèle proposé en B.2.2.,

$$K = \frac{P_{AgBr}}{P_{AgCl}} \simeq 10^{-2,3}.$$



D. APPLICATIONS : UTILISATION D'ELECTRODES A MEMBRANE

1. DOSAGES.

1.1. Fluorures.

La courbe d'étalonnage est une droite dans le domaine envisagé; elle s'incurve pour des concentrations en fluorure inférieures à 10^{-5} mol. l⁻¹ environ :

$$U_1 = U_0 + p \lg \gamma_1 c_1$$

$$U_2 = U_0 + p \lg \gamma_2 c_2$$

d'où :

$$p = \frac{U_1 - U_2}{\lg \gamma_1 c_1 - \lg \gamma_2 c_2}$$

Dans l'exemple précédent, $p = 60$ mV.

Le résultat s'écrit simplement en fonction des concentrations si $\gamma_1 = \gamma_2$, ce qui justifie l'utilisation d'un tampon de la force ionique.

$U_s = -282$ mV \Rightarrow $[F^-] = 2 \cdot 10^{-5}$ mol. l⁻¹ dans le mélange eau + tampon.

Dans l'eau étudiée $[F^-] = 4 \cdot 10^{-5}$ mol. l⁻¹ = 760 μ g. l⁻¹ :

$$\frac{d[F^-]}{[F^-]} = \frac{F dU}{RT}$$

En admettant que Δu est de l'ordre de 1 mV, l'incertitude

relative est $\frac{\Delta [F^-]}{[F^-]} = \frac{2,3}{60} \simeq 4\%$ (lorsque p a la valeur théorique $\frac{RT}{F} \ln 10$).

1.2. Chlorures : ajouts dosés.

$$U_i = U_0 + p \lg \gamma c_X$$

$$U = U_0 + p \lg \gamma (c_X + \Delta c).$$

La variation du potentiel est donc :

$$\Delta U = U - U_i = p \lg \frac{c_X + \Delta c}{c_X} = p \lg \left(1 + \frac{\Delta c}{c_X} \right)$$

d'où :

$$c_X = \frac{\Delta c}{10^{\Delta U/p} - 1}.$$

$$\Delta c = \frac{C_e V_e}{V_e + V_i} \quad \text{d'où :} \quad c_X = \frac{C_e V_e}{V_e + V_i} \cdot \frac{1}{10^{\Delta U/p} - 1}.$$

La méthode peut être utilisée facilement si $V_e \ll V_i$.

$$1.2.2. \quad p = 50 \text{ mV.}$$

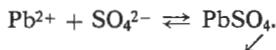
La courbe représentant $10^{\Delta U/p} = f(\Delta c)$ est une droite.

c_X est l'inverse de la pente de cette droite ; elle peut être également déterminée par l'intersection de cette droite avec l'axe Δc :

$$c_X = 1,65 \cdot 10^{-4} \text{ mol. l}^{-1} \simeq 5,9 \text{ mg. l}^{-1}.$$

1.3. Sulfates.

La réaction de dosage est la précipitation du sulfate de plomb :



La figure 1 donne :

$$[\text{SO}_4^{2-}] = 10^{-3} \text{ mol. l}^{-1} \simeq 96 \text{ mg. l}^{-1}.$$

2. DÉTERMINATION DE CONSTANTES THERMODYNAMIQUES.

2.1. Formation de paires d'ions.

U varie bien linéairement avec $\lg a$.

Pour la solution de sulfate de sodium,

$$U = 77,9 \text{ mV} \Rightarrow \lg a = -0,94 \Rightarrow a = 0,115.$$

$$\text{On estime que } [\text{Na}^+]_{\text{libre}} = \frac{0,115}{0,75} = 0,153 :$$

$$\Rightarrow [\text{NaSO}_4^-] = 0,2 - 0,153 = 0,047 \text{ mol.l}^{-1}$$

$$\Rightarrow [\text{SO}_4^{2-}] = 0,1 - 0,047 = 0,053 \text{ mol.l}^{-1}$$

$$\text{d'où : } I_1 = \frac{1}{2} [0,153 + 0,047 + 4 \times 0,053] = 0,206 \Rightarrow \gamma_1 = 0,73,$$

$$[\text{Na}^+]_{\text{libre}} = \frac{0,115}{0,73} = 0,159 \Rightarrow [\text{NaSO}_4^-] = 0,042$$

$$[\text{SO}_4^{2-}] = 0,058$$

$$I_2 = 0,216 \Rightarrow \gamma_2 = 0,725$$

$$[\text{Na}^+]_{\text{libre}} = \frac{0,115}{0,725} = 0,158 \Rightarrow [\text{NaSO}_4^-] = 0,041$$

$$[\text{SO}_4^{2-}] = 0,059$$

$$I_3 = 0,218 \Rightarrow \gamma_3 = 0,725$$

$$\text{d'où : } [\text{Na}^+]_{\text{libre}} \simeq 0,16$$

$$[\text{SO}_4^{2-}] \simeq 0,06 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow K \simeq 4.$$

$$[\text{NaSO}_4^-] \simeq 0,04$$

La conductimétrie est couramment utilisée pour étudier les associations ioniques en solution.

2.2. Constantes de stabilité d'ions complexes.

Par définition :

$$\bar{n} = \frac{[\text{FeF}^{2+}] + 2[\text{FeF}_2^+]}{[\text{Fe}^{3+}] + [\text{FeOH}^{2+}] + [\text{FeF}^{2+}] + [\text{FeF}_2^+]}$$

soit :

$$\bar{n} \left(1 + \frac{[\text{FeOH}^{2+}]}{[\text{Fe}^{3+}]} \right) + \bar{n} \frac{[\text{FeF}^{2+}]}{[\text{Fe}^{3+}]} + \bar{n} \frac{[\text{FeF}^{2+}]}{[\text{Fe}^{3+}]} = \dots$$

$$\frac{[\text{FeF}^{2+}]}{[\text{Fe}^{3+}]} + 2 \frac{[\text{FeF}_2^+]}{[\text{Fe}^{3+}]}$$

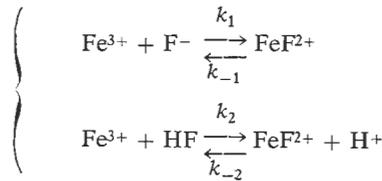
$$\bar{n} \left(1 + \frac{K_h}{[H^+]} \right) + (\bar{n} - 1) K_1 [F^-] + (\bar{n} - 2) K_1 K_2 [F^-]^2 = 0$$

$$\frac{\bar{n} \left(1 + \frac{K_h}{[H^+]} \right)}{(2 - \bar{n}) [F^-]^2} = \frac{(1 - \bar{n}) K_1}{(2 - \bar{n}) [F^-]} + K_1 K_2.$$

La pente de la droite correspondante est K_1 .

$$K_1 = 10^5.$$

3. CINÉTIQUE.



$$\frac{d[\text{FeF}^{2+}]}{dt} = k_1 [\text{Fe}^{3+}] [\text{F}^-] - k_{-1} [\text{FeF}^{2+}] \dots \\ \dots + k_2 [\text{Fe}^{3+}] [\text{HF}] - k_{-2} [\text{FeF}^{2+}] [\text{H}^+].$$

A l'équilibre $\frac{d[\text{FeF}^{2+}]}{dt} = 0$ et $\frac{[\text{FeF}^{2+}]_e}{[\text{Fe}^{3+}]_e [\text{F}^-]_e} = K_1$

$$[\text{Fe}^{3+}]_e [\text{F}^-]_e \left[(k_1 - k_{-1} K_1) + [\text{H}^+]_e \left(\frac{k_2}{K_a} - K_1 k_{-2} \right) \right] = 0$$

Cette relation doit être vérifiée quelle que soit $[\text{H}^+]$:

$$K_1 = \frac{k_1}{k_{-1}} \quad k_{-2} = \frac{k_2}{K_1 K_a}$$

$$\frac{d[\text{FeF}^{2+}]}{dt} = k_1 \left([\text{Fe}^{3+}] [\text{HF}] \frac{K_a}{[\text{H}^+]} - \frac{[\text{FeF}^{2+}]}{K_1} \right) + \dots \\ \dots + k_2 \left([\text{Fe}^{3+}] [\text{HF}] - \frac{[\text{FeF}^{2+}] [\text{H}^+]}{K_1 K_a} \right) \\ \frac{d[\text{FeF}^{2+}]}{dt} = [\text{Fe}^{3+}] [\text{HF}] \left(k_1 \frac{K_a}{[\text{H}^+]} + k_2 \right) - \frac{[\text{FeF}^{2+}]}{K_1} \left(k_1 + k_2 \frac{[\text{H}^+]}{K_a} \right) \\ = \left(k_1 + k_2 \frac{[\text{H}^+]}{K_a} \right) \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}] [\text{HF}] K_a}{[\text{H}^+]} - \frac{[\text{FeF}^{2+}]}{K_1} \right)$$

En introduisant les notations de l'énoncé :

$$\frac{1-s}{s} = \frac{[\text{H}^+]}{K_a}$$

$$m-x = [\text{Fe}^{3+}] + [\text{FeOH}^{2+}] = [\text{Fe}^{3+}] \left(1 + \frac{K_h}{[\text{H}^+]} \right) = \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{r}$$

$$n-x = [\text{F}^-] + [\text{HF}] = [\text{HF}] \left(1 + \frac{K_a}{[\text{H}^+]} \right) = \frac{[\text{HF}] K_a}{[\text{H}^+]} \times \frac{1}{s}$$

d'où $\frac{dx}{dt} = (k_1 + \frac{1-s}{s} k_2) [rs(m-x)(n-x) - \frac{x}{K_1}]$.

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dx}{rs \left[x^2 + \left(-m - n - \frac{1}{rs K_1} \right) x + mn \right]} = \left(k_1 + \frac{1-s}{s} k_2 \right) dt.$$

En intégrant :

$$\frac{1}{rs \sqrt{q}} \ln \left| \frac{2x + b - \sqrt{q}}{2x + b + \sqrt{q}} \right| = K't + \text{constante.}$$

L'existence d'une relation expérimentale linéaire entre :

$$\ln \left| \frac{2x + b - \sqrt{q}}{2x + b + \sqrt{q}} \right| \text{ et } t$$

plaide en faveur de la validité du modèle proposé. K' est proportionnelle à la pente de la droite.

$$K' = k_1 + \frac{1-s}{s} k_2 = k_1 + \frac{[\text{H}^+]}{K_a} k_2.$$

La représentation de K' en fonction de $[\text{H}^+]$ doit être une

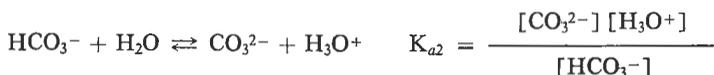
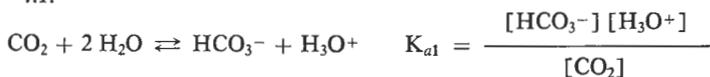
droite de pente $\frac{k_2}{K_a}$ et d'ordonnée à l'origine k_1 :

$$k_1 = 3,7 \cdot 10^3 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{l} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k_2 = 68 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{l} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4. ELECTRODE A GAZ.

4.1.



$$\text{avec : } \alpha = \frac{P_{\text{CO}_2}}{[\text{CO}_2]}.$$

L'équation d'électroneutralité est :

$$\begin{aligned} [\text{Na}^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] &= [\text{HCO}_3^-] + 2 [\text{CO}_3^{2-}] + [\text{OH}^-] \\ &= \alpha P_{\text{CO}_2} \left(\frac{K_{a1}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} + \frac{2 K_{a1} K_{a2}}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2} \right) + \frac{K_e}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } P_{\text{CO}_2} = \frac{[\text{Na}^+] [\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{H}_3\text{O}^+]^2 - K_e}{K_{a1} \left(1 + \frac{2 K_{a2}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \right)} \cdot \alpha.$$

4.2. Lorsque la solution (3) contient des ions Na^+ en quantité suffisante, les termes $[\text{H}_3\text{O}^+]^2$ et K_e peuvent être négligés aunumérateur ; de même $\frac{K_{a2}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \ll 1.$

$$P_{\text{CO}_2} = \frac{\alpha [\text{Na}^+] [\text{H}_3\text{O}^+]}{K_{a1}}.$$

Lorsque l'hydrogénocarbonate de sodium est absent de la solution (3) :

$$P_{\text{CO}_2} = \frac{\alpha [\text{H}_3\text{O}^+]^2}{K_{a1}}.$$

4.3.

$$S = \frac{|\Delta \text{pH}|}{|\Delta (\lg P_{\text{CO}_2})|}$$

$$S_1 = 1 \quad S_2 = \frac{1}{2}.$$

La sensibilité du capteur est doublée lors de l'introduction d'hydrogencarbonate de sodium dans la solution (3).

4.4. Le capteur n'est pas spécifique de CO_2 : il sera sensible à la présence de tout gaz susceptible de traverser (4) et possédant des propriétés acidobasiques en solution.

M.-P. PILENI, J. SARRAZIN,
M. SOULIVET, A. TSCHUDY.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. O'M BOCKRIS, A.-K.-N. REDDY. — *Modern Electrochemistry*, 1970, Plenum press t. 1.
 - [2] G.-A. RECHNITZ. — *J. chem. Ed.*, 1983, 60, 282.
 - [3] C. GAVACH. — *Bull. Soc. chim., Fr.*, 1971, 3395.
 - [4] *Ion selective electrodes*, ed. R.-A. Durst, National Bureau of standards, Special publication 314, Washington, D.C., 1969.
 - [5] G. EISENMAN. — *Glass electrodes for Hydrogen and Other Cations*, Marcel Dekker, Inc, New York, 1967.
 - [6] KORYTA. — *Ion selective electrodes*, Cambridge. Monographs in physical chemistry, Cambridge University Press 1975.
 - [7] M.-M. EMARA, N.-A. FARID, C.-J. LIN. — *J. chem. Ed.*, 1979, 56, 621.
 - [8] K. SRINIVASAN, G.-A. RECHNITZ. — *Anal. chem.*, 1968, 40, 509.
 - [9] K. SRINIVASAN, G.-A. RECHNITZ. — *Anal. chem.*, 1968, 40, 1818.
 - [10] H. FREISER. — *Ion selective Electrodes in Analytical chemistry*, Plenum press New York, 1978, t. 1.
 - [11] N. LAKSHMIRANAYANAIAH. — *Membrane Electrodes*, Academic Press, New York, 1976.
-

Agrégation

SESSION DE 1985

Option physique appliquée

Epreuve C

PROBLEME D'ELECTRICITE, D'ELECTRONIQUE. D'ELECTROTECHNIQUE ET D'AUTOMATIQUE

(Durée : 6 heures)

MATÉRIEL A FOURNIR :

1 feuille de papier millimétré à échelles semi-logarithmiques.

Ce problème comporte trois parties indépendantes :

- la partie I étudie un échantillonneur bloqueur ;*
- la partie II comprend deux sous-parties largement indépendantes, consacrées à l'étude de deux principes de conversion analogique numérique ;*
- la partie III compare différents procédés de transmission numérique d'un signal.*

Une annexe contient quelques rappels sur le fonctionnement des circuits logiques utilisés dans la partie II.A.

Première partie

La fig. 1 représente un échantillonneur bloqueur idéal. $v_E(t)$ et $v_{SI}(t)$ sont des tensions analogiques, K est une variable logique de commande.

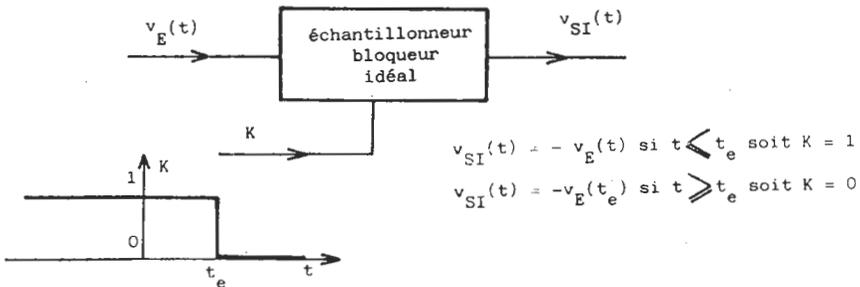


Fig. 1

La fig. 2 représente l'échantillonneur bloqueur réel étudié, construit autour d'un amplificateur opérationnel de tension de sortie $v_S(t)$.

Dans toute la partie I on appellera erreur $e(t)$ le signal :

$$e(t) = v_S(t) - v_{SI}(t).$$

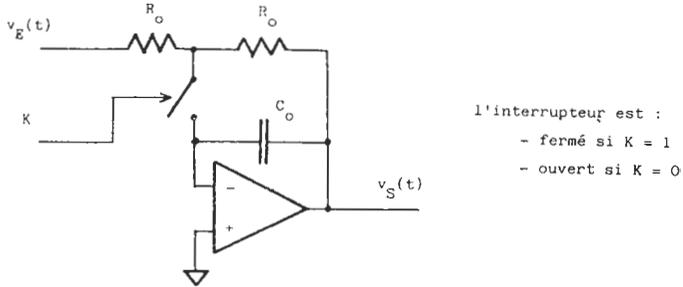


Fig. 2

Dans toute la suite, la commande logique K suit la loi de variation représentée sur la fig. 3.

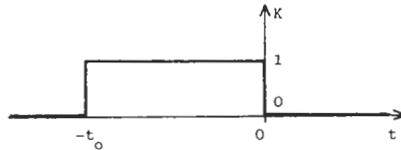


Fig. 3

A partir de l'instant $t = 0$, un convertisseur analogique numérique convertit la tension $v_S(t)$ en un nombre binaire N de 8 bits. Ce convertisseur accepte en entrée des tensions de -5 volts à $+5$ volts.

On appelle q la différence de potentiel en entrée de ce convertisseur qui correspond à une unité du nombre binaire N .

I.1. Dans cette question, tous les éléments constituant l'échantillonneur bloqueur sont supposés parfaits. On désire avoir, à l'instant $t = 0$, une erreur $e(t)$ inférieure à $\frac{q}{4}$ en valeur absolue.

I.1.1. On suppose que $v_E(t) = -V_0$ constante et on pose $v_S(-t_0) = V_{TS}$.

Exprimer $v_S(t)$ pour $t = \geq -t_0$.

Quelle est la valeur minimale t_{ac} de t_0 qui satisfait la rela-

tion $|e(0)| \leq \frac{q}{4}$ dans le cas le plus défavorable où $|V_{TS} - V_0| = 10$ volts.

Cette valeur t_{ac} est appelée temps d'acquisition.

Application numérique : $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$, $C_0 = 300 \text{ pF}$.

I.1.2. On suppose $t_0 \gg t_{ac}$ de sorte que le régime transitoire soit terminé pour $t = 0$.

$$v_E(t) = E \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \varphi_0).$$

Le fonctionnement de l'échantillonneur bloqueur n'est satisfaisant que si la condition $2 \cdot \pi \cdot f \cdot R_0 \cdot C_0 \ll 1$ est vérifiée.

Justifier cette affirmation.

En déduire, en négligeant les infiniment petits du second ordre, la fréquence maximale f_m qui satisfait la relation $|e(0)| \leq \frac{q}{4}$.

Application numérique : $E = 4$ volts.

I.2. Dans cette question, tous les éléments autres que l'amplificateur opérationnel sont supposés parfaits.

On suppose que $t_0 \gg t_{ac}$ et que le signal d'entrée $v_E(t)$ est continu. La fig. 4 représente le modèle de l'amplificateur, dans lequel V_D et I_D sont les générateurs de tension et courant continus parfaits.

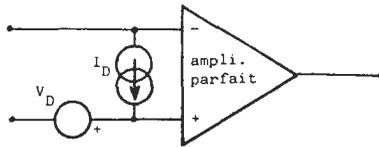


Fig. 4

I.2.1. Préciser ce que représentent I_D et V_D .

I.2.2. Calculer l'erreur $e(0)$.

Application numérique : $V_D = 5 \text{ mV}$, $I_D = 10 \text{ nA}$.

I.2.3. Exprimer $v_S(t)$ pour $t \geq 0$, à partir de $v_S(0)$.

Calculer la variation $\Delta v_S = v_S(t_c) - v_S(0)$ pendant la durée t_c de la conversion analogique numérique.

Application numérique : $t_c = 25 \mu\text{s}$.

I.2.4. Quels autres défauts de l'amplificateur opérationnel ont une action sur la précision du résultat de la conversion ?

Préciser leur influence.

I.3. Dans cette question, tous les éléments autres que l'interrupteur sont supposés parfaits. On considère un modèle simplifié de l'interrupteur constitué par :

- un condensateur C_i lorsque l'interrupteur est ouvert ;
- une résistance R_i en parallèle avec le condensateur C_i lorsque l'interrupteur est fermé.

I.3.1. En négligeant l'influence du condensateur C_i , calculer la nouvelle valeur t_{ac1} du temps d'acquisition tel qu'il a été défini dans la question I.1.1.

Application numérique : $R_i = 200 \Omega$.

I.3.2. On suppose que $t_0 \gg t_{ac1}$ et que $v_E(t) = -V_0$ est constante pour $t < 0$, mais peut varier ensuite. Expliquer pourquoi le condensateur C_i est déchargé à l'instant $t = 0$.

Montrer que $V_S(p)$, transformée de Laplace de $v_S(t)$, est la somme de deux termes que l'on exprimera, l'un fonction de V_0 , l'autre de $V_E(p)$, transformée de Laplace de $v_E(t)$.

I.3.3. Vérifier que l'erreur $e(t)$ est nulle si $v_E(t)$ reste égale à $-V_0$ pour $t \geq 0$.

I.3.4. On suppose que $v_E(t) = 0$ pour $t \geq 0$.

Exprimer $v_S(t)$ pour $t \geq 0$, et en déduire la limite de l'erreur $e(t) = v_S(t) - V_0$ lorsque t tend vers l'infini.

Application numérique : $C_i = 10 \text{ pF}$, $V_0 = 4 \text{ volts}$.

Deuxième partie

II.A. ETUDE D'UN CONVERTISSEUR ANALOGIQUE NUMÉRIQUE A DOUBLE RAMPE

La fig. 5 représente le schéma d'un convertisseur analogique numérique à double rampe.

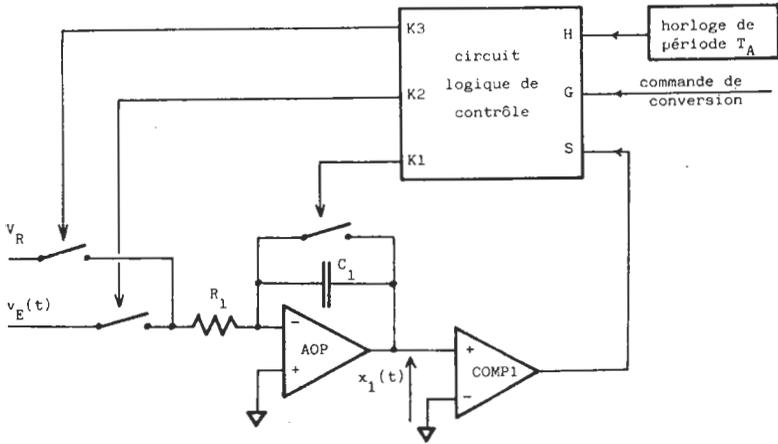


Fig. 5

Les signaux logiques K1, K2 et K3 commandent des interrupteurs parfaits. Un interrupteur est fermé si la variable logique associée vaut 1. AOP est un amplificateur opérationnel, COMP1 est un comparateur à hystérésis délivrant le signal logique S. Sa caractéristique S fonction de $x_1(t)$ est représentée fig. 6.

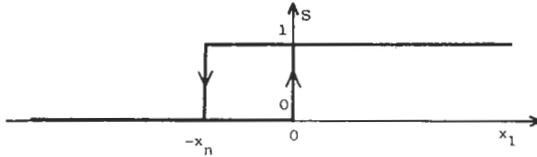


Fig. 6

Le générateur d'horloge délivre un signal logique carré de période $T_A \cdot V_R$ est une tension continue de référence négative égale à -10 volts. $v_E(t)$ est la tension positive à convertir. Le circuit logique de contrôle assure le fonctionnement représenté fig. 7.

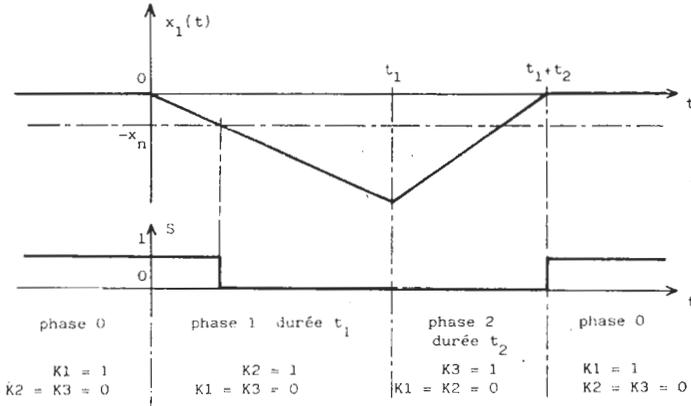


Fig. 7

La phase 1 a une durée fixée $t_1 = N_1 \cdot T_A$, N_1 étant un nombre entier. La phase 2 a une durée t_2 mesurée à l'aide d'un compteur délivrant le nombre entier N_2 . La durée mesurée est alors $N_2 \cdot T_A$.

II.A.1. On suppose que $v_E(t) = V_E$ continue positive.

En négligeant toute cause d'erreur de mesure sur t_2 , c'est-à-dire en posant $t_2 = N_2 \cdot T_A$, écrire la relation $N_2 = g_A(V_E)$ en supposant tous les éléments parfaits.

II.A.2. La fig. 8 représente le circuit logique de contrôle.

Une annexe, à la suite de l'énoncé, contient des rappels sur le fonctionnement des circuits logiques, ainsi que des précisions sur les notations employées ici.

Le compteur, le registre et les bascules sont synchrones, déclenchés sur les fronts montants de leurs horloges. Noter que le registre et la bascule D n° 3 ont un signal d'horloge en opposition de phase avec le signal d'horloge des autres circuits.

Les entrées RAZ de remise à zéro des bascules sont asynchrones et actives à l'état zéro.

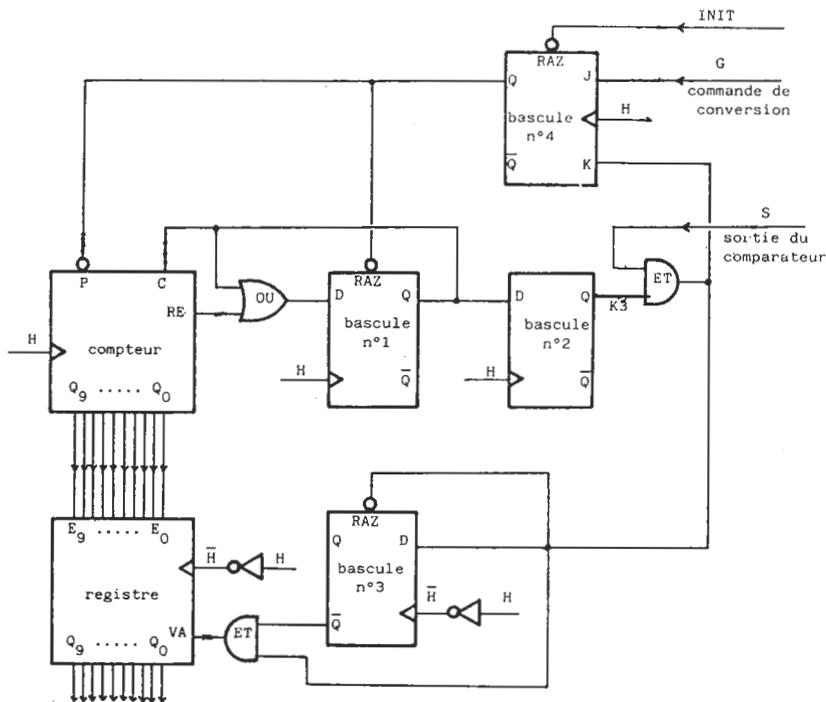


Fig. 8

On appelle état du compteur le nombre binaire N formé par ses sorties :

$$N = 2^9 \cdot Q_9 + 2^8 \cdot Q_8 + \dots + 2^2 \cdot Q_2 + 2 \cdot Q_1 + Q_0.$$

Le compteur peut fonctionner selon deux modes :

- si $C = 1$, N est augmenté de 1 à chaque front montant de l'horloge ;
la retenue $RE = 1$ pendant l'état 1023
($Q_9 = Q_8 = \dots = Q_0 = 1$)
- si $C = 0$, N est diminué de 1 à chaque front montant de l'horloge ;
la retenue $RE = 1$ pendant l'état zéro
($Q_9 = Q_8 = \dots = Q_0 = 0$).

La fig. 9 résume le fonctionnement du compteur. Noter que l'entrée C agit de façon asynchrone sur RE.

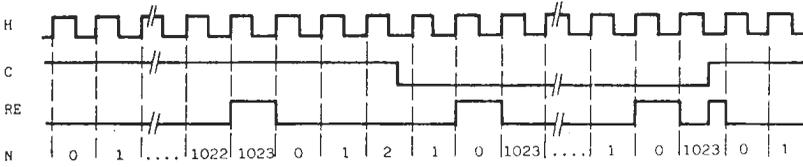


Fig. 9

L'entrée de prépositionnement P du compteur est synchrone, active au niveau zéro, et prioritaire sur le comptage : si $P = 0$ au moment du front montant de l'horloge, le compteur passe dans l'état 1023 quel que soit son état précédent et quelle que soit la valeur de C.

Le registre mémorise sur ses sorties Q_0 à Q_9 l'état de ses entrées E_0 à E_9 au moment du front montant de son horloge, si l'entrée de validation $VA = 1$. Si $VA = 0$, les sorties n'évoluent pas.

Un dispositif, non représenté, permet d'initialiser le système en mettant la variable INIT à zéro, comme indiqué sur la fig. 10.

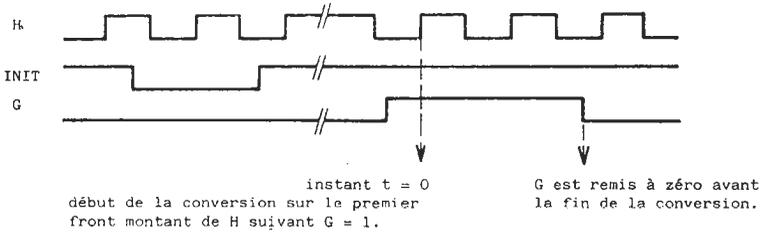


Fig. 10

II.A.2.1. Représenter sur un diagramme des temps l'évolution des signaux logiques P, C, RE, K3 (sortie de la bascule D n° 2) et VA en fonction de H, G, S et INIT.

On précisera sur ce diagramme la succession des états pris par le compteur, et on étudiera les deux cas indiqués sur la fig. 11.



Fig. 11

II.A.2.2. La sortie Q de la bascule D n° 2 est prise comme signal K3.

Ecrire l'équation logique de K2 permettant d'avoir t_1 , durée de la phase 1, égale à $1024 \cdot T_A$.

Ecrire l'équation logique de K1 pour que l'interrupteur associé à K1 soit fermé en dehors des phases 1 et 2.

II.A.2.3. A la fin de la conversion, on lit en sortie du registre le nombre N_2 :

$$N_2 = 2^9 \cdot Q_9 + \dots + 2 \cdot Q_1 + Q_0.$$

Quelle est alors l'incertitude sur la mesure de la durée t_2 ?

II.A.2.4. Soit q la différence de potentiel en entrée du convertisseur qui correspond à une unité du nombre N_2 . Calculer q .

Tracer l'allure de la courbe donnant N_2 en fonction de V_E pour V_E variant de zéro à + 10 volts.

II.A.3. Sur le schéma de la fig. 5, la tension $b(t)$ est superposée à la tension continue à convertir V_E :

$$v_E(t) = V_E + b(t)$$

$b(t)$ est un signal aléatoire stationnaire de densité spectrale de puissance $S_b(f)$.

On introduit la fonction aléatoire :

$$a(t) = \frac{1}{N_1 \cdot T_A} \int_{t-N_1 \cdot T_A}^t b(\tau) \cdot d\tau,$$

de densité spectrale de puissance $S_a(f)$.

II.A.3.1. En posant $t_2 = N_2 \cdot T_A$, montrer que $N_2 = g_A(V_E + e_b)$, g_A étant la fonction calculée au II.A.1 et e_b une variable aléatoire que l'on exprimera en fonction de $a(t)$.

II.A.3.2. Déterminer et représenter graphiquement la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre qui donnerait $a(t)$ en sortie à partir de $b(t)$ en entrée.

En déduire la fonction de transfert $H(p)$ de ce filtre.

II.A.3.3. On définit le taux de réjection du bruit du convertisseur en fonction de la fréquence par :

$$C_R(f) = 10 \cdot \log_{10} \frac{S_b(f)}{S_a(f)}.$$

Calculer $C_R(f)$ et tracer la courbe donnant $C_R(f)$ en fonction de $N_1 \cdot T_A \cdot f$ pour $f > 0$ en coordonnées semi-logarithmiques.

II.A.3.4. La fréquence de l'horloge est $f_A = \frac{1}{T_A} = 51\,200$ Hz.

Pour quelles fréquences le taux de réjection $C_R(f)$ est-il infini ?

Quel est l'intérêt de ce choix de f_A , et que faut-il penser de l'utilisation éventuelle d'un échantillonneur bloqueur en tête du convertisseur ?

II.A.4. A l'aide de la fig. 7, montrer que, pour avoir un fonctionnement correct, la largeur α_n de la fenêtre d'hystérésis du compara-

teur COMP1 doit être inférieure à une valeur que l'on calculera et que l'on commentera.

Application numérique : $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 200 \text{ nF}$.

II.A.5. On modélise l'amplificateur AOP de la fig. 5 selon le schéma de la fig. 4.

On posera $\alpha_1 = \frac{V_D}{V_R}$ et $\alpha_2 = \frac{R_1 \cdot I_D}{V_R}$ et on supposera que

$v_E(t) = V_E$ constante positive.

II.A.5.1. Calculer $x_1(t)$ pour $t \leq 0$, pour $0 \leq t \leq t_1$ et pour $t_1 \leq t \leq t_1 + t_2$.

En déduire la valeur de t_2 .

II.5.2. En posant $t_2 = N_2 \cdot T_A$, exprimer N_2 en fonction de $R_1, C_1, T_A, N_1, V_E, V_R, \alpha_1$ et α_2 .

II.A.5.3. En considérant α_1 et α_2 comme des infiniment petits, et en se limitant aux termes du premier ordre, montrer que N_2 se met sous la forme :

$$N_2 = g_A(V_E) + k_A(V_E, \alpha_1, \alpha_2)$$

g_A étant la fonction déterminée au II.A.1., et $k_A = 10$ volts, et conclure sur le nombre de chiffres significatifs de N_2 .

Application numérique : $V_D = 5 \text{ mV}$, $I_D = 10 \text{ nA}$.

II.A.5.4. Calculer cette erreur dans le cas le plus défavorable où $V_E = 10$ volts, et conclure sur le nombre de chiffres significatifs de N_2 .

II.A.5.5. Lorsque $V_E = 0$, quelle est l'influence du signe de l'expression $(V_D + R_1 \cdot I_D)$ sur le fonctionnement du convertisseur ?

II.B. ETUDE D'UN CONVERTISSEUR ANALOGIQUE NUMÉRIQUE A QUATRE RAMPES

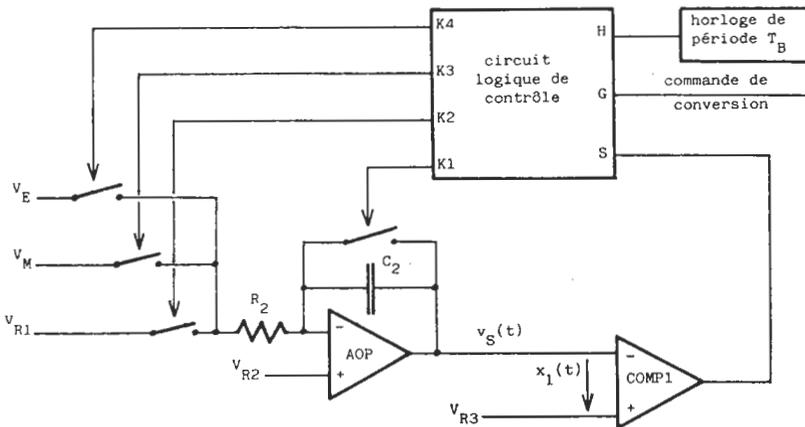


Fig. 12

La fig. 12 représente le schéma d'un convertisseur analogique numérique à quatre rampes.

Les signaux logiques K1, K2, K3 et K4 commandent des interrupteurs parfaits. Un interrupteur est fermé si la variable logique associée vaut 1.

V_E est la tension continue à convertir.

V_{R1} , V_{R2} et V_{R3} sont des tensions de référence positives vérifiant :

$$V_{R2} = \frac{V_{R1}}{2} \quad \text{et} \quad V_{R3} = \frac{V_{R1}}{4}$$

V_M est la tension de la masse analogique. Idéalement $V_M = 0$.

AOP est un amplificateur opérationnel de tension de sortie $v_S(t)$. COMP1 est un comparateur à hystérésis identique à celui de la fig. 5, commandé par la tension $x_1(t) = V_{R3} - v_S(t)$. Sa caractéristique S fonction de $x_1(t)$ est représentée sur la fig. 6.

La conversion comporte 6 phases, numérotées de 1 à 6, de durées respectives t_1 à t_6 . Le circuit logique de contrôle assure le fonctionnement représenté sur la fig. 13. Un seul interrupteur est fermé durant chaque phase, excepté durant la phase 6 pendant laquelle tous les interrupteurs sont ouverts.

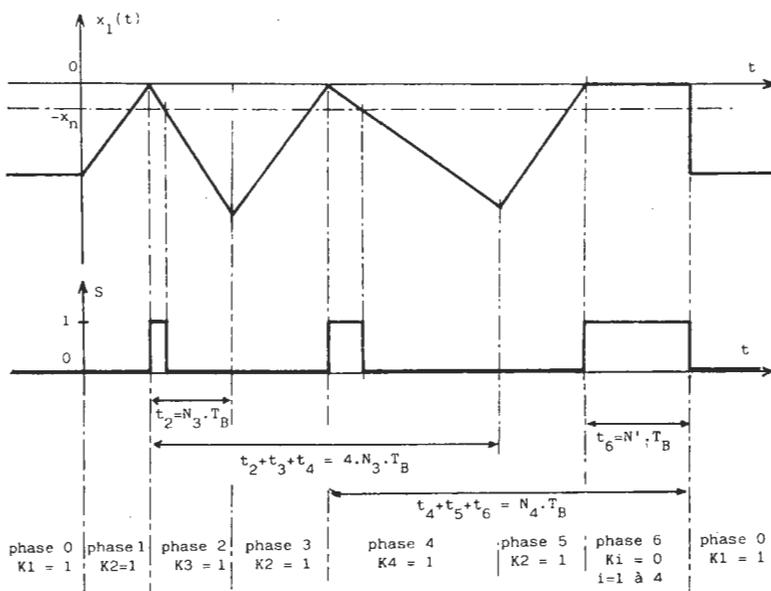


Fig. 13

Le début des phases 2, 4 et 6 est provoqué par un front montant sur S, signalant que $x_1(t)$ s'est annulée.

Trois compteurs sont utilisés pour contrôler la fin des phases 2, 4 et 6 en assurant :

$$t_2 = N_3 \cdot T_B, \quad t_2 + t_3 + t_4 = 4 \cdot N_3 \cdot T_B, \quad t_4 + t_5 + t_6 = N_4 \cdot T_B$$

T_B étant la période du signal d'horloge, N_3 et N_4 des constantes entières. Un quatrième compteur mesure la durée t_6 et fournit un nombre N' . La durée mesurée est donc $N' \cdot T_B$.

Le résultat de la conversion est le nombre $N =$ partie entière de $\frac{N'}{2}$.

II.B.1. On suppose l'amplificateur parfait et $V_M = 0$.

II.B.1.1. Calculer t_3 et t_4 en fonction de $N_3 \cdot T_B$.

II.B.1.2. En déduire la valeur de t_5 .

II.B.1.3. En négligeant l'erreur de mesure sur t_6 , c'est-à-dire en posant $t_6 = 2 \cdot N \cdot T_B$, exprimer $N = g_B(V_E)$, g_B étant une fonction faisant intervenir N_3 , N_4 et V_{R1} .

II.B.2. On impose $N_3 = 544$.

La tension continue V_E est comprise entre -5 volts et $+5$ volts. On désire que N soit un nombre binaire de 10 bits, représentant V_E en code binaire décalé, c'est-à-dire avec $N = 0$ pour $V_E = -5$ volts et $N = 512$ pour $V_E = 0$.

II.B.2.1. Calculer N_4 et V_{R1} .

II.B.2.2. Représenter sur un même schéma $x_1(t)$ en fonction de t pendant les phases 4, 5 et 6 pour $V_E = 0$, $V_E = -4$ volts et $V_E = +4$ volts.

On précisera sur ce schéma les durées des phases.

Application numérique : $f_B = \frac{1}{T_B} = 54\,400$ Hz.

II.B.3. On modélise l'amplificateur selon le schéma de la fig. 14.

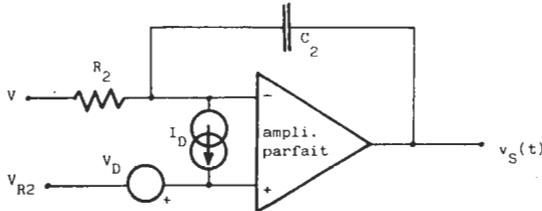


Fig. 14

La tension V est égale à l'une des trois tensions V_E , V_M ou V_{R_1} selon la phase en cours.

V_D et I_D sont des générateurs de tension et courant continus parfaits.

Calculer $v_S(t)$ en fonction de V et montrer que, quelle que soit la phase en cours, l'imperfection de l'amplificateur modélisée par V_D et I_D est équivalente à l'introduction d'une erreur sur V_{R_2} , c'est-à-dire revient à remplacer V_{R_2} par :

$$V'_{R_2} = \frac{V_{R_1}}{2} \cdot (1 + \alpha_B).$$

Calculer α_B .

Application numérique : $V_D = 5$ mV, $I_D = 10$ nA, $R_2 = 100$ k Ω .

II.B.4. Dans cette question, on tiendra compte des défauts de l'amplificateur en remplaçant V_{R_2} par V'_{R_2} calculée à la question précédente.

On supposera de plus que les imperfections du montage rendent V_M légèrement différente de zéro.

$$\text{On posera } \epsilon_B = \frac{V_M}{V_{R_1}} \text{ et } t_3 = (N_3 + n) \cdot T_B.$$

II.B.4.1. Exprimer n en fonction de α_B , ϵ_B et de N_3 .

II.B.4.2. En posant $t_6 = 2 \cdot N \cdot T_B$, exprimer N en fonction de N_3 , N_4 , V_E , V_{R_1} , α_B et ϵ_B .

II.B.4.3. En considérant α_B et ϵ_B comme des infiniment petits et en se limitant aux termes du second ordre, montrer que :

$$N = g_B(V_E) + k_B(V_E, \alpha_B, \epsilon_B)$$

g_B étant la fonction calculée au II.B.1.3. et k_B une fonction représentant l'erreur sur N .

II.B.4.4. Calculer l'erreur sur N en supposant V_M rigoureusement nulle, dans le cas le plus défavorable où $V_E = -5$ volts.

Comparer ce résultat avec celui trouvé dans la question II.A.5.4.

II.B.4.5. Quelle est la valeur maximale tolérable pour V_M , en supposant $\alpha_B = 0$, si l'erreur sur N doit rester inférieure à 0,5 lorsque $V_E = -5$ volts ?

II.B.5. Dans cette question, l'amplificateur est de nouveau supposé parfait et la tension V_M rigoureusement nulle.

On suppose que le déclenchement des compteurs et la fermeture des interrupteurs sont simultanés, et qu'ils ne peuvent se produire que sur un front d'horloge. Les durées t_1 à t_6 sont alors des multiples entiers de T_B . De ce fait, les durées des phases 3, 4, 5 et 6 diffèrent des valeurs idéales.

On appelle t'_3 , t'_5 et t'_6 les durées idéales qu'il faudrait mesurer et on pose :

$$t'_3 = t_3 + \varphi \cdot T_B, \quad t'_5 = t_5 + \vartheta \cdot T_B, \quad t'_6 = t_6 + \delta \cdot T_B$$

φ , ϑ et δ étant des nombres réels représentant l'erreur de mesure.

On admettra que les erreurs de mesure sur t'_3 et t'_5 sont négatives et inférieures à une période d'horloge en valeur absolue.

On a donc :

$$-1 \leq \varphi \leq 0 \quad \text{et} \quad -1 \leq \vartheta \leq 0.$$

II.B.5.1. Exprimer δ en fonction de ϑ et de φ et en déduire l'incertitude sur la mesure de t'_6 lorsqu'on prend $t_6 = N' \cdot T_B$.

II.B.5.2. Représenter graphiquement $N =$ partie entière de $\frac{N'}{2}$ en fonction de t'_6 en tenant compte de l'incertitude sur la mesure.

En déduire qu'il y a une incertitude sur les valeurs de V_E correspondant aux transitions entre deux valeurs consécutives de N .

Comparer cette incertitude à la valeur q de la différence de potentiel en entrée du convertisseur qui correspond à une unité du nombre N dans un fonctionnement idéal.

II.B.5.3. On pourrait penser que prendre comme résultat N' au lieu de N permet d'augmenter la résolution du convertisseur.

Montrer que, dans ce cas, il peut y avoir des codes absents en sortie.

Troisième partie

On désire transmettre un signal $y_A(t)$. Pour cela, on l'échantillonne à la fréquence f_e et on transmet sous forme numérique la suite

des échantillons $y(n) = y_A\left(\frac{n}{f_e}\right)$.

On admettra que tous les signaux envisagés dans cette partie sont des signaux aléatoires stationnaires, de valeurs moyennes nulles.

On notera par E les espérances mathématiques, par σ^2 les variances, par C les fonctions d'autocorrélation.

Exemple : si $p(y_A)$ est la densité de probabilité de $y_A(t)$:

$$\sigma_{y_A}^2 = E[y_A^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} y_A^2(t) \cdot p(y_A) \cdot dy_A \text{ est sa variance ;}$$

$Cy_A(t) = E[y_A(\tau) \cdot y_A(\tau + t)]$ est sa fonction d'autocorrélation.

On admettra que les propriétés statistiques de $y_A(t)$ et de $y(n)$ sont identiques. Cela signifie en particulier que :

$$Cy(p) = E[y(n) \cdot y(n+p)] = Cy_A\left(\frac{p}{f_e}\right) = E\left[\left(y_A(\tau) \cdot y_A\left(\tau + \frac{p}{f_e}\right)\right)\right]$$

On admettra de plus que, de façon significative, tout signal de variance σ^2 a une amplitude toujours inférieure à $4 \cdot \sigma$.

III.1. $y_A(t)$ possède une densité spectrale de puissance $Sy_A(f)$ représentée sur la fig. 15. Cette densité spectrale de puissance est nulle pour les fréquences supérieures à $F = 4 \cdot \sigma$.

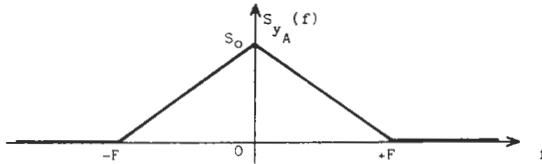


Fig. 15

En remarquant qu'un triangle est obtenu par convolution d'un rectangle avec lui-même, calculer la fonction d'autocorrélation $Cy_A(t)$. On rappelle que celle-ci est la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale de puissance $Sy_A(f)$:

$$Cy_A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Sy_A(f) \cdot e^{i2\pi ft} \cdot df.$$

Les convertisseurs analogiques numériques utilisés dans les questions III.2. et III.3. ont une dynamique d'entrée fixe de $-V_c$ à $+V_c$. On appellera n_b le nombre de bits du nombre N qu'ils délivrent en sortie et q la différence de potentiel en entrée qui correspond à une unité du nombre binaire N .

III.2. Le premier procédé de transmission étudié, représenté fig. 16, est appelé modulation par impulsions codées.

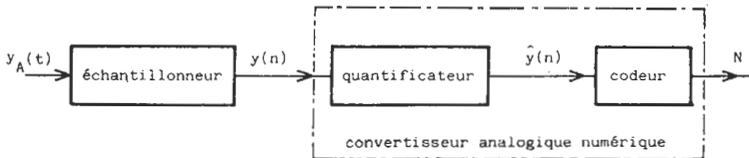


Fig. 16

Les échantillons $y(n)$ sont convertis en nombres binaires N . Ces nombres sont alors transmis sous forme série. On considère que le convertisseur est constitué de deux blocs :

- un quantificateur qui fournit $\hat{y}(n)$;
- un codeur qui fournit N à partir de $\hat{y}(n)$.

$\hat{y}(n)$ est la tension analogique qui serait restituée par un convertisseur numérique analogique à partir du nombre N .

Ces deux blocs sont bien sûr indissociables physiquement.

L'erreur de quantification est $e(n) = \hat{y}(n) - y(n)$. On considère cette erreur comme un bruit ajouté au signal $y(n)$, et on définit le rapport signal sur bruit en puissance par :

$$S/B = 10 \cdot \log_{10} \frac{\sigma_y^2}{\sigma_e^2}$$

On admettra que $\sigma_e^2 = \frac{q^2}{12}$ si on ne dépasse pas la dynamique d'entrée du convertisseur.

III.2.1. On désire un rapport signal sur bruit maximal de 40 dB, en ne dépassant pas la dynamique d'entrée du convertisseur.

Calculer la valeur de n_b nécessaire, et en déduire le nombre minimal de bits à transmettre par seconde pour que $y_A(t)$ puisse être reconstitué à la réception.

III.2.2. Pour quelle valeur $S_0 = S_{y_A}(0)$ obtient-on le rapport signal sur bruit maximal ?

Application numérique : $V_c = 5$ volts.

III.3. Le second procédé de transmission étudié, représenté fig. 17, est appelé modulation différentielle par impulsions codées.

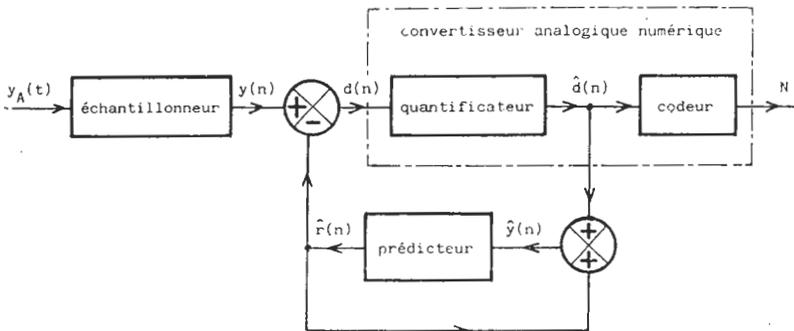


Fig. 17

Ce procédé fait appel à un prédicteur qui calcule une valeur estimée $\hat{r}(n)$ de $y(n)$ à partir des $\hat{y}(n)$ précédents [par exemple en calculant $\hat{r}(n) = a_1 \cdot \hat{y}(n-1) + a_2 \cdot \hat{y}(n-2) + \dots + a_p \cdot \hat{y}(n-p)$].

On convertit alors la différence $d(n) = y(n) - \hat{r}(n)$, et on transmet le nombre N obtenu.

Le quantificateur introduit une erreur $e_1(n) = \hat{d}(n) - d(n)$.

III.3.1. Calculer l'erreur $e(n) = \hat{y}(n) - y(n)$.

III.3.2. En utilisant le même prédicteur qu'à l'émission, faire le schéma du récepteur permettant de restituer $\hat{y}(n)$ à partir de N .

III.3.3. Le rapport signal sur bruit du convertisseur est :

$$S/B = 10 \cdot \log_{10} \frac{\sigma_d^2}{\sigma_{e_1}^2} \text{ dans lequel } \sigma_d^2 \text{ est la variance de } d(n), \text{ et}$$

$$\sigma_{e_1}^2 = \frac{q^2}{12} \text{ si on ne dépasse pas la dynamique d'entrée.}$$

Le rapport signal sur bruit de l'émetteur est :

$$10 \cdot \log_{10} \frac{\sigma_y^2}{\sigma_e^2}.$$

On pose $G = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_e^2}$. G est donc d'autant plus grand que la prédiction est bonne.

Montrer que le rapport signal sur bruit maximal possible de l'émetteur, en ne dépassant pas la dynamique d'entrée du convertisseur, ne dépend que de G et de n_b selon une relation que l'on exprimera.

III.3.4. On supposera que : $E[e(n) \cdot y(m)] = 0$ quels que soient n et m et que : $E[e(n) \cdot e(m)] = 0$ si $n \neq m$.

Le prédicteur est défini par $\hat{r}(n) = a_1 \cdot y(n-1)$.

III.3.4.1. En écrivant que $\sigma_d^2 = E[d^2(n)]$, exprimer σ_d^2 en fonction de σ_y^2 , a_1 , σ_e^2 et $Cy_A\left(\frac{1}{f_e}\right)$.

A convertisseur et signal $y_A(t)$ donnés, calculer la valeur de a_1 qui rend σ_d^2 minimale. Simplifier cette expression en supposant $\sigma_e^2 \ll \sigma_y^2$ et en déduire la valeur de G associée.

III.3.4.2. $f_e = 2 \cdot F$.

Calculer l'amélioration du rapport signal sur bruit maximal possible de l'émetteur par rapport au procédé de la question III.2., à convertisseur identique.

Pour quelle valeur $S_0 = Sy_A(0)$ obtient-on ce rapport maximal ?

III.3.4.3. $n_b = 7$.

Calculer approximativement la fréquence d'échantillonnage f_e nécessaire pour avoir un rapport signal sur bruit maximal de l'émetteur de 40 dB.

Comparer le nombre de bits à transmettre par seconde avec celui trouvé dans la question III.2.1.

III.3.4.4. La question précédente montre que, à rapport signal sur bruit de quantification donné, le prédicteur utilisé ici est trop sommaire pour diminuer le nombre de bits à transmettre par seconde, par rapport à la méthode de la question III.2. On peut penser qu'une telle diminution serait possible à l'aide d'un prédicteur plus complexe.

Quel est, à votre avis, l'intérêt de cette diminution ?

III.4. Un cas particulier du procédé de la fig. 17 constitue la modulation delta, en prenant :

- un prédicteur $\hat{r}(n) = \hat{y}(n-1)$;
- un quantificateur à deux niveaux $\hat{d}(n) = +\Delta$ si $d(n) \geq 0$;
 $\hat{d}(n) = -\Delta$ si $d(n) < 0$.

On peut alors coder $\hat{d}(n)$ avec un seul bit.

Les résultats de la question III.3.4. ne sont pas valables pour la modulation delta, les hypothèses faites pour cette question n'étant pas vérifiées dans ce cas.

Les questions ci-après supposent que la dérivée de $y_A(t)$ existe en moyenne quadratique.

III.4.1. Calculer la variance $\sigma_{y'_A}^2$ de la dérivée $y'_A(t)$ de $y_A(t)$ en fonction de S_0 et de F . On pourra pour cela chercher une relation liant les densités spectrales de puissance de $y_A(t)$ et de $y'_A(t)$.

III.4.2. La modulation delta introduit, outre l'erreur de quantification, une distorsion lorsque $y'_A(t)$ est trop grande en valeur absolue.

Calculer la fréquence minimale d'échantillonnage donnant un rapport signal sur bruit de l'émetteur de 40 dB, en l'absence de la distorsion signalée précédemment. On admettra que, dans ce cas,

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{3}. \text{ Comparer alors le nombre de bits transmis par seconde}$$

avec celui trouvé dans la question III.2.1. Ce résultat, en défaveur de la modulation delta, est en fait contrebalancé par la simplicité de sa mise en œuvre.

ANNEXE

FONCTIONNEMENT DES CIRCUITS LOGIQUES

1° COMMANDES SYNCHRONES ET COMMANDES ASYNCHRONES.

Les sorties des circuits logiques synchrones (bascules, compteurs, registres) ne peuvent évoluer qu'aux instants suivant les fronts actifs de leurs horloges. (Dans ce problème, ce sont les fronts montants.)

L'état pris par une sortie après un front actif d'horloge est fonction de l'état des entrées à l'instant de ce front. Ceci impose aux entrées de ne pas évoluer pendant un court intervalle de temps t_g autour du front. Ces relations entrées/sorties sont appelées « commandes synchrones ».

Les circuits réels présentent un temps de propagation t_p entre l'instant du front d'horloge et celui du basculement des sorties. Ceci permet de les monter en cascade, comme dans l'exemple ci-après, tout en satisfaisant la condition imposée aux entrées.

On a coutume, pour simplifier les diagrammes, de ne pas faire figurer ces temps. On raisonne alors en considérant l'état des entrées à un instant immédiatement avant le front d'horloge.

On négligera totalement dans ce problème l'existence de t_p et t_g ; on pourra donc considérer que les entrées sont prises en compte et que les sorties évoluent à l'instant du front d'horloge.

Exemple :

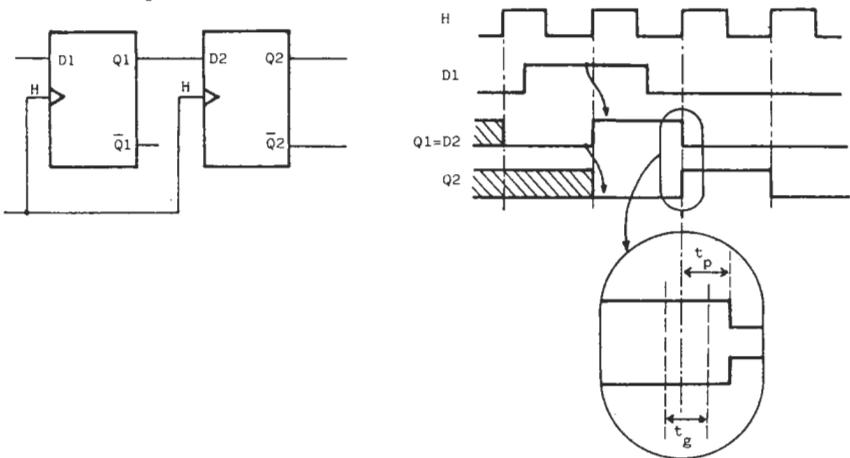


Fig. 18

La valeur présente sur l'entrée D1 ne doit pas évoluer pendant t_g autour de chaque front d'horloge, sinon l'état de la sortie Q1 n'est pas prévisible.

Certains circuits possèdent également des commandes dites « asynchrones ». C'est le cas dans ce problème des entrées RAZ de remise à zéro des bascules. Ce qui précède reste vrai tant que ces entrées sont inactives (niveau logique sur le fil RAZ = 1). Mais dès que RAZ devient active (RAZ = 0), les sorties associées deviennent $Q = 0$ et $\bar{Q} = 1$, sans attendre de front d'horloge. Cet état persiste tant que RAZ = 0, quel que soit l'état des entrées synchrones.

2° NOTATIONS.

Un rond placé devant une entrée signifie que celle-ci est active au niveau zéro, l'absence de rond qu'elle est active au niveau 1. La lettre associée à l'entrée désigne le niveau logique sur le fil.

exemple :

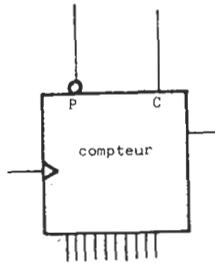


Fig. 19

P et C représentent les niveaux logiques sur les fils.

Le rond indique que P est une entrée active au niveau zéro, c'est-à-dire que le prépositionnement du compteur a lieu si $P = 0$ à l'instant du front actif d'horloge.

Au contraire, l'entrée C (comptage) est active au niveau 1 : si $C = 1$ à l'instant du front actif d'horloge le compteur compte, si $C = 0$, il décompte.

3° TABLES DE VÉRITÉ DES BASCULES D ET JK.

D, J et K représentent l'état des entrées à l'instant du front actif d'horloge.

Q^* et \bar{Q}^* sont les états des sorties avant ce front.

Q et \bar{Q} sont les états des sorties après ce front.

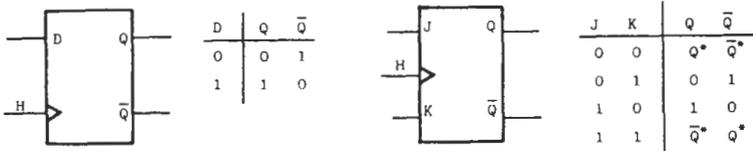


Fig. 20

SOLUTION

Première partie

I.1.

$$\text{I.1.1. } N = 2^8 = 256; \quad q = \frac{10}{256} \approx 40 \text{ mV}; \quad \frac{q}{4} \approx 10 \text{ mV}.$$

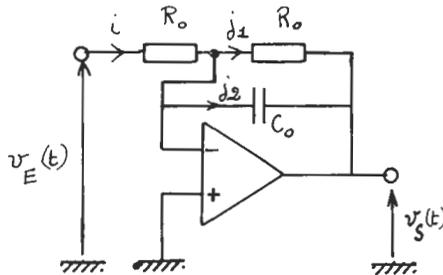


Fig. 1

Pour $-t_0 \leq t \leq 0$, on peut écrire, selon la fig. 1, $i = -\frac{V_0}{R_0}$;

$$j_2 = -C_0 \frac{dv_s}{dt}; \quad j_1 = -\frac{v_s}{R_0} \text{ et donc } R_0 C_0 \frac{dv_s}{dt} + v_s = V_0.$$

$$v_s(t) = V_0 + (V_{TS} - V_0) \cdot e^{-(t + t_0/\tau_0)}, \text{ avec } \tau_0 = R_0 C_0.$$

Dans le cas le plus défavorable où $|V_{TS} - V_0| = 10 \text{ V}$, il faut que le terme exponentiel soit devenu inférieur à 10 mV, ce qui suppose $t_{ac} = 6,9 \tau_0$.

Application numérique : $\tau_0 = 0,3 \mu\text{s}; \quad t_{ac} \approx 2,1 \mu\text{s}.$

$$\text{I.1.2. } v_s + R_0 C_0 \frac{dv_s}{dt} = -v_E(t). \text{ Lorsque le régime tran-}$$

sitoire est terminé, $v_s(t) = -\frac{E \cdot \sin(2\pi f t + \varphi_0 - \varphi)}{\sqrt{1 + R_0^2 C_0^2 \omega^2}}$ avec $\text{tg } \varphi = R_0 C_0 \omega$.

Or l'échantillonneur bloqueur idéal est tel que :

$$v_{s1}(t) = -E \cdot \sin(2\pi f t + \varphi_0).$$

En supposant ω assez faible pour que l'erreur $e(t)$ soit petite, on voit que le terme $(R_0 C_0 \omega)^2$ du dénominateur n'apporte qu'une contribution du second ordre en ω . On a donc sensiblement $e(t) = -E \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot \varphi$, avec $\varphi \simeq R_0 C_0 \omega$ (fig. 2)

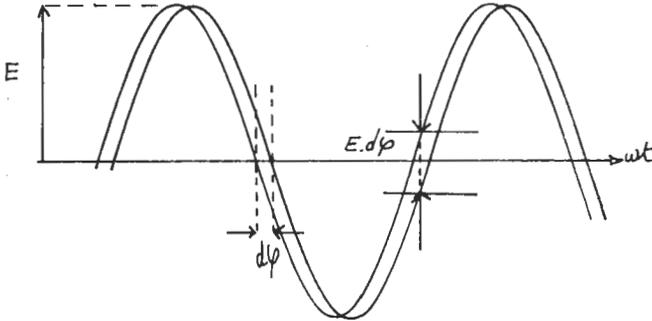


Fig. 2

$|e|_{max} = E \cdot R_0 C_0 \omega$; il est donc bien nécessaire que la condition $R_0 \cdot C_0 \cdot \omega \ll 1$ pour que la condition $|e(0)|_{max} \leq \frac{q}{4}$ soit vérifiée.

Application numérique : $R_0 C_0 \omega \leq \frac{q}{4E}$, soit $\omega \leq \frac{10^{-2}}{4 \tau_0}$
 ou encore $f_m = 1,33$ kHz.

I.2.

I.2.1. I_D , intensité du courant de décalage d'entrée (input offset current) représente la différence des courants de polarisation des entrées différentielles. V_D est la tension de décalage ramenée à l'entrée (input offset voltage).

I.2.2. Pour $t = 0$, le condensateur est chargé; il n'est « traversé » par aucun courant. On peut ignorer sa présence.

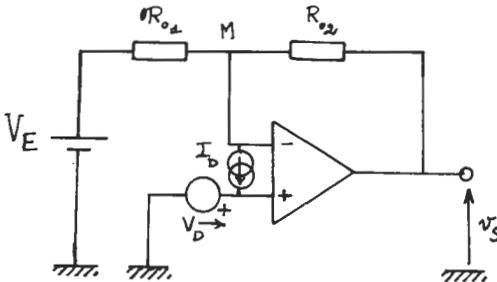


Fig. 3

Le potentiel du point M (fig. 3) est V_D ; l'intensité traversant

$$R_{02} \text{ vaut } \frac{V_E - V_D}{R_{01}} - I_D, \text{ donc } v_S(0) = V_D - V_E + V_D + R_0 I_D$$

puisque $R_{01} = R_{02}$.

On a donc :

$$v_S(0) = -V_E + 2V_D + R_0 I_D, \text{ donc } e(0) = 2V_D + R_0 I_D.$$

Application numérique :

$$e(0) = 10 \text{ mV} \text{ car } R_0 I_D = 10^{-5} \text{ V} = \frac{10 \text{ mV}}{10^3}.$$

I.2.3. A partir de $t = 0$, l'intensité I_d provoque une varia-

tion de la tension v_S telle que $\frac{dv_S}{dt} = \frac{I_D}{C_0}$, soit :

$$v_S(t) = -V_E + 2V_D + R_0 I_D + \frac{I_D}{C_0} t.$$

$$\Delta v_S = \frac{I_D \cdot t_c}{C_0}.$$

Application numérique : $\Delta v_S = 0,83 \text{ mV}$.

I.2.4. Les paramètres précédents (I_D, V_D) varient avec la température. Généralement, I_D augmente avec elle.

Il y a également des sources de bruit, notamment à très basse fréquence. Les résistances d'entrée, elles, n'interviennent pas beaucoup dans un tel montage.

I.3.

I.3.1. L'examen de la fig. 4 conduit aux équations suivantes :

$$v_M = \frac{v_S + V_E}{2 + R_0/R_i}; \quad i = \frac{v_S + V_E}{2R_i + R_0} = -C_0 \frac{dv_S}{dt}.$$

$$v_S + (R_0 + 2R_i) \frac{dv_S}{dt} = -V_E.$$

$$\tau_{01} = (R_0 + 2R_i) \cdot C_0 = 0,42 \mu\text{s}; \quad t_{ac1} = 2,9 \mu\text{s}.$$

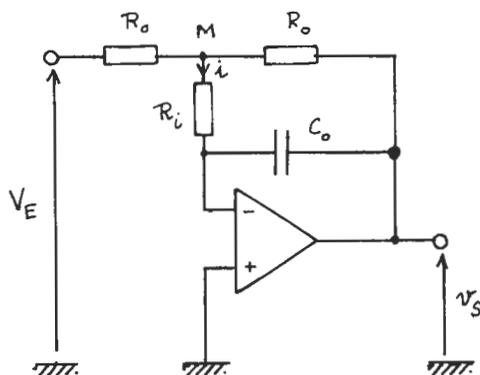


Fig. 4

I.3.2. En régime permanent : $v_S = -V_E = V_0$, donc l'expression de v_M , établie précédemment, montre que cette tension est nulle (fig. 5).

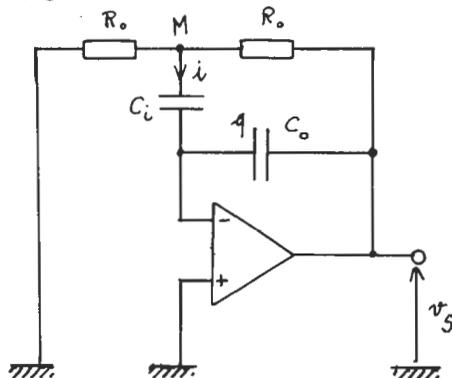


Fig. 5

C'est la tension sous laquelle est chargé C_i qui est donc déchargé à l'instant $t = 0$.

$$V_M(p) = \mathcal{L} v_M(t); \quad v_M(0) = 0 \quad \text{donc} : \mathcal{L} \left(\frac{dv_M}{dt} \right) = p \cdot V_M(p).$$

$$V_S(p) = \mathcal{L} v_S(t); \quad v_S(0) = V_0 \quad \text{donc} : \mathcal{L} \left(\frac{dv_S}{dt} \right) = p \cdot V_S(p) - V_0.$$

Donc (fig. 5) $C_i p V_M = C_o p V_S - C_o V_0$, traduit le fait que c'est le même courant qui traverse C_o et C_i .

Par ailleurs, $V_M(p) = \frac{V_E + V_S(p)}{2 + R_0 C_i p}$.

On en déduit l'équation demandée :

$$V_S(p) = -V_E \cdot \frac{C_i}{2 C_0 + C_i + R C_0 C_i p} + \dots$$

$$\dots \frac{V_0}{p} \cdot \frac{C_0(2 + R_0 C_i p)}{2 C_0 + C_i + R C_0 C_i p}$$

I.3.3. Si $V_E(p) = -\frac{V_0}{p}$, $V_S(p) = \frac{V_0}{p}$, $v_S(t) = V_0$

et l'erreur reste nulle pour $t \geq 0$.

I.3.4. $V_S(p) = \frac{V_0}{p} \cdot \frac{C_0(2 + R_0 C_i p)}{2 C_0 + C_i + R C_0 C_i p} = \dots$

$$\dots \frac{V_0}{p} \cdot \frac{2 C_0}{2 C_0 + C_i} + \frac{V_0}{(p + 1/\tau)(1 + 2 C_0/C_i)}$$

avec :

$$\tau = \frac{R_0 C_i}{2 + C_i/C_0}$$

On en déduit l'expression de :

$$V_S(t) = \frac{V_0}{1 + C_i/2 C_0} + \frac{V_0}{1 + 2 C_0/C_i} e^{-t/\tau}$$

Lorsque t tend vers l'infini,

$$e(\infty) = V_S(\infty) - V_0 = -\frac{V_0}{1 + 2 C_0/C_i}$$

Application numérique : $e(\infty) = \frac{4}{1 + 60} = 66 \text{ mV}$.

Remarque :

Ce dernier résultat, qui apparaît comme l'aboutissement d'un calcul faisant intervenir la transformation de Laplace, avec prise en compte des valeurs initiales $v_M(0)$ et $v_S(0)$, peut, en fait, être retrouvé de manière plus « physique ».

La fig. 5 montre en effet que lorsque C_i et C_0 sont chargés, le potentiel de M, V_M , est égal à $\frac{V_S}{2}$. La charge de C_i est donc

passée de 0 à $\frac{C_i V_S}{2}$.

Cette charge a également transité par C_0 , si bien que V_S est passé de V_0 à V_S tel que $C_0(V_0 - V_S) = \frac{C_i V_S}{2}$, d'où :

$$V_S(\infty) = \frac{V_0}{1 + C_i/2 C_0}$$

On peut également trouver la loi d'évolution de la tension $V_S(t)$ en notant que la capacité C_i est alimentée par un générateur de Thévenin de f.é.m. $\frac{V_S}{2}$ et de résistance interne $\frac{R_0}{2}$ (fig. 6).

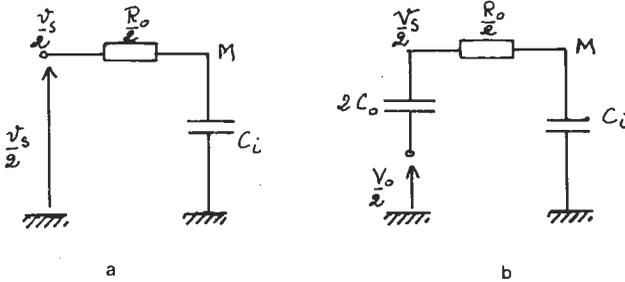


Fig. 6

Or : $V_S = V_0 - \frac{\delta q}{C_0}$ et donc $\frac{V_S}{2} = \frac{V_0}{2} - \frac{\delta q}{2 C_0}$.

La fig. 6, qui traduit ces équations, montre que le régime transitoire affectant l'intensité i , la tension $V_S(t)$, etc., s'effectue avec la constante de temps :

$$\tau = \frac{R_0}{2} \times \frac{2 C_0 \cdot C_i}{2 C_0 + C_i} = \frac{R_0 C_i}{2 + C_i/C_0}$$

C'est bien ce que le calcul symbolique nous avait appris.

Deuxième partie

II.A. ETUDE D'UN CONVERTISSEUR ANALOGIQUE NUMÉRIQUE A DOUBLE RAMPE

II.A.1. A partir de l'instant $t = 0$, le schéma à prendre en compte est celui de la fig. 7, avec $x_1(0) = 0$ puisque le condensa-

teur C_1 est préalablement déchargé (fig. 7) :

$$x_1(t) = - \int_0^t \frac{v_E}{R_1 C_1} dt = - \frac{V_E}{R_1 C_1} t.$$

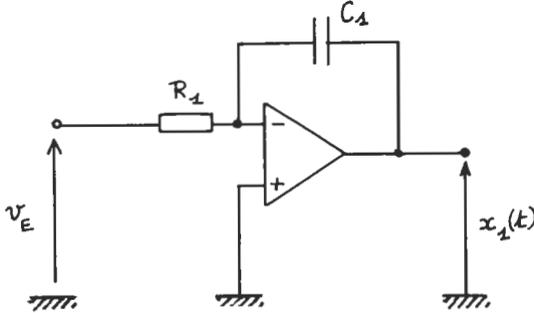


Fig. 7

A la fin de la phase 1, $x_1(t_1) = - \frac{V_E}{R_1 C_1} N_1 T_A.$

Pour $t_1 \leq t \leq t_2$, $x_1(t) = x_1(t_1) - \frac{V_R}{R_1 C_1} (t - t_1).$

En $t = t_2$, $t - t_1 = N_2 T_A$, $x(t_2) = 0$, d'où la relation cherchée :

$$N_2 = - \frac{N_1}{V_R} \cdot V_E.$$

II.A.2.

II.A.2.1. Avant de nous intéresser à la transition entre les photons 2 et zéro (fin du comptage), regardons rapidement comment débute et s'achève la phase 1 pendant laquelle s'effectue le décomptage.

La fig. 8 représente les états des principales variables logiques qui interviennent dans la définition de cette phase.

P et C sont forcées à zéro par le passage à zéro de INIT (P, directement par Q_4 , et C de manière indirecte par la RAZ prioritaire — et asynchrone — de la bascule n° 1).

Le prépositionnement du compteur à 1 023, forcé par $P = 0$, assure $R_E = 0$ puisque, dans le même temps, $C = 0$ (fig. 8).

C'est le passage de G à la valeur 1, qui, agissant sur la bascule n° 4, produit la transition $Q_4 = P = 1$ et provoque le début du décomptage.

Celui-ci ne cessera que lorsqu'un front montant d'horloge H suivra la transition $C = Q_1 = 1$; or c'est le passage à 1 de R_E qui, agissant sur la bascule D n° 1 provoque cette transition.

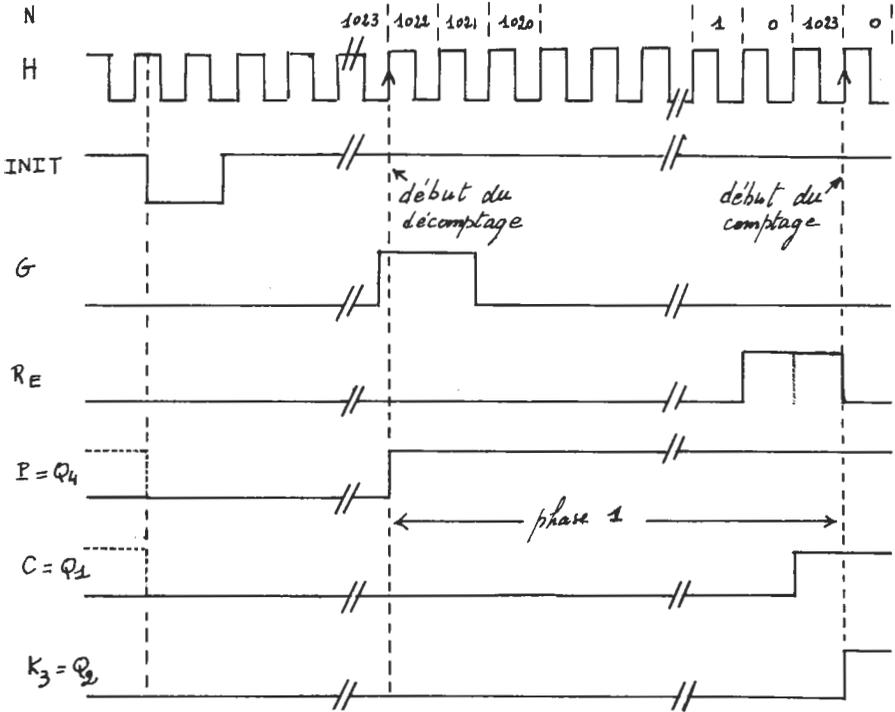


Fig. 8

La fig. 8 nous montre que la durée de la phase n° 2 est bien $1024 T_A$.

La fig. 9 (a et b) répond directement à la question posée.

Elle montre que dans le cas a, où le passage à zéro de la tension $x_1(t)$, marqué par $S = 1$, survient pour une durée t_2 comprise entre $N_2 T_A$ et $\left(N_2 + \frac{1}{2}\right) T_A$, c'est la valeur N_2 qui est mémoisée. Ici, $N_2 = 3$.

En revanche, si $\left(N_2 + \frac{1}{2}\right) \cdot T_A \leq t_2 \leq (N_2 + 1) T_A$, la fig. 9 b montre que c'est $N_2 + 1$ qui est mémorisé dans le registre.

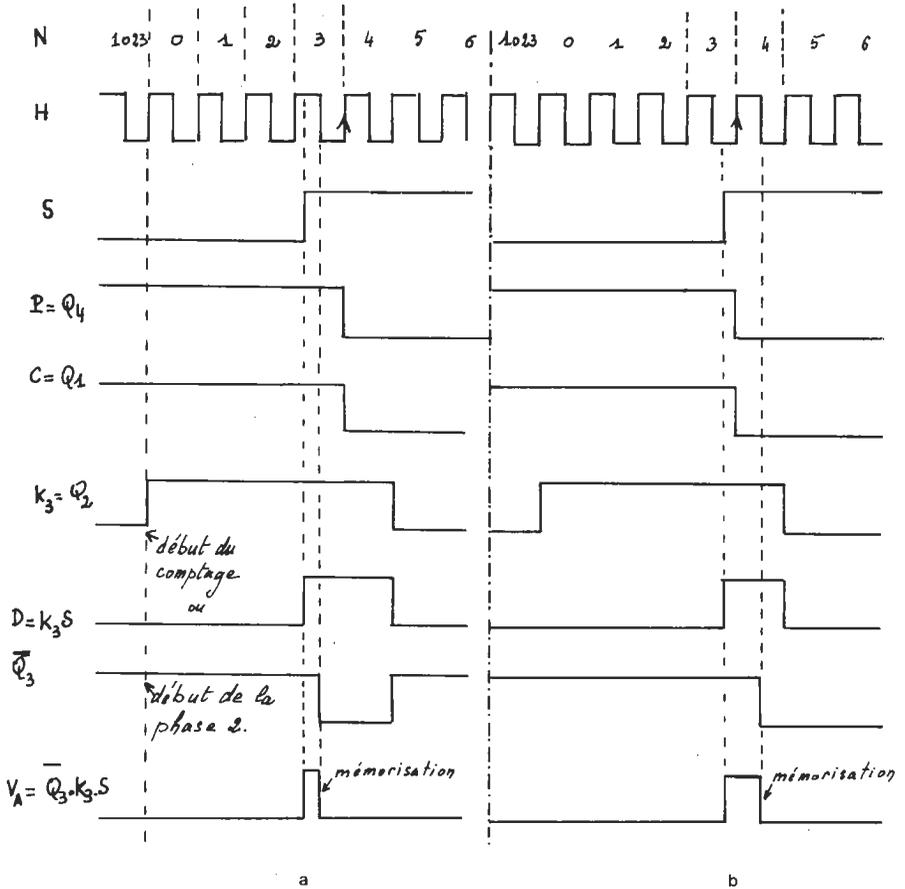


Fig. 9

II.A.2.2. La considération des fig. 8 et 9 montre que la variable $Q_4 \cdot \bar{Q}_2$ est bien égale à 1 pendant la phase 1. Il suffit donc d'utiliser une porte ET commandée par Q_4 et \bar{Q}_2 pour obtenir la fonction K_2 .

K_1 doit être égale à 1 quand ni K_2 ni K_3 n'ont cette valeur. On peut donc poser $K_1 = \bar{K}_2 \cdot \bar{K}_3$, ou $K_1 = \bar{K}_2 + \bar{K}_3$.

II.A.2.3. Nous avons vu que l'incertitude sur la mesure de

la durée t_2 est $\frac{T_A}{2}$ (fig. 9 a et 9 b).

II.A.2.4. Quand on applique une tension d'entrée $v_E(t)$ constante, et égale à $V_E = 10$ V, le convertisseur compte jusqu'à

1 024. Donc $q = \frac{10}{1\,024} = 9,77$ mV.

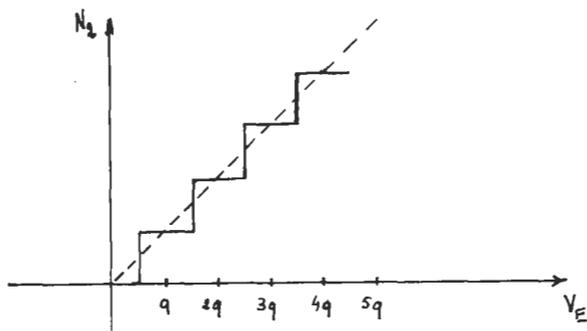


Fig. 10

La fig. 10 donne l'allure de $N_2 = f(V_E)$.

II.A.3.

II.A.3.1.

$$x_1(t_1) = -\frac{V_E N_1 T_A}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_1 C_1} \int_{t_1 - N_1 T_A}^{t_1} b(\tau) d\tau$$

$$x_1(t_2) = x_1(t_1) - \frac{V_R N_2 T_A}{R_1 C_1} = 0.$$

En posant $e_b = a(t_1)$, on en déduit bien :

$$N_2 = -\frac{N_1}{V_R} \cdot (V_E + e_b).$$

II.A.3.2. Soit $\delta(t)$ la « fonction » impulsion de Dirac.

$$\int_{t - N_1 T_A}^t \delta(\tau) d\tau = 1 \quad \text{pour } 0 \leq t \leq N_1 T_A.$$

La réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre qui à une rentrée $b(t)$ répondrait par $a(t)$ est donc représentée sur la fig. 11.

La fonction de transfert $H(j\omega)$ de ce filtre est la transformée de Fourier de $h(t)$. On trouve :

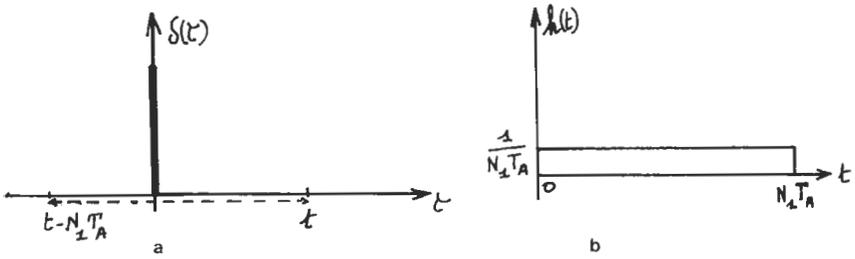


Fig. 11

$$H(j\omega) = \frac{\sin(N_1 T_a \omega/2)}{(N_1 T_a \omega/2)} \cdot e^{-j(N_1 T_a \omega/2)}$$

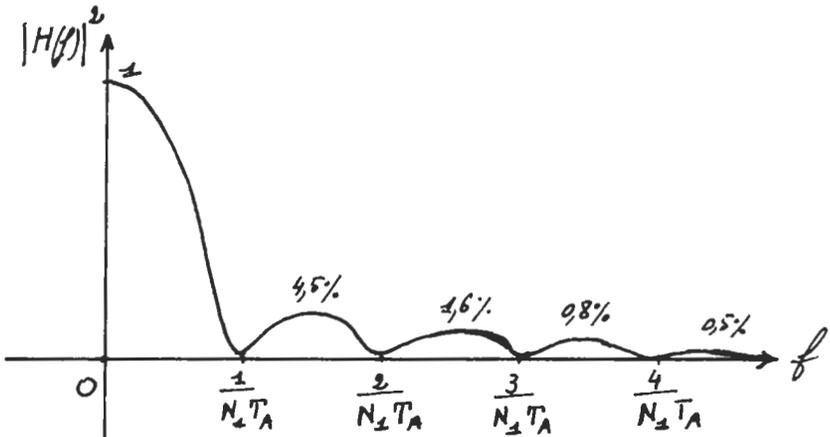


Fig. 12

La fig. 12 représente $|H(f)|^2$. C'est la fonction de diffraction d'une fente éclairée en lumière parallèle cohérente.

II.A.3.3.

$$\frac{S_b(f)}{S_a(f)} = \frac{1}{|H(f)|^2}$$

$$C_R(f) = -20 \log |H(f)|.$$

La courbe représentative de $C_R(f)$ est donnée par la fig. 13.

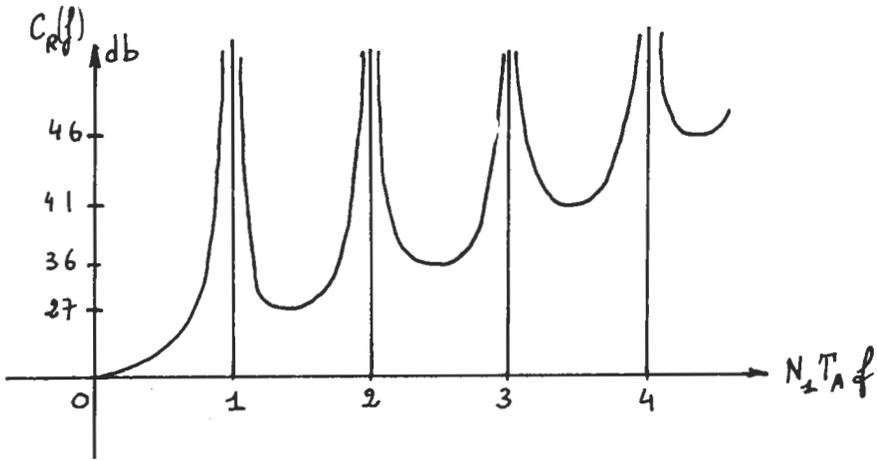


Fig. 13

II.A.3.4.

$$\frac{1}{N_1 T_A} = 50 \text{ Hz.}$$

Le taux de réjection $C_R(f)$ est infini pour 50 Hz et ses multiples. Ce sont évidemment les fréquences les plus gênantes en appareillage électrique.

Du point de vue du taux de réjection de bruit du convertisseur, la présence d'un échantillonneur bloqueur en tête du convertisseur est extrêmement néfaste puisque le bruit n'est intégré que pendant la durée t_{ac} , très faible, de l'acquisition.

$$\text{II.A.4. A l'issue de la phase 1, } x_1(t_1) = -\frac{V_E}{R_1 C_1} \cdot N_1 T_A.$$

Avec les valeurs numériques du texte, $x_1(t_1) = -v_E$.

Le processus dessiné sur la fig. 7 doit pouvoir se manifester pour la plus petite des tensions appliquées donnant lieu à un comptage, soit $\frac{q}{2} = 4,88 \text{ mV}$.

On doit donc avoir $x_n < 4,88 \text{ mV}$. C'est une valeur très faible, assez peu compatible avec une bonne immunité du bruit.

II.A.5.

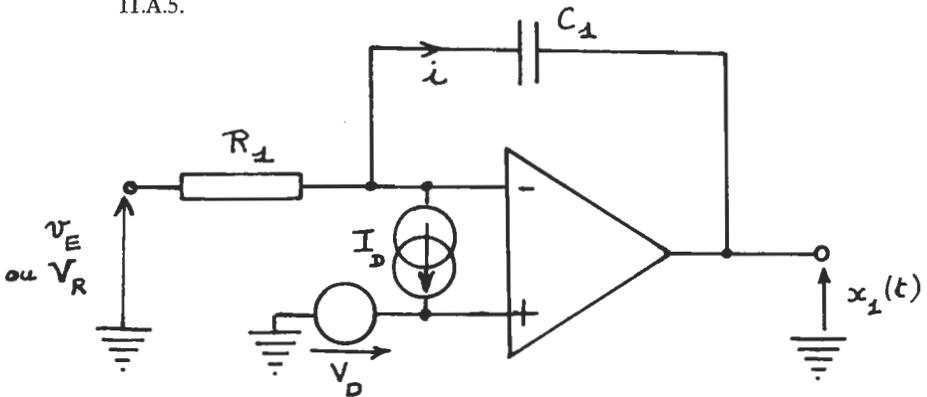


Fig. 14

II.A.5.1.(fig. 14).

Pour $t \leq 0$, $K_1 = 1$, le condensateur C_1 est en court-circuit, $x_1(t) = V_D$.

Pour $0 \leq t \leq t_1$, l'intensité qui charge C_1 n'est pas $\frac{v_E}{R_1}$ mais

$$\frac{v_E - V_D}{R_1} - I_D.$$

$$x_1(t_1) = V_D - \frac{v_E - V_D - R_1 I_D}{R_1 C_1} \cdot N_1 T_A.$$

t_2 est défini par la relation :

$$V_D - \frac{v_E - V_D - R_1 I_D}{R_1 C_1} \cdot N_1 T_A - \frac{V_R - V_D - R_1 I_D}{R_1 C_1} t_2 = 0.$$

$$t_2 = - \frac{v_E - V_D - R_1 I_D}{V_R - V_D - R_1 I_D} N_1 T_A + \frac{R_1 C_1 V_D}{V_R - V_D - R_1 I_D}.$$

II.A.5.2.

$$N_2 = -N_1 \cdot \frac{V_E}{V_R} \cdot \left[\frac{1 - V_R/V_E (\alpha_1 + \alpha_2)}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2)} \right] + \frac{R_1 C_1}{T_A} \cdot \frac{\alpha_1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

II.A.5.3.

$$N_2 \approx -N_1 \cdot \frac{V_E}{V_R} + \frac{V_R - V_E}{V_R} \cdot N_1 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{R_1 C_1}{T_A} \alpha_1$$

(le dernier terme ne peut en effet être négligé car $\frac{R_1 C_1}{T_A}$ est voisin de 10^3).

$$k_A(V_E, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{V_R - V_E}{V_R} \cdot N_1(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{R_1 C_1}{T_A} \cdot \alpha_1.$$

II.A.5.4. Pour $V_E = 10$ V,

$$k_A = 2 \cdot 1024 \cdot (5 \cdot 10^{-4} + 10^{-4}) + 0,51 = 1,74.$$

N_2 comporte au plus trois chiffres significatifs.

II.A.5.5. Pour $V_E = 0$, et pour $0 \leq t \leq t_1$, $x_1(t_1)$ varie

$$\text{comme } V_D + \frac{V_D + R_1 I_D}{R_1 C_1} \cdot t.$$

Si $(V_D + R_1 \cdot I_D)$ a un signe négatif le fonctionnement du convertisseur sera identique à celui qui est décrit sur la fig. 7 du texte. Il y aura affichage d'une valeur erronée de v_E .

Si cette quantité a un signe positif, la variable logique S garde la valeur 1, le fonctionnement du circuit logique de contrôle est perturbé et le comptage de la phase 2, notamment, ne s'effectue pas.

Cette étude a donc permis de mettre en évidence quelques défauts liés au fonctionnement d'un convertisseur analogique-numérique à double rampe.

II.B. ETUDE D'UN CONVERTISSEUR ANALOGIQUE NUMÉRIQUE A QUATRE RAMPES

II.B.1.

II.B.1.1. La fig. 15 montre que la tension $v_S(t)$ satisfait à la relation suivante lorsque K_1 , variable logique associée à l'interrupteur susceptible de mettre C_2 en court-circuit, est nulle.

$$\frac{dv_S}{dt} = - \left(e - \frac{V_{R_1}}{2} \right) \times \frac{1}{R_2 C_2}.$$

Par ailleurs :

$$x_1(t) = V_{R_3} - v_S(t) \quad \text{donc} \quad \frac{dx_1}{dt} = \left(e - \frac{V_{R_1}}{2} \right) \cdot \frac{1}{R_2 C_2}.$$

On note par ailleurs que mis à part les instants où l'on ferme l'interrupteur commandé par K_1 , les tensions v_S et x_1 sont des

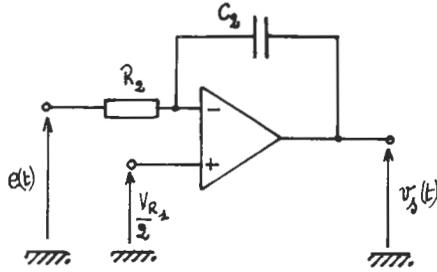


Fig. 15

fonctions continues (au sens mathématique du terme) du temps. La tension aux bornes de C_2 , en effet, ne peut subir de discontinuité.

Au cours de la phase 2, $e = 0$, donc $\frac{dx_1}{dt} = -\frac{V_{R_1}}{2 R_2 C_2}$.

Par conséquent :

$$x_1(t_1 + t_2) = -\frac{V_{R_1}}{2} \cdot \frac{N_3 T_B}{R_2 C_2}.$$

Au cours de la phase 3, $e = V_{R_1}$, donc $\frac{dx_1}{dt} = +\frac{V_{R_1}}{2 R_2 C_2}$.

Par conséquent, $t_3 = t_2 = N_3 T_B$.

Comme $t_2 + t_3 + t_4 = 4 N_3 T_B$, on en déduit $t_4 = 2 N_3 T_B$.

II.B.1.2. Pendant la phase 4, $e(t) = V_E$, donc :

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{V_E - V_{R_1}/2}{R_2 C_2}.$$

A la fin de la phase 4 :

$$x_1(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = \left(V_E - \frac{V_{R_1}}{2} \right) \cdot \frac{2 N_3 T_B}{R_2 C_2}.$$

Pendant la phase 5,

$$e(t) = V_{R_1}, \text{ donc } \frac{dx_1}{dt} = \frac{V_{R_1}}{2 R_2 C_2}.$$

On en déduit :

$$t_5 = 2 N_3 T_B \left(1 - \frac{2 V_E}{V_{R_1}} \right).$$

II.B.1.3.

$$t_6 = 2 N T_B = N_4 T_B - 2 N_3 T_B - 2 N_3 T_B \left(1 - \frac{2 V_E}{V_{R1}} \right).$$

$$N = \frac{N_4 - 4 N_3}{2} + 2 N_3 \cdot \frac{V_E}{V_{R1}}.$$

II.B.2.

II.B.2.1.

$$N = 512 \text{ pour } V_E = 0 \quad \rightarrow N_4 - 4 N_3 = 1024 : N_4 = 3200.$$

$$N = 0 \text{ pour } V_E = -5 V \rightarrow V_{R1} = 10,625 V.$$

II.B.2.2. La phase 4 dure $2 N_3 T_B = \frac{1}{50}$ s. Le signal est donc, comme précédemment, intégré sur une période du secteur.

La fig. 16 répond à la question demandée.

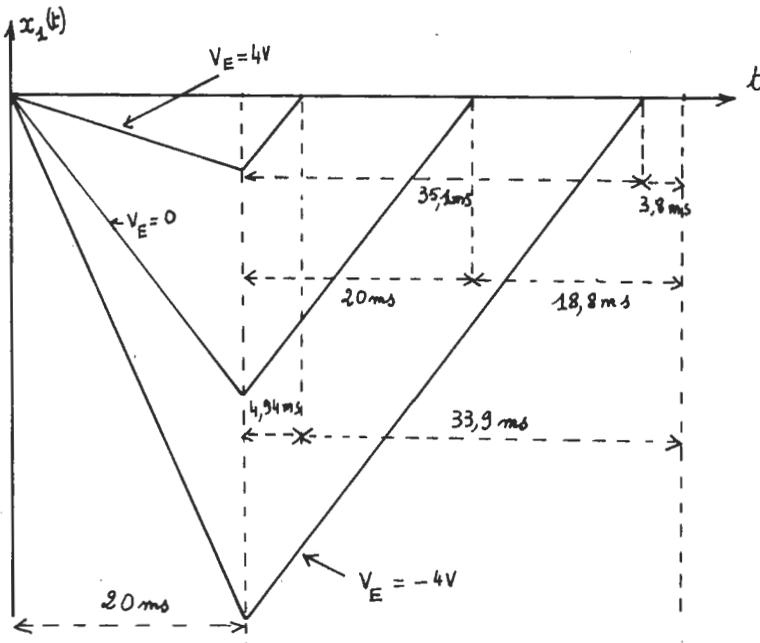


Fig. 16

II.B.3. Si l'amplificateur était parfait, l'intensité i qui, en présence d'une tension d'entrée V quelconque, chargerait le

condensateur, vaudrait $i = \frac{V - V_{R_2}}{R_2}$. L'amplificateur étant modélisé comme indiqué sur la fig. 14 du texte, l'intensité de charge, i' ,

est égale à $\frac{V - V_{R_2} - V_D}{R_2} - I_D$.

Ou encore à $\frac{V - V_{R_2} - V_D - R_2 I_D}{R_2} = \frac{V - V'_{R_2}}{R_2}$, avec :

$$V'_{R_2} = V_{R_2} + V_D + R_2 I_D = \frac{V_{R_1}}{2} (1 + \alpha_B) \quad \text{si}$$

$$\alpha_B = 2 \cdot \frac{V_D + R_2 I_D}{V_{R_1}} = 1,13 \cdot 10^{-3}.$$

$$\frac{dv_S(t)}{dt} = -\frac{V - V'_{R_2}}{R_2 C_2}, \quad \text{donc} \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{V - V'_{R_2}}{R_2 C_2}.$$

II.B.4.

II.B.4.1. Phase 2 : $V = V_M = \epsilon_B V_{R_1}$.

$x_1(t)$ décroît avec une pente proportionnelle, en valeur absolue, à :

$$\frac{V_{R_1}}{2} (1 + \alpha_B - 2 \epsilon_B), \text{ et cela pendant } t_2 = N_3 T_B.$$

Phase 3 : $V = V_{R_1}$; $x_1(t)$ croît avec une pente proportionnelle à $\frac{V_{R_1}}{2} (1 - \alpha_B)$ pendant t_3 tel que :

$$t_3 = N_3 T_B \frac{1 + \alpha_B - 2 \epsilon_B}{1 - \alpha_B}.$$

Or, on pose $t_3 = (N_3 + n) T_B$, cc qui donne pour n :

$$n = 2 N_3 \frac{\alpha_B - \epsilon_B}{1 - \alpha_B}.$$

II.B.4.2. Phase 4 : $V = V_E$; $x_1(t)$ décroît avec une pente

de valeur absolue proportionnelle à $\frac{V_{R1}}{2} \cdot (1 + \alpha_B) - V_E$ pendant $(2N_3 - n) T_B$.

Phase 5 : $V = V_{R1}$; $x_1(t)$ croît avec une pente

proportionnelle à $\frac{V_{R1}}{2} (1 - \alpha_B)$ pendant t_5 tel que :

$$t_5 = \frac{(2N_3 - n) \cdot T_B \cdot \left(1 + \alpha_B - 2 \frac{V_E}{V_{R1}}\right)}{1 - \alpha_B}.$$

On en déduit la valeur de N telle que $t_4 + t_5 + 2N T_B = N_4 T_B$:

$$N = \frac{N_4}{2} - 2N_3 \cdot \frac{1 - 2\alpha_B - \varepsilon_B}{(1 - \alpha_B)^2} \cdot \left(1 - \frac{V_E}{V_{R1}}\right).$$

II.B.4.3. Au deuxième ordre près, l'expression $\frac{1 - 2\alpha_B - \varepsilon_B}{(1 - \alpha_B)^2}$ est équivalente à $1 - \varepsilon_B - 2\alpha_B \varepsilon_B - \alpha_B^2$.

On remarque que α_B est éliminé au premier ordre.

D'où l'expression de N :

$$N = \frac{N_4 - 4N_3}{2} + 2N_3 \cdot \frac{V_E}{V_{R1}} + \dots \\ \dots 2N_3 \cdot \left(1 - \frac{V_E}{V_{R1}}\right) \cdot (\varepsilon_B + 2\varepsilon_B \alpha_B + \alpha_B^2).$$

L'erreur sur N due aux défauts analogiques vaut donc :

$$k_B = 2N_3 \cdot \left(1 - \frac{V_E}{V_{R1}}\right) \cdot (\varepsilon_B + 2\varepsilon_B \alpha_B + \alpha_B^2).$$

$$\text{II.B.4.4. Si } \varepsilon_B = 0, \quad k_B = 2N_3 \cdot \left(1 - \frac{V_E}{V_{R1}}\right) \cdot \alpha_B^2.$$

Avec $\alpha_B = 1,13 \cdot 10^{-3}$ et $V_E = -5 \text{ V}$, on trouve : $k_B = 2,0 \cdot 10^{-3}$.

Cette cause d'erreur est parfaitement négligeable. L'utilisation de la technique des 4 rampes permet d'éliminer les défauts de tension et courant de décalage de l'amplificateur opérationnel

utilisé en intégrateur. Avec des valeurs tout à fait plausibles, on passe en effet de $k_A = 1,7$ avec la double rampe à $k_B = 2,0 \cdot 10^{-3}$ avec cette technique.

$$\text{II.B.4.5. Si } \alpha_B = 0, \quad k_B = 2 N_3 \cdot \left(1 - \frac{V_E}{V_{R1}}\right) \cdot \varepsilon_B = 1600.$$

Pour $V_E = -5 \text{ V}$, $k_B = 1600 \varepsilon_B$. Pour avoir $k_B < 0,5$, on doit assurer $\varepsilon_B < 3,12 \cdot 10^{-4}$ soit $V_M < 3,32 \text{ mV}$.

II.B.5.

II.B.5.1.

$t_3 = N_3 T_B$; $t'_3 = (N_3 + \varphi) \cdot T_B$; or : $t'_2 + t'_3 + t'_4 = 4 \cdot N_3 \cdot T_B$, donc $t'_4 = (2 N_3 - \varphi) \cdot T_B$. Par conséquent $t'_4 - t_4 = -\varphi T_B$. De même :

$t_4 + t_5 + t_6 = t'_4 + t'_5 + t'_6 = N_4 T_B$; donc : $-\varphi + \theta + \delta = 0$;
 $\delta = \varphi - \theta$.

L'incertitude sur la mesure de t'_6 est $\pm T_B$.

II.B.5.2. La fig. 17 a représente les variations de N' et de N en fonction de t_6 , valeur mesurée de la durée de la phase 6.

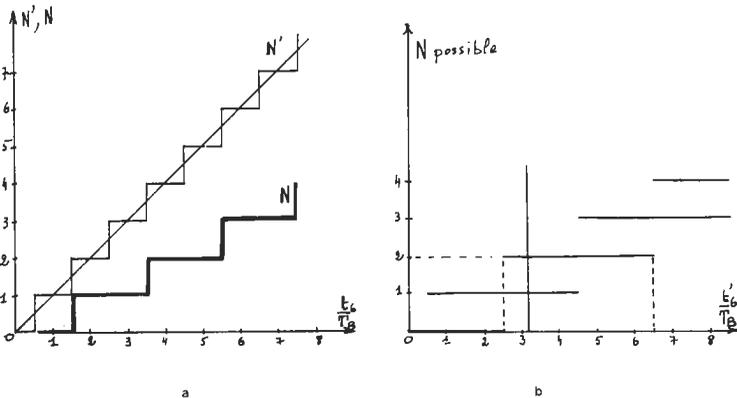


Fig. 17

La fig. 17 b représente les valeurs possibles de N en fonction de t'_6 , vraie valeur de cette durée. Elle s'explique de la manière suivante : La valeur $N = 2$, par exemple correspond à $3,5 \leq t_6 \leq 5,5 T_B$, mais on peut avoir $t_6 = 3,5 T_B$ pour t'_6 compris

entre $2,5 T_B$ et $4,5 T_B$, puisque la limite de l'erreur sur t'_6 est T_B . De même, on peut avoir $t_6 = 5,5 T_B$ pour des valeurs de t'_6 allant jusqu'à $6,5 T_B$.

Finalement, la valeur $N = 2$ peut être obtenue pour :

$$2,5 T_B \leq t'_6 \leq 6,5 T_B.$$

L'erreur sur N est donc de une unité.

Comme, théoriquement, on a :
$$N = \frac{N_4 - 4 N_3}{2} + 2 N_3 \frac{V_E}{V_{R1}},$$

l'incertitude correspondante sur V_E est
$$\frac{V_{R1}}{2 N_3} = 9,77 \text{ mV}.$$

Elle est bien évidemment égale à $q = \frac{10}{2^{10}} \text{ V}.$

II.B.5.3. La fig. 18 représente les valeurs de N' possibles en fonction de t'_6 . On constate qu'à la différence de ce qui a lieu

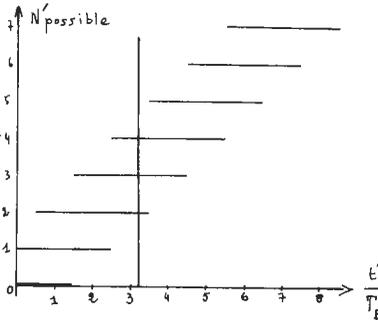


Fig. 18

sur la fig. 17 b, pour chaque valeur de t'_6 , on a 3 valeurs possibles de N' (il n'y en avait que 2 pour N). On peut donc passer de $N' = 2$ à $N' = 4$ pour une très faible augmentation de V_E , ou même, ce qui est plus choquant, de $N' = 4$ à $N' = 2$. L'erreur sur N' est donc de deux unités.

Troisième partie

III.1. Le texte suggère, pour calculer la transformée de Fourier de $Sy_A(f)$, de considérer cette fonction comme la convolution

avec lui-même d'un rectangle de hauteur $\sqrt{\frac{S_0}{F}}$ et de largeur F , centrée sur l'origine.

Or, la transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit des transformées de chacun des termes du produit.

La transformée de Fourier d'une fonction de f égale à $\sqrt{\frac{S_0}{F}}$ pour $-\frac{F}{2} \leq f \leq +\frac{F}{2}$ et à zéro partout ailleurs vaut $\sqrt{S_0 \cdot F} \cdot \frac{\sin(\pi Ft)}{\pi Ft}$. Donc :

$$C_{y_A}(t) = S_0 F \left(\frac{\sin(\pi Ft)}{\pi Ft} \right)^2.$$

On retrouvera ce résultat en calculant directement la transformée de Fourier de $S_{y_A}(f)$ telle que :

$$S_{y_A}(f) = \begin{cases} 0 & \text{pour } f \leq -F. \\ \frac{S_0}{F} (f + F) & \text{pour } -F \leq f \leq 0. \\ \frac{S_0}{F} (-f + F) & \text{pour } 0 \leq f \leq F. \\ 0 & \text{pour } f \geq F. \end{cases}$$

$$C_{y_A}(t) = \frac{S_0}{F} \cdot \left[\int_{-F}^0 F \cdot e^{j2\pi ft} \cdot df + \int_{-F}^0 f \cdot e^{j2\pi ft} \cdot df + \int_0^F F \cdot e^{j2\pi ft} \cdot df - \int_0^F f \cdot e^{j2\pi ft} \cdot df \right].$$

III.2.

III.2.1. Pour ne pas dépasser la dynamique d'entrée du convertisseur, il faut que σ_y soit inférieur ou égal à $\frac{1}{4} \cdot \frac{N}{2} q$, avec $N = 2^{n_b}$. On aura donc $(\sigma_y)_{max} = \sigma_{y_m} = 2^{n_b - 3} q$.

$$\left(\frac{\sigma_{y_m}}{\sigma_e} \right)^2 = 12 \times 2^{2n_b - 6}$$

$$\frac{1}{10} \left(\frac{S_m}{B} \right) = \log_{10} 12 + (2n_b - 6) \log_{10} 2 = \dots$$

$$\dots 1,08 + (2n_b - 6) \times 0,301.$$

Ecrivons que $\frac{S_m}{B} \geq 40$ db, on en déduit $2n_b - 6 \geq 9,7$.

Comme n_b est un entier, cette inégalité est satisfaite pour $n_b = 8$.

$y_A(t)$ possède une densité spectrale $S_{y_A}(f)$ nulle pour $f > F = 4$ kHz. Le théorème de Shannon nous apprend qu'il faut échantillonner y_A à une fréquence f_e égale au moins à $2F = 8$ kHz.

S'il y a 8 bits par échantillon, il faut, pour cela, transmettre au moins 64 kbits par seconde.

III.2.2.

$$\sigma_{y^2_m} = C_{y_A}(0) = S_0 F = \left(\frac{V_c}{4}\right)^2$$

$$S_0 = \frac{V_c^2}{16 F} = 0,39 \frac{V^2}{\text{kHz}}$$

III.3.

III.3.1.

$$\hat{y}(n) = \hat{d}(n) + \hat{r}(n) = \hat{d}(n) - d(n) + d(n) + \hat{r}(n) = \dots$$

$$\dots e_1(n) + d(n) + \hat{r}(n).$$

Or : $d(n) = y(n) - \hat{r}(n).$

Donc : $e(n) = \hat{y}(n) - y(n) = e_1(n).$

III.3.2. La fig. 19 précise le schéma d'un récepteur à modulation différentielle.

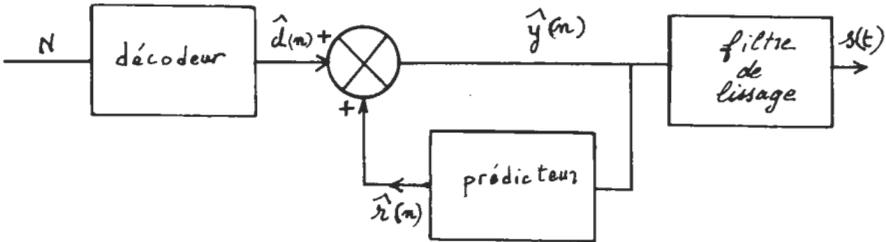


Fig. 19

III.3.3.

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_e^2} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{e_1}^2} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_d^2} \cdot \frac{\sigma_d^2}{\sigma_{e_1}^2} = \dots$$

$$\dots G \cdot \frac{2^{2n_b - 6} q^2}{q^2/12} = \frac{3}{16} \cdot G \cdot 2^{2n_b}.$$

Les deux dernières égalités ne sont réalisées que pour la valeur maximale du rapport signal sur bruit, lorsque l'écart-type du signal atteint le quart de la demi-dynamique d'entrée. On a alors :

$$S/B = 10 \log_{10} G - 10 \log_{10} \frac{16}{3} + 20 \cdot n_b \cdot \log_{10} 2 = \dots$$

$$\dots 10 \log_{10} G - 7,3 + 6,02 \cdot n_b.$$

III.3.4.

III.3.4.1.

$$d(n) = y(n) - \hat{r}(n) = y(n) - a_1 \cdot \hat{y}(n-1) = \dots$$

$$\dots y(n) - a_1 \cdot y(n-1) - a_1 \cdot e(n-1).$$

$$d^2(n) = y^2(n) + a_1^2 \cdot y^2(n-1) - 2 a_1 \cdot y(n) \cdot y(n-1) + \dots$$

$$\dots a_1^2 \cdot e^2(n-1) - 2 a_1 \cdot y(n) \cdot e(n-1) \dots$$

$$\dots + 2 a_1^2 \cdot y(n-1) \cdot e(n-1).$$

Les variables $y(n)$ et $e(n)$ étant non corrélés, cette égalité conduit à :

$$\sigma_d^2 = E d^2(n) = \sigma_y^2 \cdot (1 + a_1^2) + a_1^2 \cdot \sigma_e^2 - 2 a_1 \cdot C y_A \left(\frac{1}{f_e} \right)$$

$$\frac{d(\sigma_d)^2}{d a_1} = 2 a_1 \cdot (\sigma_y^2 + \sigma_e^2) - 2 C y_A \left(\frac{1}{f_e} \right).$$

La valeur optimale de a_1 (il s'agit bien d'un minimum) est

$$\text{donc : } \frac{C y_A (1/f_e)}{\sigma_y^2 + \sigma_e^2} \simeq \frac{C y_A (1/f_e)}{\sigma_y^2}.$$

Notons $C y_1$ la valeur $C y_A (1/f_e)$:

$$\text{Pour cette valeur optimale de } a_1, \sigma_d^2 \simeq \frac{\sigma_y^4 - C y_1^2}{\sigma_y^2},$$

$$G_1 = \frac{\sigma_y^4}{\sigma_y^4 - Cy_1^2}; \text{ ou encore : } G_1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{Cy_1}{\sigma_y^2}\right)^2}.$$

III.3.4.2. Pour $f_e = 2F$,

$$Cy_1 = Cy_A \left(\frac{1}{f_e}\right) = Cy_A \left(\frac{1}{2F}\right) = S_0 \cdot F \cdot \frac{4}{\pi^2} = \frac{4\sigma_y^2}{\pi^2}.$$

$$G = \frac{1}{1 - \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^2} = 1,197.$$

$$(S/B)_{\text{maximal}} = (6,02 n_b - 6,5) \text{ db.}$$

Si le convertisseur est identique, $n_b = 8$, donc $(S/B)_{\text{maximal}} = 41,7$ db.

L'amélioration est très faible, elle n'est égale qu'à :

$$10 \log G = 0,8 \text{ db.}$$

C'est σ_d , maintenant, qui, avec ce procédé de modulation, vaut $V_c/4$.

$$\text{Or, } \sigma_d^2 = S_0 F - \frac{[S_0 F (4/\pi^2)]^2}{S_0 F} = S_0 F \left(1 - \frac{16}{\pi^4}\right) = 0,84 \cdot S_0 F.$$

La valeur de S_0 qui rend $(S/B)_{\text{maximal}}$ est donc $0,47 \text{ V}^2/\text{kHz}$. Il s'agit d'une valeur légèrement supérieure à la densité spectrale centrale qui correspondait au meilleur rapport signal sur bruit pour la modulation directe par impulsions codées.

III.3.4.3.

$$S/B = 10 \log_{10} G + 42,1 - 7,3 = 40 \Rightarrow G = 3,31.$$

$$\text{Comme } G = \frac{1}{1 - \left(\frac{Cy}{\sigma_y^2}\right)^2}, \text{ cela entraîne :}$$

$$\frac{Cy}{\sigma_y^2} = 0,835 = \left(\frac{\sin(\pi F/f_e)}{(\pi F/f_e)}\right)^2. \text{ Soit } \frac{\sin(\pi F/f_e)}{(\pi F/f_e)} = 0,914, \text{ ce}$$

qui est réalisé pour $\frac{\pi F}{f_e} = 0,73$, et donc pour :

$$f_e = \frac{\pi F}{0,73} = 4,30 F = 17,2 \text{ kHz.}$$

Il faut, pour cela, transmettre $7 \times 1,72 \cdot 10^4 = 1,20 \cdot 10^5$ bits par seconde, ce qui est deux fois plus élevé que précédemment.

III.3.4.4. Diminuer le nombre de bits à transmettre par seconde c'est, essentiellement, réduire le coût des équipements — ainsi que leur consommation.

III.4.

III.4.1.

$y'_A(t)$ a pour densité spectrale $Sy'_A(f) = 4\pi^2 f^2 Sy_A(f)$ (fig. 20).

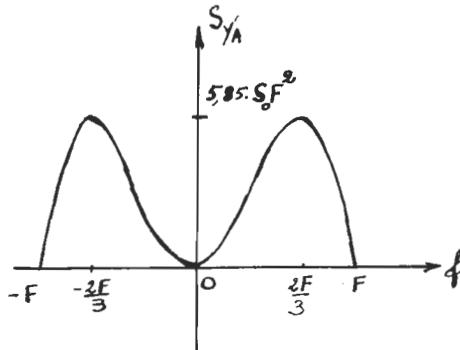


Fig. 20

La puissance de $y'_A(t)$ s'écrit, d'après le théorème de Parseval :

$$\begin{aligned} \sigma_{y'_A}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} Sy'_A(f) \cdot df = \int_{-F}^{+F} Sy'_A(f) \cdot df = 2 \cdot \int_0^F \frac{4\pi^2 \cdot S_0}{F} (Ff^2 - f^3) df \\ \sigma_{y'_A}^2 &= \frac{2\pi^2 S_0 F^3}{3}. \end{aligned}$$

III.4.2. $\hat{y}(n)$ ne peut croître plus rapidement qu'au rythme de Δ par prise d'échantillon (fig. 21). Pour qu'il n'y ait pas de distorsion, il faut donc que $y'_A(t)$ reste inférieure à $f_e \cdot \Delta$.

Or nous avons vu, lors de la question précédente, que la variance de $y'_A(t)$ vaut $\frac{2\pi^2 S_0 F^3}{3}$ et nous pouvons admettre que

cette variance est supérieure ou égale à $\left(\frac{y'_{A \max}}{4}\right)^2$.

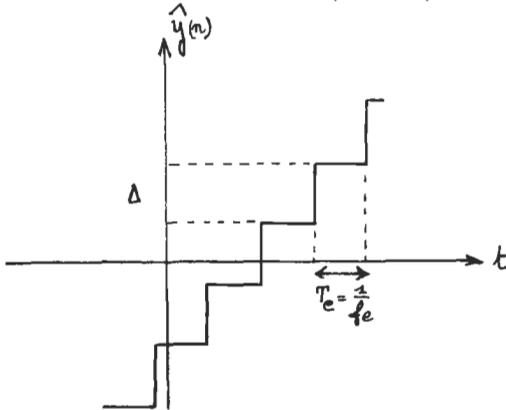


Fig. 21

On a donc $(y'_{A})^2_{\max} < \frac{32 \cdot \pi^2 \cdot S_0 \cdot F^3}{3}$.

Il suffit de prendre :

$$(f_e \cdot \Delta)^2 = \frac{32 \cdot \pi^2 \cdot S_0 \cdot F^3}{3}, \text{ soit } \Delta^2 = \frac{32 \cdot \pi^2 \cdot S_0 \cdot F^3}{3 \cdot f_e^2},$$

pour que la distorsion soit évitée.

Comme $\sigma_{yA}^2 = S_0 \cdot F$, le rapport $\frac{\sigma_{yA}^2}{\sigma_e^2}$ vaut $\frac{9 f_e^2}{32 \cdot \pi^2 \cdot F^2}$.

$$(S/B)_{\text{db}} = 20 \log_{10} \left(\frac{f_e}{F} \right) + 10 \log_{10} \frac{9}{32 \cdot \pi^2} = \dots$$

$$\dots 20 \log_{10} \left(\frac{f_e}{F} \right) - 15,5.$$

Pour avoir $(S/B) = 40$ db, il faut que le rapport $\frac{f_e}{F}$ soit égal à 596.

Cela correspond à une fréquence d'échantillonnage de 2,4 MHz et donc à une quantité d'information de 2,4 Mbits par seconde.

R. MOREAU (Bordeaux).

SOMMAIRE du supplément au n° 681

(février 1986)

Pages

Concours général 1985 :

Composition de sciences physiques (M.-Cl. HERPIN et les membres du jury)	1
--	---

C.A.P.E.S. 1985 :

Composition de physique (D. MAURAS, J.-C. HERPIN)	21
Composition de chimie (S. SAVINEAU)	59
Composition d'électronique, électrotechnique (Cl. NAUDET)	83

Agrégations 1985 :

Problème de physique (J.-P. PROVOST et E.-R. TANTART) ..	103
Composition de chimie (M.-P. PILENI, J. SARRAZIN, M. SOULIVET, A. TSCHUDY)	147
Problème d'électricité, d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique (R. MOREAU)	185

Renseignements divers	I à VIII
-----------------------------	----------

Le Directeur de la Publication : D. MAURAS

Imprimerie Hallépée - 169, rue Lecourbe, Paris
Dépôt légal : 2^e trimestre 1986
Numéro Commission paritaire : 62628