

Bulletin de l'Union des Physiciens

Association de professeurs de Physique et de Chimie

AVERTISSEMENT AUX LECTEURS

Nous avons décidé, pour l'impression de ce bulletin, de respecter les normes de la typographie nouvelle et de noter les grandeurs vectorielles en caractères gras sans les surmonter de flèches. Ces normes ont surtout comme intérêt de simplifier la tâche de composition.

J.-Cl. HERPIN.

SESSION DE 1987

Agrégation

PROBLEME DE PHYSIQUE

Option Physique

Epreuve C

(Durée : 6 heures)

SOLUTION

LE VENT SOLAIRE

L'auteur de cette solution remercie M. l'Inspecteur Général GIÉ pour sa contribution à sa mise en forme et sa relecture.

Les annexes qui figurent à la fin de ce corrigé ont pour but d'amorcer une discussion sur les hypothèses faites dans le problème et de préciser certains points.

Première partie

MODÈLES DE COURONNE SOLAIRE. FORMATION DU VENT SOLAIRE

1. *Modèle hydrostatique.*

1.1. L'énergie cinétique moyenne d'agitation thermique est de l'ordre de kT_0 . $kT_0 = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 2 \cdot 10^6}{1,6 \cdot 10^{-9}} \approx 170 \text{ eV}$, valeur très supé-

rière à l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène (13,6 eV). Comme la pression est, de plus, très faible ($P = 2,8 \cdot 10^{-5}$ Pa), l'hydrogène est entièrement ionisé.

Pour appliquer la loi des gaz parfaits, il faut pouvoir négliger l'énergie potentielle d'interaction entre les particules chargées devant leur énergie cinétique. Si l est la distance moyenne qui les sépare : $Nl^3 \approx 1$, et l'énergie potentielle moyenne est de l'ordre

$$\text{de } \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 l} \text{ soit } \frac{N^{1/3} e^2}{4 \pi \epsilon_0}.$$

La condition est donc $\frac{N^{1/3} e^2}{4 \pi \epsilon_0} \ll kT_0$, on calcule :

$$\frac{N^{1/3} e^2}{4 \pi \epsilon_0} = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ eV.}$$

Le rapport $\frac{N^{1/3} e^2}{4 \pi \epsilon_0 kT_0}$ vaut $\approx 8,5 \cdot 10^{-8}$ et la condition est remplie.

On peut aussi s'assurer que l'on n'a pas à tenir compte d'effets quantiques en calculant la longueur d'onde de DE BROGLIE des particules de masse m :

$$\lambda = \frac{h}{mV} \approx \frac{h}{(3 m kT_0)^{1/2}} = 1,32 \cdot 10^{-10} \text{ m,}$$

et en la comparant à $l = 10^{-4}$ m ; on a bien $\lambda \ll l$.

1.2. Le flux de chaleur est stationnaire, ce qui entraîne :

$$K_0 T^n \frac{dT}{dr} r^2 = \text{cte. Soit, après intégration :}$$

$$K_0 \frac{T^{n+1}}{n+1} = -\frac{A}{r} + B,$$

la constante d'intégration, B doit être nulle pour respecter la condition $r \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 0$; A se détermine en écrivant que pour

$$r = a, T = T_0. \text{ On trouve } T(r) = T_0 \left(\frac{a}{r} \right)^{1/n+1}.$$

L'équilibre hydrostatique se traduit par :

$$\frac{dp}{dr} = \frac{N G M M_{\odot}}{r^2} = \frac{N k T_0 a \lambda_0}{r^2},$$

compte tenu de la loi des gaz parfaits : $p = N kT$, on obtient :

$$k \frac{d}{dr} (NT) = - \frac{N k T_0 a \lambda_0}{r^2} \text{ soit } \frac{d}{dr} \ln (NT) = - \lambda_0 a \frac{T_0}{T} \frac{dr}{r^2}.$$

A l'aide de l'expression de $T(r)$, on aboutit à :

$$d \ln (NT) = - \lambda_0 \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{r}{a} \right)^{1/n+1} d \left(\frac{r}{a} \right),$$

soit, après intégration :

$$N = N_0 \left(\frac{r}{a} \right)^{1/n+1} e^{-\lambda_0 n + 1/n \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{n/n+1} - 1 \right]}.$$

Pour $\frac{a}{r} \ll 1$, il reste : $N \approx N_0 \left(\frac{r}{a} \right)^{1/n+1} e^{-\lambda_0 n + 1/n}$.

1.3. Au voisinage de l'orbite terrestre, $T_T = T_0 \left(\frac{a}{R_T} \right)^{1/n+1}$,

numériquement : $a = R_{\odot}$, $\frac{R_T}{a} = 215,5$ et $T_T = 4,3 \cdot 10^5$ K.

On trouve : $kT_T = 37$ eV, l'hypothèse de l'ionisation totale reste correcte.

Pour calculer N_T , on détermine d'abord $\lambda_0 = \frac{G M M_{\odot}}{k T_0 R_{\odot}} = 5,77$

et ensuite $N_T = 1440$ particules cm^{-3} .

1.4. Très loin,

$$p(r) = N_0 \left(\frac{r}{a} \right)^{1/n+1} e^{-\lambda_0 n + 1/n} k T_0 \left(\frac{a}{r} \right)^{1/n+1} = \dots$$

$$\dots N_0 k T_0 e^{-\lambda_0 n + 1/n} = p(\infty).$$

Cette pression garde donc une valeur constante, non nulle.

La pression interstellaire p^* vaut $N^* k T^*$ avec $N^* = 10 \text{ cm}^{-3}$ et $T^* = 10^2$ K. Dans le modèle hydrostatique, on trouve :

$$\frac{p(\infty)}{p^*} = \frac{N_0}{N^*} \frac{T_0}{T^*} e^{-\lambda_0 n + 1/n}$$

numériquement $\frac{p(\infty)}{p^*} = 6 \cdot 10^5$: le gaz coronal ne peut pas être

confiné. Il est nécessairement en expansion. L'hypothèse hydrostatique doit être abandonnée, tout au moins à partir d'une certaine distance héliocentrique.

2. Théorie exosphérique.

2.1. Pour un gaz d'atomes d'hydrogène, la vitesse de libération v_l est telle que $\frac{1}{2} M_H v_l^2 - \frac{G M_\odot M_H}{r} = 0$ soit :

$$v_l(r) = \left(\frac{2 G M_\odot}{r} \right)^{1/2}.$$

Pour $r = 2 R_\odot$, on trouve : $v_l(2 R_\odot) = 436,7 \text{ km s}^{-1}$ alors que $U = 181,8 \text{ km s}^{-1}$. Ceci est cohérent avec l'hypothèse que seule une petite fraction des atomes s'évade.

2.2.

a) Compte tenu des résultats de la question 2.1., l'hypothèse de l'équilibre hydrostatique reste valable et on a :

$$\frac{d N k T_0}{d h} = - N M g \text{ soit } N(h) \propto e^{-M g h / k T_0} = e^{-h/H},$$

ce qui donne : $N(h) = N_c e^{-h-h_c/H}$.

b) On écrit que la longueur parcourue l_0 est telle que le volume balayé, dans lequel la particule a pu faire un choc, renferme une autre particule. D'où :

$$Q \int_{h_0}^{h_0 + l_0} N(h) dh = 1 \text{ comme } N(h) = N(h_0) e^{-h-h_0/H},$$

$$Q N(h_0) e^{h_0/H} \int_{h_0}^{h_0 + l_0} e^{-h/H} dh = 1$$

ce qui donne $N(h_0) [1 - e^{-l_0/H}] = \frac{1}{QH}$.

c) L'altitude critique h_c correspond à $l_0 \rightarrow \infty$, l'expression précédente donne directement $N(h_c) = [QH]^{-1}$.

Le libre parcours horizontal l_{hor} à l'altitude h est tel que $Q N(h) l_{hor} = 1$; on voit que $l_{hor} = H$ à l'altitude h_c .

$$d) N_c = \frac{M g(r = 2 R_\odot)}{Q k T_0} = \frac{G M M_\odot}{4 Q k T_0 R_\odot^2} = \frac{\lambda_0}{4 Q R_\odot}.$$

$$\text{Numériquement, } N_c = \frac{5,77}{4 \cdot 10^{-21} \cdot 6,96 \cdot 10^8} = 2 \cdot 10^{12} \text{ particules m}^{-3},$$

on retrouve l'ordre de grandeur de la valeur donnée par l'énoncé.

2.3.

a) Pour écrire l'équilibre local des protons, par exemple, on peut faire le bilan de flux de quantité de mouvement pour les protons et pour un volume \mathcal{V} fixe. L'entrée ou la sortie, à l'échelle microscopique, des protons de \mathcal{V} , correspond à des forces de pression, de valeur $-\mathbf{grad}(N_p kT_0)$ par unité de volume ; le champ électrostatique provoque la force $N_p e \mathbf{E}$ par unité de volume.

A l'équilibre, on a donc :

$$-\mathbf{grad}(N_p kT_0) + N_p e \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

De même pour les électrons :

$$-\mathbf{grad}(N_e kT_0) - N_e e \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

En soustrayant (2) de (1), on obtient :

$$-\mathbf{grad}[(N_p - N_e) kT_0] + (N_p + N_e) e \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

$q_{el} = (N_p - N_e) e$, $\mathbf{E} = -\vec{\nabla} V$, on fait l'approximation $N_p + N_e = N$ et on néglige le terme du second ordre :

$$eV \mathbf{grad}(N_p + N_e).$$

On obtient donc :

$$\mathbf{grad} \left(q_{el} \frac{kT_0}{e} + NeV \right) = \mathbf{0}.$$

La présence locale d'un excès de charges, correspondant à la densité q_{el} , provoque donc une modification V du potentiel telle que :

$$q_{el} \frac{kT}{e} + NeV = \text{constante} \quad \text{soit} \quad q_{el} = -\frac{Ne^2V}{kT_0} + \text{constante}.$$

Comme à $q_{el} \equiv 0$ correspond $V \equiv 0$, on obtient : $q_{el} = -\frac{Ne^2V}{kT_0}$.

b) Soit une perturbation localisée en $r = 0$. Dans le cas de la symétrie sphérique, le potentiel V ne dépend que de r et l'équation de Poisson s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rV) + \frac{q_{el}}{\epsilon_0} = 0,$$

ce qui donne :

$$\frac{d^2}{dr^2}(rV) - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 kT_0}(rV) = 0 \quad \text{et} \quad V = \frac{A}{r} e^{-r/l_D} + \frac{B}{r} e^{+r/l_D}$$

avec $l_D = \left(\frac{\epsilon_0 kT_0}{Ne^2} \right)^{1/2}$, on doit prendre $B = 0$ si on veut éviter que V ne diverge à l'infini (le milieu est supposé illimité), il

reste donc $V(r) = \frac{A}{r} e^{-r/l_D}$, la portée spatiale de la perturbation est caractérisée par la longueur $l_D = \left(\frac{\epsilon_0 kT_0}{Ne^2} \right)^{1/2}$ (longueur de Debye).

c) Près du Soleil, on obtient : $l_D = 10$ cm ; dans la sphère de rayon l_D , il y a $\mathcal{N} = \frac{4}{3} \pi l_D^3 N_0$ particules soit $\mathcal{N} \simeq 4 \cdot 10^9$ particules.

Près de la Terre : $l_D = 31$ m et $N \simeq 1,2 \cdot 10^{12}$ particules.

Ces résultats montrent qu'à l'échelle spatiale où l'on se place (1UA, 1 UA = $1,5 \cdot 10^8$ km) toute l'hétérogénéité électrique du plasma est masquée.

2.4. L'équilibre local conduit aux équations :

$$-\mathbf{grad}(N_p kT_0) + N_p e \mathbf{E} + N_p m_p \mathbf{g}_\odot = \mathbf{0} \quad (1')$$

$$-\mathbf{grad}(N_e kT_0) - N_e e \mathbf{E} + N_e m_e \mathbf{g}_\odot = \mathbf{0}. \quad (2')$$

A l'échelle spatiale considérée, $N_p(r) = N_e(r) = \frac{N(r)}{2}$, en

soustrayant (2') de (1'), il reste : $N_e \mathbf{E} + \frac{N}{2} (m_p - m_e) \mathbf{g}_\odot = \mathbf{0}$,

d'où :

$$\mathbf{E} = -\frac{(m_p - m_e)}{2e} \mathbf{g}_\odot = -\beta \frac{m_p}{e} \mathbf{g}_\odot \quad \text{avec :}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_e}{m_p} \right).$$

Comme $\frac{m_e}{m_p} \ll 1$, on a : $\beta \approx 1/2$.

* On peut aussi écrire que la distribution $N(r)$ des protons avec l'altitude obéit à la loi de Boltzmann $N_p(r) \propto e^{-W_p(r)/kT_0}$, $W_p(r)$ représentant l'énergie potentielle des protons à l'altitude r .

Il en est de même pour les électrons $N_e(r) \propto e^{-W_e(r)/kT_0}$.

La neutralité locale du plasma exige que $W_p(r) = W_e(r) + \text{constante}$. Ceci ne peut pas être réalisé en l'absence de champ électrique car $m_p \neq m_e$. Il y a donc légère séparation des charges et apparition d'un champ électrique \mathbf{E} .

A l'équilibre :

$$-\frac{dW_p}{dr} = m_p g_{\odot} + eE = -\frac{dW_e}{dr} = m_e g_{\odot} - eE,$$

d'où :

$$\mathbf{E} = -\frac{(m_p - m_e)}{2e} g_{\odot}.$$

Les sources de \mathbf{E} sont dues à une légère séparation des charges.

2.5. On a :

$$\lambda_c = \frac{GM_{\odot} M}{2kT_0 R_{\odot}} = \frac{\lambda_0}{2} = \frac{5,77}{2}$$

$$\lambda_T = \frac{GM_{\odot} M}{kT_0 R_T} = \frac{\lambda_0}{215,5} = 2,68 \cdot 10^{-2}$$

d'où :

$$W(r \approx R_T) = \frac{3U}{8} \frac{(\lambda_T)^{1/2}}{\lambda_c^2} (\lambda_c + 1) e^{-\lambda_T} = \dots$$

$$\dots \frac{3}{8} \cdot 182 \cdot \frac{0,164}{8,32} \cdot 3,9 \cdot 0,97 \approx 5 \text{ km s}^{-1}.$$

La vitesse moyenne calculée au niveau de l'orbite terrestre est environ trop petite d'un facteur 100 environ.

3. *Modèle de l'expansion hydrodynamique.*

3.1.

a) L'équation d'EULER donne :

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} = \mathbf{g} \odot - \frac{1}{NM} \mathbf{grad} p.$$

$$\begin{aligned} \text{L'accélération } \frac{d\mathbf{W}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + (\mathbf{W} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{W} = \dots \\ &\dots - \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \vec{\nabla} \frac{W^2}{2} + (\vec{\nabla} \wedge \mathbf{W}) \wedge \mathbf{W}. \end{aligned}$$

$$\text{Pour une expansion stationnaire } \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \mathbf{0}, \text{ radiale } \mathbf{W} = W \hat{e}_r,$$

le terme :

$$(\vec{\nabla} \wedge \mathbf{W}) \wedge \mathbf{W} = \mathbf{0} \text{ car } \vec{\nabla} \wedge W \hat{e}_r = (\vec{\nabla} W) \wedge \hat{e}_r + W \vec{\nabla} \wedge \hat{e}_r = \mathbf{0}$$

(grad W est colinéaire à \hat{e}_r et $\vec{\nabla} \wedge \hat{e}_r = \mathbf{0}$).

$$\vec{\nabla} \frac{W^2}{2} = W \frac{dW}{dr} \hat{e}_r, \mathbf{g} \odot = -\frac{GM \odot}{r^2} \hat{e}_r, \mathbf{grad} p = \frac{d(NkT)}{dr} \hat{e}_r.$$

L'équation d'EULER conduit alors à l'équation :

$$(1) \quad NMW \frac{dW}{dr} = -\frac{d}{dr} (NkT) - \frac{GNM \odot M}{r^2}.$$

Remarque. — On peut aussi calculer directement le terme

$$(\mathbf{W} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{W}; \text{ en coordonnées sphériques } \mathbf{W} \cdot \vec{\nabla} = W \hat{e}_r \cdot \vec{\nabla} = W \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\text{et } (\mathbf{W} \cdot \vec{\nabla}) W \hat{e}_r = (W \frac{\partial}{\partial r} W) \hat{e}_r + W^2 \frac{\partial}{\partial r} (\hat{e}_r) = W \frac{dW}{dr}.$$

L'équation (2) s'obtient immédiatement en écrivant la conservation de la masse, compte tenu de la stationnarité.

$$(2) \quad NW r^2 = \text{cste} = N_0 W_0 a^2.$$

$$b) \text{ Les notations sont telles que } W^2 = \frac{kT_0 \psi}{M}, \quad r = a\xi,$$

T = T₀ τ, G M M_⊙ = λ₀ a kT₀, d'où :

$$\frac{NM}{2a} \frac{kT_0}{M} \frac{d\psi}{d\xi} = -\frac{1}{a} \frac{d}{d\xi} (N kT_0 \tau) - \frac{N a \lambda_0 kT_0}{a^2 \xi^2}$$

il reste :

$$\frac{d\psi}{d\xi} = -\frac{2}{N} \frac{d}{d\xi} (N \tau) - \frac{2\lambda_0}{\xi^2}.$$

En différenciant (2), on a :

$$2 \frac{dN}{N} + \frac{d\psi}{\psi} + 4 \frac{d\xi}{\xi} = 0$$

et donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\xi} &= -\frac{2\lambda_0}{\xi^2} - 2 \frac{\tau}{d\xi} \frac{dN}{N} - 2 \frac{d\tau}{d\xi} = \dots \\ &\dots - \frac{2\lambda_0}{\xi^2} + \frac{\tau}{\psi} \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{4\tau}{\xi} - 2 \frac{d\tau}{d\xi}. \end{aligned}$$

En regroupant, il vient :

$$\frac{d\psi}{d\xi} \left(1 - \frac{\tau}{\psi} \right) = -2\xi^2 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tau}{\xi^2} \right) - \frac{2\lambda_0}{\xi^2}.$$

3.2. a)

$$1 \leq \xi \leq \frac{b}{a}, \tau = 1 \text{ et } \frac{d\psi}{d\xi} \left(1 - \frac{1}{\psi} \right) = \frac{4}{\xi} - \frac{2\lambda_0}{\xi^2}$$

qui s'intègre en : $\psi - \ln \psi = 4 \ln \xi + \frac{2\lambda_0}{\xi} + \text{constante}$. Quand $\xi = 1$, $\psi = \psi_0$,

il en résulte que :

$$Z = \Psi(\xi) - \ln \Psi(\xi) = \psi_0 - \ln \psi_0 + 4 \ln \xi + 2\lambda_0 \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right).$$

$$\xi > \frac{b}{a}, \tau = 0 \text{ et } \frac{d\psi}{d\xi} = -\frac{2\lambda_0}{\xi^2}, \psi = \frac{2\lambda_0}{\xi} + \text{constante}$$

$$\text{et } \psi = \psi \left(\frac{b}{a} \right) + 2\lambda_0 \left(\frac{1}{\xi} - \frac{a}{b} \right).$$

$$b) \text{ On a posé : } \psi = \frac{MW^2}{kT_0}, \lambda_0 = \frac{GMM_{\odot}}{kT_0 a}. \text{ Pour } r \geq b,$$

on a donc : $W^2 = W_b^2 + 2GM_{\odot} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$, l'allure de W^2 en fonction de r est représentée fig. 1 :

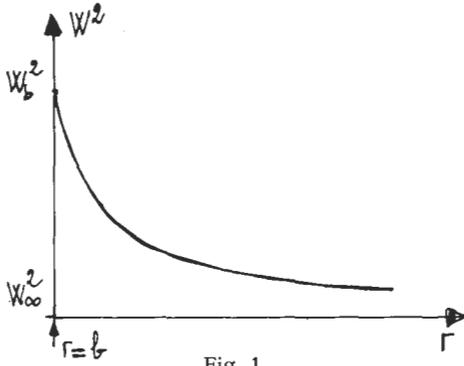


Fig. 1

$$W_b^2 - W_{\infty}^2 = \frac{2GM_{\odot}}{b}$$

Si W ne diffère de W_b que d'au plus 10 %, $W_b \leq 1,1 W_{\infty}$, et

$$\frac{b}{R_{\odot}} \geq \frac{2GM_{\odot}}{0,21 R_{\odot} W_{\infty}^2} \text{ numériquement :}$$

$$\frac{b}{R_{\odot}} \geq \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{0,21 \cdot (400 \cdot 10^3)^2 \cdot 7 \cdot 10^8} = 11,3, \text{ on prendra : } \frac{b}{R_{\odot}} \approx 11.$$

3.3. On obtient facilement les courbes représentées par les figures 2 et 3.

a)

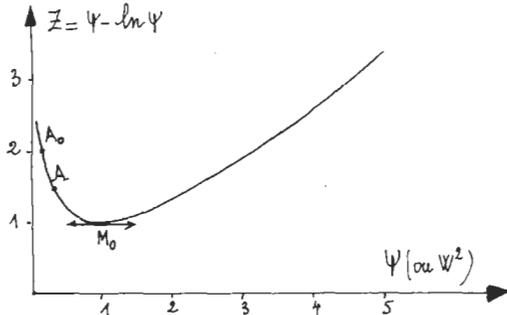


Fig. 2

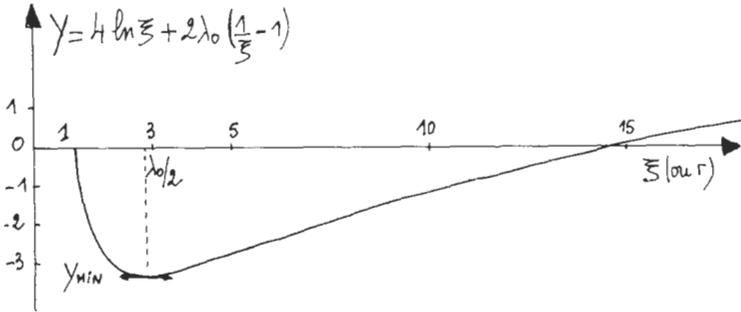


Fig. 3

b) Il faut résoudre $Z = Z_0 + Y$ ($Z_0 = \psi_0 - \ln \psi_0$).

Au départ, $\xi = 1$, on a $Y = 0$, $Z = Z_0$, $\psi = \psi_0 < 1$ d'après le texte. Ceci correspond au point A_0 de la figure 2.

Quand $\xi \nearrow$ à partir de 1, Y devient d'abord < 0 , le point A qui représente Z sur la fig. 2 s'abaisse à partir de A_0 , ψ et W^2 croissent.

Si $Z_0 - 1 > |Y_{min}|$, W^2 atteint un maximum quand $\xi = \frac{\lambda_0}{2}$

(correspond à $Y = Y_{min}$); lorsque ξ continue à croître, le point A remonte vers A_0 sur la courbe $Z(\psi)$; ψ et W^2 décroissent (courbes 1 et 2 de la fig. 4).

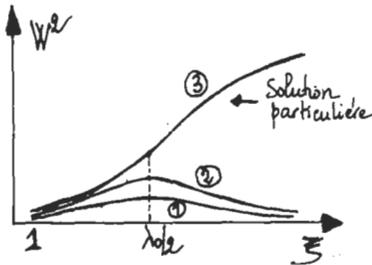


Fig. 4

c) Si $Z_0 - 1 = |Y_{min}|$, A atteint le point M_0 sur la courbe $Z(\psi)$ (fig. 2), on a alors $\psi \left(\xi = \frac{\lambda_0}{2} \right) = 1$. Lorsque ξ continue à croître, A peut décrire la portion de la courbe $Z(\psi)$ située à droite de M_0 . W^2 est alors une fonction monotone crois-

sante de ξ et prend des valeurs $W^2 > U^2$ ($\psi > 1$), c'est-à-dire que la vitesse d'expansion devient supersonique (la vitesse du son est de l'ordre de U) (courbe 3 de la fig. 4).

La solution du vent solaire s'obtient en imposant :

$$\psi \left(\xi = \frac{\lambda_0}{2} \right) = 1,$$

ce qui donne : $\psi_0 - \ln \psi_0 + 4 \ln \frac{\lambda_0}{2} + 2 \lambda_0 \left(\frac{2}{\lambda_0} - 1 \right) = 1$ et :

$$Z = \psi - \ln \psi = -3 - 4 \ln \frac{\lambda_0}{2} + 4 \ln \xi + \frac{2 \lambda_0}{\xi}.$$

3.4. Les brises solaires correspondent à l'équation :

$$\psi - \ln \psi = \psi_0 - \ln \psi_0 + 4 \ln \xi + 2 \lambda_0 \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right).$$

Comme $\xi = \frac{\lambda_0}{\lambda}$, on a encore :

$$\frac{1}{2} \ln \psi - \frac{\psi}{2} = \frac{1}{2} \ln \psi_0 - \frac{\psi_0}{2} + \ln \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2 + \lambda_0 - \lambda$$

soit :

$$\frac{\psi^{1/2}}{e^{\psi/2}} = \frac{\psi_0^{1/2}}{e^{\psi_0/2}} \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} e^{\lambda_0 - \lambda} \text{ et si } \psi \ll 1 : e^{\psi/2} \simeq e^{\psi_0/2} \simeq 1,$$

on obtient : $W = W_0 \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2 e^{\lambda_0 - \lambda}$, forme semblable à celle

donnée par la théorie exosphérique.

3.5. On veut que ψ atteigne la valeur $\psi = \left(\frac{400}{181,8} \right)^2 = 4,84$,

ce qui correspond à $Z = \psi - \ln \psi = 3,263$. On calcule Z_0 au

moyen de la valeur $\lambda_0 = 5,77$ soit $Z_0 = -3 + 2 \lambda_0 - 4 \ln \frac{\lambda_0}{\lambda} = 4,302$

et on obtient ainsi : $Y = Z - Z_0 = -1,04 = 4 \ln \xi + \frac{11,54}{\xi}$. Cette

dernière équation donne deux valeurs de ξ comme le montre la courbe de la fig. 3 : $\xi = 1,17$ et $\xi = 10,5$; seule la valeur la plus

élevée $\xi = \frac{b}{a} = 10,5$ correspond au vent solaire. Avec $a = R_{\odot}$,

on trouve $b = 10,5 R_{\odot} \ll R_T = 215 R_{\odot}$, soit une valeur de b raisonnable.

Deuxième partie

LE CHAMP MAGNÉTIQUE INTERPLANÉTAIRE

1. Le champ magnétique dans un plasma.

1.1.

a) On écrit les équations de Maxwell dans le référentiel R^* , ainsi :

$$\text{rot } \mathbf{B}^* = \mu_0 \sigma \left[\mathbf{E}^* + \frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t} \right]$$

$\left\| \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t} \right\|$ est de l'ordre de $\frac{\|\mathbf{E}^*\|}{T}$, T temps caractéristique

($T = 10^{-6}$ s), $\frac{\epsilon_0}{\sigma} = \frac{1}{36 \pi 10^9 \cdot 10^6} = 8,84 \cdot 10^{-18}$ s, on a donc :

$$\frac{\epsilon_0}{\sigma T} = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ s.}$$

On voit ainsi que le terme $\frac{\epsilon_0}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t}$ est tout à fait négligeable

devant \mathbf{E}^* , autrement dit le courant de déplacement $\mathbf{j}_D^* = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t}$ peut être ignoré.

On a donc : $\text{rot } \mathbf{B}^* = \mu_0 \sigma \mathbf{E}^*$, ce qui entraîne $\text{div } \sigma \mathbf{E}^* = 0$. Comme le plasma est spatialement uniforme, $\text{div } \mathbf{E}^* = 0$ et

l'équation de Maxwell $\text{div } \mathbf{E}^* = \frac{q^*_{el}}{\epsilon_0}$ permet de conclure à la

neutralité du plasma dans R^* ($q^*_{el} = 0$).

On passe au référentiel \mathcal{R} à l'aide des transformations galiléennes. Celle des champs permet d'écrire $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}$.

La composition des vitesses : $\mathbf{j} = \mathbf{j}^* + q^*_{el} \mathbf{v}$ soit $\mathbf{j} = \mathbf{j}^*$ (car $q^*_{el} = 0$). Finalement, on obtient les équations suivantes, dans \mathcal{R} :

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}); \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}), \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0.$$

On en tire facilement :
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) + \frac{\Delta \mathbf{B}}{\mu_0 \sigma}.$$

b) Si le plasma est immobile ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$) l'équation précédente se réduit à l'équation de diffusion :
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\Delta \mathbf{B}}{\mu_0 \sigma}.$$

Soit une perturbation magnétique $\delta \mathbf{B}$ qui s'étend spatialement sur la distance L , c'est-à-dire que $\|\Delta \mathbf{B}\|$ est de l'ordre $\frac{\|\delta \mathbf{B}\|}{L^2}$, et qui s'atténue sur une durée caractéristique τ , ce qui

revient à écrire que
$$\left\| \frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} \right\| \sim \left\| \frac{\delta \mathbf{B}}{\tau} \right\|.$$

L'équation de diffusion nous montre que $\tau = \mu_0 \sigma L^2$.

On peut dire encore, que $\tau = \mu_0 \sigma L^2$ est la durée pour qu'une perturbation de champ magnétique diffuse sur la longueur L .

1.2.

a) Si σ est très élevé : $\frac{\mathbf{j}^*}{\sigma} = \mathbf{E}^* \simeq \mathbf{0}$, on a alors :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}. \quad \text{L'équation } \text{rot } \mathbf{E} = \frac{-\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ entraîne alors immédiatement : } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).$$

b) Soit (C) un contour fermé et S une surface qui s'appuie sur (C); (C) et S sont attachés au fluide, ϕ représente le flux magnétique à travers S.

En supposant que les champs $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ sont partout continus, on montre que :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{dt} + \oint_{(C)} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

$\frac{\partial\phi}{\partial t}$ se calcule en supposant que le contour (C) conserve sa position à l'instant t considéré.

$\oint_{(C)} -(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{\delta\phi_c}{dt}$, $\delta\phi_c$ étant le flux élémentaire coupé entre t et $t + dt$ par le déplacement de (C).

On écrit encore que :

$$\frac{d\phi}{dt} = \iiint_s \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_s -\mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS$$

comme $\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$, on voit que $\frac{d\phi}{dt} = 0$ (\forall (C) et S attachés au fluide).

$$c) \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \text{ s'écrit aussi :}$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{B} - \mathbf{B}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{v})$$

en tenant compte de $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$.

L'équation locale de la conservation de la masse :

$$\vec{\nabla} \cdot \rho\mathbf{v} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0,$$

soit encore $\rho \vec{\nabla} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \vec{\nabla})\rho = -\frac{\partial\rho}{dt}$ où $\frac{d}{dt}$ est la dérivée particulaire.

En regroupant, on a $\frac{d\mathbf{B}}{dt} = (\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{v} + \frac{\mathbf{B}}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ et donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \vec{\nabla} \right) \mathbf{v} \quad (3).$$

d) $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ représentant le champ des vitesses du fluide :

$$\frac{d}{dt}(\delta\mathbf{l}) = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{l}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = (\delta\mathbf{l} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{v} \quad (4).$$

e) Les équations (3) et (4) précédentes montrent que

l'évolution temporelle de la quantité $\frac{\mathbf{B}}{\rho}$ prise en un point \mathbf{M}

lié au fluide est la même que celle de $\delta\mathbf{l} = \mathbf{MM}'$, \mathbf{M}' étant un point très proche de \mathbf{M} et également lié au fluide.

Si, à l'instant t , on choisit \mathbf{M}' tel que $\mathbf{MM}' \wedge \frac{\mathbf{B}}{\rho}(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$,

à tout instant t' ultérieur, on aura encore : $\mathbf{MM}' \wedge \frac{\mathbf{B}}{\rho}(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$.

Les lignes de champ magnétique se déplacent avec le fluide.

1.3. $R_m = \frac{\tau}{L/v}$ s'interprète comme le rapport de la durée τ

de diffusion d'une perturbation de champ magnétique sur la longueur L à la durée L/v de son transport par convection sur cette même longueur.

Si $R_m \gg 1$, $\tau \gg L/v$, on peut négliger la diffusion, les lignes de champ magnétique se déplacent avec le fluide.

2. Etude simplifiée du champ magnétique interplanétaire.

2.1.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \Omega \hat{e}_z \wedge r \hat{e}_r = \mathbf{v}' + \Omega r \sin \vartheta \hat{e}_\varphi \quad (\text{composition des vitesses}).$$

Pour $r \geq b$

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \mathbf{0} \quad \text{soit :} \quad \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{(\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_\vartheta)} + \omega \hat{e}_r \wedge \hat{e}_\varphi \wedge \hat{e}_\vartheta \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

On néglige le terme $\omega \hat{e}_r \wedge \hat{e}_\varphi \wedge \hat{e}_\vartheta \wedge \mathbf{v}$, alors :

$$\mathbf{v} = v_r \hat{e}_r + v_\vartheta \hat{e}_\vartheta + v_\varphi \hat{e}_\varphi = \text{cste} \quad \text{implique} \quad v_r, v_\vartheta, v_\varphi \text{ constants, on}$$

$$\text{détermine leurs valeurs en } r = b : \mathbf{v}(r = b) = W \hat{e}_r + \Omega b \sin \vartheta \hat{e}_\varphi$$

soit $v_r = W$, $v_\vartheta = 0$, $v_\varphi = \Omega b \sin \vartheta$, ce qui donne :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \Omega r \sin \vartheta \hat{e}_\varphi = W \hat{e}_r + \Omega (b - r) \sin \vartheta \hat{e}_\varphi.$$

2.2. La ligne de courant est telle que si $d\mathbf{M}$ appartient à la ligne $\mathbf{v}' \wedge d\mathbf{M} = \mathbf{0}$, ce qui conduit, en utilisant les coordonnées sphériques aux équations :

$$\Omega r (b - r) \sin \vartheta d\vartheta = 0, \quad W r d\vartheta = 0, \quad [\Omega (b - r) dr - W r d\varphi'] \sin \vartheta = 0$$

c'est-à-dire pour $\vartheta \neq 0$ (modulo π).

$$\vartheta = \text{cste}, \quad \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) dr = \frac{W}{\Omega b} d\varphi' \quad \text{qui donne par}$$

$$\text{intégration : } \frac{r}{b} - 1 - \ln \frac{r}{b} = \frac{W}{\Omega b} (\varphi'_0 - \varphi').$$

2.3. La distance typique de la variation spatiale de \mathbf{B} est l'UA (1 UA = $1,5 \cdot 10^8$ km), d'où :

$$R_m = \frac{\mu_0 \sigma L^2}{L/W} \gtrsim 4 \pi 10^{-7} \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 1,5 \cdot 10^{11} = 5 \cdot 10^{15},$$

R_m est de l'ordre de $10^{15} \sim 10^{16}$, les lignes de champ magnétique sont « gelées » dans le vent solaire, et se déplacent avec lui.

2.4.

a) Désignons par \mathfrak{S} et \mathfrak{S}' deux particules fluides très proches l'une de l'autre. Prenons \mathfrak{S} situé en P_0 à l'instant t tel que $SP_0 = b$, et \mathfrak{S}' au même instant en P'_0 sur la ligne de courant (C) passant par P_0 .

$\mathbf{P}_0 \mathbf{P}'_0 // \mathbf{v}'(P_0) // \mathbf{B}'(P_0)$ car le champ y est radial d'après l'énoncé.

Au cours du temps \mathfrak{S} et \mathfrak{S}' suivent la ligne de courant (C) car l'écoulement est *stationnaire*. A l'instant t' \mathfrak{S} se situe en P et \mathfrak{S}' en P'.

On a encore $\mathbf{PP}' // \mathbf{v}'(P) // \mathbf{B}'(P)$ car les lignes de champ se déplacent avec le fluide.

Comme, de plus, le champ \mathbf{B}' est stationnaire :

$$\mathbf{B}'(P, t') = \mathbf{B}'(P, t),$$

on a donc :

$$\mathbf{v}'(P) \wedge \mathbf{B}'(P) = \mathbf{0}$$

en tout point du fluide.

Les lignes de champ magnétique se confondent avec les lignes de courant de vent solaire dans le référentiel \mathcal{R}' .

b) Le résultat de la question précédente se traduit par $\mathbf{B}' = \alpha(r, \vartheta, \varphi') \mathbf{v}'$. On cherche la fonction $\alpha(r)$ quand on se déplace le long d'une ligne de courant, rappelons que le long

d'une ligne de courant $\vartheta = \text{cste}$, et $d\varphi' = \frac{\Omega(b-r)}{W r} dr$.

$$\mathbf{B}' = \alpha W \hat{e}_r + \alpha \Omega(b-r) \sin \vartheta \hat{e}_\varphi.$$

$\text{div } \mathbf{B}' = 0$ entraîne :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \alpha W) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi'} [\alpha \Omega(b-r) \sin \vartheta] = 0.$$

Il résulte de tout ce qui précède :

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial r} dr + \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi'} d\varphi' = \dots$$

$$\dots \left[\frac{\partial \alpha}{\partial r} + \left(-\frac{\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \alpha W)}{\Gamma \Omega(b-r)} - \frac{\Omega(b-r)}{W r} \right) \right] dr.$$

Après simplifications, il reste : $d\alpha = -\frac{2\alpha}{r} dr$, ce qui s'in-

tègre et donne : $\alpha r^2 = A(\vartheta, \varphi')$, si on a choisi la ligne de champ qui passe par le point de coordonnées (b, ϑ, φ') .

On en déduit :

$$\mathbf{B}' = A(\vartheta, \varphi') \frac{W}{r^2} \hat{e}_r + A(\vartheta, \varphi') \frac{\Omega(b-r)}{r^2} \sin \vartheta \hat{e}_\varphi.$$

$$\text{En } r = b : \mathbf{B}_0(\vartheta, \varphi_0) = A(\vartheta, \varphi_0) \frac{W}{b^2},$$

il vient donc :

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}_0(\vartheta, \varphi_0) \left(\frac{b}{r} \right)^2 \hat{e}_r + \mathbf{B}_0(\vartheta, \varphi_0) (b-r) \left(\frac{b}{r} \right)^2 \frac{\Omega}{W} \sin \vartheta \hat{e}_\varphi.$$

Comme $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$ (approximation galiléenne), on a donc :

$$\mathbf{B}_r(r, \vartheta, \varphi, t) = \mathbf{B}_0(\vartheta, \varphi_0) \left(\frac{b}{r} \right)^2$$

$$B_{\vartheta}(r, \vartheta, \varphi, t) = 0$$

$$B_{\varphi}(r, \vartheta, \varphi, t) = B_0(\vartheta, \varphi_0)(b-r) \left(\frac{b}{r} \right)^2 \frac{\Omega}{W} \sin \vartheta$$

φ_0 étant relié à φ' et r par l'équation de la ligne de courant (4) du 2.2. et φ' étant lui-même relié à φ par $\varphi' = \varphi - \Omega t$.

$$\text{Il en résulte que : } \varphi_0 = \varphi - \Omega t + \frac{b\Omega}{W} \left(\frac{r}{b} - 1 - \ln \frac{r}{b} \right).$$

REMARQUE : On peut vérifier (calcul non demandé, voir l'annexe 2) que, dans \mathcal{R} , on a bien $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$.

c) On remarque que très loin le champ \mathbf{B} n'a pas du tout les caractéristiques d'un champ dipolaire (en r^{-3}), la décroissance n'est qu'en r^{-1} pour la composante B_{φ} . Cela est possible parce que le champ est transporté par le vent solaire.

REMARQUE : On constate expérimentalement qu'il s'écoule environ 4,5 jours entre l'apparition sur le Soleil d'un « orage magnétique » et sa manifestation au niveau terrestre. Ceci correspond à une vitesse moyenne de 385 km s^{-1} en accord avec l'ordre de grandeur donné pour W .

2.5.

a) On calcule :

$$B_r(r = R_T) = B_r \odot \left(\frac{R_{\odot}}{R_T} \right)^2, \quad B_r = \frac{1,5 \cdot 10^{-4}}{(215,5)^2} = 3,2 \cdot 10^{-9} \text{ T}$$

du même ordre que celle ($3,5 \cdot 10^{-9} \text{ T}$) mesurée.

$$\text{Dans le plan de l'écliptique } \left(\vartheta = \frac{\pi}{2} \right) \frac{B_{\varphi}}{B_r} = \frac{\Omega(b-r)}{W},$$

$$\text{au niveau de l'orbite terrestre } \frac{B_{\varphi}}{B_r} \approx - \frac{\Omega R_T}{W}.$$

$$\text{La direction de } \mathbf{B} \text{ fait l'angle } \alpha \text{ avec } \hat{e}_r, \text{ tel que } \text{tg } \alpha = - \frac{\Omega R_T}{W}.$$

On trouve $\alpha = 134,6^\circ$ ou $314,6^\circ$, ce qui est aussi en accord avec les observations.

b) Assez loin du Soleil ($r \gg b$) les lignes de champ obéissent à l'équation $r \sim \frac{W}{\Omega} (\varphi'_0 - \varphi')$; elles ont la forme d'une spirale d'Archimède (fig. 5).

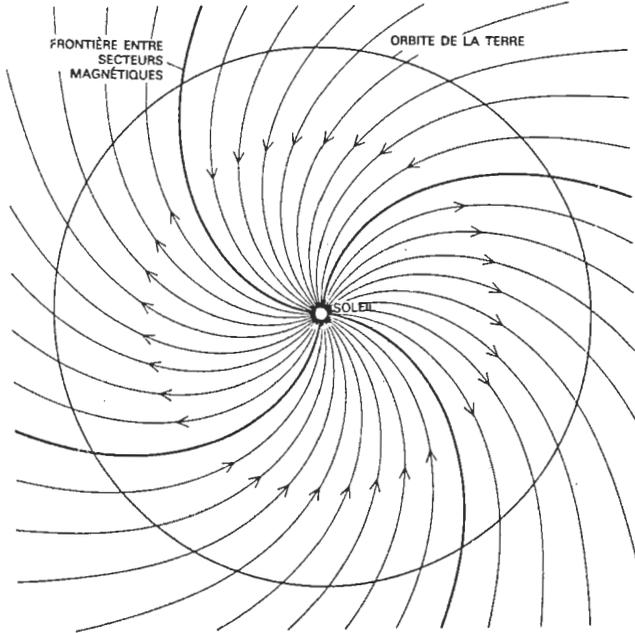


Fig. 5

3. Interaction du vent solaire avec la Lune.

3.1. Les lignes de champ magnétiques ne peuvent que diffuser à travers le matériau lunaire, elles ne sont pas altérées si la durée de cette diffusion est inférieure ou égale à la durée du transport par convection par le vent solaire. Comme $\tau \approx \mu_0 \sigma (2R_{\text{L}})^2$, cela implique $\sigma \leq \sigma_c$.

3.2. La durée du transport par le vent solaire du champ sur la longueur $2R_{\text{L}}$ vaut $\frac{2R_{\text{L}}}{W}$.

On a donc $\mu_0 \sigma (2 R_{\text{D}})^2 \leq \frac{2 R_{\text{D}}}{W}$ soit $\sigma \leq \sigma_c = (2 \mu_0 W R_{\text{D}})^{-1}$.

On trouve : $\sigma_c = 5,8 \cdot 10^{-7} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$.

4. Interaction du vent solaire avec la Terre.

4.1. La densité volumique des forces électromagnétiques est $\frac{d\mathbf{f}}{d\tau} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$ (on rappelle que $\varrho_{el} = 0$), d'autre part $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$

(le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ est négligeable). On a donc :

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\tau} = \frac{\text{rot } \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} = -\text{grad } \frac{B^2}{2\mu_0} + (\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B}.$$

Dans la situation où les lignes de champ sont parallèles à la direction de vecteur unitaire \hat{e}_x (par exemple) $\mathbf{B} = B \hat{e}_x$,

$\text{div } \mathbf{B} = 0$ entraîne $\frac{\partial B}{\partial x} = 0$ et donc $(\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{B} = \mathbf{B} \frac{\partial B}{\partial x} = 0$.

On voit que les forces électromagnétiques sont équivalentes à des forces pressantes :

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\tau} = -\text{grad } p \quad \text{avec } p = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

4.2. On se place sur l'axe Soleil-Terre (SO), entre S et O. Une surface unité disposée perpendiculairement à cet axe, est traversée par le flux de quantité de mouvement $N_p M_H W^2$, cela correspond à la pression cinétique $p_c = N_p M_H W^2$.

On compare cette pression à la pression magnétique due au champ terrestre p_m (près de la Terre, le champ solaire est négligeable).

Le vent solaire n'existe que si $p_c > p_m$.

$N_p W r^2 = \text{constante}$. Si on prend W constant, N_p varie comme $\frac{1}{r^2}$ ainsi que p_c . p_m varie comme $(R_T - r)^{-6}$, là où le

le champ terrestre peut maintenir son caractère dipolaire, c'est-à-dire dans la région où le vent solaire ne pénètre pas.

La magnétopause correspond à $p_c = p_m$.

La distance Δ est donc donnée par :

$$\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{2,6 \mu_0 m_T}{4\pi \Delta^3} \right)^2 = 2 N_p M_H W^2.$$

Le facteur 2 au second membre tient compte du fait que la réflexion double la valeur de la pression cinétique.

On a donc : $\Delta = \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(2,6 m_T)^2}{16\pi N_p M_H W^2} \right]^{1/6}$, on trouve :

$$\Delta = 6,4 \cdot 10^7 \text{ m.}$$

4.3. $\frac{\Delta}{\Delta_T} = 10$, résultat qui est accord avec les observations expérimentales.

REMARQUE : On prévoit la formation d'une onde de choc située à l'avant de la magnétopause, étant donné que le vent solaire se dirige vers cet obstacle avec une vitesse supersonique. On montre que la valeur calculée pour Δ reste correcte.

Troisième partie

ETUDE DU COUPLAGE CHAMP MAGNÉTIQUE - VENT SOLAIRE

1.1.

a) Dans le plan équatorial :

$$\mathbf{v}' = W \hat{e}_r + (v_\varphi - \Omega r) \hat{e}_\varphi$$

$$\mathbf{B} = B \hat{e}_r + B_\varphi \hat{e}_\varphi.$$

En écrivant que $\mathbf{v}' \wedge \mathbf{B} = 0$, on obtient $(v_\varphi B_r - W B_\varphi) = r \Omega B_r$.

$$b) \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ conduit à } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

car $B_\varphi \equiv 0$ dans tout le voisinage du plan équatorial d'après le texte. Comme la symétrie de révolution autour de S_z implique

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \text{ on aboutit à } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) = 0 \text{ c'est-à-dire}$$

$r^2 B_r = \text{constante} (r \neq 0)$.

En multipliant par r l'équation obtenue au a), on obtient :

$$r(v_\varphi B_r - W B_\varphi) = r^2 \Omega B_r = r_0^2 \Omega B_{r_0} = \text{constante.}$$

1.2.

L'équation locale de la conservation de la masse pour un écoulement stationnaire : $\text{div } \varrho \mathbf{v} = 0$, donne dans le plan équatorial

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \varrho W) = 0, \text{ en tenant compte que } v_\theta \equiv 0 \text{ dans tout le voisinage du plan équatorial (cf le texte), et que la symétrie de révolution autour de } Sz \text{ entraîne } \frac{\partial \varrho v_\varphi}{\partial \varphi} = 0,$$

d'où : $\varrho r^2 W = \text{constante.}$

1.3.

a) Le théorème du moment cinétique, dans le référentiel \mathcal{R} galiléen, par rapport au point S, appliquée à l'unité de masse de vent solaire que l'on suit dans son mouvement, se traduit par l'équation :

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) = \frac{1}{\varrho} [\mathbf{r} \wedge (\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) - \mathbf{r} \wedge \mathbf{grad } p].$$

Dans le plan équatorial, $\mathbf{grad } p // \mathbf{r}$ et donc $\mathbf{r} \wedge \mathbf{grad } p = \mathbf{0}$.

En projetant sur Sz de vecteur unitaire \hat{e}_z , il vient :

$$\varrho \frac{d}{dt} [\hat{e}_z \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})] = \hat{e}_z \cdot [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{j} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{B}]$$

$$\hat{e}_z \cdot \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = (\hat{e}_z \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} = r v_\varphi, \quad \hat{e}_z \cdot \mathbf{B} = -\hat{e}_\theta \cdot \mathbf{B} = 0,$$

D'où :

$$\varrho \left[\frac{\partial}{\partial t} (r v_\varphi) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) r v_\varphi \right] = -\frac{r B_r}{\mu_0} (\text{rot } \mathbf{B})_\theta$$

$(\text{rot } \mathbf{B})_\theta$ désignant la composante selon $\hat{e}_\theta = -\hat{e}_z$ de $\text{rot } \mathbf{B}$.

$\frac{\partial}{\partial t} [r v_\varphi] = 0$ (régime stationnaire); il subsiste :

$$\varrho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} (r v_\varphi) = -\frac{r B_r}{\mu_0} (\text{rot } \mathbf{B})_\theta.$$

On obtient alors facilement, compte tenu de $\frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial \varphi} = 0$

et de $\frac{\partial B_r}{\partial \varphi} = 0$:

$$\frac{d}{dr} (r v_\varphi) = \frac{B_r}{\mu_0 \varrho W} \frac{d}{dr} (r B_\varphi),$$

cette équation s'intègre simplement si on remarque que :

$$\frac{B_r}{\mu_0 \varrho W} = \frac{r^2 B_r}{\mu_0 \varrho W r^2} = \text{constante.}$$

Finalement, $L = r v_\varphi - \frac{B_r}{\mu_0 \varrho W} r B_\varphi = \text{constante.}$

b) $r v_\varphi$ est le moment cinétique, par rapport à S_z , « ordinaire » de l'unité de masse de vent solaire, le Soleil perd du moment cinétique à cause de la vitesse orthoradiale de la matière qu'il éjecte.

Le terme $-\frac{r B_r B_\varphi}{\mu_0 \varrho W}$ provient du moment des forces de

Laplace appliquée à l'unité de masse de vent solaire et dues à l'action du champ magnétique ; ce moment contribue aussi à diminuer le moment cinétique du Soleil.

L peut s'interpréter comme le moment cinétique emporté par l'unité de masse du vent solaire.

1.4.

a) M_a^2 est le rapport entre la densité d'énergie magné-

tique $\frac{B_r^2}{2\mu_0}$ et la densité d'énergie cinétique $\frac{\varrho W^2}{2}$, M_a est sans dimension.

$M_a^2 = \frac{\mu_0 \varrho W^2}{B_r^2}$ comme $\frac{\mu_0 \varrho W}{B_r} = \text{constante. } M_a^2 \text{ varie}$

comme ϱ^{-1} et M_a est fonction monotone croissante de r si $\varrho(r)$ est monotone décroissante.

On calcule :

$$M_a (r = R_T) = (4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27})^{1/2} \frac{400 \cdot 10^3}{3,5 \cdot 10^{-9}} = 11,7$$

$$\text{et } M_a \odot = \frac{11,7}{10^{5/2}} \approx 3,7 \cdot 10^{-2}.$$

M_a étant une fonction croissante de r , il existe un point A situé à la distance r_A ($R_\odot < r_A < R_T$) tel que $M_a (r = r_A) = 1$.

b)

$$\frac{M_a^2}{W r^2} = \frac{\mu_0 \varrho W}{r^2 B_r^2} = \frac{\mu_0 \varrho r^2 W}{r^4 B_r^2} = \text{constante} = \frac{1}{W_A r_A^2}.$$

on a :

$$r_A = \left(\frac{W(R_T)}{W_A} \right)^{1/2} \frac{R_T}{M_a(r = R_T)} \geq \frac{R_T}{M_a(r = R_T)}$$

d'où :

$$\frac{r_A}{R_\odot} \geq \frac{1}{M_a(r = R_T)} \frac{R_T}{R_\odot}.$$

$$\text{On trouve : } \frac{r_A}{R_\odot} \geq 18.$$

c) On sait que la vitesse du son est de l'ordre de $\left(\frac{P}{\varrho} \right)^{1/2}$ dans un gaz. On prévoit que la vitesse des ondes

magnétohydrodynamiques sera de l'ordre de $v_s \approx \left(\frac{B_r^2 / 2 \mu_0}{\varrho} \right)^{1/2}$

(à un facteur de quelques unités près).

M_a s'interprète comme le rapport de la vitesse du fluide W et de v_s .

15.

a) On a :

$$\begin{pmatrix} B_r - W \\ 1 - \frac{B_r}{\mu_0 \varrho W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\varphi \\ B_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega r B_r \\ L/r \end{pmatrix}$$

Le déterminant $Det = -\frac{B_r^2}{\mu_0 \varrho W} + W = W \left(1 - \frac{1}{M_a^2} \right)$.

$$Det \begin{vmatrix} \Omega r B_r - W & \\ L/r - \frac{B_r}{\mu_0 \varrho W} & \end{vmatrix} = -\frac{\Omega r B_r^2}{\mu_0 \varrho W} + \frac{WL}{r} = \frac{WL}{r} - \frac{\Omega r W}{M_a^2}.$$

On obtient : $v_\varphi = \frac{L/r - \Omega r/M_a^2}{1 - 1/M_a^2}$, ce qui s'écrit aussi :

$$v_\varphi = \frac{\frac{M_a^2 L}{r} - \Omega r}{M_a^2 - 1}. \text{ De même, } B_\varphi = B_r \frac{\Omega r - L/r}{W(M_a^2 - 1)}.$$

Pour $r = r_A$, $M_a = 1$, B_φ et v_φ doivent rester finis, cela implique $L = \Omega r_A^2$.

b)

$$M_a^2 = \frac{W r^2}{W_A r_A^2}, \quad L = \Omega r_A^2, \quad \text{d'où } v_\varphi = \Omega r \frac{\left(\frac{W}{W_A} - 1 \right)}{\left(\frac{W}{W_A} \frac{r^2}{r_A^2} - 1 \right)}$$

$$\text{Si } r \gg r_A, \quad v_\varphi = \frac{L}{r} \left[1 - \frac{W_A}{W_{(\infty)}} \right].$$

On voit que loin $r v_\varphi = \text{cste}$, comme L est invariant, il en résulte que $r B_\varphi$ aussi et la fraction du moment cinétique empor-

tée par le mouvement radial vaut : $\frac{r v_\varphi}{L} = 1 - \frac{W_A}{W_{(\infty)}}$.

$$\text{Si } r \ll r_A, \text{ alors } W < W_A \text{ et } v_\varphi = \Omega r \left(1 - \frac{W}{W_A} \right).$$

Et l'allure de $v_\varphi(r)$ est donnée par la fig. 6.

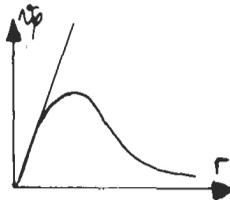


Fig. 6

2.1. La queue s'oriente parallèlement à :

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = W \hat{e}_r + v_\varphi \hat{e}_\varphi - \mathbf{u}.$$

Soit : \hat{e}'_φ la projection de \hat{e}_φ sur le plan (\mathcal{B}).

\mathbf{t} est colinéaire au vecteur : $W \hat{e}_r + v_\varphi \hat{e}'_\varphi - \mathbf{u}$ (fig. 7).

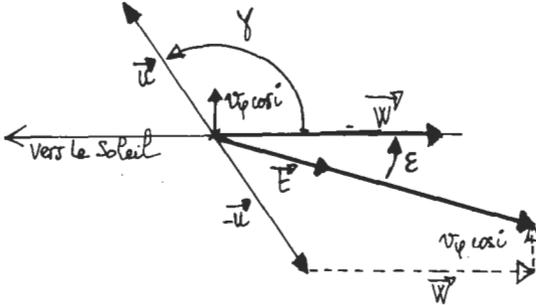


Fig. 7

On obtient : $\text{tg } \epsilon = \frac{u \sin \gamma - v_\varphi \cos i}{W - u \cos \gamma}$ comme $|u \cos \gamma| \ll W$.

Il vient : $\text{tg } \epsilon \approx \frac{u \sin \gamma - v_\varphi \cos i}{W}$.

2.2.

$$\langle \text{tg } \epsilon \rangle = \left\langle \frac{1}{W} \right\rangle [\langle u \sin \gamma \rangle - \langle v_\varphi \rangle \langle \cos i \rangle].$$

$$\text{Numériquement : } 0,062 = \left\langle \frac{1}{W} \right\rangle [34,8 - \langle v_\varphi \rangle 0,90].$$

Pour les comètes rétrogrades, on obtient :

$$0,086 = \left\langle \frac{1}{W} \right\rangle [31,7 + \langle v_\varphi \rangle 0,72].$$

On en tire : $\left\langle \frac{1}{W} \right\rangle^{-1} = 440 \text{ km s}^{-1}$ et $\langle v_\varphi \rangle = 8,5 \text{ km s}^{-1}$.

3.1. En s'inspirant de l'étude précédente, on est amené à écrire pour $r \ll r_A$ $v_\varphi(\vartheta) \alpha \Omega r \sin \vartheta$ (au lieu de $v_\varphi = \alpha \Omega r$) et $L(\vartheta) = L \sin^2 \vartheta$ car la distance à l'axe est devenue $r \sin \vartheta$.

3.2.

a) La masse éjectée, par unité de temps, dans l'angle solide $d\Omega = d[2\pi(1 - \cos \vartheta)]$ vaut :

$$\rho \frac{W 4 \pi r^2 d\Omega}{4 \pi} = \rho W r^2 2 \pi \sin \vartheta d\vartheta \quad (\rho W r^2 = \text{cste}).$$

La perte de moment cinétique du Soleil par unité de temps $-\frac{d\mathcal{L}_\odot}{dt}$, vaut $-\frac{d\mathcal{L}_\odot}{dt} = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} 2\pi L \rho W r^2 \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{8\pi}{3} \rho W r^2 L$.

La perte de masse du Soleil par unité de temps due au vent

solaire $-\frac{dM_\odot}{dt}$ vaut $-\frac{dM_\odot}{dt} = 4\pi \rho W r^2$.

On en tire : $\frac{d\mathcal{L}_\odot}{dt} = \frac{2}{3} \frac{dM_\odot}{dt} \Omega r_A^2$, comme $\mathcal{L}_\odot = I_\odot \Omega$.

On aboutit à :

$$\frac{d\mathcal{L}_\odot}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{r_A^2}{I_\odot} \left| \frac{dM_\odot}{dt} \right| \mathcal{L}_\odot$$

et :

$$\frac{1}{\tau^*} = \frac{2}{3} \frac{r_A^2}{I_\odot} \left| \frac{dM_\odot}{dt} \right|.$$

3.3.

a) $\left| \frac{dM_\odot}{dt} \right| = 4\pi N_p M_H W R_T^2$ numériquement :

$$\left| \frac{dM_\odot}{dt} \right| = 10^6 \text{ tonnes s}^{-1} \text{ et } \frac{\Delta M_\odot}{M_\odot} \simeq 8 \cdot 10^{-5}$$

la perte de masse du Soleil, due au vent solaire, est négligeable devant sa masse.

b) On calcule $\tau^* = 2,06 \cdot 10^{17}$ s soit $\tau^* = 6,5 \cdot 10^9$ années. C'est une durée comparable à l'âge du Soleil. Le vent solaire intervient de manière efficace pour ralentir la rotation propre du Soleil.

c) Actuellement, la vitesse de rotation du Soleil en un point de sa surface et à l'équateur vaut :

$$v_{\odot} = \Omega R_{\odot} = 2,7 \cdot 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^5 = 1,87 \text{ km s}^{-1},$$

ce qui correspond à une vitesse initiale, avec notre modèle, $v_{\odot}(0)$ telle que $v_{\odot} = v_{\odot}(0) e^{-t/\tau^*}$.

Avec $t = 5 \cdot 10^9$ ans, on obtient $v_{\odot}(0) = 4 \text{ km s}^{-1}$, une valeur nettement inférieure à celle de 75 km s^{-1} , prévues par certaines théories. On peut penser, que la vitesse W n'est pas restée constante, et à d'autres processus de freinage.

ANNEXE 1

I. Conductivités thermique et électrique du plasma solaire.

On donne au I_1 , la conductivité thermique de l'hydrogène ionisé de la forme $K = K_3 T^{3/2}$, indépendante de la densité particulaire et une conductivité électrique comprise entre $310^6 \Omega \text{ m}^{-1}$ (près du Soleil) et $7 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ (près de la Terre). Voici quelques éléments qui permettent de retrouver la forme de l'expression et les ordres de grandeurs.

Le problème d'agrégation 1981 et son corrigé donnent pour la conductivité électrique σ_{el} d'un plasma :

$$\sigma_{el} = \frac{3 \epsilon_0^2}{\lambda e^2} \left(\frac{2 \pi kT}{m_e} \right)^{3/2} \quad \text{avec } \lambda = \ln \frac{l_D}{\rho}, \quad \rho_1 = \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 \cdot 3 kT},$$

et l_D la longueur de Debye du plasma.

En négligeant la variation de la quantité λ , on calcule avec les données du plasma solaire : $\sigma_{el} = 6,3 \cdot 10^{-4} T^{3/2}$, ce qui donne : $\sigma_{el} \approx 10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ (Soleil) et $\sigma_{el} \approx 10^4$ à $10^5 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ (Terre).

On peut déduire de σ_{el} un temps de relaxation $\tau = \frac{m_e \sigma_{el}}{N_e e^2}$

soit encore : $\tau = \frac{3 m_e}{\lambda N_e e^4} \left(\frac{2 \pi kT}{m_e} \right)^{3/2}$ (N_e densité électronique).

La conductivité thermique d'un gaz peut être calculée à l'aide d'un modèle élémentaire ou de façon plus élaborée, à l'aide de

l'équation de Boltzmann : $K = \frac{5}{2} \frac{N}{m} k^2 \tau T$. En regardant

les formes des expressions de K et de τ , on constate que K est de la forme $K_0 T^{5/2}$.

II. Libre parcours moyen Λ des électrons. Discussion sur la pression.

On calcule un ordre de grandeur pour Λ à l'aide de la vitesse

quadratique $u = \left(\frac{3 kT}{m_e} \right)^{1/2}$ et de τ , on obtient $\Lambda = 1,5 \cdot 10^8 \frac{T^2}{N_e}$

et si on exprime Λ en UA ($1 \text{ UA} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$) Λ (en UA) = $10^{-3} \frac{T^2}{N_e}$.

Il faut ensuite comparer Λ à une distance caractéristique r^* du problème. Près du Soleil, on peut prendre :

$$r^* = 2 R_{\odot} \approx 10^{-2} \text{ UA}, \Lambda = 2 \cdot 10^{-3} \text{ UA}$$

$$(\text{avec } T = 10^6 \text{ K}, N_e = 0,5 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}).$$

$\frac{r^*}{\Lambda} = 5$, la pression peut garder son sens habituel. Au voi-

sinage de l'orbite terrestre : $\Lambda = 2 \text{ UA}$ ($T = 10^5 \text{ K}, N_e = 5 \cdot 10^3 \text{ m}^{-3}$),

en prenant $r^* = 1 \text{ UA}$, on obtient $\frac{r^*}{\Lambda} = 0,5$ et l'utilisation de

la pression au sens usuel est discutable. En fait, elle reste acceptable, si l'on tient compte du champ magnétique interplanétaire qui couple les particules et augmente le taux des collisions.

III. Distribution de température.

La question I.3.2. indique que la couronne est chauffée entre les rayons héliocentriques $r = a$ et $r = b$, or elle est parfaite-

ment transparente par les photons. On peut imaginer un transfert d'énergie par ondes acoustiques (Alfvén, Biermann, Schwarzschild), le bruit acoustique prenant naissance dans la zone convective du Soleil. Il est probable que les ondes acoustiques qui fuient le Soleil, se propageant dans le sens de la décroissance de la densité particulaire forment des ondes de choc. La nature des ondes responsables du transfert d'énergie n'est pas encore très claire car la présence du champ magnétique solaire complique la situation (ondes de Alfvén).

En simplifiant, la densité de courant d'énergie transportée par ces ondes de choc, vaut $3 N_e kT C_s$, avec $C_s = \left(\frac{2 \gamma RT}{M_H} \right)^{1/2}$ (vitesse du son). La conservation du flux d'énergie implique alors :

$$r^2 N_e T^{3/2} = \text{cste, soit encore : } T = T_0 \left(\frac{N_{e0}}{N_e} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3/2} .$$

A partir de mesures expérimentales de la densité électronique $N_e(r)$ des valeurs de la densité N_{e0} ($N_{e0} = 10^{10} \text{ m}^{-3}$) et de la température T_0 ($T_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ K}$) à la base de la couronne ($r_0 = R_\odot$), on peut estimer la température T du gaz coronal ; ainsi pour $r = 2 R_\odot$, $N_e = 2 \cdot 10^6 \text{ m}^{-3}$, on trouve $T = 2,3 \cdot 10^6 \text{ K}$.

Au voisinage de l'orbite terrestre, les observations indiquent que les électrons et les protons n'ont pas la même température

car $\frac{T_e}{T_p} \simeq 3 \text{ à } 4$. Cela est dû au fait que le temps caractéristique des échanges d'énergie entre électrons et protons est

supérieur à celui de l'expansion τ_{exp} défini par $\tau_{exp} = \left| \frac{dr/W}{dN/N} \right|$ (W vitesse du vent solaire).

Enfin, si on étudie la dispersion de la vitesse des protons dans le référentiel barycentrique local du vent solaire, on

constate que la température $T_p = \frac{M \langle v^2 \rangle}{k}$ dépend de la

direction. Ainsi, la sonde Vela 3 B (1965) a permis de tracer, pour des directions appartenant au plan de l'écliptique, le diagramme représenté fig. 8.

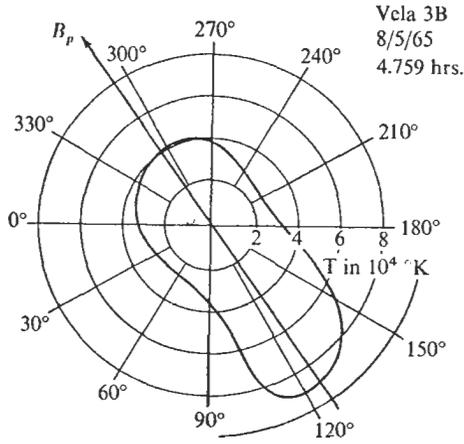


Fig. 8

ANNEXE 2

La question II.2.4. fait calculer le champ magnétique \mathbf{B} à partir d'une étude dans le référentiel tournant \mathcal{R}' , suivie d'un changement de référentiel. On peut vérifier que le champ \mathbf{B}

ainsi obtenu, satisfait bien l'équation $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ (écrite en II.1.2.).

Dans les calculs ci-après, les vecteurs sont donnés par leurs composantes en coordonnées sphériques.

$$\text{On calcule : } \mathbf{v} \begin{vmatrix} W \\ 0 \\ \Omega b \sin \vartheta \end{vmatrix} \text{ et } \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega b \sin \vartheta - W B_\varphi \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\Omega b \sin \vartheta B_r - W B_\varphi] = \dots \\ \dots - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[B_0(\vartheta, \varphi'_0) \left(\frac{b}{r} \right)^2 \Omega \right] \\ \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \Omega b \sin \vartheta - r W B_\varphi] = \dots \\ \dots \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [b^2 B_0(\vartheta, \varphi'_0) \Omega \sin \vartheta]. \end{array} \right.$$

Comme $\varphi'_0 = \varphi - \Omega t + \frac{b\Omega}{W} \left(\frac{r}{b} - 1 - \ln \frac{r}{b} \right)$,

$$\frac{\partial \varphi'_0}{\partial r} = \frac{\Omega}{W} \frac{r-b}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi'_0}{\partial \varphi} = 1,$$

en posant $\alpha_0 = \frac{\partial B_0(\vartheta, \varphi'_0)}{\partial \varphi'_0}$,

il vient : $\text{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \left| \begin{array}{l} -\Omega \alpha_0 \left(\frac{b}{r} \right)^2 \\ 0 \\ -\Omega \alpha_0 (b-r) \left(\frac{b}{r} \right)^2 \frac{\Omega \sin \vartheta}{W}. \end{array} \right.$

Le calcul de $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ est facile si l'on remarque que la dépendance temporelle est contenue dans φ'_0 , ainsi :

$$\frac{\partial B_0}{\partial t}(\vartheta, \varphi'_0) = -\Omega \alpha_0$$

et on constate aisément que $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$.

E.-R. TANTART (Paris).

SESSION DE 1987

Agrégation**SCIENCES PHYSIQUES**

Option : Chimie

Epreuve C**COMPOSITION DE CHIMIE**

(Applications)

(Durée : 6 heures)

SOLUTION**Premier problème**

ORBITALES ET SYMETRIE

Première partie

PRINCIPE DE LA METHODE DES VARIATIONS

1.1. PRINCIPE DE LA MÉTHODE DES VARIATIONS.

1.1.1. L'ensemble des fonctions Ψ_i formant une base complète orthonormée, on peut développer la fonction Φ sur cette base :

$$\Phi = \sum_{i=0}^n a_i \Psi_i$$

avec :

$$\langle \Psi_i | \Psi_i \rangle = 1; \quad \langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \Psi_i | \hat{H} | \Psi_j \rangle = E_i \delta_{ij}$$

d'où :

$$E = \frac{(\sum_{i=0}^n a_i^* \langle \Psi_i |) \hat{H} (\sum_{j=0}^n a_j | \Psi_j \rangle)}{(\sum_{i=0}^n a_i^* \langle \Psi_i |) (\sum_{j=0}^n a_j | \Psi_j \rangle)} = \dots$$

$$\dots \frac{\sum_{i=0}^n a_i^* a_i \langle \Psi_i | \hat{H} | \Psi_i \rangle}{\sum_{i=0}^n a_i^* a_i \langle \Psi_i | \Psi_i \rangle}$$

ou :

$$E = \frac{\sum_{i=0}^n a_i^* a_i E_i}{\sum_{i=0}^n a_i^* a_i}$$

d'où :

$$E - E_0 = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^* a_i (E_i - E_0)}{\sum_{i=0}^n a_i^* a_i}.$$

Tous les termes $a_i^* a_i$ et $(E_i - E_0)$ étant positifs, $E - E_0 > 0$, et l'énergie calculée à partir de la fonction Φ est supérieure à la plus petite valeur E_0 .

1.1.2. Principe de la méthode des variations : lorsque l'on peut faire varier, par l'intermédiaire d'un ou de plusieurs paramètres, la nature de la fonction approchée Φ , on calcule des valeurs de l'énergie qui sont d'autant plus proches de la valeur exacte qu'elles sont plus petites (en valeur algébrique). On cherche donc à rendre minimum, par rapport à chacun des paramètres, cette valeur de l'énergie calculée à partir de la fonction Φ : ces conditions de minimum fournissent les relations permettant de déterminer la valeur des paramètres correspondant à la « meilleure » fonction.

1.2. APPLICATION AU CAS DE DEUX ORBITALES.

1.2.1. Une orbitale (atomique ou moléculaire) est une fonction d'onde *monoélectronique* décrivant le comportement d'un électron (dans un atome ou dans une molécule), et solution de l'équation de Schrödinger du système quantique correspondant.

1.2.2. L'énergie est :

$$E(c_1, c_2) = \frac{\langle c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 | \hat{H} | c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \rangle}{\langle c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 | c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \rangle}$$

qui est bien de la forme $E(c_1, c_2) = \frac{N(c_1, c_2)}{D(c_1, c_2)}$.

La dérivée de E par rapport à l'un des paramètres est :

$$\frac{\partial E}{\partial c_1} = \frac{\partial \left(\frac{N}{D} \right)}{\partial c_1} = \frac{1}{D} \frac{\partial N}{\partial c_1} - \frac{N}{D^2} \frac{\partial D}{\partial c_1} = \dots$$

$$\dots \frac{1}{D^2} \left(D \frac{\partial N}{\partial c_1} - N \frac{\partial D}{\partial c_1} \right)$$

qui s'annule pour une valeur de c_1 telle que :

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial c_1}}{\frac{\partial D}{\partial c_1}} = \frac{N}{D} = E$$

où E est la valeur qui correspond au minimum de l'énergie par rapport au paramètre c_1 .

1.2.3.

$$E(c_1, c_2) = \frac{c_1^2 H_{11} + c_1 c_2 (H_{12} + H_{21}) + c_2^2 H_{22}}{c_1^2 + c_2^2 + 2 c_1 c_2 S_{12}}$$

Lorsque E est minimum par rapport à c_1 , on a, d'après 1.2.2. :

$$E = \frac{2 c_1 H_{11} + 2 c_2 H_{12}}{2 c_1 + 2 c_2 S_{12}} = \frac{c_1 H_{11} + c_2 H_{12}}{c_1 + c_2 S_{12}}$$

Lorsque E est minimum par rapport à c_2 , on a, d'après 1.2.2. :

$$E = \frac{2 c_1 H_{21} + 2 c_2 H_{22}}{2 c_1 S_{12} + 2 c_2} = \frac{c_1 H_{21} + c_2 H_{22}}{c_1 S_{21} + c_2}$$

d'où les équations :

$$c_1 (H_{11} - E) + c_2 (H_{12} - E S_{12}) = 0$$

$$c_1 (H_{21} - E S_{21}) + c_2 (H_{22} - E) = 0.$$

1.2.4. a) Les deux équations précédentes, linéaires et homogènes en c_1 et c_2 , n'ont des solutions différentes de 0 que si le déterminant des coefficients de c_1 et c_2 est nul :

$$\begin{vmatrix} (H_{11} - E) & (H_{12} - E S_{12}) \\ (H_{21} - E S_{21}) & (H_{22} - E) \end{vmatrix} = 0.$$

1.2.4. b) Ce déterminant est du second degré en E et le système précédent n'a donc de solutions que pour les deux valeurs de E qui annulent le déterminant. Ces deux valeurs de E correspondent aux « meilleures » valeurs possibles (pour le type de fonctions à deux paramètres considéré), c'est-à-dire qu'elles sont des approximations de la plus basse valeur de l'énergie, et de la valeur immédiatement supérieure.

1.2.5. Une des valeurs, E_1 , par exemple, étant choisie, le système d'équations se réduit à une seule équation indépendante, par exemple :

$$c_{11}(H_{11} - E_1) + c_{12}(H_{12} - ES_{12}) = 0$$

qui permet de calculer c_{12} en fonction de c_{11} (pour distinguer les coefficients relatifs à la solution E_1 ; on a ajouté 1 en premier indice). Pour déterminer c_{11} , il faut donc une condition supplémentaire. On choisit de prendre c_{11} de telle sorte que la fonction correspondante soit normée.

1.3. CAS DE DEUX ORBITALES $2p_z$.

1.3.1. Dans la méthode de Hückel, on suppose que $H_{11} = H_{22}$ (ce qui, ici, est vrai par symétrie si les deux carbones sont identiques) et $S_{12} = S_{21} = 0$.

Plus généralement, on fait les approximations suivantes :

- toutes les intégrales H_{ii} sont égales à une même quantité α ,
- toutes les intégrales H_{ij} sont égales à une même quantité β si les atomes i et j sont directement liés,
- toutes les intégrales H_{ij} sont nulles si les atomes i et j ne sont pas directement liés ;
- toutes les intégrales S_{ij} sont égales à δ_{ij} .

1.3.2. Intégrale de Coulomb :

$$\alpha = \langle \varphi_i | \hat{H} | \varphi_j \rangle$$

Intégrale d'échange :

$$\beta = \langle \varphi_i | \hat{H} | \varphi_j \rangle = \langle \varphi_j | \hat{H} | \varphi_i \rangle.$$

Avec les approximations de Hückel, le déterminant précédent devient :

$$\begin{vmatrix} \alpha - E & \beta \\ \beta & \alpha - E \end{vmatrix} = 0.$$

1.3.3. D'où les deux valeurs de l'énergie :

$$E = \alpha + \beta \qquad E = \alpha - \beta.$$

1.4. Les raisonnements et les dérivations de la question 1.2. ne font, à aucun moment, intervenir le fait que les orbitales φ_1 et φ_2 sont des orbitales atomiques. (Ce fait n'intervient que dans l'approximation de Hückel et la définition de α et β). Si on remplace ces orbitales atomiques par des orbitales moléculaires,

le formalisme mathématique reste le même ; en particulier, les valeurs de l'énergie seront données par les solutions du déterminant :

$$\begin{vmatrix} (H_{11} - E) & (H_{12} - ES_{12}) \\ (H_{21} - ES_{21}) & (H_{22} - E) \end{vmatrix} = 0.$$

Seules la définition et la valeur des intégrales H_{11} , H_{22} , $H_{12} = H_{21}$ et $S_{12} = S_{21}$ auront changé.

1.5. INTERACTIONS ENTRE ORBITALES.

D'après 1.4., et les hypothèses faites, les valeurs de l'énergie correspondant à la fonction Ψ sont solutions de l'équation :

$$\begin{vmatrix} E_1 - E & H_{12} \\ H_{12} & E_2 - E \end{vmatrix} = 0$$

ou :

$$(E_1 - E)(E_2 - E) - H_{12}^2 = E^2 - E(E_1 + E_2) - H_{12}^2 + E_1 E_2 = 0.$$

Le polynôme précédent (dont le coefficient du terme du second degré est > 0) prend des valeurs négatives pour $E = E_1$ ou $E = E_2$; donc E_1 et E_2 sont situées entre les racines E et E^* , c'est-à-dire que :

$$E < E_1 < E_2 < E^*.$$

1.6. \hat{H} appartient à la représentation irréductible complètement symétrique du groupe de symétrie de la molécule. Pour que l'intégrale H_{12} ne soit pas nulle pour raison de symétrie, il faut que le produit direct des représentations irréductibles auxquelles appartiennent Ψ_1 et Ψ_2 contienne la représentation irréductible complètement symétrique, ce qui n'est possible que si Ψ_1 et Ψ_2 appartiennent à la même représentation irréductible.

Considérons le cas d'une molécule possédant, par exemple, un plan de symétrie P ; M et M' deux points qui se correspondent par cette symétrie. Supposons également que Ψ_1 et Ψ_2 soient l'une symétrique, l'autre antisymétrique par rapport à ce plan. A tout élément de volume $d\tau$ autour du point M d'un demi-espace, on peut faire correspondre un élément de volume $d\tau'$ symétrique, autour du point M' de l'autre demi-espace. Pour ces deux éléments de volume, les quantités $\Psi_1^* \hat{H} \Psi_2 d\tau$ et $\Psi_1^* \hat{H} \Psi_2 d\tau'$ ont des valeurs opposées et leur somme est nulle. L'intégrale H_{12} , qui est une somme de ces quantités élémentaires, étendue aux deux demi-espaces symétriques, est donc nulle. Ce raisonnement,

qui devrait être fait pour chaque type de symétrie, n'a évidemment pas la généralité du résultat de la théorie des groupes.

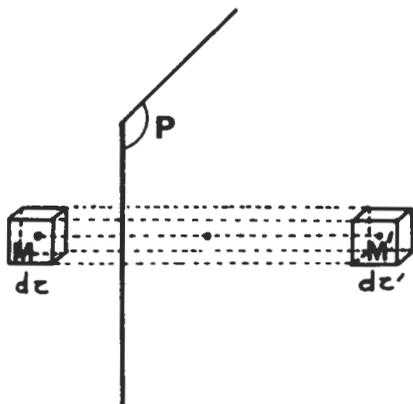


Fig. 1

1.7. INTERACTION FAIBLE.

1.7.1. Si, dans l'équation $(E_1 - E)(E_2 - E) - H_{12}^2 = 0$, on considère que $E \simeq E_1$, on aura :

$$E - E_2 \simeq E_1 - E_2 \quad \text{et} \quad E \simeq E_1 - \frac{H_{12}^2}{E_2 - E_1}.$$

De même si $E^* \simeq E_2$, on aura :

$$E^* - E_1 \simeq E_2 - E_1 \quad \text{et} \quad E^* \simeq E_2 + \frac{H_{12}^2}{E_2 - E_1}.$$

1.7.2. Pour que l'interaction soit efficace, il faut que le terme $\frac{H_{12}^2}{E_2 - E_1}$ soit grand. Pour une même valeur de l'interaction H_{12} , ce terme sera d'autant plus grand que $E_2 - E_1$ sera petit, c'est-à-dire que les orbitales seront plus voisines en énergie.

1.7.3. Il faut en outre que le terme H_{12} soit grand, ce qui implique :

- qu'il n'est pas nul pour raison de symétrie,
- que l'orientation des orbitales est telle qu'elles présentent un bon recouvrement.

1.8. EVOLUTION DE DEUX ORBITALES D'UN MÊME SYSTÈME.

1.8.1. Soit E_1^A et E_2^B les valeurs qu'auraient les énergies de Ψ_1 et Ψ_2 aux points A et B correspondant à un même état d'évolution du système. D'après 1.7.1., l'interaction éventuelle de ces deux orbitales se traduit par :

— un abaissement de l'énergie E_1^A qui devient :

$$E_{1A'} \simeq E_1^A - \frac{H_{12}^2}{E_2^B - E_1^A},$$

ce qui correspond au point A',

— une élévation de l'énergie E_2^B qui devient :

$$E_{2B'} \simeq E_2^B + \frac{H_{12}^2}{E_2^B - E_1^A},$$

ce qui correspond au point B'.

Si H_{12} n'est pas nul, cet abaissement et cette élévation sont d'autant plus grands que $E_2^B - E_1^A$ est plus petit, c'est-à-dire que l'on est plus près du point de croisement : les lignes de corrélation s'infléchissent donc l'une vers le bas et l'autre vers le haut, et l'on a un « croisement évité ».

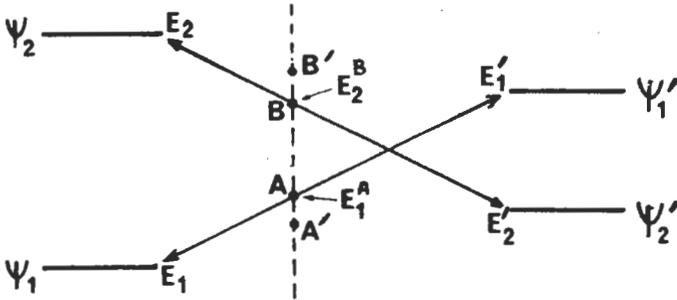


Fig. 2

1.8.2. Ce croisement évité correspond au diagramme :

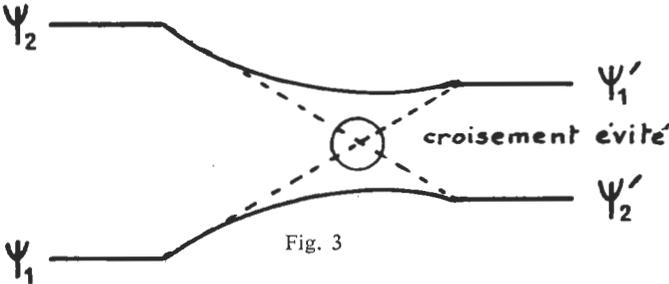


Fig. 3

1.8.3. Si les orbitales n'ont pas la même symétrie, $H_{12} = 0$ (cf 1.6.), donc les orbitales sont sans interaction et le diagramme rattache Ψ_1 à Ψ'_1 et Ψ_2 à Ψ'_2 .

Deuxième partie

TRACE D'UN DIAGRAMME DE CORRELATION

2.1. Le modèle choisi est qualitativement raisonnable car il rend compte des caractéristiques essentielles du système :

- les orbitales considérées sont celles qui subissent de profonds changements au cours de la réaction,
- dans les molécules d'éthylène séparées, l'intégrale β est la même que celle d'une molécule d'éthylène isolée et les interactions entre les atomes 1 et 4, et entre 2 et 3, sont nulles,
- dans le cyclobutane, il n'y a plus de liaison π entre les atomes 1 et 2, et entre 3 et 4, et les liaisons σ_{14} et σ_{23} se caractérisent par des interactions β_{14} et β_{23} égales à 2β , ce qui traduit le fait qu'une liaison σ est plus forte qu'une liaison π .

2.2. DÉTERMINANT DE HÜCKEL.

Les intégrales β_{ij} sont négatives lorsque, comme dans la molécule d'éthylène, elles correspondent à des recouvrements entre lobes de même signe. En particulier, compte tenu du fait que $\beta < 0$ et que les orbitales φ_1 et φ_4 ou φ_2 et φ_3 se recouvrent par des lobes de signes opposés, on a $\beta_{14} = \beta_{23} = -2\lambda\beta > 0$.

$$\begin{vmatrix} \alpha - E & \beta_{12} & 0 & \beta_{14} \\ \beta_{12} & \alpha - E & \beta_{23} & 0 \\ 0 & \beta_{23} & \alpha - E & \beta_{34} \\ \beta_{14} & 0 & \beta_{34} & \alpha - E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha - E & \beta(1-\lambda) & 0 & -2\lambda\beta \\ \beta(1-\lambda) & \alpha - E & -2\lambda\beta & 0 \\ 0 & -2\lambda\beta & \alpha - E & \beta(1-\lambda) \\ -2\lambda\beta & 0 & \beta(1-\lambda) & \alpha - E \end{vmatrix} = 0$$

2.3. ORBITALES DE SYMÉTRIE.

2.3.1. et 2.3.2. Des orbitales adaptées à la symétrie du système doivent être soit symétriques soit antisymétriques par rapport aux plans P_1 et P_2 . On notera S_i ou A_i la symétrie ou l'antisymétrie par rapport au plan P_i . On peut ainsi obtenir les quatre orbitales normalisées :

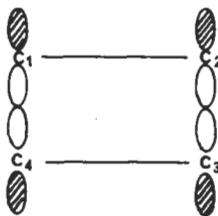
$$\begin{aligned} S_1 S_2 : & \quad \chi_1 = 1/2 (\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) \\ S_1 A_2 : & \quad \chi_2 = 1/2 (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) \\ A_1 S_2 : & \quad \chi_3 = 1/2 (\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4) \\ A_1 A_2 : & \quad \chi_4 = 1/2 (\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4). \end{aligned}$$

Dans ce cas, les quatre orbitales ayant des symétries différentes, tous les termes de type $H_{ij} = \langle \chi_i | \hat{H} | \chi_j \rangle$ et $S_{ij} = \langle \chi_i | \chi_j \rangle$ sont nuls si $i \neq j$, et le déterminant se réduit au produit $\prod_{i=1}^4 (H_{ii} - E) = 0$.

2.3.3. Solution $S_1 S_2$:

$$E_1 = H_{11} = 1/4 \langle \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 | \hat{H} | \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 \rangle$$

$$= 1/4 (4\alpha + 4\beta(1-\lambda) + 8\lambda\beta) = \alpha + \beta(1+\lambda).$$



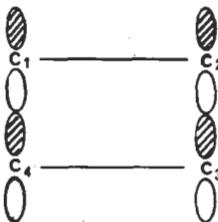
combinaison χ_1

Fig. 4

Solution $S_1 A_2$:

$$E_2 = H_{22} = 1/4 \langle \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 | \hat{H} | \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 \rangle$$

$$= 1/4 (4\alpha + 4\beta(1-\lambda) - 8\lambda\beta) = \alpha + \beta(1-3\lambda).$$



combinaison χ_2

Fig. 5

Solution $A_1 S_2$:

$$E_3 = H_{33} = 1/4 \langle \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 | \hat{H} | \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 \rangle$$

$$= 1/4 (4\alpha - 4\beta(1-\lambda) + 8\lambda\beta) = \alpha - \beta(1-3\lambda).$$

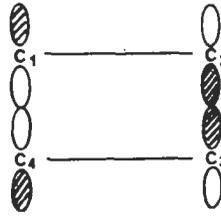
combinaison χ_3

Fig. 6

Solution $A_1 A_2$:

$$E_4 = H_{44} = 1/4 \langle \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 | \hat{H} | \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 \rangle$$

$$= 1/4 (4\alpha - 4\beta(1-\lambda) - 8\lambda\beta) = \alpha - \beta(1 + \lambda).$$

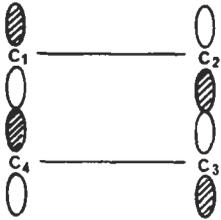
combinaison χ_4

Fig. 7

2.4. CAS EXTRÊMES.

— si $\lambda = 0$ on a $E_1 = E_2 = \alpha + \beta$ et $E_3 = E_4 = \alpha - \beta$ — si $\lambda = 1$ on a $E_1 = E_3 = \alpha + 2\beta$ et $E_2 = E_4 = \alpha - 2\beta$.

Dans les deux cas, on a deux ensembles d'orbitales dégénérées.

2.5. Si λ est petit, on pourra supposer que $3\lambda < 1$, ou, puisque $\beta < 0$, $\beta - 3\lambda\beta < 0$. Les niveaux sont dans l'ordre :

$$(E_1 = \alpha + \beta + \lambda\beta) < (E_2 = \alpha + \beta - 3\lambda\beta) < \dots$$

$$\dots (E_3 = \alpha - \beta + 3\lambda\beta) < (E_4 = \alpha - \beta - \lambda\beta).$$

De même, si $\lambda = 1 - \mu$, on obtiendra, en désignant par E'_i les niveaux correspondant aux orbitales d'énergie E_i , et obtenus

par variation continue du paramètre λ , et en supposant que $3\mu < 2$:

$$E'_1 = \alpha + 2\beta - \mu\beta$$

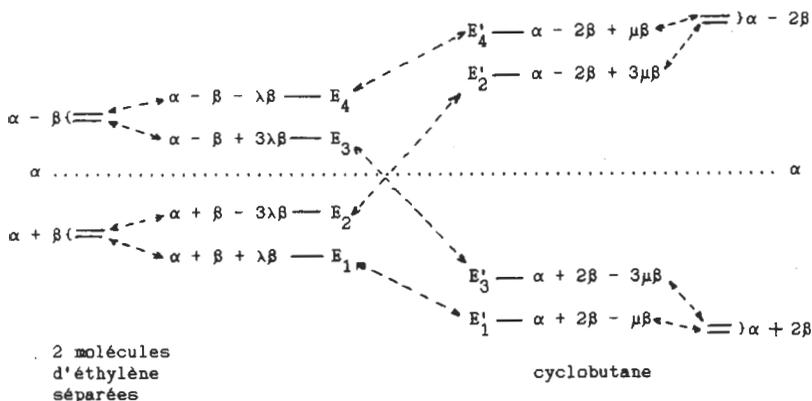
$$E'_2 = \alpha - 2\beta + 3\mu\beta$$

$$E'_3 = \alpha + 2\beta - 3\mu\beta$$

$$E'_4 = \alpha - 2\beta + \mu\beta.$$

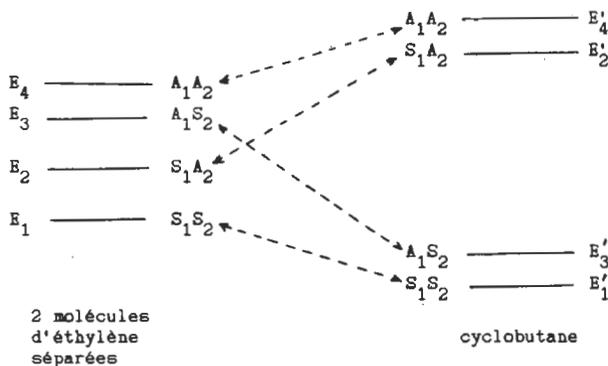
Ces niveaux sont dans l'ordre : $E'_1 < E'_3 < E'_2 < E'_4$.

2.6. DIAGRAMME DE CORRÉLATION.

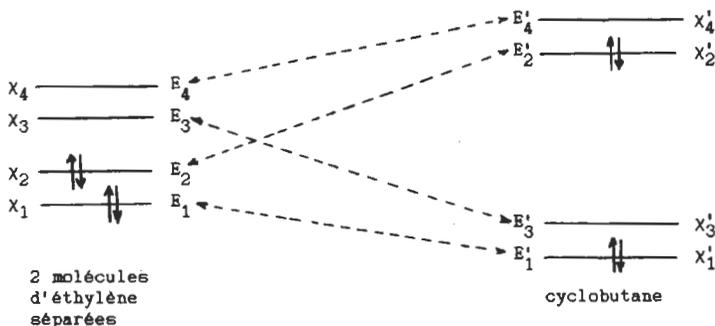


2.7. DIAGRAMME DE CORRÉLATION D'APRÈS LA SYMÉTRIE.

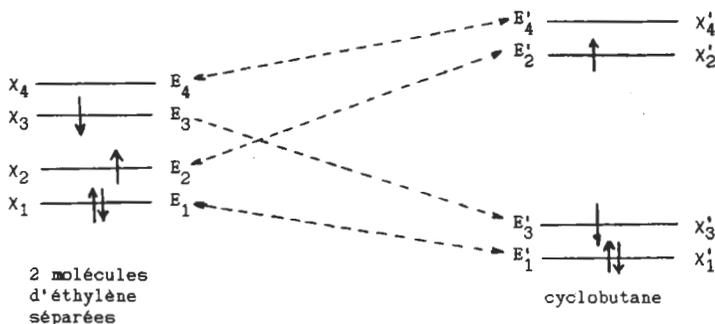
On obtient le même diagramme que le précédent en reliant les orbitales de même symétrie.



2.8. La dimérisation thermique de l'éthylène se fait à partir de l'état fondamental, dans lequel les orbitales π occupées sont x_1 et x_2 . Une évolution électronique continue, dans laquelle les électrons « suivent » l'orbitale où ils se trouvent initialement, conduit en effet à un état très excité du cyclobutane. Ce processus demande une énergie d'activation considérable (pour l'excitation des électrons π il faut fournir une énergie $-4\beta > 0$) et ne se fait donc pas.



2.9. On peut dimériser l'éthylène par une réaction photochimique, qui correspond au diagramme de corrélation ci-après :



L'état initial correspond au premier état excité du complexe des deux molécules d'éthylène en interaction. L'évolution du système, où chaque électron « suit » l'évolution de l'orbitale qui le décrit, aboutit au premier état excité du cyclobutane, ce qui demande une énergie d'activation moins importante que dans le processus thermique, avec un gain d'énergie de 2β par rapport au niveau excité du système de départ.

Deuxième problème

BIOSYNTHESE DU CHOLESTEROL

Première partie

SYNTHESE DE LA LACTONE DE L'ACIDE MEVALONIQUE

Nota : L'énoncé de cette partie contenait deux interventions d'atomes; l'une (dans 6.2.2.) était facilement décelable; la deuxième (dans 2.4.) n'avait aucune incidence sur les raisonnements ultérieurs. Elles seront précisées et commentées avec ces questions.

1.1.1. *Molécule asymétrique* : molécule n'ayant aucun élément de symétrie.

Molécule dissymétrique : molécule qui, bien que possédant certains éléments de symétrie (groupes C_n et D_n , $n \geq 2$), n'est pas superposable à son image par rapport à un plan.

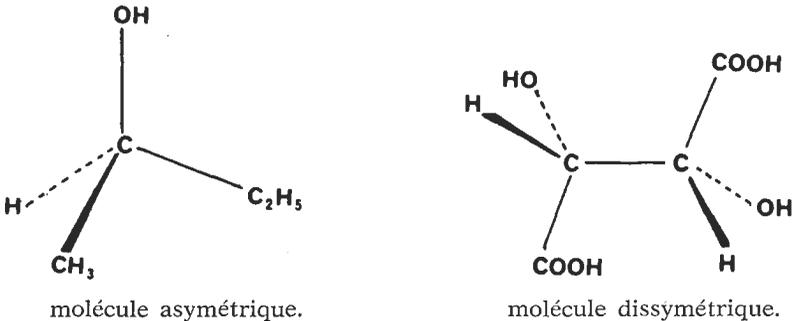


Fig. 8

1.1.2. Principe de la nomenclature (R, S).

Dans le cas d'un atome tétravalent (carbone) :

a) On classe les quatre substituants rattachés à ce carbone selon des règles de priorité.

b) On observe la molécule dans la direction de la liaison qui lie le carbone au groupement classé 4^e, en se plaçant à l'opposé de ce dernier groupement (fig. 9).

c) Si, pour passer du groupe 1 au groupe 2, puis au groupe 3, on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, le carbone considéré est de configuration absolue R (carbone Rectus); sinon, il est de configuration S (carbone Sinister).

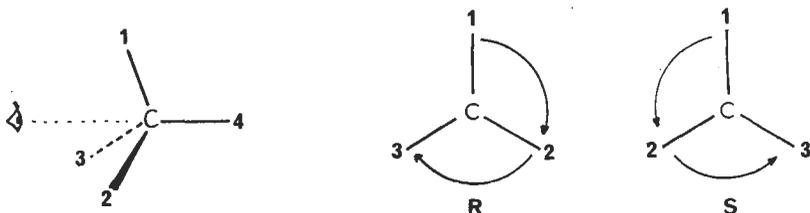


Fig. 9

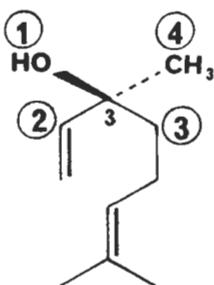
Pour le classement :

a) On considère l'ensemble (1^{er} ensemble) des quatre atomes directement liés au carbone dont on cherche la configuration, et on les classe par numéro atomique décroissant. Le rang ainsi déterminé pour chaque atome est celui de tout le groupe auquel il appartient.

b) Si une décision n'est pas possible entre certains atomes du premier ensemble, on considère les atomes qui leur sont directement rattachés et qui forment les deuxièmes ensembles : on classe les atomes de ces 2^{es} ensembles selon la même règle basée sur les numéros atomiques ; en outre, les doubles (triples) liaisons sont considérées comme deux (trois) liaisons simples, en introduisant à l'autre extrémité un (deux) atome(s) fictif(s) ; si l'un des atomes d'un des ensembles a la priorité sur ceux de l'autre (ou des autres) ensemble(s) il confère cette priorité à son groupe. Sinon on continue l'examen des ensembles suivants, jusqu'à ce que l'indétermination puisse être levée.

c) Lorsqu'on a épuisé les possibilités de classement avec la règle des numéros atomiques, on différencie les isotopes (dans le cas des composés qui doivent leur dissymétrie à la seule présence de ces isotopes) en les classant par nombre de masse décroissant.

1.1.3. L'atome C (3) de **11** est de configuration (S). (Les numéros circlés correspondent à l'ordre de priorité).



11

Fig. 10

1.2. HYDROBORATION DU LINALOL.

Le mécanisme de la réaction d'hydroboration est, dans le détail, assez complexe (voir références). Le sens de l'attaque est le résultat combiné des effets électroniques et des effets stériques ; il favorise la fixation du bore sur l'atome de carbone le moins substitué, qui est à la fois le plus riche en électrons (BH_3 est un acide de Lewis) et le moins encombré. Le transfert de l'hydrogène se fait ensuite de façon probablement concertée, et correspond à une *cis*-addition sur la double liaison. L'alkylborane ainsi formé peut additionner une 2^e, puis une 3^e molécule d'alcène (si celui-ci n'est pas trop substitué).

La coupure par l'eau oxygénée remplace la liaison C—B par une liaison C—OH. L'ensemble des deux réactions est équivalent à une addition *cis* (ou addition *syn*) d'une molécule d'eau.

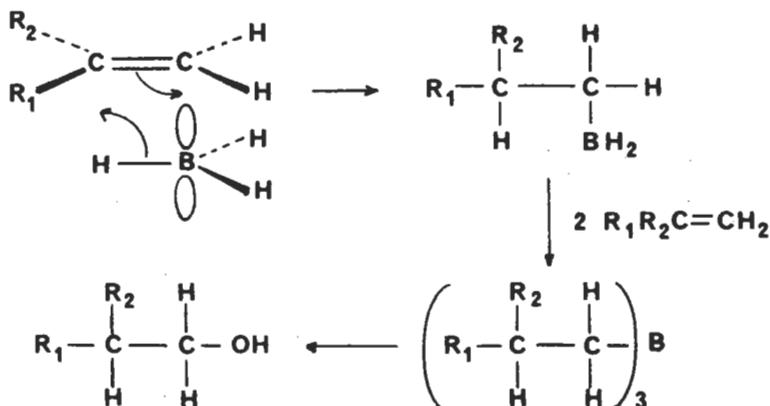


Fig. 11

1.2.2. L'hydroboration des deux doubles liaisons introduit deux groupes hydroxyles sur les deux atomes de carbone les moins substitués. A partir de **11**, on obtient le diméthyl-3,7 octa-netriol-1,3,6 **12** (fig. 12).

1.3. ACÉTALISATION DE **12** ET OXYDATION DE L'ACÉTAL **13**.

1.3.1. Structure de **13** et **14** :

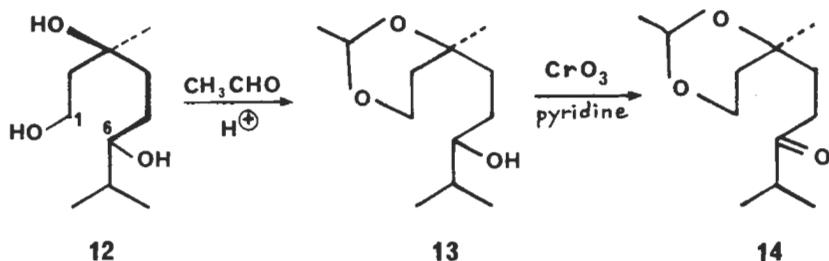


Fig. 12

1.3.2. La protection de l'alcool primaire en C(1) est indispensable pour éviter son oxydation en même temps que celle de l'alcool en C(6). La proximité de l'alcool tertiaire et de l'alcool primaire permet une protection régio-sélective par formation d'acétal cyclique ayant un cycle à 6 atomes, beaucoup plus facile à former que les autres acétals possibles (cycles à 7 ou 9 atomes).

Le groupe protecteur, l'acétal, est stable en milieu basique et hydrolysé en milieu acide : d'où la nécessité d'utiliser un oxydant dans un solvant basique (pyridine).

1.3.3. **15** a le même nombre d'atomes de carbone que **12** et seulement deux atomes d'oxygène, appartenant à un cycle dioxanne : la structure **15**, qui provient d'une trans-acétalisation acido-catalysée, est donnée ci-après :



15

Fig. 13

1.4. 1.4.1. La réaction est une réaction d'addition-élimination du carbanion, formé par arrachement d'un proton en position α du groupe carbonyle de **14**, sur le groupe carbonyle du méthanoate de méthyle.

1.4.2. La forme prédominante est celle dans laquelle l'aldéhyde **16** est sous forme énolique.

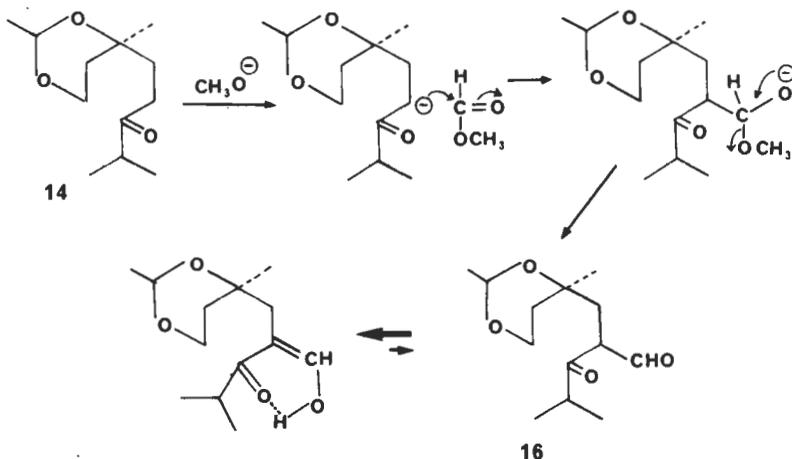


Fig. 14

1.5. Par analogie avec la réaction d'oxydation de l'hydroxyméthylène-2 cyclohexanone :

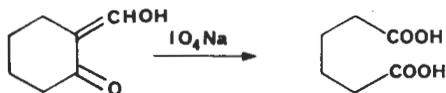


Fig. 15

l'oxydation de **16** donne l'acide mévalonique, en équilibre avec la lactone, et de l'acide méthyl-2 propanoïque. A pH = 5, l'acétal est hydrolysé.

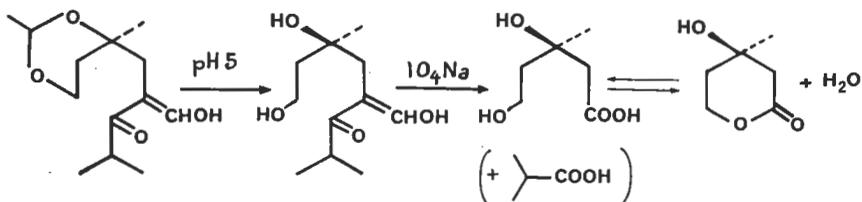


Fig. 16

Deuxième partie

BIOSYNTHESE DU FARNESOL

2.1. FORMATION DU PYROPHOSPHATE DE FARNÉSYLE.

2.1.1. En milieu acide, l'isomérisation d'une double liaison résulte de l'addition d'un proton sur la double liaison, pour former le carbocation le plus stable; celui-ci se stabilise par perte d'un proton provenant d'un carbone en α du carbocation :

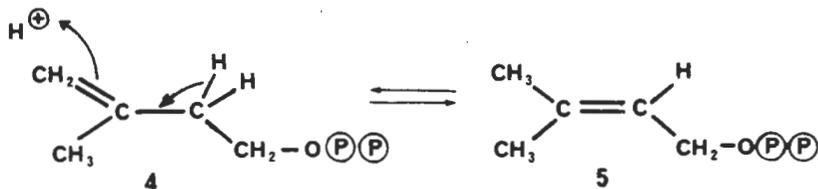


Fig. 17

2.1.2. Le carbocation le plus stable est obtenu par départ du groupe pyrophosphate de 5, car le carbocation formé est allylique. Ce carbocation allylique attaque ensuite la double liaison de 4 comme l'avait fait précédemment le proton et la suite de la réaction est analogue à la précédente.

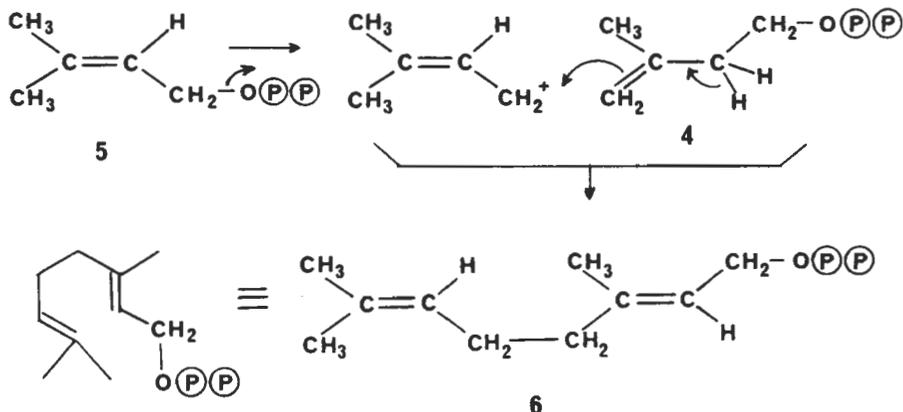


Fig. 18

2.1.3. Le produit 6 obtenu dans la réaction précédente est encore un pyrophosphate allylique; il peut conduire à un carbo-

Trans-élimination (ou élimination *anti*) : élimination dans laquelle les deux liaisons coupées sont situées de part et d'autre du plan de la double liaison formée. Exemple : élimination E2 de HBr.

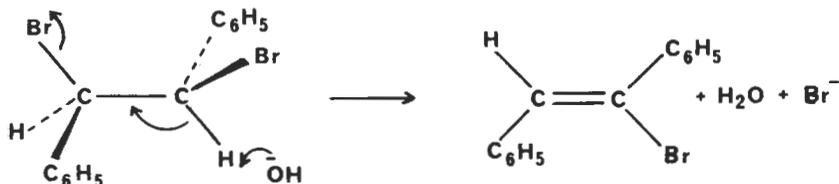


Fig. 21

2.3.2.

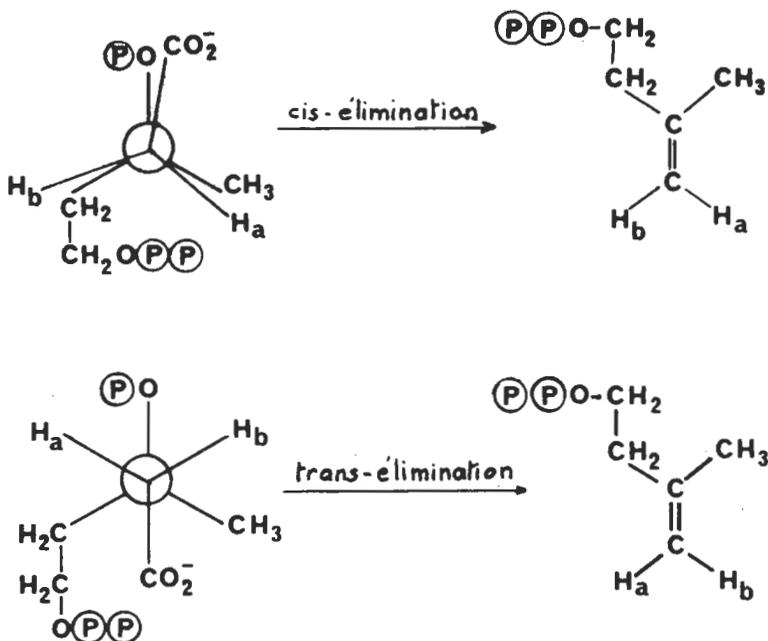


Fig. 22

2.4. ISOMÉRISATION DU PYROPHOSPHATE D'ISO-PENTÉNYLE EN PYROPHOSPHATE DE DIMÉTHYL-ALLYLE.

2.4.1. Dans la conformation (que l'on notera 10 A) de la fig. 10 de l'énoncé, l'axe de la liaison C(4) — Hc est presque parallèle à

l'axe des orbitales p des carbones de la double liaison (la liaison C(4)—Hc n'est qu'approximativement perpendiculaire au plan de la double liaison, puisque l'angle C(3)—C(4)—Hc est voisin de 109°). Dans ces conditions, le recouvrement de l'orbitale σ (C(4)—Hc) et de l'orbitale π est maximum et les électrons de la liaison σ (C(4)—Hc) peuvent assister la formation du carbocation en C(3); lors du départ de Hc sous forme de proton, l'orbitale p du carbone C(4) a alors l'orientation qui permet le recouvrement maximum avec l'orbitale p du carbocation en C(3), c'est-à-dire la formation d'une double liaison C(3)—C(4) (fig. 23).

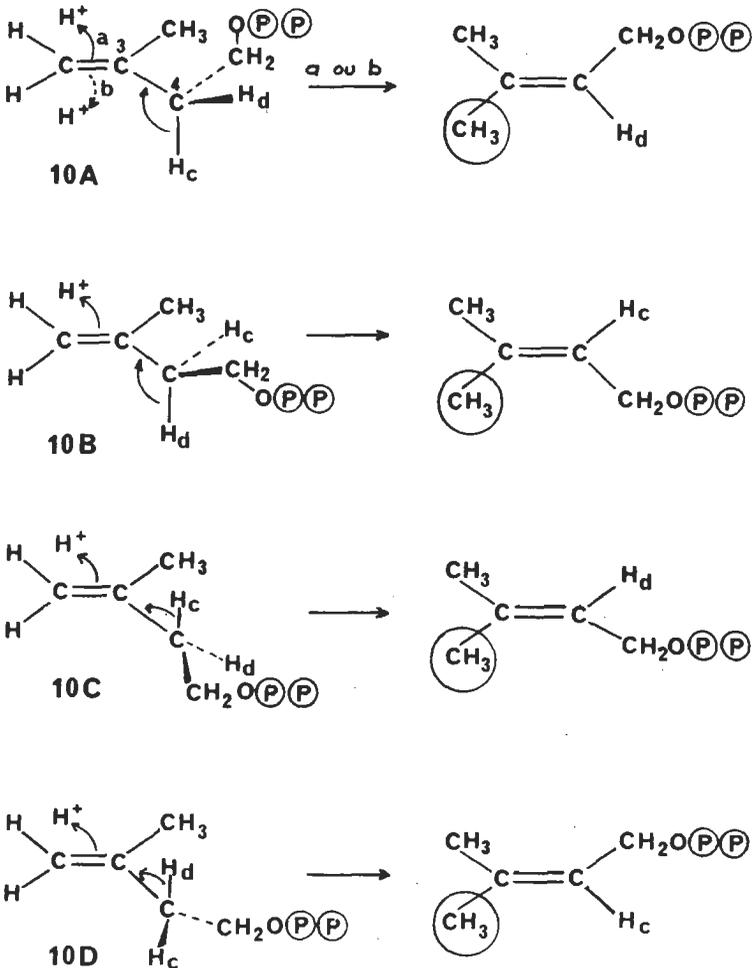


Fig. 23

2.4.2. Autres conformations présentant les mêmes particularités géométriques : ce sont les trois conformations **10 B** à **10 D** (fig. 23).

Remarque : Dans la fig. 10 de l'énoncé, les atomes Hc et Hd ont été par erreur permutés, par rapport à leur configuration dans l'acide mévalonique **3**.

La conformation **10 A** est donc en fait l'énantiomère d'une conformation correspondant au pyrophosphate dérivé de l'acide **3**. On peut remarquer que cette conformation énantiomère est celle que l'on obtient en permutant Hc et Hd dans la conformation **10 D**, et que **10 A** comme **10 D** (après la permutation) donnent le même produit d'isomérisation. De même **10 B** et **10 C** ont (après permutation de Hc et Hd dans **10 C**) une relation d'énantiomérisation et donnent le même produit d'isomérisation. La conséquence de cette interversion, tant qu'on ne peut pas distinguer les deux faces de la double liaison par un marquage de son extrémité CH₂, est que les résultats qu'on pourra déduire dans la suite, dans la mesure où ils feront intervenir les conformations **10 A** à **10 D**, correspondront aux résultats réels moyennant les échanges **10 A** ↔ **10 D** et **10 B** ↔ **10 C**. Mais cette interversion est sans autre incidence sur les raisonnements demandés dans la suite du problème.

2.4.3. Il y a, *a priori*, 8 possibilités d'élimination, selon que, pour chacune des conformations **10 A** à **10 D**, le proton s'additionne sur la double liaison par la face supérieure ou par la face inférieure, que le proton éliminé est Hc ou Hd et que l'addition et l'élimination se font de façon *syn* ou *anti*. En réalité, dans le cas présent on ne peut pas distinguer les deux atomes d'hydrogène terminaux de la double liaison, et on ne peut pas différencier l'attaque du proton par l'une ou l'autre face, comme le montre le cas de la conformation **10 A** (fig. 23).

Il suffit donc d'envisager pour la suite l'attaque du proton par la seule face supérieure. Cela donne, pour les autres conformations, les résultats indiqués sur la fig. 23.

2.5. La réaction de **4** sur **5** est l'addition du cation provenant du départ du groupe pyrophosphate de **5** sur la double liaison de **4**. Ce cation joue le même rôle que l'ion H⁺ de la question 2.4., donc les mêmes problèmes stéréochimiques se posent :

- face de la double liaison par laquelle se fixe le cation,
- détermination de l'hydrogène Hc ou Hd éliminé,
- conformation dans laquelle se fait cette élimination,
- cette fois il est possible de différencier les carbones C(2) et C(6) : C(6) reste un méthyle et C(2) est le carbone rattaché à l'unité isoprényle qui s'est fixée.

Troisième partie

MARQUAGES ISOTOPIQUES

3.1. MARQUAGE SUR LE CARBONE C (4).

3.1.1. Principe de la nomenclature Z et E.

Sur la double liaison, on classe les substituants d'un même carbone selon les règles de priorité de la nomenclature (R, S). Si les deux groupes qui ont le premier rang sont du même côté de la double liaison, il s'agit de l'isomère Z, sinon c'est l'isomère E :



Fig. 24

3.1.2. Le produit 17 est de configuration E :

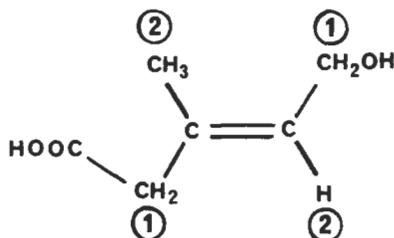


Fig. 25

3.1.3. Mécanisme de formation 21 : addition nucléophile de l'amine sur le carbonyle de la lactone, suivie d'une élimination de l'autre oxygène, qui fixe un proton pour donner la fonction alcool.

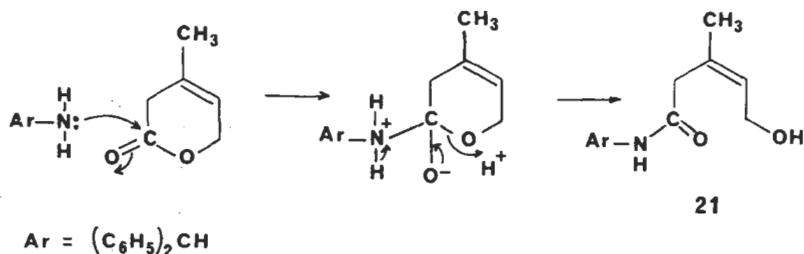


Fig. 26

3.1.4. a) et b) Voir fig. 27. On a précisé sur chaque structure la configuration absolue des atomes C(3) et C(4). On notera en particulier le changement de nomenclature de la configuration de C(3) sans changement de configuration lorsqu'on passe de **22** à **24** ou de **23** à **25**.

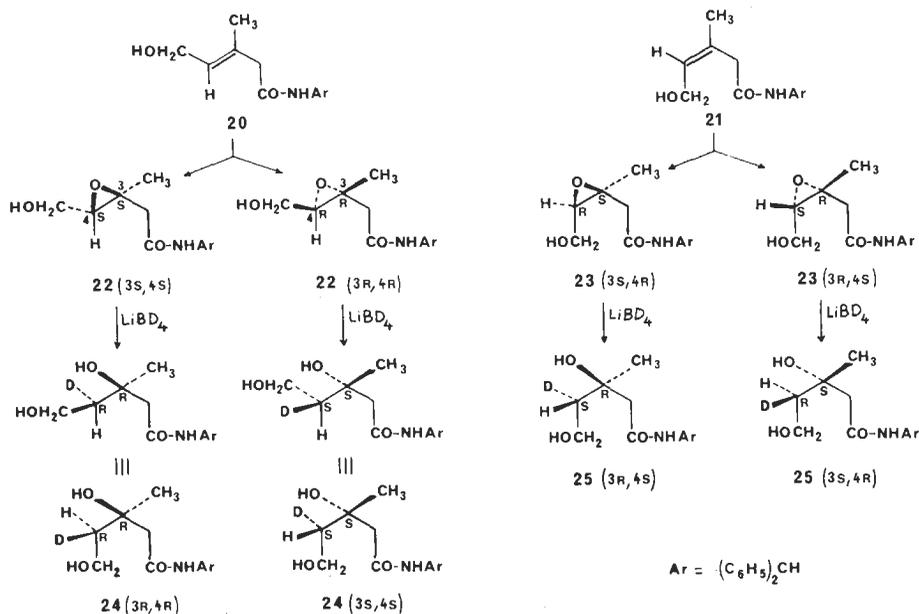


Fig. 27

3.1.4. c) Mécanisme de l'hydrolyse basique de l'amide **25** : c'est une réaction d'addition-élimination sur le carbonyle de l'amide **25**. En milieu basique, l'acide est sous forme d'ion carboxylate.

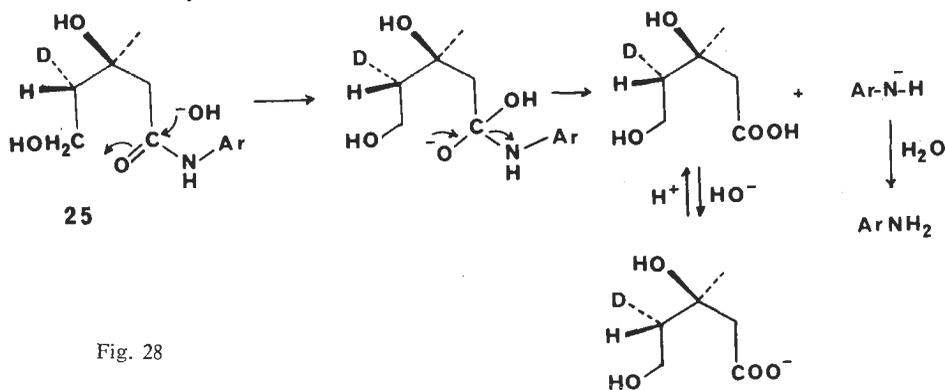


Fig. 28

3.1.4. d) On obtient :

- le mélange racémique **E + F** à partir de **24**
- le mélange racémique **G + H** à partir de **25**.

3.1.4. e) La mévalonate kinase a pour substrat spécifique l'acide (3R) mévalonique ; donc seuls les acides de configuration (3R) sont phosphorylés.

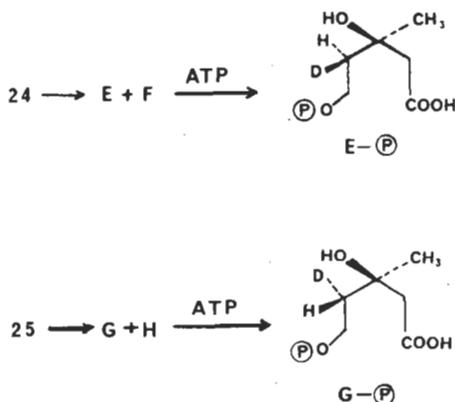


Fig. 29

3.2. MARQUAGE SUR LE CARBONE C (2).

3.2.1. Si on échange les fonctions alcool et acide de **F** (acide qui n'a pas été phosphorylé) on obtient l'acide **A** marqué en C (2). De même à partir de **H** on obtient l'acide **C**, marqué en C (2).

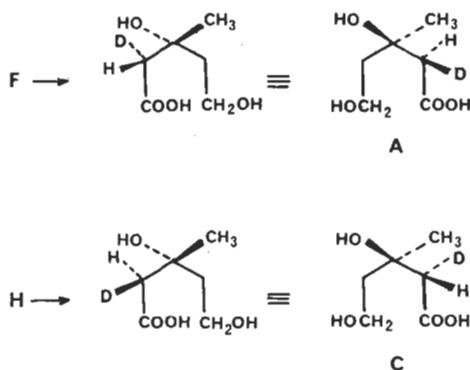


Fig. 30

3.2.2. Pour faire l'échange précédent, il faut oxyder l'alcool en acide et réduire l'acide en alcool, sans passer par un intermédiaire qui aurait la même fonction sur les deux extrémités de la chaîne, sous peine de racémisation. On peut, par exemple, imaginer la séquence suivante (fig. 31) :

- protection de l'acide par estérification,
- oxydation de l'alcool en aldéhyde par $\text{CrO}_3/\text{pyridine}$,
- protection de l'aldéhyde sous forme d'éthylène-cétal,
- réduction de l'ester en alcool,
- hydrolyse de l'acétal (possibilité de formation d'un hémia-cétal cyclique entre l'alcool et l'aldéhyde),
- oxydation de l'aldéhyde en acide, par l'oxyde d'argent ($\text{AgNO}_3 + \text{NaOH}$).

Cette séquence a bien pour effet de permuter les rôles des atomes de carbone C(4) et C(2).

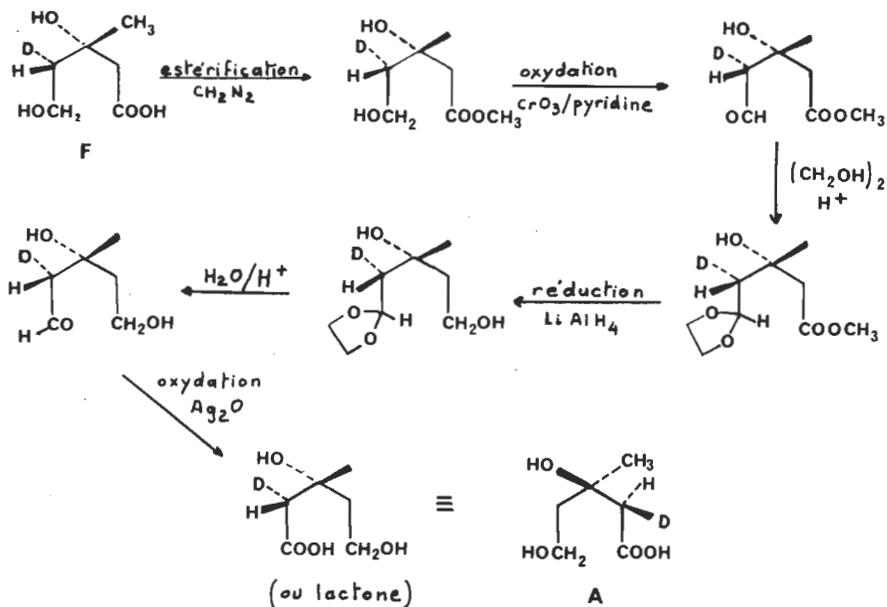


Fig. 31

3.2.3. L'acide F conduit à A et l'acide H à C.

3.3. La réaction de réduction enzymatique de l'aldéhyde dérivé de l'acide mévalonique par le NADD étant stéréospécifique, le deutérium ne s'additionne sur le carbonyle que d'un seul côté. Pour obtenir l'autre isomère, il faut réduire un aldéhyde deutérié en présence de NADH, donc partir d'un acide mévalonique contenant du deutérium en C (5) au lieu d'hydrogène. Ces deux atomes de deutérium peuvent être facilement introduits en utilisant la séquence décrite dans la question 3.2.2. : il suffit de remplacer la réduction de l'ester par LiAlH_4 par une réduction par LiAlD_4 (ou LiAlT_4 si l'on veut une lactone tritiée). Il suffit d'ailleurs de partir d'un acide racémique, puisque seul le bon énantiomère sera utilisé.

Quatrième partie

STEREOCHIMIE DE LA DECARBOXYLATION DE L'ACIDE MEVALONIQUE

4.1.

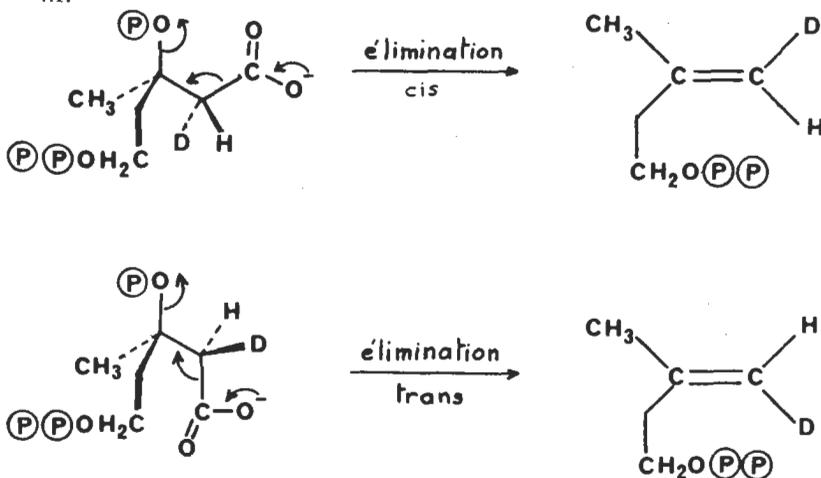


Fig. 32

4.2. MÉCANISME DE L'ADDITION DE Br_2 SUR UNE DOUBLE LIAISON.

La formation d'un ion bromonium est suivie de l'ouverture de cet ion par attaque de Br^- sur l'un ou l'autre des carbones de la double liaison, ce qui conduit à un mélange racémique et à une addition stéréospécifique *trans*.

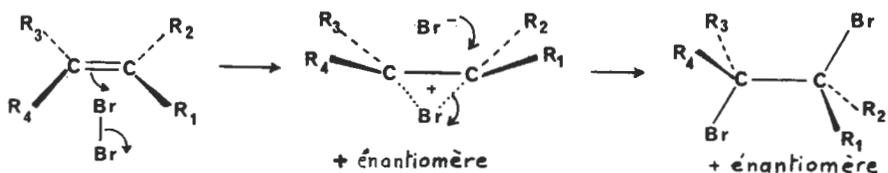


Fig. 33

4.3. STRUCTURE DE 27. A partir de 26 (non chiral), on obtient par addition de Br_2 (non chiral) le produit 27 sous forme de mélange racémique.

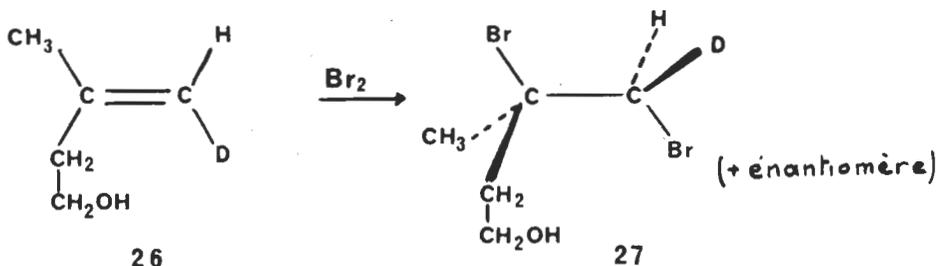


Fig. 34

4.4. ELIMINATION E2 : en prenant pour exemple l'élimination de HBr par une base, il y a attaque d'un atome d'hydrogène par la base avec rupture, plus ou moins simultanée, de la liaison $\text{C}-\text{H}$ et de la liaison $\text{C}-\text{Br}$. Pour que cette rupture puisse se faire de façon concertée, il faut que les liaisons coupées soient en position *trans* et anti-parallèle (fig. 35). La loi de vitesse est en général du second ordre (premier ordre par rapport à la base et premier ordre par rapport au substrat). Ce mécanisme est favorisé, par rapport au mécanisme concurrent $\text{S}_{\text{N}}2$, si l'on utilise une température élevée, et un solvant basique fort, faiblement polarisable et fortement encombré.

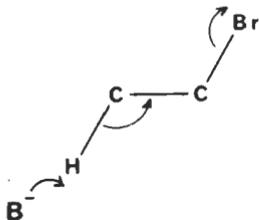


Fig. 35

4.5. Par une élimination E2 soit de HBr, soit de DBr, on peut obtenir à partir de l'isomère dibromé **27** provenant de **26** (on fait l'hypothèse que le produit **26** a la structure indiquée sur la fig. 34, et on raisonne sur l'un des deux énantiomères provenant de l'addition du brome), les produits **28** et **29** :

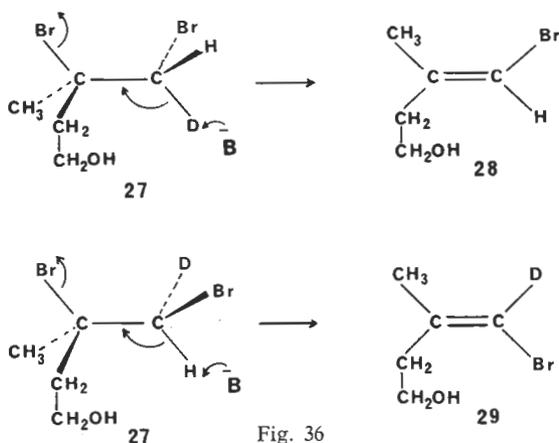


Fig. 36

Au contraire à partir de **26'** (correspondant à la permutation de H et D dans **26**) on obtiendrait les produits **28'** et **29'** dans lesquels H et D seraient permutés :

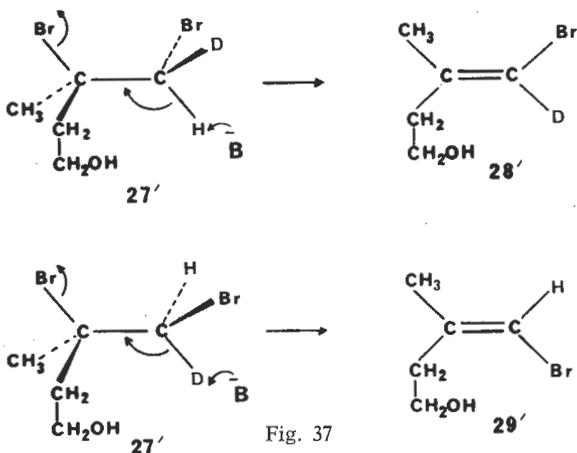


Fig. 37

Comme on obtient effectivement **28** et **29**, on peut donc conclure que, dans la formation du pyrophosphate d'iso-pentényle, il s'agit d'une trans-élimination des groupes COO⁻ et O(**P**)₂.

Cinquième partie

STEREOCHIMIE DE L'ISOMERISATION
DU PYROPHOSPHATE D'ISOPENTENYLE

5. Le farnésol provenant de **G** n'étant pas deutérié, on en déduit que c'est le même hydrogène Hd qui est éliminé dans chacune des trois isomérisations.

Le farnésol provenant de **E** étant trideutéié, c'est le même hydrogène Hc qui reste, dans chacune des trois isomérisations ; ce résultat confirme l'expérience précédente, et montre que le résultat ne provient pas d'un effet isotopique.

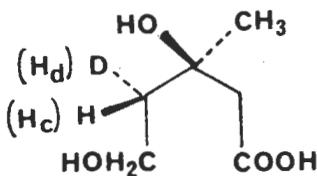


Fig. 38

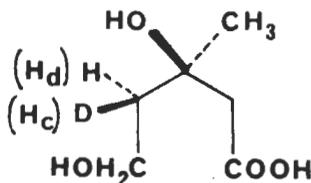


Fig. 39

Puisque Hd est éliminé et que les doubles liaisons de l'intérieur de la chaîne du farnésol sont *trans*, on peut conclure que, lors de la condensation de **4** et **5** (ou de **6** et **5**), et si l'hypothèse 2.4. est exacte, l'élimination de l'hydrogène se fait dans la conformation **10 D** (compte tenu de la remarque 2.4.2., il s'agit, dans la réalité, de la conformation **10 A**, dans laquelle Hc et Hd doivent être permutés).

Sixième partie

STEREOCHIMIE
DE L'ALKYLATION DES DOUBLES LIAISONS6.1. STÉRÉOCHIMIE DE L'ACIDE MÉVALONIQUE MARQUÉ PAR DU TRITIUM
EN C(5).

La configuration absolue du carbone qui porte le groupe hydroxyle du farnésol est la même que celle de l'acide mévalonique de départ. Par ailleurs le farnésol contient trois atomes de carbone portant chacun un atome de tritium, puisqu'il est formé à partir de trois molécules d'acide mévalonique, et que le carbone C(5), et l'hydrogène et le tritium qu'il porte, sont

conservés dans ces condensations. Des trois atomes de tritium, la déshydrogénase alcoolique du foie ne peut enlever que celui qui est sur le même carbone que le groupe hydroxyle, à condition qu'il ait la configuration pro-R (il est à la place de l'hydrogène noté H_R). Comme cet atome de tritium est effectivement éliminé, c'est qu'il occupait la position d'un hydrogène H_f dans l'acide mévalonique, et que le carbone C(5) est de configuration (R).

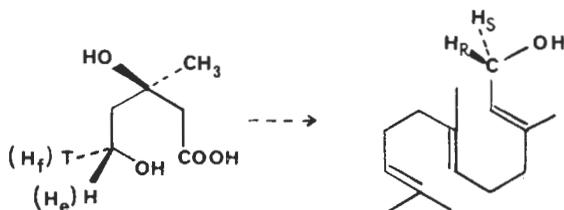


Fig. 40

6.2. A partir de l'acide I, on obtient d'après la deuxième partie, les pyrophosphate d'isopentényle et pyrophosphate de diméthylallyle suivants (le méthyle nouvellement formé et le groupe $CH_2-O(P(P))$ sont *trans*).

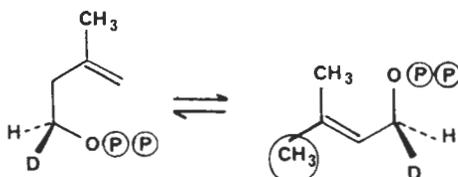


Fig. 41

6.2.1. Si les nouvelles liaisons C—C se font avec inversion de configuration sur le carbone C(5), on aura :

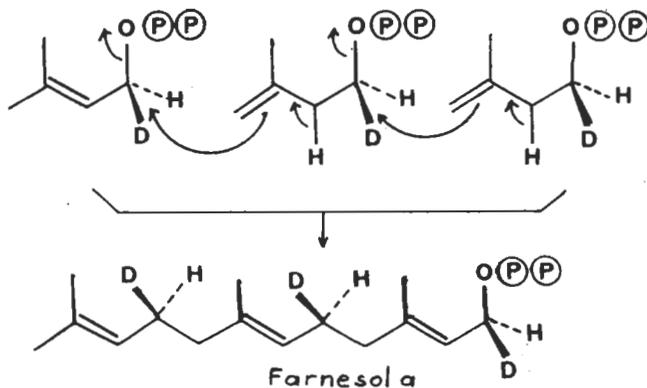
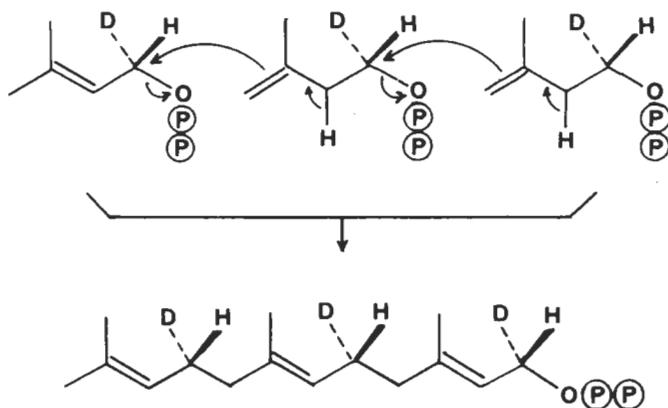


Fig. 42

Si les nouvelles liaisons C—C se font avec rétention de configuration sur le carbone C(5), on aura :



Farnésol b

Fig. 43

6.2.2. et 6.2.3. L'ozonolyse du farnésol issu de l'acide mévalonique I correspond à la rupture des doubles liaisons précédentes (fig. 42 et 43). On obtient un acide lévulinique qui est évidemment deutérié sur le carbone adjacent au groupe carboxyle (et non au groupe carbonyle, comme l'indique par erreur l'énoncé). La dégradation de cet acide lévulinique par l'hypo-iodite de sodium donne l'acide deutériosuccinique (S) si la condensation s'est faite avec inversion de configuration (cas de la fig. 42), et l'acide deutériosuccinique (R) si la condensation s'est faite avec rétention de configuration (cas de la fig. 43).

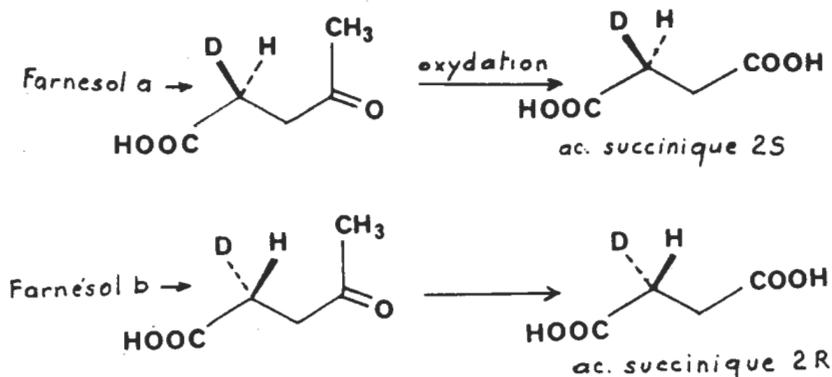


Fig. 44

Les résultats sont inverses si l'on part de l'acide mévalonique K.

6.2.4. Les résultats expérimentaux de la question 6.2.2. montrent que le couplage se fait avec inversion de configuration sur le carbone C(5) de l'acide mévalonique, selon le schéma de la fig. 42.

M^{me} M.-Ch. PÂRIS,
MM. J. BOTTIN, M. GOLFIER, M. VERDAGUER.

ORIENTATION BIBLIOGRAPHIQUE

Première partie

T. A. ALBRIGHT, J. K. BURDETT et M. H. WHANGBO, *Orbital interactions in Chemistry*, Wiley, 1985.

Deuxième partie

Généralités sur la biosynthèse :

C. WALSH, *Enzymatic Reaction Mechanisms*, Freeman, San-Francisco, 1979.

Sur la stéréochimie de la biosynthèse du cholestérol et le marquage isotopique :

J. W. CORNFORTH, *Angew. Chem. Intern. Ed.*, **12**, 903 (1968). *Quarterly Reviews*, **23**, 125 (1969). *Chem. Soc. Reviews*, **2**, 1 (1973).

D. ARIGONI et E. ELIEL, *Topics in Stereochemistry*, Wiley, New-York, 1969, vol. 4, p. 127.

Sur le mécanisme de l'hydroboration :

H. C. BROWN et G. ZWEIFEL, *J. amer. Chem. Soc.*, **82**, 4708 (1960).

D. J. PASTO, B. LEPESKA et coll., *J. amer. Chem. Soc.*, **94**, 6083 et 6090 (1972).

P. R. JONES, *J. org. Chem.*, **37**, 1886 (1972).

SESSION DE 1987

Agrégation**COMPOSITION DE SCIENCES PHYSIQUES**

Option physique appliquée

Epreuve C

**PROBLEME D'ELECTRICITE, D'ELECTRONIQUE,
D'ELECTROTECHNIQUE ET D'AUTOMATIQUE**

(Durée : 6 heures)

SOLUTION**Avertissement :**

Ce problème est très long. Il ne manque pas d'intérêt mais il se perd parfois dans des calculs qui ne sont pas nécessaires pour la suite. Les nombreuses petites erreurs de texte rendent également un peu difficile, à certains endroits, la lecture de l'énoncé. Nous signalerons au passage celles que nous avons relevées.

PREMIÈRE PARTIE**REGIME PERMANENT SINUSOIDAL****I.1. MISE EN ÉQUATION DE LA LIGNE.**

Remarque. — La ligne étant modélisée par les grandeurs linéiques R_1 , L_1 , G_1 et C_1 , les équations que nous allons établir sont rigoureusement exactes et non, comme on l'entend parfois dire, approchées au second ordre près. C'est par habitude (mauvaise) que nous, physiciens égalons d'emblée les premiers termes de deux développements limités, confondons accroissement d'une fonction et différentielle de cette fonction, etc. Ici, le raisonnement mathématique correct consisterait à écrire, par exemple :

$$v(x + dx, t) = v(x, t) + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \mathcal{O}(dx),$$

Θ étant une fonction de dx qui tend vers zéro quand dx tend vers zéro. Si bien que la limite, quand dx tend vers zéro, du quotient

$$[v(x + dx) - v(x)]/dx \text{ est bien égale à } \frac{\partial v}{\partial x}, \text{ etc.}$$

I.1. a) Nous devons établir des relations portant sur les amplitudes complexes V et I et non sur les grandeurs v et i :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \left(R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t} \right); \quad \frac{\partial i}{\partial x} = - \left(G_1 v + C_1 \frac{\partial v}{\partial t} \right).$$

De ces deux équations, on déduit l'équation dite des « télégraphistes » :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - L_1 C_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - R_1 G_1 v - (R_1 C_1 + L_1 G_1) \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

La grandeur $i(x, t)$ satisfait à la même équation différentielle. Etant donné que v et V , par exemple, sont liées par $v = V e^{i \omega t}$,

si dans l'équation des télégraphistes, on remplace $\frac{\partial v}{\partial t}$ par $j \omega v$

et $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ par $-\omega^2 v$, on obtient, en simplifiant ensuite par $e^{i \omega t}$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - [R_1 G_1 - L_1 C_1 \omega^2 + j \omega (R_1 C_1 + L_1 G_1)] V = 0.$$

L'intensité complexe $i(x, t)$ et son amplitude complexe $I(x)$ satisfont également à la même équation différentielle.

$$I.1. b) \quad \gamma^2 = R_1 G_1 - L_1 C_1 \omega^2 + j \omega (R_1 C_1 + L_1 G_1).$$

I.2. INTERPRÉTATION PHYSIQUE DES RÉSULTATS.

Il est immédiat de vérifier qu'une solution de la forme $V = V_i e^{-\gamma x} + V_r e^{\gamma x}$ satisfait à l'équation E que nous pouvons écrire sous la forme $V'' - \gamma^2 V = 0$. Mais, pour répondre à la question posée, il faut montrer que toute fonction V satisfaisant à E, a bien la forme proposée.

Soit E_1 l'équation différentielle $V' - \gamma V = 0$ qui admet des solutions de la forme $V_1 = V_i e^{\gamma x}$, et soit E_2 l'équation différentielle du premier ordre $V' + \gamma V = 0$ qui admet les solutions de la forme $V_2 = V_r e^{-\gamma x}$.

Remarquons que toute fonction $V(x)$ satisfaisant à E peut s'écrire :

$$V = \frac{1}{2\gamma} [(V' + \gamma V) - (V' - \gamma V)].$$

Posons $V_1 = \frac{1}{2\gamma} (V' + \gamma V)$. On vérifie sans peine que V_1

satisfait à E_1 car cela revient à écrire que V satisfait à E , ce qui constitue notre hypothèse. V_1 est donc bien de la forme $V_1 e^{\gamma x}$.

De même, posons $V_2 = \frac{1}{2\gamma} (V' - \gamma V)$. Écrire que $V_2 + \gamma V_2 = 0$,

autrement dit que V_2 satisfait à E_2 , c'est écrire que $V'' - \gamma^2 V = 0$, ce qui est vrai. Donc V_2 peut se mettre sous la forme $-V_r e^{\gamma x}$.

Nous venons donc de montrer que toute fonction V satisfaisant à l'équation différentielle $V'' - \gamma^2 V = 0$ peut se mettre sous la forme :

$$V = V_1 - V_2 = V_i e^{-\gamma x} + V_r e^{\gamma x}.$$

Il n'y a pas d'autre solution à l'équation différentielle vérifiée par V .

Remarque. — Il est peu probable que l'auteur du problème ait songé à demander une démonstration du type de celle que nous venons de donner. Cependant le texte comporte le mot « montrer », alors qu'en fait nous nous contentons en général de « vérifier » que telle fonction est bien solution d'une équation différentielle. Faisons attention, donc, notamment pour les épreuves de Baccalauréat, aux termes que nous utilisons pour formuler nos questions : ils peuvent gêner des candidats habitués à peser en mathématiques, le sens des mots.

I.2.1. *b*) V_i est l'amplitude complexe en $x = 0$ de l'onde de tension incidente, et V_r celle de l'onde réfléchie au même point. Il en est de même de I_i et I_r pour l'onde de courant.

I.2.2. Les deux équations écrites au début de la question I.1. *a*), et appliquées à l'onde incidente ($v_i = V_i e^{-\gamma x} e^{j\omega t}$; $i_i = I_i e^{-\gamma x} e^{j\omega t}$)

pour laquelle $\frac{\partial v_i}{\partial x} = -\gamma v_i$ et $\frac{\partial i_i}{\partial t} = j\omega i_i$, conduisent à :

$$V_i = Z_c I_i.$$

De même pour l'onde réfléchie ($v_r = V_r e^{-\gamma x} e^{j\omega t}$; $i_r = I_r e^{-\gamma x} e^{j\omega t}$), on trouve :

$$V_r = -Z_c I_r,$$

Si l'on pose :
$$Z_c = \sqrt{\frac{R_1 + j L_1 \omega}{G_1 + j C_1 \omega}}$$

$R_1 + j L_1 \omega$ a la dimension d'une impédance linéique, c'est-à-dire d'une impédance divisée par une longueur. Quant au terme $G_1 + j C_1 \omega$, il a la dimension d'une admittance divisée par une longueur. Au total, $(R_1 + j L_1 \omega)/(G_1 + j C_1 \omega)$ a la dimension du carré d'une impédance et Z_c est bien une impédance.

I.2.3. a) Si la ligne est sans pertes, $R_1 = 0$; $G_1 = 0$,

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}. \text{ L'impédance caractéristique est alors réelle.}$$

I.2.3. b) α est le coefficient d'atténuation linéique de la ligne.

αl mesure en népers l'atténuation d'une onde progressive sur une ligne de longueur l , tandis que $8,69 \alpha l$ ($20 \log_{10} e \times \alpha l$) mesure la même atténuation en dB. (La définition du néper donnée à la fin du texte est fausse).

β est la constante de phase :
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

I.2.4. a)
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

I.2.4. b) Pour les ondes progressives, lorsqu'il n'y a pas d'atténuation, le terme $e^{-j\beta x}$ entraîne une périodicité spatiale de pé-

riode :
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

I.2.4. c) λ est la longueur d'onde.

I.2.4. d) Le terme $e^{j\omega t} \times e^{-j\beta x} = e^{j(\omega t - \beta x)}$ peut encore s'écrire :

$$e^{j\omega \left(t - \frac{\beta x}{\omega} \right)}, \text{ ou } e^{j\omega \left(t - \frac{x}{v_p} \right)}.$$

Dans cette dernière expression, v_p est la vitesse de phase de l'onde. On a évidemment :

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda \omega}{2\pi}.$$

I.3. ETUDE DES CARACTÉRISTIQUES DES LIGNES.

I.3.1. a)

$$\alpha = \sqrt{\frac{R_1 G_1 - L_1 C_1 \omega^2 + \sqrt{(R_1 G_1 - L_1 C_1 \omega^2)^2 + \omega^2 (R_1 C_1 + L_1 G_1)^2}}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{L_1 C_1 \omega^2 - R_1 G_1 + \sqrt{(R_1 G_1 - L_1 C_1 \omega^2)^2 + \omega^2 (R_1 C_1 + L_1 G_1)^2}}{2}}$$

Ces expressions proviennent des équations :

$$\alpha^2 - \beta^2 = R_1 G_1 - L_1 C_1 \omega^2 \quad \text{et} \quad 2\alpha\beta = \omega (R_1 C_1 + L_1 G_1).$$

I.3.1. b) *Application numérique* : $\alpha = 0,49 \cdot 10^{-2} \text{ km}^{-1}$. La ligne apporte une atténuation de 8,5 dB à une onde progressive.

$\beta = 2,46 \cdot 10^{-2} \text{ km}^{-1}$; on en déduit la valeur de $\lambda = 255 \text{ km}$.

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1} - j \frac{R_1}{C_1 \omega}} = (664 - 132 j) \Omega ; \quad |Z_c| = 677 \Omega.$$

I.3.2. a) La relation $\alpha^2 - \beta^2 = R_1 G_1 - L_1 C_1 \omega^2$ montre que dans le cas des lignes à faibles pertes, on a :

$$\beta = \omega \sqrt{L_1 C_1}.$$

$$\text{I.3.2. b) } \beta = \frac{\omega}{v_p}, \quad \text{donc} \quad v_p = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

La relation $2\alpha\beta = \omega (R_1 C_1 + L_1 G_1)$ conduit alors à :

$$\alpha = \frac{R_1}{2} \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \frac{G_1}{2} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

Quant à Z_c , en faisant apparaître en facteur le terme $\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$,

on trouve :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \left[1 - \frac{j}{2\omega} \left(\frac{R_1}{L_1} - \frac{G_1}{C_1} \right) \right].$$

Cette expression utilisée dans le cadre de l'application numérique précédente conduit à $Z_c = 651 - 135 j$, alors que l'expression complète donne : $Z_c = 664 - 132 j$; de même, pour α , on trouve $0,50 \cdot 10^{-2} \text{ km}^{-1}$ au lieu de $0,49 \cdot 10^{-2} \text{ km}^{-1}$.

I.3.2. c) Application à la ligne coaxiale à faibles pertes.

I.3.2. c) 1. α) $L_1 C_1 = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r$; si c est la vitesse de la lumière dans le vide $\left(c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \right)$, alors : $v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$.

I.3.2. c) 1. β) Application numérique :

Dans l'air, $v_p \simeq 3,00 \cdot 10^8$ m s⁻¹.

$$\text{I.3.2. c) 2. } Z_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot l_n \left(\frac{d_2}{d_1} \right);$$

soit :

$$Z_c = 60 \times \frac{l_n \left(\frac{d_2}{d_1} \right)}{\sqrt{\epsilon_r}}.$$

I.3.2. c) 3. $\alpha = \alpha_c + \alpha_d$, avec :

$$\alpha_c = \frac{\sqrt{\pi \epsilon_0 \epsilon_r f}}{l_n \left(\frac{d_2}{d_1} \right)} \cdot \left(\frac{1}{d_1 \sqrt{\sigma_1}} + \frac{1}{d_2 \sqrt{\sigma_2}} \right);$$

$$\alpha_d = \pi \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot f \tan \delta.$$

I.3.2. c) 4. Il faut éviter les diélectriques polaires. La rotation de molécules polaires sous l'action d'un champ électrique alternatif crée en effet un phénomène d'absorption.

I.3.2. c) 5. La dérivée de α_c par rapport à d_1 , lorsque d_2 est fixe, s'annule lorsque l'égalité suivante est vérifiée :

$$l_n \left(\frac{d_2}{d_1} \right) = 1 + \frac{d_1 \sqrt{\sigma_1}}{d_2 \sqrt{\sigma_2}}.$$

Si $\sigma_1 = \sigma_2$, cette égalité est satisfaite lorsque :

$$l_n \frac{d_2}{d_1} = 1 + \frac{d_1}{d_2}.$$

Posons $\frac{d_2}{d_1} = x$; l'égalité $l_n x = 1 + \frac{1}{x}$ est satisfaite pour $x \simeq 3,595$. C'est donc pour $\frac{d_2}{d_1}$ proche de 3,595 que α_c passe par un minimum.

I.3.2. c) 6.

$$\alpha_{c \min} = \sqrt{\frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r f}{\sigma} \cdot \frac{3,59}{d_2}}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_{c \min}} = 0,280 \cdot \frac{1 + \frac{d_2}{d_1}}{l_n \left(\frac{d_2}{d_1} \right)} = 0,280 f \left(\frac{d_2}{d_1} \right).$$

Précisons sur un tableau la manière dont varie le facteur $f \left(\frac{d_2}{d_1} \right)$:

$\frac{d_2}{d_1}$	1,2	1,5	2,0	3	3,6	4	5	6	7	8
α	3,38	1,73	1,21	1,02	1	1,01	1,04	1,09	1,15	1,21
$\alpha_{c \min}$										

Ce tableau montre que α_c varie très lentement autour de $\alpha_{c \min}$ en fonction de $\frac{d_2}{d_1}$.

I.3.2. c) 7. Avec du téflon, l'expression de Z_c établie à la question I.3. c) 2. montre que l'on doit avoir $\frac{d_2}{d_1} = 3,25$ pour obtenir $Z_c = 50 \Omega$. Pour cette valeur, $\frac{\alpha}{\alpha_{c \min}} = 1,01$.

Pour réaliser $Z_c = 50 \Omega$ avec du polyéthylène, il faut prendre $\frac{d_2}{d_1} = 3,49$, ce qui conduit à $\alpha/\alpha_{c \min} = 1,006$.

Pour obtenir $Z_c = 75 \Omega$ avec le même matériau, il faut prendre $d_2/d_1 = 6,52$. Pour cette valeur, $\alpha/\alpha_{c \min} = 1,12$.

I.3.3. a) L'expression de α établie à la question I.3.2. b) montre que :

$$4 \alpha^2 = 2 R_1 G_1 + R_1^2 \frac{C_1}{L_1} + G_1^2 \frac{L_1}{C_1}.$$

Toutes choses étant égales par ailleurs, α est minimal lorsque les deux derniers termes de cette égalité, dont le produit est constant, sont égaux. On a alors $\frac{L_1}{C_1} = \frac{R_1}{G_1}$; c'est la condition d'Heaviside.

I.3.3. b) On a alors : $\alpha = \sqrt{R_1 G_1}$.

I.3.3. b) De même, lorsque la condition d'Heaviside est réalisée, on a :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{R_1}{G_1}} : \quad Z_c \text{ est réelle.}$$

La condition d'Heaviside est connue pour entraîner la non déformation d'un signal se propageant sur une ligne où elle est réalisée.

I.4. ÉTABLISSEMENT DES FORMULES USUELLES DES CALCULS DES LIGNES.

Il faut évidemment lire $V(x)$ et $I(x)$ dans l'énoncé.

I.4.1. a)

$$V_0 = V_i + V_r.$$

I.4.1. b)

$$V_0 = Z_c (I_i - I_r).$$

I.4.1. c)

$$I_0 = I_i + I_r; \quad I_0 = \frac{V_i - V_r}{Z_c}.$$

I.4.1. d)

$$V_i = \frac{V_0 + Z_c I_0}{2}; \quad V_r = \frac{V_0 - Z_c I_0}{2}; \quad I_i = \frac{V_i}{Z_c}; \quad I_r = -\frac{V_r}{Z_c}.$$

I.4.1. e)

$$V(x) = V_0 \cosh(\gamma x) - Z_c I_0 \sinh(\gamma x);$$

$$I(x) = I_0 \cosh(\gamma x) - \frac{V_0}{Z_c} \sinh(\gamma x).$$

I.4.2. a) Les notations de l'énoncé, précisées sur la fig. 2 du texte montrent que si l'on place en $x = 0$ un dipôle d'impédance Z_0 , au sens où chacun l'entend (Z_0 a notamment une partie

réelle positive), c'est le rapport $-\frac{V_0}{I_0}$ qui est égal à Z_0 .

De plus, si l'on place une impédance Z_0 à l'entrée de la ligne, c'est le rapport $-\frac{V(x)}{I(x)}$ qui est égal à l'impédance $Z(x)$ ramenée en x . Avec ces précisions, on trouve :

$$Z(x) = Z_c \frac{Z_0 + Z_c \tanh(\gamma x)}{Z_0 \tanh(\gamma x) + Z_c}.$$

I.4.2. b) Dans le cas d'une ligne sans pertes, $\gamma = j\beta = j \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$;
 $\tanh(\gamma x) = j \tan(\beta x)$.

$$Z(x) = Z_c \frac{Z_0 + j Z_c \tan(\beta x)}{j Z_0 \tan(\beta x) + Z_c}.$$

Remarque. — Si Z_0 est infinie (ligne ouverte), alors :

$$Z(x) = \frac{Z_c}{j \tan(\beta x)}.$$

Si x est petit devant la longueur d'onde, alors $\tan(\beta x) \simeq \beta x$.

On a donc : $Z(x) = \frac{Z_c v_p}{j \omega x}$. Ceci n'est autre que l'impédance d'un

condensateur de capacité $C = \frac{x}{Z_c v_p}$.

Exemple :

$$Z_c = 50 \Omega; \quad \epsilon_r = 2,25, \text{ ce qui entraîne : } v_p = 2,0 \cdot 10^8 \text{ m. s}^{-1}$$

$$C(x) = 100 \text{ pF} \times x.$$

Lorsqu'un câble coaxial est ouvert à son extrémité (ou faiblement chargé), il ramène à l'entrée 100 pF par mètre de longueur.

I.4.2. c) Grâce aux précautions que nous avons prises dans la définition des impédances, les expressions précédentes sont valables dans le cas où l'énergie se déplace globalement vers

les x positifs. (On a cette fois : $Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)}$ et $Z_0 = \frac{V_0}{I_0}$.

$$Z_0 = Z_c \frac{Z_{ch} + j Z_c \tan(\beta l)}{Z_c + j Z_{ch} \tan(\beta l)}.$$

I.4.2. d)

$$Z_0 = Z_c \frac{Z_{ch} + Z_c \tanh(\gamma l)}{Z_c + Z_{ch} \tanh(\gamma l)}.$$

Lorsque l devient infinie, $\cosh(\gamma l)$ et $\sinh(\gamma l)$ sont égaux à $e^{\gamma l}$; et $\tanh(\gamma l)$ prend la valeur 1.

On a donc : $Z_0 = Z_c$: le générateur ne « voit » pas la charge Z_{ch} .

I.4.3. a) Quand la ligne est chargée en $x = l$ par $Z_{ch} = Z_c$, on a évidemment $Z_0 = Z_c$.

I.4.3. b)

$$Z_0 = \frac{V_i + V_r}{I_i + I_r} = \frac{V_i}{I_i} \cdot \frac{1 + \frac{V_r}{V_i}}{1 - \frac{V_r}{V_i}} = Z_c \cdot \frac{1 + \frac{V_r}{V_i}}{1 - \frac{V_r}{V_i}}.$$

D'où :

$$\frac{V_r}{V_i} = \frac{Z_0 - Z_c}{Z_0 + Z_c} \quad \text{et} \quad \frac{I_r}{I_i} = \frac{Z_c - Z_0}{Z_c + Z_0}.$$

Si $Z_0 = Z_c$, $V_r = I_r = 0$. Il n'y a pas d'onde réfléchie.

I.4.3. c) En l'absence de précision, nous exprimerons $V(x)$ et $I(x)$ [et non $v(x)$ et $i(x)$], en fonction respectivement de V_0 et I_0 , amplitudes complexes de la tension et du courant au niveau du générateur. Il suffit pour cela de mettre $V(x)$, déjà exprimée à la question I.4.1. e), sous la forme :

$$V(x) = V_0 \left[\cosh(\gamma x) - \frac{Z_c}{Z_0} \sinh(\gamma x) \right].$$

Ensuite, on remplace Z_0 par l'expression donnée à la question 1.4.2. d). On trouve :

$$V(x) = V_0 \frac{Z_{ch} \cosh[\gamma(l-x)] + Z_c \sinh[\gamma(l-x)]}{Z_{ch} \cosh(\gamma l) + Z_c \sinh(\gamma l)}$$

Les mêmes opérations sur l'expression de $I(x)$ conduisent à :

$$I(x) = I_0 \frac{Z_{ch} \sinh[\gamma(l-x)] + Z_c \cosh[\gamma(l-x)]}{Z_{ch} \sinh(\gamma l) + Z_c \cosh(\gamma l)}$$

I.4.3. d) La puissance moyenne [partie réelle de :

$\frac{1}{2} V(x) I^*(x)]$ correspond à la puissance moyenne consommée par la charge, augmentée de la puissance consommée dans la ligne entre les abscisses x et l .

La puissance instantanée fait de plus apparaître des échanges longitudinaux d'énergie entre le générateur, la ligne et la charge.

Les expressions de $V(x)$ et $I(x)$ sont peu commodes et se prêtent mal aux considérations de puissance dans le cas général où $Z_{ch} \neq Z_c$.

I.4.3. e) *Application numérique* : $Z_{ch} = Z_c$ entraîne $V_r = 0$

et $I_r = 0$. Soit : $V = V_i e^{-\gamma x}$; $e^{-\alpha x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 140 \alpha = 0,693$, soit : $\alpha = 4,95 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}$. On peut encore dire que les pertes de la ligne sont de $4,3 \times 10^{-2} \text{ dB/km}$ ou de $4,95 \cdot 10^{-3}$ népers par kilomètre.

I.4.4. a)

$$Z(0, x) = Z_c \tanh[\gamma(l-x)].$$

I.4.4. b)

$$Z(\infty, x) = \frac{Z_c}{\tanh[\gamma(l-x)]}.$$

I.4.4. c)

$$Z(0, x) \cdot Z(\infty, x) = Z_c^2.$$

I.4.4. d)

$$\tanh(\gamma l) = \tanh(\alpha l + j \beta l) = \dots$$

$$\dots \frac{\sinh(\alpha l) \cdot \cos(\beta l) + j \sin(\beta l) \cdot \cosh(\alpha l)}{\cosh(\alpha l) \cdot \cos(\beta l) + j \sinh(\alpha l) \cdot \sin(\beta l)}.$$

Pour $l = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}$, $\beta l = \frac{2\pi l}{\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$; $\cos(\beta l) = 0$

et $\sin(\beta l) = \pm 1$. On a donc : $\tanh(\gamma l) = \tanh^{-1}(\alpha l)$, soit :

$$Z_0 = Z_c \frac{Z_c + Z_{ch} \tanh(\alpha l)}{Z_{ch} + Z_c \tanh(\alpha l)}.$$

I.4.4. e) Dans le cas où $l = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$, $\sin(\beta l) = 0$. Par conséquent : $\tanh(\gamma l) = \tanh(\alpha l)$, et :

$$Z_0 = Z_c \frac{Z_{ch} + Z_c \tanh(\alpha l)}{Z_c + Z_{ch} \tanh(\alpha l)}.$$

I.4.5. Analogie ligne-circuit bouchon.

I.4.5. a) Pour un circuit R_0, L_0, C_0 parallèle, on a :

$$Y = \frac{1}{R_0} + j C_0 (\omega_0 + \Delta\omega) + \frac{1}{j L_0 (\omega_0 + \Delta\omega)}; \quad L_0 C_0 \omega_0^2 = 1.$$

En faisant apparaître l'infiniment petit $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$:

$$Y = \frac{1}{R_0} + 2j C_0 \omega_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

I.4.5. b) L'expression de Z_0 pour une ligne sans pertes a été donnée à la question I.4.2. c). Si on y ajoute le fait que la ligne est fermée sur un court-circuit ($Z_{ch} = 0$), on trouve :

$$Z_0 = j Z_c \tan(\beta l) = j Z_c \tan\left(\frac{\omega l}{v_p}\right).$$

Comme, de plus, la ligne est $\frac{\lambda}{4}$ pour la pulsation ω_0 , on peut écrire :

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{v_p \times 2\pi}{4 \omega_0} = \frac{\pi v_p}{2 \omega_0}; \quad \text{donc : } Z_0 = j Z_c \tan\left(\frac{\pi \omega}{2 \omega_0}\right).$$

En posant là encore $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, on trouve :

$$Y_0 = j \frac{\pi \Delta\omega}{2 Z_c \omega_0} = j Y_c \frac{\Delta\omega}{2 \omega_0}.$$

I.4.5. c) Pour que la ligne et le circuit bouchon aient même comportement, il faut réaliser l'égalité :

$$C_0 = \frac{\pi}{4 Z_c \omega_0}.$$

Application numérique : Il est facile de réaliser, dans un laboratoire d'enseignement, les conditions suivantes : câble de 50 m, à diélectrique en téflon ($v_p = 2 \cdot 10^8$ m.s⁻¹), résonnant à $f_0 = 1$ MHz et se comportant comme un circuit bouchon avec $C_0 = 2,5$ nF et $L_0 = 10$ μ H. On observera toutefois que la qualité du résonateur à constantes réparties (le câble en court-circuit) est moins bonne que celle du circuit classique. Il est visible, en outre, que l'analogie se limite au voisinage de f_0 .

I.4.6. Analogie ligne-circuit série.

I.4.6. a) L'expression $Z = R_0 + 2j\omega_0 L_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ est facile à établir.

I.4.6. b) La relation exacte est évidemment $\lambda = \frac{v_p}{f_0} = \frac{2\pi v_p}{\omega_0}$

où, selon la notation introduite à deux reprises dans cette première partie (I.2.4. d et I.2.2. b), v_p est la vitesse de phase de l'onde dans la ligne, différente en général de la vitesse c de la

lumière dans le vide : $v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$.

Impédance ramenée à l'entrée d'une ligne sans pertes de longueur l lorsque celle-ci est fermée sur une résistance R_0 :

$$Z_0 = Z_c \frac{R_0 + j Z_c \tan(\beta l)}{Z_c + j R_0 \tan(\beta l)}.$$

Si $l = \frac{\lambda}{2}$ pour $\omega = \omega_0$ (et non $\frac{\lambda}{4}$ comme le propose le

texte), on a, de plus, $\tan(\beta l) = \tan\left(\pi \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \simeq \frac{\pi \Delta\omega}{\omega_0}$.

D'où l'expression de Z_0 : $Z_0 = R_0 + j\pi Z_c \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$.

I.4.6. c) Le rapprochement des expressions obtenues en I.4.6. a) et I.4.6. b) montre que la relation cherchée est :

$$\pi Z_c = 2 L_0 \omega_0.$$

Application numérique :

Câble coaxial de 50 m ; $f_0 = 2 \text{ MHz}$ $\left(50 \text{ m} = \frac{\lambda}{2} \right)$; ana-

logue à un circuit résonnant série avec $L_0 = 6,25 \text{ } \mu\text{H}$ et $C_0 = 1,0 \text{ nF}$. Attention, la résistance R_0 doit être très faible devant R_c , ainsi que la résistance placée en série avec la ligne pour observer l'intensité. Sinon on ne « voit rien ».

DEUXIÈME PARTIE

REFLEXION A L'EXTREMITÉ D'UNE LIGNE

II.1. RELATIONS GÉNÉRALES.

On notera que Γ est le coefficient de réflexion de la tension.

Le coefficient de réflexion pour le courant, $\frac{I_r}{I_i}$, vaut, avec les notations de l'énoncé : $-\Gamma$.

II.1.1. Il s'agit des expressions de V et de I .

$$V = V_i e^{-\gamma x} + V_r e^{\gamma x}$$

$$I = \frac{V_i e^{-\gamma x} - V_r e^{\gamma x}}{Z_c}$$

II.1.2. $Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_c \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$, d'où l'expression de

$$\Gamma = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c}$$

II.2. LIGNES SANS PERTES.

II.2.1. $V(x) = V_i(1 + \Gamma)$; $I(x) = \frac{V_i}{Z_c}(1 - \Gamma)$. Posons :

$$|\Gamma| = r, \text{ soit : } \Gamma = r e^{j\varphi} = \frac{V_r}{V_i} e^{2j\beta x} = r e^{j(\varphi_0 + 2\beta x)}$$

$$|V|_{\max} = |V_i|(1 + r) ; |V|_{\min} = |V_i|(1 - r)$$

II.2.2.

$$\varrho = \frac{|V|_{\max}}{|V|_{\min}} \left(\text{et non } \frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right) = \frac{1+r}{1-r}.$$

II.2.3.

$$|\Gamma| = r = \frac{1-\varrho}{1+\varrho}.$$

II.3.1. $V = V_i e^{-j\beta x} (1 + \Gamma)$; il faut évidemment faire intervenir Z_c , en plus des paramètres spécifiés par l'énoncé, pour

exprimer $I : I = \frac{V_i}{Z_c} e^{-j\beta x} (1 - \Gamma)$.

II.3.2. C'est quand $\Gamma = r$, que $|V|$ prend sa valeur maximale.

On a alors : $|I| = \frac{|V_i|}{Z_c} (1 - r) = |I|_{\min}$. Puisque :

$$\Gamma = r e^{j \left(\varphi_0 + \frac{4\pi x}{\lambda} \right)},$$

ceci se produit avec une périodicité spatiale égale à $\frac{\lambda}{2}$, pour

les valeurs de x telles que $\varphi_0 + \frac{4\pi x}{\lambda} = 2k\pi$.

II.3.3. Lorsque :

$$|V| = |V|_{\max} = |V_i| (1 + r), \quad |Z| = |Z|_{\max} = Z_c \frac{1+r}{1-r}.$$

II.3.4. a) C'est quand $\Gamma = -r$ que $|V|$ prend sa valeur minimale $|V|_{\min} = |V_i| (1 - r)$, donc pour les valeurs de x telles que

$$\varphi_0 + \frac{4\pi x}{\lambda} = (2k + 1)\pi.$$

II.3.4. b) On a alors : $|I| = |I|_{\max} = |I_i| (1 + r)$.

II.3.5. Lorsque :

$$|V| = |V|_{\min} = |V_i| (1 - r), \quad |Z| = |Z|_{\min} = Z_c \frac{1-r}{1+r}.$$

II.4. $\varrho = 3$, donc : $r = \frac{1}{2}$.

$\Gamma(l) = r e^{i\varphi}$; comme le premier minimum de tension sur la ligne rencontré à partir de la charge est à la distance $d_m = \frac{\lambda}{2}$, $\Gamma(l)$ est réel et vaut $-r$: $\Gamma(l) = -0,5 = \frac{Z_{ch} - Z_c}{Z_{ch} + Z_c}$.

Donc : $Z_{ch} = Z_c/3 = 16,7 \Omega$.

II.5. CONSIDÉRATIONS DE PUISSANCES SUR LES LIGNES.

Contrairement à l'énoncé, et pour garder une cohérence de notation, nous noterons E l'amplitude de la f.é.m. du générateur G.

II.5.1.

$$I(0) = \frac{E}{R_g + R_e + j(X_g + X_e)}; \quad V(0) = E - Z_g I(0).$$

En notant I^* le nombre complexe conjugué de I, on peut écrire :

$$P = \text{partie réelle de } \frac{1}{2} UI^* = \frac{E^2}{2} \frac{R_e}{(R_g + R_e)^2 + (X_e + X_g)^2}.$$

II.5.2. Les conditions d'adaptation se réduisent à : $Z_e = Z_g^*$; $R_e = R_g$; $X_e = -X_g$.

$$\text{II.5.3. } Z_s = Z_c \frac{Z_g + j Z_c \tan(\beta l)}{Z_c + j Z_g \tan(\beta l)} \text{ d'après I.4.2. a.}$$

La condition d'adaptation, $Z_e = Z_g^*$ s'écrit quant à elle, en exprimant Z_e selon I.4.2. c : $Z_c \cdot \frac{Z_{ch} + j Z_c \tan(\beta l)}{Z_c + j Z_{ch} \tan(\beta l)} = Z_g^*$. On en déduit l'expression de Z_{ch} nécessaire pour qu'il y ait adaptation à l'entrée de la ligne :

$$Z_{ch} = Z_c \frac{Z_g^* - j Z_c \tan(\beta l)}{Z_c - j Z_g^* \tan(\beta l)}.$$

On constate ainsi que Z_{ch} doit être égale à Z_s^* ; autrement dit, si l'adaptation est réalisée au niveau du générateur, elle l'est aussi au niveau de la charge.

II.5.4. Cette question sera reprise en II.6.2. Pour réaliser les conditions d'adaptation alors que Z_g , Z_c et Z_{ch} sont quelconques, on peut soit réaliser la condition $Z_{ch} = Z_s^*$, soit la condition

$Z_g = Z_e^*$. Posons $Y_{ch} = \frac{1}{Z_{ch}} = G_{ch} + j S_{ch}$. Dans le premier cas,

on crée au niveau de la charge (fig. 1 a) une impédance rame-

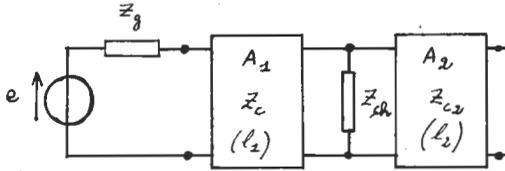


Fig. 1 a.

née $Z_s = Z_{ch}^*$ en procédant en deux temps : le quadripôle A_1 ramène sur sa sortie une admittance Y_{s1} dont la partie réelle (conductance) est égale à G_{ch} (A_1 est sans pertes), puis, grâce au quadripôle A_2 , sans pertes également, on ajoute à Y_{s1} l'admittance Y_{e2} imaginaire nécessaire pour avoir $Y_{s1} + Y_{e2} = Y_{ch}^*$.

Dans le deuxième cas, le quadripôle A_1 , sans pertes ramène à son entrée une admittance Y_{e1} dont la partie réelle est égale à celle de Y_g , puis le quadripôle A_2 apporte l'admittance imaginaire Y_{e2} nécessaire pour que la condition : $Y_{e1} + Y_{e2} = Y_g^*$ soit réalisée (fig. 1 b).

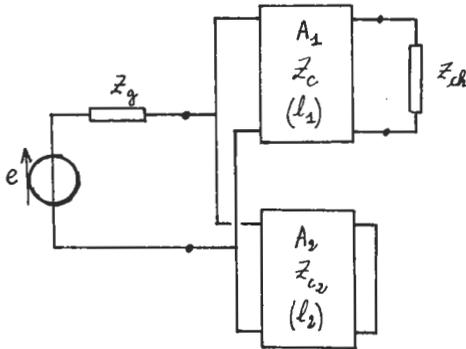


Fig. 1 b.

Si ces deux manières de procéder sont équivalentes, on ne peut pas toujours les réaliser en même temps. Mais on peut montrer que l'une au moins est réalisable.

II.5.5. Lignes avec pertes.

$$\text{II.5.5. a) } P(x) = \frac{1}{2} \Re (VI^*); \quad V = V_i e^{-\gamma x} \cdot [1 + \Gamma(x)];$$

$$I = \frac{V_i}{Z_c} e^{-\gamma x} \cdot [1 - \Gamma(x)].$$

$$\text{On a en effet : } \Gamma(x) = \frac{V_r}{V_i} e^{-2\gamma x} = \Gamma(0) \cdot e^{-2\gamma x}.$$

$$P(x) = \frac{1}{2} \Re \left\{ \frac{|V_i|^2 e^{-2\alpha x} \cdot [1 + \Gamma(x)] [1 - \Gamma^*(x)]}{Z_c} \right\}.$$

II.5.5. b) $Z_e = Z_g^*$; si la ligne est infiniment longue, cette égalité devient : $Z_c = Z_g^*$.

II.5.5. c)

$$P(l) = \frac{1}{2} \Re \left\{ \frac{|V_i|^2 e^{-2\alpha l} \cdot [1 + \Gamma(l)] [1 - \Gamma^*(l)]}{Z_c} \right\}.$$

$$\text{II.5.5. d) } A = e^{-2\alpha l} \cdot \frac{\Re \left\{ \frac{[1 + \Gamma(l)] [1 - \Gamma^*(l)]}{Z_c} \right\}}{\Re \left\{ \frac{[1 + \Gamma(0)] [1 - \Gamma(0)]}{Z_c} \right\}}.$$

II.5.5. e) Quand la ligne est sans pertes : $\alpha = 0$;

$$\Gamma(l) = \Gamma(0) \cdot e^{-2j\beta x},$$

donc $\Gamma(l)$ et $\Gamma(0)$ ont même module r ; Z_c est réelle.

$$A = \frac{1 - r^2}{1 + r^2} = 1; \text{ c'était, bien sûr, évident.}$$

II.5.5. f) Lorsque la charge en bout de ligne est adaptée à la ligne ($Z_{ch} = Z_c$), on a $\Gamma(l) = 0$ et donc : $\Gamma(0) = 0$.

$A = e^{-2\alpha l}$. Ce résultat est également évident.

II.6. LIGNES SANS PERTES.

$$\text{II.6.1. C'est pour } x = \frac{\lambda}{4} + k \frac{\lambda}{2} \text{ (tan } \beta x \text{ est alors infinie),}$$

$$\text{que } Z_e = \frac{Z_c^2}{Z_{ch}}$$

II.6.2. a) α) On interpose entre Z_{ch} et le générateur un tronçon de ligne de longueur $\lambda/4$ et d'impédance caractéristique $Z_c = \sqrt{Z_g Z_{ch}}$. L'adaptation est alors réalisée pour tout le domaine de fréquences où la ligne peut être considérée comme sans pertes.

II.6.2. a) β)

$$f = 10^9 \text{ Hz}; \quad Z_c = 30 \Omega; \quad l = 7,5 \text{ cm.}$$

II.6.2. b) α) $Y_{ch} = \frac{1-j}{100}$; il faut ajouter une susceptance de

de 0,01 S pour que la somme $Y_{ch} + Y_2$ soit réelle : $Y_2 = \frac{j}{100}$.

Si nous réalisons Y_2 à l'aide d'une ligne en court-circuit, nous

aurons : $Y_2 = \frac{1}{j Z_{c2} \tan \beta l} = -j \frac{2 \cdot 10^{-2}}{\tan \beta l}$; il faut donc que

$$\tan(\beta l) = -2. \text{ Ceci est réalisé pour } l = 0,32 \lambda + k \frac{\lambda}{2}.$$

On aurait pu également utiliser une ligne ouverte (mais elle rayonne toujours quelque peu et l'impédance Z_{ch} ne peut, de ce fait, être considérée comme infinie). Dans ce cas, en supposant Z_{ch} infinie, on a $Y_2 = j \tan(\beta l)/Z_c$. Il suffit d'avoir alors :

$$\tan(\beta l) = \frac{1}{2}, \text{ soit } l = 0,07 \lambda + k \frac{\lambda}{2}.$$

II.6.2. b) β) On a alors une impédance de charge réelle et de 100 Ω .

$$Z_{c1} = \sqrt{100 \times 50} = 71 \Omega.$$

II.6.2. c) La ligne $\frac{\lambda}{4}$ ramène à son entrée l'impédance

$Z_{e1} = \frac{Z_{c1}^2}{Z_{ch}}$, ou encore une admittance :

$$Y_{e1} = \frac{Z_{ch}}{Z_{c1}^2} = \frac{R_{ch}}{Z_{c1}^2} + j \frac{X_{ch}}{Z_{c1}^2}.$$

Si l'on pose $G_g = \frac{1}{R_g}$, il faut que cette première ligne permette de réaliser la condition : $G_g = \frac{R_{ch}}{Z_{c1}^2}$, soit :

$$Z_{c1}^2 = \frac{R_{ch}}{G_g} = R_{ch} \cdot R_g. \text{ Ensuite, il faut que l'admittance } Y_{e2} \text{ ramenée par la deuxième ligne soit telle que : } j \frac{X_{ch}}{Z_{c1}^2} + Y_{e2} = 0.$$

Soit : $Y_{e2} = -j \frac{1}{Z_{c2} \tan(\beta l)} = -j \frac{X_{ch}}{Z_{c1}^2}$. Ou encore :

$$\tan(\beta l) = \frac{Z_{c1}^2}{Z_{c2} X_{ch}}. \text{ Si on utilise une ligne à air :}$$

$$l = \tan^{-1} \left(\frac{Z_{c1}^2}{Z_{c2} X_{ch}} \right) + k \frac{\lambda}{2}.$$

Avec les valeurs numériques de la question II.6.2. b), on trouve :

$$Z_{c1} = 50 \Omega ; \quad l = \frac{\lambda}{8}.$$

TROISIÈME PARTIE

LIGNES EN REGIME IMPULSIONNEL

Nous supposons — car le texte, à cet égard n'est pas clair — qu'à l'instant $t = 0$ c'est la f.é.m. du générateur, $e(t)$, qui passe de 0 à E avant de revenir à zéro après une durée τ . De plus, nous supposons que Z_g , Z_{ch} et Z_c sont réelles, de manière à ce que les coefficients de réflexion Γ_{ch} et Γ_g soient réels. Dans le cas contraire ces coefficients dépendent de la fréquence et l'on ne peut parler de coefficient de réflexion pour une impulsion puisque celle-ci est décomposable en une infinité de fonctions sinusoïdales de fréquences différentes.

III.1.1. Pour répondre à cette question, il n'est nul besoin de supposer la ligne infiniment longue. A l'instant $t = 0$, l'onde générée par le générateur arrive juste à l'entrée de la ligne. Celle-ci se comporte simplement comme une résistance R_c . La

tension à l'entrée de la ligne vaut donc : $v_0 = E \frac{R_c}{R_c + R_g}$.

III.1.2. A l'instant $T + \frac{\tau}{2}$ l'impulsion est revenue à l'entrée de la ligne. Elle s'est propagée sur une distance $2l$ (affaiblissement $e^{-2\alpha l}$), s'est réfléchiée en $x = l$ (multiplication par le facteur Γ_{ch}) et est en train de se réfléchir en $x = 0$. Il y a donc en $x = 0$, et à l'instant $T + \frac{\tau}{2}$: l'onde réfléchiée d'amplitude $\Gamma_{ch} e^{-2\alpha l} E \frac{R_c}{R_c + R_g}$, et celle qui repart soit $\Gamma_{ch} \Gamma_g e^{-2\alpha l} E \frac{R_c}{R_c + R_g}$.

Au total, de $t = T$ à $t = T + \tau$, la tension v à l'entrée de la ligne vaut :

$$v_1 = (1 + \Gamma_g) \Gamma_{ch} e^{-2\alpha l} \frac{R_c}{R_c + R_g} E.$$

III.1.3. a)

$$v_2 = (1 + \Gamma_g) \Gamma_{ch}^2 \Gamma_g e^{-4\alpha l} \frac{R_c}{R_c + R_g} E.$$

Remarque. — Nous supposons que pendant les intervalles de temps (nT , $nT + \tau$), la f.é.m. du générateur est nulle et qu'il n'y a donc pas chevauchement entre les impulsions réfléchies et d'autres que pourrait fournir le générateur.

III.1.3. b) Que n soit pair ou non ne change rien à l'affaire :

$$v_n = (1 + \Gamma_g) \Gamma_{ch}^n \Gamma_g^{n-1} e^{-2n\alpha l} \frac{R_c}{R_c + R_g} E.$$

III.1.3. c) α) Pour mesurer α , on peut, par exemple, placer un excellent court-circuit à l'extrémité de la ligne ($x = l$), et utiliser un générateur dont la résistance interne R_g est adaptée à la ligne ($R_g = R_c$). C'est toujours possible car on peut soit augmenter R_g en plaçant une résistance additionnelle en série avec le générateur, soit la diminuer en utilisant un potentiomètre convenable. Dans ces conditions, il n'y a qu'une seule impulsion ré-

fléchiée, d'amplitude égale à $v_1 = -\frac{E}{2} e^{-2\alpha l}$.

III.1.3. c) β) Si l'application numérique correspond au mode opératoire décrit précédemment, alors $e^{-2\alpha l} = \frac{1}{2}$; $2\alpha l = 0,693$; $\alpha = 3,47 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$. On peut encore écrire que l'atténuation est de 30 dB/km ou de 3,46 nepers/km.

Remarque. — Nous avons supposé que le mot amplitude utilisé dans l'énoncé pour cette question désigne la valeur absolue de v_1 . Pour avoir une tension v_1 positive il faudrait que la ligne soit fermée sur une résistance plus grande que R_c , or une terminaison ouverte n'est pas bien définie (la valeur $R_{ch} = \infty$ n'est pas vraiment réalisée car la ligne ouverte rayonne quelque peu).

III.1.4. Si le facteur global $(1 + \Gamma_g) \Gamma_{ch} e^{-2\alpha l}$ est supérieur à l'unité, la deuxième impulsion visualisée (d'amplitude v_1) est supérieure à la première (v_0). Il suffit que α soit inférieur à

$$\alpha_0 = \frac{1}{2l} \ln [1 + \Gamma_g) \Gamma_{ch}].$$

III.2.1.

$$R'_g (R'_g - R_c) / (R'_g + R_c) = b, \text{ entraîne } R'_g = R_c \frac{1+b}{1-b}.$$

Si $R'_g > R_g$ (R_g est la résistance interne vraie du générateur G), ce qui correspond à $b > 0$, placer une résistance R_a en série avec G.

Si $R'_g < R_g$ ($b < 0$), placer, selon la fig. 2 une résistance R_p en parallèle avec la ligne. La résistance R'_g équivalente vaut

$$\frac{R_p R_g}{R_p + R_g}. \text{ On a ainsi : } \frac{R_p R_g}{R_p + R_g} = R_c \frac{1+b}{1-b}, \text{ soit :}$$

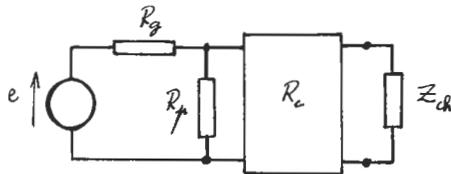


Fig. 2

$$R_p = \frac{R_g}{\frac{1-b}{1+b} \cdot \frac{R_g}{R_c} - 1} \text{ avec } b < 0.$$

III.2.2. *Application numérique :*

$$a : b < 0, \text{ donc } R_p = \frac{R_g}{3-1} = \frac{R_g}{2} = 25 \Omega.$$

$$b : b > 0; \quad b = \frac{R'_g - R_c}{R'_g + R_c} = 0,8; \quad R'_g = \frac{1,8}{0,2} R_c = 9 R_c.$$

On en tire : $R_a = 8 R_c = 400 \Omega$.

III.2.3. a) On doit avoir Z_{ch} réelle et supérieure à $Z_c = R_c$.

III.2.3. b) On place une résistance en $x = l$, en respectant les symétries de la ligne (résistance axiale si la ligne est maximale, etc.).

III.3. Etude graphique d'une ligne en régime impulsionnel : $\alpha = 3,46$ nepers/km, soit : $0,69$ neper/200 m ; donc : $e^{-2\alpha l} = 0,5$.

III.3.1. $Z_g = R_c$, donc $\Gamma_g = 0$; Z_{ch} infinie, donc $\Gamma_{ch} = 1$. Les formules établies aux questions III.1.1., III.1.2. et III.1.3. b) deviennent :

$$v_0 = \frac{E}{2} = 1 \text{ V}; \quad v_1 = 0,5 \frac{E}{2} = \frac{E}{4} = 0,5 \text{ V}; \quad v_n = 0 \text{ pour } n > 1.$$

III.3.2. $Z_g = R_c$, donc $\Gamma_g = 0$; $Z_{ch} = 0$, donc $\Gamma_{ch} = -1$.

Les mêmes formules donnent :

$$v_0 = \frac{E}{2} = 1 \text{ V}; \quad v_1 = -0,5 \frac{E}{2} = -0,5 \text{ V}; \quad v_n = 0 \text{ pour } n > 1.$$

III.3.3. $\Gamma_g = 0$; $\Gamma_{ch} = 0,5$.

$$v_0 = 1 \text{ V}; \quad v_1 = 0,5 \times 0,5 \times \frac{E}{2} = \frac{E}{8} = 0,25 \text{ V}; \quad v_n = 0 \text{ pour } n > 1.$$

III.3.4. $\Gamma_g = 0,8$; $\Gamma_{ch} = -1$.

$$v_0 = E \frac{50}{500} = 0,2 \text{ V}; \quad v_1 = 1,8 \times -1 \times \frac{1}{2} \times 0,2 = -0,18 \text{ V}; \quad \text{les}$$

autres impulsions se déduisent chacune de la précédente par multiplication par le facteur $\Gamma_{ch} \Gamma_g e^{-2\alpha l} = -0,4$. Elles valent respectivement : 72 mV ; -29 mV ; 11 mV. La sixième impulsion est inférieure à 10 mV.

III.3.5. $\Gamma_g = 0,9$; $\Gamma_{ch} = 1$.

$v_0 = 0,1 \text{ V}$; $v_1 = 95 \text{ mV}$; les autres impulsions sont obtenues en passant de l'une à la suivante par le facteur multiplicatif 0,45.

On obtient ainsi : $v_2 = 43 \text{ mV}$; $v_3 = 19 \text{ mV}$ et $v_4 = 9 \text{ mV}$. Cette cinquième impulsion a donc son amplitude inférieure à 10 mV.

III.4. LIGNES EN RÉGIME D'ÉCHELON DE TENSION.

III.4.1. a) $\Gamma_g = 0$; $\Gamma_{ch} = 1$; $e^{-2\alpha t} = \frac{1}{2}$. La fig. 3 précise ce que l'on observe en $x = 0$.

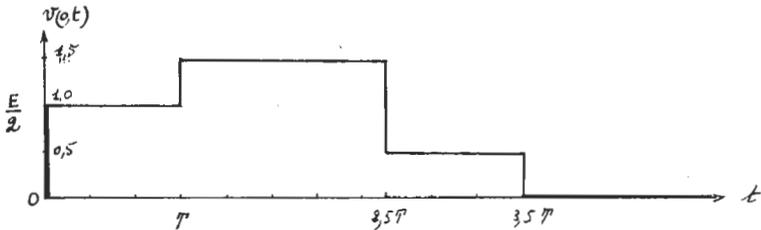


Fig. 3

Remarque. — En régime permanent (de $t_1 = T$ à $t_2 = \infty$), on

constate que $v(0) = \frac{3E}{4}$ alors que la ligne est ouverte. Ceci

peut paraître paradoxal. En fait, il n'en est rien car le fait que α ne soit pas nul indique que R_1 et G_1 ne sont pas nulles. On peut montrer que si, en courant continu, R_e est la résistance d'entrée de la ligne lorsque celle-ci est fermée sur la résistance de charge R_{ch} , on a :

$$\frac{R_e - \sqrt{\frac{R_1}{G_1}}}{R_e + \sqrt{\frac{R_1}{G_1}}} = \frac{R_{ch} - \sqrt{\frac{R_1}{G_1}}}{R_{ch} + \sqrt{\frac{R_1}{G_1}}} \cdot e^{-2\sqrt{R_1 G_1} \cdot l}$$

(Cette relation est obtenue par exemple en exploitant le modèle continu de la ligne donné sur la fig. 2 du texte).

Or, nous sommes dans le cas où Z_c est réelle quelle que soit la fréquence :

$$Z_c = \sqrt{\frac{R_1 + j L_1 \omega}{G_1 + j C_1 \omega}}, \text{ donc } \frac{R_1}{G_1} = \frac{L_1}{C_1}, \text{ et } \sqrt{\frac{R_1}{G_1}} = Z_c = 50 \Omega.$$

De plus, $\sqrt{R_1 G_1} = \alpha$.

$$\text{On a donc : } \frac{R_e - 50}{R_e + 50} = \frac{R_{ch} - 50}{R_{ch} + 50} \times \frac{1}{2}.$$

$$\text{Si } R_{ch} = \infty, R_e = 150 \Omega; \text{ si } R_{ch} = 0, R_e = \frac{50}{3} \Omega.$$

Nous sommes dans le cas où $R_{ch} = \infty$, le générateur, de f.é.m. $E = 2 \text{ V}$ et de résistance interne $R_g = 50 \Omega$ débite dans $R_e = 150 \Omega$; la tension à ses bornes vaut donc :

$$u = E \times \frac{150}{200} = 1,5 \text{ V.}$$

III.4.1. b) Voir la fig. 4. Cette fois-ci, pendant le régime permanent où l'on a $e = E$, la tension aux bornes du générateur

vaut $\frac{E}{4}$ alors qu'il est fermé sur un court-circuit par l'intermédiaire de la ligne. C'est que, dans ce cas, la résistance R_e ramenée à l'entrée vaut $\frac{50}{3} \Omega$.

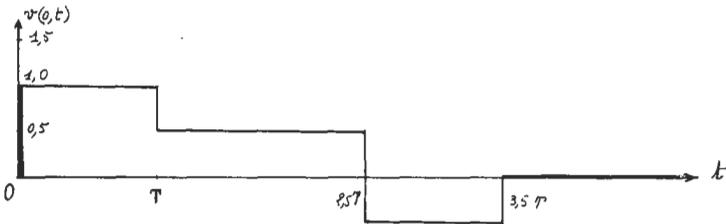


Fig. 4

III.4.1. c) Voir la fig. 5. (Quand $Z_{ch} = 150 \Omega$, $R_e = \frac{250}{3} \Omega$, $v(0) = 1,25 \text{ V}$).

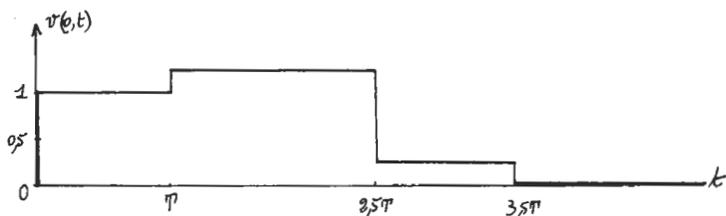


Fig. 5

III.4.1. d) Voir la fig. 6.

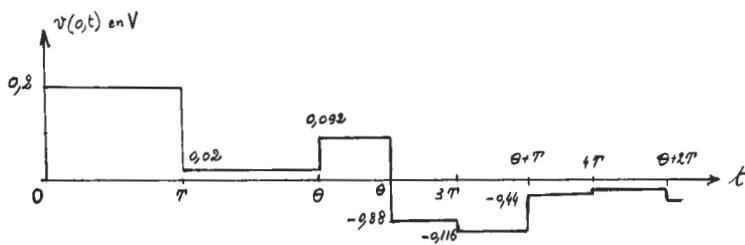


Fig. 6

III.4.1. e) Voir la fig. 7.

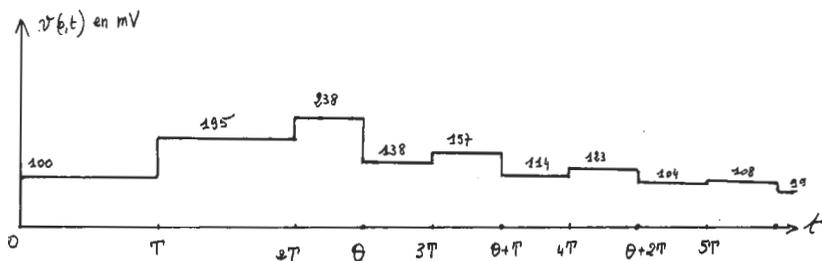


Fig. 7

III.4.2. Charge quelconque.

III.4.2. a)

$$V(0) = E - Z_g I(0) = E - (Z_g/Z_c)(V_i - V_r) = V_i + V_r.$$

$$Z_c E = (Z_g + Z_c) V_i + (Z_c - Z_g) V_r \Rightarrow \dots$$

$$\dots E = V_i \frac{Z_g + Z_c}{Z_c} \left[1 - \frac{V_r}{V_i} \Gamma_g \right]$$

III.4.2. b) $\frac{V_r}{V_i} = \Gamma_{ch} e^{-2\gamma t}$ (le texte est incorrect, car V_i et V_r ne dépendent pas de x).

III.4.2. c)

$$V_i = \frac{E Z_c}{Z_g + Z_{ch}} \cdot [1 - \Gamma_{ch} \Gamma_g e^{-2\gamma t}].$$

III.4.2. d)

$$V(x, p) = E \frac{Z_c}{Z_g + Z_c} (1 - \Gamma_{ch} \Gamma_g e^{-2\gamma t}) [e^{-\gamma x} + \Gamma_{ch} e^{-\gamma(2l-x)}].$$

$$I(x, p) = \frac{E}{Z_g + Z_c} (1 - \Gamma_{ch} \Gamma_g e^{-2\gamma t}) [e^{-\gamma x} - \Gamma_{ch} e^{-\gamma(2l-x)}].$$

III.4.2. e) $\alpha) \gamma = j \frac{\omega}{v_p}$; le texte nous demande de peser désormais $v_p = \frac{1}{\delta}$.

$$\Gamma_g = 0; \quad \Gamma_{ch} = \frac{(R_1 - R_c) C_1 p + 1}{(R_1 + R_c) C_1 p + 1};$$

$$V(l, p) = \frac{E}{2} e^{-p \delta l} \left[\frac{1}{p} + \frac{1 + (R_1 - R_c) C_1 p}{p(1 + T_1 p)} \right], \text{ ou encore :}$$

$$V(l, p) = \frac{E}{2} e^{-p \delta l} \left[\frac{2}{p} - \frac{2 R_c C_1}{1 + T_1 p} \right] = \dots$$

$$\dots E e^{-p \delta l} \left[\frac{1}{p} - \frac{R_c}{R_1 + R_c} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{T_1}} \right]$$

$$v(l, t) = E \left\{ u \left(t - \frac{l}{v_p} \right) - \frac{R_c}{R_1 + R_c} e^{-[(t - \frac{l}{v_p})/T_1]} \right\}.$$

Dans cette expression, u désigne la fonction échelon unité.

On remarque que ce résultat est compatible avec quelques observations de bon sens : 1) La tension ne commence à évoluer

en $x = l$ que lorsque l'onde a atteint l'extrémité de la ligne, au bout de la durée $\frac{l}{v_p}$. 2) Au moment où le front d'onde atteint

le dipôle RC, le condensateur n'est pas chargé; la terminaison est alors équivalente à R_1 seule; la valeur de la tension à cet

instant-là, qui vaut : $\frac{E R_1}{R_1 + R_c} = \frac{E}{2} \left(1 + \frac{R_1 - R_c}{R_1 + R_c} \right)$, est

bien compatible avec ceci. 3) Au bout d'un temps infini, le condensateur est chargé sous la tension E , ce qui est normal puisque la ligne est sans perte. 4) La constante de temps de la charge du condensateur est $(R_1 + R_g)C = (R_1 + R_c)C$ puisque $R_g = R_c$. Avec ces quatre remarques, on obtient directement l'expression de $v(l, t)$.

III.4.2. e) β) La fig. 8 représente $v(l, t)$ et $i(l, t)$.

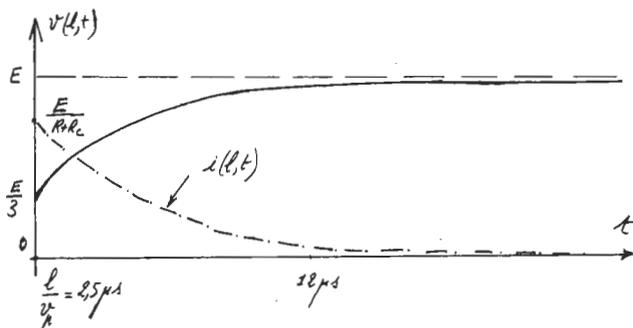


Fig. 8

$$\begin{aligned}
 I(l, p) &= \frac{E}{2R_c} e^{-\frac{pl}{v_p}} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} + \frac{2R_1 C_1}{1 + T_1 p} \right) = \dots \\
 &= \frac{E}{R_1 + R_c} e^{-\frac{pl}{v_p}} \left(\frac{1}{p + \frac{1}{T_1}} \right) \\
 i(l, t) &= \frac{E}{R_1 + R_c} e^{-\left(t - \frac{l}{v_p}\right)}
 \end{aligned}$$

Application numérique :

$$i \left(0, \frac{l}{v_p} \right) = 13 \text{ mA} ; T_1 = (R_1 + R_c) C = 3,75 \text{ } \mu\text{s} ; \frac{l}{v_p} = 2,5 \text{ } \mu\text{s}.$$

III.4.2. e) γ) La détermination de T_1 à l'oscillographe permet certes de déterminer C si l'on connaît R_1 et $R_g = R_c$, ou R_c si l'on connaît tous les autres éléments, mais cela semble une mauvaise méthode de mesure.

QUATRIÈME PARTIE

IV. PROPAGATION DES ONDES DANS LES DISPOSITIFS QUADRIPOLAIRES

IV. MATRICE DISPERSION.

$$\text{IV.1. a)} \quad V = V_i e^{-\gamma x} + V_r e^{\gamma x}.$$

$$I = (V_i e^{-\gamma x} - V_r e^{\gamma x})/Z_c.$$

IV.1. b)

$$V_n = \frac{V_i}{\sqrt{Z_c}} e^{-\gamma x} + \frac{V_r}{\sqrt{Z_c}} e^{\gamma x} ; \quad I_n = \frac{V_i}{\sqrt{Z_c}} e^{-\gamma x} - \frac{V_r}{\sqrt{Z_c}} e^{\gamma x}.$$

$$\text{IV.1. c)} \quad V_n = a + b ; \quad I_n = a - b.$$

IV.1. d)

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{\sqrt{Z_c}} + \sqrt{Z_c} I \right) ; \quad b = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{\sqrt{Z_c}} - \sqrt{Z_c} I \right).$$

$$\text{IV.1. e)} \quad V(0) = 0 ; \quad a(0) = -b(0) ; \quad a(x) = -b(x) e^{-2\gamma x}.$$

$$\text{IV.1. f)} \quad I(0) = 0 ; \quad a = b e^{-2\gamma x}.$$

$$\text{IV.1. g)} \quad a = 0 ; \quad b = -\sqrt{Z_c} I.$$

$$\text{IV.1. h)} \quad P = (a a^* - b b^*)/2.$$

IV.1. i) S_{ii} est le coefficient de réflexion de l'entrée i lorsque l'entrée j est fermée sur une terminaison adaptée .

S_{ij} est un coefficient de transmission. Pour le mesurer, on envoie une onde par l'entrée j et on mesure le rapport b_i/a_j lorsque l'entrée i est fermée sur une terminaison adaptée.

IV.1. j) Plaçons une charge adaptée Z_c à la sortie : $V_2 = Z_c I$;
 $V_1 = (Z + Z_c) I$.

$$V_{r1} = \frac{Z}{Z + 2Z_c} V_{il}, \text{ d'où : } b_1 = \frac{Z}{Z + 2Z_c} a_1.$$

$$V_{r2} = V_2 = \frac{Z_c}{Z + Z_c} V_1 = \frac{Z_c}{Z + Z_c} V_{il} (1 + \Gamma_1) = \dots$$

$$\dots 2 V_{il} \frac{Z + Z_c}{Z + 2Z_c} \cdot \frac{Z_c}{Z + Z_c} = \frac{2Z_c}{Z + 2Z_c} V_{il}.$$

On a donc : $b_2 = \frac{2Z_c}{Z + Z_c}$.

La matière S est symétrique :

$$S = \begin{pmatrix} \frac{Z}{Z + 2Z_c} & \frac{2Z_c}{Z + 2Z_c} \\ \frac{2Z_c}{Z + 2Z_c} & \frac{Z}{Z + 2Z_c} \end{pmatrix}$$

IV.1. k) Plaçons là encore une charge adaptée sur l'entrée 2.

$$a_1 + b_1 = b_2; \quad a_1 - b_1 = (y + 1) b_2, \text{ avec } y = Y Z_c.$$

On en déduit :

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} = -\frac{y}{y + 2}; \quad S = \frac{b_2}{a_1} = \frac{2}{2 + y}.$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{-y}{y + 2} & \frac{2}{y + 2} \\ \frac{2}{y + 2} & -\frac{y}{y + 2} \end{pmatrix}$$

IV.1. l) a)

$$b_1 = a_1; \quad a_2 - b_2 = Z_c g_m (a_1 + b_1) = 2 Z_c g_m a_1;$$

$$b_2 = a_2 - 2 Z_c g_m a_1.$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 g_m Z_c & 1 \end{pmatrix}$$

IV.1. l) β)

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.2. ETUDE DES EFFETS DES CHARGES.

IV.2. a)

$$S'_{11} = \frac{S_{11} - \Delta \cdot \Gamma_{ch}}{1 - S_{22} \Gamma_{ch}}, \quad \text{avec } \Delta = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}.$$

$$S'_{21} = \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_{ch}}.$$

IV.2. b)

$$S'_{12} = \frac{S_{12}}{1 - S_{11} \Gamma_g}.$$

$$S'_{22} = \frac{S_{22} - \Delta \cdot \Gamma_{ch}}{1 - S_{11} \Gamma_g}.$$

IV.2. c) Pour qu'il y ait égalité, il faut que $\Gamma_{ch} = 0$ ($S'_{21} = S_{21}$; $S'_{11} = S_{11}$), et que $\Gamma_g = 0$ ($S'_{12} = S_{12}$; $S'_{11} = S_{11}$). Ceci est évident d'après la définition des S_{ij} donnée à la question IV.1. i).

IV.2. d) α)

$$Z_e = Z_c \frac{1 + S'_{11}}{1 - S'_{11}}.$$

IV.2. d) β)

$$Z_1 = Z_c \frac{1 + S'_{22}}{1 - S'_{22}}.$$

IV.3. AMPLIFICATEUR.

IV.3.1. a)

$$G_p = \frac{|b_2|^2 - |a_2|^2}{|a_1|^2 - |b_1|^2}.$$

IV.3.1. b)

$$G_p = \frac{|b_2|^2 (1 - |\Gamma_{ch}|^2)}{|a_1|^2 (1 - |\Gamma_e|^2)}.$$

IV.3.1. c) D'après la valeur de S'_{21} établie à la question IV.2. a) :

$$G_p = \frac{|S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_{ch}|^2)}{|1 - S_{22} \Gamma_{ch}|^2 (1 - |\Gamma_c|^2)}.$$

IV.3.2. a) $a_1 = b_g + \Gamma_g b_1.$

IV.3.2. b) Compte tenu de ce que $b_1 = S'_{11} a_1$:

$$b_1 = \frac{S'_{11}}{1 - S'_{11} \Gamma_g} b_g.$$

IV.3.2. c)

$$P_g = |a_1|^2 - |b_1|^2 = |b_g|^2 \frac{1 - |S'_{11}|^2}{|1 - S'_{11} \Gamma_g|^2}.$$

IV.3.2. α) $|S'_{11}|$ est inférieure à 1 ; Γ_g est donné : pour un module de S'_{11} donné, il faut pour rendre maximale P_g , choisir pour S'_{11} un argument opposé à celui de Γ_g de manière à rendre $S'_{11} \Gamma_g$ réel. Dans ces conditions, $|1 - S'_{11} \Gamma_g| = 1 - |S'_{11}| |\Gamma_g|.$

Considérons l'expression $z = \frac{1 - x^2}{(1 - xy)^2}$, dans laquelle $z = P_g$;

$$x = |S'_{11}| ; y = |\Gamma_g|. \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y - x}{(1 - xy)^3} ; \text{ donc } \frac{dz}{dx} = 0 \text{ pour } y = x.$$

C'est donc lorsque $|S'_{11}| = |\Gamma_g|$ que P_g est maximale. Ceci, joint au fait que les arguments de S'_{11} et de Γ_g doivent être opposés entraîne : $S'_{11} = \Gamma_g^*$.

IV.3.2. e)

$$P_{g \max} = |b_g|^2 \frac{1 - |\Gamma_g|^2}{(1 - |\Gamma_g|^2)^2} = \frac{|b_g|^2}{1 - |\Gamma_g|^2}.$$

C'est à tort que l'énoncé nous suggère de remplacer $|\Gamma_g|$ par $|S'_{11}|$ dans cette expression. Certes P_g ne peut prendre la valeur $P_{g \max}$ que si $|S'_{11}| = |\Gamma_g|$, mais $P_{g \max}$ peut être calculée alors même que S'_{11} est différent de Γ_g^* .

On peut montrer par ailleurs que l'onde incidente initiale

$$b_g \text{ vaut : } \frac{E}{\sqrt{R_c}} \cdot \frac{R_c}{R_g + j X_g + R_c}.$$

IV.3.2. f)

$$G_i = \frac{P_s}{P_{g \max}} = \frac{|b_2|^2 - |a_2|^2}{|b_g|^2} \cdot [1 - |\Gamma_g|^2].$$

IV.3.2. g)

$$G_i = \frac{|b_2|^2}{|b_g|^2} [1 - |\Gamma_{ch}|^2] [1 - |\Gamma_g|^2].$$

IV.3.2. h)

$$b_2 = \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma_{ch}} a_1$$

(expression établie au § IV.2. a) ;

$$a_1 = \frac{b_g}{1 - S'_{11} \Gamma_g}$$

(expression établie au § IV.3.2. b) et non IV.3.2. a).

On en déduit l'expression de G_i :

$$G_i = \frac{|S_{21}|^2 (1 - |\Gamma_{ch}|^2) (1 - |\Gamma_g|^2)}{|1 - S_{22} \Gamma_{ch}|^2 |1 - S'_{11} \Gamma_g|^2}.$$

IV.3.3. a) Le même raisonnement que celui de la question IV.3.2. d) montre que $G_j = G_{i \max}$ si $\Gamma_{ch} = S_{22}^*$ et si $\Gamma_g = S'_{11}^*$, ce qui est évident.

$$G_{j \max} = \frac{|S_{21}|^2}{(1 - |\Gamma_{ch}|^2) (1 - |\Gamma_g|^2)}.$$

IV.3.3. b) La condition précédente équivaut à : $Z_g = Z_e^*$, $Z_s = Z_{ch}^*$.

IV.3.3. c) La question II.6.2. permet de répondre d'emblée à la question actuelle. Q_1 et Q_2 sont deux tronçons de ligne $\lambda/4$ associés chacun à des tronçons de lignes en court-circuit, permettant de réaliser l'adaptation de Z_{ch} à Z_s d'une part et de Z_g à Z_e d'autre part.

IV.3.3. d)

$$G_{j \max} = \frac{|S_{21}|^2}{(1 - |\Gamma_{ch}|^2) (1 - |\Gamma_g|^2)} = \frac{|S_{21}|^2}{(1 - |S_{22}|^2) (1 - |S'_{11}|^2)}.$$

IV.3.3. e) α)

$$S_{12} = 0 \rightarrow S'_{11} = S_{11}.$$

$$G_{iu \max} = \frac{|S_{21}|^2}{(1 - |S_{22}|^2)(1 - |S_{11}|^2)}.$$

IV.3.3. e) β) L'application numérique ne correspond pas au cas où l'amplificateur est unilatéral. C'est donc l'expression de la question IV.3.3. d) qui convient. On a alors :

$$S'_{11} = \frac{S_{11} - \Delta \cdot \Gamma_{ch}}{1 - S_{22} \Gamma_{ch}} = \frac{S_{11} - \Delta \cdot S_{22}^*}{1 - |S_{22}|^2}.$$

On trouve : $1 - |S_{22}|^2 = 0,524$; $1 - |S'_{11}|^2 = 0,516$;
 $G_{i \max} = 11,3$.

IV.4. OSCILLATEUR.

IV.4.1. Il faut que l'ensemble déphaseur-filtre apporte un déphasage supplémentaire de 180° à la fréquence f_0 . Il faut par ailleurs que le déphasage varie rapidement autour de f_0 afin que la fréquence d'oscillation soit stable.

$$\text{IV.4.2. } P_{osc} = P_{sat} \left(1 - e^{-\frac{G_0 P_e}{P_{sat}}} \right) - P_e.$$

La dérivée $\frac{d P_{osc}}{d P_e}$ s'annule lorsque $\frac{P_e}{P_{sat}} = \frac{l_n G_0}{G_0}$.

IV.4.3. a)

$$P_{e \text{ opt}} = P_{sat} \frac{l_n G_0}{G_0}.$$

IV.4.3. b) Application numérique : $P_{e \text{ opt}} = 36,5 \text{ mW}$.

IV.4.4. a)

$$P_{s \text{ opt}} = P_{sat} \left(1 - \frac{1}{G_0} \right).$$

IV.4.4. b) Application numérique : $P_{s \text{ opt}} = 58,3 \text{ mW}$.

$$\text{IV.4.5. a) } G_{opt} = \frac{G_0 - 1}{\ln G_0}.$$

IV.4.5. b) Application numérique : $G_{opt} = 1,60$ soit $2,04 \text{ db}$.

IV.4.6. a)

$$P_{osc \max} = P_{sat} \left(\frac{G_0 - l_n G_0 - 1}{G_0} \right),$$

IV.4.6. b) Application numérique : $P_{osc\ max} = 21,8\ \text{mW}$.

IV.4.7. a)

$$K_{opt} = P_{e\ opt}/P_{s\ opt} = \frac{l_n G_0}{G_0 - 1}.$$

IV.4.7. b) Application numérique : $K_{opt} = 0,65$.

IV.4.8. a) En l'absence d'information sur le mode de polarisation de l'élément actif de l'amplificateur, il est vain de chercher à relier P_{cont} à P_{sat} . Cependant, si nous supposons que, selon la fig. 9, le point de repos Q de cet élément actif est situé

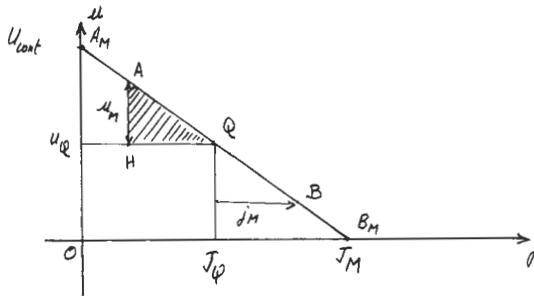


Fig. 9

au milieu de la droite de charge dynamique $A_M B_M$ et que celle-ci est confondue avec la droite de charge statique, alors la tension continue d'alimentation, U_{cont} , vaut $2U_0$ et :

$$P_{cont} = U_{cont} \cdot J_0 = 2U_0 J_0.$$

Lorsque le point de fonctionnement de l'élément actif se déplace de A à B sur la droite de charge dynamique, la puissance

de sortie $P_s = \frac{1}{2} j_M \cdot u_M$ est égale à l'aire du triangle AHQ.

Lorsque $P_s = P_{sat}$, en négligeant les incidences de la distorsion, la puissance P_s est égale à la valeur maximale de cette aire, soit

$$\frac{1}{2} U_0 J_0. \text{ On a donc : } \frac{P_{sat}}{P_{cont}} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Dans ces conditions, } \eta = \frac{P_{osc\ max}}{P_{cont}} = \frac{1}{4} \left(\frac{G_0 - l_n G_0 - 1}{G_0} \right).$$

Application numérique : $\eta = 5,5 \cdot 10^{-2} = 5,5\ \%$. Remarque : dans le cas où la droite de charge statique serait horizontale

($U_{cont} = U_0$), on aurait : $\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{G_0 - l_n G_0 - 1}{G_0} \right)$ soit 11 %.

Ce résultat, de toute manière, est fortement approché.

IV.4.9. Point de compression à 1 db.

IV.4.9. a)

$$P_s = P_{sat} \left[1 - e^{-\frac{(G_0 P_e)}{P_{sat}}} \right] \simeq \dots$$

$$\dots P_{sat} \left[\frac{G_0 P_e}{P_{sat}} - \left(\frac{G_0 P_e}{P_{sat}} \right)^2 \right] = G_0 P_e \left(1 - \frac{G_0 P_e}{P_{sat}} \right).$$

Dans la partie linéaire de la caractéristique, on a $P_s = G_0 P_e$;

on a donc : $P_e = P_{ec\ 1\ dB}$ lorsque le facteur $1 - \frac{G_0 P_e}{P_{sat}}$ vaut $10^{-0,1} = 0,794$, soit $G_0 P_e = 0,206 P_{sat}$.

IV.4.9. b) *Application numérique* : $P_{ec\ 1\ dB} = 8,3\ mW$.

Nous avons trouvé $P_{e\ opt} = 36,5\ mW$. Dans les conditions de puissance « optimales », on est donc loin des conditions de fonctionnement linéaires. N'oublions pas que tout le début de cette quatrième partie (matrice S) suppose des régimes linéaires et que nous en sommes sortis dès lors que la relation $P_s = f(P_e)$ n'est pas linéaire. Le calcul de rendement néglige également les problèmes liés à la distorsion.

IV.4.10. Etude graphique.

IV.4.10. a) La fig. 10 fait apparaître les résultats demandés. Il suffit de remarquer que la puissance $P_{e\ opt}$ est obtenue lorsque le segment AB représentant $P_{osc} = P_s - P_e$ est maximal. Le point A est donc celui où la tangente à la courbe $P_s = f(P_e)$ est parallèle à la droite $P = P_e$.

$$\text{On a : } K_{opt} = \frac{BH}{AH} ; G_{opt} = \frac{AH}{OH} ; \eta = 0,25 \frac{AB}{KH} \text{ dans le}$$

cas où les droites de charge dynamique et statique sont confon-

dues, $\eta = 0,5 \frac{AB}{KH}$ dans le cas où la droite de charge statique

est horizontale.

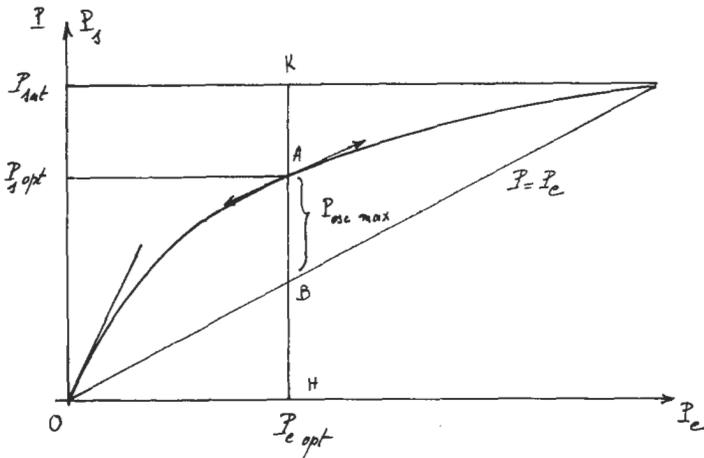


Fig. 10

IV.4.10 b) Nous avons déjà dit que le signal sera distordu. Dans ces conditions bien des hypothèses de ce paragraphe sont irréalistes. Le filtre, notamment, ne peut à la fois agir sur un signal distordu dont il doit ôter les harmoniques indésirables et être réputé sans pertes. La puissance de sortie ne peut s'écrire :

$$P_s = \frac{1}{2} j_M \cdot u_M,$$

que le signal de sortie est sinusoïdal, ce qui n'est pas le cas, etc.

IV.4.10 c) On est bien dans le cas où $G_{iu \max} \neq G_0$ puisque

$$G_{opt} = \frac{AH}{OH} \quad (\text{fig. 10}),$$

alors que G_0 est la pente à l'origine de la caractéristique $P_s = f(P_e)$. $G_{opt} < G_0$. Il suffit de désaccorder quelque peu le couplage du quadripôle actif ABCD (fig. 10 de l'énoncé), soit à l'entrée, soit à la sortie, pour obtenir le gain G_{opt} . L'action sur les tronçons de ligne en court-circuit de la question II.6.2. (reprise en IV.3.3. c) et abordée une première fois en II.5.4.), doit suffire.

R. MOREAU.

SESSION DE 1987

C.A.P.E.S.

CONCOURS EXTERNE

Epreuve commune aux options :

PHYSIQUE ET CHIMIE
PHYSIQUE ET ELECTRICITE APPLIQUEE

COMPOSITION DE PHYSIQUE AVEC APPLICATIONS
(Durée : 5 heures)

SOLUTION

PREMIÈRE PARTIE

DYNAMIQUE TERRESTRE ET SPATIALE

A. CHAMP DE GRAVITATION ET CHAMP DE PESANTEUR.

A.1.1. La force de gravitation est une force *d'attraction* newtonienne, c'est-à-dire *inversement proportionnelle au carré de la distance des masses*. Elle est, de plus, proportionnelle à la masse attirante et à la masse attirée ; avec les notations indiquées dans l'énoncé, en appelant G la constante, on peut écrire :

$$\mathbf{f} = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{u}.$$

Le champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}(r)$ est égal à la force que subirait une masse unité placée au point P. Donc :

$$\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{u}$$

et :

$$\mathbf{f} = m \vec{\mathcal{G}}.$$

A.1.2. Pour montrer qu'un champ dérive d'un potentiel, on doit calculer sa circulation le long d'un contour fermé *quelconque* et montrer que celle-ci est nulle, ou bien, ce qui revient au même, montrer que la circulation du champ entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi :

entre les deux points voisins P et P', en notant \mathcal{G} la valeur algébrique de \mathcal{G} sur **OP** :

$$d\mathcal{C} = \vec{\mathcal{G}} \cdot d\mathbf{P} = \vec{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{PP}' = \vec{\mathcal{G}} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{PP}' = \mathcal{G} dr$$

or $\mathcal{G} dr$ est une différentielle totale, et donc la circulation sur une courbe fermée est nulle.

Puisque $\vec{\mathcal{G}}$ dérive d'un potentiel, on peut écrire :

$$\vec{\mathcal{G}}(r) = -\text{grad } \mathcal{V}(r)$$

ou encore :

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{d\mathcal{V}}{dr} \quad [\mathcal{G}(r) dr \text{ est la différentielle de } -\mathcal{V}].$$

On écrit :

$$\mathcal{V}(r) = \mathcal{V}(\infty) + \int_r^\infty \mathcal{G}(r) dr = \int_r^\infty \mathcal{G}(r) dr$$

d'où :

$$\mathcal{V}(r) = GM \int_r^\infty -\frac{dr}{r^2} = -\frac{GM}{r}.$$

On aurait pu également faire état de l'analogie formelle entre le champ gravitationnel et le champ électrostatique.

A.1.3. Le théorème de Gauss se déduit de l'analogie mentionnée plus haut : il faut remplacer les charges par les masses, la

constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ par $-G$, soit ϵ_0 par $-4\pi G$.

On écrira le théorème de Gauss :

$$\text{div } \vec{\mathcal{G}} = -4\pi \rho G$$

ou encore :

$$\oiint \vec{\mathcal{G}} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G M_{int}$$

le flux du champ gravitationnel sortant d'une surface fermée est égal à la somme des masses intérieures à la surface multipliée par le coefficient $-4\pi G$.

Lorsqu'on applique le théorème de Gauss à une sphère homogène, on utilise comme surface S une surface sphérique de rayon r concentrique à la sphère donnée. Dans ces conditions, la symétrie du problème impose (fig. 1) :

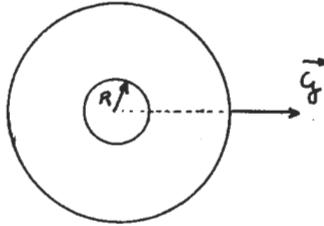


Fig. 1

1. que le champ soit radial,

2. que son module ne dépende que de la distance r . Dans ces conditions, le flux *sortant* de la sphère de rayon r s'écrit :

$$\oiint_S \vec{\mathcal{G}}(r) \, dS = \oiint_S \mathcal{G}(r) \, dS = \mathcal{G}(r) \oiint_S dS = 4 \pi r^2 \mathcal{G}(r).$$

En appliquant le théorème de Gauss, on obtient :

$$4 \pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4 \pi G M_{int}(r).$$

Si $r \geq R$ $M_{int}(r) = M$ et $\mathcal{G}(r) = -G \frac{M}{r^2}$.

Si $r \leq R$ $M_{int}(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ (ρ masse volumique, uni-

forme, égale à $\frac{M}{4/3 \pi R^3}$). D'où :

$$M_{int}(r) = \frac{r^3}{R^3} M \quad \text{et} \quad \mathcal{G}(r) = -\frac{GM r}{R^3}.$$

Il y a évidemment continuité de $\mathcal{G}(r)$ pour $r = R$ (à cause de l'absence de distributions superficielles).

A.1.4. On pose ici : $r = R_T + z$ et on applique les résultats précédents.

Pour $z \geq 0$ $r \geq R_T$ $\mathcal{G}(z) = -G \frac{M}{(R_T + z)^2}$.

Pour $z < 0$ $r < R_T$ $\mathcal{G}(z) = -G \frac{\pi (R_T + z)}{R_T^3}$.

Au voisinage de la Terre, z est petit devant R_T , et on peut effectuer un développement de la première expression :

$$\mathcal{G}(z) = -G \frac{M}{R_T^2} \left(1 - \frac{2z}{R_T} \right) = g_0 \left(1 - \frac{2z}{R_T} \right)$$

et de la seconde :

$$\mathcal{G}(z) = g_0 \left(1 + \frac{z}{R_T} \right).$$

A.2.1. La force de pesanteur est la somme de la force de gravitation \mathbf{f}_1 et de la force d'inertie d'entraînement $\mathbf{f}_2 = m\omega^2 \mathbf{HA}$. Il reste à projeter ces forces sur les axes. \mathbf{f}_2 a un module très

petit : $\frac{f_2}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2} R_T$ à l'équateur (c'est là qu'elle est maximale) avec T période de rotation de 1 jour (fig. 2) :

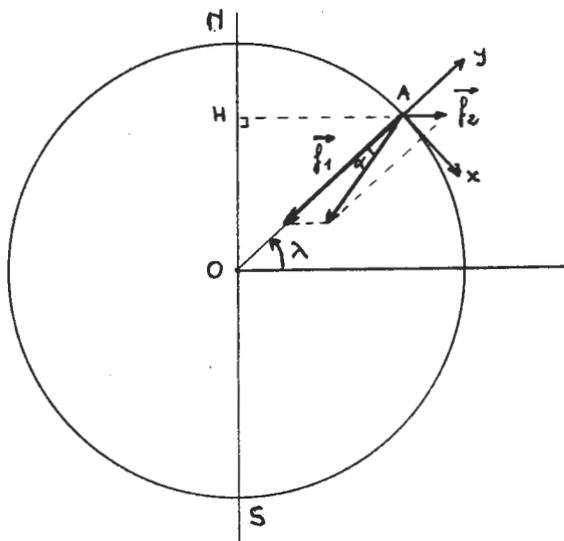


Fig. 2

$$\frac{f_2}{m} = \frac{4 \times \pi^2}{(86400)^2} 6,4 \cdot 10^6 = 0,034 \text{ à comparer à } \frac{f_1}{n} = g_0 \simeq 10$$

$$\begin{cases} P_x = f_2 \sin \lambda = m \omega^2 R_T \sin \lambda \cos \lambda \\ P_y = -f_1 + f_2 \cos \lambda = -\frac{Gm M_T}{R_T^2} + m \omega^2 R_T \cos^2 \lambda \\ P_z = 0. \end{cases}$$

Du fait de la remarque précédente :

$$P_x \ll P_y \quad \text{et} \quad P_y \simeq -\frac{Gm M_T}{R_T^2};$$

la force de pesanteur est voisine de la force de gravitation, et l'angle α entre ces deux forces est petit :

$$\alpha \simeq \operatorname{tg} \alpha = \frac{|P_x|}{|P_y|} = \frac{\omega^2 R_T \sin \lambda \cos \lambda}{\frac{G M_T}{R_T^2} - \omega^2 R_T \cos^2 \lambda} \simeq \dots$$

$$\dots \frac{\omega^2 R_T^3 \sin \lambda \cos \lambda}{G M_T} = \frac{\omega^2 R_T \sin \lambda \cos \lambda}{g_0}.$$

A.2.2. α sera maximal quand $\sin \lambda \cos \lambda$ le sera, c'est-à-dire pour $\lambda = 45^\circ$.

L'expression de α étant approchée, on peut donc dire que le maximum sera obtenu pour une latitude voisine de 45° .

$$\alpha_{max} = \frac{\omega^2 R_T}{g_0} \times \frac{1}{2} = 0,0017 \simeq 6'.$$

A.2.3. Un fil à plomb convient.

A.2.4. $\varepsilon = \frac{\delta g}{g} = \frac{\omega^2 R_T}{g_0}$, puisque $g \simeq g_0$ au pôle et que

$\delta g = f_1$ à l'équateur, d'où : $\varepsilon = 3,5 \cdot 10^{-3}$.

A.2.5. La Terre n'est pas sphérique ; elle a la forme d'un ellipsoïde aplati. La masse n'est pas uniformément répartie. Elle est approximativement répartie en couches sphériques homogènes, ce qui permet d'obtenir le même champ de gravitation à l'extérieur (la Terre est équivalente, pour l'extérieur, à une masse unique placée au centre).

On a implicitement considéré le référentiel géocentrique comme galiléen, ce qui revient à négliger l'effet du mouvement de révolution annuelle de la Terre. Il s'ensuit que l'on n'a donc pas tenu compte de l'interaction du Soleil et des autres astres.

Le mouvement de rotation de la Terre est supposé uniforme. On néglige donc tout phénomène de précession des équinoxes par exemple.

B. VITESSE DE LIBÉRATION ET SATELLITES.

B.1.1. Nous pouvons montrer comme en A.1.3., que le champ gravitationnel d'une sphère de masse M est équivalent à celui d'une masse M placée au centre de la sphère, ceci à l'extérieur

de la sphère [il suffit d'appliquer le théorème de Gauss en utilisant la symétrie sphérique]. Le champ dérive d'un potentiel.

La force gravitationnelle s'exerçant sur la masse m est donc :

$$\mathbf{f} = -G \frac{m M}{r^2} \mathbf{u}.$$

Cette force dérive d'une énergie potentielle E_p et :

$$d E_p = -\mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = -f dr$$

$$E_p = \int_{\infty}^r G \frac{m M}{r^2} dr$$

puisque $E_p(\infty)$ est pris nul, d'où :

$$E_p = -\frac{G m M}{r}.$$

B.1.2. Le théorème de l'énergie cinétique donne immédiatement le résultat :

$$E_c(r) = E_c(R) + \int_R^r f(r) dr$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + G M m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right).$$

On aurait pu également utiliser la conservation de l'énergie mécanique totale $E_c + E_p$.

B.1.3. Pour qu'il échappe à l'attraction de l'astre, l'objet doit parvenir très loin de l'astre avec une énergie cinétique non nulle.

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + G M m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \geq 0 \text{ pour } r \rightarrow \infty.$$

Donc :

$$v_0 \geq v_L \text{ avec } v_L = \sqrt{\frac{2 G M}{R}}.$$

Cette vitesse est indépendante de la masse m .

B.2.1. Pour $R = R_T$ et $M = M_T$, on obtient $v_L = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

B.2.2. Pour $R = 12 \text{ km}$ et $M = 4 M_{\odot}$, on obtiendrait $v \simeq c$; le calcul précédent n'est plus valable. Il faudrait utiliser une expression relativiste de l'énergie. Le résultat reste qualitative-

ment valable : toutes les particules restent « piégées » par l'étoile. Aucune ne peut s'en échapper, pas même un photon. On a affaire à un *trou noir*.

$$\text{B.3. } E_L = \frac{1}{2} m v_L^2 = \frac{Gm M_T}{R_T} \text{ et, sur la Terre :}$$

$E_L = 10^{12}$ joules pour 15 tonnes.

$$\mathfrak{S} = \frac{E_L}{\Delta t} \simeq 10^{14} \text{ watts. Une telle puissance n'est pas réalisable.}$$

B.4.1. Si $m(t) v(t)$ sont respectivement les masse et vitesse de l'engin à l'instant t , on peut écrire : $p(t) = m(t) v(t)$.

A l'instant $t + dt$, la quantité de mouvement est $p + dp$. L'engin a une masse $m - dm$, une vitesse $v + dv$ et la masse dm , éjectée vers l'arrière à la vitesse u algébrique par rapport à la fusée possède la quantité de mouvement $dm ((u + v))$:

$$p + dp = (m - dm)(v + dv) + dm(v_e + v)$$

$$dp = m dv + v_e dm.$$

Si l'on néglige toutes les forces de gravitation, $dp = 0$.

$$m dv + v_e dm = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_e}{m} \frac{dm}{dt} \quad \text{avec} \quad m = m_0 - \alpha t$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\alpha v_e/m_0}{1 - \alpha t/m_0} \quad v(t) = -v_e \ln \left(1 - \frac{\alpha t}{m_0} \right) + v_0 \text{ (figure).}$$

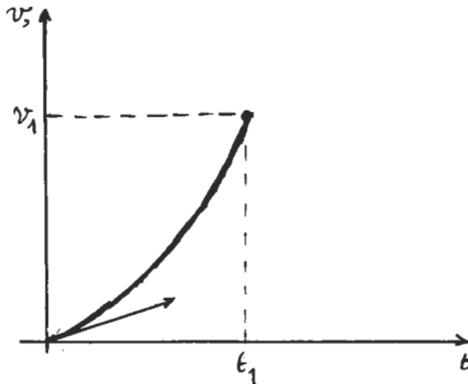


Fig. 3

La figure représente la vitesse du lanceur en fonction du temps t .

B.4.2. La masse de propergol étant m_1 , la durée de fonctionnement t_1 est $t_1 = \frac{m_1}{\alpha}$ et donc la vitesse v_1 obtenue au bout du temps t_1 s'écrira :

$$v_1 = -v_e \ln \frac{m_0}{m_0 - m_1} + v_0.$$

Cette vitesse ne dépend pas du débit α des gaz éjectés. Seul, le temps t_1 en dépend.

Numériquement :

$$v_1 = 4,99 \cdot 10^3 \text{ m. s}^{-1}.$$

B.5.1. On exprime le principe fondamental de la dynamique au satellite soumis à la force de gravitation ; l'accélération normale \mathbf{a} pour expression $-\frac{v^2}{r} \mathbf{u}$. On écrira donc, en projetant :

$$-m \frac{v^2}{R+z} = -G \frac{mM}{(R+z)^2}.$$

D'où :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R+z}}.$$

En introduisant « l'accélération de la pesanteur » g_0 au sol,

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} :$$

$$v = R \sqrt{\frac{g_0}{R+z}}.$$

La période sera :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{v}{R+z},$$

soit :

$$T = 2\pi \frac{R+z}{v} = 2\pi \frac{(R+z)^{3/2}}{\sqrt{GM}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g_0}} \frac{(R+z)^{3/2}}{R}.$$

B.5.2. On a une période égale à la période de rotation de la Terre, soit 24 h ou 86 400 s. D'où :

$$R + z = \left(\frac{g_0 T^2 R^2}{4 \pi^2} \right)^{1/3}$$

$$z \simeq 36\,000 \text{ km.}$$

Pour que le satellite apparaisse comme fixe par rapport à la Terre, il faut que les vitesses de rotation soient les mêmes et que les axes de rotation soient confondus. Le satellite tournera donc autour de l'axe des pôles, dans un plan passant par le centre de la Terre qui est le centre attractif. La trajectoire sera donc dans le plan équatorial.

On utilise généralement des orbites de transfert pour placer un satellite sur une orbite géostationnaire. Le satellite a été préalablement placé sur une orbite basse (à une altitude de quelques centaines de kilomètres). On lui donne une impulsion assez courte, ce qui lui donne une trajectoire elliptique. Une seconde impulsion, à l'apogée de cette trajectoire, lui donnera une trajectoire circulaire sur l'orbite géostationnaire.

Les satellites sont des satellites soit d'observation (civile ou militaire), soit de télécommunications.

B.5.3. L'énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{G m M}{R + z}.$$

D'après B.1.1. :

$$E_p = - \frac{G m M}{R + z}$$

et donc :

$$E_T = - \frac{1}{2} \frac{G m M}{R + z}.$$

Lorsque z augmente, E_p et E_T augmentent, E_c diminue.

Si, par suite de frottements, l'énergie totale du satellite diminue, z diminuera et l'énergie cinétique augmentera. La vitesse va donc augmenter. Les frottements produisent donc une *augmentation* de vitesse linéaire du satellite.

B.5.4. De l'expression $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{G m M}{R + z}$, on déduit,

en différenciant :

$$2 \frac{dv}{v} = - \frac{dz}{R+z}$$

et de B.5.1. :

$$\frac{dT}{T} = \frac{3}{2} \frac{dz}{R+z}$$

On considère la variation Δz comme petite devant $R+z$, ce qui permet de calculer Δv et ΔT :

$$\Delta v = - \frac{2v}{R+z} \Delta z \quad \Delta T = \frac{3}{2} \frac{T}{R+z} \Delta z$$

Le calcul numérique, en utilisant B.5.1., donne :

$$\Delta v = +0,11 \text{ m.s}^{-1} \quad \Delta T = -0,24 \text{ s.}$$

B.5.5. Le centre d'inertie I du système décrit un cercle de rayon r . En appliquant le théorème de la résultante cinétique au système, il vient :

$$-2 m g_I = -2 m \omega^2 r$$

puis en l'appliquant au satellite A_I :

$$\mathcal{T} - m g_A = -m \omega^2 (r+a).$$

En appliquant le résultat de A.1.4. : $g_A = g_I \left(1 - \frac{2a}{r}\right)$,

d'où :

$$\mathcal{T} = -3 m g_I \frac{a}{r}.$$

Les tensions peuvent être sources de déformations, voire de destructions.

C. ENVIRONNEMENT DES PLANÈTES.

C.1.1. La vitesse quadratique moyenne est définie par :

$$v^{*2} = \frac{1}{N} \sum_i v_i^2$$

son carré est la moyenne du carré des vitesses des molécules du gaz.

Or, pour un gaz parfait monoatomique, l'énergie cinétique moyenne :

$$\langle E_c \rangle = N \frac{1}{2} m v^{*2}$$

est égale à $3N \times \frac{1}{2} kT$. On associe en effet $\frac{1}{2} kT$ à chaque degré de liberté (équipartition de l'énergie).

D'où la formule : $v^2 = 3RT/M$, puisque $R = \mathcal{N}k$ et $M = \mathcal{N}m$, où \mathcal{N} désigne le nombre d'Avogadro.

C.1.2. On obtient : $v^*_{O_2} = 0,48 \text{ km.s}^{-1}$; $v^*_{N_2} = 0,52 \text{ km.s}^{-1}$, ces vitesses sont inférieures à la vitesse de libération sur Terre. L'atmosphère est stable. Il peut cependant y avoir des molécules qui s'échappent de l'atmosphère puisque v^* ne représente qu'une moyenne et que, donc, certaines molécules peuvent avoir une vitesse très supérieure à v^* , et qui approche la vitesse de libération.

C.2. Pour un corps solide : $v_1 = \omega r_1$, $v_2 = \omega r_2$ et donc :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{r_2}{r_1}.$$

S'il s'agit au contraire de fragments, chacun des fragments, de masse m a une vitesse :

$$v = \sqrt{\frac{GMm}{r}}.$$

Donc $r_1 v_1^2 = r_2 v_2^2$.

SECONDE PARTIE

PRINCIPE D'UN ANALYSEUR DE SPECTRE ACOUSTO-OPTIQUE

A. ETUDE PRÉLIMINAIRE D'UN RÉSEAU OPTIQUE SIMPLIFIÉ.

A.1. La différence de marche entre 2 rayons issus de deux sources voisines est la distance $OH = a \sin \theta$.

A.2. On aura un maximum de lumière quand toutes les sources émettront *en phase*, c'est-à-dire quand le déphasage entre deux faisceaux voisins sera un multiple de 2π :

$$\delta y = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta = 2k\pi.$$

D'où : $\theta = \theta_k$ défini par : $\sin \theta_k = \frac{k\lambda}{a}$.

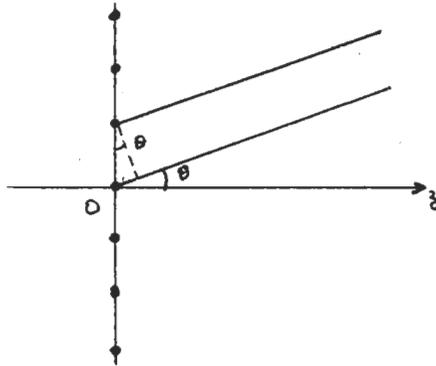


Fig. 4

A.3. A condition de se placer dans le plan focal d'une lentille mince, ou dans un plan très éloigné, ces plans étant parallèles à xOy , on obtiendra le même résultat que précédemment, le système étant invariant dans une translation parallèle à Oy . L'avantage est que le phénomène sera beaucoup plus lumineux.

A.4. L'application du principe de Huygens nous permet de considérer chacune des fentes comme une source secondaire. Ces différentes sources émettent en phase, puisqu'elles reçoivent l'onde plane et qu'elles se trouvent dans un plan d'onde de cette onde.

A.5. Le problème sera analogue au précédent, mais les fentes ne seront plus en phase, car elles ne se trouvent plus dans un plan d'onde. Le déphasage entre 2 sources successives se calculera comme le précédent. Il vaudra :

$$\frac{2\pi}{\lambda} a \sin i_1.$$

Au total, dans l'onde diffractée dans l'angle i_2 , le déphasage entre les ondes émises par 2 sources successives sera :

$$\frac{2\pi}{\lambda} a (\sin i_1 - \sin i_2).$$

Il y aura maximum principal quand toutes les ondes diffractées par toutes les fentes sont en phase (ou diphasées d'un multiple de 2π).

$$\frac{2\pi}{\lambda} a (\sin i_1 - \sin i_2) = k 2\pi$$

$$\sin i_1 - \sin i_2 = k \frac{\lambda}{a}.$$

A.6. Pour i_1 et i_2 donnés, on aura maximum principal lorsque le produit $k\lambda$ prendra la même valeur : $a(\sin i_1 - \sin i_2)$. Les maxima correspondant aux radiations de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 pourront se superposer dans cette direction, si on peut trouver des entiers k_1 et k_2 tels que $k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2$.

A.7. Calculons l'amplitude diffractée par une fente de largeur D dans le plan yOz . On pose : $\alpha = \sin \theta$ et $\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = u$.

$$s = k \int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} s_0 \exp iux \, dx$$

$$= k \frac{e^{\frac{iuD}{2}} - e^{-\frac{iuD}{2}}}{iu} = 4kD \frac{\sin \frac{uD}{2}}{\frac{uD}{2}}.$$

La largeur de la tache centrale est la distance entre les minima nuls qui la limitent, et qui sont obtenus pour :

$$uD = 2\pi \quad \alpha = \frac{\lambda}{D}.$$

La largeur de la tache de diffraction est donc, en fait $\frac{2\lambda}{D}$.

B.1. L'onde se propage à la vitesse du son v_s . Le temps mis par cette onde pour parcourir la longueur D sera tout simplement

$$\tau = \frac{D}{v_s}.$$

Numériquement : $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$ s.

L'onde *progressive* ainsi établie aura une périodicité spatiale qui est caractérisée par sa longueur d'onde $\lambda_s = \frac{v_s}{f_s} = 2 \cdot 10^{-5}$ m.

On peut assimiler le milieu perturbé par cette onde à un réseau de pas λ_s . Ce réseau est en mouvement à la vitesse v_s . Cependant, on considèrera que ce mouvement est négligeable,

car v_s est petit devant la vitesse de la lumière $c' = \frac{c}{n}$ (c célérité de la lumière dans le vide).

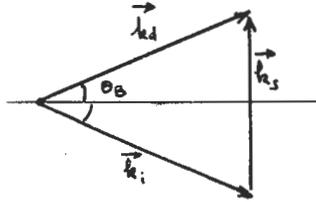
$$\text{B.2. } \lambda_1 = \frac{c'}{v} = \frac{c}{nv} = \frac{\lambda}{n} \quad \lambda_1 = 0,28 \text{ } \mu\text{m.}$$

Dans l'ordre 1, avec $i_1 = -i_2 = -\vartheta_B$, on aura :

$$2 \sin \vartheta_B = \frac{\lambda_1}{\lambda_s} = \frac{\lambda}{n} \frac{f_s}{v_s},$$

et comme ϑ_B est petit :

$$2 \vartheta_B = \frac{\lambda}{n} \frac{f_s}{v_s}.$$



B.3. La conservation de l'énergie, lors de l'interaction, se traduit par :

$$h f_d = h f_i + h f_s$$

et comme : $f_s \ll f_i \quad f_d \simeq f_i = f$.

La conservation de la quantité de mouvement s'écrira :

$$\hbar \mathbf{k}_d = \hbar \mathbf{k}_i + \hbar \mathbf{k}_s$$

$$\mathbf{k}_d = \mathbf{k}_i + \mathbf{k}_s \quad |\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_d|$$

$$\text{puisque } f_i = f_d$$

soit, en projetant :

$$2 |\mathbf{k}_i| \sin \vartheta_B = |\mathbf{k}_s| \quad |\mathbf{k}_i| = \frac{2\pi}{\lambda_1} \quad |\mathbf{k}_s| = \frac{2\pi}{\lambda_s}$$

$$\sin \vartheta_B = \frac{1}{2} \frac{\lambda_1}{\lambda_s}.$$

B.4. L'onde à la fréquence f_{s1} donnera un réseau de pas :

$$\frac{v_s}{f_{s1}} = a_1. \text{ De même, l'onde à la fréquence } f_{s2} \text{ donnera un réseau}$$

$$\text{de pas : } \frac{v_s}{f_{s2}} = a_2.$$

Le premier réseau donnera un spectre avec des maxima principaux pour :

$$\sin \vartheta = \frac{1}{2} k \frac{\lambda}{a_1}$$

et le second pour :

$$\sin \vartheta = \frac{1}{2} k \frac{\lambda}{a_2}.$$

Le spectre d'ordre 1 du second réseau sera défini par :

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda}{2 a_2}.$$

Le spectre d'ordre 2 du premier réseau, par :

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda}{a_1}.$$

Pour qu'il n'y ait pas recouvrement, il faudra donc que :

$$\frac{\lambda}{a_1} \neq \frac{\lambda}{2 a_2}, \text{ soit } f_{s2} \neq 2 f_{s1}.$$

B.5. $f_s = 3 \cdot 10^7$ Hz donne $\vartheta_B = 6,8 \cdot 10^{-3}$ rd :

$$\delta \vartheta_B = \frac{\lambda}{D} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ rd}$$

est la plus petite variation de ϑ_B décelable, et :

$$\frac{\delta \vartheta_B}{\vartheta_B} = \frac{\delta f_s}{f_s}.$$

La plus petite variation de fréquence décelable sera donc :

$$\delta f_s = \frac{f_s}{\vartheta_B} \delta \vartheta_B. \text{ Numériquement : } \delta f_s = 93 \text{ kHz.}$$

B.6. La source émet un signal périodique de période $T = \frac{1}{f_s}$.

Elle se déplace à la vitesse v . Entre l'émission de 2 signaux, la source s'est déplacée de vT . Le nouveau signal a dû donc parcourir cette distance vT en supplément. La période du signal reçu par l'observateur sera :

$$T' = T + \frac{vT}{c} = T \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

$$\frac{\delta T}{T} \simeq \frac{v}{c}$$

et donc ici, $\frac{\delta \vartheta_B}{\vartheta_B} \simeq 2 \cdot 10^{-3}$.

On pourra donc déceler des vitesses au moins égales à $2 \cdot 10^{-3} \times c$, soit : $v = 600 \text{ km. s}^{-1}$.

J.-Cl. HERPIN.

SESSION DE 1987

C.A.P.E.S

CONCOURS EXTERNE

COMPOSITION DE CHIMIE**Option : Physique et Chimie**

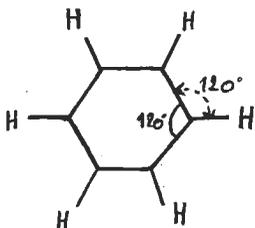
(Durée : 4 heures)

SOLUTION

1. GENERALITES SUR LE BENZENE (12 points).

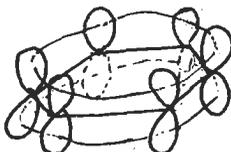
1.1. STRUCTURE DU BENZÈNE.

1.1.1. La molécule est plane, les angles font 120° .
Le squelette σ de la molécule est donc :



1.1.2. Les angles \widehat{ccc} étant de 120° , il est judicieux de choisir une hybridation sp^2 .

1.1.3. Les orbitales atomiques p se recouvrent comme indiqué sur le schéma :



1.1.4.



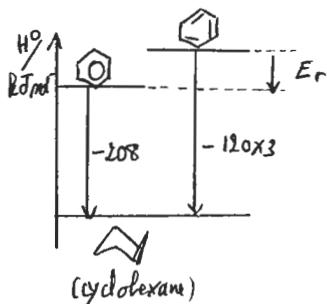
1.1.5. Les deux formes mésomères ont le même poids statistique, toutes les liaisons carbone-carbone sont donc identiques, intermédiaires entre la liaison simple (indice de liaison 1) et la liaison double (indice de liaison 2). (L'indice de liaison est 1,5).

1.2. ASPECT ÉNERGÉTIQUE.

1.2.1. L'énergie de résonance est par définition l'enthalpie standard de la réaction fictive.



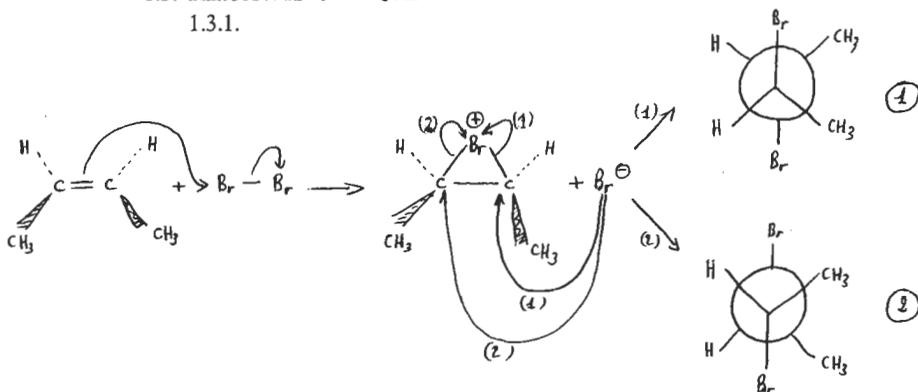
1.2.2. Les données du problème permettent d'établir le diagramme suivant :



$$|E_r| = 152 \text{ kJ mol}^{-1}.$$

1.3. RÉACTIVITÉ CHIMIQUE.

1.3.1.

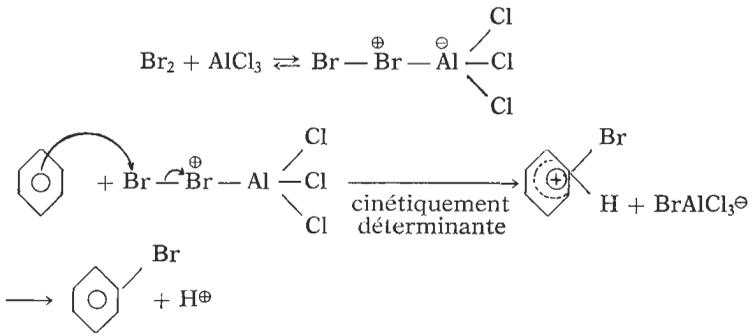


Il s'agit donc de l'attaque électrophile du dibrome, avec formation d'un intermédiaire bromonium ponté. Le bilan est une addition électrophile ;

- (1) est le dibromo-2,3 butane (2 R, 3 R),
 (2) est le dibromo-2,3 butane (2 S, 3 S).

1.3.2. Il s'agit ici de l'attaque électrophile du dibrome sur le benzène, mais l'intermédiaire formé, qui n'est pas ponté, évolue par élimination d'un proton H^+ pour retrouver l'aromaticité du cycle. Le bilan est une substitution électrophile (H substitué par Br).

Mécanisme :



1.3.3. Les alcènes subissent donc des additions électrophiles alors que le benzène subit une substitution électrophile.

2. ACIDE NITRIQUE ET DERIVES (36 points).

2.1. SYNTHÈSE DE L'ACIDE NITRIQUE.

2.1.1. Oxydation de l'ammoniac.

2.1.1.1.

$$\frac{d \Delta_r H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0 = 0 \Rightarrow \Delta_r H^0 = c^{te} = A$$

$$\frac{d \Delta_r S^0}{dT} = \frac{\Delta_r C_p^0}{T} = 0 \Rightarrow \Delta_r S^0 = c^{te} = -B$$

donc : $\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \Delta_r S^0 = A + BT$.

Avec les données du tableau :

$$\Delta_r H_{298}^0 = -453,0 \text{ kJ mol}^{-1}$$

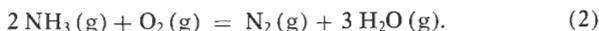
$$\Delta_r H^0 = \Sigma \Delta_f H^0(i) = 2 \Delta_f H^0(\text{NO}) + \dots$$

$$\dots 3 \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}) - \frac{5}{2} \Delta_f H^0(\text{O}_2) - 2 \Delta_f H^0(\text{NH}_3)$$

$\Delta_r C_p^0$ se calcule de la même façon, les C_p^0 étant, ici, constants, $\Delta_r C_p^0$ est constant.

$$\Delta_r H_T^0 = \Delta_r H_{298}^0 + \Delta_r C_p(T - 298) \quad \Delta_r H_{800}^0 = 444,5 \text{ kJ mol}^{-1}.$$

2.1.1.2.



Les réactions s'effectuent sous contrôle cinétique, le produit majoritaire est donc celui qui se forme le plus vite. Il est donc possible de choisir un catalyseur spécifique qui augmente la vitesse de (1) sans augmenter celle de (2).

2.1.2. Oxydation du monoxyde d'azote.

2.1.2.1.



$$\text{Pour cette réaction : } \Delta_r G_3 = \Delta_r G_3^0 + RT \ln \frac{x_{\text{NO}_2}^2}{x_{\text{O}_2} x_{\text{NO}}^2} \frac{1}{P}.$$

Pour une petite transformation, où partant d'un état d'équilibre, **seule** P est modifiée :

$$d \Delta_r G_3 = -RT \frac{dP}{P} \quad dP > 0 \Rightarrow d \Delta_r G_3 < 0 \Rightarrow \text{sens } +3$$

(gauche vers droite)

les valeurs fournies permettent de calculer :

$$\Delta_r H_3^0 = -114,20 \text{ kJ mol}^{-1} \quad \frac{d \ln K_3}{dT} = \frac{\Delta_r H_3^0}{RT^2} < 0.$$

Donc, si la température s'élève, K_3 diminue, et l'équilibre évolue dans le sens -3 .

2.1.2.2.

$$1. \quad v = \frac{1}{2} \frac{d C_{\text{NO}_2}}{dt} = k_5 C_{\text{O}_2} C_{\text{N}_2\text{O}_2}$$

mais l'équilibre (4) étant réalisé :

$$K_4 = \frac{C_{\text{N}_2\text{O}_2}}{C_{\text{NO}}^2} \Rightarrow C_{\text{N}_2\text{O}_2} = K_4 C_{\text{NO}}^2$$

d'où : $v = k_5 K_4 C_{\text{O}_2} C_{\text{NO}}^2.$

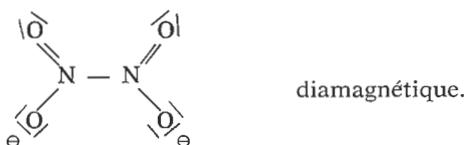
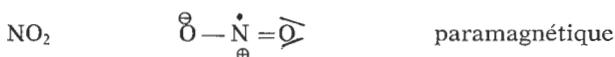
2. L'ordre global est 3.

La réaction 6 considérée comme une étape élémentaire, est trimoléculaire, elle correspond donc à un processus peu probable en termes de statistique.

3. k_5 est une constante cinétique qui ne peut qu'augmenter avec la température, mais K_4 qui est une constante thermodynamique peut diminuer quand T augmente. C'est donc l'étape (4) qui permet de justifier la variation de la vitesse avec T.

Avec un mécanisme en une seule étape: $v = k_6 C_{\text{O}_2} C_{\text{NO}}^2$, k_6 ne peut qu'augmenter avec T, donc v aussi.

2.1.3.1.



2.1.3.2. $\Delta_r H_7 = -57,20 \text{ kJ mol}^{-1},$

$\Delta_r S_7 = -175,7 \cdot 10^{-3} \text{ kJ mol}^{-1}.$

La température d'inversion correspond à $\Delta_r G_7 = 0$, soit :
 $T_i = 325,55 \text{ K}.$

2.1.3.3.

$$K_7 = e^{-\frac{\Delta_r G^0_7}{RT}} \quad K_7(40^\circ\text{C}) = 2,34.$$



$$\begin{array}{ccc} a & 0 & \\ a - 2\xi & \xi & \xi : \text{avancement de la r\u00e9action,} \\ a(1 - \alpha) & \frac{a\alpha}{2} & \alpha = \frac{a\xi}{2} : \text{coefficient de dissociation.} \end{array}$$

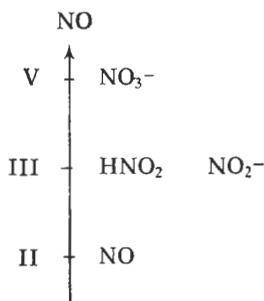
L'application de la loi d'action des masses donne :

$$K_7 = \frac{\alpha(2 - \alpha)}{4(1 - \alpha)^2} \frac{1}{P} \quad \text{ne pas oublier la quantit\u00e9 de gaz totale qui vaut } a\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

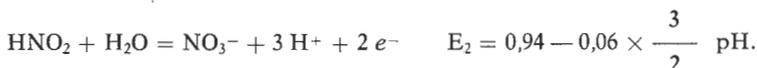
L'application num\u00e9rique conduit \u00e0 : $\alpha = 0,69$.

2.2. DIAGRAMME E — pH.

2.2.1.

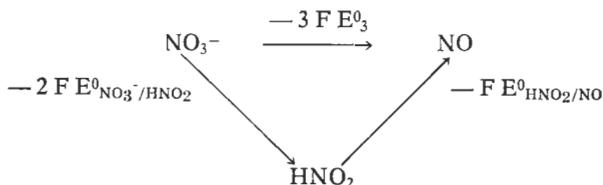


2.2.2. HNO_2 est \u00e0 la fois oxydant et r\u00e9ducteur :

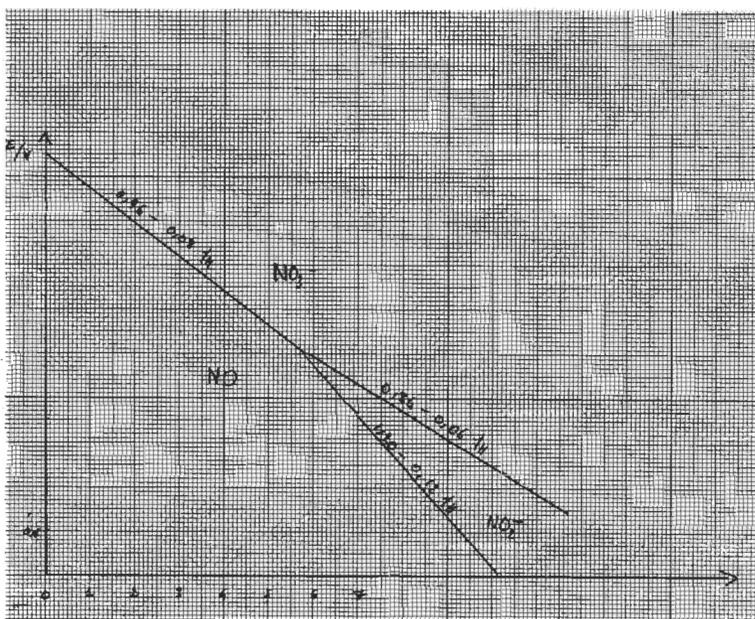


Pour un mole dm^{-3} , la dismutation a lieu si $E_1 > E_2$ c'est-\u00e0-dire pour $\text{pH} > -2$. Donc, dans le domaine \u00e9tudi\u00e9, HNO_2 (et pas n\u00e9cessairement NO_2^\ominus) se dismute.

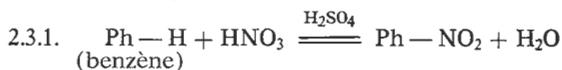
2.2.3. Il est pratique de construire un cycle sur lequel sont indiquées les variations d'enthalpie libre standard :



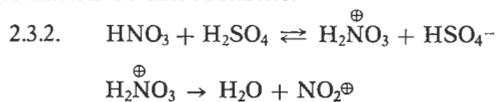
ce qui conduit à : $E_3^0 = 0,96 \text{ V}$.

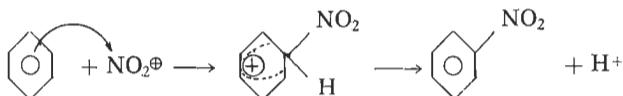


2.3. INTERVENTION DE L'ACIDE NITRIQUE ET DE L'ACIDE NITREUX EN CHIMIE ORGANIQUE.



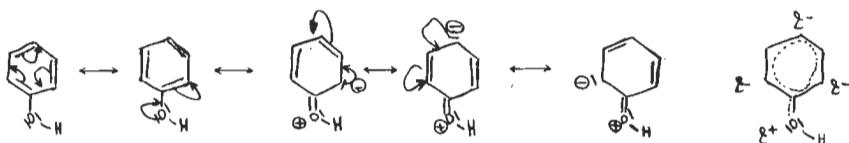
donc, formation de nitrobenzène.





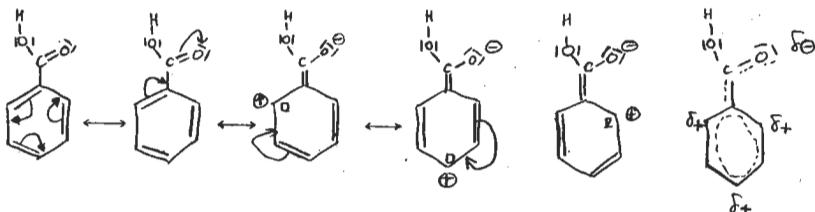
2.3.3. Les réactions sur le benzène étant électrophiles, de façon simplifiée, on peut dire que tout groupe qui augmente la densité électronique du cycle augmente la vitesse de la réaction. Tout groupe qui diminue la densité électronique a l'effet inverse.

Ainsi. — OH. — OCH₃, — CH₃ sont des activateurs :



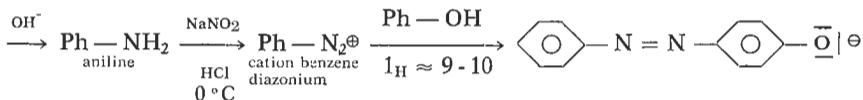
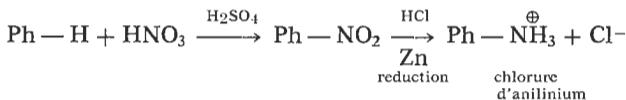
forme résumée :
cycle enrichi en électrons

et — CO₂H, — NO₂ sont désactivateurs.



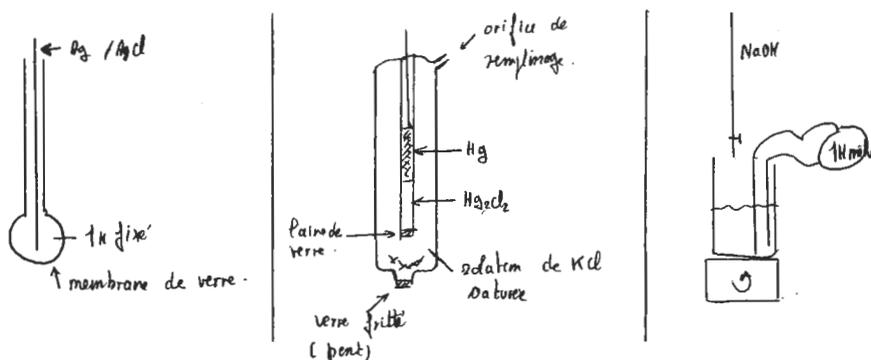
forme résumée :
cycle appauvri en électrons

2.3.4.1.



2.3.4.2. Ces réactions sont utilisées dans la synthèse des colorants.

2.4. TITRAGE ACIDE - BASE.



2.4.2. L'acide fort est titré le premier, puis l'acide faible.

$$c = 4 \cdot 10^{-3} \text{ mol dm}^{-3}$$

$$c_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol dm}^{-3}$$

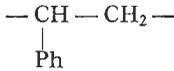
2.4.3.

V_b/cm^3	espèce présente qui impose le pH	expression de pH	pH
0	acide fort	$-\lg C$	2,40
4	acide fort	$-\lg \frac{4 \cdot 10^{-3} \times 20}{2 \cdot 24}$	2,78
8	acide faible	$\frac{1}{2} \text{p}K_a - \frac{1}{2} \lg \frac{5 \cdot 10^{-3} \times 20}{28}$	3,53
13	mélange acide et base conjugués	$\text{p}K_a$	4,62
18	base faible	$7 + \frac{1}{2} \text{p}K_a + \frac{1}{2} \lg \frac{5 \cdot 10^{-3} \times 20}{38}$	8,02
24	excès d' OH^-	$c_0 = \frac{24 \cdot 10^{-2} - 18 \cdot 10^{-2}}{44}$	11,14

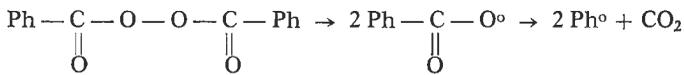
3. POLYSTYRENE (16 points).

3.1. POLYMERISATION.

3.1.1.



3.1.2.1.



3.1.2.2.

$$v = - \frac{d C_M}{dt} = k C_M C_I^{1/2}$$
 par définition de l'ordre et une réaction.

3.1.2.3.

$$\begin{aligned} v &= - \frac{d C_M}{dt} = k_p C_{R_1} \dot{C}_M + k_p C_{R_2} \dot{C}_M + \dots + k_p C_{R_n} \dot{C}_M \\ &= k_p C_M \left(\sum_{l=1}^n C_{R_l} \dot{} \right). \end{aligned}$$

3.1.2.4.

$$\frac{d C_{R_1} \dot{}}{dt} = 2 k_i C_I - k_p C_{R_1} \dot{C}_M - k_r C_{R_1} \dot{} \left(\sum C_{R_i} \dot{} \right) = 0$$

$$\frac{d C_{R_2} \dot{}}{dt} = k_p C_{R_1} \dot{C}_M - k_p C_{R_2} \dot{C}_M - k_r C_{R_2} \dot{} \left(\sum C_{R_i} \dot{} \right) = 0$$

$$\frac{d C_{R_n} \dot{}}{dt} = k_p C_{R_{n-1}} \dot{C}_M - k_p C_{R_n} \dot{C}_M - k_r C_{R_n} \dot{} \left(\sum C_{R_i} \dot{} \right) = 0.$$

en faisant la somme.

$$2 k_i C_I - k_r (\sum C_{R_i}) (\sum C_{R_i} \dot{}) = 0$$

d'où :

$$\sum C_{R_i} = \left(\frac{2 k_i C_I}{k_r} \right)^{1/2}$$

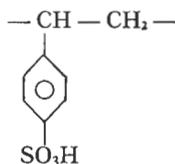
enfin, en reprenant l'expression de v , il vient :

$$v = k_p \sqrt{\frac{2 k_i}{k_r}} C_M C_1^{1/2}$$

3.1.2.5. Le mécanisme est simplifié dans la mesure où tous les k_p ont été pris identiques, y compris le premier, ainsi que tous les k_r .

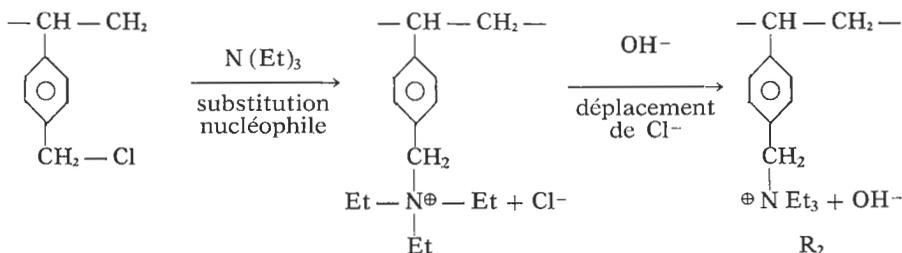
3.2. RÉSINES ÉCHANGEUSES D'IONS.

3.2.1. Il s'agit d'une sulfonation en *para* du noyau benzénique.



3.2.2.

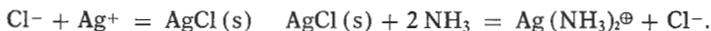
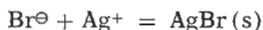
3.2.3.



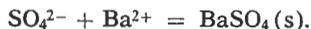
4. IONS EN SOLUTION ET RESINES ECHANGEUSES D'IONS (16 points).

4.1. ANALYSE QUALITATIVE DES IONS.

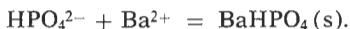
4.1.1. Les ions bromures peuvent être caractérisés par formation de $\text{AgBr}(s)$ insoluble dans l'ammoniac, alors que $\text{AgCl}(s)$ est soluble dans les mêmes conditions.



4.1.2.1. Les ions sulfates peuvent être caractérisés par formation de sulfate de baryum insoluble.



4.1.2.2. Le même test peut aussi caractériser les ions hydrogénophosphate :



Mais les ions hydrogénophosphates sont basiques et peuvent donc réagir avec H^+ :



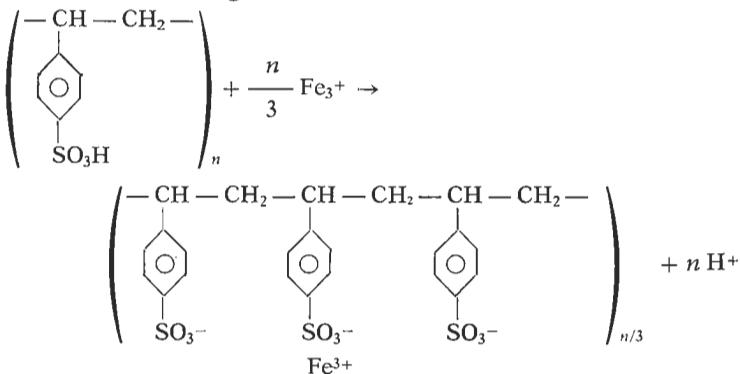
Ces réactions totales font régresser l'équilibre précédent dans le sens de la redissolution de $\text{BaHPO}_4(\text{s})$.

L'ion sulfate est une base trop faible pour donner des réactions acide-base.

4.1.2.3. Avec l'ion SCN^- , le Fe^{3+} donne un complexe rouge dit rouge sang de formule $\text{Fe}(\text{SCN})^{2+}$.

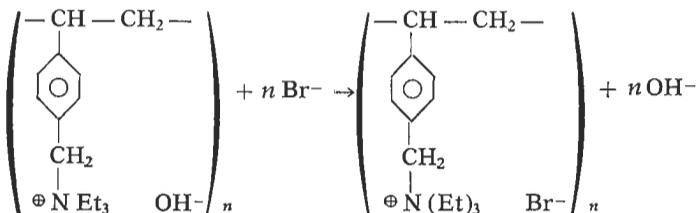
4.2. UTILISATION DES RÉSINES ÉCHANGEUSES D'IONS.

4.2.1. Echange de cation.



Les ions Fe^{3+} sont remplacés par les ions H^+ .

Echange d'anion :



La réaction est identique avec les ions sulfate.

Les ions Br^- et SO_4^{2-} sont remplacés par les ions OH^- .

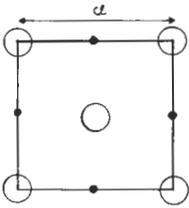
4.2.2. Les cations ayant été remplacés par des ions H^+ et les anions par des ions OH^- , de l'eau pure est obtenue théoriquement à la sortie.

4.3. ETUDE STRUCTURALE DU BROMURE D'ARGENT.

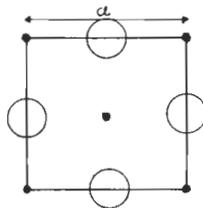
4.3.1. La maille cristalline peut être décrite comme un empilement (non compact) d'ions Cl^- , les sites octaédriques sont tous occupés par des ions Ag^+ .

○ désigne un ion chlorure Cl^-

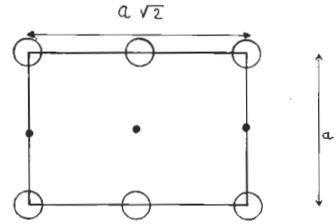
• désigne un ion sodium Ag^+



une face du cube.



plan possible à une face, décollé de $a/2$.



plan contenant deux arêtes parallèles n'appartenant pas à la même face du cube.

4.3.2. Cl^- est au centre d'un octaèdre de Ag^+ et Ag^+ au centre d'un octaèdre de Cl^- , donc : coordinence 6/6.

Jacques ARZALLIER,
Lycée Pothier, Orléans.

SESSION DE 1987

C.A.P.E.S.

CONCOURS EXTERNE

Option : Physique et Electricité appliquée

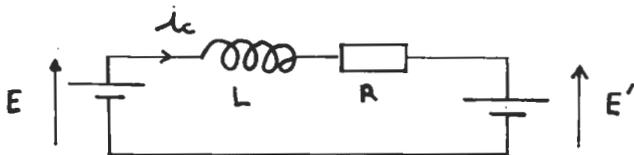
**COMPOSITION D'ELECTRONIQUE, D'ELECTROTECHNIQUE
AVEC APPLICATIONS****SOLUTION**

PARTIE A : ETUDE DU HACHEUR

A.1. RÉGIME DE CONDUCTION CONTINUE.

A.1.1.

a) De 0 à αT_0 , le schéma équivalent au montage est le suivant :



On en déduit l'équation différentielle :

$$E = R i_c + L \frac{d i_c}{dt} + E'$$

ou :

$$i_c + \frac{L}{R} \frac{d i_c}{dt} = \frac{E - E'}{R}$$

b) On peut écrire la solution de cette équation sous la

forme : $i_c = \frac{E - E'}{R} + K e^{-t/\tau}$ en posant $\tau = \frac{L}{R}$.

Comme $\tau = 70 \text{ mS} \gg T_0$, on peut assimiler l'exponentielle à sa tangente en utilisant le développement limité de $e^{-t/\tau}$ au 1^{er} ordre :

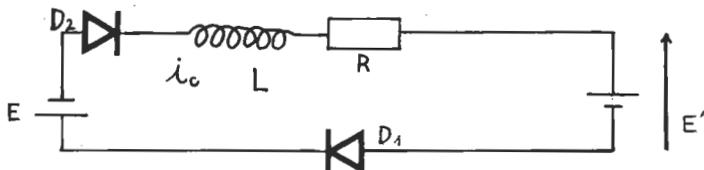
$$I_c \simeq \frac{E - E'}{R} + K \left(1 - \frac{t}{\tau} \right)$$

on a : $i_k = i_c$ et $i_D = 0$.

A.1.2. $\alpha T_0 < t < T_0$.

a) Le courant ne pouvant subir de discontinuité dans une inductance, on en déduit que i_c conserve le même sens que précédemment.

b) Le schéma équivalent devient :



c) On constate que par rapport au 1^{er} schéma, E a simplement été inversé.

L'équation différentielle est donc :

$$i_c + \tau \frac{d i_c}{d t} = - \frac{E + E'}{R}$$

En prenant l'origine des temps $a - \alpha T_0$, la solution s'écrira :

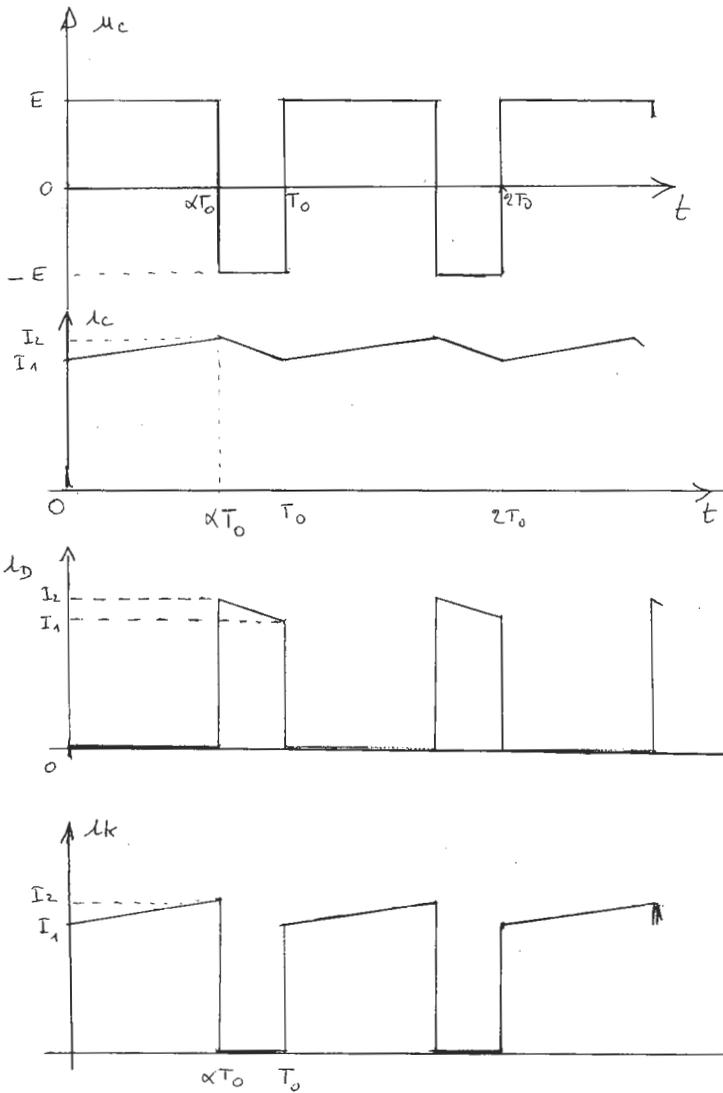
$$i_c = - \frac{E + E'}{R} + K' e^{-t/\tau}$$

qui pourra encore être assimilé à une droite :

$$i_c \simeq - \frac{E + E'}{R} + K' (1 - e^{-t/\tau})$$

Pendant cette phase, on a : $i_c = i_D$ et $i_k = 0$.

A.13.



A.1.4. Ecrivons qu'au début de la 1^{re} phase, $i_k = I_1$ et à la fin de celle-ci : $i_k = I_2$.

$$i_k(0) = I_1 = \frac{E - E'}{R} + K$$

$$i_k(\alpha T_0) = I_2 = \frac{E - E'}{R} + K \left(1 - \frac{\alpha T_0}{\tau} \right)$$

ou :

$$I_2 - I_1 = -\frac{K \alpha T_0}{\tau} \quad \text{et} \quad K = I_1 - \frac{E - E'}{R}$$

soit :

$$\Delta I = I_2 - I_1 = -\frac{\alpha T_0}{\tau} \left(I_1 - \frac{E - E'}{R} \right).$$

De la même manière, on peut écrire que $i_D(0) = I_2$ et $i_D[(1 - \alpha) T_0] = I_1$.

On obtiendra alors :

$$-\Delta I = I_1 - I_2 = -(1 - \alpha) \frac{T_0}{\tau} \left(I_2 + \frac{E + E'}{R} \right). \quad (2)$$

Cette relation peut d'ailleurs s'obtenir par analogie avec la précédente en remplaçant I_1 par I_2 et réciproquement, αT_0 par $(1 - \alpha) T_0$ et E par $-E$.

Dans l'équation (2), on remplace I_2 par $I_1 + \Delta I$ et on élimine I_1 , ce qui donne :

$$\Delta I = \frac{2E}{R} \alpha (1 - \alpha) \frac{T_0}{\tau}.$$

Application numérique : $\Delta I = 0,237 \text{ A}$.

A.1.5.

$$a) U_c = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u_c(t) dt = \frac{E \alpha T_0 - E(1 - \alpha) T_0}{T_0},$$

soit :

$$U_c = (2\alpha - 1)E = 58 \text{ V}.$$

b) A un instant t quelconque, on peut écrire :

$$u_c(t) = R i_c(t) + L \frac{d i_c}{dt} + E'$$

Prenons la valeur moyenne des deux membres :

$$U_c = R I_c + 0 + E'$$

$$I_c = \frac{U_c - E'}{R} = 4 \text{ A.}$$

c) A chaque instant, $p'(t) = E' i_c$:

$$P' = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} E' i_c dt = E' \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} i_c dt = E' I_c.$$

$$P' = E' I_c = 200 \text{ W.}$$

$$d) P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u_c i_c dt \simeq I_c \times \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u_c dt \text{ car } i_c \text{ varie}$$

très peu, donc :

$$P \simeq U_c I_c = (2\alpha - 1) E I_c$$

soit : $P = 232 \text{ W.}$

e) $P_u = P$ s'il n'y a pas de pertes dans les interrupteurs (si les diodes ont une tension de $0,7 \text{ V}$ à leurs bornes lorsqu'elles conduisent, on a une perte : $P_J = 2 \times 0,7 \times I_c \simeq 5,6 \text{ W}$). La charge est ici l'ensemble R, E' . Donc : $P_u = 232 \text{ W.}$

f) $P_m = P' = 200 \text{ W.}$

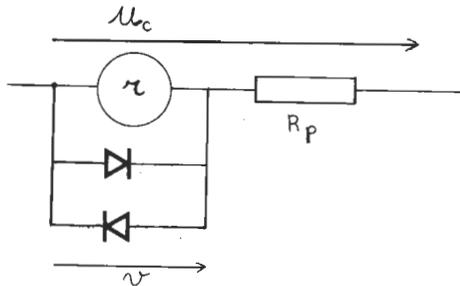
A.1.6. $\alpha = 0,54$; $U_c = 8 \text{ V}$. Le voltmètre indiquant la valeur moyenne indiquera 8 V sauf si les diodes conduisent.

Or, si les diodes ne conduisent pas, on aurait :

$$\frac{v}{u_c} = \frac{r}{r + R_p} \simeq \frac{1}{100}$$

donc : $v = \pm 1 \text{ V.}$

Donc, les diodes conduisent.



Le signal v est alors de même forme que u_c mais il vaut $\pm 0,6$ V.

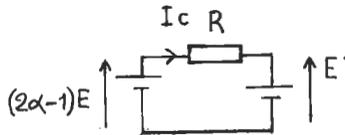
L'indication sera donc réduite par la présence des diodes : elle vaudra : $0,6 \times 8 = 4,8$ V.

La valeur de u_c est $\pm E$; sa valeur efficace est donc E .

A.1.7.

a) $E' = k\Omega$ d'où : $\Omega = \frac{E'}{K} = \frac{50}{0,3} = 166$ rad/s ou 26,5 tours/s ou 1592 tours/mn.

$$\Gamma = K I_c = 1,2 \text{ Nm.}$$



b) $\alpha = 0,32$; $u_c = (2\alpha - 1) E = -0,36 E = -36$ V ;
 $E' = (2\alpha - 1) E - R I_c = -42$ V.

La machine fonctionne en génératrice, et E devient un récepteur :

$$E' = k\Omega' \text{ d'où } \Omega' = -\frac{42}{0,3} = -140 \text{ rad/s.}$$

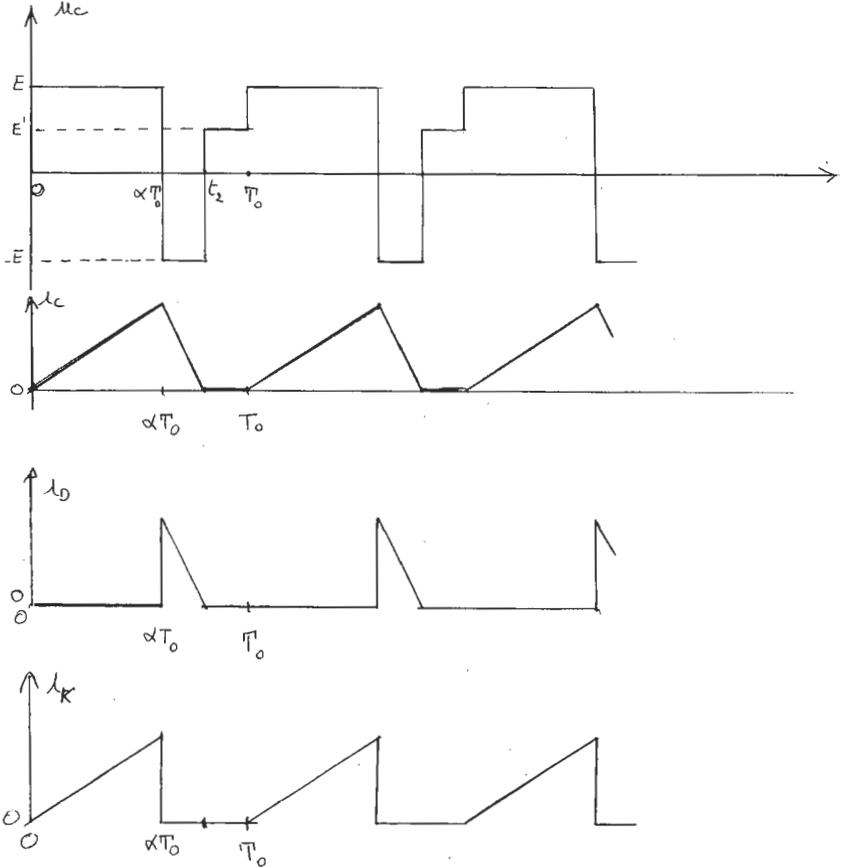
La machine a inversé son sens de rotation et tourne à 140 rad/s ou 22,3 t/s ou 1337 t/mn.

c) $U_c = (2\alpha - 1) E$ d'où $\alpha = 0,54$, le moteur étant arrêté : $E' = 0$ d'où $U_c = R I_c$:

$$I_c = \frac{U_c}{R} = 4 \text{ A.}$$

A.2. RÉGIME DE CONDUCTION DISCONTINUE.

A.2.1.



A.2.2.

a) Les équations sont les mêmes qu'au A.1. mais avec

$I_1 = 0$, donc : $i_k(t) = \frac{E - E'}{R} \frac{t}{\tau}$, d'où :

$$I_M = \frac{E - E'}{R} \frac{\alpha T_0}{\tau}$$

$$I_M = 0,214 \text{ A.}$$

b) On a la condition initiale : $i_D(0) = I_M$:

$$i_D = -\frac{E + E'}{R} + K' \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \text{ d'où } K' = \frac{E + E'}{R} + I_M$$

$$i_D = -\frac{E + E'}{R} + \left(I_M + \frac{E + E'}{R}\right) \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) = \dots$$

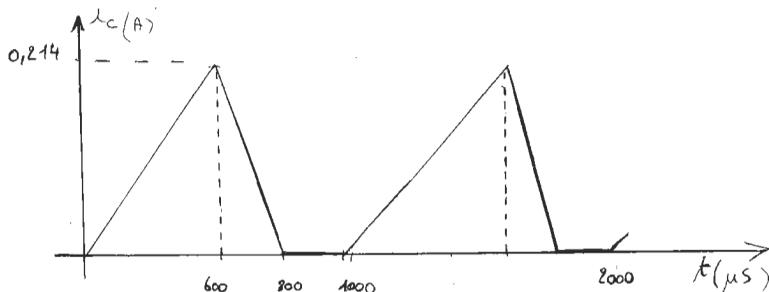
$$\dots I_M - \frac{t}{\tau} \left(I_M + \frac{E + E'}{R}\right).$$

$$\text{or, } \frac{E + E'}{R} = 75 \text{ A et } I_M = 0,214 \text{ A donc } I_M \ll \frac{E + E'}{R}.$$

$$i_D \approx I_M - \frac{t}{\tau} \left(\frac{E + E'}{R}\right)$$

La pente de cette partie de droite est trois fois plus élevée (en module) que la précédente. i_D s'annulera donc au bout de

$$\frac{600}{3} = 200 \mu\text{S} \text{ soit à l'instant } 800 \mu\text{S}.$$



Condition de conduction discontinue : il faut que i_D s'annule avant l'instant $(1 - \alpha) T_0$:

— soit t_2 l'instant où i_D s'annule :

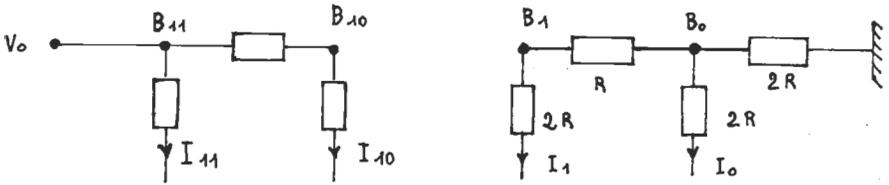
$$0 = I_M - \frac{t_2}{\tau} \frac{E + E'}{R} \text{ soit } t_2 = \frac{\tau R I_M}{E + E'}$$

— soit $t_2 = \frac{E - E'}{E + E'} \alpha T_0$; il faut : $t_2 < (1 - \alpha) T_0$; on en tire :

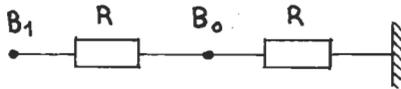
$$\alpha < \frac{E + E'}{2E}$$

c) $\alpha = 0,6$; $\frac{E + E'}{2E} = 0,75$ condition vérifiée.

PARTIE B : ETUDE DU CONVERTISSEUR NUMERIQUE ANALOGIQUE



S_1 et S_2 étant à un potentiel nul, à droite de B_1 , on peut donner le schéma équivalent :



On en déduit : $V_{B0} = \frac{V_{B1}}{2}$.

On peut recommencer avec V_{B1} et V_{B2} et ainsi de suite :

$$V_{B1} = \frac{V_{B2}}{2} \dots V_{B10} = \frac{V_{B11}}{2} = \frac{V_0}{2}; \text{ donc :}$$

$$I_{11} = \frac{V_0}{2R} \quad I_{10} = \frac{V_0}{2 \times 2R} \quad I_9 = \frac{V_0}{2^2 2R} \dots \quad I_0 = \frac{V_0}{2^{11} \times 2R}$$

$$I_0 = \frac{V_0}{2^{12} R} \quad \text{et} \quad I_i = 2^i I_0.$$

$$J_1 \text{ peut s'écrire : } J_1 = \sum_{i=0}^{11} A_i I_i.$$

$$J_1 = \sum_{i=0}^{11} A_i 2^i I_0 = N_1 I_0 = \frac{N_1 V_0}{2^{12} R}.$$

$$J_1 = \frac{N_1 V_0}{4\,096 R},$$

le quantum vaut $\frac{V_0}{4\,096 R}$; c'est la variation de la grandeur de

sortie lorsque le nombre binaire augmente d'une unité :

$$J_1 + J_2 = I_0 + 2 I_0 + \dots + 2^{11} I_0 = I_0 (2^{12} - 1)$$

d'où :

$$J_2 = (2^{12} - 1 - N_1) I_0,$$

soit :

$$J_2 = (4\,095 - N_1) I_0 = \frac{(4\,095 - N_1)}{4\,096 R} V_0.$$

B.2.

$$V_1 = -R J_1 = -\frac{R N_1 V_0}{4\,096 R} = -\frac{N_1 V_0}{4\,096};$$

on veut $\frac{|V_0|}{4\,096} = 2 \text{ mV}$. On en déduit : $V_0 = -8,192 \text{ V}$.

B.3.

a) Un convertisseur est monotone si un accroissement du nombre binaire d'une unité entraîne un accroissement de la tension de sortie, ceci quelque soit le nombre binaire de départ.

On se contentera ici d'étudier si $V_{2048} > V_{2047}$.

Quand on combine deux résistances de même tolérance, la résistance équivalente a encore même tolérance.

On a donc :

$$J_1(2048) = \frac{V_0}{2R(1+x)}$$

et :

$$J_1(2047) = \frac{V_0}{2R(1-x)} \frac{2\,047}{2\,048};$$

il faut donc :

$$\frac{V_0}{2R(1+x)} > \frac{2047}{2048} \frac{V_0}{2R(1-x)},$$

soit :

$$x_1 < \frac{1}{4095}.$$

Ce calcul, très simplifié, donne cependant une bonne idée de la précision avec laquelle les résistances d'un réseau $R-2R$ doivent être appariées.

b) $(J_n - J_{n-1})$ ne doit pas s'écarter de sa valeur théorique

(un quantum) de plus de $\pm \frac{1}{4}$ de quantum.

$$\text{Donc, ici, } J_{2048} - J_{2047} \geq \frac{3}{4} I_0 \quad \text{ou} \quad V_{2048} - V_{2047} \geq \frac{3}{4} \frac{V_0}{4096},$$

$$\frac{2048 V_0}{4096(1+x)} - \frac{2047 V_0}{4096(1-x)} \geq \frac{3}{4} \frac{V_0}{4096}.$$

$$\text{On en tire : } x_2 \leq \frac{1}{4 \times 4095} \quad \text{ou :}$$

$$x_2 \leq \frac{1}{16380}$$

$$x_2 \simeq 6 \times 10^{-4}.$$

c) La résistance R étant intégrée en même temps que celles du réseau $R-2R$ pourra être appariée avec une excellente précision. Par ailleurs, elle sera à même température que le réseau ; les dérives thermiques seront donc limitées.

Cette résistance crée une erreur d'échelle.

B.4.

$$\begin{array}{lll} a) a_i = 0 & V_{GS1} = \text{« 1 »} & V_{GS2} = \text{« 0 »} \\ & T_1 \text{ conduit} & T_2 \text{ bloqué} \end{array}$$

$$\text{donc ici :} \quad J_2 = I_i \quad J_1 = 0,$$

si : $a_i = 1$, les rôles sont inversés.

$$b) \text{ Si } V_{DS} < 300 \text{ mV, } \frac{V_{DS}}{I_D} = \text{constante} = 300 \Omega.$$

Entre drain et source, on peut remplacer le transistor par une résistance de 300Ω ; si $V_{DS} > 300 \text{ mV}$, $I_D = 1 \text{ mA}$. Ce fonctionnement est à proscrire bien entendu; il se produira si $I_{D1} = 1 \text{ mA}$ soit $V_0 = 20 \text{ V}$; on devra donc limiter V_0 à une valeur inférieure à 20 V .

c) La résistance $2R$ doit valoir $20\,000 \Omega$ avec une précision de $\frac{1}{4\,096}$ (voir B.3. a) soit à 5Ω près. Il faudra donc tenir compte de la résistance des interrupteurs et construire des résistances valant $19\,700 \Omega$ avec une précision de 5Ω .

PARTIE C : ETUDE DU MONTAGE COMPLET

C.1.

$$\alpha = 0,54 = A(V_1 - V_2) = A a(N_1 - N_2),$$

on en tire :

$$N_1 - N_2 = 54$$

$$N_1 = 2\,048 + 54 = 2\,102.$$

C.2.

$$a) T = \frac{2}{4\,095 - 2\,048} = \frac{2}{2\,047} = 0,977 \text{ mS} \simeq 1 \text{ mS}.$$

$$b) \alpha = A a(N_1 - N_2); \text{ on en tire } N_1 - N_2 = 79.$$

c) Si $N_1 = 4\,095$; le système est à l'arrêt, donc $\alpha = 0,54$, d'où $N_1 - N_2 = 54$ et $N_2 = 4\,041$.

C.3.

L ouvert et C/D indifférent : arrêt,

L fermé et C/D sur C : montée,

L fermé et C/D sur D : descente.

Y. LE BRAS (Mondeville)
et P.-M. BEAUFILS (Marseille).

SESSION DE 1987

C.A.P.E.S.

CONCOURS INTERNE

ET CONCOURS D'ACCES A L'ECHELLE DE REMUNERATION
DES PROFESSEURS CERTIFIES**Composition à partir d'un dossier****SOLUTION****Epreuve commune aux options :****PHYSIQUE ET CHIMIE****PHYSIQUE ET ELECTRICITE APPLIQUEE**

(Durée : 4 heures)

Note. — Cette épreuve n'est pas constituée par un problème au sens classique du terme. Il n'est pas toujours possible de donner un « corrigé », car les réponses peuvent être parfois multiples. Dans ce cas, nous citerons les éléments jugés importants qui doivent figurer dans les réponses.

De plus, pour indiquer les critères qui ont guidé le jury dans sa correction, nous donnons à la fin de ce texte les éléments de la grille qui a été utilisée pour noter les copies des candidats.

I. ELECTRODYNAMIQUE EN CLASSE DE SECONDE

(sur 35 points)

I.1. PROGRESSION.

Compte tenu de l'importance relative de cette partie par rapport à l'ensemble du programme de physique et de chimie de la classe de seconde, il semble raisonnable de lui consacrer l'équivalent de trois ou quatre semaines. Cela donne donc entre trois et quatre séances de travaux pratiques de une heure et demie et de six à huit séances de cours de une heure.

Voici les points principaux qui doivent impérativement figurer dans la progression :

- le schéma et la réalisation expérimentale du montage potentiométrique. Son rôle ;
- le schéma d'ensemble du montage ; le rôle et la place des différents constituants. Des considérations simples au besoin sur les montages longue et courte dérivation ;
- la définition des différentes familles de dipôles ;
- la relation : $U = R \cdot I$ pour une résistance ;
- la relation : $U = E - R \cdot I$ pour un générateur ;
- la loi de PUILLET pour un circuit simple ;
- les associations de résistances en série et en parallèle.

I.2. MANIPULATION D'ÉLÈVE.

Le choix de la diode était libre, considérons une diode Zener.

I.2. a) Liste du matériel.

Un rhéostat (de résistance comprise entre 50 et 500 Ω environ et de puissance adéquate) ; un ampèremètre ; un voltmètre ; un interrupteur ; la diode ; une résistance de protection et les fils nécessaires.

I.2. b) Schéma du montage (fig. 1).

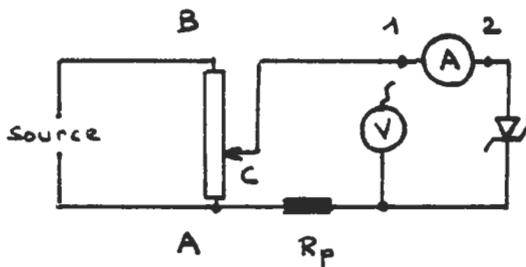


Fig. 1

I.2. c) Consignes pour les élèves.

On peut distinguer quatre séries de consigne :

- commencer les mesures avec une tension nulle (le curseur C en A) et augmenter progressivement la tension ;

- choisir le nombre de point de mesure et leur emplacement de façon judicieuse compte tenu de la forme de la courbe ;
- ne pas dépasser la puissance maximum supportable par la diode (ceci est réalisé automatiquement si on a placé une résistance de protection) ;
- choisir la position relative de l'ampèremètre et du voltmètre (cf. question I.2. e).

I.2. d) Courbe intensité-tension (fig. 2).

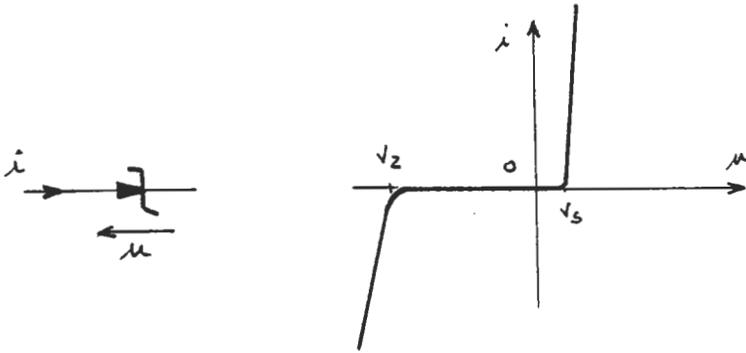


Fig. 2

V_s : tension seuil ($\sim 0,7$ V) ; V_z : tension Zener dont la valeur est variable suivant le type de diode choisi.

I.2. e) Montages longue et courte dérivation.

Longue dérivation : position 1 du schéma de la figure 1.

Courte dérivation : position 2.

C'est une question classique dont l'intérêt tend à disparaître avec l'apparition des appareils électroniques (l'impédance interne du voltmètre étant en général largement suffisante pour que le courant dérivé soit négligeable).

Avec des appareils à cadre mobile de qualité moyenne, il convient d'utiliser le montage n° 1 lorsque la diode est bloquée et le montage n° 2 lorsqu'elle conduit.

I.3. MONTAGE A L'OSCILLOGRAPHE.

I.3. a) Schéma (fig. 3).

I.3. b) Réglage des appareils.

Pour le générateur : utilisation d'une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace de quelques volts. La fréquence n'a

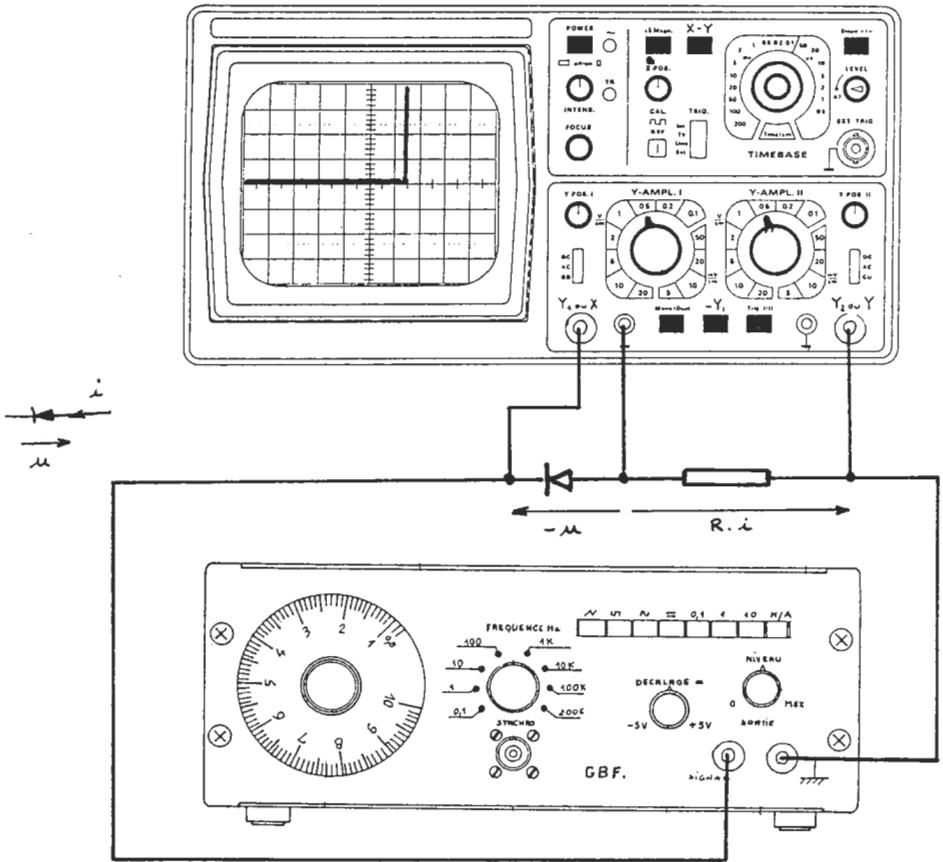


Fig. 3

guère d'importance ; il suffit qu'elle soit comprise entre quelques dizaines et quelques centaines de hertz. Plus bas, on voit le spot décrire la courbe, ce qui ne manque pas d'intérêt ; plus haut, la qualité de la jonction intervient et un phénomène « d'hystérésis » se produit.

Pour l'oscilloscope : il faut utiliser la fonction X—Y (ou Lissajous). La sensibilité doit être de 0,5 V ou 1 V par centimètre. Avec le montage à point milieu utilisé ici, il faut enclencher la touche « $-Y_1$ » (elle inverse sur l'écran le signal corres-

pendant) pour obtenir la caractéristique dans sa configuration traditionnelle.

La résistance R placée en série sert à la fois à protéger la diode et à visualiser l'intensité. Comme la plupart des générateurs basse fréquence ont une impédance interne de 50Ω , il est bon de prendre cette résistance supérieure à cette valeur de façon à ne pas faire débiter le générateur dans une résistance inférieure à son impédance interne.

I.3. c) Cf. fig. 3).

I.3. d) Le problème des masses.

Il faut que les masses de l'oscillographe et du générateur soient indépendantes pour pouvoir connecter la masse de l'oscillographe au point commun à la diode et à la résistance, de façon à obtenir les tensions u et Ri .

Dans le cas où les deux masses seraient reliées à la terre, il faudrait utiliser un transformateur d'isolement en sortie du générateur. On peut aussi faire le branchement avec une masse commune, mais dans ce cas on a sur l'écran les courbes représentant les tensions u et $u + Ri$ ce qui, dans le cas présent, ne donne pas la courbe attendue.

I.4. UTILISATION D'UNE DIODE.

I.4. a) Simple alternance (fig. 4).

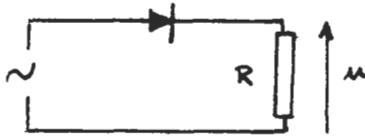


Fig. 4

I.4. b) Double alternance (fig. 5).

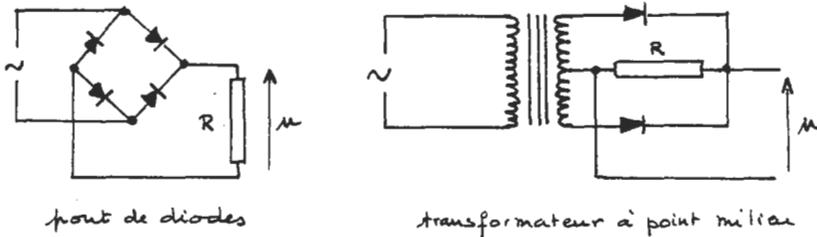


Fig. 5

I.5. RÉDACTION D'UN EXERCICE.

Il y a évidemment de nombreuses possibilités d'exercices à partir de la situation proposée. Pour calculer l'intensité du courant i , la méthode la plus rapide consiste à appliquer le théorème de THÉVENIN (qui n'est pas au programme de la classe de seconde).

Le générateur équivalent à la pile et à R_1 a :

— une force électromotrice : $\mathcal{E} = \frac{eR_1}{R_1 + r} = 3,75 \text{ V}$,

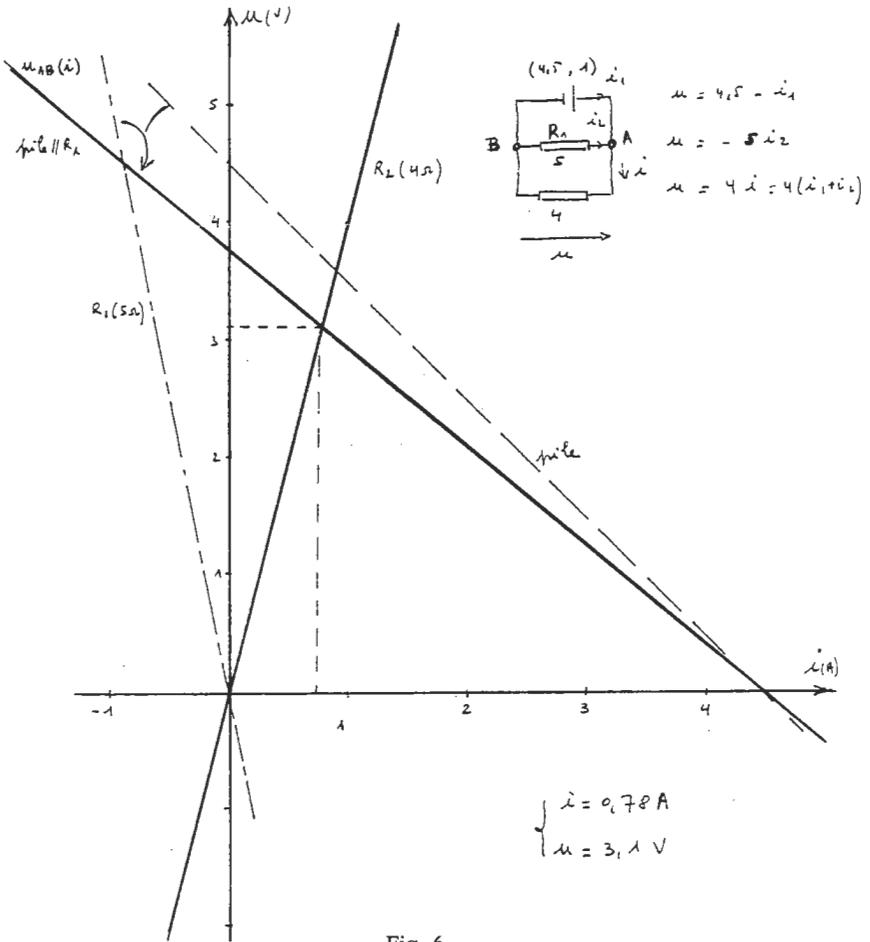


Fig. 6

— une résistance interne : $R_{eq} = R_1/r = \frac{R_1 r}{R_1 + r} = 0,83 \Omega$.

On a donc : $i = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + R_2} \simeq 0,78 \text{ A}$.

On peut également proposer des solutions graphiques. Nous en proposons une, fig. 6.

II. ANALYSE ET EXPLOITATION D'UNE PARTIE D'UN SUJET DE BACCALAUREAT

(sur 20 points)

II.1. CORRIGÉ.

1. La méthode la plus simple consistait à mesurer la distance séparant les deux points entourant le point étudié ; pour obtenir la vitesse, on divise cette distance par l'intervalle de temps mis pour la parcourir, soit ici $2 \times 40 \text{ ms} = 80 \text{ ms}$. On calcule ensuite l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m v^2$. Les résultats

sont rassemblés dans le tableau récapitulatif.

2.1) On a de façon évidente : $h = y \cdot \sin \alpha$.

2.2) On a donc : $E_p = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot y \sin \alpha$. Ceci permet de calculer l'énergie potentielle en chaque point en déterminant y à partir du graphique fourni. Les résultats sont également rassemblés dans le tableau.

3. L'énergie mécanique est la somme des énergies cinétique et potentielle du mobile placé dans le champ de pesanteur. La réaction (F_R) du plan incliné ne dérive pas d'une énergie potentielle ; son travail est soit nul s'il n'y a pas de frottements, soit négatif si ces derniers ne sont pas négligeables. On a :

$$\Delta E_m = \Delta (E_c + E_p) = W(F_R).$$

On voit d'après les résultats du tableau que l'énergie mécanique est pratiquement constante (l'écart relatif entre les valeurs extrêmes n'est que de 3 %).

On peut donc conclure que le système est conservatif, les frottements sont négligeables.

points	vitesse (m/s)	y (cm)	h (m)	E_c (J)	E_p (J)	E_m (J)
A	0,469	0	0	$11 \cdot 10^{-2}$	0	$11 \cdot 10^{-2}$
B	0,394	3,3	$3 \cdot 10^{-3}$	$7,8 \cdot 10^{-2}$	$3,0 \cdot 10^{-2}$	$10,8 \cdot 10^{-2}$
C	0,338	6,0	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$5,7 \cdot 10^{-2}$	$5,4 \cdot 10^{-2}$	$11,1 \cdot 10^{-2}$
D	0,269	8,2	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$7,4 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-2}$
E	0,215	9,7	$8,9 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$8,7 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-2}$
F	0,164	10,7	$9,8 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$9,6 \cdot 10^{-2}$	$10,9 \cdot 10^{-2}$

II.2. EXPLOITATION EN CLASSE.

Elles sont nombreuses. On peut en citer quelques-unes :

a) En cinétique :

— Calcul de la vitesse et de l'accélération suivant les axes Ox et Oy . Ce calcul peut être fait à partir des abscisses et des ordonnées des points A, B... F.

On constate que :

suivant Ox , la vitesse est constante et vaut :

$$V_x = \dot{x} \simeq 0,15 \text{ m/s,}$$

suivant Oy , la vitesse diminue et l'accélération est constante et vaut :

$$\ddot{y} \simeq 0,90 \text{ m/s}^2.$$

— Calcul de la vitesse en un point à partir des composantes.

Pour A, par exemple, on a : $\dot{x}_A = 0,15 \text{ m/s}$; $\dot{y}_A = 0,45 \text{ m/s}$, soit :

$$V_A = \sqrt{\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2} = 0,47 \text{ m/s (à comparer à la valeur du tableau).}$$

— Recherche du vecteur \mathbf{a} par une méthode graphique.

b) En dynamique :

Relier l'étude cinématique précédente au bilan des forces.

— Constater que si $\ddot{x} = 0$, on a bien $F_x = 0$.

— Comparer $\ddot{y} \simeq 0,9 \text{ m/s}^2$ à $g \sin \alpha$ (on a :
 $g \cdot \sin \alpha = 9,8 \times 9,2 \cdot 10^{-2} \simeq 0,9$).

— On peut aussi vérifier le théorème de l'énergie cinétique qui donne $\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mgh$ (mais c'est en fait le même calcul que celui de l'exercice proposé).

III. CORRECTION DE COPIES D'ELEVES (sur 25 points)

III.1. CORRIGÉ TYPE.

III.1.1. On vérifie que les mesures algébriques des vitesses des mobiles avant et après le choc sont bien constantes. On a :

— avant le choc :

$$v_1 = 5 \text{ m/s}; \quad v_2 = -5 \text{ m/s},$$

ceci donne :

$$P = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = -0,50 \text{ } \mu\text{gm/s};$$

— après le choc :

$$v'_1 = -9,1 \text{ m/s}; \quad v'_2 = 2 \text{ m/s},$$

ceci donne :

$$P' = m_1 \cdot v'_1 + m_2 v'_2 = -0,51 \text{ } \mu\text{gm/s}.$$

On constate que la quantité de mouvement est conservée. Le système constitué par les deux mobiles est pseudo-isolé et les frottements sont négligeables.

III.2. Pour savoir si le choc est élastique, il faut étudier l'énergie cinétique du système :

— avant le choc :

$$E_c = \frac{1}{2} (m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2) = 3,75 \text{ J},$$

— après le choc :

$$E'_c = \frac{1}{2} (m_1 \cdot v'^2_1 + m_2 \cdot v'^2_2) = 4,55 \text{ J}.$$

L'énergie cinétique a augmenté. Le choc n'est pas élastique ; le gain d'énergie ne peut provenir que de la détente du ressort qui a pu se produire si la ficelle qui le maintenait a cassé. En perdant son énergie potentielle, le ressort en communique une partie aux mobiles.

III.2. ANNOTATION DES COPIES.

Elève A

1^{re} question

Juste.

On voit, d'après les données, que la vitesse du mobile de masse m_1 est avant le choc de : $\frac{10 \times 10^{-2}}{20 \times 10^{-3}} = \underline{5 \text{ m/s.}}$

La vitesse du mobile de masse m_2 est de :

$$\frac{10 \times 10^{-2}}{20 \times 10^{-3}} = \underline{5 \text{ m/s.}}$$

Bon en valeur absolue, mais faute de signe.

Les deux mobiles ont donc la même vitesse et la quantité de mouvement totale est :

$$\underline{P = (m_1 + m_2) V = 1,5 \text{ kg m/s.}}$$

La même erreur est conservée dans P.

Toujours d'après les données, on a après le choc :

Encore une faute de signe.

la vitesse de m_1 : $\frac{18,1 \times 10^{-2}}{20 \times 10^{-3}} = \underline{9,05 \text{ m/s}}$ et celle de

Juste.

m_2 est : $\frac{4 \times 10^{-2}}{20 \times 10^{-3}} = \underline{2 \text{ m/s.}}$ La quantité de mouve-

ment après le choc est donc :

$$P' = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = \underline{1,305 \text{ kg m/s.}}$$

Cette valeur est fautive à cause des erreurs précédentes.

Il n'y a donc pas conservation de la quantité de mouvement rigoureusement. Mais comme la différence est petite (0,2 ce n'est pas beaucoup), on peut dire que la quantité de mouvement est conservée aux erreurs d'expérience près.

Ceci ne veut rien dire. Il faut considérer la valeur relative en faisant le rapport : $0,2/12 \simeq 15\%$. Ceci n'est donc pas négligeable.

2^e question

Cette affirmation est fautive ; cette force est intérieure au système et ne peut donc modifier sa quantité de mouvement.

Le fil n'a certainement pas cassé, car la quantité de mouvement est plutôt plus petite après le choc qu'avant. Si le fil avait cassé, le ressort en se détendant aurait donné de la quantité de mouvement aux mobiles, ce qui n'est pas le cas.

Elève B

$$\text{Faux, } v = \frac{\delta l}{\delta t}$$

Valeur numérique juste par chance. Unité fausse : m. s⁻¹.

Même remarque : kg m. s⁻¹.

Faux, car $l_0 \neq 0$. Valeurs numériques et unités fausses.

L'abréviation est impropre. Valeur numérique fausse, absence d'unité.

Même remarque.

Valeurs numériques fausses, absence d'unité ou unités erronées.

L'abréviation est impropre. L'affirmation est fausse, car il s'agit d'une force intérieure.

Faux, il faudrait considérer l'énergie cinétique.

1^{re} question

Par définition, la vitesse d'un mobile est $v = \frac{l}{t}$.

Si on applique la formule au premier mobile en faisant bien attention aux unités, on a :

$$\frac{10 \times 10^{-2}}{20 \times 10^{-3}} = \underline{5 \text{ m s}} \quad \frac{20 \times 10^{-2}}{40 \times 10^{-3}} = \underline{5 \text{ m. s.}}, \text{ etc.}$$

la vitesse de ce mobile est constante et sa quantité de mouvement est : $P_1 = 0,1 \times 5 = \underline{0,5 \text{ kg m. s.}}$

Pour le deuxième mobile, c'est plus compliqué parce qu'on voit que sa vitesse n'est pas constante. En effet :

$$\frac{90 \times 10^{-2}}{20 \times 10^{-3}} = \underline{45 \text{ m s}} \quad \frac{80 \times 10^{-2}}{40 \times 10^{-3}} = \underline{20 \text{ m s}} \text{ et juste avant}$$

le choc, on a : $\frac{60 \times 10^{-2}}{80 \times 10^{-3}} = \underline{7,5 \text{ m/s.}}$ Sa $\underline{qdm = 1,5}$.

La \underline{qdm} des deux est donc : $\underline{2 \text{ kg m.s}}$ avant le choc.

Après le choc, on a pour le premier :

$$\frac{36 \times 10^{-2}}{100 \times 10^{-3}} = \underline{3,6}$$

et pour le second : $\frac{57 \times 10^{-2}}{100 \times 10^{-3}} = \underline{5,7 \text{ ms.}}$ Soit :

$$P_2 = 0,1 \times 3,6 + 0,2 \times 5,7 = \underline{1,5 \text{ kg ms.}}$$

La \underline{qdm} n'est pas constante, ce qui vient de ce que le ressort a puissé le deuxième mobile et l'a freiné. Comme la \underline{qdm} a varié, le choc n'est pas élastique.

2^e question

Je ne sais pas.

Elève C

Non, entre les instants de date 80 et 100 ms.

Juste.

Juste.

Juste.

Faux, car les dates pour calculer les vitesses sont prises avant et après le choc.

La valeur de P' est juste par chance.

Raisonnement correct.

Juste.

Juste.

Faux à cause des erreurs précédentes sur v'_1 et v'_2 .

Juste.

Faux, on ne peut conclure que le fil a cassé que si $E'_c > E_c$.

1^{re} question

Il faut prendre les vitesses juste avant et juste après le choc, pour éviter les erreurs provoquées par les frottements. Le choc se produit à l'instant 80 ms puisque les vitesses sont modifiées à ce moment-là.

On a :

$$\overline{v}_1 = \frac{(40 - 30) 10^{-2}}{20 \times 10^{-3}} = \underline{5 \text{ m/s}}$$

$$\overline{v}_2 = \frac{(60 - 70) 10^{-2}}{20 \times 10^{-3}} = \underline{-5 \text{ m/s.}}$$

La quantité de mouvement du système est donc :

$$\overline{P} = m_1 \overline{v}_1 + m_2 \overline{v}_2 = 0,1 \times 5 - 0,2 \times 5 = \underline{-0,5 \text{ kg m/s.}}$$

Après le choc, on a :

$$\overline{v}'_1 = \frac{(36 - 40) 10^{-2}}{20 \times 10^{-3}} = \underline{-2 \text{ m/s}}$$

$$\overline{v}'_2 = \frac{(57 - 60) 10^{-2}}{20 \times 10^{-3}} = \underline{-1,5 \text{ m/s.}}$$

La quantité de mouvement est alors :

$$\overline{P}' = m_1 \overline{v}'_1 + m_2 \overline{v}'_2 = -0,1 \times 2 - 0,2 \times 1,5 = \dots \underline{\dots -0,5 \text{ kg m/s.}}$$

La quantité de mouvement est bien conservée. C'est normal car le système avec le coussin d'air supprime les frottements et le système est pseudo-isolé.

2^e question

Il faut étudier l'énergie cinétique du système des deux mobiles.

Avant le choc, on a :

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \overline{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \overline{v}_2^2 = \frac{1}{2} (0,1 \times 25 + 0,2 \times 25) = \underline{3,75 \text{ J.}}$$

Après le choc, on a :

$$E'_c = \frac{1}{2} m_1 \overline{v}'_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \overline{v}'_2^2 = \frac{1}{2} (0,1 \times 4 + 0,2 \times 1,5^2) = \underline{0,425 \text{ J.}}$$

L'énergie cinétique n'est pas conservée, donc le choc n'est pas élastique. Le fil a donc cassé et de l'énergie s'est transformée en chaleur.

IV. ANALYSE D'UNE SITUATION CONCRETE

IV.1. ETUDE QUALITATIVE.

Puisqu'on peut négliger la dilatation du bois, on peut dire que la longueur de la flûte ainsi que celle de la corde du violoncelle (tendue sur le manche de l'instrument) ne varient pas. Dans ces conditions, les longueurs d'onde des ondes stationnaires dont les deux instruments sont le siège sont constantes. Mais, dans les deux cas, les célérités de propagation du son (dans l'air de la flûte, dans la corde du violoncelle) varient ; on en conclut que les fréquences des sons émis varient.

a) *Cas de la flûte.* On a : $c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$. Seule, la tem-

pérature varie et augmente ; la célérité du son dans la flûte augmente donc. Comme $L = \lambda/2 = c/2N$, on a : $N = C/2L$; la fréquence du son émis par la flûte augmente.

b) *Cas du violoncelle.* Si la température augmente, la corde se détend et sa tension diminue. Comme $c' = \sqrt{F/\mu}$, la célérité c' diminue et comme on a toujours : $L' = \lambda'/2 = c'/2N'$, soit : $N' = c'/2L'$, la fréquence du son émis par le violoncelle diminue.

On ne peut conclure sans calcul, mais les deux effets se cumulent ; on est dans la situation la plus favorable pour que le désaccord soit sensible.

IV.2. ETUDE QUANTITATIVE.

2. a) Pour la flûte, $N = c/2L$ en utilisant les différen-

tielles logarithmiques, on a : $\frac{\delta N_1}{N_1} = \frac{\delta c_1}{c_1}$. Comme $c_1 = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$,

on a de la même manière : $\frac{\delta c_1}{c_1} = \frac{1}{2} \frac{\delta T}{T}$. En conclusion,

on a :

$$\boxed{\frac{\delta N_1}{N_1} = \frac{N_1 \cdot \delta T}{2 \cdot T_0}}$$

Pour le violoncelle : $N = c/2L$. On a donc :

$$\frac{\delta N_2}{N_2} = \frac{\delta c_2}{c_2}. \text{ Comme } c_2 = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \text{ on a : } \frac{\delta c_2}{c_2} = \frac{\delta F}{2 \cdot F}, \text{ soit :}$$

$$\frac{\delta N_2}{N_2} = \frac{\delta F}{2 \cdot F} \tag{1}$$

Comme $L' = c^{te}$, on a $\alpha(T - T_0) + \frac{F}{E \cdot s} = c^{te}$ en différentiant, on obtient :

$$\alpha \cdot \delta T + \frac{\delta F}{E \cdot s} = 0 \quad \text{soit : } \delta F = -\alpha \cdot E \cdot s \cdot \delta T \quad (2)$$

en combinant l'expression de N et celle de c_2 , on a :

$$F = 4 \cdot N_2^2 \cdot \varrho \cdot s \cdot L'^2 \quad \text{car : } \mu = \frac{m}{L'} = \frac{\varrho \cdot s \cdot L'}{L'} = \varrho \cdot s. \quad (3)$$

En combinant les relations (1), (2) et (3), on obtient :

$$\delta N_2 = -\frac{\alpha \cdot E \cdot \delta T}{8 \cdot N_2 \cdot \varrho \cdot L'^2}.$$

2. b) Les applications numériques donnent avec :

$$N_1 = N_2 = 415 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad \delta T = +5 \text{ K}$$

$$\boxed{\delta N_1 = 3,5 \text{ Hz}} \quad \text{et} \quad \boxed{\delta N_2 = -1,5 \text{ Hz.}}$$

2. c) On a donc : $N'_1 = 418,5 \text{ Hz}$ et $N'_2 = 413,5 \text{ Hz}$,

soit : $\frac{N'_1}{N'_2} = \frac{418,5}{413,5} = 1,012$. Ceci est supérieur à la valeur indi-

quée (1,00579) et correspond pratiquement à 2/10 d'un demi-ton. Le désaccord est donc audible.

Michel MEALLET.

Éléments de la grille utilisée pour la correction des copies

I.	<p data-bbox="285 261 618 285">ELECTROGINÉTIQUE DE SECONDE.</p> <p data-bbox="306 302 898 480">1 <i>Progression :</i> * nombre, * organisation : — équilibre des séances en quantité, — présence des points importants, — cohérence de la progression et de l'aspect expérimental et théorique.</p> <hr/> <p data-bbox="306 496 898 708">2 <i>Manipulation d'élève :</i> * liste du matériel, * schéma, * consignes, * allure des courbes et ordres de grandeur, * montage ampèremètre et voltmètre : — définition des deux montages, — application à la diode.</p> <hr/> <p data-bbox="306 724 898 992">3 <i>Montage à l'oscillographe :</i> * schéma, * réglages du générateur * réglages de l'oscillographe — tension — signal et fréquence, — X - Y — position des amplis — cohérence courbe et inverseur, * $R > 50 \Omega$, * questions sur la masse.</p> <hr/> <p data-bbox="306 1008 898 1089">4 <i>Redressement :</i> * simple alternance, * double alternance.</p> <hr/> <p data-bbox="306 1105 898 1390">5 <i>Exercice :</i> * texte de l'exercice : — respect des consignes, — articulation des questions, — qualité de la rédaction, * solution de l'exercice, * capacités mises en œuvre dans l'exercice : — capacités proposées pertinentes avec l'exercice, — liste complète, — capacités définies de façon précise.</p>
----	---

II.

SUJET DE BACCALAURÉAT.

- 1 *Corrigé :*
1. énergie cinétique,
 2. $h = \gamma \sin \alpha$ et énergie potentielle,
 3. énergie mécanique : valeur et conclusions.

- 2 *Exploitation :*
- * cinématique :
 - exploitation proposée correcte,
 - calculs effectués,
 - conclusions cohérentes,
 - * dynamique :
 - exploitation proposée correcte,
 - calculs effectués,
 - conclusions cohérentes.

III.

CORRECTION DE COPIES D'ÉLÈVES.

- 1 *Corrigé :*
1. quantité de mouvement avant le choc, quantité de mouvement après le choc, conclusions,
 2. calcul de l'énergie avant le choc, calcul de l'énergie après le choc, conclusions.
- 2 *Correction des copies :*
- Copie A :
1. — faute de signe signalée,
 - réponses correctes signalées,
 - erreur de raisonnement sur erreur « petite »,
 2. — force intérieure.
- Copie B :
1. — Δl et non l ,
 - valeur correcte par chance pour le 1^{er} mobile,
 - erreur sur le 2^e mobile,
 - erreurs sur les 2 mobiles après le choc,
 - « qdm », unités,
 - erreur sur force intérieure.

		<p>Copie C :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. — mauvaise définition du temps du choc, — réponses correctes signalées sur v_1 et v_2, — v'_1 et v'_2 faux. — P' juste par chance, — bonne conclusion, 2. — énergie cinétique avant le choc : bonne, — énergie cinétique après : fausse, — conclusion fausse. 				
IV.	SITUATION CONCRÈTE.	<table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td data-bbox="340 519 425 673">1</td> <td data-bbox="425 519 893 673"> <p><i>Etude qualitative :</i></p> <ul style="list-style-type: none"> * flûte, * violoncelle, * conclusion. </td> </tr> <tr> <td data-bbox="340 673 425 1003">2</td> <td data-bbox="425 673 893 1003"> <p><i>Etude quantitative :</i></p> <p>a) * flûte : $\delta N_1 = \frac{N_1 \delta T}{2 T_0}$.</p> <p style="padding-left: 40px;">* violoncelle : $\delta N_2 = \frac{\alpha \delta T}{8 N_2 \varrho L^2}$,</p> <p>b) application : $\delta N_1 = 3,5 \text{ Hz}$; $\delta N_2 = -1,5 \text{ Hz}$,</p> <p>c) conclusion.</p> </td> </tr> </table>	1	<p><i>Etude qualitative :</i></p> <ul style="list-style-type: none"> * flûte, * violoncelle, * conclusion. 	2	<p><i>Etude quantitative :</i></p> <p>a) * flûte : $\delta N_1 = \frac{N_1 \delta T}{2 T_0}$.</p> <p style="padding-left: 40px;">* violoncelle : $\delta N_2 = \frac{\alpha \delta T}{8 N_2 \varrho L^2}$,</p> <p>b) application : $\delta N_1 = 3,5 \text{ Hz}$; $\delta N_2 = -1,5 \text{ Hz}$,</p> <p>c) conclusion.</p>
1	<p><i>Etude qualitative :</i></p> <ul style="list-style-type: none"> * flûte, * violoncelle, * conclusion. 					
2	<p><i>Etude quantitative :</i></p> <p>a) * flûte : $\delta N_1 = \frac{N_1 \delta T}{2 T_0}$.</p> <p style="padding-left: 40px;">* violoncelle : $\delta N_2 = \frac{\alpha \delta T}{8 N_2 \varrho L^2}$,</p> <p>b) application : $\delta N_1 = 3,5 \text{ Hz}$; $\delta N_2 = -1,5 \text{ Hz}$,</p> <p>c) conclusion.</p>					

SESSION DE 1987

C.A.P.E.S.**COMPOSITION DE CHIMIE****SOLUTION**

PREMIÈRE PARTIE

1. ETUDE DE QUELQUES RÉACTIONS POUVANT CONDUIRE A L'ANHYDRIDE ÉTHANOÏQUE ET DE QUELQUES PROBLÈMES ANNEXES.

1.1.

1.1.1. L'acétylène a une molécule linéaire.

La description de la structure électronique doit être faite soit dans le cadre de la théorie des orbitales moléculaires L.C.A.O., soit dans le cadre de la théorie de la liaison de valence (hybridation). Nous renvoyons pour cela les candidats aux ouvrages spécialisés du premier cycle universitaire.

1.1.2. L'expérience d'addition de l'eau sur l'acétylène est décrite dans tous les manuels de 1^{re} S. Il serait bon de penser à recueillir l'éthanal et à le caractériser avec un autre réactif que celui de Schiff comme, par exemple, la D.N.P.H.

1.2.

1.2.1. L'éthanol est formé par hydratation en milieu sulfurique de l'éthylène avec passage par un carbocation $\text{CH}_3 - \overset{\oplus}{\text{C}}\text{H}_2$:

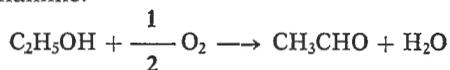


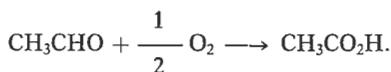
L'éthylène ne s'hydrate pas facilement car le carbocation formé est primaire, donc peu stable. La réaction a lieu à 100 °C avec de l'acide sulfurique très concentré. L'hydrogénosulfate d'alkyle est ensuite hydrolysé :



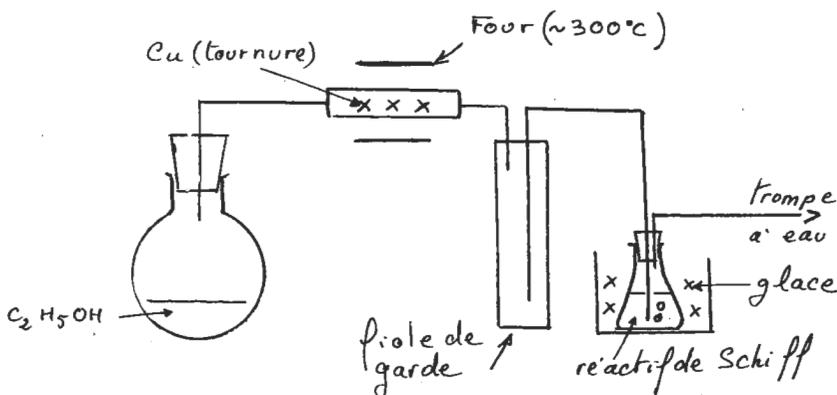
L'hydratation des alcènes substitués est plus facile.

1.2.2. Oxydation à l'air : décrire un montage classique de lampe sans flamme.





Oxydation à l'abri de l'air :

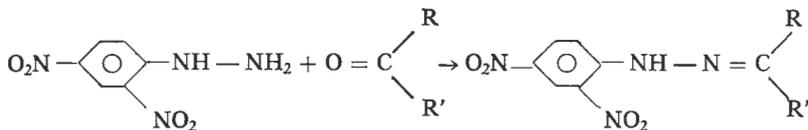


On peut aussi, après le four, placer un réfrigérant et recueillir l'éthanal.

Fig. 1

1.2.3. La différence est l'enthalpie standard de formation de l'eau : $-242 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. La première réaction s'auto-entretient alors que la deuxième nécessite un apport permanent d'énergie.

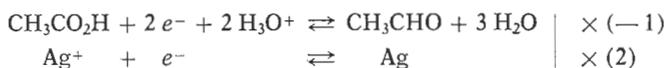
1.3. En milieu acide, le 2,4 DNPH donne avec un carbonyle une hydrazone solide colorée en jaune-orangé dont le point de fusion, mesuré après recristallisation, est caractéristique du composé carbonylé.



1.4.

1.4.1. Bande de papier ou, mieux, gel d'agar-agar contenant une solution concentrée de KNO_3 ou NH_4NO_3 (pas de KCl à cause de Ag^+).

1.4.2.



1.4.3.

$$E_1 = E^0_1 + \frac{RT}{2F} \ln \frac{[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}] [\text{H}_3\text{O}^+]^2}{[\text{CH}_3\text{CHO}]} ; E_2 = E^0_2 + \frac{RT}{F} \ln [\text{Ag}^+].$$

Ni l'eau, ni l'argent métallique dont les activités sont égales à l'unité n'interviennent dans les expressions de Nernst.

La f.é.m. de la pile est :

$$E = E_2 - E_1$$

$$E = E^0_2 - E^0_1 + \frac{RT}{2F} \ln \frac{[\text{Ag}^+] [\text{CH}_3\text{CHO}]}{[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}] [\text{H}_3\text{O}^+]^2}.$$

Lorsque le système thermodynamique que constitue la pile est en équilibre, sa f.é.m. est nulle et la fraction :

$$\frac{[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}]_{eq} [\text{H}_3\text{O}^+]^2_{eq}}{[\text{Ag}^+]_{eq} [\text{CH}_3\text{CHO}]_{eq}}$$

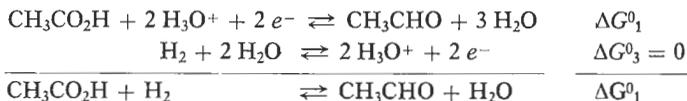
est égale à la constante K de l'équilibre écrit au 1.4.2.

$$\text{d'où : } E^0_2 - E^0_1 = \frac{RT}{2F} \ln K$$

$$\text{et : } \underline{\Delta G^0 = -RT \ln K = -2F(E^0_2 - E^0_1)}.$$

$$1.4.4. \Delta G^0_1 = -2F E^0_1 \quad \text{et} \quad \Delta G^0_2 = -F E^0_2$$

$$\Delta G^0 = -2F E^0_2 - \Delta G^0_1$$



($\Delta G^0_3 = 0$ puisque le potentiel standard du couple $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2$ est conventionnellement nul).

La dernière réaction permet d'écrire :

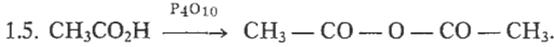
$$\Delta G^0_1 = \mu^0_{\text{CH}_3\text{CHO}} + \mu^0_{\text{H}_2\text{O}} - \mu^0_{\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}}$$

$\mu^0_{\text{H}_2} = 0$ comme pour tous les corps simples dans l'état stable à 25 °C.

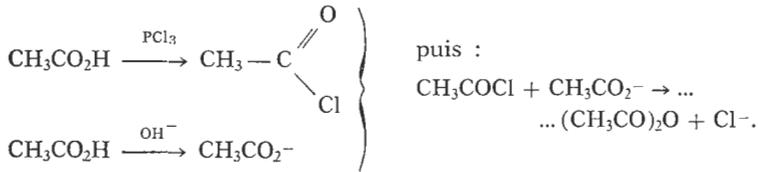
$$\text{Finalement : } \Delta G^0 = -2 F E^0_2 - \mu^0_{\text{H}_2\text{O}} - \mu^0_{\text{CH}_3\text{CHO}} + \mu^0_{\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}}$$

$$\Delta G^0 = -173,4 \text{ kJ. mol}^{-1}$$

$$\text{et : } E^0_1 = -0,10 \text{ V.}$$



Méthode indirecte : on fabrique d'abord le chlorure d'acyle et le carboxylate :



2. SYNTHÈSES INDUSTRIELLES DU MÉTHANOL ET DE L'ACIDE ÉTHANOÏQUE.

2.1. Le gaz de Lacq est essentiellement du méthane qui, avec la vapeur d'eau, donne directement le mélange $\text{CO} + \text{H}_2$:



$$2.2. \Delta H^0_{298} = -90,6 \text{ kJ. mol}^{-1},$$

$$\Delta S^0_{298} = -219 \text{ J.K}^{-1} \text{ mol}^{-1},$$

$$\Delta G^0_{298} = -25,34 \text{ kJ. mol}^{-1}$$

à P constante, si T augmente : CH_3OH se dissocie ;

à T constante, si P augmente : CH_3OH se forme.

2.3. On suppose que les coefficients C_p^0 sont indépendants de T.

$$\Delta H^0_{693} = \Delta H^0_{298} + \int_{298}^{693} \Delta C_p^0 dT = -106,7 \text{ kJ. mol}^{-1}$$

$$\Delta S^0_{673} = \Delta S^0_{298} + \int_{298}^{673} \frac{\Delta C_p^0}{T} dT = -254 \text{ J. K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

$$\Delta G^0_{673} = \Delta H^0_{673} - T \Delta S^0_{673} = 64,2 \text{ kJ. mol}^{-1}$$

$$K = 1,03 \cdot 10^{-5}.$$

2.4. Variance : nombre minimum de *facteurs intensifs de l'équilibre* qu'il faut connaître pour pouvoir déterminer tous les autres.

Le système sera complètement défini si l'on connaît la pression totale, la température et les trois fractions molaires, soit 5 paramètres intensifs. On dispose des relations suivantes :

- la somme des fractions molaires vaut 1,
- la constante d'équilibre K ne dépendant que de T , relie en fait T aux pressions partielles, c'est-à-dire à la pression totale et aux fractions molaires.

$$v = 5 \text{ inconnues} - 2 \text{ relations} = 3.$$

La règle des phases (Gibbs) permet de retrouver cette valeur.

2.5. On peut fixer $\{P, T, \text{composition initiale}\}$ ou $\{P, T, \text{une pression partielle à l'équilibre}\}$.

$$2.6. \quad \xi(t) = -(n_{\text{CO}}(t) - n_{\text{CO}}^{(0)}) = \frac{1}{2} (n_{\text{H}_2}(t) - n_{\text{H}_2}^{(0)}) = \dots$$

$$\dots n_{\text{CH}_3\text{OH}}(t) - n_{\text{CH}_3\text{OH}}^{(0)}.$$



$$t = 0 \quad a \quad b \quad 0$$

$$t = \infty \quad a - \xi \quad b - 2\xi \quad \xi$$

Nombre total de moles à l'équilibre : $a + b - 2\xi$.

$$\text{Rendement : } r = \frac{\xi}{a + b}.$$

A P et T constantes, faisons varier a et b de sorte que $a + b$ reste constant : r est maximum si ξ est maximum ;

$$K = \frac{\xi(a + b - 2\xi)^2}{(a - \xi)(b - 2\xi)P^2};$$

en prenant la dérivée logarithmique de cette expression et en écrivant que $d\xi = 0$ et $da = -db$, on obtient $\underline{b = 2a}$.

$$2.8. \quad a = 1, \quad b = 2.$$

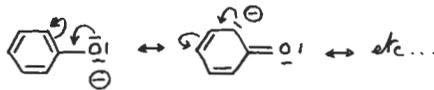
$$K = \frac{\xi(3 - 2\xi)^2}{(1 - \xi)(2 - 2\xi)^2 \times P^2} = 1,03 \cdot 10^{-5} \rightarrow \xi \simeq 0,14 \text{ mol}$$

différentes sources d'erreurs :

- C_p^0 pas indépendants de T entre 298 K et 673 K,
- à 200 atm les gaz ne sont plus parfaits, les coefficients d'activité sont différents de 1.

3. SYNTHÈSE DE L'ACIDE SALICYLIQUE.

3.1. Mésonérie : représentation de diverses formes de Lewis qui se déduisent les unes des autres par migration de doublets π ou non liants :

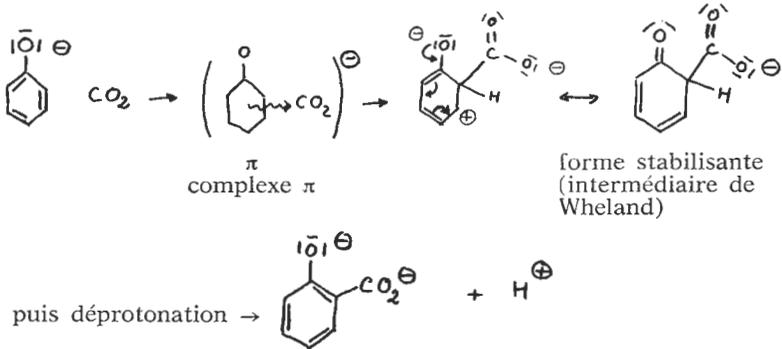


(on prendra soin de positionner correctement les flèches.

3.2.

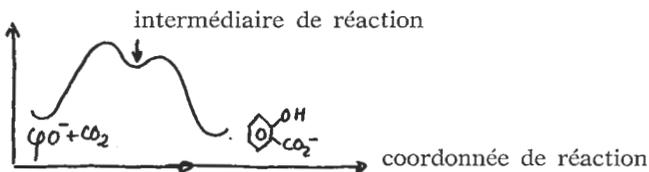
3.3. Substitution électrophile ; le réactif électrophile est l'atome de carbone de CO_2 .

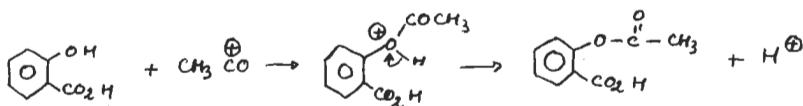
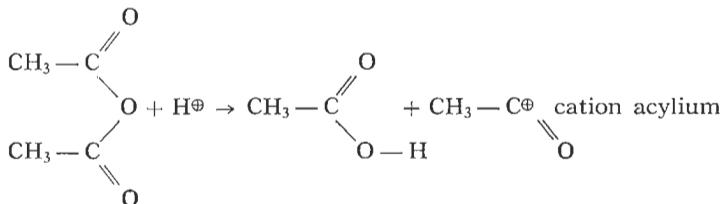
3.4.



3.5. L'intermédiaire de Wheland est stabilisé lorsque CO_2 se fixe en position ortho ou para mais pas en méta.

3.6.



4. SYNTHÈSE DE L'ASPIRINE^R AU LABORATOIRE.4.1. H_2SO_4 : catalyseur

C'est une réaction d'estérification.

4.2. On a :

$$\frac{5}{138} = 0,036 \text{ mol d'acide salicylique,}$$

$$\frac{7 \times 1087,12 \times 10^{-3}}{102} = 0,07 \text{ mol d'anhydrique qui est en excès,}$$

$$r = \frac{5,54}{180 \times 0,036} \times 100 \rightarrow r = 85 \%$$

4.3.

4.3.1. Azéotrope positif.

La phase vapeur et la phase liquide ont même composition ou la température de changement d'état est constante.

4.3.2. $T_0 \simeq 89,8^\circ\text{C}$. $x_{0, \text{vap}} \simeq 34\%$ mol éthanol ;

1^{er} plateau : $x_{1, \text{liq}} \simeq 34\%$; $T_1 \simeq 81^\circ\text{C}$; $x_{1, \text{vap}} \simeq 60\%$;
on recueille en tête l'azéotrope.

DEUXIÈME PARTIE



1.2.

1.2.1.



1.2.1. $\text{pH} = \text{p}K_1 = 9,18$ (quantités équimolaires d'espèces conjuguées). Solution tampon.

2.1. $\text{pH} = \frac{1}{2} (\text{p}K_1 - \log C_0) = 5,1$ (vérifier que les conditions d'utilisation de la formule sont réunies).

2.2. Equivalence : le nombre de moles de protons que peut libérer l'acide = nombre de moles de protons qui peut capter la base.

$$\text{pH} = 7 + \frac{1}{2} (\text{p}K_1 + \log \frac{C_0}{2}) = 10,9 \text{ si l'on considère qu'on}$$

a un monoacide faible dosé par une base forte.

(La prise en compte de la deuxième acidité conduit alors à la

relation : $\text{pH} = \frac{1}{2} (\text{p}K_1 + \text{p}K_2) = 10,9$).

2.3.
$$\text{pH} = \text{p}K_1 + \log \frac{x}{-x + 1}.$$

2.4.
$$\text{pH} = \text{p}K_e + \log C_0 + \log \frac{x-1}{x+1};$$
 cette relation n'est

valable que tant que la deuxième acidité n'intervient pas ($\text{pH} < 11,7$).

3.1. La complexation de l'ion borate provoque le déplacement de l'équilibre acide-basique dans le sens de la dissociation de l'acide, donc de la formation d'ions H_3O^+ : le pH diminue.

3.2.

$$K = \frac{[\text{C}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_3\text{BO}_3][\text{M}]^n} = k K_1.$$

3.3. Avant d'ajouter M, : $[\text{H}_3\text{BO}_3] = [\text{B}(\text{OH})_4^-] = 2C$.

Après avoir ajouté M, si le complexe est assez stable ($k \gg 1$) $[\text{B}(\text{OH})_4^-] \ll [\text{C}^-] \simeq 2C$ et l'acide reste peu dissociée :

$$[\text{H}_3\text{BO}_3] \simeq 2C$$

d'où :

$$K \simeq \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{M}]^n} \quad \text{et} \quad \text{pH} = \text{p}K - n \log [\text{M}].$$

$$3.4. \quad n = 2; \quad \text{p}k = -5,25; \quad k = 1,78 \cdot 10^5; \quad K = 1,17 \cdot 10^{-4}.$$

4.1. Les ions borate sont pratiquement tous complexés sous la forme C^- , de sorte que l'équilibre acido-basique à prendre en compte est : $\text{H}_3\text{BO}_3 + 2\text{M} + 2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{C}^- + \text{H}_3\text{O}^+$ dont la constante est $K = 1,17 \cdot 10^{-4}$.

Si l'acide est peu dissocié : $[\text{H}_3\text{BO}_3] \simeq \text{C}_0$.

Par ailleurs, la réaction de dissociation montre que :

$[\text{C}^-] \simeq [\text{H}_3\text{O}^+]$, ce qui revient à négliger devant ces concentrations celles d'espèces minoritaires ou ultraminoritaires dans l'équation d'électroneutralité :

$$[\text{C}^-] + [\text{B}(\text{OH})_4^-] + [\text{OH}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+];$$

on en déduit :

$$K = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{C}^-]}{[\text{H}_3\text{BO}_3][\text{M}]^2} \simeq \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{\text{C}_0 \cdot [\text{M}]_0},$$

d'où : $\text{pH} = 2,5$.

On vérifie que les approximations sont légitimes :

$$[\text{B}(\text{OH}_4^-)] \simeq \frac{K_1 \text{C}_0}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \simeq 2,2 \cdot 10^{-8} \ll [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-2,5} \ll \text{C}_0.$$

4.2. L'équation du dosage est $\text{H}_3\text{BO}_3 + 2\text{M} + \text{OH}^- \xrightarrow{\quad} \text{C}^-$.

A la demi-équivalence : $[\text{H}_3\text{BO}_3] = [\text{C}^-]$, d'où : $K = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{M}]^2}$

et $\text{pH} = \text{p}K - 2 \log [\text{M}]$ avec $[\text{M}] = 0,9 \times \frac{10}{15}$ (en tenant compte

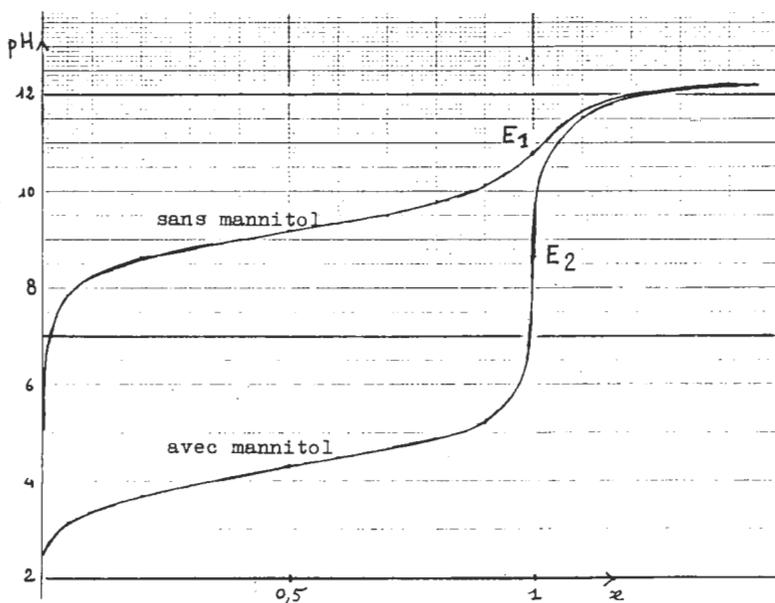
de la consommation de mannitol et de la dilution lors du dosage),
d'où : $\text{pH} = 4,4$.

4.3. A l'équivalence : $[\text{H}_3\text{BO}_3] = [\text{OH}^-]$ et comme presque

tout l'acide a réagi : $[\text{C}^-] \simeq \frac{\text{C}_0}{2}$, d'où : $K = \frac{\text{C}_0 [\text{H}_3\text{O}^+]^2}{2 [\text{M}]^2 k_e}$, avec

$$[\text{M}] = 0,80 \times \frac{10}{20} \rightarrow \underline{\text{pH} = 8,7}.$$

4.4. Courbes de dosage (fig. 2).



4.5. L'acide borique a un comportement d'acide plus fort en présence de mannitol ; le saut de pH à l'équivalence est net. Un indicateur coloré comme la phénolphtaléine peut servir en fin de dosage.

A. GILLES.

SESSION DE 1987

Concours Général

COMPOSITION DE SCIENCES PHYSIQUES

(Classes terminales C, D et E)

(Durée : 5 heures)

SOLUTION

LA MESURE DU TEMPS

Les différentes parties sont indépendantes entre elles.

I. PROBLÈMES DE CALENDRIER

1° Une année comprend $N_1 = T_3/T_1$ jours.

Application numérique : $N_1 = 365,2422\dots$ jours.

2° Une année grégorienne moyenne comprend N_2 jours avec
 $N_2 = 365 + 1/4 - 1/100 + 1/400 = 365,2425$ jours.

3° Cette année grégorienne est donc trop longue de $3 \cdot 10^{-4}$ jour.

En 10 000 ans, le décalage sera donc de 3 jours.

En 100 000 ans, il sera de 1 mois : on fêterait progressivement Noël aux bourgeons puis aux moissons.

4° En 10 000 ans, la dérive sera $5,1 \cdot 10^{-3} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 10\,000)$, soit $2,5 \cdot 10^5$ secondes soit 3 jours, ce dans le même sens.

5° La Terre se ralentit à cause du couple retardateur exercé par la Lune et le Soleil sur le bourrelet des marées océaniques et terrestres, la dissipation d'énergie étant due à la viscosité. L'année comprendra de moins en moins de jours. Au total, le décalage sera de $4,5 \cdot 10^{-8} (3,65 \cdot 10^6)^2/2$, soit environ 3 jours.

6° Ces trois décalages jouent dans le même sens : soit environ 10 jours de décalage pour 10 000 ans. Les deux derniers varient comme le carré du temps ; l'ajustement grégorien est linéaire en t : on ne peut songer compenser les uns par l'autre ; inutile donc de chercher à affiner le calendrier grégorien : 10 000 ans est sensiblement l'ordre de grandeur où les différentes perturbations sont du même ordre.

7° On connaît ΔT_0 à 0,1 ms près, soit une erreur relative de $3 \cdot 10^{-11}$; ceci justifiait la précision donnée au 1°. Le mot « environ » était là pour signifier que T_0 évolue constamment (note 1) : donc il faut choisir une année particulière pour donner T_0 (on a choisi l'année 1900). Par ailleurs 7 chiffres significatifs suffisaient pour résoudre le problème (3 jours/10 000 ans).

II. IRRÉGULARITÉS DU JOUR SOLAIRE VRAI

1° Projetons le Soleil S en s sur le plan équatorial. Soit ϑ l'angle $\widehat{ST\gamma}$. Les coordonnées de Ts sont $(\cos \varphi, \sin \varphi \cos \alpha, 0)$. Donc $\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi \cos \alpha$. Posons alors : $\varepsilon = \vartheta - \varphi$; on a :

$$\operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg}(\varphi + \varepsilon) \simeq \operatorname{tg} \varphi + \varepsilon / \cos^2 \varphi.$$

soit :

$$\varepsilon = \cos^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi (1 - \cos \alpha) = -\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin 2\varphi$$

avec :

$$2\varphi = 2 \cdot 2\pi / 365 \cdot (N - 82),$$

car $\varphi = 0$ à l'équinoxe de printemps. D'où :

$$\frac{\vartheta - \varphi}{\omega_1} = -T_1 / 2\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin 2\varphi = -570 \sin 2\varphi \text{ secondes.}$$

2° Comme e est petit, il vient :

$$[1 - 2e \cos(\varphi - \varphi_0)] \dot{\varphi} = \omega_0 [1 + e^2 \cdot 3/2] \sim \omega_0$$

soit en intégrant :

$$\varphi - 2e \sin(\varphi - \varphi_0) = \omega_0 t + \text{cste}$$

soit :

$$\frac{\varphi - \omega_0 t}{\omega_1} = \frac{2e}{\omega_1} \sin \frac{2\pi}{365} (N - 3) + \text{cste}$$

avec :

$$\frac{2e}{\omega_1} = T_1 \frac{e}{\pi} = 460 \text{ secondes.}$$

3° Bien sûr, $H(N) = h_1(N) + h_2(N)$.

La durée du jour est donc : $T_1 + dH/dN = T_1 + z(N)$ avec :

$$z(N) = \dots$$

$$\dots - 19,6 \cos 4\pi(N - 82)/365 + 7,75 \cos 2\pi(N - 3)/365 \text{ secondes.}$$

Le tracé de la courbe montre que $z = 0$ pour le 42^e, 135^e, 208^e, et 308^e jour, c'est-à-dire le 11/02, 15/05, 25/07, 04/11. Les jours les plus longs sont le 20 juin de 12 s et le 23 décembre de 24 s ; les jours les plus courts sont le 28 mars et le 17 septembre d'environ -20 s.

Bien sûr, tout cela est mesurable par une bonne montre. Evidemment les erreurs cumulées, elles, sont gigantesques puisqu'elles atteignent jusqu'à 15 minutes ! (Note 2)

III. STABILITÉ D'UNE HORLOGE ASTRONOMIQUE

1° Le théorème de l'Ec donne : $1/2 J \dot{\theta}^2 + m g a (1 - \cos \theta) = E$.

En dérivant, on obtient : $J \ddot{\theta} + m g a \sin \theta = 0$.

Dans le cas des petites oscillations : $T_0 = 2\pi \sqrt{(J/mga)}$.

2° La longueur du pendule simple synchrone est l telle que :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{l/g}.$$

Avec $J = J_0 + m a^2$, il vient : $l = a + 2/5 R^2/a$.

La plus petite racine : $a_1 = 2/5 R^2/l$ est irréalisable ;

$$a_2 \approx l \left(1 - \frac{2}{5} \frac{R^2}{l^2} \right).$$

Application numérique : $l = 99,396$ cm et $a_2 = 99,295$ soit 99,3 cm environ.

3° Si R devient $R + dR$, l devient :

$$l + dl \text{ avec } dl + 4/5 \cdot R/a \cdot dR.$$

D'où : $dT/T = 1/2 dl/l = 2/5 R^2/al (\alpha d\theta)$.

Application numérique : $dT/T = 2 \cdot 10^{-8}$ soit $dT = 4 \cdot 10^{-8}$ s.

Le retard par jour est donc : $4 \cdot 10^{-8} \cdot 43\,200 = 2$ ms/jour (Note 3).

Le calcul a été le plus souvent conduit à la calculette par les candidats.

4° Cette fois, $dT/T = -dg/g$ soit $dg = 2,3 \cdot 10^{-6}$ m.s⁻².

Si on calcule g (Lune), on trouve :

$$g(\text{Lune}) = g \cdot 1/81 \cdot 1/3\,600 = g \cdot 3,4 \cdot 10^{-6}.$$

Cela devrait être détectable. Mais un tel raisonnement est FAUX ; car l'effet est DIFFÉRENTIEL : seule se manifeste g effectif tel que :

g effectif = $g_L(M) - g_L(T) \simeq g(\text{Lune}) \cdot 2R/d = g(\text{Lune})/30$.
Il est donc à peine détectable : plus exactement rien ne sert de faire une horloge plus précise puisque son mouvement devrait tenir compte de l'influence de la Lune.

5° Avec $\theta_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ rd ($\sim 3^\circ$), la longueur l devient 99,365 cm, soit $a_2 = 99,264$ cm. La variation sur a_2 est donc infime, de 32 μm ,

ce qui est difficile à ajuster, mais faisable grâce à des artifices ingénieux (Note 4).

Si l'amplitude change, $\vartheta_0 \rightarrow \vartheta_0 + d\vartheta_0$, la période change $T \leftrightarrow T + dT$. D'où :

$$dT = T_0 \vartheta_0 d\vartheta_0 / 8 \quad dT/T_0 < 1,2 \cdot 10^{-7} \Rightarrow d\vartheta_0 < 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ rd} = 6'' = d\vartheta_{\text{max}}$$

$$\text{D'autre part, } E = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = m g a (1 - \cos \vartheta_0).$$

Donc,

$$dE = m g a \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 \simeq m g a \vartheta_0 d\vartheta_0 = m g a \cdot 8 \cdot dT/T = \dots$$

$$\dots m g a \cdot 10^{-6} = 50 \text{ } \mu\text{J}; \quad \frac{dE}{E} \sim 2 \cdot 10^{-4}.$$

Par période, on fournit : $dE' = (2 m g a / 86400) \times 2 = 200 \text{ } \mu\text{J}$.

Ceci veut dire que l'énergie fournie par période, tout en compensant l'énergie perdue, modifie notablement le mouvement de manière à le conserver périodique. Mais tout espoir de descendre en deçà de 10 ms est relativement exclu.

6° Conclusion : on peut attendre d'une bonne horloge une dérive moindre que 10 ms/jour, voire 1 s/an. Mais il faudra thermostatier l'horloge, assurer un transfert très régulier de l'énergie d'entretien de manière que l'horloge batte impérativement de la même façon. Au-delà, il apparaît que de multiples facteurs mal contrôlables entrent en jeu et il faudrait voir comment se répercutent sur la marche de l'horloge la variation de $g(t)$ due à la Lune, au Soleil, aux vibrations du sol, la variation de longueur $l(t)$ due à l'usure du couteau et à la dilatation, la variation d'amplitude $\vartheta_0(t)$ due à des transferts d'énergie mal asservis, et ceci SIMULTANÉMENT. Cela devient inextricable : on préfère choisir un autre système.

Les irrégularités du jour solaire sont aisément détectables (10 s/jour!)

Les irrégularités de la rotation de la Terre de l'ordre de quelques ms sont peu perceptibles. (Note 5)

IV. STABILITÉ D'UNE HORLOGE A QUARTZ

L'impédance de la capacité C_1 est $1/C_1\omega$; son admittance est $C_1\omega$. De même, l'impédance de l'autre branche est $1/C\omega - L\omega$, son admittance $1/(1/C\omega - L\omega)$. L'admittance totale est donc :

$$Z = \frac{1}{C_1\omega} \cdot (\omega_s^2 - \omega^2) / (\omega_p^2 - \omega^2)$$

avec :

$$\omega_s^2 = \frac{1}{LC} \quad \omega_p^2 = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right).$$

Ici on a fait le calcul basse-fréquence, où les capacités sont dominantes et $\varphi = \pi/2$. Quand ω passe ω_s , $\varphi = -\pi/2$, puis à nouveau quand ω passe ω_p , $\varphi = +\pi/2$.

La pulsation ω_s représente la pulsation pour laquelle $Z = 0$ c'est-à-dire la pulsation série ; et ω_p représente la pulsation pour laquelle $Z = \infty$, c'est-à-dire la pulsation propre du circuit.

2° La nouvelle pulsation propre devient ω'_p telle que

$$\omega'_p{}^2 = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_1 + C_2} \right)$$

soit :

$$\omega'_p{}^2 = (\omega_s^2 C_2 + \omega_p^2 C_1)/(C_1 + C_2) \quad \text{et} \quad \omega'_p{}^2 = \omega_s^2 + \omega_s^2 \frac{C}{C_1 + C_2}.$$

Application numérique :

$$\omega'_p{}^2 = 6,782\,346\,10^{11} \text{ (rad/s)}^2 \Rightarrow C_1 + C_2 = 2\,525 \cdot C$$

$$\omega_s^2 = 6,775\,66 \cdot 10^{11} \text{ (rad/s)}^2 \text{ soit } C_2 = 15 \cdot 25 \text{ pF.}$$

3° La pulsation ω_s est bien stable. Avec $C_1 = 1\,000 \cdot C$, on sait déjà que $\omega = \omega_s$ à $1/2\,000^e$ près. Il faut donc tailler le quartz à une longueur exacte à $1/2\,000^e$ près. D'autre part, on cherche à ajuster C_2 de manière à faire travailler le quartz sur sa pulsation série. Ainsi la pulsation d'émission du quartz ne sera pas JUSTE $8,23550\,10^5$ rd/s : elle ne sera pas juste mais elle sera FIDÈLE.

Application numérique :

Avec :

$$dC = 1 \text{ pF, } \omega^2 = \omega_s^2 (1 + 10^{-3}/2 \cdot 5)$$

et :

$$\omega^2 = \omega_s^2 (1 + 10^{-3}/2 \cdot 6) \Rightarrow \frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega_s^2} = 2 \frac{\Delta\omega}{\omega} = 10^{-3}/65$$

$$\Delta\omega/\omega = 8 \cdot 10^{-6}. \text{ Avec } dC = 10^{-2} \text{ pF } \Delta\omega/\omega = 8 \cdot 10^{-8}.$$

4° Après la bascule B_0 , le signal a la fréquence $f/2$. Après 17 bascules, la fréquence devient $f/2^{17} = 1,000\,000$ Hz.

5° Les 17 bits représentent le nombre de périodes en base de numération binaire, c'est-à-dire le temps écoulé avec une incertitude de 1 bit, soit une précision de $1/N$. Mais évidemment, il faut y rajouter l'incertitude sur la période du quartz due aux capacités parasites ; c'est elle qui prédomine très vite.

En fait l'immense progrès est que le système réalise un excellent diviseur de la seconde. Le découpage du mouvement sinusoïdal du pendule est plus délicat à réaliser via un ARC SINUS : pour les temps petits du chronomètre, le quartz est irremplaçable.

6° *Application numérique* : $\Delta t/t = \Delta T/T \cdot 1/\sqrt{N}$. Avec $\sqrt{N} = 362$, on obtient $\Delta t/t = 3 \cdot 10^{-8}$.

Si N est très grand, on pourra avoir des dérives dues à la température sur ω_s : le quartz va donc SATURER EN PRÉCISION : on ne peut espérer augmenter indéfiniment la précision d'une mesure simplement par répétition indéfinie. Ceci dit, avec une enceinte bien thermostatée (et cela est plus facile pour un quartz que pour une horloge à cause de la dimension!), on peut atteindre 10^{-10} voire 10^{-11} en précision. (Note 6)

En conclusion, un quartz n'est pas juste forcément, car il est réglé sur ω_s . Une horloge sera plus facilement RÉGLÉE JUSTE.

Mais la justesse n'est pas une qualité essentielle si on sait la corriger. La FIDÉLITÉ est par contre fondamentale. Un quartz sera plus fidèle (c'est-à-dire moins sujet à dérives, sauf « vieillissement » du quartz), et certainement plus précis sur des durées de quelques secondes. Sur de longues durées, une horloge astronomique est peut-être préférable, MAIS une BATTERIE d'horloges à quartz permettant d'éliminer un quartz vieillissant est toujours meilleure qu'une horloge astronomique.

V. STABILITÉ D'UNE HORLOGE ATOMIQUE

1° La longueur de la cavité est telle que :

$$L = \lambda/2 \quad (2L = n\lambda, n \in \mathbb{N}^*); \quad L = 1,6 \text{ cm.}$$

2° La précision sur une seconde sera 10^{-15} .

3° La pulsation ω_c varie à cause de L : d'où une dérive par dilatation éventuellement contrôlable en thermostatant. Il reste les vibrations, d'amplitude proportionnelle à \sqrt{kT} . Donc il faut thermostatier à basse T , mais on le réalise moins bien : un compromis est à trouver. En fait, on asservit la longueur de la cavité de manière à ce que ω_s reste le plus stable possible.

D'autre part, la dérive en ω est $\omega_c \varphi_c / (\varphi_a + \varphi_c)$: on aurait donc intérêt à avoir $Q_c/Q_a \ll 1$, ce qui semble paradoxal car on perd en précision : il y aura donc encore compromis à trouver entre la dérive et la précision : c'est toujours ce compromis fidélité-précision qui limite une mesure.

4° Avec des fréquences 10 000 fois plus élevées, on peut espérer une précision de 10^{-17} . Mais de même qu'en IV. 5°, le problème est de RACCORDER les mesures de fréquences optiques et les mesures de radiofréquence car en effet, à quoi servirait-il de mesurer si précisément avec un instrument si on ne pouvait « répliquer » aisément sa mesure, c'est-à-dire si on ne pouvait s'en servir comme pilote d'horloges esclaves. Si dans cette comparaison la perte de précision est d'un facteur 1 000, une horloge laser ne

permettra pas de mieux mesurer une radiofréquence qu'une horloge maser. Dans la décennie 80, de gros progrès sont faits dans ce raccordement grâce à une meilleure maîtrise de la non linéarité des diodes moustaches (Note 7) et progressivement les fréquences laser servent d'étalon. Pour le futur, on s'achemine doucement vers un changement de l'étalon de temps en choisissant une raie émise par UN SEUL atome placé dans un état excité très stable (Q_c très élevé), ceci dans un environnement très stable (donc peu de dérive) : les horloges à UN SEUL ATOME ou UN SEUL ION sont les horloges de l'avenir. (Note 8)

5° La précision sur le césium atteignait 10^{-13} aisément. Le raccord avec la fréquence du krypton se faisait en perdant 2 chiffres significatifs. Mais même ainsi, la précision 10^{-11} restait largement supérieure à celle du krypton 10^{-9} . Il y a donc eu abandon de la référence krypton. On aurait pu alors choisir une raie très fine pour la définition du mètre parmi les innombrables raies laser connues. Le dilemme aurait été alors le suivant : chaque fois qu'une raie plus fine aurait été trouvée, il aurait fallu changer la définition du mètre ce qui, par contrecoup, aurait changé la valeur de la mesure de la célérité de la lumière. On a préféré trancher la question en choisissant la nouvelle unité par référence directe avec la célérité de la lumière, c_0 , d'où la nouvelle définition.

On ne changera donc pas immédiatement d'étalon de longueur et la mesure de c_0 ne se fera plus. Néanmoins, ce paradoxe apparent cessera le jour où l'on remplacera dans la définition le mot célérité de la lumière par le mot « vitesse limite d'interaction » : ceci reviendra à poser $c = 299\,792\,458$ m/s comme constante fondamentale de conversion mètre en seconde au sens de la relativité restreinte, SANS LA LIER A LA CÉLÉRITÉ DE LA LUMIÈRE (Note 9). Il restera, il reste toujours à vérifier expérimentalement si $c_0 = c$, c'est-à-dire à minimiser $c_0 - c$: en ce sens, il y aura toujours des expérimentateurs pour mesurer la célérité de la lumière : un décret ne saurait abolir la physique !

Marc SERRERO

et les membres du jury.

NOTES

Note 1 : L'année tropique n'est pas constante pour deux raisons. C'est le barycentre Terre - Lune qui décrit une trajectoire sensiblement périodique autour du Soleil. On doit donc faire cette correction barycentrique. *Confer* le très joli article de K. MIZAR dans les cahiers Clairaut. D'autre part, il faut tenir compte du mouvement de précession des équinoxes : c'est l'année sidérale qui est constante. Pourtant pour le calendrier c'est bien le retour du printemps qui compte, c'est-à-dire l'année tropique : elle varie comme $at + bt * t$. Pour plus de détails, on consultera un traité d'astronomie (H. FAYE par exemple pages 39-40).

Note 2 : Ce problème dit de « l'équation du temps » a préoccupé les horlogers depuis le 17^e siècle et leur devise était fièrement : (les aiguilles du Soleil sont fausses). Sur les cadrans solaires, l'erreur était depuis longtemps corrigée par le tracé de « l'anallagmatique », qui n'est autre que l'équation du temps en coordonnées polaires. Les inégalités du jour solaire vrai conduisent à de jolis paradoxes contrôlables aisément grâce aux informations télévisées (ou au calendrier des postes) qui donnent le lever et le coucher du Soleil chaque jour. On pourra consulter le merveilleux petit livre de P. COUDERC, le calendrier (que sais-je ?). Le cours limpide de J. DUPRÉ (Ecole d'été d'astronomie du C.L.E.A.) est une référence de marque.

Note 3 : Regardez avec amusement ces unités bizarres que sont la variation temporelle d'une période, la variation en fréquence d'une pulsation, etc. En y réfléchissant, cela donne lieu à de petits paradoxes amusants.

Note 4 : Pour plus de renseignements sur toutes ces questions d'horlogerie, on pourra consulter par exemple le traité de chronométrie de J. HAAG (Ed. Eyrolles).

Note 5 : Cf le superbe article de Pour la Science sur la rotation de la Terre. Les progrès ont été tels ces dernières années en chronométrie qu'une véritable révolution a lieu dans ce domaine.

Note 6 : Les candidats ont mal saisi ce délicat problème de la limite ultime de la mesure qui réside dans le conflit entre fidélité et précision. On pourra trouver de bonnes indications dans le petit que sais-je ? de LACOUME : théorie du signal, mais aussi dans le Max, théorie de la mesure. L'instrumentation numérique et l'introduction des ordinateurs nous obligera à réintroduire ces notions dans le bagage culturel de nos élèves.

Note 7 : Cf. l'article de F. BALIBAR dans la Recherche : à la recherche du temps perdu.

Note 8 : Cf. la superbe conférence de C. COHEN-TANNOUJJI aux journées de Reims 1986.

Note 9 : La réflexion de base sur ce sujet appartient à J.-M. LÉVY-LEBLOND dans son analyse profonde des systèmes d'unités et son essai d'introduction de la relativité sans théorie de la lumière.

SOMMAIRE du supplément au n° 700 (Janvier 1988)

	Pages
Agrégation de Sciences physiques :	
Option Physique :	
Epreuve C : problème de Physique (E.-R. TANTART)	1
Option Chimie :	
Epreuve C : problème de Chimie (M ^{me} M.-Ch. PARIS, MM. J. BOTTIN, M. GOLFIER, M. VERDAGUER)	35
Option Physique appliquée :	
Epreuve C : problème d'Electricité, d'Electronique, d'Electrotechnique et d'Automatique (R. MOREAU) ..	69
C.A.P.E.S. de Sciences physiques (concours externe) :	
Epreuve commune :	
composition de Physique avec applications (J.-Cl. HERPIN)	107
Epreuve à option :	
composition de Chimie (Jacques ARZALLIER)	123
composition d'Electronique, d'Electrotechnique, avec applications (Y. LE BRAS, P.-M. BEAUFILS) ..	137
C.A.P.E.S. de Sciences physiques (concours interne) :	
Composition à partir d'un dossier	
épreuve commune aux deux options (M. MEALLET)	149
Composition sur un programme	
composition de Chimie (A. GILLES)	167
Concours général (Marc SERRERO)	177
Renseignements divers	I à VIII

Le Directeur de la Publication : J.-Cl. HERPIN

Imprimerie Hallépée - 169, rue Lecourbe, Paris

Numéro Commission paritaire : 62628

Dépôt légal : 1^{er} trimestre 1988

MEMBRES D'HONNEUR

- M. Claude COHEN-TANNOUJJI, Membre de l'Académie des Sciences, Professeur au Collège de France.
- M. Jean-Marie LEHN, Membre de l'Académie des Sciences, Professeur au Collège de France - Prix Nobel.
- M. Louis LEPRINCE-RINGUET, Membre de l'Académie française, Membre de l'Académie des Sciences, Professeur au Collège de France.
- M. Louis NÉEL, Membre de l'Académie des Sciences - Prix Nobel.
-

PRESIDENTS D'HONNEUR

- M. EURIN (Inspecteur général de l'Instruction Publique).
- M. G. GUINIER (Inspecteur général de l'Instruction Publique).
- M. LE RÉVÉREND.
- M. MARCK.
- M. BLAIN.
- M. GATECEL.
- M. FOULON.
- M. TOUREN.
-

MEMBRES DU CONSEIL

Membres de droit : MM. LE RÉVÉREND, MARCK, BLAIN, GATECEL, FOULON, TOUREN.

Membres élus :

- 1985 : M^{mes} LESTRADE, MAUREL, MONTEIL ; MM. HERPIN, JEUNEHOMME, JOURDAIN, MASSON, MAURAS.
- 1986 : M^{mes} LÉOTTA, MERCURY, MOUTIER, TINNES ; MM. ALEXANDRE, AUGIER, GOURSAUD, Cl. NÉEL.
- 1987 : M^{mes} GENESTOUX, GUIBÉ, GRANDJEAN, LAGÜES ; MM. BAZIN, GILLES, SAUTOU, TANTART.
-

SECTIONS ACADEMIQUES

PRESIDENTS ET PRESIDENTS ADJOINTS

Aix-Marseille : NÉEL, CLÉMENTE ; *Amiens* : BUSCHINGER ; *Besançon* : JARDAT, M^{lle} LAUBEPIN ; *Bordeaux* : BARBASTE, ROCH ; *Caen* : M^{me} ANFRAY, BERNARD ; *Clermont-Ferrand* : SÉBILLE, MILLON ; *Corse* : ALIBERTINI, MORATI ; *Créteil* : JUSTEL ; *Dijon* : GOUTHÈRE ; *Grenoble* : PONCIN, MOUSSA ; *Lille* : GALLIN-MARTEL ; *Limoges* : MÉTROT, AVOND, M^{me} SAINT GEORGES ; *Lyon* : RUHLA, MANGOLD ; *Montpellier* : M^{me} GRIMAUD ; *Nancy* : MORISSET, MARACHIN ; *Nantes* : M^{me} FAUCONNET, CAPIT ; *Nice* : GRILLET ; *Orléans-Tours* : BERTHOMMIER, DUBOIS ; *Paris* : Ph. FLEURY ; *Poitiers* : M^{me} BLANCHARD, GUÉRIN ; *Reims* : HERMAN-MAURICE, DEROUARD ; *Rennes* : ÉTIENNE ; *Rouen* : LEVELUT, GUERENTE ; *Strasbourg* : THIVENT, LEIBER ; *Toulouse* : GRANDCAMP, GAUTIER ; *Versailles* : LAPASSAT, M^{me} SONNEVILLE.

Les Présidents des sections régionales font, de droit, partie du Conseil de l'Union.

BUREAU

Président : André DURUPHTY, Domaine de Calas, 2, rue Gauguin-Calas, 13480 Cabries — (16) 42-69-13-89 : Questions générales.

Vice-Présidents :

André BOUSSIÉ, 13, allée de Port-Royal, 78460 Chevreuse — (1) 30-52-18-71 : Classes préparatoires. Relations avec l'Enseignement supérieur : physique. Formation des maîtres.

Josette MAUREL, 76, boulevard Sérurier, 75019 Paris — (1) 42-02-44-89 : Enseignement premier cycle.

Claude MESNIL, 23, rue G.-Lenôtre, 78120 Rambouillet — (1) 34-83-27-95 : Classes préparatoires. Relations avec l'enseignement supérieur : chimie.

Jacqueline TINNES, 11, rue des Bleuets, 77410 Charny — (1) 60-01-91-47 : Enseignement second cycle.

Jean WINTHER, 73, rue de la Convention, 75015 Paris — (1) 45-77-55-63 : Enseignement technique (L.P. ; L.T.). Informatique.

Rédacteur en chef, Directeur de la publication :

Jean-Claude HERPIN, 8, rue Saint-Charles, 78000 Versailles — (1) 30-21-32-75 : Rédacteur en chef.

Trésorier : Jacques BOULOUMIÉ, 17, Hameau de la Caravelle, 91650 Breuillet — (1) 64-58-43-34.

Trésorier adjoint : Philippe ALLAIN, rue des Hucheries, 5, résidence du Séquoia, 91400 Orsay — (1) 69-07-65-60.

Secrétaire général : Bernard CUNY, 106, rue Léonard-Bourcier 54000 Nancy — 83-96-24-66 : Relations extérieures : syndicats, associations de parents d'élèves, presse. Enseignement technique : BTS.

Secrétaire générale adjointe : Anne-Marie LESTRADE, 8/C, rue de Lahire, 45000 Orléans — 38-62-26-88 : Relations avec les sections académiques.

Membres :

Jean-Louis HUZAR, 36, allée du Jura, 93270 Sevran — (1) 43-84-69-22 : Enseignement second degré : collèges. Laboratoires.

Chantal MONTEIL, 20, rue L.-Blériot, Bondoufle, 91000 Evry — (1) 64-97-53-67 : Enseignement technique : BTn : F₁, F₂, F₃.

Monique SCHWOB, 24, rue Léon-Barillot, 57158 Montigny-les-Metz — 87-65-78-29 : Enseignement technique : BTn : F₅, F₆, F₇, F₈. Informatique.

Jacques TABUTEAU, 19, rue des Cordelières, 75013 Paris — (1) 45-35-40-81 : Publicité.

Michèle VERLHAC, 11, villa Brune, 75014 Paris — (1) 45-39-50-45 : Enseignement du second degré : lycées. Conférence des Présidents.

Sauf en cas de démarche personnelle auprès d'un membre du Bureau, nos membres sont priés d'adresser leurs lettres à :

Union des Physiciens
44, boulevard Saint-Michel
75270 Paris Cedex 06.

Prière de joindre un timbre pour la réponse à toute demande de renseignements.

Bulletin de l'Union des Physiciens

Directeur de la publication et Rédacteur en chef : J.-Cl. HERPIN.

CHARGÉE DE LA REDACTION DES BULLETINS PREMIER CYCLE

M^{lle} A. LAVAL, 15, impasse Boieldieu, 87000 Limoges.

COMITE DE LECTURE

M^{mes}, M^{lles} F. BLAIN-MARTIN, CARETTO, JOUSSEN, LESTRADE, LEYMARIE, MESMIN, SOCQUET, THORE, VIGNON.

MM. BOUSSIÉ, CHARPENTIER, DELUZARCHE, FAITG, FLEURY, FONTAINE, GATECEL, GILLES, HENRY, JOUANISSON, MALLET, MARCK, MARTINAND, MAURAS, MESNIL, MILLET, R. MOREAU, RENAULT, ROOY, SARMANT, SERRERO, TRIGEASSOU, VERDAGUER, WALTER, WINTHER.

PUBLICATION DES ARTICLES — TIRES A PART

Tout article ou communication doit être adressé au « Rédacteur en chef du Bulletin de l'Union des Physiciens » : 44, bd Saint-Michel, 75270 Paris Cedex 06 ; dès réception l'expéditeur en est avisé.

Les manuscrits sont ensuite soumis au Comité de lecture qui donne ou refuse son accord à la publication ; l'avis du Comité de lecture reste strictement anonyme. En cas d'acceptation, **aucun engagement sur la date de publication ne peut être fourni à l'auteur** ; les manuscrits acceptés ne sont pas rendus. En cas de refus, l'auteur en reçoit immédiatement communication et son manuscrit lui est renvoyé.

Les auteurs d'articles publiés peuvent recevoir à titre gracieux 25 tirés à part, ou plus à leurs frais s'ils le désirent, à condition d'en faire la demande au moment de l'envoi de leur manuscrit.

RECOMMANDATIONS AUX AUTEURS

Il est souhaitable que tout article de documentation générale **soit précédé d'un court résumé** de quelques lignes.

Les auteurs qui désirent corriger eux-mêmes le texte imprimé, **dans le seul but de le rendre exactement conforme au manuscrit**, doivent en faire la demande sur la lettre d'accompagnement de leur manuscrit ; ils doivent alors s'engager à renvoyer à l'imprimeur les épreuves corrigées dans les huit jours suivant leur réception.

TARIFS DES COTISATIONS ET ABONNEMENTS

1) Cotisation nationale :

Moyennant paiement de la cotisation, la qualité de membre actif est réservée aux professeurs et aux membres du personnel de laboratoire de sciences physiques de l'enseignement public, en activité ou en retraite ; celle de membre adhérent à toute autre personne.

La qualité de membre de l'Union des Physiciens permet de participer aux activités nationales et académiques de l'Union des Physiciens.

Le paiement de la cotisation ne donne pas droit au service du bulletin.

Le non paiement de la cotisation entraîne la radiation de membre de l'Union.

Membre actif non retraité et membre adhérent :	75 F
Membre actif retraité :	55 F
Etudiant ou militaire :	55 F

2) Cotisation nationale pour les enseignants des collèges :

Un enseignant en collège peut opter pour l'une des deux possibilités ci-dessous :

- cotiser selon les tarifs du paragraphe 1) ;
- verser une cotisation de **85 F**. Dans ce cas, les trois numéros plus spécialement consacrés à l'enseignement de la physique et de la chimie dans les collèges seront envoyés gracieusement.

3) ABONNEMENT (pour l'ANNEE CIVILE 1988) : 10 numéros, y compris les Bulletins « collèges » + 1 numéro supplémentaire en novembre 1988.

Pour tout premier abonnement, ajouter **6 F** aux tarifs indiqués.

Le montant de l'abonnement est à régler à compter du 1^{er} octobre 1987.

Le règlement doit être fait avant le 15 décembre 1987.

Pour tout règlement ultérieur, les numéros du bulletin qui seront épuisés seront remplacés par des numéros des années antérieures.

	France métropolitaine et D.O.M. (dont T.V.A. au taux de 4%)	Etranger + Expédition (a 1) étranger (a 2) (voie de surface)	
— Prix PUBLIC :			
collectivité (c) et individuel non membre de l'Association	240 F	231 F	70 F

— Prix PREFERENTIEL (*réservés* aux membres de l'Association ayant réglé la cotisation Nationale - tarif au § 1) :

* normal	165 F	159 F	70 F
* réduit (retraité, étudiant (b), militaire)	135 F	130 F	70 F

(a 1) L'abonnement étranger est exonéré de la T.V.A.

(a 2) Pour l'expédition par voie aérienne, consulter les pages couleur des bulletins de septembre 1987 et au-delà.

(b) Le tarif réduit étudiant est accordé aux intéressés sur leur demande et après envoi d'une pièce justificative de leur qualité ; cette réduction ne peut être accordée plus de deux ans. Les stagiaires appartenant à un C.P.R. et les élèves des E.N.S. ne bénéficient pas du tarif réduit étudiant.

(c) Tous les établissements, y compris les collèges, qui souscrivent un abonnement paient le tarif collectivité.

4) Changement d'adresse :

Toute demande de changement d'adresse d'expédition du bulletin doit donner l'indication de l'ancienne et de la nouvelle adresse. Elle ne peut être prise en considération que si elle est accompagnée de la somme de **6 F** ou de son équivalent en timbres-poste.

5) Service des numéros anciens encore disponibles : (l'unité)

	France	Etranger		France	Etranger
Bulletin ordinaire	22 F	27 F	Annales du bacc. de Tech. 74, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87 (1983 épuisé)		
Bulletin double oct. - nov. 1978	34 F	41 F		22 F	27 F

Numéros anciens hors abonnement encore disponibles :

Numéro spécial (Agrég. et C.A.P.E.S. - énoncés et corrigés) :			Bulletin des concours (grandes écoles) :	
	France	Etranger	France	Etranger
Concours 1978	25 F	30 F	1972	24 F 29 F
Concours 1979	34 F	39 F	1973	24 F 29 F
Concours 1980	34 F	39 F	1979	40 F 45 F
Concours 1981	34 F	39 F	1980	45 F 50 F
Concours 1982	40 F	45 F	1981	50 F 55 F
Concours 1983	44 F	49 F	1982	60 F 65 F
Concours 1984	48 F	53 F	1984	70 F 75 F
Concours 1985	55 F	60 F	1985	75 F 80 F
Concours 1986	60 F	65 F	1987	85 F 90 F
Concours 1987 (Énoncés)	30 F	35 F	79 - 80 - 82 : quelques nos disponibles.	
Concours 1987 (Corrigés)	45 F	50 F	Annales du B.T.S. 80	40 F 45 F
Olympiades chimie 85	65 F	70 F	Annales du B.T.S. 81	50 F 55 F
Nouveau fascicule « In- formations » (oct. 83)			Annales du B.T.S. 82	56 F 60 F
suppl. au n° 657	10 F	12 F	Annales du B.T.S. 83	60 F 65 F
			Annales du B.T.S. 84	60 F 65 F
			Annales du B.T.S. 85	65 F 70 F
			Annales du B.T.S. 86	69 F 74 F
			Annales du B.T.S. 87	72 F 77 F

LES COMMANDES NE SONT EFFECTUÉES QU'APRÈS RÉCEPTION DE LEUR RÈGLEMENT.

Adresser tous les paiements à :

Union des Physiciens, 44, bd Saint-Michel

C.C.P. Paris 2113-81 T

75270 Paris Cedex 06

**TARIFS DES EXPEDITIONS DU BULLETIN PAR VOIE AERIEENNE
POUR L'ANNEE CIVILE 1988
DU 1^{er} JANVIER 1988 AU 31 DECEMBRE 1988**

Régime intérieur et régime assimilé

Les membres de l'Union des Physiciens qui en feront la demande lors du paiement de l'abonnement, pourront recevoir le bulletin **par avion**, à condition de payer le tarif abonnement France et l'expédition par voie aérienne. Le tarif par voie aérienne est indiqué ci-dessous.

Régime intérieur : DEPARTEMENTS D'OUTRE-MER :	
Guadeloupe, Martinique, Guyane Française, La Réunion ..	97 F
Saint-Pierre-et-Miquelon	97 F
Régime assimilé : TERRITOIRES D'OUTRE-MER :	
Mayotte, Nouvelle-Calédonie, Polynésie française, Terres Australes et Antarctiques françaises, Wallis et Futuna ..	175 F

Régime international

Les membres de l'Union des Physiciens qui en feront la demande lors du paiement de l'abonnement, pourront recevoir le bulletin **par avion**, à condition de payer le tarif abonnement Etranger (a 1) et l'expédition par voie aérienne. Le tarif par voie aérienne est indiqué ci-dessous.

EUROPE :	
Tous pays, sauf France, Andorre, Monaco	115 F
AFRIQUE :	
Algérie, Tunisie, Maroc	115 F
Bénin, Burkina Faso, Cameroun, Centrafricaine (Rép.), Congo, Côte-d'Ivoire, Djibouti, Gabon, Guinée, Mali, Mauritanie, Niger, Sénégal, Tchad, Togo	145 F
Madagascar, Comores	210 F
Egypte, Libye	145 F
Autres pays étrangers d'Afrique	210 F
AMERIQUE :	
Canada	210 F
Autres pays d'Amérique	210 F
ASIE :	
Arabie saoudite, Iran, Iraq, Israël, Jordanie, Liban, République arabe syrienne	145 F
Birmanie, Chine (Rép. pop.), Corée (Rép.), Corée (Rép. pop. dém.), Hong-Kong, Indonésie, Japon, Kampuchéa dém., Laos, Macao, Malaisie, Mongolie, Philippines, Singapour, Taïwan (Formose), Timor Est, Thaïlande, Viêt-nam	255 F
Autres pays	210 F
OCEANIE :	
Tous pays	255 F

Adresses des Responsables Académiques pour l'année civile 1988

NE RESTEZ PAS ISOLÉS. PRENEZ CONTACT AVEC LES RESPONSABLES ACADEMIQUES.

cela vous permettra d'être tenu au courant des activités locales et d'y participer, peut-être d'en susciter de nouvelles.

Après enquête auprès des présidents de sections académiques, voici les renseignements utiles :

- nom et adresse du responsable à qui expédier le courrier relatif à la vie de votre section ;
- nom et adresse du trésorier académique ;
- nom et adresse du correspondant technique ;
- nom et adresse du correspondant 1er cycle.

AIX - MARSEILLE :

Courrier : M. NEEL Patrick, Le Cottage, Bât. B, Chemin du Four, 13100 Aix-en-Provence.
Trésorier : Mme CARTOUX Michelle, Bel Ormeau, Bât. H, avenue J.-P.-Coste, 13100 Aix-en-Provence.
Correspondant technique : M. COSTA, 34, rue de la Rotonde, 13001 Marseille.
Correspondant collège : Mme BLANC Nicole, La Colline Saint-Joseph, Bât. 1, 13000 Marseille.
Correspondant informatique : Mme AURIC Françoise, lycée Marseilleveyre, 83, traverse Parangon, 13008 Marseille.
Correspondant chimie (olympiades) : Mme DUBUSC Michèle, 32, rue Marengo, 13006 Marseille.

AMIENS :

Courrier : M. BUSCHINGER Jacques, 93, Mail Albert-1er, 80000 Amiens.
Trésorier : M. MORT Guy, rue de Gentelles, 80440 Boves.
Correspondant technique : M. CARPENTIER, n° 6, Résidence Bellevue, route de Conty, 80480 Saleux.
Correspondant collège : M. BAZIN Alain, 22, bd Pont-Noyelles, 80000 Amiens.
Correspondant informatique : Mme DESPAGNE, lycée Louis-Thuillier, bd Saint-Quentin, cité scolaire sud, 80027 Amiens.
Correspondant chimie : M. CAUCHY Didier, lycée Louis-Thuillier, bd Saint-Quentin, cité scolaire sud, 80027 Amiens.

BESANCON :

Courrier : M. JARDAT François, 27 bis, rue des Brosses, 25000 Besançon.
Trésorier : M. HAUDICOT Jean-Paul, 26, Les Vauciels, Tallenay, 25870 Geneuille.
Correspondant technique : M. FISCHER, Le Hameau du Coteau, 25770 François.
Correspondant collège : Mme BONBOIS M.-Noëlle, Le Séchaux, St-Germain-en-Montagne, 39300 Champagnole.
Correspondant informatique : M. LUNEAU Serge, lycée V.-Hugo, 2, rue Rembrand, 25043 Besançon Plannoise.
Correspondant chimie : M. BRUN Serge, lycée Pergaud, 91, boulevard Léon-Blum, 25000 Besançon.

BORDEAUX :

Courrier : M. BARBASTE Michel, 6, rue Voltaire, 33700 Mérignac.
Trésorier : Mme MAUHOURAT Marie-Blanche, lycée M.-Montaigne, 118, cours V.-Hugo, 33075 Bordeaux Cedex.
Correspondant technique : Mme BOUBEE Danielle, Cours de la Marne, 33000 Bordeaux.
Correspondant collège : M. RAYNAL Christian, « Le Violon », Bonnetan, 33370 Tresses.
Correspondant informatique : M. RABALLAND Claude, lycée Michel-Montaigne, 118, cours Victor-Hugo, 33075 Bordeaux Cedex.
Correspondant chimie : M. DUBOIS, lycée Michel-Montaigne, 118, cours V.-Hugo, 33075 Bordeaux Cedex.

CAEN :

Courrier : Mme ANFRAY Marie-Cécile, 35, rue de Maltot, 14000 Caen.
Trésorier : M. MENIVAL Christian, 15, rue des Rosiers, 14111 Louvigny.
Correspondant technique : M. BESNARD Jacques, Allée des Marronniers, Colomby-sur-Thaon, 14610 Thaon.
Correspondant collège : Mme DUVAL Danièle, 18, rue Buisson, 14760 Bretteville-sur-Odon.
Correspondant informatique : Mme LECAUCHOIS M.-Rose, lycée Malherbe, av. Albert-Sorel, 14039 Caen Cedex.
Correspondant chimie : M. MARIE Jacques, lycée Maurois, boulevard Crnuche, 14800 Deauville.

CLERMONT :

Courrier : M. SEBILLE Claude, 30, rue H.-Dunant, 63540 Romagnat.
Trésorier : Mme MORENAS M.-Colette, 1 bis, bd Fleury, 63000 Clermont-Ferrand.
Correspondant technique : M. GARRET Jean, 41, rue des Gravouses, 63100 Clermont-Ferrand.
Correspondant premier cycle : Mme MOREL Raymonde, 36, avenue Carnot, 63000 Clermont-Ferrand.
Correspondant informatique : Mme YACINE Elyane, Lycée Voie Romaine, 63400 Chamalières.
Correspondant chimie : M. SEBILLE Claude, 30, rue H.-Dunant, 63540 Romagnat.

CORSE :

Courrier : Mlle ALIBERTINI Rose-Marie, 1 bis, place Vincenti, 20200 Bastia.
Trésorier : M. TOMASI Pierre, 7, bd Auguste-Gaudin, 20200 Bastia.
Correspondant technique : M. TOMASI Sébastien, 1, rue du Nouveau-Port, 20200 Bastia.
Correspondant collège : M. ALFONSI Hervé, Le Neptune, Résidence Plein Soleil, route des Sanguinaires, 20000 Ajaccio.
Correspondant informatique : M. VIALE Georges, route de Poretto-Brando, 20222 Erbalunga.
Correspondant chimie :

CRETEIL :

Courrier : Mme JUSTEL Maité, 5, villa Félix-Faure, 75019 Paris.
 Trésorier : Mme PLOTARD Marcelle, L'Allée de l'Abbesse-Clotilde, 77500 Chelles.
 Correspondant technique : Mme SPÉTEBRODT Micheline, 42, avenue Voltaire, 93600 Aulnay-sous-Bois.
 Correspondant collègue : M. HUZAR Jean-Louis, 36, avenue du Jura, 93270 Sevran.
 Correspondant informatique :
 Correspondant chimie : Mme MAUGER Mauricette, lycée Romain-Rolland, rue L.-Nadaïre, 94200 Ivry.

DIJON :

Courrier : M. GOUTHIERE Gérard, 98, avenue Victor-Hugo, 21000 Dijon.
 Trésorier : M. MALIK Richard, 2, rue Arthur-Chaudouet, 21000 Dijon.
 Correspondant technique : M. CIRoux Bernard, 10, rue des Tonneliers, 71100 Chalon-sur-Saône.
 Correspondant collègue : M. MALIK Richard, 2, rue Arthur-Chaudouet, 21000 Dijon.
 Correspondant informatique :
 Correspondant chimie : M. BREFORT Jean, 2, impasse Balzac-Neuilly, 21800 Quétigny.

GRENOBLE :

Courrier : M. PONCIN Jean-Claude, 22, chemin des Peupliers, 38240 Meylan.
 Trésorier : M. BIBOUD Daniel, 9, chemin des Marais, 38100 Grenoble.
 Correspondant technique : Mme AITKEN Geneviève, 30, rue du Moucherotte-Poizat, 38320 Eybens.
 Correspondant collègue : Mme GOUBE Anne, 42, rue Saint-Robert, 38120 Saint-Egrève.
 Correspondant informatique : M. FOUCHIER, La Côte des Argonnes, Brie-en-Argonnes, 38320 Eybens.
 Correspondant chimie :

LILLE :

Courrier : M. GALLIN-MARTEL Gilles, 54, rue des Mouettes, 59770 Marly.
 Trésorier : M. CARIN Gabriel, 32, rue Nungesser, 59155 Fâches-Thumesnil.
 Correspondant technique : M. ZAMAGNA Serge, 630, avenue de la République, 59000 Lille.
 Correspondant collègue : M. TAVERNE, 27, rue Albert-Leroy, 59193 Erquinghem-Lys.
 Correspondant informatique : M. DROMBY Jean-Claude, 9, rue des Agaches, 62000 Arras.
 Correspondant chimie : M. SLIWA, université des sciences et techniques, Bât. C2, 59650 Villeneuve-d'Ascq.

LIMOGES :

Courrier : M. METROT Michel, 116, rue V.-Thuillat, 87000 Limoges.
 Trésorier : M. ROGUES Gérard, 13, rue du Pérou, 87570 Rilhac Rancon.
 Correspondant technique : Mme PLATON Monique, Bât. B 2, avenue du Général-Leclerc, 87100 Limoges.
 Correspondant collègue : M. CONSTANT Hubert, La Bocadie, 87790 Saint-Priest-sous-Aixe.
 Correspondant informatique : M. MIGNON André, lycée Raoul-Dautry, 14, rue du Puy-Imbert, 87036 Limoges Cedex.
 Correspondant chimie : M. ROCHE Maurice, lycée Gay-Lussac, 87 Limoges.

LYON :

Courrier : M. RUHLA Charles, Institut de Physique nucléaire - Université Claude-Bernard, 43, boulevard du 11-Novembre, 69621 Villeurbanne.
 Trésorier : M. MANGOLD, Lycée du Parc, 1, bd A.-France, 69458 Lyon Cedex.
 Correspondant technique : M. ZAYGEL Jean-Paul, 43, Cours Général-Giraud, 69283 Lyon Cedex.
 Correspondant collègue : Mme BODET, collège Olivier-de-Serres.
 Correspondant informatique : M. CARRETIER Jean-Luc, lycée Ampère-Saxe, 149, avenue de Saxe, 69003 Lyon.
 Correspondant chimie : Mme GUIGNARD Danielle, lycée La Martinière-Montplaisir, 41, rue Antoine-Lumière, 69008 Lyon.

MONTPELLIER :

Courrier : Mme GRIMAUD Huguette, lycée Mermoz, avenue J.-Mermoz, 34060 Montpellier Cedex.
 Trésorier : M. SZABO Robert, lycée Joffre, allée de la Citadelle, 34060 Montpellier Cedex.
 Correspondant technique : M. GODARD Yves, lycée Mermoz, avenue J.-Mermoz, 34060 Montpellier Cedex.
 Correspondant collègue : Mme MOURAILLE Marie-Thérèse, Collège Las Cazes, 34000 Montpellier.
 Correspondant informatique : M. FAVAND Jean-Paul, lycée Joffre, allée de la Citadelle, 34060 Montpellier Cedex.
 Correspondant chimie : M. DURANT Michel, lycée Paul-Valéry, 34200 Sète.

NANCY - METZ :

Courrier : M. MORISSET Roland, 23, rue des Munières, 54690 Lay-Saint-Christophe.
 Trésorier : M. CUNY Bernard, 106, rue Léonard-Bourcier, 54000 Nancy.
 Correspondant technique : M. CLAUDON, 3, rue de Faymont, Pulnoy, 54420 Saulxures les Nancy.
 Correspondant collègue : Mme BARRAS, 30, av. de la 40e Division, 55300 Saint-Mihiel.
 Correspondant informatique : Mme SCHWOB Monique, 24, rue Léon-Barillot, 57158 Montigny-les-Metz.
 Correspondant chimie : M. ALEXANDRE Serge, 20, rue de La Foucotte, 54000 Nancy.

NANTES :

Courrier : Mme FAUCONNET Marie-Jo, 63, rue de Pressensé, 44000 Nantes.
 Trésorier : Mme PATAILLLOT Jane, 68, avenue Pasteur, 49000 Angers.
 Correspondant technique : Mme LE GOFF Michèle, 27, avenue de la Praudière, 44700 Orvault.
 Correspondant collègue : M. DEJENNE Jean-Jacques, 13, bd du Val de la Chezine, 44800 Saint-Herblain.
 Correspondant informatique :
 Correspondant chimie : Mme FAUCONNET Marie-Jo, 63, rue de Pressensé, 44000 Nantes.

NICE - TOULON :

Courrier : M. GRILLET Alain, 5, quai Saturnin-Fabre, 83500 La Seyne-sur-Mer.
 Trésorier : Mme PADOVANI Jacqueline, avenue Winston-Churchill, 83000 Toulon.
 Correspondant technique
 Correspondant 1er cycle :
 Correspondant informatique : M. ORSINI Vincent, 172, rue Berliuc-Perrussié, 83000 Toulon.
 Correspondant chimie : Mme PERROT M.-T., Villa La Farandole, avenue Lieutaud-la-Mitre, 83000 Toulon.

ORLEANS - TOURS :

Courrier : M. BERTHOMMIER Jean-Claude, 8, allée du Parc Saint-Laurent, 45000 Orléans.
 Trésorier : M. COSSON André, 26, rue Barillet-Deschamps, 37000 Tours.
 Correspondant technique : M. MOMMEJA Jean-Claude, 20, rue du Chemin-Vert, 37300 Joué-lès-Tours.
 Correspondant collègue : M. CASTIGLIONI Bernard, 26, rue Châteaubriand, 45000 Orléans.
 Correspondant informatique : M. JOUANNETAUD Bernard, lycée J.-Zay, 2, rue Ferdinand-Buisson, 45044 Orléans Cedex.
 Correspondant chimie : Mme DEMOLLIENS Marie-Thérèse, lycée Jacques-Cœur, 108, rue Jean-Baffier, 18000 Bourges.

PARIS :

Courrier : M. FLEURY Philippe, 64-70, rue des Chantiers, 78000 Versailles.
 Trésorier : M. CHAMEROY Jean-Claude, 34, rue Marcheron, 92172 Vanves.
 Correspondant technique : M. FROMONT J.-O., 82, rue Pixérécourt, 75019 Paris.
 Correspondant collègue : Mme AMER MOUSSA Sylvette, 88 ter, rue Michel-Ange, 75016 Paris.
 Correspondant informatique : M. FILIPPI Francis, 137, rue des Pyrénées, 75020 Paris.
 Correspondant chimie : M. FOULON J.-Pierre, 45, rue Wauthier, 78100 Saint-Germain-en-Laye.

POITIERS :

Courrier : Mme BLANCHARD Francine, Les Coudreaux-Smarves, 86240 Ligugé.
 Trésorier : M. GOMBAUD Christiane, 19, avenue Maurice-Garçon, 86240 Ligugé.
 Correspondant technique : Mme ARNAUD Françoise, 32, Résidence des Rois, 86000 Poitiers.
 Correspondant collègue : Mme MICHAUD M.-Pierre, Les Sachères, 86800 Mignéfolx-Beauvoir.
 Correspondant informatique : M. SALLAT Guy, lycée Victor-Hugo, 10, rue Victor-Hugo, 86034 Poitiers.
 Correspondant chimie : Mme BLANCHARD Francine, lycée C.-Guérin, rue de la Gibauderie, 86022 Poitiers.

REIMS :

Courrier : Mme HERMAN-MAURICE Nicole, 18, rue de Taissy, 51100 Reims.
 Trésorier : Mlle SAINGERY Françoise, 13, rue Labori, 51100 Reims.
 Correspondant technique : Mme BILLOU Ch., 5, rue Saint-Martin, Semiers, 51500 Rilly-La-Montagne.
 Correspondant collègue : M. DEQUIN Jacques, 14, rue des Rouges-Gorges, 51000 Châlons-sur-Marne.
 Correspondant informatique : M. CAUSSIL Jean-Pierre, L. T. Libergier, 70, rue Sillery, 51100 Reims.
 Correspondant chimie : M. LEPICIER Luc, lycée Libergier, rue Libergier, 51100 Reims.

RENNES :

Courrier : M. ETIENNE Michel, 91, allée des Tulipes, Domaine du Landry, 35000 Rennes.
 Trésorier : M. BEAUMONT Guy, 37, impasse Hyacinthe-Lorette, 35400 Saint-Malo.
 Correspondant technique : M. LE VERN Pierre, Lycée techn. Chaptal, 35, chemin des Justices, 29191 Quimper.
 Correspondant informatique : M. PHILIPPE Jacques, 10, rue Alain-Fournier, 56300 Pontivy.
 Correspondant chimie :

ROUEN :

Courrier : M. LEVELUT Michel, 23, rue de la Hêtrée, 76420 Bihorel.
 Trésorier : Mlle BOIVIN Catherine, 14, Résidence du Vallon-Saint-Hilaire, rue de la Petite-Porte, 76000 Rouen.
 Correspondant technique : Mme BEHAR Aline, 31, rue de Velten, Les Essarts, 76530 Grand-Couronne.
 Correspondant collègue : Mme OLIVIER Françoise, 7, square Maurice-Vaumousse, 76240 Mesnil-Elnard.
 Correspondant informatique : Mme LECOQ Catherine, 3, rue de Fontenelle, 76250 Deville-les-Rouen.
 Correspondant chimie : M. LEBOURG Alain, rue Lenormand, 76360 Balentin.

STRASBOURG :

Courrier : M. THIVENT J.-F., 15, rue Victor-Schoelcher, 67300 Schiltigheim.
 Trésorier : Mlle MALLARD Marie-Anne, 58, route des Romains, 67200 Strasbourg.
 Correspondant technique : M. MARANGÉ Claude, 8, rue du Canal, 67400 Illkirch.
 Correspondant collègue : M. GOERIG Bernard, 14, rue Principale, 67300 Schiltigheim.
 Correspondant informatique : M. BOSSERT François, 7, rue des Anémones, 67480 Reichstett.
 Correspondant chimie : M. DELUZARCHE Michel, lycée Kléber, 25, place de Bordeaux, 67000 Strasbourg.

TOULOUSE :

Courrier et Trésorier : Mme GRANDCAMP Michelle, Le Clos, Bât. 3, 19, Chemin des Maraichers, 31400 Toulouse.
 Correspondant technique : M. VALLAT, 5, rue P.-Bonnard, 81000 Albi.
 Correspondant collègue : M. POUSSE, E.N.I., 58, avenue de l'U.R.S.S., 31078 Toulouse Cedex.
 Correspondant informatique : M. BOUYSSSET Claude, 18, rue Auguste-Renoir, 31320 Castanet-Tolosan.
 Correspondant chimie : Mme GALIAN Mireille, L. T. Déodat-de-Séverac, 26, bd Déodat-de-Séverac, 31076 Toulouse Cedex.

Sous-section de TARBES :

Courrier : M. ADOUE Jean, 5, rue Voltaire, 65000 Tarbes (assurance seul le fonctionnement).

VERSAILLES :

Courrier : M. LAPASSAT Gérard, Lycée Mansart, av. V.-Sardou, 78210 Saint-Cyr-l'École.
 Trésorier : Mme RINGARD Annie, Lycée F.-Sarcey, 91410 Dourdan.
 Correspondant premier cycle : M. LAPASSAT Gérard, Lycée Mansart, av. V.-Sardou, 78210 Saint-Cyr-l'École.
 Correspondant technique : M. LAPASSAT Gérard, Lycée Mansart, av. V.-Sardou, 78210 Saint-Cyr-l'École.
 Correspondant informatique : M. LAPASSAT Gérard, Lycée Mansart, av. V.-Sardou, 78210 Saint-Cyr-l'École.
 Correspondant chimie : Mme SONNEVILLE Madeleine, Lycée Lakanal, 92330 Sceaux.