

SESSION DE 1994

**concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés**

section : sciences physiques

option : physique

épreuve A : composition de physique

Durée : 5 heures

*L'usage de calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*Tout document interdit.*

*Les différentes parties de cette épreuve sont très largement indépendantes.*

## I. PHÉNOMÈNE DE POLARISATION DE LA LUMIÈRE. POLARISEURS RECTILIGNES

### I.1. Mise en évidence expérimentale.

Décrire une expérience permettant de réaliser une lumière polarisée rectilignement et de l'analyser.  
Interpréter cette expérience.

### I.2. États de polarisation d'une onde électromagnétique plane sinusoïdale.

#### I.2.a. Polarisation rectiligne.

Définir l'état de polarisation rectiligne.

Donner l'expression du champ électrique d'une onde plane sinusoïdale, polarisée rectilignement, qui se propage selon l'axe Oz dans le sens des z croissants.

#### I.2.b. Polarisation elliptique.

Définir l'état de polarisation elliptique et préciser la condition pour que l'onde soit polarisée elliptiquement à droite ou à gauche.

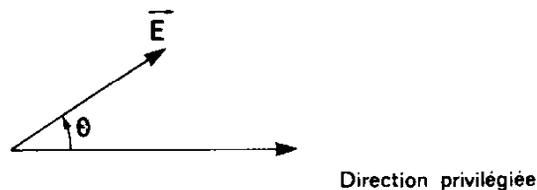
Dans le cas particulier d'une onde polarisée circulairement, indiquer les composantes du champ électrique dans un plan d'onde en distinguant les deux sens de polarisation.

### I.3. Loi de Malus.

I.3.a. Énoncer la loi de Malus dans le cas d'un polariseur rectiligne parfait.

I.3.b. Considérer le cas où le polariseur rectiligne n'est pas parfait (par exemple un polaroïd).  $T_1$  désigne le coefficient de transmission en énergie, selon la direction de transmission privilégiée du polariseur et  $T_2$  le coefficient de transmission analogue, selon la direction perpendiculaire. On supposera  $T_2 < T_1$ .

Une onde électromagnétique plane, polarisée rectilignement, arrive normalement sur la face d'entrée d'un polaroïd; le vecteur champ électrique de l'onde fait un angle  $\theta$  avec la direction de transmission privilégiée du polaroïd.



Calculer le coefficient de transmission  $T$  de l'onde à travers ce polaroïd en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$  et de l'angle  $\theta$ . Retrouver la loi de Malus dans le cas particulier du polariseur parfait.

I.3.c. Une onde de lumière naturelle arrive normalement sur un ensemble constitué de deux polaroïds identiques, disposés en série, parallèlement. Les directions de transmission privilégiée des polariseurs font un angle  $\alpha$ . Les polariseurs ne sont pas idéaux; ils sont caractérisés par les coefficients  $T_1$  et  $T_2$  définis dans la question I.3.b.

Exprimer, en fonction de  $T_1$  et de  $T_2$ , le coefficient de transmission  $T_0$  de l'ensemble des deux polariseurs lorsque  $\alpha = 0$ .

Exprimer, de même, le coefficient de transmission  $T_{00}$  de l'ensemble des deux polariseurs lorsque

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

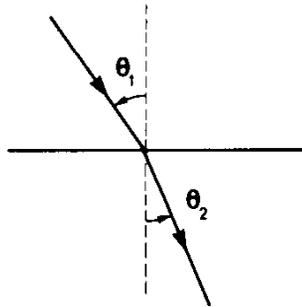
Exprimer, pour un angle  $\alpha$  quelconque, le coefficient  $T_\alpha$  de l'ensemble des deux polariseurs en fonction de  $T_1$ , de  $T_2$  et de  $\alpha$ . Montrer que, dans l'approximation  $T_2 \ll T_1$ , on retrouve la loi de Malus.

## II. DIFFÉRENTS PHÉNOMÈNES PRODUISANT UNE POLARISATION. POLARISEURS

### II.1. Polarisation par réflexion.

#### II.1.a. Angle de Brewster.

Une onde électromagnétique plane se propage dans un milieu transparent d'indice de réfraction  $n_1$  et arrive sur un dioptre, sous un angle d'incidence  $\theta_1$ . L'angle de réfraction est  $\theta_2$  dans le milieu transparent d'indice de réfraction  $n_2$ .



Le vecteur champ électrique de l'onde incidente est contenu dans le plan d'incidence.

En considérant les sources de l'onde réfléchie et leur direction d'émission, prévoir, sans aucun calcul, qu'il existe un angle d'incidence  $\theta_B$  (angle de Brewster) pour lequel il n'y a pas d'onde réfléchie.

Exprimer l'angle  $\theta_B$  en fonction des indices  $n_1$  et  $n_2$ .

Donner la valeur de l'angle de Brewster dans le cas de la transmission air-verre puis dans celui de la transmission air-eau sachant que les indices de l'air, du verre et de l'eau sont respectivement 1, 1,5 et 1,3.

II.1.b. L'onde plane incidente est constituée par de la lumière naturelle qui arrive sur le dioptre, sous l'incidence brewstérienne.

Quel est l'état de polarisation de la lumière réfléchie ?

Proposer une expérience simple permettant de vérifier cet état de polarisation.

Quel est l'état de polarisation de la lumière transmise ?

#### II.1.c. Formules de Fresnel.

On appelle  $R_{\parallel}$  le coefficient de réflexion en énergie pour des vibrations parallèles au plan d'incidence et  $R_{\perp}$  le coefficient de réflexion en énergie pour des vibrations perpendiculaires au plan d'incidence.

On rappelle les expressions de  $R_{\parallel}$  et  $R_{\perp}$  en fonction de  $\theta_1$  et de  $\theta_2$  :

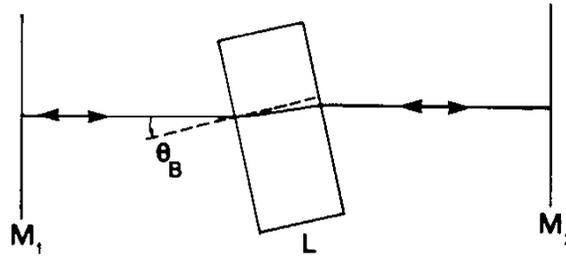
$$R_{\parallel} = \frac{\tan^2(\theta_2 - \theta_1)}{\tan^2(\theta_2 + \theta_1)} \quad \text{et} \quad R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_2 - \theta_1)}{\sin^2(\theta_2 + \theta_1)}$$

Proposer une méthode expérimentale simple et rapide pour déterminer la direction de polarisation d'un polaroïd.

Retrouver la valeur de  $\theta_B$ , angle d'incidence brewstérienne.

Calculer les coefficients de transmission en énergie  $T_{\parallel}$  et  $T_{\perp}$  pour une lame à faces parallèles d'indice de réfraction  $n = 1,5$ , placée dans l'air, la lumière arrivant sur la lame en incidence brewstérienne. Calculer également la fraction de l'énergie incidente transmise par la lame.

II.1.d. Considérer le dispositif représenté sur la figure ci-dessous.



Une lame L transparente, à faces parallèles, est placée entre deux miroirs semi-réfléchissants parallèles  $M_1$  et  $M_2$ .

Un pinceau de lumière monochromatique subit un grand nombre d'allers et retours entre les deux miroirs et traverse la lame sous l'incidence  $\theta_B$ . Au départ, la lumière n'est pas polarisée.

Montrer qualitativement l'état de polarisation de la lumière après un grand nombre d'allers et retours.

Citer une application pratique de ce dispositif.

II.1.e. *Degré de polarisation.*

Un faisceau parallèle de lumière naturelle arrive obliquement sur un dioptre. On peut considérer que la lumière transmise est un mélange de lumière naturelle et de lumière polarisée dont la vibration est parallèle au plan d'incidence. L'intensité transportée par la lumière non polarisée est notée  $I_n$ ; l'intensité transportée par la lumière polarisée est notée  $I_p$ .

Le degré de polarisation de la lumière est défini par :

$$V = \frac{I_p}{I_n + I_p}$$

Soit  $I_{\perp}$  l'intensité de la lumière transmise, transportée par la vibration perpendiculaire au plan d'incidence,  $I_{\parallel}$  l'intensité de la lumière transmise, transportée par la vibration parallèle au plan d'incidence.

Exprimer V en fonction de  $I_{\perp}$  et de  $I_{\parallel}$ , puis en fonction de  $T_{\perp}$  et de  $T_{\parallel}$ .

Calculer le degré de polarisation de l'onde transmise de l'air dans le verre (indice de réfraction 1,5) pour l'incidence brewstérienne. Commenter le résultat.

## II.2. Polarisation par double réfraction.

II.2.a. *La biréfringence.*

Décrire une expérience mettant en évidence le phénomène de biréfringence obtenu avec un cristal de spath (ou de calcite). Expliquer comment on peut montrer expérimentalement la polarisation des rayons ordinaire et extraordinaire.

II.2.b. *Interprétation du phénomène de biréfringence.*

II.2.b.1. Préliminaire.

Un dioptre plan sépare deux milieux transparents isotropes d'indices de réfraction respectifs  $n_1$  et  $n_2$ . Une onde plane se propage du milieu 1 vers le milieu 2 et aborde le dioptre sous un angle d'incidence  $\theta_1$ .

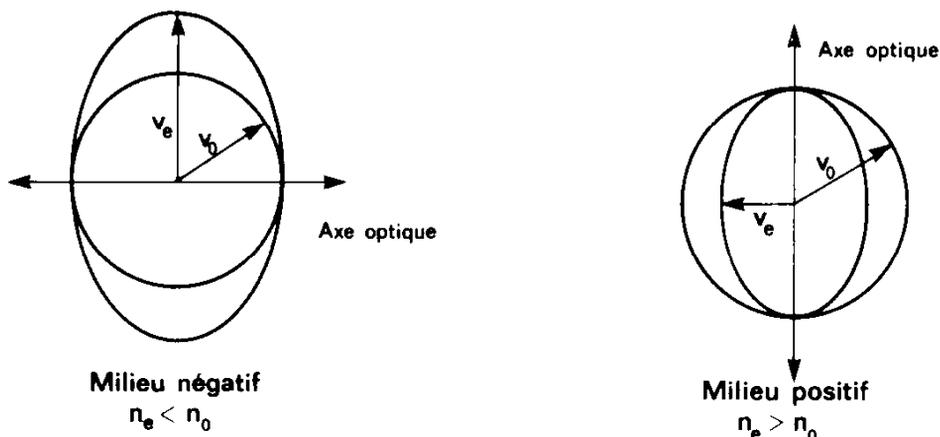
Énoncer le principe d'Huygens.

Appliquer ce principe pour construire un plan d'onde de la lumière réfractée. Préciser la direction des rayons lumineux par rapport aux surfaces d'onde et retrouver les lois de Descartes relatives à la réfraction.

### II.2.b.2. Milieu anisotrope uniaxe.

Définir expérimentalement l'axe optique d'un cristal.

L'étude théorique des milieux uniaxes permet d'établir que la surface d'onde dans ces milieux comporte deux nappes, l'une sphérique, l'autre ovoïdale de révolution, tangentes sur l'axe optique.

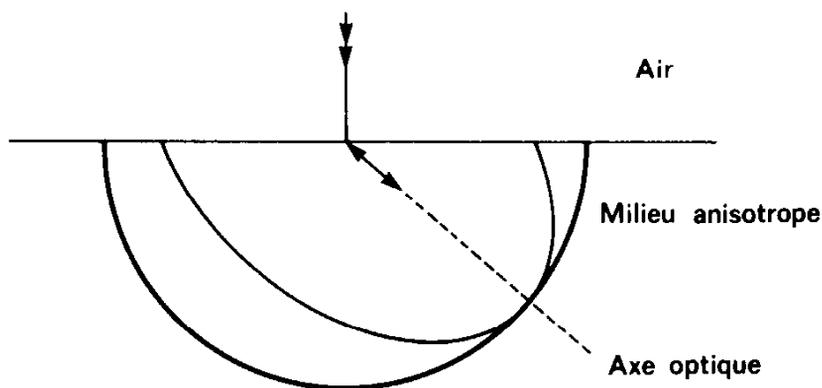


La surface d'onde sphérique correspond à l'onde ordinaire ; son rayon a pour valeur  $v_0$ , la vitesse de phase de l'onde ordinaire dans le cristal. On définit un indice de réfraction ordinaire  $n_0 = \frac{c}{v_0}$ ,  $c$  désignant la vitesse de la lumière dans le vide. La surface ovoïdale à

symétrie de révolution autour de l'axe optique correspond à l'onde extraordinaire ; les demi-axes ont pour longueur  $v_0$  et  $v_e$ , vitesse de phase extraordinaire telle que  $v_e = \frac{c}{n_e}$ ,  $n_e$  désignant l'indice extraordinaire.

Expliquer en quoi la forme de ces surfaces d'onde traduit le caractère anisotrope du milieu.

Une onde plane incidente non polarisée, de direction de propagation donnée, arrive normalement sur un dioptre air-milieu anisotrope. La figure représente l'intersection, pour un cristal uniaxe positif, de la surface d'onde et du plan défini par le rayon incident et par l'axe optique appartenant au plan d'incidence.



Construire les vecteurs d'onde correspondant respectivement à l'onde ordinaire et à l'onde extraordinaire. Énoncer les lois de Descartes.

Préciser pour chacune de ces ondes la direction du vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$  dans le milieu.

Quelle est la valeur de l'indice lorsque  $\vec{D}$  est parallèle à l'axe optique ?

Quelle est la valeur de l'indice lorsque  $\vec{D}$  est perpendiculaire à l'axe optique ?

Entre quelles valeurs l'indice est-il compris lorsque le champ  $\vec{D}$  a une direction quelconque par rapport à l'axe optique ?

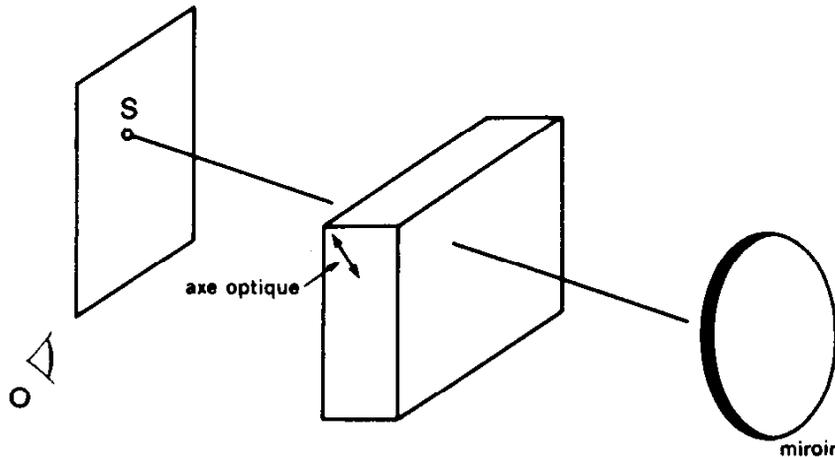
### II.2.c. Exercices.

1. On considère une lame cristalline uniaxe, dont l'axe optique est parallèle aux faces. Une onde incidente arrive perpendiculairement à la lame.

Prévoir, en le justifiant, l'état de polarisation de la lumière à la sortie de la lame, dans les cas suivants :

- l'onde incidente est polarisée rectilignement et parallèlement à l'axe optique;
- l'onde incidente est polarisée rectilignement et perpendiculairement à l'axe optique;
- l'onde incidente est polarisée rectilignement, la direction de polarisation étant orientée obliquement par rapport à l'axe optique.

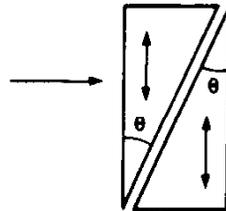
2. La figure montre un rayon de lumière qui traverse une lame de calcite et qui se réfléchit sur un miroir plan pour traverser à nouveau la lame en sens inverse. La lame a ses grandes faces parallèles au plan du miroir. Le rayon est proche de la perpendiculaire au miroir.



L'observateur placé en O verra-t-il une double image du spot S ?

### II.2.d. Dispositif polariseur.

Le polariseur de Glan-Foucault.



Ce polariseur est constitué de deux prismes en calcite, de même angle, entre lesquels on laisse une couche d'air. Les prismes sont disposés de telle sorte que les axes optiques soient parallèles.

On donne  $n_o = 1,658$  et  $n_e = 1,486$ . L'indice de l'air est pris égal à 1. Un pinceau de lumière naturelle arrive perpendiculairement à la face d'entrée.

Montrer que si l'angle  $\theta$  des prismes est bien choisi, on récupère à la sortie du dispositif un pinceau de lumière polarisée. Indiquer l'état de polarisation du pinceau de sortie.

### II.3. Polarisation par dichroïsme.

II.3.a. Définir brièvement le phénomène de dichroïsme.

Expliquer l'étymologie du mot dichroïsme.

II.3.b. Certains cristaux naturels comme la tourmaline présentent cette propriété.

Expliquer pourquoi une lame de tourmaline traversée par la lumière blanche présente une couleur verdâtre pour une certaine orientation et apparaît opaque pour une autre.

### II.3.c. Grille métallique.

Une grille constituée de fils métalliques parallèles, régulièrement espacés, dont la période est de l'ordre de la longueur d'onde de la lumière, présente la propriété de dichroïsme. Expliquer pourquoi.

Un onde de lumière naturelle arrive perpendiculairement à la grille. Quel est l'état de polarisation à la sortie ?

Pourquoi est-il plus commode de réaliser de tels polariseurs dans le domaine de l'infrarouge ?

Citer une technique permettant de construire un tel polariseur.

### II.3.d. Feuilles polarisantes.

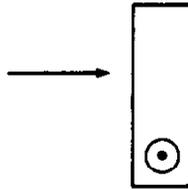
Décrire la technique de fabrication des feuilles polarisantes, ou feuilles polaroïds, inventées par E.H. Land et expliquer l'origine du dichroïsme présenté par ces feuilles.

## III. LAMES À RETARD

### III.1. Principe.

On se limitera au cas des lames à retard taillées dans des matériaux uniaxes. L'axe optique est parallèle aux faces de la lame.

Un pinceau de lumière monochromatique transportant une onde polarisée rectilignement arrive normalement à la lame.



Le pinceau subit-il une déviation ?

Expliquer la modification subie par l'onde à la sortie de la lame.

Définir les lignes neutres de la lame.

Dans le cas d'un cristal positif ( $n_e > n_o$ ), préciser l'axe lent et l'axe rapide. Justifier la réponse.

### III.2. Détermination expérimentale des lignes neutres.

Décrire une expérience permettant de déterminer les lignes neutres d'une lame à retard.

### III.3. Lames demi-onde, quart d'onde.

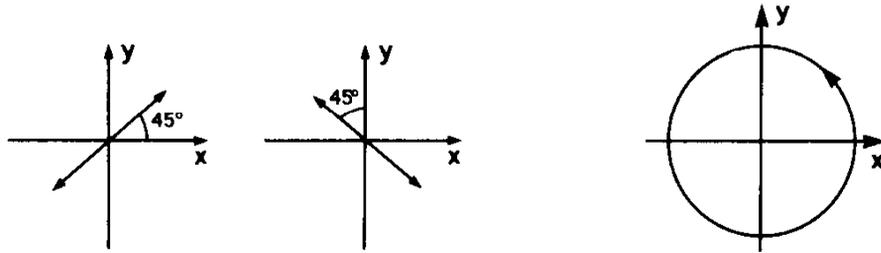
III.3.a. Donner la définition d'une lame demi-onde et d'une lame quart d'onde. Elles seront notées respectivement D et Q par la suite.

III.3.b. Calculer l'épaisseur minimale d'une lame de calcite D pour une longueur d'onde  $\lambda = 600$  nm sachant que les indices de réfraction sont alors  $n_o = 1,658$  et  $n_e = 1,486$ .

Même question pour une lame de quartz D sachant que, à cette longueur d'onde, les indices de réfraction sont  $n_o = 1,544$  et  $n_e = 1,553$ .

Comparer les résultats et conclure.

III.3.c. Considérer l'action d'une lame D puis d'une lame Q sur une onde monochromatique, polarisée conformément aux schémas ci-dessous, sur lesquels les axes  $Ox$  et  $Oy$  représentent les lignes neutres des lames :



III.3.d. On dispose d'un polaroïd et d'une lame Q.

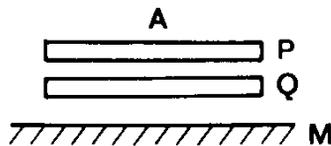
Proposer et justifier une méthode permettant de distinguer une lumière naturelle d'une lumière polarisée circulairement ou d'un mélange de lumière naturelle et de lumière polarisée circulairement.

#### III.4. Polariseur circulaire.

III.4.a. Montrer qu'il est possible d'obtenir un polariseur circulaire en associant convenablement un polaroïd et une lame à retard bien choisie.

Dans quel cas obtient-on un polariseur circulaire droit ou un polariseur circulaire gauche ?

III.4.b. On place, sur un miroir plan, l'ensemble constitué d'un polariseur rectiligne P et d'une lame quart d'onde Q.



Pour une certaine orientation du polariseur P, le miroir paraît obscur lorsqu'on le regarde normalement. Interpréter le phénomène et préciser l'orientation du polariseur P par rapport aux lignes neutres de la lame Q lorsque le miroir paraît obscur.

On retourne l'ensemble PQ sur le miroir. Peut-on observer le même phénomène ? Justifier la réponse.

*Applications :*

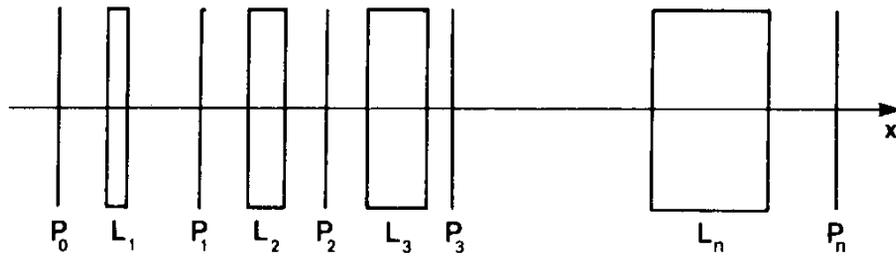
Montrer que le réglage d'un polariseur circulaire peut être obtenu à l'aide d'un simple miroir plan.

On illumine une scène avec un flash à travers une fenêtre. Comment se débarrasser des reflets gênants provenant de la lumière sur la vitre ? On supposera l'éclairage quasiment normal à la surface de la vitre.

### III.5. Filtre de Lyot.

On réalise le montage de la figure ci-dessous, dans lequel  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  sont des polarisoirs parallèles,  $L_1, L_2, \dots, L_n$  sont des lames biréfringentes dont les axes sont parallèles et orientés à  $45^\circ$  de la direction privilégiée des polarisoirs.

Les épaisseurs respectives de ces lames taillées dans le même matériau sont  $e, 2e, 4e, 2^{(n-1)}e$ .



La lame  $L_1$  introduit entre les vibrations, selon les lignes neutres, la différence de phase  $\varphi$ . Le système est éclairé en lumière blanche naturelle.

III.5.a. Exprimer  $\varphi$  en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ , de la biréfringence  $\Delta n = |n_c - n_o|$  de la lame et de son épaisseur  $e$ .

III.5.b. Exprimer l'intensité  $I$  transmise par le système en fonction de  $\varphi$  et de l'intensité  $I_0$  transmise par le polariseur  $P_0$ . On négligera l'absorption due aux traversées des lames et ses polarisoirs successifs.

III.5.c. Déterminer la position des maxima principaux et montrer que les maxima secondaires correspondent à une intensité négligeable.

Donner l'allure de la courbe représentant  $I$  en fonction de  $\varphi$ .

Pourquoi ce dispositif peut-il être qualifié de monochromateur ?

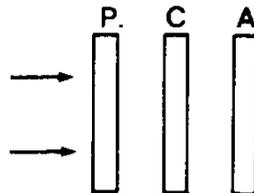
III.5.d. Traiter le cas particulier de quatre lames. Prendre  $e = 250 \mu\text{m}$  et la biréfringence  $\Delta n = |n_c - n_o| = 10^{-2}$ .

Calculer les longueurs d'onde transmises dans le visible en supposant la biréfringence  $\Delta n$  indépendante de la longueur d'onde.

### III.6. Détermination de la biréfringence d'une lame cristalline.

Une lame cristalline  $C$  taillée parallèlement à son axe optique a pour épaisseur  $e$ . On se propose de déterminer sa biréfringence.

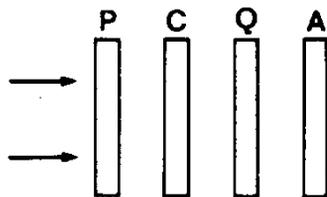
III.6.a. La lame  $C$  est placée entre un polariseur  $P$  et un analyseur  $A$  croisés. L'ensemble est éclairé par un faisceau parallèle de lumière naturelle monochromatique.



On fait tourner  $C$  jusqu'à l'extinction de la lumière. On fait tourner  $C$  de  $45^\circ$  à partir de cette dernière position et on note sa position.

Quelle est la position des lignes neutres de  $C$  par rapport à la direction de transmission privilégiée du polariseur  $P$  ?

- III.6.b. On remplace la lame C par une lame quart d'onde Q entre le polariseur P et l'analyseur A. L'ensemble est encore éclairé par un faisceau parallèle de lumière naturelle monochromatique. On fait tourner Q jusqu'à l'extinction de la lumière et on note sa position. Quelle est la position des lignes neutres de Q par rapport à la direction privilégiée du polariseur P ?
- III.6.c. On place maintenant, entre le polariseur et l'analyseur croisés, les lames C et Q dans les positions repérées en III.6.a. et III.6.b. L'ensemble est toujours éclairé par le même faisceau de lumière.



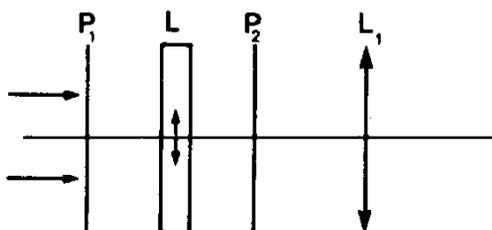
Pour rétablir l'extinction, il faut faire tourner l'analyseur d'un angle  $\alpha$ .

Montrer que l'angle  $\alpha$  peut être relié simplement au déphasage  $\varphi$  introduit par la lame C entre les deux vibrations qu'elle transmet selon son axe lent et son axe rapide.

- III.6.d. Exprimer la biréfringence  $\Delta n = |n_e - n_o|$  de la lame C en fonction de  $\alpha$ , de  $e$  et de la longueur d'onde  $\lambda_0$  de la lumière utilisée.

### III.7. Interférences en lumière polarisée.

Une lame cristalline L taillée parallèlement à son axe optique est placée entre deux polariseurs rectilignes  $P_1$  et  $P_2$ .



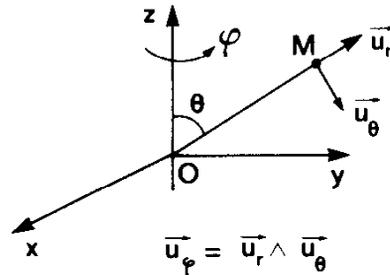
- III.7.a. L'ensemble est éclairé par un faisceau parallèle de lumière naturelle normal au système. Pourrait-on observer des interférences en l'absence de  $P_1$  ?
- III.7.b. Montrer que la présence du polariseur  $P_2$  est indispensable pour obtenir des interférences.
- III.7.c. Comment faut-il placer  $P_1$  et  $P_2$  de préférence ? Justifier la réponse.
- III.7.d. On éclaire le dispositif en lumière blanche.  
 Qu'observe-t-on avec une lame d'épaisseur uniforme ?  
 Qu'observe-t-on avec une lame d'épaisseur non uniforme ?  
 On remplace le polariseur rectiligne  $P_1$  par une lame biréfringente de spath qui permet de dédoubler le faisceau. Qu'observe-t-on avec une lame d'épaisseur uniforme ?

## IV. POLARISATION PAR DIFFUSION

## IV.1. Rayonnement du dipôle électrique.

Un dipôle  $D$  constitué d'une charge  $-q$  à l'origine  $O$  des coordonnées et d'une charge  $q$  animée, le long de l'axe  $Ox$ , d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'équation horaire  $z = a \cos \omega t$ . On posera  $p_0 = qa$ .

On considère le champ électromagnétique rayonné par le dipôle en un point  $M$  défini par ses coordonnées sphériques  $r, \theta, \varphi$ . On suppose  $r \gg a$  (approximation dipolaire). De plus, les dimensions du dipôle sont supposées petites devant la longueur d'onde.



IV.1.a. Montrer par des considérations de symétrie que le champ électrique n'a pas de composante suivant  $\vec{u}_\varphi$ .

IV.1.b. Dans le cadre des approximations précédentes, le calcul donne :

$$\vec{E} = -\frac{p_0 \omega^2 \sin \theta}{4 \pi \epsilon_0 c^2 r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{u}_\theta ;$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c} .$$

Interpréter physiquement ces résultats en traitant les points suivants :

- structure locale de l'onde rayonnée ;
- polarisation de l'onde ;
- directivité de l'émission du dipôle oscillant ;
- variation du champ électromagnétique avec la distance.

IV.1.c. Citer d'autres modes d'émission de rayonnement dans le domaine des ondes hertziennes. Quel est le processus prépondérant qui intervient dans le rayonnement des atomes ?

IV.1.d. Calculer l'intensité énergétique du rayonnement en un point donné  $M$ , c'est-à-dire la puissance moyenne reçue par unité de surface. En déduire la puissance moyenne rayonnée par le dipôle dans l'espace et montrer qu'elle est proportionnelle à  $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^4$ .

## IV.2. Diffusion d'un rayonnement par un électron atomique.

Une telle diffusion est interprétée à l'aide du modèle élastique dans lequel un électron atomique de charge  $q = -e$ , de masse  $m$ , est soumis au champ électromagnétique, à une force élastique  $-m\omega_0^2 \vec{r}$ , à une force de frottement visqueux  $-\frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt}$ .

IV.2.a. Établir l'expression complexe du moment dipolaire de l'atome sachant que le champ électrique de l'onde électromagnétique s'écrit :  $\vec{E} = E_m e^{-i\omega t} \vec{u}_r$ .

IV.2.b. On considère le cas particulier de la diffusion Rayleigh pour laquelle  $\omega_0 \gg \omega \gg \frac{1}{\tau}$ .

Montrer que la puissance moyenne rayonnée par l'atome est alors proportionnelle à  $\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4$  la longueur d'onde  $\lambda_0$  correspondant à la pulsation  $\omega_0$ .

#### IV.3. La couleur bleue du ciel.

Dans l'atmosphère, les électrons atomiques vibrent avec une fréquence de l'ordre de  $10^{17}$  Hz.

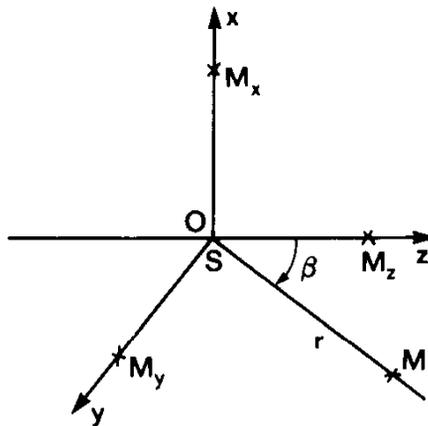
IV.3.a. Interpréter la couleur bleue du ciel et la couleur rouge du soleil couchant.

IV.3.b. Pourquoi, sur la Lune, le ciel paraît-il noir ?

#### IV.4. Polarisation de la lumière diffusée.

Une onde électromagnétique plane, non polarisée, se propage suivant l'axe Oz. Elle induit, sur un atome diffusant S situé en O, un moment dipolaire oscillant qui rayonne à son tour.

IV.4.a. Indiquer l'état de polarisation de la lumière diffusée par l'atome aux points  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_z$  placés respectivement sur les axes Sx, Sy, Sz.



IV.4.b. On considère un point  $M_1$  dans le plan  $yOz$  et repéré par ses coordonnées polaires  $r$  et  $\beta$ .

Montrer que la lumière diffusée par la particule S en  $M_1$  est partiellement polarisée et calculer

l'indice de polarisation P défini par  $P = \frac{I_v - I_h}{I_v + I_h}$  où  $I_v$  désigne l'intensité transportée par la vibration orientée selon l'axe Sx et  $I_h$  l'intensité transportée par la vibration orientée dans le plan horizontal ( $OyOz$ ).

#### IV.5. Polarisation de la lumière diffusée par les molécules de l'air éclairé par le Soleil.

IV.5.a. On observe le ciel diurne à travers une lame polaroid, dans une direction perpendiculaire à celle du Soleil.

Décrire et interpréter le phénomène de polarisation observé.

IV.5.b. On réalise une expérience analogue en observant le ciel dans une direction voisine de celle du Soleil.

L'onde diffusée dans cette direction est-elle polarisée ?

IV.5.c. Comment évolue la polarisation partielle de l'onde diffusée :

- lorsque l'altitude augmente ?
- lorsqu'on observe la lumière à travers un filtre jaune ou rouge ?

IV.5.d. Indiquer une méthode utilisée en photographie pour augmenter le contraste entre le ciel bleu et les nuages. Expliquer le phénomène.

#### IV.6. Expérience de cours.

On verse quelques gouttes de lait dans un récipient transparent contenant de l'eau et on éclaire le liquide avec le faisceau d'une lampe électrique.

IV.6.a. Prévoir la couleur de la lumière diffusée latéralement par les « particules » de lait.

IV.6.b. Prévoir l'état de polarisation de la lumière diffusée :

- dans une direction perpendiculaire à celle de la lumière incidente;
- dans la direction de la lumière incidente.

IV.6.c. On ajoute progressivement du lait ; le faisceau de lumière dans l'eau devient blanchâtre.

Comment évolue la polarisation de la lumière diffusée dans une direction perpendiculaire à celle de la lumière incidente ?

La lumière solaire diffusée par un nuage blanc est-elle polarisée ?

#### IV.7. Applications à la biologie.

Les yeux de certains insectes ou animaux sont sensibles à la lumière polarisée. Citer un ou plusieurs exemples.

### V. DESCRIPTION DES ÉTATS DE POLARISATION

#### Notation.

Lorsqu'une grandeur varie sinusoidalement au cours du temps sous la forme  $A \cos(\omega t - \varphi)$ , nous lui associons la grandeur complexe  $A e^{-i(\omega t - \varphi)}$ .

Un état de polarisation d'une onde plane sinusoidale qui se propage le long de l'axe Oz est entièrement caractérisé par la donnée de deux composantes du champ électrique dans le plan d'onde. Cet état est représenté, selon une notation due à Jones, par une matrice colonne dont les deux lignes sont proportionnelles aux amplitudes complexes du champ électrique :

$$\begin{bmatrix} E_{mx} \\ E_{my} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x e^{i\varphi_x} \\ A_y e^{i\varphi_y} \end{bmatrix}$$

$A_x$  et  $A_y$  sont réels.

Il peut être commode de normaliser la matrice précédente et de manipuler des matrices du type :

$$\frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \begin{bmatrix} A_x e^{i\varphi_x} \\ A_y e^{i\varphi_y} \end{bmatrix}.$$

V.1. Quelle est la signification physique de  $\sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ , de  $\varphi_y - \varphi_x$  ?

#### V.2. Identification d'états.

Que représentent les états suivants :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

### V.3. Superposition d'états cohérents.

On considère la superposition des deux états  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$  ,  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ ,

sous la forme :  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Décrire physiquement les trois états représentés ci-dessus et justifier la règle d'addition.

### V.4. Transformation d'états.

Les dispositifs (polariseurs, lame à retard...) qui agissent sur un état de polarisation sont ainsi représentés par des matrices  $2 \times 2$  à éléments complexes.

Identifier les dispositifs associés aux matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} , \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} , \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

### V.5. Application.

Le filtre de Lyot a été décrit dans la question III.5.

Quelle est la matrice colonne de Jones représentant l'onde à la sortie du polariseur  $P_0$  ?

En considérant les matrices de la lame  $L_1$  et du polariseur  $P_1$ , exprimer la matrice de Jones associée à l'onde qui sort de la cellule ( $L_1 P_1$ ).

En déduire la matrice de Jones associée à l'onde qui sort du dispositif entier et retrouver ainsi le résultat du III.5.b.

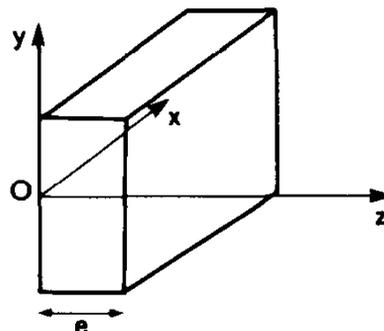
V.6. Pourquoi ce formalisme ne convient-il pas pour décrire des états de polarisation partielle ?

## VI. MOMENT CINÉTIQUE DU RAYONNEMENT

### VI.1. Moment du couple exercé sur une lame cristalline.

VI.1.a. Montrer qu'une onde électromagnétique traversant un solide diélectrique anisotrope exerce sur le solide un couple par unité de volume  $\frac{d\Gamma}{dv} = \vec{D} \wedge \vec{E}$ ,  $\vec{D}$  étant le vecteur déplacement électrique.

VI.1.b. Soit une lame anisotrope d'épaisseur  $e$  et de surface  $S$ . Le repère d'étude est choisi de telle sorte que les lignes neutres de la lame soient confondues avec les axes  $Ox$  et  $Oy$ .



Une onde électromagnétique plane monochromatique se propage dans la lame suivant l'axe Oz perpendiculaire à la face d'entrée qui coïncide avec le plan (Ox Oy).

Les indices de réfraction selon les axes Ox et Oy sont tels que :

$$n_x^2 = \epsilon_x \text{ et } n_y^2 = \epsilon_y, \quad \epsilon_x \text{ et } \epsilon_y \text{ désignant les permittivités relatives.}$$

À l'entrée de la lame, les composantes du champ électrique sont donnés par :

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos \omega t \\ E_y &= E_0 \cos (\omega t - \alpha). \end{aligned}$$

Calculer la moyenne temporelle  $\langle \Gamma_z \rangle$  du moment du couple exercé sur la lame en fonction de  $E_0$ ,  $\alpha$ ,  $n_x$ ,  $n_y$  et  $\varphi = \omega (n_x - n_y) e/c$ ,  $c$  désignant la vitesse de la lumière dans le vide.

Exprimez  $\langle \Gamma_z \rangle$  en fonction de la puissance moyenne  $\langle P \rangle$  transportée par l'onde.

VI.1.c. *Cas particulier d'une lame quart d'onde.*

L'onde incidente est circulaire gauche. Quel est l'état de polarisation de l'onde émergente ?

Exprimer  $\langle \Gamma_z \rangle$  en fonction de  $\langle P \rangle$  dans ce cas particulier.

L'onde qui a traversé la lame pendant le temps  $\Delta t$  a échangé avec elle un moment cinétique.

Exprimer la variation de moment cinétique de l'onde  $\Delta \sigma_z$  en fonction de la pulsation et de l'énergie échangée par l'onde pendant le temps  $\Delta t$ .

VI.1.d. Compléter le tableau suivant :

Polarisation de l'onde incidente	Nature de la lame	Polarisation de l'onde émergente	$\langle \Gamma_z \rangle$ pour la lame
Circulaire G .....	Quart d'onde		
Circulaire D .....	Quart d'onde		
Rectiligne à 45° des lignes neutres .....	Demi-onde		
Circulaire G .....	Demi-onde		
Circulaire D .....	Demi-onde		
Quelconque .....	Onde		

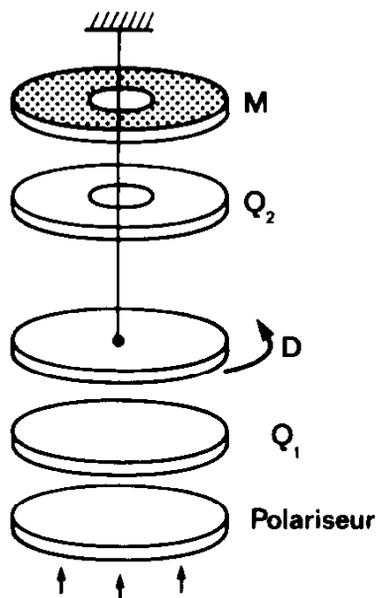
VI.1.e. *Interprétation des résultats précédents.*

Une onde polarisée rectilignement transporte-t-elle un moment cinétique ?

Exprimer le moment cinétique transporté par une onde circulaire droite, par une onde circulaire gauche, en fonction de l'énergie  $W$  véhiculée par l'onde. Vérifier sa dimension.

## VI.2. Expérience de Beth.

Une lame cristalline demi-onde  $D$  est suspendue à un fil de torsion confondu avec l'axe  $Oz$  (figure ci-dessous). On l'éclaire par dessous avec une lumière monochromatique de pulsation  $\omega$ , polarisée circulairement à gauche. À la sortie de la lame  $D$ , l'onde lumineuse traverse une lame quart d'onde fixe  $Q_2$  puis est réfléchiée par un miroir  $M$ . L'onde réfléchiée par le miroir traverse successivement la lame  $Q_2$  puis la lame  $D$ .



La direction de propagation de la lumière incidente est normale aux lames.

VI.2.a. Exprimer le couple moyen  $\Gamma_z$  qui s'exerce sur la lame  $D$  en fonction de la puissance moyenne  $P$  reçue par la lame.

Proposer des solutions pour augmenter le couple  $\Gamma_z$ .

Que se passe-t-il si l'on tourne le quart d'onde  $Q_1$  de  $90^\circ$  ?

VI.2.b. On provoque un changement du sens de la polarisation circulaire incidente, périodiquement, avec des intervalles de temps valant la moitié de la période propre du pendule de torsion.

Prévoir qualitativement le mouvement de la lame.

## VI.3. Transitions de résonance magnétique.

VI.3.a. *Moment cinétique de l'atome.*

Exposer très sommairement les résultats de mécanique quantique concernant le moment cinétique atomique : moment cinétique orbital, spin, addition...

VI.3.b. *Levée de la dégénérescence d'un niveau énergétique en présence d'un champ magnétique.*

Le champ magnétique est dirigé selon l'axe  $Oz$ .

Exprimer la composante  $\mathcal{M}_z$  du moment magnétique d'un atome sur l'axe  $Oz$  en fonction du facteur  $g$  de Landé, du magnéton de Bohr  $\mu_B$  et du nombre quantique magnétique  $M$ .

Le magnéton de Bohr est donné par  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$  où  $e$  désigne la valeur absolue de la charge de l'électron et  $m$  sa masse.

Expliquer en quoi consiste la levée de la dégénérescence d'un niveau énergétique.

VI.3.c. Considérer le cas particulier de deux niveaux  $E_1$  et  $E_2$  tels que  $E_2 > E_1$ . Les niveaux  $E_1$  et  $E_2$  sont caractérisés par les nombres quantiques  $J_1 = \frac{3}{2}$  et  $J_2 = \frac{5}{2}$ . On suppose  $g$  positif.

Indiquer les sous-niveaux Zeeman en présence d'un champ magnétique.

Quelles sont les transitions possibles entre les sous-niveaux Zeeman en présence d'un champ magnétique ? Rappeler et justifier les règles de sélection.

Indiquer, pour chaque type de transition, la nature de la polarisation de la lumière émise.

**N.B.** — La polarisation circulaire est repérée par rapport au champ  $\vec{B}$  et non pas par rapport au sens de la propagation.

VI.3.d. La raie  $D_1$  du sodium ( $\lambda = 589,6$  nm) correspond à une émission entre le niveau  $E_2$  ( $J_2 = \frac{1}{2}$ ) et le niveau  $E_1$  ( $J_1 = \frac{1}{2}$ ).

Montrer que les niveaux sont dédoublés en présence du champ magnétique.

On désire provoquer la transition  $(E_1, M_1 = -\frac{1}{2})$  vers le niveau  $(E_2, M_2 = \frac{1}{2})$  en présence du champ magnétique. Quel doit être l'état de polarisation de l'onde absorbée ? Justifier la réponse.

En quoi consiste le pompage optique ? Pourquoi peut-on parler de température négative lors d'une inversion de population ? Citer des applications pratiques du pompage optique.

**SESSION DE 1994**

**concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés**

**section : sciences physiques**

option : physique

épreuve B : composition de chimie

**Durée : 4 heures**

*Deux feuilles de papier millimétré.*

*L'usage de calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*Tout document interdit.*

*Les différentes parties de cette épreuve sont très largement indépendantes.*

**OXYGÈNE – OXYDES – OXYDORÉDUCTION**

Le sujet propose l'étude de quelques aspects de la chimie de l'oxygène et des oxydes, ainsi que des phénomènes d'oxydoréduction en chimie organique ou inorganique.

*Les différentes parties de l'épreuve sont largement indépendantes.*

*Données numériques.*

Constante des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

On prendra  $\frac{RT}{F} \ln 10 = 0,06 \text{ V}$  à  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Masses molaires en  $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$  :

O : 16,0    Mg : 24,3    Cl : 35,5    K : 39,1    Mn : 54,9    I : 126,9.

## A. L'OXYGÈNE : ÉLÉMENT ET CORPS SIMPLE

### I. L'ÉLÉMENT OXYGÈNE

I.1. Donner la structure électronique de l'atome d'oxygène dans son état fondamental.

I.2. **Les isotopes de l'oxygène.**

- Quels sont les nombres de masse des trois isotopes de l'oxygène ?  
Pour chacun d'eux, préciser la constitution du noyau.
- L'un de ces isotopes est souvent utilisé pour « marquer » l'oxygène dans une réaction. Lequel ?  
Comment sa présence dans une molécule est-elle détectée ?
- Expliquer comment « l'oxygène marqué » a été utilisé pour préciser le mécanisme de l'estérification d'un alcool primaire par un acide carboxylique.

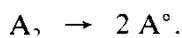
### II. LE DIOXYGÈNE

II.1. **Structure de la molécule.**

- Donner le schéma de Lewis de la molécule de dioxygène.
- Le dioxygène est paramagnétique. Le schéma précédent rend-il compte de cette propriété ?  
Sinon, connaissez-vous une théorie plus élaborée de la liaison chimique conduisant à un schéma plus satisfaisant ?

II.2. **Réactivité vis-à-vis des radicaux organiques.**

Dans les processus d'autoxydation, le dioxygène s'additionne aux radicaux organiques. Du point de vue mécanisme, il s'agit d'une réaction en chaîne, initiée par une substance  $A_2$ , susceptible de fournir des radicaux libres selon :



II.2.1. Donner la formule d'une substance de type  $A_2$  conduisant facilement à des radicaux libres  $A^\circ$ .

II.2.2. On se propose d'étudier la cinétique d'oxydation d'un alcool secondaire, en phase liquide, dont le bilan se traduit par :



L'étude expérimentale a été réalisée à 100 °C en mesurant la vitesse initiale de réaction  $v_0$  pour différentes concentrations en réactifs et initiateur  $A_2$ .

- Pour des pressions en dioxygène, comprises entre 300 et 500 mmHg, les autres paramètres étant maintenus constants, la vitesse  $v_0$  ne varie pas. Que peut-on en conclure ?
- Pour une pression de dioxygène constante (400 mmHg) et une concentration initiale en alcool de  $10 \text{ mol.L}^{-1}$ , la vitesse  $v_0$  dépend de la concentration en initiateur :

$[A_2], \text{mol.L}^{-1}, \dots\dots\dots$	0,015	0,030	0,060	0,090
$10^6 v_0, \text{mol.L}^{-1}, \text{s}^{-1}, \dots\dots$	40,4	57,1	80,8	99,0

Déterminer l'ordre de réaction par rapport à  $A_2$ .

- c. Pour la même pression en dioxygène et une concentration en initiateur de  $0,03 \text{ mol.L}^{-1}$ , la vitesse  $v_0$  dépend de la concentration en alcool :

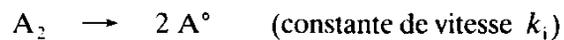
$[\text{Alcool}], \text{ mol.L}^{-1}, \dots\dots$	2	4	6	8	10
$10^6 v_0, \text{ mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}, \dots$	11,5	22,8	34,5	45,6	57,1

Déterminer l'ordre de réaction par rapport à l'alcool.

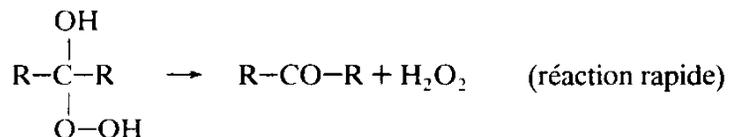
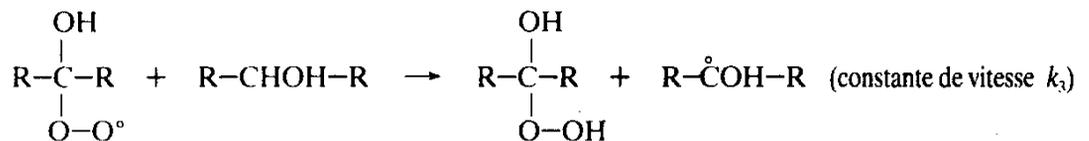
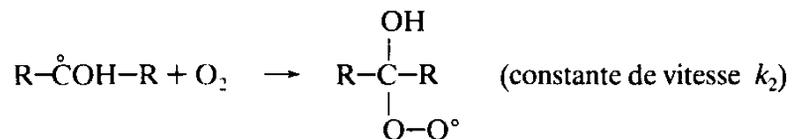
- d. En déduire la valeur de la constante globale de vitesse.

II.2.3. Le mécanisme suivant a été proposé pour rendre compte de ces résultats.

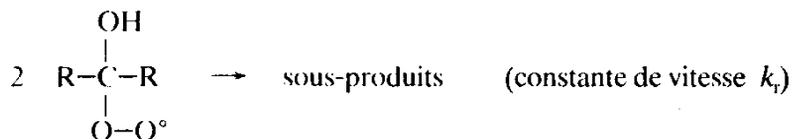
**Étapes d'initiation :**



**Étapes de propagation :**



**Étape de rupture :**



Établir la loi de vitesse de formation de la cétone et montrer qu'elle est en accord avec les résultats de l'étude expérimentale.

- II.2.4. Dans l'industrie, le cumène ou isopropylbenzène  $C_6H_5-CH(CH_3)_2$  est oxydé en hydroperoxyde. Quelle est la formule de ce dernier?

Justifier sa formation.

Qu'obtient-on par traitement de ce composé en milieu acide?

### II.3. Dosage de dioxygène dissous en solution aqueuse (méthode de Winckler).

*Principe du dosage.*

À 50 cm<sup>3</sup> de la solution à doser, on ajoute 0,5 g de chlorure de manganèse (II) puis quelques pastilles de soude. Après dissolution, la solution est abandonnée à l'abri de l'air pendant 30 minutes.

Après addition d'acide sulfurique jusqu'à obtenir  $\text{pH} \cong 0$ , on ajoute 1 g d'iodure de potassium. Après homogénéisation de la solution, celle-ci est dosée à l'aide d'une solution de thiosulfate de sodium de concentration  $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

*Questions relatives au dosage.*

II.3.1. Le potentiel normal du couple  $\text{Mn}^{3+}/\text{Mn}^{2+}$  est  $E^\circ = 1,51 \text{ V}$ . Les produits de solubilité sont respectivement  $2 \cdot 10^{-36}$  pour  $\text{Mn}(\text{OH})_3$  et  $2 \cdot 10^{-13}$  pour  $\text{Mn}(\text{OH})_2$ .

- Calculer le pH de début de précipitation de  $\text{Mn}(\text{OH})_2$  pour une solution d'ions  $\text{Mn}^{2+}$  à la concentration molaire  $0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
- Calculer le pH de début de précipitation de  $\text{Mn}(\text{OH})_3$  pour une solution d'ions  $\text{Mn}^{3+}$  à la concentration molaire  $0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
- Tracer pour  $0 < \text{pH} < 14$  le diagramme redox du système  $\text{Mn}(\text{III})/\text{Mn}(\text{II})$  pour des concentrations  $0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  en espèces dissoutes.
- Tracer sur le même diagramme les droites relatives aux couples  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  (potentiel normal  $E^\circ = 1,23 \text{ V}$  à  $\text{pH} = 0$ ) et  $\text{I}_2/\text{I}^-$  (potentiel normal  $E^\circ = 0,62 \text{ V}$ ).

II.3.2. À l'aide du diagramme potentiel-pH du manganèse établi ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

- Écrire les équations des réactions de la soude sur les ions  $\text{Mn}^{2+}$ , puis du dioxygène dissous dans l'eau sur le composé obtenu. Cette dernière réaction est relativement lente.
- Après passage en milieu acide, écrire l'équation de la réaction qui met en jeu les ions iodures.
- Le potentiel redox normal du couple  $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$  étant  $0,08 \text{ V}$ , montrer que l'on peut doser de l'iode par une solution contenant l'ion thiosulfate. Comment peut-on repérer la fin de cette réaction ?
- Justifier le mode opératoire, notamment l'ordre des manipulations, ainsi que le fait que les réactions écrites ci-dessus sont quantitatives.

II.3.3. Dosage.

- Soit  $x$  la concentration en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$  du dioxygène dissous dans l'eau et  $V$  le volume en  $\text{cm}^3$  de la solution de thiosulfate versée pour obtenir l'équivalence lors du dosage de l'iode. Exprimer la relation entre  $V$  et  $x$ .
- Une expérience a donné  $V = 12,0 \text{ cm}^3$ . Calculer la concentration en dioxygène de la solution initiale.

## B. LES OXYDES

### I. ÉLÉMENTS DE CLASSIFICATION DES OXYDES

#### I.1. Un oxyde basique : l'oxyde de magnésium.

- Comment peut-on expérimentalement démontrer le caractère basique de l'oxyde obtenu par combustion du magnésium dans le dioxygène ?
- L'oxyde de magnésium est un cristal ionique de structure cubique faces centrées. Sachant que la masse volumique du solide est  $\mu = 3\,585 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , calculer la longueur de l'arête de la maille élémentaire.
- Connaissant le rayon ionique de l'ion oxyde  $0,140 \text{ nm}$ , calculer le rayon ionique de l'ion  $\text{Mg}^{2+}$ . Le comparer aux rayons des ions  $\text{Na}^+$  ( $0,097 \text{ nm}$ ) et  $\text{Al}^{3+}$  ( $0,051 \text{ nm}$ ) appartenant à la même période du tableau périodique.
- L'oxyde de magnésium conduit à un hydroxyde peu soluble dans l'eau (produit de solubilité  $K_s = 10^{-11}$ ).

On considère une solution de chlorure de magnésium à  $10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Par addition d'une solution à  $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'ammoniac, on observe la formation d'un précipité tandis qu'il ne se produit rien par addition d'une solution équimolaire en ammoniac et en chlorure d'ammonium. Justifier ( $\text{p}K_a$  du couple  $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3 = 9,2$ ).

#### I.2. Un oxyde acide : le dioxyde de soufre.

La combustion du soufre dans le dioxygène fournit *essentiellement* du dioxyde de soufre.

- Comment montrer le caractère acide de l'oxyde obtenu ?
- La dissolution dans l'eau du mélange obtenu fournit une solution qui précipite par addition d'une solution de chlorure de baryum. Une partie importante du précipité se dissout par addition d'acide chlorhydrique. Expliquer. Quelle est la nature du résidu insoluble ?
- Citer un test, basé sur une réaction d'oxydoréduction, démontrant la présence de dioxyde de soufre. Équation-bilan de la réaction.

#### I.3. Un oxyde amphotère : l'alumine.

L'oxydation de l'aluminium par l'oxygène fournit de l'alumine.

- Pourquoi dit-on que cet oxyde est amphotère ?
- Comment peut-on expérimentalement démontrer le caractère amphotère de l'alumine ? Écrire les équations des réactions mises en jeu.
- Citer un autre oxyde amphotère.

## II. ÉTUDE DES OXYDES D'AZOTE

Les deux principaux oxydes de l'azote sont le monoxyde NO et le dioxyde NO<sub>2</sub>. Ces composés, souvent notés NO<sub>x</sub>, sont à l'origine des pluies acides.

*Données thermodynamiques en phase gazeuse (supposées indépendantes de la température) :*

Composé	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	NO	NO <sub>2</sub>
$\Delta H_f^\circ$ (kJ.mol <sup>-1</sup> )	0	0	90,25	33,20
$S^\circ$ (J.K <sup>-1</sup> .mol <sup>-1</sup> )	205	191,5	210,5	240,0

### II.1. Structures.

- Établir le schéma de Lewis des molécules NO et NO<sub>2</sub>.
- Justifier l'existence du composé N<sub>2</sub>O<sub>4</sub>.

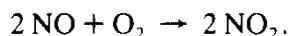
### II.2. Étude de l'équilibre $N_2 + O_2 \rightleftharpoons 2 NO$ .

- Établir la relation  $\ln K = f(T)$  entre la constante d'action de masse et la température.
- En supposant l'équilibre atteint, calculer la fraction molaire en monoxyde d'azote dans de l'air chauffé à 2 500 K.
- Que devrait-il se passer par refroidissement de l'air à 500 K ?

### II.3. Présence de NO<sub>x</sub> dans les gaz d'échappement des moteurs à explosion.

On peut considérer que les conditions décrites au paragraphe 2.b. ci-dessus existent dans les cylindres d'un moteur à explosion. Le pourcentage calculé en NO se retrouve dans les gaz d'échappement que l'on suppose rejetés à 500 K.

- Pourquoi le taux de NO contenu dans les gaz d'échappement est-il sensiblement le même que celui atteint dans les cylindres ?
- Quel est le rôle d'un pot catalytique ? Que contient-il ? Pourquoi ne peut-il être utilisé qu'avec de l'essence sans plomb ?
- Le monoxyde d'azote rejeté dans l'air s'oxyde en NO<sub>2</sub> selon :



Montrer que cette réaction est totale à 500 K.

La constante de vitesse de cette réaction augmente quand la température diminue ; proposer une explication.

- Au contact de la vapeur d'eau atmosphérique, le dioxyde d'azote est à l'origine de la formation d'acide nitrique. Écrire la (les) équation(s)-bilan de la (des) réaction(s) qui se produit(ent).

### II.4. Préciser le mode de préparation industrielle du monoxyde d'azote ; écrire les équations des réactions mises en jeu.

### III. OXYDES UTILISÉS DANS LES GÉNÉRATEURS ÉLECTROCHIMIQUES

#### III.1. Le dioxyde de manganèse : la pile Leclanché.

La pile Leclanché associe les couples  $\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}$  et  $\text{MnO}_2/\text{MnOOH}$ .

##### III.1.1. La pile saline.

- Quelle est la nature de l'électrolyte ?
- Écrire les équations-bilan des réactions se produisant aux électrodes lorsque la pile débite.
- Donner un schéma en coupe précisant la constitution d'une pile saline commerciale.
- Pourquoi cette pile n'est-elle pas rechargeable ?

##### III.1.2. La pile alcaline.

- Quelle est la nature de l'électrolyte ?
- La nature des réactions aux électrodes est-elle modifiée ?
- Justifier les avantages de la pile alcaline par rapport à la pile saline.

#### III.2. Accumulateur au plomb.

Il s'agit d'un « accumulateur acide » : l'électrolyte est une solution d'acide sulfurique (assimilé à un diacide fort) pour laquelle on confondra activité et concentration.

On considère le fonctionnement de l'accumulateur à 25 °C.

##### III.2.1. Étude de l'anode.

Il s'agit d'une lame de plomb qui s'oxyde en sulfate de plomb peu soluble.

Calculer le potentiel d'équilibre de l'anode en fonction de la concentration  $c$  en acide sulfurique (potentiel normal du couple  $\text{Pb}^{2+}/\text{Pb}$   $E^\circ = -0,13 \text{ V}$  ; produit de solubilité du sulfate de plomb  $K_s = 2 \cdot 10^{-8}$ ).

##### III.2.2. Étude de la cathode.

Il s'agit d'une couche de dioxyde de plomb, déposée sur une lame de plomb, qui se réduit en sulfate de plomb.

Calculer le potentiel d'équilibre de la cathode (potentiel normal du couple  $\text{PbO}_2/\text{Pb}^{2+}$   $E^\circ = 1,46 \text{ V}$ ).

##### III.2.3. Fonctionnement.

- Écrire l'équation de la réaction qui se produit lorsque l'accumulateur débite.
- Pourquoi cette réaction ne se produit-elle pas spontanément à la borne positive ?
- Donner l'expression de la f.e.m. à courant nul  $E_0$  en fonction de la concentration en acide sulfurique.
- En régime de décharge intense, la f.e.m. de l'accumulateur est nettement inférieure à  $E_0$ . Pourquoi ?
- Quel est l'intérêt d'utiliser comme électrolyte de l'acide sulfurique relativement concentré ?

##### III.2.4. Recharge de l'accumulateur.

- Écrire l'équation des réactions se produisant aux électrodes lors de la charge.
- Quelle est la tension minimum à appliquer aux bornes d'un élément pour effectuer la charge ?
- En fin de charge, on observe des dégagements gazeux aux électrodes. Quelle est la nature de ces gaz ? Par quelles réactions sont-ils produits ? Pourquoi n'observe-t-on pas ces dégagements gazeux en début de charge ?

## C. OXYDORÉDUCTION EN CHIMIE ORGANIQUE

### I. OXYDATION DE L'ÉTHANOL EN PHASE GAZEUSE

Données en phase gazeuse

Composé	$\Delta H_f^\circ$ (kJ.mol <sup>-1</sup> )	$S^\circ$ (J.K <sup>-1</sup> .mol <sup>-1</sup> )
CH <sub>3</sub> CH <sub>2</sub> OH	- 235,1	282,7
CH <sub>3</sub> CHO	- 166,2	250,3
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	52,3	219,5
H <sub>2</sub> O	- 241,8	188,7
H <sub>2</sub>	0	130,6
O <sub>2</sub>	0	205,0

#### I.1. Oxydation à l'air.

Les vapeurs d'éthanol peuvent être oxydées en éthanal par le dioxygène de l'air.

a. Écrire l'équation-bilan de la réaction.

Calculer la variation d'enthalpie libre standard à 300 K. Conclusion.

b. Décrire le protocole de l'expérience dite de la lampe sans flamme.

Qu'observe-t-on au niveau du catalyseur ? Pourquoi ?

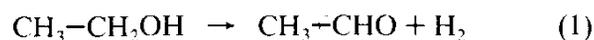
c. Pour la mise en évidence de l'éthanal, citer :

- un test caractéristique des dérivés carbonylés ;
- un test caractéristique des aldéhydes.

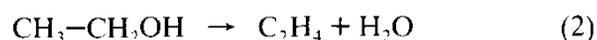
Écrire à chaque fois les équations des réactions mises en jeu.

#### I.2. Autres réactions.

La transformation de l'éthanol gaz en éthanal peut aussi s'effectuer par déshydrogénation :



Mais cette réaction peut être en concurrence avec une déshydratation :



a. Pour chacune de ces réactions, *calculer et justifier* le signe de la variation d'enthalpie standard  $\Delta H^\circ$  et de la variation d'entropie standard  $\Delta S^\circ$ .

b. Pourquoi faut-il chauffer pour réaliser ces transformations ?

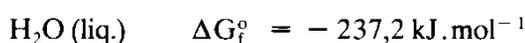
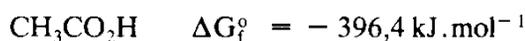
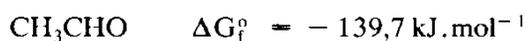
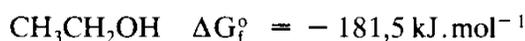
c. Pour chacune des deux réactions, citer un catalyseur approprié et *justifier* son choix.

d. Citer un test de mise en évidence de l'éthylène ; écrire l'équation de la réaction mise en jeu.

## II. OXYDATION DE L'ÉTHANOL EN SOLUTION AQUEUSE

Données :

Enthalpie libre standard de formation en solution aqueuse à 25 °C (état standard : solution à 1 mol.L<sup>-1</sup> sauf pour l'eau liquide).



Potentiel normal à pH = 0 : couple  $\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}$   $E^\circ = 1,52 \text{ V}$ .

### II.1. Couple éthanal/éthanol.

- Calculer, à pH = 0, le potentiel normal du couple éthanal/éthanol.
- Montrer qu'en milieu acide le permanganate de potassium est capable d'oxyder l'éthanol en éthanal. Écrire l'équation-bilan de la réaction.

### II.2. Couple acide éthanoïque-éthanal.

- Calculer, à pH = 0, le potentiel normal du couple acide éthanoïque/éthanol.
- Montrer qu'en milieu acide les ions  $\text{MnO}_4^-$  peuvent oxyder l'éthanal en acide éthanoïque; écrire l'équation de la réaction observée.
- Que peut-on conclure quant à la stabilité thermodynamique de l'éthanal en solution aqueuse ? Quelle réaction devrait-on observer ?
- Peut-on oxyder sélectivement l'éthanol en éthanal à l'aide des ions permanganate ?

## III. OXYDATION DES ALCÈNES

### III.1. Oxydation de l'éthylène par le dioxygène.

- Oxydation en éthanal.*  
Écrire l'équation-bilan de la réaction.  
Quel est le catalyseur utilisé ? Quel est son mécanisme d'action ?
- Oxydation en époxyde ou oxyde d'éthylène.*  
Écrire l'équation-bilan de la réaction.  
Indiquer la nature du catalyseur utilisé.  
Quel est l'intérêt industriel de l'oxyde d'éthylène ?

### III.2. Oxydation d'un butène par le permanganate de potassium.

- III.2.1. L'action d'une solution diluée et froide de  $\text{KMnO}_4$  sur le but-2-ène conduit à un diol.
  - L'isomère Z fournit un diol non dédoublable en inverses optiques. Représenter ce composé en projection de Newman.
  - Détailler le mécanisme de la réaction en tenant compte de l'aspect stéréochimique.
  - Préciser la stéréochimie du diol obtenu à partir du E-but-2-ène.
- III.2.2. Qu'obtient-on par action d'une solution concentrée et chaude de  $\text{KMnO}_4$  sur le but-2-ène ?

**SESSION DE 1994****concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques**

option : physique

épreuve C  
problème de physique**Durée : 6 heures**

*L'usage de calculatrices électroniques de poche – y compris calculatrices programmables et alphanumériques – à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*Tout document interdit.*

Les deux problèmes, qui traitent de différents aspects des instabilités mécaniques, sont largement indépendants. Cependant, la résolution des questions nécessite la lecture de l'ensemble de l'énoncé qui les précède.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

## PROBLÈME A

On rappelle que l'équation de Lagrange d'un système mécanique, relative à la coordonnée généralisée  $\xi$ , s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial L}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial \xi},$$

où  $L$  est la fonction de Lagrange du système, différence entre son énergie cinétique et son énergie potentielle, et  $F$  sa fonction de dissipation.

### UN EXEMPLE DE TRANSITION MÉCANIQUE

On considère une bille sphérique de rayon  $r$ , creuse, constituée d'une feuille rigide homogène de masse  $m$  et d'épaisseur  $\varepsilon$  petite. Elle est soumise au champ de pesanteur terrestre.

1. Elle roule sans glisser ni dissiper d'énergie, sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport au plan horizontal.
  - a. Calculer son moment d'inertie par rapport à un axe passant par son centre.
  - b. Calculer le lagrangien de la bille lorsqu'elle descend librement le plan incliné.
  - c. En déduire la loi de son mouvement.
2. La bille roule maintenant sur un rail rectiligne incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport au plan horizontal (fig. A1). Il guide la bille par sa géométrie en forme de dièdre droit, orienté symétriquement par rapport à la verticale, l'arête vers le bas (fig. A2). Déterminer à nouveau la loi du mouvement de la bille.
3. Le rail précédent est courbé en forme de cercle dans son plan de symétrie vertical, de sorte que le centre de la bille décrit une trajectoire circulaire de rayon  $R$ . De plus, ce rail en anneau est monté sur un axe vertical passant par son centre et tourne à vitesse angulaire  $\omega$  uniforme (fig. A3).
  - a. Calculer l'énergie cinétique de la bille par rapport au référentiel terrestre.
  - b. Montrer que l'équation différentielle qui régit la position angulaire  $\theta$  de la bille sur le rail en fonction du temps s'écrit :

$$\alpha \ddot{\theta} = \left( \omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right) \sin \theta,$$

$\alpha$  désignant une constante numérique que l'on précisera.

- c. Discuter les positions d'équilibre possibles de la bille en fonction de la vitesse angulaire de rotation du rail autour de l'axe vertical. Montrer qu'au-dessus d'une vitesse de rotation seuil,  $\omega_0$ , la position angulaire  $\theta = 0$  devient instable.
  - d. Montrer que la transition mécanique qui apparaît à la pulsation  $\omega = \omega_0$  correspond à une bifurcation dans l'espace des états stables du système et que, de plus, elle est caractérisée par une réduction de symétrie dudit système.
4. On étudie la dynamique du mouvement de la bille après qu'elle a été un peu écartée de sa position d'équilibre.
    - a. Montrer qu'aux petites amplitudes ce mouvement est oscillatoire sinusoïdal. Déterminer, par un calcul au premier ordre, le carré de sa pulsation,  $\Omega^2$ , en fonction de l'écart au seuil  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ , lorsque  $\Delta\omega < 0$ , c'est-à-dire avant la transition.

- b. Même question, après la transition ( $\Delta\omega > 0$ ).
- c. Représenter graphiquement ces résultats, et les comparer.
5. Le rail sur lequel roule la bille est recouvert d'un film d'huile. Il en résulte une dissipation visqueuse lors du déplacement de la bille, que l'on peut exprimer par la fonction de dissipation :

$$F = \frac{1}{2} \eta v^2,$$

où  $\eta$  est une constante de viscosité, et  $v$  la vitesse du déplacement relatif du centre de la bille par rapport au rail.

- a. Établir la nouvelle équation différentielle qui détermine le mouvement de la bille sur le rail. Discuter les conditions dans lesquelles le terme inertiel de cette équation est négligeable. On suppose par la suite que ces conditions sont réalisées.
- b. Discuter rapidement l'équilibre de la bille sur le rail en rotation en fonction de  $\omega$ . Montrer que le mouvement de retour à l'équilibre, après que la bille en a été légèrement écartée, est purement amorti et caractérisé par un temps de relaxation  $\tau$ .
- c. Déterminer, par un calcul au premier ordre, l'inverse du temps de relaxation précédent,  $\frac{1}{\tau}$ , en fonction de l'écart au seuil  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ , de part et d'autre de la transition.
- d. Représenter graphiquement ces résultats, ainsi que la limitation imposée par la condition 5.a., et les comparer.

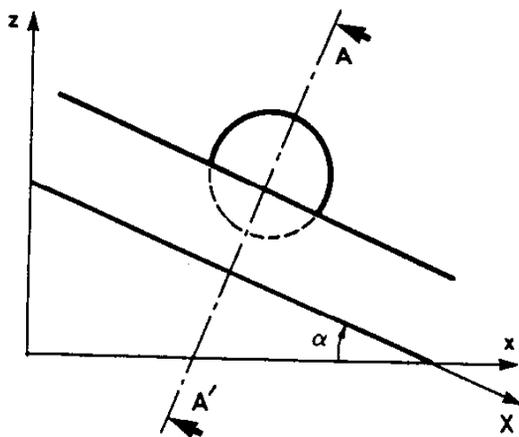
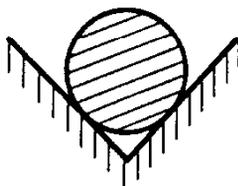


Fig. A1



coupe AA'

Fig. A2

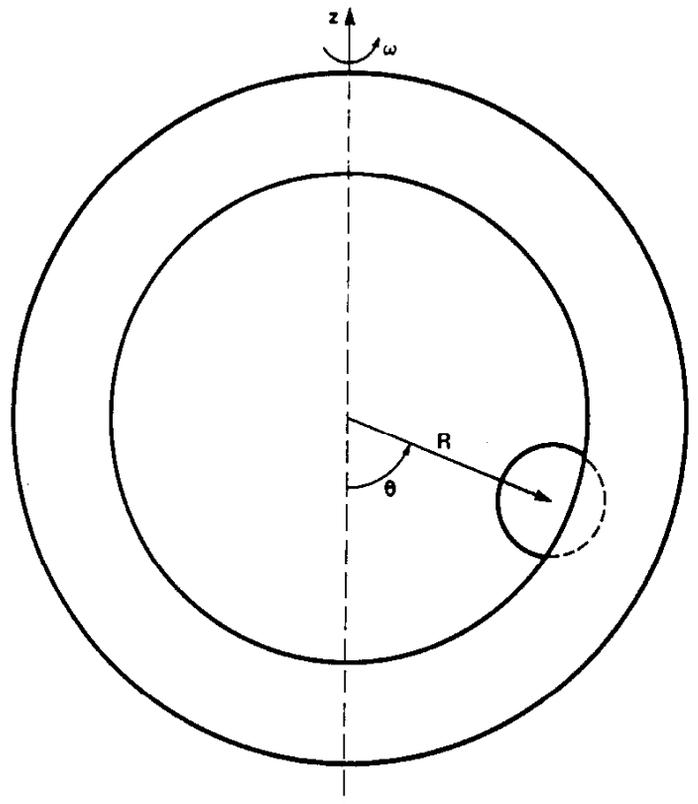


Fig. A3

## PROBLÈME B

On rappelle qu'une fonction  $f(x)$  définie et intégrable sur l'intervalle  $I$  de longueur  $L$  peut se décomposer en série de Fourier sous la forme :

$$f(x) = \sum_q f_q e^{jqx}$$

où  $j^2 = -1$ ,  $q = \frac{2n\pi}{L}$ ,  $n$  étant entier relatif, et :

$$f_q = \frac{1}{L} \int_I f(x) e^{-jqx} dx.$$

De plus,  $f(x)$  et  $f_q$  vérifient l'égalité de Bessel-Parseval :

$$\frac{1}{L} \int_I |f(x)|^2 dx = \sum_q |f_q|^2.$$

### QUELQUES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES SYSTÈMES FEUILLETÉS

Le système que nous considérons dans ce problème est constitué de couches parallèles superposées sans défauts d'empilement, en contact les unes avec les autres. Les couches sont transparentes à la lumière, de tenseur diélectrique  $\epsilon_{\alpha\beta}$  aux fréquences optiques. Un bon exemple d'un tel système, et qui est étudié plus précisément ici, est donné par la phase smectique A des cristaux liquides. Dans cette phase, les molécules en forme de bâtonnets de diamètre moyen  $\Phi = 0,5$  nm, pour une longueur  $e_0 = 3$  nm environ, sont réparties en couches successives, perpendiculairement à celles-ci, c'est-à-dire parallèlement au vecteur unitaire  $\vec{n} [n_x, n_y, n_z]$  normal aux couches smectiques. L'épaisseur des couches smectiques au repos correspond à la longueur des molécules  $e_0$  (fig. B1). Les molécules sont arrangées à l'intérieur des couches selon un réseau localement hexagonal compact (fig. B2).

Le système liquide cristallin est étudié dans un repère cartésien de coordonnées  $x, y, z$ .

#### I. Densité d'énergie élastique d'un smectique

1. Nous considérons tout d'abord que les couches smectiques sont planes, perpendiculaires à l'axe  $\vec{z}$ . Elles donnent lieu à une pression de rappel élastique, lorsqu'elles sont soumises à une compression (ou une dilatation) uniaxiale appliquée selon l'axe  $\vec{z}$ , que l'on peut écrire :

$$p = -B(e - e_0) / e_0 \quad (1)$$

où  $B$  est une constante.

- a. Donner des arguments pour justifier l'expression (1). Préciser le signe de la constante  $B$ . Donner les limites de validité de cette expression.
- b. Exprimer l'énergie élastique alors emmagasinée par unité de volume par le système smectique.
- c. On appelle  $u(z)$  le déplacement vertical (selon l'axe  $\vec{z}$ ) des couches smectiques par rapport à leur position de repos. Écrire la densité d'énergie élastique de compression  $f_b$  en fonction de  $\frac{\partial u}{\partial z}$ .
- d. En admettant qu'une dilatation de 100 % déstabilise la phase smectique, et que son énergie de cohésion par molécule est de l'ordre de  $k_B T$ , où  $T = 300$  K est la température ambiante et  $k_B$  est la constante de Boltzmann, donner une estimation littérale, puis numérique, de la constante élastique  $B$ .

2. Les couches smectiques ne sont plus maintenant considérées comme planes, mais de forme localement cylindrique de courbure  $c$  ( $c = \frac{1}{R}$ , où  $R$  est le rayon de courbure de la directrice du cylindre de révolution localement tangent), leurs génératrices étant parallèles à l'axe  $y$  (fig. B3). Cette déformation implique, en plus d'une éventuelle densité d'énergie de compression (question précédente), une densité d'énergie élastique de courbure des couches smectiques :

$$f_c = \frac{1}{2} K c^2. \quad (2)$$

- Donner des arguments pour justifier l'expression (2). Préciser le signe de  $K$ . Donner les limites de validité de cette expression.
- Exprimer  $f_c$  en fonction des dérivées de  $u(x, z)$ .
- On appelle  $\theta$  l'angle local de la normale aux couches smectiques  $\vec{n}$  avec l'axe  $\vec{z}$ . Moyennant une approximation que l'on précisera, exprimer  $f_c$  en fonction de la dérivée de  $\theta$ . Quelle est la signification physique de cette expression ?
- Donner une expression équivalente de  $f_c$  écrite avec les composantes de  $\vec{n}$ . En déduire que la densité d'énergie élastique orientationnelle comporte en réalité un terme supplémentaire et peut s'écrire :

$$f_k = \frac{1}{2} K \left[ \left( \frac{\partial n_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial n_x}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Quelle est l'hypothèse sous-jacente à cette expression ? Décrire, en s'aidant de schémas, les déformations correspondant à ces deux termes.

- On pose  $\lambda = \sqrt{\frac{K}{B}}$ . Montrer que  $\lambda$  a la dimension d'une longueur. Justifier que  $\lambda$  est de l'ordre de  $e_0$ .  
En déduire l'ordre de grandeur de  $K$ , si  $\lambda = e_0$ .

3. Les couches smectiques sont à nouveau supposées planes, mais leur normale  $\vec{n}$  est inclinée de l'angle  $\theta$  par rapport à l'axe  $\vec{z}$ .

- Les couches étant libres de toute contrainte, calculer la dilatation apparente  $\frac{\partial u}{\partial z}$  qui résulte de l'inclinaison  $\theta$ .
- Donner l'expression de la dilatation réelle d'un échantillon comprimé ou dilaté, compte tenu de l'inclinaison  $\theta$ , en fonction de  $\frac{\partial u}{\partial z}$  et  $\theta$ . En déduire une expression de la densité d'énergie élastique de compression  $f_b$  indépendante du choix du référentiel dans lequel elle est calculée.
- Montrer que la densité d'énergie élastique totale d'un échantillon smectique déformé de manière cylindrique parallèlement à l'axe  $y$ , et tel que l'inclinaison  $\theta$  reste partout petite, peut s'écrire.

$$f = f_b + f_k = \frac{1}{2} B \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \lambda^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4)$$

- À quelle condition la correction de dilatation apparente devient-elle inutile ? On admettra qu'alors des déformations cylindriques d'axes différents parallèles au plan  $xy$ , superposées dans le système smectique, contribuent indépendamment à son énergie élastique. En déduire une expression de la densité d'énergie élastique de compression  $f_b$ , valable indépendamment du choix des axes dans lesquels elle est calculée.

## II. Distance de pénétration d'une déformation des couches smectiques

Le cristal liquide smectique est déposé en une épaisseur qu'on pourra considérer comme infinie, sur un support solide de surface  $S$  présentant une rugosité aléatoire  $u(x, y, z = 0)$  (fig. B4). Les couches smectiques sont disposées parallèlement au support, plan en première approximation, et d'équation  $z = 0$ . On étudie, dans cette partie, l'effet de la rugosité du substrat sur la déformation des couches smectiques dans la masse de l'échantillon.

1. Montrer que, sous certaines conditions qu'on précisera, l'étude des déformations du cristal liquide smectique, provoquées par la rugosité naturelle d'un substrat quelconque, peut se ramener à l'étude de l'effet d'une rugosité sinusoïdale :

$$u(x, y, z = 0) = u_0 \cos qx. \quad (5)$$

2. On suppose que cette condition est réalisée, et que la rugosité est décrite par l'équation (5) ci-dessus.

- a. Écrire l'énergie élastique totale  $F$  de l'échantillon smectique.
- b. Montrer que, dans les conditions de la question 1. précédente, le déplacement des couches smectiques  $u(x, z)$  qui minimise l'énergie élastique totale de l'échantillon  $F$  est solution de l'équation aux dérivées partielles d'Euler-Lagrange du système :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \lambda^2 \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} \right). \quad (6)$$

On envisagera pour cela un déplacement des couches  $u'(x, z) = u(x, z) + \delta u(x, z)$ , voisin du déplacement à l'équilibre  $u(x, z)$ , tel que  $\delta u = 0$  aux frontières du système, et on écrira qu'il correspond à une variation d'énergie  $\delta F$  nulle au premier ordre.

- c. Justifier que le déplacement des couches smectiques  $u(x, z)$  est constant à l'infini.
  - d. On cherche une solution de la forme  $u(x, z) = v(x) w(z)$ . Montrer que l'équation d'Euler-Lagrange précédente devient alors une équation différentielle à variables séparées. La résoudre. Justifier que la solution trouvée est bien la solution du problème. Décrire la déformation des couches smectiques  $u(x, z)$  correspondante. Montrer qu'elle possède une distance caractéristique, ou distance de pénétration de la déformation  $\ell$ .
  - e. Préciser et discuter pratiquement dans quelles limites l'approximation linéaire faite à la question 1. est valable.
  - f. Calculer numériquement  $\ell$  pour une rugosité sinusoïdale du substrat de période  $\Lambda = 3 \mu\text{m}$ . On prendra  $\lambda = e_0$  comme en I. 2. e. Calculer également l'amplitude maximale de cette rugosité pour que l'approximation de la question 1. soit valable.
3. Le système smectique est maintenant limité à l'abscisse  $z = d$  par une paroi solide parfaitement lisse, en plus de la surface rugueuse à l'abscisse moyenne  $z = 0$  des questions précédentes (fig. B5).
    - a. Préciser les conditions imposées aux limites pour la variable « déplacement des couches smectiques »  $u(x, z)$ .
    - b. Calculer la déformation de l'échantillon smectique lorsque son épaisseur  $d$  est égale à  $N e_0$ , où  $N$  est le nombre de ses couches.
    - c. Montrer qu'il existe deux géométries-limites différentes pour la déformation de l'échantillon, selon son épaisseur  $d$ , ou plus exactement selon que  $q$  est plus petit ou plus grand qu'un vecteur d'onde critique  $q_c$  que l'on précisera.
    - d. Calculer l'énergie élastique de distorsion par unité de surface de l'échantillon dans chacun de ces deux cas. Les comparer. Justifier le rapport trouvé entre les énergies élastiques des deux cas types précédents.

4. On envisage, dans cette question, différents types de systèmes en couches déposés sur le même substrat rugueux que précédemment, mais possédant maintenant des épaisseurs de couches  $e_0$ , et donc des constantes  $\lambda$  différentes.
- Montrer que, dans la configuration semi-infinie de la question 2., la déformation due à la rugosité de surface présente deux régimes de variation de  $\ell$ , en fonction de  $\lambda$ , différents.
  - Montrer que, dans la configuration confinée de la question 3., avec une paroi lisse à l'abscisse  $z = d$ , les deux régimes précédents sont caractérisés par des vecteurs d'onde critiques  $q_c$  présentant des variations différentes en fonction de  $\lambda$ . Quelles sont les propriétés physiques des systèmes correspondant à ces deux régimes ?
  - Donner, en fonction de  $B$ ,  $K$ ,  $q$  et  $u_0$ , la densité d'énergie élastique de déformation par unité de surface de l'échantillon, pour ces deux régimes et pour les deux types de déformation envisagés à la question 3. Discuter ces résultats. Préciser la configuration des couches du système dans chacun des cas.

### III. Tension superficielle d'un système smectique

- D'une manière générale, la surface d'un liquide isotrope et homogène, en contact avec l'air, possède une énergie  $A$  par unité de surface.
  - Expliquer l'origine physique de cette énergie superficielle. Justifier qu'elle est positive.
  - Calculer, pour une unité de surface du liquide, l'augmentation d'énergie qui résulte d'une ondulation de petite amplitude de sa surface libre  $u(x, y, z = 0) = u_0 \cos qx$ .
  - Qu'en est-il pour une déformation de petite amplitude, mais de forme quelconque, de la surface libre ?
- On considère maintenant le cas d'un échantillon de cristal liquide smectique de grande épaisseur, dont la première couche est parallèle à l'interface avec l'air. Cet interface possède une énergie  $A$  par unité de surface, lorsqu'il est plan.
  - Calculer l'énergie effective mise en œuvre par unité de surface lors d'une petite déformation sinusoidale de la surface libre de ce système smectique. On fera les approximations nécessaires en supposant  $\lambda q \ll 1$ .
  - Calculer littéralement puis numériquement l'augmentation de tension superficielle  $\delta A$  qui résulte de la déformation des couches smectiques, pour  $\lambda = e_0$  et  $B = 1,3 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$ .
  - Qu'en est-il lorsque la surface libre du cristal liquide smectique est déformée de manière quelconque, avec une petite amplitude ?

### IV. Flambement des couches

Le cristal liquide smectique est maintenant placé entre deux lames de verre, lisses, planes, parallèles au plan  $xy$ , et situées aux abscisses  $z = 0$  et  $z = d = Ne_0$ , où  $N$  est entier positif. La dimension des lames de verre est grande par rapport à toutes les autres dimensions du problème. Dans la configuration initiale, les couches smectiques sont disposées parallèlement aux lames. Puis la lame d'abscisse  $z = d$  est reculée de  $\delta$ ,

de sorte qu'il en résulte une dilatation relative de l'échantillon de cristal liquide  $X = \frac{\delta}{d}$ , très inférieure à l'unité.

- 1.a. Montrer que le déplacement des couches  $u(x, y, z)$  peut alors s'écrire sous la forme d'un terme de dilatation uniforme des couches et d'un développement en série de Fourier :

$$u(x, y, z) = Xz + \sum_{n, \vec{q}} U_{n, \vec{q}} \sin(k_n z + \phi_n) \exp j \vec{q} \cdot \vec{r}, \quad (7)$$

où  $\vec{r} = [x, y]$  et  $\vec{q} = [q_x, q_y]$ . Déterminer les valeurs de  $\phi_n$  et  $k_n$ .

- b. On limite le développement de Fourier à un seul terme sinusoidal :

$$u(x, z) = Xz + u_1 \sin(k_1 z + \phi_1) \cos qx.$$

Justifier la validité de cette démarche.

- c. Calculer l'énergie élastique correspondante par unité de surface de l'échantillon. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme d'un développement limité à l'ordre 2 en  $u_1$ , de la forme, pour une surface d'aire  $S$  de l'échantillon :

$$F = \frac{1}{2} B d S \left\{ X^2 + \frac{u_1^2}{4} [k_1^2 - X q^2 + \lambda^2 (q^4 + k_1^2 q^2)] \right\}.$$

- 2.a. Montrer qu'il existe une dilatation-seuil  $X_s$  au-dessus de laquelle le système smectique ondule effectivement. Discuter physiquement ce résultat.
- b. Justifier le terme de brisure de symétrie généralement utilisé pour qualifier cette transition mécanique de flambement des couches.
- c. Calculer le vecteur d'onde de l'ondulation des couches au seuil  $q_s$ , et le comparer au vecteur d'onde critique  $q_c$  introduit dans la partie II.
- d. Calculer la dilatation-seuil  $X_s$  et le recul  $\delta_s$  de la lame de verre correspondant.
- e. Montrer qu'avec des dilatations plus importantes appliquées suffisamment rapidement, on peut exciter d'autres modes d'ondulation de la structure, qui ne se déduisent pas par simple continuité du mode précédent. Donner les valeurs du vecteur d'onde  $q_{s2}$  et du recul  $\delta_{s2}$ , au seuil du second mode d'ondulation de l'échantillon.
- f. En reprenant les valeurs numériques utilisées dans la partie I., et pour une épaisseur d'échantillon  $d = 300 \mu\text{m}$ , calculer  $\delta_s$ ,  $q_s$ ,  $\delta_{s2}$  et  $q_{s2}$ .
3. On considère maintenant des dilatations légèrement supérieures au seuil calculé à la question 2.d. précédente. On admet que l'ondulation produite reste sinusoidale, et de vecteur d'onde égal au premier vecteur d'onde apparu.
- a. Justifier ces approximations.
- b. Montrer que la formule (4) est une expression suffisamment approchée de la densité d'énergie élastique des couches smectiques trouvée à la question I.3.b., pour permettre le calcul de l'amplitude d'ondulation des couches  $u_1$ , au premier ordre de l'écart relatif au seuil  $\frac{\delta - \delta_s}{\delta_s}$ .
- c. Calculer l'amplitude de l'ondulation des couches  $u_1$ , qui apparaît lors d'une dilatation très légèrement supérieure au seuil.
- d. En déduire l'ordre de la transition de flambement des couches.
- e. Préciser les limites de validité du calcul précédent (3.b.) en termes de dilatation relative  $X$ .
- f. Calculer dans cette limite l'énergie élastique de compression de l'échantillon, ainsi que ses énergies élastiques orientationnelles et totales.
- g. Discuter la transition de flambement sur le plan énergétique.
- h. Peut-on dire comment est déterminée la phase de l'ondulation des couches smectiques apparue au-dessus du seuil de flambement ?

## V. Dynamique de l'ondulation des couches smectiques

Le système smectique est dans la configuration décrite dans la partie IV précédente. Il est soumis à une dilatation relative  $X$ .

1. Le déplacement des couches smectiques étant écrit sous la forme du développement (7), montrer qu'au plus bas ordre des composantes de Fourier  $U_{n,\vec{q}}$ , l'énergie élastique  $F$  de l'échantillon est la somme d'un terme

proportionnel à  $X^2$  et d'une forme quadratique  $\sum_{n,\vec{q}} \alpha_{n,\vec{q}}(d, X) |U_{n,\vec{q}}|^2$  où, comme la notation l'indique,

$\alpha_{n,\vec{q}}(d, X)$  est une fonction de  $n$ ,  $\vec{q}$ ,  $d$  et  $X$ . En déduire que, dans ces conditions, une déformation quelconque des couches smectiques peut être considérée comme la superposition linéaire de modes de déformation indépendants.

2. On suppose que les conditions de découplage des modes sont remplies.

- Rappeler la relation qui existe entre le déplacement des couches  $u$  et leur inclinaison  $\theta$ . Exprimer l'amplitude de déplacement des couches  $U_{n,\vec{q}}$  et l'énergie élastique  $F_{n,\vec{q}}$  du mode de déformation  $(n,\vec{q})$ , en fonction de son amplitude d'inclinaison  $\Theta_{n,\vec{q}}$ . Comparer  $\Theta_{n,\vec{q}}$  à la composante de Fourier de l'inclinaison des couches de même vecteur d'onde.
- Rappeler le théorème d'équipartition de l'énergie. L'utiliser pour en déduire l'amplitude quadratique moyenne d'inclinaison des modes de déformation des couches, excités par l'agitation thermique.
- Étudier et représenter graphiquement les variations de cette amplitude (ou du carré de son inverse), en fonction de la dilatation relative  $X$  du système smectique. Que se passe-t-il s'il s'agit en réalité d'une compression ? Expliquer ces variations avec des arguments physiques.
- Discuter la transition de flambement du point de vue de l'amplitude des modes de déformation des couches smectiques.

3. La dynamique du cristal liquide smectique est régie principalement par la viscosité de rotation et par l'élasticité étudiée ci-dessus, la contribution inertielle étant négligeable. Concrètement, la viscosité de rotation se manifeste par une densité de couple visqueux  $\vec{\gamma}$ , proportionnelle et opposée à la vitesse angulaire de rotation  $\vec{\omega}$  de la normale aux courbes  $\vec{n}$ . Elle s'écrit :

$$\vec{\gamma} = -\eta \vec{\omega}, \quad (9)$$

où  $\eta$  est la constante de viscosité.

- Exprimer la densité de puissance dissipée dans l'échantillon en fonction de la dérivée de l'inclinaison des couches smectiques par rapport au temps.
- Calculer la puissance dissipée dans l'échantillon en fonction des composantes de Fourier de la vitesse angulaire de rotation des couches smectiques.
- Calculer, par unité de temps, la variation d'énergie élastique qui en résulte. En déduire l'équation différentielle que vérifie l'ensemble des composantes de Fourier de l'inclinaison des couches.
- En regroupant les termes de même vecteur d'onde  $\vec{q}$ , et en utilisant l'indépendance des composantes de Fourier entre elles, déduire l'équation différentielle que vérifie individuellement chaque terme  $\Theta_{n,\vec{q}}$ .
- Déterminer la loi de retour à l'équilibre d'un mode de déformation momentanément imposé au système smectique. Préciser le temps de relaxation  $\tau$  qui caractérise cette loi.
- Étudier les variations de cette constante de temps  $\tau$  en fonction de la dilatation relative  $X$  du système smectique. Utiliser une représentation graphique, et expliquer physiquement le résultat.
- Discuter brièvement la transition de flambement du point de vue de la constante de temps des modes de déformation des couches smectiques.
- Répondre plus précisément à la question IV.3.h. précédente.
- Peut-on prédire, par analogie avec le problème A, les variations du temps de relaxation du mode d'ondulation des couches smectiques ( $n = 1, q = q$ ) en fonction de la dilatation relative  $X$ , au-dessus du seuil de flambement ?

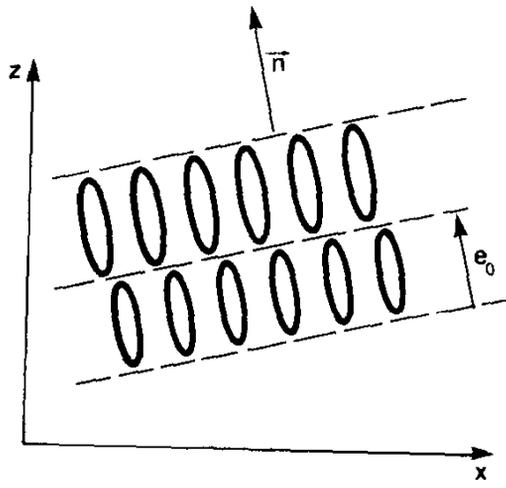


Fig. B1

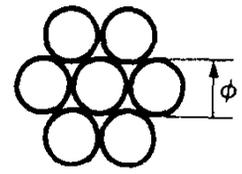


Fig. B2

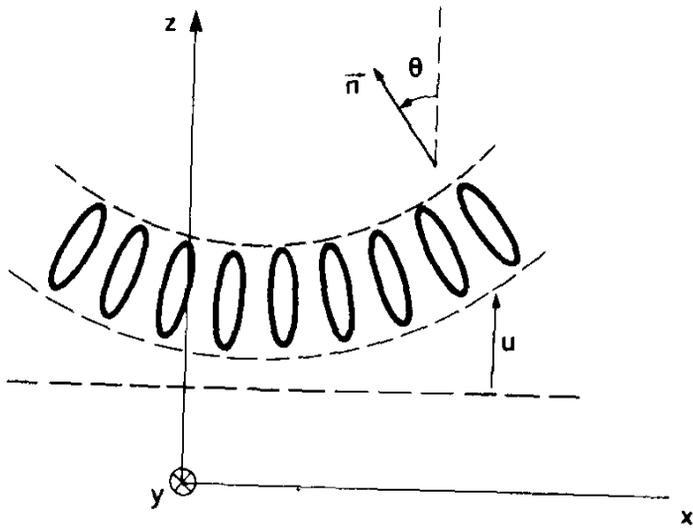


Fig. B3

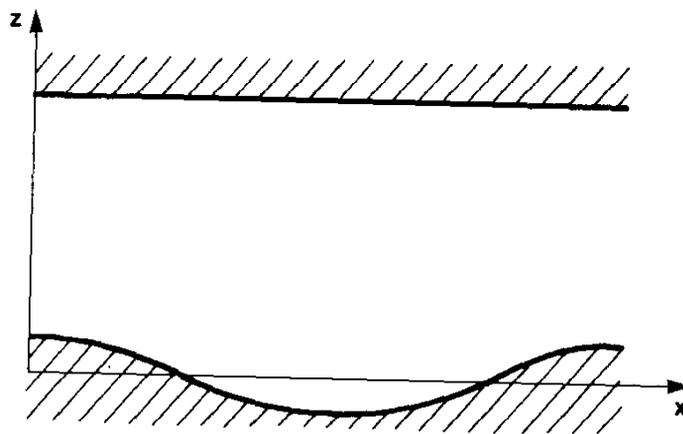


Fig. B5

**SESSION DE 1994**

---

---

**concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés**

---

---

**section : sciences physiques**

option : chimie

épreuve A  
composition de chimie**Durée : 5 heures****MATÉRIELS À PRÉVOIR :**

- *Calculatrice de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*
- *L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Les candidats composeront sur du papier quadrillé 5 × 5*



On s'intéresse, dans cette épreuve, à l'établissement d'une liaison hydrogène entre deux composés puis à son cas limite, c'est-à-dire au transfert de proton d'un composé vers un autre.

Le sujet comporte quatre parties indépendantes. De plus, à l'intérieur de chaque partie de nombreuses questions sont indépendantes.

Les graphes et les schémas demandés seront faits en utilisant le quadrillage normal de la copie.

## PARTIE A LA LIAISON HYDROGENE

### I. INTRODUCTION.

I.1.- La figure 1 ci-dessous donne l'évolution des températures d'ébullition (sous la pression atmosphérique normale) des composés hydrogénés des éléments des colonnes IV A, V A et VI A du tableau périodique, en fonction du numéro de la période à laquelle appartient l'élément.

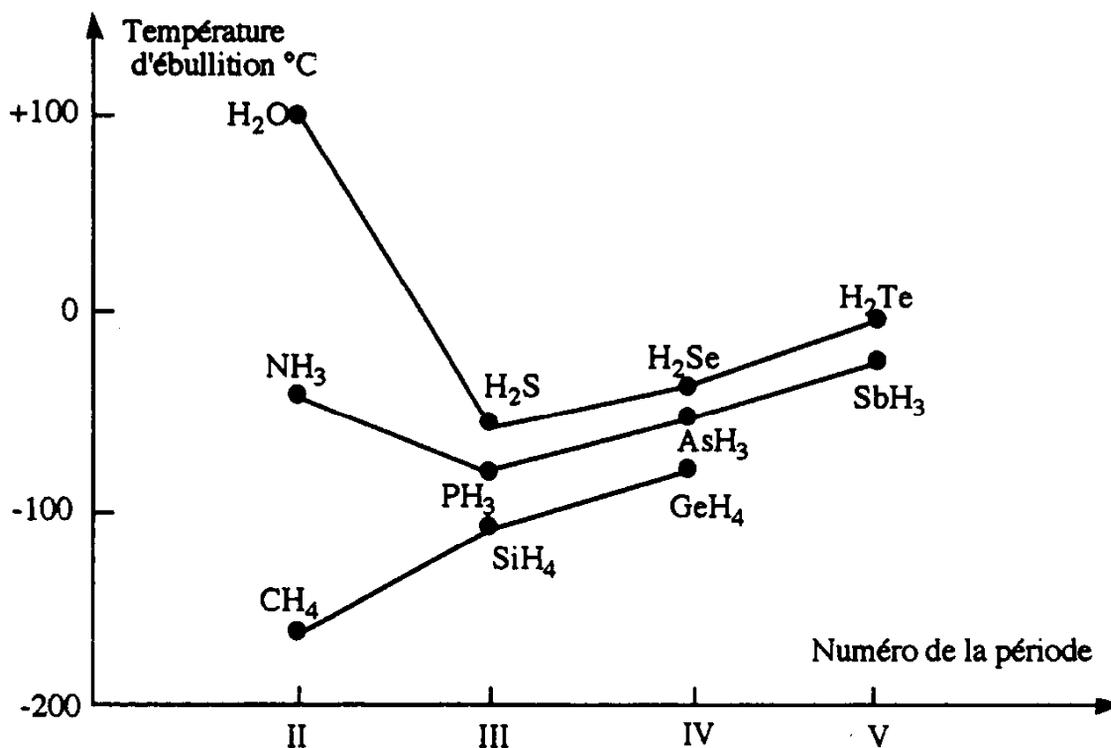


Figure 1

I.1.1.- Justifier l'évolution observée pour les composés hydrogénés des éléments de la colonne IV A.

I.1.2.- Analyser les phénomènes observés pour les composés hydrogénés des éléments de la colonne V A, puis pour ceux de la colonne VI A. Etablir une comparaison entre ces deux familles.

I.2.- Présenter la liaison hydrogène de façon aussi complète que possible (une page au maximum) : conditions d'existence, modèle théorique, énergie, conséquences ....

## II. LIAISON HYDROGENE ET ACIDITE.

Le tableau I ci-dessous rassemble les  $pK_a$  de quelques diacides carboxyliques.

Tableau I

	$pK_{a1}$	$pK_{a2}$
acide maléique (acide (Z)-but-2-ènedioïque)	2.0	6.3
acide fumarique (acide (E)-but-2-ènedioïque)	3.0	4.4
acide succinique (acide butanedioïque)	4.2	5.6
acide adipique (acide hexanedioïque)	4.4	5.4

II.1.- Justifier la différence observée entre l'ordre de grandeur des  $pK_{a1}$  de ces diacides et le  $pK_a$  de l'acide éthanoïque (acétique;  $pK_a = 4,7$ ).

II.2.- Quel devrait être l'écart entre les deux  $pK_a$  pour un diacide dont les deux groupements acides seraient très éloignés l'un de l'autre ?

II.3.- Comparer les valeurs des  $pK_{a1}$  et  $pK_{a2}$  de l'acide succinique et de l'acide adipique; justifier les évolutions observées.

II.4.- Même question dans le cas de l'acide maléique et de l'acide fumarique.

## III. LIAISON HYDROGENE ET SPECTROSCOPIE INFRA-ROUGE.

III.1.- Décrire brièvement (une page au maximum) le principe de la spectroscopie I.R. Quelle condition doit remplir une liaison pour qu'elle entraîne l'existence d'une bande d'absorption d'élongation?

On donne les bandes d'absorption suivantes :

	C-H	N-H	O-H
nombre d'onde ( $\text{cm}^{-1}$ )	2800 à 3000	3300 à 3500	3600 à 3650

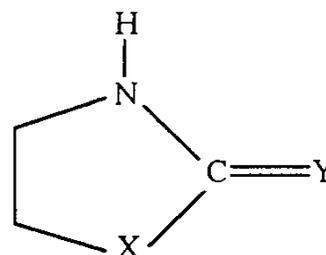
Justifier l'évolution observée.

III.2.- On envisage les diverses possibilités d'association par liaison hydrogène entre:

- d'une part des composés de structure générale ci-contre :

où X désigne : O, S ou  $\text{NCH}_3$

Y désigne : O ou S



- d'autre part le diméthylsulfoxyde (noté DMSO dans la suite) ou le *p*-chlorophénol.

Toute l'étude est menée en solution dans le tétrachlorométhane avec une cuve d'épaisseur 1 cm.

III.2.1.- La 1-méthylimidazoline-2-thione (X :  $\text{NCH}_3$  et Y : S), notée **M**, en solution à  $5,35 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , présente une bande d'absorption fine et intense à  $3468 \text{ cm}^{-1}$ . En augmentant sa concentration, on constate que cette bande d'absorption à  $3468 \text{ cm}^{-1}$  diminue, alors qu'une nouvelle bande large apparaît à  $3218 \text{ cm}^{-1}$  ne se chevauchant pas avec la précédente. On admet la formation d'un dimère cyclique par formation de deux liaisons hydrogène, selon l'équilibre :



Pour vérifier ce modèle, on mesure l'absorbance  $A$  à  $3468 \text{ cm}^{-1}$  pour diverses concentrations  $c_0$  en **M**.

a.- Représenter le dimère **D**.

b.- Quelle est l'origine de la bande située à  $3468 \text{ cm}^{-1}$ ? Même question pour la bande à  $3218 \text{ cm}^{-1}$ . Justifier la position relative de ces deux bandes.

c.- Montrer que la formation du dimère cyclique entraîne une relation de la forme :

$$c_0 / A = a + b A$$

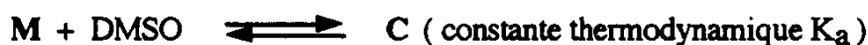
où  $a$  et  $b$  sont fonctions de  $K_D$  et d'une grandeur spectroscopique à préciser.

d.- L'expérience donne :

$a = 4,11 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$  et  $b = 3,64 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ . En déduire les valeurs de la constante thermodynamique  $K_d$  et de la grandeur spectroscopique intervenant.

La suite de cette partie a pour but d'étudier séparément le caractère donneur et le caractère accepteur d'hydrogène de M.

III.2.2.- On envisage maintenant l'association de M avec le DMSO, selon l'équilibre:



A  $3468 \text{ cm}^{-1}$ , une solution contenant  $c_0 = 5,35 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$  de M et  $2,90 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$  de DMSO, présente une absorbance  $A = 0,50$ . Une nouvelle bande est maintenant apparue à  $3225 \text{ cm}^{-1}$ , toujours sans chevauchement avec celle située à  $3468 \text{ cm}^{-1}$ .

a.- Représenter le complexe C

b.- Déterminer la constante  $K_a$

c.- Compte tenu de la structure des composés D et C ainsi que des positions relatives des nouvelles bandes apparues, les valeurs relatives de  $K_a$  et  $K_d$  étaient-elles prévisibles ?

III.3.- Il y a également des associations possibles entre M et le *p*-chlorophénol selon l'équilibre :



Les valeurs des constantes  $K_a$  et  $K_b$  sont rassemblées dans le tableau II ci-dessous pour divers composés  $M_i$ :

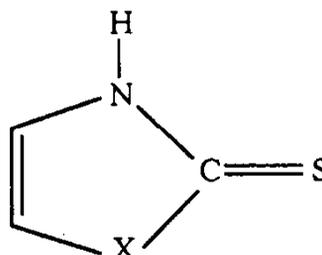
Tableau II

	X	Y	$K_a$	$K_b$
$M_1$	O	O	60	160
$M_2$	O	S	500	35
$M_3$	S	S	200	30
$M_4$	NCH <sub>3</sub>	S	44	120

III.3.1.- Comparer  $K_a$  et  $K_b$  pour  $M_1$  et  $M_2$ .

III.3.2.- Comparer de même  $K_a$  et  $K_b$  pour  $M_3$  et  $M_4$ .

III.4.- On s'intéresse enfin à des composés ayant des structures voisines des composés précédents :



Les études précédentes ont donné les résultats indiqués dans le tableau III ci-dessous :

Tableau III

	X	$K_a$	$K_b$
$M_5$	O	1200	100
$M_6$	S	1100	100

III.4.1.- Comment peut-on justifier les valeurs particulièrement fortes obtenues pour  $M_5$  et  $M_6$ , ainsi que les faibles variations observées selon la nature de X?

III.4.2.- Parmi tous les composés étudiés ( $M_1$  à  $M_6$ ), quels sont ceux qui présentent à votre avis la plus forte valeur de  $K_d$ ? Justifiez votre réponse .

## PARTIE B

### TITRAGE D'UN ACIDE FAIBLE : L'ION AMMONIUM

Dans toute cette partie, la température est fixée à 25°C

#### I. TITRAGE DE L'ION AMMONIUM PAR UNE BASE FORTE EN SOLUTION AQUEUSE

L'ion ammonium est un acide faible de  $pK_a = 9,2$ . On effectue le titrage de 100 mL d'une solution de chlorure d'ammonium de concentration  $10^{-2}$  mol.L<sup>-1</sup> par une solution d'hydroxyde de sodium de concentration  $10^{-1}$  mol.L<sup>-1</sup> et on suit le titrage à la fois par pHmétrie et par conductimétrie.

I.1.- Rappeler brièvement les principes d'un titrage pHmétrique et d'un titrage conductimétrique.

### I.2.- Titrage pHmétrique.

Donner l'allure de la courbe donnant le pH en fonction de V (volume d'hydroxyde de sodium versé) et indiquer la valeur du pH pour les points particuliers de la courbe.

Peut-on envisager l'emploi d'un indicateur coloré pour déterminer expérimentalement le volume à l'équivalence?

### I.3.- Titrage conductimétrique.

Donner les équations des deux branches de la courbe donnant la conductivité de la solution en fonction de V. Proposer une représentation linéaire.

On donne ci-dessous les valeurs des conductivités molaires limites des ions intervenant:

Ion	OH <sup>-</sup>	Na <sup>+</sup>	Cl <sup>-</sup>	NH <sub>4</sub> <sup>+</sup>
$\lambda^{\circ}(\text{mS. m}^2 \cdot \text{mol}^{-1})$	19,9	5,0	7,6	7,3

### I.4.- Précision théorique du titrage.

Quelle est la valeur du pourcentage ( $\tau$ ) de NH<sub>3</sub> à l'équivalence ?

$$\tau = 100 [\text{NH}_3] / \{ [\text{NH}_3] + [\text{NH}_4^+] \}$$

En déduire la précision théorique du titrage.

## II. TITRAGE DE L'ION AMMONIUM PAR UNE BASE FORTE EN MILIEU NON AQUEUX

### II.1.- Construction de l'échelle de pH dans un solvant non aqueux.

On considère un solvant amphiprotique dissociant noté SH.

II.1.1.- Ecrire l'équilibre d'autoprotolyse de ce solvant et donner l'expression de son produit ionique (noté  $K_i$  dans la suite).

II.1.2.- Ecrire les équations des réactions accompagnant la dissolution d'un acide faible et d'une base faible dans ce solvant.

II.1.3.- Quels sont dans ce solvant:

- l'acide et la base les plus forts?
- l'acide et la base les plus faibles?

II.1.4 a) - Définir le pH dans ce solvant.

b) - Quelle est la valeur du pH correspondant à la neutralité?

c) - Quelle est l'étendue de l'échelle de pH utilisable dans ce solvant?

### II.2.- Rôle du solvant dans le titrage de l'ion ammonium.

Le tableau IV ci-dessous rassemble les valeurs des  $pK_i$  ( $K_i$  : produit ionique du solvant),  $\epsilon$  ( permittivité relative du solvant) et  $pK_a$  ( $K_a$  : constante d'acidité de l'ion ammonium dans le solvant) pour trois solvants: l'eau, le méthanol et l'éthanol.

Tableau IV

	eau	méthanol	éthanol
$pK_i$	14	16,7	19,1
$\epsilon$	80	33	24
$pK_a$	9,2	10,8	10,4

II 2.1.- De ces trois solvants, quel est celui qui vous paraît le mieux adapté au dosage de l'ion ammonium par une base forte? Justifiez votre réponse.

II 2.2.- Donner l'allure de la courbe donnant le pH en fonction du volume de base forte versée dans le solvant choisi (on prendra les mêmes concentrations et le même volume de la prise d'essai que dans la question I ). Evaluer la précision théorique du dosage. Comparer à la valeur obtenue précédemment.

### III. COMPARAISON DE LA FORCE DES COUPLES ACIDE-BASE DANS L'EAU ET DANS L'ÉTHANOL.

III.1.- Le  $pK_a$  de l'acide éthanoïque vaut 4,7 dans l'eau et 10,4 dans l'éthanol. Comment peut-on expliquer cette grande différence par rapport au cas de l'ion ammonium?

III.2.- Comparer les compositions de solutions d'éthanoate d'ammonium ( $10^{-2}$  mol.L<sup>-1</sup>) dans l'eau et dans l'éthanol.

III.3.- Prévoir approximativement les valeurs des  $pK_a$  dans l'éthanol de l'ion anilinium ( $pK_a$  dans l'eau = 4,6) et de l'acide benzoïque ( $pK_a$  dans l'eau = 4,2).

III.4.- On veut doser les constituants d'un mélange obtenu par addition en quantités sensiblement équivalentes ( $10^{-2}$  mol ) de chlorure d'ammonium et d'acide benzoïque. Proposer un mode opératoire pour déterminer avec précision la composition du mélange. On précise que le mélange est soluble dans un litre d'eau ou d'éthanol.

III.5.- Pour un diacide  $H_2A$ , comment varie la différence  $pK_{a2} - pK_{a1}$  lorsqu'on passe de l'eau à l'éthanol?

III.6.- A quelle condition un acide de type AH est-il faible dans l'éthanol et fort dans l'eau?

III.7.- A quelle condition une base  $A^-$  est-elle faible dans l'eau et forte dans l'éthanol?

#### IV. DÉTERMINATION DU PRODUIT IONIQUE D'UN SOLVANT.

Le produit ionique d'un solvant peut être déterminé par mesure potentiométrique. Pour déterminer celui de l'éthanolamine, on construit les piles suivantes:

Pt/H<sub>2</sub> 1 bar, HCl( 0,1 mol.L<sup>-1</sup> dans l'éthanolamine)/solution A dans l'éthanolamine, H<sub>2</sub> 1 bar/Pt

On suppose que le potentiel de jonction est négligeable.

Le tableau V fournit les valeurs de la force électromotrice de la pile selon la nature de A.

Tableau V

pile n°	A	e en mV
1	KCl 0,09 mol.L <sup>-1</sup> + HCl 0,01 mol.L <sup>-1</sup>	60
2	NH <sub>4</sub> Cl 0,1 mol.L <sup>-1</sup>	0
3	KOH 0,1 mol.L <sup>-1</sup>	210
4	KCl 0,09 mol.L <sup>-1</sup> + KOH 0,01 mol.L <sup>-1</sup>	150

IV.1.- Préciser l'intérêt de l'addition de chlorure de potassium.

IV.2.- Indiquer la force dans l'éthanolamine des différents acides et bases apparaissant dans les solutions A.

IV.3.- On ajoute de l'ammoniac à la solution A de la pile n°1. Comment varie la force électromotrice ?

IV.4.- Indiquer la valeur du produit ionique "apparent" de l'éthanolamine. Quelle est la signification de l'adjectif " apparent" ?

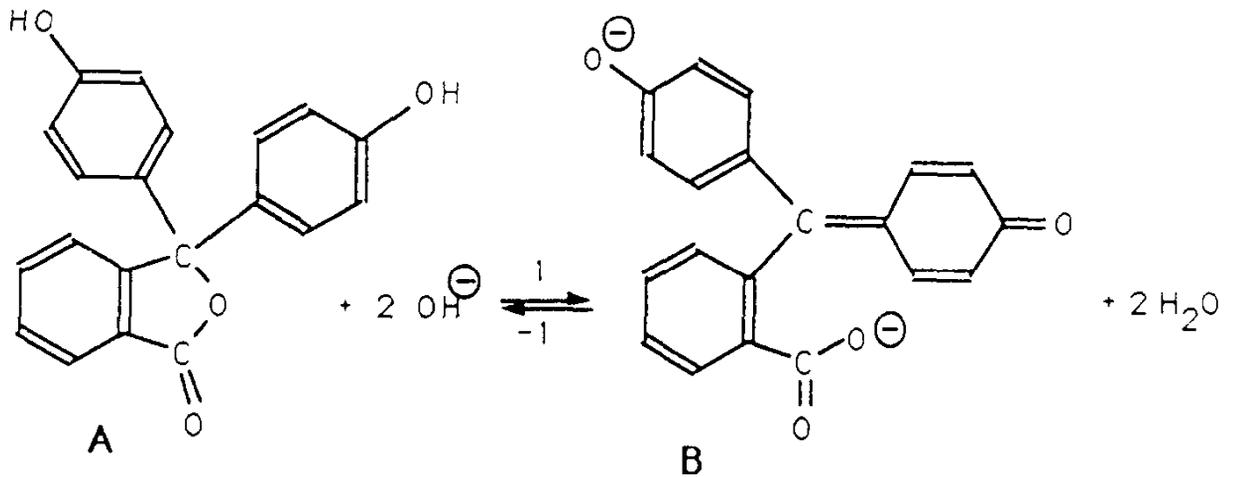
IV.5.- Quelle est la force électromotrice d'une pile dont la solution A est constituée du mélange KCl 0,1 mol.L<sup>-1</sup> + HCl 10<sup>-3</sup> mol.L<sup>-1</sup> ?

## PARTIE C

### STABILITE D'UN INDICATEUR COLORE : DECOLORATION DE LA PHENOLPHTALEINE

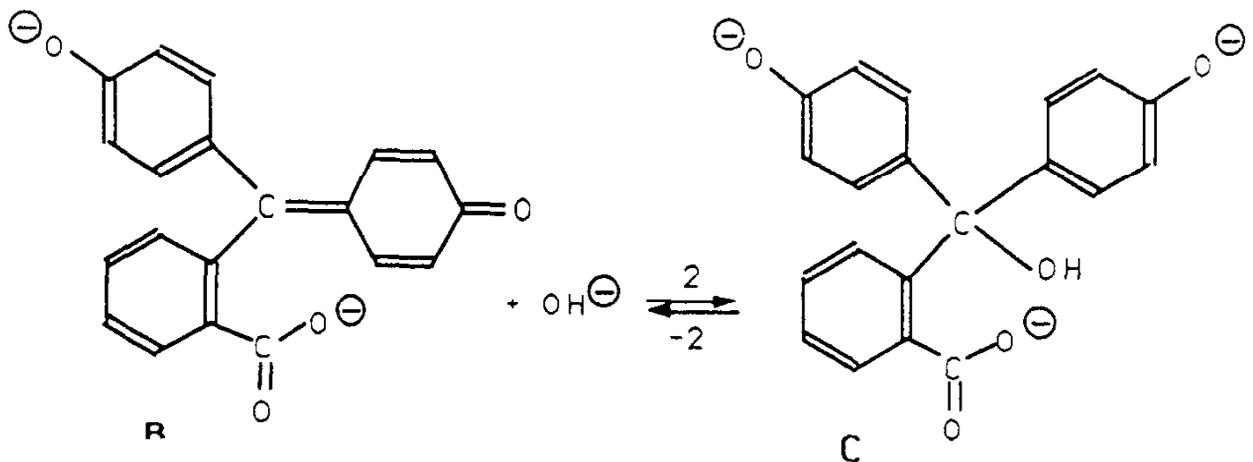
La phénolphtaléine peut exister sous trois formes A, B et C selon les équilibres suivants:

- équilibre (1) rapide :



La forme B prédomine sur la forme A si le pH est supérieur à 10

- équilibre (2) lent (intervenant à un pH supérieur à 12)



Pour les réactions (2) et (-2), l'ordre partiel est 1 pour chaque constituant, les constantes de vitesse seront notées  $k_2$  et  $k_{-2}$  et la constante thermodynamique  $K$ .

1.- Expliquer pourquoi la forme **B** est la seule qui absorbe dans le visible.

2.- Afin de déterminer  $k_2$  et  $k_{-2}$ , on mélange à l'instant  $t = 0$  une solution de phénolphtaléine (initialement à  $\text{pH} = 10$ ) et une solution d'hydroxyde de sodium de telle sorte que les concentrations initiales soient :  $2,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$  en hydroxyde de sodium et  $2,2 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$  en phénolphtaléine, puis on mesure l'absorbance de la solution à 550 nm en fonction du temps, en utilisant une cuve d'épaisseur 1 cm.

La température est maintenue à  $25^\circ\text{C}$ .

On note :  $A_0$ ,  $A_t$  et  $A_e$  les absorbances aux instants  $t = 0$ ,  $t$  et à l'équilibre;  $[\text{OH}^-]_0$  la concentration initiale en hydroxyde de sodium et on pose :  $\alpha = k_2 [\text{OH}^-]_0 + k_{-2}$

2.1.- Montrer qu'il existe une relation de la forme

$$\alpha t = \text{Ln}[F(A_0, A_t, A_e)]$$

où  $F(A_0, A_t, A_e)$  est une fonction des absorbances que l'on explicitera. En déduire qu'il est possible d'avoir accès expérimentalement à la valeur  $\alpha$ .

2.2.- Exprimer la constante thermodynamique  $K$  en fonction de  $A_0$ ,  $A_e$  et  $[\text{OH}^-]_0$ .  
Exprimer  $k_2$  en fonction de  $\alpha$ ,  $K$  et  $[\text{OH}^-]_0$ .

2.3.- On a obtenu expérimentalement :

$$\alpha = 2,73 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}, \quad A_0 = 0,72 \quad \text{et} \quad A_e = 0,34.$$

En déduire  $K$ ,  $k_2$  et  $k_{-2}$  à  $25^\circ\text{C}$ .

3.- La manipulation a été reproduite en faisant varier la force ionique par addition de chlorure de potassium.

Pour une force ionique égale à  $0,03 \text{ mol.L}^{-1}$ , on a obtenu :

$$k_2 = 80,5 \cdot 10^{-4} \text{ L.mol}^{-1}.\text{s}^{-1}.$$

Montrer que ces résultats confirment que l'étape (2) est une étape élémentaire faisant intervenir un anion ( $\text{OH}^-$ ) et un dianion (**B**).

4.- En opérant avec des mélanges eau-alcool, il est possible de faire varier la permittivité relative du milieu tout en restant à force ionique constante.

4.1.- Dans quel sens l'addition d'alcool fait-elle varier la permittivité du milieu ?

4.2.- Quel sera alors l'effet sur la constante de vitesse  $k_2$  ?

## PARTIE D

### DETERMINATION D'UNE CONSTANTE D'ACIDITE PAR SPECTROSCOPIE

Pour cette partie, on donne :

constante de Planck :  $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

célérité de la lumière :  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

masse de l'électron :  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

constante d'Avogadro :  $N = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

constante des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

#### I. ETUDE DES POLYENES LINÉAIRES ALTERNÉS

Soit un polyène linéaire alterné de formule moléculaire  $C_nH_{n+2}$  ( $n$  pair). Les longueurs des liaisons entre deux atomes de carbone dans ce type de composé valant 0,147 nm pour une liaison simple et 0,137 nm pour une liaison double, on prendra comme valeur moyenne  $l = 0,142 \text{ nm}$ .

I.0.- Justifier les variations observées par rapport aux longueurs de liaison suivantes : 0,154 nm dans l'éthane et 0,134 nm dans l'éthylène .

##### I.1.- MODELE DE L'ELECTRON LIBRE

On considère que les électrons  $\pi$  se déplacent le long d'un axe Ox sur le segment  $[-L/2, L/2]$ . Le potentiel  $V(x)$  est nul à l'intérieur du segment considéré et infini à l'extérieur du segment.

I.1.1.- Exprimer  $L$  en fonction de  $n$  et  $l$ .

I.1.2.- Ecrire l'équation de Schrödinger décrivant le système.

I.1.3.- Exprimer l'énergie  $E_j$  du  $j$ ème niveau accessible aux électrons.

I.1.4.- En déduire l'énergie  $E$  de la transition électronique permettant de passer de l'état fondamental au premier état excité.

##### I.2.- MODELE DE HÜCKEL

I.2.1.- Préciser les approximations utilisées dans le modèle de Hückel.

I.2.2.- Ecrire le déterminant séculaire dans le cas de l'hexa-1,3,5-triène.

On notera  $\alpha$  l'intégrale coulombienne et  $\beta$  l'intégrale d'échange pour deux atomes liés.

I.2.3.- L'énergie du jème niveau accessible aux électrons  $\pi$  est donnée par :

$$E_j = \alpha + 2\beta \cos ( j\pi/(n+1) ) \quad \text{avec } j = 1,2,3,\dots,n$$

En déduire l'énergie  $E'$  de la transition électronique permettant de passer de l'état fondamental au premier état excité.

On rappelle la formule de trigonométrie :

$$\cos p - \cos q = -2 \sin[(p+q)/2] \cdot \sin [(p-q)/2]$$

### I.3.- ESTIMATION DE $\beta$

En comparant  $E$  et  $E'$  pour  $n \rightarrow \infty$ , en déduire l'expression de  $\beta$  en fonction de  $l$  et des grandeurs fondamentales.

Calculer numériquement  $\beta$  en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

## II. ETUDE DES SPECTRES DE COMPOSÉS AROMATIQUES.

Pour un polyène alterné cyclique à  $n$  atomes de carbone ( $n$  pair), l'énergie des niveaux accessibles aux électrons  $\pi$  est donnée par :

$$E_j = \alpha + 2\beta \cos (2j\pi/n) \quad \text{avec } j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, + n/2 \quad \text{et } \beta = - 294 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

II.1.- Représenter les niveaux énergétiques des orbitales  $p$  du benzène, ainsi que la symétrie de ces orbitales. En déduire la longueur d'onde d'absorption attendue pour la transition électronique la moins énergétique du benzène. Le spectre U.V-visible du benzène présente une bande d'absorption avec trois maxima pour :  $\lambda = 180 \text{ nm}$  ( $\epsilon = 40000$ ) ,  $\lambda = 203,5 \text{ nm}$  ( $\epsilon = 7400$ ) ,  $\lambda = 254 \text{ nm}$  ( $\epsilon = 204$ ).

Commenter.

II.2.- On étudie l'effet de la substitution d'un hydrogène par un atome fictif, tout d'abord de même électronégativité que le carbone et possédant un doublet non liant. Représenter, sur le même schéma qu'à la question II.1., la nouvelle distribution des niveaux énergétiques.

On augmente progressivement l'électronégativité du substituant. Représenter l'évolution des niveaux énergétiques.

II.3.- On s'intéresse au déplacement de la bande dite primaire (  $203,5 \text{ nm}$  ). Dans le cas des benzènes polysubstitués, les effets des substituants sont approximativement additifs et on attribue les incréments suivants :

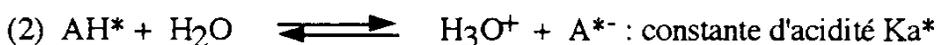
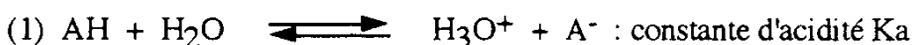
$$\text{OH} : + 7 \text{ nm} ; \quad \text{NH}_2 : +27 \text{ nm} ; \quad \text{O}^- : +32 \text{ nm}$$

Justifier les grandeurs relatives observées.

II.4.- En utilisant la méthode précédente, estimer  $\lambda_{\max}$  pour la première bande d'absorption du naph-2-ol et de sa base conjuguée.  
Comparer aux valeurs expérimentales : 325 nm et 345 nm.

### III. DÉTERMINATION DU $pK_a$ DU NAPHT-2-OL DANS SON PREMIER ÉTAT EXCITÉ.

On étudie la dissociation acido-basique du naph-2-ol dans son état fondamental noté AH (équilibre 1) et dans son premier état excité noté AH\* (équilibre 2)



III.1.- Quelle relation d'ordre peut-on attendre entre  $pK_a$  et  $pK_{a^*}$  ? Justifiez votre réponse.

III.2.- On note  $\Delta E(\text{AH})$  et  $\Delta E(\text{A}^-)$  l'écart énergétique entre le niveau fondamental et le niveau excité, respectivement pour la forme acide et pour la forme basique.

Déterminer la relation liant  $\Delta E(\text{AH})$ ,  $\Delta E(\text{A}^-)$ ,  $pK_a$ ,  $pK_{a^*}$  et T en faisant des approximations raisonnables.

III.3.- En milieu acide chlorhydrique décimolaire, le spectre du naph-2-ol présente une bande d'absorption avec un maximum pour le nombre d'onde  $\sigma(\text{AH}) = 30,8 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1}$ . Dans les mêmes conditions, le spectre de fluorescence présente une bande centrée sur  $\sigma'(\text{AH}) = 28,3 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1}$ .

Avec de la soude décimolaire, on obtient respectivement :

$$\sigma(\text{A}^-) = 29,0 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1} \text{ et } \sigma'(\text{A}^-) = 24,1 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1}$$

Expliquer pourquoi  $\Delta E(\text{AH})$  peut être raisonnablement estimé à partir de la demi-somme de  $\sigma(\text{AH})$  et  $\sigma'(\text{AH})$ .

Le  $pK_a$  du naph-2-ol valant 9,5 à 25°C, en déduire  $pK_{a^*}$  à la même température.

\*\*\*\*\*

**SESSION DE 1994****concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques**

option : chimie

épreuve B : composition de physique

**Durée : 4 heures****MATÉRIEL À PRÉVOIR :**

*Calculatrice de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Les candidats composeront sur du papier de composition quadrillé 5 × 5*



# ETOILES DOUBLES

## ETUDE DU MOUVEMENT ET METHODES D'OBSERVATION.

Dans une première partie on étudie les trajectoires circulaires d'une masse dans le champ de gravitation d'un astre, puis les propriétés des mouvements des deux composantes d'une étoile double (système binaire). En particulier on compare les masses de ces étoiles à partir de l'étude de leurs trajectoires.

Dans une seconde partie, on aborde le principe des méthodes d'observation de ces étoiles doubles : observation visuelle, méthode interférométrique et méthode spectroscopique basée sur l'effet Doppler.

De nombreuses questions peuvent être traitées sans avoir résolu les précédentes; en particulier les parties **1**, **2.1**, **2.2** et **2.3.1** sont indépendantes entre elles.

Les grandeurs vectorielles sont notées en caractères gras : **NP** signifie vecteur NP.

*Les graphes et schémas demandés seront faits en utilisant le quadrillage normal de la copie.*

### Données numériques :

Constante de gravitation universelle :  $K = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ .

Unité astronomique de distance : rayon de l'orbite terrestre  $R_t = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$ .

Année sidérale (durée de la révolution terrestre autour du Soleil) :  $T_t = 365,25 \text{ jours}$ .

Vitesse de la lumière :  $c = 300\,000 \text{ km/s}$ .

Rayon de la Terre :  $r_o = 6370 \text{ km}$ .

Période de révolution de la Terre sur elle même :  $T_o = 86164 \text{ s}$

### Formulaire :

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

## PARTIE 1

### 1. CHAMP DE GRAVITATION.

1.1. Donner l'expression vectorielle des forces de gravitation s'exerçant entre deux masses ponctuelles  $m_1$  et  $m_2$  placées respectivement en  $A_1$  et  $A_2$ . On notera  $\mathbf{F}_{12}$  la force exercée par  $m_1$  sur  $m_2$  et  $K$  la constante de gravitation universelle.

1.2. Définir le champ de gravitation  $\mathbf{G}$  et donner l'expression de  $\mathbf{G}$  créé par une masse ponctuelle  $m$  à une distance  $r$  de cette masse.

### 1.3. Propriétés.

- Dans le cas d'une masse ponctuelle  $m$ , montrer que  $\mathbf{G}$  dérive d'un potentiel  $H$ .  
Énoncer une propriété de la circulation de  $\mathbf{G}$ .
- Calculer le flux de  $\mathbf{G}$  créé par  $m$  à travers une surface fermée.
- Comment peut-on généraliser ces résultats à une distribution quelconque de masse?

### 1.4. Applications.

On considère le champ de gravitation  $\mathbf{G}(r)$  créé par un astre sphérique de rayon  $R_a$  et de masse  $M$ , dont la masse volumique  $\mu$  n'est fonction que de la distance  $r$  au centre  $O$ . Déterminer l'expression du champ de gravitation  $\mathbf{G}(r)$  créé à l'extérieur de l'astre ( $r > R_a$ ). Commenter le résultat.

## 2. TRAJECTOIRE AUTOUR D'UN ASTRE À SYMÉTRIE SPHÉRIQUE.

On considère une masse ponctuelle  $m$ , en mouvement autour d'un astre à symétrie sphérique de masse  $M \gg m$ . Soit  $(\mathbf{R})$  un référentiel, considéré comme galiléen, lié à l'astre. On prendra comme origine du repère, le centre  $O$  de l'astre.

2.1. Préciser les approximations qui permettent de considérer le référentiel  $(\mathbf{R})$  comme galiléen.

2.2. Montrer que la trajectoire d'une masse ponctuelle  $m$ , soumise aux seules forces gravitationnelles de l'astre, est plane.

Dans la suite du problème, on se limitera à l'étude des trajectoires circulaires.

2.3. On étudie le cas d'une trajectoire circulaire.

- Montrer que le mouvement est circulaire uniforme.
- Donner l'expression de la vitesse  $V$  de la masse  $m$  en fonction du rayon  $r$  de la trajectoire.

2.4. Application à un satellite artificiel de la Terre. On désire mettre en orbite un satellite géostationnaire, c'est à dire qui reste toujours à la verticale d'un même point de la Terre.

- Préciser, en justifiant votre réponse, le plan de sa trajectoire.
- Déterminer en fonction de la valeur du champ de gravitation à la surface de la Terre  $G_0$ , le rayon de son orbite. Application numérique :  $G_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ . Calculer l'altitude de ce satellite.

2.5. Troisième loi de Kepler : déterminer l'expression du rapport  $\frac{r^3}{T^2}$  où  $T$  représente la période de révolution de la masse  $m$ .

2.6. Application : à partir du résultat précédent et des données numériques indiquées au début de l'énoncé, évaluer la masse  $M_s$  du Soleil. Préciser les différentes approximations

### 3. ETOILE DOUBLE.

Soit  $(R_0)$  un référentiel galiléen et  $(Oxyz)$  un repère associé.

On étudie une étoile double constituée de deux composantes à symétrie sphérique, de masse  $m_1$  et  $m_2$  et de centre respectif  $A_1$  et  $A_2$ . On néglige les forces de gravitation exercées par les autres astres. On admettra que l'étude des mouvements des centres d'inertie des composantes est équivalente à l'étude du mouvement de deux masses ponctuelles identiques à celles des étoiles.

3.1. Quel est le mouvement de  $G$ , barycentre du système, dans  $(R_0)$  ?

3.2. Définir le référentiel barycentrique du système; est-il galiléen ? Justifier votre réponse.

3.3. On note  $\mathbf{r} = \mathbf{A_1A_2}$ .

L'évolution de  $\mathbf{r}$  correspond au mouvement relatif de  $A_2$  par rapport à  $A_1$ .

a) Montrer, en exprimant  $\mathbf{GA_1}$  et  $\mathbf{GA_2}$  en fonction de  $\mathbf{r}$ , que l'on peut déduire du mouvement relatif, les trajectoires de  $A_1$  et  $A_2$  dans le référentiel barycentrique.

b) On suppose que le mouvement relatif est circulaire de rayon  $R$ ; tracer sur un même graphe les deux trajectoires de  $A_1$  et  $A_2$ , dans le référentiel barycentrique, dans le cas où  $m_1 = 2m_2$ .

Echelle : représenter  $R$  par une distance de 6 cm, indiquer les positions des deux étoiles à un même instant  $t$  quelconque.

3.4. Etude du mouvement relatif.

a) Exprimer  $\frac{d^2(\mathbf{OA_1})}{dt^2}$  et  $\frac{d^2(\mathbf{OA_2})}{dt^2}$  dans le référentiel  $(R_0)$ ; en déduire  $\frac{d^2(\mathbf{A_1A_2})}{dt^2}$ .

b) Dans le cadre de l'hypothèse d'un mouvement relatif circulaire de rayon  $R$ , déterminer la nouvelle expression du rapport  $\frac{R^3}{T^2}$ .

c) Récrire cette loi avec comme unité de masse celle du Soleil, comme unité de temps l'année sidérale et comme unité de longueur le rayon  $R_t$  de l'orbite terrestre.

3. 5. Parallaxe. La parallaxe  $p$  permet de déterminer la distance  $d$  de l'étoile au Soleil. Elle correspond à l'angle sous lequel on voit le mouvement apparent de l'étoile, lié au mouvement orbital de la Terre. On admet que le schéma ci-contre donne la relation entre  $d$  et  $R_t$ .

a) Quel type d'observation permet de mettre en évidence le phénomène de parallaxe?

b) Sachant que  $p$  est très faible, expliciter la relation entre  $d$  et  $p$  en radian.

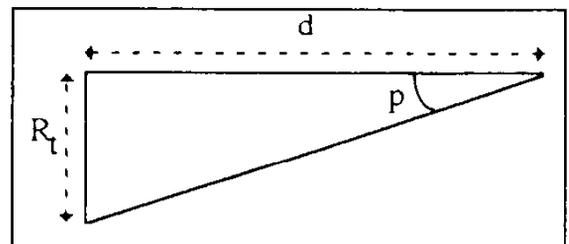


fig. 1

### 3.6. Application.

On mesure les éléments suivants pour une étoile double (Sirius)

Période  $T = 50$  ans, parallaxe  $p = 1,9 \cdot 10^{-6}$  rad (environ  $0''38$ )

Ecart angulaire entre les deux composantes  $\varepsilon = 3,8 \cdot 10^{-5}$  rad (environ  $7''62$ ).

Le rapport des distances des deux étoiles au centre d'inertie  $G$  est égal à 2,3.

On admet que le plan des trajectoires est perpendiculaire à la direction d'observation.

- Calculer à partir de  $\varepsilon$  et  $p$ , le rayon  $R'$  du mouvement relatif, avec comme unité le rayon de l'orbite terrestre ( $R'$  sans dimension égal à  $R/R_t$ ).
- Calculer en unité solaire (masse solaire) la somme des masses des deux composantes.
- Calculer en unité solaire la masse de chacune des composantes.

## PARTIE 2

### 1. OBSERVATION VISUELLE.

La détermination de l'écart angulaire à l'œil nu est tributaire de la limite de résolution de l'œil : environ  $\alpha_{\min} = 3 \cdot 10^{-4}$  rad . Pour mettre en évidence et mesurer l'écart angulaire entre les composantes d'une étoile double et la parallaxe, on doit utiliser des instruments grossissants.

#### 1.1. Principe d'une lunette astronomique.

La lunette de Newton est formé d'une lentille convergente  $L_1$  de distance focale  $f_1'$  (objectif) et d'un oculaire schématisé par une lentille convergente  $L_2$  de distance focale  $f_2'$  petite devant  $f_1'$  . On veut obtenir de l'étoile (objet à l'infini) une image grossie et rejetée à l'infini, ceci pour éviter une trop grande fatigue de l'œil.

- Indiquer quelle doit être la position de la lentille  $L_2$  par rapport à  $L_1$ .
- Représenter le trajet d'un rayon à travers le système, le rayon incident étant incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe.
- Calculer le grossissement angulaire (rapport des diamètres apparents de l'image définitive et de l'objet) . Application numérique:  $f_1' = 30 f_2'$  ; quel est le plus petit écart angulaire  $\varepsilon$  décelable?
- La limite de résolution théorique est liée au phénomène de diffraction par l'objectif de diamètre  $D$  fini :  $\varepsilon_{th} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$  .

Quelle doit être la valeur minimale du diamètre de la lunette pour que l'écart  $\varepsilon$  soit effectivement observable ? (on prendra  $\lambda = 500$  nm)

## 1.2. Notions sur les télescopes.

On utilise plutôt actuellement des systèmes catadioptriques, c'est-à-dire formés de lentilles et de miroirs.

a) Citer au moins deux avantages de ces systèmes par rapport aux lunettes astronomiques.

b) Propriétés du miroir sphérique (fig.2).

Soit  $\rho = CS$  le rayon de courbure du miroir.

Dans les conditions de Gauss le foyer image  $F'$  est situé au milieu du segment CS.

L'image d'un objet à l'infini se forme dans le plan perpendiculaire à l'axe en  $F'$ .

Soit un rayon incident passant par le centre  $C$ , caractériser le rayon réfléchi correspondant.

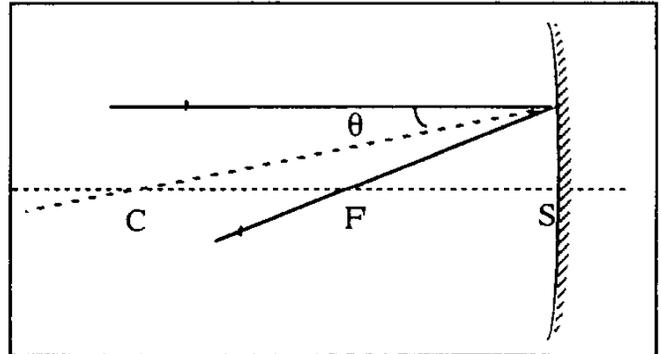


fig. 2

c) Modèle simplifié du télescope de Newton. On considère un télescope formé d'un miroir sphérique, d'un miroir plan incliné de  $45^\circ$  sur l'axe optique principal et d'un oculaire, schématisé par une lentille mince convergente  $L_o$  de distance focale  $f'$  et de centre optique  $O$ . (fig.3)

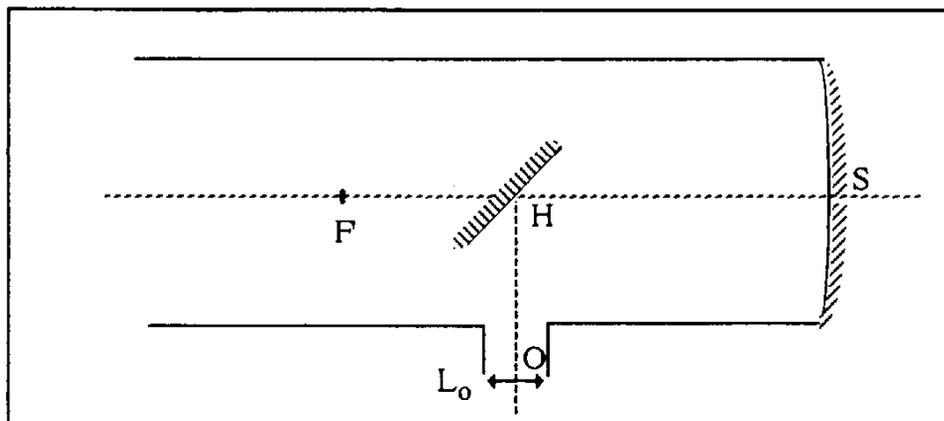


fig.3

( $F'$  foyer image du miroir sphérique)

c.1) Le système étoile double  $A_1 A_2$  est vu à l'œil nu sous un écart angulaire  $\epsilon$ . En utilisant les propriétés indiquées précédemment, construire l'image  $A'_1 A'_2$  (centrée sur l'axe du télescope) donnée par le miroir sphérique seul, et déterminer la taille de cette image en fonction de  $\rho$  et de  $\epsilon$ .

c.2) L'oculaire est placé de telle manière que l'image  $A''_1 A''_2$  donnée par le miroir plan se trouve dans le plan focal objet de la lentille formant l'oculaire; représenter sur un même schéma,  $A'_1 A'_2$ ,  $A''_1 A''_2$ , le miroir plan et la lentille.

c.3)  $\rho$  a pour valeur 3 m,  $F'H = 0,5$  m,  $f' = 1,5$  cm. Déterminer la distance  $HO$  et le grossissement angulaire du télescope  $L_o$ .

- d) Le plus grand télescope a un diamètre de 6 m, quelle est sa limite de résolution théorique pour  $\lambda = 500 \text{ nm}$  ? La turbulence atmosphérique limite, en fait, le pouvoir de résolution à environ  $2 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$ ; quel est cependant l'intérêt d'un télescope de très grand diamètre?
- e) Comment peut-on s'affranchir de la turbulence atmosphérique?

## 2. MÉTHODE INTERFÉROMÉTRIQUE.

On place devant l'objectif d'une lunette ou d'un télescope, un écran opaque percé de deux trous  $S_1$  et  $S_2$  distants de  $a$ . On dirige ce dispositif vers une étoile puis vers une étoile double. On observe l'éclairement  $E$  dans le plan focal image de l'objectif à l'aide de l'oculaire.

### 2.1. Etude préliminaire : observation d'une étoile simple.

Le dispositif est équivalent au schéma représenté fig.4. On se limite à une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . Dans les conditions de Gauss, on veut déterminer  $E(x)$ .

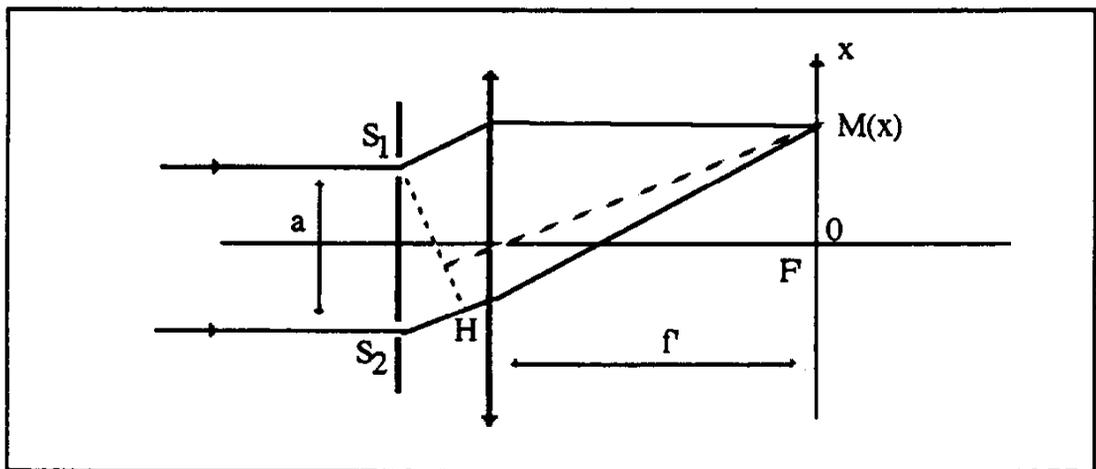


fig.4

- a) Justifier que la différence de marche  $\delta = (S_2M) - (S_1M)$  est égale à  $S_2H$  ( $S_1H$  est perpendiculaire à  $S_2H$ ).
- b) Donner l'expression de  $E(x)$ ; on appellera  $2E_0$  l'éclairement en  $x = 0$ . Vérifier que la valeur de l'interfrange  $i$  est égale à  $i = \lambda f' / a$ .

### 2.2. Enregistrement des franges.

Pour enregistrer la figure d'interférences, on utilise un photomultiplicateur dont la pupille d'entrée est une fente rectangulaire de hauteur  $h$  suivant  $Oy$  (l'axe  $Oy$  est perpendiculaire au plan de la figure 4 et dirigé vers l'avant) et de largeur  $b$  suivant l'axe  $Ox$ .

L'intensité électrique  $I$  délivrée par le photomultiplicateur est telle qu'un élément de surface  $dS = h dx$  de la pupille d'entrée compris entre  $x$  et  $x+dx$  où l'éclairement est  $E(x)$  produit une intensité  $dI = kE(x)dx$  ( $k$  constante).

a) Déterminer  $I(x_0)$ , la fente d'entrée étant centrée au point M d'abscisse  $x_0$ .

Mettre le résultat sous la forme  $I(x) = K[1 + V(b,i) \cos(\frac{2\pi x_0}{i})]$  où le facteur d'appareil  $V(b,i)$

est une fonction de la largeur  $b$  et de l'interfrange  $i$ .

b) Tracer la courbe  $V(b,i)$  en fonction de  $b, i$  ayant la valeur calculée à la question 2.1.

c) Qu'observe-t-on si  $b = i$  ?

d) Comment faut-il choisir la largeur  $b$  pour réaliser un bon enregistrement des franges?

Dans la suite, on ne tiendra plus compte du facteur d'appareil.

### 2.3. Observation d'une étoile double.

On observe, avec le dispositif interférentiel précédent, une étoile double d'écart angulaire  $\varepsilon$ . Les deux composantes émettent une onde de même intensité, de longueur d'onde  $\lambda$ .

La composante 1 est située dans une direction faisant un angle  $\varepsilon/2$  avec l'axe optique du dispositif, la composante 2 dans une direction faisant un angle  $-\varepsilon/2$  avec l'axe.

a) Calculer la différence de marche correspondant à l'étoile 1 puis celle correspondant à l'étoile 2.

b) Déterminer  $E(x)$ . Montrer que les franges d'interférences disparaissent pour certaines valeurs de  $a$ .

c) Soit  $a = 0,25$  m la plus petite valeur correspondant à la disparition des franges, calculer l'écart angulaire correspondant pour  $\lambda = 500$  nm. Même question pour  $a = 5$  m. Conclusion.

## 3. MÉTHODE SPECTROSCOPIQUE.

On se place dans le cadre de la cinématique classique.

### 3.1. Effet Doppler longitudinal.

Soit une onde de célérité  $c$  par rapport à un référentiel  $(R)$ ; cette onde de fréquence  $\nu$  (période  $T$ , longueur d'onde  $\lambda = cT$ ) est émise par une source  $S$  en mouvement dans  $(R)$  à la vitesse  $V_x$  et est reçue par un observateur  $O$  fixe dans  $(R)$ .

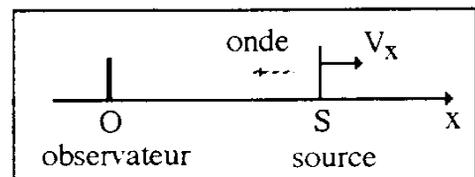


fig. 5

a) Exprimer la période  $T'$  de l'onde reçue par l'observateur en fonction de  $T$ .

b) Citer un exemple simple mettant en évidence, en acoustique, cette différence de période et donc de fréquence.

### 3.2. Généralisation

Soit une onde de célérité  $c$  par rapport à un référentiel  $(R)$ ; cette onde de fréquence  $\nu$  (période  $T$ , longueur d'onde  $\lambda = cT$ ) est émise par une source  $S$  en mouvement dans  $(R)$  à la vitesse  $V_{S/R}$  et est reçue par un observateur  $O$  également en mouvement dans  $(R)$  à la vitesse  $V_{O/R}$ . On veut exprimer la période  $T'$  (respectivement la fréquence  $\nu'$ ) de l'onde reçue par l'observateur en fonction des grandeurs  $T$  (respectivement  $\nu$ ) mesurées dans un référentiel lié à la source.

Soit  $S_1$  la position de la source lorsqu'elle émet une onde d'amplitude maximale (date  $t_1$ ) et  $S_2$  lorsqu'elle émet le maximum suivant (date  $t_2 = t_1 + T$ ).

L'observateur reçoit en  $O_1$  le premier maximum (date  $t'_1$ ) et en  $O_2$  le suivant à la date  $t'_2 = t'_1 + T'$ . On suppose que  $T$  est faible et que les vitesses  $V_{O/R}$  et  $V_{S/R}$  sont faibles par rapport à la célérité  $c$ , si bien que la direction de propagation de l'onde reçue peut être considérée comme fixe; elle est repérée par le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$ . ( $S_1O_1$  sera assimilé à  $S_1O_1\mathbf{u}$  et  $S_2O_2$  sera assimilé à  $S_2O_2\mathbf{u}$ )

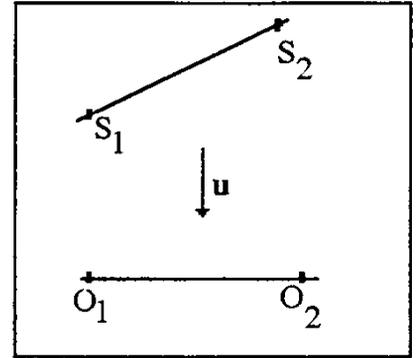


fig. 6

- a) Montrer que  $t'_1 - t_1 = \frac{S_1O_1 \cdot \mathbf{u}}{c}$ ,  $t'_2 - t_2 = \frac{S_2O_2 \cdot \mathbf{u}}{c}$ ; exprimer  $S_1S_2$  en fonction de  $V_{S/R}$  et  $O_1O_2$  en fonction de  $V_{O/R}$ .
- b) En déduire une expression de  $T'$  en fonction de  $T$ ,  $c$  et des vecteurs  $V_{S/R}$ ,  $V_{O/R}$ ,  $\mathbf{u}$ .
- c) Montrer que  $\nu' = \nu \left(1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{V}_{S/O}}{c}\right)$  où  $V_{S/O}$  représente la vitesse relative de la source par rapport à l'observateur.

d) Application aux ondes électromagnétiques appartenant au spectre visible : dans quel cas observe-t-on un décalage des raies vers le rouge?

- e) Montrer que la variation relative de longueur d'onde  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}$  permet d'accéder simplement à la vitesse radiale de fuite  $V_{sf}$  de  $S$  par rapport à  $O$  ( $V_{sf} = -V_{S/O} \cdot \mathbf{u}$ ).

### 3.3. Mesure d'une longueur d'onde.

Donner le schéma de principe d'un dispositif permettant de mesurer les longueurs d'onde associées à des ondes lumineuses visibles.

### 3.4. Application à l'observation d'une étoile double.

On appelle plan d'observation le plan perpendiculaire à la ligne de visée.

On se place dans le cas particulier où les trajectoires sont circulaires et situées dans un plan perpendiculaire au plan d'observation

(cf. fig. 7, sens de la rotation indiqué par la flèche). Le résultat de la question 3.2.d. et la mesure du décalage en longueur d'onde d'une raie particulière permettent de déterminer facilement les vitesses  $V_{sf}(t)$  des deux composantes.

On notera cette vitesse  $V_{1f}$  pour la composante 1, et  $V_{2f}$  pour la composante 2.

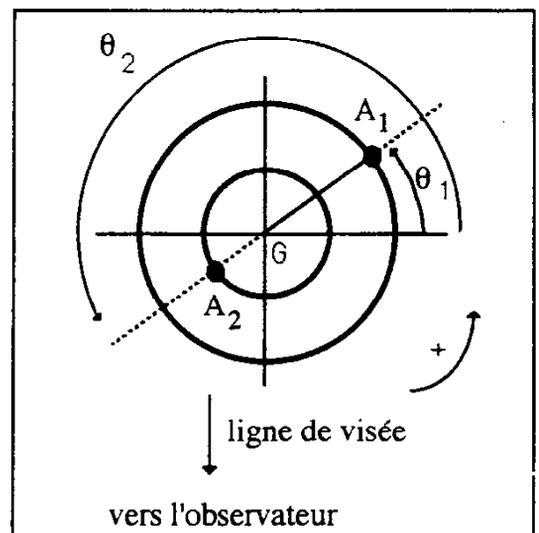


fig. 7

a) Relier ces deux vitesses à la vitesse de fuite du centre d'inertie G, notée  $V_{Gf}$ , aux vitesses uniformes des deux composantes dans le référentiel barycentrique, notées  $V_{1/G}$  et  $V_{2/G}$  et aux positions angulaires  $\theta_1$  et  $\theta_2$  des composantes  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

b) En déduire que les variations de  $V_{1f}$  et de  $\frac{\Delta\lambda_1}{\lambda}$  en fonction de  $\theta_1$ , puis en fonction du temps  $t$ , sont sinusoïdales.

c) Exprimer le rapport  $\frac{V_{1/G}}{V_{2/G}}$  en fonction des masses  $m_1$  et  $m_2$  des deux composantes.

d) En utilisant la troisième loi de Kepler (cf. partie 1 question 3) et les relations précédentes déterminer l'expression des masses  $m_1$  et  $m_2$  en fonction de la période  $T$  de rotation du système, de  $V_{1/G}$  et  $V_{2/G}$ .

### 3.5. Exploitation d'une série d'observations :

La figure 8 correspond aux courbes de variations des vitesses  $V_f$ , déduites des mesures de  $\Delta\lambda$ , pour un système binaire du type précédent.

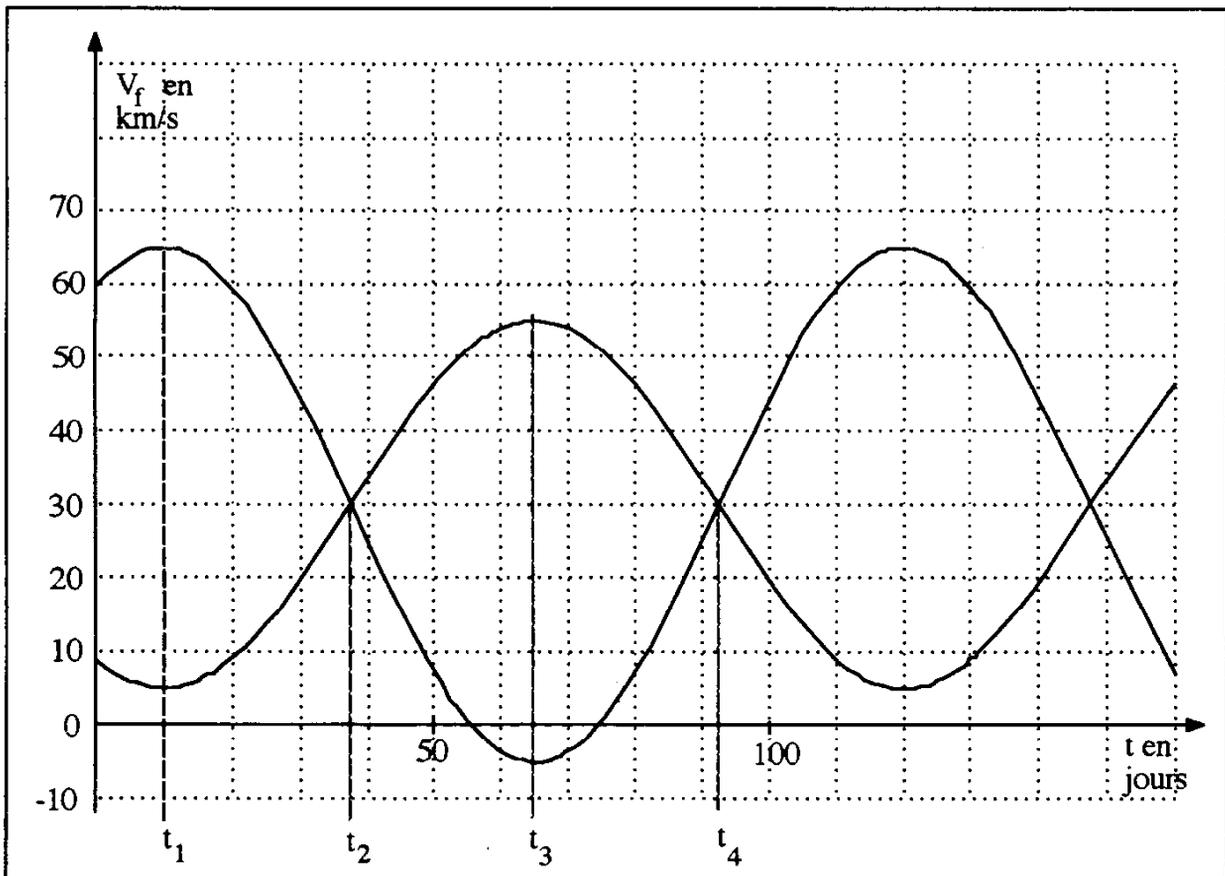


fig. 8

- Préciser sur un schéma les positions des deux composantes aux instants  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $t_4$ .
- Déterminer  $V_{Gf}$ ,  $V_{1/G}$  et  $V_{2/G}$ .
- La période  $T$  a pour valeur 110 jours légaux, en déduire la masse des deux composantes; comparer leur valeur à la masse solaire.

\*\*\*\*\*

SESSION DE 1994

**concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés**

**section : sciences physiques**

option : chimie

épreuve C  
composition de chimie (applications)

**Durée : 6 heures**

*Calculatrice de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Les candidats composeront sur du papier quadrillé 5 × 5*

L'épreuve comporte trois parties indépendantes qui étudient les propriétés du groupe carbonyle du point de vue de la structure et de la réactivité, de la stéréochimie des réactions d'addition et de la synthèse de cétones macrocycliques. A l'intérieur de chaque partie, de nombreuses questions peuvent être traitées de façon indépendante.

*Les schémas demandés seront faits en utilisant le quadrillage de la copie.*

## PARTIE 1

### ETUDE THEORIQUE DE LA STRUCTURE ET DE LA REACTIVITE DES COMPOSES CARBONYLES

La méthode de Hückel est un outil de choix pour appréhender un certain nombre de caractéristiques des molécules organiques conjuguées. Nous allons l'utiliser pour étudier la réactivité du groupe carbonyle dans quelques molécules organiques simples.

Elle repose sur des approximations que nous précisons tout d'abord.

- On se limite à la description des électrons  $\pi$ .
- Chaque électron est caractérisé par un opérateur monoélectronique effectif  $h$ , non explicite.

- Les orbitales moléculaires  $\Psi$  décrivant ces électrons sont développées sous la forme de combinaisons linéaires d'orbitales atomiques  $2p$  notées  $\chi_p$ , supposées réelles et centrées sur les  $n$  différents atomes  $p$  participant au système conjugué.

$$\Psi = \sum_{p=1}^n c_p \chi_p$$

Les meilleures orbitales moléculaires de cette forme sont obtenues par la méthode des variations en écrivant que l'énergie  $E$  de l'électron :

$$E = \frac{\sum_p \sum_q c_p c_q H_{pq}}{\sum_p \sum_q c_p c_q S_{pq}}$$

doit être minimale.

Les éléments  $H_{pp}$ ,  $H_{pq}$ ,  $S_{pp}$  et  $S_{pq}$  ont la signification précisée ci-dessous :

$$\begin{aligned} H_{pp} &= \int \chi_p h \chi_p dv && \text{Intégrale coulombienne} \\ H_{pq} &= \int \chi_p h \chi_q dv && \text{Intégrale de résonance} \\ S_{pp} &= \int \chi_p \chi_p dv && \text{Normalisation de } \chi_p \\ S_{pq} &= \int \chi_p \chi_q dv && \text{Intégrale de recouvrement} \end{aligned}$$

$dv$  est l'élément de volume de l'intégration. Les intégrales  $H_{pq}$  ( $p \neq q$ ) sont différentes de 0 pour  $p$  et  $q$  correspondant à des atomes liés et égales à 0 dans les autres cas.

De plus, on pose  $S_{pq} = \delta_{pq}$  avec  $\delta_{pq} = 1$  si  $p = q$  et  $\delta_{pq} = 0$  si  $p \neq q$ .

Les coefficients  $c_p$  doivent alors satisfaire à un système de  $n$  équations linéaires et homogènes du type :

$$\sum_p c_p (H_{pq} - ES_{pq}) = 0 \quad \text{pour chaque } q$$

dont les solutions non triviales ( $c_p$  non tous nuls) sont obtenues en posant le déterminant séculaire :

$$\left| H_{pq} - ES_{pq} \right| = 0$$

Connaissant les énergies  $E_i$  associées à chaque orbitale moléculaire  $\Psi_i$  on peut, en les reportant dans les équations précédentes, et en utilisant en outre la condition de normalisation de l'orbitale moléculaire, déterminer les coefficients  $c_p$ .

On pose habituellement :

- pour un atome de carbone :  $H_{pp} = \alpha$
- pour une liaison C-C :  $H_{pq} = \beta$  avec  $\beta < 0$
- pour un hétéroatome X :  $H_{pp} = \alpha_X = \alpha + h_X \beta$
- pour une liaison C-X :  $H_{pq} = \beta_{CX} = k_{CX} \beta$

## I. Réactivité du formaldéhyde.

**I.1.a.** Montrer par la méthode de Hückel, que les deux orbitales moléculaires  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  de symétrie  $\pi$  du formaldéhyde ont pour énergies respectivement :

$$E_1 = \alpha + 1,62 \beta \quad \text{et} \quad E_2 = \alpha - 0,62 \beta$$

On donne les paramètres suivants pour l'atome d'oxygène :

$$\alpha_O = \alpha + \beta \quad ; \quad \beta_{CO} = \beta \quad \text{avec } \beta < 0.$$

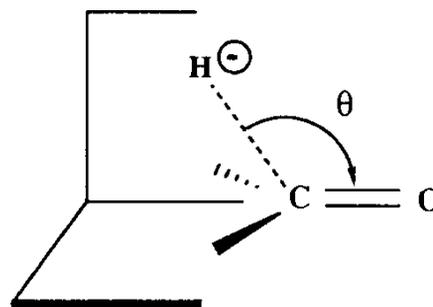
**I.1.b.** En déduire leurs expressions sur la base des orbitales atomiques  $\chi_p$ .

**I.1.c.** Préciser quelle est l'orbitale liante (respectivement antiliante).

**I.2.** Dans l'approximation des orbitales frontières, quelle est l'interaction orbitale prédominante à prendre en compte lors de l'addition sur le formaldéhyde d'un nucléophile caractérisé par sa plus haute orbitale occupée d'énergie  $\alpha$  ?

**I.3.** Justifier, en utilisant les résultats des calculs précédents, que le carbone du carbonyle soit le site d'attaque du nucléophile.

**I.4.** On s'intéresse maintenant à la directionnalité, c'est-à-dire à la direction préférentielle d'approche du réactif. Soit  $\theta$  l'angle d'attaque d'un réactif nucléophile, représenté par un ion hydrure, sur le site électrophile du groupe carbonyle.



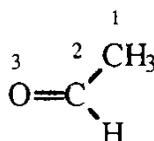
En analysant la nature des interactions entre les orbitales  $\pi$  du groupe carbonyle et l'orbitale  $1s$  de l'hydrure, justifier qualitativement le fait que l'approche de l'ion hydrure ne se fasse pas perpendiculairement au plan du groupe carbonyle ( $\theta = 90^\circ$ ) mais pour un angle  $\theta$  voisin de  $103^\circ$ .

## II. Réactivité et conformation de l'acétaldéhyde.

Les orbitales moléculaires  $\Psi_i$  de l'acétaldéhyde, d'énergie  $E_i$ , obtenues par la méthode de Hückel en choisissant un modèle hétéroatomique pour le substituant méthyle, sont données ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} E_3 = \alpha - 0,75 \beta & \Psi_3 = 0,216 \chi_1 - 0,848 \chi_2 + 0,485 \chi_3 \\ E_2 = \alpha + 1,44 \beta & \Psi_2 = 0,442 \chi_1 - 0,357 \chi_2 - 0,822 \chi_3 \\ E_1 = \alpha + 2,32 \beta & \Psi_1 = 0,870 \chi_1 + 0,392 \chi_2 + 0,300 \chi_3 \end{array}$$

La notation  $\chi_j$  désigne une orbitale atomique  $2p$  centrée sur l'atome  $j$ . La numérotation des atomes est précisée ci-dessous.



*Remarque* : le modèle hétéroatomique pour le substituant méthyle consiste à considérer le groupe méthyle dans son ensemble comme un hétéroatome défini par les paramètres :

$$\alpha_{\text{Me}} = \alpha + 2,0 \beta, \quad \beta_{\text{C-Me}} = 0,7 \beta.$$

**II.1.** En déduire, dans l'approximation des orbitales frontières, lequel des deux aldéhydes (formaldéhyde ou acétaldéhyde) est le plus réactif vis à vis d'un réactif nucléophile d'énergie  $\alpha$ .

**II.2.** Justifier quantitativement, en utilisant la formule de perturbation ci-dessous :

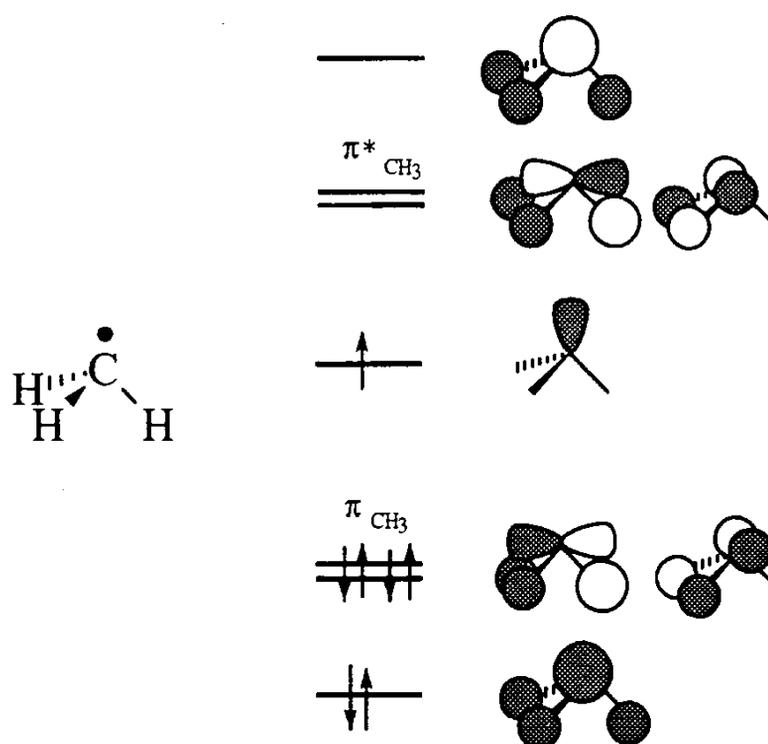
$$E_i' = E_i + \frac{(c_{ir}c_{js}\beta_{rs})^2}{E_i - E_j}$$

la position relative des plus basses orbitales vacantes (BV) du formaldéhyde et de l'acétaldéhyde. On décomposera arbitrairement l'acétaldéhyde en deux fragments  $\text{CH}_3$  et  $\text{HCO}$ , et on considérera que les OM de l'acétaldéhyde résultent de l'interaction entre les orbitales de ces deux fragments.

On appellera  $\Psi'_i$  une OM d'énergie  $E'_i$ , décrivant le système après perturbation (réunion des deux fragments);  $\Phi_i$  l'OM du fragment non perturbé (ici le formaldéhyde) d'énergie  $E_i$ ;  $\Phi_j$  l'OM de l'autre fragment, d'énergie  $E_j$ . La liaison  $r_s$  est la liaison impliquée dans la fragmentation.  $c_{iR}$  est le coefficient de l'orbitale atomique  $\chi_R$  dans l'orbitale moléculaire  $\Phi_i$  du premier fragment,  $c_{jS}$  le coefficient de l'orbitale atomique  $\chi_S$  dans l'orbitale moléculaire  $\Phi_j$  du deuxième fragment.

**II.3.** En fait le modèle hétéroatomique du méthyle est un modèle simplifié pour représenter l'une des orbitales occupées du fragment  $\text{CH}_3$  appelée  $\pi_{\text{CH}_3}$  ayant la bonne symétrie pour interagir avec le système  $\pi$  du groupe carbonyle.

On donne le diagramme des orbitales moléculaires du fragment  $\text{CH}_3$ .



**II.3.a.** Montrer que l'interaction du fragment méthyle avec le système du groupe carbonyle se traduit par un transfert de charge du méthyle vers le groupe carbonyle (hyperconjugaison).

On décomposera l'acétaldéhyde en deux fragments  $\text{CH}_3$  et  $\text{HCO}$  comme dans la question précédente et on ne considèrera dans l'analyse que les interactions entre les orbitales portées par le groupe carbonyle et les orbitales de symétrie convenable du fragment méthyle.

Les énergies des orbitales de fragment  $\pi_{\text{CH}_3}$  et  $\pi_{\text{CH}_3}^*$  seront prises égales respectivement à  $\alpha + 2\beta$  et  $\alpha - 2\beta$ .

**II.3.b.** Dans l'acétaldéhyde, la conformation (a) dans laquelle une liaison C-H du groupe méthyle éclipse la double liaison C=O est plus stable que la conformation (b) dans laquelle les liaisons C-H et C=O sont décalées.



(a)

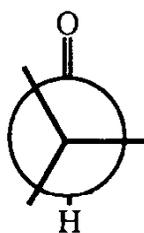


(b)

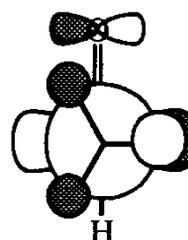
En adoptant une démarche semblable à celle de la question précédente, faire le bilan des interactions orbitales qui peuvent se développer dans chaque conformation en précisant leur caractère stabilisant ou déstabilisant.

Comparer l'interaction stabilisante prédominante dans les conformations (a) et (b). En déduire que la conformation éclipée (a) est favorisée.

**II.3.c.** En fait, la conformation la plus réactive vis-à-vis d'un réactif nucléophile, modélisé ici par un ion hydrure  $\text{H}^-$ , est la conformation perpendiculaire (c) dans laquelle une des liaisons C-H du groupe méthyle est "perpendiculaire" au plan du groupe carbonyle. En analysant la structure de la BV de cette conformation (figure de droite ci-dessous), justifier le fait que l'ion hydrure attaque de façon antipériplanaire à cette liaison C-H.



(c)



BV

**II.4.** On peut effectuer par mécanique moléculaire l'étude conformationnelle de l'acétaldéhyde. On utilise pour cela une expression analytique de l'énergie (énergie stérique) qui comprend au minimum cinq termes :

$$E = \sum_l \frac{1}{2} k_l (l - l_0)^2 + \sum_\theta \frac{1}{2} k_\theta (\theta - \theta_0)^2 + \sum_{n=1}^3 \frac{V_n}{2} (1 - (-1)^n \cos n \phi) + \sum_r \epsilon_r \left( \left( \frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^6 \right) + \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{D r_{ij}}$$

Le premier terme correspond aux allongements des distances  $l$  entre atomes liés par rapport aux distances de référence  $l_0$ . Le deuxième terme évalue l'écart dû aux angles de valence par rapport aux angles de référence  $\theta_0$ . Le troisième terme est le terme de torsion qui dépend des angles dièdres. Le quatrième terme décrit les interactions de Van der Waals entre atomes non liés distants de  $r$ . Enfin le dernier terme reflète l'interaction électrostatique entre les charges  $q_i$  et  $q_j$  localisées sur les atomes  $i$  et  $j$  distants de  $r_{ij}$  dans un milieu de constante diélectrique  $D$ . Les grandeurs  $k_l$ ,  $k_\theta$  et  $V_n$  sont des constantes qui dépendent du type d'atomes impliqués dans les liaisons. Les grandeurs  $\epsilon_r$  et  $r_0$  dépendent de chaque couple d'atomes non liés.

**II.4.a.** Quelle interprétation peut-on donner des grandeurs  $\epsilon_r$  et  $r_0$  ?

**II.4.b.** Les énergies stériques (en  $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ ) de quelques conformations de l'acétaldéhyde ainsi que leurs composantes sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

Angle dièdre	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
Energie stérique	-15,932	-16,179	-16,060	-15,306	-15,158
Allongement	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006
Angle de Valence	0,261	0,261	0,261	0,261	0,261
Torsion	1,142	0,798	0,868	1,691	1,868
Van der Waals	-0,269	-0,202	-0,199	-0,320	-0,551
Electrostatique	-17,073	-17,043	-16,997	-16,944	-16,942

L'angle dièdre  $\phi$  est défini par la figure ci-contre :

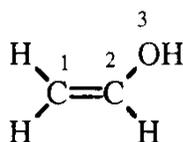


Calculer la barrière de rotation autour de la liaison C-C. S'agit-il d'une barrière de rotation rigide ? On entend par rotation rigide une rotation autour de la liaison simple C-C en maintenant les distances interatomiques et les angles de valence fixes.

**II.4.c.** Ces résultats sont-ils conformes à l'analyse effectuée à partir des orbitales de fragments au paragraphe **II.3.b.** ?

### III. Réactivité de l'alcool vinylique, énol de l'acétaldéhyde

On considère l'alcool vinylique :



**III.1.** Ecrire le déterminant séculaire permettant de déterminer l'énergie des orbitales moléculaires  $\pi$ . On prendra pour l'atome d'oxygène les paramètres suivants :

$$\alpha_{\text{O}} = \alpha + 2,0 \beta \quad \text{et} \quad \beta_{\text{CO}} = 0,8 \beta$$

La résolution de ce déterminant conduit aux résultats suivants :

$$\begin{array}{ll}
 E_3 = \alpha - 1,11 \beta & \Psi_3 = 0,658 \chi_1 - 0,729 \chi_2 + 0,188 \chi_3 \\
 E_2 = \alpha + 0,77 \beta & \Psi_2 = 0,735 \chi_1 + 0,568 \chi_2 - 0,370 \chi_3 \\
 E_1 = \alpha + 2,34 \beta & \Psi_1 = 0,163 \chi_1 + 0,382 \chi_2 + 0,910 \chi_3
 \end{array}$$

La notation  $\chi_j$  désigne une orbitale atomique 2p centrée sur l'atome j. La numérotation des atomes est précisée sur la formule ci-dessus.

**III.2.** Quel est le site privilégié d'une addition électrophile sur l'énol ? Justifiez votre réponse à l'aide des données du paragraphe précédent.

**III.3.** L'alcool vinylique est une molécule que l'on a pu identifier dans l'espace interstellaire bien qu'il soit thermodynamiquement moins stable que l'acétaldéhyde. Pour interpréter ce résultat, on admettra que l'énol isolé peut se réarranger en acétaldéhyde par une réaction sigmatropique dont on précisera la stéréochimie. Justifier le fait que l'énergie d'activation de la réaction soit très élevée (environ  $400 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ ).

**III.4.** Pour modéliser un énolate, en théorie de Hückel, comment doit-on modifier les paramètres de l'oxygène de l'énol ?

**III.5.** Peut-on utiliser directement en mécanique moléculaire les énergies stériques en  $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$  de l'acétaldéhyde et de l'alcool vinylique pour estimer l'enthalpie de l'équilibre de tautomérie ? Justifier votre réponse.

	Acétaldéhyde	Alcool vinylique
Energie stérique	-16,179	-15,949
Allongement	0,006	0,017
Angle de Valence	0,261	0,151
Torsion	0,798	0,000
Van der Waals	-0,202	1,760
Electrostatique	-17,043	-17,877

## PARTIE 2

### STEREOCHIMIE DES ADDITIONS AU GROUPE CARBONYLE

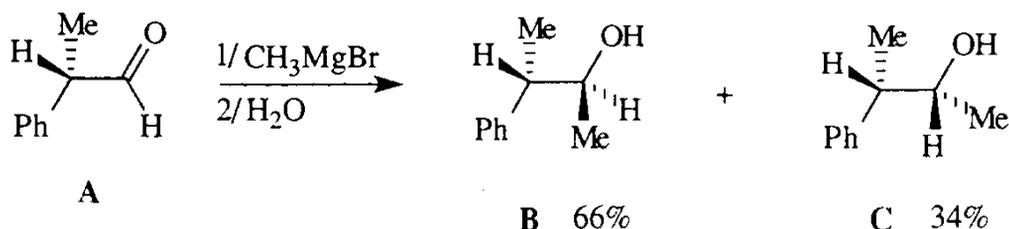
On se propose d'étudier sur quelques exemples l'importance des facteurs stéréo-électroniques sur le contrôle de la réaction d'addition d'un nucléophile au groupe carbonyle.

**I.** On réalise l'addition du benzaldéhyde à une solution de bromure de méthylmagnésium dans l'éther anhydre.

**I.1.** Quelle est la nature du produit obtenu après hydrolyse du milieu réactionnel ? Quel est le mécanisme de la réaction ?

**I.2.** Sous combien de formes, stéréo-isomères de configuration, le produit peut-il exister ? Quelles sont celles qui sont obtenues et dans quelles proportions ? Justifier ce résultat.

**II.** L'addition du 2-phénylpropanal **A**, optiquement actif, à une solution de bromure de méthylmagnésium dans l'éther conduit, après hydrolyse, à un mélange des deux alcools isomères **B** et **C**.



**II.1.** Préciser la configuration des carbones asymétriques des produits **A**, **B** et **C**.

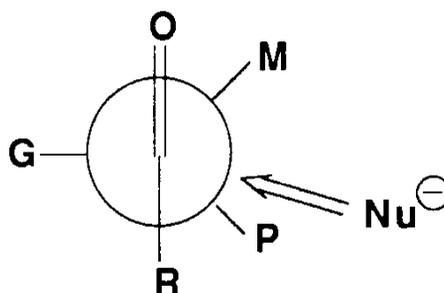
**II.2.** Les deux faces du groupe aldéhyde de **A** sont dites diastéréotopiques. Justifier ce terme.

Comment faut-il désigner les deux faces du benzaldéhyde étudié en **I.1.** ?

### III. Modèle de Felkin-Anh

On se propose d'interpréter le résultat observé en utilisant le modèle de Felkin-Anh basé sur une étude expérimentale et sur l'approche théorique développée en première partie :

G (Ph), M (Me) et P (H) symbolisent les groupes gros, moyen et petit (au sens des rayons de Van der Waals) portés par le carbone en  $\alpha$  du C=O.



- Les réactions sont sous contrôle cinétique avec un état de transition proche des réactifs.
- L'attaque du nucléophile intervient sur une conformation "perpendiculaire" du dérivé carbonylé, de façon sensiblement antipériplanaire à la liaison C-G.
- Compte-tenu de l'angle d'attaque voisin de  $103^\circ$ , la conformation privilégiée pour l'état de transition est celle qui minimise les interactions entre le groupe R et les substituants du carbone en  $\alpha$  du C=O.

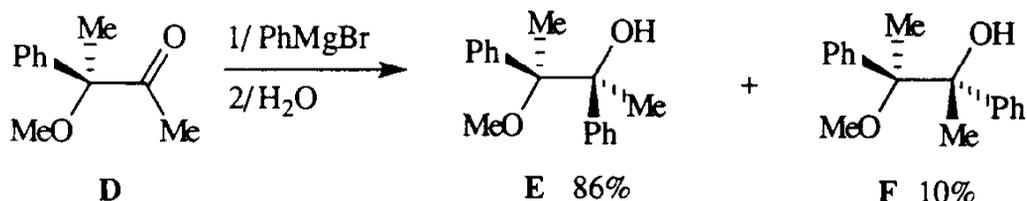
**III.1.** Pourquoi un tel raisonnement n'est-il applicable que dans le cas d'un contrôle cinétique ?

**III.2.** Représenter, en projection de Newman, les conformations perpendiculaires de A. On pourra se limiter aux notations G, M, P précédemment définies.

**III.3.** Représenter les deux états de transition conduisant à B et C, et justifier les proportions obtenues.

**III.4.** Donner, sans démonstration, le résultat obtenu à partir de A racémique, en précisant la configuration des carbones asymétriques.

**IV.** Le modèle de FELKIN-ANH ne s'applique plus lorsque le dérivé carbonylé est substitué par un groupe alkoxy ou amino en  $\alpha$  du C=O [ G (OMe) ; M (Ph) ; P (Me) ] :

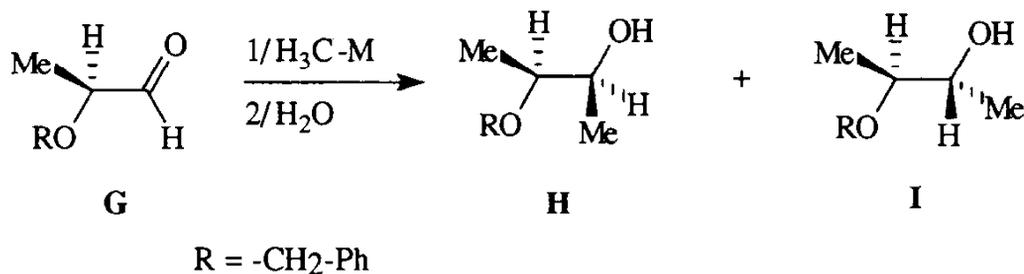


**IV.1.** Quelle est la réaction prévisible entre le cétoéther **D** et les cations magnésium présents dans le milieu ?

**IV.2.** En exploitant ce résultat, proposer des modèles d'état de transition pour la formation de **E** et de **F**.

**IV.3.** Justifier la formation majoritaire de **E**.

**V.** Le choix du réactif organométallique peut jouer un rôle déterminant sur le contrôle stéréoelectronique des additions, comme le montrent les résultats suivants avec des dérivés organométalliques du titane.



H <sub>3</sub> C-M solvant, température	pourcentages relatifs	
	H	I
H <sub>3</sub> C-TiCl <sub>3</sub> CH <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub> , -78 °	92	8
H <sub>3</sub> C-Ti[OCH(CH <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> ] <sub>3</sub> CH <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub> , -78 °C	8	92

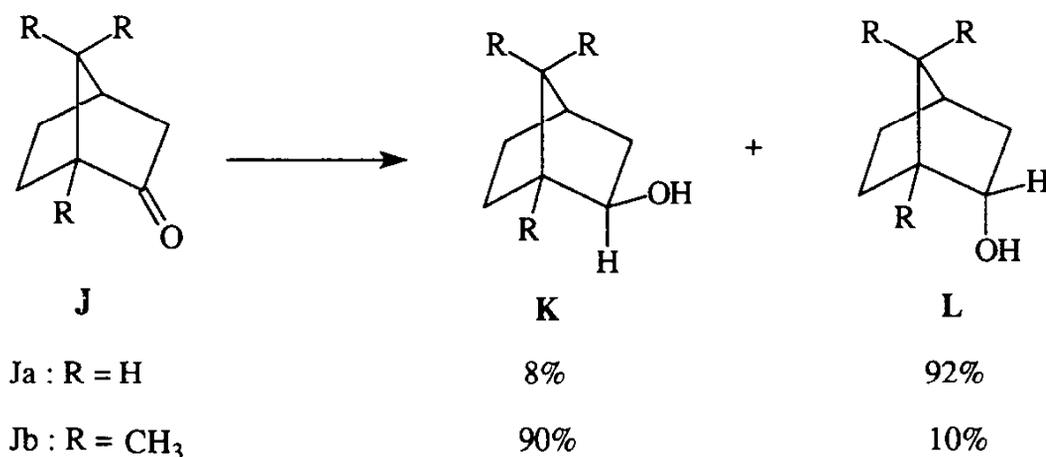
V.1. Le trichlorure et le triisopropanolate de méthyltitanium sont préparés par une réaction de transmétallation entre le méthyllithium et un dérivé halogéné convenable du titane. Ecrire les bilans correspondants.

V.2. Préciser pour chaque réaction lequel des états de transition, étudié en III ou IV, permet de rendre compte de la formation de l'isomère majoritaire (le groupe benzyloxy, Ph-CH<sub>2</sub>-O-, est à considérer comme le plus volumineux).

V.3. Montrer que l'on peut interpréter cette inversion de la diastéréosélectivité en comparant les propriétés, en tant qu'acides de Lewis, de ces deux complexes du titane.

V.4. Proposer un modèle d'état de transition pour la réaction avec le trichlorure de méthyltitanium.

VI. Les additions aux cétones cycliques ou bicycliques sont abordées ici dans le cas de la réduction du norcamphre **J<sub>a</sub>** et du camphre **J<sub>b</sub>** par le tétrahydroaluminate de lithium.



La réaction étudiée conduit à un mélange de deux alcools diastéréo-isomères dans les proportions indiquées ci-dessus.

**VI.1.** Comment désigne-t-on les isomères **K** et **L** ?

**VI.2.** Déterminer dans chaque cas (**a** et **b**) quelle est l'approche privilégiée du nucléophile.

**VI.3.** Expliquer pourquoi le camphre ne donne pas lieu à la même stéréosélectivité que le norcamphre.

**VI.4.** Lorsque les deux isomères **K<sub>b</sub>** et **L<sub>b</sub>** sont mis dans des conditions d'équilibre thermodynamique, **L<sub>b</sub>** est majoritaire à pratiquement 100%. Ce résultat semble-t-il compatible avec la sélectivité observée lors de la réduction ?

## PARTIE 3

### ANALYSE ET SYNTHÈSE DE COMPOSÉS À ODEUR MUSQUÉE

Les substances à odeur musquée sont abondamment utilisées en parfumerie. Leur structure est souvent connue depuis longtemps, mais on s'intéresse toujours à la recherche de méthodes nouvelles de synthèse de ces composés naturels.

#### I. Détermination de la structure de la civétone.

En 1915, SACK a isolé la substance odorante produite par les glandes anales de la civette (mammifère carnassier de la famille des viverridés, à laquelle appartient également la mangouste). Cette substance représente de 2% à 6% de la masse de la glande et contient environ 80% d'un composé que l'on a purifié : la civétone **A**. La structure de la civétone a été établie par RUZICKA en 1926.

**I.1.** Les méthodes d'analyse pondérale ont montré que la formule brute de **A** est  $C_{17}H_{30}O$ .

Une solution de dibrome dans le benzène se décolore rapidement en présence de **A**, de même qu'une solution aqueuse acide diluée de permanganate de potassium.

En présence de **A**, une solution alcoolique de 2,4-dinitrophénylhydrazine donne un abondant précipité jaune-orangé.

Dans des conditions expérimentales convenables, **A** peut être hydrogéné en **B** en présence de chlorotris(triphénylphosphine)rhodium (catalyseur de Wilkinson) ou de palladium sur charbon. Une mole de **A** absorbe une mole de dihydrogène, et **B** provoque également l'apparition d'un abondant précipité jaune lorsqu'on l'ajoute à une solution de 2,4-dinitrophénylhydrazine.

Une mole de **B** se condense facilement, en milieu basique, avec une mole de benzaldéhyde pour conduire à **C**.

À l'aide des indications ci-dessus, indiquer l'ensemble des données structurales mises en évidence. On donnera les explications nécessaires et des schémas réactionnels partiels.

**I.2.** Le composé **B** soumis à une vigoureuse oxydation par l'oxyde chromique en milieu sulfurique, ou par l'acide nitrique fumant et chaud, conduit à l'acide heptadécanedioïque **D** (heptadéca est le préfixe grec correspondant au nombre 17).

Quelle est la structure de **B** ?

**I.3.** Le composé **A**, soumis à une réduction de Clemmensen donne **E**. Le composé **E**, vigoureusement oxydé par le permanganate de potassium concentré en milieu acide donne **D**.

Si l'on soumet directement **A** à l'oxydation permanganique, on obtient **F**. Le composé **F** soumis à son tour à une vigoureuse oxydation par l'oxyde chromique en milieu sulfurique, ou par l'acide nitrique fumant et chaud, conduit à un mélange en quantités identiques d'acide octanedioïque et d'acide nonanedioïque.

Quelle est la structure de **A** ?

Donner également la structure de **E** et **F**.

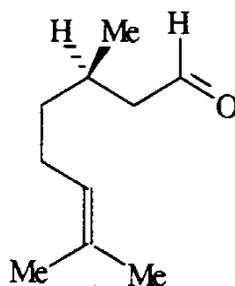
## II. Synthèse de la muscone à partir de produits naturels.

Le cerf musqué possède, près de l'estomac, une glande produisant des substances à odeur musquée représentant 0,5% à 2% de la masse de la glande. L'une de ces substances, la muscone, a été isolée pure par WALBAUM en 1906 et sa structure a été déterminée par RUZICKA en 1926.

Une synthèse intéressante de cette substance à partir de produits naturels a été proposée en 1964 par MAMDAPUR et ses collaborateurs.

Dans tout ce qui suit, la structure de chaque composé sera justifiée par une brève explication ou, mieux, par l'écriture du mécanisme de la réaction considérée.

**II.1.** Le (+)-citronellal, **1**, est une substance naturelle dont la formule est donnée ci-dessous.



**1**

**II.1.1.** Cette molécule est-elle chirale ?

**II.1.2.a)** Indiquer éventuellement le (ou les) atome(s) de carbone asymétrique(s).

b) Donner également la configuration de cet (ces) atome(s).

**II.1.3.** Donner le nom de nomenclature systématique du (+)-citronellal.

**II.2.** Le composé **1** est traité par le glycol (éthane-1,2-diol) en milieu anhydre en présence d'une quantité catalytique d'acide paratoluènesulfonique, on obtient **2**. Le composé **2** est soumis à une ozonolyse suivie d'une hydrolyse oxydante. Il se forme de l'acétone et **3**.

3 est estérifié en 4 par le diazométhane.

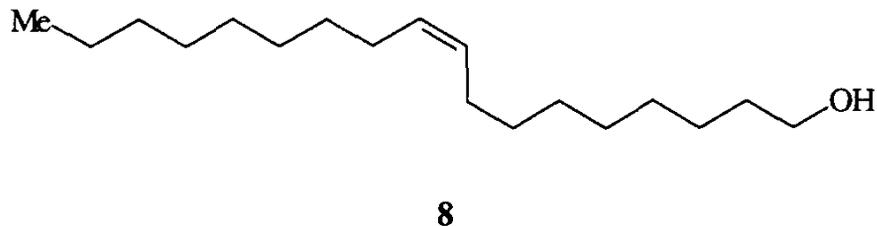
4 est hydrolysé de façon ménagée en milieu acide, on obtient 5 que l'on oxyde en 6.

6 traité par le chlorure de thionyle,  $\text{SOCl}_2$ , conduit à 7.

II.2.1. Donner la structure des composés 2 à 7.

II.2.2. Expliquer, au vu de l'ensemble de ces réactions, pourquoi l'on a effectué la réaction 1→2.

II.3. L'alcool oléique, 8, est le (Z)-octadéc-9-én-1-ol, substance naturelle dont la formule est donnée ci-dessous.



8 est traité par le tribromure de phosphore, et le composé obtenu, 9, est soumis à l'action du magnésium dans l'éther anhydre pour conduire à 10.

10 est traité par le chlorure de cadmium, et le produit 11 qui en résulte réagit avec 7 : on obtient 12.

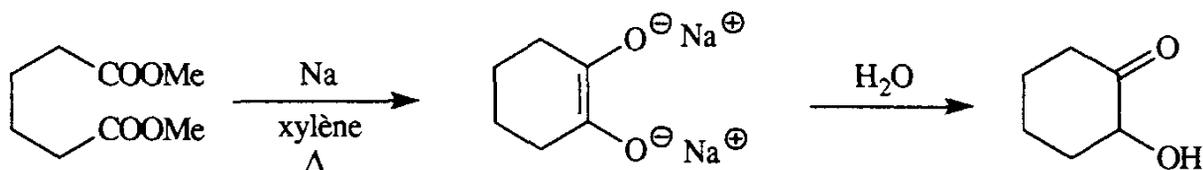
12 est traité par l'ozone, et l'ozonide obtenu est hydrolysé en milieu réducteur : un composé 13 est formé qui contient 17 atomes de carbone.

13 est oxydé chromiquement en 14 qui est estérifié en 15 par le méthanol.

II.3.1. Donner la structure des composés 9 à 15.

II.3.2. Expliquer la nécessité du passage 10→11 pour obtenir 12.

II.4. BOUVEAULT et LOCQUIN ont mis au point, en 1926, une méthode de cyclisation des diesters terminaux selon le schéma ci-dessous.



15 est ainsi acétalisé par le glycol comme il a déjà été indiqué, et le composé 16 obtenu est traité par la méthode de BOUVEAULT et LOCQUIN. Une cétone-alcool 17 (en fait un mélange de deux tautomères) est formée, puis réduite en 18 par l'action de  $\text{LiAlH}_4$  suivie d'une hydrolyse.

18 est traité par le bromure d'hydrogène dans l'acide acétique : on obtient un composé dibromé 19, de formule brute  $\text{C}_{16}\text{H}_{28}\text{OBr}_2$ .

**19**, traité par le zinc dans le méthanol, donne par une réaction d'élimination classique, **20** de formule brute  $C_{16}H_{28}O$ , dont on ne précisera pas la configuration.

**20** est hydrogéné catalytiquement et l'on obtient la (-)-muscone **21**, cétone de formule brute  $C_{16}H_{30}O$ .

**II.4.1.** Donner la structure des composés **16** à **20** et de la (-)-muscone.

**II.4.2.** Vérifier que la partie de la molécule qui est à l'origine de sa chiralité n'a jamais été modifiée pendant cette synthèse.

**II.4.3.** La réaction de BOUVEAULT et LOCQUIN doit-elle, dans ce cas, être effectuée en milieu dilué ou concentré ?

### III. Synthèse de la muscone racémique. (MOOKHERJEE, 1971)

Une synthèse de la muscone racémique a été réalisée à partir du (1Z, 9Z)-cyclohexadéca-1,9-diène **22** (hexadéca = 16).

**III.1.** Combien **22** présente-t-il d'isomères de configuration ?

**III.2.** L'addition d'une mole d'acide peracétique au diène **22** conduit à 69% de monoépoxyde insaturé **23**.

**III.2.1** Donner le mécanisme et le produit de la réaction.

**III.2.2** Combien d'isomères de configuration **23** possède-t-il ?

**III.3.** Le traitement de **23** par le butyllithium, mole à mole, conduit au mélange :  
-d'une cétone insaturée **24**  
-d'un alcool secondaire **25** (rendement 50%) contenant deux doubles liaisons dont une, de configuration *E*, est située en position  $\alpha,\beta$  par rapport à la fonction alcool.

Donner le mécanisme et les produits de la réaction.

**III.4.** L'alcool  $\alpha,\beta$ -insaturé **25** est isolé par chromatographie sur colonne puis oxydé chromiquement, en milieu acide, dans un mélange d'eau et d'acétone. On obtient une cétone- $\alpha,\beta$ -éthylénique **26** ( $C_{16}H_{26}O$ ). Traitée par le bromure de méthylmagnésium en présence de chlorure cuivreux, **26** conduit à la cétone **27** avec un rendement de 83%.

**III.4.1.** Donner la structure de **26**.

**III.4.2.** Donner le mécanisme de la réaction conduisant à **27** et la structure de ce produit. On précisera le rôle du cuivre(I) dans cette réaction.

**III.5.** La cétone **27** est hydrogénée catalytiquement en présence de palladium sur charbon à 10%; on obtient le composé **28** (I.R. :  $1715\text{ cm}^{-1}$ ).

**28** est bromée dans une solution de benzène et d'éther. On obtient **29** ( $C_{17}H_{30}OBr_2$ ) dont le spectre de R.M.N. présente deux signaux à 4,3 ppm (1H; doublet  $J = 6,5\text{ Hz}$ ) et 4,5 ppm (1H; triplet).

**III.5.1.** Quelle est la structure de **28** ?

**III.5.2.** Quelle est la structure de **29** ? Expliquer l'apparence de son spectre de R.M.N.

**III.5.3.** Traité par le méthanolate de sodium, **29** conduit, par un réarrangement de FAVORSKI, à un mélange de deux isomères **30** et **31** dont l'un, **30**, est l'ester méthylique de l'acide 3-méthylcyclopentadéc-1-ène carboxylique (70%). Donner la structure des composés **30** et **31**.

**III.5.4.** Indiquer le mécanisme du réarrangement de FAVORSKI conduisant à **30** et **31**. Montrer que ces deux produits sont les seuls attendus comme résultat de la réaction de FAVORSKI sur **29**, dans l'hypothèse où ce réarrangement fait intervenir comme intermédiaire très réactif une cyclopropanone

**III.6.** Les composés **30** et **31** sont séparés par chromatographie sur colonne. Le composé **30** est traité par l'azoture de sodium,  $\text{NaN}_3$ , et l'acide sulfurique, puis le produit formé, la muscone racémique, est entraîné à la vapeur à partir du milieu réactionnel. et isolé.

**III.6.1.** Donner une formule de Lewis pour l'ion  $\text{N}_3^\ominus$ .

**III.6.2.** Sachant que cette transformation comporte plusieurs étapes successives dont l'une est une réaction de SCHMIDT (modification de celle de CURTIUS), en proposer un mécanisme détaillé.

#### IV. Synthèse de l'exaltone (cyclopentadécanone) par homologation de cycle.

Une cétone cyclique saturée **A** est traitée par le cyanoacétate d'éthyle,  $\text{NC-CH}_2\text{-COOEt}$ , en milieu basique. Une réaction de COPE-KNOEVENAGEL (réaction de type aldolisation-crotonisation) a alors lieu : on obtient **B**.

L'action du diazométhane sur **B** conduit à une  $\Delta$ -1-pyrazoline intermédiaire **C** qui, par thermolyse, donne l'homologue **D** de **B** (cycle comportant un atome de carbone supplémentaire).

**D**, traité par la soude à  $1 \text{ mol.L}^{-1}$ , conduit à l'homologue correspondant **E** de **A**.

La formule de la  $\Delta$ -1-pyrazoline est : 

**IV.1.** Proposer un mécanisme de la synthèse du diazométhane à partir de la *N*-méthyl *N*-nitroso-urée (ou de la *N*-méthyl *N*-nitroso-paratoluènesulfonamide) et donner une ou plusieurs structures de Lewis du diazométhane.

**IV.2.** Pourquoi ne s'est-on pas contenté de faire réagir le diazométhane sur la cétone **A** ? Indiquer la (les) réaction(s) parasite(s) qui peu(ven)t éventuellement se produire.

**IV.3.** Détailler le mécanisme de chaque étape du processus d'homologation envisagé ci-dessus.

**IV.4.** L'exaltone est la cyclopentadécanone (pentadéca = 15). Si le rendement moyen d'une étape d'homologation est 60%, quel est le rendement de la synthèse de l'exaltone à partir de la cyclododécanone (dodéca = 12) ?

\*\*\*\*\*

**SESSION DE 1994****concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques**

option : physique appliquée

**épreuve B**composition d'électricité, d'électronique,  
d'électrotechnique et d'automatique**Durée : 4 heures***Tout document interdit.**L'usage de la calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.**Il sera tenu compte de la qualité de présentation et de la rigueur des raisonnements.**Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.*

Ce problème propose l'étude de différentes fonctions présentes dans un récepteur radio.

Les parties sont largement indépendantes entre elles.

## I. Synthèse de fréquence par boucle à verrouillage de phase

La figure 1 représente le schéma fonctionnel d'une boucle à verrouillage de phase. On donne :

$$v_1(t) = V_1 \sin \phi_1(t) = V_1 \sin (\omega_0 t + \phi_E)$$

$$v_2(t) = V_2 \cos \phi_2(t) = V_2 \cos (\omega_0 t + \phi_S).$$

Le multiplieur a une constante  $K$ .

Le filtre passe-bas est supposé idéal, de pulsation de coupure  $\omega_C < 2\omega_0$ , d'amplification 1 dans sa bande passante.

Le VCO délivre à sa sortie la tension  $v_2(t)$  et l'on a :

$$\frac{d\phi_S}{dt} = \lambda \cdot v_F(t).$$

On suppose  $\left| \frac{d\phi_E}{dt} \right|$  et  $\left| \frac{d\phi_S}{dt} \right|$  très inférieurs à  $\omega_0$ .

- Établir l'équation différentielle liant  $\phi_E(t)$  et  $\phi_S(t)$ .
- Réponse à un saut de phase :  $\phi_E(t) = \text{cste}$ .  
Déterminer  $\phi_S(t)$  en régime permanent.
- Réponse à une rampe de phase :  $\phi_E(t) = a \cdot t$ .  
Déterminer  $\phi_S(t)$  en régime permanent.  
Que peut-on dire des pulsations instantanées de  $v_1(t)$  et de  $v_2(t)$  :  $\omega_{i1}$  et  $\omega_{i2}$  ?
- Représenter le schéma bloc de la boucle à verrouillage de phase d'entrée  $\Phi_E(p)$ , de sortie  $\Phi_S(p)$  puis d'entrée  $\Omega_{i1}(p)$  et de sortie  $\Omega_{i2}(p)$ .
- On introduit une division par  $N$  entre la sortie du VCO et  $v_2$  (dans les questions précédentes, on a en fait raisonné sur les fondamentaux des signaux).  
Que peut-on dire de  $\omega_{iS}$  : pulsation instantanée de la tension de sortie du VCO lorsque la boucle est verrouillée ?
- $v_1(t)$  est un signal de référence délivré par un oscillateur très stable en fréquence; sa fréquence est  $f_0$ .  
 $N$  peut varier de 1 à  $N_{\max}$ .  
Quelles fréquences cette boucle permettra-t-elle de synthétiser à la sortie du VCO ?

## II. Changement de fréquence

### A. PRINCIPE

- Soit un signal sinusoïdal de fréquence  $F_R$  reçu sur une antenne :

$$v_r(t) = V_r \cdot \cos \Omega_R t = V_r \cdot \cos 2\pi F_R t$$

et un signal sinusoïdal de fréquence  $f_{L0}$  délivré par un oscillateur local :

$$v_{L0}(t) = V_{L0} \cdot \cos \omega_{L0} t = V_{L0} \cdot \cos 2\pi f_{L0} t.$$

Un schéma de principe est donné figure 2. Déterminer le spectre en fréquence du signal  $v_{S1}(t)$  obtenu en sortie du mélangeur (ici un multiplieur de constante  $K$ ).

On peut considérer  $v_{S1}(t)$  comme un signal modulé. De quelle modulation s'agit-il ?

8. Dans le cas où  $v_r(t)$  n'est pas sinusoïdal mais est à spectre borné, comment obtient-on le spectre de  $v_{S1}(t)$  ?

On donne le spectre de  $v_r(t)$  figure 3. Représenter le spectre obtenu pour  $v_{S1}(t)$ .

9. Le filtre F est un filtre passe-bande accordé sur la fréquence  $F_I$ . Quel nom donne-t-on à cette fréquence dans les récepteurs radio ?

On revient à  $v_r(t)$  sinusoïdal, fréquence  $F_R$ . Comment doivent être liées  $F_I$ ,  $F_R$  et  $f_{L0}$  pour que  $v_{S2}(t)$  ne soit pas constamment nulle ?

10. L'amplification de F dans sa bande passante est A. On se place dans l'une des conditions vues au 9.  $v_r(t)$  est une onde modulée en amplitude :

$$v_r(t) = P(1 + k \cdot s(t)) \cdot \cos \Omega_R t.$$

( $s(t)$  : signal BF à spectre borné, pulsation maximale :  $w_{\max}$ ).

En admettant que la bande passante de F est peu supérieure à  $2 w_{\max}$ , étudier le spectre de  $v_{S2}(t)$ .

Que peut-on dire de ce signal ?

Quelle conclusion tirerait-on si  $v_r(t)$  était une onde modulée en fréquence ?

11. On veut recevoir une onde modulée en amplitude (MA) dans la gamme des petites ondes (PO), c'est-à-dire dont la fréquence porteuse est comprise entre 500 kHz et 1 600 kHz.

On utilise  $F_I = 455$  kHz.

Calculer le rapport  $f_{L0\max}/f_{L0\min}$  des fréquences extrêmes que l'oscillateur local doit être capable de délivrer pour que l'on puisse recevoir toute la gamme, dans chacun des cas possibles trouvés au 9.

A-t-on intérêt à choisir  $f_{L0} < F_R$  ou  $f_{L0} > F_R$  ?

$F_R$  étant alors la fréquence porteuse de l'onde à recevoir.

12. Même question avec une onde modulée en fréquence sachant qu'alors  $F_I = 10,7$  MHz et que la bande FM va de 87 MHz à 108 MHz.

13. On veut recevoir une onde de fréquence porteuse  $F_R$ .

On choisit  $f_{L0} > F_R$ .

Montrer que la réception peut être perturbée par une autre station dont on déterminera la fréquence porteuse  $F'_R$  en fonction de  $F_R$  et  $F_I$ . On donne habituellement à cette fréquence le nom de « fréquence image ».

14. Pour limiter l'influence de cette fréquence image, on fait précéder le mélangeur d'un étage amplificateur RF passe-bande accordable sur la fréquence  $F_R$  à recevoir.

Cet amplificateur est un filtre passe-bande du deuxième ordre de fréquence d'accord  $F_R$ , de coefficient de qualité Q et de fonction de transfert  $\underline{T}_{RF}$ . On rappelle l'expression de  $\underline{T}_{RF}$  :

$$\underline{T}_{RF} = \frac{T_0}{1 + jQ \left( \frac{f}{F_R} - \frac{F_R}{f} \right)}.$$

Le taux de réjection de la fréquence image est :

$$\alpha = 20 \cdot \log \frac{|\underline{T}_{RF}(F_R)|}{|\underline{T}_{RF}(F'_R)|}.$$

Déterminer l'expression littérale de  $\alpha$  en fonction de  $F_R$ ,  $F'_R$ , Q.

15. Quel doit être le facteur de qualité du filtre passe-bande RF afin d'obtenir une réjection de la fréquence image de 40 dB, pour la réception d'une émission MA sur 900 kHz ( $F_i = 455$  kHz) ?
16. Même question pour la réception d'une émission MA ondes courtes (OC) de fréquence porteuse 20 MHz. (On a toujours  $F_i = 455$  kHz.)
17. Dans ce dernier cas, on préfère opérer un double changement de fréquence. On choisit  $F_{i1} = 1,6$  MHz;  $F_{i2} = 100$  kHz. Montrer l'intérêt de ce système sur l'exemple numérique du 16. en choisissant  $Q = 200$ .
18. Soit un mélangeur de caractéristique de transfert :

$$v_{S1} = a_1(v_r + v_{L0}) + a_2(v_r + v_{L0})^2 + a_3(v_r + v_{L0})^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(v_r + v_{L0})^n$$

$$v_r(t) = V_r \cdot \cos \Omega_R t$$

$$v_{L0}(t) = V_{L0} \cdot \cos \omega_{L0} t.$$

Quelles sont les fréquences présentes dans le spectre de  $v_{S1}(t)$  ?

En déduire ce qu'est le bruit d'intermodulation pouvant intervenir dans une réception.

19. Comment s'appelle un récepteur muni d'un ou deux changement(s) de fréquence ?

### B. EXEMPLE

Un signal  $v_r(t)$  sinusoïdal de fréquence  $F_R$  est branché à l'entrée du montage de la figure 4 où la polarisation des bases est omise (pour clarifier le schéma). Le générateur de courant  $I$  est supposé parfait. Le montage étant symétrique (X bien choisi), chaque transistor est polarisé par :

$$I_e = \frac{I}{2}.$$

Les deux transistors  $T_1$  et  $T_2$  sont définis en petits signaux par  $h_{11}$  et leur pente  $s$ . Le schéma équivalent petits signaux correspondant est donné figure 5. On rappelle :  $s = 40 \cdot I_e$  avec 40 en  $V^{-1}$ ,  $I_e$  en A,  $s$  en  $A/V$ .

20. Déterminer l'amplification  $\frac{V_{S2}}{V_r}$  en fonction de  $I$  et de l'impédance  $\underline{Z}'$  du circuit oscillant  $R', L', C'$ .

21. Le générateur de courant branché entre A et M est constitué comme indiqué figure 6. ( $T_3$  en petits signaux est défini par  $h_{11T3}$  et  $s_{T3}$ .)

Montrer que la source de courant ainsi réalisée est parfaite si  $E_0 = \text{cste}$ .

22. On branche en série avec  $E_0$  un générateur sinusoïdal  $v_{L0}$  de fréquence  $f_{L0}$ . Le circuit oscillant  $Z'$  est accordé sur la fréquence  $F_1 = f_{L0} - F_R$  et est de coefficient de qualité important.

Montrer que le montage constitue un mélangeur de tensions, de sortie  $v_{S2}(t)$ .

### III. Démodulation MA

#### A. DÉMODULATION NON COHÉRENTE

On donne le schéma d'un démodulateur non cohérent à diode (fig. 7).

23. La diode est assimilée à :

- un circuit ouvert lorsqu'elle est bloquée;
- une résistance  $r$  lorsqu'elle conduit.

On place à l'entrée du détecteur une tension sinusoïdale d'amplitude constante :

$$v_E(t) = V_E \sqrt{2} \cos \Omega t.$$

a. En admettant que l'ondulation de la tension de sortie est négligeable (avec  $\alpha$  : demi-angle d'ouverture de la diode et  $R$  : résistance de charge), calculer le courant moyen dans la diode  $\bar{I}$ .

b. Calculer les courants moyens dans la résistance  $R$  :  $\bar{I}_R$ , et dans le condensateur :  $\bar{I}_C$ . En déduire la relation liant :  $\alpha$ ,  $r$  et  $R$ .

24. Le détecteur dissipe une puissance  $P$ . Déterminer la résistance apparente d'entrée du détecteur en admettant qu'elle dissiperait la même puissance  $P$ . Que vaut cette résistance apparente si  $\alpha$  est faible ?

25. La tension d'entrée est maintenant une onde modulée en amplitude :

$$v_E(t) = P_0 (1 + k \cdot s(t)) \cos \Omega t.$$

( $s(t)$  a un spectre borné de pulsation maximale  $w_{\max}$ .)

Montrer que, moyennant une condition sur la constante de temps du circuit de charge, le montage peut conduire à une détection correcte.

26. Cette condition étant réalisée, dans quel cas la détection n'est-elle pas correcte ?

27. En se plaçant dans les bonnes conditions, on désire éliminer le résidu HF puis isoler la composante continue du signal de sortie. Proposer un montage en indiquant le mode de calcul des éléments.

À quoi peut servir l'information « composante continue » ?

#### B. DÉMODULATION COHÉRENTE OU SYNCHRONÉ

On étudie le principe de cette démodulation dans le cas d'une porteuse sinusoïdale et d'un signal modulant sinusoïdal.

L'onde modulée s'écrit donc :

$$v_E(t) = P_0 (1 + m \cdot \cos wt) \cdot \cos (\Omega t + \phi).$$

Le schéma de principe est donné figure 8.

$$v_1(t) = P'_0 \cdot \cos (\Omega t + \phi').$$

Le multiplieur a une constante  $K$ .

28. Déterminer le spectre d'amplitude de la tension  $v_2(t)$ .
29. Quel doit être le type et les caractéristiques du filtre  $F'$  pour que la tension  $v_3(t)$  soit une bonne image du modulant et conserve sa composante continue ? À quoi peut servir cette dernière ?
30. Quelle doit être la relation entre  $\phi$  et  $\phi'$  pour une détection optimale ?
31. Le filtre est bien choisi, la condition sur  $\phi$  et  $\phi'$  est réalisée.  
Y a-t-il des cas pour lesquels cette détection ne donne pas un résultat correct ? (Cf. question 26 : démodulation non cohérente.)
32. On utilise une boucle à verrouillage de phase pour la reconstitution de la porteuse, c'est-à-dire l'élaboration du signal  $v_1(t)$ .  
Développer le minimum de calculs permettant de proposer le schéma synoptique complet du démodulateur cohérent (on pourra s'aider de la partie I : Étude d'une boucle à verrouillage de phase) réalisant une détection optimale.

### C. DÉMODULATION COHÉRENTE POUR SIGNAL BLU

On étudie le principe dans le cas d'une porteuse sinusoïdale et d'un signal modulant sinusoïdal.

La bande conservée est la bande haute.

33. Expliquer pourquoi  $v_E(t)$  s'écrit maintenant :

$$v_E(t) = k \cdot P_0 \cdot S_M \cdot \cos [(\Omega + \omega)t + \phi].$$

On utilise un démodulateur synchrone (fig. 8) avec :

$$v_1(t) = P'_0 \cdot \cos (\Omega t + \phi').$$

34. De quel type doit être  $F'$  ?
35. *Idem* au 30.
36. *Idem* au 31.

## IV. Démodulation de fréquence

### A. DISCRIMINATION

37. Expliquer le principe d'une démodulation de fréquence par discriminateur.

Quelle doit être la propriété de la fonction de transfert d'un discriminateur idéal ?

*Discriminateur de Foster-Selly* (voir fig. 9).

Les deux circuits oscillants  $(L_1, C_1)$  et  $(L_2, C_2)$  sont accordés sur  $\Omega_0$  et sont couplés par mutuelle  $M$  (couplage lâche). Par hypothèse, le couplage est à flux additif avec le sens des courants indiqué sur la figure.

C est supposé équivalent à un court-circuit pour l'alternatif.

$L_{CH}$  est une self de choc : grande impédance en alternatif HF, très faible impédance pour la BF.

Soient  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{V}_1, \underline{V}_2$  les complexes associés aux grandeurs  $i_1, i_2, v_1, v_2$  lorsqu'elles sont sinusoïdales de pulsation  $\omega$ .

38. Déterminer la relation liant  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$  à la pulsation  $\omega$ .

39. Le couplage étant lâche, et  $R_1$  et  $R_2$  faibles, on admet que :

$$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \approx \frac{L_2 \underline{I}_2}{L_1 \underline{I}_1}$$

En déduire  $\underline{V}_2 / \underline{V}_1$  en fonction de  $L_1, L_2, M, \omega, R_2, C_2$ .

40. Soit  $\phi = \text{Arg} \left( \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \right)$ .

Comparer  $\phi$  à  $-\pi/2$  pour  $\omega$  variant autour de  $\Omega_0$ .

41. Représenter sur un diagramme de Fresnel  $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_{A1}, \underline{V}_{A2}$  dans les cas suivants :

- $\omega = \Omega_0$  En déduire  $v_s$ .
- $\omega < \Omega_0$  Préciser le signe de  $v_s$ .
- $\omega > \Omega_0$  Préciser le signe de  $v_s$ .

42. En admettant que  $v_s = f(\omega - \Omega_0)$  est linéaire pour  $\omega$  autour de  $\Omega_0$ , représenter cette courbe.

### B. DÉMODULATION DE FRÉQUENCE PAR PLL

43. Expliquer le principe de cette démodulation.

### C. DÉMODULATEUR EN QUADRATURE

Le démodulateur en quadrature est constitué de trois parties (voir fig. 10) :

- un réseau déphaseur,
- un multiplieur,
- un filtre passe-bas.

44. Pour l'instant,  $v_1$  est une tension sinusoïdale pure de haute fréquence :

$$v_1(t) = V_1 \cdot \cos \omega t.$$

La transmittance harmonique du réseau déphaseur est :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = |\underline{T}(j\omega)| \cdot e^{j\theta}.$$

Le multiplieur a une constante  $K$ .

Calculer la tension  $v(t)$  à la sortie de ce multiplieur.

Quelles sont les pulsations des composantes de  $v(t)$  ?

45. On suppose le filtre passe-bas idéal, d'amplification 1 dans sa bande passante.

Comment faut-il choisir sa pulsation de coupure  $\omega_c$  pour qu'il élimine la composante haute fréquence de  $v(t)$  ?

Que vaut alors  $v_s$  fonction de  $K, V_1, |\underline{T}(j\omega)|$  et  $\phi$  ? (On fera en particulier apparaître la partie réelle de  $\underline{T}(j\omega)$ .)

46.

a. Étude du déphaseur en régime harmonique.

Son schéma est donné figure 11.

Déterminer l'expression de la fonction de transfert harmonique  $\underline{T}(j\omega) = \frac{V_2}{V_1}$ . On posera :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L(C + C')} \quad Q_0 = \frac{R}{L\omega_0} \quad a = \frac{C'}{C + C'} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

b. Calculer  $v_s$  fonction de  $K, V_1, a, x, Q_0$ .

c. Effectuer le développement de Mac Laurin de  $v_s$  autour de  $\omega = \omega_0$  au premier ordre.

47.  $v_1(t)$  est maintenant une onde modulée en fréquence, de fréquence porteuse  $F_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi}$ .

Expliquer pourquoi le montage précédent permet la démodulation de  $v_1(t)$ . Comment faut-il choisir la pulsation  $\omega_0$  du déphaseur ?

## V. Amplificateur moyennes fréquences

Dans toute cette partie, on se place en régime sinusoïdal, de fréquence  $f$  (pulsation  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ ).

### A. CIRCUITS COUPLÉS PAR INDUCTANCE MUTUELLE (fig. 12)

On rappelle la définition du coefficient de couplage  $k$  :

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

avec  $L_1$  (en H) : inductance propre de la bobine 1,  
 $L_2$  (en H) : inductance propre de la bobine 2,  
 $M$  (en H) : inductance mutuelle entre les bobines 1 et 2.

48. Déterminer les expressions littérales de  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$  fonction de  $\underline{V}_1$ ,  $\omega$  et des éléments des circuits primaire et secondaire.

49. Le primaire et le secondaire sont accordés sur la même fréquence  $f_0$  (pulsation correspondante  $\omega_0$ ) lorsqu'ils sont seuls.

Comment s'écrivent  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$  à cette fréquence ?

50. On fait varier  $k$  (de 0 à 1).

On appelle  $Q_1$  le coefficient de qualité à  $f = f_0$  du circuit  $R_1, L_1$  série. On appelle  $Q_2$  le coefficient de qualité à  $f = f_0$  du circuit  $R_2, L_2$  série.

À  $f = f_0$ , étudier les variations de  $\frac{V_2}{V_1}$  (valeurs efficaces) fonction de  $M$ .

Montrer l'existence d'un couplage critique : préciser alors l'expression de  $M_c$  (mutuelle critique), fonction de  $R_1, R_2, \omega_0$ , si  $Q_1 \cdot Q_2 \geq 1$ .

Tracer l'allure de la courbe  $\frac{V_2}{V_1}$  fonction de  $M$ .

51. On suppose  $Q_1 = Q_2 = Q_0$ .

Calculer  $Q_0$  fonction de  $k_c$  : coefficient de couplage critique.

52. On se place au couplage critique.

a. Soit  $Q_0 \gg 1$ . On pose  $\delta f = f - f_0$ .

Établir l'expression approchée de  $\frac{V_2}{V_1}$  pour de petits écarts  $\delta f$  de la fréquence  $f$  autour de  $f_0$ .

b. En déduire la bande passante à  $-3$  dB. Comparer à celle que l'on aurait obtenue aux bornes de  $R_1$  si le circuit primaire était seul.

53. Étude plus générale.

a. On considère maintenant deux circuits identiques ( $R, L, C$ ) couplés par mutuelle  $M$ . Le coefficient de qualité  $Q_0$  à fréquence  $f_0$ , défini pour chaque circuit comme précédemment, est supposé élevé.

On suppose que, pour  $\omega$  autour de  $\omega_0$ , on a :  $M \cdot \omega = M \cdot \omega_0$ .

Déterminer l'expression approchée de  $\frac{V_2}{V_1}$  pour de petits écarts de  $\omega$  autour de  $\omega_0$ , en fonction de

$k, \omega_0, Q_0, \omega$ .

b. On appelle  $p_1$  et  $p_2$  les pôles de cette fonction de transfert approchée  $\frac{V_2}{V_1}$ .

Établir l'expression littérale de  $p_1$  et  $p_2$ .

Faire la représentation en pôles et en zéros de  $\frac{V_2}{V_1}$  (expression approchée).

c. On rappelle la formule donnant l'aire d'un triangle quelconque (fig. 13) :

$$S = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin \theta}{2}.$$

Montrer que, dans les approximations précédentes :

$$\left| \frac{V_2}{V_1} \right| = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\sin \alpha}{2}.$$

Préciser ce qu'est l'angle  $\alpha$ .

d. Cas  $k > k_C$  : couplage dit serré.

Montrer que  $\frac{V_2}{V_1}$  présente deux maxima lorsque  $w$  varie autour de  $w_0$ .

Indiquer comment on déterminerait graphiquement la bande passante à  $-3$  dB.

e. Cas  $k = k_C$  : couplage critique.

Montrer que  $\frac{V_2}{V_1}$  présente un maximum lorsque  $w$  varie autour de  $w_0$ .

Déterminer graphiquement la bande passante à  $-3$  dB. Expression littérale ?

Comparer au résultat du 52.b.

f. Cas  $k < k_C$  : couplage dit « lâche ».

Montrer que  $\frac{V_2}{V_1}$  passe par un maximum plus faible que dans les autres cas lorsque  $w$  varie autour de  $w_0$ .

g. Donner sur un même graphe l'allure des courbes  $\frac{V_2}{V_1}$  fonction de  $w$  ( $w$  variant autour de  $w_0$ ) dans les trois cas de couplage.

## B. AMPLIFICATEUR SÉLECTIF

**Rappel** : Le facteur de mérite pour un amplificateur à un étage est par définition :

$$M = A_{\max} \cdot B_p,$$

$A_{\max}$  : Amplification maximale,

$B_p$  : Bande passante à  $-3$  dB.

Pour  $n$  étages indentiques en cascade :

$$M_n = A_{\max} \cdot B_p,$$

$A_{\max}$  : Amplification maximale pour un étage,

$B_p$  : Bande passante à  $-3$  dB de l'ensemble.

54. On considère le montage de la figure 14. Son facteur de mérite est noté  $M_1$ .

$C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_S$  se comportent comme des courts-circuits dans la bande de fréquences utilisées.

Soit  $s_T$  : la pente du TEC au point de repos choisi. Le schéma équivalent du TEC en petits signaux est donné figure 15.

La bobine a un coefficient de qualité  $Q_B$  élevé à la pulsation  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et possède une résistance parallèle  $R_B$  supposée constante dans la bande de fréquences utilisées.

Établir l'expression littérale approchée de la fonction de transfert du montage :

$$\underline{A}_V = \frac{V_S}{V_E}$$

pour  $\omega$  variant peu autour de  $\omega_0$  en supposant que l'impédance d'entrée de l'étage suivant est très grande.

55. On utilise deux étages identiques très sélectifs à transistors (tels que celui étudié à la question 54.) en cascade. Le facteur de mérite de l'ensemble est noté  $M_2$ .

En admettant que l'on puisse faire le produit des fonctions de transfert, déterminer l'expression de la bande passante obtenue  $B_2$  en fonction de celle d'un étage simple  $B_1$ .

En déduire  $M_2$  en fonction de  $M_1$ .

56. Circuits à accords décalés.

On utilise deux étages très sélectifs en cascade. Le premier est accordé sur une fréquence  $f_1$  peu inférieure à  $f_0$ , le second sur  $f_2$  peu supérieure à  $f_0$ . ( $f_2 - f_0 = f_0 - f_1$ ). Ceci est obtenu par des circuits oscillants  $(L_1, C)$  et  $(L_2, C)$ . On suppose les deux transistors identiques (TEC de pente  $s_T$ ) et les charges de chaque étage à la résonance identiques aussi (résistance  $R_B$ ).

Donner l'expression approchée de l'amplification en tension  $\underline{A}_V$  autour de  $f_0$  en utilisant la méthode des pôles et des zéros.

En raisonnant comme pour les circuits couplés, montrer que la courbe  $A_V(f)$  peut avoir trois types de forme.

Déterminer, dans le cas « critique », par construction graphique, une valeur approchée de la bande passante. En déduire dans ce cas le facteur de mérite  $M_D$ .

Comparer à  $M_1$ , conclure.

## VI. Rapport Signal/Bruit dans la démodulation MA

On appelle puissance normalisée d'un signal le carré de sa valeur efficace.

Un bruit blanc a une densité spectrale de puissance constante :

$$\eta = \frac{dP_n}{df}.$$

$P_n$  : puissance normalisée correspondant aux composantes situées dans la bande  $df$ .

On peut écrire pour un bruit blanc :

$$n(t) = N \cdot \cos[\phi_n(t)] \quad \phi_n(t) \text{ étant un angle aléatoire.}$$

On définit la bande passante de bruit  $\Delta F_B$  par :

$$\eta \cdot \Delta F_B = \sigma_N^2 \quad \sigma_N^2 \text{ étant la puissance normalisée du bruit } n(t).$$

On pose :

$$G = \frac{N^2}{\eta}.$$

57. Établir la relation liant  $G$ ,  $\Delta F_B$  et la valeur moyenne de  $\cos^2[\phi_n(t)]$  (notée  $\overline{\cos^2[\phi_n(t)]}$ ), pour un bruit blanc.

### A. DANS LA DÉTECTION SYNCHRONE D'UNE ONDE MA

(Voir questions 28 à 32.)

58. Exprimer la puissance normalisée  $S_i$  du signal  $v_E(t)$ .
59. La condition optimale sur  $\phi$  et  $\phi'$  est supposée réalisée. On élimine la composante continue de  $v_3(t)$ . Le signal obtenu est  $v_4(t)$ . Exprimer la puissance normalisée  $S_0$  de  $v_4(t)$  en appelant  $\alpha$  l'amplification de  $F'$  dans sa bande passante.
60. Le démodulateur est précédé d'un filtre passe-bande idéal de pulsations de coupure  $(\Omega - w_{\max})$  et  $(\Omega + w_{\max})$  pour limiter l'influence du bruit, ce filtre a pour transfert 1 dans sa bande passante. On étudie le comportement de l'ensemble pour une entrée bruit blanc  $n(t)$  : voir figure 16.
- Que peut-on dire de la pulsation instantanée de  $n_i(t)$  ?
  - Montrer que  $n_2(t)$  est constitué de deux termes dont on étudiera la pulsation instantanée.
  - Même question pour  $n_3(t)$ .
  - Exprimer  $\sigma_3^2$  : puissance normalisée de  $n_3(t)$ .
  - En déduire le rapport Signal/Bruit :

$$\frac{S_0}{\sigma_3^2} \text{ en fonction de } m, S_i, \eta, f_{\max} = \frac{w_{\max}}{2\pi}.$$

- Conclure sur  $m$  pour avoir un bon rapport Signal/Bruit.

### B. DANS LA DÉTECTION SYNCHRONE D'UNE ONDE MA BLU

(Voir questions 33 à 36.)

On supposera pour la suite la condition optimale sur  $\phi$  et  $\phi'$  réalisée.

Reprendre les questions 58, 59 et 60, la bande passante du filtre passe-bande s'étendant maintenant de la pulsation  $\Omega$  à la pulsation  $(\Omega + w_{\max})$ .

Conclure.

FIGURES

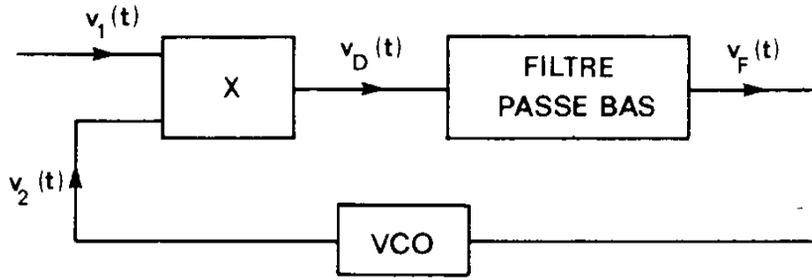


Figure 1

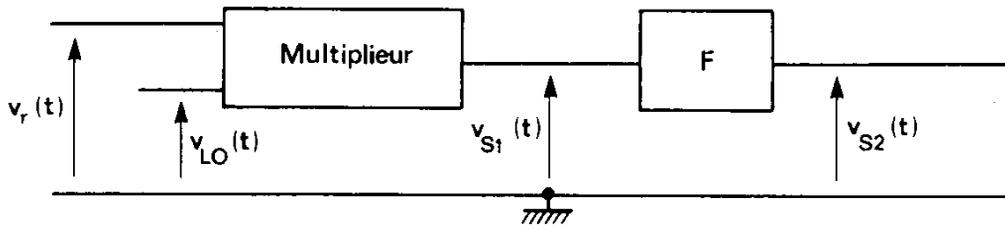


Figure 2

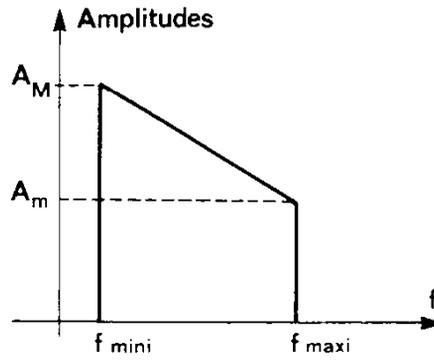


Figure 3

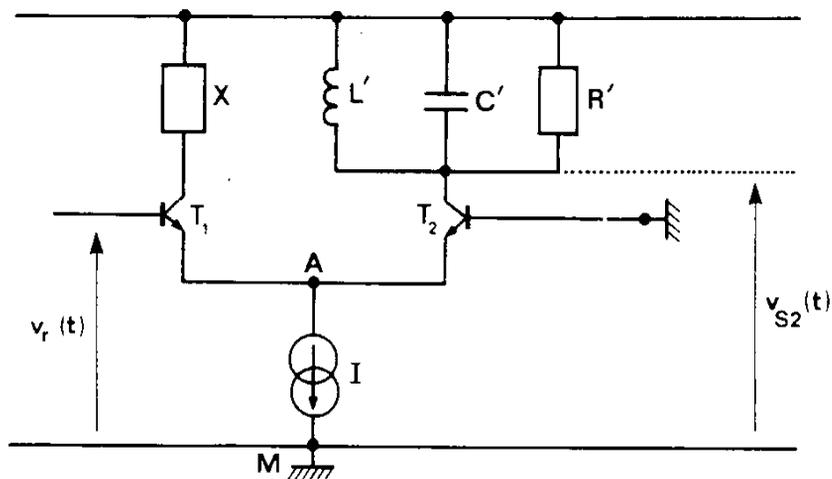


Figure 4

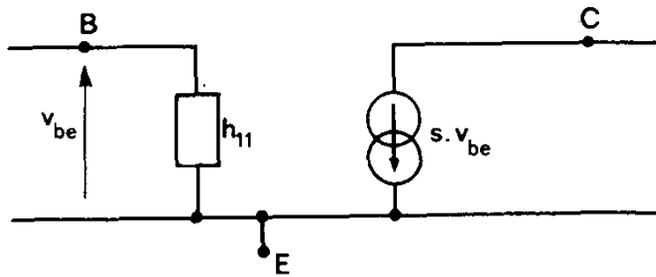


Figure 5

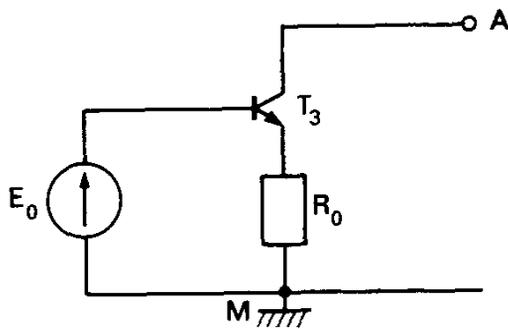


Figure 6

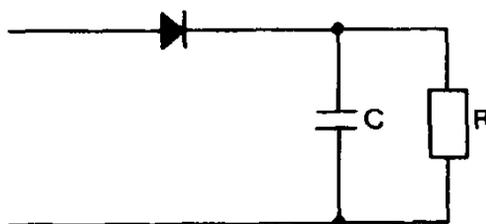


Figure 7

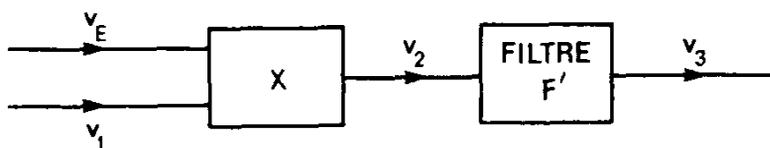


Figure 8

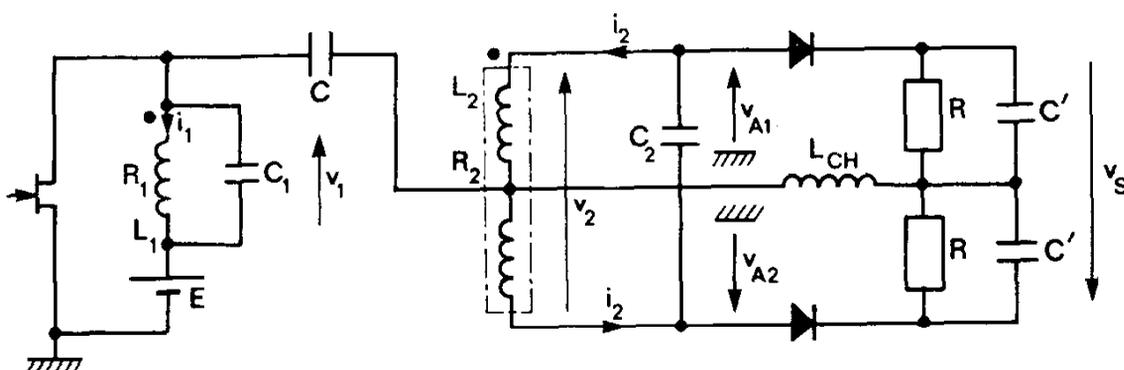


Figure 9

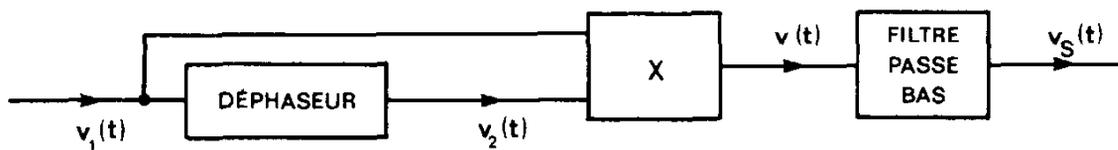


Figure 10

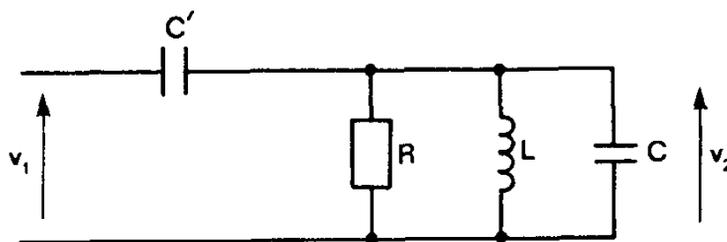


Figure 11

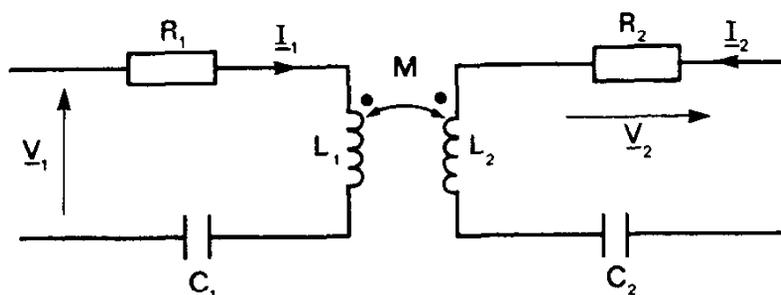


Figure 12

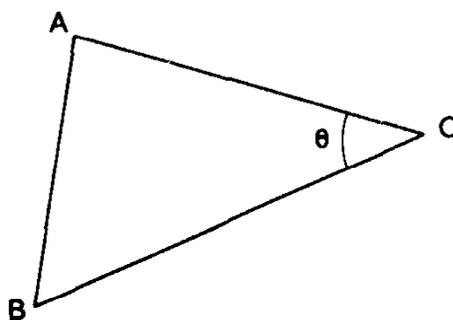


Figure 13

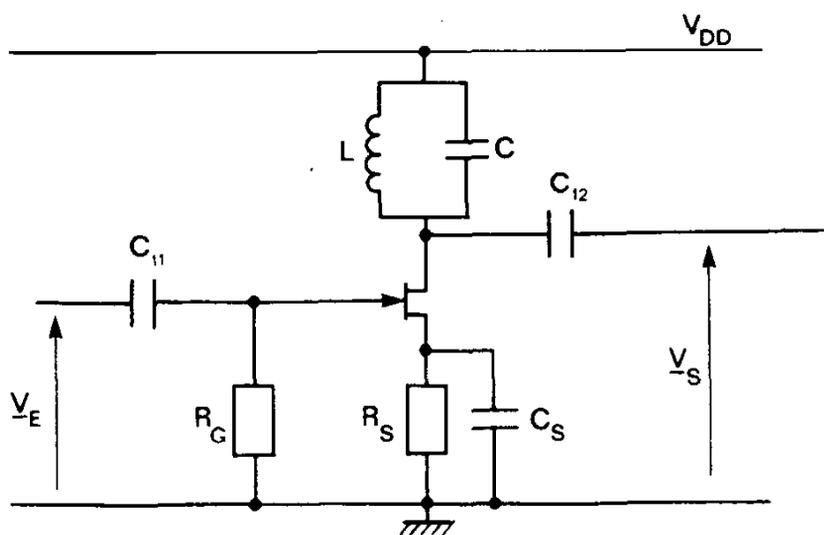


Figure 14

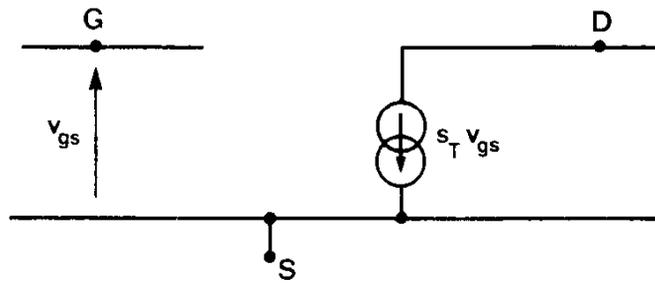


Figure 15

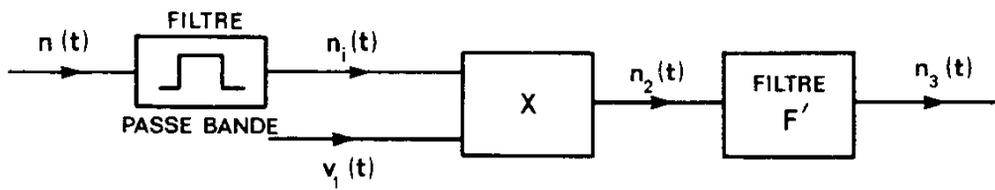


Figure 16

**SESSION DE 1994****concours externe  
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques**

option : physique appliquée

**épreuve C**

problème d'électricité, d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique

**Durée : 6 heures**

*Tout document interdit.*

*L'usage de la calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*Le sujet comporte quatre parties indépendantes.*

*Chaque figure porte le numéro de la question à laquelle elle se rapporte.*

*Les documents-réponses portent le numéro des questions auxquelles ils se rapportent ; ils sont à rendre avec la copie.*

*Si au cours de l'épreuve le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et continue sa composition en précisant les initiatives qu'il prend pour la rédaction de sa solution.*



### Première partie. — ONDULEUR MONOPHASÉ

Le montage étudié dans cette partie est représenté sur la figure 1. La charge de l'onduleur, branchée entre les points M et N, peut être représentée par l'association en série d'une résistance  $R$  de  $1,43 \Omega$  et d'une inductance  $L$  de  $2,63 \text{ mH}$ . Le montage est alimenté par une batterie d'accumulateurs, dont la force électromotrice totale  $E$  peut varier en fonction de son état de charge : charge minimale  $E = 320 \text{ V}$ , charge nominale  $E = 430 \text{ V}$ .

Les interrupteurs sont considérés parfaits : chute de tension nulle à leurs bornes lorsqu'ils sont conducteurs, temps de retard nuls (à l'ouverture et à la fermeture).

Période de commande  $T = 20 \text{ ms}$ .

- 1.1. Pour un décalage  $\theta$  de  $4 \text{ ms}$  des commandes des bras, tracer sur le document-réponse DR 1-1, la tension  $u(t)$ .

Dans ce qui suit on considère le régime établi.

1.2.

- 1.2.1. Dans ce régime on pose  $i(0) = -I_0 < 0$ ; que vaut  $i\left(\frac{T}{2}\right)$  ?

- 1.2.2. Établir l'expression littérale de l'évolution du courant  $i(t)$  pour  $0 < t < \frac{T}{2} - \theta$ .

- 1.2.3. On pose  $i\left(\frac{T}{2} - \theta\right) = I_1$ . Exprimer  $I_1$  en fonction de  $I_0$ .

- 1.2.4. Établir  $i(t)$  pour  $\frac{T}{2} - \theta < t < \frac{T}{2}$ .

- 1.2.5. Exprimer littéralement  $I_0$  en fonction de  $\frac{E}{R}$ ,  $T$ ,  $\theta$  et  $\tau$ . ( $\tau = \frac{L}{R}$ ).

*Application numérique* :  $\theta = 4 \text{ ms}$ ,  $E = 320 \text{ V}$ ; calculer  $I_0$  et  $I_1$ .

- 1.2.6. Tracer sur le document-réponse DR 1-2-6 les allures des courants  $i(t)$ ,  $i_{k1}$  et  $i_{d1}$ .

1.3.

- 1.3.1. Sur le document-réponse DR 1-3-1, tracer l'allure de  $i_e(t)$ , courant débité par la source  $E$ .

- 1.3.2. Calculer littéralement la puissance moyenne fournie par la source.

*Application numérique* :  $\theta = 4 \text{ ms}$ ,  $E = 320 \text{ V}$ .

1.4.

- 1.4.1. Après avoir effectué le changement de variable transformant la fonction  $u(t)$  en une fonction impaire, calculer les coefficients de la décomposition en série de Fourier de  $u(t)$  en fonction de  $E$  et  $\theta$ ; donner l'expression littérale de la valeur efficace de l'harmonique de tension de rang  $n$ .

*Application numérique* : pour  $\theta = 4 \text{ ms}$  et  $E = 320 \text{ V}$ , calculer la valeur efficace du fondamental de tension; déterminer la valeur de  $\theta$  donnant à ce fondamental la même valeur pour  $E = 430 \text{ V}$ .

- 1.4.2. Déterminer l'expression littérale de l'harmonique de courant de rang  $n$  (en valeur efficace et en phase).

- 1.4.3. Calculer littéralement la puissance moyenne fournie à la charge.

- 1.4.4. *Application numérique* : pour  $\theta = 4 \text{ ms}$  et  $E = 320 \text{ V}$ , calculer la puissance fournie à la charge par le fondamental et la puissance fournie par l'ensemble des harmoniques autres que le fondamental.

## 1.5. Schéma équivalent de la charge de l'onduleur.

La charge de type R-L série est reliée à l'onduleur par l'intermédiaire d'un transformateur dont le circuit magnétique n'est pas saturé et pour lequel les pertes ferromagnétiques sont négligées. Le schéma est représenté sur la figure 1-5, où  $r_p$  et  $r_s$  représentent les résistances des bobinages,  $L_p$  et  $L_s$  représentent les inductances propres des bobinages,  $M$  le coefficient de mutuelle inductance.

- 1.5.1. Exprimer les relations liant les flux totaux enlacés par les bobinages primaire et secondaire, en fonction des courants primaire et secondaire, des inductances propres et mutuelle en respectant les conventions de signes de la figure 1-5.
- 1.5.2. À partir des expressions précédentes, écrire celles des tensions  $u_p(t)$  et  $u_s(t)$  aux bornes des enroulements.  
Montrer que le primaire peut se modéliser par le schéma de la figure 1-5-2 dans lequel  $i'_p(t) = A \cdot i_s(t)$ ; donner l'expression de  $A$ .
- 1.5.3. Établir le modèle équivalent de l'ensemble {transformateur-charge}, vu du primaire, sous la forme du schéma de la figure 1-5-3; préciser les expressions de  $r'_s$ ,  $lr'_s$ ,  $R'$  et  $L'$ .
- 1.5.4. Justifier rapidement le schéma équivalent utilisé pour la charge de l'onduleur figure 1, après avoir précisé l'hypothèse simplificatrice nécessaire.

## Deuxième partie. — ONDULEUR MONOPHASÉ MLI

Afin de maintenir la valeur efficace du fondamental de la tension appliquée à la charge à la valeur de 231 V, quelle que soit la valeur de la force électromotrice,  $E$ , de la batterie d'accumulateurs ( $320 \text{ V} < E < 430 \text{ V}$ ), et d'éliminer les harmoniques de tension indésirables, on utilise la technique de la modulation de largeur d'impulsions (MLI).

Le montage reste identique au précédent, figure 1, seule la commande des interrupteurs, considérés parfaits, est modifiée.

La forme d'onde appliquée à la charge, dont le modèle équivalent demeure celui de la première partie, est représentée sur la figure 2. Les symétries de l'onde MLI unipolaire réalisée font que cinq angles sont suffisants pour la définir.

- 2.1. Compléter, sur le document-réponse DR 2-1, les chronogrammes des signaux de commande des interrupteurs, permettant d'obtenir la forme d'onde désirée de la figure 2. (On utilisera un niveau logique « 1 » pour un ordre de fermeture, et « 0 » pour un ordre d'ouverture.)
- 2.2. Décomposition en série de Fourier.
  - 2.2.1 Montrer que cette onde ne contient pas d'harmoniques pairs.
  - 2.2.2. Effectuer la décomposition en série de Fourier, dont on conservera l'origine des temps de la figure 2.
- 2.3. Établir les deux systèmes d'équations non linéaires, dont les angles  $\{\alpha_k\}$  sont les solutions, permettant de régler la valeur efficace du fondamental de tension à 231 V et de supprimer les harmoniques de tension de rangs 3, 5, 7 et 9 pour les valeurs extrêmes de  $E$  : 320 V et 430 V  $\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$ .

Dans la suite, la tension  $u(t)$  s'écrira :

$$u(t) = 231 \cdot \sqrt{2} \cdot \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} b_{2p+1} \cdot \sin(2p+1) \cdot \omega t \right\}.$$

Les valeurs des angles  $\{\alpha_k\}$  ainsi que celles des coefficients  $b_{2p+1}$  sont rassemblées dans les tableaux MLI monophasée 1 et 2 (page 3).

2.4. La décomposition en série du courant dans la charge s'écrit :

$$i(t) = \sum_{p=0}^{\infty} I_{2p+1} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin[(2p+1) \cdot \omega t - \varphi_{2p+1}].$$

2.4.1. Établir l'expression littérale de la puissance moyenne reçue par la charge, ou rappeler si démontrée précédemment.

2.4.2. Évaluer numériquement cette puissance pour  $E = 320$  V.

2.4.3. Comparer la puissance fournie par le fondamental et la puissance fournie par l'ensemble des harmoniques. Commenter ce résultat.

2.5.

2.5.1. Pour  $E = 320$  V, tracer sur le document-réponse DR 2-5-1 le fondamental du courant dans la charge.

2.5.2. En assimilant le courant dans la charge à son fondamental, tracer sur le document-réponse DR 2-5-2, le courant débité par la source en précisant, dans chaque intervalle de temps, les éléments en conduction; on limitera l'étude à l'intervalle de temps  $\left[0, \frac{T}{4}\right]$ .

**Tableaux MLI monophasée 1 et 2**

	Tableau 1	Tableau 2
	E = 320 V	E = 430 V
$a_1$ .....	1	1
$a_3$ .....	0	0
$a_5$ .....	0	0
$b_7$ .....	0	0
$b_9$ .....	0	0
$b_{11}$ .....	- 0,011	- 0,562
$b_{13}$ .....	- 0,195	0,215
$b_{15}$ .....	- 0,203	0,268
$b_{17}$ .....	0,112	0,063
$b_{19}$ .....	0,226	0,051
$b_{21}$ .....	0,062	- 0,254
$b_{23}$ .....	0,007	0,063
$b_{25}$ .....	- 0,024	- 0,098
$b_{27}$ .....	- 0,121	0,003
$b_{29}$ .....	- 0,042	0,167
$b_{31}$ .....	0,062	- 0,035
$\alpha_1$ .....	0,320 rad	0,410 rad
$\alpha_2$ .....	0,471 rad	0,589 rad
$\alpha_3$ .....	0,649 rad	0,847 rad
$\alpha_4$ .....	0,931 rad	1,192 rad
$\alpha_5$ .....	0,996 rad	1,351 rad

### Troisième partie. — ONDULEUR TRIPHASÉ

Le schéma du montage est représenté sur la figure 3. Les trois onduleurs monophasés délivrent des tensions identiques, décalées entre elles d'un tiers de période :

$$u_2(t) = u_1\left(t - \frac{T}{3}\right); \quad u_3(t) = u_1\left(t - \frac{2T}{3}\right).$$

#### 3.1. Étude des formes d'ondes.

Dans cette étude 3.1. le transformateur est couplé en « zigzag » au secondaire et considéré parfait.

3.1.1. Établir les expressions des tensions simples secondaires  $v_{S1N}(t)$ ,  $v_{S2N}(t)$  et  $v_{S3N}(t)$ , en fonction des tensions délivrées par les onduleurs  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$  ainsi que des nombres de spires  $n_p$  et  $n_s$ .

#### 3.1.2. Ondes triphasées MLI.

On rappelle que les ondes MLI délivrées par les onduleurs étudiés ne possèdent pas d'harmoniques pairs.

Montrer que les tensions simples et composées secondaires, quel que soit le découpage adopté, ne comportent pas d'harmoniques de pulsation  $3\omega$  et multiple de  $3\omega$ .

3.1.3 Grâce au découpage choisi pour l'onde MLI unipolaire, le premier harmonique des tensions simples secondaires (outre le fondamental) est de pulsation  $17\omega$ .

Pour les tensions simples secondaires, préciser le nombre minimum d'angles de découpage  $\alpha_i$  des ondes de tensions délivrées par les onduleurs monophasés, pour obtenir ce résultat sur les harmoniques et permettre de maintenir la valeur efficace du fondamental à 231 V, lorsque la force électromotrice E de la batterie d'accumulateurs varie.

3.1.4. Établir les deux systèmes d'équations non linéaires, permettant de calculer les angles de découpage  $\alpha_i$ , pour les deux valeurs extrêmes de E, 320 V et 430 V, et de satisfaire les contraintes énoncées dans la question 3.1.3.

Pour la suite de cette partie, les tensions délivrées par les onduleurs s'écrivent :

$$u_1(t) = 231 \cdot \sqrt{2} \cdot \left[ \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1} \cdot \sin(2p+1) \cdot \omega t \right]$$

$$u_2(t) = u_1\left(t - \frac{T}{3}\right) \quad \text{et} \quad u_3(t) = u_1\left(t - \frac{2T}{3}\right).$$

Les valeurs des coefficients  $a_i$ , correspondant aux deux valeurs de E, sont rassemblées dans les tableaux MLI triphasée 1 et 2 (page 6).

Le taux d'harmoniques d'une tension  $v(t)$ , est défini par le rapport ci-dessous :

$$\tau = \frac{\sqrt{\sum_{p=1}^{\infty} V_{2p+1}^2}}{V}$$

expression dans laquelle V représente la valeur efficace de  $v(t)$  et  $V_{2p+1}$  la valeur efficace de l'harmonique de pulsation  $(2p+1) \cdot \omega$  de  $v(t)$ .

3.1.5. Évaluer le taux d'harmoniques des tensions simples secondaires à vide, respectivement pour E = 320 V et E = 430 V.

### 3.2. Étude du transformateur triphasé.

Le transformateur triphasé est câblé en « zigzag » au secondaire; on utilisera impérativement les conventions de signes représentées sur la figure 3-2.

On notera  $r_p$  la résistance d'un enroulement primaire de  $n_p$  spires et  $r_s$  celle d'un enroulement secondaire de  $n_s$  spires.

Chaque spire des enroulements d'une colonne K ( $K = 1, 2$  ou  $3$ ) enlace un flux commun  $\Phi_K$  et un flux de fuites  $\Phi_{fpK}$  pour une spire d'un enroulement primaire, et  $\Phi_{fsK}$  pour une spire d'un enroulement secondaire. L'inductance de fuites totale associée à un enroulement sera notée  $l_p$  pour un enroulement primaire et  $l_s$  pour chaque enroulement secondaire.

On notera  $R_K$  la réluctance d'une colonne K traversée par le flux commun  $\Phi_K$ , et l'on considérera que

$$R_1 = R_2 = R_3 = R;$$

$R_0$  est la réluctance du circuit de retour de flux  $\Phi_0$  (air ou culasse).

Dans cette étude les pertes ferromagnétiques seront négligées.

3.2.1. Après avoir donné la relation liant les flux  $\Phi_0$  et  $\Phi_K$ , écrire pour chaque colonne {K} la loi d'Hopkinson liant les courants et les flux.

3.2.2. Dédurre des équations précédentes l'expression du flux  $\Phi_0$  en fonction des courants.

3.2.3. Déterminer l'expression du flux  $\Phi_K$  pour chaque colonne en fonction de  $\Phi_0$ , des courants, des réluctances et des nombres de spires.

Dans la suite de l'étude, on supposera équilibrés les systèmes de courants primaire et secondaire.

3.2.4. Tenant compte de la condition d'équilibre des courants, donner les nouvelles expressions des flux  $\Phi_0$  et  $\Phi_K$ .

3.2.5. Établissement du schéma équivalent : figure 3-2-5.

3.2.5.1. Montrer qu'un enroulement primaire d'une colonne {K} peut être représenté par un schéma équivalent tel que celui de la figure 3-2-5 pour lequel on précisera les expressions de  $L_{ik}$  et du courant  $i'_{pk}$ .

3.2.5.2. Établir que le schéma équivalent de chaque secondaire d'une colonne {K} correspond à celui de la figure 3-2-5; exprimer  $m_k$ .

3.2.6. En énonçant, puis en appliquant l'hypothèse de Kapp, démontrer qu'une phase secondaire du transformateur peut être représentée par le modèle simplifié illustré par la figure 3-2-6.

On précisera les expressions littérales de  $v_{s,kN}$ ,  $R_s$  et  $L_s$ .

3.2.7. Détermination des éléments du schéma équivalent étoile ramené au secondaire :

la résistance d'un enroulement primaire est de  $4,55 \text{ m}\Omega$ ; le secondaire câblé présente entre phases une résistance de  $10,5 \text{ m}\Omega$ ;

un essai en court-circuit sous tension réduite, régime sinusoïdal de tension de fréquence 50 Hz, couplage étoile au primaire, zigzag inchangé au secondaire, a donné les résultats suivants :

tension entre phases primaire : 41 V; courant en ligne primaire : 300 A.

À vide, avec le même couplage que celui utilisé pour l'essai en court-circuit, la tension secondaire était de 410 V entre phases pour une tension primaire entre phases également de 410 V.

Calculer numériquement le rapport  $\frac{n_s}{n_p}$ ,  $R_s$  et  $L_s$ .

### 3.3. Filtrage des tensions.

Comme représenté sur la figure 3-3, quatre batteries de condensateurs, couplés en triangles, permettent de réaliser un filtre L-C, grâce aux inductances de fuites du transformateur.

La question suivante concerne le filtrage de la tension, lorsque la charge est passive, linéaire, équilibrée, constituée de trois impédances montées en étoile, dont le schéma équivalent série de chacune peut être représenté par une résistance de 1,43  $\Omega$  et d'une inductance de 2,38 mH.

On utilisera les valeurs numériques des coefficients fournies dans les tableaux MLI triphasée 1 et 2.

3.3.1. Montrer que le montage, pour une phase secondaire, peut se représenter selon le schéma de la figure 3-3-1.

3.3.2. Calculer la valeur efficace du fondamental de tension simple aux bornes de la charge.

3.3.3. On définit l'atténuation de l'harmonique de tension de rang  $k$ , par le rapport :

$$\text{Att}_k = \frac{V_{sfk}}{V_{sk0}},$$

$V_{sfk}$  : valeur efficace de l'harmonique de tension simple, de rang  $k$ , filtrée, aux bornes de la charge ;

$V_{sk0}$  : valeur efficace de l'harmonique de rang  $k$ , de la tension simple secondaire à vide.

Montrer, en tenant compte des valeurs numériques, que l'atténuation peut s'écrire :

$$\text{Att}_k \approx (X_s \cdot C \cdot \omega \cdot k^2 - 1)^{-1}.$$

3.3.4. Évaluer le taux d'harmoniques des tensions simples après filtrage pour les valeurs extrêmes de  $E$  : 320 V et 430 V.

**Tableaux MLI triphasée 1 et 2**

	Tableau 1	Tableau 2
	E = 320 V	E = 430 V
$a_1$ .....	1	1
$a_3$ .....	- 0,014	- 0,376
$a_5$ .....	0	0
$a_7$ .....	0	0
$a_9$ .....	- 0,073	- 0,012
$a_{11}$ .....	0	0
$a_{13}$ .....	0	0
$a_{15}$ .....	- 0,179	0,156
$a_{17}$ .....	- 0,141	- 0,108
$a_{19}$ .....	0,163	- 0,226
$a_{21}$ .....	0,242	0,228
$a_{23}$ .....	0,026	0,125
$a_{25}$ .....	- 0,073	- 0,193
$a_{27}$ .....	- 0,025	0,015
$a_{29}$ .....	- 0,076	0,016
$a_{31}$ .....	- 0,107	- 0,046
$a_{33}$ .....	- 0,029	0,127
$a_{35}$ .....	0,100	- 0,008
$a_{37}$ .....	- 0,002	- 0,117
$a_{39}$ .....	- 0,030	- 0,016
$\alpha_1$ .....	0,3187 rad	0,6058 rad
$\alpha_2$ .....	0,4351 rad	0,6655 rad
$\alpha_3$ .....	0,5888 rad	0,8769 rad
$\alpha_4$ .....	0,8112 rad	1,0403 rad
$\alpha_5$ .....	0,9072 rad	1,1289 rad

## Quatrième partie. – ÉTUDE DE LA COMMUTATION DIODE-TRANSISTOR

On propose dans cette partie une étude de la commutation diode-transistor IGBT de l'un des bras. Pour cela on considère le schéma de la figure 4 dans lequel les inductances de câblage sont négligées. La durée de la commutation est très faible devant la période de fonctionnement du système, par conséquent le courant dans la charge sera considéré constant au cours de cette phase; la commutation étudiée a lieu quand  $i = I_0 = 300 \text{ A}$ ,  $E = 430 \text{ V}$ .

Les caractéristiques des composants nécessaires à l'étude sont fournies en annexes 1 et 2.

### 4.1. Diode considérée idéale.

Le dispositif de pilotage donne l'ordre à l'interrupteur, réalisé par le transistor T, de se fermer à l'instant  $t = 0$ . La diode D est assimilée à un composant idéal (chute de tension nulle en conduction, pas de charge recouvrée); l'évolution du courant collecteur du transistor suit l'allure représentée sur la figure 4-1.

4.1.1. Dans la phase de fermeture du transistor,  $0 < t < t_2$ , préciser les éléments en conduction.

Tracer l'allure de l'évolution de  $V_{ce}(t)$  ainsi que le trajet suivi par le point de fonctionnement dans le plan  $(I_c - V_{ce})$  dans l'intervalle du temps  $[0, t_2]$ .

4.1.2. Préciser les différents régimes de fonctionnement du transistor dans l'intervalle  $[0, t_2]$ .

4.1.3. À partir de la caractéristique de transfert, évaluer les valeurs de la tension de seuil  $V_{ge\ TH} = V_{ge}(t_1)$  et  $V_{ge}(t_2)$ .

4.1.4. Le schéma équivalent du circuit de commande du transistor est représenté sur la figure 4-1-4.

4.1.4.1. Dans l'intervalle  $[0, t_2]$ , le dipôle entre la grille G et l'émetteur E peut être assimilé à une capacité constante C. Justifier cette affirmation à partir de la caractéristique de charge de grille fournie par le constructeur (annexe 1). La caractéristique se prolonge linéairement dans le quadrant  $V_{gs} < 0$   $Q_g < 0$  jusqu'à  $V_{gs} = -20 \text{ V}$ .

4.1.4.2. À  $t = 0^-$ , l'interrupteur  $I_2$  est fermé,  $I_1$  est ouvert,  $V_{ge} = -15 \text{ V}$ .

À  $t = 0^+$ , l'interrupteur  $I_2$  est ouvert,  $I_1$  est fermé;  $R_g = 22 \ \Omega$ .

Calculer les instants  $t_1$  et  $t_2$ .

4.1.4.3. Le coefficient de transconductance directe  $g_s$  relie les vitesses de variation du courant collecteur et de la tension grille-émetteur dans la phase de fonctionnement linéaire du transistor :

$$\frac{di_c}{dt} = g_s \cdot \frac{dv_{ge}}{dt}$$

Après avoir calculé la vitesse de croissance de la tension grille-émetteur à l'instant  $t_2 - \epsilon$ , déterminer, en utilisant la caractéristique fournie en annexe 2, la vitesse de croissance, du courant, correspondante.

### 4.2. Influence de la charge recouvrée de la diode.

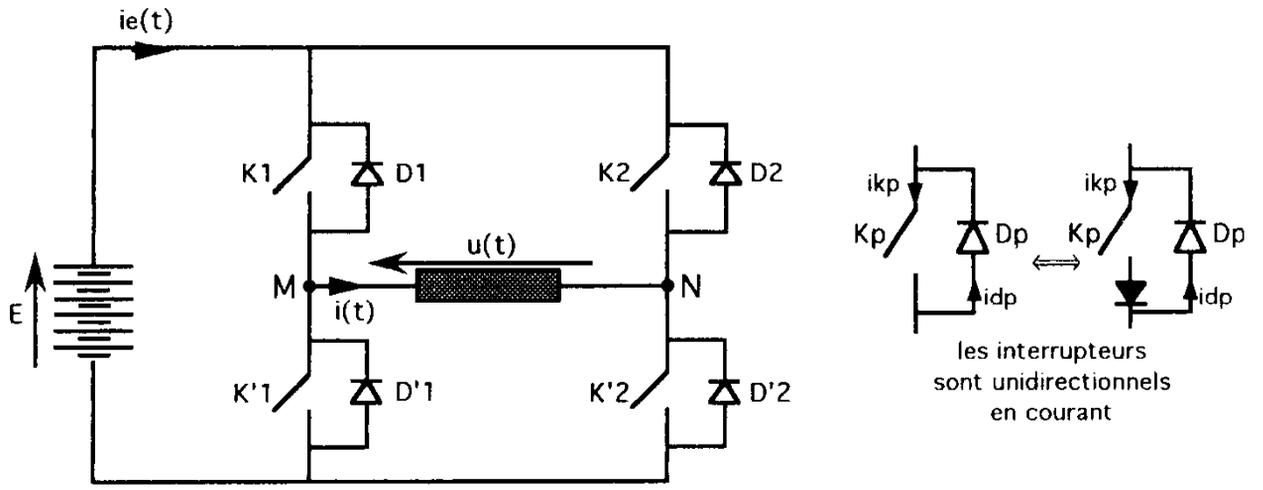
La commutation au blocage d'une diode réelle fait apparaître une charge recouvrée  $Q_{rr}$ , évacuée par le circuit extérieur à la diode. Cette charge dépend, entre autres paramètres, de la vitesse de décroissance du courant dans la diode, du niveau initial de ce courant et de la température de jonction. La figure 4-2 illustre de manière simplifiée l'évolution des grandeurs électriques de ce composant lors de la commutation au blocage. Les valeurs numériques nécessaires sont fournies en annexe 2.

- 4.2.1. À partir des résultats établis dans la question précédente, déterminer la vitesse de décroissance du courant dans la diode, à  $t = t_2 - \varepsilon$ .
- 4.2.2. À partir des données fournies en annexes, évaluer la pointe de courant inverse  $I_{RM}$ , la charge recouvré  $Q_{rr}$  ainsi que le temps de recouvrement inverse  $t_{rr}$ .
- 4.2.3. Tracer les allures du courant collecteur et de la tension collecteur-émetteur du transistor lors de la phase de commutation étudiée.
- 4.2.4. Évaluer l'énergie perdue dans le transistor dans l'intervalle  $[0, t_2]$ .

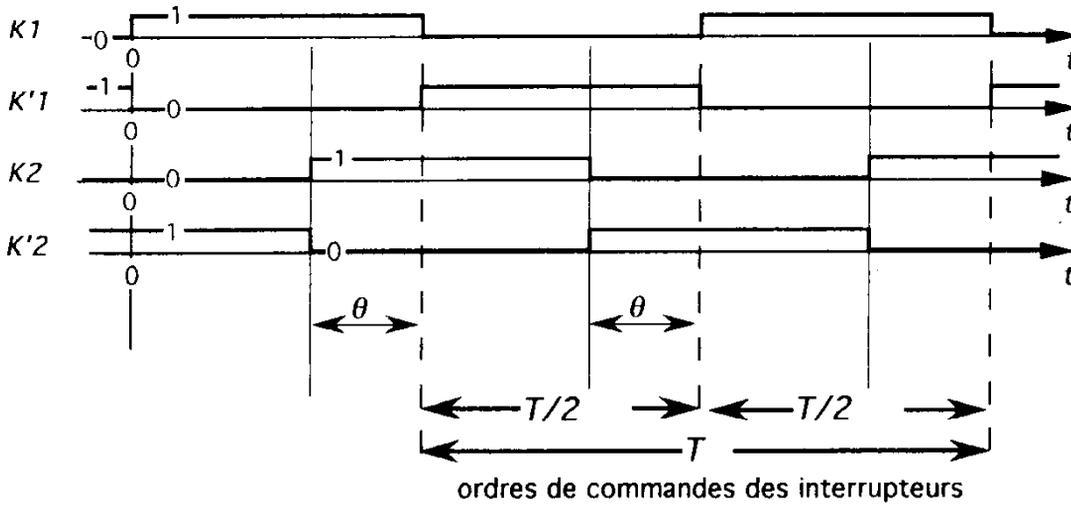
#### 4.3. Influence des inductances parasites de câblage.

En ramenant l'ensemble des inductances de câblage à un élément de 100 nH situé sur la ligne d'alimentation de la source E, voir figure 4-3, préciser comment se trouvent modifiés les résultats établis dans les questions 4.2.3. et 4.2.4.

L'étude serait-elle modifiée si cette inductance était cinq fois plus grande ?



onduleur en pont



période de commande  
T = 20 ms

ordres de commandes des interrupteurs

niveau "1" ordre de fermeture  
niveau "0" ordre d'ouverture

Figure-1

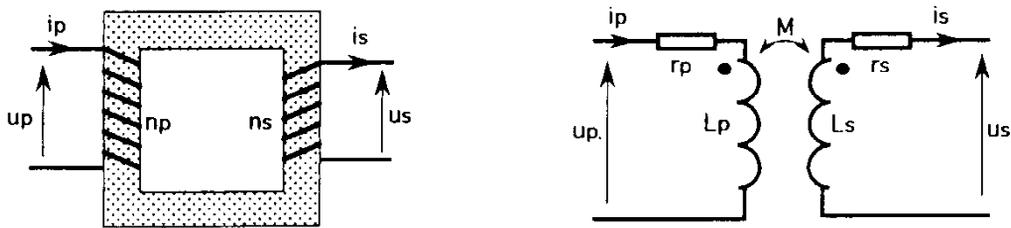


Figure 1-5

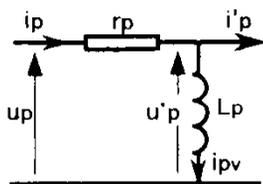


Figure 1-5-2

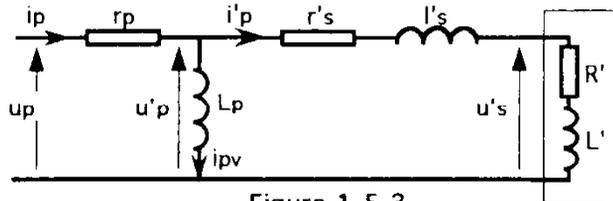


Figure 1-5-3

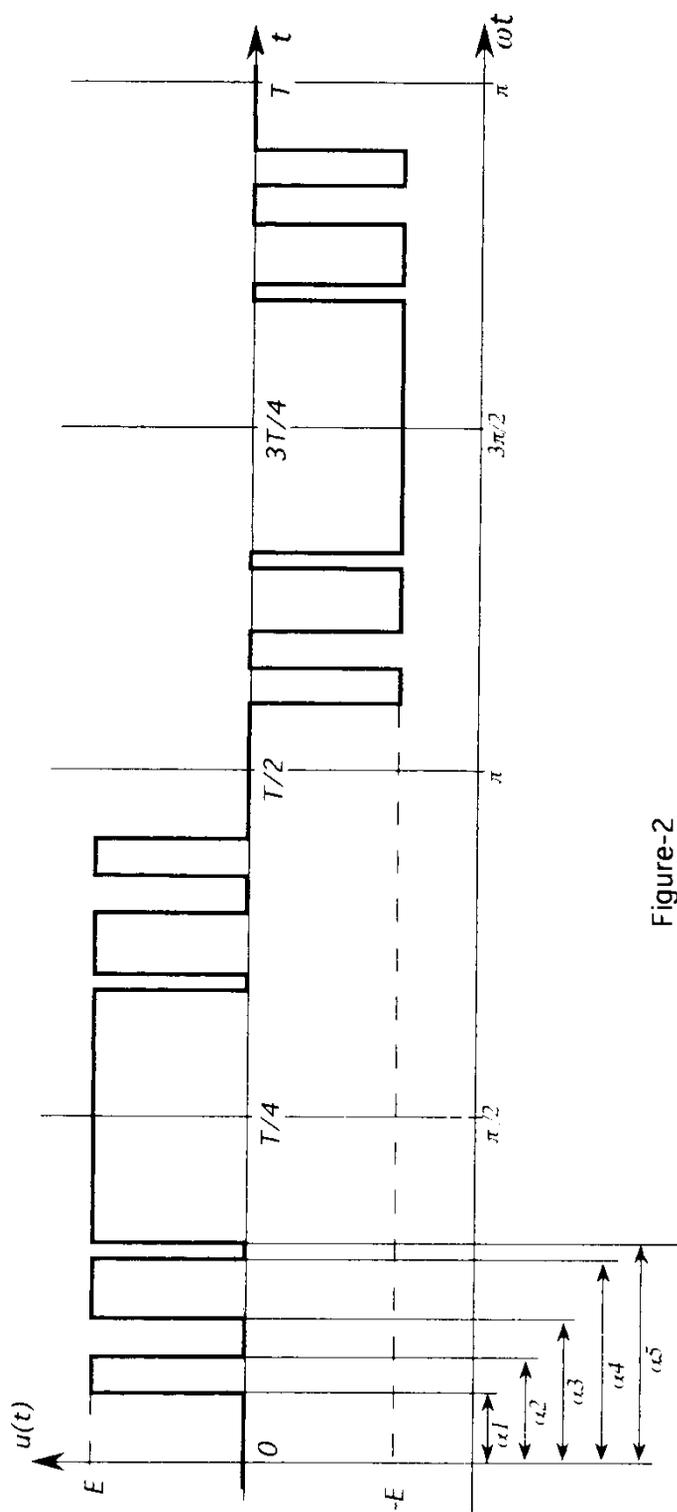


Figure-2

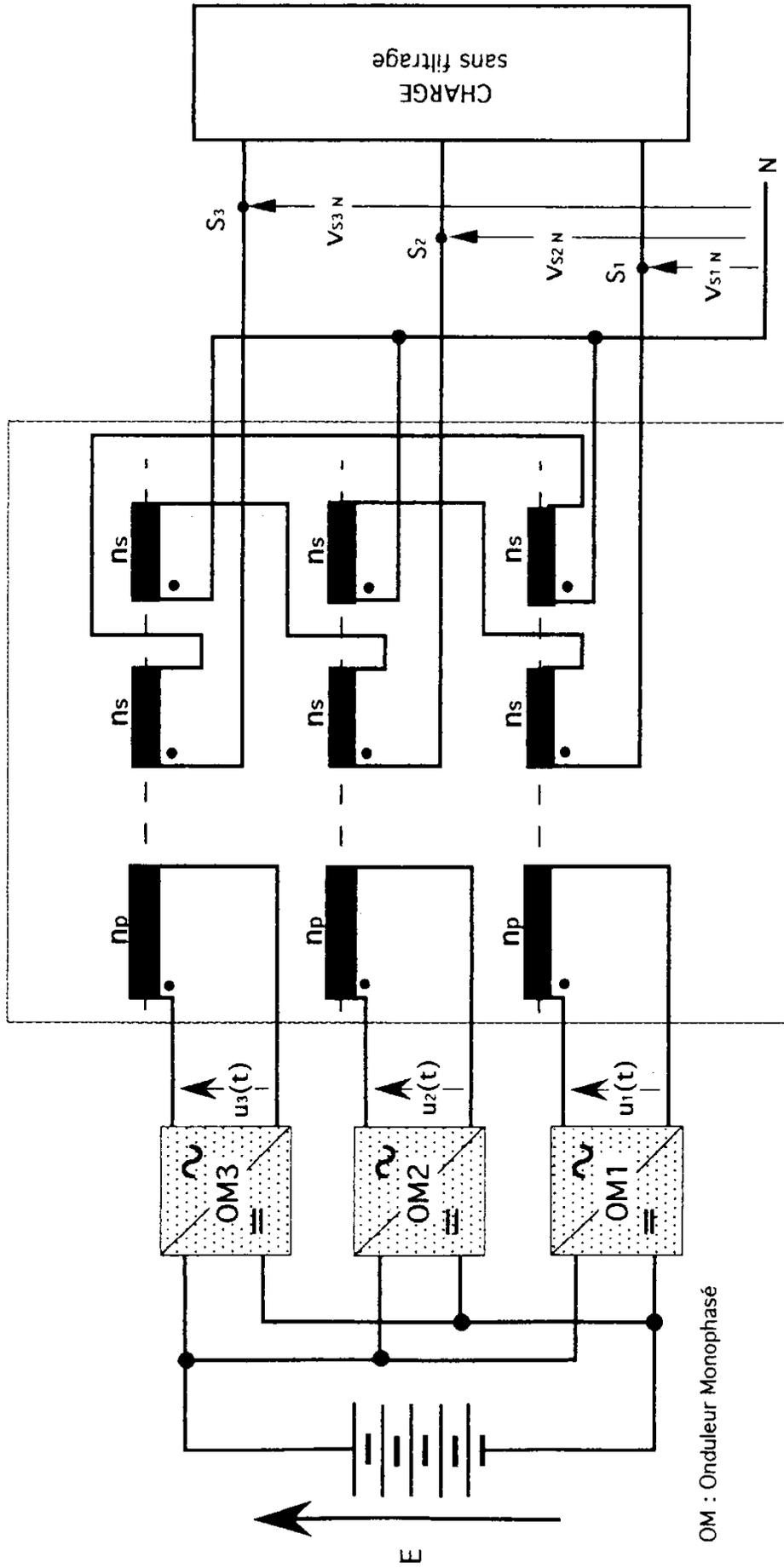


Figure-3

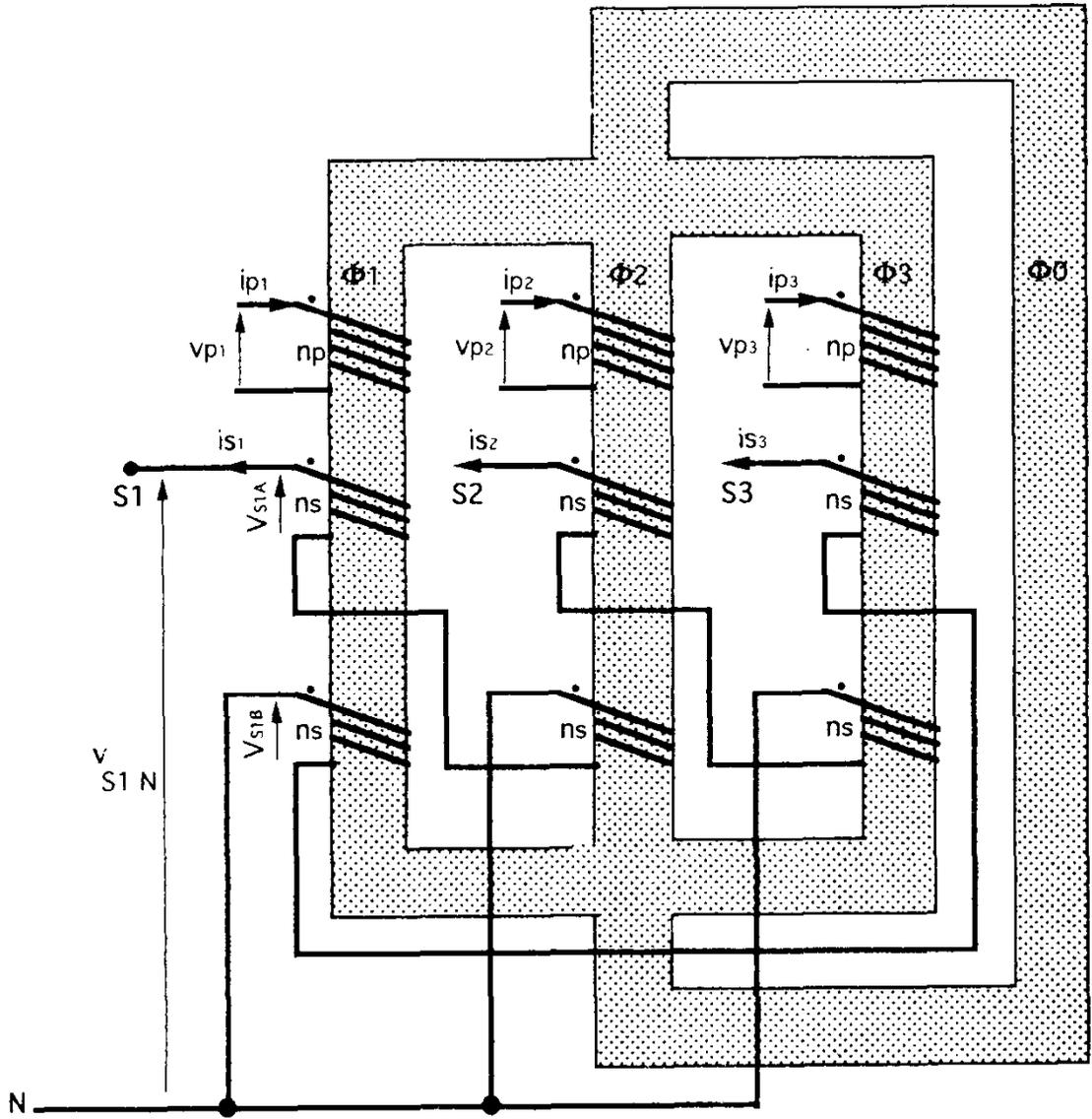


Figure 3-2

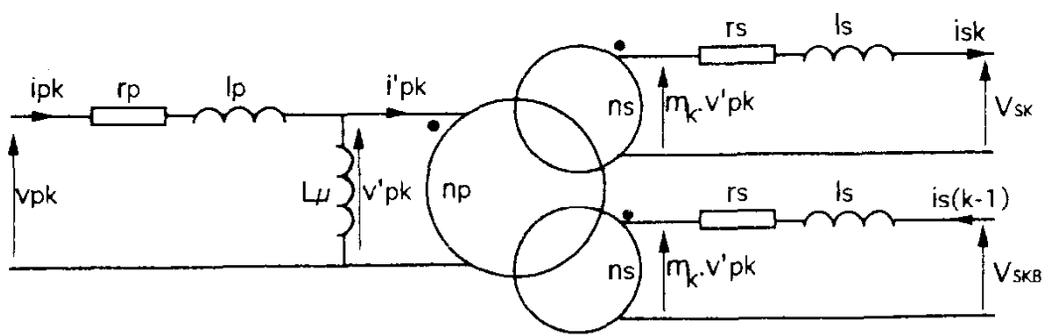


Figure 3-2-5

$K = 1, 2 \text{ ou } 3$

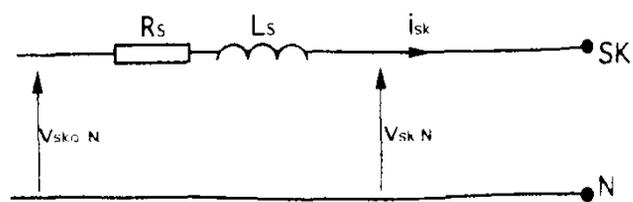


Figure 3-2-6

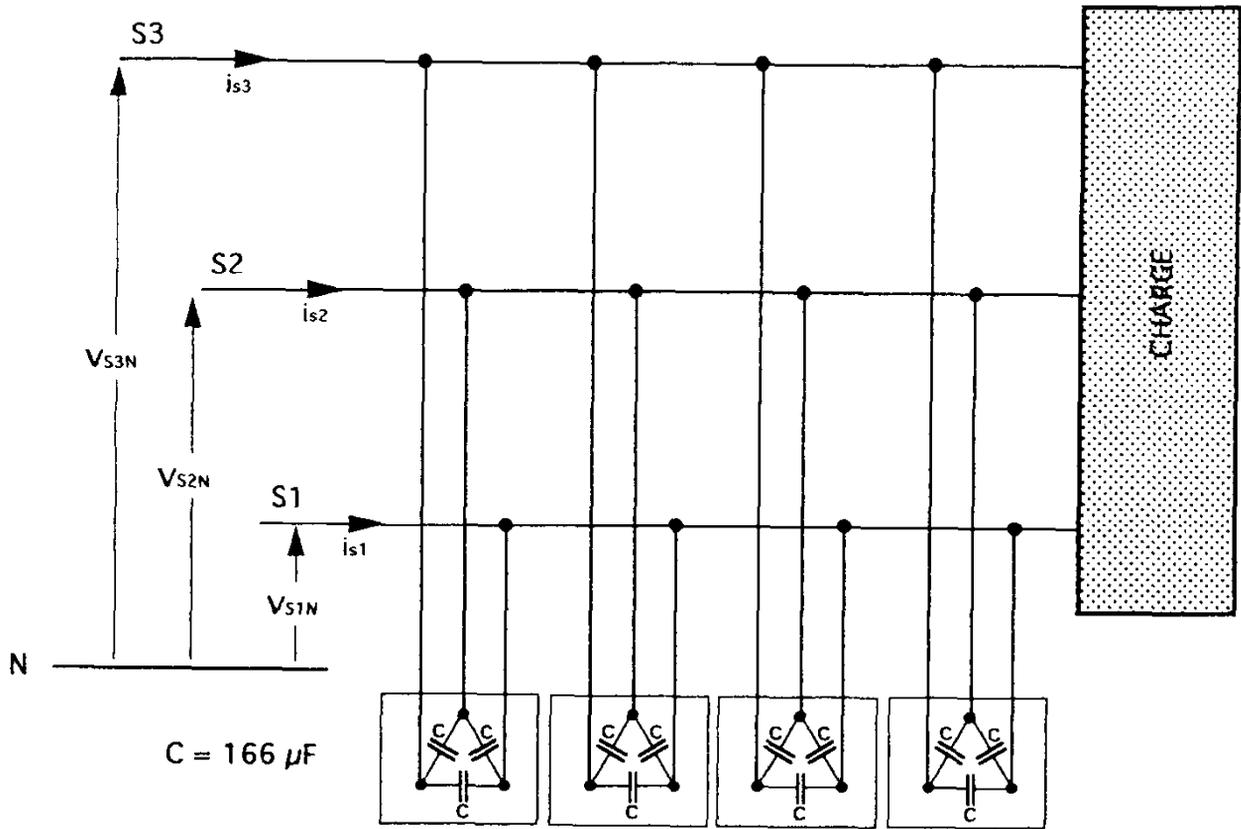


Figure-3-3

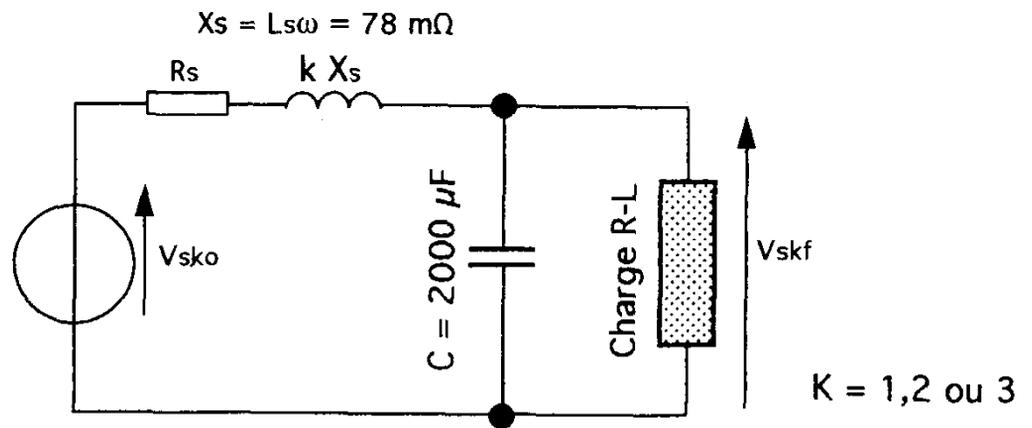


Figure-3-3-1

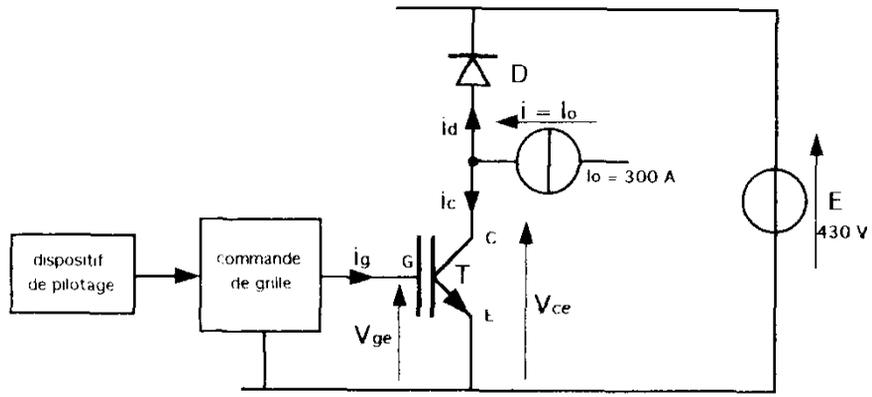


Figure 4

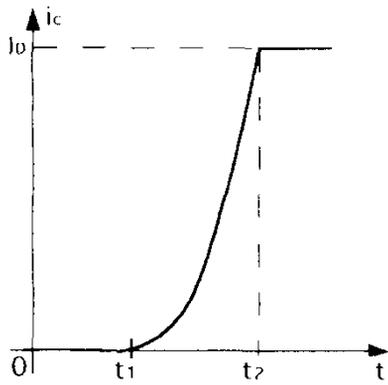


Figure 4-1

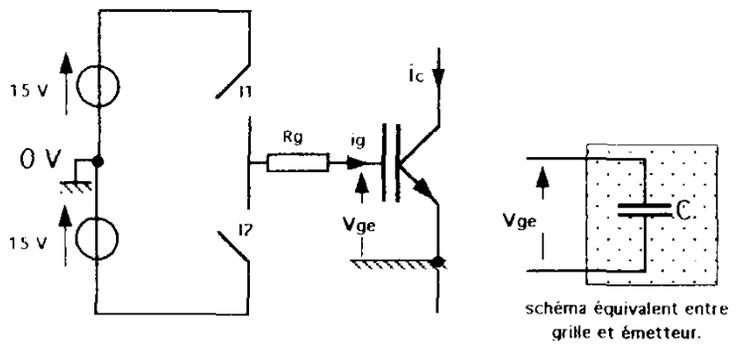


Figure-4-1-4

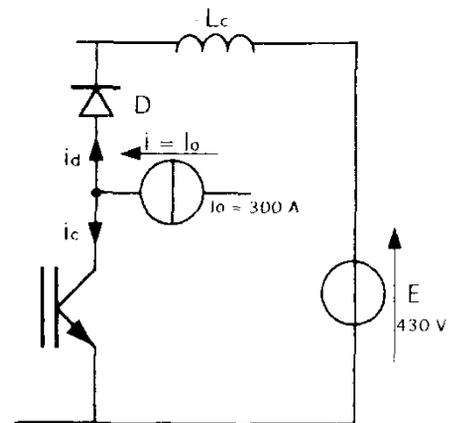
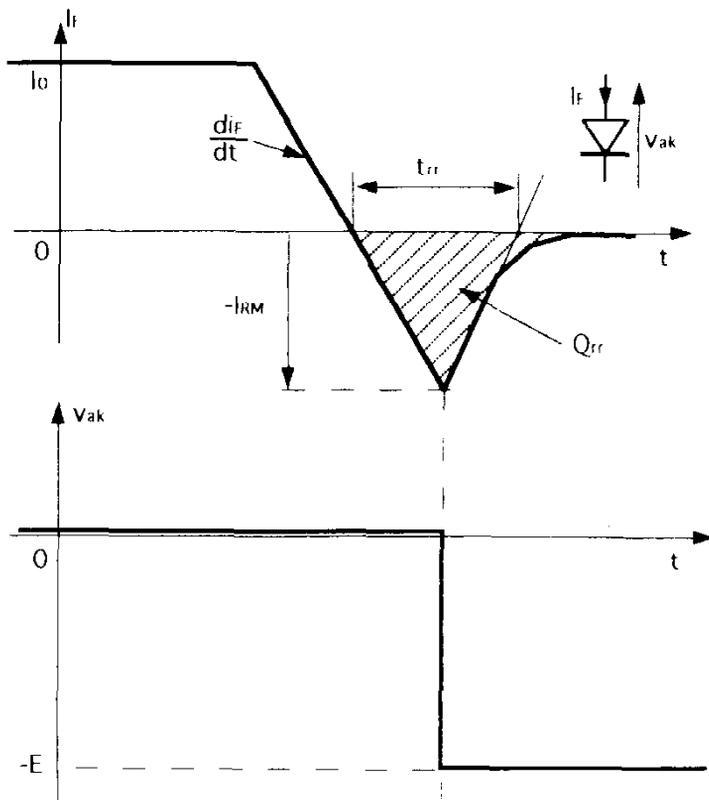
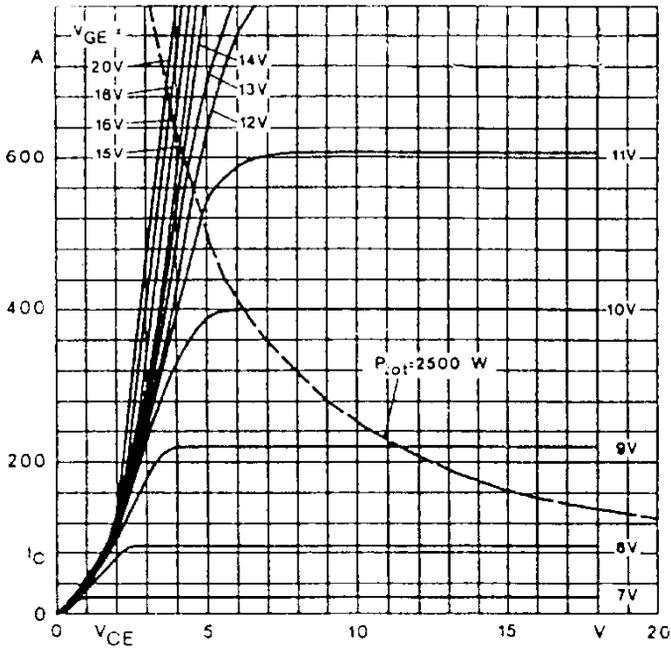
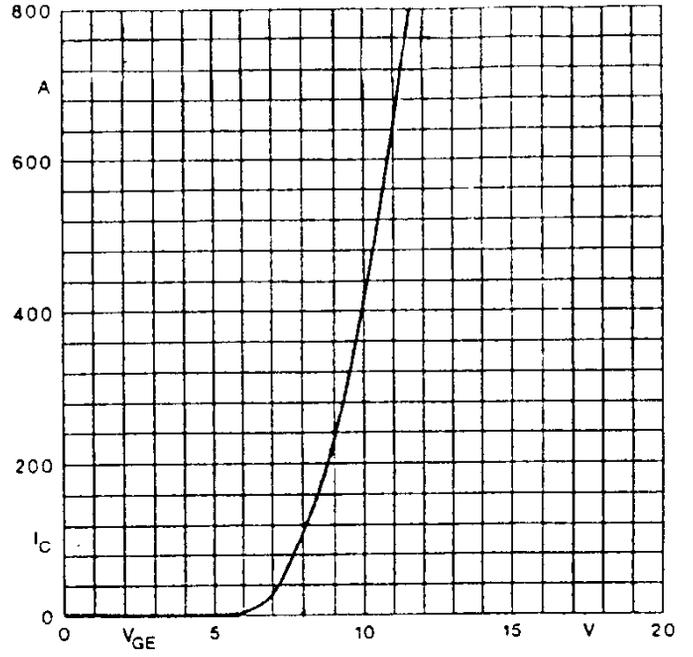


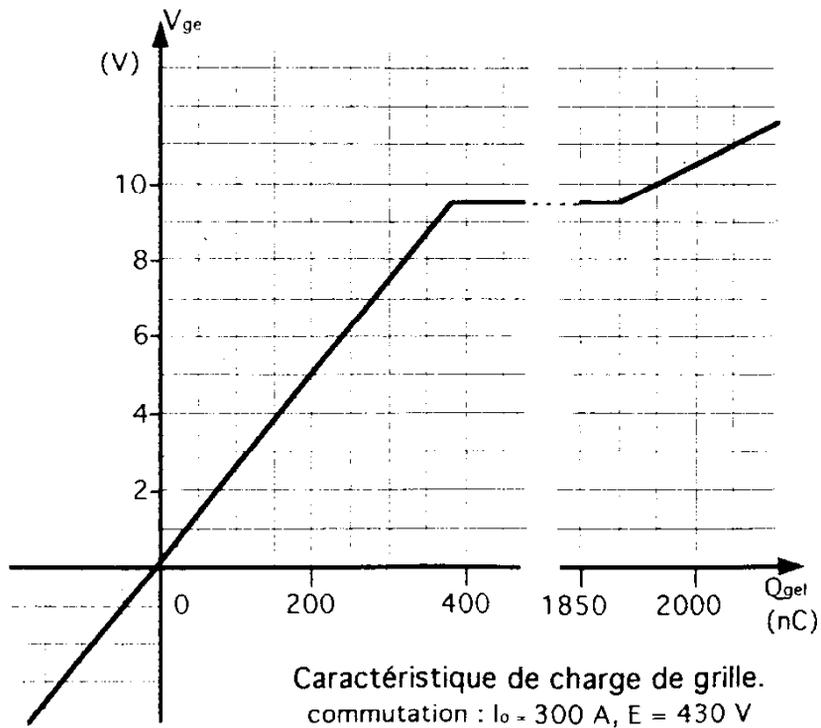
Figure 4-3

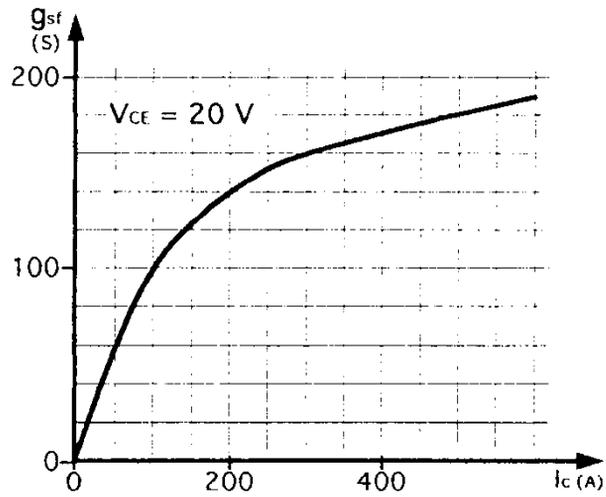


Caractéristiques de sortie.

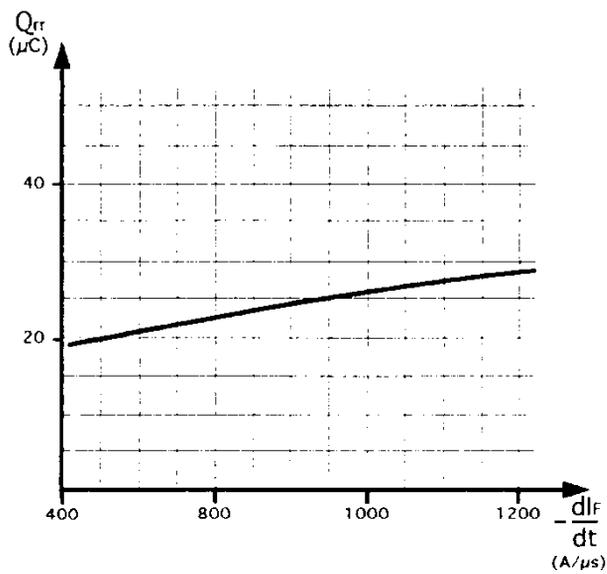


Caractéristique de transfert.

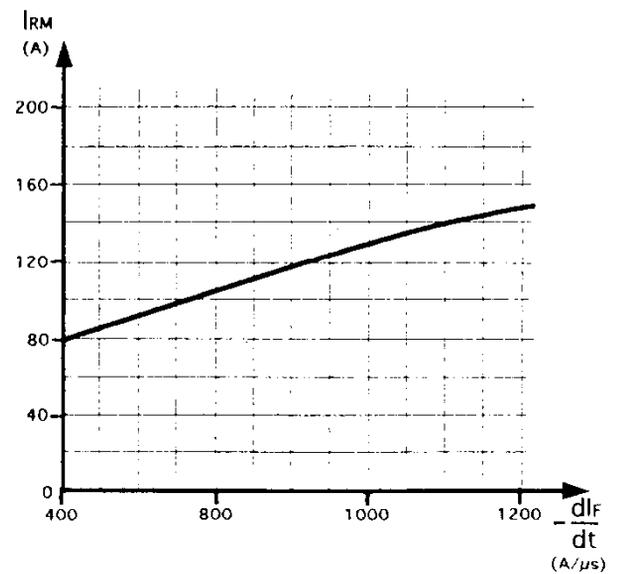




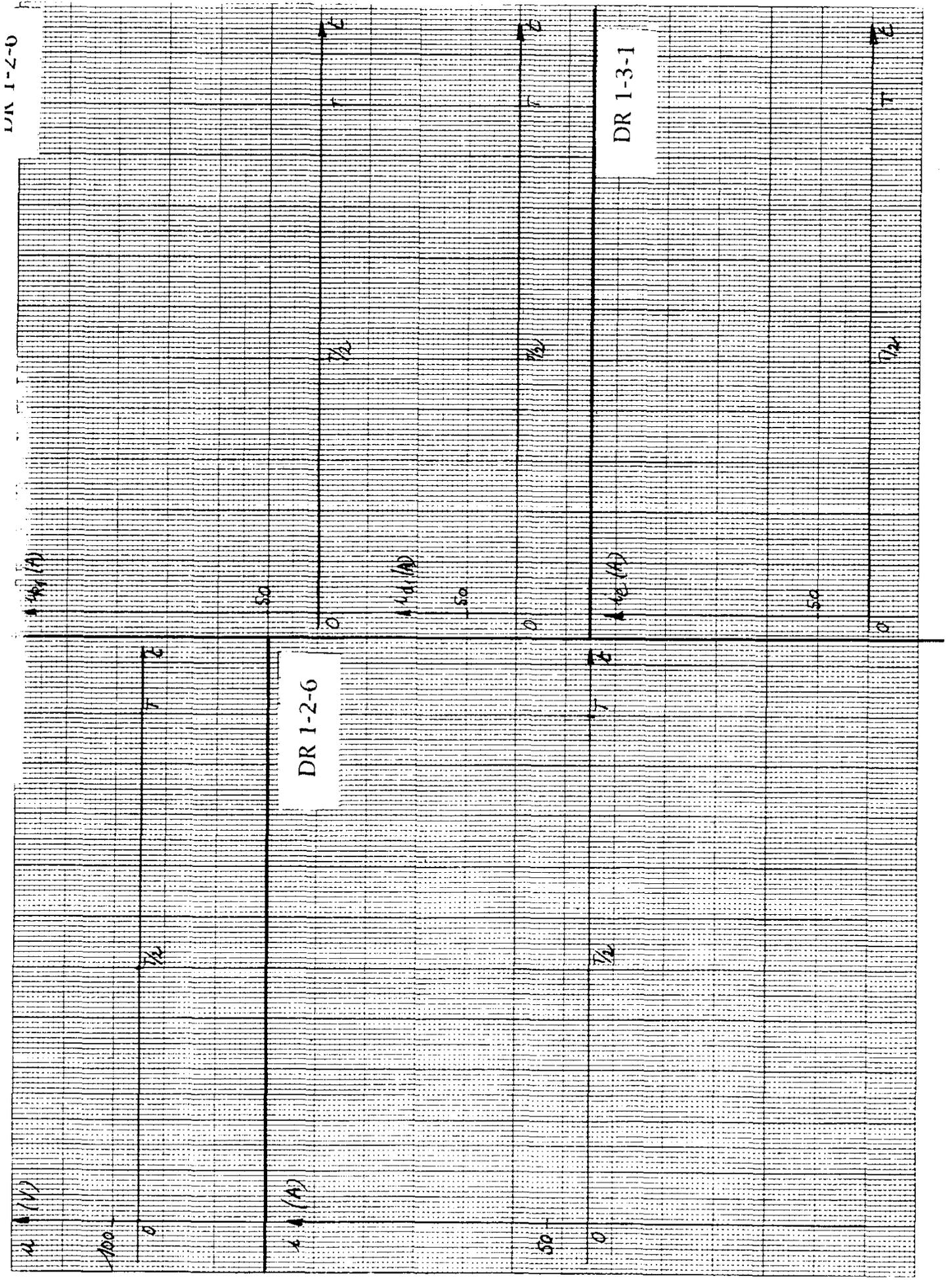
Transconductance directe  $g_{fs}$   
du transistor

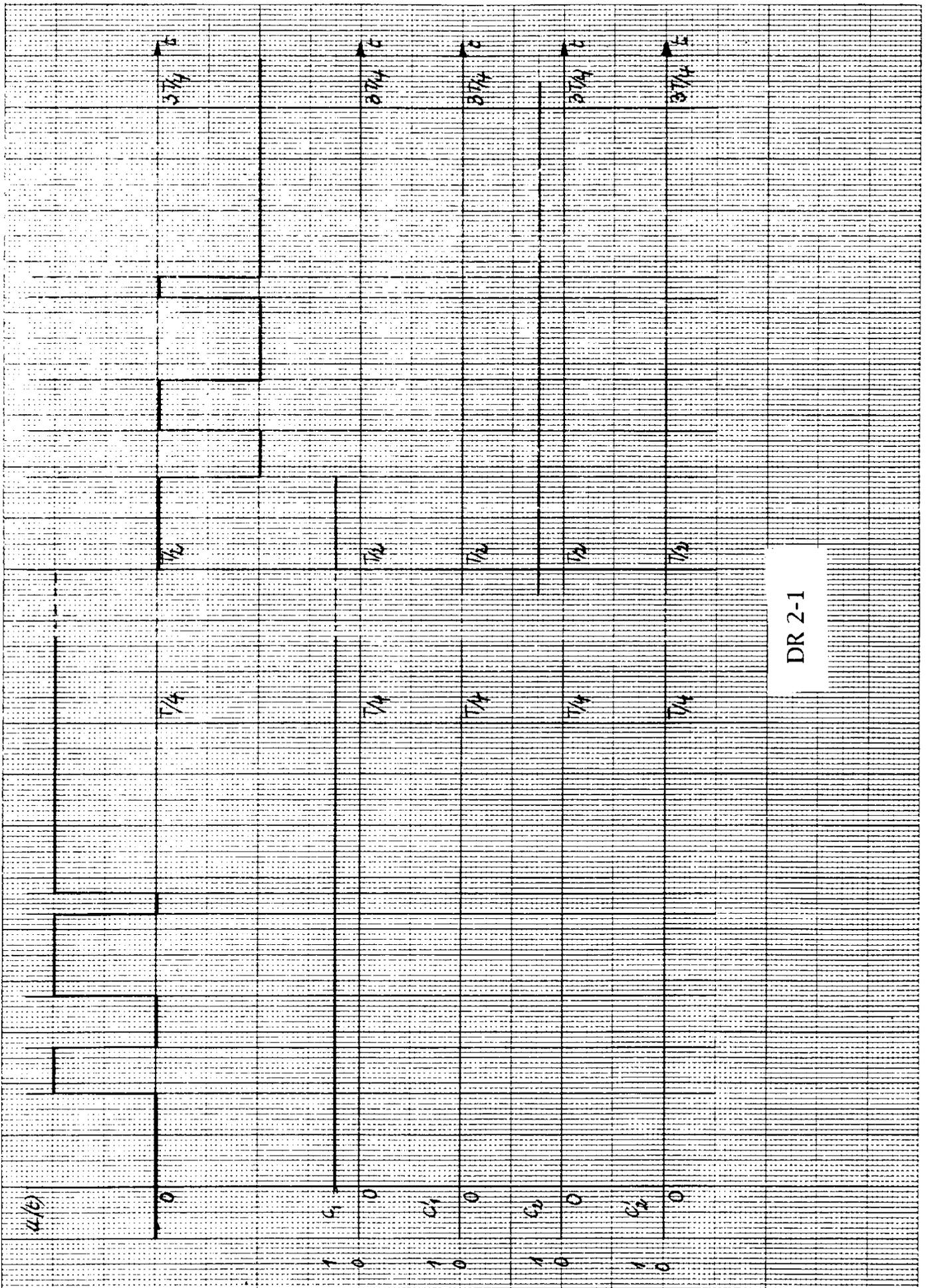


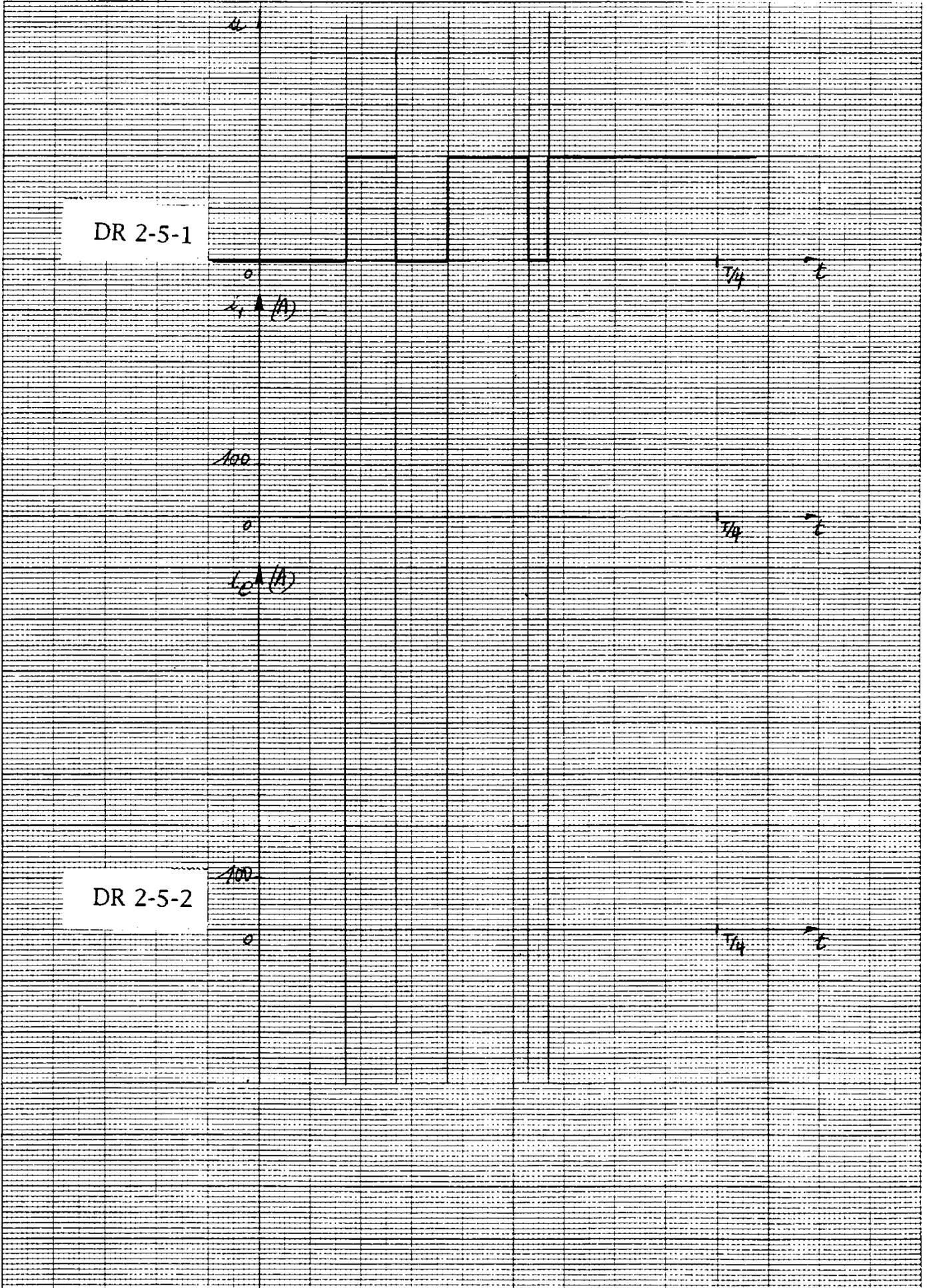
Charge recouvrée dans la diode  
en fonction de  $-dI_c/dt$  pour  $I_0 = 300 \text{ A}$



Pointe de courant inverse dans la diode  
en fonction de  $-dI_c/dt$  pour  $I_0 = 300 \text{ A}$







SESSION DE 1994

# concours interne de recrutement de professeurs agrégés et concours d'accès à l'échelle de rémunération

section : sciences physiques

composition sur la physique  
et le traitement automatisé de l'information

Durée : 5 heures

*Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire ou de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives personnelles qu'il est amené à prendre pour cela.*

## RAPPEL DU TEXTE DÉFINISSANT LA NATURE DE L'ÉPREUVE

Le candidat propose, pour un niveau et des objectifs désignés, une progression relative à une partie du programme de lycée, classes post-baccalauréat comprises, en approfondit quelques points, prévoit un accompagnement expérimental utilisant éventuellement l'ordinateur, élabore des exercices propres à consolider l'acquisition des connaissances, savoir-faire et méthodes ainsi qu'à participer à l'évaluation des élèves.

## ORGANISATION DE L'ÉPREUVE

Le sujet traite du phénomène de propagation et de ses applications, principalement à l'électromagnétisme.

Il est basé sur la partie du programme de physique des classes de Mathématiques spéciales PP' des lycées, dont le texte est donné en annexe.

## PLAN DE L'ÉPREUVE

Partie 1. — Résumé de cours.

1.1. Phénomène de propagation.

1.2. Application aux ondes électromagnétiques dans le vide.

Partie 2. — Travaux dirigés utilisant les notions précédemment introduites.

Partie 3. — Travaux pratiques relatifs à la polarisation de la lumière.

Partie 4. — Problème d'application : étude microscopique des sources de rayonnement électromagnétique.

On utilisera les valeurs numériques suivantes :

masse de l'électron :  $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

charge élémentaire :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

vitesse de la lumière dans le vide :  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

## PARTIE 1

### 1.1. Propagation.

1.1.1. Décrire une expérience réalisable en classe, mettant en évidence un phénomène de propagation à une dimension.

Préciser la grandeur qui se propage.

1.1.2. Sur cet exemple, et en choisissant pour axe  $Ox$  la direction de propagation, expliquer la dépendance spatio-temporelle du phénomène.

1.1.2.a. Définir la célérité ou vitesse de propagation  $\bar{v}$  et indiquer de quels paramètres elle dépend ;

1.1.2.b. Montrer que l'onde peut se mettre, à l'aide des fonctions  $f$  et  $g$ , sous l'une des formes mathématiques :

$$s = f(x - vt) \quad \text{ou} \quad s = g(x + vt),$$

selon le sens de propagation envisagé.

1.1.3. Équation de propagation à une dimension.

Montrer que les fonctions  $f$  et  $g$  définies ci-dessus vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

1.1.4. Cas d'une onde progressive monochromatique (ou sinusoïdale).

1.1.4.a. Donner l'expression de  $s$  ; on définira les grandeurs : période temporelle, pulsation, fréquence, longueur d'onde, vecteur d'onde ;

1.1.4.b. Donner pour ces grandeurs : leur interprétation physique, leur unité et les relations existant entre elles.

1.1.5. Superposition de deux ondes monochromatiques progressives de sens de propagation opposés, de même amplitude et de même fréquence. Définir l'onde résultante et indiquer ses principales caractéristiques.

1.1.6. Quelle est la forme mathématique de l'équation de propagation à trois dimensions ?

### 1.2. Ondes électromagnétiques dans le vide.

Le champ électromagnétique dans le vide vérifie les équations aux dérivées partielles suivantes, équations de Maxwell :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

On rappelle la formule suivante, concernant un champ de vecteurs  $\vec{A}$  :

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}.$$

## 1.2.1. Propagation du champ électromagnétique.

Montrer que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vérifient une équation de propagation.

À quelle célérité ? Donner sa valeur numérique.

## 1.2.2. On envisage la propagation, selon Ox, d'une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique.

## 1.2.2.a. Définir le plan d'onde.

Montrer qu'en un point de l'espace, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont situés dans ce plan.

1.2.2.b. Quelle relation existe-t-il entre  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  et le vecteur d'onde  $\vec{k}$  ?

## 1.2.2.c. Peut-on expliquer sur cet exemple le terme de « vibrations transversales » ?

Il existe, dans d'autres domaines de la physique, des « vibrations longitudinales » : en donner un exemple.

## 1.2.2.d. Donner la définition d'une onde plane polarisée rectilignement, puis d'une onde plane polarisée circulairement.

## 1.2.3. Spectre des ondes électromagnétiques.

## 1.2.3.a. Établir une classification selon le domaine de fréquence (ou de longueur d'onde).

## 1.2.3.b. Indiquer, pour chaque domaine, la nature de la source à utiliser pour émettre le rayonnement.

## 1.2.4. Grandeurs énergétiques.

## 1.2.4.a. Donner une preuve expérimentale de l'existence d'énergie transportée par une onde électromagnétique.

## 1.2.4.b. On rappelle la définition du vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

ainsi que l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

## 1.2.4.c. Indiquer la relation simple existant entre ces deux grandeurs dans le cas d'une onde plane, progressive, monochromatique et en donner une interprétation physique.

## 1.2.4.d. Les bilans énergétiques sont toujours effectués sur des moyennes temporelles. Pourquoi ?

## PARTIE 2

Il s'agit ici d'illustrer le phénomène de propagation par une suite d'exercices proposés en travaux dirigés.

## 2.1. Notation complexe.

2.1.1. À toute grandeur sinusoïdale de la forme  $s = a \cos(\varphi - \omega t)$ , on peut associer un nombre complexe

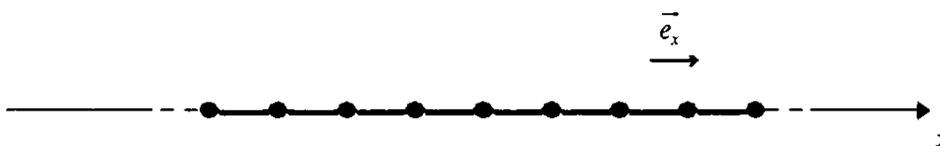
$$\underline{s} = a \exp i(\varphi - \omega t) \quad (\text{avec } i^2 = -1);$$

que représente  $s$  pour le complexe  $\underline{s}$  ?

2.1.2. Donner un exemple, portant sur un domaine différent de celui de la propagation, qui montre l'intérêt de l'utilisation des grandeurs complexes.

## 2.2. Propagation d'une onde mécanique dans une file d'atomes.

Les atomes étudiés sont modélisés par des particules supposées ponctuelles, identiques, de masse  $m$ , assujetties à se déplacer sur l'axe  $Ox$  où elles sont alignées :



À l'équilibre, elles occupent les points d'abscisses  $na$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

À un instant quelconque, leur abscisse est  $x_n$ .

Sous l'action d'une sollicitation extérieure, chacune d'elles peut se déplacer; soit  $u_n$  le déplacement de la  $n$ -ième particule  $A_n$  :

$$u_n = x_n - na.$$

Il existe, entre deux particules adjacentes, des forces d'interaction de type élastique : la force exercée par  $A_n$  sur  $A_{n+1}$  s'écrit :

$$\vec{F}_{n \text{ sur } n+1} = \lambda (u_n - u_{n+1}) \vec{e}_x \quad (\lambda \text{ constante positive}).$$

2.2.1. Établir l'équation différentielle traduisant le mouvement de  $A_n$ .

2.2.2. On cherche les solutions de la forme :

$$\underline{u}_n = u \exp i(kna - \omega t) \quad (u \in \mathbb{R})$$

2.2.2.a. Trouver la relation existant entre  $\omega$  et  $k$ .

2.2.2.b. Exprimer en fonction de  $\omega$  la grandeur  $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ .

Montrer que cette grandeur est homogène à une vitesse. On l'appelle vitesse de phase de l'onde mécanique.

2.2.2.c. La relation obtenue en 2.2.2.a. s'appelle relation de dispersion du milieu. Comment peut-on définir un milieu dispersif ? En donner des exemples.

La file d'atomes précédente est-elle compatible avec cette définition ?

2.2.2.d. Tracer la courbe  $\omega(k)$ ; peut-il y avoir propagation de l'onde envisagée quelle que soit sa pulsation ?

### 2.3. Propagation d'une onde électromagnétique dans un guide d'onde.

L'onde étudiée se propage dans un espace vide, limité par des parois conductrices métalliques parfaits.

On admettra les résultats suivants, issus des propriétés générales du champ électromagnétique, et de celles du conducteur métallique parfait :

- dans le milieu conducteur, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  relatifs à une onde sont identiquement nuls ;
- au passage du vide au milieu conducteur, la composante tangentielle de  $\vec{E}$ , ainsi que la composante normale de  $\vec{B}$ , doivent être continues.

On se propose d'étudier le guide d'ondes ci-dessous, limité par deux conducteurs métalliques plans, infiniment étendus, et parallèles ; leurs positions seront définies par  $z = 0$  et  $z = a$  :



2.3.1. Une onde plane, progressive, monochromatique incidente, polarisée parallèlement à  $\vec{e}_x$ , se propageant selon  $+\vec{e}_z$ , atteint le conducteur en  $z = a$ .

On prendra pour expression de son champ électrique :

$$\vec{E}_i = E_0 \exp i(kz - \omega t) \vec{e}_x, \quad \text{avec } E_0 \text{ réel, constant et } > 0.$$

2.3.1.a. Proposer une explication physique et une justification mathématique de l'existence d'une onde réfléchie  $\vec{E}_r$  en  $z = a$ .

2.3.1.b. Quel paragraphe du cours étudié dans la partie 1 cet exercice permet-il d'illustrer ?

2.3.1.c. Déterminer les champs totaux  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans le guide, en tenant compte de la réflexion en  $z = 0$ .

Quelles sont leurs caractéristiques ?

2.3.2. On cherche maintenant une onde pour laquelle le champ électrique total est de la forme :

$$\vec{E} = E_0(z) \exp i(kx - \omega t) \vec{e}_y,$$

où  $E_0(z)$  est une fonction réelle ;

2.3.2.a. De l'équation de propagation sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

déduire une équation différentielle satisfaite par  $E_0(z)$ .

2.3.2.b. Appliquer les conditions aux limites sur les deux plans conducteurs ; en déduire la relation de dispersion, c'est-à-dire la relation entre  $k$  et  $\omega$ .

Déterminer la pulsation  $\omega_c$  (dite « pulsation de coupure ») en dessous de laquelle ce type de propagation n'est plus possible.

Calculer numériquement  $\omega_c$  pour  $a = 2$  cm ; dans quel domaine spectral cette onde se situe-t-elle ?

2.3.2.c. Déterminer la vitesse de phase  $v_0 = \frac{\omega}{k}$ .

2.3.2.d. La comparer à  $c$  ; quels commentaires peut-on faire à ce sujet ?

2.3.2.e. Donner la forme mathématique de la fonction  $E_0(z)$  et en déduire le champ électrique.

## PARTIE 3

## TRAVAUX PRATIQUES SUR LA POLARISATION DE LA LUMIÈRE

On dispose sur des supports mécaniques adaptés :

- d'une lampe à vapeur de mercure, d'un filtre correspondant à la raie verte 546 nm, d'un condenseur, d'un diaphragme réglable pouvant former un trou source, d'une lentille convergente de distance focale 20 cm et d'un écran;
- de deux polariseurs rectilignes type polaroid (direction de polarisation marquée) et de deux lames biréfringentes minces en quartz, axe optique parallèle aux faces, dites  $\lambda/4$  pour  $\lambda = 546$  nm, dont l'une seulement a une direction marquée « axe lent »; tous ces éléments sont insérés dans des supports mécaniques permettant une rotation mesurable autour d'un axe perpendiculaire aux faces des éléments optiques;
- d'une photodiode polarisée en inverse et d'un voltmètre permettant de faire des mesures relatives d'éclairement lumineux aux bornes d'une résistance de charge adéquate;
- enfin d'une fente réglable et de fentes d'Young permettant de réaliser l'expérience du 3.4.2.

3.1. Faire le **schéma du montage expérimental** qui permet de mettre en évidence avec les éléments ci-dessus certaines propriétés de polarisation de la lumière.

### 3.2. Polarisation rectiligne.

On se place en lumière monochromatique et l'on utilise les deux polariseurs type polaroid. Décrire une expérience permettant de mettre en évidence la loi de Malus et donner son interprétation en termes de polarisation linéaire.

### 3.3. Polarisation circulaire.

3.3.1. On ajoute la lame  $\lambda/4$  marquée. Décrire le protocole expérimental permettant de montrer l'existence d'axes neutres et d'une polarisation circulaire. Interpréter ces expériences tant du point de vue des ondes que du principe de fonctionnement de la lame biréfringente.

3.3.2. Décrire et expliquer une méthode expérimentale permettant de réaliser l'équivalent d'une lame  $\lambda/2$  à l'aide des deux lames  $\lambda/4$  (on rappelle que la deuxième lame n'est pas marquée).

3.3.3. Que se passe-t-il si l'on ôte le filtre vert ?

### 3.4. Lumière non polarisée.

On replace le filtre vert et l'on ôte les lames  $\lambda/4$  et l'un des polariseurs.

3.4.1. Décrire ce qui se passe quand on fait tourner le polariseur restant. Interpréter en termes de polarisation naturelle de la lumière.

3.4.2. On dispose la fente réglable verticalement et les fentes d'Young de manière à observer dans des conditions normales (c'est-à-dire sans aucun polariseur) des franges d'interférence sur un écran. Cependant on a collé sur l'une des fentes un polaroid avec son axe de polarisation vertical et sur l'autre fente un polaroid avec son axe horizontal. Décrire et expliquer les expériences permettant de montrer qu'il n'y a pas de franges d'interférences sans placer convenablement un polariseur *avant et après* les fentes (expérience de Fresnel-Arago). Pourquoi observe-t-on des interférences quand on ne place aucun polariseur (y compris au niveau des fentes) ?

3.4.3. On abandonne les fentes d'Young. Décrire un protocole expérimental permettant de distinguer si une lumière est polarisée circulairement ou s'il s'agit d'une lumière non polarisée.

### 3.5. Méthodes de polarisation rectiligne de la lumière.

- 3.5.1. Outre les polariseurs type polaroid, donner d'autres méthodes pour obtenir une polarisation rectiligne de la lumière en laboratoire.
- 3.5.2. Citer dans notre environnement naturel des phénomènes qui polarisent au moins partiellement la lumière (du soleil en particulier).

## PARTIE 4

### MODÈLE CLASSIQUE DU RAYONNEMENT ATOMIQUE ET DE SA POLARISATION

Cette partie est consacrée à quelques résultats que l'on peut obtenir à l'aide du modèle de l'électron élastiquement lié.

Beaucoup de solutions seront recherchées et exprimées en notation complexe, c'est-à-dire qu'à la solution réelle monochromatique en  $s = a \cos(\varphi - \omega t)$ , on associe la solution complexe en  $\underline{s} = a e^{i\varphi} e^{-i\omega t} = \underline{a} e^{-i\omega t}$ , avec  $\underline{a} = a e^{i\varphi}$ . On rappelle que cette correspondance, simple quand elle concerne des grandeurs physiques qui satisfont à un principe de superposition linéaire, s'applique également au produit de deux grandeurs à condition de considérer les valeurs moyennes sur une période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  et d'employer la règle :

$$\frac{1}{T} \int_0^T a \cos(\varphi - \omega t) a' \cos(\varphi' - \omega t) dt = \text{Partie réelle de } \left( \frac{1}{2} \underline{a}^* \underline{a}' \right)$$

où l'astérisque désigne la conjugaison complexe.

#### 4.1. Interprétation de la force de rappel.

On schématise un atome d'hydrogène par un proton de charge  $-q$  ponctuel placé en O et un nuage électronique sphérique uniformément chargé de rayon  $a_0$ , de centre C, de charge globale  $q = -e$  où  $e$  est la valeur absolue de la charge de l'électron (l'utilisation de la notation  $q$  pour exprimer la valeur algébrique de la charge de l'électron évite d'éventuelles erreurs de signe dans la plupart des calculs qui suivent).

Montrer que, si la distance  $r$  entre le proton et le centre du nuage électronique est inférieure à  $a_0$ , ceux-ci sont en effet attirés par une force de rappel d'origine électrostatique en  $-\alpha \vec{r}$ , avec  $\vec{r} = \vec{OC}$ . Exprimer la constante  $\alpha$  en fonction de la permittivité du vide  $\epsilon_0$ , de la charge  $q$  et du rayon  $a_0$ .

#### 4.2. Mouvement libre de l'électron sans amortissement.

On suppose le noyau immobile et l'on considère maintenant le problème de mécanique classique non relativiste d'un électron ponctuel de masse  $m$  et de charge  $q$  rappelé à sa position d'équilibre (confondue avec celle du proton) par la force en  $-\alpha \vec{r}$  calculée au 4.1.

4.2.1. Quelle est la pulsation  $\omega_0$  du mouvement libre de l'électron ?

4.2.2. Ce mouvement de l'électron entraîne que le dipôle qu'il forme avec le proton oscille lui aussi à la pulsation  $\omega_0$  et par conséquent rayonne un champ électromagnétique (rayonnement dipolaire). Quelle est la longueur d'onde associée à ce rayonnement ? Dans quel domaine du spectre se

situe-t-il ? On prendra  $a_0 = 0.5 \text{ \AA}$  et  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ USI}$ .

#### 4.3. Mouvement avec amortissement.

Pour tenir compte de ce rayonnement et de la perte d'énergie qui en découle, on introduit phénoménologiquement, en plus de la force de rappel en  $-m\omega_0^2 \vec{r}$ , une force de frottement de type fluide en  $-m\Gamma \frac{d\vec{r}}{dt}$ . On supposera dans toute la suite que  $\Gamma \ll \omega_0$  (oscillateur faiblement amorti).

4.3.1. Montrer que la recherche d'une solution en  $e^{-i\omega t}$  conduit à la valeur  $\omega = \omega_0 - \frac{i\Gamma}{2}$ .

4.3.2. On se place dans cette question et dans la partie 4.4. dans le cas particulier d'un mouvement à une dimension, selon l'axe  $z'$   $z$  par exemple.

a. Exprimer la dépendance temporelle  $z(t)$  du mouvement de l'électron (on prendra comme conditions initiales  $z_{t=0} = z_0$  réel positif et  $\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = 0$ ).

b. Quelle est l'énergie moyenne de l'oscillateur si l'on néglige l'amortissement ( $\Gamma = 0$ )?

c. Dans le cas  $\Gamma \ll \omega_0$ , montrer que l'énergie moyenne  $\mathcal{E}$  de l'oscillateur décroît exponentiellement avec une constante de temps  $\tau = \frac{1}{\Gamma}$ .

#### 4.4. Rayonnement dipolaire et durée de vie.

On se place toujours dans le cas d'un mouvement selon  $z'/z$ . On rappelle qu'un dipôle  $\vec{p} = q\vec{r}_0 e^{-i\omega_0 t} = qz_0 e^{-i\omega_0 t} \vec{e}_z$  dirigé selon le vecteur unitaire  $\vec{e}_z$  et oscillant à la pulsation  $\omega_0$  crée dans l'espace une onde électromagnétique caractérisée, en un point M à la distance  $R \gg r$  et dans la direction repérée en coordonnées sphériques par les angles  $\theta$  et  $\varphi$  (fig. 3), par les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  tels que :

$$\vec{E} = \frac{\omega_0^2 \mu_0}{4\pi} \frac{qz_0}{R} \sin \theta e^{i(kR - \omega_0 t)} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B} = -\frac{\omega_0^2 \mu_0}{4\pi c} \frac{qz_0}{R} \sin \theta e^{i(kR - \omega_0 t)} \vec{e}_\varphi \quad \text{avec } k = \frac{\omega_0}{c}.$$

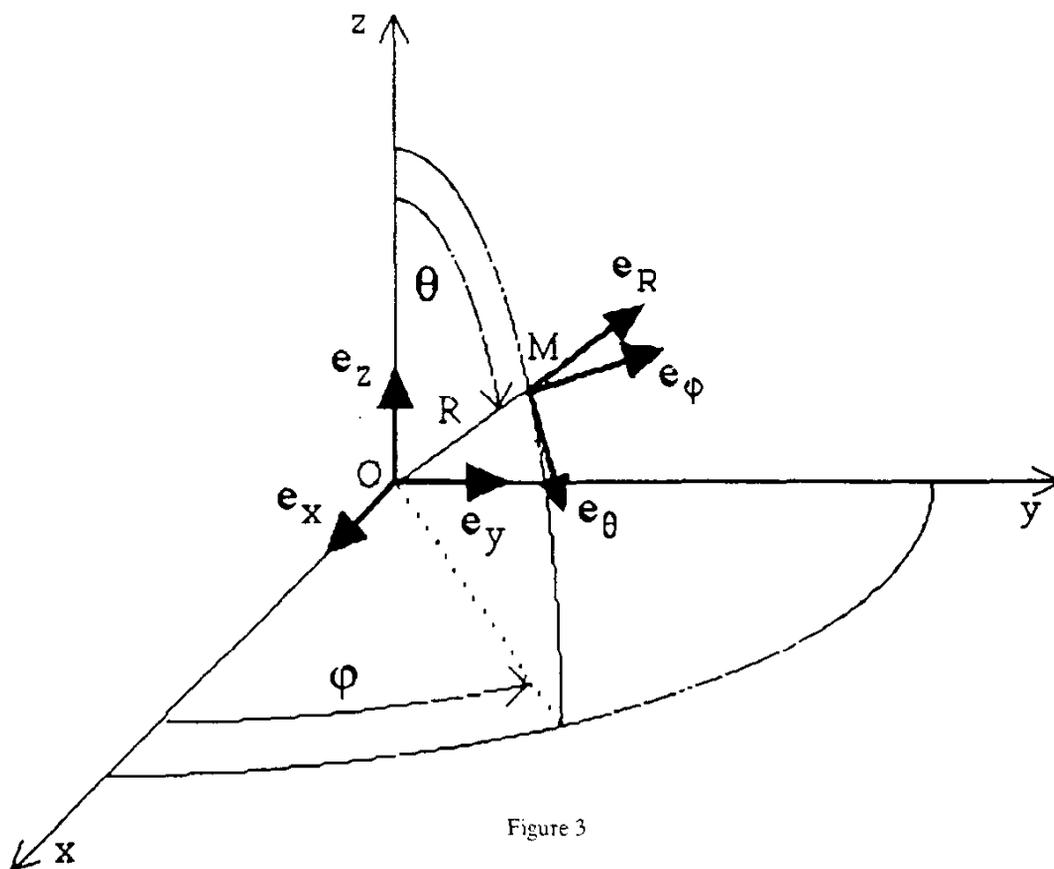


Figure 3

- 4.4.1. Montrer que l'onde rayonnée a localement la structure d'une onde plane dont on précisera la polarisation, en particulier dans une direction perpendiculaire à  $\vec{e}_z$ . On pourra faire une figure.
- 4.4.2. Calculer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$  associé à l'onde au point M (on se placera en coordonnées sphériques).  
Montrer en particulier qu'elle est nulle dans la direction de  $\vec{e}_z$ .
- 4.4.3. Calculer le flux de cette valeur moyenne sur une surface sphérique de rayon R. Quelle est sa signification physique ?
- 4.4.4. En comparant ce flux à la dérivée  $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$  de l'énergie de l'oscillateur faiblement amorti de 4.3.2., trouver la valeur de  $\tau = \frac{1}{\Gamma}$  en fonction de  $\omega_0$ ,  $q$ ,  $m$ ,  $c$  et  $\epsilon_0$ .

Faire l'application numérique. Commenter.

- 4.5. On revient à l'étude des oscillations libres de l'oscillateur faiblement amorti dans le cas de conditions initiales quelconques. Montrer que le mouvement le plus général peut s'écrire en notation complexe :

4.5.1.  $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$ , avec  $\vec{r}_0 = x_0 \vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y + z_0 \vec{e}_z$  ( $x_0, y_0, z_0$  complexes);

4.5.2. ou tout aussi bien  $\vec{r}_0 = \rho_- (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) + \rho_+ (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) + z_0 \vec{e}_z$  ( $\rho_-, \rho_+$  et  $z_0$  complexes). À quel mouvement de l'électron correspondent les termes en  $\rho_- (\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$  et  $\rho_+ (\vec{e}_x - i\vec{e}_y)$ ? À quelles polarisations de l'onde rayonnée correspondent-ils dans la direction  $\vec{e}_z$ ?

#### 4.6. Effet Zeeman.

On place maintenant l'atome schématisé par l'oscillateur précédent dans un champ magnétique  $\vec{B}$  dirigé selon  $\vec{e}_z$ . On négligera le terme d'amortissement ( $\Gamma = 0$ ).

- 4.6.1. On suppose d'abord que l'électron a son mouvement selon l'axe  $z'z$ , c'est-à-dire que les conditions initiales fixent  $\vec{r}_0 = z_0 \vec{e}_z$ . Montrer qu'alors la force de Lorentz ne perturbe pas le mouvement et que l'électron oscille à la pulsation  $\omega_0$ .

- 4.6.2. On suppose maintenant que les conditions initiales fixent  $\vec{r}_0 = \rho_- (\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$ . En appliquant, ce qui est légitime ici, le théorème de Larmor, à savoir que le mouvement en présence du champ magnétique est identique à celui qui existait sans champ magnétique à condition de se placer dans un trièdre tournant autour de  $\vec{B}$  avec la pulsation  $\vec{\Omega} = -q \frac{\vec{B}}{2m}$ , trouver la nouvelle pulsation du mouvement de l'électron dans le repère du laboratoire.

4.6.3. Même question quand les conditions initiales fixent  $\vec{r}_0 = \rho_- (\vec{e}_x - i\vec{e}_y)$ .

- 4.6.4. Sachant que pour une assemblée d'atomes, l'on a un mélange statistique des trois mouvements précédents, quelles sont les trois pulsations émises par le gaz atomique en présence de champ magnétique (effet Zeeman normal)? Calculer numériquement les écarts entre ces trois pulsations pour un champ magnétique de 0.1 tesla. Citer un appareil spectroscopique adapté pour résoudre de tels écarts.

- 4.6.5. Préciser les polarisations et les pulsations observées dans les cas particuliers d'une observation de la lumière émise dans la direction  $\vec{e}_z$  et dans une direction perpendiculaire à  $\vec{e}_z$ .

ANNEXE

EXTRAIT DU PROGRAMME DES  
CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES P, P'

Programme

Commentaires

B) PHYSIQUE ONDULATOIRE

Cette partie du programme sera étudiée en liaison notamment avec la partie C — Électromagnétisme.

L'ordre de présentation est laissé au libre choix du professeur.

1. ÉQUATION D'ONDE CLASSIQUE  
A UNE DIMENSION.

Forme générale des solutions; solutions stationnaires; ondes progressives; principe de superposition. Vibrations longitudinales et transversales.

Solution avec deux conditions aux limites; modes propres; superposition de solutions stationnaires, analyse en série de Fourier.

Ondes planes progressives, vecteur d'onde. Paquet d'ondes.

La forme de l'équation d'onde sera établie dans deux cas: ondes électromagnétiques, propagation d'une onde longitudinale dans un fluide.

On se limitera à une description qualitative et expérimentale.

C) ÉLECTROMAGNÉTISME

4. ÉQUATIONS DE MAXWELL.

Équations de Maxwell.

Énergie électromagnétique, puissance échangée entre un champ électromagnétique et des porteurs de charges libres. Vecteur de Poynting, densité d'énergie électromagnétique.

Le formalisme quadridimensionnel et les transformations relativistes des champs sont hors programme.

5. PROPAGATION.

Équation de propagation des champs électrique et magnétique dans le vide. Transversalité des champs.

Caractère vectoriel des ondes électromagnétiques, états de polarisation.

Les potentiels retardés sont hors programme.

On indiquera l'action d'une lame quart d'onde et d'une lame demi-onde sur un état de polarisation rectiligne. On supposera les lames « idéales », c'est-à-dire sans absorption. Toute étude de leur structure, de leur fonctionnement et de leur réalisation pratique est hors programme.

L'étude des lames ne pourra faire l'objet de questions aux concours qu'en travaux pratiques.

Comportement, sous incidence normale, d'une onde électromagnétique au voisinage d'un conducteur. Limite du conducteur parfait.

SESSION DE 1994

**concours interne  
de recrutement de professeurs agrégés  
et concours d'accès à l'échelle de rémunération**

**section : sciences physiques**

options { physique et chimie  
physique appliquée

composition avec exercices d'application

**Durée : 5 heures**

*Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique à fonctionnement autonome, non imprimante – autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*5 feuilles de papier millimétré pour chacune des options.*

*Aucun document n'est autorisé, notamment tableau périodique interdit.*

*Les candidats doivent traiter le sujet  
correspondant à l'option à laquelle ils sont inscrits*



Option : **CHIMIE****PARTIE A : STRUCTURES****I. Structure électronique**

1. Donner la structure électronique de l'atome d'oxygène et celle de l'atome de soufre.
2. Donner une structure électronique de Lewis des molécules :  $\text{SO}_2$ ,  $\text{SO}_3$ . En déduire leur géométrie.
3. Donner le nom et une structure électronique de Lewis des ions  $\text{SO}_3^{2-}$ ,  $\text{S}_2\text{O}_6^{2-}$ ,  $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$  et  $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ . Donner la structure spatiale des ions  $\text{SO}_3^{2-}$  et  $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ .

**II. Structure cristalline**

On donne :

- paramètre de la maille cubique du sulfure de zinc :  $a = 541 \text{ pm}$  :
  - rayon ionique (en pm) :  $\text{Zn}^{2+}$  : 74 ;  $\text{S}^{2-}$  : 184.
1. *a.* Décrire le réseau cubique faces centrées à l'aide d'un schéma.  
*b.* Le sulfure de zinc existe sous deux formes cristallines différentes. Donner le nom de ces deux formes et schématiser la structure cristalline de l'une d'elles.  
*c.* Calculer la plus petite distance entre les ions  $\text{S}^{2-}$  et  $\text{Zn}^{2+}$  dans la maille cubique en fonction du paramètre  $a$  de cette maille.  
*d.* Comparer cette distance avec les rayons ioniques du sulfure  $\text{S}^{2-}$  et de l'ion zinc  $\text{Zn}^{2+}$ . Conclure.
  2. *a.* Définir l'énergie réticulaire d'un cristal.  
*b.* On donne l'énergie réticulaire du cristal de sulfate de cuivre ( $-3165 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ), l'enthalpie standard de formation du cristal ( $-770,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) et l'enthalpie standard de formation de l'ion  $\text{Cu}^{2+}$  ( $3051 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ). Calculer l'enthalpie standard de formation de l'ion sulfate.  
*c.* On donne l'enthalpie standard de formation de l'ion sulfate aqueux et de l'ion cuivre (II) aqueux (respectivement  $-909,3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $64,9 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ). Calculer l'enthalpie standard d'hydratation de l'ion sulfate et celle de l'ion cuivre (II). Comparer ces deux valeurs.  
*d.* Donner la formule des principales formes hydratées du sulfate de cuivre (II) solide. Quelle est leur couleur respective ? Qu'observe-t-on quand on chauffe la plus hydratée ? Interpréter ce changement. Est-il réversible ?
  3. *a.* Préciser la structure électronique du cuivre ( $Z = 29$ ) et celle de l'ion cuivre (II).  
*b.* La couleur bleue de la solution aqueuse de sulfate de cuivre (II) est attribuée à une espèce dont on donnera la structure géométrique.  
*c.* Comment varie la couleur de cette solution quand on ajoute soit un excès d'acide chlorhydrique, soit un excès d'ammoniaque ? Donner la formule et la structure spatiale des espèces prédominantes dans les deux cas. Comparer la force relative des ligands  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{Cl}^-$ ,  $\text{OH}^-$  et  $\text{NH}_3$ .

### III. Structure en solution et conductivité

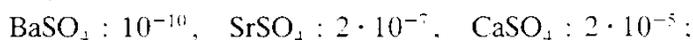
On donne à 25°C :

- les conductivités molaires limites d'ions notées  $\lambda^\circ$ , exprimées en  $\text{m}^2 \cdot \text{S} \cdot \text{mol}^{-1}$  :

$\text{H}_3\text{O}^+$ .....	$350 \cdot 10^{-4}$
$\text{Na}^+$ .....	$50 \cdot 10^{-4}$
$\text{HSO}_4^-$ .....	$50 \cdot 10^{-4}$
$\text{SO}_3^{2-}$ .....	$160 \cdot 10^{-4}$
$\text{Cl}^-$ .....	$76 \cdot 10^{-4}$
$\text{OH}^-$ .....	$198 \cdot 10^{-4}$
$\text{SO}_3^-$ .....	$160 \cdot 10^{-4}$
$\text{HSO}_3^-$ .....	$50 \cdot 10^{-4}$
$\text{Ba}^{2+}$ .....	$128 \cdot 10^{-4}$

On rappelle que la conductivité molaire limite d'un ion de charge  $z$  est égale à  $|z|$  fois la conductivité équivalente limite de cet ion :

- les produits de solubilité :



- les  $\text{pK}_A$  des couples acide/base :

- $\text{pK}_{A1} (\text{H}_2\text{SO}_3 / \text{HSO}_3^-) = 1,8$ ,
- $\text{pK}_{A2} (\text{HSO}_3^- / \text{SO}_3^{2-}) = 6,9$ .

L'acide sulfurique sera considéré comme un diacide fort.

Les études suivantes sont réalisées à 25°C.

- Justifier la valeur exceptionnellement grande de la conductivité molaire limite de l'ion  $\text{H}_3\text{O}^+$ .
  - Établir les facteurs permettant de justifier la différence de conductivité molaire limite des ions hydrogénosulfate et sulfate.
- On effectue l'étude conductimétrique de 100 mL d'une solution d'acide sulfurique de concentration  $0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  à laquelle on ajoute des volumes variables d'une solution de soude  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
  - Calculer la conductivité de la solution initiale  $\sigma_0$  et la conductivité de la solution à l'équivalence  $\sigma_e$ . (On négligera la variation de volume au cours de l'expérience.)
  - Donner l'expression de la conductivité  $\sigma$  de la solution en fonction du volume  $x$  de soude versé, et tracer le graphe  $\sigma = f(x)$ .
- Étude conductimétrique de 100 mL d'une solution de sulfite de sodium de concentration  $0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  à laquelle on ajoute des volumes variables d'une solution d'acide sulfurique de concentration  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
  - Donner l'expression de la conductivité  $\sigma'$  de la solution en fonction du volume  $y$  d'acide sulfurique versé, pour des valeurs de  $y$  inférieures ou supérieures aux valeurs des volumes équivalents. (On négligera la variation de volume au cours de l'expérience.)
  - Tracer l'allure de la courbe  $\sigma' = f(y)$ .
  - Donner l'allure de la courbe  $\text{pH} = f(y)$  pour cette même étude, en précisant quelques valeurs particulières de  $y$  et du pH. Quels indicateurs colorés pourraient être utilisés pour faire ce dosage et quelle réaction pourraient-ils mettre en évidence ?

4. Dosage des ions sulfate  $\text{SO}_4^{2-}$  par les ions baryum  $\text{Ba}^{2+}$ .
- Écrire l'équation de la réaction servant de support au dosage.
  - Calculer la conductivité de la solution de sulfate de sodium de concentration  $0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , celle de la solution après ajout du volume équivalent de chlorure de baryum de concentration  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et celle de la solution après ajout d'un volume double de celui de l'équivalence. (On négligera la variation de volume au cours du dosage.)
  - Tracer l'allure de la variation de la conductivité de la solution en fonction du volume de chlorure de baryum ajouté.
5. On réalise le dosage de 100 mL d'une solution contenant des ions baryum  $\text{Ba}^{2+}$  de concentration  $0,02 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , des ions calcium  $\text{Ca}^{2+}$  de concentration  $0,02 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , des ions strontium  $\text{Sr}^{2+}$  de concentration  $0,02 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et des ions chlorure de concentration  $0,12 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  par de l'acide sulfurique  $1,0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . (On négligera la variation de volume au cours du dosage.)
- Quel volume minimal d'acide sulfurique doit-on ajouter pour avoir le début de la précipitation du sulfate de baryum ? Quel est le volume nécessaire pour le début de précipitation du sulfate de strontium ? pour le sulfate de calcium ?
  - Calculer le volume d'acide à verser pour avoir 99 % de baryum sous forme de précipité ? Ce précipité est-il contaminé par d'autres précipités ? Peut-on obtenir 99,99 % de baryum sous forme de précipité sans avoir de contamination ?

## PARTIE B : CHIMIE ORGANIQUE

### I. Sulfonation

- Donner les formules semi-développées des produits obtenus par réaction entre un oléum et le benzène.
  - Préciser les conditions expérimentales pour obtenir le dérivé monosulfoné.
  - Écrire le mécanisme de cette réaction (type de réaction, nature de l'espèce réactive, origine de l'entité réactive).
- Quels produits peut-on obtenir à partir du toluène et de l'oléum ?
  - Justifier leur formation et leur proportion respective.
  - Donner la structure du produit majoritaire. (On précisera la nature et la géométrie des liaisons.)
  - Donner la principale utilisation industrielle de ce type de dérivés et la justifier, en précisant le rôle de la chaîne aliphatique ou aromatique et du groupe fonctionnel acide sulfonique.
- Synthèse d'un colorant à partir d'un sulfonate.  
Le naphthalène est traité par un mélange  $\text{SO}_3 \cdot \text{H}_2\text{SO}_4$  pour obtenir principalement le produit thermodynamique A substitué en  $\beta$ . Ce produit est soumis à une fusion alcaline pour donner un phénol B. Par ailleurs, l'acide sulfanilique (acide 4-amino-benzènesulfonique) noté C est mis en présence d'une solution aqueuse à  $0^\circ\text{C}$  de nitrite de sodium acidifiée par de l'acide chlorhydrique pour former un composé D. La réaction du composé D avec le phénol B conduit à un produit E appelé colorant orange II.
  - Écrire les formules semi-développées des différents composés A, B, C, D, E.
  - Donner le mécanisme des réactions mises en jeu pour passer de C à D et de D à E
  - Justifier le fait que le produit E soit un colorant.

## II. Dialkylsulfate

On donne les températures d'ébullition, à pression standard :

– méthanol .....	65°C
– éthanol .....	78°C
– acide éthanoïque .....	118°C
– acide méthanoïque .....	101°C
– éthanoate d'éthyle .....	77°C
– éthanoate de méthyle .....	57°C
– méthanoate de méthyle ...	31°C
– méthanoate d'éthyle .....	54°C

- Écrire le bilan de la réaction d'un alcool primaire sur un acide carboxylique. Quelles sont les caractéristiques de cette réaction ?
  - Donner son mécanisme.
  - Comment peut-on interpréter la différence de température d'ébullition entre un alcool ou un acide et l'ester correspondant ?
  - Comment peut-on obtenir le méthanoate de méthyle par voie directe avec un bon rendement ? Peut-on faire de même pour l'éthanoate d'éthyle ?
  - Quelle voie indirecte peut-on proposer pour préparer un ester ?
- Un alcool primaire en présence d'acide sulfurique peut donner un monoalkylsulfate ou un dialkylsulfate.
  - Écrire le bilan des réactions.
  - Donner les structures électronique et spatiale du diméthyle sulfate de formule  $(\text{CH}_3)_2\text{SO}_4$ .
  - En présence de phénol en milieu alcalin, le diméthylsulfate donne le méthoxyphénol (anisole). Donner le mécanisme.
- Un alcool primaire et un acide carboxylique traités en milieu sulfurique peuvent donner plusieurs composés.
  - Discuter la compétition entre les diverses réactions.
  - Dans quelles conditions privilégie-t-on une réaction particulière ?
  - Préciser le rôle des protons dans l'estérification d'un alcool primaire par un acide carboxylique. À la place de l'acide sulfurique, l'acide chlorhydrique serait-il acceptable ? Quelle réaction concurrentielle peut-on avoir ?

## III. Thiol

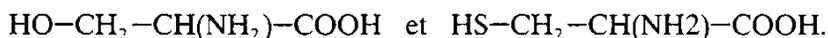
- Donner les structures électronique et géométrique de  $\text{H}_2\text{O}$  et  $\text{H}_2\text{S}$ .
  - Comparer les propriétés physiques et le caractère acido-basique de ces deux espèces.
  - Comparer les propriétés acido-basiques du méthanol et du méthanethiol.
- Écrire les équations des réactions d'oxydation du méthanol et du méthanethiol en présence du dioxygène de l'air. (On précisera la nature des produits obtenus et les conditions expérimentales.)
  - Donner deux exemples de composés possédant au moins une liaison S-S et deux exemples de composés possédant une liaison peroxy O-O.

#### IV. Acide aminé soufré

On donne :

- $pK_A$  des couples acide/base de la sérine : 2,21 et 9,15 ;
- $pK_A$  des couples acide/base de la cystéine : 1,96, 8,18 et 10,28 ;
- pH isoélectrique de la sérine :  $pI = 5,68$ .

1. La sérine et la cystéine sont deux acides aminés de formule respective :



Donner les différentes formes acido-basiques de ces acides aminés et représenter leur zone de prédominance en fonction du pH.

2. Sur l'exemple de la sérine :

- a. Donner la définition du pH isoélectrique et les propriétés de la solution d'acide aminé au pH isoélectrique.
  - b. Établir la relation entre le pH isoélectrique et les  $pK_A$  des fonctions amine et acide carboxylique de l'acide aminé.
  - c. Calculer le pH d'une solution  $0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  de sérine.
  - d. Comment peut-on mesurer le pH isoélectrique d'un acide aminé ?
3. a. Combien de stéréoisomères possèdent la cystéine et la sérine ? Les représenter en précisant les configurations absolues (R ou S) des atomes asymétriques dans chaque cas.
- b. Combien de dipeptides peut-on former à partir de la sérine et de la cystéine ? Comment réaliser la synthèse d'un seul ?
4. a. Qu'appelle-t-on polypeptide ?
- b. Un ou plusieurs polypeptides entrent dans la constitution d'une protéine. Quelles sont les interactions mises en jeu dans les structures secondaire et tertiaire d'une protéine ?

### PARTIE C : L'ACIDE SULFURIQUE ET L'ION SULFATE

#### I. En chimie organique

- a. Montrer le rôle des protons dans la déshydratation d'un alcool tertiaire en écrivant le mécanisme.
  - b. Donner les produits de la déshydratation du 2-méthylbutan-2-ol et du 3-méthylpentan-3-ol. On précisera quels sont les produits majoritaires dans les deux cas.
2. Quels produits obtient-on quand on porte le 3-méthylbutan-2-ol en présence d'acide sulfurique à différentes températures ?

## II. En chimie inorganique

On donne à 25 °C :

- solubilité de  $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$  :  $6,5 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , de  $\text{Ca}(\text{HPO}_4)$  :  $1,8 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , de  $\text{Ca}(\text{H}_2\text{PO}_4)_2$  :  $7 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ;
- les potentiels standard d'oxydoréduction en volts, pour les couples :



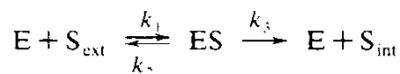
1. L'électrolyse de l'eau avec électrodes de platine est réalisée soit avec de l'eau pure soit avec de l'eau acidifiée par de l'acide sulfurique ou par de l'acide chlorhydrique.
  - a. Donner les réactions aux électrodes et l'allure de la variation de la densité de courant en fonction de la tension appliquée dans les trois cas.
  - b. Mêmes questions pour l'électrolyse de l'eau additionnée de soude avec une anode en graphite et une cathode soit en graphite soit en mercure.
2. a. Justifier qualitativement la différence de solubilité dans l'eau des différents phosphates de calcium.
  - b. Écrire les équations des différentes réactions de l'acide sulfurique sur le phosphate de calcium. Qu'appelle-t-on « superphosphate » ?
  - c. Donner le nom et la fonction de deux composés contenant du phosphore présents chez les plantes.
  - d. Citer deux éléments autres que le phosphore pouvant être apportés par les engrais. Dans quelles espèces chimiques sont-ils présents dans les plantes ?

## III. En biologie

Le sulfate est incorporé par les plantes. On se propose d'étudier la vitesse d'entrée du sulfate dans des chloroplastes isolés.

La vitesse de transport du sulfate à travers l'enveloppe des chloroplastes est étudiée en fonction de la concentration en sulfate du milieu réactionnel. La température est maintenue à 22 °C, le pH est maintenu constant et la quantité de chloroplastes par unité de volume est la même pour chaque expérience.

Dans l'hypothèse d'un mécanisme de Michaelis, le schéma de la réaction est le suivant :



où E représente l'enzyme de transport transmembranaire,  $\text{S}_{\text{ext}}$  le sulfate à l'extérieur du chloroplaste,  $\text{S}_{\text{int}}$  le sulfate à l'intérieur du chloroplaste, ES le complexe enzyme-sulfate.

1. En faisant l'approximation de l'état quasi-stationnaire sur le complexe ES et en considérant que le sulfate est en excès par rapport à l'enzyme, exprimer la vitesse initiale  $V^0$  d'entrée du sulfate à l'intérieur du chloroplaste en fonction de la concentration initiale  $S^0$  en sulfate à l'extérieur du chloroplaste, de la concentration initiale en enzyme  $E^0$  et des constantes de vitesse  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ .
2. Exprimer cette vitesse  $V^0$  en fonction de  $S^0$ , de la vitesse maximale  $V_{\text{max}}^0$  égale à  $(k_3 \cdot E^0)$  et de la constante de Michaelis  $K_M = \frac{(k_2 + k_3)}{k_1}$ .

3. Les résultats expérimentaux sont donnés ci-dessous :

Vitesse initiale d'entrée du sulfate $V^0$ ( $\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$ )	Concentration en sulfate à l'extérieur du chloroplaste $S^0$ ( $\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1}$ )
3,72	0,435
6,58	0,893
10,7	1,85
13,5	2,94
16,6	4,93

Vérifier que la cinétique étudiée suit le mécanisme de Michaelis. Calculer la constante de Michaelis.

## PARTIE D : OXYDORÉDUCTION EN SOLUTION AQUEUSE

### I. L'ion peroxodisulfate

On donne :

- l'énergie de liaison O—O dans le peroxodisulfate :  $145 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- les énergies de liaison de C—H et de O—H dans le méthanol : respectivement  $365 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $461 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

1. Donner une préparation du peroxodisulfate de sodium.
2. Les solutions aqueuses de peroxodisulfate de sodium ne sont pas stables. Écrire l'équation de la réaction lente qui a lieu.
3. Cinétique d'oxydation en chaîne du méthanol par l'ion peroxodisulfate.

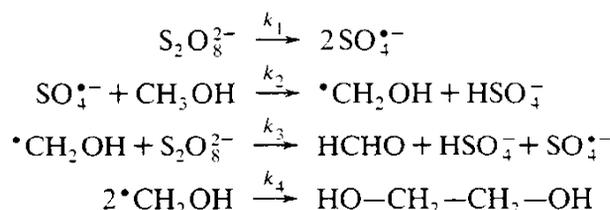
Une solution aqueuse de méthanol de concentration  $2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  est oxydée par une solution de peroxodisulfate de sodium à la température de  $80^\circ\text{C}$  selon l'équation :



Pour différentes concentrations de peroxodisulfate, la vitesse initiale de la réaction a été mesurée et reportée dans le tableau suivant :

Concentration initiale en peroxodisulfate ( $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ) ...	0,020	0,015	0,010
Vitesse initiale ( $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ) .....	$3,96 \cdot 10^{-5}$	$2,57 \cdot 10^{-5}$	$1,40 \cdot 10^{-5}$

- a. Déterminer l'ordre partiel de la réaction par rapport à l'ion peroxodisulfate.
- b. On propose le mécanisme suivant :



Calculer la vitesse initiale de formation du méthanal. Vérifier que l'ordre de la réaction par rapport à l'ion peroxodisulfate ainsi déterminé est en accord avec l'ordre déterminé expérimentalement.

c. Les variations de la constante de vitesse en fonction de la température sont les suivantes :

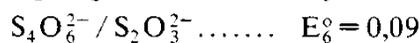
Température (°C) .....	90	100	110
Constante ( $\text{mol}^{-1/2} \cdot \text{L}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$ ) .....	$4,32 \cdot 10^{-2}$	$12,5 \cdot 10^{-2}$	$34,4 \cdot 10^{-2}$

Calculer l'énergie d'activation de la réaction. Comparer cette valeur aux énergies de liaison données ci-dessus.

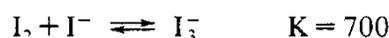
## II. Diagramme potentiel-pH du soufre (en se limitant aux espèces citées ci-dessous)

On donne :

- masse molaire atomique de l'iode :  $127 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- masse molaire atomique du potassium :  $39 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- potentiel standard de l'électrode au calomel saturé :  $0,244 \text{ V}$  ;
- potentiel standard d'oxydoréduction, en volts, des couples ci-dessous, à  $25^\circ \text{C}$  :



- constante d'équilibre :



- $\text{pK}_A$  des couples acide/base :



Pour la construction du diagramme potentiel-pH, prendre pour valeur des concentrations de chacune des espèces contenant l'élément soufre  $c = 0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

1. a. Calculer le potentiel d'oxydoréduction standard du couple  $\text{S}_2\text{O}_3^{2-} / \text{S}$ . Représenter la variation du potentiel de ce couple en fonction du pH.  
b. Représenter sur le même diagramme la variation du potentiel du couple  $\text{S} / \text{H}_2\text{S}$  et celle du potentiel du couple  $\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}$ . Calculer à partir de quel pH le soufre peut se dismuter.
2. Écrire l'équation de la réaction de dismutation de l'ion thiosulfate. Calculer le pH limite de dismutation d'une solution  $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  de thiosulfate de sodium.
3. On utilise une solution de diiode ( $6,35 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ ) additionnée d'iodure de potassium ( $40 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ ) pour doser le thiosulfate de sodium.
  - a. Dans quelles conditions de pH faut-il faire ce dosage ? À quoi sert l'iodure de potassium dans cette expérience ? Écrire l'équation de la réaction servant de support au dosage.
  - b. Calculer la constante d'équilibre associée à cette réaction. Décrire comment l'équivalence peut être observée. Calculer le titre de la solution de thiosulfate sachant que le volume équivalent est  $5,05 \text{ mL}$  et le volume dosé de  $10 \text{ mL}$ .
  - c. On mesure la tension entre l'électrode de mesure (électrode de platine) et l'électrode de référence (électrode au calomel saturé). Calculer la valeur de cette tension à l'équivalence.
  - d. Donner l'allure de la courbe représentant la variation de cette tension en fonction du volume de diiode versé, en précisant la valeur particulière à la demi-équivalence.

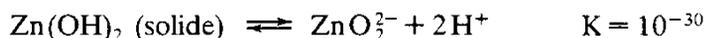
### III. Solubilité des sulfures en fonction du pH

On donne à 25°C :

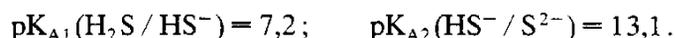
– les produits de solubilité :



– constante de l'équilibre :



–  $\text{pK}_A$  des couples acide/base :



1. Calculer la solubilité  $s$  d'un sulfure  $\text{MS}$  en fonction du pH.
2.
  - a. Calculer le pH de début de précipitation du sulfure de zinc pour une solution  $0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  en ion zinc.
  - b. Calculer le pH pour lequel 99,9 % de zinc précipite sous forme de sulfure.
  - c. Tracer l'allure de la variation de  $\text{ps} = -\log s$  en fonction du pH.
3.
  - a. Dans le cas d'une solution de nitrate de zinc de concentration  $0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , calculer le pH de début de précipitation de l'hydroxyde de zinc.
  - b. Exprimer la solubilité  $s'$  de l'hydroxyde de zinc en fonction du pH.
  - c. Tracer l'allure de la variation de  $\text{ps}' = -\log s'$  en fonction du pH.
4. Qu'observe-t-on quand on ajoute à 100 mL d'une solution de nitrate de zinc de concentration  $0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , 10 mL d'une solution de sulfure de sodium  $0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  ?

### PARTIE E : OXYDATION EN PHASE SÈCHE

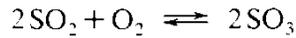
On donne à 25°C :

	$\text{O}_2$ (gaz)	$\text{SO}_2$ (gaz)	$\text{SO}_3$ (gaz)
Enthalpie standard de formation : $\Delta_f H^\circ$ ( $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ).....	—	-296,8	-395,7
Entropie standard de formation : $S^\circ$ ( $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ).....	205,0	248,1	256,7
Capacité thermique molaire à pression constante $c_p$ entre 25°C et 1000°C ( $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ).....	29,9	43,4	57,3

On admettra que l'air contient 20 % de dioxygène.

La réaction est réalisée à pression constante de 1 bar.

1. Calculer l'enthalpie standard  $\Delta_r H^\circ$  et l'entropie standard  $\Delta_r S^\circ$  de la réaction à 25°C.



2. Calculer l'enthalpie et l'entropie standard de la réaction à 1 000°C. Montrer que l'on peut, par la suite, négliger les variations de ces grandeurs avec la température dans la gamme de température 25°C à 1 000°C. Exprimer l'enthalpie libre standard de la réaction  $\Delta_r G_T^\circ$  en fonction de  $\Delta_r H^\circ$ ,  $\Delta_r S^\circ$  et T.
3. Comment l'équilibre est-il déplacé par une augmentation de température ?
4. *a.* Donner l'expression de la constante d'équilibre de la réaction de formation de trioxyde de soufre en fonction de la température, entre 25°C et 1 000°C.
- b.* Exprimer le rendement  $r$  (rapport entre le nombre de moles de  $\text{SO}_3$  formées et le nombre initial de moles de  $\text{SO}_2$ ) en fonction de la température quand on part d'un mélange en proportion stœchiométrique de  $\text{SO}_2$  et  $\text{O}_2$ .
- c.* Calculer les températures pour lesquelles le rendement est égal à 0,5, 0,9 et 0,99.
- d.* Tracer la courbe  $r = f(T)$  pour des températures comprises entre 25°C et 1 000°C et déterminer l'intervalle de température où le rendement est satisfaisant.
5. On utilise de l'air à la place du dioxygène. Calculer le rendement  $r'$  à 430°C, si l'on part d'un mélange initial contenant deux volumes de  $\text{SO}_2$  et cinq volumes d'air. Comparer avec le cas précédent à la même température et conclure.
6. *a.* Quelles sont les conditions industrielles de synthèse du trioxyde de soufre ? À quelles contraintes répondent-elles ?
- b.* Quelle est l'utilisation principale du trioxyde de soufre ? Citer quatre utilisations de son principal dérivé.

Option : **PHYSIQUE APPLIQUÉE**

*Cette composition comprend deux problèmes totalement indépendants.*

*Ces deux problèmes sont obligatoires.*

*Les deux problèmes seront traités sur des copies différentes, les candidats noteront de façon très visible, en haut de chaque feuille intercalaire, le numéro du problème abordé dans ledit intercalaire. Dans le cas où un(e) candidat(e) croit détecter une erreur dans l'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement dans sa copie, propose la correction, et poursuit en conséquence le problème.*

*Il (elle) prend bien entendu l'entière responsabilité de la correction proposée.*



## PREMIER PROBLÈME

On se propose d'étudier la commande et l'asservissement de la direction de visée de l'antenne d'un radiotélescope. Le dispositif comporte deux grandeurs commandées : l'angle de site et l'angle de gisement.

On ne s'intéressera ici qu'à la commande de gisement (angle formé par la direction méridienne du lieu et la projection sur un plan horizontal de la direction de visée).

## Description du système

L'antenne et son système de commande de site sont montés sur une plateforme mobile autour d'un axe vertical  $Oz$  (fig. 1). Un moteur à courant continu commandé par l'induit entraîne cette plateforme par l'intermédiaire d'un réducteur de vitesse. Un capteur angulaire mesure l'angle de gisement  $\theta$ .

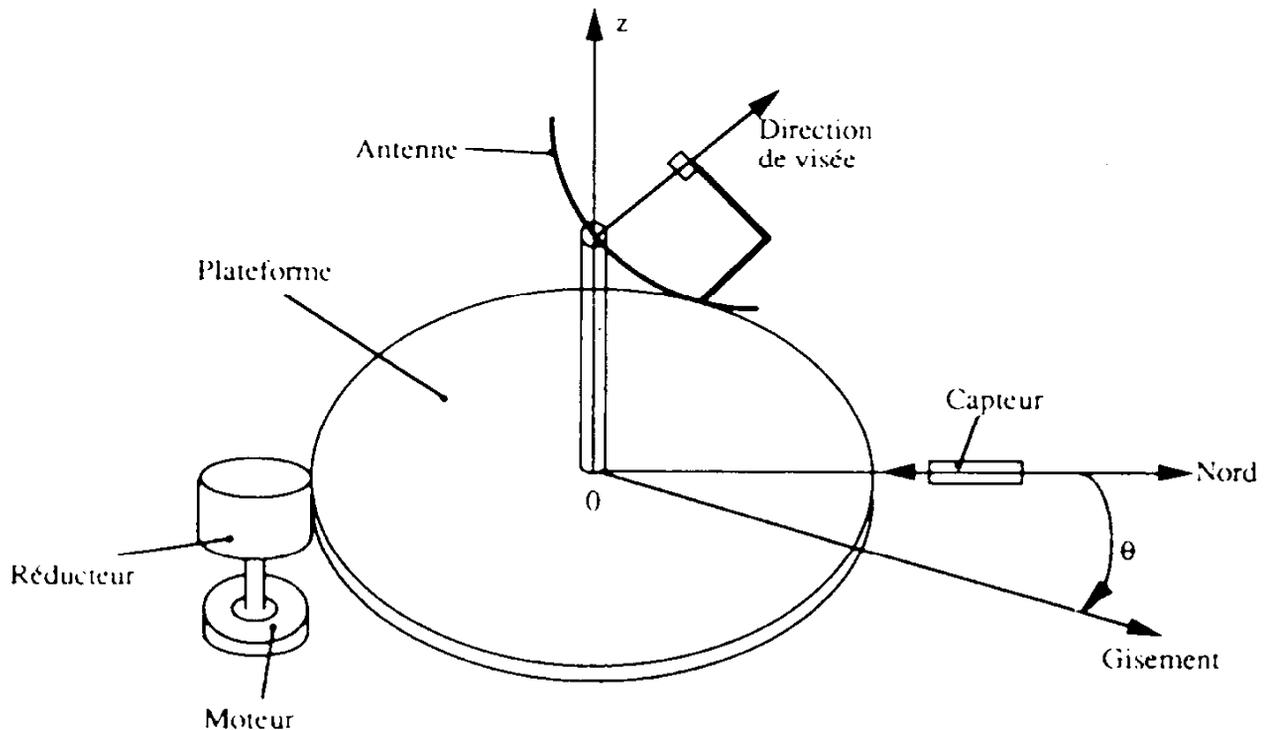


Figure 1

On désigne par :

- $\theta_c$  la consigne de gisement (valeur souhaitée) ;
- $\theta_s$  l'angle de gisement effectif (sortie du système) ;
- $J_1$  le moment d'inertie de l'ensemble moto-réducteur, ramené sur l'arbre moteur ;
- $f_1$  le frottement visqueux correspondant (dû essentiellement à la présence d'un ventilateur et à l'huile du réducteur) ;
- $J_2$  le moment d'inertie de la plateforme et de l'antenne en mouvement autour de l'axe  $Oz$  (on suppose que  $J_2$  reste constant lorsque l'angle de site varie) ;
- $f_2$  le coefficient de frottement sec (constante dépendant du signe de la vitesse de rotation), associé au mouvement de la plateforme ;
- $k_m$  et  $k_v$  respectivement la constante de couple et la constante de f.e.m. du moteur supposé linéarisé ;
- $r$  la résistance de son circuit d'induit, l'inductance correspondante pouvant être négligée ;
- $\theta_m$  l'angle de rotation du moteur ;
- $n = \frac{\theta_s}{\theta_m}$  le rapport de réduction (supposé positif : pas d'inversion) ;
- $V_c$  la tension appliquée sur l'induit du moteur ;
- $I$  le courant correspondant ;
- $C_m$  le moment du couple moteur ;
- $\omega_m$  et  $\omega_s$  respectivement les vitesses angulaires du moteur et de la plateforme ;
- $V_s$  la tension délivrée par le capteur, image de  $\theta_s$ .

On donne :

$$J_1 = 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$$

$$J_2 = 9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2;$$

$$k_m = 5,73 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1};$$

$$k_e = 5,73 \cdot 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1};$$

$$f_1 = 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1};$$

$$f_2 = 0;$$

$$r = 0,5 \Omega.$$

Autres caractéristiques du moteur :

Courant nominal : 12 ampères sous 24 volts ;

Courant maximum impulsif : 75 ampères ;

Moment nominal du couple moteur : 0,6 N · m ;

Moment maximum impulsif du couple moteur : 4,3 N · m ;

Vitesse nominale : 3 000 tours par minute ;

Vitesse maximum : 6 000 tours par minute ;

Puissance utile : 190 watts.

## PREMIÈRE PARTIE

### ÉTUDE DE L'ASSERVISSEMENT SIMPLIFIÉ

#### I.1. Modélisation.

On considère le système constitué par l'arbre moteur, la plateforme et le réducteur. Dans le but de simplifier l'étude, le réducteur sera supposé comporter deux pignons seulement, bien que  $n$  reste positif :

- un pignon moteur de diamètre  $2r_1$  ;
- un pignon lié à la plateforme de diamètre  $2r_2$ .

On négligera le frottement sec ( $f_2 = 0$ ).

I.1.1. Faire un croquis représentant ce système en indiquant clairement les éléments ( $J_1, f_1, J_2, C_m, \theta_m, \theta_s$ , ainsi que les deux pignons du réducteur).

I.1.2. Écrire les équations relatives à chacune des deux parties indéformables, mobiles en rotation.

I.1.3. À partir des équations précédentes et en utilisant le paramètre  $n$ , déterminer la transmittance du système d'entrée  $C_m$  et de sortie  $\theta_s$ .

I.1.4. Que devient cette transmittance lorsque  $f_1$  est négligeable ? Quel type de commande a-t-on réalisé ?

I.1.5. Les moments d'inertie  $J_1$  et  $J_2$  étant donnés, montrer qu'il existe une valeur optimale du rapport de réduction permettant une accélération angulaire maximum pour une valeur donnée du moment du couple moteur.

*Application numérique.*

I.1.6. On considère le système d'entrée  $V_e$  et de sortie  $\theta_s$ . Le mettre sous forme de schéma fonctionnel en s'aidant du I.1.3. et en déduire sa transmittance.

I.1.7. En supposant que  $n$  soit égal à  $10^{-3}$ , montrer à partir de I.1.6. ci-dessus et des valeurs numériques fournies, que l'on ne peut négliger, ni l'inertie de l'arbre moteur  $J_1$ , ni le coefficient de frottement visqueux  $f_1$ .

## I.2. Asservissement.

- 3 -

On suppose que  $n$  est égal à  $10^{-3}$ .

Le système de commande précédent est complété de la façon suivante :

- un comparateur élabore la différence  $\varepsilon$  entre l'image  $V_c = k_1 \theta_c$  ( $k_1$  en  $V \cdot \text{rad}^{-1}$ ), de la consigne de gisement, et l'image  $V_s = k'_1 \theta_s$  ( $k'_1$  en  $V \cdot \text{rad}^{-1}$ ) de la sortie donnée par le capteur. On suppose  $k_1 = k'_1$ ;
- la tension d'écart  $\varepsilon$ , obtenue à la sortie du comparateur, est amplifiée avant d'être appliquée au moteur :  $V_e = k_a \varepsilon$  ( $k_a$  est un réel sans dimension).

I.2.1. Faire un schéma fonctionnel du système bouclé d'entrée  $\theta_c$  (consigne de gisement) et de sortie  $\theta_s$  (gisement effectif).

I.2.2. Calculer la fonction de transfert du système bouclé  $H(p) = \frac{\theta_s(p)}{\theta_c(p)}$ .

Dans le cas où la modélisation correspondante n'aurait pu être faite, on pourra prendre :

$$\frac{\omega_m(p)}{V_e(p)} = \frac{4,93}{1 + 5,61 \cdot 10^{-2} p}$$

*Application numérique* (prendre  $k_1 = k'_1 = 10 V \cdot \text{rad}^{-1}$  ; garder  $k_a$  comme paramètre).

I.2.3. Lorsqu'on veut changer la direction de visée, on affiche la nouvelle valeur de  $\theta_c$  (ou de son image  $V_c$ ). Ceci revient à appliquer un échelon à l'entrée de l'asservissement.

Déterminer  $k_a$  pour que la nouvelle direction de visée soit atteinte à 6 % près en un temps minimum. Quel est ce temps ?

I.2.4. Calculer la vitesse maximum  $\omega_{m_{\max}}$  du moteur, obtenue dans les conditions précédentes (I.2.3.).

*Application numérique.*

I.2.5. Calculer le moment maximum du couple moteur, obtenu toujours dans les mêmes conditions. En déduire le courant d'induit maximum correspondant.

*Application numérique.*

I.2.6. Représenter  $C_m(t)$  en fonction du temps. Préciser numériquement les valeurs remarquables.

I.2.7. Reprendre les questions I.2.4. et I.2.5. en considérant un changement de consigne de  $\frac{\pi}{2}$  radians appliqué à l'entrée. Conclusion concernant le moteur d'asservissement ?

## DEUXIÈME PARTIE

## PRISE EN COMPTE DES IMPERFECTIONS DU SYSTÈME DE COMMANDE

Dans cette deuxième partie, les influences respectives de différentes imperfections du système de commande seront analysées.

## II.1. Influence de l'élasticité de la transmission.

L'application d'un moment sur l'arbre moteur, plateforme bloquée, met en évidence une certaine élasticité de la transmission. On simplifie l'étude en considérant que cette élasticité est localisée au niveau de l'entraînement de la plateforme selon le schéma figure 2. Le coefficient de raideur  $K$  sera pris égal à  $10^3 N \cdot m \cdot \text{rad}^{-1}$  ; le rapport de réduction  $n$  reste égal à  $10^{-3}$ .

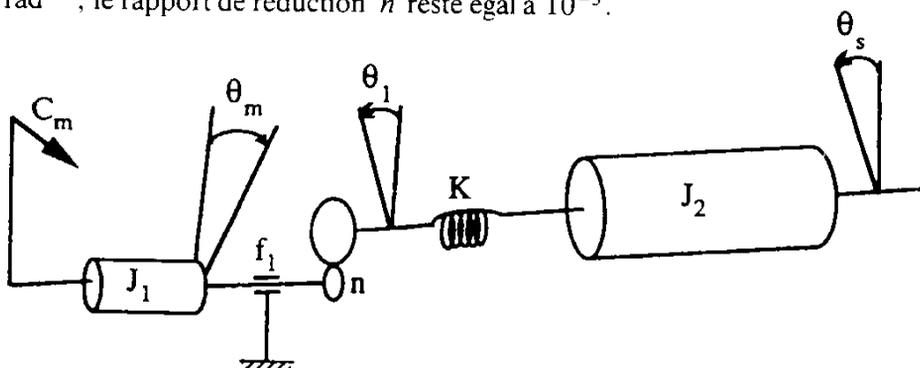


Figure 2

II.1.1. Calculer la nouvelle transmittance  $\frac{\theta_s(p)}{C_m(p)}$  qui tient compte de la raideur non infinie de la transmission.

*Application numérique.*

II.1.2. Calculer la nouvelle transmittance en boucle fermée du système asservi  $H(p) = \frac{\theta_s(p)}{\theta_c(p)}$  (voir I.2.). Là encore, on gardera l'amplification  $k_a$  comme paramètre.

Faire l'*application numérique* en prenant  $\frac{\theta_s(p)}{C_m(p)} = A(p) = \frac{0,1}{p(9p^3 + 9p^2 + 1,9p + 1)}$ .

II.1.3. Calculer numériquement la réponse  $\theta_s(t)$  de l'asservissement lorsqu'un échelon de 0,1 radian est appliqué à l'entrée, l'amplification  $k_a$  étant réglée à 7.

II.1.4. L'amplification  $k_a$  étant prise comme paramètre, représenter le lieu des pôles de  $H(p) = \frac{\theta_s(p)}{\theta_c(p)}$  pour  $k_a$  variant de zéro à l'infini.

## II.2. Influence de la réversibilité du réducteur.

Lorsqu'un couple perturbateur de moment  $\gamma(t)$ , par exemple une rafale de vent sur l'antenne, est appliqué à l'asservissement, celui-ci réagit. L'étude qui suit a pour objectif d'étudier cette réaction en se plaçant toujours dans le cas du II.1, où l'élasticité de la transmission n'est pas nulle.

II.2.1. Faire un schéma fonctionnel de l'asservissement en faisant apparaître le point d'application de la transformée de Laplace  $\Gamma(p)$  du couple perturbateur.

II.2.2. Transformer ce schéma de sorte que  $\Gamma(p)$  apparaisse comme entrée principale;  $\theta_c(t)$  étant supposée constante et appliquée depuis un temps suffisant, on considérera  $\theta_c(t) = 0$ .

II.2.3. Calculer la transmittance  $\frac{\theta_s(p)}{\Gamma(p)}$  en fonction de  $A(p) = \frac{\theta_s(p)}{C_m(p)}$  (voir II.1.1. et II.1.2.).

II.2.4. On considère un échelon de perturbation,  $\gamma(t) = \Gamma_0 u(t)$ . En supposant que l'on avait  $\theta_s(t) = \theta_0$  constant avant l'application de ce moment perturbateur, quelle sera la nouvelle valeur du gisement à l'équilibre ?

*Application numérique :*  $\theta_0 = 0$ ;  $\Gamma_0 = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

II.2.5. On veut que l'écart de gisement, dans les conditions définies ci-dessus (II.2.4.), ne dépasse pas un centième de radian. Quelle devra être l'amplification ? Que se passe-t-il dans ces conditions ? (voir II.1.4.).

II.2.6. L'observation du lieu des pôles représenté en II.1.4. permet d'imaginer un correcteur cascade (ou série) relativement simple pour le système. Donner ce correcteur et représenter le lieu des pôles de la transmittance corrigée  $H_c(p)$  correspondant.

II.2.7. On n'utilisera pas ce correcteur. Pourquoi ?

II.2.8. Le système de réduction est changé. On utilise un système couronne-vis sans fin, caractérisé par l'irréversibilité de la transmission. Ce système comporte un léger jeu, noté  $\pm \frac{\Delta\theta_s}{2}$ .

II.2.8.1. En considérant une transmission non élastique (cas I), faire un schéma fonctionnel du système d'entrée  $C_m$  et de sortie  $\theta_s$ , permettant de mettre en évidence  $\theta_s \pm \frac{\Delta\theta_s}{2} = n \theta_m$ .

II.2.8.2. Représenter qualitativement la réponse indicielle  $\theta_s(t)$  en considérant un jeu  $\Delta\theta_s$  négligeable devant l'échelon d'entrée.

TROISIÈME PARTIE  
COMMANDE DU MOTEUR

Le moteur utilisé est du type à rotor plat. Ses caractéristiques électromécaniques sont données dans la présentation générale.

Compte tenu du caractère occasionnel de la commande, on décide de l'alimenter à partir d'un montage amplificateur de classe B série (Push-Pull) utilisant deux transistors supposés rigoureusement complémentaires.

### III.1. Études préliminaires.

On considère le schéma figure 3. Le coefficient d'amplification statique en courant (gain en courant grands signaux),  $\beta$ , des transistors, sera pris égal à 100. On applique une entrée  $e(t) = e_0 \sin \omega t$ .

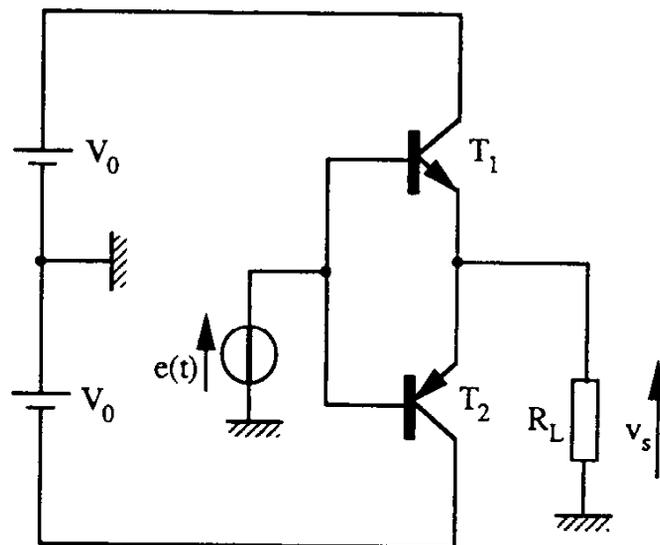
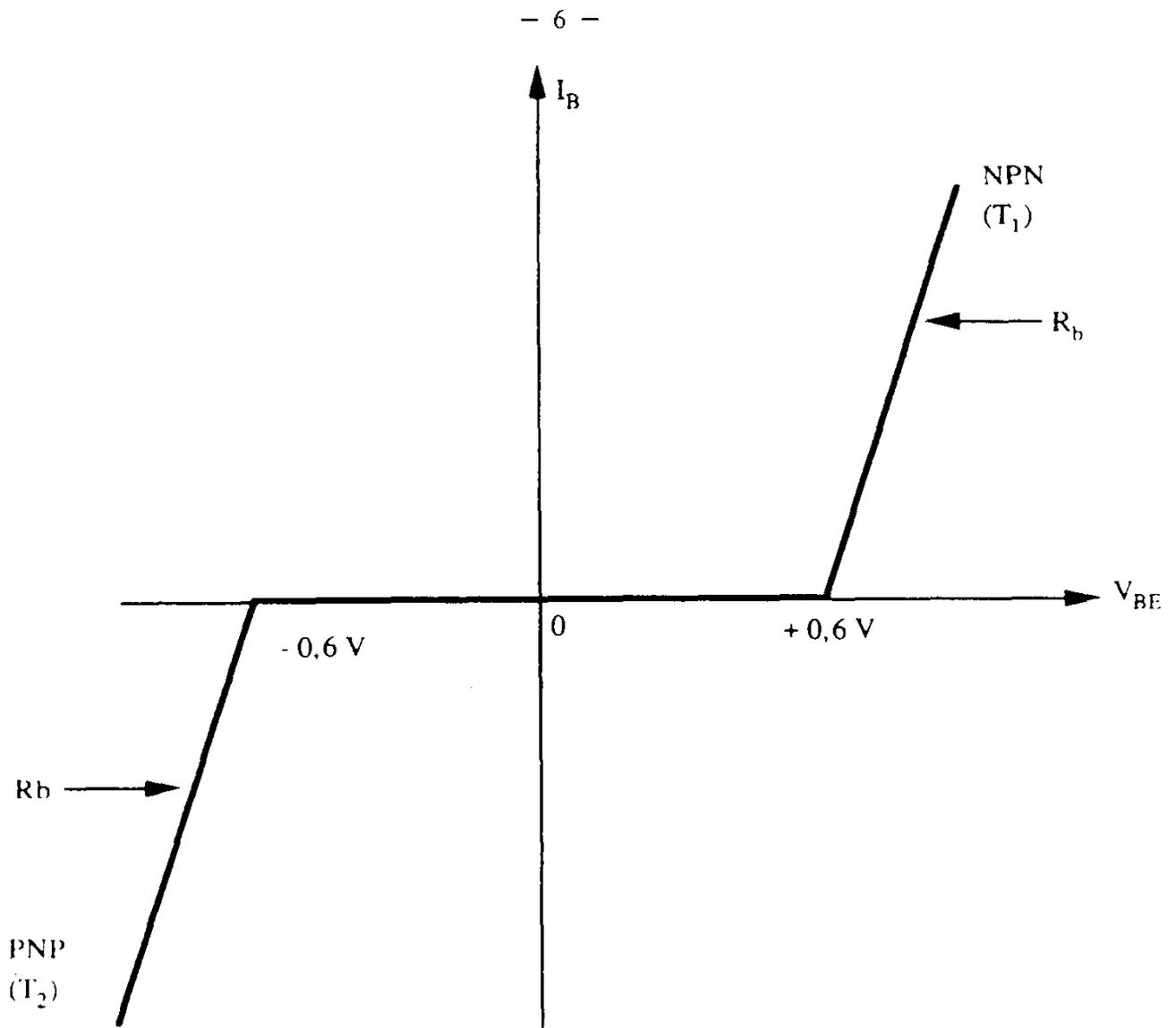


Figure 3

III.1.1. Représenter la tension  $v_s(t)$  en fonction du temps pour  $e_0 = 2$  volts. Les caractéristiques d'entrée idéalisées des transistors  $T_1$  et  $T_2$  sont données figure 4. On négligera la résistance de base  $R_b$ .



III.1.2. Le schéma de la figure 3 est modifié par adjonction d'un pont de polarisation comportant deux diodes dont le seuil de conduction est de 0,6 volt et deux résistances égales  $R$ , figure 5. Représenter  $v_s(t)$ , toujours pour  $e_0 = 2$  volts, et en négligeant la résistance  $R_b$  des transistors ainsi que la résistance directe  $R'_d$  des diodes.

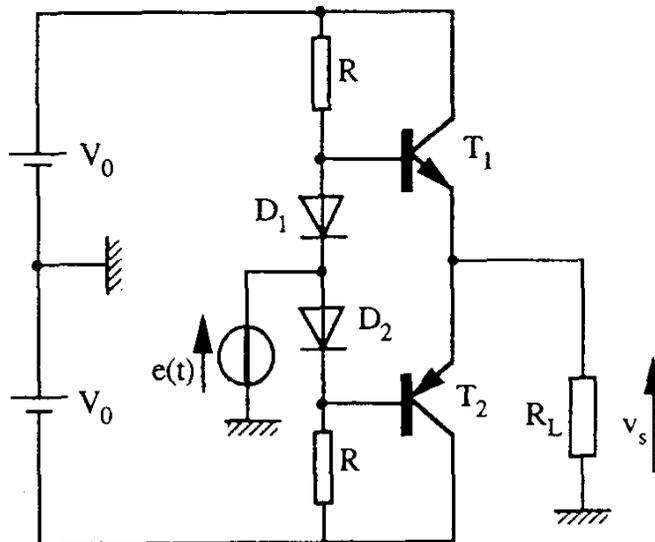


Figure 5. — Adjonction d'un pont de polarisation

- III.1. 3. En raisonnant sur l'alternance positive, montrer que les résistances  $R$  diminuent la dynamique maximum de sortie (limitation de l'excursion maximum et minimum de la tension  $v_s$ ).
- III.1. 4. On prend  $V_0 = 30$  volts,  $R_L = 3 \Omega$ ,  $R = 30 \Omega$ .  
Calculer la dynamique maximum de sortie.  
Dans ce qui suit, on considère l'entrée sinusoïdale  $e(t)$  qui correspond à la dynamique maximum de la sortie.
- III.1. 5. Calculer, dans ces conditions, la puissance moyenne maximum fournie à la charge en régime sinusoïdal.
- III.1. 6. Déterminer la tension apparaissant aux bornes de l'une des résistances  $R$ , au cours d'une période (on gardera l'hypothèse  $R'_d = 0$ ).
- III.1. 7. Déterminer la puissance moyenne fournie par les alimentations aux résistances  $R$ .
- III.1. 8. Déterminer l'expression de la tension  $v_{CE}$  du transistor  $T_1$ .
- III.1. 9. Déterminer l'expression du courant  $i_C$  dans le transistor  $T_1$ , toujours pour la même entrée.
- III.1.10. Calculer la puissance moyenne dissipée dans chaque transistor.
- III.1.11. Calculer le rendement du montage.
- III.1.12. Calculer l'impédance d'entrée du montage en conservant les conditions de simplification précédentes.
- III.1.13. Donner l'expression du courant fourni par le générateur  $e$ .
2. **Étude d'un montage plus performant.**

Les principaux défauts du montage précédent apparaissent à travers les résultats :

- impédance d'entrée trop faible ;
- puissance excessive dissipée par les résistances  $R$  et les transistors, ce qui entraîne un mauvais rendement de l'amplificateur et une surchauffe des transistors.

- III.2.1. Les résultats obtenus aux questions III.1.3 et III.1.12. suggèrent une façon d'augmenter l'impédance d'entrée du montage tout en conservant la même dynamique de sortie : il suffit pour cela d'agir sur l'un des paramètres. Quel est ce paramètre ?
- III.2.2. Proposer une solution qui permette de répondre à la nécessité trouvée au III.2.1. Faire un schéma.
- III.2.3. Sachant que la tension de seuil d'un transistor diminue avec la température de  $2$  mV par degré, que se passe-t-il qualitativement si la température de  $T_1$  ou de  $T_2$  augmente (fig. 5) ?
- III.2.4. On suppose que les transistors  $T_1$  et  $T_2$  comportent chacun une résistance  $R_E$  en série avec leur émetteur (fig. 6).

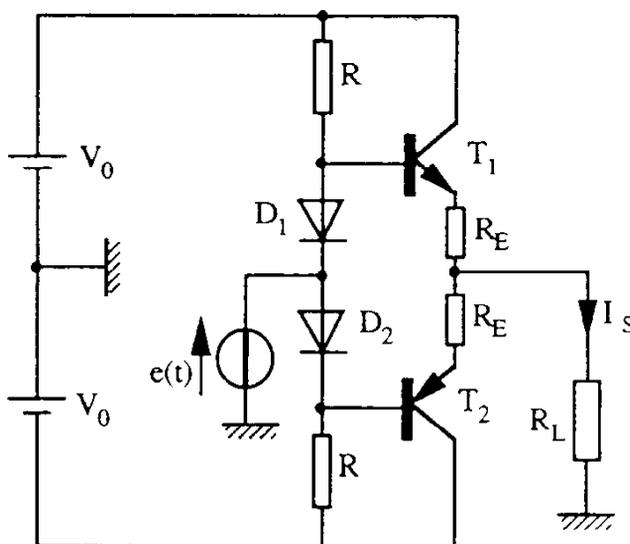


Figure 6. - Adjonction de résistances d'émetteur

- III.2.4.1. En supposant que les tensions directes aux bornes des diodes  $D_1$  et  $D_2$  ne dépendent que de la température ambiante  $\Theta_a$  que l'on supposera constante, calculer la variation du courant de collecteur de l'un des transistors en fonction de la variation de sa température de jonction  $\Theta_j$ .
- III.2.4.2. On appelle  $R_{th_{ja}}$  la résistance thermique jonction-ambiante. On suppose que la puissance dissipée dans le transistor est due uniquement au courant collecteur-émetteur. Calculer dans ces conditions la variation de la température de jonction en fonction de la variation du courant de collecteur, pour l'un des transistors  $T_1$  ou  $T_2$ .
- III.2.4.3. À partir des expressions  $dI_c = f_1(d\Theta_j)$  et  $d\Theta_j = f_2(dI_c)$ , trouvées précédemment, construire un schéma fonctionnel du système d'entrée  $d\Theta_j$  et de sortie  $dI_c$  (système bouclé), et en déduire la condition de stabilité thermique.
- III.2.4.4. Quelle valeur peut-on donner à  $R_E$  pour  $R_{th_{ja}} = 2^\circ\text{C} \cdot \text{W}^{-1}$  et un courant de repos  $I_c$  identique dans les deux transistors  $T_1$  et  $T_2$ ? ( $V_0$  est conservée à 30 volts).

III.2.5. On considère le montage de la figure 7.

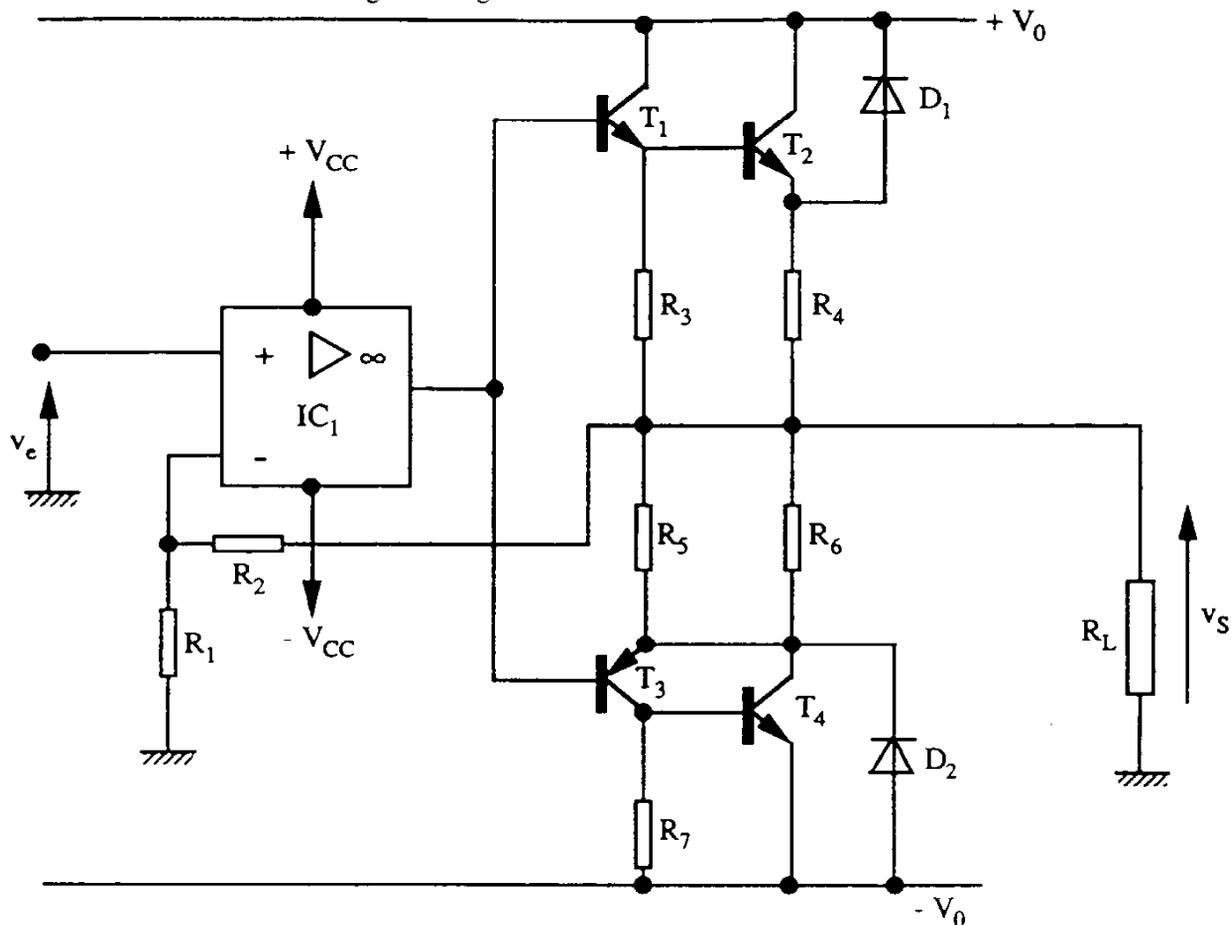


Figure 7. — Schéma de l'amplificateur définitif

- III.2.5.1.  $V_0$  est fixée à 30 volts. Quelle valeur faut-il donner à  $V_{cc}$  pour obtenir une dynamique maximum en sortie ?
- III.2.5.2.  $IC_1$  est un amplificateur opérationnel du type LH 0004 dont les caractéristiques sont :  
 $V_{cc \text{ max}} = 45$  volts ; courant de sortie max =  $\pm 20$  mA ; amplification statique de tension en boucle ouverte =  $6 \cdot 10^4$  ; produit « Gain Bande » = 10 MHz ; « Slew Rate » =  $0.3 \text{ V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ .  
 Que vaut l'amplification  $v_s/v_e$  du montage complet ?
- III.2.5.3. À quoi servent les résistances  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$ ,  $R_6$  et  $R_7$  ?
- III.2.5.4. Quelles valeurs proposez-vous pour ces résistances ? Justifiez votre choix.
- III.2.5.5. À quoi servent les diodes  $D_1$  et  $D_2$  ? Quelle est leur caractéristique essentielle ?

## SECOND PROBLÈME

## MACHINE ASYNCHRONE

Le réseau express régional parisien utilise des rames tractées par machine asynchrone.

La première partie du problème étudie de façon générale la machine asynchrone utilisée dans cette application. La deuxième partie propose l'étude des convertisseurs qui alimentent les machines asynchrones.

La troisième partie aborde l'association d'une machine asynchrone et de son convertisseur ainsi que la commande de l'ensemble.

Les parties I, II.1. et II.2. sont indépendantes.

## I. Étude de la machine asynchrone.

La machine asynchrone est une machine triphasée à rotor à cage. Ses paramètres sont les suivants :

$R_s$	résistance statorique par phase
$R_r$	résistance équivalente rotorique par phase
$L_s$	inductance cyclique statorique par phase
$L_r$	inductance équivalente rotorique par phase
$L_m$	inductance mutuelle cyclique par phase entre stator et rotor
$l_s$	inductance de fuite statorique par phase
$l_r$	inductance équivalente de fuite rotorique par phase
$\sigma$	coefficient de dispersion
$p$	nombre de paires de pôles

On utilisera comme notations :

$\Phi_s$	flux résultant statorique
$\Phi_r$	flux résultant rotorique
$g$	glissement
$\omega_s$	pulsation des grandeurs statoriques
$\omega_r$	pulsation des grandeurs rotoriques
$n$	vitesse de rotation (tr/min)
$\Omega$	vitesse angulaire de rotation de la machine (en rad/s)
$\Omega_s$	vitesse angulaire de rotation du champ tournant créé par les grandeurs de pulsation $\omega_s$ .

D'autre part, on utilisera des lettres minuscules ( $v$ ) pour les valeurs instantanées, une majuscule soulignée ( $\underline{V}$ ) pour la valeur complexe associée à une grandeur sinusoïdale dont le module sera une majuscule ( $V$ ).

Valeurs numériques des paramètres :

$$L_m = 8 \text{ mH} \quad l_s = 115 \text{ } \mu\text{H} \quad l_r = 85 \text{ } \mu\text{H} \quad R_s = 15,39 \text{ m}\Omega \quad R_r = 11,52 \text{ m}\Omega \quad p = 2.$$

On supposera la machine non saturée, son entrefer d'épaisseur constante. On négligera les pertes mécaniques ainsi que les pertes fer statoriques. Toutes les études seront faites en régime permanent.

I.1. Exprimer puis calculer les valeurs de  $L_s$ ,  $L_r$  et  $\sigma$ .

I.2. Que permet d'affirmer l'hypothèse de la non-saturation du circuit magnétique de la machine asynchrone ?

I.3. Le stator est alimenté par des tensions sinusoïdales triphasées équilibrées de pulsation  $\omega_s$ . Une tension simple sera notée  $\underline{V}$  et un courant de ligne  $\underline{I}$ . Le schéma équivalent par phase adopté pour cette étude est représenté figure 1 ainsi que les conventions de signe pour l'étude du couple. On donne les valeurs numériques suivantes :

$$L = 8,115 \text{ mH} \quad N = 204 \text{ } \mu\text{H} \quad R = 11,85 \text{ m}\Omega.$$

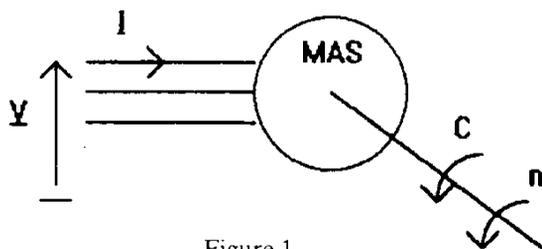
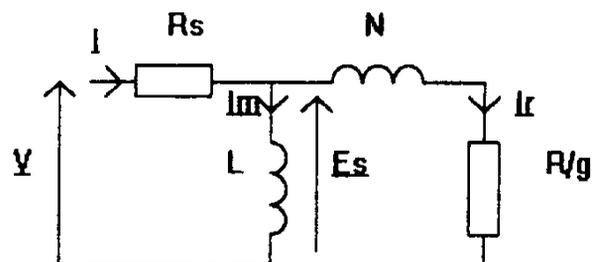


Figure 1



- I.3.1. Que représentent physiquement  $L$  et  $N$  ?
- I.3.2. Faire un bilan énergétique de la machine asynchrone en tenant compte des hypothèses formulées à ce sujet. On précisera les relations entre les différentes puissances intervenant dans ce bilan.
- I.3.3. À l'aide de ce bilan, indiquer quels sont les signes des différentes puissances, ainsi que le type de fonctionnement de la machine, pour différentes valeurs de  $g$ .
- I.3.4. Donner la relation liant le flux  $\Phi_s$  à une grandeur électrique du schéma équivalent.
- I.3.5. Quelle relation lie  $\omega_r$ ,  $\omega_s$  et  $g$  ainsi que  $\omega_r$ ,  $\omega_s$  et  $\Omega$  en fonctionnement moteur puis en fonctionnement génératrice ?
- I.3.6.a. Établir l'expression du couple électromagnétique noté  $C$  en fonction de  $E_s$ ,  $\omega_r$  et des éléments du schéma équivalent, puis en fonction de  $\Phi_s$ ,  $\omega_r$  et des éléments du schéma équivalent.
- I.3.6.b. Tracer la caractéristique  $C = f(\Omega)$  correspondant à  $E_s = 215 \text{ V}$  et  $f_s = 100 \text{ Hz}$  ( $f_s = \frac{\omega_s}{2\pi}$ ), en précisant les coordonnées des points caractéristiques (document-réponse 1).
- I.3.6.c. Comment se déplace cette caractéristique lorsque  $\omega_s$  varie avec  $\Phi_s = \text{constante}$  ?  
Tracer sur le même document la caractéristique  $C = f(\Omega)$  correspondant à  $E_s = 107,5 \text{ V}$  et  $f_s = 50 \text{ Hz}$ .
- I.3.6.d. Comment seraient modifiées les caractéristiques  $C = f(\Omega)$  si on négligeait les fuites magnétiques de la machine asynchrone ?
- I.3.7.a. Représenter le diagramme de Fresnel des grandeurs du schéma équivalent  $\underline{I}_m$ ,  $\underline{I}_r$ ,  $\underline{V}$ ,  $\underline{I}$ ,  $\underline{E}_s$  et  $\underline{\Phi}_s$ . On prendra  $E_s$  comme origine des phases et on adoptera les valeurs numériques suivantes :  $E_s = 215 \text{ V}$ ,  $f_s = 100 \text{ Hz}$  et  $\omega_r = 13,9 \text{ rad/s}$ .
- I.3.7.b. On suppose que la machine entraîne une charge mécanique qui oppose un couple résistant constant et l'on fait varier  $\omega_s$  en maintenant  $\Phi_s$  constant.  
Comment se déforme le diagramme des courants ? Comment se déforme le diagramme des tensions ? Représenter ces diagrammes lorsque  $E_s = 21,5 \text{ V}$ ,  $f_s = 10 \text{ Hz}$  et  $\omega_r = 13,9 \text{ rad/s}$ .
- I.3.7.c. Donner l'expression de  $E_s$  puis  $\Phi_s$  en fonction de  $V$  et des éléments du schéma équivalent. En déduire la loi de variation de  $V$  permettant de maintenir  $\Phi_s$  constant. Retrouver les valeurs  $V$  correspondant aux questions I.3.7.a. et I.3.7.b.

- I.4. Le stator est maintenant alimenté par des courants sinusoïdaux de pulsation  $\omega_s$ . Le courant de ligne est noté  $\underline{I}$ , la tension simple  $\underline{V}$  et le schéma équivalent par phase adopté pour cette étude est représenté figure 2. On donne les valeurs numériques suivantes :

$$L' = 7,916 \text{ mH} \quad l = 198,8 \text{ } \mu\text{H} \quad R' = 11,28 \text{ m}\Omega .$$

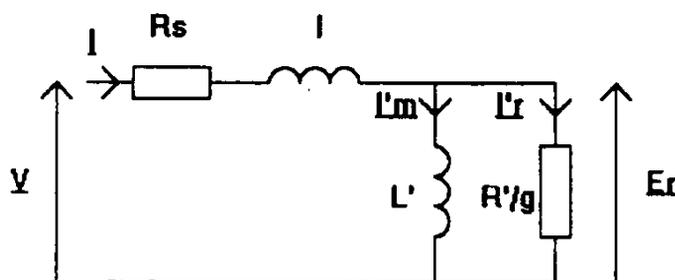


Figure 2

- I.4.1. Que représentent physiquement  $L'$  et  $l$  ?
- I.4.2. Donner la relation liant le flux  $\Phi_r$  à une grandeur électrique du schéma équivalent.

- I.4.3. Dans cette partie on impose la valeur de  $I$  et l'on étudie les caractéristiques de la machine ainsi alimentée.
- I.4.3.a. Établir l'expression du couple électromagnétique  $C$  en fonction de  $I$ ,  $\omega_r$  et des éléments du schéma équivalent.
- I.4.3.b. Représenter cette caractéristique pour les valeurs  $I = 400$  A et  $f_s = 100$  Hz en indiquant les valeurs littérales puis numériques des points caractéristiques (document-réponse 2).
- I.4.3.c. Comment est modifiée cette caractéristique lorsqu'on adopte les valeurs numériques  $I = 400$  A et  $f_s = 50$  Hz ? La caractéristique existe-t-elle pour  $\omega_s = 0$  ? À quel fonctionnement correspond-elle ?
- I.4.3.d. Établir l'expression de  $\Phi_r$  en fonction de  $I$  et  $\Omega$ . Tracer la courbe  $\Phi_r = f(\Omega)$  sur le document-réponse 2 pour les mêmes valeurs numériques qu'à la question I.4.3.b.
- I.4.4. On souhaite maintenant imposer le couple sur l'arbre de la machine, la charge mécanique imposant alors la vitesse.
- I.4.4.a. Établir l'expression du couple électromagnétique  $C$  en fonction d'un flux et d'un courant, puis en fonction de deux courants. Que rappelle cette expression ? Que peut-on en déduire pour le contrôle du couple ?
- I.4.4.b. Représenter le diagramme de Fresnel des grandeurs  $\underline{I}$ ,  $\underline{I}'_m$ ,  $\underline{I}'_r$ ,  $\underline{E}_r$ ,  $\underline{V}$  et  $\underline{\Phi}_r$ . On appellera  $\varphi_r$  l'angle  $(\underline{I}, \underline{E}_r)$ . On prendra  $I = 330$  A,  $\omega_r = 12,9$  rad/s et  $f_s = 114$  Hz.
- I.4.4.c. On pose  $L'/R' = L_r/R_r = \tau_r =$  constante de temps rotorique. Exprimer une relation entre  $\tau_r$ ,  $\varphi_r$  et  $\omega_r$ .
- I.4.4.d. Donner l'expression du couple électromagnétique  $C$  en fonction de  $I$  et  $\varphi_r$ . Pour quelle valeur de  $\varphi_r$  le couple électromagnétique est-il maximal pour une valeur de  $I$  donnée ? À quelle valeur de  $\omega_r$  correspond ce maximum ?
- I.4.4.e. Calculer la valeur numérique du couple électromagnétique correspondant aux valeurs numériques du I.4.4.b.
- I.4.4.f. Indiquer quelles grandeurs on doit imposer pour imposer le couple électromagnétique. Comment s'appelle le fonctionnement ainsi réalisé ? Proposer un schéma fonctionnel permettant de réaliser cette commande sachant que l'on dispose de l'information vitesse et préciser sur celui-ci comment on passe du fonctionnement moteur au fonctionnement génératrice.

## II. Étude des convertisseurs alimentant la machine asynchrone.

La machine asynchrone précédemment décrite est alimentée par un convertisseur indirect. L'ensemble est représenté figure 3. On remarque que le convertisseur  $\neq$  (CONV1) alimente deux ensembles « CONV2 et machine asynchrone ».

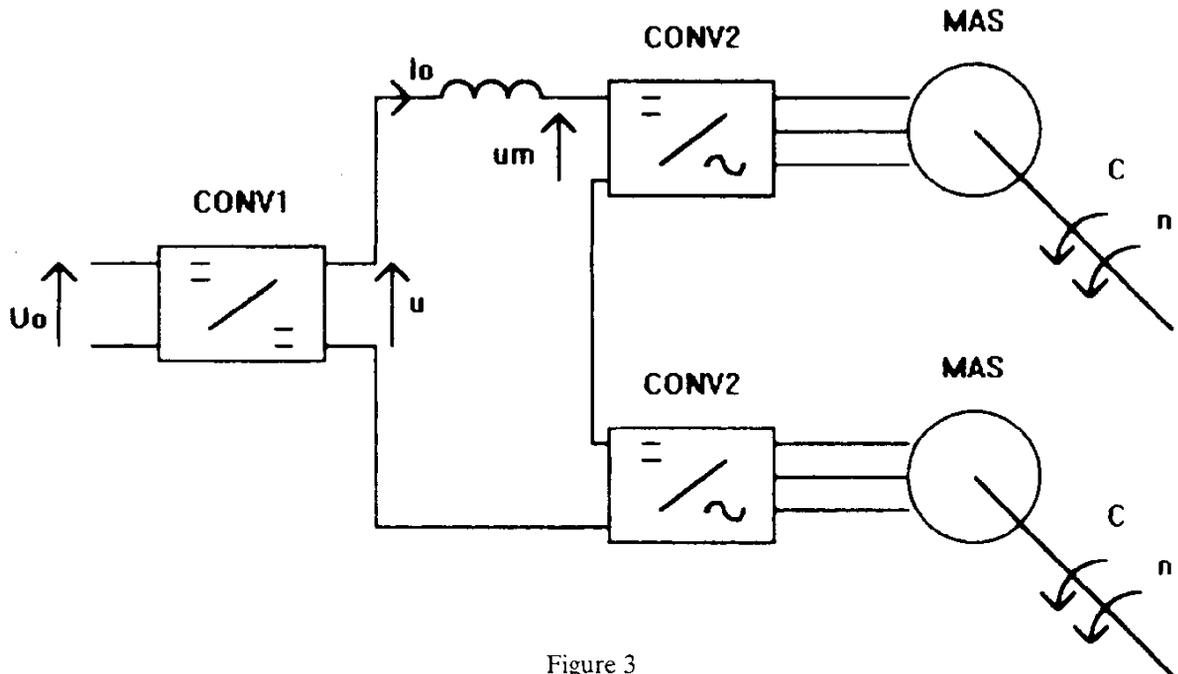


Figure 3

### II.1. Étude de l'onduleur de courant CONV2.

Le schéma de ce convertisseur est représenté figure 4. Les interrupteurs électroniques sont parfaits : courant nul à l'état bloqué et tension nulle à l'état passant. Ils sont commandables à l'ouverture et à la fermeture et leurs commutations sont considérées instantanées.  $I_0$  est un courant continu dont on négligera les ondulations. On suppose dans cette partie que l'onduleur débite sur une source de tension sinusoïdale triphasée équilibrée parfaite, c'est-à-dire sans impédance interne.

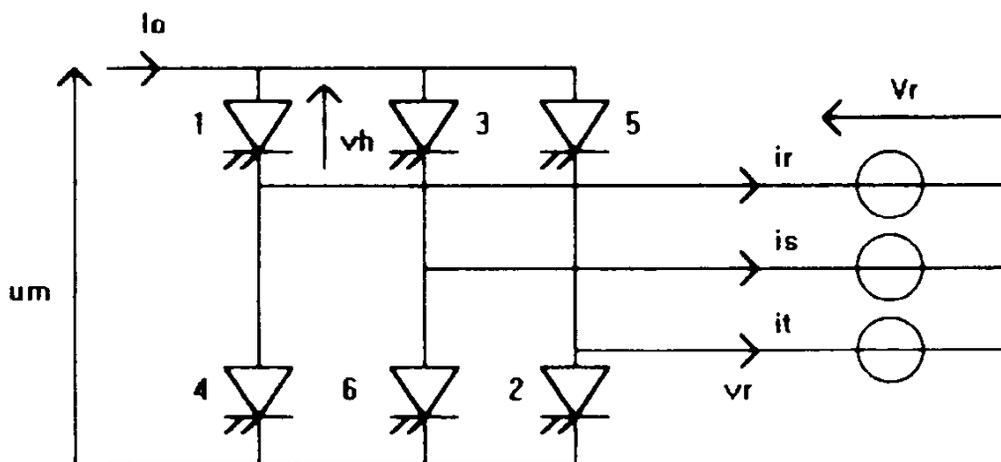


Figure 4

II.1.1. On donne les intervalles de commande des interrupteurs permettant d'obtenir un fonctionnement pleine onde sur le document 3. La valeur de  $I_0$  est  $I_0 = 423$  A.

II.1.1.a. Représenter les courants  $i_r$ ,  $i_s$ ,  $i_t$  (document-réponse 3).

II.1.1.b. Calculer la valeur efficace de  $i_r$  et  $I_1$  la valeur efficace du fondamental de  $i_r$ , et la valeur efficace de l'harmonique de rang  $n$ . Représenter  $i_1(t)$  fondamental de  $i_r$ .

- II.1.1.c. Sachant que  $v_r(t)$  présente un déphasage  $\varphi$  par rapport au fondamental  $i_1(t)$  de  $i_r$ , représenter  $u_m$  sur le document-réponse 3. Exprimer sa valeur moyenne  $U_m$  en fonction de  $V$  et  $\varphi$ ;  $V$  est la valeur efficace de  $v_r$ .
- II.1.1.d. Exprimer, en la justifiant, la puissance  $P$  absorbée par la machine asynchrone.
- II.1.1.e. Exprimer, en la justifiant, la puissance  $P_a$  absorbée par l'ensemble machine et convertisseur.
- II.1.1.f. Le convertisseur est-il réversible ? Préciser pour chaque sens de transfert de l'énergie, le signe des grandeurs concernées par la réversibilité.
- II.1.1.g. Représenter la tension  $v_h$ , donner la valeur de la tension d'amorçage et de la tension de blocage des interrupteurs. Quel type d'interrupteurs peut-on utiliser ?
- II.1.2. On utilise maintenant une commande des interrupteurs permettant d'obtenir une onde découpée. Cette commande est représentée sur le document-réponse 4. Le nombre des angles de sous-découpage est ici deux, mais on peut faire un sous-découpage avec un nombre d'angles plus élevé.
- II.1.2.a. Représenter l'allure du courant  $i_r$ .
- II.1.2.b. Établir l'expression des valeurs efficaces des harmoniques de  $i_r(t)$ .
- II.1.2.c. Quelles relations doivent satisfaire les angles  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  pour annuler les premiers harmoniques ?
- II.1.2.d. On donne  $\alpha_1 = 16,2^\circ$ ,  $\alpha_2 = 22^\circ$ . Calculer la valeur efficace des quatre premiers harmoniques de  $i_r$ .

## II.2. Étude du convertisseur $\neq$ CONV1.

Le schéma de ce convertisseur est représenté figure 5. Il se compose d'un interrupteur  $H$ , de deux diodes  $D_1$  et  $D_2$  et d'un thyristor  $Th_c$ . Tous les composants sont parfaits : courant nul à l'état bloqué, tension nulle à l'état passant, commutations instantanées. La tension  $U_0$  est une tension continue qui vaut 1 500 V,  $E$  est une tension considérée comme continue, l'interrupteur  $H$  fonctionne avec une fréquence  $f = 1/T = 600$  Hz, il est fermé de 0 à  $\alpha T$  et ouvert de  $\alpha T$  à  $T$  :  $\alpha$  est donc le rapport cyclique de fonctionnement. On considérera la constante de temps  $L_0/R_0$  grande devant  $T$ .

Le convertisseur a deux structures possibles suivant l'état de conduction du thyristor  $Th_c$ .

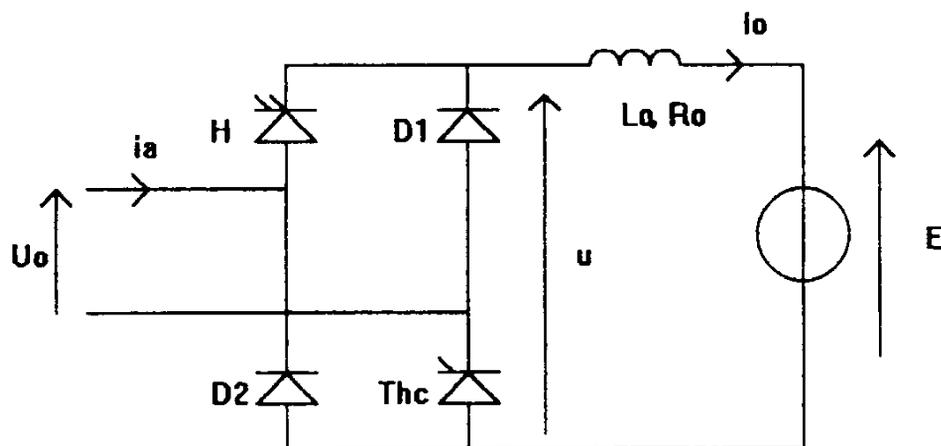


Figure 5

- II.2.1. Le thyristor  $Th_c$  est constamment passant. Le mode de fonctionnement est appelé MOD1 et on suppose la conduction ininterrompue.
- II.2.1.a. Quelle structure classique obtient-on dans ce cas ?
- II.2.1.b. Représenter la tension  $u(t)$  et déterminer l'expression de sa valeur moyenne.
- II.2.1.c. Représenter les courants  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ . Déterminer l'expression de la valeur moyenne  $I_0$  de  $i_0$  et de son ondulation  $\Delta i_0$ .

- II.2.1.d. E étant une donnée imposée, sur quel paramètre faut-il agir pour régler la valeur de  $I_0$  ?
- II.2.1.e. Sachant que l'on souhaite obtenir un  $\Delta i_0$  maximal de 125 A, calculer la valeur de  $L_0$ .
- II.2.2. Le thyristor  $Th_c$  est constamment bloqué. Le mode de fonctionnement est alors appelé MOD2 et on suppose la conduction ininterrompue.
- II.2.2.a. Quelle structure obtient-on dans ce cas ?
- II.2.2.b. Représenter la tension  $u(t)$  et déterminer l'expression de sa valeur moyenne.
- II.2.2.c. Exprimer la valeur moyenne  $I_0$  de  $i_0$ . Quel est le signe de E permettant d'obtenir une valeur de  $I_0$  compatible avec un fonctionnement correct ?
- II.2.2.d. Représenter  $i_0(t)$  et  $i_a(t)$ . Établir l'expression de l'ondulation  $\Delta i_0$  de  $i_0$ .
- II.2.2.e. E étant une donnée imposée, sur quel paramètre faut-il agir pour régler la valeur de  $I_0$  ?
- II.2.2.f. La valeur de  $L_0$  adoptée pour le premier mode de fonctionnement permet-elle d'assurer la même condition sur l'ondulation ?
- II.2.3. Expliquer quelle est la fonction assurée par ces deux modes de fonctionnement.

### III. Association machine asynchrone - convertisseur.

La machine asynchrone et son convertisseur indirect alimenté par la tension  $U_0 = 1\,500$  V équipent un bogie de traction ferroviaire. Cette machine doit pouvoir assurer la marche avant, la marche arrière, développer un couple moteur et un couple de freinage.

- III.1. En ce qui concerne le fonctionnement de l'onduleur de courant CONV2, à quel type de source peut être assimilée la machine asynchrone au sens de l'électronique de puissance ? Quelle serait, si on ne prenait pas de précautions particulières, la conséquence sur la tension  $v_r$ , de l'association source de courant-machine asynchrone aux moments des commutations ? Proposer une solution pour assurer la compatibilité des sources. On considère dans la suite du problème que cette compatibilité est assurée.
- III.2. Comment peut-on assurer les deux sens de marche, c'est-à-dire les deux sens de rotation de l'arbre de la machine asynchrone ?
- III.3. Comment et par quels réglages simultanés sur l'ensemble peut-on obtenir un couple de freinage ?
- III.4. Résumer dans le plan  $(C, \Omega)$  les valeurs à donner aux paramètres qui fixent le mode de fonctionnement de la machine asynchrone.
- III.5. Dans cette partie, on raisonne sur des grandeurs sinusoïdales, les grandeurs non sinusoïdales étant remplacées par leurs fondamentaux.  
Le conducteur du train fixe la valeur de l'effort de traction, c'est-à-dire la valeur du couple suivant qu'il souhaite accélérer ou freiner. Il existe une courbe maximum d'effort que les limites de l'ensemble ne permettent pas de dépasser. Les valeurs correspondant à cette courbe maximale sont données dans un tableau sur le document-réponse 4 en traction et en freinage.
- III.5.1. Déterminer les couples définissant cette caractéristique maximale et reporter leurs valeurs numériques dans le tableau du document-réponse 4.
- III.5.2. Au démarrage, calculer les valeurs des courants  $I'_m$ ,  $I'_r$ , ainsi que  $E_r$ ,  $V$ ,  $\Phi_r$  et  $\cos \varphi$ . Faire le diagramme de Fresnel correspondant à ce fonctionnement.
- III.5.3. Pour un fonctionnement moteur à 140 km/h et pour un fonctionnement frein à 140 km/h, calculer les valeurs des courants  $I'_m$ ,  $I'_r$ , ainsi que  $E_r$ ,  $V$ ,  $\Phi_r$  et  $\cos \varphi$ . En déduire, sachant que le fonctionnement est pleine onde et en négligeant la chute de tension dans  $R_0$ , les valeurs de  $I_0$ ,  $U_m$  et  $\alpha$ . Représenter les diagrammes de Fresnel correspondants.

III.6. On s'intéresse maintenant aux conséquences de l'alimentation de la machine asynchrone par un courant non sinusoïdal. Pour cela on adopte le schéma équivalent par phase de la figure 6. On suppose les tensions  $e_r(t)$ ,  $e_s(t)$ ,  $e_t(t)$  sinusoïdales et l'onduleur de courant fonctionne en pleine onde.

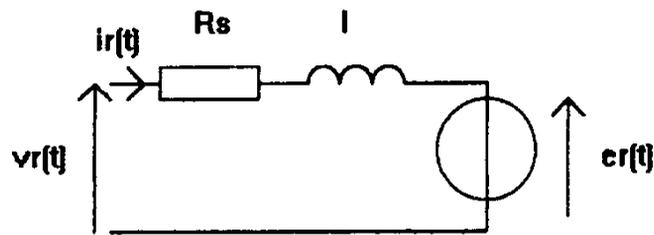
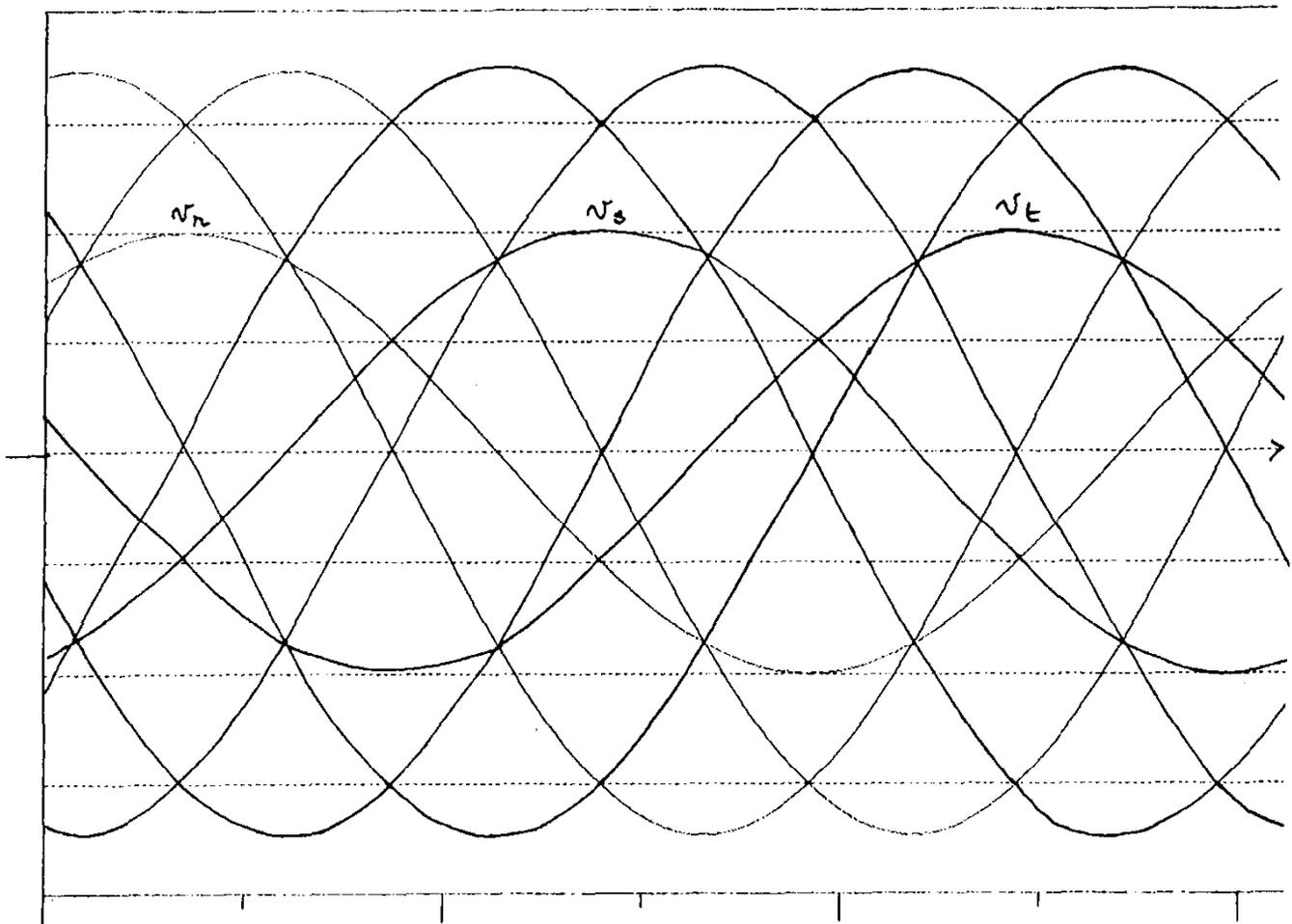
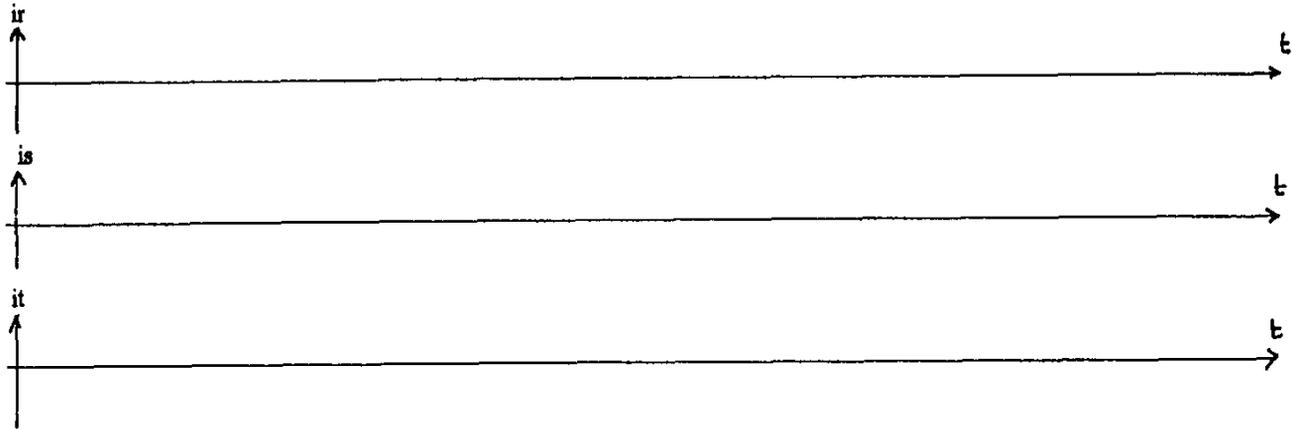
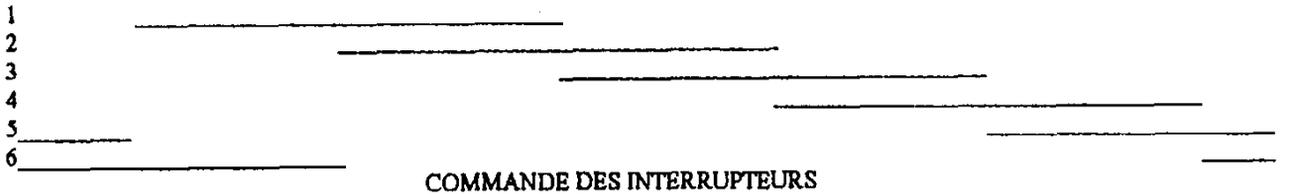


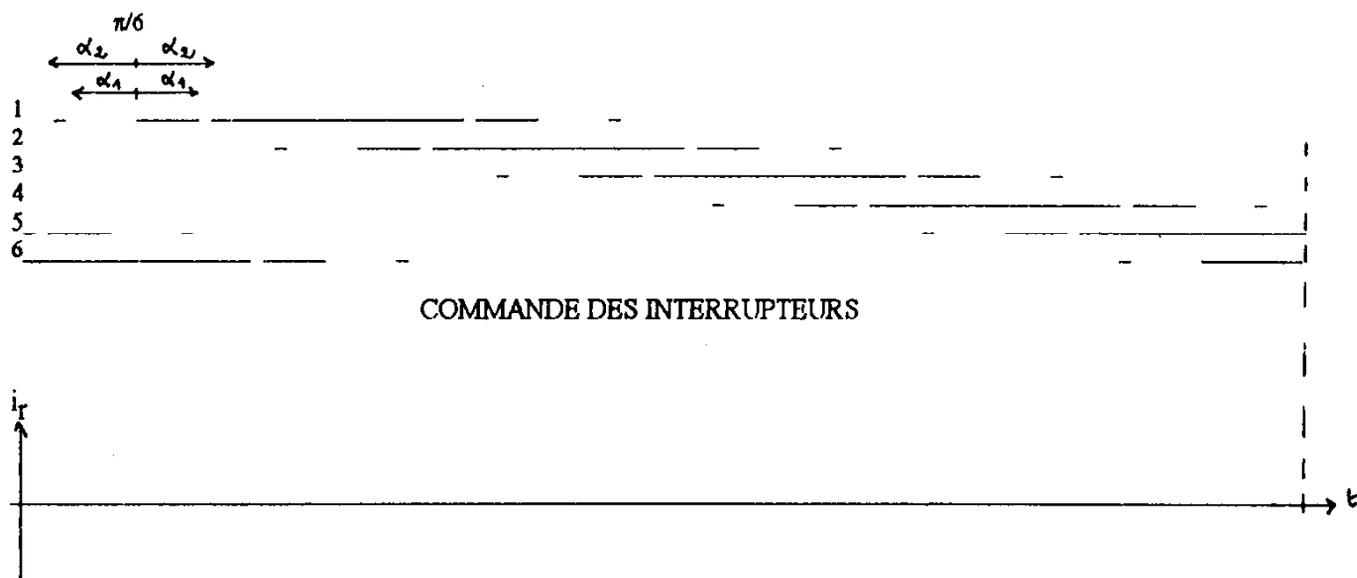
Figure 6

- III.6.1. Exprimer la puissance électromagnétique instantanée  $P_e(t)$ , en utilisant la décomposition en série de Fourier de  $i_r(t)$ ,  $i_s(t)$  et  $i_t(t)$ .
- III.6.2. En déduire l'expression du couple électromagnétique instantané  $C(t)$ .
- III.6.3. Mettre en évidence sur cette expression l'existence d'un couple constant et de couples pulsatoires dont on précisera la fréquence et l'amplitude.
- III.6.4. Calculer au démarrage la fréquence et l'amplitude du couple pulsatoire dont la fréquence est la plus basse et retrouver la valeur du couple moyen précédemment calculée. Que devient la fréquence de ce couple si on adopte au démarrage un sous-découpage du courant permettant d'annuler les harmoniques de courant jusqu'au rang 13 ?

### DOCUMENT REPONSE 3



## DOCUMENT REPONSE 4



COMMANDE DES INTERRUPTEURS

## TRACTION

## FREINAGE

vitesse rame en km/h	I en A	n en tr/min	$\omega_r$ en rad/s	C en N.m	vi tesse rame en km/h	I en A	n en tr/min	$\omega_r$ en rad/s	C en N.m
0	725	0	6.28		10	420	239	4.27	
50	540	1198	5.315		50	420	1198	4.27	
80	440	1917	7.207		80	420	1917	5.466	
110	380	2637	10.42		110	420	2637	7.79	
140	330	3356	12.92		140	420	3356	10.24	

**SESSION DE 1994****concours externe  
de recrutement de professeurs certifiés****section : physique et chimie**

composition de physique avec applications

**Durée : 5 heures**

*Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alpha-numérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numération complète (chiffres et lettres) des questions de l'énoncé.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant la raison des initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.*

L'indication de l'unité employée devra être précisée pour chacun des résultats numériques.

Le problème se compose de trois parties totalement indépendantes

## PREMIÈRE PARTIE. – ÉTUDE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DU PRISME

Le document annexe (à rendre avec la copie) sera utilisé en réponse à la question A.5.b.

Dans l'ensemble de cette partie, les radiations seront caractérisées par leur longueur d'onde dans le vide.

On considère un prisme constitué par une substance supposée non absorbante, homogène et isotrope, d'indice  $n$  ( $n > 1$ ) pour une radiation de longueur d'onde  $\lambda$ . Le milieu extérieur, dans lequel est plongé ce prisme, est l'air dont l'indice sera pris égal à 1.

Le plan de la figure suivante (fig. 1) est un plan de section principale.

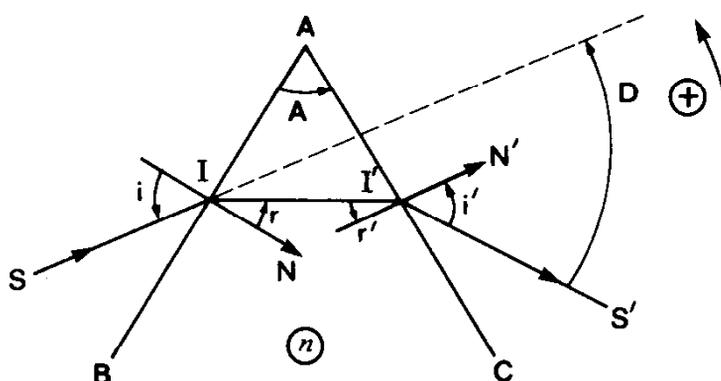


Figure 1

Les différents angles qui y interviennent sont comptés positivement dans le sens indiqué sur la figure et sont définis comme suit :

$$A = (\overline{AB}, \overline{AC}) : \text{angle du prisme ; on peut également l'exprimer par } A = (\overline{IN}, \overline{I'N'}) ;$$

$$i = (\overline{IN}, \overline{SI}) ;$$

$$r = (\overline{IN}, \overline{II'}) ;$$

$$r' = (\overline{I'I}, \overline{I'N'}) ;$$

$$i' = (\overline{I'S'}, \overline{I'N'}) ;$$

$$D = (\overline{I'S'}, \overline{SI}) : \text{angle de déviation.}$$

A.1. Rappeler la définition d'un plan de section principale.

A.2. Formules du prisme.

A.2.a. Quelle est la relation qui lie l'angle  $i$ , l'angle  $r$  et l'indice  $n$  ? [relation (1)].

Même question avec les angles  $i'$ ,  $r'$  et l'indice  $n$  [relation (2)].

A.2.b. Montrer qu'une relation très simple lie la somme  $r + r'$  et l'angle  $A$  [relation (3)].

A.2.c. Montrer qu'une relation très simple lie  $D$  (angle de déviation) à la somme  $i + i'$  et à  $A$  [relation (4)].

A.3. Influence de l'angle d'incidence sur la déviation.

On considère une radiation de longueur d'onde  $\lambda$  donnée ; on se propose d'étudier l'influence de l'angle d'incidence sur la déviation.

A.3.a. En différenciant les relations (1), (2), (3), (4) établies au A.2., montrer que :

$$\frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos(i) \cdot \cos(r')}{\cos(i') \cdot \cos(r)}$$

A.3.b. Quelles relations existe-t-il entre  $r$  et  $r'$  d'une part, entre  $i$  et  $i'$  d'autre part, quand la déviation est extrême ? On admettra que cet extremum est un minimum que l'on notera  $D_m$ .

A.3.c. Montrer alors que les mesures de l'angle de déviation minimale  $D_m$  et de  $A$  (angle du prisme) permettent d'accéder à l'indice  $n$  du prisme pour la radiation considérée.

A.3.d. *Application numérique* : on a  $A = 60,00^\circ$  ; pour la radiation considérée  $D_m = 58,20^\circ$ .

Déterminer  $n$  pour cette radiation.

#### A.4. Influence de la valeur de l'indice sur la déviation.

L'angle d'incidence est maintenant fixé. On veut étudier la variation de  $D$  avec l'indice du prisme. En procédant comme à la question A.3., montrer que :

$$\frac{dD}{dn} = \frac{\sin(A)}{\cos(i') \cdot \cos(r)}$$

#### A.5. Spectrographe à prisme.

La figure suivante (fig. 2) donne le schéma de principe d'un spectrographe à prisme qui a pour but de séparer les diverses radiations composant une lumière non monochromatique émise par la source S.

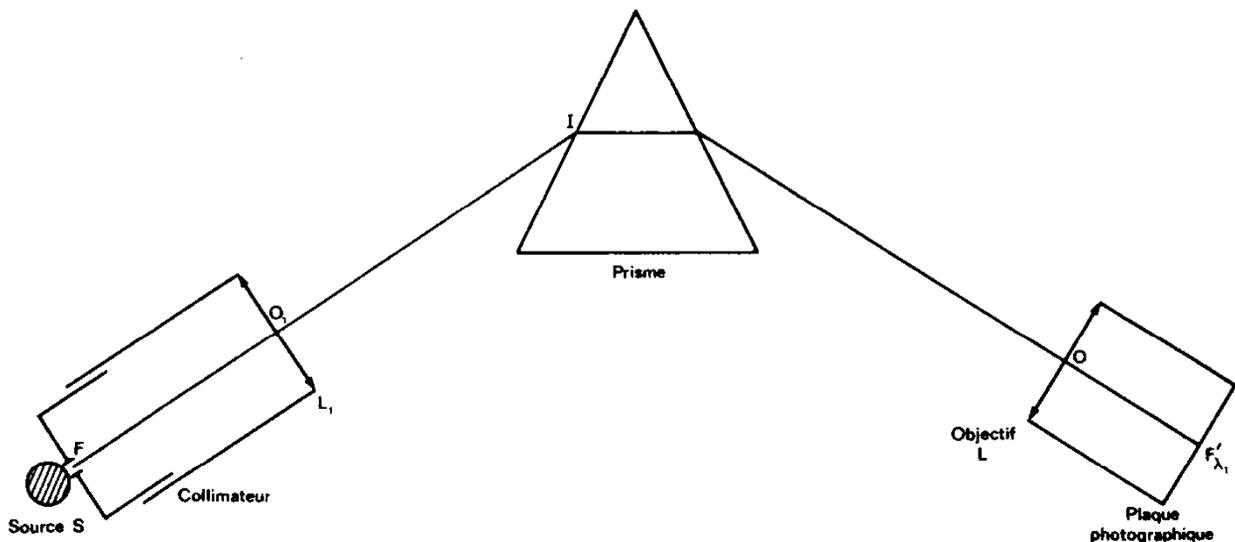


Figure 2

A.5.a. Le collimateur est constitué d'une fente  $F$  éclairée par la source  $S$  à étudier, et d'une lentille  $L_1$  qu'on supposera achromatique et qu'on assimilera à une lentille mince.

A.5.a.α. Expliquer le terme « achromatique ».

A.5.a.β. Pourquoi a-t-on placé la fente  $F$  dans le plan focal objet de la lentille  $L_1$ , ainsi que l'indique la figure 2 ?

A.5.b. Le spectrographe comporte en outre :

- un prisme dont l'indice varie avec la longueur d'onde suivant la loi :

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}, \quad (a \text{ et } b \text{ sont des constantes positives})$$

- un objectif  $L$  achromatique qu'on assimilera à une lentille mince de distance focale image  $f'$  ;  $L$  donnera dans son plan focal image (plan dans lequel on a placé une plaque photographique), une image de la fente  $F$  du collimateur pour chaque composante du spectre de la lumière émise par  $S$ .

Sur la figure 2 et sur le document annexe a été représentée la marche, à travers le prisme et l'objectif, de la composante de longueur d'onde  $\lambda_1$  du rayon incident  $FO_1I$ .

Représenter soigneusement sur le document annexe (à rendre avec la copie) :

- la marche de la composante de longueur d'onde  $\lambda_1$  d'un autre rayon incident ;
- la marche de la composante de longueur d'onde  $\lambda_2$  du rayon incident  $FO_1I$ ; on considérera  $\lambda_2 > \lambda_1$ .

A.5.c. La lumière émise par la source S est constituée de ces deux seules radiations de longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , assez proches l'une de l'autre pour que l'on puisse écrire  $\lambda_2 = \lambda_1 + d\lambda$ .

A.5.c.α. On supposera que le prisme reçoit la lumière issue du collimateur sous une incidence coïncidant avec le minimum de déviation pour ces deux radiations. Montrer alors à partir des questions A.3. et A.4. que le passage d'une radiation à l'autre entraîne une variation de la déviation  $dD$  qui s'écrit :

$$dD = - \frac{4 \cdot b \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{(D_m + A)}{2}\right)} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda^3}.$$

A.5.c.β. Exprimer la distance, dans le plan focal de l'objectif L, des images  $F'_{\lambda_1}$  et  $F'_{\lambda_2}$  correspondant aux deux radiations.

A.5.c.γ. *Application numérique* ; on donne :

$$\begin{aligned} f' &= 1 \text{ m}; \\ b &= 1,60 \cdot 10^{-2} (\mu\text{m})^2; \\ A &= 60,00^\circ; \\ D_m &= 58,20^\circ; \\ \lambda_1 &= 0,577 \mu\text{m}; \\ \lambda_2 &= 0,579 \mu\text{m}. \end{aligned}$$

Déterminer numériquement la distance  $F'_{\lambda_1}F'_{\lambda_2}$ .

A.5.d. Expliquer brièvement comment modifier le dispositif précédent pour que le spectre puisse être observé par l'œil.

## DEUXIÈME PARTIE

## PROPAGATION D'ONDES ACOUSTIQUES

On supposera que les parois des différents tuyaux, qui interviennent tout au long de cette partie, n'exercent aucun frottement sur le (ou les) fluide(s). On néglige, de plus, l'action de la pesanteur.

## B.1. Propagation d'une onde acoustique dans un tuyau de section constante contenant un fluide unique.

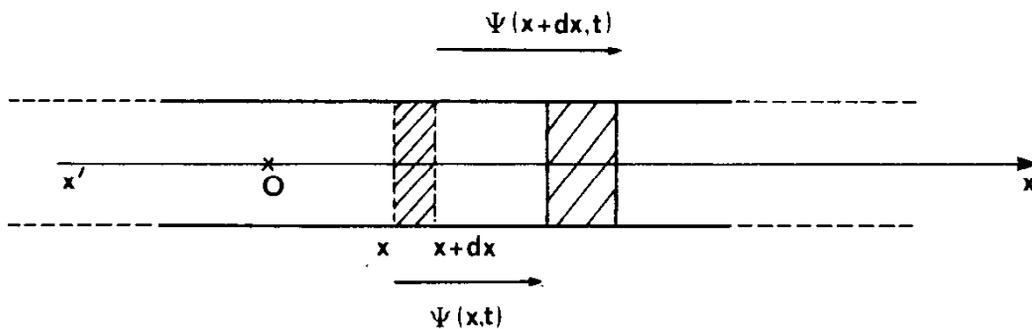


Figure 3

Un tuyau cylindrique de section constante  $S$ , d'axe  $x'x$ , contient un fluide qui, au repos, est à la pression  $P_0$ , à la température  $T_0$ ; sa masse volumique est  $\rho_0$ .

On considère une tranche de fluide qui, au repos, est située entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  (en pointillés fig. 3). Le passage de l'onde acoustique s'accompagne d'un déplacement d'ensemble des molécules contenues dans le plan d'abscisse  $x$  : soit  $\psi(x, t)$  ce déplacement à l'instant  $t$ ; ainsi la tranche de fluide considérée se trouve à l'instant  $t$  entre les plans  $x + \psi(x, t)$  et  $x + dx + \psi(x + dx, t)$  (en traits pleins fig. 3). On notera de façon comparable :

- $u(x, t)$ , la vitesse de déplacement de la section d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ ;
- $p(x, t)$ , la surpression liée au passage de l'onde en  $x$  à  $t$ ; ainsi la pression s'écrira  $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$ ;
- $\rho(x, t)$ , la masse volumique du fluide à l'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$ .

On se limitera aux mouvements de faibles amplitudes; ainsi le déplacement  $\psi(x, t)$ , la surpression  $p(x, t)$ , la variation de la masse volumique  $\rho(x, t) - \rho_0$  et leurs dérivées peuvent être considérés comme des infiniment petits du premier ordre. On négligera dans la suite tous les infiniment petits d'ordre supérieur ou égal à deux.

B.1.a. En raisonnant sur la tranche de fluide considérée, établir, en précisant la loi utilisée, que :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

B.1.b. L'évolution de la portion de fluide considérée est supposée isentropique.

B.1.b.α. Justifier brièvement cette hypothèse.

B.1.b.β. On rappelle que le coefficient de compressibilité isentropique d'un fluide est défini par :

$$\chi_s = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_s$$

où  $V$  est le volume du fluide et  $P$  sa pression ; pour le fluide contenu dans le tuyau cylindrique, on supposera que  $\chi_s$  est une constante.

Montrer que l'on peut écrire  $p = - \frac{1}{\chi_s} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ .

B.1.c.

B.1.c.α. En utilisant les résultats des questions B.1.a. et B.1.b., établir l'équation à laquelle satisfait la grandeur  $\psi(x, t)$ .

B.1.c.β. Quelle est la solution générale de cette équation ?

B.1.c.γ. Montrer que l'on peut interpréter chacun des deux termes intervenant dans la réponse B.1.c.β. comme des ondes planes progressives, se propageant à la célérité  $c$  (vitesse du son).

Donner l'expression de  $c$ .

B.1.d. Montrer que les grandeurs  $p(x, t)$  et  $u(x, t)$  satisfont à la même équation de propagation que  $\psi(x, t)$ .

B.1.e.

B.1.e.α. Le fluide est de l'air considéré comme un gaz parfait :

– de  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,40$  (rapport des capacités calorifiques molaires à pression et à volume constant) ;

– de masse molaire  $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;

– de température  $T_0 = 293 \text{ K}$ .

$R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  (constante molaire des gaz parfaits).

Donner l'expression de  $c$  en fonction de  $\gamma$ ,  $R$ ,  $T_0$  et  $M$ .

B.1.e.β. *Application numérique* : calculer  $c$ .

B.1.f. On considère la propagation dans le fluide d'une onde plane progressive sinusoïdale de pulsation  $\omega$  qu'on représente en notation complexe par :

$$\underline{\psi}_1(x, t) = A_1 \exp \{ i(\omega t - kx) \}$$

où  $A_1$  est une constante et  $k$  un réel positif (module du vecteur d'onde).

On supposera dans cette question que le tuyau est infini et donc qu'il n'y a aucune onde réfléchie se superposant à  $\underline{\psi}_1$ .

B.1.f.α. Dans quel sens se propage cette onde ?

Déterminer l'expression de  $k$  en fonction de  $\omega$  et  $c$ , et calculer sa valeur pour l'air avec une fréquence de l'onde de 1 kHz.

B.1.f.β. Exprimer alors  $\underline{p}_1(x, t)$  et  $\underline{u}_1(x, t)$ , représentations complexes de la surpression et de la vitesse.

B.1.f.γ. On appelle résistivité acoustique  $\mathcal{R}$ , la grandeur caractéristique du milieu définie par :

$$\mathcal{R} = \rho_0 c.$$

Montrer que le rapport  $\frac{\underline{p}_1}{\underline{u}_1}$  s'exprime simplement en fonction de  $\mathcal{R}$ .

B.1.g. Soit l'onde  $\underline{\psi}'_1 = A'_1 \exp \{ i(\omega t + kx) \}$ ,  $\underline{p}'_1$  et  $\underline{u}'_1$  étant les ondes de surpression et de vitesse associées.

Exprimer le rapport  $\frac{\underline{p}'_1}{\underline{u}'_1}$  en fonction de la résistivité acoustique  $\mathcal{R}$  du milieu.

## B.2. Réflexion et transmission dans un tuyau de section constante contenant deux fluides.

Le tuyau est maintenant séparé en deux régions (fig. 4).

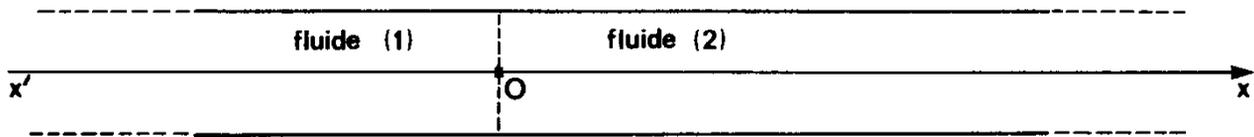


Figure 4

La région (1) ( $x < 0$ ) contient un fluide (1) de résistivité acoustique  $\mathcal{R}_1 = \rho_1 c_1$ .

La région (2) ( $x > 0$ ) contient un fluide (2) de résistivité acoustique  $\mathcal{R}_2 = \rho_2 c_2$ .

La surface de contact entre les deux fluides est donc le plan perpendiculaire en O à l'axe  $x'x$ .

Une onde acoustique plane sinusoïdale se propage du milieu (1) vers le milieu (2) et est décrite en notation complexe par :

$$\underline{p}_1 = p_{0_1} \exp \{ i(\omega t - k_1 x) \} \text{ (onde de surpression d'amplitude } p_{0_1} \text{).}$$

À l'interface entre les deux milieux, cette onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans le milieu (1) :  $\underline{p}'_1$ , et à une onde transmise dans le milieu (2) :  $\underline{p}_2$ .

On admettra que les ondes réfléchie et transmise sont des ondes planes sinusoïdales d'amplitude respective  $p'_{0_1}$  et  $p_{0_2}$ .

On précise que dans le plan  $x = 0$  il y a continuité de la pression (donc de la surpression  $p$ ) et du débit volumique  $S \cdot u$  (c'est-à-dire ici continuité de la grandeur  $u$  car la section  $S$  du tuyau est constante.)

B.2.a. Montrer que les ondes réfléchie et transmise sont de même pulsation  $\omega$  que l'onde incidente.

B.2.b. Exprimer  $\underline{p}'_1$  et  $\underline{p}_2$ .

B.2.c. En exploitant les conditions de continuité, exprimer en fonction de  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  les coefficients de réflexion  $r_{12}$  et de transmission  $t_{12}$  relatifs aux amplitudes des surpressions.

Ces coefficients sont définis par :

- $r_{12} = \frac{p'_{0_1}}{p_{0_1}}$  ;
- $t_{12} = \frac{p_{0_2}}{p_{0_1}}$ .

B.2.d. Coefficients de réflexion et de transmission en puissance.

On peut calculer pour chacune des trois ondes une puissance acoustique transportée, définie par :

$$\mathcal{P} = |p \cdot u| S \quad (\text{S est la section du tuyau}).$$

B.2.d.α. Déterminer les coefficients de réflexion R et de transmission T, relatifs aux puissances acoustiques.

B.2.d.β. Quelle remarque (prévisible) peut-on faire au sujet de R et T ?

B.2.e. Application numérique.

Le milieu (1) est l'air, le milieu (2) est l'eau. On prendra respectivement :

$$\mathcal{R}_1 = 4,50 \cdot 10^2 \text{ uSI};$$

$$\mathcal{R}_2 = 1,40 \cdot 10^6 \text{ uSI}.$$

Déterminer numériquement R et T. Commenter.

### B.3. Réflexion et transmission dues à un changement de section dans un tuyau sonore.

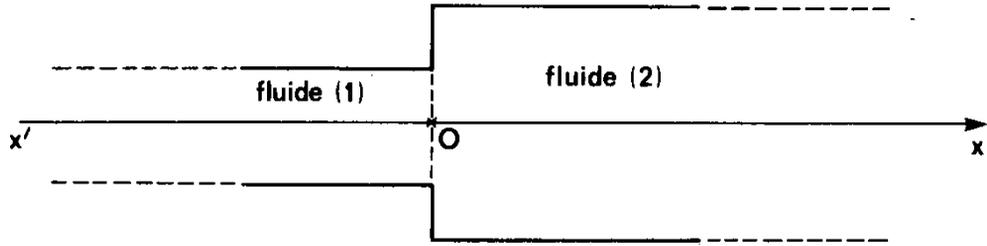


Figure 5

Soit un tuyau sonore composé de deux parties cylindriques de même axe  $x'x$ , de sections respectives  $S_1$  et  $S_2$ , raccordées par la surface perpendiculaire en  $O$  à l'axe  $x'x$ .

Les deux parties cylindriques sont remplies respectivement des fluides (1) et (2) [fig. 5].

Par définition, on appellera impédance caractéristique du milieu  $i$ , la grandeur  $Z_i = \frac{\mathcal{R}_i}{S_i}$ , rapport de la résistivité acoustique du milieu par la section correspondante.

On considère une onde plane acoustique incidente  $\underline{p}_1$  (représentation complexe) se propageant dans le milieu (1) dans le sens des  $x$  positifs. Elle donne naissance à une onde réfléchie  $\underline{p}'_1$  et à une onde transmise  $\underline{p}_2$ , à l'interface entre les deux milieux.

B.3.a. En écrivant les conditions de continuité (cf. B.2.), déterminer, en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$ , les coefficients de réflexion  $r_{12}$  et de transmission  $t_{12}$ , relatifs aux amplitudes des surpressions.

B.3.b. Déterminer les coefficients de réflexion  $R$  et de transmission  $T$ , relatifs aux puissances acoustiques.

B.3.c. En supposant que les fluides (1) et (2) sont identiques, y a-t-il réflexion à l'interface entre les deux milieux ?

Si oui, calculer  $r_{12}$  et  $t_{12}$  et préciser s'il y a changement de phase.

B.3.d. Dans le cas où les deux fluides sont de nature différente, retrouve-t-on les résultats du B.2. si  $S_1 = S_2$  ?

TROISIÈME PARTIE  
THERMODYNAMIQUE

On notera  $P$ ,  $T$ ,  $V$  les paramètres pression, température et volume d'un gaz ; on notera respectivement  $C_p$ ,  $C_v$  les capacités calorifiques molaires à pression et à volume constant, et  $\gamma$  le rapport  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

Dans la suite, les systèmes thermodynamiques étudiés seront des gaz parfaits.

**C.1. Quelques propriétés d'un gaz parfait.**

C.1.a. Rappeler l'équation d'état d'un gaz parfait ; on désignera par  $n$ , le nombre de moles, et par  $R$  la constante molaire des gaz parfaits.

C.1.b.

C.1.b.a. Rappeler la relation qui lie la fonction d'état enthalpie  $H$  à la fonction d'état énergie interne  $U$ .

C.1.b.β. Montrer que (relation de Mayer)  $C_p - C_v = R$ .

C.1.b.γ. Exprimer  $C_v$  en fonction de  $R$  et  $\gamma$ .

C.1.b.δ.  $n$  moles d'un gaz parfait évoluent d'un état initial caractérisé par  $P_0$ ,  $V_0$  jusqu'à un état final caractérisé par  $P_1$ ,  $V_1$ .

Montrer que la variation d'énergie interne de ce gaz parfait au cours de cette transformation peut s'écrire :

$$\Delta U = \frac{P_1 V_1 - P_0 V_0}{\gamma - 1}.$$

**C.2. Transformations réversibles d'un gaz parfait.**

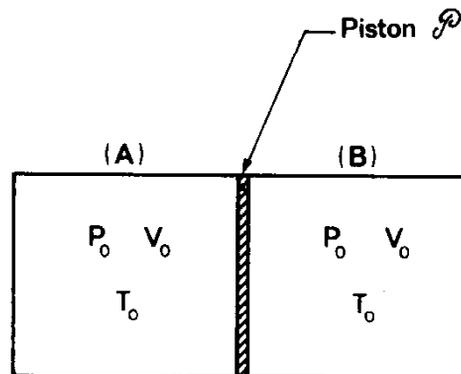


Figure 6

Un cylindre horizontal, de volume invariable, est fermé à ses deux extrémités par deux parois fixes. Ce cylindre est séparé en deux compartiments A et B par un piston  $\mathcal{P}$  mobile sans frottements. Les parois du cylindre et le piston sont adiabatiques et de capacités calorifiques négligeables.

Dans l'état initial, les deux compartiments A et B contiennent un même nombre de moles d'un gaz parfait dans le même état  $P_0$ ,  $V_0$ ,  $T_0$  (fig. 6).

On chauffe le compartiment A à l'aide d'une résistance électrique jusqu'à un état final où la pression dans le compartiment A est  $P_1 = 3P_0$  (fig. 7).

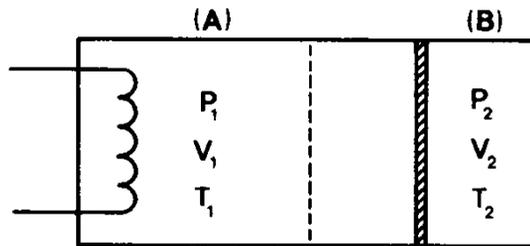


Figure 7

On pourra considérer la suite des états du système comme une suite d'états d'équilibre.

C.2.a. Calculer :

C.2.a.α. Pour l'état final du compartiment B :

- la pression  $P_2$ ,
- le volume  $V_2$ ,
- la température  $T_2$ ;

C.2.a.β. Pour l'état final du compartiment A :

- le volume  $V_1$ ,
- la température  $T_1$ .

C.2.b. On veut déterminer la quantité de chaleur  $Q_1$  fournie par la résistance chauffante au compartiment A.

C.2.b.α. Montrer que  $Q_1$  s'exprime très facilement en fonction des variations d'énergie interne des gaz des compartiments A et B (respectivement  $\Delta U_1$  et  $\Delta U_2$ ).

C.2.b.β. Donner l'expression de  $Q_1$  en fonction de  $P_0$ ,  $V_0$  et  $\gamma$ .

C.3. Détente irréversible d'un gaz parfait.

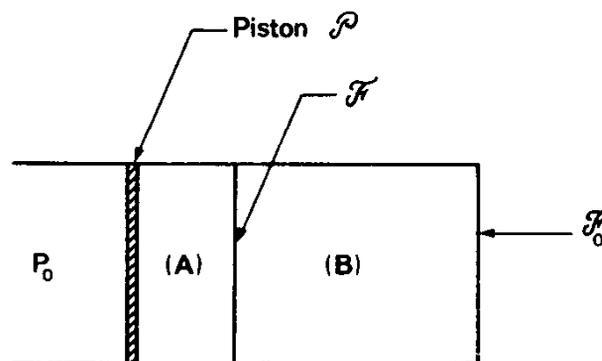


Figure 8

Un cylindre horizontal est fermé à l'une de ses extrémités par une paroi fixe  $\mathcal{F}_0$ , et à l'autre extrémité par un piston  $\mathcal{P}$  qui peut coulisser sans frottements le long du cylindre.

Le cylindre est séparé en deux compartiments A et B par une paroi fixe  $\mathcal{F}$ .

Sur la face extérieure du piston s'exerce la pression atmosphérique  $P_0$  qu'on suppose uniforme et constante.

Dans la situation initiale, le compartiment A de volume  $V_A$  contient  $n$  moles d'un gaz parfait. Le compartiment B de volume  $V_B$  est initialement vide (fig. 8).

Les parois du cylindre et le piston sont adiabatiques et de capacités calorifiques négligeables.

C.3.a. Préciser la pression et la température initiales dans le compartiment A.

C.3.b. On perce un orifice dans la paroi fixe  $\mathcal{F}$  et on cherche à décrire les caractéristiques du nouvel état d'équilibre qu'on supposera atteint.

C.3.b.α. En analysant qualitativement le problème, montrer que selon la valeur de  $V_B$  par rapport à une valeur-seuil  $V_{B_s}$  (qu'on ne cherchera pas à déterminer à ce stade de l'étude), deux types de solutions existent ; pour répondre à cette question, on pourra s'intéresser à l'équilibre mécanique du piston dans l'état final.

C.3.b.β. En supposant que  $V_B$  est inférieur à la valeur-seuil, déterminer les caractéristiques  $P_1$ ,  $V_1$ ,  $T_1$  du gaz enfermé dans le cylindre A + B quand le nouvel état d'équilibre est atteint ; on exprimera ces grandeurs en fonction de toutes ou de certaines des données  $P_0$ ,  $\gamma$ ,  $n$ ,  $V_A$ ,  $V_B$  et de R.

C.3.b.γ. Déterminer la valeur-seuil  $V_{B_s}$  en fonction de  $V_A$  et de  $\gamma$ .

C.3.b.δ. On suppose cette fois  $V_B$  supérieur à  $V_{B_s}$ . Déterminer  $P_2$ ,  $V_2$ ,  $T_2$ , du gaz enfermé à l'intérieur du cylindre dans le nouvel état d'équilibre ; on exprimera ces grandeurs en fonction de toutes ou de certaines des données  $P_0$ ,  $\gamma$ ,  $n$ ,  $V_A$ ,  $V_B$  et de R.

C.3.c.

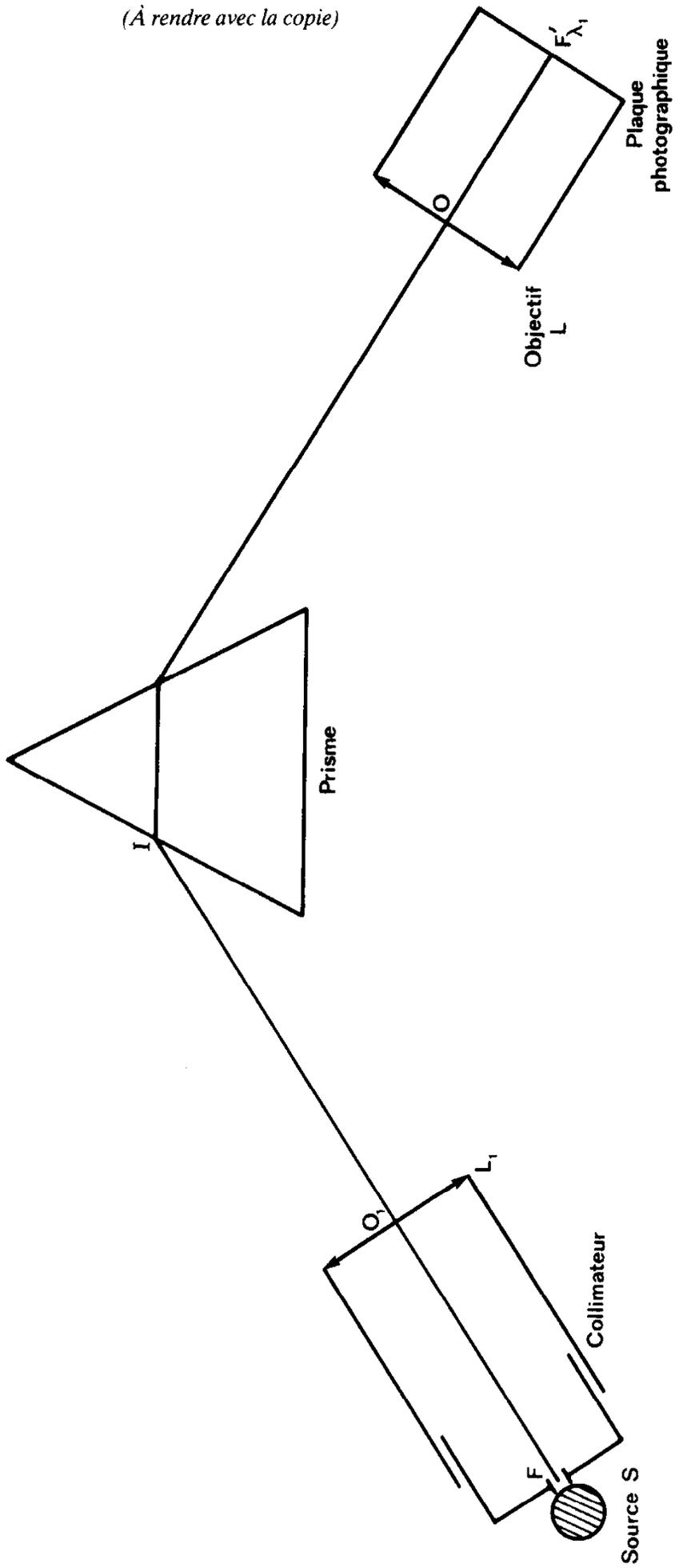
C.3.c.α. Déterminer l'entropie d'un gaz parfait (à une constante près) en fonction de  $n$ ,  $C_p$ ,  $\gamma$ ,  $P$  et  $V$ .

C.3.c.β. En déduire l'expression de la variation d'entropie  $\Delta S_1$  du gaz en fonction de  $n$ ,  $\gamma$ ,  $V_A$ ,  $V_B$  et  $C_p$  dans le cas où l'état final est celui du C.3.b.β.

Ce résultat est-il conforme au second principe de la thermodynamique ?

C.3.c.γ. Déterminer de la même façon  $\Delta S_2$  : l'état final étant celui du C.3.b.δ. ; ce résultat est-il conforme au second principe de la thermodynamique ?

## DOCUMENT - ANNEXE

*(À rendre avec la copie)*

SESSION DE 1994

**concours externe  
de recrutement de professeurs certifiés**

**section : sciences physiques**

composition de chimie avec applications

**Durée : 5 heures**

*Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alpha-numérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

**Les candidats doivent indiquer sur leur copie, devant leurs réponses, la numération complète (chiffres et lettres) des questions de l'énoncé.**

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant la raison des initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.*

Pour les calculs numériques demandés, on se limitera aux trois premiers chiffres significatifs. L'indication de l'unité employée devra être précisée pour chacun des résultats numériques.

*Les deux problèmes sont indépendants*

## A Premier Problème

*Les parties I à III sont indépendantes.*

*Ce problème a pour objet l'étude de quelques propriétés de l'oxygène et de la séquence des réactions industrielles menant à l'acide nitrique.*

### **I. Obtention du dioxygène par distillation fractionnée de l'air liquide**

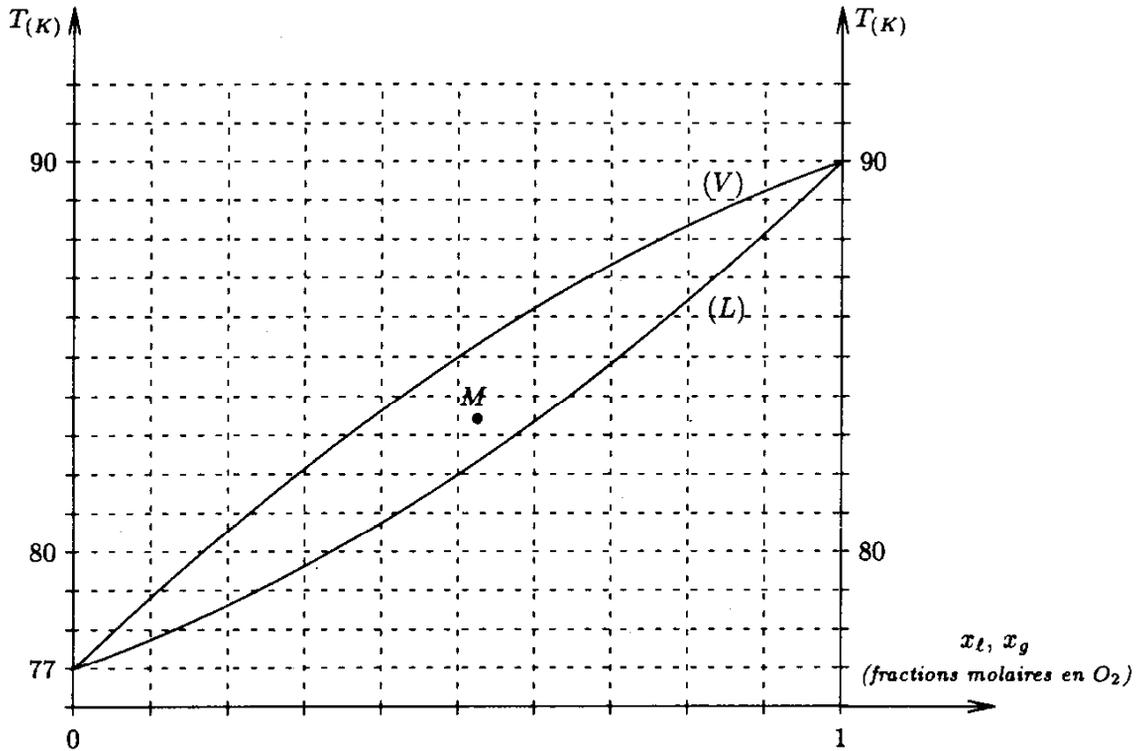
#### 1<sup>0</sup>) Equilibre liquide-vapeur des mélanges de dioxygène et de diazote

On considère sous une pression  $P$  et une température  $T$  données le système fermé constitué par  $n_{O_2,\ell}$  moles de dioxygène et  $n_{N_2,\ell}$  moles de diazote en phase liquide en équilibre physique avec  $n_{O_2,g}$  moles de dioxygène et  $n_{N_2,g}$  moles de diazote en phase gazeuse.

- Ecrire l'expression de la variation élémentaire de la fonction enthalpie libre pour la phase liquide  $(dG_{T,P})_\ell$  en fonction des potentiels chimiques  $\mu_{O_2,\ell}$  et  $\mu_{N_2,\ell}$  du dioxygène et du diazote liquides pour une variation élémentaire de  $n_{O_2,\ell}$  et  $n_{N_2,\ell}$ .
- Ecrire également l'expression de la variation élémentaire de la fonction enthalpie libre pour la phase vapeur  $(dG_{T,P})_g$  en fonction des potentiels chimiques  $\mu_{O_2,g}$  et  $\mu_{N_2,g}$  du dioxygène et du diazote gazeux pour une variation élémentaire de  $n_{O_2,g}$  et  $n_{N_2,g}$ .
- En déduire l'expression de la variation élémentaire d'enthalpie libre du système considéré  $dG_{T,P}$ . Exprimer la condition d'équilibre physique relative aux potentiels chimiques des deux constituants dans les deux phases.
- Quelle est la variance du système?

2<sup>o</sup>) Diagramme d'équilibre isobare des mélanges de dioxygène et de diazote

Le diagramme d'équilibre isobare, sous la pression atmosphérique des mélanges de dioxygène et de diazote est représenté ci-dessous:



- a) La courbe inférieure (L) donne la composition de la phase liquide alors que la courbe supérieure (V) donne la composition de la phase vapeur.
- a<sub>1</sub>) Comment s'appellent les courbes (L) et (V)?
- a<sub>2</sub>) Indiquer les domaines de stabilité du liquide et de la vapeur sur un schéma.
- b) On considère le point M du diagramme (x, T) correspondant à l'équilibre entre  $n_l$  moles de liquide et  $n_g$  moles de gaz; x représente la composition globale en dioxygène du système. En M, la fraction molaire du dioxygène dans les phases respectivement liquide et vapeur est notée  $x_l$  et  $x_g$ . Démontrer que le rapport  $\frac{n_g}{n_l}$  est donné par

$$\frac{n_g}{n_l} = \frac{x_l - x}{x - x_g}$$

Calculer numériquement le rapport  $\frac{n_g}{n_l}$  relatif au point M figurant sur le diagramme proposé.

3<sup>o</sup>) Applications: liquéfaction de l'air et distillation fractionnée de l'air liquide

- a) On refroidit de l'air sous la pression atmosphérique. En admettant en première approximation que l'air est un mélange binaire de dioxygène et de diazote dans lequel le pourcentage en volume du dioxygène est de 21%:
- a<sub>1</sub>) Quelle sera la température  $T_l$  de liquéfaction commençante de l'air?
- a<sub>2</sub>) Quelle sera la fraction molaire en dioxygène de la première goutte de liquide?
- a<sub>3</sub>) En continuant à refroidir l'air, à quelle température  $T'_l$  l'air sera-t-il totalement liquéfié?
- a<sub>4</sub>) Quelle sera la composition de ce liquide et de la vapeur correspondante?

- b) On laisse maintenant bouillir de l'air liquide dans un vase Dewar non clos:
- b<sub>1</sub>) Le gaz qui s'échappe sera-t-il plus riche ou moins riche en diazote que l'air ambiant? Justifier votre réponse.
- b<sub>2</sub>) Quelle sera l'influence sur la température d'ébullition du liquide restant?

## II. Structure de la molécule de dioxygène

- 1<sup>0</sup>) Configuration électronique de l'atome d'oxygène
- Enoncer le principe d'exclusion de Pauli.
  - Classer par ordre d'énergie relative les orbitales des atomes allant de  $Z = 1$  à  $Z = 20$ .
  - Enoncer la règle de Hund.
  - Donner la structure électronique de l'atome d'oxygène.
  - Représenter les cases quantiques relatives aux orbitales atomiques  $2s$  et  $2p$  de l'atome d'oxygène.
- 2<sup>0</sup>) Structure de la molécule de dioxygène dans la théorie de Lewis
- Déduire de ce qui précède la structure de la molécule de dioxygène dans la théorie de Lewis.
  - Quelles conclusions peut-on-en tirer?
- 3<sup>0</sup>) Utilisation des orbitales moléculaires
- Représenter le schéma énergétique correspondant à la combinaison des orbitales  $2s$  de deux atomes d'oxygène. Les orbitales moléculaires correspondantes seront notées  $\sigma_{2s}$  et  $\sigma_{2s}^*$  (l'orbitale  $\sigma_{2s}^*$  est l'orbitale antiliante).
  - En prenant l'axe  $Oz$  pour axe de symétrie de la molécule (axe liant les deux noyaux), représenter le schéma énergétique correspondant à la combinaison des orbitales  $2p_z$  (les orbitales moléculaires correspondantes seront notées  $\sigma_{2p_z}$  et  $\sigma_{2p_z}^*$ ) ainsi qu'à la combinaison des orbitales  $2p_x$  et  $2p_y$  (les orbitales moléculaires correspondantes seront notées  $2\pi_{p_x}$ ,  $2\pi_{p_x}^*$ ,  $2\pi_{p_y}$  et  $2\pi_{p_y}^*$ ). Les données spectroscopiques indiquent que l'orbitale  $\sigma_{2p_z}$  se trouve énergétiquement en-dessous des orbitales  $\pi_{2p_x}$  et  $\pi_{2p_y}$ .
  - Calculer l'indice de liaison de la molécule de dioxygène. On rappelle que l'indice de liaison est égal à la moitié du nombre obtenu en retranchant le nombre d'électrons présents dans les orbitales moléculaires antiliantes au nombre d'électrons présents dans les orbitales moléculaires liantes. Ce résultat est-il cohérent avec la structure élaborée à la question 2<sup>0</sup>) a)?
- 4<sup>0</sup>) Propriétés magnétiques de la molécule de dioxygène
- On constate que si l'on verse du dioxygène liquide sur les pôles d'un électro-aimant, le liquide se colle à ceux-ci. Comment s'appelle ce phénomène?
  - La représentation de la molécule de dioxygène par les orbitales moléculaires peut-elle rendre compte de ce phénomène? Justifier votre réponse.

## III. Obtention des oxydes d'azote et de l'acide nitrique

### 1<sup>0</sup>) Synthèse du gaz ammoniac

On considère l'équilibre de la synthèse de l'ammoniac en phase gazeuse. Les gaz sont supposés parfaits en mélange idéal.



Un mélange initial contient  $y$  moles de  $N_2$  et  $(n - y)$  moles de  $H_2$ . L'équilibre s'établit par formation de  $2z$  moles de  $NH_3$ . Soient  $p_1, p_2, p_3$  les pressions partielles de  $N_2, H_2$  et  $NH_3$  et  $P$  la pression totale à l'équilibre.

- a) Exprimer les pressions partielles  $p_1, p_2$  et  $p_3$  en fonction de  $P, y, n, z$ .

On suppose désormais que le mélange diazote-dihydrogène est pris initialement dans les proportions stoechiométriques (dans ces conditions,  $n = 4y$ ).

- b) Exprimer les pressions partielles  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  en fonction de  $x = \frac{z}{y}$  ( $x$  représente en fait le taux de réaction à l'équilibre), et de  $P$ .
- c) Donner l'expression de la constante d'équilibre thermodynamique  $K_T^0$  en fonction de  $x$ , de la pression totale  $P$ , et de la pression de référence (ou pression de l'état standard)  $P^0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ . Toutes les pressions étant exprimées en bars, quelle relation lie  $K_T^0$  et la constante  $K_p(T) = \frac{p_3^2}{p_1 \cdot p_2}$ .
- d) On pose  $a = \frac{P}{P^0} \sqrt{\frac{27}{16} K_T^0}$ ; donner l'expression de  $x$  en fonction de  $a$ ; étudier le cas particulier où  $a \ll 1$ .
- e) Dans un domaine restreint de température, on trouve que l'expression de  $K_T^0$  vérifie:

$$\ln K_T^0 = \frac{11050}{T} - 23,8$$

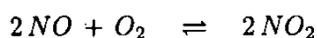
- e<sub>1</sub>) Exprimer l'enthalpie libre standard de la réaction de synthèse de l'ammoniac. Quels commentaires appelle cette expression? (On rappelle que  $R = 8,32 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .)
- e<sub>2</sub>) Déterminer, en conséquence, l'allure des graphes isobares représentant les variations de  $x$  avec  $T$  (on se restreindra au cas où le paramètre  $a \ll 1$ ; aucune application numérique n'est demandée). Montrer que l'on peut retrouver à l'aide de ces graphes les lois de le Chatelier et de Van't Hoff.

2<sup>o</sup>) Oxydation de l'ammoniac en monoxyde d'azote

- a) Ecrire la réaction d'oxydation de l'ammoniac en monoxyde d'azote et dire dans quelles conditions elle est réalisée industriellement.
- b) Donner la structure de la molécule  $NO$  dans la théorie de Lewis.
- c) Cette structure est-elle en accord avec le paramagnétisme observé et permet-elle d'expliquer la tendance à la dimérisation?
- d) Schématiser un montage permettant de préparer au laboratoire du monoxyde d'azote à partir de cuivre et d'acide nitrique; indiquer les précautions à mettre en œuvre afin d'obtenir  $NO$  pur.

3<sup>o</sup>) Cinétique de formation du dioxyde d'azote  $NO_2$

La vitesse de la réaction de formation du dioxyde d'azote



diminue lorsque la température augmente.

On admet le mécanisme suivant:

Réaction $i$	Réaction <sub>ii</sub>	Caractéristiques	Constante de vitesse
(1)	$2NO \rightarrow (NO)_2$	rapide	$k_1$
(-1)	$(NO)_2 \rightarrow 2NO$	rapide	$k_{-1}$
(2)	$(NO)_2 + O_2 \rightarrow 2NO_2$	lente	$k_2$

On ne tient pas compte de la réaction inverse de la réaction (2) et on suppose que l'évolution est isochore.

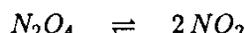
- a) Donner l'expression de la vitesse  $v$  de la réaction globale, sachant qu'elle est du premier ordre par rapport à  $(NO)_2$  et  $O_2$ .

- b) En supposant qu'à tout instant le dimère est en équilibre avec le monomère, donner l'expression de la concentration du dimère  $[(NO)_2]$  en fonction de la concentration du monomère  $[NO]$  et des constantes  $k_1$  et  $k_{-1}$ .
- c) En déduire une expression de la vitesse  $v$  de la réaction globale en fonction de la concentration en monoxyde d'azote et en dioxygène.
- d) Quel est l'ordre global trouvé?
- e) Sachant que la dimérisation du monoxyde d'azote est exothermique, comment peut-on expliquer le désaccord apparent avec la loi d'Arrhénius signalé au début de ce paragraphe?
- 4<sup>0</sup>) Dimérisation du dioxyde d'azote  $NO_2$

Le dioxyde d'azote  $NO_2$  peut se dimériser en tétraoxyde de diazote  $N_2O_4$ .

- a) Représenter le schéma de Lewis de la molécule de dioxyde d'azote.
- b) Justifier la possibilité de dimérisation.

On introduit dans un récipient de volume  $V$  égal à 1 L, à la température  $T = 298$  K,  $n_0 = 12,5$  millimoles de tétraoxyde de diazote. Il se produit une dissociation partielle selon



Soit  $\alpha$  la fraction de la quantité de matière de  $N_2O_4$  dissociée. Sachant que la pression finale  $P_f$  dans le récipient est égale à  $3,90 \cdot 10^4$  Pa, calculer  $\alpha$  en supposant que les gaz sont parfaits. Calculer la constante d'équilibre  $K_T^0$ . En déduire l'enthalpie libre standard de la réaction à la même température (on rappelle  $R = 8,32$  J.mol<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> et 1 bar =  $10^5$  Pa.)

- 5<sup>0</sup>) Réaction de  $N_2O_4$  sur l'eau

On considère les couples oxydo-réducteurs suivants:



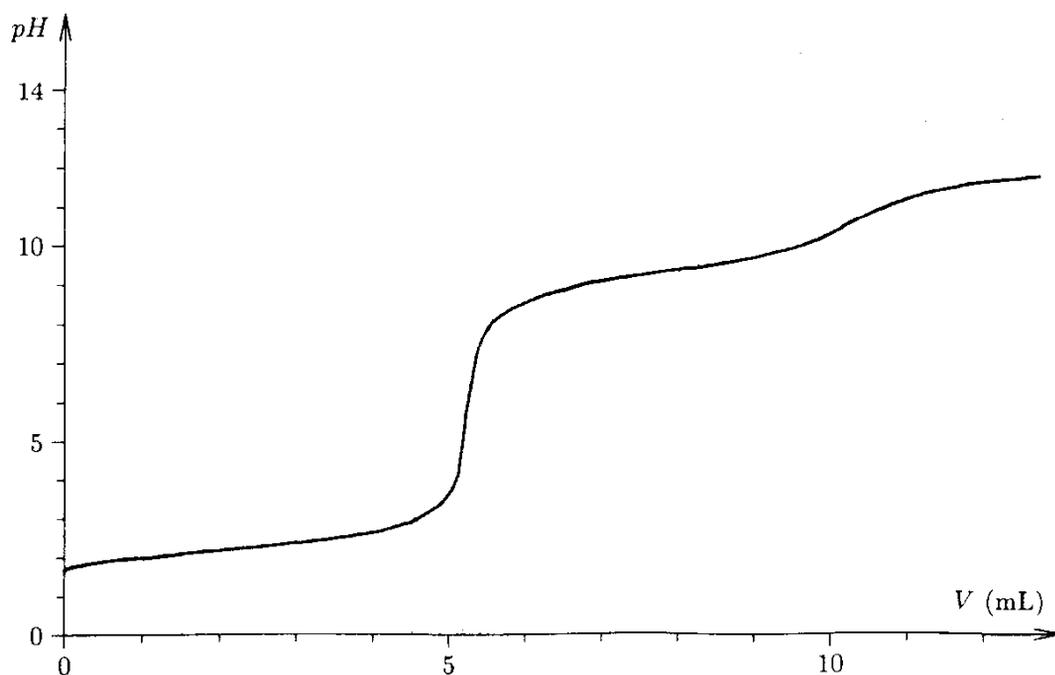
- a) Ecrire les demi-réactions d'oxydo-réduction correspondantes.
- b) En déduire l'équilibre de dismutation du tétraoxyde de diazote, en ion nitrate et en acide nitreux. Calculer la constante thermodynamique de cet équilibre à  $T = 298$  K. On prendra

$$\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln a = 0,06 \log a$$

- c) On connaît par ailleurs les potentiels standards des couples  $HNO_2/NO$ :  $E_3^0 = 0,99 V$  et  $NO_3^-/HNO_2$ :  $E_4^0 = 0,94 V$ . Que peut-on en déduire quant au comportement de l'acide nitreux au voisinage de  $pH = 0$ ?
- d) Donner en conclusion de cette étude la séquence complète des réactions intervenant dans la synthèse de l'acide nitrique par oxydation de l'ammoniac. Commentaire concernant l'espèce  $NO$

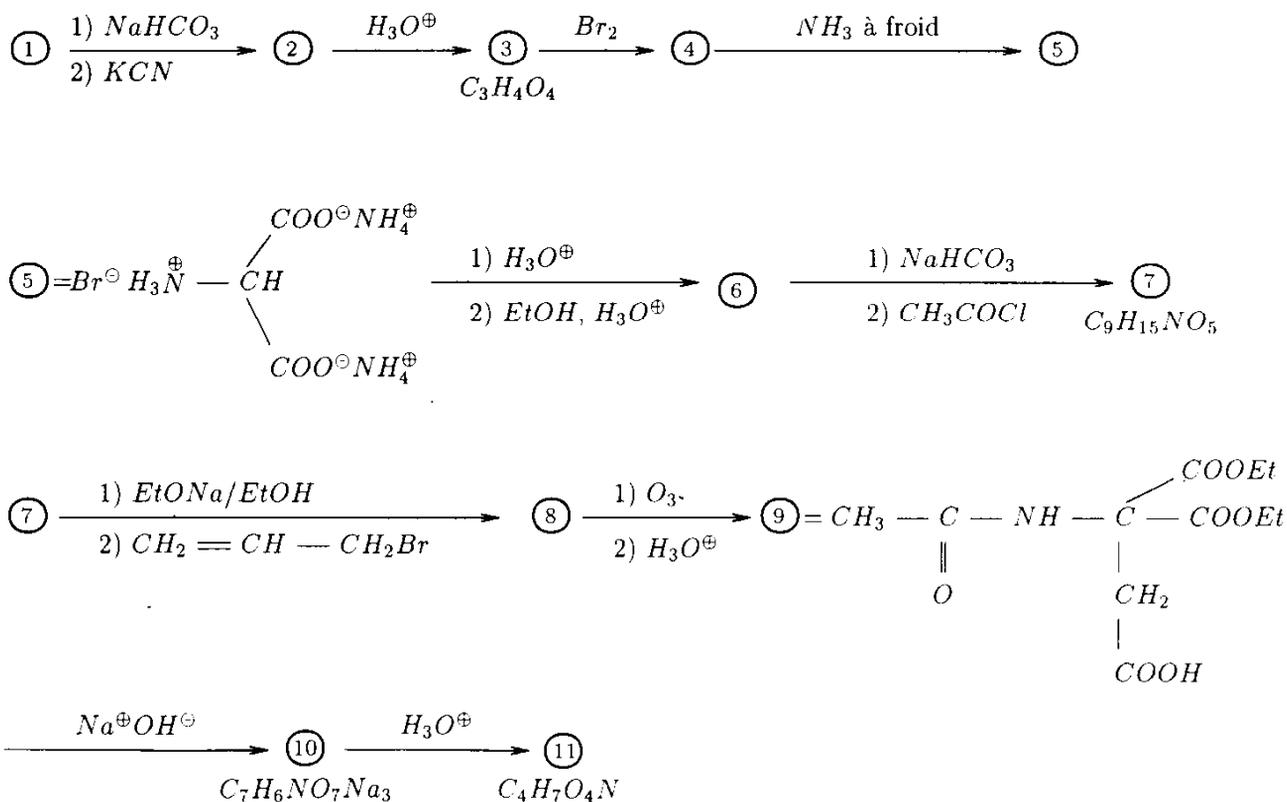


- b) Si oui, indiquer, en la justifiant, la configuration absolue de ce carbone.
- c) L'acide L-Aspartique est-il chiral? Pourquoi? Quelle conséquence en déduisez-vous? Que signifie la donnée  $[\alpha]_{25}^D = +5,0 \text{ } ^\circ \cdot \text{dm}^{-1} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{cm}^3$  ?
- d) Représenter l'acide L-Aspartique en convention de Fischer.
- 3<sup>o</sup>) On se propose d'étudier une solution aqueuse d'acide aminé dans le cas où la chaîne latérale  $R$  ( $\text{H}_2\text{N} - \text{CHR} - \text{COOH}$ ) ne comporte pas d'autres groupes fonctionnels ionisables. Pour de tels composés, les équilibres acido-basiques mettent en jeu deux couples acide / base:  $-\text{CO}_2\text{H} / -\text{COO}^\ominus$  ( $pK_1$ ) et  $-\text{NH}_3^\oplus / -\text{NH}_2$  ( $pK_2$ ). Pour la L-Phénylalanine, les  $pK_A$  sont 1,83 et 9,13.
- a) Attribuer les  $pK_A$  aux couples acido-basiques de cet acide aminé.
- b) Interpréter qualitativement la différence de  $pK_A$  du couple  $-\text{CO}_2\text{H} / -\text{COO}^\ominus$  de la L-Phénylalanine avec celui du couple  $\text{CH}_3\text{COOH} / \text{CH}_3\text{COO}^\ominus$  ( $pK_A = 4,75$ ).
- c) Sous quelle forme se trouve majoritairement la L-Phénylalanine mise en solution dans l'eau pure?
- d) Ecrire les équilibres acido-basiques auxquels participe la L-Phénylalanine en solution aqueuse.
- e) Tracer le diagramme de prédominance des différentes espèces acido-basiques mises en jeu, en fonction du  $pH$ .
- f) Montrer que la solution de L-Phénylalanine est une solution d'ampholyte. En calculer le  $pH$  pour une concentration initiale  $c_0 = 0,050 \text{ mol.L}^{-1}$ . La démonstration de la relation classique des ampholytes est attendue; on donnera le résultat avec un nombre de chiffres significatifs convenable compte-tenu des approximations.
- g) On veut doser  $V_0$  mL d'une solution de L-Phénylalanine de concentration de l'ordre de  $0,05 \text{ mol.L}^{-1}$ . Peut-on réaliser un dosage direct avec de l'acide chlorhydrique à  $0,100 \text{ mol.L}^{-1}$ ? avec de la soude à  $0,100 \text{ mol.L}^{-1}$ ? Justifier les réponses. Pour cela, on pourra utiliser la courbe expérimentale ci-dessous donnant l'évolution du  $pH$  de  $v_0 = 10,0 \text{ mL}$  d'une solution à  $0,052 \text{ mol.L}^{-1}$  d'acide chlorhydrique et à  $0,052 \text{ mol.L}^{-1}$  de L-Phénylalanine, dans laquelle on introduit de la soude de concentration  $c = 0,100 \text{ mol.L}^{-1}$ .



## II SYNTHÈSE DES ACIDES AMINES CONSTITUTIFS DE L'ASPARTAME

On s'intéressera uniquement à la synthèse de l'acide L-Aspartique. On soumet l'acide chloroéthanique (1) à la suite de réactions:



- 1<sup>o</sup>) Donner la formule semi-développée de (1) et de (2). Justifier les conditions opératoires de la formation de (2) en précisant les rôles respectifs de  $\text{NaHCO}_3$  et  $\text{KCN}$ . On donne  $pK_A(\text{CO}_2/\text{HCO}_3^\ominus) = 6,4$ ,  $pK_A(\text{CH}_2\text{ClCOOH}/\text{CH}_2\text{ClCOO}^\ominus) = 2,9$  et  $pK_A(\text{HCN}/\text{CN}^-) = 9,3$ . Proposer un mécanisme réactionnel et donner sa loi de vitesse dans le cas général.
- 2<sup>o</sup>) Donner les formules semi-développées de (3) et (4). On rappelle que l'action du dibrome permet une monohalogénéation en  $\alpha$  des fonctions acides carboxyliques de l'acide malonique (3) (ou acide propane-1.3-dioïque).
- 3<sup>o</sup>) Quelles sont les fonctions contenues dans (5)? Combien d'équivalents d'ammoniaque a-t-on ajouté pour le former? Préciser leurs rôles respectifs.
- 4<sup>o</sup>) (6) est un diester et un sel d'ammonium. Donner sa formule semi-développée. Quel est le nom de la réaction de synthèse de (6)? Quelles sont ses caractéristiques? Préciser ses conditions opératoires.

- 5<sup>0</sup>) Quelle fonction forme-t-on dans (7) ? Donner la formule de (7).
- 6<sup>0</sup>) Justifier la formation d'un carbanion par l'action de l'éthanolate de sodium sur (7). Donner une structure de Lewis de ce carbanion (on rappelle que  $EtO^\ominus$  est une base suffisamment forte pour arracher un atome d'hydrogène en  $\alpha$  des fonctions ester). Quel est le rôle de ce carbanion lorsqu'il réagit sur  $CH_2 = CH - CH_2 - Br$ ? On donnera la structure de (8)
- 7<sup>0</sup>) La fonction alcène de (8) subit une ozonolyse oxydante en milieu acide pour conduire à (9). Qu'aurait-on obtenu si l'ozonolyse avait été réalisée en milieu réducteur (présence de Zinc en poudre)?
- 8<sup>0</sup>) (9) est chauffé en présence de soude aqueuse. Comment s'appelle cette réaction? Quel est son mécanisme? Donner la formule semi-développée de (10). (10) est obtenu sous forme d'un sel trisodique.
- 9<sup>0</sup>) Le chauffage en milieu acide d'un dérivé de l'acide malonique  $RCH(COOH)_2$  conduit par décarboxylation au monoacide  $RCH_2COOH$ . L'acide aspartique (11) est-il obtenu optiquement pur?

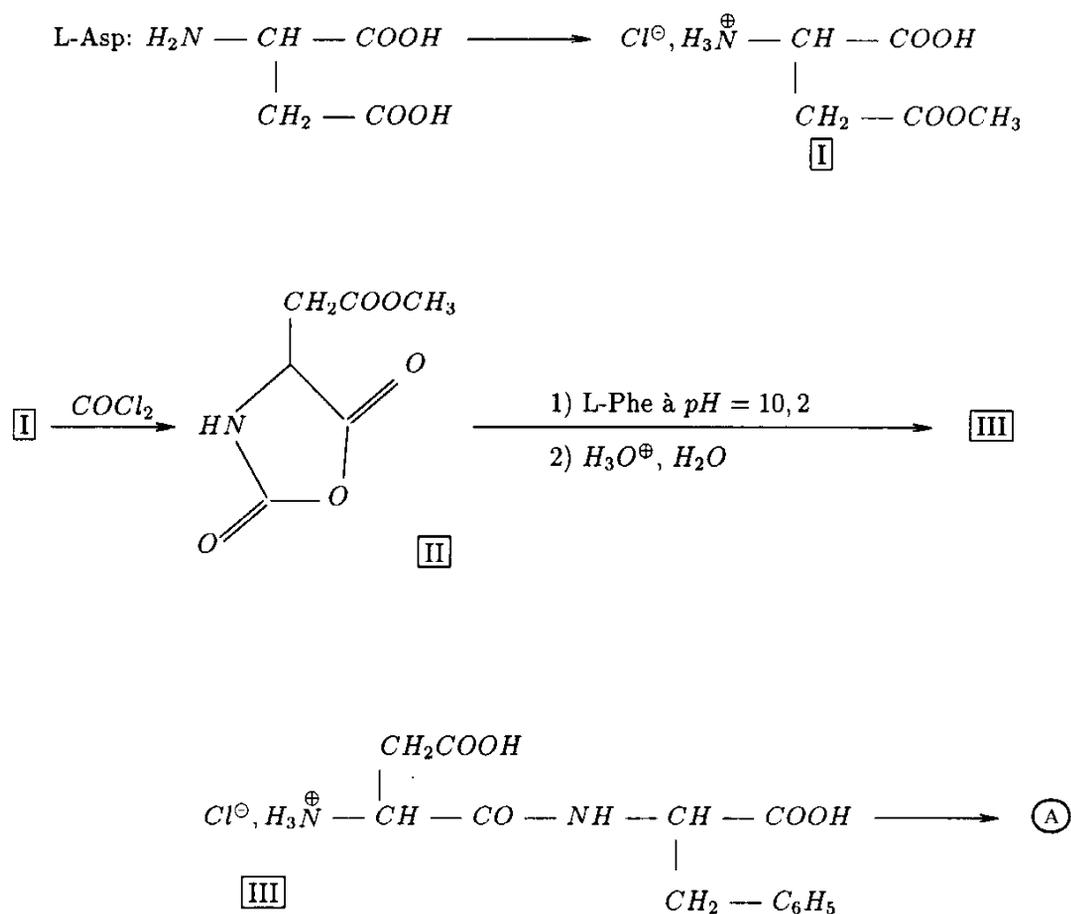
### III SYNTHÈSE DE L'ASPARTAME (A)

#### 1<sup>0</sup>) Préliminaires

- a) Le produit formé par réaction d'une fonction amine sur une fonction acide carboxylique doit être chauffé vigoureusement (150–200<sup>0</sup> C) pour qu'il y ait formation d'une fonction amide. Indiquer les deux réactions qui se déroulent consécutivement. Pourquoi la seconde étape est-elle difficile?
- b) Dans le cas de deux acides aminés différents ( $H_2N - CHR^1 - COOH$  et  $H_2N - CHR^2 - COOH$ ) quels sont les produits que l'on peut attendre de telles réactions? On se limitera à la formation d'un dipeptide non cyclique.
- c) On forme l'ester méthylique (12) de la L-Phénylalanine et on le fait réagir sur l'acide L-Aspartique. Il se forme une liaison peptidique. Montrer que dans ces conditions, on obtient deux régioisomères (ou isomères de position de fonction) dont on écrira la formule semi-développée plane.

#### 2<sup>0</sup>) Une synthèse de l'aspartame

Le problème de la synthèse de ce dipeptide est donc de différencier les deux fonctions amines et d'activer sélectivement une des fonctions acides carboxyliques de l'acide L-Aspartique. Dans une synthèse proposée en 1985, ce problème a été résolu de la façon suivante:



- a) L'action du méthanol en présence de chlorure d'hydrogène, sur l'acide L-Aspartique conduit au composé **I** dans lequel seule la fonction acide carboxylique de la chaîne latérale a été estérifiée. Ecrire les réactions bilans qui conduisent à **I**. Proposer une justification pour expliquer que seule la fonction acide carboxylique de la chaîne latérale subit une estérification.
- b) L'action du phosgène  $\text{COCl}_2$  sur **I** conduit au composé **II**. Donner une structure de Lewis complète de  $\text{COCl}_2$ . Proposer un mécanisme pour cette réaction en précisant les différents centres électrophiles et nucléophiles mis en jeu.
- c) A une solution aqueuse de L-Phénylalanine, on ajoute de la soude jusqu'à  $pH = 10,0 - 10,2$  puis un équivalent de **II**. Le produit d'addition obtenu par ouverture régiosélective de **II** n'est pas isolé et subit in situ une réaction d'hydrolyse pour conduire à **III**. Proposer un mécanisme pour la réaction de couplage entre la L-Phénylalanine et **II**. Indiquer quel est le gaz dégagé lors de la réaction. Interpréter la régiosélectivité de l'attaque.
- d) A partir de **III**, quelles sont les transformations à réaliser pour obtenir l'aspartame **A** ?
- e) On réalise la synthèse à partir de 0,045 mole de L-Phénylalanine. On obtient 6,9 g d'aspartame. Calculer le rendement de la synthèse. On donne  $N = 14\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ,  $O = 16\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ,  $C = 12\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

SESSION DE 1994

**concours externe  
de recrutement de professeurs certifiés**

**section : physique  
et électricité appliquée**

composition de physique avec applications

**Durée : 5 heures**

*Calculatrice de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

Cette épreuve comprend un problème et un exercice totalement indépendants; ils sont obligatoires.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale très lisiblement dans sa copie, propose la correction et poursuit en conséquence le problème. Il prend bien entendu l'entière responsabilité de la correction proposée.

**Avertissement aux candidats :**

Les parties 2, 3 et 4 du problème sont indépendantes. Elles font cependant appel aux données et aux résultats de cours de la partie 1 intitulée *Preliminaires*.

Dans une même partie, les questions indépendantes des précédentes sont notées (\*). Les relations données que l'on demande d'établir pourront être admises pour poursuivre le problème.

Pour les calculs numériques demandés, on se limitera à donner les trois premiers chiffres significatifs; les unités employées seront **impérativement** celles du système international ou leurs multiples et sous-multiples; l'unité devra être précisée dans chacun des résultats numériques.

## PROBLÈME

Ce problème traite des propriétés d'ondes, dans différents domaines de la physique : ondes électromagnétiques dans un câble coaxial, ondes sonores dans l'air, ondes mécaniques le long d'une corde tendue.

Les propriétés générales des ondes progressives, ainsi que les notations utilisées, seront rappelées ou retrouvées dans la première partie.

*Valeurs numériques utiles :*

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36 \pi 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \text{ (permittivité diélectrique du vide);}$$

$$\mu_0 = 4 \pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \text{ (perméabilité magnétique du vide).}$$

### 1. PRÉLIMINAIRES

On rappelle que, pour une onde qui peut être caractérisée par une grandeur physique  $G(x, t)$ , se propageant dans la direction d'un axe  $x'$   $x$ , on peut écrire une équation aux dérivées partielles, dite **équation d'ondes** à une dimension :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial t^2}.$$

- 1.1. Quelle est la dimension de la grandeur  $v$  figurant dans cette équation ? Quelle est sa signification ?
- 1.2. Quelles grandeurs  $G(x, t)$  sont caractéristiques d'une onde sonore et d'une onde électromagnétique ?
- 1.3. Qu'entend-on par onde longitudinale et onde transversale ? Illustrer cette notion dans les cas évoqués au 1.2.
- 1.4. Montrer que  $G_1(x, t) = a \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$  et  $G_2(x, t) = b \cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)\right)$  sont des solutions de l'équation (1).

Que représente  $\omega$  ? Avec quelle unité l'exprime-t-on ?

- 1.5. Quelle est la différence entre ces deux types de solutions ?
- 1.6. Retrouver la relation qui existe entre la période temporelle ( $T$ ) et la période spatiale ( $\lambda$ ), ou longueur d'onde, d'une telle onde progressive.

### 2. ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES SE PROPAGEANT DANS UN CÂBLE COAXIAL

(\*) 2.1. Calcul de la capacité linéique du câble coaxial.

La figure 1 représente une portion de câble coaxial de longueur  $h$ , faisant partie d'un câble supposé de très grande longueur; on supposera ainsi, au cours de l'étude, qu'il n'y a pas d'effets de bord. On rappelle qu'un câble coaxial est constitué de deux cylindres conducteurs, l'un creux (2), et l'autre plein (1), de même axe, séparés par un isolant de permittivité relative  $\epsilon_r$ .

- 2.1.1. À partir de la charge  $Q$  portée par l'armature interne et de la différence de potentiel entre les deux conducteurs, définir la capacité  $C$  d'un condensateur.
- 2.1.2. Déterminer le champ électrique  $\vec{E}$  en un point  $M$  de l'isolant, distant de l'axe de  $r$ , en utilisant le théorème de Gauss, et les propriétés de symétrie de l'ensemble.

2.1.3. Calculer la capacité  $C$  du condensateur constitué par la longueur  $h$  de câble. En déduire une expression de la capacité linéique du câble, en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_r$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ . Cette grandeur sera notée  $\gamma$ .

2.1.4. *Application numérique* : calculer  $\gamma$  si  $R_1 = 0,5$  mm,  $R_2 = 1,75$  mm,  $\epsilon_r = 2,25$ .

(\*) 2.2. **Calcul du coefficient d'auto-inductance linéique du câble.**

2.2.1. Les tensions et les courants qui se propagent dans le câble sont de fréquences élevées. Quel phénomène accompagne alors le passage du courant dans un métal bon conducteur ?

2.2.2. Quelle est l'expression du champ magnétique créé par un fil rectiligne parcouru par un courant  $I$ , en un point situé au voisinage de ce fil ?

On peut considérer que les courants, d'intensité  $I$ , circulent en sens inverses sur les cylindres de rayons  $R_1$  et  $R_2$ . En utilisant le théorème d'Ampère et les propriétés de symétrie de l'ensemble, déterminer en un point  $N$  de l'isolant, situé à la distance  $r$  de l'axe, le champ magnétique  $\vec{B}$ . Que vaut-il hors de l'isolant ?

2.2.3. Rappeler la définition de l'inductance propre d'un circuit.

Calculer le flux de ce champ magnétique à travers le contour rectangulaire EFGH représenté sur la figure 2, et en déduire le coefficient d'auto-inductance linéique du câble, en fonction de  $\mu_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ . Ce coefficient sera noté  $\ell$ .

2.2.4. *Application numérique* : calculer  $\ell$  avec les valeurs proposées au 2.1.4.

2.3. **Équation d'ondes dans le câble coaxial.**

Un élément du câble coaxial, de longueur  $dx$ , peut être représenté par un schéma, comme l'indique la figure 3.

(\*) 2.3.1. En appliquant les lois de l'électricité à ce modèle, et en utilisant ensuite le fait que  $dx$  est un infiniment petit tendant vers 0, trouver les deux équations aux dérivées partielles liant  $I(x, t)$  et  $V(x, t)$ .

2.3.2. Déduire de ces deux relations les équations d'ondes vérifiées par  $V(x, t)$  et  $I(x, t)$ .

2.3.3. Quelle est la vitesse de propagation, en fonction de  $\gamma$  et de  $\ell$  (grandeurs introduites au 2.1.3. et au 2.2.3.), des ondes de tension et de courant le long du câble ?

2.3.4. Exprimer cette vitesse en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_r$ ,  $\mu_0$ , puis la calculer.

2.4. **Mise en évidence d'une grandeur caractéristique du câble.**

2.4.1. Soit  $V(x, t)$  une onde de tension sinusoïdale, progressive, de fréquence  $f$ , se propageant le long du câble supposé très long. Écrire sous la même forme les fonctions  $V(x, t)$  et  $I(x, t)$ , et à partir des relations trouvées aux questions 2.3.1. et 2.3.2., en déduire qu'en tout point du câble le rapport  $V(x, t) / I(x, t)$  est une constante  $R_c$ . Que représente cette constante ?

2.4.2. Avec les valeurs numériques utilisées précédemment, calculer  $R_c$ .

2.5. **Étude de la ligne coaxiale, fermée sur une résistance.**

Le câble, de longueur  $L$ , est alimenté à une de ses extrémités (d'abscisse  $x = 0$ ) par un générateur de résistance interne  $R_g$ , délivrant une tension de pulsation  $\omega$ , et est fermé à son extrémité d'abscisse  $L$  sur une résistance  $R$ . Dans ces conditions, l'onde émise par le générateur va se réfléchir au bout de la ligne, et en un point  $M$  de la ligne, d'abscisse  $x$ , on fait l'hypothèse que l'onde résultante est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.

- 2.5.1. Quelle sera, au point M, l'intensité résultante  $I(x, t)$  en fonction des ondes incidente  $I_0(x, t)$  et réfléchie  $I_1(x, t)$  ?
- 2.5.2. Écrire les relations liant  $V_0(x, t)$  et  $I_0(x, t)$  d'une part, et  $V_1(x, t)$  et  $I_1(x, t)$  d'autre part. ( $V_0$  et  $V_1$  sont les ondes de tension incidente et réfléchie).
- 2.5.3. On appelle  $\rho = \frac{I_1}{I_0}$  le coefficient de réflexion en bout de ligne, à l'abscisse L.
- Montrer que  $\rho = \frac{R - R_c}{R + R_c}$ .
- 2.5.4. Le générateur de tension utilisé a une résistance interne  $R_g$  égale à  $R_c$ . Justifier *a posteriori* l'hypothèse faite dans cette partie 2.5.
- 2.5.5. Exposer le principe d'une méthode qui permettrait de mesurer la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques le long du câble, ainsi que la valeur de  $R_c$ .

### 3. ONDES SONORES DANS UN TUYAU

Dans un tuyau de section  $S$  constante se propagent des ondes sonores, que l'on pourra caractériser à l'abscisse  $x$ , le long du tuyau par :

$u(x, t)$  = amplitude de déplacement des molécules d'air,

$v(x, t)$  = vitesse du déplacement des molécules d'air, due à la perturbation sonore (cette vitesse n'est pas la vitesse de propagation de l'onde sonore);

$p(x, t) = P(x, t) - P_0$ , surpression due à la perturbation sonore;  $P_0$  est la pression ambiante, et  $P(x, t)$  la pression absolue.

Les grandeurs définies précédemment, ainsi que les *variations* de la masse volumique  $\mu(x, t)$  sont, dans les équations qui suivront, considérées comme des infiniment petits du premier ordre.

- 3.1. On s'intéresse, dans l'étude qui suit, au mouvement de l'air contenu dans une « tranche » élémentaire du tuyau située entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ ,  $dx$  étant infiniment petit. Quelle est la masse d'air concernée ? En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à cette « tranche » élémentaire, montrer que :

$$(2) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \frac{\partial v}{\partial t}.$$

- 3.2. En écrivant une équation de conservation de la masse de gaz à l'intérieur de la « tranche » d'essai, montrer que :

$$(3) \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = -\mu \frac{\partial v}{\partial x}.$$

- (\*) 3.3. On rappelle que le coefficient de compressibilité d'un gaz est défini par  $\chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}$  ( $V$  est le volume,  $P$  est la pression).

Exprimer ce coefficient en fonction de la masse volumique  $\mu$  et de la pression, et en déduire que la relation (3) peut s'écrire :

$$(4) \quad \chi \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- 3.4. Déduire des relations précédentes une équation d'ondes vérifiée par la surpression  $p(x, t)$ .

- 3.5. Quelle est la vitesse de propagation de l'onde en fonction de  $\chi$  et de  $\mu$  (masse volumique de l'air ambiant) ?

- 3.6. En fait, la valeur du coefficient  $\chi$  dépend de la nature de la transformation subie par le gaz au passage de la perturbation sonore. On définit  $\chi_T$ , coefficient isotherme, et  $\chi_S$ , coefficient isentropique.
- 3.6.1. Donner l'équation d'état d'un gaz parfait et calculer, en fonction de la pression, le coefficient  $\chi_T$  pour un gaz parfait.
- 3.6.2. Donner l'équation d'une transformation isentropique d'un gaz parfait et montrer que  $\chi_S = \frac{1}{\gamma} \chi_T$ , où  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  est le rapport des capacités calorifiques du gaz à pression et à volume constants.
- 3.6.3. Exprimer, en fonction de  $R$  (constante molaire des gaz parfaits), de  $M$  (masse molaire du gaz), de  $\gamma$  et de la température  $T$  du gaz, la vitesse de propagation du son dans l'air, dans les deux cas envisagés au début de la question 3.6.
- 3.6.4. *Application numérique* :  $T = 293 \text{ K}$ ,  $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $R = 8,315 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . La mesure de la vitesse du son dans ces conditions a donné la valeur de  $343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Quel type de transformation subit en fait l'air au passage de l'onde ? En déduire la valeur du coefficient  $\gamma$  de l'air.

#### 4. PROPAGATION D'ONDES SUR UNE CORDE TENDUE

Une corde, de longueur  $L$ , de masse linéique  $\rho$ , homogène, est tendue par un moyen adapté. Au repos, cette corde est confondue avec l'axe horizontal  $Ox$ . L'action de la pesanteur sur la corde sera négligée devant la tension de la corde. Lorsqu'on excite la corde, tout point de celle-ci situé en  $M_0(x, y = 0)$  au repos est, à l'instant  $t$ , en  $M(x, y)$ . L'abscisse de  $M$  sera invariante, et  $y$  sera fonction de  $x$  et de  $t$  (figure 4).

On repère, à l'instant  $t$ , la position de  $M$  par son abscisse curviligne  $s$  sur la corde. La tension de la corde est, en  $M$ , à l'instant  $t$ ,  $\vec{T}(s, t)$ , et on admettra que cette force s'applique tangentiellement à la corde. On considère à l'instant  $t$  un petit élément de corde de longueur  $ds$  et de masse  $\rho ds$ , situé entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . L'angle de la tangente à la corde avec  $Ox$  est :

et  $\theta(x, t)$  au point de coordonnées  $(x, y(x, t))$   
 $\theta(x + dx, t) = \theta + d\theta$  au point de coordonnées  $(x + dx, y(x + dx, t))$ .

- 4.1. En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, appliquée à l'élément de corde de longueur  $ds$ , écrire deux relations faisant intervenir les tensions  $\vec{T}(s + ds)$  et  $\vec{T}(s)$ , et les angles  $(\theta + d\theta)$  et  $\theta$ .
- 4.2. Sachant que la corde s'éloigne peu de l'axe  $Ox$ , et que les angles utilisés restent très petits, montrer que la norme  $T$  de la tension  $\vec{T}(s)$  reste constante, et que  $ds = dx$ .
- 4.3. Montrer que  $x, y, t$  sont liés par une équation d'ondes que l'on peut écrire :

$$(5) \quad \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Exprimer  $v$  en fonction de  $T$  et  $\rho$ .

- 4.4. *Application numérique* : la corde est une corde de violon de longueur  $L = 33 \text{ cm}$ , de masse  $0,3 \text{ g}$ . La tension exercée  $T$  est égale à  $77 \text{ N}$ . Calculer  $v$ .
- 4.5. Les ondes qui se propagent le long de la corde sont-elles transversales ou longitudinales ?
- 4.6. La corde étant de longueur finie, les ondes vont se réfléchir à ses extrémités, et on observera, dans certaines conditions, un phénomène d'ondes stationnaires.
- (\*) 4.6.1. Si  $y_1(x, t)$  est une onde progressive, et  $y_2(x, t)$  une onde régressive, écrire l'onde résultante  $y(x, t)$  en un point  $M$  de la corde, en ne considérant qu'une seule réflexion.

- (\*) 4.6.2. Sachant que les deux extrémités ( $x = 0$ ,  $x = L$ ) de la corde sont fixes, montrer que seules certaines fréquences de vibration sont compatibles avec les conditions imposées.  
Exprimer ces fréquences en fonction de  $T$ ,  $\rho$ , et  $L$ .
- 4.6.3. *Application numérique* : calculer la valeur de la fréquence la plus faible parmi celles de la question 4.6.2., en utilisant les données de la question 4.4.
- 4.6.4. Comment choisir une corde pour qu'elle puisse rendre des sons graves ou aigus ?
- 4.6.5. Quel est le dispositif expérimental classique qui permet de mettre en évidence les phénomènes précédents ? Décrire brièvement comment le mettre en œuvre.

### EXERCICE D'OPTIQUE

Cet exercice propose une étude simplifiée des caractéristiques et des performances d'un objectif photographique composé de deux lentilles minces.

**Les six premières questions** ne font appel qu'à des notions de cours sur les lentilles minces.

Dans tout le problème, les grandeurs seront comptées algébriquement. Le sens positif horizontal choisi sera celui de la progression de la lumière ; le sens positif vertical sera le sens ascendant. Tous les systèmes optiques seront placés dans l'air.

- En quelques lignes, ou à l'aide d'un schéma, rappeler les définitions du centre optique et des foyers d'une lentille mince.  
Qu'appelle-t-on distance focale et vergence d'une lentille mince ?  
Préciser les différences entre lentilles convergentes et divergentes.
- Les systèmes seront étudiés dans l'approximation de Gauss. Que signifie cette hypothèse, et quelles en sont les conséquences ?
- Rappeler les formules de Descartes, relatives aux lentilles minces, donnant les positions relatives d'un objet et de son image (sur l'axe optique), ainsi que le grandissement transversal.
- Les mêmes formules, si l'on utilise comme origines les foyers objet ( $F$ ) et image ( $F'$ ) de la lentille, sont appelées formules de Newton.  
Montrer qu'elles s'écrivent :  

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 \quad (\text{A est l'objet, A' est l'image, } f' \text{ la focale});$$

$$\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{f'}{\overline{FA}} \quad (\gamma \text{ est le grandissement transversal}).$$
- À l'aide d'un schéma, construire l'image d'un petit objet  $AB$ , perpendiculaire à l'axe, donné par une lentille convergente. Préciser dans quels cas l'image sera réelle ou virtuelle (cette construction a pu être faite auparavant).
- En expliquant votre démarche, construire le rayon émergent de la lentille, conjugué d'un rayon incident **quelconque**.
- On rappelle la formule de Gullstrand, qui donne la vergence  $\nu$  d'un système constitué de deux lentilles minces, ayant même axe optique, placées dans l'air, de vergences  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , de centres optiques  $O_1$  et  $O_2$ , distants de  $e = \overline{O_1 O_2}$  ( $e > 0$ ) :

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 - e \nu_1 \nu_2.$$

À partir de cette formule, montrer que la distance focale de l'ensemble, soit  $f'$ , peut s'exprimer par  $f' = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}$ , où  $\Delta = \overline{F_1 F_2}$  est appelé intervalle optique du système.

8. On veut réaliser, avec deux lentilles minces identiques, de distance focale  $f'_1 = f'_2 = 8$  cm, un objectif de distance focale  $f' = 5$  cm. Comment doit-on placer les lentilles ?
9. Où seront, dans ces conditions, les foyers objet  $F$  et image  $F'$  de l'objectif ?
10. Pour faire une photographie d'un objet situé loin devant l'objectif, où doit-on placer le film et quel sera l'encombrement total du système ?
11. On veut pouvoir mettre au point l'objectif pour des objets situés entre 50 cm et l'infini devant celui-ci. Que doit-on prévoir, et dans quelles limites ?
12. Au milieu de  $O_1 O_2$ , on place un diaphragme à iris, que l'on supposera circulaire, de centre  $O$ , sur l'axe, et de rayon  $R$ . Ce diaphragme **limite** le faisceau lumineux traversant l'objectif, et est appelé diaphragme d'ouverture (d.o.). Déterminer le contour géométrique, par la position de son centre  $O'$  et par son rayon  $R'$ , à l'intérieur duquel passent tous les rayons qui ont effectivement traversé l'objectif. Ce contour est appelé pupille de sortie de l'objectif. Calculer  $\overline{O'F'}$ .
13. En utilisant les résultats de la question précédente, représenter sur un schéma le trajet d'un faisceau venant de l'infini dans la direction de l'axe et traversant effectivement l'objectif.
14. L'objectif est réglé sur l'infini. Un objet ponctuel  $A$ , sur l'axe, est à distance finie devant l'objectif ( $x = \overline{FA}$ ). Quel sera le rayon  $r$  de la tache image de  $A$  sur le film, en fonction de  $R'$  et de  $x' = \overline{F'A'}$  (où  $A'$  serait l'image ponctuelle de  $A$ ). En déduire l'expression de  $r$  en fonction de  $x$ .
15. Sachant que la tolérance du film (dimension du grain du cliché) est telle que l'on peut supposer que si  $r \leq r_0$ , l'image de  $A$  sur le film est nette, déterminer la profondeur de champ de l'objectif dans ces conditions. (On entend ici par profondeur de champ la portion d'espace située devant l'objectif qui sera vue nettement sur la photographie.)

*Application numérique :*

Si  $r_0 = 50 \mu\text{m}$ , calculer la profondeur de champ lorsque  $\frac{2R'}{f'} = \frac{1}{16}$ .

16. Le nombre d'ouverture (n.o.) de l'objectif est défini par :  $\text{n.o.} = \frac{f'}{2R'}$ .
  - 16.1. Quelle grandeur lumineuse augmente si ce nombre diminue ?
  - 16.2. Comment évolue alors la profondeur de champ ?
  - 16.3. Quels phénomènes vont se produire si on ouvre trop le diaphragme ?
  - 16.4. Sans faire de calculs, indiquer comment varie, avec le rayon  $R$  du diaphragme, le flux lumineux qui parvient sur le film.
  - 16.5. Sachant que, pour impressionner le film, il suffit d'une certaine énergie lumineuse  $W$ , qui ne dépend que de la sensibilité du film, trouver une relation simple entre le nombre d'ouverture (n.o.) et le temps de pose nécessaire.
  - 16.6. Les constructeurs indiquent, sur les objectifs, des nombres d'ouverture qui varient en progression géométrique de raison  $\sqrt{2}$ . Quel en est l'intérêt ?

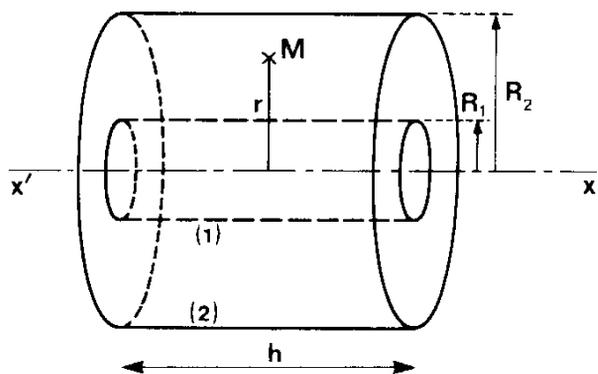


Figure 1

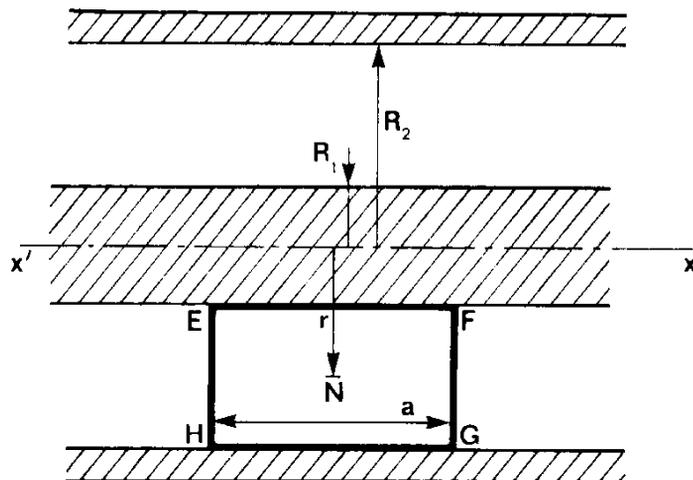


Figure 2

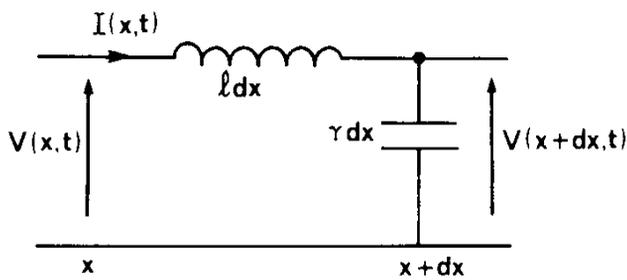


Figure 3

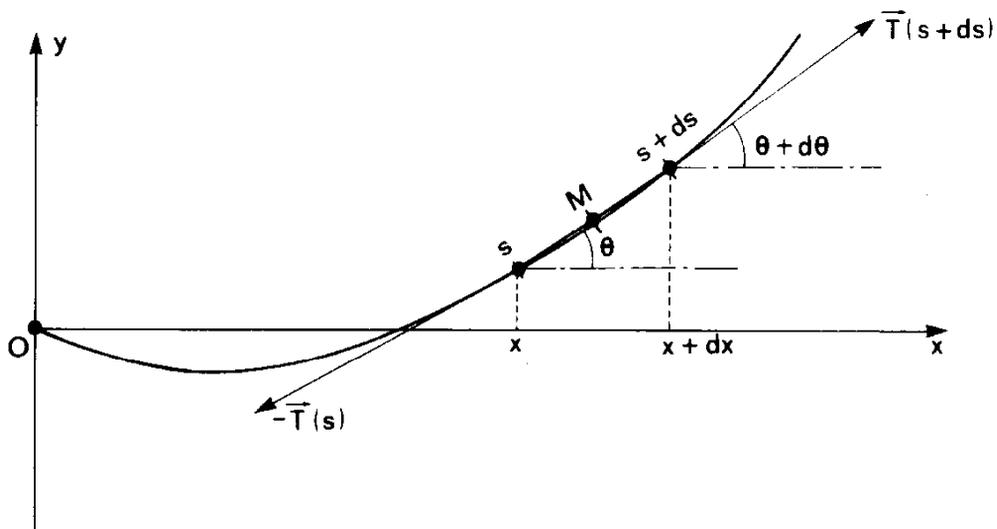


Figure 4

**SESSION DE 1994****concours externe  
de recrutement de professeurs certifiés****section : physique  
et électricité appliquée**

composition d'électronique – électrotechnique avec applications

**Durée : 5 heures**

*Calculatrice de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale très lisiblement dans sa copie, propose la correction, et poursuit en conséquence le problème. Il prend bien entendu l'entière responsabilité de la correction proposée.

Le sujet se propose d'étudier un ensemble moteur asynchrone alimenté par un onduleur maintenant un rapport  $\frac{V}{f}$  constant. La première partie s'intéresse au moteur asynchrone; la seconde étudie l'onduleur et la dernière propose une étude simplifiée de la commande de cet onduleur.

*Les trois parties sont largement indépendantes*

## 1. Moteur asynchrone

### Notations :

On notera :

- U : tension composée du réseau triphasé;
- V : tension simple du même réseau;
- $\Omega_s$  : la vitesse de synchronisme en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ;
- g : le glissement du moteur.

Sur la plaque signalétique d'un moteur asynchrone on peut lire les indications suivantes :

Tension d'alimentation nominale	: $V_N = 220 \text{ V}$ ;
Courant nominal absorbé par phase du moteur	: $I_N = 20 \text{ A}$ ;
Puissance utile	: $P_u = 10 \text{ kW}$ ;
Vitesse nominale	: $N_N = 1\,320 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ .

Ce moteur est alimenté par un système de tensions triphasé, équilibré; la tension composée est  $U = 380 \text{ V}$ ; la fréquence  $f = 50 \text{ Hz}$ .

Sur cette machine on réalise les essais suivants :

- 1° Essai à vide, sous la tension  $U_N$  :
  - courant absorbé :  $I_V = 4,0 \text{ A}$ ;
  - puissance absorbée :  $P_V = 300 \text{ W}$ ;
  - vitesse de rotation :  $N_V = 1\,410 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ .
- 2° Essai : machine asynchrone alimentée sous  $U_N$ , entraînée par un autre moteur à la vitesse de synchronisme  $N_s = 1\,500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$  :
  - courant absorbé :  $I_0 = 2,1 \text{ A}$ ;
  - puissance absorbée :  $P_0 = 150 \text{ W}$ .
- 3° Essai avec rotor bloqué :
  - tension d'alimentation :  $U_{CC} = 127 \text{ V}$ ;
  - courant par phase :  $I_{CC} = 20 \text{ A}$ ;
  - puissance absorbée :  $P_{CC} = 1,60 \text{ kW}$ .
- 4° Mesure de la résistance d'un enroulement statorique :  $r_1 = 0,050 \Omega$ .

### 1.1. Analyse des essais :

- 1.1.1. Rappeler (éventuellement sous forme d'un diagramme) le bilan de puissance d'un moteur asynchrone.
- 1.1.2. Que devient ce bilan lors de l'essai à vide ?
- 1.1.3. En déduire une relation entre les pertes mécaniques et les pertes dans le fer.
- 1.1.4. Que devient le bilan de puissance lors de l'essai 2 à  $N = N_s$  ?
- 1.1.5. Déduire de ce qui précède la valeur des pertes dans le fer et la valeur des pertes mécaniques.
- 1.1.6. Calculer le rendement pour le point nominal de fonctionnement.
- 1.1.7. Calculer la valeur du facteur de puissance au point nominal de fonctionnement.

## 1.2. Recherche d'un modèle équivalent.

La figure 1 représente un modèle classique (par phase) du moteur asynchrone. Afin de simplifier les calculs, on fera l'hypothèse habituelle que le moteur asynchrone fonctionne à flux forcé, c'est-à-dire que le flux dans le circuit magnétique est imposé par la tension.

- 1.2.1. Montrer que dans cette approximation, le modèle équivalent de la figure 1 devient celui de la figure 2.
- 1.2.2. Nommer chaque élément du modèle en disant quel est le phénomène physique qu'il représente.
- 1.2.3. Calculer les éléments  $R_0$  et  $X_0$ .
- 1.2.4. En utilisant l'essai 3 à rotor bloqué, déterminer les autres éléments du modèle.
- 1.2.5. Pour  $g = 0,12$ , calculer l'intensité du courant absorbé par le moteur asynchrone alimenté sous la tension nominale  $U_N$ .

## 1.3. Expression du moment du couple mécanique $T_M$ .

- 1.3.1. Exprimer, à l'aide du modèle équivalent, le moment du couple mécanique  $T_M$  en fonction de  $g$ .
- 1.3.2. Calculer le moment du couple au démarrage, sous la tension nominale  $U_N$ .
- 1.3.3. Montrer que selon le modèle, le moment du couple mécanique passe par un maximum  $T_{M_{\max}}$  pour une valeur  $g_0$  du glissement, dont on donnera l'expression en fonction de  $X$  et  $r_1$ .
- 1.3.4. Donner l'expression de  $T_{M_{\max}}$ .
- 1.3.5. Calculer la valeur de  $g_0$  et  $T_{M_{\max}}$ .

## 1.4. Fonctionnement à vitesse de synchronisme variable.

- 1.4.1. En utilisant l'hypothèse « machine à flux forcé », montrer qu'on peut écrire :

$$V \approx kf\Phi ; \quad \Phi : \text{flux par pôle.}$$

On donnera la valeur de  $k\Phi$ .

- 1.4.2. On pose  $X = af$ . Exprimer  $T_{M_{\max}}$  en fonction de  $f$ .
- 1.4.3. Le moteur est alimenté par un onduleur maintenant le rapport  $\frac{V}{f}$  constant. Dans ces conditions, calculer  $T_{M_{\max}}$  pour :
 
$$f = (1 ; 10 ; 20 ; 30 ; 40 ; 50) \text{ Hz.}$$
- 1.4.4. Pour ces mêmes valeurs de  $f$ , calculer le moment du couple au démarrage.
- 1.4.5. Esquisser les courbes  $T_M(g)$  pour les différentes fréquences ci-dessus.
- 1.4.6. Le phénomène mis en évidence est-il gênant ? (commenter).

## 2. Étude d'un onduleur de tension

Un onduleur de tension triphasé peut être réalisé en groupant trois demi-ponts monophasés (fig. 3). Les interrupteurs  $H_i$  sont parfaits (commutation instantanée, chute de tension nulle aux bornes lorsqu'ils sont passants).

Le moteur asynchrone du paragraphe 1 constitue la charge ; celle-ci est équilibrée et toujours de nature inductive. Le système de courants d'intensités  $i_A, i_B, i_C$  est un système triphasé équilibré ; chaque courant est sinusoïdal :

$$i_A = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \phi);$$

$$i_B = I\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \phi - \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$i_C = I\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \phi - \frac{4\pi}{3}\right);$$

avec  $\omega = 2\pi f$  et  $f = 50 \text{ Hz}$ .

$\phi$  est le déphasage introduit par la charge entre le courant en ligne et le fondamental de la tension simple correspondante.

Chaque interrupteur est fermé pendant une demi-période ; les commandes des interrupteurs ( $H_1, H_6$ ) ( $H_2, H_5$ ) ( $H_3, H_4$ ) sont complémentaires deux à deux ; chaque demi-pont est commandé avec un retard de  $\frac{T}{3}$  sur le précédent.

Ces commandes sont schématisées sur la figure 4.

On rappelle que d'après le théorème de Parseval :

si  $G$  est la valeur efficace d'une grandeur  $g(t)$ , dont la valeur moyenne est nulle ;

si  $G_1$  est la valeur efficace du fondamental de  $g(t)$ , alors le taux d'harmoniques de  $g(t)$  peut se calculer par :

$$\tau_h = \frac{\sqrt{G^2 - G_1^2}}{G_1}.$$

## 2.1. Études des formes d'ondes.

2.1.1. Tracer sur du papier millimétré et en concordance de temps l'allure des tensions  $v_{AN}, v_{BN}, v_{CN}$  en admettant qu'à chaque instant :

$$v_{AN} + v_{BN} + v_{CN} = 0.$$

2.1.2. Calculer la valeur efficace  $V$  de chaque tension  $v_{AN}, v_{BN}, v_{CN}$ .

2.1.3. Montrer que la tension  $v_{AN}$  ne comporte pas d'harmoniques pairs ni d'harmoniques multiples de 3.

2.1.4. Quelle est la valeur efficace  $V_1$  du fondamental de  $v_{AN}$  ?

2.1.5. Calculer le taux d'harmoniques  $\tau_h$  de la tension  $v_{AN}$ .

2.1.6. Quelle doit être la valeur de  $U$  pour que les fondamentaux des tensions  $v_{AN}, v_{BN}$  et  $v_{CN}$  aient pour valeur efficace commune  $V_N = 220 \text{ V}$  ?

## 2.2. Courant dans un interrupteur.

La figure 5 donne les trois intensités des courants  $i_A, i_B, i_C$  pour une valeur particulière de  $\phi$ . On pourra utiliser ces graphes pour répondre aux questions de 2.2. et de 2.3.

2.2.1. Tracer, pour une période  $T = \frac{1}{f}$ , le courant d'intensité  $i_{H_1}$  dans l'interrupteur  $H_1$ .

2.2.2. Tracer sur le même graphe la tension aux bornes de cet interrupteur.

2.2.3. Quelle est en fonction de  $\phi$  la valeur du courant à commuter lors de l'ouverture de  $H_1$  ?

2.2.4. L'interrupteur  $H_1$  est réalisé suivant la structure de la figure 6.

2.2.4.1. Justifier le choix d'un transistor plutôt que d'un thyristor.

2.2.4.2.  $H_1$  étant passant quels sont les éléments qui assurent le passage de  $i_{H_1}$  ? On précisera les intervalles de temps correspondants.

## 2.3. Courant débité par la source.

2.3.1. On note  $i(t)$  l'intensité du courant débité par la source de tension  $U$ .

Montrer que pour :

$$0 \leq t \leq \frac{T}{6} \quad \text{on a } i = -i_B.$$

2.3.2 Tracer le graphe de  $i(t)$  sur une période  $T = \frac{1}{f}$ .

2.3.3. Donner en fonction de  $\phi$  l'expression générale du courant  $i(t)$  débité par la source dans l'intervalle :  $\left(0, \frac{T}{6}\right)$ .

2.3.4. L'onduleur alimentant le moteur asynchrone du paragraphe 1, faut-il prévoir une source continue réversible en courant ?

2.3.5. Exprimer la valeur moyenne du courant d'entrée en fonction de  $\phi$ .

2.3.6. Le moteur asynchrone du paragraphe 1 présentant un  $\cos \phi$  nominal de 0,89, quelle est la valeur nominale de la valeur moyenne de  $i(t)$  ?

### 3. Étude de la commande de l'onduleur

La commande doit réaliser la fonction : « génération de signaux de commande des interrupteurs de façon à assurer  $\frac{V}{f}$  constant ».

Pour cela une consigne est, après traitement, envoyée simultanément sur un oscillateur commandé en tension et sur la commande d'un redresseur qui fournit la tension  $U$  d'alimentation de l'onduleur. L'étude proposée s'intéresse uniquement au traitement de la consigne et au fonctionnement de l'oscillateur commandé en tension.

Les amplificateurs opérationnels sont parfaits (impédance d'entrée infinie ; impédance de sortie négligeable ; amplification infinie) ; ils sont polarisés en  $+15\text{ V}$ ,  $-15\text{ V}$ .

Les diodes seront aussi considérées comme parfaites.

#### 3.1. Étude de la consigne.

La figure 7 représente le montage de traitement de la consigne.

- 3.1.1. En régime permanent, c'est-à-dire lorsque aucun courant ne traverse les condensateurs, quelle relation lie  $v_2$  à  $v_1$  (fig. 7) ?
- 3.1.2.  $R_1 = 1,8\text{ k}\Omega$  ;  $P = 1,2\text{ k}\Omega$ . Soit  $\alpha$  la fraction du potentiomètre  $P$  utilisée ; établir la loi de variation de  $v_1$  en fonction de  $\alpha$ .
- 3.1.3. On applique un échelon de tension d'amplitude  $U_0$  à l'entrée  $v_1$  ;  $p$  étant la variable de Laplace, établir la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} ;$$

on mettra cette fonction sous la forme :

$$H(p) = \frac{H_0}{p^2 + 2\zeta p + \omega_0^2} .$$

- 3.1.4. On donne  $R_2 = 100\ \Omega$  ;  $C_1 = 10\text{ nF}$  ;  $R_3 = 10\text{ k}\Omega$  ;  $C_2 = 20\ \mu\text{F}$ . Calculer les valeurs de  $\zeta$ , de  $\omega_0$  et de  $H_0$ .
- 3.1.5. On pose :  $m$  (coefficient d'amortissement) =  $\frac{\zeta}{\omega_0}$  . Calculer  $m$ .
- 3.1.6. On applique à l'entrée  $v_1$  du dispositif un échelon de tension d'amplitude  $U_0 = 1,0\text{ V}$ .

Déterminer par la méthode de votre choix la réponse  $v_2(t)$  à cet échelon. On pourra par exemple résoudre l'équation différentielle à laquelle satisfait  $v_2(t)$ . Dans ce cas, on déterminera les valeurs

de  $v_2(0^+)$  et de sa dérivée  $\frac{dv_2(0^+)}{dt}$ .

Montrer que  $v_2(t)$  est très proche de :

$$v_2(t) = U_0(1 - e^{-\zeta t} \cos \omega_0 t) .$$

- 3.1.7. L'échelon précédent  $U_0$  se superpose à la tension correspondant à  $\alpha = \frac{1}{2}$  ; tracer la réponse  $v_2(t)$  correspondante.
- 3.1.8. Déterminer dans ce cas l'instant  $\tau$  correspondant à la valeur maximale de  $v_2(t)$  et le temps de réponse  $t_r$  du dispositif.

#### 3.2. Étude de l'oscillateur commandé en tension.

Cet oscillateur est représenté figure 10 ; le signal de commande  $v_2$  est celui issu de la consigne  $v_1$  ; un premier circuit (entrée  $v_2$ , sortie  $v_3$  ; figure 9) traite ce signal de commande de l'oscillateur.

On donne  $R_4 = R_5 = 100 \text{ k}\Omega$ ;  $R_6 = 10 \text{ k}\Omega$ ;  $C_3 = 0,033 \text{ }\mu\text{F}$ ;  $R_7 = 3,9 \text{ k}\Omega$ ;  $R_8 = R_9 = 10 \text{ k}\Omega$ ;  $R_{10} = 47 \text{ k}\Omega$ ;  $R_{11} = 100 \text{ k}\Omega$ .

$D_{Z_1}$  et  $D_{Z_2}$  sont des diodes Zener 9 V.

On rappelle que la tension  $v_2$  est toujours positive et qu'elle est inférieure à 6 V.

On pose  $v_2 = V_2$ .

3.2.1. Étude préliminaire : étude du circuit de la figure 8.

3.2.1.1. Quelle est la fonction réalisée par le circuit (entrée  $v_4$ , sortie  $v_5$ ) de la figure 8 ?

3.2.1.2. Quelles sont les valeurs que peut prendre  $v_5$  ?

3.2.1.3. Déterminer la caractéristique de transfert du circuit de la figure 8.

3.2.2. Étude du circuit d'entrée de l'oscillateur (fig. 9).

3.2.2.1. Montrer que la charge de ce circuit, tel qu'il est placé dans la figure générale 10, est bien ce qui a été représenté sur la figure 9.

3.2.2.2. Dans l'hypothèse où les deux diodes  $D_3$  et  $D_4$  seraient bloquées, déterminer la relation entre  $\varepsilon_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  puis entre  $\varepsilon_2$ ,  $v_2$  et  $v_3$ .

3.2.2.3. Exprimer dans ce cas  $v_3$  en fonction de  $v_5$  en négligeant les courants qui circulent dans  $R_4$  et  $R_5$ . En déduire les expressions de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  en fonction de  $V_2$  et  $v_5$ .

3.2.2.4. Pour  $v_5 = +9 \text{ V}$  en déduire l'état respectif des diodes  $D_3$  et  $D_4$  et en déduire que  $v_3 = V_2$ .

3.2.2.5. Pour  $v_5 = -9 \text{ V}$ , préciser l'état de  $D_3$  et  $D_4$  et en déduire l'expression de  $v_3$  en fonction de  $V_2$ .

3.2.3. Étude de l'oscillateur (fig. 10).

3.2.3.1. À partir des études précédentes établir la relation entre  $v_4$ ,  $V_2$  et le temps  $t$ .

3.2.3.2. Exprimer la fréquence  $f$  du signal  $v_5$  en fonction de  $v_4$ .

3.2.3.3. Dans quel domaine peut-on faire varier cette fréquence ?

3.2.3.4. Tracer  $v_6(t)$  pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  ( $\alpha$  est défini en 3.1.2.).

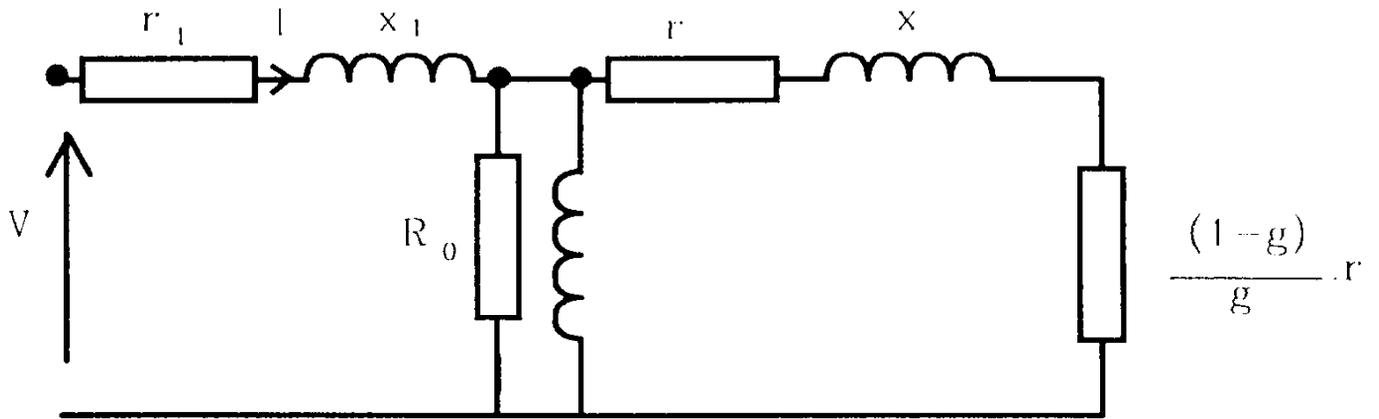


Figure 1

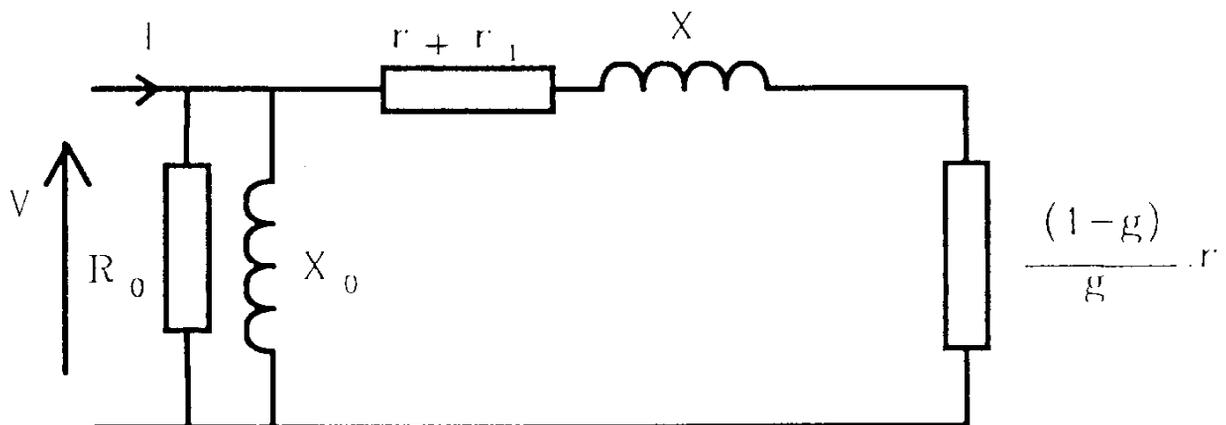


Figure 2

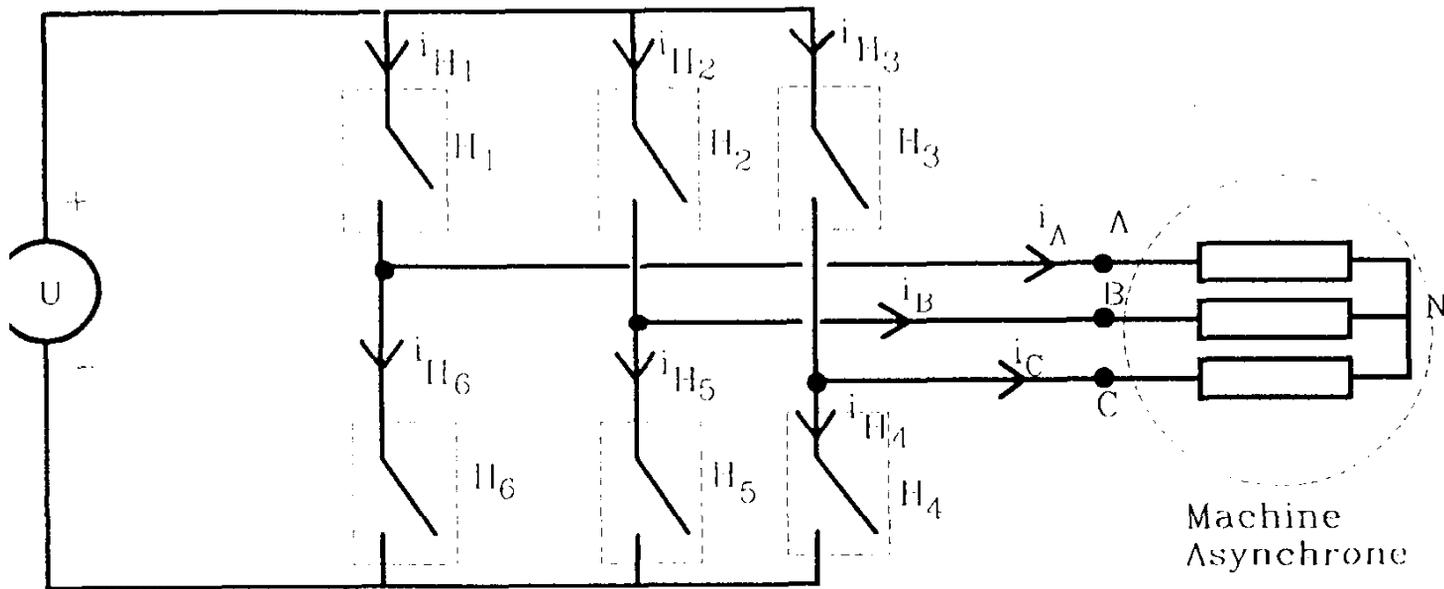


Figure 3

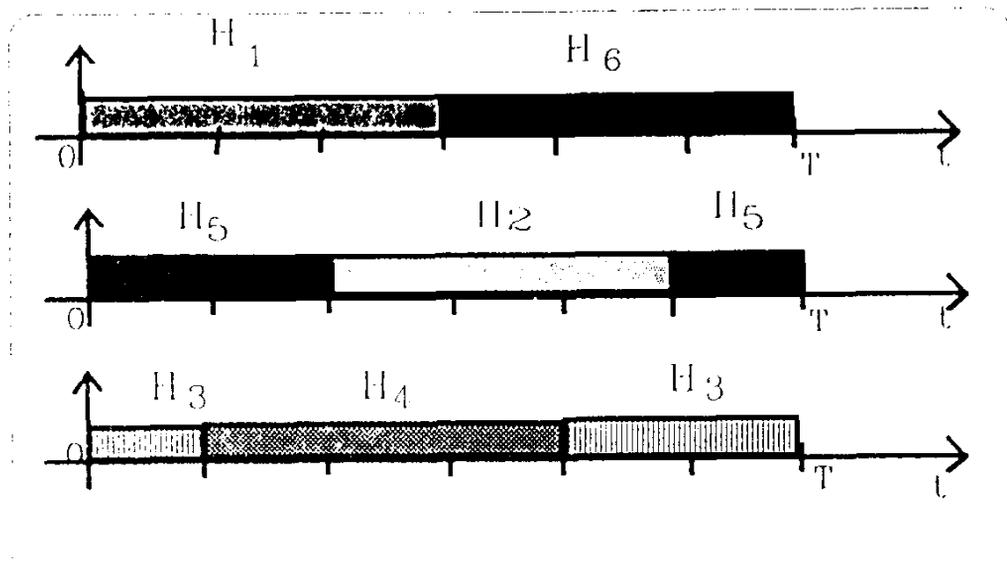


Figure 4

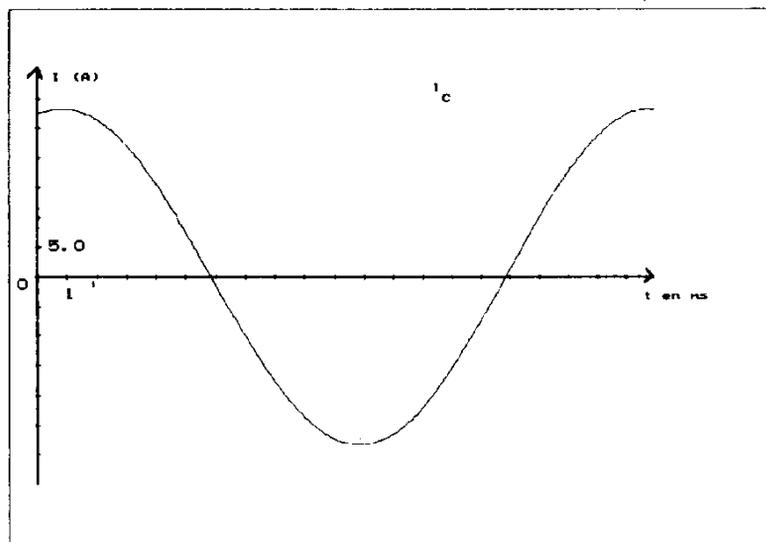
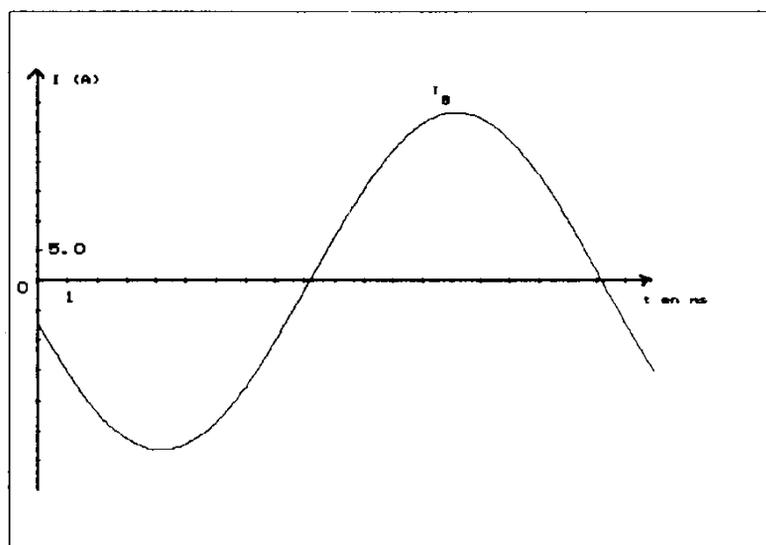
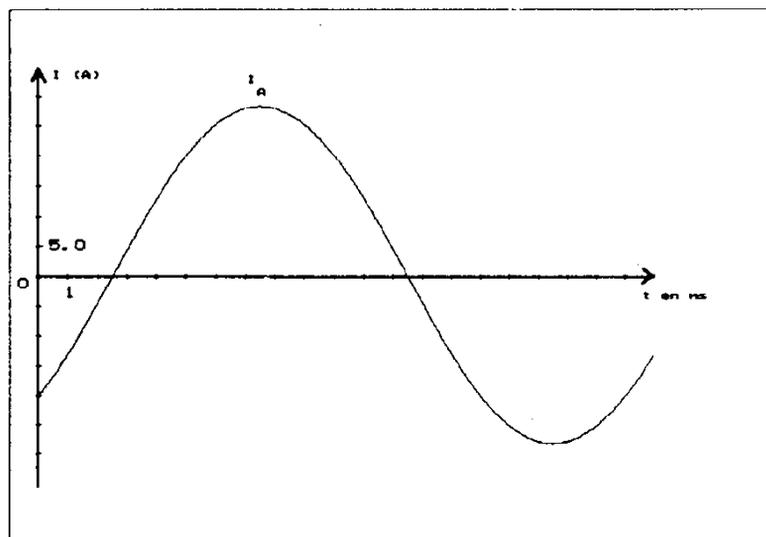


Figure 5

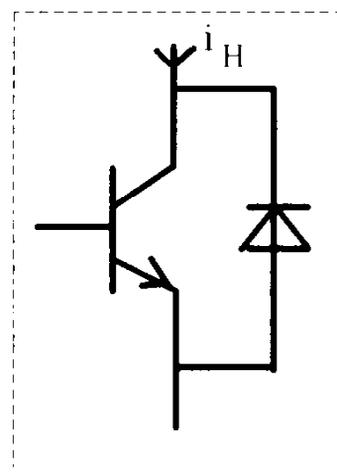


Figure 6

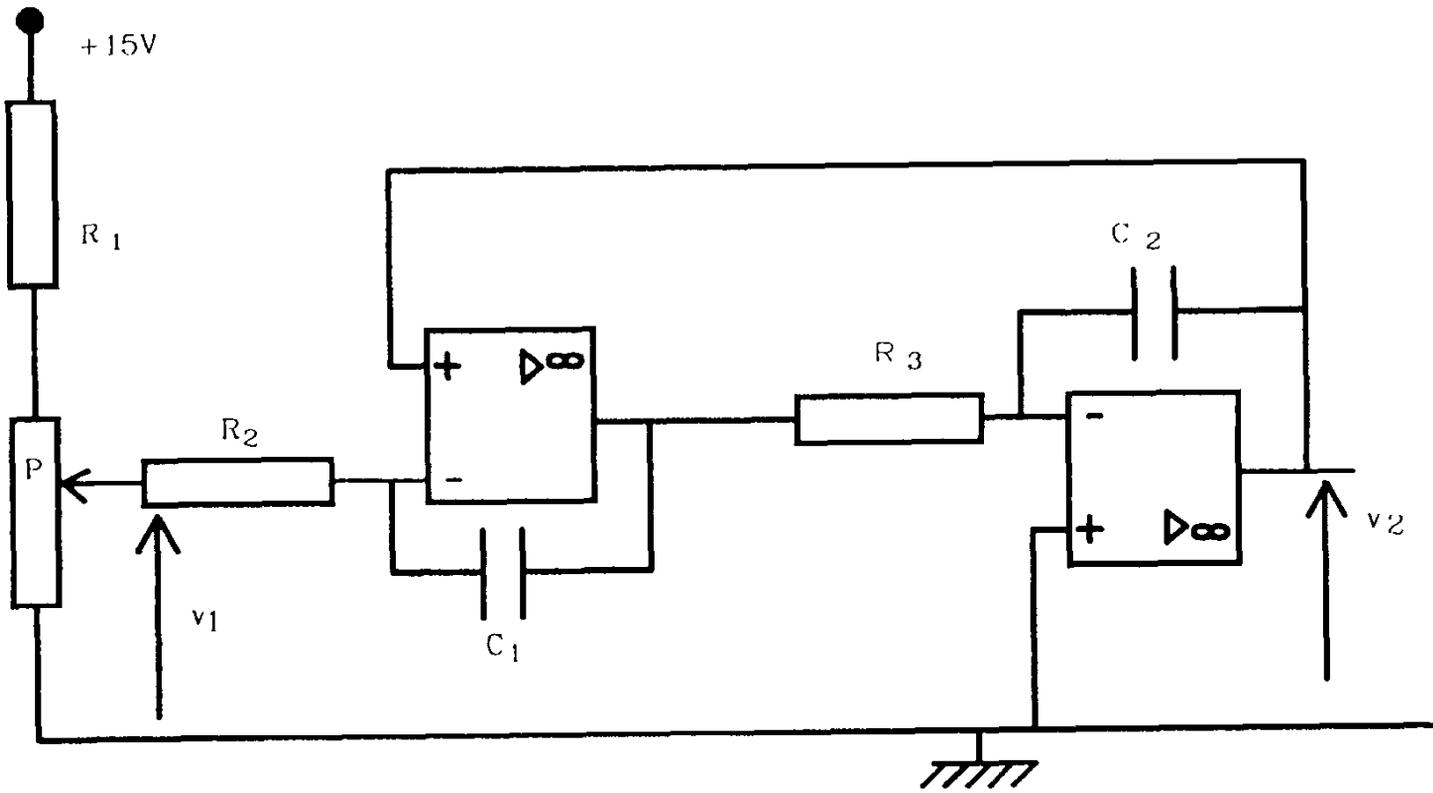


Figure 7

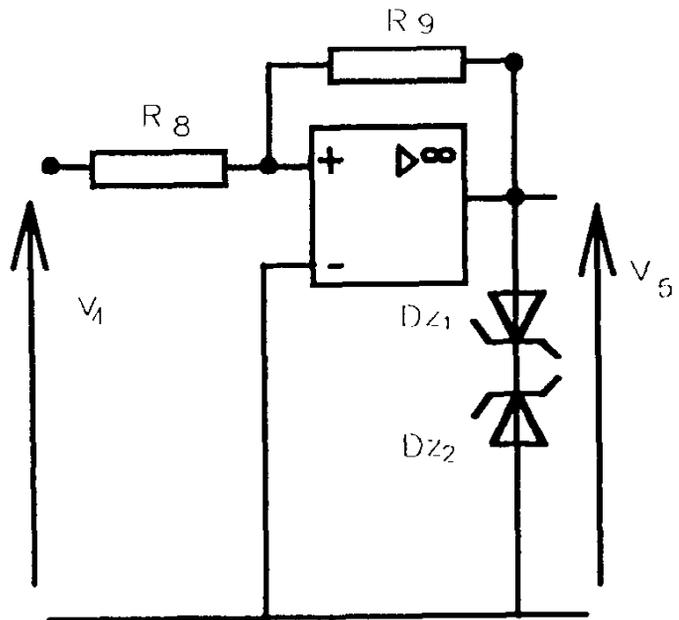


Figure 8

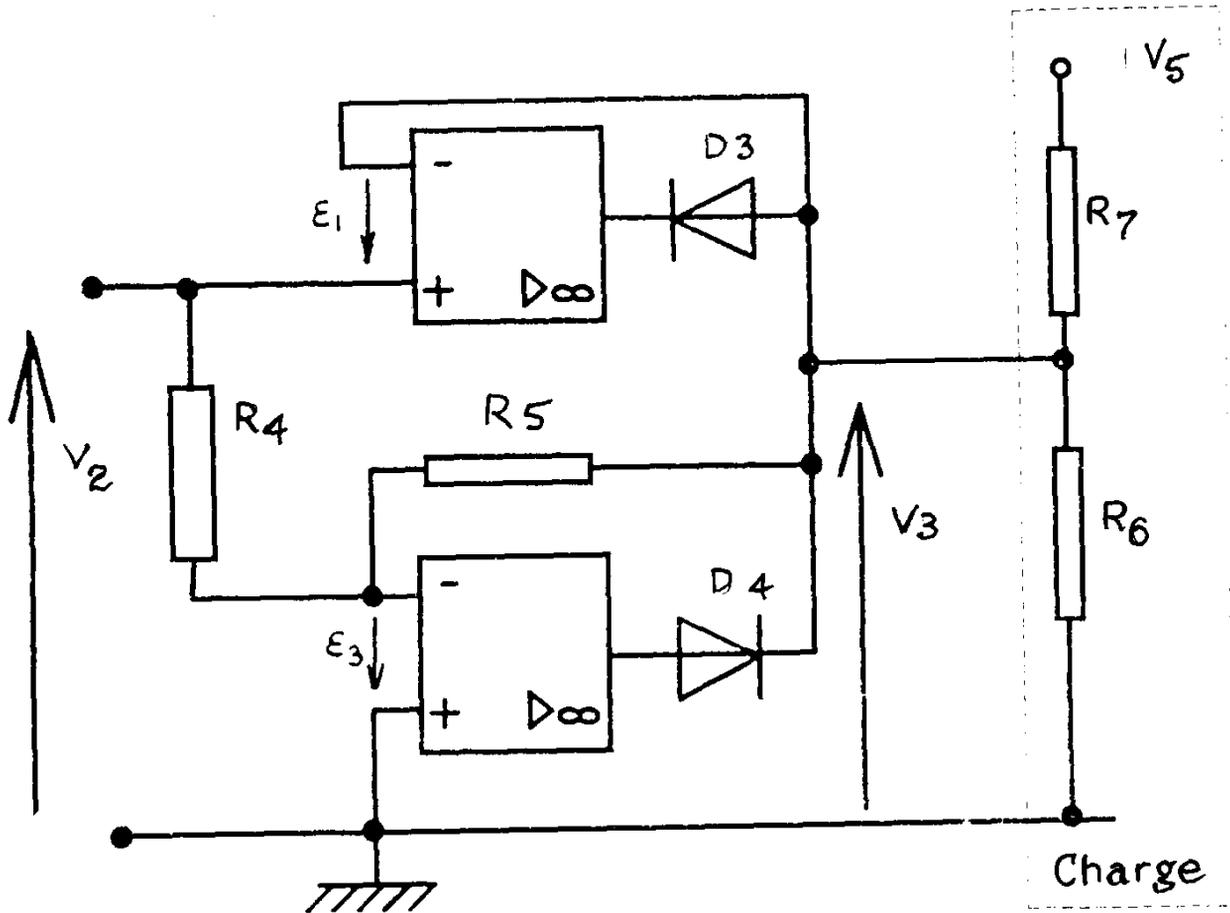


Figure 9

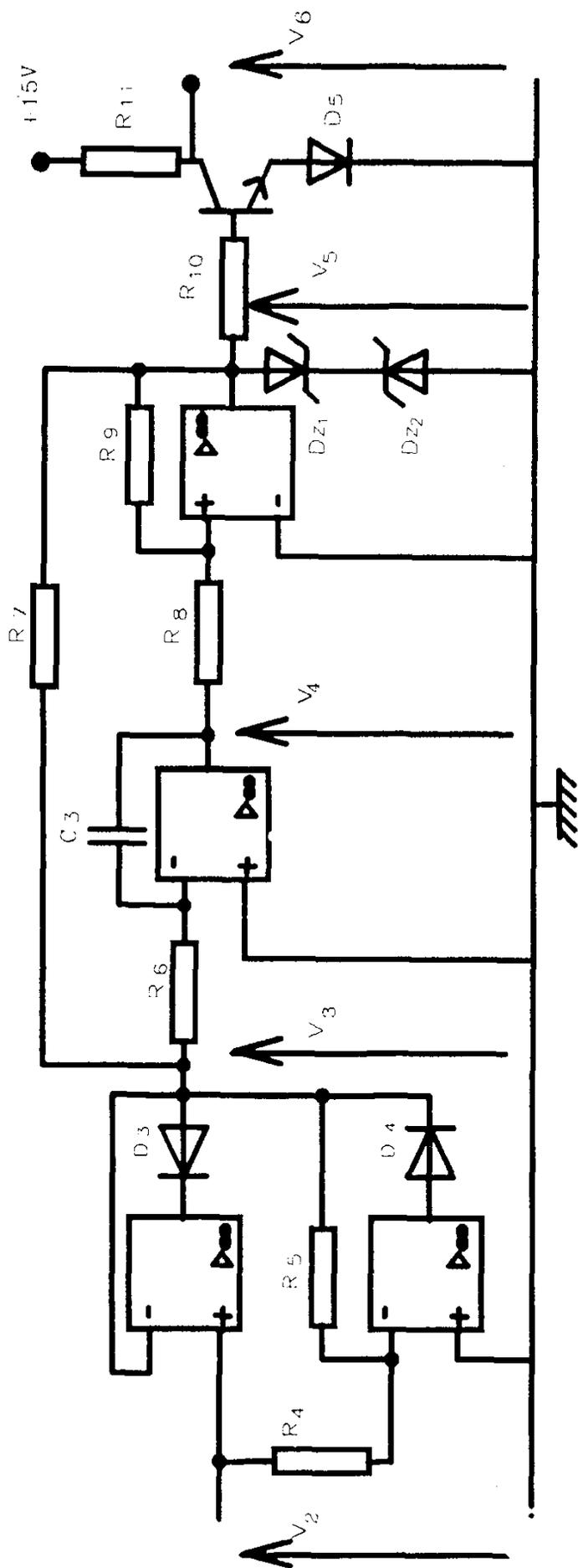


Figure 10

SESSION DE 1994

---

---

**concours interne  
de recrutement de professeurs certifiés  
et concours d'accès à l'échelle de rémunération**

---

---

section : sciences physiques

composition de chimie

Durée : 4 heures

*Calculatrice de poche – y compris calculatrice programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*Aucun document n'est autorisé.*

Le sujet est constitué de trois parties indépendantes A, B, C.

Les données et les éléments d'information sont en italique.

Le candidat est tenu d'indiquer clairement le numéro complet de chaque question devant sa réponse.

***Avertissement** : si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.*

## PARTIE A

## DOSAGE DES IONS NITRATE D'UN ENGRAIS PAR LA MÉTHODE DE LEITHE

Nous vous proposons d'étudier un engrais solide portant comme indications :

Engrais NPK 17.17.17

17 % d'azote total dont 6,3 % nitrique et 10,7 % ammoniacal

17 % d'anhydride phosphorique  $P_2O_5$

17 % d'oxyde de potassium  $K_2O$ .

Masses atomiques molaires en  $g \cdot mol^{-1}$  :

N	P	K	O
14	31	39,1	16

## 1. N, P, K.

- 1.1. Préciser sous quelles formes se présentent les éléments N, P et K dans cet engrais.
- 1.2. Déterminer les pourcentages massiques en azote, phosphore et potassium de cet engrais.
- 1.3. Les nitrates sont en train de s'accumuler dans notre environnement. Dans l'organisme, ils peuvent être transformés en nitrites qui peuvent entraîner la formation de nitrosamines cancérigènes.  
Écrire la demi-équation électronique de transformation des ions nitrate en ions nitrite  $NO_2^-$  en milieu acide.
- 1.4. L'acide orthophosphorique  $H_3PO_4$  fut découvert par Boyle à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle ; il obtint par combustion du phosphore, le décaoxyde de tétraphosphore, dont l'hydratation donne l'acide orthophosphorique.  
Écrire et équilibrer les équations de ces deux réactions.
- 1.5. Cet acide est obtenu industriellement par action de l'acide sulfurique et du phosphate de calcium.  
Écrire et équilibrer l'équation de cette réaction.

## 2. Dosage des ions nitrates.

## 2.0. Description d'un protocole opératoire.

## 2.0.1. Principe :

on fait réagir à chaud une solution d'engrais avec des ions  $Fe^{2+}$  en excès ; cet excès est dosé par des ions dichromate  $Cr_2O_7^{2-}$ .

## 2.0.2. Préparation de la solution S1 d'engrais :

peser avec précision une masse d'engrais voisine de 2 g ; introduire dans une fiole jaugée de 250 mL ; dissoudre dans l'eau et ajuster au trait de jauge.  
La masse d'engrais pesée est de 2,15 g.

2.0.3. Préparation de la solution S2 d'ions  $Fe^{2+}$  :

peser une masse de sel de Mohr ( $Fe(NH_4)_2(SO_4)_2 \cdot 6H_2O$ ) équivalente à 0,1 mol environ.  
Dissoudre dans l'eau dans une fiole de 500 mL ; compléter.

## 2.0.4. Préparation de la solution S3 d'ions dichromate :

préparer une solution de dichromate de potassium  $K_2Cr_2O_7$  à  $1,667 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

2.0.5 Étalonnage de la solution d'ions  $Fe^{2+}$  :

introduire, dans un bécher de 250 mL :

- 10,00 mL de la solution S2,
- 50 mL d'eau,
- 10 mL d'acide sulfurique concentré,
- 10 gouttes de 1,10-phénanthroline ferreuse, appelée aussi orthophénanthroline ferreuse.

Doser à l'aide de la solution S3 :

un dosage rapide indique le virage de l'indicateur vers 20 mL ; deux dosages précis donnent ensuite les virages pour :

$$V_1 = 19,55 \text{ mL} \quad \text{et} \quad V_2 = 19,70 \text{ mL}.$$

2.0.6. Action des ions  $Fe^{2+}$  sur la solution d'engrais :

mettre dans un erlenmeyer de 250 mL :

- 20,00 mL de la solution S1,
- 20,00 mL de la solution S2,
- 20 mL d'acide sulfurique concentré.

Porter à ébullition très légère pendant 5 minutes.

Refroidir, puis verser dans une fiole jaugée de 100 mL ; ajouter 10 gouttes de 1,10-phénanthroline ferreuse et compléter à 100 mL avec de l'eau.

Doser à l'aide de la solution S3 :

le virage est obtenu pour un volume  $V_e = 15,65 \text{ mL}$ .

## 2.0.7. Données :

- potentiels standard à  $25^\circ \text{C}$  ;
- $Fe^{3+}/Fe^{2+}$   $E_1^0 = 0,77 \text{ V}$  en milieu non complexant ; en milieu acide sulfurique concentré, le potentiel standard apparent est voisin de  $E_1^{0'} = 0,67 \text{ V}$  ;
- $Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}$   $E_2^0 = 1,33 \text{ V}$  ;
- $NO_3^-/NO_{(g)}$   $E_3^0 = 0,96 \text{ V}$  ;
- indicateur coloré d'oxydoréduction :  
orthophénanthroline Fer III / orthophénanthroline Fer II :  $E_4^0 = 1,06 \text{ V}$  ;  
(bleu) (rouge)
- électrode de référence :  
électrode au calomel saturée en KCl :  $E_{LCS} = 0,245 \text{ V}$ .
- $2,3 \frac{RT}{F} \approx 0,06$  à  $25^\circ \text{C}$ .
- $M (\text{g} \cdot \text{mol}^{-1})$  : N : 14 O : 16 H : 1 Fe : 56 S : 32

2.1. Justifier, à l'aide des données précédentes, les réactions mises en jeu au cours du dosage des ions nitrate (2.0.6.) et écrire les demi-équations électroniques et les équations-bilan correspondantes :

a. lors du mélange de S1 et S2 ;

b. lors de l'introduction de S3.

2.2. Pourquoi faut-il chauffer la solution d'engrais en présence des ions  $Fe^{2+}$  ?

2.3. Déterminer la concentration de la solution S2 en ions  $Fe^{2+}$

2.4. Déterminer la quantité en moles d'ions nitrate présents dans l'échantillon d'engrais de 2,15 g.

2.5. En déduire le pourcentage d'azote « nitrique » dans l'engrais.

- 2.6. Décrire le dispositif permettant de suivre les dosages par une méthode potentiométrique, grâce à un millivoltmètre ; préciser la constitution des électrodes et faire un schéma détaillé de l'électrode de référence.  
Donner la représentation schématique de la pile, précisant la nature de chaque conducteur ou électrolyte (on rappelle que dans ce type de représentation, les changements de phases sont symbolisés par un trait vertical et les jonctions liquides par un trait en pointillé).
- 2.7. Courbe de dosage des ions  $\text{Fe}^{2+}$  par les ions dichromate  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ , lors de l'étalonnage de la solution S2 (2.0.5.).
- 2.7.1. Comment est reliée la différence de potentiel  $U$  mesurée sur le millivoltmètre aux concentrations des espèces présentes en solution ?
- 2.7.2. En admettant que le pH reste constamment égal à 0, déterminer  $U$ , la d.d.p. mesurée entre les électrodes, en fonction du volume de dichromate versé (donner l'expression numérique  $U = f(V)$  :
- avant l'équivalence ; calculer  $U$  à  $V = 1, 10$  et  $18$  mL ;
  - à l'équivalence ;
  - au-delà de l'équivalence ; calculer  $U$  à  $V = 21, 25$  et  $30$  mL.
- 2.8. Tracer la courbe  $U = f(V)$  en respectant les échelles suivantes :
- 5 centimètres pour 10 millilitres en abscisse ;
  - 1 centimètre pour 0,1 volt en ordonnée.
- 2.9. L'expérience montre un écart par rapport à ces valeurs calculées, surtout au-delà de l'équivalence. Expliquer qualitativement ce phénomène.

### 3. Justification du choix de l'indicateur.

- 3.1. Justifier qualitativement, à partir de la courbe tracée au 2.8., le virage de l'indicateur.
- 3.2. Les complexes  $[\text{Fe}^{\text{III}}(\text{o-phen})_3]^{3+}$  et  $[\text{Fe}^{\text{II}}(\text{o-phen})_3]^{2+}$  sont très stables ;  $[\text{o-phen}]$  désigne l'orthophénanthroline | la constante de dissociation totale du complexe du  $\text{Fe}^{\text{II}}$  est donnée par  $\text{p}K_d = 17,7$ . Afin d'approfondir le fonctionnement de l'indicateur de fin de réaction, nous allons envisager le dosage suivant.
- 3.2.0. Préparer une solution contenant dans 50 mL :
- 0,099 g d'orthophénanthroline ( $M = 198,23 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ),
  - 0,196 g de sel de Mohr ( $M = 392,13 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ).
- On dose la totalité de cette solution par une solution de sulfate de cérium IV  $\text{Ce}(\text{SO}_4)_2$  à  $0,0250 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . En suivant le potentiel en fonction du volume de  $\text{Ce}^{4+}$  ajouté, on obtient la courbe de la figure 1, où les potentiels sont ici rapportés à l'électrode au calomel et KCl saturé (ECS) et non à l'électrode standard à hydrogène (appelée également électrode normale à hydrogène).  
On note sur cette courbe que les volumes aux équivalences sont pratiquement dans le rapport 2/3.  
Le potentiel standard du couple  $\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}$  est  $E_3^0 = 1,44 \text{ V}$ .
- 3.2.1. a. La solution initiale contient les trois espèces  $\text{Fe}^{2+}$ ,  $\text{o-phen}$  et  $[\text{Fe}(\text{o-phen})_3]^{2+}$ . Quelle équation de réaction relie ces espèces ?  
b. Déterminer la composition de cette solution en fonction de  $x$  (introduit au 3.2.). On suppose  $x > 1$ .
- 3.2.2. Indiquer pour chaque partie de la courbe les réactions qui se produisent lors de l'addition de sulfate de cérium. (On supposera que le complexe  $[\text{Fe}^{\text{II}}(\text{o-phen})_3]^{2+}$  est plus stable que  $[\text{Fe}^{\text{III}}(\text{o-phen})_3]^{3+}$ ).
- 3.2.3. Déterminer la stoechiométrie des complexes des ions  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{3+}$  avec l'orthophénanthroline, c'est-à-dire le coefficient  $x$ .
- 3.2.4. En utilisant la valeur du potentiel à la deuxième demi-équivalence, déterminer la constante de dissociation du complexe  $[\text{Fe}^{\text{III}}(\text{o-phen})_3]^{3+}$ .
- 3.2.5. Conclusion : reprendre l'explication du rôle de l'indicateur dans le dosage du § 2. et préciser les conditions d'emploi si l'on veut conserver au dosage toute sa précision.

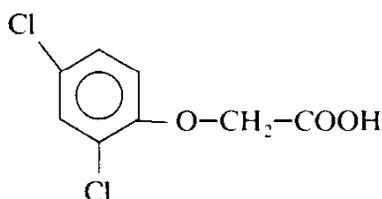
## PARTIE B

## LA LUTTE CONTRE LA MAUVAISE HERBE

Les parties 1., 2.1. et 2.2. sont indépendantes.

On désigne par mauvaise herbe, toute plante indésirable, soit parce qu'elle captera une partie des éléments nutritifs destinés à la plante cultivée, soit parce qu'elle gêne la récolte elle-même et oblige à un tri supplémentaire très onéreux, voire impraticable. Le sarclage, opération manuelle d'enlèvement des mauvaises herbes, a été peu à peu remplacé par l'usage des herbicides.

Les dérivés chlorés de l'acide phénoxyéthanique ont été introduits à la fin de la seconde guerre mondiale. L'un des plus utilisés est l'acide 2,4-dichlorophénoxyéthanique,



vendu sous le symbole 2,4-D

### 1. Synthèse du 2,4-D.

La synthèse est effectuée en deux étapes : chloration du phénol puis action de l'acide chloroéthanique en milieu basique.

#### 1.1. Étude de la première étape : la chloration du phénol.

- 1.1.1. Cette réaction de substitution nécessite un catalyseur : lequel ? Quel est son rôle ?
- 1.1.2. Préciser le mécanisme de la première substitution d'un atome d'hydrogène du phénol par un atome de chlore.  
On obtient majoritairement à ce stade les dérivés 1,2 et 1,4. Justifier ce fait en précisant les structures des intermédiaires réactionnels ; dessiner toutes les formules mésomères.
- 1.1.3. La deuxième substitution conduit majoritairement au dérivé 2,4 : justifier en comparant les effets des groupes  $-OH$  et  $-Cl$ .
- 1.1.4. Reproduire sommairement sur votre copie le profil énergétique représenté sur la figure 2 en précisant la nature de chaque état situé dans chaque creux. Comment désigne-t-on l'état du système représenté par un sommet sur la courbe ?

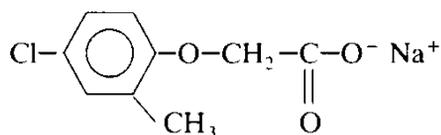
#### 1.2. Étude de la deuxième étape : le 2,4-dichlorophénol et l'acide monochloroéthanique sont chauffés à $105^{\circ}C$ en solution aqueuse de soude ( $pH = 10-12$ ).

- 1.2.1. Sous quelles formes se présentent le 2,4-dichlorophénol et l'acide chloroéthanique dans ce milieu ?
- 1.2.2. Écrire l'équation-bilan de la réaction. À quelle famille de réactions appartient-elle ?
- 1.2.3. Détailler le mécanisme de la réaction.
- 1.2.4. Quelle dernière opération faut-il exécuter pour obtenir le 2,4-D ?

### 2. Dosages d'acides phénoxyalcanoïques dans un produit commercial.

Ces herbicides sont utilisés sous forme de carboxylate alcalin, ou de carboxylate d'alkylammonium ou encore d'ester.

- 2.1. Dans un premier temps, nous vous proposons l'analyse d'un produit commercial contenant, sous forme de carboxylate de sodium à environ  $70 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ , le composé suivant connu sous le nom usuel de 2,4-MCPA :

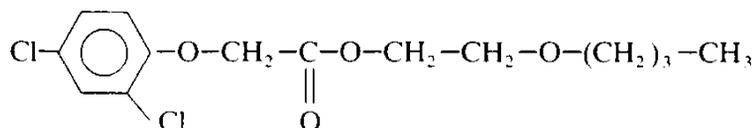


- 2.1.1. Donner le nom de l'acide 2,4-MCPA en nomenclature officielle.
- 2.1.2. Le  $\text{p}K_a$  de cet acide et de sa base conjuguée est de 2,9. Peut-on doser avec précision la solution commerciale par un acide fort ? Justifier votre réponse. (On pourra tracer rapidement l'allure de la courbe de variation du pH en fonction du volume d'acide versé lors d'un dosage de la solution commerciale par un acide fort).
- 2.1.3. Le même dosage peut être suivi par conductimétrie. Décrire sommairement le matériel nécessaire.
- 2.1.4. On dilue d'un facteur 2 la solution commerciale puis on prélève un volume  $v_0 = 20,0 \text{ mL}$  de la solution diluée que l'on introduit dans un bécher de  $100 \text{ mL}$  ; le dosage est effectué grâce à une solution d'acide chlorhydrique à  $0,200 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . La figure 3 donne l'évolution de la conductance corrigée  $G'$  en fonction du volume d'acide versé  $v$  :

$$G' = \frac{G(v + v_0)}{v_0}$$

où  $G$  est la conductance mesurée.

- 2.1.4.1. Justifier la correction de dilution.
- 2.1.4.2. Expliquer soigneusement chaque partie quasi linéaire de la courbe (on admettra que les conductivités molaires des ions chlorures et carboxylates sont du même ordre de grandeur).
- 2.1.4.3. Déterminer la concentration en 2,4-MCPA de la solution commerciale en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$  puis en  $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ .
- 2.2. Nous vous proposons d'étudier ici le protocole opératoire de l'analyse d'un produit contenant du 2,4-dichlorophénoxyéthanoate de 2-butoxyéthyle à environ  $600 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$  :



L'analyse sera faite par mesure de l'absorbance dans l'ultra-violet après avoir libéré l'acide.

- Mesurer avec précision un volume de solution commerciale contenant sensiblement  $0,06 \text{ g}$  d'ester. Ajouter  $10 \text{ mL}$  de soude à  $25 \%$  ( $250 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ ) ; introduire dans un ballon de  $125 \text{ mL}$  avec quelques billes de verre et adapter un réfrigérant à reflux. Porter à reflux pendant une heure.
- Transvaser dans une ampoule à décanter. Laver le réfrigérant et le ballon avec un peu d'eau que l'on ajoute au contenu de l'ampoule.
- Extraire par deux fois avec  $50 \text{ mL}$  d'éther diéthylique.
- Laver la solution étherée par deux fois  $10 \text{ mL}$  de solution de soude à  $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
- Réunir les phases aqueuses. Acidifier à l'acide sulfurique à  $50 \%$  ; un précipité apparaît. Ajouter  $1 \text{ mL}$  d'acide en excès.
- Dissoudre le précipité dans de l'éther ou du dichlorométhane. Réunir les phases organiques. Si la solution est trouble, laver avec  $10 \text{ mL}$  d'eau. Filtrer si nécessaire. Introduire dans une fiole jaugée de  $100 \text{ mL}$  et compléter avec le solvant choisi. Agiter.
- Prélever  $10 \text{ mL}$  de la solution précédente et introduire dans un petit ballon ; évaporer le solvant sous vide en chauffant doucement. Dissoudre le résidu solide dans  $10 \text{ mL}$  de soude à  $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  ; transférer dans une fiole jaugée de  $100 \text{ mL}$  et ajuster avec de l'eau.
- L'absorbance est mesurée à  $284 \text{ nm}$  en référence avec de la soude à  $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Un étalonnage est nécessaire pour obtenir un résultat quantitatif.

- 2.2.1. Quelle est la réaction mise en œuvre au *a.* ? Écrire l'équation de la réaction qui a lieu. Pourquoi faut-il chauffer une heure à reflux ?
- 2.2.2. Quel est le rôle de l'extraction au *c.* ? Où se trouve le 2,4-D et sous quelle forme ?
- 2.2.3. Quel est le rôle du lavage de l'étape *d.* ?
- 2.2.4. Quelle est la nature du précipité qui apparaît lors de l'acidification au *e.* ? Justifier sa formation.
- 2.2.5. Pourquoi récupère-t-on ce produit par dissolution dans l'éther et non par filtration ?
- 2.2.6. Justifier simplement l'emploi de la spectroscopie UV pour effectuer de dosage. Quelle est la relation qui lie l'absorbance et la concentration du produit ?
- 2.2.7. *Données :*
- 2,4-dichlorophénol :  $pK_a = 7,44$
  - acide chloroéthanoïque :  $pK_a = 2,90$
  - 2,4-MCPA :  $pK_a = 2,90$
  - 2,4-D :  $pK_a = 2,64$
  - solubilité du 2,4-D acide :
    - dans l'eau :  $0,9 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$
    - dans l'éther :  $270 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$
  - 4-chloro-2-méthylphénoxyacétate de sodium :  $M = 222,6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

## PARTIE C

## LA CHASSE AUX PUCERONS ET AUX ARAIGNÉES ROUGES

*Il ne suffit pas de nourrir la plante et de la débarrasser des mauvaises herbes ; encore faut-il faire la chasse aux parasites et insectes nuisibles.*

**1. L'hexachlorocyclohexane.**

*L'hexachlorocyclohexane est connu depuis 1825, mais ses propriétés insecticides ne furent établies qu'en 1940 par A. Dupire. En 1943, elles furent attribuées au seul isomère  $\gamma$ . Son usage est largement répandu, même dans les produits de lutte contre les poux.*

- 1.1. Le mode de préparation industriel s'apparente à celui qu'on peut mettre en œuvre au laboratoire à partir du benzène. Indiquer le ou les autres réactif(s), écrire l'équation de la réaction et préciser les conditions de l'expérience.
- 1.2. La réalisation de cette expérience doit être prohibée si l'on ne peut pas manipuler en vase clos. Quelle est la raison de cette interdiction ?
- 1.3. L'isomère  $\gamma$  peut être qualifié par l'enchaînement aaaaee, signifiant que trois atomes de chlore successifs sont en position axiale et les trois autres en position équatoriale. Représenter les conformations les plus stables de l'isomère  $\gamma$  et expliquer ce que l'on entend par « équilibre conformationnel ».

**2. La deltaméthrine.**

*L'un des insecticides les plus anciens est le pyrèthre ou poudre de chrysanthème séché ; dans la même famille, la deltaméthrine règne depuis près de quinze ans : efficacité contre les insectes même à très faible dose et faible toxicité pour les mammifères (malheureusement toxique pour les abeilles).*

- 2.1. La structure de cette molécule complexe présente plusieurs centres d'asymétrie. Reproduire la formule spatiale de la deltaméthrine (fig. 4) sur votre copie et repérer les centres d'asymétrie par un astérisque.
- 2.2. Combien existe-t-il de stéréoisomères de la deltaméthrine ?
- 2.3. Déterminer la configuration du carbone  $\alpha$  selon les règles de Cahn, Ingold et Prélog.

**Certaines données et situations sont extraites des ouvrages suivants :**

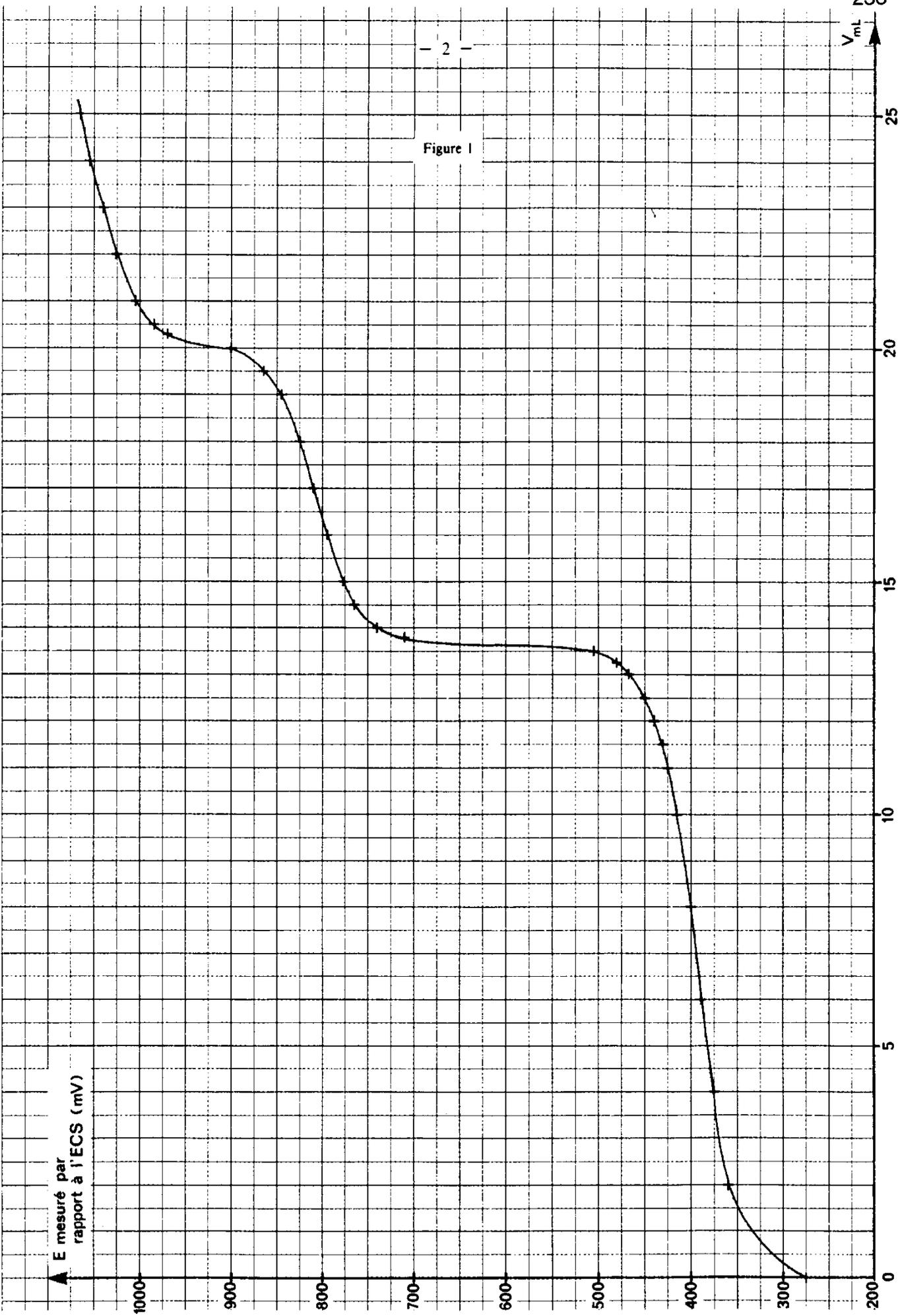
1. *Sujets des épreuves régionales des Olympiades de la Chimie* (Nancy, 1990 et Nantes, 1991).
2. *L'oxydoréduction* de Sarrazin et Verdaguer ; édition Ellipses.
3. *Chimie des pesticides* de J. Fournier ; édition Tec et Doc.

- 2 -

Figure 1

E mesuré par rapport à l'ECS (mV)

V<sub>mL</sub>



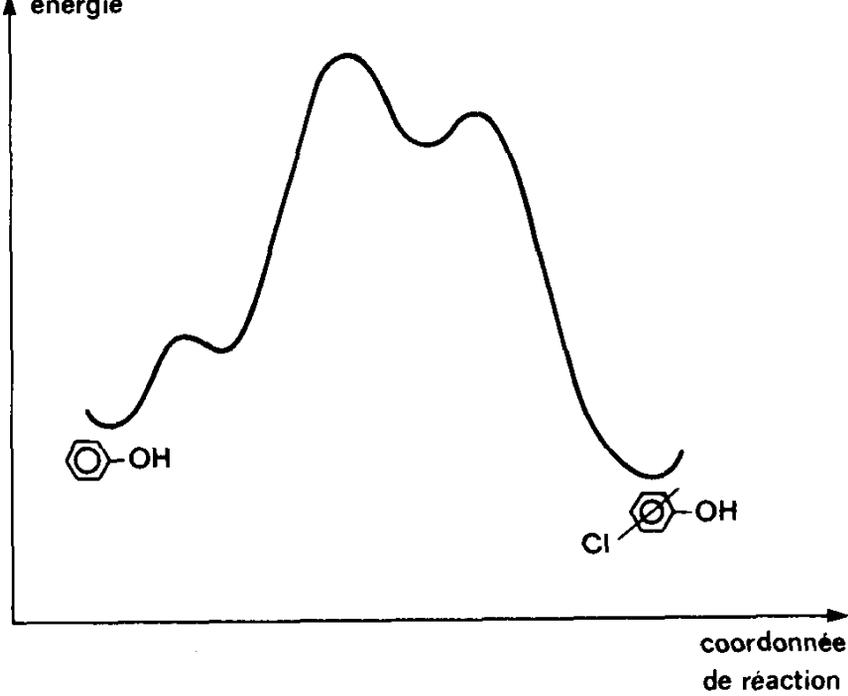


Figure 2

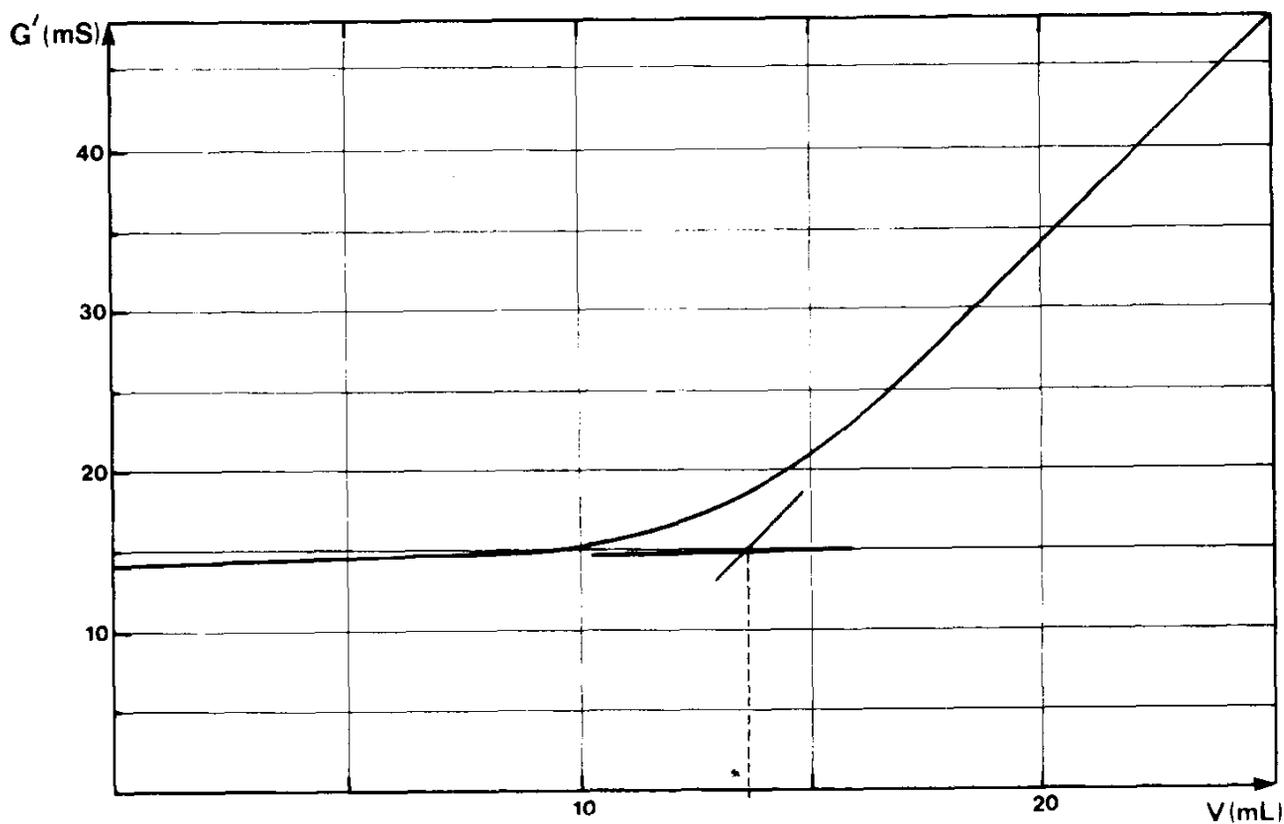
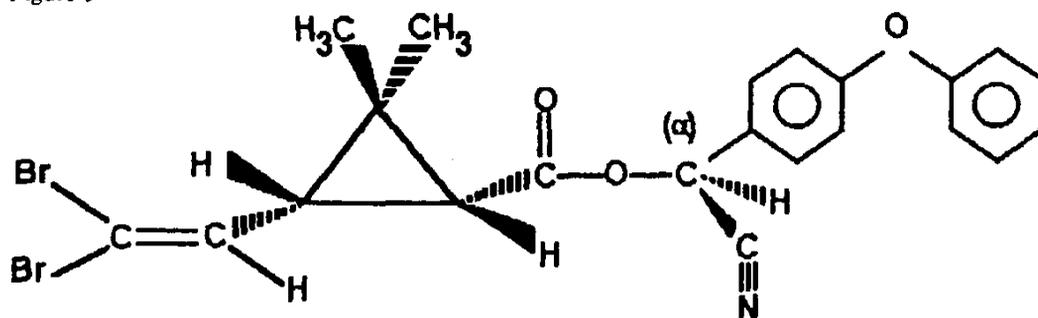


Figure 3



La DELTAMETHRINE

Figure 4

SESSION DE 1994

## concours interne de recrutement de professeurs certifiés et concours d'accès à l'échelle de rémunération

section : sciences physiques

composition de physique

section : physique et  
électricité appliquée

Durée : 4 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alpha-numérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Aucun document n'est autorisé.

### Avertissement aux candidats :

- Les deux parties sont indépendantes. Il n'est pas nécessaire de traiter l'ensemble des parties pour obtenir la note maximale. Dans une même partie les questions indépendantes des précédentes sont notées (\*). Les relations données que l'on demande d'établir pourront être admises pour poursuivre le problème.
- Pour les calculs numériques demandés on se limitera à la précision correspondant à celle donnée par les deux ou trois premiers chiffres significatifs. Les unités employées seront impérativement celles du système international, ou leurs multiples ou sous-multiples ; l'unité utilisée devra être précisée pour chacun des résultats numériques.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant la raison des initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

### Valeurs numériques utiles :

- Perméabilité du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ .
- Charge élémentaire :  $e \approx 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

### Développement en série de Taylor d'une fonction $f(x)$ :

- $f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ .

## 1. LES COURANTS COMME SOURCES DE CHAMP MAGNÉTIQUE

### 1.1. Préliminaire : questions de cours.

- 1.1.1. L'expression du champ magnétique  $\vec{dB}$  créé par un élément de courant  $I \vec{d\ell}$  en régime stationnaire (loi de Biot et Savart) peut se mettre sous la forme :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{d\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}.$$

Faire un schéma et préciser la signification des grandeurs physiques qui interviennent dans cette formule.

- 1.1.2. (\*) Le théorème d'Ampère, en régime stationnaire, exprimant la circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé ( $\mathcal{C}$ ) situé dans le vide, peut se mettre sous la forme :

$$\oint_{(*)} \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 \iint_{(\mathcal{S})} \vec{J} \cdot \vec{d\mathcal{S}}$$

où  $\vec{J}$  représente le vecteur densité de courant. Préciser la signification des grandeurs physiques qui interviennent dans ce théorème. Faire un schéma et rappeler les conventions d'orientation utilisées. Que devient ce théorème dans le cas de courants électriques circulant dans des conducteurs filiformes ? Ce théorème reste-t-il valable lorsque l'on est en régime non stationnaire ?

- 1.1.3. (\*) Définir le flux magnétique à travers un circuit fermé orienté. Faire un schéma et rappeler les conventions d'orientation utilisées. Pour quelles raisons dit-on que le champ magnétique est à flux conservatif ? Cette propriété reste-t-elle valable lorsque l'on est en régime non stationnaire ?
- 1.1.4. (\*) Définir l'inductance propre  $L$  d'un circuit électrique. Pour quelle raison ce coefficient  $L$  est-il toujours positif ?
- 1.1.5. (\*) Rappeler la loi de Laplace donnant l'expression de la force qui s'exerce sur un élément de courant placé dans un champ magnétique.
- 1.1.6. (\*) Rappeler l'expression du moment des forces magnétiques s'exerçant sur un petit dipôle magnétique de moment  $\vec{\mu}$ , au point où il se trouve, lorsqu'il est placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ .  
Quelle est l'action d'un champ magnétique, uniforme ou non, sur ce dipôle ? En déduire l'action d'un champ magnétique sur une petite aiguille aimantée.

### 1.2. Champ magnétique créé par un fil.

- 1.2.1. (\*) On considère un fil rectiligne de longueur infinie, de section circulaire négligeable, placé dans le vide et parcouru par un courant électrique constant d'intensité  $I$ . À quelle condition peut-on admettre que le champ magnétique existant au voisinage de ce fil correspond bien au champ créé par ce fil ? En utilisant les propriétés de symétrie, que peut-on dire de la direction du champ magnétique créé par ce fil ? Par application du théorème d'Ampère, en déduire l'expression du champ magnétique créé à la distance  $r$  du fil. Préciser son orientation à l'aide d'un schéma.

*Application numérique :*  $I = 1,70$  A. Calculer le champ magnétique  $B$  créé à une distance  $r = 3,0$  cm de ce fil infiniment long. Comparer cette valeur à celle de la composante horizontale du champ magnétique terrestre  $B_T = 2 \cdot 10^{-5}$  T.

- 1.2.2. Rappeler l'expérience d'Ersted mettant en évidence l'action d'un courant électrique parcourant un fil rectiligne, sur une petite aiguille aimantée assimilable à un petit dipôle magnétique. Comment peut-on interpréter cette action ? Quelles précautions faut-il prendre pour réaliser cette expérience ?

- 1.2.3. On considère maintenant deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance  $d$  l'un de l'autre dans le vide. Chacun de ces deux conducteurs est parcouru par un courant électrique constant, de même intensité  $I$  et de même sens. Exprimer la force qui s'exerce sur un élément de courant d'un des deux conducteurs, du fait de la présence de l'autre. Préciser son orientation à l'aide d'un schéma.

*Application numérique :* La force s'exerçant entre ces deux conducteurs placés dans le vide à une distance de 1 mètre l'un de l'autre est de  $2 \cdot 10^{-7}$  newton par mètre de longueur. En déduire la valeur de l'intensité  $I$  parcourant chacun de ces conducteurs. Quelle remarque vous suggère ce résultat ?

### 1.3. Champ magnétique créé par une bobine plate, bobines de Helmholtz.

- 1.3.1. (\*) On considère une spire circulaire de rayon  $R$  parcourue par un courant d'intensité  $I$ . En utilisant les propriétés de symétrie, que peut-on dire de la direction du champ magnétique créé par cette spire en un point de son axe ? En utilisant la loi de Biot et Savart montrer que le champ magnétique créé en un point  $M$  de son axe par une spire circulaire de rayon  $R$  parcourue par un courant d'intensité  $I$  a pour expression :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 R} \sin^3 \beta$$

où l'angle  $\beta$  est défini sur la figure 1. Faire un schéma indiquant le sens et la direction de ce champ.

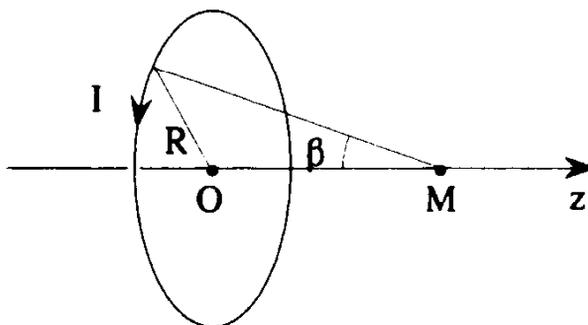


Figure 1

Tracer qualitativement la courbe donnant la variation de  $B$  en fonction de la distance  $z$  du point  $M$  au centre  $O$  de la bobine. Vérifier que la courbe  $B(z)$  présente un point d'inflexion pour  $z = \frac{R}{2}$ . Donner la valeur numérique du rapport  $B\left(z = \frac{R}{2}\right) / B(z = 0)$ .

*Application numérique :* Comparer à la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre,  $B_T = 2 \cdot 10^{-5}$  T, la valeur du champ magnétique créé en son centre par une bobine plate comportant  $N = 130$  spires de rayon moyen  $R = 15,0$  cm, parcourue par un courant d'intensité  $I = 1,70$  A.

- 1.3.2. On considère un dispositif constitué de deux bobines plates, identiques à celle étudiée précédemment, de même rayon moyen  $R$ , de même axe et comportant chacune  $N$  spires. Chacune de ces deux bobines est parcourue par un courant électrique constant, de même intensité  $I$  et de même sens. La distance entre les centres  $O_1$  et  $O_2$  des bobines vaut  $d$  (figure 2). On appelle  $O$  le milieu de  $O_1 O_2$  et  $x$  la distance d'un point  $M$ , sur l'axe, au point  $O$ . On se propose de montrer que pour une certaine valeur de  $d$ , que l'on exprimera en fonction de  $R$ , le champ magnétique varie très peu sur l'axe au voisinage du point  $O$  : le dispositif est alors appelé « bobines de Helmholtz ». Montrer que le champ magnétique au point  $M$  peut se mettre sous la forme :

$$B(x) = f\left(z = \frac{d}{2} + x\right) + f\left(z = \frac{d}{2} - x\right)$$

où  $f(z)$  est une fonction que l'on définira. En effectuant un développement limité de  $B(x)$  pour  $x$  petit, faisant intervenir les dérivées première, seconde et troisième de la fonction  $f(z)$  que l'on ne cherchera pas à exprimer, montrer que pour une certaine valeur de  $d$ , que l'on exprimera en

fonction de  $R$ , le champ magnétique se met sous la forme :  $B(x) = 2f\left(\frac{d}{2}\right) + o(x^3)$ .

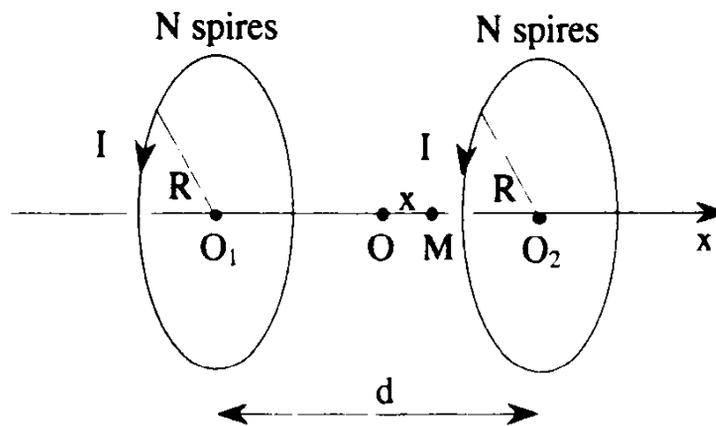


Figure 2

*Application numérique* : Avec les valeurs numériques précédentes, calculer, dans cette configuration, le champ magnétique au point  $O$  milieu de  $O_1 O_2$  et celle du champ magnétique au centre de l'une des deux bobines. Conclure.

#### 1.4. Champ magnétique créé par une bobine longue.

On considère une bobine longue sans noyau de fer, dont les caractéristiques sont les suivantes :

Nombre de spires :  $N = 200$  ; rayon moyen des spires :  $R = 2,50$  cm ; longueur :  $\ell = 40$  cm.

- 1.4.1. (\*) En assimilant la bobine à un solénoïde très allongé et en utilisant les propriétés de symétrie, que peut-on dire de la direction du champ magnétique créé à l'intérieur par cette bobine lorsqu'elle est parcourue par un courant continu d'intensité  $I$  ? Pour quelles raisons peut-on admettre que le champ magnétique est nul à l'extérieur ? Par application du théorème d'Ampère montrer que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde et calculer sa valeur  $B_0$  en fonction de l'intensité  $I$  du courant et du nombre  $n$  de spires par unité de longueur. Préciser son orientation à l'aide d'un schéma.

*Application numérique* :  $I = 7,0$  A. Calculer le champ magnétique  $B_0$  à l'intérieur de la bobine citée, le comparer à la valeur de la composante horizontale du champ magnétique terrestre  $B_T = 2 \cdot 10^{-5}$  T.

1.4.2. Établir, avec la même approximation, l'expression théorique de l'inductance propre  $L$  de la bobine.

*Application numérique* : Calculer  $L$  pour la bobine citée.

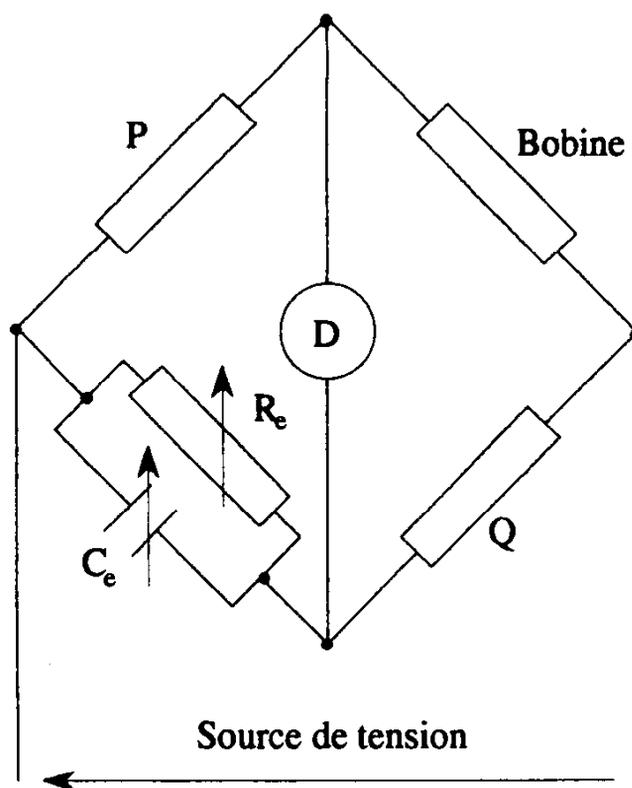


Figure 3

1.4.3. (\*) Pour mesurer expérimentalement la valeur de l'inductance de cette bobine, on utilise un montage en pont, appelé pont de Maxwell (figure 3).  $P$  et  $Q$  sont deux résistances pures ;  $R_e$  est une résistance pure, réglable, réalisée à l'aide d'une boîte de résistances ;  $C_e$  est une capacité pure, réglable, réalisée à l'aide d'une boîte de capacités ; le pont est alimenté par une source de tension sinusoïdale de fréquence  $f_0 = 400$  Hz ; le détecteur  $D$  est composé d'un filtre passe-bande ( $\mathcal{F}$ ) alimentant un voltmètre électronique couplé à un oscilloscope. La bobine est modélisée par son modèle « bande étroite » série, c'est-à-dire par l'association en série d'une inductance pure  $L$  et d'une résistance pure  $R$ .

Quel est le rôle du filtre passe-bande ( $\mathcal{F}$ ) ? Quelle doit être la fréquence centrale de sa bande passante ? Préciser la façon dont on opère pour équilibrer le pont.

On note  $R_0$  et  $C_0$  les valeurs de  $R_e$  et  $C_e$  lorsque le pont est équilibré. Donner les expressions de  $L$  et  $R$  de la bobine en fonction de  $P$ ,  $Q$ ,  $R_0$  et  $C_0$ .

*Application numérique* : On a  $P = 100 \Omega$ ,  $Q = 100 \Omega$ ,  $R_0 = 8,0 \text{ k}\Omega$  et  $C_0 = 24,1 \text{ nF}$ . Calculer  $L$  et  $R$  pour la bobine citée. Comparer à la valeur théorique obtenue précédemment. Conclure.

- 1.4.4. On considère maintenant cette bobine longue comme une distribution de spires circulaires de rayon  $R$  et de même axe  $Oz$ . En admettant que sur une longueur  $dz$  de solénoïde il y a  $dN = ndz$  spires, en déduire, par intégration, l'expression du champ magnétique sur l'axe de la bobine en fonction de l'intensité  $I$ , du nombre  $n$  de spires par unité de longueur et des angles  $\theta_-$  et  $\theta_+$  définis sur la figure 4. Dans quel cas retrouve-t-on l'expression du solénoïde infiniment long ?

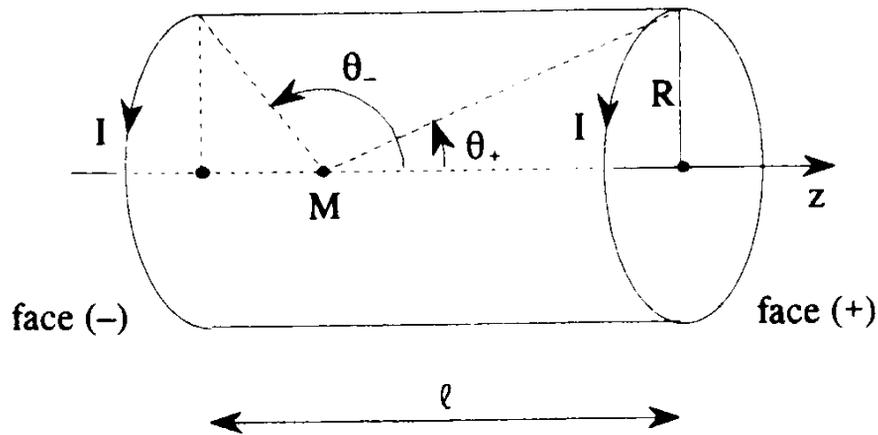


Figure 4

Exprimer le rapport de la valeur du champ au centre du solénoïde,  $B_0$ , à celle,  $B_\infty$ , obtenue en supposant le solénoïde infiniment long. À partir de quelle valeur du rapport  $l/R$  peut-on assimiler, avec une incertitude relative inférieure à 2 %, le champ au centre de la bobine à celui donné en utilisant l'approximation du solénoïde infiniment long ?

*Application numérique* : Tracer la courbe donnant la variation du champ magnétique sur l'axe, à l'intérieur du solénoïde, pour la bobine citée.

### 1.5. Champ magnétique créé par un bobinage torique à section carrée.

On considère un bobinage (figure 5) de  $N$  spires régulièrement réparties sur un tore à section carrée (surface engendrée par la rotation d'un carré autour d'une droite de son plan, droite parallèle à l'un de ses côtés et ne traversant pas le carré), sans noyau de fer, dont les caractéristiques sont les suivantes :

Nombre de spires :  $N = 200$  ; côté du carré :  $2a = 5,0$  cm ; distance du centre d'un des carrés à l'axe du tore :  $d = 6,0$  cm.

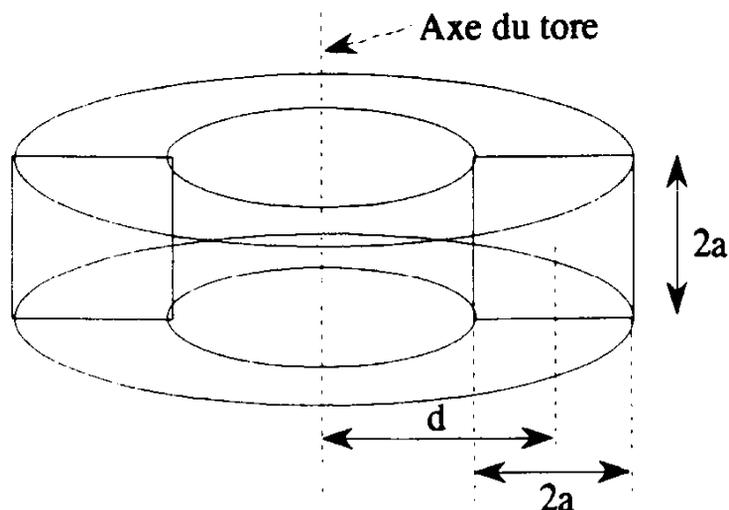


Figure 5

- 1.5.1. (\*) En utilisant les propriétés de symétrie, justifier que le champ magnétique créé par ce bobinage lorsqu'il est parcouru par un courant continu d'intensité  $I$  est orthoradial. Par application du théorème d'Ampère, en déduire l'expression du champ magnétique  $B(r)$  créé à l'intérieur du solénoïde à la distance  $r$  de l'axe du tore en fonction de l'intensité  $I$  du courant, du nombre  $N$  de spires et de la distance  $r$  à l'axe. En utilisant le même type de raisonnement, montrer que le champ magnétique est nul en tout point extérieur au tore.
- 1.5.2. En déduire l'expression théorique de l'inductance propre  $L$  de ce bobinage torique. Dans le cas particulier où  $a$  est très petit devant  $d$ , vérifier que l'on obtient pour l'expression de  $L$  la même formule que celle obtenue au 1.4.2. dans le cas du solénoïde, en posant  $\ell = 2\pi d$ .
- Application numérique :* Calculer numériquement  $L$  pour le bobinage cité.

## 2. ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UNE PARTICULE

### 2.1. Préliminaire : questions de cours.

- 2.1.1. Rappeler l'expression de la force  $\vec{f}$  s'exerçant sur une particule chargée, de charge  $q$ , caractérisée par le vecteur vitesse  $\vec{v}$  mesuré dans un référentiel galiléen d'étude et placée dans un champ électrique  $\vec{E}$  et un champ magnétique  $\vec{B}$ .
- 2.1.2. Par application du théorème de l'énergie cinétique, montrer qu'un champ magnétique seul ne peut communiquer d'énergie à une particule chargée.
- 2.1.3. Une particule de charge  $q$  est placée dans un champ électrique  $\vec{E}$ , stationnaire et uniforme, dérivant d'un potentiel scalaire  $V$ . Calculer, par rapport au référentiel supposé galiléen ( $\mathcal{R}$ ) où existe ce champ électrique et en l'absence de champ magnétique, la vitesse d'une particule partant d'un point  $A$  au potentiel  $V_A$  et arrivant en  $B$  au potentiel  $V_B$ . En déduire la polarité d'une plaque accélérant des électrons issus d'une électrode au potentiel zéro.

En physique atomique et nucléaire, on utilise comme unité d'énergie l'électronvolt. Rappeler sa définition et son facteur de conversion en unité SI.

### 2.2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique.

On se propose d'étudier une expérience de cours mettant en évidence le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, ainsi que la mesure du rapport  $e/m$  de l'électron. Pour réaliser, dans un certain volume, un champ magnétique sensiblement uniforme, on utilise le dispositif des bobines de Helmholtz. L'appareil utilise un tube spécial. Ce tube à électrons est centré entre ces deux bobines. Pour visualiser la trajectoire des électrons on n'opère pas dans le vide, mais dans une ampoule où l'on a introduit, après que le vide ait été fait, de la vapeur de mercure, à la pression de vapeur saturante. Les électrons sont émis par une cathode chaude et sont ensuite accélérés par la différence de potentiel existant entre la cathode et l'anode cylindrique. Une partie des électrons émis sort du dispositif par une petite ouverture située au centre de l'anode cylindrique. Le faisceau d'électrons, émis de façon continue, est focalisé par une grille prévue à cet effet, et devient sensiblement homocinétique. Les collisions des électrons ayant acquis une énergie cinétique suffisante avec les atomes de mercure ionisent une fraction de ceux-ci. La capture d'électrons libres par ces ions permet l'émission du spectre du mercure et sa radiation bleu-vert caractéristique. La recombinaison et l'émission ayant lieu près du point d'ionisation, le trajet du faisceau d'électrons est rendu ainsi visible par la vapeur de mercure.

On désigne par  $-e$  la charge de l'électron et  $m$  sa masse. Dans cette étude on supposera le champ magnétique uniforme et stationnaire, et l'on admettra que le mouvement des électrons a lieu dans le vide.

- 2.2.1. (\*) Dans le référentiel galiléen d'étude choisi, le champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  est dirigé selon l'axe Oz. On se place dans le cas où le vecteur vitesse initiale  $\vec{v}_0$  est perpendiculaire à la direction du champ magnétique ;  $\vec{v}_0$  sera supposé être dirigé selon l'axe Oy. À l'instant initial,  $t = 0$ , on a alors :  $x = y = z = 0$ ,  $\dot{x} = \dot{z} = 0$  et  $\dot{y} = v_0$ .

Montrer que la trajectoire est un cercle dont on déterminera le rayon  $r$  en fonction de  $B$ ,  $e$ ,  $m$  et  $v_0$ . Préciser sur un schéma le sens de parcours de l'électron sur cette trajectoire.

- 2.2.2. On note  $U$  la tension d'accélération entre la cathode émettrice et l'anode ; en déduire l'expression du rapport  $e/m$  de l'électron en fonction de  $B$ ,  $U$  et  $r$ .

*Application numérique :*  $U = 200$  V,  $r = (4,1 \pm 0,2)$  cm,  $B = 1,17$  mT. Déterminer le rapport  $e/m$  de l'électron en supposant que la plus importante cause d'erreur est celle sur la détermination du rayon  $r$  de la trajectoire. En déduire la valeur de la masse de l'électron en supposant que la valeur de sa charge est connue.

- 2.2.3. Le vecteur vitesse initiale  $\vec{v}_0$  fait maintenant un angle  $\alpha$  avec le champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ . Ceci peut être obtenu en tournant le tube. En choisissant les axes  $Ox$  et  $Oy$  tels que  $\vec{v}_0$  soit dans le plan  $yOz$ , on a alors les conditions initiales suivantes :  $x = y = z = 0$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = v_0 \sin \alpha$  et  $\dot{z} = v_0 \cos \alpha$ .

Donner l'équation et préciser la nature de la nouvelle trajectoire.

### 2.3. Mesure de champs magnétiques : sonde à effet Hall.

L'effet Hall apparaît dans les métaux et les semi-conducteurs. On considère un matériau conducteur dans lequel il n'existe qu'un seul type de porteurs de charge. Soit  $n$  le nombre volumique des porteurs et  $q$  leur charge. Pour simplifier les raisonnements et les schémas, on supposera que la charge des porteurs est positive.

- 2.3.1. (\*) Dans un repère orthonormé  $Oxyz$ , on considère une petite plaquette, réalisée dans ce matériau, ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, de très grande longueur  $a$  selon  $Ox$ , de largeur  $b$  selon  $Oy$  et d'épaisseur  $c$ , très faible devant  $b$ , selon  $Oz$ . Cette plaquette est traversée par un courant d'intensité  $I$  constante dont on supposera la densité de courant uniforme sur la section  $S = bc$  de la plaquette et dirigée selon la direction  $Ox$ .

En utilisant la relation de définition du vecteur de densité de courant  $\vec{J}$ , exprimer, lorsque la plaquette n'est soumise à aucun champ magnétique et en projetant dans le repère d'étude, la vitesse moyenne d'ensemble  $\vec{v}$  des porteurs de charge dans cette plaquette en fonction de  $n$ ,  $q$  et  $J$ , puis en fonction de  $I$ ,  $S$ ,  $n$  et  $q$ .

- 2.3.2. (\*) La plaquette est maintenant soumise à un champ magnétique perpendiculaire à son plan, soit  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  (figure 6).

Avant que le régime permanent ne soit atteint, les premiers porteurs de charge qui arrivent dans la plaquette sont soumis à une force magnétique. Justifier le fait qu'il apparaît alors un excès de charges positives (ou un défaut de charges négatives) sur le plan d'abscisse  $y = -\frac{b}{2}$  et un défaut de charges positives (ou un excès de charges négatives) sur le plan d'abscisse  $y = \frac{b}{2}$ .

Ces premières charges sont responsables de la création d'un champ électrique  $\vec{E}_{\text{Hall}}$ , appelé « champ électrique de Hall » et dirigé selon  $Oy$ .

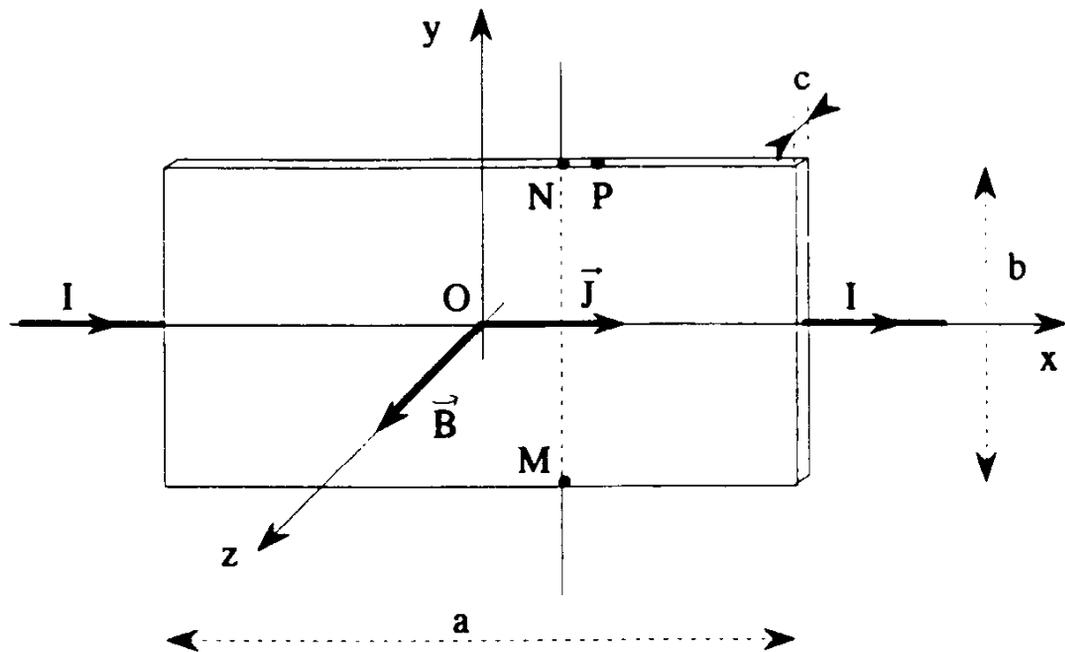


Figure 6

Lorsque le régime permanent est atteint, les nouveaux porteurs de charge qui arrivent dans la plaquette sont soumis à une force magnétique et à la force électrique due à la contribution du champ électrique de Hall. Que peut-on dire alors de la résultante de ces deux forces ? En déduire l'expression du champ électrique de Hall, en projection sur  $Oy$ , en fonction de  $B$ ,  $I$ ,  $S$ ,  $n$  et  $q$ .

On mesure la différence de potentiel  $V_{\text{Hall}} = V_M - V_N$  entre les deux points  $M$  et  $N$  de ses bords situés sur une même perpendiculaire à  $Ox$  (figure 6). Des calculs précédents, déduire la valeur de cette différence de potentiel en fonction de  $B$ ,  $I$ ,  $n$ ,  $q$  et  $c$ . Comment cette sonde peut-elle servir à la mesure d'un champ magnétique ? Sur quelle grandeur peut-on jouer pour définir différents calibres de mesure ?

2.3.3. La plaquette est maintenant soumise à un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_y$ . Que devient la différence de potentiel  $V_{\text{Hall}}$  dans ce cas ?

Même question lorsque la plaquette est soumise à un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ .

Conclure quant à l'utilisation d'une sonde à effet Hall pour la mesure d'un champ magnétique.

2.3.4. La plaquette est à nouveau soumise à un champ magnétique perpendiculaire à son plan, soit  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  (figure 6), mais on commet une erreur de positionnement du contact  $N$  et la d.d.p.  $V$  est mesurée entre  $M$  et  $P$ , tel que  $NP = d$ .

On suppose que le matériau possède une conductivité  $\gamma$  et obéit à la loi d'Ohm sous forme locale. En déduire l'expression de la composante du champ électrique qui existe suivant la direction  $Ox$  en fonction de  $I$ ,  $S$  et  $\gamma$ . Exprimer la d.d.p.  $V$  mesurée entre  $M$  et  $P$  en fonction de  $V_{\text{Hall}}$ ,  $I$ ,  $S$ ,  $\gamma$  et  $d$ . Comment pourrait-on s'affranchir de l'erreur commise en confondant  $V$  et  $V_{\text{Hall}}$  ?

SESSION DE 1994

**concours interne  
de recrutement de professeurs certifiés  
et concours d'accès à l'échelle de rémunération**

section : physique  
et électricité appliquée

composition d'électricité appliquée

Durée : 4 heures

*Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable et alphanu-  
mérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la  
circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*Aucun document n'est autorisé.*

**Avertissement aux candidats**

Les deux parties de l'épreuve, d'importance sensiblement égale, sont totalement indépendantes.

Il n'est pas nécessaire de traiter l'ensemble du sujet pour obtenir la note maximale.

Afin de faciliter la tâche des candidats, chaque document-réponse leur est fourni en double exemplaire. Un seul exemplaire de chacun de ces documents sera remis avec la copie.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

## Première Partie

### Electronique : étude d'un générateur de signaux

On se propose d'étudier un générateur fournissant un signal rectangulaire  $v_6(t)$ , de fréquence fixe, dont le rapport cyclique réglable est commandé numériquement à l'aide d'un convertisseur numérique-analogique (figure 1).

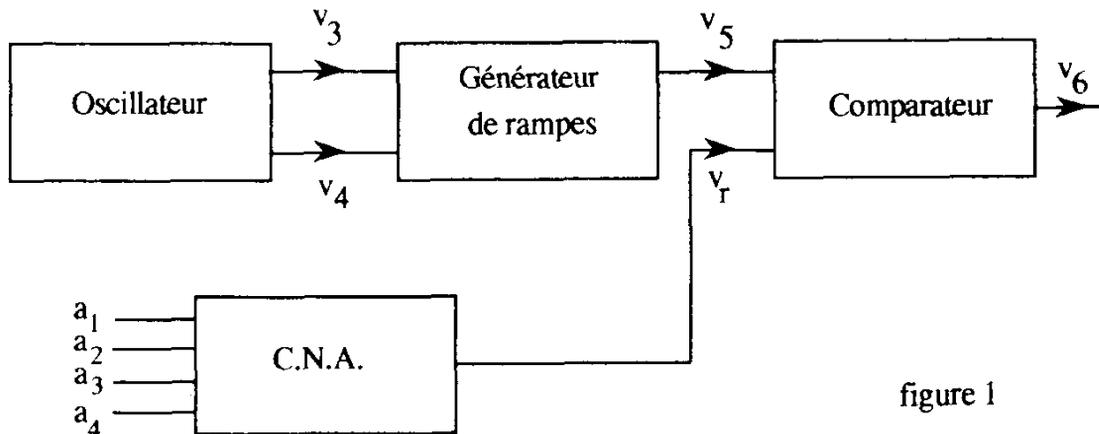


figure 1

Les différentes fonctions mises en œuvre dans le générateur et précisées sur la figure 1, sont étudiées séparément; les cinq questions de cette partie sont donc largement indépendantes.

Tous les composants intervenant dans le montage sont considérés comme parfaits :

- les amplificateurs opérationnels sont tels que les intensités de leurs courants d'entrée sont négligeables, leur résistance de sortie est nulle et leur coefficient d'amplification différentielle est infini; ils sont alimentés sous des tensions symétriques (+ E et - E, avec  $E = 15 \text{ V}$ ) et on admet que leurs tensions de saturations sont égales à + E ou à - E; le taux de variation de leur tension de sortie en fonction du temps (slew rate) est infini.

- la tension aux bornes des diodes est négligeable lorsqu'elles conduisent, leur courant inverse est nul lorsqu'elles sont bloquées;

- l'impédance d'entrée des opérateurs logiques est infinie en toutes circonstances; ces opérateurs sont alimentés sous la tension  $E = 15 \text{ V}$ , leur seuil de basculement est égal à  $E / 2$  et leur tension de sortie est égale à 0 ou E. La variable logique associée à cette tension de sortie est alors égale à 0 ou à 1.

#### 1. Etude de l'oscillateur (figure 2)

L'oscillateur est construit autour de 4 inverseurs logiques  $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$ .

On donne  $R_1 = 47 \text{ k}\Omega$ ;  $R_2 = 1,5 \text{ k}\Omega$ ;  $R_3 = 1 \text{ M}\Omega$ ;  $C_1 = 4,7 \text{ nF}$ .

Le système basculant à l'instant 0, on note 0- l'instant immédiatement antérieur à 0 et 0+ l'instant immédiatement postérieur.

Pour  $t = 0+$ , on a  $v_1 = E$ .

##### 1.1. Préciser le rôle de $R_3$ .

1.2. Donner, en les justifiant, les valeurs de  $v_1(0^-)$ ;  $u_D(0^-)$ ;  $v_2(0^-)$ ;  $v_2(0^+)$ ;  $u_D(0^+)$ .  
Sans démonstration, donner la loi de variation de  $u_D$  pour  $t > 0$ .

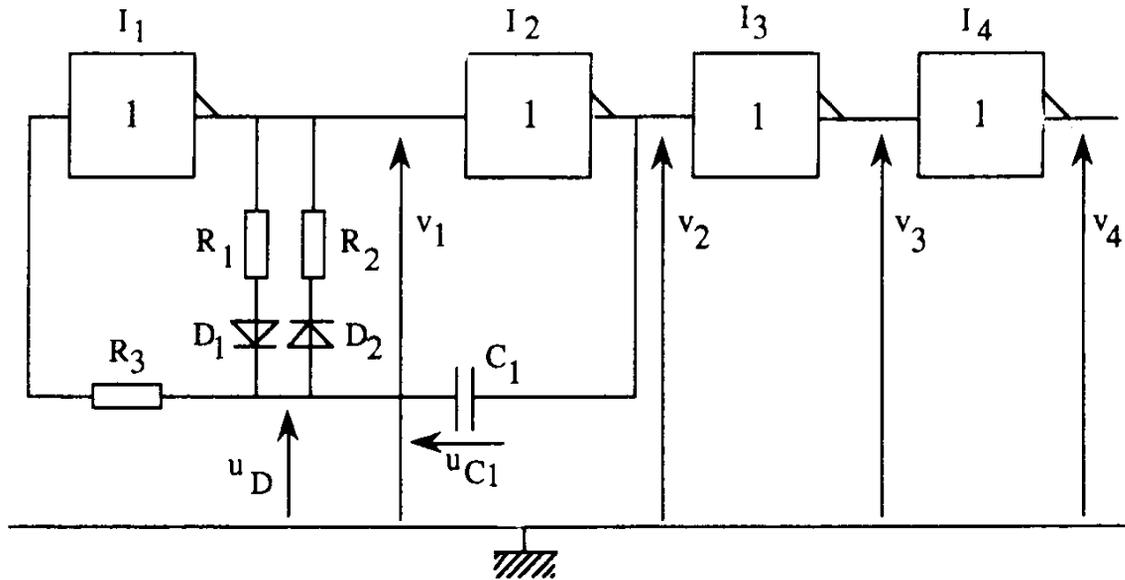


figure 2

1.3. Déterminer l'expression de la durée  $\theta_1$  de ce premier état du dispositif.

Calculer la valeur numérique de  $\theta_1$ .

1.4. A partir de l'instant  $t_1 = \theta_1$ , l'oscillateur entre dans un second état de durée  $\theta_2$ .

En posant  $t' = t - t_1$ , préciser la loi de variation de  $u_D(t')$ .

Montrer que le système évolue de façon cyclique et calculer sa période  $T$ .

1.5. Représenter les tensions  $v_3(t)$  et  $v_4(t)$  sur le document réponse n°1 et calculer le rapport cyclique du signal  $v_4(t)$ .

2. Etude du générateur de courant (figure 3)

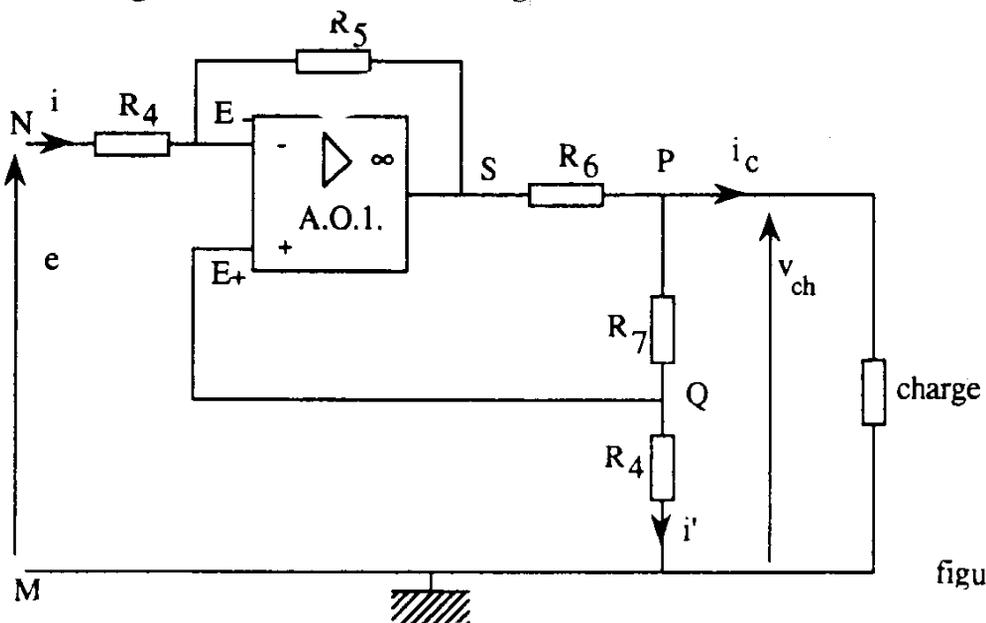


figure 3

L'amplificateur opérationnel n'est pas saturé et  $R_4 = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_5 = 15 \text{ k}\Omega$ ,  $R_6 = 2,2 \text{ k}\Omega$ .  
 $R_7$  est une résistance réglable ajustée de manière à réaliser l'égalité :  $R_5 = R_6 + R_7$ .

Tournez la page S.V.P.

2.1. En considérant une maille particulière que l'on citera, et compte tenu de l'égalité ci-dessus, établir une première relation entre  $i_c$ ,  $(i+i')$  et des résistances du montage.

2.2. En écrivant la loi des tensions pour une deuxième maille, établir une relation entre  $e$ ,  $i_c$ ,  $(i+i')$  et une résistance du montage.

2.3. Dédire de ces relations que l'intensité  $i_c$  du courant dans la charge est indépendante de cette charge; donner l'expression de  $i_c$  et calculer sa valeur  $i_{c0}$  lorsque  $e = -15$  V.

2.4. Lorsque  $i_c = i_{c0}$ , quelle est la tension  $v_{chmax}$  la plus élevée qui peut exister aux bornes de la charge ?

### 3. Etude du générateur de rampe (figure 4)

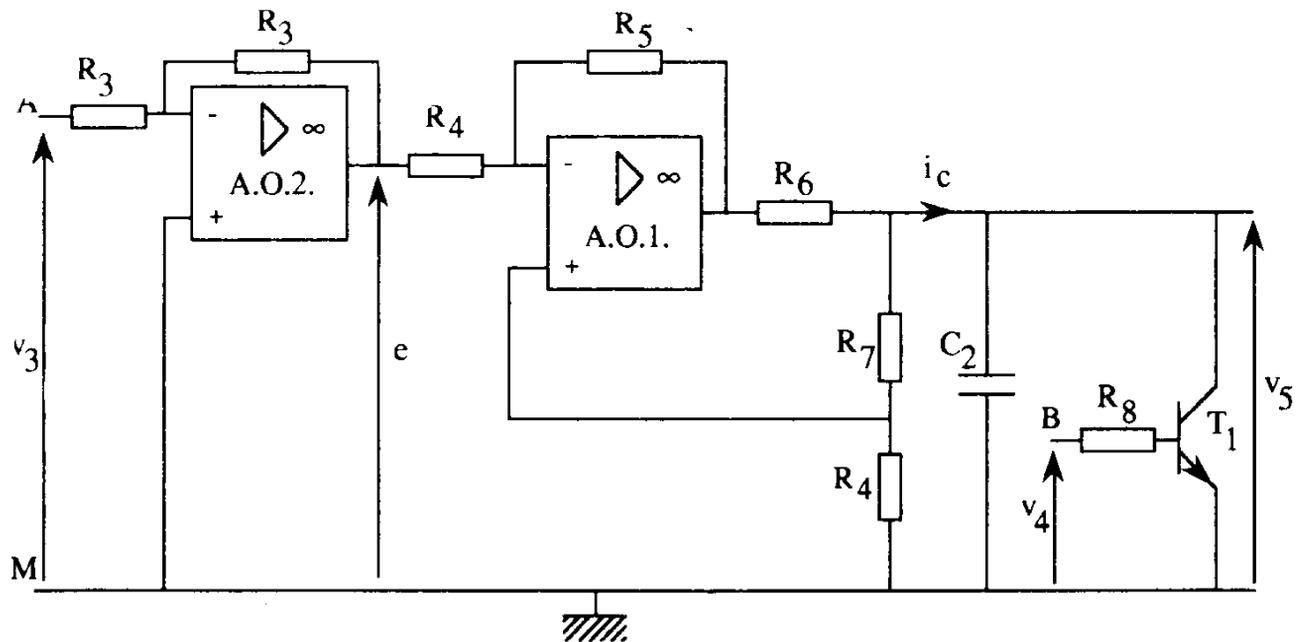


figure 4

Les tensions  $v_3(t)$  et  $v_4(t)$  déterminées à la question 1.5 sont appliquées respectivement aux entrées A et B du montage de la figure 4.

3.1. Quelle relation peut-on écrire entre les tensions  $v_3(t)$  et  $e(t)$  ?

3.2. Avec les données numériques précédentes, calculer les deux seules valeurs que peut prendre l'intensité  $i_c$  du courant fourni par le générateur à sa charge.

3.3. Compte tenu des chronogrammes des tensions  $v_3(t)$  et  $v_4(t)$ , quel est l'état du transistor  $T_1$  lorsque  $v_3 = E = 15$  V ? En déduire l'expression de la tension  $v_5(t)$  au début de l'intervalle de temps  $(0, t_1)$  déterminé à la question 1, sachant que  $v_5(0^+) = 0$ .

3.4. On conserve les valeurs numériques précédentes. Calculer la valeur de  $C_2$  pour que la valeur maximale  $v_{5max}$  de  $v_5$  soit égale à 10 V.

3.5. On règle la valeur de  $C_2$  pour obtenir effectivement  $v_{5max} = 10$  V. Sachant que le coefficient  $\beta$  d'amplification en courant de  $T_1$  est égal à 120 et que  $R_8 = 3,3$  k $\Omega$ , préciser l'allure de la tension  $v_5$  dans l'intervalle de temps  $(t_1, T)$ .

3.6. Tracer le chronogramme de  $v_5(t)$  sur le document réponse n°1.

### 4. Etude du comparateur (figure 5)

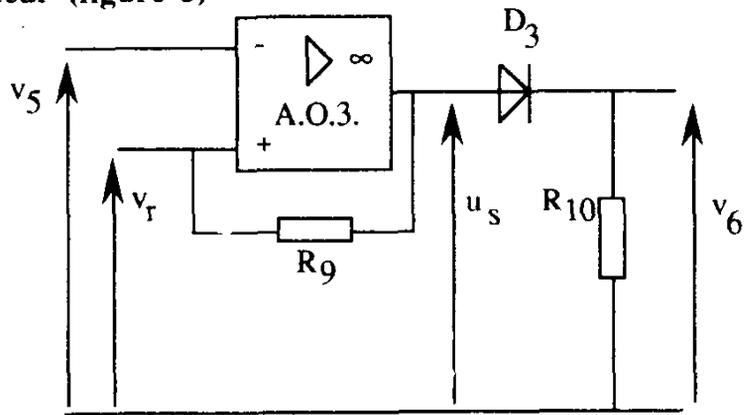


figure 5

On donne  $R_9 = R_{10} = 15 \text{ k}\Omega$ ;  $v_r$  est une tension continue, réglable, telle que  $0 \leq v_r \leq 10 \text{ V}$ .

4.1. Préciser le fonctionnement du montage et déterminer la valeur de la tension  $v_6$  selon que l'on a  $v_5 < v_r$  ou  $v_5 > v_r$ .

4.2. On considère le cas où le dispositif fournissant la tension  $v_r$  est décrit par un modèle de Thévenin dont les éléments sont une f.é.m.  $e_r = 6,0 \text{ V}$  et une résistance  $\rho = 0,50 \text{ k}\Omega$ .

La tension  $v_5(t)$  variant alors entre  $+10\text{V}$  et  $-10\text{V}$ , on l'applique sur la voie X d'un oscilloscope utilisé en mode XY, tandis que  $v_6(t)$  est appliquée sur la voie Y. Préciser l'oscillogramme obtenu.

4.3. Dans la suite du problème, on revient au cas où  $\rho = 0$  et où, par conséquent,  $v_r = e_r$ . Représenter, avec les valeurs numériques de la question 3, le chronogramme de  $v_6(t)$  sur le document réponse n° 1 dans le cas où  $v_r = 6,0 \text{ V}$ . En déduire la valeur du rapport cyclique  $\alpha$  de  $v_6(t)$ .

4.4. Avec ces mêmes valeurs numériques, exprimer la relation générale entre  $\alpha$  et  $v_r$ .

### 5. Génération de la tension $v_r$ par un convertisseur numérique-analogique

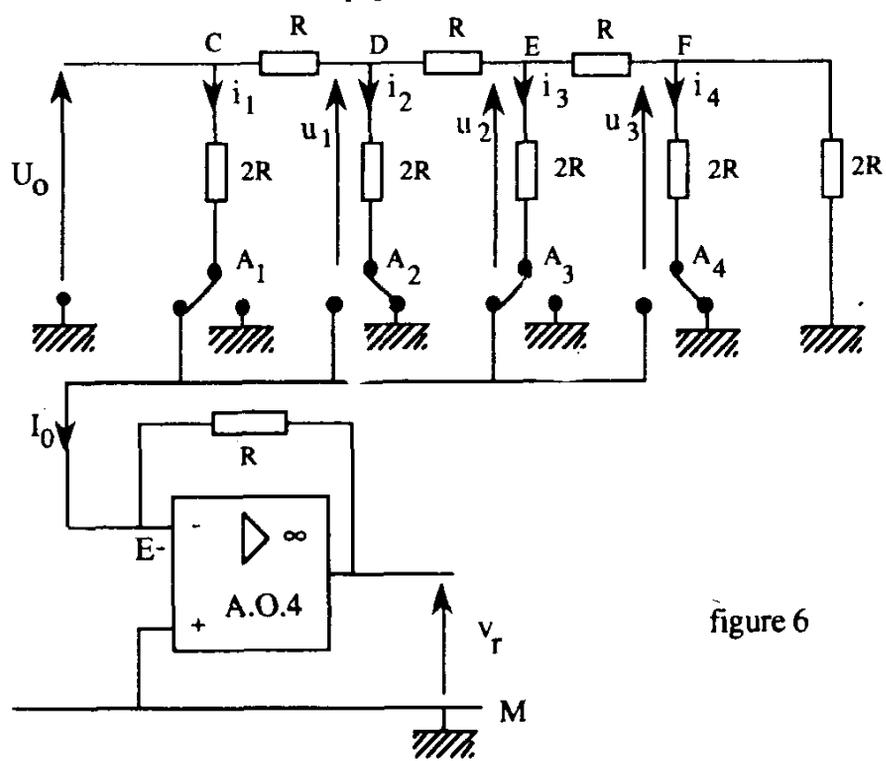


figure 6

On associe respectivement aux entrées  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $A_4$  du montage de la figure 6 les variables binaires  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$ . Lorsqu'une entrée  $A_i$  est connectée à la masse, la variable binaire  $a_i$  associée prend la valeur 0 ; lorsqu'une entrée est connectée à l'entrée E- de l'amplificateur opérationnel A.O.4, la variable binaire associée prend la valeur 1.

5.1. Le fonctionnement de l'amplificateur opérationnel A.O.4 étant linéaire, montrer que les tensions  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  sont indépendantes des valeurs prises par les variables binaires  $a_i$ .

5.2. Exprimer  $u_3$  en fonction de  $u_2$ ,  $u_2$  en fonction de  $u_1$  et  $u_1$  en fonction de la tension d'alimentation  $U_0$ . En déduire les expressions de  $u_2$  et  $u_3$  en fonction de  $U_0$ .

5.3. On pose  $N = 8 a_1 + 4 a_2 + 2 a_3 + a_4$  ; exprimer  $I_0$  en fonction de  $N$ ,  $R$  et  $U_0$ .

5.4. En déduire l'expression de  $v_r$  en fonction de  $U_0$  et de  $N$ .

Quelle valeur doit-on donner à  $U_0$  pour que  $v_r$  prenne la valeur  $v_{r\max} = 9,60$  V quand  $N$  est maximal ?

5.5. L'égalité  $v_{r\max} = 9,60$  V étant réalisée, exprimer  $\alpha$ , rapport cyclique de  $v_6$ , en fonction de  $N$  dans les conditions numériques des questions 3 et 4. Quelle est la valeur maximale de  $\alpha$  ?

## Deuxième partie

### Electrotechnique et électronique de puissance

#### Etude d'un alternateur d'automobile à excitation régulée

L'alternateur considéré est triphasé; ses enroulements d'induit sont couplés en étoile et le moteur qui l'entraîne peut lui imposer une fréquence de rotation comprise entre 1000 tr / min au ralenti et 7500 tr / min au régime maximal .

En fonctionnement normal (fig.7), cet alternateur alimente une batterie par l'intermédiaire d'un pont redresseur à 6 diodes. Il est autoexcité par un système constitué d'un pont redresseur à 3 diodes et d'un hacheur fournissant au circuit inducteur un courant d'excitation réglable, permettant de réguler le courant de charge de la batterie.

On supposera que cet alternateur n'est jamais saturé.

Il délivre un système triphasé de tensions que l'on supposera sinusoïdales. La valeur efficace des tensions composées est notée  $U$ ; celle des tensions simples est notée  $V$ ; la valeur efficace de l'intensité du courant dans une phase est notée  $I$ . La valeur efficace de la f.é.m. induite dans un enroulement d'induit par le seul champ tournant inducteur, est notée  $E_g$ .

Caractéristiques de l'alternateur :

Nombre de pôles : 12 .

Résistance du circuit inducteur :  $r_e = 2,0 \Omega$  .

Résistance d'un enroulement de l'induit :  $R_a = 62 \text{ m}\Omega$  .

Résultats d'essais effectués à la fréquence de rotation de 1000 tr / min :

A vide :  $U_v = 17$  V pour  $i_e = 1,8$  A (  $i_e$  est l'intensité du courant d'excitation).

En court-circuit :  $I_{cc} = 16$  A pour  $i_e = 1,0$  A .

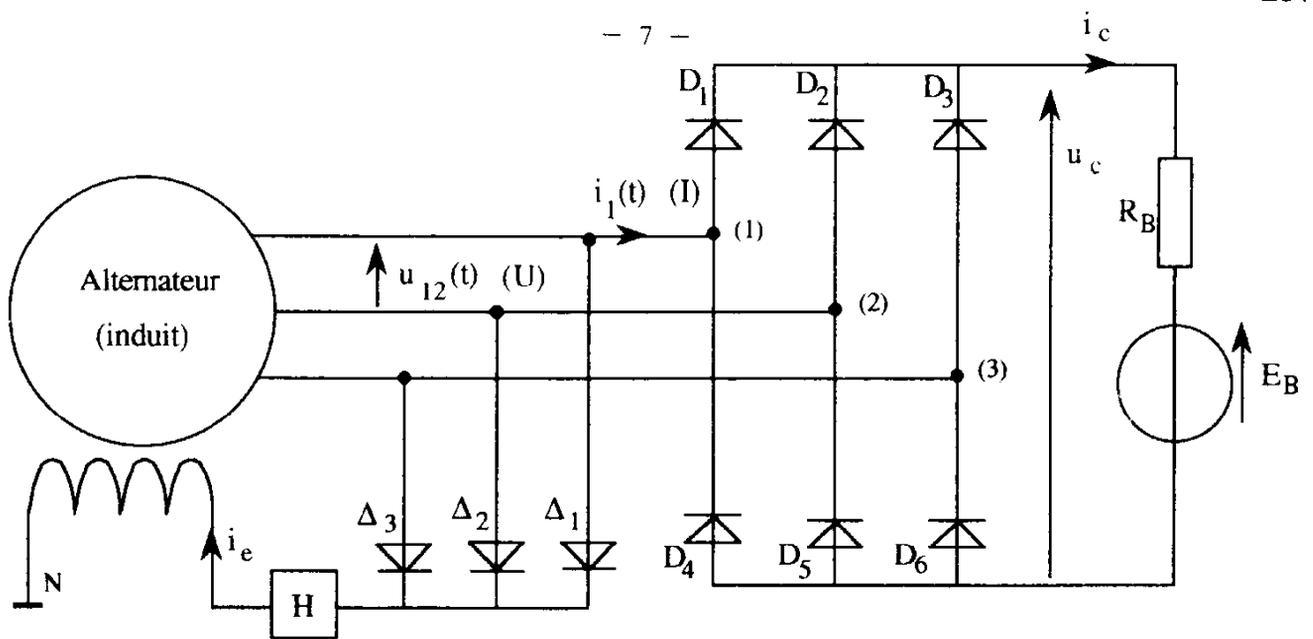


figure 7

### 1. Etude au laboratoire de l'alternateur seul

L'inducteur de l'alternateur est alimenté séparément par une alimentation stabilisée ; l'induit débite dans un système triphasé de résistances (figure 8).

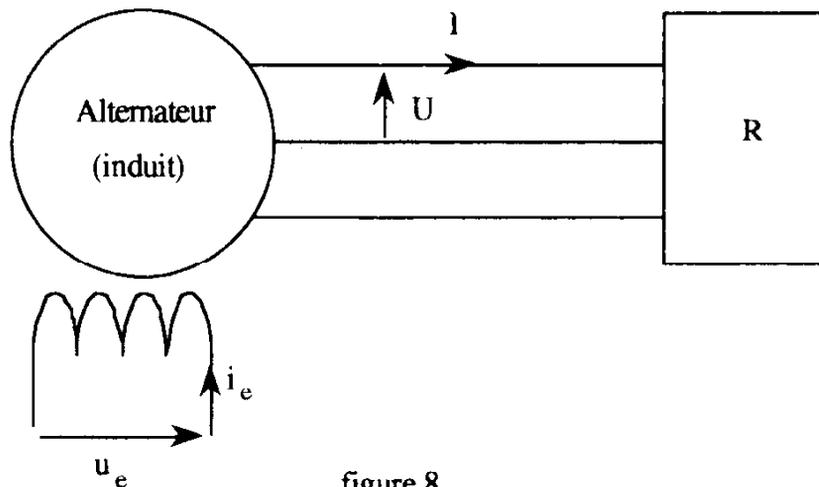


figure 8

#### 1.1. Fonctionnement à 1000 tr / min

- 1.1.1. Quelle est la fréquence des tensions statoriques ?
- 1.1.2. Déterminer l'impédance synchrone  $Z_s$  par phase de l'alternateur .
- 1.1.3. En déduire la réactance synchrone  $X_s$  par phase ainsi que l'inductance synchrone  $L_s$ .
- 1.1.4. L'intensité  $I$  du courant débité en ligne est égale à 20 A lorsque l'on a  $U = 11,0$  V.

Tracer le diagramme par phase des grandeurs électriques de l'alternateur. En déduire  $E_s$  et la valeur  $i_{e1}$  de l'intensité du courant d'excitation .

1.1.5. A cette vitesse on a déterminé séparément les pertes  $p_f$  dans le fer et les pertes mécaniques  $p_m$  . On a  $p_f = p_m = 15$  W. Calculer le rendement de l'alternateur .

## 1.2. Fonctionnement à 7500 tr / min – 8 –

1.2.1. Quelle est la fréquence des tensions rotoriques ?

1.2.2. Quelle est la valeur de la réactance synchrone ?

1.2.3. Quelle est la valeur de  $i_e$  nécessaire pour obtenir de nouveau  $I = 20$  A et  $U = 11,0$  V ?

1.2.4. Pour cette vitesse, une nouvelle mesure des pertes mécaniques et des pertes dans le fer a donné, respectivement :  $p'_m = 120$  W ;  $p'_f = 8$  W.

- Comment peut-on procéder pour séparer ces pertes ?
- Pour obtenir, à vide, les mêmes pertes dans le fer que dans la marche en charge, comment doit-on régler l'intensité  $i_e$  du courant d'excitation ?
- Quelles hypothèses peut-on faire pour expliquer les variations des grandeurs  $p_m$  et  $p_f$  observées entre les fonctionnements des questions 1.1.4 et 1.2.3. ?
- Calculer le rendement de l'alternateur à 7500 tr / min .

1.2.5. Quelle serait la valeur de  $U$  à cette vitesse pour la même intensité  $I = 20$  A mais avec un courant d'excitation d'intensité  $i_e = i_{e1}$  (voir la question 1.1.4.) ?

## 2. Etude du redressement

On considère un fonctionnement de l'alternateur en place, selon le montage la figure 7.

La f.é.m.  $E_B$  de la batterie est égale à 12,5 V.

On considère les diodes comme parfaites mais, pour rendre compte d'une partie des phénomènes que provoquent leurs défauts, on majore la résistance interne de la batterie et l'on prend  $R_B = 0,12$   $\Omega$ .

La fréquence de rotation de l'alternateur est réglée à 3000 tr / min. On mesure  $U = 11,0$  V.

2.1. En utilisant le document réponse n° 2, où est dessiné le système de tensions délivrées par l'alternateur, représenter, en justifiant votre réponse, la tension  $u_c(t)$  sur une période.

2.2. Montrer que l'intensité  $i_c$  du courant dans la batterie ne s'annule jamais.

2.3. Calculer la valeur minimale  $i_{c\min}$ , la valeur maximale  $i_{c\max}$  et la fréquence de  $i_c(t)$ .

2.4. Préciser, sur le document réponse n° 2, les durées de conduction des diodes  $D_1$  et  $D_4$  et dessiner sur ce même document l'allure de l'intensité  $i_1(t)$  du courant qui circule dans le fil (1) de l'alimentation du pont redresseur .

2.5. Calculer la fréquence de l'harmonique 3 de  $i_1(t)$  et discuter qualitativement l'hypothèse selon laquelle les tensions simples délivrées par l'alternateur sont sinusoïdales.

2.6. On maintient cette hypothèse pour la suite du problème.  
Démontrer la relation  $u_{c\text{ moy}} = 1,35 U$  . Calculer  $u_{c\text{ moy}}$  .

2.7. Calculer la valeur moyenne  $i_{c\text{ moy}}$  de  $i_c(t)$ .

## 3. Etude de la régulation

Le régulateur utilise les propriétés d'un hacheur série H dont le rapport cyclique  $\alpha$  est commandé par un calculateur qui mesure par ailleurs  $i_{c\text{ moy}}$  .

La figure 9 précise le fonctionnement du dispositif; le point N est relié au point commun des trois enroulements d'induit de l'alternateur.

Comme précédemment, on se place dans le cas où  $U = 11 \text{ V}$ ; on néglige les imperfections des diodes  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$ .

La fréquence du hacheur est élevée, de ce fait, le courant d'excitation peut être considéré comme constant :  $i_e = \text{Cste}$ .

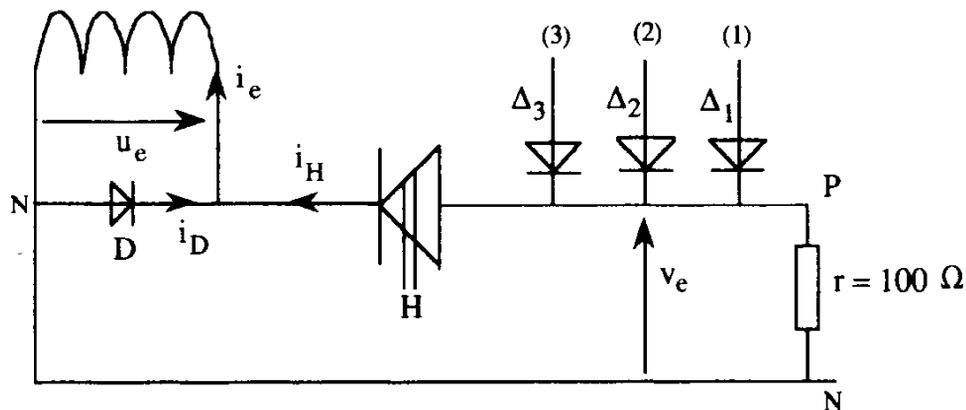


figure 9

3.1. Quel est le rôle de la résistance  $r$ , placée entre la cathode commune des diodes de redressement et le point neutre N ?

3.2. Indiquer, sur le document réponse n°2, la durée de conduction de  $\Delta_1$ .

3.3. Etablir l'expression de la valeur moyenne  $v_{e \text{ moy}}$  de  $v_e(t)$  en fonction de  $U$ .  
Calculer  $v_{e \text{ moy}}$ .

3.4. Calculer la puissance dissipée dans  $r$ .

3.5. On admet la relation  $u_{e \text{ moy}} = \alpha v_{e \text{ moy}}$ .

Calculer la valeur à donner à  $\alpha$  pour obtenir  $i_{e \text{ moy}} = 1,8 \text{ A}$ .

3.6. Dans ce cas, dessiner, en concordance de temps, l'allure des intensités  $i_H$  et  $i_D$  des courants traversant respectivement le hacheur H et la diode D.

# Document réponse n° 1

