Agrégation
(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE
Épreuve C : Problème de physique - Session : 1992

par Claude DELALANDE
Université Pierre et Marie Curie

I. PREMIÈRE PARTIE

NIVEAUX D'ÉNERGIE D'UN GAZ BIDIMENSIONNEL OU QUASI BIDIMENSIONNEL

I.A. Gaz parfaitement dimensionnel.

I.A.1. *a.* Pour $0 < x < L_x$, l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$-\frac{h^2}{2\,m}\,\frac{d^2}{dx^2}\,\chi_{n_x}(x) = E_{n_x}\,\chi_{n_x}$$

d'où la solution générale :

$$\chi_{n_x} = A\,\sin\left[\sqrt{\frac{2\,m\,E_{n_x}}{h^2}}\,x + \varphi\right]$$

avec les conditions aux limites :

$$\chi_{n_x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$$

et $$\chi_{n_x}(L_x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2\,m\,E_{n_x}}{h^2}}\,L_x = n_x\,\pi \qquad n_x \in N$$

On en déduit les valeurs quantifiées des énergies :

$$E_{n_x} = n_x^2\,\frac{h^2}{2\,m}\,\frac{\pi^2}{L_x^2}$$

b. De même :

$$\chi_{n_y} = A\,\sin\sqrt{\frac{2\,m\,E_{n_y}}{h^2}} \qquad \text{et} \qquad E_{n_y} = n_y^2\,\frac{h^2}{2\,m}\,\frac{\pi^2}{L_y^2} \qquad n_y \in N$$

c. L'énergie totale E_n a pour valeur :

$$\boxed{E_n = E_{n_x} + E_{n_y} = \frac{\pi^2\,h^2}{2\,m}\left(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right)}$$

I.A.2. *a.* Le vecteur d'onde $\vec{k}$ a ainsi pour expression :

$$\vec{k} = n_x \frac{\pi}{L} \vec{e_x} + n_y \frac{\pi}{L_y} \vec{e_y}$$

Dans l'espace des $\vec{k}$, les coordonnées du vecteur d'ondes forment un réseau de points de coordonnées $n_x \frac{\pi}{L_x}$, $n_y \frac{\pi}{L_y}$.

b. On a ainsi : $\Delta k_x = \frac{\pi}{L_x}$, $\Delta k_y = \frac{\pi}{L_y}$

de sorte que un état occupe une aire $\frac{\pi^2}{L_x L_y}$ dans l'espace des $\vec{k}$. Le nombre $N(\mathscr{S})$ d'état quantiques correspondant à des vecteurs d'ondes dont l'extrémité est dans $\mathscr{S}$ est :

$$N(\mathscr{S}) = \frac{\mathscr{S}}{\pi^2} L_x L_y$$

I.A.3. *a.* $E = \frac{h^2 k^2}{2 m}$ et le domaine de l'espace des $\vec{k}$ correspondant à des états d'énergie inférieure à une valeur nominale E est un quart de disque de centre O et de rayon :

$$k = \sqrt{\frac{2 m E}{h^2}}$$

b.

$$\mathscr{S}(E) = \frac{1}{4} \pi K^2 = \frac{1}{4} \pi \frac{2 m E}{h^2}$$

d'où :

$$N(E) = \frac{\mathscr{S}(E)}{\pi^2} S = \frac{S}{4 \pi} \frac{2 m E}{h^2}$$

La densité quantique d'états $\rho(E)$ est telle que :

$$\rho(E)\, dE = N(E + dE) - N(E) = \frac{dN}{dE} dE$$

d'où :
$$\begin{cases} \rho(E) = \frac{dN(E)}{dE} = \frac{mS}{2 \pi h^2} & \text{si } E > 0 \\ \rho(E) = 0 & \text{si } E < 0 \end{cases}$$

c. Pour $\Delta E = k_B T$: $\Delta N \approx 1{,}25\ 10^7$ états. L'approximation est donc valable.

I.A.4. *a.* $\exp i k_x (x + L_x) = \exp i k_x x$

d'où : $k_x = \frac{2 \pi}{L_x} n_x$ et $k_y = \frac{2 \pi}{L_y} n_y$ avec ces conditions aux limites périodiques.

b. Ainsi, avec ces conditions aux limites les valeurs possibles de k_x et de k_y sont 2 fois plus espacées dans les 2 directions qu'avec les conditions aux limites données en I.A.1.*a*. Donc $N(\mathscr{S}) = \frac{\mathscr{S}}{4 \pi^2} L_x L_y \left(\text{facteur } \frac{1}{4} \right)$.

Mais ici k_x et k_y peuvent être négatifs, donc N (E) correspond à l'aire du disque entier

$\mathcal{S} = \pi \dfrac{2\,m\,E}{\hbar^2}$ d'où un facteur 4 de sorte que N (E) et ρ (E) gardent évidemment la même valeur.

I.A.5. Si on tient compte de la variable de spin de l'électron :

$$\begin{cases} \rho_S = 2\,\rho\,(E) = \dfrac{mS}{\hbar^2} & \text{si } E > 0 \\ \rho_S\,(E) = 0 & \text{si } E < 0 \end{cases}$$

puisqu'il y a 2 états quantiques de spin.

I.B. **Gaz quasi-bidimensionnel.**

I.B.1. *a.* $-\dfrac{\hbar^2}{2\,m}\dfrac{d^2}{dz^2}\,\chi_n\,(z) = E_n\,\chi_n\,(z)$

ou encore : $\dfrac{d^2}{dz^2}\,\chi_n\,(z) + k_z^2\,\chi_n\,(z) = 0$

d'où : $\chi_n\,(z) = a\,\exp\,(i\,k_x\,z) + b\,\exp\,(-\,i\,k_x\,z)$

Si on retient une solution <u>paire</u> :

$$\chi_n\,(z) = A\,\cos\,k_x\,z$$

et avec les condition limites :

$$\chi_n\left(\pm\frac{L}{2}\right) = 0$$

d'où : $k_n = \dfrac{\pi}{L}\,(2\,n + 1)$ n entier

et : $E_n = \dfrac{\hbar^2}{2\,m} \cdot \dfrac{\pi^2}{L^2}\,(2\,n + 1)^2$

b. Pour une solution <u>impaire</u> :

$$\chi_n\,(z) = A\,\sin\,k_x\,z$$

avec : $\chi_n\left(\pm\dfrac{L}{2}\right) = 0$

d'où : $k_n = \dfrac{\pi}{L}\,2\,n$ n entier

et : $E_n = \dfrac{\hbar^2}{2\,m} \cdot \dfrac{\pi^2}{L^2}\,(2\,n)^2$

c. Le spectre d'énergie est de la forme :

$E_n = \dfrac{\hbar^2}{2\,m} \cdot \dfrac{\pi^2}{L^2}\,n'^2$ avec : $\begin{cases} \text{état pair} : n' = 2\,n + 1 \\ \text{état impair} : n' = 2\,n \end{cases}$

Ce spectre est identique à celui de la question I.A.1.*a*.

d. L'énergie E_0 de l'état fondamental du mouvement selon zz' a ainsi pour valeur :

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{\pi^2}{L^2}$$

et celle E_1 du 1er état excité :

$$E_1 = 4\,E_0$$

Avec les données numériques (L = 100 Å)

$$E_0 = 53{,}4 \text{ meV} \quad \text{et} \quad E_1 = 213{,}5 \text{ meV}$$

$$E_1 - E_0 = 160 \text{ meV} >> k_B\,T = 8{,}6.10^{-2} \text{ meV} \qquad (\text{à } 1 \text{ K})$$

e. On en déduit le graphe en escalier (Figure 1) donnant la fonction $\rho_S\,(E)$

$$\rho_S\,(E) = 0 \qquad \text{si} \quad E < E_0$$

$$\rho_S\,(E) = \frac{m\,S}{\pi\,\hbar^2} \qquad \text{si} \quad E_0 < E < E_1$$

$$\rho_S\,(E) = \frac{2\,m\,S}{\pi\,\hbar^2} \qquad \text{si} \quad E_1 < E < E_2 \qquad \text{etc}$$

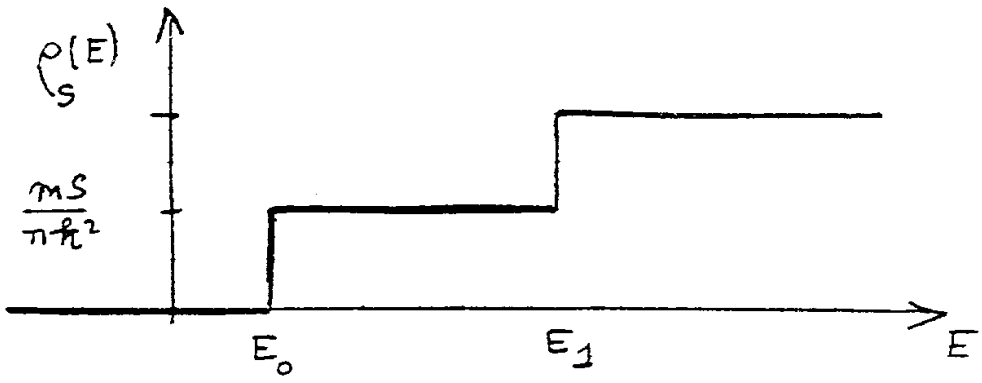


Figure 1

I.B.2. *a.*

- Si $|z| < \frac{L}{2}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{d^2}{dz^2}\,\chi\,(z) = \frac{\hbar^2}{2\,m}\,k_z^2\,\chi\,(z) \;\Rightarrow\; \chi\,(z) = a\,\exp\,(i\,k_z\,z) + b\,\exp\,(-\,i\,k_z\,z)$$

- Si $|z| > \frac{L}{2}$

$$-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{d^2}{dz^2}\,\chi\,(z) = \kappa^2\,\chi\,(z) \qquad \text{avec} \qquad \kappa^2 = \frac{2\,m}{\hbar^2}\,(V_0 - E_z)$$

d'où : $z > \frac{L}{2} : \chi\,(z) = c\,\exp\,\kappa\,z + + c'\,\exp\,(-\,\kappa\,z)$

$$z < -\frac{L}{2} : \chi\,(z) = d\,\exp\,\kappa\,z + + d'\,\exp\,(-\,\kappa\,z)$$

b. On cherche les solutions paires.

- $|z| < \frac{L}{2}$: a = b $\qquad \chi(z) = A \cos k_z z$.

- $|z| > \frac{L}{2}$: d' = c = 0 $\qquad$ car $\chi(z)$ ne peut diverger à l'infini et c = d' (solution paire)

d'où : $\begin{cases} \chi(z) = c' \exp(-\kappa z) & \text{si } z > \frac{L}{2} \\ \chi(z) = c' \exp(\kappa z) & \text{si } z < -\frac{L}{2} \end{cases}$

On écrit la continuité de $\chi(z)$ et de la dérivée $d\chi(z)/dz$ pour $z = \frac{L}{2}$, soit :

$$\begin{cases} A \cos k_z \frac{L}{2} = c' \exp\left(-\kappa \frac{L}{2}\right) \\ -A k_z \sin k_z \frac{L}{2} = c' \kappa \exp\left(-\kappa \frac{L}{2}\right) \end{cases}$$

(nécessairement vérifiées en $z = -\frac{L}{2}$ par symétrie)

d'où la relation demandée : $k_z \operatorname{tg}\left(k_z \frac{L}{2}\right) = \kappa \qquad (5)$

c. Pour les solutions impaires :

$$\begin{cases} \chi(z) = A \sin k_z z & |z| < \frac{L}{2} \\ \chi(z) = B \exp(-\kappa z) & z > \frac{L}{2} \\ \chi(z) = -B \exp(\kappa z) & z < -\frac{L}{2} \end{cases}$$

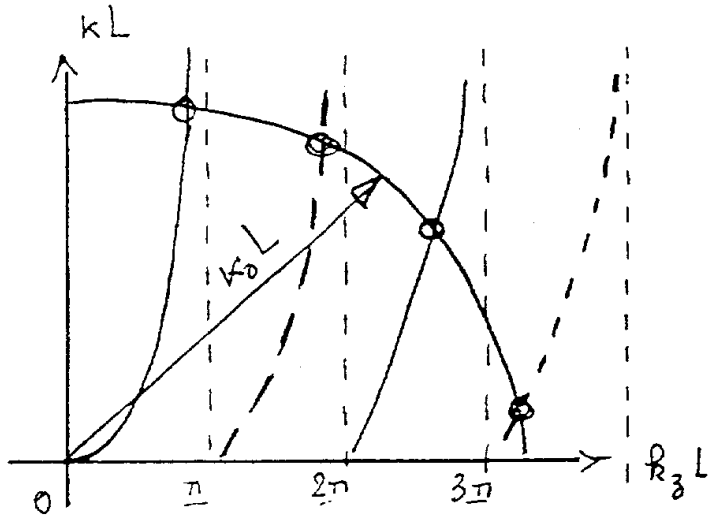
Continuités :

$$\begin{cases} A \sin k_z \frac{L}{2} = B \exp\left(-\kappa \frac{L}{2}\right) \\ A k_z \cos k_z \frac{L}{2} = -B \kappa \exp\left(-\kappa \frac{L}{2}\right) \end{cases}$$

d'où : $\qquad k_z \operatorname{cotg}\left(k_z \frac{L}{2}\right) = -\kappa \qquad (6)$

d.

- Pour (5), κL devient ∞ pour $k_z \frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} + p\pi$.



Pour (6), κL devient ∞ pour $k_z \frac{L}{2} = p\,\pi$ (faute de figure de l'énoncé). D'après la définition de E, le point ($k_z L$, κL) est sur le cercle de centre O et de rayon $\kappa_0 L$. Les points satisfaisant à (5) ou (6) sont situés aux intersections du cercle et des courbes (Figure 2).

e. Si $\kappa_0 L < \pi$, il y a une unique intersection puis on trouve une intersection supplémentaire chaque fois que $\kappa_0 L$ grandit de π.

Donc : $$\mathcal{N}_{\text{lié}} = 1 + \text{partie entière}\left(\frac{\kappa_0 L}{\pi}\right)$$

Il y a toujours un état lié, même si κ_0 est petit car la courbe (5) passe par l'origine O.

f. Quand $V_0 \to \infty$, $\kappa_0 L \to \infty$ et les intersections tendent à se placer sur les asymptotes $k_z L = p\,\pi$ d'où pour ces points :

$$E = \frac{\hbar^2 k_z}{2\,m} = p^2 \frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{\pi^2}{L^2}$$

résultat identique à I.B.1.

g. $V_0 = 250$ meV donne $\kappa_0 L = 6{,}8$.

Sachant que le 1er état (fondamental) est tel que $k_z L < \pi$, on trouve rapidement : $k_z L \approx 2{,}4$, d'où :

$$E = \frac{\hbar^2}{2\,m} k_z^2 \approx 31 \text{ meV} \qquad (L = 100 \text{ Å})$$

II. **DEUXIÈME PARTIE**

STATISTIQUE D'UN GAZ D'ÉLECTRONS BIDIMENSIONNEL

II.A. **Gaz d'électrons seul.**

II.A.1. *a.* Quand $T \to 0$

si $E > \mu_c \Rightarrow f_T(E) = 0$

si $E < \mu_c \Rightarrow f_T(E) = 1$

b. On fait $h(E) = 1$

soit : $$N = S\,n = \int_0^{E_F} \rho_S(E)\, f_T(E)\, dE = \int_0^{E_F} \frac{m\,S}{\pi\hbar^2}\, dE$$

d'où : $E_F = n\,\frac{\pi\hbar^2}{m}$ énergie de Fermi.

c. Pour $n = 10^{12}$ cm^{-2}, on trouve $E_F = 33{,}9$ meV.

d. Il faut $E_F \ll k_B T$ soit $T \ll 400$ K. Pour $T < 100$ K, on peut considérer l'approximation du gaz complètement dégénéré comme satisfaisante.

II.A.2. *a.* On a :

$$N = n\,S = \int_0^{\infty} \frac{1}{\exp\dfrac{E-\mu_c}{k_B\,T}+1}\,\frac{m\,S}{\pi\hbar^2}\,dE = \frac{m\,S\,k_B\,T}{\pi\,h^2}\int_0^{\infty} \frac{\dfrac{1}{k_B\,T}\exp-\dfrac{E-\mu_c}{k_B\,T}}{1+\exp-\dfrac{E-\mu_c}{k_B\,T}}\,dE$$

d'où : $$n = \frac{m\,k_B\,T}{\pi\,h^2}\ln\left(1+\exp\frac{\mu_c}{k_B\,T}\right)$$

II.B. **Dosage surfacique d'impuretés.**

II.B.1. *a.* La densité surfacique l'électrons piégés n_P vaut :

$$n_P = \frac{1}{S}\sum_i f_P = \frac{n_D}{\dfrac{1}{2}\exp\dfrac{E_D-\mu_c}{k_B\,T}+1}$$

b. Par hypothèse : $n_D\,S = n_P\,S + n\,S$

car les électrons des donneurs sont soit sur les donneurs, soit ionisés, donc libres dans la bande de conduction. On en déduit facilement :

$$n_D = \frac{n_D}{\dfrac{1}{2}\exp\dfrac{E_D-\mu_c}{k_B\,T}+1} + \frac{m\,k_B\,T}{\pi\hbar^2}\ln\left(1+\exp\frac{\mu_c}{k_B\,T}\right)$$

II.B.2. *a.* Lorsque $T \to 0$: $f_T(E) \to 1$ si $E < \mu_c$ et $f_T(E) \to 0$ si $E > \mu_c$, donc : $n_P = n_D$ (niveaux fondamentaux) et $n = 0$.

b. La relation donnant n_D établie en II.B.1.*b.* peut aussi s'écrire :

$$\frac{n_D/2}{\dfrac{1}{2}\exp-\dfrac{E_D-\mu_c}{k_B\,T}+1} = \frac{m\,k_B\,T}{\pi\hbar^2}\ln\left(1+\exp\frac{\mu_c}{k_B\,T}\right)$$

Quand $T \to 0$: $E_D < \mu_c < 0$. En effet si $\mu_c > 0$, le premier membre de la relation précédente tendrait vers 0 alors que le second membre tendrait vers une valeur finie.

De même si $E_D - \mu_c > 0$, il y a incompatibilité, compte tenu de $\mu_c < 0$. Donc $E_D < \mu_c < 0$. De ces inégalités on déduit que :

$$\exp\frac{\mu_c}{k_B\,T} \to 0 \quad \text{et} \quad \ln\left(1+\exp\frac{\mu_c}{k_B\,T}\right) \approx \exp\frac{\mu_c}{k_B\,T}$$

ainsi que : $$\exp-\frac{E_D-\mu_c}{k_B\,T} >> \frac{1}{2}\ .$$

Le 1er membre est donc égal à : $\dfrac{n_D}{2}\exp\dfrac{E_D-\mu_c}{k_B\,T}$

d'où il résulte l'égalité :

$$\frac{n_D}{2} \exp \frac{E_D - \mu_c}{k_B T} \approx \frac{m k_B T}{\pi \hbar^2} \exp \frac{\mu_c}{k_B T}$$

Soit : $$\mu_c \approx \frac{E_D}{2} - \frac{k_B T}{2} \ln \frac{2 m k_B T}{\pi \hbar^2 n_D}$$

qui donne le développement asympotique de μ_c (T) en fonction de $k_B T$, ou encore :

$$\delta \mu_c (T) = \mu_c - \frac{E_D}{2} \approx - \frac{k_B T}{2} \ln \frac{2 m k_B T}{\pi \hbar^2 n_D}$$

II.B.3. *a.* Quand $T \to \infty$, chaque donneur donne effectivement un électron et $n \to n_D$, $n_P \to 0$.

b. L'expression de n_P obtenue en II.B.1.*a.* exige dans ces conditions que $\mu_c \to - \infty$, et :

$$n \approx n_D = \frac{m k_B T}{\pi \hbar^2} \ln \left(1 + \exp \frac{\mu_c}{k_B T} \right)$$

d'où : $$\mu_c = k_B T \ln \left(\exp \frac{n_D \pi h^2}{m k_B T} - 1 \right)$$

soit : $$\mu_c \approx k_B T \ln \frac{n_D \pi \hbar^2}{m k_B T}$$

expression où l'on vérifie à nouveau que $\mu_c \to - \infty$ quand $T \to \infty$.

III. **TROISIÈME PARTIE**

MODULATION DE DOPAGE ET CONTRÔLE DE LA DENSITÉ SURFACIQUE D'ÉLECTRONS

III.A.

III.A.1. *a.* φ (z) vérifie l'équation de Poisson :

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = - \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = - \frac{\nu_D e}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

là où les donneurs sont ionisés.

b. Compte tenu des conditions aux limites :

$$\varphi (z) = - \frac{\nu_D e}{2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} (z + d_0)^2 + \frac{\nu_0}{e}$$

III.A.2. *a.* Avec $\varphi (0) = 0$, on trouve : $d_0 = \sqrt{\frac{2 \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\nu_D} \cdot \frac{V_0}{e}}$.

b. La condition de passage du champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$ en z = 0, donne :

$$\mathcal{E} (0^+) - \mathcal{E} (0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = - \frac{n e}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \qquad \text{avec} \quad \mathcal{E} (0^+) = 0,$$

d'où : $$\mathcal{E}(0^-) = \frac{n\,e}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}\ .$$

Comme $\mathcal{E}(z) = -\frac{d\varphi}{dz}$: $\mathcal{E}(0^-) = \frac{\nu_D\,e}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}\,d_0$ (en utilisant l'expression de $\varphi(z)$). On en déduit :

$$n = \sqrt{\frac{2\,\nu_D\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,V_0}{e^2}} = n_0$$

On vérifie que $\nu_D\,d_0 = n$, ce qui assure la neutralité électrique.

c. Avec : $\nu_D = 10^{17}\ cm^{-3}$, $V_0 = 250$ meV, $\varepsilon_r = 12$: $d_0 = 576$ Å et $n = 5{,}76\ .\ 10^{11}$ eV (se servir de $\frac{V_0}{e}$ exprimé en eV).

III.B. **Contrôle de n par grille Schottky.**

III.B.1. Le calcul est identique au précédent en remplaçant V_0 par $V_S - e\,\varphi_G$, d'où :

$$d_S = \sqrt{\frac{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r}{\nu_D\,e}\ .\ (V_S - \varphi_G)} = d_0\,\sqrt{\frac{V_S - e\,\varphi_G}{V_0}}$$

Avec : $\varphi_C = 0{,}2$ V et $V_S = 300$ meV : $d_S = 364$ Å.

III.B.2. *a.* Entre $z = -l$ et $z = 0$, les donneurs sont ionisés donc :

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{\nu_D\,e}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r} \quad \Rightarrow \quad \varphi(z) = -\frac{\nu_D\,e}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}\,\frac{z^2}{2} + az + b$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \varphi(-l) = -\frac{V_S}{e} + \varphi_G = \varphi_G - \varphi_S \\ \varphi(0) = -\frac{V_0}{e} = -\varphi_0 \end{cases}$$

d'où : $$\varphi_G - \varphi_S = -\frac{\nu_D\,e}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}\,\frac{l^2}{e} - al - \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad -al = \varphi_G - \varphi_S + \varphi_0 + \varphi_l \quad \text{où} \quad \varphi_l = \frac{l^2\,e\,\nu_D}{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r}$$

En outre : $$\mathcal{E}(z = 0^-) = -\frac{d\varphi}{dz}(z = 0^-) = -a$$

et : $$\mathcal{E}(z = 0^-) = \frac{n\,e}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}$$

d'où l'on déduit : $$n = \frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}{e\,l}\left(\varphi_G + \varphi_l + \varphi_0 - \varphi_S\right)$$

Exprimons n en fonction de n_0 , φ_G , φ_l , φ_0 , φ_S .

On a : $$l = \sqrt{\frac{2\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\varphi_l}{e\,\nu_D}}$$

d'où : $$\frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}{e\,l} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\nu_D}{2\,e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi_l}} = \frac{n_0}{2\sqrt{\varphi_0\,\varphi_l}}$$

d'où :

$$n = \frac{n_0}{2\sqrt{\varphi_0\,\varphi_l}}\left(\varphi_G + \varphi_l + \varphi_0 - \varphi_S\right)$$

n décroît quand φ_G décroît.

b. n commence à décroître quand $n = n_0$ d'où :

$$\varphi_{GC} = \varphi_S - \varphi_0 - \varphi_l + 2\sqrt{\varphi_0\,\varphi_l}$$

(on peut vérifier qu'alors $d_S + d_0 = l$).

n devient nul quand : $\varphi_G = \varphi_{G0} = \varphi_S - \varphi_0 - \varphi_l$

c. $l = 1000$ Å, $V_0 = 250$ meV, $V_S = 300$ meV, $\nu_D = 10^{17}$ cm^{-3}, $\varepsilon_r = 12$

on trouve : $\varphi_{G0} = -0{,}70$ V et $\varphi_{GC} = -0{,}70 + 0{,}86 = 0{,}16$ V

IV. **QUATRIÈME PARTIE**

TRANSISTOR À EFFET DE CHAMP À HÉTÉROJONCTION

IV.A.

IV.A.1. *a.* La densité de courant surfacique a pour expression :

$$j_x(x) = n(x)\,(-e)\,(-\mu\,F(x)) = n(x)\,e\,\mu\,F(x)$$

où F (x) est le champ électrique créé par la tension φ_D.

On en déduit : $I = -\,n(x)\,a\,e\,F(x)$ pour l'intensité surfacique.

b. On a : $n(x) = \frac{n_0}{\varphi_l}\left[\varphi_l - \varphi(x)\right]$ et $F(x) = -\frac{d\varphi}{dx}$

d'où : $$I = \frac{n_0\,a\,e\,\mu}{\varphi_l}\left[\varphi_l - \varphi_{(x)}\right]\frac{d\varphi}{dx}\ .$$

c. On intègre la relation précédente qui est à variables séparées :

$$I\,[x]_0^b = n_0\,a\,e\,\mu\left[\varphi(x) - \frac{\varphi^2(x)}{2\,\varphi_l}\right]_0^{\varphi_D}$$

d'où : $$I = \frac{n_0\,a\,e\,\mu}{b}\left(\varphi_D - \frac{\varphi_D^2}{2\,\varphi_l}\right)$$

d. La conductance dynamique $G(\varphi_D)$ a pour valeur :

$$G(\varphi_D) = \frac{d\, I(\varphi_D)}{d\, \varphi_D} \qquad \text{pour } \varphi_G = 0$$

$$= \frac{n_0\, a\, e\, \mu}{b}\left(1 - \frac{\varphi_D}{\varphi_l}\right)$$

- pour $\varphi_D = 0$ $\qquad G = \dfrac{n_0\, a\, e\, \mu}{b}$

  pour $\varphi_D = \varphi_l$ $\qquad G = 0$

e. La figure 3 représente le graphe $I(\varphi_D)$ à $\varphi_G = 0$ pour $0 \le \varphi_D \le \varphi_l$.

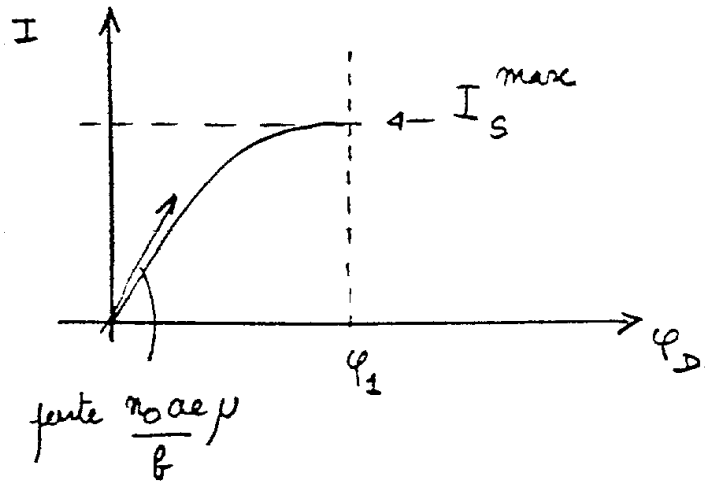


Figure 3

L'intensité est maximale pour $\varphi_D = \varphi_l$ et sa valeur est :

$$I_{S\,max} = \frac{n_0\, a\, e\, \mu}{2\, b}\, \varphi_l$$

IV.A.2. *a.* On a : $\qquad I_x = n_0\, a\, e\, \mu \left[\varphi(x) - \dfrac{\varphi^2(x)}{2\, \varphi_l}\right]$

ou : $\qquad \varphi^2 - 2\, \varphi_l\, \varphi + \dfrac{2\, I_x\, \varphi_l}{n_0\, a\, e\, \mu} = 0$

avec : $\qquad \left(\varphi_D = \varphi_l,\ \varphi_G = 0\right) \qquad I = I_{S\,max} = \dfrac{n_0\, a\, e\, \mu}{2\, b}\, \varphi_l$

d'où : $\qquad \varphi(x) = \varphi_l \left[1 - \sqrt{1 - \dfrac{x}{b}}\right]$

d'où le graphe de $\varphi(x)$ (figure 4) :

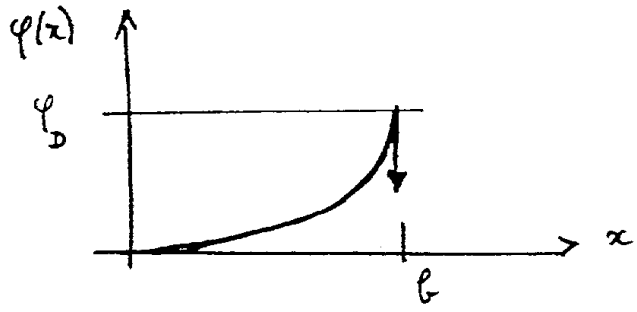


Figure 4

$\varphi(x) = 0$ pour $x = 0$

$\varphi(x) = \varphi_D$ pour $x = b$

b.

$$n(x) = \frac{n_0}{\varphi_l}\left[\varphi_l - \varphi(x)\right] = n_0\sqrt{1 - \frac{x}{b}}$$

dont le graphe est représenté sur la figure 5, n (x) s'annule en x = b.

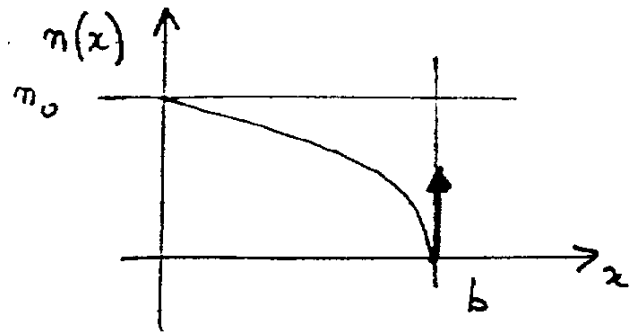


Figure 5

c. n (b) = 0 et $|F(b)| \to \infty$ quand $x \to b$. En fait, le produit n F reste contant et $n \to 0$ si $|F| \to \infty$. On «pince» le canal en x = b c'est-à-dire lorsque $\varphi_D = \varphi$. D'où l'expression de «tension de pincement» pour $\varphi_l = \varphi_D$ (à $\varphi_G = 0$).

d.
On a vu en IV.A.1.*e.* que pour $\varphi_l = \varphi_D$ (à $\varphi_G = 0$), $I = I_{S\,max} = \dfrac{n_0\, a\, e\, \mu}{2\, b}\,\varphi_l$.

IV.A.3. *a.* Si $\varphi_D > \varphi_l$, il y a saturation ave $I = I_{S\,max}$. Si φ_D devient trop grand, on déclenche un phénomène d'avalanche, l'intensité I augmentant brusquement soit réversiblement, soit irréversiblement, détruisant le composant dans ce dernier cas...

b.
$n_0 = 10^{12}$ cm^{-2}, $\varphi_l = 1$ V, $a = 100$ µm, $b = 1$ µm, $\mu = 8000$ cm^2 . V^{-1} . s^{-1} :
$I_{S\,max} = 64$ mA.

IV.B.

IV.B.1. *a.* On suppose ici $-\varphi_l \le \varphi_G \le 0$ pour la tension de grille φ_G. On reprend les calculs précédents en remplaçant simplement φ_l par $\varphi_l + \varphi_G$. Ainsi :

$$n(x) = \frac{n_0}{\varphi_l}\left[\varphi_G - \varphi(x) + \varphi_l\right]$$

d'où : $I = \dfrac{n_0\, a\, e\, \mu}{b\, \varphi_l}\left[(\varphi_l + \varphi_G)\,\varphi_D - \dfrac{\varphi_D^2}{2}\right]$ si $\varphi_D < \varphi_G + \varphi_l$

b. $\dfrac{\partial I}{\partial \varphi_D} = 0$ à $\varphi_G = \text{Cte}$ lorsque $\varphi_D = \varphi_G + \varphi_l \Rightarrow \varphi_P(\varphi_G) = \varphi_G + \varphi_l$.

c. $I_S(\varphi_G) = \dfrac{n_0\, a\, e\, \mu}{b\, \varphi_l}\,\dfrac{(\varphi_G + \varphi_l)^2}{2} = I_{S\,max}\left(1 + \dfrac{\varphi_G}{\varphi_l}\right)^2$.

IV.B.2. *a.* La figure 6 donne l'allure de réseau de caractéristiques. On notera que $I_S(\varphi_G) \le I_{S\,max}$ puisque $\varphi_G \le 0$. Le cas limite $\varphi_G = -\varphi_l$ est sans intérêt ($I_S = 0$).

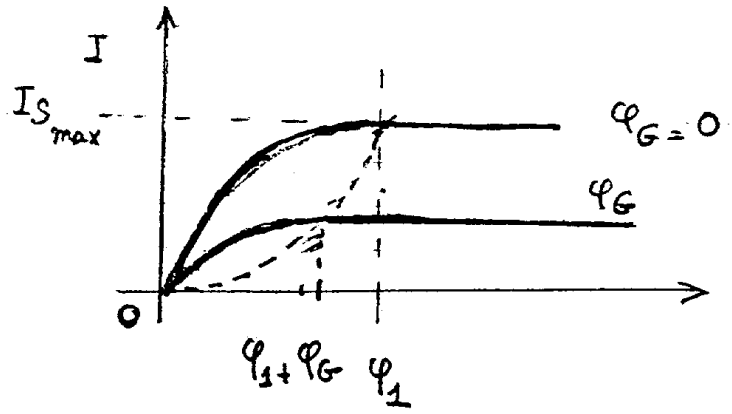


Figure 6

b. On a $I_S(\varphi_G) = I_{S\,max}\left(1 + \dfrac{\varphi_G}{\varphi_l}\right)^2$ d'où la valeur de la transconductance :

$$g(\varphi_G) = \frac{dI(\varphi_G)}{d\,\varphi_G} = 2\, I_{S\,max}\,\frac{\varphi_l + \varphi_G}{\varphi_l^2}\ .$$

c. Avec : $\varphi_l = 1$ V, $\varphi_G = -\dfrac{\varphi_l}{4}$ et $I_{S\,max} = 64$ mA : $g(\varphi_G) = 0{,}096\ \Omega^{-1}$

IV.C.

IV.C.1. On a : I = 36 mA, $\varphi_G - \varphi_S = -R_S\, I = -0{,}25$ V

d'où : $R_S = 6{,}9\ \Omega$

Également : $\varphi_{DS} = \Phi - (R_D + R_S)\, I = 2$ V

d'où : $R_D + R_S = 8/0{,}036 = 222\ \Omega$

$R_D = 215\ \Omega$ environ.

IV.C.2. *a.* $\delta I = g\,\delta(\varphi_G - \varphi_S)$

et : $\delta(\varphi_G - \varphi_S) = \delta\varphi_G - \delta\varphi_S = \delta\varphi_1 - Z_S\,\delta I$

avec : $$\frac{1}{Z_S} = \frac{1}{R_S} + j\, C_S\, \omega$$

d'où : $$\delta I \left(\frac{1}{g} + Z_S \right) = \delta \varphi_1$$

D'autre part : $\varphi_2 = \Phi - R_D\, I \quad \Rightarrow \quad \delta \varphi_2 = - R_D\, \delta I$

d'où : $$\frac{\delta \varphi_2}{\delta \varphi_1} = - \frac{R_D\, g}{1 + g\, Z_S} \ .$$

b. $$\left| \frac{\partial \varphi_2}{\delta \varphi_1} \right|^2 = R_D^2\, g^2 \left| \frac{\frac{1}{R_S} + j\, C_S\, \omega}{\frac{1}{R_S} + g + j\, C_S\, \omega} \right|^2 = R_D^2\, g^2\, \frac{1 + R_S^2\, C_S^2\, \omega^2}{(1 + g\, R_S)^2 + R_S^2\, C_S^2\, \omega^2} \ .$$

Le gain est maximum en module quand $R_S\, C_S\, \omega >> 1$ et dans ce cas :

$$G = \left| \frac{\delta \varphi_2}{\delta \varphi_1} \right| \approx R_D\, g \ , \ \frac{\delta \varphi_2}{\delta \varphi_1} = - R_D\, g$$

d'où une opposition de phase entre $\delta \varphi_1$ et $\delta \varphi_2$

c. Avec $g = 0{,}096\ \Omega^{-1}$: $G = 20{,}6$.

IV.D.

IV.D.1. *a.* On a : $$C_{GS} = \varepsilon_0\, \varepsilon_r\, \frac{a\, b}{l} = 10^{-13}\ \text{F} = 0{,}1\ \text{pF}.$$

b. On a : $$\delta I \left(\frac{1}{g} + Z_S \right) = \delta \varphi_1 \text{ (transistor)}$$

et : $|\delta I| = C_{SGc}\, \omega_c\, |\delta \varphi_1|$ qui exprime la condition de coupure.

Supposant $R_S\, C_S\, \omega >> 1$, on note que $Z_S \approx \frac{1}{j\, C_S\, \omega}$ d'où en définitive la condition :

$$\left| \frac{1}{g} + \frac{1}{j\, C_S\, \omega_c} \right| \approx \frac{1}{C_{SGc}\, \omega_c}$$

Il est probable que $C_S\, \omega_c >> C_{SGc}\, \omega_c$. Si on fait cette hypothèse :

$$g \approx C_{SGc}\, \omega_c$$

d'où la fréquence de coupure $f_c = \frac{g}{2\, \pi\, C_{SGC}} = 1{,}5 \ . \ 10^{11}\ \text{Hz} = 150\ \text{GHz}.$

On vérifie que $C_S\, \omega_c >> C_{SGc}\, \omega_c$ puisque :

$$C_S\, \omega_c >> \frac{1}{R_S} = \frac{1}{7} = 0{,}14\ \Omega^{-1}$$

$$C_{SGc}\, \omega_c \approx g = 0{,}096\ \Omega^{-1}.$$

V. **CINQUIÈME PARTIE**

MAGNÉTO-CONDUCTIVITÉ D'UN GAZ 2D

V.A.

V.A.1. *a.* En régime permanent :

$$-m\frac{\vec{v}}{\tau}-e\,(\vec{F}+\vec{v}\wedge\vec{B})=\vec{0}$$

soit : $\begin{cases} -m\dfrac{v_x}{\tau}-e\,F_x-e\,v_y\,B=0 \\ -m\dfrac{v_y}{\tau}-e\,F_y+e\,v_x\,B=0 \end{cases}$ avec $\vec{j}=-n\,e\,\vec{v}$

ou encore : $\begin{cases} j_x-\sigma_0\,F_x+\omega_c\,\tau\,j_y=0 \\ j_y-\sigma_0\,F_y-\omega_c\,\tau\,j_x=0 \end{cases}$

soit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}=\frac{\sigma_0}{1+\omega_c^2\,\tau^2}\begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\,\tau \\ \omega_c\,\tau & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

b. Par inversion :

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sigma_0}\begin{pmatrix} 1 & \omega_c\,\tau \\ -\omega_c\,\tau & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}$$

c. $\underset{V.m^{-1}}{F} = \rho \underset{A.m^{-1}}{j}$ ρ s'exprime en ohms.

V.A.2. $\vec{j}\,/\!/\,0\,x$ soit $j_y=0$

d'où : $$F_y=-\frac{\omega_c\,\tau}{\sigma_0}\,j_x=-\frac{B}{n\,e}\,j_x$$

$$\varphi_H=\int_0^a -F_y\,d_y=-F_y\,a \qquad \text{et} \quad I=j_x\,a$$

d'où : $\varphi_H=\dfrac{B}{n\,e}\,I$ soit pour la résistance de Hall :

$R_H=\dfrac{\varphi_H}{I}=\dfrac{B}{n\,e}$ indépendante des grandeurs géométriques.

V.B.

V.B.1. *a.* La vérification est immédiate :

$$\vec{B}=\vec{\text{rot}}\,\vec{A}=B\,\vec{u_z} \qquad \text{avec} \quad \vec{A}(\theta,\,B\,x,\,0).$$

b. On utilise l'expression de $\overrightarrow{A}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{e B x}{m}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{e^2 B^2 x^2}{2m}\Psi=E\Psi$$

V.B.2. *a.* $\exp i k_y (y+a)=\exp i k_y y \quad\Rightarrow\quad k_y=n_y\frac{2\pi}{a}$ avec n_y entier.

b. En substituant dans l'équation obtenue en V.B.1.*b*.

$$\Psi(x,y)=\exp(i k_y y)\,\xi(x),$$

on obtient : $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\xi^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\left(\frac{e B}{m}\right)^2\left[x+\frac{h k_y}{e B}\right]^2\xi=E\xi.$$

c. C'est l'équation d'un oscillateur harmonique centré en :

$$x_0=-\frac{\hbar k_y}{e B}\qquad\text{de pulsation } \omega_0=\frac{e B}{m}$$

d. On a : $0<|x_0|<b$ soit $0<n_y\frac{2\pi}{a}\frac{\hbar}{e B}<b.$

Ainsi : $g=\frac{a b e B}{h}$ représente le degré de dégénerescence de chaque niveau de Landau, compte non tenu du spin.

Si on tient compte du spin :

$$g_S=2g=\frac{2 S e B}{h}$$

V.C.

V.C.1. *a.* En vertu du principe de Pauli, on place les nS électrons sur les états de plus en plus énergétiques.
Il y a $\frac{2 e B S}{h}$ places par état d'énergie. Si $B\geq B_1$ tel que $B_1=\frac{n h}{2 e}$, un seul état est occupé, cette occupation étant complète si $B=B_1$.

b. De même, il y a pour p niveaux d'énergie $p\frac{2 e B S}{h}$ places. Si $B\geq B_p$ tel que $B_p=\frac{1}{p}\frac{n h}{2 e}=\frac{B_1}{p}$, il y a au plus p niveaux d'occupé.

V.C.2. *a.* Effet Shubnikov-de-Haas.
On admet que si les p niveaux de Landau sont occupés, alors $\tau\to\infty$. D'après V.A.1.*a*. :

$$\sigma_{x x}=\frac{\sigma_0}{1+\omega_c^2\tau^2}=\frac{n e^2\tau/m}{1+e B\tau^2/m}\to_{\tau\to\infty}0$$

De même (V.A.1.*b*.) :

$$\rho_{x x}=\frac{1}{\sigma_0}=\frac{m}{n e^2\tau}\to_{\infty}0$$

b. La résistance de Hall vaut pour chaque valeur B_p :

$$R_H^p = \frac{B_p}{n\,e} = \frac{h}{2\,p\,e^2}$$

valeur qui ne dépend que des constantes fondamentales.

c. Avec $e = 1{,}60219 \cdot 10^{-19}$ C et $h = 6{,}6262 \cdot 10^{-34}$ J.s :

$R_H^1 = 12906\ \Omega$ (en omettant l'effet Zeeman)

VI. **SIXIÈME PARTIE**

TRANSPORT PERPENDICULAIRE AUX COUCHES

VI.A. **Transmission à travers une barrière de potentiel.**

VI.A.1. *a.*

- pour $|z| > \frac{b}{2}$, $\chi(z)$ est de la forme générale :

$$\chi(z) = a \exp(i\,k_z\,z) + b \exp(-i\,k_z\,z)$$

- pour $|z| < \frac{b}{2}$:

$$\chi(z) = a' \exp \kappa_b\,z + b' \exp -\kappa_b\,z$$

L'énoncé indique que lorsque $|z| \to \infty$:

- pour $z > \frac{b}{2}$: $a = t$, $b = 0$

pour $z < -\frac{b}{2}$: $a = 1$, $b = r$

b. On a :

$$T_b = |t|^2 = \left[1 + \frac{1}{4}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)^2 \operatorname{sh}^2 \kappa_b\,b\right]^{-1} \qquad \left(\xi = \frac{k_z}{\kappa_b}\right)$$

avec : $t = \exp(-i\,k_z\,b)\left[\operatorname{ch} \kappa_b\,b + \frac{i}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\operatorname{sh} \kappa_b\,b\right]^{-1}$

Application Numérique : $V_0 = 250$ meV , $b = 50$ Å , $E = 30$ meV :

$$E = 30\ \text{meV} = \frac{h^2\,k_z^2}{2\,m} \qquad \frac{h^2}{2\,m}\,\kappa_G^2 = 220\ \text{meV} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{k_z}{\kappa_G} = \sqrt{\frac{30}{220}} = 0{,}37$$

$\kappa_b\,b = \kappa_0\,b\sqrt{\frac{V_0 - E}{V_0}}$ (en utilisant l'expression de κ_0 donnée en I.B.2.*d.*).

En utilisant le résultat numérique I.B.2.*g.* : $\kappa_0\,b \approx 3{,}4$ $\left(b = \frac{L}{2}\right)$

d'où : $\kappa_G\, b = 3{,}4 \sqrt{\frac{220}{250}} = 3{,}19$

$$T_b \approx 16 \frac{\exp - 2\,\kappa_b\, b}{\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)^2} = 16 \frac{\exp(-6{,}38)}{(3{,}07)^2} \approx 3 \cdot 10^{-4}$$

VI.B. **Transmission à travers une double barrière.**

VI.B.1. *a.* $T = T_b^2 \approx 9 \cdot 10^{-8}$!

b. L'analogue optique est le Fabry-Pérot (R_b grand ≤ 1, T_b petit sur une face). Quand il y a résonance, la transmission de l'ensemble est 1.

c. On a $Q \approx \frac{1}{T_b}$ (l'onde fait Q aller-retours avant d'être atténuée d'un facteur 2).

VI.B.2. *a.* La caractéristique $I(\varphi_{EC})$ est donnée sur la figure 7.

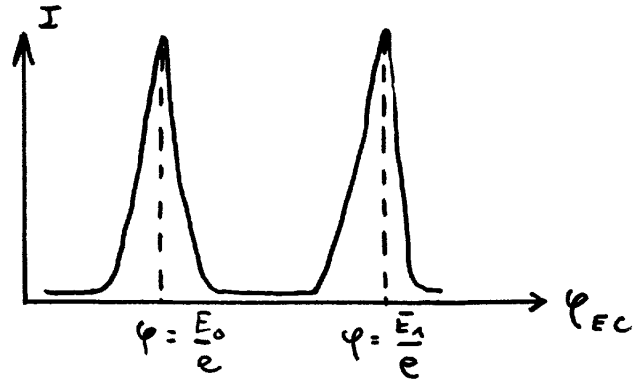


Figure 7

b. Cette caractéristique possède des parties à «résistance négative» et peut de ce fait permettre la réalisation d'oscillateurs.

VI.B.3. Il faut que la particule fasse Q aller et retours avant que le phénomène se mette en place. Donc :

$t \approx Q \frac{L}{v}$ pour le temps de mise en place

$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \approx 6 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$ (E = 30 meV)

$t \approx 10^{-12} \text{ s} = 1 \text{ ps}$ (Q = 60, L ≈ 100 Å)

d'où $f_L \approx 1$ THz pour la fréquence limite de fonctionnement.

Je remercie Stéphane Olivier pour sa contribution active et pertinente à la mise au point de ce problème.

Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : CHIMIE

Épreuve A : Composition de Chimie - Session : 1992

par R. BEN-AIM, J.F. LE MARÉCHAL[1], P. LEMETTAIS, D. ZANN

Première Partie

I Etude thermodynamique d'une cellule électrochimique pour la réalisation de l'électrolyse de l'eau

I.1.a)

anode (oxydation) : $2\ H_2O \longrightarrow O_2 + 4\ H^+ + 4\ e^-$

cathode (réduction) : $2\ H^+ + 2\ e^- \longrightarrow H_2$

équation bilan : $H_2O \longrightarrow 1/2\ O_2 + H_2$

I.1.b)

$\Delta_rH°(298\ K) = -\Delta_fH°(H_2O) = 285{,}2\ kJ.mol^{-1}$

$\Delta_rS°(298\ K) = \Sigma\ \upsilon_i\ S_i° = 163{,}2\ J.K^{-1}.mol^{-1}$

$\Delta_rG°(298\ K) = \Delta_rH° - T\Delta_rS° = 236{,}6\ kJ.mol^{-1}$

$\Delta_rG°(T) = \Delta_rH°(298\ K) - T\Delta_rS°(298\ K) = 234{,}1\ kJ.mol^{-1}$ à 313 K

$$\Delta_rG(T) = \Delta_rG°(T) + RT\ Ln\frac{P_{H_2} \cdot P_{O_2}^{1/2}}{P°^{3/2}} = 248{,}5\ kJ.mol^{-1}$$

I.1.c)

$dG = VdP - SdT + \Sigma\mu_i dn_i$

or : $dn_i = \upsilon_i\ d\xi$ et $\Delta_rG = \Sigma\ \upsilon_i\ \mu_i$

On a donc : $dG = VdP - SdT + \Delta_rG\ d\xi$

Le coefficient de $d\xi$ est Δ_rG

---

1 Pour toute correspondance, J.F. Le Maréchal, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 LYON CEDEX 07

I.2.a)

Il s'agit d'un fonctionnement réversible, la formule de Nernst s'applique donc :

$$E_{anode} = E^\circ_{(O_2/H_2O)} + \frac{0,06}{4} \log\left(\frac{P_{O_2}}{P^o} h^4\right)$$

$$E_{cathode} = \frac{0,06}{2} \log\left(\frac{h^2}{P_{H_2}} P^o\right)$$

(en notant $h = [H_3O^+]$)

$$\Delta V = E_{anode} - E_{cathode} = E^\circ_{(O_2/H_2O)} + \frac{0,06}{4} \log\left(\frac{P_{O_2} P_{H_2}^2}{P^{o3}}\right)$$

$P_{H_2} = P_{O_2} = P^o$ donc : $\Delta V = E^\circ_{(O_2/H_2O)}$ = constante

- à T et P constants : $dG = \Delta_r G \, d\xi$
- dans les conditions standard : $\Delta_r G = \Delta_r G^\circ$
- pour une transformation réversible : $dG = \delta W_e$ (travail utile)
- ici $\delta W_e = (dq)\,\Delta V = 2\,F\,\Delta V\,d\xi$

On en déduit la relation : $\Delta_r G^\circ = 2\,F\,\Delta V$

Remarque : ici, il s'agit d'une réaction non spontanée, $\Delta_r G > 0$

I.2.b)

$$G_f - G_i = \int_0^\xi dG = \int_0^\xi \Delta_r G^\circ \, d\xi = \int_0^\xi 2\,F\,\Delta V \, d\xi = 2\,F\,\Delta V\,\xi$$

$$G_f - G_i = \Delta_r G^\circ \xi \qquad H_f - H_i = \Delta_r H^\circ \xi \qquad S_f - S_i = \Delta_r S^\circ \xi$$

I.2.c)

$\xi = 0,20$ mol.

A N : $\Delta V = 1,23$ V $\qquad G_f - G_i = 47,3$ kJ

$S_f - S_i = 32,6$ J.K^{-1} $\qquad H_f - H_i = 57,0$ kJ

$W_e = G_f - G_i = 47,3$ kJ $\qquad H_f - H_i = W_e + Q$ donc $Q = 9,7$ kJ

(on peut écrire aussi : $S_f - S_i = Q / T$)

I.3.a)

Il s'agit maintenant d'une transformation irréversible , $G_f - G_i < W_e'$

$W_e' = 2\,F\,\Delta V'\,\xi$

$H_f - H_i = \Delta_r H^\circ \xi = W_e' + Q'$

$Q' = \Delta_r H^\circ \xi - 2\,F\,\Delta V'\,\xi$

$W_e' > W_e$: l'extérieur fournit plus d'énergie électrique pour la même électrolyse.

I.3.b)

$\xi = 0{,}20$ mol.

A N : $We' = 70{,}2$ kJ et $Q' = -13{,}2$ kJ

I.3.c)

$$\Delta S_u = \Delta S_\Sigma + \Delta S_{\text{mil ext}}$$

$$= \Delta_r S^\circ \xi - \frac{Q'}{T} = \Delta_r S^\circ \xi - \frac{\Delta_r H^\circ \xi}{T} + 2F\frac{\Delta V' \xi}{T}$$

$$= -\xi \frac{\Delta_r G^\circ}{T} + 2\xi F\frac{\Delta V'}{T} = \frac{-2F\xi\Delta V + 2F\xi\Delta V'}{T}$$

$$\boxed{\Delta S_u = \frac{2F\xi}{T}(\Delta V' - \Delta V)}$$

II Etude cinétique des phénomènes d'oxydoréduction aux électrodes

II.1.a)

à l'équilibre : $v_a = v_c$

$$k^\circ_a \left\{ \exp\left[\frac{\alpha nF}{T}(E_{éq} - E^\circ)\right] \right\} [\text{Red}] = k^\circ_c \left\{ \exp\left[-\frac{\beta nF}{T}(E_{éq} - E^\circ)\right] \right\} [\text{Ox}]$$

$$\text{Ln}\left[\frac{k^\circ_a[\text{Red}]}{k^\circ_c[\text{Ox}]}\right] = -(\alpha+\beta)\frac{nF}{T}(E_{éq} - E^\circ)$$

$$E_{éq} = E^\circ + \frac{RT}{(\alpha+\beta)nF}\text{Ln}\frac{k^\circ_a}{k^\circ_c} + \frac{RT}{(\alpha+\beta)nF}\text{Ln}\frac{[\text{Ox}]}{[\text{Red}]}$$

Or, à l'équilibre, la formule de Nernst est vérifiée : $E_{éq} = E^\circ + \frac{RT}{nF}\text{Ln}\frac{[\text{Ox}]}{[\text{Red}]}$

En identifiant, on obtient : $\boxed{\alpha + \beta = 1 \quad \text{et} \quad k^\circ_a = k^\circ_c}$

II.1.b)

$j_a = nF v_a$; $j_c = -nF v_c$ et $j = j_a + j_c$

$$j = nFk^\circ \left\{ [\text{Red}] \exp\left[\frac{\alpha nF}{RT}(E - E^\circ)\right] - [\text{Ox}] \exp\left[-\frac{(1-\alpha)nF}{RT}(E - E^\circ)\right] \right\}$$

$$E - E^\circ = E - E_{éq} + \frac{RT}{nF}\text{Ln}\frac{[\text{Ox}]}{[\text{Red}]}$$

En remplaçant dans l'expression de j, on obtient :

$$j = nFk^\circ \left\{ [\text{Red}]\frac{[\text{Ox}]^\alpha}{[\text{Red}]^\alpha}\exp\left[\frac{\alpha nF\eta}{RT}\right] - [\text{Ox}]\frac{[\text{Red}]^{1-\alpha}}{[\text{Ox}]^{1-\alpha}}\exp\left[-\frac{(1-\alpha)nF\eta}{RT}\right] \right\}$$

$$j = nFk^\circ [Red]^{1-\alpha} [Ox]^{\alpha} \left\{ \exp\left[\frac{\alpha n F \eta}{RT}\right] - \exp\left[-\frac{(1-\alpha) n F \eta}{RT}\right] \right\}$$

$\boxed{j_o = nFk^\circ [Red]^{1-\alpha} [Ox]^{\alpha}}$: c'est le courant d'échange

à l'équilibre $j_a = -j_c = j_o$

Si j_o est grand, le système est dit rapide : il existe un domaine de potentiel pour lequel les deux réactions électrochimiques opposées $Ox + n\,e \rightleftharpoons Red$ peuvent se produire simultanément (Fig1).

Si j_o est faible, le système est lent : il n'existe pas de domaine de potentiel où les deux réactions opposées peuvent se produire simultanément et l'intensité du courant reste très faible tant que l'on n'applique pas un potentiel très différent de $E_{éq}$ (Fig.2).

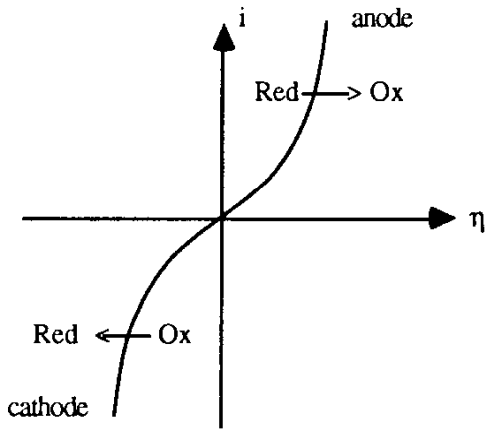


Fig.1

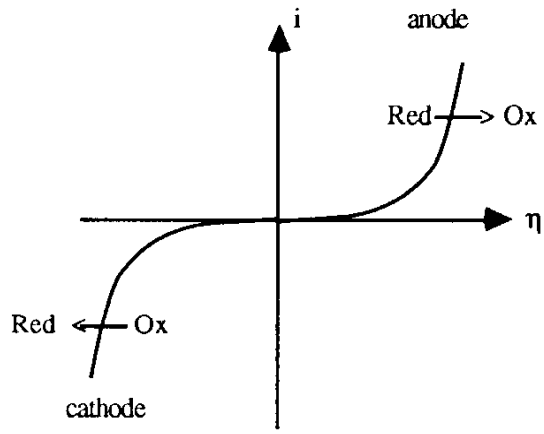


Fig.2

II.1.c)

La loi de Butler Volmer s'applique lorsqu'aucun processus autre que le transfert d'électron ne vient limiter la vitesse de la réaction (régime de transfert pur).

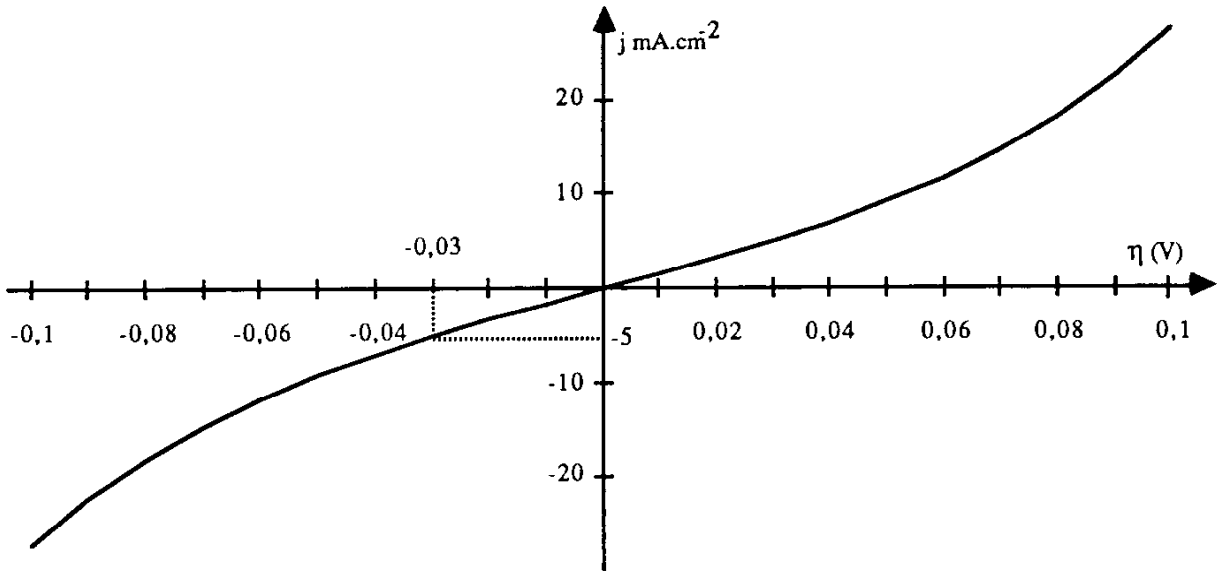
Démontrée ici lorsque Ox et Red sont en solution, cette loi reste valable quel que soit leur état physique. On a choisi ici des ordres cinétiques égaux à 1 pour les deux réactions électrochimiques; la loi s'applique également pour des ordres quelconques. Dans le cas de réactions complexes qui comportent plusieurs réactions successives de transfert d'électrons, si une des étapes mettant en jeu n' électrons (n' < n) est cinétiquement déterminante, la loi s'applique à condition de remplacer n par n'.)

II.1.d)

$j = 4\,[\exp(19{,}5\eta) - \exp(-19{,}5\eta)]$ en $mA.cm^{-2}$

Remarque : l'énoncé précisait : n = 1 car il s'agit en fait d'une réaction en plusieurs étapes

- *une étape électrochimique* : $H^+ + e^- \longrightarrow H_{ads}$
- *une étape chimique* : $2\,H_{ads} \longrightarrow H_2$



II.2)

On lit sur le graphe précédent : $\eta_c = -0,03$ V pour $j_c = -5$ mA .cm^{-2}

$$E_{cathode} = E_{éq} + \eta_c = -0,06\ pH + \eta_c$$

$$E_{anode} = E_{éq} + \eta_a = 1,23 - 0,06\ pH + \eta_a$$

$$\Delta V' = E_{anode} - E_{cathode} = 1,82 = 1,23 + \eta_a + 0,03$$

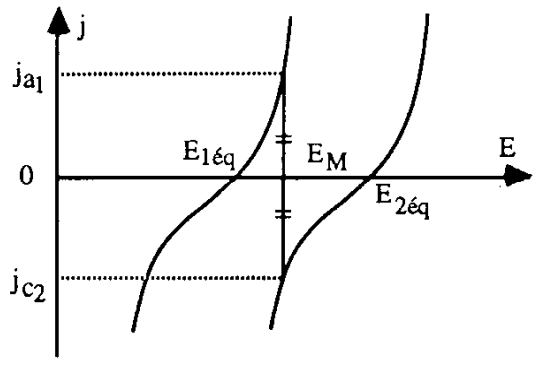
donc $\boxed{\eta_a = 0,56\ V}$

III Application des courbes densité de courant en fonction du potentiel

III.1.a)

On peut écrire : $j_1 = j_{a1}$ et $j_2 = j_{c2}$

$j_{a1} = -\ j_{c2}$



$$j_{o1} \exp\left[\frac{\alpha_1 n_1 F}{RT}(E_M - E_{1éq})\right] = j_{o2} \exp\left[-\frac{(1-\alpha_2) n_2 F}{RT}(E_M - E_{2éq})\right]$$

$$E_M = \frac{n_1\alpha_1 E_{1éq} + n_2(1-\alpha_2)\,E_{2éq}}{n_1\alpha_1 + n_2(1-\alpha_2)} + \frac{RT}{F[n_1\alpha_1 + n_2(1-\alpha_2)]} \operatorname{Ln}\frac{j_{o2}}{j_{o1}}$$

III.1.b)

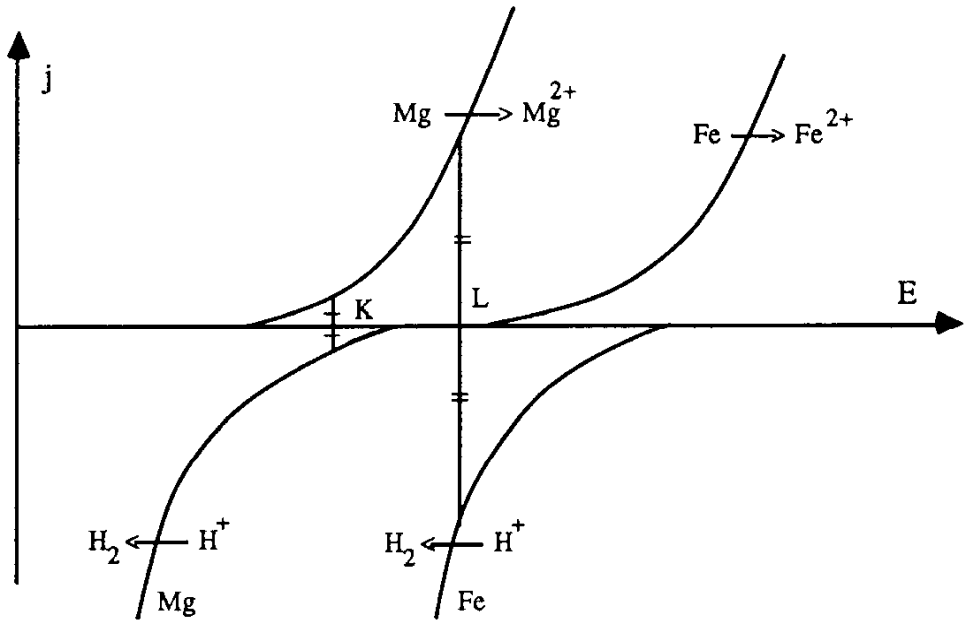
H^+/H_2 : $E_{2éq} = -0,06\ pH = -0,06\ V$ et $n_2 = 1$

Fe^{2+}/Fe : $E_{1éq} = -0,44 + 0,03 \log [Fe^{2+}] = -0,47\ V$ et $n_1 = 2$

$E_M = -0,33\ V$; $j_{a1} = 0,233\ mA.cm^{-2} = -j_{c2} = 2F\,v$

$v = 1,21.10^{-6}\ mol.cm^{-2}.s^{-1} = 6,8.10^{-5}\ g.cm^{-2}.s^{-1}$

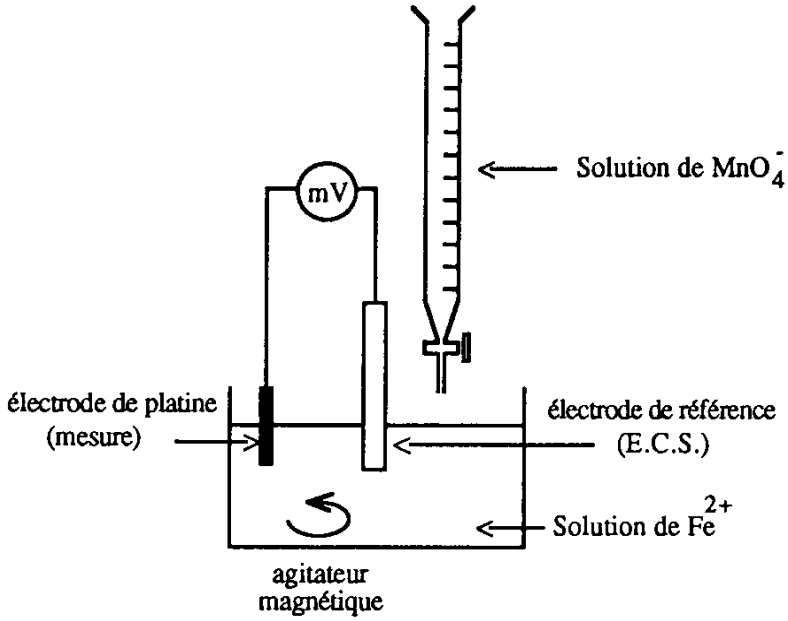
III.2)



En l'absence du clou, les conditions de fonctionnement correspondent à la verticale du point K : l'attaque est lente. La surtension du dégagement de dihydrogène sur le fer est plus faible que sur le magnésium.

En présence du clou, les conditions de fonctionnement correspondent à la verticale du point L : la réaction est nettement plus rapide mais il y a dégagement de H_2 au niveau du clou et attaque du magnésium ; le clou n'est pas attaqué. Ceci constitue un procédé de lutte contre la corrosion : on associe au métal à protéger (par exemple le fer) un métal plus réducteur (Mg, Zn, Al).

III.3.a)



III.3.b)

équation-bilan de la réaction de dosage :

$MnO_4^- + 5\ Fe^{2+} + 8\ H^+ \longrightarrow Mn^{2+} + 5\ Fe^{3+} + 4\ H_2O$

à l'équivalence : $n(MnO_4^-) = 1/5\ n(Fe^{2+})$ $Ve = 10$ ml

* <u>V= 5 ml</u> : c'est la demi - équivalence, $[Fe^{2+}] = [Fe^{3+}]$

donc $\boxed{E = E_1^\circ = 0,77\ V}$

* <u>V = Ve = 10 ml</u> : c'est l'équivalence, $[MnO_4^-] = 1/5\ [Fe^{2+}]$

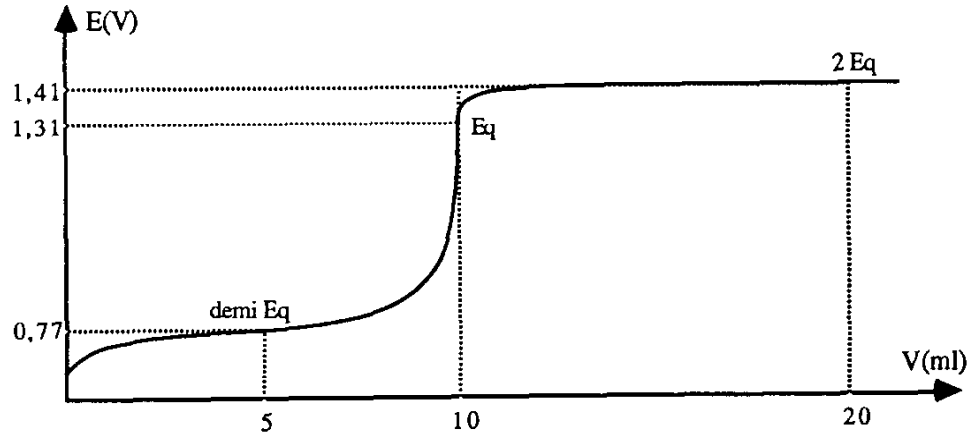
et $[Mn^{2+}] = 1/5\ [Fe^{3+}]$

$$\begin{cases} E = E^\circ_2 + \dfrac{0,06}{5} \log \dfrac{[MnO_4^-]\ h^8}{[Mn^{2+}]} \\ E = E^\circ_1 + \dfrac{0,06}{5} \log \dfrac{[Fe^{3+}]}{[Fe^{2+}]} \end{cases}$$

$6E = 5E^\circ_2 + E^\circ_1 - 0,48\ pH$: $\boxed{E = 1,31\ V}$

* <u>V = 2 Ve = 20 ml</u> , $[MnO_4^-] = [Mn^{2+}]$

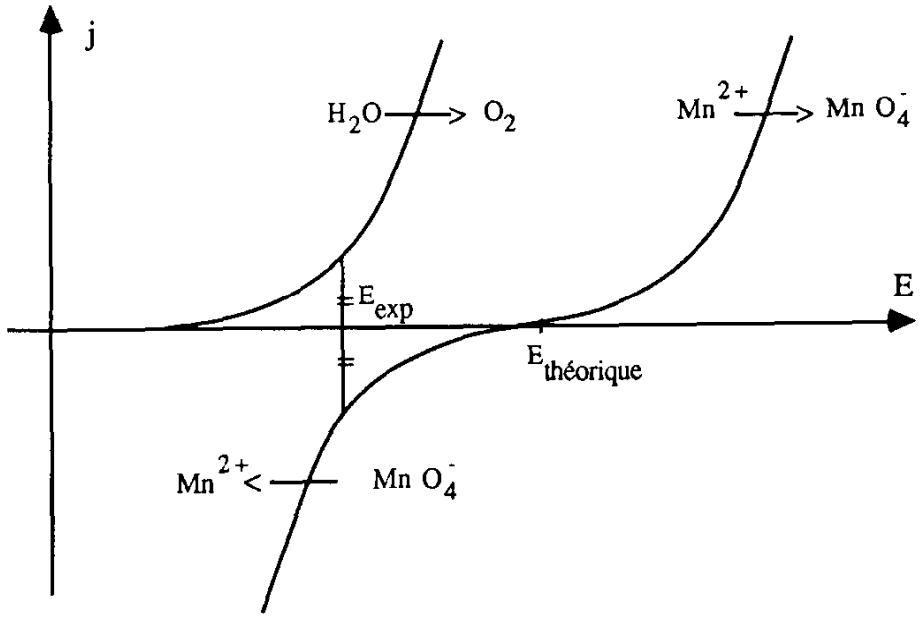
$E = E_2 = E^\circ_2 - \frac{0,48.pH}{5}$ d'où $\boxed{E = 1,41\ V}$



III.3.c)

Pour V > 10 ml, on mesure un potentiel mixte MnO_4^- / H_2O

E(expérimental) < E(théorique)



IV Etude du mécanisme d'une réaction électrochimique

IV.1.a)

$RhClL_3H_2 \longrightarrow H_2 + RhClL_3$

IV.1.b)

Ar ˙ est formé loin de l'électrode, en solution

L'étape n°3 doit s'écrire : $Ar^{\cdot} + ArX^{\cdot-} \rightleftharpoons Ar^{-} + ArX$

IV.1.c)

* pour une série de dérivés ayant même groupe restant, plus le composé accepte facilement une charge négative, plus le départ de X^- est favorisé.

* pour une série de dérivés ayant même groupe partant, plus E° est grand, plus le groupe restant accepte facilement une charge négative qui sera, soit délocalisée sur le cycle aromatique, soit localisée sur un groupe attracteur, mais cette charge sera en tout cas peu localisée sur l'halogène, ce qui n'est pas favorable à la rupture de la liaison C-X.

IV.2.a)

$$ArX + e^- \rightleftharpoons ArX^{\cdot -}$$

$$ArX^{\cdot -} \longrightarrow Ar^\cdot + X^-$$

$$Ar^\cdot + Ph\text{-}CH(OH)\text{-}Ph \longrightarrow ArH + Ph\text{-}\dot{C}(OH)\text{-}Ph$$

$$Ph\text{-}\dot{C}(OH)\text{-}Ph + A^- \longrightarrow Ph\text{-}\dot{C}(O^-)\text{-}Ph + AH \qquad (AH/A^- = \text{urée/uréate})$$

$$Ph\text{-}\dot{C}(O^-)\text{-}Ph \rightleftharpoons Ph\text{-}C(=O)\text{-}Ph + e^-$$

Le bilan s'écrit : $ArX + Ph\text{-}CH(OH)\text{-}Ph + A^- \longrightarrow 2\,ArH + AH + X^-$

Il s'agit d'une catalyse électrochimique

IV.2.b)

Il y a compétition entre les 2 mécanismes :

- mécanisme (1) à 2 électrons
- mécanisme (2) à 0 électron

q = 1 F donc :

0,5 mol de ArX évolue suivant (1) et fournit 0,5 mol de ArH

0,5 mol de ArX évolue suivant (2) et fournit 1 mol de ArH

Pour 1 mole de substrat, on forme 1,5 mol de ArH.

Deuxième Partie

I.1.a)

Modèle VSEPR : NH_3 , 4 voisins (3 H et 1 doublet) => tétraèdre. Un des doublets entourant l'azote étant un doublet non liant, il occupe plus de place. Le tétraèdre n'est pas régulier et les angles HNH sont inférieurs à 109°.

I.1.b)

BH_3 (pas de doublet non liant sur le bore) => 3 voisins => plan

I.2)

B possède 3 électrons de valence, H en possède 1 : donc dans l'entité BH_3, B ne possède pas d'électron à engager dans une liaison avec l'autre unité BH_3 qui lui permettrait de saturer sa coordinence selon la règle de l'octet[2].

1.3.a)

Le nombre d'orbitales atomiques intervenant dans cette structure est 4n pour le bore (pour chacun des n atomes de bore, 2s, $2p_x$, $2p_y$ et $2p_z$) et m pour l'hydrogène. Pour former les p orbitales BH, il faut mettre en jeu 2 orbitales atomiques, de même pour les x et y liaisons. Par contre, il faut mettre en jeu 3 orbitales atomiques pour les s et t liaisons non classiques. On en tire la relation :

$$4n + m = 2p + 2x + 2y + 3s + 3t$$
$$\text{ou } 4p + (p+q) = 2p + 2x + 2y + 3s + 3t$$
$$\text{ou } 3p + q = 2x + 2y + 3s + 3t \quad (1)$$

1.3.b)

Le nombre d'atomes d'hydrogène est exprimé, soit à partir de la stoechiométrie (p+q), soit à partir du décompte des liaisons (p+x+s). On a : p + x + s = p + q soit

$$s + x = q \quad (2)$$

1.3.c)

Le nombre d'électrons mis en jeu est 3n + m soit 3p + p+q, donc deux fois moins de paires d'électrons

$$1/2(4p + q) = p + x + y + s + t \quad (3)$$

1.3.d)

(3) se transforme en 2p + q = 2x + 2y + 2s + 2t. Avec (1) on obtient :

$$p = s + t \quad (4)$$

---

2 Cette règle n'est en fait applicable que pour les éléments C, N et O.

D'après (1), $2y = 3p + q - 2x - 3s - 3t$: en introduisant (2), $2y = 3p - 2s - x - 3t$; et en introduisant (4) $2y = 3s + 3t - 2s - x - 3t$ qui est la relation demandée :

$$2y = s - x \quad (5)$$

I.4)

Le diborane peut s'écrire $(BH)_2H_4$, donc p = 2 et q = 4. Il faut trouver s, t, y, x entiers positifs ou nuls qui satisfassent aux équations (2) (4) et (5) ci-dessus :

(4) impose que le couple (s,t) = (0,2) ou (1,1) ou (2,0)

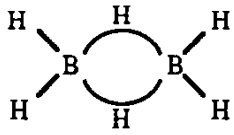
(2) impose que le couple (s,x) = (0,4) ou (1,3) ou (2,2) ou (3,1) ou (4,0), les deux derniers couples n'étant pas compatibles avec les couples (s,t) proposés ci-dessus.

Seul le couple (s,x) = (2,2) est compatible avec (5), y devant être positif ou nul.

Le jeu de paramètres (s,t,y,x) vaut (2,0,0,2), solution unique.

La structure de la molécule possède donc p + x = 4 liaisons B-H et s = 2 liaisons à trois centres BHB.

d'où la structure probable :



I.5)

Pour le triborane(9) on peut faire le même travail[3] que l'on résumera sous forme de tableau, avec p = 3 et q = 6

s	t	y	x
0	3	négatif	6
1	2	négatif	5
2	1	négatif	4
3	0	0	3

Les valeurs de s supérieures à 3 sont incompatibles avec (4) ;

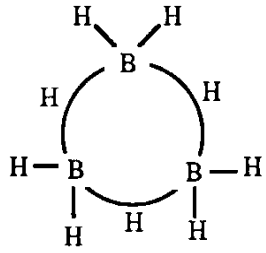
le seul jeu de valeurs styx est 3003.

Le triborane(9) possède donc p + x = 3 liaisons B-H et s = 3 liaisons BHB

---

3 Dans les cas particuliers du di- et du triborane, il était possible d'accélérer un peu cette étude en posant à priori t=0; en effet, il ne peut y avoir de liaison à trois centres BBB dans le cas du diborane. Dans le cas du triborane, l'équivalence RMN des trois atomes de bore imposait t=0 également.

d'où la structure probable :



I.6.a)

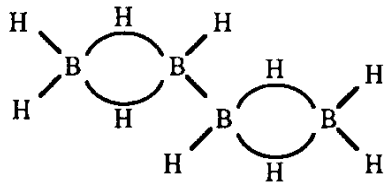
Pour le tétraborane(10) p = 4 et q = 6

s	t	y	x
0	4	négatif	6
1	3	négatif	5
2	2	négatif	4
3	1	0	3
4	0	1	2

Deux jeux de valeurs styx sont possibles : 3103 et 4012.

A partir de 3103, la structure possède t=1 liaison BBB. Ceci est en contradiction avec l'équivalence 2 à 2 des signaux observés en RMN du Bore.

A partir de 4012 on a p+x = 6 liaisons B-H, y=1 liaison B-B et 4 liaisons BHB. L'exemple de la structure suivante montre la compatibilité avec l'observation RMN :



Il existe donc bien un jeu de valeurs styx = 4012 qui donne une solution physiquement acceptable[4].

I.7)

Le jeu de valeurs styx du pentaborane(9) est 4120.

---

4 Il existe d'autres structures acceptables avec ce même jeu styx.

II.1)

Synthèse du tétraborane(10)[5] :

$$B_2H_6 \longrightarrow BH_3$$

$$B_2H_6 + BH_3 \longrightarrow B_3H_9$$

$$BH_3 \longrightarrow BH + H_2$$

$$B_3H_9 + BH \longrightarrow B_4H_{10}$$

Pour le pentaborane(9)

$$B_4H_{10} + BH \longrightarrow B_5H_9 + H_2$$

La structure électronique du bore est $1s^2\ 2s^2\ 2p^1$.

Avec un modèle covalent : dans l'entité BH, le bore est entouré de 4 électrons de valence, ce qui constitue une couche demi-remplie ($2s^1\ 2p^3$) qui possède une certaine stabilité.

Avec un modèle ionique : dans l'entité $B^+\ H^-$, le bore possède la structure électronique externe $2s^2$, sous-couche pleine, ce qui contribue à une certaine stabilité.

II.2.a)

Le moment dipolaire de l'oxyde de carbone est $^{\delta-}CO^{\delta+}$; d'où la liaison Fe-CO et non Fe-OC car le fer est électroniquement déficient.

II.2.b)

La stoechiométrie du fer pentacarbonyle ($Fe(CO)_5$) se justifie par la règle des 18 électrons: le fer en possède 8, il faut donc 5 ligands à 2 électrons.

II.2.c)

Le ligand B_4H_8 remplace 2 ligands CO ; afin que le complexe possède 18 électrons (ce que l'on peut supposer, car l'énoncé insiste sur la grande stabilité du complexe), il est nécessaire que B_4H_8 soit un ligand L_2, c'est-à-dire à 4 électrons.

II.2.d)

$$B_4H_{10} + Fe(CO)_5 \longrightarrow \text{Complexe} + H_2 + 2CO$$

Pour un éventuel mécanisme, il est impératif de partir de B_4H_{10}, B_4H_8 n'existant pas. On peut admettre plusieurs mécanismes, l'équation bilan en étant un.

II.2.e)

Le ligand isoélectronique de B_4H_8 est C_4H_4 (cyclobutadiène). C'est également un ligand L_2, chaque orbitale π donnant 2 électrons au fer.

---

5 Dans cette question , il ne faut pas faire intervenir des boranes qui n'existent pas. B_5H_{11}, B_6H_{10} et B_6H_{12} sont les seuls autres boranes utilisables "éventuellement" dans ces mécanismes, en plus des espèces déjà citées (il n'existe pas d'heptaborane). De plus, la question demandant un mécanisme, il n'était pas raisonable de faire apparaître des étapes dont la molécularité est supérieure ou égale à trois.

II.3)

Les produits des réactions (A) et (B) conservent le squelette de $B_{10}H_{14}$.

Pour la réaction (A), l'espèce active est R^+, après que $AlCl_3$ a polarisé la liaison R-Br. R^+ a tendance à se fixer sur le centre le plus riche en électrons (position 2 ou 4), avec départ de H^+.

Pour la réaction (B), l'acétonitrile, riche en électrons (doublet libre sur l'azote), se fixera préférentiellement sur le carbone le plus pauvre en électrons, à savoir en position 6 et 9.

III.1)

Le nickel est en coordinence plan-carrée.

III.2.a)

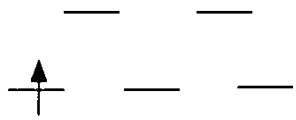
facile

II.2.b)

En l'absence de ligand, on considère que les 5 niveaux énergétiques des 5 orbitales d sont dégénérés. En présence d'un champ octaédrique, il y une levée partielle de dégénérescence : trois niveaux dxy, dxz et dyz ont même énergie. Plus haut en énergie, on trouve deux niveaux dégénérés, $d_{x^2-y^2}$ et d_{z^2}.

III.3.a)

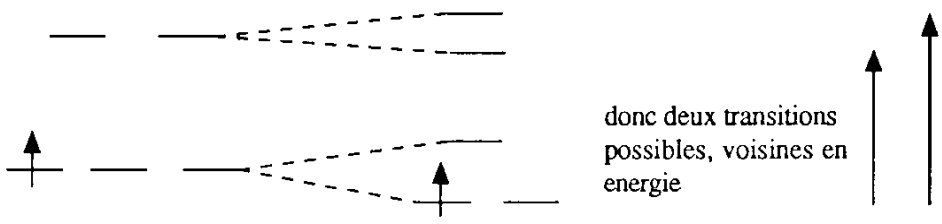
Le diagramme énergétique de l'hexaaquotitane(III) se présente ainsi :



Le seul électron peut donner une unique absorption, d'où un spectre électronique qui ne possède qu'une bande.

III.3.b)

La dissymétrie est due à un abaissement de symétrie (élongation de deux liaisons axiales Ti-H_2O). La symétrie O_h disparaît au profit d'une symétrie D_{4h} dont le diagramme énergétique est :



C'est l'effet Jahn-Teller.

III.4)

Mn(II) possède 5 électrons d : il y a deux cas possibles de répartition des électrons dans les deux niveaux d'énergie en symétrie O_h :

Si le champ des ligands est faible (cas de gauche), la répulsion électronique sera suffisamment grande pour que les niveaux soient tous occupés par un électron d.
Si le champ des ligands est fort (cas de droite), les électrons préféreront s'apparier.

Le fait que la coloration soit faible impose le cas champ faible. En effet, le saut d'un électron impose une non-conservation du spin, ce qui est interdit (règle de Laporte).
La compréhension du spectre électronique du manganèse (bien que faibles, plusieurs transitions existent) impose de tenir compte de l'hamiltonien de répulsion électronique (terme en $1/r_{ij}$) n'existant pas dans le cas du titane qui n'a qu'un seul électron.

III.5.a)

Si un complexe est distordu suivant l'axe z, les orbitales d_{xz} et d_{yz} seront moins sensibles à la proximité du ligand (donc moins déstabilisées) que l'orbitale d_{xy}. Le même raisonnement montre que l'orbitale $d_{z}2$ est moins déstabilisée que l'orbitale $d_{x}2\text{-}_{y}2$. On se retrouve comme dans le cas de la distorsion Jahn-Teller de la question III.3.b).

III.5.b)

Dans le cas d'un rejet à l'infini des ligands qui pointaient selon l'axe des z, on se retrouve dans le cas d'une coordinence plan-carrée.

III.5.c)

Le Ni(II) possédant 8 électrons d, la distorsion tétragonale ci-dessus provoque un gain énergétique d'autant plus important qu'elle est ample. Ceci interprète la préférence du Ni(II) pour la symétrie plan-carrée plutôt que O_h.

III.5.d)

Les autres métaux d^8 (Cu(III) et Co(I) ou leurs analogues respectifs Ag(III), Au(III), Rh(I) et Ir(I)) présentent des situations électroniques similaires.

III.6)

La déficience électronique du carborane aura tendance à appauvrir la liaison O-H, rendant l'acide dérivé du carborane plus acide que l'acide benzoïque.

IV.1.a)

$2\ CH_2{=}CH\text{-}C_3H_7 + B_2H_6 \longrightarrow 2\ BH_2\text{-}CH_2\text{-}CH_2\text{-}C_3H_7$

Orientation anti-Markovnikov.

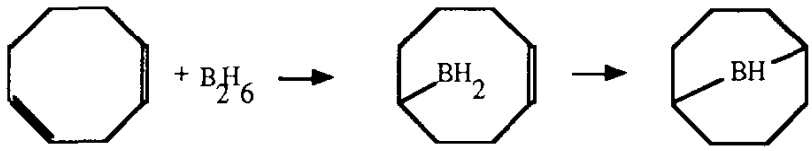
L'attaque électrophile de la double liaison se porte sur le borane, déficient en électron pour donner un intermédiaire carbocationique, soit en 1, soit en 2. Le carbocation secondaire étant plus stable que le primaire, le bore se met en position 1.

IV.1.b)

$BH_2\text{-}CH_2\text{-}CH_2\text{-}C_3H_7 + OH^- + H_2O_2 \longrightarrow HO\text{-}CH_2\text{-}CH_2\text{-}C_3H_7$

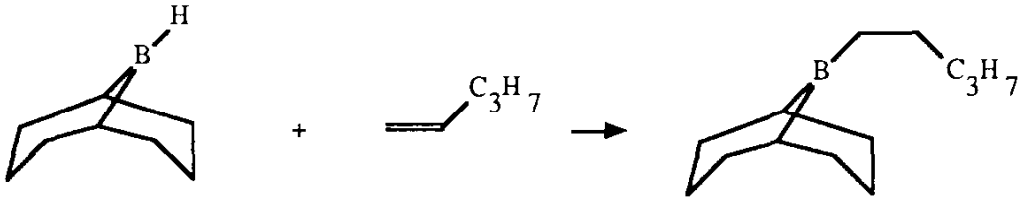
à comparer avec $CH_2{=}CH\text{-}C_3H_7 + H_2O \xrightarrow{+\ cat} CH_3\text{-}CH(OH)\text{-}C_3H_7$, produit Markovnikov attendu. Le borane inverse donc la régiosélectivité.

IV.2.a)



IV.2.b)

Le 9-BBN très encombré réagira uniquement avec un alcène terminal : l'hydroboration donne :

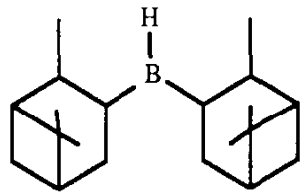


IV.2.c)

P, de formule $C_{10}H_{16}$, est donc un terpène.

Son nom est l'α-pinène.

La formule développée de $(P')_2BH$ est :



Le butan-2-ol obtenu n'est pas racémique, car le réactif hydroborant est chiral (le pinène étant d'origine naturelle).

Le caractère non racémique du mélange obtenu peut être mis en évidence par son pouvoir rotatoire non nul.

On peut sans crainte utiliser un excès de P, car P étant très encombré, la trihydroboration n'aura pas lieu.

La réaction avec le butène est conduite à 0°C pour profiter au maximum d'un contrôle cinétique qui induirait une préférence pour l'un des deux énantiomères.

IV.3)

$2\ NaH + B_2H_6 \longrightarrow 2\ NaBH_4$.

L'hydrure de sodium et le diborane sont des réactifs accessibles industriellement.

Le borohydrure de sodium est utilisable pour des réductions de cétone en alcool secondaire, par exemple.

IV.4.a)

Le bore est couplé à 4 spins 1/2 équivalents ; on observera donc un quintuplet d'intensité relative 1,4,6,4,1.

IV.4.b)

Les protons sont équivalents, ils résonent à la même fréquence. Le couplage avec le spin I=3/2 du ^{11}B donne un signal de multiplicité $2I + 1 = 4$. On a un quadruplet de raies équivalentes en intensité.

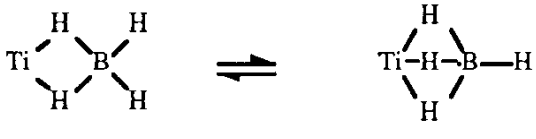
IV.5)

$Cp_2TiCl_2 + 2LiBH_4 \longrightarrow Cp_2Ti(BH_4)_2 + 2\ LiCl$

Le déplacement de cette réaction peut être dû à plusieurs facteurs, en particulier la force de la liaison Ti-borohydrure par rapport à la force de la liaison Ti-Cl. Sur ce paramètre, on ne peut rien expérimentalement. Par contre, on peut choisir un solvant où le chlorure de lithium est insoluble. C'est le cas du diéthyléther ; ce n'aurait pas été le cas du tétrahydrofurane par exemple.

IV.5.b)

Le spectre RMN ^1H du chlorure de titanocène possède 1 pic, car tous les protons sont équivalents. Par contre, celui du dérivé diborohydrure possède 2 pics d'intensité relative 10 et 8 (expérimentalement, on constate que tous les H du borohydrure sont équivalents, ce qui n'est pas évident a priori étant donné la nature de la liaison métal borohydrure :



Il se trouve que cet équilibre est très rapide même à basse température et rend équivalents tous les protons.

Si la synthèse avait produit le dérivé monoborohydrure ($Cp_2Ti(Cl)BH_4$), l'intensité relative des deux pics aurait été 10 / 8. La stoechiométrie du complexe est donc bien déterminable par RMN. Le spectre des protons liés au bore est un quadruplet (cf.IV.4.a) alors que celui des cyclopentadiényles est un singulet. [6]

---

6 Les auteurs remercient Mademoiselle V. Grosjean pour son efficace collaboration lors de la saisie de ce document, texte, figures et mise en pages.

Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : CHIMIE

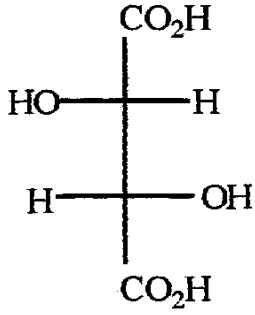
Épreuve C : Composition de chimie (applications) - Session : 1992

par D. DANION, C. DUBOC, M. DUTEIL et J.-P. FOULON

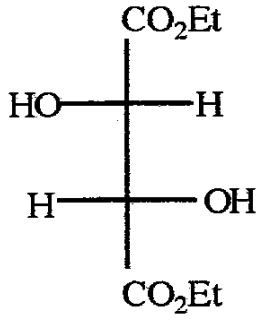
PREMIÈRE PARTIE

SYNTHÈSE STÉRÉOSÉLECTIVE D'UNE FORME OPTIQUEMENT ACTIVE DE PHÉROMONE SEXUELLE D'INSECTE : LA δ-MULTISTRIATINE

I. I.1. Projections de Fischer :



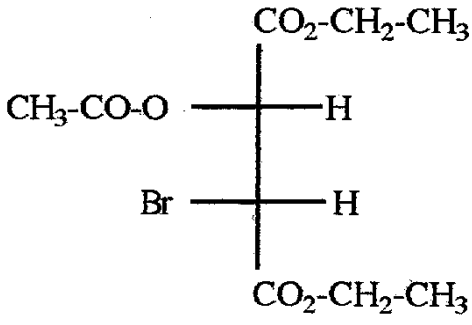
Composé inital



Composé **A**

I.2. Mécanisme classique d'estérification par catalyse acide (protique) avec intermédiaire tétraédrique.

II. II.1. Composé **B** ($C_{10}H_{15}Br0_6$)

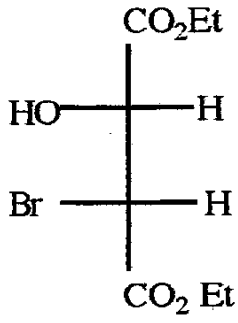


II.2. Configuration : (2R, 3R)

II.3. L'analyse du spectre RMN du proton donne δ : 4,57 ppm (H au pied de l'acétoxy) ; 5,33 ppm (H au pied du brome) ; 2,10 ppm (CH_3 de l'acétoxy) ; 4,2 et 1,2 (CH_2 et CH_3 du groupe ester).

Le mécanisme peut être schématisé par une SN au niveau du carbone 3 et une estérification au niveau du carbone secondaire en 2.

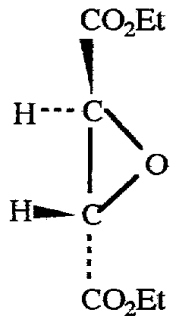
III. III.1. Le composé **C** est :



III.2. Infrarouge : 1750 cm^{-1} : ester (C = 0) ; 3300 cm^{-1} : alcool (OH liés).

III.3. Il s'agit d'une hydrolyse en milieu hydroalcoolique avec catalyse par HBr.

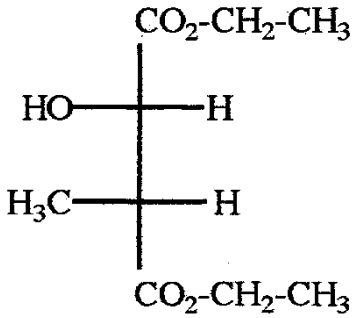
IV. IV.1. Le composé **D** est l'époxyde :



IV.2. La RMN redonne les signaux de la fonction ester et les H cycliques à 3,47 ppm.

IV.3. Il y a formation de l'alcoolate puis substitution nucléophile interne conduisant à l'époxyde.

V. V.1. Le composé **E** est :



IR : 1735 cm^{-1} (ν C = 0) et 3470 cm^{-1} (ν OH)

RMN : δ : 1,27 ppm (CH_3 ester) ; 4,10 ppm (CH_2 ester) ; 4 ppm (H au pied du OH) ; 2,63-3,03 ppm (H au pied du méthyle) ; 1,23 ppm (CH_3 , méthyle) ; 3,17 ppm (OH, alcool).

V.2. et corollaires

$$CH_3\text{–}Br + 2\ Li \xrightarrow{\text{(éther)}} CH_3\text{–}Li + LiBr$$

$$2\ CH_3\text{–}Li + CuI \longrightarrow (CH_3)_2CuLi + LiI$$

L'éther est anhydre pour éviter l'hydrolyse des organométalliques. L'argon évite l'oxydation en

méthanolate.

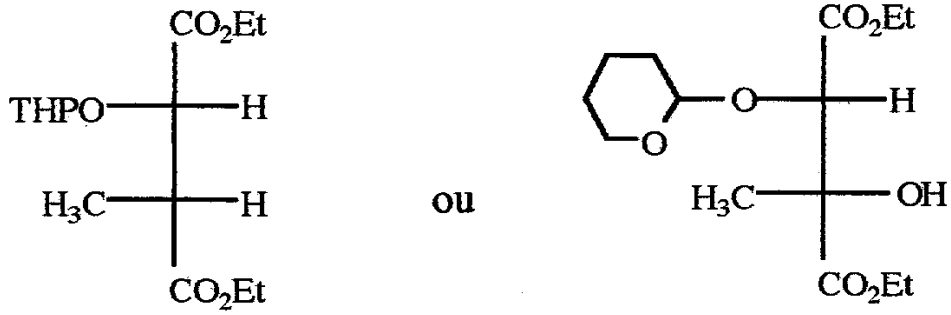
Le chlorure d'ammonium permet l'hydrolyse en milieu tamponné.

Le complexe $Cu(NH_3)_2^+$ s'oxyde à l'air en $Cu(NH_3)_4^{2+}$ qui est bleu.

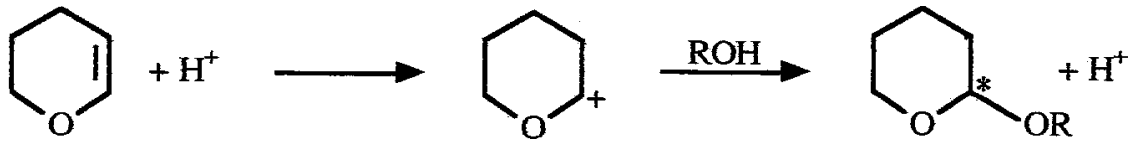
La pression réduite permet d'abaisser le point d'ébullition.

Le rendement de la transformation est de 78 %.

Le mécanisme consiste en un transfert du groupement méthyle du cuprate avec ouverture de l'époxyde et inversion de configuration du carbone concerné.

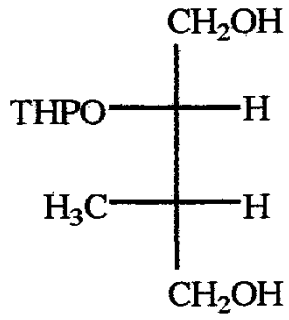


VI. Protection de l'hydroxyle en 2 par le D.H.P. : formule de **F**



Le mécanisme peut être schématisé de la manière suivante :

L'acide p-toluènesulfonique (APTS) joue le rôle de donneur de proton.



Configuration (2S,3S)

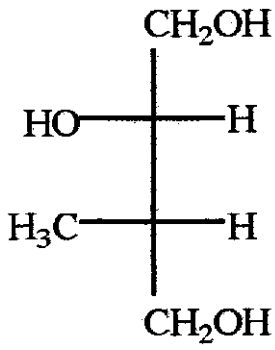
VII. L'hydrure de lithium et d'aluminium réduit les fonctions esters. Formule de **G** :

IR., groupement OH à 3360 cm^{-1}.

$LiAlH_4$ est utilisé en milieu anhydre pour éviter l'hydrolyse.

G est insoluble dans l'eau car il présente une chaîne hydrophobe.

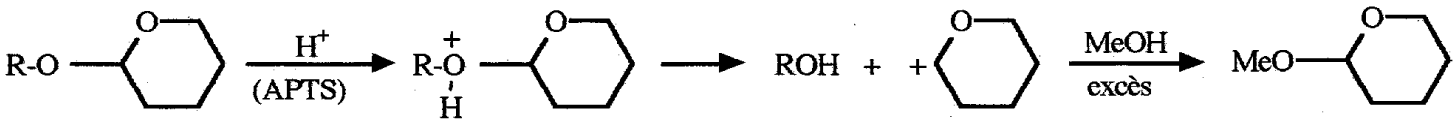
Mécanisme de réduction d'une fonction ester en alcool.



VIII. Il s'agit d'une déprotection. Formule de **H** :

Configuration (2S,3S)

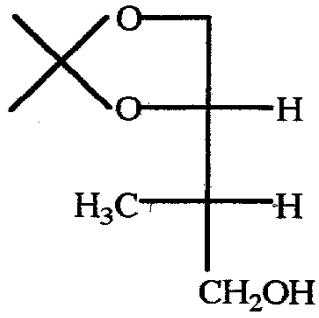
Le mécanisme est schématisé ci-dessous :



L'infrarouge confirme la fonction OH (3320 cm^{-1}).

La protection de la fonction OH permet d'éviter une réaction ave $LiAlH_4$.

IX. Étape d'acétalisation pour protéger les fonctions alcools en 1 et 2. Formule de **I** : ($C_8H_{16}O_3$) - cycle pentaatomique :

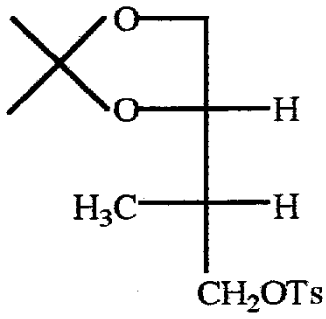


Il existe d'autre possibilités d'acétalisation.

Données de RMN ; δ : 1,3 et 1,35 ppm (CH_3 acétal) ; 0?83 ppm (CH3 méthyle) ; 1,5-2 ppm (H au pied du méthyle) ; les autres protons donnent lieu à un massif (3,4-4,07 ppm).

Mécanisme d'acétalisation en milieu acide.

X. X.1. Formation du tosylate **J** :



Configuration (2S,3S)

X.2. La pyridine sert de catalyseur et neutralise le HCl formé.

X.3. Données de RMN, δ : 1,22 et 1,25 ppm (méthyles de l'acétal) ; 0,90 ppm (CH_3 - méthyle) ; 7,7 à 7,25 ppm (aromatiques) ; 3,9 - 4,2 ppm (autres protons).

XI. Formation d'un dérivé iodé.

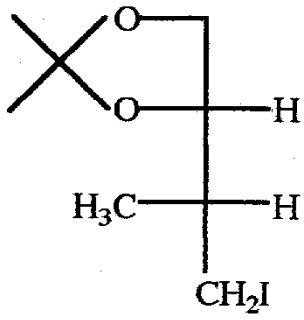
Bilan réactionnel : ROTs + NaI RI + TsONa.

L'iode formé est réduit par $S_20_3^{2-}$.

L'acétone est un solvant dipolaire aprotique qui solubilise NaI.

Protection des hydrolyses en 1 et 2, activation de l'hydrolyse en 4 sous forme de tosylate.

Formule de **K** :



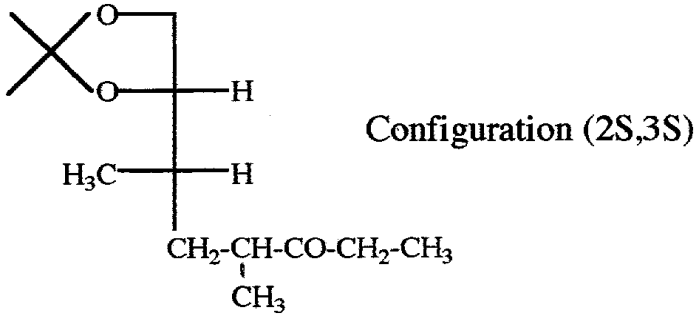
Spectre de RMN : δ : 1,27 - 1,30 ppm (CH_3 - acétal) ; 0,91 ppm (CH_3) ; 1,6 ppm (H au pied du méthyle) ; les autres protons donnent un massif de 3 à 4,2 ppm.

XII. Il s'agit d'une C-alkylation de l'ion énolate de la diéthylcétone :

$$BuLi + (iPr)_2NH \rightarrow (iPr)_2N^- , \ Li^+ \ (LDA) + Butane$$

$$(CH_3–CH_2)CO + (iPr)_2N^- , \ Li^+ \rightarrow CH_3–CH^–CO–CH_2–CH_3 , \ Li^+ + (iPr)_2NH$$

Composé **L** ($C_{13}H_{24}0_3$) :



XIII. Obtention de la multistriatine

La configuration de **M** est : (1S,2S,4S,5R).

Autre possibilité : (---,5S).

Il y a hydrolyse de l'acétal puis acétalisation intramoléculaire entre les deux OH libérés et le groupement cétonique (facteurs entropiques).

Relargage.

Données de RMN : 4,08, m., (H_1) ; 0,74, d, J = 6 Hz, (CH_3 en 2) ; 1,10 ppm, d. J = 7 Hz, (CH_3 en 4) ; 0,86 ppm, t., J = 7 Hz (CH_3 en 5) ; 3,68 ppm, d. J = 4 Hz, (CH_2 en 7) ; les autres protons constituent le massif de 1,2 à 2 ppm.

Noter en IR l'absence de ν C = 0.

DEUXIÈME PARTIE

UTILISATION DES COMPOSÉS ORGANOMÉTALLIQUES
EN SYNTHÈSE DE PHÉROMONES

I. Introduction

I.1. Le protocole opératoire requiert 6g de Mg et 27,2g de Et-Br dans 250 ml de THF.

I.2. $$Bu{-}Cl + 2\ Li \rightarrow Bu{-}Li + LiCl$$
milieu THF et atmosphère d'argon.

I.3. Le dosage repose sur la formation d'un complexe rouge entre l'orthophénantroline et le butyllithium. L'alcool benzylique détruit le complexe avec formation d'un alcoolate incolore. Le volume V_o correspond au dosage témoin. Le titre est : 1,56 $mol.L^{-1}$.

I.4. Étude de l'influence du solvant.

I.4.1. $PhCH_2MgCl$ est solvaté par le HMPT, solvant dipolaire aprotique.

I.4.2. En milieu HMPT, la diisopropylcétone conduit à un ion énolate, avec régénération de la cétone après hydrolyse.

I.5. Il s'agit de réactions de transmétallation.

I.5.1. Les réactions sont :

$$CH_3{-}Li + CuI \rightarrow CH_3{-}Cu + LiI$$
Méthylcuivre (jaune) **A**

$$CH_3{-}Li + CH_3{-}Cu \rightarrow (CH_3)_2CuLi$$
Diméthylcuprate de lithium (incolore) **B**

I.5.2. Par analogie, il vient :

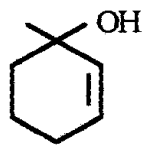
$$CH_3{-}Li + CuI \rightarrow CH_3{-}Cu + LiI$$

$$CH_3{-}Cu + Pr{-}C \equiv C{-}Li \rightarrow (CH_3)\ (Pr{-}C \equiv C)CuLi$$

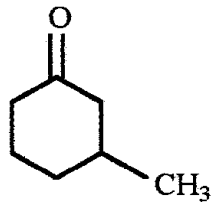
Cuprate mixte **C** permettant de transférer un seul groupement méthyle (ce qui représente une économie de réactif).

I.5.3. Les réactions sont :

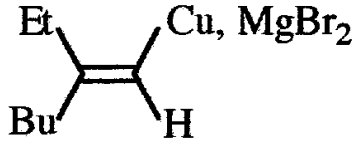
I.5.3.a. Addition-1,2 avec CH_3-Li, soit :



I.5.3.b. Addition-1,4 ave **B** et C, soit :



I.5.4. I.5.4.a. **D** = $EtCu,MgBr_2$

I.5.4.b. **E** = 

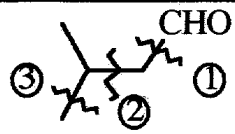
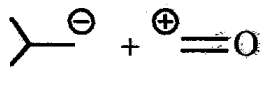
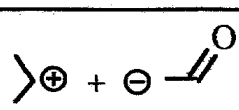
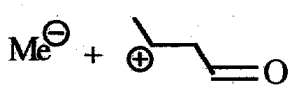
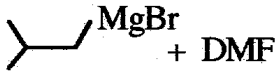
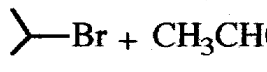
vinylcuivre

Il s'agit d'une syn-addition vérifiée par deutérolyse.

I.5.4.c. L'organomagnésien, seul, aurait déprotoné l'hexyne.

I.5.4.d. (C_2H_5) $(C_4H_9 - C \equiv C)$ CuLi, cuprate mixte.

I.6. I.6.1. Tableau rétrosynthétique :

Molécule cible			
Rétrosynthèse	⇓①	⇓②	⇓③
Synthons			
Equivalents synthétiques	 + DMF	 + CH_3CHO	Me_2CuLi + énal
Conditions opératoires	THF, -40°C, H_2O	soude (t. a.)	-80°C, THF, puis NH_4Cl aqueux

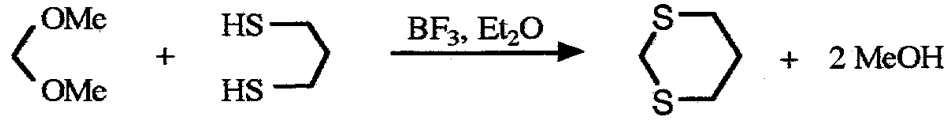
I.6.2. ① et ③ sont a priori possibles, ② risque de conduire à des aldolisations. Il faut signaler que la synthèse ③ nécessite un ajout préalable de TMSCl ($(CH_3)_3SiCl$) pour bloquer la forme énolate sous forme d'éther d'énol silylé. La déprotection en molécule cible se fait par hydrolyse acide.

II. Synthèse d'une phéronome sexuelle d'un scolyte du pin (Ips Confusus)

II.1. Le magnésien de **F** est d'accès difficile car il y a risque de duplication alkylante et de transposition allylique.

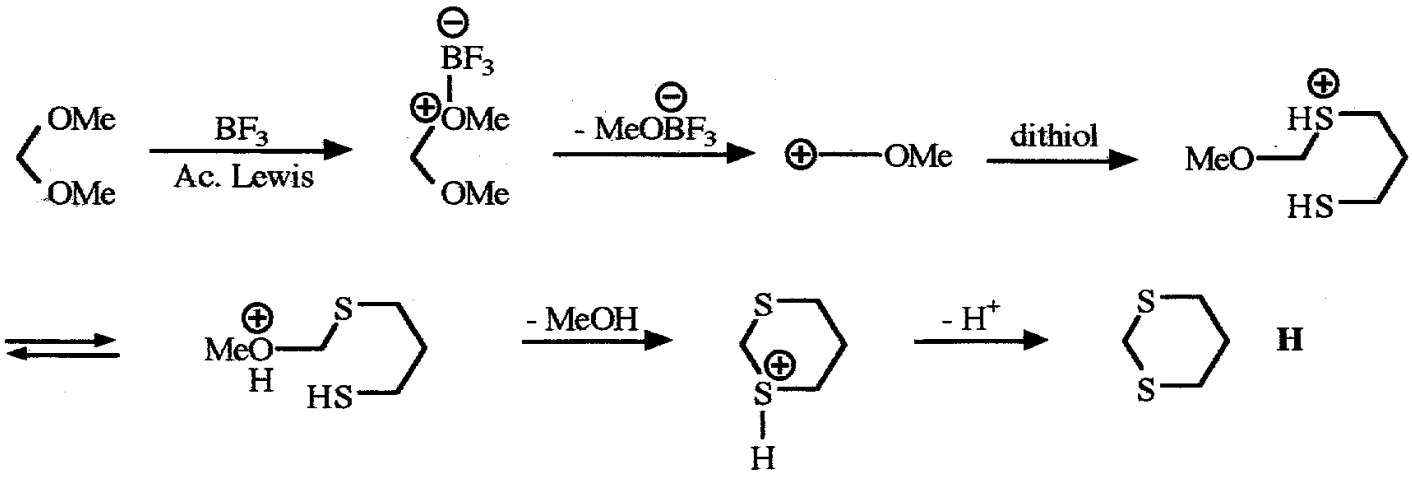
II.2. Les dithianes :

II.2.1. Équation-bilan :



H : $C_4H_8S_2$

Mécanisme :

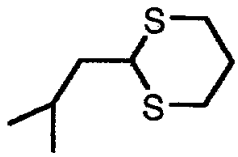


signalons que $MeO-\overline{B}F_3$, en présence de protons, régénère BF_3 avec formation de méthanol.

II.2.2. L'anion dithiane est stabilisé par les deux atomes de soufre (orbitales d -longueur de liaison et polarisibalité).

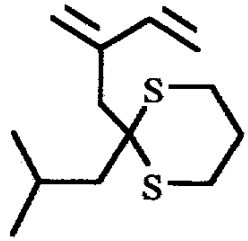
Il est formé par déprotonation de **H** avec le butyllithium.

L'addition du 1 - bromo - 2 méthylpropane conduit à **I** :



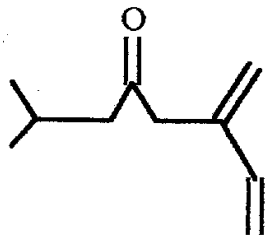
$(C_8H_{16}S_2)$

II.2.3. Le même raisonnement conduit à **J**



$(C_{13}H_{22}S_2)$

II.2.4. **J** est débloqué en cétone **K**



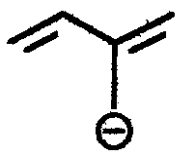
$(C_{10}H_{16}O)$

II.2.5. **K** est réduit par $NaBH_4$ pour donner la phéromone recherchée.

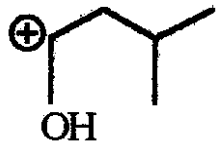
II.2.6. La phéromone est obtenue sous forme racémique.

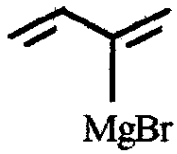
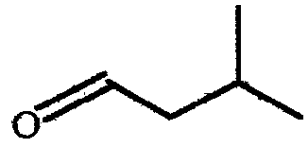
II.3. Stratégies de synthèses :

Synthons :

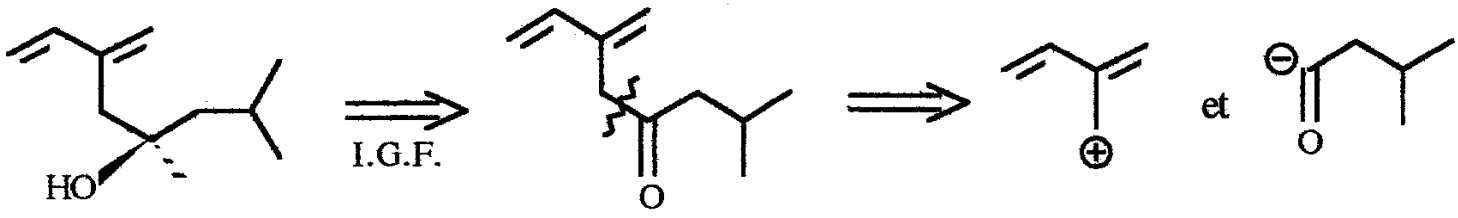


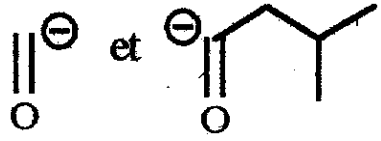
et



Équivalents synthétiques :  et 

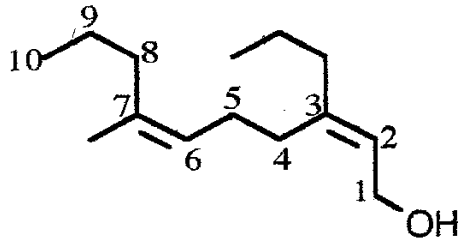
Dans le second cas, le schéma de rétrosynthèse est le suivant :



Notons que les lithiens proposés sont des équivalents synthétiques de qui sont des anions acyles virtuels 

Il s'agit d'une inversion de polarité au niveau du carbonyle aldéhydique (umpolung). Cette stratégie est essentielle en synthèse organique.

III. Synthèse d'une phéromone de phalène

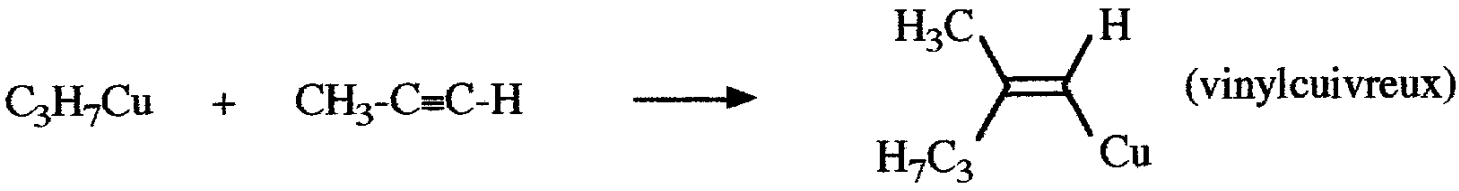
III.1. 

(2Z,6Z)-7-méthyl-3propyldéca-2,6-dién-1-ol

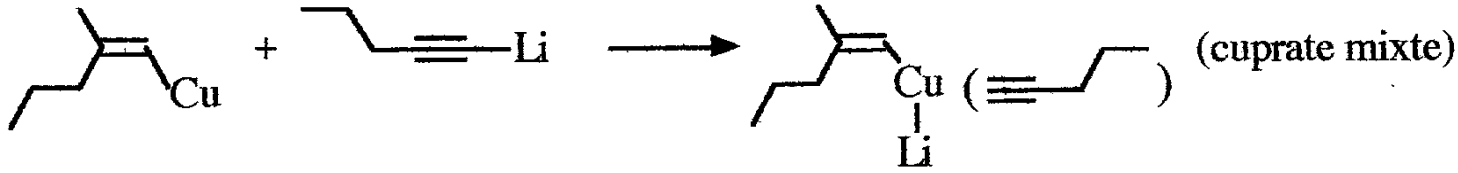
III.2. III.2.1. En utilisant les outils mis en place au paragraphe I, il vient immédiatement :

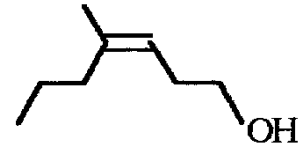
a)

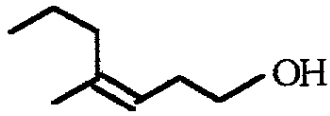
b)



c)



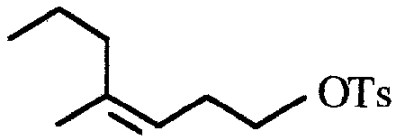
d) Addition à l'oxyde d'éthylène  **L** : $C_8H_{16}O$.

III.2.2. **L** 

III.2.3. Configuration (Z).

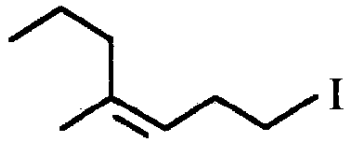
III.3. Synthèse de **M**

III.3.1. ROH + TsCl → ROTs + HCl Formule de l'intermédiaire :



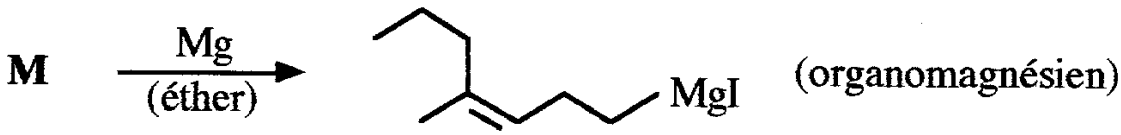
La pyridine exalte l'électrophilie du chlorure d'acid et piège le HCl formé.

III.3.2. NaI donne lieu à une SN_2 (cf. première partie)

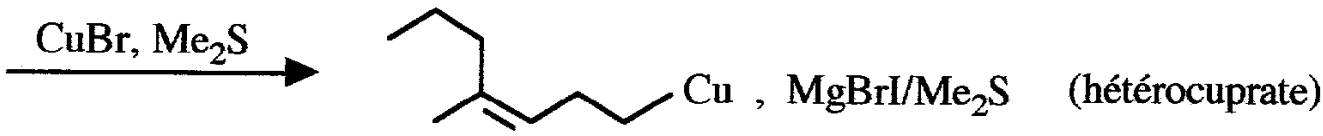
III.3.3. Formule de **M** : 

III.4. III.4.1. Obtention de **N**. Les étapes successives sont schématisées ci-dessous :

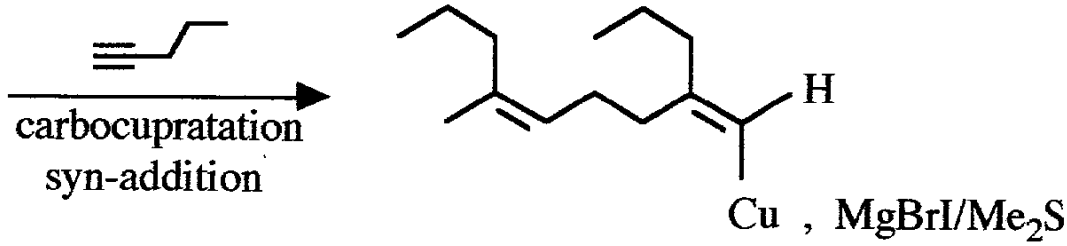
a)



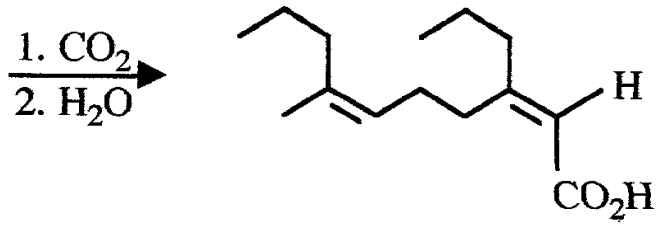
b)



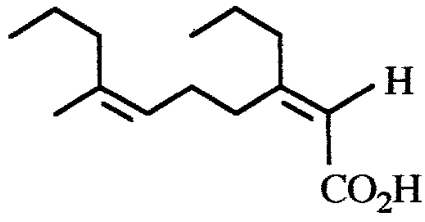
c)



d)



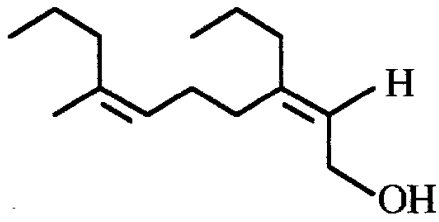
III.4.2. Formule de **N** :



III.5. Réduction de **N** :

III.5.1. Mécanisme de réduction d'un acide en alcool, via l'aldéhyde, par $LiAlH_4$

Phéromone :

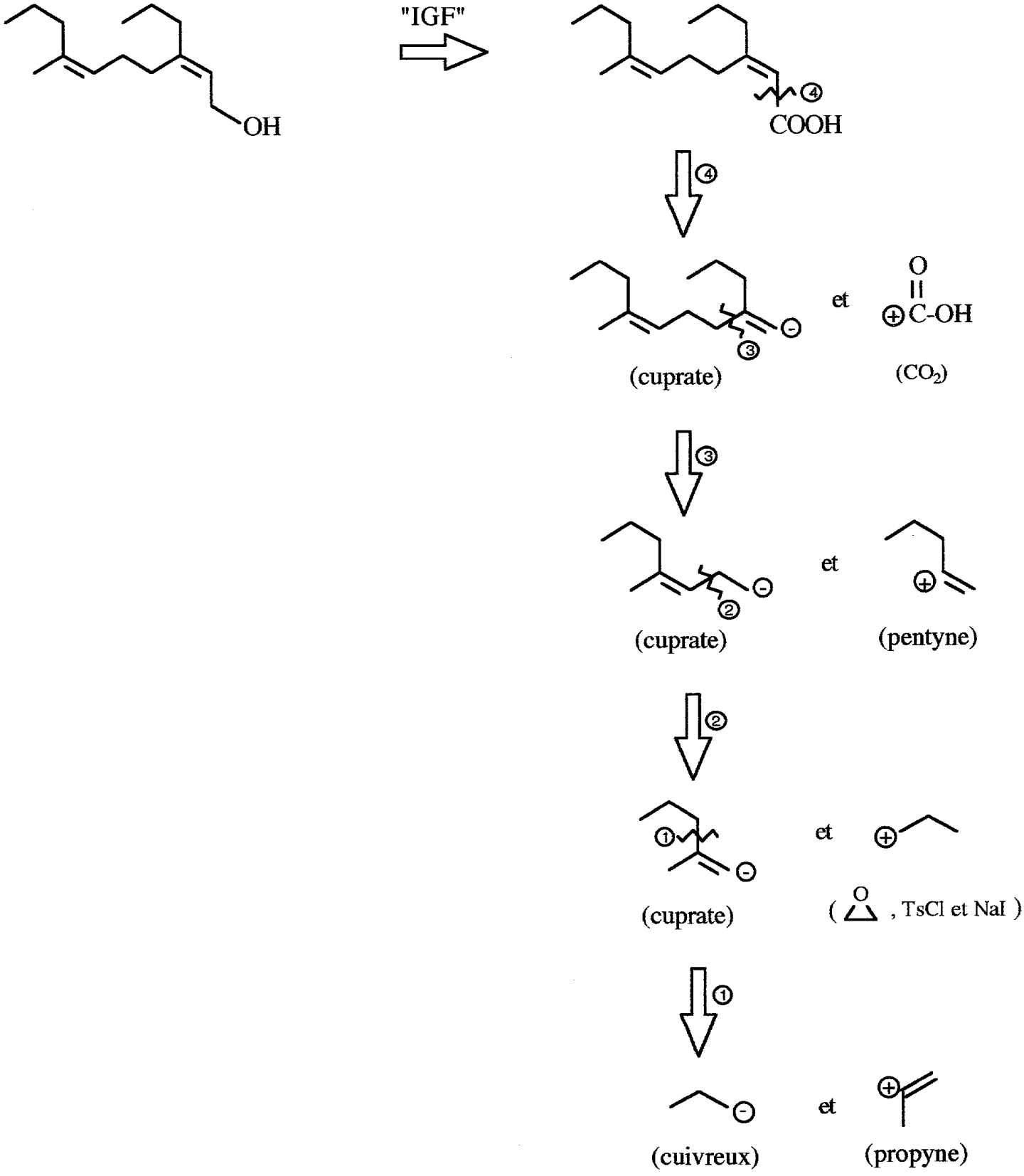


II.5.2. Éther anhydre car $LiAlH_4$ est hydrolysé par l'eau.

III.6. Bilan réactionnel :

III.6.1. Rdt = 0,89 . 0,84 . 0,50 . 0,98 = 36,6 %

III.6.2. Analyse rétrosynthétique :



BIBLIOGRAPHIE

[1] Multistriatine : K. MORI et Coll. Trétrahédron (1980) 36 87.

[2] Généralités sur les organométalliques : J.F. NORMANT, Bulletin de l'Union des Physiciens, (1991), 1333.

[3] Généralités sur les rétrosynthèses : SPARFEL et Coll., Bulletin de l'Union des Physiciens, octobre 1992.

[4] Phéromone de l'Ips Confusus : R.M. SILVERSTEIN et Coll. Tétrahédron (1968), 24, 4256.

[5] Phéromone de phalène : P. HELQUIST et Coll. J. Org. Chem. (1979), 44, 1345.

Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE
Épreuve A : Composition de Physique - Session : 1992

PHÉNOMÈNES PIÉZOÉLECTRIQUES ET APPLICATIONS

PARTIE I

PHÉNOMÈNES STATIQUES

A. ÉTUDE MÉCANIQUE

I.1 DÉFORMATION ÉLASTIQUE D'UN RESSORT.

I.1.a. En supposant, comme dans le cas d'un seul ressort, que le poids n'intervient pas, la tension F de la chaîne est la même partout et l'allongement total est $n(l_1' - l_1)$. On en déduit $\boxed{K_n = \frac{K_1}{n}}$.

I.1.b. Une longueur l correspond à $n = \frac{l}{l_1}$ ressorts et sa raideur est $\boxed{K(l) = \frac{K_1 l_1}{l}}$.

I.1.c. On voit que le produit $\boxed{k = K \cdot l}$ ne dépend pas de la longueur considérée.

I.2. DÉFORMATION ÉLASTIQUE D'UNE LAME.

I.2.a. D'après la question précédente, le produit K·e ne dépend pas de l'épaisseur de la lame. Comme il est proportionnel à la surface A (équivalence à des ressorts placés en parallèle), la constante de rigidité élastique sera définie par $k = K\frac{e}{A}$.

Les forces F appliquées à la lame provoquent la variation u de son épaisseur telle que F = Ku en mesure algébrique. En reportant K dans l'expression de la constante de rigidité, on obtient $\boxed{k = \frac{\Sigma}{U}}$. La rigidité k est égale à la constante Y'.

I.2.b. Les forces F fournissent à la lame, au cours de la variation élémentaire d'épaisseur du, un travail δT qui ne dépend que du déplacement relatif des armatures : $\delta T = F \cdot du = \Sigma A e \cdot dU = \tau Y' U dU$ où $\tau = Ae$ est le volume de la lame. Par intégration on obtient l'énergie potentielle élastique de la lame qui, en valeur volumique s'exprime par $\boxed{w_m = \frac{1}{2} Y' U^2}$.

I.2.c. *Application numérique.*

Pour $w_m = 1\ \text{mJ}\cdot\text{cm}^{-3}$, on obtient $U = 1{,}52 \cdot 10^{-4}$, soit $\boxed{u = 0{,}152\ \mu\text{m}}$.

La force correspondante est F = AY'U, soit $\boxed{F = 1{,}32 \cdot 10^3\ \text{N}}$. Cette valeur (égale au poids de 130 kg) est très grande, ce qui montre qu'une énergie de $1\ \text{mJ}\cdot\text{cm}^{-3}$ n'est pas courante.

B. ÉTUDE ÉLECTRIQUE

I.3. POLARISATION D'UN DIÉLECTRIQUE.

I.3.a.b. Voir les cours. $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$, $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Unités : $C \cdot m^{-2}$.

$\rho_p = -\operatorname{div}\vec{P}$; $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{u_n}$; $\operatorname{div}\vec{D} = \rho_{etr}$; $\vec{rot}\vec{E} = \vec{0}$; $\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n} = \sigma_{etr}\vec{u_{12}}$; $\vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t} = \vec{0}$.

I.3.c. Dans un diélectrique linéaire $\vec{P}$ est fonction linéaire de $\vec{E}$. L'isotropie réduit cette fonction à la proportionnalité : $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ et $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$, avec $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$.

I.3.d. α) Les effets de bord sont négligeables si la zone sur laquelle ils se manifestent, de l'ordre de grandeur de l'épaisseur e, est faible devant les dimensions de la surface A de la lame.

β) On néglige les effets de bord en considérant l'aire A prise dans une lame aux faces infinies. La symétrie de révolution autour de tout axe orthogonal aux faces entraîne que les vecteurs doivent être parallèles à l'axe Ox. La symétrie par toute translation parallèle aux faces entraîne que les champs ne dépendent que de Ox. En l'absence de charges étrangères dans le diélectrique, l'équation $\operatorname{div}\vec{D}(E;\vec{\ }) = 0$ soit $\frac{\partial D_x}{\partial x} = 0$ entraine que $\vec{D}$ ne dépend pas de x et est donc uniforme. Il en est de même pour les champs $\vec{P}$ et $\vec{E}$ qui lui sont proportionnels.

Voir les cours pour établir l'expression de la capacité : $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{e}$.

I.3.e. Le travail électrique reçue par le condensateur quand la charge $q = A\sigma$ de l'armature F_2 varie de dq est $\delta T = V\,dq = CV dV$ qui par intégration donne l'énergie électrostatique dont l'expression par unité de volume est $\boxed{w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2}$.

I.3.f. *Application numérique.*

Pour $w_e = 1\ mJ \cdot cm^{-3}$, le champ électrique vaut $|E| = 7{,}09 \cdot 10^6\ V \cdot m^{-1}$ d'où l'on déduit $\boxed{V = 7{,}1\ kV}$.

La charge surfacique $\sigma = -D = \varepsilon_0 \varepsilon_r |E|$ est égale à $\boxed{\sigma = 28\ nC \cdot cm^{-2}}$.

I.4. POLARISATION PAR DÉFORMATION.

I.4.a. Les forces appliquées symétriquement sur les deux faces font apparaître la polarisation $\vec{P}'$ dont le sens bien déterminé rompt cette symétrie. Le cristal piézoélectrique ne possède donc pas les éléments de symétrie correspondant à des opérations qui inversent le sens de l'axe Ox : plan et axes de symétrie parallèles aux faces, centre de symétrie. La piézoélectricité ne peut donc se manifester que dans les classes cristallines qui n'admettent pas ces symétries.

I.4.b. La polarisation totale de la lame comprend le terme de déformation $\vec{P}'$ et le terme dû à l'action du champ électrique $\vec{P}'' = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E}$. D'après sa définition, le vecteur excitation électrique a pour expression $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}' + \vec{P}''$ soit, en mesure algébrique sur Ox : $\boxed{D = \varepsilon E + \gamma U}$.

I.4.c. La couche métallique déposée sur la face F_2 peut porter les charges surfaciques σ sur son côté interne (en contact avec le diélectrique) et σ_e sur son côté externe. Pour un condensateur de ce type, on sait que σ_e est négligeable devant la charge condensée σ, ce qui entraîne que la charge surfacique totale de F_2 se réduit à σ. Les relations de passage pour le champ électrique sur le côté interne se réduisent ici à $\vec{0} - \vec{D} = \sigma \vec{u_x}$, d'où $\boxed{\sigma = -D = -\varepsilon E - \gamma U}$.

I.4.d. *Applications numériques.*

Quand les armatures ne sont pas connectées par un conducteur, elles n'ont acquis aucune charge et $\sigma = 0$. Quand l'étincelle se produit, l'air est devenu conducteur, ce qui impose, en fin de décharge, une différence de potentiel $V = -Ee$ (u étant faible) nulle et donc un champ E nul.

α) σ étant nulle, le champ électrique vaut $E = -\frac{\gamma}{\varepsilon}U = -\delta U$. En utilisant la relation avec la contrainte (en l'absence de connexions) $Y' = \frac{\Sigma}{U} = \frac{F}{AU}$ on obtient la force $\boxed{F = \frac{Y'A}{\delta}\frac{e}{e}V_0 = 2{,}0 \cdot 10^3\ \text{N}}$.

β) Quand l'étincelle s'achève, le champ électrique E est nul et l'armature F_2 a acquis la charge $Q_2 = \sigma A = -\gamma UA$. Si l'on suppose que la déformation est maintenue à la même valeur que précédemment, on peut calculer $Q_2 = -\frac{\gamma}{\delta}\frac{A}{e}V_0 = \varepsilon\frac{A}{e}V_0$, qui fait intervenir l'expression de la capacité du condensateur $C = \varepsilon\frac{A}{e}$. La charge passée dans l'étincelle est donc $\boxed{Q = \varepsilon\frac{A}{e}V_0 = 4{,}0 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}$.

L'hypothèse sur l'invariance de U est approximative. On pourrait tout aussi bien considérer que la contrainte Σ reste constante. Il faudrait alors calculer U en utilisant le coefficient Y à champ nul (défini à la question I.5.a). Il est très voisin de Y' (question I.5.f.α) et la valeur obtenue serait pratiquement la même (question I.5.f.γ).

L'énergie électrique dissipée dans l'étincelle est $W_e = -\int_0^{Q_2} V\, d(A\sigma)$. En considérant ici également que la déformation est invariante, $d\sigma = -\varepsilon\, dE = \frac{\varepsilon}{e}dV$, d'où $\boxed{W_e = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{1}{2}QV_0 = 2{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{J}}$.

Une décharge obtenue ainsi est utilisée dans les allume-gaz (ou les briquets) piézoélectriques.

γ) L'énergie mécanique fournie est égale au travail des forces appliquées aux faces $W_m = \int_0^u A\Sigma\, du = \frac{1}{2}AY'eU^2$, soit $E_m = \frac{1}{2}Y'U^2$ par unité de volume. D'après la question précédente, l'énergie électrique volumique récupérée est $E_e = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2$. Le rapport des deux énergies est $k^2 = \frac{\varepsilon}{Y'}\left(\frac{U}{E_0}\right)^2 = \frac{\varepsilon\delta^2}{Y'}$, soit $\boxed{k^2 = \frac{\gamma\delta}{Y'} = 8{,}5 \cdot 10^{-3}}$.

C. ÉTUDE THERMODYNAMIQUE

I.5. ÉQUATIONS ET FONCTIONS D'ÉTAT À TEMPÉRATURE CONSTANTE.

I.5.a. Dans le cas général, le travail élémentaire fourni à la lame (défini positif dans ce sens) sous les formes mécanique et électrique a pour expression $Fdu + VdQ_2$, soit par unité de volume

$\boxed{\delta W = \Sigma dU - Ed\sigma}$.

I.5.b. Pour une transformation élémentaire réversible, les deux premiers principes permettent d'exprimer la chaleur échangée TdS et le travail $\delta W = d\mathcal{E} - TdS = d(\mathcal{E} - TS)$ à température constante. C'est la différentielle de l'énergie libre de Helmholtz $F = \mathcal{E} - TS$. On a donc $\boxed{\delta W = dF}$.

La variation de F ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial et de l'état final. On peut donc la calculer en considérant successivement deux transformations à σ constante puis à U constante, ce qui conduit à l'expression du travail mécanique obtenue à la question I.4.d.γ, et au travail électrique : $W_e = -\int_0^\sigma E\,d\sigma = \int_0^\sigma \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} + \delta U\right) d\sigma = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon} + \delta U \sigma$.

D'où : $\boxed{F(U,\sigma,T) = F(U=0,\ \sigma=0,\ T) + \frac{1}{2}Y'U^2 + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon} + \delta U\sigma}$,

En fait il est plus simple de calculer F en considérant deux transformations à U constante puis à E constant, ce qui conduit à la forme $\boxed{F = F_0 + \frac{1}{2}YU^2 + \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$

dans laquelle l'énergie mécanique et l'énergie électrique apparaissent clairement.

I.5.c. La lame peut échanger de l'énergie sous forme de travail mécanique, travail électrique et chaleur. L'expression différentielle de chacune de ces énergies est le produit d'un paramètre intensif par la différentielle du paramètre extensif conjugué, ce qui conduit aux couples suivants :

	Travail mécanique	Travail électrique	Chaleur
Paramètres intensifs	Contrainte Σ	Champ -E	Température T
Paramètres extensifs	Déformation U	Charge σ	Entropie S

En fait les paramètres extensifs ont été remplacés par leurs grandeurs volumiques qui sont indépendantes de l'extension du système et pourraient être considérées comme des paramètres intensifs.

I.5.d. La différentielle de l'énergie interne et la définition de Φ permettent d'établir la différentielle $d\Phi = \Sigma dU + \sigma dE - SdT$, qui est bien l'expression de la différentielle d'une fonction des variables U, E et T.

I.5.e. **Première méthode** : On différentie $\Phi = F + E\sigma$ à température constante en utilisant l'expression de F établie en I.5.b : $d\Phi = (YU - \gamma E)\,dU - (\varepsilon E + \gamma U)\,dE$. Par identification avec la différentielle de Φ on obtient $\sigma = -(\varepsilon E + \gamma U)$, qui sert de vérification, et $\boxed{\Sigma = YU - \gamma E}$.

Deuxième méthode : L'application du théorème de Schwarz à la fonction $\Phi(U,E)$ à température constante permet d'obtenir la relation thermodynamique $\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial E}\right)_U = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial U}\right)_E = -\gamma$. On connait déjà $\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial U}\right)_E = Y$.

Ces coefficients étant constants (à température constante), on en déduit $\boxed{\Sigma = YU - \gamma E}$.

I.5.f. *Applications numériques.*

α) À $\sigma = 0$, on a $\Sigma = Y'U$ et $E = -\delta U$. La relation de la question précédente donne alors $\Sigma = YU + \gamma\delta U$, ce qui permet d'établir $\boxed{Y' = Y + \gamma\delta = 0{,}873 \cdot 10^{11}\ N \cdot m^{-2}}$, valeur qui concorde avec celle de l'énoncé.

β) À $\Sigma = 0$, on obtient $U = \frac{\gamma}{Y}E$ que l'on reporte dans l'expression de σ :

$\sigma = -\left(\varepsilon + \frac{\gamma^2}{Y}\right)E$, d'où $\varepsilon_r' = \varepsilon_r\left(1 + \frac{\gamma^2}{\varepsilon Y}\right)$ et $\boxed{\frac{\varepsilon_r' - \varepsilon_r}{\varepsilon_r} = \frac{\gamma\delta}{Y} = 8{,}5\cdot10^{-3}}$.

γ) Quand l'étincelle se produit, le champ passe de la valeur $-\frac{V}{e}$ à la valeur 0. À Σ constante, la charge surfacique varie de $\sigma = -\varepsilon'\left(0 + \frac{V}{e}\right)$, ce qui correspond à la charge totale $\boxed{Q' = \varepsilon'\frac{A}{e}V = 4{,}0\cdot10^{-9}\ C}$, soit la valeur précédente à $8{,}5\cdot10^{-3}$ près.

δ) Toujours à contrainte nulle, la variation d'épaisseur est liée au champ E et à la tension V par la relation de la question β : $\boxed{u = -\frac{\gamma}{Y}V = \pm 2{,}0\cdot10^{-9}\ m}$, le signe dépendant du sens de la tension appliquée.
Ces variations très faibles d'épaisseur permettent de réaliser des positionnements microscopiques de dispositifs mécaniques (cales piézoélectriques). On les utilise par exemple pour la sonde du microscope à effet tunnel, en optique adaptative, dans les buses des têtes d'imprimantes à jet d'encre.

I.6. EFFETS THERMIQUES.

I.6.a. Les variables utilisées étant Σ, σ et T, on utilise la fonction d'état $G = \Im - \Sigma U - TS$ dont la différentielle $dG = -Ud\Sigma - Ed\sigma - SdT$ permet d'établir $\left(\frac{\partial S}{\partial \Sigma}\right)_{\sigma,T} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{\Sigma,\sigma} = \lambda$.

On applique la contrainte de façon réversible (c'est-à-dire à faible vitesse) pour que l'équilibre thermique soit réalisé en permanence et maintienne la température constante. La chaleur reçue (au sens algébrique) par la lame est $\boxed{Q = AeT\Delta S = AeT\lambda\Delta\Sigma = 7{,}2\ mJ}$.

Cette chaleur est positive et est donc $\boxed{\text{reçue par la lame}}$. Si la transformation était adiabatique, il y aurait baisse de température.

I.6.b. α) Quand la température augmente, l'augmentation de volume du diélectrique entraîne une diminution de la polarisation électronique et atomique. La polarisation d'orientation diminue elle-aussi à cause de l'agitation thermique. La permittivité est donc une $\boxed{\text{fonction décroissante}}$ de la température.

β) La différentielle $d(\Im - \Sigma U - E\sigma - TS) = -Ud\Sigma + \sigma dE - SdT$ montre que $\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{\Sigma,T} = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_{\Sigma,E} = -\frac{\varepsilon_0 V}{e}\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial T}\right)_{\Sigma}$.

On en déduit la chaleur volumique échangée $\delta Q = \frac{\varepsilon_0 T}{e^2}\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial T}VdV$ qui s'intègre en $\boxed{Q = \frac{\varepsilon_0 T}{2e^2}\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial T}V^2}$.

Cette chaleur est négative et donc perdue par la lame.

γ) De la dérivée partielle précédente on déduit $\Delta\sigma = \frac{\varepsilon_0 V}{e}\Delta\varepsilon_r$ et la charge correspondante définie positive de F_1 à F_2 : $\boxed{q = \frac{C}{\varepsilon_r}\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial T}\right)_{\Sigma}\Delta T}$, tant que la variation de température n'est pas trop grande.

D. APPLICATIONS

I.7. CAPTEUR D'ACCÉLÉRATION.

I.7.a. Soient $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ les forces exercées respectivement sur les faces 1 et 2 de la lame. Le solide est soumis à la force $-\vec{F_2} = M\vec{a}$ et l'ensemble (lame, solide) à la force $\vec{F_1} = (M+m)\vec{a}$, où m est la masse de la lame. Comme $m << M$, les deux forces ont pratiquement la même norme correspondant à la contrainte $\Sigma = -M\frac{a}{A}$. La lame n'étant pas connectée, la charge des armatures est nulle et il en résulte une tension entre les armatures $V = -eE = \delta e U = \frac{\delta e}{Y'}\Sigma = -\frac{\delta}{Y'}\frac{e}{A}Ma$, d'où la sensibilité $\boxed{s = -\frac{\delta}{Y'}\frac{e}{A}M}$.

I.7.b. *Applications numériques.*

α) On obtient $\boxed{s = 4{,}9\cdot10^{-2}\ V\cdot s^2\cdot m^{-1}}$.

β) La connexion du capteur au montage de mesure entraine l'apparition d'une charge sur les armatures, ce qui modifie la valeur de la tension V. Cette charge s'effectue avec une constante de temps RC où $C = \varepsilon\frac{A}{e} = 4\ pF$ est la capacité de la lame. L'effet sur la valeur de V est négligeable tant que RC est grande devant le temps t d'acquisition de la tension, soit pour $\boxed{R >> \frac{t}{C} = 25\ M\Omega}$.

I.8. PRÉVISION DES SÉISMES.

I.8.a. Les courants telluriques sont dus aux phénomènes électromagnétiques d'origine naturelle (orages atmosphériques, variations du champ magnétique terrestre provoquées par les modifications de l'ionosphère), ou d'origine humaine (activités industrielles, courants de retour).

I.8.b. Dans le quartz (q. I.4.b) $\boxed{D' = \varepsilon E' + \gamma U}$. Dans le matériau non-piézoélectrique $\boxed{D'' = \varepsilon'' E''}$.

I.8.c. La conservativité du flux du déplacement électrique impose $D' = D'' = 0$ en l'absence de connexion. Il en résulte $\varepsilon E' + \frac{\gamma}{Y'}\Sigma = \varepsilon'' E'' = 0$. Seule intervient dans la tension la circulation de E' dans l'ensemble des tranches de quartz de longueur totale $\frac{L}{2}$: $\boxed{V = \frac{\delta}{Y'}\frac{L}{2}\Sigma}$.

Application numérique : On obtient $\boxed{\Sigma = 0{,}40\ N\cdot cm^{-2}}$.

Cette valeur (4 % environ de la pression atmosphérique) n'est pas excessive et peut correspondre à des $\boxed{\text{valeurs réalistes}}$ des contraintes dans les roches.

I.8.d. Un modèle moins simpliste devrait prendre en compte la $\boxed{\text{distribution réelle}}$ des cristaux piézoélectriques et la $\boxed{\text{conductivité}}$ des roches.

PARTIE II

APPLICATIONS QUASISTATIQUES

Les lois de la lame piézoélectrique sont (1) $\Sigma = Y'U + \delta\sigma$ (2) $\sigma = -\varepsilon E - \gamma U$

qui se mettent sous la forme (3) $U = -\frac{\varepsilon}{\gamma}E - \frac{\sigma}{\gamma}$ (4) $\Sigma = -\frac{\varepsilon Y'}{\gamma}E + \left(\delta - \frac{Y'}{\gamma}\right)\sigma$.

II.1. CAPTEUR DE PRESSION.

II.1.a. On peut considérer que l'équilibre de la lame est réalisé à tout instant si le temps caractéristique θ de variation de p(t) est grand devant le temps caractéristique de mise en équilibre de la lame qui a pour ordre de grandeur le temps mis par les ondes élastiques pour parcourir l'épaisseur de la lame $\frac{e}{c}$, où c est la vitesse des ondes dans la lame. La condition de l'approximation quasistatique s'écrit donc $\boxed{c\theta >> e}$.

II.1.b. La grande impédance d'entrée du circuit de mesure permet de considérer les armatures comme non connectées : $\sigma = 0$. L'énergie élastique due au déplacement $-u = -eU$ de F_1 est alors, par unité de surface, $\int_0^{-U} \Sigma e dU$ soit $\boxed{w_e = \frac{1}{2}Y'eU^2}$.

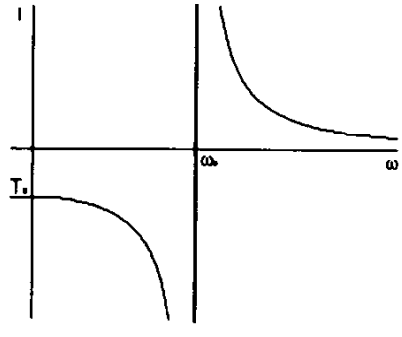
La contrainte étant uniforme dans la lame (dans l'approximation quasistatique), le déplacement de chaque tranche de la lame est proportionnel à sa distance x à F_2 : $u(x) = eU\frac{x}{-e} = -Ux$. Son énergie cinétique par unité de surface est $\delta w_c = \backslash F(1;2)\,\mu\,dx\,x^2\backslash O(U;\dot{})^2$ dont l'intégration donne l'énergie cinétique de toute la lame $\boxed{w_c = \frac{1}{6}\mu e^3 \dot{U}^2}$.

II.1.c. Le théorème de l'énergie mécanique permet d'égaler la dérivée de l'énergie mécanique $w_e + w_c$ à la puissance des forces extérieures appliquées à la lame par unité de surface $(p_0 + p)\cdot(-\dot{u}) = -(p_0 + p)\,e\,\dot{U}$. En divisant par $\dot{U}$, il reste $\boxed{\frac{1}{3}\mu e^2 \ddot{U} + Y'U = -(p_0 + p)}$.

II.1.d. La solution de l'équation précédente en régime attracteur (solution particulière) comporte une déformation permanente $-\frac{p_0}{Y'}$ à laquelle se superpose une déformation sinusoïdale de représentation complexe $\underline{U}$ telle que $(\frac{1}{3}\mu e^2\omega^2 - Y')\underline{U} = \underline{p}$. En l'absence de charges, cette déformation entraine l'apparition d'une tension sinusoïdale $\underline{V} = -e\underline{E} = e\delta\underline{U}$. On en déduit la transmittance

$$\boxed{T = \frac{\underline{V}}{\underline{p}} = \frac{-e\delta}{Y' - \frac{1}{3}\mu e^2\omega^2}}.$$

II.1.e. La courbe représentative de la fonction $T(\omega)$ a l'allure ci-contre : la transmittance ne peut être considérée comme constante que pour les faibles fréquences. Ce capteur ne fournira donc une image fidèle d'un signal que si ce dernier ne comporte que des fréquences faibles devant la fréquence de résonance $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi e}\sqrt{\frac{3Y'}{\mu}} = \boxed{1{,}6\ \text{MHz}}$, soit par exemple sur l'intervalle de fréquences [0, 500 kHz] environ, d'après la courbe.

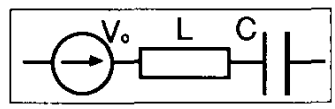


II.1.f. Pour augmenter cet intervalle, il faut augmenter ω_0, ce qui peut être obtenu soit en \X(diminuant l'épaisseur), soit en prenant un matériau piézoélectrique plus rigide ou moins dense.

II.1.g. La linéarité des relations entre les différentes grandeurs mécaniques et électriques permet d'utiliser le théorème de Thévenin. La superposition des tensions (permanente et sinusoïdale) déterminées à la question II.1.d, représente la tension à vide V_0. L'impédance interne du capteur s'obtient en considérant une contrainte nulle et en remplaçant Y' par $Y''=Y'-\frac{1}{3}\mu e^2\omega^2$ pour tenir compte de l'énergie cinétique.

Dans ces conditions l'équation (4) devient $\underline{\sigma}=-\frac{\varepsilon}{1-\frac{\gamma\delta}{Y''}}\underline{E}$, d'où l'on tire la charge $\underline{q}=\frac{\varepsilon}{1-\frac{\gamma\delta}{Y''}}\frac{A}{e}\underline{V}$.

L'intensité arrivant en F_2 est $\underline{I}=i\omega\underline{q}$ et l'impédance a pour expression $Z=\frac{\underline{V}}{\underline{I}}=\frac{1}{iC_0\omega}\left(1-\frac{\gamma\delta}{Y''}\right)$ avec $C_0=\varepsilon\frac{A}{e}$. Compte-tenu du domaine de fonctionnement du capteur en fréquence, on peut remplacer $\frac{1}{Y''}$ par $\frac{1}{Y'}\left(1+\frac{1}{3}\mu e^2\omega^2\right)$, ce qui conduit à $Z=\frac{1}{iC_0\omega}\left(1-\frac{\gamma\delta}{Y'}\right)+\frac{\mu e^2}{3C_0Y'}i\omega$. Z est de la forme $\frac{1}{iC\omega}+iL\omega$: la lame se comporte comme une capacité C et une inductance L placées en série avec la tension V_0 :



En posant $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{1-\frac{\gamma\delta}{Y'}}\approx\varepsilon$, $\boxed{C=\varepsilon'\frac{A}{e}}$ et $\boxed{L=\frac{\mu e^2}{3C_0Y'}=\frac{1}{C_0\omega_0^2}}$.

II.1.h. Un tel dispositif peut servir à détecter la pression du son comme dans les microphones piézoélectriques.

II.2. LECTURE MÉCANIQUE D'UN DISQUE.

II.2.a. En désignant par x_1 et x_2 les abscisses des faces F_1 et F_2, la loi de la liaison élastique s'écrit $A\Sigma=K(x_1-x-l_0)$ et le théorème de la quantité de mouvement $A\Sigma+Mg=-M\ddot{x}_2$.

L'épaisseur du cristal est $x_2-x_1=e(1+U)$. Après élimination de x_1 et x_2 entre les trois équations, il reste $\boxed{e\ddot{U}+\frac{A}{M}\Sigma+g+\frac{A}{K}\ddot{\Sigma}+\ddot{x}=0}$.

Remarque : l'énergie cinétique du cristal est négligeable devant celle du bras.

II.2.b. En reportant dans la relation précédente les expressions de U et Σ de (3) et (4), on obtient

$$\boxed{\frac{\varepsilon}{\gamma}\left(1+\frac{AY'}{Ke}\right)\ddot{V}+\frac{\varepsilon AY'}{\gamma Me}V-\frac{1}{\gamma}\left(e+\frac{A}{K}(Y'-\gamma\delta)\right)\ddot{\sigma}-\frac{A}{\gamma M}(Y'-\delta\gamma)\sigma+g+\ddot{x}=0}.$$

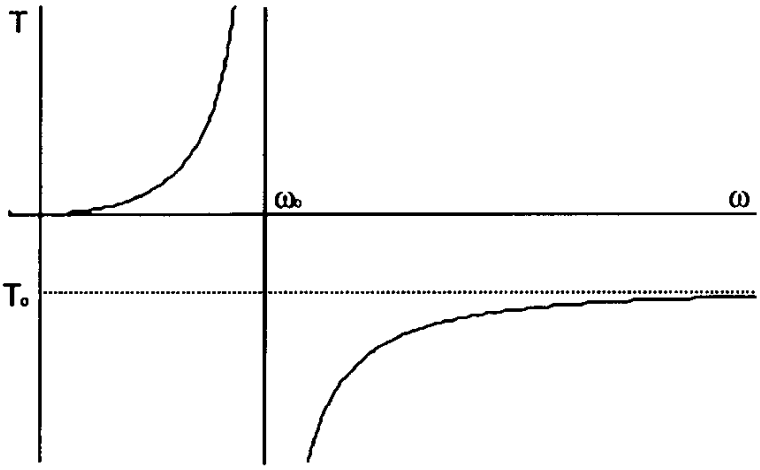
II.2.c. Les simplifications découlent de $\gamma\delta<<Y'$ et $AY'>>Ke$:

$$\boxed{\frac{A}{K}\left(\frac{\varepsilon}{e}\ddot{V}-\ddot{\sigma}\right)+\frac{A}{M}\left(\frac{\varepsilon}{e}V-\sigma\right)+\frac{\gamma}{Y'}(g+\ddot{x})=0}.$$

II.2.d. A circuit ouvert $\sigma=0$ et l'équation se réduit à $C_0\left(\frac{\ddot{V}}{K}+\frac{V}{M}\right)+\frac{\gamma}{Y'}(g+\ddot{x})=0$. La solution de cette équation en régime attracteur comporte une tension permanente $-\frac{M\gamma}{C_0Y'}g$ et une tension sinusoïdale de représentation complexe $\underline{V}$ telle que $C_0\left(-\frac{\omega^2}{K}+\frac{1}{M}\right)\underline{V}=\frac{\gamma\omega^2}{Y'}\underline{x}$.

On en déduit la transmittance $\boxed{T=\frac{V}{\underline{x}}=\frac{M\gamma\omega^2}{Y'C_0\left(1-\frac{M}{K}\omega^2\right)}}$.

La courbe représentative ci-contre de $T(\omega)$ montre une résonance pour $\omega_0=\sqrt{\frac{K}{M}}$. La transmittance ne se stabilise que pour les pulsations très supérieures à ω_0.



II.2.e. L'image du signal x(t) ne sera fidèle que si la fréquence minimale $\nu_m=20\,Hz$ est bien supérieure à $\frac{\omega_0}{2\pi}$ soit pour $\boxed{M>>\frac{K}{4\pi^2\nu_m^2}=3{,}2\,g}$. On peut prendre par exemple, d'après la courbe, $M>13\,g$.

II.2.f. La condition précédente étant satisfaite, la transmittance vaut $T_0=-\frac{K\gamma}{Y'C_0}=8240\,V\cdot m^{-1}$ ce qui permet de calculer l'amplitude de la composante variable de la tension $\boxed{V=82\,mV}$.

II.2.g. Comme en II.1.g la linéarité des relations entre les différentes grandeurs mécaniques et électriques permet d'utiliser le théorème de Thévenin. La superposition des tensions précédentes (permanente et sinusoïdale) représente la tension à vide V_0. L'impédance interne s'obtient pour $x=0$. L'équation de II.2.c se réduit alors à $q=C_0V$, qui est la loi d'une capacité $\boxed{Co=\varepsilon\frac{A}{e}}$.

D'où le schéma équivalent :

PARTIE III

OSCILLATIONS À HAUTE FRÉQUENCE

III.1. VIBRATIONS PROPRES D'UNE LAME.

III.1.a. Le théorème de la quantité de mouvement, appliqué à une tranche de lame de surface unité s'écrit, par unité d'épaisseur de la tranche, $\frac{\partial\Sigma}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$.

L'équation $div\vec{D}=\rho_{étr}=0$ impose que D soit indépendant de x et la relation de passage entraîne $D=-\sigma=0$ puisque les armatures ne sont pas connectées. On a donc $\Sigma=Y'U=Y'\frac{\partial u}{\partial x}$.

D'où l'équation cherchée $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0$, avec $\boxed{c=\sqrt{\frac{Y'}{\mu}}}$.

III.1.b. *Applications numériques.*

α) On obtient $\boxed{c=5{,}73\cdot10^3\,m\cdot s^{-1}}$.

β) La propagation est négligeable tant que l'épaisseur e de la lame reste faible devant la longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{\nu}$ où ν est la fréquence, soit pour des fréquences faibles devant $\nu_0 = \frac{c}{e} = \boxed{5{,}7\ \text{MHz}}$. Il faut donc tenir compte de la propagation quand la fréquence devient supérieure à des valeurs de l'ordre de 0,5 MHz par exemple.

III.1.c. α) Dans une onde stationnaire, l'amplitude est fonction de la coordonnée d'espace x mais la phase n'en dépend pas et peut être prise égale à ωt : $u(x,t) = f(x)\cdot\cos\omega t$. L'équation d'onde s'écrit dans ce cas $f'' + k^2 f = 0$ dont la solution générale est $f(x) = \alpha \sin kx + \beta \cos kx$.

β) Le milieu de la lame étant fixe, $\beta = 0$. Aucune force n'étant appliquée aux armatures, $\Sigma\left(\pm\frac{e}{2}\right) = Y' \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

γ) Les deux conditions précédentes imposent $\cos k\left(\pm\frac{e}{2}\right) = 0$, soit $ke = -\pi + 2p\pi$ (avec p entier positif).

Les fréquences correspondantes sont $\boxed{\nu_p = \frac{c}{e}\left(p - \frac{1}{2}\right)}$.

À la fréquence fondamentale (p = 1), l'épaisseur de la lame est égale à la demi-longueur d'onde.

III.1.d. α) On obtient $\boxed{e = \frac{c}{2\nu_1} = 0{,}68\ \text{mm}}$.

Des dispositifs électroniques permettent de diviser les fréquences par 2 et de parcourir l'échelle des puissances de 2 jusqu'aux fréquences désirées, qui sont alors réalisées avec une grande précision.

β) La longueur d'onde des ondes électromagnétiques de fréquence ν_1 est $\lambda_0 = \frac{c_0}{\nu_1}$ où $c_0 = 3\cdot10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ est la vitesse de ces ondes dans le vide. On en déduit $\boxed{\Lambda = 2\frac{c_0}{c} = 105\ \text{m}\cdot\text{mm}^{-1}}$.

III.1.e. La variation d'épaisseur de la lame est égale à la différence entre les variations des abscisses des armatures : $\Delta e = u\left(\frac{e}{2}\right) - u\left(-\frac{e}{2}\right) = 2\alpha \sin k\left(\frac{e}{2}\right)\cdot\cos\omega t = \boxed{2\alpha(-1)^p \cos\omega t}$.

Pour calculer la tension entre les armatures non connectée, il faut intégrer entre F_2 et F_1 le champ électrique $E = -\frac{\gamma}{\varepsilon}U = -\delta\frac{\partial u}{\partial x}$, soit $\boxed{V_{21} = \delta\,\Delta e}$.

Application numérique : On obtient $\boxed{V_{21} = 4{,}3\ \text{V}}$.

III.2. LE COMPOSANT ÉLECTRONIQUE "QUARTZ".

III.2.a. Comme à la question précédente, on a toujours $\boxed{D = -\sigma}$ et $\boxed{V = -\int_{-e/2}^{e/2} E\,dx}$.

III.2.b. D n'est pas nul mais est indépendant de x et l'équation $\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ reste valable. De même pour l'équation mécanique $\frac{\partial \Sigma}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. L'équation de propagation n'est donc pas modifiée. En représentation complexe elle devient : $\underline{u}'' + k^2\underline{u} = 0$.

Sa solution, compte-tenu des mêmes conditions aux limites que précédemment, est $\boxed{\underline{u}(x) = \alpha \sin kx}$, d'où $\boxed{\underline{U}(x) = U_0 \cos kx}$.

III.2.c. Sur les armatures la contrainte Σ est nulle et $\underline{\sigma} = -\underline{D} = -\frac{Y'}{\delta}\underline{U}\left(\frac{e}{2}\right) = \boxed{-\frac{Y'}{\delta}U_0 \cos k\frac{e}{2}}$.

On obtient de même le champ électrique $\underline{E} = \frac{\underline{D}}{\varepsilon} - \frac{\gamma}{\varepsilon}\underline{U} = U_0\left(\frac{Y'}{\gamma}\cos k\frac{e}{2} - \delta \cos kx\right)$, qui permet le calcul de la tension $\boxed{\underline{V} = U_0\left(-\frac{Y'}{\gamma}e\cos k\frac{e}{2} + \frac{\delta}{k}2\sin k\frac{e}{2}\right)}$.

III.2.d. L'amplitude complexe de l'intensité (définie positive dans le sens alimentant l'armature F_2) est $\underline{I} = j\omega\sigma A$. Le rapport de la tension sur l'intensité donne l'impédance $\boxed{Z = \frac{1}{j\omega\varepsilon A}\left(e - 2\frac{\gamma\delta}{Y'k}\tan k\frac{e}{2}\right)}$.

III.2.e. L'impédance s'annule pour $\tan k\frac{e}{2} = \frac{Y'ke}{2\gamma\delta}$, soit $\boxed{\tan\frac{\pi e}{c}\nu' = \frac{Y'}{\gamma\delta}\frac{\pi e}{c}\nu'}$,

Elle est infinie pour $\boxed{\nu'' = \frac{c}{e}\left(p - \frac{1}{2}\right) = \nu_p}$, c'est à dire pour les fréquences des vibrations propres.

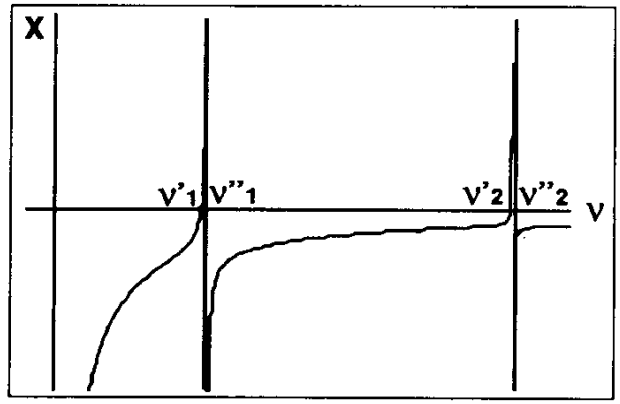
Comme $\frac{Y'}{\gamma\delta} = 118$, les fréquences ν' sont à peine inférieures aux fréquences ν''.

Application numérique : Pour $p = 1$, on obtient directement $\nu_1'' = 2{,}865$ MHz et, par itération, $\nu_1' = 2{,}854$ MHz.

III.2.f. La réactance est

$$X = \frac{-1}{2\pi\nu\varepsilon A}\left(e - \frac{\gamma\delta}{Y'}\frac{c}{\pi\nu}\tan\frac{\pi e}{c}\nu\right)$$

L'allure de sa courbe représentative est obtenue aisément à la calculatrice graphique :

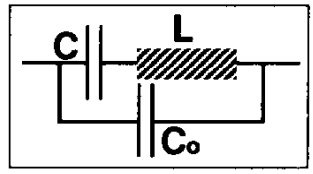


III.2.g. Au voisinage de ν_1' et ν_1'' la fonction tangente dans Z peut s'écrire $\tan\frac{\pi e}{c}\nu = \tan\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{\nu - \nu_1''}{\nu_1''}\right)$ qui se développe en $\frac{-1}{\tan\frac{\pi}{2}\left(\frac{\nu - \nu_1''}{\nu_1''}\right)} \approx \frac{2}{\pi}\frac{\nu_1''}{\nu_1'' - \nu} = \frac{2}{\pi}\frac{\omega_1''}{\omega_1'' - \omega}$ en utilisant les pulsations.

On fait apparaître dans Z la capacité de la lame non-piézoélectrique $C_0 = \varepsilon\frac{A}{e}$, ce qui donne $Z = \frac{1}{jC_0\omega}\left(1 - \frac{1}{K}\frac{\omega_1''^2}{\omega(\omega_1'' - \omega)}\right)$ où $K = \frac{Y'}{\gamma\delta}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 291$. En réduisant au même dénominateur, on fait apparaître au numérateur l'expression $-K\omega^2 + K\omega\omega_1'' - \omega_1''^2$ qui doit s'annuler pour ω_1'. Compte tenu de la proximité de ω_1' et ω_1'' et de la valeur de K, ce numérateur peut se mettre sous la forme $-K\omega(\omega - \omega_1')$ et on obtient $Z = \frac{1}{jC_0\omega}\left(\frac{\omega_1' - \omega}{\omega_1'' - \omega}\right)$.

L'impédance d'un circuit équivalent s'exprime en fonction de jω que l'on fait apparaître dans Z par des carrés obtenus en utilisant la faible valeur de l'intervalle entre ω_1' et ω_1'' : $Z=\frac{1}{jC_0\omega}\left(\frac{\omega_1'^2-\omega^2}{\omega_1''^2-\omega^2}\right)$. Comme $\omega_1''>\omega_1'$, il est plus commode d'exprimer l'admittance $Y=jC_0\omega+jC_0\left(\frac{\omega_1''^2}{\omega_1'^2}-1\right)\frac{\omega}{1-\frac{\omega^2}{\omega_1'^2}}$. Le deuxième terme a la forme $\frac{jC\omega}{1-LC\omega^2}$ de l'admittance d'une inductance L et d'une capacité C en série, avec $C=C_0\left(\frac{\omega_1''^2}{\omega_1'^2}-1\right)$ et $L=\frac{1}{C\omega_1'^2}$.

Le quartz se comporte donc comme une capacité C_0 en parallèle avec une capacité C et une inductance L en série.



Les expressions précédentes permettent le calcul des valeurs numériques :

$\boxed{C_0=\varepsilon\frac{A}{e}=4\text{ pF}}$; $\boxed{C=C_0\left(\frac{\omega_1''^2}{\omega_1'^2}-1\right)=0{,}03\text{ pF}}$; $\boxed{L=\frac{1}{C\omega_1'^2}=0{,}1\text{ H}}$.

III.2.h. Le circuit équivalent du quartz, efficace pour l'étude des circuits électroniques, suit le schéma précédent mais comporte en plus une résistance en série avec l'inductance. Cette résistance correspond à une perte d'énergie. Dans le modèle simple utilisé ici, il n'a pas été tenu compte des pertes d'énergie dans la lame (frottement interne, émission d'ondes acoustiques, par exemple), ce qui justifie que l'on n'ait pas obtenu de résistance dans le circuit équivalent.

III.3. ONDES ULTRASONORES.

III.3.a. Pour une transformation isentropique, la pression et la masse volumique sont liées par la loi de Laplace $\frac{P}{\mu'^\gamma}=f(S)$. En différentiant le logarithme de cette expression, on obtient

$$\boxed{\chi_S=\frac{1}{\mu'}\frac{\partial\mu'}{\partial P}\Big)_S=\frac{1}{\gamma P}}.$$

III.3.b. La conservativité de la masse se traduit par l'équation $\text{div}\mu'\vec{v}+\frac{\partial\mu'}{\partial t}=0$ qui peut s'écrire, compte-tenu de l'expression précédente, $\text{div}\mu'\vec{v}+\frac{\mu'}{\gamma P}\frac{\partial P}{\partial t}=0$. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'unité de volume donne $-\overrightarrow{\text{grad}}P=\mu'\frac{d\vec{v}}{dt}$. Toutes les grandeurs dépendent des coordonnées et du temps. Dans le cas des ondes sonores leurs variations restent faibles et on peut utiliser les développements $\text{div}\mu'\vec{v}\approx\mu'\,\text{div}\,\vec{v}$ et $\frac{d\vec{v}}{dt}\approx\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$.

Dans le cas particulier des ondes planes, une seule coordonnée (x par exemple) intervient et les équations deviennent $\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\gamma P}\frac{\partial P}{\partial t}=0$ et $\frac{\partial P}{\partial x}+\mu'\frac{\partial v}{\partial t}=0$ qui conduisent à l'équation d'onde

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\mu'}{\gamma P}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0}.$$

III.3.c. *Application numérique* : D'après cette équaton la vitesse de phase est $c=\sqrt{\frac{\gamma P}{\mu'}}=\sqrt{\frac{1}{\mu'\chi_s}}$.

α) et β) On obtient respectivement $\boxed{c = 342\ m\cdot s^{-1}}$ et $\boxed{c = 1414\ m\cdot s^{-1}}$.

III.3.d. Pour une onde progressive plane en $\cos(\omega t - kx)$ avec $c = \frac{\omega}{k}$, les relations de la question II.3.b donnent l'impédance complexe $\boxed{Z = \frac{\gamma P}{c} = \mu' c = \sqrt{\gamma P \mu'} = \sqrt{\frac{\mu'}{\chi_s}}}$.

Pour une onde se propageant dans le sens des x négatifs, il faut changer le signe de k et de c, ce qui multiplie l'impédance par $\boxed{-1}$.

Application numérique :

On obtient pour :	l'air	l'eau	le quartz
$Z\ (10^3\ kg\cdot m^{-2}\cdot s^{-1})$	0,410	1414	15180

III.3.e. La puissance transmise par unité de section, due à la pression P appliquée à la tranche de vitesse v s'exprime en valeur moyenne à partir des amplitudes complexes par $P = \frac{1}{2}\Re e(\underline{P}\cdot\underline{v}^*)$, soit $\boxed{P = \frac{1}{2} Z |\underline{v}|^2 = \frac{1}{2}\frac{|\underline{p}|^2}{Z}}$.

III.3.f. Sur le dioptre $\boxed{\text{la vitesse v et la pression P doivent être continues}}$.

Ces relations de continuités s'expriment en fonction des caractéristiques des ondes par $v_i + v_r = v_t$ et $P_i + P_r = P_t$ qui s'écrit également $Z_1(v_i - v_r) = Z_2 v_t$.

On en déduit $\boxed{t_v = \frac{v_t}{v_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2},\ r_v = \frac{v_r}{v_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2},\ t_p = \frac{p_t}{p_i} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2},\ r_p = \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}}$.

III.3.g. Avec les expressions des deux questions précédentes $\boxed{R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \text{ et } T = \frac{4 Z_1 \cdot Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}}$.

On vérifie bien la conservation de l'énergie $R + T = 1$.

Application numérique : On obtient pour les dioptres quartz-air et quartz-eau respectivement $\boxed{T = 1{,}1\cdot 10^{-4} \text{ et } 1{,}2\cdot 10^{-3}}$.

III.3.h. α) Des deux valeurs précédentes il découle $\boxed{T_0 = 1{,}25\cdot 10^{-7}}$.

β) La fraction de puissance transmise est maintenant $T' = \frac{16 Z_1 Z'^2 Z_2}{(Z_1 + Z')^2 (Z' + Z_2)^2}$.

L'inverse de T' est fonction affine de $\frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z'} + \frac{Z'}{\sqrt{Z_1 Z_2}}$ qui est minimale pour

$$\boxed{Z' = \sqrt{Z_1 Z_2} = 4{,}63\cdot 10^6\ kg\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}}.$$

Le coefficient de transmission vaut alors $\boxed{T' = \left(\frac{\sqrt{Z_1} - \sqrt{Z_2}}{\sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2}}\right)^4 = 8{,}0\cdot 10^{-2}}$.

Le gain part rapport à T_0 est d'un facteur $6\cdot 10^5$. L'utilisation d'un milieu intermédiaire est indispensable.

PARTIE IV

SONS ET LUMIÈRES

IV.1. DIFFRACTION DES ONDES LUMINEUSES.

IV.1.a.b.c.d. Voir les cours d'optique. Intensité diffractée : $D=D_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\pi\frac{ax}{\lambda D}\right)$.

Dans le plan focal d'une lentille convergente : $D=D_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\pi\frac{a}{\lambda}\sin\theta\right)$.

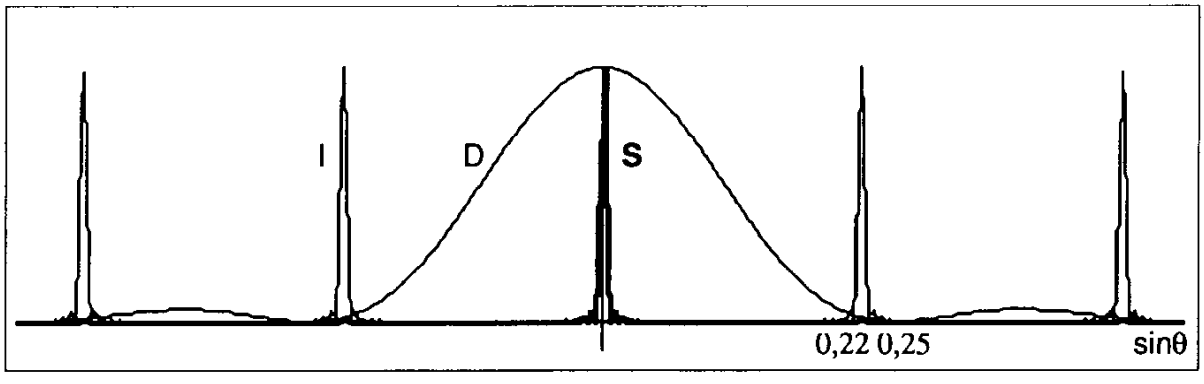
Intensité diffractée par un réseau : $I=I_0\dfrac{\sin^2\left(N\pi\frac{d}{\lambda}(\sin\theta-\sin\theta_0)\right)}{\sin^2\left(\pi\frac{d}{\lambda}(\sin\theta-\sin\theta_0)\right)}$.

IV.2. ÉMETTEUR-DÉFLECTEUR D'ULTRASONS.

IV.2.a. Le calcul de l'onde sonore de longueur d'onde Λ émise par une face est le même que celui de l'onde lumineuse diffractée par une fente et d'intensité D(sinθ). L'émetteur a la structure d'un réseau de N = 32 faces et de pas d = 0,9 mm et la fonction de diffraction D est multipliée par la fonction d'interférence I(sinθ) précédente avec $\theta_0=0$ puisque les cristaux vibrent en phase :

$$S=S_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\pi\frac{a}{\Lambda}\sin\theta\right)\frac{\sin^2\left(N\pi\frac{d}{\Lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\pi\frac{d}{\Lambda}\sin\theta\right)}=S_0\,\mathrm{sinc}^2(4\pi\sin\theta)\cdot\frac{\sin^2(144\pi\sin\theta)}{\sin^2(4{,}5\pi\sin\theta)}.$$

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes (tracées à la calculatrice graphique) représentatives des fonctions $32^2\cdot D$, I et le produit S(sinθ). On constate que les maximums d'interférence, de période 0,22 sont très proches des points, de période 0,25, où s'annule la fonction de diffraction.



Il ne reste que le pic central de la fonction I, de demi-largeur à la base $\frac{\Lambda}{Nd}=0{,}007$.

IV.2.b. Si l'on n'avait qu'un cristal unique de largeur Nd, la frange centrale de diffraction aurait une demi-largeur à la base de $\frac{\Lambda}{Nd}$, ce qui redonnerait le pic central ci-dessus : les N cristaux piézoélectriques sont pratiquement équivalents à un cristal unique.

IV.2.c. À -3 dB la fonction I est divisée par 2, et non $\sqrt{2}$ puisque l'intensité sonore représente la puissance transmise (par unité de surface). Il faut donc calculer la largeur à mi-hauteur du pic central :

on obtient aisément à la calculatrice $\sin\theta = 0{,}0031$ pour cette demi-largeur, soit une largeur du lobe principal égale à 0,0062 rad = 21' : l'émission est très directive.

IV.2.d. Dans la fonction d'interférence I, il faut tenir compte de ce déphasage Ψ. Il est équivalent à un $\sin\theta_0$ tel que $-2\pi\backslash F(d;\Lambda)\sin\theta_0 = \Psi$, soit $\sin\theta_0 = -\backslash F(\Lambda;d)\backslash F(\Psi;2\pi)$. Le maximum du pic central subit une rotation de $\boxed{\theta_0 = -\operatorname{Arcsin}\frac{\Lambda}{d}\frac{\Psi}{2\pi}}$. Sa largeur n'est pas modifiée.

Application numérique : On obtient $\boxed{\theta_0 = 56\,\text{mrad} = 3{,}2°}$.

IV.3. INTERACTION ACOUSTO-OPTIQUE.

IV.3.a.b.c.d. Voir les cours d'électromagnétisme. $\varepsilon_r = n^2$. $\vec{E_l} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$. $v\alpha = 3\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}$ ou $\frac{v\alpha}{\varepsilon_0} = 3\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}$,

selon que l'on définit la polarisabilité α par $\vec{p} = \alpha\,\varepsilon_0\vec{E}$ ou par $\vec{p} = \alpha\vec{E}$.

On utilise les relations entre ε_r et n et entre v et ρ : $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\cdot\frac{1}{\rho} = \text{constante}$.

IV.3.e. La différentiation logarithmique de la relation précédente donne $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 2n\Delta n\left(\frac{1}{n^2 - 1} - \frac{1}{n^2 + 2}\right)$, d'où on tire $\boxed{\Delta n = \frac{(n^2 - 1)\cdot(n^2 + 2)}{6n}\chi\,\Delta P}$.

Application numérique : On obtient $\boxed{K = \frac{\Delta n}{\Delta P} = 1{,}82\cdot10^{-10}\,\text{Pa}^{-1}}$.

IV.4. DIFFRACTION DE LA LUMIÈRE PAR UNE ONDE SONORE.

IV.4.a. La surpression peut s'exprimer en fonction de l'abscisse par $P = P_M\cos 2\pi\frac{x}{\Lambda}$ à l'instant considéré. Cette valeur étant faible devant P_0, on peut utiliser la loi de la question précédente pour déterminer la variation de l'indice : $\boxed{\Delta n = K\cdot P_M\cos 2\pi\frac{x}{\Lambda}}$.

IV.4.b. L'épaisseur de la cuve étant faible, les rayons lumineux sont très peu déviés par rapport à leur point d'incidence et subissent un déphasage (retard) égal à $2\pi\frac{(n + \Delta n)\,h}{\Lambda}$, correspondant au facteur de transmission $\tau = \tau_0\exp\left(i2\pi\,\Delta n\frac{h}{\lambda}\right)$. Le coefficient K étant faible pour l'eau, on peut utiliser un développement de l'exponentielle : $\boxed{\tau = \tau_0\left(1 + i\,2\pi K P_M\frac{h}{\lambda}\cos 2\pi\frac{x}{\Lambda}\right)}$.

IV.4.c. L'intégrale de la diffraction à l'infini est $D = D_0\int_{-L/2}^{L/2}\tau(x)\cdot\exp\left(i\,2\pi\frac{x}{\lambda}\sin\theta\right)dx$.

Pour calculer cette intégrale, on peut décomposer le cosinus de $\tau(x)$ en exponentielles et se ramener ainsi à trois intégrales classiques de la diffraction :

$$D = D_0\,\tau_0\left[\operatorname{sinc}\pi\frac{L}{\lambda}\sin\theta + i\,\pi K P_M\frac{h}{\lambda}\left(\operatorname{sinc}\pi\frac{L}{\lambda}(\sin\theta + \frac{\lambda}{\Lambda}) + \operatorname{sinc}\pi\frac{L}{\lambda}(\sin\theta - \frac{\lambda}{\Lambda})\right)\right].$$

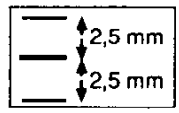
Les deux derniers termes sont espacés l'un de l'autre de $2\frac{\lambda}{\Lambda}$ grand devant la largeur $2\frac{\lambda}{L}$ des franges centrales. L'intensité ne comportera donc que les carrés de ces termes :

$$\boxed{I = I_0\left[\operatorname{sinc}^2\pi\frac{L}{\lambda}\sin\theta + \left(\pi K P_M \frac{h}{\lambda}\right)^2\left(\operatorname{sinc}^2\pi\frac{L}{\lambda}(\sin\theta + \frac{\lambda}{\Lambda}) + \operatorname{sinc}^2\pi\frac{L}{\lambda}(\sin\theta - \frac{\lambda}{\Lambda})\right)\right]}.$$

Le premier terme correspond au faisceau initial et les deux derniers à deux faisceaux déviés de $\pm\frac{\lambda}{\Lambda}$.

La propagation de l'onde sonore déplace l'origine des abscisses dans l'expression de Δn, ce qui conduit à remplacer $\frac{x}{\Lambda}$ par $\frac{x}{\Lambda} - \frac{t}{T}$. Dans l'intégrale de la diffractin il en résulte le facteur $\exp(\pm i\,2\pi\frac{t}{T})$ qui disparait dans l'intensité : la propagation n'influe pas sur l'intensité diffractée.

Application numérique : À la frange centrale de chaque terme de I correspond une raie lumineuse parallèle à Oy, ces raies étant espacées sur Ox de



$f\theta \approx f\frac{\lambda}{\Lambda} = 2{,}5\,\text{mm}$:

IV.4.d. Dans l'eau optiquement non-homogène, les rayons subissent des déviations et ressortent de la cuve en des points différents et avec des directions différentes : le faisceau émergent devient complexe à calculer.

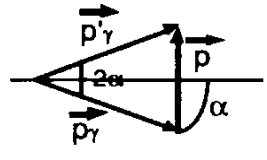
Néanmoins la périodicité Λ de l'onde sonore la rend équivalente à un réseau, dont la figure d'interférences à l'infini est encore formée de franges angulairement distantes de $\frac{\lambda}{\Lambda}$.

IV.4.e. De la mesure de l'interfrange on peut déduire la longueur d'onde Λ de l'onde acoustique.

IV.5. RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE PAR UNE ONDE SONORE.

IV.5.a. $E_\gamma = h\nu$ et $p_\gamma = \frac{h}{\lambda}$, soit $E_\gamma = p_\gamma c$.

IV.5.b. L'énergie E et l'impulsion $\vec{p}$ du phonon se retrouvent dans le photon dévié : $E'_\gamma = E_\gamma + E$ et $\vec{p}\,'_\gamma = \vec{p}_\gamma + \vec{p}$. Comme $E << E_\gamma$, $E'_\gamma \approx E_\gamma$ et $p'_\gamma \approx p_\gamma$. De la deuxième relation vectorielle on déduit alors $p^2 = 2p_\gamma^2(1 - \cos 2\alpha)$ où α est l'angle de chacun des faisceaux lumineux avec la normale à $\vec{p}$. On obtient donc $\boxed{\sin\alpha = \frac{\lambda}{2\Lambda}}$.



IV.5.c. Une loi de ce type régit la réflexion des rayons X par les plans réticulaires des cristaux de période d. C'est la loi de Bragg $2d\sin\alpha = p\lambda$, où p est entier. On retrouve également la loi des questions IV.4.c et IV.4.d avec $\theta = 2\alpha$.

IV.5.d. L'intensité lumineuse réfléchie dépend du nombre de phonons et donc de l'intensité de l'onde acoustique. On peut ainsi commander à partir d'un signal acoustique un signal lumineux permettant de réaliser optiquement des fonctions de l'électronique.

A.B.

Agrégation
(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE
Épreuve B : Composition d'Électricité, d'Électronique, d'Électrotechnique et d'Automatique - Session : 1992

AVERTISSEMENT

L'attention du lecteur est attirée sur le fait que, dans cette composition, la notion de distribution a été délibérément écartée dans le but de ne pas dérouter les candidats qui maîtrisent mal ces aspects mathématiques, et de les faire réfléchir de la manière la plus accessible sur quelques aspects importants de la représentation et du traitement des signaux, et d'utiliser ces concepts dans le domaine des télécommunications.

Cependant il faut souligner que la théorie et le traitement du signal, au même titre que l'électromagnétisme d'ailleurs, ne peuvent se passer de l'outil mathématique fondamental que représentent les distributions.

Ainsi, après avoir suivi le cheminement proposé dans cette composition, le lecteur désirant approfondir le sujet, et soucieux de rigueur mathématique pourra consulter avec profit les ouvrages suivants :

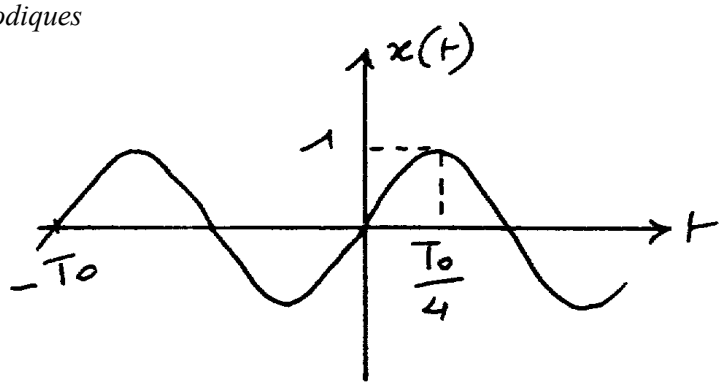
– F. RODDIER, Distributions et transformation de Fourier, Mc Graw-Hill Paris 1978.
– L. SCHWARTZ, Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, Hermann Paris 1965.
– J. ARSAC, Transformation de Fourier et théorie des distributions, Dunod Paris 1961.
– E. ROUBINE, Introduction à la théorie de la communication, Masson Paris 1970.

PARTIE A

A.I. Représentation fréquentielle des signaux

A.I.1. *Signaux Périodiques*

a.



$T_0 = \dfrac{1}{\nu_0}$.

b.

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, \delta(\nu - n\nu_0)$$

avec $$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \sin 2\pi\nu_0 t \, e^{-j\,2\pi n\nu_0 t} \, dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \left(\frac{e^{+j\,2\pi\nu_0 t} - e^{-j\,2\pi\nu_0 t}}{2j} \right) e^{-j\,2\pi n\nu_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2jT_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \left(e^{j\,2\pi\nu_0 (1-n)\,t} - e^{-j\,2\pi\nu_0 (1+n)\,t} \right) dt$$

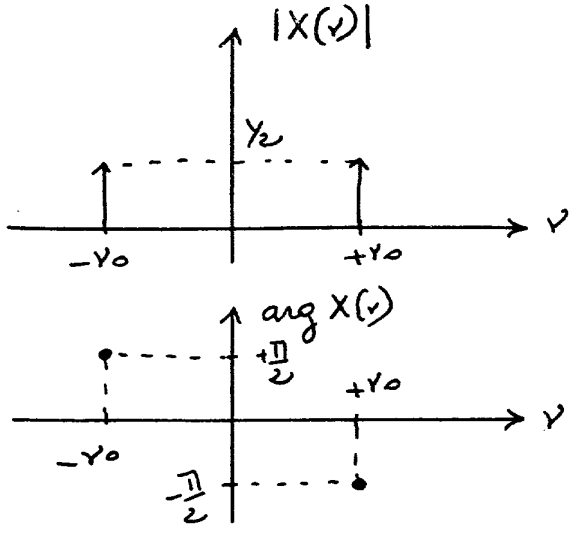
Les seuls coefficients X_n non nuls sont obtenus pour $n = \pm 1$.

$$X_1 = \frac{1}{2jT_0} [t]_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} = \frac{1}{2j}$$

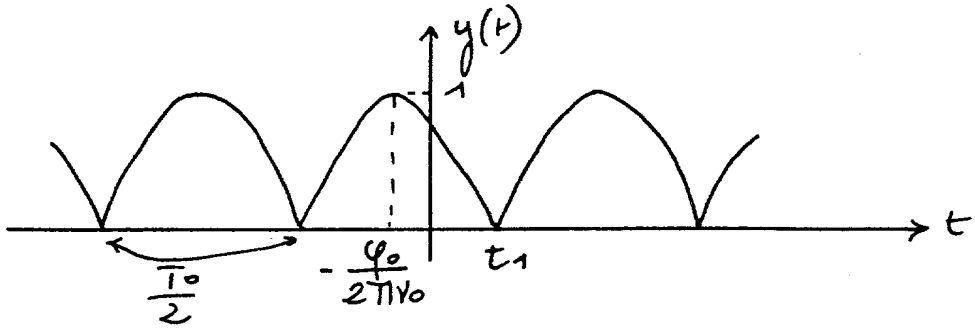
$$X_{-1} = \frac{1}{2jT_0} [-t]_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} = -\frac{1}{2j}$$

$$\boxed{X(\nu) = \frac{1}{2j}\left[\delta(\nu - \nu_0) - \delta(\nu + \nu_0) \right]}$$

c.



d.



$t_1 = \frac{T_0}{4} - \frac{\varphi_0}{2\pi\nu_0}$ signal périodique de période $\frac{T_0}{2}$.

e.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n \, e^{+j\,2\pi n(2\nu_0)t}$$

avec

$$Y_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{+\frac{T_0}{4}} y(t) e^{-j\,2\pi n(2\nu_0)t}\, dt$$

$$= \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1 + \frac{T_0}{2}} \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi_0)\, e^{-j\,4\pi n\nu_0 t}\, dt$$

on pose $u = 2\pi\nu_0 t + \varphi_0$.

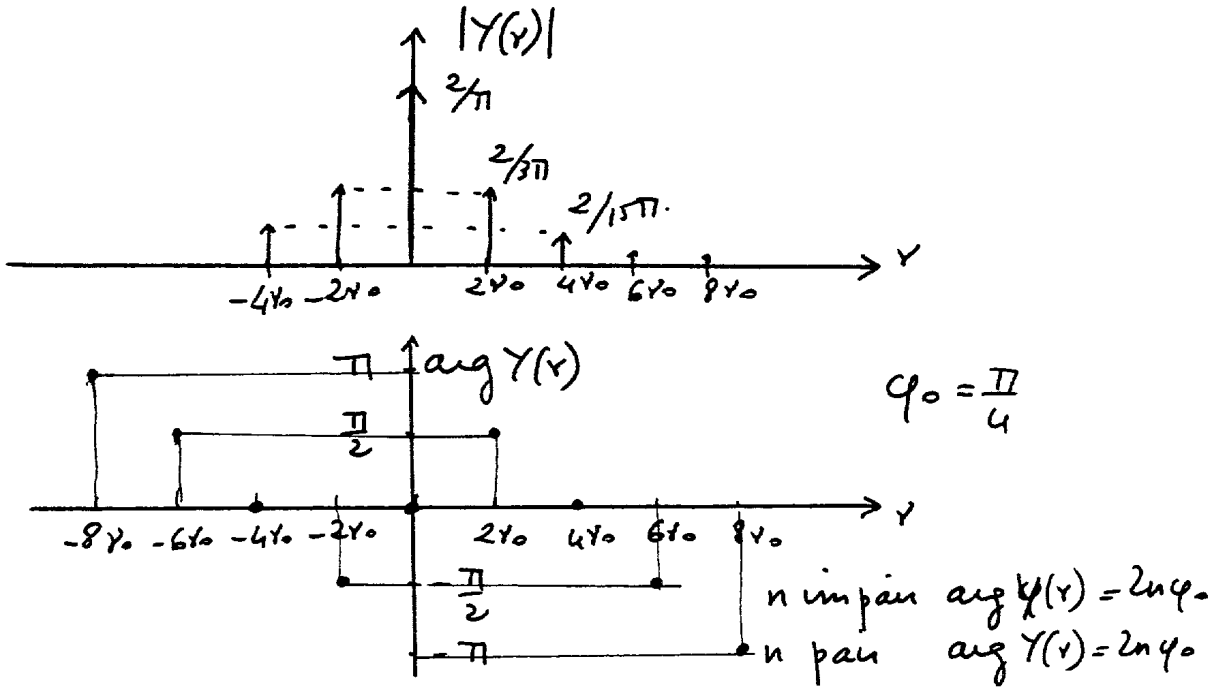
$$Y_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos u \; e^{-j\,4\pi n\nu_0 \left(\frac{u-\varphi_0}{2\pi\nu_0}\right)} \frac{du}{2\pi\nu_0}$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{+j\,2n\varphi_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos u \, e^{-j\,2n\,u}\, du$$

$$Y_n = \frac{1}{\pi} e^{+j\,2n\,\varphi_0} (-1)^n \frac{2}{1-4n^2}$$

$$\boxed{Y(\nu) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{+j\,2n\,\varphi_0} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}\, \delta(\nu - 2n\,\nu_0)}$$

f.



A.I.2. *Signaux apériodiques*

A.I.2.1. *a.* $S(\nu) = A(\nu) = A(\nu)\, e^{+j\,\Phi(\nu)}$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\, e^{+j\,2\pi\nu t}\, d\nu$$

si $s(t)$ est réel alors $S(-\nu) = \overline{S}(\nu)$

donc $\overline{S}(\nu) = A(\nu)\, e^{-j\,\Phi(\nu)} = S(-\nu) = A(-\nu)\, e^{+j\,\Phi(-\nu)}$

on en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{ll} A(\nu) = A(-\nu) & A \text{ pair} \\ -\Phi(\nu) = \Phi(-\nu) & \Phi \text{ impair} \end{array}}$$

b.

$$s(t) = \int_{-\infty}^{0} S(\nu)\, e^{+j\,2\pi\nu t}\, d\nu + \int_{0}^{+\infty} S(\nu)\, e^{+j\,2\pi\nu t}\, d\nu$$

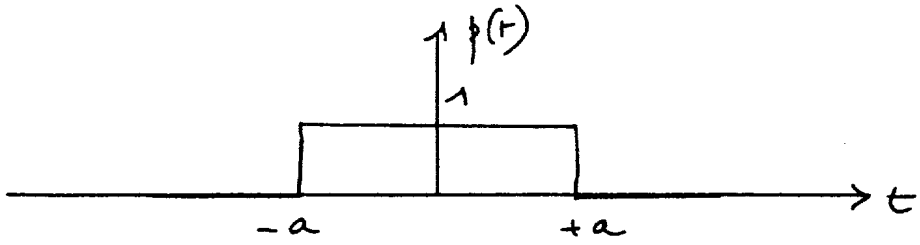
$$= \int_{0}^{+\infty} S(-\nu)\, e^{-j\,2\pi\nu t}\, d\nu + \int_{0}^{+\infty} S(\nu)\, e^{+j\,2\pi\nu t} d\nu$$

$$s(t) = \int_{0}^{+\infty} A(\nu)\, e^{-j\,\Phi(\nu)}\, e^{-j\,2\pi\nu t}\, d\nu + \int_{0}^{+\infty} A(\nu)\, e^{+j\,\Phi(\nu)}\, e^{+j\,2\pi\nu t}\, d\nu$$

$$\boxed{s(t) = 2\int_{0}^{+\infty} A(\nu)\cos\left[2\pi\nu t + \Phi(\nu)\right] d\nu}$$

c. Tout signal réel peut s'écrire sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences ν variant entre 0 et $+\infty$.

A.I.2.2.

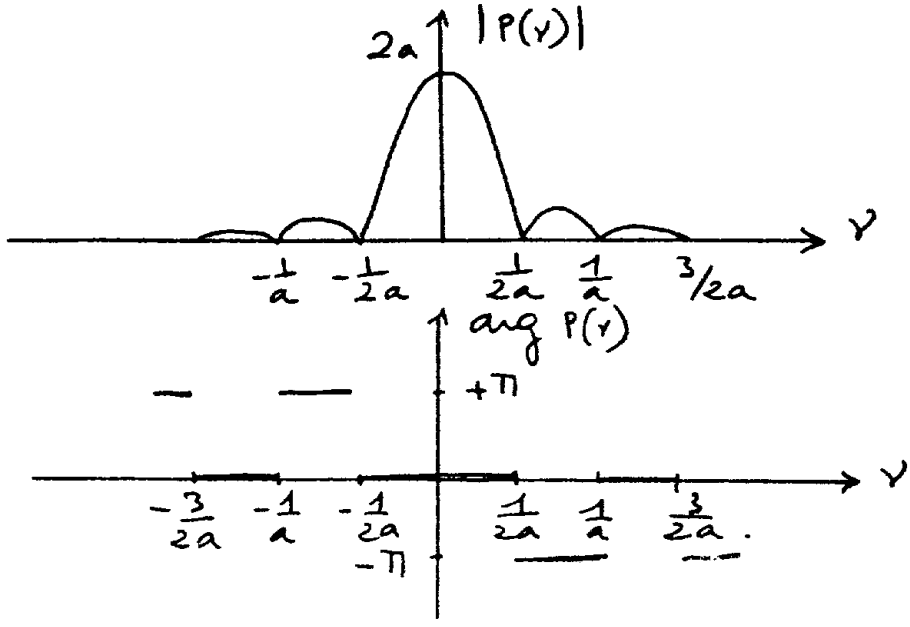


b.

$$P(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, e^{-j\,2\pi\nu t}\, dt = \int_{-a}^{+a} e^{-j\,2\pi\nu t}\, dt$$

$$= \frac{1}{-j\,2\pi\nu}\left[e^{-j\,2\pi\nu t}\right]_{-a}^{+a}$$

$$\boxed{P(\nu) = 2a\,\frac{\sin 2\pi\nu a}{2\pi\nu a}}$$



A.II. **Propriétés énergétiques des signaux**

A.II.1. *Signaux d'énergie finie*

a. L'énergie d'un signal peut être atteinte (calculée) indifféremment soit par son expression dans le domaine temporel, soit par son expression dans le domaine fréquentiel.

b.

$$s(t) \,.\, z(t) \xrightarrow{TF} S(\nu) * Z(\nu)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \,.\, z(t)\, e^{-j\,2\pi\nu' t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) \,.\, Z(\nu' - \nu)\, d\nu$$

$$\nu' = 0 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \,.\, z(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) \,.\, Z(-\nu)\, d\nu$$

$$Z(t) = \overline{s}(t) \;\rightarrow\; Z(-\nu) = \overline{S}(\nu)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\nu)|^2\, d\nu \quad \text{théorème de Parseval.}}$$

c. $\Gamma_x(\tau)$ fonction d'autocorrélation du signal x(t).

$$TF\,[\Gamma_x(\tau)] = TF\,[x(t) * \overline{x}(-t)] = TF\,[x(t)] \,.\, TF\,[\overline{x}(-t)]$$

or :
$$TF\,[\overline{x}(-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x}(-t)\, e^{-j\,2\pi\nu t}\, dt = \int_{+\infty}^{-\infty} \overline{x}(t)\, e^{+j\,2\pi\nu t}\, d(-t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{x}(t)\, e^{+j\,2\pi\nu t}\, dt = \bar{X}(\nu)$$

$$\boxed{TF\,[\Gamma_x(\tau)] = X(\nu)\,.\,\bar{X}(\nu) = |X(\nu)|^2}$$

d.

$$\Gamma_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\bar{x}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$$

= énergie du signal x(t).

A.II.1.1. *a.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)|^2\,dt = \int_{-a}^{+a} dt$$

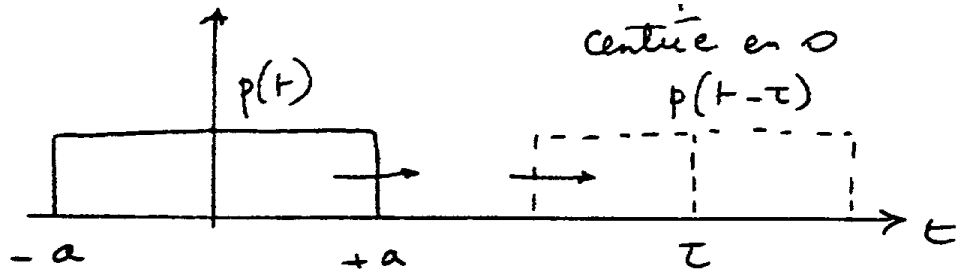
$$\boxed{\text{énergie de } p(t) = 2a}$$

b.

$$\Gamma_p(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,\bar{p}(t-\tau)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,p(t-\tau)\,dt$$

centrée en 0 centrée en τ

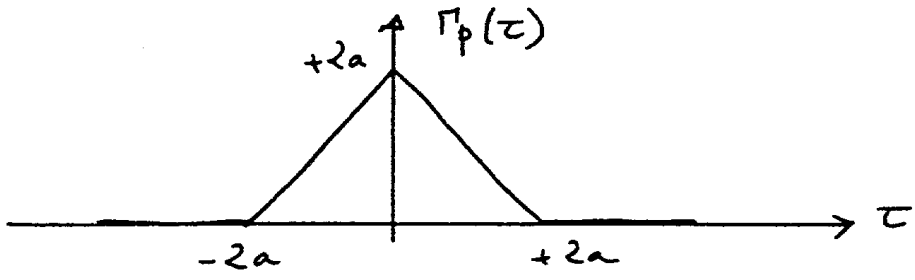


si $|\tau| > 2a$ $\Gamma_p(\tau) = 0$

si $0 < \tau < 2a$ $\Gamma_p(\tau) = \int_{\tau-a}^{a} dt = a - \tau + a = 2a - \tau$

$$\Gamma_p(\tau) = \Gamma_p(-\tau)$$

$$\boxed{\Gamma_p(\tau) = 2a - |\tau|}$$



d. $\Gamma_p(0)$ = énergie du signal p(t) = 2a

A.II.2. *Signaux de puissance finie ou de puissance moyenne finie*

Le signal z (t) est périodique et non sinusoïdal.

A.II.2.1. *a.*

$$P_z = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{4}}^{+\frac{T_0}{4}} |\cos(2\pi\nu_0 t)|^2\, dt$$

$$P_z = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{4}}^{+\frac{T_0}{4}} \frac{1+\cos 4\pi\nu_0 t}{2}\, dt = \frac{2}{T_0}\times\frac{1}{2}\,\frac{T_0}{2}$$

$$\boxed{P_z = \frac{1}{2}}$$

b. On avait trouvé : $Y_n = \frac{2}{\pi}\, e^{+j\,2n\varphi_0}\,\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$

ici : $\varphi_0 = 0$

$$Z_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$$

$Z_0 = \frac{2}{\pi}$	$Z_1 = Z_{-1} = \frac{2}{3\pi}$	$Z_2 = Z_{-2} = -\frac{2}{15\pi}$
$= 0{,}6366$	$= 0{,}2122$	$= -\,0{,}0424$
	$Z_3 = Z_{-3} = \frac{2}{35\pi}$	
	$= 0{,}0182$	

c. $$\mathscr{P}_z = Z_0^{\,2} + 2\left(Z_1^{\,2} + Z_2^{\,2} + Z_3^{\,2}\right)$$

$$\boxed{\mathscr{P}_z = 0{,}4996.}$$

d. $$P_z - \mathscr{P}_z = 4.10^{-4}$$

$$\frac{P_z - \mathscr{P}_z}{P_z} = 8.10^{-4}.$$

$\mathscr{P}_z$ s'approche de P_z à moins de 1 ‰. On peut s'attendre à ce que $\lim_{n\to\infty} \mathscr{P}_z = P_z$

A.II.2.2. *a.*

$$\varphi_s(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,\bar{s}\,(t-\tau)\, dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \, e^{j\,2\pi n \nu_0 t} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{S_m} \, e^{-j\,2\pi m \nu_0 (t-\tau)} \, dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_n \sum_m \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} S_n \, \overline{S_m} \, e^{j\,2\pi \nu_0 [(n-m)\,t + m\tau]} \, dt$$

$$\varphi_s(\tau) = \sum_n \sum_m S_n \, \overline{S_m} \, e^{j\,2\pi \nu_0 m \tau} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} e^{j\,2\pi \nu_0 (n-m)\,t} \, dt$$

$$= \sum_n \sum_m S_n \, \overline{S_m} \, e^{j\,2\pi \nu_0 m \tau} \frac{1}{\pi(n-m)} \cdot \sin \pi(n-m)$$

$= 0$ si $n \neq m$

$= 1$ si $n = m$

$$\boxed{\varphi_s(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |S_n|^2 \, e^{j\,2\pi \nu_0 n \tau}}$$

b.

$$\boxed{\Phi_s(\nu) = TF\,[\varphi_s(\tau)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |S_n|^2 \, \delta(\nu - n\nu_0)}$$

A.II.2.3. *a.*

$$\boxed{h(t) = p(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)}$$

ou :

$$\boxed{h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t - nT_0)}$$

b.

$$H(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n \, \delta(\nu - n\nu_0)$$

$$H_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} p(t) \, e^{-j\,2\pi n \nu_0 t} \, dt = \frac{1}{T_0} \int_{-a}^{+a} e^{-j\,2\pi n \nu_0 t} \, dt$$

$n = 0 \qquad H_o = \frac{2a}{T_0}$

$n \neq 0 \qquad H_n = \frac{1}{-\pi n \nu_0 T_0} \left[\frac{e^{-j\,2\pi n \nu_0 t}}{2j} \right]_{-a}^{+a} = \frac{\sin 2\pi n \nu_0 a}{\pi n}$

$$H(\nu) = \frac{2a}{T_0}\,\delta(\nu) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n\pi}\,\sin 2\pi n\nu_0 a\;\delta(\nu - n\nu_0)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi\nu_0 na}{\pi n}\,\delta(\nu - n\nu_0)$$

c.

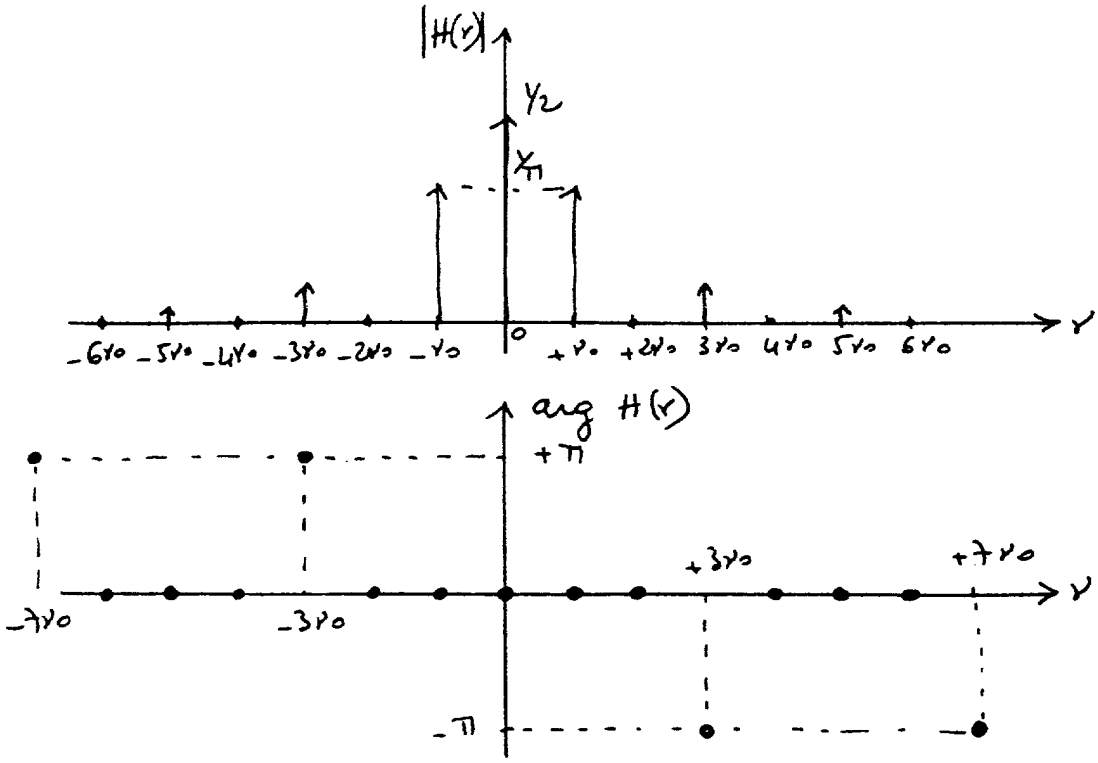
$$a = \frac{T_0}{2} \qquad H_0 = \frac{1}{2}$$

$$H_n = \frac{1}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{2}$$

si n = 2k (pair) $H_{2k} = 0$

si n = 2k + 1 (impair) $H_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,\pi}$

$k \in Z$



d. Il y a plusieurs méthodes :

la plus courte : $P_h = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |h(t)|^2\,dt$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-a}^{+a} dt = \frac{2a}{T_0}$$

$$\boxed{P_h = \frac{1}{2}.}$$

PARTIE B

B.I. **Durée d'un signal et largeur de spectre**

B.I.1. *a.*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,.\,v(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,.\,s(t)\,s'(t)\,dt$$

on intègre par parties : $a = t$ $\quad a' = 1$

$b' = ss'$ $\quad b = \dfrac{s^2}{2}$

$$I = \left[t\,\frac{s^2(t)}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s^2(t)}{2}\,dt$$

0

$$I = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\,dt \qquad \boxed{I = -\frac{1}{2}}$$

$= 1$

b.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\,s^2(t)\,dt = \left(\frac{T}{2}\right)^2$$

c.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s'(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |TF\,[s'(t)]|^2\,d\nu$$ Théorème de Parseval.

d.

$$s'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\,e^{+j\,2\pi\nu t}\,d\nu \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(S(\nu)\,e^{+j\,2\pi\nu t}\,d\nu \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{+j\,2\pi\nu\,S(\nu)\,e^{+j\,2\pi\nu t}}_{TF\,[s'(t)]}\,d\nu.$$

$$\boxed{TF\,[s'(t)] = j\,2\pi\nu\,S(\nu)}$$

e.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s'^2(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\,TF\,[s'(t)]\,|^2\,d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2\nu^2\,|\,S(\nu)\,|^2\,d\nu = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2\,|\,S(\nu)\,|^2 = 4\pi^2 \left(\frac{B}{2}\right)^2$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |\,v(t)\,|^2\,dt = \pi^2\,B^2}$$

f. L'inégalité de Schwarz s'écrit dans ces conditions :

$$\frac{1}{4} \le \left(\frac{T}{2}\right)^2 . \pi^2\,B^2 \qquad \boxed{BT \ge \frac{1}{\pi}}$$

$\frac{1}{\pi}$ est la borne inférieure du produit BT du signal s(t).

B.I.2. *Application*

a.

$$g(t) = a\,e^{-\frac{\pi^2}{2}a^4 t^2}$$

$$g'(t) = a\,.\,2t\,.\,-\frac{\pi^2}{2}a^4\,.\,e^{-\frac{\pi^2}{2}a^4 t^2}$$

$$\boxed{g'(t) = k\,.\,t\,.\,g(t)} \qquad \text{avec} \quad k = -\pi^2\,a^4$$

b.

$$v(t) = g'(t) = k\,.\,t\,.\,g(t) = k\,.\,u(t)$$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,.\,k\,.\,u(t)\,dt\right|^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\,u(t)\,|^2\,dt\,.\int_{-\infty}^{+\infty} |\,k\,u(t)\,|^2\,dt.$$

$$k^2\left|\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t)\,dt\right|^2 \le k^2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\,u(t)\,|^2\,dt\right).$$

si $k \neq 0$ il y a égalité.

c. Pour un signal Gaussien : $\boxed{BT = \frac{1}{\pi}}$

B.II. **Signaux de spectre borné**

B.II.1. *a.*

$$g(t) = f(t)\,.\,c(t)$$

$$G(\nu) = F(\nu) * C(\nu)$$

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n\,\delta\,(\nu - n\nu_0)$$

on a aussi : $f(t) = g(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$

Signal périodique — Signal générateur — Peigne de Dirac

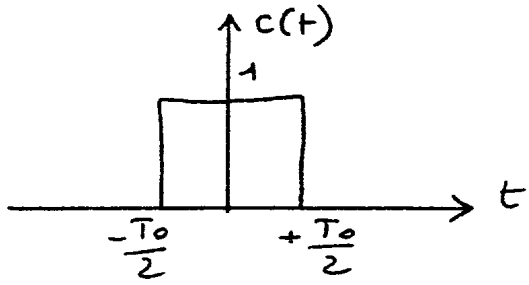
ou

$$F(\nu) = G(\nu) \cdot \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n\nu_0)$$

$$F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{G(n\nu_0)}{T_0} \delta(\nu - n\nu_0)$$

b.

$$C(\nu) = T_0 \frac{\sin \pi\nu T_0}{\pi\nu T_0}$$



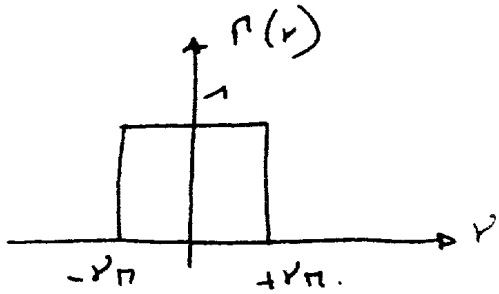
$$G(\nu) = F(\nu) * C(\nu)$$

$$= T_0 \frac{\sin \pi\nu T_0}{\pi\nu T_0} * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{G(n\nu_0)}{T_0} \delta(\nu - n\nu_0).$$

$$G(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\nu} G(n\nu_0) \underbrace{\frac{\sin \pi(\nu - n\nu_0) T_0}{\pi(\nu - n\nu_0) T_0}}_{S_n(\nu)}$$

B.II.2. *Application : échantillonnage*

a. Ce que l'on a établi à la question précédente pour un signal g(t) à support temporel borné g(t) = f(t) . c(t), on va le transposer pour un signal à support spectral donné $S(\nu) = S_E(\nu) \cdot \Gamma(\nu)$.



g(t) = f(t) . c(t)

$$G(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(n\nu_0)\,\frac{\sin \pi\,(\nu - n\nu_0)\,T_0}{\pi\,(\nu - n\nu_0)\,T_0}$$

$$S(\nu) = S_E(\nu)\,.\,\Gamma(\nu)$$

$$\boxed{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{s(nT)\,\frac{\sin \pi\,(2\nu_M t - n)}{\pi\,(2\nu_M t - n)}}_{s_n(t)}} \qquad \text{avec } T = \frac{1}{2\nu_M}.$$

b.

$$s_0(t) = \frac{\sin 2\pi\nu_M t}{2\pi\nu_M t}$$

$$\boxed{S_0(\nu) = TF\,[s_0(t)] = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,\nu_M} & |\nu| \le \nu_M \\ 0 & |\nu| > \nu_M \end{cases}}$$

$$S_n(t) = \frac{\sin \pi\,(2\nu_M t - n)}{\pi\,(2\nu_M t - n)} = s_0(t) * \delta\left(t - \frac{n}{2\nu_M}\right)$$

$$\boxed{S_n(\nu) = S_0(\nu)\,.\,e^{-j\frac{\pi n \nu}{\nu_M}}.}$$

c. Soit : $TF\,[s_n(t)\,.\,s_p(t)] = S_n(\nu) * S_p(\nu)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_n(t)\,.\,s_p(t)\,e^{-j\,2\pi\nu' t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(\nu)\,.\,S_p(\nu' - \nu)\,d\nu$$

pour : $\nu' = 0$ $\qquad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} s_n(t)\,.\,s_p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(\nu)\,.\,S_p(-\nu)\,d\nu$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(\nu)\,.\,\overline{S_p}(\nu)\,d\nu.$$

$$= \int_{-\nu_M}^{+\nu_M} \frac{1}{4\nu_M{}^2}\,e^{-j\frac{\pi\nu}{\nu_M}(n-p)}\,d\nu = 0 \qquad \boxed{\text{si } n \neq p}$$

$$= \frac{1}{2\nu_M} \qquad \text{si } n = p.$$

d.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,\overline{s}(t)\,dt$$

or : $$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\, s_n(t) = \bar{s}(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(nT)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(s_n(t)\right)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(nT)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |Sn(\nu)|^2\, d\nu$$

$$\frac{1}{2\nu_M}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\nu_M} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(nT)|^2}$$

B.III. **Signaux causaux**

B.III.1. *a.*

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

$$x(-t) = x_p(t) - x_i(t)$$

$$\boxed{x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}} \qquad \boxed{x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}}$$

b.

$$X(\nu) = A(\nu) + j\, B(\nu)$$

réel réel

$$\text{TF}\,[x(-t)] = \bar{X}(\nu) = A(\nu) - j\, B(\nu)$$

$$\boxed{\begin{aligned} X_p(\nu) &= A(\nu) \\ X_i(\nu) &= j\, B(\nu) \end{aligned}}$$

B.III.2. *a.* $t < 0$ $\quad x(t) = 0$ $\quad x_p(t) = -x_i(t)$

$t \geq 0$ $\quad x_p(t) = x_i(t)$ $\quad \boxed{x_p(t) = x_i(t) = \frac{x(t)}{2}}$

b.

$$x(t) = 2x_p(t) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} X_p(\nu)\, e^{j\,2\pi\nu t}\, d\nu$$

$$= 2x_i(t) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} X_i(\nu)\, e^{j\,2\pi\nu t}\, d\nu$$

$$\boxed{x(t) = 4 \int_0^{\infty} A(\nu) \cos 2\pi\nu t\, d\nu = -4 \int_0^{\infty} B(\nu) \sin 2\pi\nu t\, d\nu.}$$

c.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 \, d\nu$$

$$= \int_{0}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = 4 \int_{0}^{\infty} |x_p(t)|^2 \, dt$$

$$\text{or : } \int_{-\infty}^{+\infty} |x_p(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_p(\nu)|^2 \, d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(\nu) \, d\nu = 2 \int_{0}^{+\infty} A^2(\nu) \, d\nu.$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = 4 \int_{0}^{+\infty} A^2(\nu) \, d\nu = 4 \int_{0}^{+\infty} B^2(\nu) \, d\nu.}$$

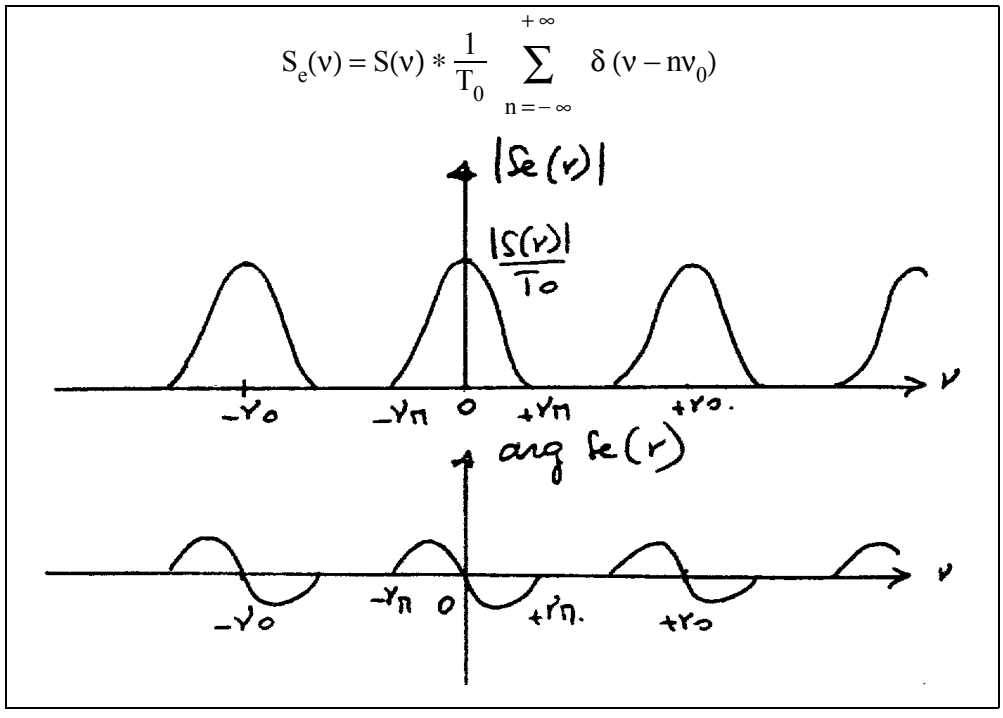
B.IV. **Signaux échantillonnés**

B.IV.1. *a.*

$$s_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_0) \, \delta(t - nT_0)$$

$$= s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0)$$

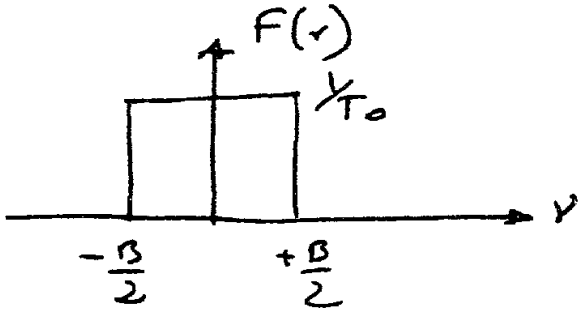
$$S_e(\nu) = S(\nu) * \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu - n\nu_0)$$



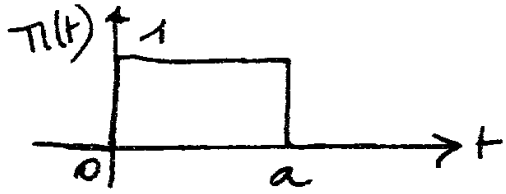
b. Il faut que $\nu_0 \geq 2\nu_M$ (pas de repliement de spectre).

Si on veut récupérer le signal s(t) il faut filtrer le signal $s_e(t)$ avec un filtre passe bas idéal de gain $1/T_0$ et de bande passante B telle que :

$$\nu_M \leq \frac{B}{2} \leq \nu_0 - \nu_M$$



B.IV.2. *a.*



$$\Pi(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(t)\, e^{-j\,2\pi\nu t}\, dt = \int_{0}^{a} e^{-j\,2\pi\nu t}\, dt$$

$$\boxed{\Pi(\nu) = \frac{e^{-j\,2\pi\nu a}}{\pi\nu} \sin \pi\nu a}$$

b.

$$s_E(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_0)\, \pi\,(t - kT_0)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_0)\, \pi\,(t) * \delta\,(t - kT_0)$$

$$= \pi\,(t) * \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\,(t - kT_0) \right) . \, s(t) \right]$$

ou :

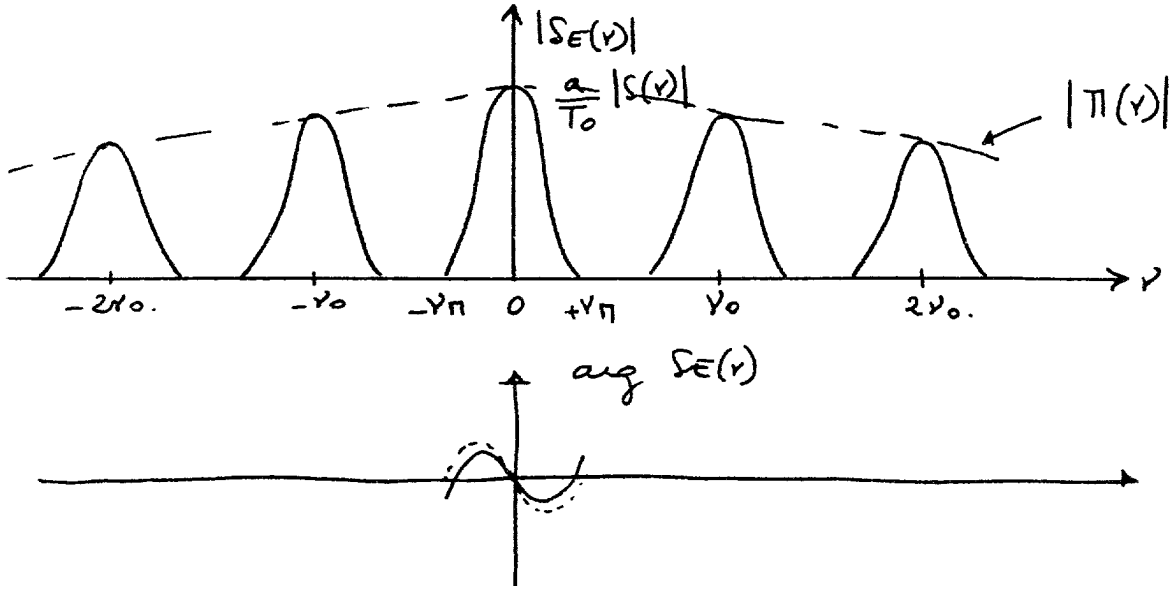
$$\boxed{S_E(\nu) = \Pi(\nu) \,.\, \left(S(\nu) * \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\,(\nu - k\nu_0) \right)}$$

$$\boxed{S_E(\nu) = \Pi(\nu) \,.\, \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S\,(\nu - k\nu_0)}$$

c. $\pi\nu_M\, a \leq 0{,}1$

Pour tout $|\nu| < \nu_M$ $\qquad \dfrac{\sin \pi\nu a}{\pi\nu a} \# 1.$

$|\Pi(\nu)| \# a$ $\qquad$ et arg $\Pi(\nu) = -\pi\nu a$



eu déformé par rapport à S(ν) (il faut multiplier le module par $\frac{T_0}{a}$ et ajouter une phase $+\pi\nu a$).

Pour reconstituer s(t) à partir de $s_E(t)$ il faut d'abord filtrer par un filtre de fonction de transfert $\frac{\pi\nu}{\sin \pi\nu a} e^{+j\,\pi\nu a}$ puis filtrer par un passe bas idéal comme à la question précédente.

B.IV.3. *a.* Il faut prendre un signal $\pi(t)$ avec $a = T_0$.

$$\Pi(\nu) = e^{-j\,\pi\nu T_0}\ \frac{\sin \pi\nu T_0}{\pi\nu}$$

$$S_R(\nu) = e^{-j\,\pi\nu T_0}\ \frac{\sin \pi\nu T_0}{\pi\nu} \cdot \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S\,(\nu - k\nu_0)$$

pour reconstituer s(t) à partir de $s_R(t)$, il faut toujours $\nu_M \leq \frac{\nu_0}{2}$ et filtrer avec :

$$H_{(\nu)} = e^{j\,\pi\nu T_0}\ \frac{\pi\nu T_0}{\sin \pi\nu T_0} \text{ si } |\nu| < \frac{\nu_0}{2}$$
$$= 0 \text{ sinon.}$$

*b.*α. $$s(t) = s_0 \cos 2\pi\nu_1 t$$

$$S(\nu) = \frac{s_0}{2}\,[\delta\,(\nu - \nu_1) + \delta\,(\nu + \nu_1)]$$

$$S_R(\nu) = \frac{\Pi\,(\nu)}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S\,(\nu - k\nu_0)$$

$$S_H(\nu) = H(\nu)\ .\ S_R(\nu) = \frac{\Pi(\nu)}{T_0}\,S(\nu)\ .\ 1\ .\ e^{j\,\alpha\nu}$$

$|H(\nu)| = 1$ pour $|\nu| < \nu_M$. α est ici négatif.

$$S_H(\nu) = \frac{\Pi(\nu)}{T_0}\ \frac{s_0}{2}\left[\delta(\nu - \nu_1)\, e^{j\alpha\nu_1} + \delta(\nu + \nu_1)\, e^{-j\alpha\nu_1}\right]$$

$$\boxed{S_H(\nu) = \frac{s_0}{2T_0}\ \frac{\sin \pi\nu_1 T_0}{\pi\nu_1}\left[e^{j(\alpha\nu_1 - \pi\nu_1 T_0)}\,\delta(\nu - \nu_1) + e^{-j(\alpha\nu_1 - \pi\nu_1 T_0)}\,\delta(\nu + \nu_1)\right]}$$

β.

$$s_0 = 1$$

$$\boxed{s_H(t) = \frac{\sin \pi\,\nu_1 T_0}{\pi\nu_1 T_0}\cos\left[2\pi\nu_1\left(t - \frac{T_0}{2} + \frac{\alpha}{2\pi}\right)\right]}$$

le retard ne dépend pas de ν_1

Il faut : $\nu_0 \geq 2\,\nu_M = 8$ kHz

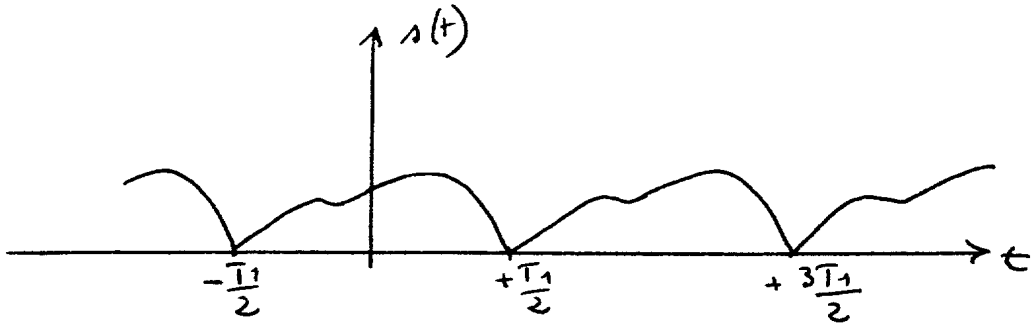
$\nu_0 = 10$ kHz $\quad T_0 = 10^{-4}$ s par exemple.

ν_1 (kHz)	$\dfrac{\sin \pi\nu_1 T_0}{\pi\,\nu_1 T_0}$
0,5	0,9959
1	0,9836
2	0,9355
3	0,8584

L'amplitude de sortie diminue lorsque ν_1 augmente et se rapproche de ν_M. Le signal de sortie est déphasé par rapport à s(t) mais le retard correspondant est le temps mis par l'énergie du signal pour transiter par le filtre (il ne dépend pas de ν_1).

B.V. **Utilisation de la transformation de Fourier discrète**

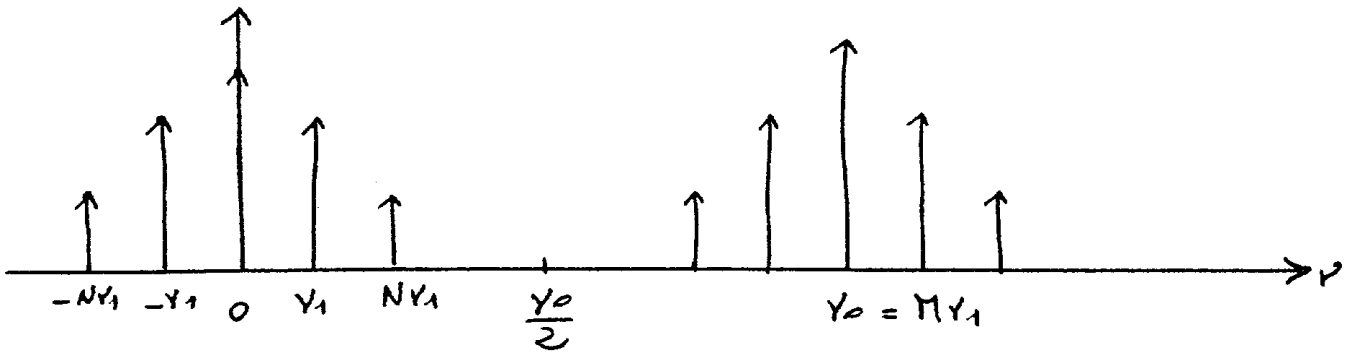
B.V.1. *a.*



b. On doit avoir $\nu_0 = M\,\nu_1$

B.V.2. Soit : $s_e(t)$ le signal s(t) échantillonné

$$S_e(\nu) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(\nu - k\nu_0)$$



pas de repliement de spectre si : $\frac{\nu_0}{2} > N\nu_1$

$$\boxed{\nu_0 = M\nu_1 > 2\,N\nu_1.}$$

B.V.3.

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=-P_1}^{P_2} x(nT_0)\, e^{-j\,2M\frac{nk}{M}}$$

$\tilde{X}(k)$ périodique de période M [$\tilde{X}(k+M) = \tilde{X}(k)$]. On fait le calcul pour <u>M impair</u> (= 2P + 1).

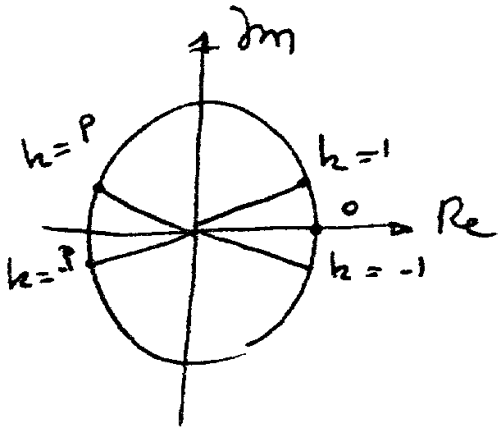
$$\sum_{k=-P}^{+P} \tilde{X}(k)\, e^{j\,2\pi\frac{nk}{M}} = \sum_{k=-P}^{+P} \left(\sum_{l=-P}^{+P} x(lT_0)\, e^{j\,2\pi\frac{k}{M}(n-l)} \right)$$

$$= \sum_{l=-P}^{+P} \left(\sum_{k=-P}^{+P} e^{j\,2\pi\frac{k}{M}(n-l)} \right) x(lT_0)$$

Lorsque $n \neq l$ ↑ il s'agit de la somme des M premières racines $M^{ièmes}$ de l'unité ; elle est nulle.

Si n = l cette somme vaut 2P + 1.

$$\boxed{x(nT_0) = \frac{1}{M} \sum_{k=-P}^{+P} \tilde{X}(k)\, e^{j\,2\pi\frac{nk}{M}} \qquad \forall n}$$



pour M pair, on trouve à la suite d'un calcul analogue :

$$x(nT_0) = \frac{1}{M} \sum_{k=-P}^{P-1} \tilde{X}(k)\, e^{j 2\pi \frac{nk}{M}} \qquad \forall n$$

B.V.4. On prend : M = 2N + 2 (M pair P = N + 1)

On a : $$s(t) = \sum_{n=-N}^{+N} S_n\, e^{j 2\pi \nu_1 nt}$$

$$s(mT_0) = \sum_{m=-N}^{+N} S_m\, e^{j 2\pi \nu_1 nmT_0} = \sum_{m=-N}^{+N} S_m\, e^{j \frac{\pi nm}{N+1}}$$

car : $$\nu_1 = \frac{\nu_0}{2(N+1)} = \frac{\nu_0}{M}.$$

On identifie cette dernière expression à :

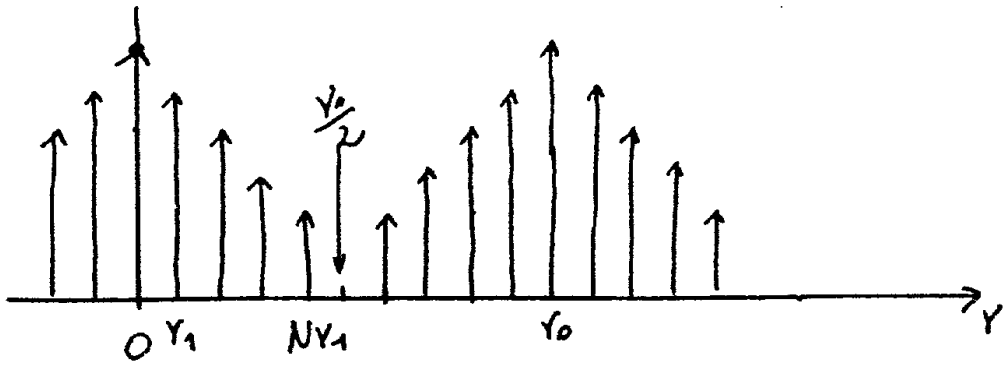
$$s_g(mT_0) = \frac{1}{2P} \sum_{k=-P}^{P-1} \tilde{X}(k)\, e^{j \frac{2\pi nk}{M}} = \frac{1}{2(N+1)} \sum_{k=-N-1}^{N} \tilde{X}(k)\, e^{j \frac{\pi nk}{N+1}}$$

On tire :

$$S_m = \frac{\tilde{X}(m)}{2(N+1)}$$
$$\tilde{X}(-N-1) = 0$$

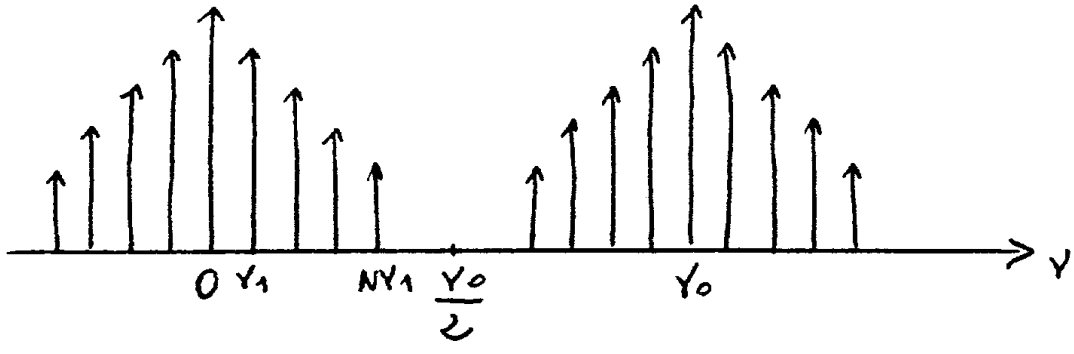
$m \in [-N, ..., 0, ..., N]$.

B.V.5. Figure pour : M = 2 (N + 1)



$\nu_0 = 2(N+1)\,\nu_1$.

Si on prend $\nu_0 = 2(N+2)\,\nu_1$ (M = 2 (N + 2)), on a la figure suivante :



Une augmentation de ν_0, tout en respectant les conditions de B.V.1. et B.V.2. provoque une augmentation des points de la transformée de Fourier discrète (et de l'inverse) mais à résolution en fréquence (ν_1) constante.

Le principe du calcul est le même qu'à la question précédente, il aboutit, après identification du développement en série de Fourier du signal s(t) et de l'expression de la TFD inverse du signal échantillonné à :

_ retrouver des relations analogues entre les S_n et les $\tilde{X}(n)$,

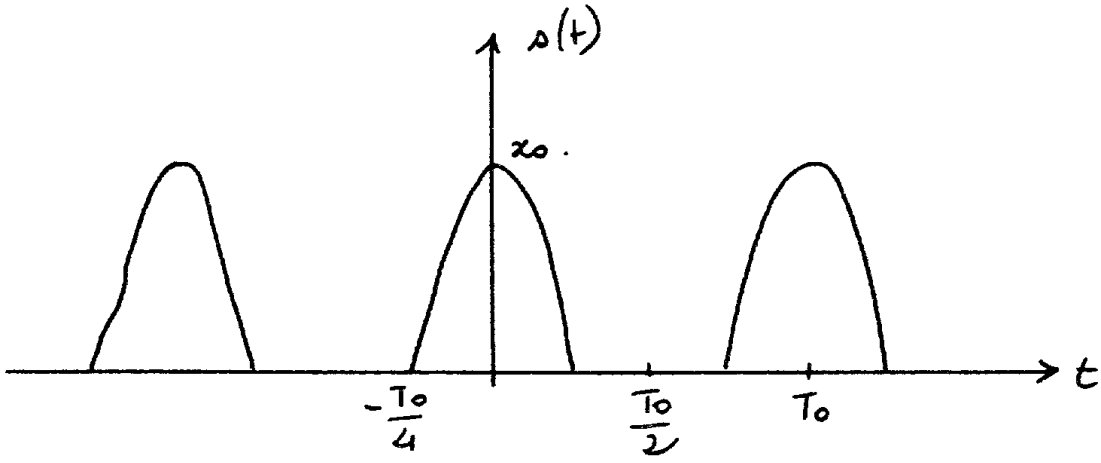
_ un nombre plus important de coefficients $\tilde{X}(n)$ nuls.

PARTIE C

C.I. **Étude comparative de deux démodulateurs d'amplitude**

C.I.1. *Démodulation d'amplitude simple alternance*

C.I.1.1. *a.*



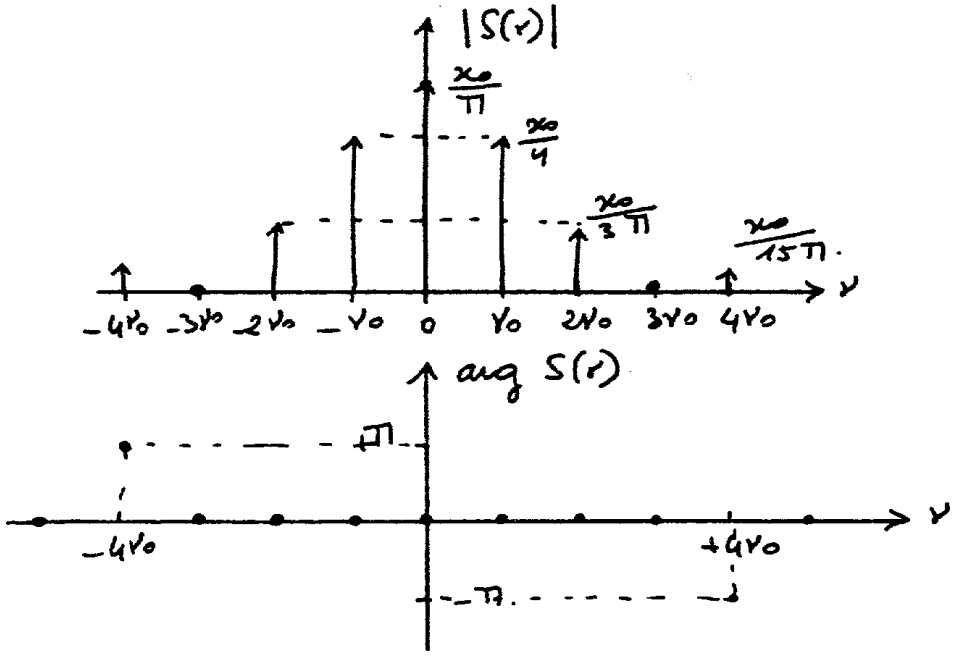
$$S(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \, \delta(\nu - n\nu_0) \qquad S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t)\, e^{-j\,2\pi n\nu_0 t}\, dt$$

$$S_1 = S_{-1} = \frac{x_0}{4}$$

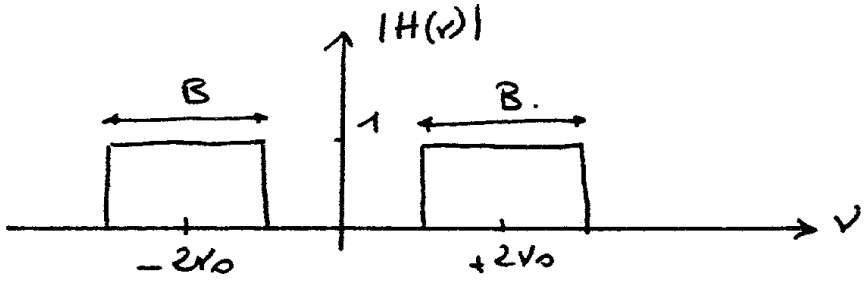
$$S_{2k} = \frac{x_0}{\pi} \, \frac{(-1)^k}{1-(2k)^2}$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{4}}^{+\frac{T_0}{4}} x_0 \cos 2\pi\nu_0 t \; e^{-j\,2\pi n\nu_0 t}\, dt$$

b.



*c.*α.



β. $S_H(\nu) = S_{-2}\,\delta(\nu + 2\nu_0) + S_2\,\delta(\nu - 2\nu_0)$

$$s_H(t) = \frac{x_0}{3\pi}\left(e^{-j\,4\pi\nu_0 t} + e^{+j\,4\pi\nu_0 t}\right)$$

$$\boxed{s_H(t) = \frac{2x_0}{3\pi}\cos 4\pi\nu_0 t}$$

C.I.1.2. *a.* $e(t) = a(t)\,.\,x(t)$

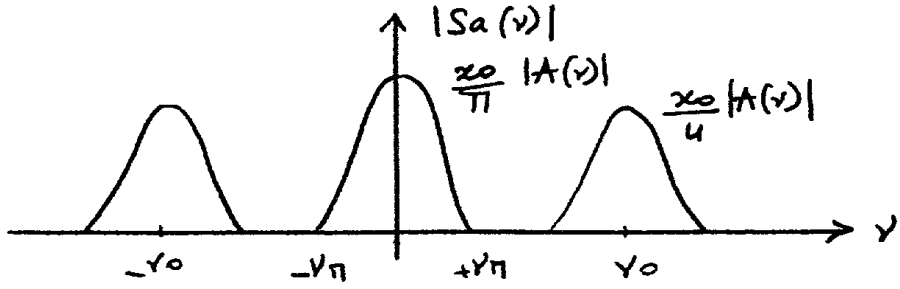
$s_a(t) = w\,[e(t)] = w\,[a(t)\,.\,x(t)] = a(t)\,.\,w\,[x(t)]$ car $a(t) > 0$.

$$S_a(\nu) = A(\nu) * S(\nu)$$

$$= A(\nu) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n\,\delta(\nu - n\nu_0)$$

$$\boxed{S_a(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n\,A(\nu - n\nu_0).}$$

b.



c. Pour obtenir à nouveau a(t) à partir de $s_a(t)$ il faut le filtrer par un passe bas de largeur $\nu_0 - \nu_M > B > \nu_M$ et de gain $\frac{\pi}{x_0}$, à condition que $\nu_0 \geq 2\,\nu_M$.

C.I.2. *Démodulateur synchrone*

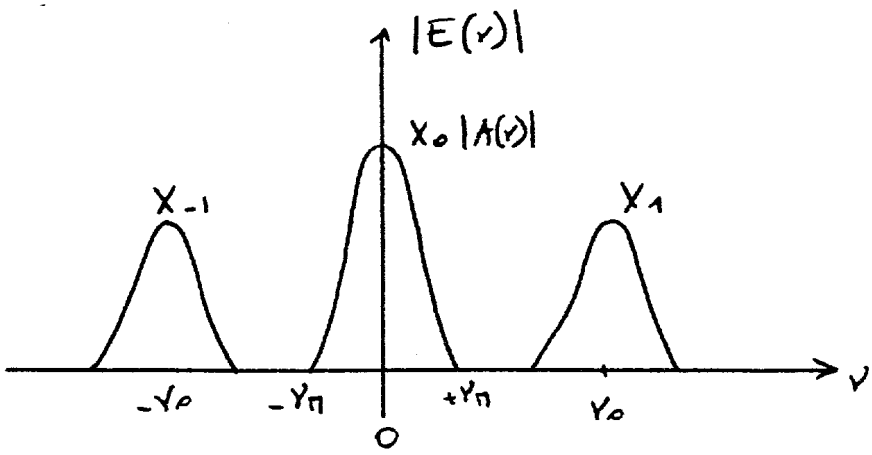
C.I.2.1. *a.* $e(t) = a(t) \,.\, x(t)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, e^{+j\,2\pi n \nu_0 t} \qquad X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, \delta(\nu - n\nu_0)$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x(t) \, e^{-j\,2\pi n \nu_0 t} \, dt$$

$$E(\nu) = A(\nu) * X(\nu) = A(\nu) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, \delta(\nu - n\nu_0)$$

$$\boxed{E(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, A(\nu - n\nu_0)}$$



c. Il faut que la période $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$ du signal x(t) soit telle que $\nu_0 \geq 2\,\nu_M$ $\rightarrow$ on peut alors filtrer le lobe central et récupérer a(t).

C.I.2.2. *a.* Si le signal x(t) est à valeur moyenne nulle, alors $X_0 = 0$. Ce n'est pas en filtrant avec un passe bas que l'on peut récupérer le signal modulant a(t).

$$c_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{T_{0_n}} e^{j\,2\pi n\nu_0 t}$$

$$C_{T_{0_n}} = \frac{1}{T_0}\int_{t_1}^{t_1+T_0} c_{T_0}(t)\, e^{-j\,2\pi n\nu_0 t}\, dt$$

$$C_{T_{0_n}} = \frac{1}{T_0}\left[\int_{t_1}^{t_1+\frac{T_0}{2}} e^{-j\,2\pi n\nu_0 t}\, dt - \int_{t_1+\frac{T_0}{2}}^{t_1+T_0} e^{-j\,2\pi n\nu_0 t}\, dt\right]$$

changement variable $t = u - t_1$ $\qquad t = u - t_1$ puis $u = v - \frac{T_0}{2}$

$$C_{T_{0_n}} \times T_0 = \int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-j\,2\pi n\nu_0 t_1}\; e^{-j\,2\pi n\nu_0 u}\, du - \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} e^{-j\,2\pi n\nu_0 t_1}\; e^{-j\,2\pi n\nu_0 u} du$$

$$\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-j\,2\pi n\nu_0 t_1}\; e^{-j\,2\pi n\frac{\nu_0 T_0}{2}}\; e^{-j\,2\pi n\nu_0 v}\, dv$$

soit : $$I(n) = \int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-j\,2\pi n\nu_0 t}\, dt$$

$$C_{T_{0_n}} = e^{-j\,n\varphi_1}\,(1 - e^{-j\,n\pi})\, I(n)$$

$$I(n) = \frac{1}{2j\pi n\nu_0}\,(1 - e^{-j\pi n}) \qquad \text{si} \quad n \neq 0$$

$$= 0 \qquad \text{si} \quad n = 0$$

on trouve : $$C_{T_{0_{2k}}} = 0$$

$$C_{T_{0_{2k+1}}} = \frac{2\, e^{-j\,\varphi_1(2k+1)}}{j\,\pi\,(2k+1)}$$

et : $$C_{T_0}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{T_0}\quad \delta\,(\nu - n\nu_0)$$

b. $$s(t) = e(t)\,.\,c_{T_0}(t) = a(t)\,.\,x(t)\,.\,c_{T_0}(t)$$

$$S(\nu) = A(\nu) * [X(\nu) * C_{T_0}(\nu)]$$

$$\sum_n \sum_m X_n C_{T_0 m}\, \delta(\nu - n\nu_0 - m\nu_0)$$

D est un filtre passe bas, on sélectionne le pic en $\nu = 0$ $\quad m + n = 0 \quad m = -n$

$$S_D(\nu) = A(\nu) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n\, C_{T_0 - n}\, \delta(\nu)$$

$$\boxed{S_D(\nu) = A(\nu) \,.\, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n\, C_{T_0 - n}.}$$

C.I.2.3. *a.* $x(t) = x_0 \cos 2\pi\nu_0 t$

Le spectre $X(\nu)$ a deux pics en $\underset{X_{-1}}{-\nu_0}$ et $\underset{X_1}{+\nu_0}$.

$$S_D(\nu) = A(\nu)\left(C_{T_{0\,1}}\, X_{-1} + C_{T_{0-1}}\, X_1\right)$$

$$C_{T_{0\,1}} = \frac{2\, e^{-j\,\varphi_1}}{j\pi} \qquad C_{T_{0-1}} = \frac{2\, e^{+j\,\varphi_1}}{-j\pi}$$

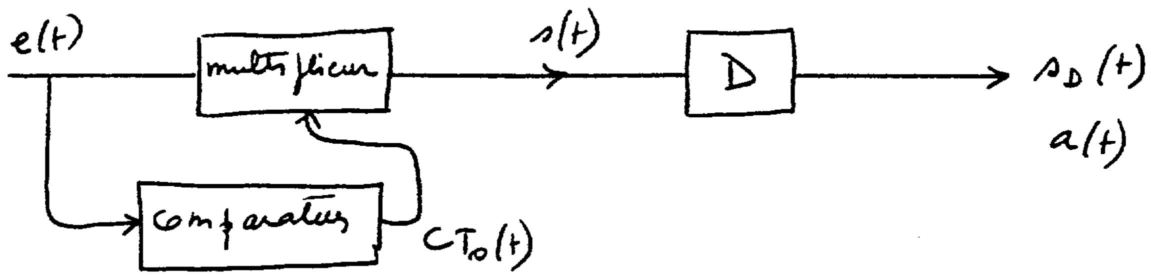
$$X_1 = \frac{x_0}{2} \qquad X_{-1} = \frac{x_0}{2}$$

$$\boxed{S_D(\nu) = \frac{2a}{\pi} \sin \varphi_1\ A(\nu)}$$

$$= \text{cte}\ \ A(\nu)$$

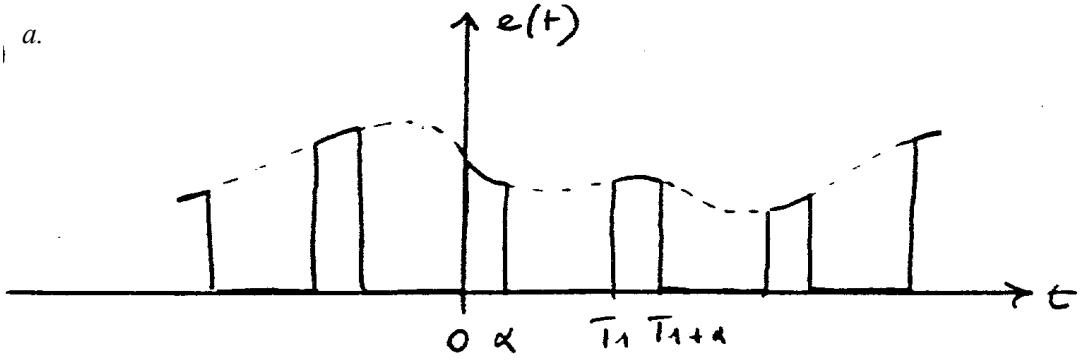
b. On peut réaliser le signal $c_{T_0}(t)$ à partir du signal e(t) à l'aide d'un comparateur ayant par exemple deux états stables $\begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}$ en sortie. Passe de l'un à l'autre lors des passages à 0 de l'entrée.

c.



C.II. **Restauration par égalisation d'un signal discret**

C.II.1. *a.*

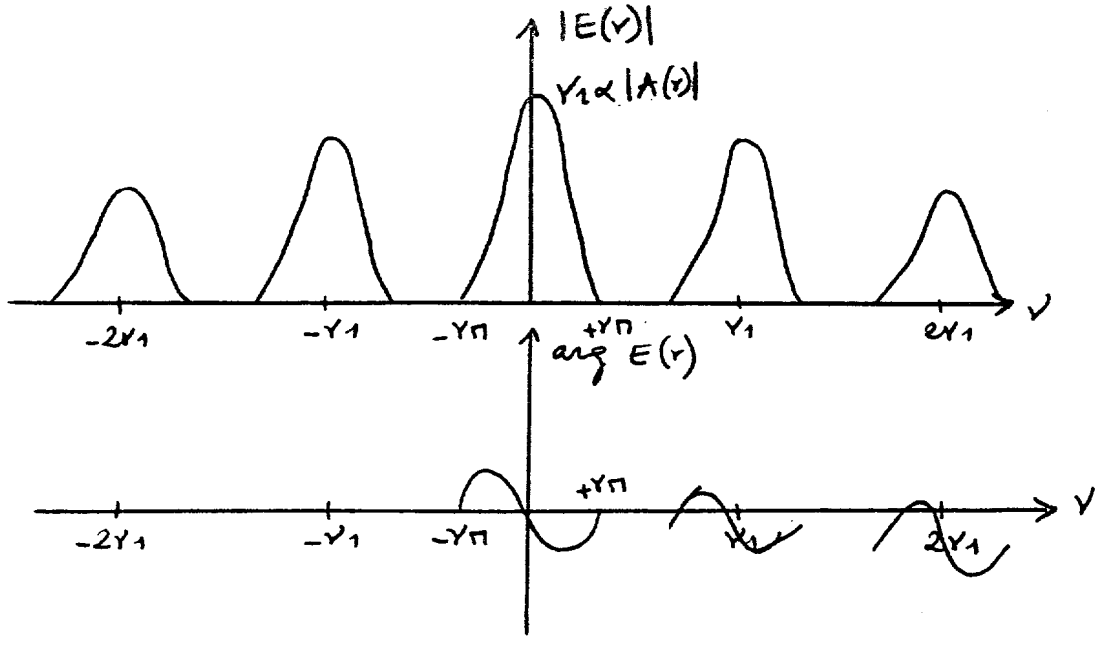


b. $e(t) = p_\alpha(t) \,.\, a(t)$

$E(\nu) = P_\alpha(\nu) * A(\nu)$ (voir B.IV.2.*a.*)

$$= A(\nu) * \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi_\alpha(n\nu_1)\, \delta(\nu - n\nu_1)$$

$$\boxed{E(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\pi n\nu_1\alpha}}{\pi n} \sin \pi n\nu_1\alpha \;\; A(\nu - n\nu_1)}$$



On doit ajouter à arg A(ν) un angle qui varie en $-\pi n\nu_1\alpha$.

c. On peut obtenir a(t) à partir de e(t) si il n'y a pas recouvrement de spectre $\nu_1 \geq 2\nu_M$. Avec un filtre passe bas idéal de gain $\frac{T_1}{\alpha}$, on récupère le lobe centré en $\nu = 0$.

C.II.2. *a.*

$$r(t) = h(t) * e(t)$$

$$= \lambda_0\, e(t - t_0) + \lambda_1\, e(t - t_1)$$

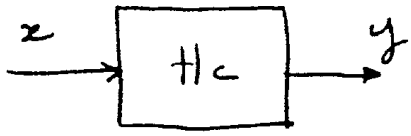
$$R(\nu) = H(\nu) \,.\, E(\nu)$$

$$\boxed{H(\nu) = \lambda_0 \, e^{-j\,2\pi\nu t_0} + \lambda_1 \, e^{-j\,2\pi\nu t_1}}$$

b.α. $\quad E(\nu) = R(\nu) \,.\, H_c(\nu) = H(\nu) \,.\, E(\nu) \,.\, H_c(\nu)$

$$H_c(\nu) = \frac{1}{H(\nu)}$$

$$\boxed{H_c(\nu) = \frac{1}{\lambda_0 \, e^{-j\,2\pi\nu t_0} + \lambda_1 \, e^{-j\,2\pi\nu t_1}}} \qquad t_1 - t_0 = a > 0$$



$\lambda_1 \, x(t) + \lambda_0 \, x(t + a) = y(t + t_1)$ $\qquad$ Ce filtre est non causal.

b.β. On construit un égalisateur causal $H_F(\nu)$

$$H_F(\nu) = H_c(\nu) \, e^{-j\,2\pi\nu t_0}$$

$$= \frac{e^{-j\,2\pi\nu t_0}}{\lambda_0 \, e^{-j\,2\pi\nu t_0} + \lambda_1 \, e^{-j\,2\pi\nu t_1}}$$

à la sortie : $x(t) = r(t) * h_F(t)$

$$X(\nu) = R(\nu) \,.\, H_F(\nu)$$

$$= H(\nu) \,.\, E(\nu) \,.\, H_F(\nu)$$

$$= E(\nu) \, e^{-j\,2\pi\nu t_0}$$

$x(t) = e(t - t_0)$ $\qquad$ Causalité.

c.

$$H_F(\nu) = \frac{e^{-j\,2\pi\nu t_0}}{\lambda_0 \, e^{-j\,2\pi\nu t_0} + \lambda_1 \, e^{-j\,2\pi\nu t_1}}$$

$$= \frac{1}{\lambda_0 + \lambda_1 \, e^{-j\,2\pi\nu(t_1 - t_0)}}$$

$$= \frac{1}{\lambda_0}\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \, e^{-j\,2\pi\nu(t_1 - t_0)}\right)^{-1}$$

$$\boxed{H_F(\nu) \# \frac{1}{\lambda_0}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \, e^{-j\,2\pi\nu(t_1 - t_0)} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^2 \, e^{-j\,4\pi\nu(t_1 - t_0)}\right)}$$

gain gain retard gain retard

d.

$$a_0 = \frac{1}{\lambda_0} \qquad a_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_0^2} \qquad a_2 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0^3}$$

$$\tau_1 = t_1 - t_0 \qquad \tau_2 = 2\,(t_1 - t_0)$$

C.II.3. C.II.3.1. *a.* e(t) est à support spectral non borné → échantillonnage difficile il faut que $\nu_e \geq 2\,\nu_M$ (pas de repliement de spectre). De plus ν_e doit être multiple ou sous multiple de ν_1.

b.

$$\nu_1 > 4\,\nu_M \qquad \nu_e = \frac{\nu_1}{2} > 2\,\nu_M$$

$$\nu_e = \nu_1 > 4\,\nu_M.$$

C.II.3.2. *a.* $\nu_e = \nu_1 \qquad T_e = T_1$

$$x(t) = e(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\,(t - n\,T_e) = a(t) \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \pi\alpha\,(t) * \delta\,(t - m\,T_1) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\,(t - n\,T_1)$$

$$= a(t) \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \pi\alpha(t) * \delta\,(t - m\,T_1) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\,(t - n\,T_1)$$

$$= a(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \pi\alpha\,(t - m\,T_1)\,\delta\,(t - n\,T_1)$$

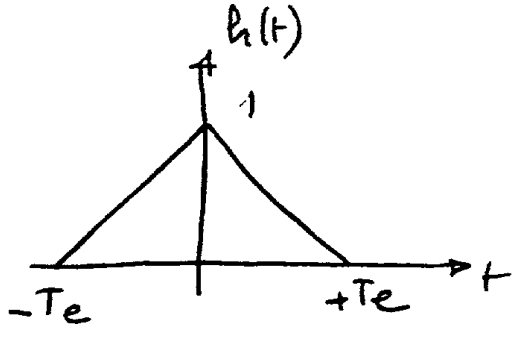
si $m \neq n \rightarrow 0$
si $m = n \rightarrow 1$

$$\boxed{x(t) = a(t) \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\,(t - m\,T_1)}$$

échantillonnage de a(t).

Système linéaire : $\lambda_1\,x_1(t) + \lambda_2\,x_2(t) \rightarrow \lambda_1\,s_1(t) + \lambda_2\,s_2(t)$,
Continu : $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum x_n(t)$,
Stationnnaire : oui.

La fonction de transfert est la TF (réponse impulsionnelle).



$$H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-pt}\, dt \qquad p = j\,2\pi\nu.$$

$$H(p) = \int_{-T_e}^{0} \left(\frac{t}{T_e} + 1\right) e^{-pt}\, dt + \int_{0}^{T_e} \left(-\frac{t}{T_e} + 1\right) e^{-pt}\, dt.$$

Calcul(s) . . .

$$H(p) = \frac{1}{p^2 T_e}\left(e^{pT_e} + e^{-pT_e} - 2\right)$$

$$H(\nu) = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 T_e}\left(2 - e^{j\,2\pi\nu T_e} - e^{-j\,2\pi\nu T_e}\right)$$

$$\boxed{H(\nu) = T_e\left(\frac{\sin \pi\nu T_e}{\pi\nu T_e}\right)^2}$$

b.

$$x(t) = a(t) \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\,(t - m\,T_e)$$

$$X(\nu) = A(\nu) * \frac{1}{T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta\,(\nu - m\,\nu_e)$$

$$S(\nu) = H(\nu)\,.\,X(\nu) =$$

$$\boxed{S(\nu) = \frac{\sin \pi\nu T_e}{\pi\nu T_e} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A\,(\nu - m\,\nu_e)}$$

C.M.

Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE
Épreuve C : Problème d'Électricité, d'Électronique, d'Électrotechnique et d'Automatique - Session : 1992

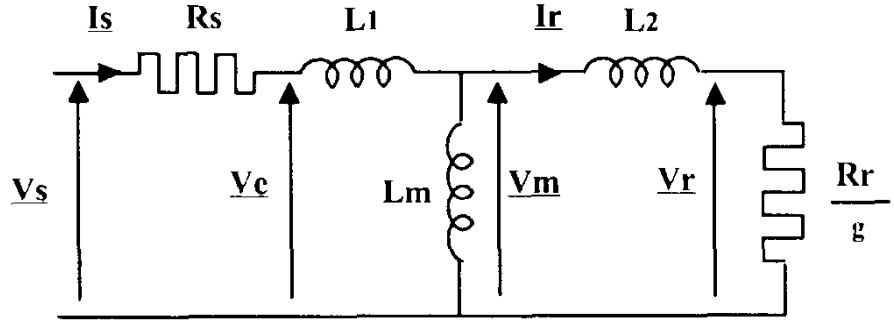
PARTIE I:

ETUDE DE LA MACHINE ASYNCHRONE ALIMENTEE SOUS TENSION SINUSOIDALE A FREQUENCE VARIABLE.

I.1) Relation entre la vitesse mécanique de synchronisme et la fréquence d'alimentation.

$$\Omega_S = \frac{2\,\pi\,f_S}{a} \qquad N_{max} = 4500 \text{ tr/mn}$$

I.2) Schéma équivalent.



I.3) Etude du point de fonctionnement nominal.

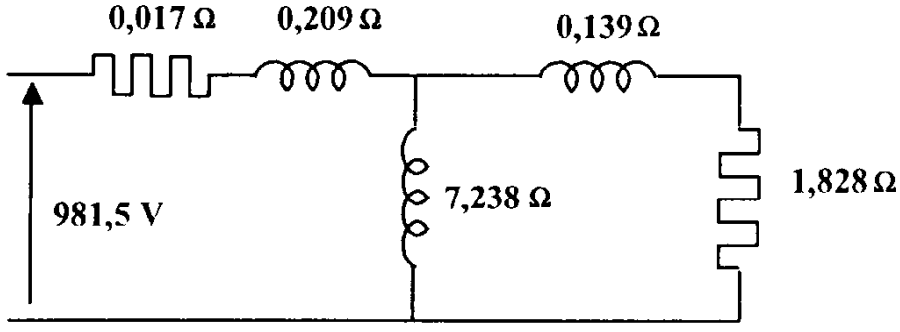
I.3.1) Couple nominal:

$$C_n = \frac{P_n}{\Omega_n} = 7534 \text{ mN} \qquad \Omega_n = 187{,}1 \text{ rd/s}$$

I.3.2) Glissement nominal et fréquence rotorique nominale:

$$\Omega_{sn} = 188{,}5 \text{ rd/s} \qquad g_n = \frac{N_S - N_n}{N_S} = 7{,}22\ 10^{-3} \qquad f_{rn} = g_n\, f_{sn} = 0{,}433 \text{ Hz}$$

I.3.3) Valeur des éléments pour $f_s = 60$ Hz:



I.3.4) Impédance statorique:

$$\underline{Z}_r = \frac{\underline{V}_m}{\underline{I}_s} = \frac{(1{,}828 + j\ 0{,}139)\ j\ 7{,}238}{1{,}828 + j\ 0{,}139 + j\ 7{,}238} = 1{,}658 + j\ 0{,}547\ \Omega \quad Z_r = 1{,}746\ \Omega$$

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_r + R_s + j\ L_l\ \omega_s = 1{,}675 + j\ 0{,}756\ \Omega \quad Z_s = 1{,}838\ \Omega$$

I.3.5) Courant et facteur de puissance nominal:

$$I_{sn} = \frac{V_{sn}}{Z_s} = 534{,}1\ \text{A} \qquad \cos\varphi_n = 0{,}91.$$

I.3.6) La quantité $3\ \text{Réel}(\underline{Z}_r) I_s^2$ représente la puissance transmise au rotor.

$$3\ \text{Réel}(\underline{Z}_r) I_{sn}^2 = P_{Tn} = C_n\ \Omega_s = 1{,}419\ \text{MW} = 3\ \frac{R_r}{g}\ I_{rn}^2$$

$$\Rightarrow I_{rn} = 508{,}7\ \text{A et } C_n = 7527\ \text{mN}.$$

I.3.7) Rendement et pertes nominales:

Puissance mécanique: $P_n = C_n\ \Omega_n = 1{,}409$ MW

Puissance électrique absorbée: $P_{an} = 3\ \text{Réel}(\underline{Z}_s) I_{sn}^2 = 1{,}433$ MW

Rendement: $\eta_n = \frac{P_n}{P_{an}} = 0{,}983$

Pertes rotor: $P_{jrn} = g\ P_{Tn} = 10{,}24$ kW

Pertes stator: $P_{jsn} = 3\ R_s\ I_{sn}^2 = 14{,}38$ kW.

I.3.8) flux nominaux:

$\underline{V}_m = j\ \omega_s\ \underline{\Phi}_m = \underline{Z}_r\ \underline{I}_s \quad \Rightarrow V_m = 932{,}5$ V $\quad \Phi_m = 2{,}477$ Wb

$\underline{V}_r = j\ \omega_s\ \underline{\Phi}_r = \frac{R_r}{g}\ \underline{I}_r \quad \Rightarrow V_r = 929{,}9$ V $\quad \Phi_r = 2{,}467$ Wb

$\underline{V}_e = j\ \omega\ \underline{\Phi}_s = (\underline{Z}_r + j\ L_l\ \omega_s)\ \underline{I}_s \quad \Rightarrow V_e = 973{,}2$ V $\quad \Phi_s = 2{,}58$ Wb

I.4) Influence de la température.

t_2 (°C)	25	175
t_2 - 100 (°C°)	- 75	75
$\alpha (t_2 - 100)$	-0,3	0,3
$1 + \alpha (t_2 - 100)$	0,7	1,3
R_S (mΩ)	11,76	21,84
R_r (mΩ)	9,24	17,16
$\frac{R_r}{g}$ (Ω)	1,280	2,377
$\underline{Z}_r$ (Ω)	1,196 + j 0,344	2,073 + j 0,804
$\underline{Z}_S$ (Ω)	1,208 + j 0,553	2,095 + j 1,013
Z_S (Ω)	1,328	2,327
I_S (A)	738,8	421,8
P_T (MW)	1,958	1,106
C (mN)	10389	5869
P_a (MW)	1,97	1,12
P (MW)	1,94	1,10

I.4.1 et I.4.2) Valeurs nominales des couples et des puissances pour les températures extrêmes.

(voir le tableau ci-contre)

I.4.3) On constate que, bien que les points de fonctionnement correspondent aux mêmes conditions d'alimentation électrique, les couples et les puissances dépendent fortement de la température, principalement par la variation de la résistance rotorique.

I.5) Vitesse variable.

I.5.1) Relation courant-flux:

$$\underline{\Phi}_S = L_S \underline{I}_S - L_m \underline{I}_r \Rightarrow \underline{I}_S = \frac{1}{L_S}\underline{\Phi}_S + \frac{L_m}{L_S}\underline{I}_r$$

$$\underline{\Phi}_r = L_m \underline{I}_S - L_r \underline{I}_r \Rightarrow \underline{I}_S = \frac{\underline{\Phi}_r}{L_m} + \frac{L_r}{L_m}\underline{I}_r$$

$$\text{d'où } \underline{\Phi}_S = \frac{\underline{L}_S}{L_m}\underline{\Phi}_r + \frac{L_S}{L_m} L_r \left(1 - \frac{L_m^2}{L_S L_r}\right) \underline{I}_r$$

finalement, on obtient: $\underline{\Phi}_S = \frac{\underline{L}_S}{L_m}\underline{\Phi}_r + \frac{L_S}{L_m}\sigma L_r \underline{I}_r$ où $\sigma = \left(1 - \frac{L_m^2}{L_r L_S}\right)$

I.5.2) Schéma monophasé priviligiant le flux statorique.

D'après les relations précédentes on peut écrire:

$$\underline{I}_S = \frac{1}{j\,\omega_S L_S} j\,\omega_S \underline{\Phi}_S + \frac{L_m}{L_S}\underline{I}_r = \frac{\underline{V}_e}{j\,\omega_S L_S} + \underline{I}'_r \qquad \text{avec } \underline{I}'_r = \frac{L_m}{L_S}\underline{I}_r$$

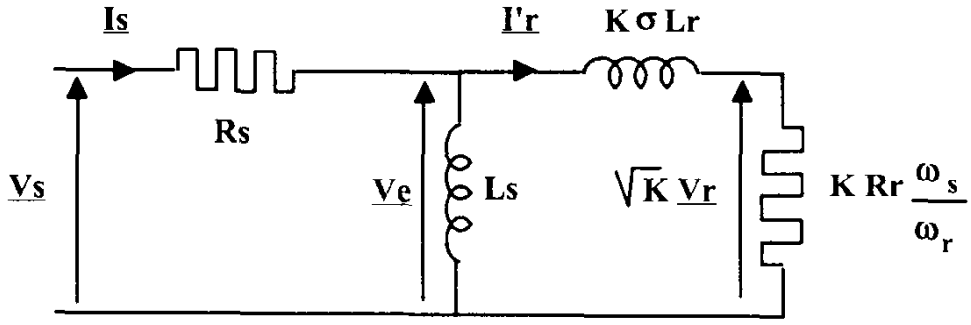
$$\underline{V}_e = j\,\omega_S \underline{\Phi}_S = j\,\omega_S \frac{\underline{L}_S}{L_m}\underline{\Phi}_r + j\,\frac{L_S}{L_m}\sigma L_r \omega_S \underline{I}_r = j\,\omega_S \frac{\underline{L}_S}{L_m}\underline{\Phi}_r + j\left(\frac{L_S}{L_m}\right)^2 \sigma L_r \omega_S \underline{I}'_r$$

D'autre part: $\underline{V}_r = j\,\omega_S \underline{\Phi}_r = \frac{\underline{R}_r}{g}\underline{I}_r$ et en posant $K = \left(\frac{L_S}{L_m}\right)^2$, il vient:

$$\underline{V}_e = \left(\frac{L_S}{L_m}\right)^2 \frac{\underline{R}_r}{g}\underline{I}'_r + j\left(\frac{L_S}{L_m}\right)^2 \sigma L_r \omega_S \underline{I}'_r = K\left(\frac{\underline{R}_r}{g} + j\,\sigma L_r \omega_S\right)\underline{I}'_r$$

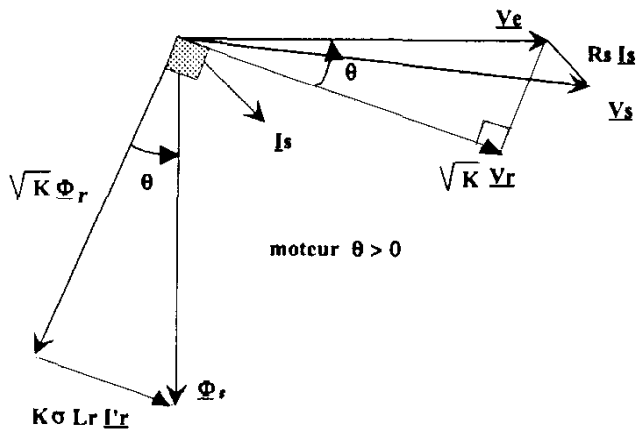
$$\underline{V}_S = \underline{V}_e + R_S \underline{I}_S$$

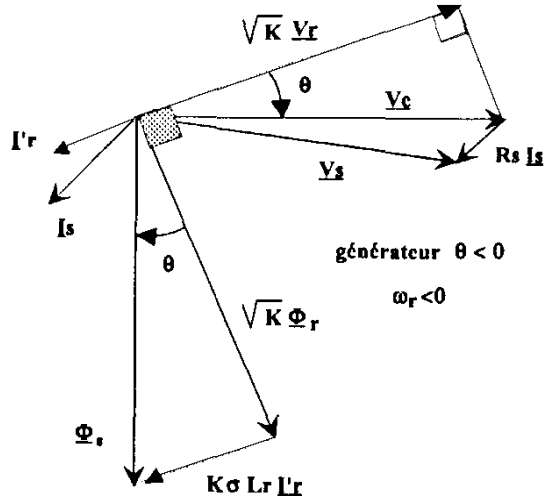
A partir de ces relations on peut déduire le schéma suivant:



I.5.3) La tension qui apparaît aux bornes de l'inductance L_s est la tension notée $\underline{V}_e$. Cette tension est proportionnelle au flux stator $\underline{\Phi}_S$. Aux bornes de la résistance $\sqrt{K}\ R_r \frac{\omega_S}{\omega_r}$ apparaît la tension $\sqrt{K}\ \underline{V}_r$ qui elle est proportionnelle au flux $\underline{\Phi}_r$ ($\sqrt{K}\ \underline{\Phi}_r$).

I.5.4) Diagrammes vectoriels.





Expression du couple: A partir de la puissance apparente complexe transmise au rotor $\underline{S}_T$:

$$\underline{S}_T = 3\ \underline{V}_e\ \underline{I'}_r^{*} = j\ \omega_S\ \underline{\Phi}_S \frac{(\underline{\Phi}_S^{*} - \sqrt{K}\ \underline{\Phi}_r^{*})}{\sigma\ K\ L_r}$$

En prenant le flux $\underline{\Phi}_S$ comme référence de phase: $\underline{\Phi}_r = e^{-j\theta}\ \Phi_r$ et $\underline{\Phi}_S = \Phi_S$

$$\underline{S}_T = 3\ j\ \omega_S \frac{(\Phi_S^2 - \sqrt{K}\ \Phi_r\ \Phi_S\ e^{j\theta})}{\sigma\ K\ L_r} \qquad C = \frac{\text{Réel}(\underline{S}_T)}{\Omega_S} = 3\sqrt{K}\ \frac{\Phi_r\ \Phi_S}{\sigma\ K\ L_r} \sin\theta$$

Dans le fonctionnement moteur $\underline{\Phi}_S$ est en avance sur $\underline{\Phi}_r$ ce qui correspond à $\theta > 0$. Dans le fonctionnement générateur $\underline{\Phi}_r$ est en avance sur $\underline{\Phi}_S$.

I.6) Autopilotage à basse fréquence.

I.6.1) Si R_S est négligeable dans le schéma équivalent précédent, on a $\underline{V}_S \approx \underline{V}_e$

$$\underline{I}_S = \frac{\underline{V}_S}{j L_S \omega_S} \frac{j (L_S + \sigma K L_r) \omega_S + K \frac{R_r \omega_S}{\omega_r}}{j \sigma K L_r \omega_S + \frac{K R_r \omega_S}{\omega_r}} = (\frac{\underline{V}_S}{\omega_S}) \frac{j L_r + \frac{R_r}{\omega_r}}{L_S (- \sigma L_r + j \frac{R_r}{\omega_r})}$$

I.6.2) Le couple peut être calculé à partir de l'expression de la puissance transmise:

$$P_T = C \Omega_S = 3 K \frac{R_r}{\omega_r} \omega_S I'_r{}^2 \qquad I'_r{}^2 = \frac{V_S{}^2}{K^2 (\sigma^2 L_r{}^2 \omega_S{}^2 + \frac{R_r{}^2 \omega_S{}^2}{\omega_r{}^2})}$$

$$\Rightarrow \qquad C = 3 a \frac{R_r}{\omega_r} \frac{(\frac{V_S}{\omega_S})^2}{K (\sigma^2 L_r{}^2 + \frac{R_r{}^2}{\omega_r{}^2})}$$

Dans le cas où $R_r{}^2 >> \sigma^2 L_r{}^2 \omega_r{}^2$, l'expression se simplifie sous la forme:

$$C = \frac{3 a}{K} \frac{\omega_r}{R_r} (\frac{V_S}{\omega_S})^2$$

Dans le cadre de cette approximation la caractéristique de couple est une droite qui passe par le point (ω_S; C = 0)

AN: R_r = 13,2 mΩ $\quad \sigma = 4{,}67\ 10^{-2} \quad \omega_{rn}$ = 2,7 rd/s L_r = 19,57 mH

$\Rightarrow R_r{}^2 = 174\ 10^{-6}$ (mΩ)^2 $\quad \sigma^2 L_r{}^2 \omega_r{}^2 = 6{,}09\ 10^{-6}$ (mΩ)^2

I.6.3) Loi de commande.

I.6.3.1) Dans la mesure où on néglige les pertes fers, les pertes mécaniques et les pertes joules au stator (R_S négligeable), le rendement η s'exprime simplement par:

$$\eta = \frac{P}{P_T} = 1 - g = 1 - \frac{\omega_r}{\omega_S}$$

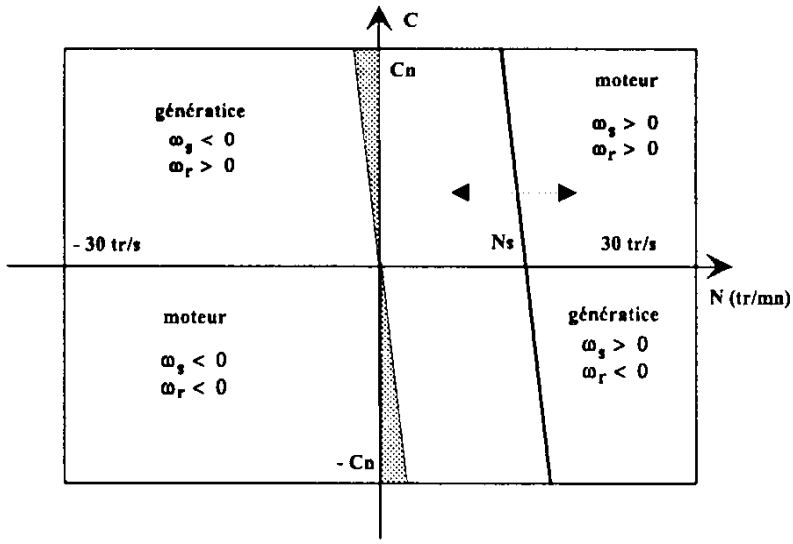
I.6.3.2) L'expression du rendement montre que l'on a intérêt à faire fonctionner la machine à ω_r minimal. Pour obtenir une valeur de couple donnée on doit donc alimenter la machine de manière à avoir le terme $(\frac{V_S}{\omega_S})$ maximal.

I.6.3.3) Dans le cadre de l'hypothèse conduisant à négliger la résistance statorique Rs, nous avons en première approximation $\underline{V}_S \approx \underline{V}_e = j\,\omega_S\,\underline{\Phi}_S$. La loi f_1 correspond à maintenir le flux à sa valeur maximale:

$$V_S = f_1(\omega_S) \Leftrightarrow V_S = 2{,}58\,\omega_S.$$

I.6.3.4) Au-dessus d'une certaine fréquence la tension deviendrait trop élevée pour l'isolation des bobinages statoriques. $V_{smax} = V_{sn} = 981{,}5$ volts d'où $f_{s1max} = 60{,}5$ Hz. ≈ 60 Hz.

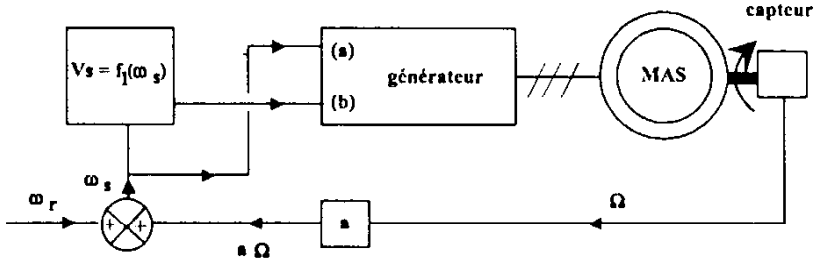
I.6.3.5) La caractéristique de couple est simplement translatée.



La zone hachurée correspond à un freinage sans récupération $|\omega_r| > |\omega_S|$.

I.6.4) On considère que ω_r est la grandeur de commande.

I.6.4.1) Schéma fonctionnel:



I.6.4.2) Lorsqu'on impose la pulsation rotorique ω_r tout en respectant la loi de commande f_1, on impose le courant statorique, le facteur de puissance, ainsi que le couple (à condition que les paramètres de la machine soit parfaitement définis).

I.6.4.3) Lorsque ω_S varie le diagramme des flux reste invariant (à ω_r constant). En effet , si le flux $\underline{\Phi}_S$ est imposé, $\underline{I}'_r$ et $\underline{\Phi}_r$ sont déterminés de manière unique (voir les diagrammes vectoriels):

$$\underline{\Phi}_S = \underline{\Phi}_r + K\,\sigma\,L_r\,\underline{I}'_r \qquad \underline{I}'_r = \underline{\Phi}_r \frac{\omega_r}{\sqrt{K} R_r}$$

$\Rightarrow$ C est constant (cf expression du couple établie à la question I.5.4)

$\Rightarrow \underline{I}_S$ reste invariant car $\underline{I}_S = \underline{I}'_r + \dfrac{\underline{\Phi}_S}{L_S}$.

I.7) Influence de la résistance statorique R_S.

I.7.1) Expression du couple en fonction de I_S.

$$\underline{I}'_r = \frac{j\,L_S\,\omega_S}{\underline{Z}''_r + j\,L_S\,\omega_S}\,\underline{I}_S \qquad \text{avec } \underline{Z}''_r = K\,\omega_S\,(R_r/\omega_r + j\,\sigma\,L_r)$$

$$I'_r = \frac{L_m^2}{L_S}\,\frac{I_S}{j\,L_r + R_r/\omega_r} \qquad C = 3a\,R_r/\omega_r\,(\frac{L_S}{L_m})^2\,I'^2_r$$

$$C = 3\,a\,\frac{R_r}{\omega_r}\,\frac{L_m^2}{L_r^2 + R_r^2/\omega_r^2}\,I_S^2$$

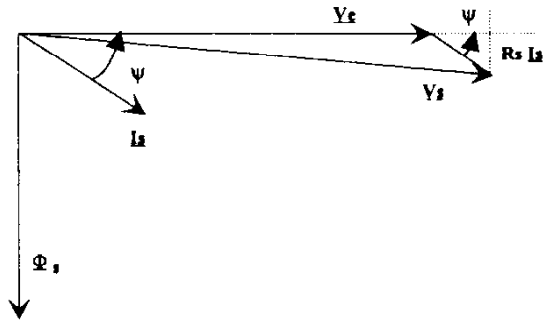
I.7.2) Caractéristique C (f_S).

$$\underline{Z}_S = R_S + \underline{Z}'_r \text{ avec } \underline{Z}'_r = \frac{j\,L_S\,\omega_S\,(R_r/\omega_r + j\,\sigma\,L_r)}{j\,L_r + R_r/\omega_r} \qquad \underline{I}_S = \frac{\underline{V}_S}{\underline{Z}_S} = \frac{2\,\pi\,f_S\,\underline{\Phi}_S}{\underline{Z}_S}$$

AN: $f_r = 0{,}4$ Hz; $\omega_r = 2{,}51$ rd/s; $\underline{Z}'_r = (4{,}71 + j\,2{,}18)\,10^{-3}\,\omega_S$; $C = 0{,}028\,I_S^2$

Aux basses fréquences et pour des valeurs de courant non négligeables, la loi f_1 ne correspond plus à imposer le flux Φ_S à sa valeur nominale.

I.7.3) Loi de commande modifiée.



$\underline{V}_S = \underline{V}_e + R_S\,\underline{I}_S$ et en première approximation $V_S = V_e + R_S\,I_S\cos\Psi$ si ($V_e >> R_S\,I_S$).

$$\underline{I}_S = \frac{\underline{V}_e}{\underline{Z}'_r} = j\,\omega_S\,\underline{\Phi}_S\,\frac{j\,L_r + R_r/\omega_r}{j\,L_S\,\omega_S\,(R_r/\omega_r + j\,\sigma\,L_r)}$$

En tenant compte de $R_r >> \sigma\,L_r\,\omega_r$:

$$\Rightarrow \underline{I}_S = \underline{\Phi}_S\,\frac{j\,L_r + R_r/\omega_r}{L_S\,R_r/\omega_r} \text{ d'où } I_S\cos\Psi = \underline{\Phi}_S\,\frac{L_r}{L_S}\,\frac{\omega_r}{R_r}$$

La loi de commande modifiée $f_2(\omega_S;\omega_r)$ prend la forme:

$$V_S = f_2(\omega_S;\omega_r) \Leftrightarrow V_S = \underline{\Phi}_S\,(1 + \frac{L_r}{L_S}\,\frac{\omega_r}{\omega_S}\,\frac{R_S}{R_r})$$

I.7.4) Caractéristique $C(f_s)$ avec la loi de commande modifiée.

AN: $\Phi_s = 2{,}58$ Wb $\Rightarrow V_s = 2{,}58\ \omega_s\ (1 + 3{,}16 / \omega_s)$

Les valeurs obtenues avec cette loi sont données dans la table I (V'_s; I'_s; C') et la courbe correspondante est tracée sur la feuille I.A. On constate que cette loi permet d'améliorer notablement la commande en consigne de couple.

1.8) Alimentation pour des fréquences supérieures à f_{1max}.

1.8.1) On choisit logiquement de maintenir la tension à sa valeur nominale (maximale), soit 981,5 volts. Ceci permet d'obtenir le flux maximal compte tenu des contraintes d'isolement.

L'ordre de grandeur de la chute de tension maximale dans la résistance statorique est $R_s\ I_{sn} = 8{,}4$ volts, ce qui est très inférieur à V_{sn}.

Les champs magnétiques ($\Phi_s = V_s / \omega_s$) vont diminuer en fonction de la fréquence d'alimentation et donc en fonction de la fréquence de rotation. Ceci va se traduire par un couple maximal décroissant avec la vitesse.

1.8.2) L'expression du couple lorsqu'on néglige le résistance statorique est :

$$C = 3a \left(\frac{V_s}{\omega_s}\right)^2 \frac{R_r}{\omega_r} \frac{1}{K\,(R_r^2/\omega_r^2 + \sigma^2 L_r^2)}$$

$$\Rightarrow \omega_{rmax} = \frac{R_r}{\sigma L_r} \qquad C_{max} = \frac{3a}{2} \left(\frac{V_s}{\omega_s}\right)^2 \frac{1}{K \sigma L_r}$$

I.8.3) Fréquence maximale d'alimentation.

Le couple correspondant à la puissance nominale est donné par la relation $C = \frac{a P_n}{\omega_s}$. Si on s'impose une marge de sécurité de 50% entre le couple que doit fournir la machine et le couple maximal qu'elle peut fournir théoriquement, on doit avoir:

$$C < \frac{C_{max}}{1{,}5} \Rightarrow \omega_{smax} < V_{sn}^2 \frac{1}{P_n} \frac{1}{K \sigma L_r}$$

AN: $\omega_{smax} = 706$ rd/s $\qquad f_{smax} = 112$ Hz

Si on dépasse notablement cette fréquence, on diminue la marge de sécurité sur le couple. Une excursion momentanée du couple résistant peut amener une perte du contrôle de l'effort de traction.

I.9) Evolution des grandeurs pour la caractéristique de traction maximale.

I.9.1) Couple pour un flux de 1 Wb.

$$C = 3a \left(\frac{L_s}{L_m}\right)^2 \frac{R_r}{\omega_r} I'^2_r = 3\,a\,\Phi_s^2 \left(\frac{L_m}{L_s}\right)^2 \frac{R_r}{\omega_r} \frac{1}{(R_r^2/\omega_r^2 + \sigma^2 L_r^2)}$$

La courbe $C(f_r)$ est tracée sur la feuille I.B et les valeurs sont rassemblées dans la table II.

La courbe $C(f_r)$ ne dépend que du rapport R_r/ω_r , on peut déduire les courbes correspondant aux températures extrêmes par affinité d'axe vertical (couple constant à R_r/ω_r constant). Pour un couple donné: $\omega_r(175°C) = 1{,}3\ \omega_r(100°C)$; $\omega_r(25°C) = 0{,}7\ \omega_r(100°C)$.

I.9.2) La courbe tracée précédemment et la connaissance des flux ($\Phi_S = 2{,}58$ Wb pour $fs < 60$ Hz; $\Phi_S = 981{,}5/\omega s$ pour $fs > 60$ Hz) permet de trouver les fréquences rotoriques correspondant aux différentes valeurs de couple. On peut en déduire la valeur du courant statorique par:

$$I_S = \Phi_S \frac{\sqrt{R_r^2/\omega_r^2 + L_r^2}}{L_S\sqrt{R_r^2/\omega_r^2 + \sigma^2 L_r^2}} \qquad \text{(cf question I.6.1)}$$

(voir les courbes sur la feuille I.C et les valeurs du tableau III)

Pour les températures extrêmes les courbes $\omega_r(f_S)$ sont obtenues par homothétie, sachant qu'elles correspondent aux mêmes valeurs de couple.

La courbe $I_S(f_S)$ reste inchangée. Pour un couple et un flux Φ_S donnés, le terme R_r/ω_r est fixé (cf expression du courant I_S).

I.9.3) A partir des courbes tracées au I.9.1 on peut facilement déduire la valeur des couples pour les températures extrêmes connaissant le couple à 100°C.

$$\text{Pour } \omega_r \text{ donnée } C(t°C, \Phi_S) = C(100°C, \Phi_S)\ \frac{C(t°C, 1\text{ Wb})}{C(100°C, 1\text{ Wb})}$$

I.9.4) On constate à partir des courbes précédentes que la simple consigne de pulsation rotorique ne permet pas de contrôler le couple délivré par la machine, la température du moteur est en effet très variable suivant les régimes auxquels elle a pu fonctionner.

I.10) Aspects technologiques.

Dans une machine construite pour la vitesse variable, la commande permet de déplacer la caractéristique de couple en changeant la fréquence d'alimentation. Le démarrage ne pose donc pas de problème particulier et il est inutile d' augmenter la résistance rotorique pour améliorer le couple de démarrage.

Afin d'avoir le meilleur rendement possible, on a intérêt à fonctionner avec la fréquence rotorique la plus faible possible. La cage rotorique doit donc présenter une résistance électrique faible. Il faut remarquer que la recherche d'un très bon rendement est motivée, plus par la diminution des contraintes thermiques qu'imposent les pertes, que par un soucis d'économie d'énergie. L'augmentation du rendement permet surtout de rendre les moteurs plus compacts.

TABLE I

Couple pour une fréquence rotorique de 0,4 Hz avec les lois de commande f_1 et f_2 .

fs (Hz)	ws (rd/s)	Vs (volts)	Zs (ohms)	Is (A)	C (mN)	V's (V)	I's (A)	C' (mN)
0,4	2,51	6,5	0,029	222,2	1397	14,6	501,9	7130
0,5	3,14	8,1	0,032	250,5	1775	16,3	502,7	7152
0,75	4,71	12,2	0,040	301,2	2567	20,3	503,4	7170
1	6,28	16,2	0,048	334,7	3170	24,4	503,2	7167
2,5	15,71	40,5	0,097	417,0	4922	48,7	501,1	7105
5	31,42	81,1	0,179	453,5	5820	89,2	499,2	7052
10	62,83	162,1	0,342	474,0	6358	170,3	497,9	7015
20	125,66	324,2	0,669	484,9	6654	332,4	497,1	6993
40	251,33	648,4	1,322	490,5	6809	656,6	496,7	6981
60	376,99	972,6	1,975	492,4	6862	980,8	496,5	6977

TABLE II

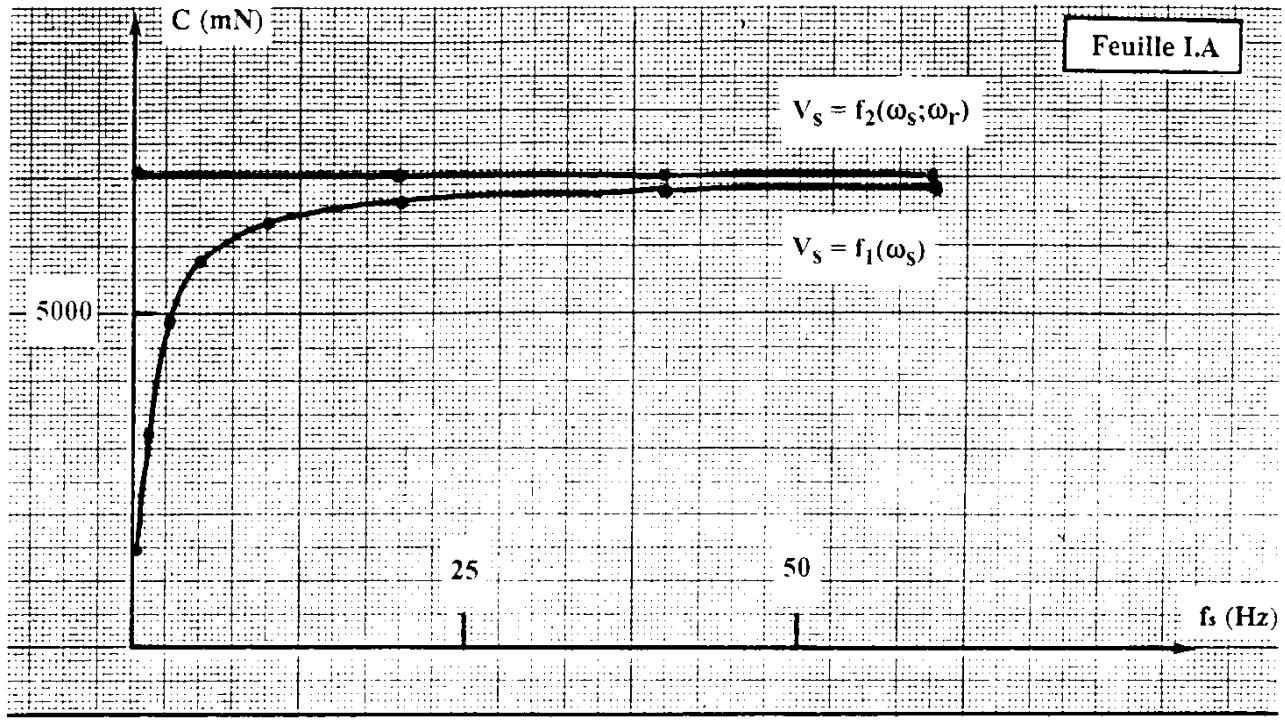
Couple pour un flux stator de 1 Wb

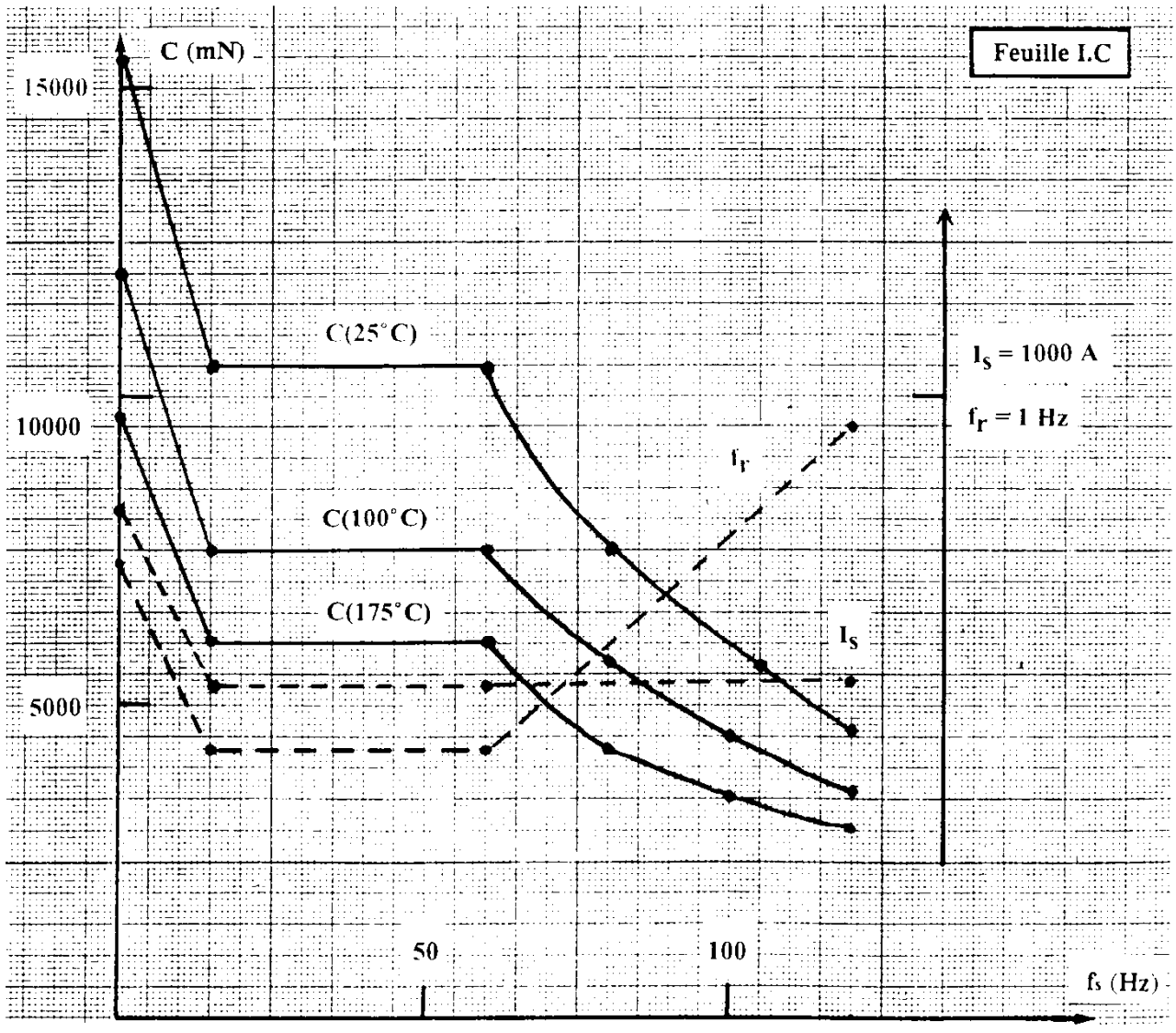
fr (Hz)	wr (rd/s)	Rr/wr	C (mN)	fr 25°C	fr 175°C
0,1	0,63	0,0210	269	0,07	0,13
0,2	1,26	0,0105	536	0,14	0,26
0,3	1,88	0,0070	796	0,21	0,39
0,4	2,51	0,0053	1048	0,28	0,52
0,5	3,14	0,0042	1289	0,35	0,65
0,6	3,77	0,0035	1517	0,42	0,78
0,7	4,40	0,0030	1730	0,49	0,91
0,8	5,03	0,0026	1928	0,56	1,14
0,9	5,65	0,0023	2109	0,63	1,27
1	6,28	0,0021	2274	0,70	1,30

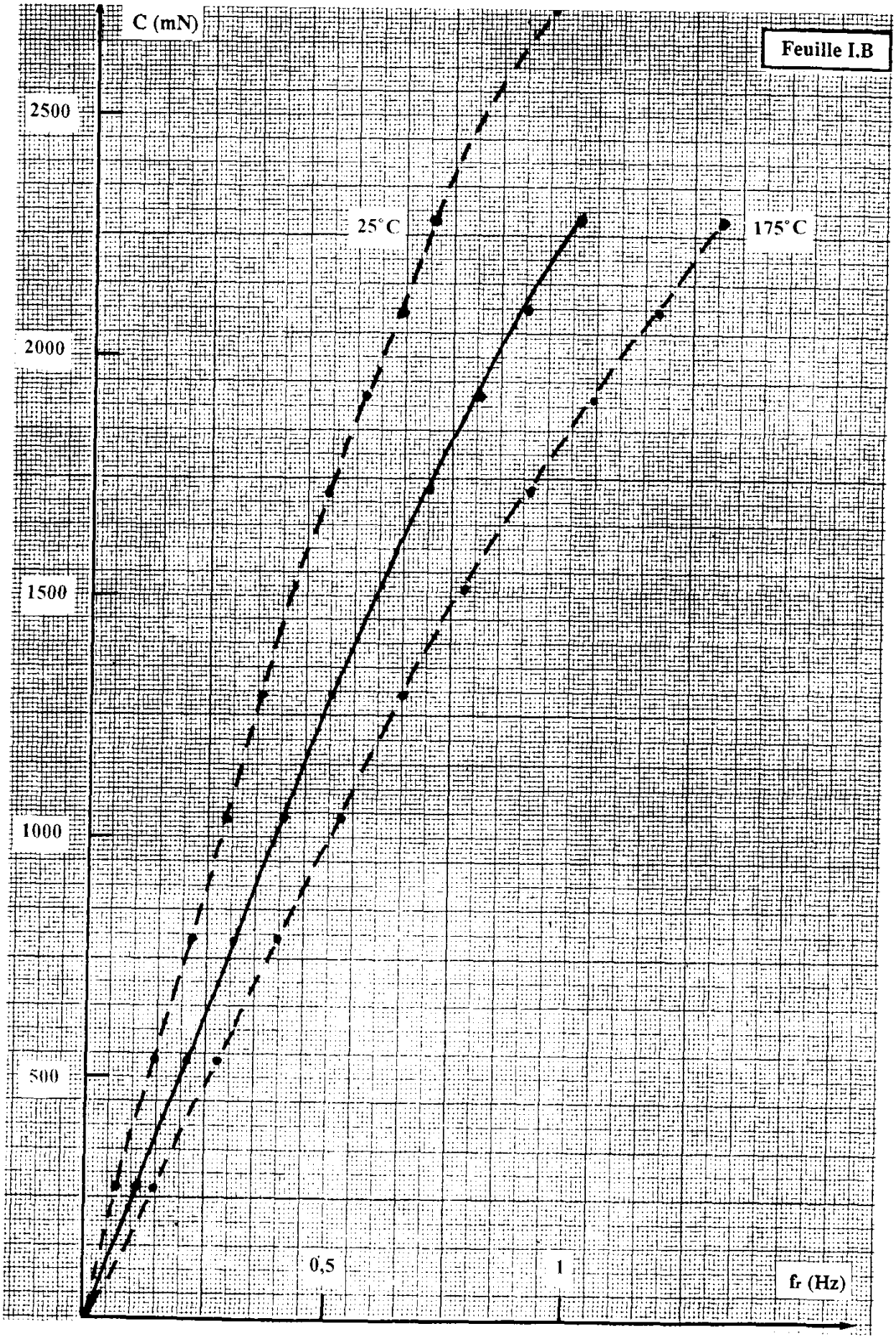
TABLE III

Courant et fréquence rotorique pour la caractéristique de traction nominale

fs (Hz)	C (mN)	Flux	fr (Hz)	Rr/wr	Is	C 25°C	C 175°C
			Flux cst.				
0,74	12000	2,58	0,74	0,0028	866,5	15400	9600
7	10000	2,58	0,60	0,0035	717,8	13100	8000
15	7530	2,58	0,43	0,0049	533,5	10400	5800
60	7530	2,58	0,43	0,0049	533,5	10400	5800
			V cst.				
80	5610	1,95	0,58	0,0036	526,8	7400	4400
100	4488	1,56	0,75	0,0028	530,9	5800	3600
120	3740	1,30	0,95	0,0022	543,0	4500	3000


C (mN)
Feuille I.A
$V_s = f_2(\omega_s;\omega_r)$
$V_s = f_1(\omega_s)$
5000
25
50
f_s (Hz)


C (mN)
Feuille I.C
15000
10000
5000
C(25°C)
C(100°C)
C(175°C)
I_s = 1000 A
f_r = 1 Hz
f_r
I_s
50
100
f_s (Hz)


C (mN)
Feuille I.B
2500
2000
1500
1000
500
25° C
175° C
0,5
1
fr (Hz)

PARTIE II

ETUDE DE L'ONDULEUR DE TENSION

II.1) Formes des tensions de sortie.

II.1.1) Allures des tensions de bras de l'onduleur $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$.

Ces tensions reproduisent les signaux de commande des thyrisors GTO T_1, T_3, T_5 (cf feuille II.A.)

II.1.2) Formes des tensions composées $u_{12}(t)$, $u_{23}(t)$, $u_{31}(t)$ (cf feuille II.A.)

II.1.3) Valeurs efficaces U(k) des harmoniques de rang k des tensions composées. Il est évident que les trois tensions composées contiennent les mêmes harmoniques. A condition de prendre une nouvelle origine en - π /6, la tension $u_{12}(t)$ est impaire. On peut alors calculer les composantes de son spectre par:

$$U(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_{12}(\theta)\sin(k\,\theta)\,d\theta = \frac{2}{\sqrt{2}\,\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} E\sin(k\,\theta)\,d\theta \text{ avec } \theta_1 = \frac{\pi}{6} \text{ et } \theta_2 = \frac{5\pi}{6}$$

$$U(k) = \frac{2\sqrt{2}E}{k\,\pi}\sin\left(\frac{k\,\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{k\,\pi}{3}\right)$$

Les harmoniques pairs et multiples de 3 sont nuls. Les premiers harmoniques non nuls sont le 5, 7 11, 13.

Les harmoniques pairs sont absents des tensions u_i (sauf k= 0). En plus, les harmoniques de rang multiple de 3 des tensions u_i correspondent à des systèmes homopolaires de tensions triphasées. Ces harmoniques n'existent donc pas au niveau des tensions composées.

II.1.4) Le fondamental de la tension composée a pour expression:

$$U(1) = \frac{\sqrt{6}\,E}{\pi} \Rightarrow E = 2180 \text{ volts.}$$

II.1.5) Tension de neutre v_N:

$v_1 = u_1 - v_N = f(i_1)$ où f est un opérateur linéaire.

$v_2 = u_2 - v_N = f(i_2)$

$v_3 = u_3 - v_N = f(i_3)$

Le montage sans connexion de neutre impose $i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

$$v_1 + v_2 + v_3 = f(i_1) + f(i_2) + f(i_3) = f(i_1 + i_2 + i_3) = 0 = (u_1 + u_2 + u_3) + 3\,v_N$$

$$\Rightarrow v_N(t) = \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3)$$

Le fondamental de v_1 est en phase avec le créneau de commande du thyristor GTO n°1.

On remarque que $v_N(t)$ est constitué des harmoniques des tensions u_i qui donnent des systèmes triphasés homopolaires.

On peut calculer les valeurs efficaces des différents harmoniques des tensions simples, sachant qu'il n'y pas d'harmonique pair, vu la symétrie par rapport à $\pi/2$:

$$V_1(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} v_1(\theta) \sin(k\,\theta)\, d\theta \qquad V_1(k) = \frac{2\sqrt{2}E}{3k\,\pi} \left((1 + \cos\left(\frac{k\,\pi}{3}\right)\right) \qquad \text{avec } k = 2k' + 1$$

I.1.6) Taux d'harmoniques:

La valeur efficace des tensions composées est $U_{12} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,E$

La valeur efficace des tensions simples est $V_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,E = \frac{U_{12}}{\sqrt{3}}$

De la même façon $U_{12}(1) = \sqrt{3}\ V_1(1) = \frac{\sqrt{6}}{\pi}\,E$

$$\Rightarrow t_h = \frac{\sqrt{V_1^2 - V_1(1)^2}}{V_1(1)} = \frac{\sqrt{U_{12}^2 - U_{12}(1)^2}}{U_{12}(1)} = 0{,}311.$$

Comparaison de $V_1(k)$ et $U_1(k)$:

Les tensions u_i et v_i ont les mêmes tensions composées (u_{ij}). Les harmoniques de rang k qui peuvent être différents pour ces deux systèmes de tensions triphasées correspondent à ceux qui forment un système homopolaire. Ceux sont les harmoniques de rang multiple de 3.

La question précédente montre que si u_1 contient de l'harmonique 3 (homopolaire). v_N contient exactement le même harmonique (même amplitude $v_N(t) = \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3)$ et celui-ci est alors absent de v_1 ($v_1 = u_1 - v_N$). Le spectre $V_1(k)$ se déduit du spectre $U_1(k)$ en supprimant les harmoniques multiples de 3 (y compris l'harmonique k=0 qui correspond à la valeur moyenne).

Il est alors logique que le taux d'harmonique soit le même pour les tensions composées et les tensions simples. Ces tensions ont des spectres dont les valeurs efficaces des composantes sont homothétiques (rapport $\sqrt{3}$ entre les amplitudes).

II.2) Courants.

II.2.1) Allure des courants dans les semi-conducteurs du bras n°1 de l'onduleur (cf Feuille II.B).

II.2.2) Tension aux bornes de T_1 (cf feuille II.B).

Immédiatement après la commutation du bras de l'onduleur ($T_1 \rightarrow T_2$), l'interrupteur T_1 est soumis à une tension directe. On doit donc pouvoir procéder à son

blocage de manière indépendante à l'évolution naturelle du circuit.

L'interrupteur doit être bidirectionnel en courant, d'où l'association classique dans un bras d'onduleur d'un GTO et d'un diode en anti-parallèle.

II.2.3) Contraintes en courant et en tension sur les semi-conducteurs.

Pour le GTO:

$I_{Tmax} = I\sqrt{2}$ $(\varphi < \pi/2)$ 1270 A

$I_{Teff} = I\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi - \varphi}{4\pi} + \frac{\sin 2\varphi}{8\pi}}$ 634 A

courant à commuter: $I_{Tc} = I\sqrt{2}\sin\varphi$ 329 A

$I_{Tmoy} = I\sqrt{2}\,\frac{1 + \cos\varphi}{2\pi}$ 398 A

$V_{Tdirecte} = E = 2180$ volts $V_{Tinverse} = 0$

Pour la diode:

$I_{Dmax} = I\sqrt{2}\sin\varphi$ $(I\sqrt{2}$ si $\varphi > \pi/2)$ 328 A

$I_{Dmoy} = I\sqrt{2}\,\frac{1 - \cos\varphi}{2\pi}$ 7 A

$I_{Deff} = I\sqrt{2}\sqrt{\frac{\varphi}{4\pi} - \frac{\sin 2\varphi}{8\pi}}$ 37 A

$V_{Ddirecte} = 0$ $V_{Dinverse} = -E = 2180$ volts.

II.2.4) Pertes par conduction dans un GTO.

$$P_{GTO} = V_{TO}\, I_{Tmoy} + r_{on}\, I_{Teff}^2$$

AN: $I_{Tmoy} = 257$ A $I_{Teff} = 420$ A $P_{GTO} = 582$ W.

II.2.5) Le signal de gachette doit être un créneau. En effet on ne maîtrise pas l'instant où un GTO doit devenir passant.

II.3) Alimentation de l'onduleur.

II.3.1) Allure du courant $i_E(t)$ (cf feuille II.B).

$\pi/3 < \omega_0 t < 2\pi/3$ T_1 conduit seul: $i_e = I\sqrt{2}\sin(\omega_0 t - \varphi)$

$2\pi/3 < \omega_0 t < \pi$ T_1 et D_3 puis T_1 et T_3 conduisent: $i_e = i_1 + i_2$.

$\Rightarrow i_e = I\sqrt{2}\{\sin(\omega_0 t - \varphi) + \sin(\omega_0 t - \varphi - 2\pi/3)\} = I\sqrt{2}\sin(\omega_0 t - \varphi - \pi/3)$

On a donc une période de $\pi/(3\,\omega_0)$ et la pulsation fondamentale de l'ondulation du courant d'entrée est $\omega_E = 6\,\omega_0$

II.3.2) Valeur moyenne du courant d'entrée.

$$3\ V1(1)\ I\cos\varphi = 3\frac{\sqrt{2}\,E}{\pi} I\cos\varphi = E\,I_E$$

$$I_E = 3\frac{\sqrt{2}}{\pi} I\cos\varphi$$

II.3.3) Filtre.

II.3.3.1) La source d'énergie réelle présente une inductance ℓ. Lors des commutations, la charge se comporte comme une source de courant (caractère inductif). L'onduleur doit donc être alimenté par une source de tension (faible impédance transitoire). Dans le cas contraire, il apparaîtrait des surtensions importantes. Le filtre sert à transformer la source réelle en une source dont le comportement dynamique est proche de celui d'une source de tension parfaite.

II.3.3.2) Ondulation crête.

$0 < \varphi < \pi/6$ $\qquad \Delta i_E = I\sqrt{2}\,(1 - \sin(\pi/3 - \varphi))$

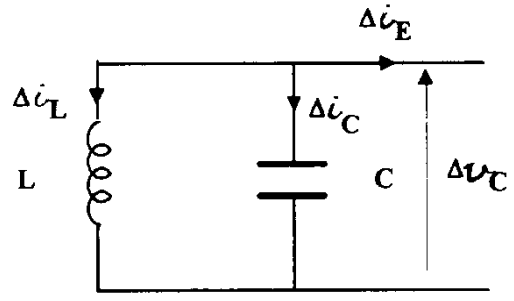
$\pi/6 < \varphi < \pi/2$ $\qquad \Delta i_E = I\sqrt{2}\sin\varphi$

L'ondulation maximale est obtenue pour $\varphi = \pi/2$; soit $\Delta i_{Emax} = I\sqrt{2}$

II.3.3.3) On assimile le courant d'entrée à sa composante moyenne et un terme sinusoïdal de pulsation ω_E.

$$i_E(t) = I_E + \frac{\Delta i_E}{2}\sin(\omega_E t)$$

Le schéma équivalent du filtre d'entrée pour la composante sinusoïdale du courant d'entrée se réduit aux deux éléments L et C:



On obtient en module les relations:

$$\Delta i_L = \frac{\Delta i_E}{|1 - LC\omega_E^2|} \qquad \Delta v_c = \Delta i_E \frac{L\omega_E}{|1 - LC\omega_E^2|}$$

$I_L = I_E$ et $V_c = E$ (valeur moyenne et absolue)

D'où :

$$\frac{\Delta i_L}{I_L} < 5\% \Rightarrow \frac{\Delta i_E}{I_E}\frac{1}{|1 - LC\omega_E^2|} < 5\%$$

$$\frac{\Delta v_C}{V_C} < 5\% \Rightarrow \frac{\Delta i_E}{E}\frac{L\omega_E}{|1 - LC\omega_E^2|} < 5\%$$

AN: $I = 600$ A; $\varphi = 25°$; $f_0 = 60$Hz $\Rightarrow I_E = 734$ A; $\Delta i_E = 362$ A; $\omega_E = 2261$ rd/s

$LC\omega_E^2 > 10{,}9$ et $L\omega_E < 3 \Rightarrow LC = 7{,}7\ 10^{-5}$ (on minimise le produit LC)

$L = 1{,}3$ mH et $C = 1{,}6$ mF.

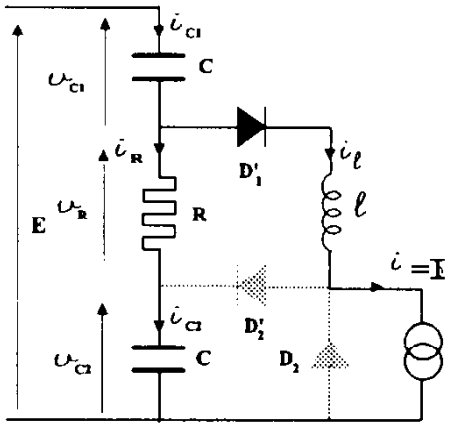
II.3.3.4) La réversibilité fonctionnelle de l'ensemble du système d'entraînement peut être obtenue si la source E est réversible en courant.

II.4) Etude de la commutation $T_1 \rightarrow D_1$ - commutation à l'ouverture.

II.4.1) A l'instant t= 0⁻ le GTO conduit le courant I_0, donc:

$$v_{T1} = 0 \qquad u_1 = E \qquad v_{C2} = E \qquad v_{C1} = 0$$

II.4.2) première phase:



II.4.2.1) A l'instant t = 0⁺; i_ℓ reste constant et égal à I_0. Le thyristor GTO T1 étant bloquée, la diode D'_1 devient passante ($i_\ell = i_{D'1} + i_{T1}$).

De même si la diode D_2 devenait passante, D'_2 resterait bloquée et le terme $\ell \frac{d\, i_\ell}{dt}(0^+)$ serait positif. Or un accroissement du courant est impossible avec cette topologie: $i_\ell = I_0 - i_{D2}$ et $i_{D2} > 0$. D_2 reste donc bloquée.

Si $i_\ell = I_0$ alors $v_{D'2} = R\, i_R < 0$. D'_2 reste bloquée. Dans ces conditions la mise en équation du circuit donne:

$$v_{C1} + v_R + v_{C2} = E \qquad I_0 = i_{C1} - i_R = i_{C1} - i_{C2}$$

$$\frac{di_{C1}}{dt} + \frac{i_{C1}}{\tau} = \frac{I_0}{C} \qquad \text{avec } \tau = RC$$

Compte tenu des conditions initiales: $v_{C1}(0^+) = 0$ et $v_{C2}(0^+) = E$, on a $i_R(0^+) = 0$ et $i_{C1}(0^+) = I_0$:

$$i_{C1}(t) = \frac{I_0}{2}(1 + e^{-2t/\tau}) \qquad i_{C2}(t) = -\frac{I_0}{2}(1 - e^{-2t/\tau}) = i_R(t)$$

$$v_{C1}(t) = \frac{I_0}{2C}t + \frac{RI_0}{4}(1 - e^{-2t/\tau}) \qquad v_{C2}(t) = E - \frac{I_0}{2C}t + \frac{RI_0}{4}(1 - e^{-2t/\tau})$$

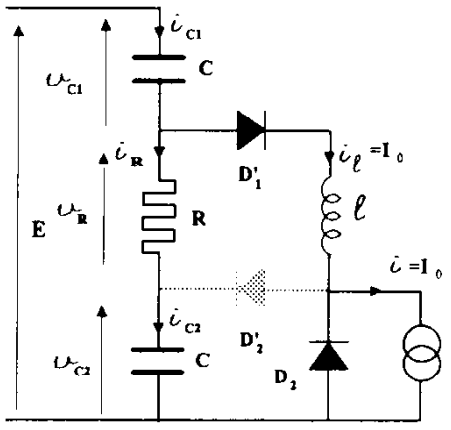
$$v_{D'2}(t) = R\, i_R(t) = R\, i_{C2}(t) < 0 \qquad v_{D2}(t) = -E + v_{C1}(t)$$

II.4.2.2) La diode D_2 devient passante à l'instant t_1 où v_{D2} devient positif.

Si $t_1 >> \tau$ $\qquad t_1 = \frac{2CE}{I_0} - \frac{\tau}{2} = \frac{2CE}{I_0}$

Valeurs finales à l'instant t_1: $v_{C1}(t_1) = E \qquad v_{C2}(t_1) = \frac{RI_0}{2} \qquad v_R(t_1) = -\frac{RI_0}{2}$

II.4.3) Deuxième phase.



II.4.3.1) Si on suppose que pendant cette phase le courant reste constant dans l'inductance:

$$i_{C1} = I_0 + i_{C2} \quad v_{C1} + v_{C2} + R\, i_{C2} = E$$

$$\frac{di_{C1}}{dt} + 2\frac{i_{C1}}{\tau} = \frac{I_0}{\tau} \Rightarrow i_{C1}(t) = I_0/2 + K\, e^{-2t/\tau}$$

Les tensions aux bornes des condensateurs sont continues en t= t_1, donc $v_R(t_1^+) = v_R(t_1) = -RI_0/2$. Le courant $i_{C1}(t_1^+)$ est donc égal à $I_0/2$, d'où (K=0):

$$i_{C1}(t) = I_0/2 = -i_{C2}(t)$$

II.4.3.2) (cf feuille II.C)

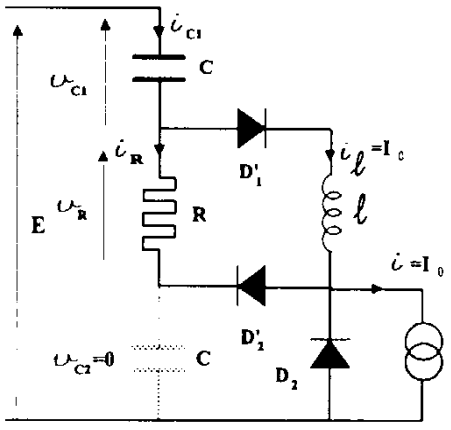
$$v_{C2}(t) = v_{C2}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \frac{I_0}{2C}\, dt = \frac{RI_0}{2}\,\frac{I_0}{2C}(t - t_1)$$

A l'instant t_2, $v_{C2}(t_2) = 0$ et la diode D'2 se débloque: $t_2 - t_1 = \tau$

II.4.4) Troisième phase.

II.4.4.1) Les équations du circuit sont pour ce circuit:

$$R\, i_R = \ell \frac{d\, i_\ell}{dt} = E - v_{C1} \qquad i_{C1} = i_R + i_\ell \qquad v_{C2}(t) = 0$$



L 'équation traduisant l'évolution du circuit est la suivante:

$$\frac{d^2 v_{C1}}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dv_{C1}}{dt} + \frac{1}{\ell C} v_{C1} = \frac{E}{\ell C}$$

II.4.4.2)

Compte tenu de l'hypothèse $\tau' = \frac{\ell}{R} >> 2\sqrt{\ell C}$:

$$v_{C1}(t) = E + A\, e^{-(t-t_2)/\tau} + B\, e^{-(t-t_2)/\tau'}$$

A $t = t_2$: $v_{C1}(t_2) = R\, I_0/2 + E \quad v_{C2}(t_2) = 0 \qquad i_\ell(t_2) = I_0$

$\Rightarrow i_R(t_2) = -I_0/2$ et par conséquent: $i_{C1}(t_2) = +I_0/2$

$\Rightarrow A = -RI_0/2$ et $B = -RI_0$

$$v_{C1}(t) = E + RI_0\,(e^{-(t-t_2)/\tau'} - \frac{1}{2} e^{-(t-t_2)/\tau})$$

$i_{C1}(t) = + \frac{I_0}{2} e^{-(t-t_2)/\tau}$ $\qquad$ $i_R(t) = - I_0 (e^{-(t-t_2)/\tau'} - \frac{1}{2} e^{-(t-t_2)/\tau})$

$i_\ell(t) = I_0 e^{-(t-t_2)/\tau'}$ $\qquad$ $i_{D2}(t) = I_0 - i_\ell(t) - i_R(t) = I_0 (1 - e^{-(t-t_2)/\tau})$

NB: le courant dans la capacité C_1 est continue en t_2, $v_{C1}(t_2)$ ne présente pas de point anguleux.

II.4.4.3) (feuille II.C)

II.4.5) Dimensionnement

II.4.5.1) Evolution de v_{T1} (voir feuille II.C). La diode D'_1 étant passante pendant toutes la commutation, nous avons $v_{T1} = v_{C1}$.

Le thyristor GTO est soumis à une contraint en dv/dt. Cette contrainte est maximale en t = 0 et vaut I_0 /C.

$$C > \frac{I_{0max}}{(dv/dt)_{max}} \text{ avec } I_{0max} = 2000 \text{ A et } (dv/dt)_{max} = 500 \text{ V/}\mu\text{s}$$

$$C = 4\ \mu F$$

La tension maximale appliquée aux bornes du GTO apparaît au début de la phase 3 à l'instant $t_{max} = t_2 + \tau \text{ Ln } \frac{\tau'}{2\tau}$.

$V_{T1max} = V_{C1max} \approx E + R I_0$ si on néglige τ/τ' AN: $V_{T1max} = 3300$ V

II.4.5.2) Evolution du courant $i_R(t)$ et pertes dans la résistance.

En négligeant les composantes exponentielles faisant intervenir la constante de temps τ:

$t < t_2$ $i_R(t) = - I/2$ d'où $W = 1/2\ \tau EI_0$.

$t > t_2$ $i_R(t) = - I_0 e^{-(t - t_2)/\tau'}$ d'où $W = 1/2 \ell I_0^2$

La résistance sert essentiellement à dissiper l'énergie emmagasinée dans l'inductance.

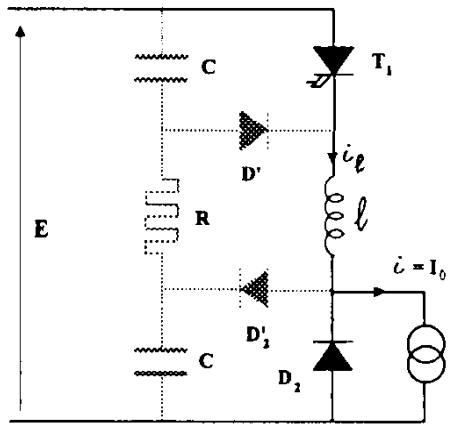
II.5) Commutation à la fermeture D2 → T1.

II.5.1) Ce type de commutation n'existe pas dans le fonctionnement pleine onde , quand la charge présente un caractère inductif.

II.5.2) valeurs initiales:

$v_{C1}(0^+) = E(0^+) = E$ $\qquad$ $v_{C2}(0^+) = 0$ $\qquad$ $i_\ell(0^+) = 0$;

II.5.3) Première phase.



II.5.3.1) $v_{T1}(0^-) = E$. Le thyristor GTO peut s'amorcer si il reçoit une impulsion sur la gachette.

II.5.3.2) Evolution des grandeurs.

$v_{D'1}(0^+) = - v_{C1}(0^+) = - E < 0$. La diode D'_1 reste bloquée (D'_2 est aussi bloquée). On a donc les relations suivantes:

$$v_{D2}(t) = I_0 - i_\ell(t) \qquad \ell \frac{di_\ell}{dt} = E$$

$$v_{C1}(t) = E \qquad v_{C2}(t) = 0$$

d'où: $i_\ell(t) = (E/\ell)\, t \qquad i_{D2}(t) = - (E/\ell)\, t + I_0$

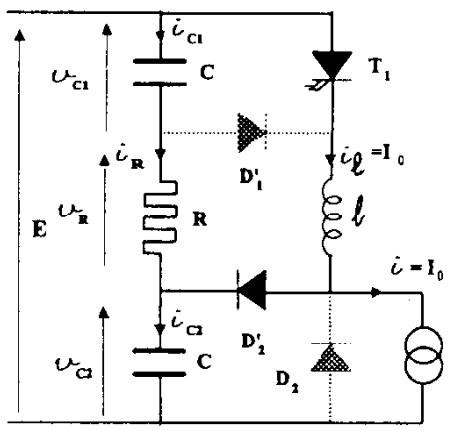
II.5.3.3) Cette phase termine à l'instant t_1, lorsque $i_\ell(t_1) = I_0$.

$$t_1 = \frac{\ell I_0}{E}$$

II.5.4) Deuxième phase.

II.5.4.1)

$v_{D'1}(t_1) = - v_{C1}(t_1) = - E < 0 \Rightarrow D'_1$ reste bloquée.



Si on suppose que D'_2 reste bloquée pout $t > t_1$, alors $i_\ell(t) = I_0$ et $v_\ell(t) = 0$; ce qui entraîne $v_{D'2} = E$ (donc D'_2 devient passante)

Les équations qui traduisent l'évolution du circuit sont:

$$i_{C1} - i_{C2} + i_\ell - I_0 = 0$$

$$v_{C1} + v_{C2} = E \; (R = 0)$$

$$\ell \frac{di_\ell}{dt} = v_{C1}$$

En tenant compte de la relation $i_{C1} - i_{C2} = 0$ on obtient l'équation différentielle à laquelle obéit $v_{C1}(t)$:

$$\frac{d^2 v_{C1}}{dt^2} + \frac{v_{C1}}{\omega} = 0 \text{ avec } \omega^2 = \frac{1}{2\ell C}$$

II.5.4.2) A $t = t_1$ $v_{C1}(t_1) = E$ et $i_{C1}(t_1) = 0$ d'où:

$$v_{C1}(t) = E \cos w\,(t - t_1)$$

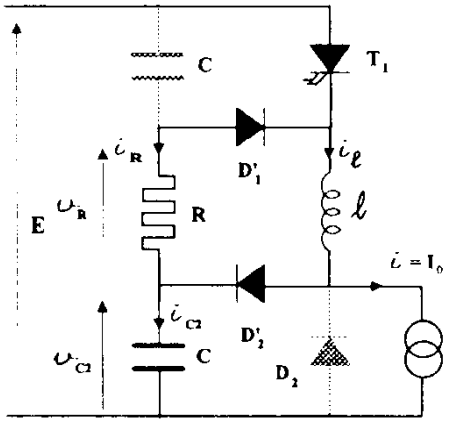
$$i_{C1}(t) = - E \sqrt{\frac{C}{2\ell}} \sin \omega\,(t - t_1) = i_R(t) \qquad v_{D2}(t) = - v_{C2}(t) = v_{C1}(t) - E$$

$$i_\ell(t) = I_0 + \sqrt{\frac{2C}{\ell}} \sin \omega\,(t - t_1)$$

Cette phase se termine à l'instant $t = t_2$ par la mise en conduction de D'_1 ($v_{D'1} = -v_{C1}$, cette tension devenant positive). (cf feuille II.D).

$$t_2 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2\ell C}$$

II.5.5) Troisième phase.



II.5.5.1) Les équations qui traduisent l'évolution du circuit sont:

$$i_R - i_{C2} + i_\ell - I_0 = 0 \qquad \ell \frac{di_\ell}{dt} = R\, i_R \qquad v_{C2} + R\, i_R = E$$

On obtient l'équation différentielle traduisant l'évolution de i_ℓ:

$$\frac{d^2 i_\ell}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{di_\ell}{dt} + \frac{1}{\ell C} i_\ell = \frac{I}{\ell C}$$

II.5.5.2) A $t = t_2$ $\quad i_\ell(t_2) = I + E\sqrt{\frac{2C}{\ell}}$ et $\quad \ell \frac{di_\ell}{dt} + v_{C2}(t_2) = E$, d'où:

$$i_\ell(t) = I_0 + E\sqrt{\frac{2C}{\ell}}\, e^{-(t - t_2)/\tau'}$$

$$v_{C2}(t) = E + E\,R\sqrt{\frac{2C}{\ell}}\,(e^{-(t - t_2)/\tau'} - e^{-(t - t_2)/\tau}) \qquad v_{C1}(t) = 0$$

$$i_{C2}(t) = E\sqrt{\frac{2C}{\ell}}\, e^{-(t - t_2)/\tau} \qquad i_R(t) = -E\sqrt{\frac{2C}{\ell}}\,(e^{-(t - t_2)/\tau'} - e^{-(t - t_2)/\tau})$$

$v_{C1}(t) = 0 \quad v_{D2}(t) = -v_{C2}(t)$

NB: avec les hypothèses faites, le courant $i_{C2}(t)$ est discontinu en $t = t_2$

II.5.6) Dimensionnement.

II.5.6.1) Courant $i_{T1}(t)$ (voir courbe II.D)

* $0 < t < t_2 \qquad i_{T1}(t) = i_\ell(t)$

* $t > t_2 \qquad i_{T1}(t) = i_\ell(t) + i_R(t) = I_0 + E\sqrt{\frac{2C}{\ell}}\, e^{-(t - t_2)/\tau}$

Durant cette commutation le thyristor GTO est soumis à une contrainte en di/dt qui est maximale à $t = 0$ et qui vaut E/ℓ.(330 A/µs):

$$\ell > \frac{E_{max}}{(dI/dt)_{max}} \quad (dI/dt)_{max} = 300 A/\mu s \text{ et } E_{max} = 2500 V$$

$$\ell = 8{,}3\ \mu H$$

La valeur maximale du courant est obtenue à la fin de la deuxième phase ($t = t_2$), et avec les hypothèses faites sur t on obtient:

$$i_{T1max} = I_0 + E\sqrt{\frac{2C}{\ell}}$$

II.5.6.2) Courant et pertes dans la résistance.

$i_R(t)$ (voir feuille II.D)

Pendant la phase 2 ($t_1 < t < t_2$) $\quad i_R(t) = - E \sqrt{\frac{C}{2\ell}} \sin \omega (t - t_1)$ d'où:

$$W = \tau E^2 \sqrt{\frac{C}{2\ell}} \pi/4$$

Pendant la phase 3 ($t_2 < t$) $\quad i_R(t) = - E \sqrt{\frac{2C}{\ell}} e^{-(t - t_2)/\tau'}$

$$W = C E^2$$

II.6)Durée des commutations:

Ouverture $t_{off} = \frac{2 CE}{I_0} + 3 \tau'$

Fermeture: $t_{on} = \frac{\ell I_0}{E} + \pi \sqrt{\frac{\ell C}{2}} + 3 \tau'$

Pour I_0 = 700 A et E = 2200 volts:

AN: $\tau' = 20{,}8$ µs $\quad t_{off} = 25 + 62 = 77$ µs $\quad t_{on} = 2{,}6 + 12{,}8 + 62 = 78$ µs

II.7) Valeurs maximales.

$v_{T1max} = E_{max} + R I_{0max} = 3300$ volts

$i_{T1max} = I_{0max} + Emax \sqrt{\frac{2C}{\ell}} = 4450$ A

II.8) Energie dissipée dans la résistance à chaque commutation.

Fermeture: $W_{on} = \tau E^2 \sqrt{\frac{C}{2\ell}} \pi/4 + C E^2$

Ouverture $W_{off} = \tau E I_0 + 1/2 \ell I_0^2$

Pour un courant I_0 de 700 A et une tension E de 2200 volts:

AN: $\tau = 1{,}6$ µs $\quad W_{on} = 3 + 19 = 22$ joules $\quad W_{off} = 1{,}2 + 2 = 3$ joules

Les durées de commutations dépendent essentiellement de τ'.

II.9) Rôle de la résistance.

La résistance R permet de dissiper lors de l'ouverture du thyristor l'énergie emmagasinée dans l'inductance. Lorsqu'on diminue la valeur de R on diminue les pertes de commutation, mais par contre on augmente les temps de commutation qui sont liés essentiellement à τ'.

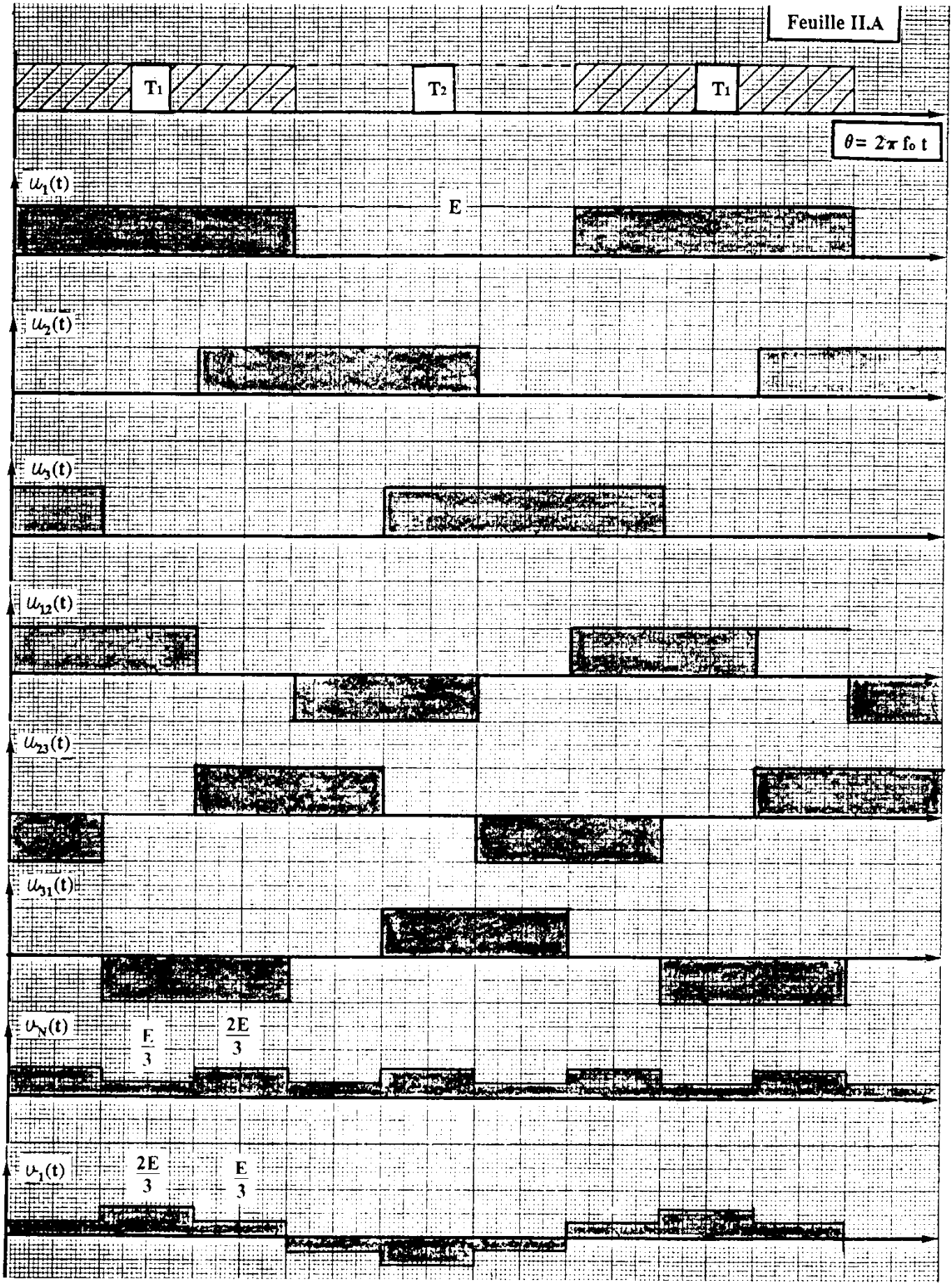
II.10) Pertes de commutations dans le composant.

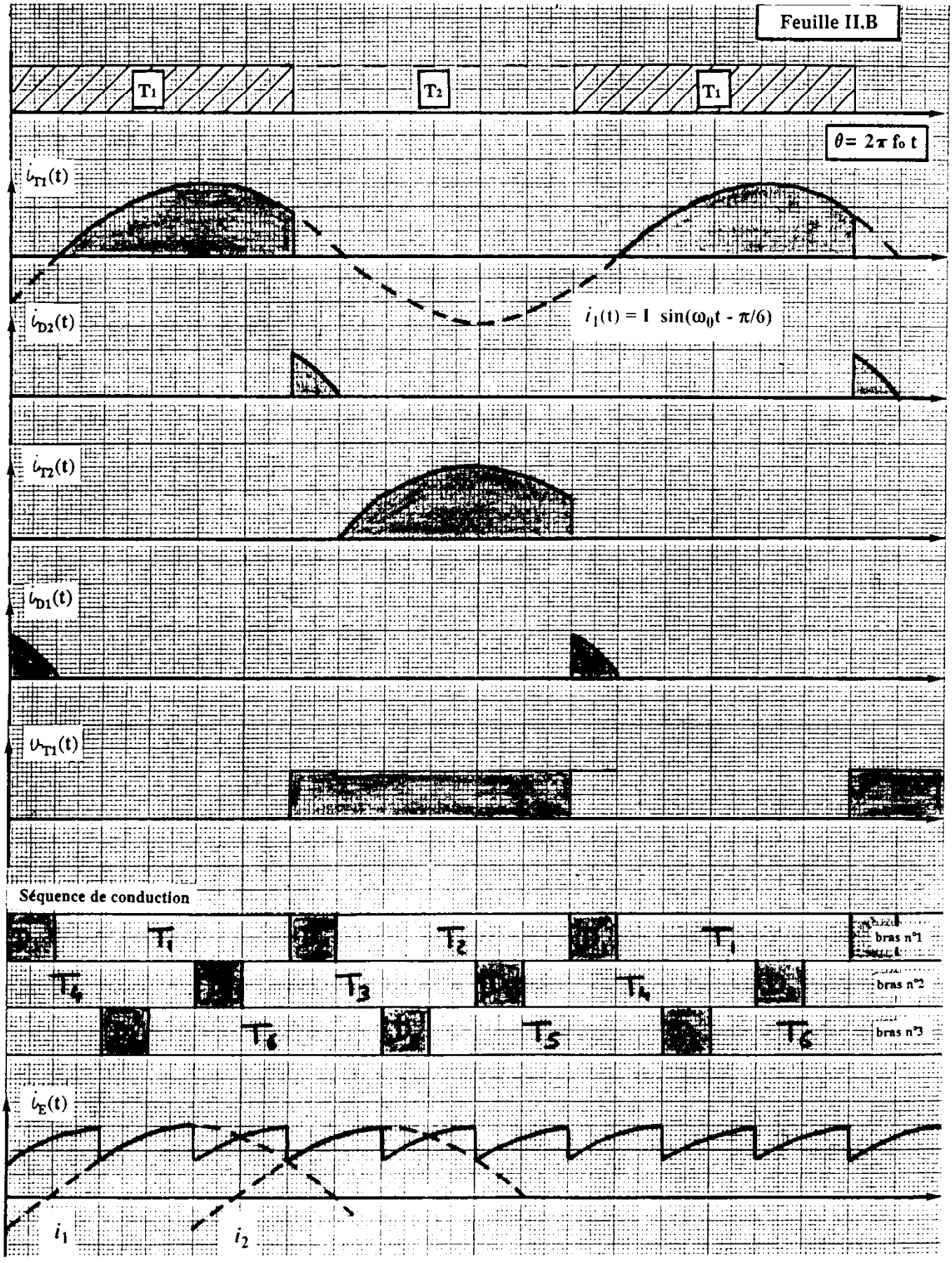
Pour les valeurs de courant et de tension spécifiées:

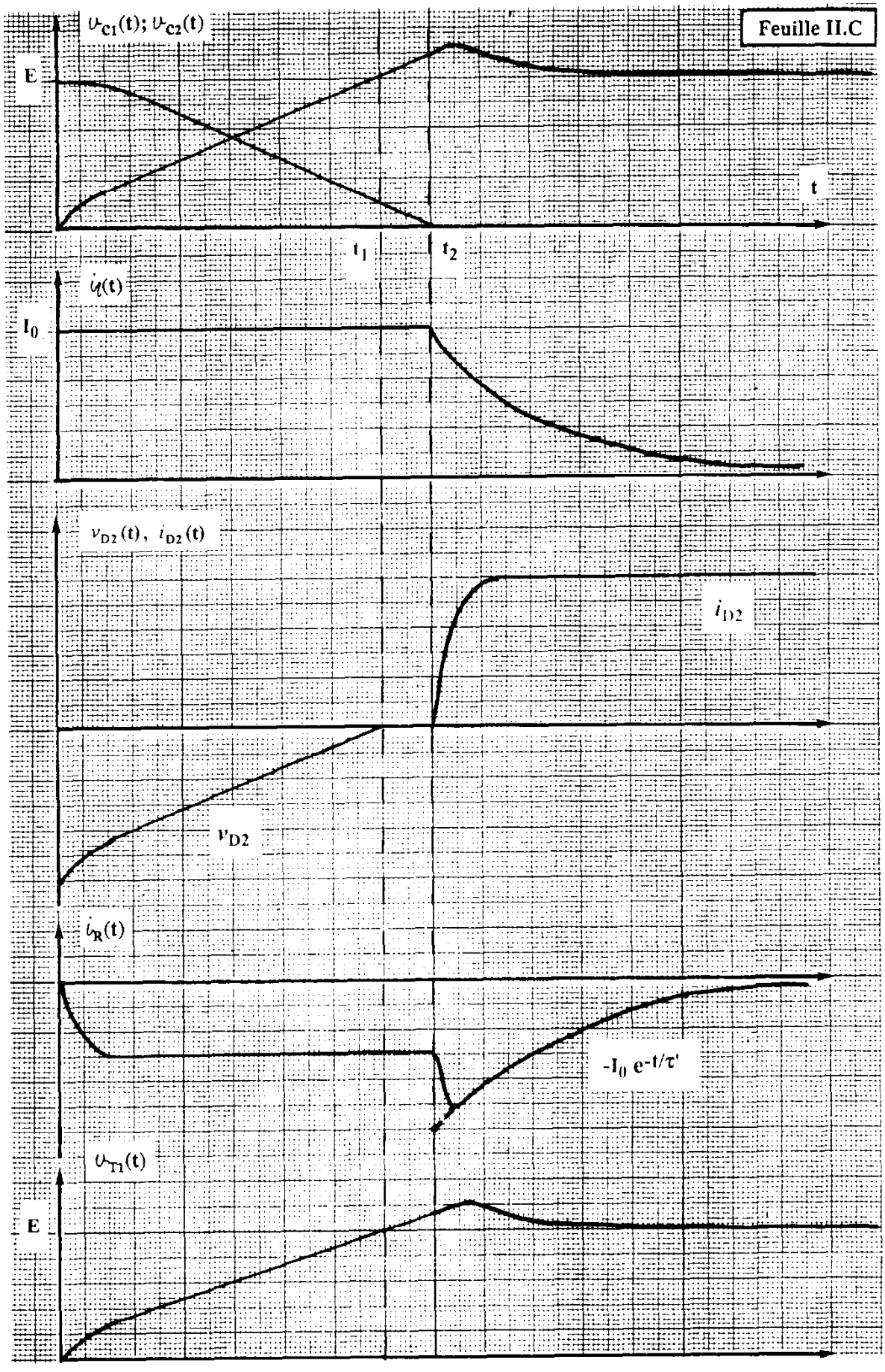
$di/dt = 265\ A/\mu s$ $dv/dt = 175\ V/\mu s$

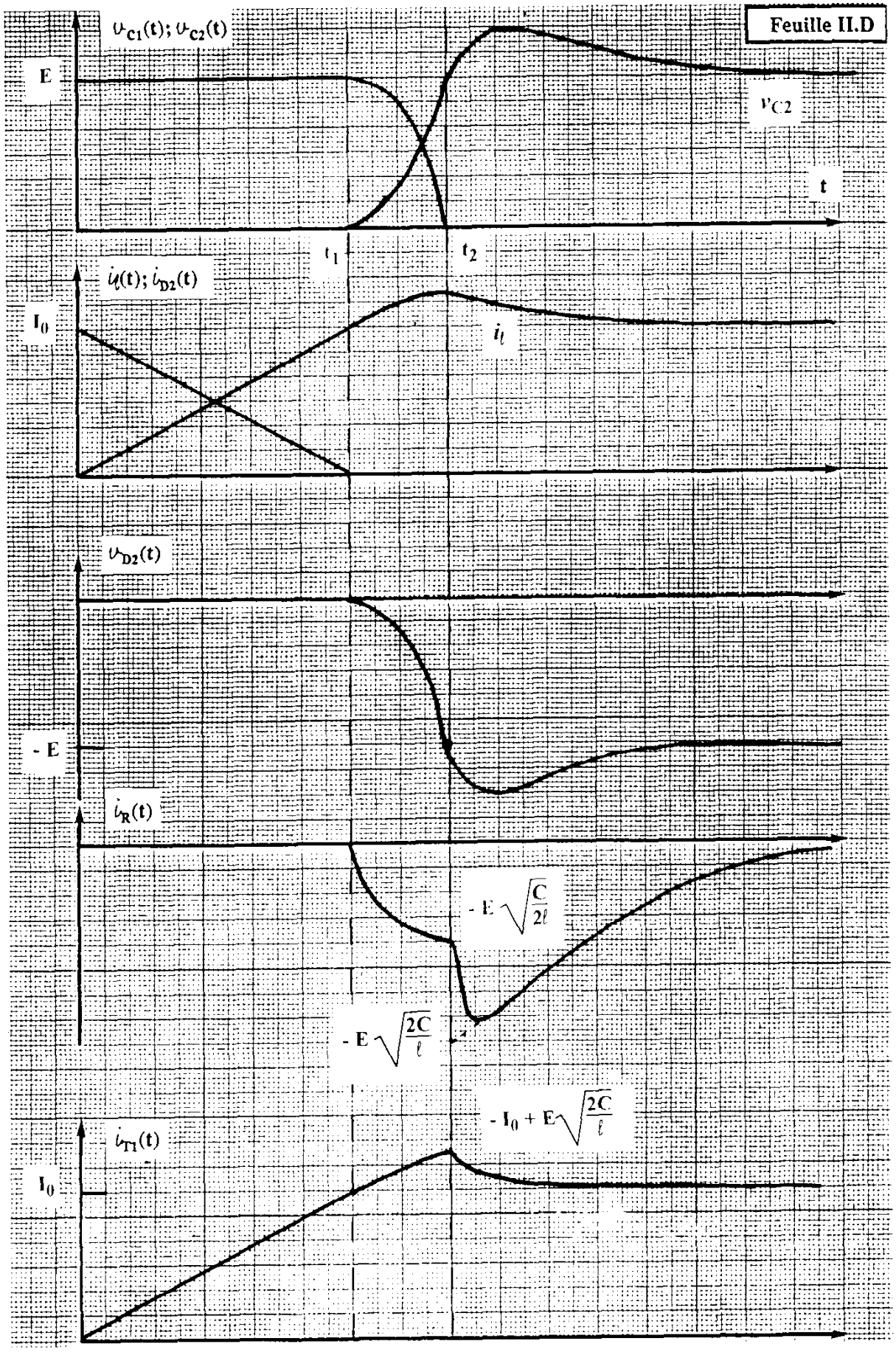
$W'_{off} = 1{,}2$ joules $W'_{on} = 3$ joules.

L'inductance et la capacité diminuent les contraintes appliquées au composant lors des commutations (di/dt et dv/dt). La diminution des pertes (internes au GTO) qui en découle permet de faire travailler le composant de manière plus fiable. Il faut noter que globalement, on ne diminue pas les pertes du convertisseur puisque celle-ci se trouvent reportées au niveau de la résistance R.


Feuille II.A
T1
T2
T1
θ = 2π f0 t
u1(t)
E
u2(t)
u3(t)
u12(t)
u23(t)
u31(t)
uN(t)
E/3
2E/3
u1(t)
2E/3
E/3


Feuille II.B
T1
T2
T1
θ= 2π f0 t
iT1(t)
iD2(t)
i1(t) = I sin(ω0t - π/6)
iT2(t)
iD1(t)
uT1(t)
Séquence de conduction
T1
T2
T1
bras n°1
T4
T3
T4
bras n°2
T6
T5
T6
bras n°3
iE(t)
i1
i2


Feuille II.C
$v_{C1}(t)$; $v_{C2}(t)$
E
t
t_1
t_2
$i_q(t)$
I_0
$v_{D2}(t)$, $i_{D2}(t)$
i_{D2}
v_{D2}
$i_R(t)$
$-I_0\, e^{-t/\tau'}$
$v_{T1}(t)$
E


Feuille II.D
$u_{C1}(t); u_{C2}(t)$
E
v_{C2}
t
t_1
t_2
$i_l(t); i_{D2}(t)$
I_0
i_l
$u_{D2}(t)$
- E
$i_R(t)$
$-E\sqrt{\frac{C}{2l}}$
$-E\sqrt{\frac{2C}{l}}$
$-I_0 + E\sqrt{\frac{2C}{l}}$
$i_{T1}(t)$
I_0

PARTIE III

MODULATION DE LARGEUR D'IMPULSION

III.1) Courants statoriques

III.1.1) Avec le convertisseur décrit dans la partie II, on peut délivrer une tension simple qui présente cette forme mais dont l'amplitude est fixée par E (A = E/3). Pour obtenir cette tension, il faudrait donc pouvoir faire varier la valeur de E, par exemple, en plaçant un hacheur en tête de l'onduleur.

III.1.2) Calcul du courant de phase $i_{s1}(t)$ sur une demi-période.

L'équation traduisant l'évolution du courant stator est donnée par:

$$\sigma L_s \frac{di_{s1}(t)}{dt} = v_{s1}(t) - e_1(t)$$

* $0 < \omega_s t < \pi/3$ et $2\pi/3 < \omega_s t < \pi$ $\quad \sigma L_s \frac{di_{s1}(t)}{dt} = A - E_0\sqrt{2}\sin(\omega_s t - \theta_0)$

$$i_{s1}(t) = \frac{A}{\sigma L_s} t + \frac{E_0\sqrt{2}}{\sigma L_s \omega_s}\cos(\omega_s t - \theta_0) + K \quad (K_1 \text{ ou } K_3)$$

* $\pi/3 < \omega_s t < 2\pi/3$ $\quad \sigma L_s \frac{di_{s1}}{dt} = 2A - E_0\sqrt{2}\sin(\omega_s t - \theta_0)$

$$i_{s1}(t) = \frac{2A}{\sigma L_s} t + \frac{E_0\sqrt{2}}{\sigma L_s \omega_s}\cos(\omega_s t - \theta_0) + K_2$$

Par continuité du courant en $\omega_s t = \pi/3$ et $\omega_s t = 2\pi/3$ et la relation $i_{s1}(0) = -i_{s1}(\pi/\omega_s)$, on obtient en posant $\omega_s t = \theta$:

$$K_1 = -\frac{A}{\sigma L_s \omega_s}\frac{2\pi}{3} \qquad K_2 = -\frac{A}{\sigma L_s \omega_s}\pi \qquad K_3 = -\frac{A}{\sigma L_s \omega_s}\frac{\pi}{3} \text{ d'où}$$

* $0 < \omega_s t < \pi/3$ $\quad i_{s1}(t) = \frac{A}{\sigma L_s \omega_s}\left(\theta + \frac{E_0\sqrt{2}}{A}\cos(\theta - \theta_0) - 2\pi/3\right)$

* $\pi/3 < \omega_s t < 2\pi/3$ $\quad i_{s1}(t) = \frac{A}{\sigma L_s \omega_s}\left(2\theta + \frac{E_0\sqrt{2}}{A}\cos(\theta - \theta_0) - \pi\right)$

* $2\pi/3 < \omega_s t < \pi$ $\quad i_{s1}(t) = \frac{A}{\sigma L_s \omega_s}\left(\theta + \frac{E_0\sqrt{2}}{A}\cos(\theta - \theta_0) - \pi/3\right)$

III.1.3) Allure du courant $i_{s1}(t)$ (cf Feuille III.A).

AN: $\sigma L_s = 0{,}92$ mH $\quad E_0 = 460$ volts $\quad \theta_0 = 10° = 0{,}174$ rd

* $0 < \omega_s t < \pi/3$ $\quad i_{s1}(t) = 2100\,(\theta + 1{,}79\cos(\theta - 0{,}174) - 2{,}09)$

* $\pi/3 < \omega_s t < 2\pi/3$ $\quad i_{s1}(t) = 2100\,(2\theta + 1{,}79\cos(\theta - 0{,}174) - 3{,}14)$

* $\pi/3 < \omega_S t < \pi$ $\quad i_{S1}(t) = 2100\,(\theta + 1{,}79\cos(\theta - 0{,}174) - 1{,}05)$

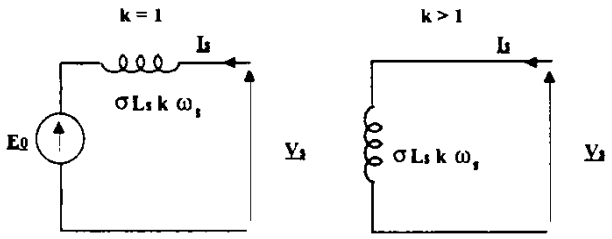
III.2) Couple en valeur instantanée.

III.2.1) Expression du couple instantané. On admet que la relation entre le couple et la puissance transmise au rotor P_T reste valable en valeur instantanée, d'où:

$$P_T(t) = C(t)\,\Omega_S = (e_1(t)\,i_1(t) + e_2(t)\,i_2(t) + e_3(t)\,i_3(t))$$

$$C(t) = \frac{1}{\Omega_S}(e_1(t)\,i_1(t) + e_2(t)\,i_2(t) + e_3(t)\,i_3(t))$$

III.2.2) Schéma équivalent par phase pour l'harmonique de tension de rang k.



* k = 1 $\quad \underline{I}_S = \dfrac{\underline{V}_S - \underline{E}_0}{j\,\sigma\,L_S\omega_S}$

* k > 1 $\quad \underline{I}_S = \dfrac{\underline{V}_S(k)}{j\,\sigma\,L_S\,k\omega_S}$

II.2.3) Harmonique de couple $C_k(t)$ associée à l'harmonique de courant $I_S(k)$.

$$e_1(t)\,I_{1k}(t) = E_0\sqrt{2}\sin(\theta - \theta_0)\,I_S(k)\sqrt{2}\sin(k\theta - \beta_k) \text{ avec } -\beta_k = \alpha_k - \varphi_k$$

On en déduit les expressions de la puissance instantanée pour chaque phase:

$e_1(t)\,I_{1k}(t) = E_0\,I_S(k)\,[-\cos((k+1)\theta - \theta_0 - \beta_k) + \cos((k-1)\theta - \beta_k + \theta_0)]$

$e_2(t)\,I_{2k}(t) = E_0\,I_S(k)\,[-\cos((k+1)\theta - \theta_0 - \beta_k + (k+1)2\pi/3) + \cos((k-1)\theta - \beta_k + \theta_0 + (k-1)\,2\pi/3)]$

$e_3(t)\,I_{3k}(t) = E_0\,I_S(k)\,[-\cos((k+1)\theta - \theta_0 - \beta_k + (k+1)4\pi/3) + \cos((k-1)\theta - \beta_k + \theta_0 + (k+1)4\pi/3)]$

On a globalement une puissance instantanée non nulle transmise au rotor, et donc un couple , dans les 2 cas suivants:

* k + 1 = 3n $\quad C_k(t) = -\dfrac{E_0\,I_S(k)}{\Omega_S}\cos((k+1)\theta - \theta_0 - \beta_k)$

* k - 1 = 3n $\quad C_k(t) = +\dfrac{E_0\,I_S(k)}{\Omega_S}\cos((k-1)\theta + \theta_0 - \beta_k)$

III.2.4) Expression des composantes $C_k(t)$ du couple en fonction des harmoniques de tension.

* k >= 1:

$$C_k(t) = -\frac{a\,E_0\,V_S(k)}{k\,\sigma\,L_S\,\Omega_S^2}\cos((k+1)\theta - \theta_0 - \beta_k) \quad \text{si } k + 1 = 3n$$

$$C_k(t) = +\frac{a\,E_0\,V_S(k)}{k\,\sigma\,L_S\,\Omega_S^2}\cos((k-1)\theta + \theta_0 - \beta_k) \quad \text{si } k - 1 = 3n$$

* k = 1:

$$C_1(t) = \frac{E_0\,I_S}{\Omega_S}\cos(\theta_0 - \beta_1) \qquad \beta_1 = \varphi - \alpha_1 = \varphi$$

$$C_1(t) = \frac{E_0 I_S}{\Omega_S} \cos(\theta_0 - \varphi) = \frac{V_S I_S}{\Omega_S} \cos(\varphi)$$

On obtient un couple constant qui est le couple moyen développé par la machine asynchrone lorsqu'elle est alimentée sous tension sinusoïdale.

III.2.5) Ondulation du couple.

Le premier harmonique de tension non nul est l'harmonique de rang 5 qui vaut:

$$Vs(5) = \frac{3\ A\sqrt{2}}{5\pi} = 98 \text{ volts} \qquad (I_S(5) = 114 \text{ A})$$

Cet harmonique donne un couple à la pulsation $6\ \omega_S$ dont l'amplitude est donnée par:

$$C_5 = \frac{3\ a\ E_0\ V_S(5)}{5\ \Omega_S^2\ \sigma\ L_S} = 1660 \text{ mN} \qquad 6\ \omega_S = 150\text{Hz}$$

Pour ce point de fonctionnement le couple moyen est de l'ordre de 7067 mN. On constate que l'amplitude de l'ondulation (pour le fondamental) du couple est loin d'être négligeable et est en fait inacceptable.

II.2.6) Le couple moyen est lié uniquement au fondamental du courant. Par contre les harmoniques de courant ne dépendent que de la forme de la tension $v_S(t)$ ($V_S(k)$) et de la pulsation ω_S. Les harmoniques de couples sont donc indépendants du couple moyen.

L'inductance de fuite $\sigma\ L_S$ a un effet bénéfique puisqu'elle diminue la valeur des harmoniques de courant.

III.2.7) Le problème devient plus aigu à basse fréquence et à faible charge. En effet, dans ces conditions, les harmoniques de couples se situent à des fréquences basses (pas de filtrage mécanique) et leurs amplitudes deviennent très importantes devant le couple moyen.

III.3) Modulation de largeur d'impulsion synchrone.

III.3.1) Les signaux de commande sont générés à la fréquence ω_S, la tension $u_1(t)$ présente une période de $2\pi\ /\omega_S$. On rappelle que la tension $u_1(t)$ reproduit exactement la forme du signal de commande.

Si on prend m impair le signal de commande est symétrique par rapport à $\pi/2$, ce qui permet d'éliminer les harmoniques pairs de la tension $u_1(t)$ (mis à part la valeur moyenne).

II.3.2) Expression des modulantes pour les phases 2 et 3.

Si $m_1(t) = U_{ref} \sin(\omega_S t)$ alors :

$$m_2(t) = U_{ref} \sin(\omega_S t - 2\pi/3)$$

$$m_3(t) = U_{ref} \sin(\omega_S t - 4\pi/3)$$

Les porteuses doivent rester en synchronisme avec les modulantes:

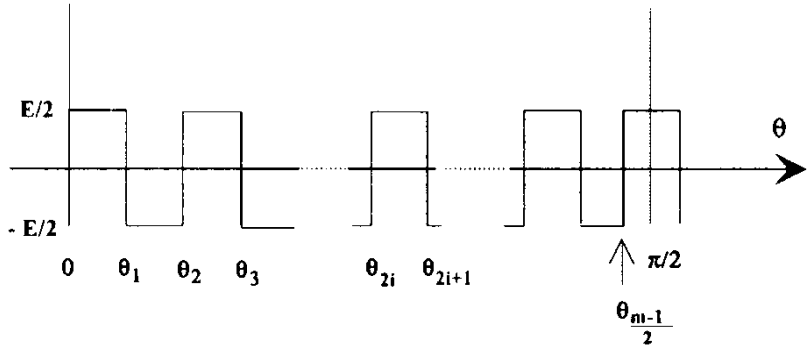
Si $p_1(t) = U_{ref}\ \text{Tri}(m\ \omega_S t)$ alors :

$$p_2(t) = U_{ref}\ \text{Tri}(m\ (\omega_S t - 2\pi/3)) = U_{ref}\ \text{Tri}(m\ \omega_S t - m\ 2\pi/3)$$

$$p_3(t) = U_{ref}\ \text{Tri}(m\ (\omega_S t - 4\pi/3)) = U_{ref}\ \text{Tri}(m\ \omega_S t - m\ 4\pi/3)$$

On note Tri(θ) la fonction triangle variant entre - 1 et +1 et qui présente une période de 2π. Si m est multiple de 3, la porteuse est identique pour les 3 phases.

III.3.3) Valeur efficace du fondamental de la tension $u_1(t)$.



En éliminant sa valeur moyenne, la tension $u_1(t)$ se présente comme sur la figure ci-dessus.

On peut exprimer la valeur efficace de son fondamental par l'expression:

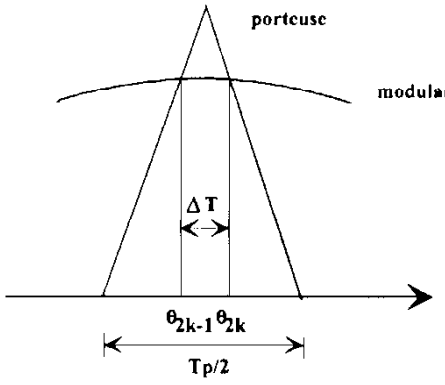
$$U_1(1) = \frac{\sqrt{2}\,E}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta$$

$$U_1(1) = \frac{\sqrt{2}\,E}{\pi} \sum_{k=0}^{(m-5)/4} \left(\int_{\theta_{2k}}^{\theta_{2k+1}} \sin\theta \, d\theta - \int_{\theta_{2k+1}}^{\theta_{2k+2}} \sin\theta \, d\theta \right) + \frac{\sqrt{2}\,E}{\pi} \int_{\theta_{(m-1)/2}}^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta$$

$$U_1(1) = \frac{\sqrt{2}\,E}{\pi} \sum_{k=0}^{(m-5)/4} \left((\cos\theta_{2k} - \cos\theta_{2k+1}) + (\cos\theta_{2k+2} - \cos\theta_{2k+1}) \right) + \frac{\sqrt{2}\,E}{\pi} \cos\theta_{(m-1)/2}$$

$$U_1(1) = \frac{\sqrt{2}\,E}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{(m-1)/4} (\cos\theta_{2k} - \cos\theta_{2k-1}) \right)$$

$$U_1(1) = \frac{\sqrt{2}\,E}{\pi} \left(1 - 4 \sum_{k=1}^{(m-1)/4} \sin(\theta_{2k} + \cos\theta_{2k-1}) \sin(\theta_{2k} - \cos\theta_{2k-1}) \right)$$



$$1/2\,(\theta_{2k} - \theta_{2k-1}) = \Delta T\,\omega_s.$$

On peut exprimer ΔT de manière approchée par:

$$\Delta T = T_p/2\,(1 - r \sin\theta'_{2k})$$

$$\theta'_{2k} = (\theta_{2k} + \theta_{2k-1})/2 = 3\,T_p/4 + (k - 1)T_p$$

En tenant compte du fait que m est très grand et que par conséquent $(\theta_{2k} - \theta_{2k-1})$ est très petit.

$$\sin\,(\theta_{2k} - \theta_{2k-1})/2 = T_p/4\,\omega_s.(1 - r \sin\theta'_k)$$

$$U_1(1) = \frac{\sqrt{2}\,E}{\pi} \left(1 - T_p\,\omega_s\,(A - r\,B) \right)$$

avec : $A = \sum_{k=1}^{(m-1)/4} \sin\theta'_k$ $\qquad B = \sum_{k=1}^{(m-1)/4} \sin^2\theta'_k$

Un calcul classique sur les sommes de fonctions sinusoïdales montre que lorsque m tend vers des valeurs très grandes:

$$A = 1/(\omega_S\, Tp) \text{ et } B = (m/8)$$

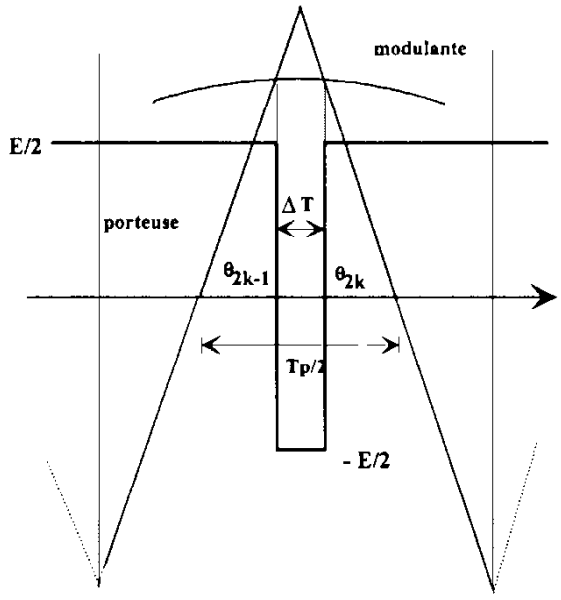
Sachant que $m\ \omega_S T_p = 2\ \pi$, on obtient finalement:

$$U_1(1,r) = \frac{r\ E}{2\sqrt{2}}$$

On peut raisonner de manière plus intuitive en calculant la valeur moyenne de $u_1(t)$ sur une période de la porteuse (ici, on raisonne en fait sur la partie alternative de $u_1(t)$)

$$u_{Tp}(\theta) = 1/(T_p\ \omega_S)\ (E/2\ (T_p\ \omega_S - (\theta_{2k} - \theta_{2k-1}) - E/2\ (\theta_{2k} - \theta_{2k-1}))$$

$$u_{Tp}(\theta) = E/2\ r\ \sin\theta'_k \approx E/2\ r\ \sin\theta$$



III.3.4) La valeur maximale du fondamental est obtenue pour r = 1. Dans le fonctionnement pleine onde, la valeur obtenue est de:

$$U_1(1,p) = \frac{\sqrt{2}\ E}{\pi}$$

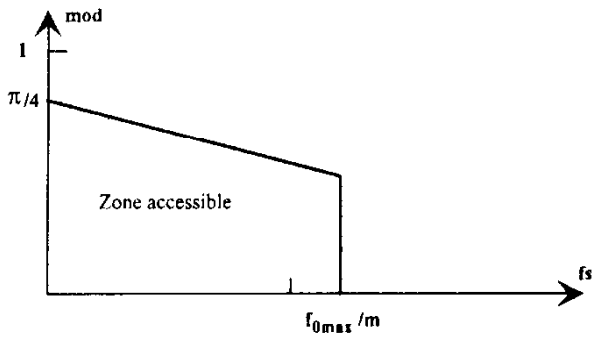
$$mod = \frac{U_1(1,r)}{U_1(1,p)} \qquad mod_{max} = \pi/4$$

On rappelle que les tension u_i et v_i ont le même spectre, mis à part les harmoniques multiples de 3.

III.3.5) La durée de conduction diminue lorsque le terme r s'approche de la valeur 1. En se reportant à la figure, il est clair qu' en première approximation:

$$\Delta T = T_p/2\ (1 - r) \text{ avec } T_p = 1/f_p \qquad \Delta T > t_{min} \Rightarrow mod < \pi/4\ (1 - 2\ t_{min}\ m\ f_s)$$

III.3.6) Zone accessible dans le plan (mod, f_s)



On est en présence de deux types de limitation:

* une fréquence maximale de fonctionnement liée à la fréquence maximale de fonctionnement de l'onduleur.

$$f_{smax} = f_{omax}/m$$

* une limitation en taux de modulation (mod) qui décroît linéairement en fonction de la fréquence f_S (cf question précédente).

$$mod(f_S) < \pi/4\ (1 - 2\ t_{min}\ m\ f_S)$$

III.7) Taux d'harmonique de la tension $u_1(t)$.

La valeur efficace des harmoniques de $u_1(t)$ (cf définition donnée à la partie II) est E/2.

$$t_h = \frac{\sqrt{(E/2)^2 - 1/2\,(r\,E/2)^2}}{\sqrt{2}\,r\,E/2} = \frac{\sqrt{2 - r^2}}{r}$$

Le taux d'harmonique est indépendant de m (si m est suffisamment grand) et toujours supérieur à 1.

Lorsque r = 0, le premier harmonique de tension se situe à la fréquence $f_p = mf_s$

II.3.8) Les premiers harmoniques de la tension $u_1(t)$ apparaissent aux fréquences:

$$(m - 2)\,f_s \qquad m\,f_s \qquad (m + 2)\,f_s$$

m étant multiple de 3, la fréquence m fs sera absente des tensions simples et par conséquent des courants de ligne. Les harmoniques $(m - 2)\,f_s$ et $(m + 2)\,f_s$ sont impairs et non multiples de 3, ils seront présents dans ces grandeurs.

Le couple présentera une composante à la pulsation $f_c = (m - 3)\,f_s$.(cf question III.2.3)

On constate que la MLI ne diminue pas le taux d'harmonique des tensions, par contre ce mode de commande permet de repousser les harmoniques de courant, et donc de couple, vers les hautes fréquences.

III.3.9) Domaine d'utilisation de la MLI synchrone.

* la fréquence minimale pour f_c impose: $f_s > f_{cmin} / (m - 3)$
* la fréquence maximale de l'onduleur impose: $f_s < f_{omax} / m$

Aux basses fréquences la plage dans laquelle une modulation MLI synchrone d'indice m peut fonctionner risque d'être beaucoup trop étroite pour pouvoir être gérée. Lors d'une accélération de la machine, il faudrait changer fréquemment d'indice de modulation.

III.4) MLI à angles calculées.

III.4.1) fréquence de fonctionnement de l'onduleur.

$$f_o = (2n + 1)\,f_s$$

L'augmentation du taux de modulation (mod) ne peut être obtenu qu'en diminuant les périodes pendant lesquelles T_1 est ouvert (entre 0 et π). Le fonctionnement de l'onduleur impose des durées de conduction minimales (pour T_1 et T_2).

III.4.2) Les harmoniques de rang k de la tension $u_1(t)$ ont pour valeur efficace:

$$U_1(k) = \frac{E}{2k\sqrt{2}}\,(1 - 2\cos k\alpha_1 + 2\cos k\alpha_2 - \cos k\pi/2)$$

d'où les équations permettant de fixer mod et d'annuler l'harmonique 5:

$$\text{mod} = \frac{E}{2\sqrt{2}}\,(1 - 2\cos\alpha_1 + 2\cos\alpha_2)$$

$$0 = (1 - 2\cos 5\alpha_1 + 2\cos 5\alpha_2)$$

Dans le cas où n est différent de 2, on choisit de supprimer les premiers harmoniques de tensions (simples ou composées , car les mêmes harmoniques sont présents dans ces tensions) qui donnent des harmoniques de couple.

Ces harmoniques doivent vérifier les relations définies au III.2.3. Il s'agit du 5, 7, 11, 13, 17 etc...qui donnent des couples aux fréquences 6 f_s, 12 f_s, 18 f_s etc....

III.5) Stratégie de modulation.

III.5.1) Zones du plan (mod,f_s) accessibles par les différentes commandes.

MLI asynchrone: $mod_{max} = \pi/4$ et $f_s < 15$ Hz.

MLI synchrone: $mod_{max} = 0{,}785\ (1 - 32\ 10^{-5}\ m\ f_s)$ $f_{smax} = 400/m$

m = 21 $mod_{max} = 0{,}785\ (1 - 6{,}7\ 10^{-3}\ f_s)$ $f_{smax} = 19$ Hz

m = 15 $mod_{max} = 0{,}785\ (1 - 4{,}8\ 10^{-3}\ f_s)$ $f_{smax} = 26{,}6$ Hz

Angles calculés: $mod_{max} = (1 - (n-1)\ 1{,}25\ 10^{-3}\ f_s)$ $f_{smax} = 400/(2n + 1)$

n = 4 $mod_{max} = (1 - 3{,}8\ 10^{-3}\ f_s)$ $f_{smax} = 44{,}4$ Hz

n = 3 $mod_{max} = (1 - 2{,}5\ 10^{-3}\ f_s)$ $f_{smax} = 57{,}1$ Hz

n = 2 $mod_{max} = (1 - 1{,}25\ 10^{-3}\ f_s)$ $f_{smax} = 80$ Hz

n = 1 $mod_{max} = 1$ $f_{smax} = 130$ Hz

On remarque que l'on est amené à changer de type de MLI soit parce qu'on a atteint la fréquence maximale de fonctionnement de l'onduleur, soit parce qu'on ne peut pas obtenir la valeur de mod désirée. On est dans ce dernier cas lors de la transition entre la MLI à 3 puis à 2 angles calculés à 53 Hz (de même entre 2 et 1 à 56 Hz).

NB: En fait il existe deux type de MLI à angles calculés, suivant l'état logique de la commande de T_1 à $\theta = 0$.:

* T_1 à 1 (ou passant) et pour α_1 le thyristor est commandé à l'ouverture. C'est le cas dans lequel on s'est placé ici.
* T_1 à 0 (ou bloqué) et pour α_1 le thyristor est commandé à la fermeture. Le fonctionnement en pleine onde correspond à ce cas avec $\alpha_1 = 0$ et n = 1.

III.5.2) Fréquence de fonctionnement de l'onduleur et fréquence minimale de l'ondulation du couple.

MLI asynchrone: $f_c = f_p = 400$ Hz;

MLI synchrone: $f_c = (m - 3)\ f_s$

m = 21 $f_c = 18\ f_s$

m = 15 $f_c = 12\ f_s$

MLI angles calculés: On annule les n - 1 premiers harmoniques de 5, 7, 11, 13, 17

n = 4 $f_c = 12\ f_s$

n = 3 $f_c = 12\ f_s$

n = 2 $f_c = 6\ f_s$

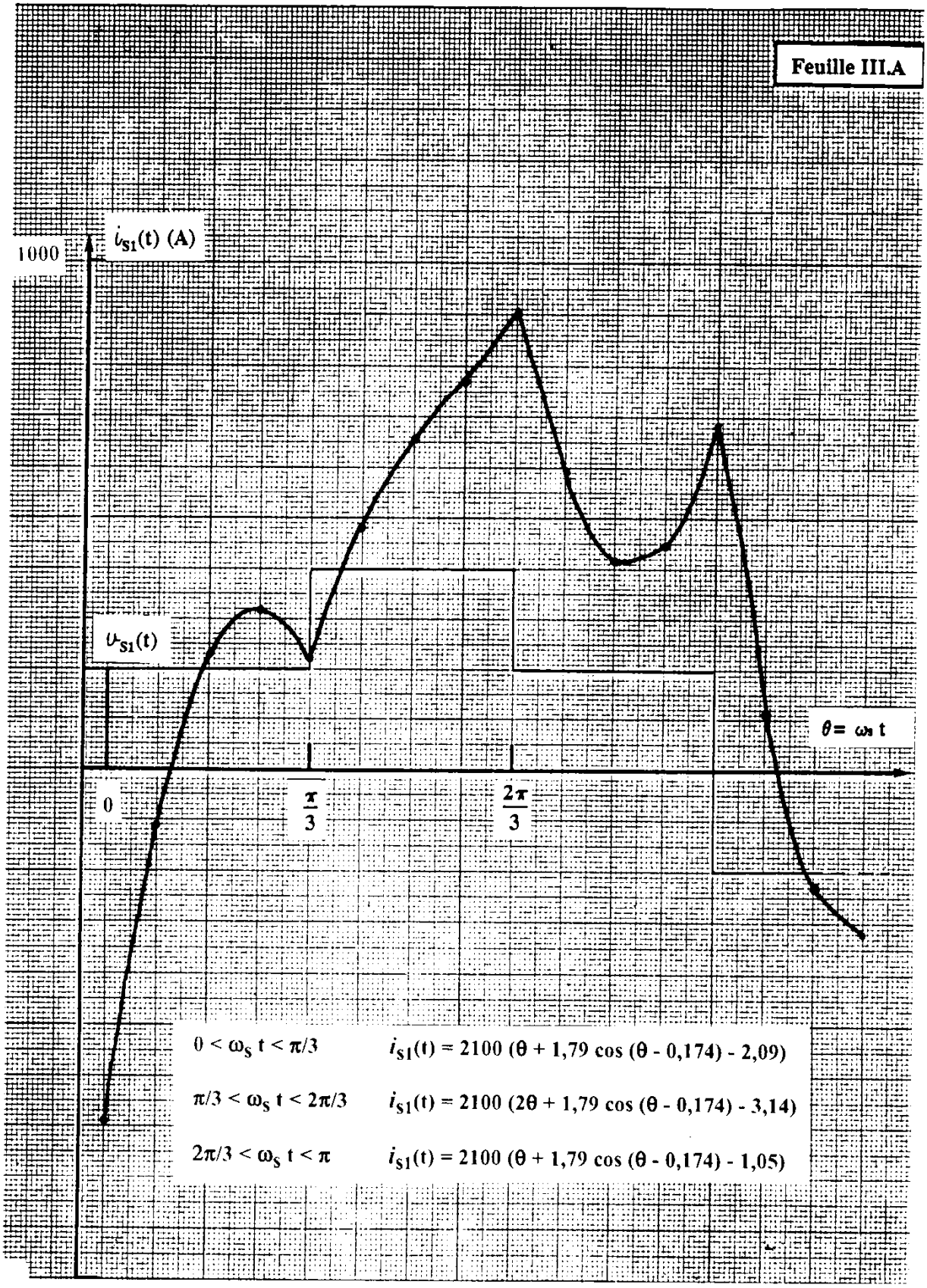
n = 1 $f_c = 6\ f_s$

La valeur minimale pour la la fréquence f_c est de 228 Hz (cf courbe pour l'ensemble des résultats).

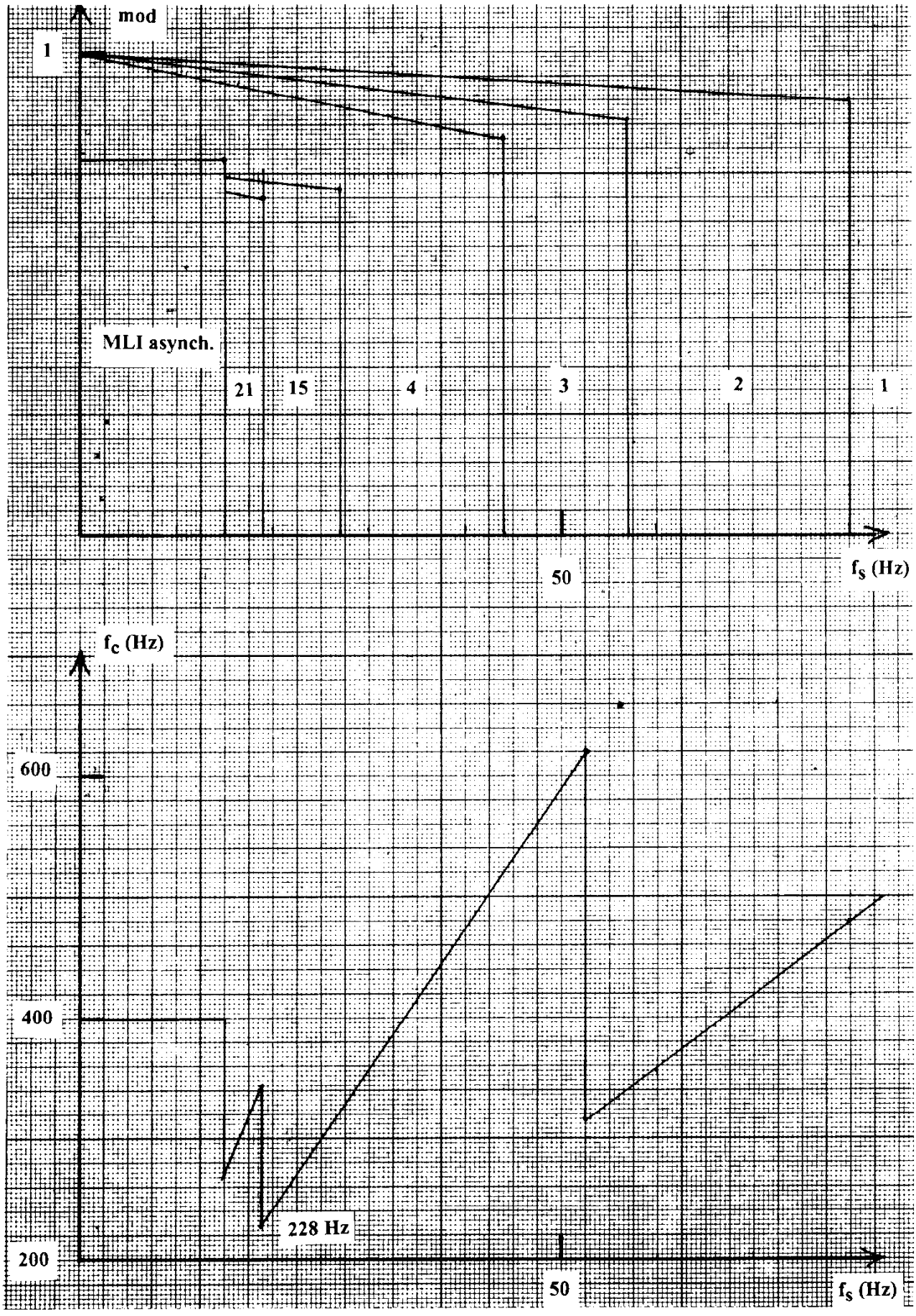
III.5.3) La fréquence maximale de fonctionnement de l'onduleur peut être fixée par plusieurs paramètres. On peut citer:

* Les pertes dans la résistance du circuit de commutation. Ces pertes augmentent évidemment avec la fréquence.
* La rapidité du système de gestion des commandes des thyristors GTO

Feuille III.A



$0 < \omega_S t < \pi/3$	$i_{S1}(t) = 2100\ (\theta + 1{,}79 \cos(\theta - 0{,}174) - 2{,}09)$
$\pi/3 < \omega_S t < 2\pi/3$	$i_{S1}(t) = 2100\ (2\theta + 1{,}79 \cos(\theta - 0{,}174) - 3{,}14)$
$2\pi/3 < \omega_S t < \pi$	$i_{S1}(t) = 2100\ (\theta + 1{,}79 \cos(\theta - 0{,}174) - 1{,}05)$


mod
1
MLI asynch.
21
15
4
3
2
1
50
f_s (Hz)
f_c (Hz)
600
400
200
228 Hz
50
f_s (Hz)

PARTIE IV

PILOTAGE VECTORIEL

IV.1) Préliminaire.

IV.1.1) Schéma équivalent.

La démarche est la même que celle suivie dans la question de la partie I. On dispose des relations entre flux et courants.

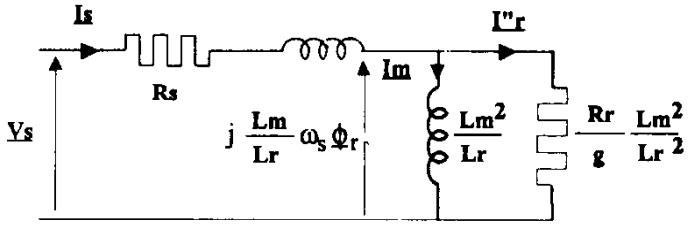
$$\underline{\Phi}_S = L_S \underline{I}_S - L_m \underline{I}_r$$

$$\underline{\Phi}_r = L_m \underline{I}_S - L_r \underline{I}_r \qquad \underline{I}_r = \frac{L_m}{L_r}\underline{I}_S - \frac{\underline{\Phi}_r}{L_r} \text{ et } \underline{I}_S = \frac{L_r}{L_m}\underline{I}_S + \frac{\underline{\Phi}_r}{L_m}$$

d'où

$$\underline{V}_S - R_S \underline{I}_S = j\,\omega_S \underline{\Phi}_S = j\,L_S\,\omega_S \underline{I}_S - j\,L_m\,\omega_S\left(\frac{L_m}{L_r}\underline{I}_S - \frac{\underline{\Phi}_r}{L_r}\right) = j\,\sigma\,L_S\,\omega_S\,\underline{I}_S + j\,\frac{L_m}{L_r}\omega_S\,\underline{\Phi}_r$$

$$\underline{I}_S = \frac{1}{\frac{L_m^2}{L_r}}\frac{L_m}{L_r}\underline{\Phi}_r + \underline{I}_r'' \qquad \underline{I}_r'' = \frac{L_r}{L_m}\underline{I}_r$$



Les relations tension, flux, courant au au rotor donne:

$$\underline{V}_r = j\,\omega_S\,\underline{\Phi}_r = \frac{R_r}{g}\underline{I}_r \text{ d'où la relation:}$$

$$j\,\frac{L_m}{L_r}\omega_S\,\underline{\Phi}_r = \frac{R_r}{g}\frac{L_m}{L_r}\underline{I}_r = \frac{R_r}{g}\left(\frac{L_m}{L_r}\right)^2 \underline{I}_r''$$

IV.1.2) Couple.

$$C = \frac{3}{\Omega_S}\frac{L_m}{L_r}\omega_S\,\Phi_r\,I_r'' = 3\,a\,\frac{L_m}{L_r}\Phi_r\,I_r''$$

$\underline{I}_r''$ est en quadrature avec le flux rotor $\underline{\Phi}_r$. C'est aussi la composante de $\underline{I}_S$ qui est en quadrature avec ce flux.

IV.2) Principe du pilotage vectoriel.

IV.2.1) Equations des tensions statoriques. (les grandeurs sont représentées par leurs transformées de Laplace).

$$v_{sd} = (R_S + L_S\,p)\,i_{sd} - L_S\,\omega_S\,i_{sq} - L_m\,p\,i_{rd} + L_m\,\omega_S\,i_{rq}$$

$$v_{sq} = L_S\,\omega_S\,i_{sd} + (R_S + L_S\,p)\,i_{sq} - L_m\,\omega_S\,i_{rd} - L_m\,p\,i_{rq}$$

$$\varphi_{rq} = 0 = Lm\,i_{sq} - L_r\,i_{rq} \qquad i_{rq} = \frac{L_m}{L_r}i_{sq}$$

$$\varphi_{rd} = \varphi_r = Lm\,i_{sd} - L_r\,i_{rd} \qquad i_{rd} = \frac{L_m}{L_r}i_{sd} - \frac{\varphi_r}{L_r}$$

d'où

$$v_{sd} = (R_s + \sigma L_s p)\, i_{sd} - \sigma L_s \omega_s i_{sq} + \frac{L_m}{L_r} p \varphi_r$$

$$v_{sq} = \sigma L_s \omega_s i_{sd} + (R_s + L_s p)\, i_{sq} + \frac{L_m}{L_r} \omega_s \varphi_r$$

IV.2.2) Equations des courants statoriques.

Les équations du rotor donnent les deux relations:

$0 = L_m p\, i_{sd} - L_m \omega_s i_{sq} - (R_r + L_r p)\, i_{rd} + L_r \omega_r i_{rq}$

$0 = L_m \omega_r i_{sd} + L_m p\, i_{sq} - L_r \omega_r i_{rd} - (R_r + L_r p)\, i_{rq}$

en remplaçant i_{rd} et i_{rq} par les expressions trouvées à la question précédente

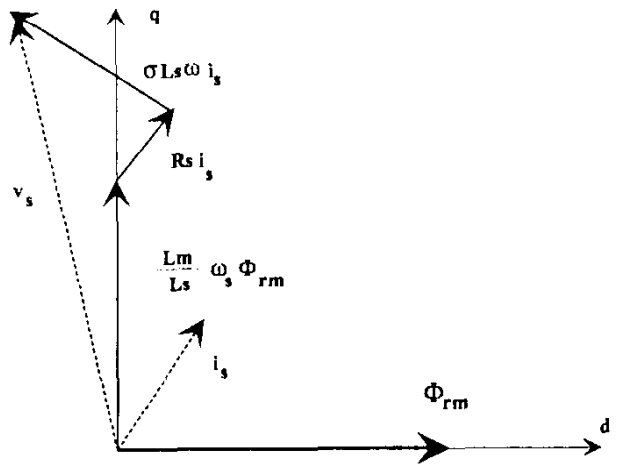
$$i_{sd} = (1 + \frac{L_r}{R_r}) \frac{\varphi_r}{L_m} = (1 + T_r p) \frac{\varphi_r}{L_m}$$

$$i_{sq} = \frac{L_r}{R_r} \omega_r \varphi_r = T_r \omega_r \varphi_r$$

IV.2.3) Expressions simplifiées dans le cas du régime permanent.

$$v_{sd} = R_s i_{sd} - \sigma L_s \omega_s i_{sq} \qquad i_{sd} = \frac{\varphi_r}{L_m}$$

$$v_{sq} = \sigma L_s \omega_s i_{sd} + R_s i_{sq} + \frac{L_m}{L_r} \omega_s \varphi_r \qquad i_{sq} = T_r \omega_r \varphi_r$$



Dans le cas du régime permanent (p = 0), les relations entre les transformées de Laplace des grandeurs, et les relations entre les grandeurs réelles de Park (qui sont constantes) sont identiques.

La conservation de la puissance donne la relation:

$v_{sd}\, i_{sd} + v_{sq}\, i_{sq} = v_s\, i_s \cos\varphi = 3\, V_s\, I_s \cos\varphi$

Le facteur d'homothétie entre le vecteur de Park et la valeur efficace de la grandeur sinusoïdale associée est donc de

IV.2.4) Expression du couple dans le cas du régime permanent.

$$C = a\,(i_{sq}\, \Phi_{sd} - i_{sd}\, \Phi_{sq})$$

$$\Phi_{sd} = L_s i_{sd} - L_m i_{rd} \qquad \Phi_{sq} = L_s i_{sq} - L_m i_{rq}$$

On obtient donc:

$$C = a L_m (i_{rq}\, i_{sd} - i_{sq}\, i_{rd}) = a \frac{L_m}{L_r} i_{sq} \Phi_{rm}$$

En remarquant que i_{sq} est en quadrature avec le flux Φ_{rm} qui est suivant l'axe d, on a:

$$\Phi_{rm} = \sqrt{3}\,\phi_r \text{ et } i_{sq} = \sqrt{3}\,I_r'' \text{ donc } C = 3\,a\,\frac{L_m}{L_r}\,\phi_r\,I_r''$$

IV.3) Régulation de couple.

IV.3.1) Le schéma de la régulation nous permet d'écrire les relations suivantes:

$$\varepsilon = \varphi_{rcons} - \varphi_r \qquad \mathcal{V}_{sd} = K/p\,\varepsilon - \sigma\,L_s\,\omega_s\,\mathcal{I}_{sd}$$

Les équations traduisant le comportement dynamique de la machine de la machine nous donne la relation:

$$\mathcal{V}_{sd} = (R_s + \sigma\,L_s\,p)\,(1 + T_r\,p)\,\frac{\varphi_r}{L_m} - \sigma\,L_s\,\omega_s\,\mathcal{I}_{sq} + \frac{L_m}{L_r}\,p\,\varphi_r$$

d'où:

$$\varphi_r = \frac{1}{G(p)}\,(\mathcal{V}_{sd} + \sigma\,L_s\,\omega_s\,\mathcal{I}_{sq}) \text{ avec } G(p) = \frac{1}{L_m}\,(R_s + \sigma\,L_s\,p)\,(1 + T_r\,p)\,\frac{L_m}{L_r}\,p$$

$$\varphi_r = \frac{K}{p\,G(p)}\,\varepsilon$$

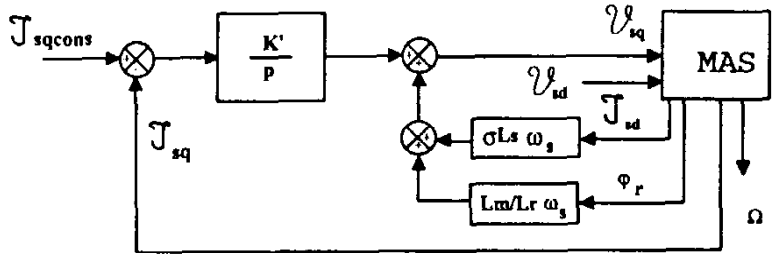
et en définitive: $\varepsilon = \varphi_{rcons} - \dfrac{K}{p\,G(p)}\,\varepsilon \qquad \varepsilon = \varphi_{rcons}\,\dfrac{G(p)}{G(p) + K/p}$

Pour une entrée du type $\varphi_{rcons} = \Phi / p$:

$$\lim p\,\varepsilon = 0 \quad \text{lorque } p \to 0 \quad (G(p) \to R_s / L_m)$$

IV.3.2) Schéma de la régulation de $\mathcal{I}_{sq}$.

A partir de l'équation concernant $\mathcal{V}_{sq}$, établie au IV.2.1, on peut obtenir le schéma suivant:



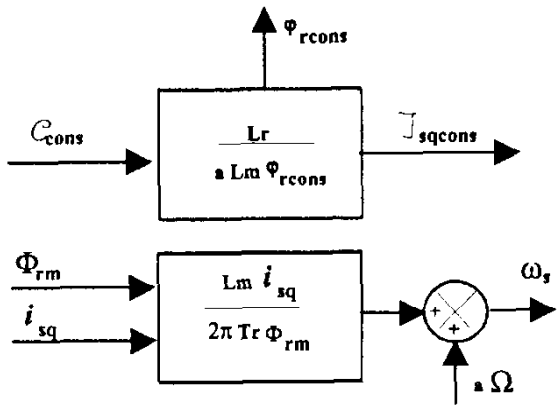
IV.3.3) Le flux est lié à l'énergie associée au champ magnétique. On ne peut réaliser que des variations lentes sur cette grandeur. On choisit évidemment de maintenir $\Phi_{rm} = \Phi_{rcons}$ à sa valeur nominale tant que cela est compatible avec l'isolation de la machine.

La consigne i_{sqcons} peut être élaborée de la manière suivante:

$$i_{sqcons} = \frac{L_r\,C_{cons}}{a\,L_m\,\Phi_{rcons}}$$

IV.3.4) $\omega_r = \dfrac{L_m\, i_{sq}}{T_r\, \Phi_r}$ $\qquad \omega_s = \omega_r + a\Omega$

IV.3.5) Schéma complet de la régulation.



IV.4) Elaboration des grandeurs courants et flux.

IV.4.1) A l'aide de la transformation de Park et en tenant compte du fait que $i_1 + i_2 + i_3 = 0$, on établit les relations:

$$i_{sa}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(i_1 - 0{,}5(i_2 + i_3)) = \sqrt{\frac{2}{3}}\, i_1(t)$$

$$i_{sb}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}(i_2 - i_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(2i_2(t) + i_1(t))$$

IV.4.2) On obtient les mêmes relations pour les flux ϕ_{ma} et ϕ_{mb} que pour les courants.

Les relations flux-courants permettent d'écrire:

$$\phi_{ma} = L_m\,(i_{sa} - i_{ra}) \qquad \phi_{ra} = L_m\, i_{sa} - L_r\, i_{ra}$$

$$\phi_{mb} = L_m\,(i_{sb} - i_{rb}) \qquad \phi_{rb} = L_m\, i_{sb} - L_r\, i_{rb}$$

On aboutit finalement aux relations demandées:

$$\phi_{ra} = L_2\, i_{sa} + \frac{L_r}{L_m}\,\phi_{ma}$$

$$\phi_{rb} = L_2\, i_{sb} + \frac{L_r}{L_m}\,\phi_{mb}$$

IV.4.3) Par une simple analyse vectorielle, on obtient:

$$\Phi_{rm} = \sqrt{\phi_{ra}^2 + \phi_{rb}^2} \qquad \text{tg}\,\rho = \frac{\phi_{rb}}{\phi_{ra}}$$

$$i_{sd} = i_{sa}\cos\rho + i_{sb}\sin\rho$$

$$i_{sq} = i_{sb}\cos\rho + i_{sa}\sin\rho$$

IV.5) Commande de l'onduleur.

IV.5.1) Les ternsion qui sont aplliquées à la machine sont produitzes par l'onduleur. Le système qui gère la commande des thyristors GTO permet de savoir à quel instant de la période électrique on se situe. Cela peut se faire à partir de la phase de la modulante dans une MLI intersective synchrone; la modulante étant générée par un système numérique.

On connaît alors l'angle α par $\alpha = \beta - \rho$

IV.5.2) On peut déterminer V_{scom} et α_{cons} par:

$$h\ Vscom = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{v_{sd}^2 + v_{sq}^2} \qquad tg\ \alpha_{cons} = \frac{v_{sq}}{v_{sd}}$$

IV.5.3) On dispose d'un signal d'erreur sur l'angle α: $\varepsilon = \alpha_{cons} - \alpha$

On peut donc corriger la commande de fréquence de l'onduleur par un terme proportionnel à ce signal d'erreur:

$$f_{scom} = \frac{2\pi}{\omega_s} K' (\alpha_{cons} - \alpha)$$

F. B.

C.A.P.E.S.

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de physique avec applications - Session 1992

PREMIÈRE PARTIE

ÉLECTRICITÉ

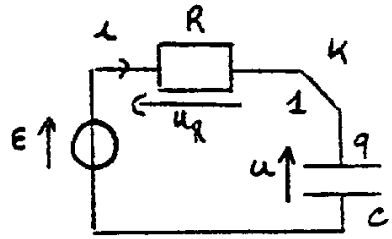
I. CHARGE D'UN CONDENSATEUR À TRAVERS UNE RÉSISTANCE

1. Étude de la tension aux bornes du condensateur.

a.

- $E = u_R + u = Ri + u$ or $i = +\dfrac{dq}{dt} = +\dfrac{d(Cu)}{dt} = C\dfrac{du}{dt}$

$$E = RC\frac{du}{dt} + u$$

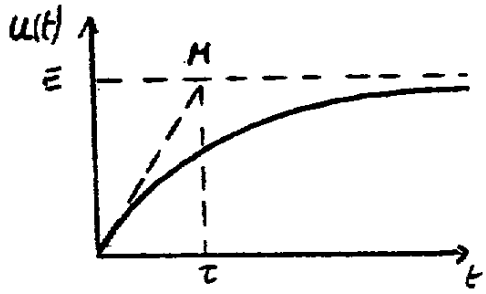


- Les solutions sont de la forme $u = E + A\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = RC$.

La tension u est continue $u(0^-) = 0 = u(0^+) = E + A$. Il vient bien $u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

- τ est la constante de temps du dipôle (R, C).

b. • Courbe : voir ci-contre.



- Tangente à l'origine $y = \left.\dfrac{du}{dt}\right)_{t=0} t = \dfrac{E}{\tau}t$ $\qquad y = \dfrac{E}{\tau}t$.

- Le point M a pour coordonnées (τ, E) .

c. La charge du condensateur est q = cu, sa charge limite est $CE = q_\infty$.

Nous cherchons t_1 tel que $CE\left(1-e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right)\geq 0{,}99\,CE$ soit $e^{-\frac{t_1}{\tau}}\leq 0{,}01$ et $t_1 \geq -\tau \,\text{lu}\, 0{,}01$.

Application numérique : $t_1 \geq \tau \,\text{lu}\, 100 = 4{,}61\,\tau$ **$t_1 = 4{,}61\ \mu s$** .

2. Étude énergétique de la charge du condensateur.

a. $\mathcal{E}_C = \dfrac{q_\infty^2}{2C} = \dfrac{C\,U_\infty^2}{2}$ $\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}CE^2}$ *Application numérique* : $\mathcal{E}_C = \mathbf{5{,}00\times 10^{-8}\ J}$.

b. En convention générateur, la puissance fournie par le générateur et $\mathcal{P}_G = E\,i = E\,C\,\dfrac{du}{dt}$.

L'énergie fournie par le générateur est donc $\mathcal{E}_G = \displaystyle\int_0^\infty \mathcal{P}_G\,dt = CE\int_0^\infty \frac{du}{dt}\,dt$ $\boxed{\mathcal{E}_G = C\,E^2}$.

Application numérique : $\mathcal{E}_G = \mathbf{1{,}00\times 10^{-7}\ J}$.

c. • La puissance dissipée dans la résistance est donnée par la loi de Joule $\boxed{\mathcal{P}_R = Ri^2 = RC^2\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2}$.

L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance est donc :

$$\mathcal{E}_{JR} = \int_0^\infty RC^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 dt = \int_0^\infty RC^2\,\frac{E^2}{R^2C^2}\,e^{-\frac{2t}{RC}}\,dt = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{RC}{2}\,e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^\infty \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathcal{E}_{JR} = \frac{1}{2}CE^2}\ .$$

• Nous pouvons retrouver ce résultat car l'énergie fournie par le générateur est en partie emmagasinée par le condensateur et en partie dissipée par effet Joule dans la résistance.

$\boxed{\mathcal{E}_G = \mathcal{E}_{J,R} + \mathcal{E}_C}$ soit $\mathcal{E}_{J,R} = \mathcal{E}_G - \mathcal{E}_C = CE^2 - \frac{1}{2}CE^2 = \dfrac{C\,E}{2}$.

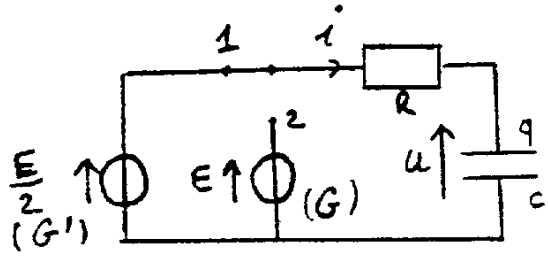
d. Nous pouvons définir la rendement ρ par $\boxed{\rho = \dfrac{\mathcal{E}_C}{\mathcal{E}_G}}$. Ici $\boxed{\rho = \frac{1}{2}}$.

e. $\boxed{\rho' = \dfrac{\mathcal{E}_C}{\mathcal{E}_{G'} + \mathcal{E}_G}}$ $\mathcal{E}_C = \mathbf{\frac{1}{2}\,C\,E^2}$

$$\mathcal{E}_{G'} = \int_0^\infty \frac{E}{2}\,i\,dt = \frac{E}{2}\int_0^\infty C\,\frac{du}{dt}\,dt = \frac{E}{2}\,.\,C\,\frac{E}{2} = \frac{1}{4}CE^2 \qquad \text{Première étape.}$$

$$\mathcal{E}_G = \int_0^\infty E\,i\,dt' = E\int_0^\infty C\,\frac{du}{dt'}\,dt' = E\,C\,[u]_{E/2}^{E} = \frac{1}{2}CE^2 \qquad \text{Deuxième étape.}$$

Il vient $\mathcal{E}_{G'} + \mathcal{E}_G = \mathbf{\frac{3}{4}\,CE^2}$ $\boxed{\rho' = \frac{2}{3}}$.



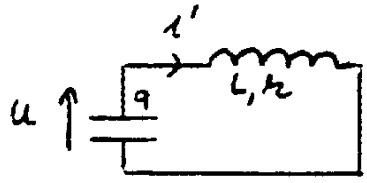
f. Il faut fractionner E en intervalles les plus petits possibles et effectuer une succession de charges. Il faut d'un générateur de tension continue U_0 mais ou on peut faire varier continûment et très lentement la tension à vide de O à E. L'intensité pourra toujours être considérée comme très faible ainsi que l'énergie dissipée par effet Joule.

II. DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR À TRAVERS UNE BOBINE

1. Compte tenu des conventions précisées sur la figure ci-dessous, la loi des tensions s'écrit, dans l'approximation des régimes quasi-permanents :

$u = \frac{q}{c} = L\frac{di'}{dt} + ri'$ avec $i' = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{du}{dt}$;

d'où l'équation différentielle $\boxed{L\,c\frac{d^2u}{dt^2} + r\,C\frac{du}{dt} + u = 0}$.



2. • Nous pouvons écrire :

$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$ nous posons $\boxed{\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}}$ et $2\lambda\omega_0 = \frac{r}{L}$ soit $\boxed{\lambda = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}}$

et nous obtenons bien la forme recherchée $\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda\omega_0\frac{du}{dt} + \omega_0{}^2 u = 0.$

• Le discriminant réduit de l'équation caractéristique $r^2 + 2\lambda\omega_0 r + \omega_0{}^2 = 0$ vaut $\Delta' = \lambda^2\omega_0{}^2 - \omega_0{}^2 = \omega_0{}^2(\lambda^2 - 1)$.

Si $\lambda > 1$, le régime est apériodique $u = e^{-\lambda\omega_0 t}\left(A\,e^{+\sqrt{\Delta'}t} + B\,e^{-\sqrt{\Delta'}t}\right)$

Si $\lambda = 1$, le régime est apériodique critique $u = e^{-\lambda\omega_0 t}(A\,t + B)$

Si $\lambda < 1$, le régime est pseudosinusoïdal $u = e^{-\lambda\omega_0 t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$ $\boxed{\text{avec } \omega = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}.}$

3. Ici $\boldsymbol{\lambda = 2{,}5 \times 10^{-2}}$, le **régime pseudopériodique**.

4. Nous partons de l'expression générale $u = e^{-\lambda\omega_0 t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$ avec $\omega = \omega_0\left(1-\lambda^2\right)^{1/2}$.

La tension u au borne du condensateur est continue $u(0^-) = U_0 = u(0^+) = A$.

L'intensité i' du courant qui travers la bobine est continue or $i' = -C\dfrac{du}{dt}$ donc $\dfrac{du}{dt}$ est continue.

$$0 = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0^-} = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0^+} = \left(e^{-\lambda\omega_0 t}\left(-A\,\omega\sin\omega t + B\,\omega\cos\omega t - \lambda\,\omega_0\left(A\cos\omega t + B\sin\omega_0 t\right)\right)\right)_{t=0^+} = B\omega - \lambda\,\omega_0 A\ .$$

Il vient donc $A = U_0$ et $B = \dfrac{\lambda\,\omega_0}{\omega}U_0$ soit $\boxed{u(t) = U_0\,e^{-\lambda\omega_0 t}\left(\cos\omega t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sin\omega t\right)}$.

5. Par définition, la pseudo-période du phénomène est :

$\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\left(1-\lambda^2\right)^{1/2}}}$ *Application numérique* : $\mathbf{T = 6{,}29 \times 10^{-4}\ s}$

6. Nous cherchons t_2 tel que $e^{-\lambda\omega_0 t_2} = 10^{-2}$ soit $\boxed{t_2 = \dfrac{1}{\lambda\,\omega_0}\ln 100}$.

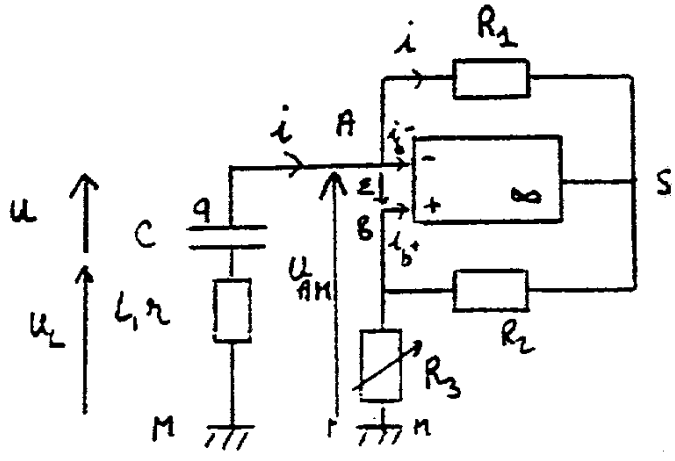
Application numérique : $\mathbf{t_2 = 1{,}84 \times 10^2\ s}$ avec $\lambda = 2{,}50 \times 10^{-2}$ et $\omega_0 = 1{,}00 \times 10^4\ s^{-1}$

$\boxed{\dfrac{t_2}{T} = 29{,}3}$.

III. ENTRETIEN DES OSCILLATIONS

1. i_{b^+} est nulle. Nous sommes donc en présence d'un <u>diviseur de tension</u> :

$$v_B = \frac{R_3}{R_2 + R_3}v_S$$



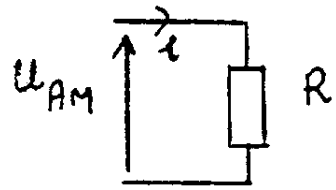
2. Le régime est linéaire $\varepsilon = v_B - v_A = 0$ soit $v_B = v_A$.

L'amplificateur opérationnel est idéal $1_{b^-} = 0$ donc l'intensité du courant qui traverse la résistance R_1 est i.

Il vient $v_A - v_S = R_1\,i = v_A - \dfrac{R_2 + R_3}{R_3}v_A = -\dfrac{R_2}{R^3}v_A$ soit enfin $\boxed{u_{AM} = -\dfrac{R_3\,R_1}{R_2}i}$.

3. Il s'agit d'un dipôle à résistance négative :

$$u_{AM} = R\,i \qquad R = -\frac{R_3 R_1}{R_2}$$



4. La loi d'additivité des tensions donne : $u + u_L = u_{AM}$

$$u = \frac{q}{c} \quad \text{et} \quad i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{du}{dt}$$

$$\left.\begin{aligned} u_L &= -L\frac{di}{dt} - r\,i = +LC\frac{d^2u}{dt^2} + r\,C\frac{du}{dt} \\ u_{AM} &= -\frac{R_3 R_1}{R_2}\,i = +\frac{R_3 R_1}{R_2}\,C\frac{du}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2U}{dt^2} + \left(r - \frac{R_3 R_1}{R_2}\right)\frac{1}{L}\,\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}\,u = 0.}$$

5. Oscillations sinusoïdales.

a. Pour que les oscillations de u (t) soient sinusoïdales, il faut que le terme d'amortissement soit nul :

$$\boxed{r = \frac{R_3 R_1}{R_2}}$$

b. La période de ces oscillations est : $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}}$.

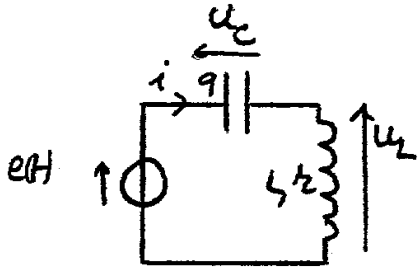
c. La puissance dissipée par effet Joule dans la bobine est compensée par la puissance fournie à l'amplificateur opérationnel, par ses sources de polarisation.

IV. OSCILLATIONS FORCÉES / RÉSONANCE D'INTENSITÉ

1. Nous avons $e = u_C + u_L$ avec $i = +\frac{dq}{dt}$, $u_C = \frac{q}{c}$, $u_L = L\frac{di}{dt} + Ri$

$$e = \frac{1}{C}\int i\,dt + ri + L\frac{di}{dt}$$

L'impédance complexe vaut $\underline{Z} = r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$, son module $\boxed{Z = \left(r^2 = +\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right)^{1/2}}$.



2. Étude de l'intensité efficace.

Nous posons $e(t) = E\cos\omega t$ et $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$.

a. En module, nous pouvons écrire $\boxed{I = \frac{E_0}{\sqrt{2}\,Z} = \frac{E_0}{\sqrt{2}\left(r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right)^{1/2}}}$.

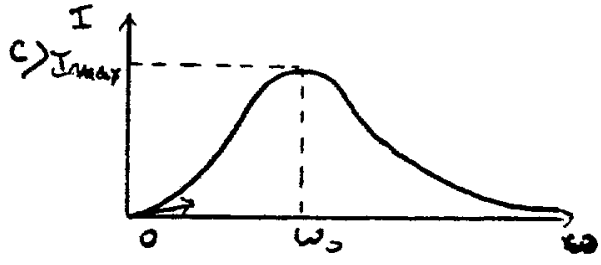
b. Quand $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ $\quad I = \boxed{I_{max} = \frac{E_0}{\sqrt{2}\,r}}$.

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right)^{-3/2}\left(L + \frac{1}{C\omega^2}\right)\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right).$$

$\boxed{\omega_{max} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$.

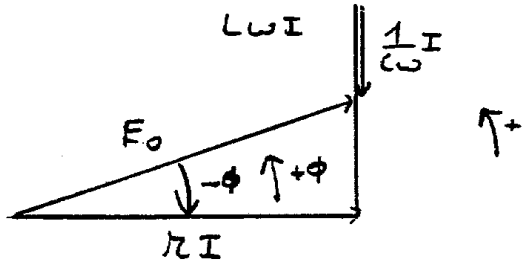
ω	0		ω_0		∞
$\frac{dI}{d\omega}$	$\frac{E_0}{r}$	+	0	−	0
I	0	↗	I_{max}	↘	0

c. (La courbe tracée correspond à un amortissement pas trop fort $Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} > 1$).



3. Étude du déphasage entre i (t) et e (t).

a. La construction de Fresnel est réalisée ci-dessous :



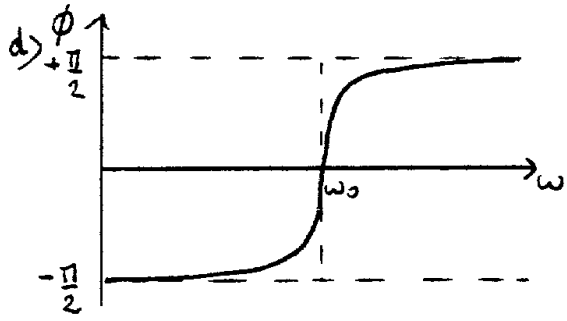
b. Grâce à la construction précédente nous pouvons écrire :

$$\boxed{\phi = \text{Arc tan}\,\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{r}}$$

c. $\dfrac{d\phi}{d\omega} = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{r}\right)^2} \dfrac{1}{r}\left(L + \dfrac{1}{C\omega^2}\right)$ Pour $\omega = \omega_0$ $\phi = 0$.

ω	0	ω_0	∞
$\frac{d\phi}{d\omega}$	$\nexists$ +	+	0
ϕ	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$

d. Pour ω très petite $e \approx u_C(t)$ i (t) est en avance sur e (t) $\phi = -\dfrac{\pi}{2}$.



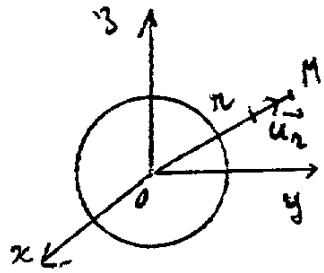
Pour ω très grande $u_C << e(t)$ i (t) est en retard sur e (t) $\phi = +\dfrac{\pi}{2}$ (pour la bobine quasi seule).

DEUXIÈME PARTIE

MÉCANIQUE

I. MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL DANS UN CHAMP NEWTONIEN

1. Étude d'un satellite.



$\vec{\mathcal{G}}$ est donné par la formule de Newton : $\vec{\mathcal{G}} = -\dfrac{G M_T \vec{OM}}{r^3}$.

2. Satellites circulaires.

a. Dans la base de Frenet ou dans celle des coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire, l'accélération s'écrit : $\vec{a} = -\dfrac{v^2}{r}\vec{u}_r + \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_\theta$ pour un mouvement circulaire. Or $\vec{a} = \vec{\mathcal{G}} - \dfrac{G M_T}{r^2}\vec{u}_r$ donc $\dfrac{dv}{dt} = 0$, le mouvement est donc circulaire uniforme.

b. La vitesse $\vec{v}$ doit être perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$.

De plus sa norme doit vérifier la relation $\frac{v^2}{r} = \frac{G M_T}{r^2}$ soit $\boxed{v = \left(\frac{G M_T}{r}\right)^{1/2}}$.

c. La norme de la vitesse v et la période T de révolution du satellite sont liés par la formule $2\pi r = vT$ d'où :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{(G M_T)^{1/2}} . r^{3/2}} \qquad \text{(Loi de Kepler)}$$

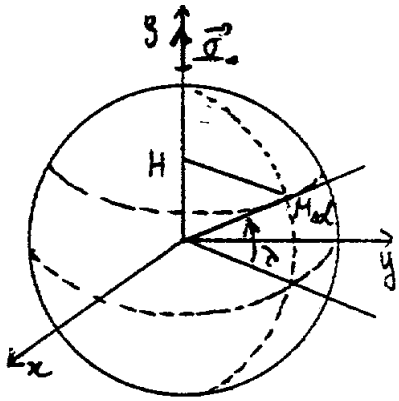
d. L'énergie mécanique du satellite est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle dans le champ de gravitation terrestre.

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_T m}{r}$$

L'énergie potentielle est ici prise nulle pour une particule infiniment éloignée du centre de force O.

$$\boxed{E = -\frac{G M_T}{2 r}}$$

e. • L'énergie au sol vaut : $E_{sol} = \frac{1}{2} m v^2_{sol} - \frac{G M_T m}{R_T}$



Au sol, le satellite décrit une trajectoire circulaire dans le référentiel géocentrique (R) évoqué dans le texte, de rayon $HM_{sol} = R_T \cos\lambda$ et de période T_0.

$$v_{sol} = \frac{2\pi}{T_0} R_T \cos\lambda \qquad \text{d'où} \qquad E_{sol} = \frac{m\, 2\, M^2\, R_T^2 \cos^2\lambda}{T_0^2} - \frac{m G M_T}{R_T} .$$

Pour la satellisation, l'énergie à fournir est :

$$\boxed{\Delta E = E_{orbite} - E_{sol} = -\frac{m G M_T}{2 r} - \frac{m\, 2\pi^2 R_T^2 \cos^2\lambda}{T_0^2} + \frac{m G M_T}{R_T}} .$$

• $\cos^2\lambda$ est maximal et vaut 1 pour une base équatoriale. L'énergie de mise sur orbite est donc minimale.

f. *Application numérique* : $\mathbf{v = 7{,}79 \times 10^3\ ms^{-1}}$

$\mathbf{T = 5325\ s}$ **soit** $\mathbf{T = 1\ h\ 28\ min\ 45\ s}$ (Précision illusoire sur le dernier chifffre).

g. Satellites géostationnaires.

– Un satellite géostationnaire est toujours à la verticale d'un même point à la surface de la Terre.

– Il est impossible de placer un satellite géostationnaire à la verticale de Paris puisque le centre de l'orbite est le centre de la Terre ; l'orbite ne peut être qu'équatoriale.

– Nous pouvons utiliser la formule du I.2.*c*., elle donne $\boxed{r_0 = \left(\dfrac{G\,M_T\,T_0^{\,2}}{4\,\pi^2}\right)^{1/3}}$.

Application numérique : $\mathbf{r_0 = 42{,}2 \times 10^6\ m}$.

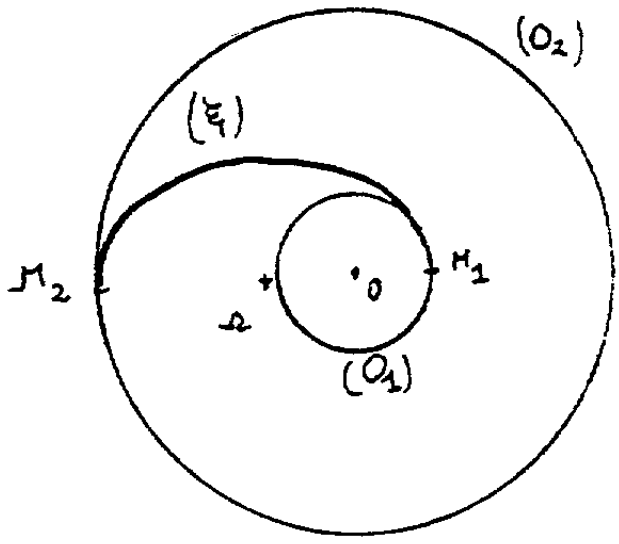
– La vitesse du satellite sur cette orbite vaut :

$$v = \left(\frac{G\,M_T}{r_0}\right)^{1/2} = \left(G\,M_T\left(\frac{4\,\pi^2}{G\,M_T\,T_0^{\,2}}\right)^{1/3}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\,M\,G\,M_T}{T_0}\right)^{1/3}$$

$\boxed{v = \left(\dfrac{2\,\pi\,G\,M_T}{T_0}\right)^{1/3}}$ *Application numérique* : $\mathbf{v = 3{,}08 \times 10^3\ m.s^{-1}}$.

3. Étude d'une orbite de transfert.

a.



La lecture de la figure donne $M_2\,M_1 = 2a = M_2\,O + OM_1 = r_2 + r_1$:

$$\boxed{a = \frac{r_2 + r_1}{2}}$$

b. Pour les trajectoires circulaires (O_1) et (O_2) nous utilisons la formule précédente :

$$\boxed{E_{(O_1)} = -\frac{G\,M_T\,m}{2\,r_1}} \qquad \boxed{E_{(O_2)} = -\frac{G\,M_T\,m}{2\,r_2}}$$

Pour l'orbite elliptique nous admettons la formule analogue : $\boxed{E_{(\xi)} = -\dfrac{G\,M_T\,m}{r_1 + r_2}}$.

c. Par définition :

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta E_1 &= E_{(\xi)} - E_{(O_1)} = G\,M_T\,m\left(\frac{1}{2\,r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right)\\ \Delta E_2 &= E_{(O_2)} - E_{(\xi)} = G\,M_T\,m\left(\frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{1}{2\,r_2}\right)\end{aligned}}$$

Application numérique : $\Delta E_1 = 2{,}21$ GJ $\qquad \mathbf{\Delta E_2 = 3{,}46 \times 10^8\ J}$

$\mathbf{\Delta E_1 = 2{,}21 \times 10^9\ J}$.

d. Nous admettons que la période sur (ξ) est donnée par la formule $T_{(\xi)} = \dfrac{2\,M}{(G\,M_T)^{1/2}}\,a^{3/2}$ (Loi de Kepler) avec $a = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$. La durée du transfert est $\boxed{\theta = \dfrac{T_{(\xi)}}{2} = M\left(\dfrac{a^3}{G\,M_T}\right)^{1/2}}$.

Application numérique : $\theta = 1{,}893 \times 10^4\ s = 5\ h\ 15\ min.$

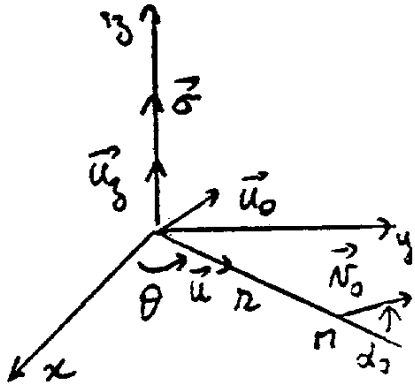
II. ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL DANS UN CHAMP NEWTONIEN ATTRACTIF

1. • Par définition, le moment cinétique en O du point matériel est $\vec{\sigma}(0) = \vec{OM} \wedge m\,\vec{v}$, dans le référentiel (R). Le référentiel (R) étant gagiléen : $\dfrac{d\vec{\sigma}(0)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{f}$ (Théorème du moment cinétique).

Ici $\dfrac{d\vec{\sigma}(0)}{dt} = \vec{O} = \vec{OM} \wedge \left(-k\,\dfrac{\vec{OM}}{r^3}\right)$. Le moment cinétique est donc constant.

• Les veteurs $\vec{OM}$ et $\vec{v}$ sont, par définition du moment cinétique, perpendiculaires à $\vec{\sigma}$, vecteur constant. Le point M appartient donc au plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}$ constant et passant par O.

2. Nous cherchons la fonction énergie potentielle telle que $\vec{f} = -\vec{\text{grad}}\,E_p$.



En coordonnées cylindriques $\vec{\text{grad}}\,E_p = \dfrac{\partial E_p}{\partial r}\,\vec{u} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_p}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \dfrac{\partial E_p}{\partial z}\,\vec{u}_z$.

Il vient : $\left.\begin{array}{l} -\dfrac{\partial E_p}{\partial r} = -\dfrac{k}{r^2} \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_\theta}{\delta\theta} = 0 \\ -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow E_p(r) \Bigg\} \Rightarrow \dfrac{dE_p}{dr} = \dfrac{k}{r^2}$ d'où $\boxed{E_p = -\dfrac{k}{r}}$ en prenant $\lim_{r\to\infty} E_p = 0$.

3. L'équipe mécanique E est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle E_p :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{k}{r}$$

Le point matériel n'est pas soumis à d'autres forces que celle prise en compte dans la définition de l'énergie mécanique. L'énergie mécanique est donc une constante du mouvement.

4. *a.* Le moment cinétique $\vec{\sigma}$ vaut $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = m\, r\, \vec{u} \wedge \left(\dot{r}\, \vec{u} + r\, \dot{\theta}\, \vec{u_\theta}\right) = m\, r^2\, \dot{\theta}\, \vec{u_z} = \underline{m\, C}\, \vec{u_z} = \vec{\sigma}(0)$.

Le moment cinétique est un vecteur constant, C est donc une constante.

b. $\boxed{E_0 = \frac{1}{2} m\, v_0^{\,2} - \frac{k}{r_0}}$.

$\vec{v_0} = v_0 \cos\alpha_0\, \vec{u} + v_0 \sin\alpha_0\, \vec{u_\theta}$

$\vec{\sigma_0} = m\, r_0\, \vec{u} \wedge \left(v_0 \cos\alpha_0\, \vec{u} + v_0 \sin\alpha_0\, \vec{u_\theta}\right) = m\, r_0\, v_0 \sin\alpha\, \vec{u_z} = mC\, \vec{u_z}$ $\qquad \boxed{C = r_0\, v_0 \sin\alpha_0}$.

c. Nous pouvons transformer l'expression de $E = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{k}{r}$.

$E = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\, \dot{\theta}^2\right) - \frac{k}{r} = \frac{1}{2} m\, \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m\, r^2 \frac{C^2}{r^4} - \frac{k}{r} = \frac{1}{2} m\, \dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{k}{r}$.

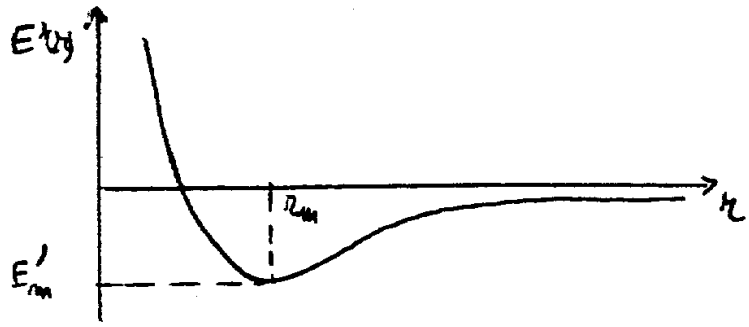
Cette expression est bien de la forme $E = \frac{1}{2} m\, \dot{r}^2 + E'(r)$ avec $\boxed{E'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{mC^2}{2r^2}}$.

d. Étudions $E'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{mC^2}{2r^2}$; $\frac{dE'(r)}{dr} = +\frac{k}{r^2} - \frac{mC^2}{2r^2} = \frac{1}{r^2}\left(k - \frac{mC^2}{r}\right)$; $\frac{dE'\,r}{dr} = 0$ pour $r_m = \frac{mC^2}{k}$.

$\frac{d^2E'(r)}{dr^2} = \frac{2k}{r^3} + \frac{3mC^2}{r^4} = \frac{1}{r^3}\left(-2k + \frac{3mC^2}{r}\right)$; $\frac{d^2E'(r)}{dr^2} = 0$ pour $r = \frac{3mC^2}{2k}$ et $\left.\frac{d^2E'}{dr^2}\right)_{r=r_m} = \frac{k}{r_m{}^3} > 0$.

Il existe un minimum $\boxed{E'_m = -\frac{K^2}{r\,mC^2} = -\frac{k^2}{2m(r_0\, v_0 \sin\alpha)^2}}$ pour $\boxed{r_m = \frac{mC^2}{k} = \frac{m(r_0\, v_0 \sin\alpha)^2}{k}}$.

r	0	$\frac{mC^2}{2k}$	$r_m = \frac{mC^2}{k}$	$\frac{3mC^2}{2k}$	∞
$\frac{d^2E'}{dr^2}$	$+\infty$		$+$	0 $-$	0
$\frac{dE'}{dr}$	$-\infty$	$+$	0	$+$	0
E'	$+\infty$ $+$ 0	$-$	$-\frac{k^2}{2mC^2}$	$-$	0



e. Rappelons que $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E'(r)$ donc $E \geq E'(r)$.

Pour que le mobile puisse s'échapper de l'attraction du centre de force, il faut que r puisse devenir infini et donc que E' (r) puisse devenir nulle. Il faut donc que $E \geq 0$.
A contrario, pour qu'il reste prisonnier, il faut que $\boxed{E < 0}$.

f. Nous traduisons la condition $\boxed{E \geq 0}$

$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{k}{r_0} \geq 0$, la valeur minimale de la vitesse, en norme est $\boxed{v_{om} = \left(\frac{2k}{m r_0}\right)^{1/2}}$.

g. Quand $E = E'_m$, $\dot{r} = 0$ donc r est une constante.
Le mouvement est circulaire.

Nous avons vu au I. que le mouvement est alors uniforme et qu'initialement α_0 doit valoir $\frac{\pi}{2}$.

TROISIÈME PARTIE

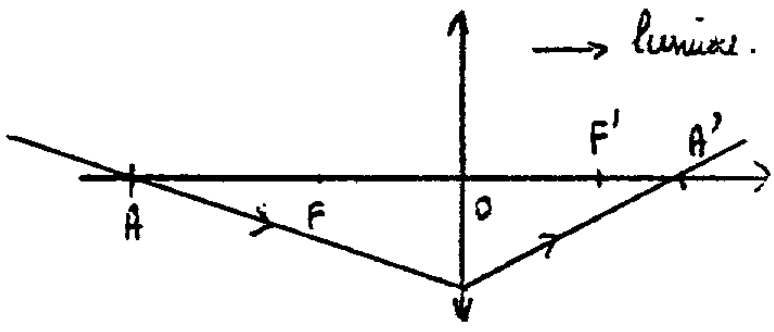
OPTIQUE

I. ÉTUDE D'UN APPAREIL PHOTOGRAPHIQUE

1. Un système optique est utilisé dans les conditions de Gauss quand :
   – les rayons lumineux sont peu inclinés sur l'axe optique,
   – les points de rencontre des rayons lumineux avec les surfaces optiques sont à faibles distances de l'axe optique.

2. Le plan focal image doit être le plan du film, la distance de l'objectif au plan du film est donc la distance focale image f'.

3. Soit l'objet A, à la distance minimale de mise au point parfaite, ($\overline{OA} = -60$ cm) et son image A' sur le film. A et A' sont pris sur l'axe optique.



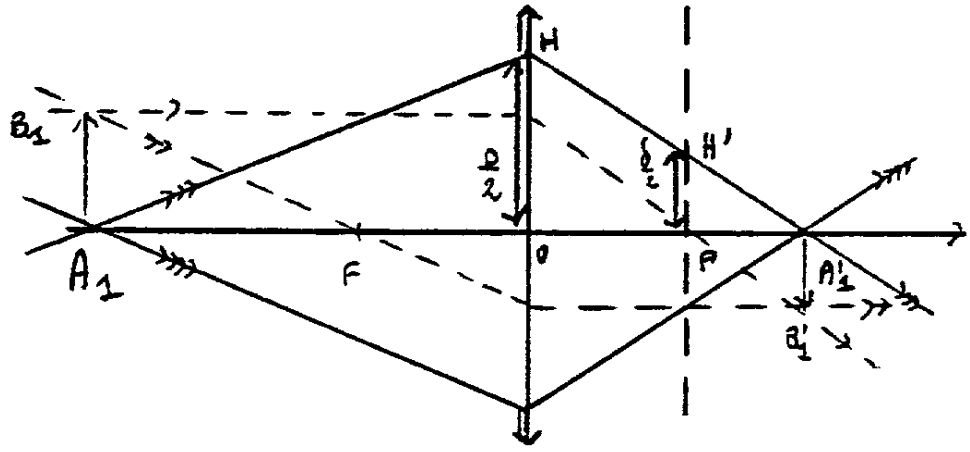
La relation de conjugaison de Descartes s'écrit : $-\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OA'}}=\frac{1}{f'}$

$$\boxed{\overline{OA'}=\frac{\overline{OA}\,.\,f'}{\overline{OA}+f'}}$$

Application numérique : **$\overline{OA'}$ = 54,5 cm**.

Le film occupant une position fixe par rapport au boîtier, au cours de la mise au point il faut pouvoir translater l'objectif de 5 mm. Notons de plus, que plus A est proche de F et devant F, plus A' est loin de F, après F' ($\overline{FA}\,.\,\overline{F'A'}=-f'^2$).

4. *a.* Notion de profondeur de champ.



b. Pour les triangles homothétiques ($OH\,A'_1$) et ($F'\,H'\,A'_1$) nous pouvons écrire : $\frac{\overline{F'H'}}{\overline{OH}}=\frac{\overline{F'A'}_1}{\overline{OA'}_1}$ soit :

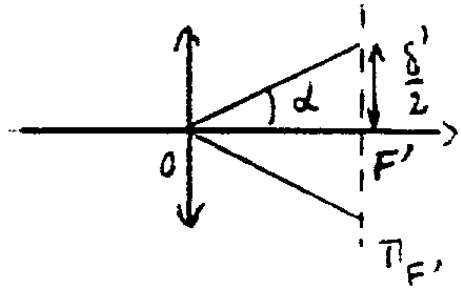
$$\frac{\delta/2}{D/2}=\frac{\delta}{D}=\frac{\overline{OA'}_1-f'}{\overline{OA'}_1}=1-\frac{f'}{\overline{OA'}_1}=f'\left(\frac{1}{f'}-\frac{1}{\overline{OA'}_1}\right)=f'\times\frac{-1}{\overline{OA}_1}$$ d'après la formule de conjugaison.

D'autre part $\overline{OA}_1=-p_1$ d'où $p_1=f'\frac{p}{\delta}=f'^2\,.\,\frac{1}{N\delta}$ $\qquad\boxed{p_1=\frac{f'^2}{N\delta}}$.

Avoir une grande profondeur de champ c'est obtenir p_1 la plus petite possible. Pour ceci, il faut choisir :
- la distance focale f' la plus petite possible,
- le nombre d'ouverture N le plus grand possible (faible ouverture devant le distance focale),
- δ le plus grand possible mais la définition de l'image d'un objet étendu est alors dégradée.

c. Application numérique : Pour N = 2,8 **p_1 = 29,8 m** ; pour N = 16 **p_1 = 5,2 m**.

5. Dans l'approximation de Gauss $\frac{\delta'}{2}=f'\tan\alpha\approx f'\,\alpha\,1{,}22\frac{\lambda}{D}f'=1{,}22\,\lambda\,N$.



Nous voulons que $\frac{\delta'}{2} \leq \frac{\delta}{2}$ soit $\boxed{N \leq \frac{\delta}{2{,}44\,\lambda}}$.

Application numérique : pour $\delta = 30\ \mu m$ $N \leq 20{,}5$; pour $\delta = 10\ \mu m$ $N = 6{,}8$.

La diffraction limite grandement la profondeur de champ et d'autant plus sévèrement que le grain de la pellicule est fin.

6. *a.* Nous reconnaissons les premiers termes approchés d'une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$.

b. Il s'agit ici des premiers termes approchés d'une suite géométrique de raison 2.

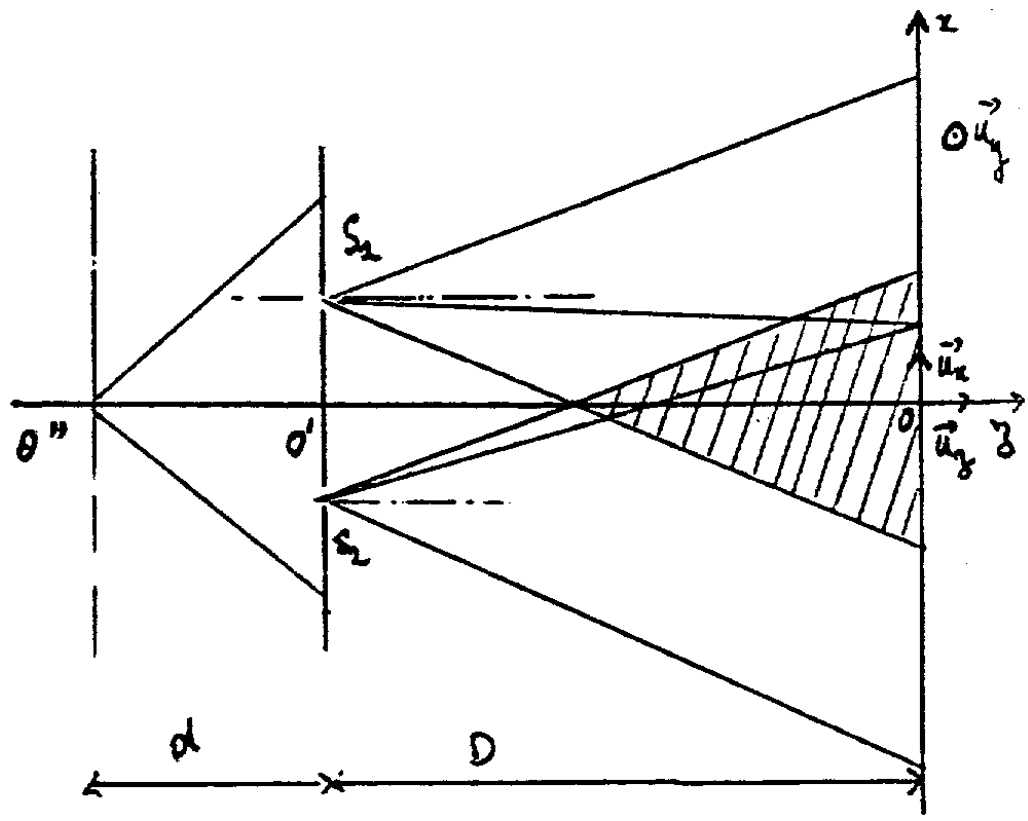
Les flux lumineux entrants sont proportionnels à la surface du diaphragme et donc à D^2 et à N^{-2}. Pour avoir une énergie entrante constante quand on passe d'un terme de la suite des nombres d'ouverture au suivant, il faut augmenter la durée d'exposition d'un facteur deux et donc passer dans la suite des vitesse d'obsturation d'un terme au suivant.

Le choix cohérent des raisons pour les deux suites allège le travail du photographe.

c. Pour diminuer la profondeur de champ $\left(p_1 = \frac{f'^2}{N\delta} \text{ plus grand}\right)$, le photographe doit faire décroître N (et donc augmenter D). Pour conserver la même exposition, il doit faire croître la vitesse d'obturation et décroître la durée d'exposition.

II. INTERFÉRENCES LUMINEUSES

1. *a.* Dans le cadree de l'optique géométrique, la lumière se propage en ligne droite dans un milieu homogène. Les rayons lumineux SS_1 et SS_2 ne pourraient pas interférer.



Il y a diffraction à la traversée des ouvertures au voisinage de S_1 et S_2. Les faisceaux émergents de S_1 et S_2 sont divergents et peuvent donc avoir un domaine commun, champ d'interférence.

b. Le champ d'interférence est représenté par la zone hachurée sur la figure ci-dessus.

2. *a.* Notons $\delta(M)$ la différence de marche, $(S_1\ M)$ le chemin optique entre S1 et M ; $(S_1M) = n \parallel \overrightarrow{S_1 M} \parallel$.

L'indice de réfraction du milieu de propagation sera pris égal à 1 par la suite :

$$\boxed{\delta(M) = (S_2\ M) - (S_1\ M) = \parallel \overrightarrow{S_2 M} \parallel - \parallel \overrightarrow{S_1 M} \parallel}$$

b.

$$\boxed{\begin{aligned} S_1\ M &= \left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2\right)^{1/2} \\ S_2\ M &= \left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2\right)^{1/2} \end{aligned}}$$

c. Nous effectuons un développement limité de $S_1\ M$ et $S_2\ M$:

$$S_1\ M = D\left(1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{D^2}\right)^{1/2} \approx D\left(1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2\,D^2}\right) = D + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2\,D}$$

$$S_2\ M = D\left(1 + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{D^2}\right)^{1/2} \approx D\left(1 + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2\,D^2}\right) = D + \frac{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2\,D}$$

$\boxed{\delta(M) = (S_2\ M) - (S_1\ M) = \dfrac{a\,x}{D}}$ $\delta(M)$ est indépendante de y dans cette approximation.

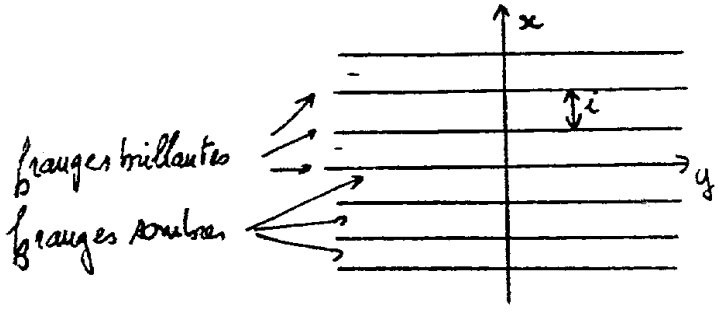
3. *a.* Les points tels que l'intensité lumineuse est maximale sont donnés par $\boxed{\delta = k\,\lambda \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$.

soit $x_{max} = k\dfrac{\lambda\,D}{a}$ avec $k \in \mathbb{Z}$; il s'agit de droites parallèles à oy.

b. Quand l'intensité est minimale, il s'agit des points qui correspondent à $\boxed{\lambda = (2\,k + 1)\dfrac{\lambda}{2}\ (k \in \mathbb{Z})}$.

$\boxed{x_{min} = (2\,k + 1)\dfrac{\lambda D}{2\,a}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c. • La figure d'interférence est constituée d'une juxtaposition de franges rectilignes alternativement brillantes et sombres.



• L'interfrange est la distance qui sépare les lignes médianes de deux bandes consécutives de même éclairement. Considérons deux points d'intensité lumineuse maximale :

$$i = x_{max,\,k+1} - x_{max,\,k} = (k+1)\frac{\lambda D}{a} - k\frac{\lambda D}{a} \qquad \boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}.$$

4. *a.* Les franges d'interférences sont encore rectilignes mais peu nombreuses et irisées. Très vite l'écran est éclairé de façon quasi uniforme.

La frange centrale est par exemple bordée de rouge puis de bleu vers l'extérieur.

b. On observe un spectre cannelé, où sont absentes les radiations pour lesquels la différence de marche à l'endroit où est placée la fente est un multiple impair de leur demi-longueur d'onde.

$$x_{min} = (2k+1)\frac{\lambda D}{2a} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Pour $\lambda_B = 0{,}40\ \mu m$ $\qquad k = -\frac{1}{2} + \frac{ax}{\lambda_B D} = 12{,}25$

Pour $\lambda_R = 0{,}75\ \mu m$ $\qquad k = -\frac{1}{2} + \frac{ax}{\lambda_R D} = 6{,}3$

k est donc un entier appartenant à l'intervalle [7, 12].

Les longueurs d'onde des radiations non observées sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

k	7	8	9	10	11	12
λ (μm)	0,68	0,60	0,54	0,49	0,44	0,41

C.A.P.E.S.

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de chimie avec applications - Session 1992

I. LES OXYDES DE CARBONE ET L'INDUSTRIE

1. La préparation de l'hydrogène nécessaire à la synthèse de l'ammoniac s'effectue à partir du méthane en plusieurs étapes. Dans un premier temps, le méthane réagit à haute température avec de la vapeur d'eau selon :

$$CH_4 + H_2O \rightarrow CO + 3\,H_2$$

Cette réaction est obtenue dans deux réacteurs. Dans le premier, la température est limitée par le fait que les tubes utilisés sont en acier (reformage primaire). Le second réacteur est construit en matériaux réfractaires et le chauffage est obtenu par la combustion partielle d'une partie du méthane grâce à l'ajout d'air ou d'oxygène.

$$CH_4 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow CO + 2\,H_2$$

On réalise ensuite la conversion du monoxyde de carbone après refroidissement du mélange gazeux :

$$CO + H_2O \rightarrow CO_2 + H_2$$

2. Le dioxyde de carbone est utilisé dans l'industrie pour la réfrigération. Il est utilisé sous forme solide ou liquide. Le monoxyde de carbone sert à la réduction de certains oxydes métalliques. Dans le haut fourneau les réactions sont les suivantes :

$$3\,Fe_2O_3 + CO \rightarrow 2\,Fe_3O_4 + CO_2$$

$$Fe_3O_4 + CO \rightarrow 3\,FeO + CO_2$$

$$FeO + CO \rightarrow Fe + CO_2$$

Le monoxyde de carbone est obtenu dans le bas du haut fourneau par combustion incomplète du coke à haute température :

$$C + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow CO$$

(ou $C + O_2 \rightarrow CO_2$ suivi de $C + CO_2 \rightarrow 2\,CO$)

II. MÉTAUX CARBONYLES

A. Structures des métaux carbonyles.

1. Le nickel a pour configuration électronique :

$$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^8\ 4s^2$$

(ou [Ar] $3d^8\ 4s^2$)

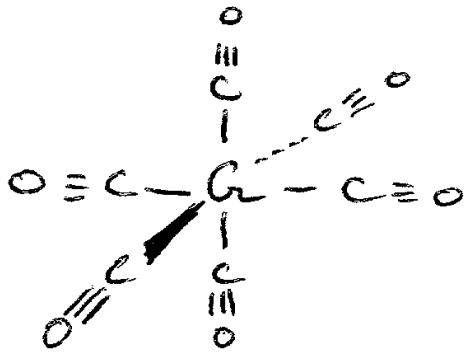
Il appartient à la quatrième période du tableau de Mendeleiev.

2. Il y a dix-huit éléments dans cette période.

3. Les métaux carbonylés vérifient la règle des 18 électrons. Chaque ligand CO donne deux électrons au métal qui doit atteindre la configuration électronique du gaz rare le suivant.

Le fer possède 8 électrons dans sa couche de valence ([Ar] $3d^6\ 4s^2$) et le chrome 6 ([Ar] $3d^5\ 4s^1$). Les métaux carbonyles correspondant possèdent donc respectivement $(18-8)/2 = 5$ et $(18-6)/2 = 6$ ligands. Leurs formules sont donc : $Fe(CO)_5$ et $Cr(CO)_6$.

4. L'hexacarbonylchrome a une structure octaédrique :



5. Le manganèse et la cobalt ne donnent pas de complexes mononucléaires car leur nombre de charge étant impair, la règle des dix-huit électrons ne peut être vérifiée pour un tel complexe. Par contre on peut avoir des complexes dinucléaires stables par dimérisation de fragments à 17 électrons et formation d'une liaison métal-métal.

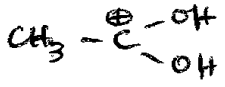
6. Le fragment à dix-sept électrons correspondant au vanadium est $V(CO)_6$. Il possède déjà six ligands. Sa dimérisation entraînerait la présence d'au moins sept ligands autour du vanadium ce qui est probablement très défavorisé à cause de la gène stérique que cela entraînerait.

B. Catalyse par les métaux carbonyles.

1. Un catalyseur est une espèce chimique qui augmente la vitesse d'une réaction sans être consommée par celle-ci.

2. – La réaction d'estérification est catalysée par les ions H^+. Il s'agit d'une catalyse homogène.

Exemple : $CH_3COOH + CH_3CH_2OH \overset{H^+}{\rightleftarrows} CH_3COOCH_2\,CH_3 + H_2O$

La source H^+ peut être l'acide sulfurique. L'ion hydrogène va se fixer sur la molécule d'acide pour donner  ce qui va favoriser l'addition du nucléophile, ici la molécule d'éthanol.

– L'hydrogénation des alcènes est catalysée par des métaux comme le nickel ou le palladium. Avec ces catalyseurs, on parle de catalyse hétérogène, le catalyseur n'étant pas dans la même phase que les réactifs.

Exemple : $CH_2 = CH_2 + H_2 \rightarrow C_2H_6$

L'hydrogène et l'alcène sont adsorbés à la surface du catalyseur. La molécule de dihydrogène est dissociée et les atomes d'hydrogène peuvent diffuser sous la surface du métal avant de se lier avec les atomes de carbone de la double liaison.

– La déshydrogénation catalytique des alcools. Les alcools peuvent être déshydrogénés à haute température sur un catalyseur solide comme le cuivre. Il s'agit encore d'une catalyse hétérogène.

Exemple : $CH_3CH_2OH \rightarrow CH_3CHO + H_2$

Lorsque la réaction est effectuée en présence d'air, le dihydrogène est oxydé en eau et le processus devient exothermique (lampe sans flamme).

III. SOLUTIONS AQUEUSES

A. Solubilité du dioxyde de carbone.

1. Voir courbe.

2. *a.* La loi d'action de masse s'écrit ici :

$$K = \frac{[CO_2]}{C_O} \times \frac{P_O}{P_{CO_2}}$$

avec $C_O = 1$ mol/l et $P_O = 1$ bar.

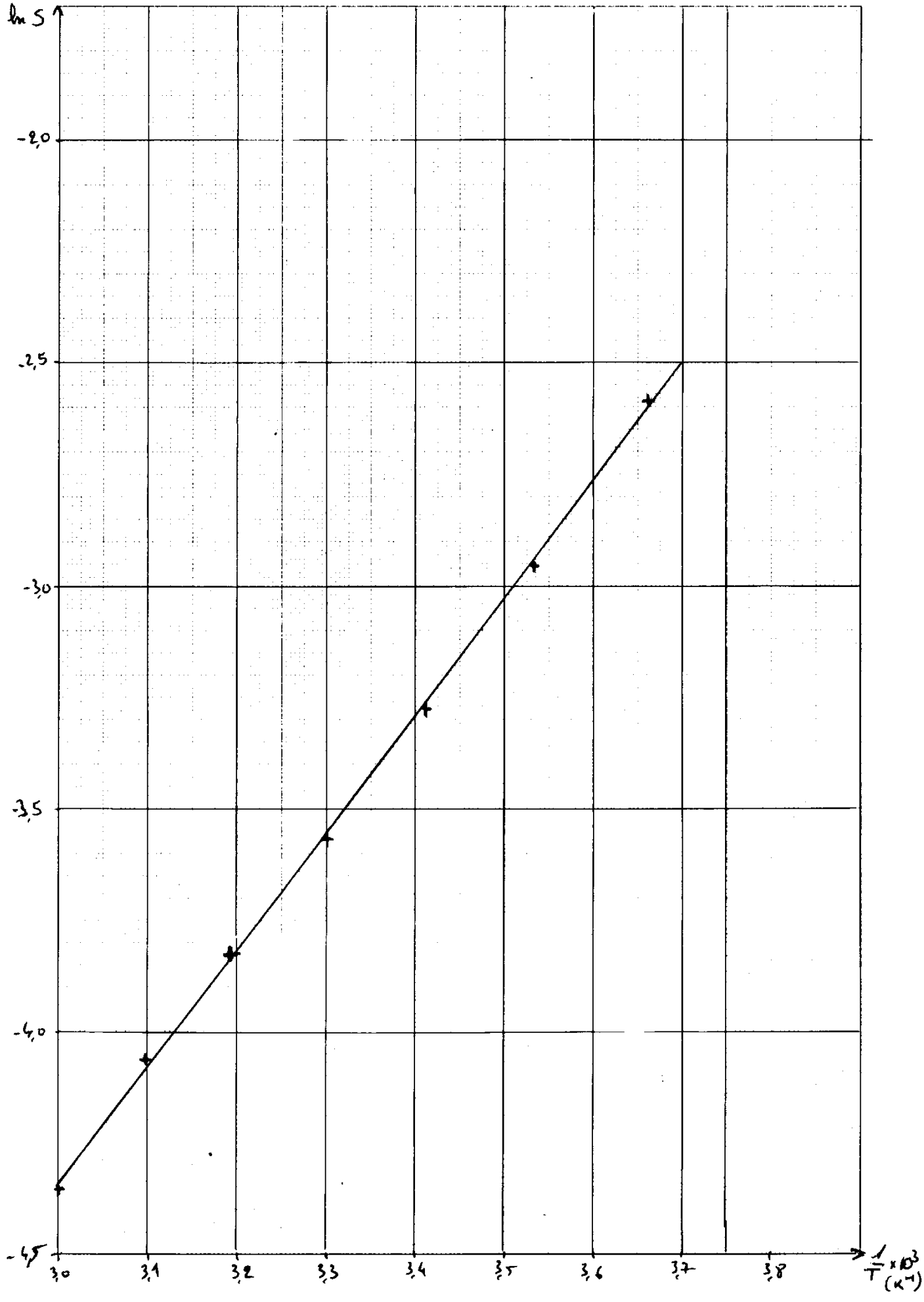
Dans la suite C_O et P_O seront sous-entendus $\left(K = \frac{[CO_2]}{P_{CO_2}}\right)$.

b. Si on néglige la formation de HCO_3^- et CO_3^{2-}, on a :

$$S = [CO_2]$$

c. Si on applique la loi de Van't Hoff à cet équilibre il vient :

$$\frac{d \ln \left(\frac{[CO_2]}{P_{CO_2}}\right)}{dT} = \frac{\Delta H^\circ}{RT^2}$$


ln S
-2,0
-2,5
-3,0
-3,5
-4,0
-4,5
3,0
3,1
3,2
3,3
3,4
3,5
3,6
3,7
3,8
1/T x10³ (K⁻¹)

Compte tenu de la question précédente et du fait que $P_{CO_2} = 1$ bar dans les conditions de l'expérience, il vient :

$$\frac{d \ln S}{dT} = \frac{\Delta H°}{RT^2}$$

Si $\Delta H°$ est constant dans l'intervalle de température considéré, on peut intégrer cette relation :

$$\ln S = -\frac{\Delta H°}{RT} + Cste$$

La constante est égale ici à $\frac{\Delta S°}{R}$.

d. Les points expérimentaux étant pratiquement alignés lorsque l'on trouve $\ln (S) = f\left(\frac{1}{T}\right)$, il est raisonnable de supposer que $\Delta H°$ est constant.
(La loi de Van't Hoff peut s'écrire : $\frac{d \ln S}{d\left(\frac{1}{T}\right)} = -\frac{\Delta H°}{R}$).

3. La pente vaut $-\frac{\Delta H°}{R}$ et s'exprime en Kelvin. L'ordonnée à l'origine n'a pas d'unité. Elle est égale à $\frac{\Delta S°}{R}$.

Le coefficient de corrélation est une grandeur adimensionnelle et n'a donc pas d'unité.

$\Delta H° = -R \times 2{,}63 \,.\, 10^3$
$\Delta H° = -21{,}9 \text{ kJ} \,.\, \text{mol}^{-1}$

$\Delta S° = -12{,}22 \times R$
$\Delta S° = -101{,}6 \text{ J} \,.\, \text{K}^{-1} \,.\, \text{mol}^{-1}$.

4. La solubilité du dioxyde de carbone peut être estimée à partir de la régression linéaire :

$$\ln S_{25°C} = -12{,}22 + \frac{2{,}63 \,.\, 10^3}{298} = -3{,}39$$

$$S_{25°C} = 3{,}4 \,.\, 10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}$$

B. Dioxyde de carbone et acidité.

1. *a.* Les gaz étant supposés parfaits, on a :

$$x_{CO_2} = 3{,}3 \,.\, 10^{-4}$$

soit : $$P_{CO_2} = 3{,}3 \,.\, 10^{-4} \text{ bar}$$

En appliquant la loi d'action des masses avec $K = 3.4 \,.\, 10^{-2}$:

$$[CO_2] = K \, P_{CO_2} = 1{,}12 \,.\, 10^{-5} \text{ mol.l}^{-1}$$

b. Calculons le pH de l'eau distillée. On a : $[CO_2] = 1{,}12 \cdot 10^{-5}$ mol.l^{-1} puisqu'on suppose que la solution est en équilibre avec l'atmosphère.

L'électroneutralité s'écrit :

$$[H^+] = [OH^-] + [HCO_3^-] + [CO_3^{2-}]$$

La solution étant obtenue par dissolution d'un acide dans l'eau, elle est forcément acide et son pH est inférieur à 7.

Supposons pH < 6
$[OH^-]$ est alors négligeable devant $[H^+]$ et $2\,[CO_3^{2-}]$ devant $[HCO_3^-]$ compte tenu de la valeur de K_2.

Soit : $$[H^+] = [HCO_3^-]$$

La réaction prépondérante est $CO_2 + H_2O \rightleftarrows H^+ + HCO_3^-$ et en écrivant la loi d'action de masse :

$$K_1 = \frac{[H^+]\,[HCO_3^-]}{[CO_2]}$$

il vient : $$[H^+] = \sqrt{K_1\,[CO_2]}$$

soit : $pH = 5{,}65$ (ce qui est conforme à l'hypothèse).

2. La masse molaire de l'éthanoate de sodium cristallisé ($NaCH_3CO_2 \cdot 3\,H_2O$) vaut :

$$M = 23{,}0 + 2 \times 12{,}0 + 5 \times 16{,}0 + 9 \times 1{,}0 = 136{,}0 \text{ g . mol}^{-1}$$

Pour préparer 100 cm^3 de solution décimolaire, il faut peser 0,01 mol de sel à la balance de précision soit 1,360 g. On peut utiliser un bécher pour effectuer cette pesée. On dissout alors le sel dans de l'eau distillée (toujours dans le bécher). La solution est ensuite transférée dans une fiole jaugée de 100 cm^3, on rince le bécher avec de l'eau distillée et on ajoute celle-ci dans la fiole. Ensuite, on homogénéise la solution dans la fiole après avoir ajouté suffisament d'eau pour que le volume soit légèrement inférieur à 100 cm^3 puis on complète au trait de jauge avec de l'eau distillée et on homogénéise la solution obtenue.

3. *a.* L'ion acétate réagit ave le dioxyde de carbone selon :

$$CH_3CO_2^- + CO_2 \rightleftarrows CH_3COOH + HCO_3^-$$

b. Initialement, dans la solution, on a $[CH_3CO_2^-] = 0{,}1$ mol.l^{-1} et $[CO_2] = 1{,}12 \cdot 10^{-5}$ mol.l^{-1} donc il y a un grand excès d'acétate, mais ultérieurement, le dioxyde de carbone présent dans l'atmosphère interviendra.

c. Calculons les concentrations, on a :

$$pH = 7{,}9 \quad \text{donc} \quad [H^+] = 10^{-pH} = 1{,}3 \cdot 10^{-8} \text{ mol.l}^{-1}$$

$$[OH^-] = \frac{K_e}{[H^+]} = 8.10^{-7}\ mol.l^{-1}$$

Pour le couple acidobasique CH_3COOH/CH_3COO^- :

$$[CH_3COOH] + [CH_3COO^-] = 0{,}1\ mol.l^{-1} = [Na^+]$$

$$K_a = \frac{[CH_3COO^-]\,[H^+]}{[CH_3COOH]}$$

d'où :
$$[CH_3COO^-] = \frac{0{,}1\ K_a}{[H^+] + K_a} = 0{,}1\ mol.l^{-1}$$

$$[CH_3COOH] = \frac{0{,}1\ [H^+]}{[H^+] + K_a} = 7\ .\ 10^{-5}\ mol.l^{-1}$$

L'électroneutralité s'écrit :

$$[H^+] + [Na^+] = [OH^-] + [CH_3COO^-] + [HCO_3^-] + 2\,[CO_3^{2-}]$$

en reportant la conservation de l'acétate et compte tenu du fait que $2\,[CO_3^{2-}]$ est négligeable devant $[HCO_3^-]$, il vient :

$$[H^+] + [CH_3COOH] = [OH^-] + [HCO_3^-]$$

soit au vu des valeurs calculées ci-dessus :

$$[HCO_3^-] = [CH_3COOH] = 7.10^{-5}\ mol.l^{-1}$$

De $K_1 = \frac{[HCO_3^-]\,[H^+]}{[CO_2]}$ on tire $[CO_2] = 2\ .\ 10^{-6}\ mol\ .\ l^{-1}$ et à partir de $K_2 = \frac{[CO_3^{2-}]\,[H^+]}{[HCO_3^-]}$:
$[CO_3^{2-}] = 3\ .\ 10^{-7}\ mol.l^{-1}$.

d. $[CO_2] < 1{,}12\ .\ 10^{-5}\ mol.l^{-1}$ donc la solution n'est pas saturée en dioxyde de carbone. Celui-ci va donc continuer à se dissoudre et le pH diminuera encore.

4. Lorsque le pH de la solution diminue, les ions carbonates issus de l'équilibre de dissolution du sel peu soluble sont transformés en ions HCO_3^- et en CO_2 :

$$CO_3^{2-} + H^+ \rightleftarrows HCO_3^-$$

$$HCO_3^- + H^+ \rightleftarrows CO_2 + H_2O$$

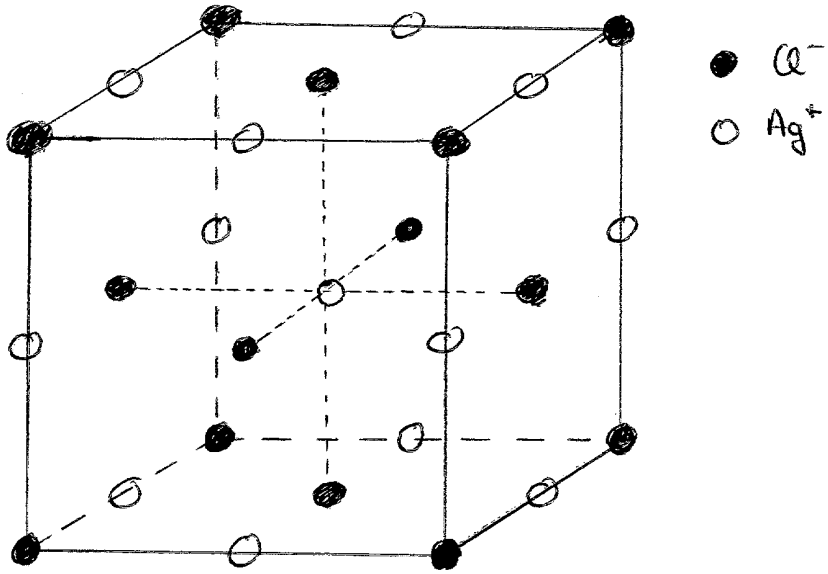
Pour que le produit $[M^{2+}]\,[CO_3^{2-}]$ (pour le carbonate d'un métal divalent) reste constant, il faut que la concentration de M^{2+} augmente : $MCO_3 \rightleftarrows M^{2+} + CO_3^{2-}$.

IV. CRISTALLOGRAPHIE

1. $\frac{r_+}{r_-} = 0{,}64$ donc $0{,}414 < \frac{r_+}{r_-} < 0{,}732.$

La coordinence du chlorure d'argent doit donc être (6,6).

2.



3. Le corps ionique type de cette structure est le chlorure de sodium NaCl.

4. Chaque maille renferme 4 ions Cl^- et 4 ions Ag^+. Le paramètre de maille a vaut : $a = 2\,(r_+ + r_-)$ et la masse volumique : $\mu = \frac{4\,(M_{Ag^+} + M_{Cl^-})}{\mathcal{N}_A\, a^3}$.

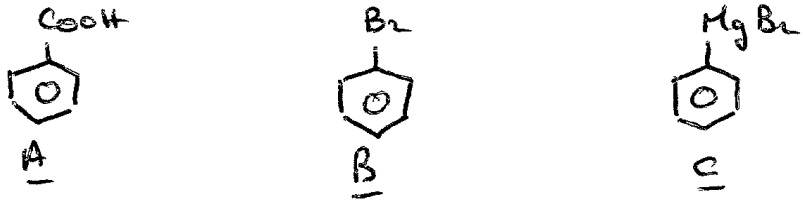
$$\mu = \frac{4\,(107{,}9 + 35{,}5) \times 10^{-3}}{6{,}022 \,.\, 10^{23}\left[2\,(113 + 181)\,10^{-12}\right]^3} = 4{,}69 \,.\, 10^{-3}\ \text{kg.m}^3$$

$$\mu = 4{,}69\ \text{g.cm}^{-3}$$

V. SYNTHÈSES ORGANIQUES

A. Première méthode.

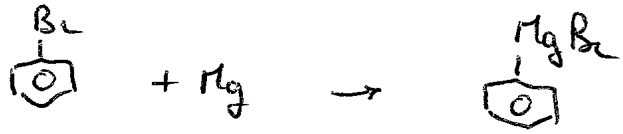
1. Les formules de A, B et C sont :



2. Les équations des réactions correspondantes s'écrivent :

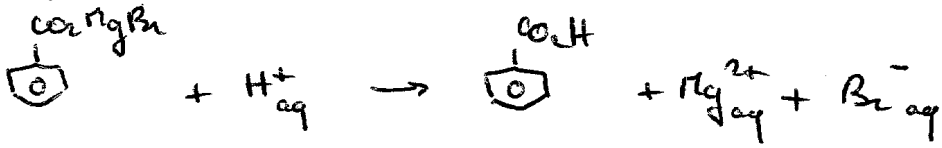
– bromation du benzène :

– préparation de l'organomagnésien :



– réaction de l'organomagnésien avec le dioxyde de carbone :

– hydrolyse en milieu acide :

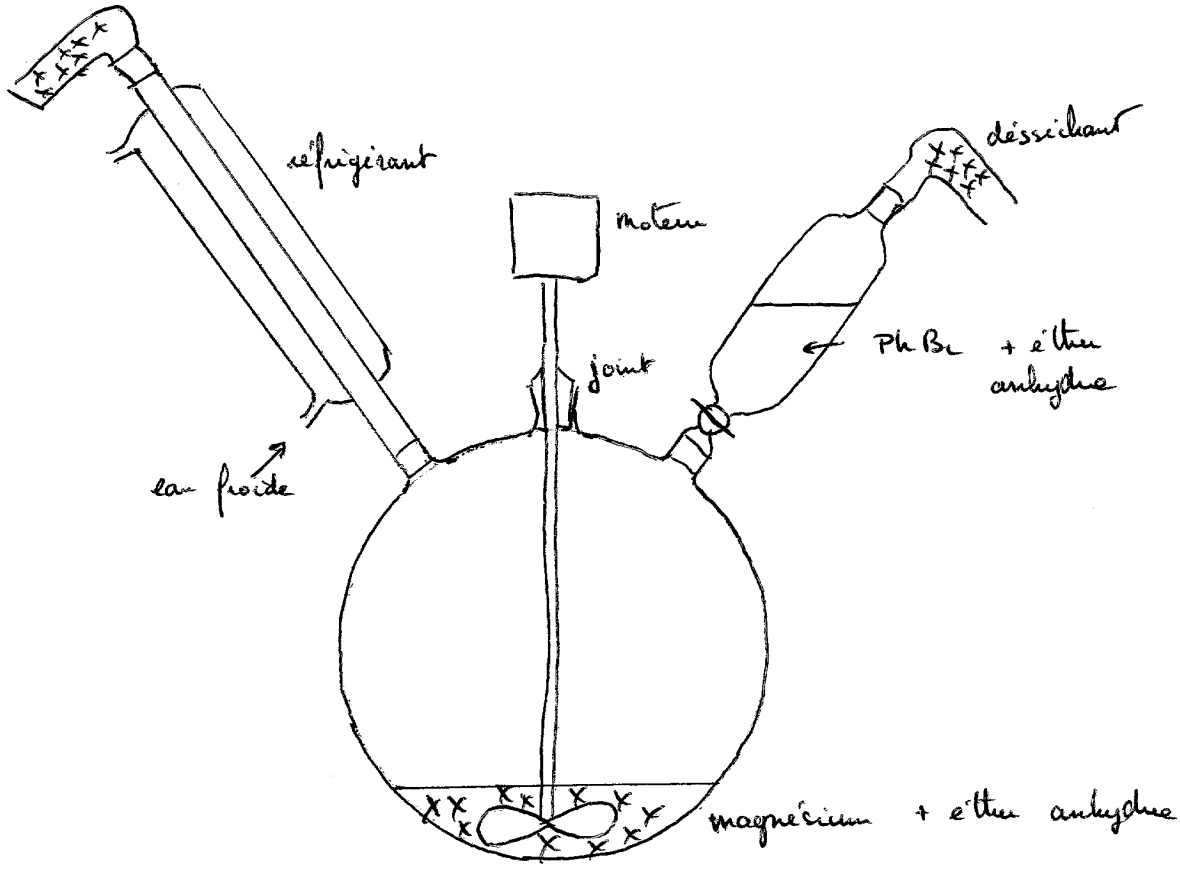


3. Le fer réagit ave le dibrome pour donner $FeBr_3$ qui catalyse la réaction en polarisant les molécules de dibrome :

$$2\,Fe + 3\,Br_2 \rightarrow 2\,FeBr_3$$

$$FeBr_3 + Br \rightarrow FeBr_4^+ \ldots Br^+$$

$FeBr_3$ est un acide de Lewis.



4. Lors de la synthèse du magnésien, il faut utiliser de la verrerie sèche et des produits anhydres car l'eau inhibe la formation du magnésien en oxydant le magnésium en surface et réagit avec le magnésien qui pourrait se former :

$$RMgX + H_2O \rightarrow RH + \text{“MgXOH”}$$

Le montage utilisé est le suivant : (voir page précédante)

Au début, on ajoute un peu de solution de bromobenzène et on agite jusqu'à ce que la réaction démarre, ce qui se traduit par l'ébullition du solvant. Si la réaction ne s'amorce pas, on peut éventuellement arrêter l'agitation et ajouter un cristal d'iode.

Lorsque la réaction a démarré, on ajoute lentement la solution de bromure de phényle de façon à maintenir une légère ébullition tout en agitant le milieu.

5. La réaction de l'organomagnésien ave le dioxyde de carbone est exothermique. L'énergie est absorbée par le dioxyde solide en excès qui se sublime.

6. Dans la première étape, l'acide benzoïque est extrait dans la phase organique en même temps que les autres produits organiques présents (benzène, PhBr, Ph-Ph, ...). Les produits inorganiques sont dans la phase aqueuse.

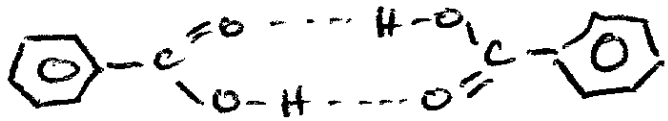
Lorsque l'on extrait la phase inorganique avec de la soude, l'acide benzoïque est extrait sous forme de benzoate de sodium dans la phase aqueuse ; les autres produits organiques, n'étant pas acides, restent dans la phase organique.

En ajoutant HCl, on reforme l'acide benzoïque qui est insoluble dans l'eau et qui précipite.

7. Une expérience de cryométrie consiste à mesurer l'abaissement de la température de cristallisation commençante d'un solvant lorsque l'on y a dissous une masse connue d'un soluté.

D'après la loi de Raoult, pour des solutions diluées, l'abaissement de température est inversement proportionnel à la masse molaire du soluté ce qui permet de déterminer celle-ci.

L'acide benzoïque est présent dans le benzène sous forme de dimère :



B. Seconde méthode.

1. Les formules de D et E sont :

D : E : $CHCl_3$

(la réaction d'une méthylcétone avec un halogène en milieu basique donne l'haloforme correspondant et un acide carboxylique).

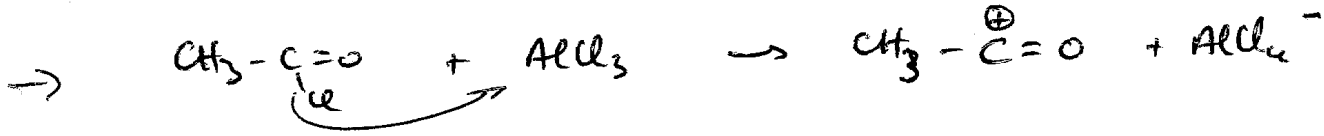
2. Le chlorure d'éthanoyle peut être préparé par réaction de l'acide éthanoïque avec le chlorure de thionyle :

$$CH_3\,COOH + SOCl_2 \rightarrow CH_3\,COCl + SO_2 + HCl$$

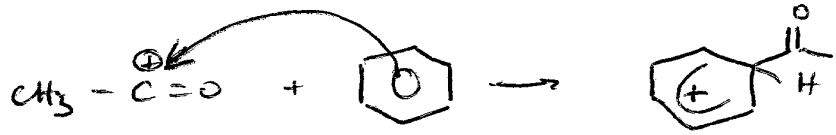
3. Lors de l'acylation de Friedel et Craft, le chlorure d'aluminium forme un complexe stable avec la cétone D. Il faut donc en utiliser un peu plus d'un dixième de mole.

4. Le mécanisme proposé est le suivant :

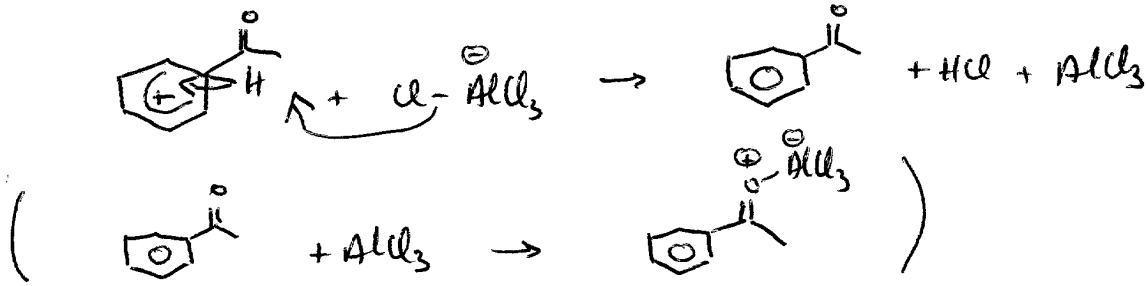
– formation de l'ion acylium :



– addition électrophile :



– élimination de H^+ :



5. L'ion sulfite réduit l'hypochlorite en chlorure. Les couples rédox correspondants sont :

$$ClO^- + H_2O + 2e^- \rightarrow Cl^- + 2\,OH^-$$

$$SO_3^{2-} + 2\,OH^- \rightarrow SO_4^{2-} + H_2O + 2e^-$$

Soit pour la réaction d'oxydoréduction :

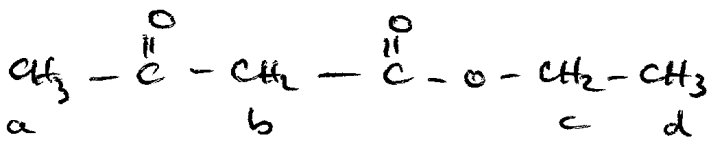
$$ClO^- + SO_3^{2-} \rightarrow Cl^- + SO_4^{2-}$$

6. On sépare les deux phases par décantation après l'hydrolyse. La phase organique contient A et E. On opère une extraction à la soude pour séparer l'acide benzoïque comme dans la première méthode, on sépare les phases. La phase aqueuse est acidifiée et l'acide précipité.

Pour récupérer E, on peut distiller la phase organique.

VI. CHIMIE ORGANIQUE ET SPECTROSCOPIE

1. L'absorption à 1743 cm^{-1} en infrarouge est liée aux vibrations d'élongation des deux liaisons C = 0. La formule semi-développée de la molécule est :



Les protons de c et d sont couplés, on doit donc observer un quadruplet pour c et un triplet pour d avec la même constante de couplage. Les protons de a et b ne sont pas couplés et donnent deux singulets.

L'intégration fait 29,9 cm au total soit environ 3 cm par hydrogène. Cela confirme les attributions des signaux pour c et d et permet de distinguer a et b. L'étude des déplacements chimiques confirme les résultats :

a. 3H non couplés déblindés par un C = 0 δ = 2,2 ppm,

b. 2H non couplés déblindés par deux C = 0 δ = 3,5 ppm,

c. 2H couplés fortement déblindés par l'oxygène en α δ = 4,2 ppm,

d. 3H couplés peu déblindés δ = 1,3 ppm.

2. L'abréviation p.p.m. signifie partie par million.

3. Le deutérium absorbe à une fréquence très différente du proton (pour un même champ magnétique) et les solvants deutériés ne donnent donc pas de signaux dans le spectre.

C.A.P.E.S.

(Concours Externe)

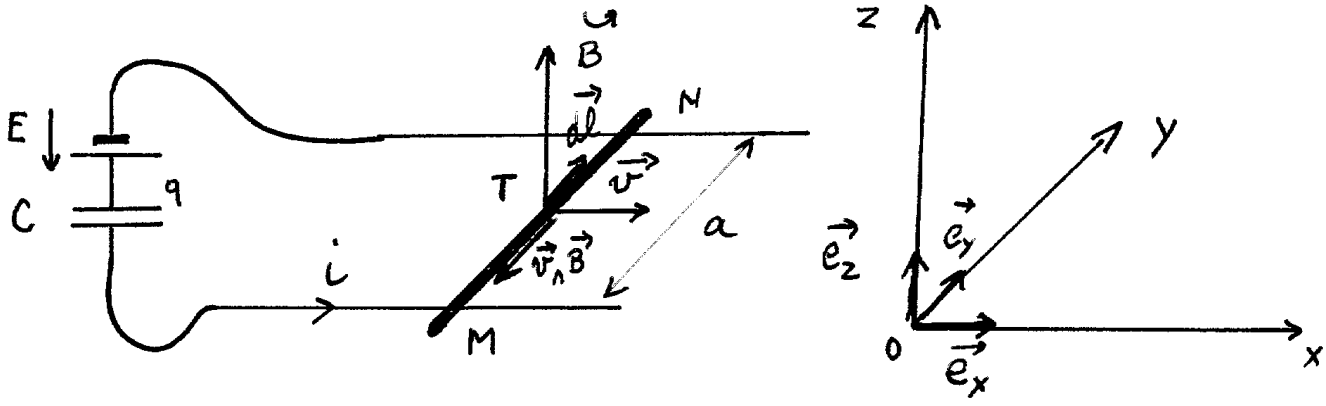
SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition de physique avec applications - Session 1992

par Roger SAHUN, Christian GROSSETÊTE
et les membres du Jury

---

1. Exercice d'électricité



1.1. **Force électromotrice :**

La force électromotrice (f.é.m) d'induction est la circulation du champ électrique $\vec{v} \wedge \vec{B}$ le long de la portion de circuit filiforme :

$$e = \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \,.\, \vec{dl}$$

avec ici : • $\vec{dl}$ orienté dans le sens choisi pour $i > 0$, soit $\vec{dl} = dl \,.\, \vec{e_y}$.

Ici le circuit filiforme (tige T) siège du phénomène d'induction est un circuit ouvert d'extrémités M et N donc :

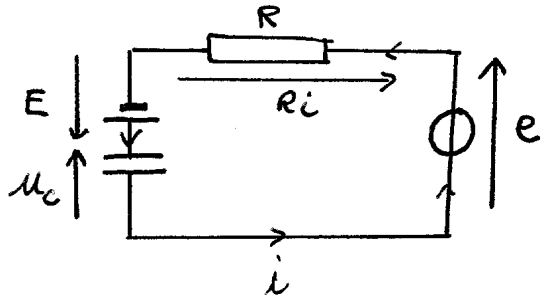
$$e = \int_M^N (\vec{v} \wedge \vec{B}) \,.\, \vec{dl}$$

soit $$e = \int_M^N -(v \,.\, B)\, \vec{e_y} \,.\, \vec{dl} = -v \,.\, B \int_M^N dl = -B \,.\, v \,.\, MN$$

$$e = -B \,.\, v \,.\, MN \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = -B \,.\, a \,.\, v}$$

e en (V)
B en (T)
a en (m)
v en ($m.s^{-1}$)

1.2. Le circuit électrique est équivalent au schéma suivant :



En circulant le long du circuit dans le sens du courant, la loi des mailles s'écrit :

$$E - u_c + e - Ri = 0$$

$$E - \frac{q}{c} - B \,.\, a \,.\, v - Ri = 0 \qquad \text{soit avec } i = \frac{dq}{dt}$$

$$E - \frac{q}{c} - B \,.\, a \,.\, v - R \,.\, \frac{dq}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R \,.\, \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} + B \,.\, a \,.\, v = E} \quad (1)$$

1.3. Choisissons pour système étudié, la tige T placée dans le référentiel d'étude supposé Galiléen ; la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \,.\, \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Les forces extérieures appliquées à la tige sont :

– son poids $\vec{P} = m \,.\, \vec{g}$ ici $\vec{P} = -m \,.\, g \,.\, \vec{e_z}$

– la réaction résultante des rails $\vec{R_r} = R_r \,.\, \vec{e_z}$

– la force électromagnétique (LAPLACE) $\vec{F} = \int_{y_M}^{y_N} i \,.\, \vec{dl} \wedge \vec{B} = i \,.\, a \,.\, B \,.\, \vec{e_x}$.

La relation fondamentale devient : $\vec{P} + \vec{R_r} + \vec{F} = m \,.\, \frac{d\vec{v}}{dt}$.

En projection sur Oz : $-mg \,.\, \vec{e_z} + R_r \,.\, \vec{e_z} = \vec{O}$ soit $\mathbf{R_r = mg}$.

En projection sur Ox : $i \,.\, a \,.\, B \,.\, \vec{e_x} = m \,.\, \frac{dv}{dt} \,.\, \vec{e_x}$ soit $i \,.\, a \,.\, B = m \,.\, \frac{dv}{dt} \Rightarrow$

$$\boxed{m \,.\, \frac{dv}{dt} = B \,.\, a \,.\, \frac{dq}{dt}} \quad (2)$$

1.4. La relation (2) donne : $\frac{dq}{dt} = \frac{m}{B \,.\, a} \,.\, \frac{dv}{dt}$ (2')

En intégrant (2') on obtient : $q = \frac{m}{B \,.\, a} \,.\, v + Cte$; à $t = 0$ $q = 0$ et $v = 0$, soit

$$C^{te} = 0 \Rightarrow q = \frac{m \,.\, v}{B \,.\, a} \quad (2'')$$

Portons (2') et (2'') dans la relation (1), nous obtenons :

$$\frac{R\,.\,m}{B\,.\,a}\,.\,\frac{dv}{dt}+\frac{m\,.\,v}{B\,.\,a\,.\,c}+B\,.\,a\,.\,v=E\ ;$$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{B\,.\,a\,.\,m}{R\,.\,m\,.\,B\,.\,a\,.\,C}\,.\,v+\frac{B^2\,.\,a^2}{R\,.\,m}\,.\,v=E\,.\,\frac{B\,.\,a}{R\,.\,m}\ ;$$

$$\frac{dv}{dt}+\left(\frac{1}{R\,.\,C}+\frac{B^2\,.\,a^2}{R\,.\,m}\right).\,v=\frac{B\,.\,a}{m\,.\,R}\,.\,E.$$

On pose $$\tau=\frac{1}{\frac{1}{R\,.\,C}+\frac{B^2\,.\,a^2}{R\,.\,m}}=\frac{R\,.\,C}{1+\frac{B^2\,.\,a^2\,.\,C}{m}}=\alpha\,.\,R\,.\,C$$

avec $$\boxed{\alpha=\frac{1}{1+\frac{B^2\,.\,a^2\,.C}{m}}} \qquad \boxed{\tau=\alpha\,.\,R\,.\,C}$$

1.5. Résolvons l'équation différentielle $\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=\frac{B\,.\,a}{m\,.\,R}\,.\,E.$

Solution générale de l'équation sans 2nd membre : $\frac{dv}{dt}=-\frac{dt}{\tau}\Rightarrow v_1=A\,.\,e^{-\frac{t}{\tau}}.$

Solution particulière de l'équation avec 2nd membre : $$v_2=\frac{B\,.\,a\,.\,\tau\,.\,E}{m\,.\,R\,.}\ .$$

La solution de l'équation est : $v=v_1+v_2=\frac{B\,.\,a\,.\,\tau\,.\,E}{m\,.\,R}+A\,.\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

à t = 0, $v=0=\frac{B\,.\,a\,.\,\tau\,.\,E}{m\,.\,R}+A \qquad \Rightarrow \qquad A=-\frac{B\,.\,a\,.\,\tau\,.}{m\,.\,R}\,.\,E$

d'où $$\boxed{v=\frac{B\,.\,a\,.\,\tau\,.\,E}{m\,.\,R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=\frac{B\,.\,a\,.\,C\,.\,E\,.\,\alpha}{m}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

- Dans la question 1.4. nous avons $q=\frac{m}{B\,.\,a}\,.\,v$ soit ici :

$$q=\frac{m}{B\,.\,a}\ \frac{B\,.\,a\,.\,\tau\,.\,E}{m\,.\,R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad \text{avec} \quad \tau=\alpha\,.\,R\,.\,C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{q=\alpha\,.\,C\,.\,E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

- Avec $i=\frac{dq}{dt} \qquad i=\alpha\,.\,C\,.\,E\,.\,\frac{1}{\tau}\,.\,e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{E}{R}\,.\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{i=\frac{E}{R}\,.\,e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

1.6. En régime permanent $t >> \tau$ donc $e^{-\frac{t}{\tau}}$ tend vers $e^{-\infty}$ donc vers O ; on obtient alors :

- vitesse limite $v_{lim} = \dfrac{B \,.\, a \,.\, \tau \,.\, E}{m \,.\, R}$ $\boxed{v_{lim} = \dfrac{B \,.\, a \,.\, C \,.\, E \,.\, \alpha}{m}}$

- énergie cinétique $E_{k_{final}} = \dfrac{1}{2} m \,.\, v_{lim}^2 = \dfrac{1}{2} m \,.\, \left(\dfrac{B \,.\, a \,.\, C \,.\, E \,.\, \alpha}{m}\right)^2$

$$\boxed{E_{k_{final}} = \frac{1}{2} C \,.\, E^2 \,.\, \frac{B^2 \,.\, a^2 \,.\, C \,.\, \alpha^2}{m}}$$

- charge électrique limite $q_{lim} = \alpha \,.\, C \,.\, E$ $\boxed{q_{lim} = \alpha \,.\, C \,.\, E}$

- énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur

$$W_C = \frac{q^2}{2 \,.\, C} = \frac{\alpha^2 \,.\, C^2 \,.\, E^2}{2\,C} = \alpha^2 \,.\, \frac{C \,.\, E^2}{2} \qquad \boxed{W_C = \frac{1}{2} C \,.\, E^2 \,.\, \alpha^2}$$

- énergie fournie par le générateur

$$W_g = \int_0^{q_{lim}} E \,.\, dq = \int_0^{q_{lim}} dq = E \,.\, q_{lim} = \alpha \,.\, CE^2 \qquad \boxed{W_g = \alpha \,.\, C \,.\, E^2}$$

1.7. • L'énergie W_J dissipée par effet Joule est égale à la différence entre l'énergie produite W_g et l'énergie emmagasinée dans le système.

$$W_J = W_g - \left(W_C + E_{K_{final}}\right)$$

$$W_J = \alpha \,.\, C \,.\, E^2 - \left(\frac{1}{2} C \,.\, E^2 \,.\, \alpha^2 + \frac{1}{2} C \,.\, E^2 \,.\, \frac{B^2 \,.\, a^2 \,.\, C \,.\, \alpha^2}{m}\right)$$

$$W_J = \alpha \,.\, C \,.\, E^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \,.\, C \,.\, E^2 \left(1 + \frac{B^2 \,.\, a^2 \,.\, C}{m}\right) \qquad \text{soit avec} \quad 1 + \frac{B^2 \,.\, a^2 \,.\, C}{m} = \frac{1}{\alpha}$$

$$W_J = \alpha \,.\, C \,.\, E^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \,.\, C \,.\, E^2 \,.\, \frac{1}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_J = \frac{1}{2} \alpha \,.\, C \,.\, E^2}$$

Remarque : Par un calcul direct, on peut obtenir le même résultat :

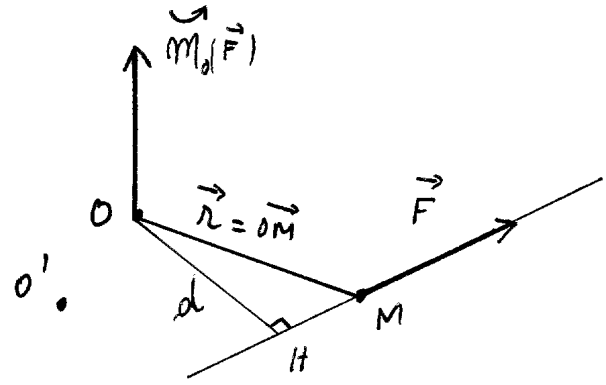
$$W_J = \int_0^{\infty} R\, i^2\, dt = \frac{E^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}}\, dt$$

• Si la résistance R = 0, l'état permanent est atteint au bout d'un temps τ qui tend vers O et alors l'approximation des états quasi stationnaires n'est plus valable. L'énergie est alors perdue pas rayonnement.

2. Étude mécanique du mouvement d'un rotor

2.1. Préliminaire : questions de cours

2.1.1.



• Le moment $\overset{\frown}{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ par rapport à un point O fixe dans un référentiel galiléen (R) d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel situé au point M est donné par :

$\overset{\frown}{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$ avec $\|\vec{OM}\|$ en (m)

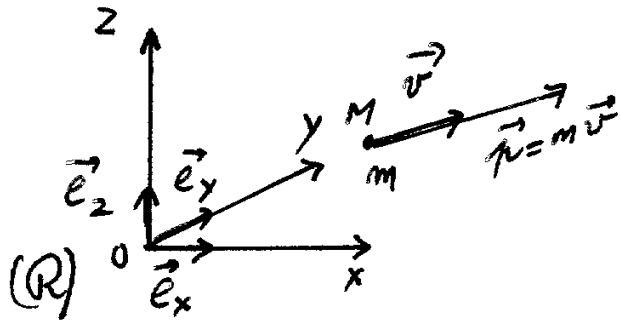
$\|\vec{F}\|$ en (N)

$\|\overset{\frown}{\mathcal{M}}_O(\vec{F})\|$ en (N.m)

• Par rapport à un point O' : $\overset{\frown}{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) = \vec{O'M} \wedge \vec{F} = (\vec{O'O} + \vec{OM}) \wedge \vec{F} = \vec{O'O} \wedge \vec{F} + \overset{\frown}{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$

$$\Rightarrow \boxed{\overset{\frown}{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) = \overset{\frown}{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) + \vec{O'O} \wedge \vec{F}}$$

2.1.2.



• Le moment cinétique $\overset{\frown}{L}_O$ par rapport au point O, d'un point matériel de masse m situé au point M et animé d'une vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel $(\mathcal{R})$ est le vecteur $\overset{\frown}{L}_O$ tel que $\overset{\frown}{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p}$ avec $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ (quantité de mouvement)

$$\Rightarrow \quad \overset{\frown}{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$

$\|\vec{OM}\|$ en (m)

m en kg

v en $m \cdot s^{-1}$

$\|\overset{\frown}{L}_O\|$ en $kg.m^2 \cdot s^{-1}$

• Théorème du moment cinétique :

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique L_O d'un point matériel M par rapport à un point fixe O d'un point référentiel galiléen ($\mathcal{R}$), est égale au moment par rapport à O, $\mathcal{M}_O(\vec{F})$, de la résultante $\vec{F}$ des forces agissant sur ce point M :

$$\frac{d\,L_O}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F})$$

En effet : $\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ donc $\frac{d\,\vec{L_O}}{dt} = \frac{d\,\vec{OM}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{OM} \wedge \frac{d\,m\vec{v}}{dt}$

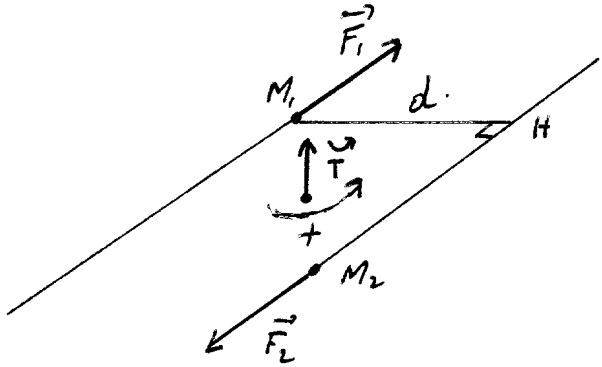
$$= \underbrace{\left(\vec{v_{(M)}} - \vec{v_{(O)}}\right) \wedge m\vec{v}}_{a} + \underbrace{\vec{OM} \wedge \frac{d\,m\vec{v}}{dt}}_{b}$$

– Si on est dans un référentiel galiléen, $\frac{d\,m\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

– Si le point O est fixe ou si $\vec{v_{(O)}}$ est parallèle à $\vec{v_{(M)}}$ le terme a est nul et on a bien dans ces conditions :

$$\frac{d\,\vec{L_O}}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F})$$

2.1.3.



Le moment de force étant une grandeur additive, si nous appelons $\vec{C}$ l'ensemble des 2 vecteurs liés $(M_1, \vec{F_1})$ et $(M_2, \vec{F_2})$:

$$\mathcal{M}_O(\vec{C}) = \vec{OM_1} \wedge \vec{F_1} + \vec{OM_2} \wedge \vec{F_2} \qquad \text{avec} \quad \vec{F_1} = -\vec{F_2} = \vec{F}$$

$$\mathcal{M}_O(\vec{C}) = (\vec{OM_1} - \vec{OM_2}) \wedge \vec{F} = \vec{M_2M_1} \wedge \vec{F}$$

Le moment de ce couple de forces vaut :

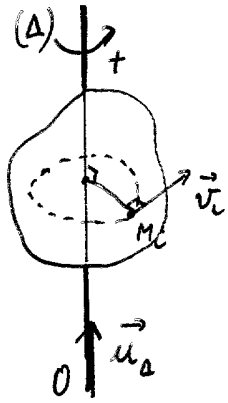
$$T = \vec{M_2M_1} \wedge \vec{F}$$

avec $\|T\| = d \cdot \|\vec{F}\|$

2.1.4. Pour un système de n points :

$$\vec{L_O} = \sum_{i=1}^{n} \vec{OM_i} \wedge m_i\,\vec{v_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{OM_i} \wedge \vec{v_i}$$



en projection sur l'axe Δ : $L_\Delta = \overset{\smile}{L_O} \cdot \vec{u_\Delta} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{OM_i} \wedge \vec{v_i}\right) \cdot \vec{u_\Delta}$

$$L_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{u_\Delta} \wedge \vec{OM_i}\right) \cdot \vec{v_i}$$

En rotation autour d'un axe passant par O, la vitesse du point M_i vaut :

$$\vec{v_i} = \overset{\smile}{\omega} \wedge \vec{OM_i} \qquad \text{avec} \quad \overset{\smile}{\omega} = \omega \cdot \vec{u_\Delta}$$

$$\vec{v_i} = \omega \left(\vec{u_\Delta} \wedge \vec{OM_i}\right)$$

soit $$L_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{u_\Delta} \wedge \vec{OM_i}\right) \cdot \omega = \vec{u_\Delta} \wedge \vec{OM_i}$$

$$= \omega \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \left(\vec{u_\Delta} \wedge \vec{OM_i}\right)^2 \qquad \text{or} \quad \vec{u_\Delta} \wedge \vec{OM_i} = \vec{H_i M_i}$$

soit $$\boxed{L_\Delta = \omega \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \, \|\vec{H_i M_i}\|^2}$$

On définit J_Δ le moment d'inertie d'un solide par rapport à l'axe Δ par :

$$J_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \|\vec{H_i M_i}\|^2 \qquad m \text{ en (kg)}$$

$\|\vec{H_i M_i}\|$ en (m)

$L_\Delta = J_\Delta \cdot \omega$ J en $kg.m^2$

$L_\Delta = J_\Delta \cdot \omega$ en dérivant par rapport au temps.

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \frac{dJ_\Delta}{dt}\omega + J_\Delta \cdot \frac{d\omega}{dt} \qquad \frac{dJ_\Delta}{dt} = 0 \text{ pour un solide}$$

soit $$\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(\overset{\smile}{L_O} \cdot \vec{u_\Delta})}{dt} = \frac{d\overset{\smile}{L_O}}{dt} \cdot \vec{u_\Delta} + \overset{\smile}{L_O} \cdot \frac{d\vec{u_\Delta}}{dt}$$

0

soit $\dfrac{d\,L_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F})$ (d'après 2.1.2.)

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$$

En projection sur l'axe Δ, le théorème du moment cinétique s'exprime par :

$$\boxed{\frac{d\,L_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}).}$$

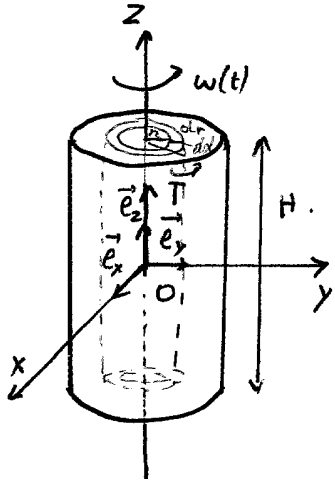
2.2. **Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe**

2.2.1.

D'après 2.1.4. le moment d'inertie $J_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \|H_i\vec{M}_i\|^2$.

Il peut s'écrire ici : $J_\Delta = \iiint_{(v)} dm \cdot r^2$

$$= \iiint_{(v)} \rho \cdot dv \cdot r^2 = \rho \iiint_{(v)} r^2 \cdot dv$$



l'élément de volume $dv = r \cdot d\alpha \cdot dr \cdot dh$

soit $J_\Delta = \rho \iiint d\alpha \cdot dh \cdot r^3\, dr$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{H} dh \int_0^{R} r^3\, dr = 2\,\pi\,H\,\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$\boxed{J_\Delta = \frac{\rho\,\pi\,H\,R^4}{2}}$$

Remarque : $J_\Delta = \dfrac{m\,R^2}{2}$ puisque $m = \rho\,\pi\,H\,R^2$.

Application Numérique : $\rho = \dfrac{2\,.\,J_\Delta}{\pi\,.\,H\,.\,R^4} = \dfrac{2\,.\,12\,.\,10^{-3}}{\pi\,.\,0{,}155\,.\,6{,}25\,.\,10^{-6}} = 7{,}886\,.\,10^3$

$$\rho \approx 7{,}89\,.\,10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

c'est la masse volumique du fer.

2.2.2. Appliquons la relation fondamentale de la dynamique :

ici $$J_A \frac{d\omega}{dt} = T_m - \lambda\omega$$

soit $$\frac{J_\Delta}{\lambda}\frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{T_m}{\lambda}$$

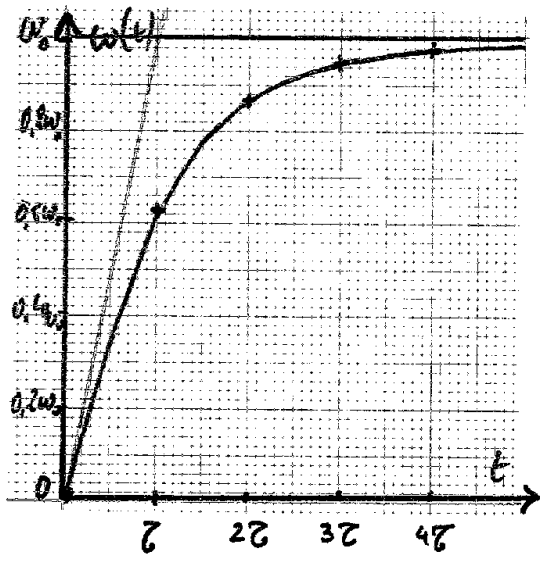
En réalisant l'équation différentielle (comme au 1.5), nous obtenons, avec la condition initiale $\omega(0) = 0$ et en posant $\tau = \dfrac{J_\Delta}{\lambda}$ et $\omega_0 = \dfrac{T_m}{\lambda}$:

$$\omega = \omega_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\omega = \omega_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

- Tracé de courbe :

t	0	τ	$2\,\tau$	$3\,\tau$	$4\,\tau$
$\dfrac{t}{\tau}$	0	1	2	3	4
$e^{-\frac{\tau}{\tau}}$	1	0,37	0,135	0,049	0,018
$1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}}$	0	0,63	0,865	0,95	0,98
ω	0	0,63 ω_0	0,87 ω_0	0,95 ω_0	0,98 ω_0



• Tangente à l'origine :

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe vaut $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$ pour $t = 0 \quad \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_0 = \frac{\omega_0}{\tau}$.

L'équation de la droite tangente à la courbe à l'origine O s'écrit $\omega(t) = \frac{\omega_0}{\tau} \cdot t$; elle coupe l'asymptote $\omega = \omega_0$ au point d'abscisse $t = \tau$.

• *Application Numérique* : $\omega_0 = \frac{2\pi \cdot n_0}{60} = \frac{2\pi \cdot 1500}{60} = 50\pi$

$\omega_0 = 50$ radian.s^{-1}

$\lambda = T$ $\quad \lambda = \frac{T_m}{\omega_0} = \frac{3}{50\pi} = 0{,}0191$ N.m.s.rad^{-1}

$\lambda = 1{,}91 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N.m.s.}}{\text{rad}}$

$\tau = \frac{J}{\lambda} = 0{,}628$ s

$\tau = 0{,}628$ s

En régime permanent $\quad P_m = T_m \cdot \omega_0 = 3{,}50\pi$

$P_{ml} = 471$ w

2.2.3. • Le même raisonnement qu'en 2.2.2. conduit à :

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = -T_r \qquad \text{soit} \quad J\frac{d\omega}{dt} + T_r = 0.$$

La solution de cette équation différentielle est, en tenant compte de la condition initiale : $\omega = \omega_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{J}{\lambda}$ et $\omega_0 = \frac{T_m}{\lambda}$.

$\omega = \omega_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

• Avant de s'arrêter, le moteur effectuera une rotation d'angle θ_1 donné par :

$$\theta_1 = \int_0^\infty \omega_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt = \omega_0 \cdot \tau.$$

Le nombre total de tours effectués avant l'arrêt complet sera :

$$N_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{\omega_0 \cdot \tau}{2\pi}$$

$N_1 = \frac{\omega_0 \cdot \tau}{2\pi}$

• *Application Numérique* : $N_1 = \frac{50\pi \cdot 0{,}68}{2\pi} = 15{,}7$ tr

$N_1 = 15{,}7$ tr

2.2.4. • Le même raisonnement qu'en 2.2.2. conduit à :

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} + \lambda \cdot \omega = T_F \qquad \text{avec} \quad T_F < 0$$

La résolution de cette équation différentielle donne la solution :

$$\omega(t) = \frac{T_F}{\lambda} + \left(\omega_0 - \frac{T_F}{\lambda}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{T_m}{\lambda}$$

L'arrêt correspond à $\omega(t_2) = 0 = \frac{T_F}{\lambda} + \left(\omega_0 - \frac{T_F}{\lambda}\right) . e^{-\frac{t_2}{\tau}}$

soit $\frac{-T_F}{\lambda\left(\omega_0 - \frac{T_F}{\lambda}\right)} = e^{-\frac{t_2}{\tau}}$ avec $\omega_0 . \lambda = T_m$

$$-\frac{T_F}{T_m - T_F} = e^{-\frac{t_2}{\tau}} \qquad \frac{t_2}{\tau} = \ln\frac{T_m - T_F}{-T_F}$$

$t_2 = \tau \ln\frac{T_m - T_F}{-T_F}$
$t_2 = 0{,}870$ s

Application Numérique : $t_2 = 0{,}628 \ln\frac{3+1}{1} = 0{,}870$ s

- Le nombre N_2 de tours effectués avant l'arrêt complet vaut :

$$N_2 = \frac{\theta_2}{2\pi} \qquad \text{avec} \quad \theta_2 = \int_0^{t_2} \omega(t) . dt$$

soit $\theta_2 = \int_0^{t_2} \left[\frac{T_F}{\lambda} + \left(\frac{T_m - T_F}{\lambda}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}\right] dt$

$$= \frac{T_F}{\lambda} t_2 - \tau\left(\frac{T_m - T_F}{\lambda}\right)\left[e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{t_2} = \frac{T_F}{\lambda} t_2 - \tau\left(\frac{T_m - T_F}{\lambda}\right)\left[e^{-\frac{t_2}{\tau}} - 1\right]$$

$$= \frac{T_F}{\lambda} t_2 - \tau\left(\frac{T_m - T_F}{\lambda}\right)\left[\frac{-T_F}{T_m - T_F} - 1\right] = \frac{T_F}{\lambda} . t_2 + \tau . \frac{T_m}{\lambda}$$

Soit $N_2 = \frac{\theta_2}{2\pi} = \frac{T_F . t_2 + \tau . T_m}{2\pi . \lambda}$

$N_2 = \frac{T_F . t_2 + \tau . T_m}{2\pi . \lambda}$

Application Numérique : $N_2 = \frac{-0{,}87 + 0{,}628 \times 3}{6{,}28 \times 1{,}91 . 10^{-2}} = 8{,}45$ tr

$N_2 = 8{,}45$ tr

3. Optoélectronique

3.1. Préliminaire : questions de cours

3.1.1.

Radiations visibles	$400 \text{ nm} \le \lambda \le 800 \text{ nm}$
Radiations infrarouges	$800 \text{ nm} \le \lambda \le 1 \text{ mm}$
Radiations ultraviolettes	$10 \text{ nm} \le \lambda \le 400 \text{ nm}$

Un milieu linéaire est un milieu dans lequel les effets d'une perturbation sont proportionnels aux causes perturbantes ; ainsi dans un diélectrique linéaire, la polarisation qui apparaît sous l'action d'un champ électrique pas trop intense, est proportionnelle à ce champ : $\vec{P} = \chi . \vec{E}$.

Un milieu est homogène lorsque ses propriétés sont les mêmes en tout point.

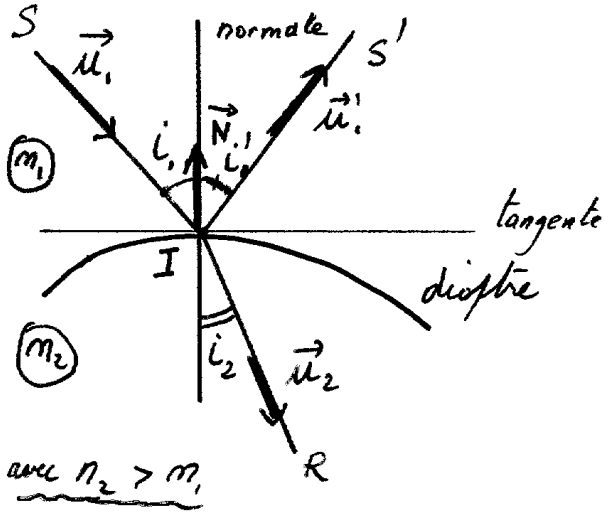
Un milieu est isotrope quand les propriétés sont indépendantes de la direction.

- L'indice de réfraction n d'un milieu est égal au rapport :

$n = \frac{C_O}{C}$ C_O vitesse de la lumière dans le vide

C vitesse de la lumière dans l'air.

- Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope la lumière se propage en ligne droite.



- La droite $\vec{N}$ est la normale au dioptre en I (perpendiculaire en I au plan tangent au dioptre en I).

- Le plan d'incidence est le plan $(\vec{u_1}, \vec{N})$ défini par le rayon incident SI et la normale.

- L'angle d'incidence est l'angle $i_1 = (\vec{N_1} - \vec{u_1})$ entre la normale et le rayon incident.

3.1.2. - Lois de DESCARTES (SNELL)

Réflexion :	1ère loi : le rayon réfléchi IS' est dans le plan d'incidence. 2ème loi : l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence $i'_1 = i_1$
Réfraction :	1ère loi : le rayon réfracté IR est dans le plan d'incidence 2ème loi : $n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$

- Réflexion totale

Elle a lieu lorsque le dioptre est tel que $n_1 > n_2$ et si $i_1 \geq i_0 = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$; alors il n'y a pas de rayon réfracté mais seulement un rayon réfléchi tel que $i'_1 = i_1$.

L'angle i_0 est appelé l'angle limite du dioptre.

3.1.3. - Le facteur de réflexion R représente la proportion d'énergie incidente qui a été réfléchie.

Le facteur de transmission T représente la proportion d'énergie incidente qui a été transmise.

Comme il y a conservation de l'énergie, nous pouvons écrire, en négligeant l'absorption : $R + T = 1$.

Soit $$T = 1 - R + 1 - \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}\right)^2 = \frac{(n_2 + n_1)^2 - (n_2 - n_1)^2}{(n_1 + n_2)^2}$$

soit $$T = \frac{2\, n_2 \,.\, n_1}{(n_1 + n_2)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{4\, n_1 \,.\, n_2}{(n_1 + n_2)^2}}$$

Application numérique : $n_1 = 1 \quad n_2 = 1{,}5$.

Pour un dioptre : $$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}\right)^2 = \left(\frac{0{,}5}{2{,}5}\right)^2 = 0{,}04$$

$\boxed{R = 0{,}04}$

$\boxed{T = 0{,}96}$

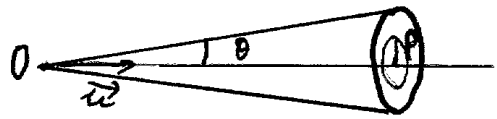
Les coefficients sont les mêmes pour les deux dioptres d'une même lentille ; le facteur de transmission d'une lentille $T_L = T \times T = T^2$.

Pour N lentilles le facteur de transmission total, sera $T' = (T^2)^N$ soit, pour 10 lentilles : $T' = T^{20} = 0{,}96^{20} = 0{,}44$.

$$\Rightarrow \boxed{T' = 0{,}44}$$

Sans traitement antireflet des lentilles, plus de la moitié de l'énergie arrivant sur l'objectif est perdue, ce qui est beaucoup !

3.1.4. Soit une sphère de centre O et de rayon R. Un cône de sommet O et de demi-angle θ découpe sur la sphère une surface S :



L'angle solide Ω est défini par la relation :

$$\Omega = \frac{S}{R^2} = \iint_{(S)} \frac{\vec{u} \,.\, \vec{dS}}{r^2}$$ l'unité est le stéradian (sr)

• La surface d'une couronne élémentaire de rayon ρ, de largeur $d\rho$ vaut $dS = 2\,\pi\,\rho \,.\, d\rho$ avec $\rho = R \,.\, \sin\alpha$ et $d\rho = R \,.\, d\alpha$

soit $$dS = 2\,\pi\,R^2 \sin\alpha \,.\, d\alpha$$

il vient $$\Omega = \iint_S \frac{2\,\pi \,.\, R^2 \,.\, \sin\alpha \,.\, d\alpha}{r^2} = \frac{2\,\pi\,R^2}{R^2} \int_O^\theta \sin\alpha \,.\, d\alpha$$

$$\Omega = 2\,\pi \left[-\cos\alpha\right]_O^\theta = 2\,\pi\,(1 - \cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega = 2\,\pi\,(1 - \cos\theta)}$$

• Si l'on voit tout l'espace, le cône de sommet O a pour demi-angle au sommet $\theta = \pi$ alors :

$$\Omega = 2\,\pi\,[1 - \cos\pi] = 4\,\pi \qquad \boxed{\Omega = 4\,\pi \text{ sr}}$$

3.2. **Étude d'une diode électroluminescente (L.E.D.)**

3.2.1. Le rayonnement des L.E.D. présente un spectre très étroit ($\Delta\lambda \approx 50$ nm). La longueur d'onde centrale dépend du matériau utilisé et peut prendre une valeur comprise entre 500 nm et $1{,}1 \cdot 10^3$ nm

$$\lambda = \frac{h \cdot C_o}{\Delta E_g}$$

avec h constante de Planck. C_o vitesse de la lumière dans le vide.

ΔE_g largeur de bande interdite du matériau.

ex : pour $G_a P$ $\lambda = 555$ nm (vert) Si $\lambda = 1{,}14$ nm (infrarouge).

3.2.2. D'après le 3.1.2., seuls les photons arrivant sous une incidence inférieure à l'angle limite $\theta_0 = \text{Arc sin}\,\frac{n_2}{n_1}$, traversent en donnant un rayon réfracté.

Application Numérique :

$$\theta_0 = \text{Arc sin}\,\frac{1}{3{,}50} = 0{,}290 \text{ rad} = 16{,}6° \qquad \boxed{\theta_0 = 0{,}29 \text{ rad.}}$$

3.2.3. • La probabilité pour qu'un photon soit émis dans un cône de demi-angle au sommet θ_0 est égal au rapport des angles solides, soit :

$$\frac{\Omega(\theta_0)}{\Omega_{total}} = \frac{2\,\pi\,(1 - \cos\theta_0}{4\,\pi} = \frac{1 - \cos\theta_0}{2}$$

Le rendement optique de sortie s'écrit alors :

$$\eta = T \cdot \frac{1 - \cos\theta_0}{2} = \frac{4\,n_1 \cdot n_2}{(n_1 + n_2)^2} \cdot \frac{1 - \cos\theta_0}{2} =$$

$$\eta = \frac{2\,n_1 \cdot n_2}{(n_1 + n_2)^2} \cdot (1 - \cos\theta_0)$$

Application Numérique :

$$\eta = \frac{2 \times 3{,}5}{(4{,}5)^2} \cdot (1 - 0{,}958) = 0{,}145 \qquad \boxed{\eta = 1{,}45 \cdot 10^{-2}}$$

Le rendement optique ainsi obtenu est très faible.

3.2.4. • $n_3 = 1{,}50$ et $n_1 = 3{,}50$, alors l'angle limite se trouve modifié et devient : $\theta'_0 = \arcsin\,\frac{n_3}{n_1}$

$$\theta'_0 = \arcsin\,\frac{1{,}50}{3{,}50} = 25{,}38° = 0{,}44 \text{ rad}$$

Le rendement optique devient $\eta' = \dfrac{2\, n_1\, n_3}{(n_1 + n_3)^2} \cdot (1 - \cos \theta'_0)$

$$\eta' = \frac{2 \times 1{,}5 \times 3{,}5}{25}(1 - 0{,}903) \qquad \Rightarrow \quad \boxed{\eta' = 4{,}07 \cdot 10^{-2}}$$

Par ce traitement le rendement optique est presque triplé.

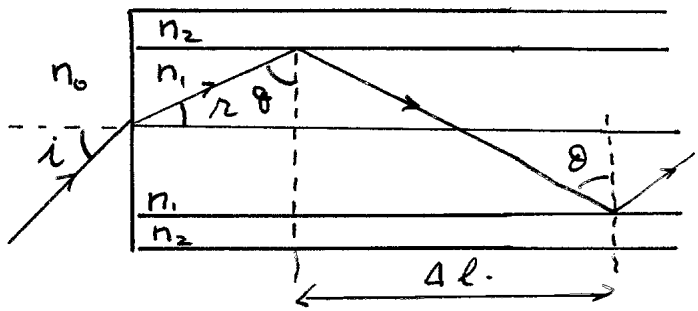
- Si le dioptre plastique-air est hémisphérique, le rendement optique devient :

$\eta'' = \dfrac{4\, n_2\, n_3}{(n_2 + n_3)^2} \cdot \eta'$

$$\eta'' = \frac{4 \times 1{,}5 \times 1}{6{,}25} \cdot 4{,}07 \cdot 10^{-2} = 0{,}039 \qquad \boxed{\eta'' = 3{,}9\ \% \approx \eta'}$$

Le dioptre sphérique ne diminue pratiquement pas le rendement optique de la L.E.D. et permet d'agir sur la directivité du faisceau émis, en jouant sur la distance émetteur-dôme.

3.3. **Étude de la transmission par fibre optique multimode**



3.3.1. - De la même façon qu'en 3.1.2., il faut que θ soit inférieur à θ_0 :

$$\boxed{\theta < \theta_0 = \arcsin \frac{n_2}{n_1}}$$

- Pour qu'un rayon pénètre dans la fibre, il faut $i < i_0 = \arcsin \dfrac{n_1}{n_0}$

$$n_0 \cdot \sin i_0 = n_1 \cdot \sin r_0 = n_1 \cos \theta_0 = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0}$$

$$\sin i_0 = n_1 \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sin i_0 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

Application Numérique : $\sin i_0 = \sqrt{1{,}51^2 - 1{,}5^2} = 0{,}173$

$$i_0 = 9{,}99° \qquad \Rightarrow \quad \boxed{i_0 \approx 10^0 \approx 0{,}17 \text{ rad.}}$$

• Après la 1ère incidence sous un angle θ, le rayon réfléchi repart en faisant un angle θ avec le 1er dioptre et arrive sur le 2ème dioptre en restant dans un plan de symétrie de la fibre. Il fait alors le même angle avec la normale au 2ème dioptre. **La propagation se fait bien selon une ligne brisée dont chaque portion a une longueur $l = \frac{\Delta L}{\sin\theta}$.** Sur l'ensemble de la fibre la longueur totale parcourue par le rayon lumineux vaut donc : $l_T = \frac{L}{\sin\theta}$.

• Le temps mis pour parcourir la fibre sera :

$$t = \frac{l_T}{v} \qquad \text{avec} \quad v = \frac{C_o}{n_1} \qquad \text{soit} \quad t = \frac{L}{\sin\theta \,.\, \frac{C_o}{n_1}} = \frac{n_1 \,.\, L}{\sin\theta \,.\, C_o}$$

Le temps minimal correspond à une traversée de la fibre parallèlement à l'axe

$$\Rightarrow \quad t = \frac{n_1 \,.\, L}{C_o \,.\, \sin\theta}$$

soit avec $\theta = 0 \;\Rightarrow\; t_{min} = \frac{n_1 \,.\, L}{C_o}$

$$t_{min} = \frac{n_1 \,.\, L}{C_o}$$

Le temps maximum t_{max} correspond à un parcours dans la fibre avec une incidence maximale θ_0 sur le dioptre

$$t_{max} = \frac{n_1 \,.\, L}{C_o \,.\, \sin\theta_0} = \frac{n_1 \,.\, L}{C_o \frac{n_2}{n_1}} \qquad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{n_1^2 \,.\, L}{C_o \,.\, n_2}$$

3.3.2. • Pour que deux impulsions séparées de Δt à l'entrée se trouvent encore séparées à la sortie il faut que :

$$\Delta t = t_{max} - t_{min} = \frac{n_1 \,.\, L}{C_o} \,.\, \frac{n_0 - n_2}{n_2}$$

Le nombre maximum d'impulsions par seconde est $N = \frac{1}{\Delta t} = \frac{C_o \,.\, n_2}{n_1 \,.\, L \,.\, (n_1 - n_2)}$

soit $N \approx \frac{C_o}{L \,.\, (n_1 - n_2)}$ puisque $n_1 \approx n_2$

$$N \approx \frac{C_o}{L \,.\, (n_1 - n_2)}$$

Application Numérique :

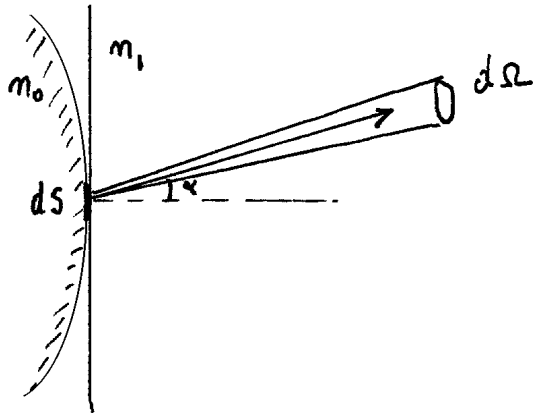
$\theta_0 = \arcsin\frac{n_2}{n_1} = \arcsin\frac{1{,}5}{1{,}51} = 83{,}4°$ $\qquad \theta_0 = 83{,}4°$

$i_0 = \arcsin\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 9{,}99°$ $\qquad i_0 \approx 10°$

$$N_{max} = \frac{C_o}{L.\,(n_1 - n_2)} = \frac{3\,.\,10^8}{10^3\,.\,0{,}01} = 30\,.\,10^6 \text{ bit/s} \qquad \boxed{N_{max} = 30 \text{ Mbits}\,.\,s^{-1}}$$

$$L_{max} \approx \frac{C_o}{N'\,.\,(n_1 - n_2)} = \frac{3\,.\,10^8}{2\,.\,10^8 \times 0{,}01} = 1{,}5\,.\,10^2 \text{ m} \qquad \boxed{L_{max} \approx 150 \text{ m}}$$

3.4. **Étude du couplage LED fibre optique**



• D'après 3.1.4. nous savons que $\Omega = 2\,\pi\,(1 - \cos\theta)$. Différentions, il vient :

$d\Omega = 2\,\pi \sin\alpha\,.\,d\alpha$

$$\boxed{d\Omega = 2\,\pi \sin\alpha\,.\,d\alpha}$$

• Portons cette expression dans celle donnant $d^2\,\Phi$

$$d^2\,\Phi = 2\,\pi\,.\,L_e\,.\,dS\,.\,\sin\alpha\,.\,\cos\alpha\,.\,d\alpha$$

Nous reconnaissons $d\,(\sin^2\alpha) = 2 \sin\alpha\,.\,\cos\alpha\,.\,d\alpha$.

Donc le flux lumineux total émis par la diode s'écrit :

$$\Phi = L_e\,.\,dS \int_0^{\Psi} 2\,\pi\,.\,\sin\alpha\,.\,\cos\alpha.\,d\alpha = \pi\,L_e\,.\,dS \int_0^{\Psi} d\,(\sin^2\alpha)$$

$$\Phi = \pi\,.\,L_e\,.\,dS\,[\sin^2\alpha]_0^{\Psi} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Phi = \pi\,.\,L_e\,.\,dS\,.\,\sin^2\Psi}$$

• Par définition du facteur de transmission T :

$$\Phi' = T\,.\,\Phi \qquad \text{avec ici } T = \frac{4\,n_0\,.\,n_1}{(n_0 + n_1)^2}$$

soit $$\Phi' = \frac{4\,n_0\,.\,n_1}{(n_0 + n_1)^2}\,.\,\pi\,.\,L_e\,.\,dS\,.\,\sin^2\Psi$$

$$\boxed{\Phi' = \frac{4\,n_0\,.\,n_1}{(n_0 + n_1)^2}\,.\,\pi\,.\,L_e\,.\,dS\,.\,\sin^2\Psi}$$

• Le facteur de couplage η_c s'exprime alors par :

$$\eta_c = \frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{4\, n_0 \cdot n_1}{(n_0 + n_1)^2} \cdot \frac{\sin^2 i_0}{\sin^2 \Psi}$$

$$\eta_c = \frac{4\, n_0 \cdot n_1}{(n_0 + n_1)^2} \cdot \frac{\sin^2 i_0}{\sin^2 \Psi}$$

Application Numérique :

$$\eta_c = \frac{4 \times 1{,}51}{2{,}51^2} \cdot \frac{0{,}0301}{0{,}1786} = 0{,}9587 \cdot 0{,}168 = 0{,}162$$

$$n_c = 0{,}162$$

On perd encore beaucoup d'énergie au niveau du couplage L.E.D. - fibre optique (division par 6 du flux émis par la L.E.D.).

C.A.P.E.S.

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition d'électronique - électrotechnique avec applications - Session 1992

par René MOREAU ; Bordeaux

---

1. Première partie : étude des chutes de tension en ligne.

1.1. Cas d'une distribution sinusoïdale monophasée de fréquence f = 50 Hz

1.1.1. La figure 1 représente le diagramme demandé.

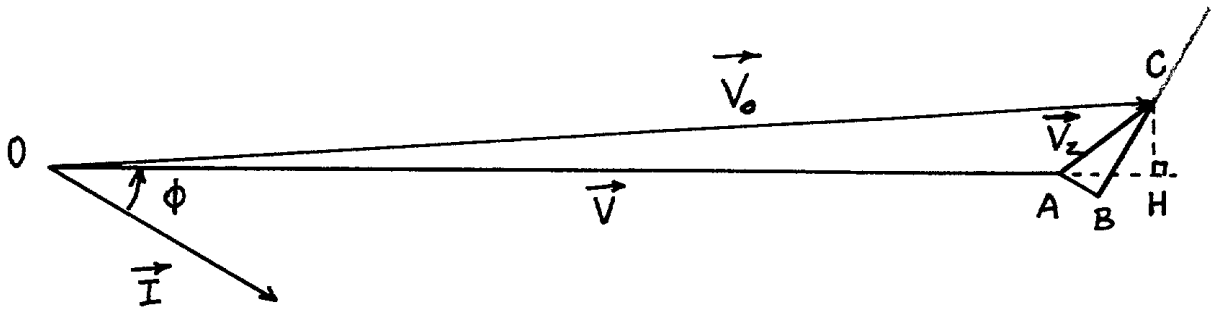


Figure 1

La chute de tension $\delta V = V_o - V$ est proche de AH, car H, obtenu en projetant le point C sur la droite OA, est voisin de l'intersection du cercle de rayon OC avec la droite OA. Dans ces conditions :

$$\delta V \approx AH = AB \cos\phi + BC \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = I\,(R \cos\phi + X \sin\phi)$$

Les conventions utilisées pour représenter i et v sont, pour la charge, celles d'un récepteur.

$P_1 = V\,I \cos\phi$; $Q_1 = V\,I \sin\phi$. Ces puissances sont positives, elles sont donc effectivement consommées par la charge.

1.1.2. *Application Numérique* :

$$\tan\phi = \frac{Q_1}{P_1} \Rightarrow \cos\phi = 0{,}852 \text{ ; } \sin\phi = 0{,}523$$

$$I = \frac{P}{V \cos\varphi} = 1{,}45 \text{ kA} \Rightarrow \mathbf{\delta V = 0{,}35\ kV}$$

$$V_o = V + \delta V \Rightarrow \mathbf{V_o = 6{,}41\ kV}$$

1.2. Cas d'une distribution sinusoïdale triphasée de fréquence 50 Hz

1.2.1. $P = UI\sqrt{3}\cos\phi$; $Q = UI\sqrt{3}\sin\phi$

1.2.2. $$\frac{\delta U}{U_o} = \frac{\sqrt{3}\ R\left(UI\cos\phi + \frac{X}{R}UI\sin\phi\right)}{U\,U_o} = \frac{R\,(P + Q\tan\alpha)}{U\,U_o}\ ;$$

$$I_{cc} = \frac{V_o}{Z} = \frac{V_o}{R}\cdot\frac{R}{Z} = \frac{U_o\cos\alpha}{\sqrt{3}\ R} \Rightarrow \frac{U_o}{R} = \frac{\sqrt{3}\ I_{cc}}{\cos\alpha}\ ;$$

Donc : $$\frac{\delta U}{U_o} = \frac{(P + Q\tan\alpha)\cos\alpha}{\sqrt{3}\ U\ I_{cc}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}\ U\ I_{cc}}\left(\frac{P}{\tan\alpha} + Q\right)$$

On obtient l'expression approchée proposée en confondant U et U_o ; dans le cadre de l'application numérique précédente, cette approximation est de l'ordre de 5 %.

1.2.3. $\frac{P}{\tan\alpha} << Q$, c'est donc la puissance réactive Q absorbée par la charge qui est principalement responsable de la chute de tension en ligne.

1.2.4. *Application Numérique* :

1.2.4.1. $P_a = 22{,}5$ MW ; $Q_a = 13{,}8$ Mvar $\Rightarrow \left(\frac{\delta U}{U_o}\right)_a = 5{,}9$ % ; $U_a = 9{,}88$ kV

1.2.4.2. $P_b = 1{,}3$ MW ; $Q_b = 26{,}5$ Mvar $\Rightarrow \left(\frac{\delta U}{U_o}\right)_b = 9{,}8$ % ; $U_b = 9{,}47$ kV.

1.2.4.3. $\frac{U_a - U_b}{U_o} = 4{,}0$ % ; c'est bien l'augmentation de la puissance réactive qui provoque la baisse de tension.

2. Deuxième partie : compensation de l'énergie réactive.

2.1. Utilisation d'une batterie de condensateur

2.1.1. $Q_c = -3\,\Gamma\omega\,U_o^2 \Rightarrow \mathbf{\Gamma = 240\ \mu F}$.

La puissance réactive à prendre en compte pour calculer les nouvelles valeurs du rapport $\frac{\delta U}{U_o}$ est la somme algébrique $Q + Q_c$.

Pour la charge (a), on trouve ainsi $\left(\frac{\delta U}{U_o}\right)_{a'} = -3{,}3\ \% \Rightarrow U'_a = 10{,}84$ kV ; pour la charge (b) : $\left(\frac{\delta U}{U_o}\right)_{b'} = 0{,}6\ \% \Rightarrow U'_b = 10{,}44$ kV.

2.1.2. L'écart relatif $\frac{U'_a - U'_b}{U_o}$ reste évidemment égal à 4,0 % : la présence d'une batterie fixe de condensateurs permet de remonter la tension en ligne, mais ne modifie pas ses variations dues aux variations de la puissance réactive Q consommée par la charge.

2.1.3. En modifiant la valeur de Γ, et en ramenant à 17 Mvar la puissance réactive fournie par la batterie, on trouve $U''_a = 10{,}54$ kV. Dans ces conditions, on arrive bien à réguler la tension en ligne.

2.2. Utilisation d'un compensateur synchrone

2.2.1. Lorsqu'une machine synchrone est branchée sur le réseau, la puissance active qu'elle fournit au réseau ou qu'elle reçoit de lui, dépend de la machine tournante à laquelle elle est associée : le moteur thermique, par exemple, dans le cas d'un alternateur, ou la charge entraînée dans le cas d'un moteur.

En revanche la puissance réactive (algébrique) Q_{ms} qu'elle reçoit du réseau, peut, à volonté ; être rendue positive ou négative en agissant sur l'intensité I_e de son courant d'excitation : $Q_{ms} < 0$ implique que I_e soit grande.

En général, un compensateur synchrone est une machine synchrone fonctionnant en moteur à vide, qui fournit de la puissance réactive au réseau ($Q_{ms} < 0$), mais on peut aussi rencontrer le cas où le compensateur absorbe de la puissance réactive ($Q_{ms} > 0$), ce qui est obtenu en diminuant I_e .

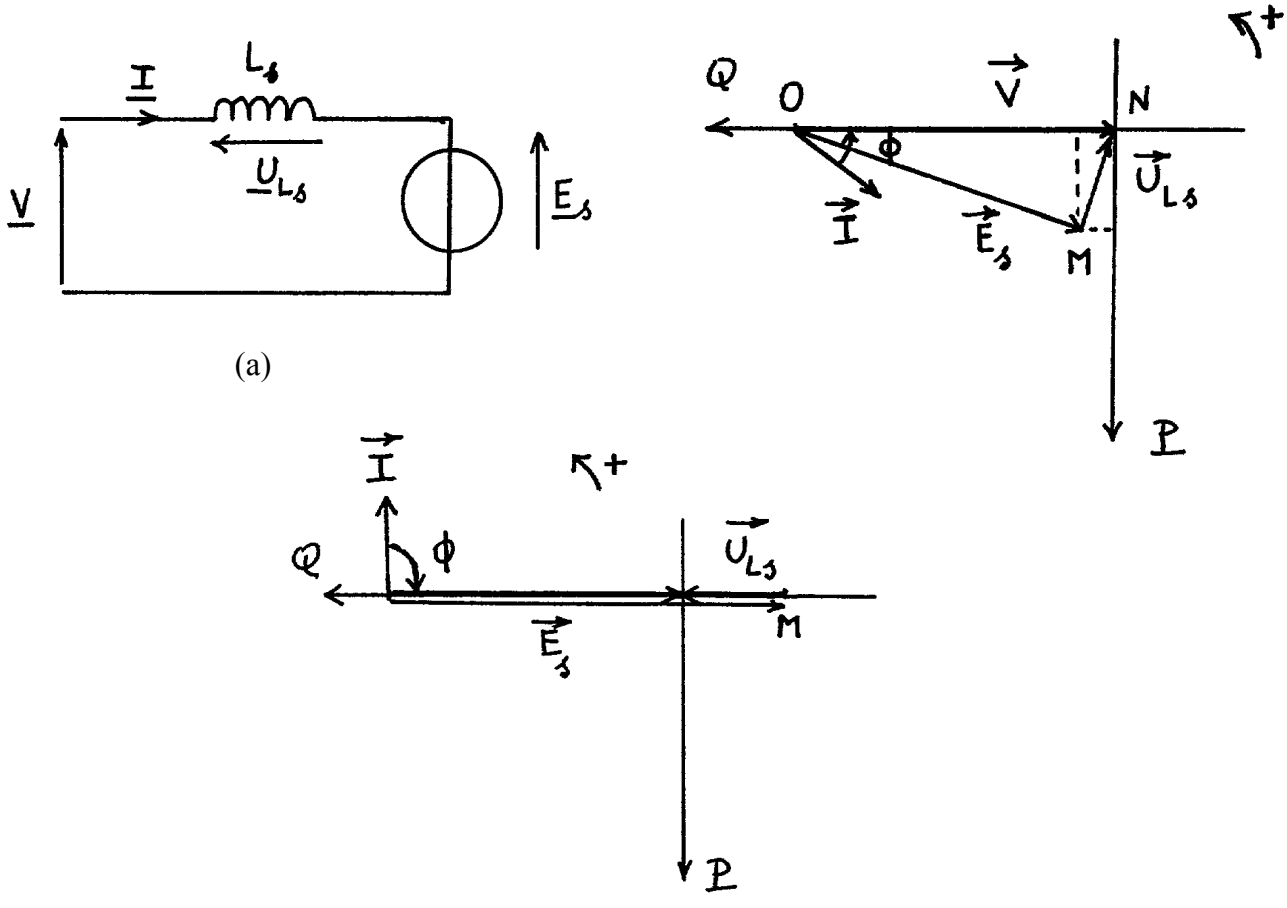


Figure 2

2.2.2. La figure 2a représente le modèle équivalent par phase utilisé pour représenter la machine synchrone.

La figure 2b correspond à un fonctionnement en moteur synchrone sous-excité ($P_{ms} > 0$; $Q_{ms} > 0$) ; enfin la figure 2b correspond au cas habituel d'un fonctionnement en compensateur synchrone : $P_{ms} \approx 0$; $Q_m < 0$: on voit que la f.é.m. E_s due à l'inducteur doit être plus grande que la tension simple V par phase, ce qui nécessite un courant inducteur important.

2.2.3. Le réglage de Q_{ms} est très facile, puisqu'on agit sur une grandeur électrique I_e ; ce réglage peut aisément être rendu automatique.

2.2.4. Le courant inducteur circule dans un circuit inductif dont la constante de temps est élevée. L'intensité I_e ne peut varier qu'assez lentement, de ce fait.

2.3. Association de condensateurs et d'un absorbeur

2.3.1. Cas d'un système triphasé équilibré.

2.3.1.1. D'après l'expression de la question 1.2.2., il faut réaliser la condition $Q + Q_c + Q_a = -\dfrac{P}{\tan \alpha}$, avec $Q = 13{,}8$ Mvar, $Q_c = -25$ Mvar, $P = 22{,}5$ MW et $\tan \alpha = 10$.

On trouve $\mathbf{Q_a = 9{,}0\ Mvar}$ (il s'agit bien d'une puissance réactive absorbée).

2.3.1.2. $Q_a = \dfrac{3\,U^2}{\lambda\,\omega}$, avec $U = U_o = 10{,}5$ kV $\Rightarrow \mathbf{\lambda = 0{,}12\ H}$.

2.3.2. Cas d'une décharge déséquilibrée.

2.3.2.1. – $u_{AC} = v_1 - v_3 \Rightarrow \overrightarrow{U_{AC}} = \overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_3}$;

– $i_{R_1} = \dfrac{u_{AC}}{R_1} \Rightarrow \overrightarrow{I_{R_1}}$ et $\overrightarrow{U_{AC}}$ sont colinéaires ;

– i_{L_1} est en retard de $\dfrac{\pi}{2}$ par rapport à u_{AC} , dont $\overrightarrow{I_{L_1}}$ est en quatrature arrière par rapport à $\overrightarrow{U_{AC}}$;

– $i_A = i_{R_1} + i_{L_1} \Rightarrow \overrightarrow{I_A} = \overrightarrow{I_{R_1}} + \overrightarrow{I_{L_1}}$;

– $i_C = -i_A \Rightarrow \overrightarrow{I_C} = -\overrightarrow{I_A}$ (figure 3).

2.3.2.2. $Q_{C_1} = -C_1\,\omega\,U^2$; $Q_{L_1} = \dfrac{U^2}{L_1\,\omega}$;

$Q_{C_1} + Q_{L_1} = 0$ si $C_1 = \dfrac{1}{L_1\,\omega^2} \Rightarrow \mathbf{C = 159\ \mu F}$.

2.3.2.3. Le réseau étant équilibré en tension, il faut que la relation $L\,C_2\,\omega^2 = 1$ soit vérifiée.

2.3.2.4. $\omega = 314$ rad/s $\Rightarrow$ **L = 0,11 H** ; **C_2 = 92 µF**.

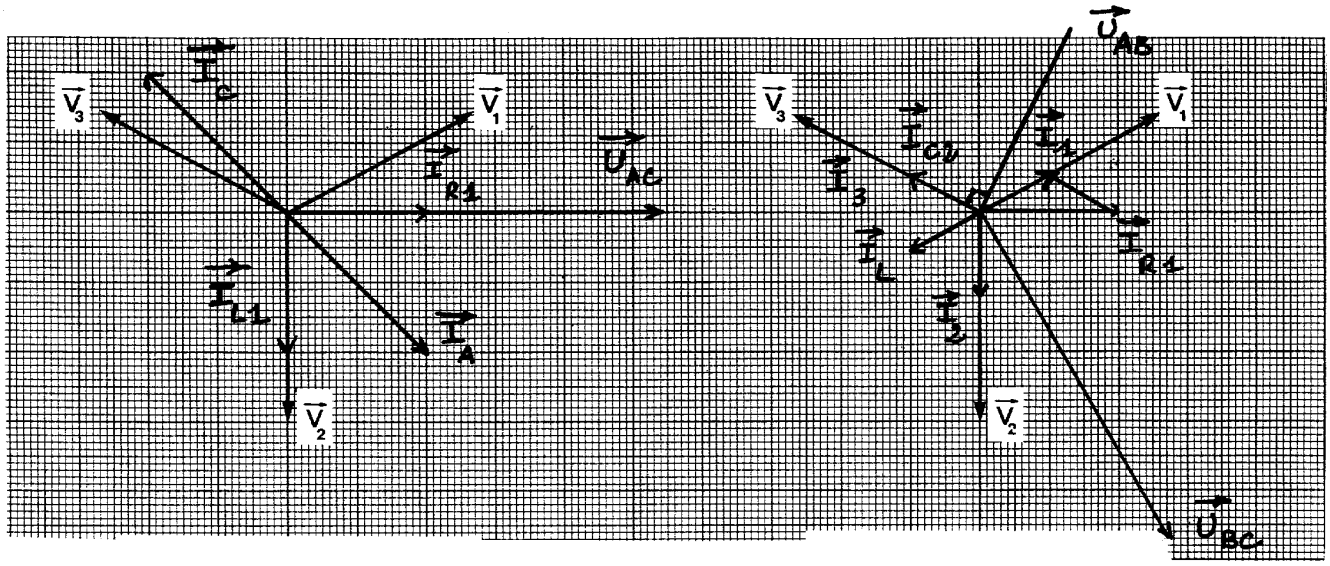


Figure 3

Figure 4

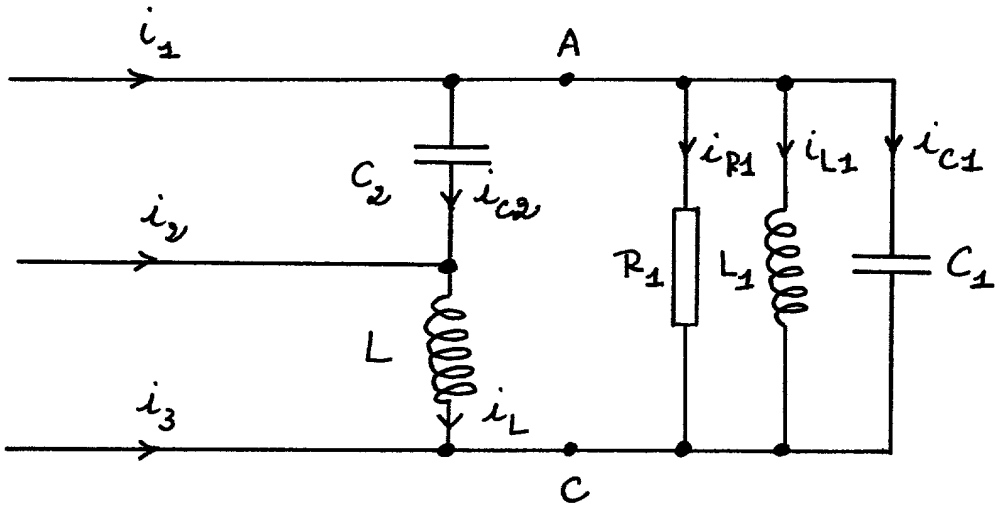


Figure 5

La tension $u_{AB} = v_1 - v_2$ est en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à v_3 (figure 4). Or i_{C_2} est en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à u_{AB} (figure 5), par conséquent i_{C_2} est en phase ave v_3.

A chaque instant, la somme $i_{L_1} \rightarrow i_{C_1}$ est nulle, par conséquent

$i_1 = i_{R_1} = i_{C_2} \Rightarrow \vec{I_1} = \vec{I_{R_1}} + \vec{I_{C_2}}$.

$I_{C_2} = \frac{I_{R_1}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ la construction graphique montre que i_1 est en phase avec v_1 , et que $I_1 = I_{C_2} = 303$ A.

$u_{BC} = v_2 - v_3 \Rightarrow \vec{U_{BC}} = \vec{V_2} - \vec{V_3}$ (Figure 4) ; i_L , en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à u_{BC} , est en opposition de phase avec v_1 (Figure 4).

$i_2 = i_L - i_{C_2} \Rightarrow \overrightarrow{I_2} = \overrightarrow{I_L} + \left(-\overrightarrow{I_{C_2}}\right)$: la construction graphique montre que $\overrightarrow{I_2}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{V_2}$, et que $I_2 = I_1$.

$i_3 = -\left(i_L + i_{R_1}\right) \Rightarrow \overrightarrow{I_3} = \left(-\overrightarrow{I_L}\right) + \left(-\overrightarrow{I_{R_1}}\right)$; la construction graphique montre que $\overrightarrow{I_3}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{V_3}$, et que $I_3 = I_2 = I_1$.

Le système $\left(\overrightarrow{I_1},\ \overrightarrow{I_2},\ \overrightarrow{I_3}\right)$ est donc un système triphasé, équilibré, direct.

3. Troisième partie : étude d'un gradateur sur charge inductive.

3.1. Étude en monophasé

3.1.1. A l'instant t_1 , $u_{AB} > 0$, or i = 0, donc le potentiel de A est celui de l'anode de Th_1 et le potentiel de B est celui de sa cathode. La tension anode-cathode de Th_1 étant positive, le thyristor est amorçable.

Lorsque Th_1 est amorcé, on peut négliger la tension à ses bornes, donc $u = L_a \dfrac{di}{dt}$.

3.1.2. $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{U\sqrt{2}\sin \omega t}{L_a} \rightarrow i = -\dfrac{U\sqrt{2}}{L_a \omega}\cos \omega t + K.$

En écrivant que $i(t_1) = 0$, on trouve : $i = -\dfrac{U\sqrt{2}}{L_a \omega}(\cos \beta + \cos \omega t).$

3.1.3. L'intensité i (t) suit la loi précédente tant que la valeur correspondante est positive, or, pour t'_1 tel que $\omega t'_1 = \pi + \beta$, on a i = 0.

Donc, pour $t'_1 < t < t_2$, on a i = 0 ; ensuite le phénomène recommence dans l'autre sens.

3.1.4. La figure 6 représente i (t) pour $\beta = \dfrac{\pi}{4}$.

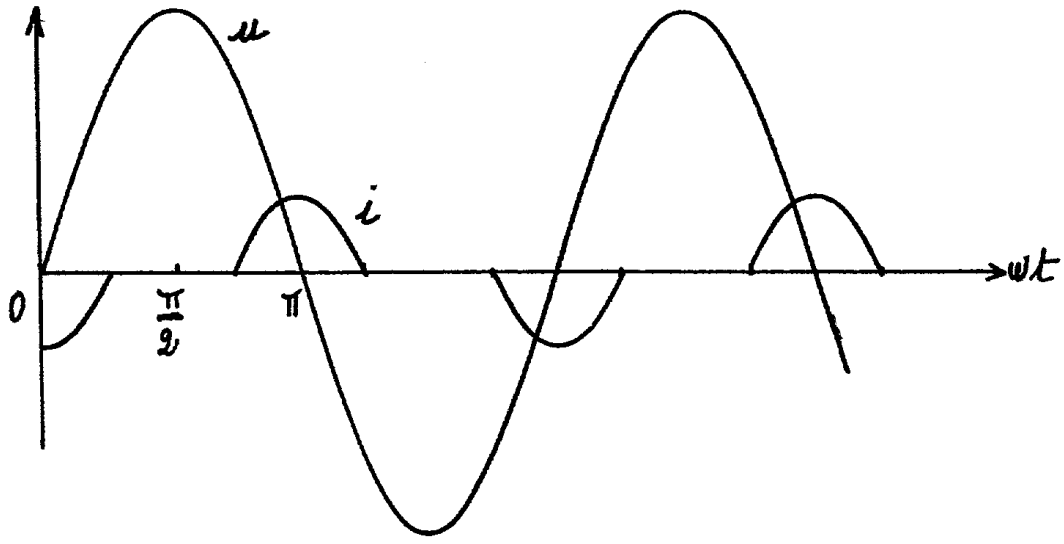


Figure 6

Si β dépasse $\frac{\pi}{2}$, alors $\pi + \beta > 2\pi - \beta$: le premier thyristor conduit encore quand le second est susceptible d'être amorcé. Ce dernier n'est donc pas amorçable à l'instant t_2. Selon le mode d'amorçage des thyristors, (impulsion unique aux instants t_1 ou t_2, ou trains d'impulsions à partir des instants t_1 ou t_2), on peut avoir dans L_a un courant unidirectionnel (de $t_1 + kT$ à $t'_1 + kT$), ou, au contraire, un courant sinusoïdal dont on ne peut faire varier la valeur efficace.

3.1.5. L'intensité i (t) est alternée $\left[i\left(t + \frac{T}{2}\right) = - i\,(t) \right]$. Cette propriété doit se retrouver dans le développement en série de Fourier, or les harmoniques de rang pair ne peuvent vérifier cette propriété :

$$\sin\left[2\,p\,\omega\left(t + \frac{T}{2}\right)\right] = \sin\left[(2\,p\,\omega t) + p\,T\right] = \sin\,(2\,p\,\omega t)\ .$$

Donc le développement ne contient pas de termes pairs.

3.1.6. 3.1.6.1.

$$I_1 = \frac{U}{L_a\,\omega} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cdot i\,(x)\,dx, \text{ en posant } x = \omega t\ ;$$

$$\text{soit } I_1 = \frac{4\,U}{L_a\,\omega} \int_0^{\beta} (\cos\beta - \cos x)\cos x\,dx = \frac{U}{L_a\,\omega}\left(\frac{2\,\beta - \sin 2\,\beta}{\pi}\right).$$

3.1.6.2.

$$\Phi_1 = \frac{\pi}{2}\ .$$

3.1.6.3.

$$\lambda = \frac{\pi\,L_a}{2\,\beta - \sin 2\,\beta}\ .$$

3.1.7. La valeur prise par g (β) étant maximale (et égale à 1) pour $\beta = \frac{\pi}{2}$, pour une valeur de L_a donnée, la puissance réactive consommée par l'absorbeur est maximale pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ et vaut $Q_{a\,max} = \frac{U^2}{L_a\,\omega}$.

Pour $Q_{a\,max} = 12$ Mvar, on trouve $\mathbf{L_a = 29\ mH}$.

3.1.8. Pour $\beta = \frac{\pi}{4}$, $g\,(\beta) = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{\pi} = 0{,}182.$

$$Q_a = \frac{U^2}{\lambda\,\omega} = \frac{U^2}{L_a\,\omega} \times \frac{L_a}{\lambda} = Q_{a\,max}\,g\,(\beta) = 12\ \text{Mvar} \times 0{,}182.$$

Soit $\mathbf{Q_a = 2{,}18\ Mvar}$.

3.2. Étude en triphasé symétrique

3.2.1. Pour $\beta = \frac{\pi}{2}$, $Q_a = Q_{a\,max} = \frac{3\,U^2}{L_a\,\omega} \Rightarrow$ **$Q_{a\,max} = 36$ Mvar**.

3.2.2. $i_A(t) = i(t) - i\left(t - \frac{2\,T}{3}\right)$.

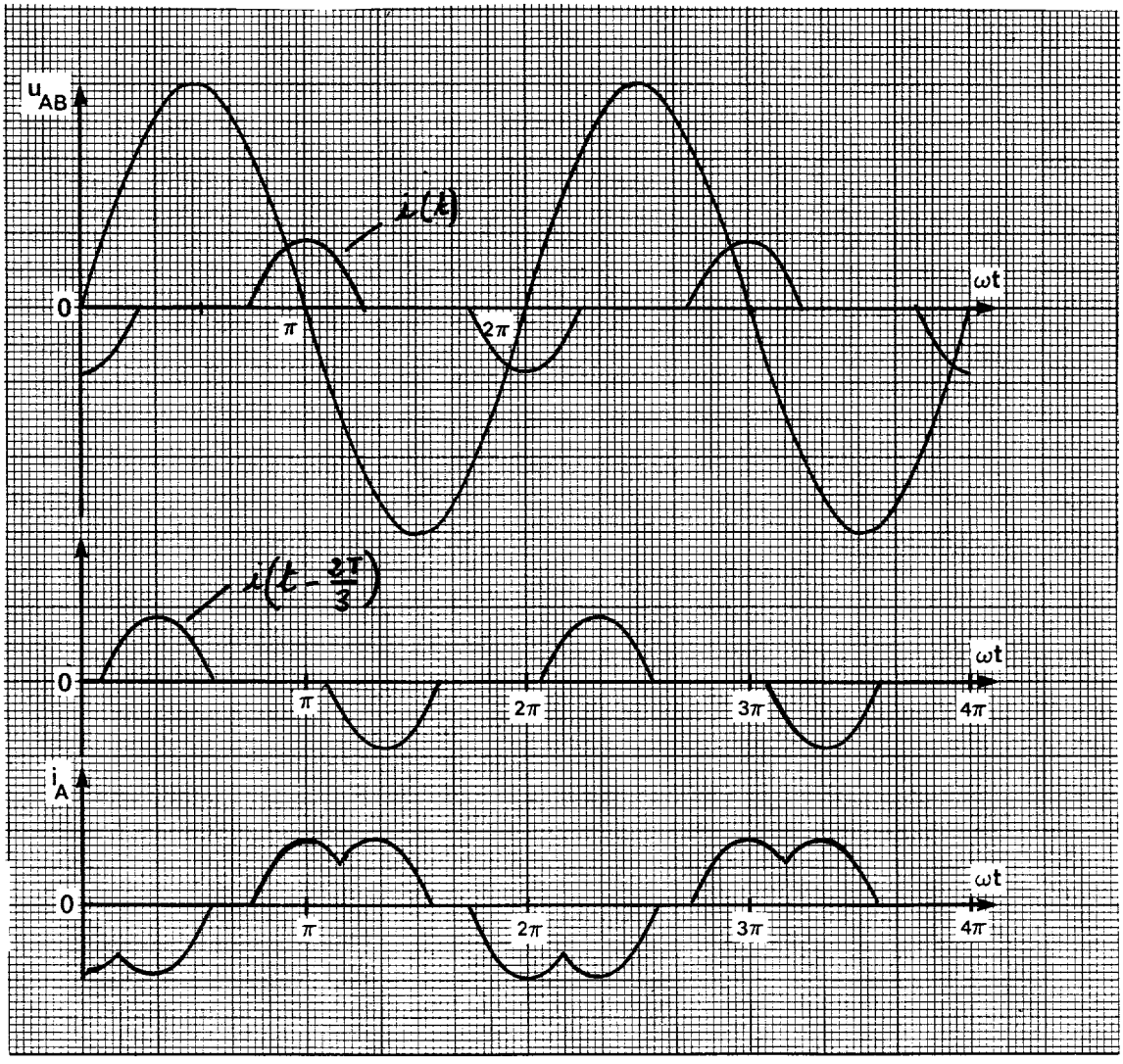


Figure 7

La figure 7 représente successivement i (t), $i\left(t - \frac{2\,T}{3}\right)$ et i_A (t).

3.2.3. Les harmoniques 3 respectifs de i (t) et de $i\left(t - \frac{2\,T}{3}\right)$ sont en phase ; comme $i_A(t) = i(t) - i\left(t - \frac{2\,T}{3}\right)$, l'intensité i_A (t) ne comporte pas d'harmonique 3.

En ligne, l'absorbeur ne provoque donc pas de «ronflement» à 150 Hz, or ceux-ci sont, en général, les plus intenses.

3.3. Étude triphasé dissymétrique

3.3.1. Soit $\underline{Y_e}$ l'admittance complexe du dipôle équivalent à la mise en parallèle du condensateur de capacité Γ et de la bobine parfaite d'inductance λ :

$$\underline{Y_e} = j\left(\Gamma\omega - \frac{1}{\lambda\,\omega}\right) = j\,C\,\omega \qquad \text{si} \quad \Gamma\,\lambda\,\omega^2 > 1 \ ;$$

dans ces conditions : $C = \Gamma - \dfrac{1}{\lambda\,\omega^2} \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{(\Gamma - C)\,\omega^2}$.

Si $\Gamma\,\lambda\,\omega^2 < 1$, alors on peut écrire $\underline{Y_e} = -\dfrac{j}{L\omega}$, soit :

$$L = \frac{\lambda}{1 - \Gamma\,\lambda\,\omega^2} \qquad \text{ou :} \quad \lambda = \frac{L}{1 + \Gamma\,L\omega^2} \ .$$

3.3.2. La capacité Γ a été calculée à la question 2.1.1. : $\Gamma = 240\ \mu F$. Pour la phase AB, il faut donc passer de $\Gamma = 240\ \mu F$ à $C_2 = 90\ \mu F$. On se trouve dans le premier cas :

$$\lambda_1 = \frac{1}{(\Gamma - C_2)\,\omega^2} = 67{,}5\ mH$$

$$g\,(\beta_1) = \frac{L_a}{\lambda_1} = 0{,}43 \ \Rightarrow \ \mathbf{\beta_1 = 62°}$$

Pour la phase BC, il faut passer de $\Gamma = 240\ \mu F$ à $L = 0{,}10\ H$; on se trouve donc dans le deuxième cas :

$$\lambda_2 = \frac{L}{1 + \Gamma\,L\omega^2} = 29{,}7\ mH$$

$$g\,(\beta_2) = \frac{L_a}{\lambda_2} = 0{,}98 \ \Rightarrow \ \mathbf{\beta_2 = 99°}$$

Pour la phase CA, il faut passer de $\Gamma = 240\ \mu F$ à $C_1 = 160\ \mu F$; on se trouve donc encore dans le premier cas :

$$\lambda_3 = \frac{1}{(\Gamma - C_1)\,\omega^2} = 127\ mH$$

$$g\,(\beta_3) = \frac{L_a}{\lambda_3} = 0{,}23 \ \Rightarrow \ \mathbf{\beta_3 = 48°}$$

4. Quatrième partie : filtrage des harmoniques.

4.1. L'impédance du filtre vaut : $\underline{Z_f} = \dfrac{1}{j\,C_f\,\omega} + j\,L_f\,\omega$, soit : $\underline{Z_f} = \dfrac{1}{j\,C_f\,\omega}\,(1 - k)$; cela revient à remplacer C_f par $\dfrac{C_f}{1 - k}$. Par conséquent $Q_1 = \dfrac{C_f}{1 - k}\,\omega\,U^2$.

4.2. $L_f C_f (5\,\omega_0)^2 = 1 \;\Rightarrow\; L_f \omega_0 = \dfrac{1}{25\, C_f \omega_0} \;\Rightarrow\; k = \dfrac{1}{25} = 0{,}04.$

$C_f = (1 - k)\dfrac{Q_1}{V^2\,\omega_0} \;\Rightarrow\; \mathbf{C_f = 694\ \mu F}$

$L_f = \dfrac{1}{25\, C_f\, \omega_0^2} \;\Rightarrow\; \mathbf{L_f = 0{,}58\ mH}$

4.3. Dans le schéma unifilaire, C_f est soumis à une tension x, alors que dans le montage réel de la figure 11, chaque condensateur de capacité Γ_f est soumis à la tension x $\sqrt{3}$. Pour la même puissance réactive, on a donc $\Gamma_f = \dfrac{C_f}{3}$.

4.4. L'harmonique fondamental du courant traversant le fIltre a pour valeur efficace $I_{f\,1} = \dfrac{C_f\,\omega}{1-k} V_0 = 1376$ A. Quant à l'harmonique 5 de l'ensemble charge-absorbeur, il passe entièrement dans le filtre car celui-ci présente une impédance nulle pour cet harmonique.

Comme on a $I_f^2 = I_{f\,1}^2 + I_{ca5}^2$, on trouve $I_f = 1{,}41$ kA.

4.5. $\underline{Z}_G = (j\, L_r\, \omega) \,//\, \left(j\, L_f\, \omega + \dfrac{1}{j\, C_f\, \omega}\right) = \dfrac{j\, L_r\, \omega \left(1 - L_f\, C_f\, \omega^2\right)}{1 - \left(L_r + L_f\right) C_f\, \omega^2}$.

$\underline{Z}_G$ est infinie pour la pulsation ω_r telle que : $(L_r + L_f)\, C_f\, \omega_r^2 = 1$, c'est-à-dire pour $f_r = 140$ Hz.

5. Cinquième partie : mesure de la puissance réactive ; régulation du courant réactif.

5.1. Mesure de la puissance réactive

5.1.1. $v_1 = k_1\, V \sqrt{2} \cos(\omega t)$

$x_1 = k_1\, V \sqrt{2} \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$m_1 = 2\, k\, k_1\, k_2\, VI \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right) \cos(\omega t - \phi)$

$m_2 = 2\, k\, k_1\, k_2\, VI \cos(\omega t) \cos\left(\omega t - \phi + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$z = 2\, k\, k_1\, k_2\, VI \sin\phi$

5.1.2. Le temps de réponse n'est limité que par la rapidité des composants, il est très faible devant la période (20 ms) du secteur.

5.2. Régulation de la composante réactive du courant

5.2.1. Étude du régime permanent

5.2.1.1. $\varepsilon = V_c - K\,I_r$; $I_r = I_{ar} + I_{cfr} = HC\,\varepsilon + I_{cfr}$;

$$I_r = HC\,V_c - KHC\,I_r + I_{cfr} \Rightarrow I_r\,(1 + KHC) = HC\,V_c + I_{cfr}$$

$$\text{soit : } I_r = \frac{HC}{1 + KHC}\,V_c + \frac{I_{cfr}}{1 + KHC}\ .$$

5.2.1.2. Il faut choisir la constante C élevée, mais la stabilité du montage diminue lorsque C augmente : il y a donc un compromis à trouver... ou bien on change de correcteur.

5.2.2. Cela signifie qu'en réalité :

$$x_c = C_1\,\varepsilon + C_2 \int_0^t \varepsilon\,dt + C_3\,\frac{d\varepsilon}{dt}.$$

En augmentant la constante C d'un correcteur «proportionnel», le montage devient instable car en réalité, entre les variables successives ε, x_c , I_{ar} , etc. existent des retards et des déphasages qui conduisent à des oscillations du montage. Par ailleurs, même si C est assez réduit pour que le système soit stable, diverses non linéarités limitent la précision du système. En général l'insertion d'une correction dérivée permet de reculer la limite d'instabilité tandis que la mise en œuvre d'une correction intégrale améliore la précision.

C.A.P.E.S.

(Concours Interne)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE
Composition à partir d'un dossier - Session 1992

ERRATUM : Le corrigé de cette épreuve a été publié, sous une forme moins élaborée, dans le tome 1 relatif aux énoncés.
Nous conseillons aux utilisateurs de consulter le texte qui suit.

PARTIE A. - ÉTUDE DE QUELQUES ASPECTS DE LA CHIMIE DU VIN

I. Étude de deux espèces minérales contenues dans le vin

1. Dosage de l'acide sulfureux.

1.1. Considérations générales.

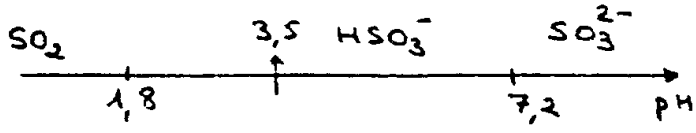
1.1.1.

$$H_2SO_3 + H_2O \rightleftarrows HSO_3^- + H_3O^+ \quad \text{ou} \quad SO_2 + 2\,H_2O \rightleftarrows HSO_3^- + H_3O^+$$

$$HSO_3^- + H_2O \rightleftarrows SO_3^{2-} + H_3O^+.$$

1.1.2. Ampholyte : Espèce susceptible de jouer le rôle de base conjuguée d'un couple Ac. Base et d'acide conjugué d'un second couple Ac. Base.

1.1.3.



A pH 3,5, l'espèce majoritaire est l'ion HSO_3^- .

1.2. 1.2.1.

$$I_2 + 2\,e^- \rightleftarrows 2\,I^-$$

$$SO_4^{2-} + 4\,H_3O^+ + 2\,e^- \rightleftarrows SO_2 + 6\,H_2O \quad \text{ou} \quad SO_4^{2-} + 4\,H^+ + 2\,e^- \rightleftarrows SO_2 + 2\,H_2O.$$

1.2.2.

$$I_2 + SO_2 + 6\,H_2O \rightarrow 2\,I^- + SO_4^{2-} + 4\,H_3O^+$$

ou $I_2 + SO_2 + 2\,H_2O \rightarrow 2\,I^- SO_4^{2-} + 4\,H^+$.

1.2.3. *a.* I_2 est peu soluble dans l'eau. On augmente sa solubilité par complexation

$$I_2 + I^- \overset{K}{\rightleftarrows} I_3^- \qquad (K \approx 750).$$

b. Sous forme d'ion I_3^- (ion triodure).

1.2.4. *a.*

$$S_4\,O_6^{2-} + 2\,e^- \rightleftarrows 2\,S_2\,O_3^{2-}\ .$$

b.

$$I_2 + 2\,S_2O_3^{2-} \rightleftarrows 2\,I^- + S_4O_6^{2-}\ .$$

c. $S_4O_6^{2-}$: ion tétrathionate.

d. Thiodène ou empois d'amidon.

1.3. 1.3.1. 1 mole de I_2 correspond à 1 mole soit 64 g de SO_2 .
1 mL de I_2 0,01 mol.L^{-1} contient 10^{-5} mol de I_2 .

$\Rightarrow$ 1 mL de I_2 0,01 mol.L^{-1} correspond à $0{,}64.10^{-3}$ g (ou 0,64 mg) de SO_2.

1.3.2. 50 mL de vin $\leftrightarrow$ n mL de solution de I_2 .

$\Rightarrow$ 1 L de vin $\leftrightarrow$ 20 n mL de solution de I_2 .

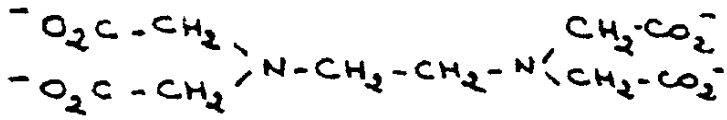
$\Rightarrow$ x = 20.0,64 . 10^{-3} . n = 12,8 n mg L^{-1}.

2. **Dosage du fer contenu dans le vin.**

2.1. Considérations générales.

2.1.1. Acide éthylène diamine tétraacétique.

2.1.2.



2.1.3. 6 positions de chélation : CO_2^- 4 positions, $\overline{N}$ 2 positions.

2.1.4. $$K_{D1} = \frac{[Fe^{3+}]\,[Y^{4-}]}{[Fe\,Y^-]}\ .$$

2.1.5. *a.* $$K_{D2} = \frac{[FE^{3+}]\,[SCN^-]}{[Fe\,SCN^{2+}]}\ .$$

b. Rouge.

2.2. Dosage du fer.

2.2.1. Volume total de solution à analyser = 50 + 2 + 1 + 10 = 63 mL.
1 mole de fer = 56 g.

$$C = \frac{10\ .\ 10^{-3}}{56} \times \frac{50}{63} = 1{,}42\ .\ 10^{-4}\ \text{mol.L}^{-1} \left(\frac{50}{63} = \text{fact. de dilution}\right).$$

2.2.2. Masse molaire $NH_4\,SCN$: 76 g.mol^{-1}.
Une solution à 5 % contient 50 g de $NH_4\,SCN$ pour 1000 g (soit $\approx$ 1 L) de solution.

$$\Rightarrow\quad c'_o = \frac{50}{76} = 0{,}658\ \text{mol.L}^{-1}.$$

2.2.3. On pose c (concentration en fer total dans la solution à analyser)
c' (concentration en SCN^- total dans la solution à analyser).

$c = 1{,}42 \cdot 10^{-4}$ mol.L^{-1}

$c' = c'_o \cdot \frac{10}{63} = 0{,}104$ mol^{-1}.

$c = [Fe^{3+}] + [x]$ avec $x = FeSCN^{2+}$

$c' = [SCN^-] + [x]$

$K_{D2} = \frac{[Fe^{3+}]\,[SCN^-]}{[x]} = 10^{-2}$.

On utilise les approximations suivantes :

$c' >> c \Rightarrow [x] >> [Fe^{3+}] \quad \Rightarrow \quad [x] \approx c = 1{,}42 \cdot 10^{-4}$ mol.L^{-1}

$[x] << [SCN^-] \quad \Rightarrow \quad [SCN^-] \approx c' = 0{,}104$ mol.L^{-1}

$\Rightarrow [Fe^{3+}] \approx K_{D2} \cdot \frac{c}{c'} = 1{,}36 \cdot 10^{-5}$ mol.L^{-1}.

On admettra ces résultats ou les résultats plus précis suivants :

$[Fe^{3+}] = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ mol.L^{-1}, $[FeSCN^{2+}] = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ mol.L^{-1}

$[SCN^-] = 0{,}104$ mol.L^{-1}

obtenus par résolution d'une équation de 2ème degré en $[Fe^{3+}]$.

2.2.4. On ajoute de l'EDTA (noté Y^{4-}).

$Fe^{3+} + Y^{4-} \quad \rightleftarrows \quad Fe\,Y^- \qquad (1)$

$Fe^{3+} + SCN^- \quad \rightleftarrows \quad FeSCN^{2+} \qquad (2)$

$FeSCN^{2+} + Y^{4-} \quad \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \quad Fe\,Y^- + SCN^- \qquad (3) \quad = (1) - (2)$

$$K_3 = \frac{[Fe\,Y^-]\,[SCN^-]}{[FeSCN^{2+}]\,[Y^{4-}]} = \frac{K_{D2}}{K_{D1}} = 10^{23{,}1} \qquad >> 1$$

La réaction (3) est donc totale dans le sens 1.

2.2.5. On a maintenant :

$c = [Fe^{3+}] + [x] + [Fe\,Y^-] = 1{,}42 \cdot 10^{-4}$ mol.L^{-1}

$c' = [SCN^-] + [x] = 0{,}104$ mol.L^{-1}

On pose :

c'' (concentration totale en EDTA) = $[Y^{4-}] + [Fe\,Y^-]$

en négligeant la dilution provenant de l'addition de v ml de solution d'EDTA à V = 63 ml de solution à analyser.

On a $[x] = 10^{-5,5} = 3,2 \cdot 10^{-6}$ mol.L^{-1} à l'instant précis où la décoloration est atteinte. On a alors : $[SCN^-] \approx c'$ (car la réaction (3) est totale).

$$\Rightarrow [Fe^{3+}] = K_{d2} \cdot \frac{[x]}{c'} = 3,04 \cdot 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow [Fe\,Y^-] = c - [Fe^{3+}] - [x] = 1,385 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow [Y^{4-}] = \frac{[Fe\,Y^-]\,[SCN^-]}{K_3\,[x]} = 3,6 \cdot 10^{-23} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow c'' = [Fe\,Y^-] + [Y^{4-}] \approx [Fe\,Y^-] = 1,385 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.$$

2.2.6. Comment évaluer l'erreur commise ?

Au cours du dosage, on a versé du Y^{4-} (EDTA). Si on avait versé autant de Y^{4-} qu'il y a de fer total, l'erreur serait de ≈ 0 %.

La concentration en Y^{-4} versé devrait être égale à c. Elle est en fait égale à c'' ⇒

$$\text{Erreur relative} \quad \frac{\Delta c''}{c''} = \frac{c - c''}{c} = 2,5\ \%$$

2.2.7. Le vin contient 10 mg de fer III par L. Pour que 1 cm^3 d'EDTA corresponde à 1 mg de fer III par L, il faut une solution d'EDTA de concentration C_{EDTA}.

50 mL de vin (contenus dans la solution à analyser) contiennent 0,5 mg de fer III et doivent correspondre à v = 0,5 mL de solution d'EDTA.

Remarque : On a donc bien v = 0,5 mL négligeable à v = 63 mL de solution à analyser (cf. I.2.2.5.).

On a : $C_{EDTA} \times v = c'' \times V$

$$\Rightarrow C_{EDTA} = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

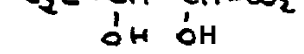
II. **Étude de quelques sucres contenus dans le vin**

1. **Questions d'ordre général.**

1.1. Le glucose possède une fonction aldéhyde qui peut être oxydée en fonction acide.

(Couple rédox mis en jeu $R\,CO_2H + 2\,H^+ + 2\,e^- \rightleftarrows R\,CHO + H_2O$).

1.2. La liqueur de Fehling est un mélange de sulfate de cuivre (II° de tartrate double de Na et K en milieu basique (soude concentrée).

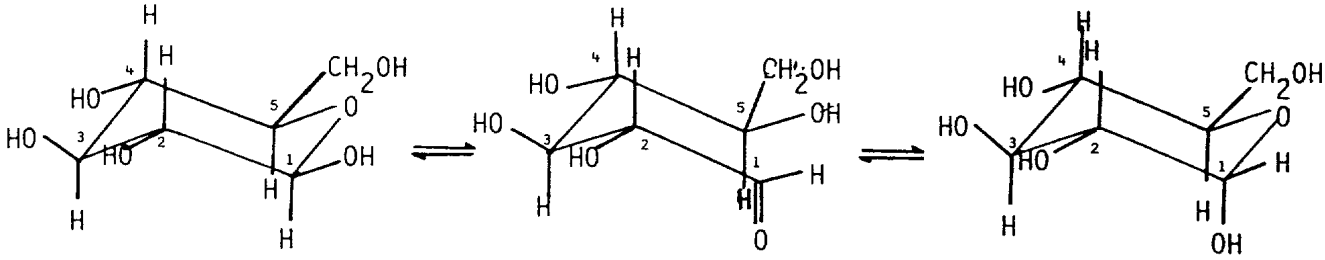
Les ions tartrate complexent Cu^{2+} (ion tartrate = ).

1.3. Cu_2O (oxyde de cuivre (I) ou oxyde cuivreux).

1.4. *a.* Ces appellations se réfèrent au signe du pouvoir rotatoire spécifique.

b. C * est un carbone sp^3 dont les 4 substituants sont différents.

Il y a 4 C * dans la glucose sous sa forme linéaire. En fait, en solution, il y a cyclisation et équilibre entre 2 formes anomères (notées α et β) énantiomères l'une de l'autre et comportant 5 C *.



I (forme β) II (forme linéaire) III (forme α)

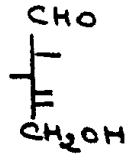
A 298 K, les pourcentages à l'équilibre sont : I : 64 % ; II : 0,02 % ; III : 36 %.

Les pouvoirs rotatoires spécifiques sont :

pour I pur : $[\alpha]_0 = 18{,}7°$

pour III pur : $[\alpha]_0 = 112°$

Proj^{on} de Füher (forme linéaire)



2. Questions relatives au dosage polarimétrique.

2.1. *a.* Cas d'un vin ne contenant pas de saccharose

m_g = masse de glucose par litre de solution

m_f = masse de fructose par litre de solution

$$P = m_g + m_f$$

$$\Rightarrow$$

$$\alpha_T = d_g \,.\, m_g \rightarrow d_f \,.\, m_f$$

$$\Rightarrow m_g = \frac{P \,.\, d_f - \alpha_T}{d_f - d_g} \quad ; \quad m_f = \frac{\alpha_T - P \,.\, d_g}{d_f - d_g}$$

b. Application numérique : $P = 72\ gL^{-1}$, $\alpha_T = -29$ d.s.

$d_f = -0{,}864$ d.s. ; $d_g = +0{,}484$ d.s.

$\Rightarrow \quad m_f = 47{,}4\ g.L^{-1}$

$m_g = 24{,}6\ g.L^{-1}$.

2.2. Cas d'un vin contenant du saccharose.

a. On dit qu'il y a inversion du saccharose car le pouvoir rotatoire change de signe au cours de l'hydrolyse.

b. Masses molaires : Saccharose 342 $g.mol^{-1}$

Glucose et fructose 180 $g.mol^{-1}$.

1 g de saccharose donne 0,526 g de glucose et 0,526 g de fructose.

c. On a avant hydrolyse $\alpha_T = z \,.\, d_s$

avec ici z (masse de saccharose égale à 1 $g.L^{-1}$) $\Rightarrow \alpha_T = d_s$.

On a après hydrolyse $\alpha'_T = m_f \,.\, d_f + m_g\, d_g$

$z = 1\ g.L^{-1} \Rightarrow m_f = m_g = 0{,}526\ g.L^{-1}$

$\Rightarrow \alpha'_T = m_f (d_f + d_g)$

$= 0{,}526\ (-0{,}864 + 0{,}484) = -0{,}200$ d.s.

La variation de l'angle de rotation vaut :

$$\alpha'_T - \alpha_T = (-0{,}200) - (0{,}623) = -0{,}823 \text{ d.s.}$$

Chaque fois que l'on hydrolyse une solution contenant 1 $g.L^{-1}$ de saccharose, l'angle de rotation diminue de 0,823 d.s.

d. On a maintenant avant hydrolyse $\alpha_T = z \cdot d_s$

et après hydrolyse $\alpha'_T = m_f \cdot d_f + m_g\, d_g$

avec $m_f = m_g = 0{,}526 \cdot z$

$\Rightarrow \alpha'_T - \alpha_T = z \cdot d_s - 0{,}526\ (d_f + d_g) \cdot z$

$= z\left[d_s - 0{,}526\ (d_f + d_g)\right]$

$$\Rightarrow z = \frac{\alpha'_T - \alpha_T}{d_s - 0{,}526\ (d_f + d_g)} = \frac{\alpha'_T - \alpha_T}{(-0{,}823)}$$

$$z = \frac{\alpha_T - \alpha'_T}{0{,}823}\ .$$

PARTIE B. - CINÉTIQUE CHIMIQUE

I. Étude des facteurs dont dépend la vitesse d'une réaction chimique

1. Influence des concentrations sur la vitesse d'une réaction chimique.

1.1. $v = \dfrac{dc}{dt}$ $\qquad v = \dfrac{dc}{dt} = k\, a^{\alpha}\, b^{\beta}.$

α = ordre partiel par rapport à A.

β = ordre partiell par rapport à B.

$\alpha + \beta$ = ordre global de la réaction, k = c^{te} de vitesse.

1.2. On utilise ici la méthode dite des vitesses initiales.

$$\log v_0 = \log k + \alpha \log a_0 + \beta \log b_0$$

Exp^{ces} 1 et 3 $\qquad a_0$ identique $\qquad \log v_0 = \beta \log b_0 + A \Rightarrow \beta = 2$

Exp^{ces} 2 et 3 $\qquad b_0$ identique $\qquad \log v_0 = \alpha \log b_0 + B \Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow v_0 = k\, b_0^2 \Rightarrow v = k\, b^2$

$k = 0{,}20\ L\ mol^{-1}\ min^{-1}$

1.3. Soit x le réactif en défaut. On appelle temps de demi-réaction $t_{½}$ le temps au bout duquel la moitié du réactif x a disparu.
ou soit y l'un des produits formés. On appelle temps de demi-réaction le temps au bout duquel la moitié du produit y s'est formé.

Il faut intégrer l'expression $v = k\,b^2$ pour obtenir l'expression de $t_{½}$ dans l'exemple considéré.

	A	+	B	→	C
E I	a_0		$b_0 = a_0$		0
date t	a		b = a		$c = a_0 - a = b_0 - b$

$\Rightarrow v = \dfrac{dc}{dt} = -\dfrac{db}{dt}$. On doit intégrer $-\dfrac{db}{dt} = kb^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{b_0} = kt$

En $t = t_{½}$, $b = b_{½}$ $\Rightarrow$ $t_{½} = \dfrac{1}{kb_0}$

A N : $t_{½} = 25$ min

1.4. $v = k\,b_0^2$ A N : $v_0 = 0{,}05$ mol.L^{-1} min^{-1}.

2. Influence de la température sur la vitesse d'une réaction chimique.

2.1. En règle générale k augmente avec T.
Exception notoire : $2\,NO + O_2 \rightarrow 2\,NO_2$.

2.2. $k = A \exp\left(-\dfrac{E}{RT}\right)$ E est l'énergie d'activation
A est le facteur préexponentiel.

2.3. 2.3.1. A $T = T_1$, $k = k_1$; à $T = T_2$, $k = k_2$

$\log k = \log A - \dfrac{E}{RT}$ $\Rightarrow$ $\log\left(\dfrac{k_2}{k_1}\right) = \dfrac{E}{2{,}3\,R}\left(\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right)$

$\Rightarrow$ E = 130 kJ/mol pour la réaction directe
E' = 100 kJ/mol pour la réaction inverse.

2.3.2. $D \underset{k'}{\overset{k}{\rightleftharpoons}} E$

$v = kd - k'e$ en posant d = conc^{on} en D à la date t,
(v = 0 à l'équilibre) e = conc^{on} en E à la date t
et en supposant les 2 réactions d'ordre 1 (cf unités).

K (constante d'équilibre) $= \frac{e_e}{d_e} = \frac{k}{k'}$

(e_e et d_e étant les concentrations en E et D à l'équilibre)

(A l'équilibre $v = k\, d_e - k'\, e_e = 0$ d'où la relation).

Application Numérique : A 61°C $K_1 = 10{,}3$; à 71°C $K_2 = 14{,}27$.

Pour calculer ΔH^0, on peut utiliser l'une des 2 méthodes suivantes :

– Relation de Vant'Hoff $\frac{d \ln K}{dT} = \frac{\Delta H_0}{RT^2} \Rightarrow \ln K = -\frac{\Delta H^0}{RT} + C^{te}$,

– $\ln K = \ln \frac{k}{k'} = \ln k - \ln k' = -\frac{E - E'}{RT} + \ln (A - A')$ soit $\Delta H^0 = E - E'$.

Dans les 2 cas $\Delta H^0 = 30$ kJ/mol.

3. **Influence d'un catalyseur sur la vitesse d'une réaction chimique.**

On appelle catalyseur une substance qui accélère la vitesse d'une réaction sans modifier le bilan de cette réaction et sans subir de modification permanente.

Si le catalyseur, les réactifs et les produits appartiennent à la même phase, la catalyse est dite homogène. Dans le cas contraire la catalyse est dite hétérogène.

Lorsqu'un même système peut évoluer différemment selon la nature du catalyseur, on dit qu'il y a sélectivité du catalyseur.

Si l'un des réactifs ou l'un des produits formés catalyse la réaction, on dit qu'il y a autocatalyse.

Le candidat n'a que l'embarras du choix pour illustrer ces définitions.

II. **Correction d'une copie d'élève**

1. (1) On effectue une «trempe» du système pour stopper ou ralentir fortement l'évolution du système pendant la durée du dosage. Le facteur mis en jeu est donc la température.

(2) Soit e la concentration en ester à la date t, a celle de l'acide et b celle de l'alcool. La vitesse instantanée d'apparition de l'ester à la date t s'écrit (par définition) $v = \frac{de}{dt}$.

v est égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe c = f (t) à la date t. Il faut donc tracer les tangentes à la courbe c = f (t) et déterminer leurs coefficients directeurs aux dates t_1 et t_2.

$\Rightarrow$ Date t_1 : $v_1 = 0{,}08$ mol.L^{-1} min^{-1}

date t_2 : $v_2 = 0{,}016$ mol.L^{-1} min^{-1}.

On retrouve l'influence des concentrations : v dépend des concentrations en réactifs ; v diminue lorsque les concentrations en réactifs diminuent.

(3) Le catalyseur ne modifie pas les proportions à l'équilibre et accélère la vitesse de la réaction. C'est donc la courbe (4) qui convient.

Capacités testées :
(1) : A1, ~~A2~~ (2) : ~~A1~~, B3, ~~C1~~ (3) : ~~A2~~, C1.

2. Les calculs sont justes mais la copie comporte de nombreuses perles de français et (ou) de chimie :
ex : (question 1) milieu réactionnaire,
(question 3) réponse erronée.

Le vocabulaire utilisé en Cinétique chimique n'est pas maîtrisé.

Il s'agit d'une copie d'un élève moyen de TC !

PARTIE C. - ÉTUDE DE QUELQUES EXPÉRIENCES DE TRAVAUX PRATIQUES

I. Dosage de l'aspirine

1.

2. 2.1. Pipette 20 ml + Fiole jaugée 250 ml + Erlenmeyer 250 ml + Agitateur magnétique chauffant + Réfrigérant à air pour l'hydrolyse.
Pipette 10 ml + Bécher 100 ml + Pipette 10 ml + Agitateur magnétique pour le dosage.

2.2. On chauffe pour que la solubilisation et l'hydrolyse soient suffisamment rapides.

L'excès de soude est destiné à rendre la réaction totale (déplacement d'équilibre par ajout d'un excès de réactif + dosage aisé).

2.3. Le volume de la fiole jaugée est connu à 0,5 ou 1 % près à 20°C (ou 25°C). Dès qu'elle est chauffée son volume et celui de la solution sont modifiés par dilatation.

2.4. Dans ce protocole opératoire, la 1ère goutte en excès de (5) provoque l'apparition d'une coloration rose dans le bécher. L'œil observe plus facilement l'apparition d'une couleur que sa disparition.

2.5. En absence d'aspirine, il y aurait simplement dilution de la soude.

$$c' = c_1 \cdot \frac{20}{250} \qquad c' = 0{,}08 \text{ mol.L}^{-1}$$

2.6. *a.* Soit c_A la concentration en aspirine dans S avant hydrolyse. Il faut 2 moles de soude pour neutraliser 1 mole de H_2SO_4 (diacide «fort») et il faut 2 moles de soude par mole d'aspirine au cours de l'hydrolyse.

$\Rightarrow \quad c'v = 2\,c_2\,v_2 + 2\,c_A\,v$

$$c_A = \frac{c'}{2} = \frac{c_2\,v_2}{v} \qquad \textit{Application Numérique} : c_A = 3{,}31 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

Masse molaire de l'aspirine : 180 g / mol.

Masse d'aspirine dans la fiole : $m = c_A\,M \times \frac{250}{1000} = 1{,}49$ g.

Masse d'aspirine par comprimé : $\frac{1{,}49}{3} \approx 0{,}50$ g.

b. Chaque comprimé contient 500 mg d'aspirine d'où la désignation commerciale.

2.7.

Cette réaction est totale.

2.8. L'aspirine (notée AH) se comporte en solution aqueuse comme un monoacide faible. Soit s sa solubilité.

$s = [AH] + [A^-] \approx [AH]$ car l'acide est faible et pas trop dilué.

Neutralité électrique : $[H_3O^+] = [A^-] + [AH]$ $\quad pH = 2,8 \Rightarrow [A^-] \approx [H_3O^+]$

$$K_a = \frac{[A^-]\,[H_3O^+]}{[AH]} \approx \frac{[H_3O^+]^2}{s} \Rightarrow s = \frac{[H_3O^+]^2}{K_a} = \frac{10^{-5,6}}{10^{-3,75}} = 10^{-1,85} \approx 1,4\ s \cdot 10^{-2}\ mol.L^{-1}$$

Masse molaire de l'aspirine : 180 g / mol.

$\Rightarrow \quad s = 1,4\ s \cdot 10^{-2}\ mol/L = 1,41 \cdot 10^{-2} \times 180 = 2,54\ g.L^{-1}$.

II. **Dosage des ions hydrogénocarbonate d'une eau minérale**

1.

$CO_2 + 2\,H_2O \rightleftarrows CO_3H^- + H_3O^+ \qquad pK_{a1} = 6,4$

$HCO_3^- + H_2O \rightleftarrows CO_3^{2-} + H_3O^+ \qquad pK_{a2} = 10,3$

2. $2\,HCO_3^- \quad + \quad 2\,H^+ \quad \rightarrow \quad 2\,CO_2 + 2\,H_2O$

2 moles $\qquad$ 1 mole de $H_2\,SO_4$

(écriture préférable car H_2SO_4 est un diacide «fort»).

3. A l'équivalence $c_e v = 2\,c_A\,v_e$ $\quad$ ou $\quad c_c v = 2\,c_A\,v_c$

v = 100 ml = vol. d'eau minérale prélevé.

c_A = concentration de la solution de H_2SO_4.

c_e = concentration en HCO_3^- dans l'eau d'Evian.

c_c = concentration en HCO_3^- dans l'eau de Contrexéville.

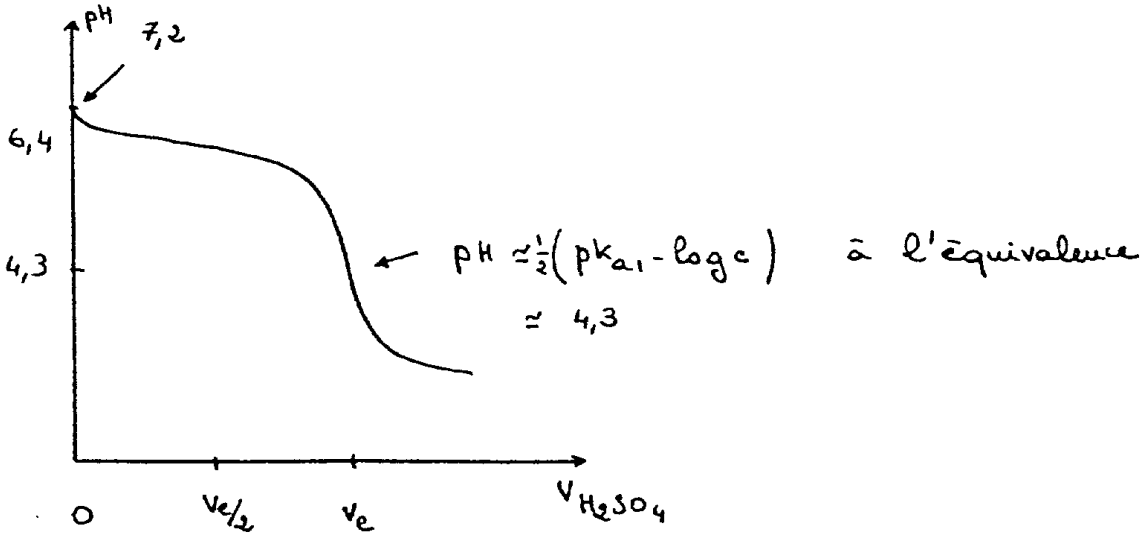
Masse molaire de HCO_3^- = 61 g / mol.

$$\Rightarrow \quad c_e = \frac{2 \times 0,03 \times 9,9}{100} = 5,94 \cdot 10^{-3}\ mol.L^{-1} = 362\ mg\ L^{-1}$$

$$c_c = \frac{2 \times 0,03 \times 12,7}{100} = 7,62 \cdot 10^{-3}\ mol.L^{-1} = 0,464\ g\ L^{-1}$$

(Accord assez satisfaisant avec les indications des étiquettes).

4.



$pH \approx pK_{a_1}$ à la ½ équivalence ≈ 6,4.

Il s'agit de valeurs approchées car la dilution de l'acide est importante.

C.A.P.E.S.

(Concours Interne)

OPTION : PHYSIQUE ET CHIMIE ET PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition à partir du programme - Session 1992

A. ETUDE D'UN OSCILLOSCOPE

.1./ Le canon à électrons:

$$U_0 = \frac{m.v_0^2}{2\,e} = 1{,}78\times10^3 \text{ V}$$

A.2./ La déviation verticale:

A.2.1./

A.2.1.1./ $\frac{d\,\overrightarrow{p}}{d\,t} = q.\overrightarrow{E} \Longrightarrow \begin{cases} z - z_0 = v_0.t \\ x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = \dfrac{e.u_y.t^2}{2\,m.d} = y \end{cases}$

d'où: la branche de parabole: $x = x_0,\ z \geq z_0$:

$$y = \frac{e.u_y.(z - z_0)^2}{2\,m.d.v_0^2}$$

A.2.1.2./ Trajectoire rectiligne parallèle à $\overrightarrow{v}$.

A.2.1.3./ α) $\theta = \dfrac{l}{v_0}$

β) $\tan(\alpha) = \dfrac{e.u_y.l}{m.v_0^2.d}$

γ) $Y_S = \dfrac{D.e.l}{m.v_0^2.d}.u_y$

A.2.1.4./ $\theta = 2\times10^{-9}$ s $\qquad Y_S \simeq 1{,}76$ cm

A.2.2./ $N \in [\ 10 \text{ Hz}, 10^4 \text{ Hz}\ ]$: $u_y = 100\cos(2\,\pi.N.\theta) \simeq 100$ V

donc: mouvement rectiligne sinusoïdal de fréquence N d'amplitude Y_S centré sur O.

A.3./ Le balayage horizontal:

A.3.1./ $X_S = \dfrac{D'.e.l.u_x}{m.v_0^2.d}$

A.3.2./ $X = -\dfrac{GG'}{2} + \dfrac{GG'}{T'}.t = \dfrac{D'.e.l}{m.v_0^2.d}.u_x$

$$u_x = \frac{m.v_0^2.d.GG'}{2\,D'.e.l}.\left(\frac{2t}{T'} - 1\right) \qquad u_x \in \left]-316\text{ V}, +316\text{ V}\right[$$

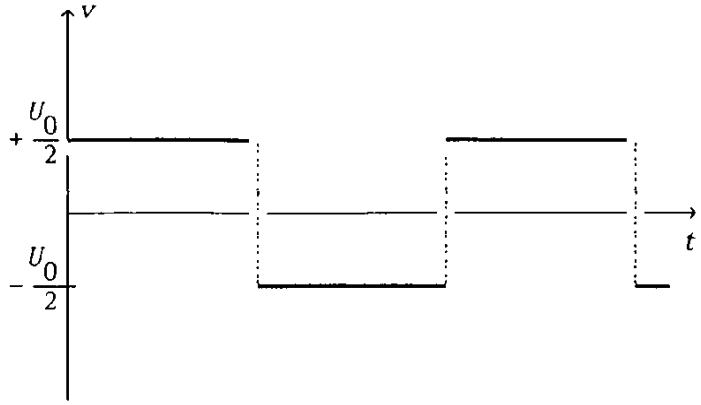
A.4./ Utilisation de l'oscilloscope:

A.4.1./ $V_S = R.i = R.\dfrac{dq}{dt}$

$$\frac{1}{C}.q + R.\frac{d\,q}{d\,t} = V_E$$

$$\frac{1}{R.C}.v + \frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt}$$

Si $T \ll R.C$



A.4.4./ Le condensateur transmet les hautes fréquences mais pas le continu, ni les basses fréquences: le circuit est un filtre passe haut.
Aux basses fréquences le circuit est dérivateur.

B. ETUDE D'UN PHENOMENE D'INTERFERENCES LUMINEUSES

B.1./Aspect qualitatif du phénomène:

B.1.1./ Rouge
B.1.2./ Interférences (franges rectilignes parallèles à y'y) et diffraction par un trou (anneaux).
B.1.3./ Les interférences disparaissent et reste la diffraction par un trou.
B.1.4./ Il n'y a pas de modification.
B.1.5./ On a le même phénomène d'interférences (plus lumineux) et diffraction par une fente.
B.1.6./ La distance entre deux franges varie.
B.1.7./ Non; incohérence des sources.

B.2./ Différence de chemin optique:

B.2.1./ $\delta = T_2M - T_1M$

$$\delta = \left[\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y - b \right)^2 + D^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y - b \right)^2 + D^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

B.2.2./ $$\delta = D.\left[1 + \frac{(y-b)^2}{D^2} + \frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} + \frac{a.x}{D^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$- D.\left[1 + \frac{(y-b)^2}{D^2} + \frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} - \frac{a.x}{D^2} \right]^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{a.x}{D}$$

B.2.3./ δ est indépendant de y: les franges sont parallèles à y'y.(B.1.2./)
δ est indépendant de b:
- une translation de (P) ne modifie pas le phénomène.(B.1.4./)
- il est possible d'utiliser des fentes à la place des trous. (B.1.5./)

B.3./ Analyse quantitative du phénomène:

B.3.1./ Maximum de lumière pour $\varphi_b = 2\,m.\pi \qquad m \in \mathbb{Z}$

Minimum de lumière pour $\varphi_s = (2m+1).\pi \qquad m \in \mathbb{Z}$

$$\varphi = \frac{2\pi.\delta}{\lambda} \Longrightarrow x_b = m.\frac{\lambda.D}{a} \quad \text{et} \quad x_s = \frac{2m+1}{2}.\frac{\lambda.D}{a}$$

B.3.2./ $i = x_b(m+1) - x_b(m) = x_s(m+1) - x_s(m) = \frac{\lambda . D}{a} = 0,63$ mm

B.3.3./ $e_{1M}(t) = e_M . \cos\left(\frac{2\pi . c}{\lambda} . \left(t - \frac{T_1M}{c} \right) \right)$

$$e_{2M}(t) = e_M . \cos\left(\frac{2\pi . c}{\lambda} . \left(t - \frac{T_2M}{c} \right) \right)$$

$$e_M(t) = 2\, e_M . \cos\left(\frac{\pi . \delta}{\lambda} \right) . \cos\left(\frac{2\pi . c}{\lambda} . \left(t - \frac{T_1M + T_2M}{2\, c} \right) \right)$$

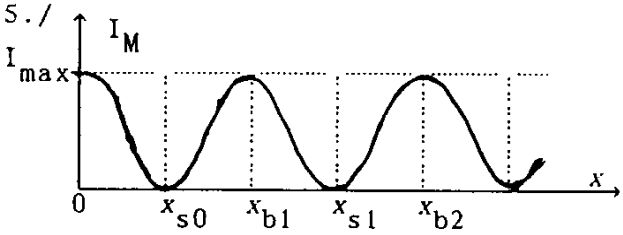
$$e_M(t) = 2\, e_M . \cos\left(\frac{\pi . a . x}{\lambda . D} \right) . \cos\left(\frac{2\pi . c}{\lambda} . \left(t - \frac{T_1M + T_2M}{2\, c} \right) \right)$$

B.3.4./ $I_M = 4\, e_M^2 . \cos^2\left(\frac{\pi . a . x}{\lambda . D} \right)$, carré de l'amplitude de l'onde.

$$I_M = 0 \Longrightarrow \frac{\pi . a . x_s}{\lambda . D} = \frac{2m+1}{2} . \pi \quad \text{et} \quad x_s = \frac{2m+1}{2} . \frac{\lambda . D}{a}$$

$$I_M = I_{max} \Longrightarrow \frac{\pi . a . x_b}{\lambda . D} = m . \pi \quad \text{et} \quad x_b = m . \frac{\lambda . D}{a}$$

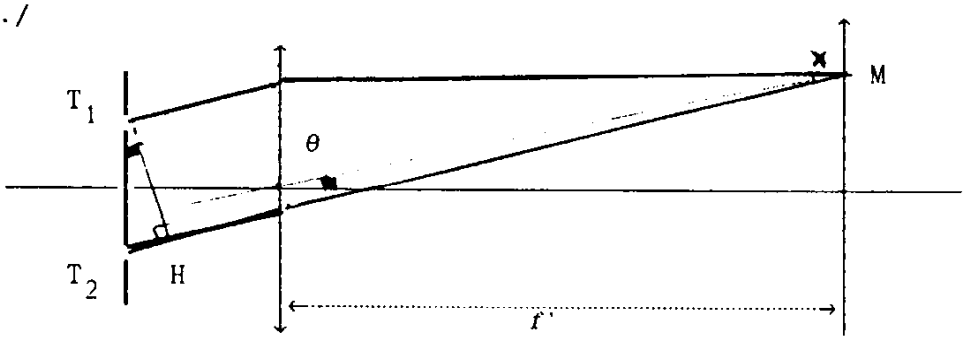
B.3.5./



B.4./ Modification du dispositif:

B.4.1./ distance (L)(E) égale à f'.

B.4.2./



B.4.3./ $\delta' = T_2H \simeq a.\theta \simeq a . \frac{x}{f'}$ $\qquad \varphi' = \frac{2\pi . a . x}{\lambda' . f'}$

B.4.4./ L'aspect est le même mais l'interfrange est changé en i'.

$i' = \frac{\lambda . f'}{a} = 0,32$ mm (interfrange divisé par 2).

B.4.5./ Image nette et lumineuse.

B.5./ Dispositif à trois trous:

B.5.1./ Déphasage $\psi = -\varphi''$

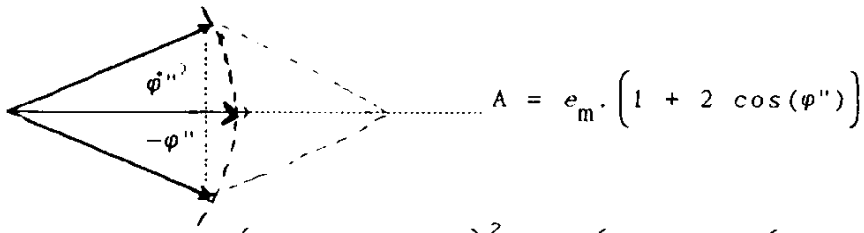
T_1 | T_3 | T_2

$\varphi'' = \frac{2\pi.\delta''}{\lambda}$ avec: $\delta'' = \frac{\delta'}{2}$

$\varphi'' = \frac{\pi.a.x}{\lambda.f'}$

B.5.2./

$$e_M(t) = e_m.\cos\left(\frac{2\pi.c}{\lambda}.t\right) + e_m.\cos\left(\frac{2\pi.c}{\lambda}.t - \varphi''\right) + e_m.\cos\left(\frac{2\pi.c}{\lambda}.t + \varphi''\right)$$



B.5.3./ $I'_M = e_m^2.\left(1 + 2\cos(\varphi'')\right)^2 = e_m^2.\left(1 + 2\cos\left(\frac{\pi.a.x}{\lambda.f'}\right)\right)^2$

B.5.4./ $\cos(\varphi'') = 1 \Longrightarrow x'_b = 2\,m.\frac{\lambda.f'}{a}$

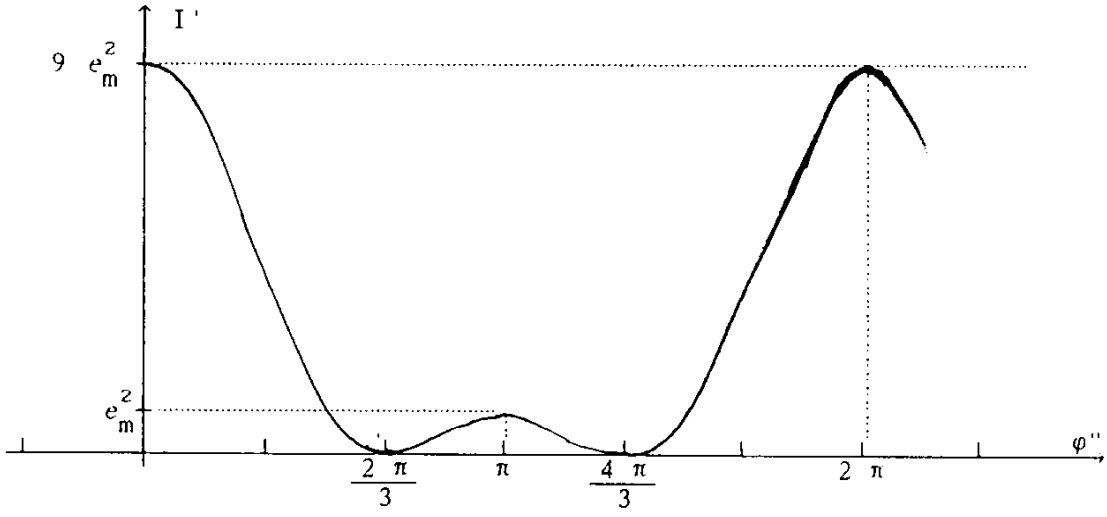
$\cos(\varphi'') = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \varphi'' = 2\,m.\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ et $x'_s = \left(2\,m \pm \frac{2}{3}\right).\frac{\lambda.f'}{a}$

B.5.5./ $\frac{dI'}{d\varphi''} = 2\,e_m^2.\left(1 + 2\cos(\varphi'')\right).\left(-2\sin(\varphi'')\right)$

s'annule pour $\cos(\varphi'') = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\varphi'') = 0$ $\begin{cases}\cos(\varphi'') = 1\\ \cos(\varphi'') = -1\end{cases}$

donc on a un extremum, en l'occurrence un maximum secondaire pour: $\cos(\varphi'') = -1$ et donc: $x'_{bs} = (2\,m + 1).\frac{\lambda.f'}{a}$

B.5.6./



C./ ETUDES DE TRANSFORMATIONS D'UN GAZ PARFAIT

C.1./ Préliminaires:

C.1.1./ $P.V = n.R.T$

C.1.2./ $\Delta U = W + Q$ (en négligeant l'énergie cinétique d'ensemble).

C.1.3./ U ne dépend que de la température.

C.2./ Compression isochore:

C.2.1./ $n = \dfrac{P_1.V_1}{R.T_1} = 0{,}080$ mol

C.2.2./ $T_2 = T_1 + \Delta T_1 = 600$ K ($= 2\ T_1$)

$V_2 = V_1 = 2\times10^{-2}m^3$

$P_2 = \dfrac{P_1.V_1.T_2}{T_1.V_2} = 2\times10^4$ Pa

C.2.3./ $W_e = \dfrac{E^2}{r}.\tau = 500$ J.

$\Delta U_1 = W_e = 500$ J

C.2.4./ $C = \dfrac{\Delta U}{\Delta T} = \dfrac{500}{300} = \dfrac{5}{3} = 1{,}66\ J.K^{-1}$

C.3./ Compression isochore:

C.3.1./ $T_2 = 600$ K et $V_2 = V_1 = 2\times10^{-2}m^3 \Longrightarrow P = P_2 = 2\times10^4$Pa

C.3.2./ Q_1 provient de la source. $Q_1 = \Delta U_1 = W_e = 500$ J

C.4./ Détente isotherme:

C.4.1./ $T_3 = T_2 = 600$ K et $V_3 = 2\ V_2 = 4{,}0\times10^{-2}m^3$, d'où: $P_3 = 1{,}0\times10^4$Pa

C.4.2./ $\delta W = -\ P.dV = -\ n.R.T_2.\dfrac{dV}{V} \Longrightarrow W_2 = -\ n.R.T_2.\ln\left(\dfrac{V_3}{V_2}\right)$

$W_2 = -\ n.R.T_2.\ln 2$

$W_2 = -\ 277$ J

C.4.3./ T est constante, donc: $\Delta U_2 = 0$ et $Q_2 = -\ W_2 = 277$ J.

C.5./ Compression isobare:

C.5.1./ $T_f = T_1 = 300$ K

$P_f = \dfrac{m.g}{S} = 1{,}0\times10^4$Pa $= P_1$

$V_f = V_1 = 2{,}0\times10^{-2}m^3$

C.5.2./ $\alpha)\ dW = -\ P.dV \Longrightarrow W_3 = -\ P_1.(V_1 - V_3) = 200$ J

$\beta)\ \Delta U_3 = C.(T_1 - T_3) = -\ 500$ J

$\gamma)\ Q_3 = \Delta U_3 - W_3 = -\ 700$ J

C.A.P.E.S.

(Concours Interne)

SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE
Composition à partir d'un dossier - Session 1992

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE DU FILTRAGE D'UN SIGNAL

I. Étude du filtre universel

I.1. L'amplificateur A.O.4. est monté en amplificateur-inverseur. Son amplification est $A_4 = -\frac{R}{R} = -1$.

La tension d'entrée est v_2 . On a donc $v_4 = -v_2$.

L'amplificateur A.O.1. est monté en sommateur-inverseur, les tensions d'entrée étant e, v_3 , v_4 . On a donc :

$$\underline{V}_1 = -R \times \left(\frac{\underline{E}}{R} + \frac{\underline{V}_3}{R} + \frac{\underline{V}_4}{R} \right) = -\underline{E} - \underline{V}_3 - \underline{V}_4 = -E - \underline{V}_3 + \underline{V}_2 \ .$$

D'où la relation : $\underline{E} + \underline{V}_1 - \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = 0.$

I.2. A.O.2. et A.O.3. sont montés comme des amplificateur-inverseurs, mais avec des impédances complexes. On a donc :

$$\underline{T'}_2 = -\frac{\underline{Z}_C}{R_1} = -\frac{1}{jC\omega R_1}$$

et de même : $$\underline{T'}_3 = -\frac{\underline{Z}_C}{R_2} = -\frac{1}{jC\omega R_2}$$

I.3. En remplaçant $\underline{V}_1$ et $\underline{V}_3$ en fonction de $\underline{V}_2$ dans la relation obtenue au I.1., on obtient :

$$\underline{V}_2 \left(1 - \frac{1}{\underline{T'}_2} - \underline{T'}_3 \right) = \underline{E}$$

d'où : $$\underline{T}_2 = \frac{\underline{V}_2}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + jC\omega R_1 + \frac{1}{jC\omega R_2}} \ .$$

I.4. En transformant l'écriture, on obtient :

$$\underline{T}_2 = \frac{1}{1 + j\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \left(C\omega\sqrt{R_1 R_2} - \frac{1}{C\omega\sqrt{R_1 R_2}} \right)} \ .$$

soit : $\underline{T}_2 = \dfrac{1}{1 + j\,Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$ avec $Q = \dfrac{1}{2m} = \sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}}$

$$\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1\,R_2}}$$

I.5. On obtient de même :

$$\underline{T}_1 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{E}} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{T'}_2} \times \frac{1}{E} = \frac{\underline{T}_2}{\underline{T'}_2} = -\frac{jC\omega R_1}{1 + j\,Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

soit : $$\underline{T}_1 = \frac{\dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}{1 + j\,2m\,\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}$$

et : $$\underline{T}_3 = \frac{\underline{V}_3}{\underline{E}} = \underline{V}_2\,\underline{T'}_3 \times \frac{1}{\underline{E}} = \underline{T'}_3\,\underline{T}_2 = \frac{-1}{jC\omega R_2\left[1 + j\,Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]}$$

$$\underline{T}_3 = \frac{-1}{1 + j\,2m\,\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}$$

I.6. I.6.1.

$$Q = 10 = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\,,\ R_1 = 10\ k\Omega$$

d'où : $$R_2 = \frac{R_1}{100} = 100\ \Omega$$

$$\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1\,R_2}}\,,\ C = 4{,}7\ nF$$

d'où : $\omega_0 = 2{,}13.10^5$ rd/s et $f_0 = 33{,}9$ kHz

I.6.2. $$T_2\,(\omega_0) = 1$$

I.6.3. $$T_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 100\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)2}}$$

On remarque que T_2 prend la même valeur pour des valeurs inverses de $\dfrac{\omega}{\omega_0}$, donc son graphe est symétrique par rapport à ω_0 en coordonnées graphiques semi-logarithmiques. On calcule

alors quelques points, par exemple :

$\omega = 0{,}1\ \omega_0$ et $\omega = 10\ \omega_0$	$T_2 = 0{,}0101$	$G_2 = -39{,}9$ dB
$\omega = 0{,}5\ \omega_0$ et $\omega = 2\ \omega_0$	$T_2 = 0{,}0665$	$G_2 = 23$ dB

La courbe se trace alors aisément sur le papier graphique semi-logarithmique fourni.

I.6.4. $T_{2MAX} = 1$. La bande passante à 3 dB s'obtient en résolvant l'équation

$$T_2 = \frac{T_{2MAX}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

soit : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$ en posant : $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$

Il faut donc que : $Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1$ ou $Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1$

ce qui conduit à 2 équations :

$$x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

Le discriminant est le même : $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 \approx 4$ car $Q^2 = 100$

Il faut que x soit > 0, ce qui élimine les solutions < 0. Il reste donc :

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2Q} = \frac{f_1}{f_0} \qquad \text{soit : } f_1 = f_0\left(1 - \frac{1}{2Q}\right)$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2Q} = \frac{f_2}{f_0} \qquad \text{soit : } f_2 = f_0\left(1 + \frac{1}{2Q}\right)$$

I.6.5. $f_0 = 1{,}0$ kHz $\omega_0 = 2000\ \pi$ rd/s

$$\sqrt{R_1 R_2} = \frac{1}{C\omega_0} = 33\,861$$

$$\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = Q = 10$$

d'où : $R_1 = 3{,}39\ 10^5\ \Omega$

$R_2 = 3{,}39\ 10^3\ \Omega$

II. Étude du générateur de signaux

II.1. v_+ s'obtient à partir de v_5 par le diviseur de tension R_4, R_4. On a donc :

$$v_+ = \frac{v_5 R_4}{R_4 + R_4} = \frac{v_5}{2}$$

II.2. Compte-tenu des valeurs possibles pour v_5, on a donc :

$$v_+ = +\frac{E}{2}$$

ou : $$v_- = -\frac{E}{2}$$

II.3. Il y a charge du condensateur C_1 par v_5 à travers R_3. On a donc :

$$v_5 - v_- = R_3 C_1 \frac{dv_-}{dt} \qquad \text{ou} \qquad R_3 C_1 \frac{dv_-}{dt} + v_- = v_5$$

II.4. A $t = 0$, C_1 est déchargé et donc $v_- = 0$; $v_5 = E$, $v = +\frac{E}{2}$. Le condensateur est chargée par +E. La tension à ses bornes $\left(v_{C1} = v_-\right)$ augmente donc et tend vers +E. A l'instant t_1, v_- atteint la valeur $\frac{E}{2}$, ce qui fait basculer le comparateur ($v_- = v_+$).

On a alors $v_5 = -E$ et $v_+ = -\frac{E}{2}$ et le condensateur est chargé par –E.

II.5. L'équation différentielle devient, compte-tenu de la nouvelle origine des temps :

$$R_3 C_1 \frac{dv_-}{dt} + v_- = -E \qquad \text{avec} \qquad v_{-(0)} = \frac{E}{2} .$$

La nouvelle loi de variation s'écrit alors :

$$v_{-(t)} = -E + \left(\frac{E}{2} - (-E)\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

soit : $$v_{-(t)} = -E\left[1 - \frac{3}{2}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \text{ avec } \quad \tau = R_3 C_1$$

II.6. Il y a basculement lorsque $v_{-(t)} = v_+ = -\frac{E}{2}$.

Soit : $$-\frac{E}{2} = -E\left(1 - \frac{3}{2}\exp\left(-\frac{t_2}{\tau}\right)\right),$$

ce qui donne : $$t_2 = R_3 C_1 \text{ Ln } 3$$

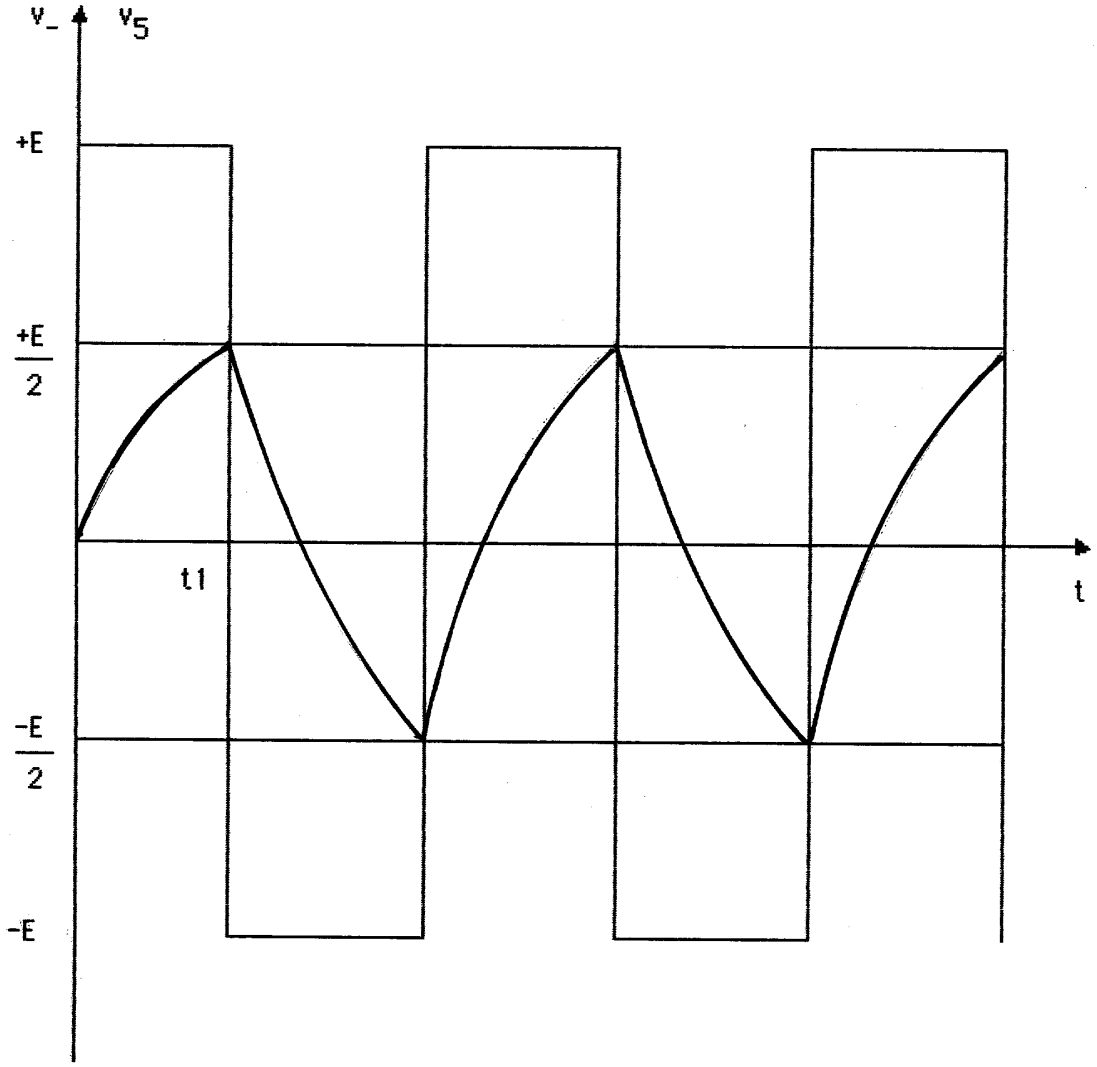
II.7. Après ce basculement, $v_5 = E$ et $v_+ = \frac{E}{2}$ et le condensateur est chargé par E et avec $v_{-(0)} = -\frac{E}{2}$ en prenant une nouvelle origine des temps. On a une nouvelle évolution de v_- symétrique de la précédente jusqu'à

ce que $v_- = v_+ = \frac{E}{2}$ .Il y a à nouveau basculement de l'amplificateur opérationnel et le cycle recommence.

On a donc une période $T = 2t_2 = 2\ R_3\ C_1\ \text{Ln}\ 3$.

Pour $f = 1{,}0$ kHz, on obtient $R_3 = 4{,}55\ k\Omega$.

II.8. Voir le graphe ci-dessous :



III. Filtrage du signal par le filtre passe-bande

III.1. L'amplitude des trois premiers termes était donnée par le texte. On obtient alors :

$$v^*_{5\,(1)} = \frac{4V_m}{\pi} = 1{,}27\ \text{V}.$$

$$v^*_{5\,(3)} = \frac{4V_m}{3\pi} = 0{,}424\ \text{V}.$$

$$v^*_{5\,(5)} = \frac{4V_m}{5\pi} = 0{,}255\ \text{V}.$$

III.2. III.2.1. L'expression de T_2 a été faite au paragraphe I.6.3. On calcule donc :

$$T_{2(\omega_0)} = 1$$

$$T_{2(3\omega_0)} = 0{,}0375$$

$$T_{2(5\omega_{0)}} = 0{,}0208$$

III.2.2. On en déduit l'amplitude des termes sinusoïdaux à la sortie de A.O.2. en multipliant les composantes de $v^*_{5(t)}$ par les transmittances $T_{2(\omega)}$ correspondant à la même pulsation.

$$v_{2(1)} = 1{,}27 \times 1 = 1{,}27 \text{ V.}$$

$$v_{2(3)} = 0{,}424 \times 0{,}0375 = 0{,}016 \text{ V}$$

$$v_{2(5)} = 0{,}255 \times 0{,}0208 = 0{,}005 \text{ V}$$

III.2.3. Les termes sinusoïdaux de pulsation $3\omega_0$ et $5\omega_0$ ont une amplitude négligeable par rapport à celle du terme fondamental de pulsation ω_0. Le signal observé sera donc pratiquement sinusoïdal. Comme $\underline{T}_2 = 1$, le déphasage sera nul, et $v_{2(t)} = 1{,}27 \sin \omega_0 t$.

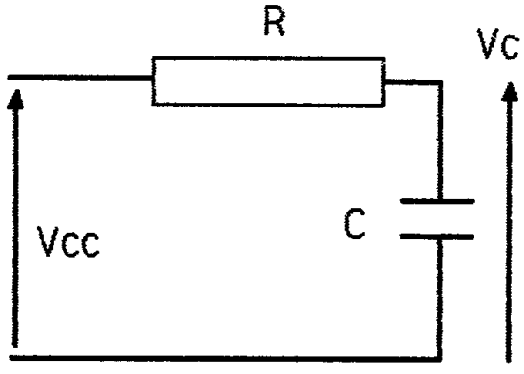
DEUXIÈME PARTIE

RÉDACTION D'UN TEXTE DE TRAVAUX PRATIQUES
GÉNÉRATION DE SIGNAUX NON-SINUSOÏDAUX

Il était demandé d'utiliser un circuit intégré 555 dont le schéma de fonctionnement était donné en annexe. L'ordre des questions posées est donné à titre indicatif. De même, il est possible de prévoir d'autres montages au gré de chaque professeur.

I. Calculs préalables

a) Établir la loi de variation de la tension Vc aux bornes du condensateur C chargé par la tension Vcc à travers la résistance R, la valeur initiale de Vc étant $Vc_{(0)} = V_i$.

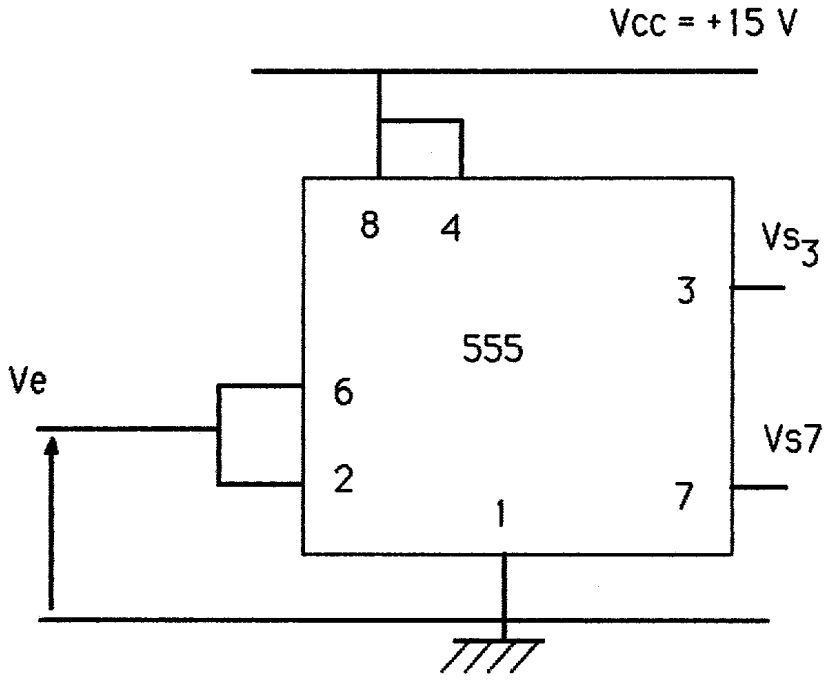


b) Étudier le schéma de fonctionnement du 555 et déterminer les seuils de basculement des deux comparateurs, le circuit étant alimenté entre 0 et +Vcc.

Comment faut-il brancher une résistance R pour charger le transistor T ? Pourquoi ? Déterminer la valeur de R pour que le courant dans T soit au plus égal à 100 mA. (Vcc = + 15 V)

II. Étude pratique du circuit 555

Réaliser le montage ci-contre. Brancher la résistance R pour charger T. Faire varier Ve de 0 et + 15 V. Mesurer et représenter l'évolution de Vs_3 et Vs_7 en fonction de Ve.

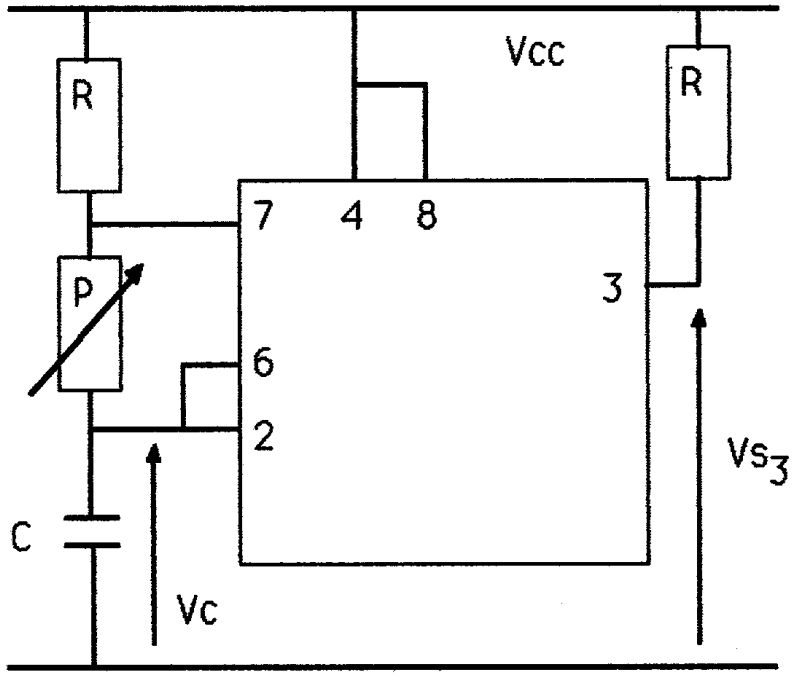


En déduire les seuils de basculement des comparateurs.

Mettre la broche 4 à la masse. Qu'observe-t-on en faisant varier Ve ? Quel est le rôle de la broche 4 ?

III. Générateur de tension en créneaux : astable

Vcc = 15 V R = 10 kΩ C = 47 nF.



a) Calcul

Suivant l'état du transistor T, le condensateur C se charge sous Vcc par l'intermédiaire de R et P ou se décharge vers la masse à travers P. A partir des valeurs déterminées précédemment, dire entre quelles valeurs évolue Vc. Calculer les temps de charge T1 et de décharge T2 de C en fonction de P et de R. En déduire la péride T du générateur et le rapport cyclique α du signal observé sur la sortie 3.

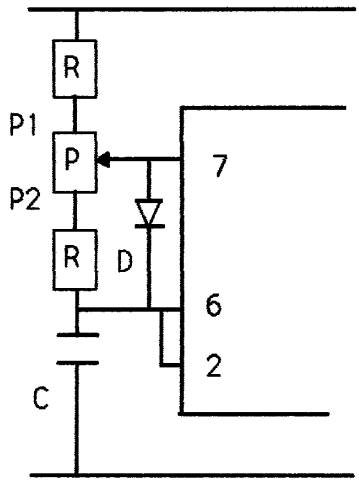
b) Mesures

Pour P = 10 kΩ, relever et tracer $Vs_{3(t)}$. Mesurer T et α. Comparer aux valeurs théoriques.

En faisant varier P de 10 à 50 kΩ, relever et tracer les courbes T(p) et α(p).

IV. Générateur à fréquence constante et rapport cyclique variable

R = 4,7 kΩ C = 10 nF P = 47 kΩ P1 + P2 = P



a) Calculs

Dans le montage précédent, on modifie le circuit de C de la façon ci-contre.

Quel est le rôle de D ?

Déterminer T1 en fonction de R et P1, puis T2 en fonction de R et P2.

Déterminer la période du montage cyclique du signal observé sur la sortie 3 en fonction de P1 et P2.

b) Mesures

Réaliser le montage. Mesurer la période et le rapport cyclique de Vs_3 pour diverses valeurs de P1 pour avoir $\alpha = 0{,}1$. Mesurer la largeur des implusions.

TROISIÈME PARTIE

ÉTUDE D'UN MOTEUR ASYNCHRONE TRIPHASÉ*

1. La plaque signalétique indique $U_n = 380/660$ V. Chaque phase du moteur est soumise à 380 V en régime normal. Il faut donc coupler en triangle, chaque phase étant soumise à la tension composée du réseau, soit 380 V.

* **ERRATUM :** Le corrigé de cette épreuve a été publié, sous une forme moins élaborée, dans le tome 1 relatif aux énoncés. Nous conseillons aux utilisateurs de consulter le texte qui suit.

2. La fréquence de rotation de sychronisme est donnée par :

$$Ns_{(tr/min)} = \frac{3000}{p}$$. (p = nombre de paires de pôles)

On sait que la fréquence de rotation normale N est légèrement inférieure à Ns. Ici N = 1440 tr/min . On a donc p = 2 et Ns = 1500 tr/min.

3. La puissance en régime triphasé équilibré est donnée par :
$P = \sqrt{3}\ U\ I \cos \varphi$.

On a donc ici, à vide : $\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{\sqrt{3}\ U_n\ I_0} = \frac{240}{\sqrt{3}\ 380\ 16} = 0{,}23$

4. Au régime nominal :

– $g = \frac{1500 - 1440}{1500} = 0{,}04 = 4\ \%$.

– $f_R = g \times f_S = 0{,}04 \times 50 = 2$ Hz.

– $P_{JouleStator} = \frac{3}{2} \times R_m \times I_n^{\ 2}$ (Rm = Résistance mesurée à chaud entre deux bornes du stator).

$P_{JouleStator} = \frac{3}{2} \times 1{,}8 \times 6{,}70^2 = 121$ W.

– $P_{JouleRotor} = g \times P_{Transmise\ au\ Rotor}$.

$P_{Transmise\ au\ Rotor} = P_{absorbée} - P_{JouleStator} - P_{Fer}$.

$P_0 = P_{Fer} + P_{mécanique}$ et donc $P_{Fer} = P_{mécanique} = \frac{P_0}{2}$.

$P_{absorbéé} = \sqrt{3}\ u_n\ I_n \cos \varphi_v = \sqrt{3} \times 380 \times 6{,}70 \times 0{,}85 = 3748$ W.

$P_{Fer} = \frac{P_0}{2} = 120$ W.

$T_{Transmise\ au\ Rotor} = 3748 \times 121 \times 120 = 3507$ W.

$P_{JouleRotor} = 0{,}04 \times 3507 = 140$ W.

– $P_{utile} = T_{Transmise\ au\ Rotor} - P_{JouleRotor} - P_{mécanique}$.

$P_{utile} = 3507 - 140 - 120 = 3247$ W.

Soit $P_u = 3{,}25$ kW.

– Moment du couple utile : $T_u = \frac{P_u}{\Omega}$ avec $\Omega = \frac{2\pi N}{60}$.

$T_u = \frac{3247 \times 60}{2 \times \Pi \times 1440} = 21{,}5$ Nm.

– Rendement du moteur : $\rho = \frac{P_u}{P_a} = \frac{3247}{3748} = 0{,}866$, soit ρ = 87 %.

5. *a)* Dans le modèle équivalent, seule la résistance r absorbe de la puissance active :

$$P_a = 3 \times r \times j_2{}^2 \quad \text{avec} \quad j_2 = \frac{380}{\sqrt{r^2 + (l\omega)^2}}$$

$$P_a = 3 \times r \times \frac{380^2}{r^2 + (l\omega)^2}$$

Pour obtenir la puissance maximal, on peut dériver P_a par rapport à r qui est la variable. On peut également remarquer que P_a peut s'écrire :

$$P_a = 3 \times \frac{380^2}{r + \dfrac{(l\omega)^2}{r}}$$

Le dénominateur est la somme de deux termes dont le produit est constant. Il est minimal si ces termes sont égaux, soit :

$$r = \frac{(l\omega)^2}{r} \qquad \text{ou} \qquad (l\omega)^2 = r^2$$

D'où : $l\omega = r = \dfrac{R}{g_m}$ et $g_m = \dfrac{R}{l\omega}$

b) Si on néglige les pertes au stator, $P_{\text{Transmise au rotor}} = P_{\text{absorbée}}$. Cette puissance est transmise au rotor par le couple électromagnétique tournant à la vitesse angulaire Ω_s. Ce couple fait tourner le rotor à la vitesse angulaire Ω et, les pertes mécaniques étant nulles, il est égal au couple utile.

On a donc : $$T = \frac{P_{\text{Transmise au Rotor}}}{\Omega_s} = \frac{P_a}{\Omega_s}$$

soit : $$T = \frac{3}{\Omega_s} \times \frac{380^2}{r + \dfrac{(l\omega)^2}{r}}$$

Ω_s étant ne constante, l'étude de l'expression de T est identique à celle de P_a. T sera donc maximal pour $g = g_m = \dfrac{R}{l\omega}$

c)

$$g_m = 0{,}11 = \frac{R}{l\omega} = \frac{m^2 R_r}{m^2 \lambda_r \Omega} = \frac{R_r}{\lambda_r \Omega}$$

d'où : $$\lambda_r = \frac{R_r}{g_m \Omega} = 1{,}45 \text{ mH}$$

6. *a)* Le démarrage s'effectue avec un couplage étoile du moteur, puis on effectue une communication rapide pour coupler le moteur en triangle, soit manuellement, soit de façon automatique par des relais. Le couplage étoile place chaque phase du moteur sous 220 V ce qui réduit le courant de démarrage.

b) Couplage triangle : Tension par phase 380 V.
courant en ligne au démarrage $I_{dt} = 18{,}7$ A
courant par phase au démarrage $J_{dt} = 18{,}7/\sqrt{3}$ A
$= 10{,}8$ A

Couplage étoile : Tension par phase $220\ \text{V} = \frac{380}{\sqrt{3}}\ \text{V}$

courant par phase au démarrage $J_{de} = 10{,}8/\sqrt{3}\ \text{A}$

$= 6{,}23\ \text{A}$

courant en ligne au démarrage $I_{de} = J_{de} = 6{,}23\ \text{A}$

c) Le couple au démarrage est proportionnel au carré de l'intensité du courant dans la phase.

On a donc : $$T_{de} = T_{dt} \times \frac{J_{de^2}}{J_{dt^2}} = \frac{8}{3} = 2{,}67\ \text{Nm}.$$

On constate qu T_{de} est sensiblement égal au $\frac{1}{10°}$ du couple utile nominal. Ceci risque de rendre les démarrages difficiles, surtout s'ils sont effectués en charge.

Une autre solution pourrait être de démarrer avec des rhéostats rotoriques, puisque la donnée de la résistance par phase du rotor indique qu'il est bobiné.

Agrégation
(Concours Interne)

OPTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE, PHYSIQUE APPLIQUÉE
Composition sur la physique et le traitement automatisé
de l'information - Session 1992

PARTIE I - CIRCUITS ÉLECTRIQUES LINÉAIRES

I.1. RÉSEAUX LINÉAIRES EN RÉGIME PERMANENT

I.1.1. Progression

Paragraphe 1 : lois de base

a) La loi aux mailles résulte de l'existence d'une fonction potentiel définie en tout point du circuit et partout continue. On en déduit la propriété des d.d.p. sur une maille : $\sum u_k = 0$ (à condition que les d.d.p. soient toutes définies avec le même sens du parcours de la maille).

Plus généralement on a : $\sum \varepsilon_k u_k = 0$ avec $\varepsilon_k = \pm 1$

b) La loi aux nœuds résulte de l'absence d'accumulation de charges électriques aux nœuds ; il y a conservation de l'intensité :

$$\sum i_k = 0$$

(avec la même convention d'orientation des conducteurs arrivant au nœud).

Plus généralement on a : $\sum \varepsilon_k i_k = 0$ avec $\varepsilon_k = \pm 1$

Remarque : Les deux lois sont valables en régime continu et en régime variable ; dans ce dernier cas elles s'appliquent aux grandeurs instantanées. Le terme «régime variable» sera précisé dans la question I.2.1.a).

Paragraphe 3 : théorèmes de base et modélisation.

c) Régimes de fonctionnement

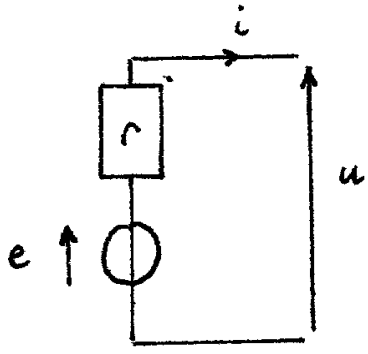
L'étude se limite aux régimes permanents : régime continu et régime sinusoïdal forcé.

On sait qu'en régime sinusoïdal forcé, on peut remplacer les équations différentielles linéaires entre d.d.p. et intensités par des équations linéaires en utilisant les complexes.

Dans la suite de la progression on se limitera à l'étude de réseaux purement résistifs et à l'utilisation de grandeurs réelles sachant que l'étude peut-être étendue aux circuits R.L.C. en régime sinusoïdal forcé à condition d'utiliser les complexes.

d) Modèle de Thévenin d'un dipôle actif linéaire

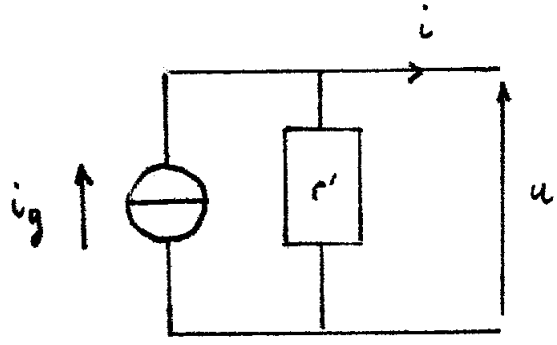
C'est une source idéale de tension en série avec une résistance.



e : f.é.m. de la source
r : résistance interne
$u = e - ri$

e) Modèle de Norton d'un dipôle actif linéaire

C'est une source idéale de courant en parallèle avec une résistance.



i_g : c.é.m. de la source
r' : résistance interne

$$i = ig - \frac{u}{r'}$$

f) Équivalence entre les modèles

$u = e - ri$ s'écrit $i = \frac{e}{r} - \frac{u}{r}$

par identification on obtient $r' = r$ $i_g = \frac{e}{r}$

g) Sources intépendantes, sources liées

Une source est dite indépendante si la f.é.m. (ou le c.é.m.) du modèle ne dépend pas des autres grandeurs électriques du circuit.

Une source est dite liée dans le cas contraire : on se limitera au cas d'une relation linéaire entre la f.é.m. (ou le c.é.m.) et la grandeur électrique dont elle (ou il) dépend.

h) Circuit linéaire

Un circuit est soumis aux lois de Kirchhoff et aux lois de comportement de ses dipôles passifs et actifs.

Si les dipôles passifs et actifs sont linéaires, le circuit est dit linéaire.

Il satisfait alors au théorème suivant :
L'intensité du courant dans une branche est une fonction linéaire des f.é.m. et des c.é.m. indépendants du circuit.

$$i_k = \sum_j \alpha_{k_j} E_j + \sum_l \beta_{k_l} I_l$$

(j parcours les f.é.m. du circuit
l parcours les c.é.m. du circuit)

Le théorème s'applique à la d.d.p. entre deux points du circuit.

i) Théorème de superposition

La relation précédente s'écrit :

$$i_{k_l} = \alpha_{k_j} E_j \qquad i_{k_l} = \beta_{k_l} I_l$$

$$i_k = \sum_j i_{k_j} + i_{k_l}$$

L'intensité du courant dans une branche est égale à la somme des intensités dues à chacune des sources dans la branche.

Même propriété pour la d.d.p. entre deux points du circuit.

Remarque : Quand on écrit $i_{k_j} = \alpha_{k_j} E_j$ on suppose avoir éteint toutes les sources, sauf j mais on maintient dans le circuit les résistances internes des sources éteintes.

Éteindre une source c'est annuler sa f.é.m. ou son c.é.m., c'est-à-dire remplacer une source idéale de tension par un interrupteur fermé et une source idéale de courant par un interrupteur ouvert.

j) Théorèmes de Thévenin et de Norton

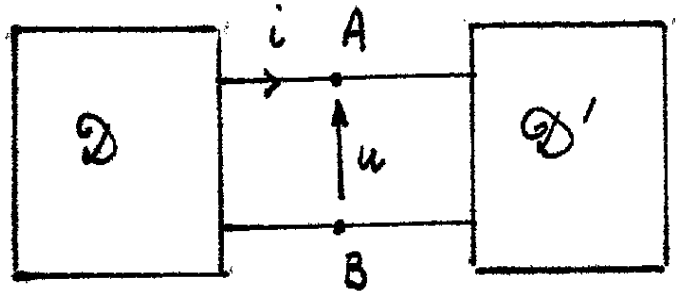
Soit un réseau dipolaire linéaire actif contenant :

– des résistances,

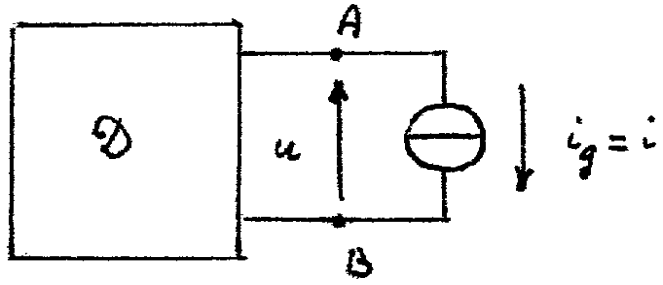
– des sources indépendantes et des sources liées représentées par leur modèle de Thévenin ou de Norton,

– on suppose que les sources liées sont commandées par des grandeurs internes au réseau dipolaire et que les relations entre ces grandeurs et les f.é.m. ou c.é.m. sont linéaires.

Le réseau dipolaire (noté $\mathscr{D}$) débite une intensité i avec une d.d.p. u entre ses bornes dans un réseau dipolaire $\mathscr{D}'$.



Remplaçons le dipôle $\mathscr{D}'$ par une source idéale de courant de c.é.m. égal à i ; le régime de fonctionnement de $\mathscr{D}$ n'est pas changé.



D'après le théorème du paragraphe h).

$$u = \alpha + \beta i$$

α est une fonction linéaire des f.é.m. et c.é.m. indépendants de $\mathscr{D}$.

$\alpha = u_0$ u_0 : d.d.p. à vide obtenue en éteignant la source idéale de courant placée entre A et B.

En éteignant les f.é.m. et c.é.m. indépendants de $\mathscr{D}$ on a : $\beta = \frac{u}{i} = -R$ (R est la résistance équivalente vue entre A et B).

$$u = u_0 - Ri$$

D'où le théorème de Thévenin :

Un réseau dipolaire linéaire actif équivaut à une source idéale de tension de f.é.m. u_0 égale à la d.d.p. à vide entre les bornes, en série avec une résistance égale à la résistance équivalente vue entre les bornes.

Le théorème de Norton s'en déduit par l'équivalence vue au paragraphe f).

$$i = i_g - \frac{u}{R} \qquad i_g = \frac{u_0}{R}$$

On a $i_g = i_{cc}$ (courant de court-circuit entre A et B)

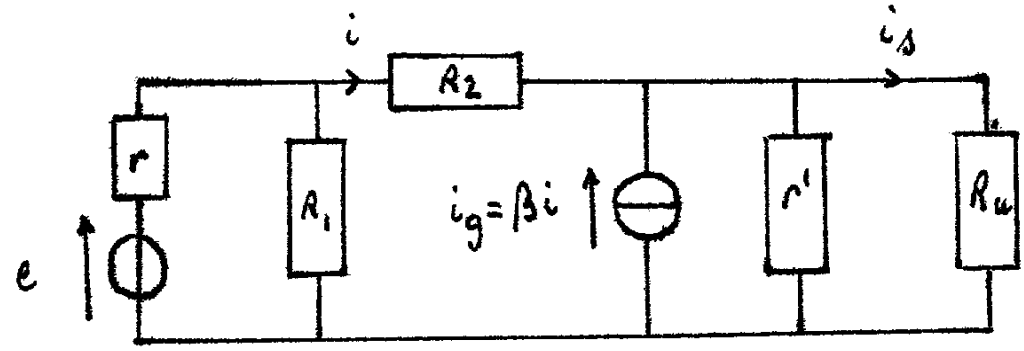
$$i = i_{cc} - \frac{u}{R}$$

Un réseau dipôlaire linéaire actif équivaut à une source idéale de courant de c.é.m. i_{cc} égale à l'intensité du courant de court-circuit entre les bornes, en parallèle avec une résistance égale à la résistance équivalente vue entre les bornes.

I.1.2. **Exercices**

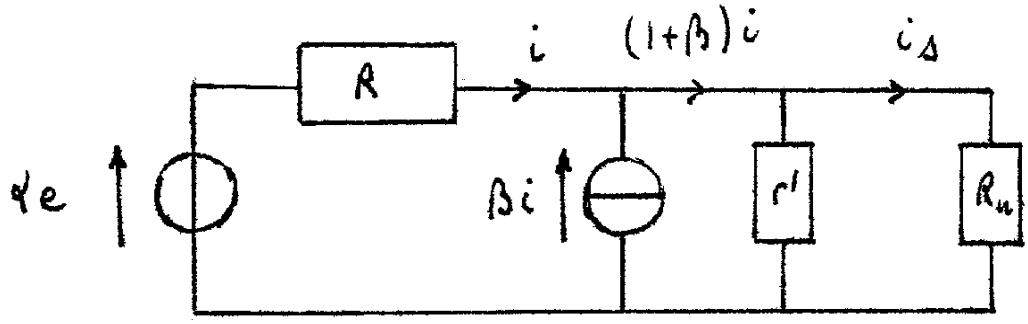
a. Énoncé

On modélise un étage amplificateur à transistor par le circuit ci-dessous : (e, r) est le générateur de signaux, R_u est la résistance de charge, le transistor est modélisé par une source liée du courant dont le c.é.m. i_g vérifie $i_g = \beta i$ (i est l'intensité du courant dans R_2, β est une constante caractéristique du transistor).



Déterminer l'intensité i_s du courant dans la résistance de charge R_u.

Simplifions tout d'abord le circuit avec le schéma équivalent suivant :



On a : $\alpha = \dfrac{R_1}{r + R_1}$ $\qquad R = R_2 + \dfrac{r\,R_1}{r + R_1}$

Notons : $R' = \dfrac{r'\,R_u}{r' + R_u}$

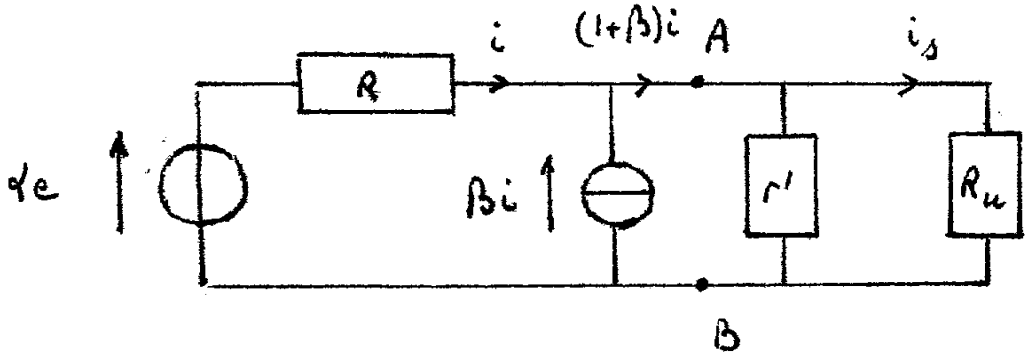
1ère méthode :

Loi aux mailles : $\alpha e = [R + R'(1 + \beta)]i$

diviseur de courant : $i_s = \dfrac{r'}{r' + R_u}(1 + \beta)\, i$

d'où : $i_s = \dfrac{r'}{r' + R_u} \times \dfrac{\alpha e(1 + \beta)}{R + (1 + \beta)\, R'}$

2ème méthode :

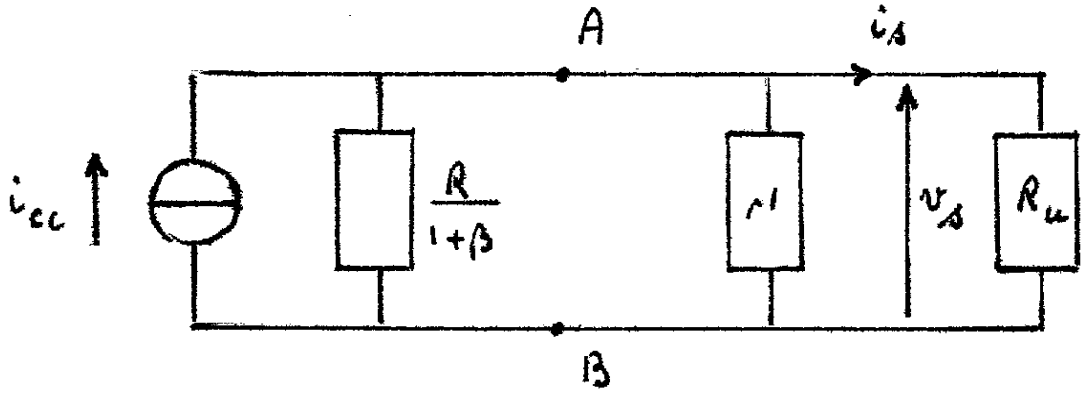


Cherchons l'équivalence de Norton entre A et B :

$$i_{cc} = \frac{\alpha e}{R}(1+\beta)$$

$$R_{eq} = \frac{R}{1+\beta} \text{ (il ne faut pas éteindre la source liée)}$$

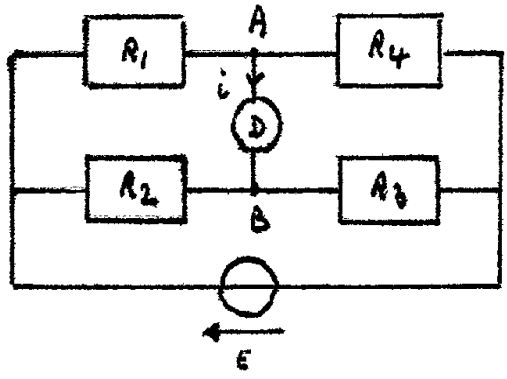
$$i_s = \frac{v_s}{R_u} = \frac{\dfrac{i_{cc}}{R_u}}{\dfrac{1}{r'} + \dfrac{1}{R_u} + \dfrac{1+\beta}{R}} = \frac{\dfrac{\alpha e (1+\beta)}{R R_u}}{\dfrac{1}{r'} + \dfrac{1}{R_u} + \dfrac{1+\beta}{R}}$$



d'où : $$i_s = \frac{r'}{r' + R_u} \times \frac{\alpha e (1+\beta)}{R + R'(1+\beta)}$$

b. Pont de Wheastone déséquilibré

D est un détecteur de résistance interne g.



D : détecteur de résistance interne g

On utilise le théorème de Thévenin :

$$u_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_4} E - \frac{R_2}{R_2 + R_3} E = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)} E$$

$$R = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$i = \frac{u_0}{R + g} = E \times \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_{4)}(R_2 + R_{3)}} \times \frac{1}{\dfrac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + g}$$

I.2. DIPÔLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

I.2.1. Régimes de fonctionnement

a. L'A.R.Q.P. étudie les régimes «lentement» variables des circuits R.L.C. : elle prend en compte le phénomène d'induction électromagnétique mais néglige le phénomène de propagation. Dans le domaine de l'A.R.Q.P. l'intensité dans un circuit est une grandeur conservative comme en régime continu.

La condition de validité de l'A.D.Q.P. peut s'écrire sous la forme : $\lambda >> l$

λ : longueur d'onde des ondes électromagnétiques associées au régime sinusoïdal de période T

l : dimension du circuit

Elle traduit le fait que la durée de propagation dans le circuit est petite devant la période.

b. Les circuits linéaires sont régis par des équations différentielles linéaires à coefficients constants, avec second membre.

Un régime forcé est la solution particulière de l'équation (ou du système d'équations) avec second membre.

C'est le régime imposé par la source, obtenu lorsque le régime transitoire initial a disparu.

I.2.2. Représentation complexe

a. A la fonction $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ on associe la fonction $\underline{x} = A\,e^{j(\omega t + \varphi)}$ par la relation $\underline{x} = x - \frac{j}{\omega}\frac{dx}{dt}$

$\underline{x} = A\,e^{j\varphi}\,e^{j\omega t}$ $\underline{A} = A\,e^{j\varphi}$ représente l'amplitude complexe.

$$\frac{d}{dt}(\underline{x}) = j\,\omega\,\underline{x} \qquad \int \underline{x}\,dt = \frac{\underline{x}}{j\omega}$$

L'intérêt de la représentation complexe est de remplacer les équations différentielles par des équations algébriques.

b. Lois de Kirchhoff

La relation entre $\underline{x}$ et x étant linéaire et les lois de Kirchhoff étant elles-mêmes linéaires et valables à chaque instant, elles s'étendent aux grandeurs complexes $\underline{x}$ et aux amplitudes complexes $\underline{A}$.

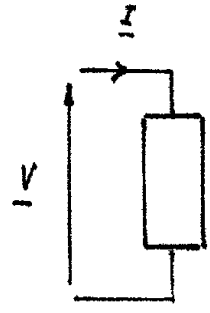
I.2.3. Impédance, admittance

Si on utilise la convention récepteur pour la d.d.p. $\underline{V}$ on a :

Impédance $\underline{Z} = \frac{\underline{V}}{\underline{I}}$

Admittance $\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{V}}$

Association en série $\underline{Z} = \sum_i \underline{Z}_i$



Association en parallèle $\underline{Y} = \sum_i \underline{Y}_i$

Résistor $\underline{Z} = R$

Capacité $\underline{Z} = \dfrac{I}{jC\omega}$

Inductance $\underline{Z} = jL\omega$

I.2.4. **Résonances**

a. Définition

Il y a résonance quand le comportement fréquentiel d'un récepteur est caractérisé par l'existence d'un maximum pour la grandeur étudiée : valeur moyenne de l'énergie absorbée, valeur efficace de la d.d.p., valeur efficace de l'intensité.

b.

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{L\omega}\right) \qquad Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{L}\omega\right)^2}$$

$I = \dfrac{V}{Z}$ est maximale pour $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et tend vers zéro quand ω tend vers zéro ou l'infini ; ω_0 est la pulsation de résonance.

Quand la résonance est aigue, il est commode de caractériser la largeur du pic à la hauteur $\dfrac{Imax}{\sqrt{2}}$ on obtient $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \dfrac{\omega_0}{Q}$ avec $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$; Q est le facteur de qualité du récepteur.

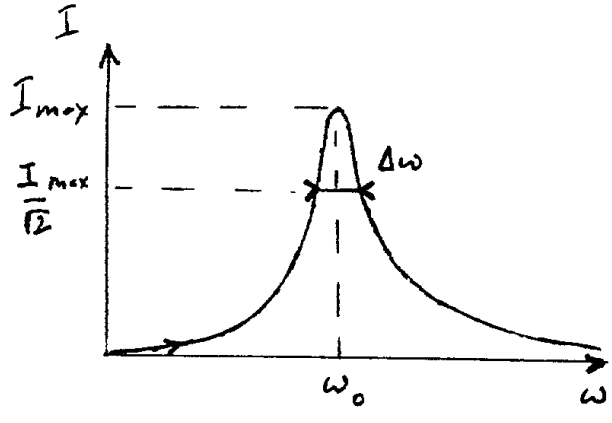
La phase est définie par :

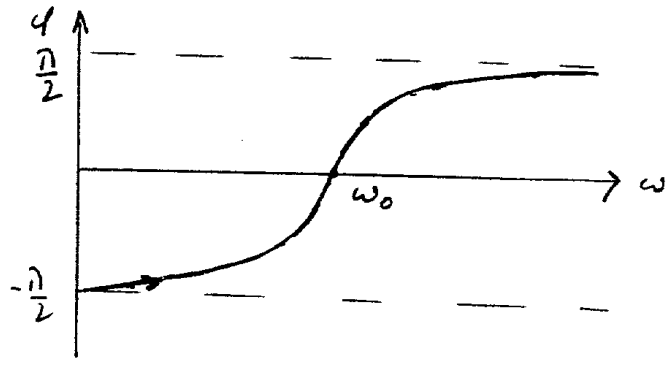
$$\varphi = \text{Arg}\,(\underline{I}) - \text{Arg}\,(\underline{V}) = -\text{Arg}\,(\underline{Z}) = -\text{Arc tg}\left(\frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

Pour : $\omega = \omega_0$ $\varphi = 0$

Quand $\omega \to 0$ $\varphi \to -\dfrac{\pi}{2}$

$\omega \to \infty$ $\varphi \to +\dfrac{\pi}{2}$





c. On a : $$\underline{u}_c = \frac{u}{1 - L\,C\omega^2 + jRC\omega}$$

Il est commode d'introduire $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$

$$I = \frac{\underline{U}_c}{\underline{U}} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On obtient $$I = \frac{1}{1 - \eta^2 + j\,\frac{\eta}{Q}}$$

$$T = \left[(1-\eta^2)^2 + \frac{\eta^2}{Q^2}\right]^{-1/2}$$

$$\text{Arg (I)} = \text{Arg } (\underline{U}_c) - \text{Arg } (\underline{U}) = -\text{ Arc tg}\left[\frac{\eta}{(1-\eta^2)\,Q}\right]$$

La résonance de tension n'existe que si $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$; elle est obtenue pour :

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \left(\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}\right)$$

et on a : $T_{max} = Q\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-1/2}$ $\left(Uc_{max} = U \times Q\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-1/2}\right)$

Pour la résonance aigue on a :

$$\eta \approx 1\ (\omega \approx \omega_0) \qquad T_{max} \approx Q \qquad (U_{Cmax} \approx Q\,U)$$

Q est le coefficient de surtension.

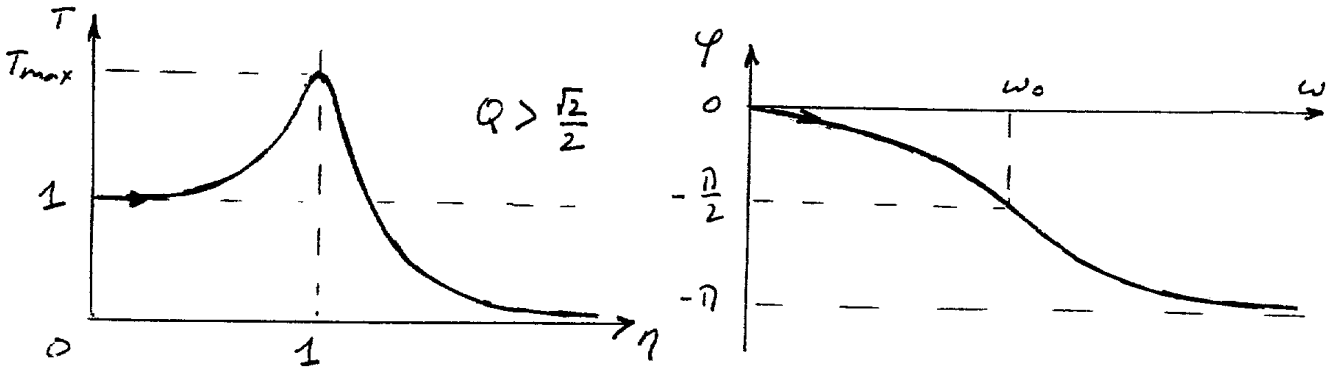
La largeur du pic pour $T = \frac{T_{max}}{\sqrt{x}}$ vaut $\Delta\eta = \frac{1}{Q}\left(\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}\right)$

La phase $\varphi = \text{Arg (I)}$ a les propriétés suivantes :

$$\eta = 1 \quad (\omega = \omega_0) \qquad \varphi = 0$$

$$\eta \to 0 \quad (\omega \to \omega_0) \qquad \varphi \to 0$$

$$\eta \to \infty \quad (\omega \to \infty) \qquad \varphi \to -\frac{\pi}{2}$$



d. $\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\left(L\omega - \frac{1}{L\omega}\right) \qquad \underline{U} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}}$

On utilise l'étude vue dans la partie b. en faisant une transposition $R \to \frac{1}{R}$ $L\omega \to C\omega$ $\frac{1}{C\omega} \to \frac{1}{L\omega}$ $I \to u$ $u \to I$.

Les résultats vus pour I sont valables pour U.

e. Circuit R.L.C. série :

Si $Q \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$: c'est un filtre passe-bas du 2ème ordre.

Si $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$: il peut être encore considéré comme un filtre passe-bas puisque $T \to 1$ quand $\omega \to 0$.

Toutefois pour $Q >> \frac{\sqrt{2}}{2}$ on peut l'utiliser comme filtre passe-bande sélectif à condition de limiter son utilisation au voisinage immédiat de la résonance.

Circuit R.L.C. parallèle :
Filtre passe-bande

I.3. CORRIGÉ (Extrait d'un texte donné au concours d'entrée à Saint-Cyr en 1990)

I.3.1.

$$Z_0 = Z_A + \frac{Z_c\,(Z_A + Z_0)}{Z_c + Z_A + Z_0}$$

$$Z_0{}^2 + Z_0\,(Z_B - Z_A) - \Delta = 0 \qquad \Delta = Z_A\,Z_B + Z_A\,Z_C + Z_B\,Z_C$$

Cette équation admet 2 solutions en Z_0.

Pour n filtres on a $Z_c = Z_0$.

L'impédance d'entrée est égale à l'impédance caractéristique (adaptation).

I.3.2.

$$Z_0{}^2 = \frac{L}{C} - \frac{L^2\,\omega^2}{4}$$

Si $\omega \leq \frac{2}{\sqrt{LC}}$ $\quad Z_0{}^2 \geq 0$ $\quad Z_0$ réel

Si $\omega > \frac{2}{\sqrt{LC}}$ $\quad Z_0{}^2 < 0$ $\quad Z_0$ imaginaire

Z_0 réel $\qquad Z_0 = \pm\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{L^2\omega^2}{4}}$

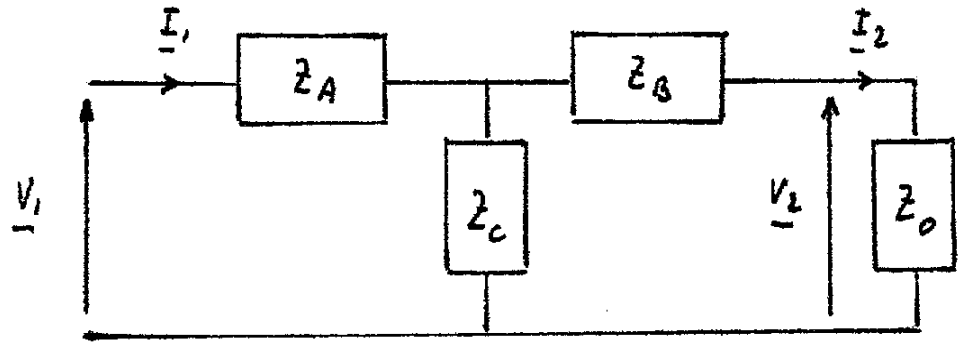
Z_0 imaginaire $\qquad Z_0 \pm j\sqrt{\frac{L^2\omega^2}{4} - \frac{L}{C}}$

Z_0 réel positif : résistant
négatif : dipôle actif (résistance négative)

Z_0 imaginaire positif : inductance
négatif : capacité

La valeur du compsants dépend de la pulsation

I.3.3. Basses fréquences $\omega \leq \frac{2}{\sqrt{LC}}$



$$T = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_0 I_2}{Z_0 I_1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{Z_C}{Z_0 + Z_C + Z_B}$$

$$T = \frac{\frac{1}{JC\omega}}{\frac{1}{JC\omega} + J\frac{L\omega}{2}} + \frac{\sqrt{L}}{C}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_C{}^3}\right)^{1/2} \qquad \text{avec } \omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

soit : $$T = \frac{1}{1 - \frac{2\omega^2}{\omega_C{}^2} \pm 2j\frac{\omega}{\omega_C}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_C{}^2}\right)^{1/2}}$$

On a : $\cos\phi = 1 - \frac{2\omega^2}{\omega_C{}^2}$ d'où $1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2} = 1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_C{}^2}$

et : $$\sin\frac{\phi}{2} = \pm\frac{\omega}{\omega_C}$$

$$T = \frac{1}{\cos\varnothing \pm \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}} = \frac{1}{\cos\phi \pm j\sin\phi} = e^{\pm j\phi}$$

$$|T| = 1 \quad \text{et} \quad \text{Arg } J = \pm\phi$$

or : $|T| = \frac{|I_2|}{|I_1|}$ on en déduit $\frac{Z_0 |I_1|^2}{2} = \frac{Z_0 |I_2|^2}{2}$

La puissance fournie à l'entrée est consommée dans l'impédance de sortie.

I.3.4.

$$\omega > \frac{2}{\sqrt{LC}} \qquad (\omega > \omega_C)$$

$$T = \frac{\frac{1}{JC\omega}}{\frac{1}{JC\omega} + j\frac{L\omega}{2} \pm j\sqrt{\frac{L}{C}}\left(\frac{\omega_2}{\omega_C{}^2} - 1\right)^{1/2}} = \frac{1}{1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_C{}^2} \pm 2\frac{\omega}{\omega_C}\left(\frac{\omega^2}{\omega_C{}^2} - 1\right)^{1/2}}$$

on a : $\operatorname{ch}\Psi = \frac{2\omega^2}{\omega_C{}^2} - 1 \qquad 2\operatorname{ch}^2\left(\frac{\Psi}{2}\right) - 1 = \frac{2\omega^2}{\omega_C{}^2} - 1$

soit : $\operatorname{ch}\left(\frac{\Psi}{2}\right) = \frac{\omega}{\omega_C}$ et $\operatorname{sh}\left(\frac{\Psi}{2}\right) = \pm\left(\frac{\omega^2}{\omega_C{}^2} - 1\right)^{1/2}$

$$T = \frac{1}{-\operatorname{ch}\Psi \pm 2\operatorname{ch}\frac{\Psi}{2}\operatorname{sh}\frac{\Psi}{2}} = \frac{1}{-\operatorname{ch}\Psi \pm \operatorname{sh}\Psi} = -e^{\pm\Psi}$$

$$|T| = e^{\pm\Psi} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Arg} T = \pm\pi$$

I.3.5.

Soit $x = \frac{\omega}{\omega_C}$

$x < 1$ choisissons $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_C{}^2}}$ et $\phi > 0$ $(0 \le \phi \le \pi)$

$$\operatorname{Sin}\left(\frac{\phi}{2}\right) = x \qquad \phi = +2\operatorname{Arc\,sin}(x)$$

On a : $T = \frac{1}{\cos\phi + J\sin\phi} = e^{-j\phi}$

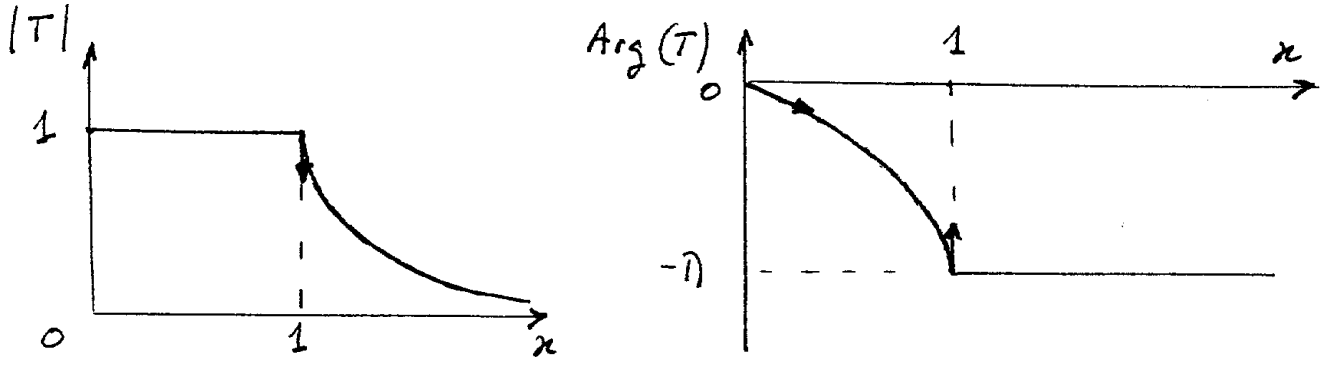
Soit : $|T| = 1$ et $\operatorname{Arg}(T) = -\phi = -2\operatorname{Arc\,Sin}(x)$

$x > 1$ choisissons $Z_0 = +j\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_C{}^2} - 1}$ et $\psi > 0$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\Psi}{2}\right) = x \qquad \Psi = +2\operatorname{Arg\,ch}(x)$$

On a : $T = \frac{1}{-\operatorname{ch}\Psi - \operatorname{sh}\Psi} = -e^{-\Psi}$

Soit : $|T| = e^{-\Psi}$ et $\operatorname{Arg}(T) = -\pi$ (par continuité on choisit $-\pi$)

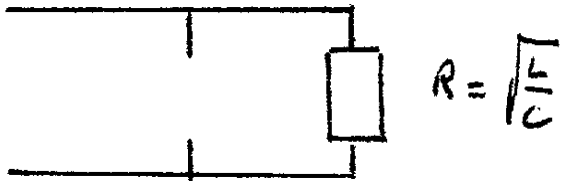


Le filtre chargé, à toute fréquence, par son impédance caractéristique est un filtre passe-bas.

Un raisonnement qualitatif permet de retrouver directement le caractère passe-bas du filtre.

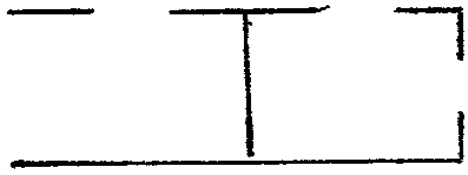
Quand : $\omega \to 0$ on a $\frac{L\omega}{2} \to 0$ $\frac{1}{C\omega} \to \infty$ $Z_0 \to \infty$

d'où l'équivalence.



Quand : $\omega \to \infty$ on a $\frac{L\omega}{2} \to \infty$ $\frac{1}{C\omega} \to 0$ $Z_0 \to \infty$

d'où l'équivalence.



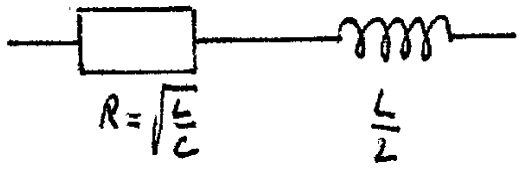
Il s'agit bien d'un filtre passe-bas.

Réalisation approchée de l'impédance caractéristique :

quand $\omega \to 0$ $Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$

quand $\omega \to \infty$ $Z_0 \approx j\frac{L\omega}{2}$

On prendra donc :



Il y aura un écart important dans le voisinage de $\omega = \omega_C$ entre l'étude théorique et le comportement du dipôle réel.

PARTIE II - PROPAGATION D'ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS UN CÂBLE COAXIAL

II.1. ÉQUILIBRE ÉLECTROSTATIQUE

II.1.1. Soit un point M ; le plan méridien et le plan perpendiculaire à l'axe 0z passant par le point M sont des plans de symétrie pour la distribution de charges : ce sont aussi des plans de symétrie pour le champ électrique : $\vec{E}(M)$ appartient à l'intersection des 2 plans, $\vec{E}(M)$ est donc radical.

Il y a invariance de la distribution de charges par rotation d'axe 0z et par translation parallèles à 0z : E ne dépend pas de θ et z.

Conclusion : $\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}$

Énoncé du théorème de Gauss : le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée est égale au quotient de la charge iintérieure par la permittivité du vide ε_0.

Expression de la fonction E(r) :
La surface de Gauss est un cylindre à base circulaire d'axe Oz de rayon r, limité par deux plans perpendiculaires à l'axe Oz de côtes z_1 et z_2 ($z_2 > z_1$).

Flux sortant : $(z_2 - z_1)\,\pi r\,E(r)$

Charge intérieure : 0 pour $r < a$ et $r > b$

$$Q\,\frac{(Z_2 - Z_1)}{l} \text{ pour } a < r < b$$

D'où $E(r) = O$ pour $r < a$ et $r > b$

$$E(r) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r\,l} \text{ pour } a < r < b$$

II.1.2. **Relations entre champ et potentiel électrostatiques**

$$\vec{E} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\ V$$

$$\int_A^B \vec{E}.\,\vec{dl} = V(A) - V(B) \text{ (intégrale sur un chemin allant de A à B)}$$

Pour le cas étudié :

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = E(r)\ ;\ \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0\ ;\ \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 : V \text{ n'est fonction que du r.}$$

pour $r < a$ $\quad V = \text{Cste} = V_1$

$r > b$ $\quad V = \text{Cste} = V_2$

$a < r < b$ $\quad \dfrac{dV}{dr} = -\dfrac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,l\,r}$

$$V - V_1 = -\frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,l}\ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

D.d.p. entre les conducteurs :

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Capacité du condensateur :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Capacité du câble par unité de longueur :

$$C_0 = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

II.1.3.

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Le théorème de Gauss s'applique au vecteur $\vec{D}$: le flux du $\vec{D}$ surtout d'une surface fermée est égal à la charge intérieure.

Le diélectrique est linéaire homogène isotrope :

$$\vec{D} = \varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\vec{E}$$

$\vec{E}$ est à circulation conservative : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$

A.N. : $C_0 \approx 10^{-10}$ F/m

II.2. RÉGIME STATIONNAIRE

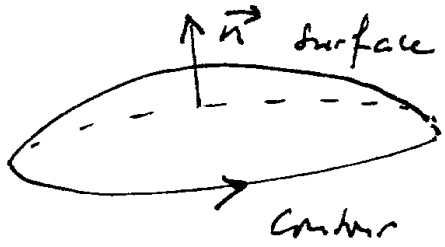
II.2.1. Soit un point M ; le plan méridien passant par M est un plan de symétrie pour la distribution des courants : ce plan est un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique : $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire au plan méridien, $\vec{B}(M)$ est donc orthoradial.

Il y a invariance de la distribution du courants par rotation d'axe 0z et par translation parallèle à 0z : B ne dépend pas de 0 et z.

Conclusion : $\vec{B} = B(r)\,\vec{u_\theta}$

Théorème d'Ampère :
La circulation du champ magnétique sur un contour fermé orienté est égale au produit par la permittivité du vide μ_0 de l'intensité du courant enlacé par le contour.

L'intensité du courant enlacé est égale au flux du vecteur densité du courant à travers une surface s'appuyant sur le contour fermé ; l'orientation de la surface est liée à celle du contour par la règle d'Ampère (voir figure).



Expression de B(r)

Le contour utilisé est un contour circulaire centré sur l'axe 0z, de rayon r et orienté par $\vec{u_\theta}$; le vecteur orientant le disque s'appuyant sur le contour est $\vec{u_z}$.

Circulation de $\vec{B}$: $2\pi r B(r)$

Courant enlacé par le contour :

$r < a$	0
$r > b$	0
$a < r < b$	I

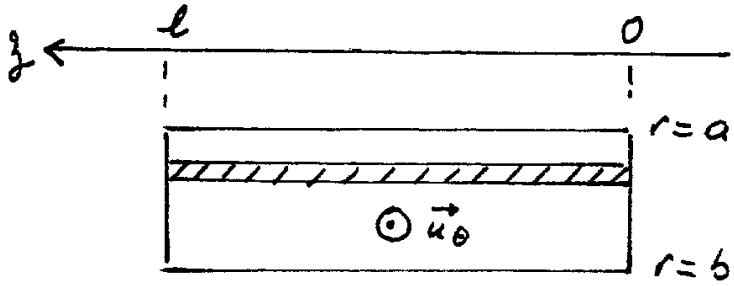
D'où : $\vec{B} = \vec{O}$ pour $r < a$ et $r > b$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u_\theta} \quad \text{pour } a < r < b$$

II.2.2. Le flux du champ magnétique est conservatif (le flux sortant d'une surface fermée est nul).

On calcul le flux de $\vec{B}$ à travers une surface rectangulaire appartenant à un plan méridien et limitée par r = a, r = b et z = o, z = l (limites du câble).

La surface est orientée par $\vec{u_\theta}$; on néglige les effets d'extrémités.



$$\psi = \iint \vec{B}.\vec{ds}$$

$$\vec{ds} = l\,dr\,\vec{u_\theta}$$

$$\psi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$\psi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

Remarque : la méthode de calcul du flux propre tient compte de deux particularités du circuit : 1) la répartition des courants est superficielle ; 2) l'intensité du courant enlacé est l'intensité du courant dans le câble coaxial.

II.2.3. Définition de l'inductance propre $L = \frac{\Psi}{I}$

$$L = \frac{\mu_0 \, l}{2\,\pi} \ln\left(\frac{a}{b}\right) \qquad L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

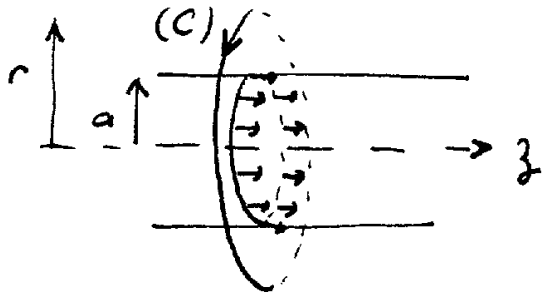
A.N. $L_0 = 2{,}5\ 10^{-7}\ \text{H m}^{-1}$

Remarque : on pouvait utiliser la définition :

$$L = \frac{2\,Um}{I^2} \qquad \text{avec} \qquad Um = \iiint \frac{B^2}{2\,\mu_0}\, d\tau$$

II.3. RÉGIME VARIABLE

II.3.A. Étude à partir des équations de Maxwell



II.3.A.1. *a.*

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \varepsilon_0\,\varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La forme intégrale de l'équation sur le contour fermé (C) de rayon r ($a < r < b$) est :

$$\oint \vec{B}.\,\vec{dl} = \mu_0\, I_{enlacé} + \varepsilon_0\,\varepsilon_r \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\,\vec{ds}$$

$$\oint \vec{B}.\,\vec{dl} = 2\,\pi\, r\, B\,(r\,,\,z\,,\,t)$$

$$\iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.\,\vec{ds} = 0 \qquad (\vec{E} \text{ et } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ sont suivant } \vec{u_r})$$

$$I_{enlacé} = i(t\,,\,z)$$

Doù : $$B\,(r\,,\,z\,,\,t) = \frac{\mu_0\, i\,(t\,,\,z)}{2\,\pi\, r}$$

b. $$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = -\frac{\partial B}{\partial z}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB)\,\overrightarrow{uz}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t}\overrightarrow{u_r} \qquad \overrightarrow{j} = 0 \qquad \text{pour} \qquad a < r < b$$

On obtient : $\frac{\partial}{\partial r}(rB) = 0$ (ce qui permet de retrouver le résultat de la question 1.A.)

et : $$-\frac{\partial B}{\partial z} = \mu_0\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r\frac{\partial E}{\partial t} \qquad (1)$$

II.3.A.2. Équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E} = \frac{\partial E}{\partial z}\overrightarrow{u_0} - \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\overrightarrow{uz} \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$$

On obtient : $$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (2)$$

II.3.A.3. De (1) on déduit : $-\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = \mu_0\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r\frac{\partial^2 E}{\partial t\,\partial z}$

De (2) on déduit : $-\frac{\partial^2 E}{\partial z\,\partial t} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$

d'où : $$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \varepsilon_0\,\mu_0\,\varepsilon_r\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0$$

On remplace B par son expression : $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ on obtient l'expression demandée :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \varepsilon_0\,\mu_0\,\varepsilon_r\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

II.3.A.4. *a.* Calcul analogue à celui de 2.1.1.

$$E(r, t, z) = \frac{\lambda(t, z)}{2\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,r} \qquad (3)$$

b. La conservation de la charge s'écrit, pour le domaine de longueur dz du conducteur 1 :

$$dt\,[i(t, z) - i(t, z + dz)] = \frac{\partial d}{\partial t} \times dt\,dz$$

d'où : $$\frac{\partial \lambda}{\delta t} + \frac{\partial i}{\partial z} = 0$$

c. Dans (1) on remplace E et B par leurs expressions :

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right) = \mu_0\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r\frac{\partial}{\delta t}\left(\frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,r}\right)$$

soit : $$-\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\partial d}{\partial t} \qquad (4)$$

d. On utilise l'éqation (2) où on remplace E et B par leurs expressions :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r r}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)$$

d'où : $$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = -\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \frac{\partial_i}{\partial t} \qquad (5)$$

de (4) et (5) on obtient :

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} = -\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 i}{\partial t \, \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial z \, \partial t}$$

On en déduit l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}$$

II.3.B. **Étude à partir d'un schéma équivalent**

II.3.B.1. Aux bornes de l'inductance :

$$-u(t,z+dz) + u(t,z) = L_0 \, dz \frac{\partial i(t,z)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -L_0 \frac{\partial i}{\partial t}$$

Aux bornes du condensateur :

$$i(t,z) - i(t,z+dz) = C_0 \, dz \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -C_0 \frac{\partial u}{\partial t}$$

II.3.B.2. $$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} \quad ; \quad \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} = -L_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

d'où : $$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

avec $L_0 C_0 = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r$; l'équation de propagation définie en A.3. est bien vérifiée.

Un raisonnement analogue permet d'obtenir :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$$

II.3.C. **Solutions des équations de propagation**

II.3.C.1. $$\frac{1}{v^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0}}$$

v : vitesse de propagation des signaux.

A.N. : $v \approx 200\,000 \text{ kms}^{-1}$

II.3.C.2. Indice 1 : propagation vers les z croissants.
Indice 2 : propagation vers les z décroissants.

II.3.C.3. Soit le changement de variable $\alpha = t - \frac{z}{v}$ $\qquad \beta = t + \frac{z}{v}$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{du_1}{d\alpha} \times -\frac{1}{v} + \frac{du_2}{d\beta} \times \frac{1}{v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{du_1}{d\alpha} + \frac{du_2}{d\beta}$$

De même : $$\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{1}{v}\left(-\frac{di_1}{d\alpha} + \frac{di_2}{d\beta}\right)$$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{di_1}{d\alpha} + \frac{di_2}{d\beta}$$

On remplace les dérivées dans les expressions obtenues à la question B.1. ; on utilise $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ on obtient :

$$\frac{du_1}{d\alpha} - \frac{du_2}{d\beta} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\left(\frac{di_1}{d\alpha} + \frac{di_2}{d\beta}\right)$$

$$\frac{du_1}{d\alpha} + \frac{du_2}{d\beta} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\left(\frac{di_1}{d\alpha} - \frac{di_2}{d\beta}\right)$$

D'où : $$\frac{du_1}{d\alpha} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\,\frac{di_1}{d\alpha} \qquad \frac{du_2}{d\beta} = -\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\,\frac{di_2}{d\beta}$$

En intégrant :

$$u_1 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\,i_1 + u_{0_1} \qquad u_2 = -\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\,i_2 + u_{0_2}$$

La résistance caractéristique R_C est :

$$R_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{t_0}{\varepsilon_0}} \times \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \times \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$R_C \approx 50\ \Omega$$

II.4. QUELQUES ASPECTS DU PHÉNOMÈNE DE PROPAGATION

II.4.A. Propagation de signaux non sinusoïdaux

II.4.A.1. *a.* Pour $t < 0$ et $0 \le z \le l$ les fonctions u_1, u_2, i_1, i_2 sont identiquement nulles.

Conditions aux limites en $z = l$

$$u_s(t) = R_u\, i_s(t) \qquad (\text{valable } \forall t)$$

$$u_s(t) = u_1\left(t - \frac{l}{v}\right) + u_2\left(t + \frac{l}{v}\right)$$

$$i_s(t) = i_1\left(t - \frac{l}{v}\right) + i_2\left(t + \frac{l}{v}\right)$$

$$i_s(t) = \frac{1}{R_c}\left(u_1\left(t - \frac{l}{v}\right) - u_2\left(t + \frac{l}{v}\right)\right)$$

On en déduit :

$$u_2\left(t + \frac{l}{v}\right) = u_1\left(t - \frac{l}{v}\right) \times \frac{R_u - R_c}{R_u + R_c} \qquad (\text{valable } \forall t)$$

En faisant un changement d'origine des temps on obtient :

$$u_2(t) = u_1\left(t - \frac{2l}{v}\right) \times \frac{R_u - R_c}{R_u + R_c}$$

(l'expression est valable quelque soit t)

Conditions aux limites en $z = 0$

$t < 0$ $\qquad i_e(t) = 0 \qquad u_e(t) = 0$

$t \ge 0$ $\qquad u_e(t) = E - R_g\, i_e(t)$

$$i_e(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{1}{R_c}\left(u_1(t) - u_2(t)\right)$$

$$u_e(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

On obtient : $$u_1(t) = E\,\frac{R_c}{R_c + R_g} + u_2(t)\,\frac{R_g - R_c}{R_g + R_c} \qquad (6)$$

pour $$R_g = R_c$$

$$u_1(t) = \frac{E}{2}$$

b. La fonction $u_1(t)$ est définie par :

$$t < 0 \qquad u_1(t) = 0$$

$$t \ge 0 \qquad u_1(t) = \frac{E}{2}$$

La fonction $u_2(t)$ est définie par :

$$t < \frac{2l}{v} \qquad u_2(t) = 0$$

$$t \geq \frac{2l}{v} \qquad u_2(t) = \frac{E}{2} = \frac{R_u - R_c}{R_u + R_c}$$

Soit pour $R_u = 0$ $\qquad u_2(t) = -\frac{E}{2}$

$R_u \to \infty$ $\qquad u_2(t) = \frac{E}{2}$

$R_u = R_c$ $\qquad u_2(t) = 0$

D'où la fonction $u_e(t) = u_1(t) + u_2(t)$

$t < 0$ $\qquad u_e(t) = 1$

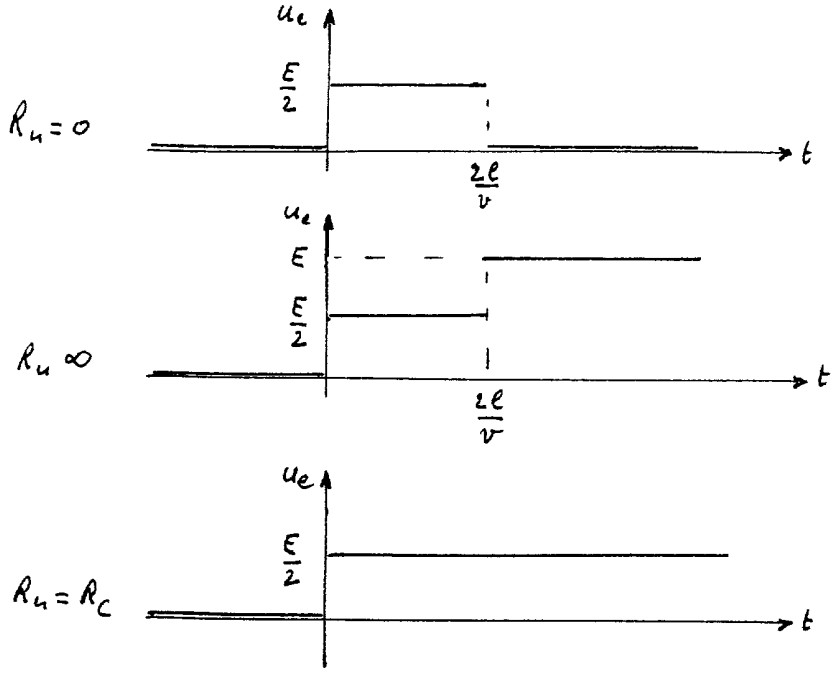
$0 \leq t < \frac{2l}{v}$ $\qquad u_e(t) = \frac{E}{2}$

$t \geq \frac{2l}{v}$ $\qquad R_u = 0 \qquad e_e(t) = 0$

$R_u \to \infty \qquad u_e(t) = E$

$R_u = R_c \qquad u_e(t) = \frac{E}{2}$

Le tracé des graphes $u_e(t)$:



Commentaire : $u_1(t) = \frac{E}{2}$ pour $t \geq 0$: l'onde (1) transporte la valeur constante $\frac{E}{2}$ à partir de t = 0.

$u_2(t) = u_1\left(t - \frac{2l}{v}\right) \times \frac{R_u - R_c}{R_u + R_c}$: l'onde (2) est produite par réflexion de l'onde (1) ; $\frac{R_u - R_c}{R_u + R_c}$ est le coefficient de réflexion ; $\frac{2l}{v}$ est le retard de (2) par rapport à (1) en z = 0.

Cas particuliers : $R_u = 0$ réflexion totale avec changement de signe.

$R_u \infty$ réflexion totale sans changement de signe.

$R_u = R_c$ pas de réflexion : ligne adaptée.

II.4.A.2. *a.* α) D'après 1.a. on a :

$$u_2(t) = u_1\left(t - \frac{2l}{v}\right) \times \frac{R_u - R_c}{R_u\ R_c}$$

$$u_1(t) = E\frac{R_c}{R_c + R_g} + u_2(t)\frac{R_g - R_c}{R_g + R_c}$$

On voit que, dans le cas général, l'onde (1) est produite par le générateur (terme $E\frac{R_c}{R_c + R_g}$) et par réflexion de l'onde (2) (coefficient de réflexion $\frac{R_g - R_c}{R_g + R_c}$).

A $t = 0_+$ on a :

$$u_2\left(0_+\right) = 0 \qquad u_2\left(0_t\right) = E\frac{R_c}{R_c + R_g}$$

d'où : $$u_e\left(0_+\right) = E\frac{R_0}{R_c + R_g}$$

β) On recherche un état stationnaire.

On a : $$u_2(\infty) = u_1(\infty) \times \frac{R_u - R_c}{R_u + R_c}$$

et $$u_1(\infty) = E\frac{R_c}{R_c + R_g} + u_2(\infty) \times \frac{R_u - R_c}{R_u + R_c}$$

On obtient : $u_e(\infty) = u_1(\infty) + u_2(\infty) = E \times \frac{R_u}{R_g + R_u}$

(résultat obtenu directement en considérant le régime continu).

b. A l'instant de la fermeture, le circuit se comporte comme une résistance R_c pour l'onde (1).

Au cours du temps le circuit est le siège de réflexion multiples : ces réflexions modifient la valeur de u_e aux instants $\frac{2l}{v} \times p$ ($p \in N$).

Lorsque $t \to \infty$, elles conduisent vers un état stationnaire caractérisé par :

$$u_e(\infty) = \frac{R_u}{R_g + R_u} E$$

u_s est modifié aux instants $(2p+1)\frac{l}{v}$ et tend évidemment vers la même valeur limite.

La suite des valeurs prises par u_e pourrait s'obtenir à partir des équations obtenues au 2.a.α).

II.4.A.3. *a.* A l'entrée on a d'après l'équation (6) obtenue au 1.a. :

$$u_1(t) = E\frac{R_c}{R_g + R_c} + u_2(t)\frac{R_g - R_c}{R_g + R_c}$$

L'approximation $R_g >> R_c$ donne :

$$u_1(t) = u_2(t) \text{ équation valable } \forall t \qquad (7)$$

b. Pour $t < 0$ on a un régime stationnaire correspondant à $R_n \infty$: d'après la question 2.b. on a : $u_s = E$; on a aussi $i_s = 0$

$$u_s = E \implies u_1\left(t - \frac{1}{v}\right) + u_2\left(t + \frac{1}{v}\right) = E$$

$$i_s = 0 \implies u_1\left(t - \frac{1}{v}\right) = u_2\left(t + \frac{1}{v}\right)$$

d'où : $u_2\left(t - \frac{1}{v}\right) = \frac{E}{2}$ pour $t < 0$

D'après l'équation (7) obtenue au 3.a. :

$$u_1(t) = u_2(t)$$

soit : $u_1\left(t - \frac{1}{v}\right) = u_2\left(t - \frac{1}{v}\right)$

avec : $u_2\left(t + \frac{1}{v}\right) = \frac{E}{2}$ pour $t < 0$

c'est-à-dire : $u_2\left(t - \frac{1}{v}\right) = \frac{E}{2}$ pour $t < \frac{2l}{v}$

on a donc : $u_1\left(t - \frac{1}{v}\right) = \frac{E}{2}$ pour $t < \frac{2l}{v}$

Pour $t \geq 0$ on a $u_s = R_c$ is

$$u_1\left(t-\frac{1}{v}\right)+u_2\left(t+\frac{1}{v}\right)=u_1\left(t-\frac{1}{v}\right)-u_2\left(t=\frac{1}{v}\right)$$

d'où : $u_2\left(t+\frac{1}{v}\right)=0$ pour $t \leq 0$

on sait que : $u_1\left(t-\frac{1}{v}\right)=u_2\left(t-\frac{1}{v}\right)$ d'après (7)

$u_2\left(t+\frac{1}{v}\right)=0$ pour $t \geq 0$ implique

$u_2\left(t-\frac{1}{v}\right)=0$ pour $t \geq \frac{2l}{v}$

d'où : $u_1\left(t-\frac{1}{v}\right)=0$ pour $t \geq \frac{2l}{v}$

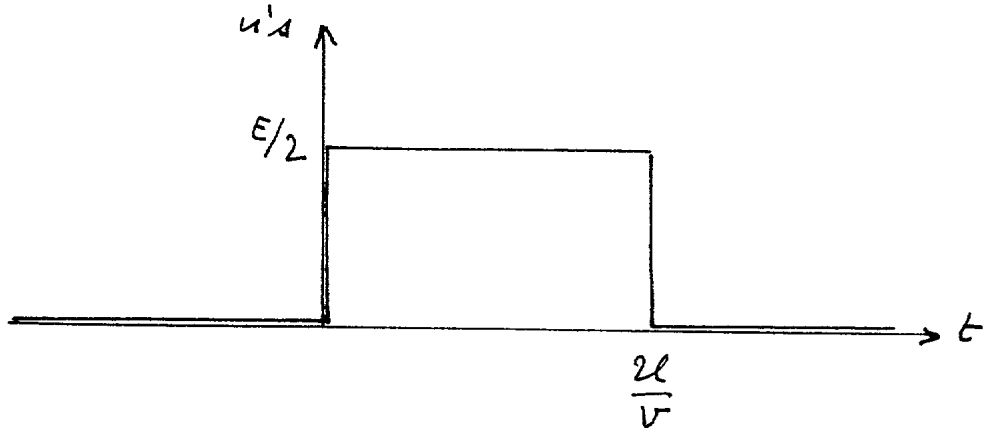
c. Évolution de u'_s

on a : $u'_s = 0$ pour $t < 0$

$u'_s = u_s$ pour $t \leq 0$

soit : $u'_s = u_1\left(t-\frac{1}{v}\right)+u_2\left(t+\frac{1}{v}\right)$

D'où le graphe de u'_s connaissant les fonctions $u_1\left(t-\frac{1}{v}\right)$ et $u_2\left(t+\frac{1}{v}\right)$.



On a bien une impulsion de tension de hauteur $\frac{E}{2}$ et de durée $\frac{2l}{v}$.

II.4.B. **Propagation de signaux sinusoïdaux**

II.4.B.1. *a.* On a :

$$I\begin{cases}\underline{U}_e = \underline{U}_{10} + \underline{U}_{20}\\ R_c\,\underline{I}_e = \underline{U}_{10} - \underline{U}_{20}\end{cases}$$

$$II\begin{cases}\underline{U}_s = \underline{U}_{10}\,e^{-jkl} + \underline{U}_{20}\,e^{jkl}\\ R_c\,\underline{I}_s = \underline{U}_{10}\,e^{-jkl} - \underline{U}_{20}\,e^{jkl}\end{cases}$$

De II on obtient : $\underline{U}_{10}\, e^{-jkl} = \frac{1}{2}(\underline{U}_s + R_c\, \underline{I}_s)$

$$\underline{U}_{20}\, e^{jkl} = \frac{1}{2}(\underline{U}_s - R_c\, \underline{I}_s)$$

On remplace $\underline{U}_{10}$ et $\underline{U}_{20}$ dans les équations I.

d'où : $\underline{U}_e = \underline{U}_s \cos kl + \underline{I}_s\, j\, R_c \sin kl$

$$\underline{I}_e = \underline{U}_s\, j\, \frac{\sin kl}{RC} + \underline{I}_s \cos kl$$

b.
$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_e} = \frac{R_n \cos kl + j\, R_c \sin kl}{\cos kl + j\, \frac{R_n}{R_c} \sin kl}$$

II.4.B.2.
$$\underline{r}_s = \frac{\underline{U}_{20}\, e^{jkl}}{\underline{U}_{10}\, e^{-jkl}} = \frac{\underline{U}_s - R_c\, \underline{I}_s}{\underline{U}_s + R_c\, \underline{I}_s} = \frac{R_n - R_c}{R_n + R_c}$$

II.4.B.3. *a.* α. $R_n = R_c$ $\underline{Z}_e = R_c$ $\underline{r}_s = 0$

Pas d'onde réfléchie ; comportement purement résistif du câble (câble adapté avec uniquement l'onde progressive directe).

β. $R_n = 0$ $\underline{Z}_e = j\, R_c\, tg\, kl$ $\underline{r}_s = -1$

Réflexion totale avec déphasage de π.

L'impédance est purement réactive :

inductive si tg kl > 0 soit $n\frac{1}{2} < l < \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}$

capacitive si tg kl < 0 soit $\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} < l < \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}$ $(n \in N)$

Si $kl = n\pi$ soit $l = n\frac{1}{2}$ $\underline{Z}_e = 0$: le câble se comporte comme un circuit résonnant série.

Si $kl = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ soit $l = \left(n + \frac{1}{2}\right)$ $\underline{Z}_e \to \infty$: le câble se comporte comme un circuit résonnant parallèle.

γ. $R_n \to \infty$ $\underline{Z}_e = -j\, R_c\, c_0\, tg\, kl$ $\underline{r}_s = +1$

Réflexion totale sans déphasage.

L'impédance est purement réactive.

inductive si $\omega \operatorname{tg} kl < 0$ soit $\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} < l < (n+1)\frac{1}{2}$

capacitive si $\omega \operatorname{tg} kl > 0$ soit $n\frac{1}{2} < l < \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}$

Si $kl = n\pi\iota$ $\quad l = n\frac{1}{2}$ $\quad \underline{Z}_e \to \infty$ circuit résonnant parallèle

Si $kl = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ $\quad l = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}$ $\quad \underline{Z}_e = 0$ circuit résonnant série

II.4.B.3. *b.* α. $\quad \underline{r}_s = 0$

$$\underline{u} = u_1 = \underline{U}_e\, e^{j(\omega t - kz)} \quad \underline{i} = \frac{\underline{U}_e}{R_c}\, e^{j(\omega t - kz)}$$

On a uniquement l'onde progressive directe sur le câble.

β. $\quad \underline{r}_s = -1$

En appliquant le résultat de la question 1.a. à l'abscisse z on a (en tenant compte de $\underline{U}_0 = 0$).

$$\underline{U}(z) = \underline{I}_s\, j\, R_c \sin k(l - z)$$

$$\underline{I}(z) = \underline{I}_s \cos k(l - z)$$

d'où : $\quad \underline{u} = \underline{I}_s\, j\, R_c \sin k(l - z)\, e^{j\omega t}$

$$\underline{i} = \underline{I}_s \cos k(l - z)\, e^{j\omega t}$$

Il s'agit d'une onde stationnaire : les positions des centres de tension vérifient $z = l - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ et les nœuds $z = l - \frac{\lambda}{2}$; les positions des centres et nœuds de courant sont inversés.

γ. $\quad r_s = +1$

On applique le résultat de la question 1.a. à l'abscisse z (en tenant compte de $\underline{I}_l = 0$)

$$\underline{U}(z) = \underline{U}\, s \cos k(l - z) \qquad \underline{I}(z) = \underline{U}_s\, j\, \frac{\sin k(l - z)}{R_C}$$

d'où $\quad \underline{u} = \underline{U}_s \cos k(l - z)\, e^{j\omega t}$

$$\underline{i} = \frac{\underline{U}_s}{R_C}\, j \sin k(l - z)\, e^{j\omega t}$$

On a une onde stationnaire dont les centres et les nœuds de tension sont inversés par rapport au cas β.

II.4.B.4. *a.* On utilise le résultat de la question 1.a. à l'abscisse z (avec $R_u \underline{I}_s = \underline{U}_s$).

$$\underline{U}(z) = \underline{I}_s \left(R_u \cos k(l-z) + j R_c \sin k(l-z) \right)$$

$$\underline{I}(z) = \frac{\underline{I}_s}{R_c} \left(R_c \cos k(l-z) + j R_u \sin k(l-z) \right)$$

b. $$|\underline{U}(z)|^2 = |\underline{I}_s|^2 \left(R_n^2 \cos^2 k(l-z) + R_c^2 \sin^2 k(l-z) \right)$$

$$|\underline{I}(z)|^2 = \frac{|\underline{I}_s|^2}{R_c} \left(R_n^2 \cos^2 k(l-z) + R_u^2 \sin^2 k(l-z) \right)$$

Si $R_u > R_c$ $|\underline{U}| = |\underline{U}|_{max}$ pour $k(l-z) = n\pi$ soit $z = l - n\frac{1}{2}$

$$|\underline{U}| = |\underline{U}|_{min} \text{ pour } k(l-z) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \text{ soit } z = l - \left(n\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}$$

Si $R_n > R_c$ $v = \frac{R_u}{R_c}$; si $R_n < R_c$ $v = \frac{R_c}{R_n}$

On a $|\underline{r}_s| = \frac{v-1}{v+1}$ et $v = \frac{1 + |\underline{r}_s|}{1 - |\underline{r}_s|}$

Dans le cas général les ondes peuvent être vues comme la superposition d'une onde stationnaire et d'une onde progressive directe. Cet état est caractérisé par le taux d'ondes stationnaires : celui-ci vaut 1 dans le cas α, il est infini dans les cas β et γ. Ce taux constitue un moyen de mesure de l'adaptation du récepteur à la ligne.

Agrégation
(Concours Interne)

OPTION : CHIMIE
Composition avec exercices d'application - Session : 1992

Partie A : Étude du fer métallique

I. Généralités

I.1. Fe_α.

I.2. Fe_α car transitions $[Fe_\alpha \rightarrow Fe_\gamma \rightarrow Fe_\alpha] \rightarrow Fe_{liquide}$.
Fe_{solide}

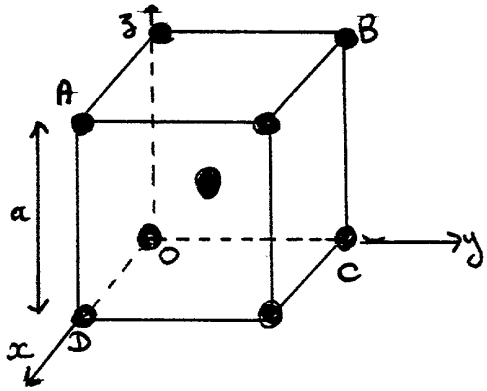
On a de nouveau Fe_α lors de la fusion.

I.3. Oxydes : Hematite ($Fe_2\ O_3$) Magnétite ($Fe_3\ O_4$) Limonite [Fe O (OH), $nH_2\ O$].

Carbonate : Siderite (Fe CO_3).

II. Étude cristallographique du fer α

II.1



II.2 Non.

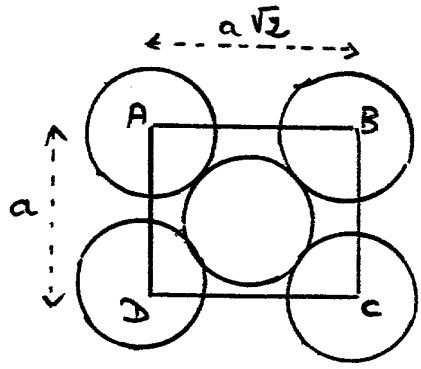
– La maille conventionnelle représentée ici contient $1 + 8 \times \frac{1}{8} = 2$ atomes de fer,

– Or, une maille élémentaire ne contient qu'un seul motif.

II.3. Paramètre de la maille = arête du cube dessiné ci-dessus.

II.4. Coordinence 8 : 1 atome de Fer a 8 plus proches voisins $\left(\text{à } \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

II.5. Le plan (1, 1, 0) correspond (par exemple) au plan passant par les points (A, B, C, D).



Il y a «contact» entre les atomes selon les diagonales du rectangle ABCD.

II.6. $4\,R_{Fe\alpha} = a\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{Fe\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{4}}$

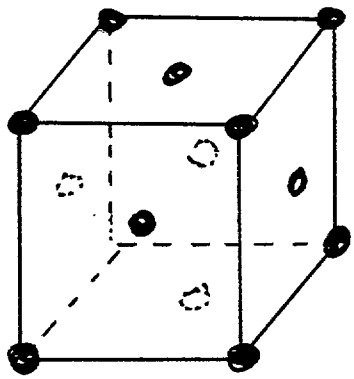
$\underline{\text{Compacité}}\ C_\alpha = \dfrac{2 \times \frac{4}{3}\pi R_{Fe\alpha}^3}{a^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_\alpha = 0{,}68}$

II.7.

$$\mu_\alpha = \frac{\text{masse d'une maille}}{\text{volume d'une maille}} = \frac{2\,\frac{M_{Fe}}{\mathcal{N}}}{a^3} = \frac{2\,M_{Fe}\,3\sqrt{3}}{\mathcal{N}\,R_{Fe\alpha}^3\,4^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_\alpha = 7520\ \text{kg.m}^{-3}}$$

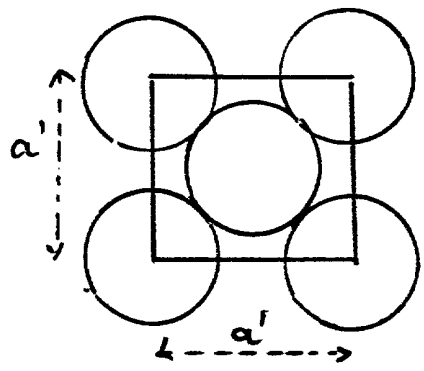
III. Étude cristallographique du fer γ

III.1.



III.2. Coordinence 12 : chaque atome a 12 plus proches voisins $\left(\text{à } \frac{a'\sqrt{2}}{2}\right)$.

III.3.



III.4. Il y a «contact» selon une diagonale de chaque face $\Rightarrow 4\,R_{Fe\gamma} = a'\sqrt{2}$

$$\boxed{R_{Fe_\gamma} = \frac{a'\sqrt{2}}{4}}$$

III.5. nb de motifs par maille conventionnelle

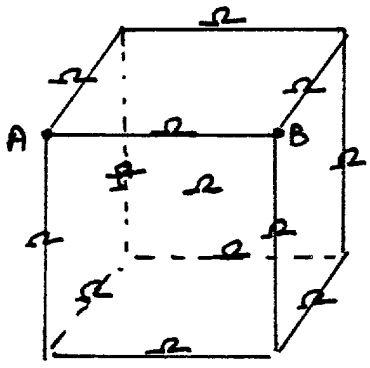
$$C_\gamma = \frac{4 \times \frac{4}{3}\pi R_{Fe\gamma}}{a'^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_\gamma = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0{,}74 > C_\alpha}$$

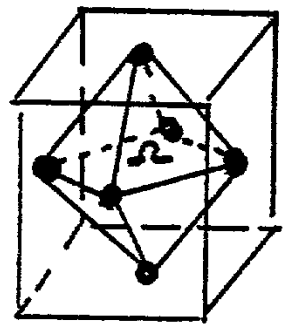
réseau cfc plus compact que c.c (voir coordinence)

III.6. III.6.a. Études des cavités octaédriques

III.6.a.α. Une cavité octaédrique est un interstice du réseau délimité par le centre des six atomes de fer (voir schéma) placés aux sommets d'un octaèdre (régulier).

III.6.a.β.



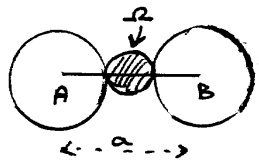


III.6.a.γ. centre du cube

Il y a 4 cavités octaédriques : $1 + 12 \times \frac{1}{4}$.

milieu de chaque arête

III.6.a.δ. $2\,R_\Omega + 2\,R_{Fe\gamma} = a'$ 'une arête du cube



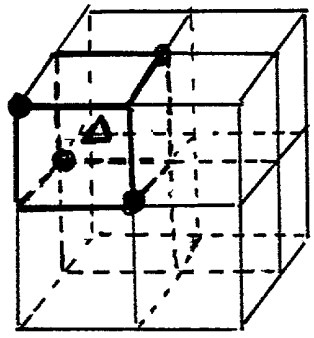
$\Downarrow$

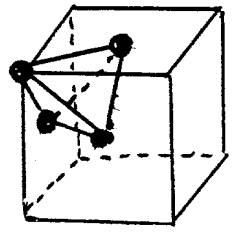
$$\boxed{R_\Omega = \frac{a'}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0{,}146\,a'}$$

III.6.b. Étude des cavités tétraédriques

III.6.b.α. Interstice du réseau délimité par le centre de 4 atomes de fer placés aux sommets d'un tétraèdre (régulier).

III.6.b.β. 1 seule cavité tétraédrique est représentée ici : il y en a une au centre de chaque cube d'arête $\frac{a}{2}$.





III.6.b.γ. 8 cavités tétraédriques (voir ci-dessus).

III.6.b.δ. $R_{Fe\gamma} + R_\Delta = \dfrac{a' \sqrt{3}}{4}$

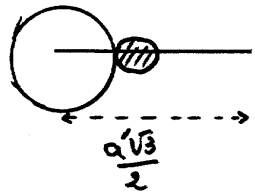


schéma de la diagonale d'un cube d'arête $\dfrac{a'}{2}$

$\Downarrow$

$$\boxed{R_\Delta = \frac{a'}{4}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0{,}079\ a'}$$

IV. **Cristal réel de fer**

IV.1. IV.1.a. Défaut de Schottky : un atome de fer a quitté sa position normale dans le réseau. Il y a création d'une lacune :

$$\boxed{Fe} \rightarrow \boxed{\ \ } + \underset{\uparrow}{Fe}$$

atome éliminé du réseau

IV.1.b. Défaut d'anti-Schottky : un atome de fer extérieur vient s'insérer dans une cavité :

$$Fe \rightarrow (Fe)$$

IV.1.c. Défaut de Frenkel : un atome de fer quitte sa position normale dans le réseau pour se placer dans une cavité :

$$\boxed{Fe} \rightarrow \boxed{\ \ } + (Fe)$$

Remarque : $\boxed{Fe}$: site normal du réseau occupé — $\boxed{\ \ }$ Lacune (site normal vide)

$\boxed{Fe}$: cavité Ω ou Δ occupée — ◯ Cavité vide

IV.2. IV.2.a. $H = n\,E$

IV.2.b. nb de complexions $\omega = C_N^n$
(répartition de n défauts sur N sites)

$$\downarrow$$

$$S = K\,Ln\,\omega = K\,Ln\,\frac{N\,!}{n\,!\,(N-n)\,!}$$

La réponse $S = K\,Ln\,\dfrac{(N+n)\,!}{n\,!\,N\,!}$ est correcte $\left(\omega = C_{N+n}^n\right)$

IV.2.c. $G = H - TS \quad \Rightarrow \quad \boxed{G = nE - kT\left(N\,Ln\,N - n\,Ln\,n - (N-n)\,Ln\,(N-n)\right)}$

IV.2.d. $\frac{dG}{dn} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = E - KT \, Ln \frac{N-n}{n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = N \exp\left(-\frac{E}{KT}\right)}$ car $n << N$.

On obtient une répartition selon la statistique de Boltzman.

V. Propriétés magnétiques du fer solide

V.1. Le paramagnétisme du fer est essentiellement dû à l'existence d'un moment magnétique de spin non nul.

V.2. Les moments magnétiques ont tendance à s'aligner pour donner des domaines de Weiss où les atomes ont leurs moments magnétiques parallèles.

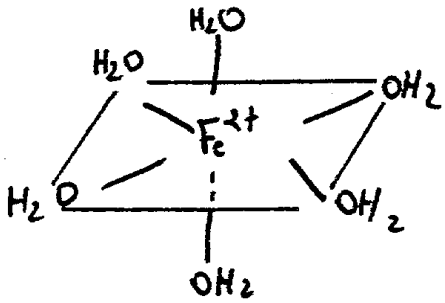
V.3. Disparition des domaines de Weiss au point de Curie (transition ferromagnétique → paramagnétique).

V.4. Cobalt Nickel.

Partie B : Étude des ions ferreux et ferrique complexés en solution aqueuse

I. Comportement acido-basique des ions ferreux et ferrique complexés en solution aqueuse

I.1. I.1.a.



idem pour $Fe(H_2O)_6^{3+}$: {complexe octaédrique

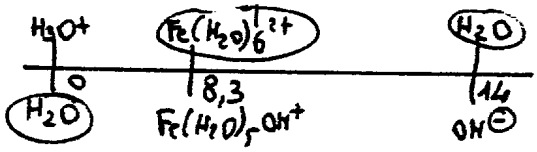
I.1.b. $Fe(H_2O)_6^{2+}$: cation hexaqua fer (II),

$Fe(H_2O)_6^{3+}$: cation hexaqua fer (III).

I.2. I.2.a. Base conjuguée de Fe_{aq}^{2+} : $Fe(H_2O)_5 OH^+$.

I.2.b. Pour Fe_{aq}^{3+} : couple $\left(Fe(H_2O)_6^{3+} / Fe(H_2O)_5 OH^{2+}\right)$

et couple $\left(Fe(H_2O)_5 OH^{2+} / Fe(H_2O)_4 (OH)_2^+\right)$.

I.3. 

$\Rightarrow$ RP : $Fe_{aq}^{2+} + H_2O \leftrightarrows Fe(H_2O)_5 OH^+ + H_3O^+$

10^{-1}

$10^{-1} - \alpha$ α α

$K_a = \frac{\alpha^2}{10^{-1} - \alpha}$ avec $\alpha << 10^{-1} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = 10^{-3,3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{pH = 4,65}$.

On vérifie que la RPS (autoprotolyse de l'eau) ne modifie pas la RP.

Remarque : On pouvait également utiliser la formule $pH = \frac{1}{\alpha}(pK_a + pC_o)$ en la justifiant.

II. Étude de la solubilité des hydroxydes $Fe(OH)_2$ et $Fe(OH)_3$

II.1. II.1.a. $s_{Fe(OH)_2} = [Fe^{2+}]$ $\quad [OH^-] = 2\,[Fe^{2+}] + [H_3O^+]$ $\quad K_S = [Fe^{2+}]\,[OH^-]^2$

Approximation : $[H_3O^+] \ll 2\,s \quad \Rightarrow \quad 4\,s^3 = K_S \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_{Fe(OH)_2} = \left(\frac{K_S\,(Fe(OH)^2}{4}\right)^{1/3}}$

$\boxed{s_{Fe(OH)_2} = 6{,}3\ 10^{-6}\ mol\ l^{-1}}$ Approximation vérifiée car $[H_3O^+] < 10^{-7} = pH$ basique.

$s_{Fe(OH)_3} = [Fe^{3+}]$ et $[OH–] = 3\,[Fe^{3+}] + [H_3O^+]$ $\quad K_S = [Fe^{3+}]\,[OH^-]^3$

Approximation : $3\,s \ll [H_3O^+]$ car $K_s = 10^{-37} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_{Fe(OH)_3} = \frac{K_S\left(Fe(OH)_3\right)}{(10-7)^3}}$

$[OH^-] = [H_3O^+] \quad \Rightarrow \quad pH = 7$

$\boxed{s_{Fe(OH)_3} = 10^{-16}\ mol^{-1}}$ $\Rightarrow$ Approximation vérifiée.

II.1.b. $\boxed{pH_{Fe(OH)_2} = 9{,}1}$ $\qquad \boxed{pH_{Fe(OH)_3} = 7}$

II.2. $$\begin{cases} s' = [Fe^{3+}] + \left[Fe\,(H_2O)_5\,OH^{2+}\right] + \left[Fe\,(H_2O)_4\,(OH)_2^+\right] \qquad K_S = [Fe^{3+}]\,[OH^-]^3 \\ [OH^-] = [H_3O^+] + 3\,[Fe^{3+}] + 2\left[Fe\,(H_2O)_5\,OH^{2+}\right] + \left[Fe\,(H_2O)_4\,(OH)_2^+\right] \end{cases}$$

Approximation : pH reste proche de 7 $\Rightarrow$ $Fe\,(H_2O)_4\,(OH)_2^+$ majoritaire

d'où $s' = \left[Fe(H_2O)_4\,(OH)_2^+\right] = \frac{Ka_1\,Ka_2}{[H_3O^+]}\,[Fe^{3+}] = \frac{Ka_1\,Ka_2\,K_S}{Ke^2\,[OH^-]}$

Il faut calculer le pH

$$\frac{Ke}{[H_3O^+]} = [H_3O^+]\left(1 + \frac{Ka_1\,Ka_2\,K_S}{Ke^3}\right) \quad \Rightarrow \quad [H_3O^+] = \left(\frac{Ke}{1 + \frac{Ka_1\,Ka_2\,K_S}{Ke^3}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \textbf{pH = 7,05}$$

Approx. vérifiée ⇑

d'où $\boxed{s' = 2{,}2\ 10^{-8}\ mol.l^{-1}}$ $\qquad$ s' > s car hydrolyse des ions Fe^{3+}.

III. Tracé du diagramme potentiel-pH du fer à 298 K

III.1. pH de précipitation de $Fe[OH]_2$ $\begin{cases} pH = 7{,}0 & \text{si } Co = 10^{-1}\ mol l^{-1} \\ pH = 9{,}5 & \text{si } Co = 10^{-6}\ mol l^{-1} \end{cases}$

$$E = E^0 (Fe^{2+}/Fe) + 0{,}03 \log [Fe^{2+}] \qquad \text{avec} \begin{cases} [Fe^{2+}] = Co & \text{si pH} < \text{pH précipitation} \\ [Fe^{2+}] + \dfrac{K_S}{Ke^2} [H_3O^+]_2 & \text{si pH} > \text{pH précipitation} \end{cases}$$

$Co = 10^{-1}$ mol l^{-1}		$Co = 10^{-6}$ mol l^{-1}	
pH < 7	E = – 0,46 V	pH < 9,5	E = – 0,61 V
pH > 7	E = – 0,04 – 0,06 pH	pH > 9,5	E = – 0,04 – 0,06 pH

III.2.

pH de précipitation de $Fe[OH]_3$: pH = 2 si $Co = 10^{-1}$ mol l^{-1} ; pH = 3,7 si $Co = 10^{-6}$ mol l^{-1}

$$E = E^0 (Fe^{3+}/Fe^{2+}) + 0{,}06 \log \frac{[Fe^{3+}]}{[Fe^{2+}]}$$

avec
$$\begin{cases} [Fe^{3+}] = Co \text{ et } [Fe^{2+}] = Co & \text{si pH} < \text{pH précipitation} \\ [Fe^{2+}] = \dfrac{K_S\left(Fe(OH)_3\right)}{Ke^3} [H_3O^+]^3 \quad \text{et} \\ [Fe^{2+}] = \dfrac{K_S\left(Fe(OH)_2\right)[H_3O^+]^2}{Ke^2} & \text{si pH} > \text{pH précipitation} \end{cases}$$

$Co = 10^{-1}$ mol l^{-1}		$Co = 10^{-6}$ mol l^{-1}	
pH < 2	E = – 0,77 V	pH < 3,7	E = 0,77 V
2 < pH < 7	E = 1,13 – 0,18 pH	3,7 < pH < 9,5	E = 1,43 – 0,18 pH
7 < pH	E = 0,29 – 0,06 pH	9,5 < pH	E = 0,29 – 0,06 pH

III.3.

III.4. Voir Graphe (page suivante)

III.5.

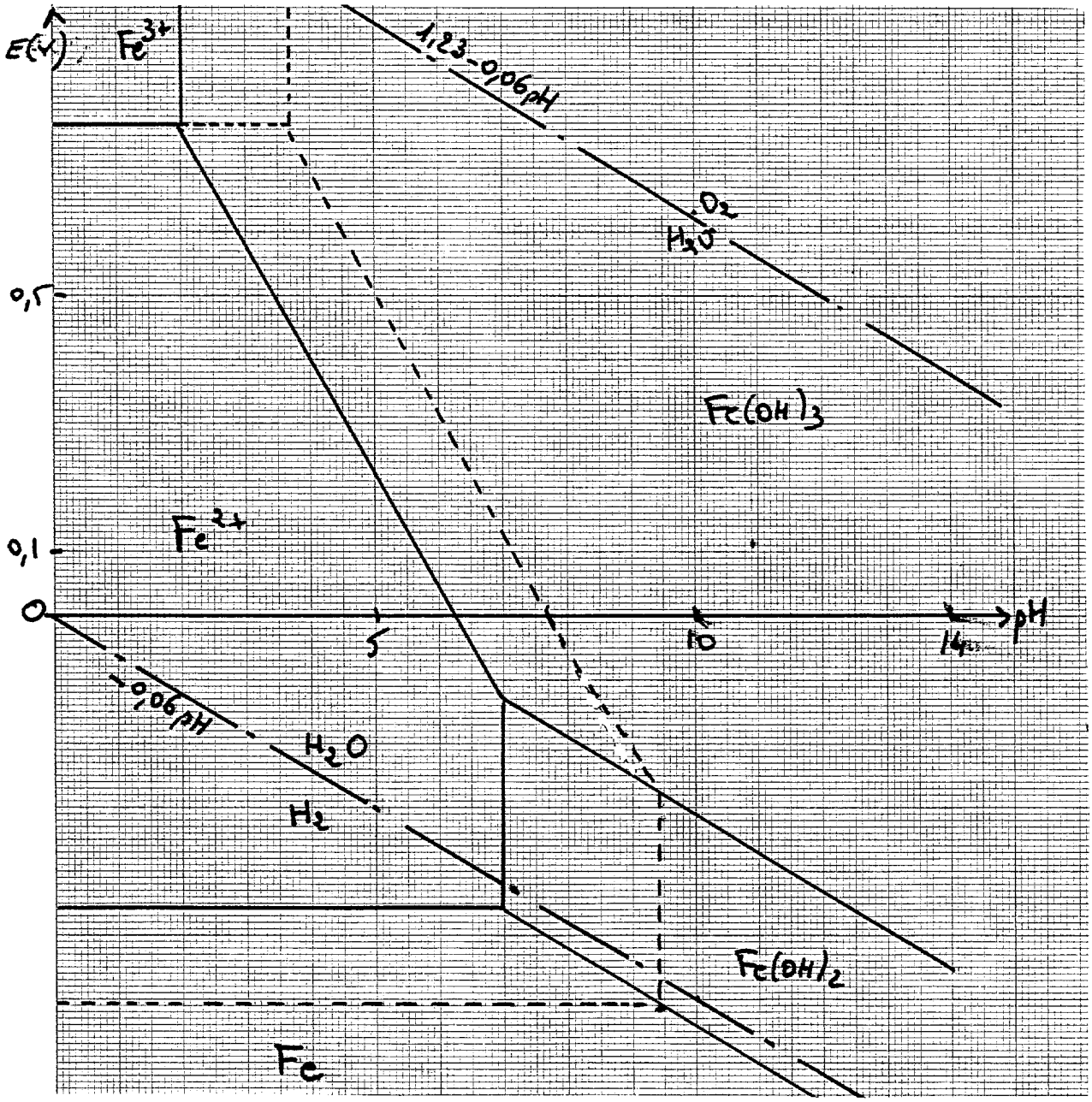
III.6. – Aucun degré d'oxydation ne se dismute.
– Le fer au degré O est instable au contact de l'eau : il est oxydé.
– L'air humide (H_2O et O_2) oxyde Fe mais également le degré II. Seul le degré III est alors stable.

III.7. $Co = 10^{-6}$ mol l^{-1} correspond au diagramme de corrosion d'un métal.

IV. Tracé du diagramme potentiel-pF du fer à 298 K

IV.1.

$$Fe\,F_{i-1}^{(3-i+1)+} + F^- \rightleftarrows Fe\,F_i^{(3-i)+} \qquad \boxed{K_{F_i} = \frac{\left[Fe\,F_i^{(3-i)+}\right]}{\left[Fe\,F_{i-1}^{(3-i+1)+}\right][F^-]}}$$



IV.2. si $pF > -pK_{F_i}$: $Fe\,F_{i-1}^{(3-i+1)+}$ qui prédomine.

IV.3.

$$E = E_0\,(Fe^{3+}/Fe^{2+}) + 0{,}06 \log \frac{[Fe^{3+}]}{[Fe^{2+}]} \qquad \text{avec} \quad [Fe^{2+}] = 10^{-1}\ \text{mol l}^{-1}$$

si $pF > 5{,}1$ $\quad [Fe^{3+}] = 10^{-1}\ \text{mol l}^{-1}$ $\quad \Rightarrow \boxed{E = 0{,}77\ \text{V}}$

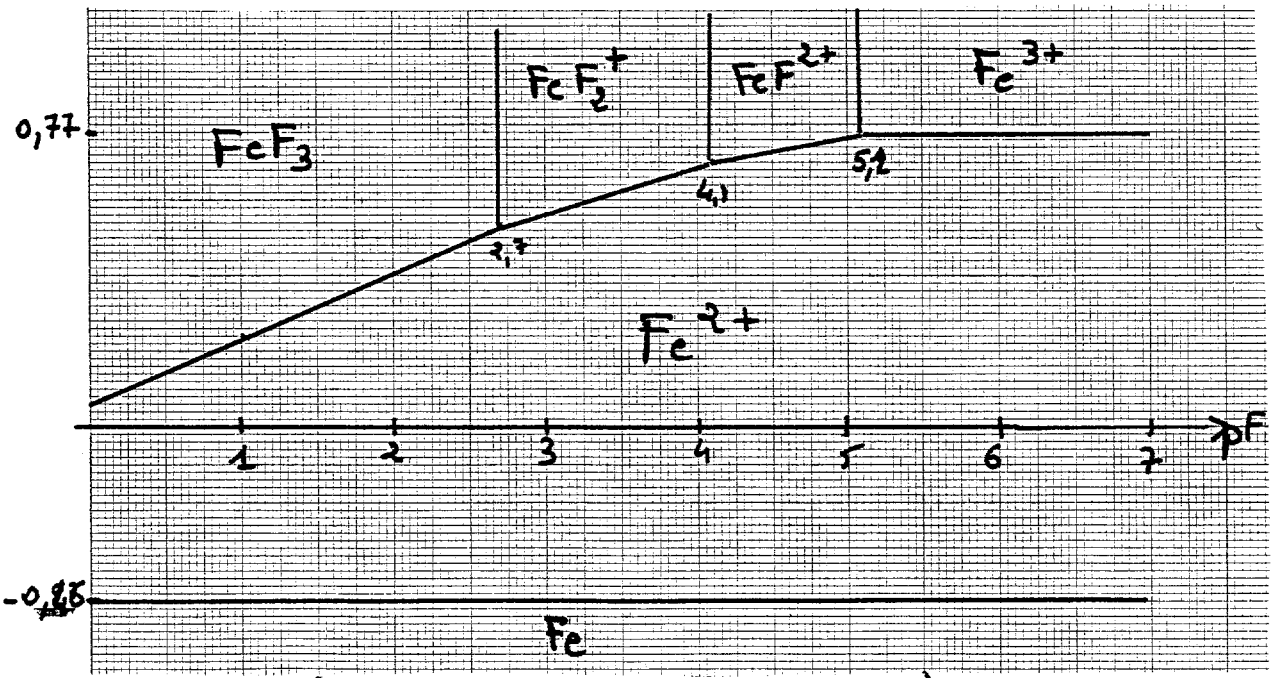
$4{,}1 < pF < 5{,}1$ $\quad [Fe^{3+}] = \dfrac{10^{-1}}{[F^-]\,K_{F_1}}$ $\quad \Rightarrow \begin{cases} E = 0{,}77 + (pK_{F_1} + pF)\ 0{,}06 \\ \boxed{E = 0{,}46 + 0{,}06\ pF} \end{cases}$

$$2{,}7 < pF < 4{,}1 \quad [Fe^{3+}] = \frac{10^{-1}}{[F^-]^2 K_{F_1} K_{F_2}} \quad \Rightarrow \begin{cases} E = 0{,}77 + 0{,}06\,(2\,pF + pK_{F_1} + pK_{F_2}) \\ \boxed{E = 0{,}22 + 0{,}12\,pF} \end{cases}$$

$$pF < 2{,}7 \quad [Fe^{3+}] = \frac{10^{-1}}{[F^-]^3 K_{F_1} K_{F_2} K_{F_3}} \quad \Rightarrow \begin{cases} E = 0{,}77 + 0{,}06\,(3\,pF + pK_{F_1} + pK_{F_2} + pK_{F_3}) \\ \boxed{E = 0{,}06 + 0{,}18\,pF} \end{cases}$$

IV.4. Pas de complexe F^- avec Fe^{2+} $\Rightarrow$ $E = E^0 (Fe^{2+}/Fe) + 0{,}03 \log [Fe^{2+}] = \mathbf{-\ 0{,}46\ V}$.

IV.5.



Échelle de l'énoncé non respectée

Partie C : Étude d'orbitales

I. Structure électronique

I.1.

Fe :	$1s^2$ $2s^2$ $2p^6$ $3s^2$ $3p^6$	$4s^2$	$3d^6$
Fe^{2+} :	$1s^2$ $2s^2$ $2p^6$ $3s^2$ $3p^6$		$3d^6$
Fe^{3+} :	$1s^2$ $2s^2$ $2p^6$ $3s^2$ $3p^6$		$3d^5$

I.2. Le Fer appartient à la 1ère série des éléments de transition car il possède des **électrons 3d**.

II. Étude des orbitales d

II.1. $l = 2$ pour une orbitale d, par définition.

m varie de – l à + l par valeur entière $\Rightarrow$ $m = \pm 2$ $m = \pm 1$ $m = 0$ $\Rightarrow$ **50 A type d**

II.2. II.2.a. *Partie radiale* : Partie de la fonction d'onde ne dépendant que de r.

$$R(r) = \frac{4}{81\sqrt{30}} a_0^{-7/2} r^2 e^{-r/3 a_0} = K a_0^{-7/2} r^2 e^{-\frac{r}{3} a_0}$$

↓

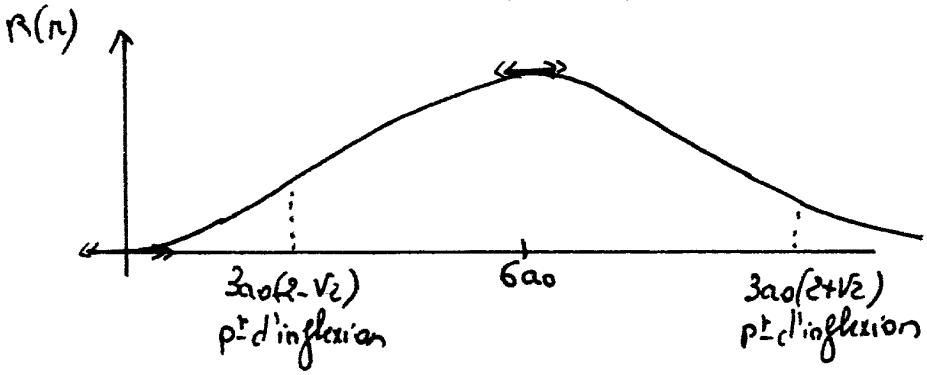
ce terme peut éventuellement ne pas être intégré à la partie radiale.

partie radiale

↓

Remarque : $\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot Y(\theta, \varphi)$.

Allure de R (r) : $\frac{dR}{dr} = K a_0^{-7/2} e^{-r/3 a_0} \left(2\pi - \frac{r^2}{3 a_0}\right) \Rightarrow \frac{dR}{dr} = 0 \Rightarrow r = 6 a_0$



Le Maximum de la partie radiale se situe assez loin du noyau (6 a_0) $\Rightarrow$ orbitale *diffuse*.

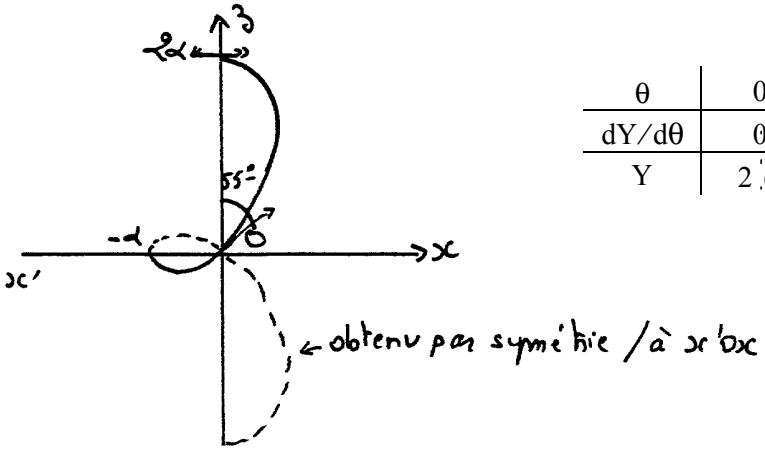
II.2.b. La partie radiale des autres orbitales 3 d est IDENTIQUE car R n'est fonction que de (r, l) qui est (3,2) pour toutes les O.A. 3 d.

II.3. II.3.a. *Partie angulaire* : Partie de la fonction d'onde ne dépendant que de (θ, φ)

$$Y(\theta, \varphi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} (3\cos^2\theta - 1)$$

II.3.b. On pose $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} = \alpha \quad \Rightarrow \quad Y(\theta, \varphi) = \alpha (3\cos^2\theta - 1) \Rightarrow \frac{dY}{d\theta} = -3\alpha \sin 2\theta.$

Étude faite pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car $Y(\theta) = Y(-\theta) \Rightarrow$ fonction symétrique/à x'Ox.



θ	0		55°	$\pi/2$
$dY/d\theta$	0	–		0
Y	2 α		0	– α

II.3.c. La densité de probabilité de présence de l'électron est :

$$\frac{d}{d\tau} = \Psi\,\Psi^* \qquad \text{avec } d\tau = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi \qquad \text{et } \Psi^* \text{ : partie conjuguée de } \Psi.$$

La «probabilité de présence angulaire» est :

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} YY^* \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \alpha^2 \int_0^{\pi} (3\cos^2\theta - 1)^2 \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$2\pi \frac{5}{16\pi}\int_0^{\pi} (9\cos^4\theta - 6\cos^2\theta + 1)\,\alpha \sin\theta\, d\theta = \frac{5}{8}\left(\left[-\frac{9\cos^5\theta}{5}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{6\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} - \left[\cos\theta\right]_0^{\pi}\right)$$

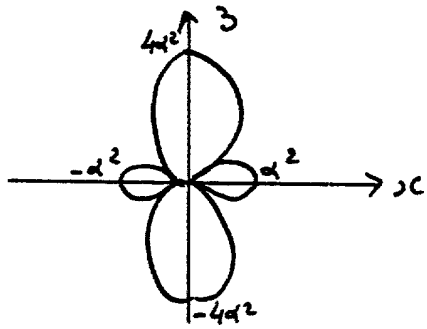
$$= \frac{5}{8}\left(\frac{18}{5} - \frac{12}{3} + 2\right) = \quad 1 \quad \Rightarrow \textbf{Normée}$$

II.3.d. $$Y = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}\left(3\frac{z^2}{r^2} - 1\right)}$$

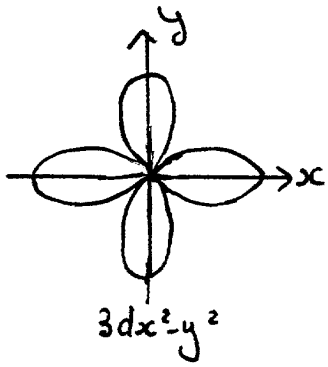
II.3.e. $3\,dz^2$.

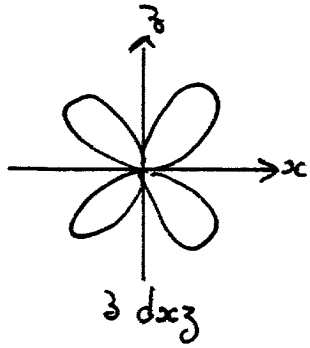
II.3.f. Surface de symétrie de révolution par rapport à l'axe Oz.

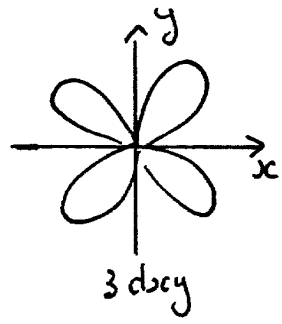
II.3.g.

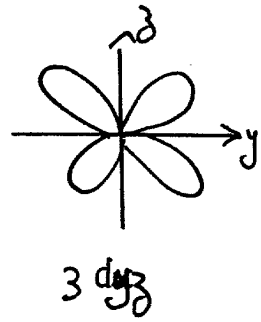


II.3.h.









Partie D : Étude thermodynamique de la réduction des oxydes de fer par la vapeur d'eau

I. Construction du diagramme d'Ellingham des oxydes de fer

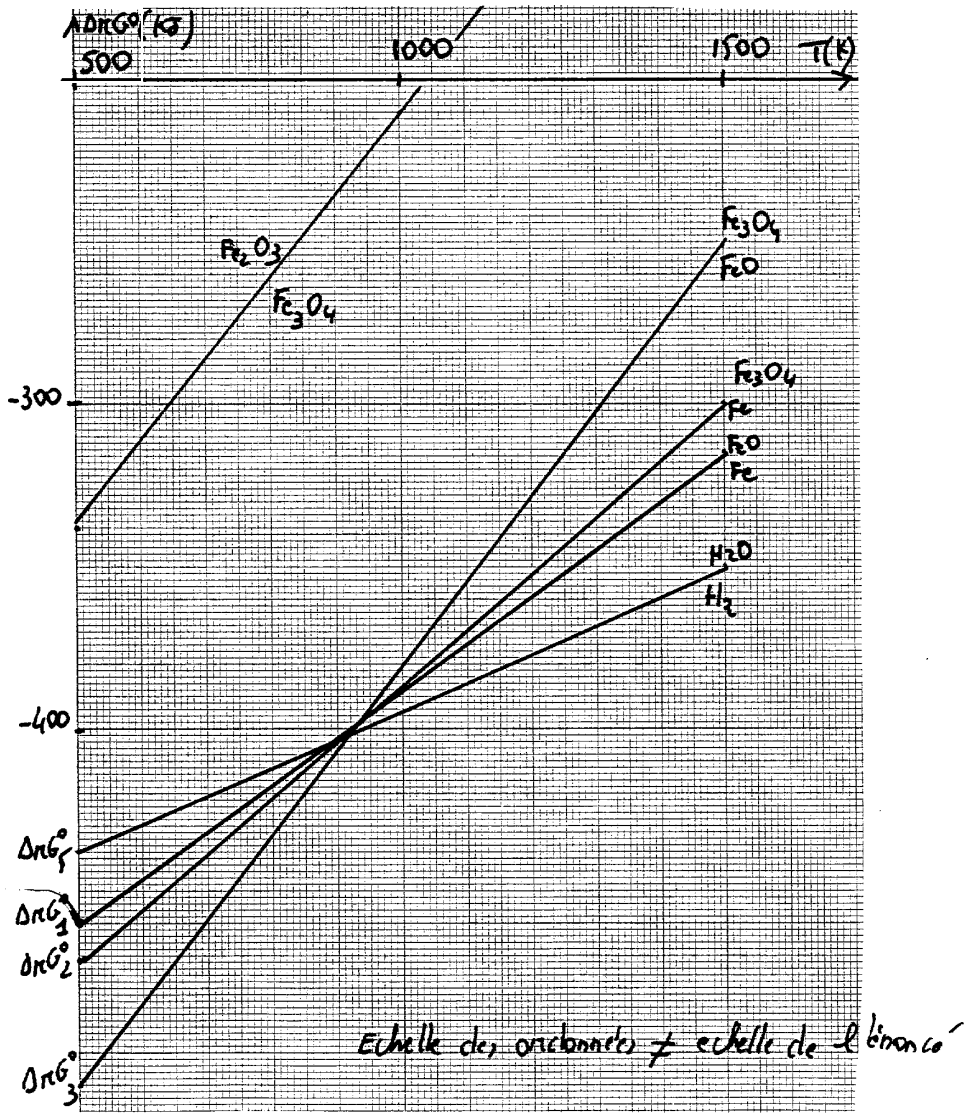
I.1. I.1.a. Soit la réaction $\frac{2n}{p} M + O_2 \rightarrow \frac{2}{p} Mn\,Op$

On représente pour cette réaction $\Delta_r G^o = \Delta_r H^o - T\,\Delta_r S^o$ en fonction de T ($\Delta_r H^o$ et $\Delta_r S^o$ constants dans les domaines de température où il n'y a pas de changement d'état).

I.1.b.

$2\,Fe + O_2 \rightleftarrows 2\,FeO$	$\Delta_r G_1^o = -532\,10^3 + 144{,}4\,T$ (J.mol^{-1})
$\frac{3}{2} Fe + O_2 \rightleftarrows \frac{1}{2} Fe_3O_4$	$\Delta_r G_2^o = -558{,}6\,10^3 + 172{,}4\,T$ (J.mol^{-1})
$6\,FeO + O_2 \rightleftarrows 2\,Fe_3O_4$	$\Delta_r G_3^o = -638{,}6\,10^3 + 256{,}6\,T$ (J.mol^{-1})
$4\,Fe_3O_4 + O_2 \rightleftarrows 6\,Fe_2O_3$	$\Delta_r G_4^o = -471{,}8\,10^3 + 266{,}2\,T$ (J.mol^{-1})
$2\,H_2 + O_2 \rightleftarrows 2\,H_2O$	$\Delta_r G_5^o = -483{,}6\,10^3 + 88{,}8\,T$ (J.mol^{-1})

I.1.c.



I.2.

Si T < 950 K FeO se dismute $4\,FeO \rightleftarrows Fe + Fe_3O_4$

II. Étude du pouvoir réducteur du dihydrogène

II.1. II.1.a.

$3\,Fe_2O_3 + H_2 \rightleftarrows 2\,Fe_3O_4 + H_2O$: réaction totale

(6) $Fe_3O_4 + H_2 \rightleftarrows 3\,FeO + H_2O$ $\qquad \Delta_rG_6^o = \frac{1}{2}\Delta_rG_5^o - \frac{1}{2}\Delta_rG_3^o$

(7) $\frac{1}{4}Fe_3O_4 + H_2 \rightleftarrows \frac{3}{4}Fe + H_2O$ $\qquad \Delta_rG_7^o = \frac{1}{2}\Delta_rG_5^o - \frac{1}{2}\Delta_rG_2^o$

(8) $FeO + H_2 \rightleftarrows Fe + H_2O$ $\qquad \Delta_rG_8^o = \frac{1}{2}\Delta_rG_5^o - \frac{1}{2}\Delta_rG_1^o$

II.1.b. $\Delta_rG_6^o = 77{,}5\ 10^3 - 83{,}9\ T$ $\qquad \Delta_rG_7^o = 37{,}6\ 10^3 - 41{,}8\ T$ $\qquad \Delta_rG_8^o = 24{,}2\ 10^3 - 27{,}8\ T$

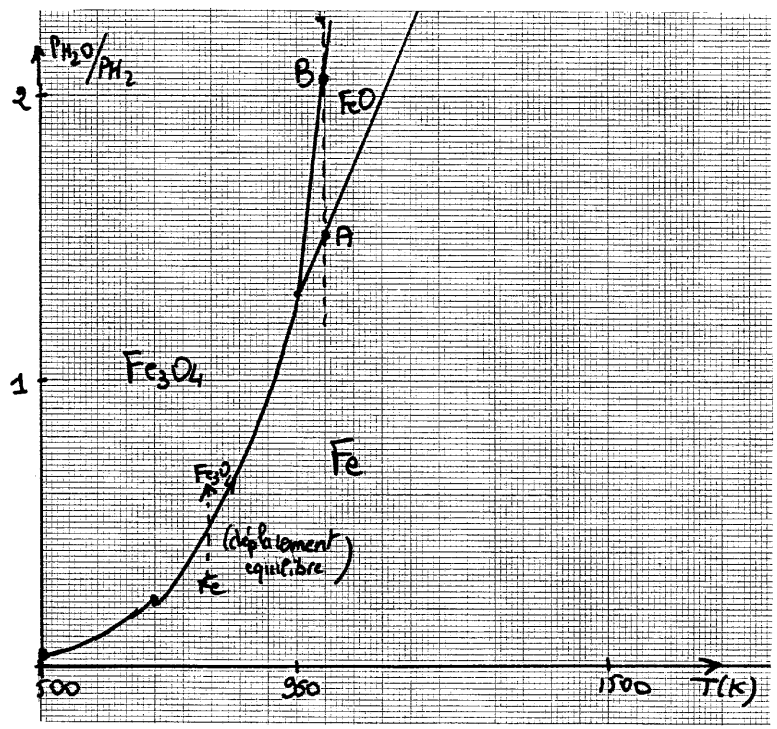
II.1.c. – Pas d'influence de la pression sur ces 3 équilibres ($\Delta\nu_g = 0$) ;
– Une augmentation de T favorise le pouvoir réducteur de H_2 dans les 3 cas car $\Delta_rH^o > 0$ $\forall$ équilibre considéré.

II.2.

$\Delta_rG^o + RT\,Ln\,K = 0$ avec $K = \dfrac{P_{H_2O}}{P_{H_2}} \Rightarrow \dfrac{P_{H_2O}}{P_{H_2}} = \exp\left(-\dfrac{\Delta_rG^o}{RT}\right)$

équilibre (6) : $P_{H_2O}/P_{H_2} = \exp\left(10{,}1 - \dfrac{9326}{T}\right)$	pour T > 950 K
équilibre (7) : $P_{H_2O}/P_{H_2} = \exp\left(5{,}03 - \dfrac{4524}{T}\right)$	pour T < 950 K
équilibre (8) : $P_{H_2O}/P_{H_2} = \exp\left(3{,}35 - \dfrac{2912}{T}\right)$	pour T > 950 K

II.3. et II.4.



III. **Application**

III.1.

	Fe_3O_4	+ H_2	$\rightleftarrows$	3 FeO	+ H_2O	K_6
	1	x		0	0	
État final	1 – v	x – v		3 v	v	

	FeO	+ H_2	$\rightleftarrows$	FeO	+ H_2O	K_8
	3 v	x – v		0	v	
État final	3 v – u	x – v – u		u	v + u	

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P_{H_2O}}{P_{H_2}} = \frac{u+v}{x-u-v}}$$

III.2. III.2.a. M ∈ zone d'existence de FeO. Les frontières sont non comprises ⇒ système hors équilibre.

d'où : $\boxed{\begin{matrix} u = 0 \\ v = 1 \end{matrix}}$ car il n'y a pas de fer formé
car équilibre (6) rompu (plus de Fe_3O_4)

d'où : $Kg < \frac{1}{x-1} < K_6 \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}55 < \frac{1}{x-1} < 2{,}17 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{1{,}46 < x < 1{,}65}$

III.2.b. M ∈ zone d'existence de Fe (là encore, le système est hors équilibre).

$\boxed{\begin{matrix} v = 1 \\ u = 3 \end{matrix}}$: il n'y a plus de Fe_3O_4
: tout Fe_3O_4 est transformé en Fer.

d'où : $\frac{4}{x-4} < Kg \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x > 6{,}58 \text{ moles}}$

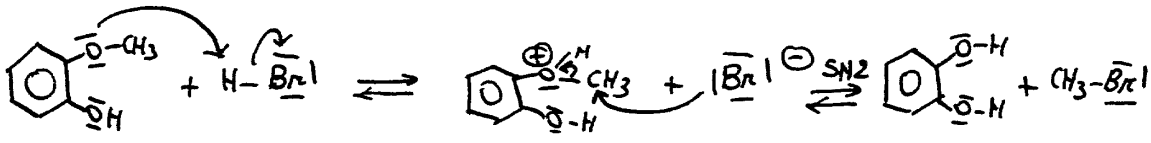
Partie E : Synthèse de nouveaux ligand-cage complexant l'ion ferrique

I. **Synthèse du produit de départ (pont)**

I.1. Étude du produit de départ de cette synthèse

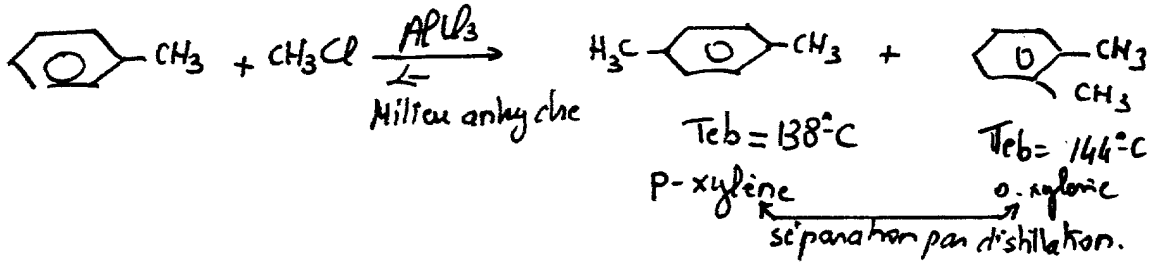
I.1.a. Pyrocatechol ou *1,2-dihydroxybenzène*
IUPAC

I.1.b.

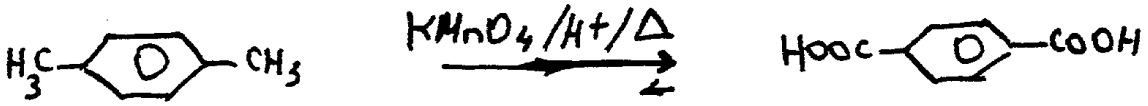


I.2. Synthèse de l'acide téréphtalique

I.2.a. **1ère étape** : alkylation de Friedel-Crafts.



2ème étape : oxydation des chaînes latérales d'hydrocarbures benzéniques.

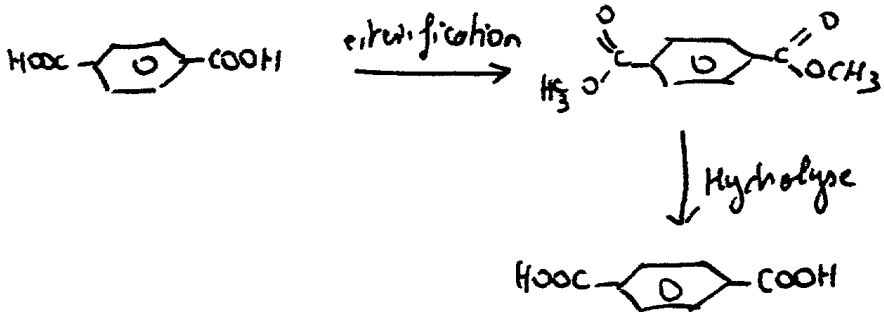


Chauffage à reflux : T ≈ 100°C - on acidifie à la fin pour faire précipiter l'acide téréphtalique.

I.2.b. **Purification de l'acide téréphtalique**

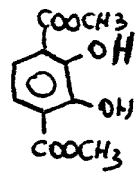
Remarque : Difficilement purifiable par recristallisation directe (sublimation et décomposition).

Technique industrielle : facile à purifier par cristallisation.

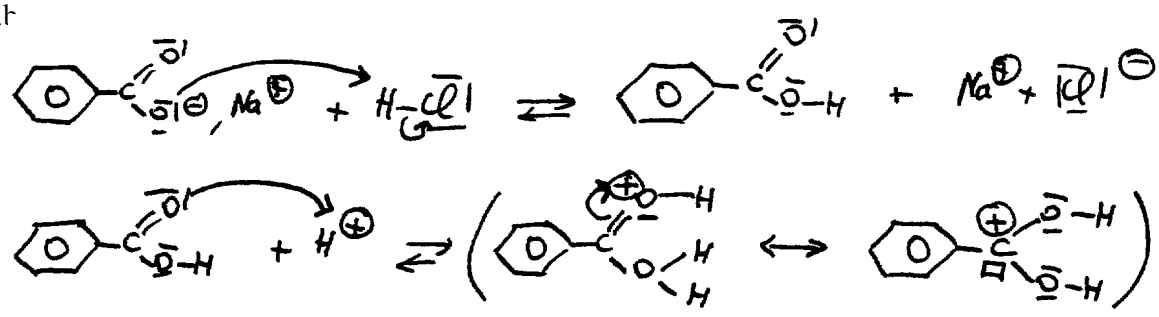


I.3. Étude du passage de **B** à **C**

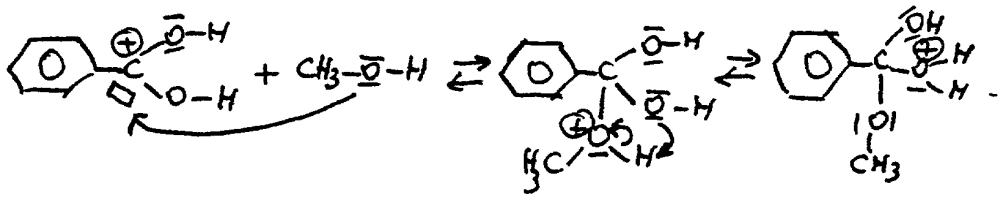
I.3.a.

:  diester méthylique.

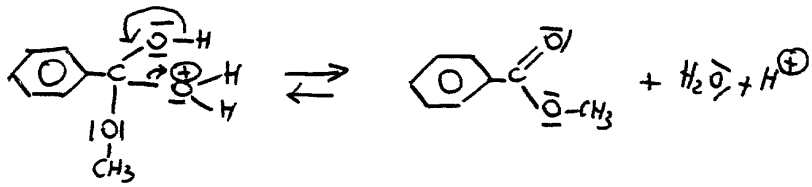
I.3.b



: protonation de l'acide.



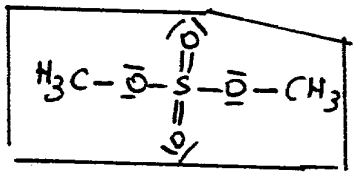
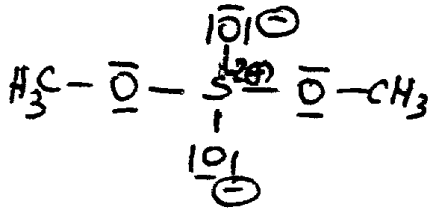
: addition nucléophile de l'alcool.



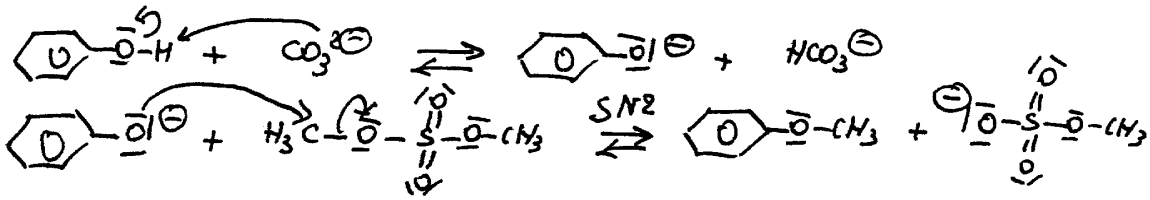
: élimination de H_2O puis déprotonation.

I.4. Étude du passage de **C** à **D**

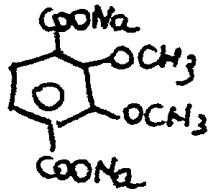
I.4.a. **Rôle de K_2CO_3** : base faible permettant de fabriquer la base conjuguée de C sans pour autant provoquer de saponification.

I.4.b.  ou 

I.4.c. Mécanisme en simplifiant C sous la forme



I.5. Étude de la fin de la synthèse du «pont»

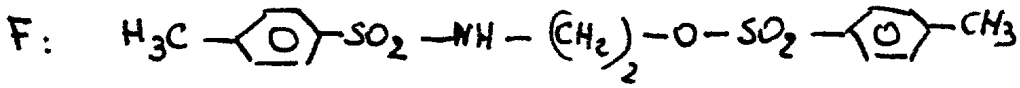
I.5.a. D  excès de soude : **double saponification**

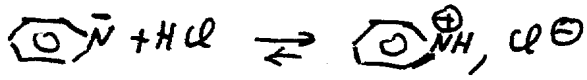
I.5.b. $P Cl_5$, $P Cl_3$.

II. **Synthèse du «chapeau supérieur»**

II.1. Étude du composé **F**

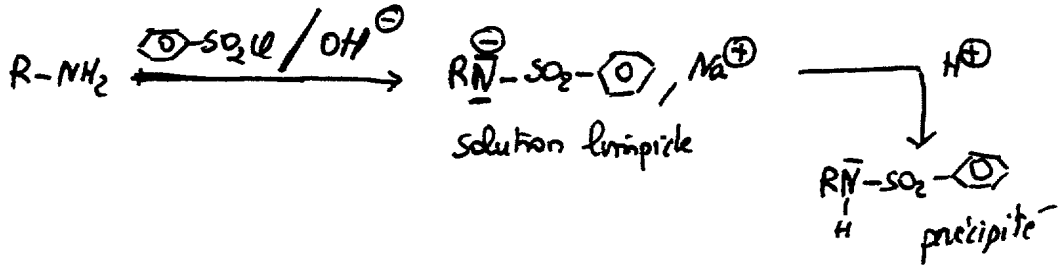
II.1.a.

F : 

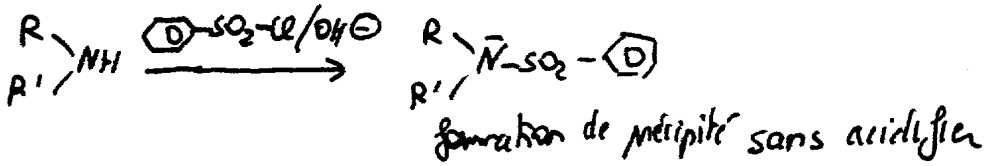
II.1.b. La pyridine capte HCl formé : 

II.1.c. Test de Hinsberg

Amine primaire :

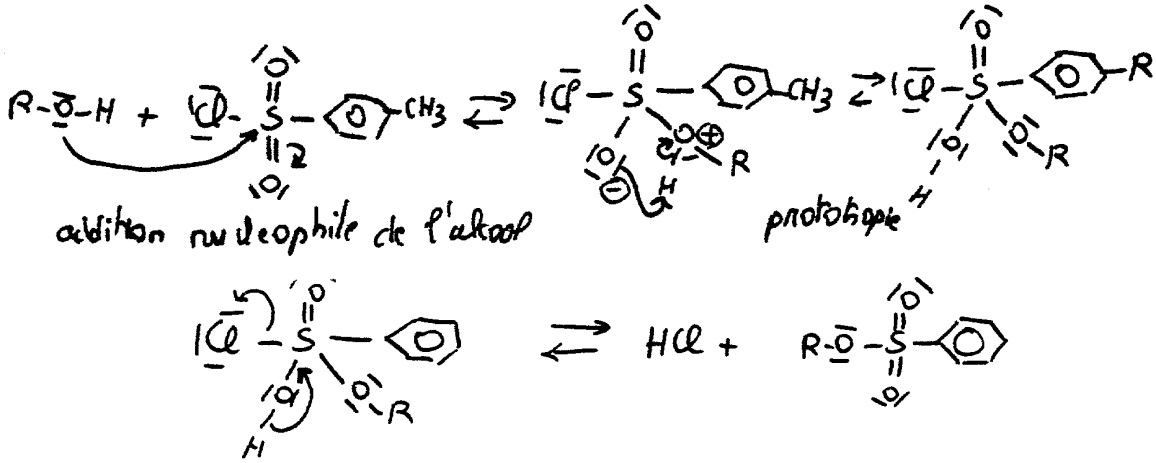


Amine secondaire :



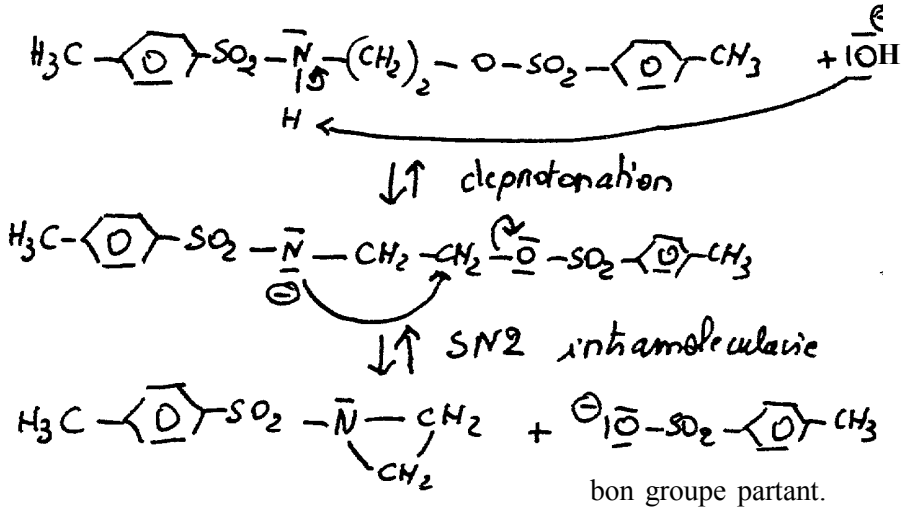
Amine tertiaire : pas de réaction.

II.1



II.2. Synthèse de l'aziridine N-substitué

II.2.a. :



bon groupe partant.

II.2.b. Rôle de KOH : deprotoner l'amide et accroître ainsi le caractère nucléophile.

II.3. Formation de **G**

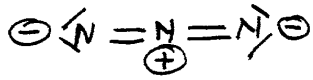
Sulfamide (ou sulfanilamide).

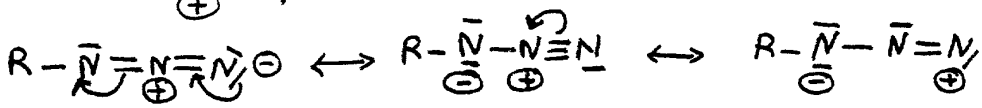
II.4. Étude de la dernière étape

G $\xrightarrow[2/\text{ milieu basique}]{1/\ H_2O/H^+}$ $N-\left(CH_2-CH_2-NH_2\right)_3$: hydrolyse des fonctions sulfamides.

III. Synthèse du chapeau inférieur

III.1. Étude de la première étape

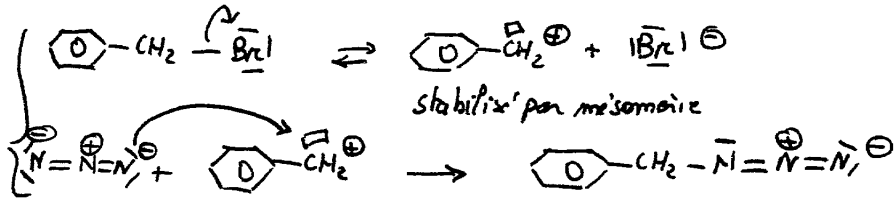
III.1.a. 

III.1.b. 

III..1.c. SN

L'acétone est un solvant polaire ⇒ stabilisation des ions ⇒ solubilise Na N_3 (ionique) mais également le produit de départ.

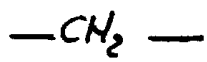
III.1.d. Mécanisme SN1

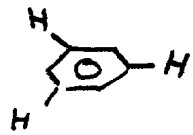


1ère étape réversible (ou inversable !!)

III.2. Étude de la deuxième étape

III.2.a. Réaction de réduction par les ions «hydrure».

III.2.b. III.2.b.α. $\delta_1 = 3{,}78$ Proton du méthylène 

$\delta_1 = 7{,}22$ Proton du cycle 

grandeur caractéristique de protons sur un cycle benzénique.

III.2.b.β. NON car il y a 3 types de protons ⇒ 3 déplacements chimiques ≠

III.2.b.γ. Les protons de l'amine NH_2 ne sont pas observés (échange avec D du solvant D_2O).

III.2.b.δ. Signal à $\delta_1 = 3{,}78$ **d'intensité double** / au signal à $\delta_2 = 7{,}22$.

III.2.c. III.2.c.α.

	C	H	N
% massique théorique	65,40	9,17	25,43

III.2.c.β. % H pratique > % H théorique alors que $\left(\frac{\%\,C}{\%\,N}\right)_{pratique} < \left(\frac{\%\,C}{\%\,N}\right)_{théorique}$

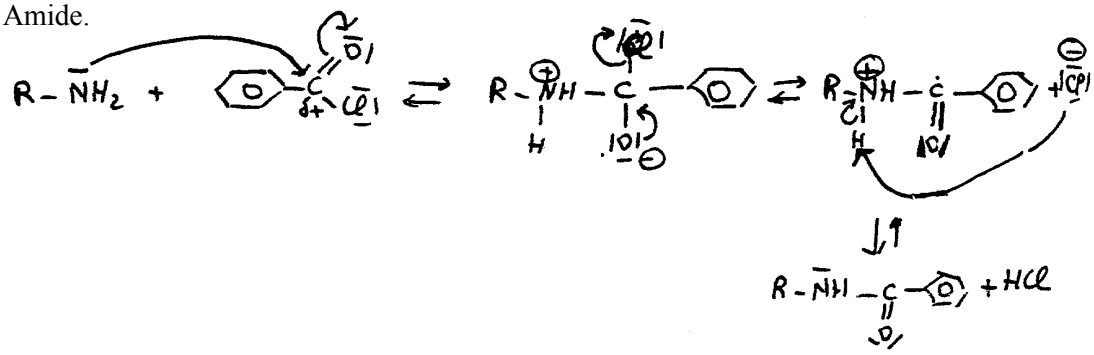
$\Rightarrow$ produit contenant H_2O (d'ailleurs % O_{prat} = 5,97 % $\neq$ 0).

IV. **Synthèse du ligand-cage TRENMECAM**

IV.1. Fixation du «chapeau supérieur». Synthèse de **H**

IV.1.a. Amide.

IV.1.b.

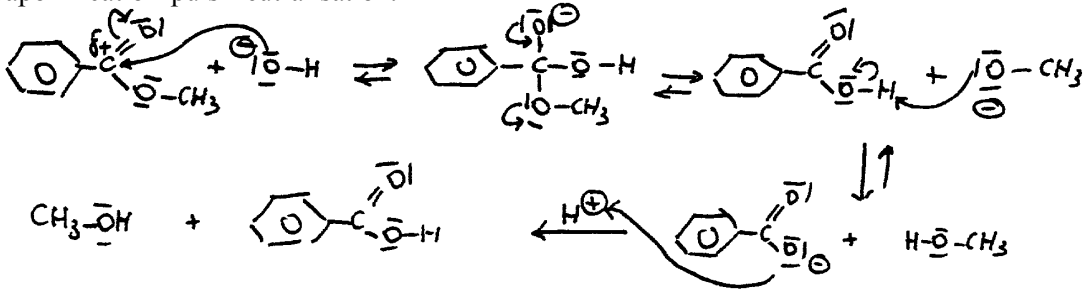


IV.1.c. La triéthylamine «capte» Hcl formé et déplace l'équilibre vers l'amide.

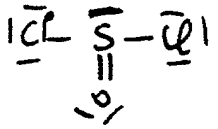
IV.2. Passage de **H** à **J**

IV.2.a. Saponification puis neutralisation.

IV.2.b.

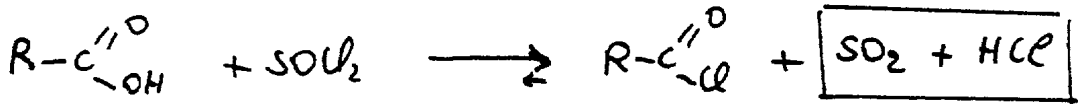


IV.2.c.

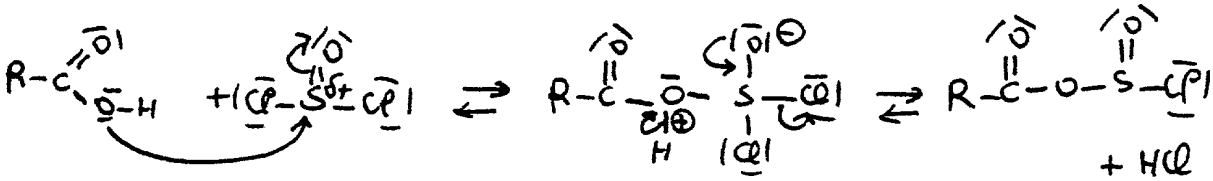


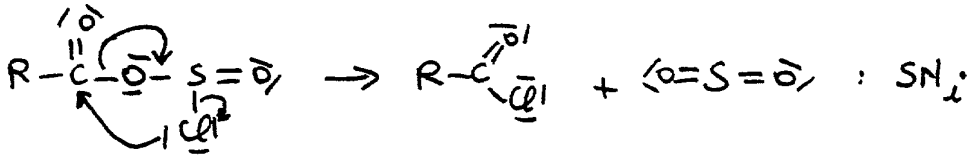
: chlorure de thionyle.

IV.2.d.



IV.2.e.



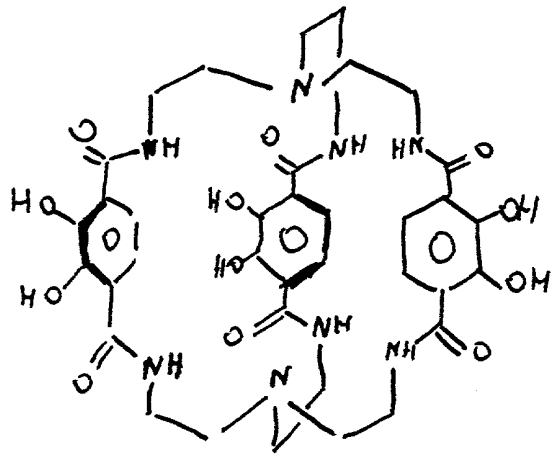
puis 

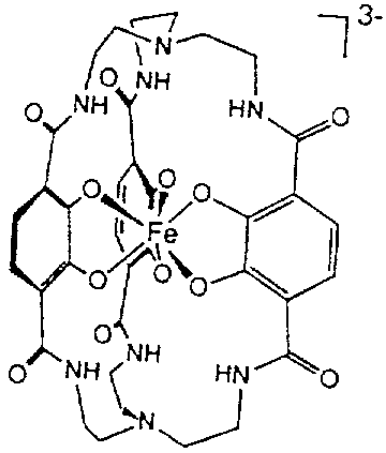
IV.3. Fixation du «chapeau inférieur». Synthèse de **K**

IV.3.a. Fonction amide.

IV.3.b. Très haute dilution pour éviter la polymérisation (polyamide).

V. Complexation du fer (III) par le ligand-cage TRENCAM

V.1. 

V.2. 

V.3. V.3.a.

$$E = E^o\,(Fe^{3+}/Fe^{2+}) + 0{,}06 \log \frac{[Fe^{3+}]}{[Fe^{2+}]} = E^o\,(Fe^{3+}/Fe^{2+}) + 0{,}06 \log \frac{[Fe^{III}\,L]}{[Fe^{II}\,L]}\,\frac{K_{f\,II}}{K_{f\,III}}$$

$$E^o\,(Fe^{III}\,L/Fe^{II}\,L) = E^o\,(Fe^{3+}/Fe^{2+}) + 0{,}06 \log \frac{K_{f\,II}}{K_{f\,III}}$$

$$\Rightarrow\ K_{f\,II} = K_{f\,III}\ 10^{\dfrac{E^o\,(Fe^{III}\,L/Fe^{II}\,L) - E^o\,(Fe^{3+}/Fe^{2+})}{0{,}06}}\ \Rightarrow\ \mathbf{K_{f\,II} = 8{,}6\ 10^{12}} << K_{f\,III}\ .$$

V.3.b. Le ligand TRENCAM «piège mieux» Fe^{3+} que Fe^{2+} (caractère très sélectif de TRENCAM vis-à-vis du fer (III)).

V.3.c. Diminution du caractère oxydant du fer (III) $\Rightarrow$ stabilisation du fer (III).

Agrégation
(Concours Interne)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE
Composition avec exercices d'application - Session : 1992

PREMIER PROBLÈME

Partie I. - **FILTRES ANALOGIQUES**

1. **Filtres à éléments passifs**

1.1. Fonction de transfert :

$$T(p) = \frac{\frac{Lp}{Cp}}{R\left(Lp + \frac{1}{Cp}\right) + \frac{Lp}{Cp}} = \frac{\frac{Lp}{R}}{1 + \frac{L}{R}p + LCp^2}$$

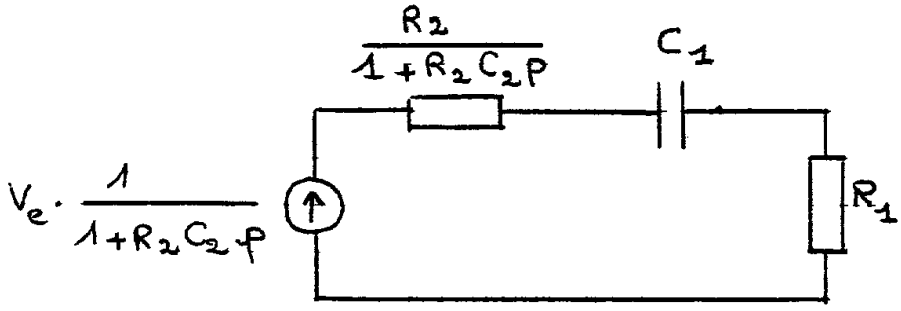
On a donc par analogie avec la forme présentée dans l'énoncé :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad m = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad A = 1$$

1.2. Inconvénients des bobines :
- Difficultés d'avoir des bobines de bons coefficients de qualité à fréquences faibles.
- Encombrement.

1.3. Le filtre étudié est un passe bande, de pulsation de résonance ω_0 , de bande passante à – 3 dB $B_p(\omega) = 2\,m\,\omega_0$.

1.4. Le schéma proposé Figure 2 est équivalent d'après le théorème de Thévenin, au schéma suivant :



Donc sa fonction de transfert s'écrit :

$$T'(p) = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{C_1 p} + \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 p}} \cdot \frac{1}{R_2 C_2 p + 1}$$

$$= \frac{R_1}{R_1 + R_1 R_2 C_2 p + \frac{1}{C_1 p} + \frac{R_2 C_2}{C_1} + R_2}$$

$$T'(p) = \frac{R_1 C_1 p}{1 + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2) p + R_1 R_2 C_1 C_2 p^2}$$

Il s'agit donc bien de la fonction de transfert d'un filtre passe bande du 2ème ordre. Caractéristiques :

- Pulsation d'accord : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$
- Transfert à l'accord : $\frac{R_1 C_1}{R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2}$
- Bande passante (en pulsations) :

$$B_P = \frac{R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2}$$

- Coefficient de qualité ($Q = \omega_0 / B_p$) :

$$Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2}$$

1.5. $R_2 = k R_1$ et R_1 fixe

Fréquence de résonance cste $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} = \text{cste} \Leftrightarrow \frac{1}{R_1 \sqrt{k C_1 C_2}} = \text{cste}.$

Donc 2 solutions :

- $C_1 = \frac{C_2}{k}$ à $C_2 = \text{cste}$ $\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{R_1 C_2} = \text{cste}$
- $C_2 = \frac{C_1}{k}$ à $C_1 = \text{cste}$ $\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{R_1 C_1} = \text{cste}$

1.6.

Premier cas : $C_1 = \frac{C_2}{k}$ à C_2 = cste

$$Q = \frac{R_1 C_2}{R_1 \frac{C_2}{k} + k R_1 \frac{C_2}{k} + k R_1 C_2} = \frac{1}{\frac{1}{k} + 1 + k}$$

La valeur optimale de Q sera donc $Q = \frac{1}{3}$ pour k = 1. On a alors à l'accord un transfert $= \frac{1}{3}$.

Deuxième cas : $C_2 = \frac{C_1}{k}$ à C_1 = cste

$$Q = \frac{R_1 C_1}{R_1 C_1 + k R_1 C_1 + k R_1 \frac{C_1}{k}} = \frac{1}{2 + k}$$

La valeur optimale de Q sera donc $Q \to \frac{1}{2}$ pour $k \to 0$ (La valeur 0 pour k étant sans intérêt pratique).

On a alors, à l'accord, un transfert $\to \frac{1}{2}$.

1.7. Commentaire : On obtient des coefficients de qualité trop faibles.

2. **Filtres actifs à amplificateurs opérationnels**

2.1. *Structure de Sallen et Key.*

2.1.1.
- K < 0 : Montage suiveur à AOP suivi d'un inverseur à AOP d'amplification + K.
- 0 < K < 1 : Montage précédent suivi d'un inverseur à AOP d'amplification – 1.
- K > 1 : Montage non inverseur à AOP d'amplification K.

2.1.2. Fonction de transfert :

On a : $$\frac{V_e Y_1 + V_S Y_2 + V_S Y_3/K}{Y_1 + Y_2 + Y_3} = \frac{V_S}{K}\left(\frac{Y_3 + Y_4}{Y_3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad V_e Y_1 Y_3 = \frac{V_S}{K}(Y_3 + Y_4)(Y_1 + Y_2 + Y_3) - V_S Y_2 Y_3 - \frac{V_S}{K} Y_3^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad T = \frac{V_S}{V_e} = \frac{Y_1 Y_3 K}{(Y_3 + Y_4)(Y_1 + Y_2 + Y_3) - K Y_2 Y_3 - Y_3^2}$$

2.1.3. Avec les composants de la Figure 4, on obtient :

$$T = \frac{\frac{1}{R_1} \cdot Cp\, K}{\left(Cp + Cp + \frac{1}{R}\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} + Cp\right) - K\frac{1}{R}Cp - (Cp)^2}$$

$$= \frac{K\, Cp/R_1}{2\,(Cp)^2 + \frac{Cp}{R} + \frac{2\,Cp}{R_1} + \frac{2\,Cp}{R} + \frac{1}{R_1 R} + \frac{1}{R^2} - K\frac{Cp}{R} - (Cp)^2}$$

$$= \frac{K\, Cp/R_1}{(Cp)^2 + Cp\left(\frac{3-K}{R} + \frac{2}{R_1}\right) + \frac{R + R_1}{R_1 R^2}} = \frac{\frac{R^2}{R + R_1} \cdot K \cdot Cp}{1 + R\, Cp\left(\frac{2R + (3-K)R_1}{R + R_1}\right) + \frac{R^2 R_1}{R + R_1}(Cp)}$$

Le filtre réalisé est un passe bande du 2ème ordre.

2.1.4. Caractéristiques de ce filtre :

- Pulsation d'accord : $\omega_0 = \frac{1}{RC}\frac{\sqrt{R + R_1}}{R_1}$

- Coefficient de qualité :

$$\frac{1}{Q\,\omega_0} = RC\left(\frac{2\,R + (3-K)\,R_1}{R + R_1}\right) \Leftrightarrow Q = \frac{(R + R_1)\cdot RC\sqrt{\frac{R_1}{R + R_1}}}{RC\left(2\,R + (3-K)\,R_1\right)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{\sqrt{1 + \frac{R}{R_1}}}{\frac{2\,R}{R_1} + (3-K)}}$$

- Amplification maximale :

$$A = \frac{R\,K}{2\,R + (3-K)\,R_1} = \frac{K}{2 + (3-K)\frac{R_1}{R}}$$

2.1.5. Pour obtenir un grand coefficient de qualité, il faut choisir :

$$K = 3 \qquad \text{et} \qquad \frac{R}{R_1} \ll 1$$

On a alors : $A \approx \frac{3}{2}$ et $Q \approx \frac{R_1}{2\,R}$

2.1.6. 2.1.6.1.

$$S_K^Q = \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dK}{K}} = \frac{K}{Q}\cdot\frac{dQ}{dK} = \frac{K\left(\frac{2\,R}{R_1} + (3-K)\right)}{\sqrt{1 + \frac{R}{R_1}}}\cdot\frac{\sqrt{1 + \frac{R}{R_1}}}{\left(\frac{R}{R_1}2 + (3-K)\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S_K^Q = \frac{K}{2\frac{R}{R_1} + (3-K)}}$$

2.1.6.2.

Application Numérique : K = 3, $\frac{R_1}{R} = 200$

$$Q \approx \frac{R_1}{2\,R} = 100 \qquad S_K^Q = \frac{3}{\frac{2}{200}} = 300$$

2.1.6.3. Si K varie de 1 %, Q varie de 300 %.

$\Rightarrow$ si K = 3 – 0,03, $Q \approx 25$ (25,12).

Il faut que $\frac{2R}{R_1} + (3 - K) > 0$ pour $Q > 0$

donc : $K < \frac{2R}{R_1} + 3 = 3{,}01$

Donc K ne peut augmenter que de $\frac{1}{3}$ % sous peine d'instabilité.

2.1.6.4. On constate :

1) que l'optimisation de Q impose la valeur de A donc pas de réglages indépendants.
2) que S_K^Q pour Q grand est inacceptable.

2.2. *Structure de Rauch.*

2.2.1. Théorème de Millmann :

$$V_A = \frac{V_e Y_1 + V_S Y_4}{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4} = -\frac{Y_5}{Y_3} V_S$$

$$\Leftrightarrow \qquad V_e Y_1 Y_3 + V_S Y_3 Y_4 = -Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) V_S$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{V_S}{V_e} = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_3 Y_4 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}$$

2.2.2. Ave les composants de la Figure 6 :

$$\frac{V_S}{V_e} = -\frac{\frac{1}{R_1} Cp}{C^2 p^2 + \frac{1}{R_3}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2\,Cp\right)}$$

$$= \frac{-R_2 Cp}{R_1 R_2 C^2 p^2 + \frac{1}{R_3}(R_1 + R_2) + \frac{R_1 R_2}{R_3} \cdot 2\,Cp}$$

$$= \frac{-\frac{R_2 R_3 Cp}{R_1 + R_2}}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot 2\,Cp + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot R_3 C^2 p^2}$$

Il s'agit donc de la fonction de transfert d'un filtre passe bande du second ordre.

2.2.3. On a
$$\begin{cases} \omega_{0_R} = \dfrac{1}{C\sqrt{R_3 \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}} \\ A_R = -\dfrac{R_3}{2 R_1} \\ Q_R = \dfrac{1}{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot 2 C \cdot \omega_{0_R}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{R_3}{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}} \end{cases}$$

2.2.4. Bande passante à -3 dB : $B_R(\omega)$

$$B_R = \frac{\omega_{0_R}}{Q} = \frac{2}{R_3 C}$$

2.2.5. On peut donc, en ayant choisi C, régler :
- B_R par R_3
- puis A_R par R_1
- puis ω_{0_R} par R_2

Donc, même à Q élevé, on n'a pas le problème du A fixe comme le Sallen Key.

2.2.6. Pour avoir un coefficient de qualité élevé, il faut $\dfrac{R_2}{R_1} >> 1$.

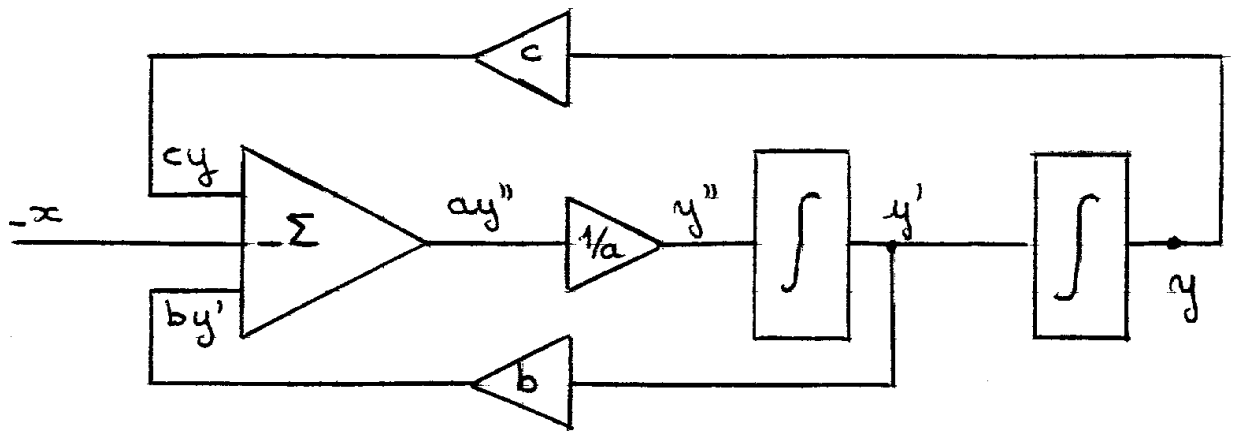
Par rapport au Sallen Key, il y a donc l'avantage des réglages indépendants à Q élevé, mais il y a toujours le même inconvénient de rapport de résistances important.

2.3. *Filtre à variable d'état.*

2.3.1. Équation différentielle par calcul analogique :

$$ay'' + by' + cy = x \quad \Leftrightarrow \quad y'' = -\frac{b}{a}y' - \frac{c}{a}y + x$$

D'où le schéma fonctionnel :



2.3.2. 2.3.2.1. L'AOP dont la sortie est au potentiel v_{S_3} par rapport à la masse est monté en intégrateur inverseur donc à la sortie v_{S_2}, on a :

$V_{S_2}(p) = -R_2 C_2 p V_{S_3}(p)$ et à la sortie v_{S_1}, on a :

$V_{S_1}(p) = +R_1 C_1 R_2 C_2 p^2 V_{S_3}(p)$ car le montage du 2ème AOP est indentique.

Pour le 1er AOP :

$$\begin{cases} V_+ = \dfrac{V_e/R_3 + \left(-V_{S_3}\right) p R_2 C_2 / R_4}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}} \\ V_- = \left(V_{S_3} + R_1 R_2 C_1 C_2 p^2 V_{S_3}\right) \cdot \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

D'où : $V_e R_4 - V_{S_3} R_3 p R_2 C_2 = \dfrac{1}{2} \cdot (R_3 + R_4) V_{S_3} (1 + p^2 R_1 R_2 C_1 C_2)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{V_{S_3}}{V_e} = \frac{2\alpha}{1 + 2(1-\alpha) p R_2 C_2 + p^2 R_1 R_2 C_1 C_2}$$

2.3.2.2. La fonction de transfert trouvée est du type : $\dfrac{\text{cste}}{1 + 2m\dfrac{p}{\omega'_0} + \dfrac{p^2}{\omega'^2_0}}$ donc passe bas du 2ème ordre.

On a $\begin{cases} \omega'_0 = \dfrac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} = \omega_0 \sqrt{\beta} \\ A_{BF} = 2\alpha \\ Q = \dfrac{1}{2m} = \dfrac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{2(1-\alpha) R_2 C_2} = \dfrac{\sqrt{\beta}}{2(1-\alpha)} \end{cases}$

Les réglages sont indépendants :

Choix de $A_{BF} \rightarrow \alpha$
Choix de $Q \rightarrow \beta$
Choix de $\omega'_0 \rightarrow \omega_0$

2.3.3. $\dfrac{V_{S_2}}{V_e}$: filtrage passe bande 2ème ordre car $V_{S_2} = -R_2 C_2 p V_{S_3}$.

2.3.4. $\dfrac{V_{S_1}}{V_e}$: filtrage passe haut 2ème ordre car $V_{S_1} = R_1 C_1 R_2 C_2 p^2 V_{S_3}$.

2.3.5. Pour le quatrième AOP :

$\dfrac{V_e}{R_3} + \dfrac{V_{S_2}}{R_4} = -\dfrac{V_{S_4}}{R_3}$. D'où $\dfrac{V_{S_4}}{V_e} = -1 - \dfrac{V_{S_2}}{V_e}\dfrac{R_3}{R_4}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{V_{S_4}}{V_e} = -1 - \frac{V_{S_2}}{V_e} \cdot \frac{(1-\alpha)}{\alpha} = \frac{-1 - 2(1-\alpha) p R_2 C_2 - p^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + R_2 C_2 p\, 2(1-\alpha)}{1 + 2(1-\alpha) p R_2 C_2 + p^2 R_1 R_2 C_1 C_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{V_{S_4}}{V_e} = -\frac{1 + p^2 R_1 R_2 C_1 C_2}{1 + 2(1-\alpha) p R_2 C_2 + p^2 R_1 R_2 C_1 C_2}$$ Filtrage réjecteur 2ème ordre.

2.3.6. 2.3.6.1. On a vu que $\frac{V_{S_2}}{V_e} = \frac{-R_2 C_2 p \,.\, 2\alpha}{1 + 2(1-\alpha) p R_2 C_2 + p^2 R_1 R_2 C_1 C_2}$

Donc on a :

- Pulsation d'accord : $\omega_A = \omega'_0 = \omega_0 \sqrt{\beta}$.
- Amplification à l'accord : $A_{MAX} = -\frac{R_2 C_2 \,.\, 2\alpha}{2(1-\alpha) R_2 C_2} = -\frac{\alpha}{1-\alpha} = -\frac{R_4}{R_3}$.
- Bande passante : $\underset{(\omega)}{B} = 2(1-\alpha) R_2 C_2 \cdot \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} = 2(1-\alpha)\omega_0$.

2.3.6.2. Le réglage de ces 3 grandeurs est indépendant :

Choix de A_{MAX} $\rightarrow \alpha$
Choix de B $\rightarrow \omega_0$
Choix de ω_A $\rightarrow \beta$

On ne retrouve pas le problème de réglage du Sallen Key vu précédemment.

2.3.6.3. Calculs de sensibilités :

- $\omega_A = \frac{1}{\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}}$ donc $S_{R_1}^{\omega_A} = S_{R_2}^{\omega_A} = S_{C_1}^{\omega_A} = S_{C_2}^{\omega_A} = -\frac{1}{2}$.

- $Q = \frac{\sqrt{\beta}}{2(1-\alpha)} = \sqrt{\frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}} \cdot \frac{R_3 + R_4}{2 R_3}$ donc $S_{R_1}^{Q} = S_{C_1}^{Q} = \frac{1}{2}$

$$S_{R_2}^{Q} = S_{C_2}^{Q} = -\frac{1}{2}$$

$$S_{R_3}^{Q} = \frac{R_3}{Q} \cdot \frac{dQ}{dR_3} = \frac{2\cancel{R_3^2}}{R_3 + R_4} \cdot \sqrt{\frac{\cancel{R_2 C_2}}{\cancel{R_1 C_1}}} \cdot \sqrt{\frac{\cancel{R_1 C_1}}{\cancel{R_2 C_2}}} \cdot \frac{2R_3 - 2R_3 - 2R_4}{4\cancel{R_3^2}} = -\frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_4}}$$

$$S_{R_4}^{Q} = \frac{2 R_3 R_4}{R_3 + R_4} \sqrt{\frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}} \sqrt{\frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{R_3}{R_4} + 1}$$

- $A_{MAX} = -\frac{R_4}{R_3}$. Donc $S_{R_3}^{A_{MAX}} = 1$ $S_{R_4}^{A_{MAX}} = -1$

Ces sensibilités sont donc tout à fait acceptables.

Avantage du montage : Indépendance des réglages.

Inconvénients du montage : Beaucoup de composants.
Rapport de résistances grand pour avoir A_{MAX} grand.

Partie II. - **CAPACITÉS COMMUTÉES**

1. **Principe**

Pendant la 1ère demi-période Δq passe de A sur C :

$$\Delta q = (V_1 - V_2)\, C$$

Pendant la 2ème demi-période, Δq passe de C à B :

$$\Delta q = (V_1 - V_2)\, C$$

Donc pendant T_K, Δq est passée de A à B, ceci est équivalent à un courant moyen :

$$I = \frac{\Delta q}{T_K} = (V_1 - V_2)\frac{C}{T_K}$$

Donc, on a, entre A et B, l'équivalent d'une résistance :

$$\left[R_K = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{T_K}{C} = \frac{1}{CF_K} \right]$$

2. **Application**

2.1. v_E : tension continue.

2.1.1. De 0 à $\frac{T_K}{2}$, C se charge sous E donc il y a la charge q = CE à $\frac{T_K}{2}$ sur son «armature supérieure».

De $\frac{T_K}{2}$ à T_K, C se décharge (car masse virtuelle sur l'entrée – de l'AOP). L'armature supérieure de C et l'armature de gauche de C' forment un système isolé, donc :

$$q' = CE = -C'\, v_{S_1} \qquad \text{à } T_K$$

D'où : $\boxed{v_{S_1} = -\frac{C}{C'}E}$

2.1.2. De nT_K à $\left(n + \frac{1}{2}\right)T_K$, C se charge sous E donc q = CE à $\left(n + \frac{1}{2}\right)T_K$.

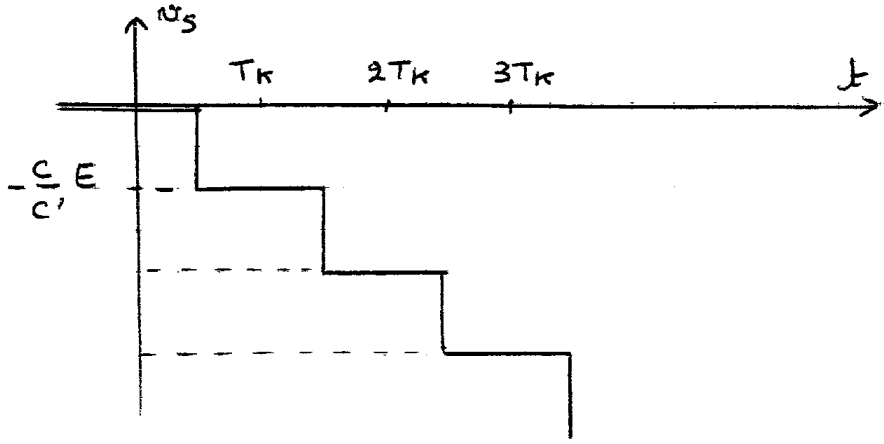
De $\left(n + \frac{1}{2}\right)T_K$ à $(n + 1)\, T_K$, même raisonnement que ci-dessus d'où :

$$q' = CE - v_{S_n}\, C' = -C'\, v_{s\,(n+1)}$$

Soit : $\boxed{v_{s\,(n+1)} = -\frac{C}{C'}E + v_{S_n}}$

Pour n = 0, on retrouve $v_{S_1} = -\frac{C}{C'}E + 0$ cf. 2.1.1.

2.1.3. Graphe de v_S (t) :



2.2. v_E variable dans le temps.

2.2.1. D'après le raisonnement précédent, en supposant la charge instantanée, on a :

$$v_{S_1} = -\frac{C}{C'} v_{E\left(\frac{1}{2}\right)}$$

2.2.2. De même :

$$\boxed{v_{S\,(n+1)} = -\frac{C}{C'} v_{E\left(n+\frac{1}{2}\right)} + v_{S_n}}$$

2.2.3. 2.2.3.1. Passage aux notations complexes :

$$v_{E_n} = V_E e^{j n \omega T_K} \qquad v_{S_n} = V_S e^{(j n \omega T_K + \varphi)}$$

D'où :
$$V_S e^{j\left[(n+1)\omega T_K + \varphi\right]} = -\frac{C}{C'} V_E e^{j\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega T_K} + V_S e^{j\left(n \omega T_K + \varphi\right)}$$

$\Leftrightarrow$
$$\underline{V}_{S_n} e^{j \omega T_K} = -\frac{C}{C'} e^{j \frac{\omega}{2} T_K} \; \underline{V}_{e_n} + \underline{V}_{S_n}$$

Soit :
$$\underline{H} = \frac{\underline{V}_{S_n}}{\underline{V}_{e_n}} = -\frac{C}{C'} \frac{e^{j \frac{\omega}{2} T_K}}{e^{j \omega T_K} - 1}$$

$\Leftrightarrow$
$$\boxed{\underline{H} = -\frac{C}{C'} \frac{e^{j \pi f / F_K}}{e^{j 2 \pi f / F_K} - 1}}$$

2.2.3.2. Cette fonction est périodique (en fonction de f), sa période est $2 F_K$ (propriété des exponentielles complexes).

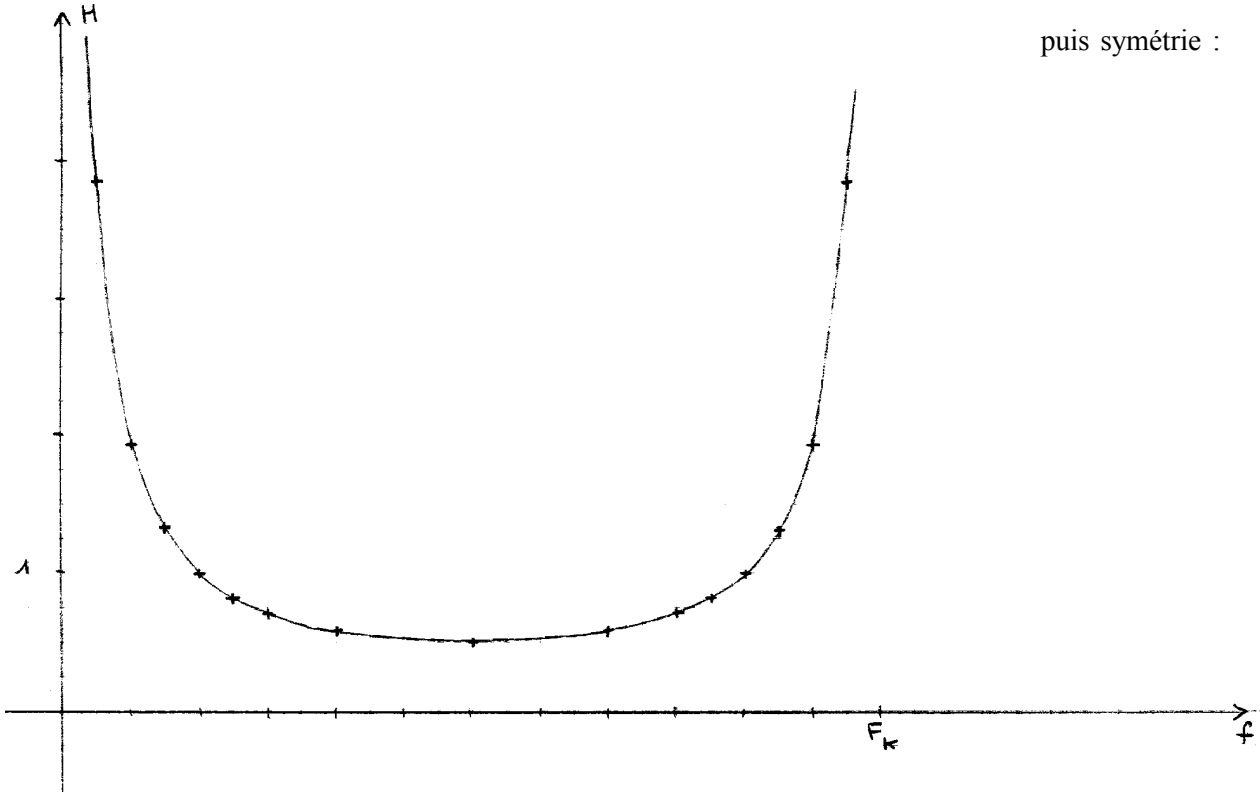
2.2.4. Étude du module de $\underline{H}$: H.

$$H = \frac{C}{C'} \frac{1}{\sqrt{\left(\cos 2 \pi \frac{f}{F_K} - 1\right)^2 + \sin^2 2 \pi \frac{f}{F_K}}}$$

Tableau de valeurs :

f	$\frac{F_K}{48}$	$\frac{F_K}{24}$	$\frac{F_K}{12}$	$\frac{3\,F_K}{24}$	$\frac{F_K}{6}$	$\frac{5\,F_K}{24}$	$\frac{F_K}{4}$	$\frac{F_K}{3}$	$\frac{F_K}{2}$
$\frac{HC'}{C}$	7,64	3,83	1,93	1,31	1	0,82	0,71	0,58	0,50

puis symétrie :



2.2.5. Argument de $\underline{H}$: φ

$$\varphi = \cancel{\pm\pi} + \pi\frac{f}{F_K} - \left[\operatorname{Arctg}\frac{\sin 2\pi f/F_K}{\left(\cos 2\pi\frac{f}{F_K} - 1\right)} \cancel{\pm\pi}\right] = \pi\frac{f}{F_K} + \operatorname{Arctg}\frac{\cos\pi\frac{f}{F_K}}{\sin\pi\frac{f}{F_K}}$$

Donc : $\varphi = \pi\frac{f}{F_K} - \pi\frac{f}{F_K} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = \text{cste}$ si $0 < f < F_K$

$\varphi = \pi\frac{f}{F_K} - \pi\frac{f}{F_K} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} = \text{cste}$ si $F_K < f < 2\,F_K$

Remarque : Autre méthode : $\underline{H} = -\frac{C}{C'}\frac{1}{e^{j\pi f/F_K} - e^{-j\pi f/F_K}}$

$\Leftrightarrow \quad \underline{H} = -\frac{C}{C'}\frac{1}{2j\,.\,\sin\pi\frac{f}{F_K}}$ donc : $\begin{cases} H = \frac{C}{C'}\cdot\frac{1}{|\sin\pi f/F_K|} \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{si } 0 < f < F_K \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{si } F_K < f < 2\,F_K \end{cases}$

Calculs donnés dans la 1ère période (de f = 0 à f = 2 F_K)

2.2.6. Si $f << F_K$, on obtient :

$$\underline{H} \approx -\frac{C}{C'} \cdot \frac{1}{j\,2\,\pi \frac{f}{F_K}} \approx -\frac{C}{C'} \cdot \frac{F_K}{j\omega}$$

On a donc un intégrateur inverseur avec $R \approx \frac{1}{C\,F_K}$.

C'est bien l'équivalence trouvée au 1. (Principe).

2.2.7. Le rapport $\frac{C}{C'}$ de bonne précision garantit une bonne précision sur la constante de temps de l'intégrateur, si F_K est précise.

2.2.8. On a $\underline{H} = -\frac{C}{C'} \frac{e^{j\pi f/F_K}}{e^{2j\pi f/F_K} - 1}$.

Donc, en passant à la transformée en z, on a :

$$H(z) = -\frac{C}{C'} \frac{z^{1/2}}{z-1}$$

Pour un intégrateur inverseur $\left(-\frac{1}{RC'\,p}\right)$ suivi d'un bloqueur d'ordre 0, on a :

$$-\frac{1}{RC'\,p} \cdot \frac{1 - e^{-T_K p}}{p} = -\frac{1}{RC'\,p^2}(1 - e^{-T_K p})$$

D'après la table de correspondance, cela correspond à une transformée en z :

$$-\frac{1}{RC'} \cdot \frac{T_K\,z}{(z-1)^2} \cdot (1 - z^{-1}) = -\frac{T_K}{RC'\,(z-1)}$$

En comparant H (z) et ce résultat, on peut dire que le terme $z^{1/2}$ correspond à une avance de $T_K/2$ qui était visible sur la courbe du 2.1.3. (avance par rapport à un intégrateur échantillonné de période T_K et bloqué), et que $-\frac{T_K}{RC'} = -\frac{C}{C'}$

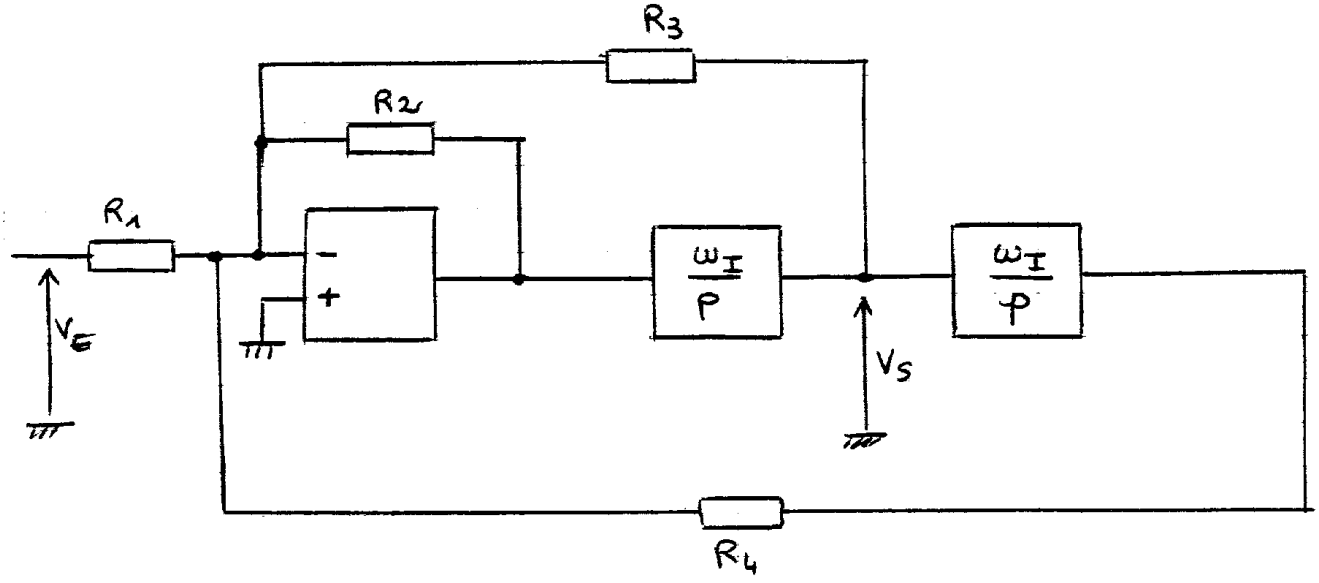
donc $R = \frac{1}{C\,F_K}$, ce qui a été vu au 1.

2.3. Les capacités parasites peuvent ainsi se décharger à la masse à chaque basculement d'interrupteur (s).

$\underline{H}' = -\underline{H}$ car il y a changement d'armature pour C à chaque basculement d'interrupteur (→ transfert de charge opposée à celles vues dans les 2.1. et 2.2.).

3. **Circuit intégré**

3.1.



$$V_S \frac{p}{\omega_I} = -\frac{R_2}{R_1} V_E - \frac{R_2}{R_3} V_S - \frac{R_2}{R_4} \cdot \frac{\omega_I}{P} V_S$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{V_S}{V_E} = \frac{-\dfrac{R_2}{R_1}}{\dfrac{p}{\omega_I} + \dfrac{R_2}{R_3} + \dfrac{R_2}{R_4} \cdot \dfrac{\omega_I}{p}} = \frac{-\dfrac{R_4}{R_1} \cdot \dfrac{p}{\omega_I}}{1 + \dfrac{R_4}{R_3} \cdot \dfrac{p}{\omega_I} + \dfrac{R_4}{R_2}\left(\dfrac{p}{\omega_I}\right)^2}$$ Passe bande 2ème ordre

$$\begin{cases} \omega'_A = \omega_I \sqrt{\dfrac{R_2}{R_4}} : \text{pulsation d'accord} \\ A'_{MAX} = -\dfrac{R_3}{R_1} \\ B'(\omega) = \dfrac{R_4}{R_3} \omega_I \dfrac{R_2}{R_4} = \omega_I \dfrac{R_2}{R_3} \qquad \text{d'où } Q' = \sqrt{\dfrac{R_2}{R_4}} \cdot \dfrac{R_3}{R_2} = \dfrac{R_3}{\sqrt{R_4 R_2}} \end{cases}$$

3.2. Sensibilités : (différentielles logarithmiques)

$$S_{R_2}^{\omega'_A} = \frac{1}{2} \quad ; \quad S_{R_4}^{\omega'_A} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad S_{\omega_K}^{\omega'_A} = 1$$

$$S_{R_4}^{Q'} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad S_{R_2}^{Q'} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad S_{R_3}^{Q'} = 1$$

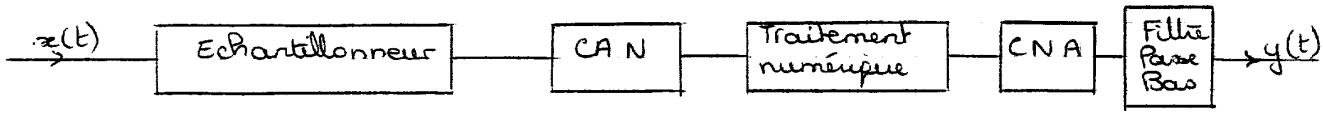
$$S_{R_3}^{A'_{MAX}} = 1 \quad ; \quad S_{R_1}^{A'_{MAX}} = -1$$

Intérêt de ce montage : sensibilités correctes, réglages simples et indépendants, peu de composants.

Partie III. - **FILTRES NUMÉRIQUES**

1. **Chaîne de traitement**

1.1. Schéma fonctionnel de la chaîne :



1.2. Problème de repliement des fréquences $> \frac{F_E}{2}$.

1.3. Théorème de Shannon.

1.4. On place, avant l'échantillonneur, un filtre anti-repliement qui élimine du spectre de x (t) les fréquences $> F_E/2$.

2. **Étude d'un filtre passe bas numérique 1er ordre**

2.1. On obtient :

$$\tau \frac{y_n - y_{n-1}}{T_E} + y_n = Ax_n$$

$$\Leftrightarrow \quad y_n\left(\frac{\tau + T_E}{T_E}\right) - \frac{\tau\, y_{n-1}}{T_E} = Ax_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_n}{K} - y_{n-1}\left(\frac{1}{K} - 1\right) = Ax_n$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y_n = y_{n-1}(1-K) + KAx_n}$$

2.2. Réponse impulsionnelle :

n	– 1	0	1	2	3	4
x_n	0	1	0	0	0	0
y_n	0	KA	KA (1 – K)	KA $(1-K)^2$	. . .	
y_{n-1}	0	0	KA	KA (1 – K)		

$$y_n = KA\,(1-K)^n$$

Comme $0 < K < 1$, $y_n \to 0$ le système est stable
$n \to +\infty$

C'est un <u>filtre récursif RII</u> (réponse impulsionnelle «infinie»).

2.3. Passage à la notation complexe :

$$Y_n = Y_n \cdot e^{-j\omega T_E}(1-K) + KA\,X_n \qquad \Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{AK}{1-(1-K)\,e^{-j\omega T_E}}}$$

2.4. $$H = \frac{AK}{\sqrt{\left[1-(1-K)\cos \omega T_E\right]^2 + \left[(1-K)\sin \omega T_E\right]^2}}$$

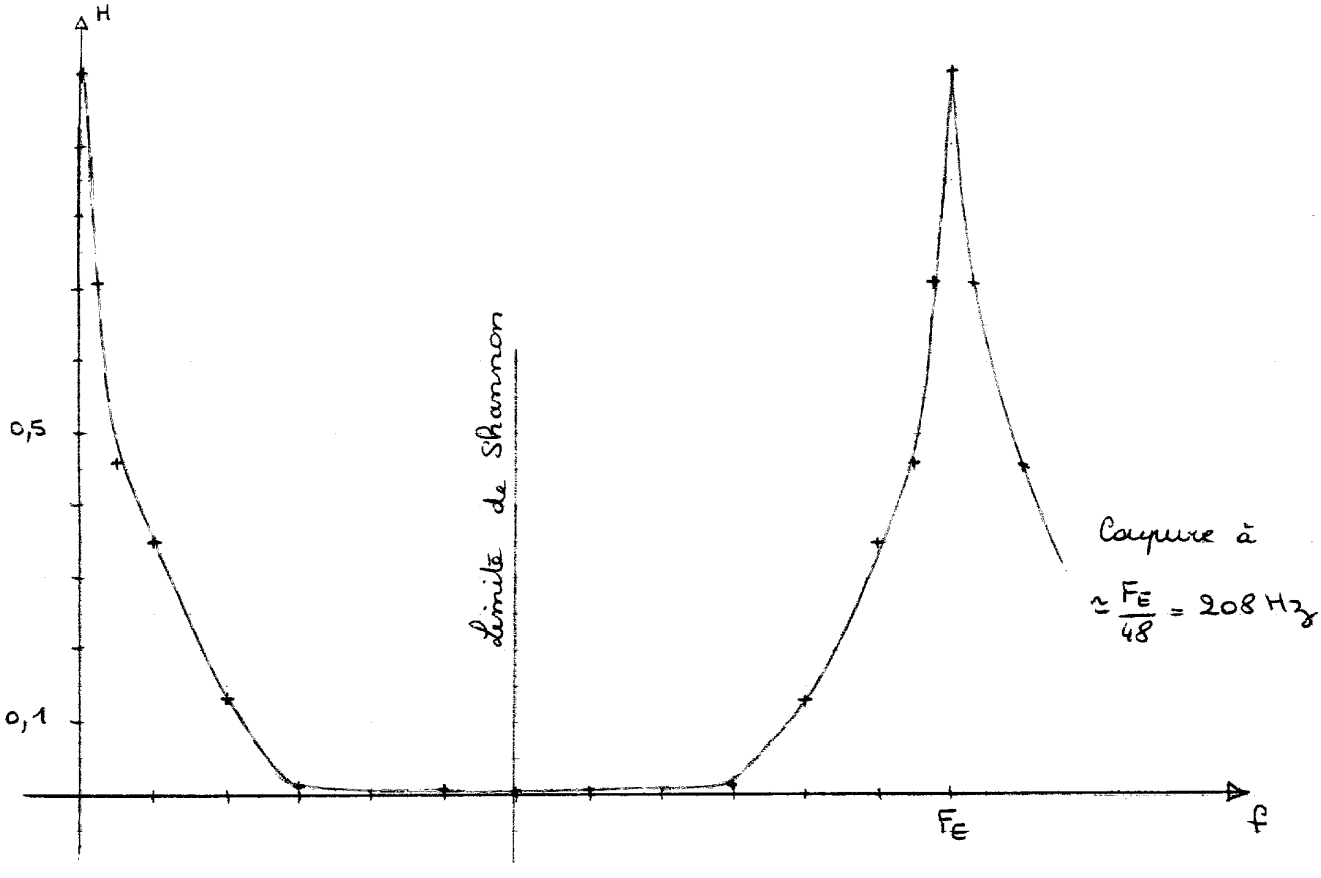
H est une fonction paire, de période en fréquence : F_E.

Si $f \to 0$, $H \to \frac{AK}{\sqrt{(1-1+K)^2+0}} = A$

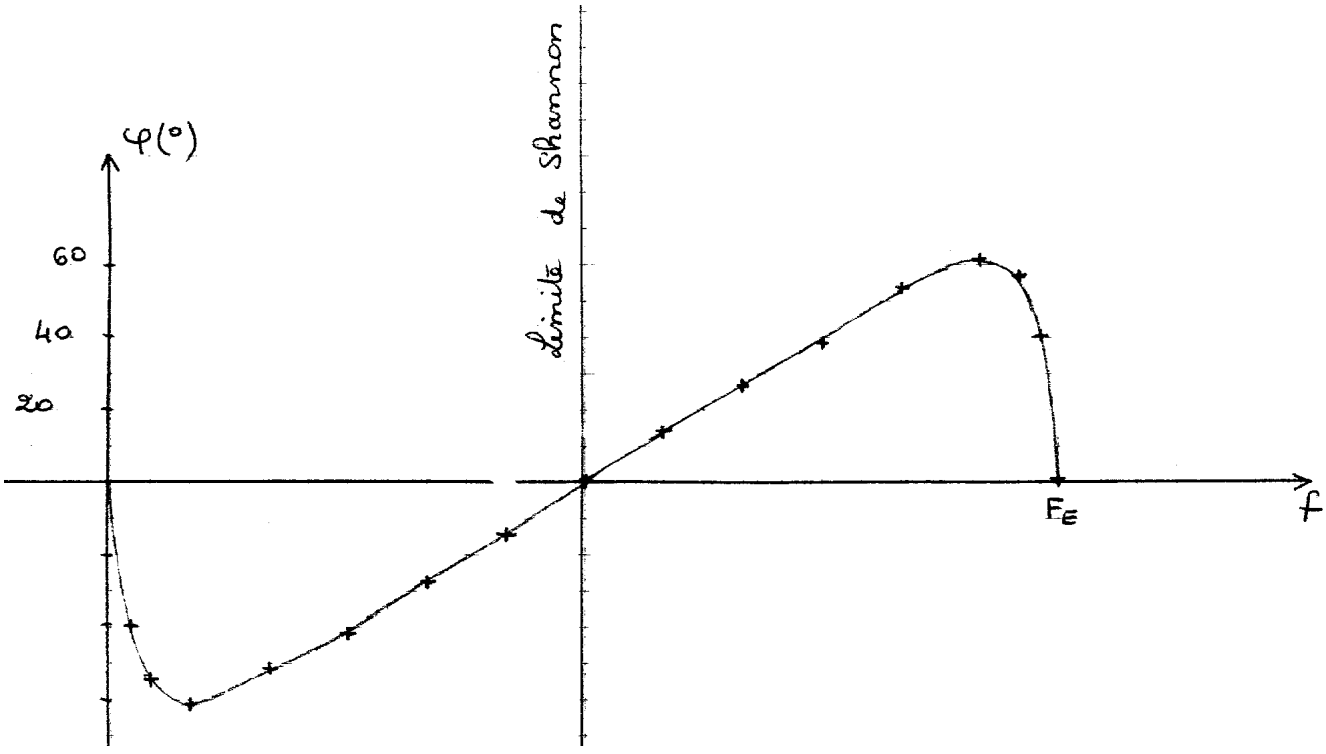
Si $f \to \frac{F_E}{2}$, $H \to \frac{AK}{\sqrt{(1+1-K)^2}} = \frac{AK}{2-K}$

Application Numérique : $A = 1$ et $K = \frac{1}{8}$ $\Leftrightarrow$ H varie de 1 à $\frac{1}{15}$ lorsque f varie de 0 à $\frac{F_E}{2}$.

$$H = \frac{1}{8} \times \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{7}{8}\cos 2\pi \frac{f}{F_E}\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\sin 2\pi \frac{f}{F_E}\right)^2}}$$



2.5. $$\varphi = -\operatorname{Arctg}\frac{(1-K)\sin 2\pi f/F_E}{1-(1-K)\cos 2\pi f/F_E} = -\operatorname{Arctg}\frac{\frac{7}{8}\sin 2\pi f/F_E}{1-\frac{7}{8}\cos\frac{2\pi f}{F_E}}$$

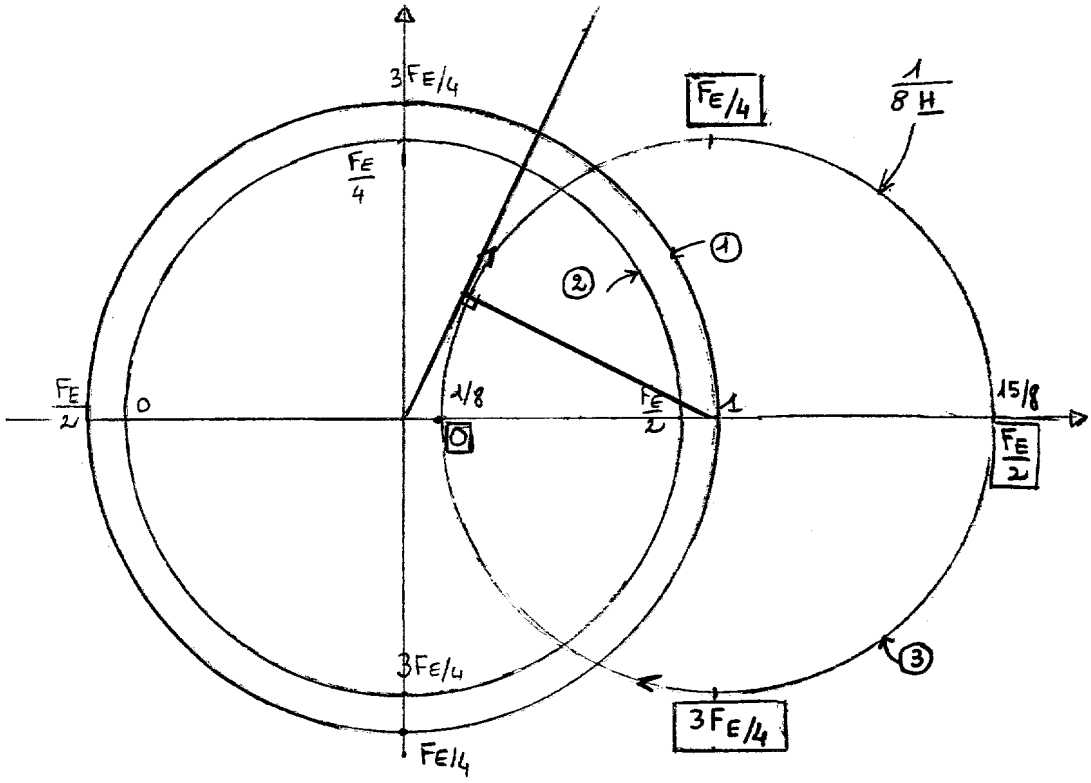


2.6. On représente :

- $e^{-j\omega T_E} \rightarrow$ Cercle ①
- $-\frac{7}{8}e^{-j\omega T_E} \rightarrow$ Cercle ②
- $\left(1-\frac{7}{8}e^{-j\omega T_E}\right) \rightarrow$ Cercle ③

Ensuite x 8

$\Rightarrow$ cercle entre 1 et 15 sur l'axe des réels.



$$\sin\left|\varphi_{mini}\right| = \frac{\text{Rayon du cercle}}{\text{Abscisse du centre}} = \frac{7/8}{1} = \frac{7}{8} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{\varphi_{mini} = -61°}$$

(Fréquence pour laquelle φ_{mini} est atteint $= \frac{F_E}{4}\left(\frac{90-61}{90}\right) \approx \frac{F_e}{12}$).

2.7. Fréquence de coupure à – 3 dB :

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{7}{8}\cos\omega_c T_E\right)^2 + \left(\frac{7}{8}\sin\omega_c T_E\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{64} = 1 + \left(\frac{7}{8}\right)^2 - 2 \cdot \frac{7}{8}\cos\omega_c T_E$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{7}{4}\cos\omega_c T_E = \frac{111}{64} \qquad \Rightarrow \quad f_c = F_E \cdot \frac{0{,}13}{2\pi} = 21{,}3 \cdot 10^{-3} F_E$$

$$\text{Si} \quad F_E = 10 \text{ kHz}, \ \boldsymbol{f_c = 213 \text{ Hz}}.$$

Pour le filtre analogique de départ :

$$f_{ca} = \frac{1}{2\pi\tau} \qquad K = \frac{T_E}{\tau + T_E} = \frac{1}{8} \ \Rightarrow \ \tau = 7\,T_E = 700\ \mu s$$

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{f_{ca}} = \frac{1}{2\pi \cdot 700 \cdot 10^{-6}} = \boldsymbol{227 \text{ Hz}}$$

2.8. $H(z) = \dfrac{AK}{1 - (1-K)\,z^{-1}}$

D'où
- 1 pôle $\quad z^{-1}(1-k) = 1 \ \Leftrightarrow \ z = \frac{7}{8}$

  Le pôle est à l'intérieur ducercle unité $\Rightarrow$ Filtre **STABLE**
- 1 zéro : $z = 0$

3. **Synthèse d'un filtre passe-bande numérique par la méthode de la transformée bilinéaire**

3.1. 3.1.1. $\quad s = k\dfrac{z-1}{z+1} \ \Leftrightarrow \ z = \dfrac{k+s}{k-s}$

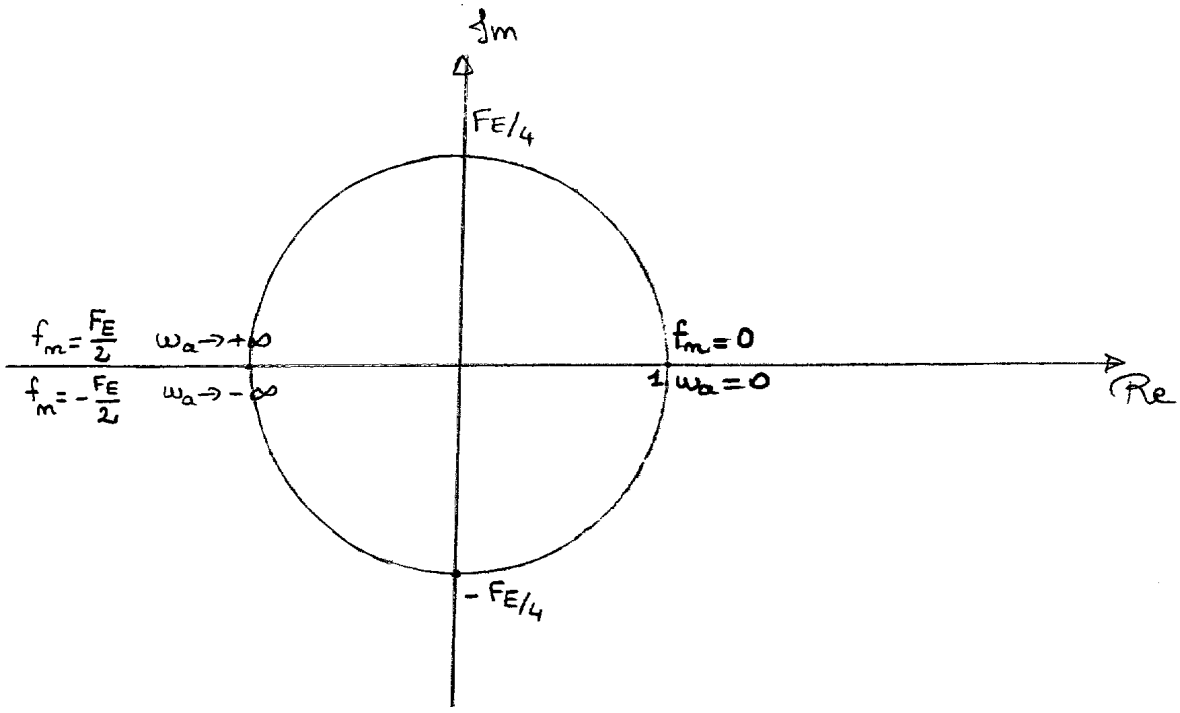
3.1.2. s imaginaire pur : $\Rightarrow |z| = 1 \ \Rightarrow$ cercle de centre 0 de rayon 1 dans le plan des z.

$s = \alpha + j\beta$
- si $\alpha > 0 : z = \dfrac{k + \alpha + j\omega}{k - \alpha - j\omega}$ $\quad |z| > 1 \Rightarrow$ extérieur du cercle
- si $\alpha < 0$: intérieur du cercle

3.1.3. La condition de stabilité :

– dans le plan des s : pôles dans le ½ plan gauche donc dans le plan z : pôles à l'intérieur du cercle unité.

3.2. 3.2.1.



$$z = \frac{k + j\,\dfrac{\omega_a}{\omega_{ua}}}{k - j\,\dfrac{\omega_a}{\omega_{ua}}} = \frac{k\,\omega_{ua} + j\,\omega_a}{k\,\omega_{ua} - j\,\omega_a}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg} z = 2\,\operatorname{Arctg}\frac{\omega_a}{\omega_{ua}}$$

Si $\omega_a \to -\infty$, $\operatorname{Arg} z \to -\pi$

Si $\omega_a = 0$, $\operatorname{Arg} z = 0$

Si $\omega_a \to +\infty$, $\operatorname{Arg} z \to +\pi$

3.2.2. $z = e^{j\,\omega_n T_e} = e^{j\,\omega_n / F_E}$

donc $|z| = 1$.

3.2.3.

$f_n = -\dfrac{F_E}{2} \Rightarrow \quad z = e^{-j\pi}$

$-\frac{F_E}{4}$	$e^{-j\pi/2}$
0	1
$+\frac{F_E}{4}$	$e^{j\pi/2}$
$+\frac{F_E}{2}$	$e^{j\pi}$

Le cercle sans recouvrement correspond à tout l'axe imaginaire des s.
Donc les lieux de Nyquist de T dans le plan s et dans le plan z seront superposés. Seule la graduation en ω_a et ω_n ne sera pas la même et il n'y aura pas de recouvrement.

3.3. 3.3.1. On a $s = k\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad \Leftrightarrow \quad s + sz^{-1} = k\,(1-z^{-1})$

$$\Leftrightarrow \quad \left[z^{-1} = \frac{k-s}{k+s} = \frac{k - j\dfrac{\omega_a}{\omega_{ua}}}{k + j\dfrac{\omega_a}{\omega_{ua}}} = \frac{k\,\omega_{ua} - j\,\omega_a}{k\,\omega_{ua} + j\,\omega_a} \right]$$

3.3.2. Le numérateur étant le conjugué du dénominateur, $|z^{-1}| = 1$ comme vu au 3.2.2.

3.3.3. $$z^{-1} = e^{-j\,\omega_n/f_E} = \frac{k\,\omega_{ua} - j\,\omega_a}{k\,\omega_{ua} + j\,\omega_a}$$

$$\Rightarrow \text{ Égalité des arguments : } -\frac{\omega_n}{f_E} = \operatorname{Arctg}\left(-\frac{\omega_a}{k\,\omega_{ua}}\right) - \operatorname{Arctg}\left(\frac{\omega_a}{k\,\omega_{ua}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Arctg}\frac{\omega_a}{k\,\omega_{ua}} = \frac{\omega_n}{2\,f_E}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\omega_a}{\omega_{ua}} = k\,\operatorname{tg}\frac{\omega_n}{2\,f_E}}$$

3.3.4. Relation sensiblement linéaire pour ω_a autour de ω_{ua} si k grand car alors $\operatorname{tg} ... << 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\dfrac{\omega_n}{2\,f_E} \approx \dfrac{\omega_n}{2\,f_E}$.

3.4. 3.4.1. On choisira $\boldsymbol{\omega_{ua} = 500 \,.\, 2\,\pi \text{ rd/s}}$.

3.4.2. $$\underline{k} = \frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{500\,.\,2\,\pi}{2\,.\,5\,.\,10^3}} = \mathbf{3{,}078}$$ (formule ci-dessous pour $f_a = f_{ua} = 500$ Hz).

3.4.3. On peut maintenant chercher les fréquences analogiques correspondant aux fréquences numériques limites de la B_p.

$Q_n = 10,\ f_n = 500$ Hz $\Rightarrow$

$$f_{n1} = f_{n0}\left(-\frac{1}{2\,Q_n} + \sqrt{1 + \frac{1}{4\,Q_n^2}}\right) = 475{,}62 \text{ Hz}$$

$$f_{n2} = f_{n0}\left(+\frac{1}{2\,Q_n} + \sqrt{1 + \frac{1}{4\,Q_n^2}}\right) = 525{,}62 \text{ Hz}$$

D'où : $$f_{a1} = f_{ua}\,k\,\operatorname{tg}\frac{\pi\,.\,475{,}62}{5000} = 474{,}11 \text{ Hz}$$

;P!3.4.4.

$$f_{a2} = f_{ua}\, k\, tg\, \frac{\pi \,.\, 525{,}52}{5000} = 527{,}59 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{Q_a} = \frac{f_{0a}}{\Delta f} = \frac{500}{527{,}59 - 474{,}11} = \mathbf{9{,}35}$$

3.4.4. $$T\,(s) = \frac{1}{1 + 9{,}35 \,.\, \left(s + \frac{1}{s}\right)}$$

3.4.5. $$T\,(z) = \frac{1}{1 + 9{,}35 \left(k\, \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + \frac{1 + z^{-1}}{k\,(1 - z^{-1})}\right)}$$

$$= \frac{k\,(1 - z^{-2})}{k\,(1 - z^{-2}) + 9{,}35 \,.\, k^2\,(1 + z^{-2} - 2\,z^{-1}) + 9{,}35\,(1 + z^{-2} + 2\,z^{-1})}$$

$$= \frac{k\,(1 - z^{-2})}{k - k\,z^{-2} + 9{,}35\,k^2 + 9{,}35\,k^2\,z^{-2} - 18{,}7 \,.\, k^2\,z^{-1} + 9{,}35 + 9{,}35\,z^{-2} + 18{,}7\,z^{-1}}$$

$$\boxed{T\,(z) = \frac{3{,}077\,(1 - z^{-2})}{100{,}95 - 158{,}35\,z^{-1} + 94{,}8\,z^{-2}}}$$

3.4.6. D'où l'algorithme :

$$y_n = \frac{1}{100{,}95}\left(158{,}35\,y_{n-1} - 94{,}8\,y_{n-2} + 3{,}077 - 3{,}077\,x_{n-2}\right).$$

3.4.7.

$$\underline{T}\,(j\,\omega_n) = \frac{3{,}077\left(1 - \cos\left(+2\,\omega_n\,T_E\right) + j\,\sin\left(2\,\omega_n\,T_E\right)\right)}{100{,}95 - 158{,}35\left(\cos\omega_n\,T_E + j\,\sin\omega_n\,T_E\right) + 94{,}8\left(\cos 2\,\omega_n\,T_E + j\,\sin 2\,\omega_n\,T_E\right)}$$

$$\left|\underline{T}\,(j\,f_n)\right| = \frac{3{,}077\,\sqrt{\left(1 - \cos 4\,\pi\,f_n/f_E\right)^2 + \sin^2\left(4\,\pi\,f_n/f_E\right)}}{\sqrt{\left(100{,}95 - 158{,}35\cos\left(2\,\pi\,f_n/f_E\right) + 94{,}8\cos\left(4\,\pi\,f_n/f_E\right)\right)^2}}$$

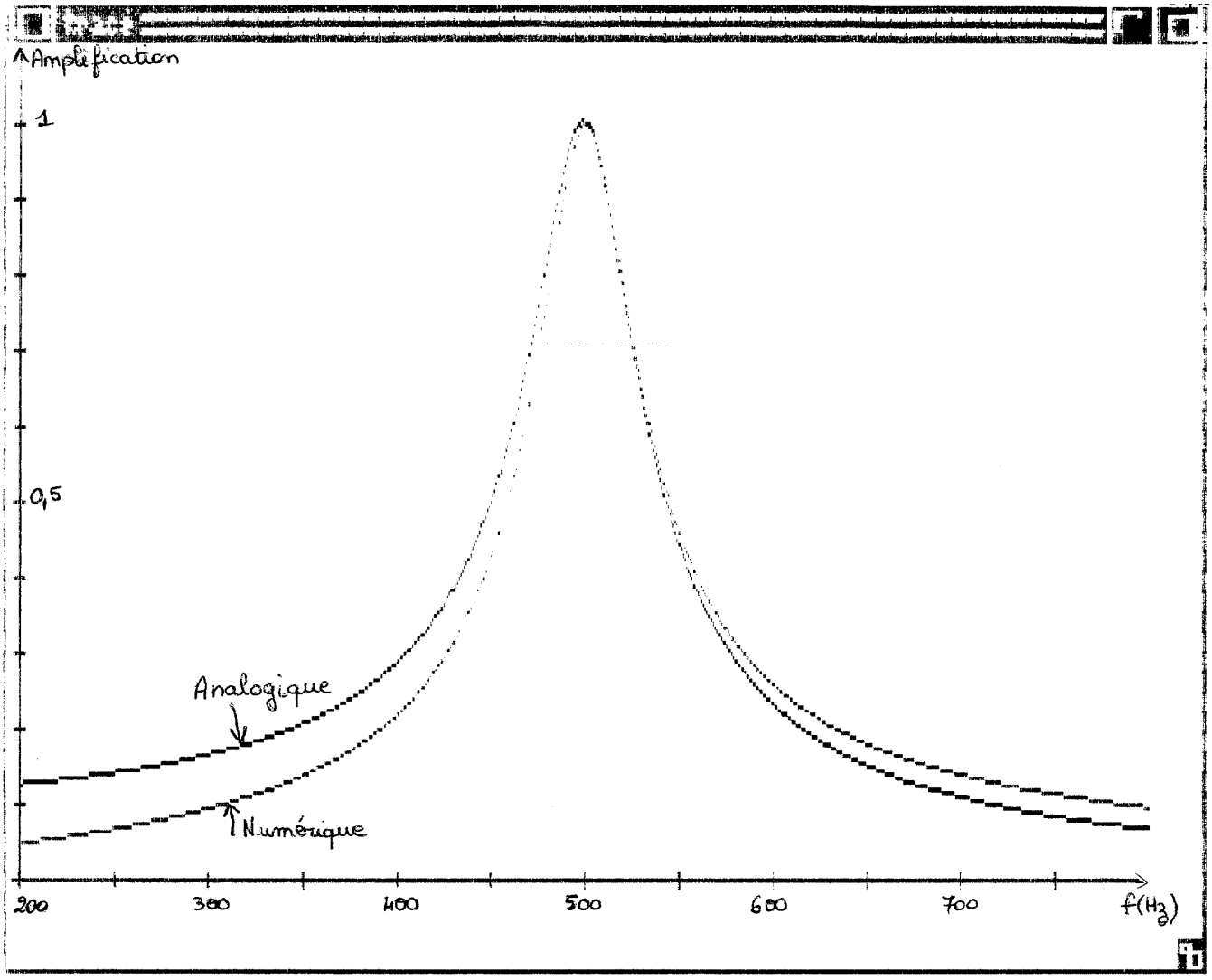
$$+\left(-158{,}35\sin\left(2\,\pi\,f_n/f_E\right) + 94{,}8\sin\left(4\,\pi\,f_n/f_E\right)\right)^2$$

Voir courbe ci-après.

3.4.8. $$\underline{T_a}\,(j\,\omega) = \frac{0{,}107}{1 + 3{,}4 \,.\, 10^{-5}\,j\,\omega - 101{,}3 \,.\, 10^{-9}\,\omega^2}$$

$$\left|\underline{T}_a\,(j\,f_a)\right| = \frac{0{,}107}{\sqrt{\left(1 - 101{,}3\,.\,10^{-9}\,.\,4\,.\,\pi^2\,(fa)^2\right)^2 + \left(3{,}4\,.\,10^{-5}\,.\,2\,\pi\,.\,fa\right)^2}}$$

Voir courbe ci-après.



3.4.9. On obtient un filtre passe-bande de résonance 1 kHz et de bande passante 100 Hz.

3.4.10. Le temps de calcul étant plus long que la période d'échantillonnage, le système ne prend qu'un échantillon sur 2. $\Rightarrow$ Tout se passe comme si $f_E = 5$ kHz $\Rightarrow$ On retrouve les résultats du 3.4.7.

Agrégation
(Concours Interne)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE
Composition avec exercices d'application - Session : 1992

DEUXIÈME PROBLÈME

MACHINE SYNCHRONE AUTOPILOTÉE À AIMANTS

I. Étude d'un circuit magnétique à aimants

1.1. Le théorème d'Ampère donne : $H_a\, l_a + H_e \cdot e = 0$.

Dans l'aimant : $B_a = \mu_0 H_a + J$ (vecteurs colinéaires).

Dans l'entrefer : $B_{e_0} = \mu_0 H_e$.

D'où : $\dfrac{B_a - J}{\mu_0} \cdot l_a + \dfrac{B_{e_0}}{\mu_0} \cdot e = 0$.

Or (conservation du flux) : $B_{e_0} \cdot S = B_a \cdot S \Leftrightarrow B_{e_0} = B_a$.

D'où : $\dfrac{B_{e_0} - J}{\mu_0} \cdot l_a + \dfrac{B_{e_0}}{\mu_0} \cdot e = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{B_{e_0} = J \dfrac{l_a}{l_a + e}}$.

1.2. Seule est modifiée l'écriture du théorème d'Ampère : $H_a\, l_a + H_e \cdot e = ni$.

Le même déroulement de calcul qu'au 1.1. conduit à :

$$B_e = J \frac{l_a}{l_a + e} + \frac{\mu_0\, ni}{l_a + e} = B_{e_0} + Kni$$

avec : $\boxed{K = \dfrac{\mu_0}{l_a + e}}$

Commentaires :

1) Si l'on fait J = 0, «l'aimant» est caractérisé par $B_a = \mu_0 H_0$ donc il est remplacé par du vide (ou de l'air). Ceci est confirmé par le résultat trouvé pour B_e car, à J = 0, $B_e = \dfrac{\mu_0\, ni}{l_a + e}$ qui est la relation classique pour un circuit magnétique sans aimant et avec un entrefer $e + l_a$. Ceci montre bien que l'aimant est remplacé par un entrefer de longueur l_a dans l'hypothèse J = 0.

2) Si l'on fait i = 0 (voir 1.1.), on a : $B_e = B_{e_0} = J \dfrac{l_a}{l_a + e}$.

3) Donc il y a linéarité par rapport à J et à i.

$$B_e\,(i \neq 0, J \neq 0) = B_e\,(J = 0) + B_{e_0}\,(i = 0)$$

On peut donc appliquer le théorème de superposition.

1.3. Par analogie avec $B_e\,(J=0) = \dfrac{\mu_0\, ni}{l_a + e}$, l'influence de l'aimant à $J \neq 0$ peut être caractérisée par un terme $\dfrac{\mu_0\, n'i'}{l_a + e}$ en appliquant la superposition, comme vu ci-dessus. Ce qui donne :

$$B_e\,(ni, n'i') = \frac{\mu_0\, ni}{l_a + e} + \frac{\mu_0\, n'i'}{l_a + e} = \frac{\mu_0\, ni}{l_a + e} + J\,\frac{l_a}{l_a + e}$$

D'où : $\boxed{n'i' = \dfrac{J\, l_a}{\mu_0}}$

1.4. D'après la conservation du flux, B dans le fer est égal à B_e. Donc :

$$\boxed{\phi_t = n\, B_e \,.\, S}$$

Soit : $$\phi_t = S\left[\frac{(\mu_0\, n^2\, i)}{l_a + e} + J\,\frac{l_a\, n}{l_a + e}\right]$$

D'où : $$\left[L = \frac{\partial \phi_t}{\partial i} = S\,\frac{\mu_0\, n^2}{l_a + e}\right]$$

Remarque : $L = \dfrac{n^2}{\mathscr{R}}$

avec $\mathscr{R} = \dfrac{1}{\mu_0} - \dfrac{l_a + e}{S}$ (Réluctance)

Commentaires On peut voir le problème sous 2 angles complémentaires :

1) L mesure la «résistance» à une variation de courant car celle-ci entraîne une variation de flux. La constante $JS\dfrac{l_a\, n}{l_a + e}$ n'a donc pas d'importance pour le calcul de L.

2) On applique le théorème de superposition : L'aimant donne $B_{e_0} = \text{cste}$ donc pas de $\dfrac{d\,\phi_0}{dt}$. Pour calculer l'inductance, il faut remplacer l'aimant par un entrefer de longueur $(l_a + e)$ (voir 1.2.) donc on retrouve l'expression classique $\dfrac{n^2}{\mathscr{R}}$ avec $\mathscr{R}$: réluctance égale à $\dfrac{1}{\mu_0} \,.\, \dfrac{l_a + e}{S}$.

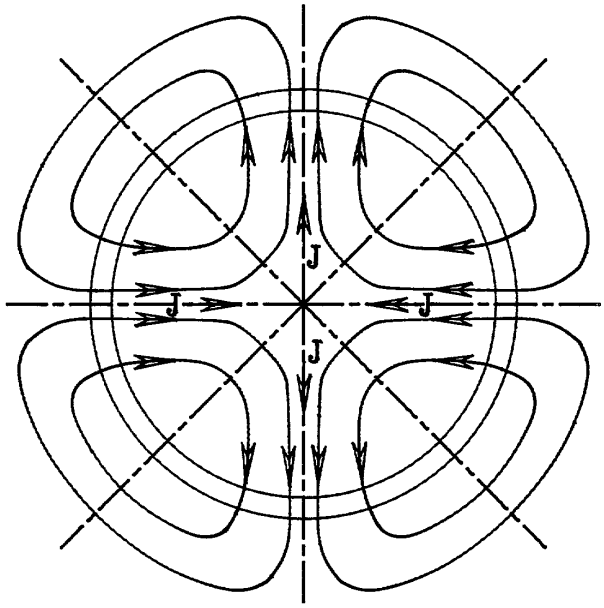
1.5. *Application numérique*

- $\mathbf{B_{e_0}} = J\,\dfrac{l_a}{l_a + e} = 0{,}8 \,.\, \dfrac{3}{4} = \mathbf{0{,}6\ T}$
- $\mathbf{L} = \mu_0\,\dfrac{n^2\, S}{l_a + e} = \mathbf{0{,}314\ mH}$
- $\mathbf{B_e}\ (i = -5\ A) = \dfrac{\mu_0\, ni}{l_a + e} + 0{,}6 = \mathbf{0{,}44\ T}$

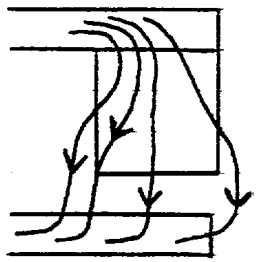
II. Étude d'une machine simplifiée

2.1. Étude du champ magnétique.

2.1.1. Carte de champ

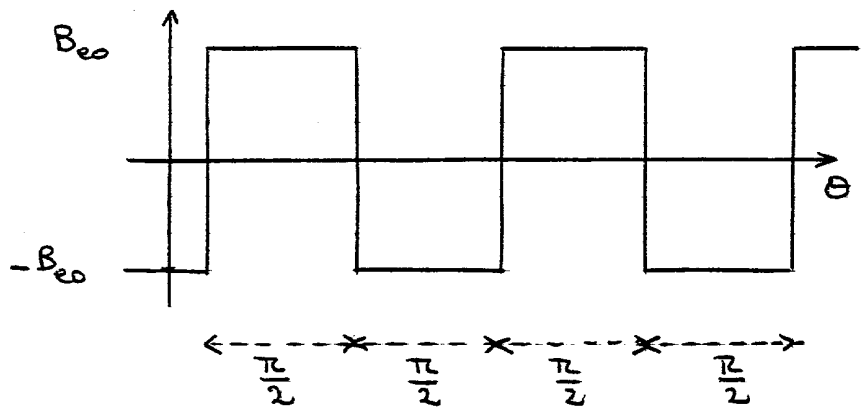


2.1.2. C'est évident d'après le tracé des lignes de champ. C'est encore une meilleure approximation que pour le circuit de la première partie car il n'y a pas de fuites latérales, la structure étant refermée sur elle-même.



Circuit de la première partie au niveau de l'entrefer.

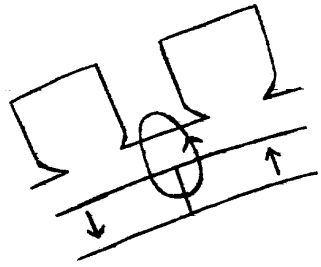
2.1.3. Avec les hypothèses faites (B_e radial), on a sous chaque pôle $B_e = B_{e_0}$ de la première partie. D'où (avec $B_{e_0} = 0{,}6$ T car A.N. identique au 1.5.).



On a donc bien une machine à 4 pôles.

2.1.4. Les lignes de champ ont bien la forme générale vue au 2.1.1., elles passent dans les dents et très peu dans les encoches. La conséquence de cela se voit Figure 4 : le champ est «presque rectangulaire» mais avec des trous liés d'une part à la présence des encoches et d'autre part au fait que les aimants ne sont pas jointifs.

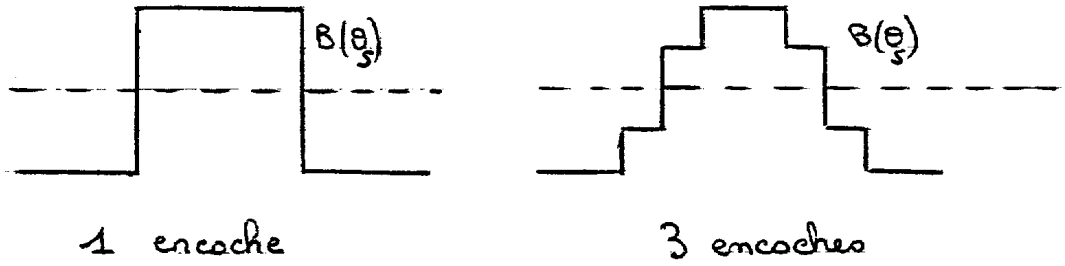
On voit que les dernières lignes de champ, à gauche et à droite n'englobent pas la totalité d'une encoche, donc ne sont pas très efficaces pour créer une f.é.m. Si l'on n'avait pas laissé un espace entre les aimants d'un pôle et ceux d'un autre pôle, cette partie aurait été «court-circuitée» par le stator et n'aurait donné lieu à aucune f.é.m.



Le stator est feuilleté, car, lorsque la machine tourne, au stator B est variable dans le temps donc existence de courants de Foucault ; alors qu'au rotor, B n'est pas fonction du temps, sauf en régime transitoire, on peut donc faire un rotor massif (qui servira d'amortisseur), même chose pour les aimants Samarium-Cobalt qui sont conducteurs.

2.2. Étude des bobinages et du couple.

2.2.1. Répartir les conducteurs dans 3 encoches (ou plus) revient à rendre plus sinusoïdale la répartition du champ B (θ_S) créé par le courant passant dans ces conducteurs.



Si l'on fait l'approximation B (θ_S) sinusoïdale, cela ne peut provenir que d'une densité angulaire de courant sinusoïdale. Si l'on suppose tous les conducteurs en série alimentés par le même courant i, il faut supposer, par cohérence, qu'ils sont répartis de façon sinusoïdale. D'où $n(\theta) = N \cdot \cos(\ )$ ou $N \sin(\ )$. L'angle intervenant est $2\,\theta_S$ car il faut, pour obtenir un couple non nul, que le stator ait le même nombre de pôles que le rotor. Ici le rotor a 4 pôles, donc 2 paires de pôles donc l'angle est $\underline{2}\,\theta_S$.

2.2.2. Pour faire un bobinage triphasé, il faut un décalage de $\frac{2\pi}{3}$ en angle électrique, donc :

$$\begin{cases} n_2(\theta_S) = N \sin\left(2\,\theta_S - \frac{2\pi}{3}\right) \\ n_3(\theta_S) = N \sin\left(2\,\theta_S - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

(Un décalage électrique de $\frac{2\pi}{3}$ correspond à un décalage mécanqiue de $\frac{\pi}{3}$).

2.2.3. Calcul de $j(\theta_S)$:

$$j(\theta_S) = N \sin 2\theta_S \cdot I\sqrt{2} \cos \omega t$$

$$+ N \sin\left(2\theta_S - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot I\sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$+ N \sin\left(2\theta_S - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot I\sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

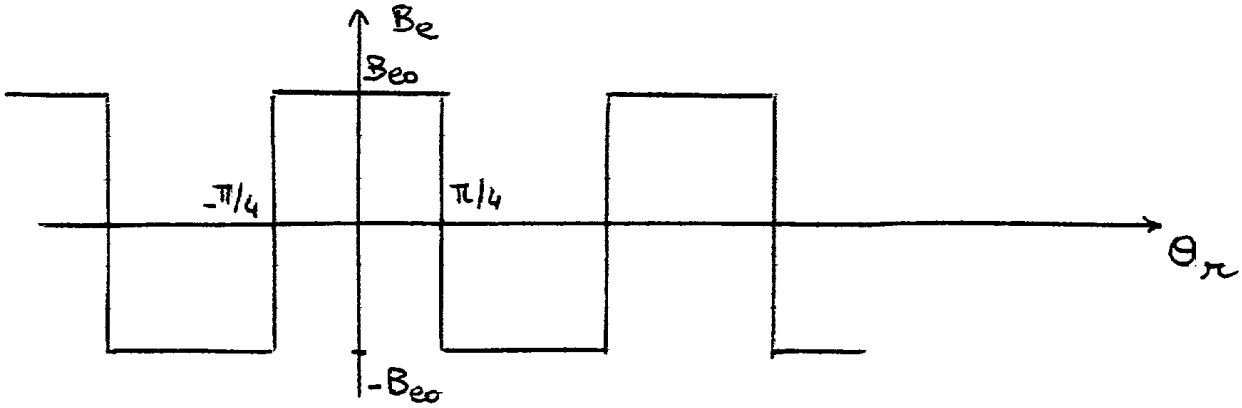
$$= N I\sqrt{2}\left[\cos \omega t \cdot \sin 2\theta_S + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(2\theta_S - \frac{2\pi}{3}\right)\right.$$

$$\left. + \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(2\theta_S - \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$\boxed{j(\theta_S) = \frac{3}{2} N I\sqrt{2} \sin(2\theta_S - \omega t)}$$

Si l'on accompagne l'onde, $2\theta_S - \omega t = \text{cste}$ donc $2\,d\theta_S - \omega\,dt = 0$ soit $\frac{d\theta_S}{dt} = \frac{\omega}{2}$. On voit donc que l'on a une onde de densité angulaire de courant tournante. Sa vitesse angulaire est $\frac{\omega}{2} = \Omega_S$.

2.2.4. D'après la Figure 3, on obtient :



La force de Laplace s'exerçant sur les conducteurs situés dans l'angle $d\theta_S$ est :

$$dF(\theta_S) = j(\theta_S) \cdot d\theta_S \cdot B_e(\theta_S) \cdot l$$

Le couple correspondant est :

$$d\Gamma(\theta_S) = R_1 \cdot dF(\theta_S)$$

Par symétrie, on peut calculer le couple total en intégrant entre $\theta_r = -\frac{\pi}{4}$ et $\theta_r = +\frac{\pi}{4}$, puis en multipliant par 4.

Comme $\theta_S = \theta_r + \Omega_r t + \theta_0$, les bornes d'intégration en θ_S sont $-\frac{\pi}{4} + \Omega_r t + \theta_0$ et $+\frac{\pi}{4} + \Omega_r t + \theta_0$.

D'où : $$\Gamma(t) = 4 \cdot \int_{-\frac{\pi}{4} + \Omega_r t + \theta_0}^{+\frac{\pi}{4} + \Omega_r t + \theta_0} R_1 \cdot l \cdot B_{e_0} \cdot \frac{3}{2} \cdot N I\sqrt{2} \sin(2\theta_S - \omega t)\, d\theta_S$$

$$\boxed{\Gamma(t) = 4 R_1 \cdot l B_{e_0} \frac{3}{2} N I\sqrt{2} \sin(2\Omega_r t + 2\theta_0 - \omega t)}$$

Pour que Γ soit constant, il faut que $2\Omega_r t + 2\theta_0 - \omega t$ soit constant donc $2\Omega_r - \omega = 0$ soit $\boxed{\Omega_r = \frac{\omega}{2}}$.

Commentaires :

$\Omega_r = \Omega_S = \frac{\omega}{2}$, il faut que la machine soit synchrone.

On obtient donc : $\Gamma = 6 R_1 l B_{e_0} N I\sqrt{2} \sin 2\theta_0$. C'est l'expression du couple exercé par un champ sur un moment : $\vec{m} \wedge \vec{B} = m \cdot B \cdot \sin \Psi$.

2.2.5. *Application numérique*

$\Omega_r = \frac{\omega}{2} = 157$ rd/s $= 1500$ tr/mn

$\Gamma_{MAX} = 68{,}7$ Nm pour $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$

$P_{MAX} = \Gamma_{MAX} \cdot \Omega_r = 10790$ W

2.2.6. On utilise la même démarche que pour calculer le couple, à partir de :

$$de_1(\theta_S) = B_e(\theta_S) \cdot l \cdot v \cdot n_1 \cdot d\theta_S.$$

D'où : $$e_1(t) = 4 \int_{-\frac{\pi}{4} + \Omega_r t + \theta_0}^{+\frac{\pi}{4} + \Omega_r t + \theta_0} B_{e_0} \cdot l \cdot \Omega_r \cdot R_1 \cdot N \cdot \sin 2\theta_S \, d\theta_S$$

$$\boxed{e_1(t) = 4 N B_{e_0} l R_1 \Omega_r \sin(2\Omega_r t + 2\theta_0) = e_m \sin(2\Omega_r t + 2\theta_0)}$$

$e_2(t)$ et $e_3(t)$ sont déphasées de $-\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{4\pi}{3}$ par rapport à $e_1(t)$.

2.2.7. $$p(t) = e_m \cdot I\sqrt{2} \left[\sin(2\Omega_r t + 2\theta_0) \cdot \cos \omega t + \sin\left(2\Omega_r t + 2\theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(2\Omega_r t + 2\theta_0 - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$= e_m \cdot I\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2} \sin\left[2\,\Omega_r\, t + 2\,\theta_0 - \omega t\right]$$

Étant donné que toutes les pertes ont été négligées :

$$p(t) = \Gamma(t) \cdot \Omega_r$$

D'où : $$\Gamma(t) = \frac{e_m\, I\sqrt{2}}{\Omega_r} \cdot \frac{3}{2} \sin\left[2\,\Omega_r\, t + 2\,\theta_0 - \omega t\right]$$

On retrouve que $2\,\Omega_r = \omega$, donc que la machine doit être synchrone. On retrouve l'expression du couple vue au 2.2.4.

Application Numérique : $\Gamma_{MAX} = 68{,}7$ Nm

$$E = 4 \cdot \frac{B_{e_0}\, N\, l\, R_1\, \Omega_r}{\sqrt{2}} = 144 \text{ V}$$

2.2.8. On retrouve le même résultat. C'est normal puisque $e = Bl\,v$ et $F = Bil$ dérivent tous deux de la force de Laplace.

On a par exemple pour $\theta_0 = \pi/4$:

$$P_{MAX} = 3 \cdot E \cdot I = 3 \cdot 144 \cdot 25 = 10800 \text{ W}$$

III. Étude d'un onduleur à modulation de largeur d'impulsion

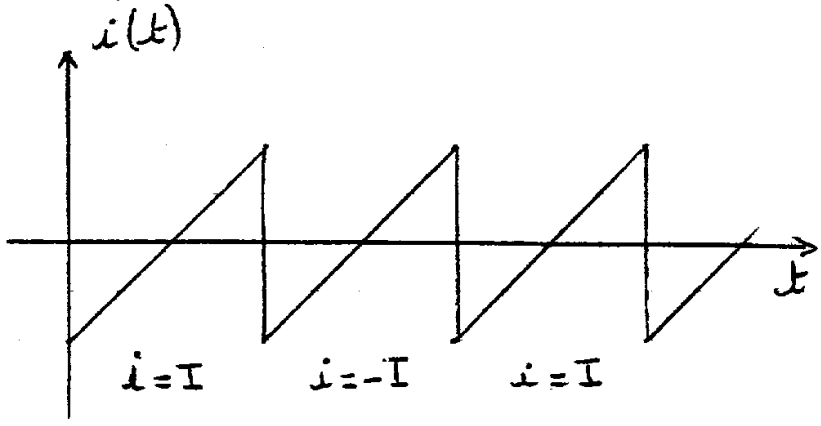
3.1. Étude d'un onduleur monophasé en fonctionnement dit «pleine onde».

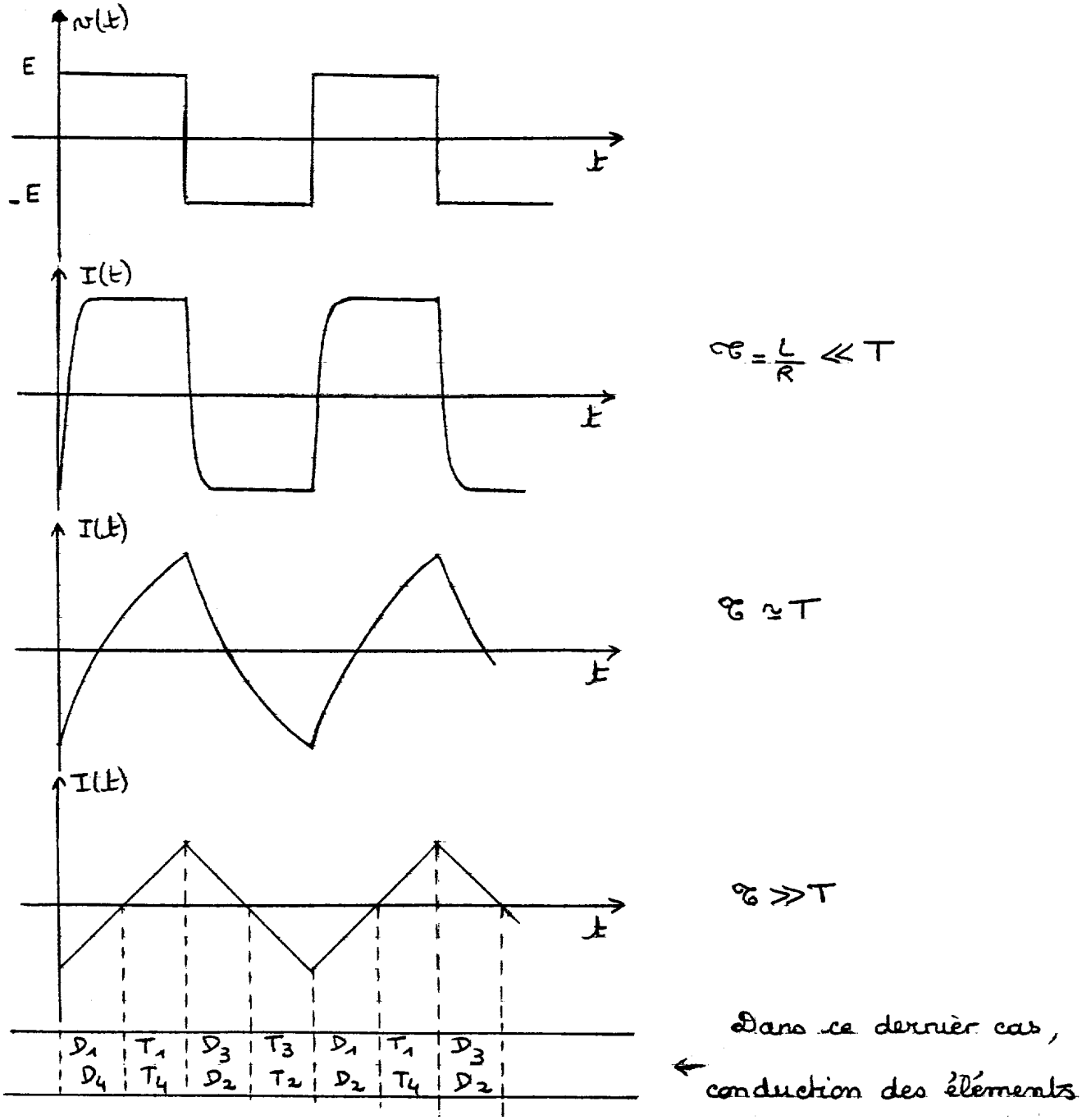
3.1.1. Charge R-L

1ère demi-période : Interrupteurs 1 et 4 fermés donc v (t) = + E.
2ème demi-période : Interrupteurs 2 et 3 fermés donc v (t) = – E.

D'où les courbes : (page suivante)

On constate sur le schéma que, lorsque les interrupteurs 1 et 4 conduisent, i (t) = I (t) et lorsque les interrupteurs 2 et 3 conduisent, i (t) = – I (t), d'où i (t) dans le dernier cas vu ci-dessus ($\tau >> T$) :





3.1.2. Charge L-e (t)

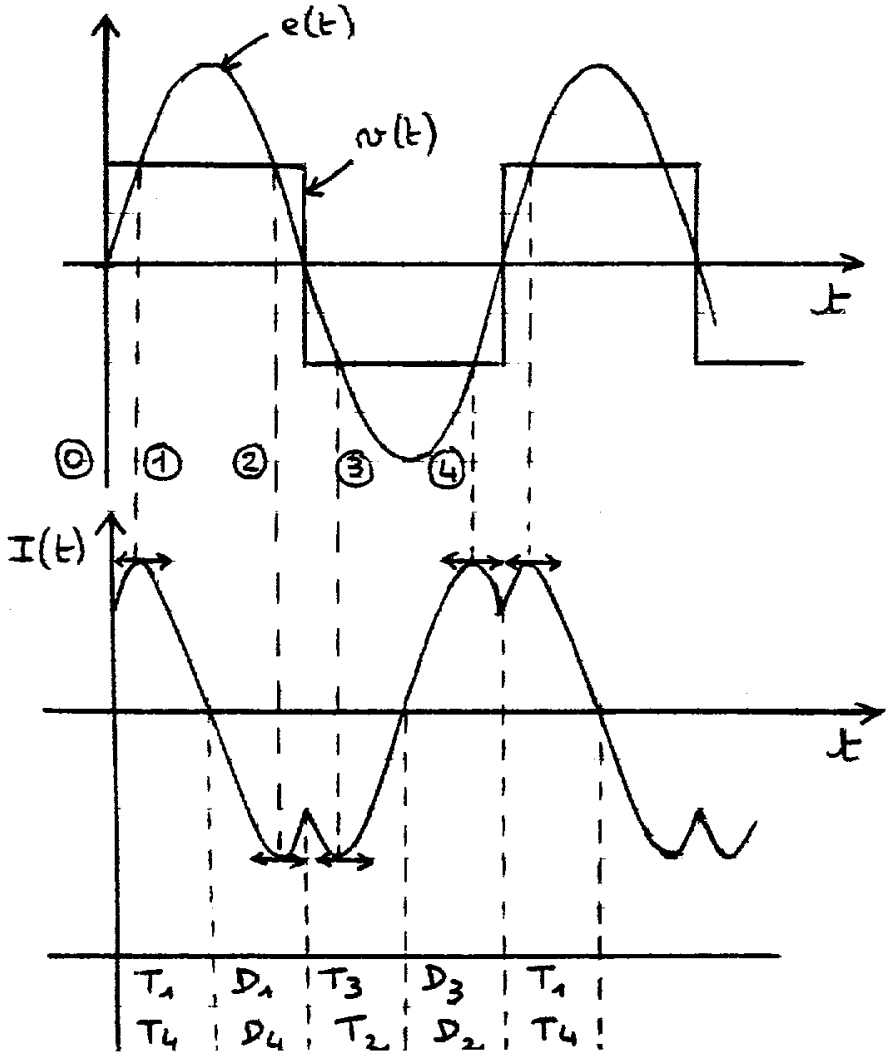
Les tensions e (t) et v (t) sont «en phase».

Pour tracer I (t) :

On a : $v(t) = L\dfrac{dI}{dt} + e(t)$ donc $L\dfrac{dI}{dt} = 0$ si v (t) = e (t).

Il y a donc un extremum avec tangente horizontale pour I (t) lorsque les courbes de v (t) et de e (t) se coupent.

De plus : $\begin{cases} \text{si } v(t) > e(t), \ I(t) \text{ est croissant car } L\dfrac{dI}{dt} > 0 \\ \text{si } v(t) < e(t), \ I(t) \text{ est décroissant car } L\dfrac{dI}{dt} < 0 \end{cases}$



On remarque que :

$$\int_1^2 (v - e)\, dt = L \int_1^2 dI = L\left(I(2) - I(1)\right)$$

est plus grand, en valeur absolue que :

$$\int_0^1 (v - e)\, dt = L \int_0^1 dI = L\left(I(1) - I(0)\right)$$

Donc l'excursion du courant entre "1" et "2" est plus grande qu'entre "0" et "1" d'où la figure ci-dessus, compte tenu des symétries.

On remarque que le fondamental de I (t) est en quadrature avance par rapport à e (t).

3.1.3.

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} E' \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) \left(\sum_{n=1}^{\infty} I_{cn} \cos n\,\omega t + I_{sn} \sin n\,\omega t \right) dt$$

Tous les produits à $n \neq 1$ conduisent en linéarisant à des fonctions sinusoïdales de pulsations $(n + 1)\,\omega$ et $(n - 1)\,\omega$ dont l'intégrale est nulle sur un intervalle T car T est un multiple de leur

période. Il reste donc :

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} E'\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi)\left(I_{c1}\cos\omega t + I_{s1}\sin\omega t\right)dt$$

Un calcul classique et simple conduit à :

$$\boxed{P = E'\frac{I_{s1}}{\sqrt{2}}\cos\varphi + E'\frac{I_{c1}}{\sqrt{2}}\sin\varphi}$$

On voit donc que les harmoniques de I (t) n'interviennent pas.

Dans le cas de la question 3.1.2., si l'on prend l'origine des temps au point "0", alors $\varphi = 0$ et I (t) est une fonction paire donc $I_{sn} = 0$, $\forall n$. On alors alors :

$$P = 0$$

La dernière remarque de la réponse à la question 3.1.2. le montre également.

3.2. Étude d'un ondulateur monophasé à modulation de largeur d'impulsion.

3.2.1. P ne dépend que de I_{c1} et I_{s1}, or les pertes Joule sont :

$$R\,I_{eff}^2 = R\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_{cn}^2 + I_{sn}^2}{2} = R\frac{\left(I_{c1}^2 + I_{s1}^2\right)}{2} + R\sum_{n=2}^{\infty}\frac{I_{cn}^2 + I_{sn}^2}{2}$$

Pour conserver P, on doit donc conserver I_{c1} et I_{s1}. Le premier terme des pertes Joule est donc incompressible, il faut minimiser le dernier, c'est-à-dire réduire les harmoniques.

3.2.2. Pour le terme fondamental, l'impédance du circuit R-L est :

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = 18{,}6\ \Omega$$

On voit donc que $Z_n \approx n\,L\omega$ dès que n > 2 ou 3.

• Dans le cas de la commande pleine onde, le spectre de v (t) est en 1/n (résultat classique de la décomposition d'un signal carré). Compte tenu de la remarque précédente sur Z_n , le spectre de I (t) est en $\frac{1}{n^2}$ dès que n > 2 ou 3.

• Spectres de v (t) :

On constate une raie dominante à 70 Hz (Figure 6) et 210 Hz (Figure 7). Ceci est normal car la modulation est d'ordre 7 (Figure 6) ou 21 (Figure 7) (compter les impulsions positives par période de v (t)).

On constate une quasi absence de raies jusqu'à 50 Hz (Figure 6) et 150 Hz (Figure 7). C'est le résultat recherché pour rejeter le plus loin possible les harmoniques.

Par contre, on constate que la raie à 70 Hz fait ≈ 60 % (idem pour celle à 210 Hz), alors que pour la pleine onde, elle ne ferait que $\frac{100}{7}$ % (ou $\frac{100}{21}$ %).

Néanmoins, dans ce dernier cas, il y aurait des raies à plus basses fréquences. Cette amplification de quelques raies (70 et ses harmoniques) était prévisible par le théorème de Parseval :

$$v^2_{efficace} = \frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T E^2\,dt = E^2 = \textbf{cste}$$

quelle que soit la modulation.

Donc si on supprime des raies basse fréquence, on amplifie des raies hautes fréquences car Parseval dit que $v^2_{efficace} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n^2}{2}$ avec v_n : amplitude de la raie n.

- Spectres de I (t) :

Ce que l'on vient de voir n'est pas grave car pour n > 2 ou 3 le spectre I (t) est celui de v (t) divisé par nL. On le voit en comparant les figures 6 et 7 à l'absence quasi totale de raies de I (t) dans la Figure 7 (quantitativement, on peut, en comparant les raies de v (t) et I (t), retrouver Z_n).

3.3. Étude d'un onduleur triphasé dit «pleine onde».

3.3.1. • Les courbes de v_{10} (t), v_{20} (t) et v_{30} (t) résultent directement du schéma de la Figure 8 et des conductions indiquées Figure 9.

- $v_{12} = v_{10} - v_{20}$.

- On a les équations de mailles :

(Maille 0 - 1 - n - 2 - 0) $\quad v_{10} - v_{20} - v_{1n} + v_{2n} = 0$

(Maille 0 - 1 - n - 3 - 0) $\quad v_{10} - v_{30} - v_{1n} + v_{3n} = 0$

De plus $\underline{V}_{1n} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_1$; $\underline{V}_{2n} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_2$; $\underline{V}_{3n} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_3$
avec $\underline{Z}$: impédance de charge. La charge est constituée de trois impédances $\underline{Z}$ en étoile

D'où $\underline{V}_{1n} + \underline{V}_{2n} + \underline{V}_{3n} = \underline{Z}\ (\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = 0$ car le neutre n'étant pas relié la somme des trois courants est nulle.

Donc : $v_{1n} + v_{2n} + v_{3n} = 0,\ \forall t$.

Si l'on additionne les 2 équations de maille, on obtient :

$$2\,v_{10} - v_{20} - v_{30} - v_{1n} + (v_{2n} + v_{3n}) = 0$$

$\Leftrightarrow 2\,v_{10} - v_{20} - v_{30} - 3\,v_{1n} = 0$ car $v_{2n} + v_{3n} = -v_{1n}$

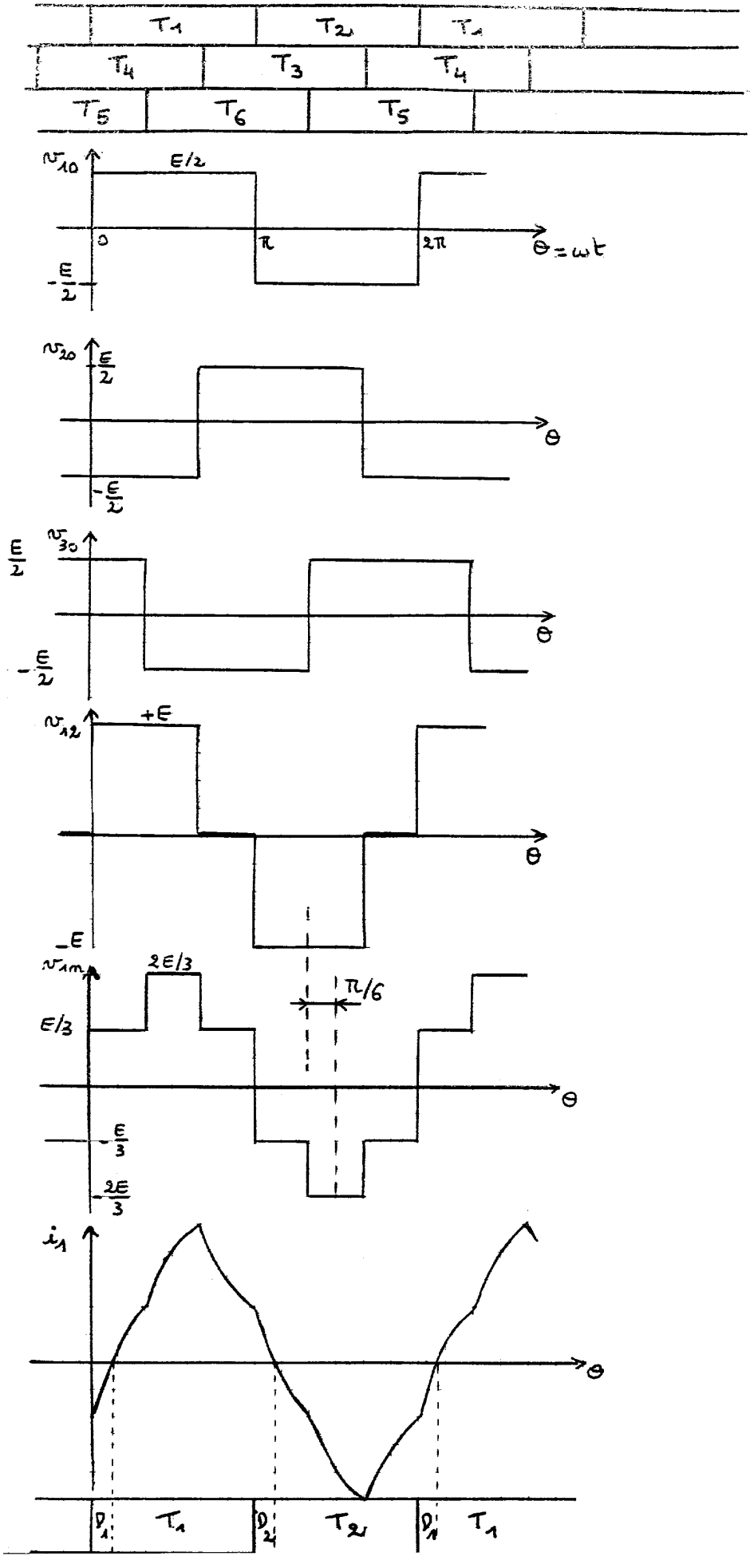
Soit : $\boxed{3\,v_{1n} = 2\,v_{10} - v_{20} - v_{30}}$

D'où la courbe de v_{1n} tracée ci-après.

Le déphasage entre le fondamental de v_{12} et celui de v_{1n} est $\frac{\pi}{6}$ (voir courbes). C'est le cas du triphasé équilibré classique.

3.3.2. Courbe i (t) : voir ci-après ainsi que les conductions de D_1, T_1, D_2, T_2.

Pour T_3 et T_4 par exemple, il suffit de décaler les conductions de T/3 (1/3 de période) par rapport à T_1 et T_2.


T1
T2
T3
T4
T5
T6
v10
E/2
0
π
2π
θ = ωt
-E/2
v20
E/2
θ
-E/2
v30
E/2
θ
-E/2
v12
+E
θ
-E
v1m
2E/3
π/6
E/3
θ
-E/3
-2E/3
i1
θ
D1
T1
D2
T2
D1'
T1

IV - Étude d'une machine synchrone autopilotée

4.1. On a : $$v_1(t) = R\, i_1 + L_S \frac{di_1}{dt} + M_S \frac{di_2}{dt} + M_S \frac{di_3}{dt} + e_1(t)$$

Compte tenu de la symétrie d'ordre 3, les 2 autres relations s'obtiennent par permutation circulaire 1 - 2 - 3. La somme des courants est nulle par hypothèse, donc $i_2 + i_3 = -i_1$ et la relation pour la phase 1 devient :

$$\boxed{v_1 = R\, i_1 + (L_S - M_S) \frac{di_1}{dt} + e_1} \qquad \text{(idem pour 2 et 3)}$$

On peut donc choisir le modèle monophasé par phase équivalente en utilisant l'inductance cyclique par phase $(L_S - M_S)$.

4.2. On a montré au 2.2.6. que : $e_1(t) = e_m \sin(2\,\Omega_r\, t + 2\,\theta_0)$

avec : $e_m = 4\, N\, B_{e_0}\, l\, .\, R_1\, \Omega_r = k\, \Omega_r$

On a bien la forme $\sin 2\,\Psi(t)$ avec $\Psi(t) = \Omega_r\, t + \theta_0$.

Ces grandeurs sont définies à la question 2.2.4. $\Psi(t)$ est donc le décalage entre l'axe de la phase 1 (lié au stator, fixe dans le repère stator) et l'axe d'un pôle du rotor (lié au rotor (aimants collés) fixe dans le repère rotor).

$\Psi(t)$ est donc la position du rotor à l'instant t. Lors du montage de la machine, de la construction de la commande, de l'onduleur..., l'angle θ_0 n'est pas connu. Lors d'essais préliminaires, il faudra «faire le zéro», donc pouvoir lui donner une valeur particulière correspondant au couple maximum ou autre chose. $\Psi(t)$ est donc mesurable par un capteur de position du rotor.

Les courants i_1 , i_2 , i_3 doivent être sinusoïdaux et tels que $\omega = 2\,\Omega_r$ (calcul déjà fait 2 fois).

4.3. Commentaires (Figure 10) :

On y voit que $E = V_c$ ajustable (en général par un hacheur). On retrouve l'onduleur ave sa commande et sa modulation. La commande de l'onduleur est définie par le capteur de position du rotor dont le rôle sera d'assurer que $\omega = 2\,\Omega_r$ et que e et i sont en phase pour obtenir le couple maximum. Le déphaseur "δ" étant là pour ajuster θ_0 pour que e et i soient en phase, puisque e est lié à la position du rotor et i défini par les commutations de l'onduleur.

4.4. • Entre t = 0 et t = 35 ms :

e_1 et i_{Ref} sont en phase pour avoir le couple max. i_1 est légèrement déphasé par rapport à i_{Ref} , ceci est dû au fait que les commutations ne sont pas instantanées et aux constantes de temps électriques de la machine.

On pourra remarquer que i_{Ref} est une sinusoïde, c'est la référence «calculée» par la commande, alors que i_1 possède une ondulation car c'est le courant généré par l'onduleur. (e_1 est représentée par simulation).

• Après t = 35 ms :

i_{Ref} a été déphasée en π et on voit qu'elle est en opposition de phase avec e_1. On a donc agi sur la commande. Puisque e et i sont en opposition de phase, le couple va changer de signe, on va freiner.

On peut le dire différemment : on passe d'un fonctionnement moteur à un fonctionnement génératrice. Au delà de t = 35 ms, on devrait voir la vitesse diminuer. Ceci ne s'observe pas sur la figure car cette variation est conditionnée par les constantes de temps mécaniques très supérieures à quelques dizaines de ms.