

92^e Année

N° 802

Cahier N° 3

Publication mensuelle

MARS 1998

Bulletin de l'Union des Physiciens

Concours

Agrégations et C.A.P.E.S.

1997 : Les solutions

U N I O N
UP
DES
PHYSICIENS

ADMINISTRATION et REDACTION
44, bd Saint-Michel – 75270 PARIS Cedex 06

Avertissement

Ce recueil des solutions de la plupart des épreuves écrites des concours de recrutement de professeurs en physique et chimie est destiné à faciliter le travail de toutes les personnes intéressées par ces épreuves et notamment des candidats à ces concours.

Nous remercions les collègues qui ont accepté de se charger de la rédaction des solutions. Ces solutions peuvent être plus ou moins détaillées selon les épreuves. En aucun cas elles ne constituent un modèle des méthodes ni des rédactions que les jurys pourraient souhaiter mais une simple aide permettant en particulier de contrôler la validité des résultats.

Ces épreuves de concours peuvent fournir l'occasion de prolongements et d'approfondissements qu'il n'est généralement pas possible aux auteurs de signaler ici autrement que par une bibliographie sommaire. Les candidats aux concours doivent pouvoir trouver ces incitations à d'intéressantes études en participant aux préparations ouvertes dans les différentes académies.

Afin de faciliter l'utilisation de ce numéro spécial, son service est inclus dans l'abonnement collectivités, tout en demeurant hors abonnement individuel. Il en est de même pour le numéro spécial comportant les énoncés correspondants. Les numéros des concours sont disponibles par correspondance au siège de l'U.d.P.

Pour le bureau de l'U.d.P.
André BOUSSIE

Agrégation (Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE

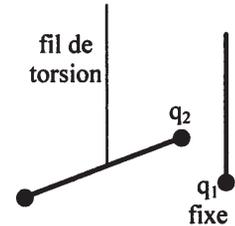
Épreuve A : Composition de physique - Session : 1997

QUELQUES ASPECTS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

PARTIE I

ÉLECTROSTATIQUE DU VIDE ET DES CONDUCTEURS

I.A.1. $\vec{f} = \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^3}$. Dans la balance de Coulomb (1785), une barre qui porte à une de ses extrémités une boule chargée soumise à l'action électrostatique d'une autre charge est suspendue et maintenue à l'équilibre vis à vis de la rotation par un fil de torsion. La mesure de l'angle de rotation du fil donne accès à la force électrostatique.



Si un point matériel de charge q est soumis à l'action d'autres charges, le rapport $\frac{\vec{f}}{q}$ ne dépend que de la répartition de ces autres charges et du point M où est placée la charge q . Ce rapport est le champ électrique en M. Le champ créé par la réunion de systèmes disjoints est la somme des champs créés par chacun des systèmes. (Principe de superposition)

I.A.2. En régime permanent, $\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \exists V / \vec{E} = -\text{grad } V$ et $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$. Le potentiel électrostatique V est défini à une constante additive près. Pour une particule de charge q soumise à un champ électrostatique, le produit qV est l'énergie potentielle associée aux forces électriques (qui sont conservatives dans le cas statique). Le principe de superposition est une conséquence de la linéarité de ces équations. Le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge intérieure à cette surface divisée par ϵ_0 (théorème de Gauss valable en toutes circonstances).

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P,t)}{MP} d\tau \quad (\text{Car } \Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})) \quad \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(P) d\tau \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Dans le cas de modèles surfaciques ou filiformes, il suffit de remplacer dans les expressions précédentes la charge élémentaire $\rho d\tau$ par σdS ou λdl . Dans le cas surfacique, le champ électrique n'est alors plus continu (il subit une discontinuité de $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ à la traversée de la surface). Dans le cas filiforme, le champ et le potentiel divergent à l'approche de la courbe chargée. Par exemple, le champ créé par le plan $x=0$ uniformément chargé vaut $\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sgn}(x) \vec{u}_x$. (Les invariances par translation selon les axes Oy et Oz et par rotation autour de Ox permettent de montrer que $\vec{E} = E(x) \vec{u}_x$. La symétrie par rapport au plan $x=0$ montre que $E(x)$ est impaire. Enfin le théorème de Gauss permet de donner l'expression de $E(x)$.)

I.A.3. Les lignes de champ sont les courbes orthogonales aux équipotentielles. Il ne peut y avoir d'extremum local de potentiel dans une zone sans charge (où d'après l'équation de Poisson $\Delta V=0$) car un minimum par exemple nécessiterait des dérivées secondes positives par rapport à x, y et z ce qui est contradictoire avec l'équation de Poisson.

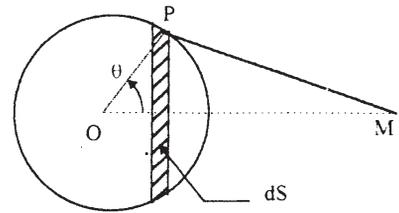
Les points où passent plusieurs lignes de champ ne peuvent être que les emplacements des charges (où le champ n'est pas défini) et les points de champ nul. Au point C certaines lignes arrivent, d'autres repartent. Il ne peut donc pas y avoir de charge en ce point ; c'est un point de champ nul. D'après les orientations des lignes, il y a une charge positive en B et D et une charge négative en A. L'allure du champ à grande distance est dipolaire (une seule ligne va à l'infini, les autres forment des boucles) donc la somme des charges est nulle : $q_A = -(q_B + q_D)$. On peut obtenir une seconde relation entre ces charges soit en écrivant que le champ est nul en C projeté sur Ox (ce qui conduit à l'équation

$$\frac{24q_B}{(8^2 + 24^2)^{3/2}} = \frac{51q_D}{(8^2 + 51^2)^{3/2}} \quad \text{c'est à dire } q_D = 4q_B) \quad \text{ou sur Oy (ce qui conduit à l'équation$$

$$\frac{8q_B}{(8^2 + 24^2)^{3/2}} + \frac{8q_D}{(8^2 + 51^2)^{3/2}} + \frac{q_A}{83^2} = 0 \quad \text{c'est à dire } 3,4q_B + 0,4q_D + q_A = 0) \quad \text{soit en mesurant sur le$$

dessin la pente à grande distance de la ligne de champ qui part à l'infini qui donne la direction du moment dipolaire et donc la position du barycentre des charges positives q_B et q_D (on trouve que sa coordonnée selon x vaut $60a$ donc $q_D = 4q_B$). Finalement $q_B = q > 0$, $q_D = 4q$ et $q_A = -5q$.

- I.A.4. La surface hachurée a pour aire $2\pi R_0^2 \sin \theta d\theta$. Or, en notant r la distance OM $PM^2 = r^2 - 2rR_0 \cos \theta + R_0^2$ donc, en différentiant, $PM d(PM) = rR_0 \sin \theta d\theta$. La contribution élémentaire δV s'écrit alors $\delta V = \frac{\sigma R_0}{2\epsilon_0 r} \frac{d(PM)}{(PM)^\epsilon}$. La sommation pour PM variant entre R_0 et R_1 rest alors immédiate et conduit à :



$$V = \frac{\sigma R_0}{2\epsilon_0(1-\epsilon)} \left(\frac{(R_0+r)^{1-\epsilon}}{r} - \frac{(R_0-r)^{1-\epsilon}}{r} \right)$$

Alors $V_0 - V_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0(1-\epsilon)} \left((2R_0)^{1-\epsilon} - \frac{R_0(R_0+R_1)^{1-\epsilon}}{R_1} + \frac{R_0(R_0-R_1)^{1-\epsilon}}{R_1} \right)$ qui est nul si ϵ est nul et

dont un développement limité à l'ordre 1 en ϵ conduit à :

$$\frac{V_0 - V_1}{V_0} \approx -\epsilon \left[\ln 2 - \frac{R_0}{2R_1} \left\{ \left(1 + \frac{R_1}{R_0}\right) \ln \left(1 + \frac{R_1}{R_0}\right) - \left(1 - \frac{R_1}{R_0}\right) \ln \left(1 - \frac{R_1}{R_0}\right) \right\} \right] \approx 0,22 \epsilon$$

On obtient donc numériquement $|\epsilon| < 4,5 \cdot 10^{-16}$. La loi de Coulomb est très bien vérifiée.

- I.B.1. $\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v} \right) = -\text{grad} P + \eta \Delta \vec{v}$ (Navier-Stokes). Pour un fluide incompressible $\text{div} \vec{v} = 0$ donc, avec

une vitesse de la forme $\vec{v} = v \vec{e}_z$, $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$. La projection de l'équation de Navier-Stokes conduit alors sur les

axes Ox et Oy à $\frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial P}{\partial y}$ (donc P ne dépend que de z) et sur Oz à $\frac{dP}{dz} = \eta \Delta v$ (donc, tout comme κ

$\frac{dP}{dz}$ ne dépend pas de z). On peut alors écrire $\frac{dP}{dz} = Cte = \frac{P_B - P_A}{L}$ et $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{Cte}{\eta}$ qui est de

la forme proposée par l'énoncé avec $K = -\frac{1}{\eta} \frac{dP}{dz} = \frac{P_A - P_B}{\eta L}$. Sur les parois de la conduite, la vitesse doit être nulle.

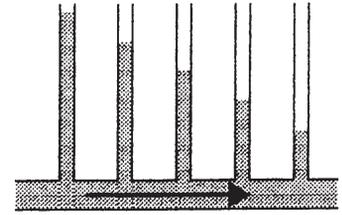
Dans le cas d'un cylindre à base circulaire et en utilisant $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right)$ on obtient alors

$v = \frac{K}{4} \left(\frac{d^2}{4} - \rho^2 \right)$. Le débit s'exprime par $D = \int_0^{d/2} v(\rho) 2\pi\rho d\rho$. On démontre alors la loi de Poiseuille avec

$$\alpha = \frac{128}{\pi}$$

On peut la vérifier expérimentalement par le dispositif ci-contre.

La mesure de la hauteur du liquide (immobile) dans les tubes verticaux permet d'avoir accès à la pression le long du tube horizontal où le liquide s'écoule. On détermine par ailleurs le débit en mesurant le volume sortant du tube et on assure une alimentation permanente du dispositif. L'écoulement reste laminaire si le nombre de Reynolds (sans dimension) R_e n'est pas trop grand (typiquement $R_e < 1000$).



I.B.2. La loi de Fourier $\vec{j}_Q = -\lambda \text{grad} T$ combinée à l'équation de bilan local d'énergie $\text{div} \vec{j}_Q + c \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha$

conduit, en régime permanent, à l'équation de Poisson dans la sphère avec $K = \frac{\alpha}{\lambda}$ et à l'équation de

Laplace dans l'eau (en prenant $\alpha=0$). Les conditions aux limites sont la continuité de T et de la composante

composante radiale de \vec{j}_Q c'est à dire $-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$ à l'interface $r=R$ entre la sphère et l'eau. Par ailleurs,

$$\begin{cases} r < R \Rightarrow T = T_0 + \frac{\alpha R^2}{3\lambda_2} + \frac{\alpha(R^2 - r^2)}{6\lambda_1} \\ r > R \Rightarrow T = T_0 + \frac{\alpha R^3}{3\lambda_2 r} \end{cases}$$

pour r tendant vers l'infini, T doit tendre vers T_0 . On obtient alors :

I.B.3. Les équations de Laplace ou de Poisson interviennent en magnéto-statique (où le potentiel vecteur joue un rôle analogue au potentiel électrostatique étudié ici), en mécanique des fluides par exemple pour l'étude des écoulements irrotationnels de fluides incompressibles, dans les problèmes de diffusion de particules ...

I.C.1.a. Un conducteur est en équilibre électrostatique s'il n'y a aucun courant ($\vec{j} = \vec{0}$). Dans le cas où il est homogène (composition chimique, température uniformes), cela impose que \vec{E} soit nul à l'intérieur et donc que le potentiel électrostatique y soit uniforme. De plus, d'après l'équation de Maxwell-Gauss, ρ doit y être nul.

b. En régime variable, en combinant la loi d'Ohm ($\vec{j} = \gamma \vec{E}$), la loi de conservation de la charge ($\text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) et l'équation de Maxwell-Gauss ($\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$) on obtient $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$ avec

$\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma} \approx \frac{10^{-11}}{10^7} = 10^{-18} \text{ s}$. La densité de charge tendrait donc exponentiellement vers 0 avec une constante de temps de l'ordre de 10^{-18} s. Cela n'est qu'approximatif car la loi d'Ohm ne peut s'appliquer pour des évolutions aussi rapides. Le temps de relaxation de ρ est plutôt de l'ordre de 10^{-14} s (« temps de collision » des porteurs de charge dans un conducteur métallique).

c. Les charges portées par un conducteur en équilibre ne peuvent alors être qu'à sa surface. Comme le champ est nul à l'intérieur, il doit valoir $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ juste à l'extérieur du conducteur.

d. Une ligne de champ doit arriver normalement sur un conducteur (sauf point où $\sigma=0$) ; la courbe C est donc impossible. Le potentiel décroissant sur une ligne de champ, il ne peut y avoir de « circuit fermé » de lignes de champ. Donc E, A et I sont impossibles. De même (H et J) sont incompatibles tout comme (F et G) et comme (D et B). Par ailleurs H et G (ou J et F) sont incompatibles car, la charge Q_2 étant nulle, σ doit prendre sur le conducteur 2 des valeurs positives et négatives. Donc, soit les lignes B,G,J sont correctes, soit les lignes D,F,H le sont, les deux situations s'excluant. Mais F et D sont impossibles car la charge Q_1 étant positive, les lignes de champ ne peuvent toutes arriver sur le conducteur 1.

Finalement, les bonnes lignes sont donc **B**, **G** et **J**. Les autres sont incorrectes. Alors $V_1 > V_2 > 0$ car le potentiel décroît sur les lignes de champ **G** et **J**.

- e. La force électrostatique subie par dS est $d\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{n} dS$. Elle a les caractéristiques d'une force de pression (normale à la surface, proportionnelle à l'aire de la surface) de valeur $p = \epsilon_0 E^2 / 2$.

I.C.2. Pour un conducteur en équilibre, la charge superficielle (et le champ dans le milieu isolant près du conducteur) est d'autant plus grande (en valeur absolue) que la courbure de la surface est grande. Cela cause en particulier le claquage (ionisation) d'un diélectrique au voisinage de cette partie courbée du conducteur.

Dans le microscope à émission ionique, le conducteur sphérique de grande taille peut être considéré à l'infini et son potentiel pris comme origine. Alors, sur la petite sphère, $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ et $E_{vide} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ donc $V = RE$. On peut évaluer le champ nécessaire pour ioniser un atome d'hélium à $10V\text{\AA}^{-1}$ (énergie d'ionisation de l'ordre de 10 eV et dimension de l'atome de l'ordre de 0,5 Å). Alors $V \approx 50 \text{ kV}$.

I.C.3.a. Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs en influence totale : toute ligne de champ partant d'un des conducteurs arrive sur l'autre (autrement dit, la surface d'un conducteur admet un élément correspondant sur celle de l'autre). Dans la pratique cette condition est remplie si un des conducteurs est dans une cavité à l'intérieur de l'autre. Soit (1) ce conducteur entouré par l'autre. On peut montrer

qu'alors le rapport $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}$ est indépendant des potentiels des conducteurs. C est la capacité du condensateur.

b. Pour un condensateur plan sans diélectrique, (deux conducteurs dont les surfaces en regard sont planes, parallèles, distantes de e et illimitées - dans la pratique de dimensions grandes devant e -) la capacité vaut ϵ_0/e par unité de surface en regard. Cette expression est valable pour des condensateurs réels de forme quelconque, du moment que la distance entre les armatures est constante (e) et que e est petite devant les rayons de courbure des surfaces et les dimensions de ces surfaces. (effets de bord négligés)

c. En utilisant l'expression de la capacité d'un condensateur plan avec diélectrique, $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e}$. Or le volume du diélectrique est Se et est bien sûr inférieur au volume \mathcal{V} du condensateur $[Se < \mathcal{V}]$. Avec l'expression de la capacité, on obtient la condition $e < \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r \mathcal{V}}{C}} = 32 \text{ nm}$. Par ailleurs le champ entre les armatures est V/e . Pour éviter le claquage du diélectrique, il faut que $\frac{V_{\max}}{e} < K$ soit $e > 8 \text{ nm}$.

d. Le condensateur se charge avec la constante de temps $\tau = RC$. La tension à ses bornes suit donc la loi $V_C = V_{\text{ref}} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ Les comparateurs basculent lorsque V_C prend les valeurs V_1 et V_2 . L'intervalle de

temps entre les basculements est $\delta t = RC \ln \frac{V_{\text{ref}} - V_1}{V_{\text{ref}} - V_2}$. Un compteur électronique, déclenché par le

basculement de s_1 et arrêté par celui de s_2 , peut mesurer cette durée et un système d'affichage peut directement donner la valeur de C qui est proportionnelle à cette durée. Une modification de la base de temps du compteur ou de R permet de mesurer des capacités dans des gammes de valeur variées. On peut aussi mesurer des capacités en utilisant des ponts de mesure en alternatif.

I.C.4. Soient q et v la charge et le potentiel de l'armature mobile. q est constante pendant le déplacement (armature isolée). Or en position P_1 $q = C_1 E$ et juste avant la position P_2 $q = C_2 v$ donc, juste avant le contact avec C , $v = \frac{C_1}{C_2} E$. On note $V_\infty = \frac{C_1}{C_2} E$. Supposons $V_n < \frac{C_1}{C_2} E$ (ce qui est vrai au départ). Alors,

lors du contact en position P_2 , le potentiel de l'armature mobile étant supérieur à celui de C , l'armature mobile va donner des charges à C et les potentiels vont s'équilibrer à une valeur intermédiaire entre V_n et V_∞ . Donc $V_n < V_{n+1} < V_\infty$. V_n augmente donc bien en restant inférieur à V_∞ ; donc V_n tend vers une limite inférieure ou égale à V_∞ . Soit l cette limite. Elle doit vérifier $V_n = l \Rightarrow V_{n+1} = l$. Cela n'est

possible que s'il n'y a pas de transfert de charge au contact en P_2 donc si juste avant le contact, les potentiels sont égaux, c'est à dire $l = \lim V_n = V_\infty$. On peut facilement s'arranger pour que $C_1 \gg C_2$ (partie mobile complètement sortie). Alors le condensateur C est finalement chargé sous une tension très largement supérieure à E . On a créé une source de très haute tension.

I.D.1. L'énergie électrostatique W_e est l'énergie minimale qu'il faut fournir à un système de charges dispersées (infiniment éloignées les unes des autres) pour les amener dans une position déterminée. Elle est

indépendante du trajet suivi pour arriver à la situation considérée. $W_e = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$ ou

$\frac{1}{2} \iiint \rho(M) V(M) d\tau$. On peut mettre cette dernière expression sous la forme $\iiint \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau$ où l'intégrale porte sur l'espace entier dans le cas où la distribution de charge est bornée (décroissance du potentiel à l'infini au moins en $1/r$).

I.D.2. Dans le cas surfacique V est uniforme là où sont les charges et vaut $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ donc $W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$.

Dans le cas volumique on trouve $W_e = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ (calcul classique). Dans le cas de l'électron, son énergie électrostatique vaut $mc^2 = 511 \text{ keV}$ si $R = 1,7 \text{ fm}$. Lorsqu'on arrive à de telles dimensions, il n'est plus possible d'utiliser les modélisations classiques employées jusqu'à présent. Seule la mécanique quantique permet de décrire cela. Le résultat trouvé n'est donc guère significatif.

c. L'eau est supposée incompressible donc son volume ne varie pas, les termes d'énergie volumique seront constants et non pris en compte par la suite. Si la goutte initiale se scinde en n gouttes identiques, le rayon de ces dernières sera $R_n = \frac{R}{n^{1/3}}$ (conservation du volume) et leur charge $\frac{Q}{n}$. L'énergie

électrostatique totale est alors $W_{en} = n \frac{1}{2} \frac{(Q/n)^2}{4\pi\epsilon_0 R/n^{1/3}} = n^{-2/3} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = n^{-2/3} W_{e1}$. De même, on montre

que l'énergie de tension superficielle s'écrit $W_{An} = n^{1/3} A 4\pi R^2 = n^{1/3} W_{A1}$ et $W_{total}(n) = n^{-2/3} W_{e1} + n^{1/3} W_{A1}$. La séparation en deux gouttes est favorisée si $W_{total}(2) < W_{total}(1)$, c'est à

dire si $\frac{W_{e1}}{W_{A1}} > \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} = \frac{2^{2/3}}{2^{1/3} + 1}$ soit $Q > Q_C$ avec $Q_C = \sqrt{\frac{2^{2/3}}{2^{1/3} + 1}} 32\pi^2 \epsilon_0 A R^3 = 4,2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$. Alors

$V_C = \frac{Q_C}{4\pi\epsilon_0 R} = 7600 \text{ V}$ (Remarque pour la suite $\frac{W_{e1}}{W_{A1}} = \left(\frac{Q}{Q_C}\right)^2 \frac{2^{2/3}}{2^{1/3} + 1}$). Si $Q \gg Q_C$, la goutte risque de

se scinder en un grand nombre de gouttelettes, les nombres les plus probables correspondent aux valeurs de n proches du minimum de l'énergie. $\frac{dW_{total}(n)}{dn} = -\frac{2}{3} n^{-5/3} W_{e1} + \frac{1}{3} n^{-2/3} W_{A1}$ est nul pour

$$n = 2 \frac{W_{e1}}{W_{A1}} = \left(\frac{Q}{Q_C}\right)^2 \frac{2^{5/3}}{2^{1/3} + 1}$$

d. On constitue progressivement une cellule en amenant une charge $dq = 4\pi r^2 dr \rho = -3e \frac{r^2 dr}{R^3}$ sur une sphère partiellement constituée qui crée le potentiel $\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$. Le travail total à fournir est alors

$\int_0^R -3e \frac{r^2 dr}{R^3} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$ qui vaut $\frac{9}{10} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$. (On peut aussi ajouter l'énergie de la sphère

uniformément chargée calculée au I.D.2.a. et l'énergie d'interaction entre cette sphère et la charge ponctuelle $+e$; et pour ce dernier terme, on pourrait calculer le potentiel créé par $-e$ au centre de la sphère). Chaque cellule étant globalement neutre et à symétrie sphérique, crée à l'extérieur un champ nul. L'énergie d'interaction entre les cellules est donc nulle et l'énergie de l'ensemble est la somme des énergies des cellules. $W_e = -580 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

PARTIE II

ÉLECTROSTATIQUE DES SEMI-CONDUCTEURS

II.A. Modèles de distributions de charges dans un conducteur.

II.A.1. Conducteurs à un seul type de porteurs.

a. A l'instant où l'on applique le potentiel V_s à la surface du conducteur, les porteurs sont soumis à la force électrique $q\vec{E} = -q \text{grad } V$. La mesure algébrique de cette force sur l'axe Ox est du signe de qV_s .

Si $qV_s < 0$, les porteurs vont vers l'interface où ils s'accumulent ; il y apparaît une charge de surface qui, à l'équilibre, annule le champ à l'intérieur du conducteur (l'étude de la distribution au voisinage de la surface relève de la physique quantique).

Si $qV_s > 0$, les porteurs s'éloignent de l'interface et désertent une couche superficielle du conducteur. A l'équilibre le conducteur est divisé en deux zones : une zone profonde où subsistent des porteurs et dans laquelle le champ électrique et la charge volumique sont nuls et la zone désertée superficielle où ni le champ ni la charge ne sont nuls et où il ne reste aucun porteur (dans la limite du modèle envisagé dans cette question). L'absence de porteurs impose une charge volumique uniforme $-qN$, de signe opposé à q , dans toute une épaisseur x_d .

b. On a donc :

$$Q_s = -qNx_d$$

Le champ électrique s'obtient simplement en appliquant le théorème de Gauss à un cylindre dont une extrémité est placée dans la zone de champ et de potentiel nuls et l'autre à l'abscisse x , en tenant compte de la permittivité ϵ_r du milieu :

$$E(x \geq x_d) = 0 \quad ; \quad E(0 < x \leq x_d) = -\frac{qN}{\epsilon_0 \epsilon_r} (x - x_d)$$

Le champ à l'extérieur s'obtient en utilisant la continuité de la composante normale de l'excitation électrique $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$:

$$E(x < 0) = \frac{qN}{\epsilon_0} x_d$$

Le potentiel est calculé par sommation de $-E(x)dx$ entre la zone de potentiel nul et l'abscisse x :

$$V(x \geq x_d) = 0$$

$$V(0 \leq x \leq x_d) = \frac{qN}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (x - x_d)^2$$

$$V(x < 0) = \frac{qN}{\epsilon_0} x_d \left(\frac{x_d}{2\epsilon_r} - x \right)$$

On en déduit :

$$E_s = \frac{qNx_d}{\epsilon_0}$$

et :

$$V_s = \frac{qNx_d^2}{2\epsilon_0 \epsilon_r}$$

En tirant x_d de cette expression, on peut calculer la capacité surfacique $C_s = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{x_d} = \sqrt{\frac{K}{V_s}}$.

c. Pour un métal (bon conducteur) $x_d = 5,5 \cdot 10^{-16}$ m ; pour le silicium dopé $x_d = 5,5 \cdot 10^{-8}$ m.

Pour un conducteur métallique la valeur de x_d (dans ce modèle non quantique) est inférieure aux dimensions des noyaux (quelque 10^{-15} m) et l'on peut utiliser un modèle où les charges sont distribuées en surface.

II.A.2. *Conducteurs à deux types de porteurs.*

a.
$$n_0 = \frac{n_i^2}{N} = 10^{11} \text{ m}^{-3} \ll N = 10^{21} \text{ m}^{-3}$$

Dans le cas où $V_s < 0$, les trous sont concentrés à la surface, les électrons minoritaires y sont en densité encore plus faible et négligeable.

b. Avec :
$$V = \frac{qN}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (x - x_d)^2$$

on obtient :
$$p = N \exp\left(-\frac{eV}{k_B T}\right) = N \exp\left(-\left(\frac{x - x_d}{L_D}\right)^2\right)$$

et :
$$n = n_0 \exp\left(+\frac{eV}{k_B T}\right) = \frac{n_i^2}{N} \exp\left(\frac{x - x_d}{L_D}\right)^2$$

Valeur numérique : $L_D = 1,9 \cdot 10^{-7}$ m. La charge volumique $\rho = e(p - n - N)$ est voisine de $-eN$ pour $p - n \ll N$ soit (compte tenu de $\frac{N}{n_i} = 10^5 = \frac{n_i}{n_0}$) :

$$L_D < |x - x_d| \ll L_D \sqrt{2 \ln \frac{N}{n_i}} = 4,8 L_D$$

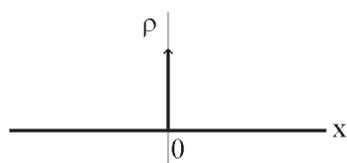
c. $n = N$ pour $|x - x_d| = x_i = L_D \sqrt{2 \ln \frac{N}{n_i}} = 0,89 \mu\text{m}$.

$$V_I = \frac{qN}{\epsilon_0 \epsilon_r} L_D^2 \ln \frac{N}{n_i} = \frac{2k_B T}{e} \ln \frac{N}{n_i} = 0,60 \text{ V}$$

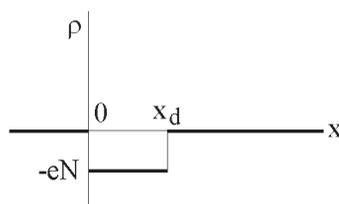
d. $n = 100 N$ pour $|x - x_d| / x_i = \sqrt{\ln 10 \frac{N}{n_i} / \ln \frac{N}{n_i}} = 1,1$.

Les grandes charges négatives sont concentrées sur de faibles épaisseurs, ce qui permet de les modéliser par une distribution surfacique. La charge d'espace garde alors l'épaisseur constante x_i .

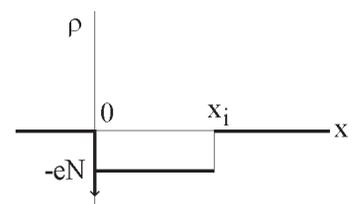
II.A.3. *Récapitulatif des modèles pour un semi-conducteur dopé.*



$V_s < 0$
régime d'accumulation



$0 < V_s < V_I$
régime de désertion



$V_I < V_s$
régime d'inversion

II.B. Structure capacitive C-I-SC.

II.B.1. Régime d'accumulation.

- a. Les charges des deux conducteurs se trouvent en surface et la structure est équivalente à celle d'un condensateur plan de capacité $C_A = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r'}{d} = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ F} \cdot \text{m}^{-2}$.

Pour une surface de $100 \mu\text{m}^2$, la capacité vaut $3,5 \cdot 10^{-14} \text{ F}$.

- b. Pour éviter le claquage du diélectrique il faut que $|E| = \frac{|V_G|}{d} < R$ soit $|V_G| < Rd = 60 \text{ V}$.

II.B.2. Régime de désertion.

- a. $Q = -Q_s = eNx_d$.

On calcule V_G en additionnant les différences de potentiel dans l'isolant et dans le semi-conducteur :

$$V_G = \frac{Q}{C_A} + V_s = \frac{eNx_d}{\epsilon_0} \left(\frac{d}{\epsilon_r'} + \frac{x_d}{2\epsilon_r} \right)$$

On reste dans le régime de désertion tant que $x_d < x_i$, soit :

$$V_G < V_{GI} = V_1 \left(1 + \frac{2\epsilon_r'}{\epsilon_r} \frac{d}{x_i} \right) = 1,00 \text{ V}$$

- b. Par le même type de raisonnement $\frac{dV_G}{dQ} = \frac{1}{C_A} + \frac{dV_s}{-dQ_s}$ soit $\frac{1}{C_D} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_A} + \sqrt{\frac{V_s}{K}}$ d'après

II.A.1.b. En éliminant x_d entre les expressions de V_s et de V_G , on obtient :

$$\sqrt{\frac{V_s}{K}} = -\frac{1}{C_A} + \sqrt{\frac{1}{C_A^2} + \frac{V_G}{K}}, \text{ d'où } \frac{1}{C_D} = \sqrt{\frac{1}{C_A^2} + \frac{V_G}{K}}.$$

Application Numérique :

V_G (V)	0,1	1	5	0,0
C_D ($\mu\text{F} \cdot \text{m}^{-2}$)	225	89	41	354

II.B.3. Régime d'inversion.

- a. La charge d'espace ne varie plus pour $V_G > V_{GI}$: les charges supplémentaires dQ et $-dQ_s$ s'accumulent sur le condensateur défini en II.B.1.a. On a donc $C_1 = C_A$.

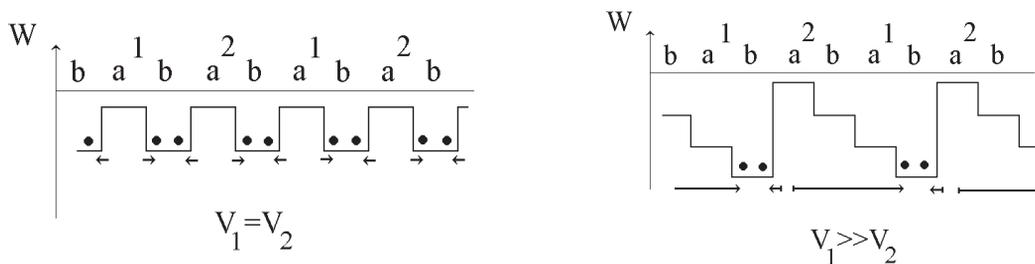
- b. Le courant J_s servirait à fournir la charge négative accumulée en surface $Q_I = C_1 (V_G - V_{GI})$, soit :

$$J_s = C_A \frac{V_G - V_{GI}}{\tau_1} = 7,1 \cdot 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

- c. Temps nécessaire à la création des paires électrons-trous permettant d'alimenter la surface du semi-conducteur jusqu'à l'équilibre.

II.C. Application : dispositif à transfert de charge (DTC).

- a. L'expression de V_{GI} (II.B.2.a.) montre que $d_a > d_b$ entraîne $V_{Ga} > V_{Gb}$. Pour $V_1 = V_2$, le potentiel à l'interface V_{sa} est inférieur à V_{sb} et l'énergie potentielle d'un électron $W = -eV_s$ y est plus grande. Quand $V_1 \gg V_2$, les énergies sous les paires 1 sont plus faibles que sous les paires 2.



b. Avant la collecte il ne faut pas accumuler d'électrons et donc être en régime de désertion partout :

$$V_1 < V_{Gb} < V_{Ga}$$

et :

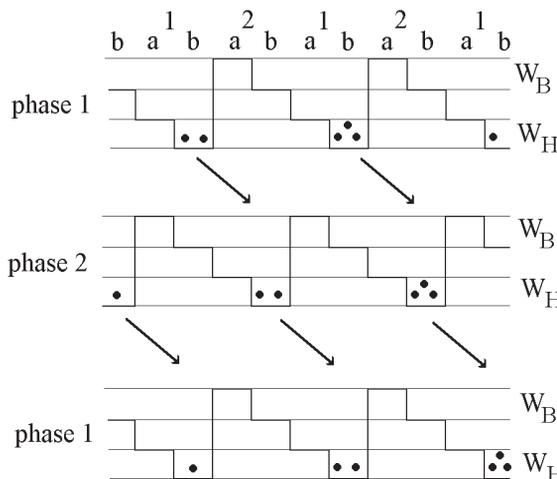
$$V_2 < V_{Gb} < V_{Ga}$$

Après le début de la collecte, il faut être en régimes de désertion et d'inversion alternés pour pouvoir conserver localement les électrons collectés :

$$V_{Gb} < (V_1 \text{ ou/et } V_2) < V_{Ga}$$

La charge maximale accumulable sous une électrode de collecte est celle calculée en II.B.3.b. $Q_M = C_1 (V_G - V_{Gl}) c^2 = 142 \cdot 10^{-15} \text{ C}$ soit un peu moins de 10^6 électrons.

c. Représentons les énergies des électrons au cours de trois phases consécutives. On constate que le déplacement des puits d'énergie consécutifs (dissymétriques) entraîne les électrons d'une électrode b à l'électrode b suivante (à droite sur la figure).



d. Le pixel est une période du registre, formée de quatre éléments capacitifs. La période minimale détectable correspond à deux pixels soit huit électrodes et une bande passante spatiale allant de 0 à $\sigma_c = \frac{1}{8c} = 12,5 \text{ mm}^{-1}$.

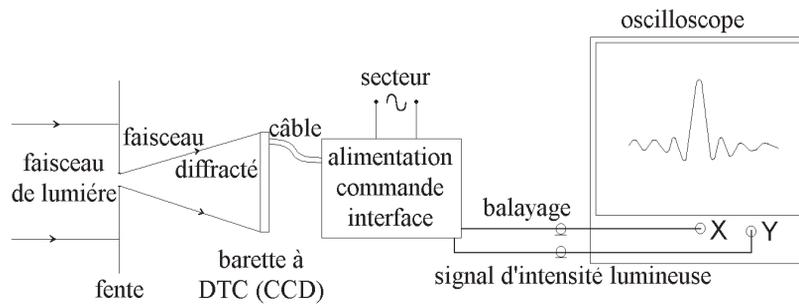
e. A la fréquence minimale f_m , pendant la durée d'une mesure $\frac{1}{f_m}$, le courant $J_s c^2$ fournit une charge $10^{-3} Q_M$ sous les électrodes b au potentiel V_H : $f_m = \frac{10^3 J_s c^2}{Q_M} = \frac{10^3 J_s}{C_1 (V_G - V_{Gl})}$.

Avec les valeurs du II.C.b. on obtient $f_m = 7,0 \text{ Hz}$.

Une charge avançant de un pixel par période de V_1 et V_2 , la fréquence de commande des tensions est $f_v = 128 f_m = 901 \text{ Hz}$.

f. Capteurs de distributions spatiale de lumière. Capteurs d'image par exemple, caméras CCD...

g.



PARTIE III

QUANTITÉ DE MOUVEMENT
ET MOMENT CINÉTIQUE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

III.A.1. On néglige le courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans les équations de Maxwell ce qui conduit à négliger tout phénomènes de propagation. Dans le cadre de la jauge de Coulomb ($\text{div } \vec{A} = 0$), les potentiels et le champ magnétique se calculent comme en statique. Le champ électrique se calcule pour sa part suivant
$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

III.A.2. On choisit des coordonnées cylindriques d'axe Oz porté par \vec{M} . Les deux charges se repoussent et tendent à s'éloigner avec une vitesse radiale. Mais, étant en mouvement, elles sont soumises à la force magnétique due au dipôle qui a une composante orthoradiale. Les trajectoires s'infléchissent alors et ont une allure de spirale dans un plan perpendiculaire à \vec{M} . La vitesse ayant alors une composante orthoradiale, il y a apparition d'un moment cinétique en O selon Oz. Dans le plan de la trajectoire, le champ du dipôle est $\frac{q\mu_0 M}{4\pi r^3}(-\vec{u}_z)$ et la composante orthoradiale de la force magnétique subie par une particule est $\frac{q\mu_0 M}{4\pi r^3} \frac{dr}{dt}$. Le moment par rapport à Oz en est alors $\frac{\mu_0 q M}{4\pi r^2} \frac{dr}{dt}$ et le moment cinétique en O des deux charges vérifie $\frac{d\vec{\sigma}_1}{dt} = 2 \frac{\mu_0 q M}{4\pi r^2} \frac{dr}{dt} \vec{u}_z$. Par intégration (r variant entre a et l'infini)

$$\vec{\sigma}_1 = \frac{\mu_0 q M}{2\pi a} \vec{u}_z.$$

III.A.3. Cette fois ci, la force orthoradiale est due à la composante orthoradiale du champ électrique $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ qui vaut $-\frac{\mu_0}{4\pi a^2} \frac{dM}{dt} \vec{u}_\theta$. L'équation vérifiée par $\vec{\sigma}_2$ est alors $\frac{d\vec{\sigma}_2}{dt} = -2 \frac{\mu_0 q}{4\pi a} \frac{dM}{dt} \vec{u}_z$. Par intégration on obtient alors
$$\vec{\sigma}_2 = \frac{\mu_0 q M_0}{2\pi a} \vec{u}_z.$$

III.A.4 Cette apparition de moment cinétique mécanique correspond en fait à un transfert de moment cinétique du champ électromagnétique vers le système mécanique. Le moment cinétique du champ existe en présence simultanée d'un champ électrique et d'un champ magnétique (voir question III.B.2.). Dans les situations précédentes, on a fait disparaître soit le champ électrique (III.A.2.), soit le champ magnétique (III.A.3.) et donc le moment cinétique initial du champ a été transféré au système mécanique. $\vec{\sigma}_1 = \vec{\sigma}_2$ et correspond au moment cinétique initial du champ.

III.B.1.
$$\text{div } \vec{j}_A + \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \alpha$$

III.B.2.

a. Par sommation des forces $q_i(\vec{E} + \vec{v}_i \wedge \vec{B})$ et utilisation de $\sum_i q_i \vec{v}_i = \vec{j} d\tau$ on obtient
$$\frac{d\vec{f}}{d\tau} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}.$$

b. On remplace ρ par $\epsilon_0 \text{div } \vec{E}$, \vec{j} par $\frac{r \text{rot } \vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ par $-r \text{rot } \vec{E}$ pour obtenir :

$$\vec{V} = \epsilon_0 \left(\vec{E} \text{div } \vec{E} + r \text{rot } \vec{E} \wedge \vec{E} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(r \text{rot } \vec{B} \wedge \vec{B} \right)$$

qui est une expression parfaitement symétrique en champs électrique et magnétique car on peut toujours rajouter un terme en $\vec{B} \text{div } \vec{B}$ qui est identiquement

nul. Le terme contenant le champ électrique dans $\vec{V} \cdot \vec{u}$ est égal à $-\varepsilon_0 \operatorname{div} \left(\frac{\vec{u} E^2}{2} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{E} \right)$ ce qui se justifie en utilisant les formules d'analyse vectorielle portant sur $\operatorname{div}(f\vec{u})$ et $\operatorname{grad} \left(\frac{E^2}{2} \right)$ données dans l'énoncé et le fait que $\vec{u} \cdot (\vec{E} \cdot \operatorname{grad}(\vec{E})) = \vec{E} \cdot \operatorname{grad}(\vec{u} \cdot \vec{E})$. Finalement :

$$\operatorname{div} \left[\varepsilon_0 \left(\frac{\vec{u} E^2}{2} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{E} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\vec{u} B^2}{2} - (\vec{u} \cdot \vec{B}) \vec{B} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}) = - \frac{d\vec{f}}{d\tau} \cdot \vec{u}$$

- c. Cette équation est l'équation bilan locale de la projection sur \vec{u} de la quantité de mouvement du champ électromagnétique. Le terme en $\frac{d\vec{f}}{d\tau}$ correspond bien à la création par unité de temps de quantité de mouvement (le signe - signifie que ce terme est cédé à la matière). $\varepsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B})$ est alors la densité volumique associée à la quantité de mouvement. On peut lui associer une densité volumique de moment cinétique en O de la forme $\vec{r} \wedge \varepsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B})$. Une étude de la direction de ce vecteur en quelques points dans les situations du III.A. montre que le moment cinétique du champ est bien non nul et dirigé selon Oz tant que les champs électrique et magnétique coexistent.

III.C.1. $\vec{B} = \vec{u}_x \wedge \vec{E}/c$

III.C.2. En utilisant les projections sur Ox, la densité volumique de *quantité de mouvement* est $\varepsilon_0 E^2/c$ et le

vecteur densité de courant de *quantité de mouvement* est $\vec{j}_p = \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \vec{u}_x = \varepsilon_0 E^2 \vec{u}_x = \varepsilon_0 \frac{E^2}{c} c \vec{u}_x$.

La dernière égalité est de la forme $\vec{j} = \rho \vec{v}$ et s'interprète en considérant que la *quantité de mouvement* est transportée à la vitesse c selon l'axe Ox (par les photons !).

III.C.3 Le vecteur de Poynting est le vecteur densité de courant d'énergie et vaut $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x = c \vec{j}_p$.

Le rapport c entre les vecteurs densité de courant d'énergie et de *quantité de mouvement*, correspond au rapport c entre l'énergie et la *quantité de mouvement* des photons.

III.C.4. La pression (*quantité de mouvement* cédée par unité de surface et de temps) et la puissance surfacique (énergie apportée par unité de temps et de surface) sont alors dans un rapport 2/c (le facteur 2 vient du caractère réfléchissant de la surface - « rebond des photons »-). $p = \frac{2}{c} 1500 = 10^{-5} \text{ N.m}^{-2}$. Ceci communique à la voile une accélération de $10^{-5} \text{ N.m}^{-2} / 10 \text{ g.m}^{-2} = 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$. L'accélération due à l'attraction gravitationnelle solaire est $\Omega^2 R$ où Ω est la pulsation associée à une période d'une année et R le rayon de l'orbite terrestre (150 millions de km). $\Omega^2 R = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$ est 6 fois plus grand que le terme associé à la pression de radiation. Ce rapport n'est pas très grand et la voile solaire peut donc jouer un rôle non négligeable.

PARTIE IV

TÉLÉTRANSMISSION DU SIGNAL

IV.A. Émission.

IV.A.1. Émission dipolaire.

a. Potentiels retardés.

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\vec{E} = - \text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\square V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

$$\square \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$$

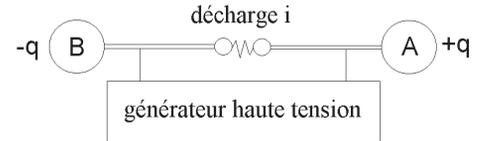
$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho \left(P, t - \frac{PM}{c} \right) \frac{\delta\tau}{PM}$$

et :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j} \left(P, t - \frac{PM}{c} \right) \frac{\delta\tau}{PM}$$

vérifient la condition de jauge de Lorentz $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$.

b. Doublet.



Exemple du doublet de Hertz :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dq}{dt} a \vec{u}_z = i a \vec{u}_z = i \vec{B}\vec{A}$$

c. Rayonnement dipolaire.

i. $r \gg a$ permet l'approximation :

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}$$

$cT \gg a$ permet l'approximation :

$$\frac{PM}{c} = \frac{r}{c}$$

D'où :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} i \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{B}\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\vec{p}}{dt} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

et :

$$\vec{B}(M, t) = \text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r} \frac{d^2\vec{p}}{dt^2} \left(t - \frac{r}{c} \right) \wedge \vec{u}_r$$

en négligeant les dérivations de $\frac{1}{r}$ qui conduisent à des termes de l'ordre de $\frac{\mu_0}{4\pi r^2} \frac{d\vec{p}}{dt}$.

Cette expression est négligeable devant la précédente si $\frac{1}{r} \ll \frac{1}{cT}$, soit $r \gg cT$.

On calcule le champ électrique en intégrant l'équation de Maxwell-Ampère (et en excluant tout champ statique) : $\vec{E} = c^2 \int \vec{r} \text{rot } \vec{B} dt = c\vec{B} \wedge \vec{u}_r$.

- ii. Les expressions de \vec{E} et \vec{B} montrent que $(\vec{u}_r, \vec{E}, \vec{B})$ est un trièdre orthogonal direct et que $|\vec{E}| = c |\vec{B}|$ ce qui correspond bien en chaque point à la structure d'une onde plane.

iii.
$$P(r, t) = \int_{(\text{espace})} \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot r^2 d\Omega \vec{u}_r = \frac{c}{\mu_0} 2\pi r^2 \int_0^\pi B^2 \sin\theta d\theta = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left| \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \right|^2 \left(t - \frac{r}{c} \right)^2$$

La distance r n'intervient que par le terme de propagation $t - \frac{r}{c}$, c'est-à-dire que la puissance émise se propage sans pertes à la vitesse c .

d. Émission d'une porteuse sinusoïdale.

i.
$$\left\langle \left| \frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} \right|^2 \right\rangle = I_0^2 a^2 \omega^2$$

entraîne :
$$P_0 = \frac{2\pi}{3} \mu_0 c I_0^2 \frac{a^2}{\lambda^2}$$

- ii. P_0 est de la forme $R I_0^2$ où la résistance de rayonnement est :

$$R = R_0 \frac{a^2}{\lambda^2}$$

avec :
$$R_0 = \frac{2\pi}{3} \mu_0 c = 80 \pi^2 = 790 \Omega.$$

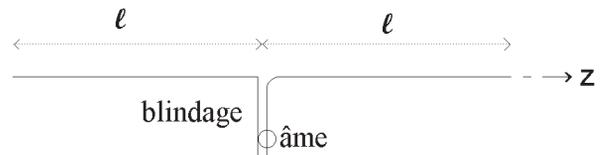
IV.A.2. Antenne filaire demi-onde.

a. Courant dans l'antenne.

L'onde stationnaire sinusoïdale a une intensité qui s'annule en

$$z = \pm l, \quad \text{d'où, pour } l = \frac{\lambda}{4},$$

$$i(z, t) = I_0 \sqrt{2} \cos 2\pi \frac{z}{\lambda} \exp(-j\omega t).$$



b. Rayonnement de l'antenne.

- i. Chaque élément dz de l'antenne est considéré comme un dipôle créant le champ à grande distance $\delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r} \frac{\partial i}{\partial t} \left(t - \frac{PM}{c} \right) dz \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$

$r \gg a$ permet l'approximation $PM = r - z \cos\theta$, d'où :

$$\delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} I_0 \sqrt{2} (-j\omega) \frac{\exp\left(-j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{r} \cos 2\pi \frac{z}{\lambda} \exp\left(-j 2\pi \frac{z}{\lambda} \cos\theta\right) dz \sin\theta \vec{u}_\phi$$

On calcule :

$$\int_{-\frac{\lambda}{4}}^{+\frac{\lambda}{4}} \cos 2\pi \frac{z}{\lambda} \exp\left(-j 2\pi \frac{z}{\lambda} \cos\theta\right) dz = 2 \int_0^{\frac{\lambda}{4}} \cos 2\pi \frac{z}{\lambda} \cdot \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda} \cos\theta\right) dz$$

$$= \frac{\lambda}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin^2 \theta}$$

puis :

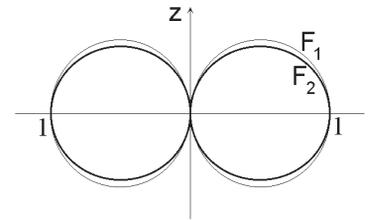
$$\vec{B}(r, \theta, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0 \sqrt{2}}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin \theta} \exp\left[-j\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right)\right] \vec{u}_\phi$$

Comme en IV.A.1.c.i. $\vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{u}_r$.

Les normes des champs électriques du dipôle et de l'antenne dépendent de la direction selon les fonctions res-

pectives $F_1(\theta) = \sin \theta$ et $F_2(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin \theta}$ (définies

à une constante multiplicative près). $F_1(\theta)$ donne un cercle dans lequel se trouve $F_2(\theta)$. Le tracé à la calculatrice graphique donne les diagrammes ci-après.



ii. Comme en IV.A.1.c. et IV.A.1.d. :

$$P_0 = \frac{\mu_0 c}{2\pi} I_0^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin \theta} d\theta = \frac{\mu_0 c}{2\pi} 1,22 I_0^2$$

On en déduit la résistance de rayonnement :

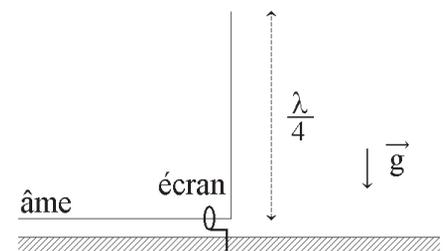
$$R = \frac{\mu_0 c}{2\pi} 1,22 = 73 \Omega$$

iii. Les diagrammes de rayonnement montrent que l'antenne demi-onde est plus directive que le dipôle.

La résistance de rayonnement de l'antenne est plus grande que celle du dipôle (car $a \ll \lambda$), ce qui permet à l'antenne d'émettre plus de puissance.

c. Réalisation pratique.

Un point au-dessus du sol reçoit l'onde émise par la quart-d'onde et celle réfléchiée sur le sol provenant de l'image virtuelle antisymétrique par rapport au sol (par suite de l'opposition par réflexion sur un conducteur parfait). Le champ est donc le même que pour la demi-onde étudiée ci-dessus. Mais comme il n'occupe que la moitié de l'espace, la puissance émise est divisée par deux et la résistance de rayonnement vaut $36,5 \Omega$



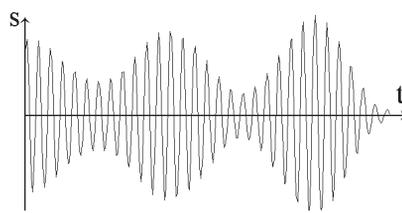
IV.B. Transmission de signal.

IV.B.1. Modulation.

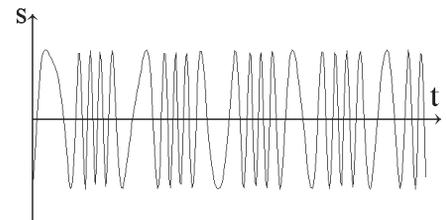
a. Intérêt de la modulation.

- i. Aux audiofréquences les longueurs d'ondes λ sont très grandes et la puissance émise sera en $\frac{1}{\lambda^2}$ (IV.A.1.d.) et donc très faible : les antennes réalisables ($a \ll \lambda$) ne sont pas adaptées à ces fréquences.
- ii. On peut utiliser la modulation d'amplitude ($s = p_0 (a + k m(t)) \cos \omega_0 t$),
la modulation de fréquence ($s = p_0 \cos 2\pi (f_0 t + k \int m(t) dt)$),
la modulation de phase ($s = p_0 \cos (\omega_0 t + k m(t))$)
les deux dernières étant des cas de modulation angulaire.

Allure des signaux :



modulation d'amplitude



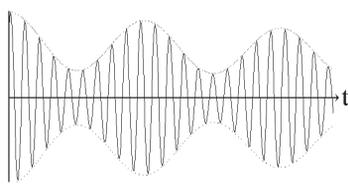
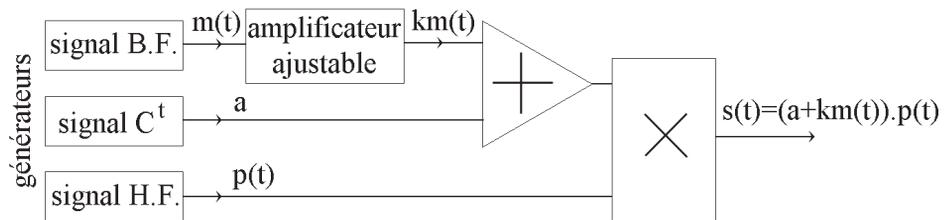
modulation angulaire

Cette méthode présente deux avantages :

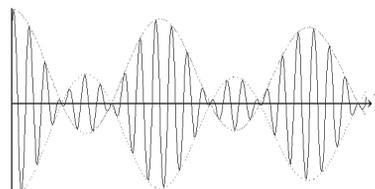
- émission à des fréquences adaptées à l'antenne,
- transport d'un grand nombre d'informations sur des canaux différents.

b. Étude temporelle du signal modulé.

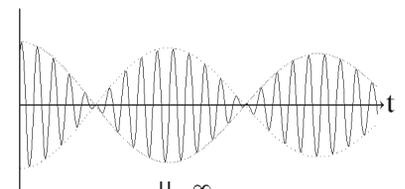
- i. Les composants multiplicateurs de qualité étant de fabrication courante, leur utilisation conduit à un schéma fonctionnel simple :



$\mu < 1$
enveloppe = $a + km(t)$



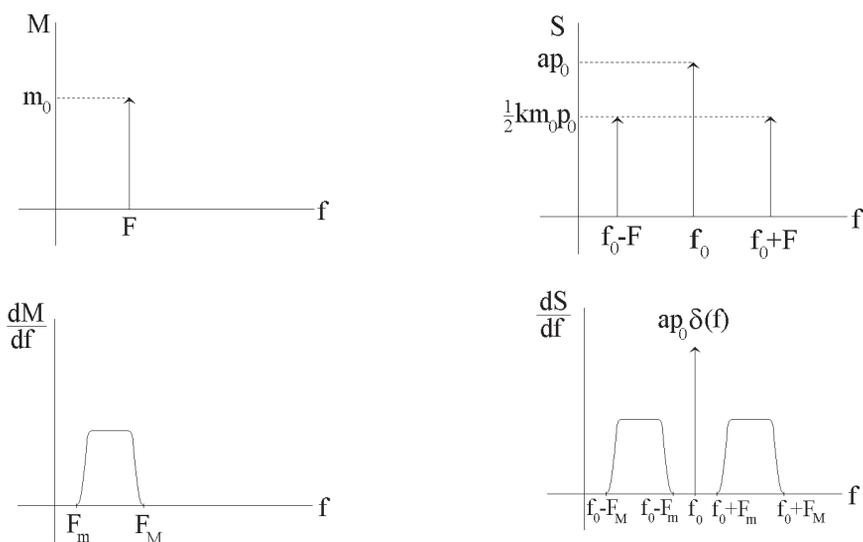
$\mu > 1$
enveloppe = $|a + km(t)|$



$\mu = \infty$
(porteuse supprimée)
enveloppe = $|km(t)|$

ii.

c. Étude spectrale du signal modulé.



Pour $m(t)$ sinusoïdal, on désigne par des capitales les amplitudes des différentes composantes sinusoïdales des signaux à la fréquence f (tracées pour $f > 0$) :

Avec $m(t) = m_0 \cos \Omega t$, on obtient :

$$s(t) = a p_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} k m_0 p_0 (\cos (\omega_0 + \Omega) t + \cos (\omega_0 - \Omega) t)$$

Pour un signal quelconque, le spectre est continu et il faut porter en ordonnées les densités spectrales $\frac{dM}{df}$ et $\frac{dS}{df}$. A chaque fréquence de $m(t)$ correspondent les deux fréquences de $s(t)$ symétriques par rapport à f_0 .

Le signal modulé $s(t)$ occupe la bande comprise entre $f_0 - F_M$ et $f_0 + F_M$ de largeur $2F_M$, centrée sur f_0 .

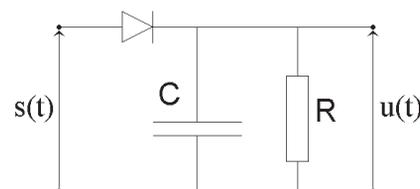
Dans la modulation à porteuse supprimée la fréquence f_0 de densité $a p_0 \delta(f)$ (où $\delta(f)$ est la distribution de Dirac ou impulsion-unité) disparaît et toute la puissance du signal $s(t)$ est concentrée dans les composantes de $m(t)$: cette modulation est énergétiquement plus efficace.

A chaque fréquence F du signal à transmettre correspondent deux fréquences $f_0 \pm F$ du signal modulé. Une seule est suffisante pour transmettre l'information contenue dans $m(t)$ et l'on peut supprimer les fréquences inférieures (ou supérieures) à f_0 . La bande occupée est alors divisée par deux, ce qui permet de dégager des fréquences pour transmettre d'autres informations. C'est la modulation à bande latérale unique.

IV.B.2. Démodulation.

a. Méthode de la détection de crête.

Quand $s(t) < u(t)$ la diode est bloquée et le condensateur se décharge dans la résistance R avec la constante de



temps τ . Cette situation se produit quand $s(t)$ est décroissante. $u(t)$ redevient égale à $s(t)$ au cours de l'alternance suivante (voir les courbes de $s(t)$ et $u(t)$).

Pour que $u(t)$ suive au plus près l'enveloppe, il faut d'une part que $\tau = RC \gg \frac{1}{f_0}$, d'autre part que la

pente de la décharge de l'ordre de $\frac{ap_0}{\tau}$ (si $\mu < 1$) soit supérieure à la pente de l'enveloppe de l'ordre de

$k m_0 p_0 2\pi F$, soit $RC < \frac{1}{2\pi F \mu}$. On trouve donc comme ordres de grandeur (pour $\mu \approx 1$) :

$$\frac{1}{f_0} \ll RC \ll \frac{1}{F}.$$

Cette condition étant réalisée, il reste dans $u(t)$ des oscillations à des fréquences f_0 et ses multiples que l'on peut éliminer par filtrage passe-bas de fréquence de coupure f_c telle que $F \ll f_c \ll f_0$.

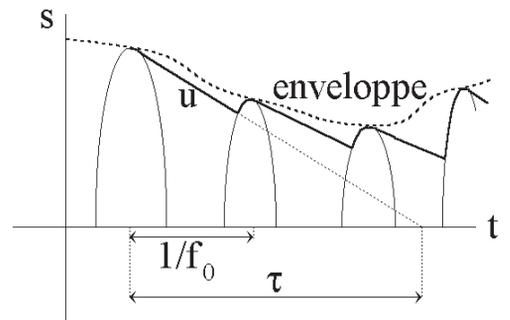
D'après les courbes tracées en IV.B.1.b. on voit que l'enveloppe ne concorde avec le signal à transmettre que si $\mu < 1$.

b. Méthode de la démodulation synchrone.

Le signal $m(t)$ pouvant être considéré comme une somme de signaux sinusoïdaux de type $m_0 \cos 2\pi Ft$, on fait d'abord l'étude dans ce cas simple. Le signal $s(t)$ contenant les fréquences $\{f_0 - F, f_0, f_0 + F\}$, le signal produit $s(t)p(t)$ contient les fréquences $\{0, F, 2f_0 - F, 2f_0, 2f_0 + F\}$. Le filtre ne doit laisser passer que la fréquence F . C'est donc un passe-bande de fréquences de coupure f_{c_1} et f_{c_2} qui, pour le signal quelconque $m(t)$ doivent satisfaire les conditions : $0 \ll f_{c_1} < F_m, F_M < f_{c_2} \ll 2f_0 - F_M$.

Dans les deux cas, le multiplieur effectue une translation du signal $m(t)$ dans l'espace des fréquences : de $+f_0$ à la modulation, de $-f_0$ à la démodulation.

Si le signal $s(t)$ contient la porteuse à la fréquence f_0 , on peut récupérer cette dernière en utilisant une boucle à verrouillage de phase. Si la modulation est à porteuse supprimée, il est cependant possible de régénérer la phase de celle-ci par un traitement plus complexe.



Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE
Épreuve B : Composition de chimie - Session : 1997

A. ÉLÉMENTS, ATOMES, MOLÉCULES

I. Définitions.

1. Dix-septième colonne. Avant-dernière à droite.
2. $F : 1s^2 2s^2 2p^5$ $Cl : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$
 $Br : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^5$ $I : \dots 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^5$
3. $X^- ns^2 np^6$ octet, type gaz rare, très stable.
4. EI : réaction $X_{\text{atome gaz}} \rightarrow X_{\text{gaz}}^+ + e^-$
AE : $X_{\text{gaz}}^- \rightarrow X_{\text{atome gaz}} + e^-$ $r_X = \frac{d_{X-X}}{2}$ (d dans molécule X_2).
5. $E_X : X_{2\text{gaz}} \rightarrow 2X_{\text{atome gazeux}}$; $Cl_2 \rightarrow 2Cl$ $\lambda = 490 \text{ mm}$.

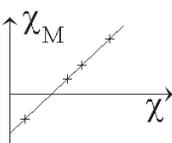
II. Électronégativité des éléments.

1. Tendance à attirer les électrons de liaison \Rightarrow liaison polarisée.
2. EN \nearrow de gauche à droite et \nearrow de bas en haut ; Fluor.
3. *Échelle d'Allred-Rochow.*
 - a. Z^* ; pour les atomes polyélectroniques, un e^- est soumis à l'attraction du noyau (proportionnelle à Z) et aux répulsions des autres électrons \Rightarrow globalement attraction centrale plus faible proportionnelle à $Z^* = Z - \sigma$ (σ effet d'écran des e^-).
 - b. $Z^* = 5,2$ (F) 6,1 (Cl) 7,6 (Br) 7,6 (I)
 - c. $x_{AR} = 4,45$ (F) 2,98 (Cl) 2,84 (Br) 2,29 (I)
4. *Échelle de Pauling.*
 - a. Pauling = $\chi(Cl) = 3,15$ $\chi(Br) = 2,99$
 - b. $E_{BrCl} = 2,27 \text{ eV}$ $D_{BrCl} = 218,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.
 - c. Bromure de chlore correspondrait à la polarisation $\overset{\delta+}{Cl} - \overset{\delta-}{Br}$, soit à $\chi_{Br} > \chi_{Cl}$.

5. *Échelle de Mulliken.*

a.
$$\chi_M = \frac{EI + AE}{2}$$

b. F : 10,4 Cl : 8,31 Br : 7,58 I = 6,78

c. 
$$\chi_M = 2,756 \chi - 0,539 \quad (\text{coefficient corrélation} = 0,99)$$

$$\chi_M = 2,76\chi - 0,54$$

d.
$$\chi_M = 2,76 \times 2,50 - 0,54 = 6,36 \quad \chi_M = \frac{11,3 + 1,26}{2} = 6,28$$

accord 1,3 %.

B. CORPS SIMPLES

I. **Obtention.**

Diaphragme : empêche le mélange $\text{Cl}_2 + \text{OH}^- \rightarrow$ dismutation.

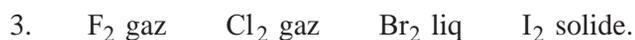
b. Membrane perméable aux cations (les ions OH^- ne passent pas dans le compartiment anodique).

Intérêt : obtention de soude pure (non mélangée à NaCl).



Intérêt : soude pure après décomposition de l'amalgame.

Inconvénient : pollution par Hg si fuites.



II. Réactivité en phase sèche : comparaison des pouvoirs oxydants de Cl₂ et de O₂.

1. a.
$$\Delta_r G_1^0 (T) = - 63.10^{+3} + 55,5 T \text{ J. mol}^{-1}$$

b. $T < 1135 \text{ K}$: Cl₂ plus oxydant que O₂.

2. a.
$$\Delta_r G_2^0 (298) = 38779 \text{ Joule. mol}^{-1}$$

$$\Delta_r G_2^0 (700) = 12850 \text{ J. mol}^{-1}.$$

b. $P = 203,4 \text{ bar}$.

c. Plus de HCl et de O₂ : se placer à $T > 700 \text{ K}$ et $P < 203,4 \text{ bar}$.

III. Réactions en milieu aqueux.

1. *Dichlore.*

a.
$$E = E_{\text{Cl}_2/\text{Cl}^-}^0 + \frac{0,06}{2} \log \frac{P_{\text{Cl}_2}}{P_o} \Big/ \frac{1}{(\text{Cl}^-)^2}$$

$$E = E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}}^0 + \frac{0,059}{4} \log \frac{P_{\text{O}_2}}{P_o} (\text{H}^+)^4$$

b. α.
$$\log_{10} K = \frac{E_{\text{Cl}_2}^0 - E_{\text{O}_2}^0}{0,059 / 2} \quad K = 2,5.10^4$$

β.
$$c = 8,6 \text{ mol. L}^{-1}$$

γ. Cl₂ oxyde H₂O avec dégagement de O₂ (mais cinétique lente).

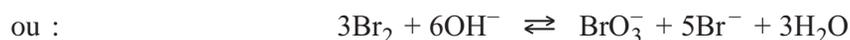
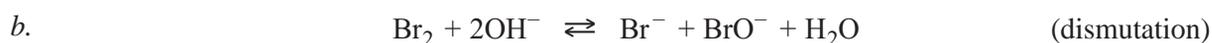
c.
$$\Delta_r G_2^0 (298) = - 25,1 \text{ kJ. mol}^{-1} \quad \Delta_r G_2^0 = + 38,8 \text{ KJ. mol}^{-1}$$

dans (2') H₂O est liquide et HCl est dissous dans l'eau. C'est l'hydratation des ions H⁺ et Cl⁻ qui rend la réaction (2') beaucoup plus favorable que (2) en phase gazeuse.

Cl₂ est plus oxydant que O₂ vis-à-vis de H₂ en solution aqueuse.

2. *Dibrome.*

a.
$$P_{\text{Br}_2}^* = 0,28 \text{ bar} \quad s = 0,19 \text{ mol. L}^{-1} \quad E_{\text{Br}_2/\text{Br}_{\text{aq}}^-} = 1,09 \text{ V}$$



3. *Diode.*

a.
$$(\text{I}_2)_{\text{aq}} = 1,33.10^{-3} \text{ mol. L}^{-1}$$

b. $K = 374$ $[I_2]_{\text{total}} = [I_2]_{\text{aq}} + [I_3^-] = 3,45 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$



$\beta.$ $K = 10^{-49}$

$\gamma.$ $K_2 = 1 \quad \text{pH} = 8,17$

$\delta.$ A pH = 0 $K_2 = K_1 = 10^{-49}$

A pH = 10 $K_2 = 10^{11}$

I_2 stable à pH acide (< 8), se dismuté à pH basique (> 8).

$E_{IO_3^-/I^-}^0 = 1,10 \text{ volt à pH} = 0.$

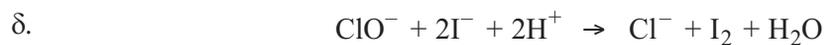


$\beta.$ Milieu basique : I_2 se dismuté en IO_3^- et I^- .



$\gamma.$ On forme le tampon CH_3COOH / CH_3COO^- $\text{pH} = \text{p}K_a \approx 5.$

Le pH reste constant. Avec HCl on peut ajuster à pH = 5 mais le pH ne se conserve pas.



$c_{\text{commerciale}} = 1,8 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

C. HALOGÉNURES

I. Caractère ionique ou covalent.

1. Si M = métal (à gauche et en bas) : caractère ionique.

Exemple : NaCl MgCl₂.

Si M = non métal (à droite et en haut) : caractère covalent.

Exemple : PCl₃ PCl₅ molécule gazeuses

CCl₄ liq volatil.

2. BF₃ : triangle plan

CCl₄ : tétraèdre

NF₃ : pyramide à base triangle.

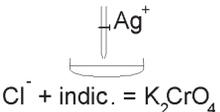
PCl₃ : pyramide à base triangle.

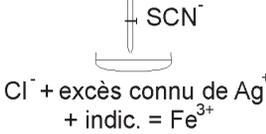
PCl_5 : bipyramide à base triangle
 SF_6 : octaèdre : bipyramide à base carrée.

3. a. 2 cfc décalés d'une demi arête.
- b. Ions Na^+ et Cl^- au contact le long d'une demi arête.
- c. $a = 2 (r_+ + r_-)$
- d. Compacité $\xi = 66,2 \%$.
- e. $\rho = 2235,0 \text{ kg.m}^{-3}$

II. Dosages des halogénures en solution par argentimétrie.

1. $\text{Ag}^+ + \text{X}^- \rightleftharpoons \text{AgX}_{(s)} \quad K_s = (\text{Ag}^+) (\text{X}^-)$
2. $s = 1,34 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1} \quad s' = 1,8 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}$

3. Mohr  fin de réaction : virage au rouge $\text{Ag}_2 \text{CrO}_4$.

Charpentier Volhard :  : on dose l'excès de Ag^+ par SCN^- ($\rightarrow \text{AgSCN}_s$).

Fin : virage au rouge (FeSCN^{2+}).

III. Dosage des halogénures par chromatographie d'échange d'ions.

1. Résine échangeuse d'anions.
 - a. $V_R C_{ZR}^0 = [Z_{sol}^-] V_S + [Z_{rs}^-] V_R$
 $V_S C_{XS}^0 = [X_{rs}^-] V_R + [X_{sol}^-] V_S$
 - b. $n = V_R C_{ZR}^0 - [Z_{rs}^-] V_R = V_S C_{XS}^0 - V_S [X_{sol}^-]$

$$K = \frac{n^2}{(V_R C_{ZR}^0 - n) (V_S C_{XS}^0 - n)}$$

c. $n = 4,44 \cdot 10^{-4}$ moles échangées.

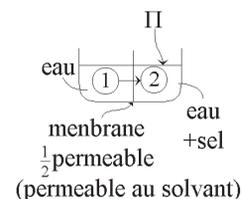
2. Analyse chromatographique.
 - a. A_1 correspond à F^- ; A_2 à Cl^- ; A_3 à Br^- ;
 $k = 5 \cdot 10^6$ unités par mol.L^{-1} pour F^-
 $4 \cdot 10^6$ Cl^-
 $4 \cdot 10^6$ Br^-



IV. Dessalement industriel de l'eau de mer.

• Pour arrêter le flux de solvant de ① vers ② (car $\mu_{\text{solvant}}(1) > \mu_{\text{solvant}}(2)$), on applique une surpression π du côté 2.

• Si on applique $\pi' > \pi$ du côté ② on a alors $\mu_{\text{solvant}}(2) > \mu_{\text{solvant}}(1)$ et le solvant va de la cuve 2 vers la cuve 1. On obtient de l'eau dessalée du côté 1.



$$\left(\mu_{\text{solvant}} = \underbrace{\mu_{\text{solvant}}^0 + R T \ln x_{\text{solvant}}}_{< 0} + \underbrace{\int_{P_0}^{P_0 + \pi} \bar{V}_{\text{solvant}} dp}_{> 0} \right)$$

D. LES HALOGÈNES EN CHIMIE ORGANIQUE

1. Étude de mécanismes réactionnels.

1. Étude cinétique de l'iodation de l'acétone en milieu acide aqueux.



b.
$$[\text{I}_2] \times 10 \times 2 = V_{\text{S}_2 \text{O}_3^{2-} (\text{cm}^3)} \times 10^{-2} \times 1$$

Expérience 1 :

t (min)	1,4	5,0	10,0	15,0	20,0	25,0
$[\text{I}_2]$ (mol.L ⁻¹)	$5,35.10^{-3}$	$4,90.10^{-3}$	$4,45.10^{-3}$	$3,95.10^{-3}$	$3,50.10^{-3}$	$3,00.10^{-3}$

Régression linéaire : pente = $- 0,0977.10^{-3}$ coefficient de corrélation = $- 0,9993$.

$$\text{ord} = 5,44.10^{-3}$$

Expérience 2 :

t	1,0	5,0	10,0	15,0	20,0	25,0
$[\text{I}_2]$	$5,45.10^{-3}$	$5,25.10^{-3}$	$5,05.10^{-3}$	$4,85.10^{-3}$	$4,7.10^{-3}$	$4,5.10^{-3}$

Régression linéaire : pente = $- 0,0388$ coefficient de corrélation = $- 0,9978$.

$$\text{ord} = 5,46.10^{-3}$$

Expérience 3 :

t	1,0	5,0	10,0	15,0	25,0
$[\text{I}_2]$	$5,40.10^{-3}$	$5,20.10^{-3}$	$4,95.10^{-3}$	$4,70.10^{-3}$	$4,20.10^{-3}$

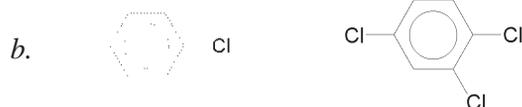
Régression linéaire : pente = $- 0,050$ coefficient de corrélation = $- 1,000$.

$$\text{ord} = 5,45.10^{-3}$$

II. Chimie industrielle.

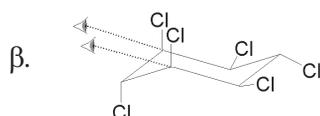
1. Chloration du benzène.

a. AlCl_3

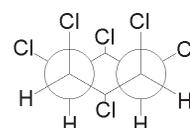


c. Mécanisme classique.

d. Stéréoisomères (enchaînement des atomes identique, mais disposition dans l'espace différente).



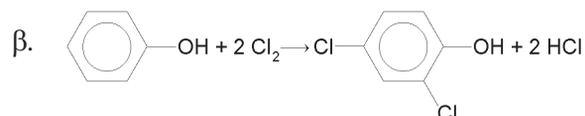
γ . (plus autres possibilités suivant l'axe de visée choisie).



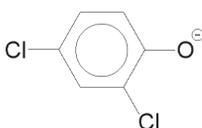
δ . Lindane non chiral (il existe un plan de symétrie dans conformation bateau).

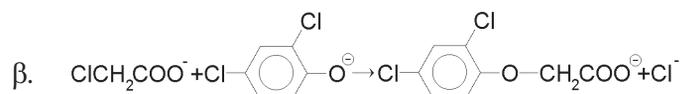
2. Synthèse de l'acide 2,4-dichlorophénoxyacétique ou 2,4-D (herbicide sélectif).

a. α . Réaction ionique (solvant polaire SEA)



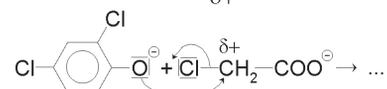
b. $\text{CH}_3\text{COOH} + \text{Cl}_2 \rightarrow \text{ClCH}_2 - \text{COOH} + \text{HCl}$

c. α . $\text{ClCH}_2\text{COO}^-$ et 

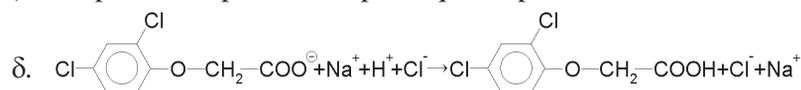


S_{N} nucléophile : ion phénolate

Substrat : $\text{Cl}-\overset{\delta+}{\text{CH}_2}-\text{COO}^-$ (C^{5+} électrophile) ; vraisemblablement $\text{S}_{\text{N}}2$

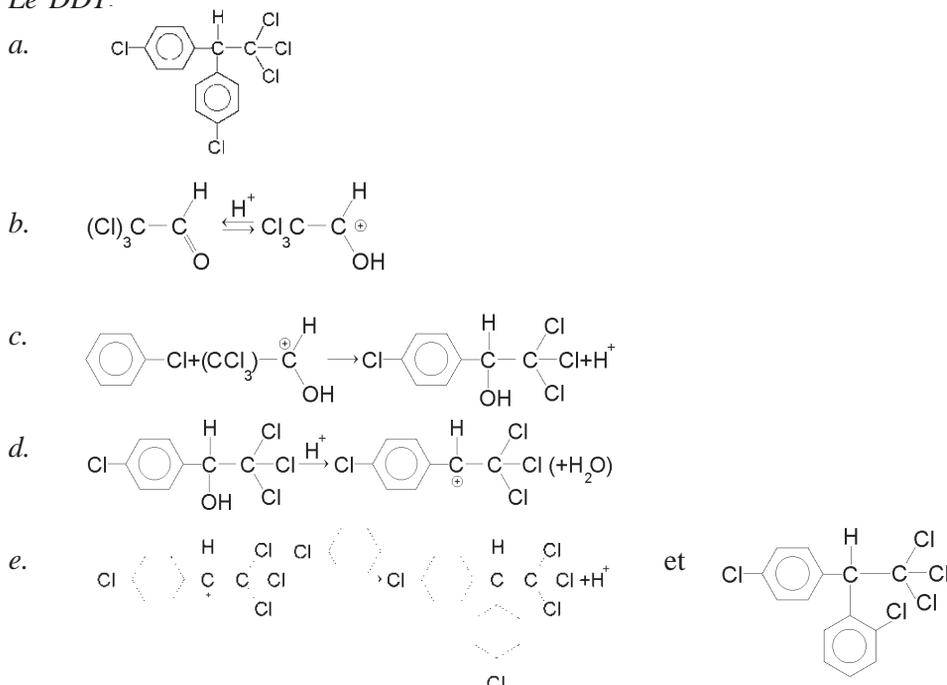


γ . Ion phénolate plus nucléophile que le phénol.



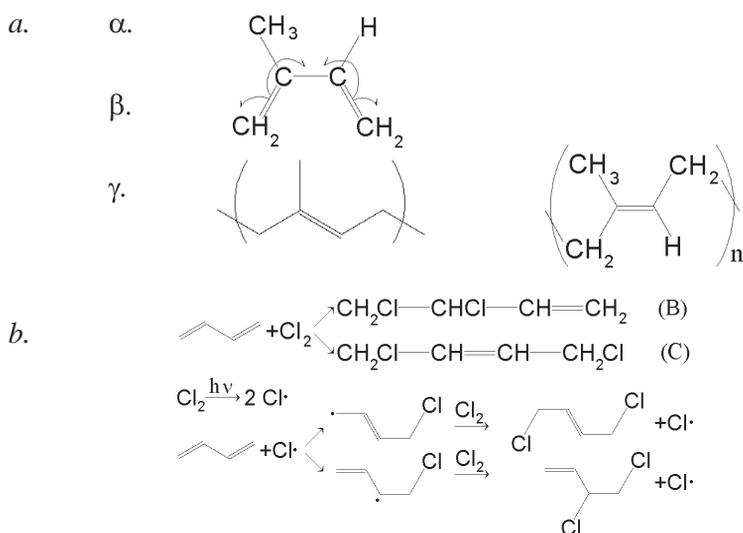
d. On produit 2HCl en a, 1HCl en b, et on consomme 1HCl en $\delta \Rightarrow$ production de 2HCl en tout.

3. *Le DDT.*

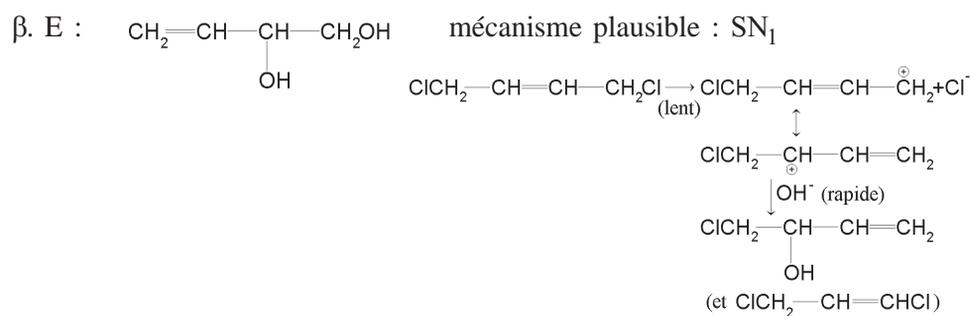
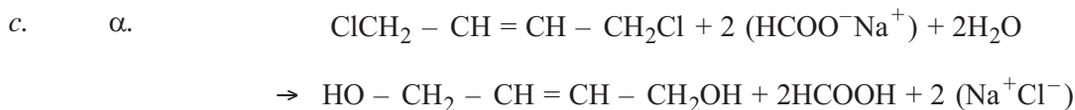


f. Accumulation dans l'environnement. Nocif pour la reproduction des oiseaux → déséquilibre écologique à long terme.

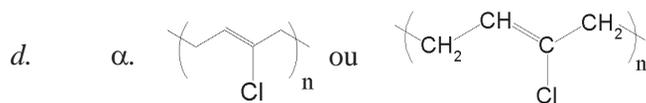
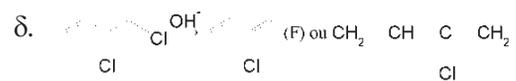
4. *Caoutchouc naturel et synthétique.*



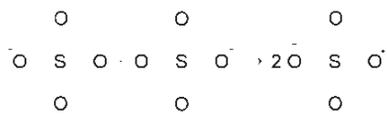
Terminaison : recombinaison de 2 radicaux quelconques.



γ. Catalyseurs d'hydrogénation : Ni, Co, Pt, Pd, Rh.



β. $S_2O_8^{2-}$ génère des radicaux (peroxyde fragile)



γ. Phénol : piège à radicaux



Agrégation (Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE

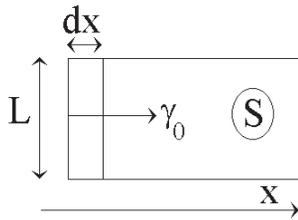
Épreuve C : Problème de physique - Session : 1997

PARTIE I. - ÉNERGIE ET TENSION DE SURFACE

1. a.

$$dF_0 = f_0(T) dS + S \frac{df_0}{dT} dT \quad ; \quad s_0 = - \frac{df_0}{dT}$$

b. La variation d'énergie libre dF_0 est égale au travail dW des forces extérieures qui s'opposent, à l'équilibre, à la force de tension de surface.



$$dF_0 = f_0 dS = -f_0 L dx$$

$$dW = -\gamma_0 L dx$$

$$\Rightarrow \gamma_0 = f_0$$

force normale à la paroi, dans le plan de l'interface, dirigée vers l'intérieur.

c. $\gamma_0 = 72,7 \text{ mN} / \text{m}$ à 20°C , diminue d'environ $0,15 \text{ mN} / \text{m}$ par $^\circ\text{C}$.

2. a.

$$dF_1 = \left(f_1 - \sigma \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \Big|_T \right) dS + S \frac{df_1}{dT} \Big|_\sigma dT \quad ; \quad s_1 = - \frac{\partial f_1}{\partial T} \Big|_\sigma$$

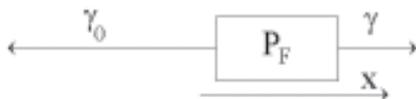
b.

$$\Omega = \sigma \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \Big|_T - f_1$$

c.

$$\gamma = \frac{\partial F_0}{\partial S} \Big|_T + \frac{\partial F_1}{\partial S} \Big|_T = \gamma_0 - \Omega$$

3. a.



$$R_T = \gamma - \gamma_0 = -\Omega$$

R_T est la force par unité de longueur, due au film, qui s'exerce sur la paroi.

b. • Ω est positive car sinon R_T serait dirigée vers l'intérieur du film tensioactif et le film s'effondrerait sur lui-même.

• R_T est dirigée vers la surface extérieure au film. $|R_T| = \Omega$ est donc équivalente à une pression en dimension deux (force par unité de longueur).

• γ doit rester positive car sinon l'interface liquide devient instable vis-à-vis des fluctuations de hauteur.

$$\Rightarrow 0 < \Omega < \gamma_0$$

4. Pour un cylindre de hauteur h et de rayon R , on considère une variation dR du rayon :

variation d'énergie libre :
$$dF = \gamma \times 2\pi h dR$$

travail des forces de pression :
$$dW = (p_i - p_e) 2\pi R h dR$$

$$\left. \begin{array}{l} p_i = \text{pression interne} \\ p_e = \text{pression externe} \end{array} \right) \Rightarrow \Delta p = p_i - p_e = \frac{\gamma}{R}$$

(ce n'est qu'un cas particulier de la formule de Laplace : $\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface).

5. Équilibre de long de la verticale \Rightarrow

$$\gamma_a = \gamma_s + \gamma \cos \theta_c \Rightarrow \cos \theta_c = \frac{\gamma_a - \gamma_s}{\gamma}$$

- $\gamma > |\gamma_a - \gamma_s|$ l'angle de contact θ_c existe.

le liquide «mouille» la paroi

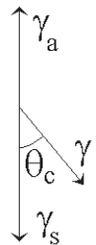
$$\theta_c < 90^\circ \text{ si } \gamma_a > \gamma_s$$

le liquide «ne mouille pas»

$$\theta_c > 90^\circ \text{ si } \gamma_a < \gamma_s$$

Dans les deux cas on a affaire à un mouillage partiel.

- $\gamma < \gamma_a - \gamma_s$: cas du mouillage total. Un film mince de liquide recouvre la paroi.
- $\gamma_s - \gamma_a > \gamma$: cas symétrique (quasiment jamais observé).



6. On écrit l'équilibre des pressions hydrostatiques au point de la surface à l'altitude z :

$$\left. \begin{array}{l} p_i = p_o \text{ pression atmosphérique} \\ p_e = p_o - \rho g z \end{array} \right| \Rightarrow p_i - p_e = \rho g z = \frac{\gamma}{R}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} = -\cos \theta \frac{d\theta}{dz}$$

ds = élément d'abscisse curviligne.

En intégrant l'équation différentielle $z(\theta)$ on trouve :

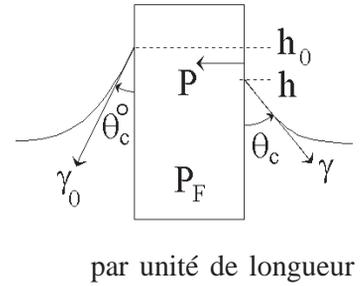
$$\gamma \sin \theta + \rho g \frac{z^2}{2} = C = \gamma$$

car :
$$z = 0 \text{ pour } \theta = \frac{\pi}{2}$$

Remarque : si l'angle de contact était supérieur à 90° , on aurait :

$$\gamma \sin \theta - \frac{\rho g z^2}{2} = \gamma$$

7. En plus des forces de tension de surface, il faut tenir compte de la force de pression hydrostatique P due à la différence d'ascension $h_0 - h$ du liquide de part et d'autre de la barrière.



$$P = \int_h^{h_0} \rho g z dz = \frac{\rho g}{2} (h_0^2 - h^2)$$

Bilan des forces dans la direction horizontale :

$$R_T = \gamma \sin \theta_c - \gamma_0 \sin \theta_c^0 - P = \left(\gamma \sin \theta_c + \frac{\rho g h^2}{2} \right) - \left(\gamma_0 \sin \theta_c^0 + \frac{\rho g h_0^2}{2} \right)$$

$$R_T = \gamma - \gamma_0 = -\Omega$$

Le bilan des forces est inchangé, et ne dépend pas de la forme des ménisques de raccordement.

8.
$$T = \underbrace{2 \gamma l}_{\text{force de tension de surface}} + \underbrace{\rho_1 g H l e}_{\text{poids de la lame}} + \underbrace{\rho g h_1 l e}_{\text{poussée d'Archimède}}$$

En toute rigueur, la hauteur d'eau h_1 qui intervient dans la poussée d'Archimède est la différence de hauteur entre le bas de la lame et le niveau de liquide loin des ménisques.

9. a. Équilibre des moments des forces : $NB\Sigma I = TL$

$$I = \frac{TL}{NB\Sigma}$$

et :

$$\frac{dI}{d\Omega} = -\frac{dI}{d\gamma} = -\frac{2lL}{NB\Sigma}$$

- b. $\Delta I = 1 \text{ mA}$ pour $\Delta\Omega = \gamma_0$

$$L = \frac{NB\Sigma}{2l} \frac{\Delta I}{\Delta\Omega}$$

Application Numérique :

$$L = 2,31 \text{ cm}$$

- c. Sensibilité $\delta\Omega$ correspond à $\delta I = 1 \mu\text{A}$

$$\delta\Omega = \delta I \frac{\Delta\Omega}{\Delta I} = 0,072 \text{ mN / m}$$

PARTIE II. - TRANSITIONS DE PHASE DANS UN FILM TENSIOACTIF

1. A_0 représente l'aire minimale accessible par molécule [«coaire» ou «cosurface» par analogie avec le covolume en dimension 3].

$$A_0 \sim \text{quelques } \text{Å}^2 \text{ ou quelques dizaine d'Å}^2.$$

2. a. L'équation d'état se met sous la forme :

$$\Omega = \frac{\beta k_B T}{A - A_0} - \frac{A_0 k_B T_0}{A^2}$$

en écrivant :

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial A} \right|_T = 0$$

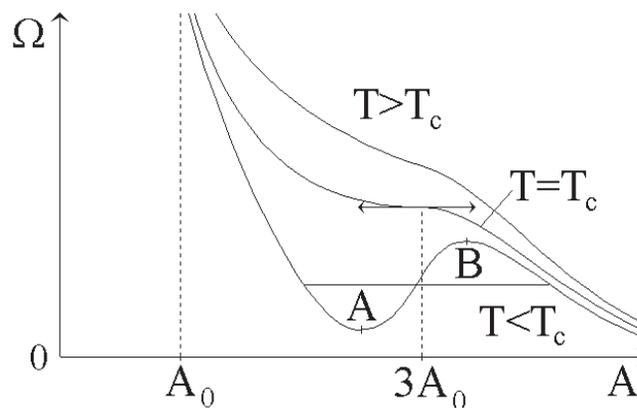
et :

$$\left. \frac{\partial^2 \Omega}{\partial A^2} \right|_T = 0$$

on trouve :

$$\begin{cases} A_c = 3 A_0 \\ T_c = \frac{8}{27} T_0 \\ \Omega_c = \frac{1}{27} \frac{k_B T_0}{A_0} \end{cases}$$

b. isothermes analogues aux isothermes de Van der Waals.



c. La portion AB des isothermes pour $T < T_c$ est instable \rightarrow on doit la remplacer dans cette région par un plateau traduisant l'équilibre entre deux phases de densités différentes (transition du premier ordre).

T_c est la température critique au-delà de laquelle il n'y a plus de transition.

3. Si $dF_1 = S \left. \frac{\partial f_1}{\partial T} \right|_{\sigma} dT - \Omega dS$, on définit naturellement :

$$G_1 = F_1 + \Omega S = \frac{N}{\sigma} (f_1 + \Omega) = NA (f_1 + \Omega)$$

avec :

$$G_1 = N\mu \Rightarrow \mu = A (f_1 + \Omega)$$

A N constant :

$$dG_1 = S \left. \frac{\partial f_1}{\partial T} \right|_{\sigma} dT + S d\Omega = Nd\mu$$

$$\Rightarrow d\mu = A \left. \frac{\partial f_1}{\partial T} \right|_{\sigma} dT + A d\Omega$$

4. a. $\mu_1 = \mu_2$ à l'équilibre.

b. $\mu_1(T, \Omega') = \mu_1(T, \Omega) + A_1 \Delta\Omega$

$$\mu_2(T, \Omega') = \mu_2(T, \Omega) + A_2 \Delta\Omega$$

Comme : $\mu_1(T, \Omega) = \mu_2(T, \Omega)$

on a : $\Delta\mu = (A_2 - A_1) \Delta\Omega$

Si $A_2 < A_1$, $\mu_2 < \mu_1$, la phase 2 est plus stable que la phase 1 et va donc croître.

c. $\Delta G_c = \mu_2 \Delta N_2 + \mu_1 \Delta N_1$; $\Delta N_1 = - \Delta N_2 = - \Delta N$
 variation du nombre de molécules dans chaque phase.

$$\Rightarrow \Delta G_c = (\mu_2 - \mu_1) \Delta N$$

$$\Delta N = \frac{\pi R^2}{A_2}$$

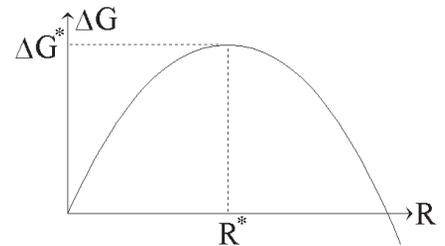
$$\Delta G_c = \pi R^2 \frac{A_2 - A_1}{A_2} \Delta\Omega$$

5. $\Delta G = \Delta G_1 + \Delta G_c = 2\pi R\lambda - \pi R^2 \frac{(A_1 - A_2)}{A_2} \Delta\Omega$

$\Delta G(R)$ est maximale pour $R = R^*$.

$$R^* = \frac{\lambda A_2}{(A_1 - A_2) \Delta\Omega}$$

$$\Delta G^* = \frac{\pi \lambda^2 A_2}{(A_1 - A_2) \Delta\Omega}$$



6. a. On écrit : $\ln n = \ln K - \frac{\Delta G^*}{k_B T} = \ln K - \frac{\pi \lambda^2 A_2}{(A_1 - A_2) \Delta\Omega k_B T}$

Pour déterminer λ , on trace $\ln n$ en fonction de $\frac{1}{\Delta\Omega}$; la pente de la droite est :

$$p = - \frac{\pi \lambda^2 A_2}{(A_1 - A_2) k_B T}$$

b. On trouve graphiquement, ou bien en faisant une régression linéaire sur les points de mesure :

$$p = 37 \cdot 10^{-3} \text{ N/m} \Rightarrow \lambda = 8.2 \cdot 10^{-12} \text{ J/m}$$

Pour une longueur d'interface $a \sim \sqrt{A_2} \sim 6 \text{ \AA}$ correspondant à une seule molécule, on trouve :

$$\lambda a = 4,9 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

Ce qui est de l'ordre de $k_B T$ (température ambiante), ou encore d'une fraction d'électron-volt.

PARTIE III. - INTERACTIONS DIPÔLAIRES ÉLECTRIQUES

1. a. Composante tangentielle du champ électrique : $E_{+x} = E_{-x}$.
 Composante normale du champ électrique : $\varepsilon_0 (E_{+z} - \varepsilon_r E_{-z}) = e\sigma_0$.
 Potentiel électrique : $V_+ (z = 0) = V_- (z = 0)$.

b. \vec{E} est uniforme dans chaque demi-espace.

$$z > 0 :$$

$$V_+ = -zE_+ + V_0$$

$$z < 0$$

$$V_- = -z \left(\frac{E_+}{\varepsilon_r} - \frac{e\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \right) + V_0$$

2. a. \vec{E} dirigé suivant z et uniforme dans chaque région de l'espace.

$$\text{Relations de passage : } \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 (E_+ - \varepsilon_r E_n) = e\sigma_0 \\ \varepsilon_0 \varepsilon_r (E_n - E_-) = -e\sigma_0 \end{array} \right\} \quad E_+ = \varepsilon_r E_- = 0 \quad \text{par hypothèse}$$

$$\text{donc : } \quad E_n = -\frac{e\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_+ = V_0 \\ V_n = V_0 + \frac{e\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} z \\ V_- = V_0 - \frac{e\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} a \end{array} \right.$$

$$b. \quad U = \frac{1}{2} \int \rho V d^3r = \frac{S}{2} \{ e\sigma_0 V(z=0) - e\sigma_0 V(z=-a) \}$$

$$f_e = \frac{U}{S} = \frac{1}{2} \frac{e^2 \sigma_0^2 a}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{1}{2} \frac{P^2}{a \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

en posant $P = e\sigma_0 a$ (densité surfacique de dipôles).

3. $\Delta V = 0$ sauf sur les plans de charge.

$$V = V_0(z) + V_1(z) \sin kx$$

$$\Delta V = \underbrace{\frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2}}_{\text{fonction de } z} + \underbrace{\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} \sin kx - V_1 k^2 \sin kx}_{\text{fonction de } x \text{ et de } z} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} = 0 \quad \text{et} \quad k^2 V_1 - \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = 0$$

$$\text{Solutions : } \left\{ \begin{array}{ll} z > 0 & V_1 = V_+ e^{-kz} \\ -a < z < 0 & V_1 = V e^{kz} + V' e^{-kz} \\ z < -a & V_1 = V_- e^{kz} \end{array} \right.$$

on a éliminé les solutions qui divergent à l'infini

4. $V_0(z)$ est la solution correspondant à une densité de chargé non modulée. Sa forme est donnée au § 2.a.

$$\text{Continuité de } V_1 \text{ en } z = 0 : \quad \begin{cases} V_+ = V + V' & (1) \\ Ve^{-ka} + V'e^{-ka} = V_- e^{-ka} & (2) \end{cases}$$

Relations de passage pour E_z :

$$\left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0^+} - \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0^-} = -\sigma_0 e - \sigma_1 e \sin kx$$

donne :
$$\epsilon_0 k [V_+ - \epsilon_r (V' - V)] = \sigma_1 e \quad (3)$$

Relation similaire en $z = -a$:

$$\epsilon_r \epsilon_0 k [-Ve^{-ka} + V'e^{ka} + V_- e^{-ka}] = -\sigma_1 e \quad (4)$$

La résolution du système d'équations (1) à (4) donne :

$$V = \frac{\sigma_1 e}{k \epsilon_0} \left(\frac{1}{1 + \epsilon_r} + \frac{1 - \epsilon_r}{2 \epsilon_r (1 + \epsilon_r)} e^{-ka} \right) ; \quad V' = -\frac{\sigma_1 e}{2 k \epsilon_0 \epsilon_r} e^{-ka}$$

$$V_+ = \frac{\sigma_1 e}{k \epsilon_0} \frac{1 - e^{-ka}}{1 + \epsilon_r} ; \quad V_- = \frac{\sigma_1 e}{k \epsilon_0} \left(\frac{1}{1 + \epsilon_r} + \frac{1 - \epsilon_r}{2 \epsilon_r (1 + \epsilon_r)} e^{-ka} - \frac{1}{2 \epsilon_r} e^{-ka} \right)$$

5.
$$U = \frac{e}{2} \int (\sigma V)_{z=0} d^2 r - \frac{e}{2} \int (\sigma V)_{z=-a} d^2 r$$

$$\Rightarrow f_e = \frac{e}{2} \left(\langle \sigma V \rangle_{z=0} - \langle \sigma V \rangle_{z=-a} \right)$$

avec :
$$\langle \sigma V \rangle_{z=0} = \frac{\sigma_1}{2} (V + V')$$

et :
$$\langle \sigma V \rangle_{z=-a} = \frac{e^2 \sigma_0^2 a}{\epsilon_0 \epsilon_r} + \frac{\sigma_1}{2} (Ve^{-ka} + V'e^{ka})$$

} en ne gardant que les termes de valeurs moyenne $\langle \rangle$ non nulle suivant x

On trouve la forme indiquée, avec :

$$\beta_0 = \frac{1}{2\epsilon_r} ; \quad \beta_1 = \frac{3\epsilon_r + 1}{8\epsilon_r (\epsilon_r + 1)} ; \quad \beta_2 = \frac{1 - \epsilon_r}{8\epsilon_r (1 + \epsilon_r)}$$

6. a. On trouve :
$$\sigma(x) = \sigma_0 + \sum_{n \text{ impair}} \frac{4\Delta\sigma}{n\pi} \sin \frac{2\pi nx}{L}$$

avec :
$$\begin{cases} \sigma_0 = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} \\ \Delta\sigma = \frac{\sigma_B - \sigma_A}{2} \end{cases}$$

et :
$$P(x) = ea \sigma(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} P_0 &= ea \sigma_0 \\ n \neq 0 \quad P_n &= \frac{4}{n\pi} ea \Delta\sigma = \frac{P_1}{n} \end{aligned}$$

b.

$$\langle f_e \rangle = \frac{e}{2} \left[\langle \sigma V \rangle_{z=0} - \langle \sigma V \rangle_{z=-a} \right]$$

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_n \sigma_n \sin \frac{2\pi n x}{L}$$

par conséquent :

$$V = V_0(z) + \sum_n V_n(z) \sin \frac{2\pi n x}{L}$$

Dans le développement de σV seuls les termes de même n donnent une contribution non-nulle à la moyenne $\langle f_e \rangle \Leftrightarrow$ les composantes de Fourier ont des contributions indépendantes entre elles.

c. On trouve :

$$\langle f_e \rangle = \beta_0 \frac{P_0^2}{a\epsilon_0} + \frac{P_1^2}{a\epsilon_0} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n^3} \frac{L}{2\pi a} \left(\beta_1 + \beta_2 \exp\left(-\frac{2\pi n a}{L}\right) \right) \left(1 - \exp\left(-\frac{2\pi n a}{L}\right) \right)$$

Le facteur $\frac{1}{n^3}$ assure la convergence de la série.

7. Pour $\frac{a}{L} \ll 1$, on remplace la somme par une intégrale sur $t = \frac{2\pi n a}{L}$:

$$\langle f_e \rangle = \beta_0 \frac{P_0^2}{a\epsilon_0} + \frac{\pi P_1^2}{L} \int_{\frac{2\pi a}{L}}^{\infty} \frac{1}{t^3} (\beta_1 + \beta_2 \exp(-t)) (1 - \exp(-t)) dt$$

L'intégrale diverge quand $\frac{a}{L} \rightarrow 0$. On obtient son comportement asymptotique en développant la fonction à intégrer au deuxième ordre :

$$\frac{1}{t^3} (\beta_1 + \beta_2 \exp(-t)) (1 - \exp(-t)) \sim \frac{1}{t^2} \left(\beta_1 + \beta_2 - \frac{t(\beta_1 + 3\beta_2)}{2} \right)$$

En intégrant, on trouve le résultat annoncé.

8. Pour une aire $S = lL$, on a deux lignes de séparation de phase de longueur l chacune :

Par unité de surface :

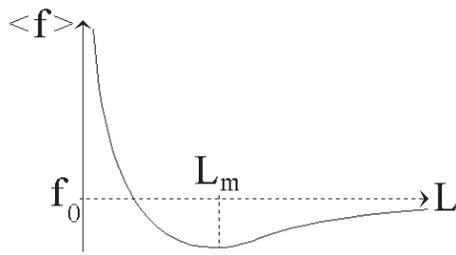
$$\langle f_l \rangle = \frac{2\lambda l}{lL} = \frac{2\lambda}{L}$$

9. a.

$$\langle f \rangle = \langle f_e \rangle + \langle f_l \rangle$$

$$\langle f \rangle = \frac{\beta_0 P_0^2}{a\epsilon_0} + (\beta_1 + \beta_2) \frac{P_1^2}{2a\epsilon_0} + \frac{\beta_1 + 3\beta_2}{2\epsilon_0} \frac{\pi P_1^2}{L} \ln \frac{2\pi a}{L} + \frac{2\lambda}{L}$$

$$\beta_1 + 3\beta_2 = \frac{1}{2\epsilon_r(\epsilon_r + 1)} > 0$$



$$L \rightarrow 0 \quad \langle f \rangle \sim -\frac{K}{L} \ln L$$

$$L \rightarrow \infty \quad \langle f \rangle \rightarrow f_0 - \frac{K}{L} \ln L$$

avec $K > 0$

b. $\langle f \rangle$ admet un minimum pour $L = L_m$, qui correspond à la configuration la plus stable :

en écrivant :

$$\frac{\partial \langle f \rangle}{\partial L} = 0$$

on trouve :

$$L_m = 2\pi a \exp \left(1 + \frac{2\pi\lambda \varepsilon_0 \varepsilon_r (\varepsilon_r + 1)}{(ea)^2 (\sigma_B - \sigma_A)^2} \right)$$

c. Application Numérique : avec les valeurs données, on trouve $L_m = 69 \mu m$, ce qui est une longueur macroscopique, grande devient a.

S'il n'y avait pas de tension de ligne ($\lambda = 0$), on trouverait $L_m = 2\pi a$, c'est-à-dire que les domaines seraient de taille moléculaire, ce qui n'a pas de sens physique.

PARTIE IV. - DIFFRACTION DE RAYONS X PAR UNE MONOCOUCHE À L'ÉTAT CRISTALLISÉ

1. Pour que la diffraction ait lieu sous un angle raisonnable, il faut que la longueur d'onde soit de l'ordre des distances intermoléculaires, soit quelques Å. C'est le cas pour les rayons X.

2. a. La diffusion a lieu sans changement de phase :

$$\rightarrow (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{OM}_i = -\vec{q} \cdot \vec{OM}_i = \phi_i$$

b.

$$A_d = A_2 \exp i (\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t) \times \left(\sum_i \exp (-i\vec{q} \cdot \vec{OM}_i) \right)$$

A_d amplitude de l'onde diffusée dans la direction \vec{k}_2 .

3. a. On a :

$$\vec{k}_2 = \vec{k}_1 + \vec{q}$$

$$\|\vec{k}_2\|^2 = \|\vec{k}_1\|^2 + \|\vec{q}\|^2 + 2 \vec{k}_1 \cdot \vec{q}$$

→ la diffusion a lieu sans changement de longueur d'onde : $\|\vec{k}_1\| = \|\vec{k}_2\|$

$$\rightarrow \|\vec{q}\|^2 = \|\vec{q}_\perp\|^2 + \|\vec{q}_\parallel\|^2$$

→ $\vec{k}_1 \cdot \vec{q} = \vec{k}_1 \cdot \vec{q}_\parallel$ puisque \vec{k}_1 est dans le plan xOy .

On en déduit :

$$\|\vec{q}_\perp\|^2 = -\|\vec{q}_\parallel\|^2 - 2 \vec{k}_1 \cdot \vec{q}_\parallel$$

- b. On observe un maximum d'intensité diffractée lorsque $\sum_i \exp(i \vec{q}_i \cdot \vec{OM}_i)$ est maximale, c'est-à-dire lorsque $\vec{q}_i \cdot \vec{OM}_i$ est un multiple de 2π pour tout i .

$\vec{q} \cdot \vec{OM}_i = \vec{q}_{//} \cdot (m_i \vec{G} + n_i \vec{H})$ ((m_i, n_i) entiers) est un multiple de 2π si :

$$\begin{cases} \vec{q}_{//} \cdot \vec{G} = 2\pi M \\ \vec{q}_{//} \cdot \vec{H} = 2\pi N \end{cases} \quad \text{avec } M, N \text{ entiers}$$

(ce qui revient à écrire que $\vec{q}_{//}$ est un vecteur du réseau réciproque).

- c. Pour chaque $\vec{q}_{//}$ vérifiant les conditions ci-dessus, il y a deux vecteurs \vec{q}_{\perp} et $-\vec{q}_{\perp}$ qui remplissent les conditions du § 3.a.

On observe donc deux taches symétriques par rapport au plan xOy .

4. a. On décompose $\vec{q}_{//}$ sur la base rectangulaire (\vec{G}, \vec{H}) .

$$\vec{q}_{//} = \alpha \vec{G} + \beta \vec{H} \begin{cases} \vec{q}_{//} \cdot \vec{G} = 2\pi M & \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi M}{a^2} \\ \vec{q}_{//} \cdot \vec{H} = 2\pi N & \Leftrightarrow \beta = \frac{2\pi N}{b^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{q}_{//} = 2\pi \left(M \frac{\vec{G}}{a^2} + N \frac{\vec{H}}{b^2} \right)$$

- b. Pour une tache de diffraction : $\|q_{\perp}\|^2 \geq 0 \Rightarrow \|q_{//}\|^2 \leq -2 \vec{q}_{//} \cdot \vec{k}_1$

Une condition nécessaire est : $\|q_{//}\| \leq 2 \|k_1\|$

La valeur minimale de $\|q_{//}\|$ est $\frac{2\pi}{a}$ (car $a > b$), ce qui impose $\lambda_0 \leq 2a$.

Cette condition est suffisante car $\lambda_0 = 2a$ correspond à la plus grande différence de marche possible entre molécules voisines, pour laquelle on observe un pic de rétrodiffusion.

- c. Pour $\vec{q}_{\perp} = \vec{0}$, on a $\|q_{//}\|^2 = -2\vec{k}_1 \cdot \vec{q}_{//}$ et on retrouve la relation de Bragg :

$$q_{//} = 2k_1 \sin \frac{\theta}{2} = \frac{4\pi}{\lambda_0} \sin \frac{\theta}{2}$$

Les premiers vecteurs du réseau réciproque sont :

$$q_1 = \frac{2\pi}{a} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{2\pi}{b}$$

d'où l'on calcule :

$$a = 5,20 \text{ \AA} \quad \text{et} \quad b = 4,60 \text{ \AA}$$

On vérifie ensuite que $q_3 = 2\pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$ correspond effectivement à θ_3 .

5. a. L'amplitude diffractée par un point courant P de la tige $M_i N_i$ est :

$$dA = A_2 \exp i (\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t) \exp \left(i \vec{q} \cdot \overrightarrow{OM_i} \right) \exp i \left(\vec{q} \cdot \overrightarrow{M_i P} \right) dl$$

or :

$$\vec{q} \cdot \overrightarrow{M_i P} = q_{//} \|M_i P\| \sin \psi \cos \eta + q_{\perp} \|M_i P\| \cos \psi$$

En notant $\|M_i P\| = l$, l'amplitude totale diffractée par la tige est donnée par l'intégrale :

$$A = A_2 \exp i (\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t) \exp i \left(\vec{q} \cdot \overrightarrow{OM_i} \right) \int_0^e dl \exp (ilW)$$

- b. L'intensité diffractée I est proportionnelle à AA^* , elle se met sous la forme donnée après normalisation.

6. a. L'amplitude totale diffractée par le réseau s'obtient en sommant l'amplitude A sur toutes les molécules :

$$A_t = A_2 \exp i (\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t) \sum_i \exp (i \vec{q} \cdot \overrightarrow{OM_i}) \int_0^e dl \exp (ilW)$$

L'intégrale (facteur de forme) ne dépend pas de i et sort de la sommation.

L'intensité totale diffractée est donc le produit de $I(W)$ par l'intensité diffractée par un réseau de molécules ponctuelles.

- b. Pour un maximum d'intensité diffractée, il faut ajouter aux deux conditions établies précédemment, à savoir :

$$\|q_{\perp}\|^2 = -\|q_{//}\|^2 - 2 \vec{k} \cdot \vec{q}_{//} \quad \text{et} \quad \|\vec{q}_{//}\| \text{ vecteur du réseau réciproque,}$$

une troisième condition qui donne le maximum de $I(W)$:

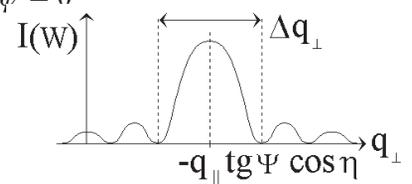
$$W = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q_{//} \sin \psi \cos \eta + q_{\perp} \cos \psi = 0$$

- c. Allure des variations de $I(W)$

La largeur de la tache principale (distance entre les deux premiers minima nuls) est :

$$\Delta q_{\perp} = \frac{4\pi}{e \cos \psi}$$

L'épaisseur du film est $e \cos \psi$, on la mesure à partir de Δq_{\perp} .



7. a. \vec{G} et $\overrightarrow{M_i N_i}$ sont colinéaires, ainsi que $\vec{q}_{//}$ et \vec{G} , donc $\eta = 0$.

$$\frac{q_{\perp}}{q_{//}} = 0,40 = |\operatorname{tg} \psi| \quad \Rightarrow \quad \psi = 21,8^{\circ} \quad (\text{au signe près})$$

- b. On trouve :
- $$e = 21,8^{\circ} \text{ \AA}$$

PARTIE V. - ORDRE DANS UN MONOCOUCHE DICHROÏQUE

1. a. La composante tangentielle du champ électrique est continue et le champ est nul dans le conducteur parfait :

$$\Rightarrow \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{0}$$

Onde transmise : $\vec{E}_t = \vec{0}$

Onde réfléchie : $\vec{E}_r = E_r^0 \vec{e}_x e^{i(kz-\omega t)}$ avec : $E_r^0 = -E_i^0$

- b. La densité \vec{j} de courant surfacique est reliée à \vec{B} (champ magnétique) par :

$$\mu_0 \vec{j} = \vec{e}_z \wedge \vec{B}$$

$\vec{B} = \vec{B}_r + \vec{B}_i$ avec : $\vec{B}_i = -\frac{E_i}{c} \vec{e}_y e^{-i\omega t}$ en $z = 0$

et : $\vec{B}_r = \vec{B}_i$

d'où : $\mu_0 \vec{j} = \frac{2 E_i^0}{c} \vec{e}_x e^{-i\omega t} = -\frac{2 E_r^0}{c} \vec{e}_x e^{-i\omega t} = -\frac{2 \vec{E}_r}{c}$ en $z = 0$

On relie ensuite \vec{j} à $\vec{P}_{//}$ (densité surfacique de dipôles) :

$$\vec{j} = \frac{1}{S} \sum_i q_i \vec{v}_i = \frac{1}{S} \sum_i q_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial t} \sum_i q_i \vec{r}_i = \frac{1}{S} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{P}_{//}}{\partial t}$$

d'où le résultat.

2. a. α a les dimensions d'un volume.

La seule longueur intervenant dans le problème est la taille de la molécule l :

$$\alpha \sim l^3 \sim 10^{-30} \text{ m}^3$$

- b. α_i est directement proportionnelle à l'absorption de puissance par le dipôle induit.

Cette puissance absorbée s'écrit :

$$\frac{dW}{dt} = \sum q \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} = S \sigma \vec{E} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{dW}{dt} = S \sigma \varepsilon_0 (\alpha_r + i\alpha_i) \vec{E} \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} = S \sigma \varepsilon_0 (-i\omega\alpha_r + \omega\alpha_i) E_0^2$$

dont la partie réelle représente effectivement la puissance absorbée.

- c. Le champ local en $z = 0$ est $\vec{E} = E \vec{e}_x e^{-i\omega t}$ et induit une densité surfacique de dipôles :

$$\vec{P}_{//} = \sigma \vec{p}_{//} = \varepsilon_0 \alpha \sigma \vec{E}$$

L'onde rayonnée a la même amplitude E_p^0 dans les directions $z > 0$ et $z < 0$

$$E_p^0 = -\frac{1}{2\varepsilon_0 c} \frac{\partial P_{//}}{\partial t} = i \frac{k\alpha\sigma}{2} E$$

L'onde réfléchie a donc pour amplitude : $E_r^0 = E_p^0$ et l'onde transmise est la superposition de l'onde incidente et de l'onde rayonnée :

$$E_t^0 = E_i^0 + E_p^0$$

L'amplitude du champ local vaut :

$$E = E_i^0 + E_r^0 = E_t^0 = E_i^0 + E_p^0$$

En résolvant ces équations, on trouve :

$$E_r^0 = \frac{iA}{1 - iA} E_i^0$$

et :

$$E_t^0 = \frac{1}{1 - iA} E_i^0$$

avec :

$$A = \frac{k\sigma\alpha}{2}$$

3. a. Relations de passage :

$$\begin{cases} \vec{E}_+ - \vec{E}_d = \vec{0} \\ \vec{E}_d - \vec{E}_- = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_+ : z > d \\ E_d : 0 < z < d \\ E_- : z < 0 \end{cases}$$

car il n'y a que des dipôles de polarisation mais pas de charges de polarisation.

Pour le champ magnétique :

$$\begin{cases} \vec{B}_+ - \vec{B}_d = \mu_0 \frac{\partial \vec{P}_{//}}{\partial t} \wedge \vec{e}_z \\ \vec{B}_d - \vec{B}_- = \vec{0} \end{cases}$$

b. On voit que les valeurs \vec{E}_d et \vec{B}_d des champs s'éliminent si la couche est d'épaisseur négligeable.

En écrivant :

$$\begin{cases} \vec{E}_+ = (1 + R) E_i \vec{e}_x \\ \vec{E}_- = T E_i \vec{e}_x \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} \vec{B}_+ = -\frac{E_i}{c} (1 - R) \vec{e}_y \\ \vec{B}_- = -nT \frac{E_i}{c} \vec{e}_y \end{cases}$$

on trouve :

$$T = \frac{2}{(1 + n) - 2iA}$$

$$R = \frac{1 - n + 2iA}{1 + n - 2iA}$$

4. a. Évaluation de $k\sigma\alpha$:

$$k \sim 2 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

dans le visible

$$\alpha \sim 10^{-30} \text{ m}^3$$

$$\sigma \sim 10^{19} \text{ m}^{-2}$$

$\Rightarrow k\sigma\alpha \sim 2 \cdot 10^{-4}$; le développement est légitime.

b. On trouve :

$$R = \frac{1-n}{1+n} + \frac{4iA}{(1+n)^2}$$

$$T = \frac{2}{1+n} + \frac{4iA}{(1+n)^2}$$

c.

$$I_r = |R|^2 I_0$$

$$I_t = n|T|^2 I_0$$

A l'ordre le plus bas en A :

$$|R|^2 = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 - \frac{8A_i (1-n)}{(1+n)^3}$$

$$|T|^2 = \left(\frac{2}{1+n} \right)^2 - \frac{16A_i}{(1+n)^3}$$

avec :

$$A_i = \frac{k\sigma\alpha_i}{2}$$

Le bilan énergétique est :

$$\frac{I_r + I_t}{I_0} = 1 - \frac{8A_i}{(1+n)^2}$$

Comme α_i et donc A_i sont positifs (question 2.b.), on trouve que la couche absorbe effectivement.

Remarque : le signe de α_i dépend de la convention d'écriture $E = E_0 e^{-i\omega t}$; si on avait choisi $E_0 e^{i\omega t}$, il aurait fallu inverser aussi le signe de α_i .

5. a. Le dichroïsme correspond à une absorption anisotrope du champ électromagnétique, ce qui est le cas ici (absorption suivant OX seulement).

b. On décompose \vec{E} suivant OX et OY :

$$\vec{E} = E_i \cos \phi \vec{X} + E_i \sin \phi \vec{Y}$$

En définissant un coefficient de réflexion R_X suivant OX :

$$R_X = \frac{1-n+2iA_X}{1+n-2iA_X}$$

avec :

$$A_X = \frac{k\sigma}{2} (\alpha_1 + i \alpha_2)$$

(définition similaire de R_Y suivant OY avec $A_Y = \frac{k\sigma\alpha_3}{2}$).

L'amplitude du champ réfléchi est :

$$\vec{E}_r = R_X E_i \cos \phi \vec{X} + R_Y E_i \sin \phi \vec{Y}$$

ce qui donne :

$$E_{r//} = (R_X \cos^2 \phi + R_Y \sin^2 \phi) E_i$$

$$E_{r\perp} = (R_Y - R_X) \cos \phi \sin \phi E_i$$

6. a. Dans le cas général $R_Y \neq R_X$, la polarisation réfléchie est elliptique.

b. Si α_1 et α_3 sont petits devant α_2 , on a :

$$R_X \approx \frac{1-n}{1+n} - \frac{2k\sigma\alpha_2}{(1+n)^2} \quad ; \quad R_Y = \frac{1-n}{1+n}$$

R_X et R_Y sont réels, la polarisation réfléchie est rectiligne, tournée d'un angle θ par rapport à la polarisation incidente, tel que :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k\sigma\alpha_2 \sin 2\phi}{n^2 - 1 + k\sigma\alpha_2 (1 + \cos 2\phi)} \approx \frac{k\sigma\alpha_2 \sin 2\phi}{n^2 - 1}$$

car $k\sigma\alpha_2$ est petit devant $n^2 - 1$.

θ est maximum pour :

$$\phi = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \operatorname{tg} \theta_M = \frac{k\sigma\alpha_2}{n^2 - 1}$$

On peut repérer à l'aide d'un analyseur la direction θ du champ réfléchi. En faisant varier la direction de la polarisation incidente par rapport au plan de la monocouche on repère θ_M , et on en déduit alors que OX et E_i font un angle de 45° .

c. Application Numérique :

On trouve $k\sigma\alpha_2 = 0,023$ (ce qui justifie l'approximation) et $\theta_M = 1.7^\circ$.

* * *

Ce problème a été adapté à partir de travaux de recherche sur les monocouches tensioactives, dits «Films de Langmuir», effectués au Laboratoire de Physique Statistique de l'École Normale Supérieure. Je tiens à remercier mes collaborateurs de ces dernières années : Cyrille FLAMENT, François GRANER, Pierre MULLER, Arnaud SAINT-JALMES, dont la contribution à ces travaux a été essentielle.

François GALLET

BIBLIOGRAPHIE

- C.M. KNOBLER : «*Recent developments in the study of monolayers at the air-water interface*», in «*Advances in Chemical Physics*», edited by I. Prigogine et S. Rice (Wiley, New York, 1990) vol. 77, p. 397.
- D. ANDELMAN, F. BROCHARD and J.F. JOANNY : «*Phase transitions in Langmuir monolayers of polar molecules*», J. Chem. Phys. 86 (1987), 3673.
- P. MULLER and F. GALLET : «*First measurement of the liquid-solid line energy in a Langmuir monolayer*», Phys. Rev. Lett. 67 (1991), 1106.
- A. SAINT-JALMES, F. GRANER, F. GALLET, P. NASSOY and M. GOLDMANN : «*Structure of bidimensional phospholipidic crystallites on formamide determined by X-ray diffraction*», Chem. Phys. Lett. 240 (1995), 234.
- C. FLAMENT and F. GALLET : «*Ordered phases in pure and mixed dichroic monolayers*», Modern Phys. Lett. B 9 (1995), 1791.

Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : CHIMIE

Épreuve A : Composition de chimie - Session : 1997

Partie A : SOLUTIONS DE POLYMERES.

I. Modèle du mélange idéal.

I.1. L'expression du potentiel chimique d'un constituant d'un mélange idéal est de la forme :

$$\mu_i(T, P, x_i) = \mu_i^*(T, P) + RT \ln(x_i)$$

où $\mu_i^*(T, P)$ est le potentiel chimique du corps pur et x_i est la fraction molaire du constituant i dans la phase.

I.2. L'enthalpie libre de mélange ΔG_m est égale à la différence d'enthalpie libre entre l'état final (le mélange) et l'enthalpie libre initiale (les corps purs séparés).

$$\Delta G_m = G_f - G_i = (N_1 \mu_1 + N_2 \mu_2) - (N_1 \mu_1^* + N_2 \mu_2^*) = RT(N_1 \ln(x_1) + N_2 \ln(x_2))$$

I.3. Pour obtenir l'entropie de mélange, on utilise la relation entre enthalpie libre et entropie :

$$\partial(\Delta G_m) / \partial T = -\Delta S_m$$

et donc :

$$\Delta S_m = -R(N_1 \ln(x_1) + N_2 \ln(x_2))$$

Pour obtenir l'enthalpie de mélange, on peut soit utiliser la relation de Gibbs-Helmholtz, soit utiliser la relation reliant les grandeurs ΔG_m , ΔH_m et ΔS_m . Avec cette seconde méthode qui évite une opération de dérivation supplémentaire, on obtient $\Delta H_m = 0$.

I.4. Calcul du volume de mélange :

$$\Delta V_m = V_f - V_i = (N_1 v_1 + N_2 v_2) - (N_1 v_1^* + N_2 v_2^*)$$

avec $v_1 = (\partial \mu_1 / \partial P)_T$ volume molaire partiel de 1 dans le mélange et $v_1^* = (\partial \mu_1^* / \partial P)_T$ volume molaire du corps pur. De même pour le constituant 2.

$$v_1 = (\partial \mu_1 / \partial P)_T = (\partial (\mu_1^*(T, P) + RT \ln(x_1)) / \partial P)_T = (\partial \mu_1^* / \partial P)_T$$

On en déduit : $\Delta V_m = 0$.

I.5. Pour observer un comportement de mélange idéal, il faut des interactions comparables entre les espèces A-A, B-B et A-B (A et B étant les deux constituants du mélange).

I.6. Les interactions A-B ne sont jamais comparables à cause de la différence de taille entre les molécules du solvant et celle du polymère.

II. Modèle de polymères sur réseaux.

II.1. Calcul du nombre de complexions Ω du mélange.

$$II.1.1. \quad v_{i+1} = (N_0 - xi).Z(1-p_i).(Z-1).(1-p_i).....(Z-1).(1-p_i)$$

Lorsque l'on place le polymère sur le réseau, il y a pour le premier segment $(N_0 - xi)$ sites disponibles. Puis, pour le second segment, il faut estimer les sites voisins du précédent qui sont disponibles : le site occupé par le premier segment possède Z voisins qui sont parfois occupé avec une probabilité p_i . Donc le nombre de possibilité de placer ce second segment est $Z(1-p_i)$. Pour placer les segments suivants, un des Z sites est occupé par le segment précédent et le nombre de possibilité est donc $(Z-1).(1-p_i)$. Soit au total pour le nombre du complexions :

$$v_{i+1} = (N_0 - xi).Z.(Z-1)^{x-2}.(1-p_i)^{x-1}$$

II.1.2. $(N_0 - xi)$ est le nombre de sites libres. Donc $1-p_i = (N_0 - xi) / N_0 = 1 - xi / N_0$.

II.1.3. En approximant $Z(Z-1)^{x-2}$ à $(Z-1)^{x-1}$, nous avons :

$$v_{i+1} = (N_0 - xi) \cdot (Z-1)^{x-1} \cdot (1-p_i)^{x-1}$$

$$\text{soit : } v_{i+1} = (N_0 - xi) \cdot (Z-1)^{x-1} \cdot ((N_0 - xi) / N_0)^{x-1} = (N_0 - xi)^x \cdot ((Z-1) / N_0)^{x-1}$$

$$\text{soit } \ln(v_{i+1}) = x \cdot \ln(N_0 - xi) + (x-1) \cdot \ln((Z-1) / N_0)$$

La comparaison de la formule (exacte) établie ci-dessus et celle proposée par l'énoncé conduit à étudier l'expression $\ln((N_0 - xi)!) - \ln((N_0 - (i+1)x)!)$. En appliquant la formule de Stirling :

$$\begin{aligned} \ln((N_0 - xi)!) - \ln((N_0 - (i+1)x)!) &= \\ &= (N_0 - xi) \cdot \ln(N_0 - xi) - (N_0 - xi) - (N_0 - (i+1)x) \cdot \ln(N_0 - (i+1)x) - (N_0 - (i+1)x) \\ &= (N_0 - xi) \cdot \ln(N_0 - xi) - (N_0 - (i+1)x) \cdot \ln(N_0 - (i+1)x) - x \end{aligned}$$

Avec l'approximation $\ln(N_0 - xi) \approx \ln(N_0 - xi - x)$ ($i \gg 1$), on obtient :

$$\ln((N_0 - xi)!) - \ln((N_0 - (i+1)x)!) \approx (N_0 - xi - (N_0 - (i+1)x)) \cdot \ln(N_0 - xi) - x$$

$$\text{donc : } \ln((N_0 - xi)!) - \ln((N_0 - (i+1)x)!) \approx x \cdot \ln(N_0 - xi) - x \approx x \cdot \ln(N_0 - xi).$$

On peut donc écrire de façon approchée :

$$\ln(v_{i+1}) = x \cdot \ln(N_0 - xi) + (x-1) \cdot \ln((Z-1) / N_0)$$

$$\ln(v_{i+1}) \approx \ln((N_0 - xi)!) - \ln((N_0 - (i+1)x)!) + (x-1) \cdot \ln((Z-1) / N_0)$$

$$\ln(v_{i+1}) \approx \ln((N_0 - xi)!) / (N_0 - (i+1)x)! + \ln((Z-1) / N_0)^{x-1}$$

soit finalement :

$$v_{i+1} = (N_0 - xi)! \cdot ((Z-1) / N_0)^{x-1} / (N_0 - (i+1)x)!$$

II.1.4. Le nombre de complexion est égal au produit des v_i divisé par $N_2!$ pour tenir compte de l'indiscernabilité des molécules de polymère. Ainsi $\Omega = \prod v_i / N_2!$.

$$\begin{aligned} \Omega &= (1 / N_2!) \cdot (N_0! \cdot ((Z-1) / N_0)^{x-1} / (N_0 - x)! \cdot (N_0 - x)! \cdot ((Z-1) / N_0)^{x-1} / (N_0 - 2x)! \dots \\ &\dots \cdot (N_0 - (N_2 - 1)x)! \cdot ((Z-1) / N_0)^{x-1} / (N_0 - N_2 \cdot x)! \end{aligned}$$

ce qui donne, en simplifiant le dénominateur avec le numérateur suivant, et en remarquant qu'il y a N_2 termes $((Z-1) / N_0)^{x-1}$, on obtient la formule proposée par l'énoncé.

II.1.5. En utilisant la formule de Stirling et la formule de Boltzmann :

$$S = k \cdot (N_0 \cdot \ln N_0 - N_1 \cdot \ln N_1 - N_2 \cdot \ln N_2 + N_2 \cdot (x-1) \ln((Z-1) / N_0) - N_0 + N_1 + N_2)$$

La conservation du nombre de site dans le réseau s'écrit :

$$N_0 = N_1 + x N_2$$

$$\text{Donc } N_0 - N_1 - N_2 = (x-1) \cdot N_2$$

$$\text{D'autre part } N_0 \cdot \ln N_0 = (N_1 + x \cdot N_2) \cdot \ln N_0 = N_1 \cdot \ln N_0 + N_2 \cdot \ln N_0 + (x-1) \cdot N_2 \cdot \ln N_0$$

L'entropie du système s'écrit donc :

$$S = k \cdot (N_1 \cdot \ln N_0 + N_2 \cdot \ln N_0 + (x-1) \cdot N_2 \cdot \ln N_0 - N_1 \cdot \ln N_1 - N_2 \cdot \ln N_2 + N_2 \cdot (x-1) \cdot \ln((Z-1) / N_0) - N_0 + N_1 + N_2)$$

$$= -k \cdot \{N_1 \cdot \ln(N_1 / (N_1 + x \cdot N_2)) + N_2 \cdot \ln(N_2 / (N_1 + x \cdot N_2)) - N_2 \cdot (x-1) \cdot \ln((Z-1) / e)\}$$

II.2. Calcul de l'entropie de mélange polymère liquide/solvant.

II.2.1. $S_1 - 0$ correspond à la variation d'entropie lors de la fusion du polymère. 0 est l'entropie du polymère parfaitement ordonné à l'état liquide.

S_1 est la limite de S lorsque N_1 tend vers 0 et donc lorsque N_2 tend vers N_2/x .

$$\text{On obtient } S_1 = k \cdot (N_2 \cdot \ln x + N_2 \cdot (x-1) \cdot \ln((Z-1) / e))$$

$$\text{II.2.2. } \Delta S_{m,r} = S - S_1 = k \cdot (N_1 \cdot \ln((N_1 + x \cdot N_2) / N_1) + N_2 \cdot \ln((N_1 + x \cdot N_2) / (x \cdot N_2)))$$

II.3. Calcul de l'enthalpie de mélange.

II.3.1. Pour une molécule de polymère, les deux segments terminaux sont entourés de $Z-1$ molécules de solvant. Tous les autres segments (ils sont $x-2$ dans la chaîne polymère) sont entourés de $Z-2$ molécules de solvant. D'autre part le probabilité pour qu'un site voisin soit occupé est donnée par Φ_1 . Donc :

$$P_{1,2} = \{2(Z-1) + (x-2) \cdot (Z-2)\} \cdot \Phi_1.$$

II.3.2. Pour passer de $P_{1,2}$ à $\Delta H_{m,r}$ on multiplie $P_{1,2}$ par $N_2 \cdot \Delta w_{1,2}$.

$$\Delta H_{m,r} = \{2(Z-1) + (x-2) \cdot (Z-2)\} \cdot \Phi_1 \cdot N_2 \cdot \Delta w_{1,2}.$$

$$2(Z-1) + (x-2) \cdot (Z-2) = 2Z - 2 + xZ - 2x - 2Z + 4 = xZ - 2x + 2 \approx xZ \text{ pour } Z \gg 1.$$

Ainsi $\Delta H_{m,r}$ s'écrit de façon approchée :

$$\Delta H_{m,r} = x \cdot Z \cdot \Phi_1 \cdot N_2 \cdot \Delta w_{1,2}$$

II.3.3. On introduit le paramètre adimensionnel $\chi = Z \cdot N_A \cdot \Delta w_{1,2} / (R \cdot T)$.

Donc $Z \cdot \Delta w_{1,2} = (\chi \cdot RT / N_A)$ et :

$$\Delta H_{m,r} = x \cdot N_2 \cdot \Phi_1 \cdot (\chi \cdot R \cdot T / N_A)$$

soit en tenant compte de $x \cdot N_2 \cdot \Phi_1 / N_A = x \cdot N_2 \cdot N_1 / (N_0 \cdot N_A) = (x \cdot N_2 / N_0) \cdot (N_1 / N_A) = \Phi_2 \cdot n_1$

ce qui donne pour $\Delta H_{m,r}$:

$$\Delta H_{m,r} = \chi \cdot R \cdot T \cdot \Phi_2 \cdot n_1$$

II.3.4. Si le paramètre d'interaction est indépendant de la température, la définition de χ permet d'écrire :

$$\chi = (Z \cdot N_A \cdot \Delta w_{1,2} / R) \cdot 1/T$$

$\chi \cdot T$ est une constante.

II.4. Expression de l'enthalpie libre de mélange.

II.4.1. $\Delta G_{m,r} = \Delta H_{m,r} - T \Delta S_{m,r}$

En considérant l'expression de l'entropie de mélange :

$$\Delta S_{m,r} = k(N_1 \ln((N_1 + x N_2) / N_1) + N_2 \ln((N_1 + x N_2) / (x N_2))) = -k(N_1 \ln(\Phi_1) + N_2 \ln(\Phi_2))$$

$$\Delta S_{m,r} = -k N_A (n_1 \ln(\Phi_1) + n_2 \ln(\Phi_2)) = -R(n_1 \ln(\Phi_1) + n_2 \ln(\Phi_2))$$

nous obtenons pour l'enthalpie libre de mélange :

$$\Delta G_{m,r} = \chi \cdot RT \cdot \Phi_2 \cdot n_1 + RT(n_1 \ln(\Phi_1) + n_2 \ln(\Phi_2)) = RT \cdot (\chi \Phi_2 n_1 + n_1 \ln \Phi_1 + n_2 \ln \Phi_2)$$

II.4.2. Expression de l'activité du solvant.

Par définition du potentiel chimique : $\mu_1 = (\partial G / \partial n_1)_{T,P,n_2}$ et

Par définition de l'enthalpie libre de mélange :

$$\Delta G_{m,r} = (n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2) - (n_1 \mu_1^* + n_2 \mu_2^*)$$

avec $\mu_1 = \mu_1^* + RT \cdot \ln(a_1)$ où μ_1^* est le potentiel chimique de 1 corps pur. L'état de référence choisi est donc le corps pur.

Différentiations à température et pression fixée, l'enthalpie libre de mélange :

$$d \Delta G_{m,r} = d(n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2) - d(n_1 \mu_1^* + n_2 \mu_2^*) = (n_1 d\mu_1 + n_2 d\mu_2) + (\mu_1 dn_1 + \mu_2 dn_2) - (\mu_1^* dn_1 + \mu_2^* dn_2)$$

Le premier terme entre parenthèse du développement est nul par application de l'équation de Gibbs-Duhem et $d\mu_1^* = d\mu_2^* = 0$ car à température et pression constantes, le potentiel chimique d'un corps pur est fixé.

On en déduit l'expression de $(\partial \Delta G_{m,r} / \partial n_1)_{T,P,n_2}$:

$$\begin{aligned} (\partial \Delta G_{m,r} / \partial n_1)_{T,P,n_2} &= \mu_1 - \mu_1^* = RT \cdot \ln(a_1) \\ &= RT \cdot (\partial / \partial n_1)_{T,P,n_2} \{ \chi n_1 x n_2 / (n_1 + x n_2) + n_1 \ln(n_1 / (n_1 + x n_2)) + n_2 \ln(x n_2 / (n_1 + x n_2)) \} \\ &= RT \{ \chi x n_2 / (n_1 + x n_2) - \chi n_1 x n_2 / (n_1 + x n_2)^2 + \ln(n_1 / (n_1 + x n_2)) + 1 - n_1 / (n_1 + x n_2) - n_2 / (n_1 + x n_2) \} \end{aligned}$$

soit en introduisant les fractions volumiques :

$$(\partial \Delta G_{m,r} / \partial n_1)_{T,P,n_2} = RT \cdot (\chi \Phi_2 - \chi \Phi_1 \Phi_2 + \ln(\Phi_1) + 1 - \Phi_1 - \Phi_2 / x)$$

soit en faisant apparaître systématiquement la fraction volumique Φ_2 :

$$\begin{aligned} \chi \Phi_2 - \chi \Phi_1 \Phi_2 + \ln(\Phi_1) + 1 - \Phi_1 - \Phi_2 / x &= \chi \Phi_2 - \chi(1 - \Phi_2) \Phi_2 + \ln(1 - \Phi_2) + \Phi_2 - \Phi_2 / x \\ &= \chi \Phi_2 - \chi \Phi_2 + \chi \Phi_2^2 + \ln(1 - \Phi_2) + \Phi_2 - \Phi_2 / x = \chi \Phi_2^2 + \ln(1 - \Phi_2) + (1 - 1/x) \Phi_2 \end{aligned}$$

Ce qui donne la formule proposée par l'énoncé.

III. Etudes expérimentales de la validité du modèle de polymères sur réseaux.

III.1. Mesures de l'activité du solvant.

III.1.1 Mesures de pressions partielles.

III.1.1.1. L'équilibre de phase se traduit par l'égalité des potentiels chimiques du solvant entre la phase gazeuse et la phase liquide :

$$\mu_{1,l}^* + RT \cdot \ln(a_1) = \mu_{1,g}^{\circ} + RT \cdot \ln(f_1 / P^{\circ})$$

où $\mu_{1,l}^*$ est le potentiel chimique du liquide 1 corps pur, $\mu_{1,g}^{\circ}$ est le potentiel chimique standard du constituant 1 gazeux et f_1 est la fugacité du gaz. Si le gaz est parfait, on assimile la fugacité à la pression partielle de 1 et donc la mesure de P_1 est une mesure de l'activité du solvant.

III.1.1.2. Dans le cas le plus général, le gaz ne se comporte pas comme un gaz parfait et dans ce cas il n'est pas possible d'assimiler fugacité et pression partielle. Il faut étudier les propriétés du gaz pour le décrire par une équation d'état (par exemple un développement du viriel en P : $Pv = RT(1 + aP + bP^2)$) ce qui permet le calcul de la fugacité.

III.1.2. Osmométrie.

III.1.2.1. La condition d'équilibre est l'égalité des potentiels chimiques du solvant de part et d'autre de la membrane :

$$\mu_{1,1}^*(T,P) = \mu_{1,1}^*(T,P + \Delta P) + RT \ln(a_1')$$

où ΔP est la surpression existant dans le compartiment contenant le polymère : $\Delta P = h\rho g$.

III.1.2.2. $(\partial\mu_{1,1}/\partial P)_T = v_1$: c'est le volume molaire partiel du constituant 1. Une bonne approximation consiste à poser $v_1 = v_1^*$ où v_1^* est le volume molaire de 1 liquide pur. On suppose par la suite que cette grandeur est constante sur l'intervalle de pression $P, P + \Delta P$.

$$\Delta\mu_{1,1}^*(T) = v_1^* \Delta P = -RT \ln(a_1')$$

III.1.2.3. En utilisant l'équation établie au II.4.2., on obtient :

$$\Delta P = h\rho g = -(RT/v_1^*)\{\chi \Phi_2^2 + \ln(1 - \Phi_2) + (1 - 1/x)\Phi_2\}$$

III.2. Etude d'une solution polystyrène/propanone.

III.2.1. La masse molaire du polystyrène est $M = 104 \text{ g.mol}^{-1}$. On en déduit $x = 15700/104 = 151$

III.2.2. $W_1 = m_1/(m_1 + m_2) = 1/(1 + m_2/m_1)$ soit $1/W_1 = 1 + m_2/m_1$ soit $m_2/m_1 = (1 - W_1)/W_1$

Soit ϕ_1 la fraction volumique du solvant :

$$\phi_1 = n_1/(n_1 + x.n_2) = 1/(1 + x.n_2/n_1) = 1/(1 + x.(m_2/m_1). (M_1/M_2))$$

soit en utilisant la relation établie ci-dessus :

$$\phi_1 = 1/(1 + M_1/(M_2/x). (1 - W_1)/W_1)$$

III.2.4. Pour établir la nature exo ou endothermique de la dissolution du polystyrène dans la propanone, il est nécessaire de déterminer le signe du paramètre d'interaction χ .

Dans ce but, on trace $\ln(a_1) - \ln\Phi_1 - (1 - 1/x).(1 - \Phi_1)$ en fonction de Φ_2^2 . On doit obtenir, si le modèle décrit correctement la réalité, une droite passant par l'origine et de pente χ .

M_2/x représente la masse d'un monomère. Donc dans le cas du mélange propanone/polystyrène, $M_1 = 58 \text{ g.mol}^{-1}$; $M_2 = 104 \text{ g.mol}^{-1}$. On construit le tableau suivant :

W_1	0,042	0,134	0,184	0,293	0,461
Φ_1	0,0729	0,217	0,288	0,426	0,605
Φ_2	0,927	0,783	0,712	0,574	0,395
Φ_2^2	0,860	0,613	0,507	0,329	0,156
g_1	0,735	0,493	0,398	0,247	0,110

avec $g_1 = \ln(a_1) - \ln\Phi_1 - (1 - 1/x).(1 - \Phi_1)$

Le tracé de g_1 en fonction de Φ_2^2 donne une droite de pente 0,853.

Comme $\Delta H_{m,r} = \chi.R.T.\Phi_2.n_1$, si χ est positif, alors $\Delta H_{m,r}$ est aussi positif, ce qui montre que le processus de dissolution est ici endothermique.

III.3. Comportement particulier de la solution polystyrène/chloroforme.

III.3.1. La forme symétrique centrée en 0,5 s'explique par la formation d'un adduit de stoechiométrie 1-1 entre le chloroforme et un composé aromatique. Le déplacement de la bande de vibration de valence de O-D dans CH_3OD lors d'un changement de solvant montre que les composés aromatiques utilisés sont susceptibles de se comporter comme accepteur de liaisons hydrogène.

III.3.2. La diminution du nombre d'onde de la vibration de valence est liée à la diminution de la force de la liaison O-D par augmentation de la force de la liaison hydrogène.

III.3.3. Lors de cette interaction, le noyau aromatique se comporte comme un donneur. Des substituants donneurs (groupements alkyles) favorisent ce comportement donneur du noyau.

III.3.4. Cette contribution stabilisante contribue de façon exothermique au processus de dissolution.

III.3.5. On peut citer d'une part l'interaction entre le chloroforme et la propanone, d'autre part l'interaction entre le benzène et la molécule de chlorure d'hydrogène.

Partie B : ETUDE CINÉTIQUE DES REACTIONS DE POLYMERISATION.

I. Généralités.

I.1. Exemple de réaction de polymérisation : formation du polyéthylène.

Exemple de réaction de polycondensation : formation du polyester.

I.2. Dans le premier cas, il s'agit d'une croissance en chaîne : il y a formation d'intermédiaires réactifs du type $\text{CH}_3\text{CH}_2-(\text{CH}_2-\text{CH}_2)_n-\text{CH}_2-\text{CH}_2\cdot$.

Dans le cas de la polycondensation, il y a croissance par étape : il y a formation d'espèces stables, qui ne sont pas des intermédiaires réactifs.

II. Polymérisation par condensation.

$$\text{II.1. } \overline{DP}_n = \sum i x_i = \sum \{i \cdot p^{(i-1)} \cdot (1-p)\}$$

ce qui conduit à : $\overline{DP}_n = 1/(1-p)$

$$\overline{DP}_w = \sum i \omega_i = \sum \{i^2 \cdot p^{(i-1)} \cdot (1-p)^2\}$$

ce qui conduit à : $\overline{DP}_w = (1+p)/(1-p)$

D'autre part en utilisant $p = (N_0 - N)/N_0$, on obtient $\overline{DP}_n = N_0/N$.

II.2. Pour atteindre $\overline{DP}_n = 100$, il faut $p = 0,99$. Pour atteindre $\overline{DP}_n = 150$, il faut $p = 0,999$. Il est donc nécessaire d'atteindre des degrés d'avancement très élevés.

II.3. Formation du polyamide-11.

II.3.1. $-(\text{NH}-(\text{CH}_2)_{10}-\text{CO})_n-$ est le motif du polymère obtenu.

II.3.2. $-d[\text{AB}]/dt = k[\text{AB}]^2$ donne par intégration :

$$1/c - 1/c_0 = kt, \text{ soit } (c_0 - c)/c = c_0 kt = c_0/c - 1$$

$$\text{Or } \overline{DP}_n = N_0/N = c_0/c.$$

$$\text{Donc } \overline{DP}_n = 1 + kc_0 t = 1 + k' \cdot t.$$

Le tracé de \overline{DP}_n en fonction de t doit conduire à une droite de pente $k c_0$.

Ceci est vérifié expérimentalement :

$$\text{à } t = 196^\circ\text{C}, k' = 0,554 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{à } t = 213^\circ\text{C}, k' = 0,852 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{à } t = 228^\circ\text{C}, k' = 0,979 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$$

Pour déterminer l'énergie d'activation, on utilise l'équation d'Arrhénius $k = A \cdot \exp(-E_a/RT)$.

On trace $\ln(k)$ en fonction de $1/T$; on obtient une droite de pente $-E_a/R$. Et donc $E_a = 33,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

II.3.3. La masse molaire du motif du polymère est : $M_{\text{motif}} = 183 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

$$\omega_i = 10^{-4} \cdot i \cdot 0,99^{i-1} \text{ et } M_i = i \cdot M_{\text{motif}}$$

i	0	20	50	100	200	300	400
ω_i	0	0,0017	0,0033	0,0037	0,0027	0,0015	0,0007
$10^{-4} \cdot M_i$	0	0,37	1,10	1,83	3,66	5,49	7,32

$$\overline{DP}_n = 1/(1-p) = 100 \text{ ce qui donne } M_n = 18300 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{et } \overline{DP}_w = (1+p)/(1-p) = 199 \text{ ce qui donne } = 36417 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{Ainsi } \overline{I} = \overline{DP}_w/\overline{DP}_n = 1,99$$

De façon générale $\overline{I} = 1 + p$. Donc si l'avancement est grand, p tend vers 1 et \overline{I} tend vers 2.

Lorsque p augmente, la courbe s'élargit et s'écrase ; son sommet se déplace vers les grandes valeurs de M_i .

II.3.4. Pour interrompre la réactivité des extrémités de chaîne, on ajoute au milieu réactionnel une impureté monofonctionnelle qui bloque la chaîne en réagissant avec les extrémités.

III. Polymérisation par addition.

$$\text{III.1. } r = -d[\text{M}]/dt = k_i \cdot [\text{R}^\cdot][\text{M}] + k_p[\text{M}] \cdot \sum [\text{R}_i^\cdot]$$

On applique aux radicaux intermédiaires l'approximation des états quasistationnaires :

$$2 k_d \cdot [A] = k_i \cdot [R \cdot] \cdot [M]$$

$$k_i \cdot [R \cdot] \cdot [M] = k_p [R_1 \cdot] \cdot [M] + k_t [R_1 \cdot] \cdot \sum_{i=2}^{n+1} [R_i \cdot] + 2k_t' [R_1 \cdot]^2$$

$$k_i \cdot [R \cdot] \cdot [M] = k_p [R_1 \cdot] \cdot [M] + k_t [R_1 \cdot] \cdot \sum_{i=1}^{n+1} [R_i \cdot]$$

$$k_p [R_1 \cdot] \cdot [M] = k_p [R_2 \cdot] \cdot [M] + k_t [R_2 \cdot] \cdot \sum_{i=1}^{n+1} [R_i \cdot]$$

.....

$$k_p [R_n \cdot] \cdot [M] = k_p [R_{n+1} \cdot] \cdot [M] + k_t [R_{n+1} \cdot] \cdot \sum_{i=1}^{n+1} [R_i \cdot]$$

$$2 k_d \cdot [A] = k_t \cdot \left(\sum_{i=1}^{n+1} [R_i \cdot] \right)^2$$

$$\text{soit } \sum_{i=1}^{n+1} [R_i \cdot] = \left(2k_d \cdot [A] / k_t \right)^{1/2}$$

$$r = k_i \cdot [R \cdot] \cdot [M] + k_p [M] \cdot \sum_{i=1}^{n+1} [R_i \cdot] - k_p [R_{n+1} \cdot] \cdot [M]$$

$$r = k_p [M] \cdot \sum_{i=1}^{n+1} [R_i \cdot]$$

$$\text{Donc : } r = k_p (2k_d/k_t)^{1/2} [M] \cdot [A]^{1/2}$$

III.2. Etude du degré de polymérisation.

III.2.1. $l = (r/2r_d)$

III.2.2. $DP_n = 2l$ ce qui donne $DP_n = k_p (2/(k_d k_t))^{1/2} [M] / [A]^{1/2}$

III.2.3. Si la concentration en amorceur croît, r croît mais le degré de polymérisation moyen DP_n décroît.

$$\text{III.3. } [A] = (k_p)^2 \cdot (2/(k_d k_t)) \cdot [M]^2 / (DP_n)^2$$

Or $[M] = d/M$ et $DP_n = M_w / (I \cdot M)$

ce qui donne $[A] = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

III.4. Avec le substituant CN électroattracteur, on observera une polymérisation anionique. Avec le substituant OCH_3 mésomère donneur, on observera une polymérisation cationique.

IV. Effet de la température.

IV.1. Cas des polymérisations par condensation.

L'expérience montre que lorsque la température croît, la constante k augmente et le degré moyen de polymérisation augmente (voir II.3.2.).

IV.2. Cas des polymérisations par addition.

En reprenant l'expression de la constante de vitesse K , l'application de la loi d'Arrhénius indique que la constante de vitesse est proportionnelle à :

$$\exp((-E_p + E_t/2 - E_d/2)/(RT))$$

avec $-E_p + E_t/2 - E_d/2 = -83,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

Donc si la température augmente, la vitesse croît.

Il a été établi que DP_n est proportionnel à $k_p (2/(k_d k_t))^{1/2}$ soit par application de la loi d'Arrhénius :

$$\exp((-E_p + E_t/2 + E_d/2)/(RT))$$

avec $-E_p + E_t/2 + E_d/2 = 39,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

Donc si la température croît, le degré moyen de polymérisation décroît.

V. Polymérisations par ouverture de cycles.

Le fait que k_d soit peu différente de k_t rapproche cette réaction des réactions par stade (k_d est très différente de k_t pour des réactions en chaîne). En revanche, à chaque instant, sont présentes dans le milieu uniquement des molécules de monomère et de polymères, ce qui rapproche la réaction des réactions en chaîne.

Partie C : STEREOCHIMIE DES POLYMERES.

I. Configuration et stéréorégularité.

I.1. Deux conformères sont deux arrangements spatiaux d'une molécule de constitution définie (enchaînements d'atomes et de liaisons définis) qui sont séparés par une barrière d'énergie inférieure à l'énergie thermique disponible. Deux isomères de configuration sont aussi deux arrangements spatiaux d'une molécule de constitution définie (enchaînements d'atomes et de liaisons définis) ; mais la barrière d'énergie à franchir par passer d'un isomère à l'autre est très supérieure à l'énergie thermique disponible.

I.2.1. Isotactique : enchaînement d'unités configurationnelles identiques.

Syndiotactique : enchaînement alternatif des deux unités configurationnelles.

Atactique : l'enchaînement est aléatoire.

I.2.2. La configuration est S si $n > p$

I.2.5. Au milieu de la chaîne, la configuration absolue des atomes change. Le polymère est optiquement inactif.

II. Etude de la stéréorégularité du polyméthacrylate de méthyle (ou PMMA) par spectroscopie de RMN.

II.1. On observe à δ voisin de 1 ppm les signaux dus aux protons du méthyl lié aux carbones asymétriques. A δ voisin de 2 ppm, il s'agit des signaux du CH_2 . A δ voisin de 3,6 ppm, il s'agit des signaux des méthyles de la fonction ester.

II.2.1. Un polymère isotactique correspond à un enchaînement de triades mm. Un polymère syndiotactique correspond à un enchaînement de triades rr

II.2.2. Si on effectue une analyse globale, que la diade soit r ou m, les atomes d'hydrogène sont diastéréotopiques : la substitution isotopique d'un hydrogène par un deutérium conduit à deux stéréoisomères qui sont diastéréoisomères. Si on se limite à une analyse locale, c'est à dire en se limitant aux deux carbones voisins (on peut prendre comme molécule modèle le 3,5-diméthylheptane et étudier les hydrogènes portés par le carbone 4), les deux hydrogènes du groupement CH_2 d'une diade m (qui correspondrait à un stéréoisomère (R,S)) sont diastéréotopiques tandis que les deux hydrogènes du groupement CH_2 d'une diade r (qui correspondrait à un stéréoisomère (R,R) ou (S,S)) sont homotopiques. D'où un signal RMN pour les protons du groupement CH_2 des diades r, c'est à dire un polymère syndiotactique et deux signaux RMN pour les protons du groupement CH_2 des diades m, c'est à dire un polymère isotactique.

Il est possible de proposer :

- spectre a : deux signaux au voisinage de 2 ppm donc polymère isotactique

- spectre b : un signal au voisinage de 2 ppm donc polymère syndiotactique.

II.2.3. Les protons du groupement méthyle porté par l'atome de carbone ne peuvent pas se coupler (les constantes de couplage en J^n pour $n > 3$ sont en général très faibles). Mais suivant leur appartenance à une triade mm, mr ou rr, leur déplacement chimique est différent.

On peut proposer, par analyse des spectres (a) et (b) :

- pour un méthyle dans une triade mm : $\delta(\text{CH}_3) = 1,23$

- pour un méthyle dans une triade rr : $\delta(\text{CH}_3) = 0,86$ (le signal le plus intense des méthyles du spectre(b)).

- pour un méthyle dans une triade mr : $\delta(\text{CH}_3) = 1,01$

II.3. La conservation du nombre de diade et du nombre de triade implique :

$$(r) + (m) = 1$$

$$(rr) + (mm) + (mr) = 1$$

$$2(m) = 2(mm) + (mr)$$

$$2(r) = 2(rr) + (mr) \quad \text{soit } (m) - (r) = (mm) - (rr)$$

$$\text{soit } (rr) = (mm) + (r) - (m) = (mm) + 1 - 2(m)$$

$$\text{avec } (m) = 0,71 \text{ et } (mm) = 0,58$$

$$\text{ce qui conduit à : } (r) = 0,29 \quad (rr) = 0,16 \quad (rm) = 0,26$$

Partie D : ELECTROCHIMIE ET POLYMERES.

I. Cinétique de l'oxydoréduction à une électrode.

I.1. Les trois modes de transport en solution sont le transport par convection, le transport par diffusion et le transport par migration. Le premier est dû à une agitation macroscopique du solvant, le second à un gradient de concentration et le troisième à un gradient de potentiel électrique.

I.2. Etude de la relation donnant j .

I.2.1. La densité de courant à l'électrode est la somme d'un terme anodique correspondant à un processus d'oxydation et compté conventionnellement positif ($j_o \cdot \exp(\alpha n F \eta / RT)$), et d'un terme cathodique correspondant à un processus de réduction ($-j_o \cdot \exp((1 - \alpha) n F \eta / RT)$), et compté conventionnellement négatif.

I.2.2. η est le potentiel supplémentaire à appliquer par rapport au potentiel d'équilibre pour observer la densité de courant j . Cette grandeur est appelée surtension.

I.2.3. $j_o = |j_a| = |j_c|$ et $j = 0$ lorsque $\eta = 0$.

I.2.4. α et β représentent la fraction de l'énergie électrique qui permet de diminuer l'énergie d'activation pour l'étape de transfert de charge à l'électrode.

I.3. La comparaison de j_o se fait par rapport à l'asymptote atteinte lorsque le transfert de masse limite la densité de courant d'électrolyse. Lorsque j_o est faible, il faut imposer des surtensions notables pour observer des densités de courant importantes ; ce n'est pas le cas lorsque j_o est grand.

II. Synthèses électrochimiques.

II.1. Synthèse de l'adiponitrile.

II.1.1. Si $E < E_1 - E_2$, il ne se produit rien (Red_2 et Ox_1 ne sont pas présents en solution).

Si $E > E_1 - E_2$, il y a électrolyse :

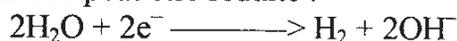
- à l'anode Red_1 est oxydé en Ox_1
- à la cathode Ox_2 est réduit en Red_2



C'est une réaction de réduction : elle a donc lieu à la cathode.

A l'anode, il y a une réaction d'oxydation : on peut proposer la réaction d'oxydation de l'eau avec dégagement d'oxygène.

II.1.3. L'eau peut être réduite :



Le dihydrogène se forme et peut réduire le monomère en propanitrile (CH_3-CH_2-CN).

II.1.4. Les ions ammonium jouent le rôle d'électrolyte support. Mais ils viennent aussi s'adsorber à la cathode, rendent le milieu hydrophobe et évitent ainsi la réaction de réduction de l'eau (réaction parasite). Enfin ils sont difficilement réductibles.

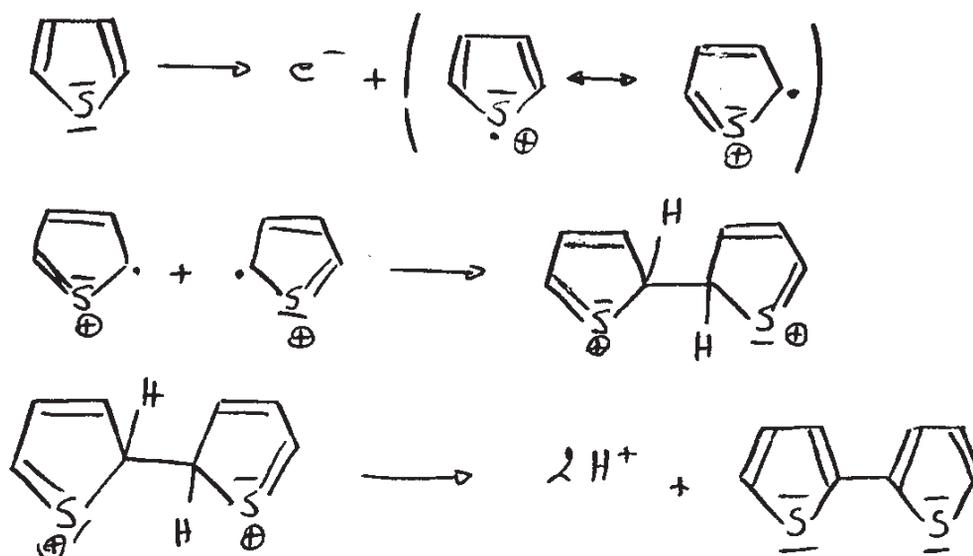
II.1.5. L'oxydation des électrodes métalliques se traduit par l'existence en solution des produits d'oxydation des métaux (ions métalliques Fe^{2+} , Fe^{3+} et Cd^{2+}) qui peuvent se réduire à la cathode, ce qui modifie sa composition chimique. L'ajout d'EDTA, très bon complexant des cations métalliques, rend beaucoup plus difficile ces réactions de réduction.

II.1.6. La différence de potentiel entre les deux électrodes est due :

- à une contribution thermodynamique due à la nature des réactions chimiques et à la composition du milieu réactionnel (loi de Nernst)
- à une contribution cinétique qui se traduit par l'existence de surtensions
- à la chute ohmique due à la résistance de la solution

II.2. Elaboration de nouveaux matériaux.

II.2.1. Proposition de mécanisme réactionnel :



II.2.2. Si le solvant est nucléophile, le radical-cation peut réagir avec les molécules de solvant

II.2.3. Pour que la réaction soit suffisamment rapide, il faut se placer dans une région de la courbe où la densité de courant est suffisante : par exemple pour $E > 1,5$ V.

Pour que le dimère puisse s'oxyder, il faut que son potentiel d'oxydation soit inférieur à celui du monomère et que des surtensions supplémentaires n'apparaissent pas.

Comme les radicaux-cations qui apparaissent lors de la polymérisation comportent d'autant plus de possibilités de délocalisation de la charge positive que le polymère est délocalisé, il est possible de justifier la polymérisation électrochimique du thiophène.

II.2.4. D'après la question II.2.1., il faut deux électrons pour fixer un monomère. Le fait que l'on observe le passage de plus de deux électrons par monomère peut s'expliquer par l'oxydation du polymère lui-même (= apparition de charge). L'existence de réactions parasites (par exemple oxydation du solvant) pourrait aussi expliquer le rendement électrique inférieur à un. Le fait que le polymère présente en infra-rouge des signaux caractéristiques de l'électrolyte et que la microanalyse mette en évidence la présence de chlore confirme l'hypothèse de l'oxydation de la chaîne, avec donc nécessité, pour assurer la neutralité électrique, de la présence d'anions perchlorate, confirme l'hypothèse de l'oxydation de la chaîne de polymère.

$$\%C + \%H + \%S = 76$$

$$\%Cl + \%O = 24$$

Calculons le nombre de motifs présents par anion perchlorate : $(\text{thio})_n^+, \text{ClO}_4^-$

$$m(\text{thio}) = 32,1 + 4 \cdot 12 + 2 = 82,1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$m(\text{ClO}_4^-) = 35,5 + 4 \cdot 16 = 99,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Donc la masse molaire M du polymère est $M = n \cdot m(\text{thio}) + m(\text{ClO}_4^-)$ et l'analyse élémentaire indique :

$$n \cdot m(\text{thio})/M = 0,76 \quad \text{et} \quad m(\text{ClO}_4^-)/M = 0,24$$

$$\text{Donc } n = (0,76/0,24) \cdot (99,5/82,1) = 3,84 \approx 4.$$

II.2.5. Pour observer la copolymérisation, il faut que les potentiels d'oxydation soient voisins.

Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Épreuve A : Composition de physique - Session : 1997

PARTIE A / MÉCANIQUE : ÉTUDE DE QUELQUES MOUVEMENTS À FORCES CENTRALE

I. PROPRIÉTÉS DES MOUVEMENTS DANS UN CHAMP NEWTONIEN

I.1.

$$\vec{L}_O = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt/R} = \vec{m}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}(M) = \vec{0} \quad \forall t$$

$$\vec{L}_O = cte = L_{Oz} \vec{e}_z \quad ; \quad \forall t$$

$$\overrightarrow{OM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{dOM}$$

sont contenus dans le plan $\perp \vec{e}_z$ passant par le point O . La trajectoire est plane et contenue dans ce plan noté xOy .

I.2.

$$C_0 = \frac{L_{Oz}}{m} = r^2 \dot{\theta} = cte$$

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Contante des aires :
$$\frac{1}{2} \vec{r} \wedge d\vec{r} = d\alpha \vec{e}_z$$

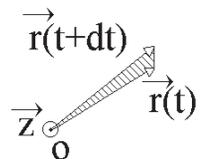
$d\alpha$ aire algébrique élémentaire hachurée > 0 si $(\vec{r} \wedge d\vec{r}) \cdot \vec{e}_z > 0$.

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} \vec{e}_z = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} C_0 \vec{e}_z$$

soit :

$$C_0 = 2 \frac{d\alpha}{dt}$$

$\frac{C_0}{2}$ = vitesse aréolaire ou C_0 constante des aires.



I.3.

$$\frac{d\vec{p}}{dt/R} = m \frac{d\vec{v}}{dt/R} = m (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}_{/R} = m (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r$$

$$\dot{r} = \frac{d}{dt} r = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C_0}{r^2}$$

$$\ddot{r} = -\frac{2}{r^3} \frac{dr}{d\theta} \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} C_0 + \frac{C_0}{r^2} \frac{d^2 r}{d\theta^2} \dot{\theta} = -\frac{2 C_0}{r^3} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \dot{\theta} + \frac{C_0}{r^2} \frac{d^2 r}{d\theta^2} \dot{\theta}$$

or :

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} = +\frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 r}{d\theta^2}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{C_0^2}{r^4}$$

$$r\dot{\theta}^2 = \frac{C_0^2}{r^3}$$

$$\dot{\theta} = \frac{C_0}{r^2}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}_{/R} = m \left(-\frac{C_0^2}{r^3} - \dot{\theta} C_0 \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} \right) \vec{e}_r = -\frac{m C_0^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} \right) \vec{e}_r$$

$$= -\frac{K}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} \right) \vec{e}_r$$

$$\boxed{K = m C_0^2}$$

I.4.

$$\vec{f} = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$$

α cte réelle > 0

$$\boxed{\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{m C_0^2} = cte > 0}$$

Solution générale de l'équation homogène :

$$\frac{1}{r} = A \cos(\theta - \theta_0)$$

A, θ_0 constantes à déterminer.

Solution particulière de l'équation complète :

$$\frac{\alpha}{m C_0^2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{m C_0^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

$$r = \frac{1}{\frac{\alpha}{m C_0^2} + A \cos(\theta - \theta_0)}$$

On choisit l'axe polaire et son orientation de manière à avoir $\theta_0 = 0$ avec $A > 0$ ou $A < 0$.

$\frac{m C_0^2}{\alpha}$ est une quantité positive homogène à une longueur. On pose :

$$p_o = \frac{m C_0^2}{\alpha}$$

A est > 0 ou < 0 et homogène à l'inverse d'une longueur.
 $|A| p_o = e$ nombre > 0 sans dimension.

L'équation de la trajectoire s'écrit :

$$r = \frac{p_o}{1 \pm e \cos \theta}$$

on reconnaît l'équation polaire d'une conique avec p_o paramètre et e excentricité.

I.5. Énergie mécanique E_m du point M.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + E_p$$

avec E_p énergie potentielle dont dérive le champ de forces :

$$\vec{f}(M) = -\frac{\alpha \vec{e}_r}{r^2} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = -\frac{d E_p}{dr} \vec{e}_r$$

$$\frac{d E_p}{dr} = \frac{\alpha}{r^2}$$

$$E_p = -\frac{\alpha}{r} + cte$$

$$E_p(\infty) = 0$$

$$cte = 0$$

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\alpha}{r}$$

La seule force qui s'exerce sur le point M est à circulation conservatrice : d'où E_m est une constante du mouvement.

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

$$r = \frac{p_o}{1 \pm e \cos \theta}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C_0}{r^2}$$

$$\dot{r}^2 = \frac{C_0^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{C_0^2}{r^4} \left(\frac{p_o (\mp) e \sin \theta}{(1 \pm e \cos \theta)^2} \right)^2 = \frac{C_0^2}{r^4} \left(\frac{r^2}{p_0^2} \right)^2 p_0^2 e^2 \sin^2 \theta$$

$$\dot{r}^2 = \frac{C_0^2}{p_0^2} e^2 \sin^2 \theta$$

$$r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{C_0^2}{r^2} = \frac{C_0^2}{p_0^2} (1 \pm e \cos \theta)^2$$

$$v^2 = \frac{C_0^2}{p_0^2} (e^2 \sin^2 \theta + 1 \pm 2e \cos \theta + e^2 \cos^2 \theta) = \frac{C_0^2}{p_0^2} (1 + e^2 \pm 2e \cos \theta)$$

or :

$$-\frac{\alpha}{r} = -\frac{(1 \pm e \cos \theta) m C_0^2}{p_o p_o}$$

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{m C_0^2}{p_o^2} (e^2 - 1) = \frac{\alpha}{2 p_o} (e^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} \alpha &> 0 & e > 0 \\ p_o &> 0 \end{aligned}$$

$E_m > 0$ pour $e > 1$ hyperbole (1 branche)

$E_m = 0$ pour $e = 1$ parabole

$E_m < 0$ pour $\begin{cases} e < 1 & \text{ellipse} \\ e = 0 & \text{cercle} \end{cases}$

I.6. Constante vectorielle ?

$$\vec{R} = \vec{v} \wedge L_o + \beta \vec{e}_r$$

β cte ?

$$\frac{d\vec{R}}{dt_{/R}} = \frac{d\vec{v}}{dt_{/R}} \wedge \vec{L}_o + \vec{v} \wedge \frac{d\vec{L}_o}{dt_{/R}} + \beta \dot{\theta} \vec{e}_0$$

\parallel
 $\vec{0}$

or :

$$\frac{d\vec{V}}{dt_{/R}} = \frac{\vec{f}}{m} = -\frac{\alpha}{mr^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{R} = \overrightarrow{\text{cte}} \Rightarrow \frac{d\vec{R}}{dt_{/R}} = \vec{0}$$

$$-\frac{\alpha}{mr^2} \vec{e}_r \wedge mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z + \beta \dot{\theta} \vec{e}_0 = \vec{0}$$

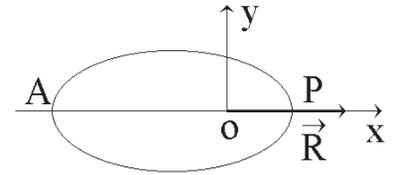
$$\alpha \dot{\theta} \vec{e}_0 + \beta \dot{\theta} \vec{e}_0 = \vec{0}$$

$$\beta = -\alpha$$

Cas d'une trajectoire elliptique : choisissons $A > 0$ puis $A < 0$.

① $A > 0$

$$r = \frac{P_0}{1 + e \cos \theta}$$



P est le péricentre de la trajectoire.

$$\vec{v}(P) = v_P \vec{e}_y$$

$$O\vec{P} = r_P \vec{e}_x$$

$$C_0 = r_P v_P$$

$$\vec{R} = \vec{V} \wedge \vec{L}_0 - \alpha \vec{e}_r = v_P \vec{e}_y \wedge m r_P v_P \vec{e}_z - \alpha \vec{e}_x = \left(\frac{m C_0^2}{r_P} - \alpha \right) \vec{e}_x$$

or :

$$\alpha = \frac{m C_0^2}{p_0}$$

$$\vec{R} = m C_0^2 \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{p_0} \right) \vec{e}_x$$

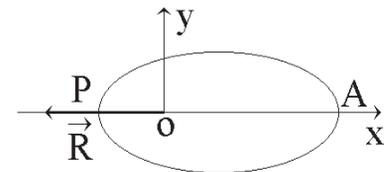
avec :

$$r_P = \frac{p_0}{1 + e}$$

$$\vec{R} = \frac{e m C_0^2}{p_0} \vec{e}_x = e \alpha \vec{e}_x$$

② $A < 0$ A apocentre

$$r = \frac{P_0}{1 - e \cos \theta}$$



$$\vec{R} = m C_0^2 \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{p_0} \right) \vec{e}_x$$

$$r_A = \frac{p_0}{1 - e}$$

$$\vec{R} = - \frac{e m C_0^2}{p_0} \vec{e}_x = - e \alpha \vec{e}_x$$

⇒ dans tous les cas \vec{R} est porté par le grand axe de l'ellipse, orienté de O vers P et a pour norme $e\alpha$.

I.7.

$$E_m = \frac{\alpha}{2 p_0} (e^2 - 1)$$

or :

$$2a = r_A + r_P = p_0 \left(\frac{1}{1 + e} + \frac{1}{1 - e} \right)$$

$$2a = \frac{2 p_0}{1 - e^2}$$

$$E_m = -\frac{\alpha}{2a}$$

énergie négative (état lié).

La période T est égale à la durée de parcours de l'ellipse soit α l'aire de l'ellipse $\alpha = \pi ab$ (b demi petit axe). La vitesse aréolaire est constante, en valeur absolue :

$$\left| \frac{d\alpha}{dt} \right| = \frac{C_0}{2}$$

avec :

$$C_0 = \left(\frac{\alpha p_0}{m} \right)^{1/2}$$

$$a = \frac{p_0}{1 - e^2}$$

et :

$$b^2 = a^2 (1 - e^2)$$

d'après les propriétés géométriques de l'ellipse.

$$C_0^2 = \frac{\alpha a (1 - e^2)}{m}$$

$$T^2 = \frac{4 \alpha^2}{C_0^2} = \frac{4 \pi^2 a^2 b^2}{C_0^2} = \frac{4 \pi^2 a^3 m}{\alpha}$$

troisième loi de Kepler.

II. APPLICATIONS

II.1. Vitesse de libération

II.1.1. v_l vitesse minimale correspondant à un état libre de la particule soit ($E_m = 0$ vis-à-vis de la Terre : vitesse mesurée dans le référentiel géocentrique) :

$$\frac{1}{2} m v_l^2 - \frac{k m M_T}{R_T} = 0$$

II.1.2.

$$v_l = \left(\frac{2 k M_T}{R_T} \right)^{1/2}$$

II.2. Comète à trajectoire parabolique

II.2.1. Trajectoire parabolique $E_m = 0$ pour la comète de masse $m \Rightarrow v_M$ en P car SP minimum = d .

et

$$-\frac{\alpha}{r} + \frac{1}{2} m v^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_M^2 = \frac{k M_S m}{d} \quad v_M = \left(\frac{2 k M_S}{d} \right)^{1/2}$$

La Terre est en orbite circulaire de rayon R_0 autour du Soleil. Son énergie mécanique est :

$$E_{mt} = -\frac{k M_S M_T}{R_0} + \frac{1}{2} M_T v_0^2 = -\frac{k M_S M_T}{2 R_0}$$

soit :

$$v_0 = \left(\frac{k M_S}{R_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_M = v_0 \left(\frac{2 R_0}{d} \right)^{\frac{1}{2}}$$

II.2.2. en A et B, $r = R_0 \Rightarrow v_A - v_B$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{k M_S m}{R_0}$$

$$v_A = \left(\frac{2 k M_S}{R_0} \right)^{\frac{1}{2}} = v_B = \sqrt{2} v_0$$

Écrivons la conservation du moment cinétique de la comète en S :

$$L_S = m d v_M = m v_0 (2 R_0 d)^{\frac{1}{2}} = m v_A R_0 \sin \alpha_A = m v_B R_0 \sin \alpha_B = m v_0 R_0 \sqrt{2} \sin \alpha_A$$

$$\sin \alpha_A = \sin \alpha_B = \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \left(\frac{d}{R_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{d}{R_0} \right)^{\frac{1}{2}} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\alpha_A = \pi - \alpha \quad \alpha_B = \alpha$$

II.2.3. $d = R_0/2$; durée de visibilité = durée de son parcours de A à B.

Équation polaire : $r = \frac{P}{1 + \cos \theta}$ en désignant par C la comète :

$$r = SC \quad \theta = (\overrightarrow{Sx}, \overrightarrow{SC})$$

$$\frac{P}{2} = r(\theta = 0) = d = \frac{R_0}{2}$$

D'où l'équation :

$$r = \frac{R_0}{1 + \cos \theta} \quad V_M = 2 V_0$$

$$C_S = \frac{R_0 V_M}{2} = R_0 V_0 = r^2 \dot{\theta} = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

C_S constante des aires de la comète.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{R_0 V_0}{r^2} = \frac{R_0 V_0}{R_0^2} (1 + \cos \theta)^2 = \frac{V_0}{R_0} (1 + \cos \theta)^2$$

$$dt = \frac{R_0}{V_0} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2}$$

$$\text{D'où : } \Delta t = t_B - t_A = \int_A^B dt = \frac{R_0}{V_0} \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{2 R_0}{V_0} \int_0^{\theta_B} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2}$$

$$(1 + \cos \theta)^2 = 4 \cos^4 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Posons : } \tan \frac{\theta}{2} = u$$

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = 1 + u^2$$

$$du = \frac{d\theta}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$J = \int_0^{\theta_B} \frac{d\theta}{4 \cos^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} \int_0^{u_B} (1 + u^2) du$$

$$\text{avec : } u_B = \tan \frac{\theta_B}{2}$$

$$\text{en } B \text{ pour } d = \frac{R_0}{2} : R_0 = \frac{R_0}{1 + \cos \theta_B}$$

$$\text{soit : } \theta_B = \frac{\pi}{2}$$

$$\tan \frac{\theta_B}{2} = u_B = 1$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + u^2) du = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

$$\Delta t = \frac{4 R_0}{3 V_0}$$

$$\text{et : } V_0 = \frac{2\pi R_0}{T_0}$$

$$\text{D'où : } \Delta t = \frac{2 T_0}{3\pi} = 0,212 T_0$$

II.3. Satellite géostationnaire

II.3.1. Soit G le centre de masse du satellite :

$$\vec{V}_{G/R} = \vec{V}_{G/R_T} + \vec{\Omega}_{R_T/R} \wedge \overrightarrow{OG}$$

$$\text{satellite géostationnaire : } \Rightarrow \vec{V}_{G/R_T} = \vec{O} \quad \forall t$$

D'où :
$$\vec{V}_{G/R} = \vec{\Omega}_{R_T/R} \wedge \vec{OG}$$

$\vec{\Omega}_{R_T/R} = \overrightarrow{cte}$ orientée selon la ligne des pôles terrestres Sud \rightarrow Nord.

$$\vec{V}_{G/R} \perp \vec{OG} \quad \forall(t) \tag{1}$$

et :
$$\vec{V}_{G/R} \perp \vec{\Omega} \quad \forall(t) \tag{2}$$

D'où le mouvement dans R d'un tel satellite est circulaire.

II.3.2.

$$(1) \quad \vec{V}_{G/R} = \frac{d \vec{OG}}{dt_{/R}}$$

on a donc :
$$\frac{d \vec{OG}}{dt_{/R}} \cdot \vec{OG} = 0$$

soit :
$$\left\| \vec{OG} \right\| = cte$$

$$(2) \quad \vec{V}_{G/R} \perp \vec{\Omega}$$

le mouvement est à force centrale ; la trajectoire est contenue dans le plan contenant le centre de forces et perpendiculaire à $\vec{\Omega}$; c'est le plan équatorial terrestre.

Comme $\vec{\Omega} = \overrightarrow{cte}$ le mouvement est circulaire uniforme.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{k M_T} = \frac{4\pi^2}{\Omega^2}$$

avec :
$$\Omega = \left\| \vec{\Omega}_{R_T/R} \right\|$$

$R = \left(\frac{k M_T}{\Omega^2} \right)^{1/3}$	$R = 42291 \text{ km}$
---	------------------------

II.3.3. Vitesse $v = R\Omega$ $V = 3,075 \text{ km}^{-1}$

II.4. **Engin balistique : tir Nord-Sud**

II.4.1. Équation polaire de l'ellipse :
$$r = \frac{R_T}{1 - e \cos \theta}$$

Conservation du moment cinétique en O :

$$m r^2 \dot{\theta} = - m R_T V_0 \sin \varphi$$

$$r^2 \dot{\theta} = - R_T V_0 \frac{\sqrt{3}}{2} = cte$$

Vitesse initiale connue en N sur la base polaire :

$$V_{or} \vec{e}_r = V_0 \cos 60^\circ \vec{e}_r = \frac{V_0}{2} \vec{e}_r = \dot{r} \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) \vec{e}_r$$

$$r = \frac{R_T}{1 - e \cos \theta} \Rightarrow \dot{r} = - \frac{e \sin \theta}{R_T} r^2 \dot{\theta} = e V_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$$

en N :

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{r} = \frac{V_0}{2} = e V_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{e = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

II.4.2.

Distance maximum :

$$OA = r_A = \frac{R_T}{1 - e} = \boxed{\frac{R_T}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}}$$

$$\boxed{OA = 15142 \text{ km}}$$

II.4.3. Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = - \frac{\alpha}{2a} = \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{\alpha}{R_T}$$

$$2a = \frac{2 R_T}{1 - e^2}$$

$$\frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{\alpha}{R_T} \left(1 - \frac{1 - e^2}{2} \right)$$

avec $\alpha = k M_T m$

$$V_0^2 = \frac{k M_T}{R_T} (1 + e^2) = \frac{4}{3} \frac{k M_T}{R_T}$$

$$\boxed{V_0 = 2 \left(\frac{k M_T}{3 R_T} \right)^{1/2}}$$

$$\boxed{V_0 = 9,13 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$$

II.4.4. Constante des aires :

$$\boxed{C_0 = r^2 \dot{\theta} = - R_T V_0 \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boxed{C_0 = - 5,06 \times 10^4 \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}}$$

II.5. Trajectoire de la planète Mercure

II.5.1.

$$T_M = 88 \text{ jours}$$

$$e = 0,21$$

$$a = \left(\frac{k M_S T_M^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

$$a = 5,8 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

$$P_M = (1 - e^2) a$$

$$P_M = 5,54 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

$$b = a \sqrt{1 - e^2}$$

$$b = 5,67 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

II.5.2. a.

$$\|4 - p\|^2 = -\vec{p} \cdot \vec{p} + E^2/c^2 = m^2 c^2$$

$$-\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} + m^2 c^2 \gamma \frac{d\gamma}{dt} = 0$$

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

$$-\vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d}{dt} (\gamma m c^2) = 0$$

soit :

$$\frac{d}{dt} (\gamma m c^2) = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

b.

$$E_m = E_c + E_p = (\gamma - 1) m c^2 - \frac{\alpha}{r}$$

or :

$$\frac{d}{dt} (\gamma m c^2) = \frac{dE}{dt} = \frac{dE_c}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{dE_p}{dt}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = 0$$

$$E_m = cte$$

c. Théorème du moment cinétique en O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt}_{/R} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{L}_O = cte = \vec{OM} \wedge m \gamma \vec{v}$$

donc même raisonnement qu'en mécanique newtonienne \Rightarrow trajectoire plane \perp à \vec{L}_O contenant O.

d.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + m\gamma \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m (\dot{\gamma}\dot{r} + \gamma (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)) \vec{e}_r + m (\dot{\gamma} r\dot{\theta} + \gamma (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})) \vec{e}_\theta = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m (\dot{\gamma}\dot{r} + \gamma (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)) \vec{e}_r$$

$$L_{Oz} = cte = m\gamma r^2 \dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{L_{Oz}}{m\gamma r^2}$$

O désigne le «centre» du Soleil.

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{L_{Oz}}{m\gamma r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{L_{Oz}}{m\gamma} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = -\frac{L_{Oz}}{m} \left(\frac{\dot{\theta}}{\gamma} \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} - \frac{1}{\gamma^2} \dot{\gamma} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} \right)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{L_{Oz}^2}{m\gamma r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} \right) \vec{e}_r$$

e.

$$-\frac{L_{Oz}^2}{m\gamma r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} \right] = -\frac{\alpha}{r^2}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\alpha m \gamma}{L_{Oz}^2}$$

éliminons γ

$$E_m = cte = (\gamma - 1) mc^2 - \frac{\alpha}{r}$$

$$\gamma = 1 + \frac{E_m + \alpha/r}{mc^2}$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{\alpha m}{L_{Oz}^2} \left(1 + \frac{E_m}{mc^2} + \frac{\alpha}{r m c^2} \right)$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2 L_{Oz}^2} \right) = \frac{\alpha}{c^2 L_{Oz}^2} (E_m + mc^2)$$

$$C_1 = \frac{\alpha^2}{c^2 L_{Oz}^2} \quad C_2 = \frac{\alpha}{c^2 L_{Oz}^2} (E_m + mc^2)$$

$$C_1 \approx \frac{\alpha m}{\underbrace{L_{Oz}^2}_1} \times \frac{\alpha}{\underbrace{m}_{10^{-20}}} \times \frac{1}{\underbrace{c^2}_{10^{-17}}}$$

$p_0 \sim 10^{-10} \text{ m}$

$$C_1 \sim 10^{-7} \ll 1 \Rightarrow 1 - C_1 > 0 \text{ voisin de } 1.$$

f.

$$\frac{d^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{d\theta^2} + (1 - C_1) \frac{1}{r} = C_2$$

solution générale de l'équation homogène.

$$\frac{1}{r} = \lambda \cos(\Omega\theta - \theta_0)$$

$$\Omega = (1 - C_1)^{1/2} = \left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2 L_{Oz}^2} \right)^{1/2}$$

solution particulière de l'équation complète.

$$\frac{1}{r} = \frac{C_2}{1 - C_1}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{C_2}{1 - C_1} + \lambda \cos(\Omega\theta - \theta_0) = \frac{1}{P_1} (1 + B \cos \Omega\theta)$$

en choisissant $\theta_0 = 0$.

$$P_1 = \frac{1 - C_1}{C_2} = \frac{L_{Oz}^2 c^2 - \alpha^2}{\alpha (E_m + mc^2)}$$

g. Condition pour que la trajectoire ne présente pas de point à l'infini :

$$\frac{1}{r} \neq 0 \quad \forall \theta \quad B \cos \Omega\theta \neq -1 \quad \forall \theta \Rightarrow |B| < 1$$

h. Période de $\frac{1}{r}$ en fonction de θ : Θ

Elle est telle que :

$$\Omega\Theta = 2\pi$$

$$\Theta = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2 L_{Oz}^2} \right)^{-1/2}$$

$$\Theta \approx 2\pi \left(1 + \frac{\alpha^2}{2 c^2 L_{Oz}^2} \right) = 2\pi + \frac{\pi \alpha^2}{c^2 L_{Oz}^2} > 2\pi$$

i. Le rayon r reprendra même valeur pour une rotation minimum de la planète de l'angle $\Theta > 2\pi$, ce qui correspond à une rotation de l'ellipse sans déformation autour de l'axe Oz , repérée par exemple par la rotation de son grand axe de l'angle $\Theta - 2\pi$ pendant la durée T_M d'une révolution de la planète MERCURE.

$$\delta\varphi = \Theta - 2\pi = \frac{\pi \alpha^2}{c^2 L_{Oz}^2}$$

$\delta\varphi = 0,017''$ d'arc en 88 jours

soit : $7,06''$ par siècle.

- j. La relativité restreinte explique qualitativement l'avance du périhélie de Mercure mais pas quantitativement.

II.5.3. a.

$$\vec{R} = \vec{v} \wedge \vec{L}_O + \beta \vec{e}_r$$

$$\beta = -\alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{R}}{dt} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{L}_O - \alpha \dot{\theta} \vec{e}_o = -\frac{\alpha}{mr^2} \vec{e}_r \wedge \vec{L}_O - \frac{\alpha'}{mr^4} \vec{e}_r \wedge \vec{L}_O - \alpha \dot{\theta} \vec{e}_o \\ &= -\frac{\alpha'}{mr^4} \vec{e}_r \wedge mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \frac{f'}{m} \wedge \vec{L}_O \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\alpha'}{r^2} \dot{\theta} \vec{e}_o$$

$$\boxed{d\vec{R} = \frac{\alpha'}{r^2} d\theta \vec{e}_o}$$

$$r = \frac{P_M}{1 + e \cos \theta}$$

b.

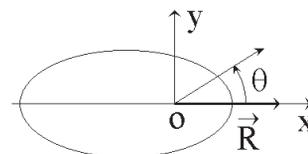
$$\vec{e}_o = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$$

$$d\vec{R} = \frac{\alpha'}{P_M^2} (1 + e \cos \theta)^2 d\theta (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y)$$

pour une révolution complète on doit intégrer sur θ de 0 à 2π .

$$\delta\vec{R} = \frac{\alpha'}{P_M^2} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \theta)^2 \cos \theta d\theta \vec{e}_y$$

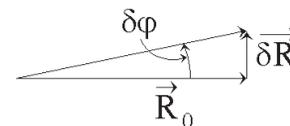
$$\delta\vec{R} = \frac{\alpha'}{P_M^2} 2e\pi \vec{e}_y$$



$$\left(\frac{\|\delta\vec{R}\|}{\|\vec{R}_0\|} \right)_{(\alpha'_2)} = \frac{2e\pi \ 3k \ M_S \ m \ C_0^2}{P_M^2 \ c^2 \ e \ k \ M_S \ m} = \frac{6\pi \ C_0^2}{c^2 \ P_M^2}$$

avec :

$$C_0^2 = 4\pi^2 \ a^2 \ b^2 / T_M^2$$



$$\left(\frac{\|\delta \vec{R}\|}{\|\vec{R}_0\|} \right)_{(\alpha'_2)} = 5,03 \cdot 10^{-7} \text{ sur 88 jours.}$$

$$\left(\frac{\|\delta \vec{R}\|}{\|\vec{R}_0\|} \right)_{(\alpha'_1)} = \frac{2\epsilon\pi \ 3k \ M_S \ m \ R_e \ (R_e - R_p) / 5}{P_M^2 \ e \ k \ M_S \ m}$$

$$\left(\frac{\|\delta \vec{R}\|}{\|\vec{R}_0\|} \right)_{(\alpha'_1)} = 2,975 \cdot 10^{-8} \text{ sur 88 jours.}$$

c. Relativité générale $\delta\varphi_2 = 43''$ d'arc \rightarrow explication la plus satisfaisante : aplatissement du soleil $\delta\varphi_1 = 2,56''$.

PARTIE B / THERMODYNAMIQUE : ÉTUDE DE QUELQUES PHÉNOMÈNES DE TRANSFERT THERMIQUE

I. ÉTUDE THÉORIQUE DE LA CONDUCTION THERMIQUE

I.1. Flux thermique

C'est la quantité de chaleur traversant (S) par unité de temps dans le sens de \vec{n} . C'est un flux non convectif d'énergie interne.

Φ_{th} s'exprime en Watts.

I.2. Courant thermique volumique

\vec{j}_{th} : c'est un vecteur défini localement en tout point et à chaque instant dans le matériau. Il est tel que :

$$\Phi_{th} = \int_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{n} \ dS$$

j_{th} s'exprime en $W.m^{-2}$

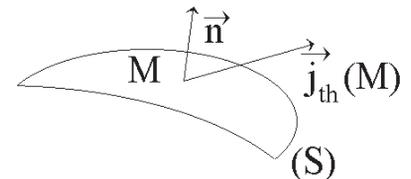


Figure 1

I.3. Loi de Fourier

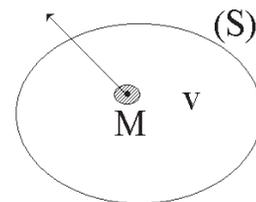
Elle traduit la linéarité du matériau pour le phénomène de conduction thermique (relation de proportionnalité en chaque point et à chaque instant entre la cause, $\vec{grad}_M T(M, t)$ et l'effet, $\vec{j}_{th}(M, t)$) ; si le matériau est homogène et isotrope, cette relation fait intervenir un seul coefficient scalaire égal à une constante λ :

$$\vec{j}_{th}(M, t) = -\lambda \vec{grad}_M T(M, t)$$

(λ s'exprime donc en $W.m^{-1} K^{-1}$).

I.4. Bilan énergétique et équation de continuité

$$I.4.1. \quad \frac{d}{dt} \left(\iiint_V u(M, t) dv \right) = \iiint_V \sigma_u(M, t) dv - \oint_S \vec{j}_{th}(M, t) \cdot \vec{M} d$$



$$I.4.2. \quad \oint_S \vec{j}_{th}(M, t) \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \text{div}_M \vec{j}_{th}(M, t) dv$$

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} u(M, t) \right) - \sigma_u(M, t) + \text{div}_M \vec{j}_R(M, t) \right] dv = 0 \quad (\forall V)$$

en effet on peut permuter dans la première intégrale $\frac{d}{dt}$ et \iiint_V car les variables t et coordonnées de M sont indépendantes ; on doit alors introduire un symbole de dérivée partielle par rapport r à t sous le signe \iiint_V).

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(M, t) + \text{div}_M \vec{j}_{th}(M, t) = \sigma_u(M, t)}$$

I.5. Équation de la conduction thermique

(c_v capacité thermique massique ; ρc_v capacité thermique volumique)

$$I.5.1. \quad \frac{\partial u}{\partial t}(M, t) = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t}(M, t)$$

$$\text{div}_M \vec{j}_{th}(M, t) = -\lambda \text{div}_M \left(\overrightarrow{\text{grad}}_M T(M, t) \right) = -\lambda \Delta_M T(M, t)$$

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t}(M, t) = \sigma_u(M, t) + \lambda \Delta_M T(M, t)$$

$$\boxed{\Delta_M T(M, t) = \frac{\rho c_v}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}(M, t) - \frac{\sigma_u}{\lambda}(M, t)}$$

L'irréversibilité apparaît dans cette équation dans la dérivée première partielle $\frac{\partial T}{\partial t}(M, t)$.

L'équation de la conduction thermique n'est pas invariante par renversement du temps.

$$I.5.2. \quad \text{Régime stationnaire :} \quad T(M), \sigma_u(M)$$

$$\boxed{\Delta_M T(M) = -\frac{\sigma_u(M)}{\lambda} = 0}$$

$$\text{si } \sigma_u(M) = 0 \quad \forall M$$

I.6. Résistance thermique : analogie électrique

$$I.6.1. \quad \text{div}_M \vec{j}_{th}(M) = 0$$

I.6.2.

$$\oiint_{SUS'} \vec{j}_{th}(M) \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\substack{\text{normale} \\ \text{unitaire} \\ \text{extérieure}}} dS = 0$$

SUS' représente une surface fermée dans le conducteur.

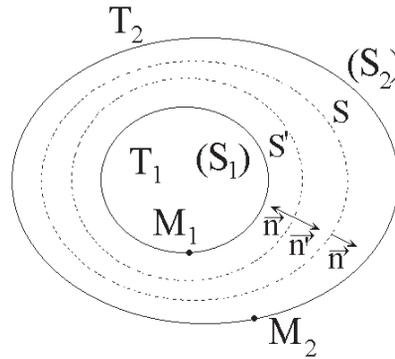


Figure 2

$$-\iint_{S'} \vec{j}_{th}(M) \cdot (-\vec{n}') dS = \boxed{\iint_S \vec{j}_{th}(M) \cdot \vec{n} dS}$$

$$\boxed{= \iint_{S'} \vec{j}_{th}(M) \cdot \vec{n}' dS = \Phi_{th1 \rightarrow 2} = cte}$$

I.6.3.

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{th1 \rightarrow 2}}$$

$$\vec{j}_{th}(M) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}_M T(M)$$

soit pour M_1 et M_2 deux points quelconques appartenant respectivement aux isothermes T_1 et T_2 .

$$-\lambda \int_{M_1}^{M_2} \overrightarrow{\text{grad}}_M T(M) \cdot d\vec{r} = \lambda (T_1 - T_2)$$

$$\boxed{R_{th} = \frac{\int_{M_1}^{M_2} \vec{j}_{th} \cdot d\vec{r}}{\lambda \iint_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{n} dS}}$$

I.6.4. Unité de résistance thermique $W^{-1} \cdot K$.

I.6.5.

$$\begin{array}{l} \vec{j} \Leftrightarrow \vec{j}_{th} \\ \text{En électrocinétique : } I \Leftrightarrow \Phi_{th} \\ V \Leftrightarrow T \end{array} \quad R = \frac{V_1 - V_2}{I_{1 \rightarrow 2}} \Leftrightarrow R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{th1 \rightarrow 2}}$$

L'analogie permet de transposer les lois d'associations de résistances thermiques

série :

$$\boxed{R_{th} = \sum_i R_{thi}}$$

parallèle :

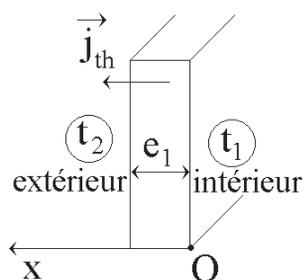
$$\frac{1}{R_{th}} = \sum_i \frac{1}{R_{thi}}$$

II. APPLICATIONS

II.1. Isolation thermique d'un mur

II.1.1. Flux thermique traversant le mur non doublé.

Le sens du gradient de température (sens de $x \rightarrow$) impose que le flux thermique est orienté en sens contraire :



$$\Phi_{th1 \rightarrow 2} = \frac{\lambda_1 S (t_1 - t_2)}{e_1} = \frac{t_1 - t_2}{R_{th1}}$$

$$\Phi_{th1 \rightarrow 2} = \frac{1,16 \times 20}{15 \times 10^{-2}} \times 15 = 2,32 \cdot 10^3 \text{ W} = 2,32 \text{ kW}$$

II.1.2. Mur doublé d'isolant

Le mur et l'isolant présentent des résistances thermiques R_{th1} et R_{th2} montées en série.

On a :

$$\Phi'_{th1 \rightarrow 2} = \frac{t_1 - t_2}{R'_{th}}$$

avec :

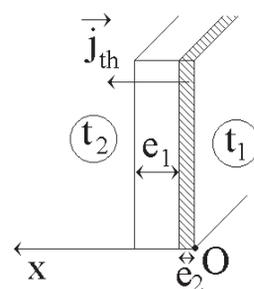
$$R'_{th} = R_{th1} + R_{th2} = \frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S}$$

$$\Phi'_{th1 \rightarrow 2} = \Phi_{th1 \rightarrow 2} / 5 = \frac{t_1 - t_2}{R'_{th}} = \frac{t_1 - t_2}{5 R_{th1}}$$

soit :

$$R'_{th} = 5 R_{th1} \quad R_{th2} = 4 R_{th1} \quad \frac{e_2}{\lambda_2} = 4 \frac{e_1}{\lambda_1}$$

$$e_2 = 4 e_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 4 \times 15 \times \frac{4 \cdot 10^{-2}}{1,16} = 2,07 \text{ cm}$$



Épaisseur bien faible ; le défaut du modèle est ici de négliger les échanges thermiques par convection avec l'air ambiant à l'intérieur et à l'extérieur qui sont prépondérants.

II.2. Champ de température dans un système à symétrie de révolution avec conduction électrique

II.2.1. La géométrie système infini // $z'z$ et à symétrie de révolution autour de l'axe $z'z$ imposé une invariance par translation selon $z'z$ et par rotation autour de $z'z$ de tous les champs \vec{J}_{th} , T dans le conducteur et dans la gaine. Soit r désignant la variable radiale r du système de coordonnées cylindriques $\Rightarrow \vec{J}_{th}(r, t)$ et $T(r, t)$.

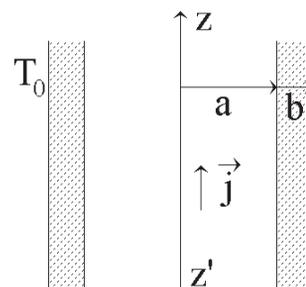


Figure 3

$\vec{J}_{th}(r, t) = - \lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(r, t)$ dans le conducteur et $\vec{J}_{th}(r, t) = - k \overrightarrow{\text{grad}} T(r, t)$ dans la gaine. Or les isothermes sont cylindriques d'axes $z'z$.

$\Rightarrow \vec{J}_{th}(r, t)$ est radial $\vec{J}_{th}(r, t) = J_{th}(r, t) \vec{e}_r$

II.2.2. En régime stationnaire on a $T(r)$ et $\vec{J}_{th}(r) = J_{th}(r) \vec{e}_z$. Bilan énergétique pour un volume élémentaire dans le conducteur. Calculons la variation d'énergie interne entre deux instants infiniment voisins t et $t + dt$, d'un élément de volume compris entre les cylindres d'axes $z'z$ et de rayons r et $r + dr$ et de hauteur arbitraire l .

Dans le conducteur $0 < r < a$

$$\left\{ \begin{array}{l} dU = \delta W + \delta Q \\ \text{premier principe de} \\ \text{la thermodynamique} \end{array} \right. \quad \delta W = \delta W_{el} = \frac{j^2}{\sigma} 2\pi r dr l dt$$

$$\delta Q = (J_{th}(r) \times 2\pi r l - J_{th}(r + dr) \times 2\pi (r + dr) l) dt$$

En régime stationnaire : $\frac{dU}{dt} = 0$

$$\frac{j^2}{\sigma} \times 2\pi r dr l + 2\pi l \left(- \frac{d}{dr} (r J_{th}(r)) dr \right) = 0$$

soit :

$$\boxed{\frac{d}{dr} (r J_{th}(r)) = \frac{j^2}{\sigma} \times r}$$

On intègre entre 0 et r : $r J_{th}(r) - 0 = \frac{j^2}{\sigma} \frac{r^2}{2}$

car $J_{th}(r)$ reste fini soit : $(r J_{th}(r))_{r=0} = 0$

$$J_{th}(r) = \frac{j^2}{\sigma} \frac{r}{2} \quad \boxed{\vec{J}_{th}(r) = \frac{j^2}{2\sigma} \vec{r}}$$

II.2.3. Dans la gaine $a < r < b$ le bilan s'écrit pour un volume identique.

$$dU = \delta Q = 0 \quad \frac{d}{dr} (r J_{th}(r)) = 0 \quad \boxed{r J_{th}(r) = cte = a J_{th}(a)}$$

$$\boxed{\vec{J}_{th}(r) = a J_{th}(a) \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{a^2 j^2}{2\sigma} \frac{\vec{r}}{r^2}}$$

Car $J_{th}(r)$ est continu entre le conducteur et la gaine.

II.2.4. Traduction de la loi de Fourier :

• Dans le conducteur $\boxed{0 \leq r \leq a}$

$$J_{th}(r) = - \lambda \frac{dT(r)}{dr} = \frac{j^2}{2\sigma} r$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{j^2}{2\sigma\lambda} r$$

$$T(r) = -\frac{j^2}{4\sigma\lambda} r^2 + cte$$

• Dans la gaine $\alpha \leq r \leq b$

$$J_{th}(r) = -k \frac{dT(r)}{dr} = \frac{a^2 j^2}{2\sigma} \times \frac{1}{r}$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{a^2 j^2}{2\sigma k} \times \frac{1}{r}$$

$$T(r) - T_0 = -\frac{j^2 a^2}{2\sigma k} \ln \frac{r}{b}$$

Le contact thermique parfait en $r = a$ impose la continuité en ce point du champ de température.

$$T(a) = -\frac{j^2 a^2}{4\sigma\lambda} + cte = T_0 - \frac{j^2 a^2}{2\sigma k} \ln \frac{a}{b}$$

$$cte = T_0 - \frac{j^2 a^2}{2\sigma} \left(\frac{1}{k} \ln \frac{a}{b} - \frac{1}{2\lambda} \right)$$

$$0 \leq r \leq a \quad T(r) = +\frac{j^2}{4\sigma\lambda} (a^2 - r^2) - \frac{j^2 a^2}{2\sigma k} \ln \frac{a}{b} + T_0 \quad (1)$$

$$a \leq r \leq b \quad T(r) = -\frac{j^2 a^2}{2\sigma k} \ln \frac{r}{b} + T_0 \quad (2)$$

En fonction de l'intensité du courant I et de R résistance électrique par unité de longueur :

$$j = \frac{I}{\pi a^2} \quad \text{et} \quad R = \frac{1}{\sigma \pi a^2} \quad j^2 a^2 = \frac{I^2}{\pi^2 a^2} \quad \frac{j^2 a^2}{2\sigma} = \frac{RI^2}{2\pi}$$

$$0 \leq r \leq a \quad T(r) = +\frac{RI^2}{2\pi} \left(-\frac{1}{k} \ln \frac{a}{b} + \frac{1}{2\lambda} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right) + T_0 \quad (1')$$

$$a \leq r \leq b \quad T(r) = -\frac{RI^2}{2k\pi} \ln \frac{r}{b} + T_0 \quad (2')$$

II.3. Étude de la formation d'une couche de glace sur un lac

→ conditions initiales : $t = 0 \quad l(0) = 0$

II.3.1. On utilise l'équation de la conduction thermique dans la glace. Il n'y a pas création d'énergie interne et on est à une dimension cartésienne x .

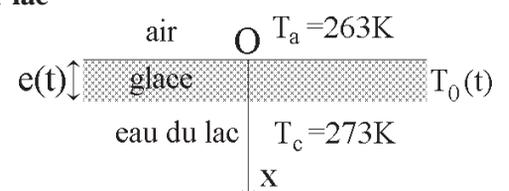


Figure 4

On a donc :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = C\mu \frac{\partial T}{\partial t}(x, t)$$

où C est la capacité thermique massique de la glace, négligée ici, soit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

$$\forall t \quad T(x, t) = a(t)x + b(t) \quad \text{et} \quad \begin{aligned} T(0, t) &= T_0(t) \\ T(l(t), t) &= T_c \end{aligned}$$

D'où :

$$T(x, t) = T_0(t) + (T_c - T_0(t)) \frac{x}{l(t)}$$

II.3.2. Flux thermique dû à l'échange thermique lié à la solidification de l'eau à l'interface glace / eau liquide à l'instant t donc à l'abscisse $l(t)$ (pour une surface S) :

$$\mu S \frac{dl(t)}{dt} L_f$$

(puissance dégagée par la solidification de l'eau à l'instant t sur une épaisseur $dl(t)$ pour la surface S).

Ce flux thermique est transporté par conduction à travers la couche de glace à l'instant t de l'abscisse $l(t)$ à l'abscisse 0 où il est évacué par convection dans l'air qui surmonte la couche de glace, soit pour ces flux :

$$+ \lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \quad \text{et} \quad \alpha (T_0(t) - T_a) S$$

(ils sont tous comptés positivement).

On a donc les deux équations :

$$\mu S L_f \frac{dl(t)}{dt} = + \lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) = \alpha (T_0(t) - T_a) S$$

Tous ces flux sont dirigés du fond vers la surface, dans le sens de x ➡.

$$\mu L_f \frac{dl(t)}{dt} = + \lambda \frac{T_c - T_0(t)}{l(t)}$$

$$l(t) \frac{dl(t)}{dt} = \frac{\lambda}{\mu L_f} [T_c - T_0(t)] \quad (1)$$

$$(\alpha T_0(t) - \alpha T_a) l(t) = + \lambda (T_c - T_0(t))$$

$$T_0(t) [\alpha l(t) + \lambda] = \lambda T_c + \alpha l(t) T_a$$

$$T_0(t) = \frac{T_c + \frac{\alpha l(t)}{\lambda} T_a}{1 + \frac{\alpha l(t)}{\lambda}} \quad (2)$$

II.3.3. En reportant cette équation (2) dans (1) :

$$\begin{aligned}
 l(t) \frac{dl(t)}{dt} &= \frac{\lambda}{\mu L_f} \left[T_c - \frac{T_c + \frac{\alpha l(t)}{\lambda} T_a}{1 + \frac{\alpha l(t)}{\lambda}} \right] \\
 &= \frac{\lambda}{\mu L_f} \left[\frac{\alpha l(t)}{\lambda} (T_c - T_a) \right] / \left(1 + \frac{\alpha l(t)}{\lambda} \right) \\
 \frac{dl(t)}{dt} &= \frac{\alpha}{\mu L_f} (T_c - T_a) / \left(1 + \frac{\alpha l(t)}{\lambda} \right) \\
 \boxed{\left(1 + \frac{\alpha l(t)}{\lambda} \right) \frac{dl(t)}{dt} &= \frac{\alpha}{\mu L_f} (T_c - T_a)}
 \end{aligned}$$

En intégrant cette équation en $l(t)$ avec comme condition initiale $l(0) = 0$ entre $t = 0$ et t :

$$\begin{aligned}
 l(t) + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\lambda} l^2(t) &= \frac{\alpha}{\mu L_f} (T_c - T_a) t \\
 l^2(t) + \frac{2\lambda}{\alpha} l(t) &= \frac{2\lambda}{\mu L_f} (T_c - T_a) t \\
 \left(l(t) + \frac{\lambda}{\alpha} \right)^2 &= \frac{2\lambda}{\mu L_f} (T_c - T_a) t + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \\
 l(t) &= \left(\frac{2\lambda}{\mu L_f} (T_c - T_a) t + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda}{\alpha}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{l(t) = \frac{\lambda}{\alpha} \left[\left(\frac{2\alpha^2}{\mu\lambda L_f} (T_c - T_a) t + 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]}$$

de la forme :

$$l(t) = l_0 \left[\left(1 + \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

avec :

$$\boxed{l_0 = \frac{\lambda}{\alpha}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\mu\lambda L_f}{2\alpha^2 (T_c - T_a)}}$$

$$T_0(t) = \frac{T_c + \left[\left(1 + \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] T_a}{\left(1 + \frac{t}{\tau} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{T_0(t) = (T_c - T_a) \left(1 + \frac{t}{\tau} \right)^{-\frac{1}{2}} + T_a}$$

De la forme :
$$T_0(t) = A + B \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

avec :

$$A = T_a \quad \text{et} \quad B = T_c - T_a$$

II.3.4.

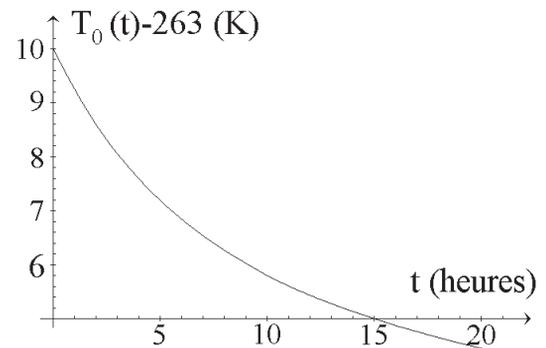
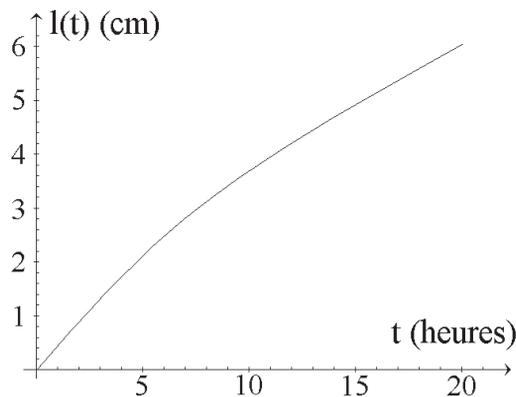
$$l_0 = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{2,1}{41,8} = 0,05 \text{ m}$$

$$l_0 = 5 \text{ cm}$$

$$\tau = \frac{9 \cdot 10^2 \times 2,1 \times 3,34 \times 10^5}{2 \times 41,8^2 \times 10} = 1,806 \cdot 10^4 \text{ s}$$

$$\tau = \frac{18065}{3600} \approx 5 \text{ heures}$$

$$A = 263 \text{ K} \quad B = 10 \text{ K}$$



III. ÉCHANGES THERMIQUES AVEC UN FLUIDE EN ÉCOULEMENT

III.1. Dérivée particulière d'un champ relatif à l'écoulement

Exemple : pour $T(\vec{r}, t)$ la dérivée particulière $\frac{DT}{dt}(\vec{r}, t)$ de ce champ est la dérivée par rapport au temps lorsqu'on suit dans son déplacement le mouvement d'une particule fluide ; c'est donc une dérivée totale dans le cas particulier où l'on fait évoluer les coordonnées d'espace de quantités élémentaires telles que $d\vec{r} = \vec{V}(\vec{r}, t) dt$ où $\vec{V}(\vec{r}, t)$ est le champ de vitesses de l'écoulement soit la vitesse de la particule fluide dont on suit la température au cours du temps ; en cartésienne on peut écrire :

$$\frac{DT}{dr}(\vec{r}, t) = \frac{\partial T}{\partial t}(\vec{r}, t) + \frac{\partial T}{\partial x}(\vec{r}, t) \frac{V_x dt}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}(\vec{r}, t) \frac{V_y dt}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}(\vec{r}, t) \frac{V_z dt}{dt}$$

soit vectoriellement :

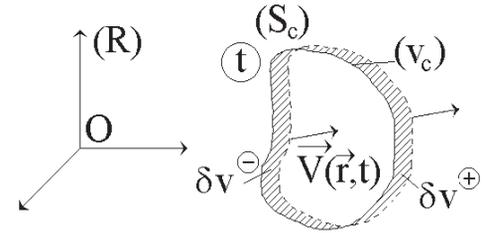
$$\underbrace{\frac{DT}{dt}(\vec{r}, t)}_{\text{dérivée «particulière»}} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}(\vec{r}, t)}_{\text{dérivée «locale» (à } \vec{r} \text{ fixé)}} + \underbrace{\vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_M T(\vec{r}, t)}_{\text{dérivée «convective» traduit la convection, c'est-à-dire le déplacement de la matière que l'on suit en fonction du temps}}$$

III.2. Bilan intégral de grandeur extensive relative à un système : formule de Reynolds

Volume et surface de contrôle en pointillé, on représente à l'instant $t + dt$ le volume (v') *infinitement voisin* de (v_c) qu'occupe le système fermé Σ_f .

Σ_f et Σ_0 sont définis à l'instant t par le contenu de (v_c) .
Entre les instants t et $t + dt$, regardons comment évolue
la grandeur extensive $G(t)$ pour Σ_f .

Σ_f libère le volume élémentaire hachuré (δv^-) et vient
occuper (δv^+).



$$\text{Donc :} \quad (G(t + dt) - G(t))_{\Sigma_f} = (G(t + dt) - G(t))_{\text{dans } (V_c \wedge V')} \\ + \delta G(t + dt)_{\text{dans } \delta v^+} - \delta G(t)_{\text{dans } \delta v^-}$$

par passage à la limite quand $dt \rightarrow 0$ ($(v_c) \wedge (v')$) $\rightarrow (v_c)$

$\frac{1}{dt} \cdot \delta G(t + dt)$ dans δv^+ est le flux sortant de G de la surface (S_c) , à t .

$\frac{1}{dt} \cdot \delta G(t)$ dans δv^- est le flux entrant de G dans la surface (S_c) , à t .

On peut donc écrire :

$$\left(\frac{dG(t)}{dt} \right)_{\Sigma_f} = \left(\frac{dG(t)}{dt} \right)_{\Sigma_0} + \Phi_G(t)_s - \Phi_G(t)_e$$

en régime stationnaire on a $G = cte$ dans Σ_0

$$\text{soit :} \quad \left(\frac{dG(t)}{dt} \right)_{\Sigma_0} = 0$$

$$\text{et :} \quad \left(\frac{dG(t)}{dt} \right)_{\Sigma_f} = \Phi_G(t)_s - \Phi_G(t)_e$$

III.3. Étude d'un capteur solaire

III.3.1. Bilan énergétique au niveau de l'absorbeur à l'instant t :

On considère la «tranche» d'absorbeur comprise entre les abscisses x et $x + \delta x$, de masse

$$\delta m_a = \frac{M_a}{S} l \delta x \quad S = Ll \quad \delta m_a = \frac{M_a \delta x}{L}$$

$$\frac{\delta Q_a}{dt} = \delta m_a C_a \frac{\partial T_a}{\partial t}(x, t) \\ = \left[\alpha_0 (T_0 - T_a(x, t)) + \alpha_f (T(x, t) - T_a(x, t)) \right] l \delta x \\ + P_s(t) l \delta x$$

$$\frac{M_a}{S} C_a \frac{\partial T_a}{\partial t}(x, t) + (\alpha_0 + \alpha_f) T_a(x, t) = P_s(t) + \alpha_0 T_0 + \alpha_f T(x, t)$$

III.3.2. Bilan énergétique pour le fluide à l'instant t

• Définition du système fermé $\delta \Sigma_f$: contenu à l'instant t dans le volume de contrôle élémentaire compris entre les abscisses x et $x + \delta x$, de section égale à la section de la veine fluide.

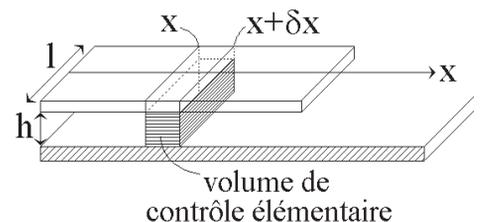


Figure 5

$\delta\Sigma_f$ a une masse élémentaire $\delta m = \mu h l \delta x$.

Le bilan s'écrit à l'instant t :

$$\delta m C \underbrace{\frac{DT}{dt}}_{\substack{\text{dérivée} \\ \text{particulaire}}}(x, t) = \delta m C \left(\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + V \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right) \\ = \alpha_f (T_a(x, t) - T(x, t)) \times l \delta x$$

soit :

$$\boxed{\mu h C \left(\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + V \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right) = \alpha_f (T_a(x, t) - T(x, t))}$$

• Raisonnement sur le système ouvert $\delta\Sigma_0$ qui coïncide à l'instant t avec le système fermé $\delta\Sigma_f$.

Formule de Reynolds :

$$\mu h l \delta x C \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + \underbrace{\mu h l C V (T(x + \delta x, t) - T(x, t))}_{\substack{\text{flux sortant} - \text{flux entrant} \\ \text{d'énergie interne de la surface de contrôle}}} = l \delta x \alpha_f (T_a(x, t) - T(x, t))$$

soit :

$$\mu h C \left(\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + V \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right) = \alpha_f (T_a(x, t) - T(x, t))$$

III.3.3. On néglige la chaleur massique de l'absorbeur : cela signifie qu'il cède aux fluides qui l'environnent, air ambiant et fluide caloporteur toute la puissance solaire qu'il absorbe. Alors l'équation-bilan établie au § III.3.1. se simplifie en :

$$\boxed{(\alpha_0 + \alpha_f) T_a(x, t) = P_s(t) + \alpha_0 T_0 + \alpha_f T(x, t)}$$

D'où l'équation établie au § III.3.2. devient :

$$\mu h C \left(\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + V \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right) = \frac{\alpha_f}{\alpha_0 - \alpha_f} (P_s(t) + \alpha_0 T_0 - \alpha_f T(x, t)) + \alpha_f T(x, t)$$

$$\boxed{\mu h C \left(\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) + V \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right) + \frac{\alpha_0 \alpha_f}{\alpha_0 + \alpha_f} T(x, t) = \frac{\alpha_f}{\alpha_0 + \alpha_f} (P_s(t) + \alpha_0 T_0)}$$

III.3.4. Régime stationnaire :

$$P_s, T(x), T_a(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial t}(x) = 0$$

$$\mu h C V \frac{dT}{dx}(x) + \frac{\alpha_0 \alpha_f}{\alpha_0 + \alpha_f} T(x) = \frac{\alpha_f}{\alpha_0 + \alpha_f} (P_s + \alpha_0 T_0)$$

C'est une équation différentielle du premier ordre en $T(x)$ à coefficients constants de la forme :

$$\frac{\mu h C V (\alpha_0 + \alpha_f)}{\alpha_0 \alpha_f} \frac{dT}{dx}(x) + T(x) = \frac{P_s}{\alpha_0} + T_0$$

On pose :
$$\frac{L}{\eta} = \frac{\mu h C V (\alpha_0 + \alpha_f)}{\alpha_0 \alpha_f}$$
 homogène à une longueur

η est un coefficient > 0 sans dimension.

Et :
$$T^* = T_0 + \frac{P_s}{\alpha_0}$$

qui représente la valeur limite de T .

La solution générale de l'équation :

$$\frac{L}{\eta} \frac{dT}{dx}(x) + T(x) = T^*$$

est :
$$T(x) = T^* + C e^{-x\eta/L}$$

avec :
$$T(0) = T_e = cte$$

d'où :
$$T_e = T^* + C \quad C = T_e - T^*$$

$$T(x) = T^* + (T_e - T^*) e^{-x\eta/L}$$

$$\eta = AB = \underbrace{\frac{\alpha_f}{\alpha_0 + \alpha_f} \times \frac{\alpha_0 L}{\mu h C V}}_{\text{sans dimension}} \times \overbrace{\frac{W m^{-2} K^{-1} m}{kg \cdot m^{-3} \times m \times J \times kg^{-1} K^{-1} \times m s^{-1}}}^{\text{→ dimension par les unités}}$$

D'où η est une constante positive sans dimension.

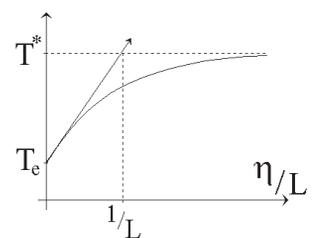
III.3.5. Température du fluide à la sortie du capteur

$$T(L) = T^* + (T_e - T^*) e^{-\eta}$$

$T^* = \frac{P_s}{\alpha_0} + T_0$ représente la température limite qu'atteindrait le fluide pour un capteur de très grande longueur.

D'où :
$$T^* > T_e$$

soit :
$$T_e - T^* < 0$$



Optimiser $T(L)$, c'est-à-dire augmenter $T(L)$ exige d'augmenter η soit les facteurs A et B .

- En ce qui concerne $A = \frac{\alpha_f}{\alpha_0 + \alpha_f}$ on doit avoir $\alpha_f \gg \alpha_0$. La valeur optimale de A est 1.

Cela signifie que l'échange absorbeur \rightarrow fluide est prépondérant devant l'échange absorbeur \rightarrow air ce qui est souhaitable !!!

- Pour le rapport $B = \frac{\alpha_0 L \times l}{\mu h C v \times l}$ il augmente avec Ll donc avec la surface d'échange et lors-

que $\underbrace{(lhV)}_{\text{débit volumique}}$ diminue (pour un fluide donné).

voir plus loin §II.3.7.

III.3.6. Puissance totale reçue par le capteur

Le fluide reçoit du fait de son passage dans le capteur la puissance :

$$P = C (T(L) - T_e) \times \frac{dm}{dt}$$

où $\frac{dm}{dt}$ est la masse de fluide circulant par unité de temps dans le capteur (= masse entrant = masse sortant), régime stationnaire et fluide incompressible ici :

$$dm = \mu V h l dt$$

$$P = \mu V h l C (T(L) - T_e) = \mu V h l C (T^* - T_e) (1 - e^{-\eta})$$

III.3.7. Application Numérique :

$$\bullet T^* = \frac{640}{4} + 283 = 443 \text{ K} \quad \text{ou} \quad 170^\circ \text{C}$$

$$\bullet \eta = \frac{\alpha_0 L l}{\mu h C V l} \text{ or } (V l h) \text{ représente le débit volumique } V l h = \frac{20 \times 10^{-3}}{3600} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ du fluide :}$$

$$\eta = \frac{4 \times 2 \times 3600}{4,18 \times 10^6 \times 20 \times 10^{-3}}$$

$$\eta = \frac{4 \times 2 \times 3,6}{4,18 \times 20} = 0,344$$

$$\bullet T(L) = 443 - 150 e^{-0,344}$$

$$T(L) = 336,7 \text{ K} \quad \text{soit : } 63,7^\circ \text{C}$$

$$\bullet P = \frac{4,18 \times 10^6 \times 20 \times 10^{-3}}{3600} (443 - 293) \underbrace{(1 - e^{-0,344})}_{0,29}$$

$$P = \frac{4,18 \times 20}{3,6} (150) 0,29 = 1010 \text{ W} = 1,01 \text{ kW}$$

Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Épreuve B : Composition d'électricité, d'électronique, d'électrotechnique
et d'automatisme - Session : 1997

PREMIERE PARTIE

1. Cascade monophasée en régime permanent :

1.1. On a par définition : $[u_s(t)] = [m(t)] [u_e(t)]$

soit : $[u_s(t)]^t = [u_e(t)]^t [m(t)]^t$

Les puissances instantanées en amont et en aval du convertisseur s'écrivent de manière générale :

$$P_e(t) = [u_e]^t [i_e]$$

et

$$P_s(t) = [u_s]^t [i_s]$$

Dans ces conditions, en écrivant que ces puissances sont égales il vient :

$$[u_s]^t [i_s] = [[u_e]^t [m(t)]^t] [i_s] = [u_e]^t [[m(t)]^t [i_s]]$$

d'où

$$[i_e] = [m(t)]^t [i_s]$$

1.2. On a :

$$[u_s] = [m] [u_e]$$

avec

$$[m] = \sum_{n=0}^{\infty} [m_n] = [m_0] + [m_1] + \sum_{n=2}^{\infty} [m_n]$$

. Si $[u_e] = [u_{e0}]$, $[u_s] = [m_0][u_{e0}] + [m_1][u_{e0}] + \left[\sum_{n=2}^{\infty} [m_n] \right] [u_{e0}]$

et

$$[\bar{u}_s] = [m_0] [u_{e0}]$$

car les termes suivants sont sinusoïdaux donc de valeur moyenne nulle.

. Si $[u_e] = [u_{e1}]$ de fréquence ω

$$[u_s] = \left[[m_0] + [m_1] + \left[\sum_{n=2}^{\infty} [m_n] \right] \right] [u_{e1}] = [m_0] [u_{e1}] + [m_1] [u_{e1}] + \left[\sum_{n=2}^{\infty} [m_n] \right] [u_{e1}]$$

En vertu de l'identité $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$, les termes du produit

$\left[\sum_{n=2}^{\infty} m_n \right] [u_{e1}]$ sont tous sinusoïdaux de fréquence $(n-1)\omega$ et $(n+1)\omega$ et seul le terme $[m_1][u_{e1}]$ peut présenter une valeur moyenne différente de zéro donc :

$$[\bar{u}_s] = [m_1] [u_{e1}]$$

1.3. Cas d'un convertisseur monophasé

1.3.1.

$$\begin{cases} m = m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{M}_n \sin(n\omega t - \varphi_n) \\ u_e = u_{e0} \end{cases}$$

$$u_s = m u_{e0} = m_0 u_{e0} + \sum_{n=1}^{\infty} u_{e0} \sin(n\omega t - \varphi_n)$$

$$u_s = \sum_{n=0}^{\infty} u_{sn}$$

On a donc

$$\begin{aligned} u_{s0} &= m_0 u_{e0} \\ u_{s1} &= \widehat{M}_1 u_{e0} \sin(\omega t - \varphi_1) \\ u_{s2} &= \widehat{M}_2 u_{e0} \sin(2\omega t - \varphi_2) \end{aligned}$$

1.3.2.

$$\begin{cases} m = m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{M}_n \sin(n\omega t - \varphi_n) \\ u_e = \widehat{U}_{e1} \sin \omega t \end{cases}$$

$$u_s = (m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{M}_n \sin(\omega t - \varphi_n)) (\widehat{U}_{e1} \sin \omega t)$$

$$= m_0 \widehat{U}_{e1} \sin \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{U}_{e1} \widehat{M}_n \sin(n\omega t - \varphi_n) \sin \omega t$$

$$= m_0 \widehat{U}_{e1} \sin \omega t + \frac{1}{2} \widehat{U}_{e1} \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{M}_n (\cos((n-1)\omega t - \varphi_n) - \cos((n+1)\omega t - \varphi_n))$$

$$\begin{aligned} u_{s0} &= \frac{1}{2} \widehat{U}_{e1} \widehat{M}_1 \cos \varphi_1 \\ u_{s1} &= \frac{1}{2} \widehat{U}_{e1} (2m_0 \sin \omega t + \widehat{M}_2 \cos(\omega t - \varphi_2)) \\ u_{s2} &= \frac{1}{2} \widehat{U}_{e1} (-\widehat{M}_1 \cos(2\omega t - \varphi_1) + \widehat{M}_3 \cos(2\omega t - \varphi_3)) \end{aligned}$$

1.4. Etude du redresseur à diodes.

1.4.1. On a $u_2 = m_R u_1 = m_R \widehat{U}_1 \sin \omega t = |\widehat{U}_1 \sin \omega t|$ d'où les formes d'onde de m_R , u_2 et i_2 (figure 1)

1.4.2. L'expression de $u_2(t)$ permet le calcul direct du développement de Fourier de la tension redressée :

$$\begin{aligned} u_2 &= \left(\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\omega t}{2k+1} \right) \widehat{U}_1 \sin \omega t = \frac{4\widehat{U}_1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \omega t \sin(2k+1)\omega t}{2k+1} \\ &= \frac{2\widehat{U}_1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2k\omega t - \cos(2k+2)\omega t}{2k+1} = \frac{2\widehat{U}_1}{\pi} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \cos 2k\omega t \right) \end{aligned}$$

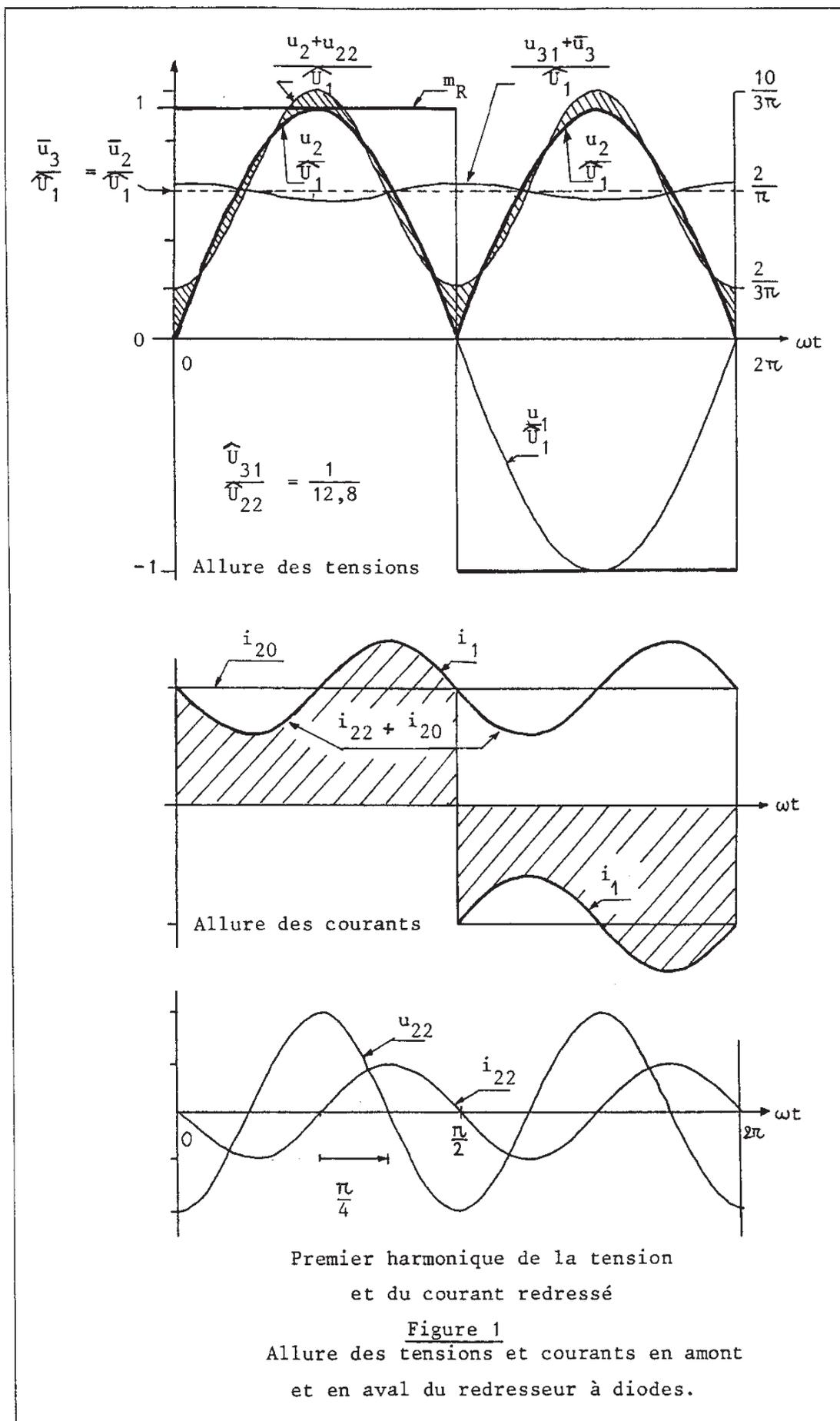


Figure 1
 Allure des tensions et courants en amont
 et en aval du redresseur à diodes.

soit :

$$u_2 = \frac{2\hat{U}_1}{\pi} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos 2k\omega t}{4k^2 - 1} \right)$$

et en développant :

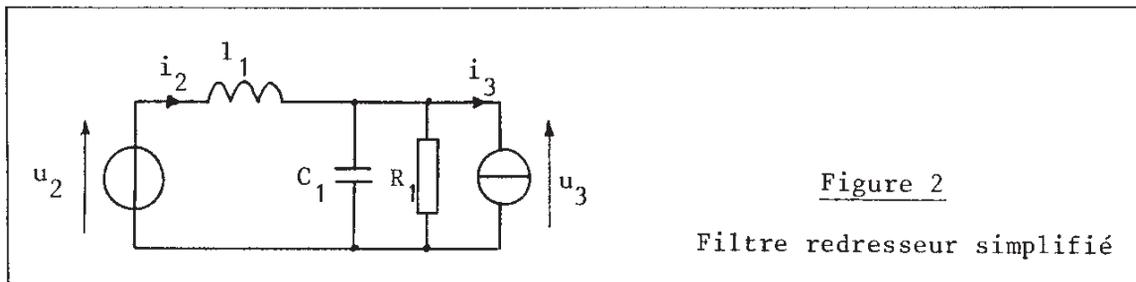
$$u_2 = \frac{2\hat{U}_1}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \frac{2}{15} \cos 4\omega t - \frac{2}{35} \cos 6\omega t - \frac{2}{63} \cos 8\omega t \dots \right)$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &\in [900V, 2100V], & U_1 &= \frac{\hat{U}_1}{\sqrt{2}} \\ \bar{u}_2 &\in [810V, 1890V], & \bar{u}_2 &= \frac{2\hat{U}_1}{\pi} \\ \hat{U}_{22} &\in [534V, 1260V], & \hat{U}_{22} &= \frac{4\hat{U}_1}{3\pi} \end{aligned}$$

1.4.3. D'après le schéma équivalent de la figure 2, il vient pour les grandeurs instantanées :

$$\begin{cases} C_1 \frac{du_3}{dt} = i_2 - \frac{u_3}{R_1} \\ l_1 \frac{di_2}{dt} = u_2 - u_3 \end{cases}$$



Dans un régime périodique ces équations deviennent en exprimant leur valeur moyenne :

$$\begin{cases} 0 = \bar{i}_2 - \frac{\bar{u}_3}{R_1} \\ 0 = \bar{u}_2 - \bar{u}_3 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \bar{i}_2 = \frac{\bar{u}_3}{R_1} \\ \bar{u}_3 = \bar{u}_2 = \frac{2\hat{U}_1}{\pi} \end{cases}$$

En dérivant $i_2 = i_{20} + \hat{I}_{22} \sin(2\omega t - \varphi_2)$ on obtient l'égalité des amplitudes : $2 \ell_1 \omega \hat{I}_{22} = \hat{U}_{22}$ soit $\hat{I}_{22} = \frac{4 \hat{U}_1}{6\pi \ell_1 \omega}$ indépendant de la charge.

d'où : $\hat{I}_{22} \in [12,2A, 28,5A]$ pour $U_1 \in [900V, 2100V]$

1.4.4. La condition de conduction continue du redresseur s'écrit :

$$i_2(t) = \bar{i}_2 + \hat{I}_{22} \sin(2\omega t - \varphi_2) > 0 \quad \text{ou} \quad \bar{i}_2 > \hat{I}_{22}$$

La grandeur $\bar{i}_2 - \frac{2\hat{U}_1}{\pi}$ nulle en conduction continue devient positive lorsqu'on passe en conduction discontinue.

1.4.5. En notant les impédances et admittances symboliques

$z_1 = r_1 + \ell_1 p$ et $y_2 = \frac{1}{R_1} + C_1 p$ du schéma de la figure 3 on obtient :

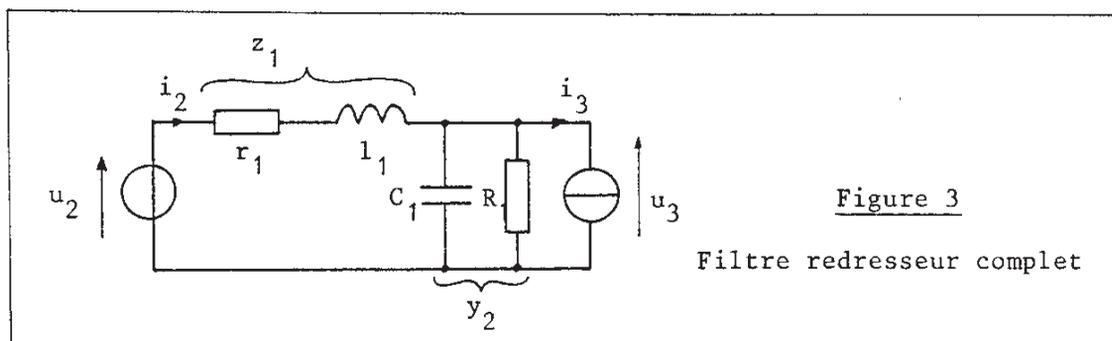


Figure 3

Filtre redresseur complet

$$\begin{cases} u_2 - u_3 = z_1 i_2 \\ i_2 - i_3 = y_2 u_3 \end{cases}$$

soit, en notation matricielle, en séparant les grandeurs influentes et influencées :

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ -y_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + z_1 y_2} \begin{bmatrix} 1 & -z_1 \\ y_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = [T(p)] \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

avec :

$$[T(p)] = \frac{1}{1 + (r_1 + l_1 p)(\frac{1}{R_1} + C_1 p)} \begin{bmatrix} 1 & -(r_1 + l_1 p) \\ \frac{1}{R_1} + C_1 p & 1 \end{bmatrix}$$

Avec les valeurs numériques choisies :

$$[T(p)] = \frac{1}{1 + 1,28 \cdot 10^{-4} p + 35 \cdot 10^{-6} p^2} \begin{bmatrix} 1 & -(0,2 + 0,07 p) \\ 4 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-4} p & 1 \end{bmatrix}$$

La fréquence naturelle du filtre est de 27 Hz (169 rad/s) à deux octaves en dessous du premier harmonique de la tension redressée (100 Hz) mais le facteur d'amortissement du filtre est très *insuffisant*.

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{\frac{l_1}{R_1} + C_1 r_1}{\sqrt{l_1 C_1}} = 0,108$$

1.4.6. Avec les notations et l'origine des temps choisies :

$$u_{21}(t) = -\hat{U}_{22} \cos 2\omega t = -\frac{4\hat{U}_1}{3\pi} \cos 2\omega t$$

L'affaiblissement du filtre à la fréquence 2ω est alors, en négligeant le terme d'amortissement :

$$\frac{\hat{U}_{31}}{\hat{U}_{22}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (35 \cdot 10^{-6} (200\pi)^2)^2}} = \frac{1}{12,8}$$

$$u_{31}(t) \neq \frac{\hat{U}_{22}}{12,8} \cos 2\omega t \quad \text{avec} \quad \hat{U}_{31} = \frac{\hat{U}_{22}}{12,8} = 94 \text{ V}$$

donc $u_3(t) \in [u_{3\min}, \hat{U}_3] = [1707 \text{ V}, 1895 \text{ V}]$

La forme d'onde de $u_{31}(t)$ est donnée figure 1.

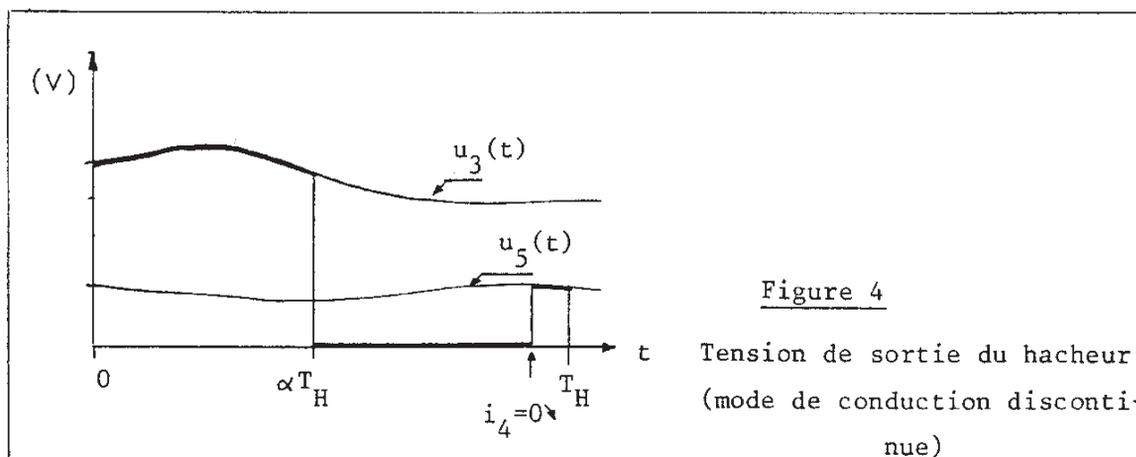
1.5. Etude du hacheur dévolteur

1.5.1. a. Avec les notations choisies on a $m_H(t) = B(t)$

donc :

$$\overline{m_H(t)} = \alpha$$

b. La figure 4 donne la forme d'onde de $u_4(t)$.



Si $i_4(t)$ s'annule dans l'intervalle $]\alpha T_H, T_H]$ la tension de sortie du hacheur est fixée par la capacité du filtre de sortie et $u_4 = u_5(t)$.

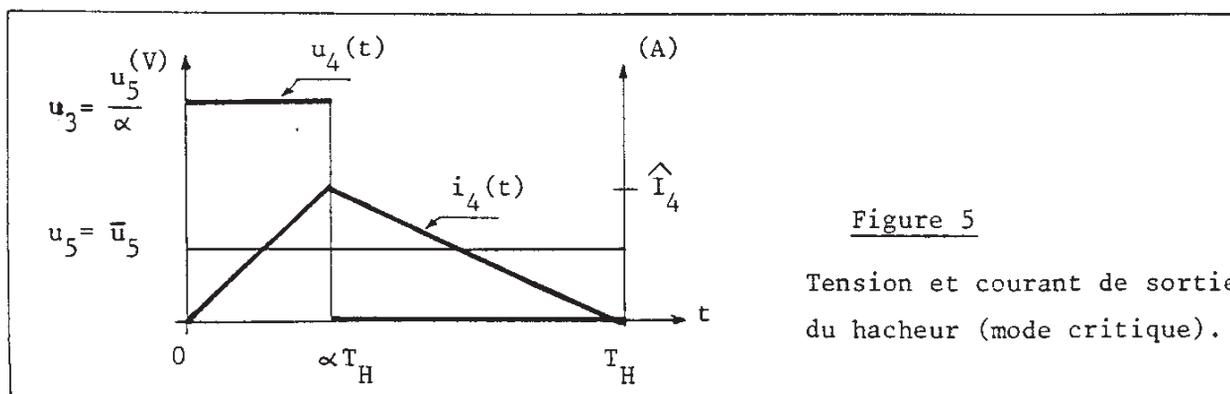
c- Dans la phase de croissance de i_4 on a :

$$\frac{l_2 \hat{I}_4}{\alpha T_H} = \frac{u_5}{\alpha} - u_5 = u_5 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)$$

d'où $\hat{I}_4 = \frac{T_H u_5}{l_2} (1 - \alpha)$ (figure 5)

Avec $T_H = \frac{1}{900}$ s, $l_2 = 20$ mH et $u_5 = 850$ V on obtient $\hat{I}_4 = 23,6$ A et $\bar{i}_4 = 11,8$ A.

Remarque : Pour une puissance absorbée inférieure à 10kW le hacheur va fonctionner dans un mode de conduction discontinue.



1.5.2. Plage de variation de α (figure 6).

La tension d'entrée du hacheur $u_3 = \frac{2\hat{U}_1}{\pi} \in [810\text{V}, 1891\text{V}]$ si $U_1 \in [300\text{V}, 2100\text{V}]$
 On a donc en conduction continue

$$\alpha \in [\alpha_{\min}, \hat{\alpha}]$$

avec $\alpha_{\min} = \frac{850}{1891} = 0,449$

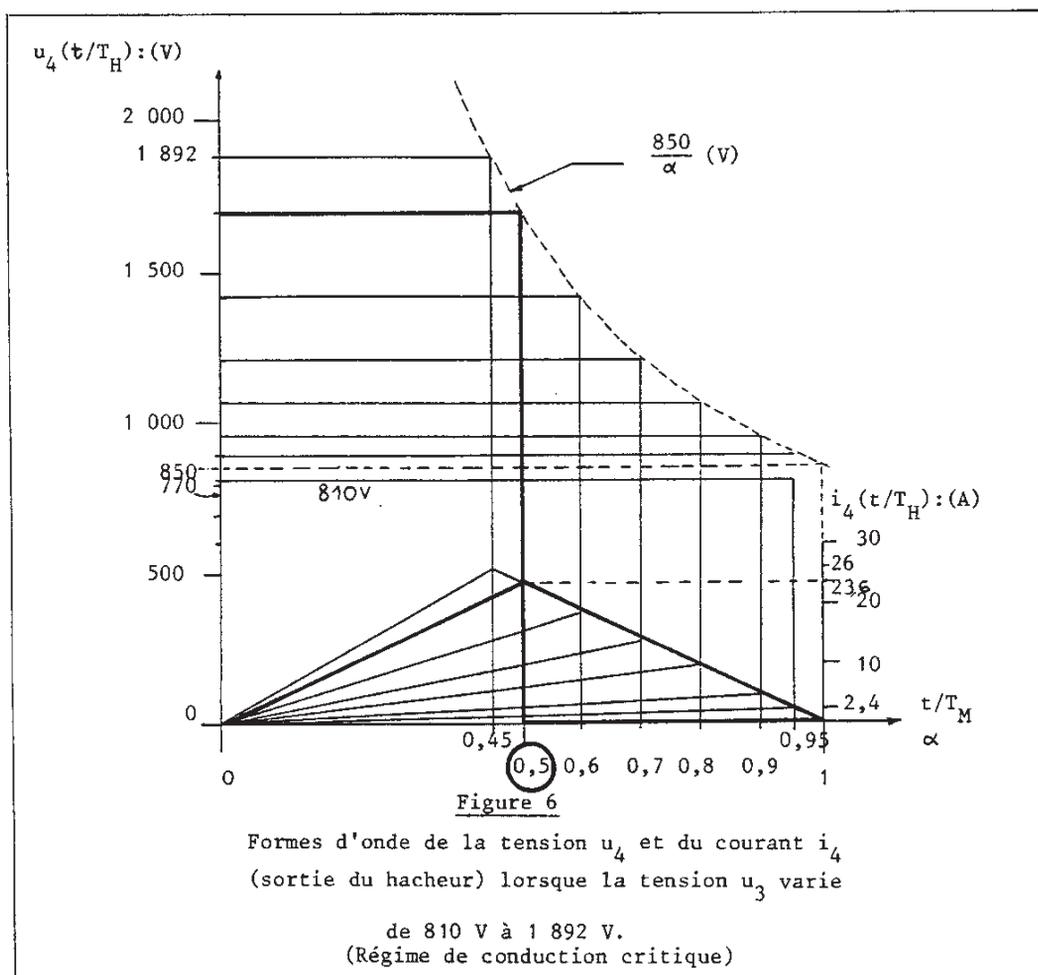
$\hat{\alpha} = \frac{850}{810} > 1$ ce qui signifie que la tension de référence imposée au hacheur est trop élevée.

1.5.3. La figure 6 donne la tension obtenue en fixant la butée supérieure de α à 0,95 avec $\bar{u}_3 = 810\text{V}$.

Si l'asservissement présente une erreur statique nulle $u_{5\text{ref}} = \frac{2}{\pi} \alpha \hat{U}_1$

Avec $\alpha = \hat{\alpha}$, $u_{5\text{ref}} = \frac{2}{\pi} \hat{\alpha} \hat{U}_1 = \frac{2\sqrt{2} \cdot 0,95}{\pi} U_1 = 0,855 U_1$.

Il convient de respecter cette loi dans l'intervalle $U_1 \in [900\text{V}, 993\text{V}]$



DEUXIEME PARTIE

Cascade triphasée en régime permanent

2.1. Etude de l'onduleur

2.1.1. Les tensions composées à la sortie de l'onduleur s'écrivent en fonction des tensions simples :

$$\begin{cases} u_{G1} = v_{G2} - v_{G3} \\ u_{G2} = v_{G3} - v_{G1} \\ u_{G3} = v_{G1} - v_{G2} \end{cases} \quad \text{soit} \quad [u_G] = [M] \cdot [v_G]$$

avec :

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.2. Pour un bras k, lorsque le transistor du haut est commandé ($B_k=1$), la tension $v_{Gk} = \frac{u_s}{2}$. Dans le cas contraire ($B_k=0$) $v_{Gk} = -\frac{u_s}{2}$. Le transistor du bas reçoit dans le même temps, la commande complémentaire $B_{-k} = \bar{B}_k$.

La figure 7 dans les formes d'ondes des coefficients de la matrice $[m(t)]$ définie par la relation :

$$[v_G] = [m(t)] u_s$$

$$\text{soit} \quad \begin{cases} v_{G1} = m_1 u_s \\ v_{G2} = m_2 u_s \\ v_{G3} = m_3 u_s \end{cases}$$

sous forme développée

$$\text{On a alors :} \quad [m_{OD}] = [M] [m] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\begin{cases} m_{OD1} = m_2 - m_3 \\ m_{OD2} = -m_1 + m_3 \\ m_{OD3} = m_1 - m_2 \end{cases}$$

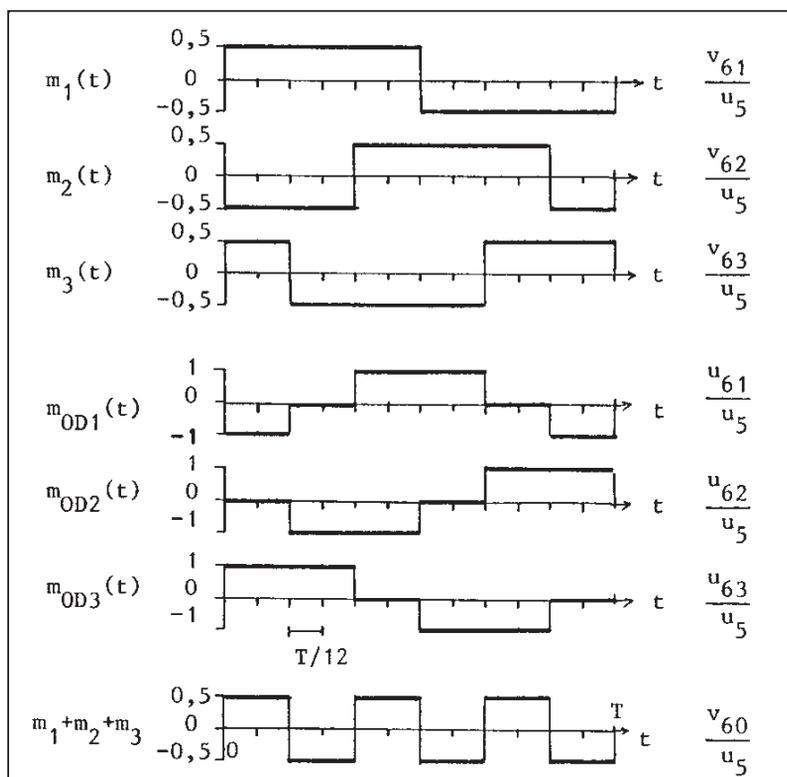


Figure 7 : Fonctions de modulation de l'onduleur et tensions simples et composées de sortie.

2.1.3. La tension $v_{60} = v_{61} + v_{62} + v_{63} = (m_1 + m_2 + m_3) u_5$

présente une forme d'onde rectangulaire de fréquence triple de celle de l'onduleur (150 Hz=3x50 Hz) (figure 7)

soit :

$$v_{60} = \frac{2 u_5}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin 3(2k+1)\omega t}{2k+1}$$

$$v_{60} = \frac{2 u_5}{\pi} \left(\sin 3\omega t + \frac{\sin 9\omega t}{3} + \frac{\sin 15\omega t}{5} + \dots \right)$$

avec $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$.

2.1.4. Les développements harmoniques des tensions composées de sortie de l'onduleur s'obtiennent simplement par composition des fonctions de modulation des bras : En posant $\theta = \omega t$ il vient en effet :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1(\theta) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\theta}{2k+1} \\ m_2(\theta) = m_1\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ m_3(\theta) = m_2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{array} \right.$$

$$m_{OD1} = m_2 - m_3 = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\sin\left((2k+1)\theta - (2k+1)\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left((2k+1)\theta - (2k+1)\frac{4\pi}{3}\right) \right)$$

soit

$$\left\{ \begin{aligned} m_{OD1} &= -\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} 2 \sin(2k+1) \frac{\pi}{3} \cos(2k+1) \theta \\ m_{OD2} &= m_{OD1} \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ m_{OD3} &= m_{OD2} \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \right.$$

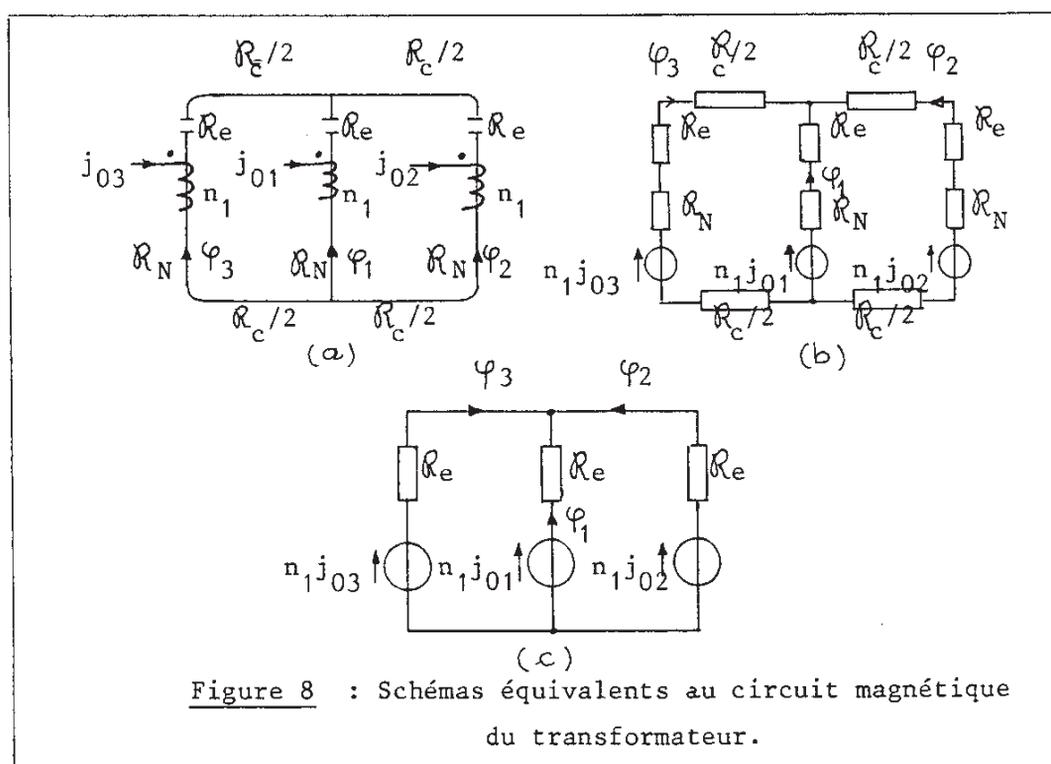
En explicitant les développements précédents, il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} m_{OD1} &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \left(-\cos\theta + \frac{\cos 5\theta}{5} - \frac{\cos 7\theta}{7} + \frac{\cos 11\theta}{11} - \frac{\cos 13\theta}{13} + \dots \right) \\ m_{OD2} &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \left(-\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{7} \cos\left(7\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{11} \cos\left(11\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - \dots \right) \\ m_{OD3} &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \left(-\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{7} \cos\left(7\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{11} \cos\left(11\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - \dots \right) \end{aligned} \right.$$

On observe la formation de systèmes symétriques de fréquence croissante successivement directs et inverses dans les tensions de sortie composées de l'onduleur.

2.2. Etude du transformateur.

2.2.1. Le schéma équivalent au circuit magnétique est donné par la figure 8b.



La différence de potentiel magnétique aux bornes du noyau central s'écrit :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_0 = n_1 j_{01} - (\mathcal{R}_N + \mathcal{R}_e) \varphi_1 & \text{- tronçon central} \\ \mathcal{E}_0 = n_1 j_{02} - (\mathcal{R}_N + \mathcal{R}_e + \mathcal{R}_c) \varphi_2 & \text{- tronçon latéral droit} \\ \mathcal{E}_0 = n_1 j_{03} - (\mathcal{R}_N + \mathcal{R}_e + \mathcal{R}_c) \varphi_3 & \text{- tronçon latéral gauche} \end{cases}$$

avec $\mathcal{R}_e = \frac{1}{\mu_0} \frac{e}{S}$, $\mathcal{R}_N = \frac{1}{\mu} \frac{\lambda}{S}$, $\mathcal{R}_c = \frac{1}{\mu} \frac{\lambda'}{S}$,

λ' et S' désignent respectivement la longueur et la section de chacune des culasses.

Si $\mu \rightarrow \infty$, $\mathcal{R}_N \rightarrow 0$ et $\mathcal{R}_c \rightarrow 0$ de sorte que

$$\mathcal{E}_0 = n_1 j_{01} - \mathcal{R}_e \varphi_1 = n_1 j_{02} - \mathcal{R}_e \varphi_2 = n_1 j_{03} - \mathcal{R}_e \varphi_3$$

2.2.2. La relation

$$3 \mathcal{E}_0 = n_1 (j_{01} + j_{02} + j_{03}) - \mathcal{R}_e (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$$

permet le calcul de \mathcal{E}_0 car la condition $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$ est toujours remplie (les lignes de champ ne s'échappent pas du circuit magnétique):

$$\mathcal{E}_0 = \frac{n_1}{3} (j_{01} + j_{02} + j_{03})$$

La condition $j_{01} + j_{02} + j_{03} = 0$ entraîne l'égalité $\mathcal{E}_0 = 0$. Elle est satisfaite avec une alimentation trois fils du primaire du transformateur (figure 9).

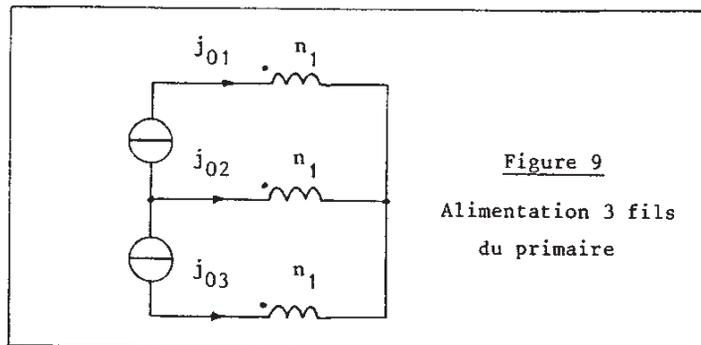


Figure 9
Alimentation 3 fils
du primaire

2.2.3. En posant $L_1 = \frac{n_1^2}{\mathcal{R}_e}$ les relations précédentes s'écrivent :

$$\begin{cases} n_1^2 j_{01} = \mathcal{R}_e n_1 \varphi_1 \\ n_1^2 j_{02} = \mathcal{R}_e n_1 \varphi_2 \\ n_1 j_{03} = \mathcal{R}_e n_1 \varphi_3 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} L_1 j_{01} = \varphi_1 \\ L_1 j_{02} = \varphi_2 \\ L_1 j_{03} = \varphi_3 \end{cases}$$

soit sous forme matricielle :

$$[\varphi] = [L_1] [j_0] \quad \text{avec} \quad [L_1] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 \end{bmatrix} .$$

2.2.4. Une f.e.m. $e = -\frac{d\phi}{dt}$ est induite dans chaque enroulement supposé dénué de résistance donc :

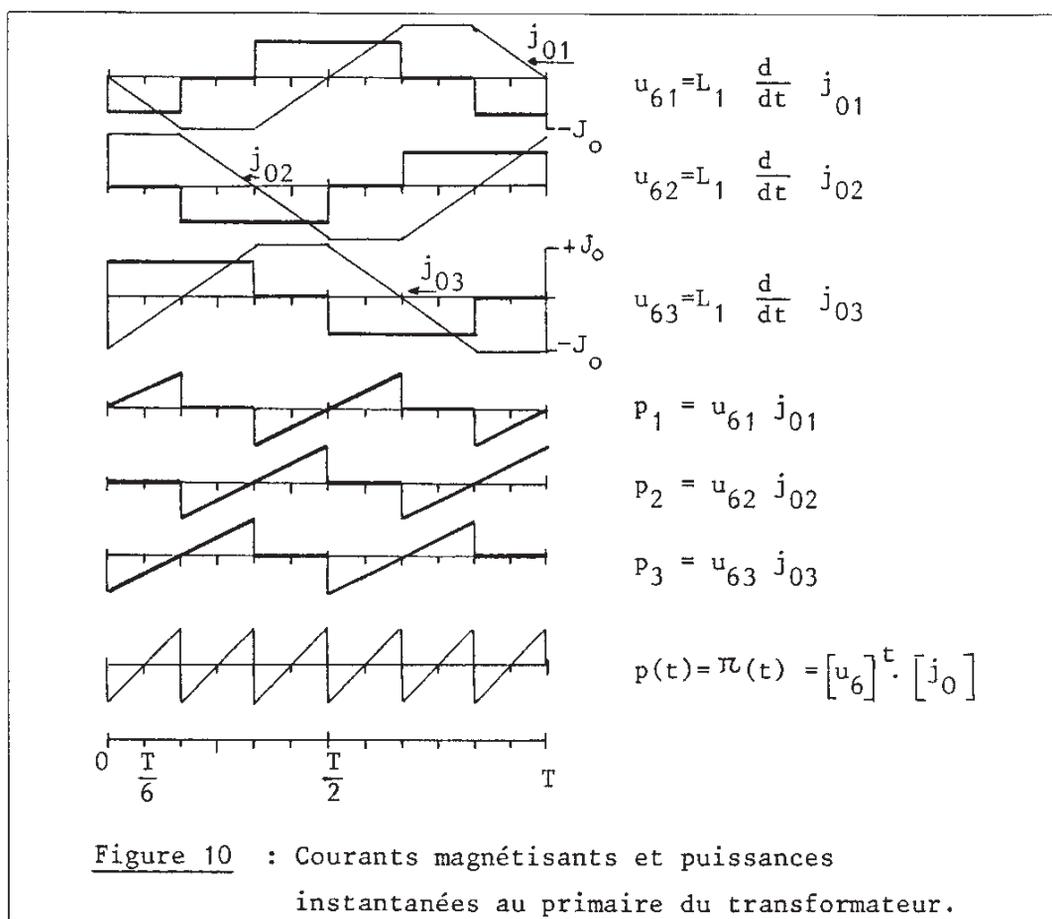
$$u_{61} - \frac{d\phi_1}{dt} = u_{62} - \frac{d\phi_2}{dt} = u_{63} - \frac{d\phi_3}{dt} = 0$$

soit, sous forme matricielle

$$\boxed{[u_6] = [L_1] \cdot \frac{d}{dt} [j_0]}$$

Le courant magnétisant résulte des tensions appliquées au primaire du transformateur.

2.2.5. Les formes d'onde des courants magnétisants s'obtiennent par simple intégration des formes d'onde des tensions en remarquant qu'ils doivent présenter une valeur moyenne nulle (figure 10).



2.2.6. L'énergie emmagasinée dans le circuit magnétique se trouve confinée dans les trois entrefers. Elle s'écrit :

$$\boxed{E(t) = \frac{1}{2} L_1 (j_{01}^2(t) + j_{02}^2(t) + j_{03}^2(t))}$$

Pour $t = 0$, $j_{01} = 0$, $j_{02} = \hat{J}_0$ et $j_{03} = -\hat{J}_0$.

Pour $t = \frac{T}{6}$, $j_{01} = -\hat{J}_0$, $j_{02} = \hat{J}_0$, $j_{03} = 0$,

donc $E(0) = E(\frac{T}{6})$: $\frac{T}{6}$ est la période de $E(t)$. (figure 11.).

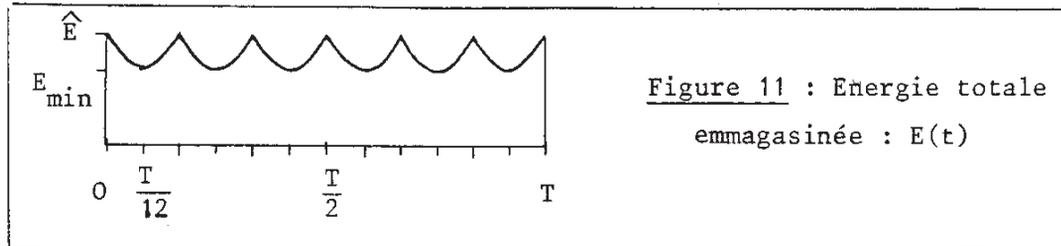


Figure 11 : Energie totale emmagasinée : $E(t)$

Pour $t = \frac{T}{12}$, $j_{01} = -\frac{\hat{J}_0}{2}$, $j_{02} = \hat{J}_0$ et $j_{03} = -\frac{\hat{J}_0}{2}$,

donc $E(\frac{T}{12}) = \frac{1}{2} L_1 (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1) \hat{J}_0^2 = \frac{3}{2} L_1 \hat{J}_0^2$

Avec $\hat{J}_0 = 5,57A$ et $L_1 = 0,5H$ on obtient :

$$E(\frac{T}{12}) = E_{\min} = 11,64 J$$

$$E(\frac{T}{6}) = \hat{E} = 15,52 J$$

2.2.7. La relation matricielle $[u_6] = \frac{d}{dt} [\Phi]$ s'écrit en fonction de l'induction dans chacune des colonnes du circuit magnétique:

$$\begin{cases} u_{61} = n_1 S \cdot \frac{d}{dt} B_1 \\ u_{62} = n_1 S \cdot \frac{d}{dt} B_2 \\ u_{63} = n_1 S \cdot \frac{d}{dt} B_3 \end{cases} \quad \text{soit } u_{6k} = n_1 S \frac{d}{dt} B_k \quad \text{pour } k \in \{1, 2, 3\}.$$

La puissance fournie aux trois enroulements primaires s'écrit en exprimant l'excitation magnétique H_k sur chaque noyau

$$p(t) = \sum_{k=1}^3 u_{6k} j_{0k} = \sum_{k=1}^3 n_1 S \frac{d}{dt} B_k \cdot \frac{B_k}{\mu_0} \frac{e}{n_1} = \frac{S e}{\mu_0} \sum_{k=1}^3 B_k \frac{d}{dt} B_k$$

d'où

$$E(t) = \frac{S e}{\mu_0} (B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)$$

En se reportant à la forme d'onde des tensions u_{6k} , on calcule \hat{B}_k :

$$u_5 = n_1 S \frac{\Delta B_k}{\Delta t} = 3 n_1 S \frac{\hat{B}_k}{T}$$

soit

$$\hat{B}_R = \frac{u_5 T}{6 n_1 S}$$

Avec $T = 20 \text{ ms}$, $u_5 = 850 \text{ V}$, $S = 10^{-2} \text{ m}^2$ et $n_1 = 200$, on obtient

$$\hat{B}_R = 1,41 \text{ Teslas}$$

2.2.8. Les tensions induites dans chacun des enroulements secondaires s'écrivent conformément aux notations de l'énoncé :

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_{71} = v''_{71} = n_2 \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{n_2}{n_1} u_{61} \\ v'_{72} = v''_{72} = n_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{n_2}{n_1} u_{62} \\ v'_{73} = v''_{73} = n_2 \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{n_2}{n_1} u_{63} \end{array} \right.$$

Dans ces conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{71} = v'_{71} - v''_{73} = \frac{n_2}{n_1} (u_{61} - u_{63}) \\ v_{72} = v'_{72} - v''_{71} = \frac{n_2}{n_1} (u_{62} - u_{61}) \\ v_{73} = v'_{73} - v''_{72} = \frac{n_2}{n_1} (u_{63} - u_{62}) \end{array} \right.$$

Sous forme matricielle, il vient :

$$[v_7] = [m_{TR}] \cdot [u_6] \text{ avec } [m_{TR}] = \frac{n_2}{n_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.9. a- En exprimant $[u_6]$, on obtient :

$$[v_7] = [m_{TR}] \cdot [M] \cdot [v_6] = [M'_{TR}] [v_6]$$

$$[M'_{TR}] = \frac{n_2}{n_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{soit : } [M'_{TR}] = \frac{n_2}{n_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

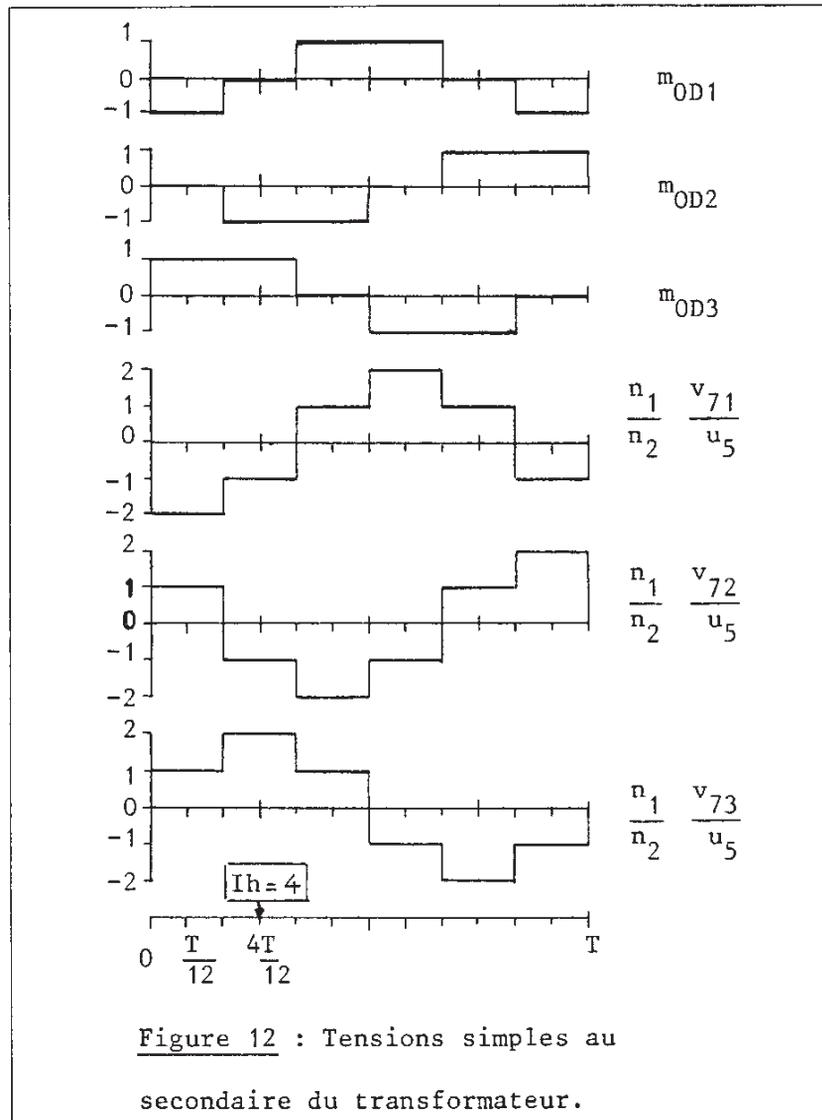
b-

$$[v_7] = [m_{TR}] \cdot [u_6] = [m_{TR}] \cdot [m_{OD}] u_5$$

$$[v_7] = \frac{n_2}{n_1} u_5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{OD1} \\ m_{OD2} \\ m_{OD3} \end{bmatrix} = \frac{n_2}{n_1} u_5 \begin{bmatrix} m_{OD1} - m_{OD3} \\ -m_{OD1} + m_{OD2} \\ -m_{OD2} + m_{OD3} \end{bmatrix}$$

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} \frac{n_1 v_{71}}{n_2 u_5} &= m_{OD1} - m_{OD3} \\ \frac{n_1 v_{72}}{n_2 u_5} &= -m_{OD1} + m_{OD2} \\ \frac{n_1 v_{73}}{n_2 u_5} &= -m_{OD2} + m_{OD3} \end{aligned}$$



c- La valeur efficace des tensions de sortie s'écrit :

$$V_7 = \frac{n_2 u_5}{n_1} \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{n_2}{n_1} u_5 \sqrt{2} = 220 \text{ Volts}$$

On en déduit

$$n_2 = \frac{220 \times 200}{850 \sqrt{2}} = 37$$

d- Le déphasage arrière du fondamental de v_{71} par rapport au fondamental de v_{61} vaut $\frac{4\pi}{6}$ radians, donc l'indice horaire $I_h=4$.

2.2.10. A partir du schéma fonctionnel du transformateur, on obtient :

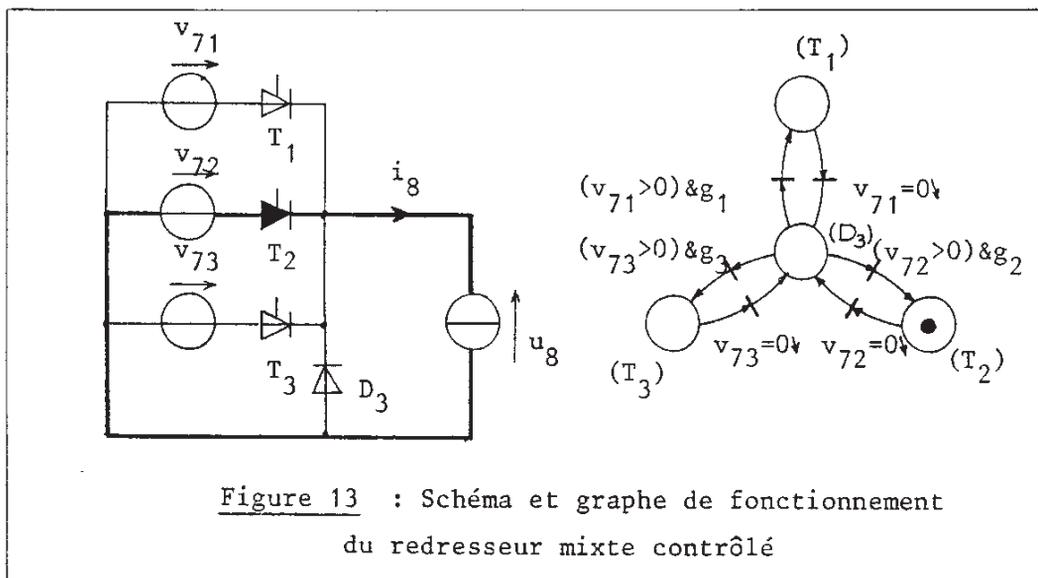
$$[\beta] = [m_{TR}]^t = \frac{n_2}{n_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\alpha] = [M]^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\gamma] = [L_1]^{-1} = \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

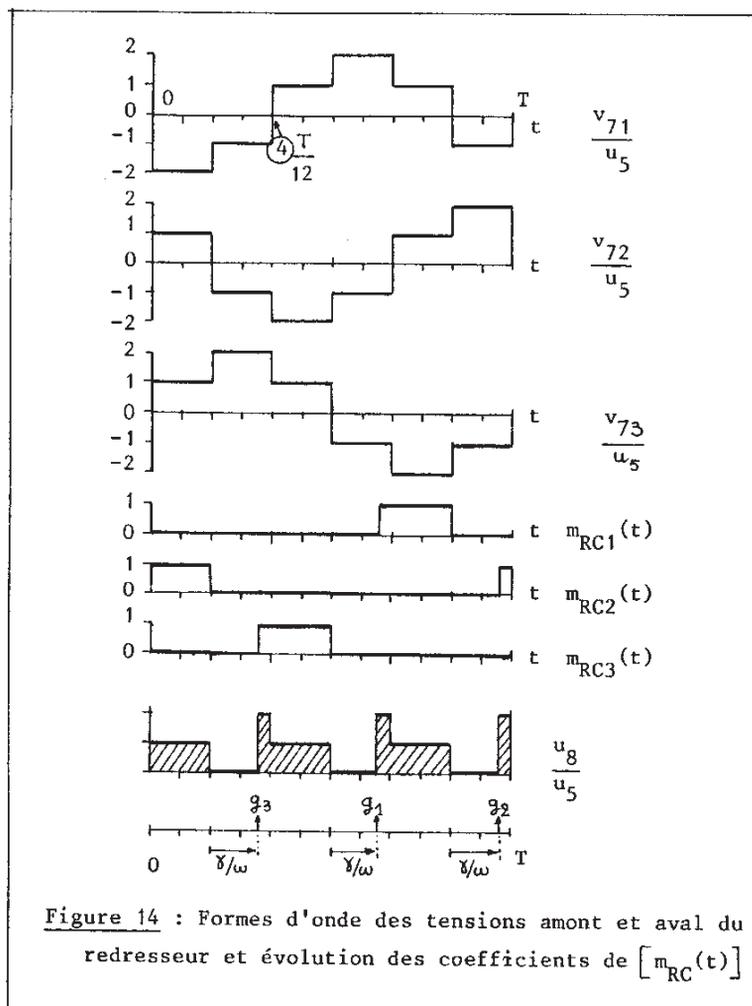
2.3. Etude du redresseur contrôlé

2.3.1. En tenant compte des conditions d'amorçage des t et de la diode du redresseur données figure 13, le retard à l'amorçage γ peut être fixé dans l'intervalle $\left] 0, \frac{2\pi}{3} \right[$



2.3.2. Les formes d'onde des tensions d'alimentation ainsi que de la tension redressée permettent de tracer l'évolution des coefficients de la matrice de modulation du redresseur (figure 14) :

$$[m_{RC}] = [m_{RC1}, m_{RC2}, m_{RC3}]$$



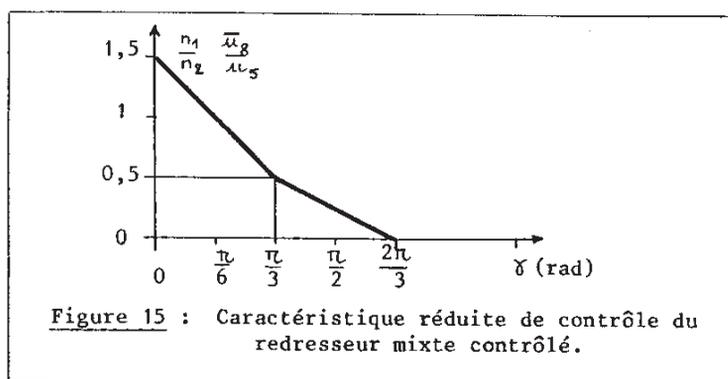
La tension redressée s'écrit alors : $u_8 = [m_{RC}] \cdot [v_7]$

soit : $u_8 = m_{RC1} v_{71} + m_{RC2} v_{72} + m_{RC3} v_{73}$

Si $\gamma \in]0, \frac{\pi}{3}]$, $\bar{u}_8 = \frac{n_2}{n_1} u_5 \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{\pi} \gamma \right)$ soit, $\bar{u}_8 = 236 - 150,16 \gamma$ (V).

Si $\gamma \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$, $\bar{u}_8 = \frac{n_2}{n_1} u_5 \left(1 - \frac{3}{2\pi} \gamma \right)$ soit, $\bar{u}_8 = 118 - 75 \gamma$ (V).

La caractéristique externe réduite du redresseur donnant $\frac{n_1 \bar{u}_8}{n_2 u_5}$ en fonction de γ est donnée figure 15.



2.3.3. Dans le circuit de la batterie, on a :

$$\bar{u}_g = \bar{u}_g = R_B \bar{i}_g + E_B$$

Avec $R_B = 5 \cdot 10^{-3} E_B + 0,46$, il vient l'expression non linéaire :

$$\bar{u}_g = E_B - 5 \cdot 10^{-3} E_B \bar{i}_g + 0,46 \bar{i}_g \quad (V)$$

- Lorsque la batterie est déchargée : $E_B = 60$ V et $\bar{i}_g = 120$ A, on obtient $\bar{u}_g = \bar{u}_g = 79,2$ V

- Lorsque la batterie est chargée : $E_B = 80$ V et $\bar{i}_g = 12$ A, on obtient $\bar{u}_g = \bar{u}_g = 80,72$ V.

L'angle de retard à l'amorçage vaut alors $59,8^\circ$ dans le premier cas et $59,2^\circ$ dans le second ce qui justifie la nécessité d'une commande asservie de γ autour de la valeur 60° .

Agrégation (Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Épreuve C : Problème d'électricité, d'électronique, d'électrotechnique
et d'automatique - Session : 1997

PARTIE I

I.A) Conductibilité électrique des conducteurs

A.1) Equation différentielle de v:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = -\frac{q}{m}E$$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{q\tau}{m}E$$

A.2) Solution en régime permanent:

$$\vec{v}(t) = -\frac{q\tau}{m}\vec{E} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{q\tau}{m}$$

A.3) Densité de courant et conductivité:

$$\vec{j} = -nq\vec{v} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E} \quad \sigma_o = \frac{nq^2\tau}{m}$$

A.4) Cas de l'Al.

$$\tau = \frac{m_o}{nq^2\rho} = 5.66.10^{-15} \text{ s}$$

A.5)

$$\mu = \frac{1}{\rho q n} = 10^{-3} \text{ m}^2 / \text{Vs}$$

A.6)

$$v = \mu E = 2.10^{-3} \text{ m/s}$$

$$j = nqv = 5.82.10^7 \text{ A/m}^2$$

$$I = jS = 0.46 \text{ A}$$

I.B) Semiconducteur intrinsèque à l'équilibre thermodynamique.

B.1) f est la probabilité d'occupation d'un niveau d'énergie E à la température T.

$$E \gg E_F \quad f \approx 0$$

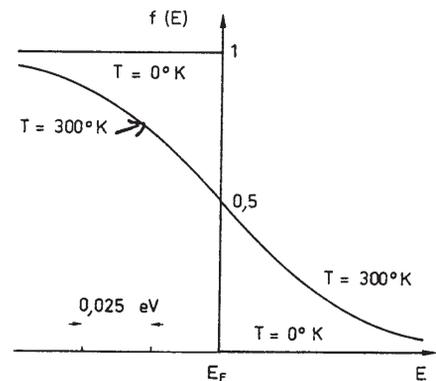
$$E \ll E_F \quad f \approx 1$$

$$E = E_F \quad f = 1/2 \text{ sépare les niveaux pleins des niveaux vides.}$$

T=0K Isolant

T=300K forte résistivité semi-conducteur intrinsèque

$$B.2) \quad p_0 n_0 = n_i^2 = N_c N_v e^{-\frac{E_g}{kT}}$$



B.3 et 4) Ge-GaAs: Densités d'état et concentrations intrinsèques en fonction de la température:

Ge	240K	300K	500K
$N_c(\text{cm}^{-3})$	$7,2 \cdot 10^{18}$	10^{19}	$2,17 \cdot 10^{19}$
$N_v(\text{cm}^{-3})$	$4,27 \cdot 10^{18}$	$6 \cdot 10^{18}$	$1,28 \cdot 10^{19}$
$n_i(\text{cm}^{-3})$	$5,2 \cdot 10^{11}$	$1,93 \cdot 10^{13}$	$7 \cdot 10^{15}$

GaAs	240K	300K	500K
$N_c(\text{cm}^{-3})$	$3,06 \cdot 10^{17}$	$4,3 \cdot 10^{17}$	$9,2 \cdot 10^{17}$
$N_v(\text{cm}^{-3})$	$5 \cdot 10^{18}$	$7 \cdot 10^{18}$	$1,5 \cdot 10^{19}$
$n_i(\text{cm}^{-3})$	$1,23 \cdot 10^3$	$1,73 \cdot 10^6$	$2,3 \cdot 10^{11}$

I.C : Semi-conducteur extrinsèque :

C.1) Equation de neutralité électrique.

$$\sum \text{charges} + = \sum \text{charges} - , \text{ soit :}$$

$$p_0 + N_D = n_0 \quad (\text{les atomes donneurs sont ionisée positivement})$$

donc :

$$p_0 - n_0 + N_D = 0 \text{ avec } p_0 n_0 = n_i^2 \text{ soit l'équation du second degré en } n_0$$

$$n_0^2 - N_D n_0 - n_i^2 = 0$$

$$n_0 = \frac{N_D + (N_D^2 + 4n_i^2)^{1/2}}{2}$$

$$p_0 = \frac{n_i^2}{n_0}$$

* $N_D \gg n_i$ type N affirmé

$$n_0 = N_D \text{ et } p_0 = \frac{n_i^2}{N_D}$$

* $N_D \ll n_i$ semi-conducteur intrinsèque : $(N_D^2 + 4n_i^2)^{1/2} \approx n_i$ et $n_0 = p_0 = n_i$

$$n_0 = p_0 = n_i$$

C.2) Conductivité intrinsèque

$$\sigma_i = qn_i(\mu_n + \mu_p)$$

	Ge	GaAs
$\sigma_i(\Omega^{-1}\text{cm}^{-1})$	0,018	$2,85 \cdot 10^{-9}$
$\rho_i(\Omega\text{cm})$	55	$3,510^8$

C.3) Les deux semiconducteurs sont dopés:*pour le Ge: $N_D = 4.10^{13} \text{ cm}^{-3}$

$$\begin{array}{l} n_0 = 4,83.10^{13} \text{ cm}^{-3} \\ p_0 = 8,28.10^{12} \text{ cm}^{-3} \end{array} \quad \text{Il reste quasiment intrinsèque}$$

*pour le GaAs: $N_D = 2.10^{13} \text{ cm}^{-3}$

$$\begin{array}{l} n_0 = 2.10^{13} \text{ cm}^{-3} \gg n_i \\ n_0 = N_D \end{array} \quad \text{Il est largement extrinsèque}$$

C.4) Conductivités et résistivités extrinsèques :

$$\begin{array}{l} \text{Ge} \\ \sigma_{\text{Ge}} = 0.036 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1} \\ \rho_{\text{Ge}} = 27.7 \Omega \text{ cm} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{GaAs} \\ \sigma_{\text{GaAs}} = 0.027 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1} \\ \rho_{\text{AsGa}} = 36.8 \Omega \text{ cm} \end{array}$$

D) Semi-conducteur hors équilibre.**D.1) Résistance du barreau et intensité :**

$$\begin{array}{l} \sigma_0 = 0.04 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1} \\ \rho_0 = 25 \Omega \text{ cm} \\ R_0 = \rho_0 \frac{L}{W.d} = 3125 \Omega \end{array} \quad I_0 = 1.6 \text{ mA}$$

D.2.a et b) Equation différentielle:

A partir de l'équation de continuité donnée dans le texte, on obtient l'équation différentielle du premier ordre et sa solution en régime permanent :

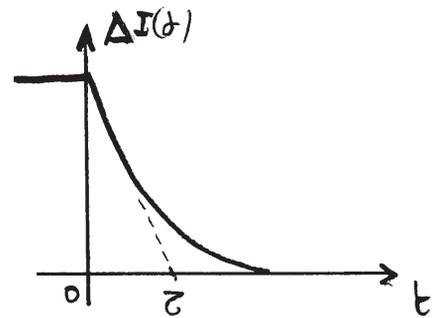
$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{d\hat{n}}{dt} = -\frac{\hat{n}}{\tau} + G = 0 \\ \text{b) } \hat{n} = \hat{p} = \tau G = 2.10^{13} \text{ cm}^{-3} \end{array}$$

D.2.c) Variation de conductivité et résistance sous éclaircissement:

$$\begin{array}{l} \Delta\sigma = q\hat{n}(\mu_n + \mu_p) \\ \Delta\sigma = 2,8.10^{-2} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1} \end{array} \quad \sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma = 0.068 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

$$R = \frac{L}{\sigma S} = 1838 \Omega \quad I = \frac{V_a}{R} = 2,72 \text{ mA}$$

$$\Delta I = 1,12 \text{ mA}$$



D.3) On cesse d'éclairer à $t=0$, l'équation devient :

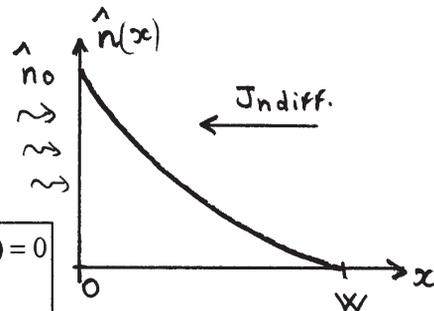
$$\frac{d\hat{n}}{dt} + \frac{\hat{n}}{\tau} = 0 \text{ d'où } \hat{n}(t) = \hat{n}_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\Delta I(t) = \Delta I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Même loi pour le courant, on en déduit la durée de vie des porteurs libres dans le matériau.

D.4) On éclaire en surface dans le plan $x=0$: En régime permanent et à partir de l'expression de J_{ndiff} , on a l'équation différentielle :

$$-\frac{\hat{n}}{\tau} + \frac{1}{q} \frac{dJ_n}{dx} = 0 \quad \frac{d^2 \hat{n}}{dx^2} - \frac{1}{L_n^2} \hat{n} = 0$$



D.5) solution :

$$\hat{n}(x) = Ae^{-x/L_n} + Be^{+x/L_n} \text{ avec } \hat{n}(0) = \hat{n}_0 \text{ et } \hat{n}(W) = 0$$

$$\hat{n}(x) = \hat{n}_0 \frac{\text{sh} \frac{W-x}{L_n}}{\text{sh} \frac{W}{L_n}}$$

D.6) $J_{\text{ndiff}} = qD_n \frac{d\hat{n}}{dx} = q \frac{D_n}{L_n} \hat{n}_0 \frac{\text{ch} \frac{W-x}{L_n}}{\text{sh} \frac{W}{L_n}}$ en module (sens remontant le gradient)

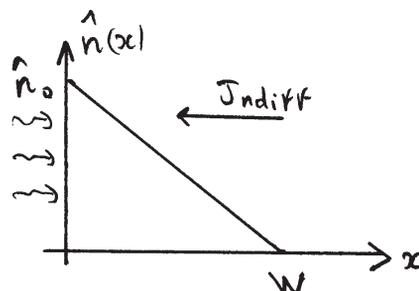
D.7) Cas du barreau court :

$$W \ll L_n \Rightarrow \text{sh} \frac{W-x}{L_n} \approx \frac{W-x}{L_n}$$

$$\text{sh} \frac{W}{L_n} \approx \frac{W}{L_n}$$

$$\hat{n}(x) = \hat{n}_0 \frac{W-x}{W} \text{ et } |J_{\text{ndiff}}| = q \frac{\hat{n}_0 D_n}{W}$$

Le courant est uniforme.



PARTIE II

II.A) Etude à l'équilibre:

A.1) Région neutre N: $J_n=0$ et $n_0 = N_D$ implique: $qD_n \left(N_D \frac{E}{U_T} + \frac{dN_D}{dx} \right) = 0$ soit

$$E(x) = -\frac{U_T}{N_D} \frac{dN_D}{dx} = -\frac{U_T}{x}$$

A.2) ddp supportée par la région N:

$$\Delta V_N = V(W_2) - V(W_N) = U_T \ln \frac{W_N}{W_2}$$

A.3) Zone de transition:

A.3.a) Relation de neutralité électrique: $\int_{-W_1}^0 qN_A dx = \int_0^{W_2} qN_D(x) dx$ d'où:

$$W_1 = \frac{a}{2N_A} W_2^2$$

A.3.b) Champ électrique ; on résout l'équation de Poisson dans la zone de transition :

***Côté N** entre $x = 0$ et $x = W_2$ on trouve:

$$E_N(x) = -\frac{qa}{2\epsilon} (W_2^2 - x^2)$$

***Côté P** entre $x = -W_1$ et $x = 0$:

$$E_P(x) = -\frac{qN_A}{\epsilon} (x + W_1)$$

***Champ maximum en $x=0$:**

$$|E_{Max}| = \frac{qa}{2\epsilon} W_2^2 = \frac{qN_A}{\epsilon} W_1$$

A.4) ddp supportée par la zone de transition:

***côté P:** $\Delta\Phi_P = \frac{qN_A}{\epsilon} \left[\int_{-W_1}^0 x dx + W_1 \int_{-W_1}^0 dx \right]$ soit $\Delta\Phi_P = \frac{qN_A}{2\epsilon} W_1^2 = \frac{qa^2}{8\epsilon N_A} W_2^4$

***côté N:** $\Delta\Phi_N = \frac{qa}{2\epsilon} \left[\int_0^{W_2} W_2^2 dx - \int_0^{W_2} x^2 dx \right]$ soit $\Delta\Phi_N = \frac{qa}{3\epsilon} W_2^3$

$$\Phi = \Delta\Phi_N + \Delta\Phi_P = \frac{qa}{3\epsilon} W_2^3 \left(1 + \frac{3a}{8N_A} W_2 \right)$$

*D'après l'approximation $N_A \gg aW_2$: $\Phi \approx \frac{qa}{3\epsilon} W_2^3$

A.5) Appl. numérique:

$$W_2 = \left(\frac{3\epsilon\Phi}{qa} \right)^{1/3} = 5,4 \cdot 10^{-5} \text{ cm} \quad \text{et} \quad |E_{\text{Max}}| = 2,33 \cdot 10^4 \text{ V/cm}$$

II.B) Sous polarisation directe:

B.1) Densités de courant de saturation:

* Côté P dopage uniforme: $J_{\text{sn}} = \frac{qn_i^2 D_n}{N_A W_P}$ courant d'électrons minoritaires.

* Côté N dopage linéaire: $J_{\text{sp}} = \frac{2qn_i^2 D_p}{aW_N^2}$ courant de trous minoritaires.

B.2) Appl. num.: $J_{\text{sn}} = 8 \cdot 10^{-14} \text{ A/cm}^2$ $J_{\text{sp}} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ A/cm}^2$ $\gamma = \frac{J_{\text{sp}}}{J_{\text{sn}}} = 250$

La densité de courant de saturation de la diode vaut : $J_s \approx J_{\text{sp}} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ A/cm}^2$

Conclusion: la densité de courant résultante est la somme des composantes d'électrons et de trous avec continuité à la jonction :

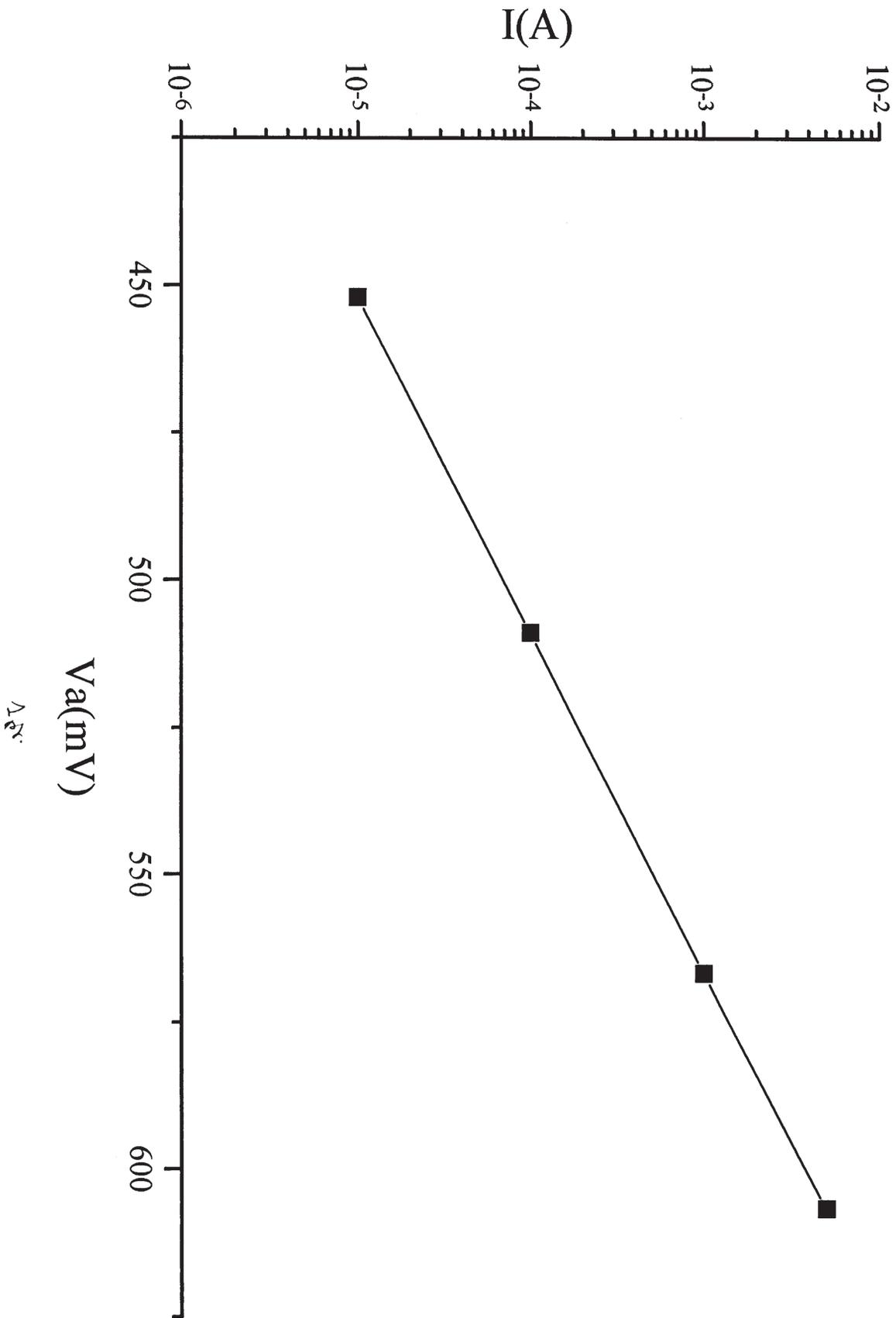
Le courant total se réduit pratiquement au courant de trous J_p dans la région N peu dopée.

B.3) Tension appliquée avec $J=0.7\text{A/cm}^2$ $I=A \cdot J=5\text{mA}$

$$V_a = U_T \ln \frac{J}{J_s} = U_T \ln \frac{J_p}{J_s} = 0.607 \text{ V}$$

B.4) Caractéristique $I(V_a)$:

I(A)	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-3}$
Va(V)	0,452	0,509	0,567	0,607



II.C : Charges stockées

C.1) Répartition des porteurs minoritaires:

*trous côté N: $\hat{p}(x) = \frac{J_p}{qD_p a x} \int_x^{W_N} ax dx$ soit: $\hat{p}(x) = \frac{J_p}{2qD_p} \left(\frac{W_N^2}{x} - x \right)$ non linéaire

*électrons côté P: $\hat{n}(x) = \frac{J_n}{qD_n} (W_p + x)$ linéaire

C.2) Charges stockées par les porteurs minoritaires:

*Côté N: $Q_{s(N)} = \frac{J_p}{2D_p} \left[W_N^2 \ln \frac{W_N}{W_2} - \frac{1}{2} (W_N^2 - W_2^2) \right]$ soit, d'après l'approximation indiquée:

$W_2 \ll W_N$ $Q_{s(N)} = \frac{J_p}{2D_p} W_N^2 \left(\ln \frac{W_N}{W_2} - \frac{1}{2} \right)$ (ce sont des trous)

*Côté P: $Q_{s(P)} = J_n \frac{W_p^2}{2D_n}$ (ce sont des électrons)

C.3) Application numérique :

$J = 0.7 \text{ A/cm}^2$ $Q_{s(N)} = 1,08 \cdot 10^{-8} \text{ C/cm}^2$ $Q_{s(P)} = - 2,24 \cdot 10^{-11} \text{ C/cm}^2$

$Q_s \approx Q_{s(N)}$ charge stockée par les trous car $J = J_p$ d'après B.2

II.D) Comportement en régime dynamique:

D.1) Conductance dynamique: $I_p \gg I_n$, g se réduit pratiquement à la conductance relative aux trous minoritaires dans la région N, soit avec $I = 5 \text{ mA}$:

$g = \frac{dI}{dV_a} \approx \frac{dI_p}{dV_a} = \frac{I}{U_T} = 0.2 \text{ S}$ et $r_d = \frac{1}{g} = 5 \Omega$

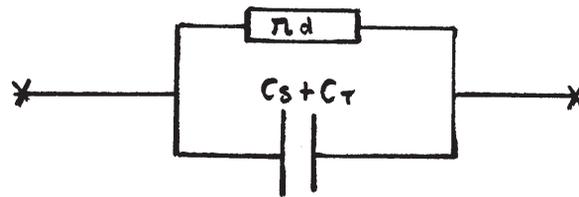
D.2) Capacités de stockage et de transition pour $I=5 \text{ mA}$ et $V_a=610 \text{ mV}$:

$C_s = 3,1 \text{ nF}$
 $C_T = 202 \text{ pF}$

D.3) Admittance complexe: $\underline{Y} = g + j\omega(C_s + C_T)$

Schéma équivalent:

Il correspond à: $I = 5\text{mA}$, $V_a = 0.61\text{V}$, $r_d = 5\Omega$, $C_s = 3,1\text{nF}$, $C_T = 202,4\text{ pF}$

**D.4) Pulsation et fréquence de coupure:**

$$\omega_c = \frac{g}{C_s + C_T} = 6,06 \cdot 10^7 \text{ rd/s} \quad \text{donc} \quad F_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 9,64 \text{ MHz}$$

PARTIE III

III.A) Fonctionnement statique:

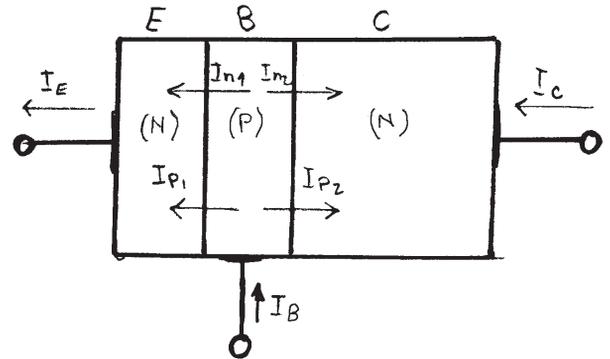
A.1) Composantes de diffusion : Elles sont au nombre de 4:

***porteurs minoritaires dans la base :** courant de saturation des électrons:

$$I_{sn} = A \frac{qn_i^2 D_n}{N_{AB} W_B} \text{ d'où les courants d'électrons}$$

$$I_{n1} = I_{sn} \left(e^{\frac{V_{BE}}{U_T}} - 1 \right) \text{ électrons venant de l'émetteur}$$

$$I_{n2} = I_{sn} \left(e^{\frac{V_{BC}}{U_T}} - 1 \right) \text{ électrons venant du collecteur}$$



*** trous minoritaires dans l'émetteur:**

$$\text{avec: } I_{sp1} = A \frac{qn_i^2 D_{pE}}{N_{DE} W_E}$$

$$I_{p1} = I_{sp1} \left(e^{\frac{V_{BE}}{U_T}} - 1 \right)$$

***trous minoritaires dans le collecteur:**

$$I_{p2} = I_{sp2} \left(e^{\frac{V_{BC}}{U_T}} - 1 \right) \text{ avec: } I_{sp2} = \frac{qn_i^2 D_{pC}}{N_{DC} W_C} \cdot A$$

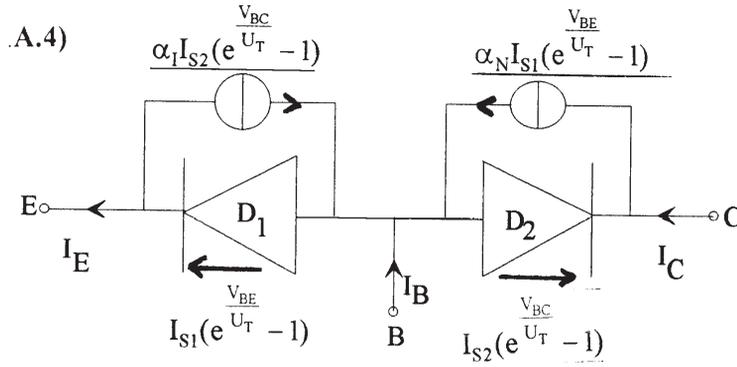
A.2) Applications numériques : d'après les relations donnant les courants de saturation les applications numériques donnent:

$$\begin{aligned} I_{sn} &= 9,33 \cdot 10^{-16} \text{ A} \\ I_{sp1} &= 6 \cdot 10^{-18} \text{ A} \\ I_{sp2} &= 3,2 \cdot 10^{-16} \text{ A} \end{aligned}$$

A.3) Courant base:

$$\begin{aligned} I_B &= I_E - I_C = I_{p1} + I_{p2} \\ I_B &= I_{sp1} \left(e^{\frac{V_{BE}}{U_T}} - 1 \right) + I_{sp2} \left(e^{\frac{V_{BC}}{U_T}} - 1 \right) \end{aligned}$$

c'est un courant de trous



A.5) Gains en courant base commune:

$\alpha_N = \frac{I_c}{I_E} = \frac{I_{sn}}{I_{sn} + I_{sp1}}$	$\alpha_I = \frac{I_E}{I_C} = \frac{I_{sn}}{I_{sn} + I_{sp2}}$	$\alpha_N = 0.994$
		$\alpha_I = 0.75$

A.6) Courants de saturation des deux diodes :

$I_{s1} = I_{sn} + I_{sp1} = 9.39 \cdot 10^{-16} \text{ A}$	On a : $I_{s2} = \frac{4}{3} I_{s1}$
$I_{s2} = I_{sn} + I_{sp2} = 1.25 \cdot 10^{-15} \text{ A}$	

III.B) Régime actif :

B.1) Seules les composantes de diffusion relatives à la diode émetteur-base sont présentes, on a donc en simplifiant les équations de I_C et I_E

$I_C = I_{sn} e^{\frac{V_{BE}}{U_T}}$	ce qui s'écrit encore: $I_C = \alpha_N I_{s1} e^{\frac{V_{BE}}{U_T}}$
---------------------------------------	---

$I_E = (I_{sn} + I_{sp1}) e^{\frac{V_{BE}}{U_T}}$	soit encore $I_E = I_{s1} e^{\frac{V_{BE}}{U_T}}$
---	---

$I_B = I_{sp1} e^{\frac{V_{BE}}{U_T}}$
--

B.2) Expression littérale du gain β_N :

Le gain en courant en émetteur commun s'écrit:

$\beta_N = \frac{I_C}{I_B} = \frac{I_{sn}}{I_{sp1}} = \frac{D_n N_{DE} W_E}{D_p N_{AB} W_B}$
$\beta_N \approx 156$

B.3) Le courant collecteur est imposé: $I_C = 1 \text{ mA}$.

$V_{BE} = U_T \ln \frac{I_C}{I_{sn}} \approx 0.692 \text{ V}$

B.4) On impose $I_B = 6\mu A$

On relève une augmentation du gain en courant due à l'extension de la zone dépeuplée de la jonction collecteur-base dans la base entraînant une diminution de l'épaisseur de base.

La tension d'Early traduit la pente de la caractéristique $I_C (V_{CE})$. L'intersection avec l'axe des tensions donne $V_A = 515 V$ environ.

B.5) Epaisseur de base en fonction de V_{BC} :

D'après la relation imposée : $\beta_N = \frac{467 \cdot 10^{-4}}{W_{\text{Beff}}}$

$V_{BC}(V)$	-10	-20	-30
$W_{\text{Beff}}(\text{cm})$	$2,74 \cdot 10^{-4}$	$2,71 \cdot 10^{-4}$	$2,64 \cdot 10^{-4}$

III.C) Régime dynamique :**C.1) Conductances:**

*conductance d'entrée:

$$g_{11E} = \frac{\tilde{i}_B}{\tilde{v}_{BE}} = \frac{dI_B}{dV_{BE}} = \frac{I_B}{U_T}$$

*transconductance:

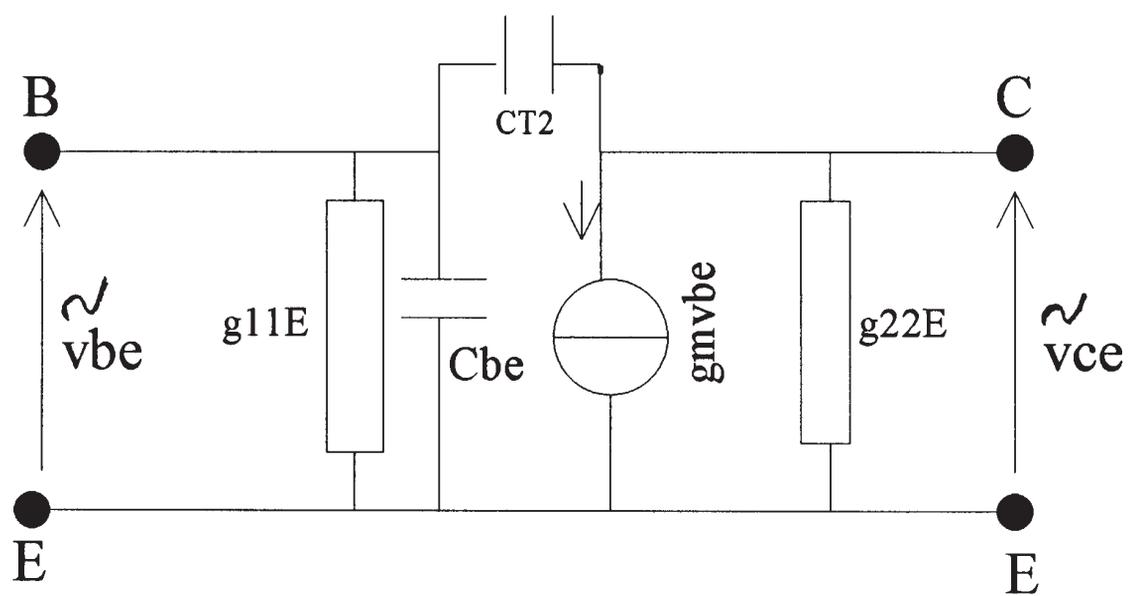
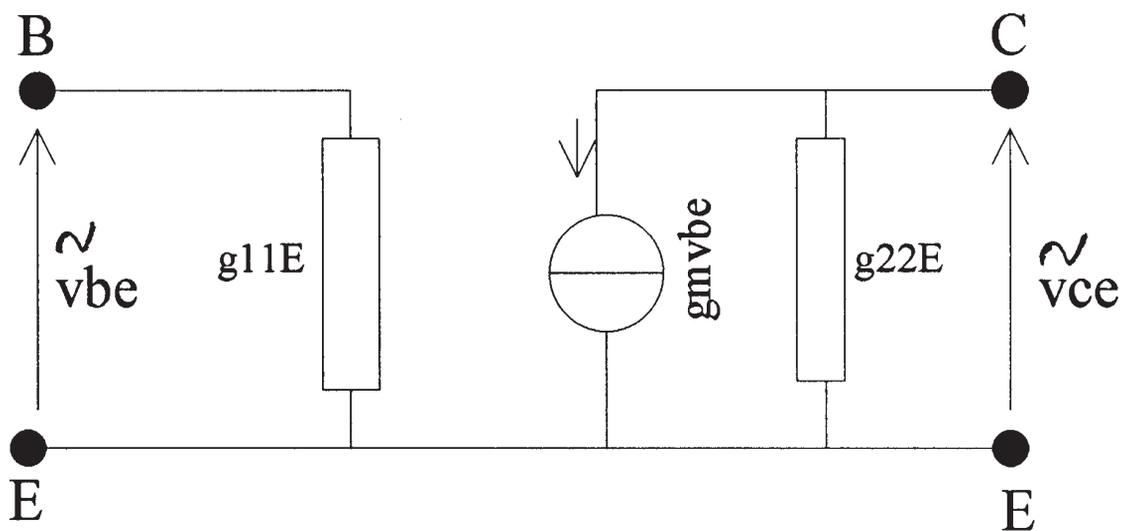
$$g_{21E} = \frac{\tilde{i}_c}{\tilde{v}_{BE}} = \frac{dI_C}{dV_{BE}} = \frac{I_C}{U_T}$$

*Conductance de sortie:

$$g_{22E} = \frac{dI_C}{dV_{CE}} \approx 0 \quad \text{car on néglige l'effet Early par suite:} \quad g_{12E} = \frac{dI_B}{dV_{CE}} \approx 0$$

C.2) Applications numériques:

$$\begin{array}{l} g_{11E} = 2,67 \cdot 10^{-4} \text{ S} \\ g_m = g_{21E} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ S} \end{array} \quad \text{On a la relation: } g_m = \beta_N g_{11E}$$



C.3) En haute fréquence : On doit rajouter les capacité des deux jonctions: C_S , C_{T1} et C_{T2} .

C.4) Calcul des capacités : On applique les relations données dans l'énoncé :

$$C_S = \tau_B g_m = 103 \text{ pF}$$

$$C_{T1} = 20 \text{ pF}$$

*La capacité totale émetteur-base vaut alors:

$$C_{BE} = C_S + C_{T1} = 123 \text{ pF}$$

*La capacité collecteur-base se réduit à la capacité C_{T2} :

$$C_{BC} \approx 1.63 \text{ pF}$$

Approximation légitime: $C_S + C_{T1} \gg C_{T2}$

C.5) Expression du gain dynamique en courant:

D'après l'approximation indiquée $g_m \gg \omega C_{T2}$:

$$\tilde{i}_c = (g_m + j\omega C_{T2}) \tilde{v}_{BE} \approx g_m \tilde{v}_{BE}$$

$$\tilde{i}_b = [g_{11E} + j\omega(C_S + C_{T1} + C_{T2})] \tilde{v}_{BE}$$

De plus: $C_{T2} \ll C_S + C_{T1}$ et $g_{11E} = \frac{g_m}{\beta_N}$ implique :

$$\beta(\omega) = \frac{\beta_N}{1 + j\omega \frac{\beta_N}{g_m} (C_S + C_{T1})} \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{g_m}{\beta_N C_{BE}}$$

C.6) Pulsation de transition:

$$|\beta(\omega)| = 1 \Rightarrow \omega_T = \beta_N \omega_c$$

C.7.a) $\omega_T = \frac{g_m}{C_S + C_{T1}}$ de plus $C_S = \tau_B \frac{I_c}{U_T}$ et $C_{T2} = 0$ donc:

$$\frac{1}{\omega_T} = \frac{U_T}{I_c} C_{T1} + \tau_B$$

C.7.b) Graphe $\frac{1}{\omega_T} = f\left(\frac{1}{I_C}\right)$

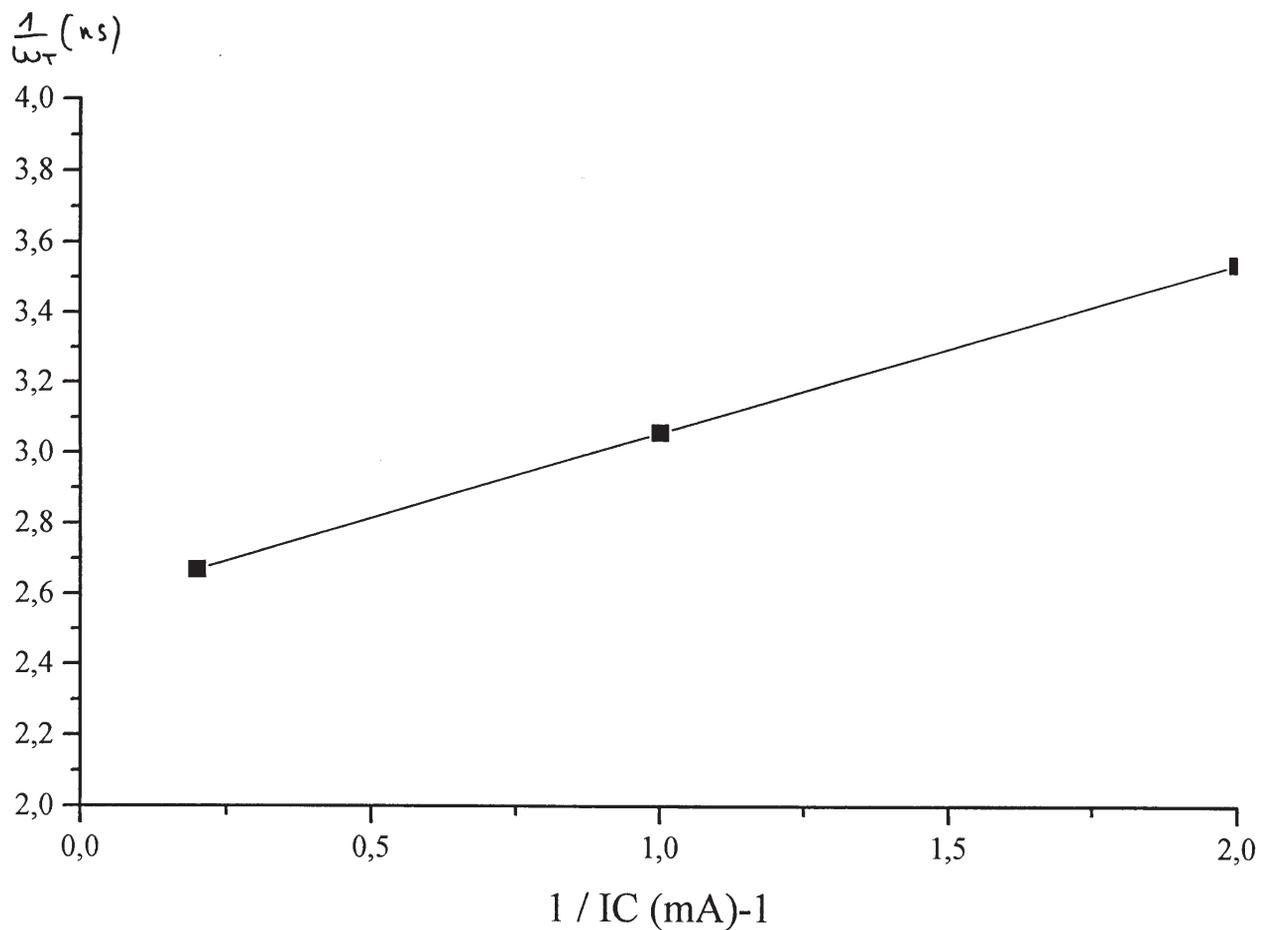
$C_{T1}=20\text{pF}$

$I_C(\text{mA})$	0.5	1	5
$U_T C_{T1}/I_C(\text{ns})$	0,97	0,5	0,1
$\omega_T^{-1}(\text{ns})$	3,54	3,06	2,67
$\omega_T(\text{rd / s})$	$2,82 \cdot 10^8$	$3,27 \cdot 10^8$	$3,75 \cdot 10^8$
$F_T(\text{MHz})$	44,8	52	59,5

On déduit de cette courbe le temps de transit dans la base. $\tau_B = 2.6\text{ns}$
 (valeur très proche de celle donnée dans l'énoncé)

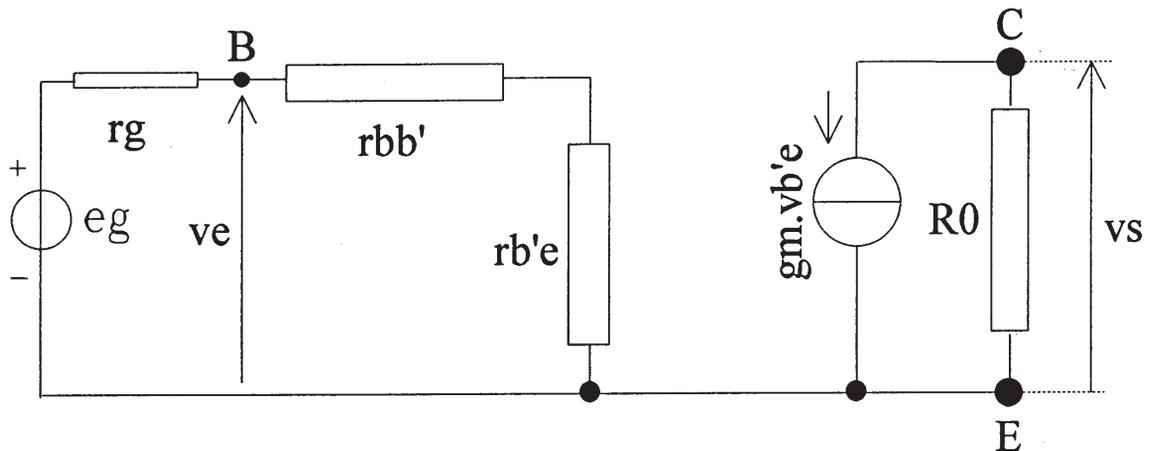
*valeurs maximales possibles de ω_T et de F_T sont: $\omega_{T\text{Max}} = \frac{1}{\tau_B} = 3,9 \cdot 10^8 \text{ rd / s}$ soit

$F_{T\text{Max}}=62 \text{ MHz}$



PARTIE IV

AMPLIFICATION A TRANSISTOR

IV .A) En basses fréquences :A.1) Schéma équivalent :A.2) Amplification en tension :

$$A_{vB} = \frac{V_s}{V_e} \quad v_{b'e} = V_e \frac{r_{b'e}}{r_{b'e} + r_{bb'}} \quad \text{donc } V_e = v_{b'e} \frac{r_{b'e} + r_{bb'}}{r_{b'e}}$$

$$\text{Par ailleurs : } V_s = -g_m v_{b'e} R_0 \quad \text{donc } v_{b'e} = -\frac{V_s}{g_m R_0}$$

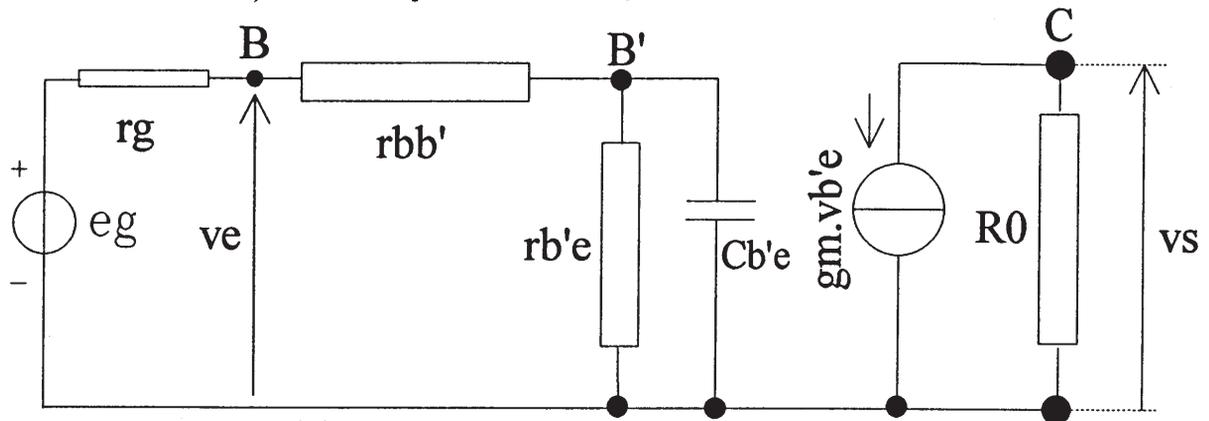
$$A_{vB} = -\frac{g_m r_{b'e} R_0}{r_{b'e} + r_{bb'}} = -\beta \frac{R_0}{r_{b'e} + r_{bb'}}$$

Appl. Num. : $R_0 = 3200 \Omega$ ($R_L // R_C$)

$$A_{vB} = -123 \quad G_{db} = 20 \cdot \log 123 = 41.8 \text{ db}$$

B) Etude en hautes fréquences.

B.1) Schéma équivalent : On rajoute la capacité émetteur-base $C_{b'e}$.



B.2) Amplification en tension :

*Impédance $r_{b'e}$ en // avec $C_{b'e}$: $Z_{b'e} = \frac{r_{b'e}}{1 + j\omega r_{b'e} C_{b'e}}$

$$\underline{A_{vH}} = - \frac{-g_m R_0 r_{b'e}}{r_{b'e} + r_{bb'} + j\omega r_{b'e} r_{bb'} C_{b'e}}$$

B.3) pulsation de coupure .

L'amplification s'écrit par ailleurs sous la forme classique :

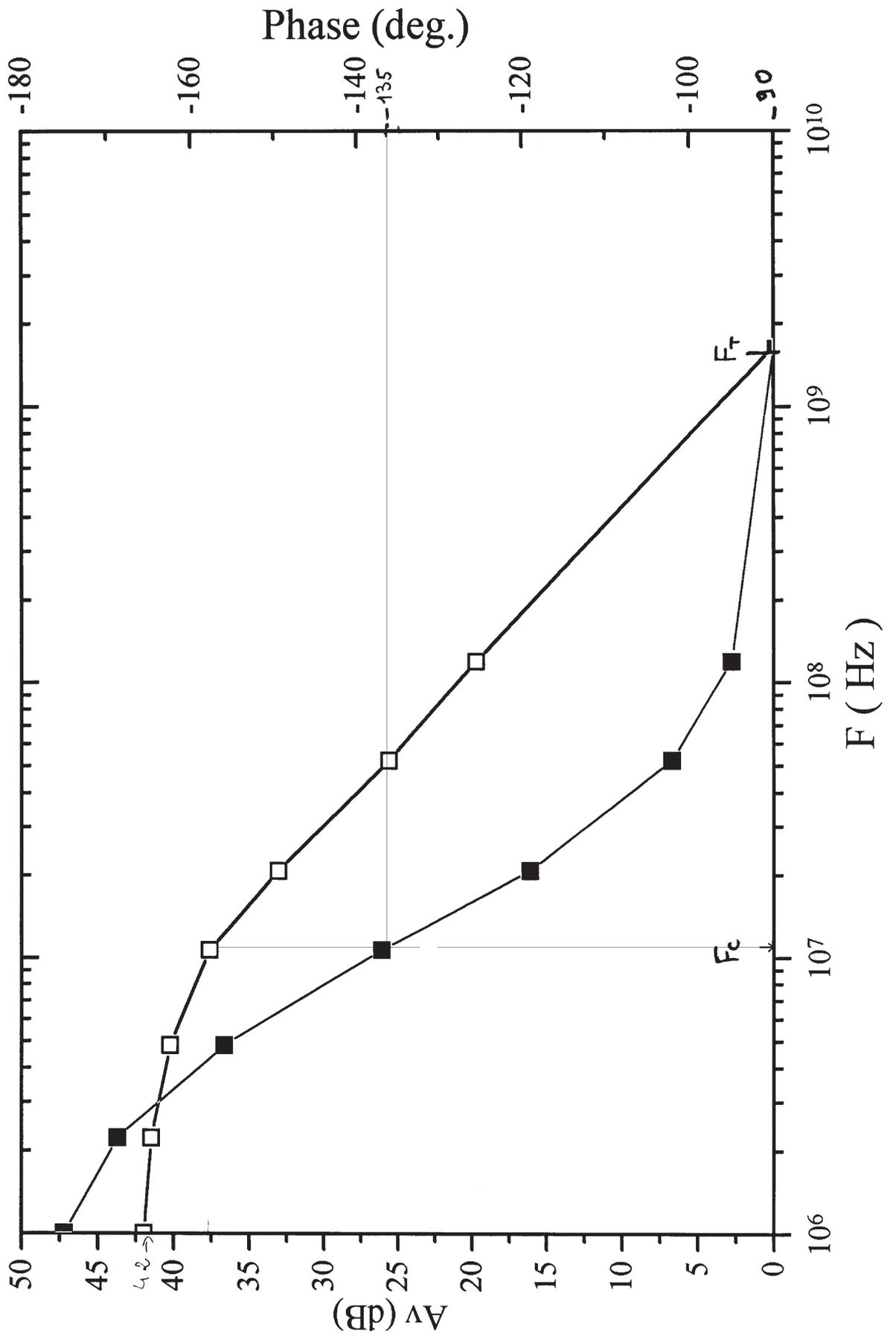
$$\underline{A_{vH}} = - \frac{-g_m R_0 r_{b'e}}{(r_{b'e} + r_{bb'}) \left(1 + \frac{j\omega r_{b'e} r_{bb'} C_{b'e}}{r_{b'e} + r_{bb'}} \right)} \quad \text{soit} \quad \underline{A_{vH}} = A_{vB} \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$\omega_c = \frac{r_{b'e} + r_{bb'}}{r_{bb'} r_{b'e} C_{b'e}}$$

B.4) pulsation de coupure : $\omega_c = 6,93 \cdot 10^7 \text{ rd / s}$ $F_c = 11,04 \text{ MHz}$.

Fréquence de transition : $F_T = \beta F_c = 1,65 \cdot 10^9 \text{ Hz}$

Phase : $\phi = -\arctg \frac{F}{F_c} \pm \Pi$



C.A.P.E.S

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de physique avec applications - Session : 1997

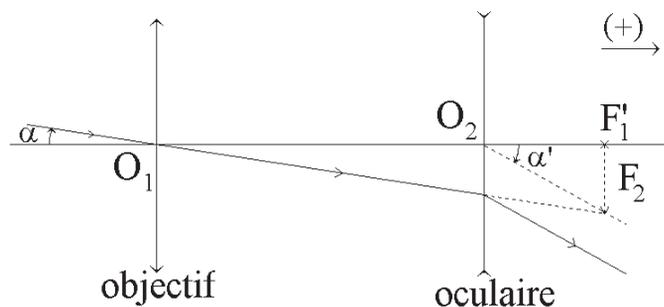
Première partie

I. Lunette de Galilée

- I.1. Oculaire : lentille divergente.
Objectif : lentille convergente.

- I.2. I.2.1. L'objet à l'infini doit donner une image à l'infini. Le foyer image de l'objectif coïncide avec le foyer objet de l'oculaire.

I.2.2.



- I.2.3. Grossissement de la lunette :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f'_1}{|f'_2|} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

- I.2.4. $G \approx 30$ $O_1O_2 \approx 37,5 \text{ cm}$

$$\left. \begin{array}{l} f'_1 + f'_2 \approx 37,5 \\ G = -\frac{f'_1}{f'_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} f'_1 \approx 39 \text{ cm} & C_1 = 2,6 \delta \\ f'_2 \approx -1,3 \text{ cm} & C_2 \approx -77 \delta \end{cases}$$

- I.3. I.3.1. L'objet est pratiquement à l'infini, les conditions de Gauss sont respectées : l'image est pratiquement à l'infini :

$$\alpha = 6,8 \times 10^{-4} \text{ rad} \quad \alpha' = G \alpha \Rightarrow \alpha' \approx 2,0 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

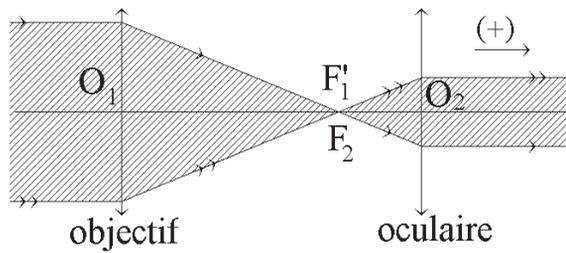
I.3.2.

$$\alpha = \frac{h}{D} \quad \alpha' = \frac{h}{D'} \quad \begin{array}{l} D : \text{distance réelle} \\ D' : \text{distance apparente} \end{array}$$

$$\Rightarrow D' = \frac{D}{G} \quad D' = 83 \text{ m}$$

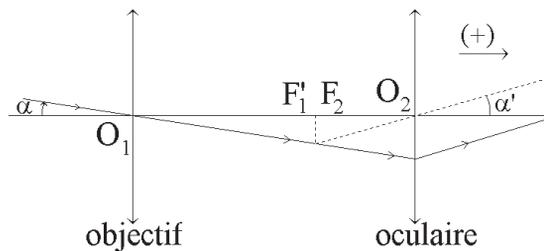
II. La lunette astronomique

II.1.



II.2. Dans les conditions de Gauss :

$$G = \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right| = \frac{f'_1}{f'_2}$$



II.3. II.3.1. Limite de $\alpha' = u'$:

$$u = \frac{u'}{G} \Rightarrow 2u = \frac{2u'}{G}$$

$G = 40$	$2u = 0,75^\circ$
	$= 1,3 \times 10^{-2} \text{ rad}$
$G = 266$	$2u = 0,11^\circ$
	$= 2,0 \times 10^{-3} \text{ rad}$

II.3.2. Le chercheur réticulé a un faible grossissement, donc un grand champ. L'astronome amateur fait coïncider l'astre avec le centre du réticule, il peut alors l'observer à travers la lunette de fort grossissement.

II.3.3. Diamètre apparent de Mars :

$$\delta_M = \frac{6800}{7 \times 10^7} = 9,7 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

Champ de la lunette : $2u = 2,0 \times 10^{-3} \text{ rad}$

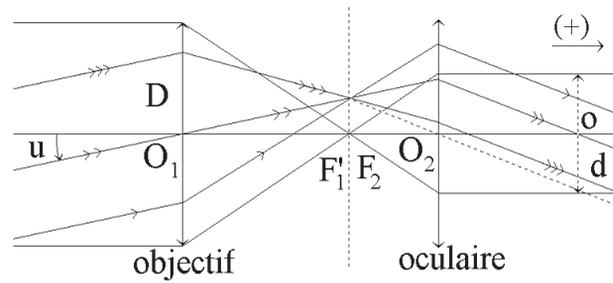
$\delta_M < 2u$: Mars apparaît en entier.

Diamètre apparent de la Lune :

$$\delta_L = \frac{3400}{380.000} = 8,9 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$\delta_L > 2u$: la Lune n'apparaît en entier.

II.4. II.4.1.



Cercle oculaire : image de la monture de l'objectif à travers l'oculaire :

$$G = \frac{D}{d}$$

II.4.2.

$$G = 133 \quad G = \frac{f'_1}{f'_2} \Rightarrow f'_2 \approx 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

L'oculaire a une distance focale de 6,0 mm.

Le cercle oculaire est l'image de l'objectif à travers l'oculaire :

$$\overline{O_2 O_1} = -0,806 \text{ m} \quad \frac{1}{\overline{O_2 O}} - \frac{1}{\overline{O_2 O_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

$$\Rightarrow \overline{O_2 O} = 6,04 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Le cercle oculaire est pratiquement dans le plan focal image de l'oculaire.

Diamètre du cercle oculaire : $d = \frac{D}{G} = 0,45 \text{ mm}$

L'astronome amateur doit placer son œil au niveau du cercle oculaire pour qu'il reçoive le flux lumineux maximum.

II.5. II.5.1. Le pouvoir de résolution est limité par le phénomène de diffraction dû à la monture de l'objectif (diffraction à l'infini à travers un trou).

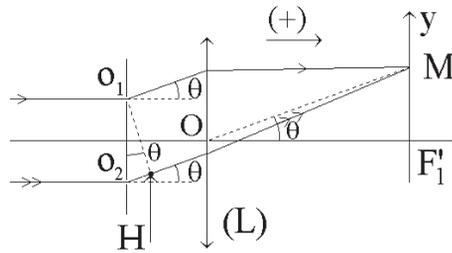
$$\text{II.5.2.} \quad \beta = \frac{1,22 \lambda}{D} \quad \beta = 1,12 \times 10^{-5} \text{ rad} \quad d_{TM} = 7,0 \times 10^7 \text{ km}$$

$$d_{AB \text{ min}} = \beta \times d_{TM} \quad d_{AB \text{ min}} = 780 \text{ km}$$

II.5.3. $d_{AB \text{ min}}$ est inférieur au diamètre du bassin d'Hellas, on pourra donc repérer le bassin d'Hellas.

III. Mesure de la distance angulaire entre deux étoiles proches

III.1.



III.1.1. O_1 et O_2 sont deux sources synchrones cohérentes et en phase.

M est dans le plan focal image de (L). Les trajets optiques $[O_1 M]$ et $[H M]$ sont égaux.

La différence de marche entre les rayons issus de O_1 et O_2 et arrivant en M vaut $\delta = O_2 M$.

$$\delta = O_1 O_2 \sin \theta \Rightarrow \delta = a \sin \theta$$

Dans les conditions de Gauss $\sin \theta \approx \theta$ et $\theta \approx \frac{y}{f'_1}$

$$\Rightarrow \delta = \frac{a y}{f'_1}$$

III.1.2. En notation complexe, les deux ondes peuvent s'exprimer par :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{E}_1 = A e^{-j\omega t} e^{j\Phi_1} \\ \underline{E}_2 = A e^{-j\omega t} e^{j\Phi_2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 = A e^{j\omega t} (e^{j\Phi_1} + e^{j\Phi_2}) \\ \Phi_2 = \Phi_1 + \frac{2\pi\delta}{\lambda} \end{array}$$

$I(M) = E_m^2$ où E_m est l'amplitude réelle du champ \underline{E} .

$$I(M) = 2A^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda} \right)$$

soit :

$$I(M) = 4A^2 \cos^2 \frac{\pi a y}{\lambda f'_1}$$

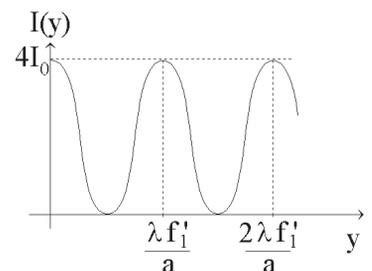
On met en évidence le phénomène d'interférences d'ondes lumineuses issues de deux sources synchrones cohérentes.

En posant $A^2 = I_0$:

$$I(M) = 2 I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi a y}{\lambda f'_1} \right)$$

ou :

$$I(M) = 4 I_0 \cos^2 \frac{\pi a y}{\lambda f'_1}$$



III.2. III.2.1. Quand la source S_1 est seule, l'éclairement énergétique est le même qu'au § III.1.2. :

$$I_1(M) = 2 I_0 \cdot \left(1 + \cos \frac{2\pi \delta}{\lambda} \right)$$

Quand la source S_2 est seule, la différence de marche est $\delta + \delta'$ avec $\delta' = -a \varepsilon_1$.

$$I_2(M) = 2 I_0 \cdot \left(1 + \cos \frac{2\pi (\delta + \delta')}{\lambda} \right)$$

III.2.2. Les sources S_1 et S_2 sont incohérentes, on peut écrire :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M)$$

$$I(M) = 2 I_0 \left(2 + \cos \frac{2\pi \delta}{\lambda} + \cos \frac{2\pi (\delta + \delta')}{\lambda} \right)$$

$$I(M) = 4 I_0 \left(1 + \cos \frac{\pi \delta'}{\lambda} \cos \left(\frac{2\pi \delta}{\lambda} + \frac{\pi \delta'}{\lambda} \right) \right)$$

Dans le plan focal image $\cos \left(\frac{2\pi \delta}{\lambda} + \frac{\pi \delta'}{\lambda} \right)$ varie, donc $I(M)$ varie

$$I_{\max} = 4 I_0 \left(1 + \frac{\cos \pi \delta'}{\lambda} \right) \text{ lorsque } \cos \left(\frac{2\pi \delta}{\lambda} + \frac{\pi \delta'}{\lambda} \right) = 1$$

$$I_{\min} = 4 I_0 \left(1 - \frac{\cos \pi \delta'}{\lambda} \right) \text{ lorsque } \cos \left(\frac{2\pi \delta}{\lambda} + \frac{\pi \delta'}{\lambda} \right) = -1$$

$$\Rightarrow C = \cos \frac{\pi \delta'}{\lambda}$$

III.3. $C = 0$ (brouillage du système de franges).

On veut : $\cos \frac{\pi \delta'}{\lambda} = 0$

soit : $\frac{\pi \delta'}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

avec : $\delta' = -a \varepsilon_1$

la seule possibilité est de faire varier a .

Conditions optimales : a maximum soit $a = D$ diamètre de l'objectif :

$$\Rightarrow |\varepsilon_1| = \frac{\lambda}{2a} \quad |\varepsilon_1| = \frac{\lambda}{2D} \quad \Rightarrow |\varepsilon_1| = 4,6 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

III.4. Pour avoir $|\varepsilon_1|$ plus petite, il faut augmenter a , donc D , actuellement, D peut atteindre 1 m, ce qui permet d'atteindre $|\varepsilon_1| = 2,8 \times 10^{-7} \text{ rad}$.

Deuxième partie

A. Interactions magnétiques entre courants et aimants

A.I. Force de Laplace.

A.II. A.II.1.

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= I \overrightarrow{A_1 A_2} \wedge \vec{B} \text{ en } P_1 ; \quad \vec{F}_2 = I \overrightarrow{A_2 A_3} \wedge \vec{B} \text{ en } P_2 ; \\ \vec{F}_3 &= I \overrightarrow{A_3 A_4} \wedge \vec{B} \text{ en } P_3 ; \quad \vec{F}_4 = I \overrightarrow{A_4 A_1} \wedge \vec{B} \text{ en } P_4 \\ \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i &= (\overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} + \overrightarrow{A_3 A_4} + \overrightarrow{A_4 A_1}) \wedge \vec{B} = \vec{0}\end{aligned}$$

La somme est nulle.

A.II.2. La somme étant nulle, on parle de couple.

 M_Δ : moment du couple par rapport à l'axe Δ .

$$M_\Delta = \overrightarrow{M_{(M)}} \cdot \vec{u}_z = \left(\sum_{i=1}^4 \overrightarrow{MP_i} \wedge \vec{F}_i \right) \cdot \vec{u}_z$$

$$M_\Delta = (\vec{0} + \overrightarrow{P_2 P_4} \wedge \vec{F}_4) \cdot \vec{u}_z = [-a \sin \theta \vec{u}_x \wedge I a B \vec{u}_y] \cdot \vec{u}_z$$

$$M_\Delta = -I a^2 B \sin \theta$$

soit :

$$M_\Delta = -m B \sin \theta$$

A.II.3. Soit une rotation d'angle $d\theta$ autour de Oz de la spire, le travail du couple est :

$$\delta W = M_\Delta d\theta$$

$$\delta W = -I B a^2 \sin \theta d\theta = -d[-I a^2 B \cos \theta]$$

or :

$$\delta W = -d E_p$$

on peut donc poser :

$$E_p = -I a^2 B \cos \theta$$

soit :

$$E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

A.II.4. La position d'équilibre stable correspond au minimum de E_p .

Soit :

$$\cos \theta = +1 \Rightarrow \theta = 0$$

 \vec{B} et \vec{n} ont alors même direction et même sens.

A.II.5. Dans une aiguille aimantée, des moments magnétiques microscopiques, dus aux électrons, s'ajoutent.

Le moment résultant, non nul, détermine les pôles de l'aiguille. Placée dans un champ magnétique \vec{B} l'aiguille s'oriente, et la position des pôles de l'aiguille, discernables nous donne le sens de \vec{B} .

Un grain de limaille, de fer, placé dans le champ \vec{B} , s'aimante et acquiert un moment magnétique, mais ses pôles ne sont pas discernables. Il s'oriente dans \vec{B} et indique seulement la direction du champ magnétique.

A.III. A.III.1.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

B_x décroît quand x augmente ($x > 0$) donc $\frac{\partial B_x}{\partial x} < 0$.

A.III.2. Développement limité de B_z au voisinage de $z = 0$.

$$B_z(P_1) = B_z(x, 0, 0) + \frac{a}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}(x, 0, 0)$$

or :

$$B_z(x, 0, 0) = 0$$

A.III.3. \vec{n} a même direction et même sens que \vec{B} .

\vec{n} est orienté dans la direction et le sens de l'axe O_x .

A.III.4. A.III.4.1.

$$\vec{F}_1 = I (-a \vec{u}_y) \wedge \vec{B}(P_1) = \begin{cases} -I a B_z(P_1) \\ 0 \\ +I a B_x(P_1) \end{cases}$$

$$\vec{F}_3 = I (a \vec{u}_y) \wedge \vec{B}(P_3) = \begin{cases} +I a B_z(P_3) \\ 0 \\ -I a B_x(P_3) \end{cases}$$

$$\vec{F}_2 = I (-a \vec{u}_z) \wedge \vec{B}(P_2) = \begin{cases} +I a B_y(P_2) \\ -I a B_x(P_2) \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{F}_4 = I (a \vec{u}_z) \wedge \vec{B}(P_4) = \begin{cases} -I a B_y(P_4) \\ -I a B_x(P_4) \\ 0 \end{cases}$$

La somme est :

$$\vec{F} = \left[-I a B_z(P_1) + I a B_z(P_3) + I a B_y(P_2) - I a B_y(P_4) \right] \vec{u}_x :$$

$$\vec{F} = -I a^2 \left[\frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right] \vec{u}_x = I a^2 \frac{\partial B_x}{\partial x} \vec{u}_x \quad (\text{puisque } \operatorname{div} \vec{B} = 0)$$

$$\vec{F} = m \frac{\partial B_x}{\partial x} \vec{u}_x$$

A.III.4.2. Pour des raisons de symétrie, on admet que $\vec{F} = F \vec{u}_x$. Soit une translation de la spire suivant \vec{u}_x , $d\vec{l} = dx \vec{u}_x$ la spire reçoit le travail $\delta W = -dE_p$.

$$\delta W = M_\Delta d\theta + \vec{F} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \delta W = F \cdot dx \quad (d\theta = 0)$$

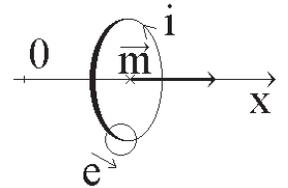
$$F \, dx = - d [\vec{m} \cdot \vec{B} (M)] \Rightarrow F \cdot dx = - d [- m \cdot B_x (x, 0, 0)]$$

$$\text{d'où :} \quad F = m \frac{\partial B_x}{\partial x} \quad \text{et} \quad \vec{F} = m \frac{\partial B_x}{\partial x} \vec{u}_x$$

A.III.5. Dans le cas de la figure 3a, $F < 0$; le spire est attirée par le pôle N de l'aimant.

Si on retourne la spire, son moment magnétique \vec{m} devient $\vec{m}' = - m \vec{u}_x$ et la force devient $\vec{F}' = - m \frac{\partial B_x}{\partial x} \vec{u}_x$, la spire est alors repoussée par la pôle N de l'aimant.

A.III.6. A.III.6.1. La spire, mobile dans un champ magnétique \vec{B} indépendant du temps, est le siège d'une force électromotrice induite e . Comme la spire est fermée, il apparaît un courant induit d'intensité $i = \frac{e}{R}$.



$$\vec{m} = \pi b^2 i \vec{u}_x$$

$$\vec{m} = \frac{\pi b^2 e}{R} \vec{u}_x$$

$$\text{avec :} \quad e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{loi de Faraday})$$

$$\Phi = \pi b^2 B_x$$

$$e = - \pi b^2 \frac{d B_x}{dx} v$$

$$\text{avec :} \quad B_x = \frac{A}{x^3} \quad e = \pi b^2 \frac{3A}{x^4} v$$

$$\text{d'où :} \quad i = \frac{3A\pi b^2 v}{R x^4}$$

$$\text{et :} \quad \vec{m} = \frac{3A\pi^2 b^4}{x^4} \frac{v}{R} \vec{u}_x$$

A.III.6.2. D'après la question A.III.4., $\vec{F} = m \frac{\partial B_x}{\partial x} \vec{u}_x$ or ici B ne dépend que de :

$$x \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{dB_x}{dx}$$

$$\text{d'où :} \quad F = - \frac{3A\pi^2 b^2}{x^4} \frac{v}{R} \times \frac{3A}{x^4}$$

$$\vec{F} = - \frac{9A^2 \pi^2 b^4}{R x^8} v \vec{u}_x$$

$$\text{soit :} \quad \vec{F} = - h \vec{v} \quad \text{avec } h > 0$$

Le sens de \vec{F} est opposé à celui de \vec{v} .

Le phénomène mis en évidence est le freinage par courants induits d'un conducteur mobile dans un champ magnétique \vec{B} indépendant du temps.

B. Étude simplifiée d'un teslamètre à effet Hall

B.I. B.I.1.

$$I = |q| n^* v b h$$

$$I \text{ en } C \cdot s^{-1}$$

$$|q| n^* v b h \text{ en } C \cdot m^{-3} \cdot m \cdot s^{-1} \cdot m \cdot m \quad \text{soit en } C \cdot s^{-1}.$$

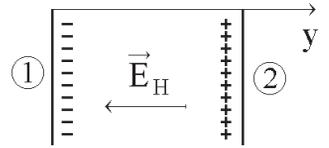
B.I.2. Un électron est soumis à la force magnétique :

$$\vec{f}_m = q (-v \vec{u}_x) \wedge B \vec{u}_z = q v B \vec{u}_y \quad (\text{sens de } -\vec{u}_y)$$

Les électrons sont déviés vers ① \Rightarrow des charges négatives apparaissent sur ① et des charges positives sur ②.

B.I.3. Si $\vec{v} = -v \vec{u}_x$ \vec{v} constant, l'électron est soumis à la force :

$$\vec{f} = q (\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$$



$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{E}_H &= -v B \vec{u}_y \\ V_2 - V_1 &= \vec{E}_H \cdot (-b \vec{u}_x) \end{aligned} \right\} V_2 - V_1 = v B b > 0$$

$$U_H = v B b, \text{ d'après le § B.I.1. } v b = \frac{-I}{h q n^*}$$

$$\text{d'où : } U_H = - \frac{BI}{h q n^*}$$

$$\text{donc : } R_H = \frac{1}{q n^*}$$

B.I.4. $U_H = 1,1 \times 10^{-10} V$ tension très faible.

Avec un semi-conducteur n^* est beaucoup plus faible, donc R_H est plus grand et U_H plus importante et plus facile à mesurer.

B.II. B.II.1. Si h est petit, la tension U_H est plus grande.

Si L et b sont petits, le champ est quasi uniforme sur toute la sonde et la détection est quasi-punctuelle.

B.II.2.

$$U_H = 22 \mu V$$

$$\ll 0,1 V \Leftrightarrow 5 mT \gg$$

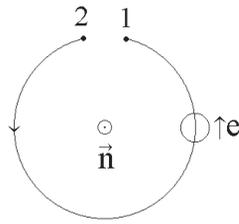
$5 mT$ donnent $U_H = 110 \mu V$, il faut amplifier pour obtenir :

$$A \cdot U_H = 0,1 V$$

$$\text{d'où : } A = 9 \cdot 10^2$$

C. Production d'énergie électrique à partir d'un champ magnétique

C.I. C.I.1. On choisit un sens de référence tel que :



$$\vec{n} = \vec{u}_x$$

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

(loi de Faraday)

$$\Phi = Ns \vec{n} \cdot \vec{B}$$

$$\Phi = Ns B \cos \omega t$$

$$e = - \omega Ns B \sin \omega t$$

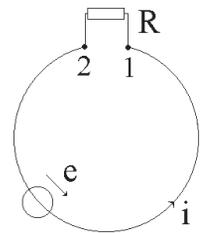
$$u_o(t) = V_2 - V_1 = - e$$

$$V_2 - V_1 = Ns B \omega \sin \omega t$$

C.I.2. C.I.2.1.

$$i = \frac{e}{R}$$

$$i = - \frac{Ns B \omega}{R} \sin \omega t$$



C.I.2.2. La spire est soumise aux couples $\vec{\Gamma}$ et $\vec{\Gamma}'$; elle est immobile donc $\vec{\Gamma} + \vec{\Gamma}' = \vec{0}$.

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{\Gamma} = N s i B \sin \omega t \vec{u}_z$$

donc :

$$\vec{\Gamma}' = \frac{N^2 s^2 B^2}{R} \omega \sin^2 \omega t \vec{u}_z$$

($\vec{\Gamma}'$ action extérieure, $\vec{\Gamma}$ action du champ \vec{B}).

C.I.2.3. Le rotor est soumis aux couples $-\vec{m} \wedge \vec{B}$ (actions mutuelles avec la bobine) et $\vec{\Gamma}''$ (action extérieure).

La vitesse de rotation est constante donc :

$$\vec{\Gamma}'' = - \vec{m} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

d'où :

$$\vec{\Gamma}'' = \frac{N^2 s^2 B^2}{R} \omega \sin^2 \omega t \vec{u}_z$$

Puissance moyenne fournie par le milieu extérieur :

$$\mathcal{P} = \langle \vec{\Gamma}'' \omega \rangle = \frac{N^2 s^2 B^2 \omega}{2R}$$

$$\mathcal{P}_{joule} = \langle R i^2 \rangle = R \left(\frac{N s B \omega}{R} \right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{N^2 s^2 B^2 \omega^2}{2R}$$

Bilan énergétique : Pendant la durée δ , l'ensemble [bobine fermée sur R + rotor] reçoit du milieu extérieur l'énergie mécanique $\mathcal{P}\delta$. Cette énergie peut être soit dissipée : effet Joule, frottements mécaniques (négligeables) soit stockée : énergie macroscopique (ici E_c est constante), énergie magnétique (ici $L = 0$).

$$\text{Donc : } \mathcal{P}\delta = \mathcal{P}_{\text{joule}} \cdot \delta \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{joule}} = \frac{N^2 s^2 B^2 \omega^2}{2R}$$

En conclusion, l'hypothèse de départ est en accord avec le principe de conservation de l'énergie, sa validité est donc confirmée.

C.II. Loi de Faraday, qui traduit le phénomène d'induction électromagnétique, découverte au milieu du XIXe siècle.

Alternateur, dynamo, microphone électrodynamique, transformateur, four à induction...

C.III. C.III.1. $T = 20 \text{ ms}$, $\omega = 100 \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ou $3,1 \times 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$u(t) = 220 \sqrt{2} \cos(100 \pi t + \varphi)$$

C.III.2. L'eau du barrage, en tombant, fait tourner la turbine. Celle-ci entraîne le rotor sur lequel sont fixées des bobines.

La partie qui tourne : le rotor ; celle qui ne tourne pas : l'induit fixe (que représentait la spire fixe de la question I.).

Le cuivre : bon conducteur dans les bobines qui créent \vec{B} et dans l'induit fixe.

Le fer : dans les bobines pour augmenter le champ \vec{B} .

Alternateur : ensemble rotor - induit fixe.

C.III.3. C.III.3.1.

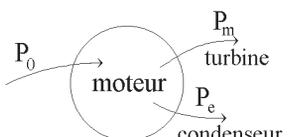
$$r_m = \frac{W}{Q_o}$$

C.III.3.2. Affirmation 2 : En accord avec le deuxième principe, les moteurs monothermes n'existent pas, le rendement est lié aux températures des deux sources.

C.III.4. C.III.4.1. Une seconde source de chaleur est nécessaire.

C.III.4.2.

$$P = r_o \mathcal{P}_m \quad ; \quad \mathcal{P}_e = \mathcal{P}_o - \mathcal{P}_m$$

$$\frac{\mathcal{P}_o}{r_o} \frac{\mathcal{P}_m}{r_m} \Rightarrow \mathcal{P}_e = \frac{1 - r_m}{r_m} \cdot \frac{1}{r_o} \cdot P$$


C.III.4.3. Soient t_s et t_e les températures de l'eau respectivement à la sortie et à l'entrée du condenseur.

$$\text{On peut écrire : } \mathcal{P}_e = D_e c (t_s - t_e)$$

$$\text{d'où : } D_e = \frac{\mathcal{P}_e}{c (t_s - t_e)}$$

$$D_e = 40 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Débit important, qui a été un critère de choix pour l'emplacement de la centrale : il faut une grande quantité d'eau disponible pour réduire la pollution thermique. D'autres installations voisines peuvent utiliser cette eau réchauffée comme source de chaleur.

C.A.P.E.S

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de chimie avec applications - Session : 1997

I. Le dichlore Cl₂

1. *a.* Cl₂ est un gaz verdâtre à P_{atm} et T ambiante.
 - b.* Br₂ est un liquide rouge et I₂ un solide noir dans ces conditions de T et P.
 - c.* Ces trois corps purs sont constitués de molécules apolaires, elles vont néanmoins subir des interactions de Van der Waals de type London. Or celles-ci dépendent de la polarisabilité α des liaisons et $\alpha_{I-I} > \alpha_{Br-Br} > \alpha_{Cl-Cl}$ donc les interactions sont plus énergétiques pour I₂ que Br₂ et Cl₂, ce qui explique l'évolution des températures de changement d'état.
2. *a.* Il faut faire immédiatement évacuer les locaux.
 - b.* En mélangeant un produit désinfectant contenant de l'eau de javel et un produit nettoyant contenant un acide (détartrant wc), on peut avoir un dégagement accidentel de dichlore.
 - c.* On peut préparer du dichlore au laboratoire en oxydant une solution contenant des ions chlorures Cl⁻ par une solution acide contenant des ions permanganate MnO₄⁻ :



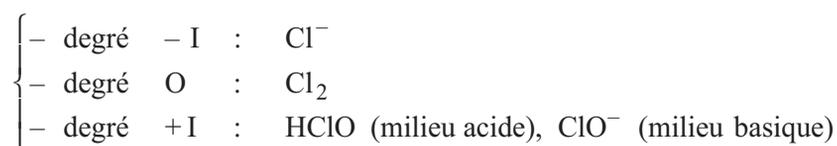
3. *a.* Pour le couple redox Mⁿ⁺ / M on écrit Mⁿ⁺ + ne⁻ → M et la loi de Nernst correspondante :

$$E_{M^{n+}/M} = E_{M^{n+}/M}^o + \frac{RT}{nF} \ln \frac{a_{M^{n+}}}{a_M}$$

or M métal a_M = 1 Mⁿ⁺ soluté dilué a_{Mⁿ⁺} = $\frac{C_{M^{n+}}}{C^o}$ avec C^o = 1 mol.L⁻¹.

- b.* Diagramme potentiel-pH du chlore.

On rencontre de bas en haut :



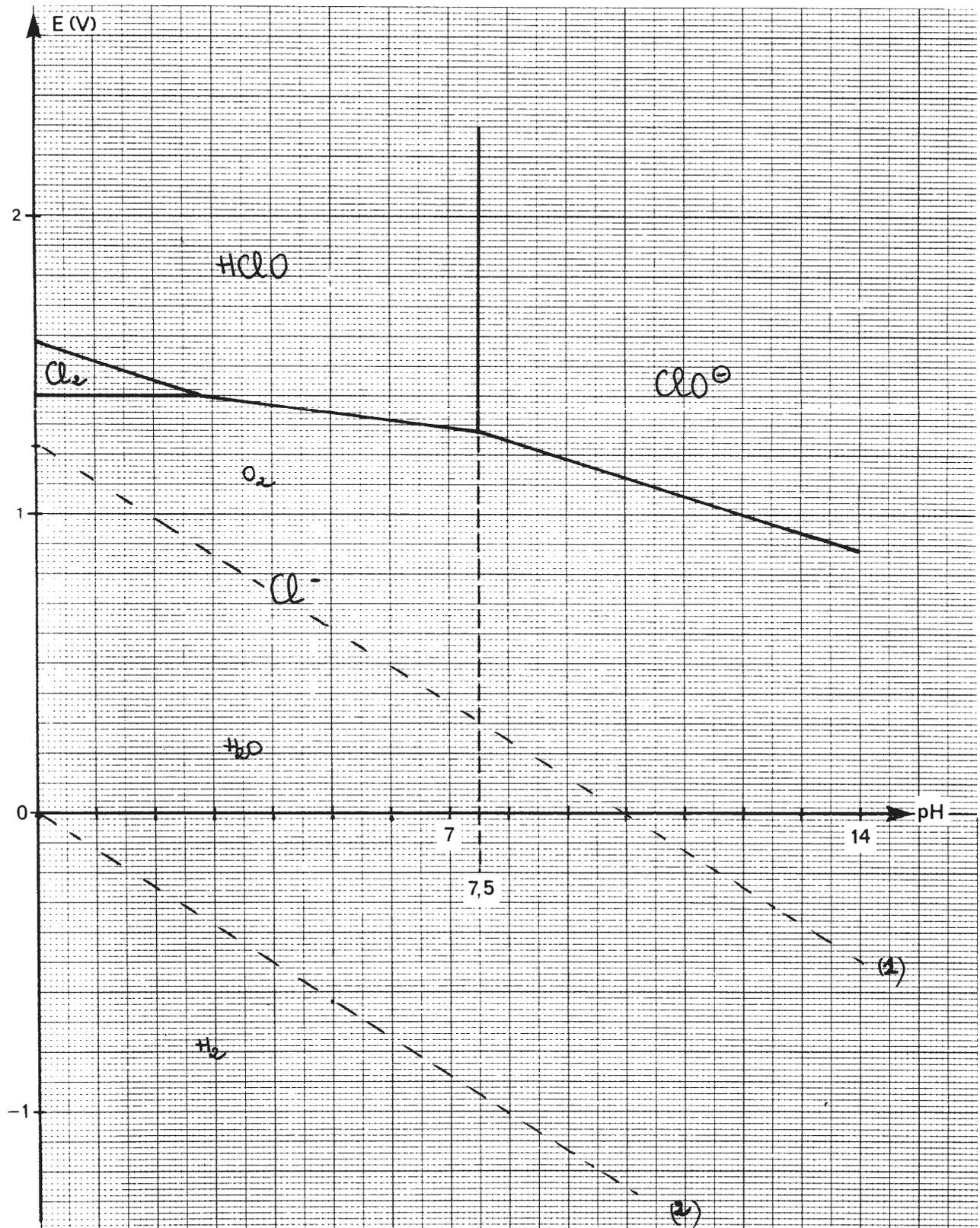
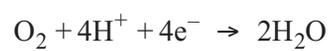
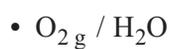


Figure 1

c. Diagramme potentiel - pH de l'eau.

Les deux couples de l'eau sont :

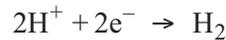


$$E_{\text{O}_2\text{g}/\text{H}_2\text{O}} = E_{\text{O}_2\text{g}/\text{H}_2\text{O}}^{\circ} + \frac{RT}{4F} \ln \frac{a_{\text{O}_2} a_{\text{H}^+}^4}{a_{\text{H}_2\text{O}}^2} \quad \begin{array}{l} p_{\text{O}_2} = 1 \text{ bar} \Rightarrow a_{\text{O}_2} = \frac{p_{\text{O}_2}}{p^{\circ}} = 1 \\ a_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \end{array}$$

$$E_{\text{O}_2\text{g}/\text{H}_2\text{O}} = 1,23 - 0,06 \text{ pH}$$

(1)

• $\text{H}_2\text{O} / \text{H}_2\text{g}$



$$E_{\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2\text{g}} = E_{\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2}^{\circ} + \frac{RT}{2F} \ln \frac{a_{\text{H}^+}^2}{a_{\text{H}_2}} \quad p_{\text{H}_2} = 1 \text{ bar} \Rightarrow a_{\text{H}_2} = \frac{p_{\text{H}_2}}{p^{\circ}} = 1$$

$$E_{\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2\text{g}} = -0,06 \text{ pH}$$

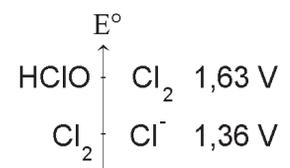
(2)

On trace les deux droites --- sur le même diagramme que celui du chlore. Le domaine de stabilité de l'eau est compris entre les deux droites. On voit sur ce graphe que Cl_2 peut oxyder H_2O .

4. Eau de chlore.

a. Une «dismutation» est une réaction d'oxydoréduction au cours de laquelle le réactif (ici Cl_2) est à la fois l'oxydant et le réducteur.

Il appartient à deux couples : $\text{HClO} / \text{Cl}_2$ et $\text{Cl}_2 / \text{Cl}^-$.



La réaction de dismutation s'écrit :



$$K_{\text{dis}} = \frac{[\text{HClO}][\text{H}^+][\text{Cl}^-]}{[\text{Cl}_{2\text{aq}}]}$$

b. Valeur de la constante d'équilibre de la réaction : on montre qu'à l'équilibre $E_{\text{HClO}/\text{Cl}_2} = E_{\text{Cl}_2/\text{Cl}^-}$ d'où :

$$K_{\text{diss}} = e^{-\frac{F}{RT} (E_{\text{Cl}_2/\text{Cl}^-}^{\circ} - E_{\text{HClO}/\text{Cl}_2}^{\circ})}$$

Application Numérique :

$$K_{\text{diss}} = 3,16 \cdot 10^{-5}$$

c. La présence d'ions chlorure en solution aqueuse déplace l'équilibre de dismutation (3) dans le sens $\textcircled{2}$ avec formation de $\text{Cl}_{2\text{aq}}$.

Quand on envoie $\text{Cl}_{2\text{g}}$ dans cette solution on atteint la saturation correspondant à l'équilibre $\text{Cl}_{2\text{g}} \rightleftharpoons \text{Cl}_{2\text{aq}}$. L'excédent de dichlore injecté ensuite se dégage et on peut le recueillir.

5. Dosage de l'eau de chlore.

D'après ce que nous venons d'étudier, l'eau de chlore est un mélange de dichlore aqueux, d'acide chlorhydrique et d'acide hypochloreux en équilibre (cf. (3)).

a. Avant le premier saut de pH, l'hydroxyde réagit totalement avec les ions H_{aq}^+ selon :



cela contribue à déplacer entièrement l'équilibre (3) de dismutation du dichlore dans le sens (1).

Par la méthode des tangentes on mesure $V_{e1} = 5,5$ mL.

b. Entre le premier et le deuxième saut de pH les ions hydroxyde vont réagir avec l'acide hypochloreux produit par (3) en même quantité que l'acide chlorhydrique :



$$K = \frac{[ClO^-]}{[ClOH][OH^-]} = \frac{K_a}{K_e} = 10^{6,5} \gg 1$$

On obtient par la méthode des tangentes : $V_{e2} = 10,8$ mL

c. On devrait théoriquement avoir $V_{e2} = 2V_{e1}$ car à la première équivalence $n_{OH^- \text{ ajouté à } v_{E1}} = n_{H_o^+}$ et à la deuxième équivalence $n_{OH^- \text{ ajouté à } v_{E2}} = n_{H_o^+} + n_{HClO_o}$ or $n_{H_o^+} = n_{HClO_o}$ donc $n_{OH^- v_{E2}} = 2 n_{H_o^+} = 2 n_{OH^- v_{E1}}$

d. Quantité de dichlore dissous.

On a : $n_{OH^- v_{E1}} = n_{H_o^+} = n_{Cl_2 i}$

d'où : $n_{Cl_2 i} = c_B \times v_{e1} = 0,1 \times 5,5 \cdot 10^{-3} = 5,5 \cdot 10^{-4}$ mol

dans les 50 mL de prise d'essai donc :

$$n_{Cl_2} = 0,011 \text{ mol dans } 1 \text{ L}$$

e. On détermine le pK_a du couple $HClO / ClO^-$ à la demi-équivalence du dosage de l'acide hypochloreux. C'est donc le pH pour :

$$v = v_{e1} + \frac{(v_{e2} - v_{e1})}{2} = 8,15 \text{ mL}$$

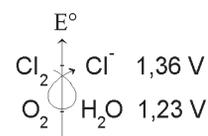
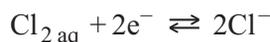
soit :

$$pH = pK_a = 7,2$$

Les données indiquent une valeur de $pK_{a \text{ théorique}} = 7,5$, l'écart $\Delta pH = 0,3$ peut s'expliquer par un mauvais étalonnage du pH-mètre...

6. Évolution de l'eau de chlore

a. L'eau de chlore évolue lentement car le dichlore Cl_2 peut oxyder l'eau d'après les potentiels redox des couples mis en jeu selon :



b. Affinité chimique : $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\circ - RT \ln Q_6 \quad \mathcal{A}^\circ = -\Delta_r G^\circ = RT \ln K_6$

$$\mathcal{A} = RT \ln \frac{K_6}{Q_6} = -\Delta_r G \quad \begin{cases} K_6 & \text{constante de l'équilibre (6)} \\ Q_6 & \text{quotient de réaction} \end{cases}$$

avec : $K_6 = e^{\frac{2F}{RT} (E^\circ_{\text{Cl}_2/\text{Cl}^-} - E^\circ_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}})} = 10^{\frac{2}{0,06} (1,36 - 1,23)} = 21544$

et : $Q_6 = \frac{p_{\text{O}_2}^{1/2} [\text{Cl}^-]^2 [\text{H}^+]^2}{[\text{Cl}_2]}$

avec : $p_{\text{O}_2} = 0,2 \text{ bar}$ car : $p_{\text{O}_2} = x_{\text{O}_2} P_{\text{air}}$

Pour déterminer Q_6 il faut calculer les concentrations des différentes espèces présentes dans l'eau de chlore : $[\text{Cl}_2]$, $[\text{Cl}^-]$, $[\text{HClO}]$, $[\text{H}^+]$.

D'après :

- la réaction de dismutation (3) : $[\text{H}^+] = [\text{Cl}^-] = [\text{HClO}]$.

- la conservation de la matière en élément chlore :

$$2 [\text{Cl}_2]_i = 2 \times 0,011 \text{ mol.L}^{-1} = 2 [\text{Cl}_2] + [\text{Cl}^-] + [\text{HClO}]$$

d'où : $[\text{Cl}_2] = 0,011 - [\text{Cl}^-]$

- la constante de dismutation : $K_{\text{diss}} = \frac{[\text{HClO}][\text{Cl}^-][\text{H}^+]}{[\text{Cl}_2]} = 3,16 \cdot 10^{-5}$

$$K_{\text{diss}} = \frac{[\text{Cl}^-]^3}{0,011 - [\text{Cl}^-]} \Rightarrow \begin{cases} [\text{Cl}^-] = [\text{HClO}] = [\text{H}^+] = 5,56 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \\ [\text{Cl}_2] = 5,44 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \end{cases}$$

D'où : $Q_6 = \frac{0,2^{1/2} \cdot (5,56 \cdot 10^{-3})^4}{5,44 \cdot 10^{-3}} = 7,86 \cdot 10^{-8}$

et : $\mathcal{A} = 8,32 \times 298 \ln \frac{21544}{7,86 \cdot 10^{-8}} = \boxed{65299 \text{ J.mol}^{-1}}$

$\mathcal{A} > 0$ donc la réaction a bien lieu dans le sens Ⓓ. L'eau de chlore se décompose donc lentement selon (6) et quasi-totalement ($K_6 \gg 1$) si on attend assez longtemps car cette réaction est lente.

7. Étude du second dosage.

La réaction de décomposition de l'eau de chlore. $\text{Cl}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons 2\text{H}^+ + 2\text{Cl}^- + \frac{1}{2} \text{O}_2$ ayant lieu, une partie de Cl_2 disparaît et se transforme en acide chlorhydrique au détriment de l'acide hypochloreux qui n'est formé que par la dismutation :

	Cl_2	+	H_2O	\rightarrow	H^+	+	Cl^-	+	HClO	
au début :	C_0				0		0		0	
après une semaine :	$C_0 - C$				$2C$		$2C$		0	(cf (6))
lors de l'addition de soude :					$C_0 + C$		$C_0 + C$		$C_0 - C$	

On voit d'après ce tableau que $V'_{e_1} > V_{e_1}$ car il y a plus d'acide chlorhydrique à doser mais $V'_{e_2} - V'_{e_1} < V_{e_2} - V_{e_1}$ car il y a moins d'acide hypochloreux.

Néanmoins $V'_{e_2} = V_{e_2}$ car $n_{OH' v_{e_2}} = n_{H_0^+} + n_{HClO_0} = 2C_0 V_0$.

II. Le chlorure de sodium NaCl

1. Le chlorure de sodium solide.

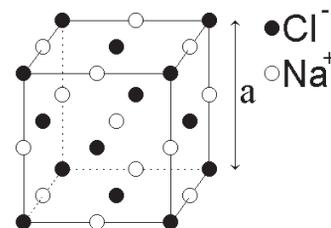
a. Il s'agit d'un solide ionique constitué d'ions Na^+ et Cl^- .

b. Maille cristalline

On peut la décrire de deux façons :

– les ions Cl^- (●) et Na^+ (○) occupent les nœuds de deux réseaux cubique à faces centrées décalés de $a/2$,

– les ions Na^+ (○) occupent tous les sites octaédriques d'un réseau cubique à faces centrées décrits par Cl^- (●).



c. Nombre d'ions par maille :

$$\left. \begin{aligned} n_{Cl^-} &= 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ ions } Cl^- \\ n_{Na^+} &= 1 \times 1 + 12 \times \frac{1}{4} = 4 \text{ ions } Na^+ \end{aligned} \right\} \text{ quatre motifs } (Na^+, Cl^-) \text{ par maille.}$$

On vérifie bien l'électronéutralité du cristal.

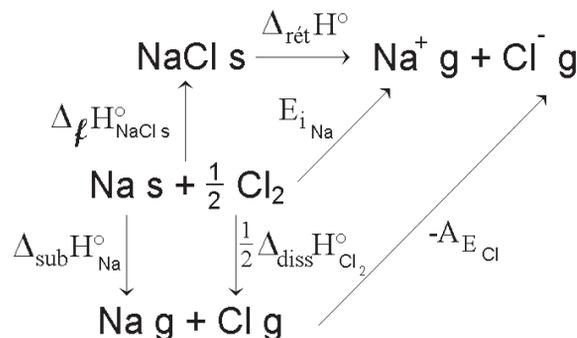
d. Paramètre de la maille a

$$\text{La masse volumique : } p = \frac{4 \times (M_{Cl^-} + M_{Na^+})}{\mathcal{N} a^3} \Rightarrow a = \left(\frac{4 \times (M_{Cl^-} + M_{Na^+})}{\mathcal{N} \rho} \right)^{1/3}$$

$$\text{Application Numérique : } a = \left(\frac{4 \times (35,5 + 23) 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23} \times 2170} \right)^{1/3} = 5,64 \cdot 10^{-10} \text{ m} = \boxed{564 \text{ pm}}$$

e. Enthalpie réticulaire : c'est l'enthalpie correspondant à la réaction $NaCl_s \rightarrow Na^+_g + Cl^-_g$ $\Delta_{ret} H^0$.

Cycle de Born-Haber



d'où :

$$\Delta_{\text{ret}} H^{\circ} = -\Delta_f H^{\circ}_{\text{NaCl}_s} + \Delta_{\text{sub}} H^{\circ}_{\text{Na}} + \frac{1}{2} \Delta_{\text{diss}} H^{\circ}_{\text{Cl}_2} + E_{i_{\text{Na}}} - A_{E_{\text{Cl}}}$$

$$\Delta_{\text{ret}} H^{\circ} = +411,0 + 108 + \frac{242}{2} + 496 - 349$$

$$\Delta_{\text{ret}} H^{\circ} = 787 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

2. Le chlorure de sodium en solution aqueuse.

a. La solubilité du chlorure de sodium est de 360 g pour 1000 g d'eau à 25°C.

Concentration en Na^+ et Cl^- : 1 L de solution saturée à une masse de 1200 g. La masse de chlorure de sodium dans cette solution est de $m_{\text{NaCl}} = \frac{360 \times 1200}{1360} = 317,7 \text{ g}$ soit $n_{\text{NaCl}} = \frac{317,7}{58,5} = 5,43 \text{ mol}$ donc

$$[\text{Na}^+_{\text{aq}}] = [\text{Cl}^-_{\text{aq}}] = 5,43 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$



Enthalpie libre standard :
$$\Delta_r G^{\circ} = \Delta_r H^{\circ} - T \Delta_r S^{\circ}$$

avec :
$$\Delta_r H^{\circ} = \Delta_f H^{\circ}_{\text{Na}^+_{\text{aq}}} + \Delta_f H^{\circ}_{\text{Cl}^-_{\text{aq}}} - \Delta_f H^{\circ}_{\text{NaCl}_s}$$

$$\Delta_r H^{\circ} = 3,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} > 0$$

endothermique

$$\Delta_r S^{\circ} = S^{\circ}_{\text{Na}^+_{\text{aq}}} + S^{\circ}_{\text{Cl}^-_{\text{aq}}} - S^{\circ}_{\text{NaCl}_s}$$

$$\Delta_r S^{\circ} = 42,97 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\Delta_r G^{\circ} = 3,8 - 298 \times 42,97 \cdot 10^{-3} = -9 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Produit de solubilité à 25°C

$$\Delta_r G^{\circ} = RT \ln K_s \Rightarrow K_s = e^{-\frac{\Delta_r G^{\circ}}{RT}} = 37,8$$

c. D'après la définition de :

$$K_s = \frac{a_{\text{Cl}^-} a_{\text{Na}^+}}{a_{\text{NaCl}}} = \frac{\gamma_{\text{Cl}^-} [\text{Cl}^-] \gamma_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+]}{C^{\circ 2}}$$

Connaissant la solubilité de NaCl on connaît $[\text{Na}^+]$ et $[\text{Cl}^-]$ mais on ne connaît pas les valeurs des coefficients d'activité γ_{Cl^-} et γ_{Na^+} qui ne peuvent être ici extrapolés à 1 car les concentrations des ions sont trop importantes. On ne peut donc accéder au produit de solubilité K_s à l'aide de la solubilité seule.

d. Test des ions chlorure en solution aqueuse : addition d'une solution de nitrate d'argent et observation d'un précipité blanc de AgCl_s qui noircit à la lumière.

e. A 25°C on cherche le point sur la figure 2 (...). Il correspond à :

$$x_{\text{NaCl}} = \frac{n_{\text{NaCl}}}{n_{\text{NaCl}} + n_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{5,43}{5,43 + \left(\frac{1200 - 317,7}{18}\right)} = 0,0997$$

On se trouve à la limite du liquidus (•) puisqu'au-delà ($x > 0,099$) on a apparition de NaCl_s en équilibre avec le liquide saturée (cf. ci-après).

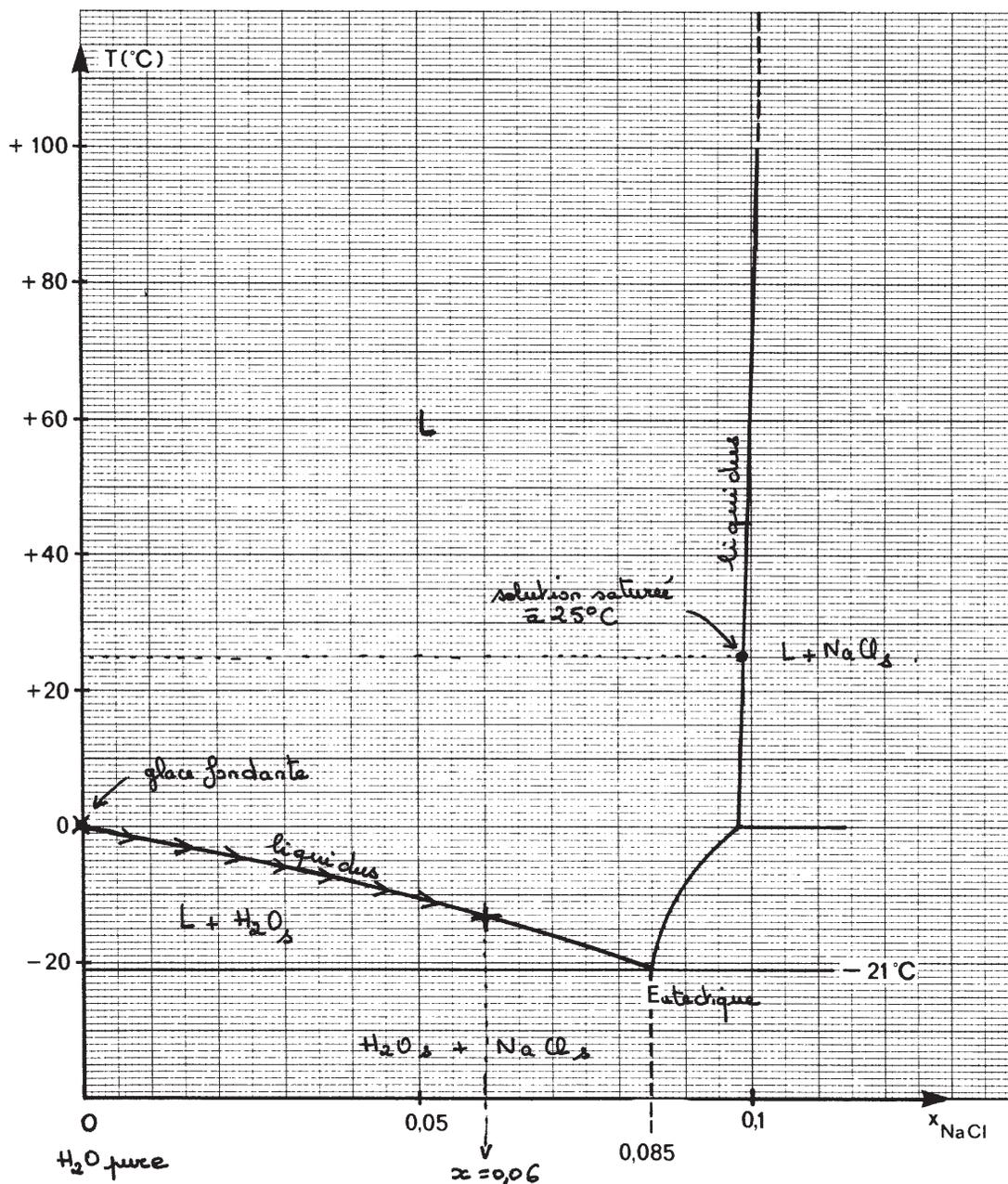


Figure 2

f. Quand on ajoute du chlorure de sodium à de la glace fondante (x), la température du mélange diminue, le point représentant le mélange se déplace sur le liquidus ($\rightarrow\rightarrow\rightarrow$). On peut atteindre ainsi -21°C (mélange réfrigérant) pour $x_{\text{NaCl}} = 0,085$.

Pour $x = 0,06$ (+) on a un mélange de liquide L et $\text{H}_2\text{O}_{\text{solide}}$ à $t = -13^\circ\text{C}$.

g. A 0°C sous $P=1\text{ atm}$ on a l'équilibre $\text{H}_2\text{O}_s \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O}_l$ caractérisé par :

$$dG = \sum_i \mu_i^\circ dn_i = 0$$

$$dG = \mu_{\text{H}_2\text{O}_s}^\circ dn_{\text{H}_2\text{O}_s} + \mu_{\text{H}_2\text{O}_l}^\circ dn_{\text{H}_2\text{O}_l} = 0$$

or : $dn_{\text{H}_2\text{O}_s} = - dn_{\text{H}_2\text{O}_l}$

d'où : $\mu_{\text{H}_2\text{O}_s}^\circ = \mu_{\text{H}_2\text{O}_l}^\circ$ à 0°C sous $P=1\text{ atm}$

Pour attribuer chaque courbe à un état physique de l'eau il faut rappeler l'expression de $\mu^\circ(T) = h_m^\circ(T) - T S_m^\circ(T)$.

La pente $-S_m^\circ(T)$ est l'entropie molaire standard, or $S_m^\circ \text{H}_2\text{O}_{\text{liq}} > S_m^\circ \text{H}_2\text{O}_{\text{sol}} > 0$ donc la pente correspondant à $\text{H}_2\text{O}_{\text{solide}}$ - ① - est plus faible que celle de $\text{H}_2\text{O}_{\text{liquide}}$ - ② -.

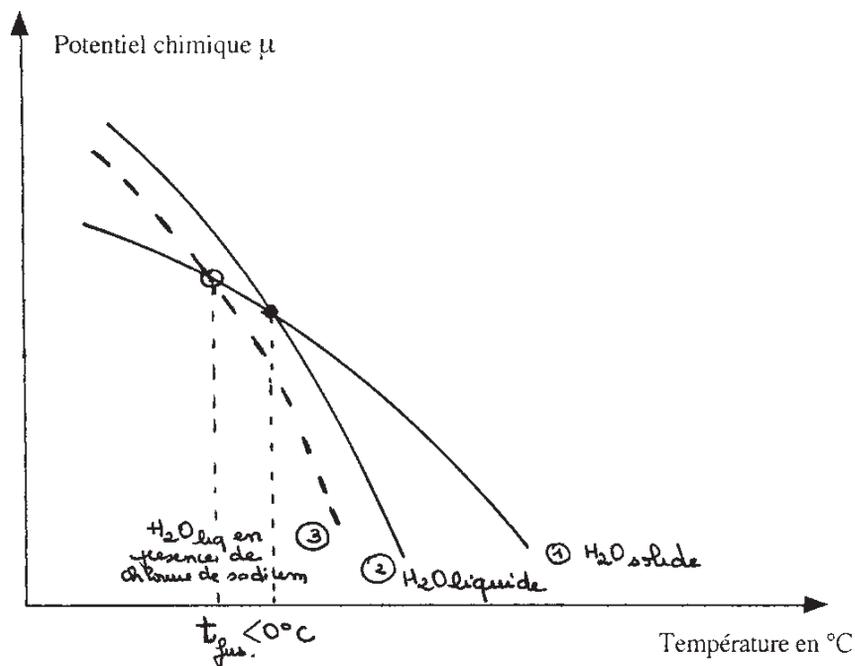


Figure 3

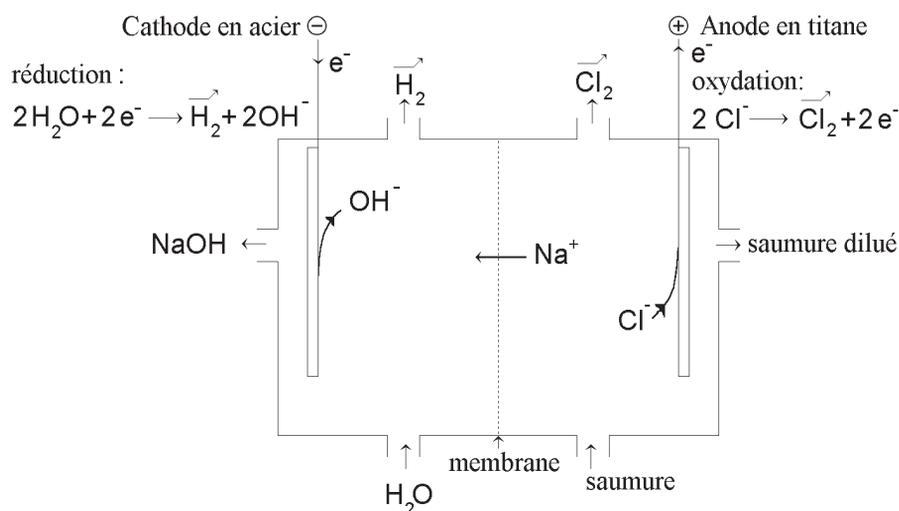
Pour le potentiel chimique de l'eau dans une solution aqueuse de chlorure de sodium $\mu_{\text{H}_2\text{O}}(T) = \mu_{\text{H}_2\text{O}_l}^\circ(T) + RT \ln x_{\text{H}_2\text{O}}$.

Or $x_{\text{H}_2\text{O}_{\text{liq}}} < 1$ donc $\mu_{\text{H}_2\text{O}}(T) < \mu_{\text{H}_2\text{O}_l}^\circ \forall T$, la courbe - ③ - correspondante est donc située toujours en-dessous de la courbe - ② -.

On trouve alors au point de rencontre (O) des courbes - ① - et - ③ - pour lequel $\mu_{\text{H}_2\text{O}_{\text{sol}}} = \mu_{\text{H}_2\text{O}}$ en présence de NaCl donc la température $t_{\text{fus}} < 0^\circ\text{C}$ correspondant à l'équilibre $\text{H}_2\text{O}_{\text{sol}} \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O}_{\text{liq}}$ en présence de chlorure de sodium. On y retrouve bien, qu'en présence de chlorure de sodium, la température de fusion est plus faible que pour l'eau pure.

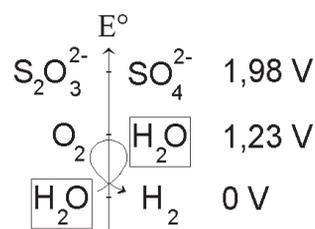
3. Électrolyse d'une solution aqueuse de chlorure de sodium.

a. Schéma de la cellule



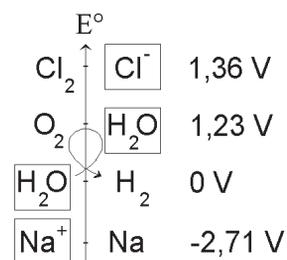
- b. La membrane est constituée d'un polymère contenant des groupements sulfonates $-\text{SO}_3^\ominus$ chargés négativement qui repoussent les anions qui ne peuvent traverser la membrane.
- c. Ce phénomène peut être mis en évidence si on électrolyse une solution aqueuse (acidifiée à l'acide sulfurique).

La réaction non naturelle : $\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2 + \frac{1}{2} \text{O}_2$ nécessite en fait l'application d'une différence de potentielle d'environ 3 V bien supérieure à 1,23 V prévue par la thermodynamique.

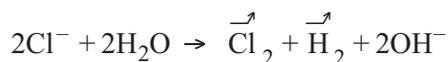


- d. Si on ne considère que l'aspect thermodynamique des couples mis en jeu sans prendre en compte les surtensions, on devrait avoir l'électrolyse de l'eau : $\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2 + 1/2 \text{O}_2$.

L'existence de surtension conduit en fait à une oxydation des ions chlorures à l'anode : $2\text{Cl}^- \rightarrow \text{Cl}_2 + 2\text{e}^-$ et ne modifie pas les prévisions à la cathode : $2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^- \rightarrow \text{H}_2 + 2\text{OH}^-$.



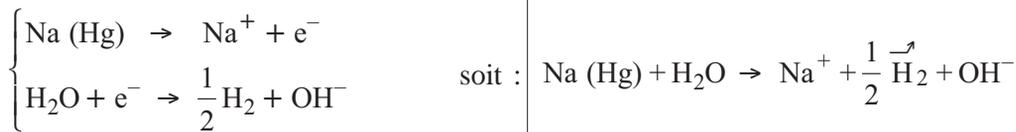
Soit un bilan d'électrolyse :



On obtient donc du dichlore, du dihydrogène ainsi qu'une solution de soude.

- e. Si on enlève la membrane sélective, il y aurait alors mélange des produits formés à la cathode et à l'anode. On pourrait alors assister à la dismutation de Cl_2 en présence de soude selon : $\text{Cl}_2 + 2\text{OH}^- \rightarrow \text{ClO}^- + \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$ conduisant ainsi à la formation d'eau de javel.

f. On met l'amalgame Na(Hg) dans l'eau, il ne se passe rien car la surtension du couple $\text{H}_2\text{O} / \text{H}_2$ sur Na ou Hg est trop importante (cf. figure 5). Par contre en présence de fer (paille de fer), la surtension sur le fer est beaucoup moins importante et l'on peut observer la décomposition :



– Les électrons cédés par le sodium étant égaux à ceux captés par l'eau on a donc :

$$\boxed{j_a = -j_c}$$

Ces densités de courant sont donc égales en valeur absolue. Le potentiel pris dans ces conditions est E (cf. figure 4), potentiel commun au fer et au mercure.

– Le fer n'est pas attaqué, il se trouve être le lieu de la réduction, son rôle est ici le transport d'électron.

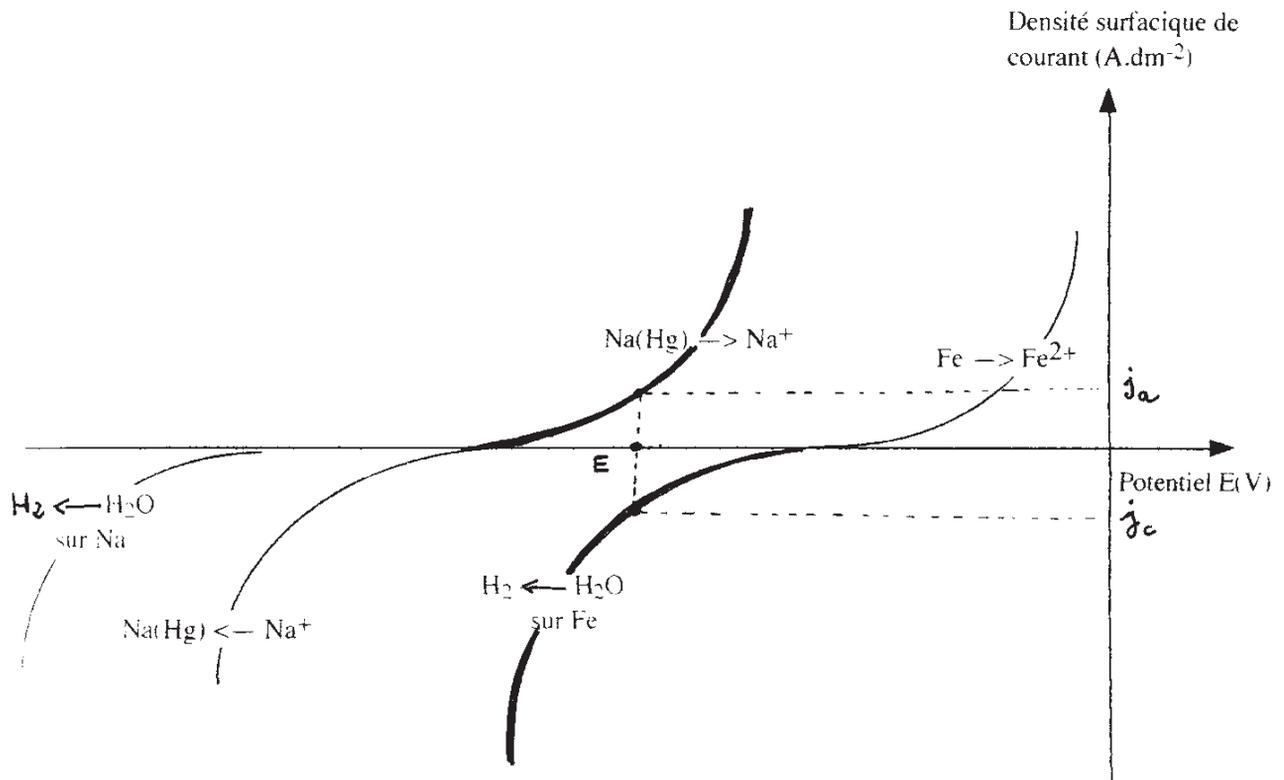
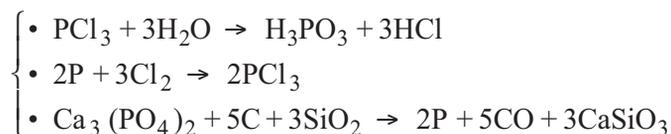


Figure 4

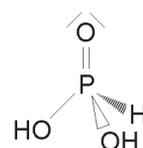
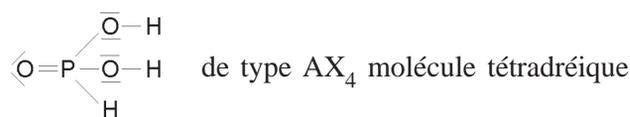
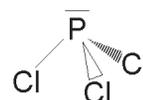
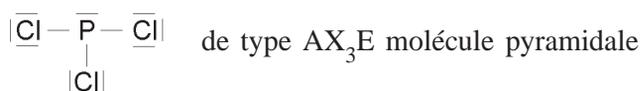
III. Le chlorure d'hydrogène et la solution aqueuse d'acide chlorhydrique

1. Le chlorure d'hydrogène est un sous-produit de la synthèse du chlorure de vinyle obtenu lors de la déshydrochloration du 1,2-dichloroéthane selon : $\text{CH}_2\text{Cl} - \text{CH}_2\text{Cl} \xrightarrow{\theta} \text{CH}_2 = \text{CH} - \text{Cl} + \text{HCl}$.

2. a. Équation-bilans :



b. Représentation de Lewis et géométrie :



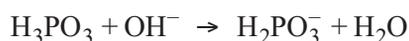
c. Solution aqueuse de trichlorure de phosphore :



EI : 0,01

EF : 0 0,01 0,03

Dosage par NaOH de concentration $0,1 \text{ mol. L}^{-1}$. On a un mélange de deux acides HCl et H_3PO_3 , la première acidité de H_3PO_3 ($\text{p}K_a = 1,2$) est dosé en même temps que HCl. La deuxième acidité est dosée ensuite. Il y aura deux sauts de pH.



• Coordonnées particulières :

– à V_{e_1} : $n_{\text{OH}^- \text{ ajouté à } v_{E_1}} = n_{\text{H}_3\text{O}^+} + n_{\text{H}_3\text{PO}_3}$

$$0,1 \times V_{e_1} = (0,03 + 0,01) \times 20$$

$$V_{e_1} = 8 \text{ mL}$$

– à V_{e_2} : $n_{\text{OH}^- \text{ ajouté entre } v_{E_1} \text{ et } v_{E_2}} = n_{\text{H}_2\text{PO}_3^-} = n_{\text{H}_3\text{PO}_3}$

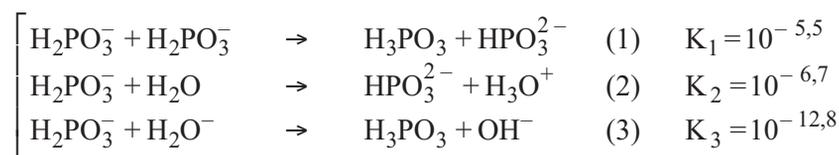
$$0,1 \times (V_{e_2} - V_{e_1}) = 0,01 \times 20$$

$$V_{e_2} = 10 \text{ mL}$$

– $V = 0 \text{ mL}$: solution de HCl de concentration $0,03 \text{ mol. L}^{-1}$. HCl impose le pH :

$$\text{pH} \approx -\log c = -\log 0,03 = 1,5$$

– $V = 8 \text{ mL}$: première équivalence. On est en présence d'une solution de Na^+ , H_2PO_3^- . H_2PO_3^- espèce amphotère qui conduit aux réactions :



(1) et (2) sont les R.P.

On en déduit : $[\text{HPO}_3^{2-}] = [\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{H}_3\text{PO}_3]$ (4)

or :

$$[\text{HPO}_3^{2-}] = \frac{K_{a_2} [\text{H}_2\text{PO}_3^-]}{h}$$

$$[\text{H}_3\text{PO}_3] = \frac{[\text{H}_2\text{PO}_3^-] h}{K_{a_1}}$$

et :

$$[\text{H}_2\text{PO}_3^-] = c'_0 = \frac{0,01 \times 20}{28} = 7,14 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

car K_1 et $K_2 \ll 1$.

$$(4) \Rightarrow \frac{K_{a_2} c'_0}{h} = h + \frac{c'_0 h}{K_{a_1}} \Rightarrow h = 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

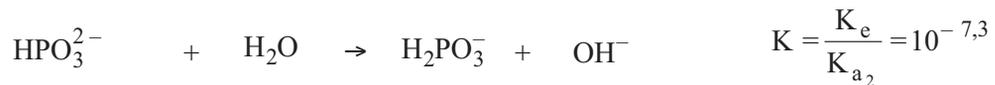
et :

$$\text{pH} = 4,45$$

– $V = 9 \text{ mL}$: demi-équivalence du dosage de H_2PO_3^- on a :

$$\text{pH} = \text{p}K_{a_2} = 6,7$$

– $V = 10 \text{ mL}$: deuxième équivalence. On est en présence d'une solution de 2Na^+ , HPO_3^{2-} . HPO_3^{2-} est une base faible :



EI :

$\frac{0,001 \times 20}{30}$	0	0
------------------------------	---	---

EF :

$6,67 \cdot 10^{-3} - \varrho$	ϱ	ϱ
--------------------------------	-----------	-----------

$$K = \frac{\varrho^2}{6,67 \cdot 10^{-3} - \varrho} \Rightarrow [\text{OH}^-] = \varrho = 1,82 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{pH} = 9,26$$

– $V = 11 \text{ mL}$: excès de OH^- $[\text{OH}^-] = \frac{0,1 \times 1}{30} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$

$$\text{pH} = 14 + \log [\text{OH}^-] = 11,5$$

La courbe de dosage est la suivante :

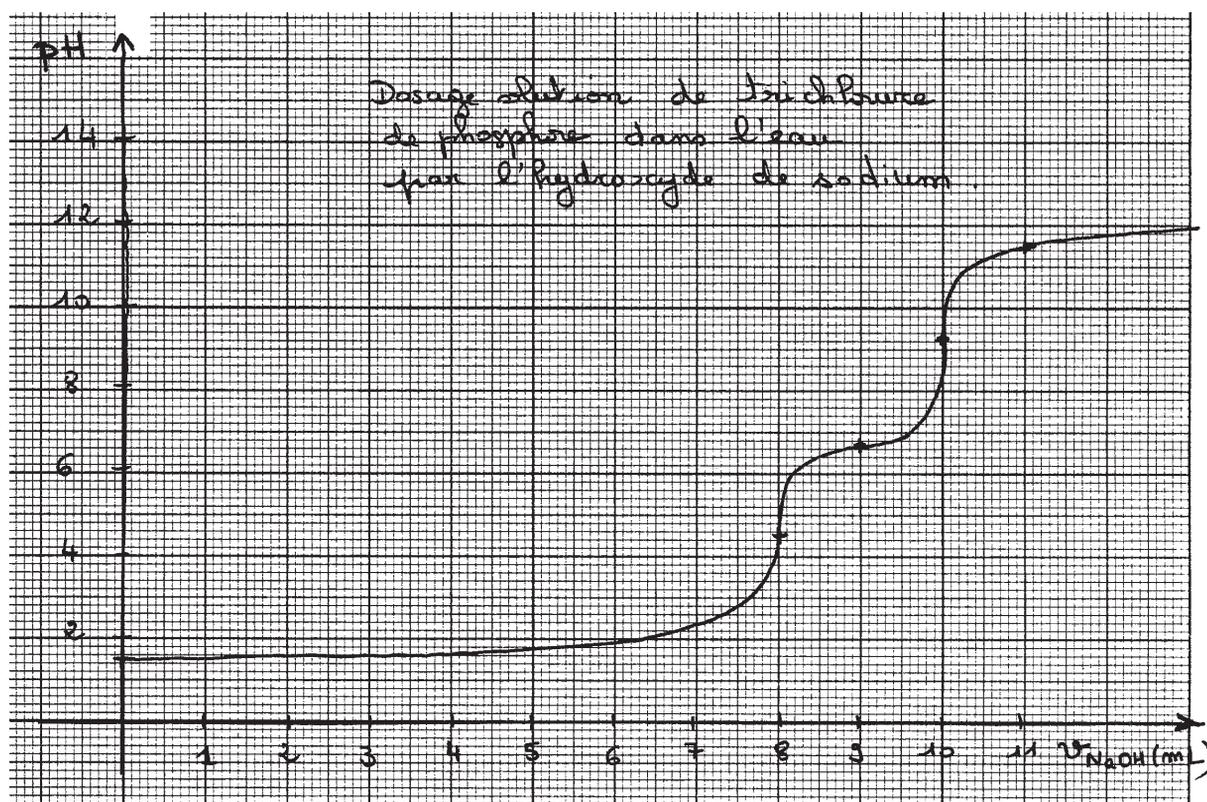


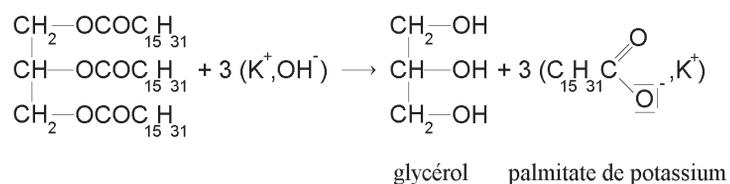
Figure 5

3. Étude d'un corps gras

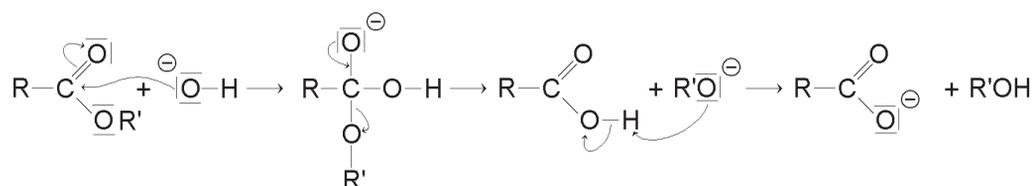
a. Le glycérol $\begin{array}{c} \text{CH}_2-\text{CH}-\text{CH}_2 \\ | \quad | \quad | \\ \text{OH} \quad \text{OH} \quad \text{OH} \end{array}$ possède deux fonctions alcool primaire et une fonction alcool secondaire.

La palmitine $\begin{array}{c} \text{CH}_2-\text{CH}-\text{CH}_2 \\ | \quad | \quad | \\ \text{O} \quad \text{O} \quad \text{O} \\ | \quad | \quad | \\ \text{C}=\text{O} \quad \text{C}=\text{O} \quad \text{C}=\text{O} \\ | \quad | \quad | \\ \text{C}_{15}\text{H}_{31} \quad \text{C}_{15}\text{H}_{31} \quad \text{C}_{15}\text{H}_{31} \end{array}$ possède trois fonctions ester.

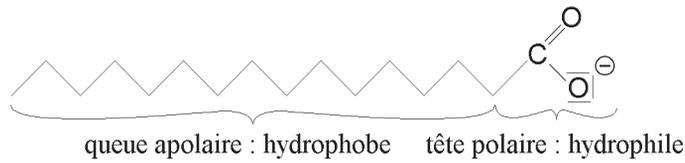
b. La réaction de la potasse sur la palmitine et une saponification :



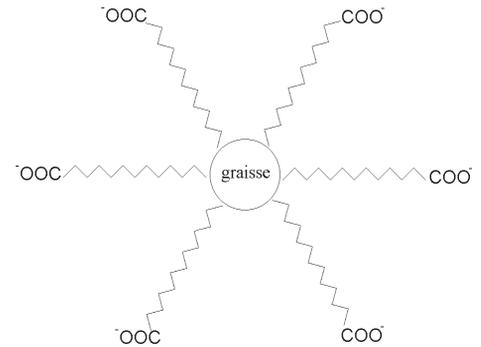
Mécanisme général de la saponification :



- c. Traité par la potasse, le corps gras fournit un carboxylate de potassium qui dans le cas des acides gras est un savon mou (savon dur dans le cas des carboxylates de sodium). Cet ion carboxylate est un composé amphiphile :



Il a la propriété de décoller les taches de graisse des tissus et de les dissoudre dans sa partie hydrophobe qui est le lipophile formant ainsi des micelles qui sont éliminés avec les eaux de lavage.



- d. Le corps gras n'est pas soluble dans l'eau. L'éther et l'alcool permettent de le solubiliser.

- e. A l'équivalence, la quantité de potasse versée permet d'accéder à la quantité d'acide libre :

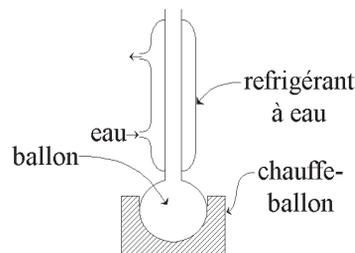
$$n_{\text{OH}^-_{\text{aj}}} = n_{\text{acide}} = 12 \times 1,21 \times 10^{-2} \times 10^{-3} = 1,45 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

$$\text{Dans 1 g de corps gras } n_{\text{acide}} = \frac{1,45 \cdot 10^{-4}}{0,402} = 3,61 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

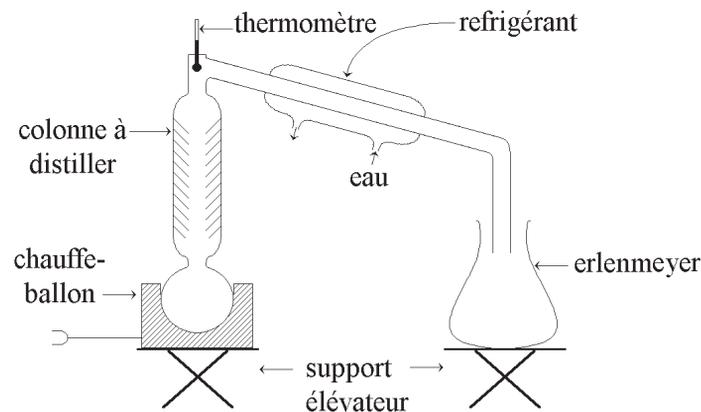
$$\text{on a : } n = n_1 + n_2 = 3,61 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

$$\text{L'indice d'acide est } I_a = 3,61 \cdot 10^{-4} \times 56 \times 100 = 20,22$$

- f. Montage à reflux :



Montage de distillation :



Lors du chauffage on a utilisé le montage à reflux qui permet de recondenser les vapeurs d'alcool (composé le plus volatil) formées.

- g. Le ballon n° 1 sert de témoin il permet de connaître la quantité de potasse initialement introduite. Dans le

ballon n° 2, on dose la potasse restant après saponification. La quantité de potasse ayant réagi sur le corps gras est donc :

$$\begin{aligned} n_{\text{KOH}} \text{ ayant réagi} &= n_{\text{KOH}} \text{ dans ballon n}^{\circ}1 - n_{\text{KOH}} \text{ restant dans ballon n}^{\circ}2 \\ &= 0,198 \times 20,2 \times 10^{-3} - 0,198 \times 13,0 \times 10^{-3} \\ &= 1,42 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \end{aligned} \quad \text{pour } 0,395 \text{ g de corps gras}$$

Donc pour 1 g de corps gras $n_{\text{KOH}} = 3,61 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$

h. L'indice de saponification étant la masse (en mg) de potasse nécessaire pour saponifier 1 g de corps gras et neutraliser l'acide libre :

$$I_s = 3,61 \times 10^{-3} \times 56 \times 100 = 202,11$$

i. L'indice d'ester est la masse de potasse (en mg) nécessaire pour saponifier les esters présents dans 1 g de corps gras :

$$I_e = I_s - I_a = 181,89$$

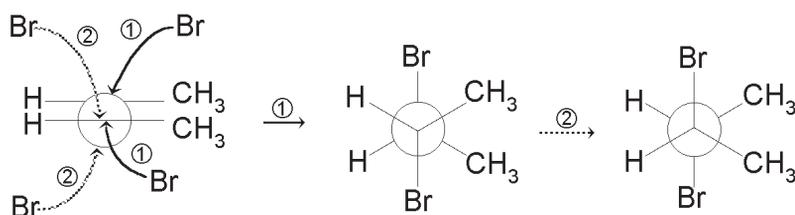
On a donc : $n_3 + n_4 = \frac{1}{3} n_{\text{OH}^-}$ nécessaire pour saponifier les esters.

$$n_3 + n_4 = \frac{1}{3} \cdot (3,61 \cdot 10^{-3} - 3,61 \cdot 10^{-4}) = 1,083 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

j. L'indice d'iode

La réaction entre un dihalogène X_2 et un composé organique comportant une double liaison $C = C$ est une réaction d'addition électrophile ionique.

L'action du dibrome Br_2 sur Z·but-2-ène est une addition anti-stéréospécifique. On obtient un mélange racémique :



Composés majoritaires : 1,2-dibromobutane (S,S) et (R,R).

k. Indice d'iode = masse de diiode (en g) fixée sur 100 g d'acide gras

$$n_{\text{I}_2} \text{ pour } 1 \text{ g} = \frac{21,44}{126,9 \times 2} \times \frac{1}{100} = 8,45 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

or I_2 se fixe sur l'acide oléique (n_2) et sur l'oléine (n_4) mais l'oléine contient trois insaturations donc :

$$n_{\text{I}_2} = n_2 + 3n_4 = 8,45 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

Calcul de n_1 , n_2 , n_3 et n_4

$$\text{On a : } \begin{cases} n_3 = 3n_4 \\ n_1 + n_2 = 3,61 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \\ n_3 + n_4 = 1,083 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \\ n_2 + 3n_4 = 8,45 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \end{cases}$$

On obtient donc dans 1 g de corps gras :

$$n_4 = 2,71 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \quad n_3 = 8,12 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \quad n_2 = 3,27 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \quad \text{et} \quad n_1 = 3,28 \cdot 10^{-4} \text{ mol.}$$

La masse d'acide présente dans 1 g du corps gras est donc :

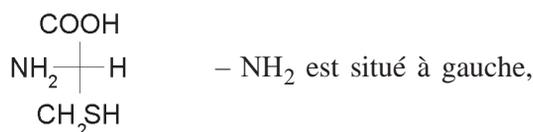
$$m = n_1 \times M_1 + n_2 \times M_2 = 3,28 \cdot 10^{-4} \times 256 + 3,25 \cdot 10^{-5} \times 282 = 9,32 \cdot 10^{-2} \text{ g}$$

$$\text{le pourcentage d'acide est donc : } \frac{0,093}{1} \times 100 = \boxed{9,3 \%} \quad \text{L'huile n'est pas consommable.}$$

IV. Stéréochimie et mécanismes réactionnels

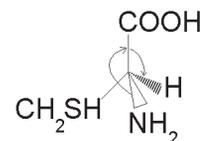
1. Rappels

a. Représentation de la L-cystéine en projection de Fisher :

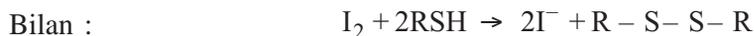
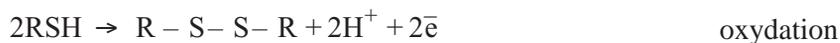


b. Représentation dans la convention de CRAM.

La L-cystéine est aussi l'acide aminé de configuration R car l'ordre de préséance des groupements fixés sur le carbone asymétrique est :

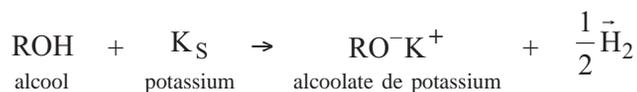


c. La fonction chimique présente sur la chaîne latérale est une fonction thiol – SH. Par action du diiode on obtient un disulfure, on a une réaction d'oxydoréduction :



2. Étude de la séquence réactionnelle

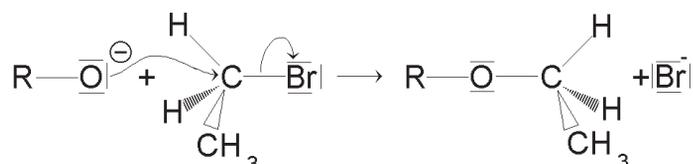
a. Équation-bilan : A \rightarrow B.



On a ici une réaction d'oxydoréduction entre le potassium (métal réducteur) qui s'oxyde en ion potassium et l'hydrogène de la fonction alcool qui est réduit en dihydrogène. Le dihydrogène se dégageant du milieu réactionnel, la réaction est déplacée vers la droite donc totale.

- b. La réaction $B \rightarrow C_1$ est une synthèse d'éther selon Williamson $RO^- + R'X \rightarrow ROR' + X^-$. C'est une substitution nucléophile.
- c. Mécanisme SN_2 : Ici l'alcoolate réagissant sur le dérivé halogène primaire peut donner lieu à un mécanisme de type SN_2 . Cela se passe en une étape. La loi de vitesse de cet acte élémentaire est donc d'ordre 2 : $v = k [RO^-][R'X]$.

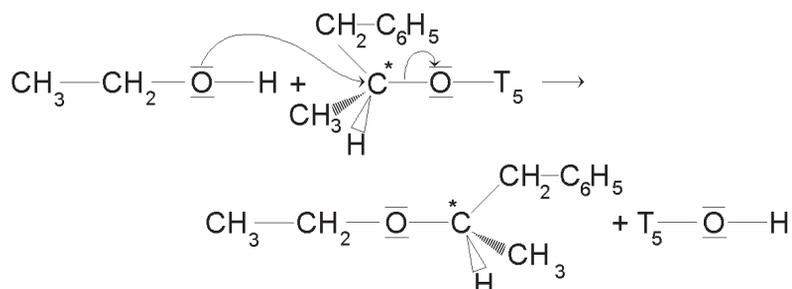
Le schéma réactionnel admis est une attaque du nucléophile (alcoolate) du côté opposé à l'halogène selon :



on a une réaction stéréospécifique avec inversion de Walden. Ici le C^* étant sur l'alcoolate et n'intervenant pas dans la réaction il n'y a pas inversion mais rétention de configuration.

- d. Dans la solution nucléophile $B \rightarrow C_1$ le C^* n'est pas perturbé par la réaction car c'est l'alcoolate B qui joue le rôle de nucléophile. On ne peut donc conclure à un mécanisme de type SN_2 car même un mécanisme de type SN_1 conduirait à un pouvoir rotatoire de même valeur.

Par contre dans la solution nucléophile $D \rightarrow C_2$ c'est l'alcool $CH_3-CH_2-\bar{O}H$ qui joue le rôle de nucléophile et $-OT_s$ de groupe partant, il y a bien ici inversion de configuration sur le C^* car on obtient un produit ayant un pouvoir rotatoire. Un mécanisme SN_1 aurait donné ici un mélange racémique sans pouvoir rotatoire.



C.A.P.E.S

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition de physique avec applications - Session : 1997

PREMIER PROBLÈME

Première Partie:

I.1a) On part de $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. En appliquant le théorème d'Ostrogradski à un volume V limité par la surface fermée orientée S : $\iiint_V \text{div } \mathbf{E} \, d\tau = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{int}}/\epsilon_0$. On retrouve le théorème de Gauss : le flux de \mathbf{E} à travers une surface fermée S est égal au rapport $Q_{\text{int}}/\epsilon_0$.

I.1b) On part de $\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$.

En appliquant le théorème de Stokes à une surface S s'appuyant sur un contour fermé orienté C : $\iint_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = e = -d\phi/dt = -d/dt (\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = -d\phi/dt$ (S fixe dans le référentiel). On retrouve la loi de Faraday. Elle correspond au phénomène d'induction électromagnétique.

I.1c) En régime permanent $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$. En utilisant le théorème de Stokes..., on retrouve le théorème d'Ampère $\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$.

I.1d) $\text{div } \mathbf{B} = 0$. En utilisant le théorème d'Ostrogradski, on retrouve $\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$: le flux de \mathbf{B} à travers une surface fermée est nul.

Les lignes de champ magnétiques ne peuvent être que fermées car $\text{div } \mathbf{B} = 0$.

I.2) Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, il suffit de remplacer ϵ_0 par ϵ et comme $\rho_{\text{libre}} = 0$ ainsi que \mathbf{j} , on obtient :

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{div } \mathbf{E} = 0 \quad \text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t.$$

$$\begin{aligned} \text{I.3) } \text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) &= \text{grad}(\text{div } \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = - \Delta \mathbf{E} \\ &= \text{rot}(-\partial \mathbf{B} / \partial t) = - \partial (\text{rot } \mathbf{B}) / \partial t = - \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 \end{aligned}$$

d'où l'équation de propagation $\Delta \mathbf{E} = (1/c^2) \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$ avec $c = 1/\epsilon \mu_0 = c_0 / \sqrt{\epsilon_r}$

$$\text{I.4) L'équation s'écrit : } \partial^2 \mathbf{E} / \partial x^2 = (1/c^2) \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$$

\mathbf{E}_1 caractérise une onde plane progressive dans le sens des x croissants et \mathbf{E}_2 caractérise une onde plane progressive dans le sens des x décroissants (ou onde plane régressive)

Deuxième partie

I.1a) Il y a phénomène de dispersion lorsque la vitesse de phase d'une onde sinusoïdale dépend de la fréquence de celle-ci.

Ex. en optique de milieu dispersif : le prisme qui dévie plus les rayons bleus que les rayons rouges.

I.1b) $\alpha) \mathbf{k}$ est le vecteur d'onde

$\beta)$ En remplaçant \mathbf{E} dans l'équation de propagation, on a $k^2 = \omega^2/c^2 = \omega^2 \epsilon_r / c_0^2$

II.2a) α) $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$ force de Lorentz

β) Pour une onde plane progressive on a $\mathbf{B} = \mathbf{E} / c$

γ) le rapport des forces magnétique et électrique est inférieur à v/c donc $\ll 1$: on peut négliger l'action du champ magnétique de l'onde.

II.2b) α) On applique la relation fondamentale de la dynamique à la particule M en négligeant son poids : $m \frac{d^2 \mathbf{OM}}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathbf{s}}{dt^2} = q \mathbf{E}$.

A $t=0$, la particule est en O où le champ $\mathbf{E} = E_0 \cos \omega t \mathbf{u}$ avec $\|\mathbf{u}\| = 1$

En projetant sur la direction de \mathbf{u} : $m \frac{d^2 s}{dt^2} = q E_0 \cos \omega t$ d'où $s = (q E_0 / m \omega^2)(1 - \cos \omega t)$

β) L'amplitude des oscillations forcées est : $s_0 = |q| E_0 / m \omega^2$

γ) $s_{0,p} / s_{0,e} = m_e / m_p \ll 1$ donc le mouvement des protons est d'amplitude très faible par rapport à celui des électrons et on pourra les considérer comme fixes.

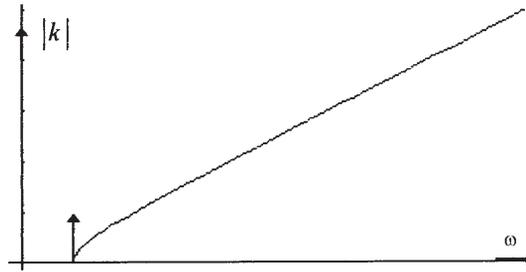
II.3) On a $\mathbf{P} = -N e \mathbf{s}_e = -N e (-e) \mathbf{E} / m \omega^2 = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}$

d'où $\epsilon_r = 1 - N e^2 / m \epsilon_0 \omega^2$

II.4a) $k^2 = \omega^2 \epsilon_r / c_0^2 = (\omega^2 - N e^2 / m \epsilon_0) / c_0^2$. $k = 0$ pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{N e^2 / m \epsilon_0}$

II.4b) Application numérique : $\omega_0 = 4,4 \cdot 10^7 \text{ rad/s}$ $\lambda_0 = c_0 \cdot 2\pi / \omega_0 = 42,8 \text{ m}$

II.4c)



II.4d) Si $\omega < \omega_0$, il ne peut y avoir propagation dans le milieu : il y a réflexion totale.

$\lambda = 1376 \text{ m} > \lambda_0$: alors $\omega < \omega_0$ il ne peut y avoir propagation : il y aura une réflexion sur la couche ionisée ; $\lambda = 2,85 \text{ m} < \lambda_0$: alors $\omega > \omega_0$ il y a propagation.

La première aura donc une plus vaste audience grâce à la réflexion.

Troisième partie

III.1a) On applique à la particule le principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0)$$

- la norme de la vitesse est constante : $\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$ donc $v = v_0$

- le mouvement est dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B}_0 : Soit $v_{||}$ la projection de \mathbf{v} sur la direction de \mathbf{B}_0 . La projection de la relation fondamentale de la dynamique donne : $m \frac{dv_{||}}{dt} = 0$ donc $v_{||} = \text{cte} = 0$ (condition initiale). le mouvement reste dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B}_0 .

- En utilisant la base de Frenet dans le plan, on a $\mathbf{a} = v^2/R = |q| v B_0 / m$ d'où

$$R = \text{cte} = m v_0 / |q| B_0 : \text{le mouvement est un cercle de rayon } R.$$

- le vecteur rotation est alors $\omega_c = -q B_0 / m$

III.1b) ω_c est appelée pulsation-cyclotron car il s'agit de la pulsation du champ électrique accélérateur dans le cyclotron synchronisé avec la vitesse de rotation des particules.

III.1c) Si la vitesse initiale n'est plus perpendiculaire à \mathbf{B}_0 , le mouvement est alors hélicoïdal d'axe parallèle à \mathbf{B}_0 et de base circulaire. Exemple : particules solaires piégées par le champ magnétique terrestre (ceintures de Van Allen)

III.2) Si $\mathbf{E} // \mathbf{B}_0$, les électrons, mis en mouvement par \mathbf{E} ont une vitesse parallèle à \mathbf{E} donc à \mathbf{B}_0 : \mathbf{B}_0 est sans action sur eux.

Si $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$, les deux actions interviennent : le modèle doit être changé.

III.3a) On trouve : $\omega_1 = (\sqrt{(\omega_c^2 + 4\omega_o^2)^2 - \omega_c^2})/2$ $\omega_2 = (\sqrt{(\omega_c^2 + 4\omega_o^2)^2 + \omega_c^2})/2$
 $\omega_3 = \sqrt{(\omega_c^2 + \omega_o^2)}$ Il y a propagation si k^2 positif soit pour $\omega_1 < \omega < \omega_3$ et pour $\omega > \omega_2$

III.3b) Si $\mathbf{E} // \mathbf{B}_0$, on a $\lambda_o = c_o 2\pi / \sqrt{Ne^2/m\epsilon_o} = 42,7 \text{ m}$

Si $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$ on a $\lambda_2 = c_o 2\pi / \omega_2 = 38,9 \text{ m}$ et $\omega_c = (\omega_2^2 - \omega_o^2)/\omega_2$
d'où $N = 6,1 \cdot 10^{11} \text{ électrons/m}^3$ $B_o = 4,69 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

III.4) On a $B_o(h) = B_o(0)(1 + (h/R)^2)^{-3/2}$ d'où $h = 240 \text{ km}$.

SECOND PROBLÈME

I.1 La somme des moments des forces appliquées au fléau au point 0 est nulle.

I.1.a Le moment de la réaction en 0 est nul, il reste donc les deux poids, soit $mlg = m'l'g$ donc $ml = m'l'$.

I.1.b $m = m'$.

I.2

I.2.a Le premier équilibre conduit à $Ml = m_1l'$. Le second équilibre conduit à $Ml' = m_2l$. D'où $M = \sqrt{m_1m_2}$.

I.2.b Le premier équilibre conduit à $(M + m_4)l = tl'$. Le second équilibre conduit à $m_3l = tl'$. D'où $M = m_3 - m_4$.

I.3

I.3.a par différenciation il vient

$$\frac{dM}{M} = \frac{1}{2} \frac{dm_1}{m_1} + \frac{1}{2} \frac{dm_2}{m_2}$$

soit

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{1}{2} \frac{\Delta m_1}{m_1} + \frac{1}{2} \frac{\Delta m_2}{m_2}$$

d'où

$$\frac{\Delta M}{M} = \epsilon.$$

I.3.b de même

$$\frac{dM}{M} = \frac{m_3}{M} \frac{dm_3}{m_3} - \frac{m_4}{M} \frac{dm_4}{m_4}$$

d'où

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{m_3 + m_4}{M} \epsilon.$$

I.3.c Comme $m_3 + m_4 > M$ la méthode de Gauss est plus précise que celle de Borda. Cependant à l'époque les racines carrées étaient extraites à la main ...

II.1

II.1.a Avec les origines choisies,

$$\begin{aligned} E_p(M) &= -Mgl \sin \alpha \\ E_p(M') &= +M'gl \sin \alpha \\ E_p(m) &= +mgl(1 - \cos \alpha)/2. \end{aligned}$$

II.1.b L'énergie potentielle totale du système doit être minimale à l'équilibre. En exprimant que $\frac{dE_p}{d\alpha} = 0$, il vient

$$\alpha = \arctan\left(2 \frac{M - M'}{m}\right).$$

II.1.c D'où la sensibilité :

$$S = \frac{2}{m} \frac{1}{1 + 4\left(\frac{M-M'}{m}\right)^2}.$$

II.1.d Application numérique : $m = 2 \times 1,000 \times \cotg \frac{\pi}{3} = 1,155 \text{ kg}$.

II.1.e Il suffit d'utiliser la sensibilité de la balance dans ces conditions avec $\Delta M = 0,01 \text{ kg}$ pour obtenir

$$\Delta \alpha = S \Delta M = 15'.$$

II.2

II.2.a Les expressions établies dans la question II.1.a sont encore valables, comme $M = M'$,

$$E_p = +mgl(1 - \cos \alpha)/2$$

II.2.b Les trajectoires sont des cercles de rayon $l/2$ et l respectivement.

II.2.c La masse m est en rotation autour de O ; par contre les plateaux restent horizontaux, donc les masses M et M' sont en translation circulaire.

II.2.d L'énergie cinétique de rotation de m est négligeable car la masse est supposée ponctuelle. D'où :

$$E_c = 2 \frac{1}{2} M (l\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{l}{2}\dot{\alpha}\right)^2 = \left(M + \frac{m}{8}\right) l^2 \dot{\alpha}^2$$

II.2.e $d(E_p + E_c) = 0$ conduit à

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{4l\left(\frac{M}{m} + \frac{1}{8}\right)} = 0$$

II.2.f

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{M}{m} + \frac{1}{8}} = 1,263 \pm 0,005 \text{ s}$$

III.1

III.1.a La section du conducteur vaut ici YZ d'où :

$$R = \rho \frac{X}{YZ}$$

III.1.b En remarquant que $V = XYZ$, que ΔX représente une petite variation algébrique (et non une incertitude), la formule demandée se démontre aisément.

III.1.c Application numérique : $K = 2,00$.

III.2

III.2.a

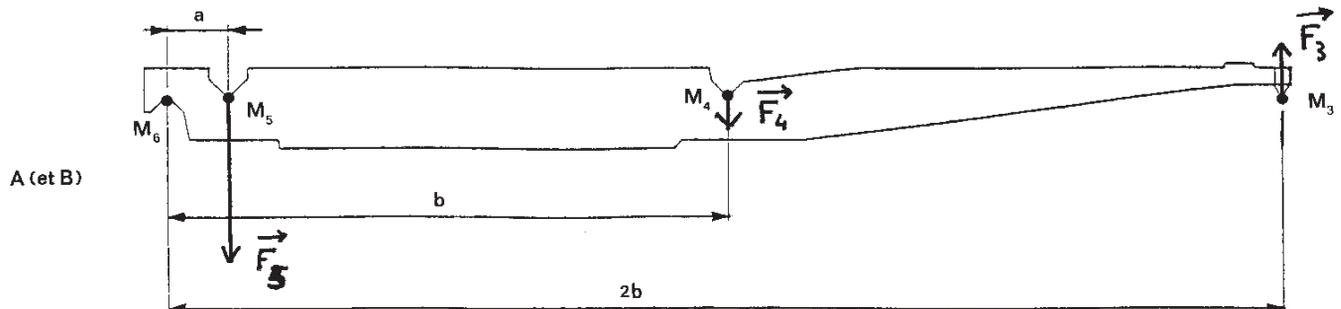
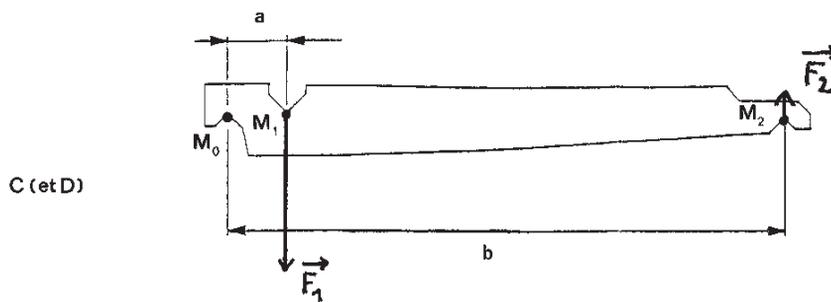
$$\frac{\Delta R}{R} = K \frac{\Delta l}{l} = K K' F = 0,24\%$$

III.2.b

- $X \gg Y$: la sensibilité est plus grande dans le sens des brins.
- les brins sont repliés sur une petite surface (au lieu d'un seul long brin) pour avoir une mesure quasi ponctuelle.
- $Z \ll Y$: la jauge est très fine, pour assurer un bon contact mécanique et pour une bonne évacuation thermique.

III.3 La somme des moments des forces par rapport aux axes de rotation doit être nulle.

III.3.a Graphiquement :



III.3.b Vectoriellement, cela s'écrit :

$$\begin{aligned} a\vec{F}_1 + b\vec{F}_2 &= \vec{0} \\ a\vec{F}_5 + b\vec{F}_4 + 2b\vec{F}_3 &= \vec{0} \end{aligned}$$

De plus le principe des interactions impose $\vec{F}_2 + \vec{F}_4 = \vec{0}$.

III.3.c L'équilibre du plateau s'exprime par :

$$F_{1C} + F_{1D} + F_{5B} + F_{5D} = \vec{P}$$

L'équilibre du crochet Q s'exprime par :

$$F_{3A} + F_{3B} = \vec{F}$$

l'élimination des vecteurs intermédiaires entre ces cinq équations conduit à $K'' = a/2b$.

Remarque : la valeur numérique donnée dans le texte n'est pas en accord avec cette formule (c'est l'inverse) ; la constante K' donnée précédemment ayant été calculée à partir de K'' , le produit $K'K''$ est exact et cette « coquille » est sans influence sur la suite de l'énoncé.

III.3.d F est indépendant de la répartition des masses sur le plateau.

III.4

III.4.a L'application des lois de l'électrocinétique conduit au résultat classique :

$$v = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} E_s.$$

III.4.b Par substitution il vient

$$v = \frac{E_s \Delta R}{4 R_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R_0} \right)^{-1}$$

III.4.c qui par linéarisation conduit à $S_0 = \frac{E_s}{4}$ et $\xi = \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R_0}$;

III.4.d Numériquement cela donne $S_0 = 2,25$ V et $\xi_{max} = 0,15\%$.

III.4.e En rassemblant les définitions de l'énoncé, il arrive $S_M = S_0 K' K'' g = 17,6 mV.kg^{-1}$.

III.4.f Avec une source de courant la relation devient

$$v = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} I_s.$$

la substitution puis la linéarisation conduisent à $S_0 = S'_0$ et $\xi' = \xi/2$: la sensibilité n'est pas modifiée, mais la linéarité est meilleure, d'où l'intérêt de ce montage.

III.5

III.5.a v n'évolue pas car $\frac{\Delta R}{R}$ reste constant pour les quatre jauges.

III.5.b Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} v &= E_s \frac{2R_{f0} + \Delta R + 2\Delta R_f}{2R_0 + 2R_{f0} + \Delta R + 2\Delta R_f} \\ &= \frac{E_s}{2} \frac{x}{1+x} + \frac{E_s}{4} \frac{x}{(1+x)^2} \frac{\Delta R}{R_0} + \frac{E_s}{2} \frac{x^2}{(1+x)^2} \frac{\Delta R_f}{R_{f0}} \end{aligned}$$

III.5.c En substituant, il vient

$$S''_M = 17,6 \frac{x}{(1+x)^2} mV.kg^{-1}$$

et

$$S''_M = 0,09 \frac{x^2}{(1+x)^2} mV.K^{-1}.$$

III.5.d Il faut qu'une variation de 40 Kelvin puisse être compensée par une variation de masse de 0,2 kg, soit

$$\left| \frac{\Delta M}{\Delta T} \right| = \frac{S_T''}{S_M''} = \frac{0,09x}{17,6} < \frac{0,2}{40} \Rightarrow x < 1.$$

Cette condition est facile à réaliser pour des valeurs de jauges usuelles (350 Ω).

III.5.e Les deux résistances de liaisons sont maintenant dans deux branches adjacentes du pont ; les deux bornes du pont évoluent donc en même temps, donc v est peu influencée par la température. Pour une approche quantitative, il est judicieux de poser $x' = R'_f/R_0$. En négligeant ΔR devant R , v se met sous la forme

$$v = \frac{\Delta R E_s}{R_0} \frac{1}{2} \frac{x(2+x)}{(1+x)(2+x+2x')}.$$

En remarquant d'après la loi donnée dans la question III.5.b que $dx = \lambda x dT$ et $dx' = \lambda x' dT$ et en exprimant que $dv/dT = 0$ on montre que la valeur à donner à R'_f est

$$R'_f = \frac{R_0}{2} (x + 4 + 4/x).$$

Cette compensation a en général un effet néfaste sur la sensibilité du pont.

C.A.P.E.S

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition d'électronique - électrotechnique avec applications - Session : 1997

PREMIER PROBLÈME

Pour chaque question, on trouvera la **réponse** attendue de la part des candidats. Des **commentaires** insérés dans le corps de la solution complètent ou éclairent éventuellement ces réponses. Ces commentaires incorporent le renvoi à quelques références spécialisées. Un **commentaire final** récapitule les connaissances nécessaires à la résolution du problème et indique une bibliographie plus générale.

1. Étude de la fonction retard

1.1. Caractérisation de la fonction retard

1.1.1) • **Réponse:** $s(t) = E_M \cdot \cos(\omega(t - \tau))$.

1.1.2) • **Réponse:**

le module de la transmittance complexe \underline{T}_r de la fonction retard est le rapport des amplitudes de $s(t)$ et $e(t)$ donc $|\underline{T}_r| = 1$;

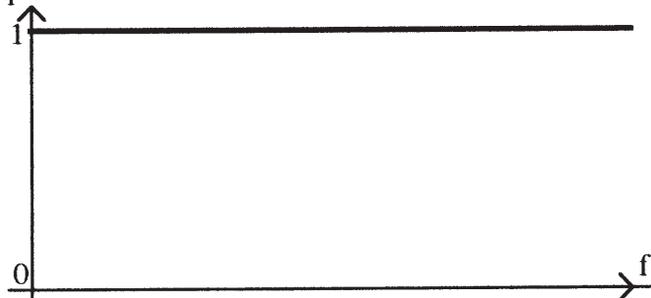
l'argument est le déphasage de $s(t)$ par rapport à $e(t)$ donc $\text{Arg}(\underline{T}_r) = -\omega\tau$.

1.1.3) • **Réponse:** $\underline{T}_r = [1; -\omega\tau] = e^{-j\omega\tau}$.

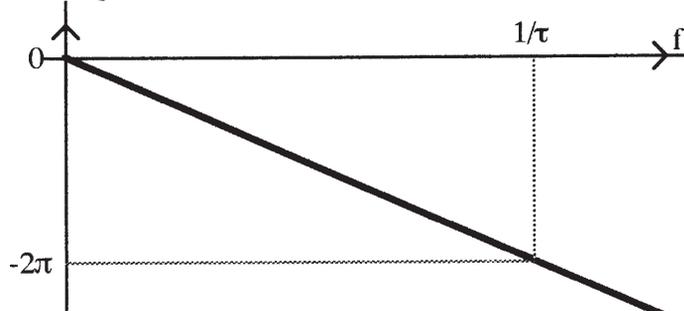
• **Commentaire:** un retard entre donc dans la catégorie des filtres linéaires, c'est à dire des systèmes linéaires invariants dans le temps, qu'on peut aussi définir mathématiquement comme les opérateurs dont les fonctions propres sont les exponentielles complexes.

1.1.4) • **Réponse:**

$|\underline{T}_r|$ en fonction de la fréquence f



$\text{Arg}(\underline{T}_r)$ en fonction de la fréquence f



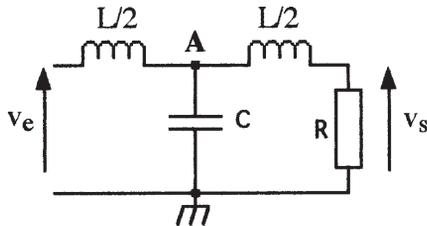
• **Commentaire:** le point important est ici la linéarité du déphasage en fonction de la fréquence.

1.1.5) • **Réponse:** La fonction retard définie pour tout signal d'entrée n'est pas physiquement réalisable; cela supposerait en effet qu'elle opère à toutes les fréquences or aucun dispositif physique ne possède une bande passante infinie.

• **Commentaire:** on pouvait invoquer également une limitation de l'amplitude des signaux pour qu'un dispositif physique fonctionne linéairement.

1.2. Réalisation approchée d'un retard pour des signaux électriques

1.2.1) • **Réponse:**



L'application du théorème de Millman au point A suivie d'un diviseur de tension permet de calculer

$$\text{la transmittance complexe } \underline{T} = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R}j\omega + \frac{LC}{2}(j\omega)^2 + \frac{L^2C}{4R}(j\omega)^3}.$$

1.2.2) • **Réponse:** L'association d'impédances en série et en parallèle permet de calculer

$$\text{l'impédance d'entrée } \underline{Z}_e \text{ du quadripôle: } \underline{Z}_e = \frac{R + Lj\omega + \frac{RLC}{2}(j\omega)^2 + \frac{L^2C}{4}(j\omega)^3}{1 + RCj\omega + \frac{LC}{2}(j\omega)^2}.$$

1.2.3) Assimilation du quadripôle de la figure 3 à un retard:

1.2.3.1) • **Réponse:**

$$\text{La transmittance d'un retard est } \underline{T}_r = e^{-j\omega\tau} = \frac{1}{e^{j\omega\tau}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau + \frac{(j\omega\tau)^2}{2!} + \frac{(j\omega\tau)^3}{3!} + \dots};$$

$$\text{or le quadripôle précédent a une transmittance } \underline{T} = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R}j\omega + \frac{LC}{2}(j\omega)^2 + \frac{L^2C}{4R}(j\omega)^3};$$

on peut donc, en se limitant au second ordre, l'assimiler à un retard, pour des fréquences suffisamment basses et à condition que $\tau = \frac{L}{R}$ et $\tau^2 = LC$.

1.2.3.2) • **Réponse:** Si L et C sont donnés, le retard vaut $\tau = \sqrt{LC}$ et R doit prendre une valeur particulière $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

1.2.3.3) • **Réponse:** L'approximation est valable pour $\omega\tau \ll 1$ soit pour $f \ll \frac{1}{2\pi\tau}$.

1.2.4) Impédance d'entrée du quadripôle de la figure 3:

1.2.4.1) • **Réponse:** Lorsque $R=R_0$, l'impédance d'entrée \underline{Z}_e devient

$$\underline{Z}_e = \frac{R_0 \left(1 + \tau j \omega + \frac{(\tau j \omega)^2}{2} + \frac{(\tau j \omega)^3}{4} \right)}{1 + \tau j \omega + \frac{(\tau j \omega)^2}{2}}$$

1.2.4.2) • **Réponse:** Dans les conditions de l'approximation $\omega\tau \ll 1$, et en se contentant d'un développement au second ordre, il vient $\underline{Z}_e \approx R_0$.

1.2.5) Impédance caractéristique du quadripôle de la figure 2:

1.2.5.1) • **Réponse:** L'impédance caractéristique (ou impédance itérative) d'un quadripôle est l'impédance qui, branchée entre les bornes de sortie, est également vue entre les bornes d'entrée.

1.2.5.2) • **Réponse:** En branchant \underline{Z}_0 en sortie du quadripôle de la figure 2 et en écrivant que l'impédance d'entrée calculée dans ce cas est égale à \underline{Z}_0 , on obtient $\underline{Z}_0^2 = \frac{L}{C} - \frac{L^2\omega^2}{4}$.

1.2.5.3) • **Réponse:** \underline{Z}_0^2 peut devenir négatif si la fréquence est assez grande; \underline{Z}_0 est alors imaginaire.

1.2.5.4) • **Réponse:** En basse fréquence (pour $\omega^2 \ll \frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{LC}$), on peut adopter la valeur

approchée $\underline{Z}_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$ qui n'est autre que la valeur R_0 précédente.

1.2.6) • **Réponse:** On voit R_0 à l'entrée de la dernière cellule, donc R_0 à l'entrée de l'avant-dernière, donc R_0 à l'entrée de l'antépénultième, etc., donc R_0 à l'entrée de la ligne.

1.2.7) • **Réponse:** Le retard total apporté par la ligne de n cellules vaut $n\tau = n\sqrt{LC}$.

• **Commentaire:** *Quel est l'intérêt de disposer plusieurs cellules en cascade?*

Un retard $n\tau$ peut être obtenu par une seule cellule avec les composants nL et nC , à condition de travailler à des fréquences $f \ll \frac{1}{n(2\pi\sqrt{LC})}$, ou bien par n cellules avec les composants L et C , à

condition de travailler à des fréquences $f \ll \frac{1}{(2\pi\sqrt{LC})}$. Cette deuxième solution permet donc d'obtenir pour un même retard une bande passante plus large.

Prenons comme exemple une ligne à retard Sécéré de caractéristiques nominales $\tau = 6,2 \mu\text{s}$ et $R_0 = 330 \Omega$, constituée de 6 cellules. Les valeurs correspondantes de L et C sont $L = 0,34 \text{ mH}$

et $C = 3,1 \text{ nF}$. La condition de validité sur la fréquence est $f \ll \frac{1}{(2\pi\sqrt{LC})} = 155 \text{ kHz}$. Une étude

expérimentale montre une bande passante à $\pm 0,5$ dB d'environ 130 kHz. On aurait pu obtenir $\tau = 6,2 \mu\text{s}$ avec une seule cellule mais à condition de travailler à des fréquences nettement inférieures à 25 kHz.

1.2.8) Exemple(s) de ligne(s) introduisant un retard:

1.2.8.1) • **Réponse:**

- Exemple à constantes réparties: on peut donner un modèle à base de cellules LC en cascade pour un câble coaxial, à condition de le "découper" en éléments infinitésimaux.
- Exemple à constantes localisées: certaines lignes à retard du commerce (fabricants: Sprague, Sécéré par exemple) sont réalisées à l'aide de cellules LC.

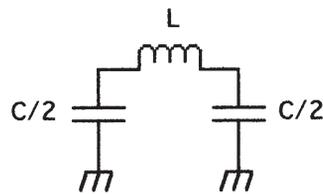
1.2.8.2) • **Réponse:**

- Pour un câble coaxial: $R_0 = 75 \Omega$ (câble de liaison entre antenne et téléviseur) ou 50Ω (câble de liaison entre appareils de laboratoire), $\tau \approx 5$ ns par mètre de longueur, ce qui correspond à une vitesse de propagation de $2 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx \frac{2}{3} c$.

- Pour une ligne à retard en composants discrets, $R_0 = 50$ à 330Ω , $\tau = 1$ ns à quelques ms (données Sécéré).

• **Commentaire:**

- Les lignes à retard du commerce sont constituées de cellules en Π préférentiellement aux cellules



en T de l'énoncé

, ce qui ne change rien sauf aux extrémités.

On obtient

des résultats

analogues

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + \frac{L}{R}j\omega + \frac{LC}{2}(j\omega)^2} \quad \text{et}$$

$$\underline{Z}_e = \frac{R + Lj\omega + \frac{RLC}{2}(j\omega)^2}{1 + RCj\omega + \frac{LC}{2}(j\omega)^2 + \frac{LC^2R}{4}(j\omega)^3}$$

qui, avec les mêmes conditions d'approximation,

conduisent aux mêmes conclusions: $\tau = \sqrt{LC}$ et $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$;

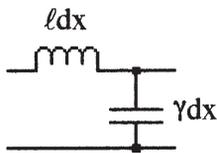
- dans le domaine des signaux vidéo, les lignes à retard qui demandent une large bande passante (plusieurs MHz) et des retards importants ($64 \mu\text{s}$) ne sont pas réalisées avec des cellules LC mais grâce à la propagation d'une onde élastique dans un solide entre deux transducteurs piézo-électriques.

1.2.9) • **Réponse:** Si la sortie de la dernière cellule est branchée sur une impédance différente de R_0 , il y a réflexion d'un signal incident à l'extrémité de la ligne; le signal incident et le signal réfléchi se superposent et on peut obtenir des ondes stationnaires.

• **Commentaire:**

- On ne demandait pas de calcul, mais seulement une indication qualitative des phénomènes;

- pour une étude de la propagation le long d'un câble coaxial, on peut se reporter au problème de l'épreuve écrite de Physique du CAPES 1994 ;
- dans ce problème, le câble coaxial était modélisé par des cellules en Γ inversé:



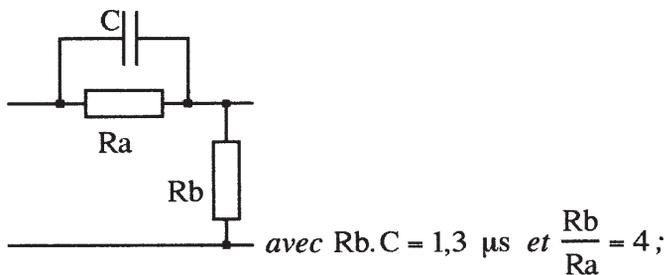
; l'étude conduite y menait à une autre définition de l'impédance caractéristique (rapport entre tension et courant en un point de la ligne pour une onde progressive); la reprise des calculs précédents (\underline{T} , \underline{Z}_e , \underline{Z}_0) donnerait, en basse fréquence, des résultats analogues pour τ et R_0 .

2. Étude d'une application de la fonction retard

• Commentaire:

Cette partie du problème donne une vue très simplifiée de la magnétoscopie. Voici quelques indications complémentaires:

- en PAL ou SECAM la télévision diffuse 25 images de 625 lignes par seconde; chaque image est constituée de deux trames entrelacées; la fréquence trame vaut donc 50 Hz et la fréquence ligne 15625 Hz;
- pour conserver la compatibilité avec la télévision en noir et blanc, on transmet séparément les signaux de luminance et de chrominance;
- la bande de base du signal de luminance s'étend de 0 à quelques MHz;
- les têtes de lecture ne pouvant détecter que des variations de flux magnétique, l'enregistrement ne s'effectue pas en bande de base (qui incorpore les très basses fréquences) mais en modulation de fréquence; pour le procédé VHS, en PAL ou SECAM, la fréquence instantanée varie de 3,8 MHz pour le fond des impulsions de synchronisation à 4,8 MHz pour le blanc maximal; les bandes latérales s'étendent de 2 à 6 MHz;
- la démodulation de fréquence peut être assimilée à une démodulation de phase suivie d'une dérivation (de transmittance complexe $j\omega$); après démodulation, la puissance d'un bruit ajouté au signal modulé en fréquence sera donc fortement relevée vers les hautes fréquences (multipliée par un facteur $(2\pi f)^2$); pour cette raison, tous les procédés de transmission en modulation de fréquence incorporent une accentuation du signal à transmettre avant la modulation puis une désaccentuation après la démodulation; ainsi, en radiodiffusion, on utilise des filtres RC de constante de temps 50 μ s en Europe ou 75 μ s aux États-Unis et au Japon; en magnétoscopie VHS, le filtre d'accroissement suivant peut être employé:



- les blocs enregistrement et lecture de la figure 9 de l'énoncé doivent donc être lus comme
 enregistrement = accentuation + modulation de fréquence + magnétisation de la bande,
 lecture = transduction des variations de flux magnétique + démodulation de fréquence +
 désaccentuation ;

pour une étude du bruit en modulation de fréquence, on pourra se reporter à l'ouvrage de
 Dominique Ventre: Communications analogiques (Ellipses, 1991);

- le procédé décrit dans l'énoncé est un dispositif supplémentaire d'accentuation -désaccentuation;
 introduit dans le système VHS en 1985 sous l'acronyme YNR ("Luminance Signal Noise
 Reduction"), il est destiné à améliorer la définition verticale de l'image;

on trouvera une introduction à ce dispositif dans le manuel: JVC Video Technical Guide (Victor
 Company of Japan, 1990); l'idée de base est qu'il existe une corrélation entre les luminances Y_n et
 Y_{n-1} de deux lignes consécutives de l'image mais pas entre les bruits b_n et b_{n-1} superposés à ces
 luminances ; le filtre récursif analogique réalisé avec un retard correspondant à la durée d'une ligne
 vidéo (soit $\tau = 64 \mu s$) doit donc augmenter le signal utile plus que le bruit ;

les valeurs numériques des coefficients a , b , c et a' , b' , c' de l'énoncé ne sont données qu'à titre
 d'exemple.

On voit donc que la magnétoscopie est relativement complexe; encore n'avons nous abordé ni
 l'enregistrement du son ou de la chrominance, ni les traitements non linéaires (limitateurs
 d'amplitude), ni les problèmes mécaniques!

2.1) Filtre récursif analogique:

2.1.1) • **Réponse:** $v_1(t) = e_1(t) + av_1(t - \tau)$.

2.1.2) Réponse indicielle du filtre de la figure 6:

2.1.2.1) • **Réponse:**

$$u_1(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

$$u_1(0_+) = e_1(0_+) + au_1(0_+ - \tau) = U$$

$$u_1(\tau_+) = e_1(\tau_+) + au_1(0_+) = U(1 + a)$$

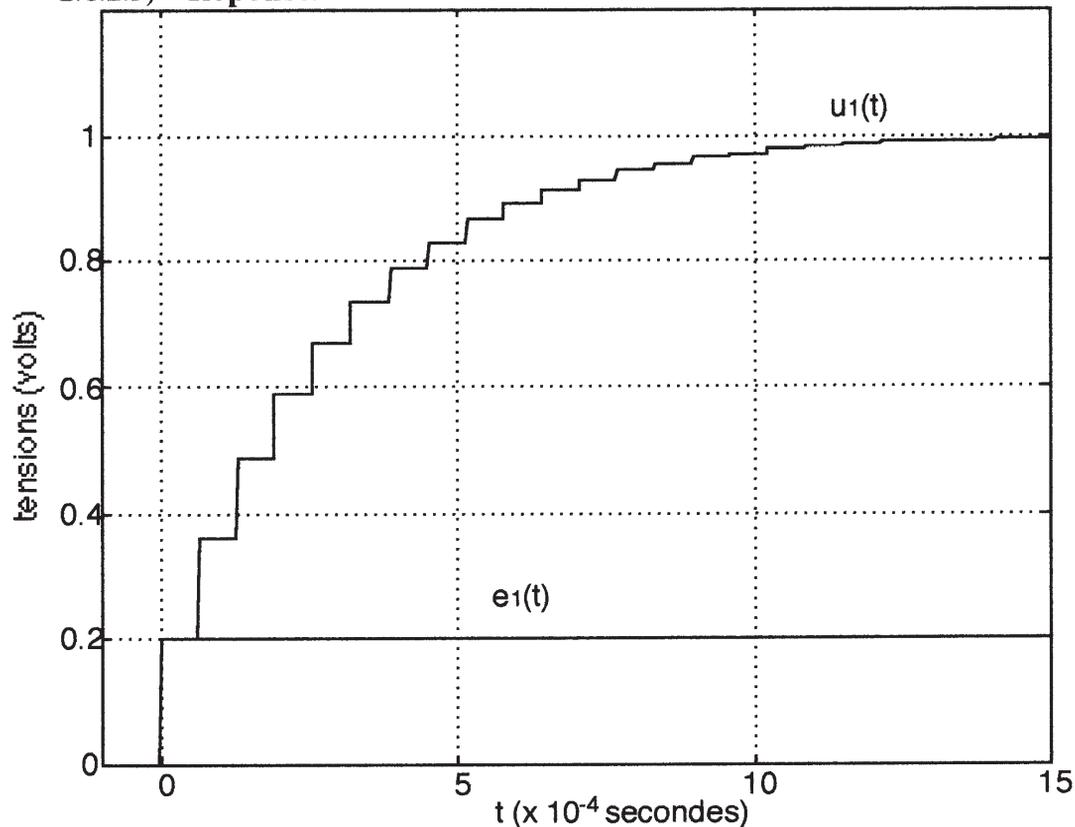
$$u_1(2\tau_+) = e_1(2\tau_+) + au_1(\tau_+) = U(1 + a + a^2)$$

...

$$u_1(n\tau_+) = e_1(n\tau_+) + au_1((n-1)\tau_+) = U(1 + a + a^2 + \dots + a^n)$$

2.1.2.2) • **Réponse:** $\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t) = \frac{U}{1-a}$.

2.1.2.3) • Réponse:



2.1.2.4) • Réponse:

Sur la courbe $u_1(t)$ on constate qu'après un temps de montée non nul la valeur finale tend vers un plateau (transmittance statique=5): le filtre, qui transmet le "continu", est donc de type passe-bas.

2.1.3) Transmittance opérationnelle du filtre de la figure 6:

2.1.3.1) • Réponse: $F(p) = \frac{V_1(p)}{E_1(p)} = \frac{1}{1 - ae^{-p\tau}}$.

2.1.3.2) • Réponse: $\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pU_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \frac{U}{p} = \frac{U}{1-a}$.

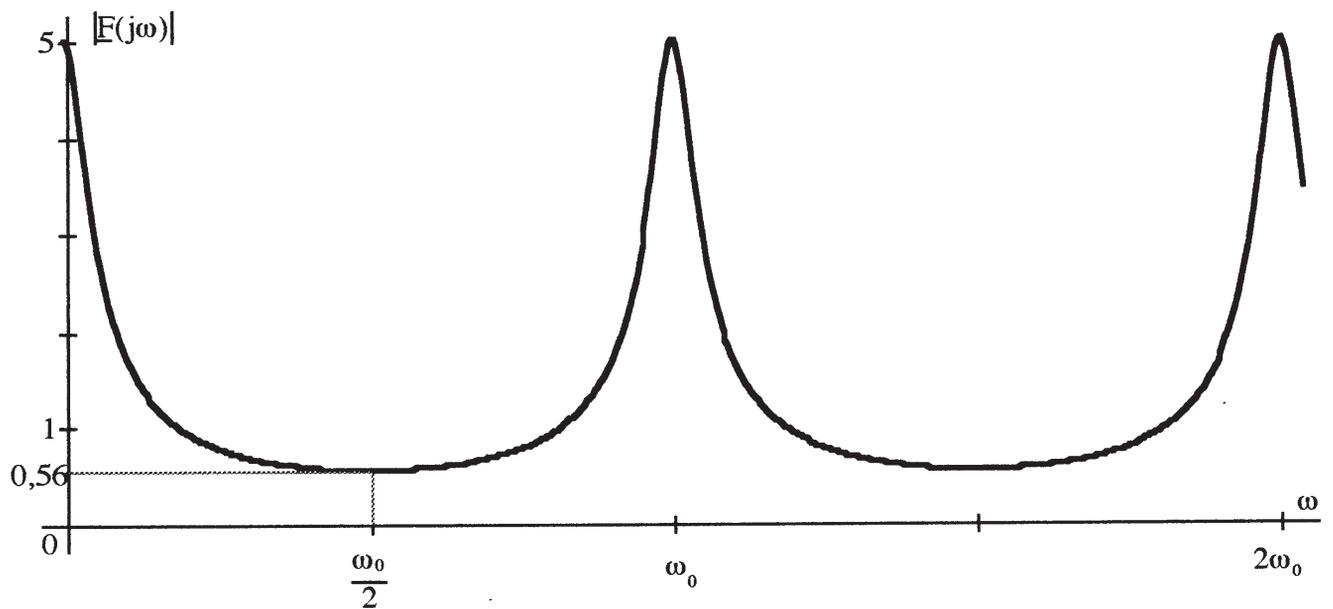
2.1.3.3) • Réponse: on retrouve bien sûr le même résultat qu'en 2.1.2.2!

2.1.4) Transmittance complexe du filtre de la figure 6:

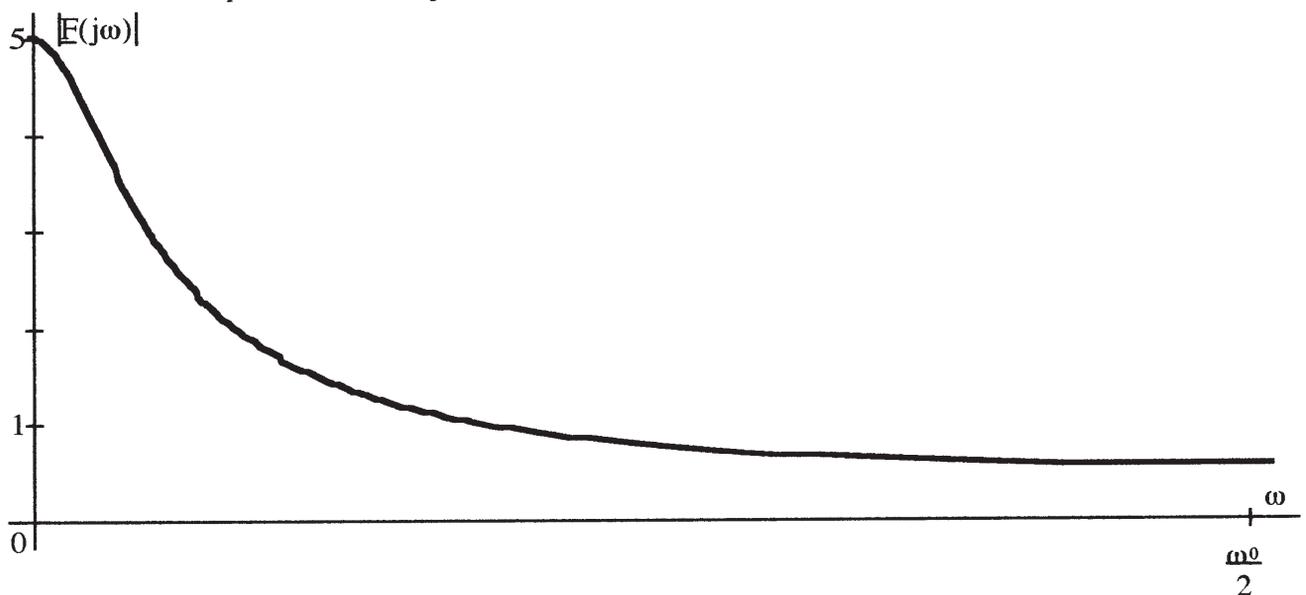
2.1.4.1) • Réponse: En régime sinusoïdal $\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega\tau}}$.

2.1.4.2) • Réponse: $\underline{F}(j\omega)$ est une fonction périodique de la pulsation ω , de période $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$.

2.1.4.3) • Réponse: comme $\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 - a \cos \omega\tau + ja \sin \omega\tau}$, $|\underline{F}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega\tau}}$.



2.1.4.4) • **Réponse:** Pour des signaux d'entrée limités à des fréquences telles que $\omega < \frac{\omega_0}{2}$, le filtre se comporte comme un passe-bas:



2.2) Dispositif d'accentuation:

2.2.1) • **Réponse:** $H_1(p) = \frac{W_1(p)}{E_1(p)} = 1 - bF(p).$

2.2.2)

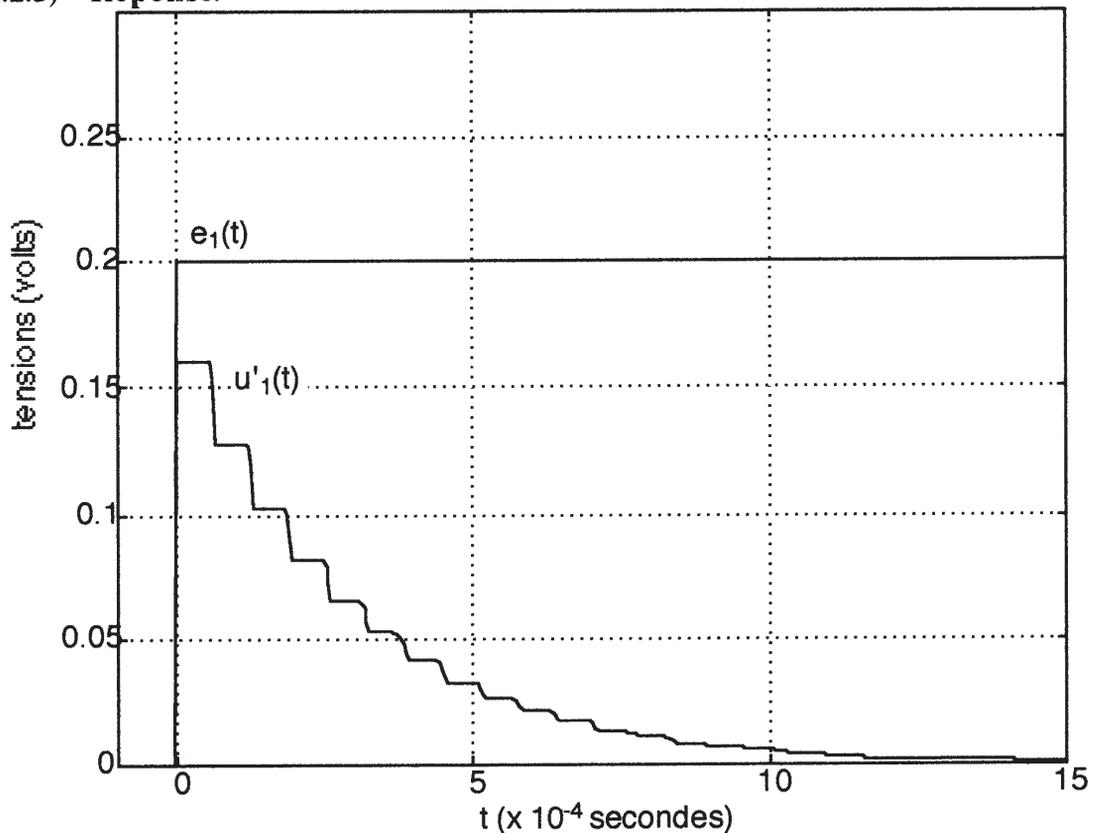
2.2.2.1) • **Réponse:** $\lim_{t \rightarrow \infty} u_1'(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pH_1(p) \frac{U}{p} = (1 - bF(0))U = \left(1 - \frac{b}{1-a}\right)U.$

2.2.2.2) • **Réponse:** $\lim_{t \rightarrow 0_+} u_1'(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pH_1(p) \frac{U}{p} = (1-b)U$.

2.2.2.3) • **Réponse:** Pour obtenir $u_1'(\infty) = 0$, il faut $b=1-a$ (valeur numérique 0,2).

2.2.2.4) • **Réponse:** Alors $u_1'(0_+) = aU$.

2.2.2.5) • **Réponse:**



• **Commentaire:** On remarque $u_1'(t) = \text{échelon} - bu_1(t)$.

2.2.2.6) • **Réponse:**

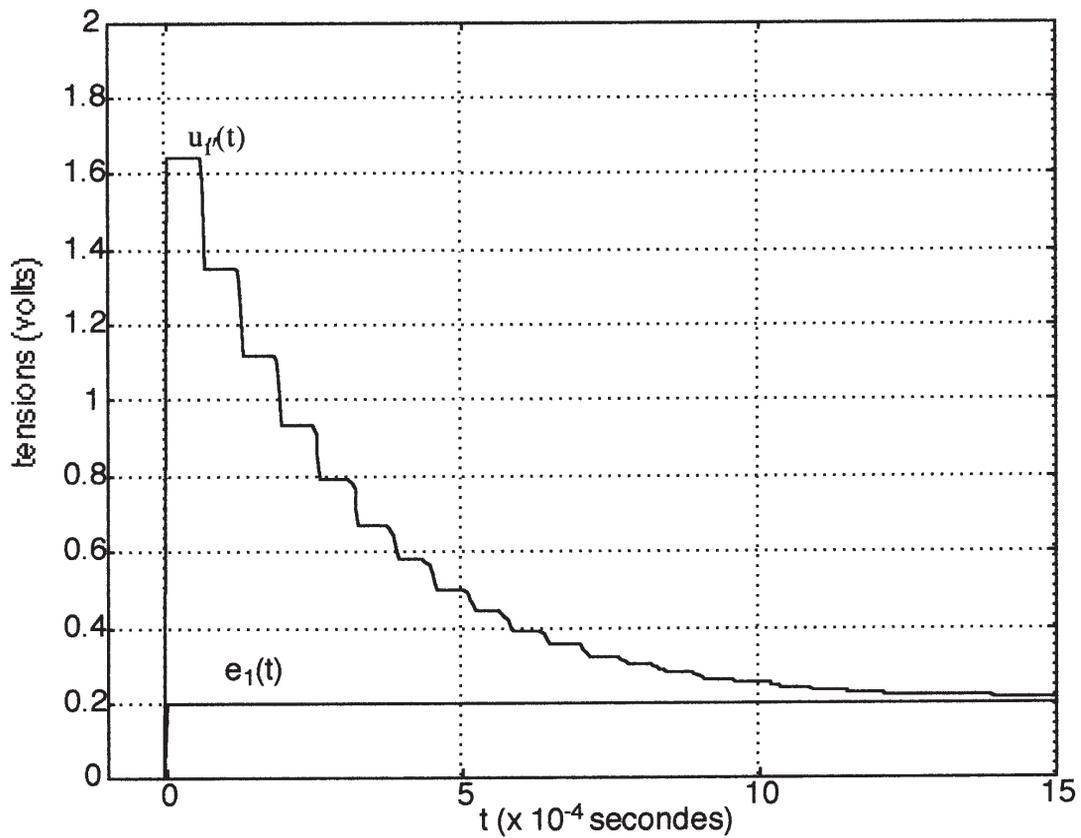
Sur la courbe $u_1(t)$ on constate qu'après un temps de montée nul la valeur finale tend vers 0 (transmittance statique nulle): le filtre, qui transmet les fronts et coupe le "continu", est donc de type passe-haut.

2.2.3) N.B.: Dans la suite $b=1-a$.

2.2.3.1) • **Réponse:** D'après le schéma fonctionnel $s_1(t) = e_1(t) + cw_1(t)$ donc

$u_1''(t) = \text{échelon} + cu_1'(t)$. D'où $u_1''(\infty) = U$ et $u_1''(0_+) = (1+ac)U$.

2.2.3.2) • Réponse:



2.2.4) • Réponse: À partir de $S_1(p) = E_1(p) + cW_1(p)$ on obtient la transmittance opérationnelle

$$T_1(p) = \frac{S_1(p)}{E_1(p)} = \frac{1 + ac - a(1+c)e^{-p\tau}}{1 - ae^{-p\tau}}$$

2.2.5) Transmittance complexe du dispositif de la figure 7:

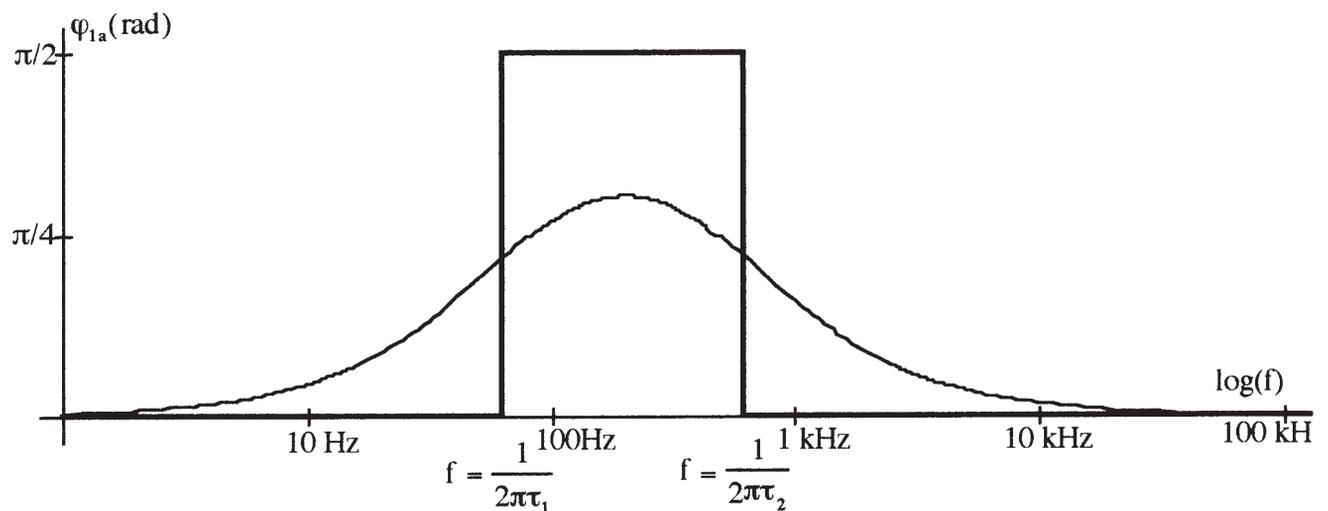
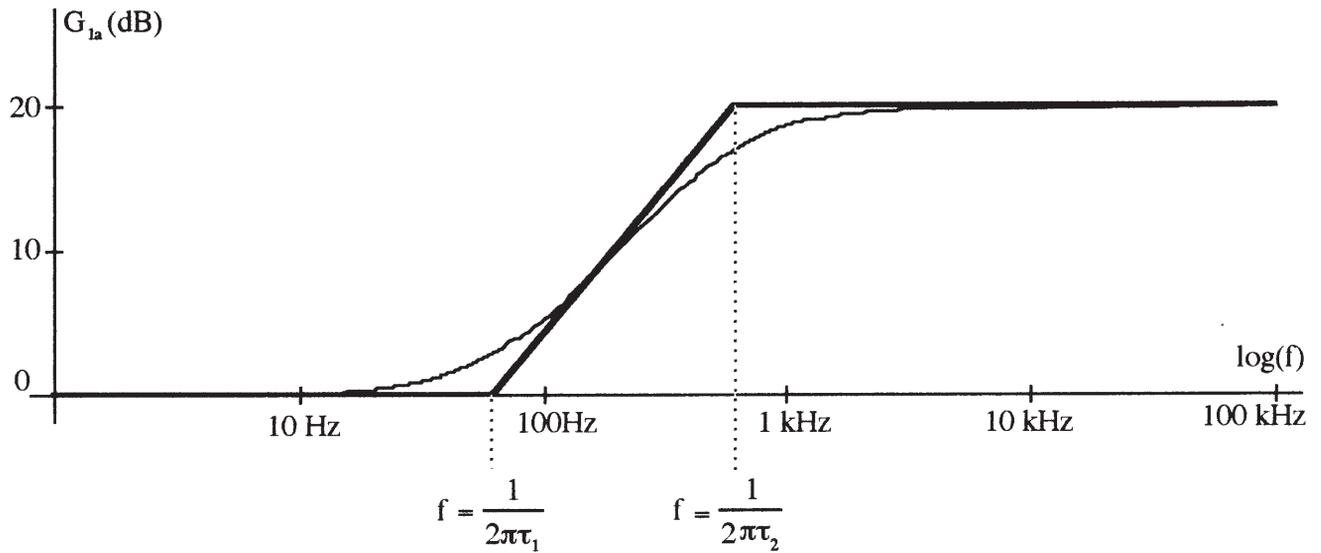
2.2.5.1) • Réponse: $T_1(j\omega) = \frac{S_1}{E_1} = \frac{1 + ac - a(1+c)e^{-j\omega\tau}}{1 - ae^{-j\omega\tau}}$

2.2.5.2) • Réponse: Avec un développement de l'exponentielle limité au premier ordre $e^{-j\omega\tau} \approx 1 - j\omega\tau$, on obtient une expression approchée de $T_1(j\omega)$ par $T_{1a}(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}$ avec

$$\tau_1 = \frac{a(1+c)}{1-a}\tau \quad \text{et} \quad \tau_2 = \frac{a}{1-a}\tau.$$

2.2.5.3) • Réponse: L'approximation est valable pour $\omega\tau \ll 1$.

2.2.6) • **Réponse:** L'association d'un passe-haut du premier ordre et d'un passe-bas du premier ordre conduit aux diagrammes de Bode de $T_{1a}(j\omega)$:



• **Commentaire:** On reconnaît un filtre à avance de phase.

2.2.7) • **Réponse:** La fonction d'accentuation peut s'expliquer

2.2.7.1) à partir des diagrammes de Bode: les basses fréquences sont transmises sans atténuation et les hautes fréquences sont relevées de 20 dB par rapport aux basses fréquences;

2.2.7.2) à partir de la réponse indicielle $u_1''(t)$: le continu est transmis mais les variations rapides (front initial raide) sont amplifiées (pic à $t=0_+$).

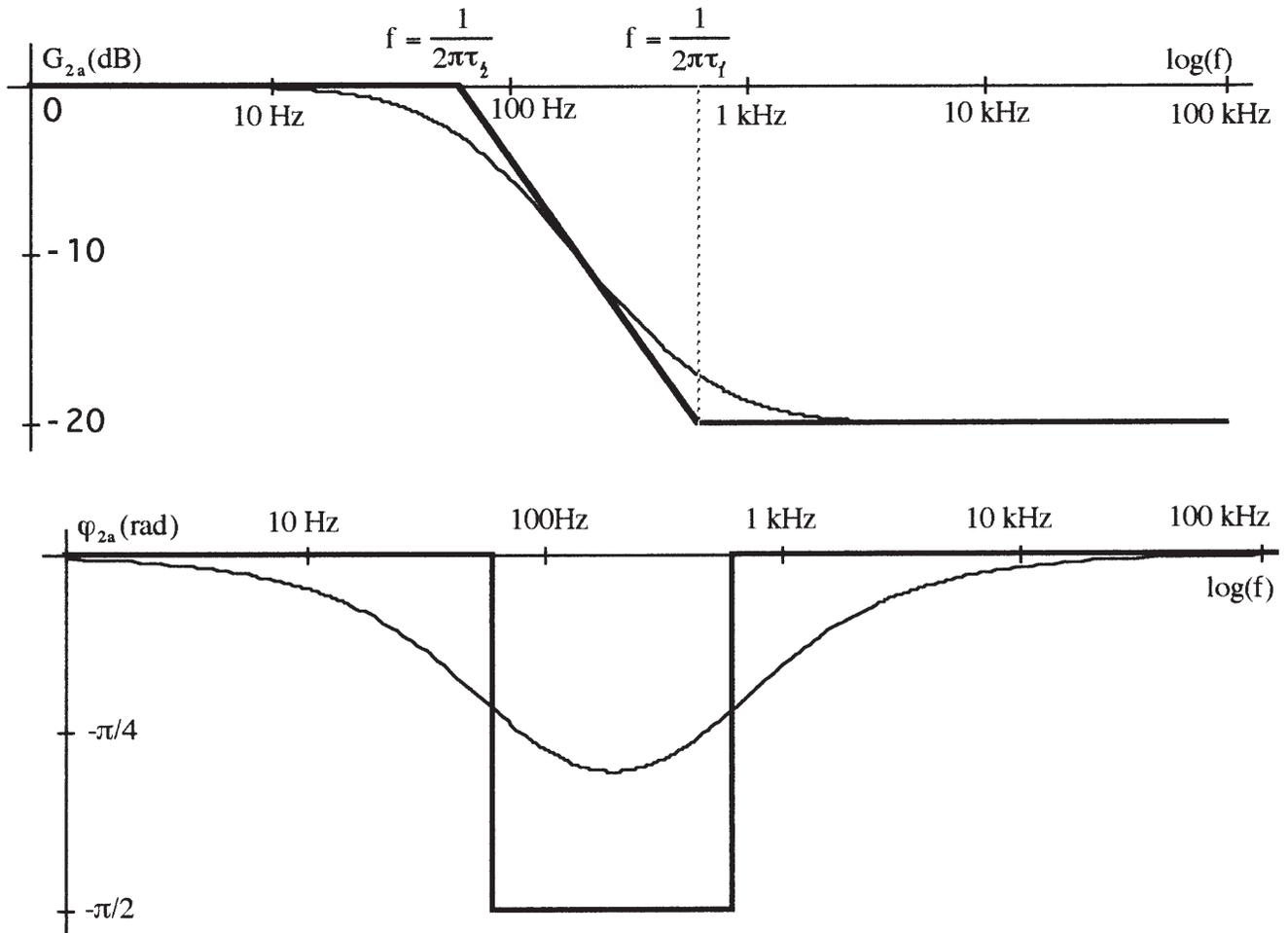
2.3) Dispositif de désaccentuation:

2.3.1) • **Réponse:** $T_2(p) = \frac{1 - a'c' - a'(1-c')e^{-p\tau}}{1 - a'e^{-p\tau}}$.

2.3.2) • **Réponse:** $T_2(j\omega) = \frac{1 - a'c' - a'(1-c')e^{-j\omega\tau}}{1 - a'e^{-j\omega\tau}}$.

• **Commentaire:** L'établissement de l'expression approchée n'était pas demandé; grâce à un développement de l'exponentielle limité au premier ordre $e^{-j\omega\tau} \approx 1 - j\omega\tau$, on obtient comme précédemment (partie 2.2) $T_{2a}(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau'_1}{1 + j\omega\tau'_2}$ avec $\tau'_1 = \frac{a'(1-c')}{1-a'}\tau$ et $\tau'_2 = \frac{a'}{1-a'}\tau$.

2.3.3) • **Réponse:** Diagrammes de Bode de $T_{2a}(j\omega)$:



• **Commentaire:** On reconnaît un filtre à retard de phase.

2.3.4) • **Réponse:** La fonction d'accentuation peut s'expliquer à partir de ces diagrammes de Bode car les basses fréquences sont transmises sans atténuation et les hautes fréquences sont atténuées de 20 dB par rapport aux basses fréquences.

2.4) Système de réduction de bruit:

• **Commentaire:** Les expressions des transmittances opérationnelles devaient avoir été établies en

$$2.2.4) \text{ pour } T_1(p) = (1+ac) \frac{1 - \frac{a(1+c)}{1+ac} e^{-\tau p}}{1 - a e^{-\tau p}} \text{ et en 2.3.1) pour } T_2(p) = (1-a'c') \frac{1 - \frac{a'(1-c')}{1-a'c'} e^{-\tau p}}{1 - a' e^{-\tau p}} .$$

Étude en l'absence de bruit.

2.4.1) Transmittance de l'ensemble:

2.4.1.1) • **Réponse:** Transmittance opérationnelle

$$T(p) = T_1(p)T_2(p) = (1+ac)(1-a'c') \frac{1 - \frac{a(1+c)}{1+ac} e^{-\tau p}}{1 - a e^{-\tau p}} \frac{1 - \frac{a'(1-c')}{1-a'c'} e^{-\tau p}}{1 - a' e^{-\tau p}} .$$

2.4.1.2) • **Réponse:** Pour que $T(p)$ soit une fonction constante de p , il faut

$$a' = \frac{a(1+c)}{1+ac} \text{ et } a = \frac{a'(1-c')}{1-a'c'} ; \text{ on constate alors que } T(p)=1.$$

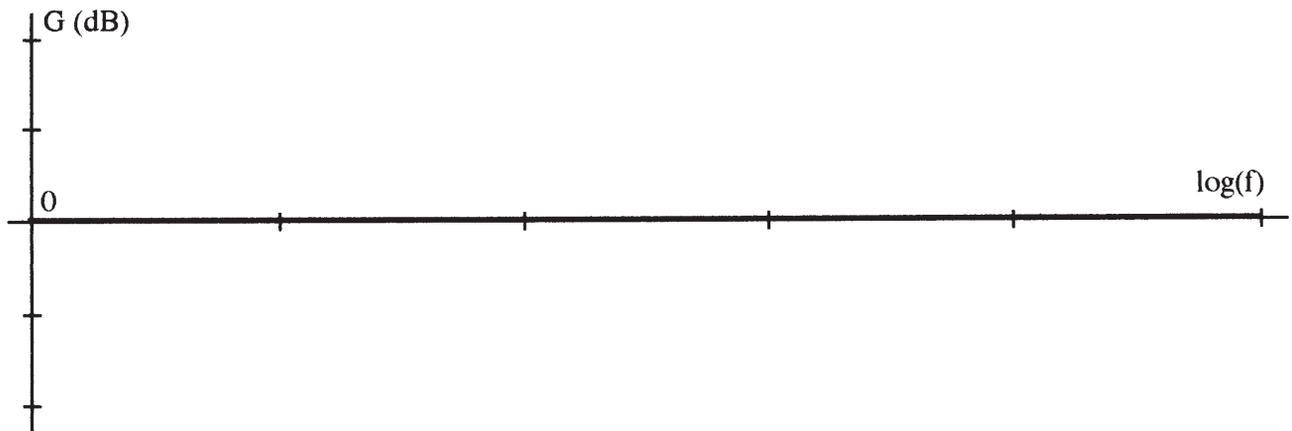
2.4.1.3) • **Réponse:** On tire des deux relations précédentes

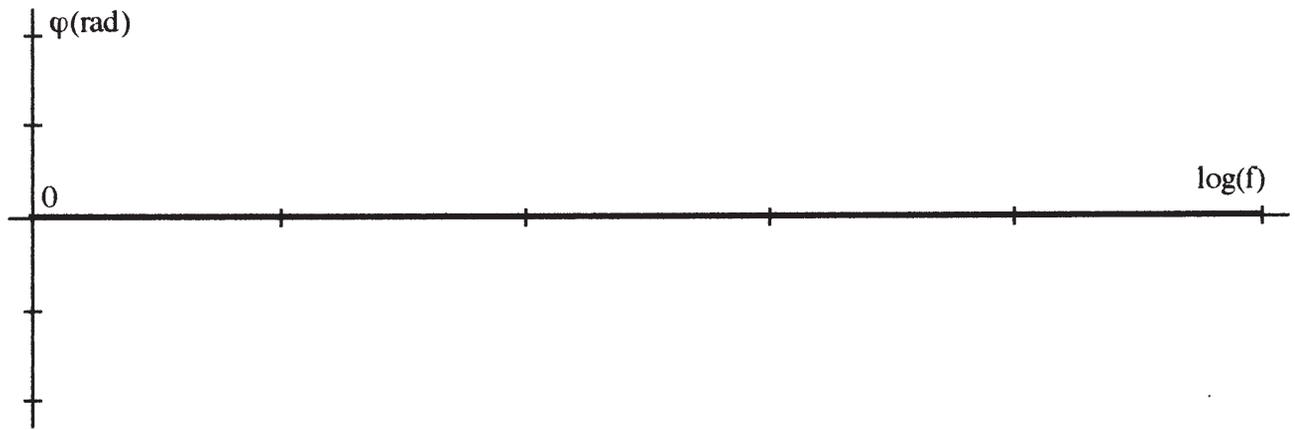
$$a' = \frac{a(1+c)}{1+ac} \text{ et } c' = \frac{c}{1+c} .$$

2.4.1.4) • **Réponse:** Sachant que $a=0,8$ et $c=9$, il vient $a'=0,9756$ et $c'=0,9$ (valeurs très voisines des coefficients donnés en 2.3.3: $a'=0,976$ et $c'=0,9$).

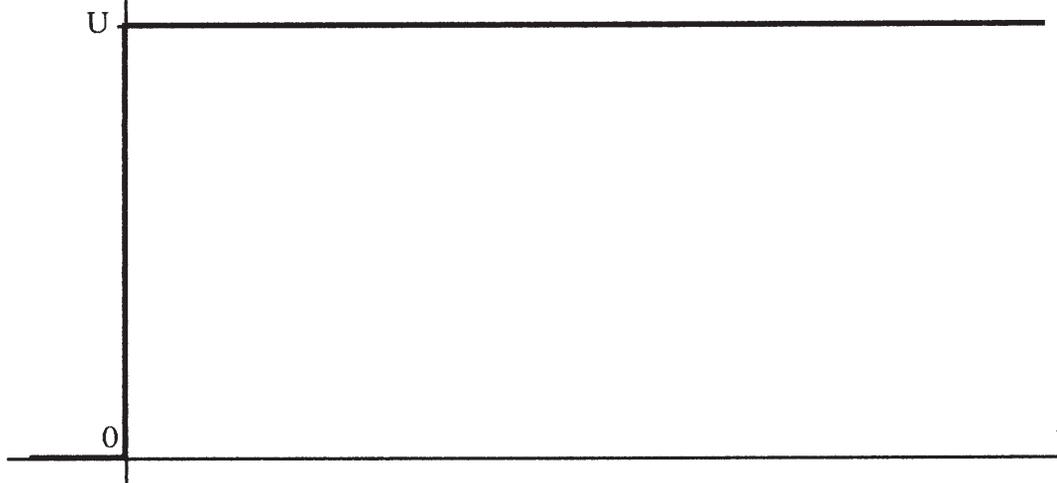
• **Commentaire:** La précision sur les valeurs des coefficients est critique pour une bonne restitution du signal original.

2.4.2) • **Réponse:** Diagrammes de Bode approchés de $T(j\omega) \approx T_{1a}(j\omega)T_{2a}(j\omega)$:





2.4.3) • **Réponse:** Réponse indicielle du système d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$



Étude en présence d'un bruit $b(t)$.

2.4.4)

2.4.4.1) • **Réponse:** La densité spectrale $\gamma(f)$, définie dans la bande de fréquences $[f_{\min}, f_{\max}]$ par $V_{\text{eff bruit}}^2 = \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} \gamma(f) \cdot df$, se mesure donc en $V^2 \text{Hz}^{-1}$.

• **Commentaire:** La densité spectrale définie dans l'énoncé est parfois appelée densité spectrale de puissance; les fabricants de composants électroniques indiquent souvent un niveau de bruit $B(f)$ défini dans une bande Δf par $V_{\text{eff bruit}} = \sqrt{B(f)^2 \cdot \Delta f}$ où $B(f)$ se mesure en $V / \sqrt{\text{Hz}}$. Pour un amplificateur opérationnel par exemple, le niveau de bruit à l'entrée a une valeur typique de 10 à 100 nV / $\sqrt{\text{Hz}}$ entre 10 Hz et 10 kHz.

2.4.4.2) • **Réponse:** Sans système accentuation-désaccentuation, on aurait un rapport signal sur

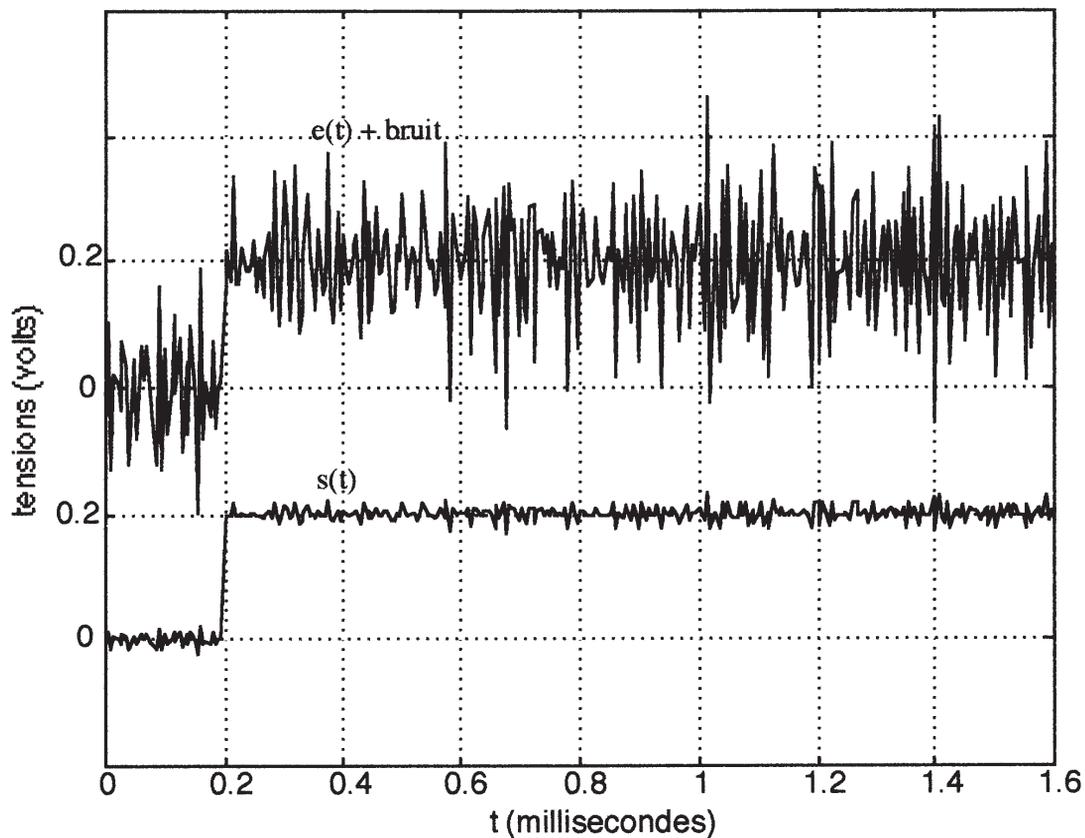
$$\text{bruit} \left(\frac{S}{B} \right)_{\text{sans}} = \frac{\frac{E_M^2}{2}}{\int_{f_2}^{f_0} \gamma(f) df} .$$

2.4.4.3) • **Réponse:** Dans la bande de fréquences $[f_2, f_0]$ la valeur approchée de $|T_2(j\omega)|$ est $A \approx 0,1$. Avec le système accentuation-désaccentuation, on obtient un rapport signal sur bruit

$$\left(\frac{S}{B} \right)_{\text{avec}} = \frac{\frac{E_M^2}{2}}{\int_{f_2}^{f_0} A^2 \gamma(f) df} = \frac{\left(\frac{S}{B} \right)_{\text{sans}}}{A^2} \approx 100 \left(\frac{S}{B} \right)_{\text{sans}} .$$

2.4.4.4) • **Réponse:** On a donc gagné 20 dB sur le rapport signal à bruit.

• **Commentaire:** une simulation informatique (avec le logiciel Matlab en l'occurrence) permet d'illustrer la réduction de bruit



• **Commentaire final:** *Que fallait-il connaître pour traiter ce problème?*

- *le caractère linéaire en fonction de la fréquence du déphasage (négligé) créé par un retard;*
- *les lois de l'électrocinétique en régime variable; la représentation complexe des fonctions sinusoidales du temps et l'usage des impédances complexes; le théorème de Thévenin, le théorème de Millman, le résultat concernant le diviseur de tension s'avéraient utiles;*
- *la notion d'impédance caractéristique d'un quadripôle;*
- *quelques ordres de grandeurs réalistes sur les lignes à retard;*
- *l'importance de l'impédance caractéristique d'une ligne de transmission;*
- *le théorème de la valeur finale et le théorème de la valeur initiale pour les transformées de Laplace; la transformée de Laplace d'un échelon;*
- *le passage d'une transmittance symbolique à la transmittance complexe (ou vice versa);*
- *le lien entre la réponse temporelle (indicielle dans ce cas) et le comportement fréquentiel d'un système;*
- *la construction des diagrammes de Bode pour des filtres à retard de phase ou avance de phase du premier ordre;*
- *l'effet d'un filtrage sur la densité spectrale d'un bruit.*

Parmi tous les livres traitant d'un ou plusieurs des points énumérés ci-dessus, on peut conseiller:

- *les manuels de terminale "Génie électronique", dont*
Physique appliquée, collection Mérat-Moreau (Nathan, 1994)
- *les manuels destinés aux BTS ou DUT, dont*
Électronique, tomes 1 et 2 Manneville et Esquieu (Dunod-Bordas, 1990)
Précis d'électronique, tomes 1 et 2 Azan (Bréal, 1993 et 1994)
- *des ouvrages universitaires*
Cours d'automatique, tome 1 Signaux et systèmes, Rivoire et Ferrier (Eyrolles, 1989)
Théorie des signaux et des systèmes, Picinbono (Dunod, 1989)
The Art of Electronics, Horowitz & Hill (Cambridge University Press, 1989)

DEUXIÈME PROBLÈME

ÉTUDE D'UN BANC DE MACHINES

PARTIE A

Remarques préliminaires : les calculs ne seront pas détaillés et, pour les questions nécessitant une interprétation, ne seront indiqués que des mots-clés attendus dans la réponse.

A.I. A.I.1. $E = k_1 \phi \Omega$

E : f.é.m. en volt (V),

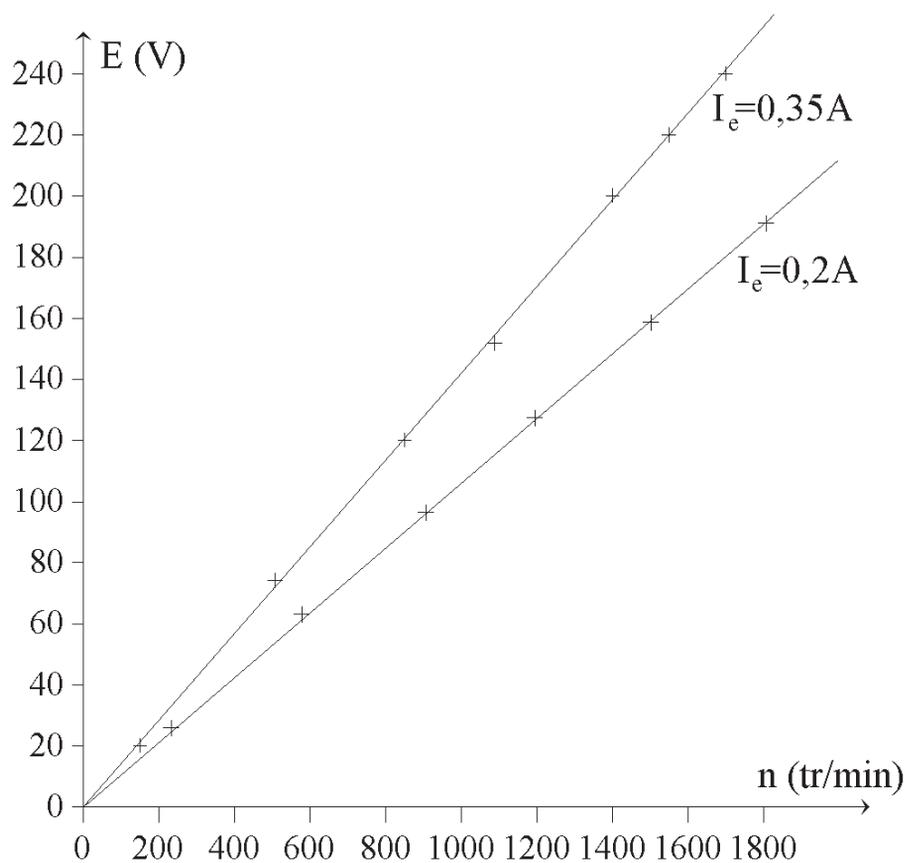
ϕ : flux sous un pôle en wéber (Wb),

Ω : vitesse angulaire de rotation en radian/seconde (rad/s).

A.I.2. A.I.2.1. A.I.2.1.1. Détermination de n : génératrice dynamométrique.

Détermination de E : essai à vide en moteur sous tension U variable, mesure de courant absorbé I_0 , $E = U - R_i I_0$ où R_i est la résistance d'induit.

A.I.2.1.2.



A.I.2.1.3. I_e est fixé, alors $\phi(I_e)$ est fixé. $\Omega = \frac{2\pi n}{60}$

$$\Rightarrow E = \frac{2\pi n}{60} \cdot k_1 \cdot \phi(I_e) \cdot n = K n$$

donc $E(n)$ est une droite pour un courant d'excitation constant.

A.I.2.1.4. La pente K de $E(n)$ dépend de I_e par le flux $\phi(I_e)$:

$$I_e = 0,35 \quad K(0,35) \approx 145 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{min} / \text{tr}$$

$$I_e = 0,20 \quad K(0,20) \approx 103 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{min} / \text{tr}$$

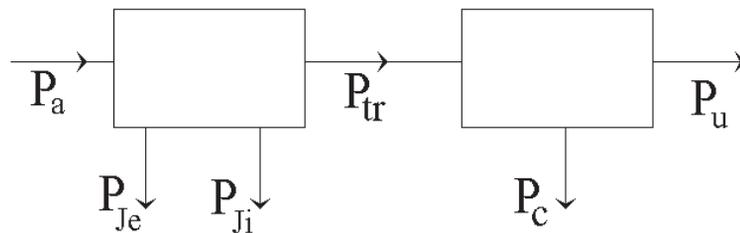
$$\frac{K(0,35)}{K(0,20)} = \frac{\phi(0,35)}{\phi(0,20)} = 1,4$$

Or le rapport des courants vaut 1,75, le flux n'est pas proportionnel au courant d'excitation.

A.I.2.2. $E(I_e)$ a l'allure de $B = f(H)$, E proportionnel à $\|\vec{B}\|$, H à I_e (théorème d'Ampère). Si I_e est faible, zone linéaire, si I_e est élevé, zone de saturation. On vérifie le résultat précédent, la saturation apparaissant vers $I_e = 0,3 \text{ A}$.

A.II. A.II.1. A.II.1.1. P_a est la puissance électrique absorbée totale, dans l'induit et dans l'inducteur.

P_{tr} est aussi souvent appelée puissance «électrique utile».



A.II.1.2. P_c représente les pertes autres que par effet Joule :

→ mécaniques. P_m dépend de la vitesse,

→ magnétiques. P_F est la somme des pertes par hystérésis et par courants de Foucault. P_F dépend de la fréquence de rotation et de la valeur maximale du champ magnétique. Ces pertes magnétiques sont dues essentiellement aux papillotements des lignes de champ.

A.II.2. A.II.2.1. La précision d'un appareil numérique est exprimée en fonction du calibre et/ou de la lecture. En l'absence de ces termes dans le sujet, la précision indiquée (0,5 %) pouvait être utilisée dans les deux sens. Par exemple :

– mesure : 512Ω ,

– erreur sur le dernier digit : 1Ω

– erreur due à la précision : $0,5 \cdot 10^{-2} \times 512 = 2,6 \Omega$.

$$R = (512 \pm 4) \Omega$$

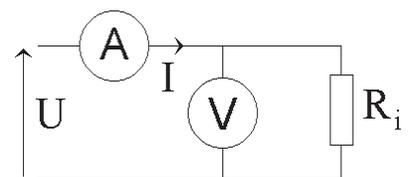
soit : 0,8 % de précision sur R .

A.II.2.2. A.II.2.2.1. – Méthode volt ampèremétrique.

– Montage courte dérivation.

– Voltmètre électronique, DC.

– Ampèremètre magnétoélectronique ou numérique, DC.

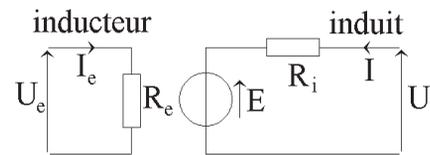


L'essai se fait en continu, à chaud, au courant nominal si possible.

A.II.2.2.2. La valeur $R_i = 4,6 \Omega$ est obtenue :

- soit en prenant la moyenne de six valeurs calculées avec les données du tableau,
- soit en traçant $U(I)$: R_i est alors la pente de la droite.

A.II.2.3. a) $P_a = U_e I_e + U I_i$
 b) $P_{Je} = R_e I_e^2 = U_e I_e$
 $P_{Ji} = R_i I_i^2$



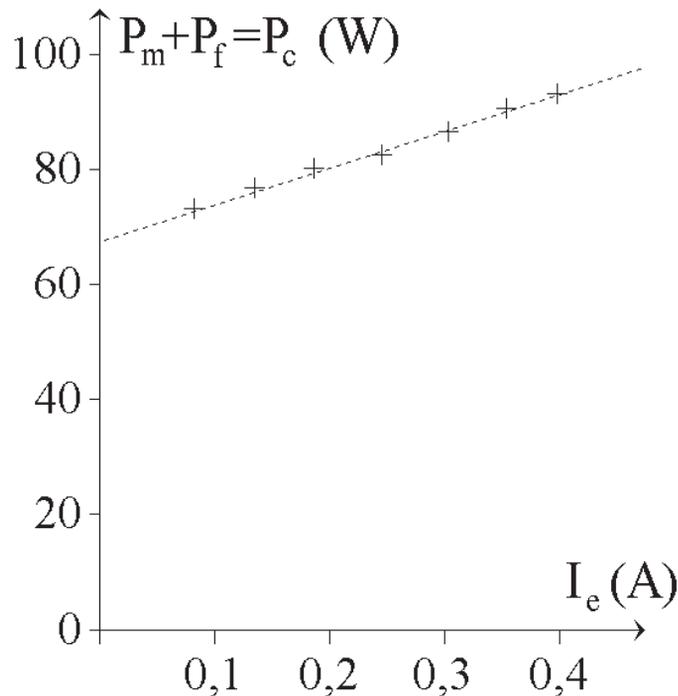
A.II.3. A.II.3.1. A vide $P_u = 0$ $n = 1500 \text{ tr/min.}$

$$\left. \begin{aligned} P_a &= P_{Je} + P_{Ji} + P_c + P_u \\ &= U_e I_e + U I_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_c = U I_i - R_i I_i^2$$

P_c peut être calculé à partir des mesures de U et I_i si R_i est connue.

A.II.3.2. On construit le tableau $P_c(I_e)$ à l'aide des données puis on trace $P_c(I_e)$:

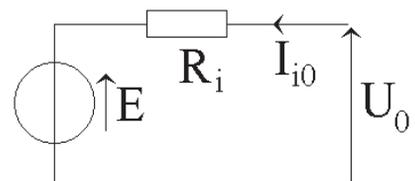
I_e (A)	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
P_c (W)	74,3	77,2	83,1	83,4	88,2	92,8	94,6



A.II.3.3. P_m est l'ordonnée à l'origine de la courbe $P_c(I_e)$ tracée à vitesse constante car les pertes dans le fer sont nulles pour I_e nul. $P_m = 68 \text{ W}$ pour une vitesse de 1500 tr/min.

A.III. A.III.1. A.III.1.1. A.III.1.1.1. $E = U_0 - R_i I_{i0}$.

$$E = 198,2 \text{ V.}$$



A.III.1.1.2. Alors $I_{e0} \approx 0,31 A$ ($I_{e0} = 0,31 A \Rightarrow E = 198 V$ sur le document 1 fourni par $n = 1500 \text{ tr/min}$).

$$\begin{aligned} \text{A.III.1.2 } P_a &= U_e I_e + U_0 I_{i0} \\ &= P_{Je} + P_{Ji} + P_c + P_u \Rightarrow P_u = U_0 I_{i0} - R_i I_{i0}^2 - P_c \end{aligned}$$

$P_c = 89 W$ pour $I_{e0} = 0,31 A$ (cf. A.II.3.2.) à 1500 tr/min .

Alors :

$$P_u = 506 W$$

$$\text{A.III.1.3. } M_u = \frac{P_u}{\Omega} = \frac{30 P_u}{\pi n_0} \quad M_u = 3,22 N.m$$

Pour un point de fonctionnement stable, $M_u = M_r$ ce qui valide la valeur donnée de M_r .

$$\text{A.III.2. A.III.2.1. } M_e = \frac{P_{tr}}{\Omega} = \frac{E I_i}{\Omega} = k_1 \phi(I_e) I_i$$

M_e est constant puisque I_e et I_i sont constants.

Déterminons la valeur de $k_1 \phi(I_e)$; d'après la courbe $E(I_e)$ document 1, à 1500 tr/min et pour $I_e = 0,31 A$.

$$\left. \begin{array}{l} E = 198 V \\ I_e = 0,31 A \\ n = 1500 \text{ tr/min} \end{array} \right\} \Rightarrow k_1 \phi(I_e) = \frac{198 \cdot 30}{\pi \cdot 1500} = 1,261$$

alors :

$$M_e = 3,78 Nm$$

$$\text{A.III.2.2. } \left. \begin{array}{l} E = U - R_i I_i \\ = k_1 \phi \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow \Omega = \frac{1}{k_1 \phi} (U - R_i I_i)$$

mais :

$$n = \frac{30 \Omega}{\pi}$$

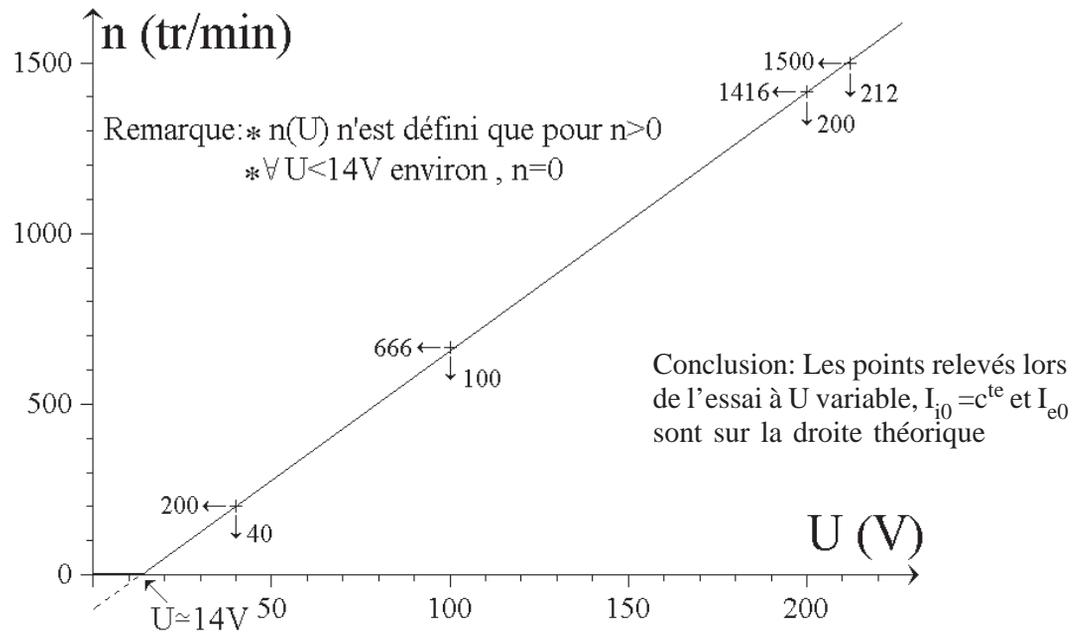
$$\Rightarrow n = \frac{30}{\pi k_1 \phi(I_e)} (U - R_i I_i) : n(u) \text{ est une droite de forme } aU + b$$

avec : $a = \frac{30}{\pi k_1 \phi(I_e)}$ et $b = -R_i I_i a$

$$a = 7,56 \text{ tr min}^{-1} \text{ v}^{-1}$$

$$b = -104,5 \text{ tr/min}$$

A.III.2.3. A.III.2.3.1. On trace $n(U)$ à l'aide des trois points proposés et d'un quatrième :
 $U = 212 \text{ V}$ pour $n = 1500 \text{ tr/min}$.



Document réponse 3 : Tracé de $n(U)$.

A.III.2.3.2. $n = 0 \Rightarrow E = 0$ donc $U = R_i I_{i0}$.

Application Numérique : $U = 13,8 \text{ V}$.

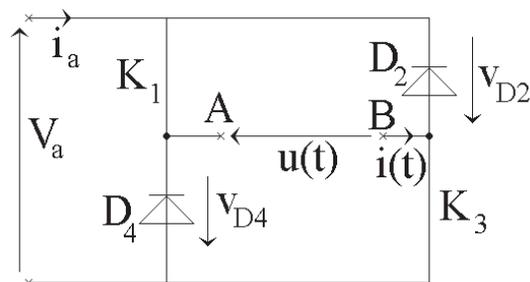
$$\text{Remarque : } n = 0 \Rightarrow aU + b = 0 \Rightarrow U = -\frac{b}{a}$$

PARTIE B

B.I. B.I.1. B.I.1.1. $\forall t \in [0, \alpha T]$, $K_{1com} = 1 \Rightarrow K_1$ passant, alors D_1 est bloquée. K_3 étant passant, $u(t) = V_a$. D_3 est aussi bloquée. Le schéma devient :

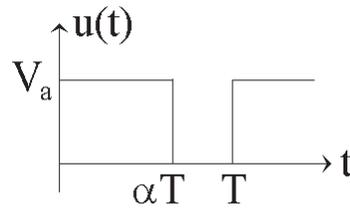
$$v_{D2} = -V_a \Rightarrow D_2 \text{ bloquée}$$

$$v_{D4} = -V_a \Rightarrow D_4 \text{ bloquée}$$



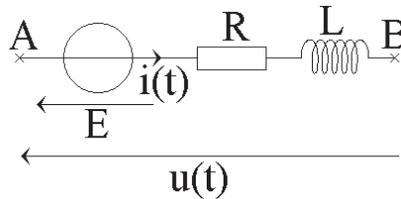
A $t = \alpha T$, K_1 est ouvert. La diode D_2 reste bloquée puisque K_3 reste fermé. D_4 devient passante, le montage est en phase de roue libre. $u(t) = 0$.

B.I.1.2.



$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \\ &= \frac{1}{T} [V_a - \alpha T] \end{aligned} \right\} \Rightarrow U = \alpha V_a$$

B.I.2. B.I.2.1. Le modèle entre A et B de la charge est :



$$u(t) = E + R i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = u(t) - E$$

B.I.2.2. B.I.2.2.1. On notera $\langle f(t) \rangle$ la valeur moyenne d'une grandeur variable. D'après ci-dessus :

$$\begin{aligned} \langle R i(t) \rangle + \left\langle L \frac{di(t)}{dt} \right\rangle &= \langle u(t) - E \rangle \\ &= \langle u(t) \rangle - E \end{aligned}$$

$$\text{or : } - \langle u(t) \rangle = U = \alpha V_a$$

$$- \langle R i(t) \rangle = RI$$

$$\begin{aligned} - \left\langle L \frac{di(t)}{dt} \right\rangle &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} L \frac{di(t)}{dt} dt \\ &= \frac{L}{T} [i(t_0+T) - i(t_0)]. \end{aligned}$$

Le courant est ininterrompu, donc $i(t_0+T) = i(t_0)$ et $\left\langle L \frac{di(t)}{dt} \right\rangle = 0$.

$$\Rightarrow RI = \alpha V_a - E$$

$$\text{soit : } I = \frac{1}{R} (\alpha V_a - E)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{B.I.2.2.2.} \quad I = 0,45 \text{ A} \quad \alpha = \frac{1}{V_a} [E + RI] \\ \text{Pour } I_e = 0,3 \text{ A, à } 1500 \text{ tr/min, } E = 194 \text{ V} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = 0,85$$

B.I.2.3. B.I.2.3.1. Par définition $i'(t) = i(t) \Rightarrow i(t) = i'(t) + I$.

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{di'(t)}{dt}$$

car : $\frac{dI}{dt} = 0$.

On obtient : $Ri'(t) + L \frac{di'(t)}{dt} + RI + E = u(t)$

or : $E + RI = \alpha V_a$

soit en définitive : $Ri'(t) + L \frac{di'(t)}{dt} = u(t) - \alpha V_a$.

B.I.2.3.2. • Étude sur l'intervalle $[0, \alpha T] : u(t) = V_a$

Pour simplifier l'écriture, on notera i' la variable.

$$Ri' + L \frac{di'}{dt} = V_a (1 - \alpha)$$

donc : $i' = I'_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_a}{R} (1 - \alpha)$

solution de l'équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants et second membre constant non nul.

$\tau = \frac{L}{R}$ est la constante de temps du circuit, I'_0 la constante à déterminer par les conditions initiales.

A $t = 0, i'(0) = I'_{\min}$ car sur cet intervalle, $u(t) > U$ donc $i(t)$ croît. Alors on obtient :

$$i'(t) = (1 - \alpha) \cdot \frac{V_a}{R} + \left[I'_{\min} - (1 - \alpha) \frac{V_a}{R} \right] e^{-\frac{t}{\tau}}$$

A l'instant $t = \alpha T, i'(\alpha T) = I'_{\max}$.

• Étude sur l'intervalle $[\alpha T, T] : u(t) = 0$

$$Ri' + L \frac{di'}{dt} = -\alpha V_a$$

donc : $i' = I'_1 e^{-\frac{t'}{\tau}} - \frac{\alpha V_a}{R}$

si on pose : $t' = t - \alpha T$.

$$i'(0) = I'_{\max}$$

$$\text{d'où : } i'(t') = -\frac{\alpha V_a}{R} + \left(I'_{\max} + \alpha \frac{V_a}{R} \right) e^{-\frac{t'}{\tau}}$$

soit, en fonction de t :

$$i'(t) = -\frac{\alpha V_a}{R} + \left(I'_{\max} + \alpha \frac{V_a}{R} \right) e^{-\frac{t-\alpha T}{\tau}}$$

B.I.2.3.3.

Si $\frac{t}{\tau}$ est petit devant 1, alors $e^{-\frac{t}{\tau}} \approx 1 - \frac{t}{\tau}$.

L'approximation est valable pour $\frac{t}{\tau} \leq 0,1$.

$$\forall t \in [0, \alpha T]$$

$$\begin{aligned} i'(t) &= (1-\alpha) \frac{V_a}{R} + \left[I'_{\min} - (1-\alpha) \frac{V_a}{R} \right] \cdot \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \\ &= I'_{\min} + \left[(1-\alpha) \frac{V_a}{R} - I'_{\min} \right] \frac{t}{\tau} \end{aligned}$$

$i'(t)$ est une droite de pente positive (I'_{\min} est négatif).

$$\forall t \in [\alpha T, T]$$

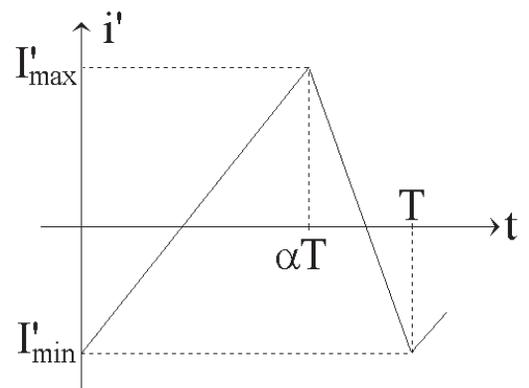
$$\begin{aligned} i'(t) &= -\alpha \frac{V_a}{R} + \left[I'_{\max} + \alpha \frac{V_a}{R} \right] \left(1 - \frac{t'}{\tau} \right) \\ &= I'_{\max} - \left(I'_{\max} + \alpha \frac{V_a}{R} \right) \frac{t'}{\tau} \end{aligned}$$

donc $i'(t')$ est une droite de pente négative ($I'_{\max} > 0$).

Conclusion : On retrouve donc bien l'allure proposée pour $i'(t)$ dans le texte.

B.I.2.3.4. a. $I' = \frac{1}{2} (I'_{\max} + I'_{\min})$.

b. $I' = \langle i'(t) \rangle$
 $= \langle i(t) - I \rangle$
 $= 0$



donc :

$$I'_{\max} = -I'_{\min}$$

c. $I'_{\max} = i'(\alpha T)$ sur l'intervalle $[0, \alpha T]$.

$$I'_{\max} = I'_{\min} + \left[(1 - \alpha) \frac{V_a}{R} - I'_{\min} \right] \frac{\alpha T}{\tau}$$

$$\Rightarrow I'_{\max} = \alpha (1 - \alpha) \frac{V_a T}{R\tau} \cdot \frac{1}{2 - \frac{\alpha T}{\tau}}$$

mais $\frac{\alpha T}{\tau}$ est certainement petit devant 2, d'où :

$$I'_{\max} \approx \frac{1}{2} \alpha (1 - \alpha) \frac{V_a T}{R\tau}$$

B.I.2.3.5. a. $\Delta I' = I'_{\max} - I'_{\min}$
 $= 2 I'_{\max}$

soit :
$$\Delta I' = \alpha (1 - \alpha) \frac{V_a T}{L}$$

puisque :
$$R\tau = R \cdot \frac{L}{R} = L$$

b. $\Delta I' = f(\alpha)$ est une parabole de sommet en $\alpha = 0,5$.

$$\frac{d(\Delta I')}{d\alpha} = \frac{V_a T}{L} [1 - 2\alpha]$$

donc nul pour $\alpha = 0,5$.

c. Alors :
$$\alpha (1 - \alpha) = \frac{1}{4}$$

et :
$$\Delta I'_{\max} = \frac{1}{4} \frac{V_a T}{L}$$

B.I.2.3.6. a. La conduction est ininterrompue si $i(t)$ reste positif ou, à la limite, nul.

$i(t) \geq 0 \Rightarrow I + i'(t) \geq 0$. Le cas le plus défavorable est en $t = 0$:
 $i'(0) = I'_{\min}$ d'où la condition ; $I \geq -I'_{\min}$ ou $I \geq I'_{\max}$. A la limite,
 lorsque l'ondulation $i'(t)$ est d'amplitude maximale donc pour $\alpha = 0,5$:

$$I \geq I'_{\max} = \frac{1}{2} \Delta I'_{\max}$$

La valeur limite de L est donc :

$$I \geq \frac{V_a T}{8 L} \Rightarrow L \geq \frac{V_a T}{8 I} : L_{\min} = \frac{V_a T}{8 L} \quad L_{\min} = 192 \text{ mH}$$

b.
$$\tau_{\min} = \frac{L_{\min}}{R} \quad \tau_{\min} = 38 \text{ ms}$$

or :
$$T = 3 \text{ ms}$$

d'où :
$$\frac{t}{\tau} < \frac{T}{\tau} = 78.10^{-3}$$

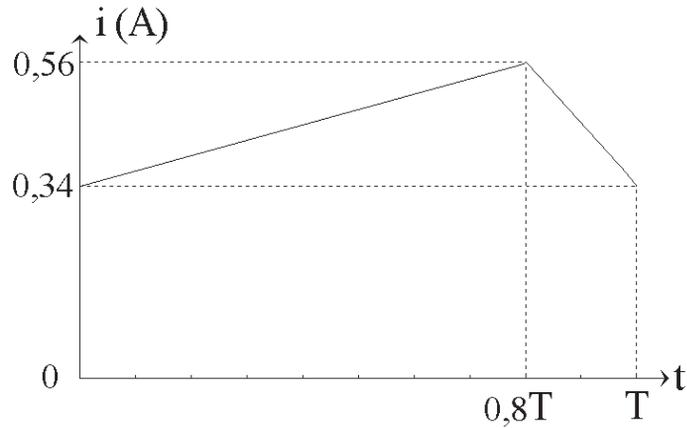
L'approximation $\frac{t}{\tau} \ll 1$ est valable sur tout l'intervalle.

B.I.3. B.I.3.1.

$$I_{\max} = I + I'_{\max} \quad I'_{\max} = \frac{1}{2} \Delta I' \quad \Delta I' = 0,22 \text{ A}$$

$$I_{\min} = I + I'_{\min} \quad I'_{\min} = -I'_{\max} \quad I = 0,45 \text{ A}$$

$$\Rightarrow I = 0,56 \text{ A} \quad I'_{\min} = 0,34 \text{ A}$$



B.I.3.2.

$$P_e = \langle E i(t) \rangle$$

$$= E \cdot I \quad P_e = 81,8 \text{ W}$$

B.I.3.3. $i_a(t) = i(t)$ sur $[0, \alpha T]$ quand K_1 est fermé.
 $i_a(t) = 0$ sur $[\alpha T, T]$ quand K_1 est ouvert.

$$P_a = \langle V_a i_a(t) \rangle$$

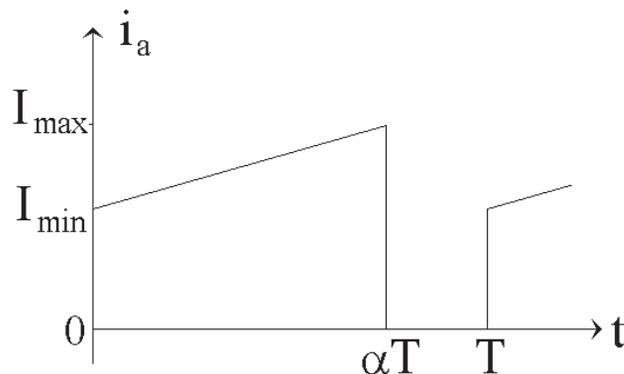
$$= V_a \cdot \langle i_a(t) \rangle$$

or :

$$\langle i_a(t) \rangle = \alpha I$$

donc :

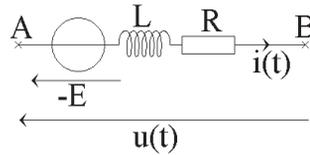
$$P_a = \alpha V_a I \quad ; \quad P_a = 82,8 \text{ W}$$



B.II. B.II.1. Pour inverser le sens de rotation du moteur, il faut, sans toucher à I_e , inverser le sens de parcours de $i(t)$ dans le moteur, donc inverser $u(t)$. Il suffit donc d'inverser les rôles de K_1 et K_2 ainsi que de K_3 et K_4 .

B.II.2. Avec cette nouvelle séquence de commande, $u(t) = -V_a$ sur $[0, \alpha T]$ et $u(t) = 0$ sur $[\alpha T, T]$ donc $U = -\alpha V_a$. Le modèle électrique entre A et B devient :

- $i(t) < 0$,
- E est négatif car le sens de rotation a changé.



$$u(t) = -E + R i(t) + L \frac{d i(t)}{dt} \Rightarrow RI - E = -\alpha V_a$$

et :

$$I = \frac{1}{R} [E - \alpha V_a] \quad I < 0, U < 0$$

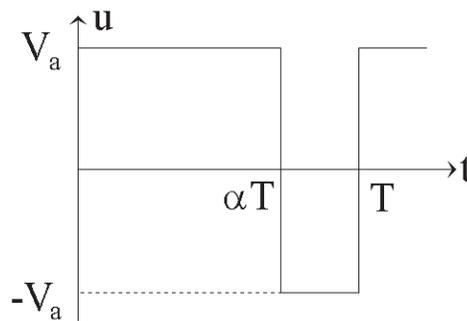
B.III. B.III.1. Sur $[0, \alpha T]$, on retrouve la commande initiale, $u(t) = V_a$. Sur $[\alpha T, T]$, le fonctionnement est symétrique (cf. B.II.1), $u(t) = -V_a$.

B.III.1.1.

$$U = \langle u(t) \rangle$$

$$= \frac{1}{T} [V_a \alpha T + (1 - \alpha) T \cdot (-V_a)]$$

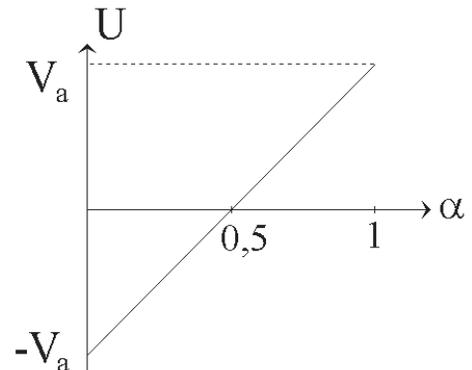
$$\Rightarrow U = (2\alpha - 1) V_a$$



B.III.1.2. $U(\alpha)$ est une droite :

On constate que :

- $U > 0$ si $\alpha > 0,5$,
- $U < 0$ si $\alpha < 0,5$,
- $U = 0$ si $\alpha = 0,5$.



B.III.1.3. $I_e = 0,3 \text{ A}$ $n = 1500 \text{ tr/min}$ $\Rightarrow |E| = 194 \text{ V}$ (document 1).

- $\alpha > 0,5$ $U > 0$ $I > 0$ $E > 0$

$$\left. \begin{aligned} U &= E + RI \\ &= (2\alpha - 1) V_a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{E + RI}{V_a} \right] \quad \alpha = 0,93$$

- $\alpha < 0,5$ $U < 0$ $I < 0$ $E < 0$

Avec la même expression :

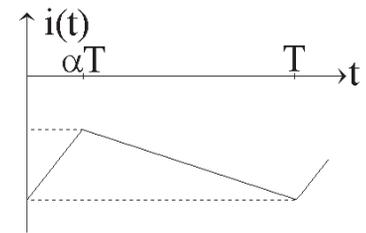
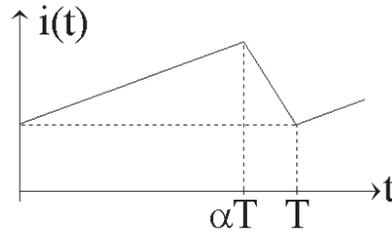
$$\alpha = 0,07.$$

Les deux valeurs de α sont symétriques par rapport à la valeur centrale $\alpha = 0,5$, ce qui était prévisible.

B.III.2. $\alpha > 0,5$

cf. B.I.3.1. $i(t) > 0$

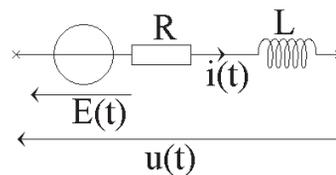
$\alpha < 0,5$ $i(t) < 0$



Attention : $i(t)$ croît quand $u(t) = V_a$, décroît quand $u(t) = -V_a$, donc les pentes sont positive sur $[0, \alpha T]$, négative sur $[\alpha T, T]$.

PARTIE C

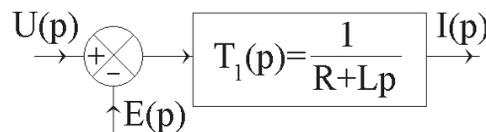
C.I. C.I.1. Le modèle électrique



conduit à :
$$u(t) = E(t) + Ri + L \frac{di}{dt}$$

soit :
$$U(p) = E(p) + R I(p) + Lp I(p)$$

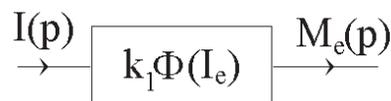
$$\Leftrightarrow I(p) = \frac{1}{R + Lp} [U(p) - E(p)]$$



C.I.2.
$$M_u(p) = M_e(p)$$

or :
$$M_e = \frac{E I_i}{\Omega} = k_1 \phi(I_e) \cdot I_i \quad (\text{cf. partie A})$$

donc en régime variable :
$$M_e(p) = k_1 \phi(I_e) I(p)$$



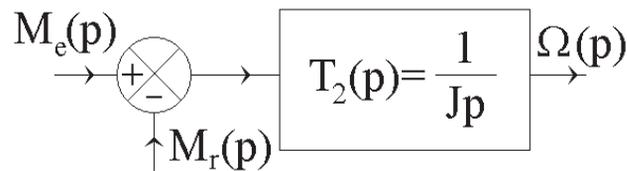
C.I.3. La relation fondamentale de la dynamique de rotation est :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = M_u - M_r$$

soit, si l'on néglige les frottements :

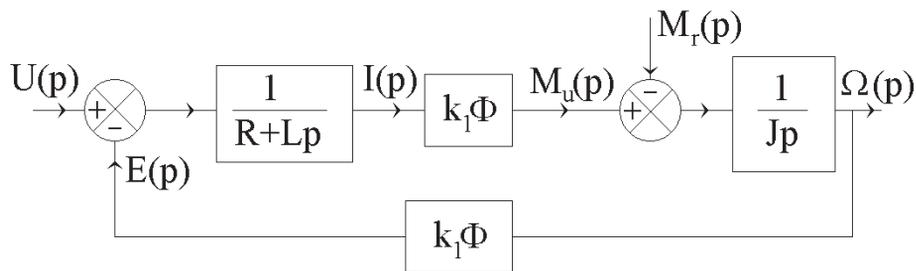
$$J \frac{d\Omega}{dt} = M_e - M_r \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad Jp \Omega(p) = M_e(p) - M_r(p)$$

Cette relation peut être symbolisée par :



C.I.4. Pour obtenir le schéma-bloc proposé sur le document 5, il faut exprimer $E(p)$ en fonction de $\Omega(p)$ pour la chaîne de retour.

$E = k_1 \phi(I_e) \Omega \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad E(p) = k_1 \phi(I_e) \Omega(p)$ pour le régime variable. On obtient alors :



C.II. C.II.1.

$$I_e = 0,37 \text{ A}$$

alors :

$$E = 214 \text{ V} \quad \text{à} \quad n = 1500 \text{ tr/min}$$

(document 1)

$$k_1 \phi(I_e) = \frac{E}{\Omega} = \frac{30 E}{\pi n}$$

$$k_1 \phi(0,37) = 1,36 \text{ V} \cdot \text{tr}^{-1} \text{ min}$$

C.II.2. C.II.2.1. a. $I = 0$ dans l'induit, alors $M_e = 0$.

b. Si l'on néglige les frottements visqueux liés à Ω^2 , les pertes mécaniques P_m sont proportionnelles à Ω . Le moment M_F du couple de pertes mécaniques est alors constant :

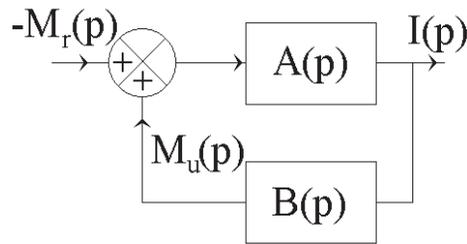
$$M_F = \frac{P_m}{\Omega}$$

C.II.2.2. $J \frac{d\Omega}{dt} = M_u - M_r$ mais M_r est nul (moteur à vide) et $M_u = M_e - M_F$ puisqu'il n'y a pas de pertes dans le fer ($I_e = 0$). M_e est nul (cf. a.) d'où :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = -M_F \quad \Rightarrow \quad \Omega(t) - \Omega(t_0) = -\frac{M_F}{J}(t - t_0)$$

La vitesse décroît linéairement en fonction du temps.

de la forme générale :



On sait alors que :

$$\frac{I(p)}{-M_r(p)} = \frac{A(p)}{1 - A(p)B(p)}$$

donc :

$$H(p) = \frac{I(p)}{M_r(p)} = -\frac{A(p)}{1 - A(p)B(p)}$$

avec :

$$\begin{cases} A(p) = -k_1 \phi T_1(p) T_2(p) \\ B(p) = k_1 \phi \end{cases}$$

$$H(p) = \frac{k_1 \phi T_1(p) T_2(p)}{1 + k_1^2 \phi^2 T_1(p) T_2(p)}$$

or :

$$T_1(p) = \frac{1}{R + Lp} \quad \text{et} \quad T_2(p) = \frac{1}{Jp}$$

$$= \frac{k_1 \phi}{JLp^2 + RJP + k_1^2 \phi^2}$$

C.III.2. $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot I(p)$ [Théorème de la valeur finale]

$$= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot H(p) \cdot M_r(p)$$

or :

$$M_r(p) = \frac{M_o}{P}$$

et :

$$M_o = 1,4 \text{ Nm}$$

puisque le couple subit une discontinuité en passant brutalement de 1,8 N à 3,2 Nm.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = M_o H(o)$$

$$= \frac{M_o}{k_1 \phi}$$

car :

$$H(o) = \frac{1}{k_1 \phi}$$

Sur le document n° 3, on constate que $i(t)$ varie de 1,5 A à $t = 0$ à la valeur limite 2,5 A, donc, si l'on s'en tient aux variations : $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 1 \text{ A}$ valeur notée ΔI .

On en déduit $k_1 \phi$:

$$k_1 \phi = \frac{M_o}{\Delta I}$$

Application Numérique :

$$k_1 \phi = 1,4 \text{ Nm} \cdot \text{A}^{-1}$$

Cette valeur correspond à celle déterminée au § C.II.1.

C.III.3. C.III.3.1. a.

$$M_r(p) = \frac{M_o}{p} \quad \text{avec : } M_o = 1,4 \text{ Nm}$$

$$b. \quad I(p) = H(p) \cdot M_r(p)$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$= \frac{k_1 \phi M_r}{JL} \frac{1}{p \left(p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{k_1^2 \phi^2}{JL} \right)}$$

soit, après décomposition en éléments simple :

$$I(p) = \frac{k_1 \phi M_r}{JL} \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p - p_1} + \frac{C}{p - p_2} \right)$$

où p_1 et p_2 sont les racines du trinôme du second degré au dénominateur.

C.III.3.2. Avec les valeurs numériques proposées :

$$\frac{R}{L} = 25 \text{ S.I.}$$

$$\frac{k_1^2 \phi^2}{JL} = 44,55$$

p_1 et p_2 sont donc les solutions de $p^2 + 25 p + 44,55 = 0$ pour lequel le discriminant Δ est positif : p_1 et p_2 sont réelles, négatives.

$$p_1 = - 1,93 \quad p_2 = - 23,07$$

Les pôles de $I(p)$ sont donc réels négatifs (p_1, p_2) ou nuls ($p = 0$).

C.III.3.3. $i(t)$ se comporte comme un deuxième ordre apériodique, ce que l'on constate sur le document n° 3 où sont placés les points expérimentaux.

Globalement, la simulation de $i(t)$ pour plusieurs valeurs de L , les autres paramètres restant constants, est conforme au relevé expérimental. $L = 0,2 \text{ H}$ conduit à une courbe proche de $i(t)$ réel, ce qui valide le modèle et les valeurs déterminées des paramètres.

C.A.P.E.S
(Concours Interne)

SECTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE
PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition de physique - Session : 1997

A - Mesure du pouvoir calorifique d'un combustible avec un thermomètre à affichage numérique

A.I - Mesure du pouvoir calorifique supérieur à volume constant d'un combustible

A.I.1) La réaction ayant lieu à volume constant, la quantité de chaleur Q dégagée lors la combustion représente la variation de l'énergie interne ΔU de la réaction. $\Delta U = Q$

A.I.2) Le calorimètre étant adiabatique, il n'y a pas d'échange de chaleur avec l'extérieur : $\Sigma Q = 0$
 $Q + C(t - t_0) = 0$
 $Q = - C(t - t_0)$

A.I.3) Pouvoir calorifique supérieur P à volume constant : quantité de chaleur dégagée par la combustion complète de 1 kg (ou de 1 g) de combustible solide ou liquide ou de 1 m³ de combustible gazeux, le combustible et le comburant étant pris à une température de référence (0°C ou 25 °C) et les produits de combustion ramenés à la même température et donc l'eau est condensée dans l'état final.

A la différence de la chaleur de combustion, le pouvoir calorifique P est une grandeur positive, car elle est définie par rapport à l'utilisateur.

$$P = - Q/m$$

$$A.I.4) Q = - C(t - t_0) = - 1620 (27,3 - 16,1) = - 18 144 \text{ J} = - 18,14 \text{ kJ}$$

$$P = - Q/m = 51,84 \text{ kJ.g}^{-1}$$

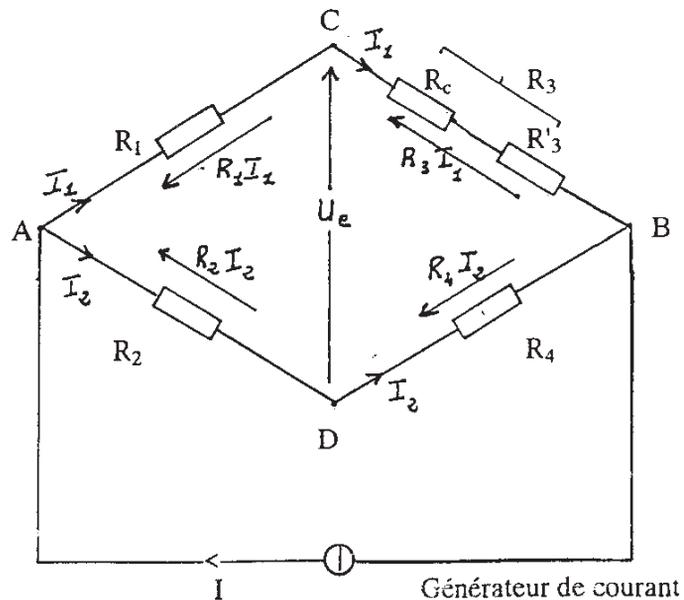
A.II - Principe d'un thermomètre à affichage numérique

A.II.1) Courants traversant les différentes résistances et chutes de tension aux bornes de ces résistances.

$$R_1 = R_2 = R_4 = 1,00 \text{ k}\Omega$$

$$R'_3 = \text{résistance variable}$$

$$R_3 = R'_3 + R_c$$



A.II.2) Différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B$

$$U_{AB} = (R_1 + R_3) I_1$$

$$U_{AB} = (R_2 + R_4) I_2$$

A.II.3) Différence de potentiel $U_e = V_C - V_D$ en fonction de I , R_1 , R_2 , R_3 et R_4

$$U_e = R_2 I_2 - R_1 I_1 = R_3 I_3 - R_4 I_2$$

Résolution du système à 2 inconnues pour connaître I_1 et I_2 en fonction de I , R_1 , R_2 , R_3 et R_4

$$(R_1 + R_3) I_1 = (R_2 + R_4) I_2$$

$$I_1 + I_2 = I$$

$$I_1 = [(R_2 + R_4)/\Sigma R] I$$

$$I_2 = [(R_1 + R_3)/\Sigma R] I$$

$$U_e = [(R_2 R_3 - R_1 R_4)/\Sigma R] I$$

A.II.4) Le pont est équilibré à $t = 0,0^\circ\text{C}$ si $U_e = 0 \rightarrow R_2 R_3 = R_1 R_4$

A $t = 0,0^\circ\text{C}$, $R_c = 1,00 \cdot 10^2 \Omega = 0,1 \text{ k}\Omega$

$$R_3 = R_1 R_4 / R_2 = 1,00 \text{ k}\Omega$$

$$R'_3 = R_3 - R_c = 0,900 \text{ k}\Omega$$

A.II.5) Variation de R_c et de U_e en fonction de la température t entre 0°C et 50°C

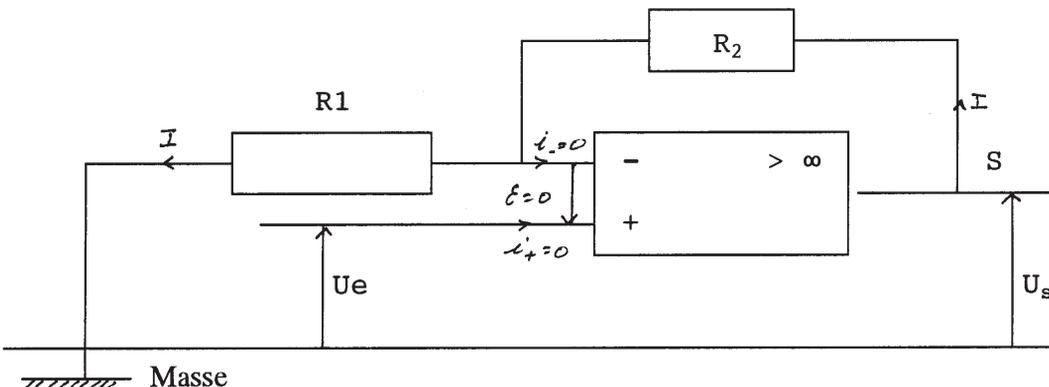
Sachant que $R_{c(\text{k}\Omega)} = R_{c0}(1 + \alpha t) = 0,100 (1 + 4 \cdot 10^{-3}t)$, on en déduit : $U_{e(\text{mV})} = 10^{-4}t/(1 + 10^{-4}t)$

$U_{e(\text{mV})}$ ne varie donc pas linéairement en fonction de la température t .

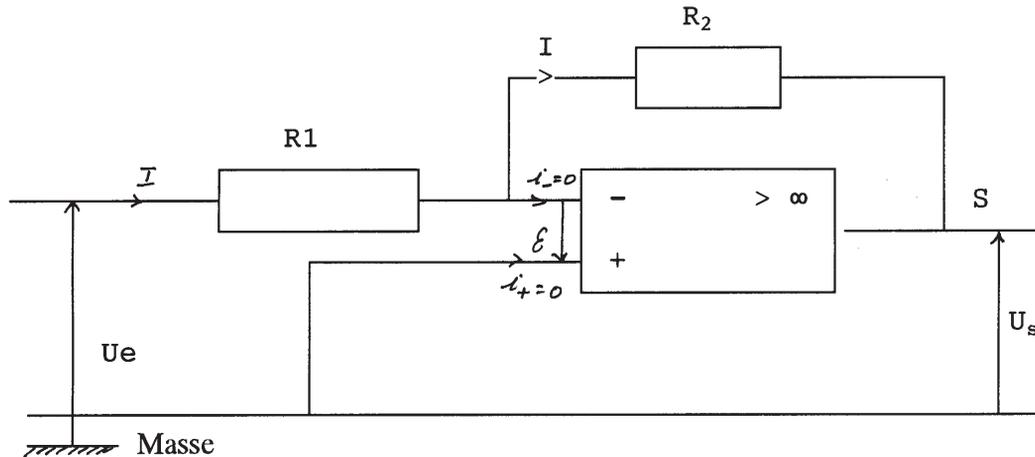
$t(^{\circ}\text{C})$	$R_{c(\text{k}\Omega)}$	$R_3(\text{k}\Omega)$	$U_{e(\text{mV})}$
0,0	0,100	1,000	0,00
10,0	0,104	1,004	1,00
20,0	0,108	1,008	2,00
25,0	0,110	1,010	2,49
30,0	0,112	1,012	2,99
40,0	0,116	1,016	3,98
50,0	0,120	1,020	4,97

A.II.6) Le signal délivré U_e étant faible, il est amplifié et linéarisé.

a) Montage amplificateur non inverseur : $A = U_s/U_e = 1 + R_2/R_1$



Montage amplificateur inverseur : $A = U_s/U_e = - R_2/R_1$



b) Après amplification et mise en forme, on obtient :

$$\begin{array}{lll} U_s = 1,00 \text{ V} & \text{si} & t = 0,0^\circ\text{C} \\ U_s = 5,00 \text{ V} & \text{si} & t = 50,0^\circ\text{C} \end{array}$$

$$\text{Soit : } t = 12,5 (U_s - 1)$$

A.II.7) a) Dans les systèmes informatiques actuels, le circuit de base est la bascule à transistors ; sa sortie ne peut se trouver que dans 2 états par rapport à la masse :

$$\begin{array}{ll} U_s = 5 \text{ V} & \text{Etat logique 1} \\ U_s = 0 \text{ V} & \text{Etat logique 0} \end{array}$$

Une telle bascule ne peut donc fournir comme information que les chiffres 1 ou 0 (Binary digit ou bit).

Le CAN peut distinguer des valeurs comprises entre 0 et 1111 1111, c'est à dire entre 0 et 255, soit 256 valeurs.

$$\text{b) } \Delta U_s = 5/256 = 1,95 \cdot 10^{-2} \text{ V, soit } 19,5 \text{ mV}$$

$$\text{c) Si : } t = 12,5 (U_s - 1), \text{ alors : } \Delta t = 12,5 \Delta U_s \\ \Delta t = 0,244^\circ\text{C} \approx 0,25^\circ\text{C}$$

d) Précision absolue sur le pouvoir calorifique supérieur P

$$\Delta P = C (\Delta t + \Delta t_0)/m \\ \Delta P = 2 \, 260 \text{ J.g}^{-1}$$

Précision relative sur le pouvoir calorifique supérieur P

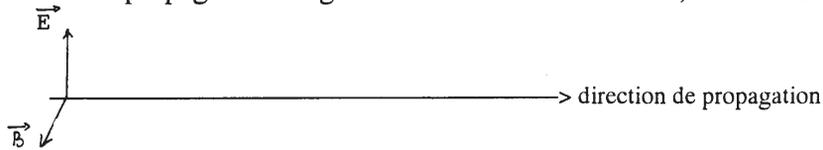
$$\Delta P/P = C (\Delta t + \Delta t_0) / C (t - t_0) = (\Delta t + \Delta t_0) / (t - t_0) \\ \Delta P/P = 0,5/11,2 = 4,5 \%$$

e) Pour améliorer ce résultat, on pourrait :

- Utiliser un CAN 12 ou 16 bits
- Utiliser une sonde de température étalonnée sur une plage plus étroite

Partie B - Spectrophotomètre d'absorption**B.I - Lumière et onde**

B.I.1) Caractéristiques d'une onde lumineuse se propageant dans le vide : onde électromagnétique transversale se propageant en ligne droite à la célérité : $c \approx 2,998 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$



B.I.2) Dualité onde - particule : selon la physique classique, un électron est une particule et la lumière une onde électromagnétique. La mécanique quantique fait disparaître cette distinction et affirme que toute entité, comme les électrons ou la lumière, possède à la fois une nature ondulatoire et une nature corpusculaire. L'aspect prédominant sera déterminé par le genre d'interaction que l'onde ou la particule aura avec la matière. Les concepts d'onde et de particule ne sont valables qu'en tant qu'analogie et ne sont en réalité que des représentations abstraites rendues concrètes à l'aide de modèles connus à notre échelle.

Exemple : la longueur d'onde d'un électron est relié à sa masse m et à sa vitesse v par l'équation : $mv = h/\lambda$; il est possible d'obtenir des interférences avec des électrons ou d'étudier la diffraction des électrons par un cristal.

Energie transportée par une onde lumineuse : $E = hv = hc/\lambda$ $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

Nature ondulatoire de la lumière : interférences lumineuses, diffraction

Nature corpusculaire de la lumière : effet photoélectrique, effet Compton

Si Max Planck fut le premier, en 1900, à avoir l'intuition que la lumière possédait des propriétés corpusculaires, ce fut Albert Einstein qui proposa en 1905 l'idée que la lumière était composée de photons. Il reçut, en 1921, le prix Nobel pour avoir expliqué l'effet photoélectrique.

B.I.3) Le spectre visible se situe entre 400nm (bleu) et 700 nm(rouge).

B.I.4) La lampe à incandescence à filament de tungstène émet une lumière polychromatique :

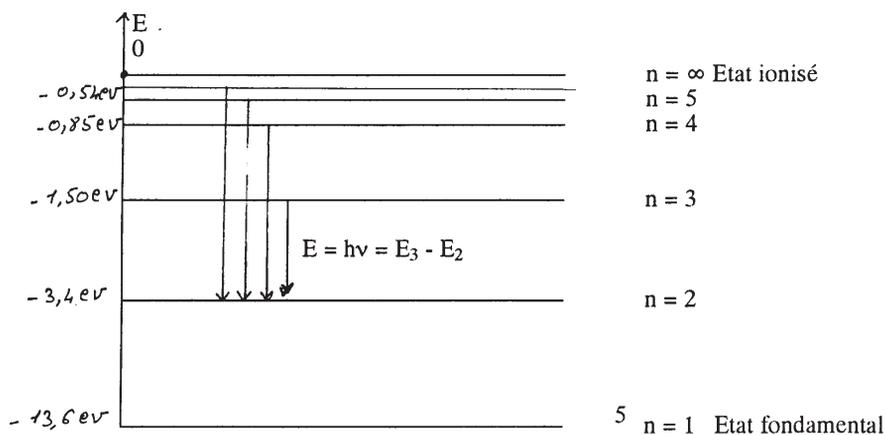
Après dispersion de la lumière (prisme ou réseau par exemple), on observe un spectre d'émission continu.

On utilise le tungstène car son point de fusion est élevé : $t_f = 3410 \text{ }^\circ\text{C}$. Plus la température d'un corps est élevée, plus il émet dans le visible : loi de Wien : $\lambda_m T = \text{constante}$; d'autre part, d'après la loi de Stefan, le flux énergétique est proportionnel à T^4 .

B.I.5) Avec une lampe à vapeur d'hydrogène atomique, on observe dans le visible un spectre d'émission discontinu formé de 4 raies : spectre de Balmer.

Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont quantifiés : $E_n = -13,6/n^2 \text{ (eV)}$

Si on excite un atome, ses électrons ne peuvent prendre que des énergies bien déterminées ; l'atome tend à revenir dans son état fondamental en émettant un photon d'énergie : $E = E_i - E_f$



B.II - Réseau

B.II.1) Fabrication d'un réseau : on construit les réseaux en gravant des sillons parallèles sur une lame de verre (ou de métal pour les réseaux à réflexion) à l'aide d'une pointe de diamant (ou par laser) dont le mouvement est contrôlé automatiquement. Lorsque le réseau original a été construit, on peut en obtenir des copies en formant sur le réseau une pellicule de collodion, qu'on détache après séchage et que l'on colle sur un support adéquat. Ce sont les Anglais les grands spécialistes de cette technique.

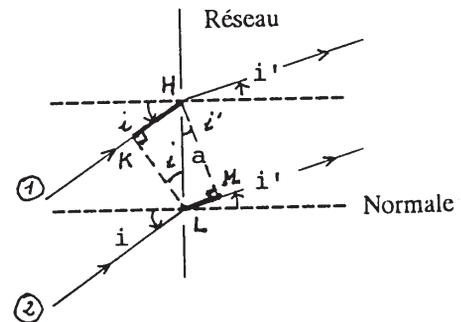
Autre procédé : microphotographie

B.II.2) Des rayons lumineux arrivant sur le réseau en faisant un angle i avec la normale au réseau peuvent sortir du réseau dans une direction i' différente de i à cause du phénomène de diffraction par un obstacle de largeur du même ordre de grandeur que la longueur d'onde.
Aucun calcul n'est demandé.

B.II.3) Les rayons 1 et 2 peuvent interférer de façon constructive si la différence de marche entre les 2 rayons est un nombre entier de longueur d'onde : $\delta = k\lambda$
Aucun calcul n'est demandé.

B.II.4) Différence de marche entre les rayons 1 et 2

$$\delta = HK - LM = HL \sin i - HL \sin i' = a (\sin i - \sin i')$$



B.II.5) Il y aura maximum de lumière dans la direction i' s'il y a interférences constructives : $\delta = k\lambda$

$$\delta = k\lambda = a (\sin i - \sin i')$$

En posant : $a = 1/n$, n étant le nombre de traits par unité de longueur, on en déduit :
 $\sin i - \sin i' = k n \lambda$

k est un entier positif, négatif ou nul et les angles i et i' sont comptés positivement dans le sens trigonométrique par rapport à la normale au réseau.

B.III - Etude du monochromateur

B.III.1) L'image F_1 de F_0 par rapport au miroir est symétrique de F_0 par rapport au miroir.
 F_1 doit être correctement tracé.

B.III.2) Pour que les rayons émergents de la lentille L_1 forment un faisceau de lumière parallèle, il faut que F_1 se trouve au foyer objet de la lentille L_1 de distance focale $1/C_1 = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$.
Donc : $d(F_1O_1) = 0,1 \text{ m}$

B.III.3) Si $i' = 0$ pour $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$ et $k = 1$ $\sin i_0 = kn\lambda_0$ $i_0 = 33,36^\circ$

$$i_0 + 2\alpha_0 = 90 \quad \alpha_0 = (90 - i_0)/2 = 28,32^\circ$$

B.III.4) i_0 et α_0 gardant les valeurs précédemment trouvées et si $\lambda_1 = 530 \text{ nm}$
En appliquant la formule générale des réseaux :

$$\begin{aligned} \sin i' - \sin i_0 &= kn\lambda \\ \sin i' &= \sin i_0 + kn\lambda \quad i' = 1,14^\circ \end{aligned}$$

Position de l'image correspondant à $\lambda_1 = 530 \text{ nm}$ dans le plan focal de L_2 :
 $F_2F'_2 = O_2F'_2 \tan i' = 0,1 \tan 1,14 = 1,99 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 2,0 \text{ mm}$

B.III.5) Pour que sortent par F_2 les radiations de longueur d'onde $\lambda_1 = 530 \text{ nm}$, il faut que $i' = 0$

$$\sin i_1 = kn\lambda_1 \quad i_1 = 32,00^\circ$$

$$\alpha_1 = (90 - i_1)/2 = 29,00^\circ$$

$$\beta = \alpha_0 - \alpha_1 = -0,68^\circ$$

B.III.6) Résolution du monochromateur

Les angles étant très faibles : $\tan i' \approx i' \approx 1/OF'_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$

En dérivant : $\sin i = kn\lambda$, on obtient : $\Delta i' \approx kn\Delta\lambda$

$$\Delta\lambda = \Delta i'/kn = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 2 \text{ nm}$$

B.IV - Etude du photomultiplicateur

B.IV.1) On suppose que la vitesse des électrons émis au niveau d'une dynode est nulle. Si la différence de potentiel entre 2 dynodes est $U = 150 \text{ V}$, l'énergie d'un électron arrivant sur la dynode suivante est $E_c = 150 \text{ eV}$. En se reportant à la figure B.5, il suffit de lire que le taux moyen d'émission secondaire est : $\delta = 5$

B.IV.2) Si un électron frappe une dynode, $\eta\delta$ sont émis.

$$\text{Amplification du photomultiplicateur : } A = (\eta\delta)^N = 5,5 \cdot 10^5$$

B.IV.3) La sensibilité s_p de la photocathode est : $s_p = 0,1 \text{ mA} \cdot \text{W}^{-1}$

$$s_p = I_0/P$$

$$I_a = A I_0 = A s_p P = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ mA}$$

Tension aux bornes de la résistance de charge R_c : $U = R_c I = 1,10 \text{ V}$

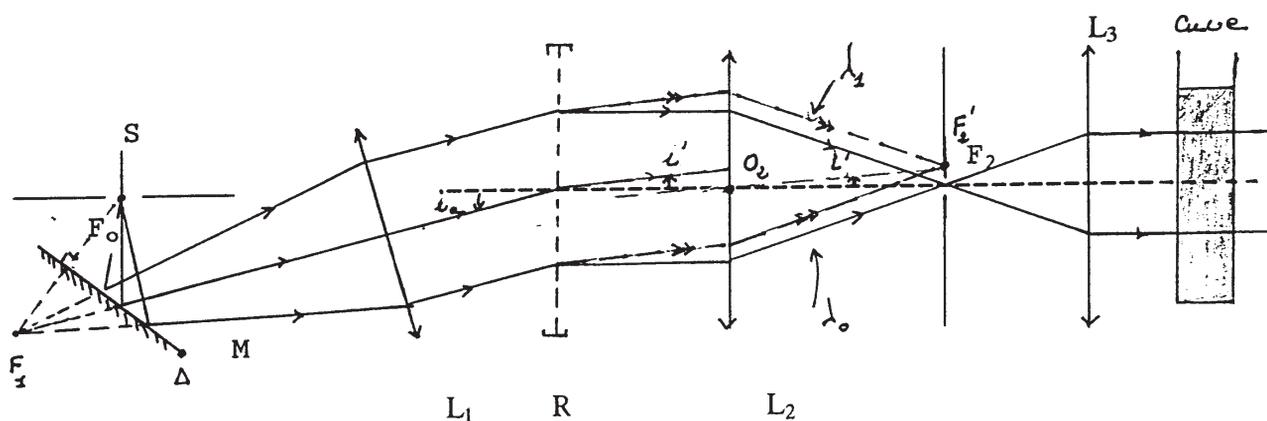
B.V - Absorbance - Loi de Beer-Lambert

B.V.1)

a) Sur le schéma de la figure B.3, il faut placer la cuve après la lentille L_3 .

b) Il faut faire le "blanc" avec une cuve remplie d'eau car il faut soustraire l'absorbance du solvant pour ne mesurer que l'absorbance du soluté car la loi de Beer-Lambert est une loi additive.

B.V.2) Concentration c de la solution inconnue : $c = (A/A_0)c_0 = 5,85 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$



Partie C - Becquerel et la radioactivité

C.1) d signifie densité

$d = \text{masse d'un certain volume d'uranium} / \text{masse du même volume d'eau}$
masse d'un kg d'uranium = 19 kg

C.2) $^{235}_{92}\text{U}$ et $^{238}_{92}\text{U}$ sont des isotopes : ils ont même nombre de charge $Z = 92$, mais un nombre de masse A différent. Le noyau d'uranium contient 92 protons, mais 143 neutrons pour l'uranium 235 et 146 neutrons pour l'uranium 238.
L'uranium naturel ne contient que 0,7 % d'uranium 235, le reste étant de l'uranium 238.

C.3) Différents types de radioactivité naturelle mis en évidence par Becquerel

Désintégration α

Une particule α est un noyau d'hélium chargé positivement ; rayonnement très rapidement absorbé par la matière ; trajectoire de l'ordre du μm .

Désintégration β^-

Emission d'un électron chargé négativement ; de masse plus faible de le noyau d'hélium , l'électron est moins rapidement absorbé par la matière.

Rayonnement γ

Photons de très courte longueur d'onde ($\approx 0,01 \text{ nm}$) provenant de la désexcitation du noyau.

Faisceau peu atténué dans la matière : $\Phi = \Phi_0 \exp(-\mu x)$; μ , coefficient d'atténuation, dépend de l'énergie des photons γ .

C.4) $1 \text{ Bq} = 1 \text{ désintégration par seconde}$

C.5) Pour produire des rayons X, on peut bombarder une surface métallique par les électrons : (tube de Coolidge par exemple).

- a) Les électrons des couches profondes des atomes sont éjectés ; lors du réarrangement des couches électroniques, il y a émission de rayons X. Observation d'un spectre de raies.
- b) On observe également un spectre continu dû au rayonnement de freinage.

Les rayons X furent découverts par Roentgen en 1895.

C.6) Rayons γ = désexcitation du noyau

Rayons X = réarrangement des couches électroniques

Ces 2 rayonnements n'ont pas la même origine, mais ont des propriétés communes car ces sont des radiations électromagnétiques de longueur d'onde voisine.

C.7) Principe d'une centrale nucléaire à uranium enrichi : fission des noyaux d'uranium 235 par des neutrons lents.

C.8) Quelques physiciens qui ont étudié la physique des particules ou la physique nucléaire :

Pierre et Marie Curie ; Bohr ; Rutherford ; Schroedinger ; Irène et Frédéric Joliot-Curie ; Fermi ; Heisenberg ; Geiger et Muller ; Charpak ; ...

C.A.P.E.S

(Concours Interne)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

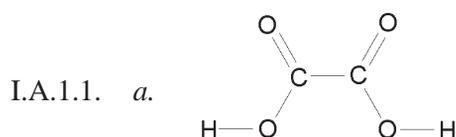
Composition de chimie - Session : 1997

PARTIE I

ÉTUDE DE QUELQUES RÉACTIONS UTILISANT L'ACIDE OXALIQUE

I.A. Dosage d'une solution aqueuse S obtenue en mélangeant de l'acide oxalique $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ et de l'oxalate de sodium $\text{Na}_2\text{C}_2\text{O}_4$.

I.A.1. L'acide oxalique.

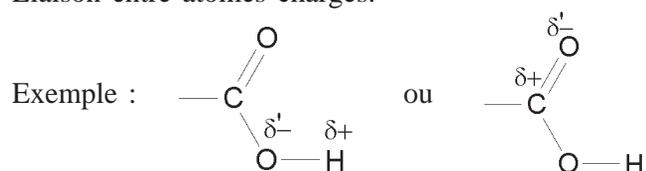


b. Acide éthane dioïque.

I.A.1.2. 100 mL de solution renferme $5 \cdot 10^{-3}$ mol d'acide dont $M = 126 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

→ pesée de $m = 0,63 \text{ g}$ de cristaux (balance monoplateau à $0,01 \text{ g}$) puis dissolution dans l'eau distillée d'une fiole jaugée de 100 mL et ajustement au trait de repère.

I.A.1.3. Liaison entre atomes chargés.

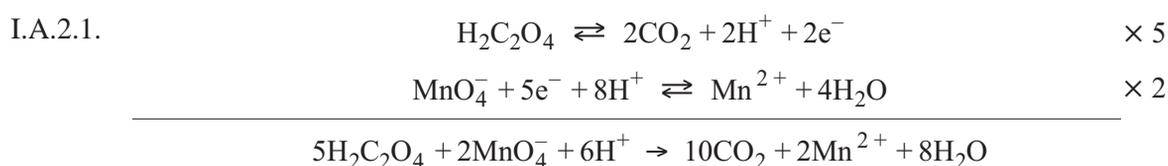


I.A.1.4. $\text{H} - \text{COOH}$: molécule polaire, soluble dans l'eau.

$\text{HOOC} - \text{COOH}$: molécule globalement apolaire, moins soluble dans l'eau.

I.A.1.5. L'effet électroattracteur du groupement $-\text{COOH}$ stabilise la base conjuguée $\text{HOOC} - \text{COO}^\ominus$, donc accroît l'acidité.

I.A.2. Dosage d'oxydo-réduction de la solution S.



I.A.2.2. a. Pour accélérer la réaction.

Persistance de la couleur rose de l'ion MnO_4^- .

b. La réaction consomme des ions H^+ et il faut empêcher la formation de MnO_2 marron.

c. L'anion Cl^- est oxydé par l'ion MnO_4^- ($\rightarrow \text{Cl}_2$).

$$2 v_{\text{red}} \cdot c_{\text{red}} = 5 v_{\text{ox}} \cdot c_{\text{ox}} \rightarrow c_{\text{red}} = \frac{5}{2} \frac{14,4 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{10} = 0,144 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

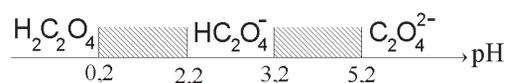
$$c_1 = 0,144 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

I.A.3. Dosage pH-métrique de l'acide oxalique de la solution S.

I.A.3.1. Électrode de mesure : électrode de verre.

Électrode de référence : électrode au calomel saturé (par exemple).

I.A.3.2.



a. $\text{pH} = 2,8 \rightarrow \text{HC}_2\text{O}_4^-$ prédomine.

b. $\text{pH} \approx 8$ à $9 \rightarrow \text{C}_2\text{O}_4^{2-}$ prédomine.

I.A.3.3. Au cours du mélange : $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4 + \text{C}_2\text{O}_4^{2-} \rightleftharpoons 2\text{HC}_2\text{O}_4^-$.

Réaction de dosage : $\text{HC}_2\text{O}_4^- + \text{OH}^- \rightleftharpoons \text{C}_2\text{O}_4^{2-} + \text{H}_2\text{O}$ (essentiellement).

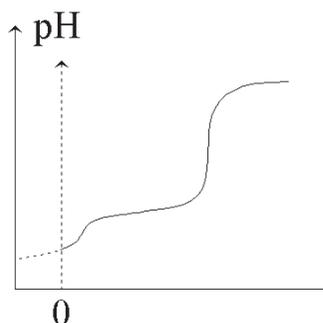
Tout se passe comme si NaOH neutralisait les ions H^+ issus de $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$.

$$2 v_a c_a = v_b c_b \rightarrow c_a = c_2 = \frac{15,5 \cdot 0,1}{2 \times 10} = 0,0775 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

puis

$$c_3 = 0,065 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

I.A.3.4. a. $\Delta(\text{pK}_a) = 3 \rightarrow$ premier saut de pH peu marqué. D'autre part, il y a peu de $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ dans la solution S (c'est surtout le dosage de HC_2O_4^-).



b. Phénolphtaléine.

c. A l'équivalence, le pH est celui de la base $C_2O_4^{2-}$ à :

$$c = 0,144 \cdot \frac{10}{75,5} = 0,0191 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pOH = \frac{1}{2} (pK_{b_2} + pc) \quad \text{et} \quad pH = 14 - pOH$$

$$pH = 14 - \frac{1}{2} (9,8 + 1,72) = 8,24$$

Pour $v = 18 \text{ mL}$, le pH est dû aux $(18 - 15,5) \text{ mL}$ de NaOH en excès :

$$[OH^-] = \frac{18 - 15,5}{60 + 18} \times 0,1 = 0,0032 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pOH = 2,49 \quad \text{et} \quad pH = 11,50$$

Bon accord avec les résultats fournis par la courbe.

I.B. Étude cinétique, par spectrophotométrie visible, d'une réaction mettant en jeu l'acide oxalique et le permanganate de potassium.

I.B.1. Étude de quelques caractéristiques spectroscopiques de l'ion permanganate MnO_4^- .

I.B.1.1. La solution de $KMnO_4$ absorbe dans le vert. Elle prend donc la teinte complémentaire du vert c'est-à-dire la teinte violette.

I.B.1.2. a. L'absorption est maximale au voisinage de cette longueur d'onde.

b. Voir graphe.

c. $A = \epsilon \cdot l \cdot c$ coefficient directeur de la droite $A = f(c)$ vaut :

$$\epsilon \cdot l = 1,85 \cdot 10^3$$

$$l = 1 \text{ cm} \rightarrow \epsilon = 1,85 \cdot 10^3 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$$

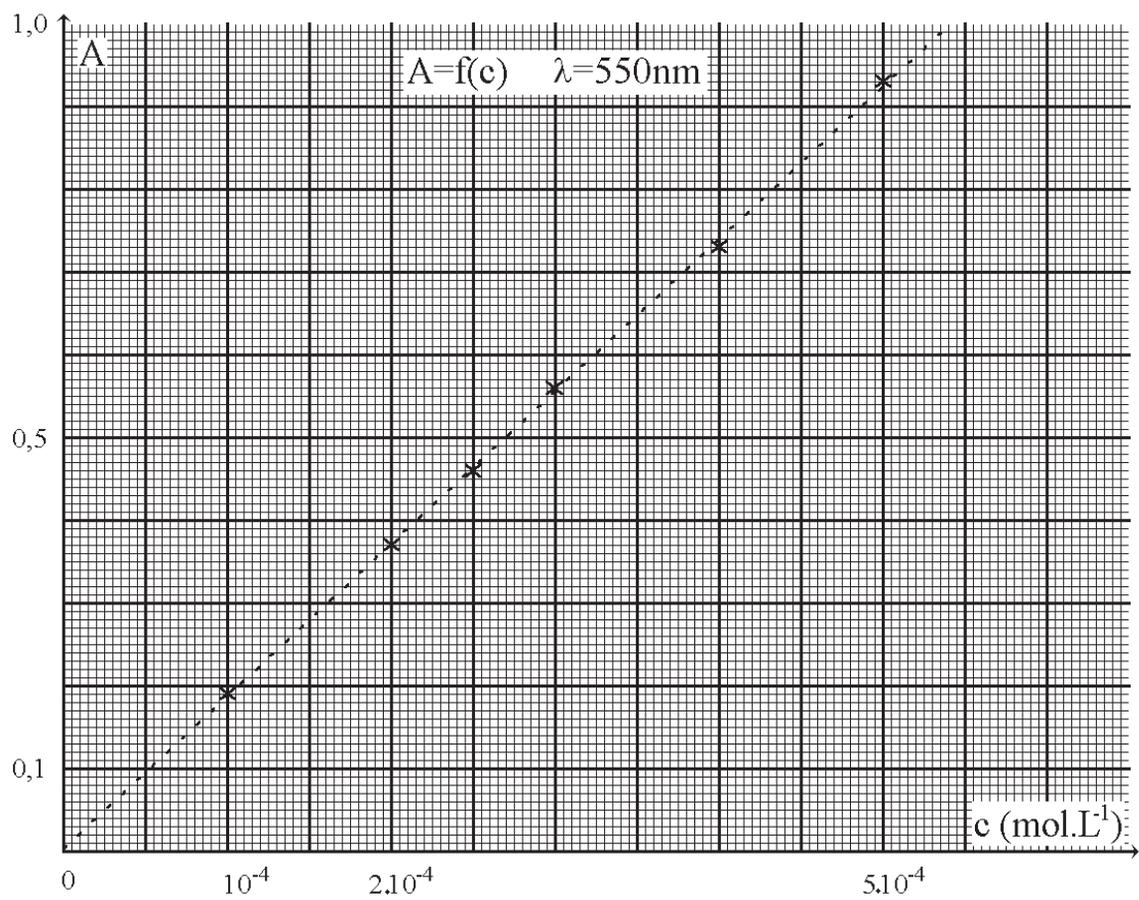
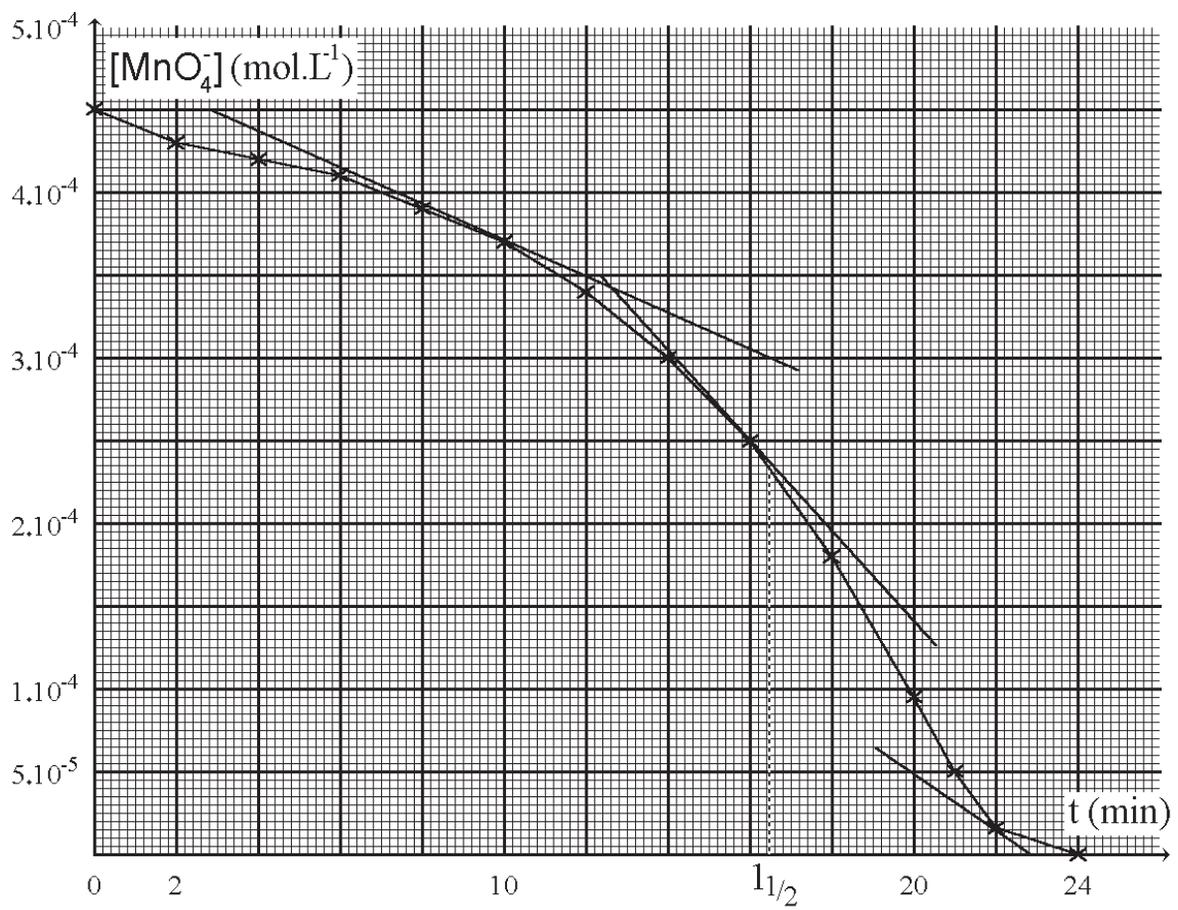
I.B.2. Étude cinétique de l'oxydation de l'acide oxalique $H_2C_2O_4$ par l'ion permanganate MnO_4^- , en milieu acide (suivie par spectrophotométrie).

I.B.2.1.

t (min)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	21	22	24
$c = \frac{A}{\epsilon l}$	4,3 10^{-4}	4,2 10^{-4}	4,1 10^{-4}	3,9 10^{-4}	3,7 10^{-4}	3,4 10^{-4}	3,0 10^{-4}	2,5 10^{-4}	1,8 10^{-4}	0,95 10^{-4}	0,503 10^{-4}	0,16 10^{-4}	0

I.B.2.2. Voir graphe.

I.B.2.3. $2MnO_4^- + 6H^+ + 5H_2C_2O_4 \rightarrow 2Mn^{2+} + 10CO_2 + 8H_2O$



$$\left. \begin{array}{l} n_{\text{MnO}_4^-}^i = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \\ n_{\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4}^i = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \end{array} \right\} \text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4 \text{ est en excès, ou } [\text{MnO}_4^-] \text{ est le réactif limitant.}$$

$t_{1/2}$ est donc le temps au bout duquel $[\text{MnO}_4^-]$ a diminué de moitié. Le graphe indique $t_{1/2} = 16,5 \text{ min}$.

I.B.2.4.

$$v_{\text{MnO}_4^-} = - \frac{d[\text{MnO}_4^-]}{dt} \quad \text{et} \quad v = - \frac{1}{2} \frac{d[\text{MnO}_4^-]}{dt}$$

I.B.2.5.

$$t = 10 \text{ min} \quad v_{\text{MnO}_4^-} \begin{cases} = 1,9 \cdot 10^{-7} \pm 0,3 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \\ = 1,1 \cdot 10^{-5} \pm 0,2 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1} \end{cases}$$

$$t = 15 \text{ min} \quad v_{\text{MnO}_4^-} \begin{cases} = 2,9 \cdot 10^{-5} \pm 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1} \\ = 4,8 \cdot 10^{-7} \pm 0,8 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

$$t = 22 \text{ min} \quad v_{\text{MnO}_4^-} \begin{cases} = 1,5 \cdot 10^{-5} \pm 0,3 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1} \\ = 2,5 \cdot 10^{-7} \pm 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

En fin de réaction : $v \rightarrow 0$.

I.B.2.6. Réaction catalysée par Mn^{2+} (ou autocatalysée).

Au début : $[\text{Mn}^{2+}]$ faible $\rightarrow v$ faible.

Puis : $[\text{Mn}^{2+}] \nearrow$ donc $v \nearrow$.

Ensuite $v \searrow$ car il y a de moins en moins de réactif et $v = 0$ à la disparition du réactif limitant.

I.B.2.7.

$$n_{\text{MnO}_4^-}^{\text{consommé}} = 10^{-5} \text{ mol}$$

$$n_{\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4}^{\text{consommé}} = \frac{5}{2} 10^{-5} \text{ mol} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$$

$$n_{\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4}^{\text{restant}} = 10^{-4} - 2,5 \cdot 10^{-5} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$$

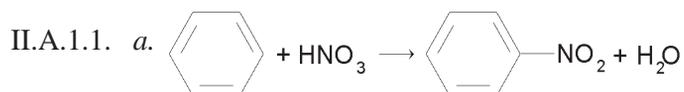
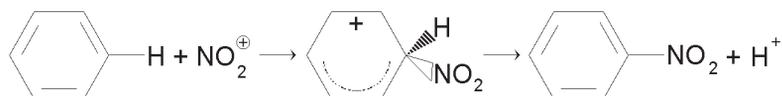
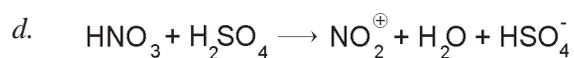
$$[\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4]_{\text{restant}} = \frac{7,5 \cdot 10^{-5}}{22 \cdot 10^{-3}} = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

PARTIE II

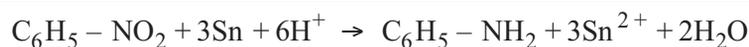
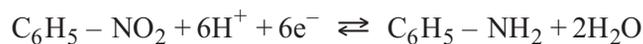
A PROPOS DES COLORANTS

II.A. Étude d'un colorant.

II.A.1. Préparation de l'un des réactifs : l'aniline.

b. Mélange $\text{HNO}_3 + \text{H}_2\text{SO}_4$.

II.A.1.2.



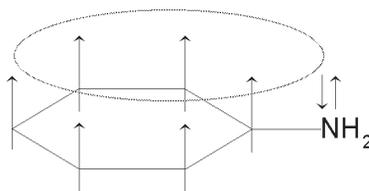
N.B. : Le milieu étant acide, il serait préférable de faire intervenir $\text{C}_6\text{H}_5 - \text{NH}_3^+$ au lieu de $\text{C}_6\text{H}_5 - \text{NH}_2$.

II.A.1.3. a. Le doublet non liant de l'atome N.

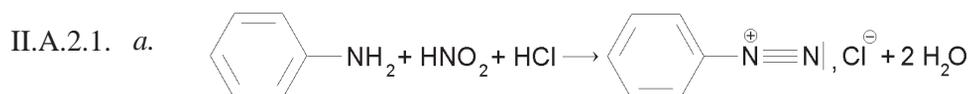
b. L'aniline est moins basique car le doublet de l'atome N est partiellement délocalisé sur le cycle.

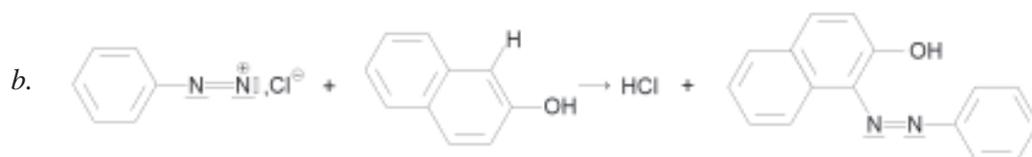
c. NH_3 tétraédrique (édifice du type AX_3E d'après VSEPR).

Structure plane pour l'aniline, à cause de la délocalisation électronique.

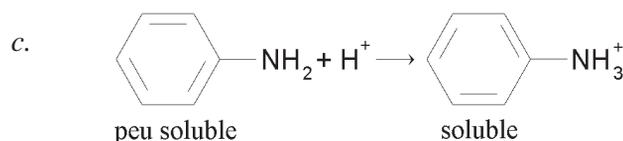


II.A.2. Étude d'un protocole opératoire.





b. Instabilité de celui-ci à $t > 5^\circ\text{C}$.



d. Aniline : $v = 3,7 \text{ mL}$ $m = 3,774 \text{ g}$ $n = 0,0406 \text{ mol}$

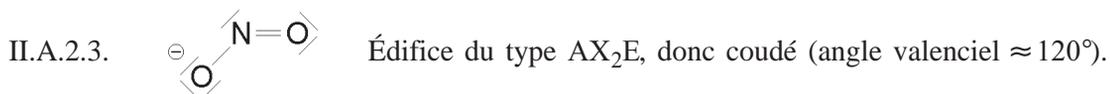
NaNO_2 : $m = 3,0 \text{ g}$ $n = 0,0435 \text{ mol}$

β - naphtol : $n = 0,04167 \text{ mol}$

Colorant : $n = 0,02258 \text{ mol}$

D'où : masse théorique = $0,0406 \times 248 = 10,07 \text{ g}$

rendement : $\eta = 55,6 \%$.

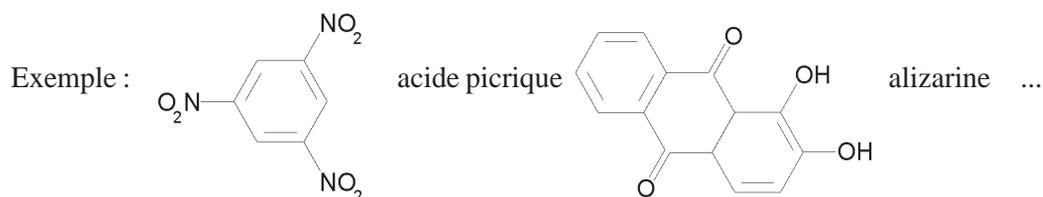


II.B. Propriétés générales des colorants.

II.B.1. Origine de la couleur.

II.B.1.1. Présence du groupement auxochrome – OH plus système de dix-huit électrons délocalisés (ou vingt si l'on tient compte du doublet du groupement – OH).

II.B.1.2. Toute formule respectant les valences habituelles et susceptible de correspondre à un colorant, convient.



II.B.2. Fixation de la couleur.

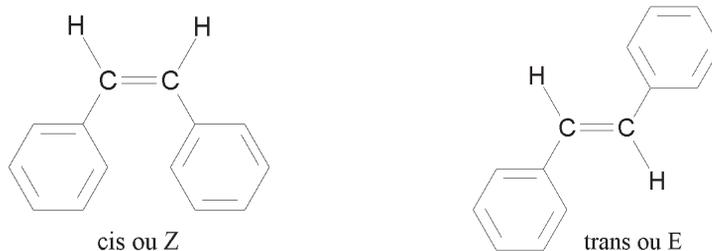
Colorant direct : colorant susceptible de se fixer directement sur la fibre, sans l'aide d'un mordant.

Fixation par liaisons intermoléculaires colorant fibre (liaison de Van der Waals et liaison H).

Exemple : Liaisons H entre les groupements – COOH et – NH₂ de la fibre et le groupement – OH du colorant.

II.B.3. Isomérisie due à la liaison $-N=N-$.

II.B.3.1. Stéréoisomères : molécules ayant même formule semi développée mais des structures spatiales différentes.



Stéréoisomère E le plus stable (moins d'encombrement stérique d'où planéité et délocalisation électronique «parfaite»).

II.B.3.2. Placer l'éluant dans la cuve, attendre la saturation, tracer, avec une mine de graphite, ligne de dépôt et ligne de front sur la chromatoplaque, effectuer le (ou les) dépôt en plusieurs fois, sécher, faire agir l'éluant. Terminer par la révélation éventuelle des taches.

Exploitation : définition et intérêt du R_F .

L'isomère cis, polaire, est plus fortement retenu par l'adsorbant, polaire, donc il se déplace plus lentement.

C.A.P.E.S

(Concours Interne)

SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition d'électricité appliquée - Session : 1997

Première partie - ELECTROTECHNIQUE

Variation de la vitesse d'un moteur synchrone

1. Etude du moteur alimenté par un réseau 230 V/400 V, 50 Hz.

1.1. 1.1.1. La plus faible des deux tensions est la tension qui doit être appliquée à un enroulement du stator. Si le réseau a une tension composée de 230 V (réseau 133 V/230 V) le branchement est effectué en triangle et la condition est bien réalisée.

Mais un réseau de tension composée 400 V peut également permettre d'alimenter le moteur : il suffit de coupler les enroulements du stator de ce moteur en étoile.

230 V et 400 V sont donc les tensions composées permettant d'alimenter le moteur, mais avec des couplages différents.

La plus faible des deux intensités (40 A) représente l'intensité nominale du courant dans un enroulement. Avec un réseau 133 V/230 V dont nous avons vu qu'il nécessitait un couplage en triangle, l'intensité du courant en ligne vaudra $(40 \text{ A}) \times \sqrt{3} = 70 \text{ A}$.

Avec un réseau 230 V/400 V dont nous avons vu qu'il nécessite un couplage en étoile, l'intensité du courant en ligne est égale à l'intensité du courant dans un enroulement (40 A).

70 A/40 A est l'indication du courant nominal provoqué par ce moteur :

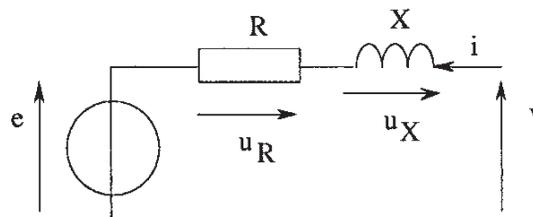
70 A pour un réseau 133 V/230 V et 40 A pour un réseau 230 V/400 V.

Un réseau 230 V/400 V nécessite donc un couplage en étoile des enroulements du stator de la machine présentée.

1.1.2. $S_n = UI\sqrt{3} \Rightarrow$ Avec $U = 230 \text{ V}$, $I = 70 \text{ A}$ et avec $U = 400 \text{ V}$, $I = 40 \text{ A}$. Il n'y a pas besoin de donner l'indication 70 A/40 A, mais c'est l'habitude.

1.1.3. La machine doit fonctionner en génératrice à vide. On règle la vitesse à 1500 tr/min grâce à un moteur à courant continu qui l'entraîne, puis on relève l'intensité du courant d'excitation de l'alternateur et on mesure soit la tension composée à vide, qui, divisée par $\sqrt{3}$ donne la f.é.m. à vide par phase E, soit directement la tension aux bornes d'un enroulement.

1.1.4.



1.1.5. $v = e + u_R + u_X$

u_R est en phase avec i : c'est \vec{BC} qui la représente.

u_X est en avance de $\pi/2$ sur i : c'est \vec{AB} qui la représente.

Le troisième vecteur permettant d'aboutir à la somme v représentée par \vec{OC} , c'est \vec{OA} qui représente e .

$\varphi = (\vec{I}, \vec{V})$, c'est le retard de i sur v ; ψ est le retard de i sur e ; θ est le décalage angulaire : c'est l'angle dont il faudrait faire tourner le rotor d'un moteur identique au moteur considéré, fonctionnant à vide sur le même réseau, pour le faire coïncider avec celui du moteur fonctionnant en charge.

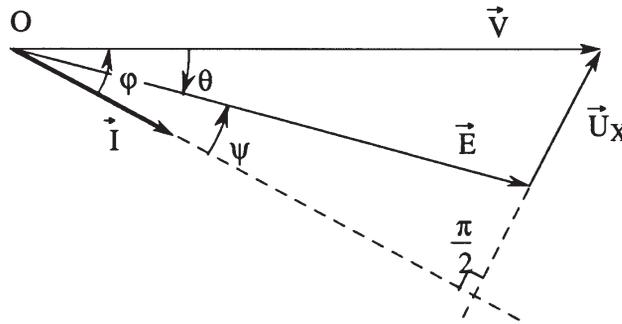
1.1.6. $P_{em} = 3EI\cos\psi = P_e - 3RI^2 = 3VI\cos\varphi - 3RI^2$

1.2. 1.2.1. $P_{em} = T_{em} \cdot \Omega$; mais $\Omega = \Omega_s = \text{cste}$ et $T_{em} = T_u$ puisque $T_p = 0$
 $T_u = \text{cste} \Rightarrow T_{em} = \text{cste}$ et $P_{em} = \text{cste}$.
 Si $T_u = 140 \text{ N.m}$, alors $P_{em} = 22 \text{ kW}$.

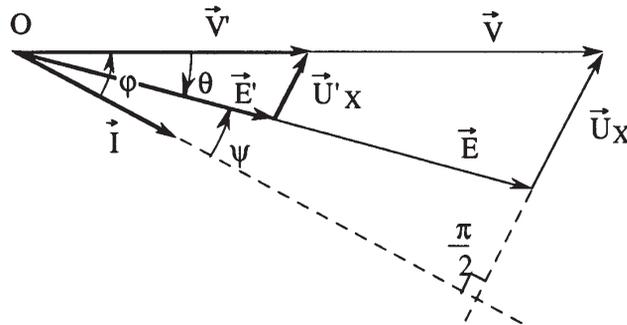
- 1.2.2 1.2.2.1. $P_{em} = 22 \text{ kW}$
 $p_{ji} = 3RI^2 = 1,9 \text{ kW}$
 $\eta = P_{em}/(P_{em} + p_{ji}) = 22/23,9 = 92 \%$
 1.2.2.2. $P_a = 23,9 \text{ kW} = UI\sqrt{3} \cos\varphi$
 $\cos\varphi = (23,9 \times 10^3)/(400 \times 40 \times \sqrt{3}) = 0,86$
 1.2.2.3. $E = kfI_e \Rightarrow E = 190 \text{ V}$

2. Etude du moteur alimenté par une source à $U/f = \text{constante}$.

2.1. 2.1.1.



2.1.2.



$f' = f/2 \Rightarrow V' = V/2$;
 $I_e = \text{cste} \Rightarrow E' = kfI_e = E/2$;
 $I = \text{cste} \Rightarrow XI = XI/2$.
 \Rightarrow les trois côtés du triangle sont divisés par 2.

Le triangle (*) est homothétique du triangle initial dans un rapport 1/2 : les angles sont conservés.

2.1.3. $T_u = T_{em} = (3EI\cos\psi)/\Omega$, avec $E = kfI_e$, et $\Omega = 2\pi f/p$, E/Ω est indépendant de la fréquence, ce qui implique qu'à I et I_e constants T_u est indépendant de la fréquence.

2.2. 2.2.1. $f = 10 \text{ Hz} \Rightarrow X_{10} = 0,32 \Omega < R$.
 On ne peut plus négliger R devant X qui est très inférieure.

2.2.2.

$$T_u = \frac{UI\sqrt{3}\cos\varphi - 3RI^2}{\pi f} = \frac{P_{em}}{\Omega_s} \text{ car } \Omega = \frac{2\pi f}{p} \text{ avec } p = 2$$

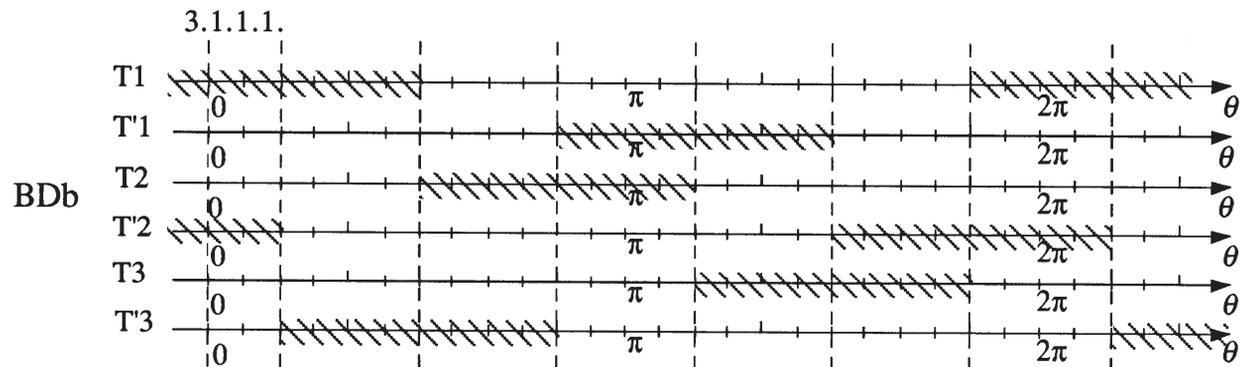
2.2.3.

$$T_u = \underbrace{\frac{U}{f} \frac{I\sqrt{3}\cos\varphi}{\pi}}_{\text{terme indépendant de } f} - \underbrace{\frac{3RI^2}{\pi f}}_{\text{terme qui croît lorsque } f \text{ diminue}}$$

Le couple de démarrage diminue. On ne peut plus démarrer le moteur à $U/f = \text{cste}$.

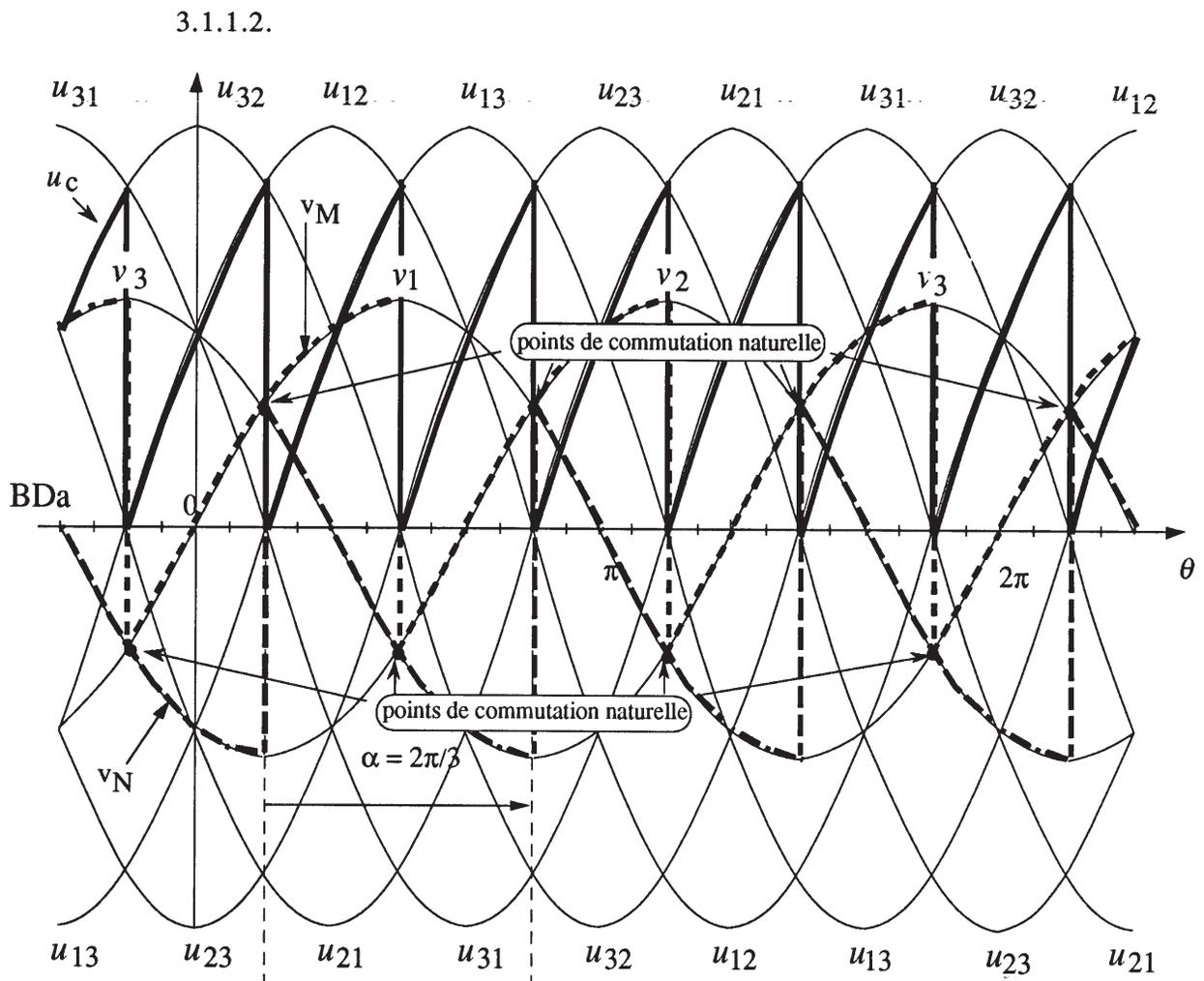
3. Principe d'une alimentation triphasée pour moteur synchrone.

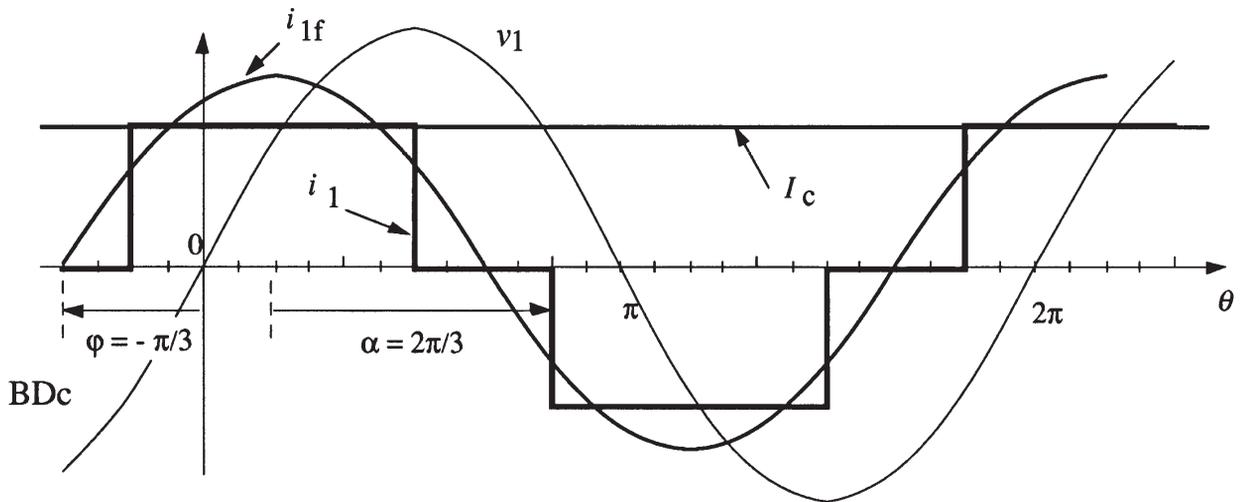
3.1. 3.1.1.



Il faut déterminer d'abord les instants de commutation naturelle : des trois thyristors T_1 , T_2 et T_3 , celui qui conduit est celui qui a son potentiel de cathode le plus faible (en commutation naturelle), tandis que de T'_1 , T'_2 et T'_3 , celui qui conduit est celui qui a son potentiel d'anode le plus élevé.

Puis on décale du retard $\alpha = 2\pi/3$ pour tous les thyristors. On en déduit ainsi successivement le potentiel du point M, puis celui du point N et enfin la tension u_c .





Quand l'intensité i_1 est positive, $i_1 = I_c$ et le thyristor T_1 conduit :

- de 0 à $\pi/2$,
- et de $7\pi/6$ à 2π ($\pi/2 + \pi/6 = 2\pi/3$).

Quand l'intensité i_1 est négative, $i_1 = -I_c$ et le thyristor T'_1 conduit de $5\pi/6$ à $3\pi/2$.

$$I = I_c \sqrt{\frac{2}{3}}$$

3.1.2. Dans le cas particulier de $\alpha = 2\pi/3$, $\phi = -\pi/3$: i_{1f} est en avance sur v_1 .

En fait : $\phi = \alpha - \pi$

3.1.3. u_c est une tension de fréquence $6f$.

Pour calculer sa valeur moyenne, il suffit de se limiter à un angle $\theta = \pi/3$.

Par exemple $u_c = u_{13}$ de $\pi/6$ à $\pi/2$ sur le graphique où $\alpha = 2\pi/3$

$\pi/6 = \theta_1 + \alpha \Rightarrow \theta_1 = -\pi/2$; $\pi/2 = \theta_2 + \alpha \Rightarrow \theta_2 = -\pi/6$

$u_c = u_{13}$ de $(-\pi/2 + \alpha)$ à $(-\pi/6 + \alpha)$

$$\begin{aligned} \bar{u}_c &= \frac{3}{\pi} \int_{-\pi/2 + \alpha}^{-\pi/6 + \alpha} u_{13} d\theta = \frac{3\hat{v}}{\pi} \int_{-\pi/2 + \alpha}^{-\pi/6 + \alpha} \left[\sin\theta - \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \right] d\theta \\ \bar{u}_c &= \frac{3\hat{v}\sqrt{3}}{\pi} \int_{-\pi/2 + \alpha}^{-\pi/6 + \alpha} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) d\theta = \frac{3\hat{v}\sqrt{3}}{\pi} \left[\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \right]_{-\pi/2 + \alpha}^{-\pi/6 + \alpha} \\ \bar{u}_c &= \frac{3\hat{v}\sqrt{3}}{\pi} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \alpha - \frac{\pi}{6}\right) \right] \\ \bar{u}_c &= \frac{3\hat{v}\sqrt{3}}{\pi} \left[\cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \right] = -\frac{3\hat{v}\sqrt{3}}{\pi} \times 2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \times \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \bar{u}_c &= -\frac{3\hat{v}\sqrt{3}}{\pi} \cos\alpha \end{aligned}$$

3.1.4. 3.1.4.1. $p_f = u_c I_c$;

3.1.4.2.

$$\bar{p}_f = \overline{u_c I_c} = \bar{u}_c I_c = -\frac{3\hat{v}I_c\sqrt{3}}{\pi} \cos\alpha$$

3.1.4.3.

$$P = \frac{3\hat{v}_{if}}{2} \cos\varphi = -\frac{3\hat{v}_{if}}{2} \cos\alpha \text{ puisque } \varphi = \pi - \alpha$$

3.1.5.

3.1.5.1.

$$\frac{-3\hat{v}_{Ic}\sqrt{3}}{\pi} \cos\alpha = -\frac{3\hat{v}_{if}}{2} \cos\alpha \text{ car } P_f = P$$

D'où :

$$\hat{i}_f = \frac{2I_c\sqrt{3}}{\pi}$$

3.1.5.2.

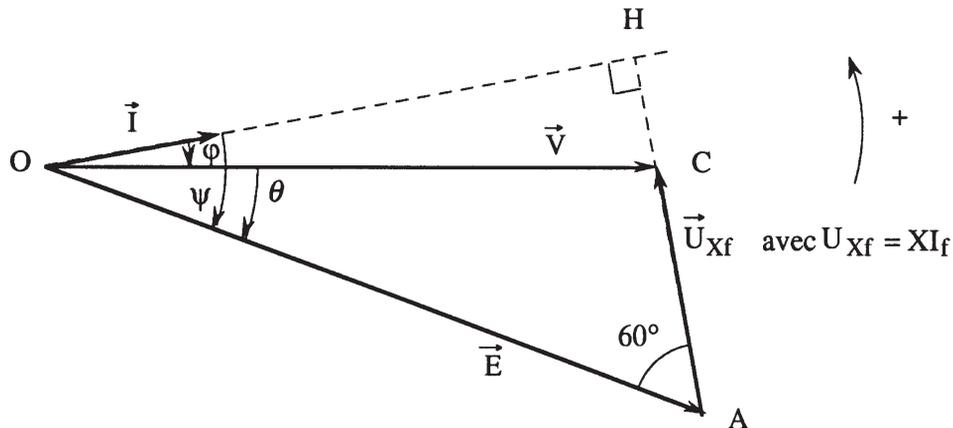
Par définition $k_f = \frac{\bar{P}}{3VI}$; nous avons vu que $I = I_c\sqrt{\frac{2}{3}}$, par ailleurs $V = \frac{\hat{v}}{\sqrt{2}}$

Donc :

$$k_f = -\frac{3\hat{v}_{Ic}\sqrt{3} \cos\alpha}{\pi \times 3 \times \frac{\hat{v}}{\sqrt{2}} \times I_c \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = -\frac{3}{\pi} \cos\alpha$$

Pour $\alpha = 2\pi/3$, $k_f = 3/2\pi = 0,48$ (valeur faible)

3.2. 3.2.1.



$$I_e = 5,1 \text{ A}, E = k_f I_e = 255 \text{ V}$$

$$I_f = \hat{i}_f / \sqrt{2} = 40,3 \text{ A} ; X = 1,6 \Omega ; X I_f = 64,5 \text{ V}$$

$$\text{Sur le diagramme : } AH = E \cos 60^\circ = E/2 = 127,5 \text{ V} \Rightarrow HC = 63 \text{ V}$$

$$OH = E \cos \psi = 221 \text{ V} \Rightarrow \tan \varphi = 63/221 = 0,285$$

$$\varphi = -16^\circ = -0,28 \text{ rad et } V = OH / \cos \varphi = 230 \text{ V}$$

$\psi < 0$, $\varphi < 0$: le moteur est surexcité, cela est nécessaire, car pour avoir $\psi < 0$, il faut que la f.é.m. E soit importante. On peut dire également que c'est la machine synchrone qui fournit de la puissance réactive au commutateur de courant.

3.2.2.

$$\bar{u}_c = \frac{-3\hat{v}\sqrt{3}}{\pi} \cos\alpha, \alpha = \pi - \varphi \Rightarrow \bar{u}_c = \frac{3\hat{v}\sqrt{3}}{\pi} \cos\varphi$$

Le schéma montre que $V \cos\varphi = E \cos\psi$

Donc :

$$\bar{u}_c = \frac{3\hat{e}\sqrt{3}}{\pi} \cos\psi = \frac{3E\sqrt{6}}{\pi} \cos\psi$$

$$\bar{u}_c = \frac{3k_f I_e \sqrt{6}}{\pi} \cos\psi ; \Omega_s = \frac{2\pi f}{p}$$

Donc :

$$\Omega_s = \frac{2\pi^2}{3kpI_e\sqrt{6}\cos\psi} \bar{u}_c \Rightarrow \Omega_s = 0,31\bar{u}_c$$

3.2.3.

$$T_u = \frac{P_e}{\Omega_s} = \frac{\bar{u}_c I_c}{\Omega_s}, \text{ avec là encore } \Omega_s = \frac{2\pi f}{p}$$

$$T_u = \frac{3kpI_e\sqrt{6}\cos\psi}{2\pi^2} I_c \Rightarrow T_u = 3,2I_c$$

Ω et T_u sont indépendants car réglés par des paramètres différents : c'est un immense avantage. Ces relations sont du même type que celles qui régissent le fonctionnement d'un moteur à courant continu. Mais la machine étudiée n'a pas de collecteur fragile.

Seconde partie - ELECTRONIQUE

Réception des images transmises par le satellite Météosat

1. Etude de la tête de de réception.

1.1. $s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$

Fréquence instantanée : $f_i = f_c + \beta f_m \cos(2\pi f_m t)$

$$f_c - \beta f_m \leq f_i \leq f_c + \beta f_m$$

$$\delta f = 2(\beta + 1)f_m = 26 \text{ kHz avec } f_m = 2,4 \text{ kHz} \Rightarrow \beta + 1 = 5,4$$

$$\beta = 4,4$$

$$\beta f_m = 4,4 \times 2,4 \text{ kHz} \approx 10 \text{ kHz}$$

Cette variation est en effet très faible devant 136 MHz = f_c .

1.2. 1.2.1. $u(t) = A_o \cos(2\pi f_1 t)$

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$

$$x(t) = ku(t).s(t) = kA_o A_c \cos(2\pi f_1 t) \cdot \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$

$$x(t) = \frac{kA_o A_c}{2} \cos[2\pi(f_c + f_1)t + \beta \sin(2\pi f_m t)] + \frac{kA_o A_c}{2} \cos[2\pi(f_c - f_1)t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$

$x(t)$ est composée d'une tension modulée en fréquence autour de la fréquence centrale $f_c + f_1$ avec un indice de modulation égal à β et d'une autre tension, plus intéressante, modulée autour de la fréquence centrale $f_c - f_1$ et de même indice de modulation.

1.2.2. Il faut que $f_c - f_1 = f_b$ ou $f_1 - f_c = f_b$ et ensuite que la largeur de la bande Δf du filtre passe bande soit supérieure ou égale à $\delta f = 26 \text{ kHz}$.

1.3. $f_1 = f_c - f_b = 136 \text{ MHz} - 10,7 \text{ MHz} = 125,3 \text{ MHz}$

$$f_1 = f_c + f_b = 146,7 \text{ MHz}$$

1.4. f_c peut varier de 134 MHz à 138 MHz

Première plage pour $f_1 = f_c - f_b$, soit $123,3 \text{ MHz} \leq f_1 \leq 127,3 \text{ MHz}$

Deuxième plage pour $f_1 = f_c + f_b$, soit $144,7 \text{ MHz} \leq f_1 \leq 148,7 \text{ MHz}$

1.5. A la sortie du filtre passe-bande, le signal est modulé en fréquence autour de $f_b = 10,700 \text{ MHz}$.

On doit donc avoir $|f_b - f_2| = f_d = 455 \text{ kHz}$ soit :

- $f_b - f_2 = f_d \Rightarrow f_2 = f_b - f_d = 10,245 \text{ MHz}$

- $f_2 - f_b = f_d \Rightarrow f_2 = f_b + f_d = 11,155 \text{ MHz}$

$$1.6. \quad v_1(t) = V_{1m} \cos[2\pi f_d t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$

$$f_{\min} = f_d - \beta f_m = (455 - 4,4 \times 2,4) \text{ kHz} = 444,4 \text{ kHz}$$

$$f_{\max} = f_d + \beta f_m = (455 + 4,4 \times 2,4) \text{ kHz} = 465,6 \text{ kHz}$$

2. Etude de la démodulation de fréquence.

2.1.

$$v(t) = \frac{kV_{1m}V_{2m}}{2} \cos\varphi + \frac{kV_{1m}V_{2m}}{2} \cos(2\omega t + \varphi)$$

tension constante tension sinusoïdale de fréquence
proche de $2 \times 455 \text{ kHz} = 910 \text{ kHz}$

2.2. Pour éliminer la fréquence élevée, il faut que la bande passante du filtre passe-bas soit inférieure à $2f_0$. En fait, on peut la choisir très inférieure, par exemple de l'ordre de 10 kHz, car en fait, nous verrons que la tension que nous avons qualifiée de "constante", varie.

2.3.

$$\underline{T} = \frac{jC'\omega}{jC'\omega + \frac{1}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})} \quad \text{d'après la "règle du potentiomètre"}$$

$$\underline{T} = \frac{jRC'\omega}{1 + j\left[R(C + C')\omega - \frac{R}{L\omega}\right]} \quad \text{avec } R(C + C') = \frac{Q_0}{\omega_0} \text{ et } \frac{R}{L} = Q_0\omega_0$$

En divisant membre à membre ces deux relations, on trouve : $L(C + C')\omega_0^2 = 1$, soit :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L(C + C')}}}$$

On en déduit l'expression de Q_0 : $Q_0 = R\sqrt{\frac{C + C'}{L}}$

2.4. Lorsque ω est très proche de ω_0 , la somme $\omega + \omega_0$ est assimilable à $2\omega_0$.

D'où :

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0\omega} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0\omega} \approx \frac{2\omega_0(\omega - \omega_0)}{\omega_0^2}$$

Soit :

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx 2 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

On a donc :

$$\underline{T} = \frac{jRC'\omega_0}{1 + 2jQ_0 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}}$$

2.5.

$$T = |\underline{T}| = \frac{RC'\omega_0}{\sqrt{1 + 4Q_0^2 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$V_{2m} \approx \frac{RC'\omega_0}{\left[1 + 4Q_0^2 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} V_{1m}$$

Pour $\omega = \omega_0$, $V_{2m} = RC'\omega_0 V_{1m}$

2.6. L'avance φ de v_2 sur v_1 est égale à l'argument de \underline{T} .

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \left(2Q_0 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)$$

Si $x = 2Q_0 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ est petit devant 1, alors on peut confondre $\text{Arctan } x$ et x .

On a donc :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2Q_0 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

$$\text{Par conséquent } \cos \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2Q_0 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right) = \sin \left(2Q_0 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)$$

Ce qui était vrai pour $\text{Arctan } x$ est vrai, à priori, pour $\sin x$ qui peut être confondu avec x si x est petit.

Par conséquent :

$$\cos \varphi = 2Q_0 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

$$2.7. \quad 2.7.1. \quad \omega_0 = 2\pi f_d = 2,859 \times 10^6 \text{ rad/s}$$

$$C + C' = \frac{1}{L\omega_0^2} = 556 \text{ pF}$$

On a donc : $C' = 556 \text{ pF} - 86 \text{ pF} = 470 \text{ pF}$

En fait la capacité C ne sert à rien. Mais elle est inévitable en tant que capacité parasite de la bobine. Ici elle est renforcée pour être maîtrisée.

Avec $C + C' = 556 \text{ pF}$ et $L = 0,22 \text{ mH}$, on peut calculer le coefficient $\sqrt{\frac{C + C'}{L}} = 1,59 \times 10^{-3} \text{ S}$

$$\text{D'où : } R = \left(\frac{Q_0}{1,59 \times 10^{-3}} \right) \Omega = 1,57 \text{ k}\Omega$$

$$2.7.2. \quad T_d = RC'\omega_0 = 2,11$$

Pour $f = 445 \text{ kHz}$ (proche de la fréquence minimale de $v_1(t)$) :

$$2Q_0 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -5 \times \frac{10}{455} = -0,11$$

$$\sqrt{1 + 0,11^2} = 1,006 ; \text{ en revanche } RC'\omega = 2,11 \times 445/455 = 2,063.$$

Tout compte fait : $T_{445} = 2,05$

Pour $f' = 465 \text{ kHz}$ (proche de la fréquence maximale de $v_1(t)$) :

$$T_{465} = 2,14$$

Entre 445 kHz et 465 kHz, T varie de 2,05 à 2,14, c'est-à-dire de moins de 5% : on peut considérer que T est constante.

$$2.8. \quad V_{2m} = RC'\omega_0 V_{1m}$$

$$v_s = \frac{kV_{1m}V_{2m}}{2} \cos \varphi \quad \text{d'après la question du 2.1}$$

Donc :

$$v_s = \frac{kV_{1m}RC'\omega_0 V_{1m}}{2} \times 2Q_0 \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$$

Soit :

$$v_s = kRC'V_{1m}^2 Q_0 (\omega - \omega_0) = K_0 (\omega - \omega_0) \quad \text{avec } K_0 = kRC'V_{1m}^2 Q_0$$

$v_s = K_0 \omega - K_0 \omega_0$: à la constante $K_0 \omega_0$ près, la tension v_s est bien l'image de la pulsation instantanée ω

3. Etude de la démodulation d'amplitude.

3.1. Quand $u_1(t)$ est positive, l'entrée + de l'amplificateur opérationnel reçoit $u_1(t)$; l'entrée - reçoit $(u_1 + u_2)/2$ qui doit être égale à u_1 .

Le résultat, c'est que $u_2 = u_1$.

Quand la tension $u_2(t)$ est négative $u_+ = 0$, $u_- = (u_1 + u_2)/2 = u_+ = 0$, donc $u_2 = -u_1$.

On a donc $u_2 = u_1$ si $u_1 > 0$ et $u_2 = -u_1$ si $u_1 < 0$: c'est la définition de la valeur absolue : $u_2(t) = |u_1(t)|$.

3.2. 3.2.1. $u_1(t) = U_{1m} \sin(2\pi f_{ao} t)$

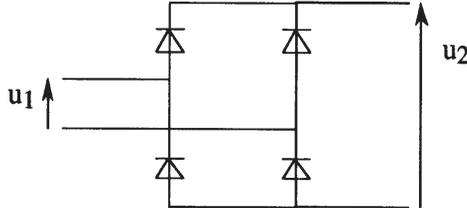
$u_1(t)$ est positive pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2f_{ao}}$ à $\frac{1}{f_{ao}}$ près.

$u_1(t)$ est négative pour $\frac{1}{2f_{ao}} \leq t \leq \frac{1}{f_{ao}}$ à $\frac{1}{f_{ao}}$ près.

Nous constatons que $d(t) = 1$ lorsque $u_1(t)$ est positive et que $d(t) = -1$ lorsque $u_1(t)$ est négative.

On a donc bien : $u_2(t) = |u_1(t)| = u_1(t) \times d(t)$.

3.2.2. C'est le redresseur :



Si les diodes étaient parfaites, on aurait bien :

$u_2 = u_1$ pour $u_1 > 0$; $u_2 = -u_1$ pour $u_1 < 0$.

Le défaut essentiel de ce pont redresseur à diodes, ce sont les tensions de seuil des diodes. Avec des diodes au silicium, la somme des deux tensions de seuil est de l'ordre de 1,2 V.

3.3. 3.3.1. Si m est inférieur à 1, rien n'est changé : $u_1(t)$ est positive pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2f_{ao}}$ etc...

$u_2(t) = u_1(t) \times d(t)$.

$u_1(t) = U_{1m} \sin \omega_{ao} t + m U_{1m} \sin(\omega_{ao} t) \cdot \cos(\omega_{am} t)$

Considérons tout d'abord le produit de $u_1(t)$ par le premier terme de $d(t)$ soit $\frac{4}{\pi} \sin(\omega_{ao} t)$;

cela donne :

$$u_2(t) = \frac{4U_{1m}}{\pi} \sin^2(\omega_{ao} t) + \frac{4mU_{1m}}{\pi} \sin^2(\omega_{ao} t) \cdot \cos(\omega_{am} t) + \dots$$

$$\sin^2(\omega_{ao} t) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\omega_{ao} t)}{2}, \text{ donc :}$$

$$u_2(t) = \frac{2U_{1m}}{\pi} - \frac{2U_{1m}}{\pi} \cos(2\omega_{ao} t) + \frac{2mU_{1m}}{\pi} \cos(\omega_{am} t) - \frac{2mU_{1m}}{\pi} \cos(\omega_{am} t) \cos(2\omega_{ao} t) + \dots$$

Soit encore :

fréquence 0 :	$\frac{2U_{1m}}{\pi}$
fréquence f_{am} :	$\frac{2mU_{1m}}{\pi}$
fréquence $2f_{ao} - f_{am}$:	$-\frac{mU_{1m}}{\pi}$
fréquence $2f_{ao}$:	$-\frac{2U_{1m}}{\pi}$
fréquence $2f_{ao} + f_{am}$:	$-\frac{mU_{1m}}{\pi}$

Mais il faut aussi tenir compte du deuxième terme de $d(t)$, à la fréquence $3f_{ao}$; cela donne :

$$\frac{4U_{1m}}{3\pi} \sin(\omega_{ao} t) \sin(3\omega_{ao} t) + \frac{4mU_{1m}}{3\pi} \sin(\omega_{ao} t) \sin(3\omega_{ao} t) \cos(\omega_{am} t)$$

Le premier de ces deux termes donne un terme de fréquence $2f_{ao}$: $\frac{2U_{1m}}{3\pi} \cos(2\omega_{ao} t)$ et un terme de fréquence $4f_{ao}$.

Le deuxième donne $\frac{2mU_{1m}}{3\pi} \cos(2\omega_{ao}t) \cdot \cos(\omega_{am}t)$ et des termes de pulsations $4\omega_{ao} - \omega_{am}$ et $4\omega_{ao} + \omega_{am}$ dont nous ne tenons pas compte.

Au total, les cinq premiers termes de $u_2(t)$ sont les suivants :

fréquence 0 : $\frac{2U_{1m}}{\pi}$

fréquence f_{am} : $\frac{2U_{1m}}{\pi} \times m \times \cos(2\pi f_{am}t)$

fréquence $2f_{ao} - f_{am}$: $\frac{mU_{1m}}{\pi} (-1 + \frac{1}{3}) \cos[2\pi(2f_{ao} - f_{am})t] = -\frac{2mU_{1m}}{3\pi} \cos[2\pi(2f_{ao} - f_{am})t]$

fréquence $2f_{ao}$: $-\frac{2U_{1m}}{\pi} \cos(4\pi f_{ao}t)$

fréquence $2f_{ao} + f_{am}$: $-\frac{2mU_{1m}}{3\pi} \cos[2\pi(2f_{ao} + f_{am})t]$

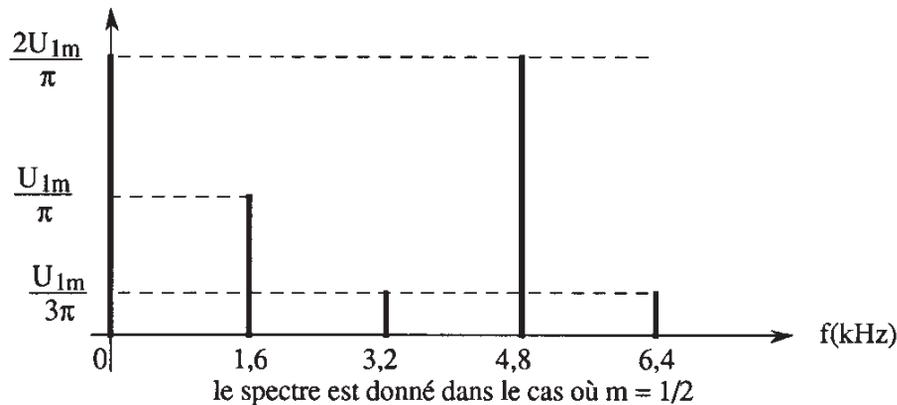
3.3.2. Le signal modulant se compose uniquement des deux premiers termes, au facteur $2/\pi$ près.

Cela n'est possible que si $2f_{ao} - f_{am} > f_{am}$, soit $f_{ao} > f_{am}$.

3.3.3. Si $f_{ao} = 2400$ Hz et $(f_{am})_{max} = 1600$ Hz, la condition précédente est vérifiée. Le filtrage est le plus délicat lorsque $f_{am} = 1600$ Hz.

On a alors :

- une composante à fréquence nulle,
- une composante de fréquence 1600 Hz,
- une composante de fréquence 3200 Hz,
- une composante de fréquence 4800 Hz,
- une composante de fréquence 6400 Hz,



3.3.4. Il faut isoler les deux premières composantes.

$T_0 = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{f}{f_q}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}}$ doit être supérieur à $1/\sqrt{2}$ pour $f = 1,6$ kHz et inférieur à $1/100$ pour $f = 3,2$ kHz.

Ou encore $1 + \left(\frac{f}{f_q}\right)^{2n}$ doit être inférieur à 2 pour $f = 1,6$ kHz et doit être supérieur à 10^4 pour $f = 3,2$ kHz.

De la première inégalité on déduit que f doit être inférieur ou égal à f_q . Choisissons $f = f_q$.

C'est-à-dire $f_q = 1,6$ kHz \Rightarrow cette composante sera atténuée de 3 dB.

Pour $f/f_q = 2$, $1 + 2^{2n} = 10^4$ est réalisé pour $n = 7$ car $2^n \approx 4 \cdot 10^3$ et $2^{14} = 1,6 \cdot 10^4$.

On prendra donc $f_q = 1,6$ kHz. La composante à 1,6 kHz sera atténuée de 3 dB et $n = 7$: la composante à 3,2 kHz sera atténuée de 42 dB.

Agrégation (Concours Interne)

OPTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE ET PHYSIQUE APPLIQUÉE

Composition sur la physique et le traitement automatisé de l'information - Session : 1997

PARTIE I

BASES DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

I.1. Résultats essentiels d'électrostatique

I.1.1 Loi de Coulomb

Coulomb a montré expérimentalement (fin XVIII^e) (méthode statique : balance de torsion - méthode dynamique : mesure de la période des oscillations d'un corps soumis à l'influence de l'autre) que la force est inversement proportionnelle au carré de leur distance.

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{M_{12}^3} r_{12} \vec{u}_{12}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ en S.I.}$$

force exercée par q_1 immobile sur q_2 immobile.

Une particule chargée placée au point M subit une force \vec{F} dépendant de sa charge Q et du vecteur champ $\vec{E}_{(u)}$ au point M .

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}}{Q}$$

I.1.2. Si il existe plusieurs charges q_i au repos en P_i , elles créent en M un champ qui est la somme vectorielle des champs $\vec{E}_i(M)$ que créeraient en M les charges q_u si elles étaient seules.

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(M) P\vec{M}}{PM^3} d\tau$$

I.1.3 Le champ est central et fonction de r seulement.

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{M}$$

$$\vec{E} = f(r) \vec{u}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$P\vec{M} = r\vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot d\vec{M} = dr$$

$$C_{AB} = \int_A^B f(r) dr = \mathcal{F}_{(B)} - \mathcal{F}_{(A)}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{M} = d\mathcal{F} = \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{F} \cdot d\vec{M}$$

$$\boxed{\vec{E} \text{ dérive d'un potentiel}}$$

On pose : $\mathcal{F} = -V$ et $E(\vec{M}) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M V(M)$

$$\vec{E} \cdot d\vec{M} = -dV$$

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

est une différentielle exacte.

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0}$$

Pour arriver à ce résultat on n'utilise que le fait que le champ soit fonction de M seulement. Dans le cas d'un champ coulombien, l'expression du potentiel est :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{PM}$$

à une constante près que l'on choisit nulle si on veut que le potentiel soit nul à l'infini.

Cas de la distribution continue :

$$V(H) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P) d\tau}{PM}$$

I.1.4 Expérience de Millikan :

$$6\pi \eta R v_{\text{lim}} = \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho_m - \rho'_m) g$$

le rayon est alors la seule inconnue.

Si on applique un champ :

$$q \frac{U}{d} - 6\pi \eta R v'_{\text{lim}+} (m - m') g = 0$$

on en déduit :

$$v'_{\text{lim}} = \frac{q \frac{u}{a} + (m - m') g}{6\pi \eta R}$$

Pour que la vitesse s'annule, il suffit que la force électrique soit opposée à l'action de la pesanteur corrigée de la poussée d'Archimède.

Application Numérique :

Quand : $v_0 \text{ limite} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$

on trouve : $R = 1,12 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$

La progression des vitesses s'exprime par :

$$\frac{\delta v_e}{v_e} = \frac{\delta q}{q}$$

Soit :
$$\frac{U}{d} \delta q = 6\pi \eta R \delta v_e \Rightarrow \delta q \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

ce qui est la valeur de la charge élémentaire.

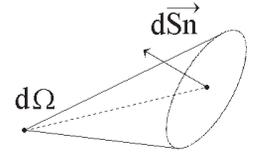
I.1.5. Théorème de Gauss

I.1.5.1.

$$d\Omega = \frac{dS \cos \alpha}{r^2}$$

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} n$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$



Une surface fermée S entoure une charge q :

– $\phi = 0$ si q est extérieure au volume limité par S ,

– $\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$ si q est intérieure.

Lignes de champ.

Tube de champ.

Si :
$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

le flux de \vec{E} sortant est :

$$\phi_s = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \vec{n} = \iiint_V \text{div } \vec{E} \cdot d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \cdot d\tau$$

on retrouve la théorie de Gauss.

Ou autre démarche :

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(M) \cdot d\tau = \iiint_V \text{div}_M \vec{E} \cdot d\tau$$

donc la forme locale $\text{div}_M \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ car le volume d'intégration étant le même il y a identité des intégrandes.

I.1.5.2. Utilisation des symétries : symétrie sphérique.

\vec{E} ne dépend que de r .

\Rightarrow surface fermée pour appliquer le théorème de Gauss = sphère.

$$\phi = 4\pi r^2 E(r) = \frac{4}{3 \epsilon_0} \pi r^3 \rho$$

$$q = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$E(r) = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0}$$

$$r \leq R \quad \vec{E} = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{r}{R^3} \vec{u}_r$$

$$r \geq R \quad \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$$

(identique à une charge ponctuelle).

Potentiel continu en $r = R$:

$$V(0) = \frac{\rho}{6 \epsilon_0} 3 R^2 = \rho \frac{R^2}{2 \epsilon_0}$$

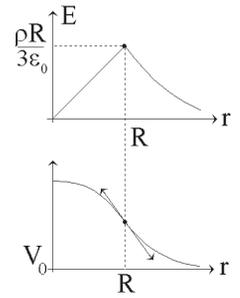
$$V(r) = \left[\frac{\rho}{3 \epsilon_0} \frac{r^2}{2} \right]_0^r \rightarrow \frac{\rho}{6 \epsilon_0} (3 R^2 - r^2) = V(r) \quad \text{pour } r < R$$

$$\text{Si } r = R : \quad 3 R^2 - R^2 = 2 R^2$$

$$V(r) = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0} \frac{1}{r} + V_0$$

$$\text{si :} \quad r \rightarrow \infty \quad V \rightarrow V_0$$

$$V(R) = \frac{\rho R^3}{3 \epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{\rho R^2}{3 \epsilon_0} + V_0$$



$V_0 = 0$ à l'infini.

Calotte sphérique chargée :

Surface chargée :

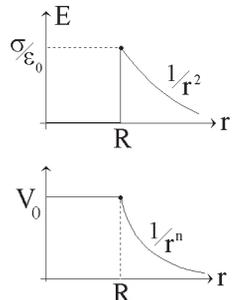
$$r < R \quad \vec{E} = \vec{0}$$

$$r > R \quad E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$\text{discontinuité en } r = R : \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$r < R \quad V(r) = V_0 + \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R}$$

$$r > R \quad V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + V_0 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} + V_0$$



I.1.6 Équations de Poisson et de Laplace

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} = 0 & \quad \operatorname{rot} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{aligned} \quad \vec{E} = - \overrightarrow{\operatorname{grad}} V$$

Comme $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$: $\vec{E} = - \overrightarrow{\operatorname{grad}} V$

$$\Delta V = \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} V = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{équation de Poisson}$$

Dans le cas d'absence de charge dans la région de l'espace étudiée, elle devient l'équation de Laplace : $\Delta V = 0$. Ceci n'est possible que parce que les charges agissent à distance et peuvent créer un champ en un point sans charge. On choisit généralement comme convention $V(r_\infty) \rightarrow 0$. Ceci pose le problème des fils infinis, des plans infinis, qui sont des cas idéaux donc non physiques en pratique.

I.1.7. Énergie électrostatique

Quand on déplace q de l'infini vers M de façon quasistatique, elle subit une force $\vec{F} = q \vec{E}(P)$. Si P est un point de sa trajectoire, l'extérieur exerce une force qui s'oppose à \vec{F} (quasistatique). Le travail de la force extérieur est :

$$W = \int_{\infty}^M \vec{F} \cdot d\vec{P} = - q \int_{\infty}^M \vec{E} \cdot d\vec{P}$$

Comme : $\vec{E} = - \overrightarrow{\operatorname{grad}} V$

$$W = q V(M) - V(\infty) = q V_M$$

représente l'énergie potentielle des charges.

I.1.7.1. Le travail fourni par l'extérieur dans le déplacement de q_2 de l'infini jusqu'à M_2 où le potentiel est créé par q_1 , est :

$$W_2 = q_2 V_2 \quad \text{avec} \quad V_2 = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 \vec{r}_{12}}$$

Le potentiel est 0 quand toutes les charges sont à l'infini (pour amener q_1 de l'infini à M_1 , le potentiel est nul $W_1 = 0$).

Si $q_1 q_2 > 0$: $W > 0$

il faut lutter contre la force de répulsion et fournir de l'énergie.

Si $q_1 q_2 < 0$: $W < 0$

il y a force attractive. L'extérieur reçoit de l'énergie.

I.1.7.2. Soit un ensemble de charges ponctuelles $q_1, q_2, q_i, \dots, q_n$, au repos à l'infini q est amenée en M depuis l'infini très lentement (succession d'états électrostatiques). La charge q est soumise au champ $E(P)$ créé en P par les charges q_i .

Elle subit une force $\vec{F} = q \overrightarrow{\operatorname{grad}} V$. Puisque c'est une succession d'états d'équilibre, une force $-\vec{F}$ = extérieure s'oppose à l'action de \vec{F} électrostatique.

Le travail de cette force est :

$$W = \int_{\infty}^M \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{M} = - \int_{\infty}^M F \cdot dM = - q \int_{\infty}^M \vec{E} \cdot d\vec{M}$$

Comme E dérive du potentiel V , nul à l'infini :

$$V(\infty) = 0$$

$$W = q (V(M) - V(\infty)) = q V(M) = E_p$$

Ce travail fourni au système par l'extérieur est l'énergie potentielle de la charge q dans le champ E , dérivant du potentiel V .

Soient $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ charges en M_1, M_2, \dots, M_n :

– on approche q_1 en M_1 , les autres charges sont à l'infini (pas d'interaction). $W_1 = 0$ puisque q_1 n'agit pas sur q_1 ,

– on approche q_2 en M_2 (en interaction avec q_1).

$$V_2 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$$

W fournie par l'extérieur (donc potentielle pour le système q_1, q_2) est :

$$W_2 = q_2 V_2$$

On approche q_3 dans :

$$V_3 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$

$$W_3 = q_3 V_3$$

L'énergie totale fournie par l'extérieur (donc W_{pot} des n charges) est :

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + \dots + W_n \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \sum_{i>j}^n q_i \left(\frac{q_j}{r_{ij}} \right) \end{aligned}$$

Pour symétriser :

$$= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(M_i)$$

Dans le cas d'une répartition continue de densité $\rho(M)$, le volume $d\tau$ élémentaire contient la charge $\rho d\tau$ et est le siège d'un potentiel $V(M)$.

L'énergie potentielle E_p est donc :

$$= \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho(M) V(M) d\tau$$

I.1.7.3

Nous avons vu que :

$$\text{div } E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Donc :

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon_0 \text{div } E \cdot V d\tau$$

Comme :

$$\text{div } V\vec{E} = V \text{div } \vec{E} + \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V$$

$$E_p = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} V \cdot \vec{E} \, d\tau + \iiint_{\Omega} \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \, d\tau$$

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} (V \cdot \vec{E}) \, d\tau = \iint_{\Sigma} V \cdot \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

V est en $1/R$, E en $1/R^2$, S en $R^2 \Rightarrow$ le flux est en $1/R$ si $R \rightarrow \infty, \phi = 0$.

Il ne reste plus que :
$$E_p = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \, d\tau$$

La densité d'énergie est donc :
$$\frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

On ne parle plus des charges mais seulement du champ \vec{E} .

I.1.8 Étude du dipôle électrostatique

I.1.8.1.

Potentiel :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$$

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$$

$$V(M) = \frac{qd \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

On pose : $\vec{p} = q\vec{d}$ moment dipolaire.

$$E_r = - \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{qd \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3}$$

$$E_{\theta} = - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{qd \sin \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3}$$

I.1.8.2.

$$V_M(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{2p \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{r^3} \vec{e}_{\theta} \right]$$

et :

$$= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}}{r^3} \right)$$

I.1.8.3. La résultante des forces qui s'exercent sur un dipôle placé dans un champ uniforme est nulle :

$$\vec{F} = \vec{0}$$

Le moment du couple par rapport au point O (milieu des deux charges) :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{d}}{2} \wedge q \vec{E}_a + \left(-\frac{\vec{d}}{2} \right) \wedge (-q \vec{E}_a) = q\vec{d} \wedge \vec{E}_a$$

Dans le cas d'un dipôle rigide, pour amener deux charges $+q$ et $-q$ de l'infini :

$$\begin{aligned} W_{\text{opérateur}} &= q \left[V \left(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2} \right) - V \left(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2} \right) \right] \\ &= q\vec{d} \overrightarrow{\text{grad}} V \\ &= -\vec{p} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

Le résultat ne dépend pas du chemin suivi = Énergie potentielle.

Énergie minimale si \vec{b} aligné avec \vec{E} : $\begin{cases} \text{Expérience} \\ \text{Déviation d'un jet d'eau} \end{cases}$

Le long de la ligne de champ : $\vec{E} = E_{(x)} \vec{u}_x$

$$\begin{array}{ccc} \vec{F}_- = -q \vec{E}_- & & \vec{F}_+ = +q \vec{E}_+ \\ \leftarrow \bullet & & \bullet \rightarrow \\ -q & & +q \end{array}$$

La résultante des forces n'est plus nulle :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_- + \vec{F}_+ = q \left[E \left(x + \frac{d}{2} \right) - E \left(x - \frac{d}{2} \right) \right] \\ E \left(x + \frac{d}{r} \right) &= E(x) + \frac{d}{2} \frac{dE}{dx} \Rightarrow \vec{F} = qd \frac{dE}{dx} \vec{u}_x \end{aligned}$$

I.2. Charges en mouvements

I.2.1. Notion de densité de courant

ρ représente une densité volumique de charge.

On considère une surface élémentaire $d\vec{S}$ traversée par un flux de charge (et sa normale orientée).

La charge élémentaire d^2Q traversant $d\vec{S}$ pendant dt est :

$$\begin{aligned} d^2Q &= n q \vec{v} \cdot d\vec{S} \cdot dt \\ &= \vec{j} \cdot d\vec{S} \cdot dt \end{aligned}$$

$d^2Q > 0$, si $q > 0$ et \vec{v} est dans le sens de la normale > 0 .

Si $q < 0$, il faut que \vec{v} soit de sens opposé à la normale à la surface.

Cas d'une surface finie :

$$dQ = \iint_{(S)} d^2Q = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \cdot dt$$

donc : $\frac{dQ}{dt} = I = \text{flux de } \vec{J} \text{ à travers } S$

I.2.2. Dans le volume \mathcal{V} la charge à l'instant t est :

$$Q(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(t) \, d\tau$$

à $t + dt$:

$$Q(t + dt) = Q(t) + dQ$$

Donc :

$$Q(t + dt) - Q(t) = \iiint_{\mathcal{V}} (\rho(t + dt) - \rho(t)) \, d\tau$$

$$dQ = \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dt \, d\tau$$

Mais :

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau$$

Si la charge du volume \mathcal{V} , il y a courant vers l'extérieur donc :

$$\left| \left(\frac{dQ}{dt} \right)_{ext \rightarrow int} \right| = \left| \left(\frac{dQ}{dt} \right)_{cos t \rightarrow ext} \right|$$

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau &= - \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ &= - \iiint \overrightarrow{div j} \cdot d\tau \end{aligned}$$

donc :

$$div j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Dans le cas d'un régime stationnaire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

donc :

$$div \vec{j} = 0$$

\vec{j} est à flux conservatif.

I.2.3. Loi d'Ohm :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

$$-\overrightarrow{grad} V = \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}$$

$$V_A - V_B = E \cdot l$$

$$I = j S$$

donc :

$$V_A - V_B = \frac{I l}{\gamma S}$$

on appelle résistance la quantité :

$$R = \frac{l}{\gamma S}$$

I.2.4. Modèle de Drude :

I.2.4.1. Équation :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = e \vec{E} - \frac{m_e \vec{v}}{t_0}$$

mouvement rectiligne suivant la direction du champ uniforme \vec{E} .

$$m_e \frac{dv}{dt} + \frac{mv}{t_0} = e E$$

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$v = v_0 e^{-t/t_0}$$

Une solution particulière de l'équation complète est :

$$v = \frac{e t_0}{m} E$$

Donc la vitesse est : $v = v_0 e^{-t/t_0} + e \frac{t_0}{m_e} E$

le régime transitoire est exponentiel.

Si $t \gg t_0$ le régime est permanent :

$$v = \frac{e t_0}{m_e} E$$

Le courant \vec{j} , dans ce cas, est :

$$\vec{j} = n e \vec{v} = n \frac{e^2 t_0}{m} E$$

donc : $\gamma = \frac{n e^2 t_0}{m}$ et $\mu_e = \frac{e t_0}{m_e}$

donc : $t_0 = \frac{10^8 \times 9 \cdot 10^{-31}}{1,9 \times 8,3 \cdot 10^{28} \times (1,6)^2 (10^{-38})} = 2 \cdot 10^{-14} \text{ s}$

$$v = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

I.2.4.2. Dans le cas où la concentration des porteurs de charges n'est plus uniforme, on écrit la condition d'équilibre :

$$\vec{J}_{conduction} + \vec{J}_{diffusion} = 0$$

donc : $-n q_e \mu_e E - D \overrightarrow{\text{grad}} n_e = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} n = -\frac{n_e q_e \mu_e E}{D}$

On applique le théorème de Gauss :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

donc : $\text{div } \vec{E} = \frac{(N_0 - n_e) q_e}{\epsilon_0}$

En utilisant : $\text{rot rot } E = -\Delta E + \text{grad div } E = 0$

On obtient : $\Delta E = -\frac{q_e}{\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} n_e = \frac{n_e q_e \mu_e E}{\epsilon_0 D}$

que l'on met sous la forme : $\Delta E - \frac{1}{\lambda_D^2} E \tau_0$

avec : $\lambda_D^2 = \frac{\epsilon_0 D}{n_e q_e^2 \mu_e}$

I.2.5. La diffusion s'oppose à l'accumulation de charge à la surface d'un conducteur.

Soit $z'z$ la direction perpendiculaire à la surface :

$$\frac{d^2 E_z}{dz^2} - \frac{E_z}{\lambda_D^2} = 0$$

$$E_z = E(0) e^{-z/\lambda_D}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_z}{dz} &= -\frac{E(0)}{\lambda_D} \exp(-Z/\lambda_D) \\ &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Donc : $\rho = -\epsilon_0 \frac{E_z(0)}{\lambda_D} \exp\left(-\frac{z}{\lambda_D}\right)$ [si $z \rightarrow \infty, \rho = 0$]

La densité de charge ρ est répartie sur une épaisseur de l'ordre de λ_D .

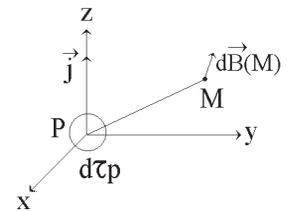
Application Numérique : $D = 2 \mu_e \epsilon_F / 3$
 $N_0 = 10^{28} / m^3$ $\lambda_D = 1,6 \text{ \AA}$
 $\epsilon_F = 7 \text{ eV}$

I.3. Magnétostatique : champ d'induction magnétique créé par un courant stationnaire

I.3.1. Loi de Biot et Savart

$$dB(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} d\tau_p$$

cas d'un circuit filiforme.



$$\vec{j} \cdot d\tau = \vec{j} \cdot s \times dl = I d\vec{l}$$

on oriente $d\vec{l}$ suivant \vec{j} .

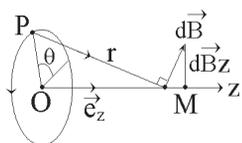
Donc : $\vec{dB}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$

Attention : quand on intègre l'intégrale curviligne est fermée puisqu'un circuit doit être fermé.

Expression équivalente :
$$dB(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} nd\tau_p$$

I.3.2. Étude des bobines de Helmholtz

I.3.2.1. Induction créée par une spire :



$$\overrightarrow{B}(M) = \left(\overrightarrow{B}(M) \cdot \vec{e}_z \right) \vec{e}_z = \left(\int_0^{2\pi} \overrightarrow{dB} \cdot \vec{e}_z \right) \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} R d\theta \vec{e}_\theta \wedge \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dB} \cdot \vec{e}_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[R d\theta \frac{\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_{P \rightarrow M}}{\left(\frac{R}{\sin \alpha} \right)^2} \right] \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sin^3 \alpha d\theta \end{aligned}$$

En intégrant sur la spire :
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2 R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$$

au centre de la spire :
$$B(0) = \frac{\mu_0 I}{2 R}$$

I.3.2.2. Bobines de Helmholtz

Sur l'axe :

$$\vec{B} = B_0 \sin^3 \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{R}{x}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cos^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

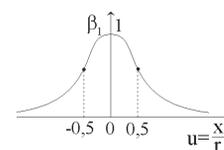
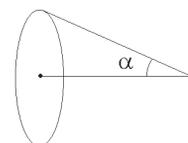
$$1 + u^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \left(\frac{1}{1 + u^2} \right)^{+\frac{3}{2}}$$

donc :

$$\mathcal{B}_1 = (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\mathcal{B}'_1 = -\frac{2u^3}{2} (1 + u^2)^{-\frac{5}{2}}$$

On calcule \mathcal{B}''_1 et on voit que : $\mathcal{B}''_1 = 0$

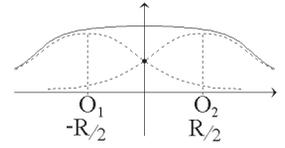


si : $4u^2 - 1 = 0 \cdot u^2 = \frac{1}{4}$ $u = \pm \frac{1}{2}$

$\mathcal{B}(0) = 2 B_0 (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}}$ avec : $u = 0,5$

$\mathcal{B}(0) = 1,44 B_0$

I.3.2.3. Quand les deux bobines sont à une distance R, les inductions créées ont leurs points d'inflexion confondus, et l'induction résultante est à peu près constante entre les deux bobines.



I.3.3.

En remarquant que : $\frac{\vec{PM}}{PM^3} = \text{grad}_{(M)} \left(-\frac{1}{PM} \right)$

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(P) \wedge \text{grad} \frac{1}{PM} d\tau_p$$

On utilise la relation :

$$\text{rot} [a(M) \vec{K}(M)] = a(M) \text{rot} \vec{K}(M) - \vec{K}(M) \wedge \text{grad} a(M)$$

$$\vec{dB} = \text{rot} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau_p \right] \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{PM} \text{rot}_{(M)} j(P) \right)}_{=0}$$

\vec{dB} étant un rot pur, sa divergence est nulle.

$$\text{div} \vec{dB} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{dB} = 0$$

Le potentiel vecteur \vec{dA} est donc :

$$\vec{dA} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau_p$$

\vec{dA} et \vec{A} sont définis à un gradient près puisque :

$$\text{rot} (\text{grad} f) \equiv \vec{0}$$

$$\nabla \wedge \nabla \cdot f \equiv \vec{0}$$

$$\text{rot} \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \text{rot}_M \left(\vec{j}(P) \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} \right) d\tau_p$$

I.3.4. Analogie formelle entre électrostatique et magnétostatique

I.3.4.1.

1.3.4.2. * $\phi = 2\pi r E(r) h$

$$= \pi a^2 h \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{théorème de Gauss})$$

car : $q_{\text{int}} = \pi a^2 h \rho$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

et : $V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln r + k$

problème des charges à l'infini.

* Potentiel vecteur du champ magnétique à l'extérieur d'un cylindre infini de rayon a , à la distance r , dans lequel se trouve une densité de charge uniforme parallèle à O_z .

$$\mu_0 j_z = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow j_z = \frac{\rho}{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$j_z = \frac{\lambda}{\pi a^2} \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Rightarrow A(z) = -\frac{\mu_0 a^2}{2} j_z \ln r + k$$

I.4. Régimes variables : induction électromagnétique

I.4.1. Une ampoule avec \bar{e} + plaques + bobines de Helmholtz pour montrer expérimentalement chaque propriété contenue dans la force de Lorentz :

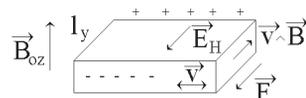
$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Force électrique : indépendante de \vec{v} . $\vec{F}_E = q \vec{E}$,

Force magnétique : proportionnelle à \vec{v} , d'orientation $\vec{v} \wedge \vec{B}$.

$$v = \frac{I}{s} \frac{1}{\rho}$$

I.4.2. Effet Hall



$$L = 20 \text{ mm} \quad B = 0,1 \text{ T}$$

$$l_y = 1 \text{ mm} \quad i_0 = 10 \text{ mA}$$

$$d_z = 0,2 \text{ mm} \quad n_e = 1,6 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$$

Le champ de Hall est :

$$\vec{E}_H$$

$$i_0 = \frac{dq}{dt} = n_e$$

$$j = n_e v$$

$$|q \vec{v} \wedge \vec{B}| = \left| q \vec{E}_H \right|$$

$$v \cdot B = E_H = \frac{V_H}{l_y}$$

$$\vec{j} \cdot \vec{dS} = i_0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{dS} = e v d_z l_y = i_0$$

$$= 195 \text{ m/s}$$

$$V_H = 0,0357 \text{ volt} = 35,7 \text{ mV}$$

Par la mesure de V_H , on obtient B - après étalonnage.

I.4.3. L'induction électromagnétique

I.4.3.1. Loi de Faraday : la f.é.m. d'induction est $e = -\frac{d\phi}{dt}$ quelle que soit la cause de la variation de flux.

Loi de Lenz : la f.é.m. d'induction s'oppose à la cause qui l'engendre.

I.4.3.2.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dM} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_{\text{en 1 pt fixe}} \cdot \vec{dS}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dM} = \iint_{(S)} \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

La surface (S) est quelconque, donc :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On traduit la conservation du flux de \vec{B} par l'existence d'un potentiel vecteur \vec{A} .

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = -\text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

donc : $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ dérive d'un potentiel V

$$\vec{E} = - \overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

PARTIE II

UTILISATION DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

II.1. Introduction du courant de déplacement

La relation $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ pose un problème car :

$$\text{div} (\text{rot } \vec{B}) = 0$$

entraîne : $\text{div } \vec{j} = 0$

ce qui n'est vrai que dans les régimes stationnaires.

Dans le cas de transport de charges on a :

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Comme : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\text{div} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Donc : $\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est un champ de rotationnel.

On élargit donc : $\overrightarrow{\text{rot}} B = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est appelé densité de courant de déplacement, bien qu'il ne corresponde pas du tout à un déplacement de charge.

Le rapport est : $R = \frac{\gamma}{\epsilon_0 \omega}$

Si la fréquence $F = 1 \text{ MHz}$: $R_1 = 1,1 \cdot 10^{12}$ pour $\gamma_1 = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$

$$R_2 = 18 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{pour } \gamma_2 = 10^{-6} \Omega^{-1} m^{-1}$$

Pour pouvoir écrire $i = \gamma E$, il faut que $t > t_0$.

Donc ici, la période T doit être telle que : $T \gg t_0$

$$\omega \ll \frac{2\pi}{t_0}$$

la relation :

$$\gamma = \frac{ne^2 t_0}{m}$$

entraîne :

$$t_0 = 2,3 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

Il faut :

$$T > 2 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

II.2. Application à la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

Équations de Maxwell dans le vide en absence de charges et de courants.

II.2.1.

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

II.2.2.

$$\text{rot } \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \text{rot } \vec{B}}{\partial t}$$

$$-\Delta \vec{E} + \text{grad } \text{div } \vec{E} = - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Comme $\text{div } \vec{E} = 0$:

$$\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon_0 \mu_0 \partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{rot } \text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \text{rot } \vec{E}}{\partial t}$$

$$-\Delta \vec{B} = - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. On reconnaît l'équation de propagation des ondes de d'Alembert.

Corde vibrante : écart par rapport à la position d'équilibre.

Tuyau sonore : écart entre pression et pression d'équilibre.

II.2.3.

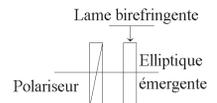
Si :

$$E = E_1 \left(t - \frac{x}{c} \right) + E_2 \left(t + \frac{x}{c} \right)$$

progressive dans le sens $x > 0$.Les solutions ont une double périodicité en t et \vec{r} ; φ = phase / origine, \vec{k} = vecteur d'onde.

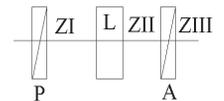
	$\lambda(m)$	γH_7	$1 \mu m \rightarrow 1,2396 eV$
Ondes radio	$10^4 \rightarrow 1$	10^4	
Micro-ondes	$10^{-2} \rightarrow 10^{-3}$	10^{10}	
Infrarouge	$10^{-3} \rightarrow 10^{-6}$	10^{12}	
Visible	$10^{-6} \rightarrow 10^{-7}$		
Ultraviolet	$10^{-7} \rightarrow 10^{-8}$	10^{14}	
Rayons X	$10^{-8} \rightarrow 10^{-10}$	10^{18}	
Rayons γ	$10^{-10} \rightarrow 10^{-12}$	10^{20}	

II.2.4.

• Rectiligne : le vecteur \vec{E} reste dans un plan fixe de polarisation, au cours de la propagation.• Polariseur : prisme – polaroïd• Elliptique : composition de deux vibrations rectilignes cohérentes déphasées de $\varphi \neq k\pi$ II.2.5. Déphaseur

II.2.5.1.

$$\phi = 2\pi \frac{d \Delta n}{\lambda}$$

Lumière incidente naturelle \rightarrow après P : elle est polarisée rectilignement avec l'intensité :

$$\frac{I_0}{2}$$

Amplitude du champ électrique après P :

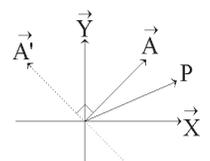
 E_0 tel que :

$$\frac{I_0}{2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 C E_0^2 \rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{I_0}{\epsilon_0 C}}$$

et champ électrique porté par P.

dans :

$$\rightarrow \begin{matrix} \vec{E} \\ (Z I) \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{I_0}{\epsilon_0 C}} \cos \omega t \\ 0 \end{array} \right.$$



dans le repère \vec{X}, \vec{Y}

$$\rightarrow \begin{matrix} \vec{E} \\ (Z I) \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{I_0}{\epsilon_0 C}} \cos \omega t \cos \alpha \\ \sqrt{\frac{I_0}{\epsilon_0 C}} \cos \omega t \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$\text{En zone II ds axes } (\vec{X}, \vec{Y}) : \begin{cases} \sqrt{\frac{I_0}{\epsilon c}} \cos \omega t \cos \alpha \\ \sqrt{\frac{I_0}{\epsilon c}} \cos (\omega t - \phi) \sin \alpha \end{cases}$$

En zone II ds (\vec{A}, \vec{A}') :

$$\vec{X} \begin{cases} \cos \beta \\ -\sin \beta \end{cases}$$

$$\vec{Y} \begin{cases} \sin \beta \\ \cos \beta \end{cases}$$

$$\text{suisant } \vec{A} \begin{cases} \sqrt{\frac{I_0}{\epsilon c}} \cos \omega t \cos \alpha \cos \beta + \sqrt{\frac{I_0}{\epsilon c}} \cos (\omega t - \phi) \sin \alpha \sin \beta \end{cases}$$

$$\text{suisant } \vec{A}' \begin{cases} -\sqrt{\frac{I_0}{\epsilon c}} \cos \omega t \cos \alpha \sin \beta + \sqrt{\frac{I_0}{\epsilon c}} \cos (\omega t - \phi) \cos \beta \sin \alpha \end{cases}$$

$$I = \epsilon_0 C \langle E^2 \rangle_t = I_0 \langle [\cos \alpha \cos \beta \cos \omega t + \sin \alpha \sin \beta \cos (\omega t - \phi)]^2 \rangle_t$$

$$= I_0 \left[\frac{1}{2} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \langle \cos \omega t \cos (\omega t - \phi) \rangle \right]$$

$$= \frac{I_0}{2} [\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \cos \phi]$$

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \phi$$

avec :

$$I_1 = \frac{I_0}{2} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta$$

$$I_2 = \frac{I_0}{2} \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

Les amplitudes correspondantes sont respectivement :

$$\sqrt{\frac{I_0}{2}} \cos \alpha \cos \beta \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{I_0}{2}} \sin \alpha \sin \beta$$

I_{\max} pour $\cos \phi = 1$ le maximum de $I_{\max}, I_{\max \max}$
est $I_{\max \max}$ si $I_1 = I_2$

I_{\min} pour $\cos \phi = -1$

↓

$$|\cos \alpha \cos \beta| = |\sin \alpha \sin \beta|$$

↓

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \pm \frac{\pi}{2} \\ \alpha - \beta = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

alors :
$$I_{\max} = \frac{I_0}{2} \sin^2 2\alpha$$

Donc pour que I_{\max} soit max il faut :

$$\sin 2\alpha = 1 \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$$

→ Pour satisfaire simultanément $V = 1$ et I_{\max} il faut :

• P et A //, à 45° de (\vec{X}, \vec{Y}) alors :

$$I = \frac{I_0}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2}$$

• ou P et $A \perp$ à 45° de (\vec{X}, \vec{Y}) alors :

$$I = \frac{I_0}{2} \sin^2 \frac{\phi}{2}$$

II.2.5.2. Compensateur de Babinet

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{2\pi \Delta n}{\lambda} (2y - y_0) \tan \theta \sim \frac{2\pi \Delta n}{\lambda} (2y - y_0) \theta$$

analogue à une lame d'épaisseur variable :

$$e(y) = (2y - y_0) \theta$$

ceci est analogue au coin d'épaisseur variable
on voit des franges // arrête du coin.

PARTIE III

LES MATÉRIAUX EN PRÉSENCE DE CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

III.1. Travaux dirigés : cas des champs électriques permanents

III.1.1
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

III.1.2.
$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

avec :
$$\epsilon_r = 1 + \chi_e$$

La polarisation est source d'un nouveau champ :

$$\vec{E}_p = - \frac{|\sigma_p|}{\epsilon_0} \vec{u} = - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

le champ total est :
$$\vec{E} = \underset{\text{appliqué}}{\vec{E}_0} + \vec{E}_p$$

\vec{E}_p s'oppose au champ appliqué.

Cas du vide : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_0 = 0$

$$\text{div} \vec{E}_0 = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0}$$

Sans modifier ρ_{libre} , on met un diélectrique : le champ devient \vec{E} .

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0$$

$$\text{div} (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}) = \rho_{\text{libre}}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \epsilon_r \vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{div} \epsilon_r \vec{E} = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0}$$

donc : $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$

avec : $\epsilon_r > 1$

$$E < E_0$$

donc la tension est divisée par ϵ_r et la capacité est multipliée par ϵ_r :

$$C_{\text{matériau}} > C_{\text{vide}}$$

III.1.3. III.1.3.1.

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} e \frac{r^3}{a^3}$$

$$E = \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{r}{a^3}$$

L'électron est ramené vers sa position d'équilibre par :

$$f = -kr$$

avec : $k = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 a^3}$

III.1.3.2. L'énergie électrostatique d'un dipôle \vec{p} dans le champ local est ;

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}_e$$

donc : $W(\theta) = -p E_e \cos \theta$

Puisque la probabilité pour qu'un dipôle ait l'énergie $W(\theta)$ soit Boltzmann.

Dans le cône $\theta, \theta + d\theta$, le nombre dN est tel que :

$$dP = \frac{dN}{N} = K e^{-w'(\theta)/k_B T} d\omega$$

si : $d\omega = 2\pi \sin \theta d\theta$

On pose : $\frac{p E_e}{k_B T} = u$

Il faut déterminer K ; pour cela on fait :

$$\int_0^\pi dP = 1$$

Donc : $1 = 2\pi K \int_0^\pi e^{u \cos \theta} \sin \theta d\theta$

donc :

$$K = \frac{u}{4\pi sh u}$$

Comme $P = \frac{1}{V} \int p \cos \theta dN$, le nombre demandé est :

$$dN = \frac{Nu}{4\pi sh u} e^{u \cos \theta} 2\pi \sin \theta d\theta$$

Le vecteur polarisation est le moment dipolaire résultant par unité de volume. On projette sur la direction du champ (par raison de symétrie, vu le grand nombre de dipôles) :

$$n = \frac{N}{V}$$

$$P = \frac{dN}{V} \int_0^\pi K e^{u \cos \theta} 2\pi \sin \theta p \cos \theta d\theta$$

$$P = 2\pi K np \int_0^\pi (\cos \theta e^{u \cos \theta}) \sin \theta d\theta$$

On intègre par parties en posant : $U = \cos \theta$

$$dU = -\sin \theta d\theta$$

$$dV = e^{u \cos \theta} \sin \theta d\theta$$

$$V = \frac{2 sh u}{u}$$

Plus astucieux :

On dérive : $\int_0^\pi e^{u \cos \theta} \sin \theta d\theta$ par rapport à u .

On trouve : $\int_0^\pi \cos \theta e^{u \cos \theta} \sin \theta d\theta$

c'est-à-dire : $\frac{P}{2\pi Knp}$

Il suffit donc de dériver / à u , la quantité :

$$\frac{2 sh u}{u}$$

ce qui donne :

$$2 \left[\frac{ch u}{u} - \frac{sh u}{u^2} \right] = \frac{2}{u} \left[ch u - \frac{sh u}{u} \right] \frac{P}{2\pi K np} = \frac{2}{u} \left[ch u - \frac{sh u}{u} \right]$$

III.2. Matériaux en régime variable

III.2.1. Modèle de Drude-Lorentz

$$\vec{E} = E_0 e^{-i(\omega t)}$$

à une dimension :

$$m \ddot{r} = - m \omega_0^2 r - \frac{m_e}{\tau_0} \dot{r} - e E_e$$

donc :

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r + \frac{m_e}{m \tau_0} \dot{r} = - \frac{e}{m} E_0 e^{-i \omega t}$$

On cherche une solution de la forme :

$$r = r_0 e^{-i \omega t} \Rightarrow r = - \frac{e}{m} \frac{E_0 e^{-i \omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau_0}}$$

$$p = - e r$$

$$p = \frac{e^2}{m} \frac{E_0 e^{-i \omega t}}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{i \omega}{\tau_0} \right]}$$

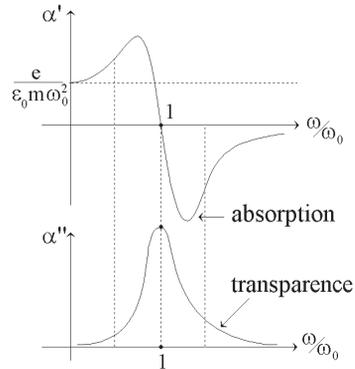
$$\alpha = \frac{p}{\epsilon_0 E_{local}}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{i \omega}{\tau_0}}$$

Au voisinage de $\omega = \omega_0$ résonance d'absorption ; α a une partie imaginaire α'' et une partie réelle α' .

Si : $\omega \ll \frac{1}{\tau} \quad \alpha'' \approx 0$

l'amortissement est très faible. Il y a transparence.



PARTIE IV MILIEUX AIMANTÉS

IV.1. Résumé de cours : définitions

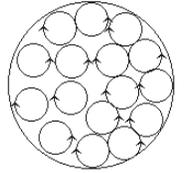
IV.1.1 Expériences classiques de l'enseignement secondaire.

IV.1.2. Expériences classiques de l'enseignement secondaire.

IV.1.3. Barreau cylindrique uniformément aimanté :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \cdot \vec{M} = \vec{0} = \vec{j}_{mv}$$

courants purement superficiels.



Analogues à de petits dipôles magnétiques sous forme de boucle de courants d'aimantation. Les boucles adjacentes annulent leurs effets sauf en surfaces.

Analogue au solénoïde.

IV.1.4. $\text{div } \vec{B} = 0$

et : $\overrightarrow{\text{rot}} \cdot \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_e + \vec{j}_{mv})$

avec : $\vec{j}_{mv} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{M}$

donc : $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

ou : $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

IV.2. Aimantation induite

IV.2.1. Si : $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \vec{H}$$

donc :
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

avec :
$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

$$\chi_m > 0$$

paramagnétique

$$\chi_m < 0$$

diamagnétique

à T ordinaire :
$$\chi_m \text{ para} \sim 10^{-3} \text{ SI}$$

$$\chi_m \text{ di} \sim 10^{-9} \text{ SI}$$

tous les corps sont diamagnétiques.

IV.2.2. Ascension d'un liquide paramagnétique

Un élément de volume $d\tau$ possède un moment magnétique :

$$d\vec{m} = \vec{M} \cdot d\tau$$

Dans un champ inhomogène B_0 il subit la force :

$$\vec{dF} = (d\vec{m} \cdot \text{grad}) \vec{B}_0$$

$$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = (\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B}_0$$

Pour les paramagnétiques $\chi \ll 1$: $\mu \approx \mu_0$

donc :
$$\vec{M} = \chi \vec{H} \Rightarrow \vec{M} = \chi \frac{\vec{B}_0}{\mu} = \chi \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

(on néglige le champ dipolaire). La densité volumique de force est :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}}{d\tau} &= f_v = \frac{\chi_m}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{B}_0 \\ &= \frac{\chi}{2 \mu_0} \text{grad} B_0^2 \end{aligned}$$

puisque :
$$\text{rot} \vec{B}_0 = 0$$

hors de l'aimant.

La relation fondamentale de l'hydrostatique est :

$$\vec{0} = \rho_{mv} \vec{g} - \text{grad} \mathcal{P}_h + \frac{\chi}{2 \mu_0} \text{grad} B_0^2$$

On peut transformer :
$$\rho_m \vec{g} = \text{grad} (-\rho_m g z)$$

Donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(-\rho_{mv} g z - \mathcal{P}_h + \frac{\chi}{2 \mu_0} \overrightarrow{B_0}^2 \right) = \vec{0}$$

Donc : la quantité entre () est constante dans le liquide.

Si :

$$\overrightarrow{B_0} = \vec{0} \Rightarrow \text{théorème de Pascal}$$

$$-\rho_{mv} g z_A - \mathcal{P}_A + \frac{\chi}{2 \mu_0} \overrightarrow{B_{0_A}}^2 = -\rho_{mv} g z_B - \mathcal{P}_B + 0$$

(B est extérieur au champ)

$$\mathcal{P}_A = \mathcal{P}_B$$

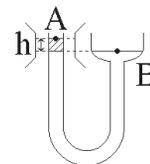
$$\Rightarrow \rho_{mv} (z_A - z_B)_g = \frac{\lambda}{2 \mu_0} \overrightarrow{B_{0_A}}^2$$

$$(z_a - z_b) = h = \frac{\chi}{2 \mu_0 \rho_{mv} g} \overrightarrow{B_{0_A}}^2$$

$$B_0 = 1 T$$

$$h = 6 \cdot 10^{-3} m$$

$$\chi \approx 1,5 \cdot 10^{-4} SI$$



IV.3. Partie expérimentale, un TP cours : Étude du ferromagnétisme

IV.3.1. Fe, Co, Ni, alliages, CrO₂, Gd généralement cristallins.

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_c}$$

Loi de Curie Weiss

Si $T > T_c$ la substance n'est plus ferromagnétique.

Expérience du clou chauffé qui n'est plus attiré par l'aimant (ne pas chauffer l'aimant !).

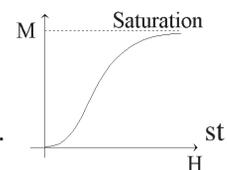
IV.3.2. Par raison de symétrie \vec{B} , \vec{M} , \vec{H} sont tous orthoradiaux.

La mesure de H est directement proportionnelle à la valeur de I (ampèremètre).
Le potentiel lu est proportionnel à la f.é.m. e :

$$\phi - e_{\text{induction}} = - \left(- \frac{d}{dt} \right) = k \frac{dB}{dt}$$

Il faut intégrer pour avoir B.

Sur la courbe on voit que χ_m varie avec H.



IV.3.3. Sur la courbe de variation $M = f(H)$, le retour ne se fait pas suivant l'aller. On arrive à stabiliser le cycle en faisant varier H alternativement. On atteint ainsi les valeurs de M_r , H_c .

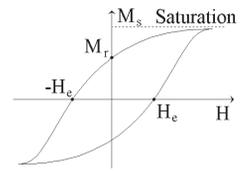
M_r est l'aimantation rémanente,

H_e est le champ coercitif,

matériaux doux : H_c très petit, M_r très grand,

matériaux durs : H_c très grand : (aimants permanents),

les pertes sont proportionnelles à l'aire du cycle.



Agrégation (Concours Interne)

OPTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE ET PHYSIQUE APPLIQUÉE

Composition avec exercices d'application - Session : 1997

OPTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

PARTIE A:

PROPRIETES DE L'HYDROGENE, DE L'OXYGENE ET DE L'EAU

1.1 $^{16}_8\text{O}$; $^{17}_8\text{O}$; $^{18}_8\text{O}$

1.2 *Etude des molécules :*

1.2.1 $M_o = \sum x_i \cdot M_i = 15,9994 \text{ g/mol}$

1.2.2 $^{16}\text{O}^{16}\text{O}$; $^{16}\text{O}^{17}\text{O}$; $^{16}\text{O}^{18}\text{O}$; $^{17}\text{O}^{17}\text{O}$; $^{17}\text{O}^{18}\text{O}$; $^{18}\text{O}^{18}\text{O}$, soit 6 molécules possibles

1.2.3 molécules de dihydrogène

1.2.3.1 Les trois pics correspondent respectivement à $^1\text{H}^1\text{H}$; $^1\text{H}^2\text{H}$; $^2\text{H}^2\text{H}$.

1.2.3.2 Les abondances des molécules en fonction des abondances des atomes sont respectivement X^2 , Y^2 , et $2XY$. Donc $X = (0,99968)^{1/2} = 0,99984$

$Y = 0,000312/2X = 1,56 \cdot 10^{-3}$;

$x = Y^2 = 2,43 \cdot 10^{-8}$.

1.2.4 Molécules d'eau :

Les probabilités de combinaison des atomes sont indépendantes , si les isotopes sont admis avoir les mêmes propriétés chimiques . Donc les abondances de chaque molécules sont données par $(x+y+z)^1(u+v)^2$ où x , y , z sont les abondances des atomes d'oxygène 16 , 17 , 18 et u et v les abondances de H et D respectivement . $x=0,9976$; $y=0,0004$; $z=0,002$.

1.2.4.1 18,19,20,21,22.

1.2.4.2 Le développement du produit donne les abondances des molécules

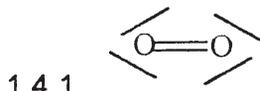
18 : $0,99728$; 19 : $3,11 \cdot 10^{-4} + 3,69 \cdot 10^{-4}$; 20 : $2,43 \cdot 10^{-8} + 1,26 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3}$

21 : $9,7 \cdot 10^{-12} + 4,8 \cdot 10^{-11}$; 22 : $4,8 \cdot 10^{-11}$.

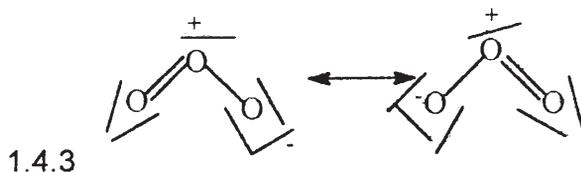
1.2.5 Les propriétés chimiques sont essentiellement dues aux électrons périphériques , mais certaines propriétés font intervenir les vibrations des atomes . La masse des isotopes entraîne donc de légères différences qui , dans le cas de l'hydrogène peuvent être notables .

1.3 Formule électronique de l'atome

1.3.1 Et 1.3.2. $1s^2, 2s^2, 2p_x^2, 2p_y^1, 2p_z^1$. Deux électrons sont non appariés. Les niveaux d'énergie sont donnés par Klechskowski.

1.4 Représentation des molécules :

1.4.2 double liaison, indice de liaison égal à 2.



1.4.4 D'où un moment dipolaire résultant dirigé selon l'axe de symétrie de la molécule.

La formule en forme de triangle équilatéral est à bannir en raison des propriétés chimiques de l'ozone.

1.4.5 Orbitales moléculaires du dioxygène :

1.4.5.1 Les orbitales moléculaires sont obtenues par combinaison linéaire des orbitales atomiques.

1.4.5.2 La formule du dioxygène est $\sigma_{2s}^2 \sigma_{2s}^{*2} \sigma_{2p_x}^2 \pi_{2p_y}^2 \pi_{2p_z}^2 \pi_{2p_y}^{*1} \pi_{2p_z}^{*1} \sigma_{2p_x}^0$

1.4.5.3 L'indice de liaison est égal à :

(Nombre d'électrons liants- nombre d'électrons antiliants)/2 = 2

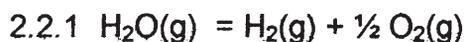
1.4.5.4 les deux électrons non appariés expliquent le paramagnétisme du dioxygène .

1.4.5.5 La molécule de dioxygène placée dans un champ magnétique hétérogène se déplace vers les champs forts .

2. Stabilité de l'eau en phase gazeuse :

2.1 L'état standard du carbone est l'état le plus stable à 298 K , sous un bar , c'est à dire le carbone graphite .

2.2 Stabilité en phase gazeuse :



2.2.2 $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \cdot \Delta_r S^\circ = 241800 + 44,4 \cdot T \quad (\text{J/mol})$

2.2.3 $K(2400) = \exp(-\Delta_r G^\circ/RT) = \alpha^{3/2} (P/P^\circ)^{1/2} / ((1+\alpha/2)^{1/2} \cdot (1-\alpha) \cdot 2^{1/2})$

AN : $\alpha = 0,027$; peu important mais pas négligeable .

2.2.4 Toutes choses égales par ailleurs , une augmentation de pression déplace l'équilibre dans le sens de la diminution des moles gazeuses donc dans le sens de la formation de l'eau . Il n'est pas nécessaire de refaire la démonstration de ce théorème (Loi de Le Chatelier)

225. Un calcul rapide analogue au 223. Nous donne $\alpha=0,174$; la dissociation , nous devrions plutôt dire la non formation , est donc importante , mais la présence d'eau est encore prédominante dans les produits de la combustion .

226. Pour qu'une température de flamme soit élevée , il faut que l'enthalpie réactionnelle soit très grande (en valeur absolue) ET que le nombre de moles de produits obtenus soit le plus petit possible , en effet la « Chaleur » réactionnelle sert à élever la température de l'état final. Ces deux conditions sont vérifiées par la combustion de l'acétylène . L'enthalpie de formation positive de l'acétylène contribue à une enthalpie réactionnelle très grande , mais n'est pas une condition nécessaire .

227. Environ 3500K , le calcul effectué avec les $C_p(T)$ donne à peu près cette valeur .

3. Etude électrochimique : Décomposition électrolytique :**3.1**

3.1.1 En milieu acide sulfurique : A l'anode : $\text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightarrow 1/2\text{O}_2(\text{g}) + 2\text{H}^+(\text{aq}) + 2\text{e}^-$

A la cathode : $2\text{H}^+(\text{aq}) + 2\text{e}^- \rightarrow \text{H}_2(\text{g})$

Le bilan global de la cellule d'électrolyse est $\text{H}_2\text{O}(\text{l}) \rightarrow \text{H}_2(\text{g}) + 1/2\text{O}_2(\text{g})$

3.1.2 L'avancement peut être défini comme le nombre de moles de réaction ci-dessus, il est égal au nombre de moles d'eau ayant réagi, il peut aussi être défini par le nombre de moles d'électrons échangé. Un choix clair doit être fait.

3.1.3 Energie interne :

$$dU = TdS - P_1 \cdot dV_1 - P_2 \cdot dV_2 + E \cdot dq \quad (\text{chaleur et travaux échangés})$$

$$3.1.4 \quad dG = dH - TdS - SdT = TdS + V_1 dP_1 + V_2 dP_2 - SdT \quad dG_{T,P_i} = Edq = EnF \cdot d\xi$$

Avec $\partial G / \partial \xi = \Delta_r G$, on obtient $\Delta_r G = +EnF$ pour la réaction d'électrolyse.

$$3.1.5 \quad E(298\text{K}, 1\text{bar}) = \Delta_r G^\circ / 2F = 236560 / 2.96500 = 1,225 \text{ V} \quad (\text{valeur connue } 1,23 \text{ V})$$

$$3.1.6 \quad E(353\text{K}, 1\text{bar}) = \Delta_r G / 2F = (285200 - 353 \cdot 163,2) / 2.96500 = 1,179 \text{ V}, \text{ variation faible.}$$

$$3.1.7 \quad E(353\text{K}, 40\text{bar}) = \Delta_r G / 2F = (\Delta_r G^\circ + 3/2 \cdot RT \cdot \ln(P/P^\circ)) / 2F = 1,263 \text{ V}$$

avec l'hypothèse des gaz parfaits, on constate qu'une augmentation importante de pression ne fait presque rien gagner sur la fem.

3.1.8 Electrolyse :

$$3.1.8.1 \quad dG = dW_{\text{rev}} = EnF \Rightarrow W_{\text{rev}} = 1,225 \cdot 2.96500 = 236425 \text{ J.}$$

$$3.1.8.2 \quad Q_{\text{rev}} = T\Delta S = \Delta_r H - \Delta_r G = 57,6 \text{ kJ}$$

$$3.1.8.3 \quad \Delta S = Q_{\text{rev}} / T = 163,2 \text{ J/mol/K}$$

$$3.1.8.4 \quad \Delta S_{\text{univers}} = \Delta S_i + \Delta S_{\text{ext}} = 0 \text{ car globalement réversible.}$$

Après quelques calculs, on trouve finalement que l'entropie supplémentaire correspond au phénomène de surtension

$$3.1.8.5 \quad \Delta S_{\text{univers}} = \Delta S_2 + \Delta S_{\text{ext}} = W_{\text{irrev}} - W_{\text{rev}} = (1,82 - 1,225) \cdot 2.96500 / 298 = 385 \text{ J/K}$$

3.2 Pile à combustible :

3.2.1 En milieu basique :



$$3.2.2 \quad dV_1 = dV_{\text{H}_2} = -RT \cdot d\xi ; \quad dV_2 = dV_{\text{O}_2} = -\frac{1}{2} RT d\xi$$

$$3.2.3 \quad \text{Pour la pile } \Delta_r G^\circ = -E^\circ nF \Rightarrow E^\circ = 1,225 \text{ V .}$$

$$3.2.4 \quad \Delta_r G = \Delta_r G^\circ + RT/2 \cdot \ln(p_{\text{O}_2}/P^\circ) = 236560 + 0,5 \cdot 8,32 \cdot 298 \cdot \ln(0,2) = 1,204 \text{ V}$$

Il n'y a donc aucun intérêt à utiliser de l'oxygène pur pour alimenter la pile à combustible , le gain sur la fem est insignifiant .

$$3.2.5 \quad \text{Si l'évolution est isotherme , } Q = \Delta_r H \cdot \xi - W_{\text{rev}} = -285200 + 1,225 \cdot 2.96500 = -48770 \text{ J (on retrouve ici que } \Delta S = Q/T = -163,2 \text{ J/K)}$$

3.2.6 $Q_p < 0$, si adiabatique , la température va augmenter . En pratique , les transformations réelles s'accompagneront d'une élévation de température de la pile .

$$3.2.7 \quad \text{Si le fonctionnement de la pile est supposé quasi réversible . } W_{\text{elect}} = \Delta G = -E^\circ nF = -1,225 \cdot 3,6 \cdot 10^{-3} = -4,41 \cdot 10^{-3} \text{ J } \Rightarrow Q_{\text{fournie}} = +4,41 \cdot 10^{-3} \text{ J .}$$

3.2.8 Le rendement tel que défini par le texte est $|\Delta_r G^\circ| / |\Delta_r H^\circ| = 2 \cdot E^\circ F / 285200 = 0,83$. Le rendement de cette pile est donc excellent , malheureusement , elle est toujours loin de la réversibilité .

3.3 Comme vu dans l'électrolyse , les surtensions limitent le rendement .

4. L'EAU SOLVANT : !

4.1 Détermination de pKe :

4.1.1 $a_i = C_i / C^\circ$, dans le cas des solutions idéales .

$$4.1.2 \quad \chi = \sum \lambda_i C_i = \lambda_{\text{H}^+} [\text{H}^+] + \lambda_{\text{HO}^-} [\text{HO}] = (\lambda_{\text{H}^+} + \lambda_{\text{HO}^-}) \cdot [\text{H}^+] \text{ pour l'eau pure .}$$

$$\text{De plus } \lambda_{\text{H}^+} + \lambda_{\text{HO}^-} = \Lambda_{\text{HCl}} + \Lambda_{\text{NaOH}} - \Lambda_{\text{NaCl}} \Rightarrow [\text{H}^+] = 5,93 \cdot 10^{-6} / 57,83 \cdot 10^{-3} = 1,025 \cdot 10^{-4} \text{ mol/m}^3 = 1,025 \cdot 10^{-7} \text{ mol/L donc } K_e = [\text{H}^+]^2 / C^{\circ 2} = 1,05 \cdot 10^{-14}$$

4.1.3

4.1.3.1 Loi de Van t'Hoff : $d(\text{Ln}K^\circ)/dT = \Delta_r H^\circ/RT^2$

Avec $\Delta_r H^\circ = \text{Constante}$, on obtient $\text{Ln}K_e = A/T + B$

4.1.3.2 Le graphe de $\text{Ln}K_e$ en fonction de $1/T$ est effectivement une droite, la dissociation de l'eau suit donc la loi de Van t'Hoff.

4.1.3.3 La pente de la droite nous donne $\Delta_r H^\circ = +57,1 \text{ kJ/mol}$.

4.1.4 A 60°C , la droite précédente donne un $\text{p}K_e = 12,5$, pour $\text{pH} = 6,7$, on a donc $[\text{HO}^-] > [\text{H}^+]$, la solution est donc basique.

4.2 Etude d'électrolytes :

4.2.1 Détermination de K_a :

$$\begin{aligned} 4.2.1.1 \quad \Lambda^\circ(\text{CH}_3\text{COOH}) &= \Lambda^\circ(\text{CH}_3\text{COONa}) + \Lambda^\circ(\text{HCl}) - \Lambda^\circ(\text{NaCl}) \\ &= 42,03 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

4.2.1.2 Λ augmente lorsque $c \rightarrow 0$ à cause de la dissociation de l'acide éthanóïque.

4.2.1.3 L'extrapolation est très difficile, elle est rendue encore plus difficile par les impuretés ($\text{CO}_2 \dots$)

4.2.1.4 Comme indiqué, la conductivité limite d'un électrolyte fort peut être obtenue par combinaison de conductivités limites d'électrolytes forts.

4.2.1.5 $[\text{H}^+] = [\text{CH}_3\text{COO}^-]$ en négligeant $[\text{HO}^-]$; donc

$$[\text{H}^+] = \chi / (\lambda_{\text{H}^+} + \lambda_{\text{CH}_3\text{COO}^-}) = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ mol/L} \Rightarrow K_a = [\text{H}^+]^2 / (C_0 - [\text{H}^+]) = 1,5 \cdot 10^{-5}$$

donc $\text{p}K_a = 4,82$

4.2.1.6 La conductivité de l'eau pure vaut $5,93 \cdot 10^{-6} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, il n'est donc pas nécessaire d'effectuer une correction, l'erreur est due beaucoup plus aux impuretés qu'aux ions provenant de l'autoprotolyse de l'eau.

4.2.2 Détermination d'un produit de solubilité :

$$\begin{aligned} \text{BaSO}_4 \text{ est un électrolyte fort, } [\text{Ba}^{2+}] &= [\text{SO}_4^{2-}] = \chi / (\lambda_{\text{Ba}^{2+}} + \lambda_{\text{SO}_4^{2-}}) \\ &= 9,57 \cdot 10^{-3} \text{ mol/m}^3 \text{ donc } K_s = a(\text{Ba}^{2+}) \cdot a(\text{SO}_4^{2-}) = 9,17 \cdot 10^{-11} \end{aligned}$$

4.2.3 Etude de paires d'ions :

4.2.3.1 $C_f = [Ca^{2+}]$; $C_i + C_f = [SO_4^{2-}]$

si le sulfate de calcium est un électrolyte fort , on doit vérifier que $C_f(C_i + C_f) = K_s$. Le graphe de C_f en fonction de $1/(C_i + C_f)$ doit être une droite , ce qui n'est pas le cas .

4.2.3.2 Si des paires d'ions existent , elles contribuent à la concentration totale , mais ne participent pas à la conduction .

$C_f = [Ca^{2+}] + [CaSO_4]$; $C_i + C_f - [CaSO_4] = [SO_4^{2-}]$

Si l'équilibre de solubilité est vérifié , $K_1 = [CaSO_4]$; $(C_i + C_f - K_1)(C_f - K_1) = K_s$ cette relation peut se mettre sous la forme

$C_f(C_i + C_f) = (2C_f + C_i)K_1 + K_s - K_1$; le graphe représentatif de $C_f(C_i + C_f)$ en fonction de $C_i + 2C_f$ est une droite , ce qui valide le modèle . Le graphe donne

4.2.3.3 $K_1 = 7,4 \cdot 10^{-5}$ et $K_s = 5,6 \cdot 10^{-3}$

4.2.3.4 $Ca^{2+} + H_2O \rightarrow Ca(OH)^+ + H^+$, que l'on peut écrire

4.2.3.5 $Ca(H_2O)^{2+} + H_2O \rightarrow Ca(OH)^+ + H_3O^+$

4.2.3.6 On peut donc dire que l'ion $Ca^{2+}(aq)$ est un acide selon Bronsted , la constante $K_{a,Ca} = K_{ca} \cdot K_e = 2 \cdot 10^{-12}$, l'acidité de cet ion sera donc négligeable .

4.2.3.7 L'ion sulfate a un pK_b égal à 12 , sa basicité sera donc négligeable .

4.2.4 Dosage potentiométrique de dichromate :

4.2.4.1 $K_{eq} = [CrO_4^{2-}]^2 [H^+]^2 / [Cr_2O_7^{2-}] = [H^+]^4 / (Co - [H^+]) \Rightarrow K_{eq} = 4 \cdot 10^{-15}$

4.2.4.2 Dosage

4.2.4.2.1 $Cr_2O_7^{2-} + 2 HO^- \leftrightarrow 2 CrO_4^{2-} + H_2O$ $K = K_a / K_e^2 = 4 \cdot 10^{13} \gg 1$

La réaction de dosage est donc totale .

Le V_{eq} est tel que $2 Co \cdot V_o = C_{eq} V_{eq} \Rightarrow V_{eq} = 20 \text{ mL}$

4.2.4.2.2 Pour $V=15 \text{ mL}$, le point demandé est avant l'équivalence

$[Cr_2O_7^{2-}] = (no - n_{HO,aj} / 2) / (V + V_o) = 0,0192$; $[CrO_4^{2-}] = [HO^-]_{aj} = 0,1154$

D'où en reportant dans $K \Rightarrow [H^+] = 7,6 \cdot 10^{-8} \Rightarrow pH = 7,12$

4.2.4.2.3 De manière analogue au calcul précédent , mais par un calcul littéral , on obtient

$pH = \frac{1}{2} \cdot (pK_{eq} + \log([CrO_4^{2-}]^2 / [Cr_2O_7^{2-}]))$

$pH = 7,2 + \frac{1}{2} \cdot \log((C_b V_b)^2 / (C_o V_o - \frac{1}{2} \cdot C_b V_b) (V + V_o))$

La courbe est analogue à celle d'un monoacide faible dont le pKa serait égal à 7,2 (et non pas 14,4 comme le pK pourrait le faire penser) .

4.2.4.2.4 Le pouvoir tampon $\eta = dC_b/dpH$

Le calcul peut être effectué en exprimant le pH en fonction de C_b :

$$pH = 1/2 (pK_e + \log(C_b^2(V_o+V)/(C_o-C_b/2)V)) \Rightarrow$$

$$4.2.4.2.5 \quad dpH/dC_b = (2/C_b + 1/2(C_o - C_b/2)/(4,6)) \Rightarrow \eta = 0,138 .$$

4.2.4.2.6 L'allure est celle d'un monoacide faible avec pKa=7,2 avec $V_{eq}=20\text{mL}$.

4.2.5 Influence des ions baryum :



La réaction est donc quasi totale . L'ion dichromate libère donc 2 H⁺ quantitativement , il se comporte comme un acide fort .

4.2.5.2 Concentrations :

La réaction ci-dessus est totale $[\text{H}^+] = 0,4/2 = 0,2$. $[\text{Ba}^{2+}] = 0,3 \text{ mol/L}$
 $[\text{CrO}_4^{2-}] = K_s/[\text{Ba}^{2+}] = 3,3 \cdot 10^{-11}$ donc $[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] = 1,1 \cdot 10^{-8}$.

4.2.5.3 La réaction de dosage est $\text{H}^+ + \text{HO}^- \rightarrow \text{H}_2\text{O}$

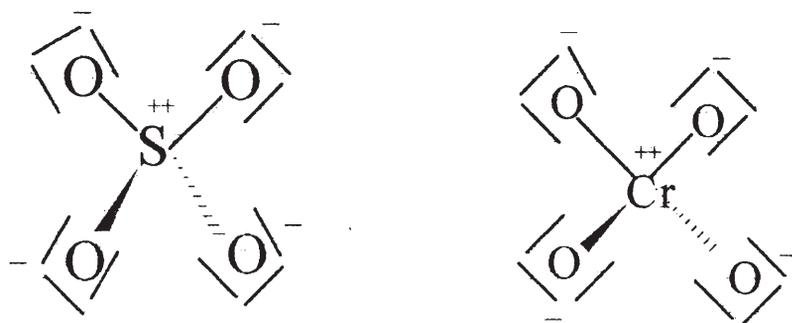
donc $pH = -\log((C_o V_o - C_b V_b)/(V_o + V))$

La courbe est la même que celle d'un acide fort avec un volume équivalent de 10 mL .

4.2.5.4 L'ion Ba^{2+} n'est pas intrinsèquement gênant , la courbe de dosage est beaucoup plus facile à interpréter , la précision du dosage est très améliorée

4.2.6

4.2.6.1



4.2.6.2 Le chrome a 6 électrons de valence , tout comme le soufre . Les deux structures sont tétraédriques .

4.2.6.3 Leur taille est certainement voisine , les valeurs des pKs très voisines ne sont donc pas surprenantes .

PARTIE B : SELECTIVITE DES REACTIONS :

1. Contrôle cinétique et thermodynamique :

$$1.1 \quad da/dt = k_1.ns - k_{-1}.a \quad ; \quad db/dt = k_2ns - k_{-2}.b \quad \text{avec} \quad n = n_0 - a - b \quad , \quad s = s_0 - a - b$$

1.2

1.2.1 $da/dt = k_1.ns$; $db/dt = k_2.ns \Rightarrow da/db = k_1/k_2$ comme $a_0=0$ et $b_0=0$ ceci implique que $a/b = k_1/k_2$ ce que le graphe montre clairement . une 'mesure' sur le graphe donne donc le rapport des constantes de vitesse directe .

1.2.2 Dans l'état final d'équilibre , les vitesses deviennent nulles . d'où

1.3 $([A]/[B])_{eq} = (k_1/k_{-1})/(k_2/k_{-2}) = K_1/K_2$ où K_1 et K_2 sont les constantes d'équilibre respectives .

1.4 Sulfonation du naphtalène :

1.4.1

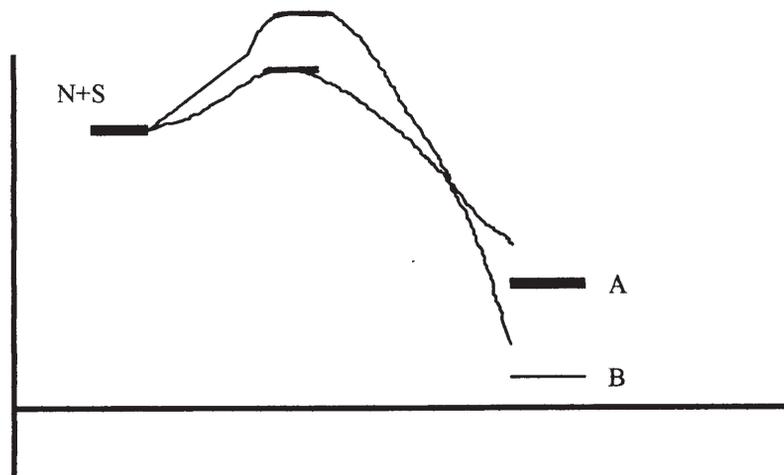
1.4.1.1 Les courbes $n(t)$ et $s(t)$ sont confondues , ce sont les deux courbes décroissantes sur le premier graphe , qui deviennent très voisines de l'axe lorsque t devient grand .

1.4.1.2 Elles sont constantes , (par simple lecture des graphes fournis)

1.4.1.3 Le composé qui se forme le plus vite est l'acide alpha , il est majoritaire au début car sa vitesse de formation initiale est plus grande que celle du bêta .

1.4.2 Le rapport des constantes directes est obtenu sur le premier graphe , le rapport des constantes d'équilibre donnera donc le rapport des constantes inverses , on obtient $k_{-1}/k_{-2} \approx 12$

1.4.3

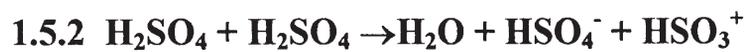
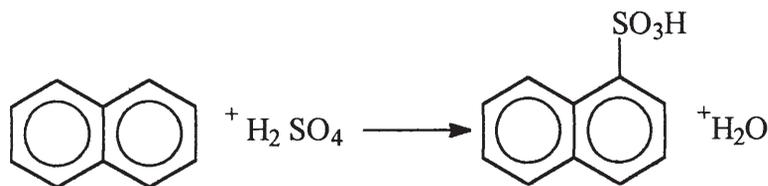


1.4.4 $E_{a,a} - E_{a,b} = -RT \cdot \ln(k_1/k_2)$ à 298 K ; $E_{a,a} - E_{a,b} = 3400 \text{ kJ/mol}$

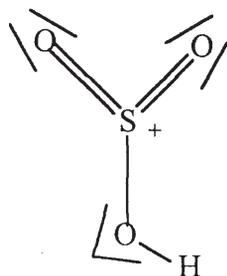
1.4.5 $\Delta_r G^\circ = -RT \cdot \ln K = -RT \cdot \ln(K_2/K_1) = -RT \cdot \ln([B]/[A]_{eq}) = -2700 \text{ J/mol}$

1.5 Mécanisme de la sulfonation :

1.5.1



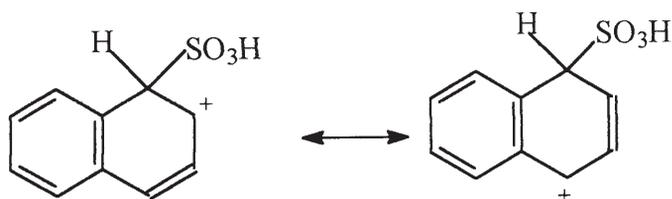
1.5.3 L'acide sulfurique est donneur de protons , le trioxyde de soufre est l'accepteur .



Le soufre porte la charge + et c'est lui qui se fixe sur le cycle du naphthalène .

La géométrie est trigonale plane autour de l'atome de soufre .

1.5.4



1.5.5 Si le cycle aromatique de gauche est préservé, la forme menant à A possède deux formes mésomères alors que le complexe menant à B n'en présente qu'une seule,

1.5.6 le complexe de Wheland menant à alpha est donc stabilisé, ce qui correspond au schéma énergétique précédent.

1.5.7 A 170°C, la réaction est sous contrôle thermodynamique, la forme bêta, moins encombrée est plus stable et se formera préférentiellement.

2. Considérations générales de stéréochimie :

2.1 Une molécule chirale n'est pas superposable à son image dans un miroir.

2.2 Déviation du plan de polarisation d'une onde polarisée rectilignement.

2.3 $\alpha = [\alpha]_D \cdot C \cdot l$ où $[\alpha]_D$ est la rotation spécifique pour la lumière du sodium.

2.4 Pour une solution contenant un mélange de composés, il y a additivité selon

$\alpha = \sum \alpha_i C_i l$, ce qui explique l'inactivité optique du mélange racémique.

2.5

2.5.1 Faux : Avec deux carbones asymétriques , il peut exister un plan de symétrie pour la molécule et elle sera inactive , la présence d'un seul carbone asymétrique implique la chiralité de la molécule .

2.5.2 Faux : L'isomérisation des allènes , la présence d'atomes d'azote ou de phosphore , l'absence de symétrie de certaines molécules peuvent rendre la molécule chirale , même en l'absence de carbones asymétriques .

2.6 Les énantiomères ont des propriétés scalaires identiques (ils sont images) , leurs propriétés vectorielles peuvent être différentes . Leurs propriétés chimiques sont identiques dans un environnement achiral , elles sont différentes dans un environnement chiral , notamment en biochimie .

2.7 Les diastéréoisomères ont toutes leurs propriétés physiques et chimiques différentes . C'est en utilisant ce fait que l'on peut dédoubler des mélanges racémiques .

3. Dédoublage d'un mélange racémique :

3.1 + et – signifient respectivement dextrogyre et lévogyre .

3.2 Les deux réactions constituent des situations diastéréoisomères , elles ne sont pas images , il n'y a donc aucune raison que les deux constantes soient égales .

**3.3 Par contre les réactions A^+B^- et A^-B^+ sont images donc $k_3 = k_n$
De même les réactions A^+B^+ et A^-B^- sont images donc $k_4 = k_p$.**

3.4 Le catalyseur doit être chiral et agir différemment sur les deux réactions .

3.5 Les réactions sont du premier ordre , $[A^+] = [A^+]_0 \cdot \exp(-k_p \cdot t)$

$[A^-] = [A^-]_0 \cdot \exp(-k_n \cdot t)$

donc $ee = (\exp(-k_p t) - \exp(-k_n t)) / (\exp(-k_p t) + \exp(-k_n t))$

3.6

3.7 On a $ee = 0,98$ pour $t = 22,7$ s , cela paraît bien court ...

4. Caractéristiques des catalyseurs asymétriques :

4.1 Un composé naturel très bon marché comportant ces deux carbones asymétriques est l'acide tartrique .

4.2 Le composé est RR car $O > CP > CO > H$

4.3 Cette molécule ne comporte pas de plan de symétrie , elle n'est pas superposable à la molécule SS qui est son image , elle est donc chirale et optiquement active .

4.4

4.4.1 Les atomes de phosphore sont des centres de chiralité . Ils sont tétraédriques et ne s'inversent pas .

4.4.2 Le phosphore est dans la cinquième colonne , chaque atome porte donc un doublet non liant .

4.5

4.5.1 Il s'agit d'une hydrogénation

4.5.2 Elle est énantiosélective , puisque l'on obtient sélectivement l'un des deux énantiomères .

4.5.3 Elle serait énantiospécifique si la même réaction mise en œuvre sur le diastéréoisomère du composé de départ , donnait l'autre énantiomère .

4.5.4 Un catalyseur classique , non chiral , donnerait un hydrogénation certes stéréosélective , qui donnerait le couple d'énantiomères .

L'attaque du dihydrogène peut se faire soit d'un côté du plan de la double liaison , soit de l'autre .

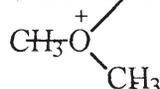
5. L'eau en chimie organique :

5.1.1 Le mécanisme , d'ordre 2 , donne de l'oxyde de diméthyle ou 2-oxapropane .



L'attaque nucléophile du méthanol sur cet ion donne

La perte d'un proton donne l'éther attendu .

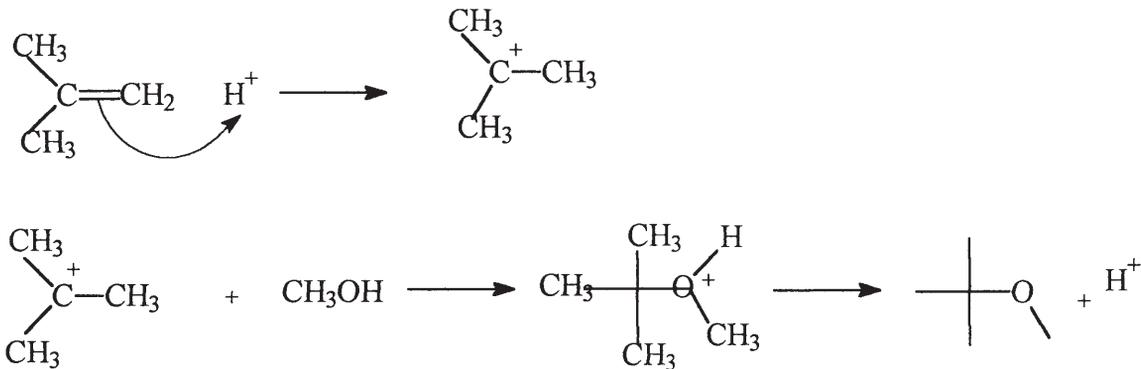


5.1.2 Un mécanisme faisant intervenir un carbocation donne le 2-méthylpropène .

Ce mécanisme est dû à la stabilité particulière du carbocation .

5.1.3

5.1.3.1 Le chauffage en milieu acide du mélange donne très préférentiellement du méthyl propène , un peu de 2-oxa propane , et très peu de MTBE .



5.1.3.2

La protonation de l'alcène donne le carbocation le plus stable , une attaque nucléophile de l'alcool donne un ion oxonium , lequel donne l'éther cherché en éliminant un proton .

5.1.3.3 Il joue le rôle d'antidétonant , tout en étant miscible aux hydrocarbures .

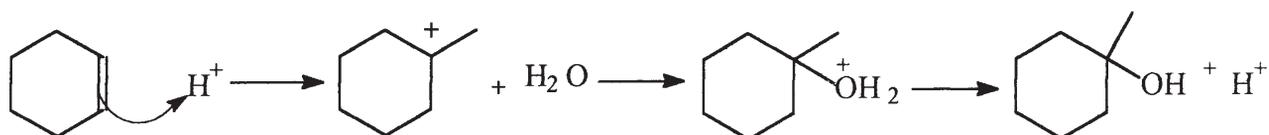
5.2 Problèmes de réarrangements :

5.2.1 Il y a protonation de l'alcool , formation du carbocation intermédiaire , puis réarrangements

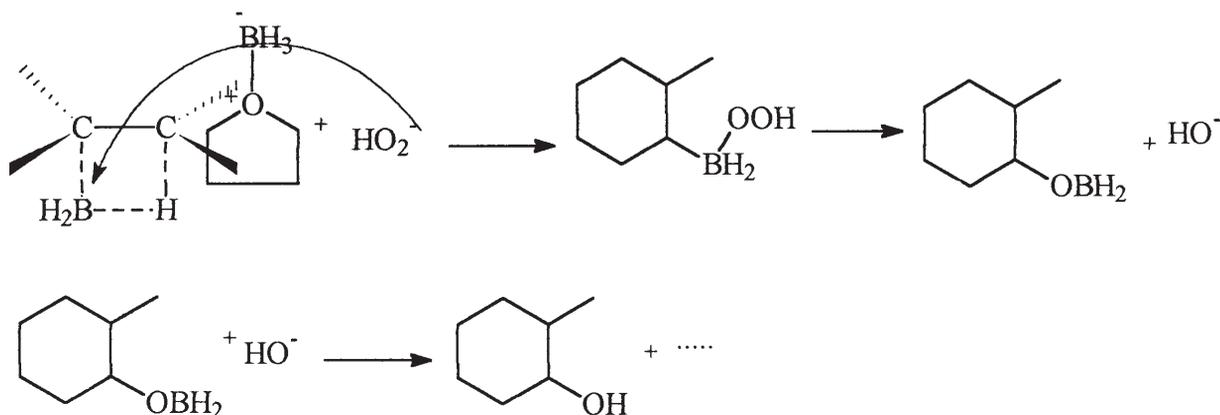
5.2.2 Les alcènes les plus abondants sous contrôle thermodynamique sont les plus stables , c'est à dire (3) et (5) , car ils forment un système Π conjugué . Le composé le moins stable sera l'alcène terminal , c'est à dire (2) .

5.3 Régiosélectivité :

5.3.1



5.3.2

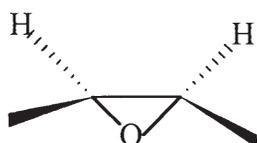


5.3.3 En raison de facteurs stériques , B se fixera plutôt sur le carbone le moins encombré .

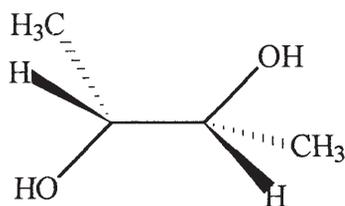
5.3.4 L'attaque en milieu basique sera effectuée par le nucléophile le plus actif soit HO_2^-

6.

6.1.1 Préparation d'époxydes :On obtient par une cis addition le SEUL époxyde non chiral



6.1.2 Il s'agit du (2R,3S) 2,3-diméthyl-oxacyclopropane



6.1.3

6.1.3.1 L'attaque après protonation de l'oxygène , avec attaque du nucléophile , selon une Sn2 stéréosélective ,

6.1.3.2 donne un mélange racémique de (2R,3R) et de (2S,3S)

6.1.3.3

6.1.3.4 Dans ce cas elle n'est pas régiosélective , puisque les deux sites d'attaque sont équivalents , pour la rendre stéréosélective , il faudrait créer une dissymétrie .

6.2 Epoxydation selon SHARPLESS :

6.2.1 3,7-diméthyl-octa-2,6diène-1-ol

6.2.2 Il existe trois stéréoisomères , les RR et SS énantiomères et le RS inactif (méso

6.2.3 Seule l'une des doubles liaisons a été attaquée donc il y a régiosélectivité , seul l'un des énantiomères possibles est obtenu , elle est donc énantiosélective .

6.2.4 Le (-) DET est l'isomère lévogyre optiquement pur .

6.2.5 L'énantiomère serait obtenu .

6.2.6 La forme méso ne peut pas donner de réaction énantiosélective .

Agrégation (Concours Interne)

OPTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE ET PHYSIQUE APPLIQUÉE

Composition avec exercice d'application - Session : 1997

Option : **PHYSIQUE APPLIQUÉE**

PREMIER PROBLÈME ÉLECTROTECHNIQUE

I. ESSAIS PRÉLIMINAIRES

I.1. I.1.1. Étude de la première structure

I.1.1.1.

$$v_{p1} = r_{p1} i_{p1} + l_{p1} \frac{di_{p1}}{dt} + n_p \frac{d\phi_1}{dt}$$

$$v_{p2} = r_{p2} i_{p2} + l_{p2} \frac{di_{p2}}{dt} + n_p \frac{d\phi_2}{dt}$$

$$v_{p3} = r_{p3} i_{p3} + l_{p3} \frac{di_{p3}}{dt} + n_p \frac{d\phi_3}{dt}$$

I.1.1.2.

Si les tensions $r_{pi} i_{pi}$ et $l_{pi} \frac{di_{pi}}{dt} \ll v_{pi}$ alors $v_{pi} \approx n_p \frac{d\phi_i}{dt}$. Nous sommes alors dans les hypothèses de Kapp vérifiées pour les transformateurs de la puissance envisagée et :

$$v_{p1} = n_p \frac{d\phi_1}{dt} \quad ; \quad v_{p2} = n_p \frac{d\phi_2}{dt} \quad ; \quad v_{p3} = n_p \frac{d\phi_3}{dt}$$

I.1.1.3. En sinusoïdal triphasé équilibré $v_{p1} + v_{p2} + v_{p3} = 0$

$$\Rightarrow n_p \left(\frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt} + \frac{d\phi_3}{dt} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \phi_a = Cte$$

Or il n'y a aucun enroulement parcouru par des courants continus ou à valeur moyenne non nulle donc :

$$\phi_a = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0$$

Les expressions des flux s'obtiennent par intégration :

$$\phi_1 = -\frac{V_p \sqrt{2}}{n_p \omega} \cos \omega t \quad ; \quad \phi_2 = -\frac{V_p \sqrt{2}}{n_p \omega} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \quad ;$$

$$\phi_3 = -\frac{V_p \sqrt{2}}{n_p \omega} \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$$

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 forment un système de flux triphasé équilibré.

$$I.1.1.4. \quad n_p \underset{\text{O}}{i_{p1}} - n_s \underset{\text{O}}{i_{s1}} - n'_s \underset{\text{O}}{i'_{s1}} = \mathcal{R}_1 \Phi_1 + \mathcal{R}_a \Phi_a$$

$$\text{d'où :} \quad n_p i_{p1} = \mathcal{R}_1 \Phi_1$$

$$\text{et de même :} \quad n_p i_{p2} = \mathcal{R}_2 \Phi_2 \quad n_p i_{p3} = \mathcal{R}_3 \Phi_3$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{i_{p1} = \frac{\mathcal{R}_1 \Phi_1}{n_p} \quad ; \quad i_{p2} = \frac{\mathcal{R}_2 \Phi_2}{n_p} \quad ; \quad i_{p3} = \frac{\mathcal{R}_3 \Phi_3}{n_p}} \quad (1)$$

$$I.1.1.5. \quad v_{p1} = n_p^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{i_{p1}}{\mathcal{R}_1} \right) \quad ; \quad v_{p2} = n_p^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{i_{p2}}{\mathcal{R}_2} \right) \quad ; \quad v_{p3} = n_p^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{i_{p3}}{\mathcal{R}_3} \right)$$

de la relation (1) : $\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3$ sont sinusoïdaux mais le circuit magnétique étant non-linéaire, $\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3$ sont non-linéaires. De plus elles ne sont pas égales car le trajet des lignes de champ sont différents sur les trois colonnes. **Donc i_{p1}, i_{p2}, i_{p3} ne sont pas sinusoïdaux et ne sont pas égaux.**

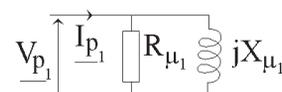
I.1.1.6. Pour définir une impédance équivalente on remplace le courant non sinusoïdal par un courant sinusoïdal «équivalent» qui aurait les mêmes effets énergétiques.

– Si le circuit magnétique est sans pertes $\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3$ sont des réels et :

$$\underline{V}_{p1} = j \frac{n_p^2}{\mathcal{R}_1} \omega \underline{I}_{p1} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}_{\mu 1} = j \omega \frac{n_p^2}{\mathcal{R}_1}$$

idem $\underline{Z}_{\mu 2}$ et $\underline{Z}_{\mu 3}$.

– Si le circuit magnétique est avec pertes $\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3$ ne sont pas réelles et \underline{Z}_{μ} est composée d'une partie réelle et d'une partie imaginaire on préfère une représentation parallèle :



$$I.1.1.7. \quad Z_{\mu} = \frac{V_p}{I_p} \quad \Rightarrow \quad Z_{\mu 1} = 256 \, \Omega \quad Z_{\mu 2} = 400 \, \Omega \quad Z_{\mu 3} = 265 \, \Omega$$

$$R_{\mu} = \frac{V_p^2}{P_0} \quad \Rightarrow \quad R_{\mu 1} = 968 \, \Omega \quad R_{\mu 2} = 1383 \, \Omega \quad R_{\mu 3} = 1000 \, \Omega$$

$$X_{\mu} = \frac{V_p^2}{Q_0} \quad \Rightarrow \quad X_{\mu 1} = 265 \, \Omega \quad X_{\mu 2} = 418 \, \Omega \quad X_{\mu 3} = 274 \, \Omega$$

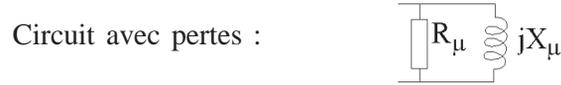
$$\text{En valeur moyenne :} \quad \boxed{\begin{array}{l} \underline{V}_p \quad \underline{I}_p \quad R_{\mu} \quad jX_{\mu} \\ R_{\mu} = 1120 \, \Omega \quad Z_{\mu} = 307 \, \Omega \\ X_{\mu} = 319 \, \Omega \end{array}}$$

$$I.1.1.8. \quad m = \frac{V_{so}}{V_p} = 0,568$$

I.1.2. Étude de la deuxième structure

I.1.2..1. La mise en équation est identique, Φ_1, Φ_2, Φ_3 traversent la même réluctance et sont indépendants.

I.1.2.2. Circuit sans pertes :
$$\underline{Z}_{\mu 1} = \underline{Z}_{\mu 2} = \underline{Z}_{\mu 3} = j\omega \frac{n_p^2}{\mathcal{R}}$$

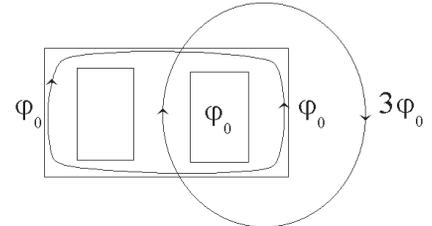


I.1.2.3. $Z_{\mu} = 157 \Omega$ avec :
$$R_{\mu} = 2017 \Omega \quad \text{et} \quad X_{\mu} = 158 \Omega$$

I.1.2.4.
$$m = 0,486$$

I.2. I.2.1. Étude de la première structure

I.2.1.1. Les trois flux $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$ sont trois flux en phase ; leur somme est non nulle et se referme dans l'air.



$$\varphi_a = 3 \varphi_0$$

I.2.1.2.
$$\begin{aligned} - 2 n_s i_{s01} &= \mathcal{R}_1 \varphi_0 + 3 \mathcal{R}_a \varphi_0 \\ - 2 n_s i_{s02} &= \mathcal{R}_2 \varphi_0 + 3 \mathcal{R}_a \varphi_0 \\ - 2 n_s i_{s03} &= \mathcal{R}_3 \varphi_0 + 3 \mathcal{R}_a \varphi_0 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{cases} i_{s01} = \frac{-\varphi_0}{2 n_s} (\mathcal{R}_1 + 3 \mathcal{R}_a) \\ i_{s02} = \frac{-\varphi_0}{2 n_s} (\mathcal{R}_2 + 3 \mathcal{R}_a) \\ i_{s03} = \frac{-\varphi_0}{2 n_s} (\mathcal{R}_3 + 3 \mathcal{R}_a) \end{cases}$$

La dissymétrie entre les trois courants est faible car :

$$\mathcal{R}_a \gg \mathcal{R}_1 \quad ; \quad \mathcal{R}_a \gg \mathcal{R}_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_a \gg \mathcal{R}_3$$

I.2.1.3.
$$- v_0 = (r_{s1} + r'_{s1}) i_{s01} + (l_{s1} + l'_{s1}) \frac{di_{s01}}{dt} + 2 n_s \frac{d\varphi_0}{dt}$$

idem pour 2 et 3.

En remplaçant φ_0 par son expression :

$$- v_0 = (r_{s1} + r'_{s1}) i_{s01} + (l_{s1} + l'_{s1}) \frac{di_{s01}}{dt} + 4 n_s^2 \frac{d(i_{s01})}{dt (\mathcal{R}_1 + 3 \mathcal{R}_a)}$$

idem pour 2 et 3.

Les lignes de champ effectuant un long trajet dans l'air, le circuit magnétique n'est pas saturé et peut être considéré comme linéaire. Les courants $i_{s01}, i_{s02}, i_{s03}$ sont sinusoïdaux. L'inductance équivalente est faible ce qui explique que les courants croissent vite (6 A pour $V_0 = 41 V$).

$$\text{D'où : } \quad -v_0 = (r_{s1} + r'_{s1}) i_{s01} + \left(l_{s1} + l'_{s1} + \frac{4 n_s^2}{\mathcal{R}_1 + 3 \mathcal{R}_a} \right) \frac{di_{s01}}{dt}$$

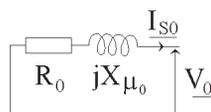
idem pour 2 et 3.

Remarque : la valeur du champ magnétique étant faible, les pertes fer sont faibles et négligées.

I.2.1.4. En passant aux valeurs complexes :

$$\begin{cases} \underline{Z}_{\mu 01} = (r_{s1} + r'_{s1}) + j \left(l_{s1} + l'_{s1} + \frac{2 n_s^2}{\mathcal{R}_1 + 3 \mathcal{R}_a} \right) \omega \\ \underline{Z}_{\mu 02} = (r_{s2} + r'_{s2}) + j \left(l_{s2} + l'_{s2} + \frac{2 n_s^2}{\mathcal{R}_2 + 3 \mathcal{R}_a} \right) \omega \\ \underline{Z}_{\mu 03} = (r_{s3} + r'_{s3}) + j \left(l_{s3} + l'_{s3} + \frac{2 n_s^2}{\mathcal{R}_3 + 3 \mathcal{R}_a} \right) \omega \end{cases}$$

I.2.1.5. $\underline{Z}_{\mu 0} = 6,81 \, \Omega$ $R_0 = 0,938 \, \Omega$ et $X_{\mu 0} = 6,75 \, \Omega$



$$R_0 = \frac{P_0}{I_{s0}^2}$$

$$X_0 = \frac{Q_0}{I_{s0}^2}$$

I.2.1.6. $m_0 = 0,569$

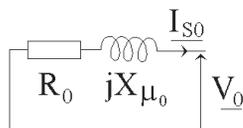
I.2.2. Étude de la deuxième structure

I.2.2.1. Les trois flux φ_0 se referment dans le fer du circuit magnétique : il n'y a donc pas de différence de fonctionnement par rapport au fonctionnement en régime sinusoïdal triphasé équilibré. Les flux prendront les mêmes valeurs mais ne seront pas déphasés.

I.2.2.2. On obtient par un calcul identique au § I.1.2.3. (sous forme parallèle) :

$$\underline{Z}_{\mu 0} = 129,5 \, \Omega \quad R_{\mu 0} = 1561 \, \Omega \quad \text{et} \quad X_{\mu s} = 130 \, \Omega$$

Ce qui donne sous la forme série équivalente :



$$\underline{Z}_{\mu 0} = 129,5 \, \Omega \quad R_{\mu 0} = 10,7 \, \Omega \quad \text{et} \quad X_{\mu s} = 125 \, \Omega$$

Le rapport de transformation est $m_0 = 0,485$.

Les impédances des deux structures sont nettement différents et traduisent un comportement très différent.

I.2.3. Dans ce cas la ddp ne serait pas imposée aux bornes des enroulements, il ne circulerait aucun courant i_{s0} et l'impédance équivalente aux enroulements serait infinie.

I.3. I.3.1. Soit i_{s0z} le courant passant dans une phase. Sur une colonne on a :

$$\underbrace{n_p i_{p1}}_{\text{0}} - \underbrace{n_s i_{s0z} + n_s i_{s0z}}_{\text{0}} = (\mathcal{R}_1 + 3 \mathcal{R}_a) \varphi_0$$

La somme des ampères-tour est nulle donc $\varphi_0 = 0$. Les enroulements sont équivalents à leurs résistances et leurs inductances de fuite qui peuvent se compenser si les deux enroulements secondaires sont bien couplés $\Rightarrow i_{s0z}$ croît rapidement et pas de tension induite au primaire.

Ce raisonnement est vrai quelque soit la structure du circuit magnétique.

I.3.2.

$$-V_0 = (r_s + r'_s) i_{s0z} + (l_s - l'_s) \frac{di_{s0z}}{dt}$$

$$\underline{Z_{s0z}} = (r_s + r'_s) + j (l_s - l'_s) \omega$$

Les résultats numériques sont les suivants :

$$\begin{cases} Z_{s0z} = 0,484 \Omega & \text{pour le premier montage} \\ Z_{s0z} = 0,244 \Omega & \text{pour le deuxième montage} \end{cases}$$

Les réactances de fuites sont très faibles, non mesurables et :

$$\boxed{Z_{s0z} = R_{s0z} \quad ; \quad X_{s0z} = 0}$$

I.4. I.4.1. Étude de la première structure

I.4.1.1. Pour les trois phases, on peut écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= r_r i_{p0} + l_p \frac{di_{p0}}{dt} + n_p \frac{d\varphi_0}{dt} \\ -v_0 &= (r_s + r'_s) i_{s0} + (l_s + l'_s) \frac{di_{s0}}{dt} + 2 n_s \frac{d\varphi_0}{dt} \end{aligned}}$$

L'équation est commune si $r_{p1} = r_{p2} = r_{p3}$ et $r_{s1} = r_{s2} = r_{s3}$; $r'_{s1} = r'_{s2} = r'_{s3}$ et idem pour les inductances de fuite.

I.4.1.2.

$$n_p i_{p0} - (n_s + n'_s) i_{s0} = (\mathcal{R}_1 + 3 \mathcal{R}_a) \varphi_0$$

or en posant :

$$i_{s0\mu} = \frac{(\mathcal{R}_1 + 3 \mathcal{R}_a) \varphi_0}{n_s + n'_s}$$

L'équation devient :

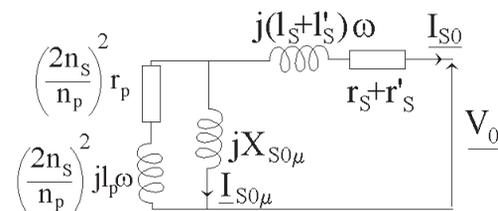
$$\boxed{n_p i_{p0} - (n_s + n'_s) (i_{s0} + i_{s0\mu}) = 0}$$

I.4.1.3. En regroupant les équations électriques et la loi d'Hopkinson :

$$-v_0 = (r_s + r'_s) i_{s0} + (l_s + l'_s) \frac{di_{s0}}{dt} + \left(\frac{2 n_s}{n_p} \right)^2 \left(r_p (i_{s0} + i_{s0\mu}) + l_p \frac{d}{dt} (i_{s0} + i_{s0\mu}) \right)$$

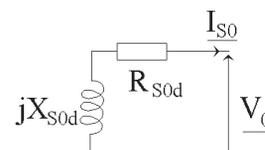
et :
$$v'_0 = 2 n_s \frac{d\phi_0}{dt} = 2 n_s^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{i_{s0\mu}}{\mathcal{R}_1 + 3 \mathcal{R}_a} \right)$$

Les flux ϕ_0 se refermant dans l'air le circuit magnétique n'est pas saturé, les courants sont sinusoïdaux. En passant aux impédances, on obtient le schéma suivant :



On ne tient pas compte des pertes fer car B_M est faible.

Ce qui donne finalement :



I.4.1.4. Pour la première structure on trouve :

$$Z_{sod} = 0,882 \Omega$$

$$R_{sod} = 0,75 \Omega$$

$$X_{sod} = 0,467 \Omega$$

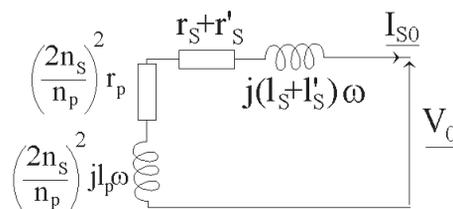
I.4.2. Étude de la deuxième structure

I.4.2.1. Dans ce cas les équations se posent de la même façon mais les lignes de champ ont leurs trajets entièrement dans le fer et :

$$n_p i_{p0} - (n_s + n'_s) i_{s0} = \mathcal{R}_1 \phi_0$$

La réactance $X_{s0\mu}$ parcourue par le courant magnétisant $i_{s0\mu}$, sera beaucoup plus élevée et pourra être négligée devant l'impédance primaire ramenée au secondaire.

I.4.2.2.



$$\underline{Z}_{sod} = r_s + r'_s + \left(\frac{2 n_s}{n_p} \right)^2 r_p + j \left((l_s + l'_s) + \left(\frac{2 n_s}{n_p} \right)^2 l_p \right) \omega$$

Cette impédance est proche de l'impédance de court-circuit ramenée au secondaire pour un régime sinusoïdal équilibré.

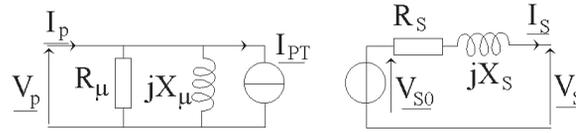
Pour cette seconde structure, on trouve :

$$Z_{s0d} = 0,677 \Omega \quad R_{s0d} = 0,495 \Omega \quad X_{s0d} = 0,462 \Omega$$

II. SCHÉMAS ÉQUIVALENTS EN RÉGIME SINUSOÏDAL TRIPHASÉ DÉSÉQUILIBRÉ

II.1. Schéma équivalent pour un système triphasé sinusoïdal équilibré direct

II.1.1. Le schéma équivalent dans les hypothèses de Kapp pour un système triphasé équilibré direct est :



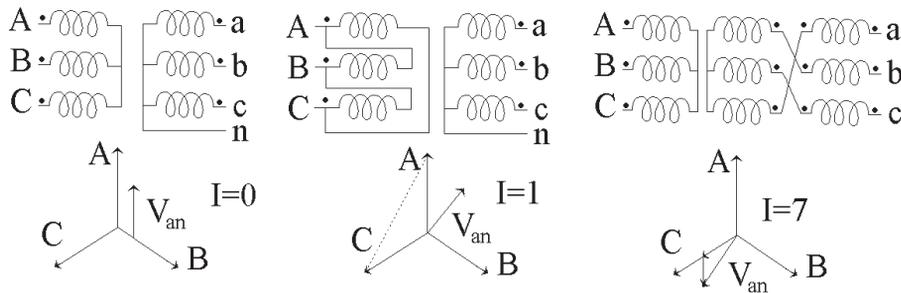
$$\underline{V_{s0}} = m_g e^{-jI\frac{\pi}{6}} \underline{V_p}$$

avec :

$$\underline{I_{PT}} = m_g e^{+jI\frac{\pi}{6}} \underline{I_s}$$

I : indice horaire, m_g rapport de transformation global.

II.1.2.



II.1.3. Pour le couplage Y_{yn0}

$$\text{structure 1} \begin{cases} Z_s = \frac{m V_{lcc}}{I_{scc}} = 0,774 \Omega & R_\mu = 1120 \Omega \\ R_s = \frac{P_{cc}}{3 I_{scc}^2} = 0,7 \Omega & X_\mu = 319 \Omega \\ X_s = \frac{Q_{cc}}{3 I_{scc}^2} = 0,33 \Omega & (I_{pcc} = 2m I_{scc} = 10,2 A) \end{cases}$$

$$\text{structure 2} \begin{cases} Z_s = 0,711 \Omega & R_\mu = 2017 \Omega \\ R_s = 0,532 \Omega & X_\mu = 158 \Omega \\ X_s = 0,472 \Omega & (I_{pcc} = 2m I_{scc} = 8,94 A) \end{cases}$$

Pour le couplage D_{yn1}

Les enroulements sont soumis à la même tension le rapport global de transformation est $x\sqrt{3}$ mais la résistance \equiv primaire est divisée par 3, donc R_s reste inchangée de même pour X_s . Le primaire absorbera à vide, même puissance active et réactive donc le schéma \equiv par phase sera le même

Donc $D_{yn1} \equiv Y_{yn0}$ seul l'indice horaire change.

Pour le couplage $Yzn7$

$$1^{\text{ère}} \text{ structure } \begin{cases} Z_s = 0,792 \, \Omega \\ R_s = 0,743 \, \Omega \\ X_s = 0,276 \, \Omega \end{cases} \quad \begin{cases} m_g = \sqrt{3} \frac{n_s}{n_p} = 0,984 \\ I_{pcc} = 8,02 \, A \end{cases}$$

$$2^{\text{ème}} \text{ structure } \begin{cases} Z_s = 0,567 \, \Omega \\ R_s = 0,393 \, \Omega \\ X_s = 0,408 \, \Omega \end{cases} \quad \begin{cases} m_g = \sqrt{3} \frac{n_s}{n_p} = 0,842 \\ I_{pcc} = 7,906 \, A \end{cases}$$

R_μ X_μ sont les mêmes que pour le premier couplage

II.1.4. Seules R_μ et X_μ peuvent être influencées par la nature du circuit magnétique, toutefois, ces impédances restent du même ordre de grandeur. On peut remarquer que les trois transformateurs monophasés absorbent un courant à vide plus élevé : ils sont davantage saturés.

II.2. Schéma équivalent pour un système triphasé sinusoïdal équilibré inverse

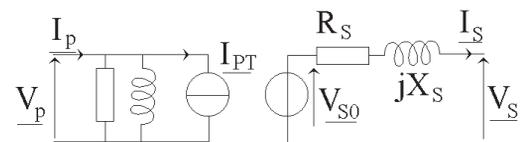
II.2.1. L'indice horaire 0 n'est pas modifié par l'ordre des phases.

L'indice horaire 1 devient un indice horaire 11 et l'indice horaire 7 devient 5 quand l'ordre du système est inversé.



$$I_{inverse} = 12 - I_{direct}$$

II.2.2. Le schéma \equiv , sera le même que pour un système équilibré direct seul l'indice horaire est modifié.



Avec :

$$\underline{V_{s0}} = m_g e^{j - (12-l) \frac{\pi}{6}} \underline{V_p}$$

$$\underline{I_{PT}} = m_g e^{j (12-l) \frac{\pi}{6}} \underline{I_s}$$

II.3. Schéma équivalent pour le système triphasé sinusoïdal homopolaire

II.3.1. Pour le premier couplage $Yyn0$

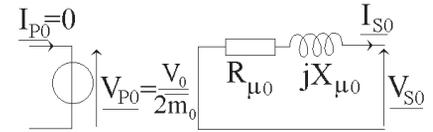
II.3.1.a. Dans un montage étoile sans neutre $i_{p1} + i_{p2} + i_{p3} = 0$. Les courants primaires n'ont pas de composante homopolaire $I_{p0} = 0$.

$$\underline{Z}_{\mu 0} = \infty$$

II.3.1.b. L'essai est le II. Les impédances équivalentes sont pour les deux montages :

1 ^{ère} structure	2 ^{ème} structure
$R_{\mu 0} = 0,938 \Omega$	$R_{\mu 0} = 10,7 \Omega$
$Z_{\mu 0} = 6,81 \Omega$	$Z_{\mu 0} = 129 \Omega$
$X_{\mu 0} = 6,75 \Omega$	$X_{\mu 0} = 129 \Omega$
$m_0 = 0,569$	et $m_0 = 0,485$

II.3.1.c. Les courants homopolaires secondaires produisent des flux homopolaires dont l'importance dépend beaucoup de la structure du circuit magnétique. Ces flux induisent des f.é.m. homopolaires au primaire ce qui a pour conséquence le déplacement du potentiel du point neutre.



II.3.2. Pour le deuxième couplage *Dyn1*

II.3.2.a. Pour un montage triangle $\underline{V}_{p1} + \underline{V}_{p2} + \underline{V}_{p3} = 0$.

Il n'y a donc pas de composante homopolaire de tension.

$$\underline{V}_{p0} = 0$$

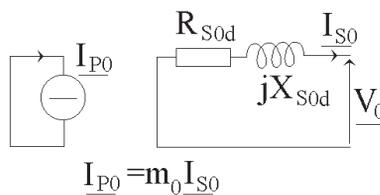
Les enroulements primaires représentent un court-circuit pour les courants homopolaires primaires.

II.3.2.b. Cette impédance est mesurée au cours de l'essai IV où le primaire est en court-circuit.

L'impédance équivalente aux deux secondaires est :

$$\underline{Z}_{0sd} = R_{s0d} + j X_{s0d}$$

II.3.2.c.



$$\underline{I}_{p0} = m_0 \underline{I}_{s0}$$

1^{ère} structure : $R_{s0d} = 0,75 \Omega$ $X_{s0d} = 0,467 \Omega$

2^{ème} structure : $R_{s0d} = 0,495 \Omega$ $X_{s0d} = 0,462 \Omega$

Ces impédances parcourues par les courants homopolaires sont faibles et dépendent peu de la structure.

II.3.3. Pour le troisième couplage *Yzn7*

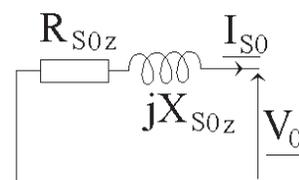
II.3.3.a. Même réponse qu'au § III.1. $Z_{\mu 0} = \infty$.

II.3.3.b. Cette impédance est mesurée au cours de l'essai III.

L'impédance équivalente au secondaire est :

$$\underline{Z}_{s0z} = R_{s0z} + j X_{s0z}$$

II.3.3.c. Le schéma équivalent se compose du seul schéma ≡ secondaire. Au primaire il n'y a pas de courants homopolaires $\underline{I}_{p0} = 0$ et, il n'y a pas de f.é.m. induites homopolaires. Les flux homopolaires créés par les courants homopolaires secondaires étant nuls.



1^{ère} structure : $R_{s0z} = 0,484 \Omega \quad X_{s0z} = 0$

2^{ème} structure : $R_{s0z} = 0,244 \Omega \quad X_{s0z} = 0$

Ces éléments ne dépendent pas de la structure du circuit magnétique.

Tableau récapitulatif

	1 ^{ère} structure		2 ^{ème} structure	
Impédance secondaire/phase triphasé équilibré <i>Yyn0</i> ou <i>Dyn1</i> <i>Yzn7</i>	$R_s = 0,7 \Omega$ $R_s = 0,743 \Omega$	$X_s = 0,33 \Omega$ $X_s = 0,276 \Omega$	$R_s = 0,53 \Omega$ $R_s = 0,393 \Omega$	$X_s = 0,47 \Omega$ $X_s = 0,408 \Omega$
Impédance magnétisante primaire en tri équilibré	$R_\mu = 1120 \Omega$	$X_\mu = 319 \Omega$	$R_\mu = 2017 \Omega$	$X_\mu = 158 \Omega$
Impédance secondaire homopolaire primaire à vide	$R_{\mu 0} = 0,938 \Omega$	$X_{\mu 0} = 6,75 \Omega$	$R_{\mu 0} = 10,7 \Omega$	$X_{\mu 0} = 129 \Omega$
Impédance secondaire homopolaire primaire en CC	$R_{s0d} = 0,75 \Omega$	$X_{s0d} = 0,467 \Omega$	$R_{s0d} = 0,495 \Omega$	$X_{s0d} = 0,462 \Omega$
Impédance secondaire homopolaire zig-zag primaire à vide	$R_{s0z} = 0,484 \Omega$	$X_{s0z} = 0$	$R_{s0z} = 0,244 \Omega$	$X_{s0z} = 0$

III. FONCTIONNEMENT SUR CHARGE DÉSÉQUILIBRÉE

III.1.

$$\left. \begin{array}{l} \underline{I}_{s1} = I \\ \underline{I}_{s2} = 0 \\ \underline{I}_{s3} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{I}_{sd} = \frac{1}{3} I \\ \underline{I}_{si} = \frac{1}{3} I \\ \underline{I}_{s0} = \frac{1}{3} I \end{array} \right.$$

III.2. Pour le couplage *Yyn0*

Nous avons pour la composante directe :

$$\underline{I}_{pd} = 2m e^{j\frac{\pi}{6}I} \underline{I}_{sd} = 2m \underline{I}_{sd} \quad (I = 0) \quad (I = \text{indice horaire})$$

Pour la composante inverse : $\underline{I}_{pi} = 2m \underline{I}_{si}$

($I = 0$ pour le système inverse également).

Pour la composante homopolaire : $\underline{I}_{p0} = 0$

$$\boxed{\underline{I}_{pd} = 2m \frac{I}{3} \quad \underline{I}_{pi} = 2m \frac{I}{3} \quad \underline{I}_{p0} = 0}$$

D'où l'on tire : $\underline{I}_{p1} = \underline{I}_{pd} + \underline{I}_{pi} + \underline{I}_{p0} = \frac{2}{3} \times 2m I$

$$\underline{I}_{p2} = a^2 \underline{I}_{pd} + a \underline{I}_{pi} + \underline{I}_{p0} = -\frac{1}{3} \times 2m I$$

$$\underline{I}_{p3} = -\frac{1}{3} 2m I$$

$$\boxed{\underline{I}_{p1} = 2m \frac{2}{3} I \quad \underline{I}_{p2} = -2m \frac{I}{3} \quad \underline{I}_{p3} = -2m \frac{I}{3}}$$

$$\begin{array}{c} \underline{I}_{P2} \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ \underline{I}_{P3} \quad \underline{I}_{P1} \end{array} \rightarrow \underline{I}$$

En ce qui concerne la mesure, viennent s'ajouter à ces courants les courants magnétisants. Ces courants ne dépendent pas de la nature des circuits magnétiques.

Pour le couplage Dyn1

$$\underline{I}_{pd} = 2m \underline{I}_{sd} = 2m \frac{I}{3}$$

On a les relations :

$$\underline{I}_{pi} = 2m \underline{I}_{si} = 2m \frac{I}{3}$$

$$\underline{I}_{p0} = 2m_0 \underline{I}_{s0} = 2m \frac{I}{3}$$

d'où l'on tire :

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{I}_{p1} = 2m I \\ \underline{I}_{p2} = 0 \\ \underline{I}_{p3} = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{I}_{l1} = 2m I \\ \underline{I}_{l2} = 0 \\ \underline{I}_{l3} = -2m I \end{array}}$$

En raisonnant de façon globale pour avoir \underline{I}_l .

$$I = 1 \text{ pour le système direct} \quad e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{1-a^2}{\sqrt{3}}$$

$I = 11$ pour le système inverse

$$\begin{cases} \underline{I}_{ld} = \sqrt{3} \times 2m e^{+j\frac{\pi}{6}} \underline{I}_{sd} = 2m (1-a^2) \frac{I}{3} \\ \underline{I}_{li} = \sqrt{3} \times 2m e^{-j\frac{\pi}{6}} \underline{I}_{si} = 2m (1-a) \frac{I}{3} \\ \underline{I}_{l0} = 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{I}_{l1} = 2m I \\ \underline{I}_{l2} = 0 \\ \underline{I}_{l3} = -2m I \end{array}}$$

$$\begin{array}{c} \underline{I}_{l3} \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ \underline{I}_{l1} \end{array} \rightarrow \underline{I}$$

Pour le couplage $Yzn7$

On exprime les courants primaires :

$$\underline{I}_{pd} = \sqrt{3} m e^{j 7 \frac{\pi}{6}} \cdot \underline{I}_{sd} = m (a^2 - 1) \frac{I}{3}$$

$$\underline{I}_{pi} = \sqrt{3} m e^{j 5 \frac{\pi}{6}} \cdot \underline{I}_{si} = m (a - 1) \frac{I}{3}$$

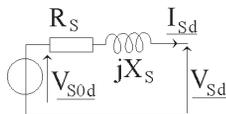
$$\underline{I}_{p0} = 0$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \underline{I}_{p1} = -m I \\ \underline{I}_{p2} = 0 \\ \underline{I}_{p3} = +m I \end{cases}$$

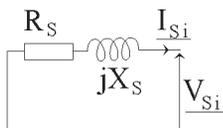
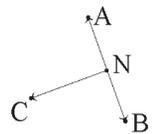
$$\begin{matrix} \leftarrow \underline{I}_{P1} \\ \underline{I}_{P3} \rightarrow \end{matrix} \underline{I}$$

III.3. Pour le système direct, on obtient :



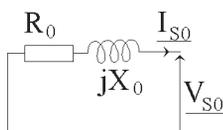
$$\underline{Z}_{sd} = \underline{Z}_s$$

Pour le système inverse, les grandeurs U_{AB} , U_{BC} et U_{CA} restant équilibrées, les tensions simples V_A , V_B , V_C peuvent présenter un homopolaire mais ont même composante directe et inverse que le système équilibré donc ne présentent pas de composante inverse.



$$\underline{Z}_{si} = \underline{Z}_s$$

Pour le système homopolaire, le schéma équivalent est :



$$\underline{Z}_{s0} = \underline{Z}_0$$

\underline{Z}_0 dépend fortement du couplage et du circuit magnétique.

III.4. Les équations donnant les composantes homopolaires des tensions secondaires sont :

$$\begin{cases} \underline{V}_{sd} = \underline{V}_{s0d} - \underline{Z}_{sd} \underline{I}_{sd} \\ \underline{V}_{si} = \underline{V}_{s0i} - \underline{Z}_{si} \underline{I}_{si} \\ \underline{V}_{s0} = \underline{V}_{s00} - \underline{Z}_0 \underline{I}_{s0} \end{cases}$$

Ce qui donne pour \underline{V}_{s1} \underline{V}_{s2} \underline{V}_{s3} :

$$\begin{cases} \underline{V}_{s1} = \underline{V}_{s0d} - (\underline{Z}_{sd} \underline{I}_{sd} + \underline{Z}_{si} \underline{I}_{si} + \underline{Z}_0 \underline{I}_{s0}) \\ \underline{V}_{s2} = a^2 \underline{V}_{s0d} - a^2 \underline{Z}_{sd} \underline{I}_{sd} - a \underline{Z}_{si} \underline{I}_{si} - \underline{Z}_0 \underline{I}_{s0} \\ \underline{V}_{s3} = a \underline{V}_{s0d} - a \underline{Z}_{sd} \underline{I}_{sd} - a^2 \underline{Z}_{si} \underline{I}_{si} - \underline{Z}_0 \underline{I}_{s0} \end{cases}$$

En remplaçant par les valeurs \underline{I}_{s0} \underline{I}_{sd} \underline{I}_{si} :

$$\underline{V}_{s1} = \underline{V}_{s0d} - \frac{\underline{I}}{3} (2 \underline{Z}_s + \underline{Z}_0)$$

$$\underline{V}_{s2} = a^2 \underline{V}_{s0d} + \underline{Z}_s \frac{\underline{I}}{3} - \underline{Z}_0 \frac{\underline{I}}{3}$$

$$\underline{V}_{s3} = a \underline{V}_{s0d} + \underline{Z}_s \frac{\underline{I}}{3} - \underline{Z}_0 \frac{\underline{I}}{3}$$

On notera :

$$\underline{V}_{s0d} = \underline{V}_{s01}$$

Or on connaît la nature de la charge :

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}_{s1}}{R} \quad \underline{I} = \frac{3 \underline{V}_{s01}}{3R + 2 \underline{Z}_s + \underline{Z}_0}$$

Ce qui donne :

$$\underline{V}_{s1} = \underline{V}_{s01} - \frac{(2 \underline{Z}_s + \underline{Z}_0) \underline{V}_{s01}}{3R + 2 \underline{Z}_s + \underline{Z}_0} = \frac{3R}{3R + 2 \underline{Z}_s + \underline{Z}_0} \underline{V}_{s01}$$

$$\underline{V}_{s2} = a^2 \underline{V}_{s01} - \frac{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_s}{3R + 2 \underline{Z}_s + \underline{Z}_0} \underline{V}_{s01} = \frac{a^2 (3R + 2 \underline{Z}_s + \underline{Z}_0) - \underline{Z}_0 + \underline{Z}_s}{3R + 2 \underline{Z}_s + \underline{Z}_0} \underline{V}_{s01}$$

$$\underline{V}_{s3} = a \underline{V}_{s01} - \frac{(\underline{Z}_0 - \underline{Z}_s) \underline{V}_{s01}}{3R + 2 \underline{Z}_s + \underline{Z}_0} = \frac{a (3R + 2 \underline{Z}_s + \underline{Z}_0) - \underline{Z}_0 + \underline{Z}_s}{3R + 2 \underline{Z}_s + \underline{Z}_0} \underline{V}_{s01}$$

Calculons les modules :

$$\underline{V}_{s1} = \frac{3R}{\sqrt{(3R + 2 R_s + R_0)^2 + (2 X_s + X_0)^2}} \underline{V}_{s01}$$

$$\underline{V}_{s2}^2 = \left[\frac{\left[(3R + 2 R_s + R_0) \cos(-120) - (2 X_s + X_0) \sin(-120) + R_s - R_0 \right]^2 + \left[X_s - X_0 + (2 X_s + X_0) \cos(-120) + (3R + 2 R_s + R_0) \sin(-120) \right]^2}{(3R + 2 R_s + R_0)^2 + (2 X_s + X_0)^2} \right]$$

\underline{V}_{s3}^2 s'exprime de la même façon avec un argument de 120° et non de (-120°) .

Il faut calculer R à chaque fois en calculant $\frac{\underline{V}_{s1}}{\underline{I}}$.

III.5. Calcul des courants :

	1^{ère} structure	2^{ème} structure
Couplage Y_{yn0}	$I_{p1} = 6,1 A$ $I_{p2} = 3,05 A$ $I_{p3} = 3,05 A$	$I_{p1} = 1,36 A$ $I_{p2} = 0,68 A$ $I_{p3} = 0,68 A$
Couplage D_{yn1}	$I_{p1} = 9,16 A$ $I_{p2} = 0$ $I_{p3} = 0$	$I_{p1} = 8,77 A$ $I_{p2} = 0$ $I_{p3} = 0$
Couplage Y_{zn7}	$I_{p1} = 4,57 A$ $I_{p2} = 0$ $I_{p3} = 4,57 A$	$I_{p1} = 4,37 A$ $I_{p2} = 0$ $I_{p3} = 4,37 A$

Les différences avec les mesures s'expliquent par la présence du courant magnétisant dont on connaît l'ordre de grandeur.

Calcul des tensions :

	1^{ère} structure	2^{ème} structure
Couplage Y_{yn0}	$V_{s1} = 243 V$ $V_{s2} = 265 V$ $V_{s2} = 236 V$ $R = 30,4 \Omega$ $V_{s0} = 250 V$ $I = 8,02 A$	$V_{s1} = 59,5 V$ $V_{s2} = 195 V$ $V_{s3} = 140 V$ $R = 29 \Omega$ $V_{s0} = 112 V$ $I = 2,1 A$
Couplage D_{yn1}	$V_{s1} = 246 V$ $V_{s2} = 252 V$ $V_{s3} = 251,7 V$ $R = 30,3 \Omega$ $V_{s0} = 252 V$ $I = 8,06 A$	$V_{s1} = 209 V$ $V_{s2} = 213,9 V$ $V_{s3} = 214 V$ $R = 22,4 \Omega$ $V_{s0} = 214 V$ $I = 9,03 A$
Couplage Y_{zn7}	$V_{s1} = 212,7 V$ $V_{s2} = 217 V$ $V_{s3} = 218,3 V$ $R = 26,3 \Omega$ $V_{s0} = 218 V$ $I = 8,04 A$	$V_{s1} = 157 V$ $V_{s2} = 159 V$ $V_{s3} = 161 V$ $R = 17,5 \Omega$ $V_{s0} = 160 V$ $I = 9 A$

IV. RÉGIME NON SINUSOÏDAL DE COURANT

IV.1. IV.1.1. La décomposition en série de Fourier de i_{s1} est :

$$i_{s1}(t) = \overline{I}_{s1} + \hat{i}_{s11} \sin(\omega t - \varphi_1) + \hat{i}_{s12} \sin(2\omega t - \varphi_2) + \dots + \hat{i}_{s1n} \sin(n\omega t - \varphi_n) + \dots$$

alors :

$$i_{s2}(t) = \overline{I_{s2}} + \hat{i}_{s21} \sin \left(\omega \left(t - \frac{T}{3} \right) - \varphi_1 \right) + \hat{i}_{s22} \sin \left(2\omega \left(t - \frac{T}{3} \right) - \varphi_2 \right) + \dots \hat{i}_{s2n} \sin \left(n\omega \left(t - \frac{T}{3} \right) - \varphi_n \right) + \dots$$

$$i_{s3}(t) = \overline{I_{s3}} + \hat{i}_{s31} \sin \left(\omega \left(t - \frac{2T}{3} \right) - \varphi_1 \right) + \hat{i}_{s32} \sin \left(2\omega \left(t - \frac{2T}{3} \right) - \varphi_2 \right) + \dots \hat{i}_{s3n} \sin \left(n \omega \left(t - \frac{2T}{3} \right) - \varphi_n \right) + \dots$$

avec :

$$\left. \begin{array}{l} \overline{I_{s1}} = \overline{I_{s2}} = \overline{I_{s3}} \\ \hat{i}_{s11} = \hat{i}_{s21} = \hat{i}_{s31} \\ \vdots \end{array} \right\} \text{ car les formes sont identiques.}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$i_{s1}(t) = \overline{I_s} + \hat{i}_{s1} \sin (\omega t - \varphi_1) + \hat{i}_{s2} \sin (2\omega t - \varphi_2) + \dots \hat{i}_{sn} \sin (n\omega t - \varphi_n) + \dots$$

$$i_{s2}(t) = \overline{I_s} + \hat{i}_{s1} \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi_1 \right) + \hat{i}_{s2} \sin \left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi_2 \right) + \dots \hat{i}_{sn} \sin \left(n\omega t - \frac{n2\pi}{3} - \varphi_n \right)$$

$$i_{s3}(t) = \overline{I_s} + \hat{i}_{s1} \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi_1 \right) + \hat{i}_{s2} \sin \left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi_2 \right) + \dots \hat{i}_{sn} \sin \left(n\omega t - \frac{n4\pi}{3} - \varphi_n \right)$$

Le terme général est :

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{s1n}(t) = \hat{i}_{sn} \sin (n\omega t - \varphi_n) \\ i_{s2n}(t) = \hat{i}_{sn} \sin \left(n\omega t - \varphi_n - n \frac{2\pi}{3} \right) \\ i_{s3n}(t) = \hat{i}_{sn} \sin \left(n\omega t - \varphi_n - n \frac{4\pi}{3} \right) \end{array} \right.$$

IV.1.2. Discutons suivant la valeur de n.

Si $n = 3k$ les phases sont : $(0, 2k\pi, 4k\pi) \rightarrow$ SYSTÈME HOMOPOLAIRE

$n = 3k - 1$ les phases sont : $\left(0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right) \rightarrow$ SYSTÈME TRIPHASÉ INVERSE

$n = 3k + 1$ les phases sont : $\left(0, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3} \right) \rightarrow$ SYSTÈME TRIPHASÉ DIRECT

Les harmoniques 1 4 7 10 ... forment un système direct
3 6 9 ... forment un système homopolaire
2 5 8 ... forment un système inverse

IV.1.3. Les trois tensions $v_1 v_2 v_3$ imposent des flux sinusoïdaux à une constante près.

Les trois courants i_{s1}, i_{s2}, i_{s3} peuvent présenter des valeurs moyennes non nulles. Ces valeurs moyennes créent des ampères-tours continus qui créent des flux continus. Mais ces flux ne

peuvent induire des courants primaires \Rightarrow seules les **composantes alternatives** des courants secondaires seront compensées par des **composantes alternatives** des courants primaires.

Valeur moyenne de $i_s \neq 0 \Rightarrow$ existence d'un flux continu φ_0 dans le circuit magnétique.

$$\text{IV.1.4. IV.1.4.1. IV.1.4.1.a.} \quad n_p i_{p1} - n_s i_{s1} - n'_s i'_{s1} = \mathcal{R}_1 \varphi_1 + \mathcal{R}_a \varphi_a \quad (1)$$

$$n_p i_{p2} - n_s i_{s2} - n'_s i'_{s2} = \mathcal{R}_2 \varphi_2 + \mathcal{R}_a \varphi_a$$

$$n_p i_{p3} - n_s i_{s3} - n'_s i'_{s3} = \mathcal{R}_3 \varphi_3 + \mathcal{R}_a \varphi_a$$

$$\text{IV.1.4.1.b.} \quad n_p (i_{p1} + i_{p2} + i_{p3}) - n_s (i_{s1} + i_{s2} + i_{s3}) - n'_s (i'_{s1} + i'_{s2} + i'_{s3}) \\ = \mathcal{R}_1 \varphi_1 + \mathcal{R}_2 \varphi_2 + \mathcal{R}_3 \varphi_3 + 3 \mathcal{R}_a \varphi_0$$

$$\text{avec :} \quad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}$$

$$\varphi_a = \frac{n_p \sum_1^3 i_p - \sum_1^3 \sum n_s i_s}{\mathcal{R} + 3 \mathcal{R}_a}$$

IV.1.4.1.c. On peut écrire :

$$\mathcal{R}_a \varphi_a = \frac{n_p \sum i_p - \sum \sum n_s i_s}{3} - \frac{\mathcal{R}}{3} \varphi_a$$

En remplaçant dans la première équation (1) on obtient :

$$n_p i_{p1} - \sum n_s i_{s1} = \mathcal{R} \varphi_1 + \frac{\sum n_p i_p - \sum \sum n_s i_s}{3} - \frac{\mathcal{R} \varphi_a}{3}$$

$$n_p i_{p1} - \sum n_s i_{s1} = \frac{\sum n_p i_p - \sum \sum n_s i_s}{3} + \mathcal{R} \left(\varphi_1 - \frac{\varphi_a}{3} \right)$$

IV.1.4.1.d. Si on considère $\mu_r \infty \Rightarrow \mathcal{R} = 0 \rightarrow$

$$\varphi_a = \frac{\sum_1^3 n_p i_p - \sum_1^3 \sum n_s i_s}{3 \mathcal{R}_a}$$

et :

$$n_p i_{p1} - \sum n_s i_{s1} = \frac{\sum_1^3 n_p i_p - \sum_1^3 \sum n_s i_s}{3}$$

$$\text{IV.1.4.2.} \quad n_p i_{p1} - \sum n_s i_{s1} = \mathcal{R}_1 \varphi_1$$

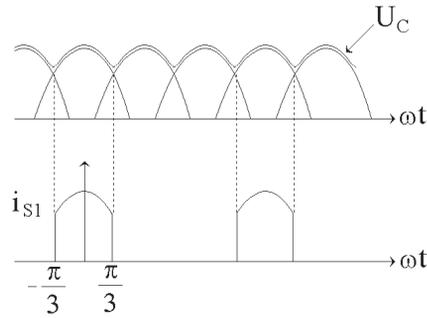
$$n_p i_{p2} - \sum n_s i_{s2} = \mathcal{R}_2 \varphi_2$$

$$n_p i_{p3} - \sum n_s i_{s3} = \mathcal{R}_3 \varphi_3$$

Trois transformateurs identiques $\Rightarrow \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_3$.

IV.1.4.3.
$$v_{p1} = n_p \cdot \frac{d\phi_1}{dt} \quad v_{p2} = n_p \cdot \frac{d\phi_2}{dt} \quad \text{et} \quad v_{p3} = n_p \cdot \frac{d\phi_3}{dt}$$

IV.2. IV.2.1.



IV.2.2.

$$\hat{i}_{sn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} \frac{\hat{V}}{R} \cos \theta \cos n\theta \, d\theta$$

$$\hat{i}_{sn} = \frac{\hat{V}}{\pi R} \left[\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{1+n} + \frac{\sin(1-n)\frac{\pi}{3}}{1-n} \right] \quad \text{pour } n \neq 1$$

$$\hat{i}_{sn} = \frac{\hat{V}}{\pi R} \frac{1}{(1-n^2)} \left[\sqrt{3} \cos n \frac{\pi}{3} - n \sin n \frac{\pi}{3} \right] \quad n \neq 1$$

et :
$$\bar{V} = \frac{\hat{V} \cdot \sqrt{3} \cdot 3}{2\pi} \quad \bar{I}_s = \frac{\hat{V} \sqrt{3}}{2\pi R}$$

$$\hat{i}_{sn} = \bar{I}_s \frac{2}{\sqrt{3}(1-n^2)} \left[\sqrt{3} \cos n \frac{\pi}{3} - n \sin n \frac{\pi}{3} \right]$$

$n \neq 1$ si $n = 3k$
$$\hat{i}_{sn} = (-1)^k \frac{2 \bar{I}_s}{1-n^2}$$

si $n = 3k+1$
$$\hat{i}_{sn} = (-1)^k \frac{\bar{I}_s}{1+n}$$

si $n = 3k-1$
$$\hat{i}_{sn} = (-1)^k \frac{\bar{I}_s}{1-n}$$

pour $n = 1$:
$$\hat{i}_{s1} = \frac{\hat{V}}{2\pi R} \left[\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{\bar{I}_s}{\sqrt{3}} \left[\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

expérimentalement :
$$\bar{I}_s = k_i \, 0,987 \, V$$

$\hat{i}_{s1} = 1,71 \bar{I}_s$ d'où $\hat{i}_{s1} = k_i \, 1,68 \, V$ et analyse expérimentale $\hat{i}_{s1} = k_i \, 1,59 \, V$

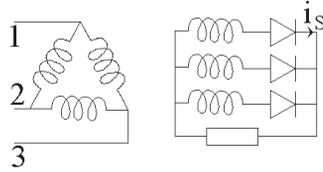
$\hat{i}_{s2} = \bar{I}_s$ $\hat{i}_{s2} = k_i \, 0,987 \, V$ $\hat{i}_{s1} = k_i \, 0,937 \, V$

$\hat{i}_{s3} = \frac{\bar{I}_s}{4}$ $\hat{i}_{s3} = k_i \, 0,246 \, V$ $\hat{i}_{s2} = k_i \, 0,241 \, V$

$$\hat{i}_{s4} = \frac{\overline{I_s}}{5} \quad \hat{i}_{s4} = k_i 0,197 V$$

$$\hat{i}_{s5} = \frac{\overline{I_s}}{4} \quad \hat{i}_{s5} = k_i 0,246 V$$

IV.2.3. IV.2.3.a.

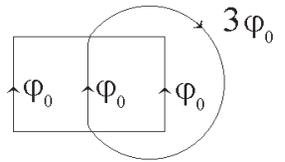


$$v_{p1} + v_{p2} + v_{p3} = 0$$

$$n_p \left(\frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt} + \frac{d\phi_3}{dt} \right) = 0$$

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = Cte$$

Les composants = des courants i_s créent un flux continu dans chaque colonne : ils se referment dans l'air.



IV.2.3.b. Les flux = ϕ_0 se refermant dans l'air restent de valeur faible. Il ne peut y avoir saturation.

IV.2.3.c.

$$n_p i_{p1} - 2 n_s i_{s1} = \mathcal{R}_1 \phi_1 + \mathcal{R}_a \phi_a$$

$$n_p i_{p1} - 2 n_s i_{s1} = \mathcal{R}_a \phi_a = \mathcal{R}_a 3 \phi_0 = Cte$$

On sépare en composante continue et composante ~

$$n_p i_{p1} - 2 n_s \overline{i_{s1}} = 3 \mathcal{R}_a \phi_a$$

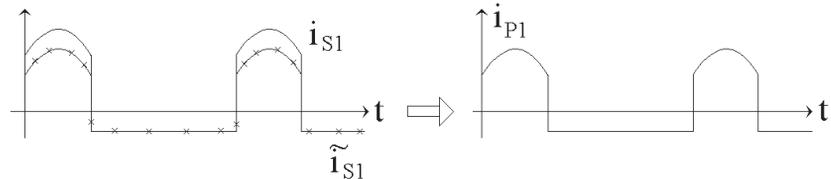
⇒

$$- 2 n_s \overline{I_s} = 3 \mathcal{R}_a \phi_a$$

et : $n_p \tilde{i}_{p1} - 2 n_s \tilde{i}_{s1} = 0$

⇒

$$\tilde{i}_{p1} = \frac{2 n_s}{n_p} \tilde{i}_{s1}$$



Seul le courant magnétisant ainsi que l'empiètement viennent un peu perturber l'allure générale.

IV.2.3.d. D'après la décomposition en série de Fourier i_{s1}, i_{s2}, i_{s3} comportent :

- des systèmes directs : transformés avec rapport de transformation,
- des systèmes inverses : idem,
- des systèmes homopolaires : le triangle représente un CC pour les homopolaires
⇒ les courants secondaires sont transformés dans le rapport m .

⇒ i_{p1}, i_{p2}, i_{p3} possèdent les mêmes harmoniques que i_{s1}, i_{s2}, i_{s3} (à l'exclusion de la composante = bien sûr).

IV.2.3.e. Il est la différence de deux courants $i_p \Rightarrow$ tous les harmoniques $3k$ disparaissent. Effectivement $i_{l1} + i_{l2} + i_{l3} = 0 \Rightarrow i_{l1} i_{l2} i_{l3}$ ne peuvent contenir de systèmes homopolaires. D'autre part les trois tensions $v_{p1} v_{p2} v_{p3}$ imposées par le réseau demeurent sinusoïdales. En fait il y a une chute de tension et on note la présence de légers harmoniques 2 et 4 (mêmes harmoniques que i_l).

IV.2.4. IV.2.4.a. Pour un montage étoile : $i_{p1} + i_{p2} + i_{p3} = 0$.

D'après la relation établie précédemment :

$$\Phi_a = \frac{\sum_1^3 n_p i_p - \sum \sum n_s i_s}{3 \mathcal{R}_a}$$

$$\Phi_a = - \frac{2 n_s (i_{s1} + i_{s2} + i_{s3})}{3 \mathcal{R}_a}$$

IV.2.4.b.

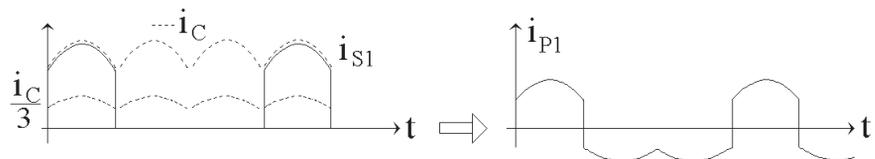
$$i_{s1} + i_{s2} + i_{s3} = i_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_a = - \frac{2 n_s i_c}{3 \mathcal{R}_a}}$$

Φ_a possède donc une composante = et une composante alternative. Ce flux Φ_a demeure faible car il passe dans l'air.

IV.2.4.c. Sur la première colonne on a :

$$n_p i_{p1} - 2 n_s i_{s1} = \mathcal{R}_1 \Phi_1 + \mathcal{R}_a \left(- \frac{2 n_s i_c}{3 \mathcal{R}_a} \right)$$

$$n_p i_{p1} - 2 n_s i_{s1} = 2 n_s \frac{i_c}{3}$$



$$\boxed{i_{p1} = \frac{2 n_s}{n_p} \left(i_{s1} - \frac{i_c}{3} \right)}$$

On retrouve bien l'allure de l'oscillogramme obtenu.

IV.2.4.d. Les courants primaires de somme nulle ne peuvent présenter d'homopolaires : ils n'auront pas d'harmoniques de rang $3k$. L'analyse spectrale confirme ceci. Par contre les harmoniques correspondant à des systèmes directs ou inverses sont transmis, on les retrouve dans l'analyse spectrale de i_p .

IV.2.4.e. Les courants homopolaires (de rang $3k$) créent des flux qui induisent des f.é.m. de pulsation $3k$ qui viennent se superposer aux tensions simples primaires qui comportent des harmoniques 3, 6, 9... non nuls. Mais les flux homopolaires se refermant dans l'air restent faibles et les tensions primaires sont peu déformées.

IV.2.5. IV.2.5.a.

$$v_{p1} = n_p \frac{d\phi_1}{dt} \Rightarrow \phi_1 = -\hat{\phi} \cos \omega t + Cte \Rightarrow \text{avec } \bar{\phi} = Cte$$

IV.2.5.b. Il comporte une composante continue s'il existe une composante continue des ampères-tours.

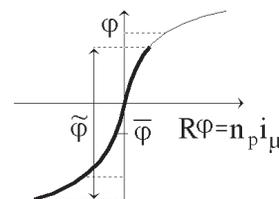
$$n_p i_{p1} - 2 n_s i_{s1} = \mathcal{R}_1 \phi_1$$

$$\bar{i}_{p1} = 0 \Rightarrow -2 n_s \bar{i}_{s1} = \overline{\mathcal{R}_1 \phi_1}$$

La composante continue de flux est créée par \bar{i}_{s1} . \bar{i}_{s1} est > 0 donc la composante = de flux est < 0 .

Ce flux continu passe dans le fer et peut donc prendre des valeurs comparables au flux alternatif.

L'exclusion de la caractéristique magnétique est translaté et le courant magnétisant prendra des valeurs très élevées. Il y a saturation du circuit magnétique.

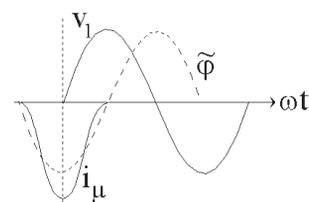


IV.2.5.c. Le courant magnétisant passe par un maximum quand $\tilde{\phi}$ est max. Il existera une pointe < 0 de courant quand $\tilde{\phi}$ est < 0 max.

$\tilde{\phi}$ est en quadrature avec v_1 .

i_μ est max quand $v_1 = 0$ et croît.

i_s est max quand $v_1 \text{ max} > 0 \Rightarrow$ décalage de $\frac{\pi}{2}$ entre \hat{i}_s et (\hat{i}_μ) .



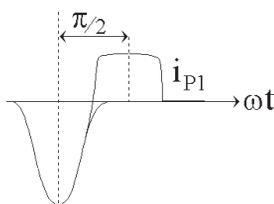
IV.2.5.d.

$$n_p i_{p1} = \mathcal{R}_1 \phi_1 + 2 n_s i_s \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_1 \phi_1 = n_p i_\mu$$

$$n_p i_{p1} = n_p i_\mu + 2 n_s i_s \quad \Rightarrow$$

$$i_{p1} = \frac{2 n_s}{n_p} i_s + i_\mu$$

On retrouve l'allure de l'oscillogramme observé.



IV.2.5.e. Toutes les composantes spectrales de i_s sont transmises, le triangle se présente comme un CC pour les composantes homopolaires. On retrouve toutes les composantes de i_s dans i_p mais leur amplitude est modifiée en raison de l'importance du courant magnétisant due à la saturation.

Les courants de lignes ne comporteront pas d'harmoniques 3 (voir plus haut) et donc le spectre de v_{p1} ne devrait pas avoir d'harmoniques si les sources étaient parfaites, on voit en fait des harmoniques 2, 4 5, apparaître liés aux chutes de tension.

IV.2.6. IV.2.6.a. De même que précédemment, il existe un flux continu dans chaque circuit magnétique dont la conséquence est la saturation. Il y aura donc comme dans le cas précédent une pointe de courant magnétisant très importante quand ϕ est max < 0.

IV.2.6.b. Les courants primaires ne peuvent avoir des composantes homopolaires. Or les systèmes homopolaires des courants secondaires (harmonique de rang $3k$) créent des flux homopolaires non négligeables car ils passent entièrement dans le fer. Ceux-ci induisent des f.é.m. homopolaires importantes qui déforment fortement les tensions primaires.



IV.2.6.c. Sur l'analyse de i_{p1} : pas d'harmoniques $3k$.

Sur l'analyse de v_{p1} : de forts harmoniques $3k$ créés par les flux homopolaires.

Sur l'analyse de i_{s1} on ne retrouve plus la décomposition spectrale initialement trouvée car v_{p1} déformée $\Rightarrow v_{s1}$ déformée $\Rightarrow i_s$ déformée.

IV.2.7. La structure à trois transfos est à éviter dans le cas d'un redresseur $P3$ car saturation et déformation des tensions en Y_y .

La structure à trois colonnes permet de limiter l'influence des flux continus et homopolaires lorsqu'on alimente un $P3$ avec débit résistif.

V. APPLICATIONS

V.1. Étude en régime sinusoïdal équilibré

V.1.1.

$$Z_s = 15\% \frac{U_n^2}{S_n} = 0,15 \times \frac{(2510^3)^2}{6010^6} = 1,56 \Omega = Z_s$$

$$S_{cc} = 3 V_{so} I_{2ccn} \quad \text{et} \quad I_{2ccn} = \frac{V_{20}}{Z_s}$$

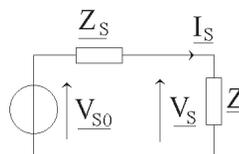
V.1.2.

$$S_{cc} = \frac{U_{20}^2}{Z_s} = 400 \text{ MVA} \quad S_{cc} = 400 \text{ MVA}$$

V.1.3. $V_2 \equiv V_s$

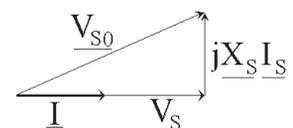
$$\underline{Z}_s = j X_s$$

$$(R_s = 0)$$



• $\cos \varphi = 1$

$$\begin{cases} Z_s = \frac{U_{20}^2}{S_{cc}} \\ Z = \frac{U_2^2}{S_n} \end{cases}$$



$$\text{or } U_{20} \approx U_2 \text{ (débit R)} \quad \frac{Z}{Z_s} = \frac{S_{cc}}{S_n} = \frac{400}{60} = 6,67$$

La chute de tension aux bornes de Z_s est égale à 15 % de la tension en charge.

$$V_{so}^2 = V^2 + (X_s I)^2 = V^2 (1 + (0,15)^2)$$

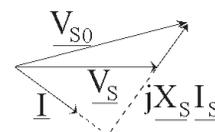
$$V_{so} = 1,011 V \quad \boxed{\frac{\Delta V}{V_{so}} = 1,1 \%}$$

$$\boxed{\Delta U = 275 V}$$

• $\cos \varphi = 0,8$

$$(V_s + X_s I_s \sin \varphi)^2 + (X_s I_s \cos \varphi)^2 = V_{so}^2$$

$$\left(V_s + X_s \frac{Q}{3V_s} \right)^2 + \left(X_s \frac{P}{3V_s} \right)^2 = V_{so}^2$$



$$S = 60 \text{ MVA}$$

$$Q = 36 \text{ MVA}$$

$$V_{20} = \frac{25 \text{ kV}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow (3 V_s^2)^2 + (3 V_s^2) (2 X_s Q - 3 V_{so})^2 + X_s^2 S_n^2 = 0$$

$$\Rightarrow V_s = 13,02 \text{ kV} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = 22,5 \text{ kV}}$$

$$\boxed{\Delta U = 2,5 \text{ kV}}$$

et

$$\boxed{\frac{\Delta U}{U} = 10 \%}$$

La chute de tension demeure très faible si $\cos \varphi = 1$ elle augmente très rapidement avec la puissance réactive (importance de X_s).

V.2. Étude en régime sinusoïdal déséquilibré

V.2.1. La composante inverse est transmise. La composante homopolaire est arrêtée : il n'y a pas de composante homopolaire ni sur les flux, ni sur les courants et tensions primaires (voir étude précédente).

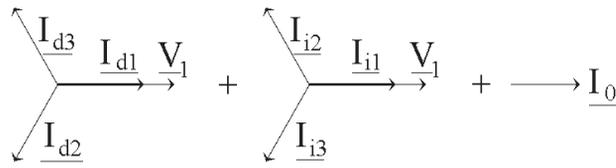
V.2.2. V.2.2.a. $S_n = 60 \text{ MVA} \quad Q = S \sin \varphi = 31,6 \text{ MVA}$

Pour compenser cette puissance réactive, il faut un condensateur C_1 tel que :

$$C_1 = \frac{Q_1}{\omega V_1^2} = 483 \mu F$$

V.2.2.b.

$$\underline{I}_d = \frac{I_1}{3} \quad \underline{I}_i = \frac{I_1}{3} \quad \underline{I}_0 = \frac{I_1}{3}$$



V.2.2.c.

$$P = 6010^6 \times 0,85 = 51 \text{ MVA} \Rightarrow I_1 = \frac{P}{V_1} =$$

$$I_1 = 3534 \text{ A} \Rightarrow Z = 4,08 \Omega$$

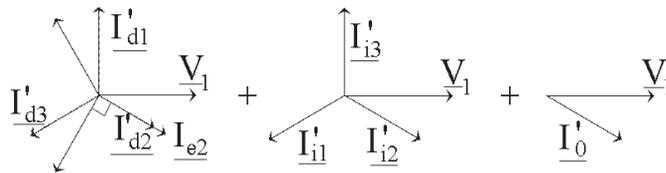
$$I_{e2} = \frac{I_1}{\sqrt{3}} = 2040 \text{ A}$$

or :

$$V_2 = \frac{I_{e2}}{C_{2\omega}} \Rightarrow C_2 = \frac{I_{e2}}{V_2 \omega} = 450 \mu F$$

$$C_2 = 450 \mu F$$

V.2.2.d.



$$\underline{I}'_d = \frac{I_{e2}}{3} \times a$$

$$\underline{I}'_i = \frac{I_{e2}}{3} \times a^2$$

$$\underline{I}'_o = \frac{I_{e2}}{3}$$

V.2.2.e.

$$I_{e3} = 2040 \text{ A}$$

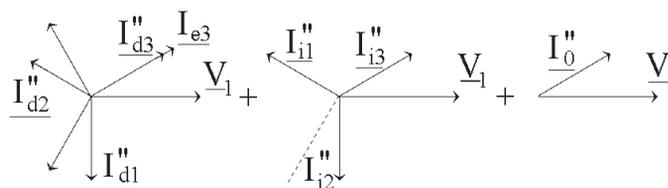
or :

$$V_3 = L_3 \omega I_{e3} \Rightarrow L_3 = \frac{V_3}{\omega I_{e3}} = 22,5 \text{ mH}$$

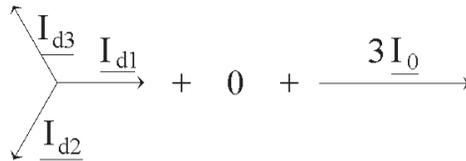
$$L_3 = 22,5 \text{ mH}$$

V.2.2.f.

$$\underline{I}''_d = \frac{I_{e3}}{3} a^2 \quad \underline{I}''_i = \frac{I_{e3}}{3} a \quad \underline{I}''_0 = \frac{I_{e3}}{3}$$



V.2.2.g. Quand on ajoute les différents systèmes on trouve :



La composante inverse a été annulée, par contre la composante homopolaire a été renforcée. Ceci importe peu car un secondaire zig-zag ne transmet pas les courants homopolaires.

⇒ il reste le système direct qui est transmis au primaire.

V.3. *Étude en régime équilibré non sinusoïdal*

V.3.1. En régime équilibré les harmoniques forment :

- des systèmes directs qui sont transmis,
- des systèmes inverses qui sont transmis,
- des systèmes homopolaires (rang $3k$) qui ne sont pas transmis au primaire.

V.3.2.

$$I_{s1} = \frac{S_n}{\sqrt{3} U_n} = 1386 \text{ A} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c} \text{jn}X_s \\ \text{jn}X_0 \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow I_{sn} \\ \uparrow V_{sn} \end{array}$$

$$I_{s3} = 426 \text{ A} \quad I_{s5} = 277 \text{ A} \quad I_{s7} = 198 \text{ A} \quad I_{s9} = 154 \text{ A}$$

Si $n \neq 3k$: $V_{sn} = n X_s I_{sn} = n X_s \frac{I_{s1}}{n} = X_s I_{s1} = 2162 \text{ V}$

$$V_{sn} = 2162 \text{ V}$$

pour $n \neq 3k$

Si $n = 3k$: $V_{sn} = X_0 I_{s1}$

$$V_{sn} = 216 \text{ V}$$

pour $n = 3k$

$$\frac{V_{sn}}{V} = 8,6 \% \text{ inacceptable}$$

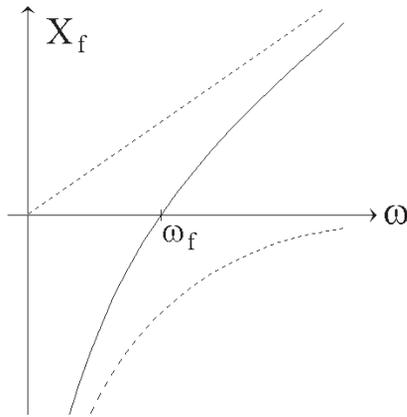
V.3.3. V.3.3.a.

$$\underline{Z}_f = j \left(L_f \omega - \frac{1}{C_f \omega} \right) \Rightarrow X_f = L_f \omega - \frac{1}{C_f \omega}$$

$$X_f = 0 \quad qd \quad L_f C_f \omega_f^2 = 1$$

ω très petit : $\underline{Z}_f \approx -j \frac{1}{C_f \omega}$

ω très grand : $\underline{Z}_s \approx -j L_f \omega$



V.3.3.b. Pour que $V_{sn} = 0$ il faut que $X_f = 0$.

soit :

$$L_{f3} C_{f3} (3 \omega_0)^2 = 1$$

$$L_{f5} C_{f5} (5 \omega_0)^2 = 1$$

$$L_{f7} C_{f7} (7 \omega_0)^2 = 1$$

$$L_{f9} C_{f9} (9 \omega_0)^2 = 1$$

V.3.3.c. Pour $\omega = \omega_0$ le filtre est capacitif $X_f < 0$ car $\omega < \omega_f$.

$$Q_n = + \frac{V^2}{X_{fn}} = + V^2 C_f \omega_0 \left(\frac{n^2}{1-n^2} \right) = Q_n$$

V.3.4. V.3.4.a. Si $S = S_n$ et $\cos \phi = 0,85$ $Q_{\max} = 31,6$ MVA sur une phase.

$$Q_f = - \frac{Q_{\max}}{4} = - 7,9 \text{ MVA}$$

$$Q_3 = - V^2 C_{f3} \omega_0 \frac{9}{8} \quad Q_5 = - V^2 C_{f5} \omega_0 \frac{25}{40}$$

$$Q_7 = - V^2 C_{f7} \omega_0 \frac{49}{48} \quad Q_9 = - V^2 C_{f9} \omega_0 \frac{81}{80}$$

⇒

$$C_{f3} = 107 \mu F$$

$$C_{f5} = 116 \mu F$$

$$C_{f7} = 119 \mu F$$

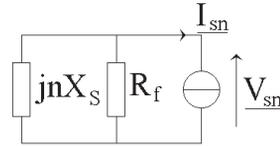
$$C_{f9} = 119 \mu F$$

quand n grand $Q \approx - V^2 C_f \omega_0$

V.3.4.b. D'où l'on tire : $L_{f3} = \frac{1}{C_{f3} (3 \omega_0)^2} = 10,5 \text{ mH}$

de même : $L_{f5} = 3,49 \text{ mH}$ $L_{f7} = 1,74 \text{ mH}$ $L_{f9} = 1,05 \text{ mH}$

V.3.5.



Le coefficient de qualité : $Q_f = \frac{L_f \omega_f}{R_f}$ $\omega_f = n \omega_0$

ce qui donne :

$$R_{f3} = 0,66 \Omega \quad R_{f5} = 0,365 \Omega \quad R_{f7} = 0,255 \Omega \quad R_{f9} = 0,198 \Omega$$

et : $Z_{neq} = \frac{R_{fn} \cdot j n X_s}{R_{fn} + j n X_s}$

$$V_{sn} = \frac{R_{fn} I_{sn}}{\sqrt{R_{fn}^2 + (n X_s)^2}}$$

$$X_s = 1,56 \Omega \quad I_{s1} = 1386 A \quad X_0 = 0,156 \Omega$$

$$V_{s3} = 176 V \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{s3}}{V} = 0,7 \%$$

$$V_{s5} = 101 V \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{s5}}{V} = 0,4 \%$$

$$V_{s7} = 50,5 V \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{s7}}{V} = 0,2 \%$$

$$V_{s9} = 30 V \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{s9}}{V} = 0,12 \%$$

forte atténuation tous $< 1 \%$.

V.3.6. Lorsque les courants ne sont pas équilibrés, les harmoniques de rang $3k$ ne forment plus des homopolaires mais sont eux-mêmes découplables en système directs, inverses et homopolaires et on ne veut pas que les systèmes directs et les systèmes inverses soient transmis.

Agrégation (Concours Interne)

OPTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE ET PHYSIQUE APPLIQUÉE

Composition avec exercice d'application - Session : 1997

Option : **PHYSIQUE APPLIQUÉE**

DEUXIÈME PROBLÈME
ÉLECTRONIQUE - AUTOMATIQUE

PREMIÈRE PARTIE

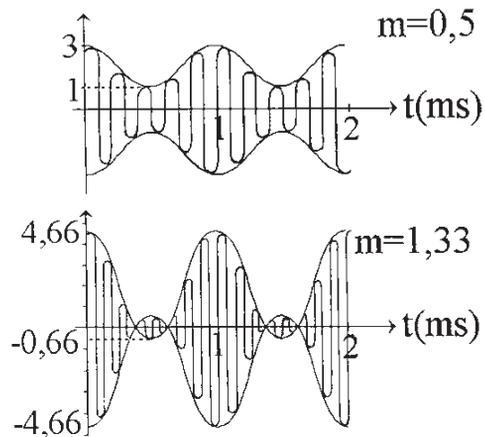
I.1.

$$s(t) = [A + E \cos \omega_m t] \cos \omega_p t$$

I.1.1.

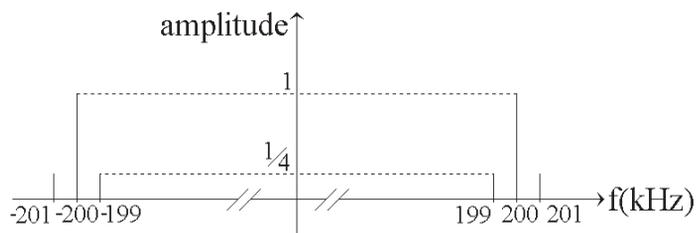
$$s(t) = A \left[1 + \frac{E}{\underbrace{A}_m} \cos \omega_m t \right] \cos \omega_p t$$

I.1.2.



I.1.3.

$$s(t) = A \cos \omega_p t + A \frac{m}{2} [\cos (\omega_p - \omega_m) t + \cos (\omega_p + \omega_m) t]$$



$$s(t) = \frac{A}{2} [e^{j\omega_p t} + e^{-j\omega_p t}] + \frac{A \cdot m}{4} [e^{j(\omega_p + \omega_m) t} + e^{-j(\omega_p + \omega_m) t} + e^{j(\omega_p - \omega_m) t} + e^{-j(\omega_p - \omega_m) t}]$$

I.1.4.

$$P_{totale} = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \frac{m^2}{4} \times 2 = \frac{A^2}{2} \left[1 + \frac{m^2}{2} \right]$$

P_u est transportée dans les raies latérales, elle est transportée toute entière dans une raie :

$$P_u = \frac{A^2}{2} \frac{m^2}{4} = \frac{A^2}{2} \left(\frac{m^2}{4} \right)$$

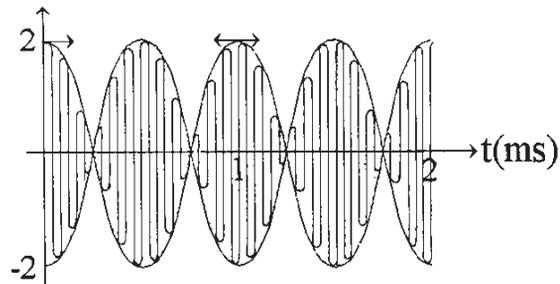
$$\eta = \frac{\frac{A^2}{2} \left(\frac{m^2}{4} \right)}{\frac{A^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)} = \frac{m^2}{4 + 2 m^2} = \frac{m^2}{2 \cdot (2 + m^2)}$$

I.1.5. $m \leq 1$ pour permettre la démodulation par détection d'enveloppe.Si $m > 1$: surmodulation.Si $m \leq 1$: η est maximal pour $m = 1$ $\eta = \frac{1}{6}$.

I.2.

$$s(t) = E \cos \omega_m t \cos \omega_p t$$

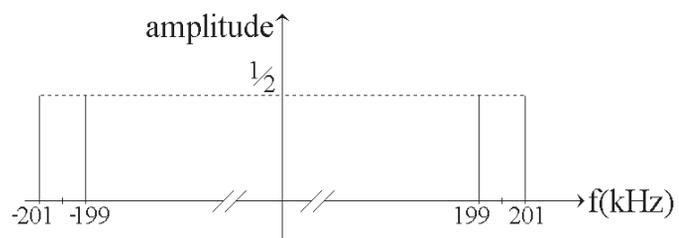
I.2.1.



I.2.2.

$$s(t) = \frac{E}{2} \left[\cos (\omega_p + \omega_m) t + \cos (\omega_p - \omega_m) t \right]$$

$$s(t) = \frac{E}{4} \left[\exp j (\omega_p + \omega_m) t + \exp j (\omega_p - \omega_m) t + \exp j (-\omega_p + \omega_m) t + \exp j (-\omega_p - \omega_m) t \right]$$



I.2.3. Le signal transporte uniquement la puissance utile mais deux fois la même. Il n'y a pas de puissance perdue dans la porteuse, puisque la porteuse est supprimée.

I.3.

$$s(t) = [1 + e(t)] \cos \omega_p t$$

I.3.1.

$$e(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_m t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_m t}$$

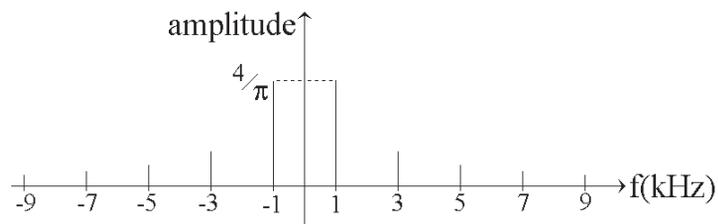
$$C_n = \frac{1}{T_m} \int_{-\frac{T_m}{2}}^{\frac{T_m}{2}} e(t) e^{-jn\omega_m t} dt$$

$$C_n = \frac{E}{T_m} \left[\int_{-\frac{T_m}{2}}^0 -e^{-jn\omega_m t} dt + \int_0^{\frac{T_m}{2}} e^{-jn\omega_m t} dt \right]$$

$$= \frac{E}{jn\pi} [1 - \cos n\pi]$$

$$n = 2k \quad C_n = C_{2k} = 0 \quad n = 0 \quad C_0 = 0$$

$$n = 2k + 1 \quad C_{2k+1} = \frac{2E}{jn\pi} = \frac{2E}{j(2k+1)\pi}$$



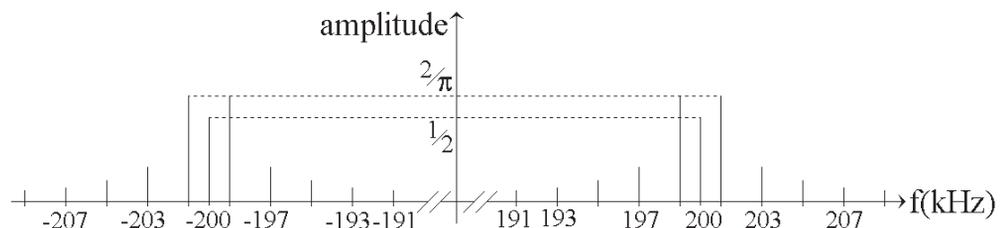
Amplitude du fondamental : $n = 1 \quad C_1 = \frac{2E}{\pi} = \frac{4}{\pi}$

$$\Rightarrow C_9 = \frac{4}{9\pi} \quad \left[C_1 = \frac{4}{\pi} \quad C_3 = \frac{4}{3\pi} \quad C_5 = \frac{4}{5\pi} \quad C_7 = \frac{4}{7\pi} \quad C_9 = \frac{4}{9\pi} \right]$$

I.3.2.

$$s(t) = \left[1 + \sum_{k=4}^9 \frac{2E}{j(2k+1)\pi} e^{j(2k+1)\omega_m t} \right] \left[\frac{e^{j\omega_p t} + e^{-j\omega_p t}}{2} \right]$$

$$s(t) = \frac{1}{2} [e^{j\omega_p t} + e^{-j\omega_p t}] + \sum_{k=-4}^4 \frac{E}{j(2k+1)\pi} \times \left(e^{j(\omega_p + (2k+1)\omega_m)t} + e^{j(-\omega_p + (2k+1)\omega_m)t} \right)$$



Largeur de bande nécessaire $2 \times 9 \text{ kHz} = 18 \text{ kHz}$.

I.3.3.

$$P_0 \quad e(t) = 0 \quad s(t) = \cos \omega_p t \quad P_0 = \frac{1}{2}$$

$$P = 2 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] + 4 \left[\left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \right] + 4 \left[\left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 \right] + 4 \left[\left(\frac{2}{5\pi} \right)^2 \right] + 4 \left[\left(\frac{2}{7\pi} \right)^2 \right] + 4 \left[\left(\frac{2}{9\pi} \right)^2 \right]$$

$$P = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{puissance} \\ \text{porteuse}}} \underbrace{4 \left[\left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} \right]}_{\substack{\text{2 fois la puissance utile}}} \\ P_0 \qquad \qquad \qquad 2 \times 0,96 \qquad \qquad \qquad = 2,42$$

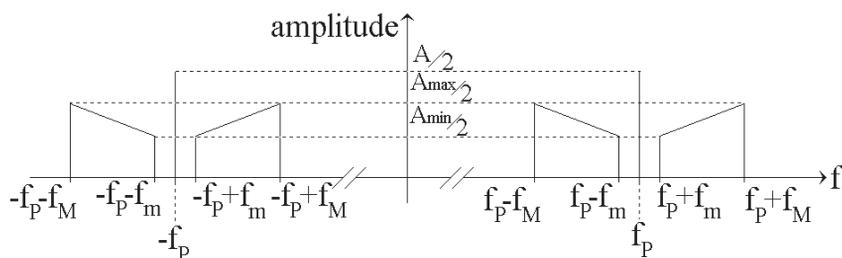
$$\frac{P_u}{P_T} = \frac{0,96}{2,42} \approx \frac{4}{10} = 0,4$$

I.4. I.4.1.

$$\begin{aligned} s(t) &= [A + e(t)] \cos \omega_p t \\ s(t) &= A \cos \omega_p t + e(t) \cos \omega_p t \\ s(t) &= \frac{A}{2} [e^{j\omega_p t} + e^{-j\omega_p t}] + \frac{e(t)}{2} [e^{j\omega_p t} + e^{-j\omega_p t}] \\ \frac{A}{2} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{A}{2} \delta(f) \\ \frac{A}{2} e^{j2\pi f_p t} &\longrightarrow \frac{A}{2} \delta(f - f_p) \\ \frac{A}{2} e^{-j2\pi f_p t} &\longrightarrow \frac{A}{2} \delta(f + f_p) \\ e(t) &\longrightarrow E(f) \\ e(t) e^{j2\pi f_p t} &\longrightarrow E(f - f_p) \\ e(t) e^{-j2\pi f_p t} &\longrightarrow E(f + f_p) \end{aligned}$$

$$S(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p)] + \frac{1}{2} [E(f - f_p) + E(f + f_p)]$$

I.4.2.



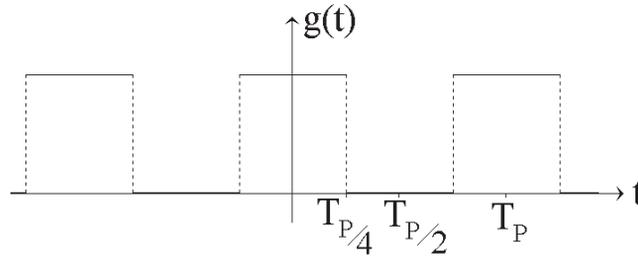
Largeur de bande nécessaire : $2 f_M$.

I.4.3. Application Numérique : $f_p = \frac{C}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{1640} = 183 \text{ kHz}$ gamme des grandes ondes en modulation d'amplitude

$$BP = 2 \times f_M = 18 \text{ kHz}$$

Musicalité moyenne : Bande audible \Rightarrow 20 Hz \rightarrow 16 kHz
20 kHz

I.5. I.5.1.



$g(t)$ est une fonction périodique de période T_p alternativement égale à 1 et 0 :

- 1 quand $\cos \omega_p t > 0$,
- 0 quand $\cos \omega_p t < 0$.

I.5.2.

$$g(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{j\omega_p n t}$$

$$C_n = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{T_p}{4}}^{\frac{T_p}{4}} 1 \times e^{-j\omega_p n t} dt \Rightarrow C_0 = \frac{1}{2}$$

$$C_n = \frac{1}{\pi n} \sin n \frac{\pi}{2}$$

$$G(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi} \delta(f - (2k+1) f_p)$$

I.5.3.

$$u(t) = b g(t) \cdot s(t)$$

$$U(f) = b G(f) * S(f)$$

or :

$$\delta(f) * S(f) = S(f)$$

$$\delta(f - f_p) * S(f) = S(f - f_p)$$

$$U(f) = \frac{b}{2} S(f) + \frac{b}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} S(f - (2k+1) f_p)$$

avec : $S(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p)] + \frac{1}{2} [E(f - f_p) + E(f + f_p)]$

$$U(f) = \frac{bA}{4} [\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p)] + \frac{b}{4} [E(f - f_p) + E(f + f_p)]$$

$$k = 0 \rightarrow + \frac{b}{2\pi} [A\delta(f - 2 f_p) + A\delta(f) + E(f - 2 f_p) + E(f)]$$

$$k = 1 \rightarrow - \frac{b}{6\pi} [A\delta(f - 4 f_p) + A(f - 2 f_p) + E(f - 4 f_p) + E(f - 2 f_p)]$$

$$k = -1 \rightarrow \frac{b}{2\pi} [A\delta(f) + \delta(f + 2 f_p) + E(f) + E(f + 2 f_p)]$$

+

I.5.4. Si $f_c > f_M$ et $f_c < (f_p - f_M)$

Après le filtre :

$$R(f) = 2 \frac{bA}{2\pi} \delta(f) + \frac{2b}{2\pi} E(f)$$

$$= \frac{bA}{\pi} \delta(f) + \frac{b}{\pi} E(f)$$

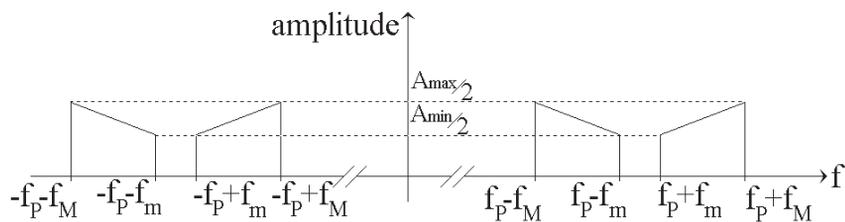
$$r(t) = \frac{b}{\pi} [A + e(t)] = \frac{b}{\pi} a(t)$$

I.6. I.6.1.

$$s(t) = e(t) \cdot \cos \omega_p t = \frac{e(t)}{2} [e^{j\omega_p t} + e^{-j\omega_p t}]$$

$$S(f) = \frac{1}{2} [E(f - f_p) + E(f + f_p)]$$

I.6.2.



Même spectre qu'au § I.4.2. sans la porteuse.

Largeur de bande nécessaire : $2 f_M$

I.7. I.7.1.

$$u(t) = kV s(t) \cdot \cos \omega_p t$$

$$= kV [e(t)] \cos^2 \omega_p t = \frac{kV}{2} [(e(t)) [1 + \cos 2 \omega_p t]]$$

$$U(f) = \frac{kV}{2} E(f) + \frac{kV}{4} [E(f - 2 f_p) + E(f + 2 f_p)]$$

$$R(f) = \frac{kV}{2} E(f) \quad \text{si} \begin{cases} f_c > f_M \\ f_c < 2 f_p - f_M \end{cases}$$

$$r(t) = \frac{kV}{2} e(t)$$

I.7.2.

$$v_{loc} = V \cos (\omega_p t + \phi)$$

v_{loc} est déphasé par rapport à la porteuse.

$$u(t) = kV e(t) \cdot \cos \omega_p t \cdot \cos (\omega_p t + \phi)$$

$$= \frac{kV e(t)}{2} [\cos (2 \omega_p t + \phi) + \cos \phi]$$

Après filtrage :

$$r(t) = \frac{kV}{2} e(t) \cdot \cos \phi$$

Si ϕ est constant $r(t)$ est proportionnel à $e(t)$ mais il est atténué. Si $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ $r(t) = 0$.

Si ϕ n'est pas constant $r(t)$ n'est plus une bonne représentation de $e(t)$.

I.7.3.

$$v_{loc} = V_{\cos} (\omega_p + \Delta\omega) t$$

v_{loc} n'a pas une fréquence exactement égale à celle de la porteuse.

$$\begin{aligned} u(t) &= kV [e(t)] (\cos \omega_p t) \cdot [\cos (\omega_p t + \Delta\omega) t] \\ &= \frac{kV}{2} e(t) [\cos \Delta\omega t + \cos (2 \omega_p + \Delta\omega) t] \end{aligned}$$

Après filtrage :

$$r(t) = \frac{kV}{2} \cos \Delta\omega t \cdot e(t)$$

$e(t)$ est multiplié par $\cos \Delta\omega t$ ce qui donne un phénomène de battement indésirable.

I.7.4. Le v_{loc} doit être asservi en fréquence et en phase sur la porteuse. On peut utiliser une PLL par exemple ; on obtient alors une démodulation synchrone.

DEUXIÈME PARTIE

II.1. Modulateur d'amplitude à amplificateur de transconductance

II.1.1. a.

$$i_s = i_5 - i_4$$

b.

$$\beta \gg 1 \quad i_4 + i_5 = i_0$$

c.

$$v_e = v_{BE_5} - v_{BE_4}$$

$$i_4 = I_S \exp \frac{v_{BE_4}}{V_T} \quad i_5 = I_S \exp \frac{v_{BE_5}}{V_T}$$

$$v_{BE_4} = V_T \ln \frac{i_4}{I_S} \quad v_{BE_5} = V_T \ln \frac{i_5}{I_S}$$

$$v_e = V_T \ln \frac{i_5}{i_4}$$

d.

$$\frac{i_5}{i_4} = \exp \frac{v_e}{V_T} \quad i_5 + i_4 = i_0$$

$$\Rightarrow i_4 = \frac{i_0}{1 + e^{\frac{v_e}{V_T}}} \quad i_5 = \frac{i_0}{1 + e^{-\frac{v_e}{V_T}}}$$

e.

$$\begin{aligned}
 i_s &= i_0 \left(\frac{1}{1 + e^{-\frac{v_e}{V_T}}} - \frac{1}{1 + e^{+\frac{v_e}{V_T}}} \right) \\
 &= i_0 \frac{e^{\frac{v_e}{2V_T}} - e^{-\frac{v_e}{2V_T}}}{e^{\frac{v_e}{2V_T}} + e^{-\frac{v_e}{2V_T}}} \\
 &= i_0 \operatorname{th} \frac{v_e}{2V_T}
 \end{aligned}$$

II.1.2.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{th} x &\approx x - \frac{x^3}{3} = x \left(1 - \frac{x^2}{3} \right) \\
 i_s &= i_0 \times \frac{v_e}{2V_T} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{v_e}{2v_T} \right)^2 \right] \\
 &\approx i_0 \frac{v_e}{2V_T}
 \end{aligned}$$

A 10 % près :

$$\frac{1}{3} \left(\frac{v_e}{2V_T} \right)^2 \leq \frac{1}{10} \quad v_e \leq 2V_T \sqrt{\frac{3}{10}}$$

$$v_e \leq 27 \text{ mV}$$

$$\frac{i_s}{v_e} = \frac{i_0}{2V_T} = g = k i_0 \quad k = \frac{1}{2V_T}$$

II.1.3. a.

$$\begin{aligned}
 v_e &= V_T \ln \frac{i_5}{i_4} & i_5 + i_4 &= i_0 \\
 & & i_5 - i_4 &= i_s
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 i_5 &= \frac{1}{2} (i_0 + i_s) \\
 i_4 &= \frac{1}{2} (i_0 - i_s)
 \end{aligned} \right| v_e = V_T \ln \frac{i_0 + i_s}{i_0 - i_s}$$

b.

$$v_e = v_{D_2} - v_{D_3} = V_T \ln \frac{i_{D_2}}{i_{D_3}}$$

$$v_e = V_T \ln \frac{\frac{i_D}{2} + i_e}{\frac{i_D}{2} - i_e}$$

c. En identifiant les deux expressions de v_e :

$$\frac{i_0 + i_s}{i_0 - i_s} = \frac{\frac{i_D}{2} + i_e}{\frac{i_D}{2} - i_e}$$

mais cette relation n'est valable que si les ln sont définis.

$$\frac{i_D}{2} + i_e > 0 \quad \frac{i_D}{2} - i_e > 0 \quad \Rightarrow \quad |i_e| < \frac{i_D}{2}$$

Dans ce cas :

$$(i_0 + i_s) \left(\frac{i_D}{2} - i_e \right) = (i_D - i_s) \left(\frac{i_D}{2} + i_e \right)$$

d.
$$i_s = i_e \times \frac{2 i_0}{i_D} = K i_0 i_e \quad K = \frac{2}{i_D}$$

II.1.4. a.
$$V_E = -V + 2 V_0 = -12 + 0,7 \times 2 = -10,6 V$$

b.
$$i_0 = \frac{v_m - V_E}{R_m}$$

c.
$$v_s = R_c i_s = R_c k i_0 v_e$$

$$v_s = R_c k \left(\frac{v_m - V_E}{R_m} \right) \times \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_p$$

d.
$$v_s = k \frac{R_c}{R_m} \times \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_p [E \cos \omega_m t - V_E] \cos \omega_p t$$

$$v_s = k \frac{R_c}{R_m} \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_p \cdot (-V_E) \left[1 + \frac{E}{-V_E} \cos \omega_m t \right] \cos \omega_p t$$

$$A = k \frac{R_c}{R_m} \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_p (-V_E)$$

$$m = \frac{E}{-V_E} \quad (V_E < 0 \Rightarrow -V_E > 0)$$

pas de surmodulation $m \leq 1$.

$$E \leq 10,6 V$$

e.
$$m = 0,5 \quad E = 5,3 V$$

$$v_e = E \times \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cos \omega_p t$$

$$V_{e \max} = 5,3 \times \frac{220}{10\,000 + 220} = 21 mV$$

(21 mV < 27 mV) linéarité à 10 % près.

$$A = \frac{1}{2} \frac{R_c}{V_T} \frac{R_2}{R_m R_1 + R_2} - V_p (-V_E)$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-3}} \times \frac{10}{33} \times \frac{220}{220 + 10000} \times 1 \times 10,6$$

$$A = 1,38 \text{ V}$$

II.2. Démodulation d'amplitude par détection d'enveloppe

II.2.1. Étude du circuit élémentaire

a. $\tau \gg \frac{T_p}{2} \quad \tau \gg T_p$

b. D idéale :

– passante :

$$r(t) = s(t)$$

– bloquée :

$$r + \tau \frac{dr}{dt} = 0$$

$$r = K \cdot e^{-t/\tau}$$

$$a \text{ } t = t_1 \quad r(t_1) = [A + e(t_1)]$$

$$\Rightarrow K = [A + e(t_1)] e^{t_1/\tau}$$

$$r = [A + e(t_1)] e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}}$$

c.
$$\Delta S = [A + e(t_1)] - [A + e(t_1 + T_p)]$$

$$= e(t_1) - e(t_1 + T_p)$$

$$\Delta R = [A + e(t_1)] \left[1 - e^{-\frac{(t_2 - t_1)}{\tau}} \right]$$

On linéarise l'exponentielle :

$$\Delta R = [A + e(t_1)] \left[\frac{t_2 - t_1}{\tau} \right]$$

$$t_2 \text{ très voisin de } t_1 + T_p \Rightarrow t_2 - t_1 = T_p.$$

$$\Delta R = [A + e(t_1)] \frac{T_p}{\tau}$$

Pour que la détection suive l'enveloppe, il faut que $\Delta S < \Delta R$.

$$\underbrace{[e(t_1) - e(t_1 + T_p)]}_{\Delta S} < [A + e(t_1)] \frac{T_p}{\tau}$$

$$- T_p \frac{de(t_1)}{dt} < [A + e(t_1)] \frac{T_p}{\tau}$$

$$e(t) \searrow \text{ donc : } \quad \frac{de}{dt} < 0 \quad - T_p \frac{de}{dt} > 0$$

$$\tau < \frac{A + e(t_1)}{-\frac{de}{dt}(t_1)}$$

il faut que cette inégalité soit vraie \forall la valeur de $\frac{A + e(t_1)}{-\frac{de}{dt}(t_1)}$ donc :

$$\tau < \left(\frac{A + e(t)}{-\frac{de}{dt}(t)} \right)_{\max}$$

$$d. \quad s(t) = S (1 + m \cos \omega_m t) \cdot \cos \omega_p t$$

$$A = S$$

$$e(t) = S_m \cos \omega_m t \quad \frac{de}{dt} = - S_m \omega_m \sin \omega_m t$$

$$\tau < \left(\frac{S + S_m \cos \omega_m t}{S_m \omega_m \sin \omega_m t} \right)_{\max}$$

$$\tau < \left(\frac{1 + m \cos \omega_m t}{m \omega_m \sin \omega_m t} \right)_{\max}$$

Il faut trouver la valeur maximale de la fonction :

$$\frac{1 + m \cos \omega_m t}{m \omega_m \sin \omega_m t}$$

$$\omega_m t = \theta \quad y = \frac{1 + m \cos \theta}{m \omega_m \sin \theta}$$

L'étude de cette fonction indique qu'elle possède un maximum pour une valeur θ_0 de θ , telle que :

$$\cos \theta_0 = - m$$

$$y_{\max} = \frac{1 - m^2}{m \omega_m \sqrt{1 - m^2}} = \frac{\sqrt{1 - m^2}}{m \omega_m}$$

Si $m < 1$ indispensable pour une détection d'enveloppe :

$$\tau < \frac{\sqrt{1 - m^2}}{m \omega_m}$$

Application Numérique :

$$m = 0,5 \quad f_m = 1 \text{ kHz} \quad T_m = 10^{-3} \text{ s}$$

$$f_p = 200 \text{ kHz} \quad T_p = 5 \mu\text{s}$$

$$\bullet \quad \tau \gg 5 \mu s \quad \tau < \frac{\sqrt{1 - (0,5)^2}}{0,5 \times 2\pi \cdot 10^3}$$

et

$$\tau < 280 \mu s \quad \tau < 0,28 \text{ ms}$$

e. • Détection d'enveloppe possible pour $m < 1$

• Suivant les valeurs de f_m, f_p, m il ne sera pas toujours possible de trouver τ surtout si f_m et f_p sont proches.

f.

$$s(t) = (1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_p t$$

$$\Delta R = (1 + m \cos \omega_m t) \frac{T_p}{\tau}$$

$$\Delta S = T_p m \omega_m \sin \omega_m t$$

$$d(t) = \Delta R - \Delta S$$

$$d(t) = \frac{T_p}{\tau} [1 + m \cos \omega_m t - \tau m \omega_m \sin \omega_m t]$$

Si :

$$\tau = \tau_{\max} = T_m \frac{\sqrt{1 - m^2}}{2\pi m} = \frac{\sqrt{1 - m^2}}{\omega_m m}$$

$$d(t) = \frac{T_p}{\tau} [- (\sqrt{1 - m^2}) \cdot \sin \omega_m t + m \cos \omega_m t + 1]$$

$$\cos \theta_0 = -m \quad \sin \theta_0 = \sqrt{1 - m^2}$$

$$d(t) = \frac{T_p}{\tau} [- \cos (\omega_m t - \theta_0) + 1]$$

$$= \frac{T_p}{T_m} \frac{2\pi m}{\sqrt{1 - m^2}} [1 - \cos (\omega_m t - \theta_0)]$$

$$d_{\max} : \cos (\omega_m t - \theta_0) = -1 \quad d_{\max} = \frac{T_p}{T_{\max}} \frac{2\pi m}{\sqrt{1 - m^2}}$$

$$d_{\max} = \frac{10^3}{200 \cdot 10^3} \times \frac{2\pi \cdot 0,5}{\sqrt{1 - (0,5)^2}} = 0,018 \text{ V}$$

$$= 18 \text{ mV}$$

II.2.2. Démodulateur comprenant une diode suivie d'un filtre passe-bas

a. Z_{ent} du filtre $\gg R$

$$u(t) = s(t) \text{ quand } s(t) > 0$$

$$u(t) = 0 \text{ quand } s(t) < 0$$

b.

$$\underline{T} = \frac{R}{\underline{U}} \quad \underline{V}^+ = \underline{V}^- = \frac{R}{k} = \frac{V_A}{1 + j R_1 C_1 \omega}$$

$$\underline{V}_A \left(\frac{2}{R_1} + j C_2 \omega \right) = \frac{\underline{U}}{R_1} + \frac{R}{k R_1} + j C_2 \omega R$$

$$\underline{T} = \frac{k}{\left[1 + j (2 R_1 C_1 \omega + R_1 C_2 \omega - R_1 C_2 k \omega) + R_1^2 C_1 C_2 (j\omega)^2 \right]}$$

Filtre passe-bas deuxième ordre de $T_{\max} = k$:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R_1^2 C_1 C_2}$$

Filtre maximale plat :

$$m = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad f_0 = f_c$$

$$k = 1 \quad \frac{2m}{\omega_0} = 2 R_1 C_1 \quad m = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

$$\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad f_0 = f_c = 210^3 = \frac{1}{2\pi R_1} \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2}}$$

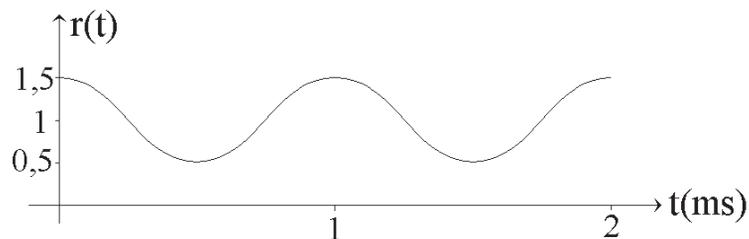
$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = 2 C_1$$

$$C_1 \sqrt{2} = \frac{1}{2 \times 2\pi \cdot 2210^6}$$

$$C_1 = 2,55 \text{ nF} \quad C_2 = 5,1 \text{ nF}$$

c.



TROISIÈME PARTIE

III.1. Étude de la modulation du signal de luminance dans un téléviseur

III.1.1. Fréquence de l'oscillateur local qui pilote la synchronisation des signaux de balayage.

$$\begin{aligned}
 a. \quad f_h &= nbe \text{ de lignes} \times f_i \\
 &= 625 \times 25 = 15\,625 \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

b. f_{loc} doit être le plus petit commun multiple entre f_h et $f_t = 50 \text{ Hz}$.

$$f_{loc} = 31250 \text{ Hz} \quad f_{loc} = 2 f_h = 625 f_t$$

III.1.2. Bande passante nécessaire pour la transmission du signal de luminance.

a. hauteur d'un pixel = largeur d'un pixel

$$\text{hauteur d'un pixel} = \frac{H}{625}$$

$$\text{largeur d'un pixel} = \frac{d}{n} \quad (n : \text{nombre de pixels sur un ligne}).$$

$$\frac{H}{625} = \frac{d}{n} \quad n = 625 \times \frac{d}{H} = \frac{4}{3} \times 625$$

$$n = 833$$

b. La fréquence du signal décrit est :

$$- \text{ pour 1 ligne } 833 \times \frac{1}{2},$$

$$- \text{ pour 625 lignes } 833 \times \frac{1}{2} \times 625,$$

$$- \text{ pour 25 images par seconde } f = 833 \times \frac{1}{2} \times 625 \times 25$$

$$f = 6,51 \text{ MHz}$$

c. $BP = 2 f_{\max}$ standard européen $2 \times 5 = 10 \text{ MHz}$

standard français $2 \times 6 = 12 \text{ MHz}$

III.1.3.

$$e(t) = E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t$$

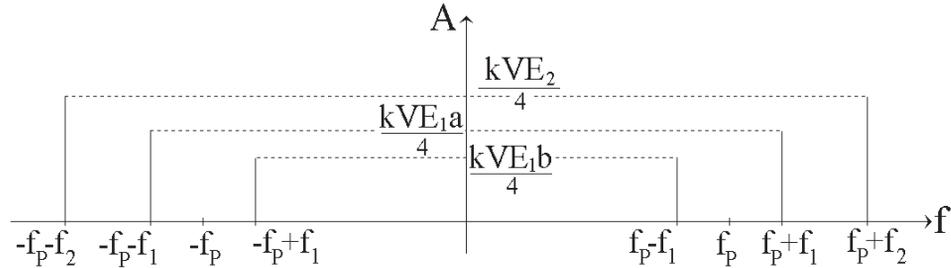
$$a. \quad u(t) = k \cdot e(t) \cdot v_p(t) \quad v_p(t) = V \cos \omega_p t$$

$$u(t) = \frac{kV}{2} \left[E_1 (\cos (\omega_p + \omega_1) t + \cos (\omega_p - \omega_1) t) + E_2 (\cos (\omega_p + \omega_2) t + \cos (\omega_p - \omega_2) t) \right]$$

en utilisant les caractéristiques du filtre FBLR.

$$s(t) = \frac{kV}{2} E_2 \cos [(\omega_p + \omega_2) t + \phi_2] \\ + \frac{kV}{2} E_1 a \cos [(\omega_p + \omega_1) t + \phi_1] \\ + \frac{kV}{2} E_1 b \cos [(\omega_p - \omega_1) t - \phi_1]$$

b.



c.

$$z(t) = k' v_p(t) \cdot s(t)$$

$$z(t) = \frac{k k' V^2 E_2}{4} \left[\cos [(2 \omega_p + \omega_2) t + \phi_2] + \cos [(\omega_2 t) + \phi_2] \right] \\ + \frac{k k' V^2 E_1 a}{4} \left[\cos [(2 \omega_p + \omega_1) t + \phi_1] + \cos [\omega_1 t + \phi_1] \right] \\ + \frac{k k' V^2 E_1 b}{4} \left[\cos [(2 \omega_p - \omega_1) t - \phi_1] + \cos (\omega_1 t + \phi_1) \right]$$

d. Le filtre passe-bas doit filtrer les termes de fréquence :

$$2 f_p + f_2 \quad 2 f_p + f_1 \quad 2 f_p - f_1$$

sa fréquence de coupure f_c doit être très inférieure à $2 f_p - f_1$.

e. Si le filtre passe-bas est bien choisi :

$$y(t) = \frac{k k' V^2}{4} \left[E_2 \cos (\omega_2 t + \phi_2) + E_1 a \cos (\omega_1 t + \phi_1) + E_1 b \cos (\omega_1 t + \phi_1) \right] \\ y(t) = \frac{k k' V^2}{4} \left[E_1 (a + b) \cos (\omega_1 t + \phi_1) + E_1 \cos (\omega_2 t + \phi_2) \right]$$

f_p étant au milieu de la partie oblique de $H(f) \Rightarrow a + b = 1$ (caractéristique linéaire)

$$y(t) = \frac{k k' V^2}{4} \left[E_1 \cos (\omega_1 t + \phi_1) + E_2 \cos (\omega_2 t + \phi_2) \right] \\ = K e (t + t_0) \\ = K \left[E_1 \cos (\omega_1 t + \omega_1 t_0) + E_2 \cos (\omega_2 t + \omega_2 t_0) \right] \\ \omega_1 t_0 = \phi_1 \quad \omega_2 t_0 = \phi_2 \quad t_0 = \frac{\phi_1}{\omega_1} = \frac{\phi_2}{\omega_2}$$

⇒ ϕ déphasage est proportionnel à ω .

$$K = \frac{k k' V^2}{4} \quad t_0 = \frac{\phi_1}{\omega_1} = \frac{\phi_2}{\omega_2}$$

III.1.4. a.

$$\begin{aligned} u(t) &= k e(t) \cdot v_p(t) \\ &= k e(t) V \cos \omega_p t = \frac{k}{2} e(t) V [e^{j\omega_p t} + e^{-j\omega_p t}] \\ U(f) &= \frac{kV}{2} [E(f - f_p) + E(f + f_p)] \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} S(f) &= H(f) \cdot U(f) \\ S(f) &= \frac{kV}{2} [H(f) \cdot E(f - f_p) + H(f) \cdot E(f + f_p)] \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} z(t) &= k' s(t) \cdot v_p(t) \\ z(t) &= \frac{k' V}{2} s(t) [e^{j\omega_p t} + e^{-j\omega_p t}] \\ Z(f) &= \frac{k' V}{2} [S(f - f_p) + S(f + f_p)] \\ Z(f) &= \frac{k k' V^2}{4} [H(f - f_p) E(f - 2f_p) + H(f - f_p) E(f) \\ &\quad + H(f + f_p) E(f) + H(f + f_p) E(f + 2f_p)] \end{aligned}$$

d. Si :

$$\begin{aligned} f_c \ll (2 f_p - f) \quad f_c \ll (2 f_p - f_M) \\ Y(f) = \frac{k k' V^2}{4} E(f) [H(f - f_p) + H(f + f_p)] \end{aligned}$$

Les valeurs des $|f|$ sont $< f_M$.

Si :

$$H(f - f_p) + H(f + f_p) = cst = C$$

$$Y(f) = \frac{C k k' V^2}{4} E(f)$$

$$y(t) = K e(t)$$

III.1.5. Standard européen :

$$MA : 10 \text{ MHz}$$

$$BLR : 5,75 \text{ MHz}$$

Standard français :

$$MA : 12 \text{ MHz}$$

$$BLR : 7,25 \text{ MHz}$$

III.2. Étude de la modulation du signal de chrominance

III.2.1.

$$Y = 0,30 R + 0,59 V + 0,11 B$$

$$Y(0,30 + 0,59 + 0,11) = 0,30 R + 0,59 V + 0,11 B$$

$$0,59 (V - Y) = -0,30 (R - Y) - 0,11 (B - Y)$$

$$V - Y = \frac{0,30}{0,59} (R - Y) - \frac{0,11}{0,59} (B - Y)$$

$$V - Y = - 0,5085 (R - Y) - 0,1864 (B - Y)$$

III.2.2. Fréquence de la sous-porteuse

a. Standard européen : $B = 5 \text{ MHz} - 0,6 \text{ MHz}$

f sous-porteuse : $\approx 4,4 \text{ MHz}$

b. Le spectre du signal de luminance est concentré autour des harmoniques de f_p et f_r . On éloigne la porteuse des positions où le signal de luminance est le plus dense pour éviter des éventuels battements (cross-modulation ou inter-modulation).

$$\begin{aligned} f_{sp} &= (4 \times 284 - 1) \times \frac{15\,625}{4} + 0,5 \times 50 \\ &= 4,43361875 \text{ MHz} \end{aligned}$$

III.2.3. a.

$$s(t) = kV r(t) \sin \omega_{sp}t + kV b(t) \cos \omega_{sp}t$$

$$s(t) = kV \sqrt{r^2(t) + b^2(t)} \times \left[\frac{r(t)}{\sqrt{r^2 + b^2}} \sin \omega_{sp}t + \frac{b(t)}{\sqrt{r^2 + b^2}} \cos \omega_{sp}t \right]$$

$$s(t) = S(t) \cdot \sin [\omega_{sp}t + \phi(t)]$$

$$S(t) = kV \sqrt{r^2 + b^2} \left. \begin{array}{l} \cos \phi = \frac{r(t)}{\sqrt{r^2 + b^2}} \\ \sin \phi = \frac{b(t)}{\sqrt{r^2 + b^2}} \end{array} \right\} \text{tg } \phi = \frac{b(t)}{r(t)}$$

b.

$$z(t) = k' s(t) \cdot V_0 \sin (\omega_{sp}t + \phi_0)$$

$$= k k' V V_0 \cdot \sqrt{r^2 + b^2} \left[\sin (\omega_{sp}t + \phi) \sin (\omega_{sp}t + \phi_0) \right]$$

$$= k k' V V_0 \cdot \sqrt{r^2 + b^2} \left[\cos (\phi - \phi_0) - \cos (2 \omega_{sp}t + \phi + \phi_0) \right]$$

après filtrage $f_c \ll 2 f_{sp}$

$$\begin{aligned} y(t) &= k k' V V_0 \sqrt{r^2 + b^2} \cdot [\cos \phi \cos \phi_0 + \sin \phi \sin \phi_0] \\ &= k k' V V_0 [r(t) \cos \phi_0 + b(t) \sin \phi_0] \end{aligned}$$

c. Si $\phi_0 = 0$ $y(t) = K r(t)$

Si $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ $y(t) = K b(t)$ $\Rightarrow \phi_0$ permet de séparer les deux signaux $r(t)$ et $b(t)$

III.2.4. Compression des signaux

a. Pour le rouge saturé :

$$R = 1 \quad B = V = 0 \quad Y_R = 0,30$$

$$r = R - Y = 0,70 \quad S_R = \sqrt{0,7^2 + (-0,3)^2}$$

$$b = B - Y = -0,30 \quad S_R = 0,7616$$

Pour le bleu saturé :

$$R = V = 0 \quad B = 1 \quad Y_B = 0,11$$

$$r = R - Y = -0,11 \quad S_B = \sqrt{(-0,11)^2 + (0,89)^2}$$

$$b = B - Y = 0,89 \quad S_B = 0,8968$$

b. Pour le rouge saturé :

$$Y_R + S_R = 1,0616 \quad Y_R - S_R = -0,4616 = -0,46$$

Pour le bleu saturé :

$$Y_B + S_B = 1,0068 \quad Y_B - S_B = -0,7868 = -0,79$$

c. S_{RC} et S_{BC} les signaux corrigés :

$$Y_R - S_{RC} = -0,33 \quad S_{RC} = 0,30 + 0,33 = 0,63$$

$$Y_B - S_{BC} = -0,33 \quad S_{BC} = 0,11 + 0,33 = 0,44$$

$$S_{RC} = 0,63 = \sqrt{\eta^2 0,7^2 + \mu^2 (-0,3)^2}$$

$$0,63 = \sqrt{0,49 \eta^2 + 0,09 \mu^2}$$

$$S_{BC} = 0,44 = \sqrt{\eta^2 (-0,11)^2 + \mu^2 (0,89)^2}$$

$$0,44 = \sqrt{0,0121 \eta^2 + 0,792 \mu^2}$$

$$0,49 \eta^2 + 0,09 \mu^2 = 0,3969$$

$$0,0121 \eta^2 + 0,792 \mu^2 = 0,1936$$

$$\Rightarrow \eta = 0,876$$

$$\mu = 0,482$$

Les modulateurs sont attaqués par les signaux 0,876 ($R - Y$) et 0,482 ($B - Y$).

Le Directeur de la Publication : Monique SCHWOB