
Bulletin de l'Union des Physiciens

Association de professeurs de Physique et de Chimie

AVERTISSEMENT AUX LECTEURS

Nous avons décidé, pour l'impression de ce bulletin, de respecter les normes de la typographie nouvelle et de noter les grandeurs vectorielles en caractères gras sans les surmonter de flèches. Ces normes ont surtout comme intérêt de simplifier la tâche de composition.

J.-Cl. HERPIN.

Concours Général 1986

SESSION DE 1986

COMPOSITION DE SCIENCES PHYSIQUES

(Classes terminales C, D et E)

(Durée : 6 heures)

Dans les machines tournantes classiques, l'axe de la partie mobile (rotor) est en contact avec le support (stator), par exemple par l'intermédiaire d'un roulement à billes. L'existence du contact rotor-stator est une source de vibrations parasites interdisant d'atteindre des valeurs élevées pour les vitesses de rotation (étude de la partie 1).

Il est possible de suspendre sans contact l'axe du rotor en utilisant des forces magnétiques (étude de la partie 2) à condition de réaliser un asservissement (étude de la partie 5) comprenant un capteur de position (étude de la partie 3) et un dispositif électronique de liaison (étude de la partie 4).

Le dispositif complet, appelé PALIER MAGNÉTIQUE ACTIF, permet de supprimer les vibrations parasites (étude de la partie 6), et plus généralement d'améliorer notablement les performances des machines tournantes :

- augmentation des vitesses de rotation (jusqu'à 800 000 tr/min) ;
- suppression des frottements entre rotor et stator, d'où une augmentation de la durée de vie, et une amélioration du bilan énergétique ;
- suppression de la lubrification, ce qui permet de travailler dans une plage de température très étendue (de -253°C à $+450^{\circ}\text{C}$).

Parmi les applications récentes les plus significatives, on peut citer :

- des volants d'inertie destinés au pilotage de satellites ;
- les anodes tournantes des tubes à rayons X des scanners ;
- un prototype de turbo-alternateur pour E.d.F.

INDICATIONS

* Les différentes parties du problème sont très largement indépendantes.

* L'énoncé comprend quelques questions qualitatives ; il est recommandé d'y répondre sans développements excessifs : quelques lignes doivent suffire.

* Dans tout le problème on suppose le champ de pesanteur uniforme, avec $g = 9,81 \text{ m. s}^{-2}$ pour l'accélération de la pesanteur.

* On note ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide et μ_0 la perméabilité magnétique du vide ; on rappelle que : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ SI}$.

* On rappelle l'expression de la capacité C d'un condensateur plan à vide de surface S et dont la distance entre les armatures est d :

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}.$$

* On rappelle que la résistance électrique d'un fil est de la forme $R = \rho \frac{l}{s}$ (l : longueur du fil ; s : aire de sa section droite ; ρ : résistivité).

* Tous les axes des z sont des axes verticaux orientés vers le bas. Si \mathbf{A} est un vecteur, A_z désigne sa composante sur l'axe des z .

1. VIBRATIONS D'UNE MACHINE TOURNANTE CLASSIQUE

Un rotor de masse M tourne à vitesse angulaire ω constante autour d'un axe horizontal $x'Ax$ fixe par rapport à un référentiel galiléen $Oxyz$. Son centre de gravité G est situé légèrement en dehors de l'axe $x'Ax$: il décrit un cercle d'axe $x'Ax$, de centre A, et de rayon b ; on repère la position de G sur ce cercle par l'angle $(\mathbf{Az}, \mathbf{AG}) = \omega t$ (fig. 1).

1.1. Exprimer en fonction de b , ω , et du temps t , la composante a_z de l'accélération \mathbf{a} du point G dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen.

1.2. En déduire l'expression de la composante R_z de la résultante \mathbf{R} des actions exercées par le stator sur le rotor, en fonction de M, g , b , ω et t .

1.3. Soit R_z^{MAX} (respectivement R_z^{MIN}) la valeur maximale (resp. minimale) de R_z en fonction du temps. On définit le rapport :

$$K = \left| \frac{R_z^{\text{MAX}} - R_z^{\text{MIN}}}{R_z^{\text{MAX}} + R_z^{\text{MIN}}} \right|.$$

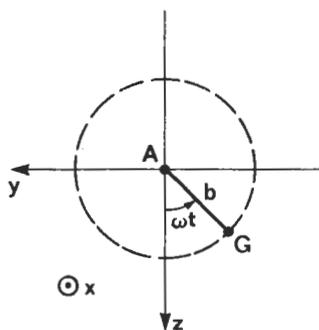


Fig. 1

1.3. a) Pour un rotor de turbine de masse $M = 20\,000$ kg tel que $b = 20 \cdot 10^{-6}$ m, on impose que K reste inférieur à 0,5 pour éviter de détériorer la liaison entre le rotor et le stator. Calculer en tours par minute la vitesse angulaire maximale ω_M correspondante.

1.3. b) Une ailette de la turbine (assimilée à une masse ponctuelle $m = 2$ kg située à $d = 1$ m de l'axe $x'Ax$ et sur la droite AG) se rompt et quitte le rotor étudié en 1.3. a. On admet que la vitesse angulaire du rotor est à peu près la même avant et après l'incident, soit $\omega = 3\,000$ tours/min. Calculer, dans le cas le plus défavorable, la valeur de K après l'incident et conclure.

1.4. On constate que le STATOR est le siège de vibrations de même fréquence que la fréquence de rotation du rotor. Quelle est la force responsable de ces vibrations ? Pourquoi les entend-on ?

2. SUSPENSION MAGNETIQUE

On considère le dispositif représenté sur la fig. 2 :

- un fil long horizontal (Δ) parcouru par un courant d'intensité I dans le sens des flèches, crée en tout point de l'espace un champ magnétique \mathbf{B} dont les lignes de champ sont des cercles d'axe (Δ) et dont la norme à une distance r de (Δ) vaut :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- un cadre carré de côté $a = 5$ mm, de masse M , parcouru par un courant de même intensité I dans le sens des flèches, est placé sous le fil, dans un plan vertical, ses côtés AB et CD étant parallèles au fil. Le centre G du carré qui est aussi son centre de gravité est repéré par sa position $Z = \overline{OG}$ sur la verticale Oz .

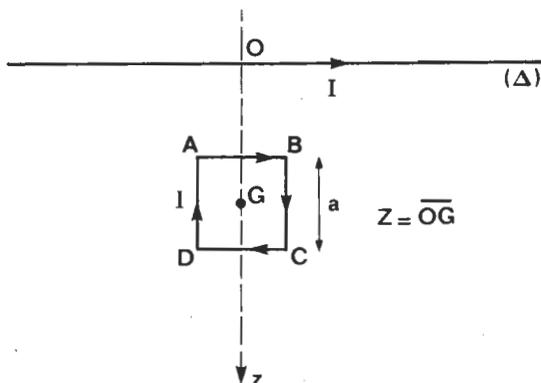


Fig. 2

2.1. a) Etablir l'expression de la composante F_z de la résultante \mathbf{F} des forces de Laplace exercées par le fil sur le cadre en fonction de μ_0 , I , a et Z .

2.1. b) Dans toute la suite, on adopte l'expression simplifiée :

$$F_z = \frac{-\mu_0 I^2 a^2}{2\pi Z^2}$$
 Calculer l'erreur relative ainsi commise sur F_z ,

sachant que Z reste voisin de $Z_0 = 5$ cm, et conclure.

2.2. Dans toute la suite de cette partie, on maintient constante la valeur de l'intensité du courant qu'on note I_0 , de telle sorte que le cadre soit en équilibre en $Z = Z_0 = 5$ cm.

2.2. a) Proposer une valeur maximale raisonnable pour I_0 en indiquant quel(s) phénomène(s) interdisent des valeurs trop élevées. Calculer la masse M maximale du cadre qu'on peut suspendre en Z_0 et conclure.

2.2. b) Comment proposez-vous de modifier le dispositif pour pouvoir suspendre un solide fixé au cadre conducteur, et de masse M' nettement plus importante que la masse calculée en 2.2. a ?

2.2. c) Le cadre et le fil sont réalisés avec un même conducteur filiforme, cylindrique de diamètre d , et dissipant une puissance proportionnelle à sa surface. Faut-il augmenter ou diminuer d pour augmenter la masse M' susceptible d'être suspendue ? Le choix d'un même diamètre pour le cadre et le fil est-il optimum ?

2.3. On s'intéresse maintenant aux mouvements de translation du cadre le long de l'axe vertical Oz .

2.3. a) En utilisant au besoin une représentation graphique de la fonction $F_z(Z)$, expliquer ce qui se passe si on abandonne le cadre sans vitesse initiale au voisinage de sa position d'équilibre $Z = Z_0$.

Quelle conclusion pratique peut-on en tirer sur ce type de suspension magnétique ?

2.3. *b*) Etablir l'expression de l'énergie potentielle E_1 du cadre correspondant à la force magnétique F_z en fonction de μ_0 , I_0 , a et Z , en prenant $E_1 = 0$ pour Z infini. Soit E_2 l'énergie potentielle de pesanteur du cadre, que peut-on dire de l'énergie potentielle totale $E = E_1 + E_2$ pour $Z = Z_0$?

3. CAPTEUR DE POSITION

On considère les trois plaques métalliques planes parallèles de même surface S représentées sur la fig. 3 : (1) et (2) sont fixes et distantes de e ; (3) peut se déplacer le long de l'axe Oz — axe perpendiculaire aux plaques dont l'origine est située à égale distance de (1) et (2) — en restant parallèle à (1) et (2) ; sa position est repérée par z (voir fig. 3).

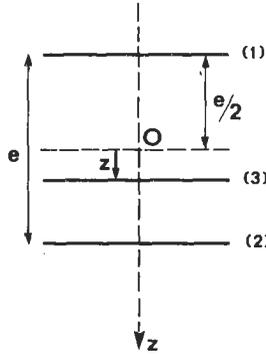


Fig. 3

L'ensemble étant plongé dans l'air de permittivité diélectrique égale à celle du vide, les plaques (3) et (1) forment un condensateur de capacité C_1 et les plaques (3) et (2) un condensateur de capacité C_2 .

3.1. Dans le circuit représenté sur la fig. 4, un générateur de tension parfait maintient entre M et N une tension $v_{MN}(t) = V \cos(\omega_0 t)$. On s'intéresse à la réponse du circuit en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω_0 .

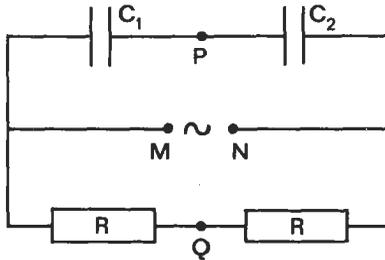


Fig. 4

3.1. a) Etablir les expressions des tensions instantanées $v_{MP}(t)$ et $v_{MO}(t)$ aux bornes de C_1 et R en fonction de C_1 , C_2 , V, ω_0 et t .

3.1. b) En déduire l'expression de $v_{PQ}(t)$ en fonction de z , e , V, ω_0 et t .

3.2. On admet pour la suite que l'expression de $v_{PQ}(t)$ obtenue en 3.1. b) reste valable lorsque la plaque (2) est animée d'un mouvement décrit par $z(t)$. Un dispositif qui ne sera pas étudié permet d'obtenir, à partir des tensions $v_{MN}(t)$ et $v_{PQ}(t)$, une tension $k \cdot v_{MN}(t) \cdot v_{PQ}(t)$ avec k constante donnée. On applique alors cette tension à l'entrée d'un filtre tel que $e(t)$ désignant la tension à l'entrée du filtre et $s(t)$ la tension correspondante à la sortie du filtre :

- si $e(t) = E \cos(\Omega t)$: $s(t) = e(t)$ si $\Omega \leq \omega_c$, et $s(t) = 0$ si $\Omega > \omega_c$, ω_c étant une pulsation caractéristique du filtre ;
- le filtre est linéaire : si $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont les sorties correspondant à $e_1(t)$ et $e_2(t)$, alors $s_1 + s_2$ est la sortie correspondant à $e_1 + e_2$.

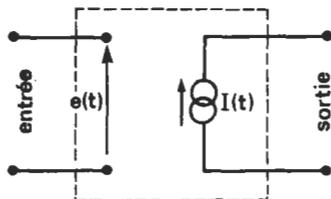
3.2. a) On suppose d'abord pour simplifier que $z(t)$ est de la forme $z(t) = z_M \cos(\omega t)$. Montrer qu'il est possible d'obtenir à la sortie du filtre une tension $s(t) = \sigma z(t)$ avec σ constante, à condition que ω , ω_0 et ω_c vérifient deux inégalités à préciser. ω pouvant prendre toutes les valeurs compatibles avec ces inégalités, comment faut-il choisir ω_0 par rapport à ω_c ?

3.2. b) A quelle condition a-t-on encore $s(t) = \sigma z(t)$ lorsque $z(t)$ est une somme de fonction du type de 3.2. a, de pulsations ω_1 , ω_2 , ω_3 , etc. ?

3.2. c) A quelle condition *qualitative* pensez-vous qu'on puisse encore avoir $s(t) = \sigma z(t)$ lorsque $z(t)$ est une fonction *a priori* quelconque ?

4. DISPOSITIF ELECTRONIQUE DE LIAISON

Les composants électroniques permettent de synthétiser approximativement des amplificateurs appelés « sources de courant commandées par une tension » et représentés schématiquement sur la fig. 5. Leur entrée permet de prélever une tension $e(t)$ sans prélever aucun courant (comme un voltmètre parfait) ; leur sortie se comporte alors



$$I(t) = G e(t)$$

Fig. 5

comme un générateur de *courant* parfait, débitant quelle que soit la tension à ses bornes un courant d'intensité : $I(t) = G \cdot e(t)$, où G est le gain de l'amplificateur.

On dispose en outre d'un capteur de position idéal c'est-à-dire d'une source de tension parfaite de f.é.m. $u(t) = \sigma z(t)$ où σ est une constante et $z(t)$ la position qu'on souhaite suivre.

On dispose enfin de résistances, de condensateurs et d'inductances pures.

4.1. Proposer un montage permettant de réaliser un générateur de courant parfait débitant un courant $i = \gamma z + \delta \frac{dz}{dt}$ où γ et δ

doivent être facilement réglables. Exprimer γ et δ en fonction des différents paramètres : gains des amplificateurs, sensibilité σ du capteur, valeurs des composants.

4.2. On se propose d'examiner les conséquences du caractère en réalité imparfait des sources de courant commandées par une tension qui se traduit par l'existence d'une résistance r en parallèle sur la sortie.

4.2. a) Considérons une source de courant imparfaite débitant dans une résistance R et une inductance L , c'est-à-dire le circuit de la fig. 6. A la date $t = 0$, le courant i_L dans l'inductance étant nul, on ferme l'interrupteur K .

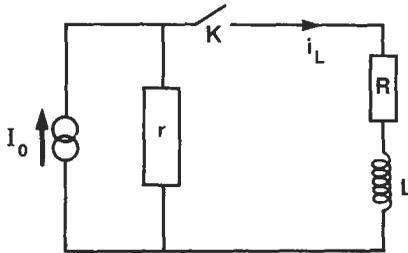


Fig. 6

- Déterminer la dérivée $\frac{di_L}{dt}$ du courant dans l'inductance à la date $t = 0$ en fonction de r , L , I_0 .
- Au bout d'un certain temps, on atteint un régime permanent : $i_L(t) = \text{cte}$; déterminer alors l'intensité i_L dans L en fonction de I_0 , r et R .
- Donner une estimation du temps τ nécessaire pour atteindre un régime permanent si on admet que l'évolution de $i_L(t)$ est à peu près représentée par la courbe de la fig. 7. Pour $r = 10^5 \Omega$, en

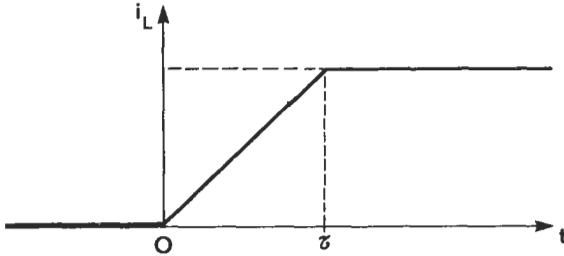


Fig. 7

choisissant une valeur maximale raisonnable pour L , donner un ordre de grandeur maximal pour τ et conclure.

4.2. b) Comment se manifestera qualitativement le défaut évoqué dans 4.2. a sur le dispositif dont on demandait le montage dans 4.1. ?

5. SUSPENSION MAGNETIQUE ASSERVIE

Un objet assimilé à une masse ponctuelle M susceptible de se déplacer sur une verticale où son mouvement est repéré par sa cote Z par rapport à un référentiel galiléen est placé en suspension sous l'effet d'une force magnétique analogue à celle étudiée dans la partie 2, portée par l'axe Oz et telle que :

$$F_z = -k' \frac{I^2}{Z^2} \text{ avec } k' \text{ constant.}$$

L'équilibre étant obtenu pour un courant $I = I_0$ et une position $Z = Z_0$, on s'intéresse aux évolutions au voisinage de cette position d'équilibre, et on pose : $z = Z - Z_0$ et $i = I - I_0$. Dans ces conditions pour $z \ll Z_0$ et $i \ll I_0$, on utilisera l'expression approchée : $F_z = -Mg(1 + \alpha z + \beta i)$ avec α et β constants.

Le déplacement z par rapport à la position d'équilibre étant repéré par un capteur analogue à celui de la partie 3 associé à un dispositif électronique de liaison analogue à celui de la partie 4, on a à tout

$$\text{instant : } i = \gamma z + \delta \frac{dz}{dt} \text{ avec } \gamma \text{ et } \delta \text{ constants.}$$

5.1. Avant tout calcul, prévoir le signe de α en liaison avec la question 2.3. a. Puis établir les expressions de α et β en fonction des données.

5.2. Etablir l'équation différentielle du mouvement $z(t)$ de la masse M .

5.3. Pour $\delta = 0$, établir une condition sur α , β et γ pour que les solutions de cette équation différentielle soient de la forme : $z(t) = A \cos(\omega_0 t - \varphi)$, et vérifier que l'asservissement est indispensable.

5.4. La condition précédente étant vérifiée, quel est l'intérêt d'imposer en outre $\delta > 0$? Comparer avec la situation obtenue en 2.3. a et conclure.

6. PALIER MAGNETIQUE ACTIF

On revient au rotor de la partie 1 tournant à vitesse angulaire ω constante autour d'un axe $x'Ax$ horizontal. Mais ce rotor est maintenant suspendu sans contact comme la suspension magnétique asservie de la partie 5 sous l'effet d'une force magnétique verticale exercée par le stator et de la forme :

$F_z = -Mg (1 + Cz + D \frac{dz}{dt})$ avec

C et D constants positifs et $z =$ déplacement de A sur la verticale Oz d'un référentiel galiléen Oxyz (pour $z = 0$, A est en O).

6.1. En étudiant le mouvement du centre de gravité G du rotor, projeté sur la verticale, montrer que $z(t)$ est solution d'une équation différentielle de la forme :

$M \frac{d^2z}{dt^2} + a_1 \frac{dz}{dt} + a_0 z = H \cos(\omega t)$ et

donner les expressions des constantes a_0 , a_1 et H en fonction de M, g, C, D, ω et b.

6.2. On s'intéresse dans toute la suite aux solutions de cette équation différentielle en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω , c'est-à-dire à des solutions de la forme : $z(t) = z_M \cos(\omega t - \varphi)$. La force exercée par le stator est alors de la forme :

$$F_z(t) = -Mg + F_{zM} \cos(\omega t - \psi).$$

6.2. a) En exploitant une analogie avec l'étude d'un circuit R, L, C, série en régime sinusoïdal forcé, établir les expressions de z_M , puis de F_{zM} , en fonction de a_0 , a_1 , M, H et ω .

6.2. b) Dans le cas où $a_1 = 0$, tracer l'allure de la courbe représentative des variations de z_M en fonction de ω . Soit $L = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} z_M$.

Déterminer le domaine des pulsations ω telles que $z_M(\omega) \geq 3L$, ce qui correspond à un fonctionnement dangereux.

6.3. Il est possible de modifier les valeurs supposées constantes jusqu'ici des coefficients C et D, par l'intermédiaire de la partie électronique, pour une pulsation particulière, sans remettre en cause les conclusions de la partie 5.

6.3. a) Supposons donc que $C = 0$ et $D = 0$ pour la pulsation ω_u correspondant à la vitesse de rotation usuelle du rotor. Que peut-on dire des vibrations du stator? Décrire le mouvement du rotor par rapport au référentiel galiléen Oxyz.

6.3. b) Quel pourrait être l'intérêt d'avoir au contraire C et D infinis pour la pulsation ω_u ?

6.3. *c*) En liaison avec 6.2. *b*, proposer une autre application du cas où C et D sont infinis.

6.4. Dans le dispositif réel, on s'arrange pour que :

$$F_z = -Mg \left(1 + Cz + D \frac{dz}{dt} + E \int z dt \right).$$

6.4. *a*) Proposer une modification du circuit de la question 4.1. permettant d'obtenir F_z de cette forme.

6.4. *b*) Etudier à très basse fréquence l'effet du terme $E \int z dt$ sur z_M et conclure sur son intérêt. (On pourra penser aux actions subies par un rotor de scie circulaire en action.)

SOLUTION

1. VIBRATIONS D'UNE MACHINE TOURNANTE CLASSIQUE

1.1. Dans le référentiel (Oxyz), on a : $\mathbf{OG} = \mathbf{OA} + \mathbf{AG}$, d'où la cote de G : $z = \mathbf{OG} \cdot \mathbf{u}_z$, c'est-à-dire : $z = \mathbf{OA} \cdot \mathbf{u}_z + b \cos \omega t$. En dérivant deux fois, il vient : $a_z = -b \omega^2 \cos \omega t$.

1.2. Le rotor est soumis à son poids $Mg \mathbf{u}_z$ et aux actions de contact exercées par le stator dont la résultante est \mathbf{R} . En appliquant le principe fondamental de la dynamique au rotor dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen Oxyz, il vient : $\mathbf{Ma} = \mathbf{Mg} + \mathbf{R}$. D'où en projetant sur \mathbf{u}_z :

$$Ma_z = Mg + R_z \quad \text{soit} \quad R_z = -Mg + M \omega^2 b \cos \omega t.$$

$$1.3. a) R_z^{\text{MAX}} = -Mg + M \omega^2 b \quad \text{et} \quad R_z^{\text{MIN}} = -Mg - M \omega^2 b.$$

$$\text{D'où : } K = \frac{\omega^2 b}{g}.$$

On en déduit la vitesse maximale acceptable :

$$\omega_{\text{MAX}} = \left(\frac{g K_{\text{MAX}}}{b} \right)^{1/2} = 4,7 \times 10^3 \text{ tours/min.}$$

Remarque.

La limitation de la vitesse angulaire est manifestement due à l'existence dans R_z d'un terme sinusoïdal, ce qui se traduira concrètement par l'existence de vibrations des différentes pièces de la machine. Ces vibrations sont dues à l'impossibilité d'équilibrer parfaitement une machine tournante classique ($b \neq 0$). Les paliers magnétiques actifs permettent de réaliser un équilibrage automatique du rotor (voir 6.3. a) et donc de supprimer les vibrations. La vitesse angulaire n'est plus alors limitée que par la résistance des tôles ferromagnétiques (qui recouvrent l'axe du rotor) aux forces d'inertie centrifuges ; on peut ainsi atteindre les vitesses importantes mentionnées dans le préambule du sujet.

1.3. b) Soit B le point d'attache de l'ailette, G' le centre de gravité du rotor après l'incident. G est le centre de gravité de l'association d'une masse m placée en B et d'une masse $M - m$ placée en G'. On a donc : $\mathbf{MAG} = (\mathbf{M} - m)\mathbf{AG}' + m\mathbf{AB}$, d'où :

$$\mathbf{AG}' = \frac{M}{M-m} \mathbf{AG} - \frac{m}{M-m} \mathbf{AB}.$$

La situation la plus défavorable est celle où la distance $b' = \mathbf{AG}'$ est maximale, c'est-à-dire celle où B et G sont situés de part et d'autre de l'axe Ax du rotor. On a alors, en projetant sur

la direction de \mathbf{AG}' : $b' = \frac{M b + m d}{M - m} = 120 \mu\text{m}$. D'où un rap-

port $K' = \frac{\omega^2 b'}{g} = 1,2$ supérieur à 0,5. La liaison rotor-stator risque donc d'être détériorée.

Remarque.

Dans un palier magnétique avec équilibrage automatique (cf. question 6.3. a), le rotor tourne autour de l'axe Gx. Cet axe peut se déplacer à la suite d'un déplacement de G (incident ou vieillissement du rotor) et il est nécessaire de prévoir un entrefer suffisant entre rotor et stator.

1.4. Le stator est soumis entre autres aux actions de contact exercées par le rotor. D'après le théorème des actions réciproques, ces actions ont pour résultante $-\mathbf{R}$, dont la composante $-\mathbf{R}_z$ contient un terme sinusoïdal de pulsation ω , susceptible de créer des vibrations forcées du stator à la pulsation ω . La surface du stator se comporte alors comme un haut-parleur, transmet à l'air des vibrations sinusoïdales de pulsation ω , c'est-à-dire crée des

ondes sonores de fréquence $N = \frac{\omega}{2\pi}$. Pour $\omega = 3\,000$ tours/min, on obtient une fréquence $N = 50$ Hz audible (son grave).

Remarque.

La machine tournante ne peut pas, en fait, être décrite comme un unique oscillateur. Elle se comporte comme un ensemble d'oscillateurs couplés. Il existe alors plusieurs pulsations de résonance correspondant à un fonctionnement dangereux. Les vitesses de rotation correspondantes sont les vitesses critiques dont il est question en 6.3. c.

Remarque.

Le comportement des oscillateurs n'étant pas nécessairement linéaire, il peut y avoir génération d'harmoniques.

Remarque.

Lorsqu'une machine est freinée brutalement, la fréquence du son émis évolue des aigus vers les graves. Ceci se produit en

particulier lorsqu'une scie circulaire découpe une planche, et rend le voisinage des scieries plutôt pénible...

2. SUSPENSION MAGNETIQUE

2.1. a) On applique la loi de Laplace : $d\mathbf{f} = I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$. Seuls, les côtés horizontaux contribuent et :

$$F_z = -IB(Z - a/2) + IB(Z + a/2).$$

$$\text{D'où : } F_z = \frac{-\mu_0 I^2 a^2}{2\pi(Z^2 - a^2/4)}.$$

2.1. b) L'erreur relative $\frac{\delta F_z}{F_z} \simeq \frac{a^2}{4Z^2}$ est suffisamment faible pour valider l'approximation : $\frac{\delta F_z}{F_z} \simeq 0,25\%$.

2.2. a) La puissance RI^2 dissipée dans le fil par effet Joule, doit être rayonnée par ce fil, faute de quoi le fil risque de fondre. On peut raisonnablement prendre $I_0 = 10$ A.

La condition d'équilibre $F_z + Mg = 0$ permet alors de calculer $M = \frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi g Z^2} = 2 \times 10^{-8}$ kg. La masse obtenue est dérisoire, probablement inférieure à la masse du fil nécessaire pour réaliser le cadre. Il faut donc améliorer le dispositif.

2.2. b) Il s'agit d'augmenter la force F_z sans alourdir le cadre, puisqu'on veut suspendre non seulement le cadre, mais une masse M' élevée. On peut par exemple :

- rapprocher le fil du cadre, ce qui augmente le champ magnétique B (bien sûr, il faut alors discuter sur l'expression exacte de F_z);
- diminuer les côtés verticaux du cadre qui ne contribuent pas à F_z , ce qui allège le cadre;
- utiliser plusieurs fils infinis dont les effets s'ajoutent.

Une fois que ces solutions ont rendu la masse $M_S = M + M'$ susceptible d'être suspendue supérieure à la masse M du cadre, on peut bobiner le cadre. Avec N tours de fils, on multiplie F_z et donc M_S par N , on multiplie bien sûr M par N . Donc la masse utile $M' = M_S - M$ est aussi multipliée par N .

Remarque.

Dans un palier magnétique réel, le dispositif étudié dans cette question est remplacé par un électroaimant. L'optimisation de l'électroaimant (question analogue à 2.2. *b*) consiste à :

- diminuer l'entrefer (valeur typique inférieure à 1 mm) ;
- augmenter la surface des tôles ferromagnétiques recouvrant l'axe du rotor ;
- utiliser 2 électroaimants exerçant des forces identiques à 45° de la verticale, ce qui fait gagner un facteur $\sqrt{2}$.

2.2. *c*) En régime permanent, la puissance $RI^2 = \rho \frac{l}{s} I^2$

dissipée par effet Joule est égale à la puissance rayonnée par le fil $k \times \pi d \times l$. D'où, avec $s = \pi d^2/4$, $\rho l I^2 = k \pi^2 d^3/4 \times l$, c'est-à-dire $I = \lambda d^{3/2}$.

Avec les notations introduites en 2.2. *b*, M est proportionnelle au volume de fil, donc $M = \mu d^2$; par contre M_S est proportionnelle à F_z , donc à I^2 , donc à d^3 , soit $M_S = \nu d^3$, d'où $M' = M_S - M = \nu d^3 - \mu d^2$. Donc M' est une fonction croissante de d (pour les valeurs de d telles que $M' > 0$) et on a intérêt à augmenter le diamètre des fils.

Soit d_c (resp. d_F) le diamètre du fil utilisé pour le cadre (resp. le fil infini), on a de même : $M' = \nu d_c^{3/2} d_F^{3/2} - \mu d_c^2$. On a donc intérêt à augmenter le diamètre du fil, et à diminuer celui du cadre. Donc le choix d'un même diamètre n'est pas le choix optimal.

2.3. *a*) La fonction F_z de Z est croissante. Donc la fonction $F_z + Mg$ aussi. A l'équilibre, on a $F_z(Z_0) + Mg = 0$. Donc :

- pour $Z > Z_0$ $F_z(Z) + Mg > 0$: le cadre est soumis à une accélération positive ;
- pour $Z < Z_0$ $F_z(Z) + Mg < 0$: le cadre est soumis à une accélération négative.

Sans vitesse initiale, il s'éloigne donc dans tous les cas de la position d'équilibre. Donc l'équilibre est instable. En pratique, la suspension est inutilisable.

2.3. *b*) Le travail de la force \mathbf{F} lors d'un déplacement élémentaire du cadre de Z à $Z + dZ$ s'écrit :

$$\delta W = F_z(Z) dZ = -\frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi} \times \frac{dZ}{Z^2} = -d\left(-\frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi Z}\right).$$

On peut donc définir une énergie potentielle $E_1 = -\frac{\mu_0 I^2 a^2}{2 \pi Z} + C_1$.

Comme $\lim_{Z \rightarrow \infty} E_1 = 0$, on a $C_1 = 0$, d'où $E_1 = -\frac{\mu_0 I^2 a^2}{2 \pi Z}$.

Soit $E_2 = -mgZ$ l'énergie potentielle de pesanteur, à une constante additive près, l'énergie potentielle totale s'écrit :

$E = -mgZ - \frac{\mu_0 I^2 a^2}{2 \pi Z}$. On peut calculer ses dérivées première et seconde :

$$\frac{dE}{dZ} = -mg + \frac{\mu_0 I^2 a^2}{2 \pi Z^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2E}{dZ^2} = -\frac{\mu_0 I^2 a^2}{\pi Z^3}.$$

En $Z = Z_0$, on a équilibre : $\frac{dE}{dZ} = 0$. Le signe négatif de $\frac{d^2E}{dZ^2}$ montre alors que en $Z = Z_0$, l'énergie potentielle est *maximale*. On retrouve le caractère instable de l'équilibre.

3. CAPTEUR DE POSITION

$$3.1. a) v_{MQ}(t) = Ri_{MQ}(t) = \frac{R}{2R} v_{MN}(t). \text{ Donc :}$$

$$v_{MQ}(t) = \frac{V}{2} \cos \omega_0 t.$$

Les deux condensateurs en série sont équivalents à un seul condensateur de capacité $\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ et portent la même charge

$$q(t) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} v_{MN}(t). \text{ La tension } v_{MP}(t) \text{ aux bornes de } C_1$$

$$\text{est donc : } v_{MP}(t) = \frac{q(t)}{C_1} \text{ soit } v_{MP}(t) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V \cos \omega_0 t.$$

$$3.1. b) v_{PQ}(t) = v_{MQ}(t) - v_{MP}(t) = \dots \\ \dots (V \cos \omega_0 t) \left(\frac{1}{2} - \frac{C_2}{C_1 + C_2} \right)$$

avec $C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{Z + e/2}$ et $C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{-Z + e/2}$, on obtient :

$$v_{PQ}(t) = -\frac{Z}{e} V \cos \omega_0 t.$$

$$3.2. a) e(t) = k v_{MN}(t) \cdot v_{PQ}(t) = -k \frac{V^2}{e} z_M \cos \omega t \cos^2 \omega_0 t$$

qu'on linéarise pour exploiter les données sur le filtre :

$$e(t) = -k \frac{V^2}{e} z_M \left[\frac{1}{2} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos (2\omega_0 - \omega) t + \dots \right. \\ \left. \dots \frac{1}{4} \cos (2\omega_0 + \omega) t \right].$$

Si $\omega \leq \omega_c$ et $2\omega_0 - \omega > \omega_c$, alors bien sûr $2\omega_0 + \omega > \omega_c$, et seule la fonction de pulsation ω est dans la bande passante du

filtre. Alors $s(t) = -k \frac{V^2}{e} z_M \times \frac{1}{2} \cos \omega t$, c'est-à-dire qu'on

$$a) \text{ bien } s(t) = \sigma z(t) \text{ avec } \sigma = -\frac{kV^2}{2e}.$$

Dans la limite $\omega = \omega_c$, la condition $2\omega_0 - \omega > \omega_c$ s'écrit $2\omega_0 - \omega_c > \omega_c$ c'est-à-dire $\omega_0 > \omega_c$. Cette condition porte sur la conception du filtre, et non sur le signal $z(t)$. Cette condition étant réalisée, la condition $\omega \leq \omega_c$ implique automatiquement la condition $2\omega_0 - \omega > \omega_c$.

3.2. b) D'après la linéarité du filtre, il suffit que $\sup_i(\omega_i) \leq \omega_c$ pour qu'on ait $s(t) = \sigma z(t)$.

3.2. c) Qualitativement, pour que $s(t) = \sigma z(t)$, il suffit que $z(t)$ soit « voisin » d'une somme (éventuellement infinie) de fonctions sinusoidales de pulsations inférieures à ω_c . Ceci correspond à une fonction $z(t)$ suffisamment lentement variable.

Remarque.

Une réponse quantitative à cette question nécessite la connaissance de la transformation de Fourier. On aura $s(t) = \sigma z(t)$ si $z(t)$ ne comprend dans son spectre aucune fréquence supé-

$$\text{rieure à } \omega_c, \text{ c'est-à-dire si } z(t) = \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} A(\omega) \exp(+i\omega t) d\omega.$$

Remarque.

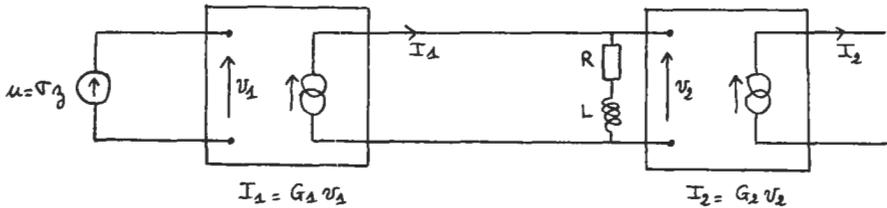
ω_c et ω_0 doivent être choisies dans la gamme des basses fréquences, compatibles avec l'approximation des régimes lentement variables dans les circuits électriques (fréquences inférieures à 1 MHz). La limitation correspondante sur $z(t)$ est peu restrictive, le spectre d'un signal mécanique usuel étant naturellement limité aux basses fréquences.

Remarque.

Les capteurs utilisés dans les paliers magnétiques actifs réels sont plutôt inductifs (capteurs à réluctance variable).

4. DISPOSITIF ELECTRONIQUE DE LIAISON

4.1.



Avec le schéma proposé :

$$v_1 = \sigma z; \quad I_1 = G_1 \sigma z; \quad v_2 = RI_1 + L \frac{dI_1}{dt} = G_1 \sigma \left(Rz + L \frac{dz}{dt} \right);$$

$$\text{et } I_2 = G_2 v_2 \text{ c'est-à-dire } I_2 = G_1 G_2 \sigma \left(Rz + L \frac{dz}{dt} \right).$$

Le dispositif assure donc bien la fonction souhaitée :

$$\gamma = \sigma G_1 G_2 R \quad \text{et} \quad \delta = \sigma G_1 G_2 L$$

sont réglables; le plus simple est de fixer L et G_1 et de régler R et G_2 .

Remarque.

Ce circuit doit commander l'électroaimant. Il comprend donc nécessairement un étage de puissance, dont la consommation représente l'essentiel de la consommation d'un palier magnétique actif. Malgré cette consommation d'énergie électrique, un palier magnétique actif permet de gagner un facteur dix à cent dans le bilan énergétique d'une machine tournante grâce à la suppression des frottements.

4.2. a) A la date $t = 0$, le courant i_L dans l'inductance est nul (il est nul avant la fermeture de l'interrupteur, et ne peut pas subir de discontinuité). On écrit alors la loi des nœuds $i_r = I_0$

et la loi des mailles $L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = ri_r$, d'où on tire :

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{r}{L} I_0.$$

En régime permanent, $\frac{di_L}{dt} = 0$. On écrit de même :

$$I_0 = i_r + i_L \quad \text{et} \quad ri_r = Ri_L$$

d'où : $i_L|_{t=\infty} = I_0 \frac{r}{R+r}$.

Si on linéarise la fonction $i_L(t)$ pour $0 \leq t \leq \tau$ on a :

$i_L(t) = \frac{r}{L} I_0 t$. On atteint donc le régime permanent lorsque

$$\frac{r}{L} I_0 t = I_0 \frac{r}{R+r} \quad \text{c'est-à-dire à la date } \tau = \frac{L}{R+r}.$$

Pour $L = 1 \text{ H}$ et $\tau = 10^5 \Omega$, $\tau \leq \frac{L}{R} = 10 \mu\text{s}$. Donc $\tau \leq 10 \mu\text{s}$.

Le régime permanent est atteint très rapidement.

4.2. b) Comme $i_L(t = +\infty) = I_0 \frac{r}{R+r} < I_0$, on peut pré-

voir une légère chute des coefficients γ et δ ; cette chute est compensable en augmentant G_1 ou G_2 et donc sans importance.

On peut prévoir qualitativement un retard de l'ordre de $10 \mu\text{s}$ maximum, du générateur de courant sur la position $z(t)$. Ceci n'a d'influence que pour des signaux rapides (signaux sinusoïdaux de fréquences supérieures à 10 kHz). On trouve donc une nouvelle limitation sur $z(t)$, de même nature que celle introduite par la condition de fonctionnement du filtre (cf. 3.2. c).

5. SUSPENSION MAGNETIQUE ASSERVIE

5.1. On a vu en 2.3. a que $F_z(Z)$ est une fonction croissante de $Z = Z_0 + z$, donc F_z doit être une fonction croissante de z , donc $-Mg\alpha$ est positif, c'est-à-dire que α est négatif.

$$F_z = -k' \frac{I_0^2}{Z_0^2} \left(1 + \frac{i}{I_0}\right)^2 \left(1 + \frac{z}{Z_0}\right)^{-2} = \dots$$

$$\dots - k' \frac{I_0^2}{Z_0^2} \left(1 + \frac{2i}{I_0} - 2\frac{z}{Z_0}\right)$$

à l'ordre 1 en z/Z_0 et i/I_0 . De plus, pour $I = I_0$ et $Z = Z_0$, on

a équilibre, donc $F_z + Mg = 0$ c'est-à-dire $-k' \frac{I_0^2}{Z_0^2} + Mg = 0$.

Donc $F_z = -Mg \left(1 + \frac{2i}{I_0} - \frac{2z}{Z_0}\right)$ c'est-à-dire que $\alpha = -\frac{2}{Z_0}$ et

$$\beta = \frac{2}{I_0}.$$

5.2. On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse M dans son mouvement par rapport au référentiel $Oxyz$ galiléen et on projette sur l'axe Oz : $F_z + Mg = Ma_z$ avec

$$a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \quad \text{et}$$

$$F_z + Mg = -Mg\alpha z - Mg\beta i = -Mg\alpha z - Mg\beta \left(\gamma z + \delta \frac{dz}{dt}\right).$$

On en tire l'équation différentielle :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + g\beta\delta \frac{dz}{dt} + g(\alpha + \beta\gamma)z = 0.$$

5.3. Les solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + g(\alpha + \beta\gamma)z = 0$$

sont sinusoïdales si $g(\alpha + \beta\gamma) > 0$ soit $\beta\gamma > -\alpha$.

Avec $\alpha < 0$ et $\beta > 0$ on en déduit $\gamma > -\frac{\alpha}{\beta} > 0$. On ne

peut donc pas avoir $\gamma = 0$ de sorte que l'asservissement est indispensable (prévisible, vu les conclusions de la question 2.3. a).

5.4. Pour $\delta > 0$, puisque $\beta > 0$, le terme $-Mg\beta\delta \frac{dz}{dt}$ de la force F_z est analogue à une force de frottement fluide, et crée donc un amortissement des oscillations (voire leur suppression si le régime est aperiodique).

Ainsi la masse M abandonnée au voisinage de sa position d'équilibre $z = 0$, évolue vers cette position d'équilibre. L'asservissement a donc permis de rendre la suspension magnétique stable, et donc utilisable.

6. PALIER MAGNETIQUE ACTIF

6.1. La cote z_G de G dans le référentiel $Oxyz$ galiléen s'écrit : $z_G = z + b \cos \omega t$, donc la composante a_z de l'accélération a de G dans ce référentiel s'écrit : $a_z = \ddot{z} - b\omega^2 \cos \omega t$.

On applique le principe fondamental de la dynamique au rotor dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen $Oxyz$ et on projette sur Oz :

$$M\ddot{z}_G = M[\ddot{z} - b\omega^2 \cos \omega t] = Mg + F_z = Mg - Mg(1 + Cz + D\dot{z}).$$

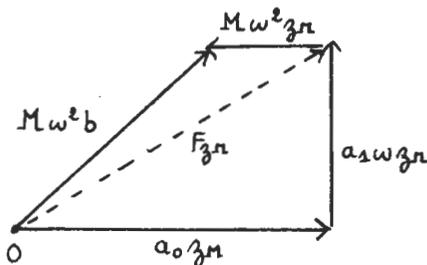
D'où, en ordonnant :

$$M\ddot{z} + MgD\dot{z} + MgCz = M\omega^2 b \cos \omega t.$$

L'équation différentielle dont est solution $z(t)$ a bien la forme attendue avec :

$$a_0 = MgC; \quad a_1 = MgD; \quad H = M\omega^2 b.$$

6.2. a) On utilise par exemple la construction de Fresnel pour sommer les trois fonctions sinusoïdales : a_0z , a_1z , $M\dot{z}$, d'où :



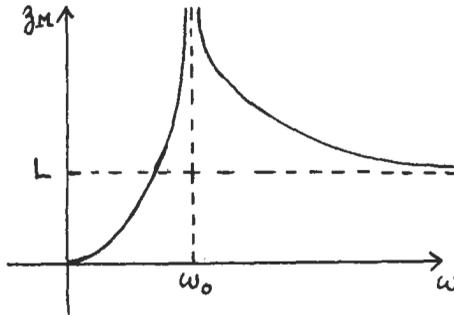
$$(M\omega^2 b)^2 = [(a_0 - M\omega^2)^2 + (a_1 \omega)^2] z_M^2$$

soit :

$$z_M = \frac{M \omega^2 b}{\sqrt{(a_0 - M \omega^2)^2 + (a_1 \omega)^2}}$$

De même, $F_z = -Mg(1 + Cz + Dz) = -Mg - (a_0z + a_1\dot{z}) = -Mg + F_{z_M} \cos(\omega t - \psi)$. On utilise la construction de Fresnel pour sommer a_0z et $a_1\dot{z}$, d'où : $F_{z_M}^2 = [a_0^2 + (a_1 \omega)^2] z_M^2$, soit en remplaçant z_M par son expression : $F_{z_M} = \frac{M \omega^2 b \sqrt{a_0^2 + a_1^2 \omega^2}}{\sqrt{(a_0 - M \omega^2)^2 + a_1^2 \omega^2}}$.

6.2. b) Pour $a_1 = 0$, on a : $z_M = \frac{M \omega^2 b}{|a_0 - M \omega^2|}$, dont on trace facilement la représentation graphique en remarquant les asymptotes d'équation $z_M = b$ et $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{M}}$.



$$z_M = 3b \quad \text{si} \quad a_0 - M \omega^2 = \pm \frac{1}{3} M \omega^2 \quad \text{soit pour :}$$

$$\omega = \omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0 \quad \text{et} \quad \omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \omega_0.$$

Le domaine dangereux est alors le domaine $[\omega_1, \omega_2]$.

Remarque.

Pour $\omega = \omega_0$, il y a résonance pour le mouvement de translation du rotor. Le domaine dangereux correspond au voisinage de la vitesse de rotation critique de la machine.

6.3. a) Si $C = 0$ et $D = 0$, on a : $M \frac{d^2 z_G}{dt^2} = 0$, soit en

régime permanent $z_G = 0$ (il faut supposer que D n'est pas tout à fait nul pour pouvoir négliger le régime transitoire éventuel). Donc G est fixe dans le référentiel Oxyz galiléen : la composition du mouvement de rotation du rotor autour de l'axe Az et du mouvement de translation rectiligne de cet axe, est un mouvement de rotation du rotor autour de l'axe fixe Gz.

Remarque.

Le constructeur parle alors d'équilibrage automatique ; il s'agit dans ce problème uniquement d'équilibrage statique. En utilisant deux paliers magnétiques, on peut de même réaliser l'équilibrage dynamique du rotor : le rotor tourne autour d'un axe principal d'inertie Gz' (non parallèle à Oz éventuellement).

Puisque $F_z = -Mg$, la force $-F$ exercée par le rotor sur le stator n'a pas de composante sinusoïdale, et donc le stator ne vibre pas.

Remarque.

La possibilité d'équilibrage automatique est une qualité essentielle des paliers magnétiques actifs. Plus généralement, la modification des circuits électroniques (amplificateurs sélectifs, filtres) permet de modifier la courbe $z_M(\omega)$. La seule contrainte lorsqu'on introduit ces modifications est de conserver à la suspension magnétique sa stabilité.

6.3. b) Si C et D sont infinis, $z_M = 0$. Donc l'axe du rotor est rigidement lié au stator. On utilise cette possibilité pour les machines où la position de l'axe du rotor doit être définie avec précision par rapport au stator (machines destinées à l'usinage de précision par exemple). On peut ainsi atteindre une précision de $0,05 \mu\text{m}$ sur la position de l'axe du rotor.

6.3. c) En rendant C et D « localement » infinis au voisinage de ω_0 (vitesse de rotation critique définie en 6.2. b) on diminue fortement z_M comme en 6.3. b, ce qui permet de faire transiter sans danger la machine par un fonctionnement à vitesse critique. Une fois la zone dangereuse dépassée, on revient aux valeurs normales de C et D.

6.4. a) Il suffit d'ajouter un condensateur en série avec R et

L. On a alors : $i = \sigma G_1 G_2 (Rz + L \frac{dz}{dt} + \frac{1}{C} \int z dt)$. D'où, dans

$F_z = -Mg(1 + \alpha z + \beta i)$ un terme de la forme :

$$-Mg \beta \sigma G_1 G_2 \times \frac{1}{C} \int z dt.$$

6.4. b) A très basse fréquence, le terme $-Mg E \int z dt$ d'amplitude $\frac{Mg E z_M}{\omega}$ est prépondérant dans la construction de Fresnel. On a alors : $H \simeq \frac{Mg E z_M}{\omega}$, soit : $z_M \simeq \frac{H \omega}{g EM}$. Ce terme permet donc de diminuer fortement z_M à basse fréquence.

Si $H = M b \omega^2$, ceci est sans intérêt. Par contre, si le rotor est soumis à une force supplémentaire de la forme $H' \cos \omega' t$ avec H' indépendant de ω' et ω' faible, le terme supplémentaire capacitif permet de réduire fortement l'influence de cette force sur z_M .

Comme exemple de situation où on a ce type de forces supplémentaires, on peut citer la scie circulaire. Lorsque la lame s'enfonce dans la planche, celle-ci exerce sur le rotor des actions de contact dont la résultante possède une composante F'_z dont la valeur moyenne est non nulle. Tout se passe alors comme si le rotor était soumis à une force statique $F'_z = H'$ ($\omega' = 0$). L'ajout du condensateur permet d'éviter un déplacement de l'axe du rotor trop important sous l'effet de F'_z .

Remarque.

On ne peut évidemment pas avoir un terme intégrateur $\frac{1}{C} \int z dt$ pur sous peine de saturer les amplificateurs à basse fréquence. Le circuit est donc encore plus compliqué...

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

- H. HABERMANN et Y. DESTOMBES. — « *Le palier magnétique actif, caractéristiques, applications* ». Revue Française de Mécanique, 1985/1.
- M. GAUTHIER. — « *Paliers à suspension magnétique dans les applications spatiales* ». Revue Française de Mécanique, 1985/1.

S. OLIVIER,

et les membres du Jury du Concours Général.

C.A.P.E.S

SESSION DE 1986

COMPOSITION DE PHYSIQUE AVEC APPLICATIONS

(Durée : 5 heures)

Cette épreuve comporte quatre parties totalement indépendantes. Les parties A, B et C traitent de mécanique et la partie D d'électrocinétique.

Certaines questions portent sur des définitions de base du programme de physique des lycées. Les candidats ne devront pas négliger ces questions.

D'autre part, cette épreuve est un problème de physique et, comme tel, cherche à se distinguer d'une épreuve de calcul. Ceci a pour conséquence que la réponse à une question n'a aucune signification sans les explications et les justifications qui doivent l'accompagner. Mais la clarté et la concision vont souvent de pair et il sera accordé beaucoup d'importance à ces qualités. En particulier, cette épreuve comporte un certain nombre de graphiques auxquels il faudra apporter le soin voulu.

Dans tout le problème, le référentiel d'étude sera supposé galiléen et on se placera dans l'hypothèse de la mécanique classique.

A. ETUDE D'UN SYSTEME MATERIEL ASSIMILABLE A UN POINT MATERIEL

A.1. LES PRINCIPES DE BASE.

A.1.1. Donner, dans ces conditions, l'énoncé du principe d'inertie et du principe fondamental de la dynamique.

A.1.2. Dans le cadre de la mécanique, le terme masse représente indifféremment le coefficient d'inertie et le coefficient gravitationnel d'un point matériel. Indiquer une expérience simple qui permet de vérifier sans grande précision, mais de façon très probante, la proportionnalité de ces deux coefficients.

A.2. LE POINT DE VUE ÉNERGÉTIQUE.

A.2.1. Démontrer et énoncer le théorème de l'énergie cinétique.

A.2.2. On peut aborder la notion d'énergie potentielle au moins de deux façons :

- par l'intermédiaire de la notion de champ de force défini dans l'espace sans préciser la cause et en masquant en fait le phénomène d'interaction ;
- par l'intermédiaire de l'étude directe de l'interaction entre deux systèmes en définissant le système global qui possède l'énergie.

Par souci de simplicité, les commentaires du programme de la classe de première S semblent pencher pour la première méthode qui sera adoptée ici.

Dans le cas d'une force provenant d'un champ indépendant du temps, indiquer à quelle condition on peut définir une énergie potentielle. On demande un exposé qui sépare bien l'aspect mathématique et l'interprétation physique de la notion d'énergie potentielle.

A.2.3. Définir l'énergie mécanique d'un point matériel. Indiquer dans quelles conditions l'énergie mécanique se conserve.

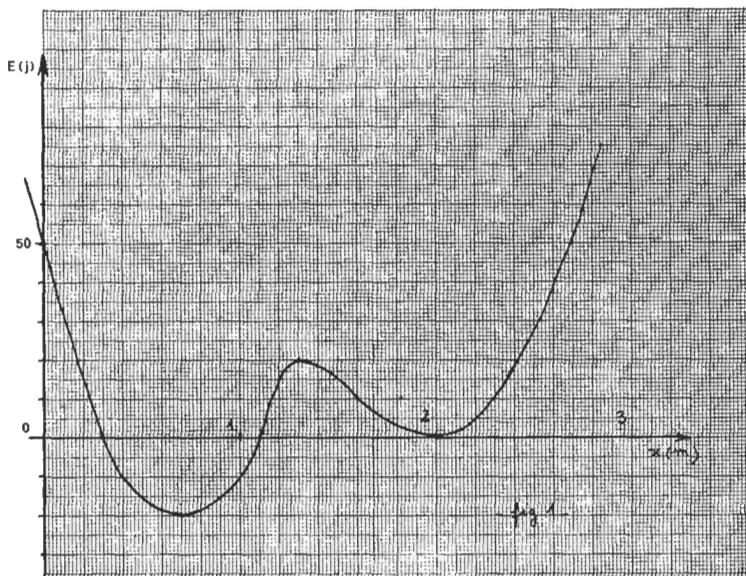


Fig. 1

A.2.4. Une particule matérielle de masse $m = 0,200$ kg est assujettie à se déplacer sur un axe Ox . Elle est soumise à une force $f(x)$ parallèle à cet axe et dérivant de l'énergie potentielle $E(x)$ dont les variations sont représentées sur la fig. 1.

a) Etablir le tableau des variations de $f(x)$ dans l'intervalle considéré. Donner le sens et l'ordre de grandeur de la norme de $f(0)$ et de $f(1)$.

b) Le mobile est abandonné en $x = 0$ à $t = 0$, sans vitesse initiale. Tracer (sur un graphique nommé G_1) la courbe $V(x)$ de la valeur algébrique de la vitesse pour le premier passage entre $x = 0$ et $x = 2,7$ m.

L'échelle prise sera : axe de x : 5 cm pour 1 m,
axe des y : 1 cm pour 5 ms⁻¹.

c) Quelle est la nature du mouvement au cours du temps ?

A.3. APPLICATION A L'ÉTUDE D'UN SATELLITE TERRESTRE.

On considérera le repère géocentrique R_G , dirigé vers des « étoiles fixes », comme galiléen. Toute l'étude sera faite dans ce repère. Le satellite sera assimilé à un point matériel de masse m négligeable devant celle de la Terre. On supposera aussi la Terre de forme sphérique et créant un champ à symétrie sphérique. Pour les applications numériques, on prendra : R_T (rayon de la Terre) : $6,37 \cdot 10^6$ m.

A.3.1.

a) Démontrer que le champ de gravitation créé par la Terre en un point M extérieur est, dans ces conditions, assimilable au champ créé par une masse ponctuelle. Quelle est la valeur de cette masse et où est-elle située ?

b) Exprimer $\mathbf{g}(M)$ en fonction de $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ (où O désigne le centre de la Terre), R_T et g_0 (où $g_0 = g(R_T) = 9,81$ m. s⁻²).

c) Donner, en la démontrant, l'expression de $E_p(M)$, l'énergie potentielle de gravitation d'une masse ponctuelle m soumise à $\mathbf{g}(M)$. On prendra, en la spécifiant clairement, la convention d'origine qui donne l'expression la plus simple pour $E_p(M)$.

A.3.2. Dans le cas d'un satellite circulaire gravitant à la distance r_0 du centre de la Terre, donner, en les démontrant, les expressions de la vitesse V_0 du satellite, de son énergie mécanique E_m et de sa période de révolution T dans R_G , en fonction des seuls paramètres g_0 , R_T , r_0 et m .

A.3.3. Dans le cas général où la trajectoire n'est pas circulaire, on démontre que c'est une conique dont l'un des foyers est en O .

a) En gardant la convention définie précédemment pour l'énergie potentielle, montrer que, si l'énergie mécanique reste négative, la trajectoire ne peut être qu'une ellipse.

b) Une ellipse est caractérisée (fig. 2) par son grand axe PA ($|PA| = 2a$), son apogée A ($|OA| = r_A$), son périégée P ($|OP| = r_P$), où a , r_A , r_P sont donc positifs. On admet que l'énergie du satellite

sur cette trajectoire est donnée par $E_m = -m \cdot \frac{g_0 R_T^2}{2a}$. Montrer que

cette relation est compatible avec celle établie en A.3.2.

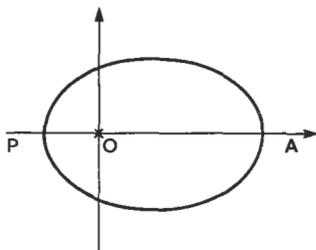


Fig. 2

A.3.4. Pour passer d'une orbite circulaire basse de rayon r_1 sur une orbite circulaire haute coplanaire de rayon r_2 , on utilise une orbite elliptique dite orbite de transfert (T), tangente en son périhélie à l'orbite (C_1) et en son apogée à l'orbite (C_2) (voir fig. 3). Pour passer de (C_1) sur (T), une accélération tangentielle assez brève communiquée en P au satellite une augmentation de vitesse $\Delta V_P = V_P - V_1$. A l'arrivée en A, une nouvelle accélération tangentielle brève communiquée une nouvelle augmentation de vitesse $\Delta V_A = V_2 - V_A$ et place le satellite sur (C_2) . V_1 et V_2 désignent respectivement les vitesses du satellite sur (C_1) et sur (C_2) .

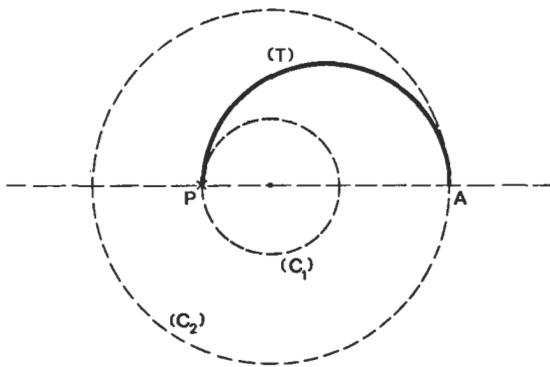


Fig. 3

a) Donner les expressions de V_1 , V_2 , V_P et V_A en fonction de g_0 , R_T , r_1 et r_2 .

Application numérique : $r_1 = 8 \cdot 10^6$ m et $r_2 = 42 \cdot 10^6$ m.

b) Montrer que les valeurs de V_A et V_P obtenues sont compatibles avec le théorème du moment cinétique.

c) Considérant qu'une quantité de l'ordre de 10^{-2} peut être négligée devant l'unité, donner l'ordre de grandeur des intervalles

de temps τ_A et τ_B que ne doivent pas dépasser les durées des impulsions communiquées en A et en P.

B. ETUDE D'UN SYSTEME DEFORMABLE, NON ASSIMILABLE A UN POINT MATERIEL

B.1. LES EXPRESSIONS GÉNÉRALES.

B.1.1. Définir le centre de masse (ou d'inertie) d'un système matériel.

B.1.2. Donner, en la démontrant, l'expression de la quantité de mouvement totale du système.

B.1.3. Définir l'énergie cinétique d'un système matériel. L'exprimer en fonction de sa masse totale et d'autres paramètres par l'intermédiaire du repère barycentrique que l'on définira au préalable. Donner la signification des deux termes obtenus.

B.1.4. Enoncer sans démonstration le théorème de l'énergie cinétique.

B.2. UNE PREMIÈRE APPLICATION A L'ÉTUDE D'UN SYSTÈME DÉFORMABLE.

Un camion de masse $M = 5$ t transporte un objet assimilable à un cube de 0,5 m de côté et de masse $m = 1$ t. Initialement l'objet est complètement à l'arrière du camion (fig. 4 a 1).

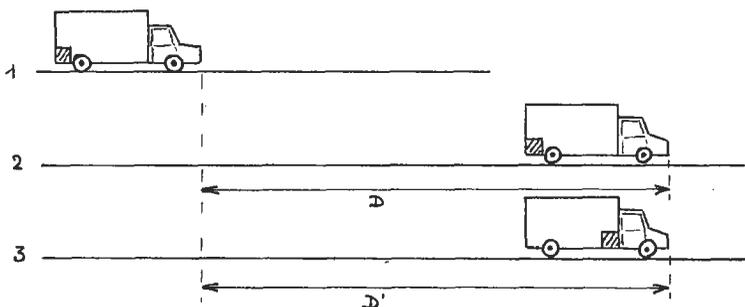


Fig. 4 a.

Le camion se déplace à 60 km/h sur une route horizontale. Le conducteur freine et le camion s'arrête sur une distance $D = 100$ m, comptée comme l'indique la fig. 4 a 1 et 2, après le début effectif du freinage. Dans un deuxième temps, le camion de nouveau lancé à 60 km/h, le conducteur freine et s'arrête sur une distance D' (fig. 4 a 1 et 3). Au cours de ce dernier freinage, le colis, mal arrimé, s'est déplacé vers l'avant de la plate-forme où il s'est coincé avant l'arrêt du camion. On fait l'hypothèse que l'action des freins a été rigoureusement identique dans les deux cas. On néglige les forces de résistance de l'air et on suppose qu'à aucun moment le camion n'a glissé par

rapport à la route. Les dimensions du camion et la position de son centre d'inertie G sont données sur la fig. 4 b.

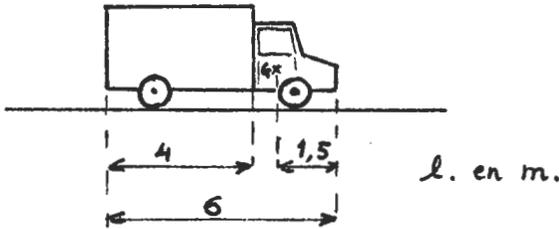


Fig. 4 b.

B.2.1. Peut-on avec ces hypothèses calculer D' ?

- si oui, faire le calcul et commenter le résultat ;
- si non, indiquer clairement pourquoi. S'il manque des données ou des hypothèses les indiquer et, choisissant des valeurs vraisemblables, faire le calcul de D' et commenter le résultat.

B.2.2. Au cours du freinage, une certaine quantité d'énergie est dissipée sous forme de chaleur. Peut-on avec les hypothèses faites et les données fournies calculer cet échange d'énergie dans le premier et le deuxième cas ?

- si oui, faire le calcul ;
- si non, expliquer les hypothèses et les données manquantes.

(L'ensemble de la réponse à la question B.2. ne doit pas dépasser une page et demie à deux pages au maximum.)

B.3. QUELQUES CONSIDÉRATIONS ÉNERGÉTIQUES.

B.3.1. La consommation d'une grosse voiture est voisine de celle d'une petite voiture à vitesse stabilisée (6 à 7 litres aux 100 km pour l'une contre 5 à 6 litres pour l'autre, à 90 km/h). Par contre, la conduite en ville fait davantage consommer la grosse voiture que la petite (11 à 12 litres pour l'une contre 7 à 8 litres pour l'autre). Comment peut-on expliquer simplement cette constatation ?

B.3.2. Trois élèves discutent une information lue dans un journal. Bien qu'il faille être très prudent avec ce qui est écrit dans la presse, on ne remettra pas en cause cette information ! On demande simplement de juger les affirmations des élèves. Les questions qui sont posées seront précisées après l'information proposée :

« En région parisienne, sur un laps de temps de 24 heures, il y a environ deux millions de véhicules qui se déplacent. En moyenne, chaque véhicule roule deux heures, parcourt 50 km et le moteur développe pendant son fonctionnement une puissance de 15 kW. »

Voici la discussion entre les trois élèves :

* Alfred dit : « Avec ces données, je peux calculer le dégagement de chaleur que provoque la circulation automobile. »

* Béatrice répond : « Non ! Il te manque le rendement moyen d'un moteur de voiture. J'ai lu qu'il était voisin de 0,25 ; c'est ce que je vais prendre pour faire le calcul. »

* Camille réplique : « Vous avez tort tous les deux ! Il manque d'autres données. »

Qui a raison ? Justifier la réponse. En tout état de cause, faire le calcul de la quantité de chaleur dégagée (si besoin est, préciser les données manquantes et leur donner des valeurs plausibles).

Comparer cette pollution thermique engendrée en 24 heures à celle d'une centrale EDF fonctionnant sans arrêt, dont la puissance électrique est de 900 MW et dont le rendement global est de 0,35.

C. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE

NOTE : Le résultat de certaines questions est fourni dans l'énoncé de façon à permettre aux candidats de poursuivre la résolution du problème.

C.1. CARACTÉRISATION ET EFFET D'UN COUDE DANS L'ÉCOULEMENT.

Dans tout le paragraphe C, on considère une veine de fluide incompressible et non visqueux, de masse volumique ρ constant, se déplaçant à une vitesse \vec{V} , de norme V constante et uniforme. La surface S de la veine de fluide, comptée dans une section droite perpendiculaire à la vitesse, sera donc supposée constante.

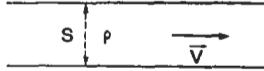


Fig. 5

C.1.1. Définir et exprimer le débit massique q .

C.1.2.

a) La veine de fluide subit un coude (fig. 6) ; la norme de

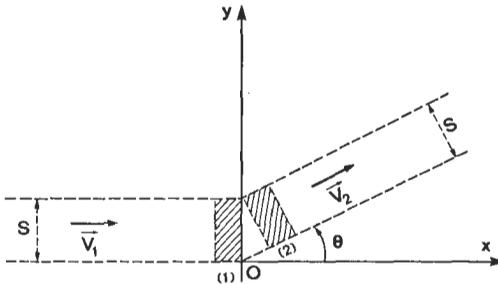


Fig. 6

la vitesse étant constante $|\mathbf{V}_1| = |\mathbf{V}_2| = V$. ϑ est l'angle entre \mathbf{V}_2 et l'axe des x . Le plan Oxy est supposé horizontal. On considère que pendant un laps de temps dt , une masse dm comprise dans un volume $d\mathcal{C} = S \cdot V \cdot dt$ passe de l'état (1) à l'état (2). En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse dm , déterminer les composantes \mathbf{F}_x et \mathbf{F}_y de la force \mathbf{F} que le fluide exerce sur le coude.

b) Montrer que cette force peut se mettre sous la forme : $|\mathbf{F}| = F = A \cdot f(\vartheta)$ où le terme A ne dépend que de ρ , S et V . Donner les expressions de A et de $f(\vartheta)$.

c) *Application numérique.*

Calculer F pour de l'eau, $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ avec un débit $q = 50 \text{ kg s}^{-1}$ et avec $\vartheta = 45^\circ$ et $S = 10^{-2} \text{ m}^2$.

C.2. APPLICATION A L'ÉTUDE DE LA PROPULSION D'UN BATEAU A VOILE.

On assimile la voile d'un petit bateau à une surface plane Σ placée dans l'écoulement d'air que constitue le vent relatif par rapport au bateau. Ce dernier se déplaçant à vitesse constante constitue un repère galiléen qui sera choisi pour toute cette question.

On admettra que l'action d'une voile réglée pour que le plan de Σ fasse un angle φ avec la direction du vent relatif (fig. 7) consiste à

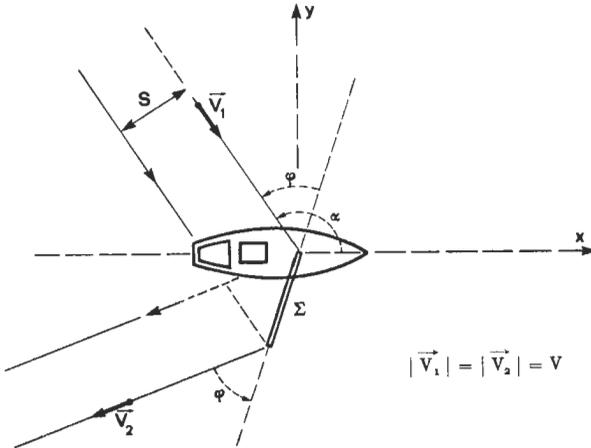


Fig. 7

dévier de 2φ le tube du courant qui aurait traversé Σ en l'absence de la voile. On admettra, en outre, que la voile n'altère pas de façon sensible l'écoulement de l'air en dehors de ce tube de courant. On pourra donc, dans ces conditions, assimiler la voile à un coude dans un tube de courant d'air s'écoulant à vitesse constante en module. On admettra que ρ , la masse volumique de l'air, reste constante. Comme

on n'étudie pas ici le mouvement de dérive du bateau, on ne s'intéresse qu'à la composante suivant Ox , soit f , de la force exercée par le vent sur la voile.

C.1. Donner la relation entre S , surface de la veine d'air, et Σ .

C.2.2. Montrer que $f = \rho \cdot \Sigma \cdot V^2 \cdot g(\alpha, \varphi)$ est une fonction uniuement de α et de φ telle que :

$$g(\alpha, \varphi) = 2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \sin(\alpha - \varphi).$$

C.2.3.

a) Représenter sommairement sur un même graphique (nommé G_2) les variations de g en fonction de φ pour les deux valeurs particulières de α : $\alpha_1 = 90^\circ$ et $\alpha_2 = 180^\circ$. Expliquer en quoi ces deux graphiques permettent de voir que, pour une allure de vent relatif donné (α fixé), il existe un réglage optimum de la voile correspondant à une valeur $\varphi_m(\alpha)$ de l'angle φ . Donner les valeurs approchées de φ_m pour $\alpha_1 = 90^\circ$ et $\alpha_2 = 180^\circ$.

b) Montrer que pour une valeur quelconque de α , φ_m est défini par la relation $2 \operatorname{tg}(\alpha - \varphi_m) = \operatorname{tg} \varphi_m$. Pour déterminer $\varphi_m(\alpha)$, donner un tableau comportant au moins dix valeurs. Les valeurs numériques seront déterminées soit à la machine à calculer, soit à partir de la courbe fournie (fig. 8). Dans l'un ou l'autre cas, la procédure employée sera soigneusement expliquée.

c) Faire un schéma du bateau, de sa voile et de la direction du vent relatif pour le réglage optimum correspondant aux valeurs de α : 50° , 90° et 180° .

C.2.4.

a) Tracer la courbe $g(\alpha, \varphi_m) = y(\alpha)$ (graphique nommé G_3), à partir des résultats précédents. On justifiera rapidement le nombre et l'emplacement des points choisis pour tracer une courbe suffisamment précise.

Echelle : y en ordonnée : 10 cm pour une unité ;

α en abscisse : 1 cm pour 10 degrés.

b) En déduire la valeur de la force propulsive qu'on peut obtenir en déployant une voile de 30 m^2 dans un vent relatif de vitesse $V = 10 \text{ ms}^{-1}$ arrivant par le travers ($\alpha = 90^\circ$). On prendra $\rho = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$.

C.2.5. L'une des caractéristiques importantes d'un bateau est sa capacité à remonter au vent. Pour déterminer cette capacité, on continue de négliger le mouvement de dérive et on considère que la coque et les superstructures présentent une résistance à l'écoulement de l'air équivalente à celle d'une surface s_0 perpendiculaire au vent relatif. Montrer, avec ces hypothèses, que le bateau ne peut plus avancer si $\alpha \leq \alpha_0$. Déterminer à l'aide des graphiques précédents la valeur de α_0 pour $s_0 = 3 \text{ m}^2$, en conservant les valeurs numériques de C.2.4. b.

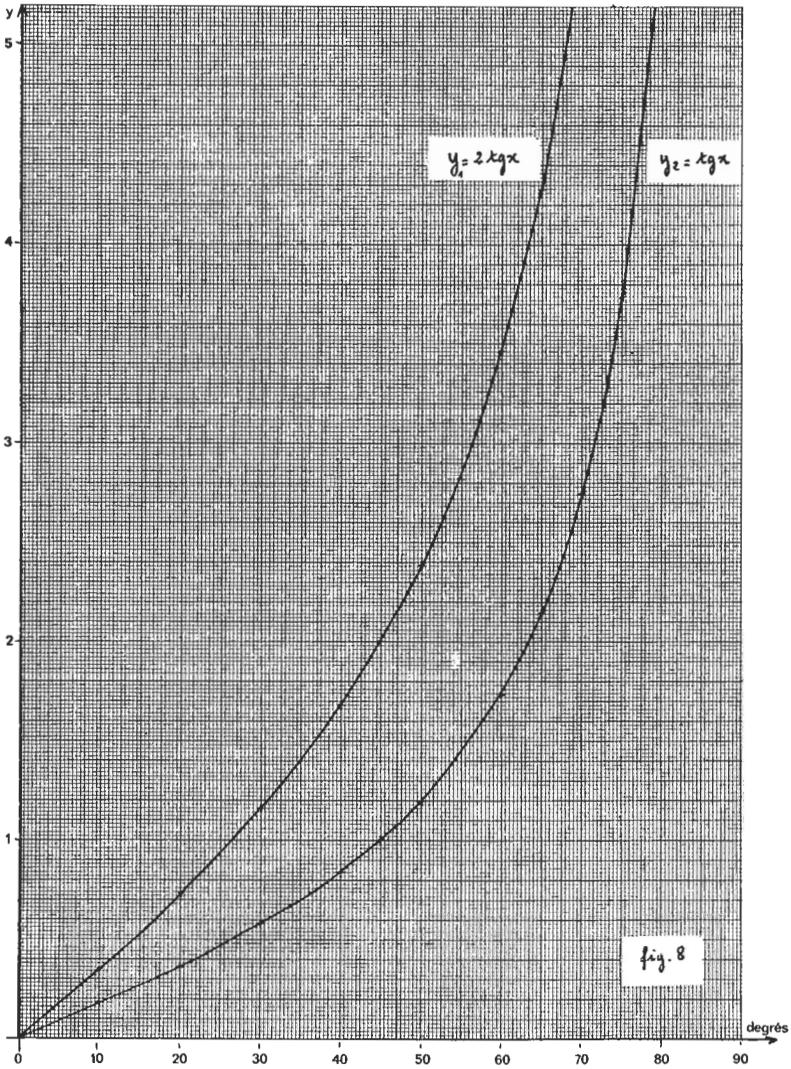


Fig. 8

D. ELECTRODINAMIQUE

Dans cette étude, la tension et l'intensité seront des grandeurs algébriques. Dans les réponses et sur les schémas on précisera avec soin les conventions d'orientation choisies pour ces grandeurs.

D.1. GÉNÉRALITÉS.

D.1.1. Définir sur le schéma d'un dipôle les conventions d'orientation pour u et pour i correspondant à la convention « récepteur ».

D.1.2. Énoncer la loi des nœuds et la loi des mailles pour un réseau électrique dans l'hypothèse des régimes permanents ou lentement variables.

D.2. EXEMPLES.

D.2.1. *La diode Zener* Définir la tension seuil V_s et la tension Zener V_z . Donner l'aspect de la caractéristique $i(u)$ d'une diode Zener de résistance dynamique nulle.

D.2.2. *Le condensateur.*

a) Définir la charge d'un condensateur. Donner la relation entre la charge q et la tension u . Faire un schéma.

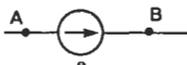
b) Donner la relation $i(u)$. Faire un schéma.

D.2.3. *La bobine.*

Pour une bobine de coefficient d'auto-inductance L et de résistance r , donner la relation $u(i)$. Faire un schéma.

D.2.4. *Le générateur de tension.*

On appelle générateur de tension idéal un générateur capable de maintenir une tension constante quel que soit le courant d'intensité i qui le traverse. On peut le représenter par le symbole :



où B désigne le pôle positif et e la force électro-motrice. A l'aide de ce modèle :

a) Donner le schéma d'un générateur réel à caractéristique $u(i)$ rectiligne, ainsi que la relation tension-courant (représentation dite de Thévenin).

b) Donner les ordres de grandeur numériques des paramètres nécessaires pour décrire selon la représentation de Thévenin une pile plate de lampe de poche, et une batterie d'accumulateurs utilisée dans une voiture.

D.2.5. *Le générateur de courant.*

On appelle générateur de courant idéal, un générateur capable de débiter un courant d'intensité constante quel que soit le circuit qu'il alimente. On peut le représenter par le symbole :



où B désigne le pôle positif et $i = I$.

A l'aide de ce modèle :

a) Donner le schéma d'un générateur réel à caractéristique $i(u)$ rectiligne, ainsi que la relation courant-tension (représentation de Norton).

b) Donner les ordres de grandeur numériques des paramètres nécessaires pour décrire selon la représentation de Norton les deux générateurs réels précédents.

c) Quelle est la représentation la plus appropriée pour ces deux sources d'énergie ?

D.3. LE CIRCUIT R-C.

D.3.1. Réponse à un générateur de tension parfait.

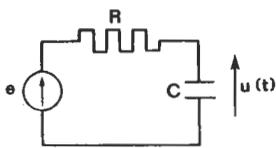


Fig. 9 a.

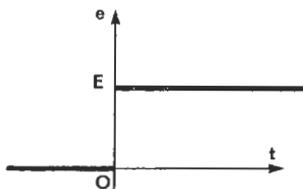


Fig. 9 b.

On considère le circuit de la fig. 9 a alimenté par un générateur de tension parfait imposant à ses bornes un « échelon » de tension de la forme définie par la fig. 9 b, soit pour :

$$t < 0; \quad e = 0; \quad t \geq 0, \quad e = E.$$

a) Donner en la démontrant l'expression de $u(t)$.
Représenter schématiquement $u(t)$ sur un graphique.

b) Que devient l'expression de $u(t)$ pour un échelon de tension de la forme :

$$t < 0, \quad e = E_0; \quad t \geq 0, \quad e = E + E_0?$$

D.3.2. Réponse à un générateur de courant parfait.

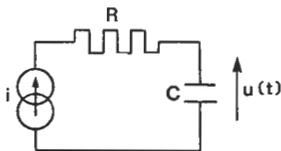


Fig. 10 a.

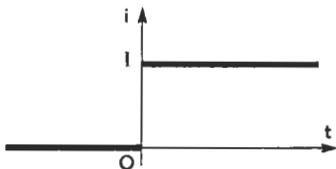


Fig. 10 b.

On considère le circuit de la fig. 10 a alimenté par un générateur de courant parfait délivrant un « échelon » de courant défini par la fig. 10 b, soit pour $t < 0, \quad i = 0; \quad t \geq 0, \quad i = I.$

Donner l'expression de $u(t)$. Que risque-t-il de se passer si on ne prend aucune précaution ?

D.3.3. Application.

On considère le montage défini par la fig. 11.

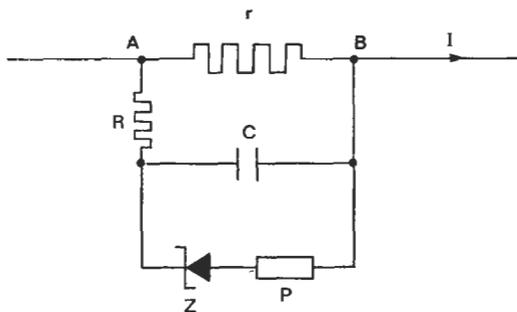


Fig. 11

$$r = 10 \Omega; \quad R = 10^6 \Omega.$$

Z = diode Zener parfaite $V_Z = 14 \text{ V}$.

P = relais ne consommant aucune puissance, qui coupe le courant principal (I) dès qu'il est lui-même traversé par un courant.

La tension normale de fonctionnement de r est $U_{AB} = U_0 = 10 \text{ V}$. Par suite d'un incident, cette tension monte à une valeur $U = 15 \text{ V}$, valeur qui n'est pas admissible si elle dure trop longtemps. Par contre, il arrive très fréquemment qu'une telle surtension se produise pendant quelques secondes ; ceci n'a rien de grave et il serait tout à fait inutile de protéger le circuit par un fusible qui sauterait trop souvent. On fait le montage de la fig. 11. Quelle valeur doit-on donner à la capacité C, si on veut que la durée de la surtension U n'excède pas 5 secondes ? On fait l'hypothèse que U_{AB} passe brutalement de U_0 à U .

D.4. EFFET D'UNE RUPTURE BRUTALE DANS UN CIRCUIT.

Un fil de section $s = 1 \text{ mm}^2$ est parcouru par un courant. D'une façon qu'on supposera instantanée une longueur de 0,1 mm disparaît (rupture) laissant un vide équivalent. Plusieurs modèles sont envisageables *a priori* pour décrire cette petite rupture :

MODELE a : un condensateur dont le diélectrique est l'air supposé isolant tant que la tension n'est pas trop grande. Ce modèle permet d'étudier le début du phénomène.

MODELE b : quand l'air est devenu conducteur, on peut assimiler cette rupture à une résistance.

ETUDE DU MODÈLE a.

D.4.1. Quelle est la valeur de C en supposant qu'on puisse considérer valable l'approximation du condensateur plan (on prendra $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ u. SI) ?

D.4.2. Le circuit considéré a la forme indiquée par la fig. 12 avec $E = 10$ V et $R = 10 \Omega$. On prend la date où se produit la rupture comme origine des temps.

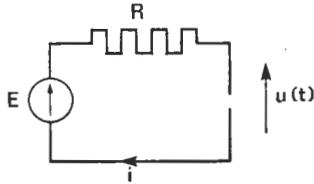


Fig. 12

a) Que doit-on prendre comme conditions initiales pour $i(0+)$ et $u(0+)$?

b) En déduire $u(t)$ et $i(t)$. Au bout de combien de temps $i(t) = 10^{-2} \cdot i(0+)$?

D.4.3. Le circuit considéré a la forme indiquée par la fig. 13 avec $E = 10$ V, $R = 10 \Omega$ et $L = 1$ H.

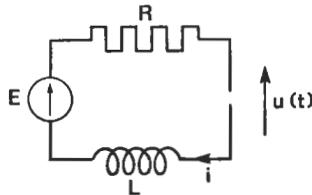


Fig. 13

a) Que doit-on prendre comme conditions initiales pour $i(0+)$ et $u(0+)$?

b) Etablir l'équation différentielle du deuxième ordre liant $u(t)$, $\dot{u}(t)$ et $\ddot{u}(t)$. La mettre sous la forme :

$$\ddot{u}(t) + 2\lambda \dot{u}(t) + \Omega^2 u(t) = A.$$

Donner les valeurs de λ , Ω_0 et A et faire l'application numérique. Dans ces conditions, on constate que le terme $2\lambda u(t)$ est négligeable, la solution est donc de la forme :

$$u(t) = \alpha + \beta \cos \Omega_0 t + \gamma \sin \Omega_0 t.$$

Calculer α , β et γ . Compte tenu des valeurs de ces coefficients et des approximations déjà faites, quelle expression plus simple est-il raisonnable de conserver pour $u(t)$?

L'air devient conducteur (claquage) si on lui impose un champ électrostatique supérieur ou égal à $2 \cdot 10^6$ Vm⁻¹. (Cette valeur est improprement appelée : tension de claquage). Jusqu'à quelle date t_1 le modèle précédent reste-t-il valable ? Quelles sont les valeurs de $u(t_1)$ et de $i(t_1)$?

ETUDE DU MODÈLE *b*.

D.4.4.

a) En considérant les grandeurs électriques comme continues, quel ordre de grandeur doit-on donner à la résistance R' de la rupture devenue conductrice ?

b) En prenant comme nouvelle origine des temps la date t_1 , donner la loi d'évolution de $i(t)$ et $u(t)$ en supposant que R' garde une valeur constante. En conclusion, donner l'allure, en indiquant les valeurs remarquables des différents paramètres intéressants, des courbes de variation de u et de i pendant l'ensemble du phénomène.

SOLUTION

A. ETUDE D'UN SYSTEME MATERIEL ASSIMILABLE A UN POINT MATERIEL

A.1. LES PRINCIPES DE BASE.

A.1.1. Un système matériel assimilable à un point matériel a une vitesse constante lorsqu'il n'est soumis à aucune interaction.

S'il est soumis à une force \mathbf{F} , on pourra écrire, en notant \mathbf{a} son accélération, m sa masse et \mathbf{p} sa quantité de mouvement : $\mathbf{F} = m \mathbf{a} = d\mathbf{p}/dt$.

A.1.2. Il suffit de réaliser une expérience dans laquelle on a à la fois mouvement (masse d'inertie), et force gravitationnelle (masse gravitationnelle). On citera : chute libre, étude d'un pendule simple, etc.

A.2. LE POINT DE VUE ÉNERGÉTIQUE.

A.2.1. Soit un système assimilable à un point matériel, soumis à une force \mathbf{F} ; le travail de cette force est pendant le temps dt :

$$dW = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt, \text{ soit } dW = m d\mathbf{v}/dt \cdot \mathbf{v} dt = m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d(1/2 m v^2).$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'en déduit en considérant le travail sur un parcours entre deux positions A et B :

$$W_{A^B} = E_c(B) - E_c(A).$$

A.2.2. On pourra définir une énergie potentielle si on peut écrire $\mathbf{F} = -\text{grad } E_p$; cela signifie encore que le travail de la force \mathbf{F} entre deux positions A et B ne dépend que de A et de B :

$$W_{A^B} = E_p(A) - E_p(B).$$

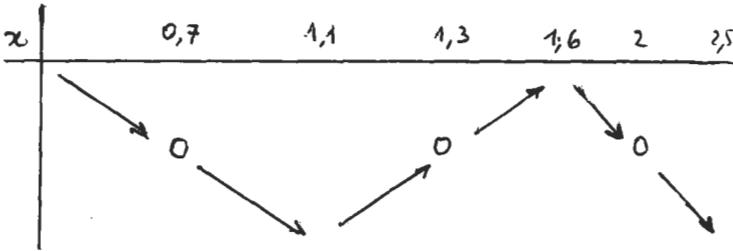
On peut dire également que la variation d'énergie potentielle entre A et B est égale au travail minimal qu'il faut fournir au système pour qu'il passe de A à B (sans lui fournir d'énergie cinétique et donc en opérant de façon quasi-statique).

A.2.3. On pose $E_m = E_c + E_p$; on obtient : $\Delta E_m = W(\mathbf{F}_0)$ où \mathbf{F}_0 désigne les forces qui ne dérivent pas d'une énergie poten-

tielle. L'énergie mécanique se conservera donc si $W(F_0) = 0$, en particulier s'il n'y a pas de frottements.

A.2.4.

a) Il suffit d'écrire $\mathbf{F} = -\text{grad } E_p$, ce qui, à une dimension, s'exprimera par $f = -dE_p/dx$. D'où le tableau de variations :



On obtient facilement sur la figure fournie un ordre de grandeur du coefficient directeur de la tangente à la courbe, qui donnera l'opposé de f .

On trouve ainsi : $f(0) \sim 180 \text{ N}$; $f(1) \sim -70 \text{ N}$.

b) On exprime que l'énergie mécanique totale est constante :

$$E + 1/2 mV^2 = \text{cte} = E(0),$$

d'où l'expression numérique :

$$V = \sqrt{10(50 - E)}.$$

Le tableau ci-après et la courbe se déduisent facilement de l'exploitation de la courbe donnée.

x	0,2	0,4	0,7	1	1,3	1,6	2	2,4	2,7
E	15	-10	-20	-10	20	10	0	18	50
v	18,7	24,5	26,5	24,5	17,3	20	22,4	18	0

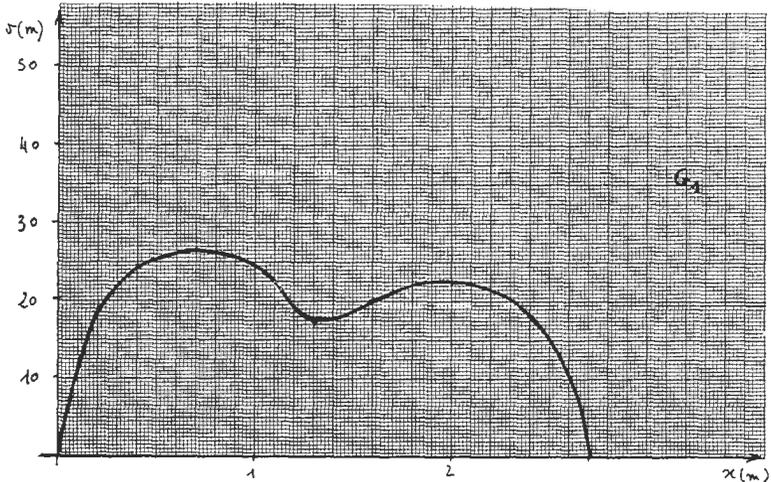
c) Comme tout mouvement non dissipatif dans un puits de potentiel, le mouvement sera un mouvement périodique.

A.3. APPLICATION A L'ÉTUDE D'UN SATELLITE TERRESTRE.

A.3.1.

a) On utilise le théorème de Gauss pour le champ de gravitation : on l'applique à une sphère de centre O et passant par M ; à cause de la symétrie :

— le champ est normal à la sphère, dirigé vers l'intérieur,



— il a le même module $g(M)$ en tout point de la sphère. On obtient donc :

$$-g(M) \times 4\pi r^2 = -4\pi G M_T, \text{ soit } g(M) = G M_T/r^2,$$

expression obtenue pour une masse ponctuelle M_T placée à la distance r .

b) On demande simplement l'expression vectorielle. D'après la question précédente : $\mathbf{g}(M) = -G M_T \mathbf{r}/r^3$; et on a : $g_0 = G M_T/R_T^2$. D'où le résultat : $\mathbf{g}(M) = -g_0 R_T^2 \mathbf{r}/r^3$.

c) On exprime :

$$dE_p = -dW = -m g_0 R_T^2 \mathbf{r}/r^3 \cdot d\mathbf{r} = -m g_0 R_T^2 dr/r^2 ; \text{ d'où : } E_p = -m g_0 R_T^2/r.$$

On a pris la convention : $E_p \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$.

A.3.2. Il suffit d'appliquer le principe fondamental au cas du mouvement circulaire uniforme, en notant a_r l'accélération radiale : $-m a_r = -m v_0^2/r_0 = -m g R_T^2/r_0^2$, d'où :

$$V_0 = \sqrt{g_0 R_T^2/r_0}.$$

L'énergie mécanique s'écrira facilement :

$$E_m = E_c + E_p = 1/2 m V_0^2 - m g_0 R_T^2/r_0,$$

$$E_m = -m g_0 R_T^2/2 r_0.$$

La période pourra s'écrire, le mouvement étant uniforme :

$$T = 2\pi r_0/V_0 = 2\pi \sqrt{r_0^3/g_0 R_T^2}.$$

A.3.3.

a) $E_m = E_p + E_c$ et l'on sait que E_m est négative, avec les conventions adoptées précédemment. Par conséquent, E_p restera toujours négative et ne s'annulera jamais. La trajectoire ne possèdera pas de branches infinies et sera donc une ellipse.

b) Si l'ellipse est un cercle, le demi-grand axe coïncide avec le rayon du cercle : $a = r_0$.

A.3.4.

a) Il faut exprimer que l'énergie mécanique sur la trajectoire elliptique est celle correspondant à un demi-grand axe a tel que $2a = r_1 + r_2$:

$$E_m = -m g_0 R_T^2/(r_1 + r_2) = 1/2 m V_p^2 - m g_0 R_T^2/r_1 = \dots \\ \dots 1/2 m V_A^2 - m g_0 R_T^2/r_2$$

et donc :

$$V_p = \sqrt{2 g_0 R_T^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)}$$

et :

$$V_A = \sqrt{2 g_0 R_T^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)}$$

V_1 et V_2 correspondent à des trajectoires circulaires de rayons r_1 et r_2 respectivement :

$$V_1 = \sqrt{g_0 R_T^2/r_1} \quad V_2 = \sqrt{g_0 R_T^2/r_2}.$$

Numériquement, les résultats sont :

$$V_1 = 7,05 \text{ km. s}^{-1}; \quad V_2 = 3,1 \text{ km. s}^{-1}; \quad V_p = 9,14 \text{ km. s}^{-1};$$

$$V_A = 1,74 \text{ km. s}^{-1}.$$

b) Le mouvement étant à force centrale, le moment cinétique du système est constant. Lorsqu'on exprime le module de celui-ci en p et A , on obtient :

$$r_1 \cdot V_p = r_2 \cdot V_A \quad \text{soit} \quad V_p/V_A = r_2/r_1,$$

ce que l'on peut vérifier sur l'expression littérale ou bien sur les valeurs numériques.

c) Les impulsions doivent être appliquées pendant un intervalle de temps petit devant la période sur l'orbite considérée. Ces périodes peuvent être calculées en utilisant la question A.3.2., et en extrapolant pour les trajectoires elliptiques :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{r_1^3/g_0 R_T^2}; \quad T_2 = 2\pi \sqrt{r_2^3/g_0 R_T^2}; \\ T = 2\pi \sqrt{(r_1 + r_2)^3/8 g_0 R_T^2},$$

ce qui nous donnera numériquement :

$$T_1 = 7\,000 \text{ s}; \quad T_2 = 86\,000 \text{ s}; \quad T = 40\,000 \text{ s}.$$

On devra donc avoir :

$$\tau_A < 70 \text{ s} \quad \tau_B < 400 \text{ s}.$$

B. ETUDE D'UN SYSTEME DEFORMABLE, NON ASSIMILABLE A UN POINT MATERIEL

B.1. LES EXPRESSIONS GÉNÉRALES.

B.1.1. Le centre de masse d'un système matériel est le barycentre des masses qui composent le système :

$$(\Sigma m_i) \cdot \mathbf{OG} = \Sigma m_i \mathbf{OM}_i \quad \text{ou} \quad 0 = \Sigma m_i \mathbf{GM}_i.$$

B.1.2.

$$\mathbf{p} = \Sigma m_i \mathbf{v}_i = \Sigma m_i d\mathbf{OM}_i/dt = (\Sigma m_i) d\mathbf{OG}/dt = M \mathbf{V}_G.$$

B.1.3. $E_c = 1/2 \Sigma m_i V_i^2$. Elle peut s'écrire, en utilisant le repère *barycentrique*, repère *en translation* lié au centre d'inertie G :

$E_c = 1/2 M V_G^2 + \Sigma 1/2 m_i u_i^2$ où les u_i désignent les vitesses par rapport au référentiel barycentrique. Le premier terme est l'énergie de translation globale du système, le second sera, suivant les cas :

- pour un solide, l'énergie de rotation,
- pour un gaz parfait monoatomique, l'énergie d'agitation des molécules du gaz, qu'on appelle *énergie interne*.

B.1.4. La variation d'énergie cinétique d'un système matériel entre deux états est égale au travail de toutes les forces, *extérieures et intérieures*.

B.2. UNE PREMIÈRE APPLICATION

A L'ÉTUDE D'UN SYSTÈME DÉFORMABLE.

B.2.1. On peut effectivement faire le calcul : les forces *extérieures* sont les mêmes dans les deux expériences. Les conditions initiales étant les mêmes (immobilité), le centre d'inertie se déplacera de la même quantité dans les deux expériences.

Le déplacement OG' du centre d'inertie est donc le même, mais la position de G' change par rapport à l'avant du camion.

Soit A l'avant du camion, G' le centre d'inertie de l'ensemble, C celui du colis. On peut écrire :

$$\overline{AG'} = (M\overline{AG} + m\overline{AC})/(M + m); \quad d\overline{AG'} = (m/M + m)d\overline{AC}$$

or :

$$d\overline{AC} = 3,5 \text{ m. Donc : } D' = d\overline{AG'} = 3,5/6 = 0,58 \text{ m.}$$

A est plus proche de G' dans le second cas ; l'avant du camion s'arrêtera donc 58 cm avant, dans le second cas.

B.2.2. Oui, le calcul est possible, car dans les deux cas, l'énergie cinétique initiale du camion est *intégralement* transformée en chaleur, et cédée à l'atmosphère, à la route, aux pneus, aux freins...

Effectuons le calcul (qui sera le même dans les deux expériences) :

$$Q_1 = Q_2 = E_{c \text{ init}} = 1/2 (M + m) V_1^2 = 8,3 \cdot 10^5 \text{ joules.}$$

B.3. QUELQUES CONSIDÉRATIONS ÉNERGÉTIQUES.

B.3.1. A vitesse stabilisée, il ne faut vaincre que les forces de frottement dues à l'air, essentiellement. En ville, il y a beaucoup d'accélération (et de décélérations), et donc la masse intervient.

B.3.2. C'est Béatrice qui a raison, les données permettent de calculer le travail dépensé pour effectuer le déplacement qui est décrit. Mais on a besoin du rendement moyen d'un moteur pour pouvoir calculer la consommation totale d'énergie. A noter qu'en moyenne sur vingt-quatre heures, les voitures transforment toute cette énergie en chaleur, le travail des forces de pesanteur étant en moyenne nul (les automobiles parisiennes ne se rassemblent pas toutes sur la butte Montmartre !)

Plus précisément, une voiture qui roule pendant 2 heures consommera : $W_m = 15 \cdot 10^3 \times 2 \times 3600 = 1,08 \cdot 10^8 \text{ J}$ et toute cette énergie est finalement transformée en chaleur. La quantité de chaleur dégagée au total est en fait celle qui est « fournie par la source chaude » c'est-à-dire ici celle qui correspond à la combustion du carburant : $Q_1 = W_m/p = 4,23 \cdot 10^8 \text{ J}$ et pour toutes les automobiles : $Q = 2 \cdot 10^6 Q_1 = 8,64 \cdot 10^{14} \text{ J.}$

La pollution thermique d'une centrale se situe à la source froide. Soit Q_2 la quantité de chaleur restituée à la source froide,

Q_1 celle empruntée à la source chaude, pour une durée de fonctionnement de une seconde, P_{el} la puissance électrique fournie par la centrale.

On pourra écrire :

$$p_{el} = \varrho Q_1; \quad Q_2 = (1 - \varrho) Q_1 \quad \text{et donc} \quad Q_2 = (1 - \varrho) / \varrho p_{el}.$$

Numériquement, et pour 24 heures :

$$Q' = 0,65 / 0,35 \times 9 \cdot 10^8 \times 24 \times 3\,600 = 1,44 \cdot 10^{14} \text{ J.}$$

On constate que la pollution *thermique* par la circulation automobile équivaut à peu près à celle d'une centrale thermique.

C. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE

C.1. CARACTÉRISATION ET EFFET D'UN COUDE DANS L'ÉCOULEMENT.

C.1.1. Le débit massique est égal à la masse qui traverse une section de la veine de fluide pendant l'unité de temps : $q = dm/dt$.

La masse qui passe pendant le temps dt est contenue dans un cylindre de surface de base S et de hauteur $V dt$, et donc $dm = \varrho S V dt$ d'où l'expression du débit : $q = \varrho S V$.

C.1.2.

a) Nous allons appliquer le principe fondamental à la masse dm indiquée sur la fig. 6 ; soit $\mathbf{p}(t)$ et $\mathbf{p}(t + dt)$ sa quantité de mouvement juste avant le coude et juste après :

$$\mathbf{p}(t) = \varrho S V^2 dt \mathbf{i} \quad \mathbf{p}(t + dt) = \varrho S V^2 dt (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j});$$

la force \mathbf{F}_1 qu'exerce la conduite sur le fluide est donc :

$$\mathbf{F}_1 = d\mathbf{p}/dt$$

et la force exercée par le fluide sur le coude en est l'opposé.

On pourra donc écrire :

$$F_x = \varrho S V^2 (1 - \cos \theta) \quad \text{et} \quad F_y = -\varrho S V^2 \sin \theta.$$

b) On calcule le module de la force F :

$$F = \varrho S V^2 \sqrt{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2} = 2 \varrho S V^2 \sin(\theta/2).$$

c) Numériquement, on trouve $F = 191 \text{ N}$.

C.2. APPLICATION A L'ÉTUDE DE LA PROPULSION D'UN BATEAU A VOILE.

C.2.1. Sur la figure, on constate que la vitesse \mathbf{V}_1 fait avec la voile un angle φ ; on pourra donc écrire : $S = \Sigma \cos \varphi$.

C.2.2. La déviation de la veine d'air est égale à 2φ (c'est l'angle entre la vitesse V_1 avant la voile et la vitesse V_2 après). On applique le résultat de la question C.1.2., avec $\vartheta = 2\varphi$:

$$F = 2 \rho S V^2 \sin \varphi = 2 \rho \Sigma V^2 \sin^2 \varphi.$$

On ne s'intéresse qu'à la composante suivant la direction Ox du mouvement : $f = F \sin(\alpha - \varphi)$ puisque $\alpha - \varphi$ est l'angle entre la voile et Ox . On obtient bien le résultat de l'énoncé :

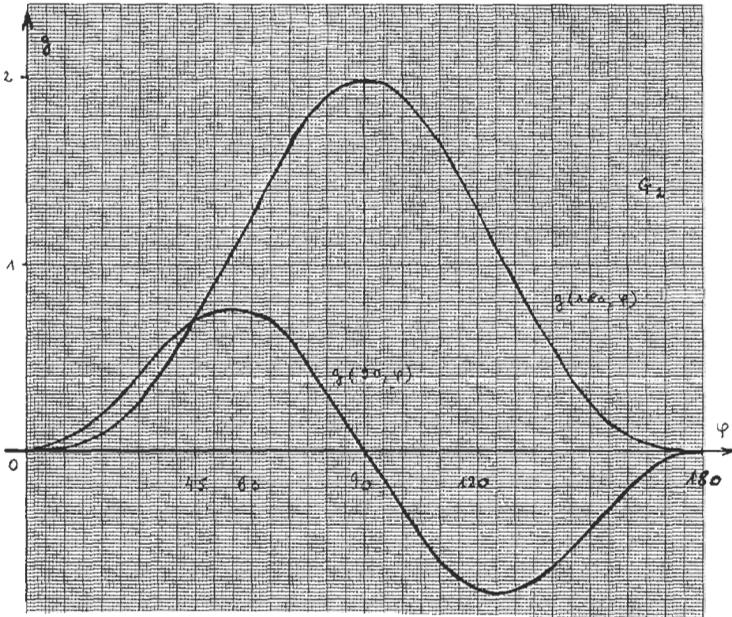
$$f = \rho \Sigma V^2 g(\alpha, \varphi) \quad \text{avec} \quad g(\alpha, \varphi) = 2 \sin^2 \varphi \sin(\alpha - \varphi).$$

C.2.3.

a) Le graphique G_2 comportera les deux courbes :

$$g(90, \varphi) = 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi \quad \text{et} \quad g(180, \varphi) = 2 \sin^3 \varphi.$$

Le réglage optimum de la voile correspond à un maximum de la force propulsive, donc de $g(\alpha, \varphi)$.



Le graphique qui vient d'être tracé donnera le maximum φ_m de la courbe $g(\alpha, \varphi)$ pour $\alpha = 90^\circ$ et pour $\alpha = 180^\circ$:

$$\varphi_m(90) \sim 55^\circ \quad \varphi_m(180) = 90^\circ.$$

b) Il suffit de calculer g'_φ et de l'annuler :

$$g'_\varphi = 4 \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin (\alpha - \varphi) - 2 \sin^2 \varphi \cdot \cos (\alpha - \varphi)$$

$$g'_\varphi = 2 \sin \varphi [2 \sin (\alpha - \varphi) \cos \varphi - \sin \varphi \cos (\alpha - \varphi)].$$

$g'_\varphi = 0$ pour $\sin \varphi = 0$, sans intérêt, ou pour $\operatorname{tg} \varphi_m = 2 \operatorname{tg} (\alpha - \varphi_m)$.

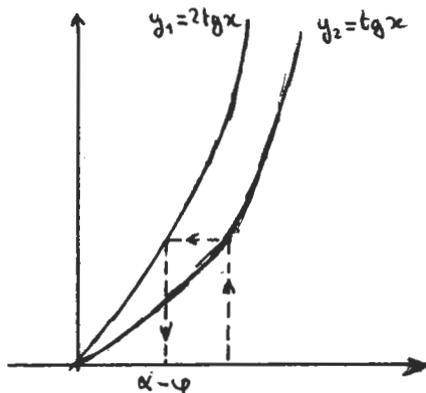
On peut résoudre cette équation par itération, en écrivant, par exemple : $\alpha - \varphi_m = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (1/2 \operatorname{tg} \varphi_m)$. On en déduit le tableau suivant :

φ_m	0	10	15	20	25	30	35	40	45
α	0	15	23	30	38	46	54	63	72
g	0	$5 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-2}$	0,14	0,22	0,32	0,45

φ_m	50	55	60	65	70	75	80	85	90
α	81	91	101	112	124	137	151	165	180
g	0,6	0,80	0,98	1,2	1,43	1,64	1,83	1,96	2

On peut également utiliser une résolution graphique, en se servant des courbes jointes à l'énoncé.

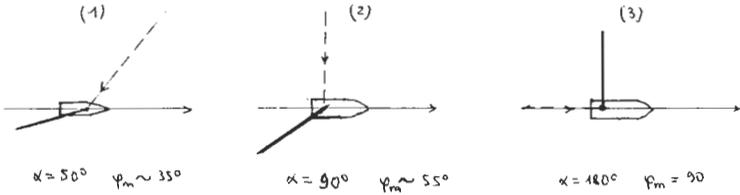
A l'abscisse φ correspond l'ordonnée $y = \operatorname{tg} \varphi$. On trace ensuite une parallèle à l'axe des abscisses, et l'intersection avec la courbe $y = 2 \operatorname{tg} x$ nous donne en abscisse la valeur de $\alpha - \varphi$. D'où α .



On trouve les mêmes valeurs, avec une précision de l'ordre du degré.

- c) Pour $\alpha = 50^\circ$, $\varphi_m \simeq 35^\circ$.
- Pour $\alpha = 90^\circ$, $\varphi_m \simeq 55^\circ$.
- Pour $\alpha = 180^\circ$, $\varphi_m = 90^\circ$.

Les schémas, respectivement (1), (2), (3), ont été faits ci-après.



C.2.4.

a) Il suffit de calculer $g(\alpha, \varphi) = 2 \sin^2 \varphi \cdot \sin(\alpha - \varphi)$ pour chaque couple (α, φ_m) de valeurs calculées précédemment (les valeurs de g ont été reportées dans le tableau précédent) pour tracer la courbe G^3 demandée.

b) On lit sur la courbe : $g(90, \varphi_m) = 0,77$. On en déduit $f \sim 3 \cdot 10^3$ N.

C.2.5. La force de freinage f' peut s'écrire :

$$f' = -2 \rho s_0 V^2 \cos \alpha,$$

car $\varphi = \pi/2$, à la limite.

On exprime ensuite que le mouvement est juste possible et donc qu'à la limite :

$$f + f' = 0 \Rightarrow \rho \Sigma V^2 g(\alpha, \varphi) = 2 \rho s_0 V^2 \cos \alpha$$

soit :

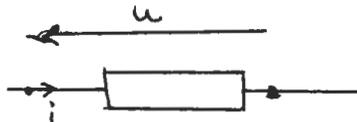
$$g(\alpha, \varphi) = 2 s_0 \cos \alpha / \Sigma.$$

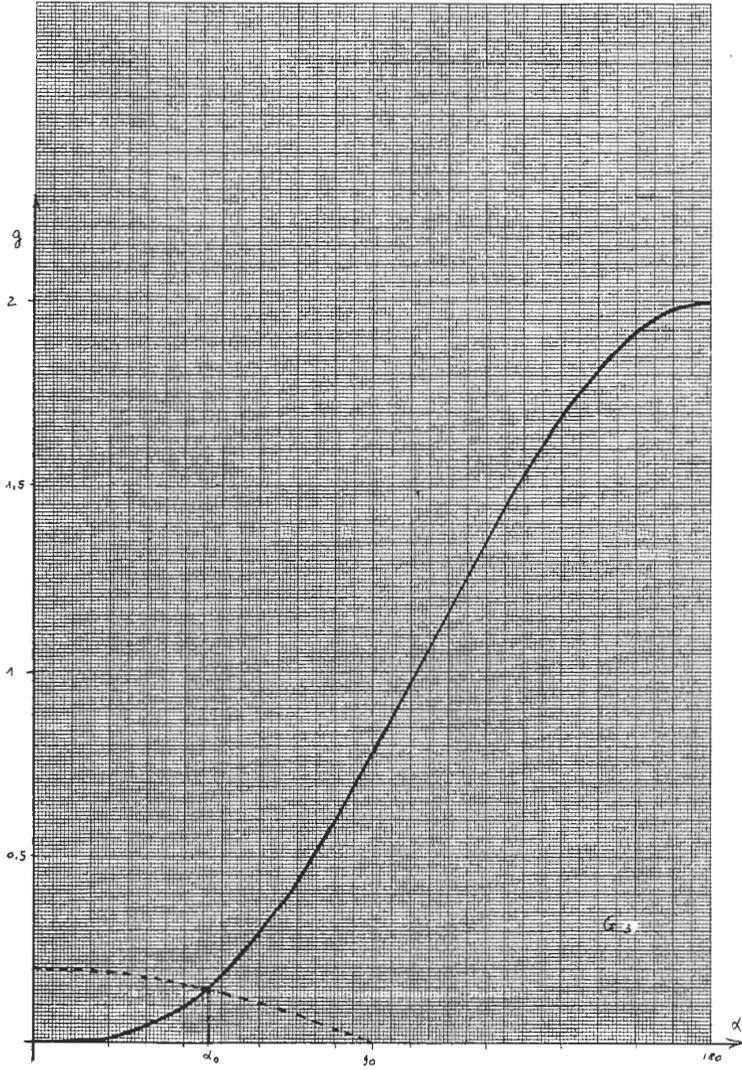
On trace sur G_4 la courbe $0,2 \cos \alpha$ et on regarde l'intersection avec G_4 . L'abscisse est voisine de $\alpha_0 = 46^\circ$.

D. ELECTROCINETIQUE

D.1. GÉNÉRALITÉS.

D.1.1. Le schéma suivant donne la réponse :





D.1.2. La loi des nœuds exprime que la somme *algébrique* des courants arrivant en un nœud est égale à zéro. On compte positivement les courants qui arrivent au nœud, négativement ceux qui en repartent. La loi des mailles exprime que la somme *algébrique* des tensions aux bornes des différentes branches constituant une maille est égale à zéro.

[La loi des nœuds n'est valable que dans la mesure où il n'y a pas de création de charges et où l'on peut supposer que l'intensité dans un fil est la même en tous les points du fil. La densité de courant est alors à flux conservatif.].

D.2. EXEMPLES.

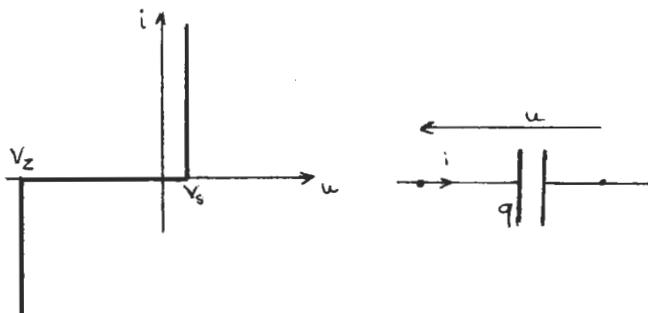
D.2.1. La tension de seuil V_s d'une diode (Zener) est la tension nécessaire pour vaincre le champ interne qui existe au niveau de la jonction.

La tension Zener V_z est celle pour laquelle apparaît l'« effet Zener », qui consiste, dans certains cas, à l'arrachement des électrons de valence par le champ électrique ou bien, dans d'autres cas, au fait que les porteurs de charge qui forment le courant inverse ont une énergie suffisante pour briser les liaisons de valence, lors de leurs collisions avec les atomes. De toutes les façons, on obtient une tension pratiquement invariable, et qui sert de référence de tension.

Les valeurs que l'on peut trouver pour V_s et V_z seront, par exemple :

$$V_s \sim 0,6 \text{ volt} \quad \text{et} \quad V_z = 6,1 \text{ volts.}$$

On a représenté ci-après la caractéristique schématisée d'une diode Zener :



D.2.2. La *charge d'un condensateur* est la charge électrique que porte une de ses armatures, choisie arbitrairement comme armature « positive ». Cette charge est proportionnelle à

la différence de potentiel u entre l'armature positive et l'armature négative (et qui porte donc la charge $-q$) :

$$q = C u.$$

On a représenté précédemment le schéma d'un condensateur, et la relation qui le caractérise, avec la convention récepteur s'écrit :

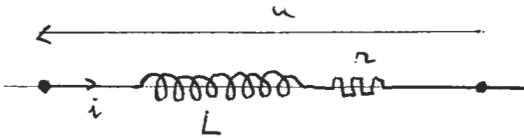
$$i = dq/dt = C du/dt.$$

D.2.3. La force électromotrice d'auto-induction qui apparaît dans une inductance L s'écrit : $e = -L di/dt$, ce qui, en appliquant la loi d'Ohm à la portion de circuit équivalente à la bobine donnera :

$$u - L di/dt = Ri \quad \text{ou} \quad u = L di/dt + Ri$$

[on vérifie qu'un courant qui augmente ($di/dt > 0$) correspond à un générateur *en opposition* dans le circuit, qui donc, s'il était seul ferait passer un courant dans le sens négatif : c'est la loi de Lenz.]

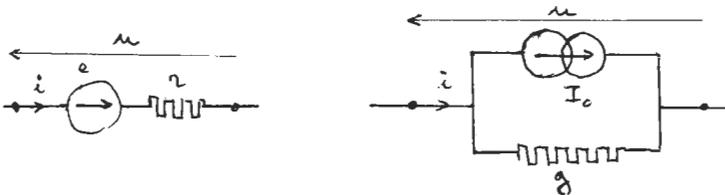
Le schéma ci-après donne les conventions de signe qui correspondent à la relation écrite précédemment.



(convention récepteur),

D.2.3.

a) On écrit simplement $u = ri - e$ avec le schéma ci-après (la résistance r est en série avec la générateur de tension idéal).



b) Pour une pile plate (3 éléments de pile Leclanché en série) $e_1 = 4,5$ volts et $r_1 \sim 1 \Omega$. Pour une batterie d'accumulateurs, on a $e_2 = 12$ volts et une résistance $r_2 \sim 0,01 \Omega$.

D.2.5.

a) On écrit la relation précédente sous la forme : $i = g u + I_0$, en posant : $g = 1/r$ et $I_0 = e/r$; g s'appelle conductance interne du générateur; on la place en parallèle aux bornes du générateur de courant idéal (voir schéma précédent).

b) Il suffit d'effectuer les calculs à partir des données de D.2.4. b. On trouvera :

$I_1 = 4,5 \text{ A}$; $g_1 = 1 \text{ S}$; $I_2 = 1200 \text{ A}$; $g_2 = 100 \text{ S}$
[l'unité de conductance est l'ohm⁻¹ ou siemens (S)].

c) C'est la représentation de Thévenin la plus appropriée, à cause des faibles résistances des deux sources d'énergie. La représentation de Norton se trouve mieux adaptée à d'autres systèmes tels : transistors, cellules photo-électriques...

D.3. LE CIRCUIT R-C.

D.3.1.

a) Pour $t < 0$, $e = 0$ et donc $u(t) = 0$. Pour $t > 0$, il faut écrire l'équation différentielle qui régit les variations de $u(t)$: la loi d'Ohm nous donne le résultat : $e = R i + u$, ce qui, compte tenu de la relation entre i et u dans une branche contenant un condensateur (voir D.2.2.) donne :

$$R C du/dt + u = e.$$

La solution générale de cette équation est :

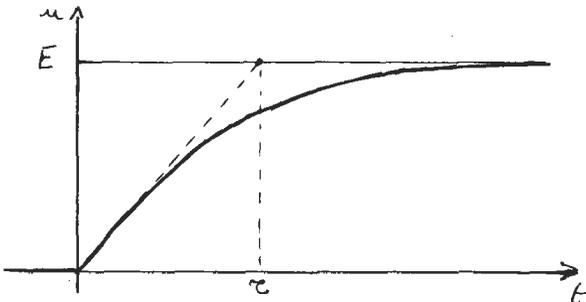
$$u(t) = E + A \exp(-t/\tau)$$

on exprime la condition initiale qui est la continuité de la tension $u(t)$ pour $t = 0$: $u(0) = 0$. [$u(t)$ est continue car proportionnelle à la charge q du condensateur. Une discontinuité de charge est impossible, car cela demanderait une intensité de courant infinie.]

La solution s'écrit donc :

$$u(t) = E [1 - \exp(-t/\tau)].$$

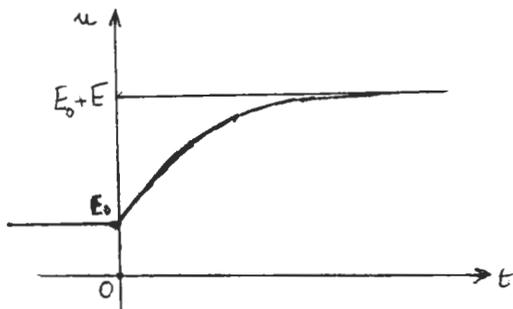
Elle est représentée graphiquement ci-après :



b) L'équation différentielle est la même que précédemment, mais pour $t < 0$, $e = E_0$ (et donc $u(t) = E_0$). Pour $t = 0$, il y a continuité de $u(t)$. La solution s'écrit de même et a été représentée ci-après :

$$u(t) = E_0 + E [1 - \exp(-t/\tau)].$$

Il y a seulement translation de E_0 du graphe de $u(t)$.



D.3.2. On écrit : $i = dq/dt = C du/dt$. Pour $t < 0$, $i = 0$. Pour $t > 0$, $i = I = \text{cte}$; on obtient en intégrant : $u(t) = I C t + u_0$ (u_0 tension à l'instant initial).

Si on ne prend pas de précaution, on va provoquer le claquage du condensateur. Il faudra donc limiter la tension appliquée au condensateur.

D.3.3. On se sert de la remarque qui est exprimée dans la question D.3.1. b. Seule donc, la tension au-dessus de 10 V sera prise en compte; on posera donc : $\Delta u = u - E_0$, $\Delta E = E - E_0$. L'évolution de $\Delta u(t)$ sera donnée par :

$$\Delta u(t) = \Delta E [1 - \exp(-t/RC)].$$

Pour que la diode Zener conduise, et donc que le relais coupe le circuit, il faut que $\Delta u(t)$ atteigne la valeur $V_z - E_0$. Cela ne doit donc pas se produire avant un temps $t_1 = 5$ secondes. On écrira donc :

$$V_z - E_0 = \Delta E [1 - \exp(-t_1/RC)]$$

soit :

$$t_1/RC = \text{Ln } 5$$

$$C = t_1/R \text{ Ln } 5 \quad C = 3 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 3 \text{ } \mu\text{F}.$$

D.4. EFFET D'UNE RUPTURE BRUTALE DANS UN CIRCUIT.

D.4.1. On applique simplement : $C = \epsilon_0 S/e = 8,85 \cdot 10^{-14}$ F.

D.4.2.

a) A l'instant $t = 0$, le « condensateur » n'est pas chargé. La d.d.p. à ses bornes est donc égale à 0 : $u(0^+) = 0$. On écrit donc la loi d'Ohm : $E - R i = u(t)$, ce qui, à l'instant origine, nous donne la condition :

$$E - R i(0^+) = 0 \quad \text{ou} \quad i(0^+) = E/R.$$

b) Les solutions pour $u(t)$ et $i(t)$ se déduisent de l'étude du D.3. On obtient, compte tenu des conditions initiales explicitées au D.4.2. a :

$$u(t) = E [1 - \exp(-t/RC)] \quad \text{et} \quad i = E/R \exp(-t/RC).$$

Pour que $i(t_0) = i(0^+)/100$, on doit avoir $\exp(-t_0/RC) = 1/100$ soit $t_0 = RC \ln 100$.

Numériquement, cela nous donne : $t_0 = 4 \cdot 10^{-12}$ s. Le courant diminue très rapidement dans le circuit.

[On pourrait s'étonner du fait que l'intensité dans le circuit varie sur une durée très faible, ce qui équivaut à di/dt très grand. Il ne faut pas oublier que dans ce modèle, on néglige complètement les phénomènes d'induction, et particulièrement l'auto-induction. Il est clair que, même avec une self très petite, la f.é.m. d'induction $-L di/dt$ ne sera certainement pas négligeable.]

D.4.3.

a) A $t = 0^+$, le « condensateur » n'est pas chargé et donc $u(0^+) = 0$.

L'intensité dans le circuit est continue puisque, cette fois, on a dans le système étudié une inductance propre et que celle-ci interdit toute discontinuité d'intensité (à cause de la f.é.m. d'auto-induction $-L di/dt$). On a donc aussi, comme précédemment : $i(0^+) = E/R$.

b) La loi d'Ohm s'écrit, en tenant compte de l'auto-induction :

$$E - L di/dt - R i = u \quad \text{avec} \quad i = dq/dt = C du/dt$$

et :

$$di/dt = d^2u/dt^2.$$

D'où :

$$\ddot{u}(t) + (R/L) \dot{u}(t) + (1/LC) u(t) = E/LC$$

ou bien :

$$\ddot{u}(t) + 2\lambda \dot{u}(t) + \Omega^2 u(t) = A$$

avec les valeurs suivantes pour les constantes :

$$\lambda = R/2L = 5 \text{ s}^{-1}; \quad A = E/LC = 1,13 \cdot 10^{14} \text{ V} \cdot \text{s}^{-2};$$

$$\Omega = 1/\sqrt{LC} = 3,36 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}.$$

Quand on néglige le terme d'amortissement $\lambda u(t)$, on obtient très simplement :

$$\Omega = \Omega_0 \quad \text{et} \quad \alpha = E.$$

La solution de l'équation différentielle peut donc être écrite :

$$u(t) = E + \beta \cos \Omega t + \gamma \sin \Omega t$$

et on détermine les constantes β et γ en servant des conditions initiales :

$$u(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad du/dt(0^+) = 1/C i(0^+) = E/RC.$$

Ceci donne :

$$u(0^+) = E + \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \beta = -E = -10 \text{ V}$$

$$u(0^+) = \gamma \Omega = E/RC \quad \text{ou} \quad \gamma = E/R \sqrt{L/C} = 3,36 \cdot 10^6 \text{ V}$$

$$u(t) = E(1 - \cos \Omega t) + E/R \sqrt{L/C} \sin \Omega t.$$

En fait, $\gamma \gg \beta$. Il convient donc de négliger le premier terme par rapport au second. Dans ce second terme, on peut aussi faire un développement limité au premier ordre en Ωt , car on aura toujours $t \ll 1/\Omega$. On obtient donc :

$$u(t) \sim E/R \sqrt{L/C} \quad 1/\sqrt{LC} \quad t = E/RC \quad t,$$

numériquement :

$$u(t) = 1,13 \cdot 10^{13} \quad t.$$

La tension de claquage correspond à un champ de $2 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. L'étincelle va donc jaillir lorsque :

$$u(t) = 2 \cdot 10^6 \times 10^{-4} = 200 \text{ V},$$

soit au temps $t_1 = 200/1,13 \cdot 10^{13} = 1,8 \cdot 10^{-11} \text{ s}$.

$$u(t_1) = 200 \text{ V} \quad \text{et} \quad i(t_1) \sim 1 \text{ A}.$$

L'intensité du courant n'a pas le temps de décroître.

D.4.4.

a) Si l'on peut considérer que courant et tension sont continus, à l'instant initial, on peut dire que la résistance de la rupture est :

$$R' = u(t_1)/i(t_1) = 200 \Omega.$$

b) Nous avons un nouveau régime, qui correspond à un circuit inductif de résistance $R + R'$. En prenant comme ori-

gine des temps le temps t_1 du début de ce régime, et en écrivant que l'intensité du courant est continue au temps $t = 0$, on écrira $i(t_1) \sim E/R$.

L'équation différentielle qui régit les variations de l'intensité dans le circuit s'écrit :

$$E - L \frac{di}{dt} = (R + R') i.$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$i(t) = E/R + R' + A \exp(-t/\tau') \quad \text{avec} \quad \tau' = L/(R + R').$$

Avec la condition initiale, on détermine la valeur de A :

$$A = E/R - E/(R + R').$$

D'où :

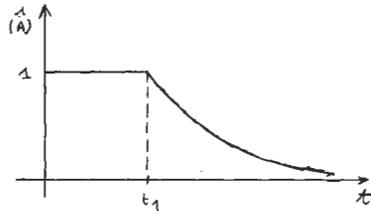
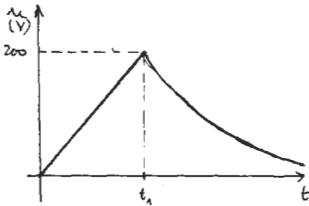
$$i(t) = E/R + R' + [E/R - E/(R + R')] \exp(-t/\tau')$$

et numériquement :

$$i(t) = 0,048 + 0,952 \exp(-210 t)$$

$$u(t) = R' i = 10 + 190 \exp(-210 t).$$

Les schémas ci-après représentent les variations de $u(t)$ et de $i(t)$ au cours des deux régimes successifs, $0 < t < t_1$ et $t > t_1$.



J.-Cl. HERPIN.

C.A.P.E.S.

SESSION DE 1986

Option : Physique et Chimie

COMPOSITION DE CHIMIE

(Durée : 4 heures)

MATÉRIEL FOURNI : feuilles de papier millimétré.

On attend du candidat qu'il réinvestisse ses connaissances et son savoir-faire dans la chimie du magnésium, métal qu'il n'a sans doute pas eu l'occasion d'étudier.

Ce réinvestissement est demandé dans des cas concrets et non pas en tant qu'application de base.

Les différentes parties seront notées selon le barème indiqué.

L'épreuve comporte quatre parties indépendantes (on constatera en outre que les différents paragraphes de chacune d'elles sont largement indépendants).

Les candidats sont invités à reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation (chiffres et lettres) de l'énoncé.

LE MAGNESIUM ET SES COMPOSES

PLAN

PREMIÈRE PARTIE (6 points).

L'élément, l'atome de magnésium.

DEUXIÈME PARTIE (37 points).

I. Structure cristalline du magnésium.

II. Alliages magnésium - aluminium.

III. Magnésium dans la métallurgie du zirconium.

IV. Magnésium et solutions aqueuses.

TROISIÈME PARTIE (19 points).

I. Synthèse et dosage d'un composé organomagnésien.

II. Réactions avec les dérivés carbonylés.

III. Synthèse industrielle du phényl-2 éthanol.

QUATRIÈME PARTIE (18 points).

I. Cinétique enzymatique.

II. Propriétés acido-basiques.

III. Stéréochimie.

PREMIÈRE PARTIE

L'ELEMENT, L'ATOME DE MAGNESIUM

1. Donner la structure électronique de l'atome de magnésium de numéro atomique $Z = 12$. Indiquer le numéro atomique du cation Mg^{2+} .

2. Lorsque l'on bombarde l'isotope 24 du magnésium par un faisceau de particules α , outre un isotope du silicium, un neutron est obtenu.

a) Ecrire la réaction nucléaire.

b) Calculer l'énergie libérée dans cette réaction.

Estimer le rapport entre les ordres de grandeur de cette énergie et de celle mise en jeu lors d'une réaction chimique.

On donne les masses atomiques :

n : 1,0087 u ; particule α : 4,0026 u ; magnésium, isotope 24 : 23,9850 u ; silicium, isotope 27 : 26,9770 u, isotope 28 : 27,9769 u, isotope 29 : 28,9765 u, isotope 30 : 29,9738 u.

10^{-3}

On rappelle que $1 \text{ u} = \frac{\quad}{N_A} \text{ kg}$.

(Constante d'Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$).

3. a) Parmi les propositions suivantes, citer celles qui sont fausses et, en une ligne pour chacune d'entre elles, expliquer en quoi elle est fausse.

1° L'élément magnésium fond à 923 K.

2° La dolomie ($\text{Ca Mg}(\text{CO}_3)_2$) et la magnésie contiennent l'élément magnésium.

3° L'élément magnésium est caractérisé par 12 électrons.

4° L'élément magnésium est caractérisé par 24 nucléons.

5° L'élément magnésium est caractérisé par 12 protons.

b) Quelle est la signification de :

1° Il y a du magnésium dans le cacao.

2° Le magnésium est utilisé dans l'industrie aérospatiale.

c) Préciser la distinction à faire entre élément et corps simple.

DEUXIÈME PARTIE

I. STRUCTURE CRISTALLINE DU MAGNESIUM

Le métal magnésium cristallise dans le système hexagonal compact, dont la maille élémentaire, caractérisée par les paramètres a et c , est représentée sur la fig. 1.

I.1. Calculer la valeur du rapport c/a correspondant à un empilement compact. Calculer le taux de compacité qui en résulte.

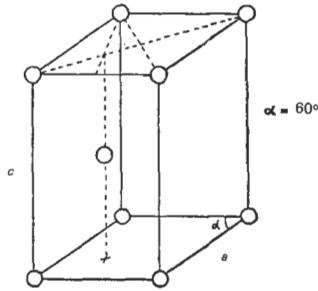


Fig. 1

I.2. Dans le cas du magnésium, les données cristallographiques indiquent pour valeur des arêtes de la maille élémentaire : $a = 3,20 \text{ \AA}$; $c = 5,20 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$).

a) La masse atomique molaire du magnésium est $24,3 \text{ g. mol}^{-1}$. Calculer sa masse volumique.

b) La masse volumique du fer est 7860 kg. m^{-3} . En déduire un avantage possible dans l'emploi du magnésium. Vérifier si le gain de masse dû à l'utilisation de 30 kg de magnésium à la place de fer pour réaliser les structures de la voiture « Coccinelle » de Volkswagen permettait le transport d'une personne supplémentaire. (On suppose que toutes les autres caractéristiques de la voiture sont inchangées.)

II. ALLIAGES MAGNESIUM - ALUMINIUM

On donne (fig. 2) le diagramme de phases du système binaire aluminium - magnésium (température en fonction du pourcentage atomique en magnésium).

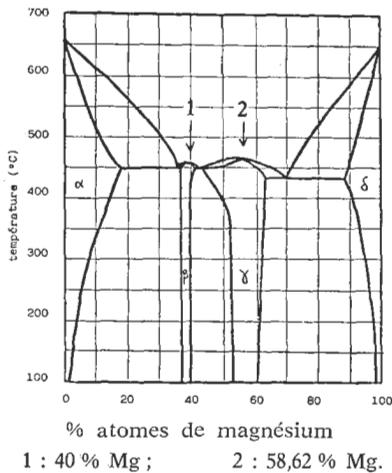


Fig. 2

L'aluminium, de rayon atomique 1,43 Å, cristallise dans le système cubique à faces centrées ($a' = 4,04$ Å).

II.1. Indiquer la nature de la phase correspondant au domaine α , en préciser le réseau cristallin et justifier le fait que son arête soit supérieure à 4,04 Å.

II.2. Donner les formules des composés définis (celle du plus riche en magnésium en compte 17 atomes). Peut-on prévoir leurs structures cristallines ?

II.3. On considère l'alliage appelé industriellement GA 9, qui est un mélange d'aluminium et de magnésium à 9 % en masse d'aluminium, soit 91,8 % d'atomes de magnésium.

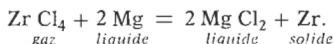
En laissant les phases en présence au fur et à mesure de leur apparition, on refroidit ce mélange à partir de 650 °C. Décrire les phénomènes observés jusqu'à ce que la température de 410 °C soit atteinte : on précisera la nature des phases en présence ainsi que l'évolution de leur composition et de leurs proportions respectives.

II.4. On considère maintenant un mélange à 70 % en atomes de magnésium à 650 °C. Donner l'allure de la courbe de refroidissement du mélange (température θ en fonction du temps t) et, pour chaque portion, préciser la nature de la ou des phases constituant le système.

III. MAGNESIUM DANS LA METALLURGIE DU ZIRCONIUM

Le zirconium constitue un élément de choix comme matériau de gainage pour les combustibles nucléaires et comme matériau de structure dans les réacteurs nucléaires.

L'élaboration du zirconium est réalisée essentiellement par le procédé Kroll, dont l'étape fondamentale est la réduction du tétrachlorure par le magnésium :



La réaction est effectuée à 800 °C, sous argon, à la pression atmosphérique. On supposera les phases condensées non miscibles.

Données : enthalpies standard de formation à 25 °C ($\Delta_f H^\circ$), de fusion ($\Delta_{fus} H^\circ$) et de sublimation ($\Delta_{sub} H^\circ$) exprimées en kJ.mol⁻¹; températures normales de fusion (θ_{fus}) et de sublimation (θ_{sub}) en °C.

	$\Delta_f H^\circ$	$\Delta_{fus} H^\circ$	$\Delta_{sub} H^\circ$	θ_{fus}	θ_{sub}
Zr (solide).....	0	20		1 860	
Zr Cl ₄ (solide).....	- 980		106		331
Mg (solide).....	0	9		650	
Mg Cl ₂ (solide).....	- 641	43		708	

III.1.

a) Quelle est la relation entre les grandeurs thermodynamiques standard ΔG° , ΔH° et ΔS° pour la réaction réalisée à température constante.

Montrer que $\Delta G^\circ = f(T)$ est une droite, pourvu que soient remplies certaines conditions que l'on précisera.

b) Prévoir qualitativement et justifier les changements de pente et d'ordonnée à l'origine de la droite $\Delta G^\circ = f(T)$ à 331 °C.

III.2.

a) Calculer ΔH° à 800 °C ainsi que ΔG° sachant que, entre 708 et 1 000 °C, $\Delta S^\circ = -0,137 \text{ J. K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

b) Exprimer l'enthalpie libre de réaction ΔG en fonction de la pression partielle de ZrCl_4 . Que représente ΔG ? Quelle en est la signification physique?

III.3.

a) Montrer que la réaction se fait spontanément dans les conditions industrielles de la réaction, effectuée à 800 °C, la pression partielle de ZrCl_4 étant maintenue constante, égale à 10^4 Pa (= 0,1 bar).

b) La réaction pourrait-elle être totale dans les conditions industrielles? Justifier la réponse.

IV. MAGNESIUM ET SOLUTIONS AQUEUSES

IV.1. Le potentiel normal du couple $\text{Mg}_{aq}^{2+}/\text{Mg}$ donné par les tables est $E^\circ = -2,36 \text{ V}$ à 25 °C.

a) On plonge une lame de magnésium décapée dans une eau désaérée. Dire, en le justifiant, à quelle réaction chimique on doit s'attendre. Ecrire son équation.

b) En fait, aucune réaction spectaculaire ne se produit. Une lame semblable plongée dans une solution de $0,1 \text{ mol. dm}^{-3}$ d'acide chlorhydrique provoque une légère réaction.

Pourquoi cette réaction n'est-elle que faible?

c) En touchant la lame de magnésium avec un clou en fer, on observe un dégagement gazeux intense sur le clou et, au bout d'un certain temps, la disparition de la lame de magnésium.

Expliquer ces observations à l'aide de courbes intensité-potentiel.

d) Interpréter le fait que, dans l'expérience précédente, le fer n'est pas attaqué. En déduire une application pratique du magnésium.

e) Les gilets de sauvetage en mer sont équipés de piles au magnésium (le magnésium constituant le pôle négatif).

Expliquer pourquoi ces piles sont conservées à l'état sec et pourquoi, au moment de l'utilisation, on doit y faire entrer l'eau de mer.

IV.2.

a) A 25 °C, on fait varier le pH d'une solution aqueuse de $10^{-2} \text{ mol. dm}^{-3}$ de chlorure de magnésium, la variation de volume étant

négligeable. A partir de $\text{pH} = 9,5$ on observe la formation d'un précipité.

Quel est ce précipité et quel en est le produit de solubilité ?

On rappelle que le produit ionique de l'eau à 25°C est égal à $K_e = 10^{-14}$.

b) Quelle est la valeur théorique du potentiel normal apparent du couple $\text{Mg}_{aq}^{2+}/\text{Mg}$ à $\text{pH} = 11$?

On prendra $2,3 \text{ RT/F} = 0,06 \text{ V}$ à 20°C .

c) Tracer le diagramme potentiel-pH théorique du couple $\text{Mg}_{aq}^{2+}/\text{Mg}$ dans l'intervalle de pH $[0, 14]$ pour une solution de $10^{-2} \text{ mol. dm}^{-3}$ de chlorure de magnésium.

On prendra : 1 cm pour représenter 0,02 V en ordonnée,
1 cm pour représenter 1 unité pH en abscisse.

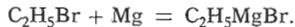
d) Définir les termes corrosion, immunité, passivation.
Placer leur zone d'existence sur le diagramme précédent.

e) On peut obtenir la passivation du magnésium par anodisation.
Quel est le principe de cette méthode ?

TROISIÈME PARTIE

I. SYNTHÈSE ET DOSAGE D'UN COMPOSE ORGANOMAGNÉSIE

Lc bromoéthane, dans l'oxyde de diéthyle, réagit sur le magnésium selon la réaction :



I.1.

a) Faire un schéma du montage expérimental utilisé au laboratoire.

b) Cette synthèse nécessite une protection contre l'atmosphère ambiante.

Expliquer pourquoi. Comment peut-on réaliser pratiquement cette protection ?

I.2. On a réalisé une synthèse d'éthylmagnésium en faisant réagir du bromoéthane (21,8 g) et un excès de magnésium, le solvant étant l'oxyde de diéthyle. Le volume de la solution magnésienne obtenue est de 180 cm^3 . Pour la doser, on en prélève 5 cm^3 qui sont versés dans 10 cm^3 d'acide chlorhydrique 1 mol. dm^{-3} , contenant de la phénolphtaléine. On observe le virage de l'indicateur acido-basique quand on a ajouté $4,6 \text{ cm}^3$ de soude 1 mol. dm^{-3} .

a) Calculer le titre du magnésien.

b) Calculer le rendement de la synthèse sachant que les masses molaires atomiques (g. mol^{-1}) sont : H : 1,0 ; C : 12,0 ; Br : 79,9.

II. REACTIONS AVEC LES DERIVES CARBONYLES

II.1. On fait réagir le bromure d'éthylmagnésium sur l'éthanal.

- a) Quel produit *A* obtient-on ?
- b) Proposer une écriture pour le mécanisme de cette réaction.
- c) Quel produit *B* obtient-on quand on hydrolyse *A* par une solution de chlorure d'ammonium ? Ecrire la réaction.

II.2. On fait réagir le bromure d'éthylmagnésium sur la pentène-3 one-2.

Après hydrolyse, on obtient un mélange renfermant 75 % de méthyl-4 hexanone-2, *F* et 25 % d'un produit *D*, isomère.

- a) Donner le nom et la formule développée de *D*.
- b) Expliquer la formation de *F* et proposer un mécanisme de réaction.
- c) On veut caractériser la cétone *F*. Proposer et décrire un test chimique ; écrire la réaction mise en jeu.
- d) On peut faire la synthèse de la cétone éthylénique de départ à partir de l'éthanal et de la propanone. Ces deux produits réagissent entre eux en présence de soude diluée ; le produit *G* obtenu est transformé en pentène-3 one-2 par traitement en milieu acide.

Donner le nom et la formule développée de *G*.

Expliciter le mécanisme de la réaction donnant *G*.

III. SYNTHÈSE INDUSTRIELLE DU PHÉNYL-2 ÉTHANOL

III.1. La première synthèse industrielle du phényl-2 éthanol, utilisé en parfumerie pour son odeur de rose, a été réalisée en faisant réagir le bromure de phénylmagnésium sur le chloro-2 éthanol. Quel est le type de la réaction du phénylmagnésium sur l'halogénure d'alkyle ?

Pourquoi faut-il deux équivalents de magnésien ?

Ecrire l'équation réactionnelle.

III.2. La méthode la plus récente consiste à faire réagir l'époxy-1,2 éthane (oxyde d'éthylène) et le benzène en présence de chlorure d'aluminium. Après hydrolyse, on obtient le phényl-2 éthanol.

a) Préciser le type de la réaction sur le benzène et son mécanisme.

b) Comment prépare-t-on l'oxyde d'éthylène dans l'industrie ? Préciser les réactifs et le catalyseur.

QUATRIÈME PARTIE

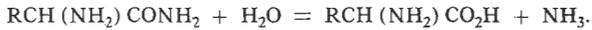
Les liaisons peptidiques adjacentes à un groupe NH_2 libre peuvent être hydrolysées par une enzyme, la leucine aminopeptidase, si celle-ci

est activée par Mg^{2+} , libérant l'acide aminé N-terminal de la protéine traitée.

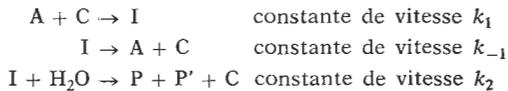
La réaction d'hydrolyse est catalysée par le complexe C formé par l'enzyme et son cofacteur Mg^{2+} (on supposera par la suite que toute l'enzyme est complexée par Mg^{2+}).

I. CINETIQUE ENZYMATIQUE

La réactivité de l'enzyme est déterminée par la réaction de la L-leucine amide A (méthyl-4 amino-2 pentanamide) :



Le déroulement cinétique peut s'interpréter par le schéma suivant :



I est le complexe intermédiaire; P et P' représentent la leucine et l'ammoniac. Dans la période initiale, on peut négliger la réaction inverse de l'étape d'hydrolyse. On prendra l'activité de l'eau égale à 1.

I.1.

a) En supposant réalisées les conditions de l'état stationnaire pour I, exprimer la concentration [I] et la vitesse de réaction $V = d[P]/dt$ en fonction de [A] et de $[C]_0$, concentration initiale de l'enzyme.

b) Quelle est l'allure de la courbe $V = f([A])$?

c) Montrer, en explicitant V_m et K_M , que l'expression de la vitesse peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{V_m} + \frac{K_M}{V_m} \cdot \frac{1}{[A]}.$$

I.2. On a mesuré la vitesse initiale dans plusieurs expériences différant par la concentration de la L-leucine amide, les autres conditions restant inchangées : enzyme activée en présence de $MgCl_2$ ($5 \cdot 10^{-3}$ mol. dm^{-3}); pH = 8,4; $\vartheta = 25^\circ C$.

$[A]_0 \cdot 10^3 / \text{mol} \cdot \text{dm}^{-3}$	3,33	1,67	0,83	0,67	0,50
$V_0 / \text{unité arbitraire}$	0,284	0,182	0,102	0,083	0,066

a) Représenter $\frac{1}{V_0}$ en fonction de $\frac{1}{[A]_0}$.

On prendra comme échelles :

en ordonnée : 1 cm = 1 [unité arbitraire]⁻¹

en abscisse : 1 cm = 10² mol⁻¹. dm³.

b) Evaluer V_m et K_M .

c) Quelle est la signification physique de V_m ?

d) Pour quelle valeur de $[A]_0$, observe-t-on que $V_0 = \frac{V_m}{2}$?

Que représente K_M si $k_{-1} \gg k_2$?

II. PROPRIETES ACIDO-BASIQUES

Pour mesurer la vitesse initiale de la réaction précédente, le pH est maintenu rigoureusement constant par addition continue, à l'aide d'une microseringue, d'une solution aqueuse d'acide chlorhydrique de concentration 1 mol.dm⁻³. La connaissance du volume ajouté, négligeable par rapport au volume total du système réactionnel, permet de connaître l'avancement de la réaction à un instant donné. La cinétique est étudiée à 25 °C, dans un milieu maintenu à pH = 8,4.

II.1. Pour la L-leucine (acide méthyl-4 amino-2 pentanoïque), donner la structure de la forme acido-basique prépondérante dans les trois domaines de pH que l'on précisera ($pK_{a1} = 2,3$; $pK_{a2} = 9,8$).

II.2.

a) Montrer que, pratiquement, la fonction acide carboxylique de la L-leucine est complètement déprotonée à pH = 8,4.

b) Calculer les taux de protonation $h = \frac{[\text{RNH}_3^+]}{([\text{RNH}_2] + [\text{RNH}_3^])}$

pour les deux fonctions amines dans la leucine amide (h_1) et la leucine (h_2) et pour l'ammoniac (h_3) ; on établira d'abord la relation générale : $h = f(\text{pH}, pK_a)$.

On donne $pK_a = 7,9$ et $9,2$ pour les acides conjugués de la leucine amide et de l'ammoniac.

II.3. Faire le bilan des échanges protoniques (pertes et gains) lors de la réaction d'hydrolyse de la leucine amide et montrer que la vitesse de réaction s'écrit :

$$V = \frac{d[P]}{dt} = \frac{1}{(h_2 + h_3 - h_1 - 1)} \cdot \frac{[\text{HCl}]_0}{\vartheta} \cdot \frac{dX}{dt}$$

où : ϑ = volume total du milieu réactionnel,

$[\text{HCl}]_0$: concentration de la solution d'acide chlorhydrique ajoutée,

dX : volume d'acide chlorhydrique ajouté pendant le temps dt .

III. STEREOCHIMIE

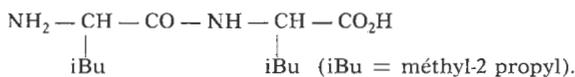
III.1.

a) La L-leucine possède la configuration S. Donner une représentation stéréochimique de cette molécule, en utilisant les conventions de Cram.

b) Quelle est la signification de la lettre L précédant le mot leucine ?

III.2.

a) On considère le dimère de la L-leucine.



Préciser la configuration des deux carbones asymétriques dans cette molécule.

b) Si on synthétisait ce dimère à partir de leucine racémique, combien de stéréoisomères obtiendrait-on ? Préciser pour chaque couple de ces composés la relation de stéréoisomérisie qui le caractérise.

SOLUTION

Comme l'annonce le préambule, le large balayage des connaissances en Chimie des candidats que veut être ce sujet, a pour support le magnésium. Il repose sur des exemples concrets, souvent liés à la vie courante, conformément à la manière actuelle et vraiment intéressante d'aborder l'étude de la Chimie.

PREMIÈRE PARTIE

L'ÉLÉMENT, L'ATOME DE MAGNÉSIUM

1. La structure électronique de l'atome de magnésium est $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$ (seul l'atome est caractérisé par cette structure électronique, et pas l'élément).

Le cation Mg^{2+} a bien sûr 12 protons dans son noyau $Z = 12$.

2. a) Le texte lu se traduit par :



$$b) \Delta E = c^2 \cdot \Delta m.$$

$$\Delta m = |1,0087 + 26,9770 - 4,0026 - 23,9850| = 0,0019 \text{ u.}$$

$$\Delta E = (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 0,0019 \cdot 10^{-3} = 1,71 \cdot 10^{11} \text{ J. mol}^{-1}$$

$$= 1,71 \cdot 10^8 \text{ kJ. mol}^{-1}.$$

Comme l'énergie libérée par une réaction chimique est de l'ordre de la centaine de kJ. mol^{-1} , il y a donc un facteur 10^6 .

$$E_{\text{nucleaire}} = 10^6 \cdot E_{\text{chimique}}.$$

3. Il ne faut pas assimiler élément chimique et corps simple, ni confondre élément chimique et atome. L'élément chimique est caractérisé par Z le nombre de protons et peut avoir un nombre Z' d'électrons différent de Z .

Si $Z = Z'$, c'est le cas particulier de l'atome. L'élément chimique recouvre l'atome et ses isotopes, le corps pur et éventuellement les variétés allotropiques et toutes les combinaisons chimiques. Dans la réaction chimique, l'élément se conserve ; pour chacun, le numéro atomique nombre de protons est invariant.

a) Les propositions 1° 3° 4° sont fausses.

1° c'est le métal magnésium qui fond à 923 K,

3° c'est l'atome de magnésium qui possède 12 électrons,

4° c'est l'isotope 24 qui a 24 nucléons.

b) Le langage courant ne fait pas la distinction entre élément et corps simple, ce qui peut provoquer des confusions. Dans 1° c'est l'élément magnésium qui est contenu dans le cacao sous forme d'ion Mg^{2+} et non le magnésium métal.

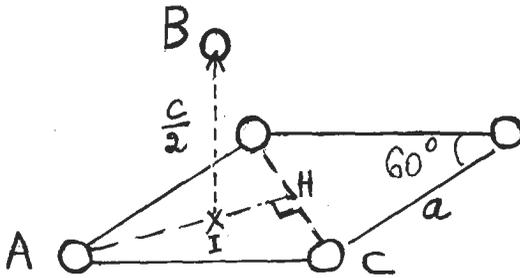
Par contre, en 2°, il s'agit du métal magnésium. La nomenclature actuelle appelle le dioxygène, le corps pur, permettant ainsi de lever l'ambiguïté et la confusion dans le langage entre élément et corps simple.

c) Le corps simple est le composé ne contenant qu'un élément. L'élément est l'invariant dans les réactions chimiques caractérisé par le nombre de protons dans le noyau.

DEUXIÈME PARTIE

I. STRUCTURE CRISTALLINE DU MAGNESIUM

I.1. Dans un empilement compact, les atomes centrés en A, B et C (assimilés à des sphères) sont tangents :



$$2r = AC = a = AB,$$

$$AH = h = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$AI = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$AB^2 = AI^2 + IB^2,$$

$$a^2 = a^2/3 + c^2/4 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 1,633.$$

I.2.

$$a) \varrho = \frac{m}{V}. \quad \begin{array}{l} V \text{ volume d'une maille,} \\ m \text{ masse des atomes d'une maille.} \end{array}$$

Le nombre d'atomes par maille est :

$$n = 1 + 8 \times \frac{1}{8} = 2,$$

leur masse :

$$m = \frac{M}{N_A} \cdot n = \frac{2 \times 24,3}{6,02 \cdot 10^{23}} \text{ g.}$$

Le volume de la maille est : $V = a h c = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} c$, d'où :

$$\varrho = \frac{4 M}{N_A a^2 c \sqrt{3}},$$

$$\varrho = 1750 \text{ kg. m}^{-3}.$$

b) L'emploi du magnésium permet un allégement.

Pour un même volume :

$$m_{\text{Mg}} = \varrho_{\text{Mg}} \cdot V = \varrho_{\text{Mg}} \cdot \frac{m_{\text{Fe}}}{\varrho_{\text{Fe}}},$$

$$m_{\text{Fe}} = m_{\text{Mg}} \frac{\varrho_{\text{Fe}}}{\varrho_{\text{Mg}}},$$

$$\Delta m = m_{\text{Mg}} \left(\frac{\varrho_{\text{Fe}}}{\varrho_{\text{Mg}}} - 1 \right),$$

$$\Delta m = 101 \text{ kg},$$

ce qui permet de transporter une personne en plus.

II. ALLIAGES MAGNESIUM-ALUMINIUM

II.1. Le domaine α est celui d'une phase solide, c'est une solution solide, de substitution étant donné les valeurs proches des rayons atomiques du magnésium et de l'aluminium.

Le réseau cristallin est celui de l'aluminium *cfc* :

$$r_{\text{Mg}} = \frac{a}{2} = 1,60 \text{ \AA} > r_{\text{Al}} = 1,43 \text{ \AA}$$

la substitution de l'aluminium par le magnésium dilate la maille, donc : $a'' > 4,04 \text{ \AA}$.

II.2. Les composés définis sont de formule Mg_xAl_y :

(1) 40 % Mg : $\frac{x}{40} = \frac{y}{60}$, ce qui conduit à Mg_2Al_3 .

(2) 58,62 % Mg : $\frac{x}{58,62} = \frac{y}{41,38}$, avec $x = 17$.

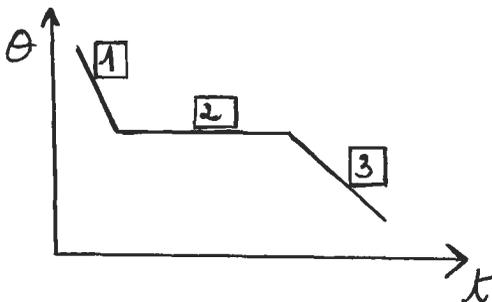
On obtient : $Mg_{17}Al_{12}$.

On ne peut pas prévoir leurs structures cristallines.

II.3. Les phénomènes observés sont les suivants :

- le liquide (mélange homogène Al-Mg) se refroidit,
- vers 600 °C apparaît une deuxième phase, le solide δ , solution solide d'aluminium dans le magnésium (≈ 97 % Mg),
- le mélange hétérogène liquide-solide continue à se refroidir jusqu'à environ 500 °C. La quantité de phase solide augmente aux dépens de la phase liquide. Les deux phases s'enrichissent en aluminium,
- de 500 à 410 °C, la phase solide, qui existe seule, se refroidit. Cette solution solide d'aluminium dans le magnésium conserve toujours la même composition (91,8 % Mg en atomes).

II.4.



- 1 liquide homogène,
- 2 liquide homogène + solide (eutectique mélange hétérogène des deux phases δ et γ),
- 3 mélange hétérogène des deux phases δ et γ dont la composition ainsi que les proportions varient légèrement au fur et à mesure que la température s'abaisse.

III. MAGNESIUM DANS LA METALLURGIE DU ZIRCONIUM

On étudie la réaction : $\text{ZrCl}_4 + 2 \text{Mg} = 2 \text{MgCl}_2 + \text{Zr}$.

III.1.

$$a) \Delta G^\circ = \Delta H^\circ - T \cdot \Delta S^\circ.$$

$\Delta G^\circ = f(T)$ est une droite si ΔH° et ΔS° sont indépendants de la température dans l'intervalle considéré.

b) à 331 °C ZrCl_4 sublime,

— passer de l'état solide à l'état gazeux augmente l'entropie $S^\circ(\text{ZrCl}_4) \nearrow$ donc $\Delta S^\circ \searrow$ et comme la pente vaut $-\Delta S^\circ$, elle augmente ;

— $\Delta_{\text{sub}}H^\circ > 0$; $\Delta_f H^\circ(\text{ZrCl}_{4g}) = \Delta_f H^\circ(\text{ZrCl}_{4s}) + \Delta_{\text{sub}}H^\circ$; donc $\Delta H^\circ_f(\text{ZrCl}_4) \nearrow$ et $\Delta H^\circ \searrow$; comme l'ordonnée à l'origine vaut ΔH° , elle décroît.

III.2.

a) Une erreur de 1000 s'est glissée dans le texte, en réalité il faut lire $\Delta S^\circ = -0,137 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$:

$$\Delta H^\circ = \Delta_f H^\circ(\text{Zr}_s) + 2 \Delta_f H^\circ(\text{MgCl}_{2l}) - 2 \Delta_f H^\circ(\text{Mg}_l) - \Delta_f H^\circ(\text{ZrCl}_{4g})$$

$$\Delta H^\circ = 2 \Delta_f H^\circ(\text{MgCl}_{2s}) + \dots$$

$$\dots 2 \Delta_{fus} H^\circ(\text{MgCl}_2) - 2 \Delta_{fus} H^\circ(\text{Mg}) - \Delta_f H^\circ(\text{ZrCl}_{4s}) - \Delta_{\text{sub}} H^\circ(\text{ZrCl}_4)$$

$$\text{d'où : } \Delta H^\circ = -340 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1},$$

$$\Delta G^\circ = -193 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

$$b) \Delta G = \Delta G^\circ - RT \ln p_{\text{ZrCl}_4}.$$

ΔG est la différence d'enthalpie libre entre, d'une part, 1 mole $\text{Zr} + 2$ moles MgCl_2 et, d'autre part, 1 mole ZrCl_4 à $p_{\text{ZrCl}_4} + 2$ moles Mg .

$$\Delta G = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{P, T} \quad \text{où } \xi \text{ est l'avancement de la réaction.}$$

ΔG indique l'écart par rapport à l'équilibre et le sens d'évolution spontanée ($-\Delta G$ est appelée affinité chimique).

III.3.

a) La réaction est spontanée si $\Delta G < 0$, ce qui est le cas ici :

$$\Delta G = \Delta G^\circ - RT \ln p_{\text{ZrCl}_4}$$

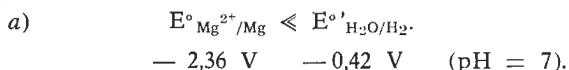
$$= -193 + 20,5 = -172,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

ΔG est constante et négative.

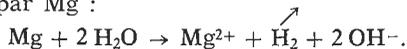
b) p_{ZrCl_4} étant maintenue constante, égale à 0,1 atm., ΔG est constant et négatif. La réaction se poursuit jusqu'à épuisement du magnésium (compte tenu des hypothèses).

IV. MAGNESIUM ET SOLUTIONS AQUEUSES

IV.1.



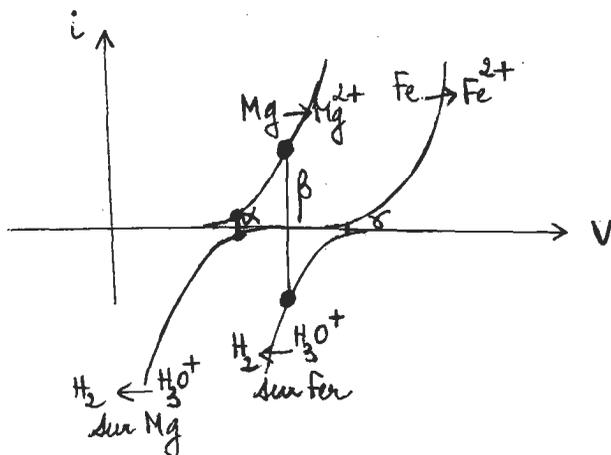
On doit donc s'attendre à la réduction de l'élément hydrogène de l'eau par Mg :



b) à pH = 1 : $E^{\circ}_{\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2} = -0,06 \text{ V} \gg E^{\circ}_{\text{Mg}^{2+}/\text{Mg}}$: la réaction entre Mg et H_3O^+ est thermodynamiquement très favorisée.

La faible réactivité est due à des facteurs cinétiques; la surtension du dihydrogène sur le magnésium est importante.

- c)
 $\alpha \ll \beta$
 $\gamma \ll \beta$



α est un courant très faible, la réaction est très lente,
 β est un courant plus intense, la réaction est plus rapide.

d) γ est un courant très faible.

Le magnésium est utilisé comme anode sacrificielle dans la protection électrochimique du fer.

[On peut aussi considérer la formation de la pile galvanique :

- ⊖ Mg anode : $\text{Mg} \rightarrow \text{Mg}^{2+}$ (oxydation),
- ⊕ Fe cathode : $\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2$ (réduction)].

e) Bien que la réaction soit lente, le magnésium finirait par être attaqué par l'eau avant l'emploi.

Le fonctionnement d'une pile nécessite un électrolyte.

L'eau de mer qu'on fait pénétrer au moment de l'emploi, ferme le circuit et la pile peut débiter.

IV.2.

a) Le précipité formé est $Mg(OH)_2$.

$$K_s = [Mg^{2+}] [OH^-]^2$$

$$K_s = 10^{-11}.$$

b) $E = E^\circ + 0,03 \lg [Mg^{2+}]$.

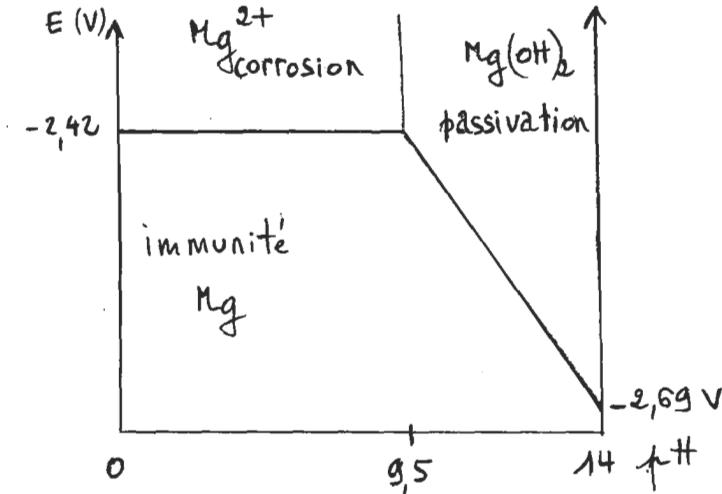
Quand il y a précipitation de $Mg(OH)_2$:

$$E = E^\circ + 0,03 \lg \frac{K_s}{[OH^-]^2}$$

d'où : $E^\circ = E - 0,03 \text{ p}K_s + 0,06 \text{ pOH}$ à $\text{pH} = 11$ ($\text{pOH} = 3$)
 $E^\circ = -2,51 \text{ V}$.

c)

$$[Mg^{2+}] = 10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}.$$



$$\text{pH} < 9,5 : E = -2,42 \text{ V},$$

$$\text{pH} > 9,5 : E = -1,85 - 0,06 \text{ pH}.$$

d) La corrosion existe quand a lieu le passage métal \rightarrow cation ; l'immunité quand ce passage est thermodynamiquement impossible. La passivation consiste à arrêter l'attaque du métal par formation d'une couche protectrice (oxyde, hydroxyde, carbonate, fluorure...).

Le diagramme précédent donne leur domaine d'existence.

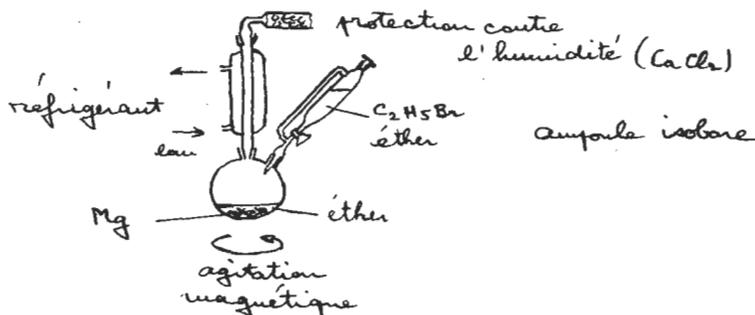
e) L'anodisation consiste en l'oxydation anodique du métal donnant un dépôt protecteur d'oxyde ou de fluorure selon certaines conditions.

TROISIÈME PARTIE

I. SYNTHÈSE ET DOSAGE D'UN COMPOSE ORGANOMAGNÉSIE

I.1.

a)



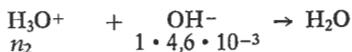
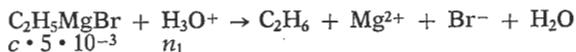
b) C_2H_5MgBr réagit sur H_2O , CO_2 et O_2 atmosphériques.

Pour protéger le magnésien, on doit faire sa synthèse sous atmosphère inerte de diazote ou d'argon sec.

Une simple protection contre l'humidité est réalisée avec un tube desséchant à $CaCl_2$.

I.2.

a) Il s'agit d'un dosage en retour :



avec : $n_1 + n_2 = 1 \cdot 10 \cdot 10^{-3}$ mol,

c : concentration du magnésien.

Comme : $n_1 + n_2 = 10^{-2} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot c + 4,6 \cdot 10^{-3}$,
 $c = 1,08 \text{ mol.l}^{-1}$.

b) Le nombre de moles de magnésien formé est :

$$n = 0,180 \cdot 1,08 = 0,194 \text{ mol}$$

alors que le nombre de moles de bromoéthane au départ est :

$$n' = \frac{21,8}{79,9 + 29} = 0,200 \text{ mol.}$$

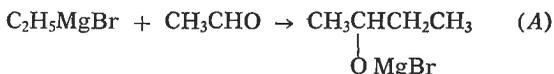
Le rendement est donc :

$$r = n/n' = 0,97 \quad \text{soit} \quad 97 \%$$

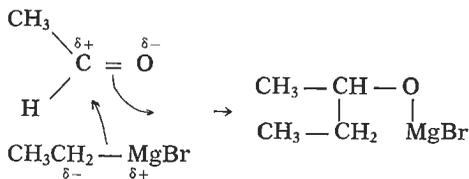
II. REACTIONS AVEC LES DERIVES CARBONYLES

II.1.

a)



b) On a une attaque nucléophile sur le carbone du carbonyle. Compte tenu des polarisations des liaisons, on peut proposer :



En fait, on a la réaction d'une molécule de magnésien sur un complexe formé entre $\text{C}_2\text{H}_5\text{MgBr}$ et CH_3CHO , où Mg est lié à O et où le carbone du carbonyle est plus électrophile.

Envisager l'attaque du carbonyle par R^- est trop schématique, car il est irréaliste de considérer l'existence d'un carbanion provenant de la dissociation du magnésien dans l'éther.

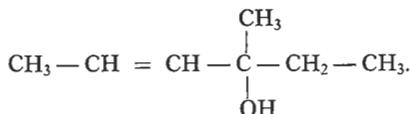
c)



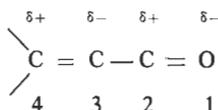
On obtient le butanol-2 (B).

II.2.

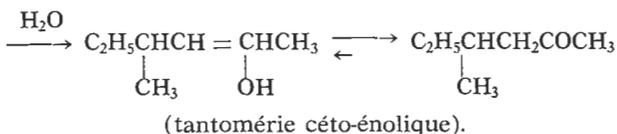
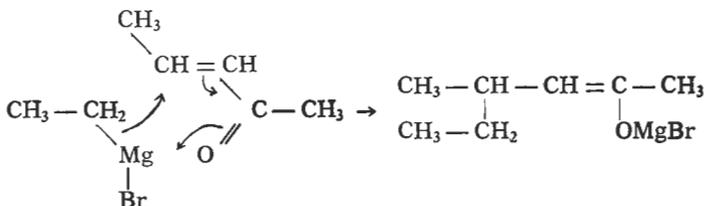
a) *D* correspond à l'addition normale sur le carbonyle, qui conduit, après hydrolyse, au méthyl-3 hexène-4 ol-3 :



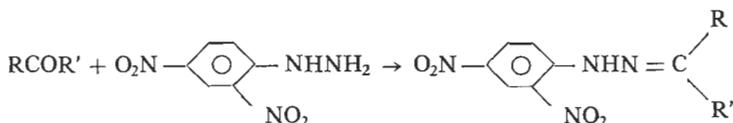
b) *F* résulte de l'addition-1,4 du magnésien sur l'énone, dont le système Π est délocalisé et présente deux centres électrophiles.



Le radical éthyle du magnésien peut se fixer en 2 (addition-1,2) ou en 4 (addition-1,4), conduisant respectivement à *D* ou *F*.

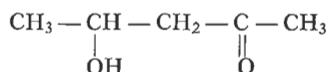


c) Pour caractériser *F*, on peut utiliser sa réaction avec la dinitrophénylhydrazine.



Dans le réactif (2,4-DNPH), on verse quelques gouttes de cétone; il se forme un précipité jaune, dont on prend le point de fusion.

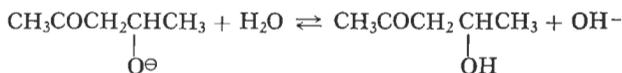
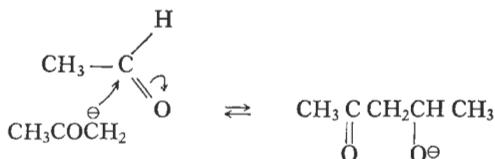
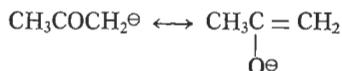
d) G est l'hydroxy-4 pentanone-2 :



C'est le produit d'une condensation aldolique, dont le mécanisme s'écrit :



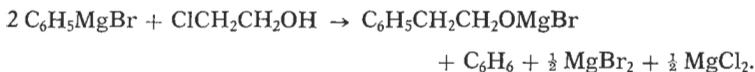
ou mieux :



III. SYNTHÈSE INDUSTRIELLE DU PHENYL-2 ETHANOL

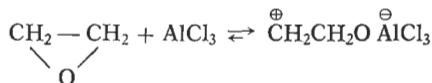
III.1. On a affaire à une substitution nucléophile du phénylmagnésium sur l'halogénure d'alkyle.

La réaction nécessite deux équivalents de magnésien, l'un pour la substitution nucléophile, l'autre pour la réaction acide-base avec la fonction alcool.



III.2.

a) La réaction sur le benzène est une substitution électrophile :



c) De a), on tire :

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{k_2 [C]_0} + \frac{k_{-1} + k_2}{k_1 k_2 [C]_0} \cdot \frac{1}{[A]} = \frac{1}{V_m} + \frac{K_M}{V_m} \cdot \frac{1}{[A]}$$

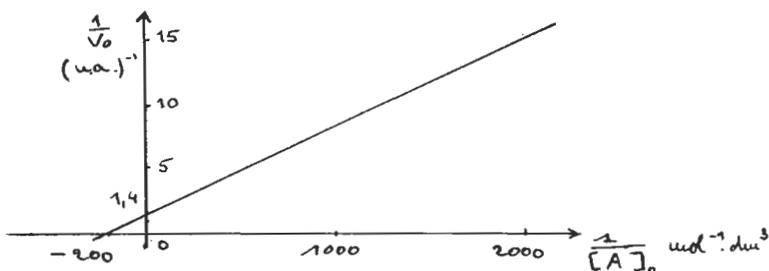
avec : $V_m = k_2 [C]_0$,

$$K_M = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}.$$

I.2.

a)

$\frac{1}{[A]_0}$ (mol ⁻¹ . dm ³)	300	599	1205	1493	2000
$\frac{1}{V_0}$ (unité arbitraire) ⁻¹	3,52	5,49	9,80	12,05	15,15



b) $V_m = 1/(1/V_0)_0 = 0,71$ u. a.,

$$K_M = 1/(1/[A]_0)_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol. dm}^{-3}.$$

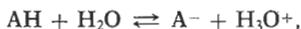
c) V_m est la vitesse initiale maximum.

d) Quand $V_0 = \frac{V_m}{2}$, on a : $[A]_0 = K_M$.

Si $k_{-1} \gg k_2$, $K_M = \frac{k_{-1}}{k_1}$ c'est-à-dire, la constante de dissociation du complexe enzymatique I en A et C.

II. PROPRIETES ACIDO-BASIQUES

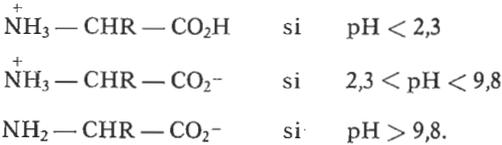
II.1. Pour l'équilibre de dissociation d'un acide faible :



on peut écrire : $\log \frac{[A^-]}{[AH]} = \text{pH} - \text{pK}_a$,

quand $\text{pH} < \text{pK}_a$, AH est prépondérant,
quand $\text{pH} > \text{pK}_a$, A⁻ est prépondérant.

Les formes prépondérantes pour la L-leucine (R = iBu) sont :



II.2.

$$a) \frac{[\text{R}'\text{CO}_2^-]}{[\text{R}'\text{CO}_2\text{H}]} = 10^{\text{pH} - \text{pK}_a} = 10^{6,1} \text{ avec } \text{R}' = \text{iBu} \underset{\substack{| \\ \text{+NH}_3}}{\text{CH}} -$$

La fonction acide carboxylique de la L-leucine est pratiquement complètement déprotonée.

Remarque.

(Il existe aussi une partie (~ 4 %) de carboxylate déprotoné $\text{NH}_2\text{CH}(\text{iBu})\text{CO}_2^-$).

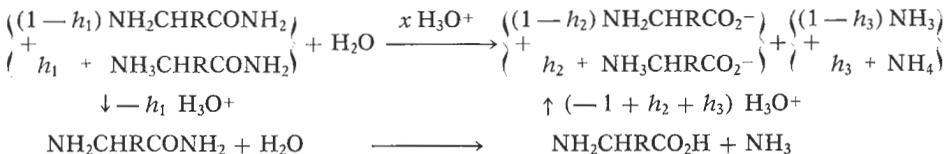
$$b) h = \frac{[\text{RNH}_3^+]}{[\text{RNH}_2] + [\text{RNH}_3^+]} = \dots$$

$$\dots \frac{1}{1 + [\text{RNH}_2]/[\text{RNH}_3^+]} = \frac{1}{1 + 10^{\text{pH} - \text{pK}_a}}$$

A $\text{pH} = 8,4$, on a :

$$\begin{array}{l} h_1 = 0,24 \text{ pour la leucine amide,} \\ h_2 = 0,96 \text{ pour la leucine,} \\ h_3 = 0,86 \text{ pour l'ammoniac.} \end{array}$$

c) Pour une mole de A transformée en P, x moles de H_3O^+ sont consommées.



d'où :

$$x = -h_1 + h_2 + h_3 - 1.$$

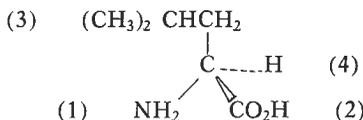
Pendant le temps dt , $\varrho \cdot d[P]$ moles de P formées ont nécessité $[HCl]_0 \cdot dX$ moles H_3O^+ . Il en résulte :

$$V = \frac{d[P]}{dt} = \frac{1}{-h_1 + h_2 + h_3 - 1} \cdot \frac{[HCl]_0}{\varrho} \cdot \frac{dX}{dt}.$$

III. STEREOCHIMIE

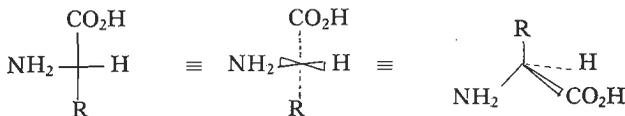
III.1.

a) La L-leucine de configuration S a la structure suivante :



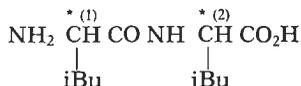
En effet, selon Cahn, Ingold, Prelog, on classe les substituants du carbone asymétrique dans l'ordre (1) (2) (3) (4). En regardant la molécule selon l'axe $C^* - (4)$ (en arrière), on passe de (1) à (2), puis (3) en tournant dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre.

b) L se rapporte à la représentation de Fischer (groupe NH_2 à gauche) et n'a pas de rapport avec le pouvoir rotatoire. [Pour désigner une substance lévogyre, on utilise *l* ou $(-)$].



III.2.

a) Le dimère de la L-leucine est l'isomère SS :



Par rapport à la L-leucine, le carbone (1) (CO_2H changé en $CONH$) garde la même configuration S, de même que le carbone (2) (NH_2 changé en $NHCO$).

b) A partir de leucine racémique, on peut obtenir quatre dimères stéréoisomères : RR, RS, SR et SS.

Entre RR et SS, on a une relation d'énantiométrie, de même qu'entre RS et SR.

Chacun des quatre autres couples d'isomères est caractérisé par une relation de diastéréoisométrie.

Claude DUBOC-CHABANON

(*Université P.-et-M.-Curie, Paris VI*)

et Pierre FELLMANN

(*Université Paris VII*).

C.A.P.E.S.

SESSION DE 1986

Option : Physique et Electricité appliquée

**COMPOSITION D'ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE
AVEC APPLICATIONS**

(Durée : 4 heures)

Les candidats devront indiquer sur les copies la numérotation exacte des questions traitées et respecter les notations de l'énoncé.

Il est recommandé de lire complètement le sujet car de nombreuses questions peuvent être abordées sans que les précédentes aient été totalement résolues (notamment II, III et IV).

Il sera tenu le plus grand compte des qualités d'exposition et de soin.

ETUDE D'UN ASSERVISSEMENT DE VITESSE DE SERVO-MOTEUR

L'objet du problème est d'étudier le fonctionnement des divers éléments d'un asservissement de vitesse dont le schéma fonctionnel est décrit par la fig. 1.

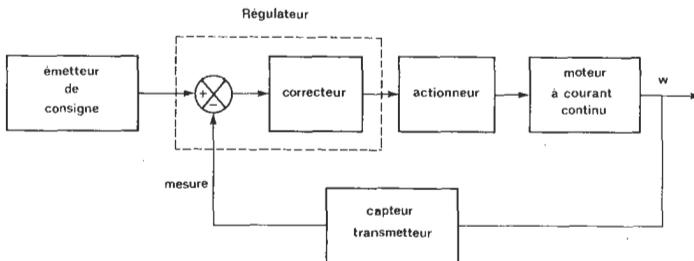


Fig. 1

I. ETUDE DU PROCÉDÉ : MOTEUR

1.1. Etude simplifiée.

On utilise un moteur à courant continu, bipolaire, à excitation indépendante, avec commande par l'induit ; le circuit inducteur est

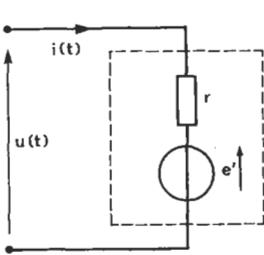


Fig. 2 a.

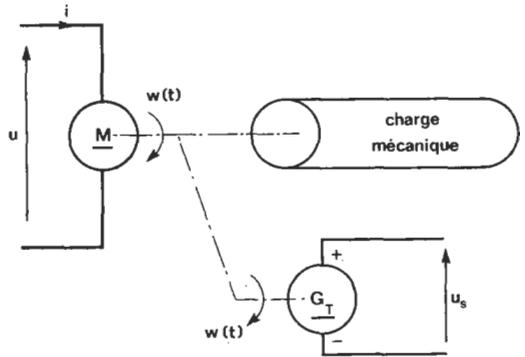


Fig. 2 b.

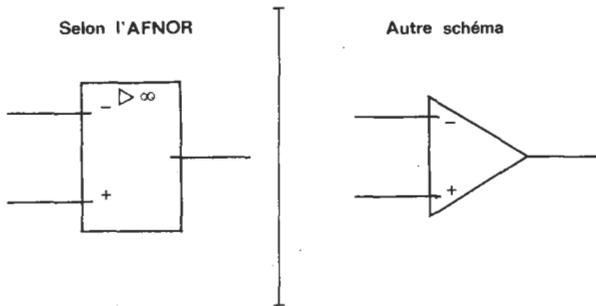


Schéma de l'amplificateur opérationnel.

alimenté par une alimentation stabilisée fournissant un courant d'intensité 1 A, ce qui est suffisant pour en assurer la saturation.

1.1.1. Indiquer l'intérêt d'un tel type de commande.

1.1.2. L'induit du moteur en rotation peut être simulé par le dipôle simplifié (r, e'), cf fig. 2 a.

Rappeler les expressions de la f.c.e.m. e' en fonction de la vitesse angulaire w (en rad/s) ainsi que celle donnant le moment du couple électromagnétique T en fonction de l'intensité absorbée i (on néglige les pertes mécaniques et les pertes fer du moteur).

r : résistance interne de l'induit ; $r = 4 \Omega$.

1.1.3. On désigne par T_c le moment du couple résistant imposé par la charge entraînée. On désigne par T_f le moment du couple de frottements (pour ce type de servo-moteur, les frottements secs sont importants et à vitesse moyenne on peut négliger les frottements dépendant de la vitesse).

Le moment d'inertie équivalent à l'ensemble des parties tournantes est noté J .

Établir l'équation différentielle liant $w(t)$ à $u(t)$.

Montrer qu'elle peut se mettre, dans le cas où $T_r = 0$, sous la forme :

$$\tau \frac{dw}{dt} + w = K(u - U_0)$$

où U_0 représente la tension de seuil de démarrage. Exprimer littéralement U_0 , K et τ .

1.1.4. Identification du moteur.

La vitesse angulaire w n'étant pas directement accessible, le moteur est couplé à une génératrice tachymétrique fournissant une tension u_s proportionnelle à w (cf. fig. 2 b). En particulier $u_s = 2,6$ V pour $N = 1000$ tr min⁻¹.

La caractéristique $u_s = f(u)$ est fournie en annexe (fig. 3 a) pour 3 régimes de fonctionnement du moteur :

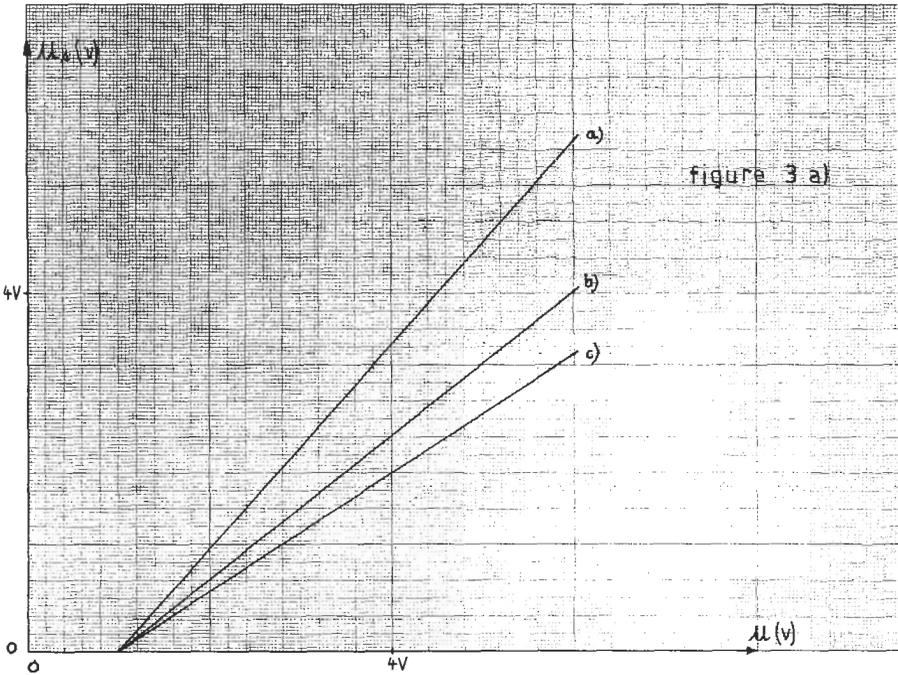


Fig. 3 a.

- a) A vide (pas de charge).
- b) En charge (la charge étant un frein magnétique).
- c) En charge (la charge étant un frein magnétique plus puissant).

Dans tous les cas la charge ne modifie pas J .

Pour le cas a), déterminer numériquement U_0 et K .

La réponse indicielle du moteur à un échelon de tension u est fournie en annexe (fig. 3 b) pour le cas a).

Montrer que son allure confirme l'hypothèse d'étude simplifiée. En déduire la valeur numérique de τ .

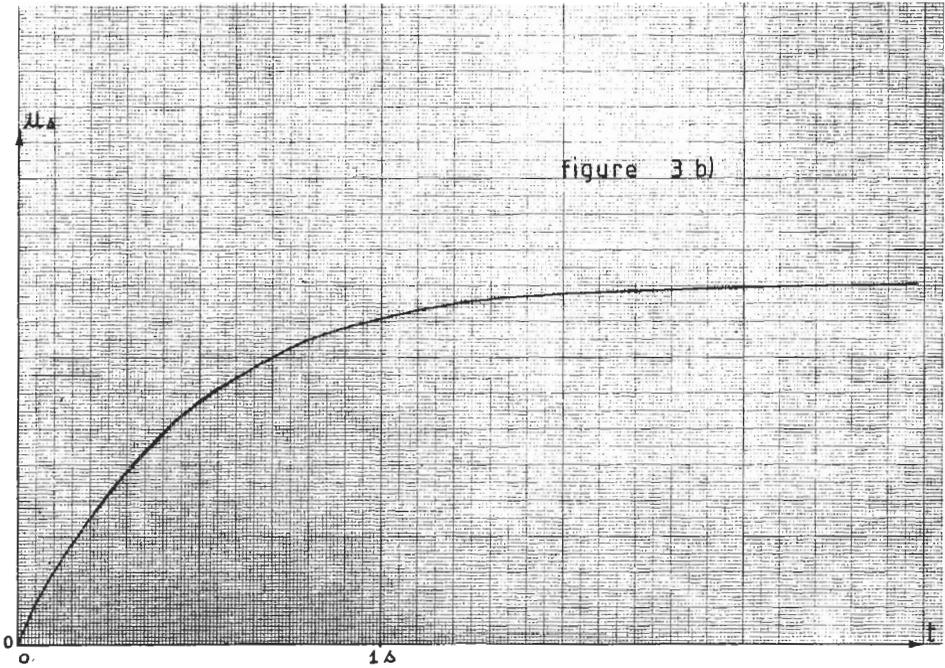


Fig. 3 b.

1.1.5. En déduire numériquement les valeurs de J , T_r , et vérifier que le coefficient de proportionnalité entre T et i est $2,18 \cdot 10^{-2} \text{ N.m.A}^{-1}$, tracer l'allure des caractéristiques $T = f(w)$ pour les valeurs $u = 5 \text{ V}$ puis $u = 10 \text{ V}$.

Quels paramètres (τ , K , U_0) sont modifiés lorsque le moteur est en charge ? [L'influence de T_r est déterminée à partir de la fig. 3 a)].

1.1.6. Donner l'expression de la fonction de transfert $H_M(p) = \frac{w^*(p)}{u^*(p)}$ en notation de Laplace, autour d'un point de fonctionnement correspondant à $u' = u - U_0 > 0$.

N.B. — On supposera nulles les conditions initiales sur w^* et u^* qui représentent de petites variations autour d'un point de fonctionnement défini par w et u' .

1.2. Etude complète.

On s'intéresse maintenant à un modèle r, l, e' de l'induit du moteur où l représente l'inductance de l'induit.

1.2.1. Etablir la nouvelle équation différentielle liant $w(t)$ à $u(t)$.

1.2.2. Autour d'un point de fonctionnement (w, u') , donner l'expression de la fonction de transfert $H'_M(p) = \frac{w^*(p)}{u^*(p)}$ dans le cas d'un moteur à vide.

1.2.3. Montrer que si l est inférieure à une valeur limite l_m , que l'on calculera numériquement, cette fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$H'_M(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

Evaluer littéralement τ_1 et τ_2 .

1.2.4. Calculer numériquement τ_1 et τ_2 pour $l = l_m$.

1.2.5. Dans la pratique $l = 1$ mH. Déterminer numériquement τ_1 et τ_2 . Conclusions ?

II. ETUDE DE L'ACTIONNEUR

2.1. Etude théorique d'un hacheur série.

Le schéma de principe du montage est représenté à la fig. 4.

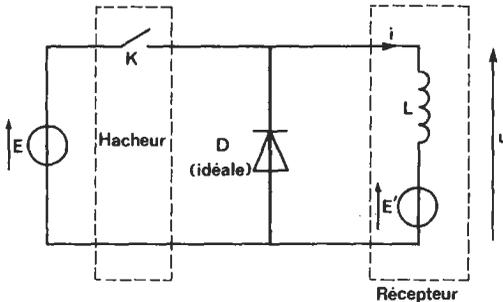


Fig. 4

On fait les hypothèses suivantes :

- le hacheur est un interrupteur parfait dont on peut commander l'ouverture et la fermeture ;
- la diode D est idéale ;
- le récepteur est constitué du moteur ($E', r = 0, l = 0$) et d'une bobine parfaite d'inductance L ;
- $E \geq E'$.

2.1.1. *On se place en régime permanent et EN CONDUCTION CONTINUE dans le récepteur.*

Les ouvertures et fermeture de K sont périodiques de période T.

On choisit l'origine des temps $t = 0$ telle que, pour la première période étudiée :

$$\begin{array}{l} t \in]0, \emptyset[: K \text{ fermé} \\ t \in]\emptyset, T[: K \text{ ouvert} \end{array} \quad \alpha = \frac{\emptyset}{T} \text{ est appelé rapport cyclique.}$$

2.1.1.1. Soit \bar{U} la valeur moyenne de $u(t)$. Exprimer \bar{U} en fonction de E' (on rappelle que l'on se trouve en régime permanent).

2.1.1.2. Représenter $u(t)$ et déterminer sa valeur moyenne \bar{U} en fonction de E et α . Entre quelles limites peut-elle varier (si α varie entre 0 et 1) ?

Déduire des deux expressions de \bar{U} la relation qui doit exister entre E, E' et α .

2.1.1.3. On appelle :

$$\left. \begin{array}{l} I_m : \text{la valeur minimale de } i(t) \\ I_M : \text{la valeur maximale de } i(t) \end{array} \right\} \text{ lorsque } t \text{ varie.}$$

Déterminer l'expression de l'ondulation $\Delta I = I_M - I_m$ en fonction de α , E, T, L.

Pour quelle valeur de α cette ondulation est-elle maximale et quelle est alors son expression ? Comment pourrait-on réduire ΔI_{MAX} ?

2.1.2. *On se place en régime permanent et EN CONDITION DISCONTINUE.*

La conduction est donc maintenant discontinue c'est-à-dire que le courant $i(t)$ s'annule avant la fin de chaque période T.

Pour la première période, on a donc : condition initiale $i(t = 0) = 0$.

$$\begin{array}{l} t \in]0, \emptyset[, K \text{ fermé, } i \neq 0 \\ t \in]\emptyset, \emptyset'[, K \text{ ouvert, } i \neq 0 \\ t \in]\emptyset', T[, K \text{ ouvert, } i \neq 0. \end{array}$$

$$\text{On notera } \beta = \frac{\emptyset'}{T}.$$

2.1.2.1. Exprimer \bar{U} en fonction de E'.

2.1.2.2. Représenter $u(t)$ et déterminer sa valeur moyenne \bar{U} en fonction de E, α, E', β .

En déduire la relation existant entre E, α, E', β .

2.1.2.3. Soit I_M la valeur maximale de $i(t)$ lorsque t varie. Déterminer l'expression de I_M .

2.1.2.4. Calculer \bar{I} : valeur moyenne de $i(t)$ en fonction de E, E', α, T, L .

2.1.3. Valeur moyenne de $i(t)$ à α et E' variables.

2.1.3.1. On veut déterminer \bar{I} à la limite de conduction continue. α a alors une expression simple en fonction de E et E' . Montrer à partir de la relation trouvée au 2.1.2.2. que cette expression simple de α est la même que celle trouvée au 2.1.1.2.

En déduire $\bar{I} = f(E, E', L, T)$ à la limite de conduction continue. Tracer la courbe représentative de $\bar{I}(E')$ dans ce cas (L et T étant fixés).

2.1.3.2. Tracer dans le même repère : $\bar{I}(E')$ en régime quelconque pour $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$. Indiquer les zones de conduction continue et de conduction discontinue.

2.1.3.3. Quel type de conduction présente un intérêt dans le cadre d'une commande par l'induit ?

2.1.3.4. Quel est alors l'inconvénient de ce dispositif en cas de régime transitoire ?

2.2. Réalisation à transistor.

Le schéma de principe du montage est représenté à la fig. 5. Le circuit de commande de la base sera étudié à la question 3. La valeur

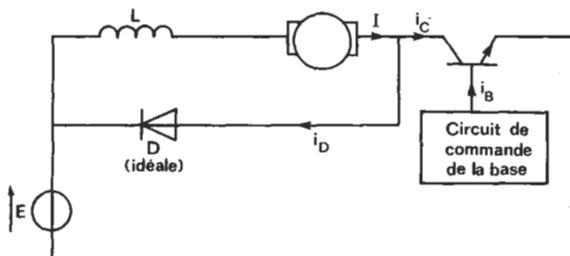


Fig. 5

de L a été choisie de telle manière que $\Delta I \approx 0$, donc le courant dans la charge sera supposé constant (égal à I).

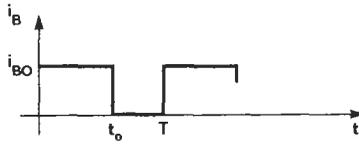


Fig. 6

La fig. 6 donne le graphe de $i_B(t)$.

i_{B0} a une valeur telle que T est saturé ; on a alors :

$$v_{CE} = V_{CE \text{ sat.}} \approx 0$$

si $i_B = 0$, $i_C = I_{CE0} \approx 0$.

2.2.1. En négligeant les temps de commutation des transistors, représenter $i_C(t)$ et $i_D(t)$.

2.2.2. En supposant maintenant que i_C croisse linéairement au déblocage après un temps de retard t_d et décroisse linéairement au blocage après un temps de stockage t_s , représenter $i_C(t)$, $i_D(t)$, $v_{CE}(t)$ puis $p_T(t)$: puissance consommée par le transistor (on néglige la puissance consommée par le circuit « base »).

2.2.3. On appellera t_m le temps de montée de $i_C(t)$ et t_f son temps de descente (définis à 0 % et 100 % de la valeur finale).

Exprimer la puissance moyenne P consommée par le transistor. Lorsque T diminue, comment évolue P ? Ou'en concluez-vous ?

2.3. Circuit de commande du transistor.

On utilise un circuit intégré type NE 555 dont le schéma équivalent interne est donné fig. 7.

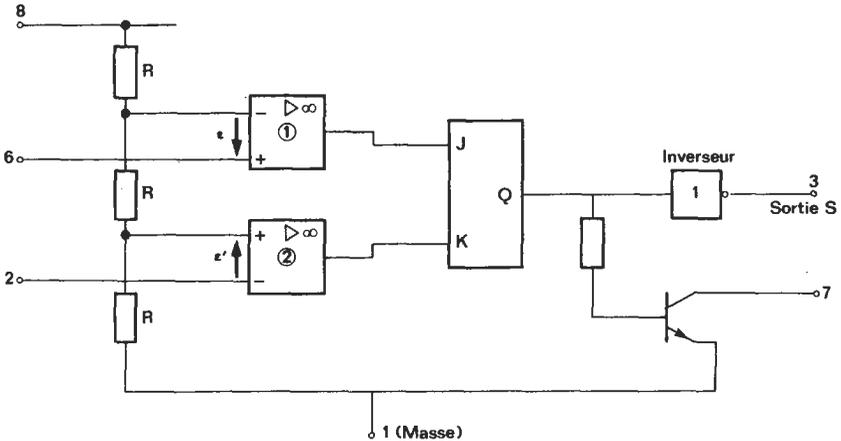


Fig. 7

Le transistor T fonctionne en bloqué-saturé et on suppose $V_{CE\text{ sat.}} \approx 0$.

Les comparateurs (1) et (2) donnent en sortie :

niveau logique 1 si ε (ou ε') > 0

niveau logique 0 si ε (ou ε') < 0

et ont des courants d'entrée nuls.

Le schéma du montage réalisé est représenté fig. 8.

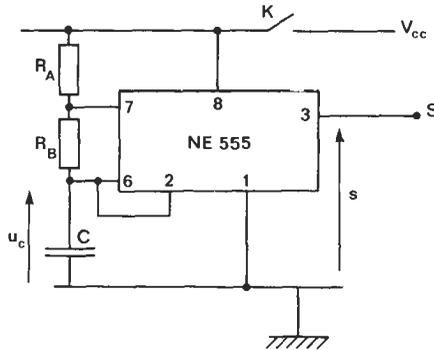


Fig. 8

La table de vérité d'une bascule JK est rappelée ci-après :

J	K	Q_{n+1}
0	0	Q_n
0	1	0
1	0	1
1	1	$\overline{Q_n}$

2.3.1. C est supposé déchargé.

A $t = 0$, on ferme K ; à $t = 0^+$, que vaudront J et K ? Donc Q et S ?

Quel sera l'état de T et que se passera-t-il pour u_C ?

Expliquer l'évolution de u_C et de S par la suite (faire les graphes de $u_C(t)$ et $s(t)$ pour $t \geq 0$).

2.3.2. Lorsque le régime permanent est établi, déterminer la durée de S à l'état haut puis de S à l'état bas (durées exprimées en fonction de R_A , R_B , C).

En déduire la fréquence du signal de sortie et le rapport cyclique α de ce signal.

Entre quelles valeurs extrêmes peut-il varier ? (On pourra à R_A fixe faire varier R_B , puis à R_B fixe faire varier R_A .)

2.4. Que pensez-vous des avantages et des inconvénients de la commande étudiée aux 2.1., 2.2., 2.3. pour une utilisation sur un servomoteur :

- en régime permanent ;
- en régime transitoire.

2.5. Commande linéaire.

On utilise le montage de la fig. 9 où le circuit intégré linéaire fonctionne en régime linéaire.

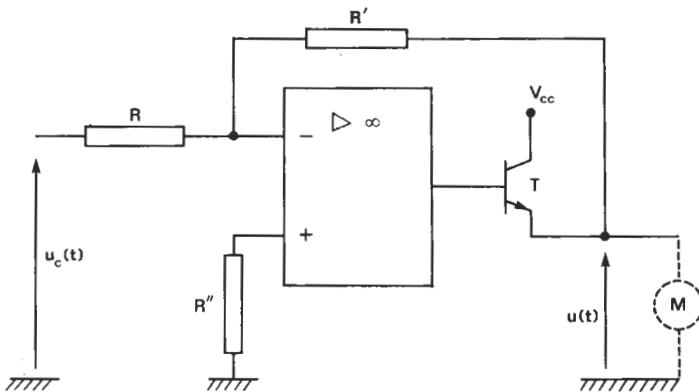


Fig. 9

2.5.1. On adopte les hypothèses du composant idéalisé (résistance d'entrée infinie, résistance de sortie nulle, amplification interne infinie).

Justifier l'existence du transistor ballast T.

2.5.2. Donner la relation littérale entre u et u_c .

2.5.3. On adopte $R = R' = 100 \text{ k}\Omega$; $R'' = 50 \text{ k}\Omega$ et $V_{CC} = 15 \text{ V}$.

Déterminer numériquement la relation entre u et u_c .

Dans l'hypothèse d'un composant non idéalisé, justifier la valeur de ces résistances.

Quel doit être le signe de u_c ? Quel est l'intérêt de ce type de commande linéaire ?

III. ETUDE DU RÉGULATEUR

On adopte le montage de la fig. 10, où le circuit intégré est idéalisé et fonctionne en régime linéaire.

On adopte les valeurs $R_1 = R_2 = 10 \text{ k}\Omega$; R_3 variable.

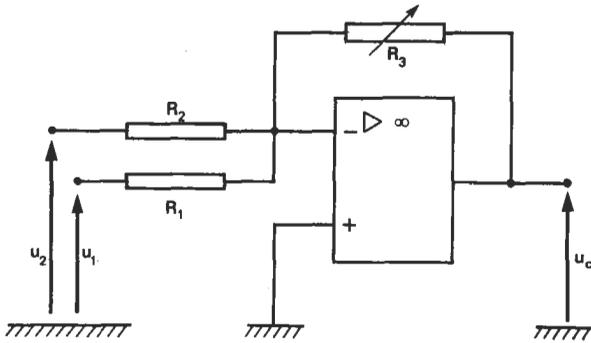


Fig. 10

3.1. Déterminer la relation littérale donnant u_c en fonction de u_1 et u_2 . On posera $A = \frac{R_3}{R_1}$.

3.2. Ce montage réalise simultanément la fonction de comparateur et d'amplificateur-correcteur. Si u_1 est une tension positive de consigne, quel doit être le signe du signal de mesure u_2 ?

IV. ETUDE DU CAPTEUR-TRANSMETTEUR

On désire réaliser un ensemble capteur-transmetteur fournissant un signal de mesure (ou signal de retour) u_2 avec l'échelle linéaire $u_2 = -10 \text{ V} \leftrightarrow N = 3000 \text{ tr min}^{-1}$.

On utilise le montage de la fig. 11.

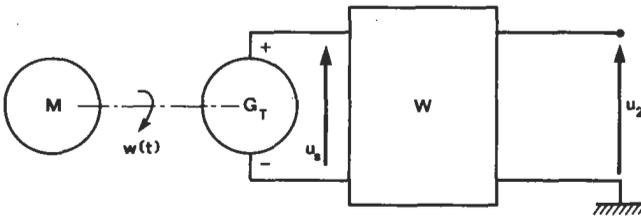


Fig. 11

Comment réaliser le bloc W de façon à réaliser la relation désirée ? (On utilisera un montage à amplificateur opérationnel.)

V. ASSERVISSEMENT DE VITESSE : cas du moteur à vide

On réunit les différents éléments suivant le schéma de la fig. 12.

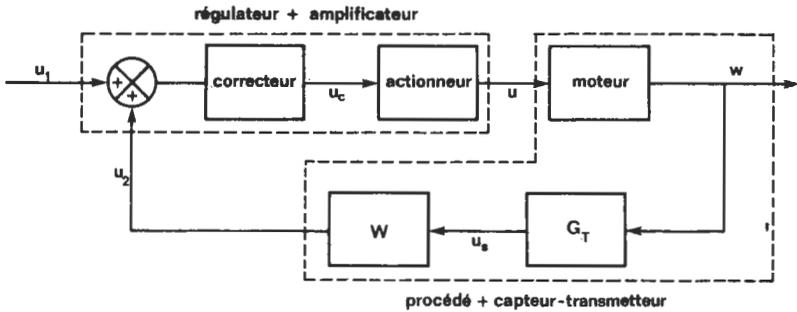


Fig. 12

5.1. Etude des performances statiques du système bouclé.

5.1.1. Pour le schéma de la fig. 12, tracer dans un diagramme ($Ox = -u_2$; $Oy = u$) la caractéristique graphique de l'ensemble : procédé + capteur-transmetteur.

Echelle : 1 V \leftrightarrow 1 cm pour les 2 axes.

5.1.2. Sur le même diagramme, tracer la caractéristique graphique de l'ensemble : régulateur + amplificateur.

On prendra $u_1 = 5$ V (ce qui correspond à une vitesse de 1500 tr min^{-1} par définition de l'échelle du capteur-transmetteur).

On prendra successivement $A = 1$, $A = 3$, $A = 10$.

5.1.3. Dans ces 3 cas, déterminer graphiquement le point de fonctionnement de l'ensemble bouclé. En déduire les 3 vitesses de rotation N (en tr min^{-1}) pour les 3 amplifications.

Pour ce type de régulation (appelée régulation proportionnelle), à quelle conclusion aboutirait-on si l'on désirait une précision statique parfaite ?

5.2. Correction du « statisme ».

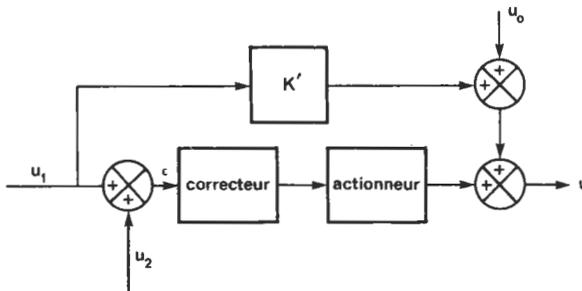


Fig. 13

Dans la pratique, l'amplification A est imposée par les performances dynamiques, les conditions de stabilité de la boucle et les

impératifs de fonctionnement linéaire s'il y a lieu. On ne joue donc pas sur A pour obtenir un point de fonctionnement correspondant à la consigne.

On utilise un système appelé correcteur automatique de statisme fournissant en sortie un signal de commande u exactement adapté à tout point de fonctionnement désiré.

On aboutit donc au schéma de la fig. 13.

5.2.1. Expliquer le principe et l'intérêt d'un tel montage. En particulier, déterminer la valeur à donner au coefficient constant K' pour que la valeur de ε au statisme soit nulle quel que soit le point de consigne.

5.2.2. On désire réaliser ce montage en modifiant le système de commande du moteur. Le schéma adopté est celui de la fig. 14.

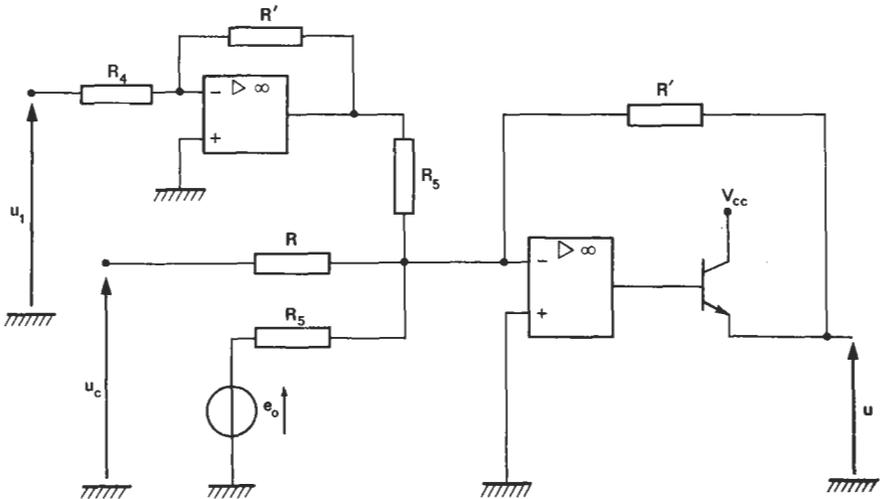


Fig. 14

Déterminer les valeurs numériques de R_4 , R_5 et e_0 .

5.3. Etude des performances dynamiques du système bouclé.

5.3.1. Pour le schéma de la fig. 12 (cas du paragraphe 5.1.), déterminer toutes les fonctions de transfert du système, que l'on présentera suivant le schéma de la fig. 15. Ce schéma fonctionnel sera valable autour d'un point de fonctionnement correspondant à $u' = u - U_0 > 0$.

Toutes les grandeurs repérées d'un astérisque représentent de petites variations autour d'un point de fonctionnement.

Montrer qu'on peut ramener le schéma à un schéma fonctionnel à retour unitaire.

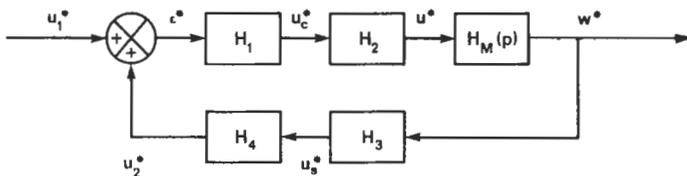


Fig. 15

5.3.2. Calculer la fonction de transfert $F(p) = \frac{w^*}{u_1^*}$. Montrer

qu'elle peut se mettre sous la forme d'un système du premier ordre dont on exprimera la constante de temps τ' en boucle fermée.

5.3.3. Calculer l'amplification A permettant d'obtenir $\tau' = 0,1$ s.

VI. COMPENSATION DES PERTURBATIONS : cas du moteur en charge

A partir du diagramme établi au 5.1.3., déterminer le nouveau point de fonctionnement pour $A = 3$ lorsque le frein magnétique est mis en fonctionnement (cas *b*).

En déduire la valeur du facteur de régulation défini par :

$$k = \frac{w'^*}{w^*}$$

où w^* représente la variation de la vitesse angulaire en l'absence de régulation (en boucle ouverte avec $u = cst$) et w'^* la variation de la vitesse en présence de la régulation proportionnelle.

Dans les 2 cas, on envisage le passage de la caractéristique du cas *a* au cas *b*.

SOLUTION

ETUDE D'UN ASSERVISSEMENT DE VITESSE DE SERVO-MOTEUR

I. ETUDE DU PROCÉDÉ : MOTEUR

1.1. Etude simplifiée.

1.1.1. Le flux inducteur étant constant, la f.c.e.m. e' du moteur n'est fonction que de sa vitesse de rotation (proportionalité : voir question suivante). Or, $e' = u - ri$ (u : tension aux bornes de l'induit ; i courant absorbé par l'induit). Donc, le réglage de u permet le réglage de la vitesse.

1.1.2. Pour un moteur à courant continu bipolaire, on a :

$$e' = n N \Phi$$

n : vitesse en tr/s,
 N : nombre de brins actifs de l'induit,
 Φ : flux sous un pôle.

D'où : $e' = \frac{\omega}{2\pi} \cdot N \Phi = \underline{k\omega}$. ω : vitesse en rd/s.

La puissance électromagnétique est :

$$P_{em} = e' i = T\omega \quad \text{d'où} \quad \underline{T} = \frac{e' i}{\omega} = \underline{ki}$$

T : moment du couple électromagnétique.

1.1.3. La relation fondamentale de la dynamique pour un solide en rotation s'écrit ici :

$$J \frac{d\omega}{dt} = T - T_r - T_f$$

T_f est constant car on néglige les frottements dépendant de la vitesse.

D'où :

$$J \frac{d\omega}{dt} = ki - T_r - T_f \dots$$

$$\dots = k \left(\frac{u - e'}{r} \right) - T_r - T_f = k \frac{u - k\omega}{r} - T_r - T_f.$$

Soit :

$$J \frac{d\omega}{dt} + \frac{k^2}{r} \omega = \frac{ku}{r} - T_r - T_f$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{Jr}{k^2} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{u}{k} + \frac{r}{k^2} (-T_r - T_f)}$$

* Dans le cas où $T_r = 0$, on obtient :

$$\frac{Jr}{k^2} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{u}{k} - \frac{r}{k^2} T_f$$

que l'on peut identifier à l'équation différentielle donnée :

$$\tau \frac{d\omega}{dt} + \omega = K(u - U_0)$$

avec :

$$\boxed{\tau = \frac{Jr}{k^2} \quad \left| \quad K = \frac{1}{k} \quad \right| \quad U_0 = \frac{r T_f}{k}}$$

1.1.4. Pour le cas *a*) : moteur à vide, on a : $T_r = 0$ donc, on a l'équation différentielle établie précédemment :

$$\tau \frac{d\omega}{dt} + \omega = K(u - U_0).$$

* La caractéristique $u_s = f(u)$ fournie est une caractéristique statique, donc :

$$\frac{du_s}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d\omega}{dt} = 0 \Rightarrow \omega = K(u - U_0).$$

U_0 est donc la tension pour laquelle $\omega = 0$ donc $u_s = 0$. On lit sur le graphe : $U_0 = 1 \text{ V}$.

K est la pente de cette caractéristique (au coefficient de la génératrice tachymétrique près, donc :

$$K = \frac{1000 \times 2\pi}{60 \cdot 2,6} \times \frac{3,4}{4-1} \Leftrightarrow K = 45,6 \text{ rd. s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$$

coeff. de la génératrice tachymétrique Pente de $u_s = f(u)$.

* Réponse indicielle.

La courbe donnée correspond à la réponse d'un système du premier ordre à un échelon : $u_s = u_s \text{ finale} (1 - e^{-t/\tau})$.

(Cette fonction est en effet solution de l'équation différentielle trouvée précédemment).

Pour déterminer la valeur de τ , différentes méthodes sont possibles. On en choisit 2 (car on fait une détermination graphique...), par exemple :

- 1) à $t = \tau$, on est à 63 % de la valeur finale,
- 2) la tangente à l'origine de la courbe coupe l'asymptote à l'abscisse $t = \tau$.

On trouve : $\tau \approx 0,45 \text{ s}$.

1.1.5. Application numérique.

$$* J = \frac{\tau k^2}{r} = \frac{\tau}{r K^2} = \frac{0,45}{4 \cdot 45,6} = \underline{5,4 \cdot 10^{-5} \text{ kg. m}^2}$$

$$T_i = \frac{U_0 k}{r} = \frac{U_0}{r K} = \frac{1}{4 \cdot 45,6} = \underline{5,5 \cdot 10^{-3} \text{ N. m.}}$$

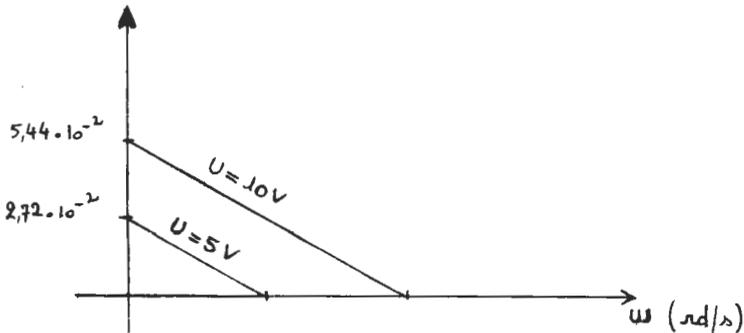
* Le coefficient de proportionnalité entre T et i est k , donc :

$$k = \frac{1}{K} = \frac{1}{45,6} \approx \underline{2,18 \cdot 10^{-2} \text{ N. m. A}^{-1}}$$

* Caractéristiques $T = f(\omega)$ pour $u = 5 \text{ V}$ puis $u = 10 \text{ V}$.
On a :

$$T = \frac{i}{K} = \frac{u - e'}{K r} = \frac{u}{K r} - \frac{\omega}{K^2 r}$$

Les caractéristiques demandées sont donc des droites.



Pente des droites $-1,18 \cdot 10^{-4} \text{ N. m. s. rd}^{-1}$.

* Lorsque le moteur est en charge (courbes *b* et *c*), l'équation différentielle est modifiée. En effet, T_r n'est plus nul et les charges envisagées étant des freins magnétiques, on a :

$$T_r = \lambda \omega.$$

Donc :

$$J \frac{d\omega}{dt} = T - T_r - T_f \iff J \frac{d\omega}{dt} = k \left(\frac{u - k\omega}{r} \right) - T_f - \lambda \omega$$

$$\iff J \frac{d\omega}{dt} + u \left(\frac{k^2}{r} + \lambda \right) = \frac{k u}{r} - T_f$$

$$\iff \boxed{\frac{J}{k^2/r + \lambda} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{k^2/r + \lambda} \left(\frac{k u}{r} - T_f \right)}$$

Donc, on a bien la même forme que précédemment mais :

$$\boxed{\tau = \frac{J}{k^2/r + \lambda} \quad \Bigg| \quad K = \frac{k}{r(k^2/r + \lambda)} \quad \Bigg| \quad U_0 = \frac{T_f r}{k}}$$

D'où :

τ et K varient avec la charge [la variation de K explique les pentes différentes des droites *a*), *b*), *c*)].

U_0 a toujours la même valeur (ce qui explique que les 3 droites passent par le même point pour $u_s = 0$).

1.1.6. En passant en notation de Laplace, on a :

$$\tau p \omega^*(p) + \omega^*(p) = K u^*(p)$$

soit :

$$\boxed{H_M(p) = \frac{\omega^*(p)}{u^*(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}}$$

1.2. Etude complète.

1.2.1. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} J \frac{d\omega}{dt} = k i - T_r - T_f \end{array} \right. \quad (1)$$

$$u = r i + e' + l \frac{di}{dt} = r i + k \omega + l \frac{di}{dt} \quad (2)$$

L'équation (1) donne : $i = \frac{1}{k} \left(J \frac{d\omega}{dt} + T_r + T_f \right)$, d'où :

$$\frac{di}{dt} = \frac{J}{k} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{1}{k} \frac{dT_r}{dt}.$$

En remplaçant dans (2), on obtient :

$$u = \frac{r}{k} \left(J \frac{d\omega}{dt} + T_r + T_f \right) + k\omega + \frac{lJ}{k} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{l}{k} \frac{dT_r}{dt}.$$

Soit :

$$\frac{lJ}{k^2} \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{rJ}{k^2} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{u}{k} - \frac{r}{k^2} (T_r + T_f) - \frac{l}{k} \frac{dT_r}{dt}$$

1.2.2. En passant en notation de Laplace, on obtient pour un moteur à vide ($T_r = dT_r/dt = 0$).

$$H'_M(p) = \frac{K}{lJ/k^2 p^2 + \tau p + 1}$$

car on reconnaît les expressions de τ , K et U_0 vues précédemment, d'où :

$$H'_M(p) = \frac{K}{K^2 lJ p^2 + \tau p + 1}$$

1.2.3. Identification du dénominateur (les numérateurs étant identiques et égaux à K) :

$$\begin{aligned} (1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p) &= 1 + \tau p + K^2 lJ p^2 \\ \Leftrightarrow 1 + \tau_1 + \tau_2) p + \tau_1 \tau_2 p^2 &= 1 + \tau p + lJ K^2 p^2. \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{cases} \tau_1 + \tau_2 = \tau \\ \tau_1 \tau_2 = lJ K^2. \end{cases}$$

Connaissant la somme et le produit de τ_1 et τ_2 , on résout l'équation du second degré associée :

$$X^2 - \tau X + lJ K^2 = 0$$

$\Delta = \tau^2 - 4lJ K^2$ est son discriminant.

On aura des solutions réelles si $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow l \leq \frac{\tau^2}{4J K^2}$. D'où :

$l_m = \frac{\tau^2}{4 J K^2}$	$\text{et si } l < l_m, \quad \tau_1 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4 l J K^2}}{2}$ $\tau_2 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4 l J K^2}}{2}$
--------------------------------	--

1.2.4. Pour $l = l_m$, $\Delta = 0$, donc :

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{\tau}{2} = 0,225 \text{ s.}$$

1.2.5. Pour $l = 1 \text{ mH}$, on trouve :

$$\tau_1 \simeq 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad \tau_2 \simeq 0,45 \text{ s.}$$

Donc $\tau_1 \ll \tau_2$, l'influence de τ_1 est négligeable. Le système peut donc être considéré comme un premier ordre avec une constante de temps $\tau = \tau_2 = 0,45 \text{ s}$. C'est ce qui a été fait dans l'étude simplifiée du 1.1.

II. ETUDE DE L'ACTIONNEUR

2.1. Etude théorique d'un hacheur série.

2.1.1. Conduction continue.

2.1.1.1. On a :

$$u(t) = E' + L \frac{di}{dt}$$

D'où :

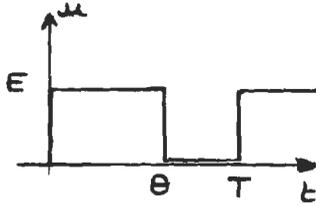
$$\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T (E' + L \frac{di}{dt}) dt = E' + [i]_0^T = E'$$

car $i(T) = i(0)$ en régime permanent.

$$\underline{\bar{U}} = E'$$

2.1.1.2.

$$\underline{\bar{U}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{E\phi}{T} = \underline{\alpha E}$$



Des 2 expressions de \bar{U} , on tire :

$$E' = \alpha E$$

\bar{U} peut varier de 0 (si $\alpha = 0$) à E (si $\alpha = 1$).

2.1.1.3. Entre $t = 0$ et $t = \theta$, on a :

$$\begin{cases} E = L \frac{di}{dt} + E' \Rightarrow i = \frac{E - E'}{L} t + i(0) \\ i(0) = I_m; \quad i(\theta) = I_M. \end{cases}$$

D'où :

$$i(t) = \frac{E - E'}{L} t + I_m \rightarrow I_M = \frac{E - E'}{L} \theta + I_m.$$

Soit :

$$\Delta I = \frac{E(1 - \alpha)\alpha T}{L}.$$

Remarque.

Entre $t = \theta$ et $t = T$, on a :

$$\begin{cases} 0 = L \frac{di}{dt} + E' \rightarrow i = -\frac{E'}{L}(t - \theta) + i(\theta) \\ i(\theta) = I_M; \quad i(T) = I_m. \end{cases}$$

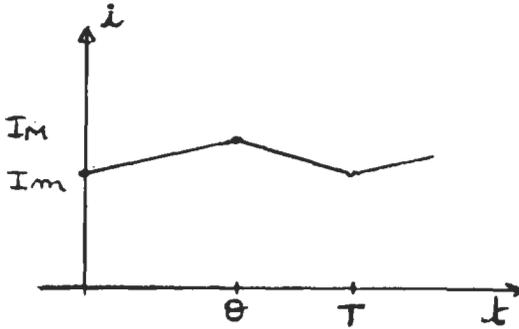
D'où :

$$i(t) = -\frac{E'}{L}(t - \theta) + I_M \Rightarrow I_m = -\frac{E'}{L}(T - \theta) + I_M.$$

Soit : $\Delta I = \frac{\alpha T E (1 - \alpha)}{L}$ (résultat identique à celui trouvé

précédemment).

Allure du courant :



* Etude de l'ondulation :

$$\frac{d(\Delta I)}{d\alpha} = \frac{ET}{L} (1 - 2\alpha).$$

D'où le tableau de variations :

α	0	0,5	1	
$\frac{d(\Delta I)}{d\alpha}$		+	0	-
ΔI			$\frac{ET}{4L}$	
	0			0

On a donc : $\Delta I_{\text{MAX}} = \frac{ET}{4L}$. Pour réduire ΔI_{MAX} , on peut :

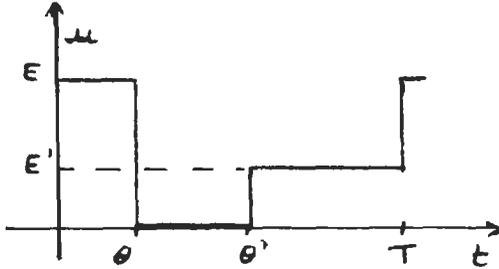
- réduire T (augmentation de la fréquence de hachage),
- augmenter L (inductance de lissage).

2.1.2. Conduction discontinue.

2.1.2.1. On a $\bar{U} = E'$ pour la même raison qu'au 2.1.1.1.

2.1.2.2. D'après la courbe ci-après,

$$\bar{U} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{E\alpha + E'(1-\beta)}{T}$$



Donc (en égalant les deux valeurs de \bar{U}) :

$$E' = E\alpha + E'(1 - \beta)$$

$$\boxed{\beta E' = \alpha E.}$$

2.1.2.3. On a entre $t = 0$ et $t = \theta$:

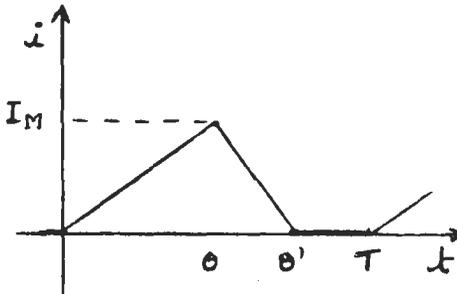
$$E = L \frac{di}{dt} + E'$$

comme précédemment avec :

$$i(0) = 0 \text{ et } I_M = i(\theta) \Rightarrow i(t) = \frac{E - E'}{L} t.$$

$$\text{D'où : } I_M = \frac{E - E'}{L} \theta \quad I_M = \frac{\alpha T (E - E')}{L}.$$

2.1.2.4. L'allure de $i(t)$ est la suivante :



$$\bar{I} = \frac{\text{Aire du triangle}}{T}$$

$$\bar{I} = \frac{I_M \vartheta'}{2T}. \text{ Soit } \bar{I} = \frac{(E - E') \alpha T}{2TL} \vartheta'$$

$$\Leftrightarrow \bar{I} = \frac{E - E'}{2L} \cdot \alpha \cdot \frac{E \alpha T}{E'} = \frac{E \alpha^2}{2L} \left(\frac{E}{E'} - 1 \right) T.$$

2.1.3. Valeur moyenne de $i(t)$ à α et E' variables.

2.1.3.1. On a trouvé au 2.1.2.2. que $E\alpha = E'\beta$, or à la limite de conduction continue $\beta = 1$, donc on a $E\alpha = E'$, ce que l'on avait trouvé au 2.1.1.2.

En remplaçant dans \bar{I} trouvé à la question précédente, α par $\frac{E'}{E}$, on obtient :

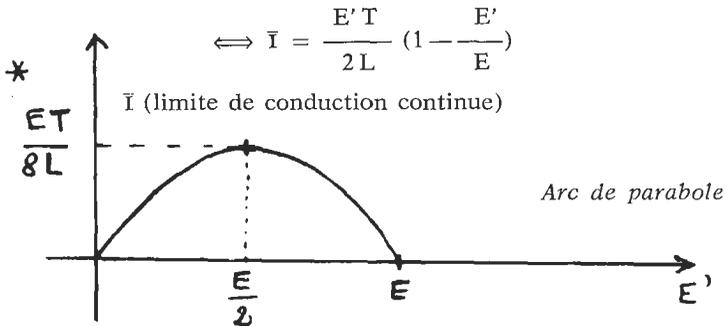
$$\bar{I} = \frac{E'}{2L} \left(1 - \frac{E'}{E} \right) T$$

à la limite de conduction continue.

Remarque.

A la limite de conduction continue, le calcul direct de \bar{I} donne :

$$\bar{I} = \frac{\text{Aire du triangle}}{T} = \frac{I_M \cdot T}{2T} = \frac{I_M}{2} = \frac{\alpha T (E - E')}{2L}$$



2.1.3.2.

* En régime discontinu (c'est-à-dire $\beta \leq 1 \Leftrightarrow E' \leq E\alpha$), on a :

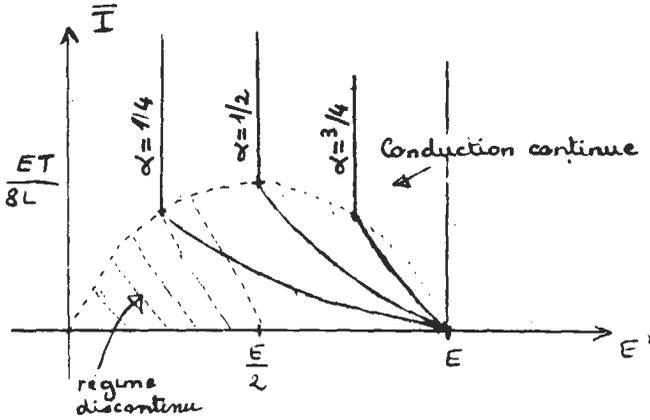
$$\bar{I} = \frac{E \alpha^2}{2L} \left(\frac{E}{E'} - 1 \right) T.$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{I} = 0 \quad \forall \alpha \text{ pour } E' = E, \\ \} \text{ à } \alpha \text{ donné, } I(E') \text{ est un arc d'hyperbole.} \end{array} \right.$$

- * Le régime continu est atteint pour $E' = E\alpha$.
- * En régime continu, $E' = E\alpha$, \bar{I} est quelconque (fixé par la puissance demandée par la machine entraînée par le moteur).

D'où les courbes :

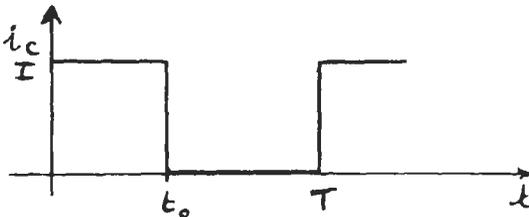


2.1.3.3. Dans le cas d'une commande par l'induit, la conduction continue est intéressante car E' , donc la vitesse du moteur, est réglable par α à E donné (\bar{I} indépendant de E').

2.1.3.4. Inconvénient : temps de réaction long à cause de l'inductance de lissage.

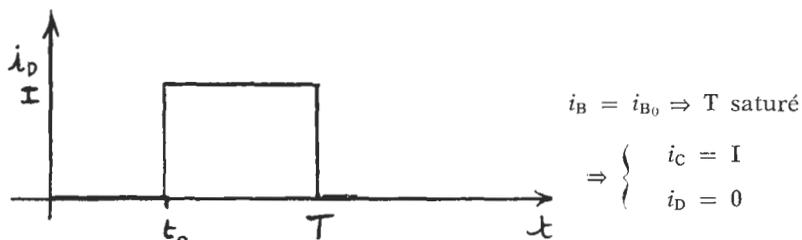
2.2. Réalisation à transistor.

2.2.1. On admet que les temps de commutation du transistor sont nuls.

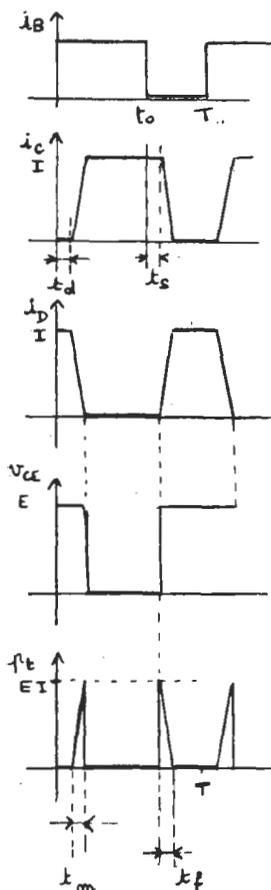


$$i_B = 0 \Rightarrow T \text{ bloqué}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_c = 0 \\ i_D = I \end{cases}$$



2.2.2. Avec les temps de commutation définis dans le texte.



$$\forall t, i_C(t) + i_D(t) = I.$$

Dès que la diode conduit,
 $v_{CE} = E$ (diode idéale).

Puissance instantanée consommée par le transistor (en négligeant la puissance consommée par le circuit base) :

$$p_t = v_{CE} \cdot i_C.$$

2.2.3. Puissance moyenne dissipée dans le transistor :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p_i dt$$

$\int_0^T p_i dt$ est l'aire des 2 triangles figurant dans le graphe de $p_i(t)$.

$$\text{D'où : } P = \frac{1}{T} \left[\frac{EI t_m}{2} + \frac{EI t_f}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P = \frac{1}{2T} EI [t_m + t_f].}$$

Lorsque T diminue, P augmente ; cela limite la fréquence d'utilisation c'est-à-dire la fréquence de hachage.

2.3. *Circuit de commande du transistor.*

2.3.1. Hypothèse : C est supposé déchargé, donc :

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0,$$

ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon < 0 \text{ pour le comparateur (1) d'où : } \\ \varepsilon' > 0 \text{ pour le comparateur (2) } \end{array} \right. \quad \boxed{\begin{array}{l} J = 0 \\ K = 1 \end{array}}$$

D'après la table de vérité : Q = 0 donc, à la sortie de l'inverseur : S = 1.

Q étant égal à 0, le transistor T est bloqué et C va se charger à travers R_A et R_B sous la tension V_{cc} .

La tension par rapport à la masse,

$$\text{* sur l'entrée - du comparateur (1) est } \frac{2}{3} V_{cc},$$

$$\text{* sur l'entrée + du comparateur (2) est } \frac{1}{3} V_{cc}.$$

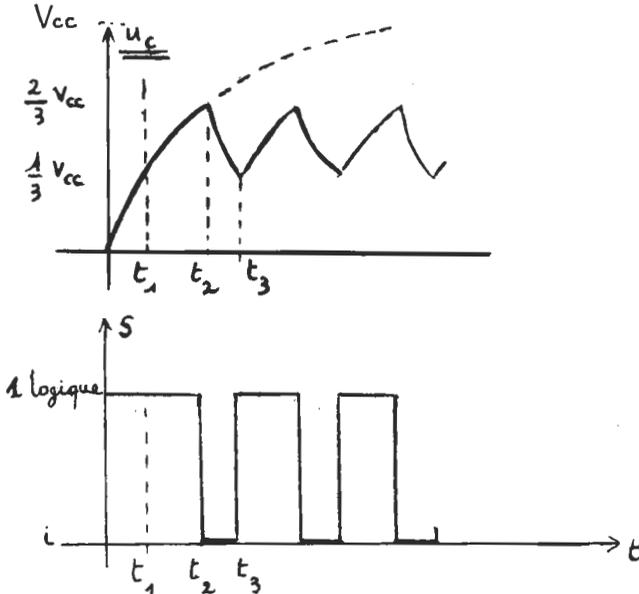
D'où le tableau :

t	0	t_1	t_2	t_2^+	t_3	t_3^+
u_c	0	$(1/3 V_{cc})^+$	$(2/3 V_{cc})^+$	$(2/3 V_{cc})^-$	$(1/3 V_{cc})^-$	$(1/3 V_{cc})^+$
J	0	0	1	0	0	0
K	1	0	0	0	1	0
Q	0	0	1	1	0	0
S	1	1	0	0	1	1

↑
On retrouve l'état
vu à t_1 .

Entre t_2 et t_3 , décharge de C à travers R_B , T étant saturé ($\Rightarrow V_{CE} = 0$).

Courbes :



2.3.2. Etude en régime permanent :

* Durée de S à l'état haut (origine des temps : t_1) : Δt_1 .

C se charge sous V_{cc} à travers R_A et R_B . u_c passe de $\frac{1}{3} V_{cc}$ à

$$\frac{2}{3} V_{cc}$$

Equation différentielle : $V_{cc} = (R_A + R_B) C \frac{du_c}{dt} + u_c$.

D'où :

$$u_c = V_{cc} + K e^{-t/(R_A + R_B) C}$$

A $t = 0$, $u_c = \frac{1}{3} V_{cc} \Rightarrow K = -\frac{2}{3} V_{cc}$. Soit :

$$u_c = V_{cc} \left(1 - \frac{2}{3} e^{-t/(R_A + R_B) C}\right). \text{ On a donc :}$$

$$\frac{2 V_{cc}}{3} = V_{cc} \left(1 - \frac{2}{3} e^{-\Delta t_1/(R_A + R_B) C}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta t_1 = (R_A + R_B) C \ln 2.}$$

* Durée de S à l'état bas (origine des temps : t_2) : Δt_2 .

C se décharge dans R_B ; u_c passe de $\frac{2}{3} V_{cc}$ à $\frac{1}{3} V_{cc}$.

Equation différentielle : $0 = R_B C \frac{du_c}{dt} + u_c$.

D'où :

$$u_c = K e^{-t/R_B C} \text{ avec } \text{à } t = 0, \frac{2}{3} V_{cc} = K.$$

Soit :

$$u_c = \frac{2}{3} V_{cc} e^{-t/R_B C}$$

On a donc :

$$\frac{1}{3} V_{cc} = \frac{2}{3} V_{cc} e^{-\Delta t_2/R_B C}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta t_2 = R_B C \ln 2.}$$

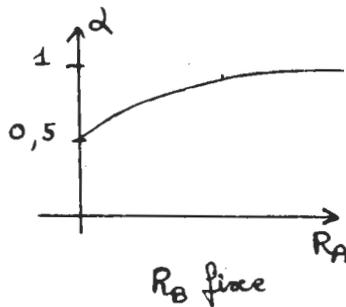
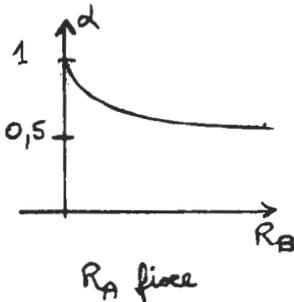
* La fréquence du signal de sortie est donc :

$$f = \frac{1}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{1}{(R_A + 2 R_B) C \ln 2}$$

et son rapport cyclique est : $\alpha = \frac{\Delta t_1}{T} = \frac{R_A + R_B}{R_A + 2R_B}$.

Valeurs extrêmes de α ,

- * à R_A fixe, R_B variable : $R_B \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 1$
 $R_B \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow 1/2$
- * à R_B fixe, R_A variable : $R_A \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 1/2$
 $R_A \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow 1$.



α varie donc entre 0,5 et 1.

2.4. En régime permanent $E' = \alpha E$ est facilement réglable mais α varie seulement entre 0,5 et 1.

Les transitoires sont longs à cause de la forte valeur de L.

2.5. *Commande linéaire.*

2.5.1. Le courant d'émetteur du transistor T est $(\beta + 1)$ fois plus grand que son courant de base.

T sert donc à amplifier le courant de sortie du circuit intégré pour alimenter le moteur.

2.5.2. L'entrée — de l'amplificateur opérationnel est une masse virtuelle, le courant passant dans R passe dans R'. Donc :

$$\frac{u_c}{R'} = \frac{-u}{R} \iff \boxed{\frac{u}{u_c} = -\frac{R'}{R}}$$

2.5.3. *Application numérique* : $\frac{u}{u_c} = -1$.

- * On a pris $R'' = R/R'$ pour équilibrer l'influence des courants de polarisation.

- * u_c doit être négatif pour que u soit positive.
- * Intérêt : Le réglage de la tension d'alimentation du moteur est direct par u_c .

III. ETUDE DU RÉGULATEUR

3.1. On a un montage sommateur inverseur :

$$u_c = -R_3 \left(\frac{u_2}{R_2} + \frac{u_1}{R_1} \right) = -\frac{R_3}{R_1} (u_2 + u_1)$$

car : $R_1 = R_2$.

$$\Leftrightarrow \boxed{u_c = -A(u_2 + u_1).}$$

3.2. Si $u_1 > 0$, pour que le montage serve de comparateur, il faut : $u_2 < 0$.

IV. ETUDE DU CAPTEUR-TRANSMETTEUR

Il faut : $u_2 = -\lambda u_s$ avec $\lambda = \frac{10}{3 \times 2,6} = 1,28$ car pour $N = 1000$ tr/min, $u_s = 2,6$ V.

On prendra donc un amplificateur opérationnel monté en inverseur avec $\frac{R'_2}{R'_1} = 1,28$.

V. ASSERVISSEMENT DE VITESSE : cas du moteur à vide

5.1. *Etude des performances statiques du système bouclé.*

5.1.1. On a : $U_2 = -\lambda U_s$; U_s proportionnelle à ω (coefficient de la génératrice tachymétrique); et $\omega = K(U - U_0)$.

On trouve numériquement :

$$\boxed{U - U_0 = -0,69 U_2.}$$

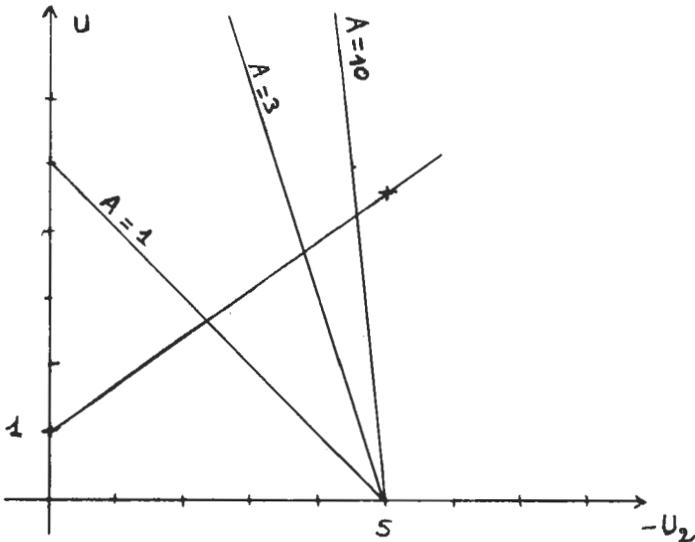
5.1.2. On a :

$$u = -u_c = -(-A)(u_1 + u_2) \Leftrightarrow u = A(u_1 + u_2).$$

Avec : $U_1 = 5$ V, $u = A(U_2 + 5)$.

5.1.3. Détermination graphique des intersections :

- $A = 1$, $-U_2 \simeq 2,3$ V $\Rightarrow N \simeq 690$ tr/min,
- $A = 3$, $-U_2 \simeq 3,9$ V $\Rightarrow N \simeq 1170$ tr/min,
- $A = 10$, $-U_2 \simeq 4,6$ V $\Rightarrow N \simeq 1380$ tr/min.



Si l'on désirait une précision statique parfaite, $U_1 = 5 \text{ V}$ devrait donner : $N = 1500 \text{ tr/min}$, donc : $-U_2 = 5 \text{ V}$, donc : $A \rightarrow \infty$ (caractéristique verticale pour l'ensemble régulateur + amplificateur).

5.2. Correction du « statisme ».

5.2.1. On a (fig. 13) : $u = A(u_2 + u_1) + u_0 + K'u_1$ [(équation 1)], et l'on sait que l'ensemble procédé + capteur transmetteur impose $U - U_0 = -0,69 U_2$ (question 5.1.1.).

Donc, si l'on veut $u_1 = -u_2$, il suffit de prendre $K' = 0,69$. $u_1 = -u_2$ est en effet donné par l'équation (1), si l'on remplace $u - u_0$ par $-0,69 U_2$, et si l'on fait $K' = 0,69$.

5.2.2. Etude du montage de la fig. 14.

$$u = -\frac{R'}{R_5} e_0 - \frac{R'}{R} u_c + \frac{R'}{R_5} \cdot \frac{R'}{R_4} u_1.$$

Or, on veut : $u = -u_c + U_0 + K'u_1$. D'où :

$$U_0 = -\frac{R'}{R_5} e_0$$

$$K' = \frac{R'^2}{R_5 R_4}$$

On peut choisir $R_5 = 100 \text{ k}\Omega$, ce qui, avec $U_0 = 1 \text{ V}$ et $R' = 100 \text{ k}\Omega$, implique : $e_0 = -1 \text{ V}$.

$$R_4 = \frac{R'^2}{R_5 K'} = 145 \text{ k}\Omega.$$

5.3. Etude des performances dynamiques du système bouclé.

5.3.1. Correcteur : $H_1 = -A.$

Actionneur : $H_2 = -1.$

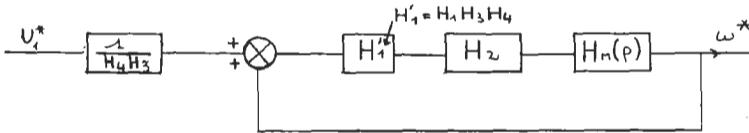
Moteur : $H_M(p) = \frac{K}{1 + \tau p}.$

H_3 : Génératrice tachymétrique :

$$H_3 = \frac{2,6 \cdot 60}{1000 \times 2\pi} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ V. s. rd}^{-1}.$$

Transmetteur : $H_4 = -1,28.$

⇒ Schéma à retour unitaire :



5.3.2. Fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{AK \cdot (-1,28) \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{AK \cdot (-1,28) \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{1 + \tau p}}$$

$$F(p) = \frac{AK}{1 + \tau p + AK(1,28) \cdot 25 \cdot 10^{-3}} \dots$$

$$\dots = \frac{AK}{1 + AK \cdot 1,28 \cdot 25 \cdot 10^{-3}} \frac{1}{1 + \tau' p}$$

$$\Rightarrow \tau' = \frac{\tau}{1 + AK \cdot 1,28 \cdot 25 \cdot 10^{-3}}$$

5.3.3. $\tau' = 0,1 \text{ s} = \frac{0,45}{1 + A \cdot 45,65 \cdot 1,28 \cdot 25 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow A = 2,4.$

VI. COMPENSATION DES PERTURBATIONS : cas du moteur en charge

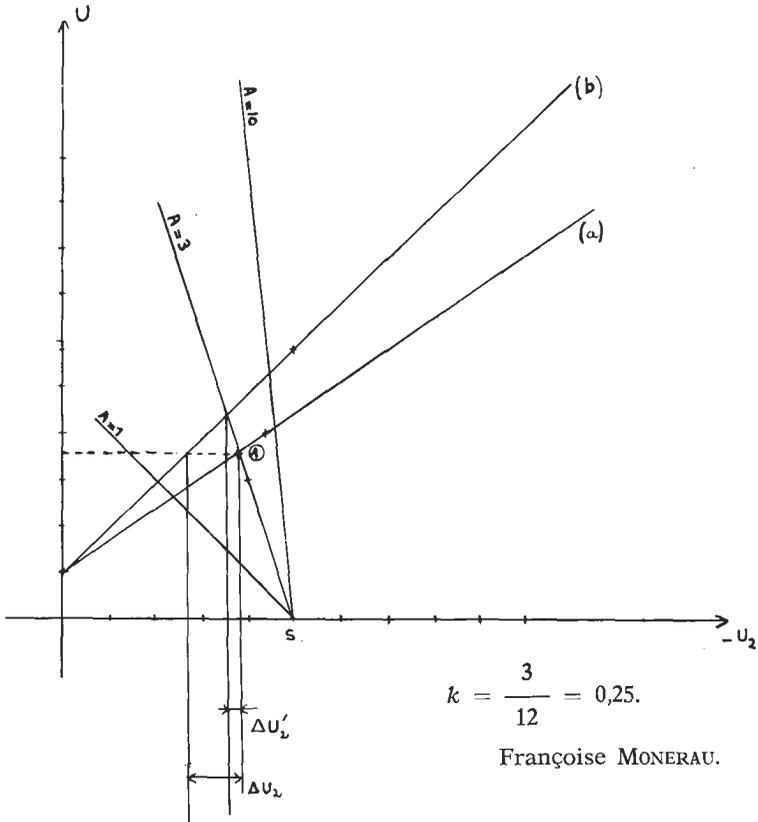
La courbe $U(-U_2)$ n'est pas la même que pour le moteur à vide, la pente de la droite $U_s = f(U)$ ayant changé.

Un calcul analogue à celui de la question 5.1.1., conduit à :

$$U_2 = -1,03(U - U_0) \Rightarrow \underbrace{U - U_0}_{\uparrow 1 \text{ V}} = -0,97 \cdot U_2.$$

Sans régulation, $U_1 = \text{cste} \Rightarrow U = \text{cste} = \text{valeur du premier point de fonctionnement en boucle fermée} : (1) \Rightarrow \text{passage de } a \text{ à } b \text{ sur une horizontale.}$

Avec régulation, passage d'un point de fonctionnement à l'autre (intersections avec la caractéristique correspondant à $A = 3$).



Agrégation

SESSION DE 1986

PROBLEME DE PHYSIQUE

Option Physique

Epreuve C

(Durée : 6 heures)

L'INSTABILITE DE RAYLEIGH-BENARD

On se propose d'étudier quelques aspects du problème, dit de Rayleigh-Bénard, qui concerne la stabilité et le mouvement convectif d'une couche horizontale de fluide, soumise à la pesanteur et à un gradient de température vertical et orienté vers le bas.

Dans un dispositif typique, schématisé sur la fig. 1, le fluide est confiné en haut et en bas par deux plaques, planes, distantes de d , rigides, très bonnes conductrices de la chaleur (cuivre). Ces plaques sont rectangulaires, de longueur L , de largeur l , parallèles au plan horizontal Oxy .

Des valeurs typiques de L , l et d sont :

$$L = 10 \text{ cm} ; \quad l = 3 \text{ cm} ; \quad d = 1 \text{ cm}.$$

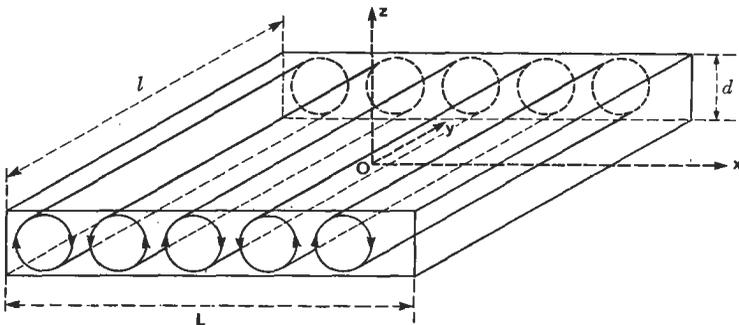
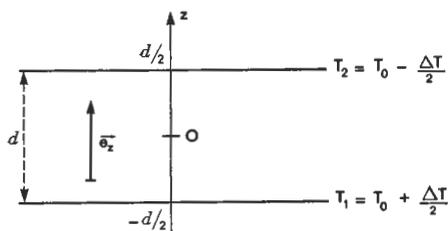


Fig. 1 a. — Représentation schématisée de l'expérience de Rayleigh-Bénard.



(e_z vecteur unitaire de Oz)

Fig. 1 b. — Vue en coupe.

La plaque inférieure de cote $z = -\frac{d}{2}$ est maintenue à la température $T_1 = T_0 + \frac{\Delta T}{2}$, tandis que la plaque supérieure de cote $z = +\frac{d}{2}$ l'est à la température $T_2 = T_0 - \frac{\Delta T}{2}$, ($\Delta T = T_1 - T_2 > 0$).

La constance de la température des plaques de cuivre est assurée par une circulation d'eau provenant de bains thermostatés (ce dispositif n'est pas représenté sur la fig. 1).

Les parois latérales de coordonnées $x = \pm \frac{L}{2}$, et $y = \pm \frac{l}{2}$

sont les parois intérieures d'un cadre de plexiglas poli optiquement et permettant de faire des mesures optiques sur la couche fluide.

Pour les fluides étudiés le coefficient de dilatation isobare α est positif.

On constate expérimentalement que, tant que ΔT ne dépasse pas une valeur critique ΔT_c , le fluide peut garder un état de repos, bien que la partie de fluide la plus dense (la plus froide) soit située au-dessus de la partie la moins dense (la plus chaude).

Si ΔT est supérieur à ΔT_c , des mouvements convectifs apparaissent. Lorsqu'on reste assez proche du seuil convectif correspondant à $\Delta T = \Delta T_c$, on constate qu'il s'établit un régime indépendant du temps (régime stationnaire), spatialement périodique, le système de courants fluides étant formé de rouleaux d'axes parallèles au petit côté l de la cellule; les effets de bord ne sont pas représentés sur la fig. 1. Une dépendance typique de la vitesse convective la plus grande dans le fluide, vis-à-vis de la différence de température ΔT , est indiquée sur la fig. 2.

La partie I étudie la méthode optique de détermination du champ des vitesses de convection par vélocimétrie laser. La partie II est

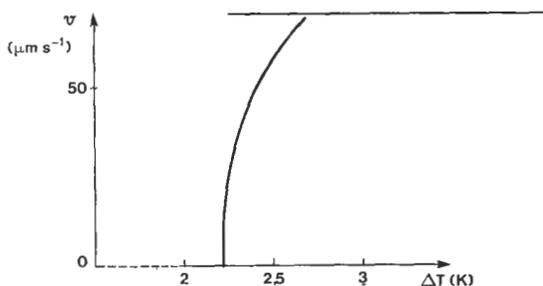


Fig. 2. — Apparition du régime convectif stationnaire et dépendance vis-à-vis de ΔT .

consacrée à quelques rappels simples de thermodynamique et d'hydrodynamique des fluides et à une approche heuristique du problème. La partie III étudie l'instabilité thermique de Rayleigh-Bénard dans le cadre d'une approximation linéaire des équations de l'hydrodynamique. La partie IV traite de quelques effets non linéaires.

Les parties I, II, III, et dans une certaine mesure la partie IV peuvent être abordées de manière indépendante.

Rappels et notations (pour les parties II, III, IV).

On rappelle qu'à l'équilibre thermodynamique local la description du comportement d'un fluide monophasé pur, isotrope, non conducteur de l'électricité, en mouvement par rapport au repère \mathcal{R} ($Oxyz$), est complète dès que l'on connaît la distribution de vitesse $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ et les distributions de deux quantités thermodynamiques, l'une d'entre elles étant par exemple la pression $p(x, y, z, t)$, l'autre pouvant être la masse volumique $\rho(x, y, z, t)$ ou la température $T(x, y, z, t)$. Ces fonctions de distribution décrivent l'état du fluide à un instant t en un point fixe du repère \mathcal{R} repéré par les coordonnées cartésiennes x, y, z .

On introduira les opérateurs :

$$\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}; \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}.$$

Pour tout champ de grandeurs $G(x, y, z, t)$, la quantité $\frac{DG}{Dt}$ repré-

sente la dérivée par rapport au temps de cette grandeur lorsqu'on suit le mouvement du fluide.

On rappelle la définition du coefficient de dilatation isobare :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left[\frac{\partial V}{\partial T} \right]_p \quad (V = \frac{1}{\rho} \text{ est le volume massique})$$

ainsi que la définition des coefficients calorimétriques par les relations :

$$T dS = C_v dT + l dV = C_p dT + h dp.$$

S est l'entropie massique du fluide; C_v et C_p sont les chaleurs massiques respectivement à volume constant et à pression constante.

Dans les conditions d'étude du problème, tous les coefficients thermoélastiques et calorimétriques seront considérés comme des constantes indépendantes de l'état du fluide, les chaleurs massiques C_v et C_p ayant pratiquement même valeur.

On désignera par η le coefficient de viscosité, $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ la viscosité

cinématique, K la conductivité thermique, $\chi = \frac{K}{\rho C_v} = \frac{K}{\rho C_p}$ la diffusivité thermique.

On supposera également dans tout le problème que η et K sont des constantes; on négligera en outre la variation de ρ dans l'expression de ν et χ que l'on traitera aussi comme des constantes.

On introduira au cours du problème les nombres sans dimensions suivants :

— le nombre de Prandtl : $\sigma = \frac{\nu}{\chi}$;

— le nombre de Rayleigh : $R = \frac{\alpha g d^3}{\chi \nu} \Delta T$ où g est l'accélération de la pesanteur.

Dans les parties III et IV, on utilise une écriture adimensionnée des équations de l'hydrodynamique, l'unité de longueur étant l'épaisseur d de la cellule, l'unité de temps étant un temps caractéristique

des échanges thermiques $\tau_{th} = \frac{d^2}{\chi}$.

Quelques données :

Pour les applications numériques, on prendra $T_0 = 293$ K.

On considérera un fluide dont les caractéristiques, dans les conditions de l'expérience, sont :

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,96 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}; \\ \nu &= 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}; \\ \chi &= 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}; \\ \rho &= 0,96 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}; \\ C_v = C_p &= 2,5 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}. \end{aligned}$$

L'apparition de la convection pour ce fluide, dans une cellule d'épaisseur $d = 1$ cm, est décrite par la fig. 2. A la valeur critique

$\Delta T_c = 2,2 \text{ K}$ correspond une valeur critique du nombre de Rayleigh $R_c = 1,7 \cdot 10^3$.

Reprise avec des cellules d'épaisseur différente ou avec des fluides différents, l'expérience peut conduire à d'autres valeurs de ΔT_c , mais le nombre de Rayleigh critique reste le même, dans les limites des erreurs expérimentales.

On rappelle la valeur de l'intensité de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m. s}^{-2}$.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.

PARTIE I. — DÉTERMINATION DES VITESSES PAR VÉLOCIMÉTRIE LASER

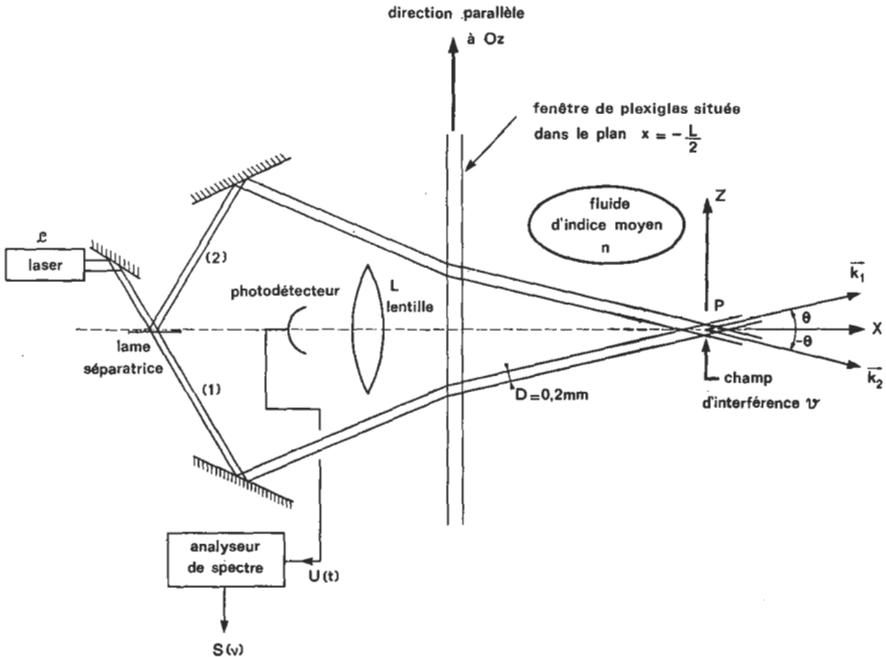


Fig. 3 a. — Schéma de principe de la vélocimétrie laser.

Le dispositif destiné à mesurer la vitesse du fluide en un point P est représenté sur la fig. 3. On fait interférer dans le voisinage du point P deux faisceaux cohérents, de même intensité, de même longueur d'onde dans le vide λ , provenant du même laser \mathcal{L} . Les faisceaux

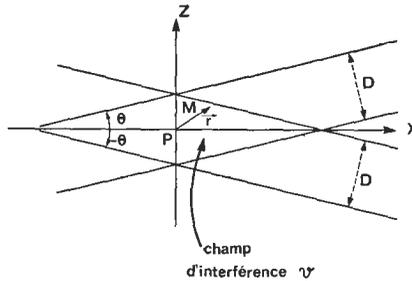


Fig. 3 b. — Agrandissement du champ d'interférence.

pénètrent dans la cellule par la face $x = -\frac{L}{2}$. On considérera dans

les questions I.1, 2 et 3 que les ondes qui interfèrent sont localement planes, de vecteurs d'onde \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 ($\|\mathbf{k}_1\| = \|\mathbf{k}_2\|$) parallèles au plan PXZ (PX parallèle à Ox et PZ parallèle à Oz) et faisant l'angle θ avec l'axe PX, les dépendances spatiales de ces ondes au point courant M étant respectivement définies par les fonctions $a e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}$ et $a e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}$ ($\mathbf{r} = \mathbf{PM}$). La fig. 3 b représente le champ d'interférence \mathcal{O} dans le plan de symétrie PXZ; D est la largeur typique commune des faisceaux dans le fluide; n désigne l'indice moyen du fluide pour la radiation λ .

Pour les applications numériques, on prendra :

$$\lambda = 0,5 \mu\text{m}; \quad D = 0,2 \text{ mm}; \quad n = 1,4; \quad \theta = 30^\circ.$$

I.1. Description du champ d'interférence.

a) Montrer que les surfaces d'égalité d'intensité dans le champ \mathcal{O} sont des plans équidistants. Calculer et évaluer numériquement leur équidistance H.

b) Représenter schématiquement les intersections avec le plan PXZ des surfaces d'intensité maximale. Donner un ordre de grandeur de leur nombre.

I.2. Principe de la vélocimétrie laser.

On admettra que tous les points du fluide à l'intérieur du champ \mathcal{O} ont la même vitesse \mathbf{v} de composantes v_x, v_y, v_z constantes (de l'ordre de quelques $\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$). Pour mesurer cette vitesse, on place dans le fluide une petite quantité de particules sphériques diffusantes (billes de latex). Lorsqu'une de ces particules, entraînée par le fluide à la vitesse \mathbf{v} , traverse le champ \mathcal{O} , elle diffuse la lumière et le photodétecteur reçoit la lumière diffusée collectée par la lentille L. Le photodétecteur délivre une tension $U(t)$ proportionnelle à l'intensité $I(t)$ de la lumière diffusée à l'instant t . Cette tension est analysée par un analyseur de spectre.

a) On considère le cas d'une seule particule qui traverse le champ \mathcal{O} pendant un intervalle de temps de durée τ . On néglige en première approche ses dimensions et on admet que l'amplitude complexe de l'onde sphérique qu'elle diffuse est proportionnelle à l'amplitude lumineuse qu'elle reçoit. Montrer que dans l'intervalle considéré, $I(t)$

peut s'écrire sous la forme $I(t) = A \cos^2 \frac{\pi v_z t}{H}$, A désignant une constante.

b) L'analyseur de spectre fournit un signal de sortie $S(\nu)$ ($\nu > 0$) donnant la répartition spectrale en fréquences du signal $U(t)$ produit par la lumière diffusée par l'ensemble des billes du champ \mathcal{O} . Montrer que la mesure de la valeur absolue $|v_z|$ de la composante z de la vitesse est ramené à celle d'une fréquence ν_D qu'on reliera à $|v_z|$ et que l'extension finie du champ d'interférence introduit une incertitude relative sur $|v_z|$ dont on exprimera l'ordre de grandeur en fonction du nombre de franges traversées. Calculer ν_D pour $v_z = 10 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

c) Expliquer comment il est possible de déterminer le signe de v_z en insérant sur l'un des faisceaux laser de la figure un dispositif qui introduit un déphasage proportionnel au temps. Comment pourrait-on mesurer les autres composantes de la vitesse ?

1.3. Effet Doppler et vélocimétrie laser.

On désire dans cette question justifier le nom de vélocimétrie (ou anémométrie) Doppler donné à la technique étudiée précédemment.

a) Exprimer, en fonction de la pulsation ω du laser et des vecteurs \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , \mathbf{v} , les deux pulsations ω'_1 et ω'_2 des ondes reçues par la particule, dans le référentiel \mathcal{R}' où celle-ci est au repos.

La particule réémet deux ondes dont les pulsations dans \mathcal{R}' sont égales à ω'_1 et ω'_2 . Calculer dans le référentiel PXYZ du laboratoire, et pour une direction de vecteur unitaire \mathbf{u} , les pulsations ω''_1 et ω''_2 des deux ondes réémises.

b) Interpréter dans cette approche la fréquence ν_D et retrouver son expression.

1.4. Utilisation de faisceaux gaussiens.

Le faisceau issu du laser n'est pas en réalité une onde plane, mais plutôt un faisceau gaussien à symétrie cylindrique. On appelle ainsi un faisceau dont l'amplitude lumineuse complexe en un point est de la forme :

$$\psi(x, q) = a(x) \exp i k \left(x - \frac{q^2}{2q(x)} \right)$$

la coordonnée x étant prise suivant la direction de propagation du faisceau, et q désignant ici la distance de ce point à l'axe de symétrie. La fonction $a(x)$ est une fonction lentement variable à l'échelle des dimensions transverses du faisceau ; on admet que l'équation de propagation des ondes est satisfaite pourvu que : $q(x) = q_0 - x$; q_0 est une

constante complexe, caractérisant le faisceau, que l'on sépare en parties réelle et imaginaire :

$$q_0 = R_0 + i \sigma_0^2 k \quad (\sigma_0 \text{ de l'ordre du millimètre}).$$

a) Représenter (en coupe) la région de l'espace définie par l'inégalité

$$\left| \frac{\psi(x, \varrho)}{\psi(x, 0)} \right|^2 < \frac{1}{e} \quad (e : \text{base des logarithmes népériens}).$$

En quel point peut-on dire que le faisceau converge ? Montrer que, loin de ce point, le faisceau est conique, et sa phase est celle d'une onde sphérique.

b) Les faisceaux gaussiens ont la propriété de rester gaussiens quand ils traversent un système centré. Vérifier cette propriété dans le cas simple d'une lentille mince, de distance focale image f , centrée en $x = \varrho = 0$ sur l'axe du faisceau précédent. On utilisera le fait qu'une telle lentille introduit un facteur de transmission proportionnel

$$\text{à } \exp - i k \frac{\varrho^2}{2f}.$$

c) On suppose qu'au point P où on désire mesurer la vitesse du fluide viennent converger deux ondes gaussiennes de même paramètre σ_0 (de l'ordre de quelques dixièmes de millimètre) caractérisant leur largeur, de directions de propagation parallèles respectivement à \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 , et d'axes passant par P. Montrer que, dans le champ d'interférence \mathcal{D} (de volume typique σ_0^3), on peut assimiler la phase des ondes à celles d'ondes planes, et que, dans le signal $U(t)$, la partie intéressante pour la mesure des vitesses (provenant du terme d'interférence) est proportionnelle à :

$$\left\{ \exp - \left[\frac{1}{\sigma_0^2} (v_x^2 \sin^2 \vartheta + v_z^2 \cos^2 \vartheta + v_y^2) t^2 \right] \right\} \cos \left(\frac{2\pi v_z t}{H} \right).$$

Décrire qualitativement le signal donné par l'analyseur de spectre.

PARTIE II. — PREMIÈRE APPROCHE DU PROBLÈME DE RAYLEIGH-BÉNARD

Les notations sont celles introduites dans la présentation du problème.

II.1. Etude de la conduction thermique.

On considère les échanges thermiques à l'intérieur du fluide au repos (régime non convectif). On suppose que le vecteur densité de courant thermique obéit à la loi de Fourier : $\mathbf{J}_{th} = -\mathbf{K} \text{ grad } T$.

a) En exprimant le bilan d'énergie pour un volume limité par une surface fermée Σ , établir la relation (« équation de la chaleur ») :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T \quad (\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

opérateur laplacien ; χ diffusivité thermique).

b) On suppose que dans le dispositif expérimental étudié, la température est stationnaire et ne dépend que de z (fig. 1). Montrer que :

$$T(z) = T_0 + \frac{T_2 - T_1}{d} z.$$

c) On rappelle que la densité de courant d'entropie est donnée par : $\mathbf{J}_S = \frac{1}{T} \mathbf{J}_{th}$. A l'aide d'un bilan d'entropie relatif à une

tranche de fluide comprise entre les cotes z et $z + dz$, montrer que la création d'entropie par unité de volume et unité de temps pour le

régime défini en II.1. b vaut $\frac{K(T_2 - T_1)^2}{d^2 [T(z)]^2}$.

d) A partir de ce régime, on envisage l'apparition à l'instant $t = 0$ d'une perturbation de température de dépendance spatiale

$\left(\cos \frac{\pi z}{d} \right)$ ($\cos k_x x$), k_x étant une constante. Vérifier que cette perturbation s'amortit exponentiellement dans le temps.

e) Plus généralement interpréter physiquement la quantité $\tau_{th} = \frac{d^2}{\chi}$.

II.2. Etude d'une hypothèse de stabilisation du régime non convectif par effet de compressibilité.

On cherche à expliquer que le fluide peut conserver un état de repos, bien que le gradient de température soit dirigé vers le bas, par un mécanisme prenant en compte la compressibilité du fluide.

Soit respectivement $\rho_e(z)$, $T_e(z)$, $p_e(z)$ la masse volumique, la température, la pression du fluide à l'équilibre. On considère un petit élément de fluide déplacé de l'altitude z où il se trouve en équilibre à l'altitude $z + dz$ (fig. 4). On suppose que son déplacement est adiabatique (variation d'entropie $dS = 0$) et que sa pression est égale à tout instant à celle du fluide environnant, qui garde, lui, son état d'équilibre. A l'altitude $z + dz$, l'élément de fluide a une température $T_e(z) - dT_{ad}$ et sa masse volumique est :

$$\rho(p_e(z) + dp_e, T_e(z) - dT_{ad}).$$

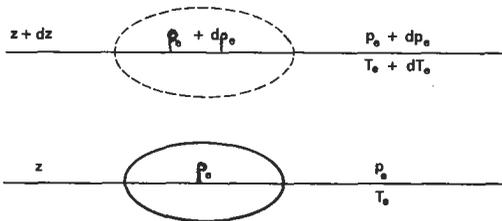


Fig. 4

a) Montrer qu'il est soumis à une force par unité de volume :

$$\delta f_z = -\alpha_Q g (dT_e + dT_{ad}).$$

b) Etablir l'égalité :

$$\frac{dT_{ad}}{dz} = \frac{\alpha g}{C_p} T_e(z).$$

c) Montrer que la condition de stabilité de l'équilibre est :

$-\frac{dT_e}{dz} < \frac{dT_{ad}}{dz}$. Cette inégalité est-elle satisfaite dans les conditions de l'expérience ?

II.3. *Modèle heuristique de stabilisation par effet de viscosité.*

On cherche à rendre compte de l'état de repos du fluide en tenant compte de sa viscosité et de sa conduction thermique ; par contre, on néglige les effets de pression et on pose $Q(T, p) = Q(T, p_0)$, p_0 étant une pression moyenne dans la cellule.

a) On imagine qu'une bulle de rayon R s'élève verticalement avec une vitesse petite, notée $v(t)$, au sein de la couche de fluide, le fluide environnant gardant son état de repos. En appliquant l'équation fondamentale de la dynamique à la bulle, montrer que la condition de stabilité peut s'écrire de manière approchée :

$$\frac{4 \alpha_Q g R^4}{3 \chi} \left| \frac{dT_e}{dz} \right| \lesssim 6 \eta.$$

Pour faire ce calcul, on prendra $-6\pi\eta Rv$ comme valeur de la force de frottement visqueux ; la somme des autres forces (poids et poussée d'Archimède) sera évaluée en admettant que la température de la bulle à l'instant t est celle de la couche fluide qui l'entourait à l'instant $t - \tau$, τ désignant un temps caractéristique de l'équilibre thermique au sein de la bulle.

b) En déduire un ordre de grandeur du nombre de Rayleigh critique correspondant au seuil convectif et le comparer à la valeur expérimentale $R_c = 1,7 \cdot 10^3$.

c) Interpréter la vitesse définie par le rapport $\frac{\chi}{d}$ et la compa-

rer aux valeurs expérimentales (indiquées dans l'introduction au problème).

On a tenu compte jusqu'à présent des effets de viscosité au niveau des forces exercées. On désire maintenant vérifier que la dissipation d'énergie associée ne modifie pas l'analyse du paragraphe II.1 concernant les échanges thermiques.

d) En prenant l'exemple d'un écoulement visqueux laminaire d'un fluide incompressible entre deux plans distants de d , l'un au repos,

l'autre en mouvement de translation à la vitesse v , expliquer de manière qualitative que l'énergie dissipée par unité de temps et de volume Φ_{visc} dans l'expérience de Rayleigh-Bénard est de l'ordre de

$$\eta \frac{v^2}{d^2}.$$

e) Calculer la création d'entropie par unité de temps et unité de volume associée à cette dissipation et la comparer numériquement à celle obtenue en II.1. c) (on prendra $\Delta T = \Delta T_c$).

II.4. Approximation de Boussinesq des équations de l'hydrodynamique.

On considère les équations générales de l'hydrodynamique d'un fluide visqueux newtonien et on admet que, dans les conditions de l'expérience, la masse volumique ρ du fluide n'est essentiellement fonction que de la température : $\rho(T) = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)]$ (approximation de Boussinesq).

a) Montrer que l'équation de conservation de la masse est :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \text{div } \mathbf{v}.$$

Justifier par un calcul d'ordre de grandeur l'approximation :

$$\text{div } \mathbf{v} = 0.$$

b) L'équation de Newton s'écrit alors :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\text{grad } p + \rho \mathbf{g} + \eta \Delta \mathbf{v}.$$

Pourquoi peut-on remplacer ρ par ρ_0 dans le membre de gauche de cette équation, mais pas dans le membre de droite? (Aucun calcul n'est demandé.)

c) La troisième équation de l'hydrodynamique est (Φ_{visc} défini en II.3. d) :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} + \rho h \frac{Dp}{Dt} = K \Delta T + \Phi_{visc}.$$

Expliquer en quoi cette équation équivaut à un bilan d'entropie. Les évaluations faites aux questions II.2. c) et II.3. e) conduisent à ne garder dans cette équation que les termes où la température T apparaît explicitement.

PARTIE III. — ETUDE DE L'ÉTABLISSEMENT DE LA CONVECTION

On désire expliquer, à l'aide des équations de l'hydrodynamique, l'apparition d'un régime convectif, et montrer que ceci correspond à une certaine valeur critique du nombre de Rayleigh. La cellule contenant le fluide est celle décrite dans l'introduction du problème (fig. 1).

Pour plus de généralité, on envisage dans les questions III.1, 2, 3, la possibilité que la cellule et le fluide aient un mouvement de rotation d'ensemble, à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ autour de l'axe vertical Oz. En l'absence de convection, le fluide est alors au repos dans le référentiel tournant \mathfrak{R} lié à la cellule.

On suppose que dans le cadre de l'approximation de Boussinesq (II.4), et dans le référentiel tournant \mathfrak{R} , les équations de l'hydrodynamique sont (Δ : opérateur laplacien)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \varrho_0 C_p \frac{DT}{Dt} &= K \Delta T \\ \varrho_0 \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\mathbf{grad} P + \eta \Delta \mathbf{v} + \alpha g \varrho_0 (T - T_0) \mathbf{e}_z - 2 \varrho_0 \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Cette dernière relation exprime la loi de Newton pour un élément de fluide de masse volumique constante ϱ_0 ; les quatre termes du membre de droite représentent des forces par unité de volume, à savoir respectivement : les forces de pression autres que celles intervenant dans l'équilibre hydrostatique du fluide à la température T_0 ($\mathbf{P} = 0$) si $\mathbf{v} = 0$ et $T = T_0$; les forces dues à la viscosité; la force additionnelle, dite d'Archimède, due à l'hétérogénéité de la température; la force de Coriolis.

En l'absence de convection ($\mathbf{v} = 0$), on peut montrer, comme à la question II.1. b), que le champ de température stationnaire (régime non convectif) est, à gradient constant : $T_{stat}(z) = T_0 + \frac{T_2 - T_1}{d} z$. Dans

la suite du problème, on s'intéresse à l'écart par rapport à la situation stationnaire et on pose :

$$\vartheta = \frac{T - T_{stat}}{T_1 - T_2} \quad (T_1 > T_2).$$

III.1. Écriture adimensionnalisée et linéarisation des équations de l'hydrodynamique.

Il est d'usage de présenter les équations sous une forme adimensionnalisée en adoptant pour unité de longueur l'épaisseur d de la

cellule et pour unité de temps $\tau_{th} = \frac{d^2 \varrho_0 C_p}{K} = \frac{d^2}{\chi}$. Ces équations

s'écrivent alors :

$$(1) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$(2) \quad \frac{D\vartheta}{Dt} = v_z + \Delta \vartheta$$

$$(3) \quad \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{grad} \Pi + \sigma \Delta \mathbf{v} + \sigma R \vartheta \mathbf{e}_z - \sigma \sqrt{T_a} \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}.$$

Dans (3), σ est le nombre de Prandtl, R le nombre de Rayleigh, $T_a = \frac{4\Omega^2 d^2}{\nu^2}$ le nombre de Taylor; $\mathbf{grad} \Pi$ regroupe les termes pouvant être écrits sous forme de gradients.

a) Etablir l'équation (2). (L'établissement de l'équation (3) n'est pas demandé.)

Dans la suite du problème, on n'oubliera pas que, désormais, toutes les grandeurs et constantes intervenant dans l'écriture des équations sont sans dimension.

b) Près du seuil de convection les quantités \mathbf{v} , ϑ et Π sont petites; on peut linéariser les équations. Sur quels termes porte cette linéarisation?

On admettra dans la suite (calculs simples mais non demandés) qu'on peut déduire du système d'équations (1), (2), (3), linéarisé, un système plus simple de trois équations couplées ne faisant intervenir que trois inconnues: ϑ , v_z , et ω_z composante suivant Oz du champ de vorticité $\vec{\omega} = \mathbf{rot} \mathbf{v}$ (rotationnel du champ de vitesse). Ces équations

$$(4) \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = v_z + \Delta \vartheta$$

$$(5) \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \sigma \Delta \omega_z + \sigma \sqrt{T_a} \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\Delta v_z) = \sigma (\Delta^2 v_z) + R \sigma \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \vartheta - \sigma \sqrt{T_a} \frac{\partial \omega_z}{\partial z}.$$

Dans ces équations, Δ représente l'opérateur laplacien :

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

et Δ^2 représente le carré de cet opérateur [$\Delta^2 v_z = \Delta (\Delta v_z)$].

c) La résolution des équations (4), (5), (6) nécessite la donnée des conditions aux limites; justifier en particulier les conditions :

$$v_z \left(\frac{1}{2} \right) = v_z \left(-\frac{1}{2} \right) = \vartheta \left(\frac{1}{2} \right) = \vartheta \left(-\frac{1}{2} \right) = 0 \text{ (ces condi-}$$

tions seront complétées à la question III.4 b).

III.2. Résolution du système d'équations dans un cas particulier.

On suppose que les grandeurs v_z , ω_z , ϑ sont, en notation complexe, de la forme :

$$v_z(x, y, z, t) = V_0 e^{ikx} e^{\mu t} \cos \pi z$$

$$\omega_z(x, y, z, t) = \omega(z) e^{ikx} e^{\mu t}; \quad \vartheta(x, y, z, t) = \vartheta_0 e^{ikx} e^{\mu t} \cos \pi z$$

V_0 et ϑ_0 sont des constantes; k est un paramètre caractérisant le mode convectif étudié. Les fonctions v_z , ω_z , ϑ , satisfont aux conditions aux limites établies en III.1. c) et doivent vérifier les équations (4), (5), (6). On cherche à déterminer le nombre complexe μ afin de savoir si un tel mode convectif peut se développer. Pour simplifier l'écriture de certaines formules des questions III.2. et III.3., on pose $\mu = \sigma \xi$.

a) A l'aide de l'équation (4), montrer que :

$$\vartheta_0 = (\sigma \xi + \pi^2 + k^2)^{-1} V_0.$$

b) Calculer $\sigma \sqrt{T_a} \frac{d\omega}{dz}$ à l'aide de l'équation (6), puis en uti-

lisant l'équation (5), montrer que $\xi = \frac{\mu}{\sigma}$ doit satisfaire la relation :

$$(7) \quad R = (\pi^2 + k^2 + \sigma \xi) \frac{(\pi^2 + k^2 + \xi)^2 (\pi^2 + k^2) + \pi^2 T_a}{(\pi^2 + k^2 + \xi) k^2}.$$

La relation (7) est une équation du troisième degré à coefficients réels pour l'inconnue ξ .

c) A quelle condition sur le nombre complexe ξ le mode convectif de paramètre k peut-il se développer ?

III.3. Examen de la stabilité de la solution non convective pour les fluides à très petit nombre de Prandtl.

Au lieu d'étudier de façon générale l'équation du troisième degré, on considère le cas particulier où le nombre de Prandtl σ est très petit. Lorsque σ tend vers zéro, on vérifie facilement (calcul non demandé) qu'une racine de l'équation du troisième degré en ξ tend vers $-\infty$. Les autres racines sont solution de l'équation du second degré de la forme $\xi^2 + a_1 \xi + a_2 = 0$ obtenue en posant $\sigma = 0$ dans la relation (7).

a) Montrer que les conditions pour que le mode convectif de paramètre k ne puisse se développer sont : $a_1 > 0$; $a_2 > 0$.

b) Représenter, dans le plan ayant pour axe des abscisses

$X = \frac{k^2}{\pi^2}$ et axe des ordonnées le nombre de Rayleigh R , l'allure des

courbes γ et Γ d'équations respectives $a_1 = 0$ et $a_2 = 0$, pour les deux cas : $T_a = 0$; $T_a = 10^4$ (on précisera les coordonnées des points où la tangente est horizontale).

c) Quand, dans l'expérience de Rayleigh-Bénard avec rotation, on augmente le nombre de Rayleigh R (ou la différence de température $T_1 - T_2$) à partir de la valeur zéro, le nombre de Taylor étant fixé, on suppose que le mode convectif qui se développe en premier est celui qui correspond à la plus petite valeur de R . A l'aide des courbes tracées en III.3. b, montrer que, suivant la valeur du nombre de Taylor, le mode convectif qui apparaît en premier peut être de deux types : soit la vitesse convective $\Re v_z$ en un point croît avec le temps en oscillant (instabilité oscillatoire) ; soit elle croît sans osciller (instabilité non oscillatoire).

III.4. Calcul du nombre de Rayleigh critique dans le cas sans rotation.

Lorsque le fluide n'est pas en rotation ($T_a = 0$), la relation établie en III.2. b devient ($\mu = \sigma\xi$, $\sigma \neq 0$) :

$$(8) \quad (\pi^2 + k^2 + \mu) \left(\pi^2 + k^2 + \frac{\mu}{\sigma} \right) (\pi^2 + k^2) - Rk^2 = 0.$$

a) Tracer dans le plan $\left(X = \frac{k^2}{\pi^2}, R \right)$ la courbe correspon-

dant à $\mu = 0$. Donner les valeurs numériques du nombre de Rayleigh critique R_c et du paramètre k_c du mode convectif associé. La valeur de R_c obtenue diffère de la valeur expérimentale $R_c = 1,710^3$. La raison en est que la solution étudiée en III.2 ne satisfait pas toutes les conditions aux limites imposées par l'expérience dans les plans

$$z = \pm \frac{1}{2}.$$

b) Expliquer pourquoi les composantes v_x et v_y du champ de vitesse doivent être nulles dans ces plans ; en déduire que la dérivée

partielle $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ doit l'être aussi et que la solution $v_z(z) = V_0 \cos \pi z$ ne

convient pas. (On utilisera la relation $\text{div } \mathbf{v} = 0$). On peut montrer que la prise en compte des conditions aux limites établies en III.1. d et III.4. b dans la résolution des équations couplées (4) et (6) conduit à une valeur du nombre de Rayleigh critique $R_c = 1708$ et une valeur $k_c = 3,1$ compatibles avec les résultats expérimentaux.

PARTIE IV. — ÉTUDE DE QUELQUES EFFETS NON LINÉAIRES

On considère l'expérience de Rayleigh-Bénard sans rotation, telle qu'elle est décrite dans l'introduction du problème. Dans la partie III, on a étudié, dans le cadre d'une approximation linéaire, des modes convectifs de paramètre k , c'est-à-dire des mouvements dans lesquels les diverses grandeurs convectives (par exemple la composante v_z de la vitesse) ont une dépendance spatio-temporelle de la forme, en notation complexe, $f(z) e^{i\mu t} e^{ikx}$. Dans ces conditions, μ est une fonction

de k et du nombre de Rayleigh R , $\mu(k, R)$, qui est réelle et paire en k . La courbe donnant la valeur de R au-dessus de laquelle le mode k peut se développer a pour équation $\mu(k, R) = 0$ et a l'allure représentée sur la fig. 5.

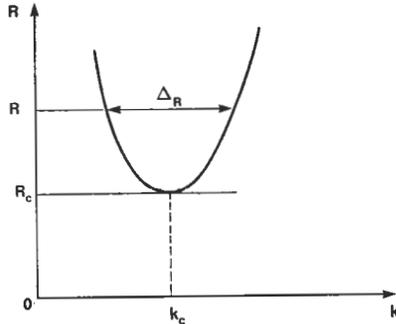


Fig. 5. — Graphe de la relation $\mu(k, R) = 0$ pour $k > 0$.

Le minimum de cette courbe correspond à $R = R_c$ et $k = k_c$.

L'approximation linéaire permet de justifier la stabilité du fluide au repos pour $R < R_c$, mais elle ne permet pas d'expliquer les phénomènes observés pour les valeurs de R juste au-dessus de R_c . Elle prévoit une infinité de valeurs possibles pour k , appartenant au domaine Δ_R (représenté sur la fig. 5), et, pour chacun de ces modes, elle prévoit une croissance exponentielle en $e^{\mu t}$ (μ réel positif), alors qu'on observe expérimentalement un mode déterminé, les rouleaux, d'amplitude finie.

L'objet de la partie IV est une approche phénoménologique des phénomènes observés juste au-dessus de R_c . Elle s'apparente à la description des transitions de phase selon Landau.

On se souviendra que les grandeurs considérées ici sont les grandeurs sans dimension introduites au paragraphe III.1.

IV.1. Equation régissant la convection dans une cellule de « petite » dimension.

a) On suppose que les conditions aux limites sur les parois latérales conduisent à une quantification du nombre k . Comment cette

quantification dépend-elle du rapport $\frac{d}{L}$ de la cellule ?

Lorsque $\frac{d}{L}$ n'est pas trop petit, on peut se limiter à un seul mode

près du seuil de convection. Pour simplifier, on suppose que ce mode est $k = k_c$ et on admet que, pour R fixé voisin de R_c , la composante v_z de la vitesse se met sous la forme :

$$v_z(x, y, z, t) = V(z) A(t) \cos k_c x$$

$V(z)$ est une fonction réelle de z qu'on ne cherchera pas à expliciter car on se borne à étudier les phénomènes en un point du fluide de cote z fixée. Pour tenir compte de manière phénoménologique des effets non linéaires, on écrit que $A(t)$ est solution de l'équation (a, δ : constantes réelles positives).

$$\frac{dA}{dt} = a(R - R_c) A - \delta A^3.$$

b) Expliquer la partie linéaire de cette équation ; montrer que l'équation non linéaire s'écrit aussi :

$$\frac{dA}{dt} = - \frac{dV(A)}{dA}$$

$V(A)$ étant une fonction dont l'expression dépend de R .

c) Montrer qu'un régime stationnaire stable d'amplitude A correspond à un minimum de la fonction V . Représenter le graphe de cette fonction dans les trois cas : $R < R_c$; $R = R_c$; $R > R_c$. Dédire de ces courbes que pour $R < R_c$ le fluide au repos est stable, et que, pour $R > R_c$, deux régimes convectifs stationnaires stables peuvent s'établir, l'un d'amplitude $A_s(R)$, l'autre d'amplitude $-A_s(R)$, le fluide au repos étant alors instable.

d) Déterminer la dépendance de l'amplitude $A_s(R)$ et celle du temps caractéristique d'approche au régime stationnaire vis-à-vis de $R - R_c$.

e) Expérimentalement on mesure le flux thermique au travers de la paroi supérieure $\left(z = \frac{1}{2} \right)$ de la cellule et on porte le rapport, appelé nombre de Nusselt Nu , de ce flux au flux attendu s'il n'y avait que de la conduction thermique. On observe que ce nombre est égal à un au-dessous du seuil de convection et devient une fonction affine croissante du nombre de Rayleigh juste au-dessus du seuil. Expliquer qualitativement ce comportement à l'aide du comportement obtenu pour A_s .

IV.2. Equation régissant la convection dans une cellule de « grande » longueur.

Lorsque le rapport d'aspect $\frac{d}{L}$ de la cellule est très petit devant

l'unité, les modes susceptibles de se développer, pour une valeur fixée de R supérieure à R_c , ont des valeurs de k qui forment un ensemble quasi continu au voisinage de $k = k_c$. On admet que, pour R proche de R_c , la composante v_z de la vitesse se met sous la forme :

$$v_z(x, y, z, t) = V(z) (A(x, t) e^{ik_c x} + \bar{A}(x, t) e^{-ik_c x}).$$

$V(z)$ est comme au IV.1 une fonction réelle de z qu'on ne cherchera pas à expliciter; $\bar{A}(x, t)$ est le complexe conjugué de la fonction $A(x, t)$. Cette fonction peut être écrite $A(x, t) = \int \hat{A}(q, t) e^{iqx} dq$;

l'amplitude complexe $\hat{A}(q, t)$ correspond alors au mode $k = k_c + q$. Dans l'analyse linéaire, elle obéit donc à l'équation :

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}(q, t) = \mu(k_c + q, R) \hat{A}(q, t).$$

Dans l'analyse non linéaire, on admettra que ce sont les modes pour lesquels μ est proche de zéro qui contribuent à la fonction $A(x, t)$, c'est-à-dire que les valeurs de q restent petites. Dans ces conditions, la dépendance en x de la fonction $A(x, t)$ peut être interprétée comme une modulation spatialement lente de l'amplitude du mode k_c , seul mode considéré au IV.1.

a) En s'aidant de la fig. 5, justifier, pour R proche de R_c et q petit, la forme du développement limité de $\mu(k_c + q, R)$:

$$\mu = D_0(R - R_c) - D_1 q^2$$

où D_0 et D_1 sont des constantes positives. En déduire que, dans l'approximation linéaire, la fonction $A(x, t)$ obéit à l'équation :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = D_0(R - R_c) A + D_1 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}.$$

On admettra que si on prend en compte les effets non linéaires de degré le plus bas en A , la fonction $A(x, t)$ obéit à l'équation :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = D_0(R - R_c) A + D_1 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \delta |A|^2 A$$

$|A|$ désignant le module de A et δ étant une nouvelle constante positive.

b) On pose :

$$R - R_c = \varepsilon; \quad \tau = \varepsilon t; \quad X = \varepsilon^{1/2} x; \quad B(X, \tau) = \varepsilon^{-1/2} A(x, t).$$

Montrer que la fonction $B(X, \tau)$ obéit à une équation différentielle dont les coefficients sont indépendants de ε . Qu'en déduit-on d'un point de vue physique ?

IV.3. Sélection d'un nombre d'onde.

Une des propriétés remarquables de l'apparition de la convection dans les cellules de grande longueur est qu'un mode stationnaire unique semble expérimentalement privilégié pour R très peu supérieur à R_c . On cherche à expliquer cette sélection du nombre d'onde en

étudiant successivement la stabilité des solutions monomode de l'équation non linéaire et le rôle des conditions aux limites.

a) Montrer que l'équation pour $B(X, \tau)$ admet des solutions stationnaires à un mode :

$$B_Q(X) = b(Q) e^{iQ \cdot X}; \quad (b(Q) = |B_Q(X)|)$$

pour un domaine de valeurs de Q qui correspond au domaine Δ_R précédemment défini. On étudie la stabilité de ces solutions en posant :

$B(X, \tau) = e^{iQX} [b(Q) + \tilde{b}(X, \tau)]$; $[\tilde{b}(X, \tau)$: perturbation infinitésimale arbitraire]. La fonction $\tilde{b}(X, \tau)$ obéit à l'équation linéarisée (calcul non demandé) :

$$\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tau} = -2(D_0 - D_1 Q^2) (\Re e \tilde{b}) + 2i D_1 Q \frac{\partial \tilde{b}}{\partial X} + D_1 \frac{\partial^2 \tilde{b}}{\partial X^2}.$$

Vérifier que, si on choisit la perturbation sous la forme :

$$\tilde{b}(X, \tau) = b_1(\tau) \cos \alpha X + i b_2(\tau) \sin \alpha X$$

(b_1, b_2 fonctions réelles, α : constante), les fonctions $b_1(\tau)$ et $b_2(\tau)$ obéissent à un système de deux équations linéaires couplées qu'on peut

écrire sous la forme matricielle $\frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. En considé-

rant le déterminant de la matrice M , montrer que les solutions $B_Q(X)$ telles que $D_0 - 3 D_1 Q^2 < 0$ sont instables.

b) On étudie maintenant l'influence des conditions aux limites afin de montrer que celles-ci peuvent jouer un rôle important, même si les parois latérales de la cellule sont éloignées. En régime stationnaire, la solution complexe $B(X)$ vérifie l'équation :

$$D_1 \frac{d^2 B}{dX^2} = -D_0 B + \delta |B|^2 B.$$

Montrer à l'aide d'une analogie mécanique, et sans calculs, que si

on pose $B(X) = r(X) e^{i\theta(X)}$ [$r(X) = |B(X)|$], les quantités $C = r^2 \frac{d\theta}{dX}$

et $E = \frac{1}{2} D_1 \left(\frac{dr}{dX} \right)^2 + \frac{1}{2} D_1 \frac{C^2}{r^2} + \frac{1}{2} D_0 r^2 - \frac{1}{4} \delta r^4$ consti-

tuent deux intégrales premières. Soit r_M la valeur la plus grande prise par l'amplitude r dans une région où $\frac{dr}{dX} = 0$ (supposée correspondre

au cœur de la cellule) et soit r_m la valeur la plus petite atteinte par r (par exemple près des bords de la cellule).

Etablir les inégalités :

$$D_1 C^2 \leq r_M^2 r_m^2 \left[D_0 - \frac{1}{2} \delta (r_m^2 + r_M^2) \right] \leq \frac{r_m^2}{2 \delta} (D_0 - \frac{1}{2} \delta r_m^2)^2.$$

Montrer que $\frac{C}{r_M^2}$ peut être assimilé à la quantité Q du IV.3. a. En déduire que, si le rapport $\frac{r_m}{r_M}$ est très petit devant l'unité, on dispose d'une explication qualitative du mécanisme de sélection du nombre d'onde.

SOLUTION

L'INSTABILITE DE RAYLEIGH-BENARD

Les auteurs de cette solution remercient Monsieur l'Inspecteur Général GIÉ pour avoir relu ce texte et contribué à sa rédaction.

Les annexes qui figurent à la fin de ce texte, ont pour but de préciser certains points du problème.

Partie I. — DÉTERMINATION DES VITESSES PAR VÉLOCIMÉTRIE LASER

I.1. *Description du champ d'interférence.*

a) L'intensité lumineuse I résulte de l'interférence de deux ondes planes :

$$I = |a|^2 |e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}|^2 = \dots$$

$$\dots 2 |a|^2 [1 + \cos(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}] = 4 a^2 \cos^2(k \sin \theta z).$$

Les surfaces d'égale intensité sont distantes de :

$$H = \frac{\pi}{k \sin \theta} = \frac{\lambda}{2 n \sin \theta} = 0,35 \mu\text{m}.$$

b) Le nombre des surfaces d'intensité maximale est de

$$\text{l'ordre de (fig. 1) : } N = \frac{D}{H \cos \theta} \approx 640.$$

I.2. *Principe de la vélocimétrie laser.*

a) La dépendance temporelle de l'intensité diffusée est proportionnelle à l'intensité du champ d'interférence au point où

se trouve la particule, c'est-à-dire à $\cos^2 \frac{\pi z}{H}$ avec $z = v_z t$

(pour un choix convenable de l'origine des temps).

$$b) \text{ La fonction } \cos^2 \frac{\pi v_z t}{H} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{\pi v_z t}{H} \right)$$

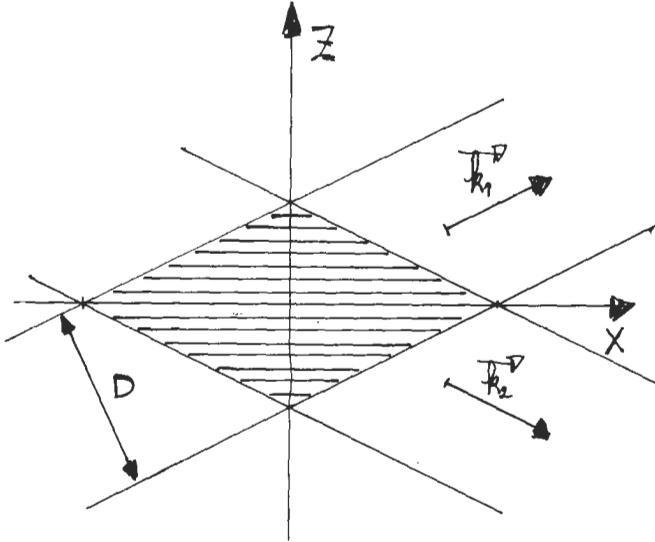


Fig. 1

contient les fréquences temporelles $\nu = 0$ et $\nu_D = \frac{|v_z|}{H}$ ($\nu_D =$

28 Hz pour $v_z = 10 \mu\text{m s}^{-1}$), fréquences données par l'analyseur de spectre. Si on tient compte du fait que le champ d'interférence est limité, et donc que le signal ne dure qu'un temps τ , alors chaque pic de fréquence a une largeur $\Delta\nu_D$ de l'ordre de τ^{-1} . Compte tenu

de la relation approchée $\tau = \frac{N}{\nu_D}$ (vraie si la particule se déplace

sur l'axe z et traverse effectivement les N franges), on obtient :

$$\frac{\Delta\nu_D}{\nu_D} \approx N^{-1}.$$

c) Un déphasage sur un faisceau entraîne un déplacement proportionnel du système de franges. Si ce déphasage est lui-même proportionnel au temps (par exemple $\phi = \alpha t$), alors le

système défile à vitesse uniforme. Soit W (par exemple $W = \frac{H \alpha}{2\pi}$)

cette vitesse. La fréquence Doppler devient : $\frac{|v_z - W|}{H}$. Elle

diminue ou augmente avec W (pour $0 < W < |v_z|$ suivant que v_z est positif ou négatif).

La composante v_y peut être mesurée en tournant de $\frac{\pi}{2}$ les faisceaux autour de l'axe PX (les surfaces d'égalité d'intensité sont alors des plans orthogonaux à l'axe PY). La composante v_x s'obtient alors en tournant de $\frac{\pi}{2}$ la cellule autour d'un axe vertical (il est plus facile de faire tourner la cellule que le montage optique).

I.3. Effet Doppler et vélocimétrie laser.

a) Dans la limite galiléenne, ($\frac{v^2}{c^2} \ll 1$), tout à fait satisfaite dans l'expérience ($\frac{v^2}{c^2} \approx 10^{-26}$!), la loi de transformation des pulsations donne : $\omega'_{1,2} = \omega - \mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{v}$; $\omega'_{1,2} = \omega''_{1,2} - \mathbf{K}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (on a écrit à chaque fois le passage du référentiel \mathcal{R} au référentiel \mathcal{R}'). D'où : $\omega''_{1,2} = \omega - \mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

b) Les ondes diffusées n'ont pas même fréquence ; leur fréquence de battement n'est autre que v_D , d'où :

$$v_D = (2\pi)^{-1} |\omega''_1 - \omega''_2| \dots$$

$$\dots = (2\pi)^{-1} |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| \cdot \mathbf{v} = \frac{k \sin \theta}{\pi} |v_z| = \frac{|v_z|}{H}$$

I.4. Utilisation de faisceaux gaussiens.

a) On sépare dans la dépendance en q la partie amplitude de la partie phase :

$$\exp - \frac{ikq^2}{2q(x)} \dots$$

$$\dots = \left[\exp - ik \frac{(R_0 - x)q^2}{2[(R_0 - x)^2 + \sigma_0^4 k^2]} \right] \dots$$

$$\dots \left[\exp - \frac{k^2 \sigma_0^2 q^2}{2[(R_0 - x)^2 + \sigma_0^4 k^2]} \right] \dots$$

L'équation $\frac{|\psi(x, q)|^2}{|\psi(x, 0)|^2} = \frac{1}{e}$, qui s'écrit :

$$k^2 \sigma_0^2 q^2 = \sigma_0^4 k^2 + (R_0 - x)^2$$

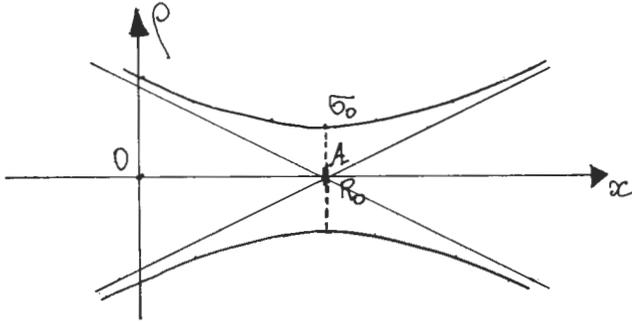


Fig. 2

correspond à l'hyperboloïde représenté en section sur la fig. 2. Loin du point A ($\overline{OA} = R_0$), point de convergence, le faisceau est conique d'angle au sommet α tel que $\operatorname{tg} \alpha = (k \sigma_0)^{-1} \approx 10^{-3}$. Pour $|x - R_0|$ grand, la phase en M vaut (en ajoutant la constante additive $-k R_0$) :

$$k \left[(x - R_0) + \frac{\varrho^2}{2(x - R_0)} \right] \approx \pm k [(x - R_0)^2 + \varrho^2]^{1/2} = \pm k AM.$$

Les surfaces d'égale phase sont donc des portions de sphères. Pour $x > R_0$ (signe +, point M au-delà de A), il s'agit d'une onde divergente, pour $x < R_0$ (signe -, point M en deçà de A), il s'agit d'une onde convergente (cf. compléments à l'annexe A).

b) A la sortie de la lentille, on a :

$$\psi(0, \varrho) = a(0) \exp i k \left(x - \frac{\varrho^2}{2q_0} - \frac{\varrho^2}{2f} \right).$$

La dépendance en ϱ dans le plan $x = 0$ est typique d'une onde gaussienne avec $\frac{1}{q(0)} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{f}$. Dans la région $x > 0$, l'onde est définie de manière univoque par le principe d'Huygens et obéit à l'équation de propagation. D'après l'énoncé, cette onde est donc gaussienne avec $q(x) = q(0) - x$ (cf. annexe A).

c) Choisissons l'origine au lieu de convergence du faisceau. L'écart à la phase kx d'une onde plane est ($R_0 = 0$) :

$$\frac{k x \varrho^2}{2(x^2 + \sigma_0^4 k^2)} < \frac{k \varrho^2 x}{2 \sigma_0^4 k^2}. \text{ Dans le champ d'interférence, } x \text{ et } \varrho$$

sont de l'ordre σ . L'écart relatif est de l'ordre de $(\sigma_0 k)^{-1} = 10^{-3}$, quantité négligeable.

L'amplitude résultante dans le cas des deux faisceaux gaussiens est proportionnelle à :

$$\left| e^{-\frac{q_1^2}{2\sigma_0^2}} e^{i \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + e^{-\frac{q_2^2}{2\sigma_0^2}} e^{i \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \right|$$

q_1 et q_2 désignent les distances du point M du champ d'interférence aux axes des faisceaux :

$$q_{1,2}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \theta \pm z \sin \theta)^2 \text{ (fig. 3).}$$

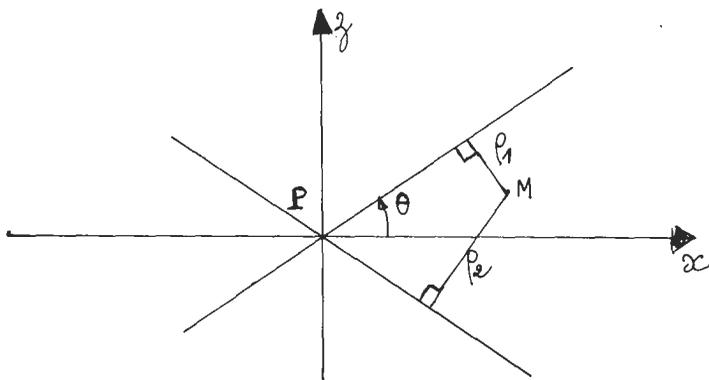


Fig. 3

La partie intéressante du signal $U(t)$ est proportionnelle au terme

d'interférence $\left[\exp -\frac{(q_1^2 + q_2^2)}{2\sigma_0^2} \right] \cdot \cos(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}$.

Le résultat demandé s'obtient en posant $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$ (on admet implicitement que la particule passe par le point P). Il est égal au produit d'une gaussienne de la forme $\exp -at^2$ et d'une fonction sinusoïdale $\cos 2\pi v_D t$. Sa transformée de Fourier est donc le produit de convolution d'une gaussienne et de « fonctions delta » centrées en $\pm v_D$. Le signal utile fourni par l'analyseur est une gaussienne centrée en v_D . [Remarque : On peut aussi calculer

$$\int e^{-2\pi i vt} e^{-at^2} (\cos 2\pi v_D t) dt = \frac{1}{2} [f(v - v_D) + f(v + v_D)]$$

avec :

$$f(v) = \int e^{-2\pi i vt - at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp -\frac{v^2 \pi^2}{a};$$

la largeur de la gaussienne est $\Delta v = \sqrt{\frac{a}{2} \frac{1}{\pi}}$.

PARTIE II. — PREMIÈRE APPROCHE DU PROBLÈME DE RAYLEIGH-BÉNARD

II.1. Etude de la conduction thermique.

a) Soit U_V l'énergie interne relative à un volume V quelconque limité par la surface Σ . Le bilan d'énergie est :

$$\frac{dU_V}{dt} = \iiint_V \rho C_V \frac{\partial T}{\partial t} dv = - \oiint \mathbf{J}_{th} \cdot d\vec{\Sigma} = - \iiint_V (\text{div } \mathbf{J}_{th}) dv.$$

D'où : $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{-1}{\rho C_V} \text{div } \mathbf{J}_{th} = \frac{K}{\rho C_V} \text{div } (\text{grad } T) = \chi \Delta T$ (équation de la chaleur).

b) Si la température est stationnaire et ne dépend que

de z , on a : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$; $\Delta T = \frac{d^2 T}{dz^2} = 0$; $T(z)$ est une fonction

affine avec : $\frac{dT}{dz} = \frac{T_2 - T_1}{d}$ et $T(0) = \frac{T_1 + T_2}{2} = T_0$.

Le courant thermique est dirigé vers le haut et constant :

$$J_{th} = K \frac{T_1 - T_2}{d} > 0.$$

c) Le flux d'entropie dans la couche comprise entre z et $z + dz$ et dû aux échanges avec le milieu qui l'entoure est, par unité de surface :

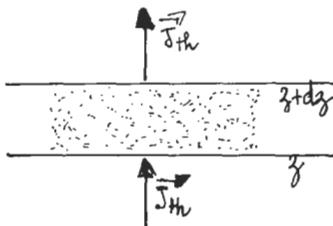


Fig. 4

$$\frac{J_{th}}{T(z)} - \frac{J_{th}}{T(z + dz)} = \frac{J_{th}}{T^2(z)} \frac{dT}{dz} dz = - \frac{J_{th}^2}{KT^2(z)} dz < 0.$$

L'entropie de la couche étant constante (régime stationnaire), il y a donc création d'entropie au sein de la couche avec un taux : $\frac{J_{th}^2}{KT^2(z)} = \frac{K(T_1 - T_2)^2}{d^2 T^2(z)}$. Cette création est due au caractère irréversible des phénomènes de transport.

d) La fonction :

$$T(t, r) = T_0 + \frac{T_2 - T_1}{d} z + A e^{-\mu t} \cos \frac{\pi z}{d} \cos k_x x$$

vérifie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\mu A e^{-\mu t} \cos \frac{\pi z}{d} \cos k_x x ;$$

$$\Delta T = -\left(\frac{\pi^2}{d^2} + k_x^2 \right) A e^{-\mu t} \cos \frac{\pi z}{d} \cos k_x x.$$

Elle satisfait l'équation de la chaleur si : $\mu = \chi \left(\frac{\pi^2}{d^2} + k_x^2 \right)$.

e) On a : $\mu^{-1} \leq \pi \frac{d^2}{\chi}$ pour toute perturbation harmonique.

$\frac{d^2}{\chi}$ décrit donc un temps d'amortissement typique d'une pulsation de température dont l'échelle de variation spatiale typique est d .

II.2. Etude d'une hypothèse de stabilisation du régime non convectif par effet de compressibilité.

a) La bulle est soumise à son poids à la poussée d'Archimède. Par unité de volume :

$$\delta f = \frac{\text{« Archimède » - poids}}{\text{volume}} = \dots$$

$$\dots [\varrho (p_e + dp_e, T_e + dT_e) - \varrho (p_a + dp_a, T_a + dT_a)] g = \dots$$

$$\dots - \alpha \varrho g (dT_e + dT_a).$$

b) Dans une transformation adiabatique :

$$dS = C_p (-dT_a) + h dp_e = 0.$$

Le résultat demandé s'obtient en écrivant :

$$h = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{\alpha T}{\rho} \quad (2^{\text{e}} \text{ formule de Clapeyron}) \text{ et}$$

$$dp_e = -\rho g dz \text{ (hydrostatique).}$$

c) Il y a stabilité si la force est une force de rappel :

$$\frac{\delta f}{dz} < 0 \text{ (la bulle a alors un mouvement périodique à une fréquence appelée fréquence de Vaïssala). Numériquement, on a :}$$

$$\frac{dT_a}{dz} = \frac{\alpha g T_e}{C_p} \approx 10^{-3}; \quad -\frac{dT_e}{dz} \leq \frac{\Delta T}{d} = 10^2 \Delta T. \text{ Par conséquent, il devrait y avoir instabilité dès que } \Delta T \text{ dépasse } 10^{-5} \text{ K. La stabilité observée pour } \Delta T < \Delta T_c = 2,2 \text{ K doit donc être expliquée autrement.}$$

II.3. *Modèle heuristique de stabilisation par effet de viscosité.*

a) L'équation de Newton s'écrit :

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{dv}{dt} = -6 \pi \eta R v - \frac{4}{3} \pi R^3 \alpha \rho g (T_{ext} - T_{int}).$$

La température intérieure T_{int} de la bulle suit la température extérieure $T_{ext} = T_e$ avec un temps de retard τ caractéristique

des échanges thermiques dans la bulle, soit : $\frac{R^2}{\chi}$. Dans l'intervalle de temps τ , la particule a parcouru la distance $v\tau$. D'où :

$$T_{ext} - T_{int} \approx \frac{dT_e}{dz} v. \text{ La force d'Archimède étant donc propor-}$$

tionnelle à v , l'équation est du type $\frac{dv}{dt} = Cv$. L'état de repos $v = 0$ est stable si la constante C est négative ; soit :

$$6 \pi \eta R > \frac{4}{3} \pi R^3 \alpha \rho g \left| \frac{dT_e}{dz} \right| \frac{R^2}{\chi} \text{ ou } \frac{\alpha g R^4}{\chi v} \frac{\Delta T}{d} < 4,5.$$

b) Le membre de gauche de l'inégalité précédente augmentant avec R , ce sont les grosses bulles qui sont les plus instables. Pour que le raisonnement puisse être tenu, $2R$ doit rester

une fraction de d . Prenons $R = \frac{d}{4}$; on obtient : $\frac{\alpha g d^3 \Delta T}{\chi v} < 10^3$

(à un facteur 10 près) ; c'est l'ordre de grandeur du nombre de Rayleigh expérimental.

c) Si on écrit que la bulle se déplace de d dans le temps τ , la vitesse typique doit être :

$$v = d \left(\frac{R^2}{\chi} \right)^{-1} \simeq \frac{\chi}{d} = 10 \mu\text{s}^{-1}$$

(ordre de grandeur conforme aux résultats expérimentaux).

(Remarque : on peut aussi écrire, en régime stationnaire :

$$\frac{DT}{Dt} = (\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}) T = \chi \Delta T; \text{ d'où, au niveau des ordres de grandeur ; la relation : } \frac{v}{d} = \frac{\chi}{d^2} \Bigg).$$

d) La force de viscosité liée à l'action du plan mobile sur le fluide est proportionnelle au gradient de vitesse, soit $\eta v d^{-1}$; sa puissance est $\eta v^2 d^{-1}$. Le résultat demandé est obtenu en disant que cette puissance est dissipée dans une couche d'épaisseur d (cf. Annexe B).

e) La puissance dissipée Φ_{visc} correspond à une création d'énergie interne. La création d'entropie associée est :

$$\frac{\Phi_{vis}}{T} \simeq \eta \frac{v^2}{T d^2}.$$

On doit la comparer à : $\frac{K (\Delta T)^2}{d^2 T^2}$. Prenons $\Delta T = \Delta T_c$; le rap-

port des deux vaut : $\eta \frac{v^2 T}{K (\Delta T_c)^2} = \frac{\rho v \chi^2 T}{(\rho C_p \chi) d^2 (\Delta T_c)^2}$, de l'ordre

de 10^{-9} ; il est très petit devant un.

II.4. Approximation de Boussinesq des équations de l'hydrodynamique.

a) L'équation demandée de conservation de la masse dérive d'une formule bien connue :

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \rho \text{ div } \mathbf{v} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{ div } \mathbf{v}.$$

Remarque : Cette équation s'écrit directement si on observe que $\text{div } \mathbf{v}$, qui est indépendant du référentiel considéré, repré-

sente la variation relative de volume d'un élément de fluide dont on suit le mouvement.

$$\text{En ordre de grandeur, on a : } \varrho^{-1} \frac{D\varrho}{Dt} \approx \frac{\alpha \Delta T}{d \nu^{-1}} \approx 2 \cdot 10^{-3} \nu d^{-1}.$$

D'autre part, toute dérivée spatiale de la vitesse est à priori d'ordre νd^{-1} . Si $\text{div } \mathbf{v}$ vaut $10^{-3} \nu d^{-1}$, cela veut dire que la combinaison particulière $\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z$ est négligeable. (On peut aussi raisonner en variables adimensionnées).

b) Dans le membre de gauche, on peut poser $\varrho = \varrho_0$ car la correction est 10^{-3} en valeur relative; mais si on oubliait la dépendance en température de ϱ dans le membre de droite, on oublierait la force d'Archimède qui est le moteur de la convection : \mathbf{v} tendrait vers $\mathbf{0}$ (viscosité) et on aurait l'équilibre hydrostatique $\mathbf{grad } p = \varrho_0 \mathbf{g}$.

c) Multiplié par T^{-1} , le membre de gauche représente la variation de l'entropie en suivant le mouvement. $K \Delta T$ et Φ_{visc} sont les variations d'énergie interne dus aux échanges thermiques et à la dissipation visqueuse des mouvements macroscopiques.

PARTIE III. — ETUDE DE L'ÉTABLISSEMENT DE LA CONVECTION

III.1. *Ecriture adimensionnalisée et linéarisation des équations de l'hydrodynamique.*

a) Faire le choix d'unités proposé revient à introduire des variables étoilées : $t^* = \frac{t}{\tau_{th}}$, $\mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{d}$, $\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{v}}{d} \tau_{th}$. Alors :

$$\frac{D}{Dt} = \tau_{th}^{-1} \frac{D}{Dt^*}; \quad \vec{\nabla} = d^{-1} \vec{\nabla}^*; \quad \Delta = d^{-2} \Delta^*.$$

Equation (2) : On part de :

$$\varrho_0 C_p \frac{D}{Dt} [T_{stat} + (T_1 - T_2) \vartheta] = K \Delta [T_{stat} + (T_1 - T_2) \vartheta]$$

et on utilise les relations :

$$\frac{D}{Dt} T_{stat} = (\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}) T_{stat} = v_z \frac{(T_2 - T_1)}{d}; \quad \Delta T_{stat} = 0, \text{ soit :}$$

$$\frac{D\vartheta}{Dt} = \frac{v_z}{d} + \chi \Delta \vartheta \text{ ou } \frac{D\vartheta}{Dt^*} = \frac{\tau_{th}}{d} v_z + \frac{\chi \tau_{th}}{d^2} \Delta \vartheta = v_z^* + \Delta^* \vartheta.$$

Remarque : En variables étoilées, et compte tenu de la relation $T - T_0 = (T_1 - T_2) \left(\vartheta - \frac{z}{d} \right)$, la troisième équation de l'hydrodynamique s'écrit :

$$\frac{D\mathbf{v}^*}{Dt^*} = \frac{\nu \tau_{ih}}{d^2} \Delta^* \mathbf{v}^* + \dots$$

$$\dots \frac{\alpha g \tau_{ih}^2}{d} (T_1 - T_2) \vartheta \mathbf{e}_z - 2 \Omega \tau_{ih} \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}^* - \vec{\nabla}^* \dots$$

$$\dots \left[\frac{\tau_{ih}^2}{d} \left(\frac{p}{\rho_0 d} + \alpha g (T_1 - T_2) \frac{z^{*2}}{2} \right) \right].$$

On reconnaît alors facilement les différents termes de l'équation (3) donnée dans le texte (ce calcul n'était pas demandé).

Dans la suite, on allège la notation en supprimant les étoiles.

b) Les termes non linéaires apparaissent dans :

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla} \right).$$

L'approximation linéaire consiste à remplacer la dérivée « en suivant le mouvement » $\frac{D}{Dt}$ par la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial t}$.

Remarque : En prenant le rotationnel de l'équation (3) linéarisée, on obtient :

$$(A) : \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \sigma \Delta \vec{\omega} + \sigma R \mathbf{grad} \vartheta \wedge \mathbf{e}_z - \sigma \sqrt{T_a} \mathbf{rot} (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}).$$

En prenant à nouveau le rotationnel de (A), on obtient

$$[\mathbf{rot} (\mathbf{rot} \mathbf{v}) = \mathbf{grad} (\mathbf{div} \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \mathbf{div} \mathbf{v} = 0].$$

$$(B) : \quad - \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \mathbf{v}) = \dots$$

$$\dots - \sigma \Delta^2 \mathbf{v} + \sigma R \mathbf{rot} (\mathbf{rot} \vartheta \mathbf{e}_z) - \sigma \sqrt{T_a} \mathbf{rot} [\mathbf{rot} (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v})].$$

Les équations (5) et (6) (dont l'établissement n'était pas demandé) ne sont autres que la projection sur z des équations (A) et (B). En effet :

$$\mathbf{grad} \vartheta \wedge \mathbf{e}_z = (\partial_y \vartheta, -\partial_x \vartheta, 0); \quad [\mathbf{rot} (\mathbf{grad} \vartheta \wedge \mathbf{e}_z)]_z = -\partial_x^2 \vartheta - \partial_y^2 \vartheta$$

et :

$$\text{rot}(\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v}) = (-\partial_z v_x, -\partial_z v_y, \partial_x v_x + \partial_y v_y = -\partial_z v_z) = \dots$$

$$\dots - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}; \{ \text{rot} [\text{rot}(\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v})] \}_z = - \frac{\partial \omega_z}{\partial z}.$$

c) Sur les parois, $v_z = 0$ car le fluide ne peut les traverser et $\theta = 0$ car la température T y prend la même valeur que T_{stat} .

III.2. Résolution du système d'équations dans un cas particulier.

a) Pour des grandeurs dont la dépendance spatio-temporelle est $e^{\mu t} e^{ikx} \cos \pi z$, on peut remplacer $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, Δ et Δ^2 respectivement par $\mu, -k^2, 0, -(\pi^2 + k^2), (\pi^2 + k^2)^2$. Dans le cas particulier de l'équation (4), on obtient $(\mu + \pi^2 + k^2)\theta = v_z$ soit encore $(\sigma \xi + \pi^2 + k^2)\theta_0 = V_0$.

b) Avec les règles précédentes, on déduit immédiatement de l'équation (6) la relation :

$$\sigma \sqrt{T_a} \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \{ (\pi^2 + k^2) [\sigma (\pi^2 + k^2) + \sigma \xi] - \frac{R \sigma k^2}{\sigma \xi + \pi^2 + k^2} \} v_z.$$

Elle montre que $\frac{\partial \omega_z}{\partial z}$ a la même variation spatiotemporelle que v_z . En dérivant l'équation (5) par rapport à z , on obtient

$$\text{donc : } [\sigma \xi + \sigma (\pi^2 + k^2)] \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = -\pi^2 \sigma \sqrt{T_a} v_z. \text{ Les deux rela-}$$

tions ainsi obtenues entre $\frac{\partial \omega_z}{\partial z}$ et v_z sont compatibles si :

$$R = (\pi^2 + k^2 + \sigma \xi) \frac{(\pi^2 + k^2 + \xi)^2 (\pi^2 + k^2) + \pi^2 T_a}{(\pi^2 + k^2 + \xi) k^2}.$$

c) Pour qu'un mode se développe (croissance dans le temps), il faut que la partie réelle de ξ (ou μ) soit positive. On a en effet : $| e^{\mu t} | = e^{(\Re \mu) t}$.

III.3. Examen de la stabilité de la solution non convective pour les fluides à très petit nombre de Prandtl.

a) Pour que le mode ne puisse pas se développer, il faut et il suffit que les deux racines de l'équation du second degré aient une partie réelle négative. Deux cas se présentent. Soit les racines sont complexes conjuguées ; leur somme $-a_1$ doit alors être négative (donc $a_1 > 0$) ; leur produit a_2 est alors automatiquement positif. Soit ces racines sont réelles, leur somme doit être négative et leur produit doit être positif. Dans les deux cas, on obtient les relations nécessaires et suffisantes : $a_1 > 0$; $a_2 > 0$.

Remarque : Pour voir ce qu'est devenue la troisième racine de l'équation du troisième degré, il suffit de remarquer que pour $\sigma = 0$, une solution particulière de (4) (5) (6) est : $v_z = \omega_z = 0$;

$$\vartheta \neq 0 ; \mu = -\pi^2 - k^2 ; \text{ donc } \xi = \frac{\mu}{\sigma} = -\infty.$$

b) Si on pose $\sigma = 0$, l'équation du second degré en ξ est :

$$(\pi^2 + k^2)^2 \xi^2 + [2(\pi^2 + k^2)^3 - R k^2] \xi + \dots$$

$$\dots (\pi^2 + k^2) [(\pi^2 + k^2)^3 - R k^2 + \pi^2 T_a] = 0.$$

L'équation de la courbe $\gamma (a_1 = 0)$ est :

$$R = 2 \frac{(\pi^2 + k^2)^3}{k^2} = 2 \pi^4 \frac{(1 + X)^3}{X}.$$

Celle des courbes $\Gamma (a_2 = 0)$ est :

$$R = \frac{(\pi^2 + k^2)^3 + \pi^2 T_a}{k^2} = \frac{\pi^4 (1 + X)^3 + T_a}{X}.$$

Le minimum des courbes Γ est obtenu pour :

$$\pi^4 (1 + X)^2 (2X - 1) = T_a,$$

on a alors $R = 3 \pi^4 (1 + X)^2$.

Pour $T_a = 0$, on trouve $X_{min} = 0,5$, $R_{min} = \frac{27 \pi^4}{4} \approx 650$ (la

courbe γ s'obtient alors par une homothétie de facteur 2). Lorsque $T_a = 10^4$, on a $X_{min} \approx 3,3$, $R_{min} = 5,4 \cdot 10^3$. Ces courbes sont représentées sur la fig. 5 ; les régions $a_1 > 0$ ou $a_2 > 0$ (qui servent à la discussion qui suit) sont situées en dessous des courbes.

c) Pour $T_a = 0$ (ou petit), le mode instable qui apparaît lorsque R croît correspond à $a_2 = 0$, donc au passage d'une

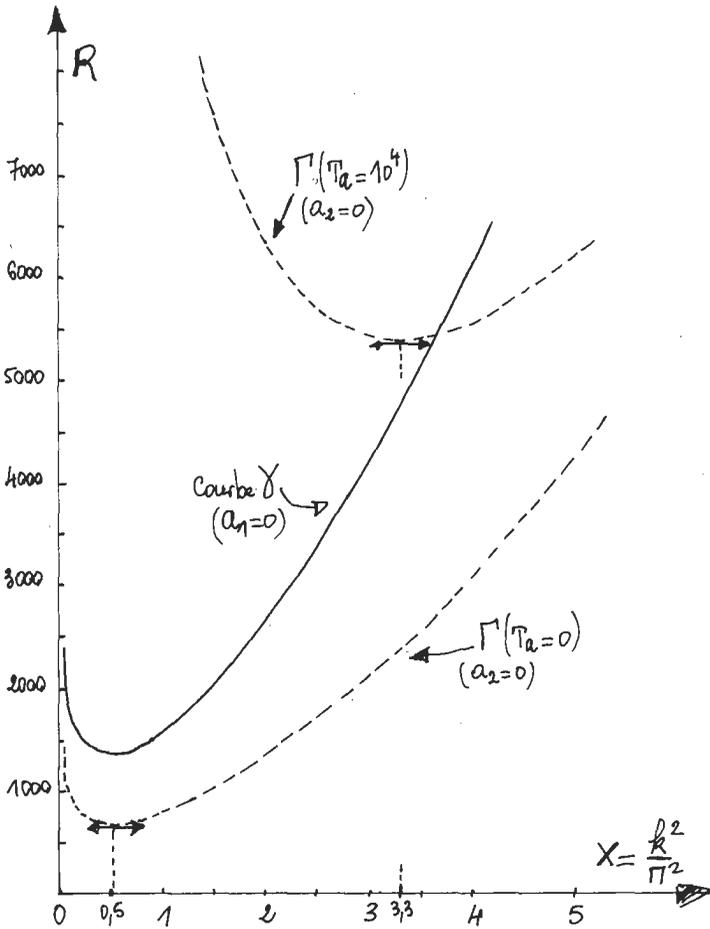


Fig. 5

racine réelle par zéro ; il est donc de type non oscillant. Pour $T_a = 10^4$ (ou « grand »), le mode instable qui apparaît, correspond à $a_1 = 0$; comme a_2 est alors positif, ξ et μ ont une partie imaginaire ; $e^{\mu t}$ est le produit d'une exponentielle croissante et d'une exponentielle oscillante ; le mode est de type oscillant.

III.4. Calcul du nombre de Rayleigh critique dans le cas sans rotation.

a) L'équation pour μ est du second degré de la forme $\mu^2 + a_1\mu + a_2 = 0$ avec $a_1 > 0$. La seule instabilité correspond

alors à : $a_2 = 0$ $\left(R = \frac{(\pi^2 + k^2)^3}{k^2} = \pi^4 \frac{(1 + X)^3}{X} \right)$; elle est de type non oscillante et, (cf. calculs déjà effectués) apparaît pour

$$R_c = \min \left[\frac{\pi^4 (1 + X)^3}{X} \right] = \frac{27 \pi^4}{4} \simeq 650$$

et :

$$k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(X = \frac{1}{2} \right).$$

b) Tout fluide visqueux a une composante de la vitesse parallèle aux parois nulle : $v_x = v_y = 0$. Ceci étant vrai quels que soient x, y dans les plans $z = \pm \frac{1}{2}$, les dérivées partielles par rapport à x et y de v_x et v_y le sont aussi dans ces plans. Utilisant la relation $\text{div } \mathbf{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z = 0$, on en déduit, dans les plans considérés : $\partial_z v_z = -\partial_x v_x - \partial_y v_y = 0$. Ceci n'est pas le cas avec la fonction v_z proposée car :

$$\partial_z v_z = -\pi V_0 e^{ikx} e^{\mu t} \sin \pi z$$

ne s'annule pas en $z = \pm 1/2$.

PARTIE IV. — ETUDE DE QUELQUES EFFETS NON LINÉAIRES

IV.1. Equation régissant la convection dans une cellule de « petite » dimension.

a) L'écart entre les modes est $\frac{2\pi}{L}$, dans les unités

usuelles, donc $2\pi \frac{d}{L}$ dans les unités réduites. Si dL^{-1} n'est

pas trop petit, l'écart est comparable à la valeur de k_c . On peut alors supposer qu'un seul mode développe son instabilité (quand R augmente) tandis que les autres restent stables.

b) La partie linéaire s'explique par le fait que $\mu(R)$ est nul pour $R = R_c$ et est positif pour $R > R_c$. On peut donc écrire : $\mu = a(R - R_c)$.

La fonction V est : $V(A) = -a(R - R_c) \frac{A^2}{2} + \delta \frac{A^4}{4}$.

c) Un régime stationnaire $A(t) = A$ correspond à :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{dV}{dA}(A) = 0. \text{ Il est stable, si, quand on s'écarte de } dA$$

de la valeur d'équilibre, $\frac{\partial A}{\partial t}$ est de signe opposé à dA , soit :

$$-\frac{d^2V}{dA^2} < 0. A \text{ doit correspondre à un minimum de } V. \text{ Pour } R < R_c$$

et $R > R_c$, ces minima sont respectivement $A = 0$ et $A = \pm A_s$ (fig. 6). Pour $R > R_c$, le régime $A = 0$ est stationnaire mais instable.

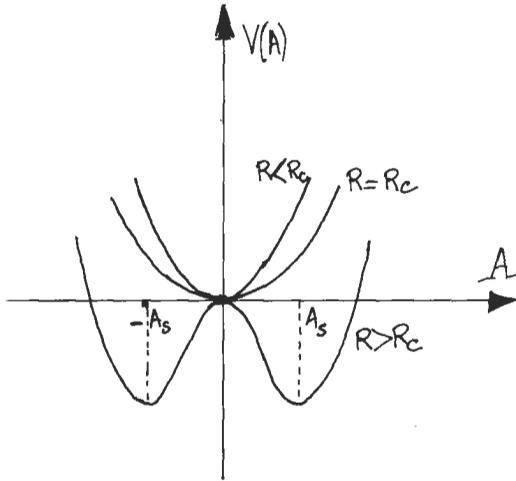


Fig. 6

d) A_s vérifie : $a(R - R_c)A_s - \delta A_s^3 = 0$ et $A_s > 0$ d'où

$$A_s = \left[\frac{a}{\delta} (R - R_c) \right]^{1/2}; \text{ le comportement en } (R - R_c)^{1/2} \text{ est}$$

compatible avec la fig. 2 de l'énoncé. Près de A_s , $A(t)$ vérifie

$$\text{l'équation } \frac{\partial}{\partial t} [A(t) - A_s] = - \left[\frac{d^2V}{dA^2} \right]_{(A_s)} [A(t) - A_s]; \text{ le}$$

temps caractéristique vaut $\left[\frac{d^2V}{dA^2} \right]_{(A_s)}^{-1}$ soit encore $[2a(R - R_c)]^{-1}$.

Près de R_c le processus d'approche au régime stationnaire est extrêmement lent.

e) Le transport thermique au centre de la cellule se fait de deux façons : par conduction et par convection. Le terme de convection est proportionnel à la vitesse d'entraînement et à l'écart de température ϑ au régime non convectif. Ce terme est donc proportionnel à A_s^2 , c'est-à-dire à $R - R_c$.

IV.2. Equation régissant la convection dans une cellule de « grande » longueur.

a) Si $q = 0$, μ passe de valeurs négatives pour $R < R_c$ à des valeurs positives pour $R > R_c$. L'ordre le plus bas en $R - R_c$ est donc $D_0(R - R_c)$ ($D_0 > 0$). Par contre, si $R = R_c$ (ligne horizontale sur la fig. 5 de l'énoncé, μ est négatif pour $q > 0$ ou $q < 0$ et nul pour $q = 0$, d'où le terme $-D_1 q^2$ ($D_1 > 0$). Un terme en $(R - R_c)q$ est a priori négligeable devant $R - R_c$. Du développement précédent de μ , on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} - D_0(R - R_c)A - D_1 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= \dots \\ \dots \int \left(\frac{\hat{\partial} A}{\partial t} - D_0(R - R_c)\hat{A} + D_1 q^2 \hat{A} \right) e^{iqx} dq &\dots \\ \dots = \int [\mu - D_0(R - R_c) + D_1 q^2] \hat{A} e^{iqx} dq &= 0. \end{aligned}$$

b) Des relations $\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial X^2}$, $A = \varepsilon^{1/2} B$,

il suit que tous les termes de l'équation non linéaire sont proportionnels à $\varepsilon^{3/2}$. L'équation pour B est indépendante de ε :

$$\frac{\partial B}{\partial \tau} = D_0 B + D_1 \frac{\partial^2 B}{\partial X^2} - \delta |B|^2 B;$$

sa solution l'est donc aussi. De la dépendance en ε de la fonction A , $A(x, t) = \varepsilon^{1/2} B(\varepsilon^{1/2} x, \varepsilon t)$, on déduit, comme à la question IV.1. d), que l'amplitude est proportionnelle à $(R - R_c)^{1/2}$ et que les temps caractéristiques d'évolution se comportent comme $(R - R_c)^{-1}$. Le résultat nouveau est l'échelle spatiale des variations de A en $(R - R_c)^{1/2}$.

IV.3. Sélection d'un nombre d'onde.

a) La fonction $B_0(X) = b(Q) e^{iQX}$ est solution si :

$$0 = (D_0 - D_1 Q^2) b - \delta |b|^2 b;$$

la solution non nulle correspond à $b = \delta^{-1/2} (D_0 - D_1 Q^2)^{1/2}$. Cette solution n'existe que pour : $D_0 - D_1 Q^2 > 0$. Dans la variable q ($QX = qx$), ce domaine est : $D_0 - D_1 \varepsilon^{-1} q^2 > 0$ ou ($\varepsilon > 0$) : $D_0 (R - R_c) - D_1 q^2 > 0$ c'est le domaine Δ_R représenté sur la fig. 5 de l'énoncé.

L'équation matricielle vérifiée par les amplitudes $b_1(\tau)$ et $b_2(\tau)$ des harmoniques de Fourier $\cos \alpha X$ et $\sin \alpha X$ de la perturbation envisagée est :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(D_0 - D_1 Q^2) - D_1 \alpha^2 & -2 D_1 Q \alpha \\ -2 D_1 Q \alpha & -D_1 \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

La solution $B_0(X)$ n'est stable que si la perturbation \tilde{b} tend vers zéro. Une condition nécessaire est que les valeurs propres de la matrice aient une partie réelle négative, ou encore, comme ces valeurs propres sont réelles (matrice M symétrique) que le

déterminant $2 D_1 \alpha^2 \left[D_0 - 3 D_1 Q^2 + \frac{1}{2} D_1 \alpha^2 \right]$ soit positif. Ceci

n'est certainement pas le cas pour tout α si : $D_0 - 3 D_1 Q^2 < 0$. On a donc réduit le domaine de la convection stationnaire (d'un facteur $\frac{1}{\sqrt{3}}$), mais on ne peut expliquer ainsi la sélection d'un mode.

b) Si X était une variable temps et B le nombre complexe associé à un point du plan, l'équation pour $B(X)$ serait l'équation de la dynamique de ce point, de masse D_1 , soumis à une force centrale de valeur $-D_0 r + \delta r^3$ dérivant de l'énergie

potentielle $\frac{1}{2} D_0 r^2 - \frac{1}{4} \delta r^4$. Les deux intégrales premières C

et E sont respectivement les analogues de la constante des aires et de l'énergie. La première inégalité s'obtient en écrivant que

$E = \frac{1}{2} D_1 \frac{C^2}{r_M^2} + \frac{1}{2} D_0 r_M^2 - \frac{1}{4} \delta r_M^4$ (puisque r_M corres-

pond à un maximum) et $E \geq \frac{1}{2} D_1 \frac{C^2}{r_m^2} + \frac{1}{2} D_0 r_m^2 - \frac{1}{4} \delta r_m^4$

(puisque, sur les bords il n'est pas certain que $\frac{dr}{dX} = 0$). En effet, des deux expressions de E , on déduit :

$$\frac{1}{2} D_1 C^2 \left(\frac{1}{r_m^2} - \frac{1}{r_M^2} \right) \leq \frac{1}{2} D_0 (r_M^2 - r_m^2) - \frac{1}{4} \delta (r_M^4 - r_m^4),$$

relation qu'il suffit de multiplier par la quantité positive :

$$\frac{2(r_m^2 r_M^2)}{r_M^2 - r_m^2}.$$

La deuxième inégalité s'obtient en remplaçant la fonction de r_M^2 par son maximum (on utilise la relation :

$$x(\alpha - \beta x) \leq \frac{\alpha^2}{4\beta} \text{ avec } \alpha = D_0 - \frac{1}{2} \delta r_m^2, \beta = \frac{\delta}{2} > 0).$$

En comparant la fonction $B(X) = r(X) e^{i\theta(X)}$ et la fonction $B_0(X) = b(Q) e^{iQX}$, on voit qu'on a non seulement une modulation d'amplitude, mais aussi une modulation de fréquence

(spatiale), la dérivée $\frac{d\theta}{dX}$ pouvant être assimilée au nombre d'onde

réduit Q des questions précédentes. Dans la région du cœur de la

cellule $r(X) \approx r_M$, $Q = \frac{d\theta}{dX} = \frac{C}{r_M^2}$. L'inégalité s'écrit alors :

$$D_1 C^2 = D_1 (r_M^2 Q)^2 \leq \frac{r_m^2}{2\delta} D_0^2 \text{ soit } Q \leq \frac{D_0}{r_M \sqrt{2\delta D_1}} \left(\frac{r_m}{r_M} \right).$$

La sélection du nombre d'onde (Q petit) peut s'expliquer (au

moins qualitativement) par la petitesse du rapport $\frac{r_m}{r_M}$, lui-même

lié aux effets de bord associés aux parois latérales rigides de la cellule.

J.-P. PROVOST,

(Physique Théorique, Université de Nice)

E.-R. TANTART,

(Paris).

ANNEXE A

FAISCEAUX GAUSSIENS

Si on écrit l'onde ψ sous la forme $a e^{i\varphi}$ où la fonction φ (éventuellement complexe) varie spatialement beaucoup plus vite que la fonction a , on sait que φ doit satisfaire l'équation eikonale $(\vec{\nabla} \varphi)^2 = k^2$.

Si $\varphi(x) = k \left(x - \frac{q^2}{2q(x)} \right)$, on obtient au deuxième ordre

en q : $\frac{dq}{dx} = -1$, d'où l'expression donnée dans l'énoncé :

$q(x) = q_0 - x$; si q_0 est réel, on retrouve l'expression des ondes sphériques dans l'approximation de Gauss. Un petit calcul, partant de l'équation $\Delta\psi + k^2\psi = 0$ et retenant les termes en $a(x)$

et $\frac{da}{dx}(x)$ donne la condition supplémentaire $\frac{1}{a} \frac{da}{dx} = \frac{1}{q}$

d'où $a(x) = (x - q_0)^{-1}$; en séparant le module et l'argument de a , on retrouve la décroissance en $|x - R_0|^{-1}$ de l'amplitude réelle de l'onde à grande distance et le déphasage de π au passage du foyer.

Les ondes gaussiennes possèdent la propriété remarquable de rester gaussiennes en traversant un système optique centré.

Plus précisément, si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ($-c$: convergence du système)

est la matrice de transfert entre deux plans, les paramètres $Q = -q$ et $Q' = -q'$ sont liées par la relation simple

$Q' = \frac{aQ + b}{cQ + d}$; cette relation se vérifie sur les deux cas parti-

culiers : translation simple de x ($a = d = 1$; $c = 0$; d'où : $Q' = Q + x$ comme on l'a montré plus haut); passage d'une

lentille mince ($a = d = 1$; $b = 0$; $c = -\frac{1}{f}$; d'où :

$Q'^{-1} = -f^{-1} + Q^{-1}$ relation montrée en I.4 b). On peut également définir des faisceaux gaussiens ne présentant pas nécessairement une symétrie de révolution (existence de différents modes); ces faisceaux sont souvent une bonne approximation des faisceaux délivrés par les lasers.

ANNEXE B

VISCOSITE ET CREATION D'ENERGIE INTERNE

Dans un fluide incompressible, la force de viscosité par unité de volume est $\eta \Delta \mathbf{v}$. Mais attention, le produit $\eta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v}$ (qui, aux dimensions, donne le résultat demandé $\eta v^2 d^{-2}$) n'est pas la puissance dissipée.

Dans le cas simple proposé en I.4. d), ce terme est même nul ! (il est bien connu que la vitesse est alors fonction affine de z :

$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$). Il ne faut pas oublier que les effets de viscosité cor-

respondent à des échanges surfaciques. Prenons le cas (un peu plus général que celui proposé) d'un écoulement incompressible horizontal unidirectionnel (axe x) dont la vitesse est une fonction de z et t .

Considérons une tranche dz de fluide soumise en $z + dz$ à la force surfacique $\eta \frac{\partial v}{\partial z}(z + dz)$ et en z à la force $-\eta \frac{\partial v}{\partial z}(z)$.

Dans le référentiel lié à la tranche de fluide et allant à la vitesse $v(z)$ la puissance est $\eta \frac{\partial v}{\partial z}(z + dz) [v(z + dz) - v(z)] + 0 =$

$dz \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2$ [à l'ordre dz , ce résultat ne dépend du choix de vitesse de la couche, $v(z)$, ou $v(z + dz)$]. Cette puissance est égale au taux de création d'énergie interne dans la couche.

Dans le référentiel du laboratoire, la puissance est :

$$\eta \frac{\partial v}{\partial z}(z + dz) v(z + dz) - \eta \frac{\partial v}{\partial z}(z) v(z) = \dots$$

$$\dots dz \eta \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right].$$

Le deuxième terme est la contribution de la viscosité au bilan d'énergie cinétique, obtenu à partir de l'équation d'Euler :

$$v \rho \frac{\partial v}{\partial t} = v \left(\eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \right).$$

ANNEXE C

On a vu en III.4. b) que le type de fonctions supposé en III.2. ne correspond pas aux conditions expérimentales. Une supposition moins forte consiste à garder la même dépendance en x et t , mais à ne pas se fixer la dépendance en z . Considérons le cas $T_a = 0$ et posons $\mu = 0$ (en supposant que l'instabilité non oscillante est la première à apparaître). Les équations (4) et (6)

deviennent $D = \frac{d}{dz}$:

$$(D^2 - k^2) \vartheta + v_z = 0; (D^2 - k^2)^2 v_z - R k^2 \vartheta = 0.$$

v_z vérifie l'équation du 6^e degré $[(D^2 - k^2)^3 + R k^2] v_z = 0$. Une solution générale paire est :

$$v_z(z) = A_1 \operatorname{ch} \alpha_1 z + A_2 \operatorname{ch} \alpha_2 z + A_3 \operatorname{ch} \alpha_3 z$$

avec : $\alpha_i = [k^2 + (R k^2)^{1/3} (-1)^{i/3}]^{1/2}$ (il y a trois racines troisième de -1). Les conditions aux limites dans les plans $z = \pm 1/2$, à savoir $v_z = 0$; $\partial_z v_z = 0$ et $(D^2 - k^2)^2 v_z = 0$ (car $\vartheta = 0$), conduisent à un système homogène de trois équations aux inconnues A_1, A_2, A_3 . En écrivant que le déterminant de ce système est nul, on obtient une relation entre R et k . Le minimum de R comme fonction de k (obtenu par calcul numérique) est très voisin du résultat expérimental.

Agrégation

SESSION DE 1986
SCIENCES PHYSIQUES
Option : Chimie
Epreuve C

COMPOSITION DE CHIMIE (Applications)

(Durée : 6 heures)

Matériel à prévoir : 4 feuilles de papier millimétré.

DISSOCIATION DE L'EAU

L'épreuve comporte quatre parties largement indépendantes.

Dans chacune d'elles, de nombreuses questions relèvent de connaissances de base, elles peuvent être résolues rapidement et brièvement.

Les notations de l'énoncé sont à respecter.

DONNÉES GÉNÉRALES

Constantes fondamentales.

On utilisera dans les calculs les valeurs approchées suivantes :

Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J. Hz⁻¹ ;

Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ mol⁻¹ ;

Charge élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C ;

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8$ m. s⁻¹ ;

Constante des gaz : $R = 8,31$ J. K⁻¹. mol⁻¹ ;

Potentiers normaux d'oxydoréduction E^0 (Volt) par rapport à l'électrode normale à hydrogène (ENH), à pH = 0 et à 298 K :

$E^0(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) = 1,36$

$E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23$

$E^0(\text{I}_2/\text{I}^-) = 0,54$

$E^0(\text{SO}_4^{2-}/\text{SO}_2 \text{ aq}) = 0,17$

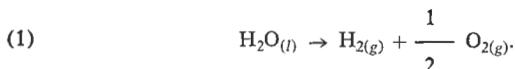
$E^0(\text{H}^+/\text{H}_2) = 0,00$

$E^0(\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}) = -0,23$

$E^0(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = -0,44.$

1. ASPECTS THERMODYNAMIQUES

La réaction de dissociation de l'eau s'écrit :



1.1. A l'aide des données du tableau I, calculer les variations d'enthalpie standard ΔH_r^0 , d'entropie standard ΔS_r^0 , et d'enthalpie libre standard ΔG_r^0 , à la température $T = 298 \text{ K}$ pour cette réaction de dissociation. Commenter les signes des quantités calculées.

Tableau I

Enthalpies de formation standard, entropies standard à $T = 298 \text{ K}$.

Coefficients a et b des capacités calorifiques molaires à pression constante

	$\Delta H_f^0 (298 \text{ K})$ $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$	$S^0 (298 \text{ K})$ $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	a $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	b $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-2}$
$\text{H}_2\text{O} (l) \dots\dots\dots$	- 285 580	69,87	46,82	$29,97 \times 10^{-3}$
$\text{H}_2 (g) \dots\dots\dots$		130,46	27,67	$3,39 \times 10^{-3}$
$\text{O}_2 (g) \dots\dots\dots$		204,82	34,57	$1,08 \times 10^{-3}$

1.2. Exprimer ΔH_r^0 , ΔS_r^0 , ΔG_r^0 en fonction de la température T . Les capacités calorifiques molaires à pression constante sont données par la relation littérale approchée :

$$c_p = a + bT \quad (\text{tableau I}).$$

On calculera d'abord le Δc_p de la réaction sous la forme :

$$\Delta c_p = \Delta a + T\Delta b ;$$

on exprimera ensuite ΔH_r^0 , et ΔS_r^0 en fonction de T , Δa et Δb puis on exprimera ΔH_r^0 , ΔS_r^0 et ΔG_r^0 en fonction de T et des valeurs numériques.

1.3. On appelle E_{th} la force électromotrice d'une pile à hydrogène et à oxygène, à courant nul, les pressions étant égales à 1 bar, en supposant un fonctionnement idéal des électrodes. Donner sans démonstration la relation existant entre E_{th} et ΔG_r^0 .

Calculer E_{th} à 298 K.

1.4. On considère une cuve à électrolyse dans laquelle s'effectue la réaction (1) de dissociation de l'eau. La cuve est maintenue à température et pression constantes T et P .

On applique aux bornes de cette cuve une tension constante V . On

pose $E_{at} = \frac{\Delta H_r^0}{nF}$, n étant le nombre de moles d'électrons mises en

jeu dans la dissociation d'une mole d'eau. Préciser le signe des échanges thermiques entre la solution électrolytique et le milieu extérieur lorsque :

$$E_{th} < V < E_{at}$$

$$V > E_{at}$$

Calculer la quantité de chaleur échangée entre la solution électrolytique et le milieu extérieur à 298 K lorsque $V = E_{th}$ et $V = E_{at}$.

1.5. Tracer les courbes donnant E_{th} et E_{at} en fonction de T : on se limitera au calcul des valeurs numériques de E_{th} et E_{at} pour T = 273 K, 298 K, 373 K. Commenter sur le diagramme les conclusions de la question précédente.

1.6. L'efficacité η est définie comme le rapport de E_{at} à V.

Deux procédés industriels utilisent des cellules alimentées respectivement sous une tension de 1,75 V et 2,05 V, à 298 K.

1.6.1. Calculer l'efficacité respective de ces deux cellules.

1.6.2. Quelle conséquence pratique importante impliquent ces valeurs de V ?

1.6.3. Est-il possible d'améliorer l'efficacité en travaillant à $T > 298$ K ?

1.7. Ecrire les demi-équations redox correspondant aux couples H^+/H_2 et O_2/H_2O ainsi que les relations de Nernst correspondantes. A l'aide des données du tableau II, tracer le diagramme potentiel — pH de l'eau avec :

$$p_{O_2} = 1 \text{ bar} \quad \text{et} \quad p_{H_2} = 1 \text{ bar}, \quad \text{à } 298 \text{ K.}$$

Préciser quel est le domaine de stabilité de l'eau.

Calculer, en électron-volt, ΔG^0_r de la réaction (1). Comparer ce résultat aux données du tableau II ; commenter.

Tableau II

Potentiels normaux (ENH) à pH = 0 et à T = 298 K de différents couples redox

Couple redox	$H^+/H \cdot$	H^+/H_2	O_2/H_2O	H_2O_2/H_2O	$OH \cdot/H_2O$
E^0 (V)	- 2,11	0,00	1,23	1,77	2,79

1.8. On peut envisager d'autres réactions de dissociation de la molécule d'eau :



Ecrire les demi-réactions redox intervenant dans les réactions (2) et (3) ainsi que les relations de Nernst correspondantes (voir tableau II).

Sur le diagramme précédent, tracer les courbes des potentiels normaux apparents en fonction du pH correspondant aux demi-couples redox des réactions (2) et (3) en supposant :

$$a_{\text{H}_2\text{O}_2} = 1, \quad a_{\text{OH}^-} = 1, \quad a_{\text{H}^+} = 1, \quad p_{\text{H}_2} = 1 \text{ bar.}$$

1.9. Calculer, en électron-volt, ΔG^0_r , des réactions (2) et (3) à 298 K.

Si celles-ci étaient réalisables par électrolyse, dans des conditions idéales de fonctionnement, quelles seraient les tensions minimales à appliquer aux bornes pour les obtenir ?

2. ELECTROLYSE

2.1. On souhaite produire de l'hydrogène par électrolyse de solutions aqueuses, au moindre coût énergétique. On peut utiliser, comme électrolytes, diverses solutions aqueuses ioniques : acide sulfurique, potasse, acide chlorhydrique ou iodhydrique, solution sulfureuse.

Indiquer brièvement pour chaque cas les réactions qui seraient observées aux électrodes, en supposant que leur fonctionnement ne dépend que de conditions thermodynamiques.

2.2. Soient deux couples redox Ox_1/Red_1 et Ox_2/Red_2 , qui échangent n électrons. Leurs potentiels normaux respectifs sont E^0_1 et E^0_2 ($E^0_1 > E^0_2$).

2.2.1. Tracer schématiquement les courbes intensité-potential pour chacun des couples sur une électrode supposée inattaquable. On portera en ordonnée la densité de courant j (le courant anodique étant compté positivement) et en abscisse, le potentiel appliqué à l'électrode, par rapport à une électrode de référence. On ne tient pas compte des phénomènes liés à la diffusion.

Indiquer clairement, pour chacun des couples : les courbes anodique et cathodique ainsi que la courbe résultante ; les points représentatifs des potentiels d'électrode E_1 et E_2 des deux systèmes à courant nul (systèmes à l'équilibre ; on supposera par exemple $a_{\text{Ox}_1} < a_{\text{Red}_1}$ et $a_{\text{Ox}_2} > a_{\text{Red}_2}$) ; la densité du courant d'échange ; les points représentatifs des potentiels normaux E^0_1 et E^0_2 .

2.2.2. On place les deux couples redox précédents dans les deux compartiments d'une cellule séparée par une membrane perméable. Les électrodes ont même surface. Utiliser les courbes précédentes pour illustrer le fonctionnement du système en cellule d'électrolyse. On pourra utiliser comme exemple les couples redox de l'eau H^+/H_2 et $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$.

Indiquer sur le schéma relatif à la cellule d'électrolyse les surtensions anodique η_a et cathodique η_c , pour la densité de courant j , définies par $\eta = E_{\text{electrode}} - E_{\text{equilibre}}$.

2.3. Dans le cas où $a_{\text{Red}_1} = a_{\text{Red}_2} = a_{\text{Ox}_1} = a_{\text{Ox}_2} = 1$, donner la relation entre la différence de potentiel initiale V appliquée aux bornes et les grandeurs E^0_1 , E^0_2 , η_a , η_c sachant que la cellule d'électrolyse, de résistance R , est parcourue par un courant d'intensité I .

2.4. Le problème pratique est de minimiser cette différence de potentiel.

Si le seul but recherché était la production d'hydrogène, toutes choses égales par ailleurs, quel serait, parmi ceux étudiés au 2.1.1., l'électrolyte à retenir sur la seule base des potentiels normaux d'oxydo-réduction ?

Dans le cas d'une électrolyse avec dégagement d'hydrogène et d'oxygène, la différence de potentiel théorique à appliquer dépend-elle du pH de la solution ?

2.5. On souhaite minimiser la chute ohmique dans la solution. Quels sont les facteurs sur lesquels il est possible d'intervenir ?

Les conductivités équivalentes limites des ions des électrolytes étudiés sont données dans le tableau III.

Tableau III

Conductivités équivalentes limites λ_0 d'ions en solution aqueuse à 298 K

Ion	H ₃ O ⁺	OH ⁻	K ⁺	Cl ⁻	I ⁻	SO ₄ ²⁻
λ_0 $\Omega^{-1} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{mol}^{-1} \dots \dots \dots$	349,8	198,6	73,5	76,3	76,8	80,0

Quel est le meilleur électrolyte de ce point de vue ? Quelle est l'influence possible d'une élévation de température sur la chute ohmique ?

2.6. On électrolyse une solution d'acide sulfurique de concentration égale à 0,5 mol.l⁻¹. Pour une même densité de courant, les surtensions η_c de l'hydrogène sur les cathodes de platine, de fer et de plomb sont respectivement égales à -0,05, -0,24 et -0,75 V.

L'électrolyse industrielle de cette solution est-elle économiquement possible ?

2.7. On électrolyse une solution d'hydroxyde de potassium à pH = 14, à 293 K.

Les surtensions observées sont les suivantes (tableau IV) pour une densité de courant de 2,5 A.m⁻².

Tableau IV

Électrode	type	Cathode		Anode	
		Fer	Nickel	Fer	Nickel
Surtension (V)	matériau	- 0,11	- 0,12	+ 0,33	+ 0,26

— Quel métal vous paraît-il économiquement préférable d'utiliser comme matériau d'anode et de cathode ?

— On interrompt l'électrolyse ; on observe qu'une anode de nickel évolue vers un potentiel de 0,46 V par rapport à l'électrode normale à hydrogène tandis qu'une anode de fer évolue vers un potentiel de — 0,16 V par rapport à la même référence. Interpréter ces résultats. Quels produits sont susceptibles d'être formés ? Quelle conclusion doit-on en tirer pour le choix du matériau d'anode ?

2.8. Quand la température de la cellule d'électrolyse passe de 293 K à 333 K, la valeur absolue de la surtension diminue de 0,14 V à la cathode et de 0,08 V à l'anode pour une densité de courant égale à 50 A. m⁻² et pour une tension de 2 V à 293 K.

Comparer le gain en énergie qui en résulte à l'énergie nécessaire pour élever la température de l'eau de 293 K à 333 K : effectuer le calcul pour une mole de dihydrogène dégagé, en admettant que la quantité d'électricité mise en jeu est intégralement utilisée pour produire du dihydrogène.

Quels sont les obstacles qui s'opposent à un choix de température différent de celui retenu industriellement (333 — 363 K) ?

2.9. On définit :

— la production horaire M : la masse (en kg) de produit formé par heure et par m² d'électrode ;

— le rendement faradique (en courant) $q_I = \frac{M}{M_{th}}$ où M_{th} est la masse théorique du produit obtenu ;

— la consommation énergétique W : l'énergie nécessaire pour produire un kg de produit ;

— le rendement énergétique q_W : le rapport de l'énergie théorique W_{th} , nécessaire à l'obtention de la masse théorique M_{th} , à l'énergie réellement consommée W.

En utilisant la loi de Faraday, exprimer la masse théorique M_{th} en fonction du courant I, de la surface S, de la masse molaire \mathcal{M} du produit formé, de z le nombre d'électrons échangés et du faraday F. Exprimer M en fonction de q_I . Exprimer la consommation énergétique W en fonction de la tension appliquée V, de I, de M et de S. En déduire la relation qui existe entre W et q_I .

Exprimer l'énergie théorique W_{th} en fonction de la différence de potentiel théorique E_{th} à appliquer aux bornes d'une cellule idéale, de I, de M et de S.

En déduire la relation entre q_W et q_I .

Appliquer ces relations à la production d'hydrogène par électrolyse de l'eau, avec une densité de courant de 2 000 A. m⁻², une différence de potentiel appliquée de 1,8 V et un rendement faradique de 0,98.

3. PHOTOLYSE

On souhaite utiliser la lumière solaire pour dissocier l'eau.

3.1. Le spectre utilisable de la lumière solaire s'étend d'environ 300 nm à environ 1 600 nm, avec un maximum d'intensité aux envi-

rons de 600 nm. Tracer un schéma approximatif de la distribution spectrale (intensité en ordonnée et longueur d'onde en abscisse). Etablir une correspondance entre les longueurs d'onde et l'énergie des photons correspondants, exprimée en eV.

3.2. Soient les réactions de dissociation de l'eau (1), (2) et (3), écrites au 1.1. et au 1.8.

3.2.1. Déterminer le nombre d'électrons formellement échangés au cours de ces réactions.

3.2.2. Calculer, en eV, les enthalpies libres $\Delta G_e^0(1)$, $\Delta G_e^0(2)$, $\Delta G_e^0(3)$ par électron mis en jeu au cours des réactions (1), (2) et (3).

Comparer les valeurs numériques obtenues aux potentiels normaux d'oxydoréduction du tableau II.

3.2.3. En admettant que chaque échange d'électron nécessite l'absorption d'un photon d'énergie au moins égale à ΔG_e^0 , donner l'énergie minimale théorique du photon absorbé pour que soient possibles les réactions (1), (2) et (3). Reporter ces valeurs sur le diagramme de distribution spectrale précédemment tracé. Quelle est la réaction la mieux adaptée à une utilisation maximale de l'énergie solaire ?

3.3. La réaction (1) n'a pas lieu par simple irradiation solaire. On ajoute dans l'eau un photosensibilisateur PS qui absorbe la lumière en donnant un état excité PS^* capable de provoquer la dissociation de l'eau.

Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à la photoproduction de dihydrogène.

A cette fin, l'espèce PS^* doit être susceptible de réduire une substance R, dite relais, à l'état d'espèce réduite R^- . Cette dernière, en présence d'un catalyseur C_{Red} , doit être capable de réduire l'eau avec un dégagement de dihydrogène, en revenant à l'état R.

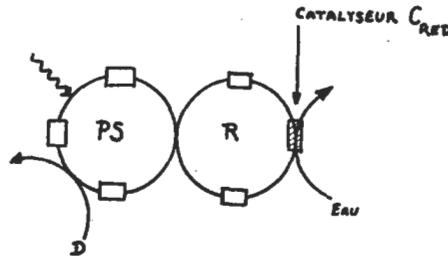
Etablir un diagramme qualitatif et schématique des niveaux d'énergie de ce système en indiquant : l'état fondamental ($PS + R$), l'état excité après l'absorption d'un quantum d'énergie $h\nu$ ($PS^* + R$), et l'état après transfert d'électron ($PS^+ + R^-$). Porter en ordonnée les énergies et en abscisse une coordonnée arbitraire de la réaction.

3.4. Ecrire la réaction de réduction de l'eau par R^- . Préciser les conditions thermodynamiques et cinétiques qui doivent être remplies et les principaux obstacles qui doivent être surmontés pour que la production de dihydrogène devienne possible. Situer, à $pH = 7$, le potentiel d'oxydoréduction du couple R/R^- .

3.5. Pour obtenir un processus cyclique, après formation des espèces PS^+ et R^- , on ramène PS^+ à l'état initial PS par réaction avec un donneur d'électrons D. Celui-ci doit intervenir sans perturber la réaction de dégagement de dihydrogène. Quelles conditions thermodynamiques doit remplir le couple D^+/D pour réagir sur PS^+ et ne pas réduire l'eau directement ?

3.6. Ecrire l'ensemble des réactions mises en jeu. Quelle est l'équation bilan ? Compléter le schéma suivant en faisant apparaître les

espèces qui appartiennent à des cycles catalytiques, les espèces qui disparaissent et celles qui sont formées.



3.7. Choix du photosensibilisateur.

Le tableau V donne quelques caractéristiques de photosensibilisateurs PS, complexes de métaux de transition, de structure électronique nd^6 , bas spin, pour lesquels le rendement quantique d'obtention de PS^* est pratiquement égal à 1.

Tableau V

PS ⁿ⁺	Nature de la transition (a)	τ (μ s) (b)	E* (eV) (c)
Fe (bipy) ₃ ²⁺ (d)	M (d-d)	0,0008	0,9
Ru (bipy) ₃ ²⁺	TCML	0,6	2,1
Os (bipy) ₃ ²⁺	TCML	0,02	1,8
Rh (phen) ₃ ³⁺ (e)	L ($\pi-\pi^*$)	0,3	2,8

(a) Transition électronique centrée sur le métal, M (d-d), ou sur le ligand, L ($\pi-\pi^*$), ou par transfert de charge du métal vers le ligand (TCML)
 (b) Durée de vie de l'état excité PS*, dans le solvant utilisé.
 (c) Énergie de l'état excité PS*, par rapport à l'état fondamental.
 (d) bipy = bipyridyl-2,2';
 (e) phen = o-phénaanthroline.

3.7.1. Indiquer la configuration électronique des ions métalliques supposés dans un champ octaédrique et donner un diagramme d'énergie simple des orbitales moléculaires (notées t_{2g} et e_g pour celles constituées principalement des orbitales du métal, et π , π^* pour celles constituées principalement des orbitales des atomes du ligand). Schématiser l'évolution de l'énergie des orbitales d dans la série précédente, les énergies des orbitales π et π^* du ligand étant supposées constantes. Indiquer sur ce schéma les transitions électroniques entre orbitales moléculaires décrites dans le tableau V.

En s'appuyant exclusivement sur des critères cinétiques, argumenter le choix en faveur d'un ou de deux photosensibilisateurs.

3.7.2. Propriétés oxydoréductrices du photosensibilisateur PS.

Le photosensibilisateur peut être engagé dans divers couples dont nous retiendrons les suivants :

Etat fondamental : PS⁺/PSEtat excité : PS⁺/PS^{*}.

Les potentiels normaux correspondants E⁰ (V) sont donnés par le tableau VI.

Tableau VI

PS	Couple	
	PS ⁺ /PS	PS ⁺ /PS [*]
Fe (bipy) ₃ ²⁺	1,05	0,1
Ru (bipy) ₃ ²⁺	1,26	- 0,84
Os (bipy) ₃ ²⁺	0,82	- 0,96
Rh (phen) ₃ ³⁺	1,5	- 1,3

3.7.2.1. Quelle relation existe-t-il entre les données énergétiques du tableau V et celles du tableau VI ?

3.7.2.2. Situer les couples sur le diagramme potentiel-pH de l'eau. Quels sont les photosensibilisateurs qui permettent à la fois la réduction et l'oxydation de l'eau pour un pH voisin de 7 ?

3.8. Transfert électronique photo-induit : choix du relais R.

La réaction directe de PS^{*} sur l'eau n'étant pas cinétiquement favorable, on cherche une espèce relais R. On considère qu'à partir de l'état excité 1 (PS^{*} + R), il y a réaction de désactivation de PS^{*} par R, qui débute par la formation d'un complexe [PS^{*}/R], état 2 ; celui-ci évolue par transfert électronique interne vers un complexe [PS⁺/R⁻], au sein d'une cage de solvant, état 3. Ce deuxième complexe peut alors évoluer soit en quittant la cage pour donner les produits PS⁺ et R⁻, état 4, soit pour redonner par une réaction-retour les réactifs PS + R, état 0, soit enfin pour retourner au complexe précédent, état 2.

3.8.1. Tracer un schéma réactionnel comportant les divers états *i, j...*, en indiquant les constantes de vitesse *k_{ij}* de passage entre états successifs.

Commenter l'ordre de grandeur relatif des différentes constantes de vitesse pour obtenir les produits PS⁺ et R⁻ avec le meilleur rendement. Insister particulièrement sur la constante de vitesse de désactivation *k₁₂*, sur celle de la réaction-retour *k₃₀*, et sur le rendement de sortie de la cage de solvant :

$$\Phi_{cage} = \frac{k_{34}}{k_{30} + k_{34}}.$$

3.8.2. Le tableau VII donne les valeurs des constantes de vitesse *k_{ij}* (mol⁻¹.s⁻¹) et les écarts d'énergies ΔE_{*ij*} = E_{*i*} - E_{*j*} (eV) entre les états *i* et *j* dans le cas du photosensibilisateur Ru (bipy)₃²⁺.

Tableau VII

Relais R	k_{12}	ΔE_{12}	k_{30}	ΔE_{30}	Φ_{cage}	E°_{R/R^-} (V)
Rh (bipy) ₃ ⁺	$6,20 \times 10^8$	0,1	$\approx 3 \times 10^8$	≈ 2	0,15	- 0,67
MV ²⁺ (a)	$1,4 \times 10^9$	0,37	4×10^8	1,7	0,25	- 0,44
Fe ³⁺ _{aq}	$2,7 \times 10^8$	1,5	5×10^8	0,6	1,00	+ 0,77

(a) MV²⁺ = dication du méthylviologène, ou N,N' diméthyl-bipyridium-4,4'.

3.8.2.1. Etablir un diagramme comparatif des énergies des états du système pour les 3 relais R, à l'aide des tableaux V et VII.

3.8.2.2. Calculer les constantes de vitesse k_{34} et commenter la corrélation existant entre k_{34} , Φ_{cage} et ΔE_{30} .

3.8.2.3. Quels produits R permettent la réduction de l'eau ? Justifier votre réponse à l'aide des valeurs de E°_{R/R^-} et du pH. Parmi les relais choisis, quel est le mieux adapté en fonction des critères cinétiques ?

3.8.2.4. Dans le cas du méthylviologène, écrire la demi-équation redox puis la réaction du radical cation MV^{•+} avec le proton hydraté. Discuter l'influence du pH.

3.9. Photoréduction de l'eau : choix d'un système.

On ajoute au système composé de PS et de R un catalyseur métallique sous forme de fines particules (platine) et un donneur d'électrons, par exemple l'acide éthylènediaminetétracétique (EDTA), capable de réduire PS⁺ à l'état PS.

3.9.1. On irradie ce système dans l'eau lourde D₂O à pH = 5. Il se dégage du deutérium et on constate la formation d'acide éthylènediaminediacétique et d'acide glyoxylique (CHOCOOH).

Ecrire la réaction d'oxydation de l'EDTA et le bilan réactionnel global correspondant à la mise en jeu d'une mole d'EDTA. Qu'indique le dégagement de dideutérium ?

3.9.2. La vitesse initiale de dégagement d'hydrogène est plus importante en présence de MV²⁺ qu'avec d'autres relais R. Cependant, on constate qu'en présence de platine et d'hydrogène, le méthylviologène est progressivement hydrogéné.

Commenter les conséquences de cette hydrogénation sur le rendement et la durée de vie du système photolytique.

3.9.3. Compte tenu de vos conclusions, proposer un système de photoréduction de l'eau. Représenter son fonctionnement à l'aide d'un schéma analogue à celui établi en 3.6.

3.10. Photo-oxydation de l'eau.

Pour obtenir la photo-oxydation de l'eau, on irradie un système constitué des complexes Ru (bipy)₃²⁺, Co (NH₃)₅Cl²⁺ et d'oxyde de

ruthénium RuO_2 finement dispersé. Dans de l'eau $^{18}\text{OH}_2$, il se dégage du dioxygène $^{18}\text{O}^{18}\text{O}$. Le potentiel normal du couple $\text{Co}(\text{NH}_3)_5\text{Cl}^{2+}/\text{Co}(\text{NH}_3)_5\text{Cl}^+$ est $E^0 = 0,52 \text{ V}$. La forme réduite de ce couple est hydrolysée de manière rapide et irréversible à l'état d'aquacomplexe.

3.10.1. Proposer un schéma de photo-oxydation de l'eau, analogue à celui proposé pour la photoréduction. Expliquer le fonctionnement du système.

3.10.2. Etablir le bilan réactionnel.

3.11. Photolyse de l'eau.

Proposer un système de photolyse de l'eau, comportant soit un compartiment, soit deux compartiments séparés par une membrane.

4. PHOTOÉLECTROLYSE

On souhaite utiliser l'énergie lumineuse pour dissocier l'eau grâce à un dispositif photoélectrolytique.

4.1. Soit une cuve à électrolyse dont l'une des électrodes, de grande surface, est recouverte d'une couche mince d'un semi-conducteur de type n . En l'absence d'électrolyte, les niveaux d'énergie du système sont ceux de la fig. 1(a) : W_v est l'énergie du bord de la bande de valence ; W_c est l'énergie du bord de la bande de conduction ; W_F^0 est l'énergie de Fermi.

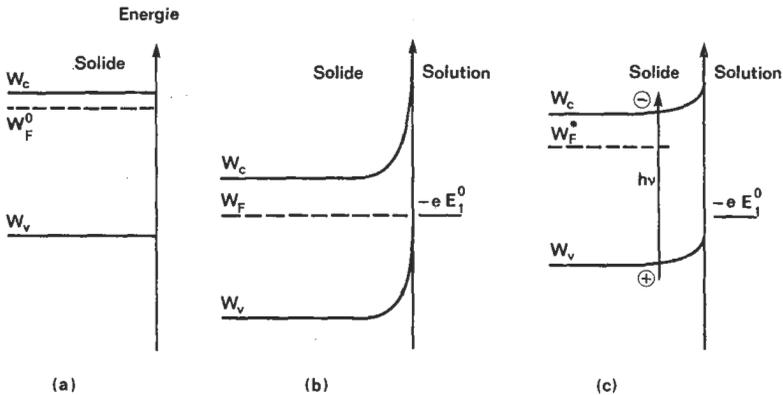


Fig. 1. — Energie des électrons dans un semi-conducteur ou dans un couple oxydoréducteur Ox 1/Red 1 en solution ;

(a) Semi-conducteur seul .

(b) Semi-conducteur en équilibre avec la solution à l'obscurité.

(c) Jonction semi-conducteur - solution sous irradiation.

4.1.1. Définir brièvement les notions de bande de valence, de bande de conduction, de bande interdite et de niveau de Fermi.

4.1.2. Indiquer sur un schéma la position de l'énergie de Fermi W_F par rapport à W_v et W_c dans des semi-conducteurs (intrinsèque, n ou p) et son évolution en fonction de l'importance du dopage.

4.2. Le semi-conducteur, de type n , est mis au contact d'un électrolyte contenant le couple redox Ox 1/Red 1, capable d'échanger n électrons, au potentiel normal redox E_1^0 . Le système est décrit de manière schématique par la fig. 1(b) : le potentiel électrochimique de l'électron est égal à l'énergie de Fermi W_F dans le solide et au produit $-eE_1$ dans la solution (E_1 est le potentiel redox du couple Ox 1/Red 1). Les énergies sont exprimées en électron-volt, l'origine est l'énergie de l'électrode normale à hydrogène.

4.2.1. Lorsque $W_F^0 > -eE_1^0$, la jonction semi-conducteur-solution n'est pas à l'équilibre. Ecrire la condition générale d'équilibre à l'interface, en terme de potentiel électrochimique.

4.2.2. Décrire le processus qui conduit à l'équilibre par création d'une double couche électrique à l'interface comportant une charge d'espace positive dans le semi-conducteur.

Commenter la création de la différence de potentiel :

$$\Delta\Phi = \Phi_{\text{solide}} - \Phi_{\text{solution}}$$

qui en résulte entre solide et solution ainsi que la courbure des niveaux d'énergie W_c et W_v dans ces conditions.

4.2.3. Quelle est la relation entre W_F et E_1 , valeurs de l'énergie de Fermi et du potentiel d'oxydoréduction à l'équilibre ?

En déduire la relation entre W_F^0 , E_1^0 et $\Delta\Phi$, si l'on admet que la composition de la solution a peu varié ?

4.3. On envoie sur l'électrode un faisceau de photons d'énergie $h\nu$. L'absorption d'un de ces photons par le semi-conducteur est susceptible de créer une paire électron-trou, notée e^- , t^+ , en transférant un électron de la bande de valence à la bande de conduction ($W_c - W_v = \Delta W_{cv}$).

On ne s'intéresse dans la suite qu'à ce type d'absorption.

4.3.1. Ecrire l'inégalité entre les énergies $h\nu$ et ΔW_{cv} pour que la paire e^- , t^+ soit créée.

4.3.2. Quand cette condition est réalisée, comment évoluent électrons et trous : quelles sont les espèces qui vont vers la surface et quelles sont celles qui se déplacent vers l'intérieur du semi-conducteur ?

4.3.3. Que deviennent alors la charge d'espace et la courbure des bandes du semi-conducteur ? Pour répondre à cette question, on pourra commenter la fig. 1.(c) où figure l'énergie de Fermi sous illumination W_F^* .

4.4. Le semi-conducteur illuminé est maintenant relié à une contre-électrode. A l'obscurité, la jonction entre le semi-conducteur et le métal de la contre-électrode est supposée ohmique (égalité des énergies de

Fermi). L'électrolyte initial est le même que précédemment. La condition relative à la création de la paire e^- , t^+ est supposée remplie.

4.4.1. Représenter schématiquement le système, en utilisant l'exemple de la fig. 1. Quelle réaction d'oxydoréduction peut intervenir à la surface du semi-conducteur entre le couple en solution et les porteurs de charge ? Quelle condition doivent remplir l'énergie W_v et le potentiel E_0^1 pour qu'il y ait réaction ?

Justifier le terme de photoanode utilisé pour ce dispositif.

4.4.2. Quelle réaction peut intervenir à la contre-électrode ?

Etablir le bilan chimique relatif aux espèces Ox 1 et Red 1.

4.4.3. Ce système est appelé photogalvanique : en créant une phototension U_p entre les deux électrodes, il permet la production d'un photocourant I_p .

Exprimer la puissance P fournie par cette cellule en fonction de I_p et U_p , puis en fonction de I_p , W_F^* et E_0^1 , et enfin dans des conditions optimales d'irradiation et de dopage entre I_p et ΔW_{cv} .

4.4.4. Compléter votre schéma de la question 4.4.1. en y indiquant les réactions chimiques aux interfaces. Sur un schéma comparatif des situations à l'obscurité et sous irradiation, indiquer l'énergie correspondant à la phototension U_p .

4.5. On remplace la cellule du système précédent par une cellule à deux compartiments séparés par une membrane perméable.

L'un des compartiments est constitué de l'électrolyte précédent. L'autre est constitué d'une solution aqueuse d'un électrolyte contenant le couple redox Ox 2/Red 2 au potentiel E_0^2 . On indique en outre que $E_0^2 < E_0^1$: quel est le signe du ΔG^0 de la réaction :



On souhaite utiliser ce système pour produire Red 2 et Ox 1 à partir de Ox 2 et Red 1, grâce à l'énergie récupérée par absorption des photons.

4.5.1. Disposer convenablement les électrolytes dans la cellule ; décrire le système en utilisant les mêmes représentations que sur la fig. 1 : situer clairement l'énergie de Fermi sous illumination W_F^* , le potentiel électrochimique des électrons pour les couples Ox 1/Red 1 et Ox 2/Red 2, les niveaux d'énergie W_v et W_c . Exprimer les conditions que doivent remplir les énergies $h\nu$ et ΔW_{cv} , par rapport à l'enthalpie libre standard ΔG^0 pour qu'il y ait formation des photoproduits Red 2 et Ox 1, les conditions optimales de fonctionnement étant réalisées.

4.5.2. Exprimer la relation entre l'énergie du bord de la bande de valence W_v et le potentiel E_0^2 pour que l'on obtienne les produits Red 2 et Ox 1.

4.6. On utilise le dispositif de la question précédente pour réaliser la photoélectrolyse de l'eau, dans un milieu de $\text{pH} = 7$.

4.6.1. A l'aide des données du tableau VIII, calculer les largeurs de bande interdite pour chaque semi-conducteur.

Tableau VIII

Energies approchées des bords des bandes de valence et de conduction de quelques semi-conducteurs

(l'origine correspond à l'électrode normale à hydrogène)

Énergie (eV)	Composé					
	CdS	SrTiO ₃	Si	GaAs	TiO ₂	SnO ₂
Bande de valence.....	- 1,6	- 2,6	0,0	- 0,2	- 2,6	- 3,6
Bande de conduction.....	+ 0,8	+ 0,6	+ 1,1	+ 0,9	+ 0,4	+ 0,1

4.6.2. Reporter sur un diagramme d'énergie les valeurs de W_p et de W_c (énergies en ordonnée, nature du semi-conducteur en abscisse). Situer sur ce diagramme les énergies correspondant aux couples redox de l'eau O_2/H_2O et H_2O/H_2 à $pH = 7$.

4.6.3. En utilisant les conditions exprimées aux questions 4.5.1. et 4.5.2., indiquer quels sont les semi-conducteurs susceptibles de permettre la dissociation de l'eau par photoélectrolyse.

4.6.4. Pour une densité de courant donnée, les surtensions anodique et cathodique sont respectivement de 0,7 V et - 0,3 V.

Cela modifie-t-il votre réponse à la question précédente ? Suggérer des catalyseurs susceptibles de réduire ces surtensions.

4.6.5. Utiliser les réponses des paragraphes 4.5. et 4.6. pour proposer un schéma de cellule photoélectrolytique permettant la dissociation de l'eau. Employer une représentation analogue à la fig. 1. Préciser la longueur d'onde des radiations à utiliser. Indiquer si ce schéma est susceptible d'aboutir à une réalisation expérimentale utilisable.

4.7. La quantité d'hydrogène dégagée par le système décrit au paragraphe 3.9.3. augmente quand, toutes choses égales par ailleurs, le platine métallique est déposé sur des particules de SrTiO₃ ou de TiO₂.

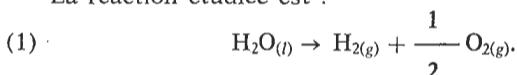
Les données du tableau VIII vous permettent-elles d'expliquer pourquoi ?

Si oui, proposer un modèle de décomposition de l'eau associant l'absorption d'un photon par un photosensibilisateur, une substance relais R et l'absorption d'un photon par un semi-conducteur, rendant inutile la présence d'un donneur d'électron sacrificiel.

SOLUTION

1. ASPECTS THERMODYNAMIQUES

La réaction étudiée est :



1.1. Les grandeurs à calculer sont :

$$\Delta H_r^0(298) = 285\,580 \text{ J. mol}^{-1},$$

$$\Delta S_r^0(298) = 163 \text{ J. K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1},$$

$$\Delta G_r^0(298) = 237\,006 \text{ J. mol}^{-1}.$$

La réaction est endothermique ; l'enthalpie libre est positive et grande : la réaction n'est pas favorisée dans ce sens ; la variation d'entropie est positive également car dihydrogène et dioxygène sont à l'état gazeux tandis que l'eau est liquide.

Ces données thermodynamiques montrent la grande stabilité de l'eau.

1.2. Les expressions de ΔH_r^0 , ΔS_r^0 , ΔG_r^0 , en fonction de la température sont :

$$\Delta H_r^0(T) = \Delta H_r^0(298) + \int_{298}^T \Delta c_p \, dT,$$

$$\Delta S_r^0(T) = \Delta S_r^0(298) + \int_{298}^T \frac{\Delta c_p}{T} \, dT,$$

$$\Delta G_r^0(T) = \Delta H_r^0(T) - T \Delta S_r^0(T).$$

On peut écrire Δc_p , en $\text{J. mol}^{-1} \text{K}^{-1}$:

$$\Delta c_p = \Delta a + T \Delta b = -1,865 - 26,04 \cdot 10^{-3} T.$$

D'où :

$$\Delta H_r^0(T) = \Delta H^0(298) + \Delta a (T - 298) + \frac{\Delta b}{2} [T^2 - (298)^2],$$

$$\Delta S_r^0(T) = \Delta S^0(298) + \Delta a \text{Log} \left(\frac{T}{298} \right) + \Delta b (T - 298),$$

$$\Delta G^0_r(T) = \Delta H^0(298) - T \Delta S^0(298) + \Delta a [(T - 298) - T \operatorname{Log} \frac{T}{298}] \\ + \Delta b \left\{ \frac{1}{2} [T^2 - (298)^2] - T(T - 298) \right\}.$$

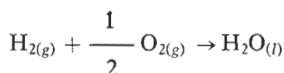
Et enfin, en fonction des valeurs numériques :

$$\Delta H^0_r(T) = 287\,290 - 1,865 T - 13,02 \cdot 10^{-3} T^2 \quad \text{J. mol}^{-1}$$

$$\Delta S^0_r(T) = 181,38 - 1,865 \operatorname{Log} T - 26,04 \cdot 10^{-3} T \quad \text{J. mol}^{-1} \text{K}^{-1}$$

$$\Delta G^0_r(T) = 287\,290 - 183,24 T \\ + 13,02 \cdot 10^{-3} T^2 + 1,865 T \operatorname{Log} T \quad \text{J. mol}^{-1}.$$

1.3. Dans la pile, la réaction qui intervient est :



dont :

$$\Delta G^0 = -\Delta G^0_r.$$

La relation entre E_{th} et ΔG^0_r est alors :

$$E_{th} = -\frac{\Delta G^0}{nF} = +\frac{\Delta G^0_r}{nF}.$$

$$\text{A } 298 \text{ K} \quad E_{th} = 1,228 \text{ V} \approx 1,23 \text{ V}.$$

1.4. On écrit la conservation de l'énergie : l'énergie fournie à la cellule, nFV est égale à la somme de l'énergie nécessaire à la réaction sous forme d'enthalpie et de la chaleur fournie par la cellule au milieu extérieur $-Q$.

$$nFV = \Delta H^0_r - Q = nF E_{at} - Q,$$

soit :

$$Q = nF(E_{at} - V).$$

D'où :

$Q < 0$ si $V > E_{at}$ la cellule fournit de la chaleur au milieu extérieur ;

$Q = 0$ si $V = E_{at}$ la cellule n'échange pas de chaleur (fonctionnement athermique) ;

$Q > 0$ si $V < E_{at}$ la cellule reçoit de la chaleur du milieu extérieur.

Lorsque $V = E_{th}$, $nFV = nF E_{th} = \Delta G^0_r$,

$$Q = -\Delta G^0_r + \Delta H^0_r = T \Delta S^0_r = + 48,57 \text{ kJ. mol}^{-1}.$$

Lorsque $V = E_{at}$, $Q = 0$.

1.5. Les valeurs de E_{th} et de E_{at} peuvent être calculées en fonction des expressions de $\Delta H^0_r(T)$ et $\Delta G^0_r(T)$ trouvées en 1.2.

On trouve :

$$E_{at} = 1,491 - 9,68 \cdot 10^{-6} T - 6,76 \cdot 10^{-8} T^2,$$

$$E_{th} = 1,491 - 9,51 \cdot 10^{-4} T - 6,76 \cdot 10^{-8} T^2 + 9,68 \cdot 10^{-9} T \text{ Log } T.$$

Les valeurs numériques aux différentes températures sont :

T/K	273	298	373
E_{th}/V	1,251	1,230	1,168
E_{at}/V	1,483	1,483	1,479

Le schéma 1 regroupe les résultats en distinguant les domaines où l'électrolyse ne peut se produire ($V < E_{th}$), des domaines où elle se produit avec récupération de chaleur sur le milieu extérieur ($E_{th} \leq V < E_{at}$) ou avec dissipation de chaleur vers l'extérieur ($E_{at} < V$).

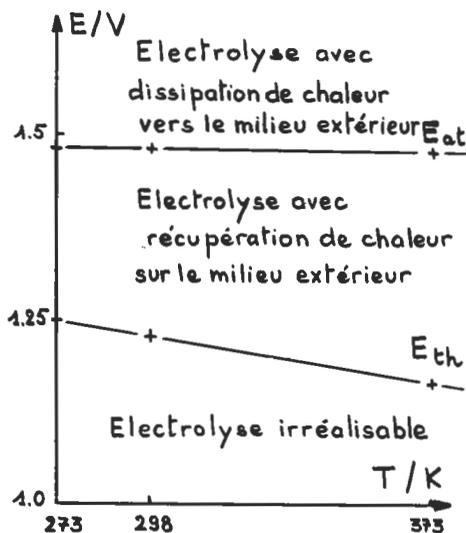


Schéma 1.

1.6. L'efficacité de la cellule est : $\eta = E_{at}/V$.

1.6.1. L'efficacité des deux cellules est donc, à 298 K où $E_{at} = 1,48$ V :

$$\eta_{1,75} = 1,48/1,75 = 0,846,$$

$$\eta_{2,05} = 1,48/2,05 = 0,722.$$

1.6.2. Dans ces conditions, le diagramme tracé précédemment montre que la cuve fournit de la chaleur au milieu extérieur. Pour garder la température constante, il convient donc pratiquement, de refroidir la cuve.

1.6.3. L'efficacité est 1 quand $V = E_{at}$, elle est > 1 si $V < E_{at}$; elle est maximale, à une température donnée, pour $V = E_{th}$, où un maximum d'énergie est prélevé au milieu extérieur. Quand la température augmente, E_{at} est pratiquement constant tandis que E_{th} décroît. L'efficacité $\eta = E_{at}/E_{th}$ peut donc être améliorée en travaillant à $T > 298$ K : on peut travailler à une différence de potentiel V plus faible, en récupérant de la chaleur sur le milieu extérieur.

1.7. Les demi-équations redox sont :

$$2 \text{H}^+ + 2 e \rightleftharpoons \text{H}_2 \quad E = E_{\text{H}^+/\text{H}_2}^0 + \frac{RT}{2F} \text{Log} \frac{(\text{H}^+)^2}{p_{\text{H}_2}}$$

$$\text{O}_2 + 4 \text{H}^+ + 4 e \rightleftharpoons 2 \text{H}_2\text{O} \quad E = E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}}^0 + \frac{RT}{4F} \text{Log} p_{\text{O}_2} \cdot (\text{H}^+)^4$$

soit :

$$E = 0,00 - 0,06 \text{ pH} \quad \text{si} \quad p_{\text{H}_2} = 1 \text{ bar},$$

$$E = 1,23 - 0,06 \text{ pH} \quad \text{si} \quad p_{\text{O}_2} = 1 \text{ bar}.$$

Le diagramme potentiel-pH de l'eau est tracé sur le schéma 2, avec l'indication du domaine de stabilité thermodynamique de l'eau.

Avec les valeurs numériques de l'énoncé :

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}; \quad N_A \text{ eV} = 96 \,320 \text{ J}$$

$$\Delta G^0_r(1) = 237 \,006 \text{ J mol}^{-1} = 1,481 \,10^{24} \text{ eV mol}^{-1} (2,46 \text{ eV molécule}^{-1}).$$

La valeur numérique de $\Delta G^0_r(1)$, en eV molécule⁻¹ est égale à deux fois la différence ($E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}}^0 - E_{\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2}^0$), ou à $2 E_{th}$; cela correspond à l'échange de deux électrons dans la réaction (1).

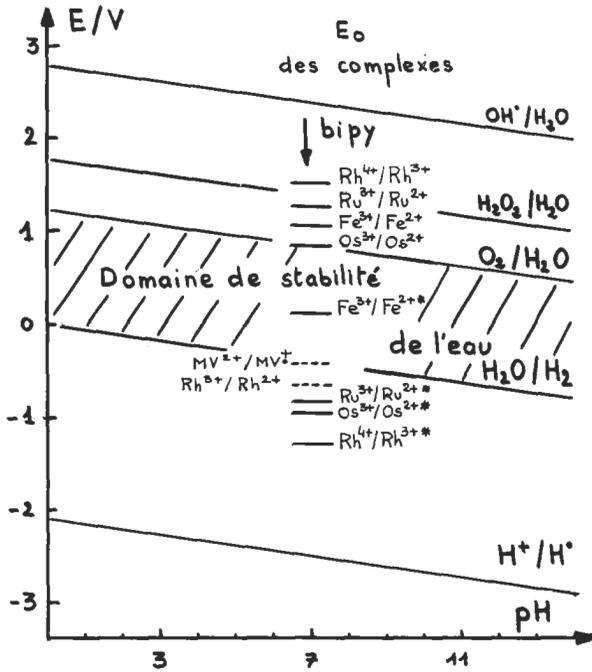
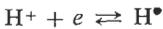
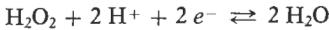


Schéma 2.

1.8. On peut écrire formellement en utilisant les valeurs des activités données dans l'énoncé :



$$E = E^0_{H^+/H^\bullet} - \frac{RT}{2F} \text{Log} \frac{(H^+)}{(H^\bullet)} = -2,11 - 0,06 \text{ pH}$$



$$E = E^0_{H_2O_2/H_2O} + \frac{RT}{2F} \text{Log} (H_2O_2)(H^+)^2 = 1,77 - 0,06 \text{ pH}$$



$$E = E^0_{OH^\bullet/H_2O} + \frac{RT}{F} \text{Log} (OH^\bullet)(H^+) = 2,79 - 0,06 \text{ pH.}$$

Les courbes relatives aux potentiels normaux apparents précédents sont reportées sur le schéma 2.

1.9. En utilisant le commentaire de la question 1.7., on écrit, à 298 K :

$$\Delta G^0(2) = nF [E^0_{\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}} - E^0_{\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2}] \quad \text{avec } n = 2$$

$$\Delta G^0(3) = nF [E^0_{\text{OH}^+/\text{H}_2\text{O}} - E^0_{\text{H}^+/\text{H}^+}] \quad \text{avec } n = 1$$

$$\Delta G^0(2) = 2,131 \cdot 10^{24} \text{ eV mol}^{-1} \quad (3,54 \text{ eV molécule}^{-1})$$

$$\Delta G^0(3) = 2,955 \cdot 10^{24} \text{ eV mol}^{-1} \quad (4,90 \text{ eV molécule}^{-1}).$$

Dans ces conditions, les tensions minimales à appliquer aux électrodes dans des conditions idéales de fonctionnement seraient :

$$E_{th}(2) = \frac{\Delta G^0(2)}{2F} = 1,77 \text{ V}$$

$$E_{th}(3) = \frac{\Delta G^0(3)}{F} = 4,90 \text{ V.}$$

On remarque que $E_{th}(1) < E_{th}(2) < E_{th}(3)$.

La dissociation à l'état de dihydrogène et de dioxygène est la moins coûteuse en énergie.

2. ELECTROLYSE

2.1. Si les réactions aux électrodes ne dépendent que de considérations thermodynamiques, les potentiels normaux d'oxydo-réduction permettent d'écrire le tableau ci-après :

Electrolyte	Réaction à la cathode	E^0/V
H_2SO_4	$\text{SO}_4^{2-} + 4 \text{H}^+ + 2 e^- \rightleftharpoons \text{SO}_2 + 2 \text{H}_2\text{O}$	0,17
KOH	$2 \text{H}_2\text{O} + 2 e^- \rightleftharpoons \text{H}_2(g) + 2 \text{OH}^-$	0,00
HCl	$2 \text{H}^+ + 2 e^- \rightleftharpoons \text{H}_2(g)$	0,00
HI	$2 \text{H}^+ + 2 e^- \rightleftharpoons \text{H}_2(g)$	0,00
SO_2, aq	$2 \text{H}^+ + 2 e^- \rightleftharpoons \text{H}_2(g)$	0,00

Electrolyte	Réaction à l'anode	E ⁰ /V
H ₂ SO ₄	H ₂ O ⇌ 1/2 O ₂ (g) + 2 H ⁺ + 2 e ⁻	1,23
KOH	2 OH ⁻ ⇌ 1/2 O ₂ (g) + H ₂ O + 2 e	1,23
HCl	H ₂ O ⇌ 1/2 O ₂ (g) + 2 H ⁺ + 2 e	1,23
HI	2 I ⁻ ⇌ I ₂ + 2 e	0,54
SO _{2, aq}	SO ₂ + 2 H ₂ O ⇌ SO ₄ ²⁻ + 4 H ⁺ + 2 e	0,17

On sait cependant que les conditions cinétiques amènent le dégagement d'hydrogène à la cathode (H₂SO₄), et de chlore à l'anode (HCl).

2.2. Les demi-équations redox et les relations de Nernst s'écrivent :

$$Ox_1 + ne \rightleftharpoons Red_1 \quad E_1 = E_1^0 + \frac{RT}{nF} \text{Log} \frac{a_{Ox_1}}{a_{Red_1}}$$

$$Ox_2 + ne \rightleftharpoons Red_2 \quad E_2 = E_2^0 + \frac{RT}{nF} \text{Log} \frac{a_{Ox_2}}{a_{Red_2}}$$

2.2.1. Les courbes intensité-potential sont tracées sur le schéma 3.

A l'équilibre, $j = 0$, on trouve que $E_1^0 > E_1$ et $E_2^0 < E_2$ car :

$$E_1 = E_1^0 + \frac{RT}{nF} \text{Log} \frac{a_{Ox_1}}{a_{Red_1}} < E_1^0 \quad \text{car} \quad a_{Ox_1} < a_{Red_1}$$

$$E_2 = E_2^0 + \frac{RT}{nF} \text{Log} \frac{a_{Ox_2}}{a_{Red_2}} > E_2^0 \quad \text{car} \quad a_{Ox_2} > a_{Red_2}$$

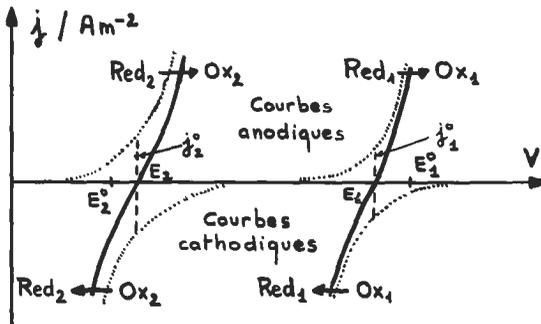


Schéma 3.

2.2.2. Dans le cas d'une cellule à électrolyse, où interviennent les couples de l'eau, le système peut être représenté par le schéma 4.

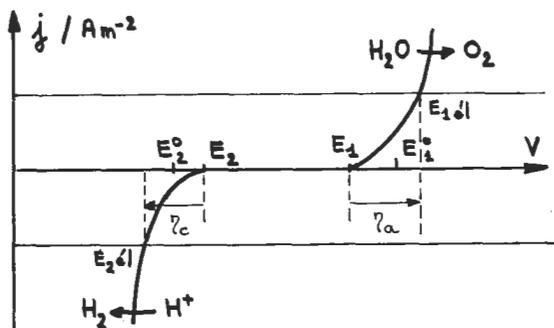


Schéma 4.

2.3. Lorsque les activités sont égales à 1, E_1 et E^0_1 , E_2 et E^0_2 sont confondus. La différence de potentiel appliquée aux bornes est égale à la somme des différences de potentiel anode/solution, chute ohmique dans la solution, solution/cathode *i. e.*

$$\begin{aligned} V &= E_{anode} + RI - E_{cathode} \\ &= E_1 + \eta_a + RI - (E_2 + \eta_c) \\ V &= E^0_1 - E^0_2 + (\eta_a - \eta_c) + RI. \end{aligned}$$

2.4. En fonction des seuls potentiels d'oxydoréduction, l'électrolyte à retenir serait la solution aqueuse de dioxyde de soufre car $E^0_{th} = 0,17$ V.

Lorsqu'il y a dégagement d'oxygène et d'hydrogène,

$$E_{th} = E_{O_2/H_2O} - E_{H^+/H_2}$$

cette grandeur ne dépend pas du pH.

2.5. Pour minimiser la chute ohmique, pour une intensité donnée, il convient de diminuer la résistance R. Or, $R = \rho \cdot \frac{l}{s}$ (ρ résistivité, l longueur de la cellule de section s).

Il est donc possible d'optimiser les facteurs géométriques, en diminuant l et en augmentant s , en utilisant des cellules de grande surface à électrodes rapprochées.

Il est également possible d'agir sur la nature de l'électrolyte, à une température donnée. Ainsi : $\varrho = \frac{1}{\chi}$, χ est la conductivité.

Si l'on introduit la conductivité équivalente ionique λ_i d'un ion i , de charge z_i et de molarité c_i :

$$\lambda_i = \frac{\chi_i}{z_i \cdot c_i}$$

Pour un électrolyte, en admettant l'additivité des conductivités,

$$\chi = \Sigma \chi_i = \Sigma z_i c_i \lambda_i$$

Pour les électrolytes étudiés, les conductivités molaires sont :

Electrolyte	H ₂ SO ₄	K OH	H Cl	HI	SO _{2 aq}
Conductivité molaire $\lambda_0 (\Omega^{-1} \text{ cm}^2 \text{ mol}^{-1})$	859,6	272,1	426,1	426,6	—

L'acide sulfurique est l'électrolyte qui conduit le mieux le courant.

Une élévation de température augmente la mobilité des ions en solution, la conductivité croît et la chute ohmique diminue.

2.6. L'électrolyse de l'acide sulfurique apparaît économiquement difficile car :

- la surtension de l'hydrogène sur le platine est faible mais le platine est coûteux,
- la surtension de l'hydrogène sur le fer est relativement faible, le fer bon marché mais les phénomènes de corrosion (attaque du fer par l'acide en cas d'arrêt de l'électrolyse) en empêchent l'utilisation,
- la surtension sur le plomb est trop importante pour permettre son utilisation comme cathode.

Cette électrolyse ne peut donc être industrielle.

2.7. Les matériaux à choisir sont :

- à la cathode : le fer (surtension plus faible, moindre coût),
- à l'anode : le choix du nickel permet un gain de 0,07 V en surtension, mais le nickel est cher.

Les expériences en l'absence de courant montrent que le nickel est passivé tandis que le fer est attaqué lors des interruptions de l'électrolyse : malgré son prix, le nickel doit donc être choisi comme anode.

L'attaque du fer produit très vraisemblablement des ions ferates Fe(VI)O_4^{2-} ; le potentiel obtenu est un potentiel mixte $\text{FeO}_4^{2-}/\text{Fe}$ et $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$.

2.8. Le gain en surtension est égal à :

$$\Delta E = \Delta \eta_a + \Delta \eta_c = 0,22 \text{ V.}$$

Par mole d'eau électrolysée, le gain d'énergie est alors :

$$\Delta(\Delta G) = nF \Delta E = 42\,380 \text{ J mol}^{-1}.$$

La quantité d'énergie nécessaire pour élever corrélativement de $\Delta T = 40$ degrés une mole d'eau est :

$$\Delta W \simeq c_p(\text{H}_2\text{O}) \times m_{\text{H}_2\text{O}} \times \Delta T = 2\,250 \text{ J mol}^{-1}.$$

L'énergie à fournir pour l'élévation de la température de l'eau est très inférieure au gain d'énergie réalisé électriquement : il est intéressant de travailler à plus haute température. Cependant, au-delà de 80°C , les phénomènes de corrosion aux électrodes deviennent importants tandis que la potasse est entraînée par évaporation avec les gaz formés. Cela limite l'utilisation de hautes températures. Des installations expérimentales travaillent pourtant à plus haute température et sous pression.

2.9. La loi de Faraday permet d'écrire qu'en l'absence de réactions secondaires, pour une durée $t = 1 \text{ h}$ (3 600 s), et par mètre carré d'électrodes, la production horaire est :

$$M_{th} = \frac{1}{F} \frac{\mathcal{Q}}{z} \cdot t \cdot \frac{I}{S} \times 10^{-3} \quad (\text{kg m}^{-2}).$$

Comme :

$$q_1 = \frac{M}{M_{th}}$$

$$M = q_1 \cdot M_{th}.$$

La consommation énergétique W par mètre carré d'électrode est :

$$W = \frac{V \cdot I \cdot t}{M \cdot S} \quad (\text{Wh kg}^{-1}).$$

D'où la relation entre W et q_1 :

$$W = \frac{V}{q_1} \cdot \frac{zF}{\mathcal{Q}t}.$$

L'énergie théorique W_{th} est obtenue de la même manière :

$$W_{th} = \frac{E_{th} \cdot I}{M_{th} \cdot S}$$

Et :

$$\eta_w = \frac{W_{th}}{W} = \frac{E_{th}}{V} \cdot \frac{M}{M_{th}} = \frac{E_{th}}{V} \cdot \eta_I.$$

Le rendement énergétique est égal au produit du rendement faradique η_I par le rapport des différences de potentiel appliquées.

Application numérique :

On recueille 73 g (= 36,5 moles) de dihydrogène par heure et par mètre carré d'électrode ; le rendement énergétique est $\eta_w = 0,67$.

3. PHOTOLYSE

3.1. La distribution spectrale est sommairement représentée sur le schéma 5.

La correspondance entre longueur d'onde et énergie des photons est :

$$E = h\nu = hc/\lambda$$

$$E/\text{eV molécule}^{-1} = 1,243 \cdot 10^{-6}/\lambda \text{ (nm)}.$$

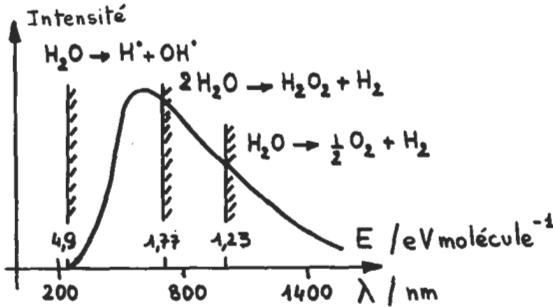


Schéma 5.

3.2.

3.2.1. Le nombre d'électrons formellement échangés est de $2e$ pour les réactions (1) et (2) et de $1e$ pour (3). La réaction (1) correspondant au dégagement d'une mole d'oxygène mettrait en jeu $4e$.

3.2.2. En utilisant les résultats obtenus à la question 1.8. :

$$\Delta G_e(1) = \Delta G_r^0(1)/2 = 1,23 \text{ eV molécule}^{-1},$$

$$\Delta G_e(2) = \Delta G_r^0(2)/2 = 1,77 \text{ eV molécule}^{-1},$$

$$\Delta G_e(3) = \Delta G_r^0(3) = 4,90 \text{ eV molécule}^{-1}.$$

Les valeurs des ΔG_e sont numériquement égales aux f.é.m. des piles obtenues à partir des couples d'oxydoréduction correspondants.

3.2.3. L'énergie minimale théorique du photon est égale à ΔG_e , soit :

$$1,23 \text{ eV molécule}^{-1}; \quad 9\,920 \text{ cm}^{-1}; \quad 1\,008 \text{ nm},$$

$$1,77 \text{ eV molécule}^{-1}; \quad 14\,275 \text{ cm}^{-1}; \quad 700 \text{ nm},$$

$$4,90 \text{ eV molécule}^{-1}; \quad 39\,518 \text{ cm}^{-1}; \quad 253 \text{ nm}.$$

Ces valeurs sont reportées sur le diagramme de distribution spectrale, (schéma 5).

C'est la réaction de dissociation de l'eau en dioxygène et en dihydrogène qui peut le mieux utiliser l'énergie solaire (4 électrons et 4 photons pour une molécule de dioxygène et 2 de dihydrogène).

La réaction (2) produisant du dihydrogène et de l'eau oxygénée est possible mais moins rentable (deux électrons et deux photons pour une molécule d'hydrogène). La réaction de dissociation radicalaire directe (un électron et un photon) n'est pas réalisable.

3.3. Le diagramme est le suivant :

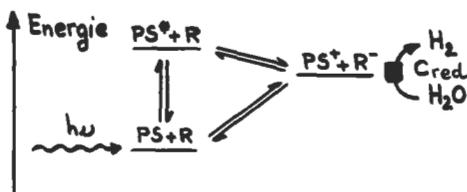


Schéma 6.

3.4. La réduction de l'eau par R^- s'écrit :



Plusieurs conditions thermodynamiques sont à remplir :

— l'énergie du photon doit être suffisante pour dissocier l'eau :

$$h\nu > 1,23 \text{ eV},$$

- le potentiel normal redox du couple E^0_{R/R^-} doit être inférieur à celui de H^+/H_2 :

$$E^0_{R/R^-} < E^0_{H^+/H_2} \quad (\text{à pH} = 7, \quad E^0_{R/R^-} < -0,42 \text{ V}),$$

- le potentiel normal redox du couple $E^0_{PS^+/PS^*}$ doit être inférieur à celui de R/R^- :

$$E^0_{PS^+/PS^*} < E^0_{R/R^-}$$

Les conditions cinétiques sont également très importantes. Il faut particulièrement que :

- l'état excité PS^* ait une durée de vie suffisante ; il ne doit réagir qu'avec R ,
- il y ait « séparation des charges » et que les espèces PS^+ et R^- , une fois formées, ne réagissent pas immédiatement entre elles pour redonner l'état fondamental,
- la réaction de R^- avec l'eau soit rapide (catalyseur C_{red}).

3.5. La réaction du donneur D avec PS^+ s'écrit :



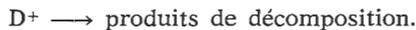
Il convient évidemment d'éviter la réduction directe de l'eau par D : il s'agirait alors d'une simple réaction chimique par un réducteur puissant (et cher...).

Cela implique donc que :

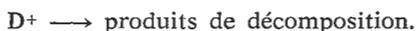
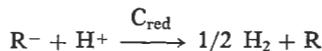
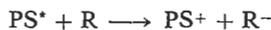
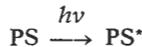
$$E^0_{PS^+/PS} > E^0_{D^+/D}$$

$$E^0_{D^+/D} > E^0_{H^+/H_2}$$

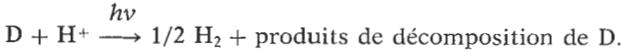
Il faut également dans ces conditions que D^+ ne puisse réagir avec le dihydrogène formé. L'une des possibilités est d'utiliser un produit bon marché se décomposant facilement :



3.6. Les réactions mises en jeu sont les suivantes :



L'équation-bilan s'écrit, pour une demi-mole de dihydrogène formée :



Le schéma complété est, pour un photon absorbé et un électron échangé :

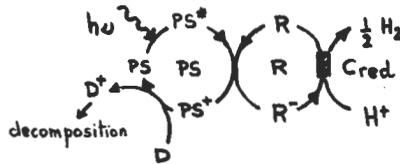


Schéma 7.

- Les espèces qui appartiennent à des cycles catalytiques sont :
- pour PS : PS, PS*, PS+,
 - pour R : R et R-.

Les produits qui disparaissent sont : H+ et D.

Les produits que l'on forme sont le dihydrogène et les produits de décomposition de D+.

3.7. Choix du photosensibilisateur.

3.7.1. La configuration électronique est $(t_{2g})^6$.

Les évolutions des énergies des O.M. et des transitions électroniques sont représentées sur le schéma 8, en fonction des indications de l'énoncé : la réalité physique est évidemment plus complexe.

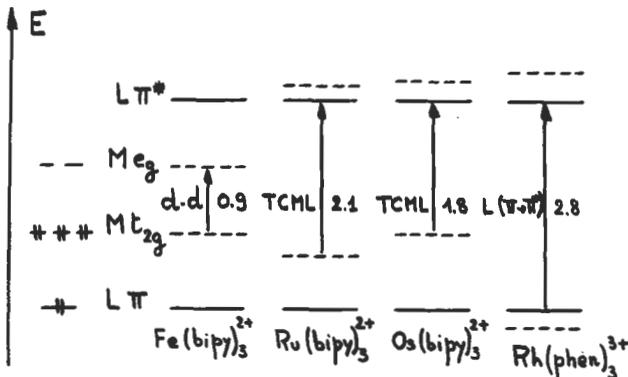
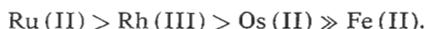


Schéma 8.

La condition cinétique mise en évidence dans le tableau V porte sur la durée de vie de l'espèce excitée PS^* . Nous avons vu qu'il fallait que cette durée de vie soit la plus importante possible à la question 3.4. Les complexes de Ru(II) et Rh(III) sont les mieux adaptés de ce point de vue :



3.7.2.1. La différence entre les potentiels normaux d'oxydo-réduction $E^0_{PS^+/PS} - E^0_{PS^+/PS^*}$, exprimée en volts (tableau VI), est numériquement égale à l'énergie d'excitation de PS à PS^* (E^0 du tableau V), exprimée en eV.

Le schéma 9, reliant les potentiels E^0 à l'énergie, montre que ceci traduit simplement la conservation de l'énergie.

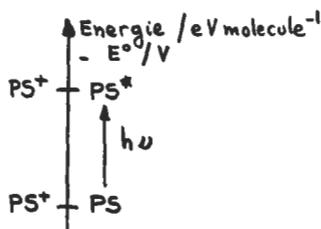


Schéma 9.

3.7.2.2. Les couples redox sont reportés sur le schéma 2. Le tableau ci-après indique les photosensibilisateurs permettant l'oxydoréduction de l'eau.

Complexes Phénomène	Fe (II)	Ru (II)	Os (II)	Rh (III)
Réduction H_2O	Non	Oui	Oui	Oui
Oxydation H_2O	pH ≥ 3	Oui	pH ≥ 7	Oui

Les deux photosensibilisateurs qui permettent la réduction et l'oxydation de l'eau à pH ≈ 7 sont les complexes de Ru(II) et de Rh(III) et, à pH > 7 seulement celui de Os(II).

3.8. Choix du relais R.

3.8.1. Le schéma réactionnel est le suivant :

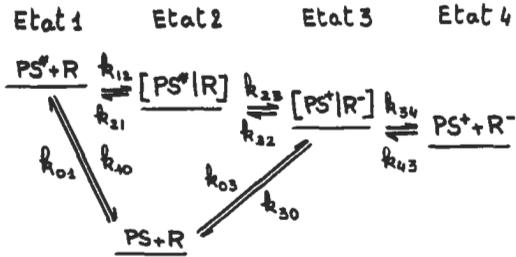


Schéma 10.

Il faut que les constantes de vitesse aboutissant aux produits $\text{PS}^+ + \text{R}^-$ soient grandes devant les constantes qui peuvent ramener le système à l'état fondamental, après l'absorption du photon.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 k_{12} &\gg k_{10} \\
 k_{34} &\gg k_{30}
 \end{aligned}$$

ce qui amène à $\Phi_{\text{cage}} \rightarrow 1$ quand k_{30} devient négligeable.

3.8.2.

3.8.2.1. Le diagramme comparatif des énergies est représenté sur le schéma 11.

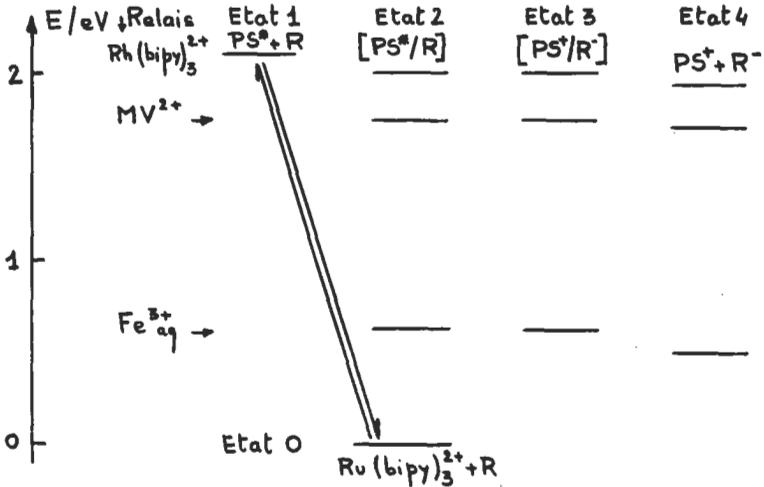


Schéma 11.

3.8.2.2. Pour calculer k_{34} , on a :

$$\Phi = \frac{k_{34}}{k_{30} + k_{34}}$$

$$k_{34} = k_{30} \cdot \frac{\Phi}{1 - \Phi}$$

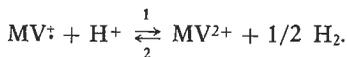
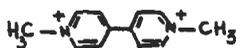
Les valeurs trouvées sont :

	Rh (bipy) ₃ ³⁺	MV ²⁺	Fe ³⁺ _{aq}
$k_{34} \times 10^9 \text{ (mol}^{-1} \text{ s}^{-1}\text{)}$	0,53	1,33	$\rightarrow \infty$

k_{34} est une fonction croissante de Φ ; k_{34} et Φ sont d'autant plus grands que ΔE_{30} est faible : plus la paire [PS⁺/R⁻] est haute en énergie, plus la vitesse de production de PS⁺ et de R⁻ est faible.

3.8.2.3. Deux relais R permettent la réduction de l'eau : Rh (bipy)₃³⁺ et MV²⁺. Cependant, le méthylviologène ne peut réagir qu'à pH $\leq 7,4$ et Rh (bipy)₃³⁺ à pH $\leq 11,3$, puisqu'au-delà, $E^0_{R/R^-} > E^0_{H^+/H_2}$. Le paramètre Φ_{cage} étant meilleur pour MV²⁺, c'est celui-ci que l'on peut retenir en fonction des critères cinétiques.

3.8.2.4. Pour le méthylviologène :



Le rôle du pH aux environs de pH 7 est très important :

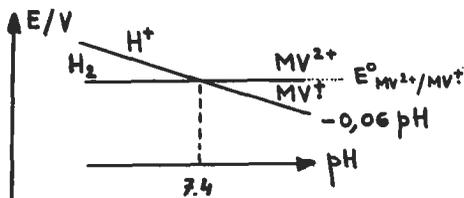


Schéma 12.

3.9.3. En conclusion, le système de photoréduction de l'eau auquel on peut aboutir est représenté sur le schéma 13 :

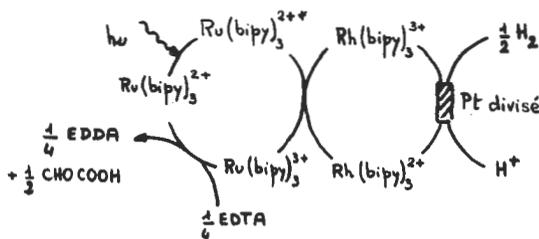
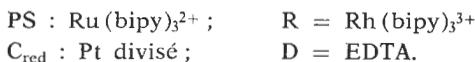


Schéma 13.

3.10.

3.10.1. La photooxydation de l'eau par le système proposé peut être représentée par le schéma 14, pour l'absorption d'un photon *hν* d'énergie supérieure à 2,1 eV, selon le tableau V.

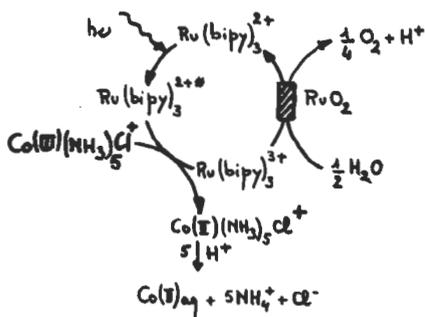
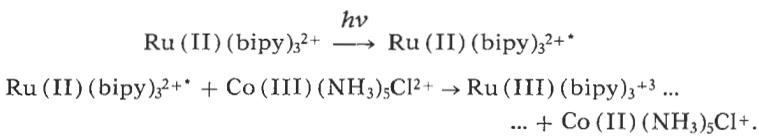


Schéma 14.

Le cycle catalytique comporte les étapes suivantes :



Cette réaction redox est permise puisque :

$$E^0_{\text{Co (III)/Co (II)}} = 0,52 \text{ V} > E^0_{\text{Ru (III)/Ru}^{2+}} = -0,84 \text{ V}.$$

Le complexe de cobalt (II) est éliminé sous forme d'aqua-complexe :

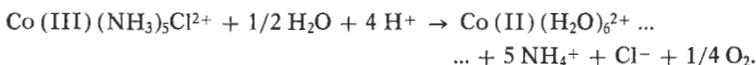
$\text{Co (II) (NH}_3)_5\text{Cl}^+ + 4 \text{H}^+ \rightarrow \text{Co (II) (H}_2\text{O)}_6^{2+} + 5 \text{NH}_4^+ + \text{Cl}^-$
 tandis que le complexe de Ru (III) réagit sur l'eau :



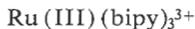
ce qui est possible puisque $E_{\text{Ru (III)/Ru (II)}}^0 = 1,26 \text{ V}$ et qu'à $\text{pH} = 7$, par exemple, $E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}} = 0,82 \text{ V}$.

L'oxyde de ruthénium finement divisé catalyse cette réaction.

3.10.2. Le bilan réactionnel est le suivant :



La substance sacrificielle est ici le complexe de cobalt (III) ; il n'y a pas de substance relais R car l'espèce oxydée :



peut directement oxyder l'eau sur l'oxyde de ruthénium.

3.11. En fonction de ce qui précède, on peut donc proposer deux systèmes de photolyse de l'eau.

1) Avec un seul compartiment :

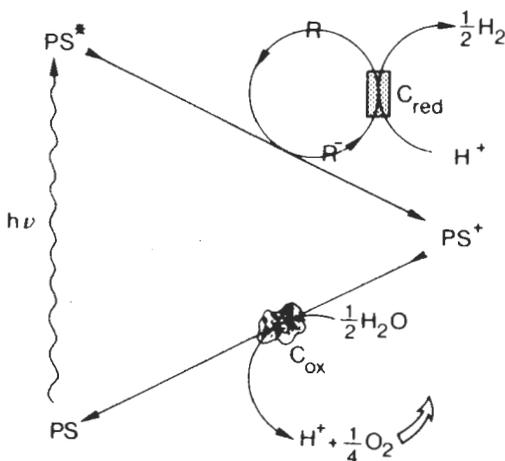


Schéma 15.

Ce système, qui n'a pas été réalisé, est extrêmement simple ; mais il mélange les gaz produits H_2 et O_2 .

2) Avec deux compartiments :

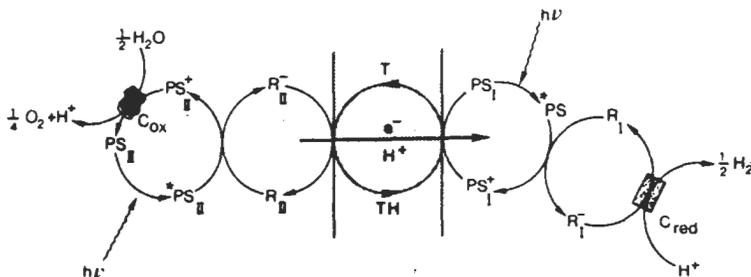


Schéma 16.

Ce système est plus complexe, il comporte un transporteur d'électron T dans une membrane, qui sert également au transfert de proton entre les deux systèmes photosensibles I et II, constitués chacun d'un photosensibilisateur PS et d'un relai R. L'oxygène et l'hydrogène produits le sont séparément. Le transporteur d'électron dans la membrane évite d'avoir recours à des composés sacrificiels. Alors que les systèmes de production d'oxygène et d'hydrogène séparés ont été expérimentés avec succès, les deux systèmes complets de photolyse demeurent à réaliser.

4. PHOTOÉLECTROLYSE

4.1.

4.1.1. Dans un modèle orbitalaire moléculaire, d'un semi-conducteur (*sc*), la bande de valence peut être considérée, comme l'ensemble des orbitales moléculaires doublement occupées, les plus hautes en énergie. La bande de conduction est constituée des orbitales moléculaires vacantes les plus basses en énergie. La bande interdite est le domaine d'énergie compris entre le bord de la bande de valence (W_v) et le bord de la bande de conduction W_c . Sa largeur est $\Delta W_{cv} = W_c - W_v$.

Le niveau de Fermi peut être défini comme le niveau d'énergie où la probabilité d'occupation par un électron est 1/2. Dans un semi-conducteur intrinsèque il est situé au milieu de la bande interdite et ne correspond pas à une orbitale moléculaire (1).

L'introduction d'impuretés par dopage conduit à l'apparition de nouveaux niveaux d'énergie dus aux impuretés : à proximité de la bande de conduction dans le cas d'un semi-conducteur *n* et à proximité de la bande de valence dans le cas d'un semi-conducteur *p*. L'importance du dopage diminue la différence

d'énergie entre le niveau d'énergie des impuretés et du bord de la bande correspondante du semi-conducteur.

Le niveau de Fermi est compris dans les deux cas entre les niveaux d'énergie des impuretés et le bord des bandes du semi-conducteur, et se rapproche de ce dernier avec l'importance du dopage.

Dans la suite de l'épreuve, on considère que l'énergie du niveau de Fermi est égale au potentiel électrochimique d'un électron dans la phase considérée :

$$W_F = \mu - e\Phi = \bar{\mu}$$

où μ est le potentiel chimique et Φ le potentiel du milieu par rapport à l'origine du potentiel.

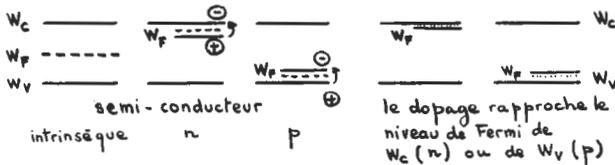


Schéma 17.

4.2.1. L'équilibre n'est atteint que lorsque :

$$(\bar{\mu})_{sc} = (\bar{\mu})_{solution}$$

4.2.2. On ne parvient à l'équilibre que par transfert d'électrons du semi-conducteur vers la solution. Il se crée un excès de charges négatives en solution et un excès de charges positives dans le solide qui se distribue dans une région dite charge d'espace.

Cette double couche crée la différence de potentiel $\Delta\Phi$ et un champ électrique qui provoque la courbure des bandes (vers le haut pour un semi-conducteur n et $W_F^0 > -eE_{Ox_1/Red_1}^0$, avec accumulation de porteurs de charges positives, les trous, à la surface du semi-conducteur ; vers le bas, pour un semi-conducteur p et $W_F^0 < -eE_{Ox_1/Red_1}^0$, avec accumulation de porteurs de charges négatives à la surface, les électrons). Ce champ électrique permet de séparer les charges.

4.2.3. L'égalité des potentiels électrochimiques s'écrit :

$$W_F = -eE_{Ox_1/Red_1} \simeq -eE_{Ox_1/Red_1}^0$$

si la création de la double couche n'a pas substantiellement modifié le rapport molaire $[Ox_1]/[Red_1]$.

L'énergie $e\Delta\Phi$ est égale à la variation du niveau de Fermi du semi-conducteur, isolé et au contact de la solution :

$$\begin{aligned} + e\Delta\Phi &= W_F^0 - W_F \\ &= W_F^0 + eE_{Ox_1/Red_1}^0. \end{aligned}$$

4.3.

4.3.1. Pour créer la paire $e^- t^+$, il faut que :

$$h\nu > \Delta W_{cv}.$$

4.3.2. La création de paires $e^- t^+$ est suivie de nombreux phénomènes dont on peut retenir :

- la recombinaison de ces paires, avec dégagement de chaleur ;
- la séparation des charges, en particulier dans la zone de charge d'espace : les trous vont vers la surface tandis que les électrons sont stabilisés en allant vers l'intérieur du semi-conducteur.

4.3.3. La charge d'espace diminue, ainsi que $\Delta\Phi$ et la courbure des bandes d'énergie (schéma 19). Le niveau de Fermi sous illumination, dans le semi-conducteur, augmente corrélativement. Plus l'irradiation est importante, plus le système s'approche des niveaux d'énergie initiaux (bande plate) : le système n'est plus à l'équilibre.

4.4.

4.4.1. Le système peut être représenté par le schéma 18 :

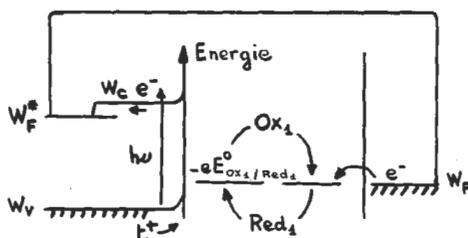
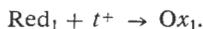


Schéma 18.

La réaction redox sur l'électrode éclairée est :



Pour que la réaction ait lieu, il faut que :

$$W_v < -eE_{Ox_1/Red_1}^0$$

c'est une réaction d'oxydation de Red_1 , provoquée par l'absorption de photons à l'électrode, d'où le terme de photoanode.

4.4.2. A la contre-électrode, intervient la réaction :

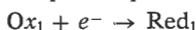


Par photon absorbé, les échanges sont :

à l'anode :



à la cathode :



au total :



L'électrolyte demeure inchangé, l'enthalpie libre de l'électrolyte reste constante : $\Delta G = 0$.

4.4.3. La puissance P fournie est simplement :

$$P = U_p \cdot I_p$$

$$eU_p = W_F^* - (-eE_{\text{Ox}_1/\text{Red}_1}^0)$$

$$P = (W_F^* + eE_{\text{Ox}_1/\text{Red}_1}^0) \cdot \frac{I_p}{e}$$

$$P \rightarrow \frac{\Delta W_{cv} \cdot I_p}{e}$$

Dans les conditions optimales en effet :

$$W_F^* + eE_{\text{Ox}_1/\text{Red}_1}^0 \rightarrow \Delta W_{cv}$$

car $W_F^* \rightarrow W_c$ (dopage et irradiation) et $W_v \rightarrow -eE_{\text{Red}_1/\text{Ox}_1}$.

4.4.4. Les réactions chimiques ont été indiquées sur le schéma 18. On peut représenter ainsi la situation à l'obscurité et sous irradiation (schéma 19) :

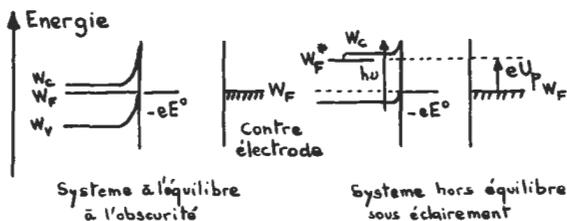
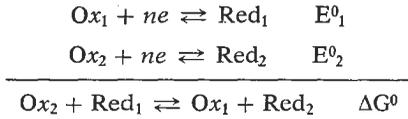


Schéma 19.

4.5. Les réactions s'écrivent :



$$\Delta G^0 = -nF E^0 = -nF (E^0_2 - E^0_1) = nF (E^0_1 - E^0_2) > 0$$

puisque :

$$E^0_2 < E^0_1.$$

Il faut fournir de l'énergie pour produire la réaction.

4.5.1. Le nouveau système proposé est décrit par le schéma 20.

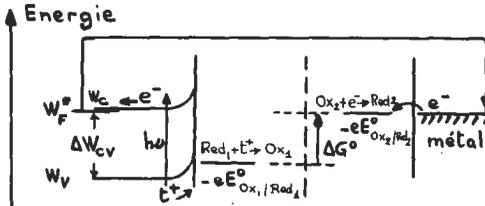


Schéma 20.

Pour que les réactions se produisent, il est nécessaire que, dans les conditions optimales de fonctionnement ($W^*_F \rightarrow W_c$) :

$$\begin{array}{l} hv \geq \Delta W_{cv} \\ \Delta W_{cv} > \Delta G^0. \end{array}$$

4.5.2. Pour qu'il y ait formation de Ox_1 , et de Red_2 , il faut en outre que :

$$\begin{array}{l} W_v < -eE^0_{\text{Ox}_1/\text{Red}_1} \\ W_c > -eE^0_{\text{Ox}_2/\text{Red}_2}. \end{array}$$

Les deux conditions doivent être réalisées pour que le courant passe.

4.6. Photoélectrolyse de l'eau.

4.6.1. Les largeurs de bande introduite sont reportées dans le schéma 21.

4.6.2. Les énergies W_v et W_c sont reportées sur le schéma 21, qui comporte également les énergies $-eE^0_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}}$ et

— eE_{H^+/H_2}^{0+} relatives aux couples redox de l'eau, avec et sans surtension aux électrodes.

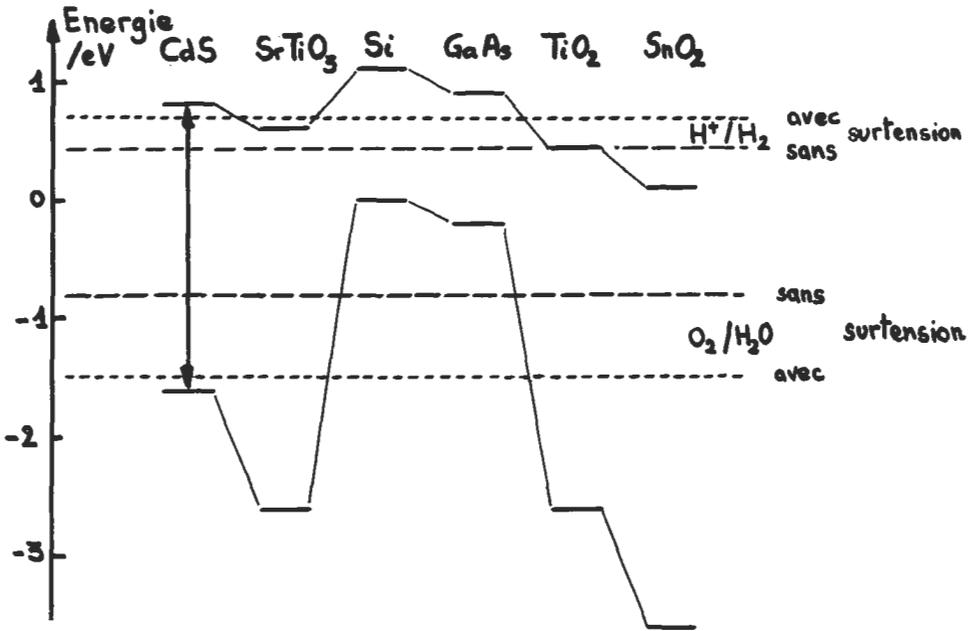


Schéma 21.

4.6.3. Les semi-conducteurs susceptibles de permettre la dissociation de l'eau sont indiqués dans le tableau suivant :

Condition à remplir	CdS	SrTiO ₃	Si	GaAs	TiO ₂	SnO ₂
$\Delta W_{cv} > \Delta G^0$	Oui	Oui	Non	Non	Oui	Oui
$W_v < -eE_{O_2/H_2O}^0$	Oui	Oui	Non	Non	Oui	Oui
$W_c > -eE_{H^+/H_2}^0$	Oui	Oui	Oui	Oui	≈	Non
3 conditions remplies	Oui	Oui	Non	Non	≈	Non
Avec surtension	Oui	Non	Non	Non	Non	Non

4.6.4. L'existence de surtensions limite encore le choix des semi-conducteurs possibles. En effet, SrTiO₃ et TiO₂ ont une bande de conduction trop basse pour permettre le dégagement d'hydrogène, et seul CdS remplit encore l'ensemble des conditions.

L'utilisation de catalyseurs tels que le platine ou le palladium à la cathode et d'oxydes (RuO_2) à l'anode doit permettre de minimiser ces surtensions.

4.6.5. La cellule peut être représentée par le schéma 22.

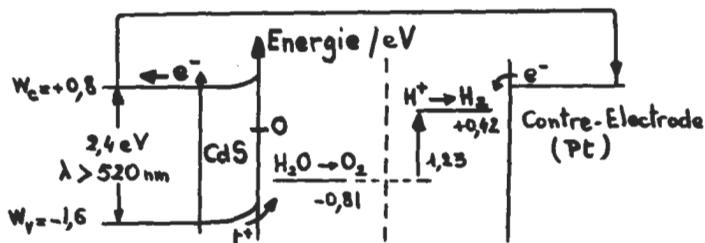


Schéma 22.

L'efficacité du système est limitée par :

- la largeur de la bande interdite (2,4 eV, soit $\lambda > 520$ nm),
- les phénomènes de corrosion anodique ; le sulfure de cadmium, est oxydé par les trous à l'état d'ions Cd(II) et de soufre S⁰.

Un tel système a fait l'objet d'une réalisation expérimentale mais ces problèmes de corrosion ne sont pas résolus.

4.7. Le dépôt de platine métallique sur des particules de $SrTiO_3$ et de TiO_2 , en présence d'un photosensibilisateur permet de combiner les propriétés des deux systèmes. Le schéma ci-après résume les processus : la présence du semi-conducteur évite la nécessité d'un donneur d'électron sacrificiel.

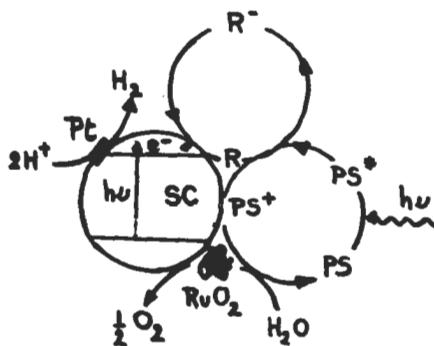


Schéma 23.

La réduction de H^+ sur le platine est provoquée à la fois par des électrons provenant du semi-conducteur et de R^- . L'oxyda-

tion de l'eau intervient sur RuO_2 grâce à l'action des trous du semi-conducteur et de la forme oxydée PS^+ .

- (1) D'autres définitions peuvent être proposées : Voir, par exemple T.-A. ALBRIGHT, J.-K. BURDETT, M.-H. WHANGBO, *Orbital interactions in Chemistry*, Wiley (1985).

ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE

Thermodynamique et électrolyse :

- R.-L. LE ROY, C.-T. BOWEN, D.-J. LE ROY, *J. Electrochem. Soc.*, 127, 1954, (1980).
- J. BESSON, J. GUITTON, *Manipulations d'électrochimie*, Masson (1972).
- A.-J. BARD, L.-R. FAULKNER, *Méthodes électrochimiques*, Wiley (1980).

Photolyse et photoélectrolyse :

- *Photochemical conversion and storage of solar energy*, J.-S. Connolly éditeur, Academic Press, (1981) ; notamment les contributions de J.-M. LEHN, M. GRATZEL, J.-R. BOLTON.
- J.-P. COLLIN, J.-M. LEHN, R. ZIESSEL, *Nouv. J. chim.*, 6, 405 (1982).
- J.-M. LEHN, J.-P. SAUVAGE, R. ZIESSEL, *Nouv. J. chim.*, 5, 291 (1981).
- P. KELLER, A. MORADPOUR, E. AMOUYAL, H.-B. KAGAN, *Nouv. J. Chim.* 4, 377 (1980).
- A. HELLER, *Acc. Chem. Res.*, 14, 154 (1981).
- H. GERISCHER, *Pure Appl. Chem.*, 52, 1649 (1980).
- N. SUTIN, C. CREUTZ, *Pure Appl. Chem.*, 52, 2717 (1980).
- *J. Chem. Ed.*, 60, 784-887 (1983), Numéro spécial sur la photochimie inorganique.
- J.-T. McDEVITT, *J. Chem. Ed.*, 61, 217 (1984).

M^{me} DANNION,

MM. BOTTIN, SOULIVET, VERDAGUER.

Agrégation

SESSION DE 1986

COMPOSITION DE SCIENCES PHYSIQUES

Option physique appliquée

Epreuve C

PROBLEME D'ELECTRICITE, D'ELECTRONIQUE, D'ELECTROTECHNIQUE ET D'AUTOMATIQUE

(Durée : 6 heures)

*Le problème proposé comporte trois parties.
La première et la deuxième sont indépendantes.
La troisième dépend, en partie, de la première.*

Première partie

On dispose d'une machine à induction triphasée à cage d'écurueil dont le fonctionnement est défini par les paramètres du schéma équivalent monophasé de la fig. 1. On pourra supposer que les enroulements du stator sont couplés en étoile.

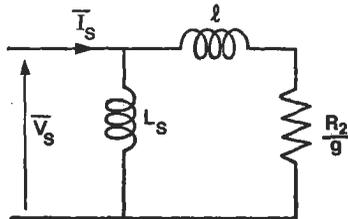


Fig. 1

On désigne par :

\bar{V}_s la tension simple, à la pulsation ω_s , appliquée aux enroulements de la machine,

\bar{I}_s le courant en ligne traversant ces mêmes enroulements,

L_s l'inductance cyclique d'une phase du stator,

l l'inductance cyclique de fuites totales de la machine,

- R_2 la résistance équivalente de la cage ramenée aux enroulements du stator,
 g glissement, tel que $\omega_r = g \omega_s$, en désignant par ω_r la pulsation des courants induits dans la cage.

On remarquera que l'on a négligé la résistance R_1 d'une phase du stator, les pertes dans le fer de la machine ainsi que ses pertes mécaniques. Les paramètres de la machine, supposés constants, ont la valeur suivante :

$$L_s = 21,3 \text{ mH}, \quad l = 0,9 \text{ mH} \quad \text{et} \quad R_2 = 0,038 \Omega.$$

Nombre de paires de pôles de la machine : $p = 2$.

1.1. La machine étant alimentée par une source triphasée de tension sinusoïdale à 50 Hz et 380 V entre phases, on demande de calculer :

- I_{s0} courant à vide ($g = 0$),
 I_{sn} courant nominal, sachant que le glissement nominal est : $g_n = 1,6\%$,
 $\cos \varphi_n$ facteur de puissance nominal,
 Γ_n couple nominal,
 P_{mn} puissance mécanique nominale,
 Φ_{sn} flux total nominal pour un enroulement stator. On supposera qu'au-delà de cette valeur, la machine est saturée,
 Γ_{max} valeur maximale du couple moteur,
 g_{max} valeur correspondante du glissement.

1.2. La machine étant alimentée par une source triphasée de courant sinusoïdal à 50 Hz et telle que $I_s = 100$ A, quel que soit le glissement, on demande de calculer Γ_{max} et g_{max} .

Donner l'expression de $\Phi_s(g)$. Que peut-on en conclure quant à l'état de saturation de la machine pour divers glissements ?

Comparer les courbes couple-vitesse théoriques obtenues aux questions 1.1. et 1.2. et critiquer.

1.3. L'alimentation de la machine est maintenant assurée par une source de tension sinusoïdale de fréquence et tension variables,

$$\text{telles que } \frac{V_s}{\omega_s} = \frac{220 \text{ V}}{2\pi \times 50 \text{ rd/s}} = K, \text{ K étant une constante.}$$

On désigne par Ω_r la vitesse de rotation de la machine.

Exprimer le couple Γ et le courant \bar{I}_s en fonction de ω_r , V_s et des paramètres de la machine.

1.3.1. Dans les quatre quadrants du plan $\Gamma - \Omega_r$, donner pour 8 valeurs différentes de ω_s l'allure (aucun calcul numérique n'est demandé) des courbes $\Gamma(\Omega_r)$, y compris pour des valeurs négatives de ω_s .

Quelle signification attachez-vous aux valeurs négatives de ω_s ?

On précise que pour des raisons évidentes d'isolement, au-delà de $\omega_s = 2\pi \times 50$ (ou $-2\pi \times 50$) la valeur de la tension V_s reste égale à 220 V quelle que soit ω_s .

1.3.2. Trouver l'ensemble ou lieu des maximums et minimums de Γ pour les zones en deçà et au-delà de 50 Hz. On le caractérisera par une ou plusieurs courbes de forme bien précise.

1.3.3. On fait maintenant tendre V_s et ω_s vers une valeur nulle tout en conservant $\frac{V_s}{\omega_s} = K$. Que devient le couple pour cette valeur nulle ?

Ce résultat appelle-t-il de votre part un commentaire ?

Deuxième partie

On se propose d'étudier un commutateur de courant triphasé, dit autoséquentiel ou à diodes d'isolement représenté fig. 2.

Il est composé de 6 thyristors (T_1 à T_6), de 6 diodes (D_1 à D_6) et de 6 condensateurs de capacité identique et égale à C et désignés ici de C_1 à C_6 pour les distinguer dans l'exposé.

Il est alimenté par une tension continue E, qui est la valeur moyenne de la tension de sortie d'un pont redresseur non représenté ici, à travers une inductance de lissage de valeur L suffisamment grande pour que l'on puisse considérer que le courant I_0 qui la traverse a une ondulation négligeable. La résistance de cette bobine est négligeable.

Ce commutateur alimente une machine à induction, représentée ici pour chaque phase par une inductance de commutation l très voisine de l'inductance cyclique de fuites totales de la machine (on prendra donc $l = 0,9$ mH), en série avec une force électromotrice sinusoïdale (e_R, e_S, e_T) de valeur efficace V_s et de pulsation ω_s .

Les angles évoqués ci-après se rapportent à cette pulsation et sont donc de la forme $\omega_s t$.

En négligeant la durée des commutations, le courant i_R est composé sur une période (360°) d'un créneau de hauteur I_0 et de 120° de largeur, suivi d'une valeur nulle de 60° , d'un créneau de hauteur $-I_0$ de 120° et enfin d'une nouvelle valeur nulle de 60° .

Les courants i_S et i_T sont de forme identique, mais déphasés en arrière, respectivement de 120° et 240° (voir fig. 3).

Le déphasage entre le terme fondamental du courant et la tension correspondante dépend de l'état de charge de la machine et de ω_s et n'est autre que le déphasage entre courant et tension dans une machine d'induction, soit φ . La fréquence à laquelle sont commandés

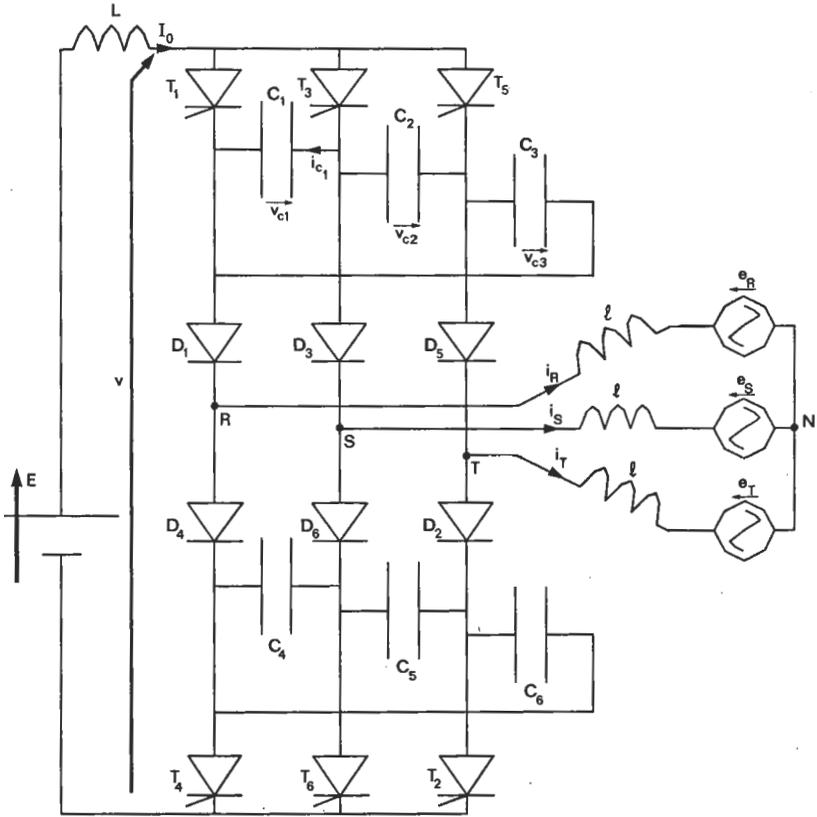


Fig. 2

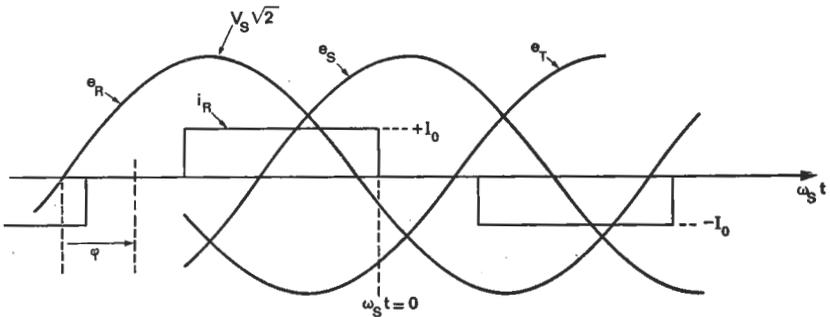


Fig. 3

les divers thyristors détermine la fréquence des courants i_R , i_S et i_T et donc celle des tensions qui apparaissent en conséquence e_R , e_S et e_T .

Le commutateur fonctionnant en régime permanent, on étudie la commutation de la phase R vers la phase S, c'est-à-dire le passage de la conduction de T_1-D_1 à la conduction de T_3-D_3 (fig. 2).

Pour cette étude, nous ferons les hypothèses suivantes :

- tous les éléments sont parfaits (chute de tension nulle aux bornes d'une diode en conduction, condensateurs dépourvus de résistance de fuite, etc.);
- la commutation dure un temps suffisamment court pour que l'on puisse considérer que e_R , e_S et e_T sont constantes pendant cette commutation.

A l'instant initial (défini par $t = 0$ sur la fig. 3), l'état du commutateur est le suivant :

- * le courant I_0 traverse $T_1-D_1-l-e_R-e_T-l-D_2-T_2$.

On a donc : $i_R = I_0$ et $i_T = -I_0$.

On supposera que, pendant toute la durée de la commutation $i_T = -I_0$ (C_4 , C_5 et C_6 n'interviennent donc pas dans cette commutation).

- * $v_{C_1} = -V_0$, $v_{C_2} = 0$ et $v_{C_3} = V_0$.

A cet instant ($t = 0$) une impulsion est envoyée sur la gachette de T_3 qui conduit instantanément, ce qui provoque l'extinction de T_1 supposée également instantanée. La commutation se déroule en deux étapes.

Première étape : I_0 traverse T_3 puis se partage entre C_1 et C_2 en série avec C_3 , puis D_1 . On désignera par t_1 l'instant où T_1 cesse d'être soumis à une tension inverse et par t_2 la fin de cette étape.

Deuxième étape : Elle commence lorsque la diode D_3 commence à conduire et se termine à l'instant t_3 lorsque la diode D_1 cesse de conduire, ce qui termine la commutation.

Fonctionnant en régime permanent, les conditions finales sont identiques aux conditions initiales à une permutation circulaire près.

2.1. Procéder à la mise en équation pour la première étape. Représenter en fonction du temps :

- v_{C_1} , v_{C_2} et v_{C_3} ,
- v_{T_1} tension aux bornes de T_1 ;
- v_{D_3} tension aux bornes de D_3 ,
- i_{C_1} courant traversant C_1 .

Quel est, à l'instant $t = 0$, le signe de la tension aux bornes de T_3 ?

2.2. Procéder à la mise en équation pour la deuxième étape et représenter les mêmes grandeurs que précédemment.

2.3. Calculer t_1 en fonction des diverses grandeurs qui interviennent (V_0 , I_0 , l , C , etc.).

2.4. Calculer t_2 .

2.5. Calculer $t_3 - t_2$.

2.6. Représenter $v_{C_1}(t)$ pendant une période de fonctionnement de l'onduleur, en négligeant la durée des commutations. En déduire la relation existant entre $v_{C_3}(t_3)$ et V_0 lors d'un fonctionnement en régime permanent, et exprimer V_0 en fonction des éléments du montage (V_s , I_0 , l , C , etc.).

2.7. Représenter entre $t = 0$ et $t = t_3$: $v_{RN}(t)$, $v_{SN}(t)$, $u_{RS}(t)$ et $u_{ST}(t)$.

La fig. 4 représente la tension entre phases d'une machine à induction alimentée par le commutateur étudié. Commenter qualitativement et quantitativement cette figure.

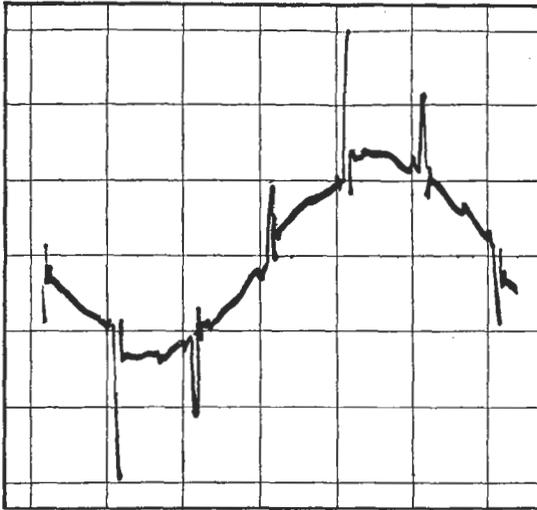


Fig. 4

2.8. Il faut pouvoir assurer les commutations lors du démarrage, c'est-à-dire à basse fréquence et donc pour V_s négligeable (voir 1.3.).

Montrer que, dans ces conditions, t_1 ne dépend que de l et C .

Les thyristors utilisés sont caractérisés par $t_q = 125 \mu s$ (t_q = durée minimale d'application de la tension inverse).

Calculer la valeur minimale de C pour que $t_1 = 2 t_q$.

On conservera cette valeur de C dans la suite du problème.

2.9. Le moteur fonctionne au voisinage de son régime nominal, on a alors :

$$I_0 = 130 \text{ A}, \quad V_s = 220 \text{ V}, \quad f = 50 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad \cos \varphi = 0,88.$$

On demande de calculer : V_0 , t_1 , t_2 , $t_3 - t_2$ et la surtension maximale entre phases du moteur.

2.10. C étant fixé, on souhaite connaître la fréquence maximale f_M à laquelle pourra fonctionner le commutateur. Cette limite est obtenue lorsque le moteur est à vide et que la période de fonctionnement

$$T_m = \frac{1}{f_M} = 3 \cdot t_3. \quad \text{Expliquer cette affirmation.}$$

f_M étant supérieure à 50 Hz, $V_s = 220 \text{ V}$ (voir 1.3.).

La machine étant à vide, on peut donc écrire :

$$I_{s0}(f_M) = \frac{V_s}{2\pi L_s f_M} \quad (L_s = 21,3 \text{ mH}).$$

Dans ces conditions, calculer f_M , sachant que $I_0 = 1,28 I_{s0}$.

2.11. Montrer que la question 2.10 a été résolue, en contradiction avec une (ou plusieurs) hypothèse faite dans cette deuxième partie.

Laquelle ? Quelle crédibilité peut-on accorder à la valeur de f_M trouvée ?

Troisième partie

On se propose maintenant d'associer la machine à induction triphasée de la première partie au commutateur de courant de la seconde afin de réaliser une machine à vitesse variable et d'étudier les caractéristiques de l'ensemble en régime permanent.

La source d'énergie électrique étant un réseau 380 V entre phases et 50 Hz, le schéma de principe est indiqué fig. 5.

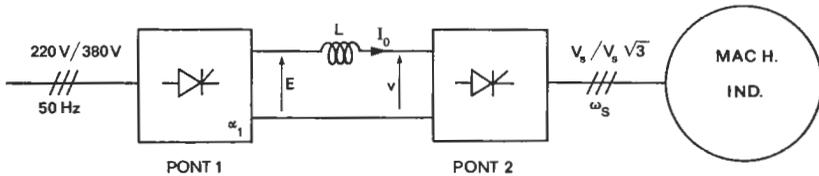


Fig. 5

Le pont 1 est un pont complet à 6 thyristors dont les commandes de gâchette (retard α_1) déterminent la tension de sortie $E(t)$ de valeur moyenne E . On négligera l'ondulation du courant I_0 ainsi que la résistance de la bobine d'inductance L .

Le pont 2 est le commutateur de la deuxième partie et on fera l'hypothèse que la durée des commutations est négligeable devant la

période de fonctionnement. Il alimente la machine à induction. Les tensions aux bornes de la machine sont supposées sinusoïdales et la valeur efficace des tensions simples est V_s .

Les courants dans la machine ont donc la forme indiquée fig. 3. On supposera que les harmoniques de ces courants ont un effet négligeable sur les caractéristiques de la machine, et on désignera par I_s la valeur efficace du terme fondamental.

Les caractéristiques de la machine sont donc fixées par V_s , I_s et ω_s et elle est représentée par le schéma équivalent de la fig. 1. Tous les paramètres de la machine sont ceux de la fig. 1, dont les valeurs sont données dans la première partie.

3.1. Etablir la relation qui existe entre I_0 et I_s ainsi qu'entre E , V [valeur moyenne de $v(t)$] et V_s .

3.2. Pour un fonctionnement déterminé, c'est-à-dire avec \bar{V}_s , \bar{I}_s , ω_s et φ connus.

3.2.1. Quelle est la forme de la tension instantanée $v(t)$ à l'entrée du commutateur ? La représenter.

3.2.2. En faisant l'hypothèse que I_0 n'est pas ondulé, que la vitesse de rotation Ω_r est constante (forte inertie de la machine) et que la machine et le commutateur ont un rendement égal à 1, montrer que le couple Γ ne peut être constant.

Représenter sa forme en fonction du temps.

3.3. Le moteur fonctionne au voisinage de son point de fonctionnement nominal, on a $V_s = 220$ V, $I_0 = 130$ A, $f = 50$ Hz et $\cos \varphi = 0,88$.

On demande de :

3.3.1. Dimensionner les thyristors du pont 2, c'est-à-dire :

Calculer les tensions directes et inverses maximales qu'ils doivent supporter et les valeurs moyenne et efficace des courants qui les traversent. On tiendra compte de la surtension calculée à la question 2.9.

3.3.2. Dimensionner les thyristors du pont 1.

3.3.3. Calculer V , E et α_1 .

3.3.4. Donner la forme du courant en ligne sur le réseau d'alimentation à 50 Hz.

3.4. Montrer que le montage est réversible, c'est-à-dire que si la machine à induction fonctionne en génératrice, l'énergie qu'elle produit peut être restituée au réseau d'alimentation à 50 Hz.

Sur quelle grandeur doit-on agir pour qu'il en soit ainsi ?

Quel est alors le signe de V et de E ?

3.5. On se propose d'établir les relations existant entre V_s , I_s , ω_s , ω_r et le couple Γ dans les cas suivants :

3.5.1. On impose V_s et ω_r , en déduire I_s et Γ en fonction de ω_s .

3.5.2. On impose I_s et ω_r , en déduire V_s et Γ en fonction de ω_s .

3.6. Dans le cas où la machine fonctionne à $\frac{V_s}{\omega_s} = \text{constante} = K$;

Montrer que le courant I_0 ne dépend que de ω_r et des constantes de la machine.

Tracer $I_0(\omega_r)$ sachant que I_0 est limité à 130 A dès que ce courant est atteint.

(On prendra $K = \frac{220 \text{ V}}{2\pi \times 50 \text{ rd/s}}$).

On considérera également les valeurs négatives de ω_r . Quelle signification attribuer à $\omega_r < 0$?

3.7. On réalise le montage de la fig. 6.

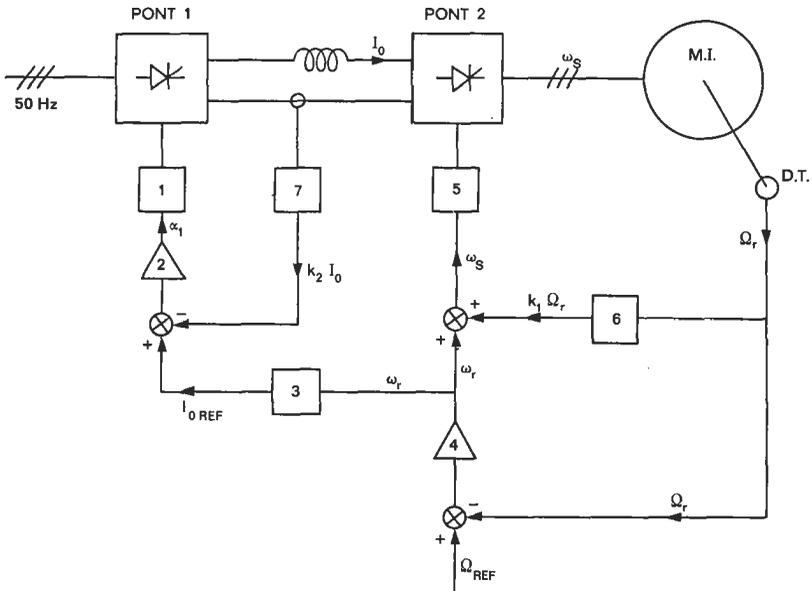


Fig. 6

Les différents éléments représentés sur la figure sont les suivants :

1. Commande des thyristors du pont 1 ;
2. Régulateur de courant ;
3. Loi $I_{0 \text{ REF}} = f(\omega_r)$ définie question 3.6 ;
4. Régulateur de vitesse ;

5. Commande des thyristors du pont 2 ;
 6. Adaptation de la tension délivrée par DT ;
 7. Capteur de courant ;
- DT : capteur de vitesse (dynamo-tachymétrique par exemple) ;
 $I_{0\text{ REF}}$: référence de courant ;
 Ω_{REF} : référence de vitesse ;
 Ω_{REF} est généralement fournie par une boucle plus externe, par exemple si la machine entraîne une pompe et que l'on désire réguler le débit de la pompe.

On demande d'expliciter le fonctionnement en régime permanent de ce montage et notamment de préciser son mode de fonctionnement au sens de la question 3.5.

Dans ce type de montage, on dit que la machine est autopilotée.

SOLUTION

Première partie

1.1. A 50 Hz, $L_s \omega_s = 6,69 \Omega$. La valeur efficace I_{s0} de l'intensité du courant qui traverse, à vide, un enroulement statorique, est donc 32,9 A.

Pour $g = g_n = 1,6 \%$, le modèle équivalent monophasé se compose d'une réactance pure de $6,69 \Omega$ en parallèle avec :

$$\frac{R_2}{g} + j l \omega_s = 2,38 + 0,283 j.$$

L'impédance équivalente, \underline{Z} , a pour expression :

$$\underline{Z} = 1,96 + 0,938 j, \text{ soit } Z = 2,17 \Omega \text{ et } \arg(\underline{Z}) = 25,6^\circ.$$

On en déduit : $I_{sn} = 101 \text{ A}$ et $\cos \varphi_n = 0,90$.

La puissance absorbée par la machine, en fonctionnement nominal, vaut : $P_{an} = 3 \frac{R_2}{g_n} I_{sn}^2$, soit 72,7 kW. D'après les hypothèses, cette puissance, transmise au rotor sous forme électromagnétique, correspond à un couple nominal de moment :

$$\Gamma_n = P_{an} \times \frac{p}{\omega_s} = 463 \text{ N. m.}$$

$$P_{mn} = P_{an}(1 - g) = 71,5 \text{ kW.}$$

$$\Phi_{sn} = \frac{V_s}{\omega_s} = 0,70 \text{ Wb.}$$

Reprenons l'équation permettant de donner l'expression de Γ :

$$\Gamma \frac{\omega_s}{p} = \frac{3 R_2}{g} \cdot \frac{V_s^2}{(R_2/g)^2 + l^2 \omega_s^2},$$

soit :

$$\Gamma = \frac{3 p}{l} \cdot \left(\frac{V_1}{\omega_s} \right)^2 \cdot \frac{1}{(R_2/l \omega_s g) + (l \omega_s g/R_2)}.$$

$\Gamma = \Gamma_{max}$ lorsque le dernier terme du produit de facteurs vaut $\frac{1}{2}$.

$$\text{On a donc : } \Gamma_{max} = \frac{3p}{2l} \left(\frac{V_s}{\omega_s} \right)^2 = 1,64 \text{ kN.m.}$$

$$\text{Cette valeur correspond à } g = g_{max} = \frac{R_2}{l\omega_s} = 13,5\%.$$

1.2. Selon le modèle de la machine, représenté sur la fig. 1, le courant total d'intensité efficace I_s , se répartit entre une inductance pure, de valeur constante $L_s = 21,3$ mH (tant que l'inégalité $I_0 \leq I_{sn}$ est vérifiée) et la branche d'impédance $(\frac{R_2}{g} + j l \omega_s)$,

cette dernière variant avec la fréquence de rotation. En fait, dans une machine réelle, la totalité du courant d'une ligne traverse l'enroulement statorique correspondant, mais, selon le glissement, les courants rotoriques s'opposent plus ou moins à l'action magnétisante des courants primaires.

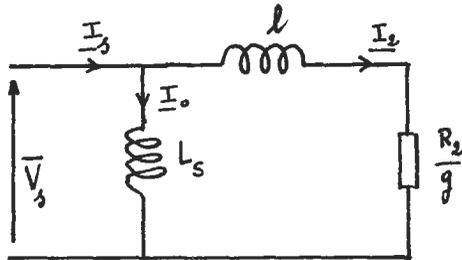


Fig. 1

Si nous ne tenons pas compte de la saturation, la fig. 1 montre que l'on a :

$$I_2 = \frac{j L_s \omega_s}{j (L_s + l) \omega_s + R_2/g} I_s.$$

Par conséquent :

$$\Gamma = 3p \frac{L_s^2}{L_s + l} \cdot I_s^2 \cdot \frac{1}{g(L_s + l)\omega_s/R_2 + R_2/g(L_s + l)\omega_s}.$$

Cette équation entraîne les égalités :

$$\Gamma_{max} = \frac{3 p L_s^2}{2(L_s + l)} \cdot I_s^2 = 613 \text{ Nm},$$

et :

$$g_{max} = \frac{R_2}{(L_s + l) \omega_s} = 0,55 \text{ \%}.$$

De même,

$$I_0 = \frac{j l \omega + R_2/g}{j(L_s + l) \omega_s + R_2/g} I_s.$$

$\Phi_s(g) = L_s I_0$; le flux nominal, marquant la limite de saturation de la machine est obtenu pour $I_0 = I_{s0} = 32,9 \text{ A}$.

C'est donc lorsque l'inégalité : $\left| \frac{j l \omega_s + R_2/g}{j(L_s + l) \omega_s + R_2/g} \right| > 0,329$

est satisfaite que la machine est saturée.

Cette inégalité, après calculs, se réduit à : $g < 1,57 \text{ \%}$.

Pour des vitesses de rotation comprises entre 1476 tr/min et 1500 tr/min, la machine est donc saturée, or justement le couple

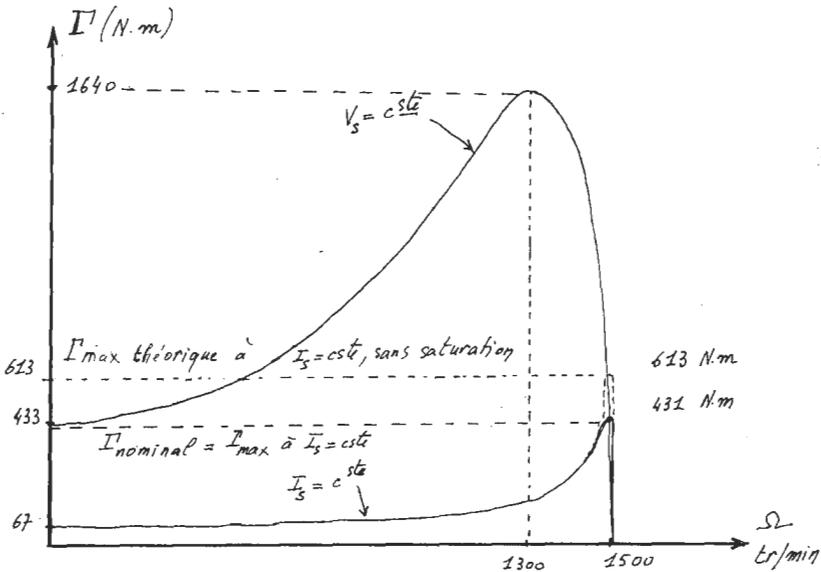


Fig. 2

maximal serait obtenu, en l'absence de saturation, pour $n = 1492$ tr/min, correspondant à $g_{max} = 0,55\%$. Les valeurs trouvées précédemment doivent donc être remises en cause. A partir du moment où la machine est saturée, le flux n'augmente pratiquement plus (il s'agit de la valeur efficace du flux fondamental), les courants induits dans la cage sont également limités, et le couple n'augmente donc pas non plus.

La fig. 2 permet de comparer les courbes couple-vitesse à tension d'alimentation constante (pas de saturation) et à courant d'alimentation constant (saturation aux vitesses proches du synchronisme, parce que les courants rotoriques, trop faibles, ne peuvent compenser l'effet magnétisant de I_s).

1.3. Dans l'expression de Γ que nous avons donnée à la ques-

tion 1.1., nous pouvons remplacer $\frac{V_s}{\omega_s}$ par K et $g \omega_s$ par ω_r .

On trouve ainsi :

$$\Gamma = \frac{3p}{l} K^2 \frac{1}{R_2/l \omega_r + l \omega_r/R_2}.$$

Par ailleurs :

$$I_s = K \frac{R_2 + j(L_s + l) \omega_r}{j(R_2 + j l_s \omega_r) L_s}.$$

1.3.1. Γ et I_s ne dépendent que de la variable ω_r , or $\omega_r = \omega_s - \Omega_r$; les courbes $\Gamma(\Omega_r)$ se déduisent donc les unes des autres par des translations parallèles à l'axe des fréquences de rotation (fig. 3).

La fig. 3 donne l'allure de plusieurs de ces courbes.

Les caractéristiques correspondant à $\omega_s > 0$ coupent l'axe Ω_r en des points d'abscisses positives. Les caractéristiques correspondant à $\omega_s < 0$, qui coupent l'axe Ω_r en des points d'abscisses négatives doivent être interprétées comme relatives à une modification de l'ordre des phases, ce qui correspond bien à un changement du sens de rotation de la machine pour un même type de fonctionnement (en particulier, en moteur à vide, $\Omega_r \simeq -\omega_s$).

En effet si, dans les expressions : $u_1 = \cos \omega_s t$,

$$u_2 = \cos \left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$u_3 = \cos \left(\omega_s t + \frac{2\pi}{3} \right),$$

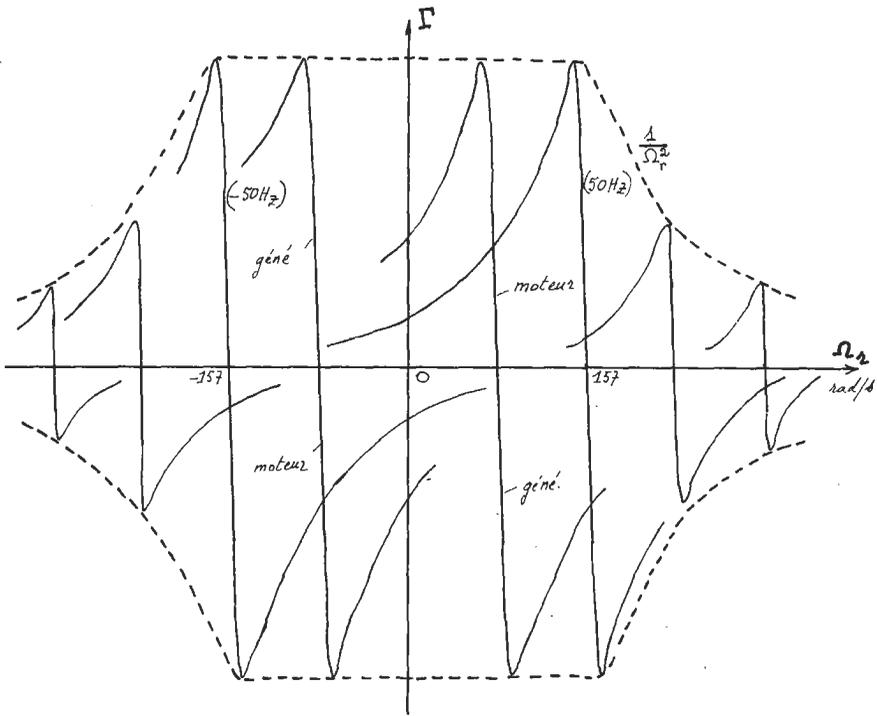


Fig. 3

on change ω_s en $\omega'_s = -\omega_s$, on trouve :

$$u'_1 = \cos \omega_s t = u_1,$$

$$u'_2 = \cos \left(\omega_s t + \frac{2\pi}{3} \right) = u_3,$$

$$u'_3 = \cos \left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3} \right) = u_2,$$

ce qui a bien pour effet de transformer le système triphasé direct de tensions, en un système triphasé inverse.

1.3.2. Pour $\omega_s > 314 \text{ rad.s}^{-1}$, puisque $V_s = 220 \text{ V} = \text{cste}$,

$$\text{on a } \Gamma_{\max} = \frac{\alpha}{\omega_s^2}.$$

Puisque le couple est maximal pour une valeur de Ω_r très proche de $\frac{\omega_s}{p}$, l'ensemble des maximums du moment Γ pour

$\omega_s > 314$ est sensiblement une courbe d'équation $\Gamma = \frac{\beta}{\Omega_r^2}$. Pour $0 < \omega_s < 314$, $\Gamma_{max} = c^{ste}$.

1.3.3. En fait, le modèle proposé conduit à $\Gamma_{max} = c^{ste}$ quand ω_s est très faible, parce que ce modèle néglige la résistance R_1 d'une phase du stator. Cette résistance n'est plus négligeable lorsque la fréquence des courants est très faible. En réalité $\Gamma_{max} \rightarrow 0$ lorsque $\omega_s \rightarrow 0$.

Deuxième partie

2.1.

Première étape (fig. 4) : La fig. 4 particularise les éléments du montage concernés par cette étape. Le fait que les charges initiales de C_2 et C_3 soient différentes n'empêche pas ce groupement de condensateurs de se comporter comme un condensateur

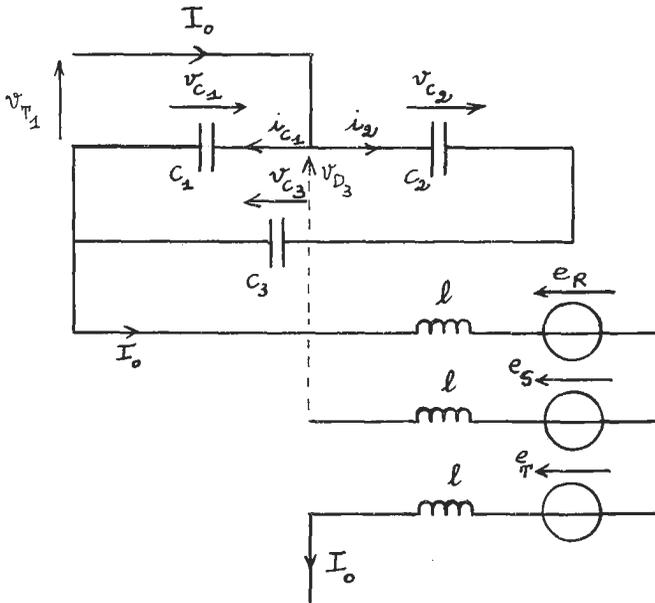


Fig. 4

unique de capacité $\frac{C}{2}$. On a donc : $i_{C_1} = \frac{2}{3} I_0$ et $i_2 = \frac{I_0}{3}$.

Donc :

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{2 I_0}{3 C} \quad \text{et} \quad \frac{dv_{C_2}}{dt} = \frac{dv_{C_3}}{dt} = -\frac{I_0}{3 C}.$$

La fig. 5 représente les variations en fonction du temps des différentes grandeurs mentionnées dans le texte (fig. 5).

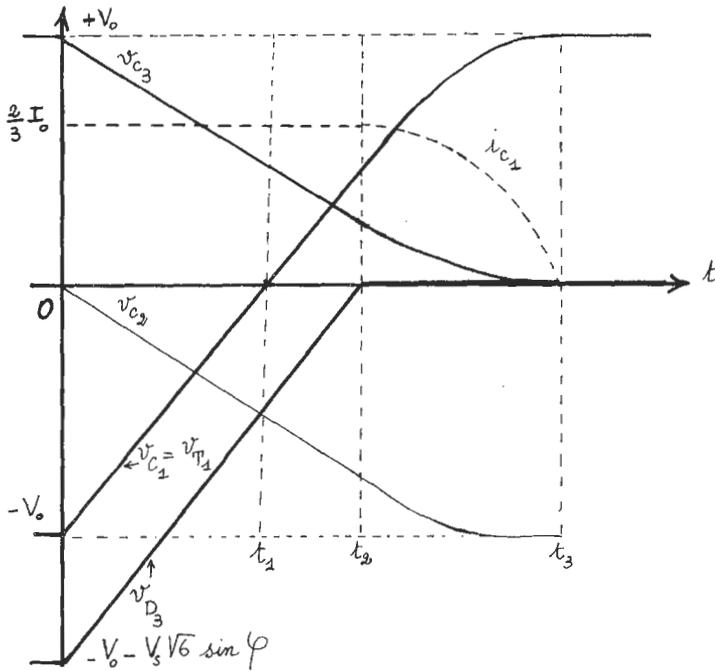


Fig. 5

A partir de l'instant $t = 0^+$, la tension V_{AKT_1} est égale à $v_{C_1}(t)$.

D'autre part, la fig. 4 montre que : $v_{D_3} - v_{C_1} - e_R + e_S = 0$,
d'où :

$$v_{D_3} = e_R - e_S + v_{C_1}, \quad \text{or} \quad e_R(0) = V_s \sqrt{2} \sin \left(-\frac{5\pi}{6} + \varphi \right),$$

$$e_S(0) = V_s \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right),$$

$$e_T(0) = V_s \sqrt{2} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Donc $v_{D_3} = -V_s \sqrt{6} \sin \varphi + v_{C_1}(t)$.

A l'instant $t = 0^-$, la tension V_{AKT_3} est évidemment égale à $-v_{C_1}(0) = V_0$.

2.2.

Deuxième étape (fig. 6) : La fig. 6 particularise les éléments du montage concernés par cette étape. On a toujours C_1

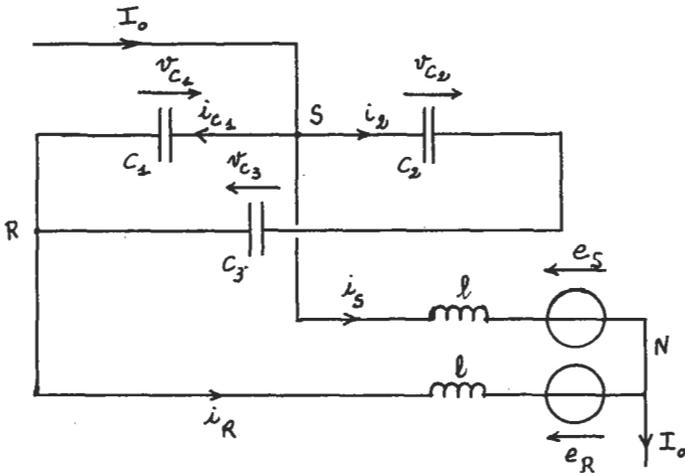


Fig. 6

en parallèle avec $\frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$, donc $i_R = \frac{3}{2} i_{C_1} = \frac{3}{2} C \frac{dv_{C_1}}{dt}$.

Par ailleurs : $I_0 = i_R + i_S$, soit $i_S = I_0 - i_R$, et :

$$v_{SN} = e_S + l \frac{di_S}{dt} = e_R + l \frac{di_R}{dt} + v_{C_1}.$$

Cette dernière équation entraîne l'égalité :

$$e_S - e_R = l \frac{d}{dt} (i_R - i_S) + v_{C_1},$$

et comme : $i_R - i_S = 2 i_R - I_0$, on en déduit :

$$e_S - e_R = 3 l C \frac{d^2 v_{C_1}}{dt^2} + v_{C_1}.$$

Les conditions initiales sont les suivantes :

Pour $t = t_2$, $v_{D_3} = 0$, or $v_{D_3} = e_R - e_S - v_{C_1}$,

$$\text{donc } v_{C_1}(t_2) = e_S - e_R.$$

Pour $t = t_2$, $i_R = I_0$, or $\frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{2 i_R}{3 C}$,

$$\text{donc } \frac{dv_{C_1}}{dt}(t_2) = \frac{2 I_0}{3 C}.$$

De l'équation différentielle et des conditions initiales, on déduit la loi d'évolution de $v_{C_1}(t)$ pour $t > t_2$, en posant

$$\omega_0^2 = \frac{1}{3 l C} :$$

$$v_{C_1}(t) = e_S - e_R + \frac{2 I_0}{3 C \omega_0} \sin \omega_0(t - t_2).$$

De la même manière : $i_R = I_0 \cos \omega_0(t - t_2)$.

La deuxième étape est achevée quand $i_R = 0$, c'est-à-dire

$$\text{lorsque } t = t_3 = t_2 + \frac{\pi}{2 \omega_0}.$$

De t_2 à t_3 , $i_{C_1} = \frac{2}{3} i_R = \frac{2 I_0}{3} \cos \omega t$; $i_2 = \frac{I_0}{3} \cos \omega t$, on

en déduit les lois d'évolution de $v_{C_2}(t)$ dont les variations sont — en valeur absolue — deux fois plus faibles que celles de $v_{C_1}(t)$.

2.3. De 0 à t_1 , $v_{C_1} = -V_0 + \frac{2 I_0}{3 C} t = v_{T_1}$, dont $t_1 = \frac{3 C V_0}{2 I_0}$.

2.4. De t à t_2 , $v_{D_3} = v_{C_1} - V_s \sqrt{6} \sin \varphi$; donc :

$$t_2 = \frac{3 C}{2 I_0} (V_0 + V_s \sqrt{6} \sin \varphi).$$

$$2.5. t_3 - t_2 = \frac{\pi \sqrt{3 l C}}{2}.$$

2.6. Au cours de la commutation étudiée, la tension v_{C_1} passe de la valeur $-V_0$ à $v_{C_1}(t_3) = V_s \sqrt{6} \sin \varphi + \frac{2 I_0}{3 C \omega_0}$.

Cette dernière valeur, en régime permanent, doit être égale à la valeur de v_{C_3} à la fin de la commutation précédente, c'est-à-dire V_0 .

$$V_0 = V_s \sqrt{6} \sin \varphi + \frac{2 I_0}{3 C \omega_0}.$$

(De même : $v_{C_2}(t_3) = v_{C_1}(0) = -V_0$, et $v_{C_3}(t_3) = v_{C_2}(0) = 0$.)

Lors de la commutation suivante ($t \approx \frac{T}{3}$), v_{C_1} suivra la même évolution que v_{C_3} pour $t \approx 0$, et, pour $t \approx \frac{2T}{3}$, v_{C_1} reproduira l'évolution de v_{C_2} pour $t \approx 0$.

La fig. 7 représente $v_{C_1}(t)$.

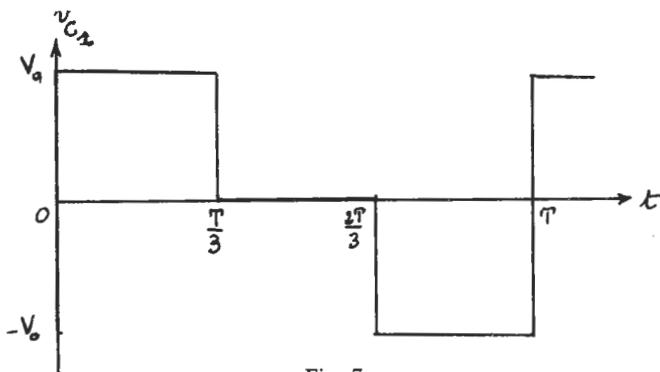


Fig. 7

2.7.

$$v_{RN} = e_R + l \frac{di_R}{dt} = e_R - l \omega_0 I_0 \sin \omega_0 t,$$

$$v_{SN} = e_S + l \frac{di_S}{dt} = e_S + l \omega_0 I_0 \sin \omega_0 t,$$

$$u_{RS} = v_{RN} - v_{SN} = e_R - e_S - 2l\omega_0 \sin \omega_0 t, \quad \text{avec } e_R - e_S < 0$$

$$u_{ST} = v_{SN} - v_{TN} = e_S - e_T + l\omega_0 \sin \omega_0 t, \quad \text{car } i_T = I_0 = c^{ste}; (e_S - e_T > 0).$$

Ceci explique que sur l'oscillogramme de la tension entre phases, on voit les 6 commutations par période. Quand les deux phases de la tension concernée (commutation de R à S ou de S à R) interviennent dans la commutation, la quantité $2l\omega_0 \sin \omega_0 t$ induit un pic — 2 fois par période — d'amplitude deux fois plus grande que lorsqu'une seule phase est concernée : de R à T, de S à T, de T à R et de T à S, c'est le terme $l\omega_0 \sin \omega_0 t$ qui intervient.

2.8.

$$t_1 = \frac{3CV_0}{2I_0}, \quad \text{avec } V_0 = V_s \sqrt{6} \sin \varphi + \frac{2I_0}{3C\omega_0} \simeq \frac{2I_0}{3C\omega_0}.$$

$$\text{Par conséquent } t_1 = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{3lC}.$$

Si on veut réaliser l'égalité $t_1 = 2tq$, il faut :

$$C_{min} = \frac{4tq^2}{3l} = 23,2 \mu\text{F}.$$

2.9.

$$V_0 = \sqrt{6} \times 220 \times 0,475 + \frac{260 \times 250 \cdot 10^{-6}}{3 \times 23,2 \cdot 10^{-6}} = 1,19 \cdot 10^3 \text{ V}.$$

$$t_1 = \frac{3CV_0}{2I_0} = 318 \mu\text{s}.$$

$$t_2 = t_1 + \frac{3C}{2I_0} V_s \sqrt{6} \sin \varphi = 386 \mu\text{s}.$$

$$t_3 - t_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{3lC} = 391 \mu\text{s}.$$

On a donc $t_3 = 0,777 \text{ ms}$.

Surtension entre phases : $2l\omega_0 I_0 = 936 \text{ V}$ (cette tension est nettement supérieure à $380 \sqrt{2} = 537 \text{ V}$ qui est la tension maximale « normale » entre phases).

2.10.

$$t_3 = \sqrt{3lC} \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3C}{I_0} V_s \sqrt{6} \sin \varphi.$$

On voit donc que la durée d'une commutation est d'autant plus longue que l'expression $\frac{V_s \sin \varphi}{I_0}$ est plus élevée. Or c'est à vide, lorsque le schéma équivalent monophasé se réduit à L_s , que ce rapport est maximal.

Si T_m est la durée minimale d'une période, on doit avoir $T_m = 3 t_{3 \text{ Max}}$, en effet, il doit y avoir, par période, 3 commutations concernant les diodes D_1 , D_3 et D_5 , intercalées avec 3 commutations relatives à D_2 , D_4 et D_6 .

La durée maximale $t_{3 \text{ Max}}$ est donc obtenue pour $\frac{V_s}{I_{s0}} = L_s \omega_M$.

Pour une forme d'onde de courant telle que $i_R(t)$ dessinée sur la fig. 3 du texte, le rapport entre I_0 et la valeur efficace I_{s0} de l'onde fondamentale de courant est 1,28. On a donc :

$$\frac{V_s}{I_0} = \frac{2\pi L_s f_M}{1,28}.$$

$$t_{3 \text{ Max}} = \sqrt{3lC} \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3C \sqrt{6}}{1,28} \times 2\pi L_s f_M = \dots$$

$$\dots (643 + 17,8 \times f_M) \times 10^{-6} \text{ s.}$$

En écrivant par ailleurs $T_m = \frac{1}{f_M} = \frac{1}{3 t_{3 \text{ Max}}}$, on trouve, après résolution d'une équation du second degré :

$$f_M = 120 \text{ Hz.}$$

2.11. Le calcul précédent ne tient pas compte du fait que pour $T < 6 t_3$ il y a nécessairement des commutations simultanées pour les deux groupes de diodes. Pendant ces commutations simultanées, le pont est en court-circuit, et l'intensité I_0 n'est limitée que par l'inductance de lissage L : I_0 n'est pas constante.

Dans toute cette deuxième partie, il a été supposé par ailleurs que l'intensité i_T était constante et égale à $-I_0$ pendant la commutation $D_1 \rightarrow D_3$. Si pendant cette commutation D_2 commute avec D_4 , l'hypothèse $i_T = -I_0$ est fautive.

La valeur 120 Hz est certainement trop élevée. Une fréquence maximale de 100 Hz, au mieux, est plus crédible.

Troisième partie

3.1. La relation entre I_s , valeur efficace de l'onde fondamentale de courant, et I_0 est classique : $I_s = \frac{2\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2}} I_0$, ou $I_0 = 1,28 I_s$.

$E = V$ puisque la résistance de la bobine est négligée.

La relation entre V et V_s est la relation classique pour un montage onduleur « parallèle-double-3 », où l'angle de retard à l'amorçage est égal à φ . C'est aussi, mais en inversant les conventions récepteur-générateur, la relation qui lie les grandeurs relatives à un redresseur P.D.3.

$$V = 2 V_s \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}/2}{\pi/3} \cos \varphi = \frac{3 V_s \sqrt{6}}{\pi} \cos \varphi = 2,34 V_s \cos \varphi.$$

(On peut vérifier que la conservation de la puissance est respectée, puisque :

$$V I_0 = 2,34 \cdot V_s I_0 \cos \varphi = 2,34 \times 1,28 V_s I_s \cos \varphi = 3 V_s I_s \cos \varphi).$$

3.2.

3.2.1. Si f_s est la fréquence des courants de la machine à induction triphasée, $v(t)$ est — malgré la présence des inductances de fuites l — une tension unidirectionnelle, ondulée, de fréquence $6f$, comme le représente la fig. 8.

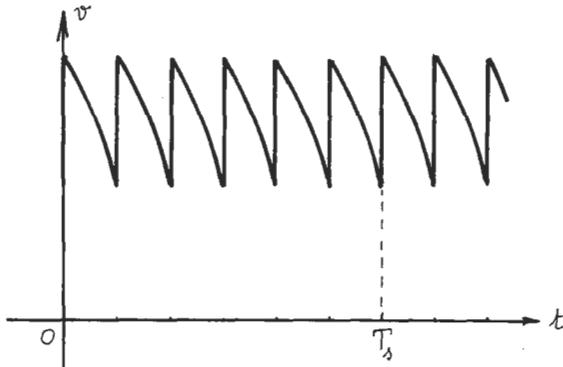


Fig. 8

3.2.2. La puissance instantanée reçue par le commutateur, $v(t) \cdot I_0$, a donc la même forme que $v(t)$.

Les seuls éléments susceptibles d'emmagasiner — temporairement — de la puissance magnétique sont les inductances de fuites l , et les 3 inductances L_s .

Comme les tensions sont sinusoïdales et la machine triphasée, il est possible de montrer que la puissance magnétique emmagasinée dans les 3 bobines L_s — en fait dans l'entrefer de la machine à induction — est constante. Il reste dès lors uniquement les 3 inductances de fuites l dont l'importance n'est pas suffisante pour servir de « tampon » entre la puissance électrique $v(t) \cdot I_0$ et la puissance électromagnétique transmise au rotor $I(t) \Omega_r$.

L'égalité de ces deux expressions — en négligeant la puissance emmagasinée dans les inductances de fuites — montre que $\Gamma(t)$ a même forme (fig. 8) que $v(t)$, ce qui est susceptible, à basse fréquence notamment, de provoquer des résonances.

3.3.

3.3.1. Les thyristors du commutateur doivent pouvoir supporter $\pm V_0$. La surtension calculée à la question 2.9 ne les affecte que dans la mesure où elle agit sur les courants i_{C1} et i_2 de la fig. 6. C'est la bobine de lissage, d'inductance L qui « absorbe » ces surtensions.

$$V_0 = V_s \sqrt{6} \sin \varphi + 2 I_0 \sqrt{\frac{l}{3C}} = 256 + 934 = 1,19 \cdot 10^3 \text{ V.}$$

Remarque.

La fréquence maximale de fonctionnement du commutateur dépend de C . Avec $C = 23,2 \mu\text{F}$, nous avons trouvé $f_M = 120 \text{ Hz}$. Avec $C' = 30 \mu\text{F}$, on aurait trouvé : $f'_M = 105 \text{ Hz}$. En revanche, on aurait : $V'_0 = 1,08 \cdot 10^3 \text{ V}$.

On peut donc être amené, pour limiter le prix des thyristors qui dépend beaucoup de la tension qu'ils doivent pouvoir supporter, à augmenter C au-delà de ce qui est nécessaire pour assurer la durée minimale de la tension inverse confirmant leur extinction. La fréquence maximale f_M est alors un peu réduite.

3.3.2. Pour le pont 1, la valeur moyenne de l'intensité du

courant traversant un thyristor vaut $\frac{I_0}{3} = 43 \text{ A}$.

La valeur efficace correspondante vaut $\frac{I_0}{\sqrt{3}} = 75 \text{ A}$.

La tension inverse maximale qu'ont à supporter les thyristors de ce pont est $U \sqrt{2} = 380 \sqrt{2} = 540 \text{ V}$.

3.3.3. $V = E = 2,34 V_s \cos \varphi = 453 V.$

Puisque la tension d'alimentation du pont 1 est la même que celle de la machine d'induction, on en déduit que : $\cos \alpha_1 = \cos \varphi.$ Donc : $\alpha_1 = 28^\circ.$

3.3.4. Le courant en ligne sur le réseau d'alimentation à 50 Hz a la même forme que celle qui est représentée sur la fig. 3 du texte. (Même forme que i_R, i_S, i_T de la machine, mais à 50 Hz).

3.4. Si la machine d'induction fonctionne en génératrice, le retard φ de l'intensité i_R (par exemple) sur la tension v_{RN} est supérieur à $\frac{\pi}{2}$ (fig. 9).

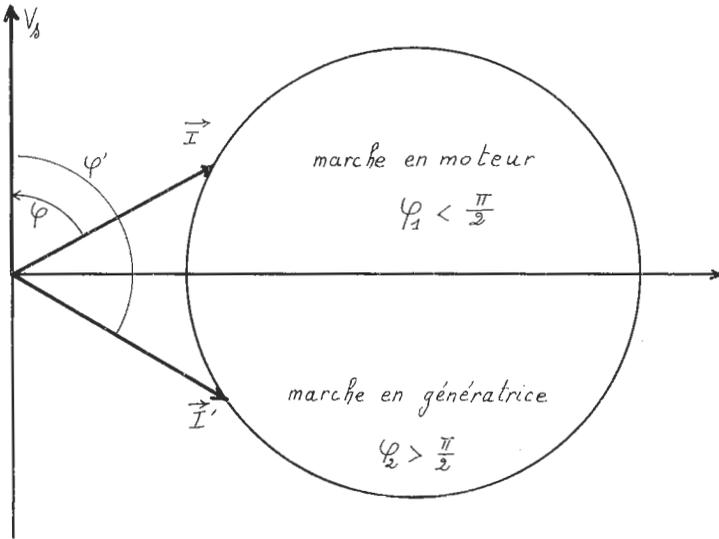


Fig. 9. — Diagramme du cercle.

La tension $V = 2,34 V_s \cos \varphi$ est alors négative ; le commutateur fonctionne en redresseur classique. Pour que l'énergie électrique produite par la génératrice asynchrone puisse être envoyée sur le réseau 50 Hz, il faut que le pont 1 fonctionne en onduleur.

L'égalité des tensions moyennes V et E impose que l'angle α_1 soit tel que : $V_s \cos \varphi = 220 \cos \alpha_1.$

Si φ est supérieur à $\frac{\pi}{2}$, on aura bien $\alpha_1 > \frac{\pi}{2}$, et donc un pont 1 onduleur.

3.5.

$$I_s = \frac{V_s}{L_s \omega_s} \sqrt{\frac{R_2^2 + (L_s + l)^2 \omega_r^2}{R_2^2 + l^2 \omega_r^2}};$$

$$\Gamma = 3p \left(\frac{V_s}{\omega_s} \right)^2 \cdot \frac{R_2 \omega_r}{R_2^2 + l^2 \omega_r^2}.$$

3.5.1. Si on impose V_s et ω_r , les produits $I_s \omega_s$ et $\Gamma \omega_s^2$ sont constants : I_s varie comme $\frac{k_1}{\omega_1}$, et Γ comme $\frac{k_2}{\omega_2}$.

3.5.2. Si on impose I_s et ω_r , c'est le rapport $\frac{V_s}{\omega_s}$ qui est constant, et donc le couple qui est fixé. En fait le flux et le couple sont imposés.

3.6. D'après la question 1.3., lorsque $\frac{V_s}{\omega_s} = K$, on a, compte tenu de ce que $I_0 = 1,28 I_1$:

$$I_0 = \frac{1,28 K}{L_s} \sqrt{\frac{R_2^2 + (L_s + l)^2 \omega_r^2}{R_2^2 + l^2 \omega_r^2}}$$

I_0 ne dépend que de ω_r , pulsation des courants rotoriques.

La fonction $I_0(\omega_r)$ est paire, son minimum est obtenu pour $\omega_r = 0$. Pour cette pulsation (moteur à vide), on a calculé à la question 1.1. que la valeur de I_s vaut : $I_{s0} = 32,9$ A. On a donc $I_{0 \min} = 42,1$ A.

On remarque que la valeur limite $I_{0l} = 130$ A correspond sensiblement à $I_{sn} = 101$ A, intensité efficace nominale de la machine pour une alimentation à 50 Hz (question 1.1.).

La limitation de I_0 à la valeur 130 A, entre en jeu, par conséquent, pour la valeur de ω_r correspondant au fonctionnement nominal. $\omega_{rn} = g_n \times \omega_s = \frac{1,6 \times 314}{100} = 5,02$ rad/s. La fréquence des courants rotoriques correspondante est 0,8 Hz.

La fig. 10 représente les variations de $I_0(\omega_r)$.

Les pulsations ω_r négatives correspondent au fonctionnement de la machine d'induction en génératrice asynchrone.

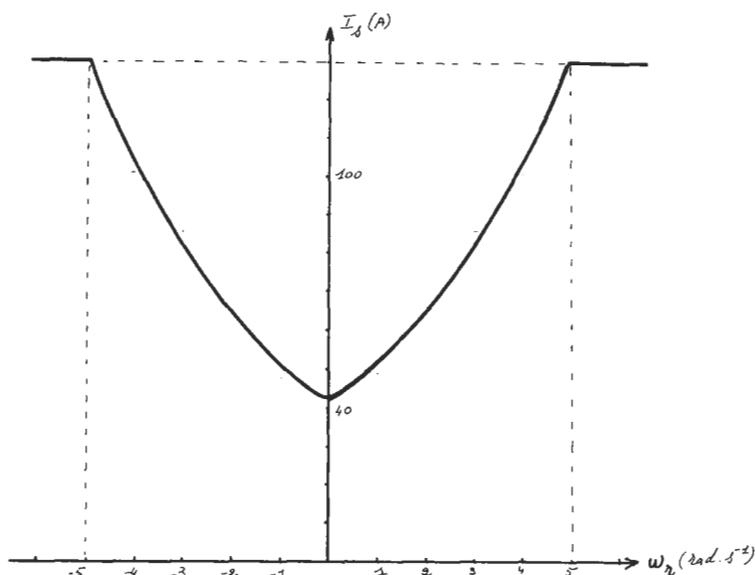


Fig. 10

3.7. La saisie de Ω_r donne par différence avec Ω_{REF} , grâce au régulateur de vitesse 4, la pulsation $\omega_r = \omega_s - p \Omega_r$.

A partir de là, la boucle d'asservissement du courant d'intensité I_0 , agissant sur α_1 , fixe en fait V_s de manière à ce que le rapport

$\frac{V_s}{\omega_s}$ soit constant. En effet, à partir de ω_r , s'élabore d'une

part $\omega_s = \omega_r + p \Omega_r$, grâce à un additionneur et au convertisseur tension-fréquence n° 5, et d'autre part un courant de circulation entre les deux ponts, tel que son intensité I_0 satisfasse à la relation :

$$I_0 = \frac{1,28 K}{L_S} \sqrt{\frac{R_2^2 + (L_S + l) \omega_r^2}{R_2^2 + l^2 \omega_r^2}}$$

L'intensité I_s est alors fixée ($I_s = \frac{I_0}{1,28}$), et comme la machine impose la relation :

$$V_s = L_S \omega_s I_s \sqrt{\frac{R_2^2 + l^2 \omega_r^2}{R_2^2 + (L_S + l) \omega_r^2}}$$

on a bien $V_s = K \omega_s$. La machine fonctionne à flux constant (tant que ω_s reste inférieur à 314 rad/s).

De plus le moment du couple, Γ , est, comme nous l'avons vu à la question 3.5.2., imposé. Cela découle des formules, mais du point de vue causal, on peut se représenter de la manière suivante la suite des implications qui conduisent à ce résultat :

La régulation de courant agit sur I_0 qui a la forme $I_0(\omega_r)$ dessinée sur la fig. 10. Le courant I_0 fixe I_s qui détermine $V_s = K \omega_s$. La machine impose alors un déphasage φ entre \underline{V}_s et \underline{I}_s .

On a d'ailleurs :

$$\cos \varphi = \frac{R_2 L_s \omega_r}{\sqrt{R_2^2 + (L_s + l)^2 \omega_r^2} \cdot \sqrt{R_2^2 + l^2 \omega_r^2}}$$

La tension moyenne $V = \overline{v(t)} = 2,34 V_s \cos \varphi$ se trouve alors imposée, tout comme la puissance $V I_0$ transmise au moteur. Comme cette puissance est égale à $\Gamma \Omega_r$, Γ est bien imposé. Il semble toutefois qu'il n'y ait pas de différence essentielle entre les manières de procéder suggérées par les questions 3.5.1. et 3.5.2. dans la mesure où, après avoir élaboré l'image de ω_r et construit celle de ω_s par l'addition : $\omega_s = \omega_r + p \Omega_r$, on peut très bien imposer V_s de manière à ce que la machine, là encore, fonctionne à flux constant. De la même manière que le calculateur 3 (ce peut être une simple mémoire), élabore $I_{0 \text{ REF}}$ à partir de ω_r , un dispositif peut très bien élaborer $V_{s \text{ REF}}$ à partir de ω_r et ω_s .

R. MOREAU (Bordeaux).

SOMMAIRE du supplément au n° 691

(février 1987)

	Pages
Concours général 1986 :	
Composition de sciences physiques (S. OLIVIER et les membres du jury)	1
 C.A.P.E.S. 1986 :	
Composition de physique (J.-Cl. HERPIN)	25
 Composition de chimie (Claude DUBOC-CHABANON et Pierre FELLMANN)	59
 Composition d'électronique, électrotechnique (Françoise MONERAU)	85
 Agrégation 1986 :	
Problème de physique (J.-P. PROVOST, E.-R. TANTART) ..	119
 Problème de chimie (M ^{me} DANNION, MM. BOTTIN, SOU- LIVET, VERDAGUER)	161
 Problème d'électricité, d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique (R. MOREAU)	203
 Renseignements divers	I à VIII

Le Directeur de la Publication : J.-Cl. HERPIN

Imprimerie Hallépée - 169, rue Lecourbe, Paris

Dépôt légal : 1^{er} trimestre 1987

Numéro Commission paritaire : 62628