

SESSION DE 1992

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés**

**section :
sciences physiques**

option : physique

épreuve A
composition de physique

Durée : 5 heures

L'usage de calculatrice de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Tout document interdit.

Les différentes parties de cette épreuve sont très largement indépendantes.

DISPERSION DE LA LUMIÈRE

SPECTRES

I. Observations de la dispersion de la lumière émise par des sources lumineuses polychromatiques.

A. La dispersion dans la vie quotidienne.

1. Citer trois observations, tirées de la vie quotidienne, de la décomposition de la lumière blanche, et expliquer d'une phrase dans chaque cas l'origine physique de cette décomposition.
2. Selon Descartes et Newton, l'arc-en-ciel est dû à la réflexion totale de la lumière du soleil sur des gouttes d'eau sphériques (fig. 1).

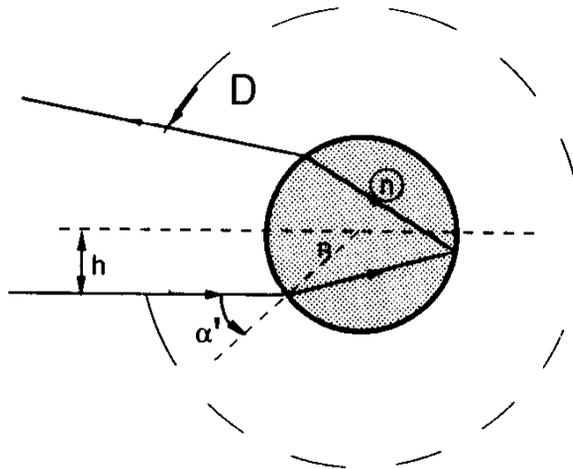


Figure 1

- a. Calculer en fonction de l'angle d'incidence α' de la lumière sur une goutte de rayon R la déviation D subie par le rayon émergent après une réflexion totale dans la goutte (cf. fig. 1). Donner la valeur du minimum de D pour des gouttes d'indice $n = 1,33$ pour une longueur d'onde de 600 nm, au milieu du spectre visible. En déduire l'interprétation de l'arc observé (position, ordre des couleurs).
- b. Il arrive fréquemment qu'on observe deux arcs-en-ciel voisins. À quoi est dû le deuxième ? Dessiner le trajet suivi à l'intérieur d'une goutte par un rayon contribuant au deuxième arc. Comment le second arc est-il placé relativement au premier, comment se présentent ses couleurs ?
- c. Pourrait-il exister un troisième arc-en-ciel ? Argumenter la réponse.

B. La dispersion au laboratoire.

1. Donner le schéma d'une expérience permettant de réaliser, à l'aide d'un prisme, le spectre d'une source de lumière blanche. Préciser l'utilité des divers éléments dessinés, leur orientation éventuelle.
2. Même question dans le cas où la dispersion est obtenue par un réseau.

3. On veut disperser cette lumière avec un réseau dans la direction horizontale et **en même temps** avec un prisme dans la direction verticale : il s'agit de l'expérience quelquefois désignée par « prisme et réseau croisés ». Décrire cette expérience, dessiner la ou les figures obtenues sur l'écran d'observation. Quel(s) intérêt(s) pédagogique(s) trouve-t-on à cette expérience ? Comment choisit-on le prisme ? le réseau ?

4. Prisme.

a. Définir les conditions de minimum de déviation d'un prisme d'angle au sommet A , d'indice n , éclairé sous l'incidence i (variable) par une radiation de longueur d'onde λ . Quel est l'intérêt d'utiliser ce minimum de déviation ?

b. Dans un spectromètre à prisme, le prisme est éclairé en lumière parallèle sous une incidence i fixée. Donner l'expression de $\frac{dD}{d\lambda}$, variation de la déviation avec la longueur d'onde, pour ce prisme, en fonction de $\frac{dn}{d\lambda}$, dispersion du verre du prisme.

c. On se place dans les conditions réalisant le minimum de déviation pour une longueur d'onde λ donnée. Pour produire le faisceau parallèle incident, on a placé entre la source et le prisme une fente source de largeur e , parallèle à l'arête du prisme, et une lentille L_1 de distance focale f . Le spectre est recueilli sur une plaque photographique dans le plan focal d'une lentille L_2 , de même distance focale. La base de la partie éclairée du prisme est b , celui-ci est éclairé jusqu'à son arête ; le faisceau émergent sous l'angle i' a une largeur égale à a dans le plan de section principale du prisme. Exprimer $\frac{dD}{d\lambda}$ en fonction de a et de b ainsi que de $\frac{dn}{d\lambda}$.

d. Si le spectre ne contenait que deux longueurs d'onde λ et λ' , quelle image obtiendrait-on sur la plaque photographique ? La schématiser.

Pour une largeur de fente source fixée, on définit le pouvoir de résolution par $PR = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, où $\Delta\lambda$

est tel que, lorsque $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$, la distance entre les centres des images de la fente est égale à la largeur de chaque image de cette fente. Donner l'expression de PR pour le montage ci-dessus.

Quel phénomène détermine le pouvoir de résolution limite PRL du prisme considéré ? En faire une estimation.

Application numérique :

$$f = 20 \text{ cm}, \quad a = 3 \text{ cm}, \quad e = 20 \text{ } \mu\text{m}, \quad b = 5 \text{ cm}, \quad \frac{dn}{d\lambda} = -10^5 \text{ m}^{-1}.$$

Quelle est la valeur du pouvoir de résolution du montage pour $\lambda = 600 \text{ nm}$? Que vaut le pouvoir de résolution limite de ce prisme ?

5. Réseau.

a. Citer deux procédés de fabrication des réseaux optiques.

b. Rappeler la condition d'interférence constructive à l'infini entre deux vibrations diffractées au niveau de deux sites équivalents successifs d'un réseau de pas égal à a , fonctionnant en réflexion. Même question pour un réseau fonctionnant en transmission.

On précisera la convention de signe choisie pour les angles des faisceaux.

c. Combien d'ordres différents peut-on observer lorsqu'on éclaire un réseau de pas a sous l'incidence i par une radiation de longueur d'onde λ ?

Application numérique : $\lambda = 600 \text{ nm}$. On suppose le réseau éclairé sous incidence normale. On considérera successivement un réseau à 570 traits par mm, puis un réseau à 50 traits par mm.

d. Calculer et représenter l'intensité des interférences produites par la totalité d'un réseau de pas a , de largeur $L = Na$, en fonction du déphasage existant entre les ondes diffractées par deux traits successifs du réseau. En déduire le pouvoir de résolution limite théorique PRL du réseau.

Si τ désigne la différence de temps de parcours pour les rayons parallèles extrêmes atteignant le réseau, que représente $\frac{1}{\tau}$ pour un maximum principal ? Quelle en est la limite physique ?

Donner un ordre de grandeur de τ et en déduire un ordre de grandeur de la largeur L requise pour un réseau destiné à analyser les raies d'une lampe à décharge.

N.B. – Les questions e , f , g , h qui suivent traitent du cas d'un réseau par réflexion.

e. Qu'est-ce que le phénomène de « blaze » ? Comment le réseau doit-il être profilé ?

On souhaite que ce phénomène permette l'observation de tout le spectre visible dans un seul ordre, le maximum d'intensité correspondant à environ 600 nm, les extinctions ayant lieu à 350 nm et 850 nm dans le même ordre. Le réseau comporte 570 traits par millimètre. Quelle sera la géométrie du profil de ce réseau ? Autour de quel ordre d'interférence le maximum d'intensité sera-t-il observé ?

f. Dans un spectromètre à réseau, la source à étudier est placée devant la fente d'entrée. Un système collimateur (miroir en général) permet d'éclairer le réseau en lumière parallèle. Un deuxième miroir fait converger le faisceau diffracté sur la fente de sortie, où un détecteur recueille la lumière transmise. Habituellement, les fentes d'entrée et de sortie sont choisies de même largeur. Faire un schéma de principe de l'appareil.

g. Le constructeur indique une résolution « x nm par millimètre de fente dans le premier ordre ». En s'inspirant de la question I. B. 4. d. calculer en nm la résolution d'un spectromètre à réseau de 1 m de distance focale, équipé d'un réseau de 570 traits par millimètre, lorsque les fentes d'entrée et de sortie sont ouvertes à $50 \mu\text{m}$. Quelle est l'influence de l'angle d'incidence i ? On supposera l'incidence proche de la normale. Quelle résolution a-t-on dans le m -ième ordre ?

h. Quand a-t-on intérêt à ouvrir les fentes ? À les fermer ? Pour une certaine ouverture des fentes, on atteint le pouvoir de résolution limite du système (calculé à la question I. B. 5. d).

D'après la question g, pour quelle ouverture de fentes atteindrait-on ce pouvoir de résolution limite avec le même réseau de 570 traits par millimètres, de largeur $L = Na = 10 \text{ cm}$ si $\lambda = 600 \text{ nm}$? Tracer pour cette longueur d'onde et pour le premier ordre le pouvoir de résolution de ce réseau en fonction de la largeur des fentes.

C. *Filtres.*

Un autre procédé de séparation des composantes d'un spectre continu consiste à utiliser un ou des filtres.

1. Sur quel principe sont construits les verres colorés ? Quel(s) profil(s) de transmission en longueur d'onde ont-ils ? Comment intervient l'épaisseur, y-a-t-il d'autres paramètres ?
2. Mêmes questions pour un filtre interférentiel. Rappeler la condition d'interférences constructives. On donnera des ordres de grandeur typiques de transmission et de bande passante.

Peut-on utiliser un filtre vendu pour un maximum de transmission à λ_0 de manière que son maximum de transmission soit à λ voisin de λ_0 ? Justifier la réponse.

3. Un autre type de filtre (dit de Christiansen) (fig. 2) est constitué d'un récipient contenant un liquide (1) et un solide en morceaux pilés (2), qui ont même indice pour $\lambda = \lambda_0$: par exemple, c'est le cas du mélange 56 % de benzène, 44 % d'éthanol qui a, à $\lambda = 350 \text{ nm}$, le même indice que la silice fondue. Que se passe-t-il pour $\lambda \neq \lambda_0$, quel est le phénomène physique en jeu ?

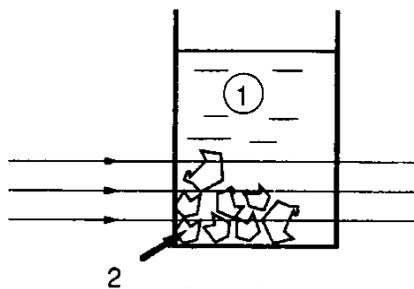


Figure 2

D. *Aberrations chromatiques.*

1. Décrire une expérience qui met en évidence les aberrations chromatiques d'une lentille mince. Interpréter. Définir les différents types d'aberrations.
2. Définir le pouvoir dispersif d'un verre optique, sa constringence ; caractériser et classer les verres optiques courants.
3. Comment réalise-t-on un achromat convergent ?

II. Les phénomènes de dispersion et d'absorption.

A. Étude classique.

Remarque. – Dans cette partie de l'énoncé, les vecteurs sont notés en caractères gras.

1. Soit un milieu matériel gazeux dilué, linéaire, homogène et isotrope. Ce milieu est excité par un champ électrique sinusoïdal $\underline{E}(\omega)$. On décrit les électrons du gaz comme élastiquement liés aux atomes. Dans ce modèle, donner l'équation du mouvement d'un électron et sa solution de régime forcé.
2. En déduire le vecteur polarisation volumique complexe $\underline{P}(\omega)$ et la susceptibilité diélectrique complexe $\chi(\omega)$ du milieu. Définir également la constante diélectrique complexe $\underline{\epsilon}(\omega)$. Quelles sont les pulsations caractéristiques intervenant dans ces quantités ? Donner l'allure des parties réelle et imaginaire de $\chi(\omega)$, l'ordre de grandeur des largeurs et hauteurs de ces courbes.

Expliquer en quelques phrases comment les résultats du 1. et du 2. devraient être modifiés si le milieu n'était pas dilué ?

3. Le champ électrique $\underline{E}(\omega)$ appartient à une onde plane monochromatique qui se propage dans le milieu dilué étudié, supposé non magnétique. Rappeler l'équation, déduite des équations de Maxwell, satisfaite par l'expression complexe du champ électrique de l'onde, soit $\underline{E}(\omega)$.

Définir la relation de dispersion complexe du milieu, l'indice complexe : on distinguera entre indice de réfraction et indice d'extinction. Relier ces indices à $\underline{\epsilon}(\omega)$.

4. Dans le domaine visible, et pour un verre, donner la variation avec la longueur d'onde λ de l'indice de réfraction obtenu en 3. On s'appuiera sur les résultats obtenus en II.A.2. Quelle(s) forme(s) approchée(s) donne-t-on habituellement à cette variation ?
5. Qu'appelle-t-on « dispersion anormale » ? Dans quel(s) domaine(s) d'énergie ce phénomène se produit-il ? Qu'y a-t-il d'anormal ? Quels sont les phénomènes microscopiques à l'origine de cet effet ?
6. Quelle relation lie coefficient d'absorption et coefficient d'atténuation de l'onde plane ?
7. En mécanique quantique, qu'appelle-t-on : absorption, émission spontanée, émission stimulée ? Entre quels états se produit l'absorption de lumière par un atome, l'émission de lumière par cet atome ?

Quel est le dispositif tirant parti de l'émission stimulée ?

Quel parallèle peut-on faire entre le traitement classique par le modèle de l'électron élastiquement lié et le traitement quantique ? Qu'appelle-t-on « règle de sélection » ? En donner un exemple.

B. Vitesse de phase, vitesse de groupe, dispersion.

1. Définir la vitesse de phase d'une onde monochromatique plane de pulsation ω se propageant selon l'axe Ox .
2. On considère un paquet (superposition linéaire) d'ondes électromagnétiques de pulsations comprises entre ω_1 et ω_2 . Dans quel cas n'y aura-t-il pas dispersion de ce paquet ?
3. On s'intéresse à un paquet d'ondes particulier constitué de trois ondes planes :

$$y = \cos(\omega t - kx) + \frac{1}{2} \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x] + \frac{1}{2} \cos[(\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x]$$

où $\Delta\omega \ll \omega$ et $\Delta k \ll k$.

Tracer l'allure du paquet d'ondes à x fixé en fonction de t . Commenter.

Définir la vitesse de phase, la vitesse de groupe pour ce paquet.

Que vaut la vitesse de groupe d'une onde plane monochromatique ?

4. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe d'une onde plane de longueur d'onde dans le vide 657 nm, se propageant dans l'eau d'indice 1,331 dont l'indice varie avec la longueur d'onde de sorte que $\frac{dn}{d\lambda} = -2,5 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$ autour de 657 nm.

C. **Compensation de la dispersion d'un milieu.**

Il s'agit de montrer qu'un ensemble de deux réseaux parallèles présente une « dispersion négative » qui permettra de compenser la dispersion acquise par un faisceau de lumière blanche lors de la traversée d'un milieu dispersif, de la silice fondue ou de l'eau par exemple. Cette propriété est utilisée dans les expériences mettant en œuvre des impulsions lumineuses ultracourtes (domaine des picosecondes ou femtosecondes).

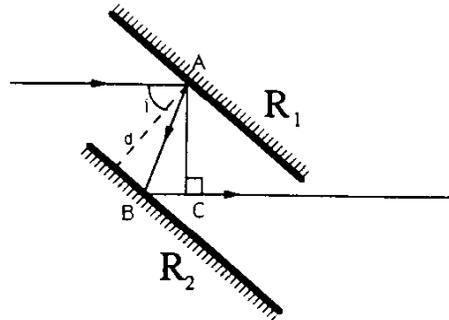


Figure 3

1. Le système étudié (cf. fig. 3) est constitué par deux réseaux en réflexion placés dans l'air, identiques, parallèles et se faisant vis-à-vis à la distance d . Le réseau R_1 est éclairé en A sous l'angle i par un faisceau de lumière blanche. Sous quel angle doit sortir du système, après diffraction par les réseaux R_1 et R_2 , le rayon associé à la longueur d'onde λ ?
2. Calculer pour une longueur donnée le chemin optique L parcouru entre A et la projection orthogonale C de A sur le rayon émergent, en fonction des angles d'incidence sur R_1 et R_2 . On supposera que l'air n'est pas dispersif.
3. En déduire $\frac{dL}{d\lambda}$. Montrer que la variation de L avec la longueur d'onde est de signe contraire à celle produite par un milieu dispersif homogène comme la silice fondue, dont l'indice n peut s'exprimer dans le domaine visible par la relation $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$.
4. *Application numérique :*
On cherche à compenser par le système ci-dessus la dispersion produite par des éléments optiques en silice fondue d'épaisseur totale 1 cm, placés à l'intérieur d'une cavité laser que l'on souhaite faire fonctionner à $\lambda = 600 \text{ nm}$. L'angle d'incidence sur R_1 est $i = 30^\circ$. Le pas du réseau étant de $5 \mu\text{m}$, quelle devra être la distance d entre R_1 et R_2 si les réseaux sont utilisés dans le premier ordre ? On donne pour la silice fondue $A = 1,448$ et $B = 3\,600 \text{ nm}^2$.

III. Spectres de raies des gaz.

A. Description et interprétation.

1. Donner plusieurs processus d'excitation du spectre de raies d'un gaz.
2. Décrire et interpréter l'expérience dite de « résonance optique » du sodium. Quel est l'effet d'un champ magnétique sur cette expérience ?
3. De quelle transition atomique s'agit-il ? En réalité, on sait que la raie de résonance du sodium est un doublet. Quelle est l'interaction responsable du dédoublement, sur quel niveau atomique joue-t-elle, quel est l'ordre de grandeur de l'énergie mise en jeu exprimée en eV (électrons-volts) ?
4. Le sodium peut émettre dans d'autres régions spectrales que le jaune. Pourrait-on réaliser avec le sodium des expériences de résonance sur d'autres raies ? Justifier la réponse.
5. Décrire une expérience d'« inversion des raies » réalisée pour du sodium. Expliquer cette inversion et donner son origine.

B. *Élargissement des raies.*

Les systèmes dispersifs à prisme et à réseau décrits en I. permettent de déterminer la largeur des raies émises ; la résolution associée à ces dispositifs a été calculée. Une analyse plus fine peut être effectuée grâce à des systèmes interférométriques.

1. Quelle est l'origine de la largeur « naturelle » d'une raie atomique ? Donner un ordre de grandeur de cette largeur, exprimée en eV, et de la durée correspondante pour un état excité.
2. Quelle est l'origine de la largeur Doppler $\Delta\nu$ d'une raie émise par un gaz à la température T ? On calculera l'ordre de grandeur de $\Delta\nu$, et du $\Delta\lambda$ correspondant, pour la raie $\lambda = 514,5$ nm de l'argon de masse atomique $M = 40$ si $T = 500$ K.
3. La raie 514,5 nm est la plus intense des raies du laser à argon ionisé du commerce. Sur un tel laser, on a mesuré pour cette raie une largeur de 10 GHz. Est-ce en accord avec l'estimation de la largeur Doppler faite en III. B. 2. ? Commenter.

Le laser fonctionnant sur cette raie a une longueur de 1 m. Combien de modes longitudinaux du laser trouve-t-on à l'intérieur de la raie d'émission ? Quelles données déterminent la largeur de chaque mode ?

4. Dans quelles conditions expérimentales pourra-t-on trouver pour largeur d'une raie émise par une lampe spectrale à peu près la largeur Doppler ?
5. Expliquer pourquoi, dans le repère d'un atome en mouvement, l'effet Doppler perturbe le processus d'absorption. Pour ne pas être gêné par cet effet, et pour atteindre des données atomiques très fines, on a mis au point des techniques dites de « spectroscopie sans effet Doppler ». Donner le principe de deux d'entre elles, avec, si nécessaire, un schéma de principe.

C. *Spectrométrie par transformée de Fourier.*

On va montrer que l'interférogramme obtenu à l'aide d'un interféromètre de Michelson permet, par transformée de Fourier, d'obtenir le profil de la raie source.

1. Décrire l'interféromètre de Michelson, en faire un schéma. Donner l'expression de l'amplitude A et de l'intensité I recueillies à la sortie de l'appareil, dans la direction perpendiculaire à la lame d'air équivalente, en fonction de la position x du miroir mobile. On supposera que la source est une raie parfaitement monochromatique de longueur d'onde λ , c'est-à-dire de nombre d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ et on choisira pour origine des positions x celle qui correspond à une épaisseur nulle de cette lame d'air équivalente. Tracer $I(x)$.
2. Que vaut $I(x)$ lorsque la source est constituée de deux raies infiniment fines de même intensité et de nombres d'onde σ_1 et σ_2 ? Comment peut-on à partir du résultat de l'expérience caractériser les raies ?
3. On suppose maintenant que la raie source a un profil en nombre d'ondes $g(\sigma)$, que l'on supposera symétrique. Montrer que $I(x)$ comporte à la fois un fond continu, et une partie variable reliée à la transformée de Fourier de $g(\sigma)$. En particulier, si $g(\sigma)$ est gaussien, quelle est la forme de $I(x)$, quelle est sa largeur ?
4. On enregistre l'interférogramme obtenu pour la raie verte du mercure à 546 nm. Dans le cas d'une lampe spectrale haute pression, les interférogrammes se brouillent lorsqu'on a déplacé le chariot de $\Delta x = 3$ mm de part et d'autre de la position correspondant à la teinte plate. Pour une lampe à mercure basse pression, le brouillage a lieu pour un déplacement 10 fois plus grand. En déduire la largeur $\Delta\sigma$ de $g(\sigma)$, et la largeur relative $\frac{\Delta\sigma}{\sigma}$ dans chacun de ces cas. Comment ces largeurs se comparent-elles à la largeur Doppler ? On supposera que la température dans la décharge est de 500 K, la masse atomique du mercure sera prise égale à 200.

SESSION DE 1992

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés**

section : sciences physiques

option : physique

épreuve B : composition de chimie

Durée : 4 heures*Deux feuilles de papier millimétré.**L'usage de calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.**Tout document interdit.**Les différentes parties de cette épreuve sont très largement indépendantes.*

CHIMIE DU PHOSPHORE ET DES PHOSPHATES

Le contenu de l'épreuve est centré sur différents aspects de la chimie du phosphore et de ses dérivés. Cependant, les réponses aux questions et la résolution des applications numériques ne nécessitent pas de connaissances particulières de la chimie de cet élément ; il suffit de raisonner par analogie avec d'autres corps simples ou composés.

Données numériques

$$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \quad \frac{RT}{F} \ln 10 = 0,06 \text{ V à } 25 \text{ }^\circ\text{C}$$

Masse molaire en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$

H : 1,0	Cl : 35,5	O : 16,0
Ca : 40,0	P : 31,0	S : 32,0

Données thermodynamiques

ΔH_f° : enthalpie standard de formation ($\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$)

S° : entropie standard ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$)

(Ces données seront supposées indépendantes de la température).

Corps	ΔH_f°	S°
P (blanc)	0	41,1
P (rouge)	- 17,56	22,8
P (gaz)	315,9	163,1
P_4 (gaz)	58,9	279,9
PH_3 (gaz)	5,44	210,1
PCl_3 (gaz)	- 287,0	311,7
PCl_5 (gaz)	- 374,9	364,5
H (gaz)	218,0	114,6
Cl_2 (gaz)	0	223,0

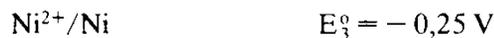
pK_a des acides du phosphore :

- | | |
|---|---|
| - acide hypophosphoreux H_3PO_2 , monoacide | $\text{pK}_1 = 2$ |
| - acide phosphoreux H_3PO_3 , diacide | $\text{pK}_1 = 2$ et $\text{pK}_2 = 6$ |
| - acide phosphorique H_3PO_4 , triacide | $\text{pK}_1 = 2$; $\text{pK}_2 = 7$ et $\text{pK}_3 = 12$ |

Produits de solubilité



Potentiels normaux d'oxydoréduction (25 °C ; pH = 0)



I. LE PHOSPHORE - QUELQUES COMPOSÉS BINAIRES

1. L'élément.

- 1.1. Préciser la structure électronique de l'élément phosphore (numéro atomique $Z = 15$). Citer deux éléments voisins immédiats du phosphore dans la classification périodique.
- 1.2. Quels sont les principaux degrés d'oxydation du phosphore dans ses composés ? Citer un exemple pour chacun de ces degrés d'oxydation.
- 1.3. Le phosphore peut conduire à l'ion hexafluorophosphate PF_6^- . Pourquoi l'analogue n'existe-t-il pas dans la chimie de l'azote ?

2. Changements d'état.

- 2.1. Le phosphore solide peut exister sous deux formes allotropiques : le phosphore rouge et le phosphore blanc.
Quelle est la variété thermodynamiquement stable à 25 °C ?
- 2.2. Par chauffage, le phosphore rouge se sublime en phosphore gazeux, sous la forme de molécules P_4 .
 - a. Proposer une structure géométrique de la molécule P_4 compatible avec une équivalence des quatre atomes de phosphore.
 - b. Établir la relation numérique entre la température et la pression de vapeur du phosphore en équilibre avec P rouge.
 - c. Pour quelle température cette pression est-elle égale à 1 bar ?

3. La phosphine PH_3 .

- 3.1. Calculer l'énergie de la liaison P-H dans PH_3 gaz. Comparer à l'énergie de la liaison N-H dans l'ammoniac ($391 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$).
- 3.2. Par action de PH_3 sur l'ammoniac liquide, on obtient le composé de formule NIH_4PH_2 . Justifier sa formation.
- 3.3. Par chauffage, la phosphine se décompose en phosphore gazeux (molécules P_4) et en dihydrogène.
 - a. Écrire l'équation-bilan de la réaction.

- b. On enferme, à basse température, de la phosphine dans un récipient de volume constant, préalablement vide. Ce dernier est rapidement porté à 600 °C et on suit l'évolution de la pression dans le récipient en fonction du temps.

t (sec)	20	30	40	50	60	80	100	∞
p (mmHg)	625	670	705	735	760	800	825	875

- α. Quelle était la pression initiale p_0 , à 600 °C, dans le récipient à $t = 0$?
 β. En considérant que la décomposition de la phosphine suit une loi cinétique du premier ordre, établir la relation :

$$\ln \frac{p_\infty - p_0}{p_\infty - p} = kt$$

dans laquelle k désigne la constante de vitesse et p_∞ la pression finale dans le récipient.

- γ. Vérifier graphiquement la loi ci-dessus et calculer la constante de vitesse.

4. Les chlorures PCl_3 et PCl_5 .

- 4.1. En utilisant la méthode VSEPR, déduire la géométrie des molécules PCl_3 et PCl_5 en phase gazeuse.
 4.2. On étudie, en phase gazeuse, l'équilibre de dissociation :



- a. À 200 °C, sous une pression $p = 1$ bar, la densité du mélange gazeux, obtenu par chauffage du pentachlorure pur, est $d = 4,80$.
 En déduire la valeur de la constante d'action de masse K (masse molaire de $\text{PCl}_5 = 208,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$).
 b. Quelle est la composition du mélange obtenu à l'équilibre, dans les mêmes conditions, sous la pression $p = 5$ bars ?
 Justifier le sens du déplacement de l'équilibre.
 c. Calculer la variation d'enthalpie standard ΔH° pour la réaction considérée.
 En supposant cette grandeur indépendante de la température, établir l'expression $\ln K = f(T)$ pour l'équilibre considéré.
 d. À quelle température faut-il opérer, sous $p = 1$ bar, pour que le taux de dissociation du pentachlorure à l'équilibre soit de 25 % ?

4.3. Action sur les alcools.

On envisage l'action du pentachlorure sur un alcool.

- a. Donner l'équation-bilan de la réaction d'un mélange équimolaire d'alcool et de PCl_5 .
 b. Que devient ce bilan lorsque l'alcool est en excès ?

4.4. Action sur les acides carboxyliques.

- a. Écrire l'équation-bilan de la réaction du pentachlorure de phosphore sur un acide carboxylique.
 b. Quel est l'intérêt des composés organiques obtenus ? Citer un exemple courant d'application de ces composés en synthèse organique.

II. LES OXACIDES DU PHOSPHORE

1. Structures.

Préciser, en donnant les formules développées, les structures :

- du monoacide H_3PO_2 ,
- du diacide H_3PO_3 ,
- du triacide H_3PO_4 .

2. Titrage de l'acide phosphorique.

On titre 10 ml d'une solution d'acide phosphorique à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$ par de la soude à $1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$; la dilution en cours de titrage sera négligée.

2.1. Calculer le pH correspondant à des additions de soude de :

$$v \text{ (ml)} = 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3 \text{ et } 4.$$

On utilisera dans un premier temps, sans démonstration, des formules simplifiées.

2.2. Pour $v = 0$, vérifier que les approximations supposées par la formule utilisée sont justifiées, à 1 % près; dans le cas contraire, effectuer un calcul plus précis.

2.3. Tracer la courbe de titrage $\text{pH} = f(v)$. Quelles acidités peut-on doser en solution aqueuse ?

2.4. Lors du dosage de l'acide phosphorique contenu dans le coca-cola, il est fréquent de constater que le volume v_2 de soude versé à la seconde équivalence (virage de la phénolphthaléine) est supérieur à deux fois v_1 , volume de soude versé à la première équivalence (virage de l'hélianthine). Proposer une explication.

2.5. On titre maintenant une solution aqueuse contenant de l'acide phosphorique (concentration $c_1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$) et de l'acide chlorhydrique (concentration $c_2 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$) par de la soude à $1 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$.

Les prises d'essai sont de 20 ml :

- un premier dosage est réalisé en présence d'hélianthine; le virage de l'indicateur est observé après addition de $v_1 = 2,8 \text{ ml}$ de soude;
- un second dosage est réalisé en présence de phénolphthaléine; le virage de l'indicateur se produit après addition de $v_2 = 4,4 \text{ ml}$ de soude.

Calculer les concentrations c_1 et c_2 .

3. Oxydoréduction.

3.1. Écrire les équations redox des couples $\text{H}_3\text{PO}_3/\text{H}_3\text{PO}_2$ et $\text{H}_3\text{PO}_4/\text{H}_3\text{PO}_3$ présents dans une solution tampon de $\text{pH} = 5$.

Calculer les potentiels normaux correspondants.

3.2. En déduire que les ions H_2PO_2^- et H_2PO_3^- sont métastables en solution aqueuse. Quelles réactions, devrait-on observer ?

Pourquoi peut-on, néanmoins, conserver des solutions aqueuses d'hypophosphite et de phosphite ?

3.3. Le procédé Kanigen de nickelage chimique des métaux met en jeu la réduction d'une solution tamponnée de sulfate de nickel (pH = 5) par un excès d'hypophosphite de sodium (potentiel normal du couple Ni^{2+}/Ni : $E_3^0 = -0,25 \text{ V}$); après le dépôt du nickel, l'analyse du bain démontre l'absence d'ion dihydrogénophosphate.

- Écrire l'équation-bilan de la réaction prépondérante du nickelage (cette réaction est catalysée par le nickel).
- Pourquoi faut-il utiliser un excès d'hypophosphite par rapport à la quantité de nickel à déposer ?

4. Les phosphates de calcium.

Il existe trois types de phosphate de calcium :

- le phosphate « tricalcique » $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ très peu soluble dans l'eau ;
- l'hydrogénophosphate de calcium CaHPO_4 , également peu soluble dans l'eau ;
- le dihydrogénophosphate $\text{Ca}(\text{H}_2\text{PO}_4)_2$, soluble dans l'eau.

4.1. Passage de $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ à $\text{Ca}(\text{H}_2\text{PO}_4)_2$.

On met en suspension dans un litre d'eau 10^{-2} mole de phosphate tricalcique ; il s'établit un équilibre avec formation d'hydrogénophosphate solide. La solution est progressivement acidifiée.

- Pour quel pH observe-t-on la disparition du précipité de phosphate tricalcique ?
- Pour quel pH observe-t-on la redissolution totale ?

4.2. Les engrais phosphatés.

Ils contiennent du dihydrogénophosphate de calcium et leur quantité « d'unité fertilisante » est évaluée par la masse d'oxyde P_2O_5 correspondant à la quantité de phosphore dans 100 g d'engrais.

- Les « superphosphates » sont obtenus par traitement du phosphate tricalcique par de l'acide sulfurique.

Écrire l'équation-bilan de la réaction.

Calculer la quantité d'unité fertilisante de l'engrais.

- Les « superphosphates triples » sont obtenus par traitement du phosphate tricalcique par de l'acide phosphorique.

Écrire l'équation-bilan de la réaction.

Calculer la quantité d'unité fertilisante de cet engrais.

- Les nappes phréatiques sont moins polluées par les phosphates que par les nitrates. Pourquoi ?

4.3. Les lessives aux phosphates.

Parmi les adjuvants des lessives, le plus utilisé est le TPP ou tripolyphosphate de sodium.

- Préciser l'enchaînement des liaisons dans un polyphosphate.
- Le TPP est utilisé comme adoucisseur de lavage. Quel est son rôle ?
- L'hydrolyse du TPP est responsable du phénomène d'eutrophisation.
Quel est le bilan de l'hydrolyse ?
Quelles en sont les conséquences sur le plan écologique ?

III. LE RÔLE DES PHOSPHATES EN BIOLOGIE

Le transfert d'un groupe phosphate, depuis un composé dit « riche en énergie » vers un autre composé qui se trouve alors « activé », joue un rôle important dans les processus biologiques.

Le système central est constitué par le couple adénosine triphosphate (sigle ATP)/adénosine diphosphate (sigle ADP).

Les réactions qui suivent sont envisagées à 25 °C.

1. Le couple ATP/ADP.

1.1. À la réaction d'hydrolyse :



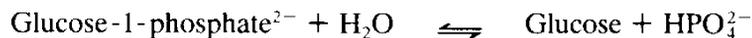
correspond une variation d'enthalpie libre standard $\Delta G^0 = 5,4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Calculer, à $\text{pH} = 7$, la variation d'enthalpie libre, notée $\Delta G'^0$, lorsque tous les constituants sauf le proton sont dans leur état standard (convention habituelle des biologistes).

1.2. Considérons l'hydrolyse de deux autres phosphates :



$$\Delta G^0 = -61,9 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$



$$\Delta G^0 = -20,9 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Dans quel sens s'effectue le transfert de phosphate lorsque chacun de ces systèmes est mis en présence du couple ATP/ADP à $\text{pH} = 7$?

Écrire les équations des réactions observées.

1.3. On considère la réaction :



de variation d'enthalpie libre standard $\Delta G^0 = 20,0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Déterminer, à $\text{pH} = 7$, la valeur de $\Delta G'^0$ pour la réaction d'hydrolyse du 1,3-diphosphoglycérate.

Le rapport de concentration entre ATP et ADP dans certaines cellules est $\frac{[\text{ATP}]}{[\text{ADP}]} = 10$.

Calculer le rapport $\frac{[\text{Diphosphoglycérate}]}{[\text{Phosphoglycérate}]}$ en équilibre avec le système ATP/ADP dans ces cellules.

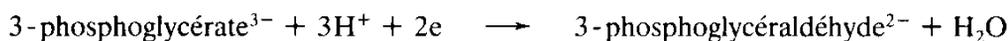
1.4. Les ions magnésium se complexent avec les ions phosphate :



Conclure quant au rôle, en biologie, des ions Mg^{2+} .

2. Réactions d'oxydoréduction.

2.1. À $\text{pH} = 7$, le potentiel normal apparent du couple :



est $E_1^\circ = -0,59 \text{ V}$.

Compte tenu de la valeur de $\Delta G'^\circ$ calculée ci-dessus pour l'hydrolyse du 1,3-diphosphoglycérate, calculer, à $\text{pH} = 7$, le potentiel normal apparent du couple 1,3-diphosphoglycérate/3-phosphoglyceraldéhyde.

Conclure quant au rôle possible de l'ATP dans les réactions d'oxydoréduction biologiques.

2.2. On considère une réaction d'oxydoréduction mettant en jeu le transfert de deux électrons entre deux couples redox dont les potentiels normaux diffèrent de $\Delta E'^\circ$ à $\text{pH} = 7$.

Quelle est l'énergie maximum libérée par la réaction ?

Pour quelle valeur limite de $\Delta E'^\circ$ cette énergie est-elle suffisante pour permettre la formation d'une mole d'ATP à partir d'une mole d'ADP et d'une mole de phosphate ?

IV. QUELQUES DÉRIVÉS ORGANO-PHOSPHORÉS

1. Les phosphines : comparaison avec les amines.

1.1. Stéréochimie d'une phosphine tertiaire.

On considère l'éthylméthylphényl phosphine que l'on désignera par A. À température ordinaire, il est possible d'observer deux isomères A1 et A2.

a. Pour quelle raison ?

De quelle isomérisation s'agit-il ?

Par quelle propriété physique se manifeste-t-elle et par quelle grandeur caractérise-t-on chaque isomère ?

b. Interpréter le fait que, par chauffage prolongé à 120°C , on observe la disparition de cette propriété physique.

c. Observe-t-on le même phénomène dans le cas de la N-éthyl N-méthyl-aniline, désignée par B ? Pour quelle raison ?

d. Citer un dérivé de B susceptible de donner lieu à l'isomérisation présentée par A.

1.2. Réactivité comparée des amines et des phosphines.

a. La structure électronique des amines leur confère deux grands types de propriétés chimiques.

Par quels qualificatifs désigne-t-on ces propriétés ?

Quelles différences faites-vous entre elles ?

b. L'iodométhane réagit avec la triméthylamine, ne réagit pas sur la triphénylamine, mais réagit avec la triphénylphosphine.

Justifier ces observations.

2. Les sels de phosphonium : comparaison avec les sels d'ammonium.

2.1. Les sels d'ammonium.

L'action de l'iodométhane en excès sur le 2-aminobutane, en présence de carbonate de potassium, conduit à un dérivé organique cristallisé C.

- Préciser le mécanisme des diverses étapes de la réaction. En donner l'équation-bilan et justifier le rôle du carbonate de potassium.
- Le composé C, traité par une suspension aqueuse d'oxyde d'argent fraîchement préparée (équivalent de l'hydroxyde hypothétique AgOH), fournit un précipité jaune que l'on élimine par filtration ; l'évaporation du filtrat permet d'isoler un composé D.

Préciser la nature du précipité jaune et donner la formule de D.

Que peut-on dire des propriétés basiques de D ?

- Par chauffage, D se décompose selon :



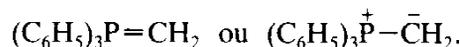
Obtiendrait-on le même alcène par action de la potasse, en solution dans l'éthanol, sur le 2-iodobutane ?

2.2. Les sels de phosphonium

- Par action de D₂O, en milieu basique, l'iodure de tétraméthylphosphonium subit l'échange hydrogène/deutérium 10⁶ fois plus rapidement que l'iodure de tétraméthylammonium.

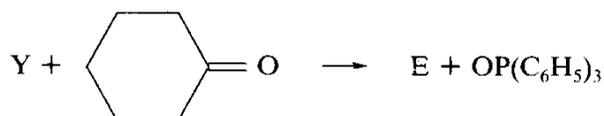
Quelle propriété du sel de phosphonium est ainsi mise en évidence ?

- L'action du bromométhane sur la triphénylphosphine conduit à un bromure de phosphonium ; celui-ci, traité par une base forte, conduit à un ylure Y pour lequel on peut admettre les deux formules :



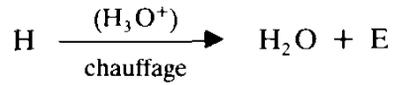
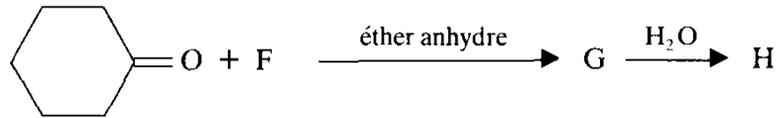
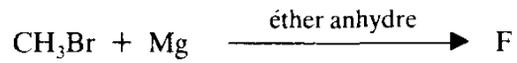
Écrire les équations des réactions conduisant à Y.

- Dans la réaction de Wittig, un dérivé carbonylé comme la cyclohexanone est traité par l'ylure Y :



Préciser la nature de l'intermédiaire mis en jeu et la structure du composé E obtenu.

d. On peut également envisager la préparation de E par la suite de réactions :



Détailler chacune de ces réactions.

Montrer que la méthode présente l'inconvénient de fournir de façon prépondérante un isomère E' de E.

Donner la formule et le nom de E'.

e. À l'aide des réactions étudiées au paragraphe 2.1. ci-dessus, suggérer une méthode permettant d'obtenir majoritairement l'isomère E à partir du composé résultant de l'action de PCl_5 sur H.

SESSION DE 1992

concours externe de recrutement de professeurs agrégés

section :
sciences physiques

option : physique

épreuve C
problème de physique

Durée : 6 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche – y compris calculatrices programmables et alpha-numériques – à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Tout document interdit.

Ce problème est consacré à l'étude de quelques propriétés des électrons de conduction dans le cas de systèmes à deux dimensions (2D) que l'on peut obtenir pratiquement à l'aide de couches minces de semiconducteurs.

On admettra le résultat simplifié de la théorie des bandes dans un solide, que ces électrons de conduction sont des particules sans interaction de masse m (appelée masse effective de l'électron), de charge $-e$ (e étant la charge élémentaire), de spin $1/2$, satisfaisant au principe de Pauli. Les valeurs numériques s'appliquent au cas de l'arséniure de Gallium (GaAs) et de l'alliage $\text{Ga}_{1-x}\text{Al}_x\text{As}$:

$$m = 0,07 m_0, \text{ avec } m_0 \text{ (masse de l'électron libre)} = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg};$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C};$$

$$k_B \text{ (constante de Boltzmann)} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1};$$

$$h \text{ (constante de Planck)} = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s};$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s};$$

$$\epsilon_0 \text{ (permittivité du vide)} = \frac{1}{36 \pi \cdot 10^9} \text{ S.I.}$$

La longueur de l'énoncé est destinée à faciliter la compréhension physique de phénomènes qui pourraient être peu connus de certains candidats. Les diverses parties sont largement indépendantes et font appel à des domaines variés de la physique. Les résultats des applications numériques seront donnés dans les unités usuelles indiquées ci-après.

<i>Notation</i>	<i>Quantité physique correspondante</i>	<i>Unité S.I.</i>	<i>Unité usuelle</i>
n	Densité surfacique d'électrons libres	m^{-2}	cm^{-2}
n_D	Densité surfacique de donneurs	m^{-2}	cm^{-2}
n_p	Densité surfacique d'électrons piégés sur les donneurs	m^{-2}	cm^{-2}
v_D	Densité volumique de donneurs	m^{-3}	cm^{-3}
$\ell, a, b, \text{ etc.}$	Longueurs diverses	m	μm ou \AA
$V(x, y, z)$	Énergie potentielle ou « potentiel » vu par les électrons	J	meV
V_0	Marche de potentiel à l'interface entre deux semiconducteurs	J	meV
V_S	Marche de potentiel à l'interface semiconducteur-métal (barrière Schottky)	J	meV
E_n	Niveaux d'énergie quantiques des électrons	J	meV
\vec{k}	Vecteur d'onde de l'électron	m^{-1}	cm^{-1}
E_F	Niveau de Fermi à température nulle	J	meV
μ_c	Potentiel chimique	J	meV
T	Température	K	K
$\rho(E)$	Densité d'états en énergie	J^{-1}	meV^{-1}
φ	Potentiel électrostatique	V	V
$\vec{F} = -\vec{\text{Grad}} \varphi$	Champ électrostatique	$V \cdot m^{-1}$	$V \cdot cm^{-1}$
\vec{B}	Champ magnétique	T	T
\vec{A}	Potentiel vecteur électromagnétique	T · m	T · cm
\vec{j}	Densité de courant surfacique	$A \cdot m^{-1}$	$A \cdot cm^{-1}$
I	Courant électrique	A	A
μ	Mobilité du gaz électronique	$m^2 \cdot s^{-1} \cdot V^{-1}$	$cm^2 \cdot s^{-1} \cdot V^{-1}$

I. PREMIÈRE PARTIE

NIVEAUX D'ÉNERGIE D'UN GAZ BIDIMENSIONNEL OU QUASI BIDIMENSIONNEL

On rappelle que la fonction d'onde $\psi_n(x, y, z)$ d'un état quantique stationnaire d'un électron de masse m soumis à un potentiel $V(x, y, z)$ obéit à l'équation de Schrödinger :

$$-\hbar^2/2m \Delta \psi_n(x, y, z) + V(x, y, z) \psi_n(x, y, z) = E_n \psi_n(x, y, z) \quad (1)$$

où $\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ désigne le Laplacien de ψ et E_n est l'énergie de l'électron dans l'état quantique n . Si g_n fonctions ψ_n linéairement indépendantes satisfont l'équation de Schrödinger avec la même énergie E_n , on dit que l'état est g_n fois dégénéré. Si $g_n = 1$, on dit que l'état est non dégénéré. L'ensemble des valeurs de E_n s'appelle le spectre d'énergie.

Si $V(x, y, z) = V_x(x) + V_y(y) + V_z(z)$, les solutions de l'équation (1) se mettent sous la forme d'un produit $\psi_n(x, y, z) = \chi_{n_x}(x) \cdot \chi_{n_y}(y) \cdot \chi_{n_z}(z)$ où chaque fonction d'une variable $\chi_{n_\alpha}(\alpha)$ ($\alpha = x, y, z$) satisfait à

$$-\hbar^2/2m d^2/d\alpha^2 \chi_{n_\alpha}(\alpha) + V_\alpha(\alpha) \chi_{n_\alpha}(\alpha) = E_{n_\alpha} \chi_{n_\alpha}(\alpha)$$

et telles que l'énergie totale E_n soit la somme des énergies du mouvement selon chaque direction

$$E_n = E_{n_x} + E_{n_y} + E_{n_z}.$$

I.A. Gaz parfaitement bidimensionnel.

On suppose que les électrons se déplacent dans le plan xOy sur une surface carrée d'aire $S = L_x L_y$ où le potentiel $V(x, y)$ est nul et sont enfermés dans cette surface par des barrières de potentiel infiniment hautes :

$$\begin{cases} V(x, y) = 0 & \text{si } 0 < x < L_x \text{ et } 0 < y < L_y \\ V(x, y) = \infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2)$$

I.A.1.a. Résoudre l'équation de Schrödinger pour $\chi_{n_x}(x)$ en prenant pour conditions limites $\chi_{n_x}(0) = \chi_{n_x}(L_x) = 0$. En déduire les énergies E_{n_x} du mouvement selon Ox .

b. Trouver de même les fonctions d'onde χ_{n_y} et les énergies E_{n_y} du mouvement selon Oy .

c. En déduire l'énergie totale $E_n = E_{n_x} + E_{n_y}$ de l'électron.

I.A.2.a. On appelle vecteur d'onde \vec{k} , de composantes k_x et k_y , un vecteur tel que $E_x = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}$ et $E_y = \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m}$. Dessiner dans le plan (k_x, k_y) , appelé espace des \vec{k} , les valeurs possibles du vecteur \vec{k} du fait de la quantification de l'énergie.

b. Soit \mathcal{S} l'aire d'un domaine de l'espace des \vec{k} situé entièrement dans le premier quadrant (k_x et $k_y > 0$) et dont les dimensions sont grandes devant les intervalles Δk_x et Δk_y entre deux valeurs possibles de \vec{k} . Exprimer, en particulier en fonction de \mathcal{S} , L_x et L_y , le nombre $N_{\mathcal{S}}$ d'états quantiques correspondant à des vecteurs d'onde dont l'extrémité est dans \mathcal{S} .

I.A.3.a. Quel est le domaine de l'espace des \vec{k} correspondant à des états d'énergie inférieure à une valeur nominale E ?

b. Soit $N(E)$ le nombre d'états quantiques d'énergie inférieure à E et $N(E + \Delta E)$ le nombre d'états quantiques d'énergie inférieure à $E + \Delta E$, où $\Delta E \ll E$. On appelle densité d'états quantiques la quantité $\rho(E)$ telle que $\rho(E) \Delta E = N(E + \Delta E) - N(E)$ représente le nombre d'états, supposé grand, d'énergie comprise entre E et $E + \Delta E$.

Calculer $\rho(E)$ en fonction de $S = L_x L_y$, m et \hbar pour ce gaz parfaitement bidimensionnel. Dessiner le graphe de $\rho(E)$.

c. Cette notion de densité d'états a un sens si le nombre d'états dans un intervalle d'énergie $\Delta E = k_B T$ est grand. Calculer ce nombre pour $T = 1 \text{ K}$ et $S = 1 \text{ mm}^2$ ($m = 0,07 m_0$).

I.A.4. Plutôt que les conditions aux limites nulles adoptées en I.A.1, on préfère adopter les conditions aux limites périodiques, c'est-à-dire que les solutions de l'équation (1) dans le potentiel (2) sont cherchées sous la forme :

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= 1/\sqrt{L_x L_y} \exp(ik_x x) \exp(ik_y y) \\ \text{avec } \psi(x + L_x, y) &= \psi(x, y) \quad \text{et} \quad \psi(x, y + L_y) = \psi(x, y). \end{aligned}$$

a. Quelles sont les valeurs possibles de k_x et k_y du fait de ces nouvelles conditions limites ?

b. Montrer que l'on trouve bien la même densité d'états $\rho(E)$ qu'avec les conditions aux limites nulles.

I.A.5. On ajoute la variable de spin de l'électron. Sachant que l'énergie de l'électron ne dépend pas de son état de spin, trouver la densité d'états $\rho_s(E)$ qui tient compte du spin.

I.B. Gaz quasi-bidimensionnel.

Pratiquement, les systèmes bidimensionnels sont obtenus artificiellement en épitaxiant une couche mince d'épaisseur L appelée puits, par exemple en GaAs, entre deux couches épaisses appelées barrières d'un semiconducteur à plus grande bande interdite, par exemple $\text{Ga}_{0.7}\text{Al}_{0.3}\text{As}$. Dans le plan des couches, de surface S , le mouvement est bidimensionnel comme décrit en I.A ; selon l'axe de croissance $z'z$, on ne peut négliger l'épaisseur L . Ceci donne naissance à une quantification supplémentaire selon cet axe, quantification que l'on considérera comme discrète à faible L (typiquement 100 \AA), contrairement à la quantification dans le plan des couches considérée comme quasi-continue (L_x et L_y grands) et décrite par une densité d'états.

I.B.1. Cas d'une barrière infinie.

Le potentiel selon $z'z$ s'écrit alors (on omet l'indice z)

$$\begin{cases} V(z) = 0 & \text{si } -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} \\ V(z) = \infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

Ce potentiel (fig. 1 a) étant pair [$V(-z) = V(z)$], on admettra que les fonctions d'ondes $\chi_n(z)$ solutions de l'équation de Schrödinger du mouvement selon Oz sont soit paires, soit impaires. On posera $E_n = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$. On omettra également l'indice z pour les fonctions χ_n et les énergies E_n .

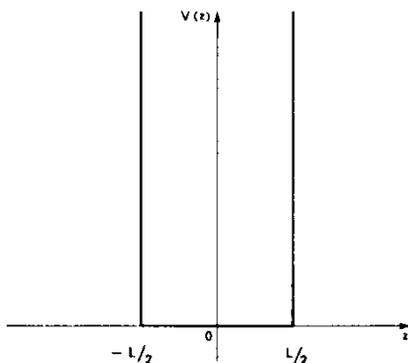


Figure 1 a

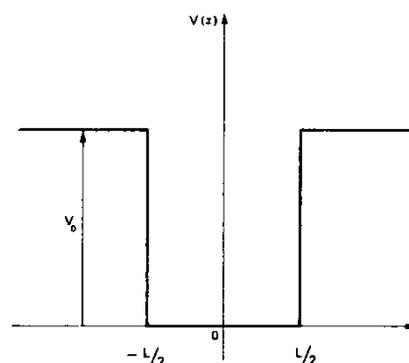


Figure 1 b

- Exprimer, en fonction de k_z , la forme analytique d'une fonction $\chi_n(z)$ paire solution de l'équation de Schrödinger dans ce cas.
En écrivant les conditions aux limites nulles, déduire les valeurs possibles de k_z et les énergies correspondantes E_n de ces états pairs.
- Même question pour les états $\chi_n(z)$ impaires.
- Vérifier que l'on trouve bien le même spectre d'énergie qu'en I.A.1.a.
- Quelle est l'énergie E_0 de l'état fondamental du mouvement selon $z'z$? Celle du premier état excité E_1 ?

Application numérique :

Calculer E_0 et E_1 en meV pour $L = 100 \text{ \AA}$. Vérifier que l'écart d'énergie entre le niveau fondamental et le premier niveau excité est grand devant $k_B T$ ($T = 1 \text{ K}$).

- e. On considère l'énergie totale $E = E_x + E_y + E_z$ du gaz quasi-bidimensionnel de grande surface S . Exprimez et dessinez le graphe représentant la densité d'états $\rho_S(E)$ associée à ce système en tenant compte du spin électronique et de la quantification selon Oz .

I.B.2. Cas d'une barrière finie.

De fait, les propriétés électroniques de GaAs et de $\text{Ga}_{0,7}\text{Al}_{0,3}\text{As}$ font qu'un électron de conduction est confiné selon z non pas par une barrière de hauteur infinie mais par une barrière de hauteur finie V_0 (fig. 1 b) :

$$\begin{cases} V(z) = 0 & \text{si} & -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} \\ V(z) = V_0 & \text{si} & |z| \geq \frac{L}{2} \text{ avec } V_0 > 0 \end{cases} \quad (4)$$

On cherche les états liés du problème, c'est-à-dire les états d'énergie $E_z < V_0$.

- a. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $\chi(z)$ pour $-\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2}$? On posera $E_z = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$.
Quelle est la solution générale de cette équation ?
Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $\chi(z)$ pour $z \geq \frac{L}{2}$? On posera $V_0 - E_z = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$.
Quelle est la solution générale de cette équation ?
Même question pour $z \leq -\frac{L}{2}$.
- b. On cherche les solutions *paires* du problème. En écrivant que $\chi(z)$ est paire, continue en $z = \pm \frac{L}{2}$, ne diverge pas à l'infini et que la dérivée $d\chi(z)/dz$ est continue en $z = \pm \frac{L}{2}$, montrer que l'énergie E_z des états pairs du système vérifie l'équation :

$$k_z \operatorname{tg} \left(k_z \frac{L}{2} \right) = \kappa \quad (5)$$

- c. Montrer de même que l'énergie des états impairs vérifie :

$$k_z \operatorname{cotg} \left(k_z \frac{L}{2} \right) = -\kappa \quad (6)$$

- d. L'allure des graphes représentant κL en fonction de $k_z L$ selon les équations (5) en trait plein et (6) en trait tireté est représentée dans la figure 2. En posant $(\kappa_0 L)^2 = (\kappa L)^2 + (k_z L)^2 = \frac{2mV_0 L^2}{\hbar^2}$, trouver le principe d'une résolution graphique des équations (5) et (6).

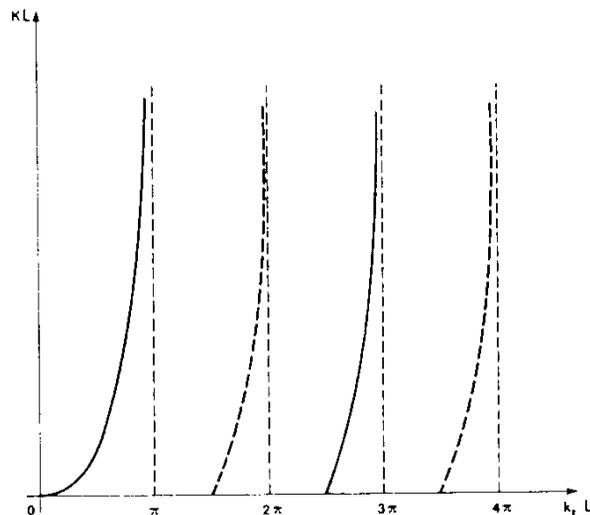


Figure 2

e. En déduire que le nombre d'états liés du problème est :

$$\mathcal{N}_{\text{lié}} = 1 + \text{Partie entière } \frac{\kappa_0 L}{\pi}.$$

Y-a-t-il toujours un état lié (on suppose V_0 strictement positif) ?

f. Vérifier qu'à la limite $V_0 \rightarrow \infty$, on retrouve bien les énergies de I. B. 1.

g. Évaluer, à 10 % près, l'énergie de l'état fondamental du système pour $L = 100 \text{ \AA}$ et $V_0 = 250 \text{ meV}$.

II. DEUXIÈME PARTIE

STATISTIQUE D'UN GAZ D'ÉLECTRONS BIDIMENSIONNEL

On se placera dans la suite, dans la limite du gaz parfaitement bidimensionnel d'électrons de spin 1/2, sans interaction. L'énergie vaut $E = \hbar^2(k_x^2 + k_y^2)/2m$ et la densité d'états, pour une surface S , vaut, en tenant compte de la dégénérescence de spin,

$$\begin{cases} \rho_S(E) = 0 & \text{si } E < 0 \\ \rho_S(E) = mS/\pi\hbar^2 & \text{si } E \geq 0. \end{cases}$$

II. A. Gaz d'électrons seul.

Les électrons étant des fermions, on rappelle qu'ils obéissent à la statistique de Fermi-Dirac, telle que la probabilité de trouver un électron dans un état d'énergie E à la température T est :

$$f_T(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu_c}{k_B T}\right) + 1}$$

où μ_c est le potentiel chimique du système et k_B la constante de Boltzmann. La valeur moyenne d'une grandeur physique $h(E)$ à l'équilibre thermodynamique s'écrit alors :

$$\langle h \rangle = \int h(E) \rho_S(E) f_T(E) dE + \sum_i g_i h(E_i) f_T(E_i)$$

où l'intégrale s'étend sur les états du quasi-continuum d'énergie de densité $\rho_S(E)$ et la somme discrète sur des états d'énergie supplémentaires discrets de dégénérescence g_i qui peuvent apparaître dans le problème.

On considère le gaz bidimensionnel seul et l'on suppose que la densité surfacique d'électrons est n . Le nombre total d'électrons est $N = nS$.

II.A.1.a. Quelle est la limite de la distribution de Fermi-Dirac $f_T(E)$ quand $T \rightarrow 0$ (limite du gaz complètement dégénéré) ?

b. On appelle énergie de Fermi E_F la valeur de μ_c à $T = 0$. Exprimer E_F en fonction de n , m , et des constantes fondamentales.

c. Application numérique : $n = 10^{12} \text{ cm}^{-2}$. Calculer E_F en meV.

d. Pour quel ordre de grandeur de T cette approximation du gaz complètement dégénéré n'est-elle plus valable ?

II.A.2. On suppose maintenant $T \neq 0$. Trouver la relation explicite reliant n au potentiel chimique μ_c , à la température T , et aux grandeurs physiques du problème.

II.B. Dopage surfacique d'impuretés.

Les électrons de conduction sont en fait créés par un dopage d'impuretés. Ces impuretés, appelées donneurs, possèdent chacune un électron de valence supplémentaire, situé sur un niveau d'énergie E_D ($E_D < 0$) en dessous du bas de la bande de conduction (fig. 3). Par ionisation thermique, cet électron peut être donné à la bande de conduction du semiconducteur. On appellera n_D la densité surfacique de donneurs, n_p la densité surfacique d'électrons piégés sur les donneurs et n la densité surfacique d'électrons libres dans la bande de conduction, électrons que l'on suppose créés uniquement par ionisation thermique des donneurs.

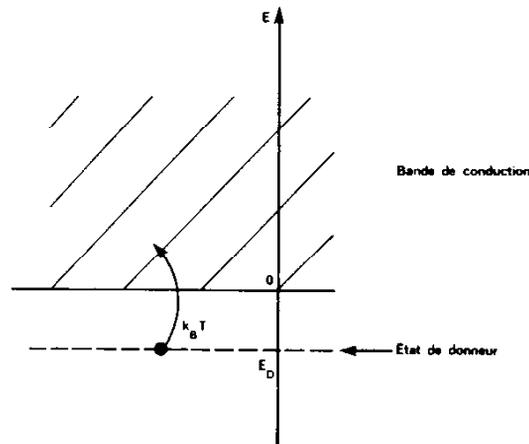


Figure 3

Sachant qu'un donneur monovalent ne peut accepter qu'un électron piégé, et non pas deux électrons de spins opposés comme dans le cas des états de la bande de conduction, on démontre que la probabilité de présence d'un électron sur un donneur est :

$$f_p = \frac{1}{\frac{1}{2} \exp\left(\frac{E_D - \mu_c}{k_B T}\right) + 1}.$$

II.B.1.a. Exprimer la densité surfacique d'électrons piégés n_p en fonction de $k_B T$, μ_c , E_D et n_D .

b. À l'aide du résultat précédent et de II.A.2., trouver une relation liant n_D , μ_c , $k_B T$, E_D , m et \mathcal{K}

II.B.2. On se place dans la limite des basses températures :

$$k_B T \ll |E_D| \quad \text{et} \quad k_B T \ll \frac{n_D \pi \hbar^2}{m}.$$

a. Quelles sont les valeurs limites de n et n_p quand $T \rightarrow 0$?

b. Montrer qu'alors μ_c tend vers $\frac{E_D}{2}$ et trouver un développement asymptotique de $\delta \mu_c(T) = \mu_c(T) - \frac{E_D}{2}$ en fonction de $k_B T$.

II.B.3. On se place dans la limite des hautes températures :

$$k_B T \gg |E_D| \quad \text{et} \quad k_B T \gg \frac{n_D \pi \hbar^2}{m}.$$

a. Quelles sont les valeurs limites de n et n_p quand $T \rightarrow \infty$?

b. Montrer que μ_c tend vers $-\infty$ et trouver le développement asymptotique donnant $\mu_c(T)$ en fonction de $k_B T$.

III. TROISIÈME PARTIE

MODULATION DE DOPAGE ET CONTRÔLE DE LA DENSITÉ SURFACIQUE D'ÉLECTRONS

De façon à obtenir une densité de porteurs appréciable même à faible température, on préfère créer des électrons libres de conduction dans le gaz bidimensionnel par la technique de la modulation de dopage (R. Dingle et H. Störmer, 1979). La barrière de $\text{Ga}_{0,7}\text{Al}_{0,3}\text{As}$ est dopée en volume par des donneurs au voisinage d'une hétérostructure $\text{Ga}_{0,7}\text{Al}_{0,3}\text{As}/\text{GaAs}$ (fig. 4 a). Les électrons piégés sur les donneurs de la barrière ont tendance à aller vers les niveaux libres de la bande de conduction de GaAs. Les donneurs ionisés créent une courbure de bande, et un gaz quasi bidimensionnel à l'interface apparaît (fig. 4 b). Pour simplifier, on supposera que le profil de bande est celui de la figure 4 c, où le gaz 2D est parfaitement bidimensionnel et localisé à l'interface en $z = 0+$.

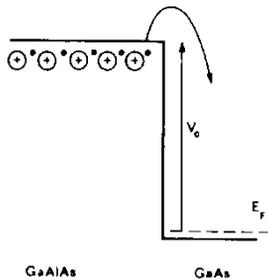


Figure 4 a

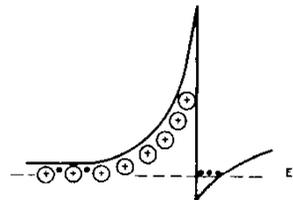


Figure 4 b

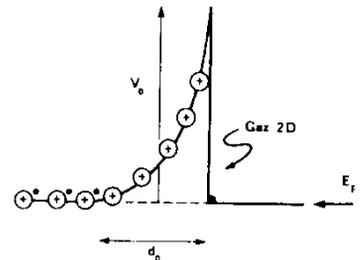


Figure 4 c

Les figures 4 a, b et c représentent les variations spatiales du potentiel :

$$W(z) = V(z) - e\varphi(z)$$

somme de l'énergie potentielle de la bande de conduction $V(z)$ considérée en I.B.2. et de l'énergie potentielle électrostatique $-e\varphi(z)$. Le potentiel électrostatique $\varphi(z)$ résulte de l'existence de donneurs ionisés (densité volumique v_D) sur une distance d_0 et du gaz d'électrons 2D (densité surfacique n). $F_z = -\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z}$ désigne le champ électrostatique dirigé selon Oz.

On se place à température nulle, de telle sorte que les donneurs de la barrière à une cote z sont soit tous neutres, soit tous ionisés. La densité volumique de donneurs v_D est uniforme dans la barrière. On négligera E_D et les énergies de confinement et de Fermi du gaz 2D devant la discontinuité de bande V_0 (fig. 4 c). On supposera le champ F_z nul dans GaAs en volume ($z > 0$).

III.A. Sachant que $\varphi(z)$ satisfait à l'équation de Poisson dans un milieu de permittivité diélectrique relative ϵ_r (équation électrique) et que le niveau de Fermi est le même au niveau du gaz 2D et à une cote $z = -d_0$ où les donneurs de la barrière sont neutres (condition d'équilibre thermodynamique), on cherche à calculer n et d_0 en fonction de v_D .

III.A.1.a. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $\varphi(z)$ entre $z = -d_0$ et $z = 0$?

b. Intégrer cette équation différentielle avec les conditions limites $\varphi(-d_0) = \frac{V_0}{e}$, $\frac{d\varphi}{dz} = 0$ en $z = -d_0$.

- III.A.2.a. En écrivant que $\varphi(0) = 0$, trouver la longueur d_0 où les donneurs sont ionisés en fonction de V_0 , v_D , ϵ_r , ϵ_0 et e .
- b. Calculer le champ électrique en $z = 0^-$. En déduire la densité surfacique n du gaz 2D en fonction de V_0 , v_D , ϵ_r , ϵ_0 et e . On appellera cette densité n_0 dans la suite. Quelle relation existe-t-il entre n_0 , v_D et d_0 ? Commenter ce résultat.
- c. *Application numérique* : $v_D = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, $V_0 = 250 \text{ meV}$, $\epsilon_r = 12$. Calculer d_0 et n_0 .

III.B. Contrôle de n par grille Schottky.

La couche de $\text{Ga}_{0.7}\text{Al}_{0.3}\text{As}$ uniformément dopée n'est plus supposée infiniment épaisse mais a une épaisseur ℓ . On a d'autre part évaporé sur la face externe une couche métallique appelée grille. Celle-ci a la propriété d'imposer un potentiel fixe, V_S , appelé potentiel Schottky, entre le bas de la bande de conduction de $\text{Ga}_{0.7}\text{Al}_{0.3}\text{As}$ et le niveau de Fermi dans le métal.

En contactant électriquement le gaz 2D et la grille et en appliquant une tension φ_G entre la grille et le gaz 2D, on peut modifier l'équilibre du système comme indiqué figure 5.

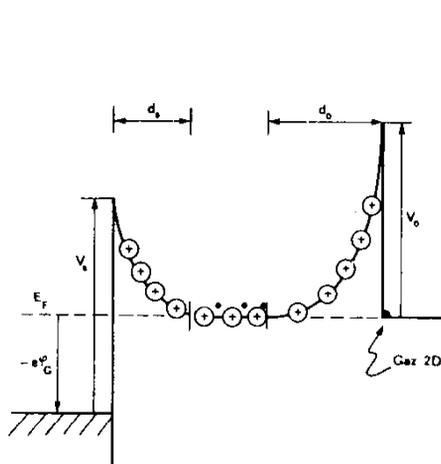


Figure 5 a

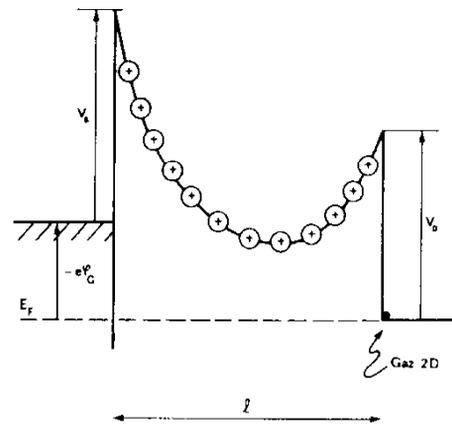


Figure 5 b

- III.B.1. Si $\ell > d_0$ et si φ_G est suffisamment positif, il y a une zone où les donneurs de $\text{Ga}_{0.7}\text{Al}_{0.3}\text{As}$ sont neutres et la densité n_0 du gaz 2D est celle calculée en III.A. (fig. 5 a). Calculer dans ce cas d_s , la longueur sur laquelle les donneurs sont ionisés du côté de la grille, en fonction de V_S et φ_G . On supposera $V_S - e\varphi_G > 0$. La densité volumique de donneurs est toujours v_D . Calculer numériquement d_s pour $\varphi_G = 0.2 \text{ V}$ et $V_S = 300 \text{ meV}$.

- III.B.2. Si au contraire φ_G diminue au point que $d_s + d_0$ devienne plus grand que ℓ , la densité surfacique n s'en trouve modifiée (fig. 5 b).

- a. Déterminer la loi de variation de n en fonction de φ_G dans le domaine de tension φ_G qui contrôle effectivement n . On exprimera $n(\varphi_G)$ en fonction de

$$\varphi_G, \varphi_0 = \frac{V_0}{e}, \varphi_S = \frac{V_S}{e}, \varphi_1 = \frac{\ell^2 e v_D}{2 \epsilon_r \epsilon_0}$$

et de la densité n_0 calculée en III.A.

- b. Préciser en particulier la tension φ_{Gc} où n commence à décroître et la tension φ_{G0} où n devient nul.

- c. *Application numérique* :

Calculer φ_{Gc} et φ_{G0} pour $\ell = 1000 \text{ \AA}$, $V_0 = 250 \text{ meV}$, $V_S = 300 \text{ meV}$, $v_D = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ et $\epsilon_r = 12$.

IV. QUATRIÈME PARTIE

TRANSISTOR À EFFET DE CHAMP À HÉTÉROJONCTION

On réalise à l'aide du système précédent un transistor à effet de champ (fig. 6).

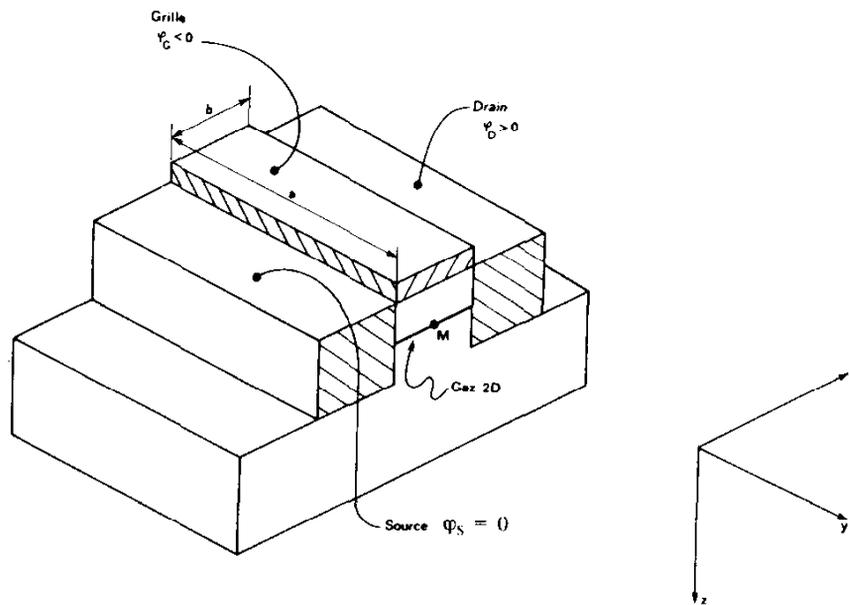


Figure 6

Des contacts électriques supposés parfaits d'un gaz d'électrons 2D sont effectués de part et d'autre (en $x = 0$ côté source et $x = b$ côté drain) d'une grille métallique de « longueur » b selon Ox (direction drain-source) et de « largeur » a selon Oy . On néglige les effets de bord dans la direction $y'y$. Soit $n(x)$ la densité surfacique du gaz 2D en un point M et $\varphi(x)$ le potentiel électrique au même point. On suppose que la relation liant $n(x)$ à $\varphi(x)$ et au potentiel électrique de la grille φ_G s'écrit dans le domaine qui nous intéresse où $\varphi_G - \varphi(x)$ est négatif :

$$\begin{cases} n(x) = \frac{n_0(\varphi_G - \varphi(x) + \varphi_1)}{\varphi_1} & \text{si } \varphi_G - \varphi(x) + \varphi_1 \geq 0 \\ n(x) = 0 & \text{si } \varphi_G - \varphi(x) + \varphi_1 \leq 0 \end{cases} \quad (5a)$$

$$(5b)$$

avec $\varphi_1 > 0$. On prendra dans cette partie $n_0 = 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ et $\varphi_1 = 1$ volt.

En $x = 0$, on impose à la source un potentiel électrique nul $\varphi(0) = 0$ et en $x = b$ le potentiel électrique de drain $\varphi(b) = \varphi_D > 0$. La grille est portée au potentiel électrique φ_G par rapport à la source. On se placera dans un régime linéaire où la vitesse v_x des électrons (ici selon $x'x$) qui créent le courant est reliée au champ électrique $F(x)$ créé par la tension φ_D par :

$$v_x = -\mu F(x) \quad \text{où } \mu \text{ est la mobilité.}$$

IV.A. On se place d'abord à $\varphi_G = 0$.

IV.A.1.a. Exprimer la densité de courant surfacique $j_x(x)$ en fonction de $n(x)$ et du champ $F(x)$. En déduire l'intensité du courant surfacique, comptée positivement depuis le drain jusqu'à la source, $I = -j_x a$, qui traverse le segment de largeur a à une distance x de la source.

b. On suppose que $\varphi_D \leq \varphi_1$, c'est-à-dire que $n(x)$ est contrôlé sur toute la longueur du gaz 2D par la relation (5a). Exprimer I en fonction de e , a , μ , $\varphi(x)$, $\frac{d\varphi(x)}{dx}$, n_0 et φ_1 .

c. En remarquant que le courant I est constant sur toute la « longueur » de la structure, intégrer l'équation trouvée en b. En déduire la caractéristique $I(\varphi_D)$ à $\varphi_G = 0$ pour $\varphi_D \leq \varphi_1$.

d. Calculer la conductance dynamique $G(\varphi_D) = \frac{dI(\varphi_D)}{d\varphi_D}$ à $\varphi_G = 0$. Préciser sa valeur pour $\varphi_D = 0$ et $\varphi_D = \varphi_1$.

e. Tracer le graphe représentant la caractéristique $I(\varphi_D)$ à $\varphi_G = 0$ pour $0 \leq \varphi_D \leq \varphi_1$.

IV.A.2. On suppose que $\varphi_D = \varphi_1$ (et toujours $\varphi_G = 0$).

a. Calculer et dessiner l'allure du graphe de $\varphi(x)$.

b. Calculer et dessiner l'allure du graphe de $n(x)$.

c. Quelles sont les valeurs de $n(b)$ et $F(b)$? Commenter ce résultat. Pourquoi $\varphi_D = \varphi_1$ s'appelle-t-elle la tension de pincement à $\varphi_G = 0$?

d. Quelle est l'expression du courant I pour $\varphi_D = \varphi_1$ et $\varphi_G = 0$? On notera ce courant $I_{S_{\max}}$.

IV.A.3. On supposera que pour $\varphi_D > \varphi_1$, le courant reste constant et vaut $I_{S_{\max}}$.

a. Compléter la caractéristique $I(\varphi_D)$ à $\varphi_G = 0$ pour $\varphi_D > \varphi_1$. Savez-vous ce qui se passe si φ_D devient trop grand?

b. Calculer numériquement $I_{S_{\max}}$ pour $n_0 = 10^{12} \text{ cm}^{-2}$, $\varphi_1 = 1 \text{ V}$, $a = 100 \text{ }\mu\text{m}$, $b = 1 \text{ }\mu\text{m}$ et $\mu = 8000 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

IV.B. On applique maintenant une tension φ_G , telle que $-\varphi_1 \leq \varphi_G \leq 0$, à la grille. $n(x)$ est toujours donnée par les lois (5).

IV.B.1.a. En appliquant les mêmes hypothèses que dans IV.A., trouver le réseau de caractéristiques $I(\varphi_D)$ à φ_G constant quand φ_D est suffisamment petit pour que la loi (5a) s'applique.

b. Trouver la loi donnant en fonction de φ_1 et φ_G la tension de pincement $\varphi_P(\varphi_G)$ c'est-à-dire la tension drain où la dérivée $\frac{\partial I}{\partial \varphi_D}$, à φ_G constant, devient nulle.

c. Quel est le courant $I(\varphi_P)$ à cette tension? On notera $I_S(\varphi_G)$ ce courant que l'on exprimera en fonction de $I_{S_{\max}}$.

IV.B.2.a. On suppose que, à φ_G donné, quand $\varphi_D > \varphi_P(\varphi_G)$, le courant reste constant et vaut $I_S(\varphi_G)$ (régime de saturation). Compléter le réseau de caractéristiques du transistor.

b. Exprimer la transconductance du transistor en régime de saturation, $g(\varphi_G) = \frac{dI_S(\varphi_G)}{d\varphi_G}$ en fonction de $I_{S_{\max}}$, φ_G et φ_1 .

c. Application numérique: Quelle est la valeur de la transconductance g pour $\varphi_G = \frac{-\varphi_1}{4}$ en prenant la valeur de $I_{S_{\max}}$ trouvée en IV.A.3.b., avec $\varphi_1 = 1 \text{ V}$?

IV.C. Cette partie IV.C. ne nécessite pas la résolution des questions précédentes.

On utilise un tel transistor dans le montage source commune (fig. 7).

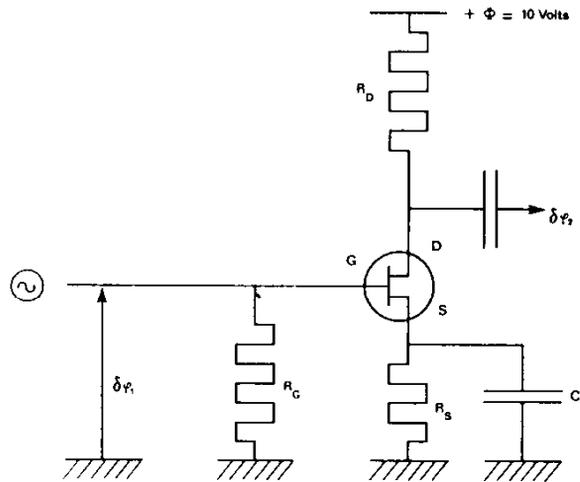


Figure 7

IV.C.1. On suppose le transistor parfait (impédance d'entrée de grille infinie). On cherche à fixer R_D et R_S pour obtenir un point de fonctionnement du système en régime de saturation. On prendra $\varphi_G - \varphi_S = -0,25 \text{ V}$ et $\varphi_D - \varphi_S = 2 \text{ V}$ pour lequel le courant drain-source vaut d'après les caractéristiques 36 mA .

Sachant que l'on dispose d'une source continue $\Phi = +10 \text{ V}$, calculer R_S et R_D pour obtenir un tel point de fonctionnement.

IV.C.2. On applique une tension sinusoïdale $\delta\varphi_1$ de faible amplitude et de pulsation ω à la grille. Cette variation de tension de grille produit une petite variation de courant de drain δI donnée par $\delta I = g\delta(\varphi_G - \varphi_S)$, où g est la transconductance du système en ce point de fonctionnement.

- On récolte la tension alternative $\delta\varphi_2$ au niveau du drain (fig. 7). Quel est, en notation complexe, le gain $\frac{\delta\varphi_2}{\delta\varphi_1}$ du système ?
- Comment choisir C_S pour que ce gain soit maximum en module ? Quel est alors le déphasage entre $\delta\varphi_2$ et $\delta\varphi_1$?
- Calculer le module de ce gain maximum pour $g = 0,096 \Omega^{-1}$.

IV.D. On cherche à calculer un ordre de grandeur de la bande passante de ce transistor.

- On assimile la capacité grille-source C_{GS} du transistor en régime dynamique à la capacité grille-gaz 2D, de surface $S = ab$, d'épaisseur ℓ et de permittivité diélectrique relative ϵ_r . Calculer C_{GS} avec $a = 100 \mu\text{m}$, $b = 1 \mu\text{m}$, $\ell = 0,1 \mu\text{m}$, $\epsilon_r = 12$.
- La fréquence de coupure est la fréquence f_c où le courant alternatif qui passe à travers C_{GS} est égal au courant alternatif drain-source $\delta I = g\delta(\varphi_G - \varphi_S)$ créé par la variation de potentiel de grille. Calculer littéralement et numériquement f_c .

V. CINQUIÈME PARTIE

MAGNÉTO-CONDUCTIVITÉ D'UN GAZ 2D

On place un gaz d'électrons 2D, de densité surfacique uniforme, n , de longueur b (selon x') de largeur a (selon $y'y$) dans un champ magnétique uniforme et stationnaire \vec{B} parallèle à Oz (fig. 8).

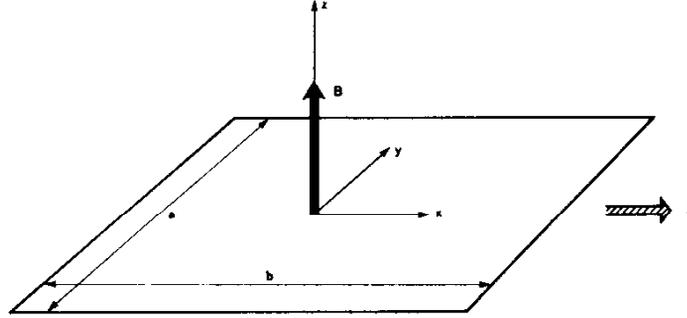


Figure 8

V.A. Soit F_x et F_y les composantes du champ électrique \vec{F} en un point du plan. Les électrons de masse m , de vitesse $\vec{v}(v_x, v_y)$, sont soumis à la force de Lorentz :

$$-e(\vec{F} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

et à une force de frottement résultant des interactions avec le réseau :

$$-m\vec{v}/\tau$$

où τ est un temps caractéristique de collision.

V.A.1.a. Montrer qu'en régime permanent $\left(\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}\right)$, on peut déduire les composantes (j_x, j_y) de la densité de courant surfacique \vec{j} en fonction des composantes du champ \vec{F} , sous forme d'une matrice de conductivité surfacique :

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Exprimer les composantes du tenseur de conductivité en fonction des grandeurs $\omega_c = \frac{eB}{m}$ et

$$\text{et } \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}.$$

b. Exprimer également le tenseur de résistivité surfacique :

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}. \quad (7)$$

c. Quelle est l'unité de résistivité surfacique ?

V.A.2. On impose un courant I dans la direction x'/x et l'on mesure la tension de Hall φ_H entre deux points situés de part et d'autre du gaz 2D dans la direction y'/y . On néglige les effets de bord et l'on suppose les grandeurs homogènes sur toute la surface du gaz 2D.

Calculer la résistance de Hall $R_H = \frac{\varphi_H}{I}$. Montrer qu'elle dépend de n , e et B et non des dimensions géométriques du système.

V.B. À basse température, on ne peut ignorer l'aspect quantique du problème. On est donc amené à chercher les niveaux d'énergie quantiques (appelés niveaux de Landau) du mouvement orbital d'un gaz d'électrons bidimensionnel soumis à un champ \vec{B} perpendiculaire au plan.

V.B.1. On rappelle que la résolution de l'équation de Schrödinger pour un potentiel harmonique

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \text{ conduit à un spectre de solutions d'énergie}$$

$$E_q = \hbar \omega_0 \left(q + \frac{1}{2} \right) \quad q = 0, 1, 2, \dots,$$

chaque solution étant non dégénérée.

a. Montrer que le vecteur $\vec{A}(0, xB, 0)$ est un potentiel vecteur pour le champ magnétique uniforme \vec{B} dirigé selon Oz .

b. En présence d'un potentiel vecteur $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$, on montre que l'équation vérifiée par la fonction d'onde $\psi(x, y)$ est pour x et y compris sur la surface du gaz 2D :

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} + eA_x \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y} + eA_y \right)^2 + \frac{1}{2m} e^2 A_z^2 \right] \psi(x, y) = E \psi(x, y).$$

Trouver l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\psi(x, y)$ dans le cas du champ \vec{B} parallèle à Oz .

V.B.2. a. Les coefficients de l'équation ne dépendant pas explicitement de y , on admettra que l'on peut chercher une solution de la forme $\psi(x, y) = \exp(ik_y y) \xi(x)$, où $\psi(x, y)$ satisfait aux conditions aux limites périodiques $\psi(x, y+a) = \psi(x, y)$. Quelles sont les valeurs possibles de k_y ?

b. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $\xi(x)$?

c. Montrer que cette équation est celle d'un oscillateur harmonique centré en $x_0 \neq 0$. Préciser la pulsation ω_0 et le centre x_0 de cet oscillateur.

d. En écrivant que le centre x_0 de cet oscillateur doit être compris dans la longueur finie b du gaz

2D, montrer que la dégénérescence de chaque niveau de Landau est $g = \frac{SeB}{h}$ où $S = ab$. Si l'on tient compte du spin et si l'on néglige l'effet Zeeman, la dégénérescence est donc $g_s = \frac{2SeB}{h}$.

V.C. On se place à température suffisamment basse (et à champ suffisamment fort) pour que l'on puisse considérer la statistique des électrons comme celle d'un gaz de Fermi complètement dégénéré ($T = 0$). La densité surfacique de porteurs n , donc le nombre de porteurs $N = nS$ sont fixés.

V.C.1. a. Montrer qu'il existe un champ B_1 au-dessus duquel il n'y a qu'un seul niveau d'énergie occupé. Calculer B_1 .

b. Trouver de même le champ B_p au-dessus duquel p niveaux de Landau au plus sont occupés.

V.C.2. a. Quand le champ magnétique vaut exactement B_p , les niveaux de Landau sont entièrement occupés et la théorie des collisions d'un gaz de fermions montre que $\tau \rightarrow \infty$.

En se servant des tenseurs de conductivité et de résistivité trouvés en V.A., montrer qu'à ces valeurs de B , ρ_{xx} aussi bien que σ_{xx} deviennent nuls (effet Shubnikov-de-Haas).

b. Montrer que la résistance de Hall vaut pour chaque valeur B_p :

$$R_H^p = \frac{h}{2pe^2}$$

c. On obtient ainsi des valeurs universelles, indépendantes des dimensions géométriques, de la mobilité et de la densité du gaz 2D. Cet effet, dont les résultats expérimentaux et l'analyse théorique nécessitent la compréhension des phénomènes de localisation, porte le nom d'effet Hall quantique. Il a valu à K. von Klitzing le prix Nobel en 1985. Il sert maintenant d'étalon de résistance.

Combien vaut R_H^1 ? On prendra ici $e = 1,60219 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

VI. SIXIÈME PARTIE

TRANSPORT PERPENDICULAIRE AUX COUCHES

Dans cette partie, on s'intéresse au mouvement des électrons perpendiculairement au plan des couches, dans la direction z' z . Ce mouvement est décrit en mécanique ondulatoire par l'onde associée à l'électron de masse m . Les fonctions d'ondes correspondantes satisfont à l'équation de Schrödinger. Elles peuvent s'étendre à l'infini et correspondent aux états non liés du système (on suppose en effet les couches épaisses de chaque côté de la structure envisagée).

VI.A. Transmission à travers une barrière de potentiel.

On considère une couche d'épaisseur b de $\text{Ga}_{0,7}\text{Al}_{0,3}\text{As}$ entourée de couches épaisses de GaAs . Soit V_0 la hauteur de la barrière de potentiel (fig. 9).

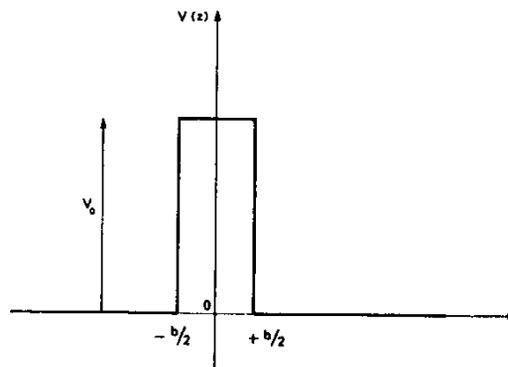


Figure 9

On cherche les états **non liés** d'énergie $E = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$ tels que $E < V_0$.

VI.A.1. a. Quelle est la solution la plus générale $\chi(z)$ de l'équation de Schrödinger du mouvement selon z' z dans chaque couche pour :

- $z \leq -\frac{b}{2}$.
- $-\frac{b}{2} < z < \frac{b}{2}$; on introduira la quantité κ_b définie par $\frac{\hbar^2 \kappa_b^2}{2m} = V_0 - E$.
- $z \geq \frac{b}{2}$?

- b. On montre que calculer le coefficient de transmission de l'amplitude de l'onde associée à l'électron d'énergie E revient à chercher le coefficient t tel que les conditions aux limites à l'infini soient :

$$\text{pour } z \leq -\frac{b}{2} \quad \chi(z) = \exp(ik_z z) + r \exp(-ik_z z);$$

$$\text{pour } z \geq \frac{b}{2} \quad \chi(z) = t \exp(ik_z z).$$

En écrivant les conditions aux limites (continuité de $\chi(z)$ et de $\frac{d\chi(z)}{dz}$ en $z = \pm \frac{b}{2}$), on montre que le coefficient de transmission en énergie $T_b = |t|^2$ vaut :

$$T_b = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\xi + \frac{1}{\xi} \right)^2 \hbar^2 \kappa_b b}$$

où $\xi = \frac{k_z}{\kappa_b}$ (on ne cherchera pas à retrouver cette relation).

Calculer T_b pour $V_0 = 250 \text{ meV}$, $b = 50 \text{ \AA}$ et $E = 30 \text{ meV}$.

V.I.B. Transmission à travers une double barrière.

On considère maintenant un système de deux barrières identiques d'épaisseur b séparées par une distance L (fig. 10).

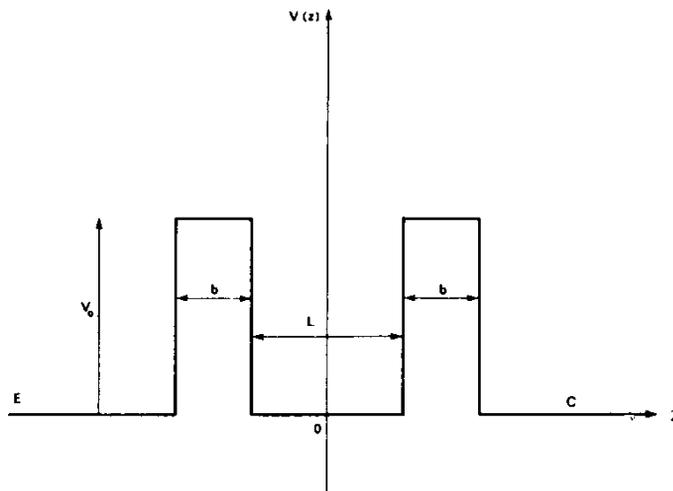


Figure 10

- V.I.B.1.a. Combien vaut la transmission T d'un tel système si l'on néglige les interférences dues aux ondes réfléchies sur chacune des deux barrières ?
- b. Quand on ne néglige plus ces interférences, on peut montrer (le calcul, long, n'est pas demandé ici) que la transmission T du système vaut 1 quand l'énergie E correspond à un état lié du problème du puits unique de hauteur V_0 étudié au I.B.2. (fig. 1 b). Quel est l'analogue optique d'un tel système électronique ?

- c. Un calcul numérique de $T(E)$ donne une courbe du type de la figure 11. La largeur des pics de transmission ΔE est très petite devant E , énergie d'une résonance. En se servant de l'analogie optique, pouvez-vous donner **un ordre de grandeur** du facteur de qualité de la résonance $Q = \frac{E_0}{\Delta E}$?

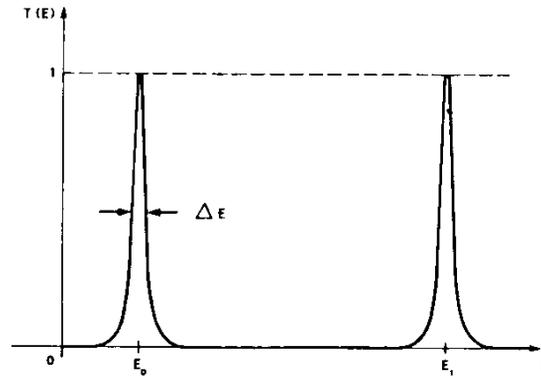


Figure 11

- VI.B.2. a. On sait faire varier l'énergie E des électrons injectés dans la structure en modifiant la différence de potentiel φ_{EC} entre l'émetteur et le collecteur placés de part et d'autre de la double barrière. Sachant que le courant I dû aux électrons qui traversent la structure est proportionnel à $T(E)$, donner l'allure de la caractéristique $I(\varphi_{EC})$ de ce composant électronique.
- b. Quelle est la spécificité de cette caractéristique et l'utilisation pratique qui peut en être faite ?
- VI.B.3. Les imperfections de la structure et les phénomènes de collisions donnent une valeur caractéristique de 60 pour Q . On cherche à calculer l'ordre de grandeur de la fréquence de fonctionnement limite f_L d'un tel système par un argument semi-classique : on assimile l'onde électronique à une particule de vitesse $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ qui « rebondit » sur les barrières de part et d'autre du puits en $z = \pm \frac{L}{2}$.

À l'aide de l'analogie optique, trouver l'**ordre de grandeur** de f_L pour $E = 30$ meV et $Q = 60$.

SESSION DE 1992**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques**

option : chimie

épreuve A
composition de chimie**Durée : 5 heures****MATÉRIELS À PRÉVOIR :**

- *Calculatrice de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*
- *L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

Les candidats composeront sur du papier de composition quadrillé 5 × 5

L'épreuve comporte deux parties totalement indépendantes, chacune d'elles étant subdivisée en sous-unités largement indépendantes. Les deux parties étant d'importance égale, il est recommandé aux candidats de répartir le temps consacré à chacune d'elles en conséquence.

La première partie vise à re-démontrer l'équation de Butler-Volmer. Quelques applications à l'étude des potentiels mixtes ainsi qu'à l'étude d'un mécanisme de réaction électrochimique en chimie organique sont proposées.

La deuxième partie envisage sous différents aspects l'étude des boranes et de leurs dérivés.

PREMIERE PARTIE

Données : Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
 $\mathcal{F} = 1 \text{ Faraday} = 96480 \text{ C.mol}^{-1}$

I Etude thermodynamique d'une cellule électrochimique pour la réalisation de l'électrolyse de l'eau

Données : $\Delta_f H^\circ$ enthalpie molaire de formation de référence ($P^\circ = 1 \text{ bar}$)
 S° entropie molaire de référence ($P^\circ = 1 \text{ bar}$)

à 25°C	$\Delta_f H^\circ$ (kJ.mol ⁻¹)	S° (J.K ⁻¹ .mol ⁻¹)
H ₂ O _{liq}	-285,2	69,9
O ₂ _{gaz}		205,0
H ₂ _{gaz}		130,6

On considère une cellule électrochimique pour la réalisation de l'électrolyse de l'eau, comportant deux électrodes de platine plongeant dans une solution aqueuse diluée d'acide sulfurique. Les gaz formés sont recueillis séparément, chacun à la pression extérieure P.

On appelle Σ le système formé par : les deux électrodes, la solution et les deux gaz recueillis. L'intensité du courant électrique est supposée suffisamment faible pour négliger la résistance de l'électrolyseur dans toute la suite. La différence de potentiel entre les deux électrodes sera comptée positivement.

I.1.a) Ecrire l'équation des réactions aux deux électrodes, ainsi que l'équation bilan de la réaction de décomposition d'UNE mole d'eau liquide (réaction notée (1) dans la suite)

I.1.b) Calculer pour cette réaction (1) les grandeurs de réaction de référence $\Delta_r H^\circ$, $\Delta_r S^\circ$ et $\Delta_r G^\circ$ à 25°C. Calculer l'enthalpie libre de réaction $\Delta_r G$ à 40°C pour $P_{\text{H}_2} = P_{\text{O}_2} = 40 \text{ bar}$ en supposant $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$ indépendants de la température.

I.1.c) On note ξ l'avancement de la réaction (1). On considère la fonction $G(T, P, \xi)$ enthalpie libre de Σ . Donner l'expression de la différentielle dG dans les variables T, P, ξ en précisant le coefficient de d ξ .

I.2) On suppose que l'on puisse réaliser l'électrolyse de façon réversible, isotherme et isobare (25°C ; P = 1 bar) pendant la durée correspondant à un avancement ξ de la réaction (1).

I.2.a) Montrer que la différence de potentiel entre les 2 électrodes, notée ΔV , est constante pendant toute la durée de l'électrolyse. Quelle est la relation entre ΔV et $\Delta_r G^\circ$?

I.2.b) Exprimer pour Σ , les variations d'enthalpie libre : $G_f - G_i$, d'enthalpie : $H_f - H_i$, d'entropie : $S_f - S_i$ entre l'état initial (caractérisé par $\xi = 0$) et l'état final (caractérisé par une valeur donnée de ξ) en fonction de ξ et des grandeurs de réaction de référence.

I.2.c) Application numérique : on forme 0,10 mol. de dioxygène O₂.

Calculer ΔV , $G_f - G_i$, $H_f - H_i$, $S_f - S_i$ ainsi que le travail électrique W_e reçu par Σ et la quantité de chaleur Q reçue par Σ .

I.3) En réalité, on constate que l'électrolyse ne s'effectue avec un courant notable qu'à partir d'une valeur $\Delta V'$ de la différence de potentiel entre les 2 électrodes valant 1,82 V (tension de décomposition). On effectue alors l'électrolyse sous cette différence de potentiel maintenue constante, de façon isotherme et isobare (25°C ; P = 1 bar) pendant un intervalle de temps correspondant à un avancement ξ de la réaction (1).

I.3.a) Exprimer le travail électrique W_e reçu par Σ , et la quantité de chaleur Q' reçue par Σ , en fonction de ξ , $\Delta V'$, et des grandeurs de réaction de référence. Commenter.

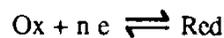
I.3.b) Application numérique : calculer W_e et Q' lorsqu'on a formé 0,10 mol. de O₂.

I.3.c) Exprimer la variation d'entropie de l'univers.
Montrer qu'elle est proportionnelle à $(\Delta V' - \Delta V)$.

II Etude cinétique des phénomènes d'oxydoréduction aux électrodes

La surtension observée précédemment est liée à la cinétique des réactions aux électrodes que nous allons étudier dans cette partie.

II.1) Soit une électrode inattaquable de surface S , portée au potentiel E (mesuré par rapport à l'électrode normale à hydrogène), plongeant dans une solution contenant la forme oxydée et la forme réduite d'un même couple. La réaction d'oxydoréduction s'effectuant à cette électrode, en une seule étape, dans un sens ou dans l'autre, est représentée par l'équation :



On note E° le potentiel de référence du couple à $T = 25^\circ\text{C}$.

Les vitesses (en nombre de moles de substance formée par unité de temps et de surface d'électrode) s'expriment en fonction des concentrations à l'électrode (notées $[\]_e$) par les relations :

- pour l'oxydation (donnant lieu à un courant anodique positif) : $v_a = k_a [\text{Red}]_e$
- pour la réduction (donnant lieu à un courant cathodique négatif) : $v_c = k_c [\text{Ox}]_e$

Les constantes de vitesse sont reliées au potentiel E appliqué à l'électrode ; en effet, les énergies d'activation qui valent E_a^\ddagger et E_c^\ddagger quand $E = E^\circ$ deviennent

$$E_a^\ddagger - \alpha n F (E - E^\circ) \quad \text{et} \quad E_c^\ddagger + \beta n F (E - E^\circ)$$

quand l'électrode est portée au potentiel E (α et β sont des coefficients caractéristiques du couple redox et indépendants de E). On a donc :

$$k_a = k_a^\circ \exp \left[\frac{\alpha n F}{RT} (E - E^\circ) \right]$$

et

$$k_c = k_c^\circ \exp \left[\frac{-\beta n F}{RT} (E - E^\circ) \right],$$

k_a° et k_c° sont les constantes de vitesse pour $E=E^\circ$. On admettra de plus, que le transport de matière ne limite en rien la réaction électrochimique, c'est-à-dire que les concentrations à l'électrode et au sein de la solution sont égales.

II.1.a) Montrer, en considérant l'électrode à l'équilibre thermodynamique que :

$$k_a^\circ = k_c^\circ$$

et que

$$\alpha + \beta = 1.$$

II.1.b) En déduire que la densité de courant se met sous la forme

$$j = j_0 \left\{ \exp \left[\frac{\alpha n F \eta}{RT} \right] - \exp \left[-\frac{(1-\alpha) n F \eta}{RT} \right] \right\}$$

équation de Butler-Volmer, η désignant la surtension définie par $\eta = E - E_{eq}$ où E_{eq} est le potentiel de l'électrode à l'équilibre thermodynamique.

On précisera la signification physique de j_0 .

Qu'appelle-t-on système rapide, système lent ?

II.1.c) La loi de Butler-Volmer démontrée ici avec des hypothèses restrictives est en fait vérifiée de façon plus générale. Indiquer brièvement les critères de validité de cette loi ; comment faudrait-il la modifier dans le cas de processus électrochimiques plus complexes ?

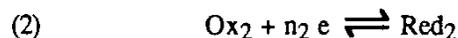
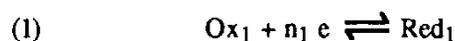
II.1.d) Pour le couple H^+/H_2 ($H^+ + e \rightleftharpoons 1/2 H_2$) sur l'électrode de platine utilisée dans la cellule électrochimique du (I), l'équation de Butler-Volmer est vérifiée et les caractéristiques cinétiques sont les suivantes : $n=1$, $\alpha=0,5$, $j_0 = 4 \text{ mA.cm}^{-2}$ à 25°C .

Tracer la courbe de la densité de courant en fonction de la surtension pour $|j| \leq 30 \text{ mA.cm}^{-2}$.

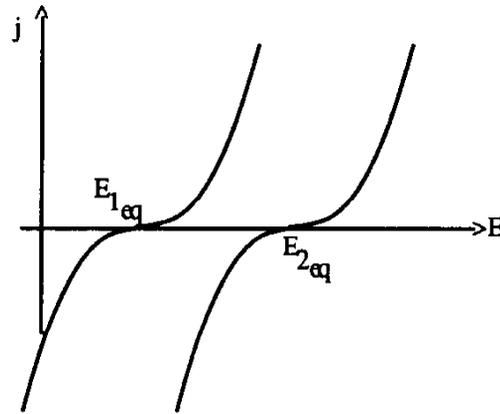
II.2) L'électrolyse de l'eau, effectuée dans les conditions de la question I.3 se produit avec une densité de courant $j = 5 \text{ mA.cm}^{-2}$. (On rappelle que la résistance de l'électrolyseur est négligeable). Quelle est alors, dans ces conditions, la surtension pour le couple O_2/H_2O sur électrode de platine ?

III Application des courbes densité de courant en fonction du potentiel

III.1) On considère une électrode à la surface de laquelle peuvent se dérouler les deux processus suivants :



chaque couple redox, pris séparément, est caractérisé par son potentiel d'équilibre thermodynamique (E_{1eq} ou E_{2eq} , avec $E_{1eq} < E_{2eq}$) et par sa courbe de densité de courant en fonction du potentiel qui vérifie l'équation de Butler-Volmer (avec les coefficients j_{O1} et α_1 pour (1) et j_{O2} et α_2 pour (2)), voir figure ci-dessous.



L'électrode à l'équilibre prend un potentiel appelé potentiel mixte noté E_M .

III.1.a) Donner une expression simplifiée de E_M en fonction de $n_1, j_{O1}, E_{1eq}, \alpha_1, n_2, j_{O2}, E_{2eq}$ et α_2 dans le cas où l'écart $E_{2eq} - E_{1eq}$ est important.

III.1.b) Application numérique : considérons une électrode en fer plongée dans une solution acide contenant des ions fer(II) ($[H^+] = 0,10 \text{ mol.l}^{-1}$, $[Fe^{2+}] = 0,10 \text{ mol.l}^{-1}$) soumise à un barbotage continu de dihydrogène sous la pression de 1 bar.

Calculer le potentiel mixte et la masse de fer dissoute par unité de temps et de surface. L'équation de Butler-Volmer est vérifiée pour les deux couples redox et on prendra pour simplifier $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$ et $j_{O1} = j_{O2} = 10^{-3} \text{ A.cm}^{-2}$.

données : $E^\circ (Fe^{2+}/Fe) = -0,44 \text{ V}$ (à 25°C)
Masse atomique du fer : 56 g.mol^{-1} .

III.2) On plonge une lame de magnésium dans une solution d'acide chlorhydrique ($0,1 \text{ mol.l}^{-1}$). On observe un léger dégagement gazeux. En touchant la lame de magnésium avec un clou en fer, on observe un dégagement gazeux intense sur le clou, et au bout d'un certain temps, la disparition de la lame de magnésium alors que le clou n'est pas attaqué.

Expliquer ces observations en donnant l'allure des courbes de densité de courant en fonction du potentiel et en utilisant la notion de potentiel mixte.

Les cathodes sacrificielles sont une des applications pratiques de ce phénomène. Rappeler brièvement leur utilisation et montrer en quoi elles fonctionnent suivant le principe de l'expérience ci-dessus.

Données : $E^\circ (Mg^{2+}/Mg) = -2,37 \text{ V}$ à 25°C .

III.3) On veut doser 10 cm^3 d'une solution aqueuse d'ions fer(II) ($[Fe^{2+}] = 10^{-2} \text{ mol.l}^{-1}$) par une solution de permanganate de potassium ($2 \cdot 10^{-3} \text{ mol.l}^{-1}$). Le dosage est suivi par potentiométrie à courant nul. Le pH des solutions est maintenu à 1.

III.3.a) Représenter un schéma du dispositif à mettre en oeuvre.

III.3.b) Tracer la courbe théorique donnant le potentiel E de l'électrode de mesure en fonction du volume V de permanganate de potassium versé. On calculera en particulier E pour $V = 5, 10$ et 20 cm^3 .

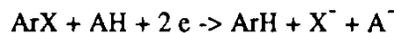
Données : $E^\circ (\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) = 0,77 \text{ V}$
 $E^\circ (\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}) = 1,51 \text{ V à pH} = 0.$

III.3.c) Pour $V \geq 10 \text{ cm}^3$, E mesuré est nettement inférieur à E calculé. Proposer une justification qualitative à l'aide des courbes de densité de courant en fonction du potentiel et de la notion de potentiel mixte.

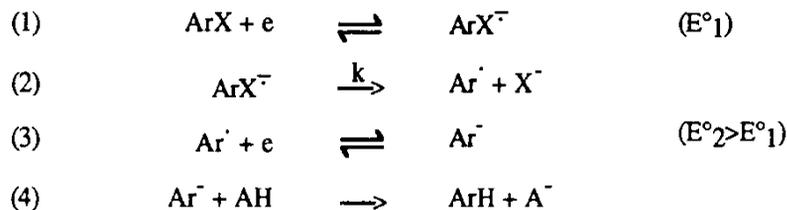
IV Etude du mécanisme d'une réaction électrochimique

Sauf dans les cas simples, les réactions électrochimiques ne sont pas des réactions élémentaires, les transferts d'électrons étant accompagnés de réactions chimiques. Nous allons illustrer ce point dans cette partie en prenant comme exemple la réduction électrochimique des halogénures d'aryle dans l'ammoniac liquide.

IV.1) On effectue l'électrolyse à potentiel constant d'une solution d'halogénure d'aryle (notée ArX) dans l'ammoniac liquide en présence d'électrolyte support (KBr) et d'un mélange tampon urée-uréate (noté AH/A⁻). On utilise une cathode en mercure et une anode en platine. Le compartiment anodique est séparé du compartiment cathodique par un verre fritté et on ne s'intéresse pas à la réaction intervenant à l'anode. Pour 1 mole de substrat (ArX), la quantité d'électricité consommée, mesurée à l'aide d'un coulomètre, est de $2 \mathcal{F}$ et il y a formation d'une mole de ArH. L'équation bilan de la réaction cathodique est donc :



Le mécanisme proposé est le suivant :



(L'expérience est conduite à un potentiel qui ne permet pas la réduction de ArH).

IV.1.a) L'étape n°2 est nommée "coupure réductrice". Ce type de réaction est également fréquemment observé en chimie organométallique. En donner un exemple.

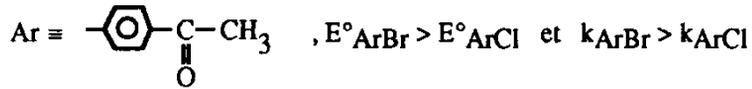
IV.1.b) Si la constante de vitesse k de l'étape n°2 est relativement faible, le deuxième transfert électronique n'a pas lieu à l'électrode. Expliquer pourquoi.

Comment doit-on alors écrire l'étape n° 3 ?

IV.1.c) Une étude par voltamétrie cyclique a permis de déterminer les valeurs de E_1° et de k pour une série de composés. De l'ensemble des résultats obtenus, se dégagent les règles empiriques suivantes :

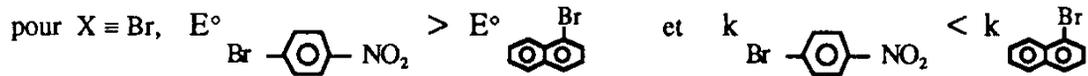
- Règle 1 : Pour une série de dérivés ayant même groupe restant (Ar) mais des groupes partants (X) différents, plus E_1° est grand, plus k est grand.

Par exemple :



- Règle 2 : Pour une série de dérivés ayant même groupe partant, c'est l'inverse qui est observé : plus E est grand, plus k est faible.

Par exemple :



Proposer une justification à ces règles empiriques.

IV.2) On effectue maintenant les électrolyses au même potentiel que précédemment, mais en présence d'alcool. Or les alcools primaires ou secondaires sont donneurs d'atomes d'hydrogène ; l'atome d'hydrogène transféré est celui en α du groupe hydroxyle.

Dans le cas de l'électrolyse de la 4-bromobenzophénone ($\text{Br-C}_6\text{H}_4\text{-C(=O)-C}_6\text{H}_5$) dans l'ammoniac liquide en présence d'un grand excès de benzhydrol ($\text{C}_6\text{H}_5\text{-CHOH-C}_6\text{H}_5$) et du tampon urée/ uréate, on constate que la quantité d'électricité consommée tend vers 0 quand la quantité de benzhydrol augmente et qu'il y a formation de 2 moles de benzophénone par mole de substrat.

IV.2.a) Proposer un mécanisme rendant compte de ces observations.

IV.2.b) L'électrolyse effectuée avec seulement 6 fois plus de benzhydrol que de 4-bromobenzophénone ($n_{\text{benzhydrol}} = 6 n_{4\text{-bromobenzophénone}}$) consomme une quantité d'électricité $q = 1 \text{ F} \cdot \text{mol}^{-1}$.
Quelle est la quantité de benzophénone formée par mole de substrat ?

DEUXIEME PARTIE

I Structure géométrique des boranes

I.1.a) Dans le cadre du modèle VSEPR, ou de tout autre modèle ou théorie que vous préciserez, prédire la géométrie de la molécule NH_3 .

I.1.b) Même question avec l'hypothétique molécule BH_3 .

I.2) Le borane BH_3 , électriquement très déficient, est une molécule instable qui compense sa déficience en se dimérisant sous la forme stable B_2H_6 , le diborane. En acceptant l'idée que seuls les électrons de valence participent aux liaisons chimiques, décompter les électrons intervenant dans les liaisons chimiques du diborane. En déduire que la règle de l'octet ne peut-être vérifiée dans cette structure.

I.3) On se propose donc de prévoir la géométrie et la nature des liaisons qui maintiennent cet édifice ainsi que celles des boranes supérieurs de formule B_nH_m . On sait expérimentalement que pour tous ces édifices, chaque bore est lié au moins à un hydrogène ; on écrira donc les boranes sous la forme $(\text{BH})_p\text{H}_q$. Nous admettrons que ces structures sont maintenues par p liaisons B-H, par x liaisons supplémentaires B-H (identique au p précédentes), par y liaisons B-B et par des liaisons dites "non-classiques" notées BHB et BBB. On appelle s le nombre des liaisons BHB et t le nombre des liaisons BBB. L'originalité de ces liaisons est de relier 3 atomes avec seulement 1 doublet d'électrons. Une structure $(\text{BH})_p\text{H}_q$ est donc décrite par un ensemble de 4 paramètres (entiers positifs) s , t , y et x .



I.3.a) Trouver une relation entre p , q , s , t , y et x qui rende compte du nombre d'orbitales atomiques mises en jeu dans les liaisons chimiques existant dans cette structure.

I.3.b) Trouver une relation entre q , s et x qui rende compte du nombre d'hydrogène de la structure.

I.3.c) Trouver une relation entre p , q , s , t , y et x qui rende compte du nombre de paires d'électrons mises en jeu dans des liaisons.

I.3.d) Déduire de ces trois relations que les trois relations suivantes doivent être vérifiées :

$$2y = s - x, \quad q = s + x \quad \text{et} \quad p = s + t.$$

I.4) Grâce aux équations ci-dessus, montrer qu'il existe un unique jeu de paramètres, s t y x , qui rende compte de la structure du diborane. En déduire une structure probable pour cette molécule.

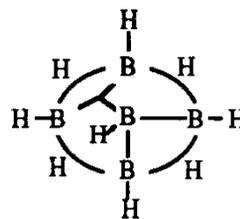
I.5) Même question pour le triborane B_3H_9 , noté aussi triborane(9).

I.6.a) Montrer que pour le tétraborane(10), B_4H_{10} , un seul jeu de paramètres, s t y x , est cohérent avec le fait que la RMN du ^{11}B montre que les atomes de bore de cette structure sont deux à deux équivalents.

I.6.b) Quelles structures sont possibles pour le tétraborane(10).

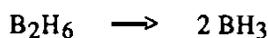
I.7) On donne la structure du pentaborane(9) :

En déduire le jeu de paramètres, s t y x , correspondant à cette formule.



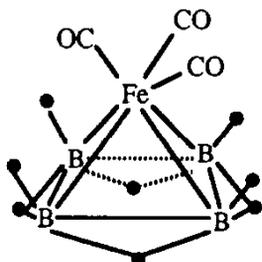
II Exemple de réactivité des boranes

II.1) On peut rendre compte de la synthèse des boranes supérieurs à partir du diborane en écrivant un certain nombre d'étapes faisant intervenir les deux espèces BH et BH₃ (non isolées). On admet que du dihydrogène est toujours présent dans le système réactionnel. La formation du triborane(9) par pyrolyse du diborane peut, par exemple, s'interpréter ainsi :



Rendre compte de la formation de tétraborane(10) et du pentaborane(9) par pyrolyse du diborane. Justifier brièvement de la possibilité d'envisager le bore à une valence aussi inusuelle que dans BH.

II.2) La réaction du fer pentacarbonyle avec le pentaborane conduit au produit très stable B₄H₈Fe(CO)₃ dont la structure géométrique est :



(Les points noirs symbolisent les atomes d'hydrogène)

II.2.a) Justifier brièvement le fait que la liaison entre Fe et CO est Fe-CO et non Fe-OC

II.2.b) Justifier la stoechiométrie du fer pentacarbonyle.

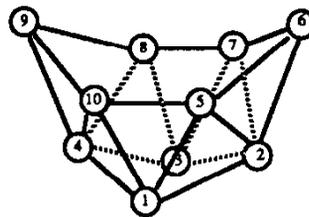
II.2.c) En déduire le nombre d'électrons que le ligand B₄H₈ met en jeu dans ce complexe.

II.2.d) Proposer une équation bilan et un mécanisme probable pour la formation de B₄H₈Fe(CO)₃, cohérent avec les questions ci-dessus.

II.2.e) Quel est le complexe organométallique isoélectronique de B₄H₈Fe(CO)₃ dans lequel le fragment B₄H₈ est remplacé par un hydrocarbure ?

II.3) La structure géométrique du squelette des atomes de bore du décaborane(14), $B_{10}H_{14}$, est :

(les atomes d'hydrogène ne sont pas représentés et les traits reliant les cercles (mis pour B) ne sont en aucun cas représentatifs des liaisons chimiques ; ils aident simplement à visualiser la proximité des atomes.)



Expérimentalement, les réactions ci-dessous "Réaction A" et "Réaction B" ont été observées :

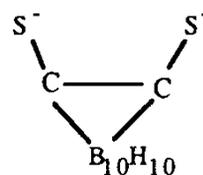
Réaction A : Il est possible de faire réagir le décaborane(14) sur un halogénure d'alkyle (par exemple RBr) pour donner $RB_{10}H_{13}$; la réaction est catalysée par du trichlorure d'aluminium ($AlCl_3$) dans le sulfure de carbone.

Réaction B : Par ailleurs la dissolution du décaborane(14) dans l'acétonitrile (CH_3CN) permet de préparer le composé $B_{10}H_{12}(CH_3CN)_2$ (avec un départ de dihydrogène).

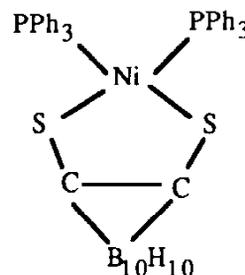
Sachant que des calculs de densité électronique dans le cadre de la théorie des orbitales moléculaires démontrent que la densité électronique est maximale sur les positions 2 et 4, et minimale sur les positions 6 et 9, représenter, en les justifiant, les structures les plus probables pour les produits des réactions A et B.

III Chimie de coordination et boranes

III.1) Il est possible de synthétiser l'ion $B_{10}H_{10}C_2S_2^{2-}$ que l'on représentera sous la forme ci-contre :



Cet anion, en présence de chlorure de nickel(II) et de triphénylphosphine (PPh_3) donne le complexe :



dans lequel les deux atomes de soufre et les deux atomes de phosphore sont dans un même plan.

Comment nomme-t-on une telle coordination pour le nickel ?

Dans la suite, on appellera PC cette coordination.

III.2) On se propose de rendre compte, avec un modèle simple, de la préférence de la coordination PC pour le nickel.

Soit M un métal ou un ion de transition possédant n électrons d.

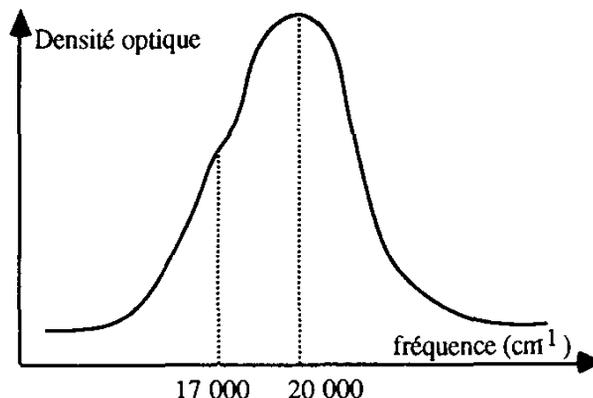
III.2.a) Rappelez la forme habituelle que l'on donne aux orbitales d, que l'on nommera d_{xz} , d_{xy} , d_{zy} , $d_{x^2-y^2}$ et d_{z^2} (on ne demande pas de justifier leur forme).

III.2.b) Du point de vue des niveaux d'énergie de ces orbitales d, comparer le cas du métal (ou de l'ion) M en l'absence de ligand, et celui du métal entouré de six charges ponctuelles, placées suivant un octaèdre régulier, et modélisant le champ créé par 6 ligands (on appellera O_h cette coordination dans la suite).

III.3.a) La coordination de l'ion titane(III) dans l'eau ($Ti[H_2O]_6^{3+}$) est en première approximation de type O_h . Montrer que les niveaux d'énergie proposés à la question précédente permettent d'interpréter l'observation d'une bande d'absorption unique en spectroscopie électronique.

III.3.b) Le spectre électronique de l'ion titane(III) dans l'eau présente en réalité une légère dissymétrie :

Comment peut-on interpréter cette dissymétrie ?



III.4) Dans le cas d'un ion manganèse(II), Mn^{2+} , préciser le mode de répartition des électrons d en coordination O_h (on distinguera deux cas). Sachant que la coloration d'une solution aqueuse de chlorure de manganèse(II) est très peu intense, peut-on en déduire dans quel cas on se trouve. Pour quelle raison ne peut-on en déduire aussi simplement que dans le cas du titane(III) l'interprétation complète de son spectre électronique.

III.5.a) Avec un raisonnement qualitatif comparable à celui de la question III.2.b, expliquer comment évoluent les niveaux énergétiques des orbitales si l'on fait subir une distorsion à un complexe de symétrie O_h , telle que les deux ligands pointant le long de l'axe z du complexe soient à une distance supérieure à ceux pointant le long des axes x et y.

III.5.b) Montrer qu'à la limite et avec quelques hypothèses simplificatrices que l'on précisera, la coordination PC du complexe de nickel de la question III.1 peut être considérée comme une telle déformation.

III.5.c) En déduire une interprétation à la stabilité de la coordination PC du nickel(II).

III.5.d) En déduire avec quels autres métaux de transition la coordination PC est fréquemment rencontrée ?

III.6) Il est possible de préparer le carborane $HC(B_{10}H_{10})C-COOH$ constitué d'une cage de 12 sommets (10 BH et 2 CH) dont l'un des atomes d'hydrogène lié à un carbone est substitué par la fonction carboxylique COOH. Le pK, dans l'eau, d'un tel acide est 2,48. Montrer que cette faible valeur du pK (comparée au pK de l'acide benzoïque, 4,2) est bien en accord avec la déficience électronique des structures boranes et carboranes.

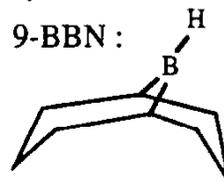
IV Borane et borohydrure en chimie organique et organométallique

IV.1.a) Le diborane est un réactif utilisé en synthèse organique. Donner la réaction du diborane avec le pent-1-ène en précisant, en la justifiant, sa régiosélectivité.

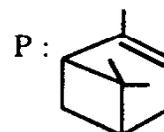
IV.1.b) L'oxydation en milieu basique ($\text{H}_2\text{O}_2\text{-NaOH}$) du produit de réaction avec le pent-1-ène est un alcool. Ecrire la réaction et la comparer avec la réaction directe du pent-1-ène sur l'eau (catalysée par un acide).

IV.2.a) Montrer que l'on peut former le 9-BBN par réaction du diborane sur le cycloocta-1,4-diène.

IV.2.b) La réaction du 9-BBN avec un mélange de pent-1-ène et de pent-2-ène conduit à une réaction avec le seul pent-1-ène : en donner une interprétation.



IV.2.c) Un excès de composé P, formule ci-contre, d'origine naturelle, réagit avec le diborane pour donner $(\text{P}')_2\text{BH}$. Ce nouveau composé réagit avec le but-2-ène-Z à 0°C pour donner un composé X qui donne par oxydation en milieu basique du butanol.



On demande, éventuellement à la lumière des questions ci-dessus, de commenter cette expérience en précisant en particulier le nom usuel de P ainsi que sa série d'appartenance, la formule développée de $(\text{P}')_2\text{BH}$, la caractéristique structurale essentielle du butanol obtenu et la technique expérimentale qui permet de la mettre en évidence ; pourquoi peut-on utiliser un excès de P et pourquoi la réaction est-elle conduite à 0°C ?

IV.3) Le borohydrure de sodium (NaBH_4) est également utilisé en chimie organique. Proposer une préparation possible de ce réactif. Donner un exemple d'utilisation du borohydrure de sodium.

IV.4.a) Il est possible de faire la RMN de l'isotope ^{11}B dont le spin nucléaire est $3/2$. Quel spectre est-on en droit d'attendre (nombre de raies et intensités relatives) pour une solution de borohydrure de sodium ?

IV.4.b) La RMN du proton de cette même solution donne un quadruplet, de constante de couplage $J \approx 100$ Hz. Interpréter cette observation et préciser l'intensité respective des quatre raies du quadruplet.

IV.5) L'ion borohydrure BH_4^- peut également être utilisé comme ligand en chimie inorganique, et organométallique. Ainsi, la réaction dans l'éther du chlorure de titanocène ($(\text{C}_5\text{H}_5)_2\text{TiCl}_2$) avec le borohydrure de lithium conduit au produit $(\text{C}_5\text{H}_5)_2\text{Ti}(\text{BH}_4)_2$.

IV.5.a) Ecrire la réaction bilan ; examiner les différents facteurs qui peuvent interpréter le caractère total de cette réaction.

IV.5.b) Sachant que les hydrogènes des ligands cyclopentadiényle d'une part, et que ceux des ligands borohydrure d'autre part sont équivalents, prévoir les spectres de RMN (du proton) du chlorure de titanocène et de son dérivé borohydrure. En déduire qu'il est possible d'obtenir, grâce à cette technique, la stoechiométrie du dérivé borohydrure, alors que cela n'était pas possible dans le cas du chlorure.

SESSION DE 1992**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques**

option : chimie

épreuve B : composition de physique

Durée : 4 heures**MATÉRIEL À PRÉVOIR :**

Calculatrice de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Les candidats composeront sur du papier de composition quadrillé 5 × 5

Le sujet est constitué de deux parties totalement indépendantes :

- un problème de physique nucléaire (fusion thermonucléaire) ;
- un problème de mécanique (statique et déformations d'une poutre).

Les deux parties sont à traiter par le candidat.

FUSION THERMONUCLÉAIRE

On donne :

charge élémentaire	: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
permittivité du vide	: ϵ_0 avec $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ S.I.}$
constante de Boltzmann	: $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
unité de masse atomique	: $1 \text{ u} = 931,50 \text{ MeV}/c^2$.

A. Préliminaires utilisés dans la suite du problème :

Il est demandé de traiter brièvement, c'est-à-dire en une dizaine de lignes au maximum, chacune des deux questions suivantes :

1. L'énergie cinétique moyenne d'une molécule de gaz parfait monoatomique vaut :

$$E_c = \frac{3}{2} k T,$$

k étant la constante de Boltzmann et T la température du gaz supposé en équilibre thermodynamique. Pouvez-vous commenter ce résultat ?

N.B. — Dans la suite du problème, on appellera plasma un fluide globalement neutre mais constitué de particules chargées (noyaux et électrons). Le plasma sera supposé en équilibre thermodynamique à la température T ; on admettra que l'énergie cinétique moyenne de chaque espèce de particules vaut, comme dans le cas du gaz parfait :

$$E_c = \frac{3}{2} k T,$$

2. Énoncer le théorème de Carnot et estimer l'ordre de grandeur du rendement maximal d'un moteur thermique industriel fonctionnant entre deux sources de chaleur usuelles.

B. Caractéristiques du noyau d'un atome :

1. On a pu vérifier que le noyau noté A_ZX comportant A nucléons, dont Z protons, est souvent assimilable à une sphère dont le rayon est proportionnel à la racine cubique du nombre de nucléons :

$$R = R_0 \cdot A^{\frac{1}{3}} \quad \text{avec} \quad R_0 = 1,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Que peut-on dire de la matière nucléaire ?

2. Masses des noyaux :

Elles ne sont pas accessibles directement.

Expliquer, en faisant un bilan énergétique, comment on peut les obtenir à partir de celles des atomes données dans les tables.

On notera : $m(Z, A)$ la masse du noyau A_ZX ,

$M(Z, A)$ la masse de l'atome correspondant.

Application : Déterminer la masse des noyaux ${}^2_1\text{H}$, ${}^3_1\text{H}$, ${}^4_2\text{He}$ et ${}^6_3\text{Li}$ en utilisant les données suivantes :

$$M(1, 2) = 2,0147 \text{ u};$$

$$M(1, 3) = 3,0170 \text{ u};$$

$$M(2, 4) = 4,0039 \text{ u};$$

$$M(3, 6) = 6,0170 \text{ u}.$$

$$\text{masse de l'électron} \quad : \quad m_e = 0,549 \cdot 10^{-3} \text{ u} = 0,511 \text{ MeV}/c^2.$$

$$\text{énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène} \quad : \quad E_H = 13,6 \text{ eV}.$$

énergie de liaison totale de tous les électrons d'un atome (excepté l'atome d'hydrogène) exprimée en électrons-volts :

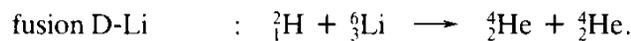
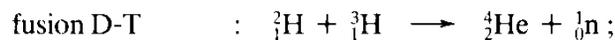
$$E_l(Z) = 15,7 \cdot Z^{\frac{7}{3}}.$$

(formule empirique issue du modèle de Thomas-Fermi).

C. Fusion thermonucléaire.

1. Énergie libérée.

On considère les deux réactions :



${}^1_0\text{n}$ est un neutron.

On suppose que les noyaux qui réagissent sont immobiles.

a. Déterminer en MeV l'énergie Q libérée par chacune des deux réactions.

On donne la masse du neutron : $m(0, 1) = 1,0090 \text{ u}$.

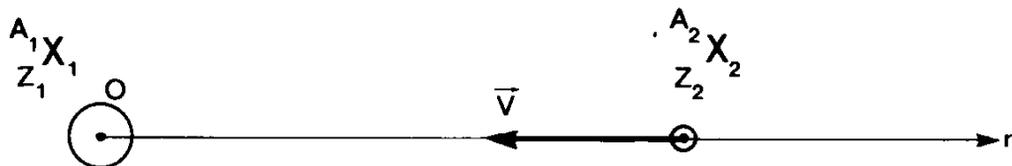
Les masses des noyaux seront celles calculées au B.

b. Montrer que les particules obtenues peuvent être considérées comme non relativistes. Calculer pour les deux réactions envisagées l'énergie cinétique de chaque espèce de particules obtenue.

2. Barrière coulombienne.

a. On envisage le choc de deux noyaux.

On considère que le noyau cible de numéro atomique Z_1 dont le centre est pris comme origine O est immobile et est heurté par le projectile de numéro atomique Z_2 .



On suppose $Z_1 > Z_2$ et on appelle r la distance entre les centres des deux particules. L'énergie potentielle d'interaction est prise égale à zéro quand les deux noyaux sont très éloignés.

Le modèle utilisé est le suivant :

– Tant que les deux noyaux ne sont pas en contact ($r > r_0$), l'interaction est supposée purement électrostatique. Les deux noyaux sont assimilables à des sphères chargées en volume mais on admettra

que l'on peut appliquer l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre deux charges ponctuelles situées au centre de chaque noyau.

- À des distances inférieures, le projectile est dans un puits carré d'énergie potentielle $U_0 = -30 \text{ MeV}$.

Tracer $U(r)$, énergie potentielle, fonction de la distance entre les centres des deux noyaux.

Justifier le fait que la quantité :

$$B_c = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{4\pi \epsilon_0 r_0}$$

est appelée barrière de potentiel électrostatique ou barrière coulombienne.

Montrer que B_c croît avec le numéro atomique des noyaux. On rappelle que le rayon des noyaux

vérifie : $R = R_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$
avec $R_0 = 1,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$.

et on pourra prendre :

$$A \approx \frac{13}{6} Z.$$

Calculer B_c en MeV pour les deux réactions D-T et D-Li.

- b. En vous inspirant des préliminaires du problème, proposer une méthode permettant de fournir aux noyaux l'énergie qui leur est nécessaire pour franchir la barrière coulombienne. Quel est l'ordre de grandeur des températures à atteindre ?
- c. Compte tenu de l'ordre de grandeur de B_c , justifier le fait que l'on a considéré les mélanges réagissants comme des plasmas formés uniquement de noyaux et d'électrons (et non d'atomes, de molécules ou d'ions).

Donner au moins un argument qualitatif permettant de justifier qu'on peut en réalité se satisfaire d'une température T telle que :

$$kT \ll B_c \quad \left(\text{par ex. } kT = \frac{B_c}{10} \right).$$

D. Condition d'amorçage : critère de Lawson.

On s'intéresse à la seule réaction de fusion D-T.

1. On considère un plasma, mélange de deux isotopes de l'hydrogène contenant :

$$n_1 \text{ noyaux } {}^2\text{H par m}^3,$$

$$n_2 \text{ noyaux } {}^3\text{H par m}^3$$

ainsi que les électrons des atomes correspondants.

Ce plasma, porté à la température T , possède une énergie volumique moyenne e_v lorsqu'il n'est le siège d'aucune réaction nucléaire.

Montrer que cette énergie vaut $e_v = 3(n_1 + n_2)kT$.

2. Certains noyaux de ce plasma subissent la fusion D-T et y libèrent donc de l'énergie.

On admet que la puissance libérée par unité de volume de plasma s'exprime par :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dv} = n_1 \cdot n_2 \cdot Q \cdot \xi(T),$$

Q étant l'énergie définie au C.1.a. et $\xi(T)$ étant une fonction de la température (dépendant de la probabilité de la réaction envisagée) appelée paramètre de réaction.

Pour des raisons techniques, le plasma ne peut être maintenu dans des conditions qui sont celles permettant l'amorçage que pendant un intervalle de temps au plus égal à τ .

L'énergie totale du plasma est alors fournie à un moteur thermique de rendement η (cf. préliminaires).

a. Écrire la relation que doivent vérifier $n_1, n_2, Q, \eta, T, \xi(T)$ et τ pour que le moteur fournisse au milieu extérieur une énergie supérieure ou égale à celle que possédait le plasma avant la réaction de fusion.

b. En déduire, lorsque $n_1 = n_2 = n$, que la valeur minimale du produit $n \cdot \tau$ est :

$$(n \cdot \tau)_{\text{mini}} = \frac{6 kT}{Q \cdot \xi(T)} \cdot \frac{1 - \eta}{\eta}.$$

Application numérique :

Calculer $(n \cdot \tau)_{\text{mini}}$ pour :

$$\xi(T) = 2,7 \cdot 10^{-22} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \quad kT = 20 \text{ keV} \quad \text{et} \quad \eta = 0,3.$$

Justifier *a posteriori* le choix $n_1 = n_2 = n$, si l'on désire que τ ait la plus petite valeur possible pour une énergie volumique moyenne et une température fixées.

DEUXIÈME PARTIE

MÉCANIQUE

N.B. — Les parties B et C sont indépendantes.

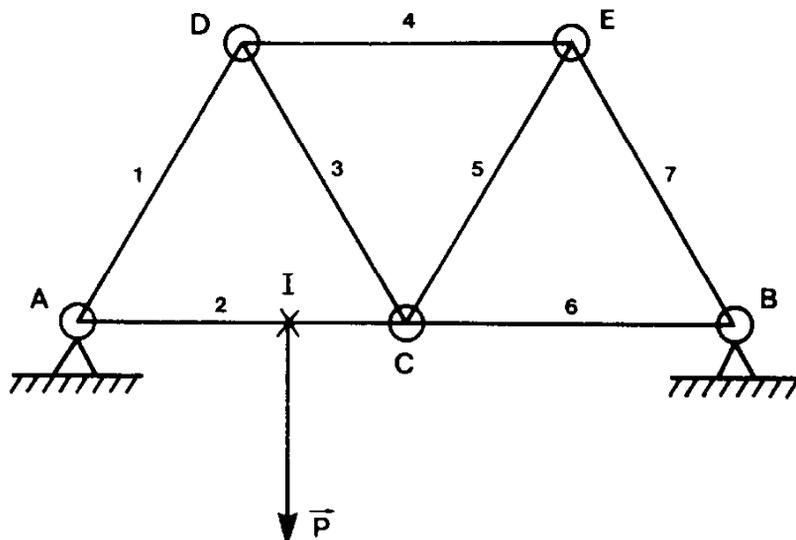
A. Énoncer les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre d'un solide.

Étudier ensuite plus particulièrement les cas où le solide est soumis à :

- 2 forces ;
- 3 forces de droites d'action coplanaires.

B. Équilibre d'un pont.

Un pont provisoire est modélisé par un treillis triangulé plan constitué de sept poutrelles de poids négligeable et de longueur commune ℓ selon le motif ci-dessous :

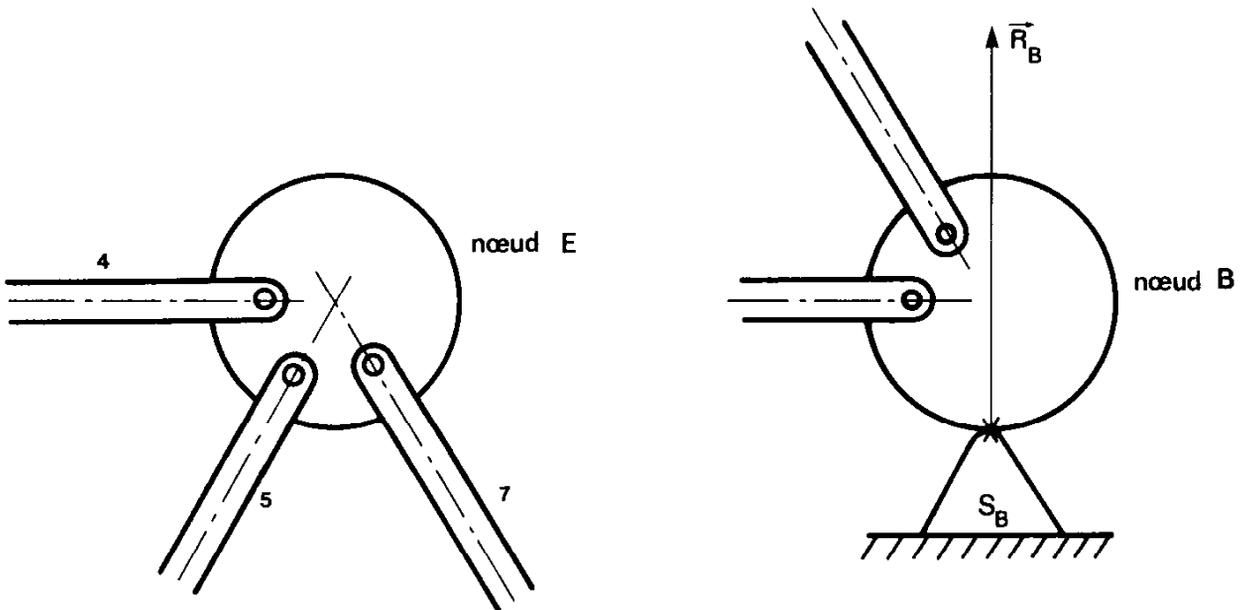


Une charge ponctuelle de poids \vec{P} ($P = 9000 \text{ N}$) est placée en I sur la poutrelle n° 2.

On prend $AI = \frac{2\ell}{3}$.

On pourra supposer que les poutrelles ne se touchent pas mais qu'elles sont boulonnées à leurs extrémités sur de petites plaques de poids négligeable qui matérialisent les nœuds A, B, C, D et E du treillis. Par ailleurs, les deux nœuds A et B reposent sur deux supports S_A et S_B qui exercent sur A et B deux forces verticales \vec{R}_A et \vec{R}_B .

On supposera, bien entendu, que le référentiel lié au pont est galiléen.

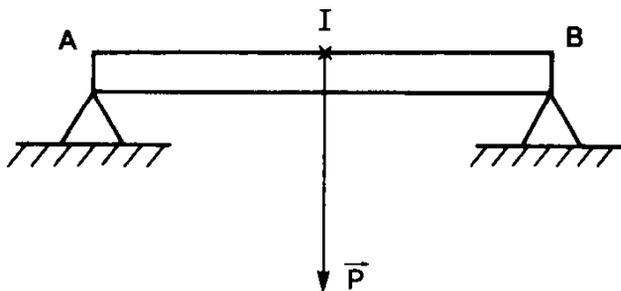


1. Exprimer \vec{R}_A et \vec{R}_B en fonction de \vec{P} .
2. Étudier l'équilibre du nœud B et déterminer les forces $\vec{6/B}$ et $\vec{7/B}$, actions respectives des poutrelles 6 et 7 sur B.
3. Représenter sur un schéma les forces s'exerçant sur les nœuds E et D.
4. Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le nœud C. Que pensez-vous de leurs directions ?

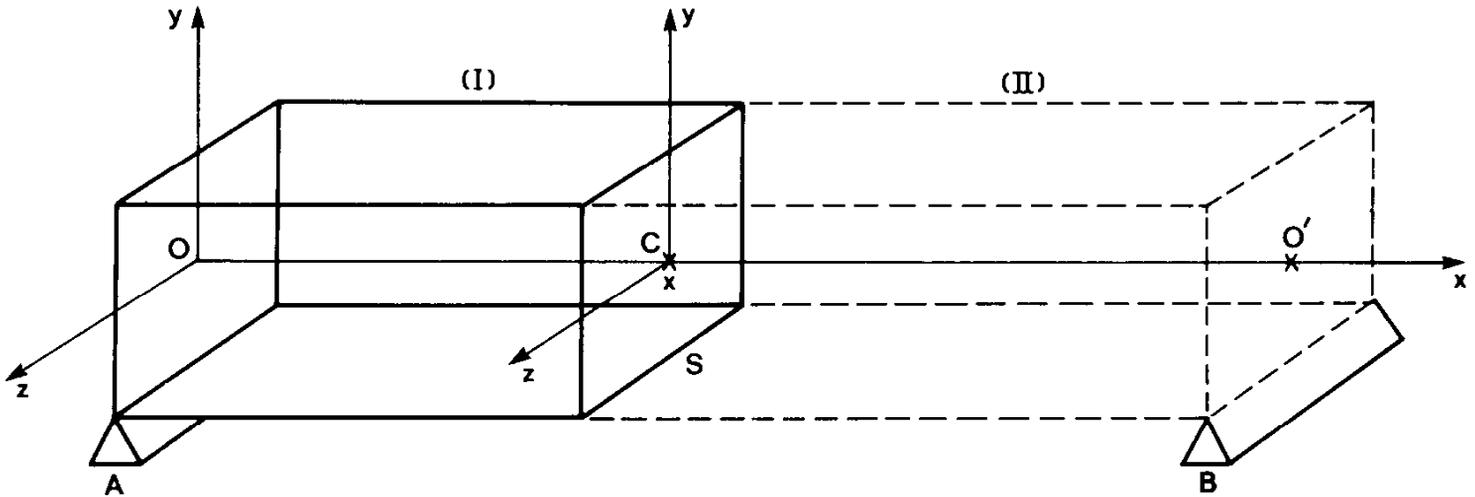
C. Déformation d'une passerelle chargée.

Une passerelle est assimilable à une poutre d'acier de longueur ℓ , de section rectangulaire (côté horizontal a , côté vertical h), de poids négligé et posée sur deux appuis A et B qui exercent des actions équivalentes à deux forces \vec{R}_A et \vec{R}_B verticales, appliquées aux milieux des arêtes de contact.

On suppose qu'une charge ponctuelle de poids \vec{P} est placée en I, milieu de la poutre.

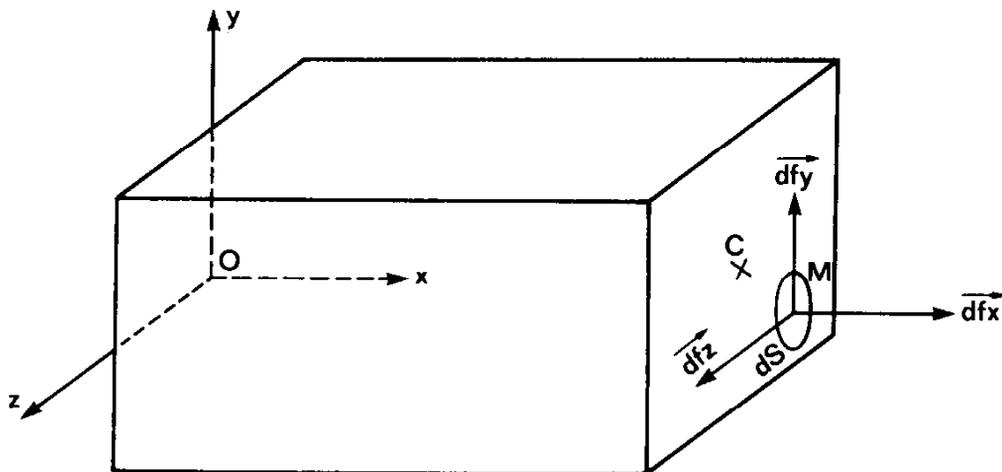


1. Que valent R_A et R_B , intensités des forces \vec{R}_A et \vec{R}_B ?
2. On adopte le système d'axes orthonormé direct $Oxyz$:
 O est le centre de la section A ,
 Ox est confondu avec l'axe de la poutre,
 Oy est vertical et dirigé vers le haut.



On considère l'équilibre de la partie (I) de la poutre à gauche d'une section rectangulaire S d'abscisse x (donc perpendiculaire à l'axe des x).

La partie (II) à droite de S exerce sur la partie (I) un ensemble de forces réparties : à travers la petite surface dS élémentaire est exercée $\vec{df} = \vec{df}_x + \vec{df}_y + \vec{df}_z$



- a. Écrire, en traduisant l'équilibre de la partie (I) de la poutre, une équation intégrale liant df_x à x et P (on distinguera les deux cas $x < \frac{l}{2}$ et $x > \frac{l}{2}$). On aura intérêt à calculer les moments par rapport à des axes passant par C , centre de S .

b. On suppose qu'on est dans le domaine des déformations élastiques du matériau constituant la poutre.

La force de compression par unité de surface $\frac{dfx}{dS}$ est proportionnelle à l'allongement relatif que subit un petit tronçon δx de matériau :

$$\frac{dfx}{dS} = E \cdot \frac{d\delta x}{\delta x} .$$

E constante caractéristique du matériau (module d'Young).

La poutre s'incurve faiblement ; on admettra que, dans ces conditions,

$$\frac{d\delta x}{\delta x} \approx - \frac{y}{R(x)} .$$

$R(x)$ étant le rayon de courbure de la poutre (rayon du cercle auquel l'axe de la poutre est localement assimilable), le même en tout point d'une section S .

En déduire que l'équation des moments par rapport à l'axe Cz donne :

$$\text{pour } \frac{\ell}{2} > x > 0, \quad -P \cdot \frac{x}{2} + \frac{EI}{R(x)} = 0$$

et

$$\text{pour } \ell > x > \frac{\ell}{2}, \quad P \cdot \frac{x - \ell}{2} + \frac{EI}{R(x)} = 0$$

$$\text{où } I = \iint_S y^2 dS = \frac{ah^3}{12} .$$

c. Lorsque la courbure est faible, on peut écrire :

$$\frac{1}{R(x)} \approx y''(x) .$$

$y''(x)$ désignant la dérivée seconde par rapport à la variable x de la fonction $y(x)$.

Trouver l'équation de la courbe dont la forme est celle que prend l'axe de la poutre et déterminer la flèche (déformation maximale en $x = \frac{\ell}{2}$).

Application numérique :

$$P = 10\,000 \text{ N}; \quad \ell = 10 \text{ m}; \quad h = 4 \text{ cm}; \quad a = 2 \text{ cm}; \quad E = 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} .$$

SESSION DE 1992

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés**

section : sciences physiques

option : chimie

épreuve C
composition de chimie (applications)

Durée : 6 heures

MATÉRIELS À PRÉVOIR :

– *Calculatrice de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

– *L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

Les candidats composeront sur du papier de composition quadrillé 5 × 5

L'épreuve comporte deux parties indépendantes, abordant toutes les deux la synthèse de phéromones.

Les informations et les questions de nature expérimentale sont indiquées avec un trait dans la marge, dans un souci de clarté.

Spectres de RMN : Les déplacements chimiques δ sont exprimés en ppm par rapport au tétraméthylsilane. Entre parenthèses sont indiquées successivement : les intégrations relatives ; la multiplicité (s : singulet, d : doublet, t : triplet, q : quadruplet, m : multiplet) et les constantes de couplage J en Hz.

On appelle phéromone toute substance participant à la communication au sein d'une même espèce ; les phéromones sexuelles ont été particulièrement étudiées chez les insectes, pour la lutte biologique contre les espèces nuisibles qui ravagent les cultures, en permettant des traitements insecticides plus spécifiques et moins gênants pour l'environnement.

PREMIERE PARTIE

SYNTHESE STEREOSELECTIVE D'UNE FORME OPTIQUEMENT ACTIVE DE PHEROMONE SEXUELLE D'INSECTE : LA δ -MULTISTRIATINE.

Dans cette première partie on étudie la synthèse, proposée par K. MORI et coll. en 1980, de la δ -multistriatine, phéromone sexuelle d'attraction de petits coléoptères vivant dans l'écorce des ormes des pays européens.

I - L'acide tartrique, ou acide (2S, 3S)-2,3-dihydroxybutane-1,4-dioïque est transformé, en présence d'éthanol et d'une quantité catalytique d'acide sulfurique, en (2S, 3S)-2,3-dihydroxybutane-1,4-dioate de diéthyle **A**.

I.1 - Représenter l'acide tartrique et **A** en projection de FISCHER.

I.2 - Préciser le mécanisme réactionnel de cette transformation.

II - Le composé **A** est traité à froid par une solution aqueuse d'acide bromhydrique à 30 %, dans l'acide acétique. Après lavage à l'eau et extraction à l'éther éthylique, on isole le (2R, 3R)-2-acétoxy-3-bromo-butane-1,4-dioate d'éthyle **B**, de formule $C_{10}H_{15}BrO_6$. Le spectre de RMN du proton de ce composé montre les signaux suivants : $\delta = 1,20$ ppm (6H, t, $J = 7$ Hz), 2,10 (3H, s), 4,20 (4H, q, $J = 7$ Hz), 4,57 (1H, d, $J = 6$ Hz), 5,33 (1H, d, $J = 6$ Hz).

II.1 - Interpréter le spectre de RMN de **B**.

II.2 - Représenter **B** en projection de FISCHER.

II.3 - Indiquer le mécanisme réactionnel correspondant à cette transformation.

III - Le composé **B** est chauffé en présence d'éthanol contenant une petite quantité de HBr, ce qui conduit à **C** : $C_8H_{13}BrO_5$, dont le spectre d'absorption infra-rouge montre principalement une bande large d'intensité moyenne vers 1750 cm^{-1} et une bande large autour de 3300 cm^{-1} .

III.1 - Donner la formule développée de **C** et sa représentation en projection de FISCHER.

III.2 - Montrer que les données du spectre infra-rouge confirment la structure proposée.

III.3 - Indiquer le mécanisme réactionnel, puis expliquer le rôle de HBr en le comparant à celui joué en II.

IV - Le composé **C** est traité par de l'éthanolate de sodium, dans l'éthanol, ce qui conduit après neutralisation par un acide à **D** : $C_8H_{12}O_5$. L'analyse du spectre de RMN 1H fournit les renseignements suivants : $\delta = 1,3$ ppm (6H, t, $J = 6$ Hz), 3,47 (2H, singulet élargi), 4,13 (4H, q, $J = 6$ Hz). Les configurations absolues des atomes de carbone sont 2S, 3S.

IV.1 - Donner la formule développée dans l'espace de **D**.

IV.2 - Interpréter les données du spectre de RMN 1H .

IV.3 - Donner le mécanisme réactionnel de la transformation **C** \rightarrow **D**.

V - À 5,07 g de lithium en copeaux, recouverts de 10 mL d'éther éthylique anhydre, sont ajoutés 41,1 g de bromure de méthyle dissous dans 300 mL d'éther également anhydre, en une heure à température ambiante et sous atmosphère d'argon. La solution obtenue est ajoutée, en 20 min, à une suspension de 5,71 g d'iodure de cuivre (I) dans 30 mL d'éther à -20°C , toujours sous atmosphère d'argon. On ajoute alors 2,35 g du composé **D** dissous dans 20 mL d'éther anhydre et le mélange réactionnel est agité à -50°C pendant 4 heures. L'ensemble est ensuite

versé dans une solution aqueuse glacée de chlorure d'ammonium.

La phase étherée est séparée de la phase aqueuse (bleue) par décantation et cette dernière est extraite à l'éther. L'ensemble des phases étherées est lavé avec une solution aqueuse saturée de chlorure d'ammonium, puis par une solution aqueuse saturée de chlorure de sodium, et enfin agitée sur sulfate de magnésium anhydre. Après filtration, l'évaporation de la solution sous pression réduite de la trompe à eau laisse un résidu que l'on distille à 96°C sous une pression de 4 mm de Hg. On obtient ainsi 2,00 g d'un produit **E** : C₉H₁₆O₅.

Le spectre d'absorption infra-rouge de **E** montre la présence d'une bande d'intensité moyenne vers 3470 cm⁻¹ et d'une bande intense à 1735 cm⁻¹. Le spectre de RMN ¹H de **E** présente l'aspect suivant : δ = 1,27 ppm (6H, t, J = 6 Hz), 1,23 (3H, d, J = 6 Hz), 2,63 - 3,03 (1H, m), 3,17 (1H, s), 4,10 (4H, q, J = 6 Hz) et vers 4 ppm (1H, pic aplati).

V.1- Ce produit est le 2-hydroxy-3-méthylbutane-1,4-dioate d'éthyle. Vérifier la concordance de la formule avec les données spectrales RMN ¹H et IR.

V.2.a - Justifier les stoechiométries de lithium et de bromure de méthyle utilisées. (On notera que l'un des deux réactifs est en léger excès par rapport à la stoechiométrie théorique)

b - Pourquoi l'éther doit-il être anhydre ?

c - Quel est le rôle de l'atmosphère d'argon ?

V.3 - Qu'obtient-on après la réaction avec l'iodure de cuivre (I) ?

V.4 - Quel est le rôle de la solution de chlorure d'ammonium saturée ?

V.5 - Pourquoi la phase aqueuse apparaît-elle bleue ?

V.6 - Pourquoi a-t-on distillé le produit **E** sous une pression de 4 mm de Hg et non sous celle de la trompe à eau ?

V.7 - Quel est le rendement de la réaction concernant le produit **E** ?

V.8 - Indiquer les configurations absolues des atomes de carbone 2 et 3. Commenter.

V.9 - Préciser le mécanisme réactionnel conduisant à la formation de **E**.

Données : masses molaires relatives

lithium = 6,94 brome = 79,90

cuivre = 63,55 iode = 126,90

VI - Le composé **E** est traité 12 h à température ambiante, en présence d'une petite quantité d'acide paratoluène sulfonique, par un équivalent de dihydropyrane de formule :  (le

radical tetrahydropyranyle saturé correspondant C₅H₉O sera noté THP). Après neutralisation,

on isole un produit **F** qui sera utilisé par la suite sans purification supplémentaire. Sa formule brute est $C_{14}H_{24}O_6$, et son spectre d'absorption infra-rouge ne présente pas de bande à 3470 cm^{-1} . Les configurations absolues sont 2S, 3R.

VI.1.a.- Donner la formule développée de **F**, en projection de FISCHER (en utilisant toujours la notation THP).

b - Y a-t-il d'autres atomes de carbone asymétriques dans la molécule ? Si c'est le cas, les représenter par C^* sur une formule semi-développée plane de **F**.

VI.2 - Indiquer le mécanisme de la formation de **F** en précisant le rôle de l'acide paratoluènesulfonique.

VII - Une solution étherée de **F** est ajoutée à une suspension de $LiAlH_4$ dans l'éther anhydre, à 0°C . Après agitation pendant 12 h et hydrolyse à l'aide d'une solution de soude à 5 %, on isole la phase organique qui est lavée à l'eau, puis après décantation, séchée sur carbonate de potassium anhydre. Après filtration et évaporation on isole un produit **G** qui n'était pas soluble dans l'eau. On indique les configurations absolues 2S, 3S des atomes 2 et 3. Le spectre d'absorption infra-rouge présente, entre autres, une bande large à 3360 cm^{-1} .

VII.1 - Représenter **G** en projection de FISCHER.

VII.2 - Justifier votre réponse compte tenu de l'information fournie par le spectre IR.

VII.3 - Préciser le mécanisme de la transformation $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$.

VII.4 - Justifier l'emploi de l'éther anhydre dans cette transformation.

VII.5 - Pourquoi, à votre avis, le composé **G** n'est-il pas soluble dans l'eau ?

VIII - Le produit **G** est ensuite traité par le méthanol en présence d'une trace d'acide paratoluènesulfonique pendant 12 h. Après neutralisation et filtration, on concentre le filtrat sous vide et on isole un produit **H** : $C_5H_{12}O_3$, présentant lui aussi une bande large à 3320 cm^{-1} dans le spectre IR. Les configurations absolues des atomes 2 et 3 sont 2S, 3S.

VIII.1 - Représenter le composé **H** en projection de FISCHER.

VIII.2 - Donner le mécanisme de la réaction.

VIII.3 - Montrer que **H** ne contient qu'un type de fonction organique et préciser lequel.

VIII.4 - Commenter, du point de vue de la stratégie de synthèse, l'enchaînement réactionnel des paragraphes VI, VII et VIII.

IX - À une solution de **H** dans l'acétone sont ajoutés quelques milligrammes d'acide paratoluènesulfonique. Après 12 h d'agitation à température ambiante, on isole, après évaporation du solvant, un produit **I** : $C_8H_{16}O_3$, qui possède toujours les configurations 2S, 3S. Son spectre de RMN 1H présente l'aspect suivant : $\delta = 0,83$ ppm (3H, d, $J = 6$ Hz), 1,30 (3H, s), 1,35 (3H, s), 1,50 - 2,0 (1H, m), 3,0 (1H, singulet élargi), 3,40 - 4,07 (5H, m).

IX.1 - Donner le mécanisme de cette réaction et montrer qu'elle peut, a priori, conduire à plusieurs hétérocycles oxygénés.

IX.2 - Le produit **I** effectivement obtenu contient un cycle penta-atomique. Représenter **I** en projection de FISCHER.

IX.3 - Montrer que cette formule est en accord avec le spectre de RMN 1H .

IX.4 - Quel est l'intérêt de cette réaction.

X - Le composé **I** est traité par du chlorure de l'acide paratoluènesulfonique dans la pyridine à $0^\circ C$ pendant 12 h. On hydrolyse avec une solution glacée et on extrait à l'éther. La phase organique est lavée avec une solution de sulfate de cuivre (II), séchée sur sulfate de magnésium puis filtrée. Après évaporation on isole un produit **J**, dont les configurations sont 2S, 3S. Son spectre de RMN 1H présente l'aspect suivant : $\delta = 0,90$ ppm (3H, d, $J = 7$ Hz), 1,22 (3H, s), 1,25 (3H, s), 2,43 (3H, s), 3,40 - 4,20 (6H, m), 7,25 (2H, d, $J = 8$ Hz), 7,70 (2H, d, $J = 8$ Hz).

X.1 - Donner la formule de **J** en projection de FISCHER.

X.2 - Quels sont les rôles de la pyridine ?

X.3 - Indiquer le mécanisme de la réaction.

XI - Le composé **J** est traité par une solution d'iodure de sodium dans l'acétone. Lorsque la réaction est terminée, la filtration du mélange permet de récupérer un solide **S**. Après évaporation du solvant, le résidu obtenu est traité par un mélange eau-éther. Après décantation, la phase étherée est lavée avec une solution aqueuse saturée de thiosulfate de sodium, redécantée, séchée, filtrée puis évaporée. On isole alors un produit **K** : $C_8H_{15}IO_2$ dont les configurations sont 2S, 3R. Le spectre de RMN 1H présente l'aspect suivant : $\delta = 0,91$ ppm (3H, d, $J = 6$ Hz), 1,27 (3H, s), 1,30 (3H, s), 1,60 (1H, m), 3,0 - 4,20 (5H, m).

XI.1 - Quelle est la formule de **K** ?

XI.2 - Quelle est la formule du solide **S** ?

XI.3 - Pourquoi lave-t-on la phase étherée au thiosulfate de sodium ?

XI.4 - Quel est le rôle de l'acétone ?

XI.5 - Donner le mécanisme de la réaction.

XI.6 - Discuter la stratégie de synthèse des réactions des paragraphes IX, X et XI.

XI.7 - Les données du spectre de RMN ^1H sont-elles cohérentes avec la formule envisagée pour **K** ?

XII -a) Une solution de butyllithium dans le tétrahydrofurane (THF) est ajoutée à une solution de diisopropylamine également dans le THF anhydre à -60°C .

b) À cette solution est ensuite ajoutée de la diéthylcétone, puis après agitation à -70°C et formation d'un intermédiaire très réactif, une solution du composé **K** dans le THF est ajoutée. Après hydrolyse acide, extraction à l'éther, séchage et filtration de la phase organique, l'évaporation du solvant laisse un produit **L** : $\text{C}_{13}\text{H}_{24}\text{O}_3$, qui est en fait un mélange de deux diastéréoisomères. La configuration absolue des atomes de carbones 2 et 3 est (2S, 3S).

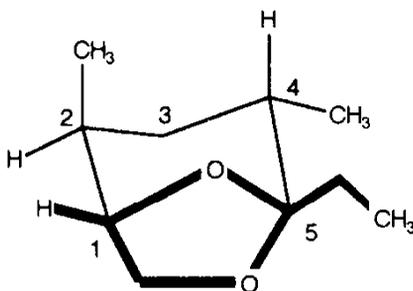
XII.1 - Donner les formules possibles de **L** en représentation de FISCHER, en indiquant par un astérisque les atomes de carbone asymétriques et en précisant leur configuration.

XII.2 - Quel est le but du protocole exposé en a) ?

XII.3 - Donner le mécanisme de la réaction conduisant à **L** en explicitant le rôle de la diéthylcétone.

XIII - Le produit **L** est dissous dans de l'acétonitrile et traité par une solution d'acide chlorhydrique à 10 % pendant 12 heures à température ambiante. La solution est saturée en NaCl puis versée dans une saumure de NaCl. Le mélange est extrait à l'éther et la phase organique est lavée avec une solution saturée de NaHCO_3 , séchée sur MgSO_4 , filtrée et évaporée.

On isole, après purification chromatographique, le produit **M** majoritaire : $\text{C}_{10}\text{H}_{18}\text{O}_2$, qui est la δ -multistriatine cherchée et dont la formule spatiale est :



Son spectre RMN ^1H présente les signaux suivants : $\delta = 0,74$ ppm (3H, d, $J = 6$ Hz) ; 0,86 (3H, t, $J = 7$ Hz) ; 1,10 (3H, d, $J = 7$ Hz) ; 1,2 - 2,0 (6H, m) ; 3,68 (2H, d, $J = 4$ Hz) ; 4,08 (1H, m).

Le spectre d'absorption IR ne présente pas de bande vers 1700 cm^{-1} .

XIII.1.a - Donner les configurations absolues des atomes de carbone 1, 2, 4 et 5 de la multistriatine ci-dessus. (*La numérotation des atomes de carbone de cette formule est indépendante de celle utilisée précédemment*)

b - A quel autre isomère de **M** peut-on s'attendre ?

XIII.2 - Vérifier que la structure est compatible avec les données spectrales.

XIII.3 - Proposer une suite de mécanismes réactionnels pour la transformation **L** \rightarrow **M** en explicitant le rôle de l'acide chlorhydrique.

XIII.4 - À quoi sert de saturer le milieu réactionnel en NaCl, lors du traitement final ?

DEUXIEME PARTIE

UTILISATION DES COMPOSES ORGANOMETALLIQUES
EN SYNTHÈSE DE PHEROMONES.

Cette partie comprend trois paragraphes largement indépendants. L'introduction a pour objet de présenter les différents "outils" qui seront utilisés dans les synthèses suivantes.

I - Introduction

I.1. Proposer un protocole opératoire pour préparer 250 ml d'une solution à une mole par litre de bromure d'éthylmagnésium dans le tétrahydrofurane (THF).

Masses atomiques relatives, Mg : 24,3 ; Br : 79,9.

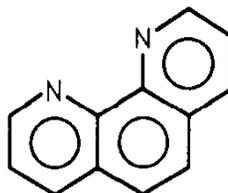
Compléter la réponse par un schéma annoté et un exposé succinct sur les précautions opératoires (20 lignes maximum).

I.2. Indiquer une synthèse du n-butyllithium à partir de lithium métal.

I.3. Dosage d'une solution commerciale de n-butyllithium dans l'hexane. Protocole opératoire :

Un erlenmeyer, maintenu sous courant d'azote, est surmonté d'une burette graduée contenant une solution à une mole par litre d'alcool benzylique dans le toluène.

- Introduire dans l'erlenmeyer 10 ml de benzène puis 5 mg d'orthophénantroline.



- À l'aide d'une pipette Pasteur, ajouter quelques gouttes de la solution de n-butyllithium jusqu'à coloration rouge persistante.

- Additionner, goutte à goutte, la solution d'alcool benzylique jusqu'à décoloration. Soit V_0 le volume ajouté.
- Introduire avec une pipette 5 ml de la solution de n-butyllithium. Le milieu vire immédiatement au rouge et l'on poursuit l'addition d'alcool benzylique jusqu'à nouvelle décoloration. Soit V_1 le nouveau volume.

- I.3.1. Proposer un schéma réactionnel pour interpréter ce dosage.
- I.3.2. Calculer la molarité de l'organolithien ($V_0 = 0,2$ ml; $V_1 = 8$ ml).
- I.3.3. Justifier l'intérêt de la première détermination volumétrique, V_0 .

I.4.- Influence du solvant sur la réactivité des organométalliques.

Expliquer les observations expérimentales suivantes:

- I.4.1. Une solution incolore de chlorure de benzylmagnésium dans l'éther, vire au rouge foncé par addition d'hexaméthylphosphoramide $(\text{Me}_2\text{N})_3\text{P}=\text{O}$.
- I.4.2. L'addition du bromure de n-propylmagnésium à la di-isopropylcétone conduit à 73 % du produit d'addition-1,2 si la réaction est effectuée dans l'éther éthylique. Lorsque la même réaction est effectuée dans l'hexaméthylphosphoramide on isole, après hydrolyse, 100 % de la cétone de départ.

I.5 - Les réactions de transmétallation et applications.

- I.5.1. L'addition d'une quantité stoechiométrique de méthyllithium à une suspension de CuI dans l'éther à -15°C conduit à un précipité jaune d'organocuireux **A**. L'addition d'un nouvel équivalent de méthyllithium conduit à une solution vert d'eau d'un homocuprate **B**.

Ecrire les équations correspondantes.

- I.5.2. Les cuprates, nettement plus réactifs que les organocuireux, sont en général préférés mais ils présentent l'inconvénient, lors de leurs réactions, de ne donner lieu qu'au transfert d'un seul groupe organique. Pour les synthèses utilisant des organométalliques complexes, il est préférable d'utiliser des cuprates mixtes. Un exemple de protocole expérimental est indiqué ci-dessous:

à une suspension de CuI dans l'éther sont ajoutés successivement un équivalent de méthyllithium puis un équivalent d'un alcynure de lithium comme le 1-lithiopent-1-yne. On obtient un produit **C**.

Ecrire les réactions correspondantes.

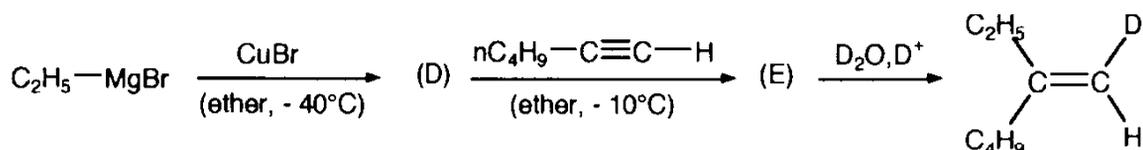
1.5.3. Le méthyllithium et les cuprates précédents **B** et **C** réagissent sur la cyclohex-2-énone. Après hydrolyse, on constate que le méthyllithium conduit au 1-méthylcyclohex-2-én-1-ol tandis que **B** et **C** conduisent à un même produit mais isomère du précédent.

1.5.3.a Donner la formule du produit d'addition issu de **B** et **C**.

1.5.3.b Commenter ces résultats à l'aide de schémas réactionnels.

1.5.4. Les organomagnésiens conduisent de façon similaire aux hétérocuprates [RCu, MgX₂] ou [R₂Cu, MgX] selon les stoechiométries utilisées. Une application majeure de ces dérivés est la carbocupration stéréospécifique des alcynes terminaux. Un exemple est indiqué ci-dessous.

La synthèse s'effectue en une seule opération sans isoler les intermédiaires **D** et **E**.



Remarque : le bromure cuivreux est fréquemment remplacé par le complexe [CuBr, Me₂S], beaucoup plus facile à purifier.

1.5.4.a Quelle est la formule semi-développée des intermédiaires **D** et **E** ?

1.5.4.b Commenter le résultat stéréochimique.

1.5.4.c Pourquoi une telle synthèse n'est-elle pas directement réalisable avec l'organomagnésien, sans ajout de sel cuivreux ?

1.5.4.d Qu'aurait-on obtenu si à la place de l'hexyne on avait ajouté du 1-lithiohex-1-yne à l'intermédiaire **D** ?

I.6.- Utilisations des organométalliques en stratégie de synthèse.

Le langage utilisé dans cette approche analytique de la synthèse organique est résumé, ci-dessous, de façon schématique.

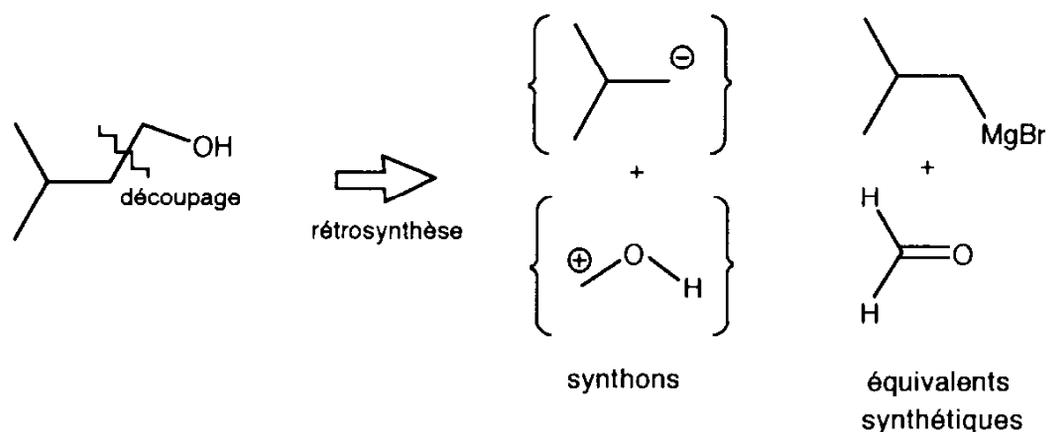
a) Rétrosynthèse. La molécule à synthétiser ou molécule cible est successivement découpée en fragments plus simples, les synthons, dont l'assemblage doit permettre de reconstruire la

molécule cible. Les synthons, dont on précise les charges \oplus ou \ominus dans le cas des réactions hétérolytiques, sont en général des entités hypothétiques et tout "l'art du chimiste" consiste à trouver des réactifs ou équivalents synthétiques correspondants.

Une séquence peut ne faire intervenir qu'une interconversion de groupe fonctionnel.

b) Synthèse. Cette analyse conduit en général à des possibilités multiples et il convient de définir la meilleure synthèse avec un choix approprié des réactifs (au moindre coût) et des conditions opératoires.

Exemple : Le 3-méthylbutan-1-ol.



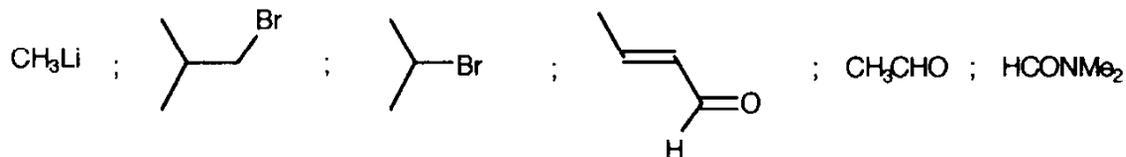
I.6.- Analyse rétrosynthétique du 3-méthylbutanal.

L'analyse rétrosynthétique du 3-méthylbutanal peut être envisagée selon les découpages suivants :

Molécule cible			
Rétrosynthèse	$\Downarrow \textcircled{1}$	$\Downarrow \textcircled{2}$	$\Downarrow \textcircled{3}$
Synthons	$\text{C}^{\ominus} + \dots$	$\text{C}^{\oplus} + \dots$	$\text{C}^{\ominus} + \dots$
Equivalents synthétiques
Conditions opératoires

1.6.1. Reproduire, en le complétant, le tableau précédent où l'on a indiqué la charge de l'un des synthons.

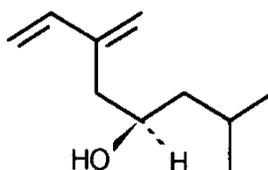
Les synthèses font intervenir les produits organiques suivants :



1.6.2. Discuter l'efficacité de ces différentes synthèses ; laquelle préféreriez vous ?

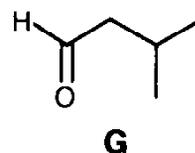
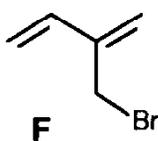
II - Synthèse d'une phéromone sexuelle d'un scolyte du pin (*Ips Confusus*)

Les scolytes sont des ravageurs des forêts de conifères, ce qui justifie tout l'intérêt d'une synthèse efficace de la phéromone sexuelle de cette espèce. La configuration absolue du produit naturel est indiquée ci-dessous :



L'auteur de ce travail a envisagé successivement deux méthodes de synthèse.

II.1 1ère méthode : Addition du magnésien (ou du lithien) dérivé du 2-(bromométhyl)butadiène **F** au 3-méthylbutanal **G**.



Cette approche a été abandonnée devant l'échec de préparer les organométalliques correspondants.

- Proposer une explication.

II.2 2ème méthode : La seconde approche, inspirée des travaux de Seebach et Corey sur les 1,3-dithianes, fait intervenir cinq étapes :

- a) Condensation du propane-1,3-dithiol sur l'acétal méthylique du méthanal, en présence d'éthérate de trifluorure de bore. Un produit **H** ($C_4H_8S_2$) est isolé.
- b) **H**, en solution dans le THF, est traité à basse température par un équivalent molaire de n-butyllithium avant addition de 1-bromo-2-méthylpropane. On isole un produit **I** ($C_8H_{16}S_2$).
- c) **I** est traité dans les mêmes conditions par le n-butyllithium puis le 2-(bromométhyl)butadiène **F**. On isole **J** ($C_{13}H_{22}S_2$).
- d) **J**, soumis à l'action d'une solution aqueuse de chlorure mercurique en présence de carbonate de calcium conduit à **K** ($C_{10}H_{16}O$).
- e) La phéromone recherchée est obtenue par action du borohydrure de sodium sur **K**, en solution dans l'éthanol.

II.2.1.a Quelle est la réaction mise en jeu dans la première étape ?

II.2.1.b Justifier le rôle du catalyseur.

II.2.2.a Dans l'échelle des pKa, le butane se situe à pKa = 42 et le composé **H** à pKa = 31. Justifier cette différence.

II.2.2.b Quelle est la réaction prévisible en présence de n-butyllithium ?

II.2.2.c Indiquer la formule de **I**.

II.2.3. Quelle est la formule de **J** ?

II.2.4. Donner la formule de **K**.

II.2.5. Quel est le mécanisme de la réaction mise en jeu lors de la réduction de **K**?

II.2.6. Comparer la stéréochimie du produit obtenu avec celle de la phéromone naturelle. Conclusion ?

II.3.- Stratégies de synthèse

II.3.1. Effectuer la rétrosynthèse imaginée par l'auteur pour la première méthode.

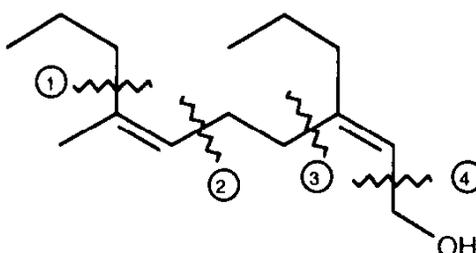
II.3.2. Même question concernant la seconde méthode.

II.3.3. Les lithiens préparés en II.2.b et II.2.c peuvent être considérés comme des équivalents synthétiques d'anions acyles. Justifier cette expression.

II.3.4. Quel est l'intérêt de la démarche précédente dans une stratégie de synthèse ?

III - Synthèse d'une phéromone de phalène

La formule de la molécule et les découpages successivement envisagés sont indiqués ci-dessous :



La synthèse est effectuée en quatre opérations successives conduisant à la phéromone recherchée avec une stéréosélectivité supérieure à 95 %. Elle fait essentiellement appel aux dérivés organométalliques du cuivre décrits en section I.5.

III.1.- Donner le nom de cette phéromone en nomenclature systématique. Quelle est sa stéréochimie ?

III.2.- La première opération est effectuée par addition successive des réactifs suivants à une solution de bromure de n-propylmagnésium dans l'éther :

a) $\text{CuBr, Me}_2\text{S}$.

b) $\text{CH}_3\text{-C}\equiv\text{C-H}$

c) $\text{n-C}_3\text{H}_7\text{-C}\equiv\text{C-Li}$

d) 

Après traitement par une solution aqueuse de chlorure d'ammonium, un produit **L** est isolé avec un rendement de 89 % ($\text{C}_8\text{H}_{16}\text{O}$).

III.2.1. Expliciter les réactions successives précédentes.

III.2.2. Donner la structure de **L**.

III.2.3. Préciser la stéréochimie de **L**.

III.3.- Le produit **L** est transformé en un produit **M** en deux étapes, de rendement global 84 %.

a) Action sur **L** du chlorure de p-toluènesulfonyle en présence de pyridine.

b) L'intermédiaire obtenu est traité sans purification préalable par une solution d'iodure de sodium dans l'acétone, ce qui conduit à **M**.

III.3.1. Quel est l'intermédiaire formé par action du chlorure de p-toluène-sulfonyle ? Justifier le rôle de la pyridine.

III.3.2. Préciser le mécanisme de la réaction mise en jeu lors de l'action de l'iodure de sodium. Justifier le choix du solvant utilisé.

III.3.3. Donner la structure de **M**.

III.4. **M**, en solution dans l'éther, est traité successivement par les réactifs suivants ce qui permet d'obtenir un composé **N** ($C_{14}H_{24}O_2$), après hydrolyse (rendement = 50 %).

a) Mg

b) CuBr, Me₂S

c) $n-C_3H_7-C\equiv C-H$

d) CO₂

III.4.1. Expliciter les réactions mises en jeu en justifiant la stéréochimie.

III.4.2. Donner la formule structurale de **M**.

III.5. **M** conduit à la phéromone cherchée avec un rendement de 98 % après traitement par l'hydrure de lithium et d'aluminium dans l'éther anhydre et hydrolyse du mélange réactionnel.

III.5.1. Quel est le mécanisme de la réaction mise en jeu ?

III.5.2. Justifier les conditions opératoires (choix du réactif et du solvant).

III.6.

III.6.1. Calculer le rendement global de cette synthèse.

III.6.2. Compte tenu des données expérimentales, donner le schéma rétrosynthétique imaginé par l'auteur pour cette phéromone. Préciser la charge des synthons.

SESSION DE 1992

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés**

section : sciences physiques

option : physique appliquée

Épreuve A

composition de physique

Durée : 5 heures

Tout document interdit.

L'usage d'une calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Le sujet de cette composition est extrait du programme défini dans la note parue au Bulletin officiel n° 27 du 11 juillet 1991.

Pour chaque question de cours, on attend du candidat un exposé clair et didactique qui traite complètement le sujet selon le schéma proposé, sans considération de niveau.

Le barème de notation tiendra le plus grand compte des applications numériques.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.

PHÉNOMÈNES PIÉZOÉLECTRIQUES ET APPLICATIONS

PRÉSENTATION DU SUJET

Dans certains cristaux naturels et certaines céramiques synthétiques, un couplage entre propriétés mécaniques et propriétés diélectriques est à l'origine de l'effet piézoélectrique, découvert par Pierre et Jacques Curie en 1880. Les propriétés piézoélectriques se manifestent dans diverses situations physiques dont plusieurs sont étudiées dans les différentes parties de cette épreuve. Ces parties sont indépendantes les unes des autres et le candidat indiquera clairement sur sa copie l'ordre dans lequel il les traite. À l'intérieur de chaque partie certaines questions sont indépendantes entre elles.

On rappelle la valeur de la constante électrique (permittivité du vide) : $\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

Notations et hypothèses.

Une lame homogène taillée dans un matériau piézoélectrique a la forme d'un cylindre d'épaisseur e , limité par deux faces F_1 et F_2 d'aires A chacune, orthogonales à l'axe Ox orienté de F_1 vers F_2 . Les deux faces sont métallisées et peuvent être reliées à un circuit électrique. On désigne par V la différence de potentiel $V(F_2) - V(F_1)$ et par $-\sigma$ et σ les charges surfaciques des armatures respectivement en F_1 et F_2 . Les faces peuvent être soumises à des forces de traction ou de compression parallèles à Ox et de normes F , uniformément distribuées avec une valeur surfacique égale à la contrainte $\Sigma = \pm \frac{F}{A}$, définie positive dans le cas de la traction et négative dans le cas de la compression. L'épaisseur de la lame peut varier ; quand sa valeur est $e+u$, avec $|u| \ll e$, on la caractérise par sa déformation $U = \frac{u}{e}$.

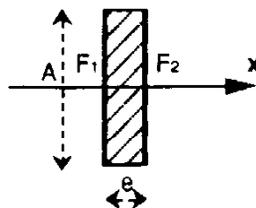


Figure 1

On négligera les effets de bord. La lame a été taillée de sorte que les vecteurs caractéristiques soient parallèles à Ox . Les grandeurs internes sont indépendantes des coordonnées. Les grandeurs volumiques sont définies par rapport au volume de la lame non déformée.

Pour les applications numériques sans donnée particulière, on considérera une lame de quartz d'épaisseur $e=1 \text{ mm}$, de masse volumique $\mu=2,65 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$, et une portion de sa surface d'aire $A=1 \text{ cm}^2$. Quand ses armatures ne sont pas connectées à un circuit, le rapport de la contrainte à la déformation est une constante $Y'=0,87 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. Quand la lame n'est pas déformée, sa permittivité relative est $\epsilon_r=4,5$; on utilisera la notation $\epsilon=\epsilon_0 \cdot \epsilon_r$. Le coefficient piézoélectrique à champ électrique

nul de la lame est $\gamma=0,171 \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$. On pourra utiliser le coefficient $\delta = \frac{\gamma}{e} = 4,3 \cdot 10^9 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

PARTIE I

PHÉNOMÈNES STATIQUES

A. ÉTUDE MÉCANIQUE

I.1 DÉFORMATION ÉLASTIQUE D'UN RESSORT.

Un ressort hélicoïdal de longueur à vide l_1 , prend une longueur $l_1' > l_1$ quand il est soumis à des forces de traction longitudinales de norme F . Tant que F ne dépasse pas une certaine valeur (ce que l'on supposera), le rapport $\frac{F}{l_1' - l_1}$ est une constante K_1 : la raideur du ressort.

- I.1.a. Déterminer la raideur K_n d'une chaîne de n ressorts identiques fixés successivement les uns aux autres selon le même axe.
- I.1.b. Déterminer la raideur $K(l)$ d'un ressort hélicoïdal réalisé en prenant une longueur l de la chaîne précédente.
- I.1.c. Définir une constante de raideur caractéristique de tout ressort de ce type indépendamment de sa longueur.

I.2. DÉFORMATION ÉLASTIQUE D'UNE LAME.

La définition, à la question I.1, de la raideur K s'applique à la lame décrite dans la présentation, aussi bien en traction qu'en compression. Les armatures de la lame ne sont pas connectées à un circuit.

- I.2.a. Définir simplement une constante de rigidité élastique, proportionnelle à K , qui caractérise l'élasticité de cette lame indépendamment de l'épaisseur e et de la surface A . Montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de Σ et U .
- I.2.b. Calculer l'énergie potentielle élastique par unité de volume dans la lame en fonction de Y' et de la déformation U .
- I.2.c. *Application numérique.*

Calculer la force sur une face et la variation d'épaisseur de la lame de quartz pour qu'elle contienne une énergie élastique de $1 \text{ mJ} \cdot \text{cm}^{-3}$.

B. ÉTUDE ÉLECTRIQUE

I.3. POLARISATION D'UN DIÉLECTRIQUE.

- I.3.a. Rappeler la définition des vecteurs polarisation \vec{P} et excitation électrique \vec{D} dans un diélectrique et le nom de leurs unités SI.

- 1.3.b. Rappeler sans démonstration l'expression des charges équivalentes à la polarisation d'un diélectrique, les équations locales du champ électrostatique \vec{E} et de l'excitation électrique \vec{D} dans le diélectrique, ainsi que les relations de passage (ou de continuité) des champs \vec{E} et \vec{D} de part et d'autre d'une surface chargée en présence de diélectrique.
- 1.3.c. Qu'est-ce qu'un diélectrique linéaire isotrope?
Quelle est alors l'expression de l'excitation électrique en fonction du champ électrique?
- 1.3.d. Une lame non piézoélectrique analogue à celle décrite dans la présentation constitue un condensateur plan rempli d'un diélectrique homogène de permittivité relative $\epsilon_r = 4,5$.
 α) À quelles conditions les effets de bord sont-ils négligeables?
 β) Montrer que dans ce cas les champs sont uniformes dans le diélectrique et établir l'expression de la capacité.
- 1.3.e. Établir l'expression de l'énergie électrostatique volumique emmagasinée dans ce condensateur quand il est chargé jusqu'à une tension V .
- 1.3.f. *Application numérique.*
 Les armatures de cette lame sont reliées à un générateur. Quelles doivent être la tension à ses bornes et la charge surfacique sur les armatures pour que l'énergie électrostatique soit de $1 \text{ mJ} \cdot \text{cm}^{-3}$?

1.4. POLARISATION PAR DÉFORMATION.

Sous l'effet des contraintes la lame piézoélectrique se déforme et les positions relatives des atomes et des centres des charges positives et négatives sont modifiées, entraînant l'apparition d'une polarisation \vec{P}' , parallèle à Ox , fonction de la déformation et se rajoutant à celle due au champ électrique. L'effet étant faible, sa mesure algébrique P' est proportionnelle à U : $P' = \gamma U$, où la constante γ est le coefficient piézoélectrique du matériau selon Ox à champ nul. Le sens de Ox a été choisi pour que γ soit positif.

- 1.4.a. Quels sont les éléments de symétrie (centre, axes ou plans de symétrie dont on précisera les directions) que ce cristal ne peut pas posséder?
- 1.4.b. Exprimer la mesure algébrique D de l'excitation électrique en fonction de la déformation U et de la mesure algébrique du champ électrique E .
- 1.4.c. Exprimer de même la charge surfacique de l'armature F_2 .
- 1.4.d. *Applications numériques.*

Les armatures de la lame de quartz sont connectées à deux fils conducteurs dont les autres extrémités sont placées très près l'une de l'autre sans être en contact. Une étincelle peut éclater entre ces électrodes si la tension entre les armatures atteint 1000 V .

- α) Quelles forces faut-il appliquer aux faces pour que l'étincelle éclate?
- β) Évaluer, en précisant les hypothèses simplificatrices utilisées, la charge qui passe dans cette étincelle et l'énergie dissipée.
 Connaissez-vous une application pratique de ce phénomène ?
- γ) Exprimer puis calculer numériquement le coefficient de couplage effectif piézoélectrique du quartz k^2 , égal au rapport de l'énergie électrique récupérée sur l'énergie mécanique fournie.

C. ÉTUDE THERMODYNAMIQUE

I.5. ÉQUATIONS ET FONCTIONS D'ÉTAT À TEMPÉRATURE CONSTANTE.

On considère la lame piézoélectrique dans des états d'équilibre thermodynamique sous l'action de la contrainte Σ due aux forces appliquées aux faces et du champ électrique E entre les armatures connectées à un générateur électrique. On désigne par T et S respectivement la température thermodynamique et l'entropie volumique de la lame et par \mathfrak{U} l'énergie interne volumique.

À température constante, la charge surfacique σ est fonction linéaire des mesures algébriques du champ électrique E et de la déformation U par la relation $\sigma = \epsilon E - \gamma U$. On désigne par la constante Y la rigidité élastique (rapport de la variation de contrainte à la variation de la déformation) à température et champ électrique constants.

- I.5.a. Donner l'expression générale des travaux par unité de volume, échangés par la lame au cours d'une transformation élémentaire entre deux états d'équilibre, en fonction de E , σ , Σ et U .
- I.5.b. Montrer qu'à température constante ces travaux sont égaux à la variation d'une fonction d'état que l'on précisera. Donner l'expression de cette fonction pour la lame.
- I.5.c. Indiquer dans un tableau les couples de paramètres conjugués nécessaires à l'étude thermodynamique de la lame, en précisant la nature intensive ou extensive de ces paramètres.
- I.5.d. On choisit comme variables la déformation U , le champ électrique E et la température T . Montrer que la fonction d'état $\Phi = \mathfrak{U} + E\sigma - TS$ est appropriée à l'utilisation de ces variables.
- I.5.e. Montrer que la contrainte dépend du champ électrique et établir son expression en fonction des variables U et E , à température constante.
- I.5.f. *Applications numériques.*
- α) Pour la lame de quartz on connaît $Y = 0,867 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. En déduire Y' .
- β) Quelle est l'écart relatif entre la permittivité relative à déformation constante ϵ_r et à contrainte constante ϵ_r' ?
- γ) Peut-on calculer une valeur plus précise de la charge évaluée à la question I.4.e. quand on maintient constantes les forces appliquées à la lame ?
- δ) On soumet la lame de quartz à une tension de 1000 V en ne lui appliquant aucune force. Calculer sa variation d'épaisseur (effet piézoélectrique inverse). Connaissez-vous une application pratique de cet effet ?

I.6. EFFETS THERMIQUES.

- I.6.a. Selon l'axe Ox la lame possède un coefficient de dilatation $\lambda = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{\Sigma, \sigma} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Montrer que l'application d'une contrainte Σ , à température constante, à la lame non connectée, entraîne l'échange d'une quantité de chaleur que l'on calculera à 300K pour une contrainte de $3 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Quel est le sens de cet échange ?

- 1.6.b. On considère une lame dont la permittivité est fonction de la température.
- α) Pourquoi la température peut-elle agir sur la permittivité ? Dans quel sens ?
 - β) Montrer que l'application d'une tension V , à température constante, à la lame soumise à des forces constantes, entraîne l'échange d'une quantité de chaleur que l'on exprimera par unité de volume (effet électrocalorifique).
 - γ) Les armatures de la lame étant maintenues à tension constante et non soumises à des forces, on fait varier la température.
Montrer qu'une charge électrique traverse le circuit et établir son expression.

D. APPLICATIONS

1.7. CAPTEUR D'ACCÉLÉRATION.

L'armature F_1 de la lame est collée sur le support dont on veut mesurer l'accélération a selon l'axe Ox . Sur l'autre armature F_2 est collé un solide de masse $M=100g$ très supérieure à celle de la lame.

- 1.7.a. Quelle est la relation entre la tension V entre les armatures, la charge Q de l'armature F_2 et l'accélération a ?

Calculer la sensibilité $s = \frac{dV}{da}$ du capteur non connecté.

- 1.7.b. *Applications numériques.*

α) Calculer s pour la lame de quartz.

β) Quelle doit-être la résistance d'entrée R du montage de mesure de V si le temps de mesure de l'accélération est de $100\mu s$?

1.8. PRÉVISION DES SÉISMES.

On a constaté depuis longtemps que des courants telluriques circulent en permanence dans l'écorce terrestre. On les connaît en mesurant la différence de potentiel entre des électrodes implantées dans le sol. Les études ont mis également en évidence des accroissements temporaires de ces tensions de l'ordre de quelques millivolts par kilomètre, pendant quelques dizaines de minutes, dans les jours précédant un séisme moyen ou fort, dans la région de l'épicentre. Pour expliquer ces courants transitoires liés à la sismicité, une hypothèse considère les contraintes imposées par la collision des plaques tectoniques aux roches contenant des cristaux de quartz piézoélectrique.

- 1.8.a. Quelles peuvent être les origines, tant naturelles qu'humaines, des courants telluriques permanents ?

- 1.8.b. On considère des lames de quartz identiques à celle étudiée précédemment, placées à la suite les unes des autres sur une longueur L de l'axe Ox et séparées par des diélectriques non piézoélectriques de même épaisseur et de permittivité ϵ_r .
Donner les expressions de l'excitation électrique D' dans le quartz et D'' dans l'autre matériau.

- 1.8.c. En déduire la relation liant la tension entre les extrémités de cette ensemble à la contrainte appliquée, en l'absence de courant.

Application numérique : Quelle est la valeur de la contrainte correspondant à une tension de $1 \text{ mV} \cdot \text{km}^{-1}$? Vous paraît-elle réaliste ?

- 1.8.d. Dans quelles directions proposeriez-vous d'améliorer ce modèle simpliste ?

PARTIE II

APPLICATIONS QUASISTATIQUES

Données complémentaires.

À la contrainte $Y'U$ due à la déformation dans la lame non connectée, se rajoute le terme $\delta \cdot \sigma$ dû aux charges des armatures. À la charge surfacique $-\epsilon E$ de l'armature F_2 , liée au champ E comme pour un diélectrique non piézoélectrique, se rajoute une charge $-\gamma U$ due à la déformation. Toutes les grandeurs sont fonction du temps. On négligera les frottements. Les armatures sont connectées à un circuit de mesure de la tension de très grande impédance d'entrée.

II.1. CAPTEUR DE PRESSION.

L'armature F_1 est soumise à une pression $p_0 + p(t)$, avec $|p| < p_0$, alors que l'armature F_2 est fixe. L'axe Ox est horizontal.

II.1.a. À quelle condition (quantitative) peut-on appliquer à la lame en régime variable les lois de la statique?

II.1.b. Exprimer les énergies élastique et cinétique par unité d'aire de la lame en fonction de la déformation $U(t)$.

II.1.c. Établir l'équation liant la pression et la déformation.

Dans la suite de cette partie II.1., la pression $p(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω .

II.1.d. Déterminer la transmittance complexe T de ce transducteur transformant le signal en pression en signal en tension.

II.1.e. Donner l'allure de la courbe $T(\omega)$ en fonction de ω .
Pour quelles valeurs de la fréquence ce capteur est-il utilisable ?

II.1.f. Pourrait-on augmenter l'intervalle de fréquences utilisable ?

II.1.g. Établir un schéma électrique équivalent du capteur en précisant les expressions de ses composants en fonction des caractéristiques de la lame.

II.1.h. Quelle application pratique (en dehors de la métrologie) utilisant le principe de ce dispositif pourrait-on envisager ?

II.2. LECTURE MÉCANIQUE D'UN DISQUE.

Sur un disque à lecture mécanique, le signal analogique est enregistré sous forme de profil gravé dans un sillon. Une pointe de lecture suit ce profil et son mouvement agit sur une face d'un cristal piézoélectrique fixé dans le bras du lecteur.

Nous considérons un modèle simplifié de cette tête de lecture dans lequel une lame piézoélectrique est en position horizontale, l'axe Ox étant vertical vers le haut, et est reliée par un dispositif élastique de raideur $K = 0,5 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-1}$ à la pointe dont le mouvement vertical $x(t)$ est imposé. Sur la face F_2 est fixée une masse M bien supérieure à celle du cristal.

II.2.a. Établir l'équation liant la contrainte Σ et la déformation U au déplacement $x(t)$.

- II.2.b. Établir la relation entre $x(t)$, la tension $V(t)$ aux bornes de la lame et la charge surfacique $\sigma(t)$.
- II.2.c. Simplifier cette relation en tenant compte des valeurs numériques, l'aire de la lame étant $A = 3 \text{ mm}^2$ et son épaisseur $e = 1 \text{ cm}$.

On se place pour la fin de cette partie II.2. en régime permanent sinusoïdal de pulsation ω .

- II.2.d. Définir et étudier sommairement la transmittance complexe de ce transducteur.
- II.2.e. Quelle valeur de la masse M faut-il choisir pour que cette tête reproduise fidèlement les audiofréquences (20 à 20000Hz)?
- II.2.f. Sachant que l'amplitude de variation de x est de $10 \mu\text{m}$, quelle est l'amplitude de V ?
- II.2.g. Donner le schéma électrique équivalent de la tête de lecture piézoélectrique en audiofréquences (en précisant les expressions de ses composants en fonction des caractéristiques de la lame).

PARTIE III

OSCILLATIONS À HAUTE FRÉQUENCE

On considère dans cette partie la lame de la figure 1, avec les mêmes notations, mais les champs ne sont plus uniformes dans la lame et sont maintenant fonction de l'abscisse et du temps. Un plan de la lame occupant la position x au repos, se trouve à l'instant t à l'abscisse $x + u(x,t)$, le déplacement u étant faible. La déformation en ce plan est $U(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}$. La partie située vers les x positifs au-delà de ce plan applique à la partie située vers les x négatifs des forces parallèles à Ox , dont la contrainte a pour mesure algébrique $\Sigma(x,t)$. En tout point de ce plan la mesure algébrique du champ électrique est $E(x,t)$, celle de l'excitation électrique est $D(x,t)$ et le potentiel électrique est $V(x,t)$.

Les relations entre ces grandeurs s'écrivent : $\Sigma = Y'U - \delta D$ et $D = \gamma U + \epsilon E$. Bien que les transformations soient isentropiques, on peut utiliser les valeurs des coefficients données précédemment.

Les armatures métalliques ont une masse négligeable. La pesanteur n'intervient pas.

On prendra l'origine des abscisses au milieu de la lame, supposé fixe.

III.1. VIBRATIONS PROPRES D'UNE LAME.

Aucune force extérieure n'est appliquée aux armatures qui ne sont pas connectées.

III.1.a. Établir l'équation de propagation des ondes de compression longitudinale :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

III.1.b. *Applications numériques :*

α) Calculer la vitesse de phase dans la lame de quartz.

β) Pour quelles fréquences doit-on prendre en compte la propagation ?

III.1.c. α) Déterminer la forme des solutions $u(x,t)$ de l'équation dans le cas d'une onde stationnaire sinusoïdale. On utilisera la notation $k = \frac{\omega}{c}$.

β) Quelles sont les conditions aux limites?

γ) Quelles sont les conditions aux limites?

γ) En déduire le spectre des fréquences de vibrations propres de la lame.

- III.1.d. α) Quelle devrait être l'épaisseur de la lame pour que la fréquence fondamentale soit de 2^{22}Hz ? Pourquoi utiliser des valeurs de fréquences en puissance de 2?
 β) Calculer la constante électromagnétique Λ de ce quartz, égale au rapport de la longueur d'onde électromagnétique pour la fréquence de vibration fondamentale de la lame sur son épaisseur e .
- III.1.e. Déterminer, pour les vibrations propres, la variation d'épaisseur de la lame Δe ainsi que la tension $V(t)$ entre les armatures.

Application numérique : Pour quelle tension l'épaisseur de la lame varie-t-elle de 10\AA ?

III.2. LE COMPOSANT ÉLECTRONIQUE "QUARTZ".

La lame piézoélectrique est soumise à une tension sinusoïdale V de pulsation ω . Aucune force extérieure n'est appliquée aux armatures. Pour les grandeurs fonctions sinusoïdales du temps de pulsation ω , leurs symboles soulignés représentent leurs amplitudes complexes.

- III.2.a. Quelles sont les relations des champs $D(x)$ et $E(x)$ avec les charges et les potentiels et en particulier avec σ et V ?
- III.2.b. Établir l'équation de la fonction $u(x)$.
 En déduire $\underline{u}(x)$ et $\underline{U}(x)$. On utilisera l'amplitude U_0 de $\underline{U}(0)$.
- III.2.c. Déterminer les amplitudes complexes $\underline{\sigma}$ et \underline{V} .
- III.2.d. Établir l'expression de l'impédance complexe Z du composant.
- III.2.e. Préciser les spectres des fréquences ν' et ν'' pour lesquelles l'impédance est respectivement nulle et infinie.
 Peut-on les comparer aux fréquences de vibrations propres (question III.1.d.)?

Application numérique : Calculer les valeurs non nulles les plus basses ν_1' et ν_1'' de chacune de ces fréquences.

- III.2.f. Tracer l'allure de la courbe de la réactance du composant en fonction de la fréquence, en se limitant aux premières valeurs des spectres précédents.
- III.2.g. Quel est le schéma électrique équivalent du "quartz" (en précisant les valeurs de ses composants) pour les fréquences voisines de ν_1' et ν_1'' ?
- III.2.h. L'expérience vérifie-t-elle le schéma précédent?
 Si non, expliquez l'origine des différences.

III.3. ONDES ULTRASONORES.

Quand la lame piézoélectrique est excitée électriquement, les vibrations de ses faces créent dans l'air des ondes ultrasonores.

L'air est un gaz parfait diatomique de masse volumique $\mu' = 1,2\text{g}\cdot\text{dm}^{-3}$. Il se trouve à la température de 21°C sous la pression de 1 bar. Le rapport des chaleurs massiques est $\gamma = 1,4$.

- III.3.a. Déterminer la compressibilité isentropique de l'air $\chi_s = \frac{1}{\mu'} \left(\frac{\partial \mu'}{\partial P} \right)_s$.

- III.3.b. Établir les relations entre pression et vitesse de l'air et en déduire l'équation de propagation des ondes sonores dans l'air. On pourra ne considérer que les ondes planes.

- III.3.c. *Application numérique* : Calculer la valeur de la vitesse de phase de ces ondes
 α) dans l'air pris dans les conditions indiquées ci-dessus;
 β) dans l'eau de coefficient de compressibilité $5 \cdot 10^{-10} \text{Pa}^{-1}$.

On considérera dans la suite de cette question des ondes sinusoïdales de pulsation ω .

- III.3.d. On appelle impédance du milieu le rapport des amplitudes complexes de la pression sur la vitesse dans le cas d'une onde progressive.
 Exprimer cette impédance en fonction des caractéristiques du milieu.
 Dépend-elle du sens de propagation?

Application numérique : Calculer ses valeurs pour l'air, l'eau et le quartz.

- III.3.e. Établir l'expression de la puissance moyenne transportée par une onde sonore plane par unité de section droite du faisceau.

- III.3.f. On considère un dioptré acoustique plan séparant deux milieux d'impédances respectives Z_1 et Z_2 et recevant une onde plane sous incidence normale.
 Quelles sont les conditions aux limites que doivent vérifier les ondes?
 En déduire les rapports des pressions et vitesses dans les ondes réfléchies et transmises sur les mêmes grandeurs de l'onde incidente, que l'on nommera r_p , r_v , t_p , t_v .

- III.3.g. Déterminer les fractions de puissance R et T respectivement réfléchi et transmise par ce dioptré.

Application numérique : Calculer T pour les dioptrés quartz-air et air-eau.

- III.3.h. En échographie médicale les ondes ultrasonores produites par le cristal piézoélectrique doivent pénétrer dans les tissus organiques dont on considérera l'impédance acoustique voisine de celle de l'eau.

α) Calculer la fraction de puissance T_0 transmise du cristal piézoélectrique aux tissus par l'intermédiaire de l'air.

β) Pour améliorer ce facteur on interpose entre le générateur ultrasonore et la peau un milieu d'impédance Z' . En négligeant l'effet des réflexions parasites, calculer la valeur de Z' qui rend maximale la puissance transmise et calculer le facteur T' correspondant.

PARTIE IV

SONS ET LUMIÈRES

IV.1. DIFFRACTION DES ONDES LUMINEUSES.

IV.1.a. Énoncer le principe de Huygens-Fresnel.

IV.1.b. Établir l'expression de l'intensité lumineuse de l'onde diffractée à la distance D par une fente de largeur $a \ll D$ recevant une onde lumineuse plane monochromatique sous incidence normale.

IV.1.c. Dessiner le schéma d'un montage permettant d'observer la diffraction à l'infini.
 Quelle est alors l'expression de l'intensité ?

IV.1.d. Même question pour la diffraction par un réseau de N fentes identiques, très fines, parallèles et coplanaires, se déduisant les unes des autres par translation de longueur d'orthogonale aux fentes, quand il reçoit une onde plane sous l'angle d'incidence θ_0 .

IV.2. ÉMETTEUR-DÉFLECTEUR D'ULTRASONS.

On considère un émetteur ultrasonore réalisé par des cristaux en forme de parallélépipède rectangle, dont les faces vibrantes se trouvent dans le plan Oxy avec chacune une largeur $a = 0,8 \text{ mm}$ parallèlement à Ox et une longueur selon Oy dont on n'étudiera pas l'influence, l'axe Oz étant orthogonal à ces axes et dans le sens d'émission. Ces faces sont placées côte à côte selon Ox avec des espacements de $0,1 \text{ mm}$ entre elles et sont au nombre de 32. Elles émettent des ondes de longueur d'onde dans l'air égale à $0,2 \text{ mm}$. On admet que ces ondes sonores suivent les mêmes lois que les ondes lumineuses précédentes. Quand ces cristaux sont alimentés par la même tension sinusoïdale, ils vibrent en phase et avec la même amplitude.

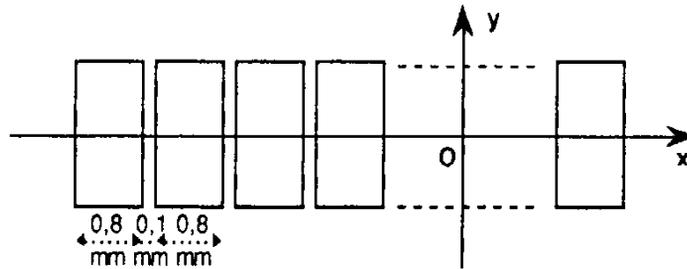


Figure 2

- IV.2.a. Tracer, avec les valeurs numériques données, la courbe représentant l'intensité sonore en fonction du sinus de l'angle de diffraction à l'infini (dans le plan Oxz).
- IV.2.b. Comparer cette courbe à celle que l'on obtiendrait si toute la longueur occupée par l'émetteur sur l'axe Ox (soit $28,7 \text{ mm}$) vibrait de la même façon que les faces.
- IV.2.c. Calculer la largeur angulaire du lobe principal d'émission en prenant ses limites pour un affaiblissement de l'intensité sonore égal à 3 dB par rapport à l'intensité maximale.
- IV.2.d. Les cristaux sont maintenant alimentés par des tensions sinusoïdales de même amplitude mais déphasées de ψ entre deux cristaux successif.
Déterminer l'effet de ce déphasage sur le lobe principal de l'émetteur.

Application numérique : Quelle est la direction du lobe principal pour $\psi = \frac{\pi}{2}$?

IV.3. INTERACTION ACOUSTO-OPTIQUE.

- IV.3.a. Établir simplement la relation entre la permittivité (relative) d'un milieu transparent et son indice de réfraction.
- IV.3.b. Définir le champ local dans un diélectrique et le calculer pour un milieu isotrope.
- IV.3.c. On considère un milieu isotrope contenant ν molécules par unité de volume. Établir la relation de Clausius-Mossoti entre sa permittivité et la polarisabilité des molécules.
- IV.3.d. Montrer que l'indice de réfraction n et la masse volumique ρ sont liés par la relation de Lorentz-Lorenz : $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{\rho} = \text{constante}$.
- IV.3.e. On considère le cas où la variation de masse volumique est suffisamment faible pour que la variation d'indice en soit une fonction linéaire.
Établir la relation entre la variation d'indice et la variation de pression.

Application numérique : Calculer la valeur du coefficient dans le cas de l'eau d'indice $1,33$ et de coefficient de compressibilité $5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$.

IV.4. DIFFRACTION DE LA LUMIÈRE PAR UNE ONDE SONORE.

Une onde lumineuse monochromatique plane de longueur d'onde $\lambda = 500 \text{ nm}$ traverse sous incidence normale une cuve remplie d'eau de faible épaisseur h dans la direction Oz. Selon la direction Ox orthogonale se propage dans la cuve une onde ultrasonore de longueur d'onde $\Lambda = 0,1 \text{ mm}$, dont les surfaces d'ondes sont des plans orthogonaux à Ox. Le faisceau lumineux a une largeur $L = 5 \text{ cm}$ selon Ox. On suppose que les effets des parois sont négligeables.

IV.4.a. On considère l'onde sonore à un instant déterminé, en plaçant l'origine des abscisses en un point de surpression maximale $P_M = 10^3 \text{ Pa}$ par rapport à la pression moyenne de 10^5 Pa .

Donner l'expression de la surpression puis de l'indice en fonction de x .

IV.4.b. Exprimer le facteur de transmission (rapport des amplitudes complexes après et avant la cuve) en fonction de x .

IV.4.c. Sur la base de l'amplitude complexe après la cuve, calculer l'expression de l'intensité lumineuse diffractée à l'infini.

Quelle est l'influence de la propagation de l'onde sonore sur cette figure?

Application numérique : La figure de diffraction est observée dans un plan orthogonal à Oz au moyen d'une lentille de 50 cm de distance focale. Donner l'allure de cette figure en précisant l'échelle.

IV.4.d. On augmente la largeur h de la cuve (diffraction de Raman-Nath).

Les résultats précédents restent-ils valables ? Sinon comment varient-ils ?

En considérant le liquide comme un réseau peut-on préciser davantage la figure de diffraction ?

IV.4.e. Une utilisation de cette interaction est-elle envisageable ?

IV.5. RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE PAR UNE ONDE SONORE.

IV.5.a. Suivant la physique quantique, des photons sont associés à une onde lumineuse de fréquence ν et de longueur d'onde λ . Rappeler les expressions de leur énergie et de la norme de leur quantité de mouvement (relations de Planck-Einstein et de Louis de Broglie).

De même une oscillation à la fréquence N et à la longueur d'onde Λ se propageant dans un solide peut être considérée comme formée de quasi-particules, les phonons, dont l'énergie et la quantité de mouvement sont données par les mêmes relations que pour le photon.

IV.5.b. Un solide transparent est parcouru par une onde lumineuse dont les photons peuvent être déviés par choc élastique sans changement appréciable de fréquence sur les phonons d'une onde ultrasonore.

Dans le cas où la réflexion se produit, déterminer les angles des faisceaux lumineux incident et réfléchi avec la normale à la direction de propagation des ultrasons (dans le plan parallèle aux directions des deux faisceaux) en fonction des deux longueurs d'onde.

IV.5.c. Une interaction d'une onde lumineuse régie par une loi analogue existe ; laquelle ?

IV.5.d. Cet effet pourrait-il avoir une application en optronique ?

SESSION DE 1992**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques**

option : physique appliquée

épreuve Bcomposition d'électricité, d'électronique,
d'électrotechnique et d'automatique**Durée : 4 heures**

Tout document interdit.

L'usage de la calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Le sujet de cette composition est extrait du programme défini dans la note parue au Bulletin officiel n° 27 du 11 juillet 1991.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.

PRÉAMBULE

Cette composition envisage quelques aspects de la théorie et du traitement du signal appliqués aux signaux déterministes à temps continu et à temps discret.

La partie A traite de la représentation fréquentielle des signaux et de leurs propriétés énergétiques.

La partie B comporte l'étude des signaux physiques, de leurs propriétés spectrales, et de leur mise en forme en vue de leur utilisation, dans les systèmes de télécommunications en particulier.

La partie C développe deux exemples d'application :

– l'étude comparative d'une démodulation d'amplitude simple alternance et d'une démodulation synchrone;

– la restauration par égalisation d'un signal discret ayant été transmis sur un canal sélectif.

La partie A doit être considérée comme un préalable aux deux suivantes. Ses résultats pourront cependant être utilisés sans avoir été établis.

Les parties B et C sont indépendantes.

Remarques préliminaires.

On considère ici deux représentations d'un signal déterministe, l'une temporelle, l'autre fréquentielle. On notera $s(t)$ la première (la variable t représente le temps). La seconde sera notée $S(\nu)$ (la variable ν représente la fréquence) : on l'appelle le spectre du signal $s(t)$.

Ces fonctions sont *a priori* des fonctions complexes de variable réelle, sauf indication contraire.

On utilisera la notation suivante en ce qui concerne les nombres complexes conjugués : \bar{x} est le complexe conjugué de x .

On notera $|x|$ le module du nombre complexe x .

On sera amené à considérer la fonction impulsion unité δ telle que :

$$\begin{cases} \delta(u) = 1 & \text{si } u = 0, \\ \delta(u) = 0 & \text{si } u \neq 0 \end{cases} \quad \forall u \in \mathcal{R} \text{ (ensemble des nombres réels);}$$

et sa translatée δ_a :

$$\begin{cases} \delta_a(u) = \delta(u - a) = 1 & \text{si } u = a, \\ \delta_a(u) = \delta(u - a) = 0 & \text{si } u \neq a \end{cases} \quad \forall u \in \mathcal{R}.$$

D'une manière générale, on veillera à respecter scrupuleusement les notations de l'énoncé, et on apportera le plus grand soin à la rédaction et à la présentation de la copie.

Tous les graphiques demandés sont à exécuter au fur et à mesure des questions posées, directement sur la copie.

PARTIE A

A.I. Représentation fréquentielle des signaux

A.I.1. Signaux périodiques.

Un signal périodique $s(t)$ de période T_0 se décompose en série de Fourier selon la formule :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi n\nu_0 t}$$

dans laquelle $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$ est la fréquence du signal $s(t)$.

Les S_n sont les coefficients de Fourier, déterminés par :

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-j2\pi n\nu_0 t} dt \quad \forall n \in \mathcal{Z} \text{ (ensemble des entiers relatifs).}$$

L'ensemble des $\{S_n\}$ constitue le spectre du signal.

On définit la densité spectrale du signal $s(t)$ par :

$$S(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \delta(\nu - n\nu_0).$$

C'est une fonction complexe de la variable ν . $S(\nu)$ est aussi appelé spectre du signal.

a. On considère le signal périodique suivant : $x(t) = \sin(2\pi\nu_0 t)$.

Représenter graphiquement $x(t)$ en fonction du temps.

b. Donner l'expression de son spectre $X(\nu)$.

c. Représenter graphiquement le module et l'argument de $X(\nu)$ en fonction de la fréquence ν .

d. Soit maintenant le signal périodique : $y(t) = |\cos(2\pi\nu_0 t + \varphi_0)|$.

Représenter graphiquement $y(t)$ en fonction du temps.

e. On donne :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos u e^{-j2nu} du = (-1)^n \frac{2}{(1-4n^2)} \quad \forall n \in \mathcal{Z}.$$

En effectuant le changement de variable $u = 2\pi\nu_0 t + \varphi_0$, déterminer l'expression du spectre $Y(\nu)$ de $y(t)$.

f. Représenter graphiquement le module et l'argument de $Y(\nu)$, en fonction de la fréquence ν .

A.I.2. Signaux apériodiques.

Soit un signal apériodique $s(t)$.

On définit pour ce signal sa transformée de Fourier $S(\nu)$ (sous réserve d'existence) :

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi\nu t} dt = \text{TF} \{ s(t) \}.$$

La relation suivante donne la transformation inverse :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu = \text{TF}^{-1} \{ S(\nu) \}.$$

A.I.2.1. On considère un signal $s(t)$ réel (il prend des valeurs réelles en fonction du temps) dont la transformée de Fourier $S(\nu)$ est appelée densité spectrale du signal $s(t)$.

a. Montrer que le module $A(\nu)$ de $S(\nu)$ est une fonction paire de la fréquence ν , et que son argument $\Phi(\nu)$ est impair. On posera $S(\nu) = A(\nu) e^{+j\Phi(\nu)}$.

b. Mettre $s(t)$ sous la forme suivante :

$$s(t) = 2 \int_0^{+\infty} A(\nu) \cos \{ 2\pi\nu t + \Phi(\nu) \} d\nu.$$

c. Interpréter physiquement ce résultat.

A.I.2.2. Soit le signal « porte » tel que :

$$\begin{aligned} p(t) &= 1 & \text{lorsque} & & t \in [-a, +a] \\ p(t) &= 0 & \text{lorsque} & & t \notin [-a, +a]. \end{aligned}$$

a. Représenter graphiquement le signal $p(t)$.

b. Déterminer l'expression de sa densité spectrale $P(\nu)$.

c. Représenter graphiquement le module et l'argument de $P(\nu)$.

A.II. Propriétés énergétiques des signaux

Définition.

On appelle produit de convolution de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ la quantité $C_{xy}(\tau)$ telle que :

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(\tau - t) dt.$$

On le note $C_{xy} = x * y$.

Vis-à-vis de la transformation de Fourier, le produit de convolution a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \text{TF} \{ x * y \} &= \text{TF} \{ x \} \cdot \text{TF} \{ y \} \\ \text{TF} \{ x \cdot y \} &= \text{TF} \{ x \} * \text{TF} \{ y \}. \end{aligned}$$

A.II.1. Signaux d'énergie finie.

Les signaux d'énergie finie sont des signaux $s(t)$ de carré sommable dans \mathcal{R} (ensemble des nombres réels), c'est-à-dire tels que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \text{ existe.}$$

On appelle fonction de corrélation de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ la quantité $R_{xy}(\tau)$ telle que :

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \bar{y}(t - \tau) dt.$$

On appelle fonction d'autocorrélation d'un signal $x(t)$ la quantité $\Gamma_x(\tau)$ telle que :

$$\Gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \bar{x}(t - \tau) dt.$$

Le théorème de Parseval se traduit par la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\nu)|^2 d\nu.$$

dans laquelle $S(\nu)$ est la densité spectrale du signal $s(t)$. $|S(\nu)|^2$ est la densité spectrale d'énergie du signal $s(t)$.

- Interpréter physiquement ce résultat, en quelques mots.
- Établir le théorème de Parseval.
On pourra prendre deux signaux $s(t)$ et $z(t) = \bar{s}(t)$ auxquels on associera leurs densités spectrales $S(\nu)$ et $Z(\nu)$, et on calculera TF $\{s(t) \cdot z(t)\}$.
- Montrer que la densité spectrale d'énergie d'un signal est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de ce signal.
- Que représente la fonction d'autocorrélation $\Gamma_x(\tau)$ d'un signal $x(t)$, prise pour $\tau = 0$?

A.II.1.1. Application à la fonction porte $p(t)$:

- Calculer directement l'énergie totale du signal porte.
- Quelle est sa fonction d'autocorrélation $\Gamma_p(\tau)$?
- Représenter graphiquement $\Gamma_p(\tau)$.
- En déduire l'énergie totale du signal $p(t)$.

A.II.2. Signaux de puissance finie ou de puissance moyenne finie.

Tous les signaux physiques ne sont pas toujours à énergie finie, ils peuvent cependant être de puissance finie.

Soit un signal périodique $s(t)$ de période T_0 , dont la décomposition en série de Fourier est la suivante :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{+j2\pi n\nu_0 t}.$$

On définit la puissance moyenne sur une période de ce signal par :

$$P_s = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |s(t)|^2 dt.$$

La fonction d'autocorrélation de $s(t)$ est :

$$\varphi_s(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} s(t) \bar{s}(t - \tau) dt.$$

A.II.2.1. Soit un signal sinusoïdal $z(t) = |\cos(2\pi\nu_0 t)|$.

- Calculer la puissance moyenne P_z de $z(t)$.
- Calculer numériquement les coefficients de Fourier Z_n de $z(t)$, pour $n \leq 3$. On pourra s'inspirer du résultat de la question A.I.1.e.
- Calculer numériquement $\mathcal{P}_z = \sum_{n=-3}^{+3} |Z_n|^2$.
- Comparer P_z et \mathcal{P}_z . Commenter.

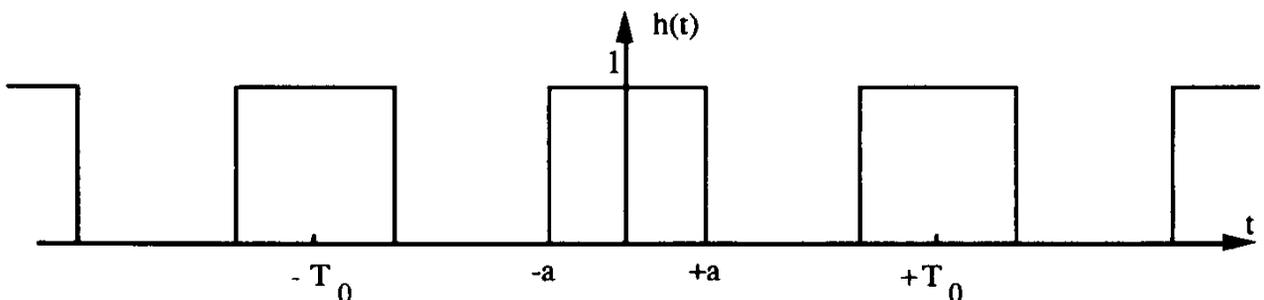
A.II.2.2. On admettra par la suite que pour tout signal périodique $s(t)$, la puissance moyenne sur une période peut s'écrire sous la forme :

$$P_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |S_n|^2.$$

- Donner l'expression de $\varphi_s(\tau)$ en fonction des coefficients de Fourier S_n de $s(t)$.
- On appelle $\Phi_s(\nu)$ la densité spectrale de puissance moyenne du signal périodique $s(t)$. Déterminer $\Phi_s(\nu) = \text{TF} \{ \varphi_s(\tau) \}$.

A.II.2.3. Application.

Soit le signal périodique $h(t)$ que l'on représente graphiquement comme suit :



- a. Donner l'expression analytique de $h(t)$ en fonction du temps.
- b. Déterminer sa densité spectrale $H(\nu)$.
- c. Représenter graphiquement $H(\nu)$. On prendra $a = \frac{T_0}{4}$.
- d. Calculer la puissance moyenne P_h de $h(t)$, toujours avec $a = \frac{T_0}{4}$.

PARTIE B

B.I. Durée d'un signal et largeur de spectre

Définitions.

On dit qu'un signal $s(t)$ est à support temporel borné si :

$$\exists t_1, t_2 \in \mathcal{R}, s(t) = 0 \quad \forall t \in] - \infty, t_1] \cup [t_2, + \infty [.$$

On dit qu'un signal $s(t)$ est à support spectral borné si :

$$\exists \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{R}, S(\nu) = 0 \quad \forall \nu \in] - \infty, \nu_1] \cup [\nu_2, + \infty [.$$

L'intervalle $[t_1, t_2]$ est le support temporel du signal (sa durée); l'intervalle $[\nu_1, \nu_2]$ est son support spectral (sa largeur de spectre).

B.I.1. Le signal porte $p(t)$ tel que : $p(t) = 1$ lorsque $t \in [-a, +a]$;
 $p(t) = 0$ lorsque $t \notin [-a, +a]$,

a un support spectral infini (voir la question A.I.2.2.b).

Plus généralement, si $s(t)$ est un signal à durée limitée, son spectre $S(\nu)$ est à support illimité, et réciproquement, un signal de spectre $S(\nu)$ à support borné a une durée infinie.

On considère un signal d'énergie finie $s(t)$, de durée finie et réel, pour lequel on normalise l'énergie à 1 ; autrement dit, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = 1 .$$

On définit la durée utile T du signal $s(t)$ par :

$$\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s^2(t) dt$$

et la largeur utile B du spectre $S(\nu)$ de $s(t)$ par :

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 |S(\nu)|^2 d\nu .$$

Le but de cette question est de montrer que le produit BT est borné inférieurement.

On utilisera l'inégalité de Schwarz :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot v(t) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt$$

dans laquelle on pourra poser :

$$u(t) = t \cdot s(t)$$

$$v(t) = s'(t) = \frac{d[s(t)]}{dt}.$$

a. Montrer que :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot v(t) dt = -\frac{1}{2}.$$

b. Donner l'expression de $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt$ en fonction de T.

c. Montrer, à l'aide du théorème de Parseval, que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\text{TF}\{s'(t)\}|^2 dv.$$

d. Donner l'expression de $\text{TF}\{s'(t)\}$ en fonction de S(v).

e. En déduire l'expression de $\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt$ en fonction de B.

f. Quelle est la borne inférieure du produit BT du signal $s(t)$?

B.I.2. *Application.*

Soit un signal gaussien $g(t) = a \cdot e^{-\frac{\pi^2}{2} a^4 t^2}$, et $g'(t)$ sa dérivée par rapport au temps.

a. Montrer que $g'(t) = k \cdot t \cdot g(t)$, k réel.

b. Que devient l'inégalité de Schwarz lorsque $u(t) = t \cdot g(t)$ et que $v(t) = g'(t)$?

c. Quelle est la valeur du produit BT pour le signal $g(t)$?

B.II. Signaux de spectre borné

B.II.1. On considère un signal périodique $f(t)$, de période T_0 , et son signal générateur $g(t)$:

$$g(t) = f(t) \cdot c(t) \quad c(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

a. Exprimer $F(\nu)$ en fonction de $G(\nu)$.

$$\left(\text{On rappelle que : } F(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n \delta(\nu - n\nu_0) \right).$$

b. Montrer que $G(\nu)$ peut s'exprimer en fonction d'échantillons $G(n\nu_0)$ et de fonctions $S_n(\nu)$ de la forme $\frac{\sin u}{u}$ (on pourra calculer la transformée de Fourier de $g(t) = f(t) \cdot c(t)$).

B.II.2. *Application : échantillonnage.*

Considérons un signal $s(t)$ de spectre borné $S(\nu)$ ($S(\nu) = 0$ pour $|\nu| > \nu_M$).

a. En utilisant le résultat précédent, montrer que $s(t)$ peut s'exprimer en fonction d'échantillons $s(nT)$ du signal et de fonctions :

$$s_n(t) = \frac{\sin \pi (2\nu_M t - n)}{\pi (2\nu_M t - n)} \quad \text{avec } T = \frac{1}{2\nu_M}.$$

b. Déterminer la transformée de Fourier de $s_0(t)$, puis celle de $s_n(t)$.

c. Montrer que les fonctions $s_n(t)$ sont orthogonales, c'est-à-dire qu'elles vérifient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_n(t) \cdot s_p(t) dt = 0; \quad \forall n \neq p.$$

d. Calculer l'énergie de $s(t)$ à partir de ses échantillons $s(nT)$.

B.III. Signaux causaux

Un signal est dit causal lorsqu'il est nul jusqu'à l'instant $t = 0$. On considère les signaux réels, admettant une transformée de Fourier.

B.III.1. Dans le cas général un signal réel peut être mis sous la forme d'une somme d'un signal pair et d'un signal impair par rapport au temps :

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t) \quad \text{avec } x_p(-t) = x_p(t) \quad \text{et} \quad x_i(-t) = -x_i(t).$$

a. Déterminer $x_p(t)$ et $x_i(t)$.

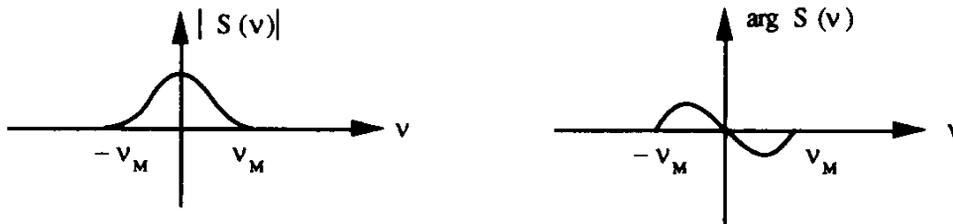
b. Déterminer les transformées de Fourier $X_p(\nu)$ de $x_p(t)$ et $X_i(\nu)$ de $x_i(t)$ en fonction de la transformée de Fourier $X(\nu) = A(\nu) + jB(\nu)$ de $x(t)$.

B.III.2. Application aux signaux causaux réels.

- Déterminer $x_p(t)$ et $x_i(t)$ pour un signal $x(t)$ réel et causal.
- Montrer que $x(t)$ peut s'exprimer en fonction de $A(\nu)$ ou $B(\nu)$ seul.
- Déterminer l'énergie de $x(t)$ en fonction de $A(\nu)$ ou $B(\nu)$.

B.IV. Signaux échantillonnés

B.IV.1. On considère un signal $s(t)$ défini à partir de la représentation spectrale suivante :

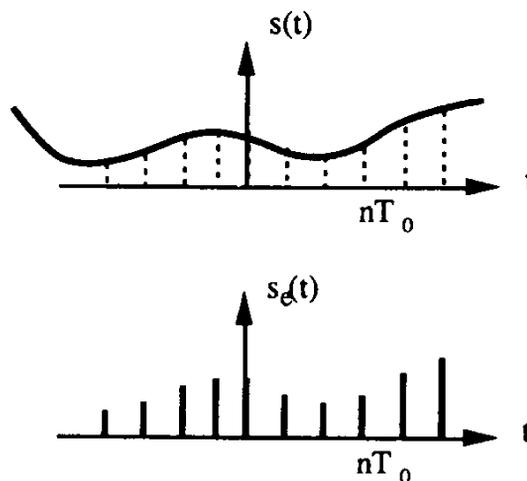


Ce signal est échantillonné à la période T_0 . Soit $s_e(t)$ le signal échantillonné :

$$s_e(t) = \begin{cases} s(nT_0) & t = nT_0 \\ 0 & t \neq nT_0 \end{cases} \quad \forall n \in \mathcal{Z}.$$

Le signal échantillonné est représenté par la fonction :

$$s_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_0) \delta(t - nT_0).$$



- Déterminer le spectre $S_e(\nu)$ de $s_e(t)$.
- Ce signal est transmis et le problème, à la réception, est d'obtenir à nouveau $s(t)$. À quelle(s) condition(s) et comment peut-on le faire ?

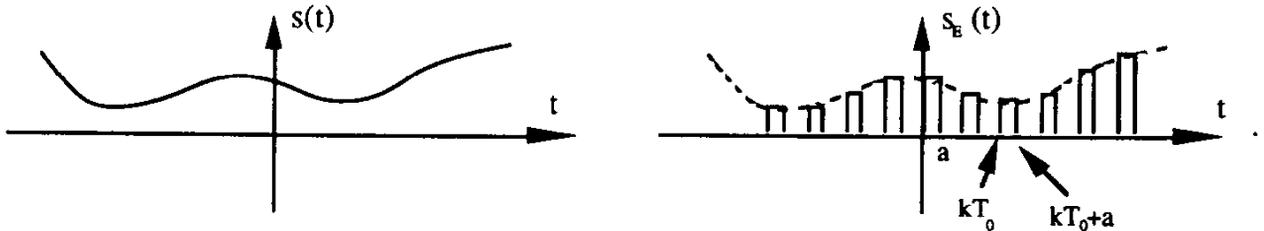
B.IV.2. On effectue maintenant un échantillonnage réel, à l'aide du signal « porte » $\pi(t)$.

$$\pi(t) = 1 \text{ lorsque } t \in [0, a]$$

$$\pi(t) = 0 \text{ lorsque } t \notin [0, a]$$

L'opération est symbolisée de la manière suivante :

$$s_E(t) = \begin{cases} s(kT_0) & t \in [kT_0, kT_0 + a] \\ 0 & t \notin [kT_0, kT_0 + a] \end{cases} \quad \forall k \in \mathcal{Z}.$$



a. Calculer $\Pi(v) = \text{TF}[\pi(t)]$.

b. Calculer $S_E(v) = \text{TF}[s_E(t)]$ en fonction de $S(v)$.

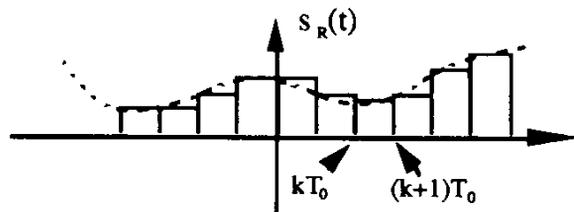
c. Nous nous plaçons dans le cas où $\pi \cdot v_M \cdot a \leq 0,1$:

Représenter $S_E(v)$ graphiquement. Remarques ?

Que faudrait-il faire pour reconstituer $s(t)$ à partir de $s_E(t)$?

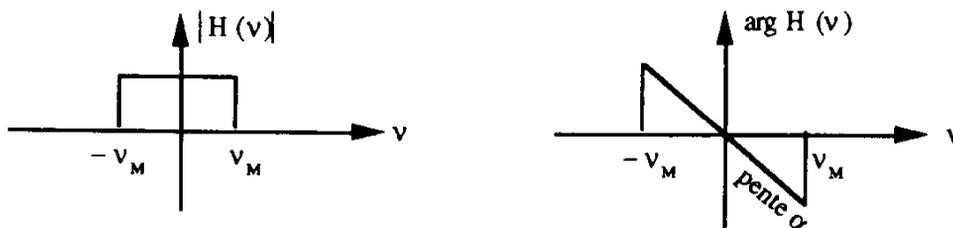
B.IV.3. En réalité, on ne transmet pas des échantillons $s(nT_0)$, mais des valeurs numériques qui permettent, à la réception, d'obtenir le signal $s_R(t)$ représenté ci-dessous :

$$s_R(t) = s(kT_0) \quad \text{pour } t \in [kT_0, (k+1)T_0[$$



a. Donner l'expression de $S_R(v)$ en fonction de $S(v)$. À quelle(s) condition(s) et comment peut-on obtenir $s(t)$ à partir de $s_R(t)$?

b. Considérons un signal $h(t)$, de transformée de Fourier $H(v)$, définie ci-dessous :



$$v_M = 4 \text{ kHz}$$

On effectue l'opération $s_R * h = s_H$.

$s(t)$ est de la forme $s(t) = s_0 \cos 2\pi \nu_1 t$, avec $\nu_1 \leq 3$ kHz.

a. Déterminer $S_H(\nu)$.

β. *Application numérique* : $s_0 = 1$.

Déterminer $s_H(t)$ pour $\nu_1 = 500$ Hz, 1 kHz, 2 kHz, 3 kHz. Remarques ?

B.V. Utilisation de la transformation de Fourier discrète

On considère un signal périodique $s(t)$ de période T_1 , défini par :

$$s_g(t) = \begin{cases} s(t) & -\frac{T_1}{2} \leq t < \frac{T_1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\text{avec } s(t) \text{ tel que : } s = s_g * \sum_n \delta_{nT_1}.$$

Le signal $s(t)$, à support spectral limité, peut se mettre sous forme de série de Fourier :

$$s(t) = \sum_{n=-N}^N S_n e^{+j2\pi n \nu_1 t} \quad \nu_1 = \frac{1}{T_1} \quad n \in \mathcal{Z}.$$

$N \in \mathcal{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non nuls).

- B.V.1. a. Donner une représentation graphique d'un signal $s(t)$ correspondant aux hypothèses de l'énoncé.
 b. $s(t)$ est échantillonné à la fréquence ν_0 . À quelle condition le signal échantillonné est-il périodique, de même période que $s(t)$?

B.V.2. Comment doit-on choisir ν_0 pour qu'il n'y ait pas de repliement de spectre ?

On définit la transformée de Fourier discrète (TFD) d'un signal échantillonné périodique $x(nT_0)$ de période $T_1 = M \cdot T_0$ de la manière suivante :

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=-P_1}^{+P_2} x(nT_0) e^{-j2\pi \frac{nk}{M}}, \quad \forall k \in \mathcal{Z}.$$

$$\text{avec, si } M = 2P, \quad P_1 = P \text{ et } P_2 = P - 1,$$

$$\text{et si } M = 2P + 1, \quad P_1 = P_2 = P.$$

M, P, P_1, P_2 sont des entiers naturels.

- B.V.3. Établir l'expression donnant la transformée de Fourier discrète inverse.
 B.V.4. Montrer qu'en prenant la fréquence ν_0 d'échantillonnage compatible avec les questions B.V.1. et B.V.2., on peut calculer les coefficients S_n de $s(t)$ à partir de la TFD de $s_g(kT_0)$.
 B.V.5. Peut-on échantillonner à une fréquence supérieure à ν_0 ? Que faudra-t-il faire pour obtenir $\{S_n\}$?

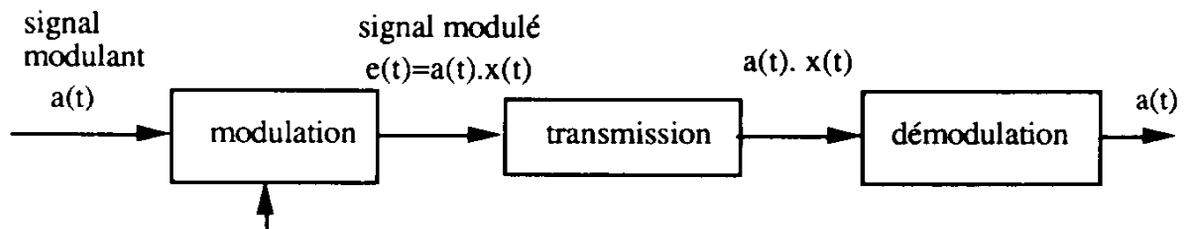
PARTIE C

C.I. Étude comparative de deux démodulateurs d'amplitude

C.I.1. Démodulation d'amplitude simple alternance.

Le schéma général de transmission d'un signal $a(t)$ par modulation d'amplitude est représenté ci-dessous. On distingue trois parties :

- un modulateur ;
- un canal de transmission, supposé ici idéal ;
- un démodulateur.

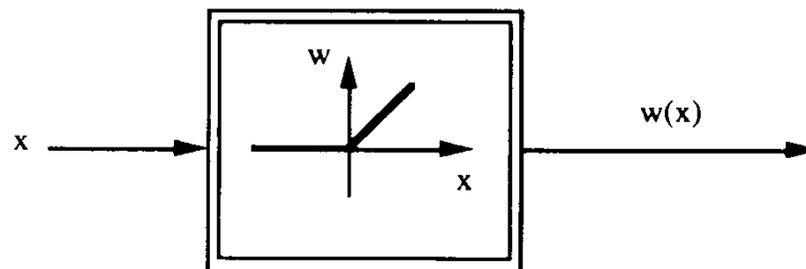


$$\text{signal porteur : } x(t) = x_0 \cos 2\pi\nu_0 t$$

L'objet de cette question est d'étudier le démodulateur.

C.I.1.1. Considérons le système non linéaire dont la caractéristique est la suivante :

$$w(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \geq 0; \\ 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$



On injecte à l'entrée de ce système un signal périodique de la forme $x(t) = x_0 \cos 2\pi\nu_0 t$.

- Déterminer le spectre complexe du signal de sortie $s(t) = w[x(t)]$.
- Représenter graphiquement son module et son argument.
- Le signal $s(t)$ est filtré par un filtre passe-bande ayant pour fonction de transfert $H(\nu)$ telle que :

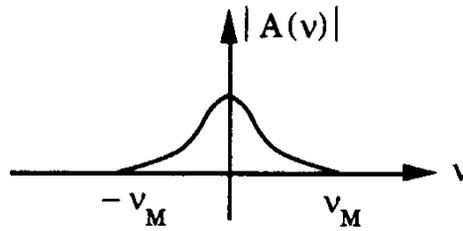
$$\gamma(\nu) = u\left(\nu + \frac{B}{2}\right) - u\left(\nu - \frac{B}{2}\right) \quad u(\nu) = \begin{cases} 1 & \nu \geq 0 \\ 0 & \nu < 0 \end{cases}$$

$$H = \gamma * \left[\delta_{2\nu_0} + \delta_{-2\nu_0} \right]$$

H est le produit de convolution de γ avec la somme des fonctions impulsions unité centrées en $+2\nu_0$ et $-2\nu_0$. On a de plus $B < \nu_0$.

- Représenter graphiquement le module de $H(\nu)$.
- Déterminer le signal de sortie du filtre $s_H(t)$.

C.I.1.2. Le spectre $A(\nu)$ du signal modulant $a(t)$ [$a(t) > 0$, modulation d'amplitude] a l'allure suivante (on ne tient pas compte de sa phase) :



Le signal à l'entrée du système non linéaire est maintenant $e(t) = a(t) \cdot x(t)$.

Soit $s_a(t) = w[a(t) \cdot x(t)]$ le signal de sortie.

- Donner l'expression de $S_a(\nu) = \text{TF}\{s_a(t)\}$.
- Représenter $S_a(\nu)$ graphiquement.
- À l'aide d'un système simple, placé à la suite du système non linéaire, on veut obtenir $a(t)$. À quelle(s) condition(s) cela est-il possible ? Quel système simple peut-on utiliser ?

C.I.2. Démodulateur synchrone.

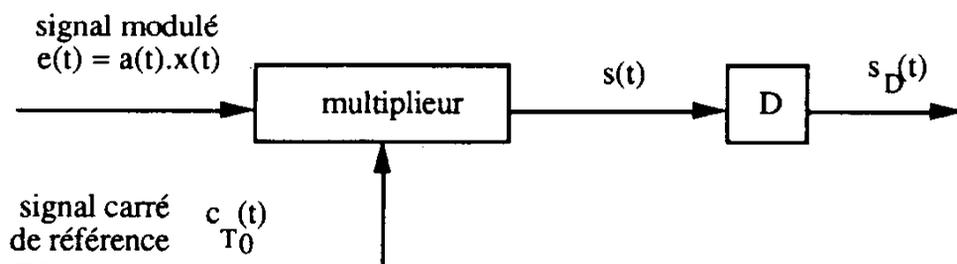
On considère le signal modulé $e(t) = a(t) \cdot x(t)$ [où $a(t)$ est le signal défini à la question C.I.1.2.].

C.I.2.1. $x(t)$ est un signal périodique quelconque, de période T_0 , dont la décomposition en série de Fourier est la suivante :

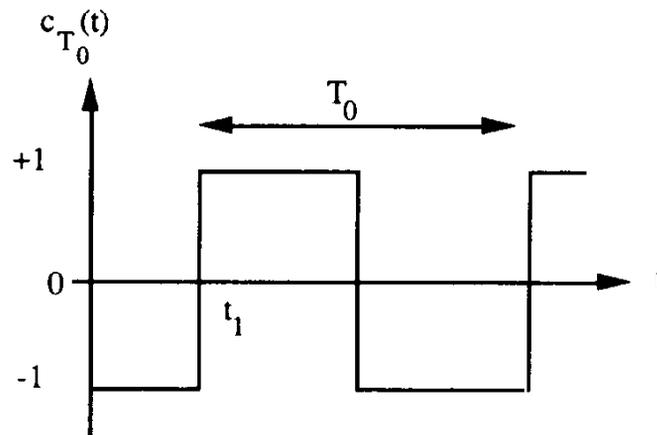
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n\nu_0 t}$$

- Donner l'expression de $E(\nu) = \text{TF}\{e(t)\}$ en fonction de $A(\nu) = \text{TF}\{a(t)\}$ et du spectre $X(\nu)$ de $x(t)$.
- Donner une représentation graphique de $E(\nu)$.
- Comment faut-il choisir $x(t)$ pour que son utilisation dans la transmission de $a(t)$ présente un intérêt ?

C.I.2.2. $x(t)$ est à valeur moyenne nulle (exemple : porteur sinusoïdal). On veut extraire le signal $a(t)$ en utilisant un dispositif analogue au précédent, à partir du système non linéaire w suivi d'un filtre (ensemble noté D sur le schéma suivant). Pour cela, on réalise le système suivant :



Les caractéristiques du signal de référence $c_{T_0}(t)$ sont représentées ci-dessous :



On posera : $\varphi_1 = 2\pi\nu_0 t_1$.

a. Donner l'expression du spectre de $c_{T_0}(t)$, soit $C_{T_0}(\nu)$.

b. Donner l'expression de $S_D(\nu)$ en fonction de $A(\nu)$ et des coefficients de Fourier de $x(t)$ et de $c_{T_0}(t)$.

C.I.2.3. Application : $x(t) = x_0 \cos 2\pi\nu_0 t$.

a. Donner l'expression de $S_D(\nu)$.

b. Comment peut-on réaliser pratiquement le signal $c_{T_0}(t)$ à partir du signal modulé ?

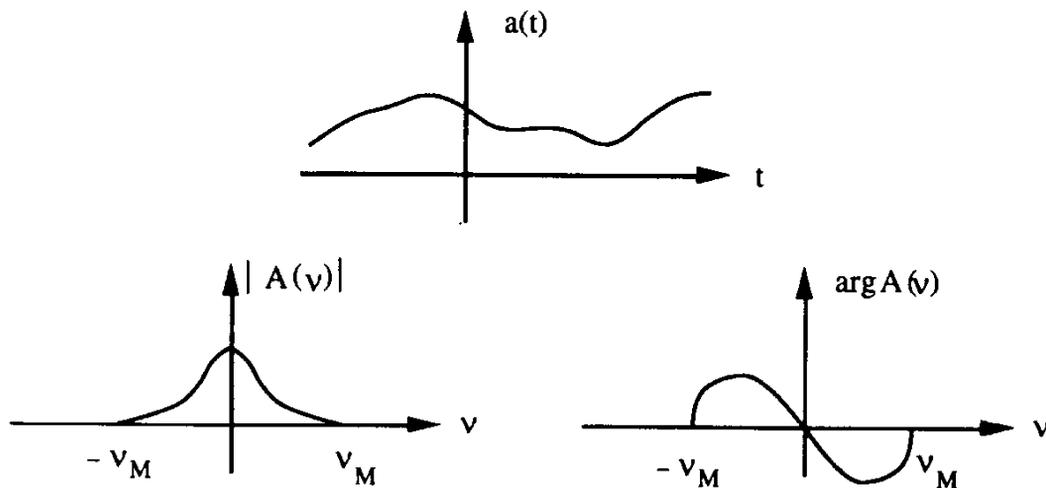
c. Proposer un schéma final pour ce démodulateur synchrone.

C.I.3. Donner les avantages et inconvénients des deux systèmes précédents, démodulateur simple alternance et démodulateur synchrone.

C.II. Restauration par égalisation d'un signal discret

C.II.1. On considère un signal $a(t)$ à support spectral borné :

$$(A(\nu) = 0, \forall |\nu| > \nu_M)$$



Ce signal module le signal « d'horloge » $p_\alpha(t)$ défini de la manière suivante :

• $p_\alpha(t)$ est périodique de période T_1 .

• Pour $t \in [0, T_1[$
$$p_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \alpha \\ 0 & \alpha < t < T_1 \end{cases} \quad \nu_1 = \frac{1}{T_1}.$$

Soit $e(t)$ le signal modulé : $e(t) = a(t) \cdot p_u(t)$.

- Représenter graphiquement $e(t)$.
- Déterminer le spectre de $e(t)$ en fonction de $A(v)$ et le représenter graphiquement.
- À quelle(s) condition(s) peut-on obtenir $a(t)$ à partir de $e(t)$? Définir un dispositif permettant d'obtenir $a(t)$ à partir de $e(t)$.

C.II.2. Le canal de transmission utilisé pour transmettre $e(t)$ se comporte comme un filtre de fonction de transfert $H(v)$, et est tel que le signal reçu $r(t)$ est de la forme :

$$r(t) = \lambda_0 \cdot e(t - t_0) + \lambda_1 \cdot e(t - t_1) \quad \text{avec} \quad 0 < \lambda_1 \ll \lambda_0 \quad \text{et} \quad t_1 > t_0 > 0.$$

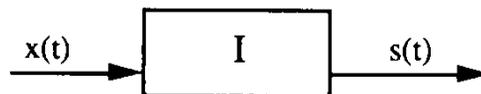
- Déterminer la fonction de transfert $H(v)$ du canal de transmission.
- On voudrait corriger la distorsion apportée à $e(t)$ par le canal de transmission. Déterminer la fonction de transfert $H_C(v)$ du filtre correcteur permettant d'obtenir $e(t)$ à partir de $r(t)$.
 - Ce filtre est-il causal, non causal, anti-causal ?
 - Que faut-il faire pour le rendre réalisable ?
- Soit $H_F(v)$ la fonction de transfert du filtre correcteur réalisable. Montrer que l'on peut construire approximativement ce filtre en utilisant des filtres réalisant des retards purs τ_j et des filtres de gains statiques a_i (faire une approximation au 2^e ordre de $H_F(v)$).
- Exprimer τ_j et a_i en fonction de λ_1 , λ_0 , t_1 et t_0 .

C.II.3. Par suite de correction on suppose que le signal reçu est $e(t)$.

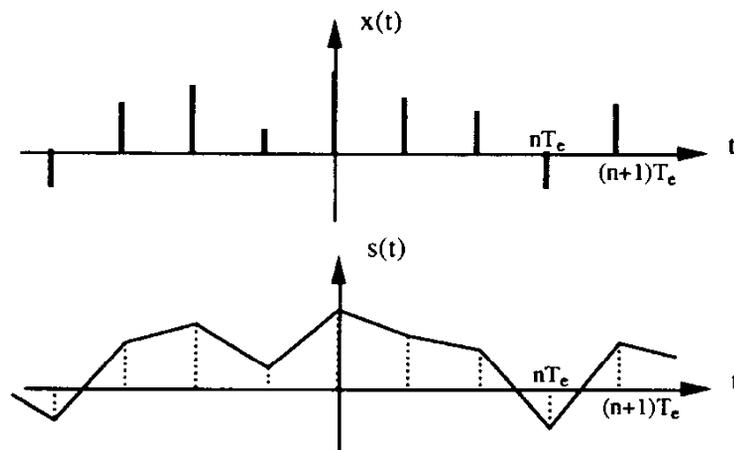
C.II.3.1. a. Montrer que l'on peut, par échantillonnage de $e(t)$, obtenir $a(t)$. Comment et à quelle(s) condition(s) ?

b. Dans l'hypothèse où $v_1 > 4v_M$, quelles sont les valeurs possibles pour la fréquence d'échantillonnage v_e ?

C.II.3.2. Soit $v_e = v_1$. Soit $x(t)$ le signal échantillonné. Pour simplifier, on suppose que l'échantillonnage se fait aux instants $t = nT_e$, n entier. On construit un signal à temps continu $s(t)$ à partir de $x(t)$ en utilisant un système I.



Les signaux $x(t)$ et $s(t)$ sont représentés ci-dessous :



Entre deux échantillons nT_e et $(n + 1) T_e$, $s(t)$ est représenté par un segment de droite, avec $s(nT_e) = x(nT_e)$ et $s((n + 1)T_e) = x((n + 1)T_e)$.

- Montrer que I est un système linéaire, continu, stationnaire. Déterminer sa fonction de transfert.
- Déterminer $S(v)$ [on pourra exprimer $s(t)$ simplement en fonction de $x(t)$ et d'un autre signal].
Remarques ?

SESSION DE 1992**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques**

option : physique appliquée

épreuve C

problème d'électricité, d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique

Durée : 6 heures

Tout document interdit.

L'usage de la calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Le candidat dispose de 2 feuilles de papier millimétré.

Les 7 documents-réponses sont à rendre avec la copie.

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction, de la rigueur des raisonnements et de la précision des tracés des courbes.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.

MACHINE ASYNCHRONE APPLIQUÉE À LA TRACTION

Ce problème porte sur l'étude d'une machine asynchrone associée à un onduleur de tension à thyristors GTO.

Il se compose de 4 parties :

- I. Étude de la machine asynchrone alimentée sous tension sinusoïdale à fréquence variable.
- II. Étude de l'onduleur de tension.
- III. Modulation de largeur d'impulsion.
- IV. Principe d'un pilotage vectoriel de la machine asynchrone.

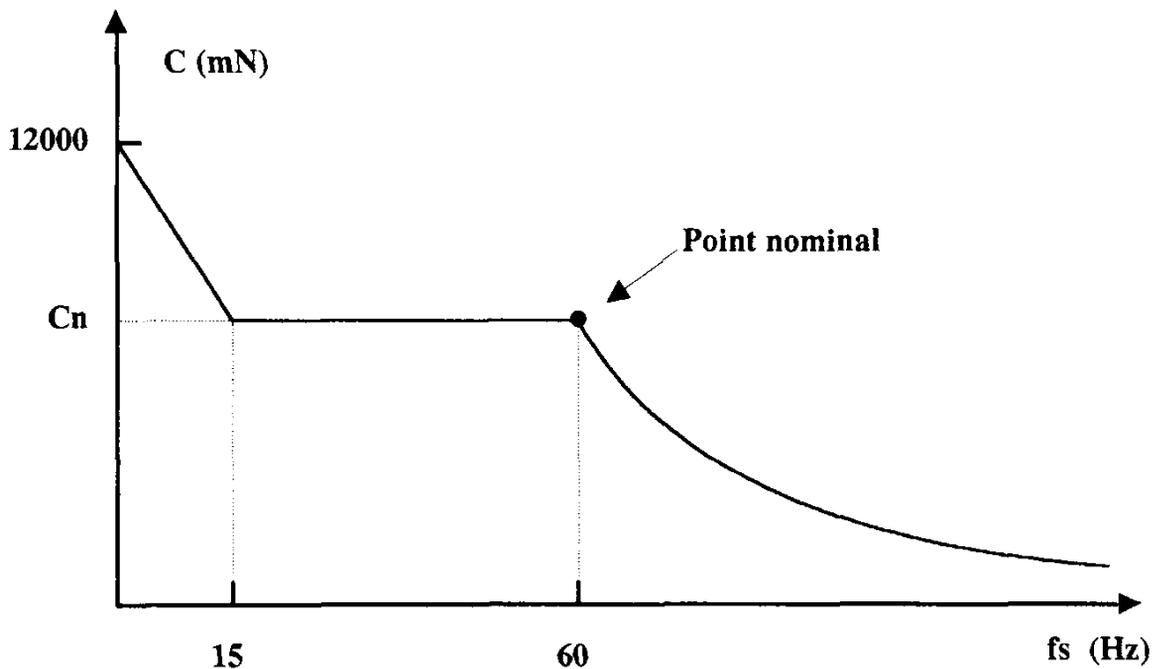
Les parties I, II et IV sont indépendantes. La partie III dépend partiellement de certaines questions de la partie II.

Caractéristiques de la machine asynchrone.

La machine est triphasée tétrapolaire. Les enroulements statoriques sont couplés en étoile et réalisés en cuivre. Le circuit porté par le rotor est du type « cage d'écureuil » et il est également en cuivre.

Cette machine est dimensionnée pour pouvoir fournir la caractéristique de traction suivante.

- *Couple maximal en fonction de la fréquence d'alimentation* à 25 °C en fonctionnement moteur.



- Au démarrage la machine peut fournir un couple de 12 000 mN.
- $0 < f_s < 15$ Hz décroissance linéaire du couple maximal en fonction de f_s .
- $15 < f_s < 60$ Hz le couple maximal est égal au couple nominal C_n .
- $f_s > 60$ Hz le couple maximal est fixé par la puissance mécanique nominale P_n .

• **Caractéristiques du point nominal.**

$$\begin{aligned} P_n &= 1,41 \text{ MW} \quad (\text{Puissance mécanique}) \\ U_n &= 1\,700 \text{ volts} \quad (\text{Tension entre phases}) \\ N_n &= 1\,787 \text{ tr/min} \\ f_s &= f_n = 60 \text{ Hz} \\ t_n &= 100 \text{ °C} \end{aligned}$$

La répartition de température est supposée uniforme.

• **Hypothèses.**

- Les valeurs P_n et U_n sont considérées comme des valeurs maximales pour la puissance mécanique et la tension d'alimentation.
- La température maximale de fonctionnement du moteur est de 175 °C.
- On suppose les pertes fer et mécaniques négligeables.
- On suppose aussi que le comportement magnétique de la machine est linéaire.

Notations et conventions.

- a : nombre de paires de pôles.
- P : puissance mécanique fournie par la machine.
- ω_s, f_s : pulsation et fréquence des grandeurs électriques statoriques ($\omega_s = 2\pi f_s$).
- ω_r, f_r : pulsation et fréquence des grandeurs électriques, rotoriques.
- Ω : vitesse mécanique de rotation en rad/s.
- N : vitesse de rotation en tr/min.
- L_1 : inductance cyclique de fuite stator.
- L_2 : inductance cyclique de fuite rotor.
- L_s : inductance cyclique stator $L_s = L_1 + L_m$.
- L_r : inductance cyclique rotor $L_r = L_2 + L_m$.
- L_m : inductance cyclique magnétisante.
- σ : coefficient de dispersion $\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_r L_s}$.
- g : glissement $g = \frac{\Omega_s - \Omega}{\Omega_s}$.
- α : coefficient de température de la résistivité du cuivre.
- ϕ_s : flux statorique par phase.
- ϕ_r : flux rotorique par phase.
- ϕ_m : flux d'entrefer par phase.
- V_s, I_s : tension simple et courant de ligne statorique (convention récepteur).
- I_r : courant rotorique ramené à une phase du stator.
- j : représente le nombre complexe imaginaire pur de module 1 et d'argument $\pi/2$.

Le couple fourni par la machine asynchrone est orienté avec la même convention que la vitesse de rotation ($P > 0 \iff$ fonctionnement en moteur).

Toutes les grandeurs caractérisant le circuit rotorique sont ramenées au stator.

Données :

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ L_1 &= 0,555 \text{ mH} & L_m &= 19,2 \text{ mH} \\ L_2 &= 0,368 \text{ mH} \\ R_s &= 16,8 \text{ m}\Omega & R_r &= 13,2 \text{ m}\Omega \\ \alpha &= 4 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \text{ à } 100 \text{ °C} \end{aligned}$$

Les valeurs des résistances sont données à 100 °C et, sauf indication contraire, on utilisera ces valeurs dans les applications numériques.

Typographie.

En règle générale on utilise les symboles de la manière suivante :

v ou $v(t)$ pour les grandeurs instantanées ;

V pour les valeurs efficaces ou les valeurs moyennes ;

\underline{V} pour les nombres complexes associés à une grandeur à variation temporelle sinusoïdale. Le module de \underline{V} est égal à la valeur efficace.

PARTIE I

ÉTUDE DE LA MACHINE ASYNCHRONE
ALIMENTÉE SOUS TENSION SINUSOÏDALE A FRÉQUENCE VARIABLE

Dans cette partie la machine est alimentée par un système de tensions triphasées équilibrées.

Les sources de tensions sont sinusoïdales et parfaites.

On rappelle les relations entre les flux magnétiques par phase et les courants.

$$\begin{bmatrix} \phi_s \\ \phi_r \\ \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & & -L_m \\ & L_r & -L_m \\ & & -L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix}$$

Les tensions \underline{V}_s , \underline{V}_m et \underline{V}_r sont définies par les relations suivantes :

$$\underline{V}_s = j \omega_s \phi_s; \quad \underline{V}_m = j \omega_s \phi_m; \quad \underline{V}_r = j \omega_s \phi_r.$$

- I.1. Donner la relation entre la vitesse mécanique de synchronisme Ω_s et la fréquence d'alimentation f_s de la machine. Entre quelles limites varie N lorsque f_s est compris entre 0 et 150 Hz ?
- I.2. Représenter le schéma équivalent d'une phase de la machine faisant apparaître L_1 , L_2 et L_m . Placer sur ce schéma les tensions \underline{V}_s , \underline{V}_r , \underline{V}_m , \underline{V}_r ainsi que les courants \underline{I}_s et \underline{I}_r en respectant les conventions choisies.
- I.3. Étude du point de fonctionnement nominal.**
- I.3.1. À partir des caractéristiques nominales, calculer la valeur du couple nominal C_n de cette machine.
- I.3.2. Calculer la vitesse mécanique de synchronisme, la fréquence des courants rotoriques et le glissement.
- I.3.3. Donner le schéma équivalent en précisant les valeurs numériques des différents éléments pour ce point de fonctionnement.
- I.3.4. Calculer l'impédance \underline{Z}_r absorbant le courant \underline{I}_s sous la tension \underline{V}_m ($\underline{Z}_r = \frac{\underline{V}_m}{\underline{I}_s}$).
- En déduire la valeur de \underline{Z}_s ($\underline{Z}_s = \frac{\underline{V}_s}{\underline{I}_s}$).
- I.3.5. Donner les valeurs du courant statorique nominal et du facteur de puissance.
- I.3.6. Que représente la quantité $3 \operatorname{Recl} (Z_r) I_s^2$ sur le plan énergétique ? En déduire une valeur pour le courant I_r ainsi que pour le couple nominal C_n .

I.3.7. Déterminer les valeurs suivantes :

- la puissance électrique absorbée ;
- les pertes joules stator ;
- les pertes joules rotor ;
- le rendement de la conversion électromécanique.

I.3.8. Quelles sont les valeurs des différents flux ϕ_s , ϕ_m , et ϕ_r ?

On considérera que la valeur de ϕ_s trouvée est une valeur nominale.

I.4. Influence de la température.

On envisage maintenant deux régimes de fonctionnement où la température de la machine asynchrone est de 25 °C pour le premier et de 175 °C pour le second.

Dans les deux cas la répartition de température est supposée uniforme et les caractéristiques de l'alimentation ainsi que la vitesse mécanique de rotation sont nominales.

I.4.1. Déterminer les valeurs des résistances statoriques et rotoriques pour ces températures.

I.4.2. Quelles seraient, dans ces conditions, les valeurs des grandeurs suivantes :

- le couple ?
- la puissance mécanique ?
- la puissance électrique absorbée ?

I.4.3. Quelles conclusions peut-on tirer de ces nouvelles valeurs en comparant à celles obtenues au I.3. ? On fera abstraction du fait que ces valeurs puissent être éventuellement incompatibles avec le dimensionnement de la machine.

I.5. Vitesse variable.

Dans le cadre d'une utilisation de cette machine en traction ferroviaire, il est nécessaire de pouvoir faire varier la vitesse.

On considérera, dans toute la suite de la partie I, que l'on dispose d'une source de tensions triphasées sinusoïdales (fig. I.1.) dont on peut régler la fréquence (entrée *a*) et l'amplitude (entrée *b*).

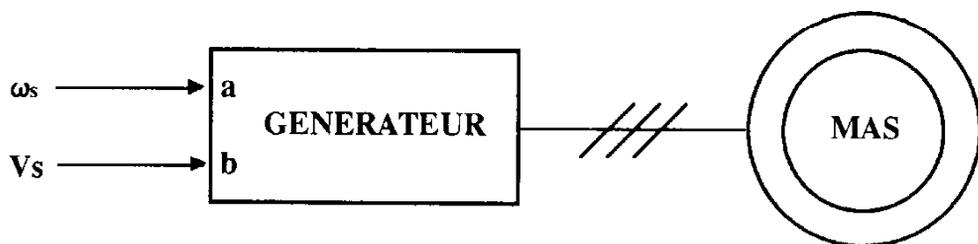


Figure I.1. - Schéma fonctionnel de l'alimentation de la machine asynchrone

Pour mener à bien cette étude, établissons un schéma par phase de la machine asynchrone, plus adapté à ce type de commande.

I.5.1. Établir les relations permettant d'exprimer \underline{I}_s en fonction de $\underline{\phi}_s$ et \underline{I}_r , puis $\underline{\phi}_s$ en fonction de $\underline{\phi}_r$ et \underline{I}_r .

I.5.2. En déduire que le schéma monophasé équivalent peut se mettre sous la forme présentée à la figure I.2.

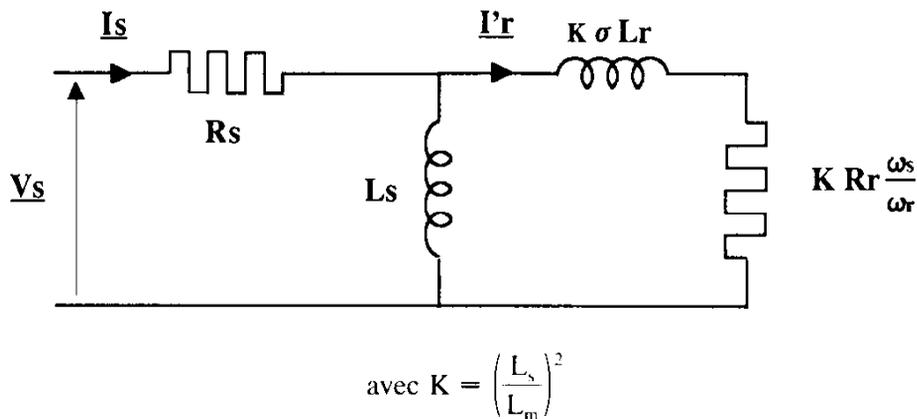


Figure I.2. — Schéma monophasé équivalent

I.5.3. Quelles sont les tensions qui apparaissent respectivement aux bornes de l'inductance L_s et de la résistance $K R_r \frac{\omega_s}{\omega_r}$?

A quels flux ces tensions sont-elles liées ?

I.5.4. Représenter dans le plan de Fresnel les diagrammes vectoriels liant les grandeurs \underline{V}_s , \underline{I}_s , $\underline{\phi}_s$, $\frac{L_s}{L_m} \underline{\phi}_r$, \underline{I}'_r pour un point de fonctionnement en moteur et un point de fonctionnement en génératrice. Quelle est la position relative des flux $\underline{\phi}_r$ et $\underline{\phi}_s$ dans chacun des cas ?

On commencera par montrer que le couple développé par la machine peut s'exprimer en fonction de $\underline{\phi}_s$, $\underline{\phi}_r$, L_r et de l'angle θ entre $\underline{\phi}_r$ et $\underline{\phi}_s$ (orienté de $\underline{\phi}_r$ vers $\underline{\phi}_s$).

I.6. Autopilotage à basse fréquence.

Dans le cas de cette question on fera l'hypothèse que la résistance statorique R_s est négligeable.

I.6.1. Exprimer le courant I_s en fonction de ω_r , ω_s et V_s .

I.6.2. Quelle est la relation liant le couple C aux mêmes paramètres ? Simplifier cette expression en supposant que $R_r^2 \gg \sigma L_r^2 \omega_r^2$. On justifiera cette hypothèse.

I.6.3. Loi de commande.

I.6.3.1. Établir l'expression du rendement de la conversion électromécanique en fonction des pulsations statorique et rotorique.

I.6.3.2. En considérant l'expression simplifiée du couple, montrer que l'on a intérêt à introduire une loi de commande liant la tension V_s à la pulsation ω_s (notée $V_s = f_1(\omega_s)$), afin d'avoir le meilleur rendement possible.

I.6.3.3. Quelle est la signification physique de cette loi ? Explicitez-la numériquement.

I.6.3.4. Donner, en la justifiant, une valeur approximative de la fréquence maximale $f_{1\max}$ en dessus de laquelle cette loi de commande ne peut plus être utilisée.

I.6.3.5. Comment la caractéristique de couple $C(N)$ se déplace-t-elle lorsque l'on fait varier ω_s en respectant la loi de commande $V_s = f_1(\omega_s)$. Tracer dans le plan $C(N)$ les limites de la zone que peut atteindre le système d'entraînement. Mettre en évidence les zones qui correspondent aux différents types de fonctionnement : moteur, génératrice, frein sans récupération. On raisonnera à partir de la caractéristique de couple simplifiée.

I.6.4. On considère que la pulsation rotorique ω_r est un paramètre de commande.

I.6.4.1. Représenter un schéma fonctionnel permettant d'imposer la pulsation rotorique tout en respectant la loi de commande définie précédemment. On supposera que l'on dispose de l'information Ω grâce à un capteur monté sur l'arbre de la machine. On réalise de cette manière un autopilotage de la machine asynchrone.

I.6.4.2. Quelles grandeurs électriques et mécaniques sont-elles imposées par l'intermédiaire de ω_r ?

I.6.4.3. Retrouver les résultats de la question précédente en analysant la déformation du diagramme vectoriel établi à la question I.5.4. lorsque ω_s varie.

I.7. On désire étudier maintenant l'influence de la résistance statorique R_s sur l'autopilotage défini à la question précédente.

I.7.1. Exprimer le couple en fonction du courant statorique I_s .

I.7.2. Pour $f_r = 0,4$ Hz, tracer la caractéristique $C(f_s)$ (feuille I.A.). On calculera la valeur du courant statorique et on en déduira les valeurs des couples pour $f_s = 0,4; 0,5; 1; 2,5; 5; 10; 30; f_{1\max}$ (cf. I.6.3.4.).

Justifier l'allure de la caractéristique aux très basses fréquences.

I.7.3. À partir du diagramme vectoriel liant les grandeurs $\underline{I}_s, \underline{\Phi}_s, \underline{V}_s$ et \underline{V}_e établir une nouvelle loi de commande permettant de diminuer l'influence de la résistance statorique. Pour établir cette loi de commande $V_s = f_2(\omega_r, \omega_s)$, on fera les approximations $R_r \gg \sigma L_r \omega_r$ et $V_e \gg R I_s$, même si cette dernière n'est pas justifiée à basse fréquence.

I.7.4. Retracer la caractéristique $C(f_s)$ dans les conditions définies à la question I.7.2. et avec cette nouvelle loi de commande. Conclusions ?

I.8. Pour les fréquences supérieures à $f_{1\max}$, on réalise la variation de vitesse à tension statorique V_s constante. On négligera la résistance R_s .

I.8.1. Quelle valeur de V_s choisit-on ? Est-il légitime de négliger l'influence de la résistance statorique dans ce domaine de fréquences ?

Quelle est l'évolution de l'état magnétique de la machine lorsque la fréquence augmente ?

I.8.2. Calculer la valeur maximale théorique (C_{\max}) du couple que peut fournir le moteur. On notera $\omega_{r\max}$ la pulsation des courants rotoriques pour ce point.

I.8.3. Calculer la fréquence maximale d'alimentation ($f_{s\max}$) pour laquelle le moteur pourra fournir sa puissance nominale avec une marge de sécurité de 50 % sur le couple ($\frac{C_{\max}}{C} = 1,5$). Que risquerait-il de se produire si on dépassait cette fréquence ?

I.9. Évolution des grandeurs électriques pour la caractéristique de traction maximale.

La machine est pilotée à flux ϕ_s constant en dessous de 60 Hz et à tension constante au-dessus de cette fréquence.

I.9.1. Tracer pour un flux ϕ_s de 1 Weber la fonction $C(f_s)$ pour f_s compris entre 0 et 1 Hz (feuille I.B.). En déduire ces mêmes fonctions pour les températures extrêmes de 25 °C et 175 °C.

I.9.2. Tracer pour la température nominale, l'allure des courbes $\omega_r(f_s)$ et $I_s(f_s)$ correspondant à la caractéristique de traction maximale (feuille I.C.). On prendra $f_s \approx 0; 7; 15; 60; 80; 100; 120$ Hz. Comment sont modifiées ces courbes pour les températures extrêmes ?

- I.9.3. Pour la courbe $\omega_r(f_s)$ trouvée précédemment tracer les caractéristiques de couple correspondant aux températures extrêmes.
- I.9.4. Discuter les performances de l'autopilotage de la machine où ω_r a été défini comme une grandeur de contrôle.
- I.10. Commenter les points suivants dans le cadre de l'application à la vitesse variable.
Pourquoi la cage est-elle construite en cuivre et non pas classiquement en aluminium ?
Serait-il intéressant de construire un circuit rotorique à cages multiples ou à encoches profondes ?

PARTIE II

ÉTUDE DE L'ONDULEUR DE TENSION

On étudie dans cette partie l'onduleur de tension servant à alimenter la machine asynchrone étudiée dans la partie I.

Deux thèmes seront abordés :

- le fonctionnement en pleine onde ;
- les commutations sur un bras d'onduleur.

Ces deux thèmes sont parfaitement indépendants.

L'onduleur de tension est réalisé à l'aide de 6 thyristors GTO.

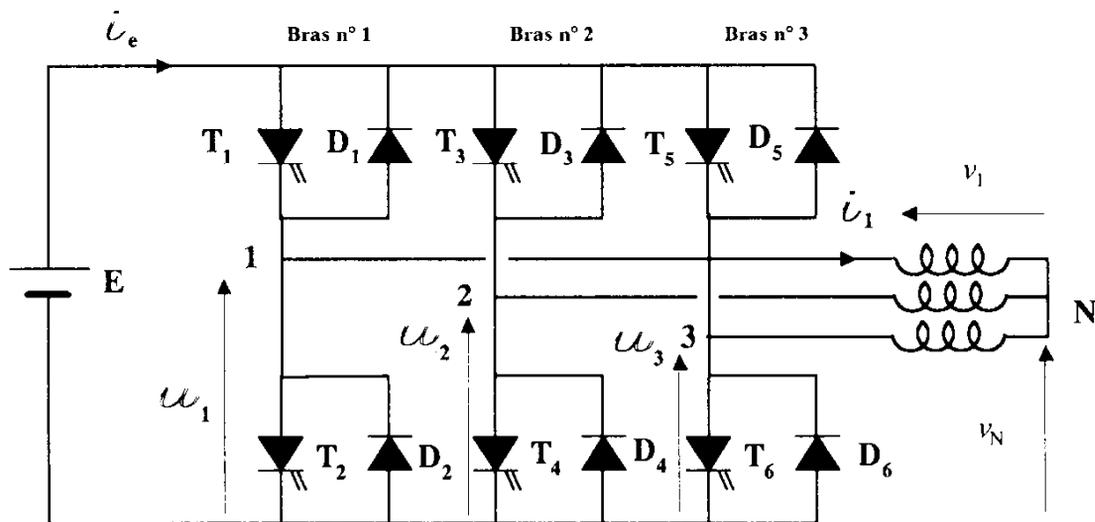


Figure II.1. — Schéma de principe de l'onduleur

Les thyristors GTO sont des composants identiques à des thyristors mais qui possèdent en plus la possibilité d'être commandés à l'ouverture par un signal de gâchette approprié.

Le fonctionnement, qualifié de pleine onde, est obtenu par le diagramme de commande suivant :

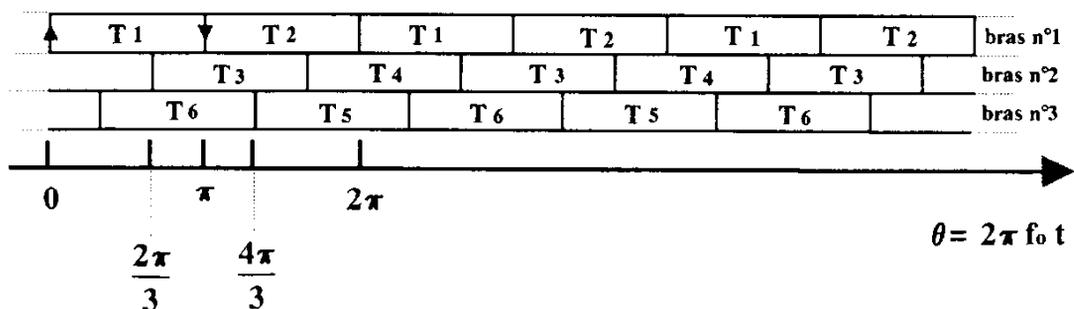


Figure II.2. — Diagramme de commande

Un thyristor GTO est commandé à la fermeture sur le front montant du créneau (ici, d'une largeur de 180°) et à l'ouverture sur le front descendant.

Hypothèses.

Dans toute cette partie on considère que les thyristors GTO sont des éléments parfaits et que la commande à l'ouverture est toujours réalisée avec succès.

La charge qui est alimentée par l'onduleur est supposée équilibrée, connectée en étoile, linéaire quant à son comportement électrique et à caractère inductif.

Notations et conventions.

La tension aux bornes d'un semi-conducteur est repérée par tension d'anode moins tension de cathode. Le courant est orienté en convention récepteur avec la tension.

On notera v_{T_i} la tension instantanée aux bornes du GTO T_i et i_{T_i} le courant. On procédera de la même façon pour tous les semi-conducteurs.

Grandeur périodique.

Une grandeur périodique sera notée :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k) \times \sqrt{2} \times \sin(k \omega t + \varphi k)$$

$\frac{2\pi}{\omega}$ étant la période fondamentale.

$X(1)$ sera appelé fondamental de la grandeur $x(t)$.

On définit le taux d'harmonique d'une grandeur périodique $x(t)$ par :

$$t_h = \frac{\left[\sum_2^{\infty} X(k)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{X(1)}$$

II.1. Formes des tensions de sortie.

II.1.1. Donner l'allure des tensions $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$ (feuille II.A).

II.1.2. En déduire la forme des tensions composées :

$$u_{12}(t) = u_1 - u_2, \quad u_{23}(t) = u_2 - u_3 \quad \text{et} \quad u_{31}(t) = u_3 - u_1.$$

II.1.3. Calculer les valeurs efficaces $U(k)$ des harmoniques de rang k présents dans les tensions composées.

Quels sont les quatre premiers harmoniques non nuls ? Quels sont les harmoniques présents dans $u_1(t)$ qui disparaissent au niveau des tensions composées ?

II.1.4. Calculer la valeur de E pour que le fondamental de la tension composée appliquée aux bornes de la charge soit égal à 1 700 volts.

II.1.5. Tracer la tension $v_N(t)$. En déduire la tensions $v_1(t)$ et la valeur efficace de ses différents harmoniques. Comment se situe le fondamental de v_1 par rapport au créneau de commande du thyristor GTO T_1 ? On rappelle que la charge est linéaire, ce qui revient à supposer qu'il existe un opérateur linéaire permettant de relier v_i à i_i (tension simple et courant de ligne).

II.1.6. Calculer les taux d'harmoniques des tensions simples et des tensions composées. Justifier le résultat obtenu. Comparer $U_1(k)$ et $V_1(k)$.

II.2. On suppose que les courants absorbés par la charge sont sinusoïdaux, de valeur efficace I et de fréquence égale à la fréquence fondamentale des tensions. On prendra $\varphi \approx \frac{\pi}{6}$ pour les graphes.

$$(v_1(t) = V\sqrt{2} \sin \omega t \quad \text{et} \quad i_1(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi))$$

II.2.1. Donner l'allure des courants dans les semi-conducteurs du bras de l'onduleur correspondant à la phase 1 (T_1, D_1, T_2, D_2) (feuille II.B.).

II.2.2. Représenter la tension qui apparaît aux bornes de T_1 (feuille II.B.).

Justifier la constitution d'un interrupteur d'un bras d'onduleur par la mise en parallèle d'une diode et d'un GTO.

II.2.3. Calculer les contraintes en courant et en tension qui peuvent apparaître sur ces semi-conducteurs en fonction de E, I et φ .

Application numérique :

$$I = 900 \text{ A} \quad \varphi = 15^\circ.$$

II.2.4. Exprimer les pertes de conduction dans les GTO sachant que la tension à leurs bornes peut être représentée par l'équation :

$$v_T = V_{TO} + r_{on} i_T$$

Application numérique :

$$I = 600 \text{ A}; \quad \varphi = 25^\circ; \quad V_{TO} = 1,75 \text{ V}; \quad r_{on} = 0,75 \text{ m}\Omega$$

II.2.5. Donner la séquence de conduction de tous les semi-conducteurs de l'onduleur (feuille II.B.).
Comment doit-on commander les GTO à la fermeture (forme du signal de gachette)?

II.3. Alimentation de l'onduleur.

II.3.1. Tracer l'allure du courant $i_E(t)$ délivrée par la source de tension qui alimente l'onduleur (feuille II.B.). Quelle est la pulsation fondamentale ω_E des ondulations ?

Montrer que $i_E(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega_0 t - \varphi)$ pour $\frac{\pi}{3} < \omega_0 t < \frac{2\pi}{3}$ avec comme origine des temps le début du créneau de commande du GTO 1 ($\omega_0 = 2\pi f_0$).

II.3.2. À partir d'un bilan de puissance, exprimer la valeur moyenne I_E de $i_E(t)$.

II.3.3. On place entre la source d'énergie, symbolisée par le générateur E et l'inductance ℓ , et l'onduleur, un filtre dont la structure est représentée à la figure II.3.

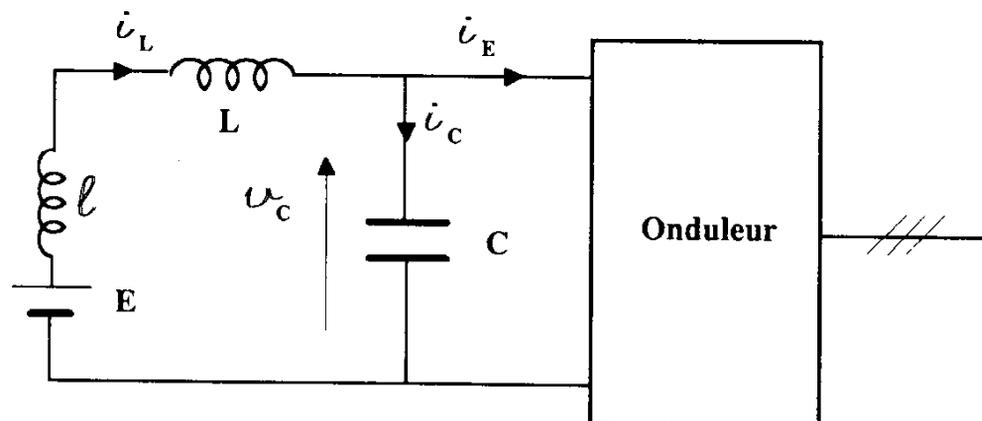


Figure II.3. - Filtre d'entrée

On définit les ondulations crête à crête Δv_C et Δi_L , de la tension $v_C(t)$ et du courant $i_L(t)$. V_C et I_L sont les valeurs moyennes de ces mêmes grandeurs.

II.3.3.1. Quel est le rôle de ce filtre ? Est-il indispensable au fonctionnement de l'onduleur ou apporte-t-il simplement une amélioration ?

II.3.3.2. Exprimer l'ondulation crête à crête Δi_E de $i_E(t)$ en fonction de φ et I . On distinguera les cas $\varphi < \frac{\pi}{6}$; $\varphi > \frac{\pi}{6}$. Pour quel déphasage cette ondulation est-elle maximale à I fixée ?

II.3.3.3. Les caractéristiques de la charge alimentée par l'onduleur font que l'ondulation Δi_E est maximale pour le point de fonctionnement suivant :

$$I = 600 \text{ A} \quad \varphi = 25^\circ \quad f_0 = 60 \text{ Hz}$$

Calculer les valeurs de L et C permettant de satisfaire les conditions :

$$\frac{\Delta i_L}{I_L} < 5\% \quad \frac{\Delta v_C}{V_C} < 5\%.$$

On assimilera le courant $i_e(t)$ à l'expression :

$$i_E(t) = I_E + \frac{\Delta i_E}{2} \sin \omega_E t$$

et on cherchera à minimiser les valeurs de C et de L sachant que la valeur de ℓ n'est pas connue a priori.

II.3.3.4. Sous quelles conditions l'ensemble source-convertisseur-charge présente-t-il une réversibilité fonctionnelle ?

II.4. Étude de la commutation T_1, D_2 — commutation à l'ouverture.

La constitution d'un bras d'onduleur est représentée sur la figure II.4.

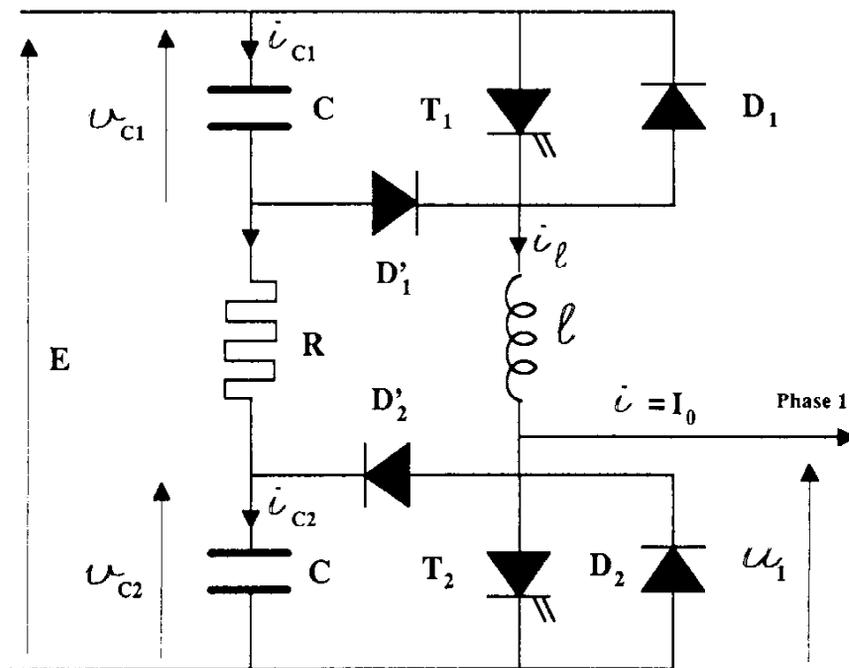


Figure II.4.

Données :

$$R = 0,4 \Omega$$

Le circuit est dimensionné de manière à ce que le GTO puisse couper 2 000 A ($I_{0,max}$) sous une tension E_{max} de 2 500 volts.

Les principales caractéristiques du GTO sont :

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\max} = 300 \text{ A}/\mu\text{s} \quad \left(\frac{dV}{dt}\right)_{\max} = 500 \text{ V}/\mu\text{s}.$$

$$V_{D_{\max}} = 4\,500 \text{ V} \quad \text{tension directe}$$

$$V_{R_{\max}} = 16 \text{ V} \quad \text{tension inverse}$$

Pendant la commutation on supposera que le courant i reste constant et égal à I_0 ($I_0 > 0$).

À l'instant $t = 0^-$ le GTO T_1 conduit le courant I_0 et tous les autres semi-conducteurs sont bloqués. À $t = 0$ on bloque T_1 par une commande sur la gâchette. On supposera son blocage instantané.

II.4.1. Quelles sont les valeurs de v_{C_1} , v_{C_2} et i_L à l'instant $t = 0^-$?

Pour chaque phase de la commutation décrite ci-dessous et celle traitée à la question II.5., on tracera le schéma du circuit actif constitué par les éléments parcourus par des courants. L'évolution temporelle des grandeurs sera présentée sur la feuille II.C. en veillant à la concordance des temps.

II.4.2. *Première phase.*

II.4.2.1. Justifier le fait que D'_1 devienne passante alors que D_2 et D'_2 restent bloquées.

Écrire l'équation traduisant l'évolution de $i_{C_1}(t)$ et tracer l'évolution de v_{C_1} , v_{C_2} , i_L et v_{D_2} .

II.4.2.2. Quel événement met fin à cette phase à l'instant t_1 ? Calculer l'expression de t_1 en supposant que $\tau = RC \ll t_1$. Donner les valeurs finales de $v_{C_1}(t_1)$, $v_{C_2}(t_1)$ et $v_R(t_1)$.

II.4.3. *Deuxième phase.*

Cette phase se termine à l'instant t_2 par la mise en conduction de la diode D'_2 . Elle est suffisamment brève pour admettre que le courant i_L reste constant pendant toute sa durée et que le courant i_{D_2} est négligeable.

II.4.3.1. Écrire l'équation régissant l'évolution de $i_{C_1}(t)$. Montrer que pendant cette phase

$$i_{C_1}(t) = -i_{C_2}(t) = \frac{I}{2}.$$

II.4.3.2. Donner l'expression de $v_{C_2}(t)$ et calculer $t_2 - t_1$. Tracer l'évolution des grandeurs citées à la question II.4.2.1. entre t_1 et t_2 .

II.4.4. *Troisième phase.*

II.4.4.1. Écrire l'équation traduisant l'évolution de $v_{C_1}(t)$.

II.4.4.2. Calculer l'évolution de $v_{C_1}(t)$. On admettra que $\tau' = \frac{\ell}{R} \gg 2\sqrt{\ell C}$.

On simplifiera les expressions en conséquence, et en particulier les constantes de temps $\left(\frac{\tau}{\tau'} \rightarrow 0\right)$.

II.4.4.3. Tracer l'évolution de v_{C_1} , v_{C_2} , i_L et i_{D_2} .

II.4.5. *Dimensionnement.*

II.4.5.1. Tracer l'évolution de la tension v_{T_1} pendant la commutation. À quelle contrainte est soumis le thyristor GTO T_1 ? Quelle doit être la valeur minimale de la capacité C ? Quelle est la tension maximale appliquée au thyristor GTO ($V_{T_{1\max}}$) ?

II.4.5.2. Tracer l'évolution du courant $i_R(t)$. On donnera les expressions de $i_R(t)$ traduisant son évolution au cours des différentes phases de la commutation. Donner les expressions approchées de l'énergie dissipée dans la résistance R en fonction de E , I_0 , C , ℓ et R pour $t < t_2$ et $t > t_2$. Pour établir ces expressions on négligera l'influence des composantes de $i_R(t)$ variant avec la constante de temps τ .

II.5. Commutation à la fermeture $D_2 \rightarrow T_1$.

II.5.1. Est-ce que ce type de commutation est présent dans le fonctionnement pleine onde décrit au début de cette partie ?

II.5.2. À l'instant $t = 0^-$, la diode D_2 conduit le courant I_0 et tous les autres semi-conducteurs sont bloqués. Quelles sont les valeurs initiales des grandeurs v_{C_1} , v_{C_2} et i_ℓ ?

II.5.3. Première phase.

À l'instant $t = 0$, on envoie une impulsion sur la gachette du GTO T_1 pour l'amorcer.

II.5.3.1. Justifier le fait que T_1 s'amorce.

II.5.3.2. Tracer l'évolution de i_ℓ , v_{C_1} , v_{C_2} et i_{D_2} . (feuille II.D.)

II.5.3.3. Calculer l'instant t_1 auquel cette phase prend fin.

II.5.4. Deuxième phase.

II.5.4.1. Montrer que la diode D'_2 devient passante et que D'_1 reste bloquée.

Écrire l'équation qui gouverne l'évolution de $v_{C_1}(t)$ en supposant que la résistance R est négligeable.

II.5.4.2. Tracer $i_\ell(t)$, $v_{C_1}(t)$, $v_{C_2}(t)$, $v_{D_2}(t)$ et calculer l'instant t_2 où cette phase se termine par la mise en conduction de D'_1 .

II.5.5. Troisième phase.

II.5.5.1. Donner l'équation à laquelle obéit $i_\ell(t)$. On fera les mêmes hypothèses qu'à la question II.4.4.2.

II.5.5.2. Tracer $i_\ell(t)$, $v_{C_1}(t)$, $v_{C_2}(t)$ et $v_{D_2}(t)$ pendant cette phase.

II.5.6. Dimensionnement.

II.5.6.1. Tracer l'évolution du courant i_{T_1} pendant la commutation. À quelle contrainte est soumis le thyristor GTO T_1 ? Quelle doit être la valeur minimale de ℓ ? Quelle est la valeur maximale de ce courant ($I_{T_1 \max}$) ?

II.5.6.2. Tracer l'évolution du courant $i_R(t)$ en donnant l'expression de sa variation temporelle au cours des différentes phases. En déduire l'énergie dissipée dans R au cours de cette commutation (mêmes hypothèses qu'à la question II.4.5.2.).

II.6. Exprimer la durée des deux commutations étudiées précédemment, en fonction de E , I_0 , C , R et ℓ (on restera dans le cadre des approximations faites : $\tau \ll \tau'$). On considère que la commutation est terminée lorsque le courant i_R est inférieur à 5 % de sa valeur maximale (en valeur absolue). Calculer ces valeurs dans le cas où $I_0 = 700$ A et $E = 2\,200$ V.

II.7. Donner les valeurs des $I_{T_1 \max}$ et $V_{T_1 \max}$ dans les conditions les plus défavorables.

II.8. Quelles sont, pour les deux commutations, les pertes engendrées dans la résistance ? ($I_0 = 700$ A $E = 2\,200$ V).

II.9. Quel est le rôle de la résistance R ? Quel compromis doit-on faire pour optimiser sa valeur ?

II.10. Dans la réalité les thyristors GTO ne commutent pas instantanément. Lors des commutations, il apparaît des pertes qui peuvent se quantifier par les relations suivantes :

$$\text{Ouverture de } T_1 \quad W_{\text{off}} = (6 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-6} I_0) \frac{dv_{T1}}{dt} (0^+).$$

$$\text{Fermeture de } T_1 \quad W_{\text{on}} = (5 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-6} E) \frac{di_{T1}}{dt} (0^+).$$

Les pertes sont exprimées en joules $\frac{di_{T1}}{dt}$, en A/ μ s et $\frac{dv_{T1}}{dt}$ en V/ μ s.

Calculer les valeurs numériques correspondant à $I_0 = 700 \text{ A}$ $E = 2\,200 \text{ V}$.

Commenter le rôle de ℓ et C dans les commutations.

PARTIE III

MODULATION DE LARGEUR D'IMPULSION

Dans cette partie on s'intéresse à l'influence sur les couples de la forme réelle de la tension appliquée à la machine asynchrone. On examine ensuite les techniques mises en œuvre pour pouvoir faire varier l'amplitude des tensions d'alimentation et améliorer leurs formes.

III.1. On admet qu'une phase de la machine asynchrone peut être décrite par le schéma III.1 où la résistance statorique est négligée. Ce schéma est supposé valable pour traduire l'évolution des grandeurs instantanées. La force électromotrice $e(t)$ traduit la conversion électromécanique.

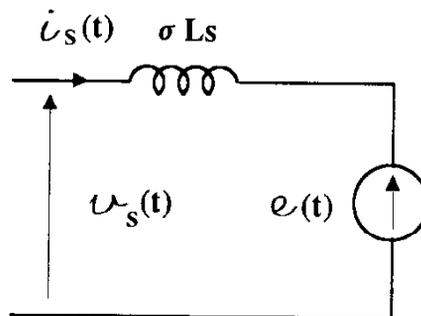


Figure III.1

Phase 1 :

$$e(t) = e_1(t) = \sqrt{2} E_0 \sin(\omega_s t - \theta_0)$$

$$v_s(t) = v_{s1}(t) = V_s \sqrt{2} \sin \omega_s t + \sum_{k=2}^{\infty} \sqrt{2} V_s(k) \times \sin(k \omega_s t + \alpha_k)$$

$$i_s(t) = i_{s1}(t) = I_s \sqrt{2} \sin(\omega_s t - \varphi) + \sum_{k=2}^{\infty} \sqrt{2} I_s(k) \sin(k \omega_s t + \alpha_k - \varphi_k).$$

On considère le point de fonctionnement suivant :

$$V_s = 490 \text{ V} \quad I_s = 500 \text{ A} \quad \varphi = 26^\circ \quad f_s = 30 \text{ Hz}$$

où I_s et V_s sont les valeurs efficaces des composantes fondamentales. La tension $v_{s1}(t)$ varie dans le temps suivant le graphe de la figure III.2 où A est égal à 363 V. Les tensions v_{s2} et v_{s3} s'obtiennent par translation de $\pm \frac{2\pi}{3}$.

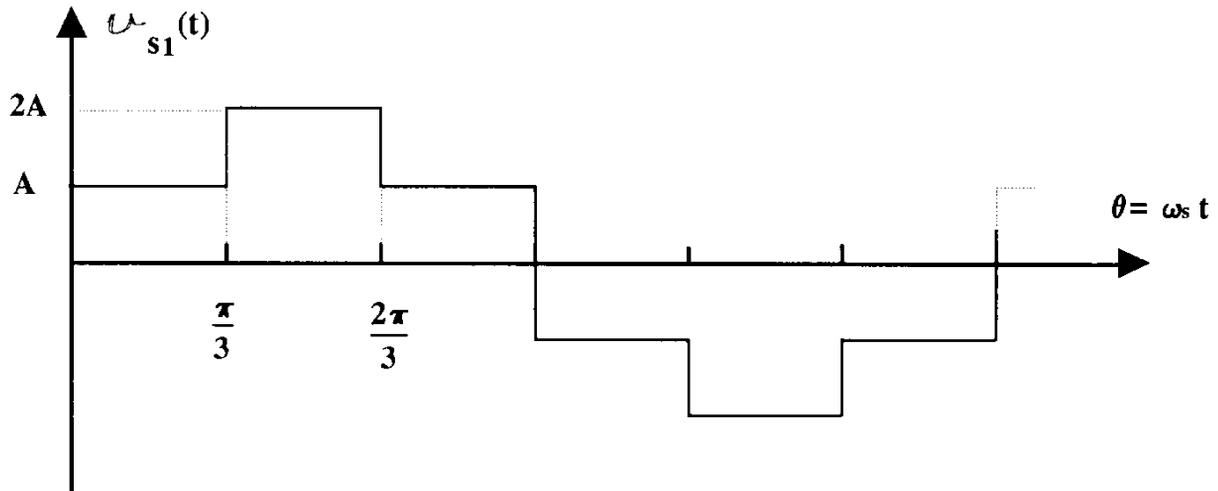


Figure III.2. – Tension $v_{s1}(t)$

- III.1.1. Sous quelle condition peut-on fournir cette tension avec le convertisseur décrit dans la deuxième partie ?
- III.1.2. Calculer l'évolution du courant $i_{s1}(t)$ au cours d'une demi-période $(0, \pi)$ en fonction de A , E_0 , θ_0 .
- III.1.3. Tracer $i_{s1}(t)$ (feuille III.A.). On calculera au préalable E_0 et θ_0 .
- III.2. On admet que la relation entre la puissance transmise au rotor et le couple reste valable en valeur instantanée.
- III.2.1. Donner l'expression du couple instantané $C(t)$ en fonction de $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$, $i_{s1}(t)$, $i_{s2}(t)$, $i_{s3}(t)$ et Ω_s .
- III.2.2. Représenter les schémas équivalents d'une phase pour l'harmonique de tension de rang k . On distinguera les cas $k = 1$ et $k \geq 1$. En déduire la valeur efficace $I_s(k)$.
- III.2.3. Donner l'expression de l'harmonique de couple $C_k(t)$ associé à l'harmonique de courant $I_s(k)$, en fonction de E_0 et $I_s(k)$.
Discuter, suivant la valeur de k , la présence d'un harmonique de couple.
- III.2.4. Exprimer $C_k(t)$ en fonction de E_0 et $V_s(k)$. Examiner plus particulièrement $k = 1$. Quelle est la pulsation de $C_1(t)$. À quoi correspond ce couple ?
- III.2.5. Dans le cas où la machine est alimentée par des tensions dont la forme correspond à celle de la figure III.2., quelle est la pulsation fondamentale de l'ondulation du couple ? Calculer l'amplitude de ce fondamental pour les données du III.1. et comparer la valeur obtenue au couple moyen développée par la machine.

III.2.6. Quelle est l'influence sur l'ondulation du couple :

- du couple moyen ?
- de l'inductance de fuite ramenée au stator σL_s ?

III.2.7. Dans quel domaine d'utilisation (C , Ω) l'ondulation du couple est-elle la plus pénalisante ?

III.3. Modulation de largeur d'impulsion, intersective synchrone.

La génération des créneaux de commande des thyristors GTO d'un bras d'onduleur est obtenue par le procédé illustré à la figure III.3.

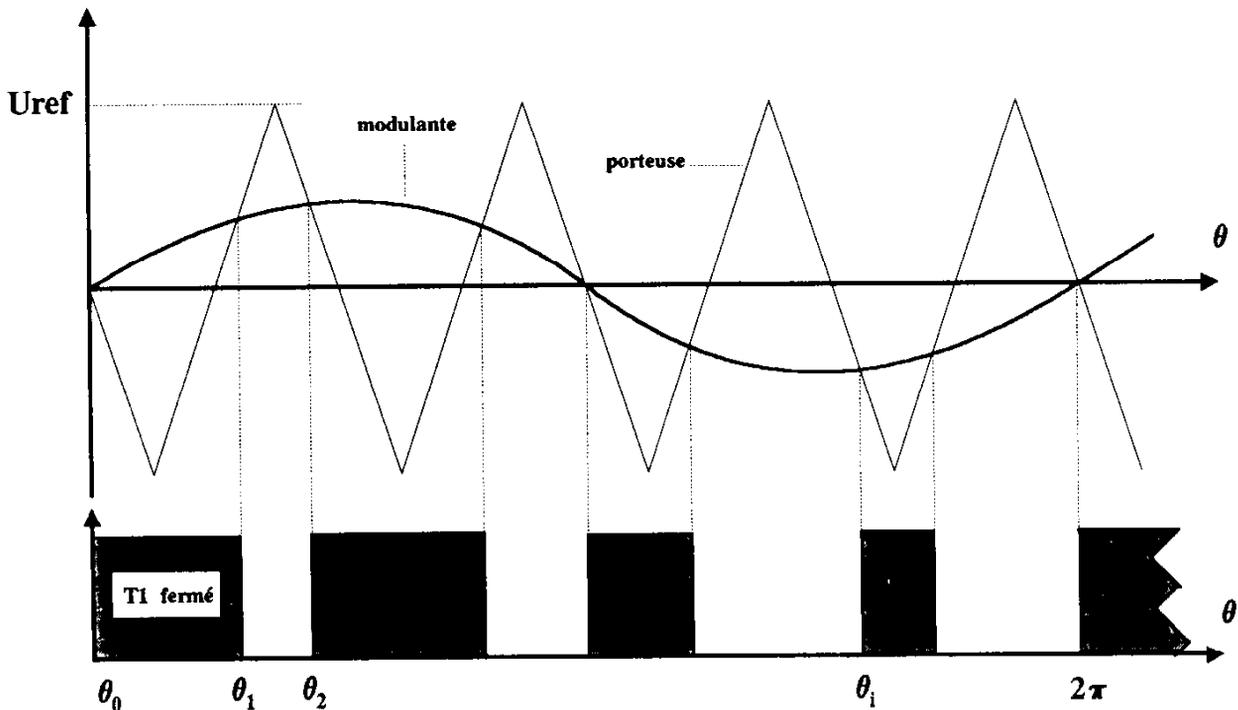


Figure III.3. - MLI intersective ($m = 4$)

La modulante a pour expression $r U_{ref} \sin \omega_s t$ pour la commande du bras 1 de l'onduleur. La fréquence de la porteuse est $f_p = m f_s$ où m est l'indice de modulation (m est entier pour ce type de MLI). La porteuse et la modulante sont synchronisées comme le présente la figure III.3.

III.3.1. Montrer que la tension $u_1(t)$ (cf. fig. II.1.) présente une pulsation fondamentale ω_s . Quel est l'intérêt de prendre m impair ? Comment se situe le fondamental par rapport à la modulante ?

III.3.2. Quelles doivent être les expressions temporelles des modulantes pour les bras 2 et 3 ? Quel est l'intérêt de prendre m multiple de 3 au niveau des porteuses servant à la génération des signaux de commande des bras 2 et 3 de l'onduleur.

Dans la suite on se placera dans le cas où m est impair et multiple de 3.

III.3.3. Exprimer l'amplitude du fondamental de la tension $u_1(t)$ en fonction des angles θ_i (fig. III.3.).

Montrer que la valeur efficace de ce fondamental est pratiquement égale à rk quand m devient grand $\left(k = \frac{E}{2\sqrt{2}}\right)$. On supposera que n tend vers l'infini pour faire ce calcul (m impair et multiple de 3).

- III.3.4. Dédire du résultat précédent que le taux de modulation (mod) maximal que l'on peut obtenir avec ce type de modulation est égal à $\frac{\pi}{4}$. mod est le rapport entre la valeur efficace du fondamental de l'onde produite en MLI et la valeur efficace de la pleine onde (GTO commandés par des créneaux 180°; cf. partie II).
- III.3.5. Afin d'assurer des commutations correctes des interrupteurs de l'onduleur, la durée de conduction de ceux-ci ne peut être inférieure à t_{\min} . Montrer que cette contrainte introduit une limitation en fonction de la fréquence f_p .
- III.3.6. On considère le plan dont l'ordonnée est mod et l'abscisse f_s . Tracer dans ce plan la zone accessible par une MLI intersective synchrone dont l'indice de modulation est m .
Données : $t_{\min} = 160 \mu s$ $f_{0\max} = 400 \text{ Hz}$ où $f_{0\max}$ est la fréquence maximale de fonctionnement de l'onduleur (nombre de découpes par seconde : f_0).
- III.3.7. Évaluer le taux d'harmonique de la tension u_1 en fonction de r et m .
Quel est le rang des harmoniques lorsque $r = 0$?
- III.3.8. Dans le cas où $r > 0$ et m suffisamment grand, les harmoniques principales de $u_1(t)$ sont aux fréquences suivantes :
 $(m - 2)f_s$ $m f_s$ $(m + 2)f_s$
Quels harmoniques apparaissent dans les tensions simples et les courants de phases ?
Quelle est alors la pulsation la plus basse, notée f_c , présente dans l'ondulation de couple ?
Quel est l'intérêt de la MLI ?
- III.3.9. On désire que la fréquence f_c soit supérieure à une valeur minimale $f_{c\min}$. Montrer que pour un indice de modulation m fixée, la fréquence fondamentale f_s délivrée par l'ondulateur doit être comprise dans un intervalle dont on déterminera les bornes.
En déduire qu'on ne peut pas utiliser aisément ce type de MLI aux très basses fréquences (f_s).

III.4. MLI à angles calculés.

La commande des thyristors GTO d'un bras d'onduleur se fait suivant le diagramme de la figure III.4.

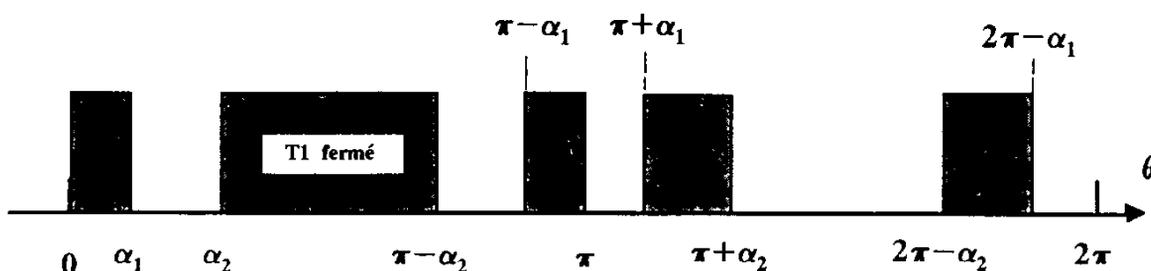


Figure III.4. - Commande à deux angles (α_1 , α_2)

- III.4.1. Quelle est la fréquence de fonctionnement de l'onduleur (f_0) en fonction de n , le nombre d'angles servant à définir la commande ?
Justifier le fait que le taux de modulation maximal que l'on peut obtenir décroît en fonction de la fréquence f_s produite. On admettra dans la suite une décroissance en $\text{mod} = (1 - (n - 1) f_s t_0)$.

III.4.2. Dans le cas de la MLI à deux angles calculés, écrire les équations qui permettent de fixer le taux de modulation et de supprimer le premier harmonique non nul des tensions composées.

Dans le cas général ($n \neq 2$), quelles harmoniques choisit-on de supprimer ?

III.5. Stratégie de modulation.

Dans le plan (mod, f_s) les points de fonctionnement de la machine sont représentés par la figure III.5. :

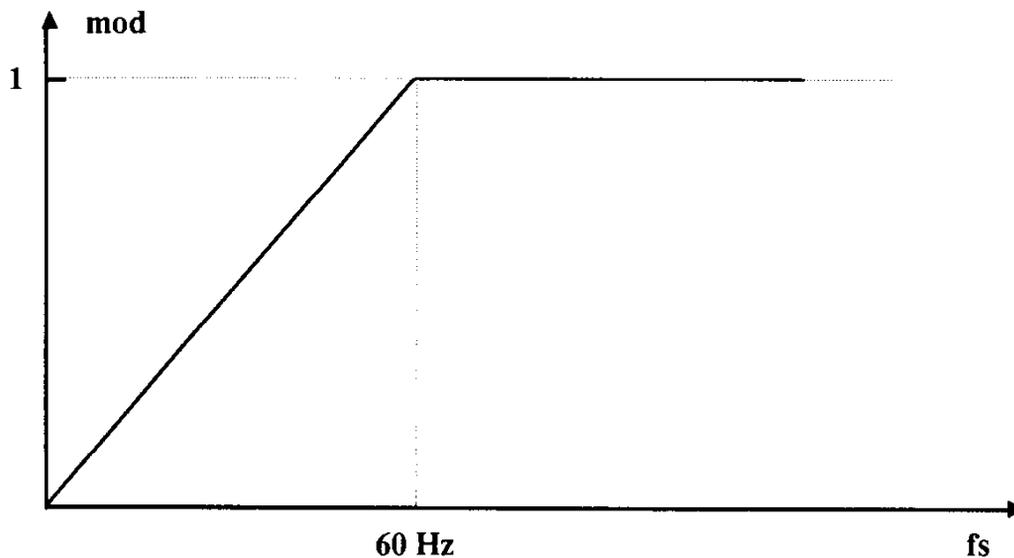


Figure III.5.

On utilise les commandes suivantes :

- $0 < f_s < 15 \text{ Hz}$ MLI asynchrone avec $f_p = 400 \text{ Hz}$;
- MLI synchrone $m = 21$; $m = 15$;
- MLI à angles calculés $n = 4$; $n = 3$; $n = 2$; $n = 1$.

On rappelle que pour la MLI asynchrone, la porteuse est à fréquence constante et commune aux trois signaux de commande. On admettra, pour simplifier, que $f_c = f_p$.

III.5.1. Déterminez pour chacune de ces commandes les zones accessibles dans le plan (mod, f_s) .

$$\text{Données : } t_0 = 1,25 \text{ ms} \quad f_{0_{\max}} = 400 \text{ Hz} .$$

III.5.2. Tracer $f_0(f_s)$ et $f_c(f_s)$ pour f_s variant entre 0 et 120 Hz .

III.5.3. Quelles raisons imposent de limiter f_0 à une valeur $f_{0_{\max}}$?

PARTIE IV

PILOTAGE VECTORIEL

Dans les applications de traction ferroviaire on veut pouvoir imposer le couple de manière précise. Dans cette partie on étudie une méthode de pilotage apte à remplir cette fonction.

IV.1. Préliminaire.

IV.1.1. Montrer que le schéma monophasé équivalent peut se mettre sous la forme de la figure IV.1.

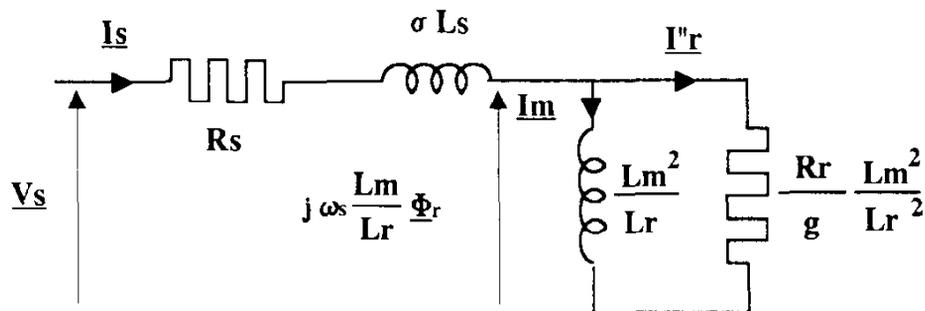


Figure IV.1.

IV.1.2. En déduire que le couple s'exprime de manière simple en fonction de ϕ_r et I_r'' .

Quelle est la phase de I_r'' par rapport à ϕ_r ?

IV.2. Le pilotage vectoriel consiste à imposer une consigne de couple en contrôlant ϕ_r et la composante de I_s en quadrature avec le flux ϕ_r .

Pour cette étude on utilise les composantes de Park qui sont obtenues par le changement de variable suivant :

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \\ -\sin \theta & -\sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Cette transformation conserve la puissance instantanée.

Le changement de variable relatif aux flux et aux courants se fait par la même transformation.

Le couple développé par la machine s'exprime par la relation $C(t) = a(i_{sq} \phi_{sd}(t) - i_{sd} \phi_{sq}(t))$.

Les équations de la machine asynchrone donnent dans un repère tournant au synchronisme ($\theta = \omega_s t + \text{const}$):

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_{sd} \\ \mathcal{V}_{sq} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s p & -L_s \omega_s & -L_m p & L_m \omega_s \\ L_s \omega_s & R + L_s p & -L_m \omega_s & -L_m p \\ L_m p & -L_m \omega_r & -(R_r + L_r p) & L_r \omega_r \\ L_m \omega_r & L_m p & -L_r \omega_r & -(R_r + L_r p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{sd} \\ \mathcal{I}_{sq} \\ \mathcal{I}_{rd} \\ \mathcal{I}_{rq} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{sd} \\ \varphi_{sq} \\ \varphi_{rd} \\ \varphi_{rq} \\ \varphi_{md} \\ \varphi_{mq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & -L_m & 0 \\ 0 & L_s & 0 & -L_m \\ L_m & 0 & -L_r & 0 \\ 0 & L_m & 0 & -L_r \\ L_m & 0 & -L_m & 0 \\ 0 & L_m & 0 & -L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{sd} \\ \mathcal{I}_{sq} \\ \mathcal{I}_{rd} \\ \mathcal{I}_{rq} \end{bmatrix}$$

p est l'opérateur de Laplace.

$\mathcal{V}_{sd}, \mathcal{V}_{sq}, \mathcal{I}_{sd}, \mathcal{I}_{sq}, \dots, \varphi_{mq}$ sont les transformées de Laplace de $v_{sd}, v_{sq}, i_{sd}, i_{sq}, \dots, \phi_{mq}$.

Dans ce repère les composantes d'un régime établi sont continues (invariantes dans le temps).

Le repère de Park est choisi de manière à ce que l'axe d soit aligné sur le flux rotorique ϕ_r . On a donc $\phi_{rq}(t) = 0$ et $\phi_{rd}(t) = \Phi_{rm}$.

NB. — Φ_{rm} est égal à $|\phi_r|$ à un coefficient près.

On notera φ_r la transformée de Laplace de Φ_{rm} .

IV.2.1. Écrire les expressions de \mathcal{V}_{sd} et \mathcal{V}_{sq} en fonction de $\mathcal{I}_{sd}, \mathcal{I}_{sq}$ et φ_r .

IV.2.2. Établir les expressions de $\mathcal{I}_{sd}, \mathcal{I}_{sq}$ en fonction de φ_r, L_m, ω_r et T_r ($T_r = \frac{L_r}{R_r}$).

IV.2.3. Simplifier ces expressions dans le cas du régime établi. Tracer dans le plan (d, q) le diagramme des vecteurs de Park v_s, i_s, Φ_{rm} (v_s a pour composante v_{sd}, v_{sq}).

Montrer que ce diagramme est identique à celui que permet d'obtenir le schéma équivalent de la figure IV.1. à une homothétie dont on donnera le facteur.

IV.2.4. Montrer que le couple s'exprime de la manière suivante $C = a \frac{L_m}{L_r} \Phi_{rm} i_{sq}$, et que cette formulation est identique à celle établie au IV. 1.2.

IV.3. Régulation du couple.

La machine asynchrone étant pilotée en tension les grandeurs de commande sont v_{sd}, v_{sq} et ω_s . On admet que l'on dispose des grandeurs i_{sd}, i_{sq}, Ω et Φ_{rm} . La régulation du couple se fait en imposant Φ_{rm} et i_{sq} à des valeurs de consigne, respectivement $\Phi_{rm \text{ cons}}$ et $i_{sq \text{ cons}}$.

IV.3.1. Montrer que la régulation dont le schéma est présenté à la figure IV.2. présente une erreur statique (ε) nulle en régime permanent. On appelle la quantité $\sigma L_s \omega_s$ « terme de découplage ».

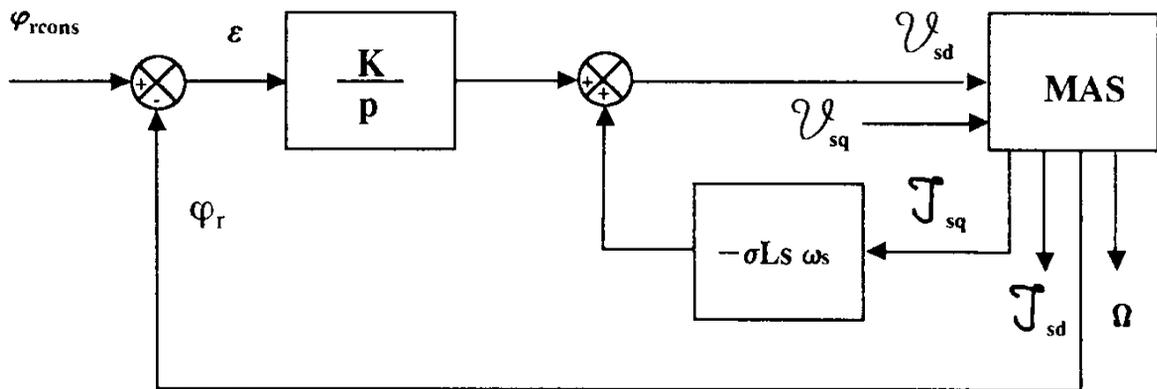


Figure IV.2.

IV.3.2. Établir un schéma analogue permettant d'asservir le courant i_{sq} avec une erreur statique nulle, le terme de découplage faisant intervenir φ_r et \mathcal{T}_{sd} .

IV.3.3. On règle le couple en agissant sur i_{sq} et en réglant Φ_{rm} à une valeur fixe. Justifier physiquement ce choix. Quelle valeur prend-t-on pour Φ_{rm} ?

Montrer que dans ces conditions la consigne $i_{sq,cons}$ peut-être établie à partir de $\Phi_{r,cons}$ et de la consigne de couple C_{cons} .

IV.3.4. Établir l'expression de ω_r en fonction de i_{sq} et Φ_{rm} . En déduire que l'on peut générer ω_s .

IV.3.5. Représenter le schéma de toute la régulation avec C_{cons} comme grandeur d'entrée.

IV.4. Les grandeurs i_{sd} , i_{sq} , Φ_{rm} ne sont pas accessibles directement par la mesure. Dans cette question on montre que l'on peut les obtenir à partir des mesures de $i_1(t)$, $i_2(t)$ (courant des phases 1 et 2), $\phi_{m_1}(t)$ et $\phi_{m_2}(t)$.

ϕ_{m_1} et ϕ_{m_2} sont les flux d'entrefer pour les phases 1 et 2 ; ils sont obtenus grâce à des spires de mesure placées dans l'entrefer.

IV.4.1. On considère un repère de Park d'axe a et b (fig. IV.3.) fixe par rapport au stator ($\theta = 0$ dans la matrice de transformation).

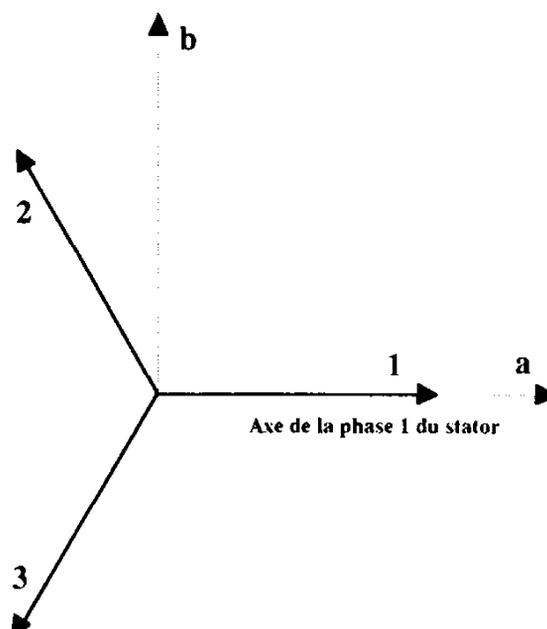


Figure IV.3.

Montrer que :

$$i_{sa} = \sqrt{\frac{3}{2}} (i_{s1})$$

$$i_{sb} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i_{s1} + i_{s2})$$

NB. — On rappelle que la machine est connectée en étoile, sans connexion de neutre.

IV.4.2. Établir les expressions de ϕ_{ma} et ϕ_{mb} .

Montrer que ϕ_{ra} et ϕ_{rb} peuvent se calculer par les relations :

$$\phi_{ra} = \frac{L_r}{L_m} \phi_{ma} + L_2 i_{sa}$$

$$\phi_{rb} = \frac{L_r}{L_m} \phi_{mb} + L_2 i_{sb}$$

NB. — La matrice liant les flux aux courants est valable quelle que soit la transformation de Park adoptée.

IV.4.3. Passage du repère a, b au repère d, q (fig. IV.4.).

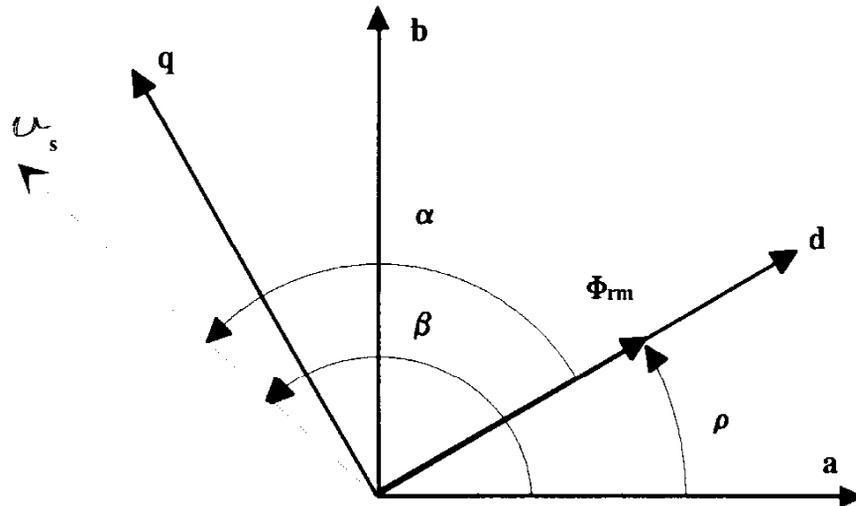
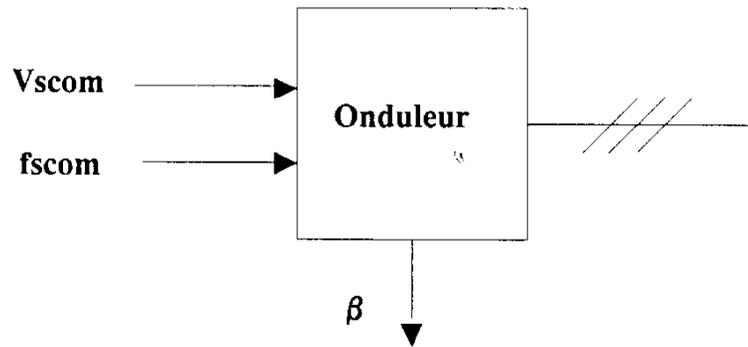


Figure IV.4.

Exprimer Φ_{rm} et ρ en fonction de ϕ_{ra} et ϕ_{rb} .

De la même façon exprimer i_{sd} et i_{sq} .

IV.5. L'onduleur qui alimente la machine asynchrone peut être commandé en fréquence ($f_{s,com}$) et en amplitude ($V_{s,com}$) (fig. IV.5.)



$$v_1(t) = h V_{s,com} \cos(2\pi f_{s,com} t)$$

$$h = \left(\frac{2E}{\pi}\right)$$

IV.5. - Schéma fonctionnel de l'onduleur

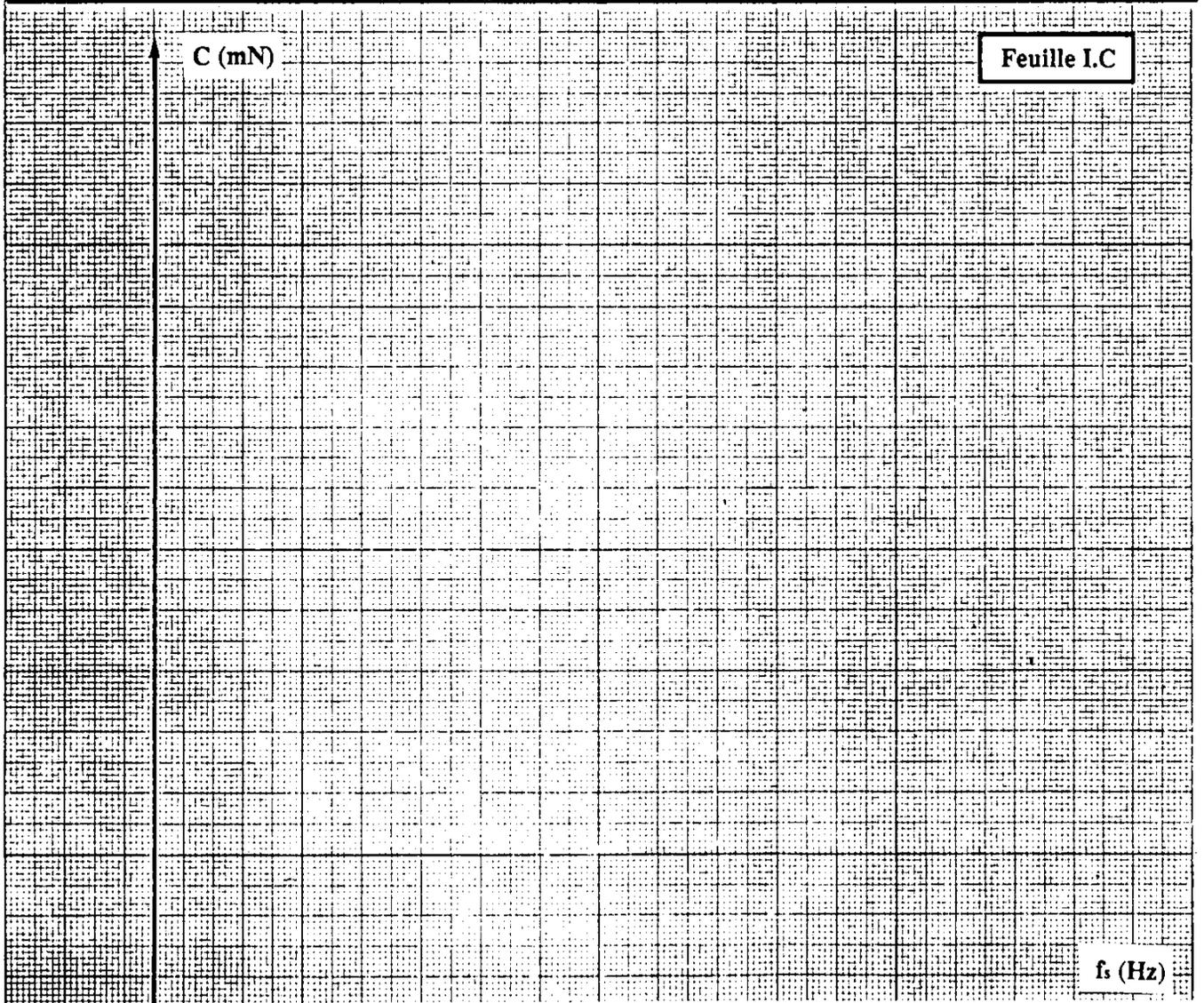
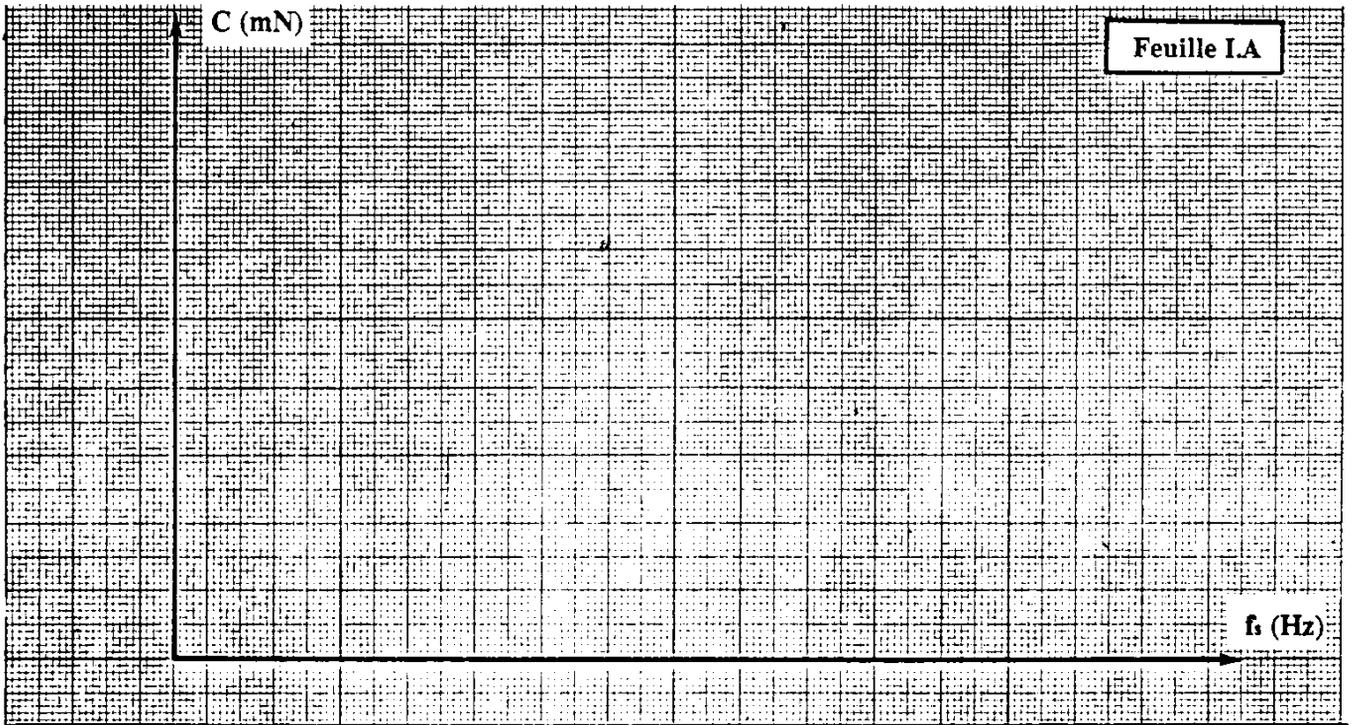
IV.5.1. Justifier de manière simple que l'on a accès à l'angle β à partir des signaux de commande de l'onduleur.

En déduire que l'on connaît l'angle α entre v_s et Φ_{rm} .

IV.5.2. Les grandeurs v_{sd} et v_{sq} qui apparaissent dans les régulations décrites aux questions IV.3.1. et IV.3.2. sont celles qui doivent être appliquées au stator de la machine.

Montrer qu'elles permettent de générer la commande en amplitude $V_{s,com}$ et une valeur de consigne pour l'angle α (α_{cons}).

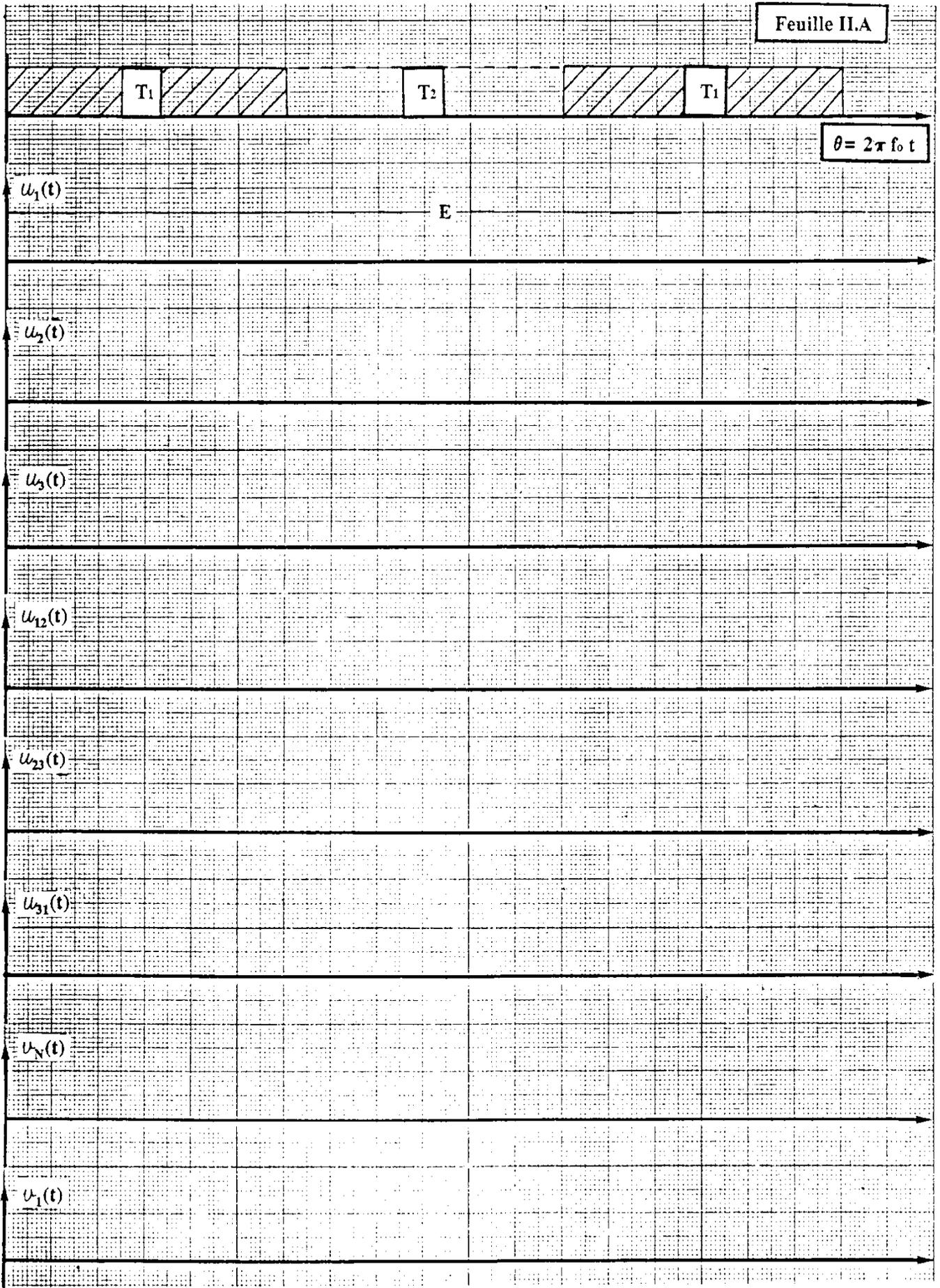
IV.5.3. Montrer que l'on peut positionner correctement v_s par rapport à Φ_{rm} en introduisant un terme correctif à $f_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$ (cf. IV.3.4.) pour générer $f_{s,com}$.

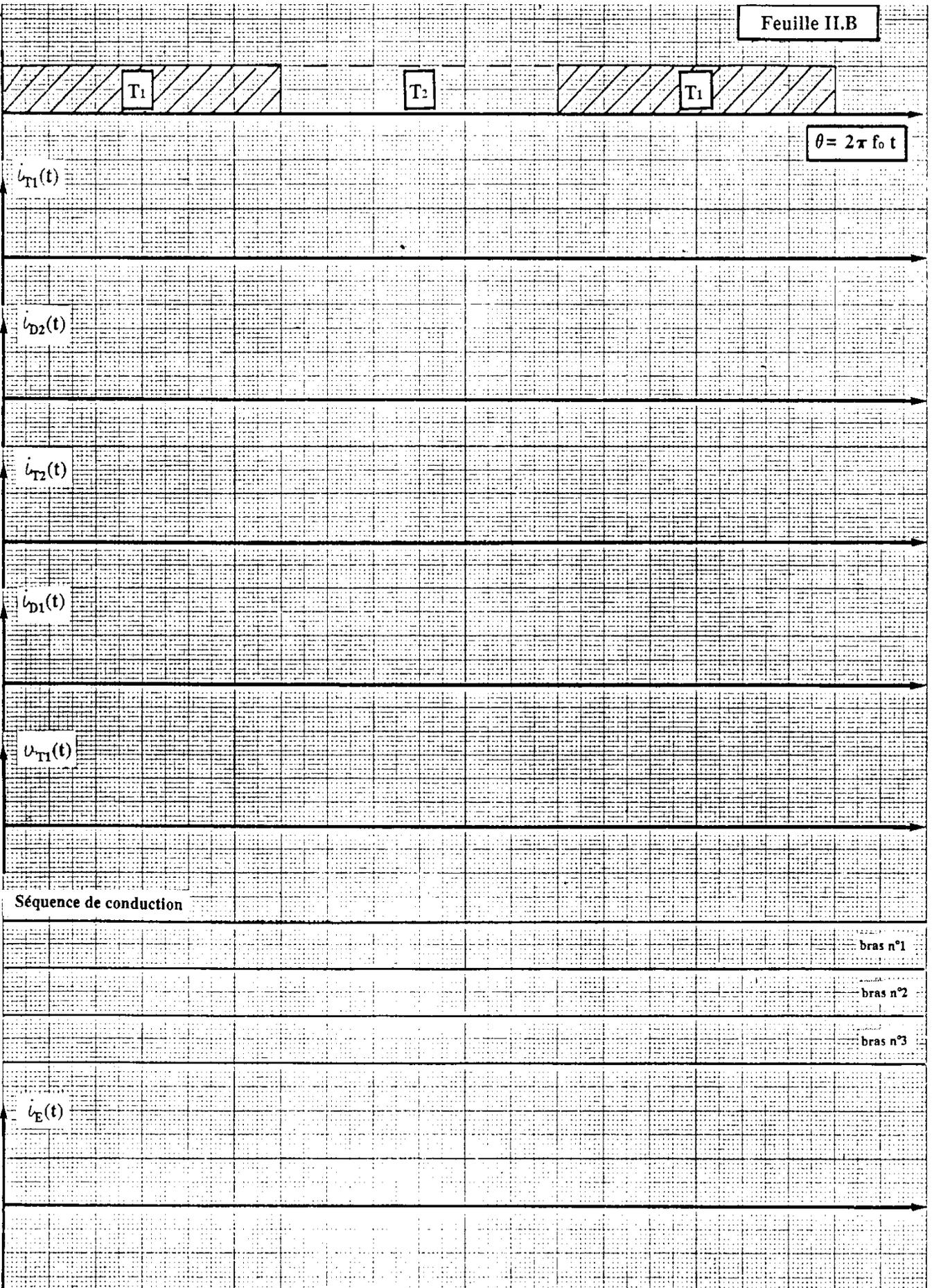


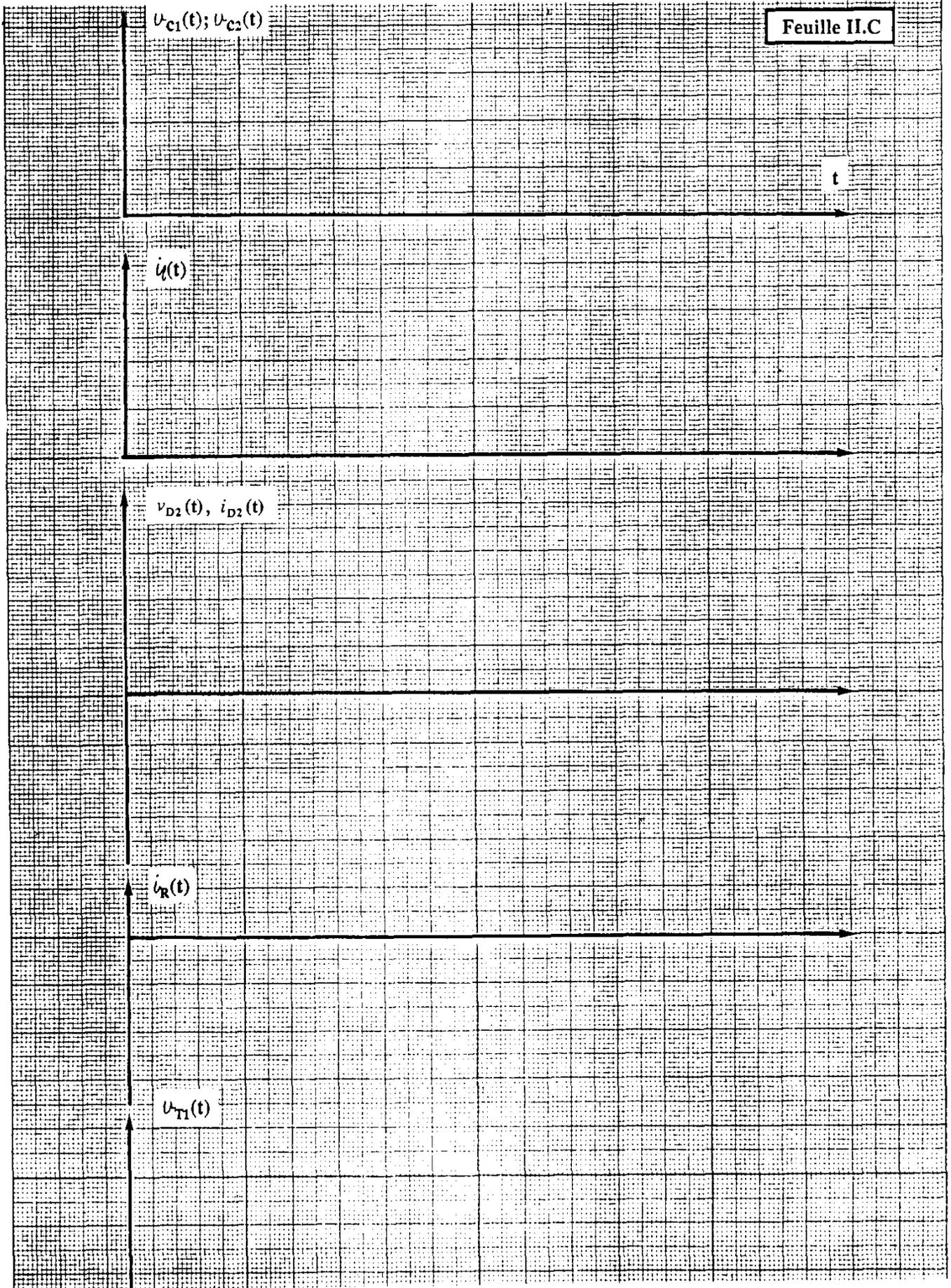
C (mN)

Feuille I.B

f_r (Hz)







Feuille II.D

$v_{c1}(t); v_{c2}(t)$

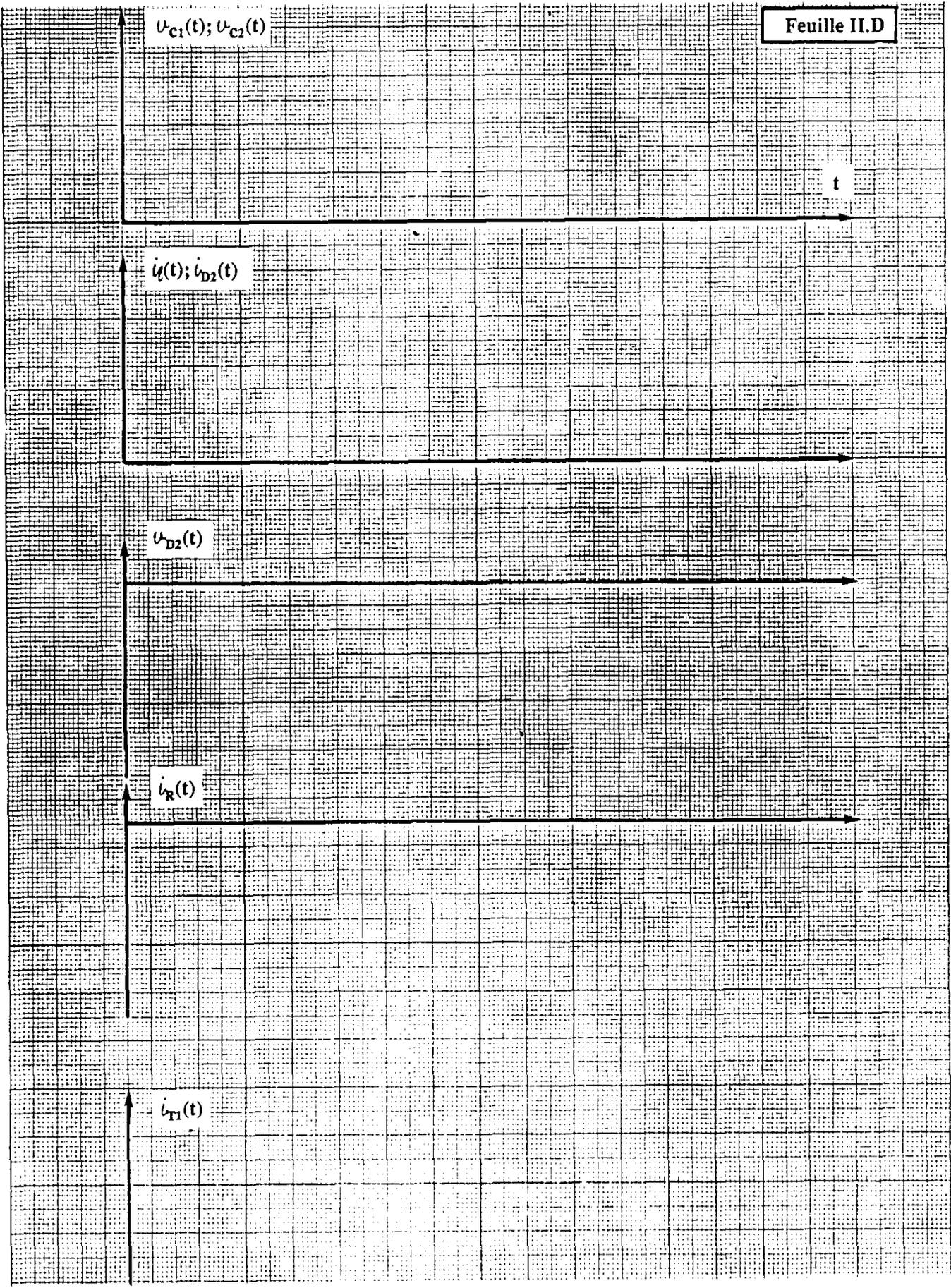
t

$i_1(t); i_{D2}(t)$

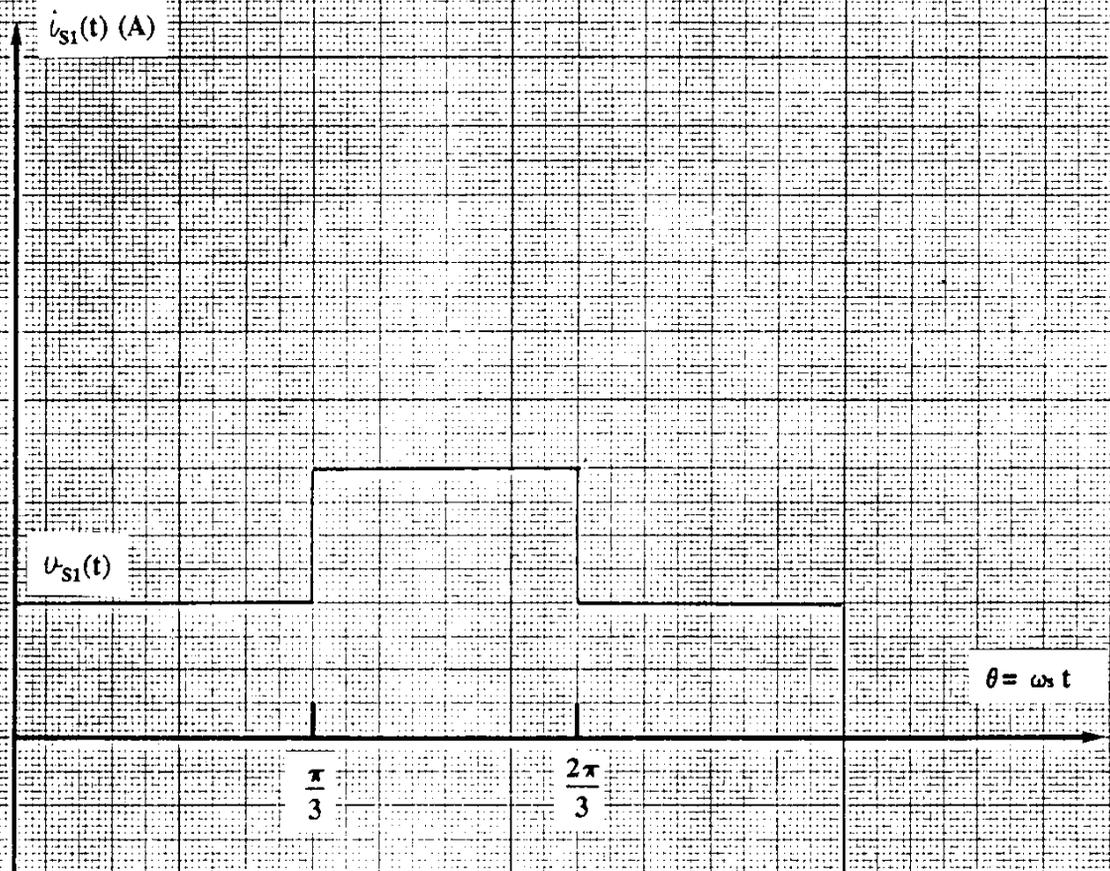
$v_{D2}(t)$

$i_R(t)$

$i_{T1}(t)$



Feuille III.A



SESSION DE 1992**concours externe
de recrutement de professeurs certifiés****section : sciences physiques**

composition de physique avec applications

Durée : 5 heures

Calculatrice de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Avertissement aux candidats.

Les trois parties sont indépendantes. Les relations données que l'on demande d'établir pourront être admises pour poursuivre le problème.

Pour les calculs numériques demandés on se limitera à la précision correspondant à celle donnée par les trois premiers chiffres significatifs. Les unités employées seront impérativement celles du système international ; l'indication de l'unité employée devra être précisée pour chacun des résultats numériques.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant la raison des initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

PREMIÈRE PARTIE

ÉLECTRICITÉ

I. CHARGE D'UN CONDENSATEUR À TRAVERS UNE RÉSISTANCE

On considère le circuit suivant :

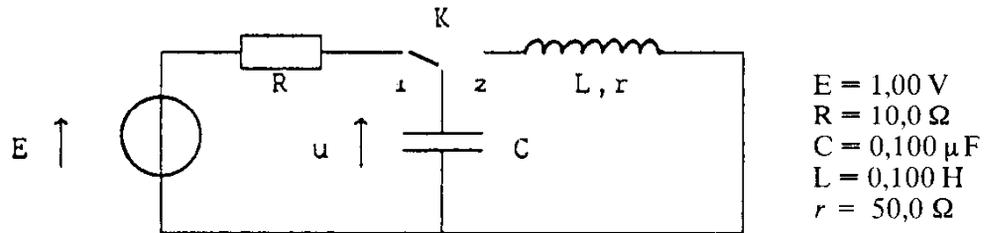


Figure 1

1. Étude de la tension aux bornes du condensateur.

À la date $t = 0$, le condensateur étant entièrement déchargé, l'interrupteur K est placé dans la position 1.

- Établir l'équation différentielle de la tension u aux bornes du condensateur. En déduire la loi : $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$. Quel nom donne-t-on à la constante τ ?
- Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $u(t)$. Tracer sa tangente à l'origine et préciser les coordonnées du point d'intersection de cette tangente avec l'asymptote.
- Calculer, en fonction de τ , le temps au bout duquel la charge du condensateur diffère de moins de 1 % de sa charge limite.

Application numérique : évaluer numériquement ce temps.

2. Étude énergétique de la charge du condensateur.

- Quelle est l'énergie \mathcal{E}_C emmagasinée par le condensateur lorsque sa charge peut être considérée comme terminée ? Donner sa valeur numérique.
- Montrer que l'énergie \mathcal{E}_G fournie par le générateur au cours de la charge est $\mathcal{E}_G = CE^2$. Donner sa valeur numérique.
- Quelle est la puissance dissipée dans la résistance R à un instant t ? En déduire l'énergie dissipée par effet Joule au cours de la charge. Retrouver ce résultat à partir des questions 2.a. et 2.b.
- Définir et calculer le rendement énergétique ρ de la charge du condensateur par un générateur à travers une résistance non inductive.
- Afin d'améliorer le rendement de la charge du condensateur, on effectue celle-ci en deux étapes. On considère pour cela le montage suivant :

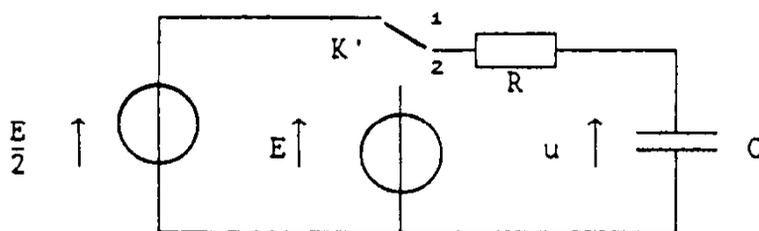


Figure 2

À la date $t = 0$, le condensateur étant déchargé, on ferme l'interrupteur K' dans la position 1. Lorsque la charge sous la tension $\frac{E}{2}$ est terminée, on bascule K' dans la position 2.

Calculer le rendement ρ' de la charge du condensateur.

f. Comment faudrait-il procéder pour faire tendre le rendement de la charge du condensateur vers 1 ?

II. DÉCHARGE DU CONDENSATEUR À TRAVERS UNE BOBINE

On revient au montage de la figure 1. La charge du condensateur sous la tension E étant terminée, on bascule l'interrupteur K dans la position 2. Cela a pour effet de fermer le condensateur sur une bobine caractérisée par son coefficient d'auto-induction L et sa résistance r . On prend comme nouvelle origine des temps la date de fermeture de K dans cette position.

1. Établir l'équation différentielle de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.
2. Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\lambda\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

et exprimer les coefficients λ et ω_0 en fonction de r , L et C .

Quels sont les régimes possibles de décharge du condensateur ?

3. Quel est le régime de la décharge du condensateur dans la bobine, compte tenu des valeurs des différents dipôles utilisés ? **On continuera l'étude dans ce cas.**
4. En notant U_0 la tension aux bornes du condensateur à $t = 0$, exprimer $u(t)$ en fonction de U_0 , λ , ω_0 et t .
5. Exprimer la pseudo-période du phénomène en fonction de λ et ω_0 et calculer sa valeur.
6. Calculer le temps au bout duquel l'amplitude des oscillations est divisée par 100.

Application numérique : Comparer ce temps à la pseudo-période du phénomène.

III. ENTRETIEN DES OSCILLATIONS

On considère maintenant le montage suivant (l'alimentation de l'amplificateur opérationnel n'est pas représentée) :

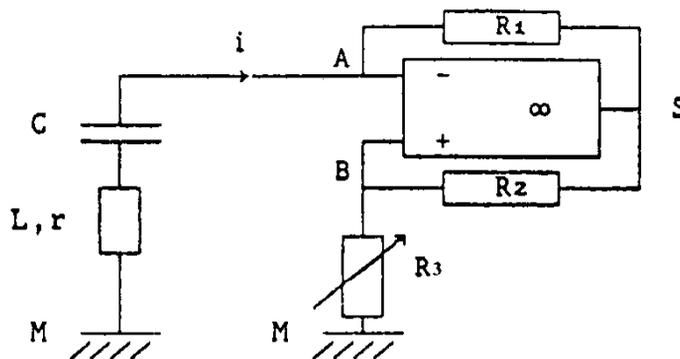


Figure 3

L'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire. M est pris comme référence des potentiels.

1. Montrer que $v_B = \frac{R_3}{R_2 + R_3} v_S$.
2. En déduire une expression de $u_{AM} = v_A - v_M$ en fonction de i , R_1 , R_2 et R_3 .
3. Quel nom donne-t-on au dipôle AM contenant l'amplificateur opérationnel ?
4. Établir l'équation différentielle de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.
5. Oscillations sinusoïdales.
 - a. À quelle condition les oscillations de $u(t)$ sont-elles sinusoïdales ?
 - b. Quelle est la période de ces oscillations ?
 - c. Comment la puissance dissipée par effet Joule dans la bobine est-elle compensée ?

IV. OSCILLATIONS FORCÉES / RÉSONANCE D'INTENSITÉ

Le condensateur et la bobine sont maintenant connectés en série aux bornes d'un générateur de tension d'impédance interne supposée négligeable et de force électromotrice : $e(t) = E_0 \cos \omega t$.

En régime sinusoïdal forcé, l'intensité du courant est $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$.

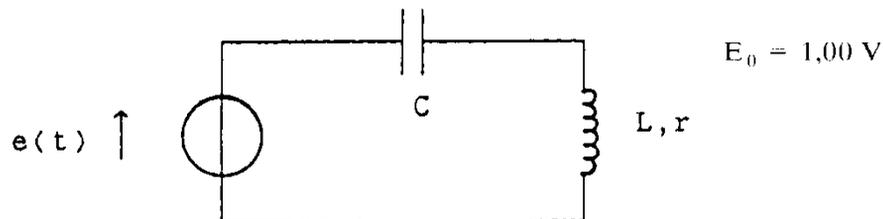


Figure 4

1. Calculer l'impédance Z du dipôle constitué du condensateur et de la bobine.
2. Étude de l'intensité efficace.
 - a. Exprimer l'intensité efficace I du courant dans le circuit en fonction de E_0 , L , r , C , ω .
 - b. Étudier les variations de I en fonction de la pulsation ω . Exprimer, en fonction de E_0 , r , L et C , la valeur maximale I_{\max} de I , ainsi que la valeur ω_0 correspondante de ω .
 - c. Tracer l'allure de la courbe représentative de $I(\omega)$.
3. Étude du déphasage entre $i(t)$ et $e(t)$.

On note φ le retard de phase de $i(t)$ par rapport à $e(t)$.

 - a. Réaliser la construction de Fresnel correspondant au circuit étudié.
 - b. Exprimer φ en fonction de r , L , C et ω .
 - c. Étudier les variations de φ en fonction de ω . Préciser en particulier la valeur de φ pour $\omega = \omega_0$.
 - d. Tracer l'allure de la courbe représentative de $\varphi(\omega)$.

DEUXIÈME PARTIE

MÉCANIQUE

I. MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL DANS UN CHAMP NEWTONIEN

On étudie le mouvement d'un satellite dans le champ gravitationnel terrestre. Ce satellite est considéré comme un objet ponctuel. La Terre est assimilée à une répartition sphérique de masse. On montre que dans ces conditions son champ gravitationnel en un point extérieur est identique à celui que créerait une masse ponctuelle placée en son centre et égale à sa masse totale.

L'étude est menée dans le référentiel géocentrique lié au centre O de la Terre et en translation par rapport aux axes de Copernic. Ce référentiel est considéré galiléen.

On ne tient compte que du champ gravitationnel terrestre.

On utilisera les valeurs numériques suivantes :

- masse de la Terre : $M_T = 6,00 \cdot 10^{24}$ kg ;
- rayon de la Terre : $R_T = 6\,400$ km ;
- constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N \cdot m² \cdot kg⁻² ;
- durée du jour sidéral : $T_0 = 86\,164$ s.

1. Donner l'expression du champ gravitationnel terrestre $\vec{\mathcal{G}}$ en un point M situé à la distance $r > R_T$ du centre de la Terre.
2. Satellites circulaires.

On désire placer un satellite de masse m sur une orbite circulaire de rayon r dont le centre sera confondu avec le centre de la Terre.

 - a. Montrer que le mouvement circulaire est nécessairement uniforme.
 - b. Le satellite ayant atteint, au cours de la phase de lancement, un point M distant de r du centre O de la Terre, quelles caractéristiques doit-on donner à son vecteur vitesse pour le placer en ce point en orbite circulaire ?
 - c. Établir l'expression de la période T du satellite en fonction du rayon de son orbite.
 - d. Établir l'expression de l'énergie E du satellite sur sa trajectoire circulaire en fonction du rayon de son orbite.
 - e. Soit λ la latitude de la base de lancement et Ω la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe de ses pôles. Quelle énergie faut-il communiquer au satellite pour le placer, depuis le sol, sur son orbite circulaire ? Quel est l'intérêt d'une base équatoriale ?
 - f. *Application numérique* : $r = 6\,600$ km ;
Calculer la vitesse du satellite sur son orbite circulaire, ainsi que la période de son mouvement.
 - g. Satellites géostationnaires.
 - Donner la définition d'un satellite géostationnaire.
 - Est-il possible de placer un satellite géostationnaire à la verticale de Paris ? Justifier la réponse.
 - Calculer le rayon de l'orbite géostationnaire.
 - Calculer la vitesse du satellite sur cette orbite.

3. Étude d'une orbite de transfert.

On désire faire passer le satellite précédent de l'orbite circulaire (\mathcal{O}_1) de rayon r_1 à l'orbite circulaire (\mathcal{O}_2) de rayon r_2 ($r_2 > r_1$). Pour y parvenir, on lui fait emprunter une orbite de transfert elliptique (\mathcal{E}) , tangente en son périhélie M_1 à l'orbite (\mathcal{O}_1) et en son aphélie M_2 à l'orbite (\mathcal{O}_2) . Les passages en M_1 de l'orbite (\mathcal{O}_1) à l'orbite (\mathcal{E}) et en M_2 de l'orbite (\mathcal{E}) à l'orbite (\mathcal{O}_2) , sont effectués en fournissant au satellite, à l'aide de propulseurs, deux impulsions permettant d'augmenter respectivement son énergie de ΔE_1 et ΔE_2 (fig. 5).

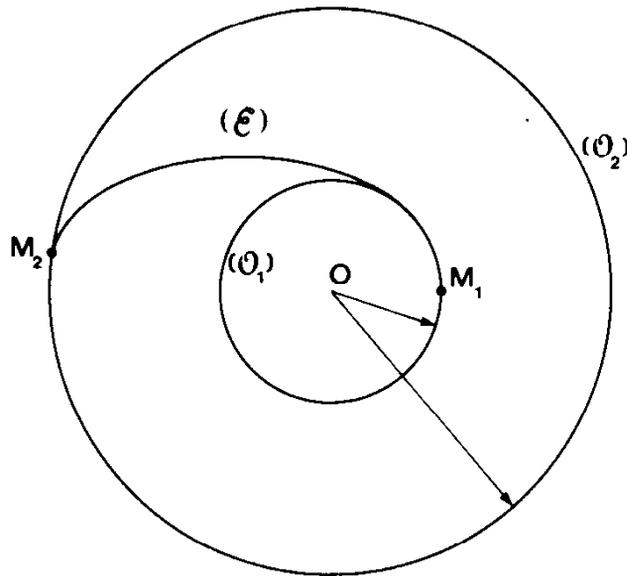


Figure 5

On admettra que les relations donnant E et T , établies avec r pour des trajectoires circulaires, restent formellement valables ici, pour des trajectoires elliptiques de demi-grand axe a en remplaçant r par a .

- Quel est le demi-grand axe de l'orbite de transfert ?
- Quelles sont les énergies respectives du satellite sur les orbites (\mathcal{O}_1) , (\mathcal{O}_2) , (\mathcal{E}) , en fonction de G , M_T , m , r_1 , et r_2 ?
- Exprimer ΔE_1 et ΔE_2 en fonction des mêmes paramètres.
Application numérique : Calculer ΔE_1 et ΔE_2 : $m = 100$ kg ; $r_1 = 6\,600$ km ; $r_2 = 42\,200$ km.
- Calculer la durée du transfert de l'orbite (\mathcal{O}_1) d'altitude 200 km, à l'orbite (\mathcal{O}_2) d'altitude 35 800 km.

II. ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL DANS UN CHAMP NEWTONIEN ATTRACTIF

Soit O un point fixe du référentiel d'étude galiléen (\mathcal{R}) .

On note r la distance à O d'un point M quelconque de l'espace et on pose :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}.$$

Une particule de dimensions négligeables, assimilée à un point matériel de masse m est animée dans (\mathcal{R}) d'une vitesse \vec{v} . Elle subit en M la seule force :

$$\vec{f} = -\frac{k}{r^2} \vec{u} \quad (k \text{ constante positive}).$$

1. Montrer que le moment cinétique en O du point matériel reste constant au cours du mouvement. En déduire que ce mouvement s'effectue dans un plan contenant le centre des forces O .

Dans la suite on aura intérêt à utiliser la base cylindrique $(\vec{u}, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ définie de la façon suivante :

- \vec{u} : vecteur unitaire de \overline{OM} ;
- \vec{u}_z : vecteur unitaire colinéaire au moment cinétique de la particule et de même sens ;
- \vec{u}_θ : vecteur tel que $(\vec{u}, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ soit orthonormée directe.

2. Montrer que la force \vec{f} dérive d'une énergie potentielle E_p . Établir l'expression de cette énergie potentielle en la prenant par convention nulle à l'infini.

3. Définir l'énergie mécanique du point matériel. Montrer que c'est une constante du mouvement.

4. Soit Ox un axe cartésien du référentiel (\mathcal{R}) . On repère la position M de la particule dans le plan de son mouvement par ses coordonnées polaires r et $\theta = (Ox, \vec{u})$.

a. On définit la constante des aires du mouvement de la particule par : $C = r^2 \dot{\theta}$. Justifier le terme « constante ».

b. Les conditions initiales du mouvement sont définies par :

$$r = r_0; \quad \theta = \theta_0; \quad \|\vec{v}\| = v_0; \quad (\vec{u}, \vec{v}_0) = \alpha_0.$$

Exprimer E et C en fonction de k , m , r_0 , v_0 et α_0 .

c. Montrer que l'énergie mécanique de la particule peut se mettre sous la forme :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E'(r) \quad \text{avec} \quad E'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{mC^2}{2r^2}.$$

d. Montrer que la fonction $E'(r)$ admet un minimum E'_m pour $r = r_m$. Exprimer E'_m et r_m en fonction de k , m , r_0 , v_0 et α_0 .

Tracer l'allure du graphe $E'(r)$.

e. Définir la condition que doit satisfaire E pour que le point matériel reste prisonnier du centre des forces.

f. Quelle est, en fonction de k , m , r_0 la valeur minimale V_{0m} de v_0 pour que le point matériel échappe au centre des forces ?

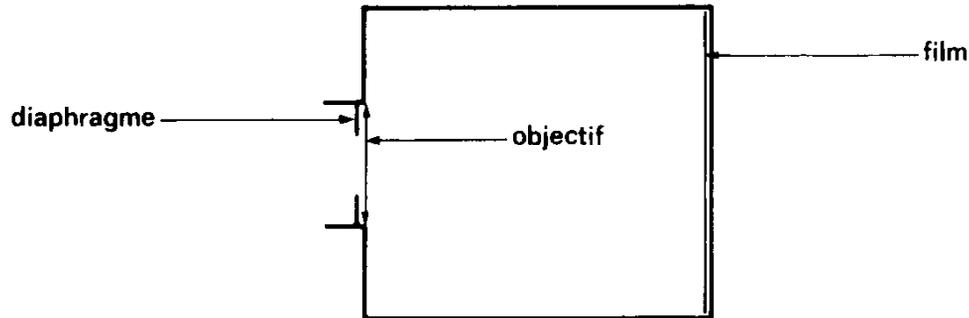
g. Quelle est la nature du mouvement lorsque $E = E'_m$?

TROISIÈME PARTIE

OPTIQUE

I. ÉTUDE D'UN APPAREIL PHOTOGRAPHIQUE

L'objectif d'un appareil photo est modélisé par une lentille mince convergente de distance focale f' , accolée à un diaphragme circulaire de diamètre D . Les axes de la lentille et du diaphragme sont confondus et f' est égale à 50 mm. La lentille est utilisée dans les conditions de Gauss. On définit le **nombre d'ouverture** N par le rapport $N = f'/D$.



- Énoncer les conditions de Gauss.
- La mise au point étant faite à l'infini, quelle est la distance de l'objectif au plan du film ?
- La distance minimale de mise au point parfaite étant de 60 cm, calculer dans ces conditions la distance de l'objectif au plan du film. Commenter le résultat.
- Notion de profondeur de champ.
L'objectif est mis au point sur l'infini. À tout point de l'axe correspond alors sur la pellicule une tache. Compte tenu du grain de la pellicule et de l'acuité visuelle, il y a netteté apparente si le diamètre de cette tache est inférieur ou égal à δ .
On note A_1 le point de l'axe le plus proche de l'objectif pour lequel ce critère de netteté apparente est satisfait.
 - Représenter sur une figure le point A_1 et son image A_1' , ainsi que les grandeurs D et δ .
 - Calculer la distance p_1 du point A_1 à l'objectif en fonction de N , f' et δ et commenter le résultat.
 - Application numérique : $\delta = 30 \mu\text{m}$.
Calculer p_1 pour $N = 2,8$ et $N = 16$.
- La tache centrale de diffraction donnée par une ouverture circulaire de diamètre D a pour rayon angulaire $\alpha = \frac{1,22 \lambda}{D}$. Quelle condition doit respecter le nombre d'ouverture de l'objectif de 50 mm de focale pour que la netteté ne soit pas limitée par la diffraction ?
Faire l'application numérique pour $\delta = 30 \mu\text{m}$ et $\delta = 10 \mu\text{m}$ (on prendra $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$). Conclusion ?
- On s'intéresse dans cette question aux valeurs pouvant être données à certains paramètres.
 - Les nombres d'ouverture disponibles au niveau de l'objectif sont : 1,8 - 2,8 - 4 - 5,6 - 8 - 11 - 16 - 22.
Quelle remarque peut-on faire et pourquoi ce choix ?
 - Les vitesses d'obturation disponibles, au niveau de l'appareil, sont, en secondes :
1/1000 - 1/500 - 1/250 - 1/125 - 1/60 - 1/30 - 1/15 - 1/8 - 1/4 - 1/2 - 1 - 2.
Quelle remarque peut-on faire à propos de ce choix ?
 - Le photographe désire diminuer la profondeur de champ tout en conservant la même exposition à sa photographie. Comment doit-il opérer ?

II. INTERFÉRENCES LUMINEUSES

On envisage le dispositif interférentiel des trous d'Young.

Une source S , de dimensions suffisamment petites pour pouvoir être considérée comme ponctuelle, éclaire un écran opaque percé de deux trous S_1 et S_2 , également de faibles dimensions, distants l'un de l'autre de a .

On note O' le milieu du segment S_1S_2 et $O'z$ l'axe normal en O' au plan opaque.

La source S se trouve au point O'' de l'axe $O'z$, à une distance d en amont du point O' . Le phénomène d'interférence est observé sur un écran (E) placé normalement à l'axe $O'z$ à une distance D en aval du point O' .

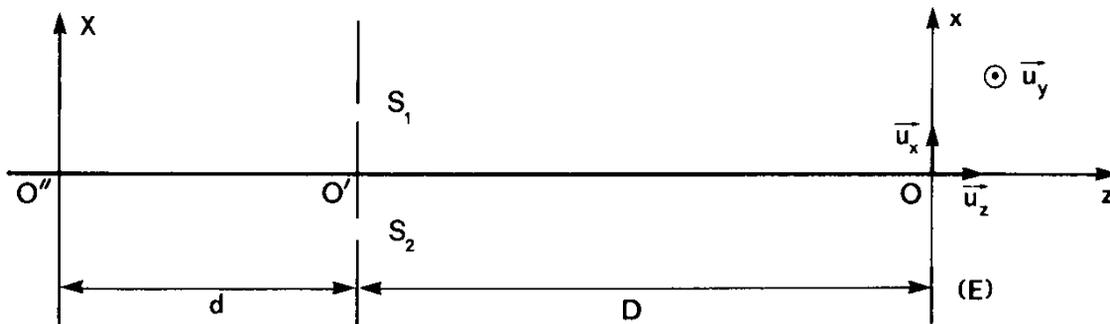
L'espace est rapporté au repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ défini de la façon suivante :

O : point de l'écran appartenant à l'axe $O'z$;

\vec{u}_z : vecteur unitaire de l'axe $O'z$, orienté du point O' vers l'écran;

\vec{u}_x : vecteur unitaire parallèle à S_1S_2 , orienté de S_2 vers S_1 ;

\vec{u}_y : vecteur unitaire tel que la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ soit orthonormée directe.



On utilisera les valeurs numériques suivantes :

$$a = 1,2 \text{ mm} \quad D = 2,00 \text{ m} \quad d = 40 \text{ cm}$$

1. Le champ d'interférences est la région de l'espace où est observé le phénomène d'interférence.
 - a. L'optique géométrique ne permet pas de prévoir l'existence d'un champ d'interférences en ce qui concerne le dispositif des trous d'Young. Pour quelle raison ? À quel phénomène physique doit-on faire appel pour en comprendre l'existence ?
 - b. Représenter sur un schéma le champ d'interférences.
2. Soit $M(x, y, 0)$ un point quelconque de l'écran (E).
 - a. Définir la différence de marche $\delta(M)$ entre les trajets des ondes parvenant en M et provenant de S_1 et S_2 .
 - b. Établir les expressions des distances S_1M et S_2M en fonction de x, y, a et D .
 - c. Sachant que dans le dispositif des trous d'Young x, y et a sont faibles devant D , en déduire l'expression approchée de la différence de marche : $\delta(M) = \frac{ax}{D}$.
3. La source S est une source monochromatique émettant une radiation de longueur d'onde λ .
 - a. Définir le lieu des points de l'écran où l'intensité lumineuse est maximale.
 - b. Définir le lieu des points de l'écran où l'intensité lumineuse est minimale.
 - c. Décrire la figure d'interférences. Définir et exprimer son interfrange.

4. S est maintenant une source de lumière blanche émettant dans tout le domaine du spectre visible : $\lambda \in [0,40 \mu\text{m} ; 0,75 \mu\text{m}]$.
- a. Décrire la figure d'interférences observée sur l'écran.
 - b. À la distance $x = 8,5 \text{ mm}$ du centre de la figure d'interférences, on place la fente d'un spectroscopie.
 - Décrire le spectre observé.
 - Calculer les longueurs d'onde des radiations non observées.

SESSION DE 1992**concours externe
de recrutement de professeurs certifiés****section : sciences physiques**

composition de chimie avec applications

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alpha-numérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numération complète (chiffres et lettres) des questions de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant la raison des initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Avertissement aux candidats.

Pour les calculs numériques demandés on se limitera aux trois premiers chiffres significatifs. L'indication de l'unité employée devra être précisée pour chacun des résultats numériques.

Le problème comporte six parties pouvant être traitées indépendamment les unes des autres.

Dans tout le problème, on supposera les gaz parfaits et les solutions idéales. Toutes les équations de réaction demandées devront être équilibrées.

Données :

Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Masses atomiques molaires de quelques éléments (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$):

H	C	O	Na	Cl	K	Mn	Ag
1,0	12,0	16,0	23,0	35,5	39,1	54,9	107,9

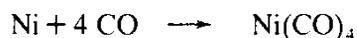
I. LES OXYDES DE CARBONE ET L'INDUSTRIE

1. Le dioxyde de carbone est un sous-produit de la synthèse industrielle de l'ammoniac. Quelles sont les réactions chimiques qui conduisent à la formation du dioxyde de carbone lorsque la matière première est le méthane ?
2. Citer une utilisation industrielle du dioxyde de carbone, une préparation et une utilisation industrielles du monoxyde de carbone (autres que celles faisant intervenir des métaux carbonyles).

II. MÉTAUX CARBONYLES

A. Structures des métaux carbonyles.

Le nickel ($Z = 28$) réagit à $50 \text{ }^\circ\text{C}$ sous une pression de 1 bar avec le monoxyde de carbone selon la réaction d'équation :



1. Quelle est la configuration électronique du nickel ? À quelle période du tableau périodique des éléments le nickel appartient-il ?
2. Quel est le nombre d'éléments de cette période ?
3. Le chrome ($Z = 24$) et le fer ($Z = 26$) donnent aussi des métaux carbonyles mononucléaires (renfermant un seul atome métallique).
Quelles sont les formules de ces composés ?
Comment peut-on prévoir leur stœchiométrie ?
4. Représenter en perspective la molécule du dérivé carbonylé du chrome.
5. Le manganèse ($Z = 25$) et le cobalt ($Z = 27$) ne donnent pas de complexes mononucléaires mais des dérivés dinucléaires. Expliquer pourquoi. Quel autre type de liaison existe-t-il dans ces complexes ?
6. Le vanadium ($Z = 23$) donne un complexe mononucléaire et ne vérifie pas la règle mentionnée en II.A.3. Comment peut-on expliquer qu'il ne donne pas de dérivé dinucléaire ?

B. Catalyse par les métaux carbonyles.

Les métaux carbonyles sont des catalyseurs importants dans l'industrie. Par exemple, on utilise un catalyseur à base de rhodium en présence d'iodure d'hydrogène pour catalyser la réaction :



1. Comment peut-on définir un catalyseur ?
2. Citer trois réactions chimiques catalysées. Pour chacune d'entre elles, préciser la nature du catalyseur et la façon dont il intervient.

III. SOLUTIONS AQUEUSES

A. Solubilité du dioxyde de carbone.

On a réalisé l'équilibre entre le dioxyde de carbone gazeux sous la pression de 1 bar et le dioxyde de carbone dissous dans l'eau à différentes températures. Dans chaque expérience, la solubilité S du dioxyde de carbone dans l'eau a été mesurée. Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

t (°C)	S (mol . dm ⁻³)	$\ln(S)$	$\frac{1}{T}$ (K ⁻¹)
0	$7,51 \cdot 10^{-2}$	- 2,589	$3,661 \cdot 10^{-3}$
10	$5,20 \cdot 10^{-2}$	- 2,957	$3,532 \cdot 10^{-3}$
20	$3,79 \cdot 10^{-2}$	- 3,273	$3,411 \cdot 10^{-3}$
30	$2,82 \cdot 10^{-2}$	- 3,568	$3,299 \cdot 10^{-3}$
40	$2,18 \cdot 10^{-2}$	- 3,826	$3,193 \cdot 10^{-3}$
50	$1,71 \cdot 10^{-2}$	- 4,069	$3,095 \cdot 10^{-3}$
60	$1,29 \cdot 10^{-2}$	- 4,351	$3,002 \cdot 10^{-3}$

1. Tracer $\ln(S) = f\left(\frac{1}{T}\right)$. Les échelles seront 2 cm pour 10^{-4} K^{-1} en abscisse et 10 cm pour une unité en ordonnée.
2.
 - a. Écrire la loi d'action de masse pour l'équilibre de dissolution du dioxyde de carbone dans l'eau :

$$\text{CO}_2_{\text{gaz}} \rightleftharpoons \text{CO}_2_{\text{dissous}}$$
 - b. L'acidité de CO_2 en solution aqueuse étant ici négligée, quelle relation existe-t-il entre la solubilité S et l'une des grandeurs qui figurent dans l'expression de la loi d'action de masse ?
 - c. Établir la relation qui existe entre la solubilité S , la température T et l'enthalpie standard de réaction de dissolution $\Delta_r H^\circ(T)$, supposée constante dans l'intervalle de température considéré.
 - d. Expliquer pourquoi l'hypothèse émise en 2.c. est raisonnable.

3. Une régression linéaire du logarithme de la solubilité en fonction de l'inverse de la température donne les résultats suivants :

$$\text{Pente} \quad : \quad 2,63 \cdot 10^3;$$

$$\text{Ordonnée à l'origine} \quad : \quad -12,22;$$

$$\text{Coefficient de corrélation} \quad : \quad 0,99936.$$

Quelles sont les unités de ces trois grandeurs ?

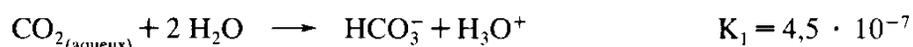
Calculer ΔH° et ΔS° supposés constants entre 0 et 60 °C.

4. Déterminer une valeur approchée de la solubilité du dioxyde de carbone dans l'eau à 25 °C sous une pression de 1 bar.

B. Dioxyde de carbone et acidité.

La présence de dioxyde de carbone dans l'atmosphère a une influence sur le pH des solutions aqueuses exposées à l'air. Dans la suite, **on supposera que la pression de l'air vaut un bar, que sa teneur en dioxyde de carbone est 0,033 % en volume et que la température est égale à 25 °C.**

Les réactions acido-basiques du dioxyde de carbone avec l'eau sont :



1. L'eau distillée en présence d'air contient un peu de dioxyde de carbone. On suppose que l'eau « distillée » est une solution saturée en dioxyde de carbone (c'est-à-dire que l'équilibre thermodynamique est atteint en ce qui concerne le dioxyde de carbone dans l'eau et dans l'air).
 - a. Calculer la concentration en CO_2 dissous (c'est-à-dire $[\text{CO}_2]$) dans l'eau distillée exposée à l'air contenant du dioxyde de carbone selon les proportions indiquées ci-dessus.
 - b. Calculer le pH de la solution aqueuse obtenue à l'équilibre.
2. On veut préparer 100 cm³ d'une solution aqueuse décimolaire d'éthanoate (acétate) de sodium. Pour cela, on dispose dans le laboratoire d'eau distillée, d'éthanoate de sodium solide cristallisé avec trois molécules d'eau ($\text{NaCH}_3\text{CO}_2 \cdot 3 \text{H}_2\text{O}$).
Décrire le mode opératoire à suivre en précisant le matériel et les quantités de produits utilisés.
3. Le pH de la solution obtenue est mesuré quelques jours après la préparation. On obtient $\text{pH} = 7,9$ alors que le pH théorique d'une solution décimolaire d'éthanoate de sodium est 8,9.
 - a. Écrire l'équation-bilan de la réaction qui a lieu.
 - b. Comparer les quantités initiales des deux réactifs et conclure.
 - c. La réaction évoquée au a. est rapide devant la dissolution du dioxyde de carbone dans l'eau. Calculer les concentrations des différentes espèces chimiques présentes dans la solution sachant que la constante d'acidité de l'acide éthanoïque (acétique) vaut : $K_a = 1,74 \cdot 10^{-5}$ à 25 °C.
 - d. La solution est-elle toujours saturée en dioxyde de carbone ? Que se passera-t-il ultérieurement ?
4. Certains carbonates métalliques sont peu solubles dans l'eau. Cependant, leur solubilité augmente lorsque le pH de la solution diminue. Expliquer qualitativement ce phénomène.

IV. CRISTALLOGRAPHIE

Le chlorure d'argent cristallise dans un système cubique. Les rayons ioniques des ions argent (I) et chlorure sont :

$$\text{Ag}^+ : r_+ = 113 \text{ pm} ; \text{Cl}^- : r_- = 181 \text{ pm}.$$

Un modèle simple de cristal ionique assimile les ions à des sphères rigides. Dans le cadre de ce modèle, on trouve que dans un cristal binaire (ne contenant que deux types d'ions différents) l'indice de coordination peut être égal à :

$$4, \text{ si } \frac{r_+}{r_-} > 0,225,$$

$$6, \text{ si } \frac{r_+}{r_-} > 0,414,$$

$$8, \text{ si } \frac{r_+}{r_-} > 0,732.$$

1. Quelle est selon vous la coordinence du chlorure d'argent ?
2. Dessiner la maille du chlorure d'argent.
3. Quel est le corps ionique type de cette structure ?
4. Calculer la masse volumique du chlorure d'argent (dans le modèle proposé, le cation et l'anion voisins sont au contact).

V. SYNTHÈSES ORGANIQUES

Un produit organique A a été préparé par deux méthodes que l'on se propose d'étudier.

A. Première méthode.

On fait réagir du benzène avec du dibrome en présence de poudre de fer. On obtient ainsi un produit B que l'on fait réagir avec des copeaux de magnésium dans l'oxyde de diéthyle (éther) pour donner C. La solution de C est versée lentement et en agitant sur de la glace carbonique (dioxyde de carbone solide) en excès. On observe un dégagement gazeux important de dioxyde de carbone. Le mélange réactionnel est hydrolysé avec une solution concentrée d'acide chlorhydrique puis on opère une extraction à l'éther. La solution dans l'éther est elle-même extraite avec une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium (soude) à 10 % ; enfin, celle-ci est acidifiée à l'aide d'acide chlorhydrique concentré. On observe la formation de cristaux blancs de A. Ces cristaux sont filtrés, séchés puis purifiés par recristallisation dans l'eau.

1. Quelles sont les formules développées de A, B et C ?
2. Écrire les équations des réactions conduisant à B, C et A.
3. Quel est le rôle du fer dans la première réaction ?
4. Quelle(s) précaution(s) doit-on prendre lors de la préparation de C ? Proposer un schéma de montage pour effectuer cette réaction.

5. Pourquoi observe-t-on un dégagement gazeux important de dioxyde de carbone lors de la réaction de C avec la glace carbonique ?
6. Justifier la procédure d'extraction utilisée pour obtenir des cristaux de A.
7. Lorsque l'on tente de vérifier la masse molaire de A par cryométrie dans le benzène, on obtient une valeur double de celle prévue à partir de la formule chimique de A. En quoi consiste une expérience de cryométrie ? Comment peut-on expliquer le résultat obtenu ?

B. Seconde méthode.

On fait réagir le benzène avec du chlorure d'éthanoyle en présence de chlorure d'aluminium ; après hydrolyse, on obtient un composé D qui réagit avec une solution basique d'hypochlorite de sodium pour donner, après destruction de l'excès d'hypochlorite par du sulfite de sodium et après extraction, A et un composé liquide E.

1. Quelles sont les formules de D et E ?
2. Comment peut-on préparer le chlorure d'éthanoyle à partir de l'acide éthanöique ?
3. Quelle quantité de chlorure d'aluminium doit-on utiliser si on opère avec un dixième de mole de benzène et de chlorure d'éthanoyle ?
4. Proposer un mécanisme pour la réaction conduisant à D.
5. Écrire l'équation de la réaction de l'ion sulfite avec l'ion hypochlorite en milieu basique.
6. Proposer un protocole expérimental pour extraire A et E séparément du mélange réactionnel.

VI. CHIMIE ORGANIQUE ET SPECTROSCOPIE

On fait réagir de l'éthanoate d'éthyle sec contenant environ 2 % d'éthanol avec du sodium. Il se produit une réaction vigoureuse et, après extraction et distillation sous pression réduite, on obtient un produit liquide A de formule $\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{COOCH}_2\text{CH}_3$. On observe dans le spectre infrarouge une bande d'absorption très intense à 1743 cm^{-1} . Par ailleurs, on a obtenu le spectre RMN^{-1}H de A dans le deutérochloroforme et les signaux suivants sont observés :

Déplacements chimiques δ (en ppm)	Multiplicité	Intégration (en cm)
4,2	quadruplet ($J = 7\text{ Hz}$)	6,0
3,5	singulet	5,9
2,2	singulet	8,9
1,3	triplet ($J = 7\text{ Hz}$)	9,1

(Les déplacements chimiques sont mesurés par rapport au tétraméthylsilane).

1. Interpréter les données spectroscopiques (on attribuera les différents signaux à des atomes ou groupes d'atomes de la molécule).
2. Quelle est la signification de l'abréviation ppm ?
3. Pourquoi utilise-t-on des solvants deutériés en RMN ?

SESSION DE 1992

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

section : physique
et électricité appliquée

composition de physique avec applications

Durée : 5 heures

Calculatrice de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

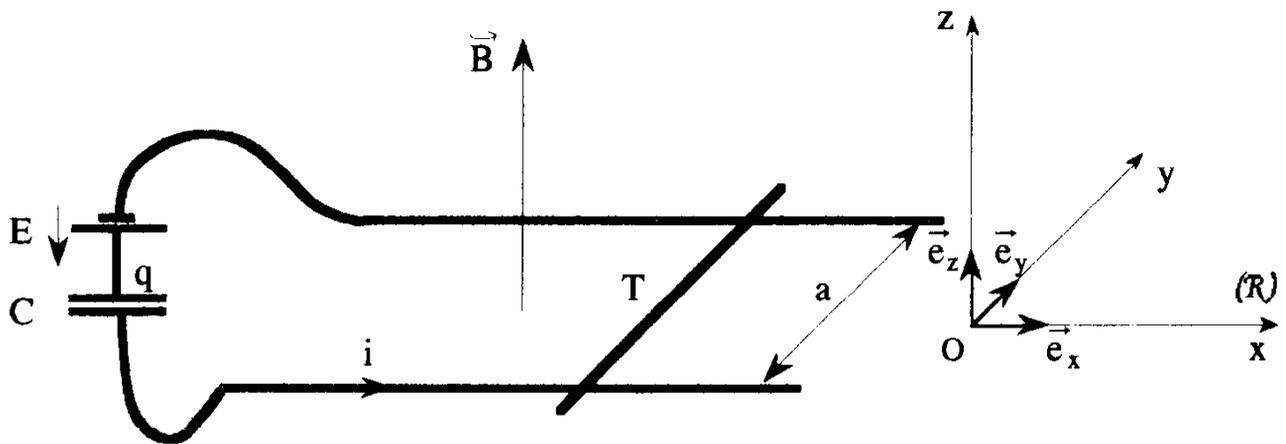
Avertissement aux candidats :

- Les trois parties sont indépendantes. Il n'est pas nécessaire de traiter l'ensemble des parties pour obtenir la note maximale. Dans une même partie les questions indépendantes des précédentes sont notées (*). Les relations données que l'on demande d'établir pourront être admises pour poursuivre le problème.
- Pour les calculs numériques demandés on se limitera à la précision correspondant à celle donnée par les deux ou trois premiers chiffres significatifs. Les unités employées seront impérativement celles du système international, ou leurs multiples ou sous multiples ; l'unité utilisée devra être précisée pour chacun des résultats numériques.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant la raison des initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

1. Exercice d'électricité

Une tige métallique T de masse m est mobile sans frottement sur deux rails conducteurs parallèles situés dans un plan horizontal, et distants de a . Au cours de son mouvement la tige reste constamment orthogonale aux deux rails. Le système constitué des rails et de la tige est relié à un circuit électrique orienté comprenant un générateur de tension de force électromotrice E constante et un condensateur de capacité C . On considère que la résistance totale des rails, des fils de jonction et des contacts tige-rails est constante et égale à R . On néglige l'inductance propre du circuit.

L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme et indépendant du temps $\vec{B} = B \vec{e}_z$, orthogonal au plan défini par les rails et parallèle à l'axe Oz d'un repère orthonormé direct (O, x, y, z) de vecteurs de base \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z (figure 1). À l'instant initial $t = 0$ la tige est au repos et le condensateur ne porte aucune charge.



- figure 1 -

1.1. On note $\vec{v} = v(t) \vec{e}_x$ le vecteur vitesse caractérisant la translation de la tige à la date t . Exprimer la force électromotrice e induite à l'instant t par son déplacement, en fonction de B , $v(t)$ et a . On adoptera la convention habituelle selon laquelle e est positive si, seule dans le circuit fermé, elle y fait circuler un courant d'intensité positive.

1.2. On note $i(t)$ l'intensité du courant électrique circulant dans le circuit et $q(t)$ la charge de la plaque du condensateur directement reliée au générateur. Établir une première relation entre q et v en écrivant la loi des mailles relative au circuit.

1.3. Le référentiel d'étude étant supposé galiléen, écrire l'équation fondamentale de la dynamique déterminant le mouvement de la tige. En déduire une deuxième relation entre $q(t)$ et $v(t)$.

1.4. Montrer que $v(t)$ est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{Ba}{mR} E$$

où τ peut se mettre sous la forme : $\tau = \alpha R C$. Exprimer le coefficient α en fonction des données.

1.5. En déduire les expressions de $v(t)$, $q(t)$ et $i(t)$.

1.6. On considère l'état permanent (ou stationnaire) atteint au bout d'un temps t très supérieur à τ . Exprimer :

- la vitesse v_{limite} de la tige en fonction de B , a , C , E , m et α ;
- l'énergie cinétique E_k finale acquise par la tige ;
- la charge q_{limite} du condensateur en fonction de C , E , et α ;
- l'énergie W_C emmagasinée dans le condensateur ;
- l'énergie W_g fournie par le générateur au cours de l'opération.

1.7. Déduire de ce qui précède l'expression W_J de l'énergie dissipée par effet Joule au cours de l'opération. Cette énergie est indépendante de la valeur de la résistance R et cela peut paraître paradoxal si $R = 0$. Commenter ce résultat.

2. Étude mécanique du mouvement d'un rotor

2.1. Préliminaire : questions de cours

2.1.1. Définir le moment $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$ par rapport à un point O d'une force \vec{F} appliquée à un point matériel situé en un point M . Faire un schéma. Établir la relation liant le moment $\vec{\mathcal{M}}_O$ par rapport au point O , et celui $\vec{\mathcal{M}}_{O'}$ par rapport à un autre point O' .

2.1.2.(*). Définir, dans un référentiel d'étude (\mathcal{R}) , le moment cinétique \vec{L}_O par rapport au point O d'un point matériel de masse m situé au point M et animé relativement à ce référentiel d'une vitesse caractérisée par le vecteur \vec{v} . Énoncer alors le théorème du moment cinétique pour un point matériel; préciser ses conditions d'application.

2.1.3. On considère un système de deux forces, la force $\vec{F}_1 = \vec{F}$ appliquée au point matériel M_1 et la force $\vec{F}_2 = -\vec{F}$ appliquée au point matériel M_2 . Montrer que le moment de ce système de deux forces, par rapport à un point O quelconque, est indépendant de la position de ce point. Exprimer alors la norme du moment \vec{T} de ce couple de forces en fonction de $\|\vec{F}\|$ et d'un élément géométrique que l'on précisera.

2.1.4.(*). On considère un solide, parfaitement indéformable, en mouvement de rotation, relativement à un référentiel galiléen d'étude (\mathcal{R}) , autour d'un axe fixe (Δ) à la vitesse angulaire ω ; ce solide pourra être considéré comme étant constitué de N points matériels rigidement liés entre eux, ou comme une distribution continue de masse volumique ρ .

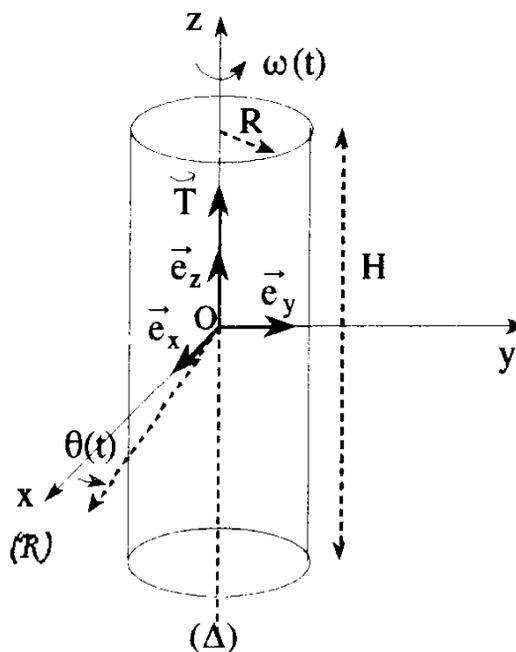
Définir le moment d'inertie J de ce solide par rapport à l'axe de rotation (Δ). Exprimer le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe (Δ) pour ce solide, dans ce référentiel d'étude, en précisant, à l'aide d'un schéma, les conventions d'orientation et de signe choisies.

2.2.(*) Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe

On considère un solide ayant la forme d'un cylindre droit, homogène (de masse volumique ρ constante), de rayon R , de hauteur H , de masse m . Il sera supposé constituer le rotor d'une machine tournante. On appelle J son moment d'inertie par rapport à son axe de symétrie (Δ).

Ce solide est mobile autour de son axe de symétrie (Δ) qui coïncide avec l'axe vertical fixe Oz d'un référentiel (\mathcal{R}) supposé galiléen (figure 2).

S'il est soumis à un couple de moment $\vec{T} = T \vec{e}_z$, celui-ci sera supposé moteur lorsque T est positif, résistant dans le cas contraire. La rotation de ce cylindre, par rapport à une position origine, est repérée par l'angle $\theta(t)$. Elle est donc positive pour une rotation effectuée dans le sens direct. La vitesse angulaire de rotation du solide est donc donnée par la relation : $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$.



- figure 2 -

2.2.1. Établir, ou donner l'expression du moment d'inertie J de ce solide par rapport à son axe de symétrie (Δ) en fonction de m et R .

Application numérique : $R = 5,00$ cm ; $H = 15,5$ cm ; $J = 0,0120$ kg.m². En déduire la masse volumique ρ du matériau utilisé.

2.2.2.(*) Ce solide est supposé soumis à un couple moteur constant de moment T_m et à un couple résistant, du type frottement fluide, ayant un moment de la forme $T_r = -\lambda\omega$. Établir l'équation différentielle dont $\omega(t)$ est solution. Intégrer cette équation sachant qu'à l'instant initial, $t = 0$, la vitesse angulaire du rotor est nulle. On introduira pour cela la constante de temps τ caractéristique de ce système et la vitesse angulaire limite ω_0 (le nombre de tours par minute correspondant est noté n_0), théoriquement obtenue au bout d'un temps infini. Tracer la courbe représentative des variations de $\omega(t)$. Vérifier que la tangente à l'origine coupe l'asymptote au point d'abscisse $t = \tau$.

Application numérique : $T_m = 3,00$ N.m ; $n_0 = 1500$ tr / min. En déduire les valeurs de la grandeur λ , de la constante de temps τ et de la puissance mécanique P_m exercée par le couple moteur en régime permanent.

2.2.3.(*) On suppose maintenant que ce rotor, soumis au couple moteur constant de moment T_m et au couple de frottement fluide de moment T_r , tourne depuis très longtemps à la vitesse angulaire limite constante ω_0 . À l'instant $t = 0$ on annule alors brusquement le couple moteur précédent. Le solide n'est alors soumis qu'au couple résistant de frottement fluide caractérisé par T_r . Donner la nouvelle expression de $\omega(t)$. En déduire l'expression du nombre total N_1 de tours effectués avant l'arrêt (théoriquement obtenu au bout d'un temps infini).

Application numérique : Calculer N_1 .

2.2.4.(*) On suppose à nouveau que ce rotor, soumis au couple moteur constant de moment T_m et au couple de frottement fluide de moment T_r , tourne depuis très longtemps à la vitesse angulaire limite constante ω_0 . À l'instant $t = 0$ on annule alors brusquement le couple moteur précédent et l'on applique à partir de cet instant un frein qui exerce un couple de moment T_f que l'on supposera constant (et négatif). Le solide n'est alors soumis qu'au couple de frottement fluide (T_r) et au couple supplémentaire de moment T_f . Donner la nouvelle expression de $\omega(t)$. En déduire le temps t_2 que dure le mouvement ainsi que le nombre total N_2 de tours effectués avant l'arrêt.

Application numérique : $T_f = -1,00$ N.m. Calculer t_2 et N_2 .

3. Optoélectronique

3.1. Préliminaire : questions de cours

3.1.1. Une onde électromagnétique plane monochromatique se propage dans le vide à la vitesse c_0 égale à la vitesse de la lumière dans le vide. On la caractérise par sa longueur d'onde λ dans le vide. Préciser les domaines de longueur d'onde, dans le vide, correspondant aux radiations visibles, infra-rouges et ultra-violettes. Cette même onde se propage dans un milieu linéaire, homogène, isotrope et non absorbant à la vitesse c . Qu'appelle-t-on milieu linéaire ? milieu homogène ? milieu isotrope ? Comment définit-on l'indice de réfraction d'un tel milieu ? Comment se propage la lumière dans un milieu possédant ces trois propriétés ?

3.1.2.(*) On considère un dioptre séparant deux milieux linéaires, homogènes, isotropes et non absorbants, caractérisés respectivement par les indices n_1 et n_2 . Une onde plane monochromatique qui se propage dans le milieu d'indice n_1 arrive sur le dioptre. Définir le plan d'incidence et l'angle d'incidence. Énoncer clairement les lois de Descartes (ou de Snell) pour la réflexion et la réfraction.

Dans certaines conditions il ne peut y avoir d'onde réfractée, on dit alors qu'il y a réflexion totale. Préciser ces conditions.

3.1.3.(*) Lorsqu'il existe une onde réfléchie et une onde transmise, on peut définir, pour l'énergie lumineuse, un facteur de réflexion R et un facteur de transmission T . Dans le cas particulier de l'incidence normale, on rappelle que le facteur de réflexion pour l'énergie lumineuse est donné, pour un tel dioptre, par la formule de Fresnel :

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

Tournez la page S.V.P.

En déduire la valeur du facteur de transmission en énergie correspondant, T .

Application numérique : On considère un système optique, le zoom d'un appareil photographique par exemple, comme étant constitué de dix lentilles ayant même axe optique, et supposées non absorbantes. Si aucune de ces lentilles n'est traitée anti-reflet, chacune est alors constituée de deux dioptres séparant deux milieux d'indices différents, l'air d'indice n_1 supposé égal à 1, et le verre d'indice $n_2 = 1,50$. Calculer le facteur de réflexion en énergie R et celui de transmission T , sous incidence normale, pour un dioptre seul. En admettant que les valeurs des facteurs de réflexion et de transmission restent sensiblement égales à celles correspondant au cas particulier de l'incidence normale, calculer le facteur de transmission T' total en énergie d'un tel système. Conclure.

3.1.4.(*). Définir ce que l'on appelle angle solide. Qu'elle est l'unité d'angle solide dans le Système International ? Montrer que l'angle solide Ω d'un cône de demi-angle au sommet θ est donné par : $\Omega = 2\pi (1 - \cos\theta)$. En déduire la valeur de l'angle solide sous lequel on voit tout l'espace depuis un point quelconque.

3.2.(*). Étude d'une diode électroluminescente

Une diode électroluminescente ou LED (Light Emitting Diode) est réalisée à partir d'une jonction pn polarisée dans le sens direct, utilisant des semi-conducteurs fortement dopés dans lesquels les recombinaisons des porteurs excédentaires sont pour la plupart radiatives. La mobilité des électrons étant beaucoup plus grande que celle des trous, la zone émettrice est la région dopée p dans laquelle diffusent les électrons. Pour la plupart des diodes électroluminescentes actuelles, le rendement quantique interne (défini comme le rapport du nombre de photons créés au nombre d'électrons qui traversent la jonction) est proche de 100 %.

3.2.1. Caractériser le spectre d'émission d'une LED.

3.2.2. On considère un dioptre plan séparant deux milieux linéaires, homogènes, isotropes, non absorbants, d'indices différents : le milieu semi-conducteur émetteur (d'indice $n_1 = 3,50$) et l'air (d'indice $n_2 = 1$). On suppose qu'un photon est émis au sein du milieu semi-conducteur dans une direction a priori quelconque. Montrer que seuls les photons arrivant sur le dioptre sous une incidence inférieure à θ_0 , dont on donnera l'expression, peuvent traverser l'interface semi-conducteur—air.

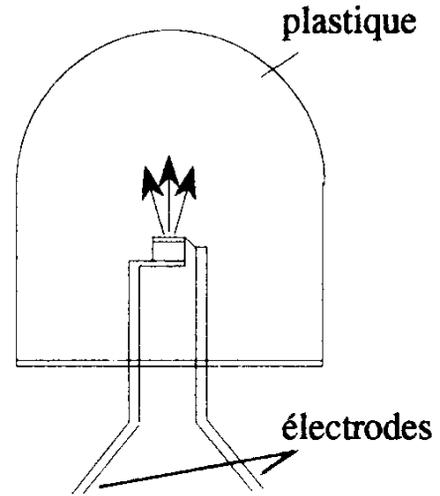
Application numérique : Calculer θ_0 , en radians, puis en degrés.

3.2.3. On définit le rendement optique de sortie η comme étant le rapport du nombre de photons sortant effectivement du dioptre, au nombre de photons émis au sein du milieu semi-conducteur. On supposera que, pour des angles d'incidence inférieurs à θ_0 , les facteurs de réflexion et de transmission restent sensiblement égaux à ceux correspondant au cas particulier de l'incidence normale. Dans ce cas, le rendement optique est égal au produit de la probabilité pour qu'un photon soit émis dans l'angle solide d'un cône de demi-angle au sommet θ_0 , par le facteur de transmission en énergie sous incidence normale. Donner l'expression du rendement optique de sortie η de cet interface semi-conducteur—air.

Application numérique : Calculer η . Commenter le résultat obtenu.

3.2.4. En vue d'améliorer le rendement optique de sortie on recouvre la partie émettrice de la diode d'un matériau plastique transparent (résine "époxy") d'indice de réfraction $n_3 = 1,50$. Calculer numériquement le rendement optique de sortie η' de ce nouvel interface du dioptre plan semi-conducteur—résine époxy remplaçant alors l'interface semi-conducteur—air.

Le dioptre de l'interface plastique—air a la forme d'un cylindre terminé par un dôme hémisphérique (figure 3). Les photons qui traversent la résine époxy arrivent sur ce nouveau dioptre sous une incidence très proche de la normale. On peut donc considérer qu'ils ne peuvent subir de réflexion totale. Pour cet interface, on doit donc seulement prendre en compte le facteur de transmission en énergie sous incidence normale plastique—air. En déduire la valeur numérique du rendement optique global η'' de sortie de cette diode. Conclure.

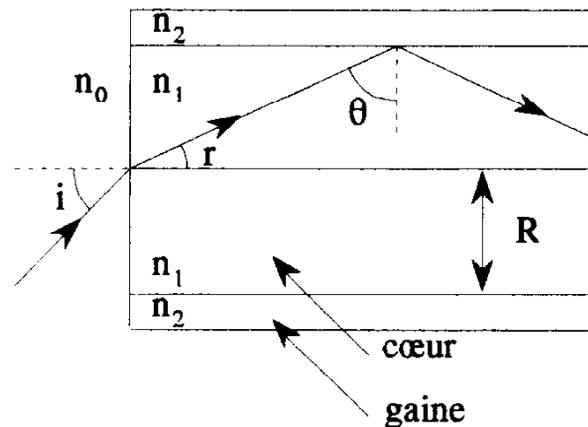


- figure 3 -

3.3.(*) Étude de la transmission par fibre optique multimode

On considère une fibre optique constituée d'un cœur (SiO_2 dopée GeO_2) d'indice de réfraction n_1 ($n_1 = 1,510$) et d'une gaine (en silice pure) d'indice de réfraction n_2 ($n_2 = 1,500$). Le cœur de cette fibre est un cylindre de longueur L à base circulaire de rayon R ($R = 100 \mu\text{m}$). Cette fibre est supposée placée dans l'air d'indice n_0 pris égal à 1 (figure 4).

Les longueurs d'onde les plus appropriées à la transmission par fibre optique en silice étant dans l'intervalle compris entre $1,33 \mu\text{m}$ et $1,55 \mu\text{m}$, on peut considérer que, pour ce domaine de longueur d'onde, le modèle classique du rayon lumineux reste utilisable puisque le diamètre du cœur est très grand devant la longueur d'onde. La fibre est alors appelée «fibre multimode». On considère un rayon lumineux incident (voir schéma) se propageant dans l'air, dans un plan de symétrie de la fibre. Il arrive sous l'angle d'incidence i .



- figure 4 -

3.3.1. Ce rayon lumineux incident, à l'entrée de la fibre, donne naissance à un rayon réfracté qui se propage dans le cœur. Celui-ci arrive alors au niveau de la surface de séparation cœur—gaine avec un angle d'incidence θ . Exprimer la condition que doit vérifier l'angle θ pour que ce rayon subisse une réflexion totale sur le dioptre ainsi formé (on appellera θ_0 l'angle d'incidence limite). En déduire la condition correspondante pour l'angle d'incidence i : on appellera i_0 l'angle d'incidence limite et on l'exprimera en fonction de n_1 et n_2 .

Montrer que, dans ce cas, le rayon peut se propager dans la fibre selon une ligne brisée. Calculer, en fonction de θ , le temps mis pour parcourir la fibre de longueur L . En déduire les valeurs minimale t_{\min} et maximale t_{\max} de ce temps de propagation.

3.3.2. On désire employer cette fibre optique pour la transmission d'informations. Celles-ci sont codées par des impulsions qui arrivent sous forme de rayons lumineux intermittents dont l'angle d'incidence i peut prendre toute valeur. Pour que cette fibre puisse transmettre correctement ces informations, il faut que deux impulsions séparées à l'entrée se trouvent encore séparées en sortie. Le cas le plus favorable étant celui où les impulsions d'entrée sont infiniment étroites, calculer le nombre maximal d'impulsions N que peut transmettre cette fibre de longueur L en une seconde.

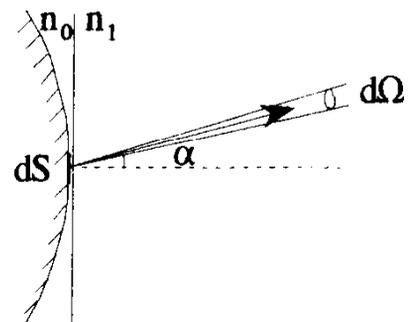
Application numérique : Calculer θ_0 et i_0 en degrés. On donne $c_0 = 300000$ km/s. Calculer, en bits par seconde, le nombre maximal d'impulsions que peut transmettre cette fibre de longueur $L = 1,00$ km. Quelle longueur maximale de fibre permet de transmettre jusqu'à 200 Mbits/s ?

3.4.(*). Étude du couplage LED fibre optique

On considère une diode électroluminescente dont la surface émettrice, placée devant l'entrée de la fibre optique, normalement à son axe, a une aire S très inférieure à la section du cœur de la fibre. On suppose que cette diode, presque plane, n'émet que dans un cône de demi-angle au sommet $\psi = 25^\circ$, et que pour α inférieur à ψ , sa luminance énergétique L_e est indépendante de l'angle d'émission α .

On rappelle que le flux énergétique élémentaire $d^2\Phi$ (ou puissance élémentaire émise sous forme de rayonnement) émis par l'élément de surface dS dans l'angle solide $d\Omega$ et dans la direction angulaire α par rapport à la normale à cette surface (figure 5) est donné par la relation :

$$d^2\Phi = L_e dS \cos \alpha d\Omega$$



- figure 5 -

Sachant que l'angle solide Ω d'un cône de demi-angle au sommet α vaut $\Omega = 2\pi (1 - \cos\alpha)$ en déduire l'expression de l'angle solide $d\Omega$ compris entre les cônes de demi-angle au sommet α et $(\alpha + d\alpha)$. Calculer le flux lumineux total Φ émis par la diode (donc pour α variant de 0 à ψ) et celui Φ' transmis par la fibre (correspondant donc à α variant de 0 à i_0), en admettant que pour les rayons utiles entrant dans la fibre le facteur de transmission énergétique est celui de l'incidence normale. En déduire l'expression du facteur de couplage $\eta_c = \frac{\Phi'}{\Phi}$ du changement diode—fibre.

Application numérique : $n_0 = 1$; $n_1 = 1,510$; $n_2 = 1,500$; $\psi = 25^\circ$. Calculer η_c . Commenter le résultat obtenu

SESSION DE 1992

**concours externe
de recrutement de professeurs certifiés**

section : physique
et électricité appliquée

composition d'électronique – électrotechnique avec applications

Durée : 5 heures

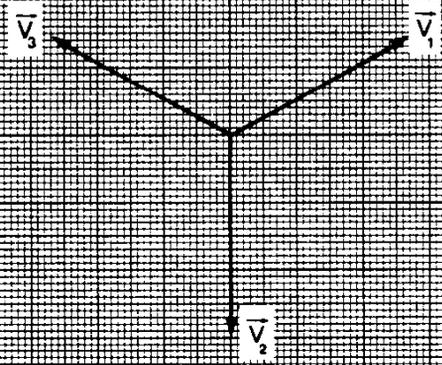
Calculatrice de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

AVERTISSEMENT AUX CANDIDATS.

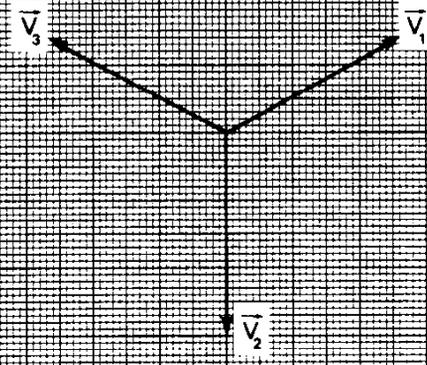
Seules les parties 1 et 2 sont liées. Il n'est pas nécessaire de traiter l'ensemble des parties pour obtenir la note maximale. Les relations données, que l'on demande d'établir, pourront être admises pour poursuivre le problème.

Pour les calculs numériques demandés on se limitera à la précision qui est compatible avec les données correspondantes de l'énoncé. Les unités employées devront être précisées pour chacun des résultats numériques.

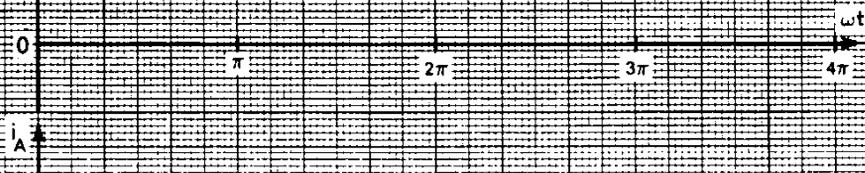
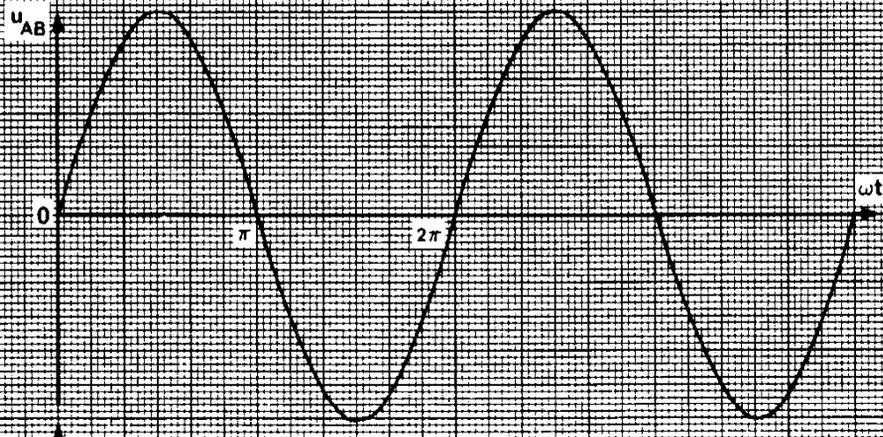
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant la raison des initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.



Document réponse n°1



Document réponse n°2



Document réponse n°3

PROBLEMES LIES AU TRANSPORT DE L'ENERGIE ELECTRIQUE

Compensation de l'énergie réactive et filtrage d'harmoniques

Régulation de la composante réactive du courant

Notations: la valeur instantanée d'une grandeur sinusoïdale est notée v ou $v(t)$, sa valeur efficace V , et la grandeur complexe associée \underline{V} . En ce qui concerne les représentations vectorielles, on pourra confondre \underline{V} et le vecteur \vec{V} correspondant.

1. Première partie : étude des chutes de tension en ligne.

1.1. Cas d'une distribution sinusoïdale monophasée de fréquence $f=50$ Hz

Le schéma monophasé équivalent d'un réseau est représenté sur la figure 1

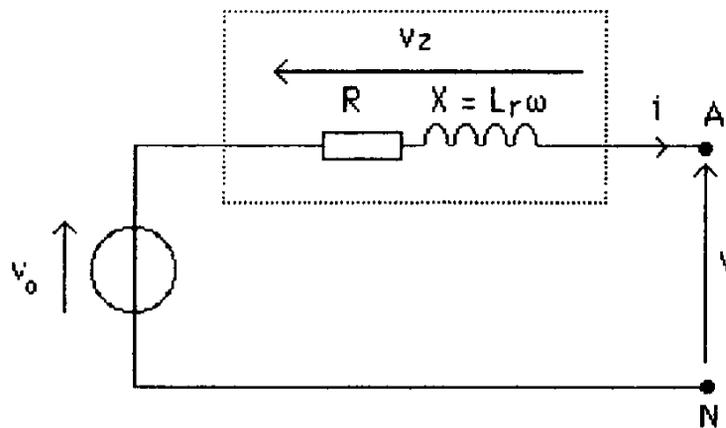


Figure 1

L'utilisateur connecté entre les points A et N dispose d'une tension à vide v_0 de valeur efficace V_0 et d'une tension en charge v de valeur efficace V . On désigne par R et X les éléments du modèle de l'impédance \underline{Z} de la ligne, vue des points A et N.

1.1.1. La charge connectée aux points A et N appelle un courant d'intensité efficace I , l'angle de retard de i par rapport à v est noté ϕ .

Représenter le diagramme vectoriel des tensions \underline{V}_Z aux bornes de \underline{Z} , \underline{V} , et \underline{V}_0 en admettant pour cela que $V = 10 V_Z$ et que $\phi = 30^\circ$ (charge inductive). Montrer que la chute de tension définie par la différence des valeurs efficaces $\delta V = V_0 - V$ est égale, en première approximation à :

$$\delta V = I \cdot (R \cos \phi + X \sin \phi)$$

Exprimer la puissance active P_1 et la puissance réactive Q_1 mises en jeu dans la charge monophasée connectée entre A et N en fonction de V , I et ϕ .

1.1.2. Application numérique:

$$V = 6,06 \text{ kV} ; P_1 = 7,50 \text{ MW} ; Q_1 = 4,60 \text{ Mvar} ; R = 40 \text{ m}\Omega ; X = 0,400 \Omega .$$

Calculer les valeurs numériques de δV et V_0 .

1.2. Cas d'une distribution sinusoïdale triphasée de fréquence 50 Hz

1.2.1. Dans le schéma de la figure 2 (système triphasé équilibré), on désigne par U la valeur efficace de la tension entre fils de ligne, par V celle de la tension simple, et par I celle de l'intensité du courant en ligne; P et Q sont les puissances (active et réactive) mises en jeu dans la charge triphasée équilibrée dont l'impédance de chaque branche a pour argument ϕ .

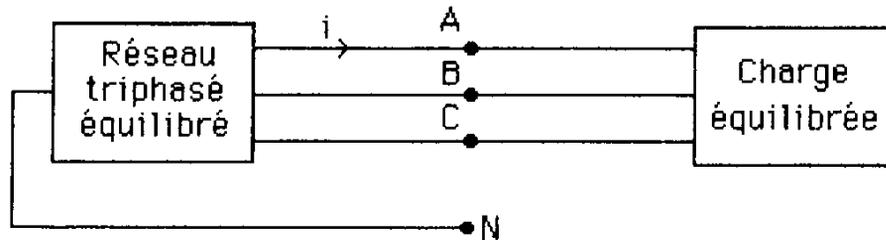


Figure 2

Donner les expressions de P et Q en fonction de U , I et ϕ .

1.2.2. On appelle puissance de court-circuit au niveau de la charge la quantité S_{cc} définie par : $S_{cc} = 3 V_o I_{cc}$, I_{cc} désignant la valeur efficace de l'intensité du courant de court-circuit.

X et R étant les éléments du schéma équivalent monophasé définis à la question 1.1., on pose par ailleurs: $\tan \alpha = (X/R)$.

Montrer que la chute de tension relative entre fils de ligne ($\delta U/U_o$) du réseau connecté à la charge peut s'écrire de manière approchée :

$$\frac{\delta U}{U_o} = \frac{\sin \alpha}{S_{cc}} \left(\frac{P}{\tan \alpha} + Q \right)$$

Compte tenu des caractéristiques usuelles des lignes ($\tan \alpha \gg 1$), on utilise cette relation sous la forme:

$$\frac{\delta U}{U_o} = \frac{1}{S_{cc}} \left(\frac{P}{\tan \alpha} + Q \right)$$

1.2.3. Quelle est, dans ces conditions, la grandeur (liée à la charge) qui est principalement responsable de la chute de tension ?

1.2.4. Application numérique.

$$S_{cc} = 270 \text{ MVA} ; U_o = 10,5 \text{ kV} ; \tan \alpha = 10 .$$

1.2.4.1. Charge (a) : $P_a = 22,5 \text{ MW}$; $Q_a = 13,8 \text{ Mvar}$ (charge inductive).

Calculer ($\delta U/U_o$)_a et U_a , tension aux bornes de la charge (a).

1.2.4.2. Charge (b) : $P_b = 1,3 \text{ MW}$; $Q_b = 26,5 \text{ Mvar}$ (charge inductive).

Calculer ($\delta U/U_o$)_b et U_b pour cette charge (b).

1.2.4.3. Calculer l'écart relatif de tension $(U_a - U_b) / U_o$ subi par l'utilisateur des charges (a) et (b).

2. Deuxième partie : compensation de l'énergie réactive

2.1. Utilisation d'une batterie de condensateurs

On utilise une batterie de condensateurs connectés en triangle (figure 3). Placée en parallèle avec la charge précédente, elle apporte 25 Mvar sous une tension U très proche de $U_0=10,5$ kV.

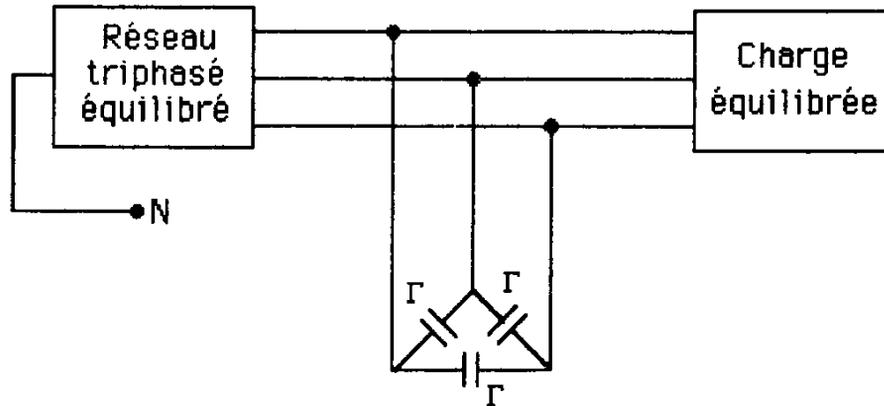


Figure 3

2.1.1. Calculer la capacité Γ du condensateur équivalent pour chaque branche. Calculer les nouvelles valeurs de $(\delta U/U_0)$ pour les charges (a) et (b) définies en 1.2.4.1. et 1.2.4.2. ainsi que les valeurs U'_a et U'_b correspondantes.

2.1.2. Comparer le nouvel écart relatif $(U'_a - U'_b) / U_0$ à celui calculé à la question 1.2.4.3.

2.1.3. Pour réduire les fluctuations de tension, on modifie la valeur des condensateurs pour la charge (a). La puissance réactive due à la batterie est ramenée à 17 Mvar. Calculer la nouvelle tension U''_a obtenue.

2.2. Utilisation d'un compensateur synchrone (fig.4)

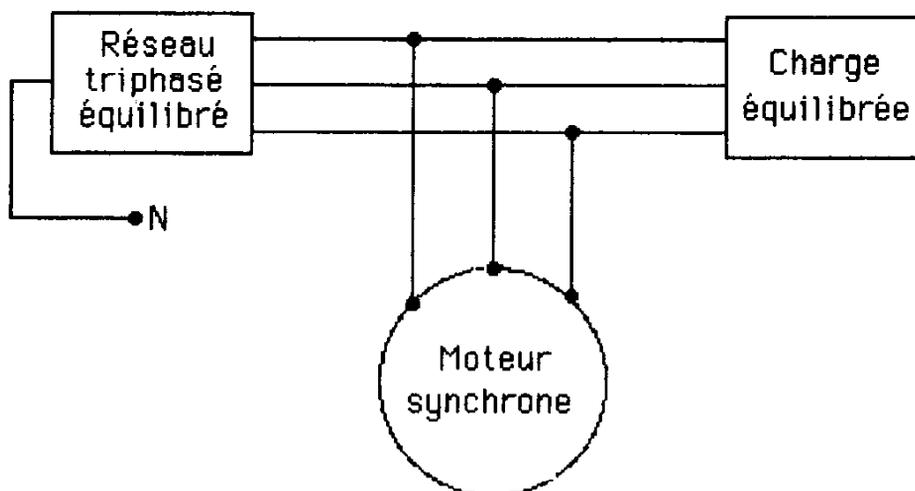


Figure 4

2.2.1. Expliquer dans quelles conditions une machine synchrone peut fournir de la puissance réactive.

2.2.2. Représenter le modèle d'une phase de la machine lorsque le circuit magnétique n'est pas saturé et construire le diagramme de Fresnel des tensions et du courant correspondant au fonctionnement en compensateur.

2.2.3. Indiquer l'avantage que présente cette solution sur celle d'une batterie de condensateurs.

2.2.4. Quel est le phénomène physique qui limite la rapidité de réglage?

2.3. Association de condensateurs et d'un absorbeur (fig. 5)

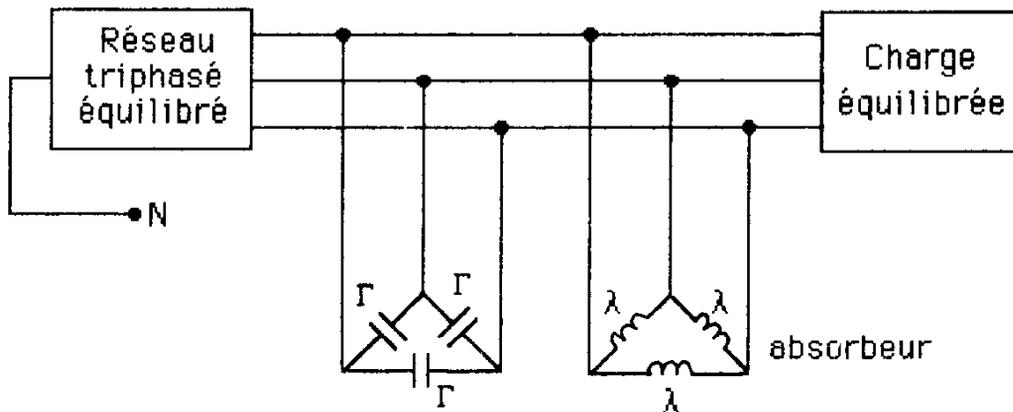


Figure 5

On appelle absorbeur un récepteur inductif réglable. Lorsqu'il est associé à une batterie de condensateurs, on peut donc régler la puissance réactive fournie par le réseau; de plus, en cas de déséquilibre, le réglage peut être ajusté pour chaque phase.

2.3.1. Cas d'un ensemble triphasé équilibré

2.3.1.1. La charge (a) décrite en 1.2.4.1. est associée à une batterie de condensateurs de 25 Mvar et on souhaite que la tension U en charge soit égale à U_0 .

Déterminer la puissance réactive que doit consommer l'absorbeur.

2.3.1.2. Calculer l'inductance λ de chacune des trois bobines supposées parfaites qui composent alors ce récepteur inductif si $U = 10,5$ kV.

2.3.2. Cas d'une charge déséquilibrée

La figure 6 schématise la charge étudiée: deux éléments R_1 et L_1 , tels que $L_1\omega = R_1 = 20 \Omega$, sont en parallèle entre les points A (phase 1) et C (phase 3); la phase 2 est telle que $i_B = 0$. On donne $U = 10,5$ kV.

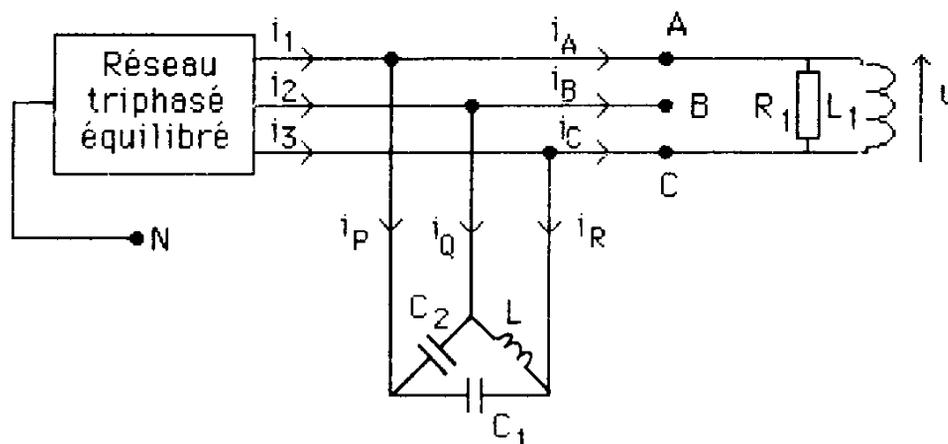


Figure 6

2.3.2.1. Sur le document réponse n°1, on a représenté le diagramme des tensions simples $\underline{V}_1 = \underline{V}_{AN}$, \underline{V}_2 et \underline{V}_3 . Compléter ce diagramme en représentant les grandeurs \underline{U}_{AC} , \underline{I}_{R_1} , \underline{I}_{L_1} et \underline{I}_A et \underline{I}_C .

2.3.2.2. A quelle condition le condensateur C_1 permet-il de compenser la puissance réactive mise en jeu dans L_1 ? Calculer C_1 dans ce cas.

2.3.2.3. Le compensateur étant complet, (C_1 , C_2 et L présents), quelle relation doit-il exister entre C_2 et L pour que la puissance réactive totale (dans la charge et le compensateur) soit nulle ?

2.3.2.4. Cette relation étant satisfaite, on choisit L telle que $L\omega = R_1 \sqrt{3}$.

Calculer L et C_2 .

Représenter sur le document réponse n°2 les intensités I_1 , I_2 et I_3 des courants en ligne lorsque le compensateur est complet. Calculer I_1 , I_2 et I_3 .

3. Troisième partie : étude d'un gradateur sur charge inductive

Cette partie traite d'une réalisation possible de l'absorbeur.

3.1. Etude en monophasé

3.1.1. La figure 7 en représente le schéma de principe pour une phase. L'inductance de la bobine est notée L_a ; on néglige sa résistance.

$$u_{AB}(t) = u = U \sqrt{2} \sin \omega t, \text{ avec } U = 10,5 \text{ kV}.$$

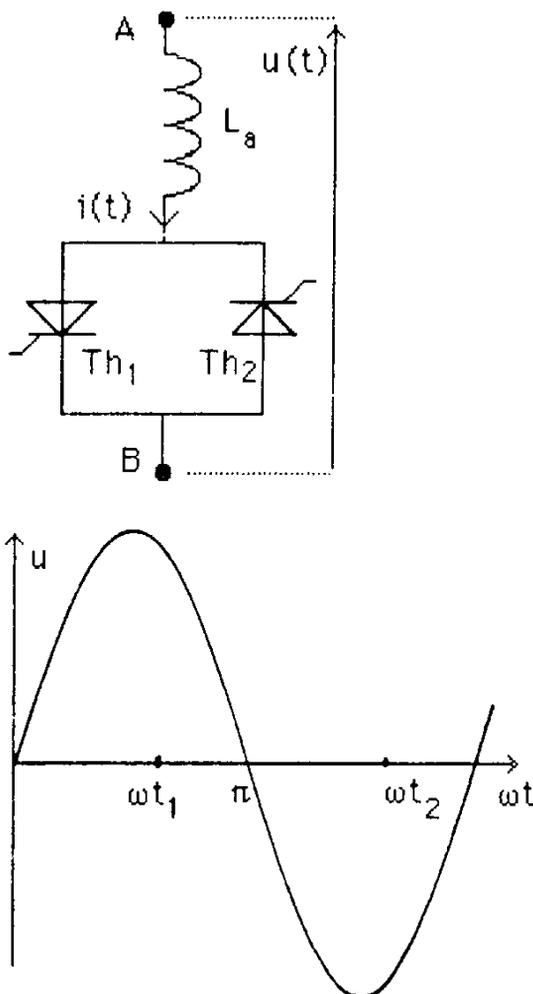


Figure 7

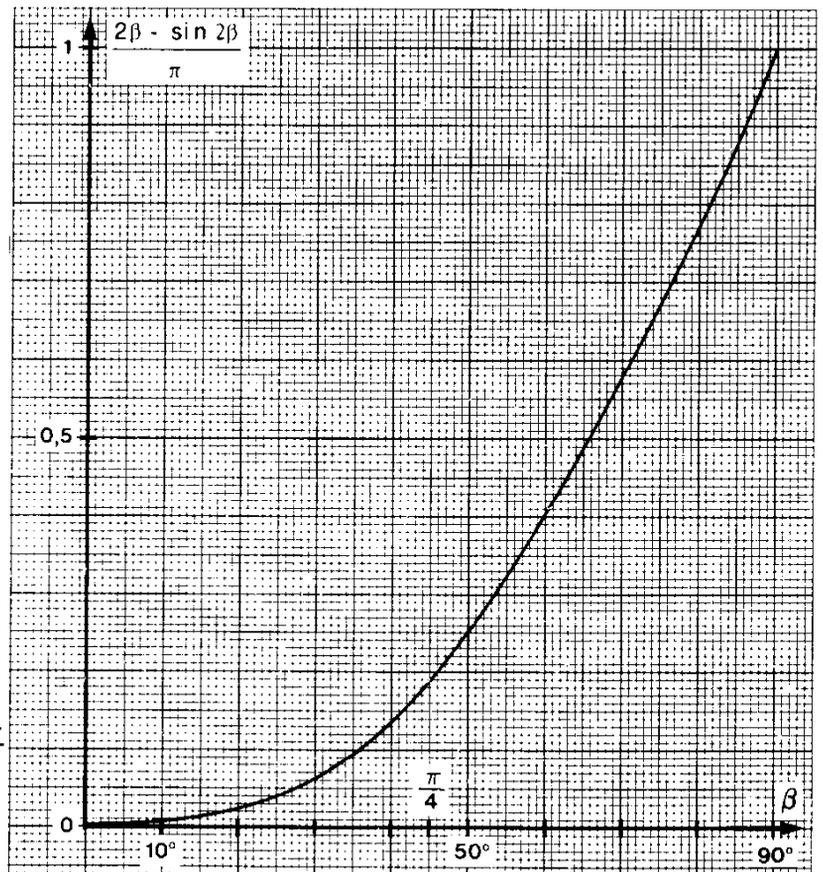


Figure 8

Les thyristors Th_1 et Th_2 sont commandés aux instants $t_1 + kT$ pour Th_1 (avec $\omega t_1 = \pi - \beta < \pi$ et $T = 2\pi / \omega$), et $t_2 + kT$ pour Th_2 (avec $\omega t_2 = 2\pi - \beta$). L'intensité i étant nulle juste avant l'instant t_1 , montrer que l'amorçage de Th_1 est possible.

Ecrire l'équation différentielle qui lie u et i à partir de l'instant t_1 .

3.1.2. En déduire l'expression de $i(t)$ en fonction de U , L_a , ω , β , pour $t > t_1$.

3.1.3. Jusqu'à quel instant t'_1 l'intensité $i(t)$ suit-elle la loi précédente ?

On se place dans le cas où $\beta < (\pi/2)$ rad. Que se passe-t-il pour $t > t'_1$?

3.1.4. Pour $\beta = (\pi/4)$ rad, représenter $i(t)$ sur deux périodes T . Pourquoi doit-on limiter β à $(\pi/2)$ rad ?

3.1.5. Montrer que $i(t)$ ne contient pas d'harmonique de rang pair.

3.1.6. On note $i_1(t) = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t - \phi_1)$ le fondamental de $i(t)$.

3.1.6.1. Montrer que $I_1 = \frac{U}{L_a \omega} \cdot \frac{2\beta - \sin 2\beta}{\pi}$

3.1.6.2. Préciser la valeur de ϕ_1 .

3.1.6.3. Quelle est l'expression de l'inductance λ qui branchée seule entre A et B, $u_{AB}(t)$ étant inchangée, serait parcourue par un courant d'intensité $i_1(t)$?

Pour les applications numériques ultérieures, la courbe de la figure 8 représente la variation de la quantité $g(\beta) = (2\beta - \sin 2\beta)/\pi$ en fonction de β .

3.1.7. Application numérique.

En admettant que la puissance réactive mise en jeu par le couple $[u(t), i(t)]$ est la même que celle qui correspond au couple $[u(t), i_1(t)]$, déterminer la valeur de l'inductance L_a qui permet d'absorber une puissance réactive maximale de 12 Mvar.

Cette valeur de L_a sera conservée dans la suite du problème.

3.1.8. Calculer la puissance réactive absorbée pour $\beta = \pi/4$ rad.

3.2. Etude en triphasé symétrique (figure 9)

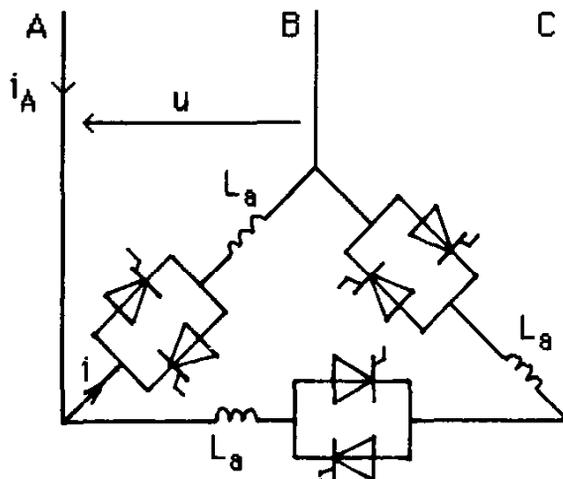


Figure 9

L'absorbeur comprend trois branches identiques connectées en triangle.

3.2.1. Quelle est la puissance réactive maximale qu'il peut absorber lorsque $U = 10,5$ kV.?

3.2.2. Les notations étant celles de la figure 9, exprimer l'intensité en ligne $i_A(t)$ en fonction de $i(t)$ et de T .

Représenter $i_A(t)$ sur le document réponse n°3 pour $\beta = \pi/4$ rad, en prenant $u_{AB}(t) = u = U \sqrt{2} \sin \omega t$.

3.2.3. Montrer, sans calcul particulier, que $i_A(t)$ ne comporte pas d'harmonique de rang 3. Quel est l'intérêt de cette remarque ?

3.3. Etude en triphasé dissymétrique (figure 10)

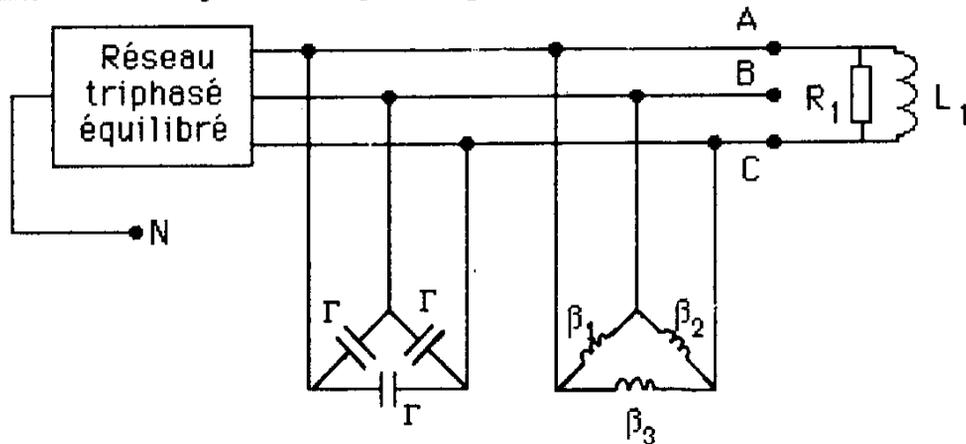


Figure 10

L'absorbeur est associé à une batterie de condensateurs montés en triangle, fournissant 25 Mvar avec $U = 10,5 \text{ kV}$.

3.3.1. Montrer que lorsqu'on place en parallèle un condensateur de capacité Γ et une bobine parfaite d'inductance λ , le dipôle obtenu peut être équivalent à un condensateur de capacité C . Exprimer alors λ en fonction de Γ , C et ω .

Montrer que le dipôle obtenu peut aussi être équivalent à une bobine parfaite d'inductance L . Exprimer alors λ en fonction de Γ , L et ω .

3.3.2. Déterminer, pour chaque branche, la valeur du paramètre β (β_1 pour AB, β_2 pour BC et β_3 pour CA) qui permet à l'ensemble (batterie + absorbeur) d'être équivalent au circuit de compensation de la figure 6, en prenant pour cette question $C_1 = 160 \mu\text{F}$, $L = 0,10 \text{ H}$ et $C_2 = 90 \mu\text{F}$.

4. Quatrième partie : filtrage des harmoniques.

La charge comporte des éléments qui appellent des courants non sinusoïdaux. Les batteries de condensateurs servant à la compensation de puissance réactive sont organisés en filtres d'harmoniques comme l'indique la figure 11, la puissance réactive de compensation étant répartie entre différents filtres.

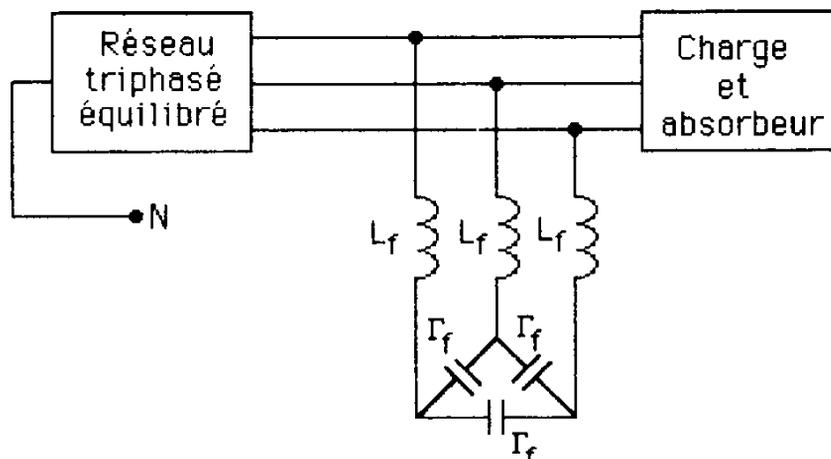


Figure 11

Nous limitons l'étude à un filtre unique destiné à réduire l'harmonique 5. Le schéma équivalent pour une phase étant alors donné par la figure 12, c'est sur ce schéma que nous raisonnons.

Le réseau délivre une tension sinusoïdale de fréquence $f = 50$ Hz et de valeur efficace $V_0 = 6,06$ kV. On néglige sa résistance équivalente R devant sa réactance à 50 Hz: $L_r \omega = 0,400 \Omega$.

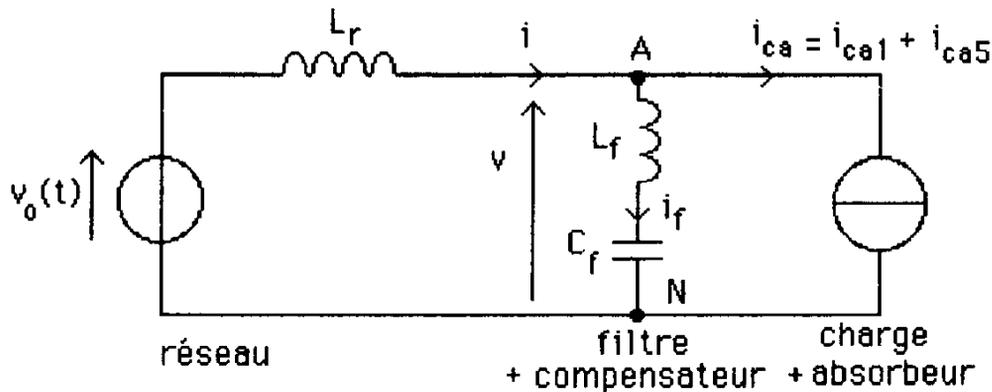


Figure 12

4.1. Pour $f = 50$ Hz et $\omega = 2\pi f$, on pose $L_f \omega = k/(C_f \omega)$, avec $k < 1$. On suppose que la tension v est sinusoïdale. Exprimer la puissance réactive Q_1 que fournit le filtre (L_f, C_f) dont on néglige la résistance, en fonction de V, C_f, ω et k .

4.2. Le filtre (L_f, C_f) est accordé sur la fréquence $f_5 = 5 f$ et doit compenser une puissance réactive totale de $\frac{25 \text{ Mvar}}{3}$ sous la tension $V \approx V_0$.

Calculer L_f et C_f .

4.3. Quelle est la relation entre la capacité C_f du schéma équivalent pour une phase et la capacité Γ_f du filtre réel (fig. 11) fournissant la même énergie réactive ?

4.4. L'ensemble charge-absorbeur est considéré comme un générateur de courant d'intensité $i_{ca}(t)$ comportant un fondamental (de fréquence f et de valeur efficace I_{ca1}) et l'harmonique 5 (de fréquence $5 f$ et de valeur efficace $I_{ca5} = 300$ A):

$$i_{ca}(t) = i_{ca1}(t) + i_{ca5}(t)$$

Exprimer puis calculer la valeur efficace I_f de l'intensité i_f lorsque les éléments L_f et C_f ont les valeurs trouvées en 4.2. et que $V \approx V_0$.

4.5. Déterminer l'expression de l'impédance interne du générateur de Thévenin équivalent à l'ensemble (réseau + filtre) vu de la charge en fonction de L_r, L_f, C_f et ω .

Montrer que cette impédance devient très grande pour une fréquence que l'on calculera.

5. Cinquième partie : mesure de la puissance réactive; régulation du courant réactif.

5.1. Mesure de la puissance réactive

La figure 13 donne le schéma de principe d'une mesure particulière de la puissance réactive mise en jeu dans la charge "totale" d'un réseau tel que celui qui est représenté sur la figure 12 (filtre + compensateur et charge + absorbeur).

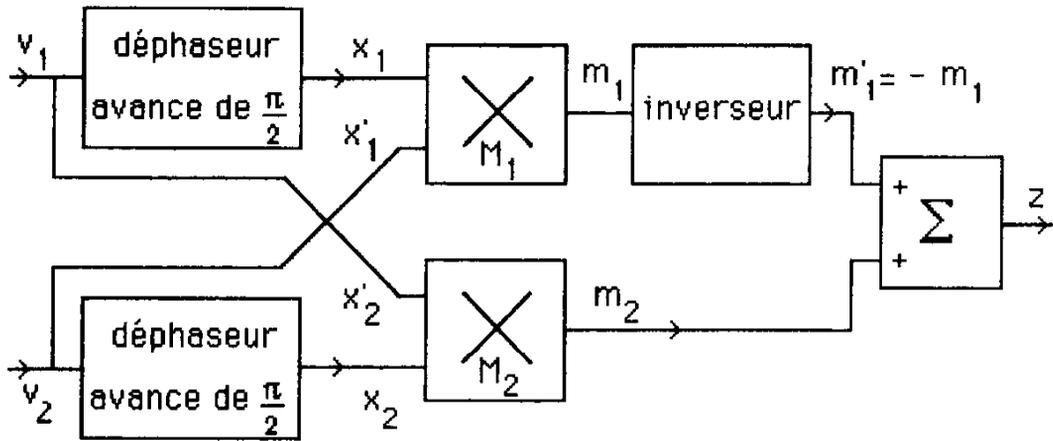


Figure 13

On élabore tout d'abord la tension $v_1(t)$ proportionnelle à la tension $v(t)$ obtenue au niveau de l'utilisateur :

$$v_1(t) = k_1 v(t) = k_1 V \sqrt{2} \cos \omega t$$

puis une tension $v_2(t)$ proportionnelle à l'intensité $i(t)$ du courant en ligne:

$$v_2(t) = k_2 i(t) = k_2 I \sqrt{2} \cos (\omega t - \phi).$$

Ces tensions sont déphasées en avance de $\pi/2$ puis, comme le montre le schéma, appliquées à des multiplieurs réalisant chacun l'opération:

$$m_n = k x_n x'_n \quad (\text{avec } n = 1 \text{ ou } 2)$$

Un inverseur et un sommateur permettent ensuite d'élaborer la tension $z(t)$.

5.1.1. Etablir l'expression de z en fonction des données du problème et notamment de V , I et ϕ .

5.1.2. Que peut-on dire du temps de réponse de cette chaîne de mesure?

5.2. Régulation de la composante réactive du courant

Après filtrage, l'image V_r de la composante réactive I_r de l'intensité I du courant en ligne (fig.12) est comparée à une tension de consigne V_c (fig.14). A partir de la différence ε de ces deux grandeurs, le système élabore une tension de commande x_c qui permet d'agir sur les thyristors d'un absorbeur de puissance réactive.

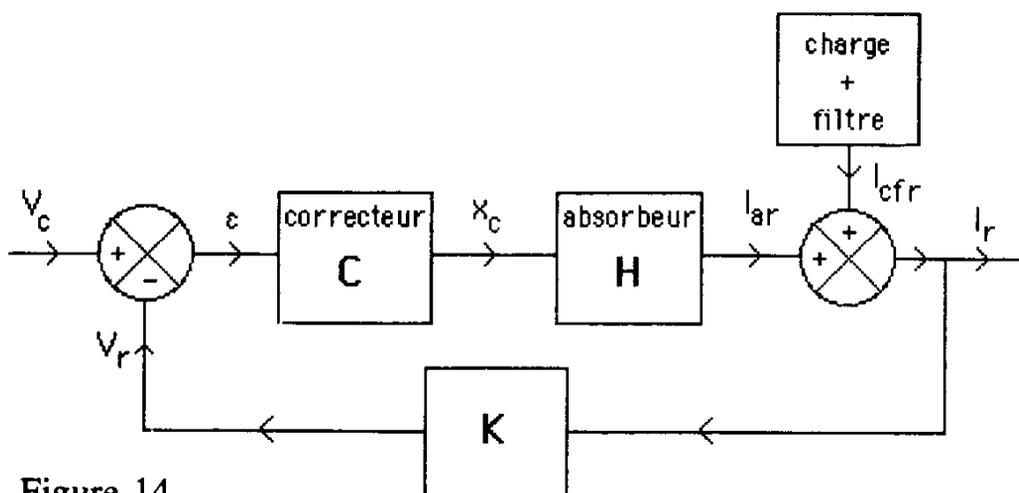


Figure 14

L'absorbeur est traversé par un courant dont la composante réactive I_{ar} est de la forme $I_{ar} = H x_c$ (commande linéarisée). La contribution à I_r du reste de l'installation (comprenant la charge proprement dite et le filtre compensateur) est I_{cfr} .

5.2.1. Etude du régime permanent

Pour cette étude, on considère que le correcteur est du type proportionnel. La transmittance C du correcteur est donc une constante réelle; il en est de même des transmittances H et K de l'absorbeur et de la chaîne de retour.

5.2.1.1. Etablir la relation donnant I_r en fonction de V_c et de I_{cfr} .

5.2.1.2. Comment doit-on choisir C pour que les variations de la composante réactive I_{cfr} du courant traversant la charge aient peu de répercussions sur la valeur de I_r (et donc sur la tension V) ?

5.2.2. Etude en régime dynamique

En réalité, le correcteur est du type "P I D", c'est à dire "proportionnel, intégral et dérivé".

Qu'est-ce que cela signifie ? Pourquoi, en matière de régulation un simple correcteur proportionnel est-il souvent insuffisant ? Qu'apportent généralement les introductions respectives d'une partie de commande "intégrale" et d'une partie "dérivée" ?

SESSION DE 1992

**concours interne
de recrutement de professeurs certifiés
et concours d'accès à l'échelle de rémunération**

section : sciences physiques

composition à partir d'un dossier

Durée : 4 heures

Calculatrice de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Aucun document n'est autorisé.

Le sujet comprend trois parties d'inégale importance :

- A. — ÉTUDE DE QUELQUES ASPECTS DE LA CHIMIE DU VIN
- B. — CINÉTIQUE CHIMIQUE
- C. — ÉTUDE DE QUELQUES EXPÉRIENCES DE TRAVAUX PRATIQUES

Il est suggéré au candidat de consacrer à chaque partie une durée de l'ordre de grandeur suivant :

- A : 55 % de la durée totale de l'épreuve
- B : 30 %
- C : 15 %

L'attention est attirée sur les points suivants :

Les thèmes abordés sont volontairement très variés, de façon à tester les différentes capacités des candidats. Ceux-ci sont invités à ne pas se limiter à traiter une seule partie.

Les différentes questions de ce sujet sont largement, sinon totalement, indépendantes.

Les thèmes envisagés dans chaque série de questions sont indiqués par un titre ou par un sous-titre.

La notation L sera adoptée comme symbole du litre ($1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$).

PARTIE A. — ÉTUDE DE QUELQUES ASPECTS DE LA CHIMIE DU VIN

I. Étude de deux espèces minérales contenues dans le vin

Dans cette partie, on se propose d'aborder les méthodes de dosage de deux espèces chimiques minérales contenues dans le vin : le dioxyde de soufre SO_2 et le fer.

Le vin est un milieu complexe contenant, entre autres choses, des composés soufrés. Parmi ceux-ci, les dérivés du soufre au degré d'oxydation IV revêtent un rôle important en protégeant le vin contre certaines altérations. Il s'agit de l'anhydride sulfureux ou dioxyde de soufre dont la solution aqueuse porte le nom usuel d'acide sulfureux, des ions hydrogénosulfite HSO_3^- et sulfite SO_3^{2-} . Les ions HSO_3^- peuvent être libres et (ou) combinés. On désigne couramment par « acide sulfureux libre » l'ensemble des espèces SO_2 et HSO_3^- non combinées et par « acide sulfureux total » l'ensemble des espèces SO_2 et HSO_3^- (présentes à l'état combiné ou non).

Remarque. — Bien que l'existence de la molécule H_2SO_3 en solution aqueuse n'ait pas été prouvée, on admettra que la molécule SO_2 est combinée dans l'eau sous forme de molécule H_2SO_3 (ou $\text{SO}_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$) par souci d'homogénéité d'écriture dans cette partie du sujet.

Le vin contient également du fer. Une partie de celui-ci est apportée par le raisin lui-même, le reste est dû à diverses sources de contaminations. Cet élément intervient dans divers processus chimiques entraînant des précipitations ou catalysant des réactions d'oxydation par exemple.

1. Dosage de l'acide sulfureux.

1.1. Considérations générales.

- 1.1.1. Le dioxyde de soufre SO_2 est un diacide dans l'eau. Écrire les équations des deux équilibres acido-basiques mis en jeu au cours de la dissolution de cet oxyde dans ce solvant.
- 1.1.2. L'ion hydrogénosulfite (HSO_3^-) est un ampholyte ou amphotère. Donnez la signification de ce terme.
- 1.1.3. Le pH du vin se situe généralement au voisinage de 3,5. Sous quelle forme le soufre IV qu'il contient est-il présent de façon majoritaire ?
Données : $\text{p}K_{a1} = 1,8$; $\text{p}K_{a2} = 7,2$.

1.2. Dosage de l'acide sulfureux libre ($\text{SO}_2 + \text{HSO}_3^-$ non combinés). Ce dosage est basé sur l'oxydation du soufre IV en ions sulfate SO_4^{2-} par le diiode I_2 .

- 1.2.1. Écrire les deux demi-équations électroniques d'oxydo-réduction correspondant au diiode et au dioxyde de soufre.
- 1.2.2. Écrire l'équation-bilan de la réaction de dosage.
- 1.2.3. Le diiode utilisé pour ce dosage est dissous dans une solution d'iodure de potassium KI.
 - a. Pour quelle raison procède-t-on ainsi ?
 - b. Sous quelle forme ionique le diiode est-il présent dans cette solution ?
- 1.2.4. Les solutions de diiode utilisées pour un tel dosage doivent être régulièrement titrées. On utilise pour cela une solution de thiosulfate de sodium de titre connu.
 - a. Écrire la demi-équation électronique d'oxydo-réduction correspondant à ce réactif.
 - b. Écrire l'équation-bilan de la réaction de dosage.
 - c. Quel est le nom de l'espèce soufrée formée au cours de ce dosage ?
 - d. Donner le nom d'un indicateur couramment utilisé permettant de mettre en évidence la fin du titrage d'une solution de diiode par une solution de thiosulfate de sodium.

1.3. La solution titrée de diiode utilisée pour le dosage de l'acide sulfureux libre est centimolaire ($0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$).

- 1.3.1. Déterminer à combien de mg de SO_2 correspond 1 mL de cette solution.
Masses molaires en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$: S : 32 ; O : 16.
- 1.3.2. Sachant que l'on a versé n mL de la solution de diiode pour doser 50 mL de vin, montrer que la relation :

$$x = 12,8 \cdot n$$

permet d'obtenir la teneur x en SO_2 libre exprimée en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$ contenu dans le vin.

2. Dosage du fer contenu dans le vin.

Diverses méthodes permettent d'atteindre la teneur en fer d'un vin. Elles sont presque toutes basées sur des dosages de type complexométrique. L'une d'entre elles utilise l'EDTA comme réactif et l'ion thiocyanate comme indicateur de fin de réaction. L'EDTA sera noté Y^{4-} dans toute cette partie.

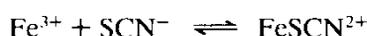
2.1. Considérations générales.

- 2.1.1. Quel est le nom du réactif désigné sous le sigle EDTA ?
- 2.1.2. Quelle est sa formule développée écrite sous forme ionique (tétraanion) ?
- 2.1.3. Quel est le nombre de position de chélation de ce tétraanion ? Justifier votre réponse.
- 2.1.4. L'EDTA forme un complexe avec les ions Fe^{3+} suivant l'équilibre :



Définir, à partir de cet exemple, la constante de dissociation d'un complexe.
(La constante de dissociation du complexe FeY^{-} sera notée K_{D1}).

- 2.1.5. Les ions Fe^{3+} donnent également un complexe avec les ions thiocyanate suivant l'équilibre :



(La constante de dissociation de l'ion thiocyanatofer (III) $FeSCN^{2+}$ sera notée K_{D2}).

- a. Quelle est l'expression de K_{D2} ?
- b. Quelle est la couleur de la solution aqueuse contenant des ions $FeSCN^{2+}$ en concentration $10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ par exemple ?

2.2. Dosage du fer.

Le but de cet exercice n'est pas de déterminer la teneur en fer d'un vin mais d'étudier le principe du dosage ainsi que sa précision. Pour ce faire, on considère un vin dont la teneur en fer est connue.

La méthode de dosage utilisée est la méthode de DEBETTIGNIES. Son principe est le suivant :

50 mL de vin (décoloré si besoin est), sont additionnés successivement de :

- 2,00 mL d'acide nitrique de concentration $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$;
- 1,00 mL d'eau oxygénée à 10 volumes ;
- 10 mL d'une solution de thiocyanate d'ammonium à 5 %.

Tous ces volumes sont mesurés à la pipette de précision. Ce mélange sera appelé « solution à analyser » par la suite.

L'eau oxygénée a pour rôle d'oxyder les ions Fe^{2+} , initialement présents, à l'état d'ions Fe^{3+} .

On admettra que le fer est exclusivement complexé à l'état d'ion $FeSCN^{2+}$ dans la solution à analyser.

On verse ensuite dans la solution à analyser une solution d'EDTA jusqu'à décoloration totale de la solution initialement rouge sang. Dans les conditions opératoires, l'hydroxyde ferrique ne précipite pas.

- 2.2.1. Dans la solution à analyser, le fer est présent sous forme d'ions Fe^{3+} et d'ions $FeSCN^{2+}$.

Soit $c = [Fe^{3+}] + [FeSCN^{2+}]$ la concentration en fer total de cette solution. Sachant que le vin étudié contient 10 mg/L de fer, montrer que la concentration totale en fer de la solution à analyser est égale à :

$$c = 1,42 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} .$$

- 2.2.2. Montrer que la solution de thiocyanate à 5 % utilisée pour ce dosage est telle que

$$[SCN^{-}] = 0,658 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} .$$

- 2.2.3. À partir des relations traduisant la conservation de la matière appliquées au fer et à l'ion thiocyanate, ainsi que l'expression de la constante de dissociation K_{D2} du complexe $FeSCN^{2+}$, déterminer les concentrations des espèces Fe^{3+} , $FeSCN^{2+}$ et SCN^{-} dans la solution à analyser.

Données : $K_{D2} = 10^{-2}$;

Masses molaires atomiques exprimées en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$:

$$H : 1 ; C : 12 ; N : 14 ; S : 32 ; Fe : 56 .$$

On prend la solution à analyser et on ajoute progressivement la solution d'EDTA. On considère dans toute la suite de l'exercice que la dilution est négligeable. Les ions Fe^{3+} présents dans la solution peuvent se combiner, soit avec les ions SCN^{-} , soit avec les ions Y^{4-} , ce qui peut se traduire par l'équilibre :



qui constitue la réaction prépondérante du dosage.

- 2.2.4. Dans quel sens cet équilibre va-t-il être déplacé sachant que la constante de dissociation du complexe FeY^- a pour valeur : $K_{D1} = 10^{-25,1}$?
- 2.2.5. On verse l'EDTA jusqu'à décoloration complète de la solution à analyser. À l'instant précis où la décoloration est atteinte, la concentration en ions FeSCN^{2+} est égale à $10^{-5,5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
- Déterminer, en suivant la même démarche qu'en 2.2.3., la concentration des différents ions Fe^{3+} , SCN^- , FeY^- et Y^{4-} présents à cet instant.
 - En déduire la quantité $c' = [\text{Y}^{4-}] + [\text{FeY}^-]$. c' représente la concentration totale en espèces dérivées de l'EDTA en fin de titrage.
- 2.2.6. Comment évaluer l'erreur commise, au cours de ce dosage, sur la détermination de la concentration en fer de ce vin ?
Calculer alors l'erreur relative commise.
On désire que 1 mL de la solution d'EDTA ajoutée corresponde à 1 mg de fer. Quelle doit être la concentration de la solution d'EDTA à utiliser pour ce faire ?

II. Étude de quelques sucres contenus dans le vin

Le vin contient des glucides et en particulier du glucose et du fructose. Diverses méthodes chimiques d'analyse permettent de déterminer la teneur d'un vin en ces sucres réducteurs.

Parmi celles-ci, une méthode mettant en jeu la liqueur de Fehling permet de déterminer la teneur totale en sucres réducteurs. Cette teneur, usuellement exprimée en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$, est obtenue en déterminant le volume de vin nécessaire à la décoloration totale de 10 mL d'une solution titrée de liqueur de Fehling.

La détermination des quantités respectives de glucose et de fructose est réalisée en procédant à une étude polarimétrique complémentaire :

Les cadrans des polarimètres utilisés sont munis de deux graduations : l'une dite polarimétrique (en degrés) et l'autre dite saccharimétrique (à titre indicatif, 1 degré polarimétrique = 4,615 divisions saccharimétriques). On utilisera dans cette partie les degrés saccharimétriques (notés d.s.).

On utilisera également la loi de Biot sous l'une des formes pratiques suivantes :

– pour un corps pur actif :

$\alpha = d \cdot m$ (d = déviation observée pour une solution contenant 1 g de corps pur actif par litre de solution ; m = concentration de corps actif, exprimée en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$)

ou $\alpha_T = \sum d_i \cdot m_i$ dans le cas d'un mélange de plusieurs corps actifs.

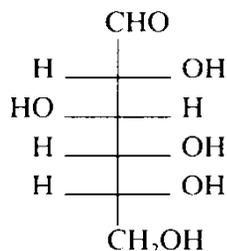
En résumé, les deux études précédentes permettent de déterminer les grandeurs suivantes :

– P (concentration totale en sucres réducteurs, exprimée en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$) déterminée par le dosage utilisant la liqueur de Fehling ;

– α_T (angle dont a tourné le plan de polarisation de la lumière) exprimé en d.s. (mesure réalisée pour une longueur d'onde donnée, dans un solvant donné et à une température donnée).

1. Questions d'ordre général.

- Comment peut-on interpréter le caractère réducteur du glucose ?
- Quelle est la composition (qualitative) de la liqueur de Fehling ?
- Quelle est la formule chimique du précipité rouge formé au cours de la réaction entre le glucose et la liqueur de Fehling ?
- La projection de Fischer de la forme du glucose contenue dans le vin est donnée ci-après. Il s'agit du D-glucose.



- Le D-glucose est encore parfois appelé dextrose et le D-fructose, lévulose. À quelle propriété se réfèrent ces appellations ?
- Donner la définition du carbone asymétrique. Combien la molécule de glucose en contient-elle ?

2. Questions relatives au dosage polarimétrique.

Cette partie ne nécessite aucune connaissance particulière en chimie pour être traitée. Elle fait exclusivement appel à la réflexion.

2.1. Cas d'un vin ne contenant pas de saccharose.

On appelle :

- d_f la déviation obtenue pour une solution contenant $1 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ de fructose ;
- d_g la déviation obtenue pour une solution contenant $1 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ de glucose ;
- m_g et m_f les concentrations respectives en glucose et en fructose du vin à analyser exprimées en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$.

- a. Déterminer les expressions de m_g et de m_f en fonction de P , α_T , d_f et d_g .
- b. On considère un vin liquoreux contenant $72 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ de sucres réducteurs. La valeur mesurée de α_T est égale à -29 divisions saccharimétriques (d.s.). Déterminer m_g et m_f .
Données : $d_f = -0,864$ d.s. ; $d_g = +0,484$ d.s.

2.2. Cas d'un vin contenant du saccharose.

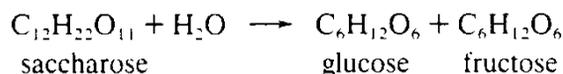
La méthode précédente doit être modifiée car le saccharose est également optiquement actif.

On opère alors comme suit :

Soit d_s la déviation correspondant à une solution contenant $1 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ de saccharose pur.

On mesure l'angle α_T dont tourne le plan de polarisation de la lumière avant hydrolyse du saccharose.

On réalise ensuite l'hydrolyse du saccharose. Celle-ci conduit à un mélange équimolaire de fructose et de glucose, selon l'équation-bilan :



On mesure l'angle α_T' dont a tourné le plan de polarisation de la lumière après hydrolyse du saccharose.

On dispose alors de trois données : $P = m_g + m_f$ (concentration en sucres réducteurs glucose + fructose avant hydrolyse), α_T et α_T' .

- a. L'hydrolyse du saccharose est également appelée « inversion du saccharose ». À quoi correspond cette appellation ?
- b. À quelles masses de sucres réducteurs (glucose et fructose) conduit l'hydrolyse de 1 g de saccharose ?
- c. Connaissant d_s , d_f et d_g , déterminer de quelle valeur (exprimée en d.s.) a varié l'angle de rotation du plan de polarisation de la lumière d'un vin contenant initialement $1 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ de saccharose, après hydrolyse de celui-ci ?

Donnée : $d_s = 0,623$ d.s.

- d. Montrer que la concentration (notée m_s et exprimée en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$) en saccharose d'un vin est donnée par la relation :

$$m_s = (\alpha_T - \alpha_T') / 0,823 .$$

PARTIE B. - CINÉTIQUE CHIMIQUE

I. Étude des facteurs dont dépend la vitesse d'une réaction chimique

Cette partie se propose d'étudier quantitativement l'influence de différents facteurs sur la vitesse d'une réaction chimique.

1. Influence des concentrations sur la vitesse d'une réaction chimique.

Soit la réaction chimique : $A + B \rightarrow C$.

On mesure la vitesse v_0 de formation initiale de C (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$) pour différentes valeurs des concentrations initiales a_0 et b_0 de A et de B en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On réalise trois séries d'expériences :

Expérience	a_0	b_0	$10^3 \cdot v_0$
1	0,1	0,1	2,0
2	0,2	0,2	8,0
3	0,1	0,2	8,0

- 1.1. Définir la vitesse instantanée d'apparition de C. Exprimer, dans le cas le plus général, cette vitesse en fonction des concentrations a et b en A et en B à la date t . Qu'appelle-t-on ordre partiel et ordre global d'une réaction chimique ?
- 1.2. Déterminer, dans l'exemple considéré, l'ordre partiel par rapport à chacun des réactifs puis la constante de vitesse de la réaction.
- 1.3. Définir le temps de demi-réaction dans le cas d'une réaction chimique. Calculer le temps de demi-réaction dans le cas de l'expérience 2.
- 1.4. Quelle serait la valeur de la vitesse initiale v_0 dans le cas suivant : $a_0 = b_0 = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$?

2. Influence de la température sur la vitesse d'une réaction chimique.

- 2.1. Quelle est, en règle générale, l'influence de la température sur la vitesse d'une réaction chimique ? Citer, éventuellement, une exception à cette règle.
- 2.2. Rappeler la relation, dite relation d'Arrhenius, liant la constante de vitesse, la température et l'énergie d'activation.
- 2.3. On considère la réaction : $D \rightleftharpoons E$.

Les constantes de vitesse k de la réaction directe et k' de la réaction inverse sont mesurées à deux températures différentes et on obtient :

$$\begin{aligned} \text{à } 61 \text{ }^\circ\text{C} : k &= 1,62 \cdot 10^{-5} \text{ min}^{-1}, \quad k' = 0,157 \cdot 10^{-5} \text{ min}^{-1}; \\ \text{à } 71 \text{ }^\circ\text{C} : k &= 6,35 \cdot 10^{-5} \text{ min}^{-1}, \quad k' = 0,445 \cdot 10^{-5} \text{ min}^{-1}. \end{aligned}$$

- 2.3.1. Calculer les énergies d'activation de la réaction directe et de la réaction inverse.
On donne $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- 2.3.2. Quelles sont les valeurs de la constante d'équilibre de la réaction à $61 \text{ }^\circ\text{C}$ et à $71 \text{ }^\circ\text{C}$? En déduire l'enthalpie de la réaction.

3. Influence d'un catalyseur sur la vitesse d'une réaction chimique.

Rappeler les définitions des termes suivants :

- catalyseur ;
- catalyse homogène ;
- catalyse hétérogène ;
- sélectivité d'un catalyseur ;
- autocatalyse.

On citera, dans chaque cas, un exemple illustrant les définitions données.

II. Correction d'une copie d'élève

L'exercice suivant a été proposé à des élèves de terminale C à l'issue du cours de cinétique chimique. Il s'agit d'un sujet proposé au baccalauréat.

SUJET

Pour étudier la cinétique d'une réaction d'estérification, on réalise un mélange équimolaire d'acide éthanóique et d'éthanol que l'on répartit ensuite en fractions égales dans des tubes scellés. On place ces tubes dans une étuve maintenue à la température constante de 60 °C. À différents instants successifs t , on retire l'un des tubes de l'étuve, on le ramène à la température ambiante et on dose l'acide qu'il contient par une solution d'hydroxyde de sodium de concentration connue.

1. Pourquoi fait-on le dosage de l'acide restant à la température ambiante et non à 60 °C ? Préciser le facteur cinétique mis en jeu.
2. Les différents dosages successifs permettent de tracer le graphe 1 figurant sur l'annexe I.
Définir et évaluer la vitesse instantanée de formation de l'ester à la date $t_1 = 15$ min et à la date $t_2 = 90$ min.
Les deux résultats trouvés vous semblent-ils en accord avec l'un des facteurs de la cinétique ? Préciser lequel. Expliquer en quelques lignes l'influence de ce facteur.
3. Si au mélange initial acide-alcool, on avait ajouté des ions H_3O^+ , l'allure de la courbe aurait été modifiée. Sur le graphe 2 de l'annexe I, la courbe précédemment étudiée apparaît (courbe 1). L'une des trois autres courbes représente l'évolution de la réaction en présence d'ions H_3O^+ .
 - a. Indiquer le numéro de la courbe qui vous semble être la bonne.
 - b. Justifier votre réponse.

Questions aux candidats au CAPES et CAERPC

1. Rédiger le corrigé de cet exercice en précisant les capacités testées. (La liste des capacités à tester figure dans l'annexe II).
2. Corriger la copie de l'élève (annexe III) avec un stylo de couleur en cochant une croix dans la marge au niveau des erreurs reprises dans l'appréciation finale puis, pour finir, rédiger vos appréciations générales (dix lignes au maximum) ; celles-ci doivent constituer un conseil sur la manière de rédiger au baccalauréat, une explication des erreurs et des maladresses les plus importantes.
La copie (annexe III) corrigée est à rendre avec votre copie.

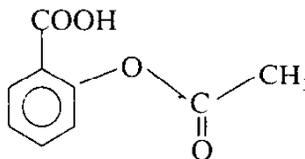
PARTIE C. — ÉTUDE DE QUELQUES EXPÉRIENCES DE TRAVAUX PRATIQUES

Conformément aux objectifs et recommandations des nouveaux programmes de terminales C ou D, un certain nombre d'expériences réalisables en travaux pratiques par les élèves sont proposées dans les ouvrages destinés aux élèves.

On se propose dans cette partie, d'étudier deux des expériences proposées.

I. Dosage de l'aspirine

1. En première approximation, l'aspirine (acide 2-acétylsalicylique ou acide acétylsalicylique) :



possède les propriétés de la fonction acide carboxylique et les propriétés de la fonction ester. Au cours de la réaction de dosage, deux moles de soude réagissent sur une mole d'acide 2-acétylsalicylique.

Écrire l'équation-bilan de la réaction de dosage.

2. Un protocole expérimental proposé aux élèves est le suivant :

Première partie. — Réaction acide-base et hydrolyse basique de l'ester.

- On utilise trois comprimés d'aspirine 500. Dans une fiole conique (ou erlenmeyer) de 250 mL, mélanger les trois comprimés avec exactement un volume de 20 mL de solution aqueuse d'hydroxyde de sodium de concentration $c_1 = 1,00 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Ajouter environ autant d'eau distillée.
- Chauffer, à ébullition lente, pendant 10 minutes. Laisser refroidir.
- Recueillir le liquide limpide obtenu dans une fiole jaugée de 250 mL ; rincer la fiole conique ayant servi à la réaction chimique et ajouter l'eau de rinçage dans la fiole jaugée. Ajuster alors le volume de solution à $V_0 = 250 \text{ mL}$ exactement ; boucher et homogénéiser par retournements successifs de la fiole.

La solution obtenue est appelée S. Elle contient un excès d'hydroxyde de sodium.

Deuxième partie. — Dosage de l'hydroxyde de sodium en excès.

- Placer la solution S dans la burette.
- Verser un volume $V_2 = 10 \text{ mL}$ d'acide sulfurique de concentration $c_2 = 0,015 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ dans un bécher. Ajouter quelques gouttes de phtaléine.
- Faire un dosage rapide mL par mL pour obtenir un encadrement du volume de solution S à l'équivalence. Réaliser ensuite deux dosages précis à la goutte près. Soit V le volume moyen obtenu au cours de ces deux dosages précis.

Questions aux candidats au CAPES et CAERPC

- Proposer la liste du matériel nécessaire à chaque élève pour réaliser ce TP.
- Pourquoi opère-t-on à chaud et en présence d'un excès de soude dans l'étape *b* ?
- Pourquoi refroidit-on ensuite, avant de verser le mélange réactionnel (aspirine + soude) dans la fiole jaugée ?
- Pourquoi met-on la solution S dans la burette et l'acide sulfurique dans le bécher, et non l'inverse, compte tenu de l'utilisation de la phtaléine comme indicateur coloré ?

- 2.5. Quelle serait la concentration c' en hydroxyde de sodium dans la fiole jaugée en absence d'aspirine ?
- 2.6. On rappelle les masses molaires atomiques :
 $H : 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $C : 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $O : 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
 et on donne la valeur de V à l'équivalence soit : $V = 21,7 \text{ mL}$.
- Déterminer la masse d'aspirine contenue dans un comprimé d'aspirine 500.
 - Quel est le lien entre cette masse déterminée ici par dosage et le nom commercial du comprimé ?
- 2.7. L'aspirine est préparée par action de l'acide 2-hydroxybenzoïque (ou acide hydroxy-2 benzoïque) sur l'anhydride éthanóique. Écrire l'équation-bilan de la réaction.
- 2.8. L'acide 2-acétylsalicylique est peu soluble dans l'eau ($2,5 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$).
 Le pH d'une solution aqueuse saturée en aspirine est de 2,8. Montrer que l'on peut retrouver cette valeur numérique connaissant le pK_a (soit 3,75) et la solubilité de l'acide 2-acétylsalicylique.

II. Dosage des ions hydrogénocarbonate d'une eau minérale

On se propose de déterminer la concentration en ions hydrogénocarbonate HCO_3^- contenus dans deux eaux minérales : l'eau d'Évian et l'eau de Contrexéville.

Le mode opératoire proposé pour ces deux dosages est le suivant :

On prélève 100 mL d'eau minérale et on dose par une solution d'acide sulfurique de concentration $0,030 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le dosage est effectué par pH-métrie.

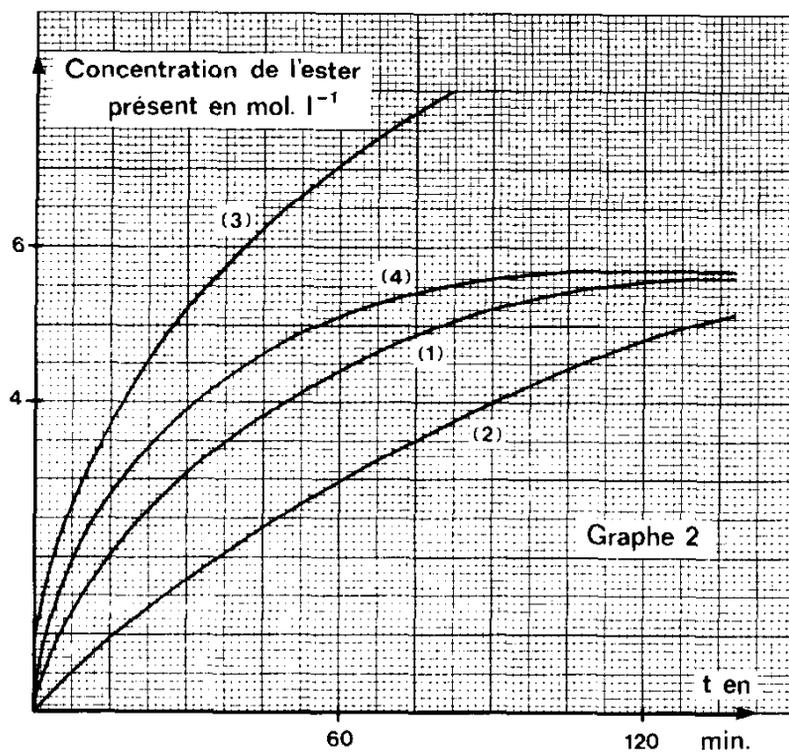
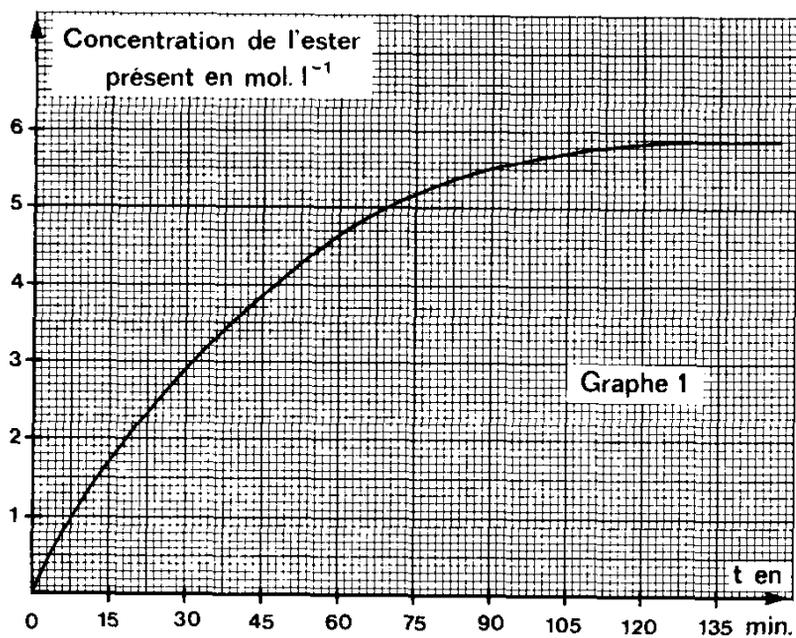
Pour l'eau d'Évian, l'équivalence est obtenue pour un volume d'acide $V_e = 9,9 \text{ mL}$. Pour l'eau de Contrexéville, l'équivalence est obtenue pour un volume d'acide $V_e = 12,7 \text{ mL}$.

Questions aux candidats au CAPES et CAERPC

- Les pK_a des couples acido-basiques mettant en jeu le dioxyde de carbone CO_2 sont égaux à 6,4 et 10,3.
 Écrire les réactions acido-basiques correspondant à la première et à la seconde acidité de CO_2 dissous.
- Quelle est la réaction mise en jeu au cours du dosage des ions hydrogénocarbonate par la solution d'acide sulfurique ?
- Calculer en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ puis en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$ (les masses molaires atomiques sont données en 2.6.), la concentration en ions hydrogénocarbonate dans l'eau d'Évian puis dans l'eau de Contrexéville.
 Comparer ces valeurs à celles figurant sur les bouteilles :
 - $357 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ pour l'eau d'Évian ;
 - $0,377 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ pour l'eau de Contrexéville.
- Tracer qualitativement, en donnant les points remarquables, la courbe de dosage de l'eau d'Évian par l'acide sulfurique.
 On négligera la dilution et on donne le pH de l'eau d'Évian : 7,2.

ANNEXE I

(Se reporter au sujet de baccalauréat de la partie B, question 2)



ANNEXE II

Partie B, question 2

Capacités à évaluer en sciences physiques(Arrêté du 14 mars 1986, *BO* spécial n° 1 du 5 février 1987)**CAPACITÉS A ÉVALUER EN SCIENCES PHYSIQUES****A) POSSÉDER DES CONNAISSANCES SPÉCIFIQUES AUX SCIENCES PHYSIQUES***1. Des connaissances scientifiques :*

- a) vocabulaire, symboles, unités,
- b) ordres de grandeur,
- c) définitions, lois, modèles.

2. Des connaissances de savoir-faire :

- a) dans le domaine expérimental,
- b) dans le domaine théorique.

B) UTILISER DES CONNAISSANCES ET DES SAVOIR-FAIRE NON SPÉCIFIQUES AUX SCIENCES PHYSIQUES

- 1. *Accéder aux connaissances au moyen de différentes sources.*
- 2. *Utiliser la langue française.*
- 3. *Utiliser les outils mathématiques.*
- 4. *Utiliser d'autres outils et moyens d'expression.*

C) PRATIQUER UNE DÉMARCHE SCIENTIFIQUE

Notamment :

- observer et analyser,
- choisir ou élaborer un modèle physique,
- organiser les étapes de la résolution,
- porter un jugement critique.

1. Dans une situation voisine d'une situation connue

- a) dans le domaine expérimental,
- b) dans le domaine théorique.

2. Dans une situation inconnue

- a) dans le domaine expérimental,
- b) dans le domaine théorique.

La liste des capacités qui précède est le résultat de l'unification de plusieurs listes établies par différents groupes de recherche et d'expérimentation qui ont travaillé ces dernières années à des niveaux différents de l'enseignement secondaire dans le cadre du programme national d'innovation de la Direction des lycées. Il vise à préciser les capacités à évaluer chez les élèves parmi celles, plus étendues, que l'enseignement des sciences physiques cherche à leur faire acquérir. En particulier, sont exclues de l'évaluation les capacités liées aux objectifs d'attitude et de comportement.

Ce document est donc général pour les sciences physiques. Il doit être utilisé dans les différentes classes et dans les différentes actions d'évaluation :

(Copie d'élève à corriger et à remettre avec votre copie)

I. Chimie

1°/ de dosage de l'acide restant dans le tube à température ambiante. Lors de la réaction, la température utilisée était $\theta_1 = 60^\circ$. On ramène le tube à température ambiante pour éviter que la réaction d'estérification ne poursuive rapidement en raison de la haute température. Ainsi, le dosage est effectué dans de meilleures conditions. Le facteur cinétique qui entre en jeu est l'influence de la température : en effet, plus la température est élevée, plus les molécules s'agitent (il y a agitation dans le milieu réactionnaire, plus la réaction est rapide).

2°/ La vitesse instantanée de formation de l'ester à $t_1 = 15 \text{ min}$ ou $t_2 = 90 \text{ min}$ est la vitesse où l'ester se forme à une date précise. On l'obtient en cherchant la dérivée de n (nombre de moles sur le temps).

Où a :

(Ici, il s'agit de la vitesse molaire d'apparition de l'ester).

$$V_f = \frac{d[C]}{dt} \quad \begin{matrix} \leftarrow (\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}) \\ \leftarrow (\text{s}) \end{matrix}$$

A $t_1 = 15 \text{ min}$: on trace la tangente, et on cherche son coefficient directeur :

Ou a :

$$V_f = \frac{MN}{PN} = \frac{6}{75} = 0,08 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

la vitesse instantanée à $t_1 = 15 \text{ min}$ est $0,08 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$

A $t_2 = 90 \text{ min}$, on trace la tangente et on cherche son coefficient directeur :

$$\text{d'où } V_f = \frac{MN}{PN} = \frac{2,5}{150} = 0,016 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

la vitesse instantanée à $t_2 = 90 \text{ min}$ est $0,016 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$

Ces deux résultats sont en accord avec un facteur de la cinétique. Ce facteur est l'influence de la concentration des corps dans un liquide. C'est l'influence de la quantité de matière qui est en jeu.

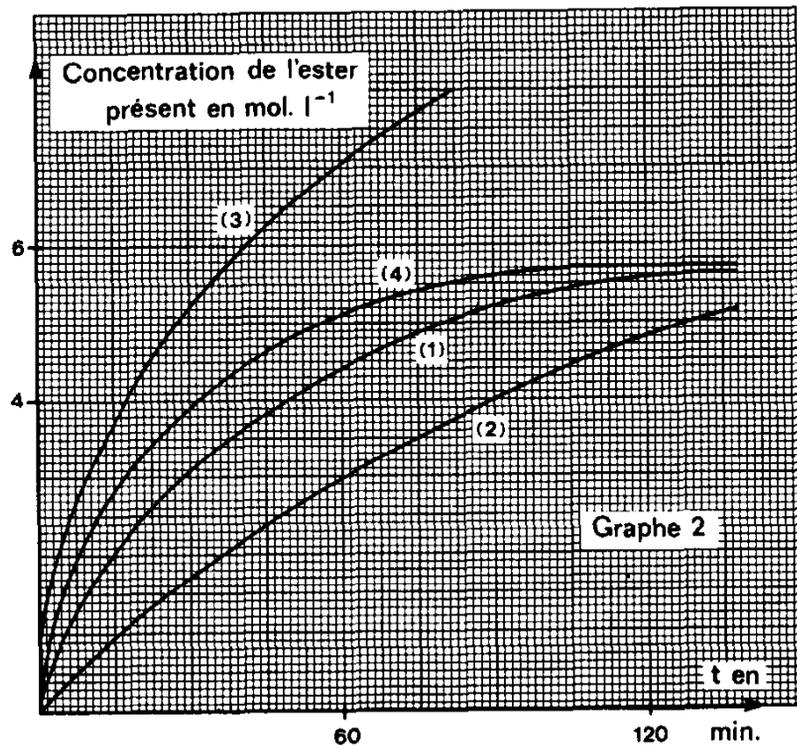
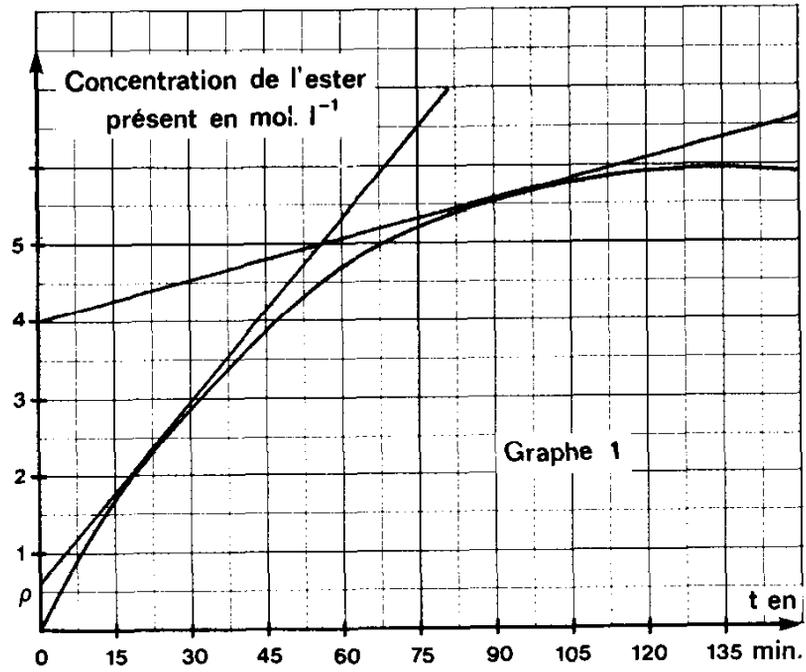
En effet, au début d'une réaction chimique lente, les produits initiaux ont une grande concentration. Puis lorsqu'ils réagissent rapidement, leur concentration diminue alors que celle du produit formé augmente.

Plus, la concentration est grande (concentration en produits initiaux), plus la zone de contact entre les molécules est grande, plus la réaction est rapide.

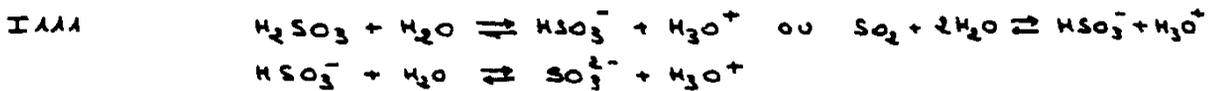
ex: dans notre réaction, au début la concentration en acide et en éthanol est forte donc vitesse rapide (à l'inverse) à $t_2 = 90 \text{ min}$, cette concentration a diminué donc la vitesse est plus lente.

3/ Je pense qu'il s'agit de la courbe (2) du graphe (2). Car si on rajoute des ions H_3O^+ , la solution est plus dissoute donc la vitesse est moins grande. Il s'agit de la courbe (2)

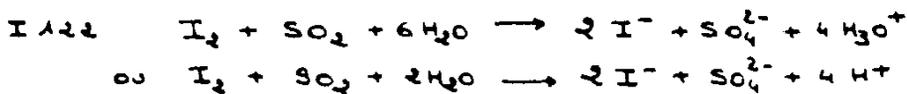
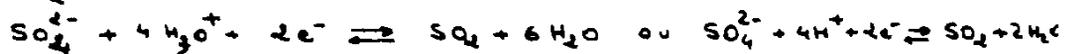
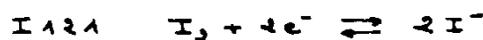
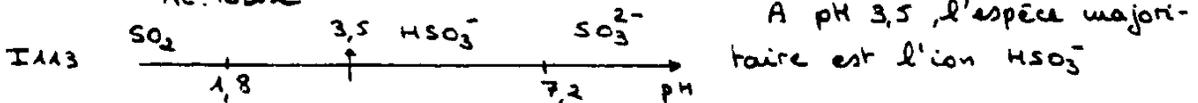
la solution est plus dissoute \Rightarrow la concentration en acide éthanoïque et en éthanol est moins forte, donc la vitesse d'estérification sera plus lente.



Partie A : Etude de quelques aspects de la Chimie du Vin

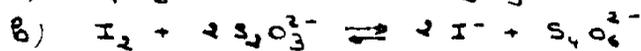
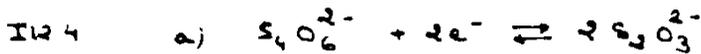
I Etude de deux des espèces minérales contenues dans le vinI1 Dosage de l'acide sulfureux

I112 Ampholyte = Espèce susceptible de jouer le rôle de base conjuguée d'un couple Ac. Base et d'acide conjugué d'un second couple Ac. Base



I123 a) I_2 est peu soluble dans l'eau. On augmente sa solubilité par complexation $\text{I}_2 + \text{I}^- \xrightleftharpoons{K} \text{I}_3^-$ ($K \approx 750$)

b) sous forme d'ion I_3^- (ion triiodure)



c) $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}$ = ion tétrathionate

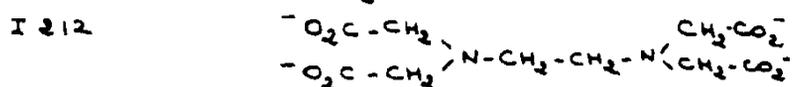
d) rhodène ou empis d'amidon

I131 1 mole de I_2 correspond à 1 mole soit 64g de SO_2 .
 1 ml de I_2 0,1 mol. L⁻¹ contient 10^{-5} mol de I_2
 \Rightarrow 1 ml de I_2 0,1 mol. L⁻¹ correspondent à $0,4 \cdot 10^{-3}$ g
 (ou 0,64 mg) de SO_2 .

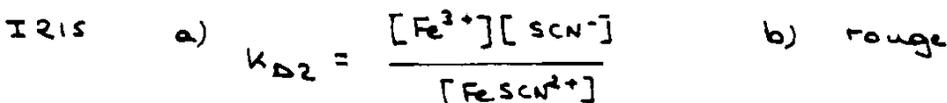
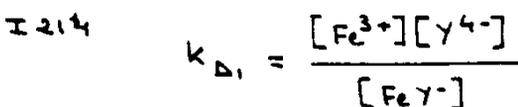
I132 50 ml de vin \leftrightarrow n ml de solution de I_2
 \Rightarrow 1 L de vin \leftrightarrow 20 n ml de solution de I_2
 \Rightarrow x = $20 \cdot 0,64 \cdot 10^{-3} \cdot n = 12,8 n$ mg L⁻¹

I2 Dosage du fer

I211 Acide éthylène diamine tétraacétique



I213 6 positions de chélation : CO_2^- 4 positions, N 2 positions



I 221 Volume total de solution à analyser = 50 + 2 + 1 + 10 = 63 ml
 1 mole de Fe = 56 g
 $c = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{56} \times \frac{50}{63} = 1,42 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ($\frac{50}{63}$ = fact. de dilution)

I 222 Masse molaire NH_4SCN : 76 g. mol⁻¹
 Une solution à 5% contient 50 g de NH_4SCN pour 1000 g
 (soit ≈ 1 L) de solution
 $\Rightarrow c'_0 = \frac{50}{76} = 0,658 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

I 223 On pose c (concentration en Fe total dans la solution à analyser)
 c' (concentration en SCN^- total - - - - -)

$$c = 1,42 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$c' = c'_0 \cdot \frac{10}{63} = 0,104 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$c = [\text{Fe}^{3+}] + [x] \quad \text{avec } x = \text{FeSCN}^{2+}$$

$$c' = [\text{SCN}^-] + [x]$$

$$K_{D2} = \frac{[\text{Fe}^{3+}][\text{SCN}^-]}{[x]} = 10^{-2}$$

On utilise les approximations suivantes :

$$c' \gg c \Rightarrow [x] \gg [\text{Fe}^{3+}] \Rightarrow [x] \approx c = 1,42 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[x] \ll [\text{SCN}^-] \Rightarrow [\text{SCN}^-] \approx c' = 0,104 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\Rightarrow [\text{Fe}^{3+}] \approx K_{D2} \cdot \frac{c}{c'} = 1,36 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

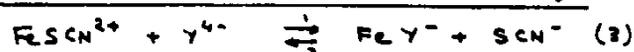
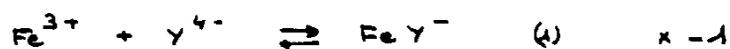
On admettra ces résultats ou les résultats plus précis suivants

$$[\text{Fe}^{3+}] = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}, [\text{FeSCN}^{2+}] = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{SCN}^-] = 0,104 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

obtenus par résolution d'une équation du 2^e degré en $[\text{Fe}^{3+}]$

224 On ajoute de l'EDTA (noté Y^{4-}).



$$K_3 = \frac{[\text{FeY}^-][\text{SCN}^-]}{[\text{FeSCN}^{2+}][\text{Y}^{4-}]} = \frac{K_{D2}}{K_{D1}} = 10^{23,1} \gg 1$$

La réaction (3) est donc totale dans le sens 1.

I 225 On a maintenant :

$$c = [\text{Fe}^{3+}] + [x] + [\text{FeY}^-] = 1,42 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$c' = [\text{SCN}^-] + [x] = 0,104 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

On pose

$$c'' \text{ (concentration totale en EDTA)} = [\text{Y}^{4-}] + [\text{FeY}^-]$$

en négligeant la dilution provenant de l'addition de v ml de solution d'EDTA à $V = 63$ ml de solution
 = ... - 0.

On a $[X] = 10^{-5,5} = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ mol L}^{-1}$ à l'instant précis où la décoloration est atteinte. On a alors :

$$[SCN^-] \approx c' \quad (\text{car la réaction (3) est totale})$$

$$\Rightarrow [Fe^{3+}] = K_{d2} \cdot \frac{[X]}{c'} = 3,04 \cdot 10^{-7} \text{ mol L}^{-1}$$

$$\Rightarrow [FeY^-] = c - [Fe^{3+}] - [X] = 1,385 \cdot 10^{-4} \text{ mol L}^{-1}$$

$$\Rightarrow [Y^{4-}] = \frac{[FeY^-][SCN^-]}{K_3 [X]} = 3,6 \cdot 10^{-23} \text{ mol L}^{-1}$$

$$\Rightarrow c'' = [FeY^-] + [Y^{4-}] \approx [FeY^-] = 1,385 \cdot 10^{-4} \text{ mol L}^{-1}$$

I226

Comment évaluer l'erreur commise ?

Au cours du dosage, on a versé du Y^{4-} (EDTA). Si on avait versé autant de Y^{4-} qu'il y a de Fer total, l'erreur serait de 0% . \rightarrow

La concentration en Y^{4-} ^{versé} devrait être égale à c . Elle est en fait égale à $c'' \Rightarrow$

$$\text{Erreur relative } \frac{\Delta c''}{c''} = \frac{c - c''}{c} = 2,5\%$$

I227

Le vin contient 10 mg de Fer III par L. Pour que 1 cm³ d'EDTA correspondent à 1 mg de Fer III par L, il faut une solution d'EDTA de concentration c_{EDTA}

50 mL de vin (contenus dans la solution à analyser) contiennent 0,5 mg de Fer III et doivent correspondre à $v = 0,5$ mL de solution d'EDTA.

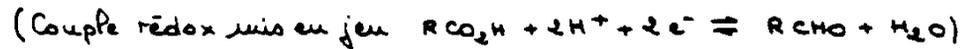
[Rq: On a donc bien $v = 0,5$ mL négligeable devant $V = 63$ mL de solution à analyser (cf I225).

$$\text{On a: } c_{EDTA} \times v = c'' \times V$$

$$\Rightarrow c_{EDTA} = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ mol L}^{-1}$$

II Etude de quelques sucres contenus dans le vin

II 11 Le glucose possède une fonction aldéhyde qui peut être oxydée en fonction acide.



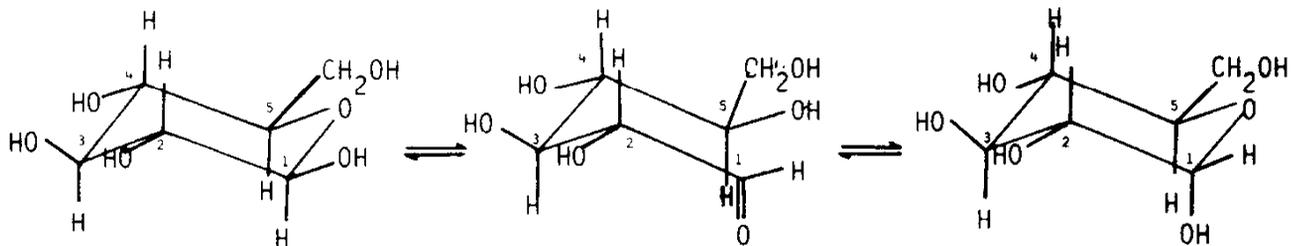
II 12 La liqueur de Fehling est un mélange de sulfate de cuivre(II) de tartrate double de Na et K en milieu basique (soude concentrée) les ions tartrate complexent Cu^{2+} (ion tartrate = $\text{C}_4\text{O}_4^{2-}$)

II 13 Cu_2O (oxyde de cuivre(I) ou oxyde cuivreux)

II 14 a) Ces appellations se réfèrent au signe du pouvoir rotatoire spécifique

b) C^* est un carbone sp^3 dont les 4 substituants sont différents

Il y a 4 C^* dans le glucose sous sa forme linéaire. En fait, en solution, il y a cyclisation et équilibre entre 2 formes anomères (notées α et β) énantiomères l'une de l'autre et comportant 5 C^* .



I (forme β)

II (forme linéaire)

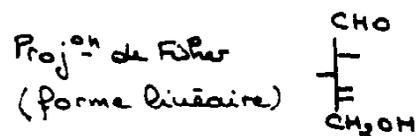
III (forme α)

A 298 K, les pourcentages à l'équilibre sont: I: 64% ; II: 0,02% ; III: 36%

Les pouvoirs rotatoires spécifiques sont:

pour I pur: $[\alpha]_D = 18,7^\circ$;

pour III pur: $[\alpha]_D = 112^\circ$.



II 21a Cas d'un vin ne contenant pas de saccharose

m_g = masse de glucose par litre de solution

m_f = - - - fructose - - - - -

$$P = m_g + m_f$$

$$\alpha_T = d_g \cdot m_g + d_f \cdot m_f$$

$$\Rightarrow m_g = \frac{P \cdot d_f - \alpha_T}{d_f - d_g} ; m_f = \frac{\alpha_T - P \cdot d_g}{d_f - d_g}$$

II 21b AN: $P = 72 \text{ gL}^{-1}$, $\alpha_T = -29 \text{ d.A.}$

$d_f = -0,864 \text{ d.A.}$; $d_g = +0,484 \text{ d.A.}$

$$\Rightarrow m_f = 47,4 \text{ g.L}^{-1}$$

$$m_g = 24,6 \text{ g.L}^{-1}$$

II 22 Cas d'un vin contenant du saccharose

a) On dit qu'il y a inversion du saccharose car le pouvoir rotatoire change de signe au cours de l'hydrolyse

b) Masses molaires : Saccharose 342 g. mol^{-1}
Glucose et fructose 180 g. mol^{-1}

1 g de saccharose donne 0,526 g de glucose et 0,526 g de fructose

c) On a avant hydrolyse $\alpha_T = z \cdot d_s$
avec ici z (masse de saccharose égale à 1 g. L^{-1}) $\Rightarrow \alpha_T = d_s$

On a après hydrolyse $\alpha'_T = m_p \cdot d_p + m_g \cdot d_g$

$$z = 1 \text{ g. L}^{-1} \Rightarrow m_p = m_g = 0,526 \text{ g. L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha'_T = m_p (d_p + d_g)$$

$$= 0,526 \cdot (-0,864 + 0,484) = -0,200 \text{ d.s.}$$

La variation de l'angle de rotation vaut

$$\alpha'_T - \alpha_T = (-0,200) - (0,823) = -0,823 \text{ d.s.}$$

Chaque fois que l'on hydrolyse une solution contenant 1 g. L^{-1} de saccharose, l'angle de rotation diminue de $0,823 \text{ d.s.}$

d) On a maintenant avant hydrolyse $\alpha_T = z \cdot d_s$

et après hydrolyse

$$\alpha'_T = m_p \cdot d_p + m_g \cdot d_g$$

$$\text{avec } m_p = m_g = 0,526 \cdot z$$

$$\Rightarrow \alpha'_T - \alpha_T = z \cdot d_s - 0,526 (d_p + d_g) \cdot z$$

$$= z [d_s - 0,526 (d_p + d_g)]$$

$$\Rightarrow z = \frac{\alpha'_T - \alpha_T}{d_s - 0,526 (d_p + d_g)} = \frac{\alpha'_T - \alpha_T}{(-0,823)}$$

$$z = \frac{\alpha_T - \alpha'_T}{0,823}$$

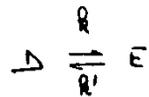
Partie B : Cinétique Chimique

I Etude des facteurs dont dépend la vitesse d'une réaction.

- I 11 $v = \frac{dc}{dt}$ $v = \frac{dc}{dt} = k a^\alpha b^\beta$
- α = ordre partiel par rapport à A
 β = ordre partiel par rapport à B
 $\alpha + \beta$ = ordre global de la réaction, $k = c^k$ de vitesse
- I 12 On utilise ici la méthode dite des vitesses initiales.
- $\log v_0 = \log k + \alpha \log a_0 + \beta \log b_0$
- Exp^{co} 1 et 3 a_0 identique $\log v_0 = \beta \log b_0 + A \Rightarrow \beta = 2$
 Exp^{co} 2 et 3 b_0 identique $\log v_0 = \alpha \log a_0 + B \Rightarrow \alpha = 0$
- $\Rightarrow v_0 = k b_0^2 \Rightarrow v = k b^2$
 $k = 0,20 \text{ L mol}^{-1} \text{ min}^{-1}$
- I 13 Soit x le réactif en défaut. On appelle temps de demi-réaction $t_{1/2}$ le temps au bout duquel la moitié du réactif x a disparu.
 ou Soit y l'un des produits formés. On appelle temps de demi-réaction le temps au bout duquel la moitié du produit y s'est formé.
 Il faut intégrer l'expression $v = k b^2$ pour obtenir l'expression de $t_{1/2}$ dans l'exemple considéré.
- A + B \rightarrow C
- EI a_0 $b_0 = a_0$ 0
- début a $b = a$ $c = a_0 - a = b_0 - b$
- $\Rightarrow v = \frac{dc}{dt} = -\frac{db}{dt}$. On doit intégrer $-\frac{db}{dt} = k b^2$
- $\Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{b_0} = k t$
- En $t = t_{1/2}$, $b = \frac{b_0}{2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{1}{k b_0}$
- AN : $t_{1/2} = 25 \text{ min}$
- I 14 $v_0 = k b_0^2$ AN AN : $v_0 = 0,05 \text{ mol L}^{-1} \text{ min}^{-1}$

- I 21 En règle générale k augmente avec T
 Exception notoire : $2 \text{ NO} + \text{O}_2 \rightarrow 2 \text{ NO}_2$
- I 22 $k = A \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)$ E est l'énergie d'activation
 A est le facteur préexponentiel
- I 231 A $T = T_1$, $k = k_1$, $a = T = T_2$, $k = k_2$
- $\log k = \log A - \frac{E}{RT} \Rightarrow \log\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = \frac{E}{2,3R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$
- $\Rightarrow E = 130 \text{ kJ/mol}$ pour la réaction directe
 $E' = 100 \text{ kJ/mol}$ pour la réaction inverse

I 232



$v = k d - k' e$ en posant $d = \text{conc.}^{\text{ou}}$ en D à la date t ,
 ($v = 0$ à l'équilibre) $e = \text{conc.}^{\text{ou}}$ en E à la date t
 et en supposant les 2 réactions d'ordre 1 (cf unités)

$$K \text{ (constante d'équilibre)} = \frac{e_e}{d_e} = \frac{k}{k'}$$

e_e et d_e étant les concentrations en E et D à l'équilibre)
 (A l'équilibre $v = k d_e - k' e_e = 0$ d'où la relation.)

$$\text{AN: } A \text{ à } 01^\circ \quad k_1 = 10,3 ; \quad \bar{a} \text{ à } 71^\circ \quad k_2 = 14,27$$

Pour calculer ΔH° , on peut utiliser l'une des 2 méthodes suivantes :

$$\text{- Relation de Van't Hoff} \quad \frac{d \ln K}{dT} = \frac{\Delta H^\circ}{RT^2} \Rightarrow \ln K = -\frac{\Delta H^\circ}{RT} + C$$

$$\text{- } \ln K = \ln \frac{k}{k'} = \ln k - \ln k' = -\frac{E - E'}{RT} + \ln(A - A')$$

$$\text{soit } \Delta H^\circ = E - E'$$

$$\text{Dans les 2 cas} \quad \Delta H^\circ = 30 \text{ kJ/mol}$$

I 3

On appelle catalyseur une substance qui accélère la vitesse d'une réaction sans modifier le bilan de cette réaction et sans subir de modification permanente.

Si le catalyseur, les réactifs et les produits appartiennent à la même phase, la catalyse est dite homogène. Dans le cas contraire la catalyse est dite hétérogène.

Lorsqu'un même système peut évoluer différemment selon la nature du catalyseur, on dit qu'il y a sélectivité du catalyseur.

Si l'un des réactifs ou l'un des produits formés catalyse la réaction, on dit qu'il y a autocatalyse.

Le candidat n'a que l'embaras du choix pour illustrer ces définitions.

II Correction d'une copie d'élève

II.1 (1) On effectue une "trappe" du système pour stopper ou ralentir fortement l'évolution du système pendant la durée du dosage.
Le facteur mis en jeu est donc la température.

(2) Soit e la concentration en ester à la date t , a celle de l'acide et b celle de l'alcool. La vitesse instantanée d'apparition de l'ester $\frac{de}{dt}$ à la date t (par définition) $v = \frac{de}{dt}$

v est égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe $e = f(t)$ à la date t . Il faut donc tracer les tangentes à la courbe $e = f(t)$ et déterminer leurs coefficients directeurs aux dates t_1 et t_2 .

$$\Rightarrow \text{Date } t_1: v_1 = 0,08 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$\text{date } t_2: v_2 = 0,016 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

On retrouve l'influence des concentrations: v dépend des concentrations en réactifs. v diminue lorsque les concentrations en réactifs diminuent.

(3) Le catalyseur ne modifie pas les proportions à l'équilibre et accélère la vitesse de la réaction. C'est donc la courbe (4) qui convient.

Capacités testées

(1) : A1, ~~A2~~ (2) ~~B1~~, B3, ~~B2~~ (3) ~~C1~~, C1

II.2. Les calculs sont justes mais la copie comporte de nombreuses fautes de français et (ou) de chimie.

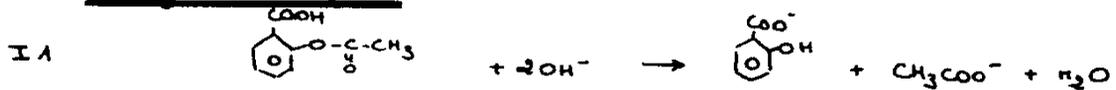
ex: (question 1) milieu réactionnaire

(question 3) réponse erronée.

Le vocabulaire utilisé en cinétique chimique n'est pas maîtrisé.

Il s'agit d'une copie d'un élève moyen de TC1.

Partie C : Expériences de Travaux Pratiques

I Dosage de l'aspirine

I 21 Pipette 20 ml + Fiole jaugée 250 ml + Etlammyer 250 ml + Agitateur magnétique chauffant + réfrigérant à air pour l'hydrolyse

Pipette 10 ml + Bêcher 100 ml + Pipette 10 ml + agitateur magnétique pour le dosage | la solubilisation et

I 22 On chauffe pour que l'hydrolyse soit suffisamment rapide. L'excès de soude est destiné à rendre la réaction totale (déplacement d'équilibre par ajout d'un excès de réactif + dosage aisé)

I 23 Le volume de la fiole jaugée est connu à 0,5 ou 1% près à 20°C (ou 25°C). Dès qu'elle est chauffée son volume et celui de la solution sont modifiés par dilatation.

I 24 Dans ce protocole opératoire, la 1^{ère} goutte en excès de (S) provoque l'apparition d'une coloration rose dans le bêcher. L'œil observe plus facilement l'apparition d'une couleur que sa disparition

I 25 En absence d'aspirine, il y aurait simplement dilution de la soude.

$$c' = c_1 \cdot \frac{20}{250}$$

$$c' = 0,08 \text{ mol.L}^{-1}$$

I 26 a) Soit c_A la concentration en aspirine dans S avant hydrolyse. Il faut 2 moles de soude pour neutraliser 1 mole de H_2SO_4 (dicaide "fort") et il faut 2 moles de soude par mole d'aspirine au cours de l'hydrolyse.

$$\Rightarrow c'v = 2 c_2 v_2 + 2 c_A v$$

$$c_A = \frac{c'}{2} = \frac{c_2 v_2}{v}$$

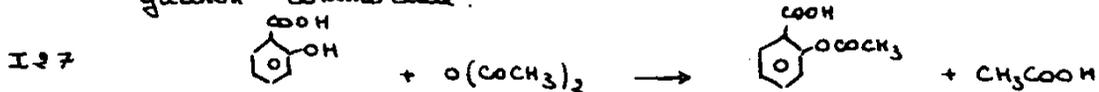
$$\text{AN: } c_A = 3,31 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

Masse molaire de l'aspirine : 180 g/mol

Masse d'aspirine dans la fiole : $m = c_A M \times \frac{250}{1000} = 1,49 \text{ g}$

Masse d'aspirine par comprimé : $\frac{1,49}{3} \approx 0,50 \text{ g}$

B/ Chaque comprimé contient 500 mg d'aspirine d'où la désignation commerciale.



Cette réaction est totale

I 28 L'aspirine (notée AH) se comporte en solution aqueuse comme un monoacide faible. Soit λ sa solubilité.

$\lambda = [AH] + [A^-] \approx [AH]$ car l'acide est faible et pas trop dilué

EN : $[H_3O^+] = [A^-] + [OH^-]$ $pH = 2,8 \Rightarrow [A^-] \approx [H_3O^+]$

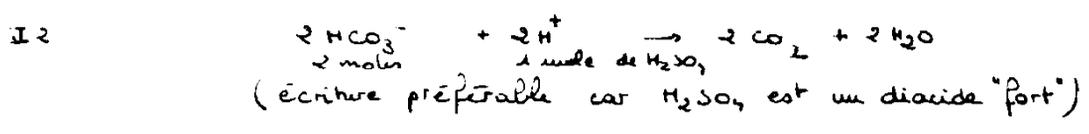
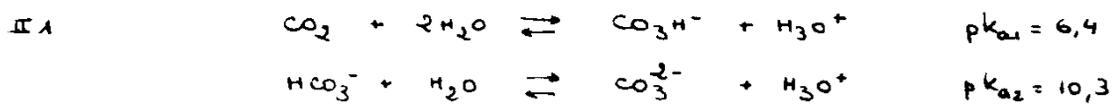
$K_a = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]} \approx \frac{[H_3O^+]^2}{\lambda} \Rightarrow$

$\lambda = \frac{[H_3O^+]^2}{K_a} = \frac{10^{-5,6}}{10^{-3,5}} = 10^{-1,85} \approx 1,41 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot L^{-1}$

Mass molaire de l'aspirine : 180 g/mol

$\Rightarrow \lambda = 1,41 \cdot 10^{-2} \text{ mol/l} = 1,41 \cdot 10^{-2} \cdot 180 = 2,54 \text{ g} \cdot L^{-1}$

II Dosage des ions hydrogène carbonate dans une eau minérale.



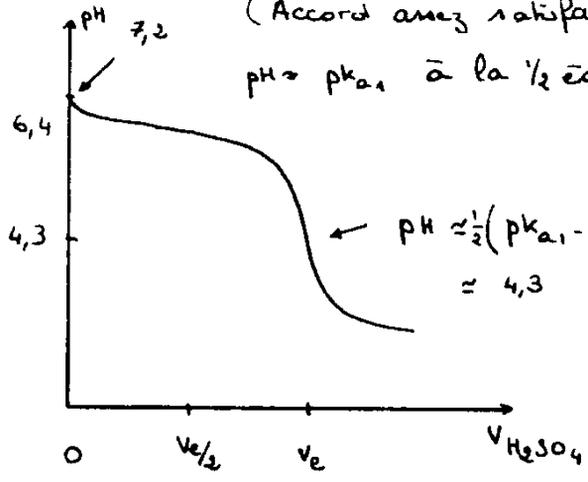
II 3 A l'équivalence $c_e V = 2c_A V_e$ ou $c_e V = 2c_A V_e$
 $V = 100 \text{ ml} = \text{vol. d'eau minérale prélevé}$
 $c_A = \text{concentration de la solution de } H_2SO_4$
 $c_e = \text{concentration en } HCO_3^- \text{ dans l'eau d'Evian}$
 $c_A = \text{ " " " " " de Contrexéville}$

Mass molaire de $HCO_3^- = 61 \text{ g/mol}$

$\Rightarrow c_e = \frac{2 \times 0,03 \times 9,8}{100} = 5,94 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot L^{-1} = 362 \text{ mg} \cdot L^{-1}$

$c_A = \frac{2 \times 0,03 \times 12,7}{100} = 7,62 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot L^{-1} = 0,464 \text{ g} \cdot L^{-1}$

II 4 (Accord assez satisfaisant avec les indications des étiquettes)



$pH \approx pK_{a1}$ à la $1/2$ équivalence $\approx 6,4$

$pH \approx \frac{1}{2}(pK_{a1} - \log c)$ à l'équivalence $\approx 4,3$

Il s'agit de valeurs approchées car la dilution de l'acide est importante.

SESSION DE 1992

**concours interne de recrutement
et concours d'accès à l'échelle de rémunération
des professeurs certifiés**

section : physique et chimie

section : physique et
électricité appliquée

composition à partir du programme

Durée : 4 heures

Calculatrice de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Aucun document n'est autorisé.

L'épreuve comporte trois études :

- A. Étude d'un oscilloscope.
- B. Étude d'un phénomène d'interférences lumineuses.
- C. Étude de transformations d'un gaz parfait.

Les trois études sont indépendantes.

Il est conseillé aux candidats de répartir leur temps de travail à raison de :

- A. 1 h 45.
- B. 1 h 30.
- C. 0 h 45.

Il sera accordé une importance significative aux qualités d'expression ainsi qu'à la présentation de la copie.

A. ÉTUDE D'UN OSCILLOSCOPE

Les différentes parties de cette étude sont indépendantes.

On supposera les vitesses suffisamment faibles pour que la mécanique classique constitue une assez bonne approximation et on négligera les effets de pesanteur.

Données :

- masse de l'électron : $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg;
- charge de l'électron : $-e = -1,6 \times 10^{-19}$ C.

Le tube d'un oscilloscope est une ampoule où la pression résiduelle est la plus faible possible et dans laquelle sont installés un canon à électrons, deux systèmes de plaques déflectrices et un écran lumineux sous l'impact des électrons. Ce tube est à symétrie cylindrique d'axe $z'z$ horizontal (fig. 1).

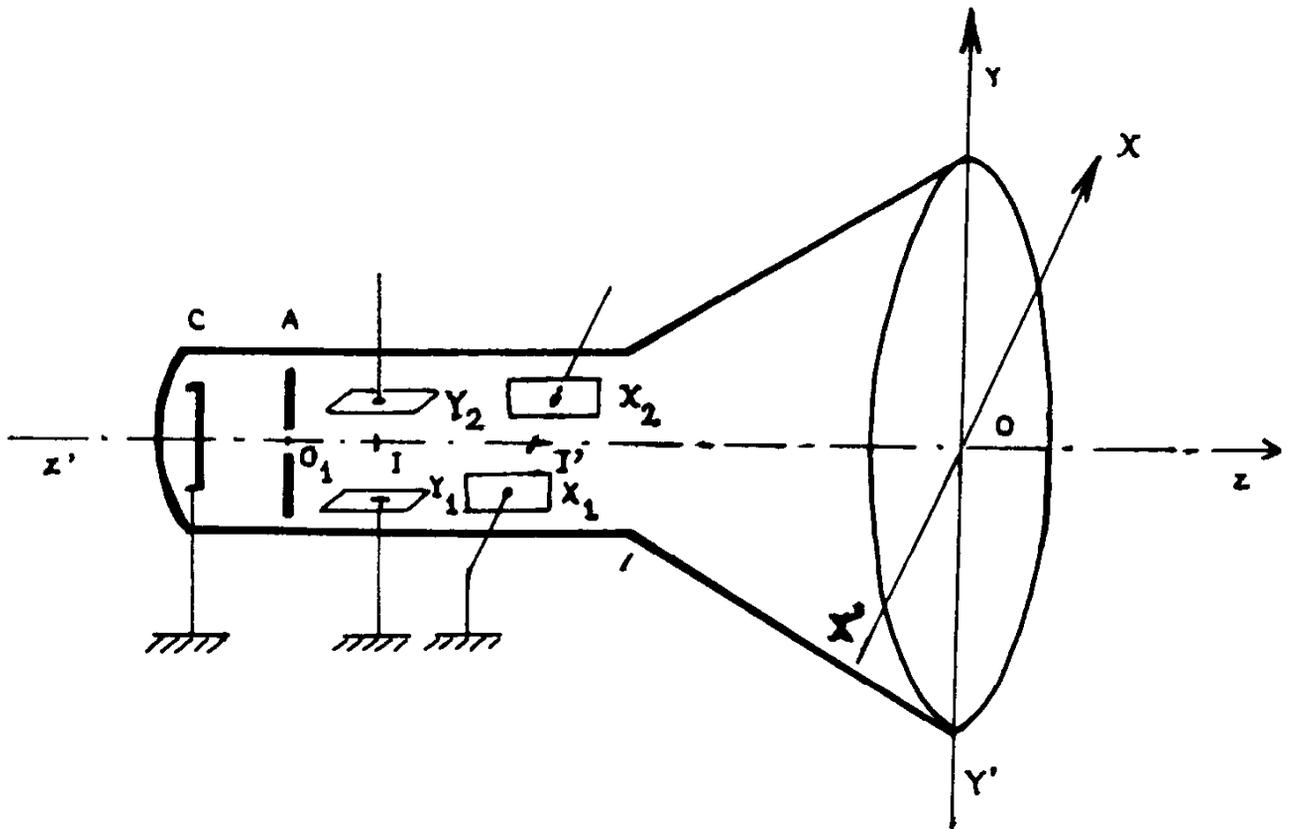


Figure 1

A.1. Le canon à électrons.

Une cathode C émet des électrons sans vitesse; ceux-ci arrivent sur l'anode A ou la traversent par une petite ouverture O_1 située sur l'axe $z'z$ avec une vitesse caractérisée par le vecteur \vec{v}_0 parallèle à $z'z$.

Entre les électrodes C et A, on établit une différence de potentiel $U_0 = V_A - V_C$.

Déterminer la valeur de cette tension U_0 pour que les électrons atteignent A ou O_1 avec la vitesse :

$$v_0 = 2,5 \times 10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

A.2. La déviation verticale.

Les plaques peuvent être ramenées à des rectangles de longueur l parallèle à l'axe du tube; l'écartement des plaques est désigné par d ; leurs positions sont repérées par les centres géométriques des condensateurs ainsi constitués : I et I' (fig. 1).

Le centre de l'écran est désigné par la lettre O, origine d'un système d'axes orthonormés horizontal et vertical, $x'x$ et $y'y$.

On pose $IO = D$ et $I'O = D'$.

On applique, entre les plaques horizontales Y_1 et Y_2 centrées en I, une différence de potentiel $u_y = V_{y_2} - V_{y_1}$ et entre les plaques verticales X_1 et X_2 une différence de potentiel $u_x = V_{x_2} - V_{x_1}$.

Lorsque $u_x = u_y = 0$, on observe un spot lumineux en O.

A.2.1. On maintient $u_x = 0$ et on établit une différence de potentiel constante u_y non nulle. On admet que le champ électrique en résultant, dans le parallélépipède défini par Y_1 et Y_2 , est uniforme, et nul à l'extérieur.

Un électron pénètre dans ce champ au point de coordonnées $(0, 0, z_0)$ avec le vecteur vitesse \vec{v}_0 défini dans A.1. On appelle \vec{v} son vecteur vitesse quand il quitte le condensateur constitué par les plaques horizontales.

A.2.1.1. Déterminer la trajectoire de l'électron dans le condensateur.

A.2.1.2. Déterminer la trajectoire de l'électron après sa traversée du condensateur.

A.2.1.3. Exprimer littéralement :

α . La durée θ de la traversée du condensateur ;

β . L'angle α que fait le vecteur \vec{v} avec l'axe $z'z$;

γ . L'ordonnée Y_S du spot lumineux sur l'écran.

A.2.1.4. Application numérique :

Calculer θ et Y_S .

$$u_y = 100 \text{ V}, l = 5,0 \text{ cm}, d = 4,0 \text{ cm}, D = 50 \text{ cm}, v_0 = 2,5 \times 10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

A.2.2. On maintient toujours u_x nulle, mais on applique, entre les plaques horizontales, une tension variable, sinusoïdale, de fréquence N et de valeur maximale 100 V.

L'électron pénètre dans le champ à la date $t = 0$ et en sort à la date θ . Comparer les valeurs de u_y aux dates 0 et θ pour des valeurs de N comprises entre 10 et 10^4 Hz.

Préciser le mouvement du spot sur l'écran pour une tension sinusoïdale qui, exprimée en volts, s'écrit :

$$u'_y = 100 \cdot \cos(100 \cdot \pi \cdot t).$$

A.3. Le balayage horizontal.

On impose $u_y = 0$ et on applique entre les plaques X_1 et X_2 la différence de potentiel u_x considérée comme constante pendant la traversée par l'électron du champ ainsi créé.

A.3.1. Calculer littéralement la déviation horizontale X_S du spot sur l'écran en fonction de e , m , v_0 , D' , l , d et u_x .

A.3.2. On désire que l'électron qui est en G, au bord de l'écran (fig. 2), décrive GG' avec une vitesse constante en un intervalle de temps de durée T' , puis qu'il retourne très vite en G pour reprendre le mouvement précédent.

On donne : $GG' = 10 \text{ cm}$, $T' = 5,0 \times 10^{-2} \text{ s}$, $D' = 45 \text{ cm}$.

Déterminer l'équation horaire du mouvement du spot sur l'écran pour $t \in [0, T']$, puis l'expression de u_x en fonction de la date t .

Préciser les valeurs extrêmes de u_x .

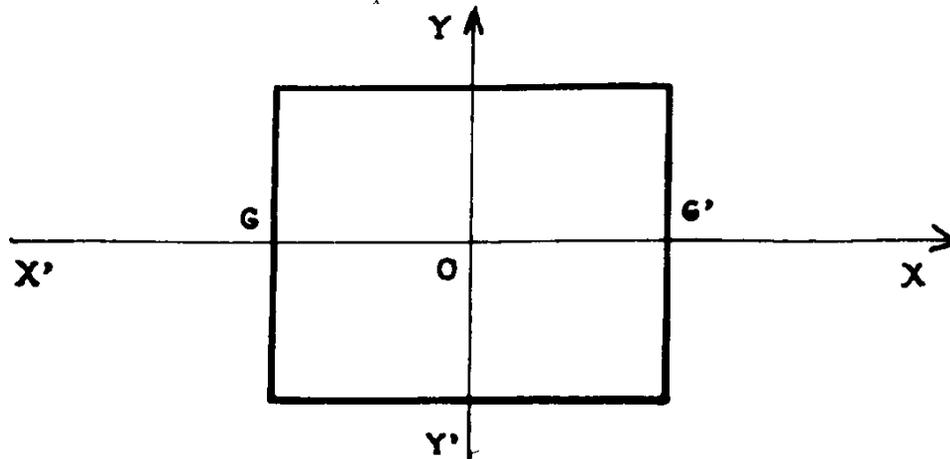


Figure 2

A.4. Utilisation de l'oscilloscope.

Une portion de circuit ESM (fig. 3) comporte un condensateur de capacité C et un conducteur ohmique de résistance R . Entre E et M , on impose la tension $V_E = u(t)$.

A.4.1. Établir l'équation différentielle dont la différence de potentiel entre S et M , $V_S = v(t)$, est solution.

A.4.2. Résoudre cette équation en régime permanent quand :

$$u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Commenter les cas $\omega \ll \frac{1}{R \cdot C}$ et $\omega \gg \frac{1}{R \cdot C}$.

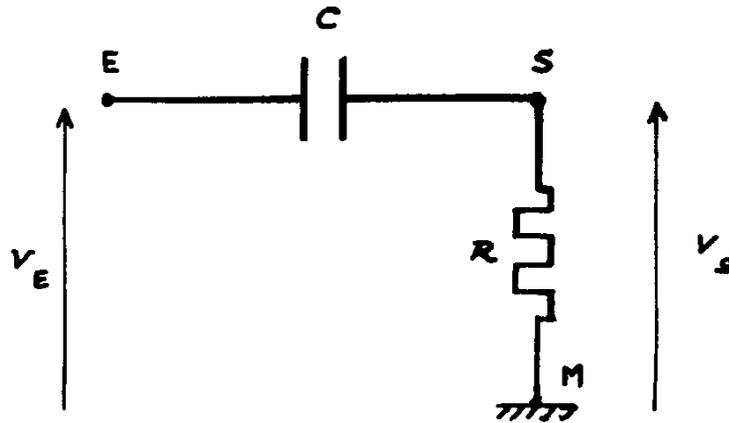


Figure 3

A.4.3. Donner une solution générale de cette équation en régime permanent quand $u(t)$ est la fonction créneaux tracée figure 4, pour $t \in \left] n \cdot \frac{T}{2}, (n+1) \cdot \frac{T}{2} \right[$, n étant un entier.

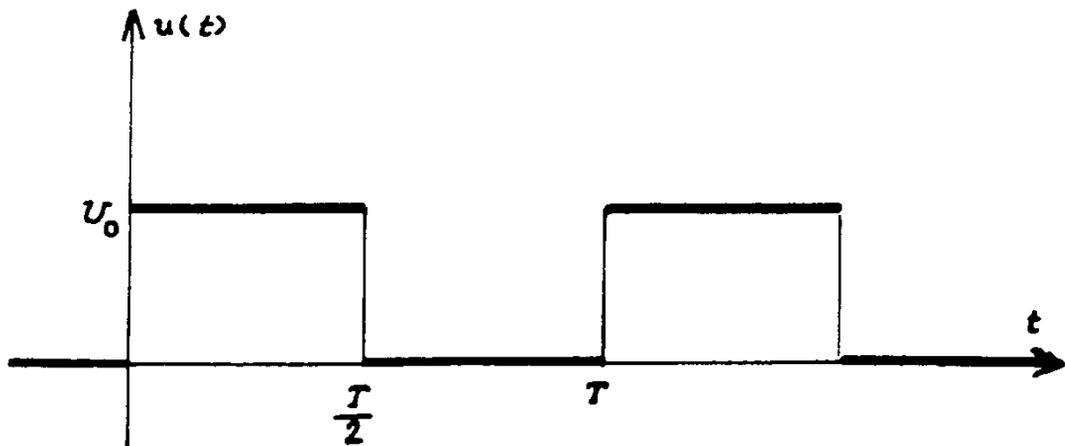


Figure 4

Justifier que $v(t)$ soit discontinue et préciser la valeur de cette discontinuité.

Tracer l'allure de $v(t)$ dans les cas $T \gg R \cdot C$ et $T \ll R \cdot C$.

A.4.4. Commenter les résultats précédents.

B. ÉTUDE D'UN PHÉNOMÈME D'INTERFÉRENCES LUMINEUSES

On réalise, dans l'air, l'expérience des trous d'Young à l'aide du dispositif schématisé sur la figure 5.

Un laser émet un faisceau lumineux cylindrique d'axe $z'z$, de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, et on suppose, dans tout ce qui suit, qu'il éclaire entièrement les différentes ouvertures placées sur son passage.

Une plaque (P), dans laquelle sont percés deux trous identiques T_1 et T_2 de très faible diamètre, est perpendiculaire à l'axe $z'z$ et peut se translater parallèlement à l'axe $y'y$. La distance T_1T_2 entre les deux trous est notée a .

À la distance D de la plaque (P) est placé un écran (E) perpendiculairement à $z'z$.

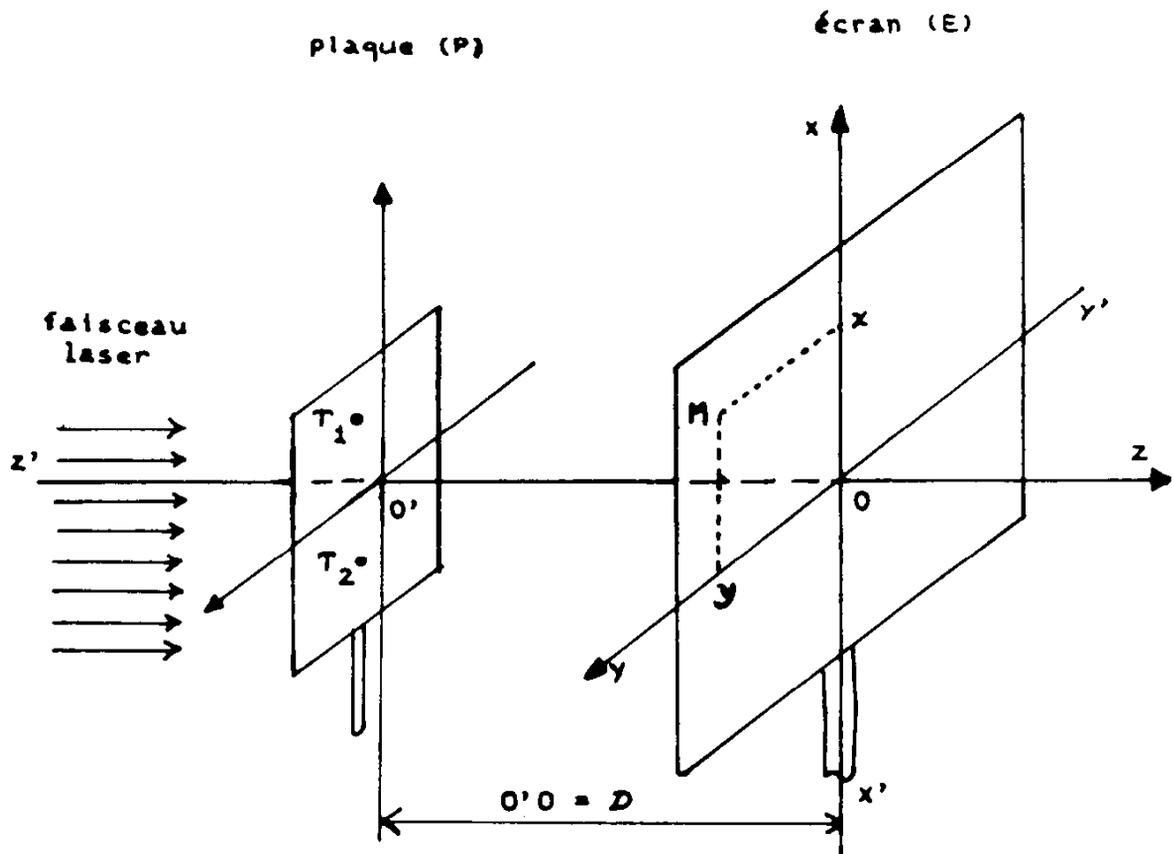


Figure 5

B.1. Aspect qualitatif du phénomène.

Dans cette partie B.1., il est demandé des réponses concises sans démonstration.

B.1.1. Quelle est la couleur de la lumière émise par le laser ?

B.1.2. Qu'observe-t-on sur l'écran ?

B.1.3. Qu'observe-t-on si on obture l'un des trous ?

B.1.4. Comment est modifié le phénomène observé si on translate la plaque (P) ?

B.1.5. Comment est modifié le phénomène observé si on remplace les deux trous par deux fentes très fines parallèles à l'axe $y'y$, avec le même écartement ?

B.1.6. Comment est modifié le phénomène observé si on déplace l'écran (E) suivant $z'z$?

B.1.7. Pourrait-on réaliser cette expérience à l'aide de deux lasers indépendants éclairant chacun un trou ? Pourquoi ?

B.2. Différence de chemin optique.

Soit un point M de l'écran, de coordonnées $(x, y, 0)$, voisin du point O (fig. 5).

Les coordonnées de T_1 et T_2 sont respectivement $\left(\frac{a}{2}, b, -D\right)$ et $\left(-\frac{a}{2}, b, -D\right)$ [fig. 6].

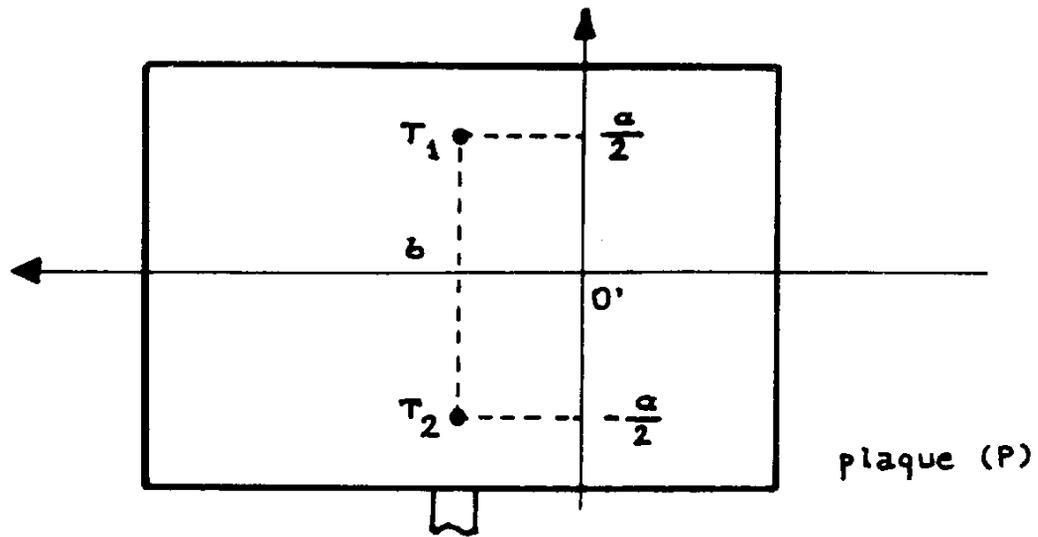


Figure 6

B.2.1. Exprimer en fonction de x, y et des données la différence de chemin optique δ au point M entre les rayons issus de T_1 et de T_2 .

(On prendra l'indice de l'air égal à 1).

B.2.2. On rappelle qu'au premier ordre :

$$\text{si } \epsilon \ll 1 \quad (1 + \epsilon)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \epsilon,$$

x, y, a et b étant très petits devant D mettre δ sous une forme très simple ne contenant que x, a et D .

B.2.3. Le résultat obtenu est-il cohérent avec les réponses des parties B.1.2., B.1.4. et B.1.5. ?

B.3. Analyse quantitative du phénomène.

B.3.1. Exprimer, en fonction des données et de x , le déphasage φ , au point M de l'écran, entre les deux ondes issues de T_1 et T_2 .

Pour quelles valeurs φ_b de φ observe-t-on un maximum de lumière ?

Pour quelles valeurs φ_v de φ observe-t-on un minimum de lumière ?

En déduire les positions x_b et x_v correspondantes.

B.3.2. Calculer la valeur de l'interfrange i .

On donne : $a = 2,0 \text{ mm}$ $D = 2,0 \text{ m}$.

B.3.3. On représente par $e_1(t) = e_2(t) = e_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot c}{\lambda} \cdot t\right)$ les ondes en T_1 et T_2 , e_m désignant l'amplitude de l'onde, c la célérité de la lumière et t la date.

Donner une expression $e_{1M}(t)$ de l'onde issue de T_1 au point M.

Donner une expression homologue $e_{2M}(t)$ de l'onde issue de T_2 au point M.

En déduire une expression de l'onde résultante $e_M(t)$ en M, faisant intervenir δ , puis x .

- B.3.4. L'intensité lumineuse I_M au point M peut être définie comme le carré de l'amplitude de $e_M(t)$.
Exprimer I_M en fonction de x .
Retrouver les expressions de x_b et x_c déterminées en B.3.1.
- B.3.5. Tracer l'allure du graphe de I_M en fonction de x .

B.4. Modification du dispositif.

On place entre la plaque (P) et l'écran (E), à quelques centimètres de la plaque, une lentille mince convergente de distance focale $f' = 1,0$ m et d'axe optique coïncidant avec $z'z$.

On translate la plaque pour que b soit nul.

On place l'écran de façon à obtenir une image nette.

- B.4.1. Où doit être placé l'écran par rapport à la lentille ?
- B.4.2. Faire un schéma représentant le trajet des rayons lumineux issu de T_1 et T_2 et atteignant le point M de coordonnée $(x, 0, 0)$.
- B.4.3. Exprimer la différence de chemin optique δ' entre ces deux rayons, puis le déphasage φ' entre les deux ondes.
- B.4.4. Par rapport au montage précédent l'aspect de l'écran est-il sensiblement modifié ? Comment ?
Calculer la nouvelle valeur i' de l'interfrange.
- B.4.5. Quel est l'avantage de ce dispositif par rapport au précédent ?

B.5. Dispositif à trois trous.

L'expérience précédente est reprise en perçant un trou T_3 identique aux précédents, au milieu du segment T_1T_2 .

- B.5.1. On note φ'' le déphasage en M entre les ondes issues de T_1 et de T_3 .
Exprimer en fonction de φ'' le déphasage ψ entre les ondes issues de T_2 et de T_3 , puis exprimer φ'' en fonction de x .
- B.5.2. Les ondes en T_1 , T_2 et T_3 sont représentées par :
- $$e_1(t) = e_2(t) = e_3(t) = e_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot c}{\lambda} \cdot t\right).$$
- Déterminer l'amplitude résultante A en M en fonction de φ'' .
(On pourra utiliser une construction de Fresnel.)
- B.5.3. En déduire l'expression de l'intensité I'_M au point M en fonction de φ'' , puis en fonction de x .
- B.5.4. Pour quelles valeurs x'_b de x l'intensité est-elle maximale ?
Pour quelles valeurs x'_c de x l'intensité est-elle nulle ?
- B.5.5. Montrer qu'il existe des maximums secondaires d'intensité et préciser leurs positions $x'_{b,c}$.
- B.5.6. Tracer l'allure du graphe de I'_M en fonction de φ'' .

C. ÉTUDE DE TRANSFORMATIONS D'UN GAZ PARFAIT

C.1. Préliminaires.

Dans tout ce qui suit, on étudie différentes transformations de n moles d'un gaz parfait dont l'état d'équilibre sera noté (P, V, T).

C.1.1. Écrire l'équation d'état relative à ce gaz parfait.

On notera R la constante des gaz parfaits dont la valeur sera prise par la suite égale à :
 $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

C.1.2. Énoncer le premier principe de la thermodynamique.

C.1.3. Citer une propriété remarquable de l'énergie interne d'un gaz parfait.

C.2. Compression isochore (par apport d'énergie électrique).

On enferme le gaz dans une enceinte adiabatique (ou athermane, c'est-à-dire ne permettant pas les échanges thermiques), indéformable et de capacité thermique ou calorifique négligeable (fig. 7).

L'état initial du gaz est A :

$$(P_1 = 1,0 \times 10^4 \text{ Pa}; \quad V_1 = 2,0 \times 10^{-2} \text{ m}^3; \quad T_1 = 300 \text{ K}).$$

On a placé dans l'enceinte un conducteur électrique, de résistance $r = 10 \Omega$, alimenté par un générateur de tension parfait de force électromotrice $E = 10 \text{ V}$ fonctionnant pendant une durée $\tau = 50 \text{ s}$.

On constate alors, à l'aide d'un capteur, une élévation de température du gaz $\Delta T_1 = 300 \text{ K}$.

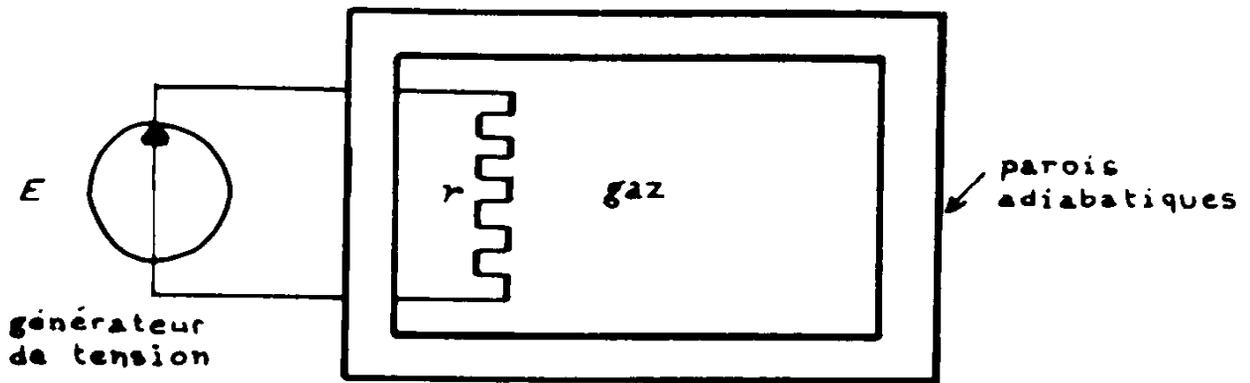


Figure 7

C.2.1. Calculer le nombre n de moles de gaz.

C.2.2. Déterminer l'état final B (P_2, V_2, T_2) du gaz.

C.2.3. Calculer la valeur de l'énergie électrique W_e reçue par le gaz ; en déduire, en appliquant le premier principe, la variation de l'énergie interne ΔU_1 correspondante.

C.2.4. On constate, en répétant l'expérience, que l'élévation de température ΔT est proportionnelle à la durée τ de fonctionnement du générateur.

Définir et calculer la capacité thermique C à volume constant du gaz.

C.3. Compression isochore AB (par contact thermique).

On enferme le gaz dans une enceinte diathermane (c'est-à-dire permettant les échanges thermiques), indéformable, de capacité thermique négligeable (fig. 8).

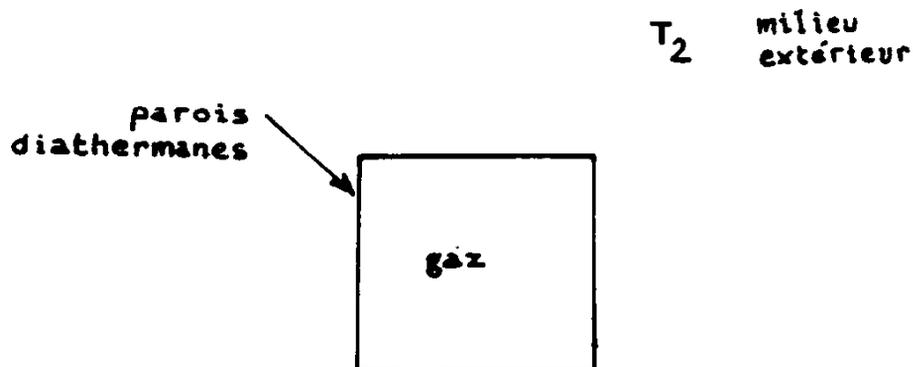


Figure 8

L'enceinte, et donc le gaz, est en contact thermique avec le milieu extérieur de température constante égale à $T_2 = 600$ K, milieu constituant une source de chaleur de température constante ou thermostat. L'état initial est l'état A (défini en C.2.).

C.3.1. Montrer que l'état final est à nouveau l'état B (défini dans C.2.2.).

C.3.2. D'où provient l'énergie calorifique ou thermique Q_1 reçue par le gaz ? Quelle est sa valeur ?

C.4. Détente isotherme BC (à la température T_2).

On enferme le gaz dans une enceinte diathermane dont une paroi horizontale, de masse négligeable, est mobile verticalement, sans frottement notable (fig. 9).

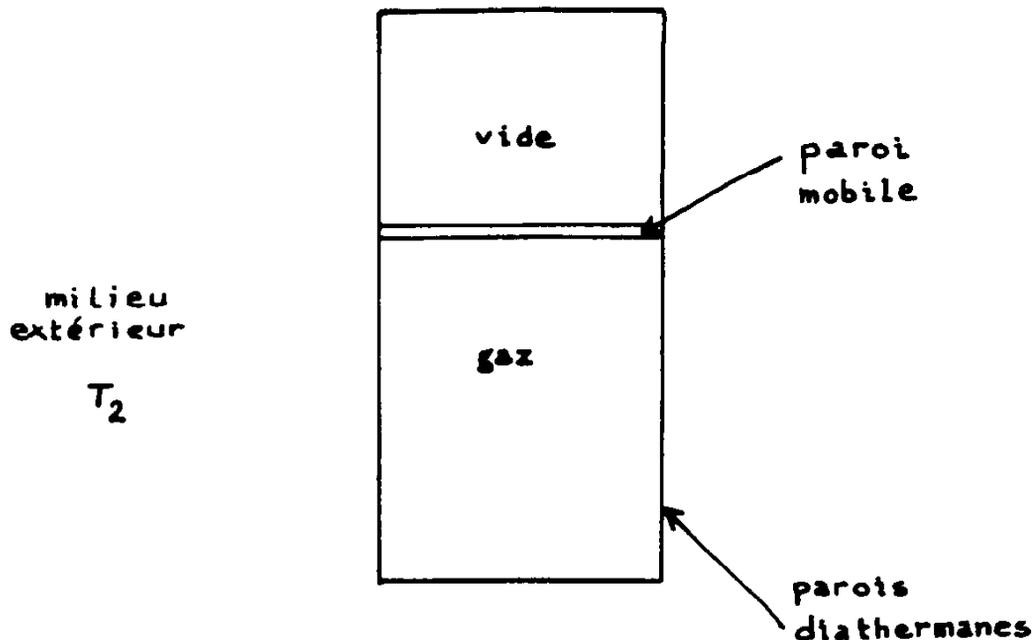


Figure 9

L'espace au-dessus de la paroi est vide. La température du milieu extérieur est $T_2 = 600$ K, et un dispositif, non représenté sur la figure 9, permet de déplacer lentement la paroi.

Initialement la paroi est bloquée; elle impose le volume V_2 au gaz dans l'état B (P_2, V_2, T_2).

On débloque la paroi et on la déplace lentement jusqu'à une position pour laquelle l'état du gaz est C (P_3, V_3, T_3) tel que V_3 ait une valeur double de V_2 , et on la bloque à nouveau.

C.4.1. Quelles sont les valeurs de T_3 et P_3 ?

C.4.2. Montrer que l'énergie mécanique W_2 reçue par le gaz au cours de la transformation a pour expression :

$$W_2 = - n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln 2 \quad (\ln \text{ désigne le logarithme népérien}).$$

Calculer alors la valeur de W_2 .

C.4.3. Quelle est la variation d'énergie interne ΔU_2 du gaz ?

En déduire la valeur de l'énergie calorifique reçue par le gaz.

C.5. Compression isobare CA.

On enferme le gaz dans une enceinte diathermane analogue à celle décrite dans C.4., la pression étant assurée dès lors par un corps de masse $m = 100 \text{ kg}$ placé sur la paroi horizontale mobile dont la surface est $S = 0,10 \text{ m}^2$ (fig. 10).

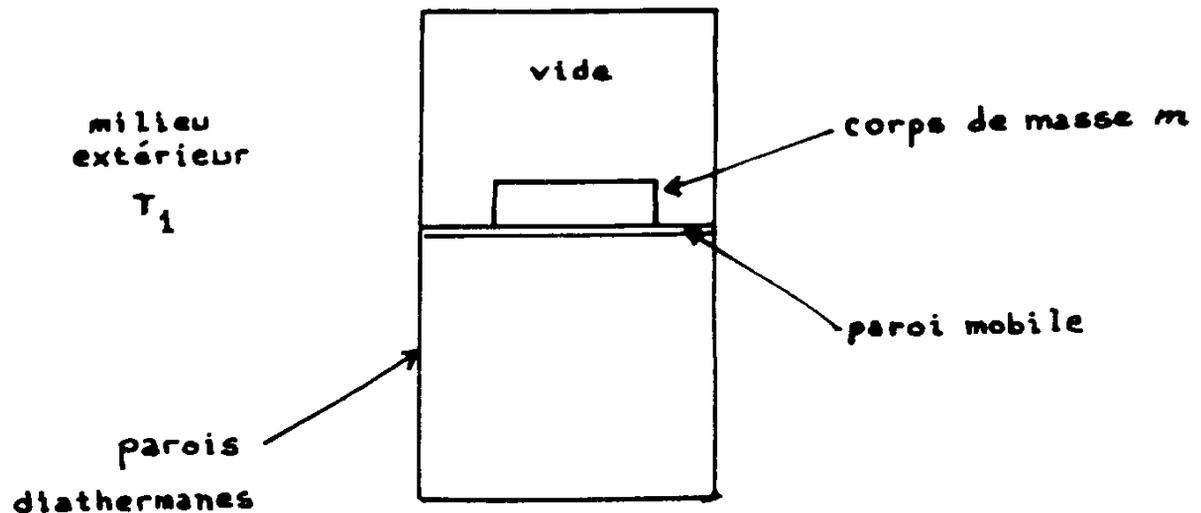


Figure 10

La température ambiante est constante et égale à $T_1 = 300 \text{ K}$.

Initialement la paroi impose au gaz le volume V_3 dans l'état C (P_3, V_3, T_3), état défini dans C.4. On débloque la paroi qui se déplace alors lentement et atteint une position d'équilibre, du fait du refroidissement du gaz dont la température passe de la température $T_3 = 600 \text{ K}$ à la température ambiante $T_1 = 300 \text{ K}$.

On suppose toujours les frottements négligeables.

C.5.1. Montrer que l'état final du gaz est alors l'état A.

On prendra pour accélération de la pesanteur $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

C.5.2. Calculer pour cette transformation :

- α. L'énergie W_3 reçue par le gaz ;
- β. La variation ΔU_3 de l'énergie interne du gaz ;
- γ. L'énergie calorifique Q_3 reçue par le gaz.

A. ETUDE D'UN OSCILLOSCOPE

A.1./ Le canon à électrons:

$$U_0 = \frac{m \cdot v_0^2}{2 e} = 1,78 \times 10^3 \text{ V}$$

A.2./ La déviation verticale:

A.2.1./

$$A.2.1.1./ \quad \frac{d \vec{p}}{dt} = q \cdot \vec{E} \Rightarrow \begin{cases} z - z_0 = v_0 \cdot t \\ x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = \frac{e \cdot u_y \cdot t^2}{2 m \cdot d} = y \end{cases}$$

d'où: la branche de parabole: $x = x_0, z \geq z_0,$

$$y = \frac{e \cdot u_y \cdot (z - z_0)^2}{2 m \cdot d \cdot v_0^2}$$

A.2.1.2./ Trajectoire rectiligne parallèle à \vec{v} .

$$A.2.1.3./ \quad \alpha) \theta = \frac{l}{v_0}$$

$$\beta) \tan(\alpha) = \frac{e \cdot u_y \cdot l}{m \cdot v_0^2 \cdot d}$$

$$\gamma) Y_S = \frac{D \cdot e \cdot l}{m \cdot v_0^2 \cdot d} \cdot u_y$$

$$A.2.1.4./ \quad \theta = 2 \times 10^{-9} \text{ s} \quad Y_S \approx 1,76 \text{ cm}$$

$$A.2.2./ \quad N \in [10 \text{ Hz}, 10^4 \text{ Hz}] : \quad u_y = 100 \cos(2 \pi \cdot N \cdot \theta) \approx 100 \text{ V}$$

donc: mouvement rectiligne sinusoïdal de fréquence N d'amplitude Y_S centré sur 0.

A.3./ Le balayage horizontal:

$$A.3.1./ \quad X_S = \frac{D' \cdot e \cdot l \cdot u_x}{m \cdot v_0^2 \cdot d}$$

$$A.3.2./ \quad X = - \frac{GG'}{2} + \frac{GG'}{T'} \cdot t = \frac{D' \cdot e \cdot l}{m \cdot v_0^2 \cdot d} \cdot u_x$$

$$u_x = \frac{m \cdot v_0^2 \cdot d \cdot GG'}{2 D' \cdot e \cdot l} \cdot \left(\frac{2t}{T'} - 1 \right) \quad u_x \in] - 316 \text{ V}, + 316 \text{ V} [$$

A.4./ Utilisation de l'oscilloscope:

$$A.4.1./ \quad V_S = R \cdot i = R \cdot \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{1}{C} \cdot q + R \cdot \frac{dq}{dt} = V_E$$

$$\frac{1}{R \cdot C} \cdot v + \frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt}$$

$$A.4.2./ \quad u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$v(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) + B \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

d'où en reportant:

$$- \omega \cdot U_0 = \frac{B}{R \cdot C} - \omega \cdot A \quad \text{et} \quad 0 = \frac{A}{R \cdot C} + \omega \cdot B$$

$$A = U_0 \cdot \frac{(R.C.\omega)^2}{1 + (R.C.\omega)^2} \quad \text{et} \quad B = -U_0 \cdot \frac{R.C.\omega}{1 + (R.C.\omega)^2}$$

$$v = U_0 \cdot \frac{R.C.\omega}{1 + (R.C.\omega)^2} \cdot \left(R.C.\omega \cdot \cos(\omega.t) - \sin(\omega.t) \right)$$

$$\omega \ll \frac{1}{R.C} \quad v(t) \approx U_0 \cdot R.C.\omega \cdot (-\sin(\omega.t))$$

dérivée de $u(t)$ à $R.C$ près.

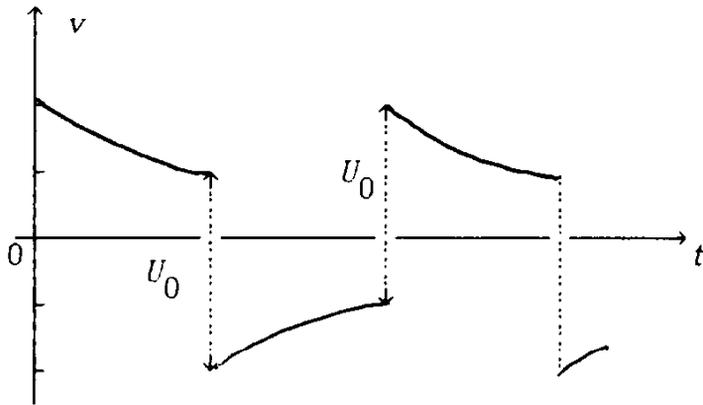
$$\omega \gg \frac{1}{R.C} \quad v(t) \approx U_0 \cdot \cos(\omega.t)$$

tension d'entrée.

$$A.4.3. / t \in \left[0, \frac{T}{2} \right[\quad u = \text{cste} \Rightarrow v = A \cdot e^{-\frac{t}{R.C}}$$

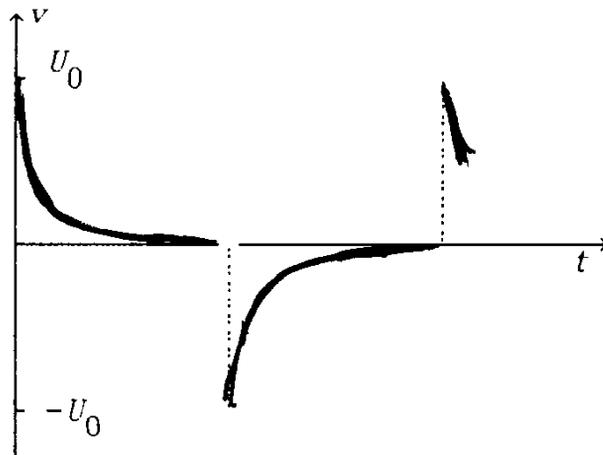
$t = \frac{T}{2}$: q est continue, donc : $v(t)$ a la même discontinuité que $u(t)$.

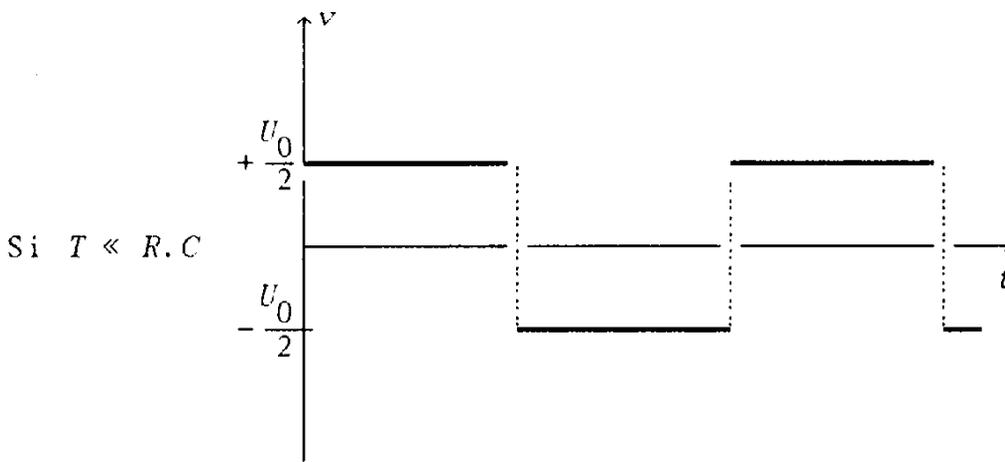
$$t \in \left[\frac{T}{2}, T \right[\quad v = B \cdot e^{-\frac{t}{R.C}}$$



Remarque: Etablir LA solution avec le calcul de A et B n'est pas demandé.

Si $T \gg R.C$





A.4.4./ Le condensateur transmet les hautes fréquences mais pas le continu, ni les basses fréquences: le circuit est un filtre passe haut.
Aux basses fréquences le circuit est dérivateur.

B. ETUDE D'UN PHENOMENE D'INTERFERENCES LUMINEUSES

B.1./Aspect qualitatif du phénomène:

B.1.1./ Rouge

B.1.2./ Interférences (franges rectilignes parallèles à $y'y$) et diffraction par un trou (anneaux).

B.1.3./ Les interférences disparaissent et reste la diffraction par un trou.

B.1.4./ Il n'y a pas de modification.

B.1.5./ On a le même phénomène d'interférences (plus lumineux) et diffraction par une fente.

B.1.6./ La distance entre deux franges varie.

B.1.7./ Non; incohérence des sources.

B.2./ Différence de chemin optique:

B.2.1./ $\delta = T_2M - T_1M$

$$\delta = \left[\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y - b \right)^2 + D^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y - b \right)^2 + D^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{B.2.2./ } \delta &= D \cdot \left[1 + \frac{(y-b)^2}{D^2} + \frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} + \frac{a \cdot x}{D^2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - D \cdot \left[1 + \frac{(y-b)^2}{D^2} + \frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} - \frac{a \cdot x}{D^2} \right]^{\frac{1}{2}} \approx \frac{a \cdot x}{D} \end{aligned}$$

B.2.3./ δ est indépendant de y : les franges sont parallèles à $y'y$. (B.1.2./)
 δ est indépendant de b :

□ une translation de (P) ne modifie pas le phénomène. (B.1.4./)

□ il est possible d'utiliser des fentes à la place des trous.

(B.1.5./)

B.3./ Analyse quantitative du phénomène:

B.3.1./ Maximum de lumière pour $\varphi_b = 2 m \cdot \pi \quad m \in \mathbb{Z}$

Minimum de lumière pour $\varphi_s = (2 m + 1) \cdot \pi \quad m \in \mathbb{Z}$

$$\varphi = \frac{2 \pi \cdot \delta}{\lambda} \Rightarrow x_b = m \cdot \frac{\lambda \cdot D}{a} \quad \text{et} \quad x_s = \frac{2 m + 1}{2} \cdot \frac{\lambda \cdot D}{a}$$

$$B.3.2./ i = x_b(m+1) - x_b(m) = x_s(m+1) - x_s(m) = \frac{\lambda \cdot D}{a} = 0,63 \text{ mm}$$

$$B.3.3./ e_{1M}(t) = e_M \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot c}{\lambda} \cdot \left(t - \frac{T_{1M}}{c}\right)\right)$$

$$e_{2M}(t) = e_M \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot c}{\lambda} \cdot \left(t - \frac{T_{2M}}{c}\right)\right)$$

$$e_M(t) = 2 e_M \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot \delta}{\lambda}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot c}{\lambda} \cdot \left(t - \frac{T_{1M} + T_{2M}}{2c}\right)\right)$$

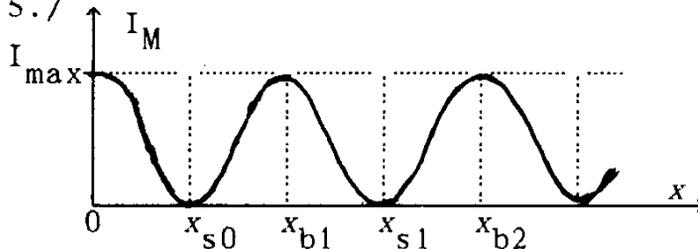
$$e_M(t) = 2 e_M \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot a \cdot x}{\lambda \cdot D}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot c}{\lambda} \cdot \left(t - \frac{T_{1M} + T_{2M}}{2c}\right)\right)$$

$$B.3.4./ I_M = 4 e_M^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi \cdot a \cdot x}{\lambda \cdot D}\right), \text{ carré de l'amplitude de l'onde.}$$

$$I_M = 0 \Rightarrow \frac{\pi \cdot a \cdot x_s}{\lambda \cdot D} = \frac{2m+1}{2} \cdot \pi \quad \text{et} \quad x_s = \frac{2m+1}{2} \cdot \frac{\lambda \cdot D}{a}$$

$$I_M = I_{\max} \Rightarrow \frac{\pi \cdot a \cdot x_b}{\lambda \cdot D} = m \cdot \pi \quad \text{et} \quad x_b = m \cdot \frac{\lambda \cdot D}{a}$$

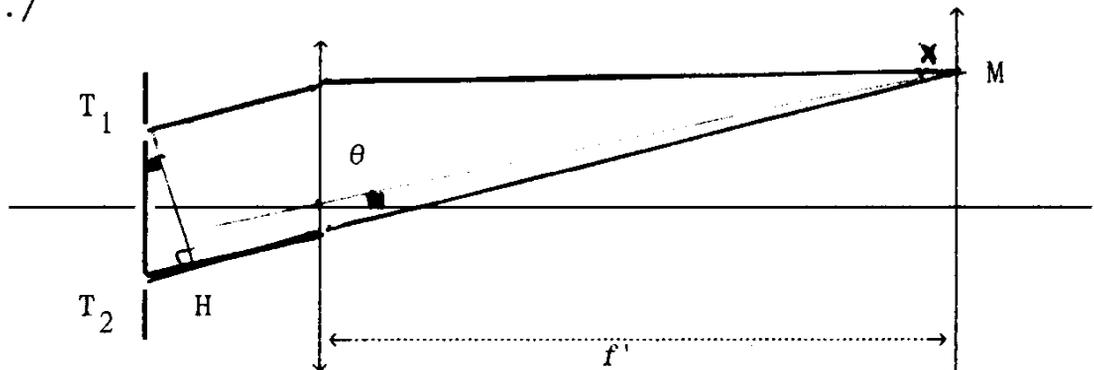
B.3.5./



B.4./ Modification du dispositif:

B.4.1./ distance (L)(E) égale à f' .

B.4.2./



$$B.4.3./ \delta' = T_2H \approx a \cdot \theta \approx a \cdot \frac{x}{f'} \quad \varphi' = \frac{2\pi \cdot a \cdot x}{\lambda' \cdot f'}$$

B.4.4./ L'aspect est le même mais l'interfrange est changé en i' .

$$i' = \frac{\lambda \cdot f'}{a} = 0,32 \text{ mm} \quad (\text{interfrange divisé par 2}).$$

B.4.5./ Image nette et lumineuse.

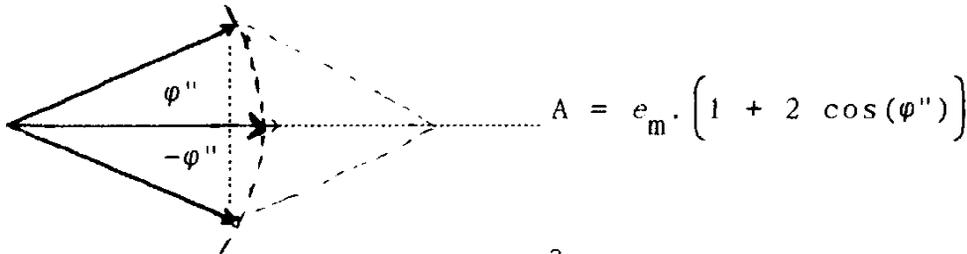
5./ Dispositif à trois trous:

5.1./

T ₁	Déphasage $\psi = -\varphi''$
T ₃	$\varphi'' = \frac{2\pi \cdot \delta''}{\lambda}$ avec: $\delta'' = \frac{\delta'}{2}$
T ₂	$\varphi'' = \frac{\pi \cdot a \cdot x}{\lambda \cdot f'}$

5.2./

$$(t) = e_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot c}{\lambda} \cdot t\right) + e_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot c}{\lambda} \cdot t - \varphi''\right) + e_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot c}{\lambda} \cdot t + \varphi''\right)$$



5.3./ $I'_M = e_m^2 \cdot \left(1 + 2 \cos(\varphi'')\right)^2 = e_m^2 \cdot \left(1 + 2 \cos\left(\frac{\pi \cdot a \cdot x}{\lambda \cdot f'}\right)\right)^2$

5.4./ $\cos(\varphi'') = 1 \Rightarrow x'_b = 2 \text{ m} \cdot \frac{\lambda \cdot f'}{a}$

$\sin(\varphi'') = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi'' = 2 \text{ m} \cdot \pi \pm \frac{2\pi}{3}$ et $x'_s = \left(2 \text{ m} \pm \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{\lambda \cdot f'}{a}$

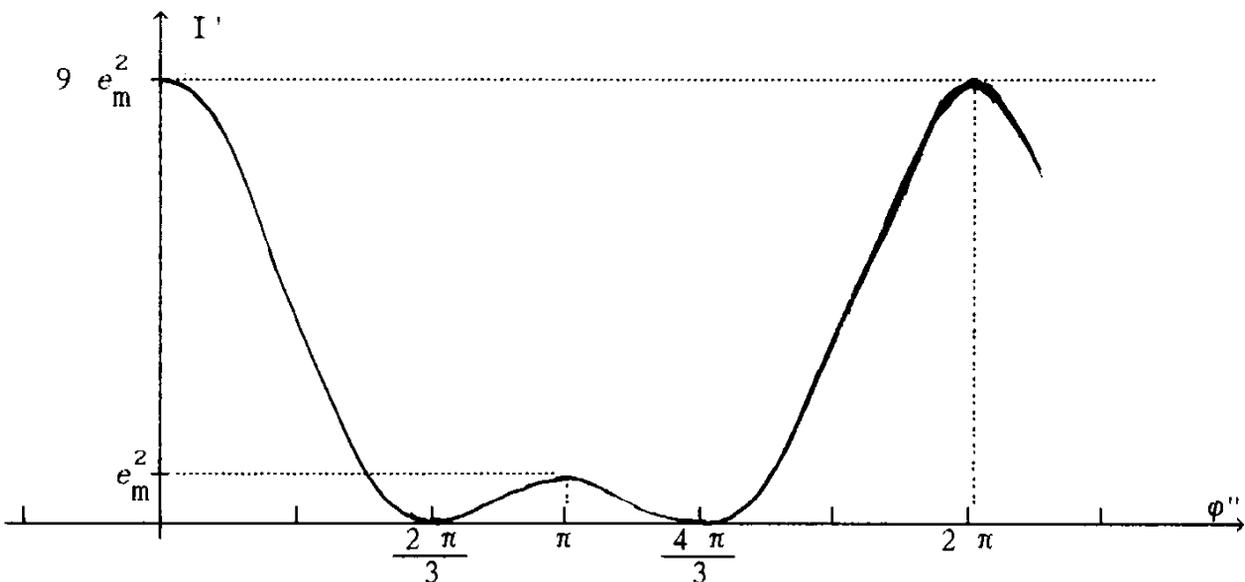
5.5./ $\frac{dI'}{d\varphi''} = 2 e_m^2 \cdot \left(1 + 2 \cos(\varphi'')\right) \cdot \left(-2 \sin(\varphi'')\right)$

annule pour $\cos(\varphi'') = -\frac{1}{2}$ et $\sin(\varphi'') = 0$ $\begin{cases} \cos(\varphi'') = 1 \\ \cos(\varphi'') = -1 \end{cases}$

nc on a un extremum, en l'occurrence un maximum secondaire pour:

$\sin(\varphi'') = -1$ et donc: $x'_{bs} = (2 \text{ m} + 1) \cdot \frac{\lambda \cdot f'}{a}$

5.6./



C./ ETUDES DE TRANSFORMATIONS D'UN GAZ PARFAITC.1./ Préliminaires:

C.1.1./ $P.V = n.R.T$

C.1.2./ $\Delta U = W + Q$ (en négligeant l'énergie cinétique d'ensemble).

C.1.3./ U ne dépend que de la température.

C.2./ Compression isochore:

C.2.1./ $n = \frac{P_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} = 0,080 \text{ mol}$

C.2.2./ $T_2 = T_1 + \Delta T_1 = 600 \text{ K} (= 2 T_1)$

$V_2 = V_1 = 2 \times 10^{-2} \text{ m}^3$

$P_2 = \frac{P_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot V_2} = 2 \times 10^4 \text{ Pa}$

C.2.3./ $W_e = \frac{E^2}{r} \cdot \tau = 500 \text{ J}$

$\Delta U_1 = W_e = 500 \text{ J}$

C.2.4./ $C = \frac{e \Delta U}{\Delta T} = \frac{500}{300} = \frac{5}{3} = 1,66 \text{ J.K}^{-1}$

C.3./ Compression isochore:

C.3.1./ $T_2 = 600 \text{ K}$ et $V_2 = V_1 = 2 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \Rightarrow P = P_2 = 2 \times 10^4 \text{ Pa}$

C.3.2./ Q_1 provient de la source. $Q_1 = \Delta U_1 = W_e = 500 \text{ J}$

C.4./ Détente isotherme:

C.4.1./ $T_3 = T_2 = 600 \text{ K}$ et $V_3 = 2 V_2 = 4,0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$, d'où: $P_3 = 1,0 \times 10^4 \text{ Pa}$

C.4.2./ $\delta W = - P \cdot dV = - n \cdot R \cdot T_2 \cdot \frac{dV}{V} \Rightarrow W_2 = - n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)$

$W_2 = - n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln 2$

$W_2 = - 277 \text{ J}$

C.4.3./ T est constante, donc: $\Delta U_2 = 0$ et $Q_2 = - W_2 = 277 \text{ J}$.

C.5./ Compression isobare:

C.5.1./ $T_f = T_1 = 300 \text{ K}$

$P_f = \frac{m \cdot g}{S} = 1,0 \times 10^4 \text{ Pa} = P_1$

$V_f = V_1 = 2,0 \times 10^{-2} \text{ m}^3$

C.5.2./ $\alpha) dW = - P \cdot dV \Rightarrow W_3 = - P_1 \cdot (V_1 - V_3) = 200 \text{ J}$

$\beta) \Delta U_3 = C \cdot (T_1 - T_3) = - 500 \text{ J}$

$\gamma) Q_3 = \Delta U_3 - W_3 = - 700 \text{ J}$

SESSION DE 1992

**concours interne
de recrutement de professeurs certifiés
et concours d'accès à l'échelle de rémunération**

**section : physique et
électricité appliquée**

composition à partir d'un dossier

Durée : 4 heures

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Avertissement aux candidats

Les trois parties de l'épreuve sont totalement indépendantes ; il n'est pas nécessaire d'en résoudre la totalité pour obtenir la note maximale.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

PREMIÈRE PARTIE

Rédaction du corrigé d'un projet d'épreuve pour le baccalauréat F2

Le candidat doit rédiger un corrigé succinct, mais complet, du projet de l'épreuve B1 de sciences physiques du baccalauréat F2 électronique, de durée 4 heures.

ÉTUDE DU FILTRAGE D'UN SIGNAL

On se propose d'étudier un filtre universel du second ordre dont le schéma fonctionnel est donné figure 1, ainsi que l'action de ce filtre sur un signal issu d'un générateur de signaux (fig. 2).

Tous les amplificateurs opérationnels seront considérés comme idéaux : intensités des courants d'entrée négligeables, résistance de sortie nulle et amplification différentielle d'entrée infinie.

Tous les amplificateurs opérationnels sont alimentés par les tensions $+E$ et $-E$ avec $E = +15\text{ V}$. Les tensions de saturation sont égales à $\pm E$.

I. Étude du filtre universel

Le montage représenté sur la figure 1 est alimenté par une tension e sinusoïdale. La grandeur complexe associée est \underline{E} .

I.1. Identifier le montage construit autour de l'amplificateur A.O.4.

Exprimer sa tension de sortie v_4 . En déduire la relation liant \underline{E} , \underline{V}_1 , \underline{V}_2 et \underline{V}_3 .

I.2. Déterminer les transmittances en tension :

$$\underline{T}'_2 = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \quad \text{et} \quad \underline{T}'_3 = \frac{\underline{V}_3}{\underline{V}_2}.$$

I.3. En déduire la transmittance en tension :

$$\underline{T}_2 = \frac{\underline{V}_2}{\underline{E}}.$$

I.4. Mettre \underline{T}_2 sous la forme :

$$\underline{T}_2 = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

avec $Q = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$.

Que vaut ω_0 ?

I.5. Mettre $\underline{T}_1 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{E}}$ et $\underline{T}_3 = \frac{\underline{V}_3}{\underline{E}}$ sous des formes voisines en utilisant les mêmes notations et les mêmes variables (on posera $\frac{1}{Q} = 2m$).

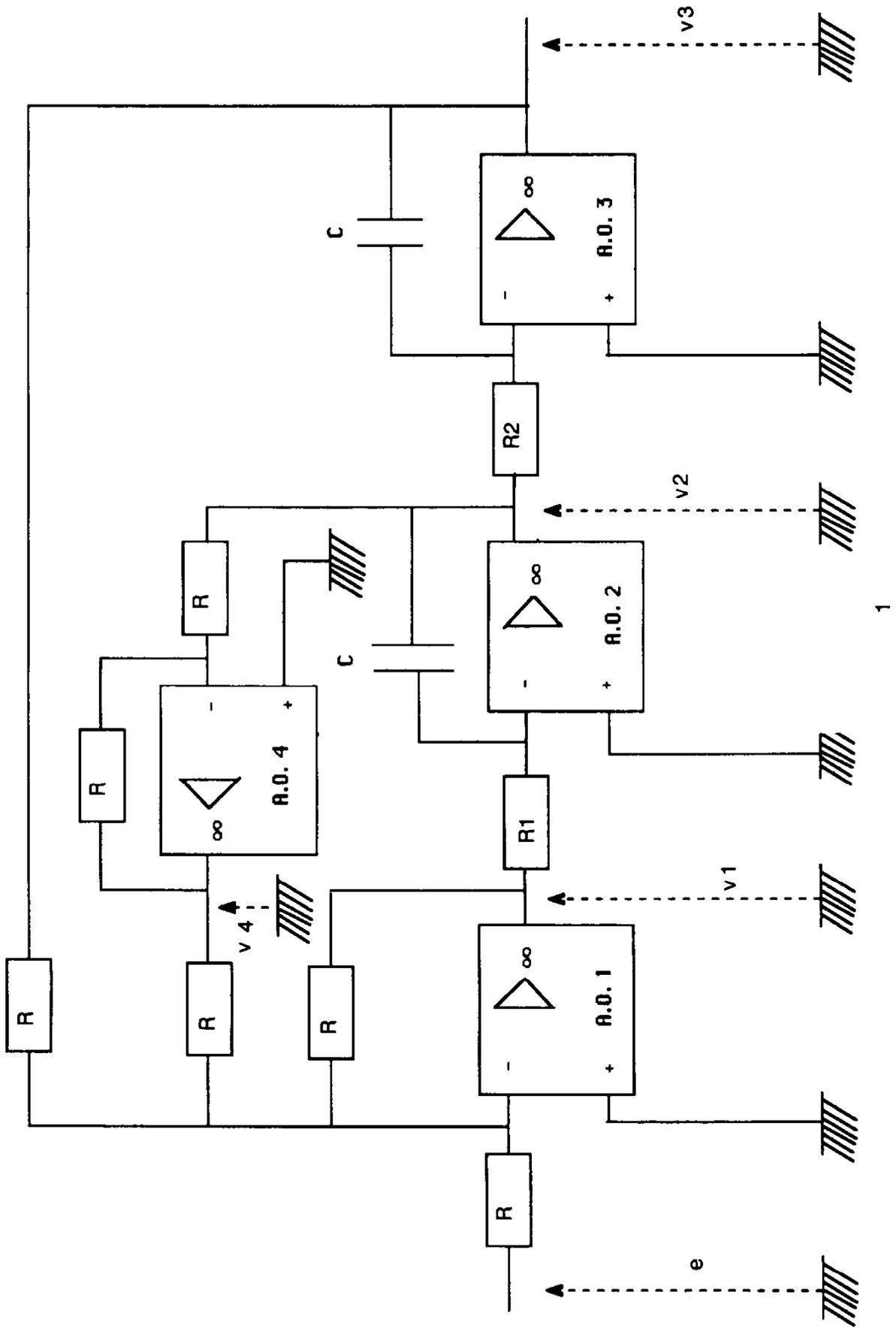


Figure 1

I.6. Étude du filtre passe-bande.

On note T_2 le module de \underline{T}_2 . On donne $C = 4,7 \text{ nF}$, $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $Q = 10$.

I.6.1. Calculer R_2 , ω_0 et la fréquence f_0 correspondante.

I.6.2. Que vaut $T_2(\omega_0)$?

I.6.3. On pose $G_2 = 20 \log(T_2)$. En calculant quelques valeurs de T_2 , tracer en coordonnées semi-logarithmiques la courbe G_2 en fonction de $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ pour $\left[0,1 \leq \frac{\omega}{\omega_0} \leq 10\right]$.

I.6.4. Montrer que les limites de la bande passante à 3 dB sont très proches de $f_0\left(1 - \frac{1}{2Q}\right)$ et $f_0\left(1 + \frac{1}{2Q}\right)$.
(On pourra utiliser le fait que si x est petit devant 1, alors $\frac{1}{1+x}$ est proche de $1-x$).

I.6.5. On veut avoir $f_0 = 1,0 \text{ kHz}$. Calculer R_1 et R_2 pour les mêmes valeurs de C et Q .

II. Étude du générateur de signaux

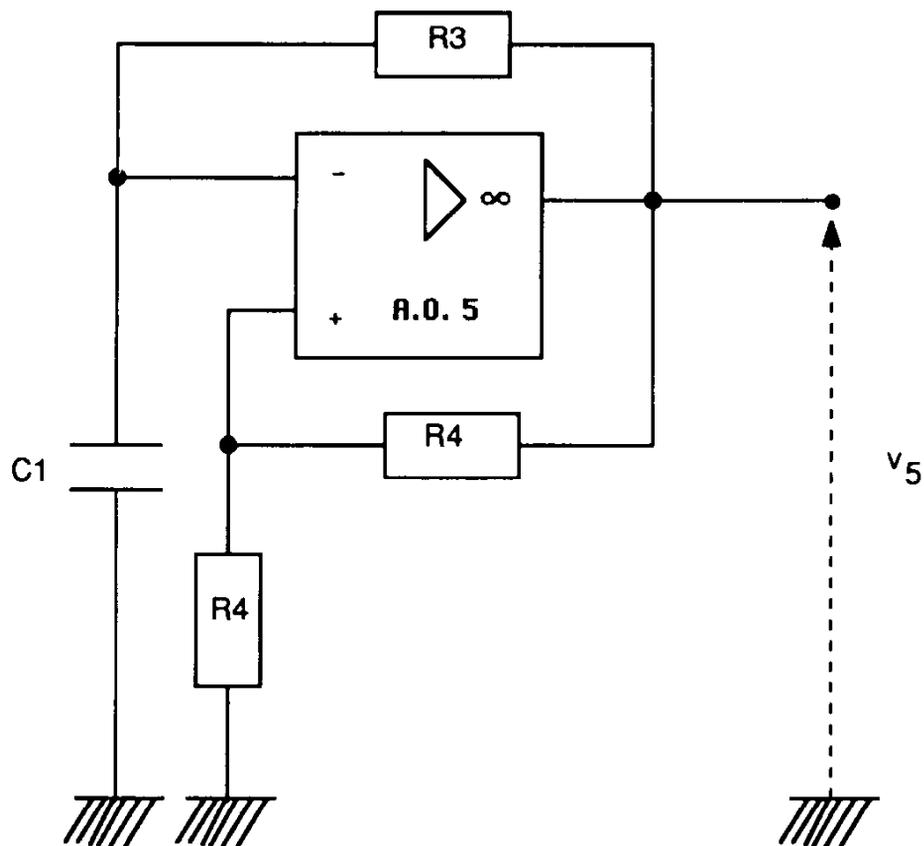


Figure 2

L'amplificateur opérationnel fonctionne en commutation :

$$(v_+ - v_- > 0 \Rightarrow v_3 = +E \quad \text{et} \quad v_+ - v_- < 0 \Rightarrow v_3 = -E).$$

On donne $C_1 = 100 \text{ nF}$, $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$.

- II.1. Exprimer v_+ en fonction de v_3 .
- II.2. Quelles sont les valeurs possibles de v_+ ?
- II.3. Établir l'équation différentielle reliant v_- et v_3 .
- II.4. En supposant qu'à l'instant $t = 0$, le condensateur C_1 est déchargé et que $v_3 = +E$, montrer qualitativement qu'il y a basculement de v_3 à un instant t_1 que l'on caractérisera. Quelles valeurs prennent alors v_3 et v_+ ?
- II.5. En prenant t_1 comme nouvelle origine des temps, déterminer la nouvelle loi de variation de v_- en fonction du temps.
- II.6. À quel instant t_2 y a-t-il basculement de v_3 ?
- II.7. Montrer que la tension v_3 prend périodiquement les valeurs $+E$ et $-E$. Quelle est la période du générateur ? Calculer la valeur de R_3 pour avoir une fréquence d'oscillation de $1,0 \text{ kHz}$.
- II.8. Représenter sur un graphe l'évolution des tensions v_- et v_3 à partir de $t = 0$, en donnant au moins deux périodes.

III. Filtrage du signal par le filtre passe-bande

Le signal sortant du générateur est traité et mis en forme de façon à obtenir un signal v_3^* carré de fréquence $f_0 = 1,0 \text{ kHz}$ et d'amplitude $V_m = 1,0 \text{ V}$ ($v_3^* = +1,0 \text{ V}$ ou $v_3^* = -1,0 \text{ V}$). On relie les deux montages de façon que $v_3^* = e$. On règle le filtre pour que $Q = 10$.

On montre que v_3^* peut alors s'écrire :

$$v_3^*(t) = e(t) = \frac{4V_m}{\pi} \cdot \left[\sin \omega_0 t + \frac{\sin 3 \omega_0 t}{3} + \frac{\sin 5 \omega_0 t}{5} + \dots \right].$$

- III.1. Calculer l'amplitude des trois premiers termes composant $v_3^*(t)$.
- III.2. On règle la fréquence caractéristique du filtre, f_0 , à la valeur $1,0 \text{ kHz}$.
 - III.2.1. Calculer $T_2(\omega_0)$, $T_2(3\omega_0)$, $T_2(5\omega_0)$.
 - III.2.2. En déduire l'amplitude des trois premiers termes sinusoïdaux à la sortie de A.O.2.
 - III.2.3. Que peut-on conclure quant au signal observé à la sortie de A.O.2. ? Donner son expression générale approchée sans procéder à des calculs supplémentaires.

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, il est demandé au candidat de rédiger un texte de TP pouvant être fourni à des élèves de Terminale F2 ou F3 sur le thème de la génération de signaux périodiques non sinusoïdaux.

Les parties des programmes susceptibles de servir de support à cet exercice sont notamment :

- Pour les classes de Première F2 ou Première F3 :
 - B.3.1.1. Étude expérimentale de la charge d'un condensateur à travers une résistance.
- Pour la classe Terminale F2 :
 - B.2.3. Comparaison à un ou deux seuils.
 - B.2.5. Fonctions mathématiques : addition, soustraction, dérivation, intégration, multiplication.
 - B.3.1. Mémorisation par les bascules bistables.
 - B.4.4.2. Horloges : multivibrateurs astables de type RC.
- Pour la classe Terminale F3 :
 - B.1.4. Étude de quelques fonctions de l'électronique : amplification de différence, dérivation, intégration, comparaison.

Le candidat précisera son choix : Terminale F2 ou Terminale F3. Il est demandé d'utiliser, pour le TP, le circuit intégré 555 dont le schéma de fonctionnement est joint en annexe 1 ; cependant le jury acceptera un choix d'où ce circuit serait absent, à condition de le justifier.

Le candidat doit :

- fournir les schémas des montages à réaliser par les élèves ;
- rédiger le texte complet du TP.

TROISIÈME PARTIE

Le candidat doit corriger la copie d'un élève (annexe 2). Il lui est conseillé d'écrire les corrections dans la marge de cette copie, puis de rendre les feuillets avec sa propre copie.

Exercice : Niveau baccalauréat F3 électronique.

Étude d'un moteur asynchrone triphasé

La plaque signalétique d'un moteur asynchrone triphasé tétrapolaire porte les indications suivantes :

Fréquence : $N = 50$ Hz.

Tension d'alimentation : $U_n = 380/660$ V.

Intensité nominale du courant en ligne : $I_n = 6,70$ A.

$\cos \varphi_n = 0,85$.

Fréquence de rotation : 1 440 tr/min.

Des essais sur le moteur ont donné les résultats suivants :

Résistance mesurée à chaud entre deux bornes du stator : $1,8 \Omega$.

Résistance par phase du rotor : $R_r = 0,050 \Omega$.

Essai à vide sous tension nominale : $I_0 = 1,6$ A (en ligne); $P_0 = 0,24$ kW.

Glissement correspondant au couple maximal : $g_m = 0,11$.

Le moteur est alimenté par un réseau triphasé 220/380 V.

On admettra que les pertes mécaniques sont égales aux pertes dans le fer du stator.

1. Déterminer le mode de couplage des enroulements statoriques en fonctionnement normal.
2. Quelle est la fréquence de rotation de synchronisme ?
3. Dans le cas de l'essai à vide, calculez le facteur de puissance.
4. Le moteur fonctionne au régime nominal. Calculez :
 - le glissement du moteur ;
 - la fréquence des courants rotoriques ;
 - les pertes au stator par effet Joule ;
 - les pertes au rotor par effet Joule ;
 - la puissance utile ;
 - le moment du couple utile ;
 - le rendement du moteur.

5. Dans cette partie (et dans la suivante), on néglige toutes les pertes autres que les pertes dans le rotor.

Dans ces conditions, le modèle équivalent d'une phase du moteur, vu du stator, est donné par la figure 3.

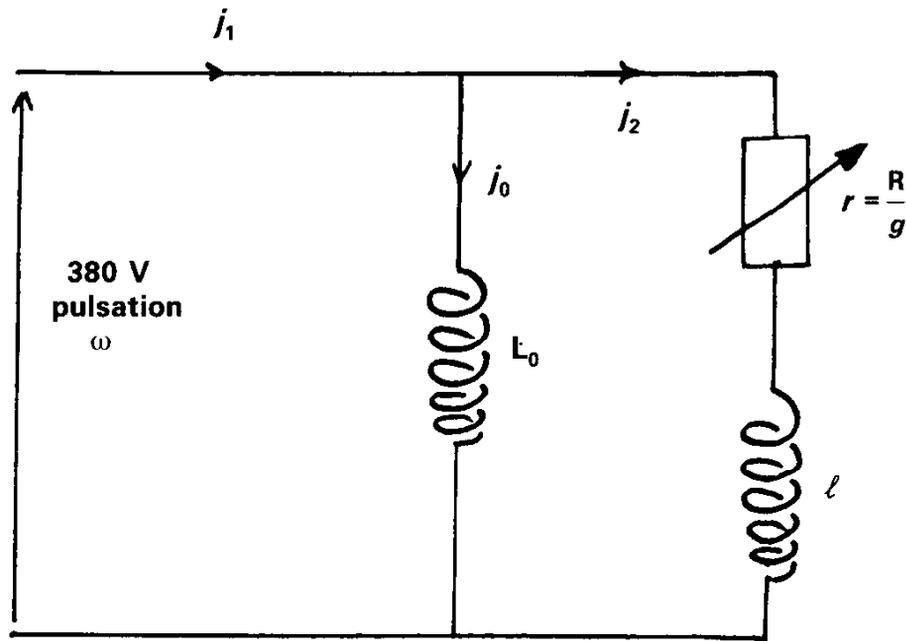


Figure 3

Dans ce modèle, $R = m^2 R_r$ et $\ell = m^2 \lambda_r$; m est un coefficient sans dimension, R_r la résistance d'un enroulement rotorique et λ_r l'inductance de fuites d'un enroulement rotorique.

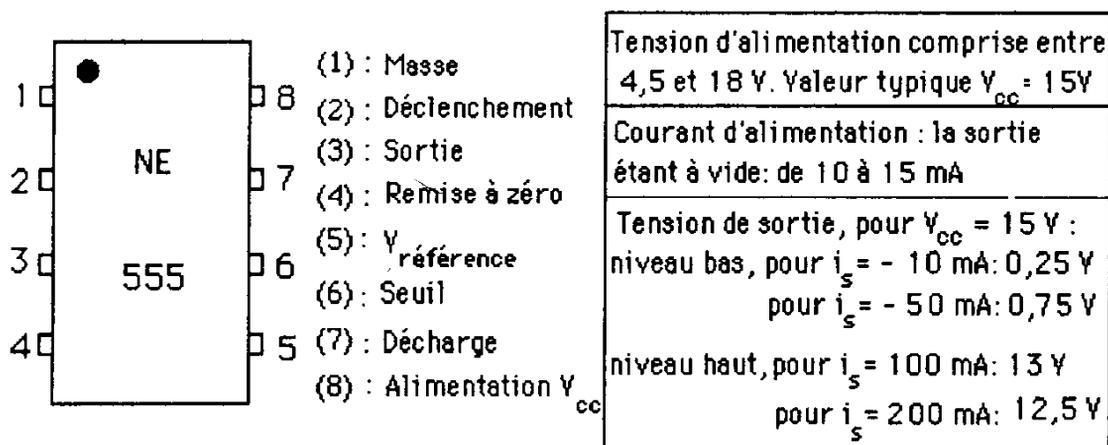
- Montrer que la puissance absorbée par le moteur est maximale pour une valeur particulière g_m du glissement que l'on exprimera en fonction de $\ell\omega$ et de R .
 - Montrer que le moment T du couple moteur est maximal pour $g = g_m$.
 - Déduire des questions précédentes et des données numériques du problème la valeur de λ_r .
6. L'intensité du courant en ligne au démarrage est $I_d = 18,7$ A, le moment du couple de démarrage étant $T_d = 8,0$ N · m. Pour réduire I_d , on peut faire un démarrage étoile-triangle.
- Donnez rapidement le principe de ce démarrage.
 - Quelle est l'intensité du courant dans un enroulement du stator lors de ce démarrage ? Que vaut alors le courant en ligne ?
 - Calculer le nouveau moment du couple au démarrage. Conclure sur l'intérêt de cette forme de démarrage pour ce moteur. Quelle autre forme pourrait-on utiliser ?

Annexe 1 : note de présentation du circuit intégré "555"

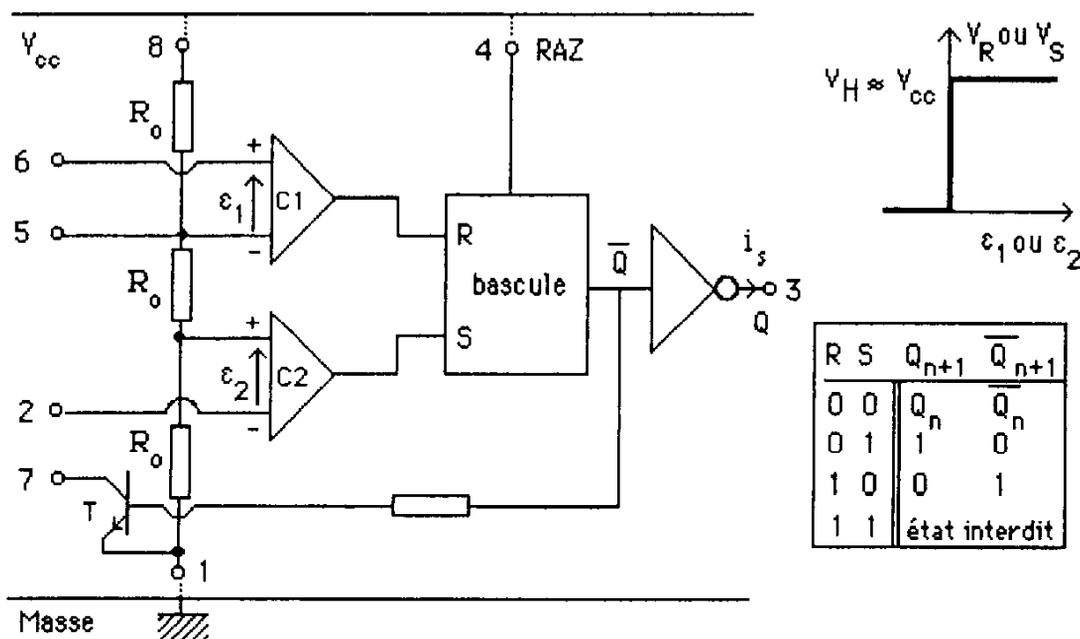
Le circuit intégré 555 permet la construction aisée de montages de temporisation, et d'oscillateurs. Ses durées de commutation inférieures à 100 ns à la descente et à la montée le rendent beaucoup plus rapide que les amplificateurs opérationnels habituels; l'intensité de son courant de sortie peut sans danger être portée à ± 200 mA; sa tension d'alimentation a peu d'influence sur son fonctionnement.

1. Schéma synoptique

La présentation courante est celle d'un boîtier plat de huit broches (boîtier dit "Mini-DIP")



Le schéma fonctionnel est donné ci-dessous:



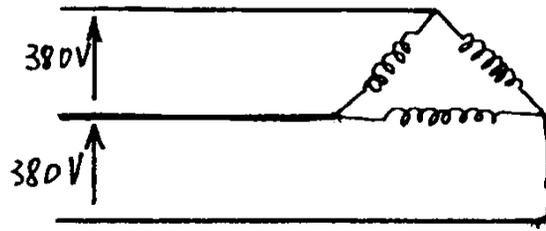
2. Analyse du fonctionnement

La borne 5 (borne - du comparateur n°1) est portée au potentiel $V_{réf} = 2 V_{cc}/3$; bien qu'accessible, cette borne est rarement utilisée. La borne + du comparateur n°2, pour sa part, est portée au potentiel $V_d = V_{cc}/3$. En reliant les bornes 2 et 6 du circuit intégré et en leur appliquant une tension v réglable entre 0 et V_{cc} (par exemple la tension aux bornes d'un condensateur), la variable logique Q de sortie (borne 3) prend une suite de valeurs parfaitement définies que les caractéristiques de transfert des comparateurs d'une part, et la table de vérité de la bascule RS d'autre part permettent de retrouver.

Lorsque la variable logique Q prend la valeur 0, le transistor T conduit; par la borne 7, il peut décharger un condensateur externe à travers une résistance R_B . Lorsque $Q = 1$, T ne conduit pas.

Reliée à la masse, l'entrée 4 force Q à zéro; reliée à V_{cc} , elle est inopérante.

① Chaque enroulement du stator doit être soumis à une tension de 380 V. Il faut donc coupler en triangle.



② N_s est donné par $N_s \text{ (tr/min)} = \frac{3000}{p}$; p est le nombre de paires de pôles : ici $2p = 4 \Rightarrow p = 2$.

$$\underline{N_s = 1500 \text{ tr/min}}$$

$$\textcircled{3} \cos \varphi = \frac{P_o}{\sqrt{3} U I_o} = \frac{240}{\sqrt{3} \times 380 \times 1,6} = \underline{\underline{0,228}}$$

$$\textcircled{4} g = \frac{N_s - N}{N_s} = \frac{1500 - 1440}{1500} = 0,04$$

$$\underline{\underline{g = 4\%}}$$

$$f_e = g f = 0,04 \times 50 = \underline{\underline{2 \text{ Hz}}}$$

$$P_{Js} = \frac{3}{2} R_m I^2 = \frac{3}{2} \times 1,8 \times 6,7^2 = \underline{\underline{121 \text{ W}}}$$

$$P_{JR} = g \cdot P_a = 0,04 \times \left(\frac{P}{a} - \text{pertes} \right)$$

$$P_a = \sqrt{3} \times 380 \times 6,70 \times 0,85 = 3750 \text{ W}$$

$$P_{JR} = 0,04 \times (3750 - 121) = 0,04 \times 3629 = \underline{\underline{145 \text{ W}}}$$

$$P_u = 3750 - 121 - 145 = \underline{\underline{3484 \text{ W}}}$$

$$T_u = \frac{P_u}{\Omega} = \frac{3484}{2\pi \times 1500} = \underline{\underline{21,5 \text{ N.m}}}$$

$$g = \frac{3484}{3750} = \underline{\underline{0,93}}$$

5. a. Pour chaque phase l'inductance L_0 ne consomme pas de puissance. La seule puissance consommée par phase est dissipée dans la résistance r et vaut $r I_2^2$, soit pour l'ensemble du moteur : $P_a = 3 r I_2^2$.

$$I_2 = \frac{U}{\sqrt{r^2 + l^2 \omega^2}} ; \quad I_2^2 = \frac{U^2}{r^2 + l^2 \omega^2}$$

$$P_a = 3 U^2 \frac{r}{r^2 + l^2 \omega^2} = 3 U^2 \frac{\frac{R}{g}}{\frac{R^2}{g^2} + l^2 \omega^2}$$

$$P_a = 3 U^2 \frac{R}{\frac{R^2}{g} + g l^2 \omega^2}$$

Il faudrait chercher pour quelle valeur de g cette expression est maximale.

6. a. Il faut coupler les enroulements en étoile lors du démarrage, puis, après mise en rotation, coupler en triangle (manuellement ou par un relais).

$$b. \quad V/\text{phase} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V} \quad , \text{ au lieu de } 380 \text{ V en triangle.} \quad \text{Donc} \quad I_d/\text{enroulement} = \frac{10,7}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{10,8 \text{ A}}}$$

Le courant en ligne est égal au courant dans un enroulement (couplage en étoile) : $\underline{I_d = 10,8 A}$.

c. Avec le couplage étoile, le courant dans un enroulement est donc divisé par $\sqrt{3}$; la puissance absorbée est donc divisée par 3, donc $\underline{T_d = \frac{8,0}{3} = 2,7 \text{ N.m}}$.

Ce nouveau couple de démarrage est presque dix fois plus petit que le moment du couple nominal. Si le moteur est chargé, il peut ne pas démarrer.

On pourrait utiliser un rhéostat de démarrage.

BO1

SESSION DE 1992**concours interne
de recrutement de professeurs agrégés
et concours d'accès à l'échelle de rémunération****section : sciences physiques**

composition sur la physique
et le traitement automatisé de l'information

Durée : 5 heures

Épreuve commune aux options
PHYSIQUE ET CHIMIE, PHYSIQUE ET PHYSIQUE APPLIQUÉE

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Rappel du texte définissant la nature de l'épreuve.

Le candidat propose, pour un niveau et des objectifs désignés, une progression relative à une partie d'un programme de lycée, classes post-baccalauréat comprises, en approfondit quelques points, prévoit un accompagnement expérimental utilisant éventuellement l'ordinateur, élabore des exercices propres à consolider l'acquisition des connaissances, savoir-faire et méthodes ainsi qu'à participer à l'évaluation des élèves.

Organisation de l'épreuve

Le sujet est constitué de deux parties indépendantes. A l'intérieur de chacune, de nombreuses questions sont indépendantes. Avant d'aborder chaque partie, il est recommandé d'en lire l'énoncé en entier. Le plan de chaque partie placé en début du texte a pour but d'aider le candidat à cerner le domaine des connaissances utiles.

La partie I, partie pédagogique, porte sur l'étude des circuits électriques linéaires.

La partie II correspond à l'étude d'un câble coaxial.

Partie I - Circuits électriques linéaires

Plan de la partie I :

document fourni : extrait de programme

I.1 - Réseaux linéaires en régime permanent

Progression

Conception d'exercices

I.2 - Dipôles linéaires en régime sinusoïdal forcé

Régimes de fonctionnement

Représentation complexe

Impédance, admittance

Résonances

I.3 - Rédaction d'un corrigé de problème

Programmes et commentaires de la classe de mathématiques supérieures
(extrait)

CIRCUITS ÉLECTRIQUES LINÉAIRES

PROGRAMME	COMMENTAIRES
1. Lois de base Lois de Kirchhoff (mailles et noeuds).	On fera ressortir le caractère fondamental de ces lois. La théorie générale des réseaux est hors programme.
2. Eléments de circuit	

<p>Dipôles R, L et C ; sources de courant, de tension, indépendantes ou liées ; association d'éléments en série, en parallèle ; diviseur de courant, de tension</p>	<p>Le formalisme matriciel des quadripôles est exclu.</p> <p>On insistera sur l'importance et la nécessité d'une convention d'orientation des courants et tensions.</p> <p>La notion d'inductance mutuelle est exclue à ce stade.</p>
<p>3. Théorèmes de base et modélisation</p> <p>Théorème de superposition. Représentation de Norton, de Thévenin.</p>	<p>On mettra en évidence l'utilité de ces représentations pour ramener un circuit linéaire à l'un des circuits modèles précédemment étudiés.</p> <p>On indiquera, pour ces deux représentations, le dipôle équivalent à une source éteinte.</p>
<p>4. Exemples d'applications ; régimes de fonctionnement</p> <p><i>Régime continu.</i> <i>Régime sinusoïdal ;</i> représentation complexe ; impédance ; puissance moyenne ; grandeurs efficaces ; facteur de puissance. <i>Réponse à une excitation en courant ou en tension :</i></p> <p>Réponse permanente sinusoïdale.</p> <p>Réponse à un échelon : résolution de l'équation différentielle avec conditions initiales.</p>	<p>On rappellera la représentation de Fresnel.</p> <p>La notion de puissance réactive et le théorème de Boucherot ne sont pas au programme.</p> <p>On étudiera expérimentalement les configurations à deux éléments (R,C) ou (R,L) et au plus à trois éléments (R,L,C).</p> <p>On introduira la notion de fonction de transfert :</p> $H(j\omega) = G(\omega) e^{j\phi(\omega)}$ <p>On fera effectuer des tracées expérimentaux en portant en abscisse ω en échelle logarithmique et, en ordonnée, $G(\omega)$ en échelle logarithmique et $\phi(\omega)$ en échelle linéaire.</p> <p>La notion de décibels sera introduite ainsi que celle de fréquence de coupure f_c à -3 dB.</p> <p>Le calcul sera effectué pour les circuits à deux éléments (R,C).</p> <p>On fera effectuer des relevés expérimentaux de réponse $s(t)$.</p> <p>On montrera, uniquement pour les seuls circuits à deux éléments (R,C), que les caractéristiques fondamentales des courbes $s(t)$, $G(\omega)$ et $\phi(\omega)$ sont liées.</p> <p>Les élèves devront posséder une bonne maîtrise de ces concepts et outils afin de savoir effectuer le calcul d'un courant ou d'une tension dans un réseau à faible nombre d'éléments de manière efficace, c'est-à-dire par l'utilisation intelligente des théorèmes de base. Cette maîtrise est indispensable pour assimiler avec profit le paragraphe "circuits électroniques" dont on notera que certains aspects peuvent être traités simultanément avec cette partie du programme.</p>

I.1 - RÉSEAUX LINÉAIRES EN RÉGIME PERMANENT.

I.1.1 - Progression

Construire la progression correspondant aux paragraphes 1 et 3 du programme. Après avoir indiqué les notions à introduire (lois, définitions, modélisations, théorèmes), on explicitera chaque notion : énoncé, hypothèses, idées physiques sous-jacentes, démonstration des principaux théorèmes.

I.1.2 - Exercices

Sur chacun des deux thèmes suivants, rédiger un énoncé et son corrigé, avec commentaire éventuel, pour un exercice d'interrogation :

I.1.2.a) Calcul, par plusieurs méthodes, de l'intensité dans une branche d'un réseau contenant au moins un générateur non idéal de tension et un générateur non idéal de courant.

I.1.2.b) Calcul de l'intensité dans un pont de Wheatstone déséquilibré.

I.2 - DIPOLES LINÉAIRES EN RÉGIME SINUSOIDAL FORCÉ

L'étude sera limitée à des dipôles linéaires comprenant les éléments résistors, bobines et condensateurs branchés sur un générateur de courant ou de tension.

I.2.1 - Régimes de fonctionnement.

I.2.1.a) Qu'appelle-t-on approximation des régimes quasi-permanents ?

I.2.1.b) Qu'appelle-t-on régime forcé ?

I.2.2 - Représentation complexe.

I.2.2.a) Justifier l'intérêt d'associer en régime sinusoïdal une représentation complexe aux grandeurs utilisées.

I.2.2.b) Que deviennent alors les lois de Kirchhoff ?

I.2.3 - Impédance, admittance.

Définir les notions d'impédance complexe et d'admittance complexe. Indiquer les lois qui les régissent dans le cas d'association série ou parallèle de dipôles. Citer quelques illustrations immédiates.

I.2.4 - Résonances.

Dans cette question, on étudiera un dipôle RLC série branché aux bornes d'un générateur de tension (figure I.1.a) ou un dipôle RLC parallèle branché aux bornes d'un générateur de courant (figure I.1.b). Les générateurs délivrent un signal sinusoïdal dont on garde l'amplitude constante mais dont on peut régler la pulsation.

On cherche alors la forme des courbes représentatives des amplitudes et des phases des grandeurs intéressantes (tensions ou courants).

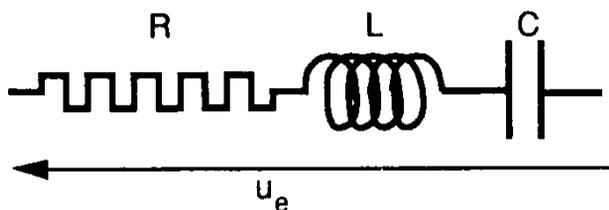


Figure I.1.a

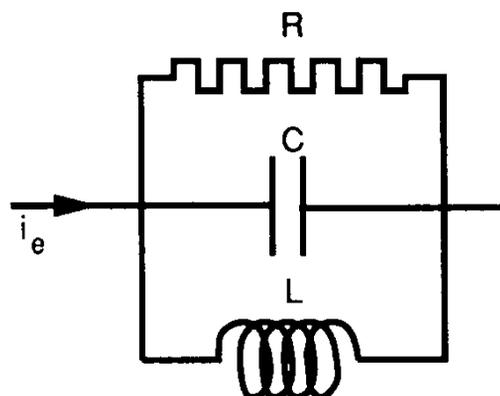


Figure I.1.b

I.2.4.a) Qu'appelle-t-on résonance ?

I.2.4.b) Etudier la résonance de courant pour le dipôle RLC série.

I.2.4.c) Etudier la résonance de tension u_c aux bornes du condensateur pour le dipôle RLC série.

I.2.4.d) Etudier la résonance de tension pour le circuit RLC parallèle.

I.2.4.e) Qu'appelle-t-on filtre ?

Déduire de l'étude précédente la nature des filtres suivants :

- circuit RLC série avec en entrée $u_e(t)$ et en sortie $u_c(t)$, tension aux bornes du condensateur,

- circuit RLC parallèle avec en entrée $i_e(t)$ et en sortie $u(t)$, tension aux bornes du dipôle.

I.3 - Rédiger un corrigé du problème suivant (extrait d'un texte donné au concours d'entrée à Saint-Cyr en 1990).

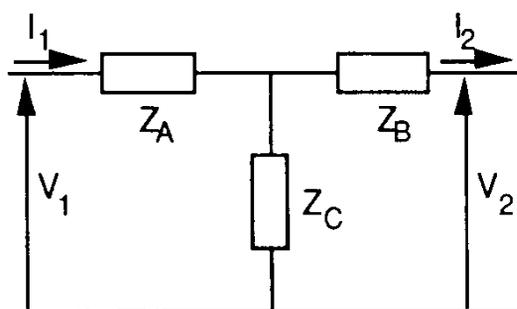


Figure I.2

On considère le filtre "en T" de la figure I.2.

Le régime étant sinusoïdal dans tout le problème, il est convenu que toutes les lettres majuscules représenteront des grandeurs complexes (impédances complexes ou amplitudes complexes).

Z_A , Z_B et Z_C sont des impédances complexes (résistances ou capacités ou inductances).

I.3.1- On charge le filtre par une impédance (complexe) Z_0 et on désire que le dipôle chargé "vu" de ses deux bornes d'entrée soit équivalent à l'impédance Z_0 qui porte alors le nom d'impédance (complexe) *itérative* ou *caractéristique*. On a alors $\frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2}{I_2} = Z_0$.

Montrer qu'à Z_A , Z_B et Z_C données, il existe a priori deux valeurs possibles de Z_0 .

Quelle est, en fonction de Z_0 , l'impédance caractéristique du système constitué par n filtres en T identiques montés en cascade ? Quel avantage présente, pour ce système, l'utilisation d'une charge d'impédance égale à l'impédance caractéristique ?

I.3.2- Dans toute la suite du problème, Z_A et Z_B sont réalisées par deux inductances pures identiques de valeur $L/2$; Z_C est réalisée par un condensateur parfait de capacité C . Calculer Z_0 et discuter des valeurs possibles de Z_0 en fonction de la pulsation ω . Comment pourrait-on réaliser Z_0 ? Peut-on réaliser Z_0 avec un seul composant pour toute pulsation ?

I.3.3 - On se place dans le cas des "basses fréquences" (à préciser) où Z_0 est une résistance pure. On charge alors le filtre, à toute fréquence, par la résistance caractéristique de valeur positive correspondant à cette fréquence. Calculer le transfert $T = \frac{V_2}{V_1}$ en fonction de L , C et ω puis en fonction de ω et $\omega_C = 2/\sqrt{LC}$. Simplifier l'expression de T en posant $\cos\phi = 1 - (LC\omega^2/2)$ et calculer son module et son argument en fonction de ϕ .

I.3.4 - On se place dans le cas des "fréquences élevées" (à préciser) où Z_0 est une réactance pure. On charge alors le filtre à toute fréquence, par l'impédance caractéristique *inductive* (de réactance positive) correspondant à cette fréquence. Calculer le transfert $T = V_2 / V_1$ en fonction de L , C et ω puis en fonction de ω et $\omega_C = 2/\sqrt{LC}$. Simplifier l'expression de T en posant $\text{ch } \psi = (LC\omega^2/2) - 1$ et calculer son module et son argument en fonction de ψ .

I.3.5 - On pose $x = \omega/\omega_C$.

Tracer les courbes donnant le module $|T| = f_0(x)$ de la quantité T et son argument $\text{Arg}(T) = g_0(x)$ dans le cas d'un filtre chargé à toute fréquence par son impédance caractéristique. Préciser la direction des tangentes aux points remarquables.

Quelle est la nature du filtre ainsi chargé, à toute fréquence, par son impédance caractéristique ?

Comment réaliser, au mieux, cette impédance caractéristique en utilisant un seul composant pour toute fréquence ?

Note :

On rappelle que les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique, notées respectivement ch et sh , sont définies pour tout x réel par

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et par} \quad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} .$$

En outre, on rappelle les relations suivantes :

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} ; \quad \text{ch } x = 2 \text{ch}^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 + 2 \text{sh}^2 \frac{x}{2}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} ; \quad \text{sh } x = 2 \text{sh} \frac{x}{2} \text{ch} \frac{x}{2}$$

Partie II - Propagation d'ondes électromagnétiques dans un câble coaxial

Plan de la partie II

Présentation de l'étude

II.1. Equilibre électrostatique

II.2. Régime stationnaire

II.3. Régime variable

A. Etude à partir des équations de Maxwell

B. Etude à partir d'un schéma équivalent

C. Solutions des équations de propagation

II.4. Quelques aspects du phénomène de propagation.

A. Propagation de signaux non sinusoïdaux

B. Propagation de signaux sinusoïdaux.

Une ligne électrique est constituée d'un câble coaxial. Les deux conducteurs du câble sont assimilés à deux surfaces parfaitement conductrices, cylindriques, à sections circulaires et coaxiales (figures 1 et 2). Le conducteur intérieur noté conducteur (1) a un rayon a ; le conducteur extérieur noté conducteur (2) a un rayon b ; la longueur est l .

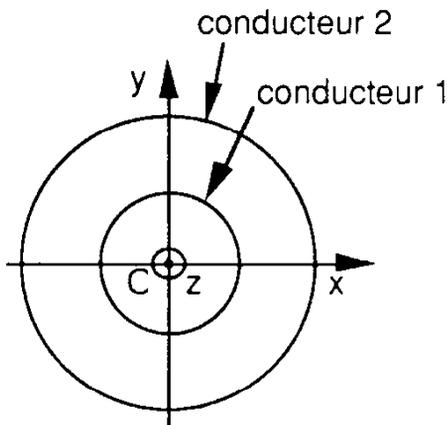


Figure II.1

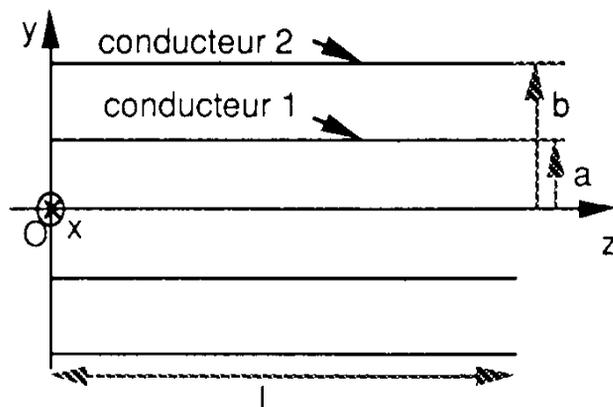


Figure II.2

Un point M est repéré en coordonnées cylindriques par r, θ, z ; la base locale associée est $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ (figure II.3).

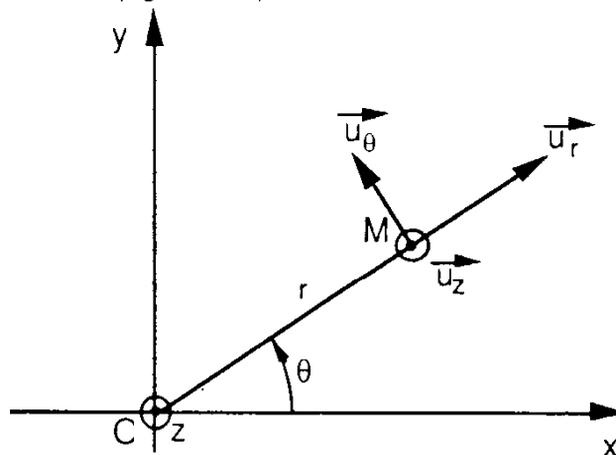


Figure II.3

L'espace entre les conducteurs contient un diélectrique linéaire homogène isotrope de permittivité relative ϵ_r et de perméabilité magnétique égale à celle du vide. Les domaines $r < a$ et $r > b$ sont vides.

On donne :

rayon du conducteur (1)	$a = 0,50 \text{ mm} ;$
rayon du conducteur (2)	$b = 1,75 \text{ mm} ;$
perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} ;$
permittivité électrique du vide	$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ F.m}^{-1} ;$
permittivité relative du diélectrique	$\epsilon_r = 2,25.$

La longueur l du câble est suffisamment grande pour qu'on puisse négliger les effets d'extrémités.

On rappelle les expressions des opérateurs gradient, divergence et rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z.$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z.$$

II.1 - Equilibre électrostatique.

On suppose dans les questions II.1.1 et II.1.2 que l'espace entre les conducteurs est le vide. Les conducteurs (1) et (2), en équilibre électrostatique, portent respectivement les charges électriques $+Q$ et $-Q$ uniformément réparties sur les deux surfaces.

II.1.1 -

Montrer que le champ électrostatique est radial et qu'il ne dépend que de r :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

Énoncer le théorème de Gauss.

Établir l'expression de la fonction $E(r)$ en distinguant les domaines

$r < a$, $a < r < b$ et $r > b$.

II.1.2 -

Le conducteur (1) est au potentiel V_1 , le conducteur (2) au potentiel V_2 . Préciser la relation entre champ électrostatique et potentiel électrostatique, d'une part sous forme locale, d'autre part sous forme intégrale. Définir la capacité C du condensateur formé par les deux conducteurs ; calculer C en fonction de ϵ_0 , l , a , b . En déduire la capacité du câble par unité de longueur :

$$C_0 = \frac{C}{l}.$$

II.1.3 -

L'espace entre les conducteurs est occupé par le diélectrique. Donner la nouvelle expression de la capacité par unité de longueur C_0 . Remarque : on se limitera à justifier l'expression proposée en rappelant les propriétés du

vecteur induction électrique \vec{D} et du vecteur champ électrostatique \vec{E} dans le diélectrique entre les deux conducteurs.

Calculer numériquement C_0 .

II.2 - Régime stationnaire

Le conducteur (1) constitue le conducteur aller d'un courant électrique constant d'intensité I (I est défini avec le sens de l'axe Oz) ; le conducteur (2) est le conducteur retour de ce courant. La répartition du courant est

superficielle et uniforme sur chaque conducteur ; les vecteurs densité superficielle de courant sont respectivement :

$$\vec{j}_{S1} = \frac{I}{2\pi a} \vec{u}_z ; \vec{j}_{S2} = \frac{-I}{2\pi b} \vec{u}_z.$$

II.2.1 -

Montrer que le champ magnétique est orthoradial et qu'il ne dépend que de r :

$\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$. Enoncer le théorème d'Ampère (préciser les conventions de signe). Etablir l'expression de la fonction $B(r)$ en distinguant les domaines $r < a$, $a < r < b$ et $r > b$.

II.2.2 -

Rappeler la propriété caractéristique du flux du champ magnétique. Calculer le flux du champ magnétique créé par le câble coaxial (remarquer que la géométrie des lignes de champ permet de choisir simplement la surface à travers laquelle le flux doit être calculé).

II.2.3 -

Définir l'inductance propre L du câble coaxial ; calculer L en fonction de μ_0 , I , a , b . En déduire l'inductance propre par unité de longueur : $L_0 = \frac{L}{l}$. Calculer numériquement L_0 .

II.3 - Régime variable

On se place dans le cadre de la théorie générale de l'électromagnétisme. La répartition des courants possède les propriétés suivantes :

- l'intensité dans un conducteur n'a pas, à un instant donné, la même valeur dans toutes les sections droites : on note $i = i(t, z)$ l'intensité du courant à travers une section droite du conducteur (1).
- pour une section droite donnée, les intensités dans les conducteurs (1) et (2) sont opposées et les vecteurs densité superficielle de courant sont respectivement :

$$\vec{j}_{S1} = \frac{i(t,z)}{2\pi a} \vec{u}_z ; \vec{j}_{S2} = \frac{-i(t,z)}{2\pi b} \vec{u}_z.$$

A cette répartition des courants est associée une répartition non uniforme des charges ; une longueur dz du conducteur (1) possède une charge dQ ; on appelle charge linéique la quantité $\lambda = \frac{dQ}{dz}$; la charge linéique dépend de t et de z :

$\lambda = \lambda(t, z)$; le conducteur (2) a une charge linéique opposée, $-\lambda(t, z)$. Les champs électrique et magnétique sont recherchés sous la forme

$\vec{E} = E(r, z, t) \vec{u}_r$, $\vec{B} = B(r, z, t) \vec{u}_\theta$ dans la domaine $a < r < b$. Ils sont supposés nuls à l'extérieur de ce domaine. Le diélectrique occupe l'espace entre les conducteurs et on admet que les équations de Maxwell dans le diélectrique s'obtiennent à partir des équations de Maxwell dans le vide en remplaçant la permittivité du vide ϵ_0 par celle du milieu $\epsilon_0 \epsilon_r$. On propose d'étudier le régime variable à partir de deux méthodes : l'une utilise les équations de Maxwell (paragraphe A), l'autre fait appel à un schéma équivalent (paragraphe B). Le paragraphe C qui termine la partie II.3 utilise les résultats du paragraphe B.

II.3.A - Etude à partir des équations de Maxwell

II.3.A.1 -

- a) Appliquer la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère sur un cercle d'axe Oz et de rayon r ; en déduire l'expression de B en fonction de μ_0 , $i(t, z)$, r.
- b) A partir de la forme locale de l'équation de Maxwell-Ampère, obtenir une relation entre $\frac{\partial B}{\partial z}$ et $\frac{\partial E}{\partial t}$.

II.3.A.2 -

Ecrire l'équation de Maxwell-Faraday sous forme locale ; en déduire une relation entre $\frac{\partial E}{\partial z}$ et $\frac{\partial B}{\partial t}$.

II.3.A.3 -

Montrer que l'intensité $i(t, z)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles dite équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0.$$

II.3.A.4 -

On cherche à préciser le rôle de la charge linéique λ .

- a) Appliquer le théorème de Gauss à un cylindre d'axe Oz, de rayon r et de longueur dz. En déduire l'expression de E en fonction de ϵ_0 , ϵ_r , r, $\lambda(t, z)$.
- b) En utilisant la conservation de la charge pour une longueur dz du conducteur (1), démontrer la relation :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial z} = 0.$$

- c) Montrer qu'en fait, l'équation précédente n'est pas indépendante et peut être obtenue à partir des résultats des questions 1a, 1b et 4a de cette partie II.3.A.
- d) Vérifier que la charge linéique satisfait à l'équation de propagation.

II.3.B - Etude à partir d'un schéma équivalent

Il est commode d'utiliser un modèle dit " à constantes réparties " qui se rapproche, par sa mise en équation, des circuits électriques classiques. Dans ce modèle la portion de câble comprise entre les plans de section droite repérés par z et z + dz est vue comme un quadripôle : elle possède une capacité $C_0 dz$ entre les conducteurs et une inductance propre $L_0 dz$ entre les sections d'entrée et de sortie.

C_0 est la capacité par unité de longueur : $C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$.

L_0 est l'inductance propre linéique : $L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

On introduit la différence de potentiel $u(t, z)$ entre les conducteurs (1) et (2) dans le plan de section droite repéré par z et on suppose que le potentiel du conducteur (2) est imposé et pris comme référence. La figure II.4 résume les propriétés du schéma équivalent.

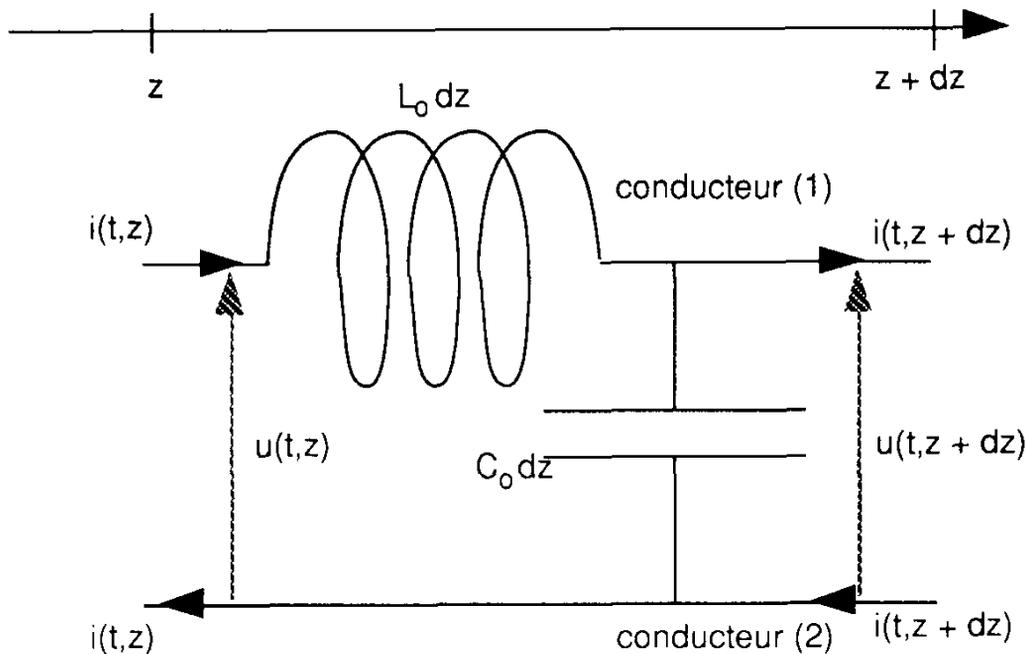


Figure II.4

II.3.B.1 -

Démontrer les relations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -L_0 \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -C_0 \frac{\partial u}{\partial t}$$

II.3.B.2 -

En déduire que u et i vérifient l'équation de propagation (l'équation de propagation a été définie à la question II.3.A.3).

II.3.C - Solutions des équations de propagation

Ce paragraphe utilise les résultats obtenus dans les questions II.3.B.1 et II.3.B.2. On admet le résultat suivant : La solution générale de l'équation de

propagation $\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

est de la forme

$$s = f\left(t - \frac{z}{v}\right) + g\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

Les fonctions f et g sont connues, à d'éventuelles constantes d'intégration près, par les conditions aux limites imposées à la grandeur s . Les expressions de $u(t, z)$ et $i(t, z)$ s'écrivent respectivement :

$$u(t, z) = u_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + u_2\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

$$i(t, z) = i_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + i_2\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

II.3.C.1 -

Exprimer v en fonction de ϵ_0 , μ_0 et ϵ_r . Que représente v ? Calculer numériquement v .

II.3.C.2 -

Préciser la signification physique des grandeurs d'indice 1 d'une part et de grandeurs d'indice 2 d'autre part.

II.3.C.3 - Montrer que

$$u_1 = R_C i_1 + u_{01}$$

et que

$$u_2 = - R_C i_2 + u_{02}$$

u_{01} et u_{02} sont des constantes. R_C est appelée résistance caractéristique du câble. Exprimer R_C en fonction de ϵ_0 , μ_0 , ϵ_r , a et b . Calculer numériquement R_C . On admettra dans toute la suite que le choix $u_{01} = u_{02} = 0$ est toujours possible et on fera ce choix.

II.4 - Quelques aspects du phénomène de propagation

Cette partie utilise les résultats obtenus dans la partie II.3.C ainsi que les notations correspondantes. Les caractéristiques du câble coaxial sont : vitesse de propagation v , résistance caractéristique R_C , longueur l . On note les grandeurs à l'entrée du câble par l'indice e et les grandeurs en sortie par l'indice s :

$$u_e(t) = u(t, 0) ; u_s(t) = u(t, l) ; i_e(t) = i(t, 0) ; i_s(t) = i(t, l).$$

Le schéma du câble est le suivant :

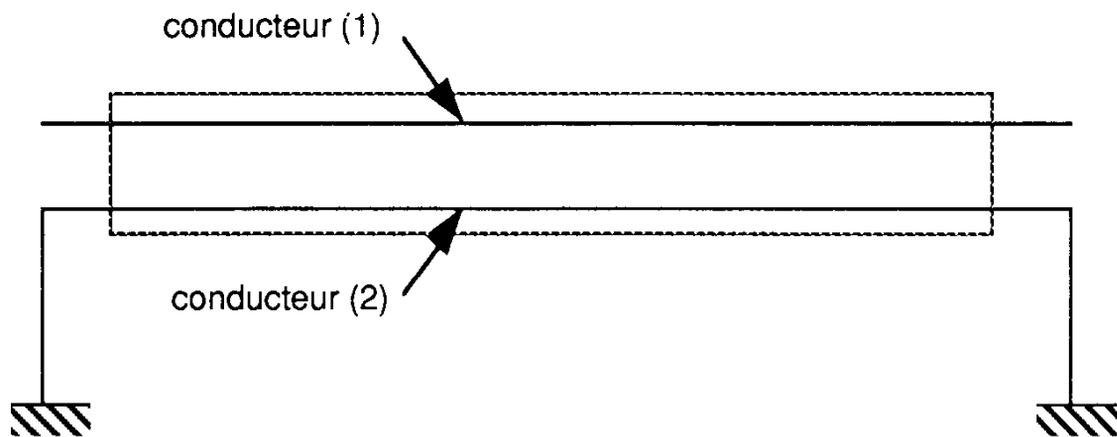


Figure II.5.

II.4.A - Propagation de signaux non sinusoïdaux

II.4.A.1 - Réflexion d'un signal.

Le câble coaxial est alimenté en entrée par un générateur de résistance interne R_g ; dans cette question II.4.A.1 uniquement, on prendra $R_g = R_C$; il est branché en sortie sur une résistance de charge R_u . Le fonctionnement du générateur est modélisé à l'aide d'une f.é.m. constante $E > 0$ et d'un interrupteur K ; Pour $t < 0$, K est ouvert et le câble n'est pas alimenté. Pour $t \geq 0$, K est fermé : le générateur produit donc un échelon de tension à $t = 0$.

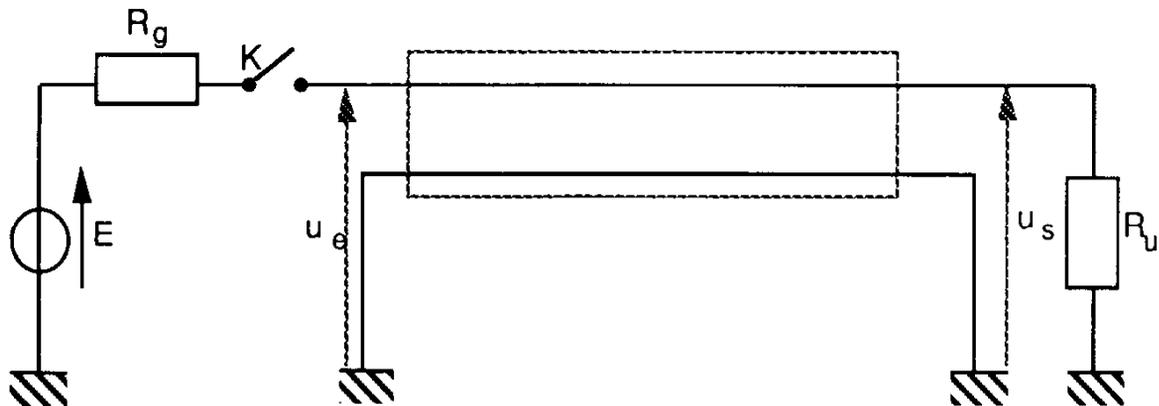


Figure II.6.

a) En tenant compte des conditions initiales (pour $t < 0$) et des conditions aux limites (en $z = 0$ et en $z = l$), montrer que :

$$u_2(t) = u_1 \left(t - \frac{2l}{v} \right) \times \frac{R_U - R_C}{R_U + R_C}$$

$$u_1(t) = \frac{E}{2} \text{ pour } t \geq 0.$$

b) Tracer le graphe de $u_e(t)$ pour les trois valeurs suivantes de R_U : $R_U = 0$, $R_U \rightarrow \infty$, $R_U = R_C$. Commenter.

II.4.A.2 -

On reprend l'étude du circuit précédent en supposant R_g et R_U quelconques.

a) Donner l'expression de u_e :

α) aussitôt après la fermeture de l'interrupteur K.

β) quand $t \rightarrow \infty$.

b) Décrire qualitativement le fonctionnement du circuit entre la fermeture de l'interrupteur et l'établissement du régime permanent.

II.4.A.3 - Production d'une d'impulsion de tension.

On réalise le circuit ci-dessous.

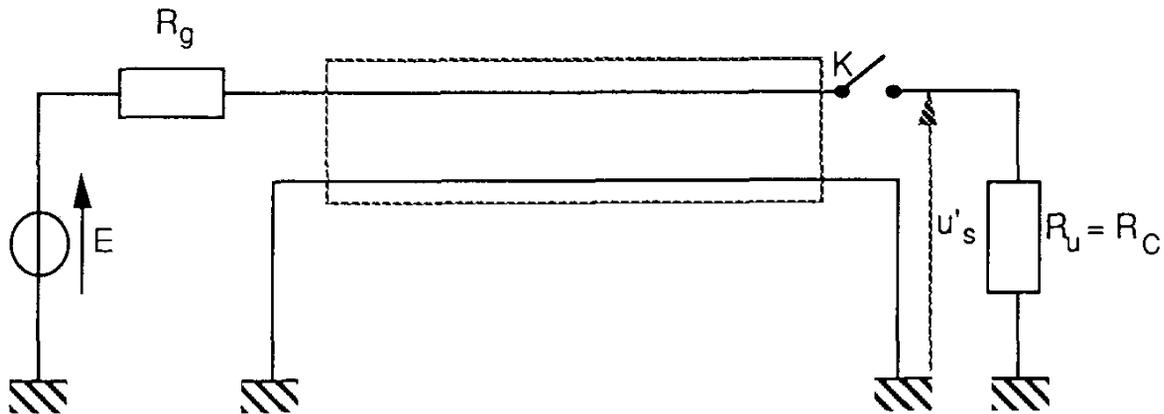


Figure II.7.

Par rapport au circuit précédent, les modifications sont les suivantes :

- l'interrupteur K est placé en sortie du câble ;

- la résistance interne R_g vérifie $R_g \gg R_C$;

- $R_U = R_C$.

Pour $t < 0$ l'interrupteur K est ouvert (le câble est sous tension pour $t < 0$) ;

à $t = 0$ on ferme K.

a) Etablir la relation entre $u_1(t)$ et $u_2(t)$ (tenir compte de la condition $R_g \gg R_C$).

b) Exprimer en fonction de E

$$u_2 \left(t + \frac{l}{v} \right) \text{ pour } t < 0$$

$$u_1 \left(t - \frac{l}{v} \right) \text{ pour } t < \frac{2l}{v}$$

puis

$$u_2 \left(t + \frac{l}{v} \right) \text{ pour } t \geq 0$$

$$u_1 \left(t - \frac{l}{v} \right) \text{ pour } t \geq \frac{2l}{v} .$$

c) En déduire l'évolution de la tension u'_s aux bornes de la résistance R_U . Tracer son graphe en fonction du temps.

II.4.B. Propagation de signaux sinusoïdaux.

Un générateur impose un régime sinusoïdal forcé de pulsation ω dans le câble coaxial. Une résistance de charge R_U est branchée en sortie du câble.

Les grandeurs u_1, u_2, i_1, i_2 introduites dans la partie II.3.C deviennent des fonctions sinusoïdales dépendant respectivement de $\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)$ pour les grandeurs d'indice 1 et de $\omega\left(t + \frac{z}{v}\right)$ pour les grandeurs d'indice 2.

Les constantes u_{01} et u_{02} sont nulles.

On utilise la représentation complexe (j vérifie $j^2 = -1$) et on note $k = \frac{\omega}{v}$. On écrit

$$\underline{u}_1 = \underline{U}_{10} \exp j(\omega t - kz)$$

$$\underline{u}_2 = \underline{U}_{20} \exp j(\omega t + kz)$$

$$i_1 = \frac{\underline{u}_1}{R_c}$$

$$i_2 = -\frac{\underline{u}_2}{R_c}$$

$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 = [\underline{U}_{10} \exp(-jkz) + \underline{U}_{20} \exp(+jkz)] \exp(+j\omega t)$$

$$i = i_1 + i_2 = \left[\frac{\underline{U}_{10}}{R_c} \exp(-jkz) - \frac{\underline{U}_{20}}{R_c} \exp(+jkz) \right] \exp(+j\omega t)$$

\underline{U}_{10} et \underline{U}_{20} sont des amplitudes complexes constantes

Il est commode d'introduire :

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_{10} \exp(-jkz) + \underline{U}_{20} \exp(+jkz)$$

$$I(z) = \left[\frac{\underline{U}_{10}}{R_c} \exp(-jkz) - \frac{\underline{U}_{20}}{R_c} \exp(+jkz) \right].$$

$\underline{U}(z)$ et $I(z)$ sont des amplitudes complexes dépendant de z .

II.4.B.1.

A l'entrée du câble, on note $\underline{U}(0) = \underline{U}_e$, $I(0) = I_e$ et à la sortie $\underline{U}(l) = \underline{U}_s$, $I(l) = I_s$

a) Démontrer les relations suivantes :

$$\underline{U}_e = \underline{U}_s \cos kl + I_s jR_c \sin kl$$

$$I_e = \underline{U}_s j \frac{\sin kl}{R_c} + I_s \cos kl.$$

b) En déduire l'impédance d'entrée Z_e en fonction de R_u , R_c , k et l .

II.4.B.2 -

On définit le coefficient de réflexion en extrémité de ligne par

$$\Gamma_s = \frac{\underline{U}_{20} \exp(jkl)}{\underline{U}_{10} \exp(-jkl)}$$

Exprimer Γ_s en fonction de R_c et de R_u .

II.4.B.3 -

On examine les cas particuliers suivants :

α) $R_u = R_c$,

β) $R_u = 0$,

γ) $R_u \rightarrow \infty$

a) Exprimer Z_e et Γ_s ; préciser le comportement du câble. Dans l'étude des cas

β et γ, on introduira la longueur d'onde $\Lambda = \frac{2\pi}{k}$ et on discutera le comportement du câble en fonction de sa longueur. Quand peut-on dire que le câble se comporte comme un circuit résonnant série ? un circuit résonnant parallèle ?

b) Exprimer \underline{u} et i et interpréter ces expressions (\underline{u} et i seront exprimées en fonction de \underline{U}_e dans le cas α, de I_s dans le cas β, de \underline{U}_s dans le cas γ).

II.4.B.4 -

La résistance de charge R_U est supposée quelconque.

a) Exprimer $\underline{U}(z)$ et $\underline{I}(z)$ en fonction de I_S , R_C , R_U , k , l et z .

b) Etudier les maxima et les minima des modules $|\underline{U}(z)|$ et $|\underline{I}(z)|$. En déduire le

taux d'ondes stationnaires $Z = \frac{|\underline{U}|_{\max}}{|\underline{U}|_{\min}}$, en distinguant les cas

$R_U > R_C$ et $R_U < R_C$. Relier le taux d'ondes stationnaires au module du coefficient de réflexion et commenter sa signification physique.

SESSION DE 1992

**concours interne
de recrutement de professeurs agrégés
et concours d'accès à l'échelle de rémunération**

section : sciences physiques

options : chimie
physique appliquée

composition avec exercices d'application

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique à fonctionnement autonome, non imprimante – autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

5 feuilles de papier millimétré pour chacune des options.

Aucun document n'est autorisé, notamment tableau périodique interdit.

*Les candidats doivent traiter le sujet
correspondant à l'option à laquelle ils sont inscrits*

Partie A**Etude du fer métallique****I. Généralités**

Pour des températures inférieures à sa température de fusion ($T_F = 1535\text{ °C}$ sous une pression $P^\circ = 1\text{ Bar}$), le fer présente deux structures cristallines différentes.

I.1. A température ambiante et sous une pression de 1 Bar, quelle est la structure cristalline stable du fer solide ?

I.2. A la température $T = 1535\text{ °C}$, sous une pression $P^\circ = 1\text{ Bar}$, quelle est la structure cristalline du fer solide en équilibre avec la phase liquide ? Expliquer.

I.3. Dans quels composés, trouve-t-on le fer à l'état naturel ?

II. Etude cristallographique du fer α

Le cristal parfait de fer α est décrit par un réseau cubique centré (noté c.c.).

Les atomes de fer sont supposés sphériques.

II.1. Dessiner en perspective la maille conventionnelle d'un réseau cubique centré. Les centres des atomes de fer seront représentés par des points •

II.2. La maille conventionnelle est-elle la maille élémentaire ?

II.3. Qu'appelle-t-on paramètre de la maille ? (noté a)

II.4. Quelle est la coordinence de chaque atome de fer (encore appelée nombre de coordination) ?

II.5. Représenter le plan de la maille conventionnelle dont les indices de Miller sont $(1,1,0)$. Chaque atome de fer sera représenté par un cercle. On indiquera clairement les "contacts" entre atomes de ce plan.

II.6. Quelle est la relation entre le rayon atomique $R_{Fe\alpha}$ de l'atome de fer et le paramètre a de la maille conventionnelle ?

En déduire la compacité C_α du réseau c.c.

II.7. Calculer la masse volumique μ du fer α à 910 °C .

Données : $R_{Fe\alpha} = 0,126\text{ nm}$ à $T = 910\text{ °C}$

$N = 6,023 \cdot 10^{23}\text{ mol}^{-1}$ $M_{Fe} = 55,8\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$

III. Etude cristallographique du fer γ

Le cristal parfait de fer γ est décrit par un réseau cubique à faces centrées (noté c.f.c). Les atomes de fer sont supposés sphériques.

III.1. Représenter en perspective la maille conventionnelle d'un réseau c.f.c (même notation qu'au II.1).

III.2. Quelle est la coordinnence de chaque atome de fer ?

III.3. Représenter une face du cube indiquant clairement les "contacts" entre atomes de ce plan.

III.4. Quelle est la relation entre le rayon atomique $R_{Fe\gamma}$ et le paramètre a' de la maille conventionnelle ?

III.5. En déduire la compacité C_γ du réseau c.f.c. Comparer C_α et C_γ . Commenter.

III.6. Il existe des cavités entre les atomes jointifs du réseau cristallin.

III.6.a. Etude des cavités octaédriques

III.6.a.α. Qu'appelle-t-on cavité octaédrique ?

III.6.a.β. Représenter leur centre (noté Ω) sur une vue en perspective de la maille conventionnelle.

III.6.a.γ. Combien y-a-t-il de cavités octaédriques dans une maille conventionnelle ?

III.6.a.δ. Exprimer leur habitabilité R_Ω en fonction de a' . L'habitabilité est définie par le rayon maximal (noté R_Ω) de la sphère qui peut s'inclure dans cette cavité sans la déformer.

III.6.b. Etude des cavités tétraédriques

III.6.b.α. Qu'appelle-t-on cavité tétraédrique ?

III.6.b.β. Représenter leur centre (noté Δ) sur une vue en perspective de la maille conventionnelle.

III.6.b.γ. Combien y-a-t-il de cavités tétraédriques dans une maille conventionnelle ?

III.6.b.δ. Exprimer leur habitabilité R_Δ en fonction de a' .

IV. Cristal réel de fer

Le cristal réel présente des défauts par rapport au cristal parfait. Nous allons nous limiter aux défauts ponctuels. On en distingue essentiellement de trois types.

IV.1. Expliquer dans chaque cas la nature du défaut :

IV.1.a. Défaut de Schottky

IV.1.b. Défaut d'anti-Schottky

IV.1.c. Défaut de Frenkel

IV.2. Détermination du nombre de défauts de Schottky.

On considère un cristal réel de fer à la température T fixée, constitué de N atomes de fer et n défauts de Schottky (n est très petit devant N). On appelle E l'énergie nécessaire pour créer un défaut.

Le cristal parfait est choisi comme système de référence : son enthalpie et son entropie sont nulles par convention.

La création de défauts se fait avec une variation de volume du cristal négligeable.

IV.2.a. Evaluer l'enthalpie H du cristal réel à la température T .

IV.2.b. Calculer l'entropie S du cristal réel à cette même température. Pour cela, on utilisera la définition statistique de l'entropie et on simplifiera l'expression obtenue en utilisant l'approximation : $\ln x! = x \ln x - x$ pour x grand devant 1.

IV.2.c. Donner l'expression simplifiée (c'est à dire en utilisant l'approximation ci-dessus) de l'enthalpie libre G du cristal réel à la température T .

IV.2.d. En remarquant que le cristal réel est un système à l'équilibre, calculer n en fonction de N , E , k et T . (k : constante de Boltzmann).

V. Propriétés magnétiques du fer solide

Le fer solide est ferromagnétique jusqu'à sa température de Curie ($T_c = 760^\circ\text{C}$), il devient ensuite paramagnétique.

V.1. Quelle est l'origine physique du paramagnétisme du fer ?

V.2. Quelle est la caractéristique principale des matériaux ferromagnétiques ?

V.3. Décrire le phénomène physique se produisant à la température de Curie.

V.4. Donner deux autres exemples de métaux ferromagnétiques.

Partie B

Etude des ions ferreux et ferrique complexés en solution aqueuse

Données numériques

Toutes les valeurs numériques suivantes sont données à la température $T = 298 \text{ K}$

Constantes d'acidité (les couples acido-basiques ne sont pas précisés. Seule la forme acide est donnée.

Ion $\text{Fe}_{\text{aq}}^{2+}$: $\text{p}K_{\text{a}} = 8,3$ Ion $\text{Fe}_{\text{aq}}^{3+}$: $\text{p}K_{\text{a}1} = 2,2$ et $\text{p}K_{\text{a}2} = 3,4$

Produits de solubilité

$\text{p}K_{\text{s}}(\text{Fe}(\text{OH})_2) = 15$ noté $\text{p}K_{\text{s}1}$ $\text{p}K_{\text{s}}(\text{Fe}(\text{OH})_3) = 37$ noté $\text{p}K_{\text{s}2}$

Potentiels standard

$E^\circ(\text{Fe}_{\text{aq}}^{3+}/\text{Fe}_{\text{aq}}^{2+}) = 0,77 \text{ V}$ noté E°_1 $E^\circ(\text{Fe}_{\text{aq}}^{2+}/\text{Fe}) = -0,43 \text{ V}$ noté E°_2

Constantes de formation successives des complexes du fer (III) avec l'ion fluorure F^-

$\text{p}K_{\text{F}1} = -5,1$ $\text{p}K_{\text{F}2} = -4,1$ $\text{p}K_{\text{F}3} = -2,7$

On prendra $\frac{RT}{F} \ln 10 = 0,06$ à $T = 298 \text{ K}$

Constante d'autoprotolyse de l'eau : $K_{\text{e}} = 10^{-14}$

Les concentrations seront notées entre crochets.

I. Comportement acido-basique des ions ferreux et ferrique complexés en solution aqueuse.

I.1. En solution aqueuse, les formules respectives de l'ion ferreux et ferrique complexés sont $[\text{Fe}(\text{H}_2\text{O})_6]^{2+}$ et $[\text{Fe}(\text{H}_2\text{O})_6]^{3+}$.

I.1.a. Préciser la forme géométrique de ces 2 ions complexes.

I.1.b. Donner leurs noms. Ces ions complexes seront notés, dans la suite du problème, $\text{Fe}_{\text{aq}}^{2+}$ et $\text{Fe}_{\text{aq}}^{3+}$.

I.2. Ces 2 ions complexes sont les formes acides de couples acido-basiques.

I.2.a. L'ion $\text{Fe}_{\text{aq}}^{2+}$ est un monoacide. Quelle est la formule de sa base conjuguée ?

I.2.b. L'ion $\text{Fe}_{\text{aq}}^{3+}$ est un diacide. Quelles sont les formules des acides et bases conjugués des deux couples ?

I.3. Calculer le pH d'une solution aqueuse de nitrate ferreux $\text{Fe}(\text{NO}_3)_2$ de concentration $C_0 = 10^{-1} \text{ mol.l}^{-1}$.

On admettra dans cette question qu'il n'y a pas formation de précipités.

II. Etude de la solubilité des hydroxydes $\text{Fe}(\text{OH})_2$ et $\text{Fe}(\text{OH})_3$

II.1. Dans un premier temps, on ne tient pas compte du caractère acide des ions $\text{Fe}_{\text{aq}}^{2+}$ et $\text{Fe}_{\text{aq}}^{3+}$.

II.1.a. Calculer les solubilités respectives dans l'eau pure à 298 K des hydroxydes $\text{Fe}(\text{OH})_2$ et $\text{Fe}(\text{OH})_3$. On les notera $s_{\text{Fe}(\text{OH})_2}$ et $s_{\text{Fe}(\text{OH})_3}$.

II.1.b. Quel est le pH des solutions obtenues dans chaque cas (c'est à dire une solution saturée en $\text{Fe}(\text{OH})_2$ ou en $\text{Fe}(\text{OH})_3$) ?

II.2. En tenant compte maintenant du caractère acide de $\text{Fe}_{\text{aq}}^{3+}$, calculer la nouvelle solubilité $s'_{\text{Fe}(\text{OH})_3}$ de $\text{Fe}(\text{OH})_3$ dans l'eau pure. Comparer $s_{\text{Fe}(\text{OH})_3}$ et $s'_{\text{Fe}(\text{OH})_3}$. Commenter.

III. Tracé du diagramme potentiel-pH du fer à 298 K

Dans toute cette partie, on ne tiendra pas compte du caractère acide des ions $\text{Fe}_{\text{aq}}^{2+}$ et $\text{Fe}_{\text{aq}}^{3+}$.

Conventions

Les frontières entre les différents domaines de prédominance seront calculées :

- pour l'égalité des concentrations dans le cas d'une limite entre deux espèces en solution
- pour une concentration c_0 dans le cas d'une limite entre une espèce en solution et un composé solide.

III.1. Etablir les équations $E = f(\text{pH})$ des frontières entre le domaine de prédominance du degré d'oxydation 0 et celui du degré d'oxydation II du fer pour les deux concentrations $c_0 = 10^{-1} \text{ mol.l}^{-1}$ et $c_0 = 10^{-6} \text{ mol.l}^{-1}$.

III.2. Même question pour les frontières entre degré II et degré III (également pour les deux concentrations).

III.3. Tracer ces différentes frontières sur un même graphe pour les deux concentrations ($c_0 = 10^{-1} \text{ mol.l}^{-1}$ en trait plein et $c_0 = 10^{-6} \text{ mol.l}^{-1}$ en pointillé).

Echelle : 1 cm par unité pH et 1 cm pour 0,1 V

- III.4. Indiquer sur le diagramme le domaine de stabilité de chacune des espèces.
 III.5. Tracer également les limites de stabilité thermodynamique de l'eau.
 III.6. Quelles conclusions en tirez-vous ?
 III.7. Quel est l'intérêt de tracer ce diagramme pour une concentration $c_0 = 10^{-6} \text{ mol.l}^{-1}$?

IV. Tracé du diagramme potentiel-pF du fer à 298 K

Dans cette partie également, on ne tiendra pas compte du caractère acide des ions $\text{Fe}_{\text{aq}}^{2+}$ et $\text{Fe}_{\text{aq}}^{3+}$.

La concentration en composés du fer en solution sera $c_0 = 10^{-1} \text{ mol.l}^{-1}$.

L'ion ferreux $\text{Fe}_{\text{aq}}^{2+}$ ne donne pas de complexes avec l'anion fluorure F^- .

On se reportera au § III pour les conventions utilisées.

IV.1. Définir la constante de formation $\text{p}K_{\text{Fi}}$ du complexe entre Fe^{3+} et F^- .

IV.2. Sachant que par la suite, la concentration en fluorure $[\text{F}^-]$ varie de $10^{-7} \text{ mol.l}^{-1}$ à 1 mol.l^{-1} , établir le diagramme de prédominance en fonction de pF ($\text{pF} = -\log[\text{F}^-]$) du fer au degré d'oxydation III en présence d'ion fluorure.

IV.3. Etablir les équations $E = f(\text{pF})$ des frontières entre le domaine de prédominance du degré d'oxydation II et celui du degré d'oxydation III du fer en présence d'ions F^- .

IV.4. Même question pour les (ou la) frontière(s) entre degré 0 et degré II.

IV.5. Tracer ces différentes frontières et indiquer sur le diagramme obtenu le domaine de stabilité de chacune des espèces envisagées.

Echelle : 2 cm par unité pF et 2 cm pour 0,1 V.

Partie C

Etude d'orbitales

I. Structure électronique

I.1. Le numéro atomique du fer est $Z=26$. Donner la configuration électronique du fer ainsi que celle des ions libres ferreux et ferrique.

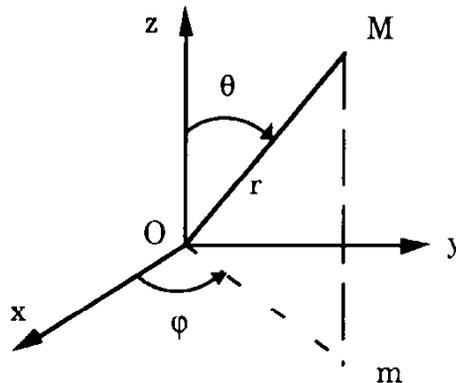
I.2. Justifier le fait que le fer appartient à la 1^{ère} série des éléments de transition.

II. Etude des orbitales d

Les orbitales sont décrites par les fonctions d'onde du type $\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi)$ où :

n, l, m représentent respectivement les nombres quantiques principal, secondaire et magnétique

r, θ, φ les coordonnées sphériques (voir schéma)



L'expression analytique d'une des orbitales 3d de l'atome d'hydrogène en coordonnées sphériques est la suivante :

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{4}{81\sqrt{30}} a_0^{-7/2} r^2 e^{-r/3a_0} \right) \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \right)$$

II.1. Quelle est la valeur de l pour une orbitale d ?

En déduire les valeurs de m possibles et le nombre d'orbitales d.

II.2. Etude de la partie radiale de la fonction Ψ définie ci-dessus.

II.2.a. Qu'appelle-t-on partie radiale de cette fonction d'onde ? On la notera R .

Donner l'allure de la courbe : $R = f(r)$. On posera $\frac{4}{81\sqrt{30}} = K$. Commenter la courbe obtenue.

II.2.b. Quelle est l'expression de la partie radiale (déduite de R ci-dessus) des autres orbitales d de l'atome d'hydrogène ?

II.3. Etude de la partie angulaire de la fonction Ψ définie ci-dessus.

II.3.a. Qu'appelle-t-on partie angulaire de cette fonction d'onde ? On la notera Y .

II.3.b. Représenter Y en fonction de θ dans le plan xOz .

II.3.c. Montrer que cette partie angulaire Y est normée.

II.3.d. Donner l'expression de la partie angulaire Y définie ci-dessus en coordonnées cartésiennes.

II.3.e. En déduire le nom usuel de cette orbitale.

II.3.f. En remarquant que la partie angulaire ne dépend pas de φ , que peut-on en déduire pour la surface obtenue en portant dans une direction donnée (θ, φ) , un vecteur proportionnel au carré de la partie angulaire de la fonction d'onde.

II.3.g. Tracer l'allure de l'intersection de cette surface avec le plan xOz .

II.3.h. Donner l'allure de l'intersection des surfaces (définies ci-dessus) avec un plan de votre choix (mais contenant O) des autres orbitales d .

Préciser par ailleurs leurs noms usuels.

Remarque : Le choix du plan peut ne pas être le même pour les différentes orbitales d .

Partie D

Etude thermodynamique de la réduction des oxydes de fer par la vapeur d'eau

I. Construction du diagramme d'Ellingham des oxydes de fer

I.1. Dans cette partie, nous allons construire puis exploiter le diagramme d'Ellingham des oxydes de fer.

I.1.a. Rappeler le principe de construction du diagramme d'Ellingham d'un couple M/M_pO_q en précisant clairement les approximations faites.

I.1.b. Etablir les équations $\Delta_r G_i^\circ = f(T)$ (i variant de 1 à 5) pour T appartenant à l'intervalle [500 K, 1500 K], des diagrammes d'Ellingham rapportés à une mole de O_2 , des couples (Fe/FeO), (Fe/Fe₃O₄), (FeO/Fe₃O₄), (Fe₃O₄/Fe₂O₃) et du couple (H₂/H₂O)

Remarque : Tous les composés sont des solides à l'exception de O_2 , H_2 et H_2O qui sont en phase gazeuse. On considèrera également que le fer solide reste sous sa forme cristalline Fe_α .

Tableau de grandeurs thermodynamiques ($T = 298,15$ K)

corps	ΔH_f° (kJ.mol ⁻¹)	S° (J.K ⁻¹ .mol ⁻¹)
Fe _α (s)	0	27,2
FeO(s)	-266,0	57,4
Fe ₃ O ₄ (s)	-1117,3	146,3
Fe ₂ O ₃ (s)	-823,5	87,3
O ₂ (g)	0	204,8
H ₂ (g)	0	130,5
H ₂ O(g)	-241,8	188,5

ΔH_f° est l'enthalpie standard molaire de formation et S° l'entropie molaire standard.

I.1.c. Représenter sur un même graphe les diagrammes d'Ellingham des couples précédents.

Echelle : Abscisse 1 cm / 100 K Ordonnée 5 cm / 100 kJ.

I.2. Montrer que l'oxyde ferreux FeO est instable en deçà d'une certaine température T° que l'on calculera.

II. Etude du pouvoir réducteur du dihydrogène

II.1. Nous allons envisager les réductions suivantes des oxydes de fer Fe_2O_3 , Fe_3O_4 et FeO par le dihydrogène :

-réduction de Fe_2O_3 en Fe_3O_4

-réduction de Fe_3O_4 en FeO ou en Fe selon la valeur de T

-réduction de FeO en Fe si FeO est stable, donc également selon la valeur de T .

II.1.a. Ecrire les quatre réactions de réduction.

II.1.b. Trois de ces quatre réductions sont équilibrées. Calculer les enthalpies libres standard de ces trois équilibres (notées $\Delta_r G_6^\circ$, $\Delta_r G_7^\circ$ et $\Delta_r G_8^\circ$) en fonction de T .

II.1.c. Etudier l'influence respective de variations de la température ou de la pression sur la position de ces 3 équilibres. Les gaz sont supposés parfaits.

II.2. Etablir les expressions du rapport $P_{\text{H}_2\text{O}} / P_{\text{H}_2} = f(T)$ pour T variant de 500 K à T° puis T variant de T° à 1500 K pour les trois équilibres précédents. On ne tiendra compte de l'existence de FeO que si T est supérieure à T° .

II.3. Tracer sur un même graphe l'allure des courbes $P_{\text{H}_2\text{O}} / P_{\text{H}_2} = f(T)$. On indiquera le long de chaque courbe, l'équation de l'équilibre considéré.

II.4. A l'aide des lois de déplacement d'équilibre, préciser sur ce graphe, le domaine de stabilité des phases solides.

Donnée : Constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

III. Application

On introduit dans une enceinte initialement vide, une mole de Fe_3O_4 et x moles de H_2 . L'enceinte est thermostatée à la température de 1000 K et la pression est fixée à 1 bar.

Nous allons déterminer l'état du système après réaction en fonction de la valeur initiale de x .

On pose u le nombre de moles de Fe formées et v le nombre de moles de Fe_3O_4 qui ont disparu.

L'état du système est défini par la position du point M (1000, $P_{\text{H}_2\text{O}} / P_{\text{H}_2}$) dans le diagramme établi au II.3

III.1. Donner l'expression générale de $P_{\text{H}_2\text{O}} / P_{\text{H}_2}$ en fonction de x , u et v .

III.2. Nous allons envisager deux stades de réduction possibles de Fe_3O_4 . Dans les deux cas, calculer u et v ; et en déduire les valeurs de x pouvant conduire à cet état :

III.2.a. M se trouve dans la zone d'existence de FeO (frontières de la zone non comprises).

III.2.b. M se trouve dans la zone d'existence de Fe (idem).

Partie E

Synthèse de nouveaux ligand-cage complexant l'ion ferrique.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la synthèse de ligands complexant le fer (III) ; synthèses réalisées par une équipe américaine de Berkeley (Californie).

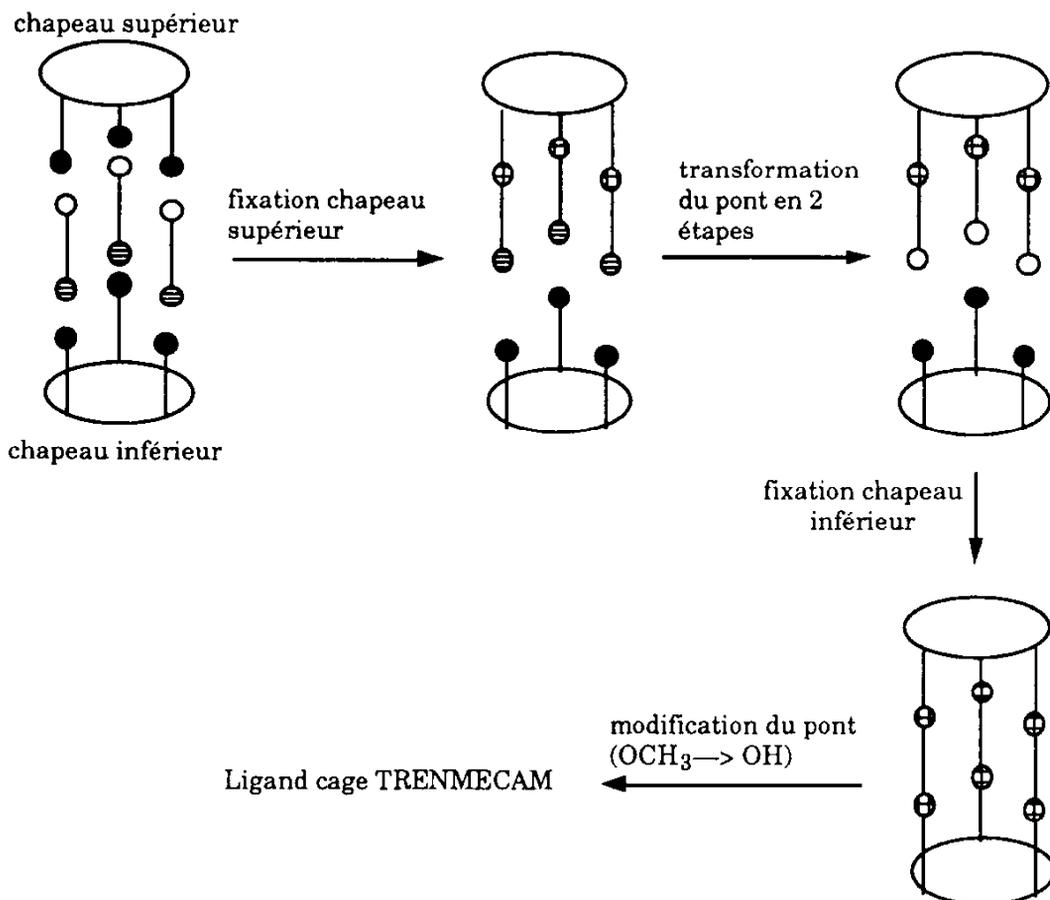
Leurs résultats ont été publiés en 1991^{*} et s'inscrivent dans le cadre de programmes de conception et de synthèses de ligands spécifiques du fer(III), modèles des sidérophores (étymologie grecque : sidéro : fer phore : porter).

Les sidérophores sont fabriqués par les bactéries pour fixer et transporter le fer : le sidérophore le plus puissant du fer(III) contient l'ENTEROBACTINE (isolée en 1970 à partir de *Salmonella thyphimurium*) qui est un ligand de structure voisine de ceux étudiés ici.

A plus long terme, il s'agit d'élaborer de nouveaux médicaments pour vaincre certaines maladies génétiques dues à des troubles du métabolisme du fer.

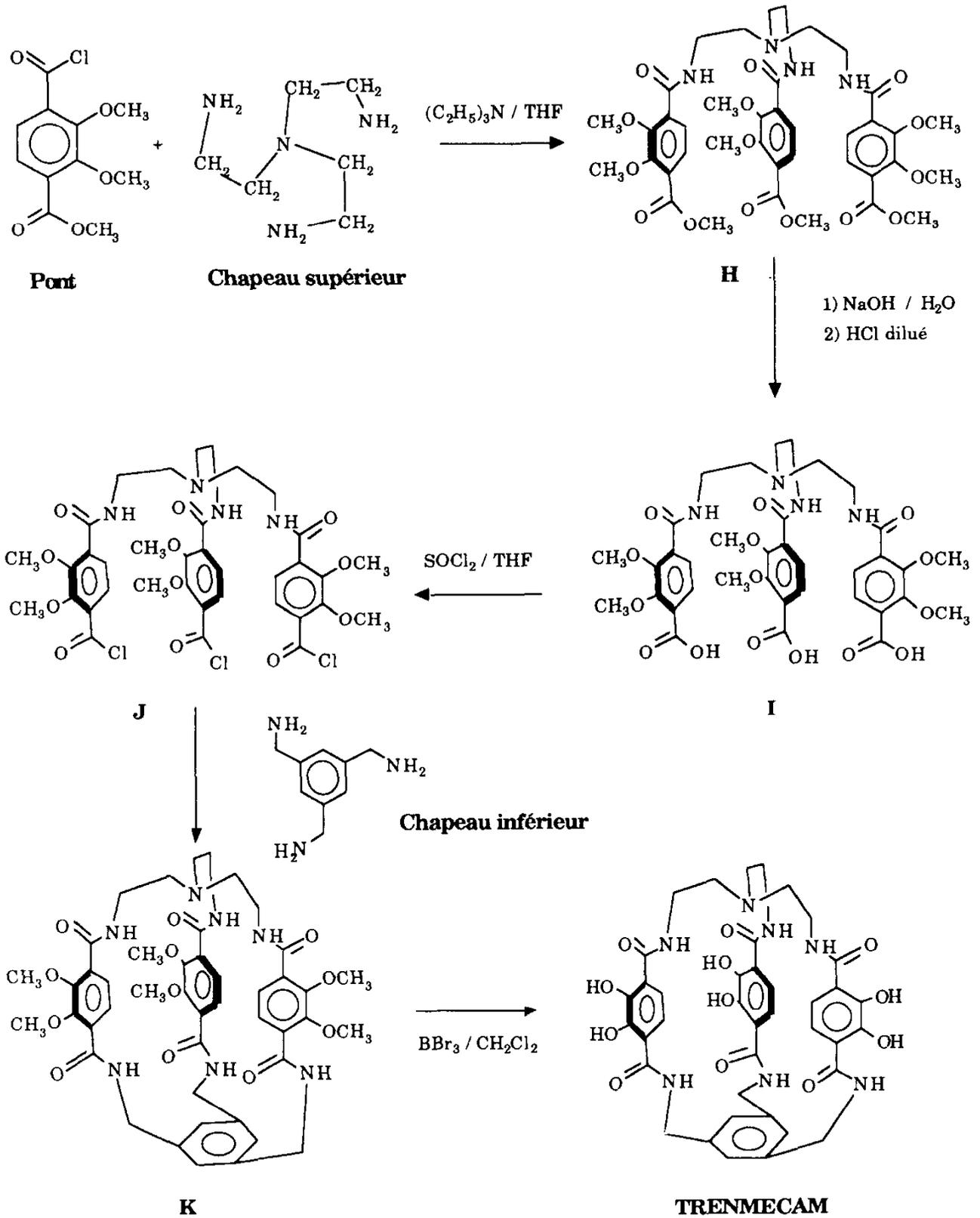
Ces nouveaux ligands ont une structure de cage (d'où leur nom de ligand-cage) et forment avec l'ion ferrique des complexes de constante de stabilité de l'ordre de 10^{43} .

On peut symboliser les différentes étapes de la synthèse du ligand-cage ainsi :

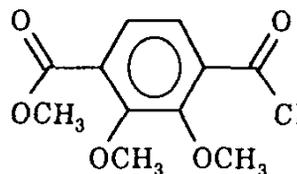


* K.N. Raymond et al. J. Am. Chem. Soc. **1991**, *113*, 2965-2977.

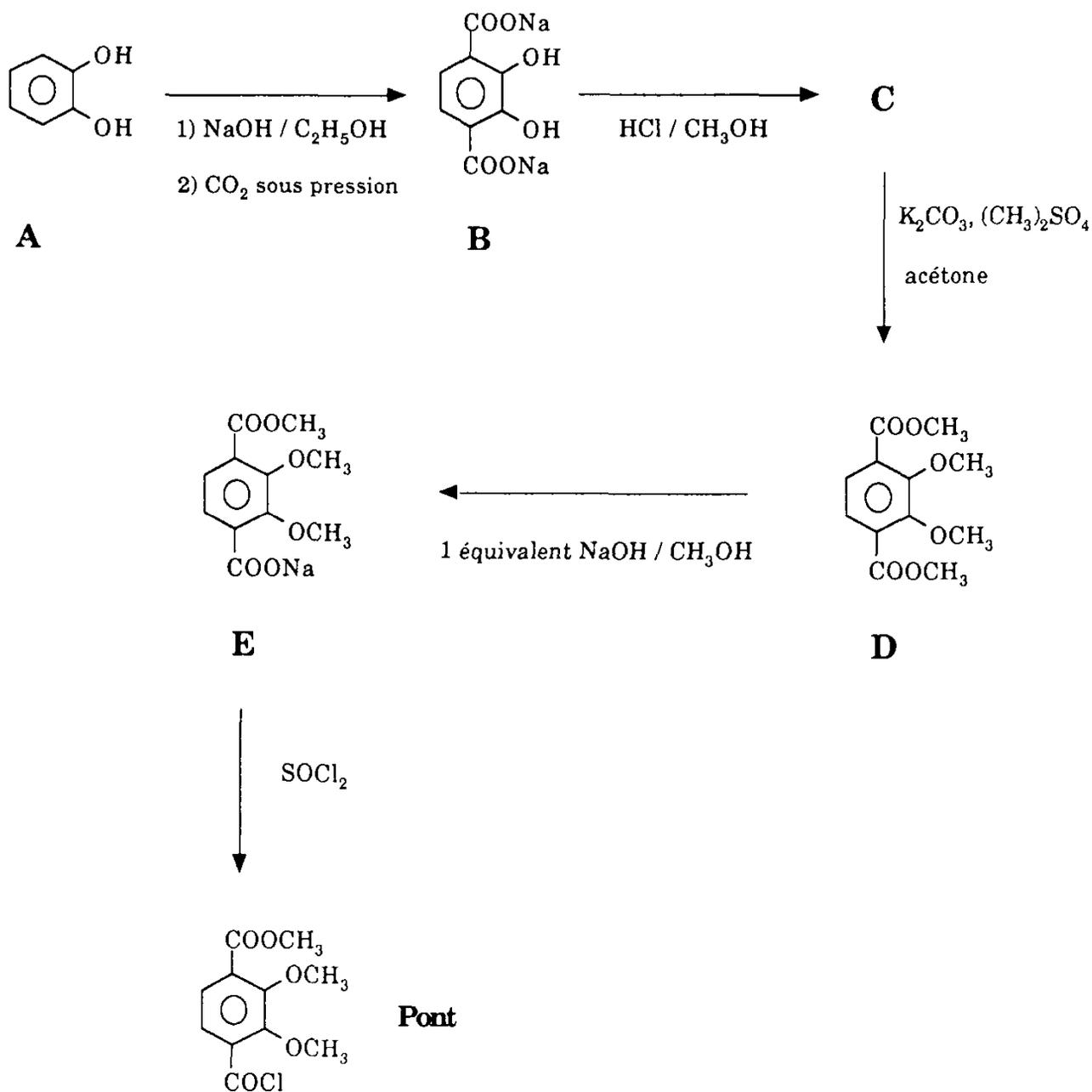
Nous allons étudier la synthèse du ligand cage nommé TRENMECAM, réalisée selon le schéma suivant:



I. Synthèse du produit de départ (pont)



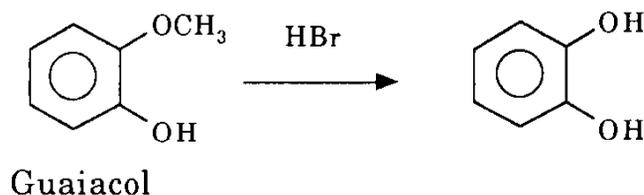
Le schéma de synthèse du pont est le suivant :



I.1. Etude du produit de départ de cette synthèse

I.1.a. Quel est le nom courant du produit **A** ? Quel est son nom en nomenclature IUPAC ?

I.1.b. Ce produit est facilement obtenu à partir du Guaiacol (lui-même isolé d'une résine) selon la réaction :



Proposer un mécanisme pour cette réaction.

I.2. Synthèse de l'acide téréphtalique

L'acide téréphtalique a pour formule 

I.2.a. Proposer une synthèse de l'acide téréphtalique en 2 étapes, à partir du toluène. On précisera clairement les conditions opératoires, les réactifs, les catalyseurs si nécessaires.

I.2.b. Comment purifier l'acide téréphtalique obtenu ?

Le produit **B** est un dérivé de l'acide téréphtalique. On ne demande pas de justifier le passage de **A** à **B**.

I.3. Etude du passage de **B** à **C**

I.3.a. Identifier le produit **C** et donner sa formule semi-développée.

I.3.b. Donner le mécanisme de cette réaction. Pour cela, les produits **B** et **C** seront simplifiés et notés respectivement :

I.4. Etude du passage de **C** à **D**

I.4.a. Quel est le rôle de K_2CO_3 ?

I.4.b. Donner la formule développée du diméthylsulfate.

I.4.c. Proposer un mécanisme pour cette réaction.

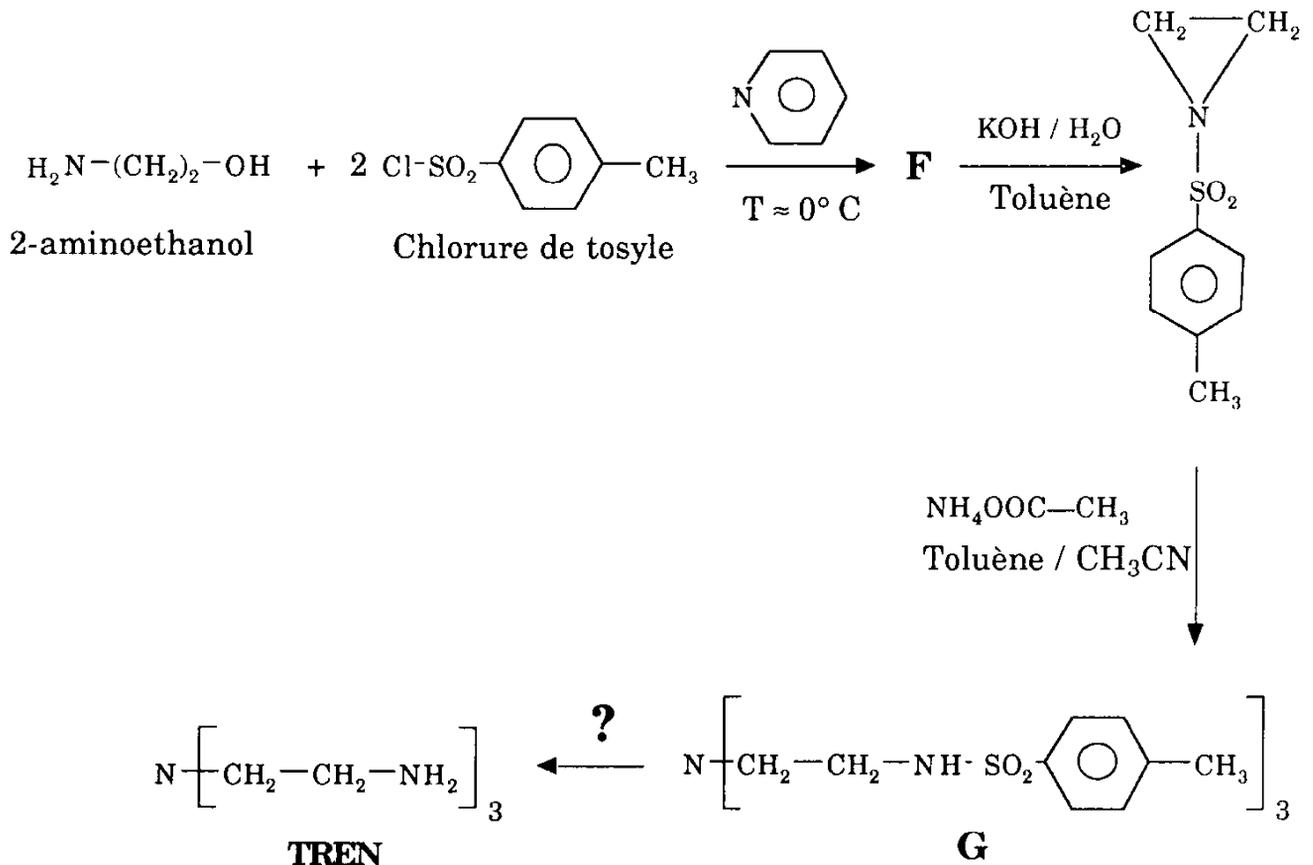
I.5. Etude de la fin de la synthèse du "pont"

I.5.a. Qu'aurait-on obtenu si **D** avait été traité par un excès de soude ?

I.5.b. Existe-il d'autres réactifs pour transformer **E** en chlorure d'acyle ?

II. Synthèse du "chapeau supérieur" $\text{N} \left[\text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{NH}_2 \right]_3$

Le schéma de la synthèse de cette molécule, nommée TREN, est le suivant :



II.1. Etude du composé **F**

II.1.a. Identifier et donner la formule semi développée de **F**.

II.1.b. Quel est le rôle de la pyridine ?

II.1.c. La réaction entre une amine et le chlorure de benzènesulfonyle est à la base d'un test permettant de distinguer les différentes classes d'amines. Expliquer le principe de ce test.

II.1.d. Proposer un mécanisme pour la réaction d'un alcool noté R-OH sur le chlorure de tosyl.

II.2. Synthèse de l'aziridine N-substitué

II.2.a. Expliquer le passage de **F** au cycle aziridine.

II.2.b. Quel est le rôle de la potasse KOH ?

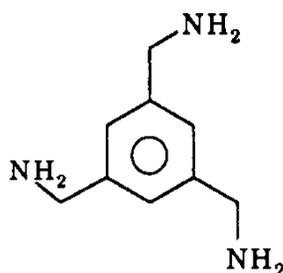
II.3. Formation de **G**

Quelle est la fonction présente dans un composé du type : R-NH-SO₂-R' ?

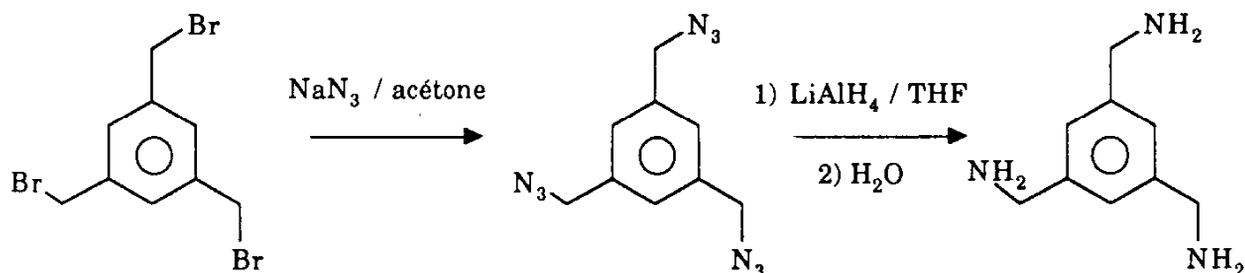
II.4. Etude de la dernière étape

Proposer une méthode pour transformer le produit **G** en N-(CH₂-CH₂-NH₂)₃.

III Synthèse du chapeau inférieur



La synthèse est effectuée en deux étapes :



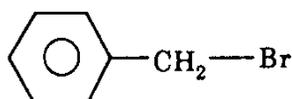
III.1. Etude de la première étape

III.1.a. Donner la structure de Lewis de l'anion azoture N_3^- .

III.1.b. Ecrire 3 formes mésomères d'un azoture d'alkyle noté $R-N_3$.

III.1.c. Quel type de réaction a lieu dans cette première étape ? Justifier l'intérêt du solvant acétone.

III.1.d. Donner le mécanisme de cette étape. On admettra que l'ordre global de la réaction est 1. Le produit de départ sera simplifié et noté :



III.2. Etude de la deuxième étape

III.2.a. De quel type de réaction s'agit-il ?

III.2.b. Le spectre RMN du proton de la triamine obtenue, réalisé dans D_2O , est constitué de 2 signaux de déplacement chimique $\delta_1 = 3,78$ et $\delta_2 = 7,22$

III.2.b.α. Attribuer ces signaux à certains protons de la triamine.

III.2.b.β. Le spectre RMN ainsi décrit (c'est à dire 2 signaux) est-il complet ?

III.2.b.γ. Le cas échéant, quels sont les protons qui ne sont pas observés dans ce spectre ?

III.2.b.δ. Que donnera l'intégration des signaux effectivement observés ?

III.2.c. La microanalyse du produit de synthèse obtenu est la suivante :

	C	H	N
% massique	61,44	9,26	23,33

III.2.c.α. Calculer les pourcentages massiques théoriques en carbone, hydrogène et azote correspondant à la formule de la triamine proposée.

III.2.c.β. Justifier l'écart entre % théorique et % pratique.

Données : Masse molaire atomique ($\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$)

C = 12,01 H = 1,01 N = 14,01 O = 16,00

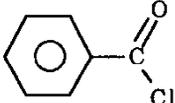
IV. Synthèse du ligand-cage TRENMECAM

On se reportera au schéma de synthèse donné au début de cette partie E.

IV.1. Fixation du "chapeau supérieur". Synthèse de **H**

IV.1.a. Quelle est la fonction organique créée dans **H** ?

IV.1.b. Donner le mécanisme de cette réaction.

On simplifiera les molécules : le "pont" sera noté 

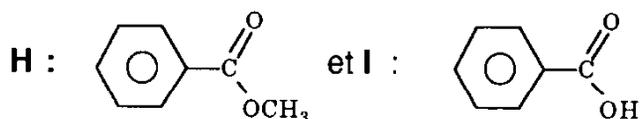
et la triamine RNH_2

IV.1.c. Quel est le rôle de la triéthylamine ?

IV.2. Passage de **H** à **J**

IV.2.a. De quel type de réaction s'agit-il lors du passage de **H** à **I** ?

IV.2.b. Donner le mécanisme détaillé de cette étape. Les molécules **H** et **I** seront simplifiées et notées respectivement :



IV.2.c. Donner la structure de Lewis de SOCl_2 . Quel est le nom de ce réactif ?

IV.2.d. Quels sont les produits minéraux libérés lors du passage de **I** à **J** ?

IV.2.e. Donner le mécanisme de la transformation :



IV.3. Fixation du "chapeau inférieur". Synthèse de **K**

IV.3.a. Le spectre IR du produit **K** présente un pic d'absorption à 1651 cm^{-1} . Quelle fonction est mise en évidence ?

IV.3.b. La fixation des deux "chapeaux", c'est à dire la synthèse de **H** et de **K**, est réalisée à très haute dilution en TREN (synthèse de **H**) et en triamine (synthèse de **K**). Expliquer pourquoi. Quelle autre réaction défavorise-t-on en opérant ainsi ?

V. Complexation du fer(III) par le ligand-cage TRENAM

A ce jour, la structure cristallographique d'un seul complexe du fer(III) avec ce genre de ligand-cage a été résolue. Il s'agit du complexe obtenu avec le ligand, nommé TRENAM, dont les 2 "chapeaux" sont identiques $(\text{H}_2\text{N}-\text{CH}_2-\text{CH}_2)_3\text{N}$.

V.1. Représenter dans l'espace la molécule TRENAM.

V.2. Représenter dans l'espace le complexe $[\text{Fe}(\text{TRENAM})]^{3-}$ que nous noterons par la suite $\text{Fe}^{\text{III}}\text{L}$.

V.3. Dans cette question la température est de 298K et le pH fixé à une valeur telle que le ligand-cage est sous la forme déprotonée TRENAM^{6-} . La constante de stabilité du complexe $\text{Fe}^{\text{III}}\text{L}$ est noté $K_{f \text{ III}}$ et vaut $10^{43,1}$.

De plus, les études électrochimiques ont permis de déterminer le potentiel standard du couple $\text{Fe}^{\text{III}}\text{L}/\text{Fe}^{\text{II}}\text{L}$: $E^\circ(\text{Fe}^{\text{III}}\text{L}/\text{Fe}^{\text{II}}\text{L}) = -1,04 \text{ V (ENH)}$ où $\text{Fe}^{\text{II}}\text{L}$ représente le complexe $[\text{Fe}(\text{TRENAM})]^{4-}$.

V.3.a A partir de ces données et de celle du potentiel standard du couple $(\text{Fe}_{\text{aq}}^{3+}/\text{Fe}_{\text{aq}}^{2+})$ (voir partie B), calculer la constante de formation notée $K_{f \text{ II}}$ du complexe $\text{Fe}^{\text{II}}\text{L}$.

V.3.b. Quelle conclusion tirez-vous de la comparaison de $K_{f \text{ III}}$ et $K_{f \text{ II}}$?

V.3.c. Quelle conclusion tirez-vous de la comparaison de $E^\circ(\text{Fe}^{\text{III}}\text{L}/\text{Fe}^{\text{II}}\text{L})$ et $E^\circ(\text{Fe}_{\text{aq}}^{3+}/\text{Fe}_{\text{aq}}^{2+})$?

Option : **PHYSIQUE APPLIQUÉE**

Cette composition comprend deux problèmes totalement indépendants.

Ces deux problèmes sont obligatoires.

Les deux problèmes seront traités sur des copies différentes. les candidats noteront de façon très visible, en haut de chaque feuille intercalaire, le numéro du problème abordé dans ledit intercalaire. Dans le cas où un(e) candidat(e) croit détecter une erreur dans l'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement dans sa copie, propose la correction, et poursuit en conséquence le problème.

Il (elle) prend bien entendu l'entière responsabilité de la correction proposée.

PREMIER PROBLÈME

Ce problème traite de la réalisation de la fonction filtrage et comporte trois parties :

- I. Filtres analogiques :
 1. Filtres à éléments passifs,
 2. Filtres actifs à amplificateurs opérationnels ;
- II. Filtres à capacités commutées.
- III. Filtres numériques.

PARTIE I. – FILTRES ANALOGIQUES

1. Filtres à éléments passifs

1.1. Soit le montage de la figure 1.

Étudier sa fonction de transfert :

$$T(p) = \frac{V_S(p)}{V_E(p)}.$$

Montrer que $T(p)$ est de la forme :

$$T(p) = \frac{\frac{A}{Q w_0} \cdot p}{1 + \frac{p}{Q w_0} + \frac{p^2}{w_0^2}} = \frac{\frac{A \cdot 2m}{w_0} \cdot p}{1 + \frac{2mp}{w_0} + \frac{p^2}{w_0^2}}.$$

Expliciter les expressions de w_0 , Q (ou m) et A .

1.2. On veut éviter l'emploi de la bobine. Pourquoi ?

1.3. De quelle nature est le filtre étudié ?

1.4. Montrer que le montage de la figure 2 conduit à un filtre de même nature que le précédent. Expliciter ses grandeurs caractéristiques.

1.5. Soit R_1 fixe et $R_2 = k \cdot R_1$.

On veut que la fréquence de résonance soit constante lorsque k varie. Montrer que cela conduit à deux solutions de réglage pour C_1 et C_2 .

1.6. Dans chaque cas, quelle est la valeur optimale du coefficient de qualité du montage que l'on peut obtenir, le but étant la réalisation d'un filtre sélectif ?

1.7. Que pensez-vous de ces résultats ?

2. Filtres actifs à amplificateurs opérationnels

Dans cette partie, plusieurs structures classiques vont être comparées.

2.1. *Structure de Sallen et Key.*

2.1.1. On considère le schéma de la figure 3. Le bloc K a une impédance d'entrée très grande et correspond à une amplification en tension K .

Représenter les structures à amplificateur(s) opérationnel(s) permettant d'obtenir $K < 0$ puis $K > 0$.

2.1.2. Établir l'expression de la fonction de transfert :

$$T(p) = \frac{V_S(p)}{V_E(p)}$$

en fonction de K et des admittances Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 .

2.1.3. Les composants choisis sont indiqués figure 4. Que devient $T(p)$ et quel est le type de filtre réalisé ?

2.1.4. Établir les expressions :

- de la pulsation d'accord w_0 ;
 - du coefficient de qualité Q ;
 - de l'amplification maximale A ,
- en fonction des éléments de montage.

2.1.5. Pour obtenir un grand coefficient de qualité, comment faut-il choisir K et R/R_1 ?

Que vaut alors A et quelle est l'expression de Q ?

2.1.6. On définit la sensibilité d'une grandeur G_1 vis-à-vis de la variation d'une grandeur G_2 par :

$$S_{G_2}^{G_1} = \frac{\frac{dG_1}{G_1}}{\frac{dG_2}{G_2}} = \frac{G_2}{G_1} \cdot \frac{dG_1}{dG_2}.$$

2.1.6.1. Déterminer S_K^Q avec l'expression de Q trouvée au 2.1.4.

2.1.6.2. *Application numérique* : $K = 3$ et $R_1/R = 200$.

Calculer Q et S_K^Q .

2.1.6.3. Si K diminue de 1 %, que devient Q ?

Quelle est la valeur maximale possible pour K ?

2.1.6.4. Conclure sur l'indépendance (ou dépendance) des réglages et sur le calcul de sensibilité précédent.

2.2. Structure de Rauch.

2.2.1. Le schéma de principe est donné figure 5. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal.

Établir l'expression de la fonction de transfert :

$$T(p) = \frac{V_S(p)}{V_E(p)}$$

en fonction des admittances Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 .

2.2.2. Les composants choisis sont indiqués figure 6.

Que devient $T(p)$ et quelle est la nature du filtre réalisé ?

2.2.3. Établir les expressions :

- de la pulsation d'accord w_{0R} ;
 - de l'amplification maximale A_R ;
 - du coefficient de qualité Q_R ,
- en fonction des éléments du montage.

2.2.4. Donner l'expression de la bande passante à -3 dB : B_R .

2.2.5. Que peut-on dire, pour ce montage, des réglages possibles de B_R , A_R et w_{0R} ?

2.2.6. Si on veut un coefficient de qualité élevé (≥ 1), comment faut-il choisir le rapport R_1/R_2 ?

Conclure.

2.3. Filtre à variable d'état.

La structure « à variable d'état » ne fait intervenir que des opérations mathématiques élémentaires pour constituer le transfert :

- sommation ;
- inversion, multiplication par un coefficient ;
- intégration.

Les opérateurs de calcul sont des amplificateurs opérationnels bouclés.

2.3.1. Solution d'une équation différentielle par calcul analogique.

On veut résoudre l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = x$$

dans laquelle a, b, c sont des coefficients constants et positifs, les fonctions x et y sont des fonctions du temps.

Représenter le schéma fonctionnel d'un dispositif utilisant les fonctions de base définies plus haut et permettant de résoudre cette équation différentielle.

2.3.2. On peut réaliser ce schéma fonctionnel à l'aide de différents montages. L'un d'entre eux est donné figure 7.

On pose :

$$\alpha = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \quad \omega_0 = \frac{1}{R_1 C_1} \quad \beta = \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}.$$

2.3.2.1. Établir l'expression de la fonction de transfert : $V_{S_3}(p)/V_E(p)$.

2.3.2.2. Montrer que cette fonction de transfert est une fonction de type passe-bas du deuxième ordre. On déterminera ses caractéristiques ω'_0 (pulsation propre), Q (coefficient de qualité), A_{BF} (amplification aux basses fréquences). Leurs réglages sont-ils indépendants ?

2.3.3. Déterminer la fonction de transfert $V_{S_2}(p)/V_E(p)$. De quel type de filtre s'agit-il ?

2.3.4. Mêmes questions pour $V_{S_1}(p)/V_E(p)$.

2.3.5. Mêmes questions pour $V_{S_4}(p)/V_E(p)$.

2.3.6. On s'intéresse à la sortie v_{S_2} .

2.3.6.1. Déterminer la pulsation d'accord ω_A , l'amplification à l'accord A_{MAX} , et la bande passante B du filtre d'entrée v_E et de sortie v_{S_2} en fonction de ω_0 , α , β .

2.3.6.2. Que pensez-vous du réglage de ces trois grandeurs ?

Comparer au montage Sallen et Key vu précédemment.

2.3.6.3. Déterminer les sensibilités :

$$S_{R_1}^{w_A}, S_{R_2}^{w_A}, S_{C_1}^{w_A}, S_{C_2}^{w_A}, S_{R_1}^Q, S_{R_2}^Q, S_{C_1}^Q, S_{C_2}^Q, S_{R_3}^Q, S_{R_4}^Q, S_{R_3}^{A_{MAX}}, S_{R_4}^{A_{MAX}}.$$

Conclure : avantages de ce montage, inconvénients...

PARTIE II. - CAPACITÉS COMMUTÉES

1. Principe

Les interrupteurs (fig. 8) sont complémentaires et manœuvrés périodiquement (période T_K). Pendant une période :

K_1 : fermé, K_2 : ouvert : pendant la première demi-période ;

K_1 : ouvert, K_2 : fermé : pendant la seconde demi-période.

Montrer que ce dispositif est équivalent entre A et B à une résistance R_K dont on déterminera la valeur en fonction de C et T_K .

2. Application

On considère le montage de la figure 9. Les fermetures de l'interrupteur K sont représentées sur la figure 10 (fermetures sur la position 1 de nT_K à $(n + \frac{1}{2})T_K$, sur la position 2 de $(n + \frac{1}{2})T_K$ à $(n + 1)T_K$).

Le condensateur C est supposé déchargé à $t < 0$.

2.1. La tension v_E est une tension continue de valeur $E > 0$.

2.1.1. Soit v_{S_1} la valeur atteinte par v_S à la fin de la première période T_K .

Déterminer v_{S_1} en fonction de E, C, C'.

2.1.2. On note v_{S_n} la valeur de v_S à l'instant nT_K (v_{S_0} est donc égale à 0 et v_{S_1} est bien la valeur calculée à la question précédente).

Exprimer la relation de récurrence reliant v_{S_n} et $v_{S_{(n+1)}}$.

Vérifier qu'elle redonne, pour $n = 0$, le résultat de la question 2.1.1.

2.1.3. Tracer le graphe de $v_S(t)$ pour les premières périodes T_K .

2.2. La tension v_E est maintenant variable dans le temps.

2.2.1. Soit v_{S_1} la valeur atteinte par v_S à la fin de la première période T_K .

Déterminer v_{S_1} en fonction de E, C, C'.

2.2.2. On note v_{S_n} la valeur de v_S à l'instant nT_K (v_{S_0} est donc égale à 0 et v_{S_1} est bien la valeur calculée à la question précédente).

Exprimer la relation de récurrence reliant v_{S_n} et $v_{S_{(n+1)}}$.

Vérifier qu'elle redonne, pour $n = 0$, le résultat de la question 2.2.1.

2.2.3.

2.2.3.1. On dispose donc d'une équation aux différences. v_E est une tension sinusoïdale de fréquence f .

En passant à la notation complexe, établir l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V}_S}{\underline{V}_E}.$$

2.2.3.2. Montrer qu'elle est périodique. Quelle est sa période ?

2.2.4. Quelle est l'expression du module H de \underline{H} ?

Représenter son graphe en fonction de f , en échelles linéaires.

2.2.5. Mêmes questions pour $\varphi = \text{Arg } \underline{H}$.

2.2.6. Si $f \ll F_K$, que devient \underline{H} ?

Montrer que ce résultat est tout à fait compatible avec celui du 1. (principe des capacités commutées) et qu'on aurait pu l'obtenir directement.

2.2.7. Dans le cas d'une réalisation en circuit intégré, le constructeur ne contrôle pas la valeur de C dans l'absolu, mais le processus de fabrication de C et C' étant rigoureusement le même, il contrôle leur valeur relative donc leur rapport. Quelle caractéristique du montage est donc garantie d'une bonne précision ?

2.2.8. À l'aide de la table de correspondance « Laplace-Transformées en z » jointe et sachant qu'un bloqueur d'ordre 0 a pour fonction de transfert de Laplace :

$$\frac{1 - e^{-T_K \cdot p}}{p} \quad (T_K : \text{période d'échantillonnage}),$$

généraliser le résultat du 2.2.6. dans le cas où f n'est pas très inférieure à F_K .

2.3. L'interrupteur K est en fait constitué par deux transistors MOS, ce qui implique la présence des capacités parasites C_{p1} et C_{p2} (fig. 11).

Dire pourquoi le montage de la figure 12 permet de s'affranchir de l'influence de ces capacités (on s'intéressera aux décharges de ces capacités à la masse...).

Quelle est la fonction de transfert du montage : $\underline{H}' = \frac{V'_S}{V_E}$?

3. Circuit intégré

Plusieurs circuits intégrés conçus autour du principe des capacités commutées sont commercialisés.

Le montage proposé figure 13 utilise l'un d'entre eux : le MF5.

Le schéma fonctionnel du MF5 ainsi connecté est représenté figure 14. On se place dans l'hypothèse $f \ll F_K$, c'est-à-dire que l'on considère des intégrateurs de fonction de transfert $\frac{w_1}{p}$ avec $w_1 = 2 \cdot \pi \cdot k \cdot F_K$ et $k = \frac{1}{100}$.

3.1. Déterminer la pulsation d'accord w'_A , l'amplification à l'accord A'_{MAX} , la bande passante B' du filtre d'entrée v_E et de sortie v_S (fig. 14).

3.2. Déterminer les sensibilités :

$$S_{R_2}^{w'_A}, S_{R_4}^{w'_A}, S_{w_k}^{w'_A}, S_{R_4}^{Q'}, S_{R_3}^{Q'}, S_{R_2}^{Q'}, S_{R_3}^{A'_{MAX}}, S_{R_1}^{A'_{MAX}}.$$

(Q' : coefficient de qualité du filtre.)

Conclure sur l'intérêt de ce montage vis-à-vis de la structure à variable d'état vue plus haut.

PARTIE III. – FILTRES NUMÉRIQUES

On veut réaliser la fonction filtrage par une méthode numérique. Le signal d'entrée $x(t)$ est analogique et le signal de sortie $y(t)$ désiré l'est aussi.

1. Chaîne de traitement

- 1.1. Représenter le schéma fonctionnel de la chaîne d'entrée $x(t)$, de sortie $y(t)$.
- 1.2. La fréquence d'échantillonnage est notée $F_E \left(= \frac{1}{T_E} \right)$.
Quel problème se pose pour le spectre du signal $x(t)$ vis-à-vis de cette fréquence ?
- 1.3. Énoncer le théorème qui traite de cette question.
- 1.4. En pratique, comment se place-t-on dans les bonnes conditions d'échantillonnage ?

2. Étude d'un filtre passe-bas numérique du premier ordre

- 2.1. Soit un filtre passe-bas analogique du premier ordre d'entrée $x(t)$, de sortie $y(t)$. Il est décrit par l'équation différentielle :

$$\tau \cdot y'(t) + y(t) = A \cdot x(t) \quad A \text{ réel positif.}$$

On peut « numériser » cette équation différentielle en donnant une expression approchée de la dérivée :

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{T_E} \quad (\text{en notant } y_n = y(nT_E))$$

si l'intervalle de temps T_E est suffisamment faible.

En déduire l'équation aux différences obtenues par cette « numérisation ». On posera $K = \frac{T_E}{\tau + T_E}$.

- 2.2. Calculer les premiers échantillons de la réponse impulsionnelle du filtre. Conclure sur sa stabilité. De quelle famille de filtres numériques fait-il partie ?
- 2.3. L'entrée $x(t)$ est sinusoïdale : $x(t) = X\sqrt{2} \sin \omega t$. La sortie sera notée $y(t) = Y\sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi)$.
Déterminer la fonction de transfert complexe $\underline{H} = \frac{Y}{X}$ en fonction de A, K, ω, T_E .
- 2.4. Étudier $H = \text{module}(\underline{H})$ en fonction de la fréquence. Indiquer ses particularités. Représenter la courbe $H(f)$ en échelles linéaires pour $A = 1, K = \frac{1}{8}$.
- 2.5. Mêmes questions pour $\varphi = \text{Arg} \underline{H}$.
- 2.6. Représenter le graphe de $1/\underline{H}$ dans le plan complexe pour $A = 1, K = \frac{1}{8}$. Retrouver les valeurs minimale et maximale de φ .
- 2.7. Calculer la fréquence de coupure f_c à -3 dB. Application numérique avec $F_E = 10$ kHz, $A = 1, K = \frac{1}{8}$.
Comparer à la fréquence de coupure du filtre analogique de départ, toujours pour les mêmes valeurs numériques.
- 2.8. Établir l'expression de la fonction de transfert en z du filtre numérique. En déduire sa représentation en pôles et en zéros. Retrouver la conclusion du 2.2.

3. Synthèse d'un filtre passe-bande numérique par la méthode de la transformée bilinéaire

On connaît le filtre analogique par sa fonction de transfert de Laplace $T(s)$ [s : variable de Laplace normalisée : $s = \frac{p}{w_{uA}}$; w_{uA} : pulsation de normalisation analogique; $p = jw_A$ en sinusoïdal analogique de pulsation w_A].

On cherche la fonction de transfert en z du filtre numérique correspondant. La pulsation en sinusoïdal dans le domaine numérique est notée : w_N .

3.1. Pour établir une correspondance entre le domaine analogique et le domaine numérique, on choisit la transformation bilinéaire :

$$s = k \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad k > 0 : \text{facteur d'échelle.}$$

3.1.1. En déduire l'expression de z en fonction de s .

3.1.2. Établir la correspondance entre le plan complexe des s et le plan complexe des z : pour cela, déterminer la transformée de l'axe imaginaire des s , puis la transformée des deux demi-plans (partie réelle positive puis partie réelle négative) du plan des s .

3.1.3. En déduire la condition de stabilité dans le plan des z .

On se place pour la suite en régime sinusoïdal.

3.2.

3.2.1. Placer les points correspondant à $w_A \rightarrow -\infty$, $w_A \rightarrow +\infty$, $w_A = 0$, dans le plan des z .

3.2.2. Rappeler l'expression de z en fonction de w_N et F_E d'après la définition de la transformée en z : $z = e^{pT_E}$.

Quel est le module de z ?

3.2.3. Placer les points correspondant à :

$$w_N = -\frac{F_E}{4}, \quad -\frac{F_E}{2}, \quad 0, \quad \frac{F_E}{4}, \quad \frac{F_E}{2}$$

dans le plan des z .

Conclusion ?

3.3.

3.3.1. Établir l'expression de z en fonction de w_{uA} et w_A .

3.3.2. Vérifier la valeur du module de z donnée au 3.2.2.

3.3.3. Déterminer la relation existant entre w_N et w_A sous la forme :

$$\frac{w_A}{w_{uA}} = f(k, w_N, F_E).$$

3.3.4. Avec quelle condition sur k cette relation entre w_N et w_A est-elle sensiblement linéaire ?

3.4. On désire réaliser un filtre passe-bande du second ordre numérique à $F_E = 5$ kHz, résonance à $f_{0N} = 500$ Hz, amplification à la résonance 1, coefficient de qualité $Q_N = 10$.

3.4.1. Quelle pulsation de normalisation analogique choisira-t-on pour simplifier l'écriture de $T(s)$?

3.4.2. En déduire k .

3.4.3. Calculer Q_A , le coefficient de qualité du filtre analogique associé : pour cela on déterminera d'abord les limites de la bande passante en analogique.

3.4.4. Établir l'expression de $T(s)$ (avec valeurs numériques).

3.4.5. Appliquer la transformation bilinéaire et en déduire :

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

3.4.6. À quel algorithme de calcul cela correspond-il ?

3.4.7. Représenter la courbe théorique de réponse en fréquence du filtre numérique (amplification fonction de la fréquence).

3.4.8. Sur le même graphe, représenter la courbe de réponse en fréquence du filtre analogique associé.

3.4.9. Si, avec le même algorithme de calcul, on règle $F_E = 10$ kHz et si le temps de calcul de chaque échantillon de y est inférieur à T_E , quelles sont les caractéristiques du filtre que l'on obtient ?

3.4.10. À $F_E = 10$ kHz toujours, le temps de calcul de chaque échantillon de y est de $154 \mu\text{s}$. Les résultats de la question 3.4.9. sont-ils modifiés ?

ANNEXE

CORRESPONDANCE ENTRE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE D'UN SYSTÈME, $F(p)$,
ET SA TRANSFORMÉE EN z : $F(z)$

1. La correspondance est linéaire si : $F_1(p) \Leftrightarrow F_1(z)$

$$F_2(p) \Leftrightarrow F_2(z),$$

alors : $\lambda F_1(p) + \mu F_2(p) \Leftrightarrow \lambda F_1(z) + \mu F_2(z)$.

2. La période d'échantillonnage étant θ , si $F(p) \Leftrightarrow F(z)$

$$\text{alors : } e^{-\theta p} F(p) \Leftrightarrow \frac{F(z)}{z};$$

$$e^{-k\theta p} \Leftrightarrow z^{-k};$$

$$1 \Leftrightarrow 1;$$

$$\frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{z}{z-1};$$

$$\frac{1}{p^2} \Leftrightarrow \frac{\theta z}{(z-1)^2};$$

$$\frac{1}{p+a} \Leftrightarrow \frac{z}{z-e^{-a\theta}};$$

$$\frac{1}{(p+a)^2} \Leftrightarrow \frac{\theta z e^{-a\theta}}{(z-e^{-a\theta})^2};$$

$$\frac{a}{p(p+a)} \Leftrightarrow \frac{(1-e^{-a\theta})z}{(z-1)(z-e^{-a\theta})};$$

$$\frac{a}{p^2(p+a)} \Leftrightarrow \frac{\theta z}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-a\theta})z}{a(z-1)(z-e^{-a\theta})}.$$

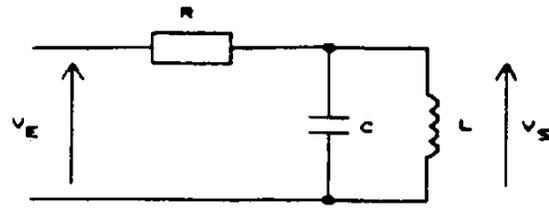


Figure 1

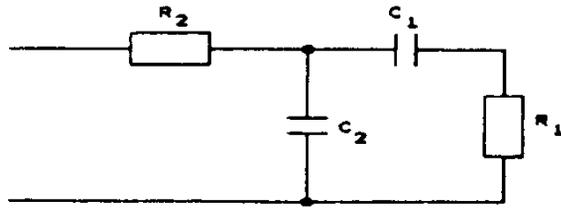


Figure 2

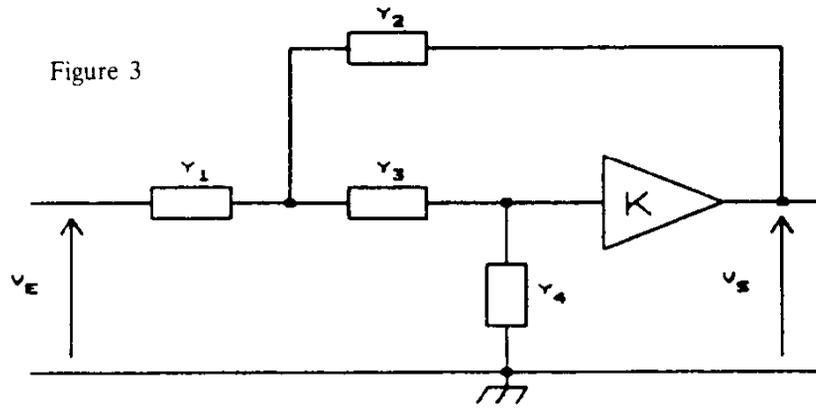


Figure 3

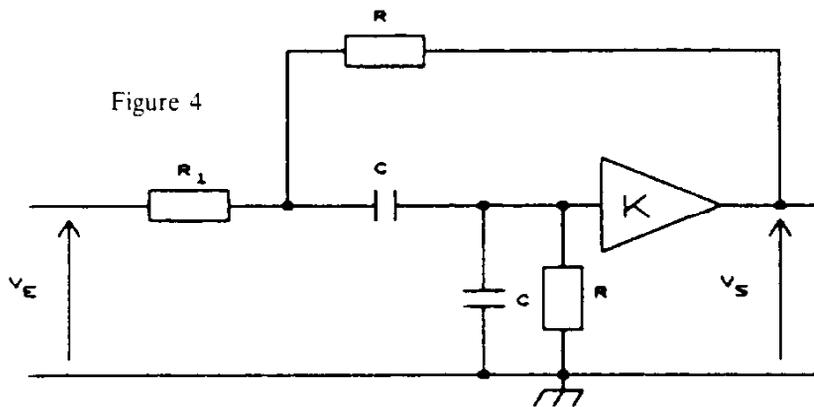


Figure 4

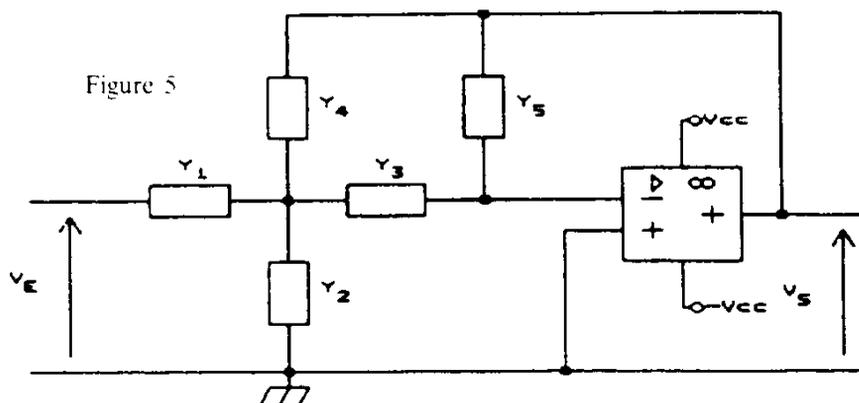


Figure 5

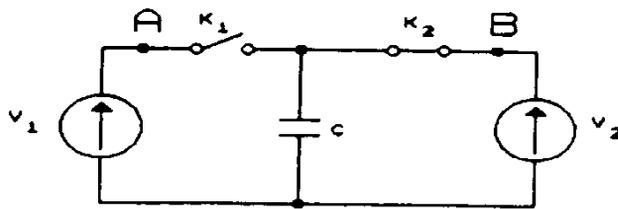
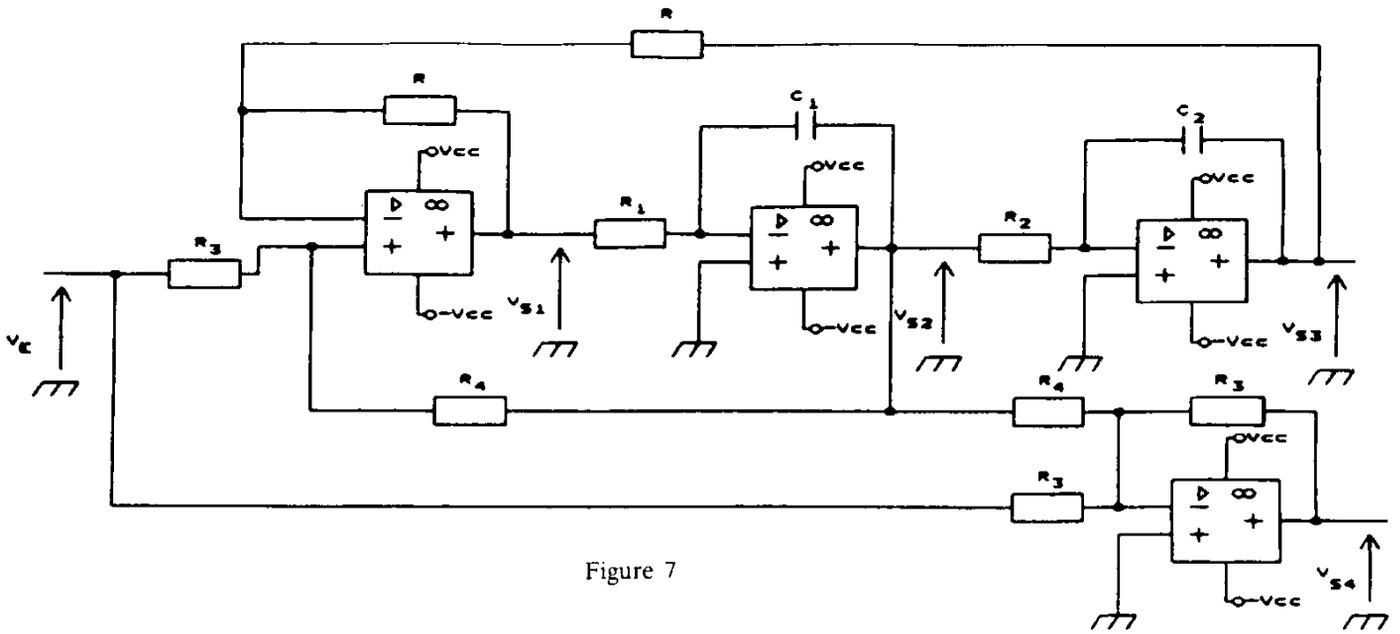
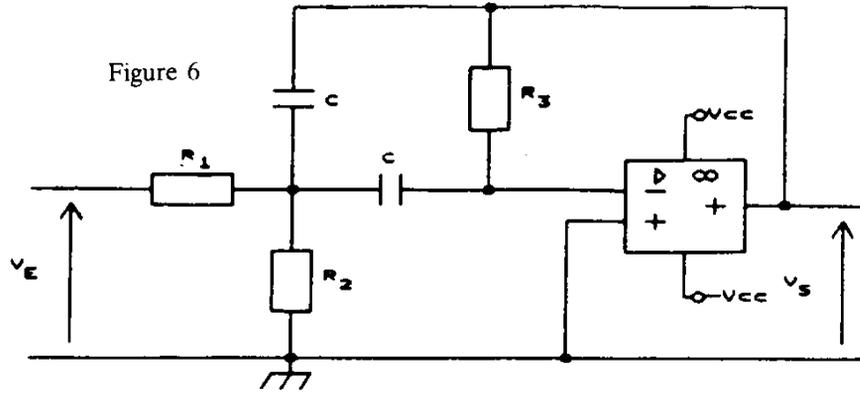


Figure 8

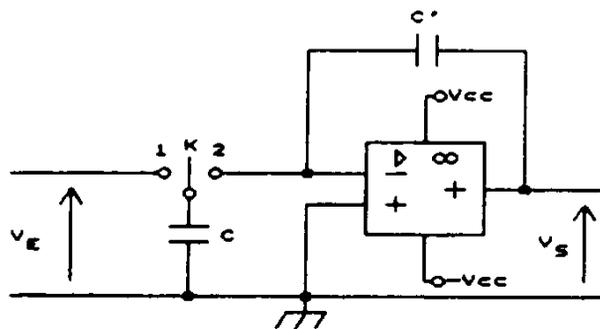


Figure 9

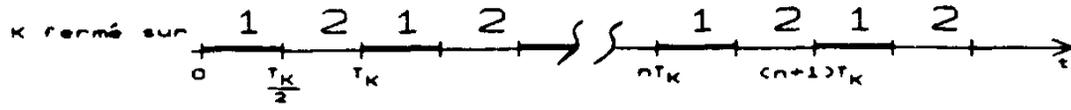


Figure 10

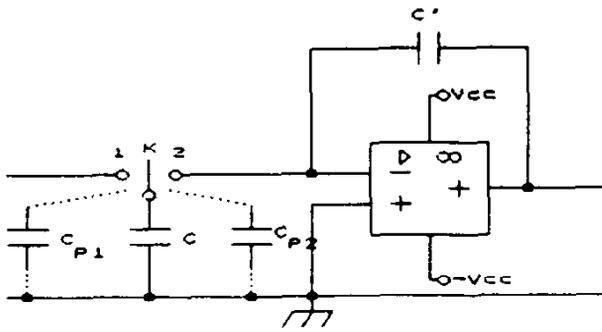


Figure 11

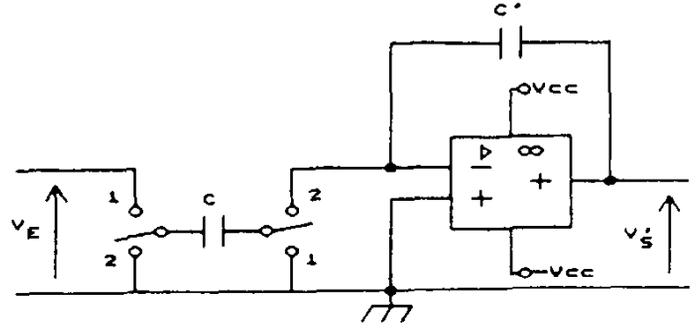


Figure 12

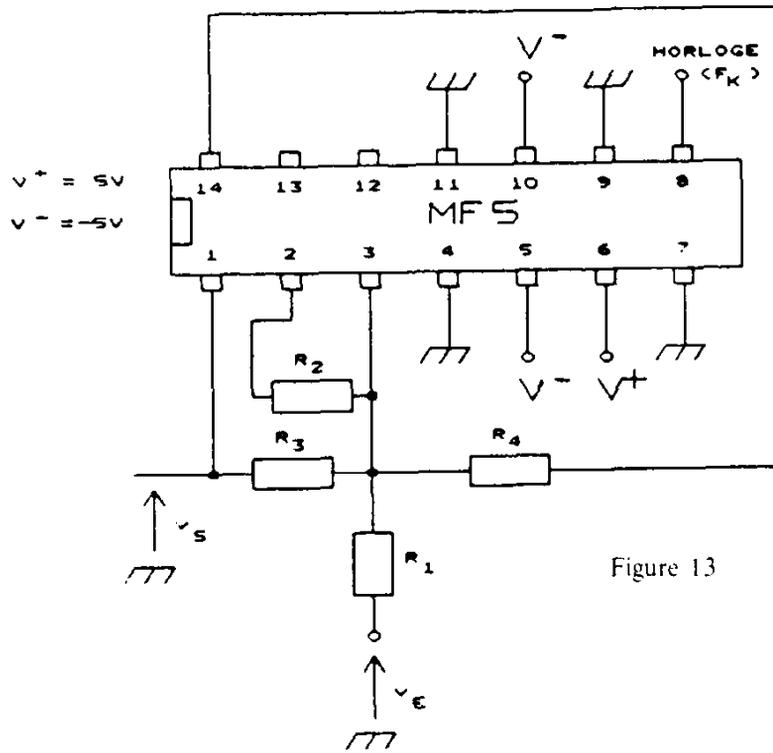


Figure 13

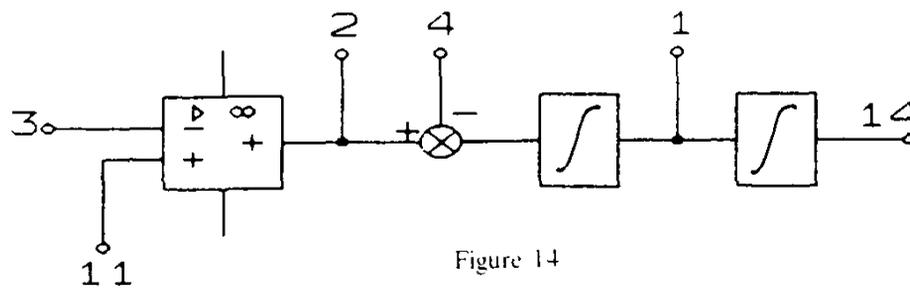


Figure 14

DEUXIÈME PROBLÈME

MACHINE SYNCHRONES AUTOPILOTÉE À AIMANTS

I. Étude d'un circuit magnétique à aimants

On considère le circuit magnétique de la figure 1. Ce circuit a une grande longueur dans l'axe perpendiculaire à la figure. Il comprend les quatre éléments suivants :

- 1° Une pièce ferromagnétique (Fer) ;
- 2° Un aimant dont l'aimantation \vec{J} est dirigée comme l'indique la figure, et de longueur l_a .
- 3° Un entrefer de longueur e .
- 4° Un circuit électrique de n spires, susceptible d'être parcouru par un courant i .

Afin de déterminer les caractéristiques électromagnétiques de ce circuit, on fait les hypothèses simplificatrices, classiques, suivantes :

- Toutes les lignes de champ créées par l'aimant et le circuit électrique sont confinées dans les pièces (1) et (2).
- Ces mêmes lignes de champ sont parallèles dans l'entrefer (3), sortent perpendiculairement à la face inférieure de l'aimant (2) et pénètrent perpendiculairement à la face de la pièce (1). Elles ont donc toutes la même longueur e .
- La perméabilité de la pièce (1) est très grande, de sorte que l'on pourra y négliger le champ d'excitation magnétique \vec{H} .
- Dans l'aimant, toutes les lignes de champ sont parallèles à l'aimantation \vec{J} , de sorte que l'on pourra admettre que dans l'aimant les champs magnétique \vec{B}_a et d'excitation \vec{H}_a sont reliés par la relation : $\vec{B}_a = \mu_0 \vec{H}_a + \vec{J}$.
On admettra de plus que les trois vecteurs précédents sont colinéaires et que l'aimantation est rigide dans la zone étudiée, c'est-à-dire que \vec{J} est constante quelle que soit la valeur de H_a .
- La section droite dans laquelle sont confinées les lignes de champ est la même pour l'aimant, l'entrefer et les n spires. On la désigne par S .
- La perméabilité du vide (et donc pratiquement celle de l'air) est $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7}$ SI.

1.1. On s'intéresse au champ magnétique dans l'entrefer ; dans le cas : $i = 0$, on le notera B_{e_0} .

À l'aide du théorème d'Ampère et de la conservation du flux du champ magnétique, montrer que :

$$B_{e_0} = J \frac{l_a}{l_a + e}.$$

1.2. On considère le cas $i \neq 0$, le champ magnétique dans l'entrefer est B_e .

Montrer que : $B_e = K n i + B_{e_0}$.

Exprimer K .

L'expression précédente montre que l'étude pour $i \neq 0$ est la superposition de celle pour $i = 0$, et d'une autre où l'aimant n'apparaît pas.

Dans ce dernier cas, l'aimant est remplacé par quel matériau ? (en conservant toutes les hypothèses évoquées au début de 1.)

On démontrera cette proposition.

1.3. Montrer que, dans ces conditions, l'aimant peut être remplacé par des ampèrestours constants $n' i'$ dont on donnera l'expression.

1.4. On considère le cas $i \neq 0$ et on désigne par ϕ_t le flux du champ magnétique dans les n spires du circuit électrique.

Calculer ϕ_t .

On définit l'inductance de ces n spires par l'expression : $L = \frac{\partial \phi_t}{\partial i}$.

Calculer L .

Justifier l'expression, inhabituelle, utilisée pour définir L .

Montrer que le résultat est cohérent avec la proposition (superposition) du paragraphe 1.2.

1.5. *Application numérique.*

On donne :

- $n = 100$ spires ;
- $S = 1 \text{ cm}^2$;
- $J = 0,8$ tesla ;
- $l_a = 3 \text{ mm}$;
- $e = 1 \text{ mm}$.

Calculer B_{e_0} et L .

Calculer B_e pour $i = -5 \text{ A}$.

II. Étude d'une machine simplifiée

On considère la machine de la figure 2, dont l'axe de rotation est perpendiculaire au plan de la figure.

Le cylindre intérieur de rayon R_1 est le rotor, formé d'un matériau ferromagnétique (fer massif) de perméabilité très grande.

Quatre aimants de dimensions identiques, en forme de « tuile », sont collés sur la surface du rotor ; leur aimantation \vec{J} , de même module et de direction radiale, est alternée de sorte que la machine possède quatre pôles. L'épaisseur des aimants est :

$$l_a = R_2 - R_1.$$

On fera l'hypothèse que $l_a \ll R_1$.

La pièce tubulaire extérieure, de rayons intérieur R_3 et extérieur R_4 , est le stator constitué d'un empilement de tôles magnétiques situées dans le plan de la figure. Ces tôles ont également une perméabilité très grande.

Il existe un jeu mécanique entre le rotor et les aimants d'une part, et le stator de l'autre. Nous désignerons ce jeu par l'entrefer, tel que : $e = R_3 - R_2$. On fera l'hypothèse que $e \ll R_1$.

En résumé, le rotor et le stator ont des rayons très voisins et sont séparés par des aimants d'épaisseur l_a et un entrefer e , faibles devant le rayon R_1 .

l_a et e sont du même ordre de grandeur.

2.1. Étude du champ magnétique.

On désigne par θ une coordonnée angulaire le long de l'entrefer (d'origine arbitraire pour l'instant).

2.1.1. Représenter, sur une reproduction de la figure 2, la forme approximative des lignes du champ magnétique dans l'ensemble de la machine.

2.1.2. En considérant l'ensemble des hypothèses faites pour cette machine, et celles du paragraphe 1, montrer qu'elles sont équivalentes. En déduire que \vec{B}_e , champ magnétique dans l'entrefer, n'a qu'une composante radiale.

2.1.3. Calculer $B_c(\theta)$ pour θ variant de 0 à 2π .

On prendra : $J = 0,8 \text{ T}$; $l_a = 3 \text{ mm}$; $e = 1 \text{ mm}$.

2.1.4. La figure 3 représente le quart (un pôle) de la machine effectivement réalisée, avec des aimants Samarium-Cobalt.

Pour des raisons technologiques (fonderie et usinage), l'aimant utilisé n'est pas une « tuile », mais est constitué de cinq aimants identiques de forme parallélépipédique, collés à la surface du rotor. Tous les cinq possèdent la même aimantation \vec{J} .

Ces aimants sont presque jointifs, mais on remarquera qu'à chaque extrémité (vers $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$), on a laissé un espace où il n'y a pas d'aimant.

On remarquera que le stator comprend neuf encoches (trente-six pour la totalité de la machine), dans lesquelles seront logés ultérieurement les conducteurs des trois phases.

Les lignes du champ magnétique ont été obtenues par un calcul numérique. Ce sont des lignes équi-flux.

De ce calcul, on a déduit la courbe de la figure 4 qui représente la composante radiale de B_c en fonction de θ .

Les grandeurs utiles (J , l_a , ...) sont celles de la question précédente.

On se propose de comparer les résultats des trois questions précédentes avec ceux obtenus par la modélisation numérique (fig. 3 et 4).

Sans effectuer de nouveaux calculs, il est demandé de faire tous les commentaires jugés utiles pour justifier (ou non) les différentes hypothèses faites, ou la façon dont la machine est construite.

Aucun commentaire de type technologique n'est demandé.

On justifiera également l'absence d'aimant vers $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, et le fait que le stator soit feuilleté et le rotor massif.

2.2. Étude des bobinages et du couple.

Le stator comporte trois bobinages identiques, la machine étant triphasée.

Sur la figure 3, chaque bobinage occupera trois encoches voisines ; pour le bobinage classique utilisé ici, on dit qu'il s'agit d'un bobinage réparti.

Une approximation courante consiste à remplacer le bobinage réel par un bobinage uniformément réparti le long de l'entrefer.

On remplace donc les encoches par un matériau ferromagnétique très perméable, et l'on répartit à la surface du stator un bobinage d'épaisseur négligeable avec une densité de conducteurs (pour la phase 1) :

$$n_1 = N \sin 2\theta_s.$$

θ_s est la coordonnée angulaire liée au stator.

2.2.1. En une demi-page maximum et un ou deux schémas, justifier l'approximation utilisée et notamment le terme en « $2\theta_s$ ».

N'effectuer aucun calcul, N sera une donnée de la machine.

2.2.2. La machine comporte trois phases dont les bobinages sont régulièrement décalés dans l'espace.

Donner l'expression de $n_2(\theta_s)$ et $n_3(\theta_s)$.

2.2.3. Chaque bobinage d'une phase est respectivement parcouru par un courant i_1 , i_2 et i_3 , de sorte que l'ensemble des bobinages et des courants produisent à la surface du stator une densité angulaire de courant : $j(\theta_s) = n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3$.

Par densité angulaire, on entend que le courant total compris dans un angle élémentaire $d\theta_s$ est : $j(\theta_s) d\theta_s$.

Les courants forment un système triphasé équilibré, soit :

$$i_1 = I\sqrt{2} \cos \omega t;$$

$$i_2 = I\sqrt{2} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right);$$

$$i_3 = I\sqrt{2} \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$

Calculer $j(\theta_s)$. Montrer qu'il s'agit d'une onde de densité angulaire de courant tournante.

Calculer sa vitesse de rotation Ω_s .

2.2.4. On définit une coordonnée angulaire θ_r , liée au rotor.

On prendra $\theta_r = 0$ dans l'axe d'un pôle du rotor, ce serait par exemple l'axe vertical dans la figure 3.

Représenter $B_e(\theta_r)$.

Le rotor est animé d'une vitesse angulaire constante Ω_r .

On posera : $\theta_s = \theta_r + \Omega_r t + \theta_0$.

θ_0 est le décalage angulaire entre l'axe de la phase 1 et l'axe d'un pôle du rotor à la date $t = 0$.

Calculer le couple qui s'exerce au stator, comme étant l'interaction de $B_e(\theta_s)$ et de $j(\theta_s)$ [force de Laplace].

On rappelle que la densité $j(\theta_s)$ est située à la distance R_1 de l'axe de rotation, et on désignera par l la longueur du moteur.

Montrer que le couple n'est constant en fonction du temps que s'il existe une relation entre Ω_r et ω .

Donner l'expression du couple dans ce cas.

Compte tenu de vos connaissances générales, pouvez-vous montrer que la forme des relations obtenues était prévisible (*ne pas dépasser dix lignes de commentaires*).

2.2.5. *Application numérique.*

Reprendre les valeurs numériques de la question 2.1.3.

On donne également :

$$\omega = 2\pi \times 50 \text{ Hz};$$

$$N = 80;$$

$$I = 25 \text{ A};$$

$$R_1 = 75 \text{ mm};$$

$$l = 90 \text{ mm}.$$

Calculer Ω_r pour que le couple soit constant.

Calculer la valeur maximale du couple. Pour quelle valeur de θ_0 est-elle obtenue ?

Calculer la puissance électromagnétique maximale que peut convertir cette machine avec ce courant I .

2.2.6. On considère le bobinage de la phase 1 défini par $n_1(\theta_s)$, et l'on fait tourner le rotor à une vitesse Ω_r .

Calculer la force électromotrice $e_1(t)$ induite dans ce bobinage (on remarquera qu'elle peut être calculée sur un quart de la machine).

On choisira les axes précédemment définis :

$$\theta_s = \theta_r + \Omega_r t + \theta_0.$$

En déduire $e_2(t)$ et $e_3(t)$, forces électromotrices des deux autres phases.

2.2.7. Les trois phases sont respectivement alimentées par les courants i_1 , i_2 et i_3 définis à la question 2.2.3.

Calculer la puissance $p(t) = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3$ absorbée par la machine.

Calculer le couple électromagnétique et montrer qu'il est constant s'il existe une relation entre Ω , et ω .

Calculer la valeur maximale du couple et la valeur efficace de la force électromotrice.

On prendra les données de la question 2.2.5.

2.2.8. En cinq lignes maximum, pouvez-vous commenter les résultats obtenus aux questions 2.2.7. et 2.2.4.

III. Étude d'un onduleur à modulation de largeur d'impulsion

3.1. Étude d'un onduleur monophasé en fonctionnement dit « pleine onde ».

On considère l'onduleur monophasé de la figure 5. Il est constitué de quatre diodes (D_1 à D_4) que l'on supposera parfaites (chute de tension négligeable à l'état passant, courant inverse négligeable à l'état bloqué) et de quatre interrupteurs unidirectionnels (T_1 à T_4).

Ces interrupteurs ne peuvent conduire qu'un courant ayant le sens conventionnel indiqué par le symbole représentant l'interrupteur, et les deux gâchettes signifient qu'ils peuvent être fermés ou ouverts à tout instant choisi par la commande. On pourra donc considérer qu'ils sont équivalents à un interrupteur mécanique en série avec une diode.

On considère de plus que l'interrupteur mécanique et la diode sont parfaits, le premier pouvant être ouvert ou fermé en un temps négligeable, qu'il soit traversé par un courant ou non.

On remarquera qu'à chaque interrupteur est associée une diode montée tête-bêche. Ainsi, par exemple, selon le sens du courant, la fermeture d'un interrupteur ne provoquera pas nécessairement sa conduction immédiate.

La commande des interrupteurs sera complémentaire, c'est-à-dire que, lorsque T_1 et T_4 sont fermés, alors T_2 et T_3 sont nécessairement ouverts et vice versa.

En outre, la commande est symétrique, c'est-à-dire que T_1 et T_4 sont fermés pendant une demi-période et ouverts pendant l'autre demi-période.

La charge, quelle que soit sa complexité, comportera toujours une inductance en série, de sorte que le courant $I(t)$ qui la traverse ne peut subir de discontinuités.

Les fonctionnements envisagés sont périodiques de période T et on ne s'intéresse qu'au régime permanent.

3.1.1. Charge R-L.

La charge est une inductance L en série avec une résistance R , on posera $\tau = \frac{L}{R}$.

Représenter $v(t)$ et $I(t)$ dans les trois cas suivants :

- $\tau \ll T$;
- τ du même ordre que T ;
- $\tau \gg T$.

On montrera que $v(t)$ est un créneau symétrique d'amplitude $\pm E$.

Dans ce dernier cas, indiquer quels sont à chaque instant les interrupteurs ou diodes qui conduisent.

En déduire $i(t)$, courant dans la source.

3.1.2. Charge L- $e(t)$. Étude des valeurs instantanées.

La charge est maintenant une inductance L en série avec une tension sinusoïdale $e(t)$ de valeur efficace E' et de même période T que la tension $v(t)$ de sortie de l'onduleur.

On suppose que $e(t)$ est en phase avec $v(t)$ et que $E' \sqrt{2}$ est de l'ordre de 2 E.

Représenter $v(t)$, $e(t)$ et $I(t)$, ainsi que les interrupteurs et diodes qui conduisent.

On ne cherchera pas l'expression analytique de $I(t)$. On situera les maxima et minima de $I(t)$ et on se contentera d'un tracé approximatif entre ces points.

3.1.3. Charge L- $e(t)$. Échanges d'énergie.

On désigne par $p(t) = e(t) I(t)$ la puissance instantanée reçue (si elle est positive) par $e(t)$, et on pose $e(t) = E' \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$.

En régime permanent, on considère le développement en série de Fourier de $I(t)$, soit :

$$I(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [I_{cn} \cos n \omega t + I_{sn} \sin n \omega t].$$

On s'intéresse aux échanges d'énergie sur une période et on rappelle que la puissance active est

définie par : $P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt$, avec t_0 arbitraire.

À partir des expressions de $e(t)$ et $I(t)$ précédentes, calculer P.

Montrer que les harmoniques de $I(t)$ ne participent pas au transfert de puissance moyenne (P) entre $v(t)$ et $e(t)$.

En déduire sans faire de calculs la valeur de P dans le cas de la question précédente.

3.2. Étude d'un onduleur monophasé à modulation de largeur d'impulsion.

3.2.1. L'étude de la question 3.1.3. a montré que l'échange d'énergie sur une période, représenté par P, ne dépendait que du terme fondamentalement de $I(t)$.

Nous supposons maintenant que la charge comporte en série une résistance R, assez faible pour ne pas modifier le résultat précédent et représentant les pertes Joule de la charge.

Montrer que pour minimiser ces dernières, en conservant P, on doit réduire les harmoniques de $I(t)$.

On rappelle que si on désigne par I_{ef} la valeur efficace de $I(t)$, le théorème de Parseval montre que :

$$I_{ef}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{cn}^2 + I_{sn}^2}{2}.$$

3.2.2. Nous allons décrire et analyser les résultats d'une technique permettant de minimiser les harmoniques délivrés par un onduleur monophasé tel que celui étudié précédemment.

Nous avons pu constater que la commande des interrupteurs (commutation) provoquait un changement de la tension de sortie qui passait de + E à - E par exemple.

On conçoit donc que, dans certaines limites d'amplitude et de fréquence qu'on ne précisera pas, le courant dans la charge suive une référence qui impose les commutations des interrupteurs, afin que le courant suive « au mieux » cette référence.

Ceci impose, bien entendu, une mesure de $I(t)$ et une comparaison avec le courant de référence, l'erreur servant à commander les commutations.

Le courant de référence dans les figures relatives à cette question sera une sinusoïde, non représentée mais facile à imaginer.

La tension $v(t)$ est alors une succession de créneaux $\pm E$ de largeur variable, on dit alors que l'onduleur fonctionne en modulation de largeur d'impulsion.

La figure 6 représente en régime permanent :

- la tension $v(t)$ pour une certaine modulation de largeur d'impulsion ;
- le courant $I(t)$ correspondant ;
- le spectre d'amplitude de $v(t)$;
- le spectre d'amplitude de $I(t)$.

La figure 7 représente les mêmes grandeurs, mais avec une fréquence de modulation plus élevée.

Dans les deux cas :

- la fréquence du terme fondamental est de 10 Hz ;
- l'amplitude du terme fondamental de $v(t)$ est de 96 volts ;
- la charge est un dipôle résistance-inductance avec $R = 10 \Omega$ et $L = 0,25 \text{ H}$.

Il est demandé de commenter, en une page au maximum et à l'aide d'une ou deux figures, les résultats obtenus sur les simulations numériques des figures 6 et 7.

On pourra rapidement rappeler la forme des spectres de $v(t)$ et $i(t)$ dans le cas d'une commande pleine onde.

En ce qui concerne les comparaisons quantitatives, on se contentera de la précision des mesures que l'on peut effectuer sur les figures fournies.

On remarquera que si l'échelle des temps est la même sur les deux figures, elle est différente en ce qui concerne les fréquences.

On ne cherchera pas à justifier le bien-fondé du type de modulation utilisée qui n'a ici qu'un but de comparaison.

3.3. Étude d'un onduleur triphasé dit « pleine onde ».

On considère le montage de la figure 8, qui est la généralisation de celui de la figure 5 au cas de l'onduleur triphasé.

Chaque interrupteur est fermé pendant une demi-période, et les commandes sont complémentaires, c'est-à-dire que T_1 et T_2 , T_3 et T_4 , T_5 et T_6 ne sont jamais simultanément fermés.

De plus la commande de chaque bras de pont (groupe d'interrupteurs placés sur la même verticale de la figure 8) est décalée d'un tiers de période par rapport à l'autre.

La commande de fermeture des divers interrupteurs est indiqué figure 9.

On remarquera que le fonctionnement de chaque bras de pont reproduit le précédent avec un retard de $T/3$.

La source de tension E possède un point milieu 0 qui ne servira que de référence des potentiels.

La charge est triphasée symétrique, c'est-à-dire que ses propriétés sont insensibles à une permutation circulaire de ses phases 1, 2, 3.

La commande et la charge étant symétriques, on en déduit que les courants i_1 , i_2 , i_3 se déduisent l'un de l'autre par une translation de $T/3$ dans le temps.

On considérera que la charge est montée en étoile, son neutre n n'étant pas relié.

Le cas le plus simple de charge, serait celui de trois dipôles passifs identiques connectés respectivement entre les points $1 - n$, $2 - n$ et $3 - n$.

On désigne par :

- v_{10} la tension entre les points 1 et 0 (*idem* pour v_{20} , v_{30}) ;
- v_{1n} la tension entre les points 1 et n (*idem* pour v_{2n} , v_{3n}) ;
- v_{12} la tension entre les points 1 et 2 (*idem* pour v_{23} , v_{31}).

3.3.1. Dans les conditions indiquées ci-dessus et en supposant que, lorsqu'un interrupteur est fermé, c'est soit qu'il conduit, soit que la diode en parallèle avec lui conduit, trouver sur une période :

- $v_{10}(t)$, $v_{20}(t)$, $v_{30}(t)$;
- $v_{12}(t)$;
- $v_{1n}(t)$;

le déphasage entre les termes fondamentaux de v_{12} et v_{1n} . Ce résultat était-il prévisible ?

On montrera préalablement que : $3 v_{1n} = 2 v_{10} - v_{20} - v_{30}$ dans les conditions décrites ci-dessus.

3.3.2. En considérant $v_{1n}(t)$ et en supposant que la charge triphasée soit constituée de trois dipôles R-L identiques, trouver sommairement la forme de $i_1(t)$ et indiquer à chaque instant les interrupteurs (T_1 et T_2) ou diodes (D_1 et D_2) qui conduisent.

Pourrait-on savoir, *a priori* et sans chercher $i_2(t)$ et $i_3(t)$, quels sont les autres interrupteurs et diodes qui conduisent sur les deux autres bras de pont ?

IV. Étude d'une machine synchrone autopilotée

On considère une machine synchrone quadripolaire à aimants permanents.

Le modèle de machine choisi est le montage étoile par phase équivalente, où chaque phase est caractérisée par une force électromotrice $e(t)$ en série avec une résistance R , une inductance L_s et possède une mutuelle inductance M_s avec chacune des phases voisines.

Les courants alimentant les phases sont générées par un onduleur triphasé à modulation de largeur d'impulsion, on admettra que la commande de l'onduleur peut imposer l'amplitude, la phase et la fréquence de ces courants.

On admettra que le neutre de la machine n'est jamais relié, de sorte que les trois courants de ligne i_1 , i_2 et i_3 soient liés par la relation $i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

4.1. Soient v_1 , v_2 et v_3 les tensions appliquées à la machine dont on négligera les harmoniques.

Établir les relations entre les divers courants et tensions et montrer qu'elles se simplifient en ne faisant intervenir pour chaque équation que les grandeurs d'une seule phase.

4.2. En reprenant l'expression des forces électromotrices déterminées à la question 2.2.6., montrer qu'elles prennent la forme générale, donnée ici pour $e_1(t)$:

$$e_1(t) = k\Omega_r \sin [2\psi(t)].$$

Caractériser l'angle $\psi(t)$. Est-il accessible à la mesure ?

On souhaite obtenir un couple constant en fonction du temps.

Montrer qu'il suffit de générer des courants (en fait une référence) $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$ de forme simple.

Justifier la réponse par un calcul.

On dit alors que la machine est autopilotée.

4.3. Le schéma de principe de l'autopilotage est représenté figure 10.

Pouvez-vous, *en dix lignes maximum*, commenter ce schéma, et notamment justifier le capteur de position du rotor. On pourra s'aider d'un ou deux schémas, mais on se limitera aux principes, sans aborder toute considération concernant la réalisation de l'ensemble.

4.4. La figure 11 indique l'évolution en fonction du temps des grandeurs suivantes :

- E_a est la force électromotrice que nous avons désignée par e_1 ;
- I_{AM} est le courant i_1 ;
- I_{AREF} est la référence du courant i_1 générée par la commande et qui agit sur la commande de l'onduleur.

On remarquera une inversion de I_{AREF} à la date $t = 0,035$ s.

Pouvez-vous, *en une dizaine de lignes maximum*, commenter l'ensemble des renseignements que l'on peut extraire de cette figure et notamment ce qui devrait logiquement se passer au-delà de $t = 0,035$ s.

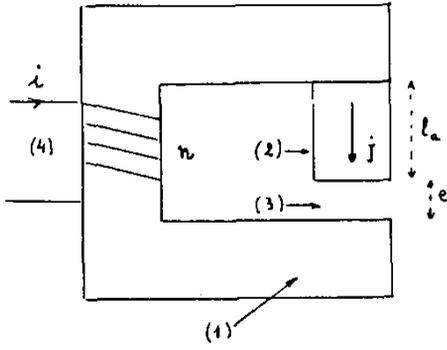


Figure 1

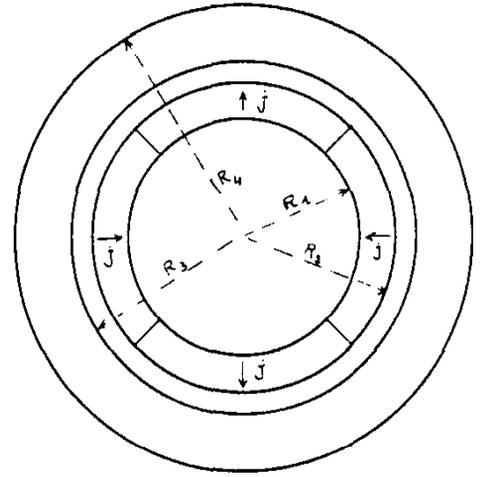


Figure 2

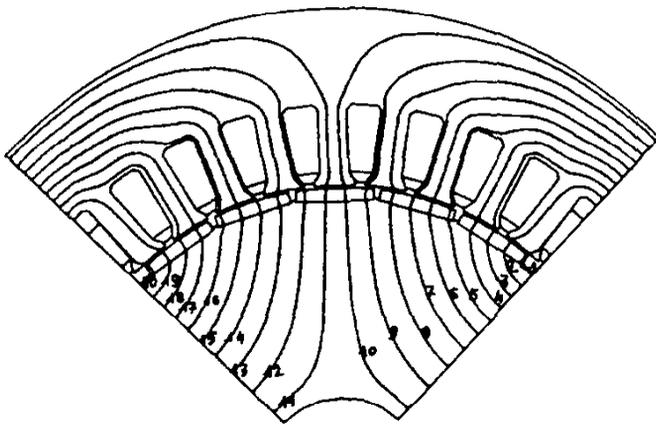


Figure 3

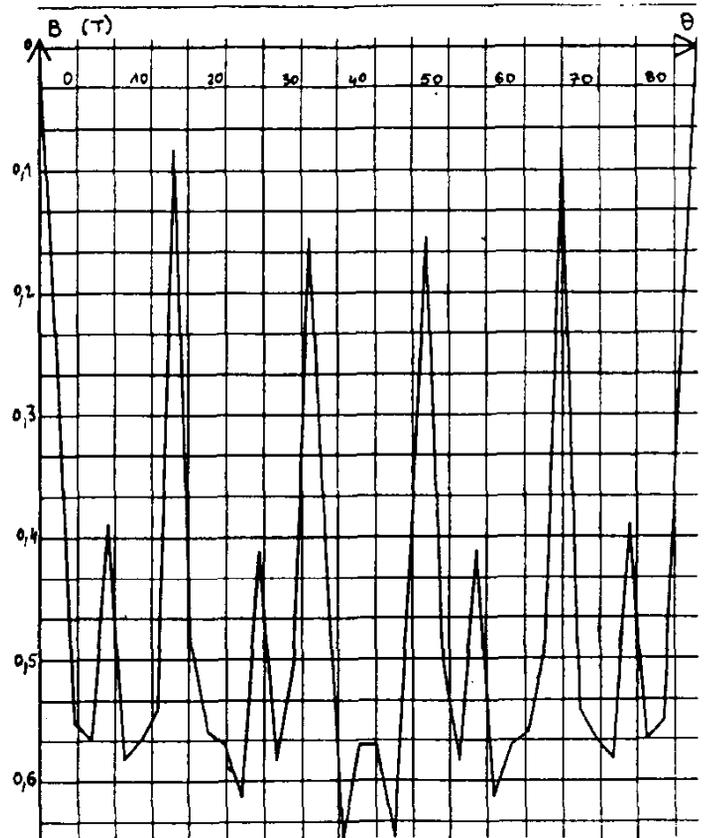


Figure 4

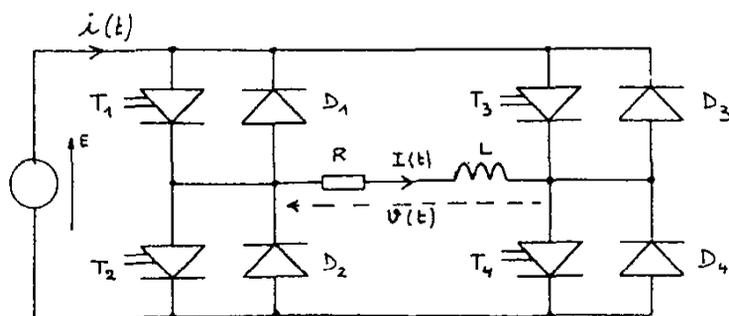


Figure 5

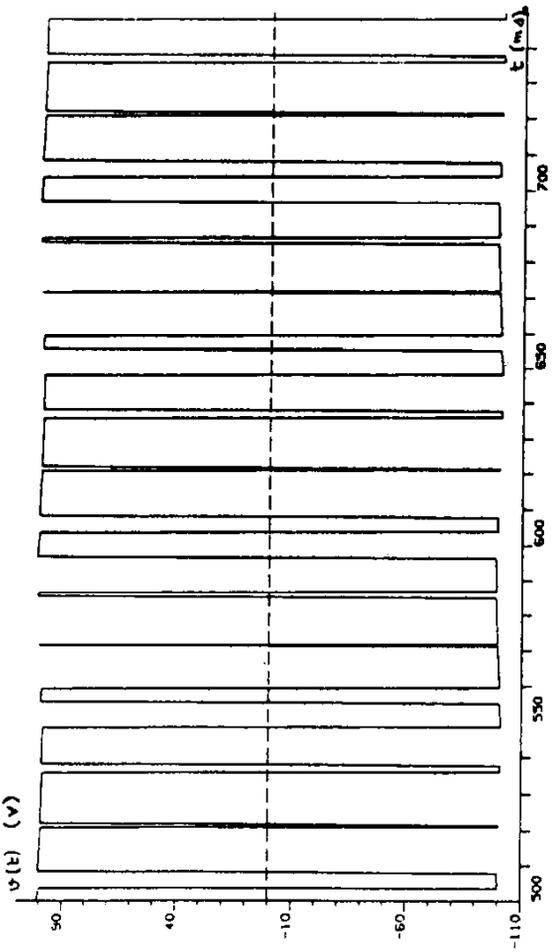


Figure 6a

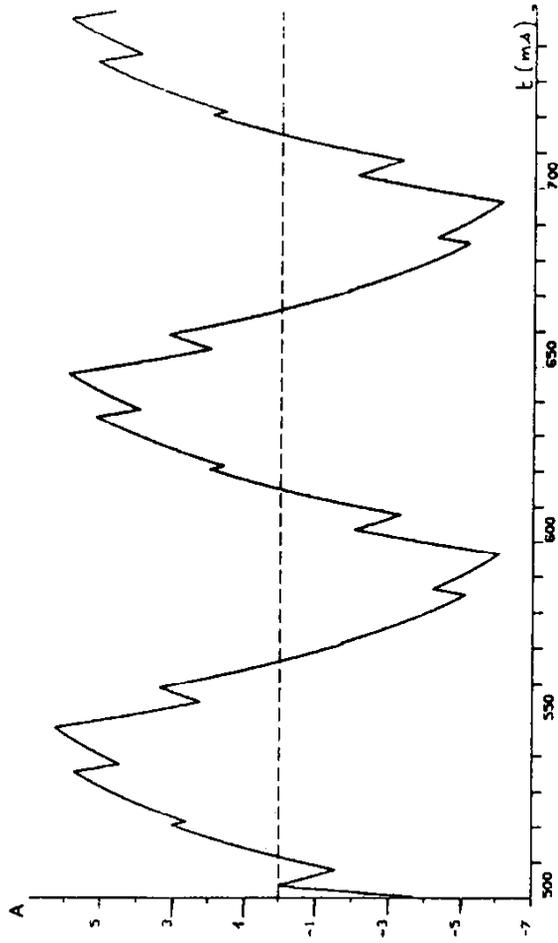


Figure 6b

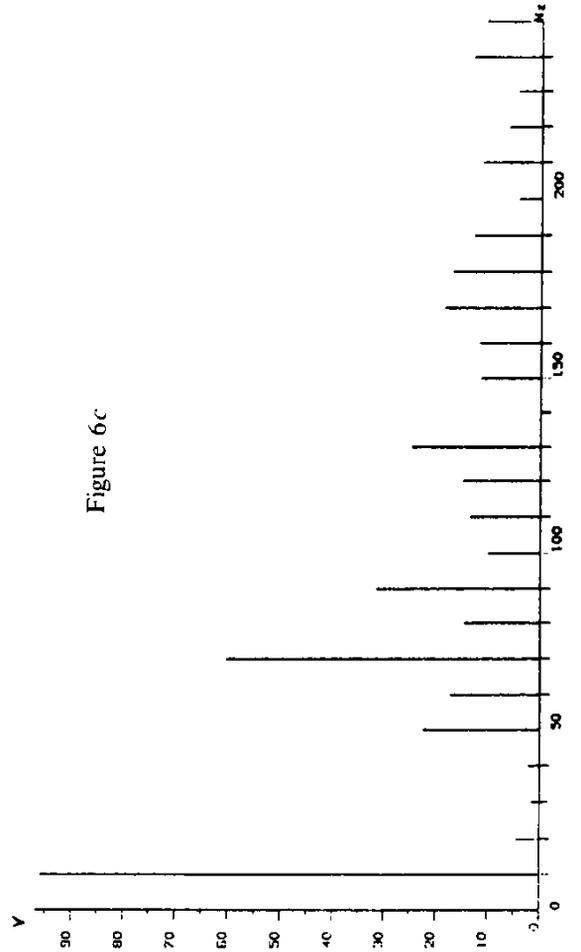


Figure 6c

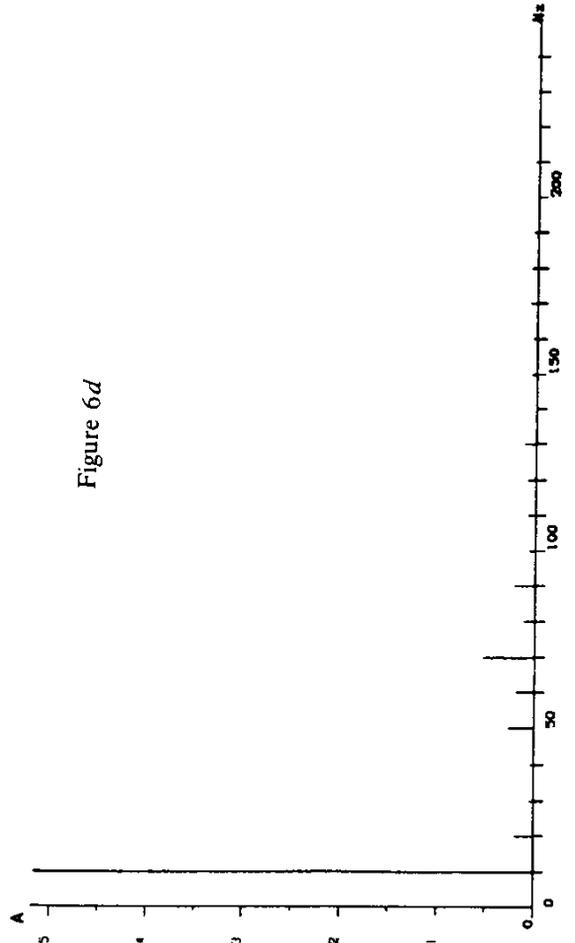


Figure 6d

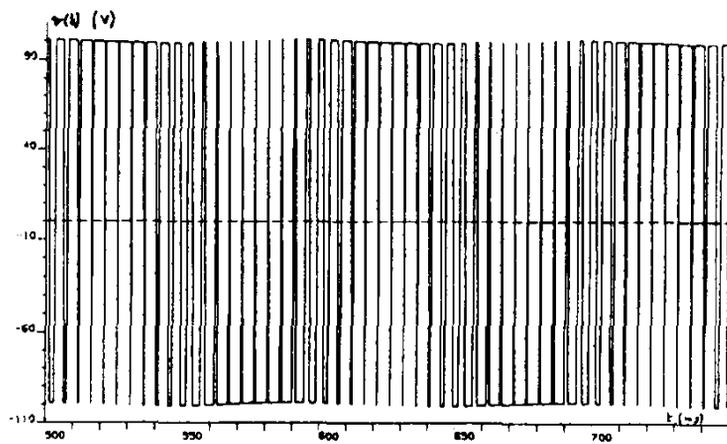


Figure 7a

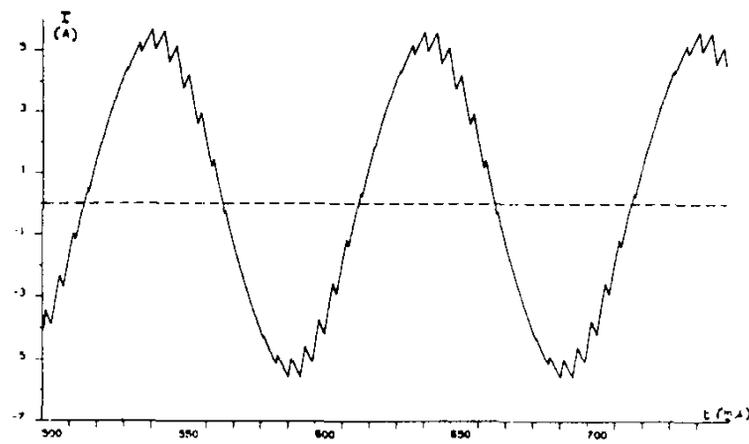


Figure 7b

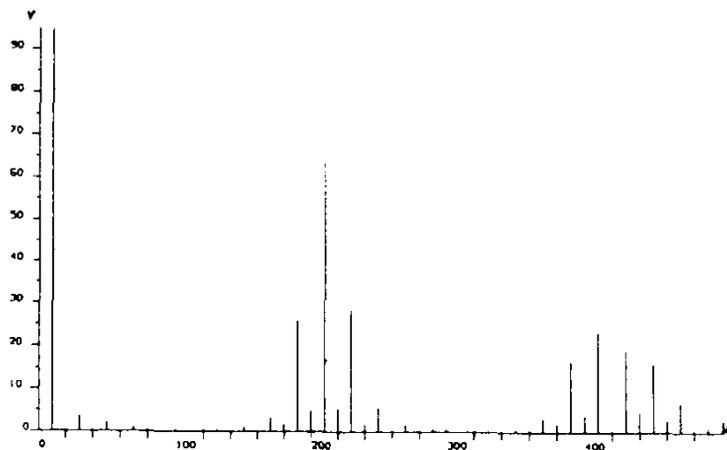


Figure 7c

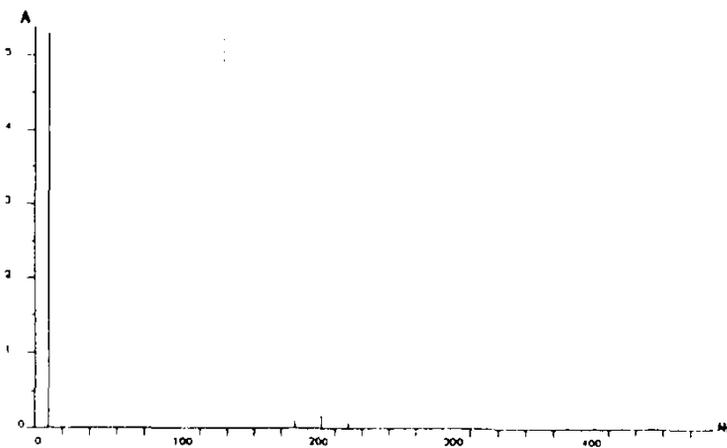


Figure 7d

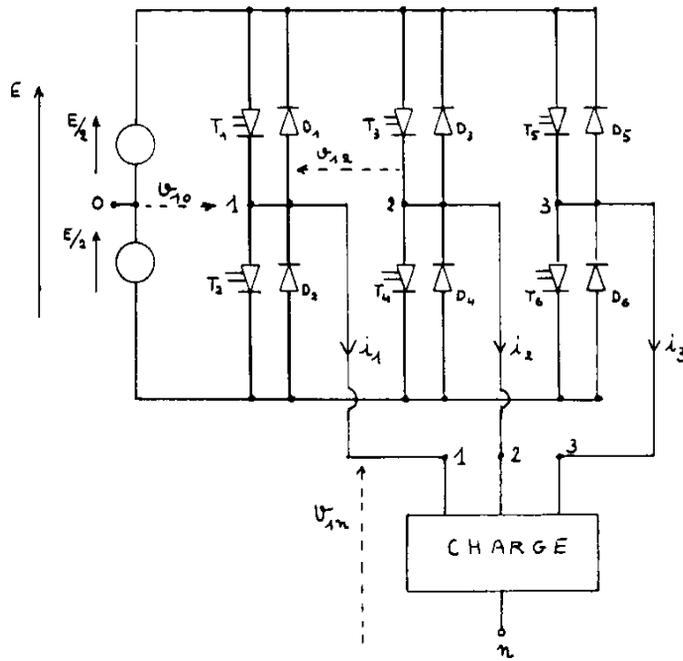


Figure 8

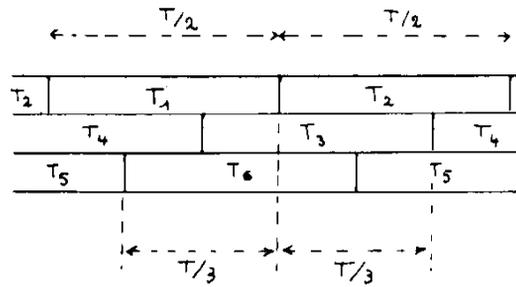


Figure 9

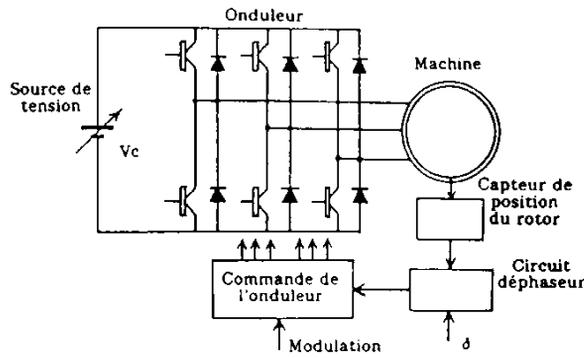


Figure 10

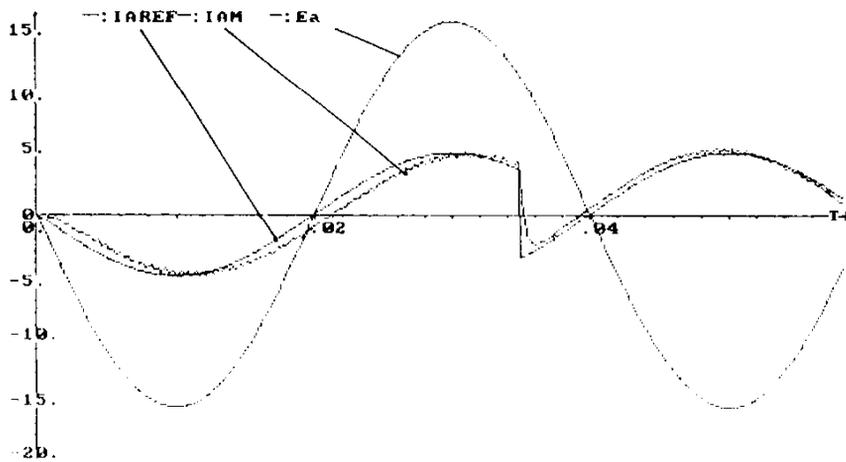


Figure 11