

**Page à numériser**

**Page à numériser**

# Agrégation

## (Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE

Épreuve A : Composition de physique - Session : 1998

### PARTIE I

#### LES FONDEMENTS DE L'ACOUSTIQUE LINÉAIRE DANS UN FLUIDE

##### I.1. L'équation de d'Alembert.

a. Les déformations relatives des différents éléments de fluide sont de faible amplitude.

$$b. \quad \rho_0 S dx = \rho S (dx + u(x+dx, t) - u(x, t)) \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \approx \rho_0 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Par conservation de la masse, si  $u$  augmente avec  $x$  (dilatation), alors  $\rho$  diminue.

$$c. \quad \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$d. \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{d\rho} \Big|_{\rho} \times \frac{\partial \rho}{\partial x} \approx \frac{dP}{d\rho} \Big|_{\rho_0} \times \left(-\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{avec :} \quad c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho} \Big|_{\rho_0}}$$

$$e. \quad u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

superposition de deux ondes planes progressives se propageant à la vitesse  $c$  en sens opposé.

Onde plane progressive dans le sens des  $x$  croissants :

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \Rightarrow u(x + \Delta x, t + \Delta t) = u(x, t)$$

si  $\Delta x = c\Delta t$ , d'où propagation à la célérité  $c$ .

$$c \equiv \left(\frac{F/S}{m/v}\right)^{1/2} = \left(\frac{kg \cdot ms^{-2} \times m^{-2}}{kg \times m^{-3}}\right)^{1/2} \equiv m \cdot s^{-1}$$

- f. Les ondes acoustiques sont longitudinales et nécessitent un milieu matériel pour se propager.  
Les ondes électromagnétiques sont transversales et peuvent se propager dans le vide.

### I.2. La célérité du son.

$$a. \quad \chi \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dP} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}} ; \chi = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho - \rho_0}{P - P_0} = \frac{1}{p} \left( - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Rightarrow p = - \frac{1}{\chi} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$b. \quad c = 1490 \text{ m.s}^{-1}$$

$$c. - P = \frac{\rho RT}{M} \Rightarrow \chi_T = \frac{1}{P_0} \text{ et } c_T = \sqrt{\frac{RT_0}{M}} = 290 \text{ m.s}^{-1} \text{ indépendante de } P_0.$$

$$- P\rho^\gamma = Cste \Rightarrow \chi_s = \frac{1}{\gamma P_0} \text{ et } c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} = \sqrt{\gamma} c_T = 343 \text{ m.s}^{-1}.$$

- d. Oscilloscope en bicourbe avec le générateur en  $Y_1$  et le microphone en  $Y_2$  ; on éloigne le microphone du haut-parleur fixe ; entre deux positions voisines où les signaux sont en phase  $d = \lambda$  ;  $f$  au fréquencemètre d'où :

$$\lambda f = c_s$$

Les transformations (compressions / dilatations) sont suffisamment rapides vis-à-vis du transfert thermique pour qu'aucune chaleur ne soit échangée entre les différentes tranches.

Par ailleurs, aucun phénomène de dissipation n'est pris en compte, d'où  $c_s$ .

$$e. \quad c \text{ de } 3000 \text{ à } 5000 \text{ m.s}^{-1}$$

### I.3. Impédance d'une onde plane progressive.

$$a. \quad v = \frac{\partial u}{\partial t} = f'$$

$$I.2.a.) \Rightarrow p = - \frac{1}{\chi_s} \frac{\partial u}{\partial x} = + \frac{1}{\chi_s c} f'$$

$$\text{soit :} \quad p = \rho_0 c v$$

$$\text{car :} \quad c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_s}$$

$$b. \quad Z = \frac{u}{i} \begin{array}{l} \rightarrow \text{tension imposée} \\ \rightarrow \text{courant qui en découle} \end{array}$$

$$Z = \frac{p}{v} \begin{array}{l} \rightarrow \text{surpression imposée} \\ \rightarrow \text{vitesse qui en découle} \end{array}$$

$$Z \text{ en } \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

$Z = \rho_0 c$  indépendant de  $t - \frac{x}{c}$  car  $p$  et  $v$  en phase  $\forall t$  et  $\forall x$  ( $Z$  caractéristique du milieu).

$$c. \quad Z_{\text{gaz}} \ll Z_{\text{liquide}} < Z_{\text{solide}}$$

car  $\rho_0$  et  $c$  évoluent dans le même sens.



d. Non,  $Z = -\rho_0 c < 0$  car  $v = f'$  conservée, mais  $p = -\rho_0 c f' \left( \text{par la dérivée } \frac{\partial u}{\partial x} \right)$

I.4. **Énergie acoustique et intensité sonore.**

a. 
$$e_c \approx \frac{1}{2} \rho_0 v^2$$

b. 
$$\delta E_p = - \int p d(\delta v)$$

avec : 
$$\chi_s = - \frac{1}{\delta v} \frac{d(\delta v)}{dp} \Rightarrow \delta E_p = \frac{1}{2} \chi_s p^2 \delta v \Rightarrow e_p = \frac{1}{2} \chi_s p^2 = \frac{p^2}{2\rho_0 c^2}$$

c. avec : 
$$p = \pm \rho_0 c v, e_p = e_c$$

soit : 
$$e = \frac{p^2}{\rho_0 c^2}$$

et donc : 
$$\langle e \rangle = \frac{P_{eff}^2}{\rho_0 c^2}$$

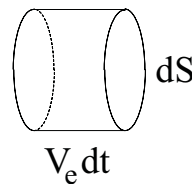
d. 
$$I = \frac{d^2 E}{dS dt} = \frac{(pdS)(vdt)}{dS dt} = pv \text{ en } W \cdot m^{-2}$$

$$p = Zv \text{ (avec } Z = \pm \rho_0 c)$$

d'où : 
$$I = \frac{p^2}{Z} \Rightarrow \langle I^+ \rangle = \frac{P_{eff}^2}{\rho_0 c}$$

et : 
$$\langle I^- \rangle = - \frac{P_{eff}^2}{\rho_0 c}$$

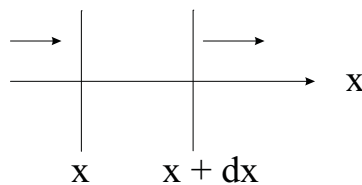
e.



$$\langle I \rangle dS \times dt = \langle e \rangle \times dS v_e dt \Rightarrow v_e = \frac{\langle I \rangle}{\langle e \rangle} = c$$

normal car  $v_g = v_\phi$  en l'absence de dispersion.

f.



$$(I(x, t) - I(x + dx, t)) dS \cdot dt = (e(x, t + dt) - e(x, t)) dS dx \Rightarrow \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

vérification :

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial p v}{\partial x} = p \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot v$$

avec :

$$p = -\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial v}{\partial x}$$

et :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

d'où :

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \chi_s \frac{p^2}{2} \right) = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

g.  $20 = 2 \times 10$

$$\rightarrow 10 \text{ car : } 1 \text{ Bel} = 10 \text{ décibels}$$

$$\rightarrow 2 \text{ parce que : } \log \frac{\langle I \rangle}{\langle I_{\text{réf}} \rangle} = \log \left( \frac{p}{p_{\text{réf}}} \right)^2 = 2 \log \frac{p}{p_{\text{réf}}}$$

$$0 \text{ dB : } p_{\text{eff}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$

soit :

$$\langle I \rangle_{\text{min}} = 0,97 \cdot 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$120 \text{ dB : } p_{\text{eff}} = 2 \cdot 10 \text{ Pa} (\ll P_0 = 10^5 \text{ Pa})$$

soit :

$$\langle I \rangle_{\text{Max}} = 0,97 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$60 + 60 \equiv 63 \text{ dB !}$$

### I.5. Ordres de grandeur en acoustique.

a.  $\frac{20 \cdot 10^3}{20} = 2^n \Rightarrow n \approx 10 \text{ octaves}$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 17 \text{ m à } 1,7 \text{ cm}$$

Pour 1000 Hz :  $\lambda = 34 \text{ cm}$

Fréquence : hauteur du son et amplitude : volume sonore.

Les attaques et le timbre sont liés au spectre d'émission (fondamental + harmoniques).

b.  $- I_{\text{dB}} = 60 \text{ dB} \Rightarrow p_{\text{eff}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Pa}$

$$- v_{\text{eff}} = \frac{p_{\text{eff}}}{\rho_0 c} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$- v = \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow u_{\text{eff}} = \frac{v_{\text{eff}}}{\omega} = 8 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$- \text{Laplace } P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{Cste} \Rightarrow (1-\gamma) \frac{p}{P_0} + \gamma \frac{\Delta T}{T_0} = 0 \Rightarrow \Delta T_{\text{eff}} = \frac{\gamma^{-1}}{\gamma} \frac{p_{\text{eff}}}{P_0} T_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ \text{C}$$

c. 
$$p_{eff} \ll P_0 = 10^5 Pa$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \approx \frac{u_{eff}}{\lambda} \ll 1$$

Il faut  $dx \gg$  libre parcours moyen  $\approx 0,1 \mu m$

d'où : 
$$u_{eff} \ll dx \ll \lambda$$

on a également : 
$$v_{eff} \ll c$$

$\Delta T_{eff} \ll T_0$  mais faire  $\Delta T_{eff} \approx 0$  revient à considérer la transformation isotherme !  
Toutes les approximations linéaires effectuées sont parfaitement justifiées.

**I.6. Réflexion et transmission sur une interface.**

- a. Continuité de  $p$  : sinon paroi ( $x = 0$ ) accélération infinie.  
Continuité de  $v$  : sinon interpénétration ou vide.

En  $x = 0$  :

$$\begin{cases} f(t) + g(t) = h(t) \\ \frac{1}{Z_1} (f(t) - g(t)) = \frac{1}{Z_2} h(t) \end{cases}$$

Relations vraies  $\forall t$ , donc si  $f(t)$  est sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , il en est de même pour  $g(t)$  et  $h(t)$ , d'où  $\omega$  inchangée mais  $k = \frac{\omega}{c}$  dépend du milieu par  $c$ .

b. 
$$\left. \begin{aligned} f + g &= h \\ f - g &= \frac{h}{\alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_p = \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \text{ et } r_p = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

c. 
$$r_v = \frac{v_r}{v_i} = \frac{-p_r / Z_1}{p_i / Z_1} = -r_p \quad ; \quad t_v = \frac{v_t}{v_i} = \frac{p_t / Z_2}{p_i / Z_1} = \frac{t_p}{\alpha}$$

d. 
$$\left. \begin{aligned} I_i &= \frac{p_i^2}{2Z_1} \\ I_r &= -\frac{p_r^2}{2Z_1} \\ I_t &= \frac{p_t^2}{2Z_2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} R &= \frac{|I_r|}{I_i} = r_p^2 = \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^2 \\ T &= \frac{I_t}{I_i} = \frac{t_p^2}{\alpha} = \frac{4\alpha}{(\alpha + 1)^2} \end{aligned}$$

soit :  $R + T = 1$  traduit la conservation du flux d'énergie à travers le dioptre.

e. 
$$\left. \begin{aligned} \text{air : } Z_1 &= 412 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \\ \text{eau : } Z_2 &= 1,49 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned} \right\} \alpha = 3,6 \cdot 10^3 \gg 1$$

d'où : 
$$r_p \approx 1 \text{ et } t_p \approx 2$$

Il y a réflexion totale à cause d'une trop grande discontinuité d'impédance ; l'onde transmise est d'amplitude double ( $I + I = 2$ ) mais ne transporte pas d'énergie ( $R \approx 1$  et  $T \approx 0$ ).

$$T \approx \frac{4}{\alpha} = 1,1 \cdot 10^{-3} \Rightarrow T_{dB} = 10 \log T = -29,5 \text{ dB}$$

f. Non, cf. coefficients de Fresnel en optique, déjà  $t_p$  et  $r_p$  dépendent de  $i$  ;

de plus :

$$T = \frac{dPt}{dPi} = \frac{\vec{I}_t \cdot \vec{dS}}{\vec{I}_i \cdot \vec{dS}} = \frac{I_t \cdot \cos i_2}{I_i \cdot \cos i_1} \quad (\text{les facteurs d'obliquité})$$

avec :

$$\frac{\sin i_2}{\sin i_1} = \frac{c_2}{c_1} \quad (\text{Descartes}).$$

## PARTIE II

### DÉVELOPPEMENTS ET APPLICATIONS

#### II.1. La cavité sonore.

a.  $\alpha \rightarrow \infty$

soit :  $r_p = 1$  ;  $t_p = 2$  ;  $r_v = -1$  ;  $t_v = 0$  ;  $R = 1$  et  $T = 0$  ;

La pression se réfléchit en phase et la vitesse en opposition ; il n'y a pas d'énergie transmise, la réflexion est totale.

b.

$$\left. \begin{array}{l} \underline{p}_i = p_0 e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{v}_i = \frac{\underline{p}_i}{Z} = \frac{p_0}{Z} e^{i(\omega t - kx)} \\ \underline{p}_r = p_0 e^{i(\omega t + kx)} \quad \text{et} \quad \underline{v}_r = \frac{\underline{p}_r}{Z} = -\frac{p_0}{Z} e^{i(\omega t + kx)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \underline{p} = \underline{p}_i + \underline{p}_r \\ \underline{v} = \underline{v}_i + \underline{v}_r \end{array}$$

en réel :

$$p(x, t) = 2 p_0 \cos kx \cos \omega t$$

et :

$$v(x, t) = \frac{2 p_0}{Z} \sin kx \sin \omega t$$

Onde stationnaire avec en  $x = 0$  : ventre de pression et nœud de vitesse.

c. En gros en  $x = -l$  on a un nœud de pression et donc un ventre de vitesse.

$$p(x = -l) = 0, \forall t \Rightarrow \cos kl = 0 \Rightarrow k_n l = \frac{\pi}{2} + (n - 1) \pi$$

soit :

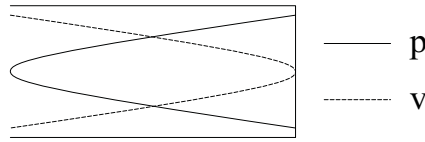
$$l = \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda_n}{2}$$

d. Mode fondamental  $n = 1 \Rightarrow l = \frac{\lambda}{4}$  (cavité quart d'onde)  $l = \frac{c}{4f} = 19,5 \text{ cm}$  .

Les réflexions successives se font en phase (ou opposition) et les ondes s'ajoutent sans se détruire (ondes multiples constructives), d'où un son important juste pour cette valeur de fréquence. La cavité adapte l'impédance dans le passage du diapason à l'air. Le son est plus fort, donc plus rapidement amorti

(Q plus faible), d'où une bande passante plus large (et donc un son moins juste !). Cavité ouverte

$$l_{\min} = \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{2} \text{ et } v' = 2v, \text{ à l'octave.}$$



e. Entre sept nœuds, il y a :

$$6 \times \frac{\lambda}{2} = 3\lambda \Rightarrow \lambda = 17,2 \text{ cm et } f = 2000 \text{ Hz}$$

## II.2. Transmission à travers une cloison ; isolation.

a. Il peut y avoir déphasage à la transmission.

b. La paroi vibre d'un seul bloc si  $a \ll \lambda$ , et comme  $\lambda_{cloison} \gg \lambda_{air}$ , si  $a \ll \lambda_{air}$ .

alors : 
$$\sigma = \rho a$$

c. Continuité de la vitesse : 
$$\underline{v}_i + \underline{v}_r = \underline{v}_t \Rightarrow 1 - \underline{r} = \underline{t} \quad (1)$$

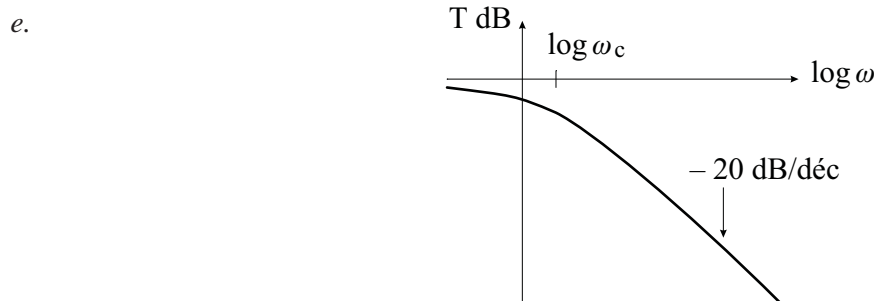
Discontinuité de pression à l'origine du mouvement de la cloison :

$$\sigma S \dot{\underline{v}}_t = S (\underline{p}_i + \underline{p}_r) - S \underline{p}_t$$

d'où : 
$$\sigma i \omega \frac{\underline{t} \underline{p}_i}{Z_0} = (1 + \underline{r} - \underline{t}) \underline{p}_i \stackrel{(1)}{=} 2(1 - \underline{t}) \underline{p}_i$$

$$\Rightarrow \underline{t} = \frac{1}{1 + i \frac{\omega \sigma}{2 Z_0}}$$

d. 
$$T = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{p}_t \cdot \underline{v}_t^*)}{\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{p}_i \cdot \underline{v}_i^*)} = \frac{\frac{1}{2 Z_0} |\underline{p}_t|^2}{\frac{1}{2 Z_0} |\underline{p}_i|^2} = |\underline{t}|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega \sigma}{2 Z_0}\right)^2} \text{ du type } \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$



Filtre passe-bas : 
$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\rho_0 c}{\pi \sigma} \left( T(f_c) = \frac{T_{\max}}{2} \right)$$

f.  $G_{dB} \approx 20 \log \frac{f_c}{f} \Rightarrow f_c = 200 \cdot 10^{-40/20} = 2 \text{ Hz}$  infrasons ; les aigus sont plus atténués que les graves (les basses grondent !)

$$\sigma = \frac{\rho_0 c}{\pi f_c} = 65,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \Rightarrow a = \frac{\sigma}{\rho} = 5,5 \text{ cm} \ll \lambda_{\text{air}} = \frac{c}{f} = 1,7 \text{ m vrai}$$

L'isolation est d'autant meilleure que  $f_c$  est basse, c'est-à-dire  $\sigma = \rho a$  élevée, soit une cloison épaisse et de forte densité (un gros mur de béton !).

### II.3. Temps de réverbération d'une salle.

a. 
$$E = V e = V \frac{4I}{c}$$

b. 
$$P = \alpha S I$$

c. Conservation de l'énergie :  $\frac{dE}{dt} = -P \Rightarrow \frac{4V}{c} \cdot \frac{dI}{dt} = -\alpha S I \Rightarrow I(t) = I^0 e^{-\frac{\alpha S c}{4V} t}$

d. 
$$I_{dB} = I^0_{dB} = 10 \log e^{-\frac{\alpha S c}{4V} t} = I^0_{dB} - \frac{10}{2,3} \cdot \frac{\alpha S c}{4V} t$$

e. 
$$\left. \begin{array}{l} V = a^3 \\ S = 6 a^2 \end{array} \right| \Rightarrow T = \frac{0,16}{6} \cdot \frac{a}{\alpha} \text{ cathédrale } T = 16 \text{ s réverbérante ; studio } T = 1,1 \text{ s sec}$$

baroque : salle sèche, donc plutôt petite ; XIX<sup>e</sup> s : salle plus réverbérante.

### II.4. Rayonnement d'une sphère pulsante.

a. 
$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = 0 \Rightarrow p(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

ondes sphériques divergente et convergente d'amplitude en  $\frac{1}{r}$ .

b. 
$$\rho_0 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\frac{\partial \underline{p}}{\partial t} \Rightarrow \underline{v} = \frac{1}{\rho_0 c} \left( \underset{\text{Champ lointain}}{\underline{1}} + \underset{\text{Champ proche}}{\frac{1}{ikr}} \right) \underline{p} \Rightarrow Z = \frac{\rho_0 c}{1 + \frac{1}{ikr}}$$

limite pour :  $kr \approx 1 \Rightarrow r \approx \lambda$

$$I = \frac{1}{2 \rho_0 c} \text{Re} \left[ \left( 1 + \frac{i}{kr} \right) \underline{p} \underline{p}^* \right] = \frac{p_0^2}{2 \rho_0 c r^2}$$

seul le champ lointain (en phase avec  $\underline{p}$ ) contribue et pas le champ proche (en quadrature avec  $\underline{p}$ ).

c. En  $r = r_0$  : 
$$\underline{v}(r = r_0) = \frac{d}{dt} (ae^{i\omega t}) \Rightarrow \frac{p_0}{\rho_0 c} \left( 1 + \frac{1}{ikr_0} \right) \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} = i\omega a$$

soit avec  $kr_0 \ll 1$  et  $k = \frac{\omega}{c}$  : 
$$p_0 = -\rho_0 \omega^2 r_0^2 a$$

Application Numérique :

$$r = 1 \text{ m}, 90 \text{ dB} = 20 \log \frac{p_0 / \sqrt{2} r}{2 \cdot 10^{-5}} \Rightarrow p_0 = 0,89 \text{ Pa} \cdot \text{m}$$

$$\text{et } a = \frac{P_0}{\rho_0 \omega^2 r_0^2} = 3 \text{ mm}, \text{ visible.}$$

$$d. \quad P = I 4\pi r^2 = \frac{2\pi p_0^2}{\rho_0 c} = \frac{2\pi \rho_0}{c} \cdot \omega^4 r_0^4 a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{c}{2\pi \rho_0}} \cdot \frac{\sqrt{P}}{r_0^2 \omega^2}$$

$r_0$  petit et  $\omega$  faible suppose  $a$  grand  $\rightarrow$  risque de détérioration.

e. Faire réfléchir un faisceau laser sur un petit miroir collé sur la membrane du haut-parleur.

### II.5. Absorption par conduction thermique.

$$a. \quad \left. \begin{aligned} \text{div } \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 &\Rightarrow \rho_0 \text{div } \vec{v} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0 & (1) \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \vec{\text{grad}} P &\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \vec{\text{grad}} p & (2) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{div} \\ \text{avec} \end{array} (2) \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right) = - \Delta p$$

$$\text{soit :} \quad \Delta p = \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} \Rightarrow \underline{\underline{p}} = \frac{\omega^2}{\underline{\underline{\rho'}}} = \frac{\omega^2}{k^2}$$

$$b. \text{ Fourier :} \quad \vec{j}_{th} = - \lambda \vec{\text{grad}} T$$

$$c. \quad * \delta Q = c_v dT + P dV_m \text{ où } V_m = \frac{1}{\rho} \text{ est le volume massique soit } dV_m \approx - \frac{d\rho}{\rho^2} \text{ ainsi que } P \approx P_0.$$

$$d. \text{ Pendant } dt : \quad \delta Q = c_v \frac{\partial T'}{\partial t} dt - \frac{P_0}{\rho_0^2} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial t} dt = \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} dt$$

$$\text{soit :} \quad \underline{\underline{\rho'}} = \frac{\rho_0^2}{P_0} (c_v - i \lambda k^2 / \rho_0 \omega) T'$$

$$* \delta Q = c_p dT - V_m dP = c_p \frac{\partial T'}{\partial t} dt - \frac{1}{\rho_0} \cdot \frac{\partial p'}{\partial t} dt = \frac{\lambda}{\rho_0} \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} dt$$

$$\text{soit :} \quad \underline{\underline{p}} = \rho_0 (c_p - i \lambda k^2 / \rho_0 \omega) T'$$

$$\text{d'où :} \quad \underline{\underline{\rho'}} = \frac{P_0}{\rho_0} \cdot \frac{c_p - i \lambda k^2 / \rho_0 \omega}{c_v - i \lambda k^2 / \rho_0 \omega} \tag{3}$$

$$e. \text{ Les deux expressions de } \frac{p}{\underline{\underline{\rho'}}} \text{ donnent la relation de dispersion } \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{1 - i \lambda k^2 / \rho_0 c_p \omega}{1 - i \lambda k^2 / \rho_0 c_v \omega}$$

$$\lambda \rightarrow 0 : \text{ pas de conduction, la transformation est isentropique } \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} = c_s^2.$$

$\lambda \rightarrow \infty$  : très forte conduction, la transformation est isotherme  $\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0} = c_T^2$ .

f. La réalité correspond à une faible conduction de telle sorte que  $\lambda k^2 / \rho_0 c_p, \nu \omega \ll 1$

d'où :

$$\frac{\omega^2}{k^2} \approx c^2 \left( 1 + i \frac{\lambda k^2}{\omega} \cdot \frac{\gamma - 1}{\rho_0 c_p} \right)$$

et :

$$\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c} \left( 1 - i \frac{(\gamma - 1) \lambda k^2}{2 \rho_0 c_p \omega} \right)$$

du type  $k = k_0 - i\alpha$  où  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  et pour  $\alpha$  on fait  $k \approx k_0$  soit  $\alpha = \frac{(\gamma - 1) \lambda \omega^2}{2 \rho_0 c_p c^3}$ .

$v_\phi = c = c_s$  non modifiée à cet ordre ; amortissement en  $e^{-\beta \omega^2 x}$  donc important lorsque  $\omega$  augmente.

Application Numérique :

$$\underline{p} = p_0 e^{i(\omega t - kx)} = p_0 e^{i(\omega t - k_0 x)}$$

$\alpha = 4,2 \cdot 10^{-6} m^{-1}$  et  $6,7 \cdot 10^{-3} m^{-1}$  soit  $d = \frac{1}{\alpha} = 240 km$  et  $150 km$ .

g. – La viscosité : il faut modifier (2) par  $\eta \Delta \vec{v}$  et faire  $\lambda = 0$  dans (3).

– La relaxation moléculaire : il faut modifier (3) par  $\hat{\lambda} = 0$  et car  $p$  et  $p'$  ne sont pas en phase.

### PARTIE III

#### LE DOMAINE DE L'ULTRA-ACOUSTIQUE

#### III. Questions préliminaires.

a. Les chiens, les chauves-souris, les dauphins...

b. L'eau de mer est conductrice et dissipe donc très rapidement les ondes électromagnétiques. Ultrasons par discrétion et réduction de la diffraction ; sonar, échographie, CND...

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{d} = 1,22 \frac{c/f}{2r} = 0,46 rad = 26^\circ, \text{ c'est énorme d'où faible directivité.}$$

– La directivité, elle est importante pour une faible diffraction, soit  $f$  élevée

– L'absorption, elle est moins importante à  $f$  faible (car en  $e^{-\beta f^2 x}$ )

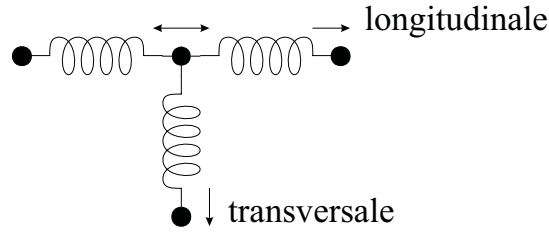
} d'où compromis.

c. «Contrôle non destructif» : Inspection de structures (plaques, rails, poutres, ...) pour la qualité des produits sans les détruire ; une inhomogénéité ou un défaut de structure donne un écho par réflexion. Il faut :

$$\lambda \approx 1 mm \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} \approx 5 MHz.$$



d. Ondes de cisaillement, que l'on comprend par la modèle masse-ressort.



### III.A. ACOUSTIQUE DANS UN SOLIDE

#### III.A.1. Ondes élastiques sur une chaîne d'atomes.

a. 
$$m \ddot{u}_n = \alpha (u_{n+1} - u_n) - \alpha (u_n - u_{n-1}) = \alpha (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$$

b. Onde plane progressive non amortie et chaîne illimitée  $\Rightarrow$  invariance par translation

$$-m\omega^2 = \alpha (e^{ika} - 2 + e^{-ika}) = -2\alpha (1 - \cos ka) \Rightarrow \omega^2 = \frac{4\alpha}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}$$

$\omega(k)$  non-linéaire  $\Rightarrow$  dispersion (en réalité seulement à très haute fréquence).

c.  $\omega(k)$  paire car le changement de sens de propagation ( $k$  en  $-k$ ) se fait à même  $\omega$ .

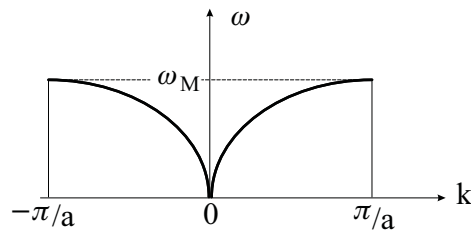
$$\omega_M = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

alors : 
$$k = \frac{\pi}{a}$$

soit : 
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2a$$

c'est-à-dire deux atomes voisins vibrent en opposition de phase

(en effet  $k x_n^0 = \pi a \Rightarrow u_n = (-1)^n A e^{-i\omega_M t}$ ) ce qui s'apparente à des ondes stationnaires. Pour  $k > \pi/a$ ,  $\lambda < 2a$  ce qui n'a plus de sens physique puisqu'il n'existe plus de support matériel pour représenter l'onde.



d. 
$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = a \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \frac{\sin ka/2}{ka/2} \rightarrow a \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \text{ pour } ka \rightarrow 0$$

$$\rightarrow \frac{2a}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \text{ pour } ka \rightarrow \pi$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = a \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \cos \frac{ka}{2} \rightarrow a \sqrt{\frac{\alpha}{m}} \text{ pour } ka \rightarrow 0$$

$$\rightarrow 0 \text{ pour } ka \rightarrow \pi$$

$ka \rightarrow 0$  :  $v_\phi \approx v_g = a\sqrt{\frac{\alpha}{m}} = c_l$  car la dispersion disparaît ( $\sin x \approx x$  à l'origine) ; on a des ondes acoustiques comme dans un fluide car  $\lambda \gg a$ .

$ka \rightarrow \pi$  : l'onde ne se propage plus (cf. c.)

e.  $f_M = 3,6 \cdot 10^{12}$  Hz domaine des hypersons ;  $\lambda_M = 2a = 8 \cdot 10^{-10}$  m atomique ;

$f_l = \frac{f_M}{100} \approx 10$  GHz énorme, on est toujours dans les hypersons, alors :

$$c_l = a \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = 4470 \text{ ms}^{-1} \quad \text{et} \quad \lambda_l = c_l / f_l = 0,12 \text{ } \mu\text{m}$$

Pour  $f < f_l$  :  $\lambda > \lambda_l \gg a \rightarrow$  modèle continu.

f.  $k_a \ll 1$ , on retrouve  $\lambda \gg a$ ,  $u_n$  est une fonction lente de  $x_n^0$  (déphasage très faible entre deux atomes consécutifs et amplitudes de vibration quasi-voisines).

$$\left. \begin{array}{l} u(x_n^0 + a) = u(x_n^0) + a \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \\ u(x_n^0 - a) = u(x_n^0) - a \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \end{array} \right\} \begin{array}{l} RFD \\ du a. \end{array} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

avec : 
$$c_l = a \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

g. 
$$T_n = \frac{1}{2} m \dot{u}_n^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(kna - \omega t) \Rightarrow \langle T_n \rangle = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2$$

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \alpha (u_{n+1} - u_n)^2 + \frac{1}{2} \alpha (u_n - u_{n-1})^2 \right] \\ &= \alpha A^2 \sin^2 \frac{ka}{2} \left[ \sin^2 \left( ka \left( n - \frac{1}{2} \right) - \omega t \right) + \sin^2 \left( ka \left( n + \frac{1}{2} \right) - \omega t \right) \right] \end{aligned}$$

après transformation des différences de cosinus en produits de sinus.

$$\langle V_n \rangle = \alpha A^2 \sin^2 \frac{ka}{2} = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 = \langle T_n \rangle$$

d'après la relation de dispersion b.

D'où : 
$$\langle E_n \rangle = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

comme pour un oscillateur harmonique. Comme  $A$ ,  $\langle E_n \rangle$  est indépendant de  $n$  conformément à l'invariance par translation.

### III.A.2. Modes stationnaires sur une chaîne limitée.

a.  $(u_n)_i = A e^{i(kx_n^0 - \omega t)}$  ne permet pas seule de vérifier  $(u_N)_i = 0, \forall t$ .

Onde réfléchie : 
$$(u_n)_r = A' e^{i(-kx_n^0 - \omega t)}$$

$$(\underline{u}_N)_i + (\underline{u}_N)_r = 0, \forall t \Rightarrow A' = -A e^{-2ikNa} \quad \text{car : } x_N^0 = Na$$

Il y a donc réflexion totale car  $|A'| = A$ .

$$\underline{u}_n = (\underline{u}_n)_i + (\underline{u}_n)_r = 2iA \sin k(n-N)a \exp i(kNa - \omega t) \quad \text{onde stationnaire}$$

b.  $\underline{u}_0 = 0, \forall t \Rightarrow \sin kNa = 0 \Rightarrow k_p = \frac{p\pi}{Na}$  quantifié

On se limite à  $0 < k \leq \pi/a \Rightarrow 0 < p \leq N$ , il y a  $N$  états stationnaires possibles normal : couplage de  $N$  oscillateurs identiques.

c.  $\underline{u}_{n,p} = 2iA_p (-1)^p \sin k_p na (-1)^p e^{-i\omega_p t} \xRightarrow{\text{réel}} u_{n,p}(t) = 2A_p \sin k_p na \sin \omega_p t$ .  
le phonon.

### III.B. ASPECTS DE L'ÉCHOGRAPHIE

#### III.B.1. Le rôle de la couche de gel.

$Z_{\text{céramique}} \gg Z_{\text{corps}}$  il y a réflexion quasi-totale. Pire, l'adhésion n'est pas parfaite et l'existence d'une mince couche d'air avec  $Z_{\text{air}} \ll Z_{\text{corps}} \ll Z_{\text{céramique}}$  rend le transfert encore plus difficile. Le gel colle à la céramique et au corps en adaptant l'impédance, d'où meilleur transport.

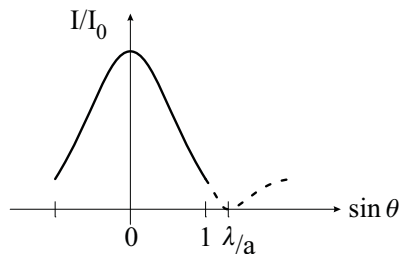
#### III.B.2. Directivité de la source ultrasonore.

a.  $\lambda = 0,5 \text{ mm}$  mesurée par diffraction d'une onde lumineuse sur le réseau constitué par un système d'ondes acoustiques stationnaires d'une petite cuve à ondes.

b.  $b \gg a \approx \lambda$  ( $\lambda/a = 1,2$ ) diffraction importante suivant  $Oy$ , très faible suivant  $Oz$ .

$$\text{Amplitude diffractée : } A_d(\theta) = a_0 \int_{-a/2}^{a/2} e^{-2\pi y \sin \theta} dy = A_0 \frac{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)}{\pi a \sin \theta / \lambda}$$

$$I(\theta) \approx A_d^2(\theta) = I_0 \text{sinc}^2(\pi a \sin \theta / \lambda)$$



Le premier minimum nul n'est pas atteint ( $\lambda/a > 1$ !).

L'intensité acoustique se répand sur une très large ouverture d'où faible directivité.

Il faut diminuer  $\frac{\lambda}{a}$ ; soit augmenter  $a$ , oui mais le  $c$ . propose mieux et c'est difficile pour des rai-

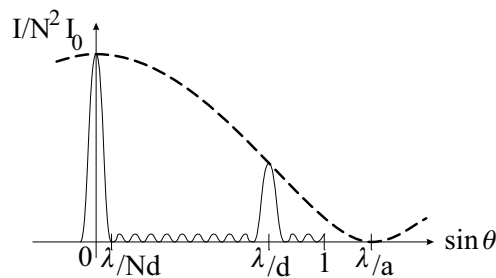
sons de taille de l'appareil ; ou augmenter la fréquence, impossible car trop de pertes (en  $e^{-\alpha f^2 x}$  voir § II.5.).

c. Réseau : différence de marche entre deux éléments voisins  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$ .

Les différents faisceaux sont cohérents entre eux : on somme les amplitudes diffractées.

$$A'(\theta) = A_d (1 + e^{-i\varphi} + e^{-2i\varphi} + \dots + e^{-(N-1)i\varphi}) = N A_d e^{-i \frac{(N-1)\varphi}{2}} \frac{\sin N\varphi/2}{N \sin \varphi/2}$$

$$\frac{I'(\theta)}{N^2 I_0} = \underbrace{\text{sinc}^2 \left( \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right)}_{\text{diffraction d'un élément}} \times \underbrace{\left( \frac{\sin (\pi N d \sin \theta / \lambda)}{N \sin (\pi d \sin \theta / \lambda)} \right)^2}_{\text{interférence entre les N éléments}}$$



$$\lambda / a = 1,2 \quad ; \quad \lambda / d = 0,71 \quad \text{et} \quad \lambda / Nd = 0,07$$

d'où un pic intense et étroit dans la direction d'émission  $\theta = 0$  et de part et d'autre, un pic d'amplitude 0,3 à  $\pm 45^\circ$ .

### III.B.3. Réalisation technique de l'exploration.

a. 
$$A''(\theta) = A_d (e^{i\phi} + e^{2i\phi} e^{-i\varphi} + \dots + e^{Ni\phi} e^{-(N-1)i\varphi})$$

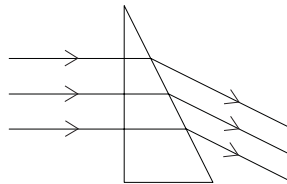
soit : 
$$\frac{I''(\theta)}{N^2 I_0} = \text{sinc}^2 \left( \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} \right) \times \left( \frac{\sin N (\varphi - \phi) / 2}{N \sin (\varphi - \phi) / 2} \right)^2$$

La courbe d'interférence est simplement translatée et le pic principal est obtenu pour :

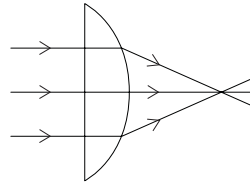
$$\varphi_M - \phi = 0$$

soit : 
$$\sin \theta_M = \lambda \phi / 2\pi d$$

Le faisceau est dévié comme par un prisme (déphaseur linéaire) dans une direction  $\theta_M$  au choix par  $\phi$ . Avec  $\phi(t)$  on obtient un balayage (de tout un organe par exemple...).



- b. Analogie lentille convergente (déphaseur quadratique) et donc le faisceau converge à une distance focale  $f'$  réglable par  $\phi(t)$  d'où la prospection en profondeur.



## PARTIE IV

### ÉLÉMENTS D'ÉLECTROACOUSTIQUE

#### IV.A. LE MICROPHONE ÉLECTROSTATIQUE

##### IV.A.1. Étude qualitative.

Les variations de pression provoquent une variation d'épaisseur du condensateur, d'où une capacité variable  $C(t)$  qui sous tension  $E$  constante conduit à un faible courant variable. La tension aux bornes de  $R$  est filtrée par la capacité  $C'$  afin que seule la tension alternative soit amplifiée (suppression du régime transitoire).

##### IV.A.2. Calcul de la tension $v(t)$ .

$$a. C(t) = \frac{\varepsilon S}{d(t)} = \frac{\varepsilon S}{d_0 - a \sin \omega t} \approx C_0 + C_1 \sin \omega t$$

$$\text{avec :} \quad C_0 = \frac{\varepsilon S}{d_0} \quad \text{capacité au repos}$$

$$\text{et :} \quad C_1 = \frac{\varepsilon a S}{d_0^2} = \frac{a}{d_0} C_0 \ll C_0$$

- b.  $C(t)$  étant variable, la notation complexe n'est pas utilisable !

$$E - v = \frac{q}{C}$$

$$\text{avec :} \quad C(t) = C_0 + C_1 \sin \omega t$$

On multiplie par  $C$  et on dérive par rapport à  $t$  :

$$E \frac{dC}{dt} - \frac{d}{dt} (Cv) = \frac{dq}{dt} = i = \frac{v}{R}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{C_1}{C_0} \sin \omega t\right) \frac{dv}{dt} + (1 + RC_1 \omega \cos \omega t) \frac{v}{RC_0} = E \frac{C_1}{C_0} \omega \cos \omega t$$

$$c. \text{ Équation du type : } (1 + \varepsilon \sin \omega t) \frac{dv}{dt} + (1 + \varepsilon' \cos \omega t) \frac{v}{RC_0} = \varepsilon'' \cos \omega t$$

avec  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon''$  du même ordre en  $C_1/C_0$ , et donc au premier ordre en  $C_1/C_0$  :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC_0} = \frac{EC_1}{C_0} \omega \cos \omega t$$

qui montre que  $v$  est en  $C_1/C_0$ .

Cette équation est linéaire, ce qui permet de travailler en complexe d'autant plus que seul le régime forcé en  $e^{j\omega t}$  est demandé.

$$\left( j\omega + \frac{1}{RC_0} \right) \underline{v} = \frac{EC_1}{C_0} \omega e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{v} = \frac{E RC_1 \omega}{1 + j RC_0 \omega} e^{j\omega t}$$

soit en réel :  $v(t) = V \sin(\omega t + \varphi)$

avec :  $V = \frac{E RC_1 \omega}{\sqrt{1 + (RC_0 \omega)^2}}$

et :  $\tan \varphi = \frac{1}{RC_0 \omega}$

d.  $V$  indépendant de  $\omega$  pour  $RC_0 \omega \gg 1$ , temps de charge  $RC_0$  grand devant la période  $\frac{1}{\omega}$  (d'où

le rôle de  $C'$  : supprimer le transitoire) alors  $v(t) \approx E \frac{C_1}{C_0} \sin \omega t$ .

– alors  $V$  et  $\varphi \approx 0$  sont indépendants de  $\omega$  : meilleure fidélité,

– et  $E \frac{C_1}{C_0} > \frac{E RC_1 \omega}{\sqrt{1 + (RC_0 \omega)^2}}$  : meilleure sensibilité.

e. Une pression mécanique polarise le cristal et fait apparaître des charges surfaciques liées ; la différence de potentiel variable est récupérable entre des plaques métalliques sur les faces du cristal.

#### IV.B. LE HAUT-PARLEUR ÉLECTRODYNAMIQUE

##### IV.B.1. Étude qualitative.

tension  $\rightarrow$  courant  $\xrightarrow{\vec{B}}$  force de Laplace  $\rightarrow$  déplacement  $\rightarrow$  onde acoustique  
 $\curvearrowright$  f.é.m.  $\leftarrow$  champ électromoteur  $\curvearrowright \vec{B}$

d'où couplage.

##### IV.B.2. Les équations du système.

a. Laplace  $d\vec{f}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = idl B \vec{u}_x$  ; RFD :  $m \frac{dv}{dt} = -kx - rv + ilB$  (1)

b. Champ électromoteur  $\vec{E}_M = \vec{v} \wedge \vec{B} = -v B \vec{u}_\theta$  opposé à  $i$ , d'où une force électromotrice

$$e = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -v Bl ;$$

$$\text{Ohm : } u = Ri + L \frac{di}{dt} + v Bl \quad (2)$$

IV.B.3. Bilan de puissance et rendement.

a.  $P_{Lapl} + P_{fem} = 0$  bilan auxiliaire ; en effet  $(i l B) v + (- v B l) i = 0$  est général dans les couplages où  $B$  est statique ; il traduit que la force magnétique de Lorentz ne travaille pas :

$$(q \vec{V}_e \wedge \vec{B}) \cdot \vec{V}_e = 0$$

$\vec{V}_e$  vitesse des électrons dans le référentiel du laboratoire.

b.  $(1) \times v :$   $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( - \frac{1}{2} k x^2 \right) - r v^2 + \underline{i l B v}$  } On élimine  $i l B v$ , le terme de couplage

$(2) \times i :$   $u i = R i^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right) + \underline{v B l i}$

d'où

$$\underbrace{u i}_{\text{puissance électrique reçue}} = \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\frac{m v^2}{2}}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{\frac{k x^2}{2}}_{\text{énergie potentielle élastique}} + \underbrace{\frac{L i^2}{2}}_{\text{énergie magnétique}} \right) + \underbrace{R i^2}_{\text{puissance Joule}} + \underbrace{r v^2}_{\text{puissance acoustique}}$$

c.  $\langle u i \rangle = R \langle i^2 \rangle + r \langle v^2 \rangle$

car :  $\frac{1}{T} \int_T \frac{dE_r}{dt} dt = 0$

La puissance fournie par l'amplificateur au H.P. est en partie perdue par effet Joule dans la résistance de la bobine et en partie transférée à l'air, c'est-à-dire rayonnée sous forme sonore.

$$\eta = \frac{P_{acoust.}}{P_{electr.}} = \frac{r \langle v^2 \rangle}{\langle u i \rangle} = \frac{1}{1 + \frac{R}{r} \cdot \frac{\langle i^2 \rangle}{\langle v^2 \rangle}} < 1$$

pour  $\eta$  grand, il faut  $R$  petit et  $r$  grand.

d.  $\vec{B}$  intervient pas explicitement dans le bilan de puissance de la question b. ! Pourtant sa valeur n'est pas indifférente puisque c'est lui qui, par le bilan auxiliaire  $P_{Lapl} + P_{fem} = 0$ , permet le couplage électromécanique ( $B = 0$  ne donne rien). En fait, il intervient dans le rapport  $\frac{\langle i^2 \rangle}{\langle v^2 \rangle}$  dans  $\eta$  (à  $i$  donnée,  $v$  est d'autant plus importante que  $B$  est grand ; cf. § 4.c.).

IV.B.4. Utilisation en régime sinusoïdal.

a. (1)  $\Rightarrow (- m \omega^2 + r j \omega + k) \underline{x} = \underline{i} l B$

(2)  $\Rightarrow \underline{u} = (R + j L \omega) \underline{i} + j \omega \underline{x} l B$

} On élimine  $\underline{x}$  entre les deux équations

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = R + j L \omega + \frac{j \omega B^2 l^2}{- m \omega^2 + j r \omega + k} = \underline{Z}_e + \underline{Z}_{am}$$

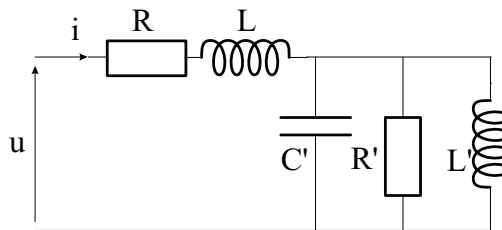
$$b. \quad \frac{1}{\underline{Z}_{am}} = j \frac{m}{B^2 l^2} \omega + \frac{1}{\frac{B^2 l^2}{r}} + \frac{1}{j \frac{B^2 l^2}{k} \omega} \equiv jC' \omega + \frac{1}{R'} + \frac{1}{jL' \omega}$$

R' L' C' en parallèle.

$$C' = \frac{m}{B^2 l^2} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ F} \quad (\text{masse})$$

$$R' = \frac{B^2 l^2}{r} = 2,7 \Omega \quad (\text{transfert acoustique})$$

$$L' = \frac{B^2 l^2}{k} = 0,37 \text{ mH} \quad (\text{ressort})$$



$$c. \quad (1) \Rightarrow \left( m j\omega + r + \frac{k}{j\omega} \right) \underline{v} = lB \underline{i} \Rightarrow \frac{\underline{i}}{\underline{v}} = \frac{r + j(m\omega - k/\omega)}{lB}$$

$$\text{or :} \quad \frac{\langle i^2 \rangle}{\langle v^2 \rangle} = \frac{|\underline{i}|^2}{|\underline{v}|^2}$$

$$\text{soit :} \quad \eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{r} \cdot \frac{r^2 + (m\omega - k/m)^2}{l^2 B^2}}$$

qui montre bien que  $\eta$  augmente lorsque  $B$  augmente.

$$\eta \text{ max pour } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_0 = 95,3 \text{ Hz}$$

$$\text{d'où :} \quad \eta_0 = \frac{1}{1 + \frac{R}{r}} = 57 \%$$

$$P = R_{ieff}^2 + r v_{eff}^2 \Rightarrow v_{eff} = 1,19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow x_{eff} = \frac{v_{eff}}{2\pi f_0} = 1,9 \text{ mm visible}$$

$$f = 300 \text{ Hz} \Rightarrow \eta = 0,12 \%$$

La restitution fidèle des sons audibles suppose un rendement constant ; dans la pratique on associe trois hauts-parleurs pour des bandes de fréquences différentes (tweeter HF, woofer BF, plus fréquences intermédiaires).

d. L'enceinte isole le champ avant du champ arrière de la membrane, et évite surtout aux basses fréquences le court-circuit acoustique qui fait diminuer  $\eta$ .



# Agrégation

## (Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE

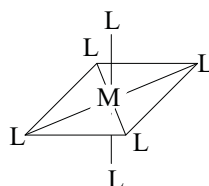
Épreuve B : Composition de chimie - Session : 1998

### PARTIE A

#### ÉTUDE D'UN COMPLEXE OCTAÉDRIQUE DANS LE CADRE DE LA THÉORIE DU CHAMP CRISTALLIN

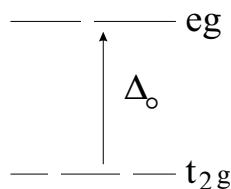
#### I. Le modèle du champ cristallin.

I.1.



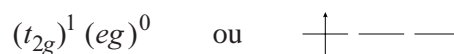
I.2. Déstabilisation des O.A. d du métal due à la répulsion électrostatique des doublets des ligands  $\Rightarrow$  levée partielle de dégénérescence ( $d_{x^2-y^2}$  et  $d_{z^2}$  sont plus fortement déstabilisée).

II.

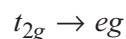


III. III.1.  $Ti : 4 s^2 3 d^2$        $Ti^{3+} : 3 d^1 4 s^0$

III.2. a.



b. Transition électronique :



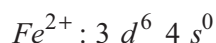
c. On accède à plusieurs niveaux vibrationnels et rotationnels du premier état électronique excité.

d. Le complexe est rose.

e.

$$\frac{h C}{\lambda} N = \Delta_o = 242,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

IV. IV.1.



IV.2. Présence d' $e^-$  célibataire(s).

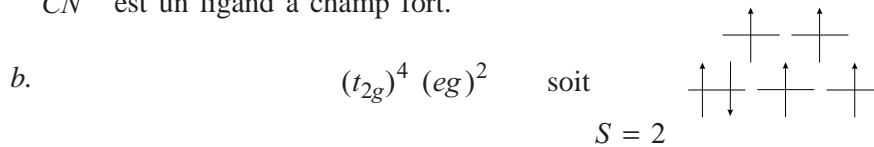
IV.3. – Principe d'exclusion de Pauli : énoncé.

- Principe d'empilement de stabilité ou de construction : on remplit d'abord les niveaux les plus bas.
- Règle de Hund : énoncé.

IV.4. a. Pas de  $e^-$  célibataire. On a donc  $(t_{2g})^6 (eg)^0$ .

Le principe d'empilement l'emporte sur la règle de Hund.

$CN^-$  est un ligand à champ fort.



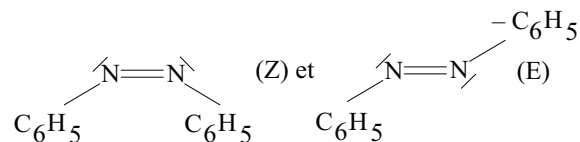
$H_2O$  est un ligand à champ faible.

## PARTIE B

### QUELQUES RÉACTIONS PHOTOCIMIQUES

#### I. Étude cinétique d'une réaction photochimique.

I.1.



elles sont diastéréoisomères.

Le plus volatil est le (E) car son moment dipolaire est nul.

I.2. 
$$A = \log \frac{I_0}{I_t}$$

I.3. 
$$\begin{array}{lcl} E & \rightleftharpoons & Z \\ s & a & 0 \\ t & a-x & x \end{array} \quad \frac{dx}{dt} = k_1(a-x) - k_{-1}x$$

$$0 = k_1(a-x_e) - k_{-1}x_e$$

I.4. 
$$\left. \begin{array}{l} A = \varepsilon l (a-x) \\ A_0 = \varepsilon l a \\ A_e = \varepsilon l (a-x_e) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A - A_e = \varepsilon l (x_e - x) \\ A_0 - A_e = \varepsilon l x_e \end{array}$$

d'où : 
$$A - A_e = (A_0 - A_e) e^{-(k_1+k_{-1})t}$$

soit : 
$$(k_1 + k_{-1}) t = \ln \frac{A_0 - A_e}{A - A_e}$$

I.5. On trace  $\ln(A - A_e) = f(t) \Rightarrow$  droite de pente  $-(k_1 + k_{-1})$  (ou on procède par régression linéaire).

$t/s$	0	15	30	60	90	120	150
$\ln (A - 0,138)$	- 0,467	- 0,585	- 0,719	- 0,970	- 1,224	- 1,474	- 1,720

On obtient  $(k_1 + k_{-1}) = 8,38 \cdot 10^{-3} s^{-1}$  (ou  $\approx 8,4 \cdot 10^{-3} s^{-1}$ ).

I.6.  $k_1 (a - x_e) = k_{-1} x_e \Rightarrow k_1 A_e = k_{-1} (A_0 - A_e)$

$$k_1 / k_{-1} = \frac{A_0 - A_e}{A_e} = \frac{0,765 - 0,138}{0,138} = 4,54$$

$$k_{-1} = 1,51 \cdot 10^{-3} s^{-1} \quad k_1 = 6,87 \cdot 10^{-3} s^{-1}$$

II. **Principe de la photographie (noir et blanc).**

II.1. Schéma de  $AgBr$  : type  $NaCl$ .

$$6470 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = \frac{4 \times 0,18778}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ a}^3} \Rightarrow a = 578 \text{ pm}$$

II.2. a.

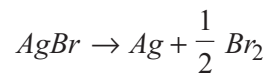
$$E (Ag^+ / Ag) = 0,80 + 0,059 \log \frac{Ks}{Br^-}$$

$$\Rightarrow E^0 (AgBr / Ag) = 0,074 \text{ V}$$

$$\Delta_r G^0 = - 96500 (0,074 - 1,06) = 95,1 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

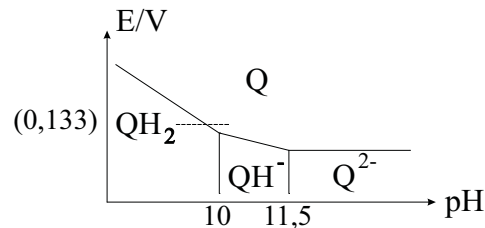
l'image latente est instable.

b. Par la même réaction !



II.3. **Révélation de l'image latente.**

a.



$$pH \leq 10 \quad Q + 2 H^+ + 2 e^- \rightarrow QH_2 \quad E = 0,70 - 0,059 pH$$

$$10 \leq pH \leq 11,5 \quad Q / QH^- \quad E = 0,405 - \frac{0,059}{2} pH$$

$$pH \geq 11,5 \quad Q / Q^{2-} \quad E = 0,70 + \frac{0,059}{2} \log k_1 k_2 = 0,066 \text{ V}$$

b.

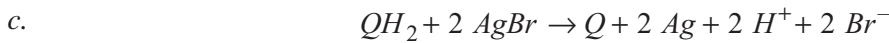
$$AgBr / Ag \quad E = 0,074 + 0,059 \log \frac{1}{0,1} = 0,133 \text{ V}$$

Réduction de  $AgBr$  par  $QH_2$  favorisée si :

$$E (AgBr / Ag) > E (Q / QH_2)$$

soit :  $0,133 > 0,70 - 0,059 pH$

soit :  $pH > 9,6$

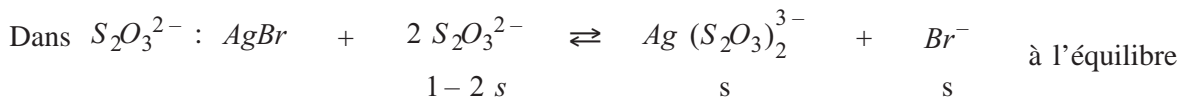


d. Il faut éviter de réduire la totalité de  $AgBr$  !

e. En milieu acide,  $E (AgBr / Ag) < E (Q / QH_2)$  et la réduction de  $AgBr$  n'est plus possible.

#### II.4. Fixation de l'image.

Eau pure :  $s = \sqrt{K_s} = 7,1 \cdot 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$



$$K = \frac{K_s}{K_d} = 5 = \frac{s^2}{(1-2s)^2} \quad \frac{s}{1-2s} = \sqrt{5} \quad s = 0,409 \text{ mol.L}^{-1}$$

et  $Ag^+$  est bien négligeable.

Le fixateur dissout  $AgBr$  par complexation d' $Ag^+$ .

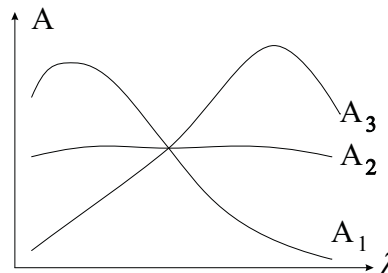
## PARTIE C

### ÉTUDE ET UTILISATIONS DE QUELQUES SUBSTANCES COLORÉES

#### I. Détermination du $pK_a$ d'un indicateur coloré.

I.1. Présence des deux formes ( $HIn$  et  $In^-$ ) en proportions notables à  $pH = 6,8$ .  
Donc à  $pH = 1,3$   $HIn$  est majoritaire et à  $pH = 12,3$   $In^-$  est majoritaire.  
 $pK_a$  doit être voisin de 6,8.

I.2.



On notera l'existence d'un point isobestique.

I.3.  $\forall \lambda$  fixée,

$$A_1 = \epsilon_{HIn} l ((HIn) + (In^-))$$

$$A_3 = \epsilon_{In^-} l ((HIn) + (In^-))$$

dans ces expressions, ( $HIn$ ) et ( $In^-$ ) représentent les concentrations à  $pH = 6,8$ .

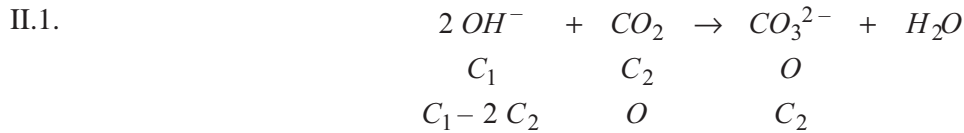
$$A_2 = \varepsilon_{HIn} l (HIn) + \varepsilon_{In^-} l (In^-) = \frac{A_1 (HIn)}{(HIn) + (In^-)} + \frac{A_3 (In^-)}{(HIn) + (In^-)}$$

soit :  $(HIn) (A_2 - A_1) = (In^-) (A_3 - A_2)$

$$pH = pK_a + \log \frac{(In^-)}{(HIn)} = pK_a + \log \frac{A_2 - A_1}{A_3 - A_2}$$

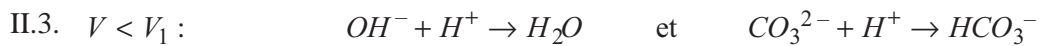
I.4. On calcule  $pK_a = 7,00$  ou  $6,99$  soit  $7,0$ .

**II. Dosage d'une soude carbonatée en présence d'hélianthine et de phénolphtaléine.**



$OH^- (C_1 - 2 C_2)$  et  $CO_3^{2-} (C_2)$  sont les espèces majoritaires.

II.2. Violet ( $V < V_1$ ) (phénolphtaléine en milieu basique), puis jaune ( $V_1 < V < V_2$ ) et enfin rouge ( $V > V_2$ ).



II.4.  $((C_1 - 2 C_2) + C_2) \times 10 = 0,1 \times V_1 = 0,1 \times 16 \Rightarrow C_1 - C_2 = 0,16 \text{ mol.L}^{-1}$

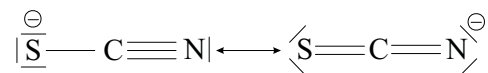
$C_2 \times 10 = 0,1 (V_2 - V_1) = 0,1 \times 4 \Rightarrow C_2 = 0,04 \text{ mol.L}^{-1}$

d'où :  $C_1 = 0,20 \text{ mol.L}^{-1}$

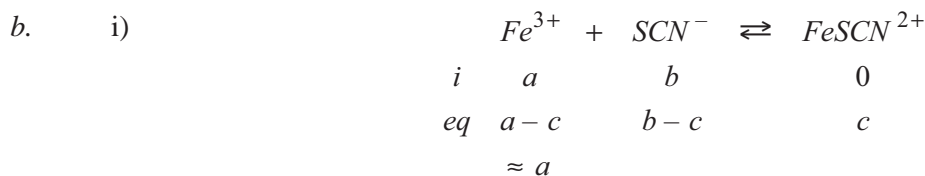
II.5. Il faut  $12 \text{ mL}$  pour doser  $OH^-$ . On dose  $CO_3^{2-}$  principalement entre  $12$  et  $16 \text{ mL}$  - donc  $pH = pK_{a_2}$  à  $14 \text{ mL}$ .

**III. A propos du complexe thiocyanatofé (III).**

III.1. Deux sites basiques de Lewis n'intervenant pas simultanément,



III.2. a. Orange (on dit «rouge sang»).



$$K_d = \frac{a(b-c)}{c} = \frac{ab}{c} - a \quad \text{avec : } A = \varepsilon Cl$$

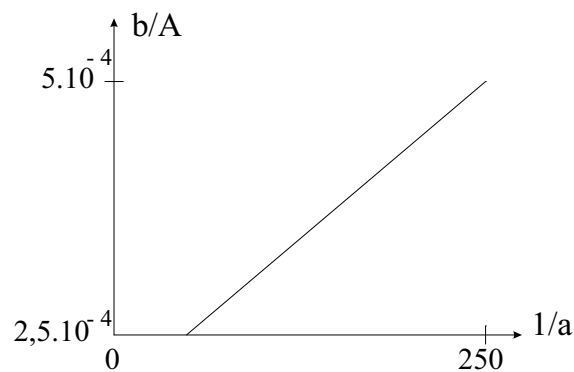
$$K_d = \frac{a b \varepsilon l}{A} - a \Rightarrow \frac{K_d}{a \varepsilon l} = \frac{b}{A} - \frac{1}{\varepsilon l}$$

soit :

$$\frac{b}{A} = \frac{K_d}{\varepsilon l a} + \frac{1}{\varepsilon l}$$

ii) Régression linéaire ou tracé de  $\frac{b}{A} = f\left(\frac{1}{a}\right)$ ; droite de pente  $\frac{K_d}{\varepsilon l}$  et de valeur  $Y = \frac{1}{\varepsilon l}$  en  $X = 0$ .

$\frac{1}{a} / \text{mol}^{-1} \cdot L$	80	100	133	200	266
$(b/A) / \text{mol} \cdot L^{-1}$	$2,84 \cdot 10^{-4}$	$3,05 \cdot 10^{-4}$	$3,42 \cdot 10^{-4}$	$4,12 \cdot 10^{-4}$	$4,90 \cdot 10^{-4}$



$$\frac{1}{\varepsilon l} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

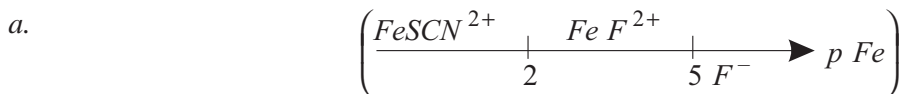
$$\varepsilon = 5000 \text{ mol}^{-1} L \text{ cm}^{-1}$$

pente :

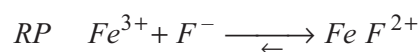
$$p = 1,08 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-4} \cdot K_d$$

$$K_d = 5,4 \cdot 10^{-3} \quad (pK_d = 2.27)$$

### III.3. Compétition entre équilibres en solution aqueuse.



$\text{Fe}^{3+}$  est en défaut par rapport à  $\text{F}^-$  donc :



$$(\text{Fe F}^{2+}) \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot L^{-1} \Rightarrow (\text{F}^-) = 0,018 \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

$$\Rightarrow (\text{Fe}^{3+}) = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot L^{-1} \text{ par } K_{d2}$$

$$(\text{SCN}^-) \approx 0,01 \text{ mol} \cdot L^{-1} \Rightarrow \text{par } K_{d1}, \quad (\text{Fe SCN}^{2+}) = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot L^{-1} (\ll 2 \cdot 10^{-3})$$

La solution est incolore.

$$\begin{aligned}
 b. \quad (Fe\ SCN^{2+}) &= 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1} \Rightarrow (SCN^{-}) = 10^{-2} - 10^{-5} \approx 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \\
 \Rightarrow (Fe^{2+}) &= 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}; \text{ par } K_{d1} \Rightarrow (Fe\ F^{2+}) = 2 \cdot 10^{-3} - 10^{-5} - 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1} \\
 &= 1,98 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \text{ (conservation du fer)} \Rightarrow (F^{-}) = 1,98 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \text{ par } K_{d2}
 \end{aligned}$$

Par conservation de F :

$$(HF) = 2 \cdot 10^{-2} - (F^{-}) - (Fe\ F^{2+}) = 1,60 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = pK_a + \log \frac{(F^{-})}{(HF)} = 2,29$$

$$n_{H^+ \text{ versé}} = n_{H^+ \text{ final}} + n_{HF} = 2,11 \cdot 10^{-2} \text{ mole}$$

## PARTIE D

### SYNTHÈSE DE PIGMENTS OU DE COLORANTS

#### I. Synthèse d'un pigment : le dioxyde de titane.

I.1. Le pigment est insoluble dans son milieu d'utilisation.



Ce sont des réactions d'oxydoréduction.

$$b. \quad K_1 = \left. \frac{p_{CO}}{p^0} \right)_{eq1}^2 = 2,45 \cdot 10^{-5} \quad ; \quad \Delta_r G_1^0 = 141,14 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

$$K_2 = \left. \frac{p_{CO}}{p^0} \right)_{eq2} = 8,8 \cdot 10^{20}$$

$$\text{à } 1600 \text{ K} : \quad \Delta_r G_2^0 = - 641,22 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

$$c. \quad \Delta_r G_1^0 = 723,7 - 0,364 T \text{ en kJ.mol}^{-1}$$

$$\Delta_r G_2^0 = - 382,5 - 0,162 T \text{ (kJ.mol}^{-1}\text{)}$$

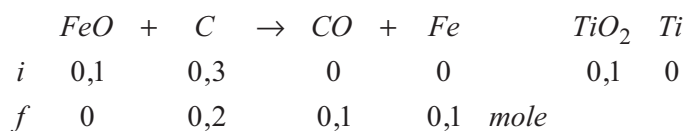
c'est bien compatible.

d.  $v = (4 - 1) + 2 - 4 = 1$  mais  $P$  n'est pas facteur d'équilibre (ni de description) et on conclut  $v = 0$ .

Conclusion : coexistence impossible des quatre solides à 1600 K. On peut aussi le justifier en constatant que :

$$pCO_{eq1} \neq pCO_{eq2} \text{ à } 1600 \text{ K}$$

- e. i) D'après l'introduction, seul  $FeO$  est réduit - (2) est quantitative et  $C$  est en excès  $\Rightarrow$  il est raisonnable de penser que  $FeO$  est totalement réduit (et que  $TiO_2$  ne l'est pas du tout («réduction sélective»)).



$$p_{CO} f = \frac{n_{CO} RT}{V} = 1,33 \text{ bar}$$

(résultats à vérifier à la question suivante).

$$ii) \quad \mathcal{A}_1 = RT \ln \frac{K_1}{Q_1} = RT \ln \frac{2,45 \cdot 10^{-5}}{1,33^2} = -148,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\mathcal{A}_2 = RT \ln \frac{K_2}{Q_2} = RT \ln \frac{8,8 \cdot 10^{20}}{1,33} = 637,4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\mathcal{A}_2 > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_1 < 0$$

On a bien réduction sélective et totale de  $FeO$ .

I.3. a.  $\Delta_r G^0_4 = -39,5 - 0,242 T = -299,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  à 1073 K

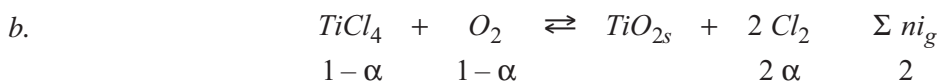


- c.  $Ti^{4+}$  est petit, chargé et très polarisant  $\Rightarrow$  covalent.  
Plus covalent  $\Rightarrow$  plus volatil ; distillation fractionnée pour la séparation.

I.4. a.  $\Delta_r H^0_5 = -181,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

$$\Delta_r S^0_5 = -63,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

à 1673 K :  $\Delta_r G^0_5 = -72,26 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;  $K_5 = 224,5$

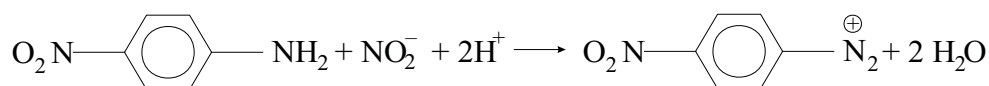
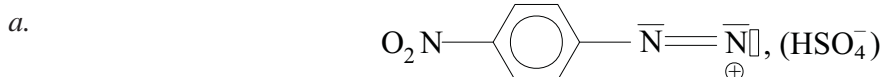


$$K = \frac{(2\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} \quad \frac{2\alpha}{1-\alpha} = \sqrt{K} = 14,98 \quad \alpha = 0,882$$

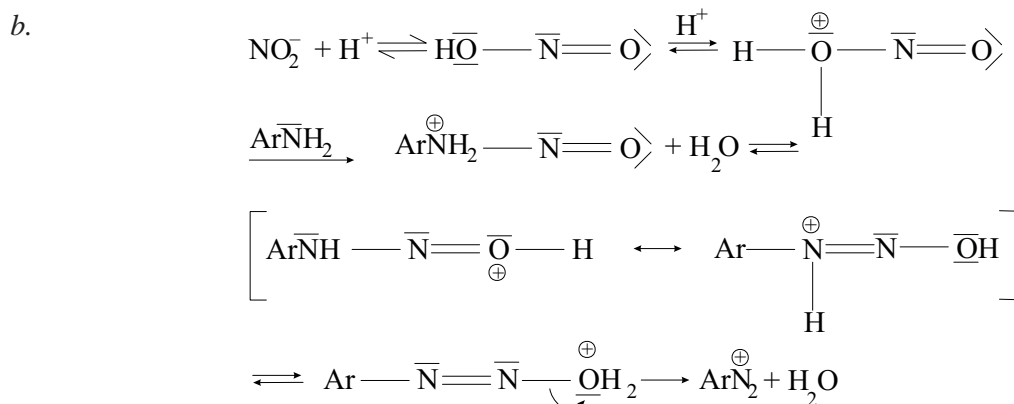
	$TiCl_4$	$O_2$	$Cl_2$
$p / p^0$	0,059	0,059	0,882

## II. Synthèse d'un colorant azoïque : le jaune d'alizarine.

### II.1. Préparation du sel de diazonium

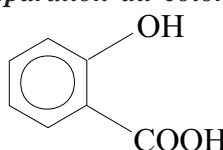






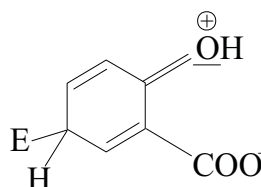
c.  $\text{Ar}\overset{\oplus}{\text{N}}_2$  est peu stable et pourrait évoluer, en  $\text{ArOH}$  notamment.

## II.2. Préparation du colorant

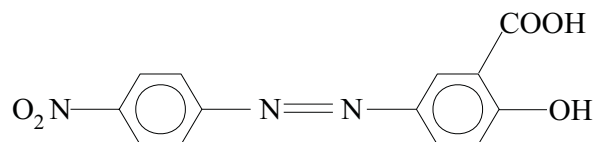
a.  est peu soluble alors que ses anions (les sels) le sont par interaction ion - dipôle.

b. On a une Substitution Électrophile Aromatique. Les intermédiaires de Wheland ortho ou para (de OH) sont stabilisés par  $-\text{OH}$  ou  $\text{O}^-$ .

Par exemple :

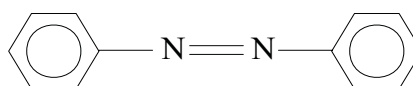


L'intermédiaire para est stériquement favorisée et on obtient donc majoritairement :



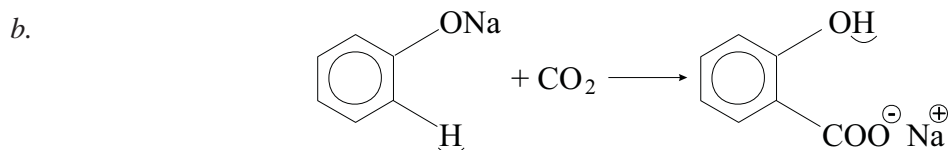
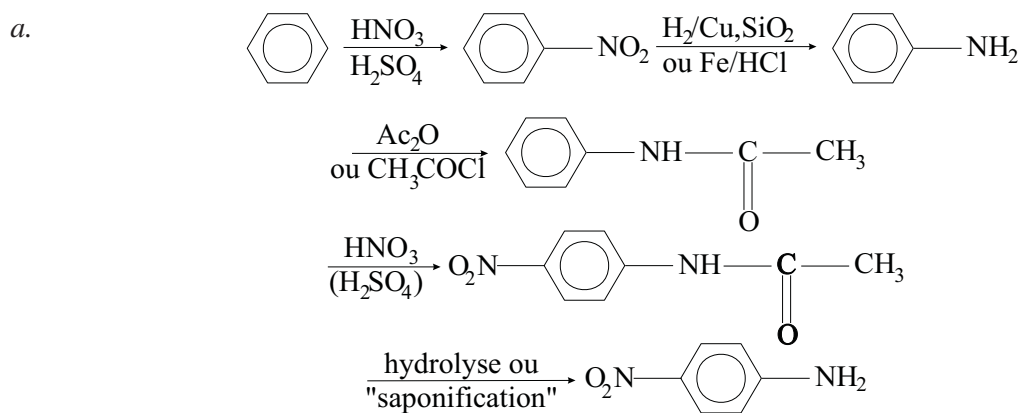
c. Apparemment.

Chromophore : groupement siège de la transition ( $\pi \rightarrow \pi^*$ ).



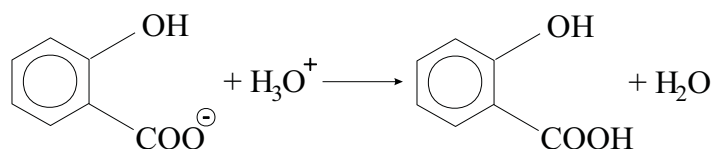
Auxochrome : groupements qui par leur présence augmentent la délocalisation électronique, diminuent l'écart  $\pi \rightarrow \pi^*$  (en fait l'écart  $HO - BV$ ) et déplacent la transition vers le visible.

Ici :  $-\text{NO}_2$  et  $-\text{OH}$

II.3. *Obtention des deux réactifs organiques*

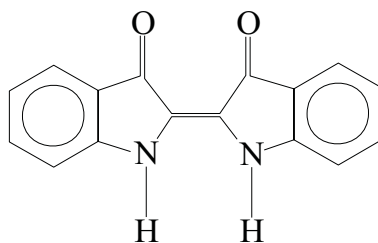
Le phénate est le nucléophile et  $\text{CO}_2$  l'électrophile.

Il a souvent manqué un atome d'hydrogène dans le bilan.

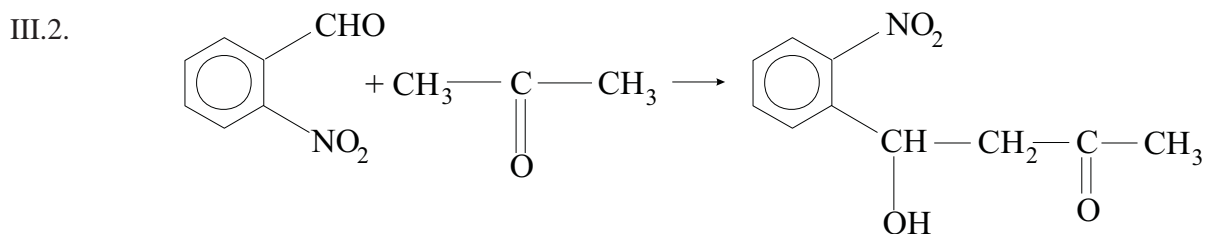


## III. Quelques étapes dans la synthèse de l'indigo.

III.1. Configuration E ; le Z :



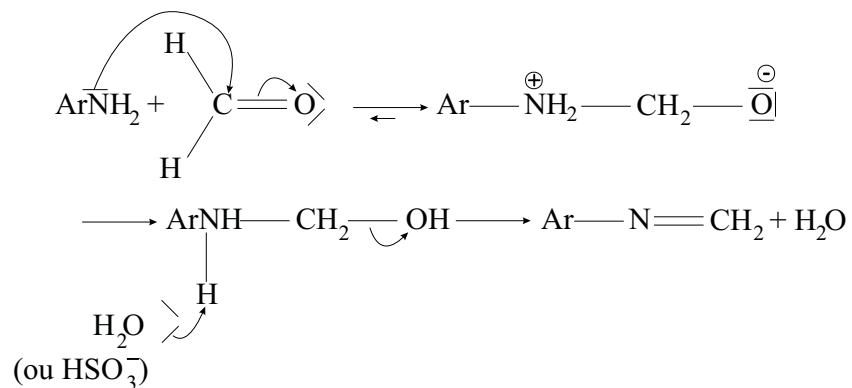
(E) est le plus stable par liaison hydrogène entre  $H$  porté par  $N$  et  $O$  du carbonyle.



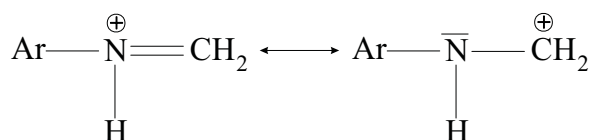
On a une céto-lisation (croisée).

Voir le mécanisme dans un ouvrage de chimie organique.

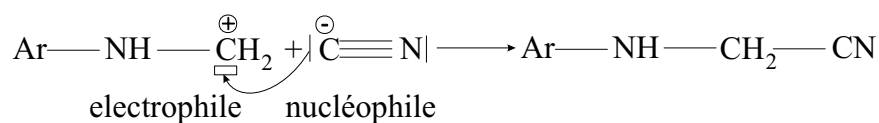
III.3. a.



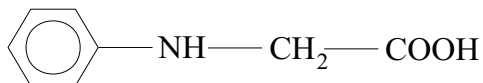
b.



c.

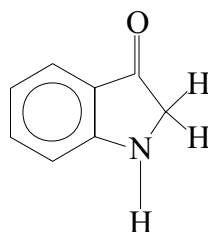


d. C :

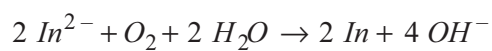
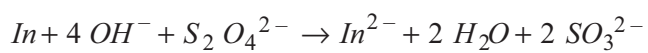


Mécanisme d'hydrolyse acide ou basique d'un nitrile en acide carboxylique : voir ouvrage de chimie organique.

e.



III.4.



# Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE

Épreuve C : Problème de physique - Session : 1998

## MICROSCOPIES À CHAMP PROCHE

### I. PREMIÈRE PARTIE. - MICROSCOPIE EN CHAMP PROCHE OPTIQUE

#### I.A. Réflexion et transmission d'une onde électromagnétique dans un problème unidirectionnel

##### IA.1. Réflexion et transmission partielle sur un dioptré plan en incidence normale

*a.* Il apparaît une onde réfléchie et une onde transmises ; on peut les décrire par les représentations complexes de leurs champs électriques, respectivement  $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r} e^{-i\omega t - i n_1 k_0 z}$  et  $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} e^{-i\omega t + i n_2 k_0 z}$  dans ce cas, et on montre que leurs amplitudes complexes  $\mathbf{E}_{0r}$  et  $\mathbf{E}_{0t}$  sont colinéaires à  $\mathbf{E}_{0i}$ . Par définition, les coefficients de réflexion  $r$  et de transmission  $t$  pour les champs électriques sur le dioptré d'équation  $z = 0$  sont tels que  $\boxed{\mathbf{E}_{0r} = r \mathbf{E}_{0i}}$  et  $\boxed{\mathbf{E}_{0t} = t \mathbf{E}_{0i}}$ .

Pour définir les facteurs énergétiques de réflexion  $R$  et de transmission  $T$ , même en incidence oblique, on considère les moyennes temporelles  $\langle d\Phi_i \rangle$ ,  $\langle d\Phi_r \rangle$  et  $\langle d\Phi_t \rangle$  des flux des vecteurs de Poynting des ondes incidente, réfléchie et transmise respectivement, au travers d'un même élément de surface du dioptré. On pose

$$\boxed{R = \frac{\langle d\Phi_r \rangle}{\langle d\Phi_i \rangle}} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \frac{\langle d\Phi_t \rangle}{\langle d\Phi_i \rangle}}$$

*Nota :* cette définition n'est opératoire que si le milieu 1 est transparent (sinon  $R$  n'est pas mesurable).

Leurs expressions s'obtiennent de la façon suivante.

On écrit, sur le dioptré d'équation  $z = 0$ , les relations de passage du champ électromagnétique : d'une part, la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$  est continue, ainsi que celle de  $\mathbf{H}$  car un courant surfacique libre ne peut exister sur ce milieu (il correspondrait à un courant volumique libre infini, ce qui est exclu car le milieu n'est pas supraconducteur et n'est pas non plus assimilé à un conducteur parfait) ; d'autre part, comme les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont perpendiculaires à  $\mathbf{u}_z$ , ils sont entièrement continus ; enfin, comme tous les milieux considérés sont non magnétiques,  $\mathbf{B}$  lui même est entièrement continu. La continuité de  $\mathbf{E}$  donne  $\mathbf{E}_{0i} + \mathbf{E}_{0r} = \mathbf{E}_{0t}$  (1)

tandis que celle de  $i\omega \mathbf{B} = \mathbf{u}_z \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}$  donne  $\mathbf{u}_z \times (n_1 \mathbf{E}_{0i} - n_1 \mathbf{E}_{0r}) = \mathbf{u}_z \times n_2 \mathbf{E}_{0t}$  ; en multipliant vectoriellement par  $\mathbf{u}_z$  membre à membre, puis en utilisant  $\mathbf{E}_{0i} \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{E}_{0r} \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{E}_{0t} \cdot \mathbf{u}_z = 0$  (tiré de l'équation de Maxwell-Gauss - en l'absence de charge volumique libre - et de la relation constitutive entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$ ), il vient  $n_1 \mathbf{E}_{0i} - n_1 \mathbf{E}_{0r} = n_2 \mathbf{E}_{0t}$  (2). En reportant dans (2) l'expression de  $\mathbf{E}_{0t}$  tirée de (1), on trouve

$$\mathbf{E}_{or} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \mathbf{E}_{oi} \text{ , puis } \mathbf{E}_{ot} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \mathbf{E}_{oi} \text{ grâce à (1). Cela prouve donc que } \mathbf{E}_{or} \text{ et } \mathbf{E}_{ot} \text{ sont colinéaires à } \mathbf{E}_{oi} \text{ , et aussi que } \boxed{r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}} \text{ et } \boxed{t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}} .$$

b. Par passage à la limite, on devine que *ces expressions sont encore valables lorsque l'indice  $n(z)$  varie brutalement mais continûment* au voisinage de  $z = 0$  ; « varier brutalement » signifie que  $n(z)$  passe de  $n_1$  uniforme à  $n_2$  uniforme *sur un domaine de largeur très petite vis à vis de  $\lambda_0$*  (ceci n'étant possible que si  $\lambda_0$  est bien assez grand vis à vis des dimensions interatomiques) – dans ce cas en effet, l'onde ne peut pas « voir » la variation continue d'indice.

Si on voulait démontrer cela en faisant appel aux milieux stratifiés, on ne pourrait pas dire que le facteur de transmission global est le produit des facteurs de transmission  $\frac{4n(n+dn)}{[n+(n+dn)]^2}$  de tous les dioptres

consécutifs, séparant des milieux d'indices  $n$  et  $n+dn$  : car cette expression suppose que le milieu d'indice  $n+dn$  est le siège d'une onde progressive, ce qui n'est le cas que pour le dernier milieu (d'indice  $n_2$ ). Il faudrait donc recourir à des théories plus sophistiquées, comme celle des matrices d'Abeles, ou des couplages d'ondes.

Une variation d'indice bien choisie, sur une échelle de l'ordre de  $\lambda_0$  ou plus, peut au contraire réaliser une adaptation d'impédance entre les milieux extrêmes, et faire que toute l'énergie incidente se trouve transmise (comme une couche anti-reflet, conçue pour supprimer les pertes par réflexion).

Quand la variation d'indice se fait à une échelle de l'ordre de  $\lambda_0$  ou plus, les coefficients de réflexion et de transmission dépendent donc du profil d'indice ; mais si elle se fait à une échelle très petite vis à vis de  $\lambda_0$ , ils deviennent indépendants du profil.

c. Le vecteur de Poynting *réel* est  $\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{E}' \times \mathbf{H}'}$  , où  $\mathbf{E}'$  et  $\mathbf{H}'$  désignent les valeurs réelles des champs électrique et magnétique ; il obéit à l'équation de continuité de l'énergie électromagnétique

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{R} + \left( \mathbf{E}' \cdot \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} + \mathbf{H}' \cdot \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \right) = -\mathbf{j}' \cdot \mathbf{E}'}$$
 , où  $\mathbf{j}'$  est la valeur réelle de la densité de courant volumique *libre*.

$\mathbf{j}' \cdot \mathbf{E}'$  représente la densité volumique de puissance électromagnétique perdue par cession aux charges libres ; en

outre,  $\mathbf{E}' \cdot \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} + \mathbf{H}' \cdot \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + \sigma_d$  où  $w$  représente la densité volumique d'énergie électromagnétique (dont l'expression en fonction des champs n'est pas forcément connue dans un milieu quelconque), et  $\sigma_d$  la densité volumique de puissance électromagnétique dissipée par cession aux charges liées. En régime harmonique, on

peut introduire (mais c'est facultatif) le vecteur de Poynting *complexe*, défini par  $\boxed{\underline{\mathbf{R}} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}$  , où  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$

sont les représentations *complexes* des champs électrique et magnétique ; alors un calcul élémentaire permet de montrer que la *moyenne* temporelle, sur une période (et non pas la valeur instantanée !), du vecteur de Poynting

réel  $\mathbf{R}$  est la partie réelle du vecteur de Poynting complexe :  $\boxed{\langle \mathbf{R} \rangle = \Re \underline{\mathbf{R}}}$  .

Comme le milieu 1, dans lequel se propage l'onde incidente, est supposé non magnétique, on relie la représentation complexe du champ magnétique  $\mathbf{H}_i$  de l'onde incidente à celle de son induction magnétique  $\mathbf{B}_i$ ,

par  $\mathbf{H}_i = \frac{\mathbf{B}_i}{\mu_0}$  ; par contre, entre les représentations complexes et du champ électrique  $\mathbf{E}_i$  de l'onde incidente on

écrit la relation constitutive  $\mathbf{D}_i = \varepsilon_1 \mathbf{E}_i$ . En outre, les équations de Maxwell-Gauss (en l'absence de charge volumique libre) et Maxwell-Faraday donnent pour les représentations complexes :  $i n_1 k_0 \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{D}_i = 0$  (donc  $\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{E}_i = 0$ ) et  $i n_1 k_0 \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_i = -(-i\omega \mathbf{B}_i)$ . Enfin, d'après l'équation de propagation et la définition de l'indice

complexe,  $k_0 = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \omega \mu_0 Y_0$  ( $Y_0$  est appelé « admittance du vide »). On en tire l'expression du champ magnétique de l'onde incidente,  $\mathbf{H}_i = n_1 Y_0 \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_i$ , puis celle de son vecteur de Poynting complexe :

$$\underline{\mathbf{R}}_i = \frac{1}{2} \mathbf{E}_i \times (n_1 Y_0 \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_i)^* = \frac{1}{2} n_1^* Y_0 \left[ (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_i^*) \mathbf{u}_z - (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{u}_z) \mathbf{E}_i^* \right] = \frac{1}{2} n_1^* Y_0 \|\mathbf{E}_i\|^2 \mathbf{u}_z,$$

car  $\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_z^*$  (le vecteur unitaire « dirigeant » l'onde incidente est réel, car il s'agit d'une onde homogène).

Comme  $\|\mathbf{E}_i\|^2 = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_i^*$  par définition est réel, il vient finalement :

$$\langle \mathbf{R}_i \rangle = \frac{1}{2} \Re(n_1) Y_0 \|\mathbf{E}_i\|^2 \mathbf{u}_z.$$

*Le vecteur de Poynting (moyen) d'une onde (monochromatique) quelconque n'ayant pas une expression linéaire en fonction du champ électrique, celui de la superposition de deux ondes n'est donc pas la somme des vecteurs de Poynting (moyens) de chacune des deux ondes : physiquement parlant, il y a en général des « interférences » pour le vecteur de Poynting.*

d. Comme l'indice  $n_1$  du milieu d'entrée est supposé réel, la relation entre les champs électrique et magnétique réels  $\mathbf{E}'_i$  et  $\mathbf{H}'_i$  de l'onde homogène incidente est la même que celle entre leurs représentations complexes  $\mathbf{E}_i$  et  $\mathbf{H}_i$  :  $\mathbf{H}'_i = n_1 Y_0 \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}'_i$  ; de façon analogue, pour l'onde réfléchie (qui est « dirigée » par  $-\mathbf{u}_z$  au lieu de  $\mathbf{u}_z$ ) on a  $\mathbf{H}'_r = -n_1 Y_0 \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}'_r$ . Le vecteur de Poynting de la superposition des ondes incidente et réfléchie en présence dans ce milieu s'écrit donc

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (\mathbf{E}'_i + \mathbf{E}'_r) \times (\mathbf{H}'_i + \mathbf{H}'_r) \\ &= \mathbf{E}'_i \times \mathbf{H}'_i + \mathbf{E}'_r \times \mathbf{H}'_r + \mathbf{E}'_i \times \mathbf{H}'_r + \mathbf{E}'_r \times \mathbf{H}'_i \\ &= \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_r + \mathbf{E}'_i \times (-n_1 Y_0 \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}'_r) + \mathbf{E}'_r \times (n_1 Y_0 \mathbf{u}_z \times \mathbf{E}'_i) \\ &= \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_r + n_1 Y_0 \left[ -(\mathbf{E}'_i \cdot \mathbf{E}'_r) \mathbf{u}_z + (\mathbf{E}'_i \cdot \mathbf{u}_z) \mathbf{E}'_r + (\mathbf{E}'_r \cdot \mathbf{E}'_i) \mathbf{u}_z - (\mathbf{E}'_r \cdot \mathbf{u}_z) \mathbf{E}'_i \right] \end{aligned}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_r$$

car  $\mathbf{E}'_i \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{E}'_r \cdot \mathbf{u}_z = 0$  à cause des relations constitutive et de Maxwell-Gauss.

Ce résultat est remarquable : bien que le vecteur de Poynting ne s'exprime pas de façon linéaire en fonction des champs en général, ici, avec les hypothèses de l'énoncé, *tout se passe comme s'il y avait linéarité ; il n'y a pas d'interférences en ce qui concerne le vecteur de Poynting dans ce cas particulier. De plus, on note que ce résultat est valable même si les deux ondes n'ont pas la même polarisation.*

### 1.A.2. Réflexion sur un milieu conducteur illimité en incidence normale

a. Les équations de Maxwell pour les représentations complexes dans le conducteur s'écrivent

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_i \cong 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_i - i\omega \mathbf{D}$$

et les relations constitutives  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  et  $\mathbf{j}_i = \sigma \mathbf{E}$ . On en tire

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = i\omega \mu_0 (\sigma \mathbf{E} - i\omega \epsilon_0 \mathbf{E}), \quad \text{mais} \quad \text{comme} \quad \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad \text{et}$$

$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \cong -\Delta \mathbf{E}$ , on trouve l'équation d'Helmholtz  $\Delta \mathbf{E} + N^2 k_0^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , avec

$N^2 = 1 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}$  (par définition d'un indice complexe  $\Re N \geq 0$ ). Comme  $\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega/\omega_c}$  et qu'on néglige

1 devant  $i\omega/\omega_c$ , il vient  $N^2 \cong 1 - \frac{\sigma_0 \omega_c}{\omega^2 \epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$  avec  $\omega_p = \sqrt{\frac{\sigma_0 \omega_c}{\epsilon_0}}$ .

b. D'après les résultats des § I.A.1.a et c, la moyenne temporelle du vecteur de Poynting de l'onde transmise s'écrit, en  $z = 0$ ,

$$\langle \mathbf{R} \rangle_{(0_+)} = \frac{1}{2} \Re e(N) \left| \frac{2}{1+N} \right|^2 Y_0 \|\mathbf{E}_{0i}\|^2 \mathbf{u}_z.$$

Pour  $\omega < \omega_p$ ,  $N^2$  est négatif, donc  $N$  est imaginaire pur ( $\sum e N = 0$ ,  $N = \pm i |N|$ ) ; donc  $\langle \mathbf{R} \rangle_{(0_+)} = 0$ . L'onde transmise est alors décrite par  $\mathbf{E}_t = \frac{2}{1+N} \mathbf{E}_{0i} e^{-(i\omega \pm |N| k_0 z)}$ , mais comme il n'est pas plausible physiquement de trouver un champ qui diverge si  $z \rightarrow +\infty$ , on ne retient que le signe + (et donc  $N = +i |N|$ ) ; il s'agit d'une *onde évanescente* (et stationnaire dans ce milieu), dont  $l_m \equiv \frac{\lambda_0}{2\pi |N|}$  est la *profondeur de pénétration*.

c.  $\omega_p \equiv 3,5 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$  ;  $|N| \equiv 0,49$  ;  $l_m \equiv 0,19 \text{ } \mu\text{m}$ .  $\omega_p$  correspond au *domaine visible* (radiation jaune).

d. On pose  $t = \frac{2}{1+N} = \frac{2}{1+i|N|} = \tau e^{i\varphi}$  ( $\tau$  étant le module de  $t$ ).

Dans le cas d'une polarisation incidente rectiligne, un bon choix de l'origine des dates permet d'avoir une amplitude  $\mathbf{E}_{0i}$  réelle. Le champ électrique de l'onde transmise s'écrit alors

$$\mathbf{E}'_t = \tau \mathbf{E}_{0i} e^{-|N| k_0 z} \cos(\omega t - \varphi),$$

et son champ magnétique

$$\mathbf{H}'_t = |N| Y_0 \mathbf{u}_z \times \tau \mathbf{E}_{0i} e^{-|N| k_0 z} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right);$$

comme  $\mathbf{E}_{0i}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{u}_z$ , on en déduit le vecteur de Poynting instantané de cette onde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t &= \mathbf{E}'_t \times \mathbf{H}'_t \\ &= \tau \mathbf{E}_{0i} e^{-|N| k_0 z} \cos(\omega t - \varphi) \times \left[ |N| Y_0 \mathbf{u}_z \times \tau \mathbf{E}_{0i} e^{-|N| k_0 z} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= Y_0 |N| \tau^2 \mathbf{E}_{0i} \times (\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_{0i}) e^{-2|N| k_0 z} \cos(\omega t - \varphi) \sin(\omega t - \varphi) \\ \mathbf{R}_t &= Y_0 \frac{2|N|}{|1+N|^2} \|\mathbf{E}_{0i}\|^2 e^{-2|N| k_0 z} \sin 2(\omega t - \varphi) \mathbf{u}_z, \text{ avec } \frac{2|N|}{|1+N|^2} = \frac{2\sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1}}{\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \end{aligned}$$

Dans le cas d'une polarisation incidente circulaire gauche ou droite, on a  $\mathbf{E}_{0i} = E_0 (\mathbf{u}_x \pm i \mathbf{u}_y)$  respectivement, avec  $E_0$  réel – moyennant un bon choix de l'origine des dates. Donc

$$\mathbf{E}'_t = \tau E_0 e^{-|N| k_0 z} [\cos(\omega t - \varphi) \mathbf{u}_x \pm \sin(\omega t - \varphi) \mathbf{u}_y]$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'_t &= |N| Y_0 \mathbf{u}_z \times \tau E_0 e^{-|N| k_0 z} \left[ \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{u}_x \pm \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{u}_y \right] \\ &= |N| \tau Y_0 E_0 e^{-|N| k_0 z} [\pm \cos(\omega t - \varphi) \mathbf{u}_x + \sin(\omega t - \varphi) \mathbf{u}_y] \end{aligned}$$

sont colinéaires ; ainsi  $\mathbf{R}_t = 0$  à tout instant !

Comme cette onde est stationnaire, *le signal électromagnétique est transmis instantanément* ; ce n'est pas choquant pour une onde *monochromatique*...

e. Pour  $\omega > \omega_p$ , l'indice  $N$  est réel et appartient à  $[0, 1]$  ; on pourra donc observer le phénomène usuel de réflexion totale, si l'angle d'incidence est supérieur (en valeur absolue) à l'angle limite  $i_l = \arcsin N$ . Lorsque  $\omega$  tend vers  $\omega_p$  par valeurs supérieures,  $N$  tend vers zéro, donc  $\langle \mathbf{R}_t \rangle$  et l'angle limite aussi. On tend donc à trouver un facteur de réflexion égal à 1, comme pour la réflexion totale ordinaire, et ceci dès l'incidence normale.

### I.A.3. Réflexion sur un milieu conducteur limité en incidence normale

On considère maintenant que le milieu conducteur n'occupe qu'une lame dont les faces sont les plans d'équations  $z = 0$  et  $z = a$ , le vide régnant toujours à l'extérieur ; on se place toujours dans le cas de l'incidence normale, et on considère de nouveau  $\omega < \omega_p$ .

a. Du fait de la valeur finie de  $a$ , les champs transmis dans la lame ne sont pas rigoureusement nuls sur la face postérieure ( $z = a$ ) ; on peut donc s'attendre à ce que, par transmission au travers de cette face, on retrouve dans le vide après la lame ( $z > a$ ) une onde plane monochromatique homogène progressive transmise, et donc à ce qu'il y ait *une transmission partielle d'énergie électromagnétique au travers de la lame* – toute l'énergie ne serait pas réfléchi. Cet effet ne serait notable que si les champs sur la face postérieure ne sont pas négligeables vis à vis des champs incidents, ce qui demande que  $a$  soit au plus de l'ordre de

$$l_m \cong \frac{\lambda_0}{2\pi |N|} \cong \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}.$$

b. On sait que la représentation complexe du champ électrique dans la lame obéit à l'équation d'Helmholtz  $\Delta \mathbf{E} + N^2 k_0^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , et comme  $\omega < \omega_p$  on a  $N^2 k_0^2 = -\frac{1}{l_m^2}$ . De plus, le système est invariant par toute translation parallèle à  $Ox$  ou  $Oy$ , donc la représentation complexe s'écrit  $\mathbf{E} = \mathbf{F}(z)e^{-i\omega t}$ , et on obtient l'équation différentielle  $\frac{d^2 \mathbf{F}}{dz^2} - \frac{1}{l_m^2} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ . La résolution de celle-ci conduit à l'expression

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}'_0 e^{-z/l_m} + \mathbf{E}''_0 e^{z/l_m}) e^{-i\omega t}$$

où  $\mathbf{E}'_0$  et  $\mathbf{E}''_0$  sont deux constantes vectorielles complexes.

Le raisonnement du § I.A.1.c. montre aussi que les valeurs moyennes  $\langle \mathbf{R}' \rangle$  et  $\langle \mathbf{R}'' \rangle$ , sur une période, des vecteurs de Poynting associés à chacune des ondes données par  $\mathbf{E}'_0$  et  $\mathbf{E}''_0$  séparément, sont nulles ; il faut préciser pour cela  $\mathbf{E}'_0 \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{E}''_0 \cdot \mathbf{u}_z = 0$ , car l'équation de Maxwell-Gauss donne  $-\mathbf{E}'_0 \cdot \mathbf{u}_z e^{-z/l_m} + \mathbf{E}''_0 \cdot \mathbf{u}_z e^{z/l_m} = 0$  quel que soit  $z$  alors que les fonctions  $e^{-z/l_m}$  et  $e^{z/l_m}$  forment une partie libre.

Mais le vecteur de Poynting moyen  $\langle \mathbf{R} \rangle$  dans la lame n'est pas nul puisqu'elle transmet une partie de l'énergie électromagnétique incidente, alors que  $\langle \mathbf{R}' \rangle = \langle \mathbf{R}'' \rangle = 0$  ! On ne peut donc plus dire, comme au § I.A.1.d., que  $\langle \mathbf{R} \rangle$  est la somme de  $\langle \mathbf{R}' \rangle$  et  $\langle \mathbf{R}'' \rangle$  : au contraire, il y a des interférences en ce qui concerne le vecteur de Poynting (comme le permet sa non linéarité en fonction du champ électrique) ; et par rapport au cas du § I.A.1.d. où il n'y avait pas d'interférences, on peut dire qu'on se trouve dans une situation diamétralement opposée où il n'y a que des interférences (puisque  $\langle \mathbf{R}' \rangle = \langle \mathbf{R}'' \rangle = 0$ ) !



c. La densité réelle de courant volumique libre  $\mathbf{j}^r$  est en quadrature avec  $\mathbf{E}^r$  dans le domaine où  $\omega \gg \omega_c$ , car la représentation complexe de  $\mathbf{j}^r$  s'écrit  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \cong i \frac{\sigma_0 \omega_c}{\omega} \mathbf{E}$  : la conductivité est quasiment imaginaire pure.

Le théorème de Poynting (voir § I.A.1.c.) s'écrit  $\text{div} \mathbf{R} + \frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{j}^r \cdot \mathbf{E}^r$  : en effet,  $\sigma_d = 0$  car il n'y a pas de dissipation d'énergie électromagnétique par cession aux charges liées (le milieu n'étant ni diélectrique ni magnétique – ce qui permet d'ailleurs d'exprimer la densité d'énergie :  $w = \epsilon_0 \frac{\mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}$ ). En prenant la moyenne temporelle de chaque membre sur une période, et en utilisant le fait qu'elle commute avec l'opérateur divergence, on obtient  $\text{div} \langle \mathbf{R} \rangle + \left\langle \frac{\partial w}{\partial t} \right\rangle = -\langle \mathbf{j}^r \cdot \mathbf{E}^r \rangle$ . De plus, sans même connaître l'expression de  $w$ , on sait que c'est une fonction du temps périodique – la période de l'onde étant une de ses périodes – donc la moyenne de sa dérivée est nulle :  $\left\langle \frac{\partial w}{\partial t} \right\rangle = 0$  ; et la moyenne du produit scalaire de  $\mathbf{j}^r$  et  $\mathbf{E}^r$  se calcule à l'aide des représentations complexes  $\langle \mathbf{j}^r \cdot \mathbf{E}^r \rangle \cong \frac{1}{2} \Re e \left( \frac{\sigma_0}{-i\omega/\omega_c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \right) \cong 0$  : elle est nulle car  $\mathbf{j}^r$  et  $\mathbf{E}^r$  sont en quadrature dans le domaine où  $\omega \gg \omega_c$ . Finalement, on a  $\text{div} \langle \mathbf{R} \rangle = 0$  :  $\langle \mathbf{R} \rangle$  est à flux conservatif. Comme le système est invariant par toute translation parallèle à  $Ox$  ou  $Oy$ ,  $\langle \mathbf{R} \rangle$  ne dépend que de  $z$  ; donc  $\langle \mathbf{R} \rangle \cdot \mathbf{u}_z$  est uniforme. Or dans notre cas on sait même que  $\langle \mathbf{R} \rangle$  est colinéaire à  $\mathbf{u}_z$ , donc finalement  $\langle \mathbf{R} \rangle$  est uniforme.

La moyenne temporelle  $\langle \mathbf{R}_t \rangle$  du vecteur de Poynting de l'onde transmise dans le domaine  $z > a$  est donc égale à la moyenne temporelle  $\langle \mathbf{R} \rangle$  dans la lame, dont on a vu qu'elle se réduit à un terme d'interférences qu'on va exprimer en fonction de  $\mathbf{E}'_0$  et  $\mathbf{E}''_0$ . Reprenons pour cela le raisonnement du § I.A.1.d. : ce qui change ici, avec  $\mathbf{E} = (\mathbf{E}'_0 e^{-z/l_m} + \mathbf{E}''_0 e^{z/l_m}) e^{-i\omega t}$ , est l'expression de l'induction magnétique tirée de

l'équation de Maxwell-Faraday,  $\mathbf{u}_z \times \frac{d}{dz} (\mathbf{E}'_0 e^{-z/l_m} + \mathbf{E}''_0 e^{z/l_m}) e^{-i\omega t} = -(-i\omega \mathbf{B})$  ; donc

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{i}{\omega \mu_0 l_m} \mathbf{u}_z \times (\mathbf{E}'_0 e^{-z/l_m} - \mathbf{E}''_0 e^{z/l_m}) e^{-i\omega t}. \text{ En utilisant } \mathbf{E}'_0 \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{E}''_0 \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{0}, \text{ on en déduit}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R} \rangle &= \frac{1}{2} \Re e (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \\ &= \frac{1}{2} \Re e \left\{ (\mathbf{E}'_0{}^* e^{-z/l_m} + \mathbf{E}''_0{}^* e^{z/l_m}) \times \left[ \frac{i}{\omega \mu_0 l_m} \mathbf{u}_z \times (\mathbf{E}'_0 e^{-z/l_m} - \mathbf{E}''_0 e^{z/l_m}) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2\omega \mu_0 l_m} \Re e \left[ i (\mathbf{E}'_0{}^* e^{-z/l_m} + \mathbf{E}''_0{}^* e^{z/l_m}) (\mathbf{E}'_0 e^{-z/l_m} - \mathbf{E}''_0 e^{z/l_m}) \mathbf{u}_z \right] \\ &= -\frac{1}{2} Y_0 |N| \Im m \left[ |\mathbf{E}'_0|^2 e^{-2z/l_m} - \mathbf{E}'_0 \cdot \mathbf{E}''_0 + \mathbf{E}''_0{}^* \cdot \mathbf{E}'_0 - |\mathbf{E}''_0|^2 e^{2z/l_m} \right] \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

la notation  $\Im m$  désignant la partie imaginaire d'une grandeur complexe. Finalement, puisque  $|\mathbf{E}'_0|^2$  et  $|\mathbf{E}''_0|^2$  sont réels, cela donne

$$\boxed{\langle \mathbf{R}_t \rangle = -Y_0 |N| \Im m (\mathbf{E}'_0 \cdot \mathbf{E}''_0{}^*) \mathbf{u}_z}, \quad \text{toujours avec } Y_0 = \frac{1}{\mu_0 c} = \epsilon_0 c = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}.$$

Ce résultat montre bien un champ  $\langle \mathbf{R} \rangle$  uniforme, exigeant  $\mathbf{E}'_0$  et  $\mathbf{E}''_0$  non nuls ensemble pour que  $\langle \mathbf{R}_t \rangle$  soit non nul. Et comme, en incidence normale, aucun effet polarisant ne peut se manifester, on voit que

$\langle \mathbf{R}_t \rangle$  est non nul si et seulement si les deux ondes évanescentes associées à  $\mathbf{E}'_0$  et  $\mathbf{E}''_0$  ne sont ni en phase ni en opposition de phase en tout point.

Au moins pour  $a$  suffisamment grand devant  $l_m$ , on s'attend à ce que  $\mathbf{E}'_0$  soit quasiment indépendant de  $a$ , et que  $\mathbf{E}''_0$  décroisse (exponentiellement) avec  $a$  ; donc  $\langle \mathbf{R}_t \rangle$  doit être à peu près une fonction exponentiellement décroissante de  $a$ . Quant au déphasage entre  $\mathbf{E}'_0$  et  $\mathbf{E}''_0$ , les expressions du § I.A.3.d montreront qu'il vaut  $\pi + 2 \arctan|N|$ , et ne dépend pas de  $a$ . Ces expressions montrent aussi, comme prévu pour  $a$  suffisamment grand devant  $l_m$ , une variation avec  $a$  de l'amplitude de la deuxième onde évanescente en  $e^{-a/l_m}$  sur la seconde face de la lame, donc une variation de  $\mathbf{E}''_0$  en  $e^{-2a/l_m}$ , et de  $\mathbf{E}_{0t}$  en  $e^{-a/l_m}$ .

**Le passage de l'énergie électromagnétique au travers de la lame est possible à cause de la réflexion de la première onde transmise sur la face postérieure de la lame et des interférences qui en résultent, ceci étant d'autant plus important que  $a$  est faible vis à vis de  $l_m$ .**

d. Comme au § I.A.1.a, les relations de passage sur les faces de la lame immobile vont nous donner des expressions reliant  $\mathbf{E}_{0t}$ ,  $\mathbf{E}'_0$  et  $\mathbf{E}''_0$  à  $\mathbf{E}_{0i}$ .

Un raisonnement similaire à celui du § I.A.3.b. montre que :

avant la lame ( $z < 0$ ),  $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_{0i} e^{ik_0 z} + \mathbf{E}_{0r} e^{-ik_0 z}) e^{-i\omega t}$ , avec  $\mathbf{E}_{0i} \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{E}_{0r} \cdot \mathbf{u}_z = 0$  ;

après la lame ( $z > a$ ),  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{0t} e^{ik_0 z} e^{-i\omega t}$  avec  $\mathbf{E}_{0t} \cdot \mathbf{u}_z = 0$  (il n'est physiquement pas possible qu'il existe une onde se propageant vers la lame, puisqu'il n'y a plus aucun obstacle susceptible de l'engendrer par réflexion).

Sur le dioptre d'équation  $z = 0$ , la continuité de  $\mathbf{E}$  donne  $\mathbf{E}'_0 + \mathbf{E}''_0 = \mathbf{E}_{0i} + \mathbf{E}_{0r}$  (3)

tandis que celle de  $i\omega \mathbf{B} = \mathbf{u}_z \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}$  donne  $\mathbf{u}_z \times \left( -\frac{1}{l_m} \mathbf{E}'_0 + \frac{1}{l_m} \mathbf{E}''_0 \right) = \mathbf{u}_z \times (ik_0 \mathbf{E}_{0i} - ik_0 \mathbf{E}_{0r})$  ; en multipliant vectoriellement par  $\mathbf{u}_z$  membre à membre, et en utilisant  $\mathbf{E}'_0 \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{E}''_0 \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{E}_{0i} \cdot \mathbf{u}_z = \mathbf{E}_{0r} \cdot \mathbf{u}_z = 0$  puis

$\frac{1}{k_0 l_m} = \frac{\lambda_0}{2\pi} \frac{2\pi|N|}{\lambda_0} = |N|$ , il vient  $i|N|(\mathbf{E}'_0 - \mathbf{E}''_0) = \mathbf{E}_{0i} - \mathbf{E}_{0r}$  (4). De la même façon, sur le dioptre

d'équation  $z = a$ , ces relations de continuité donnent  $\mathbf{E}'_0 e^{-a/l_m} + \mathbf{E}''_0 e^{a/l_m} = \mathbf{E}_{0t}$  (5) et

$i|N|(\mathbf{E}'_0 e^{-a/l_m} - \mathbf{E}''_0 e^{a/l_m}) = \mathbf{E}_{0t}$  (6). On a donc un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues ( $\mathbf{E}_{0r}$ ,  $\mathbf{E}_{0t}$ ,  $\mathbf{E}'_0$  et  $\mathbf{E}''_0$ ) et une donnée ( $\mathbf{E}_{0i}$ ) : on peut en tirer  $\mathbf{E}'_0$  et  $\mathbf{E}''_0$  en fonction de  $\mathbf{E}_{0i}$  en additionnant membre à membre (3) et (4) et en soustrayant membre à membre (5) et (6), ce qui donne

$$\begin{cases} (1+i|N|)\mathbf{E}'_0 + (1-i|N|)\mathbf{E}''_0 = 2\mathbf{E}_{0i} \\ (1-i|N|)e^{-a/l_m}\mathbf{E}'_0 + (1+i|N|)e^{a/l_m}\mathbf{E}''_0 = 0 \end{cases}$$

et, d'après les formules de Cramer

$$\mathbf{E}'_0 = \frac{(1+i|N|)e^{a/l_m}}{(1+i|N|)^2 e^{a/l_m} - (1-i|N|)^2 e^{-a/l_m}} 2\mathbf{E}_{0i}$$

$$\mathbf{E}''_0 = -\frac{(1-i|N|)e^{-a/l_m}}{(1+i|N|)^2 e^{a/l_m} - (1-i|N|)^2 e^{-a/l_m}} 2\mathbf{E}_{0i}$$

$$\mathbf{E}'_0 = \frac{(1+i|N|)e^{a/l_m}}{(1-|N|^2)2 \operatorname{sh} \frac{a}{l_m} + i|N|4 \operatorname{ch} \frac{a}{l_m}} 2\mathbf{E}_{0i}$$

$$\mathbf{E}''_0 = -\frac{(1-i|N|)e^{-a/l_m}}{(1-|N|^2)2 \operatorname{sh} \frac{a}{l_m} + i|N|4 \operatorname{ch} \frac{a}{l_m}} 2\mathbf{E}_{0i}$$

Avec l'équation (5), on obtient alors

$$\mathbf{E}_{0t} = \frac{2i|N|}{(1-|N|^2) \operatorname{sh} \frac{a}{l_m} + i|N|2 \operatorname{ch} \frac{a}{l_m}} \mathbf{E}_{0i}$$

Grâce à  $\langle \mathbf{R}_t \rangle = -Y_0 |N| \Im m(\mathbf{E}'_0 \cdot \mathbf{E}''_0^*) \mathbf{u}_z$ , on en déduit

$$\langle \mathbf{R}_t \rangle = -Y_0 |N| \frac{-2|N| 4 |\mathbf{E}_{0i}|^2}{(1-|N|^2)^2 4 \operatorname{sh}^2 \frac{a}{l_m} + |N|^2 16 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{l_m}} \mathbf{u}_z$$

$$\langle \mathbf{R}_t \rangle = \frac{16 |N|^2}{(1-|N|^2)^2 4 \operatorname{sh}^2 \frac{a}{l_m} + |N|^2 16 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{l_m}} \frac{1}{2} Y_0 |\mathbf{E}_{0i}|^2 \mathbf{u}_z$$

$$\boxed{\langle \mathbf{R}_t \rangle = \frac{1}{1 + \left( \frac{1+|N|^2}{2|N|} \right)^2 \operatorname{sh}^2 \frac{a}{l_m}} \langle \mathbf{R}_i \rangle}$$

On constate que  $\langle \mathbf{R}_t \rangle \cong \langle \mathbf{R}_i \rangle$  si  $a \ll l_m$ , et que les prédictions qualitatives du § I.A.3.c. sur le comportement de  $\langle \mathbf{R}_t \rangle$  sont réalisées. Il n'y a pas de phénomènes de résonance pour  $\langle \mathbf{R}_t \rangle$ , car la phase des ondes dans la lame ne se « propage » pas.

e. Pour  $a = l_m$ , la norme de  $\langle \mathbf{R}_t \rangle$  est 31 % de celle obtenue pour  $a = 0$  ; pour  $a = 2 l_m$  : 4,5 % ; pour  $a = 10 l_m$  :  $5,2 \cdot 10^{-7}$  %.

## I.B. Réflexion totale en incidence oblique

### I.B.1. Réflexion et transmission partielle sur un dioptre plan

a. Comme le vecteur  $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + i \mathbf{u}''$  est unitaire, on a

$$\mathbf{u}^2 = (\mathbf{u}' + i \mathbf{u}'')^2 = (\mathbf{u}'^2 - \mathbf{u}''^2) + i 2 \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'' = 1,$$

donc  $\mathbf{u}'^2 - \mathbf{u}''^2 = 1$  et  $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'' = 0$ .

La forme générale des lois de la réflexion et de la réfraction d'une onde plane monochromatique progressive sur un dioptre plan immobile est l'égalité des pulsations, et des composantes parallèles au dioptre des vecteurs  $n\mathbf{u}$ , pour les ondes incidente, réfléchi et transmise ; en désignant par l'indice // ces composantes, cela donne  $\mathbf{u}_{//} = n \mathbf{u}_{//}$ . En considérant les parties réelle et imaginaire de cette égalité, cela donne  $\mathbf{u}'_{//} = n \mathbf{u}_{//}$  et  $\mathbf{u}''_{//} = \mathbf{0}$  car  $\mathbf{u}_i$  est réel (l'onde incidente est homogène). Donc  $\mathbf{u}''$  est perpendiculaire au dioptre ; donc  $\mathbf{u}'$ , normal à  $\mathbf{u}''$ , est parallèle au dioptre. Donc la partie réelle de  $\mathbf{u}$  est connue :  $\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_{//} = n \mathbf{u}_{//}$  ; la direction de la partie imaginaire est normale au dioptre, sa norme vaut  $\|\mathbf{u}''\| = \sqrt{\mathbf{u}'^2 - 1} = \sqrt{n^2 \mathbf{u}_{//}^2 - 1} = \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}$ , et sa direction est fixée parce qu'il n'est pas plausible que les champs de l'onde transmise divergent quand on s'éloigne infiniment du dioptre.

On obtient aussi facilement ce résultat en écrivant  $\mathbf{u}_{//} = n \mathbf{u}_{//}$  et  $\mathbf{u}^2 = 1$  en coordonnées cartésiennes.

En résumé, 
$$\boxed{\mathbf{u} = n \mathbf{u}_{//} + i \sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1} \mathbf{u}_z}$$

Donc l'onde transmise se propage parallèlement à  $\mathbf{u}_{//}$ , et elle s'atténue exponentiellement dans la direction et le sens de  $\mathbf{u}_z$  ; il s'agit d'une onde évanescente.

On note que  $l_t = \frac{1}{k_0 \|\mathbf{u}''\|}$  ; c'est donc la *profondeur de pénétration de l'onde évanescente*.

b.  $l_t = 0,27 \text{ }\mu\text{m}$ .

c. On reprend la méthode déjà utilisée au I.A.1.c., pour l'onde évanescente transmise décrite par  $\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + ik_0 \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{r}}$  ; dans l'expression du vecteur de Poynting complexe, il suffit de remplacer  $\mathbf{E}_1$  par  $\mathbf{E}_0$ , et  $\mathbf{u}_z$  par  $\mathbf{u}$ , mais comme ce dernier vecteur est complexe il faut prendre garde au fait que  $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{u} = 0 \neq \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{u}^*$ . La forme de la moyenne temporelle  $\langle \mathbf{R} \rangle$  du vecteur de Poynting de l'onde transmise est donc moins simple :

$$\langle \mathbf{R} \rangle(0_+) = \frac{1}{2} Y_0 \left\{ \|\mathbf{E}_0\|^2 \mathbf{u}' - \Re \left[ (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{u}^*) \mathbf{E}_0^* \right] \right\} ;$$

contrairement à ce que l'on a pour une onde homogène, ce vecteur n'est pas parallèle à  $\mathbf{u}'$ , et sa direction dépend de la polarisation !

Mais, indépendamment de la polarisation, le théorème de Poynting donne toujours  $\text{div} \langle \mathbf{R} \rangle = 0$  (voir § I.A.3.c.). Comme les champs de cette onde évanescente s'atténuent proportionnellement à  $\exp(-k_0 \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{r})$ , on a  $\langle \mathbf{R} \rangle(z) = \exp(-2k_0 \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{r}) \langle \mathbf{R} \rangle(0_+)$ , et le théorème de Poynting donne  $\mathbf{u}'' \cdot \langle \mathbf{R} \rangle = 0$ . Or  $\mathbf{u}''$  est perpendiculaire au dioptre ; donc  $\langle \mathbf{R} \rangle$  est parallèle au dioptre, quelle que soit la polarisation.

*Le flux moyen d'énergie transmise, par l'onde évanescente au travers du dioptre, est donc nul ; c'est pourquoi on dit qu'il y a réflexion totale* (on pourrait montrer en effet que le flux moyen de l'onde réfléchi au travers du dioptre est égal au flux moyen de l'onde incidente).

Mais ceci n'est vrai que pour les valeurs moyennes : à un instant donné, il peut y avoir transmission d'énergie par l'onde évanescente au travers du dioptre vers le domaine  $z > 0$ , compensé un quart de période plus tard par le flux opposé !

En effet, on peut calculer facilement les valeurs instantanées du vecteur de Poynting dans le cas monochromatique, en disant que  $\mathbf{E}^r = \frac{\mathbf{E} + \mathbf{E}^*}{2}$  et  $\mathbf{H}^r = \frac{\mathbf{H} + \mathbf{H}^*}{2}$ , donc

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}^r \times \mathbf{H}^r = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}}{4} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^*}{4} = \Re \left( \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right) + \Re \left( \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{2} \right).$$

$\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2}$  est indépendant de  $t$ , sa partie réelle (premier terme ci-dessus) est la moyenne temporelle  $\langle \mathbf{R} \rangle = \Re \mathbf{R}$ .

Mais  $\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{2}$  est proportionnel à  $e^{-i2\omega t}$  ; sa partie réelle est la partie fluctuante de  $\mathbf{R}$ , monochromatique de pulsation  $2\omega$ .

Ici,  $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \left[ \mathbf{E}_0 \times (Y_0 \mathbf{u} \times \mathbf{E}_0) \right] e^{-2k_0 \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{r}} e^{-i2\omega t + i2k_0 \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{r}}$ , et  $\mathbf{E}_0 \times (Y_0 \mathbf{u} \times \mathbf{E}_0) = Y_0 \left[ (\mathbf{E}_0^2) \mathbf{u} - (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{E}_0 \right] = (Y_0 \mathbf{E}_0^2) \mathbf{u}$ , donc l'amplitude complexe de cette partie fluctuante est colinéaire à  $\mathbf{u}$ . On voit donc que, quelle que soit la polarisation incidente, la polarisation de la partie fluctuante de  $\mathbf{R}$  est toujours elliptique, de demi-grand et petit axes  $\mathbf{u}'$  et  $\mathbf{u}''$  respectivement, tournant de  $\mathbf{u}'$  vers  $\mathbf{u}''$ .

Si on étudie la réflexion totale d'un pinceau laser au lieu d'une onde plane, comme son extension transversale est limitée, on s'attend à ce que l'énergie incidente transmise pendant un quart de période se propage dans le domaine  $z > 0$  avant d'être totalement réfléchi ; donc *le pinceau laser réfléchi sera décalé d'une fraction de longueur d'onde par rapport à la zone d'incidence* (ce décalage pouvant être multiple, et dépendant de la polarisation – effets Goös-Hänchen et Imbert-Fedorov).

d. Considérons l'axe  $Ox$  parallèle au dioptre et au plan d'incidence ; il est donc normal aux stries du réseau. Sur le dioptre, la représentation complexe du champ électromagnétique de l'onde incidente est

proportionnelle à  $\exp\left(i2\pi\frac{n\sin\theta}{\lambda_0}x\right)$ . Toujours sur le dioptre, la représentation complexe du champ électromagnétique de l'onde transmise est modulée par le coefficient de transmission  $t(x)$ , périodique de période  $h$  : on peut donc décomposer  $t(x)$  en série de Fourier, composée de termes en  $\exp\left(-i2\pi\frac{m}{h}x\right)$  -  $m$  est un entier relatif. Le champ électromagnétique transmis est donc une somme de termes en  $\exp\left[i2\pi\left(n\sin\theta - m\frac{\lambda_0}{h}\right)\frac{x}{\lambda_0}\right]$ . Avec le dioptre non strié, on avait réflexion totale car  $n\sin\theta > 1$  : la dépendance en  $\exp\left(i2\pi\frac{n\sin\theta}{\lambda_0}x\right)$  donne naissance, dans le domaine  $z > 0$ , à une onde transmise évanescence. Mais avec le dioptre strié, les termes ci-dessus peuvent **donner naissance à des ondes transmises planes homogènes progressives** (et non plus évanescences) si  $\left|n\sin\theta - m\frac{\lambda_0}{h}\right| < 1$  ; ces ondes pourront avoir un flux moyen d'énergie non nul au travers du dioptre, et **la réflexion ne sera plus totale**.

Pour les réseaux usuels, l'amplitude des composantes de Fourier de  $t(x)$  décroît avec  $|m|$  ; le phénomène sera donc notable **pour un pas  $h$  de l'ordre de  $\lambda_0$** .

### I.B.2. Réflexion totale frustrée

On considère maintenant que le vide n'occupe que le domaine compris entre les plans d'équations  $z = 0$  et  $z = a$ , et qu'en dehors se trouvent des milieux d'indices réels  $n_1$  et  $n_2$  supérieurs à 1, pour  $z < 0$  et  $z > a$  respectivement. L'onde incidente est toujours celle décrite au début du § I.B.

a. Du fait de la valeur finie de  $a$ , par analogie avec le § I.A.3. **on peut s'attendre à trouver dans le milieu de sortie ( $z > a$ ) une onde plane homogène progressive**, car  $n_1 \sin\theta_1 < n_2$  (en ce qui concerne l'onde transmise par le premier dioptre, le second joue le rôle d'un convertisseur : il réfracte l'onde évanescence engendrée par le premier dioptre, pour donner une onde homogène progressive ; ce faisant, il réfléchit aussi l'onde évanescence, provoquant des interférences qui permettent la circulation de l'énergie d'une face à l'autre de la lame de vide - ce second dioptre joue aussi le rôle d'une sonde).

Cet effet est notable si l'amplitude des champs électromagnétiques sur le second dioptre n'est pas négligeable vis à vis de l'amplitude sur le premier, donc **si  $a$  est au plus de l'ordre de la profondeur de pénétration de l'onde évanescence**,  $\frac{\lambda_0}{2\pi\sqrt{n_1^2 \sin^2\theta - 1}}$  (voir § I.B.1.a.).

b. La forme générale du champ électrique dans le vide est

$$\mathbf{E} = \left( \mathbf{E}'_0 e^{-k_0 u' r} + \mathbf{E}''_0 e^{k_0 u' r} \right) e^{-i\alpha z + ik_0 u' r}, \text{ avec } \mathbf{u}' = n \mathbf{u}_z \text{ et } \mathbf{u}'' = \sqrt{n_1^2 \sin^2\theta_1 - 1} \mathbf{u}_z.$$

Comme l'a montré le théorème de Poynting au § I.B.1.c.,  $\langle \mathbf{R}' \rangle_{\mathbf{u}_z} = \langle \mathbf{R}'' \rangle_{\mathbf{u}_z} = 0$ .

Par contre,  $\langle \mathbf{R} \rangle_{\mathbf{u}_z} \neq 0$  : **il n'y a pas de relation simple entre ces composantes  $\langle \mathbf{R} \rangle_{\mathbf{u}_z}$ ,  $\langle \mathbf{R}' \rangle_{\mathbf{u}_z}$  et  $\langle \mathbf{R}'' \rangle_{\mathbf{u}_z}$ .**

c. Avec des raisons analogues à celles développées au § I.A.3.c. pour  $a$  suffisamment grand devant  $l_m$ , on s'attend à ce que  $\mathbf{E}'_0$  soit quasiment indépendant de  $a$ , et que  $\mathbf{E}''_0$  décroisse (exponentiellement) avec  $a$  ; donc **le facteur énergétique de transmission  $T$  de la lame doit être à peu près une fonction exponentiellement décroissante de  $a$ . Le passage de l'énergie électromagnétique au travers de la lame est rendu possible par le seul effet des interférences concernant  $\langle \mathbf{R} \rangle_{\mathbf{u}_z}$ .**

**I.C. Étude de la diffraction en termes de filtrage angulaire d'ondes planes**

a. L'hypothèse sous-jacente à l'expression  $u(x, y, 0) = \tau(x, y)u_0(x, y, 0)$  est que les *dimensions caractéristiques de variation de  $\tau(x, y)$  ne doivent pas être trop petites vis à vis de la longueur d'onde  $\lambda_0$* . On a aussi supposé implicitement que *le milieu constituant l'obstacle est linéaire et isotrope*.

b. Ainsi  $A_0(v_x, v_y; 0)$  et  $A(v_x, v_y; 0)$  sont les transformées de Fourier directes bidimensionnelles de  $u_0(x, y, 0)$ , et  $u(x, y, 0)$  respectivement. Donc, d'après la propriété utilisant le produit de convolution et la transformation de Fourier (rappelée dans l'introduction de l'épreuve),  $u(x, y, 0) = \tau(x, y)u_0(x, y, 0)$  implique la relation

$$A(v_x, v_y; 0) = \tilde{\tau} * A_0(v_x, v_y; 0)$$

c. La fonction  $u(x, y, z)$  obéit à l'équation d'Helmholtz  $\Delta u + k_0^2 u = 0$ , car  $\mathbf{E}$  y obéit (*on est dans le vide sans charges ni courants*) et  $u$  est l'amplitude (complexe) d'une composante cartésienne de  $\mathbf{E}$ .

En utilisant  $u(x, y, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} A(v_x, v_y; z) e^{i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}} dv_x dv_y$ , et toujours avec la notation  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

l'équation d'Helmholtz s'écrit

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \iint_{\mathbb{R}^2} A(v_x, v_y; z) e^{i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}} dv_x dv_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \iint_{\mathbb{R}^2} A(v_x, v_y; z) e^{i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}} dv_x dv_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_{\mathbb{R}^2} A(v_x, v_y; z) e^{i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}} dv_x dv_y + k_0^2 \iint_{\mathbb{R}^2} A(v_x, v_y; z) e^{i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}} dv_x dv_y = 0$$

mais grâce au théorème de dérivation sous le signe somme, il vient

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \left[ -4\pi^2 (v_x^2 + v_y^2) A(v_x, v_y; z) + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k_0^2 A \right] e^{i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}} dv_x dv_y = 0 .$$

Cette intégrale est une fonction de  $x$  et  $y$ , paramétrée par  $z$ , identiquement nulle. Or c'est aussi la transformée de Fourier bidimensionnelle d'une fonction de  $v_x, v_y$  paramétrée par  $z$ ; donc cette fonction-ci est identiquement nulle, ce qui se traduit par l'équation aux dérivées partielles par rapport à  $z$  pour  $A(v_x, v_y; z)$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \left[ k_0^2 - 4\pi^2 (v_x^2 + v_y^2) \right] A(v_x, v_y; z) = 0 .$$

On aurait aussi pu trouver ce résultat en prenant la transformée de Fourier directe bidimensionnelle de l'équation d'Helmholtz  $\Delta u + k_0^2 u = 0$ , et en utilisant l'expression  $i2\pi v_x A(v_x, v_y; z)$  de la transformée de Fourier de  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

d. En introduisant les paramètres sans dimension  $\alpha = \lambda_0 v_x$ ,  $\beta = \lambda_0 v_y$  et  $\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2$ , cette équation s'écrit  $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + (\gamma k_0)^2 A(v_x, v_y; z) = 0$ , et *elle s'intègre immédiatement par rapport à  $z$ , sous la forme d'une combinaison linéaire de  $e^{i\gamma k_0 z}$  et  $e^{-i\gamma k_0 z}$ , avec des coefficients qui dépendent de  $v_x$  et  $v_y$* . Si  $\gamma^2$  est positif, appelons  $\gamma$  sa racine positive; si  $\gamma^2$  est négatif, ses racines sont imaginaires pures, et on appelle



$\gamma$  celle dont la partie imaginaire est positive ; munis de cette convention, nous allons examiner la signification du terme  $e^{-i\gamma k_0 z} e^{i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}$  qui apparaît dans l'expression de  $u(x, y, z)$ . *Dans le premier cas, ce terme représente une onde plane monochromatique homogène progressive, qui se propage vers l'obstacle diffractant mais dans le domaine  $z > 0$ , alors que physiquement il n'y a dans ce domaine rien qui puisse engendrer une telle onde ; dans le second cas, ce terme représente une onde inhomogène se propageant dans le domaine  $z > 0$  avec une amplitude qui diverge pour  $z \rightarrow +\infty$ . L'existence de ce terme n'est donc pas plausible ; on retient donc uniquement les termes de la forme  $e^{i\gamma k_0 z} e^{i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}$ .*

Alors la solution de l'équation aux dérivées partielles par rapport à  $z$  s'écrit simplement

$$A(f_X, f_Y ; z) = A(f_X, f_Y ; 0) e^{i\gamma k_0 z}$$

Le paramètre sans dimension  $\gamma$  est le *cosinus directeur, sur l'axe Oz, du vecteur de propagation de l'onde représentée par  $e^{i\gamma k_0 z} e^{i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}$ .*

e. Les résultats précédents donnent

$$u(x, y, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} A(v_X, v_Y ; z) e^{i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}} dv_X dv_Y = \iint_{\mathbb{R}^2} A(v_X, v_Y ; 0) e^{i\gamma k_0 z} e^{i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}} dv_X dv_Y$$

Dans le cas où les valeurs utiles de  $\alpha$  et  $\beta$  sont très petites devant 1, on a  $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \cong 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$ , donc  $u(x, y, z)$  est la transformée de Fourier inverse bidimensionnelle de la fonction  $e^{ik_0 z} A(v_X, v_Y ; 0) \exp\left\{-i\pi\left[\left(\sqrt{\lambda_0 z} v_X\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_0 z} v_Y\right)^2\right]\right\}$  ; le formulaire de l'introduction permet de voir immédiatement que  $u(x, y, z)$  est le produit de convolution de  $u(x, y, 0)$  et de

$$e^{ik_0 z} \frac{1}{\sqrt{\lambda_0 z}} \exp\left[-i\frac{\pi}{4} + i\pi\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda_0 z}}\right)^2\right] \frac{1}{\sqrt{\lambda_0 z}} \exp\left[-i\frac{\pi}{4} + i\pi\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda_0 z}}\right)^2\right] = -\frac{i}{\lambda_0 z} e^{ik_0 z} \exp\left[ik_0 \frac{x^2 + y^2}{2z}\right] \text{ cette}$$

dernière fonction étant quasiment  $-\frac{i}{\lambda_0 r} e^{ik_0 r}$  (avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ) si  $|x|$  et  $|y|$  sont très petits

devant  $z$  (car dans ce cas  $r \cong z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$ ). On retrouve la formulation mathématique du principe d'Huyghens-Fresnel (qui peut donc être démontré ainsi), à condition de se restreindre à la diffraction aux petits angles (et on obtient en plus la valeur de la constante multiplicative :  $-\frac{i}{\lambda_0}$ ).

Les approximations faites sont bien sous-jacentes au principe d'Huyghens-Fresnel : on sait en effet que celui-ci n'est valable que pour l'étude de la diffraction aux petits angles (sinon il faudrait tenir compte du caractère vectoriel de la lumière, et aussi des facteurs d'inclinaison).

f. Lorsque  $\sqrt{v_X^2 + v_Y^2} > \frac{1}{\lambda_0}$ , les ondes planes monochromatiques progressives présentes dans la somme  $u(x, y, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} A(v_X, v_Y ; 0) e^{i\gamma k_0 z} e^{i2\pi \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}} dv_X dv_Y$  sont des ondes évanescentes, car alors  $\gamma = i|\gamma|$  ;  $\frac{\lambda_0}{2\pi|\gamma|}$  est leur profondeur de pénétration.

g. Avec  $\lambda_0 = 0,6 \mu\text{m}$  et  $\sqrt{v_X^2 + v_Y^2} = \frac{1}{2 \text{ nm}}$  (2 nm étant la limite de résolution latérale atteinte par la microscopie optique en champ proche),  $\frac{\lambda_0}{2\pi|\gamma|} \cong 0,32 \text{ nm}$ . Les valeurs accessibles à  $l_1 = \frac{\lambda_0}{2\pi\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}}$

pour une même longueur d'onde  $\lambda_0$  ne peuvent devenir aussi petites, car  $\sqrt{n^2 \sin^2 \theta - 1}$  ne peut pas prendre des valeurs aussi grandes que celles atteintes par  $|\gamma|$  ; donc de telles ondes évanescentes ne peuvent même pas être converties en ondes homogènes par réfraction sur un dioptre d'indices  $1-n$ .

*h.* Pour reproduire parfaitement le champ  $u(x, y, 0)$  dans l'image de l'objet, il faut que l'instrument d'optique en capte toutes les fréquences spatiales (ou les composantes de Fourier), y compris celles qui sont trop élevées pour engendrer des ondes planes homogènes. Ces composantes ne peuvent être détectées par un instrument d'optique « classique », ayant son diaphragme d'ouverture à une distance de l'objet très supérieure à la longueur d'onde ; **un diaphragme d'ouverture infiniment grand ne pourra pas conduire à une résolution idéale, mais seulement à une limite de résolution de l'ordre de  $\lambda_0$**  (car  $\frac{1}{\lambda_0}$  est la fréquence spatiale maximale qui puisse engendrer des ondes homogènes).

### I.D. Idées générales de la microscopie optique en champ proche

*a.* Dans la première méthode, on engendre devant la surface une onde évanescente de profondeur de pénétration  $l_i$  fixée, et en balayant cette surface avec la sonde placée juste au dessus d'elle à une distance de l'ordre de  $l_i$ , le signal enregistré par la pointe est sensible aux variations de distance entre lui et la surface : **c'est le mécanisme de la réflexion totale frustrée**, qui permet de déterminer la forme de la surface.

Dans la seconde méthode, les variations (à haute fréquence spatiale) de transmission de la surface engendrent des ondes évanescentes, mais seulement au voisinage de l'endroit où est localisée cette variation ; lors du balayage, la traversée de cette zone par la pointe sera responsable d'une variation du flux lumineux recueilli.

*b.* On peut obtenir des limites de résolution latérale et longitudinale valant 2 nm et 0,5 nm respectivement, tout en utilisant la lumière délivrée par un laser hélium-néon, car **on capte les ondes évanescentes engendrées par des détails de dimensions petites devant  $\lambda_0$**  ; la limite classique de résolution, donnée par le critère de Rayleigh, vient d'une théorie de la diffraction aux petits angles (la diffraction de Fraunhofer), qui **ne prend justement pas en compte les ondes évanescentes !**

*c.* La profondeur de pénétration des ondes évanescentes que l'on veut capter peut être de l'ordre de quelques nanomètres seulement : c'est pourquoi il faut approcher la sonde à cette distance.

Des détails de dimension latérale  $\delta \ll \lambda_0$  donnent pour  $\tau(x, y)$  un spectre en fréquences spatiales riche au voisinage de  $\frac{1}{\delta} \gg \frac{1}{\lambda_0}$ , et donc pour  $u(x, y, 0) = \tau(x, y)u_0(x, y, 0)$  aussi en incidence normale. Afin

de l'enregistrer il faut amener la sonde à une distance  $\Delta \approx \frac{\lambda_0}{2\pi|\gamma|} \approx \frac{\delta}{2\pi}$ . Avec  $\delta = 1$  nm et  $\lambda_0 = 0,6$   $\mu\text{m}$ , on trouve  $\Delta \approx 0,16$  nm.

*d.* Avec les microscopes usuels, la lentille frontale de l'objectif est située à une distance de l'objet très grande devant la profondeur de pénétration des ondes évanescentes que l'on veut capter ; c'est le contraire pour les microscopes optiques en champ proche, où les pointes sont situées à une distance de l'ordre de cette profondeur de pénétration. Donc la résolution de ces microscopes usuels est déterminée par la théorie usuelle de la diffraction qui néglige ces ondes évanescentes, c'est à dire par le critère de Rayleigh traditionnel – **alors qu'elle ne l'est plus avec les microscopes en champ proche.**

*e.* La résolution dans un microscope en champ proche est limitée par **le bruit** (optique, électronique), **la précision du balayage** et **le filtrage des vibrations parasites**, la dimension de la pointe, etc.



## II. DEUXIÈME PARTIE. - MICROSCOPIE À EFFET TUNNEL

### II.A. Effet tunnel quantique au travers d'une barrière de potentiel rectangulaire unidimensionnelle

a. D'après les relations de Louis de Broglie,  $\omega = \frac{E}{\hbar}$  et  $k_i = \frac{p_i}{\hbar}$ , où  $p_i$  désigne la quantité de

mouvement d'une particule incidente, dans le domaine  $z < 0$  où  $V = 0$  ; donc  $E = \frac{p_i^2}{2m}$ , et  $k_i = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ .

b. Le vecteur courant de probabilité  $\mathbf{j} = -i \frac{\hbar}{2m} (\psi^* \mathbf{grad} \psi - \psi \mathbf{grad} \psi^*)$  obéit à une équation de continuité qui traduit la conservation de la probabilité de présence dans tout l'espace (l'équation de Schrödinger ne concerne que des particules qui ne peuvent pas être annihilées ni créées) :

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = 0.$$

Une propriété analogue en électromagnétisme du vide (et sans courants dans l'espace) est le théorème de Poynting, où  $\mathbf{R}$  remplace  $\mathbf{j}$  et  $w$  remplace  $|\psi|^2$ .

c. Par analogie avec l'électromagnétisme, les facteurs de réflexion et de transmission  $R$  et  $T$  par la barrière sont les rapports des flux (moyens) de probabilité réfléchis et transmis par la barrière, au flux incident ; ils s'écrivent donc

$$R = \frac{\langle \mathbf{j}_r \rangle \cdot (-\mathbf{u}_z)}{\langle \mathbf{j}_i \rangle \cdot \mathbf{u}_z} \quad \text{et} \quad T = \frac{\langle \mathbf{j}_t \rangle \cdot \mathbf{u}_z}{\langle \mathbf{j}_i \rangle \cdot \mathbf{u}_z}$$

où  $\mathbf{j}_i$ ,  $\mathbf{j}_r$  et  $\mathbf{j}_t$  désignent les vecteurs courant de probabilité des particules incidentes, réfléchies et transmises.

Ici, comme  $V$  a la même valeur dans les domaines d'entrée ( $z < 0$ ) et de sortie ( $z > a$ ), le facteur de transmission est aussi  $T = \frac{|\psi_t|^2}{|\psi_i|^2}$ , où  $\psi_t$  et  $\psi_i$  représentent les fonctions d'onde transmise et incidente respectivement. De même, au § I.A.3., comme les indices des milieux extrêmes sont égaux (à 1), on a aussi

$T = \frac{\|\mathbf{E}_t\|^2}{\|\mathbf{E}_i\|^2}$  (voir pour cela le calcul de  $\langle \mathbf{R}_i \rangle$  au I.A.1.c) ; de ce point de vue,  $\psi$  est analogue à  $\mathbf{E}$ . Mais cette

analogie se prolonge dans les propriétés essentielles de ces deux paragraphes. En effet, les équations aux dérivées partielles auxquelles obéissent  $\mathbf{E}$  (équation d'Helmholtz) et  $\psi$  (équation de Schrödinger indépendante du temps) sont similaires, et entre ces équation  $k_0$  correspond à  $k_i$ , et  $k_0 |N| = \frac{1}{l_m}$  à  $K_b$  (défini ci-dessous). Enfin, les

relations de passage du § I.A.3 se traduisaient finalement par la continuité de  $\mathbf{E}$  et de  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}$ , ce qui est analogue

aux relations de passage pour  $\psi$ . Le tableau ci-dessous met en regard les principales grandeurs analogues de ces deux paragraphes :

§ I.A.3	§ II.A
E	$\psi$
$k_0$	$k_i = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$
$k_0  N  = \frac{1}{l_m}$	$K_b = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$

Le calcul du § I.A.3 permet de montrer que  $T = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+|N|^2}{2|N|}\right)^2 \text{sh}^2 \frac{a}{l_m}}$  ; le tableau montre que, pour en

déduire l'expression du facteur de transmission par la barrière, il convient de remplacer  $\frac{a}{l_m}$  par

$\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)} a}{\hbar}$ , et  $|N|$  par  $\frac{K_b}{k_i} = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}$ . On trouve donc

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \text{sh}^2 \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)} a}{\hbar}}$$

On considère que  $T$  est proportionnel à  $\exp(-2K_b a)$  lorsque la profondeur de pénétration

$\frac{1}{K_b} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$  est petite devant la largeur  $a$  de la barrière.

d. L'effet tunnel est mis en œuvre dans : l'émission  $\alpha$ , l'inversion de la molécule d'ammoniac (d'où l'horloge à ammoniac, le maser à ammoniac), l'émission de champ (d'où la microscopie ionique à cathode froide), la diode tunnel, l'effet Josephson (utilisé dans les SQUID pour mesurer des variations de champs magnétiques aussi faibles que  $10^{-15}$  T – ce qui permet d'étudier les champs créés par les tissus biologiques, etc.).

e. Comme la fonction d'onde  $\psi(z, t)$  à support borné, ce n'est pas un état propre de l'hamiltonien (qui serait en  $e^{ikz}$ ), et le support de son spectre en énergie (et en quantité de mouvement) n'est pas borné : même si l'énergie moyenne est inférieure à  $V_0$ , il y a des composantes spectrales de la fonction d'onde dont l'énergie est supérieure à  $V_0$ . Seules les composantes spectrales d'énergie  $E$  inférieure à  $V_0$  sont totalement réfléchies (car la largeur  $a$  de la barrière est infinie), mais les autres sont partiellement transmises ; la réflexion totale de la particule sur la barrière n'est donc pas rigoureuse. La présence de la fonction d'onde transmise s'accompagne d'une déformation de la fonction d'onde réfléchie (par rapport à la fonction d'onde incidente) : mais comme les composantes spectrales de la fonction d'onde transmise ne sont pas toutes évanescentes, cela s'accompagne aussi d'une diminution (par rapport à la fonction d'onde incidente) de la norme de la fonction d'onde réfléchie (d'après le théorème de Parseval), et c'est cela (mais non la présence d'une onde transmise) qui traduit la réflexion partielle. Le vecteur courant de probabilité de l'onde transmise est (toujours d'après le théorème de Parseval) la somme des vecteurs courants de ses différentes spectrales ; il n'est pas nul uniquement à cause des composantes spectrales d'énergie supérieure à  $V_0$ . Il permet de faire varier la norme de la fonction d'onde transmise, mais surtout auprès des moments de passage des fronts de la fonction d'onde incidente sur la marche de potentiel. Pour une composantes spectrale d'énergie  $E$  inférieure à  $V_0$ , la norme de la composante spectrale transmise reste constante, ce qui traduit encore la réflexion totale de la composante spectrale incidente malgré la présence de la composante spectrale transmise.

## II.B. Application aux électrons d'un métal

a. Il y a deux états (à cause du spin  $\pm 1/2$ ) par valeur de  $k$ , celles-ci étant équidistantes de  $\frac{2\pi}{H}$  pour satisfaire les « conditions aux limites périodiques » ; d'où une *densité d'états en  $k$*  valant  $\frac{H}{\pi}$ .

Or il y a  $N_1 H$  électrons dans le métal, donc à 0 K ils occupent tous les états de  $-k_F$  à  $k_F$  tel que  $\frac{H}{\pi} 2k_F = N_1 H$  (car la densité d'états en  $k$  est uniforme), donc  $k_F = \frac{\pi}{2} N_1$ . On en déduit l'énergie de Fermi

$$E_F = \frac{(\hbar k_F)^2}{2m} = \frac{(\hbar N_1)^2}{32m}$$

Expérimentalement, le *travail d'extraction  $W$*  peut être mesuré par la *fréquence de seuil de l'effet photoélectrique* ; on peut aussi mesurer, par la *méthode de Kelvin*, la *d.d.p. de contact entre le métal considéré et un autre métal dont le travail d'extraction est connu* (la d.d.p. de contact est la différence de leurs travaux d'extraction).

L'énergie potentielle d'un électron dans le vide, en dehors du métal, est  $E_F + W$ .

b. Le système étant invariant par toute translation parallèlement à  $Ox$  ou  $Oy$ , le potentiel scalaire ne dépend que de  $z$  ; or, dans l'espace vide séparant les deux surfaces métalliques, il obéit à l'équation de Laplace, donc c'est une fonction affine de  $z$  ; donc le *champ électrique est uniforme et parallèle à  $Oz$* .

Le diagramme de la figure 1 illustre le profil de variation de l'énergie potentielle d'un électron entre les deux métaux, en tenant compte de  $-eU > 0$ .

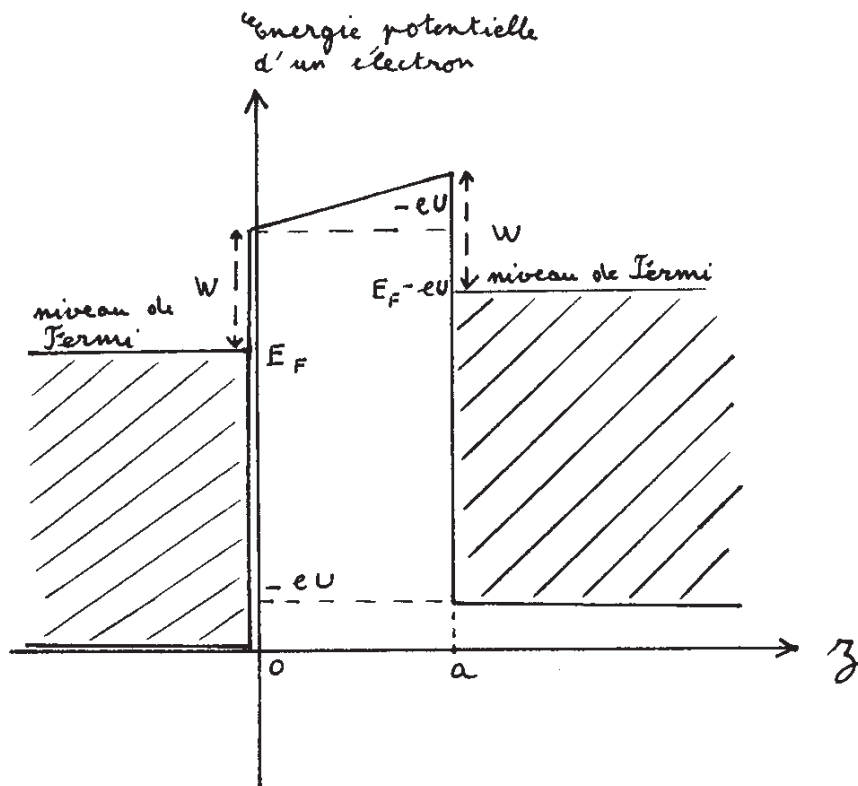


Figure 1. Profil de variation de l'énergie potentielle d'un électron entre les métaux

c. Dans l'expression du facteur de transmission (voir § II.A.c), la hauteur  $V_0$  de la barrière – qu'on considère symétrique – est ici environ  $E_F + W$  (car  $eU$  est négligeable vis à vis de  $E_F + W$ ), donc

$$T(E) = \frac{1}{1 + \frac{(E_F + W)^2}{4E(E_F + W - E)} \operatorname{sh}^2 \frac{\sqrt{2m(E_F + W - E)} a}{\hbar}}$$

d.  $T(E_F) \cong 3,1 \cdot 10^{-3}$ .

e. Les électrons ayant les composantes sur  $Oz$  de leurs vecteurs d'onde comprises entre  $k > 0$  et  $k + dk$  sont au nombre de  $\frac{H}{\pi} dk \frac{1}{H} = \frac{1}{\pi} dk$  par unité de longueur. La composante de leur vitesse sur  $Oz$  est  $\frac{\hbar k}{m} > 0$  ; en traversant l'espace entre les métaux dans le sens de  $Oz$ , ils créent la densité (linéique) de courant élémentaire  $dj_e^+ = (-e) \frac{1}{\pi} dk \frac{\hbar k}{m} T(E)$ . Or l'énergie cinétique d'un de ces électrons s'écrit  $\frac{(\hbar k)^2}{2m} = E - (-eU)$ , donc  $\frac{\hbar k}{m} dk = \frac{dE}{\hbar}$ . Finalement, la densité de courant  $j_e^+$  transmis par la barrière et dû aux électrons provenant de l'intérieur du métal situé en  $z < 0$  s'écrit

$$j_e^+ = \int_0^{E_F} (-e) \frac{1}{\pi} T(E) \frac{dE}{\hbar} = \int_{eU}^{E_F} (-e) \frac{1}{\pi} T(E) \frac{dE}{\hbar}$$

car le facteur de transmission est nul pour  $E$  compris entre 0 et  $-eU > 0$ .

f. De même, la densité de courant  $j_e^-$  transmis par la barrière et dû aux électrons provenant de l'intérieur du métal situé en  $z > a$  s'écrit  $j_e^- = - \int_{-eU}^{E_F - eU} (-e) \frac{1}{\pi} T(E) \frac{dE}{\hbar}$ , car le facteur de transmission est le même pour les deux sens de traversée de la barrière. La densité de courant totale, c'est-à-dire due aux électrons traversant la barrière dans les deux sens, est donc  $j_e = j_e^+ + j_e^- = - \int_{E_F}^{E_F - eU} (-e) \frac{1}{\pi} T(E) \frac{dE}{\hbar}$  : en fait, seuls contribuent au courant total les électrons d'énergie comprise entre  $E_F$  et  $E_F - eU$ , provenant du domaine  $z > a$  (les passages d'électrons d'énergie inférieure à  $E_F$  se compensent car le facteur de transmission est le même pour les deux sens de traversée). Comme on suppose  $|eU| \ll E_F$  et  $W$  et  $\frac{\hbar}{a} \sqrt{\frac{2W}{m}}$ ,  $T(E)$  ne varie presque pas entre

$E_F$  et  $E_F - eU$ , donc  $j_e \cong - \frac{2e^2}{h} T(E_F) U$ .

Ce résultat reste évidemment valable si  $U$  est positif (il suffit de changer le sens de l'axe  $Oz$  pour se ramener au cas précédent). Le sens du courant obtenu est bien en accord avec le signe de  $U$  dans un récepteur. Du point de vue de l'homogénéité de son expression, on note la présence du quantum de résistance  $e^2/h$ .

g. Les conditions de validité de l'expression  $j_e \cong \frac{4e^2}{h} T(E_F) U$  sont vérifiées, puisque  $|eU| = 0,1 \text{ eV}$  est effectivement petit devant  $E_F = 4 \text{ eV}$ ,  $W = 3 \text{ eV}$  et  $\frac{\hbar}{a} \sqrt{\frac{2W}{m}} \cong 1,7 \text{ eV}$  ; son application conduit à  $j_e \cong -24 \text{ nA}$ .

## II. C. LIMITES DE RÉOLUTION

Les résultats de cette partie permettent d'estimer les limites de résolution du microscope à effet tunnel.

### a. Résolution longitudinale (ou en profondeur)

Les intensités électriques à mesurer sont faibles car  $T(E_F) \ll 1$  :  $T(E_F)$  est quasiment proportionnel à  $\exp - \frac{2\sqrt{2mW}a}{\hbar}$ . Par différentiation logarithmique, on trouve que la variation relative minimale de l'intensité, que l'on sait détecter, s'écrit  $0,02 \cong \frac{2\sqrt{2mW} \delta a}{\hbar}$ , donc que  $\delta a \cong \underline{7 \text{ pm}}$ .

### b. Résolution latérale

La contribution de la zone de la plaque constituée d'un disque, de rayon  $\rho$ , ayant pour axe celui de la pointe, est grossièrement proportionnelle à

$$\int_a^{\sqrt{a^2+\rho^2}} e^{-r/b} 2\pi r dr = \left[ -2\pi b e^{-r/b} \right]_a^{\sqrt{a^2+\rho^2}} - \int_a^{\sqrt{a^2+\rho^2}} -2\pi b e^{-r/b} dr$$

$$= 2\pi \left[ (a+b)e^{-a/b} - \left( \sqrt{a^2+\rho^2} + b \right) e^{-\sqrt{a^2+\rho^2}/b} \right]$$

car l'élément d'aire  $2\pi\rho' d\rho'$  sur la plaque s'écrit aussi  $2\pi r dr$  (puisque  $r^2 = a^2 + \rho'^2$ ).

Avec les valeurs imposées par l'énoncé pour  $a$  (0,4 nm) et  $b$  (0,35 nm), la moitié du courant recueilli dans la pointe provient à peu près d'un disque de rayon  $\rho$  tel que  $\sqrt{a^2 + \rho^2} \cong 0,44 \text{ nm}$ , donc  $\rho \cong \underline{0,18 \text{ nm}}$ ; c'est l'ordre de grandeur de la limite de résolution latérale.

### III. TROISIÈME PARTIE. - MICROSCOPIE À FORCE ATOMIQUE

#### III.A. Étude de la déformation statique du bras de levier

*a.* Considérons le système fermé, constitué de l'élément de tige compris entre deux points matériels  $M$  et  $M'$  donnés de la tige ; leurs abscisses curvilignes  $s$  et  $s + ds$  sont constantes puisque la tige est inextensible. Comme la tige n'effectue que des petits mouvements dans le plan vertical  $Oxy$  au voisinage de l'axe horizontal  $Ox$ , un choix judicieux de l'origine  $O$  et de l'orientation de la tige permet d'écrire, pour l'abscisse d'un point quelconque de la tige,  $x \cong s$ .

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à ce système donne, en projection sur  $Ox$ ,  $\mu ds \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial T_x}{\partial s} ds$  ; mais, pour tout point matériel de la tige inextensible,  $x \cong s$  est constant, donc  $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cong \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$  (les déplacements des points matériels sont quasiment parallèles à  $Oy$ ) et  $\frac{\partial T_x}{\partial s} \cong \frac{\partial T_x}{\partial x}$ .

Finalement, on obtient  $\frac{\partial T_x}{\partial x} \cong 0$  :  $T_x$  est quasiment uniforme, et sera noté  $T$ .

On applique maintenant à ce système le théorème du moment cinétique, dans son référentiel barycentrique, et par rapport à son centre d'inertie  $G \left( x + \frac{dx}{2}, Y + \frac{dY}{2} \right)$  ; on projette sur  $Oz$ . Le moment

cinétique est du second ordre en  $ds$  ; sa dérivée temporelle disparaîtra donc de l'équation. Par rapport à  $Gz$ , le moment des actions exercées par l'aval de  $M'(x+dx, Y+dY)$  sur notre système s'écrit  $-\frac{dY}{2} T_x(x+dx) + \frac{dx}{2} T_y(x+dx) + \frac{C}{\delta l} \delta\theta'$ , avec  $\delta\theta' \cong \delta l \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(x+dx)$  - car la tige est peu inclinée sur

$Ox$ . En vertu du théorème de l'action et de la réaction, le moment des actions exercées (par rapport à  $Gz$ ) par l'amont de  $M(x, Y)$  sur notre système s'écrit  $-\left[ \frac{dY}{2} T_x(x) - \frac{dx}{2} T_y(x) + \frac{C}{\delta l} \delta\theta \right]$ , avec  $\delta\theta \cong \delta l \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(x)$ . Enfin,

le moment des actions de pesanteur est nul par rapport à  $G$ . Donc, par rapport à  $Gz$ , le moment des actions extérieures subies par l'élément s'écrit

$$-\frac{dY}{2} [T_x(x+dx) + T_x(x)] + \frac{dx}{2} [T_y(x+dx) + T_y(x)] + C \left[ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(x+dx) - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(x) \right].$$

Or ce moment est nul

d'après le théorème du moment cinétique, et dans son expression  $t$  est fixé, donc cela donne le résultat

demandé : 
$$T_y \cong T \frac{fY}{fx} - C \frac{f^3 Y}{fx^3}.$$

*b.* L'extrémité  $O$  de la tige a une ordonnée nulle par définition, donc  $Y(0, t) = 0$  ; de plus, l'expression du moment fléchissant montre que  $\theta$  ne peut pas être discontinu, donc  $\frac{\partial Y}{\partial x}$  est continu, ce qui

donne  $\frac{\partial Y}{\partial x}(0, t) = 0$  puisque la tige est encastée en  $O$  perpendiculairement à son support  $Oyz$ .

Afin de trouver les conditions aux limites pour l'autre extrémité, en  $x \cong L$ , considérons le système formé par l'élément terminal  $PP'$  (de longueur  $ds$ ) de la tige. Avec  $ds$  constant, c'est encore un système fermé.

En lui appliquant le théorème de la résultante cinétique, on trouve :

en projection sur  $Ox$ ,  $-T_x(L-ds) \cong \mu ds \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$  – donc puisque  $T_x$  (noté  $T$ ) est quasiment uniforme,

on retrouve  $T \cong 0$  ;

en projection sur  $Oy$ ,  $-T_y(L-ds) - \mu ds g + F \cong \mu ds \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$ , donc  $F \cong T_y(L)$  en ne gardant que les

termes prépondérants en  $ds$ , mais comme on sait aussi que  $T_y \cong -C \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}$  (ce qui est en accord avec le fait que la

tension  $T_x$  est très petite devant l'effort tranchant  $T_y$ ), on en déduit que  $\frac{\partial^3 Y}{\partial x^3}(L,t) \cong -\frac{F}{C}$ .

On lui applique maintenant le théorème du moment cinétique par rapport à  $Pz$ , qui est mobile (mais le terme correctif qui en résulte dans le théorème du moment cinétique est quasiment nul car les vitesses de  $P$  et de tous les autres points de l'élément sont quasiment parallèles – à  $Oy$ ) ; en raisonnant comme au paragraphe

précédent III.A.a, il vient  $-C \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(L-ds) - \frac{ds}{2} \mu ds g + ds F \cong 0$ , d'où  $\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}(L,t) \cong 0$  en ne gardant que le terme prépondérant.

c. On applique le théorème de la résultante cinétique comme au § III.A.a ; en projection sur  $Oy$ , on obtient  $\mu \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \cong \frac{\partial T_y}{\partial x} - \mu g$ .

Dorénavant, pour simplifier les notations, nous utiliserons le signe  $=$  malgré les approximations sous-jacentes que l'on a mentionnées jusqu'ici. En utilisant l'expression de  $T_y$  démontrée au § III.A.a, et  $T = 0$ , on

obtient l'équation aux dérivées partielles régissant  $Y(x,t)$  :  $\mu \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = -C \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} - \mu g$  (avec au contraire

$T \neq 0$ ,  $C = 0$  et  $g = 0$ , on retrouve l'équation classique de la corde vibrante).

Donc, dans la situation statique considérée,  $Y(x,t) = Y_s(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 - \frac{\mu g}{C} \frac{x^4}{4!}$  et

obéit aux conditions aux limites

$$Y_s(0) = 0 \text{ donc } a = 0 ;$$

$$\frac{dY_s}{dx}(0) = 0 \text{ donc } b = 0 ;$$

$$\frac{d^2 Y_s}{dx^2}(L) = 0 \text{ donc } 2c + 6dL - \frac{\mu g}{C} \frac{L^2}{2} = 0 ;$$

$$\frac{d^3 Y_s}{dx^3}(L) = -\frac{F_s}{C} \text{ donc } 6d - \frac{\mu g}{C} L = -\frac{F_s}{C} ;$$

cela donne

$$Y_s(x) = \frac{-\mu g L + 2F_s}{4C} Lx^2 + \frac{\mu g L - F_s}{6C} x^3 - \frac{\mu g}{C} \frac{x^4}{24}.$$

On pouvait aussi trouver ce résultat en écrivant une condition d'équilibre pour la portion de tige d'abscisse comprise entre  $x$  et  $L$  :

$$-T_y(x) - \mu(L-x)g + F_s = 0 ;$$

d'où

$$\frac{d^3 Y_s}{dx^3} \cong -\frac{\mu g}{C} x + \frac{\mu g L - F_s}{C}$$

qu'il suffit d'intégrer, en tenant compte des conditions aux limites.

Le déplacement de l'extrémité libre s'écrit

$$Y_s(L) = \frac{-\mu g L + 2F_s}{4C} L^3 + \frac{\mu g L - F_s}{6C} L^3 - \frac{\mu g}{C} \frac{L^4}{24}$$

donc

$$Y_s(L) = \frac{L^3}{3C} F_s - \frac{L^4}{8C} \mu g$$

comme annoncé.

d.  $Y_s(L) \cong 1,57 \text{ nm}$ .

L'effet de la pesanteur est négligeable devant celui de  $F_s$  si  $F_s \gg \mu g L \approx \underline{3 \cdot 10^{-11} \text{ N}}$ .

e. À grande distance, ce sont des interactions entre dipôles instantanés qui sont responsables d'une force attractive entre molécules non polaires (interaction de London) ; à courte distance, ce sont des interactions électrostatiques prenant en compte le principe d'exclusion de Pauli, qui sont à l'origine d'une force très violemment répulsive (les nuages électroniques se repoussent, mais surtout on ne peut avoir sur le même site des électrons de même spin).

f. Les autres caractéristiques microscopiques du système qui déterminent la valeur de la force entre la pointe du microscope et la surface observée sont : la forme de la pointe, la nature et l'orientation des molécules constituant la surface (ce qui détermine la valeur des forces de Van der Waals, et l'existence éventuelle d'autres interactions comme les forces magnétiques, etc.).

### III.B. Détection dynamique des gradients de force

a. Au § III.A.c, on a vu que  $\mu \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = -C \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} - \mu g$ .

b. Comme  $Y_s$  obéit à  $0 = -C \frac{\partial^4 Y_s}{\partial x^4} - \mu g$ , en soustrayant membre à membre cette équation de

l'équation du paragraphe ci-dessus III.B.a, on obtient l'équation de propagation de  $y(x,t) = Y - Y_s$  :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -C \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

Par définition, les modes propres de  $y(x,t)$  sont les solutions monochromatiques qui obéissent aux conditions aux limites ; on note  $y(x,t) = f(x)e^{-i\omega t}$  leur représentation complexe. Ainsi  $f(x)$  satisfait l'équation différentielle  $f^{(4)} - \frac{\mu}{C} \omega^2 f = 0$  ; donc  $f(x) = A_1 e^{iKx} + A_1' e^{-iKx} + B_1 e^{Kx} + B_1' e^{-Kx}$ , où

$K = \sqrt[4]{\frac{\mu}{C} \omega^2}$  dépend donc de  $\omega$  (mais  $K$  n'est pas proportionnel à  $\omega$ , donc il y a dispersion, ce qui est normal puisque l'équation de propagation n'est pas une équation d'onde).

Les conditions aux limites pour  $y(x,t)$  s'obtiennent en soustrayant membre à membre, de celles écrites au § III.A.b pour  $Y$ , celles écrites au § III.A.c pour  $Y_s$  :



$$y(0,t) = 0 \text{ et } \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L,t) = 0 \text{ et } \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L,t) = -\frac{F - F_s}{C} = -\frac{\alpha}{C} y(L,t).$$

Elles sont valables aussi pour la représentation complexe  $\underline{y}$ , ce qui donne

$$\begin{cases} A_1 + A_1' + B_1 + B_1' = 0 \\ iKA_1 - iKA_1' + KB_1 - KB_1' = 0 \\ -K^2 e^{iKL} A_1 - K^2 e^{-iKL} A_1' + K^2 e^{KL} B_1 + K^2 e^{-KL} B_1' = 0 \\ \left(-iK^3 + \frac{\alpha}{C}\right) e^{iKL} A_1 + \left(iK^3 + \frac{\alpha}{C}\right) e^{-iKL} A_1' + \left(K^3 + \frac{\alpha}{C}\right) e^{KL} B_1 + \left(-K^3 + \frac{\alpha}{C}\right) e^{-KL} B_1' = 0 \end{cases}$$

On reconnaît là un système linéaire homogène de quatre équations à quatre inconnues  $A_1$ ,  $A_1'$ ,  $B_1$  et  $B_1'$  ; les modes propres existent si et seulement si ce système admet d'autres solutions que la solution triviale  $A_1 = A_1' = B_1 = B_1' = 0$ , donc si et seulement si **le déterminant de ce système est nul**.

Cela donne une équation pour  $K = 4\sqrt{\frac{\mu}{C}}\omega^2$ , paramétrée par  $\alpha$  mais pas par  $F_0$ . Donc **les pulsations**

**propres dépendent du gradient de force, mais pas de  $F_0$ .**

L'amplitude de la vibration imposée par une excitation donnée est d'autant plus grande que la pulsation de cette excitation est proche d'une pulsation propre du système (celle-ci étant complexe *a priori*, ce qui traduit une atténuation du régime libre) ; **une variation de pulsation propre se traduira donc par une variation d'amplitude de la vibration de la tige**. En détectant cette variation d'amplitude au cours du balayage de la surface, **on peut en déduire des informations sur sa forme, puisque l'amplitude dépend de la pulsation propre, qui dépend du gradient de force, qui dépend de la distance entre la pointe et la surface**.

### III.C. Filtrage des vibrations du support

*a.* Pour déterminer l'amplitude  $A_p$  des vibrations du support de la pointe, écrivons les équations du mouvement des deux supports. Puisque, pour chaque support, la résultante des forces extérieures est nulle à l'équilibre, en mouvement la résultante des forces est la somme des *variations*, par rapport à la position d'équilibre, des différentes forces extérieures subies. On en tire immédiatement le système d'équations

$$\begin{cases} m_p \frac{d^2 z_p}{dt^2} = -k_p (z_p - z_i) \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = -k_p (z_i - z_p) - k_i (z_i - z_s) \end{cases}$$

d'où, pour les représentations complexes

$$\begin{cases} (\omega_2^2 - \omega^2) \underline{z}_p - \omega_2^2 \underline{z}_i = 0 \\ -\frac{k_p}{m_i} \underline{z}_p + (\omega_1^2 - \omega^2) \underline{z}_i = \frac{k_i}{m_i} \underline{z}_s \end{cases}$$

en se servant des pulsations  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_i + k_p}{m_i}}$  et  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_p}{m_p}}$ .

Les formules de Cramer donnent  $\underline{z}_p = \frac{\frac{k_i}{m_i} \omega_2^2 \underline{z}_s}{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_1^2 - \omega^2) - \frac{k_p}{m_i} \omega_2^2}$ ,

d'où la fonction de transfert en décibels  $Y_p = 20 \log \left| \frac{\frac{k_i}{m_i} \omega_2^2}{(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_1^2 - \omega^2) - \frac{k_p}{m_i} \omega_2^2} \right|$ .

Le graphe du dénominateur en fonction de  $\omega^2$  est une parabole « tournée vers le haut », ayant des ordonnées négatives pour  $\omega_1^2$  et  $\omega_2^2$  ; donc les pulsations de résonance se trouvent à l'extérieur de l'intervalle  $[\omega_1, \omega_2]$  (on retrouve le fait que le couplage « écarte » les pulsations propres).

Le tracé asymptotique du diagramme de Bode pour l'amplitude du support du bras de levier et de la pointe est représenté sur la figure 2 ; comme  $m_i \gg m_p$  et  $k_i \sim k_p$ , les pulsations de coupure sont nettement séparées (car  $\omega_1$  et  $\omega_2$  le sont). On y dessine aussi, en pointillés, le diagramme de Bode correspondant au cas où le support de la pointe serait directement relié au sol par un seul ressort de raideur  $k_p$  : dans ce cas, on aurait

$\left(\frac{k_p}{m_p} - \omega^2\right) \underline{z}_p = \frac{k_p}{m_p} \underline{z}_s$ , donc une fonction de transfert  $20 \log \left| \frac{\frac{k_p}{m_p}}{\frac{k_p}{m_p} - \omega^2} \right|$ .

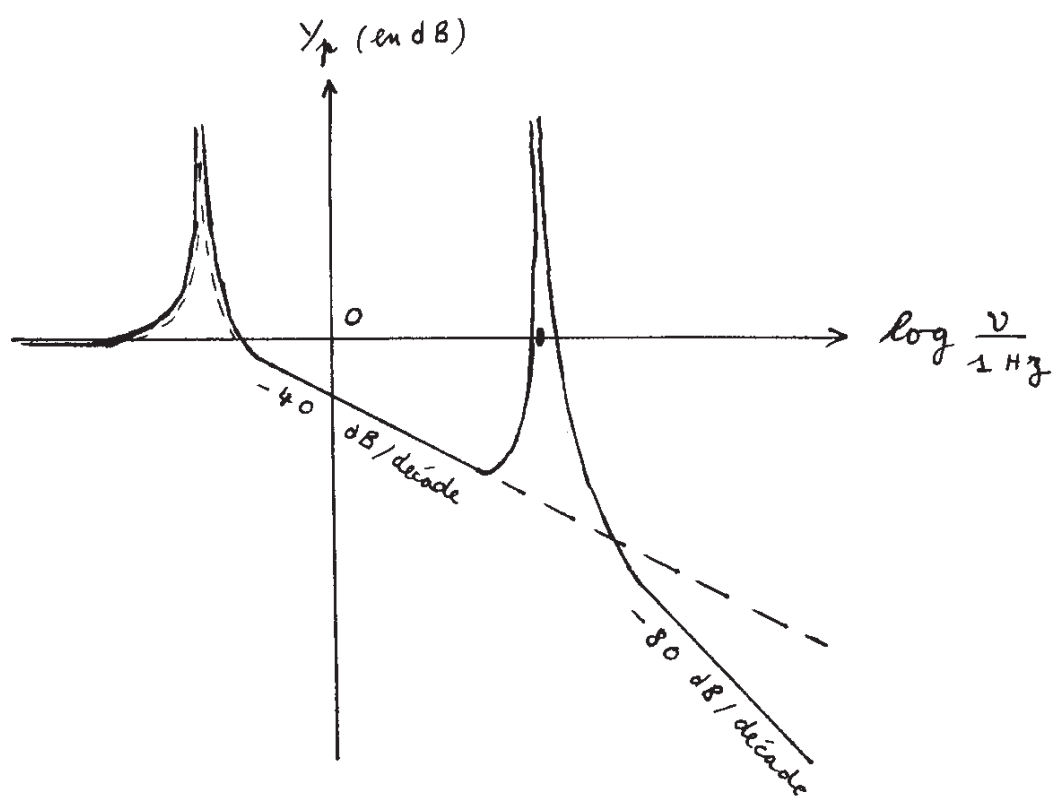


Figure 2. Diagramme de Bode pour le support de la pointe (pour simplifier le schéma, on a supposé que les les fréquences de résonance de la courbe en trait plein et de celle en pointillés sont égales)

*b. L'avantage du système à deux ressorts est de provoquer une chute plus rapide de la fonction de transfert au delà de la dernière pulsation de coupure ( - 80 dB / décade au lieu de - 40 dB / décade) en partant de la même valeur « plateau » (0 dB, comme on s'y attend physiquement : si la fréquence de vibration du sol est très faible devant les fréquences propres, les longueurs des deux ressorts restent quasiment constantes, donc les vibrations sont intégralement transmises – voir aussi ci-dessous).*

*Le filtrage à deux ressorts est le plus efficace possible si les fréquences propres sont très inférieures à 10 Hz et les plus petites possibles, de façon à atténuer nettement les vibrations du sol ; pour cela on cherche à réaliser des ressorts les moins raides possibles, et des supports massifs.*

$$\text{Pour des fréquences très inférieures aux fréquences propres, } Y_p = 20 \log \left| \frac{\frac{k_i}{m_i}}{\frac{k_p + k_i}{m_i} - \frac{k_p}{m_i}} \right| = 0, \text{ donc}$$

*ces basses fréquences de vibration sont transmises sans changement d'amplitude ; les autres fréquences sont atténuées (à l'exception des fréquences très proches des fréquences propres).*

*Il serait très gênant que le bras de levier soit soumis à des vibrations parasites de même fréquence que sa fréquence propre, car il rentrerait en résonance et cela fausserait considérablement la détection de son mouvement lié à l'analyse de la surface. Comme  $10^2$  kHz est 4 décades au dessus de 10 Hz, cette fréquence là est plus atténuée que celle-ci de 320 dB (si les fréquences propres sont très inférieures à 10 Hz) !*

# Agrégation (Concours Externe)

OPTION : CHIMIE

Épreuve A : Composition de chimie - Session : 1998

## SPECTROSCOPIE MOLÉCULAIRE D'ABSORPTION

### 1. Généralités

1.1. L'énergie d'une molécule se compose de quatre termes :

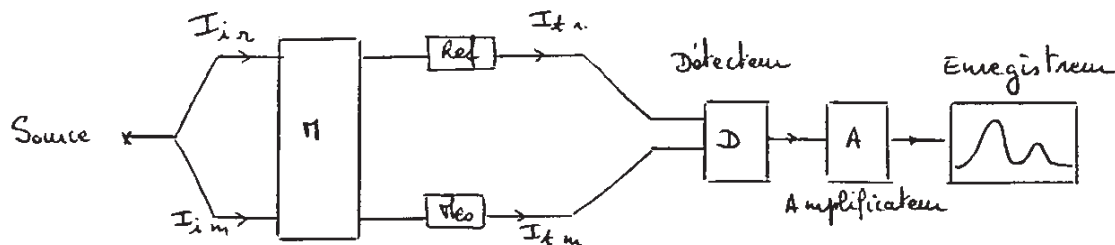
$$E_{mol} = E_{elec} + E_t + E_v + E_r$$

$E_t$  = Énergie de translation de la molécule  
= terme régi par la température

Le champ électromagnétique ne provoque pas de variation notable du mouvement de translation.

Avec :  $E_{elec} \gg E_{vib} > E_{rot}$  car  $\begin{cases} E_{elec} \approx 500 \text{ kJ.mol}^{-1} \\ E_{vib} \approx 10 \text{ kJ.mol}^{-1} \\ E_{rot} \approx 1 \text{ kJ.mol}^{-1} \end{cases}$

1.2.

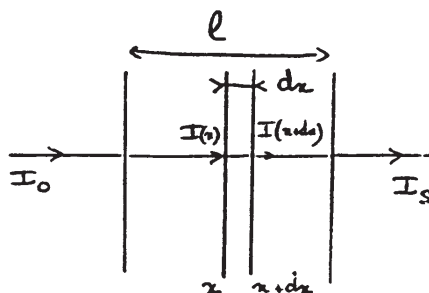


La source + M permet de produire une lumière monochromatique. Le faisceau est divisé en deux d'égale intensité (ou non).

La cellule de référence contient en général le solvant. La cellule de mesure contient la solution à étudier.

Le détecteur mesure  $\Delta I = I_{im} - I_{ir}$ . Cette mesure est en général «traitée» et l'enregistreur fournit le spectre.

1.3. a.



$$dI = -kI(x)cdx \Leftrightarrow \boxed{\frac{dI}{I} = -kc dx}$$

$k$  coefficient de proportionnalité

b. On intègre entre  $o$  et  $l$

$$\boxed{\text{Ln} \frac{I_s}{I_o} = -kcl}$$

1.4. a. Transmittance  $T = \frac{I_s}{I_o} = (e^{-kcl} = 10^{-\epsilon lc})$  **Loi de Lambert**

b. Absorbance  $A = \epsilon lc$  **Loi de Beer**

c.  $\epsilon$  : coefficient d'extinction molaire.

La valeur de  $\epsilon$  dépend :

- de la substance et de la nature de la transition électronique,
- de la longueur d'onde,
- de la nature du solvant,
- de la température.

d. **Loi de Beer-Lambert**  $A = \log \frac{I_o}{I_s} = \epsilon lc$

$l$  = longueur de la cuve (cm)

$c$  = concentration ( $\text{mol.L}^{-1}$ )

C'est une loi linéaire qui n'est valable que si :

- la substance ne s'hydrolyse pas, ne se dissocie pas, ne se polymérise pas, ne s'ionise pas, de s'associe pas,
- la lumière doit être parfaitement monochromatique,
- la solution est diluée.

## 2. Spectrophotomètre UV-Visible

2.1. a. UV  $190 \text{ nm} < \lambda < 400 \text{ nm}$ .

b. Visible  $400 \text{ nm} < \lambda < 800 \text{ nm}$ .

2.2. Les transitions électroniques observables se font entre orbitales occupées et orbitales vacantes.

$\sigma \rightarrow \sigma^*$  transition très énergétique  $\lambda < 150 \text{ nm}$

$n \rightarrow \sigma^*$  si il y a un hétéroatome  $180 < \lambda < 250 \text{ nm}$

$\left. \begin{array}{l} \pi \rightarrow \pi^* \\ n \rightarrow \pi^* \\ \sigma \rightarrow \pi^* \end{array} \right\} 200 < \lambda < 800 \text{ nm}$  valeur dépendant de la conjugaison

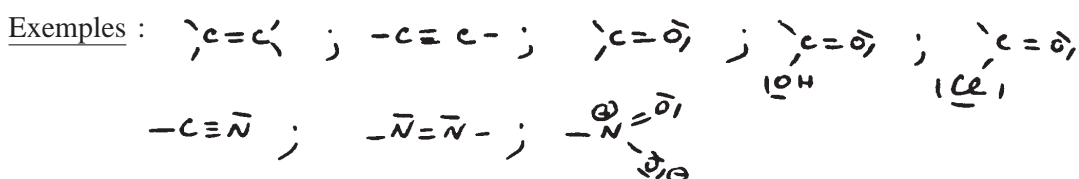
**Règles de sélection**

- $\Delta S = 0$   
L'état excité doit être de même spin que l'état fondamental.
- Les transitions ne sont permises que si les orbitales concernées se recouvrent.  
Cependant on observe un peu  $n \rightarrow \pi^*$  du fait des vibrations de la molécule (mais  $\epsilon$  est petit).

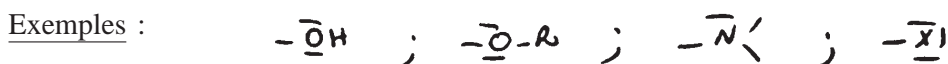
2.3. Les bandes d'absorption sont larges car :

- il y a un grand nombre de transition électronique entre tous les sous-niveaux rot/vib de l'état  $E_{initial}$  et tous ceux de l'état  $E_{final}$ ,
- il y a des interactions entre le solvant et le soluté. Les énergies mises en jeu sont faibles (Van der Waals) et varient d'une molécule à l'autre du fait de l'orientation statistique des molécules. On observe parfois un effet de solvatochromie.

2.4. **Groupes chromophores** : tout groupe ayant une absorption caractéristique due à une transition bien définie.



**Groupes auxochromes** : groupe renfermant un hétéroatome dont le doublet libre se conjugue avec l'insaturation du groupe chromophore. Les niveaux énergétiques se rapprochent,  $\lambda$  et  $A$  augmentent.



2.5.



Molécule contenant deux groupes chromophores non conjugués.

Les transitions  $\pi \rightarrow \pi^*$  sont à  $\lambda < 200 \text{ nm}$  et difficilement observables. Les  $n \rightarrow \pi^*$  sont vers  $280 \text{ nm}$  et peu intenses ( $\epsilon$  faible).



Molécule conjuguée, les niveaux se rapprochent :

$\pi \rightarrow \pi^*$  vers  $220 \text{ nm}$   $\epsilon \geq 10.000$ ,

$n \rightarrow \pi^*$  vers  $320 \text{ nm}$   $\epsilon < 50$

2.6. 2.6.1. Point isobestique.

2.6.2. **Au point I**,  $\epsilon_{AH} = \epsilon_{A^-}$

En effet les courbes sont tracées pour une concentration totale  $c$  identique ( $10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ ).

Si la forme  $AH$  prédomine  $A = \epsilon_{AH} l c$  ( $c_{AH} \approx c$ ).

Si la forme  $A^{\ominus}$  prédomine  $A = \epsilon_{A^-} l c$  ( $c_{A^-} \approx c$ ).

Au point I,  $\epsilon_{AH}(\lambda_I) l c = \epsilon_{A^-}(\lambda_I) l c$

donc :

$$\varepsilon_{AH}(\lambda_I) = \varepsilon_{A^-}(\lambda_I)$$

On n'observe un tel point que si **un équilibre** existe entre les formes  $AH$  et  $A^-$  (ici équilibre acido-basique).

2.6.3. La forme  $AH$  prédomine pour  $pH = 7,95$  (courbe 1)  
**donc  $\lambda_{\max}(AH) \approx 410 \text{ nm}$ .**

La forme  $A^-$  prédomine pour  $pH = 12$  (courbe 6)  
**donc  $\lambda_{\max}(A^-) \approx 520 \text{ nm}$ .**

2.6.4. a. A 510 nm, l'erreur relative  $\frac{\Delta A}{A}$  faite sur la lecture de l'absorbance est la plus faible car  $A$  est maximal.

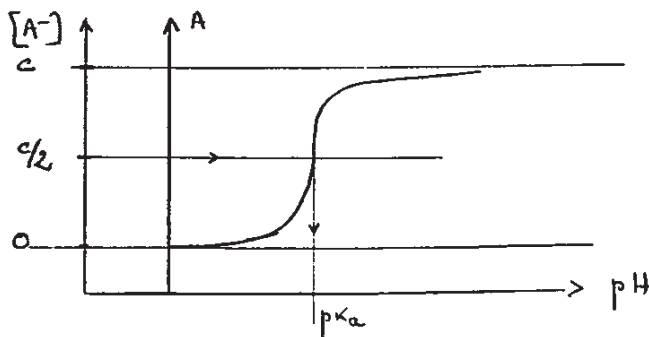
b. La courbe obtenue représente finalement  $[A^-] = f(pH)$ .

Si  $pH \rightarrow 6$  alors  $[A^-] \rightarrow 0$ .

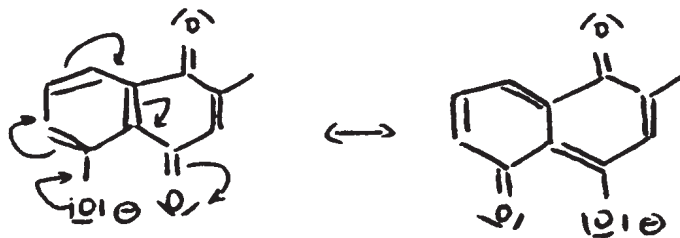
Si  $pH \rightarrow 13$  alors  $[A^-] \rightarrow c$ .

On cherche  $pH = pK_a$  tel quel  $[AH] = [A^-] = \frac{c}{2}$ .

On peut tracer les asymptotes à la courbe et chercher le point de la courbe situé à mi-distance.



c. On trouve  $pK_a \approx 9,2$  ce qui est l'ordre de grandeur du  $pK_a$  d'une fonction phénol.



La phénate est stabilisé par résonance.

2.6.5. Pour une longueur d'onde  $\lambda$  fixée arbitrairement :

$$\begin{cases} A_1 = \varepsilon_{AH} l c & \text{car pour la courbe 1, } AH \text{ prédomine} \\ A_6 = \varepsilon_{A^-} l c & \text{car pour la courbe 6, } A^\ominus \text{ prédomine} \\ A_x = \varepsilon_{AH} l c_{AH} + \varepsilon_{A^-} l c_{A^-} & \text{pour toute courbe } x \text{ (2, 3, 4, 5) avec } c = c_{AH} + c_{A^-} \end{cases}$$

$$\text{On en déduit que : } \begin{cases} A_1 - A_x = (\varepsilon_{AH} - \varepsilon_{A^-}) l c_{A^-} \\ A_x - A_6 = (\varepsilon_{AH} - \varepsilon_{A^-}) l c_{AH} \end{cases}$$

$$\text{Or par définition } pH = pK_a + \log \frac{c_{A^-}}{c_{AH}} .$$

$$\Leftrightarrow \boxed{pH = pK_a + \log \frac{A_1 - A_x}{A_x - A_6}}$$

La méthode consiste à se placer à une longueur d'onde où les courbes  $A_1$  et  $A_6$  sont très éloignées et à considérer une courbe intermédiaire  $x = 3$ .

$$\text{Exemple : } 520 \text{ nm } \quad pK_a = 9,55 - \log \frac{20}{16,5} = 9,47.$$

$$\text{Exemple : } 410 \text{ nm } \quad pK_a = 9,55 - \log \frac{10}{8,5} = 9,48.$$

On retrouve la méthode du § 2.6.4.b. en remarquant que si  $pH = pK_a$ , la formule établie donne  $A_x = \frac{1}{2} (A_1 + A_6)$  ce qui justifie la «méthode des tangentes» utilisée.

2.6.6. a. Cela signifie que la courbe  $A = f(c)$  est une droite linéaire et donc que l'on respecte toutes les conditions discutées au § 1.4.d.

b. La droite d'étalonnage précédente permet de calculer :

$$\varepsilon l = \frac{0,40}{1.10^{-4}} = 4,0 \cdot 10^3 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$$

La concentration  $c_x$  inconnue est alors déterminée en mesurant  $D_x$  et en posant :

$$\boxed{C_x = \frac{D_x}{\varepsilon l}}$$



## EXPÉRIENCES DE RMN-1D À TRANSFORMÉE DE FOURIER

1. 1.1. Il faut  $\vec{B}_0$  pour **aimanter** l'échantillon, ce qui revient à lever la dégénérescence en deux niveaux d'énergie (états  $\alpha$  et  $\beta$ ). Et il faut  $\vec{B}_1 \perp \vec{B}_0$  pour **modifier** l'aimantation, ce qui revient à faire passer les spins nucléaires d'un état à l'autre (cf. figure 1).

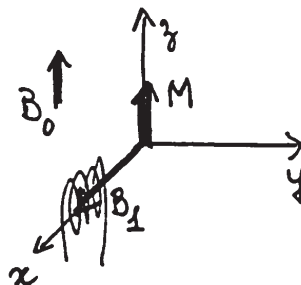


Figure 1

$\vec{B}_0$  donné par un électroaimant.

$\vec{B}_1$  par une bobine HF qui envoie des impulsions pendant un temps très court. «Champ» alternatif équivalent à deux champs tournant en sens inverse, dont un seul est efficace ( $\vec{B}_1$ , car il tourne dans le même sens que la précession de Larmor).

$\vec{B}_1$  tourne tout en restant  $\perp \vec{B}_0$ .

Le vecteur aimantation  $\vec{M}$  est dévié (cf. figure 2).

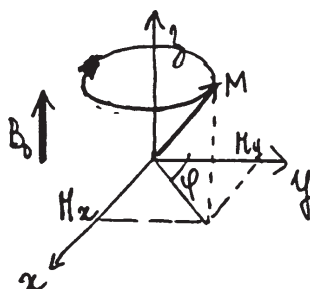


Figure 2

On prend un référentiel tournant à la même vitesse que le champ  $\vec{B}_1$  pour que  $\vec{M}$  apparaisse statique pour l'observateur (angle  $\varphi = 0$ ).

- 1.2. On mesure ce qui se passe après l'impulsion, quand les noyaux ne sont plus soumis qu'à  $\vec{B}_0$ . Donc on mesure la dépendance de  $M$  en  $f(\text{temps})$ .

Exemple de la **figure 3** : une impulsion a permis de faire basculer  $M_z$  de  $\frac{\pi}{2} \rightarrow M_y$ .

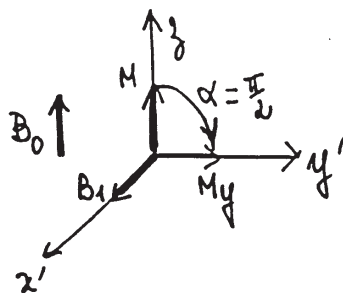


Figure 3

- 1.3. **M va revenir à son état d'équilibre (cf. figure 4)** :  $M_y$  ne décrit pas un cercle  $x'Oy'$  mais  $M$  décrit une spirale autour de  $O_z$ . La perte d'aimantation ( $M_y \rightarrow O$ ) transversale est mesurée (temps de relaxation transversale =  $T_2$ ). La composante  $M_z$  retrouve sa valeur initiale au bout du temps  $T_1$  (relaxation longitudinale).

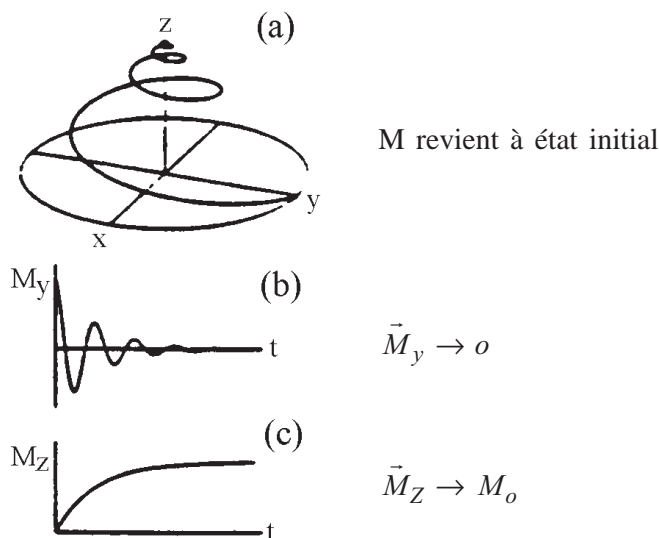
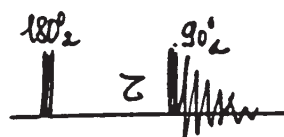


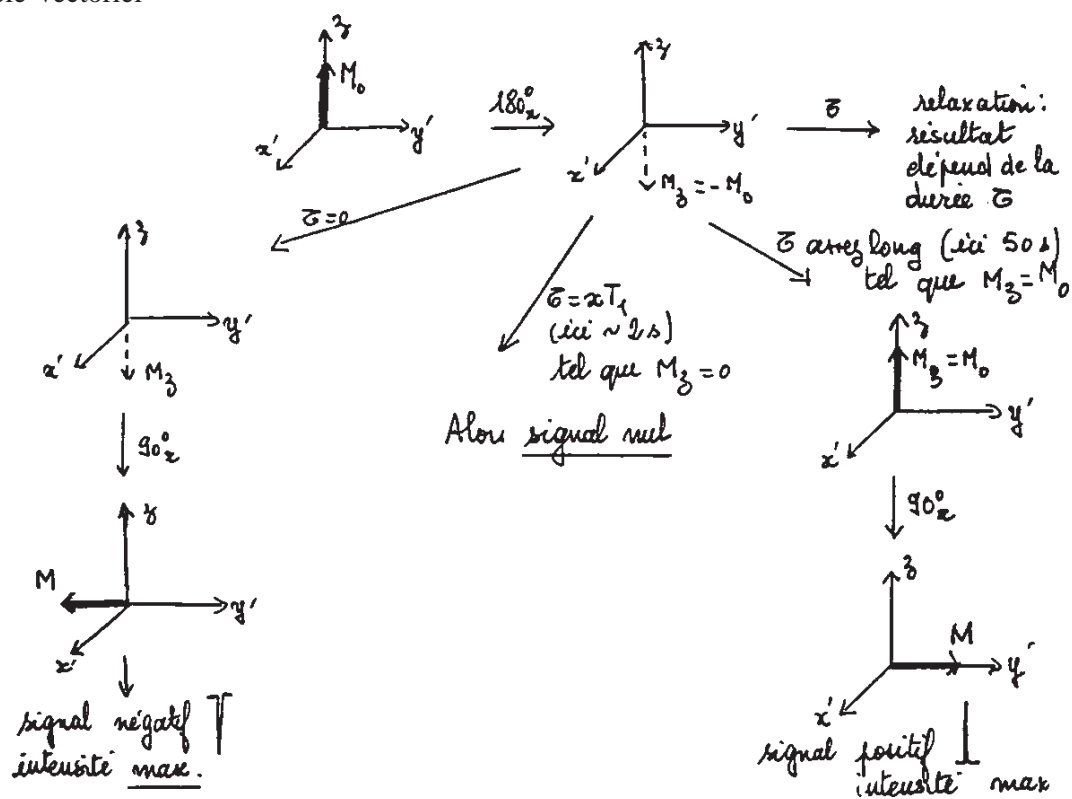
Figure 4 : «Retour».

- 1.4. Nous venons de voir que l'interférogramme représente l'aimantation en fonction du temps. La transformée de Fourier permet le passage  $M = f(t) \rightarrow M = f(\nu)$ . Ce qui donne un spectre de RMN où l'on sait déterminer  $\delta$  et  $J$ , que nous cherchons. Et comme la «FID» =  $\Sigma$  signaux de tous les noyaux étudiés (exemple : tous les  $^1\text{H}$ , ou tous les  $^{13}\text{C}$ ), elle contient toutes les informations pour le spectre.

2. Expérience d'inversion-récupération



## 2.1. Modèle vectoriel



## 2.2.

$$\frac{dM_z}{\underbrace{M_0 - M_z}_{\text{retour}}} = \frac{1}{T_1} dt \rightarrow \ln(M_0 - M_z) = -\frac{t}{T_1} + Cste$$

$$t = 0 : M_z = -M_0 \rightarrow Cste = \ln(2M_0)$$

$$\frac{M_0 - M_z}{2M_0} = e^{-t/T_1} \rightarrow M_z = M_0(1 - 2e^{-t/T_1})$$

Calcul de  $T_1$  : à ce moment  $M_z = 0 \rightarrow e^{-t/T_1} = 0,5$

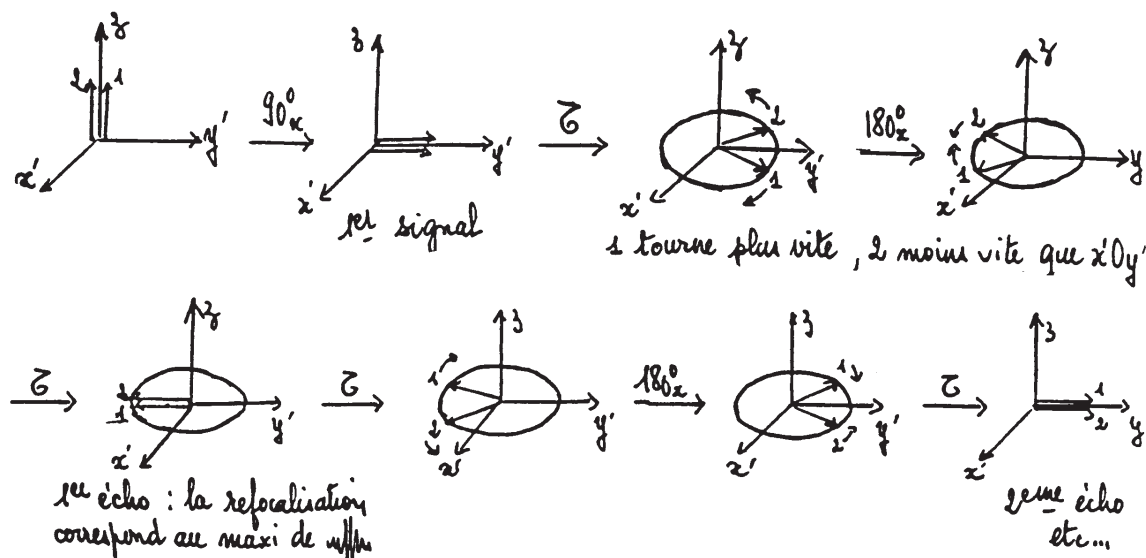
$$t = 0,693 T_1$$

Les protons du toluène ont tous le même  $T_1$  :

si on prend  $t = 2 s$  on trouve  $T_1 = 2,89 s$   
 si on prend  $t = 2,25 s$  on trouve  $T_1 = 3,25 s$  }  $T_1 \approx 3 s$

### 3. Expérience d'écho de spin

#### 3.1. Diagramme vectoriel



Les vecteurs 1 et 2 représentent les aimantations des noyaux A et X non couplés de  $\delta$  différents ( $\nu$  différentes). Or ils se retrouvent tous les deux //  $Oy'$  à certains temps donnés :

on dit qu'on refocalise les  $\delta$

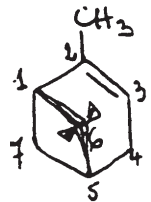
3.2. La relaxation spin-spin existe toujours (temps  $T_2$ ) et les vecteurs 1 et 2 diminuent progressivement dans le plan  $x'Oy'$ . Sans cette relaxation selon  $T_2$ , toutes les FID successives seraient de même intensité.

### QUELQUES ASPECTS DE LA CHIMIE DU BORE

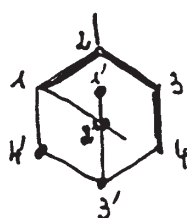
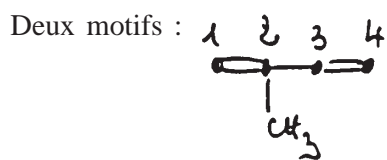
1. 1.1. **Source** : essence de térébenthine, extraite par distillation de la résine de pin. Le pourcentage de  $\alpha / \beta$  varie selon l'origine.

Pour information :

- les huiles d'Amérique du Nord contiennent le (+) $\alpha$ -pinène,
- les huiles européennes contiennent le (-) $\alpha$ -pinène.

1.2.  C'est le 2,6,5-triméthylbicyclo[3.1.1]hept-2-ène.

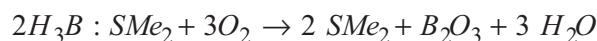
1.3. Ce sont des monoterpènes bicycliques.



2. 2.1. La notation  $H_3B : SMe_2$  correspond au complexe boranc-diméthylsulfure ( $B$  accepteur,  $S$  donneur).

Son intérêt : il est assez stable et donc on peut le préparer pratiquement pur (le produit commercial est à 95 %). Donc facilité de manipulation : moins dangereux et on peut calculer précisément la quantité ajoutée. De plus, il est soluble dans pas mal de solvants.


- 2.2. L'eau va hydrolyser et  $O_2$  oxyder. Avec  $H_3B : SMe_2$  on aura :



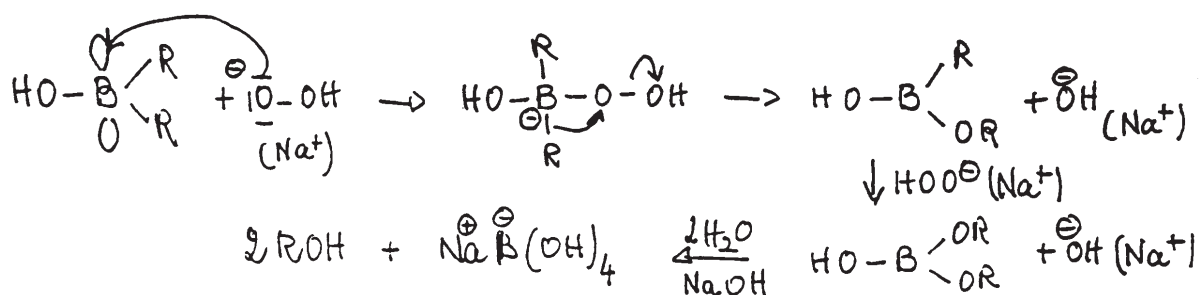
- 2.3. **Régiosélectivité** essentiellement sous l'influence de l'encombrement stérique !  $B$  se fixe sur le  $C$   $sp^2$  le moins substitué.

N.B. : On peut remarquer que le  $B$ , électrophile, se retrouve sur le  $C$  le moins substitué, l'addition suit la règle de Markovnikov.

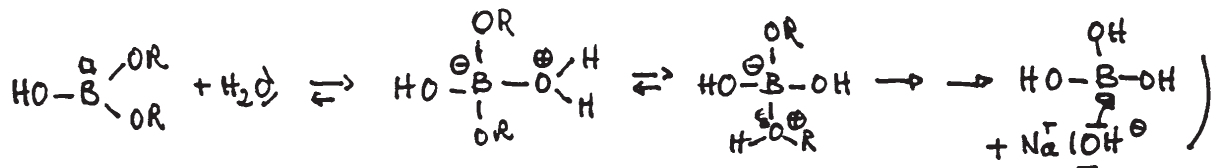
**Stéréosélectivité** *Syn* addition donc  $CH_3$  et  $H$  de la double liaison initiale restent en cis l'un de l'autre. De plus,  $B$  va du côté le moins encombré, c'est-à-dire opposé au pont portant les deux  $CH_3$ .

3. 3.1.  $R_2BH + H_2O \rightarrow R_2BOH + H_2 \uparrow$   $R = Ipc =$  

- 3.2. 
$$\left\{ \begin{array}{l} H_2O_2 + Na^+ OH^- \rightarrow HO-O^- Na^+ + H_2O \\ \text{le milieu basique sert donc à générer le réactif nucléophile, puis} \end{array} \right.$$

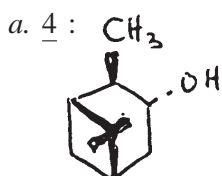


autre possibilité :

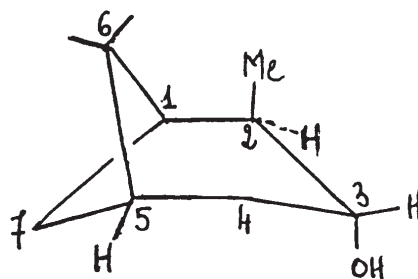


- 3.3.  $R_2BOH + 2H_2O_2 + NaOH \rightarrow 2ROH + NaB(OH)_4$

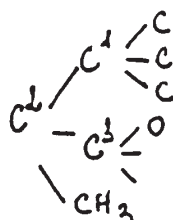
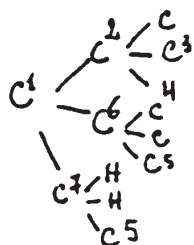
- 3.4. Rétention de configuration, donc 4 dérivé de 3, où  $OH$  remplace le bore



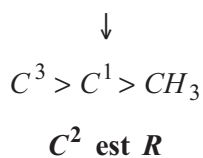
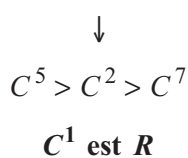
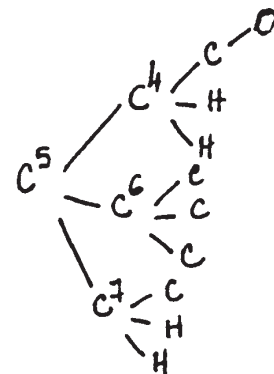
b. représentation perspective numérotation



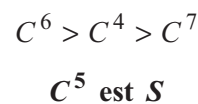
c. Les C\* sont C<sup>1</sup>, C<sup>2</sup>, C<sup>3</sup> et C<sup>5</sup>



Pour C<sup>3</sup>  
↓  
OH > C<sup>2</sup> > C<sup>4</sup>

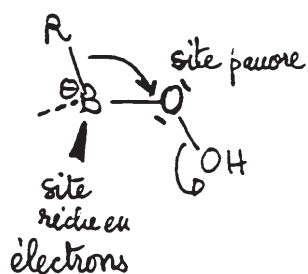


C<sup>3</sup> est R

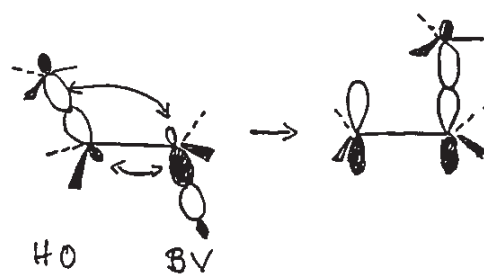


(1R, 2R, 3R, 5S) - isopinocampheol.

3.5. Toutes les migrations-1,2 sur centre déficitaire se font avec rétention de configuration.

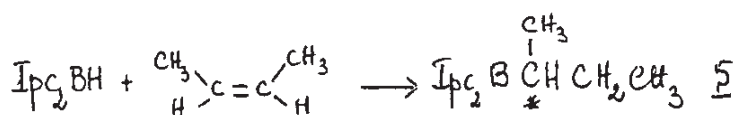


représenté par



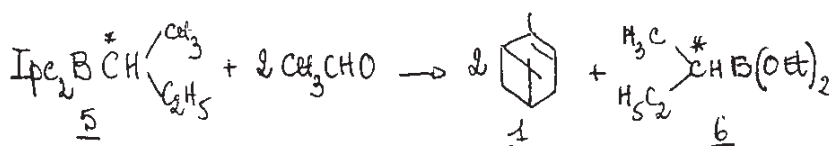
#### 4. Action sur le (Z)-but-2-ène

4.1. Formule :

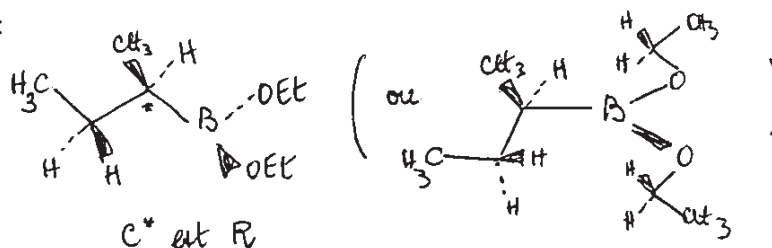


Il y a formation d'un carbone asymétrique : deux stéréoisomères. Compte tenu de l'existence du groupe (Ipc)\*, il y a donc deux **diastéréoisomères** possibles.

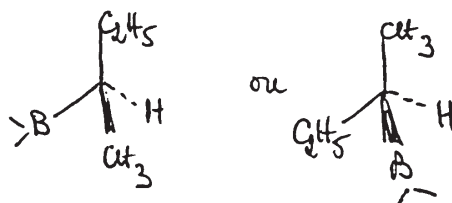
4.2. a)



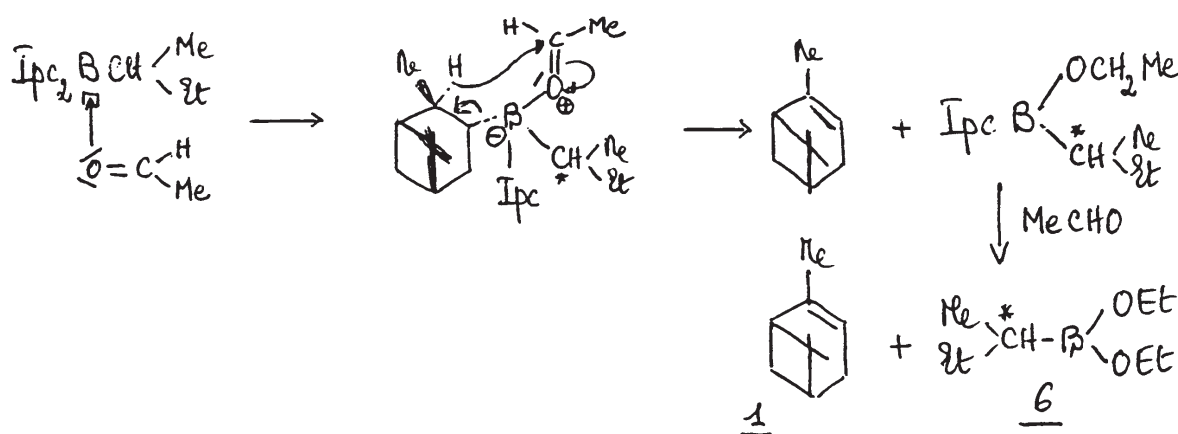
Perspective :



autre possibilité :

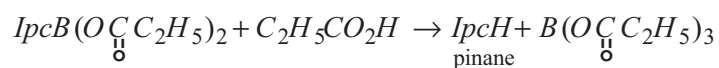
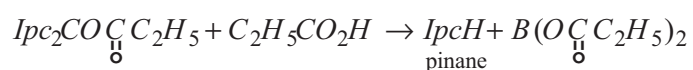
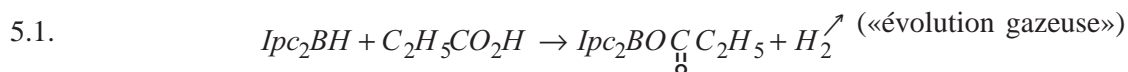


b. **Mécanisme** : B, électrophile, est complexé par O de C = O

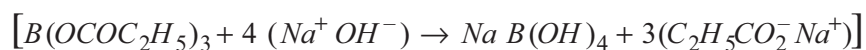


état de transition à six centres, en respectant la règle de **Zaytsev**  
donc obtention de la  $\gg$  la plus encombrée.

## 5. Action sur l'acide propanoïque $C_2H_5CO_2H$

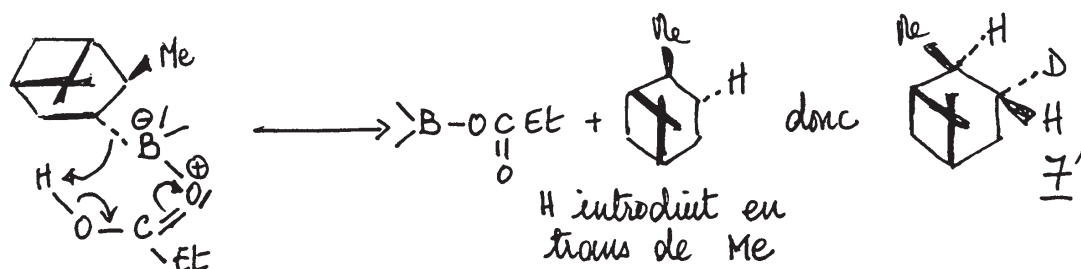


**Le composé 7 est donc le pinane** seul composé pouvant être extrait au pentane après action de  $Na^+OH^-$  car les dérivés du bore vont rester dans l'eau :

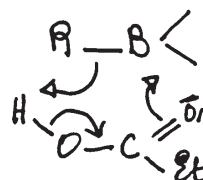


5.2. Mécanisme

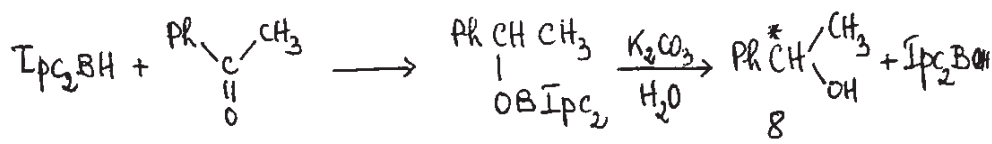
Là encore, complexe entre  $B$  électrophile et  $O$  de  $C=O$ , puis état de transition à six centres, pour les deux dernières étapes.



Autre possibilité : avec **réretion de configuration** puisque  $H$  prend la place du bore.



6. Action sur l'acétophénone : toujours  $B$ , électrophile, complexé par  $O$  de  $C=O$ , puis transfert de  $H^{\ominus}$ .

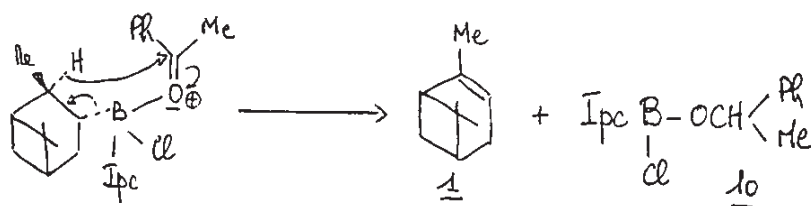


7. Induction asymétrique

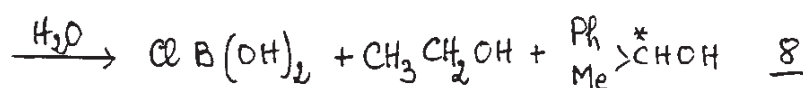
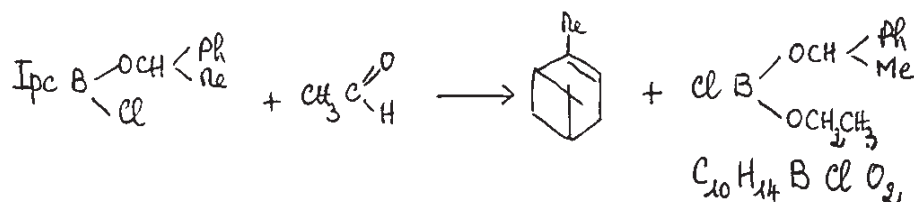


mêmes configurations que dans  $Ipc_2BH$ .

7.2. Formule et mécanisme : Le bore est complexé par  $O$  de  $C=O$ , puis état de transition à six centres (transfert de  $H^-$ ). On a donc le même mécanisme qu'en 4.2.b.).



7.3. a. 10  $\rightarrow$  8 Selon le même mécanisme que précédemment,





b. **Pureté énantiomérique** (ou excès énantiomérique ee)

ee = pourcentage d'un énantiomère – pourcentage de l'autre énantiomère.

Les pourcentages étant déterminés par RMN ou par chromatographie sur phase chirale (ou sur phase simple mais après transformation des énantiomères en diastéréoisomères).

**Pureté optique** : elle est déterminée à partir de la mesure du pouvoir rotatoire et comparaison avec  $[\alpha]_{\lambda}^t$  de l'énantiomère pur.

c. **Proportions** : Ici ee = 98 %                      soit x le pourcentage de l'un des énantiomères

$$98 = x - (100 - x) \quad \rightarrow \quad x = 198/2 = 99$$

Le mélange renferme 99 % de S et 1 % de R (98 % de S «en excès» et 2 % de racémique).

8. **Détermination de la structure de l'isopinocamphéol par RMN**

8.1. a. **Schéma 1** : La molécule contient dix carbones et on a dix signaux, il faut trouver  $3CH_3$ ,  $2CH_2$ ,  $4CH$  et  $1C$  quaternaire. Comparant 1a et 1b :

- le signal à 32,2 ppm (faible) a disparu : C quaternaire,
- deux signaux sont négatifs : ils correspondent aux  $2CH_2$   
34,4 et 39,0 ppm :  $CH_2$ ,
- les sept autres signaux correspondent aux  $3CH_3$  et  $4CH$ , mais on sait que d'une façon générale  $\delta_{CH_3} < \delta_{CH_2} < \delta_{CH}$

$$\text{donc : } \begin{array}{llll} 20,7 & 23,7 & \text{et} & 27,7 \text{ ppm : } CH_3 \\ 41,7 & 46,7 & 47,8 & \text{et} \quad 71,6 \text{ ppm : } CH \end{array}$$

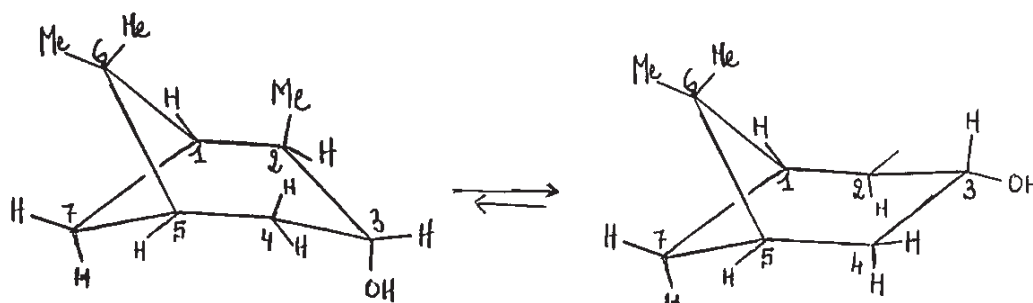


Schéma 1

b. **Schéma 2**

INADÉQUATE : On peut partir du fait que le CH le plus déblindé est celui qui porte le OH :

$$C^3 = 71,6 \text{ ppm}$$

Faire la verticale jusqu'à la diagonale, puis l'horizontale jusqu'aux taches de corrélation, d'où l'on remonte sur la diagonale\*.

- $C^3$  corrélé à 46,7 et 39,0 or 39,0 est  $1CH_2$  donc :

$$C^4 = 39,0 \text{ ppm}$$

et par suite :

$$C^2 = 46,7 \text{ ppm}$$

\* Ou bien faire des carrés pour les corrélations.

- $C^2$  corrélé à 47,8 qui est un CH donc :

$$C^1 = 47,8 \text{ ppm}$$

- $C^2$  corrélé à 20,3 donc :

$$CH_3 \text{ porté par } C^2 = 20,3 \text{ ppm}$$

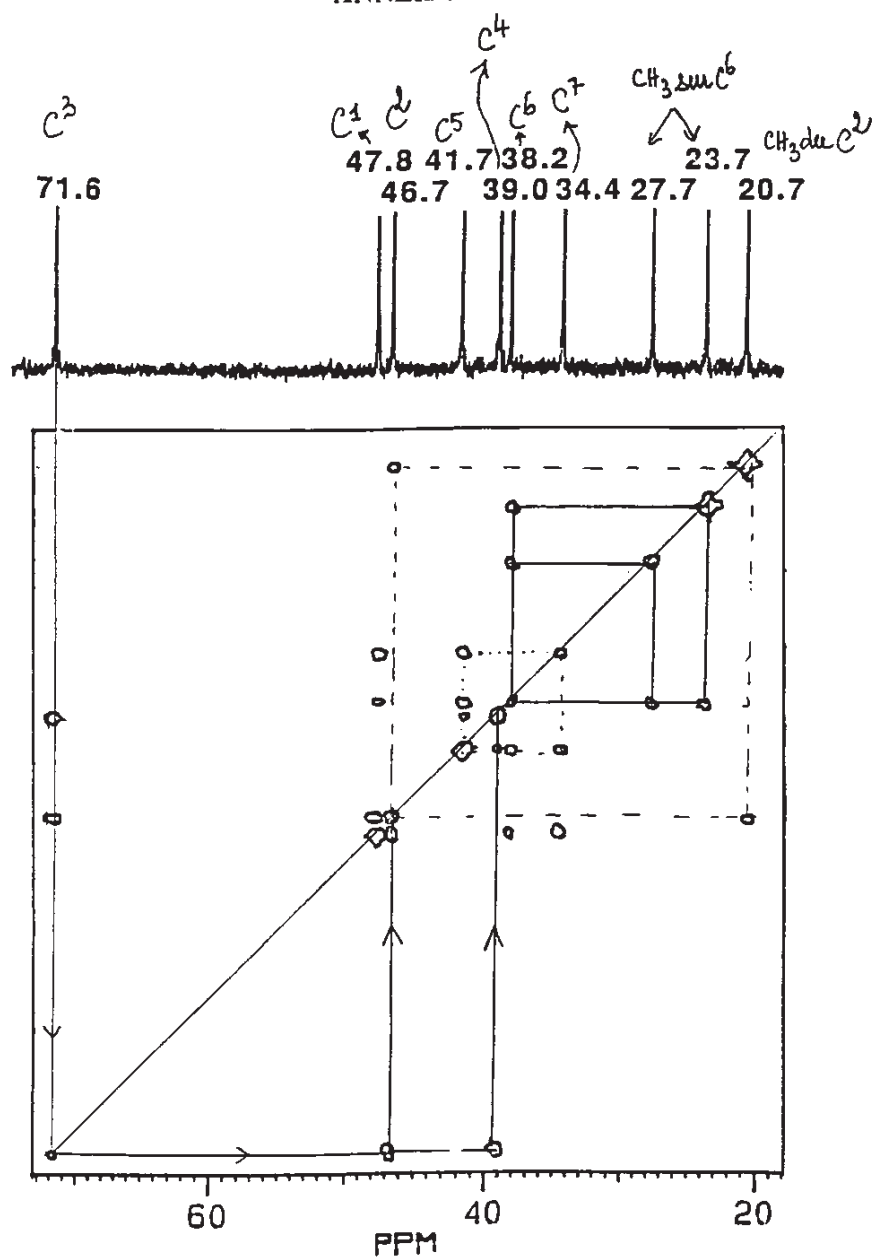
- $C^1$  corrélé aussi à 38,2 (le  $C^6$  donc vérification où on pouvait par exemple partir de là !).  
 $C^1$  corrélé à 34,4 donc :

$$C^5 = 41,7 \text{ ppm}$$

- les autres corrélations confirment les attributions précédentes et montrent que les  $2CH_3$  portés par :

$$C^6 = 23,7 \text{ et } 27,7 \text{ ppm}$$

## ANNEXE II



**Schéma 2** : Diagramme INADÉQUATE-2D  $^{13}C$  du composé 4.  
(Présentation analogue à celle d'une carte COSY).

- c. **Intégration** : La relaxation spin-réseau (longitudinale) des carbones se fait bien avec les protons et donc les signaux des  $^{13}\text{C}$  liés à des protons seront plus intenses (dans un exemple on donne  $T_1$  pour 1C de  $\text{CH}_3 = 4,2 \text{ s}$  ; pour 1C quaternaire :  $40 \text{ s}$ , pour 1H c'est  $10^{-3}$  à  $1 \text{ s}$ ).

Les C quaternaires ont donc des signaux plus faibles car on ne leur laisse pas le temps de se relaxer avant la prise de spectre ce serait beaucoup trop long.

- d. **INADÉQUATE** concerne les couplages  $^{13}\text{C} - ^{13}\text{C}$  extrêmement peu abondants (probabilité  $\approx 10^{-4}$  car l'abondance naturelle du  $^{13}\text{C}$  est  $\approx 10^{-2}$ ).

- 8.2. **HETCOR** : Reporter les numéros attribués aux  $\neq \text{C}$ . Les attributions sont faciles à voir et on peut vérifier avec les intensités sur le spectre 1H du schéma 3.  
Les réponses sont sur le spectre HETCOR.

### Multiplicités :

Le plus simple est le  $H^7$  avec  $\delta$  vers 1,05 : **doublet**  
Ce  $H^7$  n'est couplé qu'avec l'autre  $H^7$  :  $^2J (J_{gem})$  assez grand.

### L'autre $H^7$ (vers 2,38 ppm) est un tdd

donc couplé de la même façon avec  $2H$  (le  $t : J$  «moyen»)  
couplé avec un autre  $H$  (l'autre  $^7H$ ,  $^2J$  assez grand :  $d$ )  
couplé avec un quatrième  $H$  (le petit dédoublement =  $J$  petit)

par symétrie, ce  $H^7$  est en effet couplé de la même façon avec  $H^1$  et  $H^5$  : d'où le triplet.

Le petit dédoublement vient d'un couplage avec un des  $H^4$  (celui qui n'est pas dans la «même» position que  $H^2$ , sinon il y aurait aussi couplage avec ce  $H^2$  donc «détriplement»).

$H^3$  est un **td** donc couplé de la même façon avec  $2H$  (le  $t : J$  «moyen») et couplé avec un **autre H** (**J plus grand** : le double). Par symétrie, ce  $H^3$  est en effet couplé de la même façon avec  $H^2$  et un des  $H^4$  ( $J_{aa}$  ou  $J_{ee}$  et comme  $J_{petit}$  c'est  $J_{ee}$ ) et d'une autre façon avec **l'autre  $H^4$**  ( $J_{ae}$  de toute façon mais comme c'est le plus grand J cela renforce l'hypothèse formule de gauche).

NB : En mesurant on évalue  $J \approx 5$  et  $10 \text{ Hz}$ .

$H^1$  est un **td** donc couplé de la même façon avec  $2H$  (le  $t : J$  «grand») et couplé avec un autre  $H$  ( $J$  petit = petit dédoublement).

Or  $H^1$  n'est couplé qu'avec un des  $H^7$  et couplé aussi avec  $H^2$ .

Et donc  $H^1$  couple avec  $H^5$  (proche dans l'espace à cause de la tension de cycle).

ANNEXE III

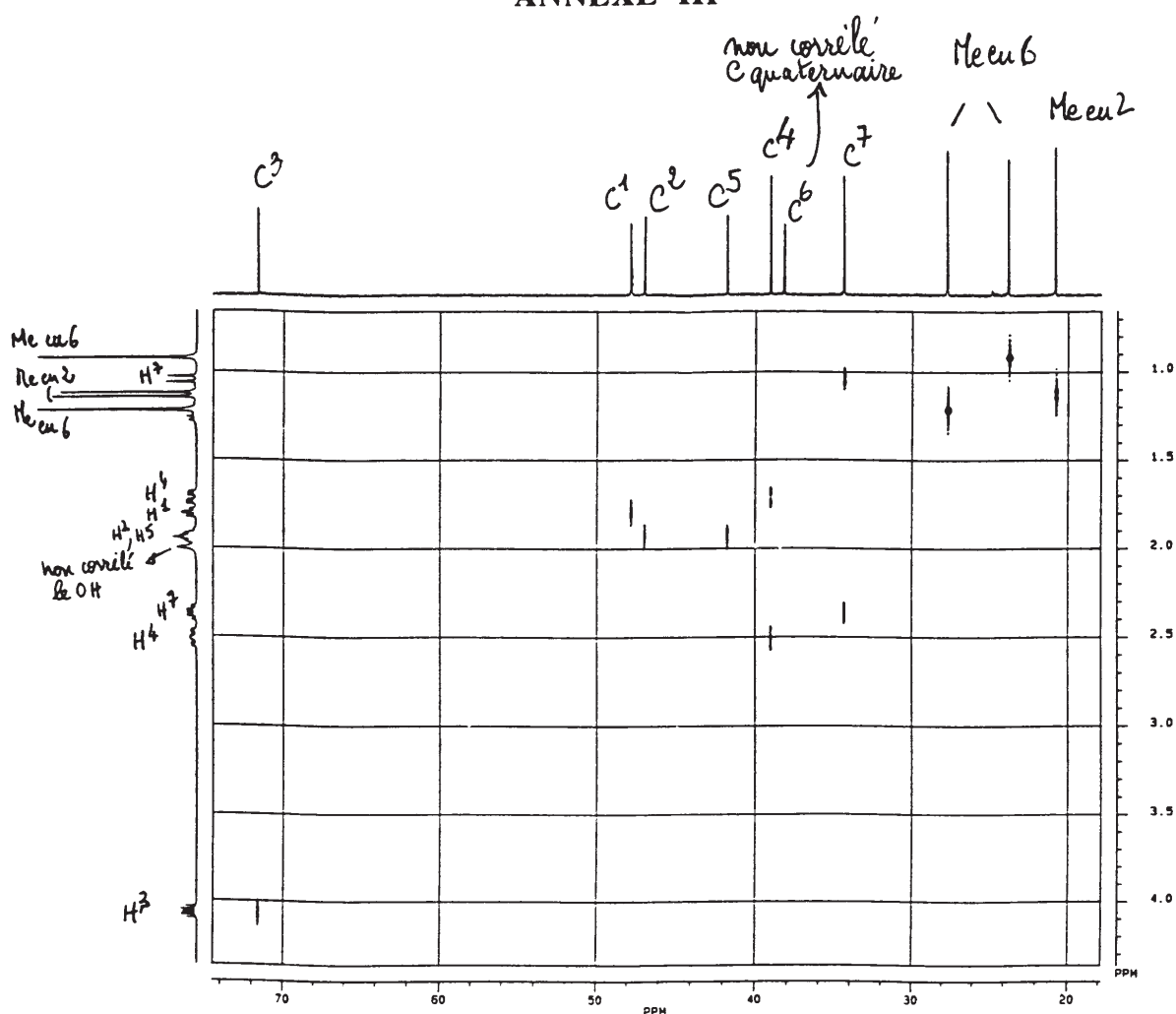
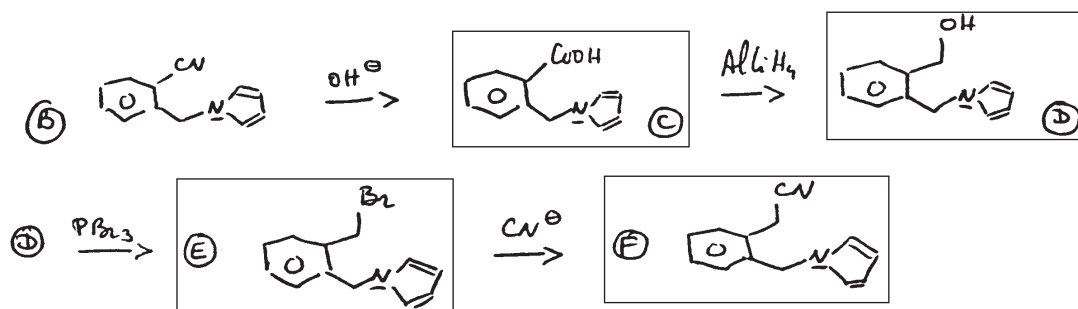


Schéma 4 : Diagramme HETCOR (COSY  $^1H$ ,  $^{13}C$ ) du composé 4.

SYNTHÈSE D'HÉTÉROCYCLES AZOTÉS

1. 1.1.



1.2. a. B → C

B est un nitrile. On voit donc la bande  $C \equiv N$  vers  $2200\text{ cm}^{-1}$  disparaître (nitrile conjugué).

C est un acide. On voit donc les bandes  $C = O$  vers  $1700\text{ cm}^{-1}$  et  $O - H$  vers  $3000\text{ cm}^{-1}$  apparaître (acide conjugué et associé donc bande très large, comme toujours).

C → D

On voit les bandes de C disparaître.

Ⓓ est un alcool. On voit donc la bande  $O-H$  alcool apparaître ( $OH$  associé vers  $3300\text{ cm}^{-1}$ , si  $OH$  libre avec : fine vers  $3600\text{ cm}^{-1}$ ).

b. RMN  $^{13}C$  :

- le signal de  $C \equiv N$  disparaît vers 120 ppm et le signal de  $COOH$  apparaît vers 180 ppm pour Ⓑ → Ⓒ,
- le signal de  $COOH$  disparaît et celui de  $CH_2-OH$  à 40-80 ppm apparaît.

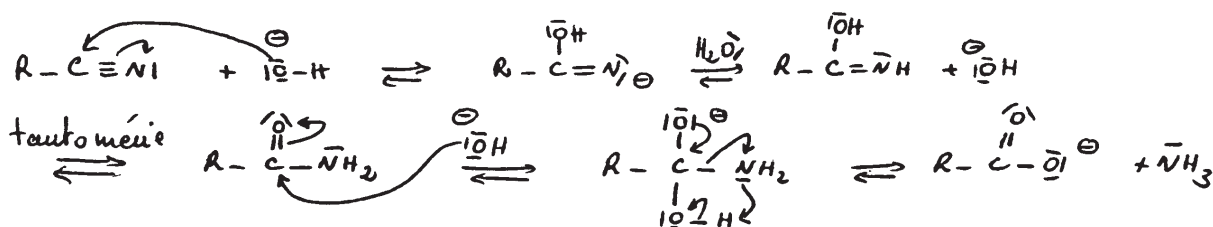
RMN  $^1H$  :

- Ⓑ ne présente pas de  $H$  caractéristique (par rapport aux autres),
- Ⓒ présente un  $H$  mobile dans  $COOH$  vers 12 ppm mais très souvent il est échangé et variation des  $\delta$  des  $H$  aromatiques,
- Ⓓ présente le système  $Ar-CH_2-OH$  a priori on attend deux signaux dans le rapport 2/1 avec  $\delta(CH_2) \approx 4,2\text{ ppm}$  et  $\delta(O-H) \approx 1\text{ à }6\text{ ppm}$ .

Le signal de  $O-H$  est élargi et disparaît par réaction d'échange.

On peut signaler enfin que le spectre de Ⓓ présente aussi 4H aromatiques et 4H pycoliques (pour l'intégration).

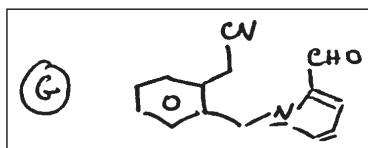
1.3. Mécanisme Ⓑ → Ⓒ : hydrolyse d'un nitrile en milieu basique.



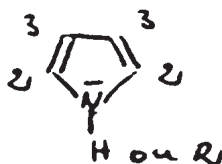
Puis neutralisation  $RCOO^- + H^+ \rightleftharpoons RCOOH$ .

2. 2.1.  $2230\text{ cm}^{-1} = \bar{\nu}$  : correspond à la vibration d'élongation de  $C \equiv N$ .  
 $1650\text{ cm}^{-1} = \bar{\nu}$  : correspond à la vibration d'élongation de  $C = O$ .  
 C'est une valeur affaiblie par conjugaison (avec le cycle pyrrole).

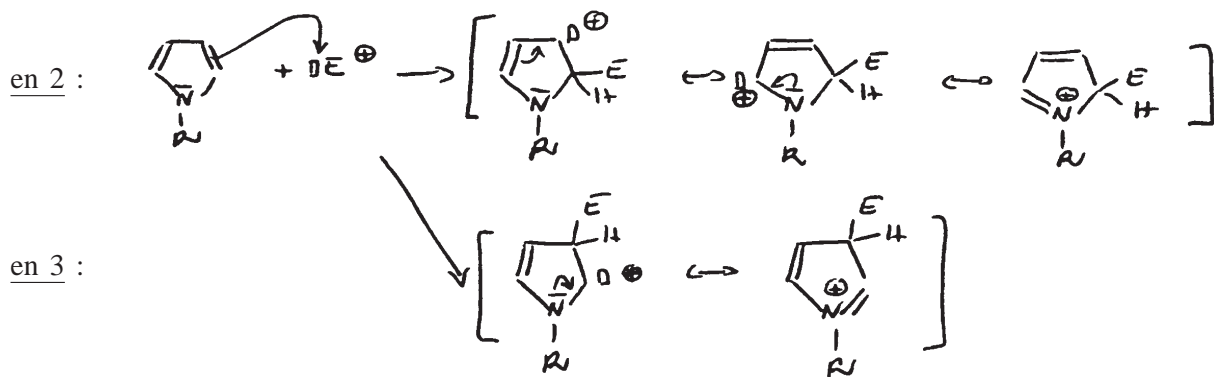
2.2.



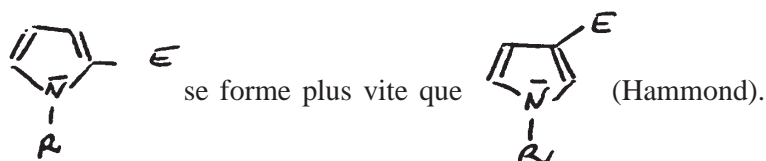
La substitution électrophile aromatique sur le pyrrole peut se faire en position 2 ou 3.



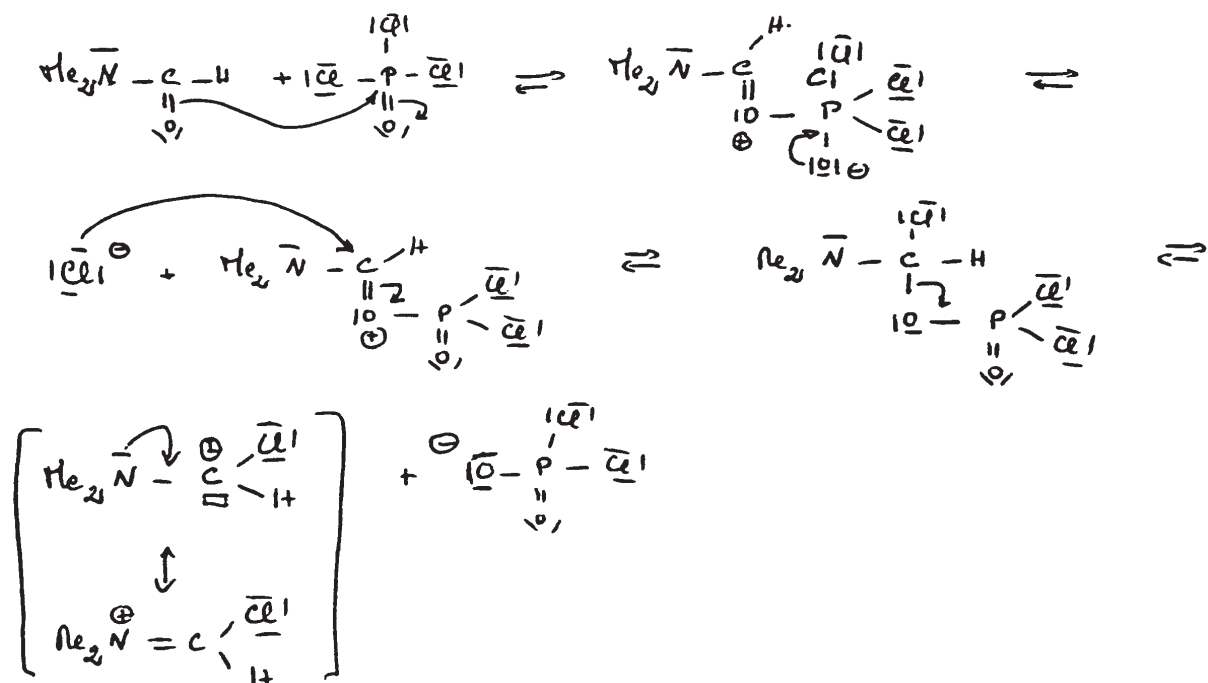
Sous contrôle cinétique, on regarde la stabilité du cation de Whéland formé.



Le cation de Whéland en position 2 possède trois formules mésomères et est donc plus stable que celui issu d'une attaque en position 3.

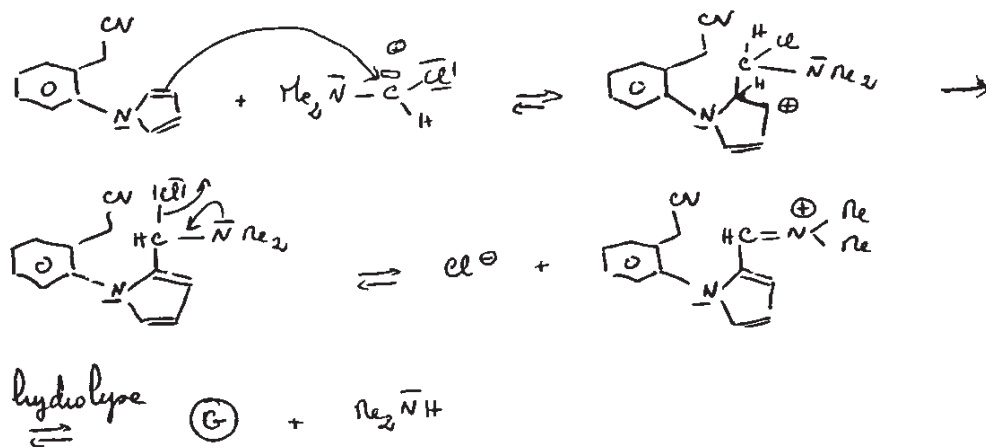


2.3. Réaction de Vilsmeier-Haack

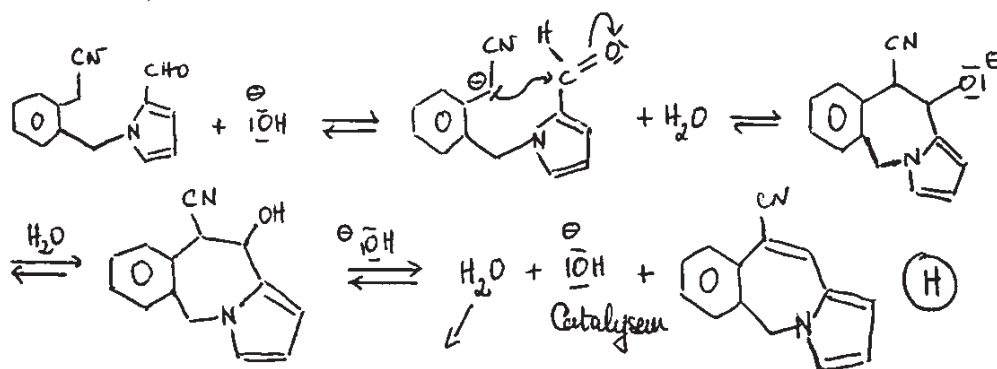


électrophile cherché.

2.4. Puis  $S_EAr$  classique sur le cycle pyrrole



3. Structure de H, mécanisme



éliminée au fur et à mesure,  
donc déplacement d'équilibre.

La dernière étape ( $\beta$ -élimination) fait intervenir  $\text{OH}^-$  comme groupe partant mais via sans doute le carbanion stabilisé au pied du CN et on déplace les  $\rightleftharpoons$  en éliminant l'eau.  
CN à  $2200 \text{ cm}^{-1}$  = conjugaison.

# Agrégation

## (Concours Externe)

OPTION : CHIMIE

Épreuve B : Composition de physique - Session : 1998

### PREMIER PROBLÈME

#### 1. MODÈLE DU GAZ PARFAIT :

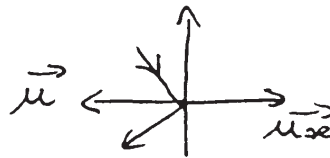
##### 1.1. PRESSION CINÉTIQUE :

1.1.1.

$$v_x + v'_x = 0 \quad , \quad v_y = v'_y$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v} &= 2 v_x \vec{u} \\ &= -2 v_x \vec{u}_x \end{aligned}$$

$$(\Delta \vec{P})_{1 \text{ particule}} = -2 m v_x \vec{u}_x$$



1.1.2.

$$d^2 N_1 = n_1 \times v_x \times dS \times dt$$

$$d^2 \vec{p} = (\Delta \vec{P})_{1 \text{ particule}} \times d^2 N_1 = (-2 m v_x) n_1 v_x dS dt \vec{u}_x$$

$$d^2 \vec{P}_{\text{cédée}} = 2 m n_1 v_x^2 dS dt \vec{u}_x$$

$$\langle n_1 v_x^2 \rangle = nu^2 / 6 \quad \rightarrow \quad 3 \text{ directions} / 2 \text{ sens} : \text{ en moyenne } \frac{n}{6} \text{ particules.}$$

1.1.3.

$$P_{\text{pression}} = \left\langle \left| \frac{d^2 \vec{P}}{dS dt} \right| \right\rangle = 2 m n \frac{u^2}{6} = \frac{mnu^2}{3}$$

1.1.4.

$$n = \frac{n' \mathcal{N}}{V}$$

$n'$  = nombre de moles de gaz dans un volume  $V$ .

$$P = \frac{mnu^2}{3} = m \times \mathcal{N} \times \frac{n'}{V} \times \frac{u^2}{3} = M \times \frac{n'}{V} \times \frac{u^2}{3} = \frac{n' RT}{V}$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{\frac{3 RT}{M}}$$

Application Numérique :

$$u = 1305 \text{ ms}^{-1}$$



## 1.2. ÉNERGIE INTERNE :

## 1.2.1. Gaz parfait monoatomique.

$C_v$  ne dépend pas de  $T$  ;  $C_v = \frac{3}{2} R$

directement  $U = \frac{3}{2} RT$  (ou  $\left( \text{ou } U = \mathcal{N} \left( \Sigma \frac{1}{2} mu^2 \right) = \frac{1}{2} Mu^2 = \frac{3}{2} RT \right)$

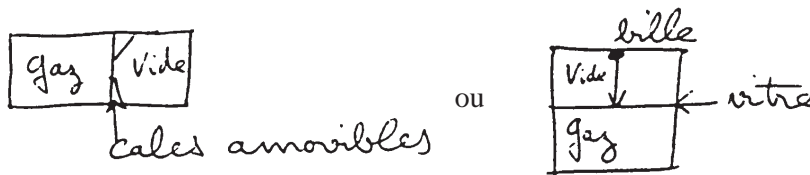
Capacité thermique molaire :  $C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2} R$

Ne s'applique au gaz parfait diatomique qu'à température assez basse pour que les rotations soient négligeables.

1.2.2.  $\Delta U = W + Q$  dans repère barycentrique.

c'est un principe de conservation de l'énergie d'un système isolé.

## 1.2.3. Détente de Joule Gay-Lussac



$U$  se conserve.

$U(T)$  gaz parfait  $\Rightarrow T$  gaz parfait se conserve, ou plus exactement,  $T_f = T_i$ , les états intermédiaires n'étant pas définis.

## 1.3. ENTROPIE :

$$1.3.1. \quad \Delta S = \Delta S_{\text{échange thermique}} + \Delta S_{\text{création par irréversibilité}} \quad (\text{système fermé})$$

L'entropie d'un système fermé peut varier de deux manières :

- échange thermique,
- création par irréversibilité.

C'est un principe d'évolution :  $\Delta S_{\text{création}} \geq 0$

Réversible :  $\Delta S_{\text{création}} = 0$

Adiabatique :  $\Delta S_{\text{échange thermique}} = 0$

$$1.3.2. \quad C_v = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{v, \text{autres}}$$

$$C_v(T, V, \text{autres})$$

$$1.3.3. \quad C_v(T \text{ seul})$$

$$1.3.4. \quad \delta Q_{\text{rév}} = TdS = C_v(T) dT + P dV$$

$$dS = \frac{C_v(T)}{T} dT + \frac{P}{T} dV = \frac{C_v(T)}{T} dT + \frac{R}{V} dV$$

$$S_{\text{gaz parfait}} \text{ à } C_v \text{ cte} = C_v \ln T + R \ln V + \text{cte}$$

$$S_2 - S_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

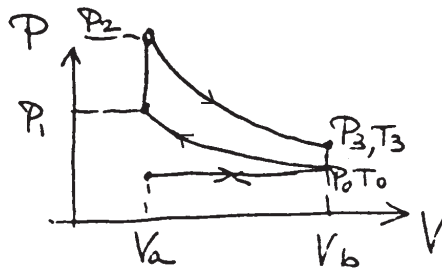
1.3.5. Isentropique :  $\Delta S = 0$   
(par exemple : ad. réversible).

Note : on peut imaginer une isentropie par échange compensant création.

$$S_2 = S_1 \Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{C_v} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^R = 1 \dots \Rightarrow P V^\gamma = \text{cte}$$

**2. MOTEURS THERMIQUES :**

2.1.



2.2.

$$\left. \begin{aligned} P_1 V_a^\gamma &= P_0 V_b^\gamma \Rightarrow P_1 = P_0 C^\gamma \\ T_1 V_a^{\gamma-1} &= T_0 V_b^{\gamma-1} \Rightarrow T_1 = T_0 C^{\gamma-1} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{de même} \\ P_3 = \frac{P_2}{C^\gamma} \\ T_3 = \frac{T_2}{C^{\gamma-1}} \end{array}$$

2.3.

$$Q_c = n C_v (T_2 - T_1)$$

2.4. Rendement :

$$r = \frac{\text{gain}}{\text{dépense}} = \frac{|W_{\text{total}}|}{Q_{\text{combustion}}} = + \frac{Q_{30} + Q_{12}}{Q_{12}}$$

$$r = \frac{T_0 - T_3}{T_2 - T_1} + 1 = 1 - \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}$$

$$r = 1 - \frac{\frac{T_2}{C^{\gamma-1}} - T_0}{T_2 - T_0 C^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{C^{\gamma-1}}$$

$$\boxed{r = 1 - C^{1-\gamma}}$$

### 3. STATIQUE DES FLUIDES :

#### 3.1. ÉQUATION DE LA STATIQUE DES FLUIDES :

3.1.1. Référentiel galiléen :  $\vec{v}_{mobile}$  = vecteur constant en l'absence de forces appliquées.

$$3.1.2. \quad \iiint \rho \vec{g} \, dv - \underbrace{\oint P \, d\vec{S}}_{\text{Ceci} = - \iiint \vec{grad} P \, dv} = \vec{0}$$

Pour l'élément  $dv$  :  $\rho \vec{g} - \vec{grad} P = \vec{0}$

ou :  $\rho \vec{g} \, dv + (P(z+dz) - P(z)) \, dx \, dy \, (-\vec{u}_z) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho \vec{g} - \frac{dP}{dz} \vec{u}_z = \vec{0}}$$

3.1.3. Applications aux fluides incompressibles :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \Rightarrow P_B - P_A = -\rho g (z_B - z_A)$$

Application Numérique :  $P_{\text{fond du lac}} = P_{\text{atmosphérique}} + \rho g h \approx 4 \text{ bars}$

3.1.4. Modèle de l'atmosphère isotherme :

$$PV = n RT = \frac{m}{M} RT \Rightarrow P = \rho \frac{RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{PM}{RT}$$

$$dP = -\rho g \, dz \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} \, dz$$

$$\ln P(z) - \ln P(o) = -\frac{Mg \, z}{RT}$$

$$\ln \frac{P(z)}{P(o)} = -\frac{Mg \, z}{RT} \Rightarrow \boxed{P(z) = P(o) e^{-\frac{Mg \, z}{RT}}}$$

Application Numérique : Altitude telle que  $P(z) = \frac{P_o}{100} \rightarrow z = 35 \text{ à } 36 \text{ km}$ .

3.1.5. Poussée d'Archimède :

Équilibre d'une portion de fluide :

$$\rho_{solide} V_{solide} \vec{g} - \oint P \, d\vec{S} = \vec{0}$$

or :  $\oint P \, d\vec{S} = \iiint \rho_{fluide} \vec{g} \, dv$

Fluide homogène :  $\rho_{solide} V_{solide} \vec{g} - \rho_{fluide} \vec{g} \iiint dv = \vec{0}$

$$\Rightarrow V_{immergé} = \iiint dv = \frac{\rho_{solide}}{\rho_{fluide}} V_{solide}$$

3.2. MOUVEMENT D'UN BALLON SONDE DANS LA TROPOSPHÈRE

3.2.1. 
$$\frac{dP}{dz} = -\frac{MP}{RT} g \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

et :

$$T = T_0 (1 - Bz)$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} \frac{1}{1 - Bz} dz$$

$$\frac{P}{P_0} = (1 - Bz)^{Mg/BR T_0}$$

$$\alpha = Mg / BR T_0$$

3.2.2. Masse volumique :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{mP}{nRT} = \frac{MP}{RT} = \rho_0 \frac{(1 - Bz)^{Mg/BR T_0}}{1 - Bz}$$

$$\rho = \rho_0 (1 - Bz)^{\alpha-1}$$

3.2.3. Ballon sonde :

Force ascensionnelle : Poussée Archimède + Poids

$$+ \rho V_m g \vec{u}_z - (m + a V_m) g \vec{u}_z$$

Équilibre :

$$\rho V_m g = (m + a V_m) g = (m + a_0 V_0) g$$

$$\Rightarrow \rho_0 (1 - Bz)^{\alpha-1} = \frac{m + a_0 V_0}{V_m} = \frac{m + a V_m}{V_m}$$

$$\rho_0 (1 - Bz)^{\alpha-1} = \frac{m}{V_m} + a = \frac{m + a_0 V_0}{V_m}$$

Application Numérique : Altitude d'équilibre  $z = 6,2$  km.

3.3. MODÉLISATION D'UNE ÉTOILE :

3.3.1. Champ de gravitation :

$$\vec{f} = -\frac{G m m'}{r^2} \vec{u}$$

Masse ponctuelle :

$$\vec{g} = -G \frac{m}{r^2} \vec{u}$$

Étoile à symétrie sphérique : en utilisant le théorème de Gauss on obtient :

$$\vec{g}_{ext} = -G \frac{\rho \times \frac{4}{3} \pi R_0^3}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{g}_{int} = -G \rho \times \frac{4}{3} \pi r \vec{u}_r$$

3.3.2.

$$\rho \vec{g} - \vec{grad} P = \vec{0}$$

$$\frac{dP}{dr} = -G \rho^2 \times \frac{4}{3} \pi r$$

$$dP = -G \rho^2 \times \frac{4}{3} \pi r dr$$

$$\underbrace{P(R_0)}_{\text{nul}} - P(0) = -G \rho^2 \frac{4}{3} \pi \frac{R_0^2}{2}$$

$$P(0) = G \rho^2 \frac{2}{3} \pi R_0^2 = \frac{\rho}{M'} RT$$

$$T = \frac{2}{3} \pi \rho \frac{M' G}{R} R_0^2$$

Application Numérique :

$$T = 2 \times 10^7 K$$

## DEUXIÈME PROBLÈME TECHNOLOGIE DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

### PREMIÈRE PARTIE : LES SUPPORTS DE DISTRIBUTION DES SIGNAUX

#### I.1. CÂBLE COAXIAL

##### I.1.1. PRÉLIMINAIRES

I.1.1.1.

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{c} = v \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{c} = \frac{dv}{dt}$$

I.1.1.2.

$$\left( jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{I}_o = \underline{V}_o$$

$$I_o = \left| \frac{\underline{V}_o}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \right| = \frac{V_o}{\left| L\omega - \frac{1}{C\omega} \right|}$$

$$j(I_o \cos \varphi + j I_o \sin \varphi) \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = V_o$$

$$j I_o \cos \varphi \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) - I_o \sin \varphi \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = V_o$$

$$\cos \varphi = 0, \quad \sin \varphi = - \frac{V_o}{I_o \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} = \pm 1$$

selon signe de  $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ .

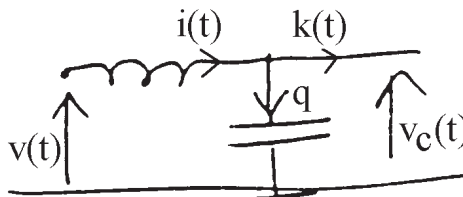
$$i(t) = I_o \cos(\omega t + \varphi)$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} > 0 \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad ; \quad L\omega - \frac{1}{C\omega} < 0 \rightarrow +\frac{\pi}{2}$$

Dans les deux cas :

$$i(t) = \frac{V_o}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} \sin \omega t$$

I.1.1.3.



$$v(t) - v_c(t) = \text{tension aux bornes de } L = L \frac{di}{dt}$$

$$i(t) - k(t) = \text{intensité entrant dans } C = \frac{dq}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt} (C v_c(t)) = C \frac{dv_c}{dt}$$

$$L \frac{di}{dt} + v_c(t) = v(t)$$

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i(t) - k(t)}{C} = \frac{dv(t)}{dt}$$

### I.1.2. MODÈLE DU CÂBLE COAXIAL

I.1.2.1.

$$v(x, t) - v(x + dx, t) = \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}(x, t)$$

I.1.2.2.

$$i(x, t) - i(x + dx, t) = \Gamma dx \frac{\partial v}{\partial t}(x, t)$$

I.1.2.3. Passage à la limite :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial v}{\partial t} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = -\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0}$$

I.1.2.4. De même :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = - \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{1}{\Lambda \Gamma} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}$$

$$[\Lambda \Gamma] = [t^2 / x^2] = 1 / \text{carré de vitesse}$$

I.1.2.5.

$$(2) \rightarrow \frac{d\underline{I}(x)}{dx} = - j \omega \Gamma \underline{V}(x)$$

$$(1) \rightarrow \frac{d\underline{V}(x)}{dx} = - j \omega \Lambda \underline{I}(x)$$

puis :

$$\frac{d^2 \underline{V}(x)}{dx^2} = - j \omega \Lambda \frac{d\underline{I}(x)}{dx} = - \omega^2 \Lambda \Gamma \underline{V}(x)$$

donc :

$$\boxed{\frac{d^2 \underline{V}(x)}{dx^2} + \omega^2 \Lambda \Gamma \underline{V}(x) = 0}$$

De même :

$$\frac{d^2 \underline{I}(x)}{dx^2} = - j \omega \Gamma \frac{d\underline{V}(x)}{dx} = - \omega^2 \Lambda \Gamma \underline{I}(x)$$

$$\boxed{\frac{d^2 \underline{I}(x)}{dx^2} + \beta^2 \underline{I}(x) = 0} \quad \beta^2 = \omega^2 \Lambda \Gamma$$

I.1.2.6.

$$\frac{d^2 \underline{V}(x)}{dx^2} + \beta^2 \underline{V}(x) = 0$$

$$\frac{d^2 \underline{I}(x)}{dx^2} + \beta^2 \underline{I}(x) = 0$$

$$\underline{V}(x) = A e^{j \beta x} + B e^{-j \beta x}$$

$$\underline{I}(x) = - \frac{1}{j \omega \Lambda} (A j \beta e^{j \beta x} - B j \beta e^{-j \beta x})$$

$$\underline{V}(0) = \underline{V}(x=0) \quad ; \quad \underline{I}(0) = \underline{I}(x=0)$$

d'où :

$$\begin{cases} A + B = \underline{V}(0) \\ A - B = - \frac{\omega \Lambda}{\omega \sqrt{\Lambda \Gamma}} \underline{I}(0) = - Z_c \underline{I}(0) \end{cases}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} A = \frac{V(0) - Z_c I(0)}{2} \\ B = \frac{V(0) + Z_c I(0)}{2} \end{cases}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} V(x) = V(0) \cos \beta x - j Z_c I(0) \sin \beta x \\ I(x) = I(0) \cos \beta x + \frac{1}{j Z_c} V(0) \sin \beta x \end{cases}$$

$$\boxed{Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = \frac{V(0) - j Z_c I(0) \tan \beta x}{I(0) - j \frac{V(0)}{Z_c} \tan \beta x}}$$

I.1.2.7.  $Z(x) = Z_c \quad \text{ssi} \quad V(0) = Z_c I(0)$

adaptation d'impédance transmission optimale d'énergie.

I.2. FIBRES OPTIQUES

I.2.1. I.2.1.1. Réflexion totale :  $n_{\text{cœur}} \cos \beta > n_{\text{gaine}}$

$$\left( \begin{array}{l} \text{et : } n_c \sin \beta = \sin \alpha \\ \text{d'où : } n_c \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n_c^2}} > n_g \end{array} \right) \text{ non demandé au § I.2.1.1.}$$



I.2.1.2. Apparaît ici au plus tard

$$n_c \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_{\text{lim}}}{n_c^2}} = n_g$$

I.2.1.3.  $n_c = 1,50 \quad , \quad n_g = 0,99 n_c$

Application Numérique :  $\alpha_{\text{lim}} = 12^\circ 13'$

$$\boxed{0 \leq \alpha \leq 12^\circ 13'}$$

I.2.2. «Gradient d'indice»

I.2.2.1.  $\sin i = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dr)^2}}$

I.2.2.2.  $n_c(r) \sin i = \text{cte} = n_c(r) \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dr)^2}}$



$$I.2.2.3. \quad n_c^2(r) = A \left[ 1 + \left( \frac{dr}{dx} \right)^2 \right]$$

En dérivant :

$$\frac{dr}{dx} n_c(r) \frac{dn_c(r)}{dr} = \frac{dr}{dx} \frac{d^2r}{dx^2} A$$

Simplifier par  $dr / dx$ , puis expliciter  $n_c(r)$ , d'où :

$$- 2 kr \times \frac{n_o^2}{2} (1 - kr^2)^{1/2} \times \frac{1}{(1 - kr^2)^{1/2}} = \frac{d^2r}{dx^2} A$$

d'où :

$$A \frac{d^2r}{dx^2} = - k n_o^2 r \Rightarrow \frac{d^2r}{dx^2} = - Kr$$

I.2.2.4.  $K > 0$  sinon exponentielle réelle empêchant la propagation.

$$r = r_1 \cos \omega x + r_2 \sin \omega x$$

Allure sinusoïdale (dessin ou phrase).

I.2.3. Fibre optique plus performante.

$$\begin{array}{l} \text{Fréquences optiques} \\ (\nu = c / \lambda \approx 10^{14} \text{ Hz}) \end{array} > \begin{array}{l} \text{Fréquences câble} \\ \text{coaxial (MHz)} \end{array}$$

d'où plus de communications à la fois. Les fabricants de câble répondent aujourd'hui avec des techniques de compression.

## DEUXIÈME PARTIE : ADAPTATION DES SIGNAUX AUX SUPPORTS UTILISÉS

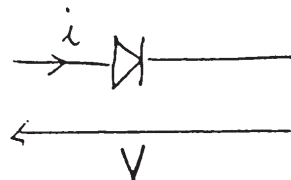
### II.1. MODULATION D'AMPLITUDE

II.1.1. II.1.1.1.



D n'est pas idéale.

II.1.1.2.



$$i = i_o \exp(\lambda V)$$

La convention de signe ci-dessus sera respectée dans toute la suite.

Figure 6

Au nœud  $\ominus$  (entrée  $\ominus$  de l'amplificateur opérationnel), on a :

$$V_{\ominus} = V_{\oplus} = 0$$

$$e - V_{\ominus} = R i \Rightarrow e - 0 = R i_o \exp \lambda V$$

Ici :  $V = 0 - V_S = -V_S \Rightarrow e = R i_o \exp (-\lambda V_S)$

ou :

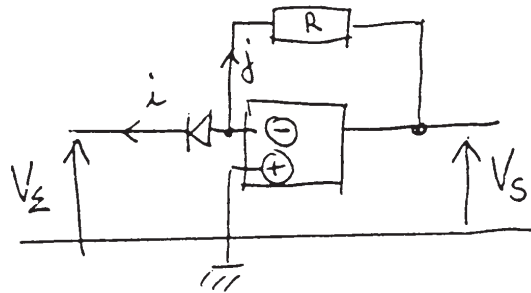
$$V_S = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{e}{R i_o} = A \ln \frac{e}{I_o}$$

avec  $A = -\frac{1}{\lambda}$  ;  $I_o = R i_o$

II.1.2. II.1.2.1. Figure 7

a) Sommateur :  $V_{\Sigma} = V_{S_1} + V_{S_2} = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{e_1 e_2}{e_0^2}$

b) Diode D en sortie du sommateur ; pour cette diode,  $V = 0 - V_{\Sigma}$  et  $0 - V_S = R j$ .



$$j = -i$$

d'où :  $V_S = -R j = R i = R i_o e^{\lambda V} = R i_o e^{-\lambda V_{\Sigma}}$

d'où encore :  $V_S = R i_o \exp \left( (-\lambda) \left( -\frac{1}{\lambda} \right) \ln \frac{e_1 e_2}{e_0^2} \right)$

donc :

$$V_S = R i_o \frac{e_1 e_2}{e_0^2} = \frac{e_1 e_2}{e_0} \quad \text{car } R i_o = e_0$$

On a donc réalisé un multiplexeur.

II.1.2.2.

$$e_1 e_2 = E^2 \cos 2\pi N t \times \cos 2\pi n t$$

$$e_1 e_2 = \frac{E^2}{2} [\cos 2\pi (N + n) t + \cos 2\pi (N - n) t]$$

Par simple multiplication, on a réalisé une modulation qui donne deux raies dites «latérales» de fréquence respectives  $N + n$  et  $N - n$ .

*N.B.* : Dans ce cas, la raie centrale correspondant à la porteuse de fréquence  $N$  est absente du spectre de l'onde modulée (DSB sans porteuse, avec DSB = Double Side Band).

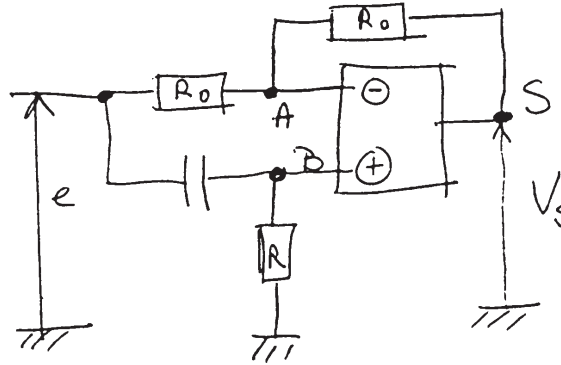
## II.2. MATÉRIEL D'INTERFAÇAGE, LES MODEMS

### II.2.1. MODEM DE MINITEL

La bande de fréquence considérée va de 700 à 2300 Hz ; elle appartient bien à la bande de téléphonie ; elle correspond au Minitel.

### II.2.2. MODULATION DE PHASE

#### II.2.2.1.



#### II.2.2.1.1.

$$V_A = V_{\ominus} = V_B = V_{\oplus}$$

On applique la loi des nœuds au nœud A (ceci constitue le théorème de Millmann, sans étages inutiles de calcul) :

$$\frac{e - V_A}{R_o} + \frac{V_S - V_A}{R_o} = 0 \quad (1)$$

De même au nœud B :

$$\frac{e - V_B}{1/jc\omega} + \frac{0 - V_B}{R} = 0 \quad (2)$$

d'où :

$$\underline{V_A} = \frac{e + V_S}{2} = \underline{V_B} = e \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

On en déduit :

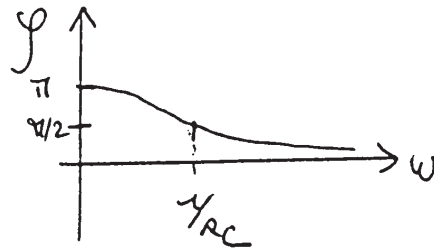
$$\boxed{\frac{V_S}{e} = \frac{jRC\omega - 1}{jRC\omega + 1} = \frac{j\omega A - 1}{j\omega A + 1} \quad \text{avec } A = RC}$$

#### II.2.2.1.2.

$$\left| \frac{V_S}{e} \right| = 1$$

Même amplitude en entrée et en sortie.

- II.2.2.1.3.  $\varphi$  décroît avec  $\omega$  de  $\pi$  (pour  $\omega = 0$ ) à 0 (pour  $\omega \rightarrow \infty$ ) en passant par  $\frac{\pi}{2}$  pour  $RC\omega = 1$ .



- II.2.2.1.4. Circuit déphaseur.

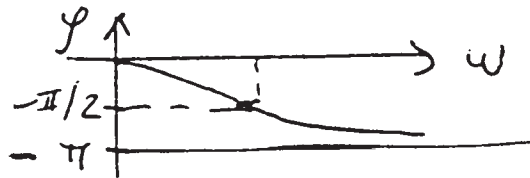
- II.2.2.2. II.2.2.2.1. Déphasage  $\frac{\pi}{2}$  pour  $RC\omega = 1$ .

- II.2.2.2.2. Déphasage  $-\frac{\pi}{2}$  en permutant  $R$  et  $C$ .

Alors :

$$\frac{V_S}{e} = \frac{1 - j RC\omega}{1 + j RC\omega}$$

déphasage de  $\pi$  / précédent.



- II.2.2.2.3. 75 bit/s  $\rightarrow$  signal de retour sur la ligne téléphonique.  
 14 400 bit/s  $\rightarrow$  premiers modems Internet.  
 On atteint aujourd'hui couramment en France 56 600 bit/s.

# Agrégation

## (Concours Externe)

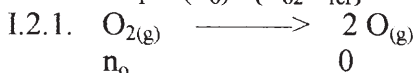
OPTION : CHIMIE

Épreuve C : Composition de chimie (applications) - Session : 1998

### Partie I. Etude de la dissociation du dioxygène.

#### I. Etude thermodynamique.

I. 1.  $K_T^o = (P_o)^2 / \{P_{o_2} \cdot P_{ref}\}$



$$n_o \qquad \qquad \qquad 0$$

$$n_o(1 - \alpha) \qquad \qquad 2n_o\alpha \qquad \qquad n_g^{tot} = n_o(1 + \alpha)$$

On en déduit l'expression des pressions partielles en fonction du coefficient de dissociation et de la pression totale :

$$P_{O_2} = \{1 - \alpha\} / \{1 + \alpha\} \cdot P_{tot} \qquad P_O = 2\alpha / \{1 + \alpha\} \cdot P_{tot}$$

et l'expression de la constante d'équilibre :

$$K_T^o = \{4 \alpha^2\} / \{1 - \alpha^2\} \cdot \{P_{tot} / P_{ref}\}$$

On pose  $P_{tot} / P_{ref} = \underline{P}_{tot}$ , ce qui donne :

$$\alpha = (1 + 4 \underline{P}_{tot} / K_T^o)^{-1/2}$$

I.2.2.  $P_{tot} = 1 \text{ bar} = P_{ref}$ . Donc  $\underline{P}_{tot} = 1$ .

T (K)	1000	2000	4000
$\alpha$	$10^{-10}$	$3,66 \cdot 10^{-4}$	0,612

#### I.3. Etude de quelques équilibres.



$$n_o \qquad \qquad \qquad 0$$

$$n_o - \xi \qquad \qquad 2\xi \qquad \qquad n_g^{tot} = n_o + \xi$$

La constante d'équilibre s'écrit :

$$K_T^o = (2 \xi)^2 / \{(n_o - \xi) \cdot (n_o + \xi)\} \cdot \{P_{tot} / P_{ref}\} \quad \text{et} \quad PV = (n_o + \xi)RT$$

L'avancement  $\xi$  de la réaction est obtenu par résolution de l'équation du second degré :

$$\xi^2 + a\xi - an_o = 0$$

avec  $a = \{K_T^o \cdot P_{ref} V / (4RT)\}$

dont la seule racine positive est :  $\xi = (-a + (a^2 + 4an_o)^{1/2}) / 2$

Application numérique :

$$K_T^o = 10^{-1,85} ; V = 10^{-2} \text{ m}^3 ; T = 3000 \text{ K} ; n_o = 0,1 \text{ mol.}$$

On en déduit :

$$a = 1,42 \cdot 10^{-4}, \xi = 3,69 \cdot 10^{-3} \text{ et donc } P = (0,1 + 3,69 \cdot 10^{-3}) \cdot 8,314 \cdot 3000 / 10^{-2} = 2,59 \cdot 10^5 \text{ bar.}$$

I.3.2. L'introduction d'un gaz inerte à T et V fixés est sans effet sur la position de l'équilibre car elle ne modifie pas les pressions partielles des gaz participant à l'équilibre étudié.

### II. Etude de la structure électronique de l'atome d'oxygène.

#### II.1. Configuration fondamentale.

II.1.1.  $1s^2 2s^2 2p^4$

II.1.2. Pour le premier électron à placer dans les orbitales p, il y a 6 possibilités (3 orbitales p plus le spin + ou -) ; pour le second électron à placer, il reste 5 possibilités (d'après le principe d'exclusion de Pauli) ; pour le troisième, 4 possibilités et pour le quatrième, trois possibilités. Le résultat final est divisé par n! pour tenir compte de l'indiscernabilité des électrons.

La dégénérescence de la configuration  $2p^4$  est donc :  $(6 \times 5 \times 4 \times 3) / (4 \times 3 \times 2) = 15$ .

Le couplage spin-orbite peut lever partiellement la dégénérescence des termes pour conduire à des états spectroscopiques.

Pour lever totalement la dégénérescence, il faut appliquer un champ magnétique (effet Zeeman).

II.2. Termes spectroscopiques issus de la configuration fondamentale.

II.2.1. Dans un atome polyélectronique possédant une sous-couche incomplète, il y a interaction entre les moments cinétiques orbitaux ( $l_i$ ) et de spin ( $s_i$ ) des différents électrons de la sous-couche. Dans le cadre du couplage de Russell-Saunders, les moments cinétiques orbitaux s'additionnent vectoriellement pour donner naissance à un moment cinétique orbital total  $L = \sum l_i$  ; les moments cinétiques de spin s'additionnent vectoriellement pour donner naissance à un moment cinétique de spin total  $S = \sum s_i$ . Les moments  $L$  et  $S$  peuvent ensuite interagir : c'est le couplage spin-orbite.

II.2.2. Un terme spectroscopique correspond à un couple  $(L,S)$  possible pour l'atome.

La notation habituellement rencontrée est :

$$^{2S+1}X$$

avec X =      S      L = 0  
                   P      L = 1  
                   D      L = 2 etc.

II.2.3. Il faut envisager les 15 microétats correspondant à la dégénérescence évoquée à la question II.1.1. et les valeurs de  $m_s$  et  $m_L$  correspondant à chaque microétat.

m	-1	0	1	$M_L$	$M_S$
	↑↓	↑	↑	-1	1
	↑	↑↓	↑	0	1
	↑	↑	↑↓	1	1
	↑↓	↑↓		-2	0
	↑↓	↑	↓	-1	0
	↓	↑↓	↑	0	0
	↑	↓	↑↓	1	0
	↑↓		↑↓	0	0
	↑↓	↓	↑	-1	0
	↓	↑↓	↑	0	0
	↓	↑	↑↓	1	0
		↑↓	↑↓	2	0
	↑↓	↓	↓	-1	-1
	↓	↑↓	↓	0	-1
	↓	↓	↑↓	1	-1

A partir de cette table, on regroupe les microétats de façon à faire varier  $m_s$  et  $m_L$  entre des bornes correspondant à des valeurs de  $L$  et  $S$ . Par exemple, dans le tableau ci-dessus, on trouve 9 microétats tels que  $M_S$  prend la valeur  $-1, 0$  ou  $+1$  et  $M_L$  prend les valeurs  $-1, 0$  ou  $+1$ , ce qui définit un terme spectroscopique  $L=1, S=1$ , c'est à dire  $^3P$ .

Les 6 microétats restant sont tous avec  $M_S = 0$ , donc des singulets.  $M_L$  variant de  $-2$  à  $+2$  par incrément entier définit un terme spectroscopique  $D$ , donc  $^1D$ . Il reste un microétat ( $M_L = 0, M_S = 0$ ) qui définit un terme  $^1S$ .

Les trois termes issus de la configuration  $p^4$  sont donc :

$$^3P ; ^1D ; ^1S$$

II.2.4. Les règles de Hund permettent de trouver, parmi les termes issus d'une configuration, celui qui est le plus stable.

- Le terme le plus stable correspond à un terme de multiplicité de spin maximale ( $2S + 1$  maximal, soit  $S$  maximal).

- parmi les termes de multiplicité de spin maximale, c'est celui de multiplicité orbitale maximale (soit L maximal) qui est le plus stable.

$^3P$  est le terme fondamental de la configuration  $p^4$ .

II.2.5.1. C'est la répulsion interélectronique qui lève partiellement la dégénérescence de la configuration.

II.2.5.2. Le facteur  $F^2(pp)$  représente quantitativement la répulsion entre les électrons p : liée à une intégrale biélectronique.

II.2.5.3.  $F^2(pp) = (5/18) \cdot (-9E_1 + 5E_1 + 5.1,96 + 4E_1 + 4.4,18) = 7,37 \text{ eV}$ .

II.2.5.4.  $F^2(pp)$  croît dans la série C, N, O. Le rayon des atomes diminue quand on se déplace de la gauche vers la droite dans une ligne de classification périodique, donc la distance moyenne entre électrons p diminue et la répulsion entre électrons p augmente, ce que traduit l'augmentation de  $F^2(pp)$ .

II.3. Couplage spin-orbite.

II.3.1. Cet Hamiltonien décrit de façon empirique le couplage spin-orbite.

II.3.2. Pour décrire le couplage spin-orbite, on introduit les nombres quantiques J et  $M_J$  associés à la grandeur  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ . J varie entre  $L + S$  et  $|L - S|$  par incrément ou décrétement de 1 ; à J fixé,  $M_J$  prend toutes les valeurs entières ou demi-entières entre  $-J$  et J, on passe de l'une à la suivante par incrément ou décrétement de 1.

II.3.3. Considérons le terme  $^3P$ .  $L = 1$  et  $S = 1$  donc J varie entre 0 et 2.

$^3P_0$  J = 0 et  $M_J = 0$

$^3P_1$  J = 1 et  $M_J$  prend trois valeurs : -1, 0 et +1

$^3P_2$  J = 2 et  $M_J$  prend cinq valeurs : -2, -1, 0, +1 et +2

Pour le terme  $^1D$ ,  $L = 2$  et  $S = 0$  donc J = 2 et  $M_J$  prend cinq valeurs : -2, -1, 0, +1 et +2 (= pas de levée de dégénérescence par couplage spin-orbite).

Pour le terme  $^1S$  (qui n'est pas dégénéré) :  $L = 0$ ,  $S = 0$  donc J = 0 et  $M_J = 0$ .

II.3.4. Considérons l'opérateur  $(\mathbf{S} + \mathbf{L})^2$  associé à la grandeur  $\mathbf{L} + \mathbf{S}$ . Comme les opérateurs  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{L}$  commutent,  $\mathbf{S}\mathbf{L} = \mathbf{L}\mathbf{S}$  et donc :

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{S}^2 + \mathbf{L}^2 + 2\mathbf{L}\mathbf{S}$$

D'où :

$$\mathbf{L}\mathbf{S} = (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2)/2$$

Soit  $\Psi(J,L,S)$  une fonction propre du Hamiltonien sans perturbation. Les valeurs propres des opérateurs moments cinétiques  $\mathbf{J}^2$ ,  $\mathbf{L}^2$  et  $\mathbf{S}^2$  sont respectivement :  $(h/2\pi)^2 J(J+1)$ ,  $(h/2\pi)^2 L(L+1)$ ,  $(h/2\pi)^2 S(S+1)$

où h est la constante de Planck.

Le Hamiltonien de perturbation appliqué à la fonction  $\Psi(J,L,S)$  conduit à la correction en énergie au premier ordre :

$$H_{\text{pert}}|\Psi(J,L,S)\rangle = (\lambda/2) \cdot (h/2\pi)^2 \cdot \{J(J+1) - (L(L+1) - S(S+1))\}.$$

La correction en énergie est donc :

$$E^{\text{cor}}(J,L,S) = (\lambda/2) \cdot (h/2\pi)^2 \cdot \{J(J+1) - (L(L+1) - S(S+1))\}.$$

Pour les termes  $^1D$  et  $^1S$ ,  $S = 0$  et donc  $J = L$ , ce qui implique  $E^{\text{cor}} = 0$ . Il n'y a pas de correction de l'énergie au premier ordre due au couplage spin-orbite.

Pour les états issus du terme  $^3P$ ,  $S = 1$ ,  $L = 1$  et  $J = 0, 1$  ou  $2$ .

$$^3P_0 \quad E^{\text{cor}}(0,1,1) = -2\lambda(h/2\pi)^2$$

$$^3P_1 \quad E^{\text{cor}}(1,1,1) = -\lambda(h/2\pi)^2$$

$$^3P_2 \quad E^{\text{cor}}(2,1,1) = +\lambda(h/2\pi)^2$$

II.3.5.1. L'état fondamental est  $^3P_2$  car la couche est plus qu'à demi remplie ( $\lambda$  est positif pour une couche moins qu'à moitié remplie et négatif pour une couche plus qu'à moitié remplie). Donc l'état fondamental est l'état  $^3P_2$ . Sa dégénérescence est 5 ( $M_J$  varie de -2 à +2). Le premier état excité situé à  $+2|\lambda|(h/2\pi)^2$  au-dessus du fondamental (dégénérescence 3

II.3.5.1. L'état fondamental est  $^3P_2$  car la couche est plus qu'à demi remplie ( $\lambda$  est positif pour une couche moins qu'à moitié remplie et négatif pour une couche plus qu'à moitié remplie). Donc l'état fondamental est l'état  $^3P_2$ . Sa dégénérescence est 5 ( $M_J$  varie de  $-2$  à  $+2$ ). Le premier état excité situé à  $+2|\lambda|(h/2\pi)^2$  au-dessus du fondamental (dégénérescence 3 car  $M_J$  varie entre  $-1$  et  $+1$ ) et le deuxième état excité est à  $+3|\lambda|(h/2\pi)^2$  au-dessus du fondamental (dégénérescence 1 car  $M_J$  prend la valeur unique 0).

Les différentes valeurs possibles de  $M_J$  peuvent être mises en évidence par application d'un champ magnétique extérieur (effet Zeeman).

II.3.5.2.  $|\lambda|(h/2\pi)^2 = 0,0196/2 = 9,8 \cdot 10^{-3}$  eV et  $|\lambda|(h/2\pi)^2 = 0,0281/3 = 9,4 \cdot 10^{-3}$  eV

Cette faible valeur comparée aux énergies mises en jeu dans les répulsions interélectroniques (la dizaine d'électronVolt).

On peut proposer comme valeur moyenne de  $\lambda \cdot (h/2\pi)^2$  :

$$\lambda(h/2\pi)^2 = -9,6 \cdot 10^{-3} \text{ eV.}$$

Le Hamiltonien proposé permet une description correcte de la structure électronique de l'atome d'oxygène.

### III. Etude de la structure électronique de la molécule de dioxygène.

III.1. Configuration électronique de la molécule de dioxygène.

$$(1\sigma_g)^2(1\sigma_u)^2(2\sigma_g)^2(2\sigma_u)^2(3\sigma_g)^2(\Pi_{ux})^2(\Pi_{uy})^2(\Pi_{gx})^1(\Pi_{gy})^1$$

III.2. Pour déterminer les termes spectroscopiques issus de la configuration électronique fondamentale, il faut décomposer en représentations irréductibles le produit direct :

$$\Pi_g \otimes \Pi_g$$

Pour cela, on utilise la table de caractère :

$\Pi_g \otimes \Pi_g$	4	$4\cos^2\phi$	.....	0	4	$4\cos^2\phi$	.....	0
$\Sigma_g^-$	1	1		-	1	1		-
$\Sigma_g^+$	1	1		1	1	1		1
$\Delta_g$	2	$2\cos(2\phi)$		0	2	$2\cos(2\phi)$		0
$\Sigma_g^- + \Sigma_g^+ + \Delta_g$	4	$2(1 + 2\cos(2\phi))$		0	4	$2(1 + 2\cos(2\phi))$		0

et on vérifie bien que :

$$\Pi_g \otimes \Pi_g = \Sigma_g^- + \Sigma_g^+ + \Delta_g$$

$$\text{car } 1 + \cos(2\phi) = 2\cos^2\phi$$

Les lettres  $\Sigma$ ,  $\Pi$  et  $\Delta$  traduisent la quantification de la projection  $\Lambda$  du moment cinétique de la molécule le long de l'axe de symétrie de révolution de celle-ci.

$\Lambda$ (en unité $(h/2\pi)^2$ )	0	1	2	....
notation	$\Sigma$	$\Pi$	$\Delta$	.....

L'indice g précise que la fonction d'onde décrivant le terme spectroscopique est symétrique vis à vis de l'inversion par rapport au centre.

Le signe + ou - apparaît pour les termes  $\Sigma$  : le signe + signifie que la fonction d'onde est inchangée par réflexion sur un plan passant par l'axe, le signe - qu'elle est multipliée par -1.

III.3. Calcul de la dégénérescence totale.

4 possibilités pour le premier électron, 3 possibilités pour le second et on divise par 2! pour tenir compte de l'indiscernabilité des électrons.

La dégénérescence totale est donc :

$$(4 \times 3)/2 = 6$$



III.4. Il faut déterminer les multiplicité de spin de chaque terme.

On cherche la décomposition sous la forme :

$$\Pi_g \otimes \Pi_g = \underset{1}{^1\Sigma_g^-} + \underset{1}{^1\Sigma_g^+} + \underset{2}{^1\Delta_g} + \underset{3}{^3\Sigma_g^-} + \underset{3}{^3\Sigma_g^+} + \underset{6}{^3\Delta_g}$$

Sous chaque terme apparaît la multiplicité totale du terme. Le dernier terme est à exclure car la multiplicité totale est égale à 6.

Il reste deux possibilités :

$$^3\Sigma_g^- + ^1\Sigma_g^+ + ^1\Delta_g$$

ou

$$^1\Sigma_g^- + ^3\Sigma_g^+ + ^1\Delta_g$$

qui conduisent chacune à une multiplicité totale égale à 6.

Or la représentation  $\Sigma_g^+$  est totalement symétrique (représente la fonction d'onde orbitale).

Donc la fonction d'onde de spin doit être antisymétrique : il s'agit donc du singulet  $^1\Sigma_g^+$ .

La décomposition est donc :

$$\Pi_g \otimes \Pi_g = ^1\Sigma_g^+ + ^1\Delta_g + ^3\Sigma_g^-$$

III.5. C'est le terme de multiplicité maximale qui est le plus stable.

#### IV. Thermodynamique statistique.

IV.1.  $Z = \sum \exp(-E/(kT))$  la somme s'effectue sur les états, E désignant l'énergie de l'état.

IV.2.  $F = -kT \ln(Z)$

$$dF = -S.dT - P.dV \quad P = -(\partial F/\partial V)_T$$

$$G = F + PV = -kT \ln(Z) - V(\partial F/\partial V)_T = -kT \ln(Z) + kTV(\partial \ln(Z)/\partial V)_T$$

IV.3. L'état énergétique d'une molécule dépend de 4 contributions : l'énergie cinétique de translation du centre de masse, l'énergie de rotation, l'énergie de vibration (cinétique et potentielle) et l'énergie électronique.

$$e = e_{\text{trans}} + e_{\text{rot}} + e_{\text{vib}} + e_{\text{élec}}$$

Soit z la fonction de partition relative à une particule.

$$z = \sum \exp(-(e_{\text{trans}} + e_{\text{rot}} + e_{\text{vib}} + e_{\text{élec}})/(kT)) \quad \text{la somme s'effectue sur les états.}$$

On peut introduire les facteur de dégénérescence g qui permettent de remplacer la somme sur les états par la somme sur les énergie :

$$g = g_{\text{trans}} \cdot g_{\text{rot}} \cdot g_{\text{vib}} \cdot g_{\text{élec}}$$

Il est alors possible d'écrire :

$$Z = \sum g_{\text{trans}} \cdot g_{\text{rot}} \cdot g_{\text{vib}} \cdot g_{\text{élec}} \cdot \exp(-(e_{\text{trans}} + e_{\text{rot}} + e_{\text{vib}} + e_{\text{élec}})/(kT)) \quad \text{la somme s'effectue sur les énergies.}$$

Si les quatre termes d'énergie sont indépendants, il est alors possible de remplacer la somme sur les énergies globales par quatre sommes pour chaque forme d'énergie :

$$Z = \{ \sum g_{\text{trans}} \cdot \exp(-e_{\text{trans}}/(kT)) \} \cdot \{ \sum g_{\text{rot}} \cdot \exp(-e_{\text{rot}}/(kT)) \} \cdot \{ \sum g_{\text{vib}} \cdot \exp(-e_{\text{vib}}/(kT)) \} \cdot \{ \sum g_{\text{élec}} \cdot \exp(-e_{\text{élec}}/(kT)) \}$$

chaque somme s'effectuant sur les énergies possibles pour le mode considéré.

IV.4. Utilisation de la formule de Stirling.

$$\ln Z = \ln(z^N/N!) = N \ln z - \ln N! = N \ln z - (N \ln N - N)$$

IV.5. Etude des différentes contributions pour un gaz parfait.

$$IV.5.1. F = -kT \cdot \{ N \ln((V/N) \cdot (2\pi mkT/h^2)^{3/2}) + N \}$$

$$(\partial F/\partial V)_T = (\partial(-kT \ln Z)/\partial V)_T = -(NkT)/V = -P \quad \text{on retrouve bien l'équation des gaz parfaits}$$

Si les autres fonctions de partition ne font pas intervenir le volume, la structure interne des particules ne modifie pas l'équation d'état.

IV.5.2. La capacité calorifique à volume constant peut s'exprimer en fonction de l'énergie interne :

$$C_V = (\partial U/\partial V)_T$$

Pour pouvoir exprimer la capacité calorifique à volume constant, il faut donc relier l'énergie interne à la fonction de partition :

$$U = F + TS = F - T \cdot (\partial F / \partial T)_V$$

ce qui donne :

$$-U/T^2 = -F/T^2 + (1/T) \cdot (\partial F / \partial T)_V = (\partial(F/T) / \partial T)_V$$

et donc :

$$U = T^2 (\partial(k \ln Z) / \partial T)_V = kT^2 (\partial(\ln(z/N) + 1) / \partial T)_V = kNT^2 (\partial \ln z / \partial T)_V$$

Si on recherche la contribution de la rotation à la capacité calorifique à 'haute température', on remplace  $z$  par  $z_{\text{rot}}$  dans la relation précédente.

$$\ln(z_{\text{rot}}) = \ln T - \ln(2T_r)$$

$$U_{\text{rot}} = kNT^2 (\partial \ln T / \partial T)_V = kNT \quad \text{et donc : } C_V = kN = R.$$

Le terme  $z_{\text{rot}}$  ne modifie pas l'équation d'état car  $z_{\text{rot}}$  est indépendante du volume du système. Mais il modifie l'entropie, donc le potentiel chimique du gaz.

IV.5.3.  $z_{\text{vib}} = \sum \exp(-e_{\text{vib}} / (kT)) = \sum \exp(-hv(n + 1/2) / (kT))$  où  $n$  est entier et varie de 0 à  $+\infty$ .

$$z_{\text{vib}} = \exp(-hv / (2kT)) \cdot \sum \exp(-hvn / (kT)) = \exp(-hv / (2kT)) / \{1 - \exp(-hv / (kT))\}$$

$$z_{\text{vib}} = 1 / \{ \exp(hv / (2kT)) - \exp(-hv / (2kT)) \}$$

IV.5.4. Contribution des termes d'excitation électronique.

$$\text{IV.5.4.1. } z_{\text{élec}}(O) = \sum g_{\text{élec}} \cdot \exp(-e_{\text{élec}} / (kT))$$

Dans cette question, on utilise les résultats de la partie II : la dégénérescence de l'état  $^3P_2$  est 5, celle de l'état  $^3P_1$  est 3, celle de l'état  $^3P_0$  est 1, celle de l'état  $^1D_0$  est 5 et celle de l'état  $^1S_0$  est 1.

$$z_{\text{élec}}(O) = 5 + 3 \cdot \exp(-0,0196 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} / (1,38 \cdot 10^{-23} T)) + \exp(-0,0281 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} / (1,38 \cdot 10^{-23} T)) + 5 \cdot \exp(-1,96 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} / (1,38 \cdot 10^{-23} T)) + \exp(-4,18 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} / (1,38 \cdot 10^{-23} T))$$

$$z_{\text{élec}}(O) = 5 + 3 \cdot \exp(-227,5/T) + \exp(-326,2/T) + 5 \cdot \exp(-22750/T) + \exp(-48520/T)$$

Si on travaille à des températures inférieures à 5000 K, les deux derniers termes sont très inférieurs à 1 : on peut les négliger.

Donc :

$$z_{\text{élec}}(O) \approx 5 + 3 \cdot \exp(-227,5/T) + \exp(-326,2/T)$$

IV.5.4.2. Pour la molécule de dioxygène :

$$z_{\text{élec}}(O_2) = 3 + 2 \cdot \exp(-0,973 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} / (1,38 \cdot 10^{-23} T)) + \exp(-1,594 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} / (1,38 \cdot 10^{-23} T))$$

$$z_{\text{élec}}(O_2) = 3 + 2 \cdot \exp(-11295/T) + \exp(-18504/T)$$

$$\exp(-11295/5000) = 0,1 \ll 3$$

Donc pour des températures inférieures à 5000 K :

$$z_{\text{élec}}(O_2) \approx 3$$

IV.6. Calcul de la constante de l'équilibre de dissociation du dioxygène.

$$\text{IV.6.1. } -RT \ln(K_T^\circ) = \Delta_r G^\circ = 2\mu^\circ(O) - \mu^\circ(O_2)$$

Pour une population de  $N$  particules :

$$G = -kT \ln(Z) + kTV (\partial \ln(Z) / \partial V)_T = -kTN(1 + \ln(z/N)) + kTNV (\partial(1 + \ln(z/N)) / \partial V)_T$$

$$G = -kTN(1 + \ln(z/N)) + kTN = -kTN_{\Lambda} n(1 + \ln(z/N)) + kTN_{\Lambda} n = -nRT \ln(z/N)$$

où  $n$  est le nombre de moles des particules considérées.

$$\mu = G/n = -RT \ln(z/N)$$

IV.6.2. La condition d'équilibre s'écrit :  $\sum \nu_i \mu_i = 0$ , soit  $2\mu(O) = \mu(O_2)$

IV.6.3. En utilisant la relation établie au IV.6.1., nous obtenons :

$$RT \ln \{ (z(O)/N(O))^2 \} = RT \ln \{ z(O_2)/N(O_2) \}$$

$$\text{soit : } (N(O))^2 / N(O_2) = (z(O))^2 / z(O_2)$$

$$\text{D'autre part, } K_T^\circ = \frac{(P_O)^2 / P_{O_2}}{(N(O)kT / (VP_{\text{ref}}))^2 \cdot (VP_{\text{ref}} / (N(O_2)kT))} = \frac{(N(O))^2 / (N(O_2)) \cdot (kT / (VP_{\text{ref}}))}{(N(O_2)kT / (VP_{\text{ref}}))} =$$

soit finalement :

$$K^{\circ}_T = (z(O))^2 / (z(O_2)) \cdot (kT / (VP_{\text{ref}}))$$

Dans le calcul des fonctions de partition, il faut prendre une origine commune aux énergies des deux systèmes. On choisit le niveau le plus bas en énergie, c'est à dire celui de la molécule d'oxygène dans son état de vibration fondamentale.

$$K^{\circ}_T = (kT / (VP_{\text{ref}})) \cdot \{z_{\text{trans}}(O) \cdot z_{\text{elec}}(O)\}^2 / \{z_{\text{trans}}(O_2) \cdot z_{\text{rot}}(O_2) \cdot z_{\text{vib}}(O_2) \cdot z_{\text{elec}}(O_2)\} \cdot \exp(-\Delta e^{\circ} / kT)$$

$z_{\text{vib}}(O_2)$  tient compte du changement d'origine.

Etude du terme  $\{z_{\text{trans}}(O)\}^2 / z_{\text{trans}}(O_2)$

$$\{z_{\text{trans}}(O)\}^2 / z_{\text{trans}}(O_2) = (V^2 / V) \cdot (2\pi m_O kT / h^2)^3 \cdot (h^2 / (2\pi 2m_O kT))^{3/2} = V(\pi m_O kT / h^2)^{3/2}$$

et donc pour la constante d'équilibre :

$$K^{\circ}_T = (kT / P_{\text{ref}}) \cdot (\pi m_O kT / h^2)^{3/2} \cdot \{z_{\text{elec}}(O)\}^2 / \{z_{\text{rot}}(O_2) \cdot z_{\text{vib}}(O_2) \cdot z_{\text{elec}}(O_2)\} \cdot \exp(-\Delta e^{\circ} / kT) \text{ qui ne dépend heureusement que de la température.}$$

D'où :

$$\ln(K^{\circ}_T) = \ln T + \ln(k / P_{\text{ref}}) + (3/2) \cdot \ln(\pi m_O kT / h^2) + 2 \ln(5 + 3 \cdot \exp(-227,5/T) + \exp(-326,2/T)) + \ln(T / (2T_r)) + \ln(1 - \exp(-hv / (kT))) - \Delta e^{\circ} / kT - \ln 3$$

ce qui donne numériquement :

$$\ln(K^{\circ}_T) = -0,196 + (3/2) \ln T - 58533/T + 2 \ln(5 + 3 \cdot \exp(-227,5/T) + \exp(-326,2/T)) + \ln(1 - \exp(-hv / (kT)))$$

#### IV.7. Comparaison théorie/expérience.

T	1000	2000	3000	4000
$\ln(K^{\circ}_T)$	-44,29	-14,16	-4,01	1,12
$K^{\circ}_T$	$5,83 \cdot 10^{-20}$	$7,08 \cdot 10^{-7}$	$1,82 \cdot 10^{-2}$	3,05
expérience	$3,63 \cdot 10^{-20}$	$5,37 \cdot 10^{-7}$	$1,41 \cdot 10^{-2}$	2,40

L'accord théorie expérience est satisfaisant. Certaines hypothèses simplificatrices (par exemple la validité de la description des oscillations par le modèle de l'oscillateur harmonique) sont probablement à l'origine des écarts.

## Partie II. Les oxydes : chimie de l'état solide.

### I. L'oxyde de calcium.

I.1. Le cristal d'oxyde de calcium peut être décrit par un arrangement cubique faces centrées d'anions oxyde, tous les cations calcium occupant les sites octaédrique définis par le réseau des anions (ne pas oublier le cation qui est au centre de la maille).

I.2. Les deux principaux défauts sont les défauts de Schottky (un atome ou un couple d'ions pour un cristal 1:1 qui quitte sa position 'normale' et migre vers la surface du cristal) et les défauts de Frenkel où un atome ou un ion passe en position interstitielle. Les défauts de Frenkel sont en général observés pour un seul des deux sous-réseaux : celui de l'ion le plus petit (soit en général le cation). Comme les rayons de l'ion oxyde et de l'ion calcium sont voisins, le défaut de Schottky sera dominant dans le cristal d'oxyde de calcium.

I.3.1. Soit  $n$  le nombre de défauts de Schottky par unité de volume à la température  $T$  et  $N$  le nombre de sites cationiques (= le nombre de sites anioniques) par unité de volume à la température  $T$ . Le nombre de microétats  $\Omega$  est le produit  $\Omega = \Omega_a \cdot \Omega_c$ ,  $\Omega_a$  ( $\Omega_c$ ) étant le nombre de façon de distribuer les  $n$  défauts anioniques (cationiques) parmi les  $N$  sites anioniques (cationiques).

$$\Omega_a = \Omega_c = N! / \{(N - n)! n!\}$$

ce qui donne :

$$\Omega = \{N! / \{(N - n)! n!\}\}^2$$

I.3.2. Soit  $\Delta S$  la variation d'entropie correspondant au passage du cristal sans défaut au cristal possédant  $n$  défaut de Schottky par unité de volume pour  $N - n$  cations par unité de volume. Il y a un microétat unique pour le cristal parfait sans défaut. On en déduit :

$$\Delta S = k \cdot \ln \Omega = 2k \ln(N! / \{(N-n)! n!\})$$

On utilise ensuite la formule de Stirling :

$$\Delta S = k \cdot \ln \Omega = 2k \cdot (N \ln N - N - (N-n) \ln(N-n) + (N-n) - n \ln n + n) = 2k \cdot (N \ln N - (N-n) \ln(N-n) - n \ln n)$$

I.3.3. Pour un cristal évoluant à P et T fixées, le nombre n de défauts de Schottky par unité de volume minimise l'enthalpie libre du système. On effectue donc un calcul variationnel où on minimise la variation d'enthalpie libre entre le cristal parfait sans défaut et le cristal réel. Il faut donc estimer le  $\Delta G$  correspondant, donc la variation d'enthalpie. La variation d'entropie de cette transformation a été calculée au I.3.2..

$$\Delta H = n \cdot \Delta_f H^\circ / N_A \text{ (il faut diviser par } N_A \text{ car } \Delta_f H^\circ \text{ est une grandeur molaire)}$$

et donc :

$$\Delta G = n \cdot \Delta_f H^\circ / N_A - 2kT \cdot (N \ln N - (N-n) \ln(N-n) - n \ln n)$$

A l'équilibre  $d(\Delta G)/dn = 0$

soit, en tenant compte de  $N = \text{constante}$  :

$$\Delta_f H^\circ / N_A - 2kT \cdot (\ln(N-n) + 1 - 1 - \ln n) = 0$$

Après réarrangement, on obtient :

$$n = (N-n) \cdot \exp\{-\Delta_f H^\circ / (2RT)\}$$

Comme  $n \ll N$ ,  $N-n \approx N$ , et donc :

$$n = N \cdot \exp\{-\Delta_f H^\circ / (2RT)\}$$

I.3.4. Soit  $N'$  le nombre d'ions calcium dans la masse de cristal étudiée :

$$N' = N_A \cdot m_{\text{CaO}} / M_{\text{CaO}}$$

avec  $M_{\text{CaO}}$  la masse molaire de l'oxyde de calcium.

$$\text{et donc } n' = N' \cdot \exp\{-\Delta_f H^\circ / (2RT)\}$$

ce qui donne numériquement :

$$n' = (6,02 \cdot 10^{23} \cdot 0,8 / (40,08 + 16)) \cdot \exp\{-294 \cdot 10^3 / (2 \cdot 8,314 T)\} = 8,588 \cdot 10^{21} \cdot \exp\{-17681/T\}$$

T (K)	298	500	1000
$n'$	$1,46 \cdot 10^{-4} \approx 0$	$3,77 \cdot 10^6$	$1,80 \cdot 10^{14}$

Le nombre de défauts augmente lorsque la température croît.

## II. L'oxyde de zirconium.

### II.1. Etude de la zircone.

II.1.1. En prenant un ion zirconium(IV) comme origine, la structure de la zircone peut se décrire comme un réseau cubique faces centrées d'ions  $Zr^{4+}$  dont tous les sites tétraédriques sont occupés par les anions oxyde  $O^{2-}$ .

II.1.2. Un ion zirconium occupant un sommet du cube compte pour un huitième, un ion zirconium occupant le centre d'une face compte pour un demi.

Il y a donc  $(8 \cdot 1/8 + 6 \cdot 1/2) = 1 + 3 = 4$  ions  $Zr^{4+}$  par maille conventionnelle.

Un ion oxyde occupant un site tétraédrique appartenant à la maille conventionnelle compte pour un : il y a donc 8 anions oxyde par maille conventionnelle.

Au total, 4 motifs  $ZrO_2$  par maille conventionnelle.

II.1.3. Le contact a lieu le long de la diagonale principale du cube. Soit a l'arrête du cube. La diagonale principale est de longueur  $a\sqrt{3}$  ; la condition de contact entre ions s'écrit :

$$\sqrt{3}a = 4 \cdot (R(\text{Ca}^{2+}) + R(\text{O}^{2-}))$$

ce qui implique :

$$a = 4 \cdot (R(\text{Ca}^{2+}) + R(\text{O}^{2-})) / \sqrt{3}$$

Application numérique :

$$a = 4(98 + 126) / \sqrt{3} = 517,3 \text{ pm}$$

II.1.4. Masse volumique.

Le volume d'une maille conventionnelle est  $V = a^3$ .

Il y a 4 motifs  $ZrO_2$  dans cette maille, soit une masse  $m = 4(M(Zr) + 2M(O))/N_A$ .

$$\rho = m/a^3 = 4(M(Zr) + 2M(O))/\{N_A a^3\} = 4.123,22.10^{-3}/(6,02.10^{23}.517,3^3.10^{-36})$$

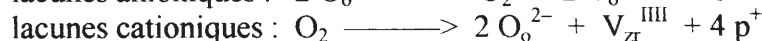
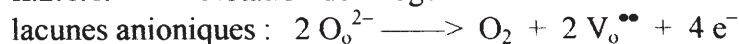
soit numériquement :

$$\rho = 5915 \text{ kg.m}^{-3}$$

II.1.5. Chaque anion est entouré de 4 cations. Chaque cation est entouré de huit anions.

II.2. Non stoechiométrie.

II.2.1.1. Notation de Kröger-Vink.



II.2.1.2. Pour l'équilibre de formation des lacunes cationiques, la constante d'équilibre s'écrit, en tenant compte du fait que l'ion  $O^{2-}$  joue ici le rôle de solvant (espèce très majoritaire, d'activité à peu près constante) :

$$K_a = \underline{P}_{O_2} \cdot [V_o^{\bullet\bullet}]^2 \cdot [e^-]^4$$

La stoechiométrie de la réaction impose :

$$[V_o^{\bullet\bullet}] = [e^-]/2$$

ce qui donne :

$$K_a = \underline{P}_{O_2} \cdot [e^-]^6/4$$

Pour l'équilibre de formation des lacunes cationiques, une étude comparable conduit à :

$$K_c = [V_{Zr}^{III}] \cdot [p^+]^4 / \underline{P}_{O_2}$$

$$[V_{Zr}^{III}] = [p^+]/4$$

et donc :

$$K_c = [p^+]^5 / \{4 \underline{P}_{O_2}\}$$

II.2.1.3.  $[e^-] = (4K_a / \underline{P}_{O_2})^{1/6}$  d'où :  $[e^-] = k_a \cdot (\underline{P}_{O_2})^{-1/6}$  avec  $k_a = (4K_a)^{1/6}$   
 $[p^+] = (4K_c \cdot \underline{P}_{O_2})^{1/5}$  d'où :  $[p^+] = k_c \cdot (\underline{P}_{O_2})^{1/5}$  avec  $k_c = (4K_c)^{1/5}$

II.2.1.4. La conductivité électrique est due essentiellement à la présence des porteurs de charge électrons et trous.

$$\sigma = a \cdot (\underline{P}_{O_2})^{-1/6} + b \cdot (\underline{P}_{O_2})^{1/5}$$

Pour vérifier la validité de la loi proposée ci-dessus, on trace  $\log(\sigma)$  en fonction de  $\log(P_{O_2})$  : il est peut-être possible de mettre en évidence des parties linéaires correspondants soit à la conduction par électron (terme en  $a \cdot (\underline{P}_{O_2})^{-1/6}$  prépondérant donc une pente de  $-1/6$  en représentation logarithmique) correspondant à un semiconducteur de type n, soit à la conduction par trou (terme en  $b \cdot (\underline{P}_{O_2})^{1/5}$  prépondérant donc une pente de  $1/5$  en représentation logarithmique) correspondant à un semiconducteur de type p.

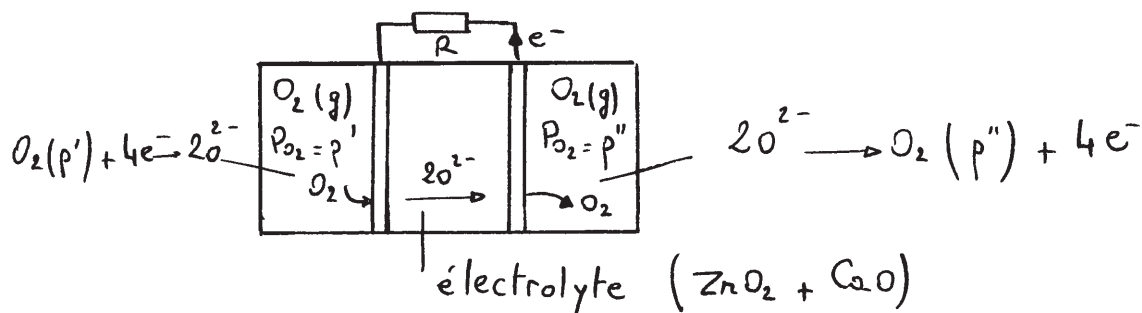
$P_{O_2}(\text{bar})$	$\log(P_{O_2})$	$\sigma (\text{S.m}^{-1})$	$\log(\sigma)$
$10^5$	5	$8,91.10^{-3}$	-2,05
$8,25.10^3$	3,92	$5,01.10^{-3}$	-2,30
$7,64.10^2$	2,88	$2,82.10^{-3}$	-2,55
$1,21.10^2$	2,08	$2,14.10^{-3}$	-2,67
10	1,00	$1,26.10^{-3}$	-2,90
0,118	-0,93	$5,75.10^{-4}$	-3,24
$1,31.10^{-5}$	-4,88	$3,98.10^{-4}$	-3,40
$1,81.10^{-9}$	-8,74	$3,16.10^{-4}$	-3,50
$2,73.10^{-12}$	-11,56	$3,02.10^{-4}$	-3,52
$1,51.10^{-14}$	-13,82	$3,23.10^{-4}$	-3,49
$7,50.10^{-16}$	-15,12	$3,63.10^{-4}$	-3,44
$1,78.10^{-17}$	-16,75	$4,57.10^{-4}$	-3,34
$4,22.10^{-19}$	-18,37	$6,31.10^{-4}$	-3,20



La pente  $1/5$  est à peu près vérifiée, tandis que la pente  $-1/6$  n'est pas atteinte. Le comportement global est observé (passage de la semiconduction n à la semiconduction p lorsque la pression en dioxygène augmente).

### II.3. Oxygènemètre.

Le schéma ci-dessous représente le principe de fonctionnement d'un oxygènemètre : la différence de pression partielle en oxygène entre les deux compartiments en contact avec la zircone se traduit par l'apparition d'une différence de potentiel qui est mesurée.



### III. L'oxyde de rhénium.

III.1. La maille élémentaire est un cube dont le centre des faces est occupé par les ions oxyde. Le centre du cube est occupé par l'ion de rhénium(VI).

Il est aussi possible de décrire le réseau comme un réseau cubique face centrée d'anion oxyde dont  $1/4$  des anions sont vacants.  $1/4$  des sites octaédriques sont occupés par les ions rhénium(VI).

III.2. Les ions aux centres des faces appartiennent à deux mailles et donc comptent pour  $1/2$  : ce qui fait  $6 \times 1/2$  ions oxyde par maille élémentaire. Les ions rhénium(VI) appartiennent à une maille et compte pour 1.

Ceci correspond à la formule  $ReO_3$  ; c'est bien l'oxyde de rhénium(VI).

III.3. Les ions rhénium(VI) forment un réseau cubique simple.

III.4. La coordinence des atomes rhénium est 6 et le polyèdre de coordination est l'octaèdre.

III.5. La formation des liaisons entre l'ion métallique et les oxydes peut s'expliquer de la façon suivante :

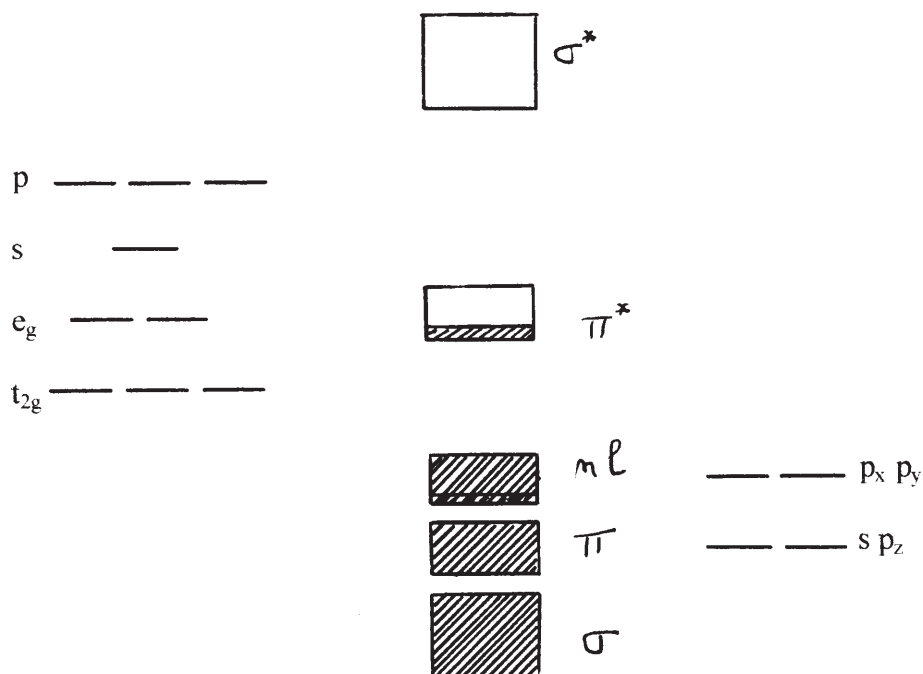
- les liaisons  $\sigma$  sont dues au recouvrement des orbitales atomiques  $p_z$  et  $s$  des ions oxyde avec les orbitales  $s$ ,  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ ,  $d_{x^2-y^2}$ , et  $d_{z^2}$  de l'ion  $Re^{6+}$ . On remarque aussi que les orbitales atomiques des oxyde participent à deux polyèdres de coordination et donc se répartissent équitablement entre les deux : soit 6 O.A. des oxygènes pour créer des liaisons  $\sigma$  et 6 O.A. du rhénium.

- les liaisons  $\pi$  sont dues au recouvrement des orbitales atomiques  $p_x$  et  $p_y$  de chaque ions oxyde avec les orbitales atomiques  $d_{xy}$ ,  $d_{xz}$  et  $d_{yz}$  de l'ion  $Re^{6+}$ . Pour les liaisons  $\pi$ , les oxyde apportent 6 O.A. et les rhénium 3 seulement : cela se traduit par l'apparition de 3 niveaux non liants dues aux niveaux fournis par les oxyde et non utilisés pour former des liaisons  $\pi$ .

III.6. Le rhénium est de configuration électronique  $5d^5 6s^2$ . Chaque atome d'oxygène apporte 6 électrons et appartient à deux polyèdre d coordination : on peut donc attribuer 3 électrons par oxygène pour former des liaisons avec un atome de rhénium, l'atome de rhénium apporte 7 électrons. Ceci fait  $6 \times 3 + 7 = 25$  électrons à répartir dans le diagramme ci-dessous. On remarque que des orbitales atomiques  $p_x$  et  $p_y$  des oxyde ne sont pas utilisées pour former des liaisons et forment donc des niveaux non-liants.

Les bandes  $\sigma$  et  $\sigma^*$  peuvent contenir 12 électrons par motif, les bandes  $\pi$  et  $\pi^*$  peuvent contenir 6 électrons par motif et le niveau non liant issu des orbitales atomiques localisée sur les oxyde peut contenir 6 électrons par motif.

Ceci conduit au diagramme de bande suivant.



rhénium

oxygène

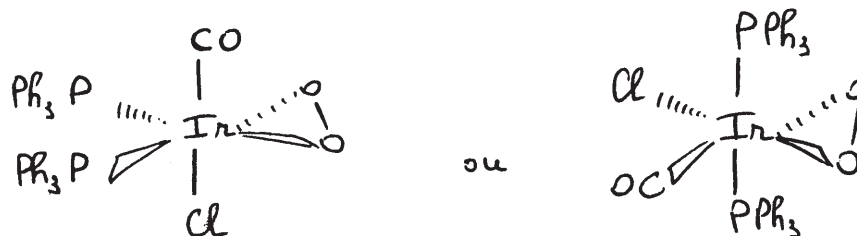
La conductivité métallique s'explique par la bande  $\pi^*$  partiellement remplie.

### Partie III. L'oxygène en chimie inorganique.

#### I. Le complexe de Vaska.

##### I.1. Addition de dioxygène.

##### I.1.1.



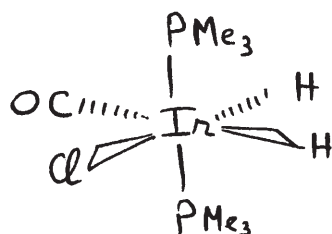
L'iridium est au degré d'oxydation (III).

I.1.2. La réaction est une addition oxydante. Le mécanisme est concerté à trois centres.

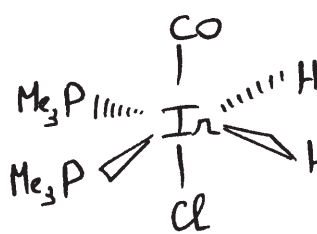
I.1.3. Le lien direct  $\sigma$  est dû à l'interaction d'un doublet  $2p \Pi_u$  du dioxygène avec les orbitales d de l'iridium. La rétrocoordination se traduit de transfert d'électron d de l'atome métallique vers les orbitales  $2p \Pi_g$  du dioxygène.

## I.2. Addition de dihydrogène.

I.2.1. Les deux espèces cis-hydruro qui sont susceptibles de se former sont :



structure A



structure B

I.2.2. Le spectre RMN  $^1\text{H}$  peut s'interpréter de la façon suivante :

Les hydrogènes portés par les méthyles des phosphines donnent un triplet. Le déplacement chimique de 1,4 ppm est celui attendu pour des hydrogènes d'un groupement  $\text{CH}_3$  lui-même lié à un atome faiblement électronégatif. Un seul déplacement chimique montre que les phosphines jouent un rôle équivalent et font donc préférer la structure A. Le couplage virtuel est dû à une interaction P-P importante et donc à un couplage de chaque hydrogène avec les deux phosphores et donc à l'apparition d'un triplet.

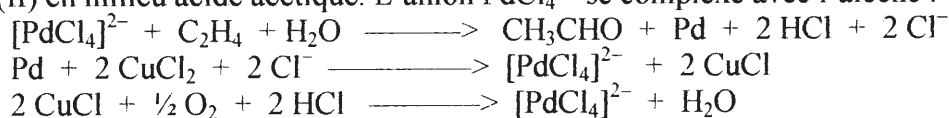
Les hydrogènes liés directement à l'atome métallique ont un déplacement chimique négatif : l'hydrogène étant plus électronégatif que l'iridium, la densité électronique autour de chaque hydrogène est augmentée et le blindage est accru par rapport au TMS. Le fait d'observer deux déplacements chimiques notablement négatifs montre que les deux hydrogènes portés par l'iridium ne sont pas équivalents, ce qui confirme la proposition A. Une seule constante de couplage H-P est observée pour ces signaux (d'où le triplet) car les H portés par l'iridium sont en cis par rapport aux phosphores. Comme les deux hydrogènes ne sont pas équivalents, il y a aussi un couplage H-H.

Le déplacement chimique à  $-7,8$  ppm est attribué à l'hydrogène en trans du ligand CO qui est  $\sigma$ -donneur mais  $\pi$ -accepteur. Le déplacement chimique à  $-18,9$  ppm est attribué à l'hydrogène en trans du ligand Cl qui est  $\sigma$ -donneur et  $\pi$ -donneur.

I.2.3. Si l'atome central était le rhodium, l'existence d'un spin nucléaire égal à  $\frac{1}{2}$  se traduirait par le dédoublement de tous les signaux par couplage H-Rh.

## I.3. Procédé Wacker.

Le système catalytique utilise du chlorure de palladium(II) en présence de chlorure de cuivre(II) en milieu acide acétique. L'anion  $\text{PdCl}_4^{2-}$  se complexe avec l'alcène :



## II. Complexes à ligand oxo.

II.1. Complexes  $\text{RuCl}_2(\text{Py})_4$ .

II.1.1. Pour qu'une vibration soit active en infra-rouge, il doit se produire une variation de moment dipolaire lors de la transition. Pour qu'une vibration soit active en Raman, il se doit se produire une variation de polarisabilité au cours de la transition.

II.1.2. Le *trans*- $\text{ClCl RuCl}_2(\text{Py})_4$  appartient au groupe de symétrie  $D_{4h}$ . Le *cis*- $\text{ClCl RuCl}_2(\text{Py})_4$  appartient au groupe de symétrie  $C_{2v}$ .

II.1.3. Etude de l'isomère *trans*- $\text{ClCl RuCl}_2(\text{Py})_4$ .

L'axe  $C_2$  est confondu avec l'axe  $C_4$  (passant par Cl-Ru-Cl). Les axes  $C_2'$  sont selon les directions Py-Ru-Py. Les plans  $\sigma_v$  contiennent les axes  $C_2$  et  $C_2'$ . Les plans  $\sigma_d$  contiennent les axes  $C_2$  et  $C_2''$ . Le plan  $\sigma_h$  est orthogonal à l'axe  $C_4$  (contient Ru et les quatre atomes d'azote).



D <sub>4h</sub>	E	2 C <sub>4</sub>	C <sub>2</sub>	2 C <sub>2</sub> '	2 C <sub>2</sub> ''	i	2 S <sub>4</sub>	σ <sub>h</sub>	2 σ <sub>v</sub>	2 σ <sub>d</sub>
Γ <sub>Ru-Py</sub>	4	0	0	2	0	0	0	4	2	0
Γ <sub>Ru-Cl</sub>	2	2	2	0	0	0	0	0	2	2

La décomposition de chaque représentation en représentations irréductibles conduit à :

- pour la représentation Γ<sub>Ru-Py</sub> :

$$\begin{aligned}
 n(A_{1g}) &= (4 + 4 + 4 + 4)/16 = 1 & n(A_{2g}) &= (4 - 4 + 4 - 4)/16 = 0 \\
 n(B_{1g}) &= (4 + 4 + 4 + 4)/16 = 1 & n(B_{2g}) &= (4 - 4 + 4 - 4)/16 = 0 \\
 n(E_g) &= (8 + 0 - 8 + 0)/16 = 0 \\
 n(A_{1u}) &= (4 + 4 - 4 - 4)/16 = 0 & n(A_{2u}) &= (4 - 4 - 4 + 4)/16 = 0 \\
 n(B_{1u}) &= (4 + 4 - 4 - 4)/16 = 0 & n(B_{2u}) &= (4 - 4 - 4 + 4)/16 = 0 \\
 n(E_u) &= (8 + 0 - 8 + 0)/16 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{Ru-Py} &= A_{1g} + B_{1g} + E_u \\
 &\quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\
 &\quad d_{x^2-y^2} \quad d_{z^2} \quad (p_x, p_y) \\
 &\quad \text{Raman} \quad \text{I.R.}
 \end{aligned}$$

Il y a un mode actif en I.R. (E<sub>u</sub>) et deux modes actifs en Raman (A<sub>1g</sub> et B<sub>1g</sub>).

- pour la représentation Γ<sub>Ru-Cl</sub> :

$$\begin{aligned}
 n(A_{1g}) &= (2 + 4 + 2 + 4 + 4)/16 = 1 & n(A_{2g}) &= (2 + 4 + 2 - 4 - 4)/16 = 0 \\
 n(B_{1g}) &= (2 - 4 + 2 + 4 - 4)/16 = 0 & n(B_{2g}) &= (2 - 4 + 2 - 4 + 4)/16 = 0 \\
 n(E_g) &= (4 - 4)/16 = 0 \\
 n(A_{1u}) &= (2 + 4 + 2 - 4 - 4)/16 = 0 & n(A_{2u}) &= (2 + 4 + 2 + 4 + 4)/16 = 1 \\
 n(B_{1u}) &= (2 - 4 + 2 - 4 + 4)/16 = 0 & n(B_{2u}) &= (2 - 4 + 2 + 4 - 4)/16 = 0 \\
 n(E_u) &= (4 - 4)/16 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{Ru-Cl} &= A_{1g} + A_{2u} \\
 &\quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\
 &\quad d_{x^2-y^2} \quad p_z \\
 &\quad \text{Raman} \quad \text{I.R.}
 \end{aligned}$$

Il y a un mode actif en I.R. (A<sub>2u</sub>) et un mode actif en Raman (A<sub>1g</sub>).

Etude de l'isomère *cis*-ClCl RuCl<sub>2</sub>(Py)<sub>4</sub>.

L'axe C<sub>2</sub> est la direction bissectrice à Cl-Ru-Cl. Le plan σ<sub>v</sub> contient deux pyridines et des atomes de chlore. Le plan σ<sub>v</sub>' passe par C<sub>2</sub> mais ne contient pas d'atome de chlore.

C <sub>2v</sub>	E	C <sub>2</sub>	σ <sub>v</sub>	σ <sub>v</sub> '
Γ <sub>Ru-Py</sub>	4	0	2	2
Γ <sub>Ru-Cl</sub>	2	0	2	0

La décomposition de chaque représentation en représentations irréductibles conduit à :

- pour la représentation Γ<sub>Ru-Py</sub> :

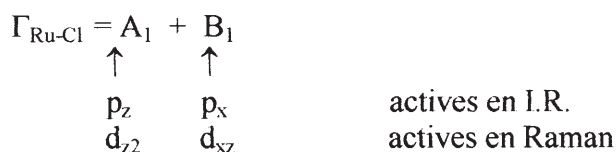
$$\begin{aligned}
 n(A_1) &= (4 + 2 + 2)/4 = 2 & n(A_2) &= (4 - 2 - 2)/4 = 0 \\
 n(B_1) &= (4 + 2 - 2)/4 = 1 & n(B_2) &= (4 - 2 + 2)/4 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{Ru-Py} &= 2A_1 + B_1 + B_2 \\
 &\quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\
 &\quad p_z \quad \quad p_x \quad \quad p_y \quad \quad \text{actives en I.R.} \\
 &\quad d_{z^2} \quad \quad d_{xz} \quad \quad d_{yz} \quad \quad \text{actives en Raman}
 \end{aligned}$$

Il y a quatre modes actifs en I.R. et quatre modes actifs en Raman.

- pour la représentation Γ<sub>Ru-Cl</sub> :

$$\begin{aligned}
 n(A_1) &= (2 + 2)/4 = 1 & n(A_2) &= (2 - 2)/4 = 0 \\
 n(B_1) &= (2 + 2)/4 = 1 & n(B_2) &= (2 - 2)/4 = 0
 \end{aligned}$$



Il y a deux modes actifs en I.R. et deux modes actifs en Raman.

II.2.1. Les quatre atomes d'azote sont les atomes donneurs de la pyridine et forment un environnement plan-carré autour de l'atome central de ruthénium. Les ligands  $\text{NO}_2^-$  sont liés à l'atome de ruthénium par l'azote et sont en position axiale. Ils sont nommés ligands nitro.

II.2.2. Les ligands  $\text{NO}_2^-$  peuvent aussi se lier par un atome d'oxygène : ils sont appelés alors ligands nitrito.

II.2.3. Pour les structures qui comportent 16 électrons de valence, la dernière orbitale moléculaire occupée est la  $1\Pi_g$  (en géométrie linéaire) ou la  $1a_2$  (en géométrie coudée). Le système est plus stable pour la géométrie linéaire : ceci explique la géométrie linéaire observée pour ces édifices à 16 électrons de valence. C'est le cas de  $\text{NO}_2^+$ ,  $\text{N}_3^-$  et  $\text{CO}_2$ .

Pour les structures qui comportent 17 ou 18 électrons de valence, la dernière orbitale moléculaire occupée est la  $2\Pi_u$  (en géométrie linéaire) ou la  $2b_1$  (en géométrie coudée). Le système est plus stable pour la géométrie coudée : ceci explique la géométrie coudée observée pour les édifices à 17 électrons de valence ( $\text{NO}_2$ ) ou 18 électrons de valence ( $\text{NO}_2^-$  et  $\text{O}_3$ ).

II.2.4. Tracé du diagramme des orbitales moléculaires de  $\text{NO}_2^-$ .

II.2.4.1. L'ion  $\text{NO}_2^-$  est de géométrie coudée et appartient au groupe de symétrie  $C_{2v}$ .

L'axe z est l'axe de rotation  $C_2$ , bissecteur des directions O-N-O. La direction y est dans le plan défini par les atomes ONO et orthogonale à z. La direction x est orthogonale au plan défini par ONO.

II.2.4.2. Les orbitales atomiques de l'azote qui participent aux liaisons  $\sigma$  dans  $\text{NO}_2^-$  sont :

s et  $p_z$  représentation irréductible  $a_1$

$p_y$  représentation irréductible  $b_2$

Les orbitales atomiques de l'azote qui participent aux liaisons  $\pi$  dans  $\text{NO}_2^-$  sont :

$p_x$  représentation irréductible  $b_1$

II.2.4.3. Ici, l'appartenance à une représentation irréductible peut se faire directement, sans théorème de projection, en étudiant la nature de la transformée par une opération de symétrie d'une combinaison linéaire d'O.A. portées par les atomes d'oxygène.

Orbitales de groupe de l'oxygène pour les liaisons  $\sigma$ .

$s_1 + s_2$  ( $a_1$ )  $p_{y1} + p_{y2}$  ( $b_2$ )  $p_{z1} + p_{z2}$  ( $a_1$ )

$s_1 - s_2$  ( $b_2$ )  $p_{y1} - p_{y2}$  ( $a_1$ )  $p_{z1} - p_{z2}$  ( $b_2$ )

Ici, l'appartenance à une représentation irréductible peut se faire directement, sans théorème de projection, en étudiant la nature de la transformée par une opération de symétrie d'une combinaison linéaire d'O.A. portées par les atomes d'oxygène.

Orbitales de groupe de l'oxygène pour les liaisons  $\pi$ .

$p_{x1} + p_{x2}$  ( $b_1$ )  $p_{x1} - p_{x2}$  ( $a_2$ )

Les orbitales (atomiques ou de groupe) de même symétrie se combinent pour donner naissance à des orbitales moléculaires.

Ce qui conduit à :

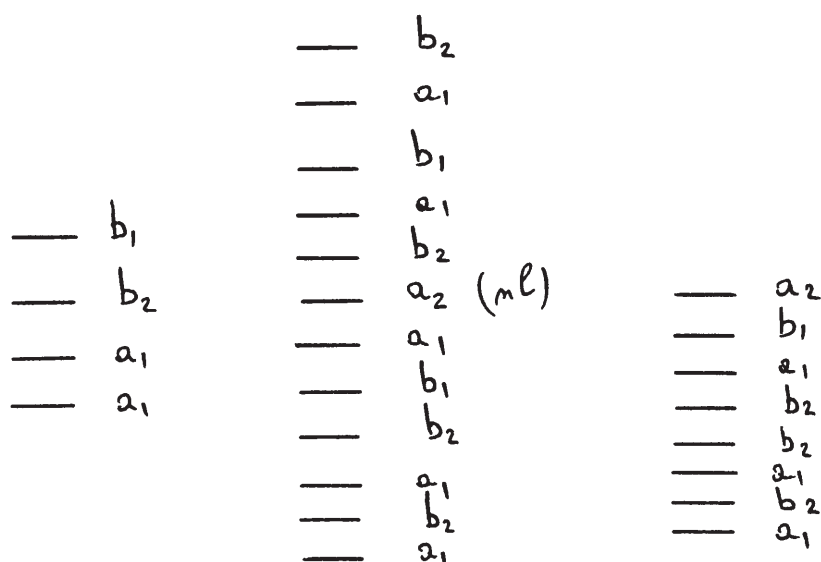
5 O.M. de symétrie ( $a_1$ )

4 O.M. de symétrie ( $b_2$ )

2 O.M. de symétrie ( $b_1$ )

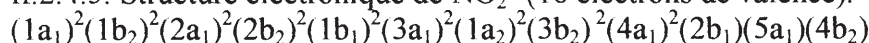
1 O.M. niveau non liant de symétrie ( $a_2$ ) (il n'existe pas d'O.A. portées par l'azote susceptible de former des liaisons avec des combinaisons d'O.A. des oxygènes).

II.2.4.4. Diagramme des O.M. de l'ion NO<sub>2</sub><sup>-</sup>.

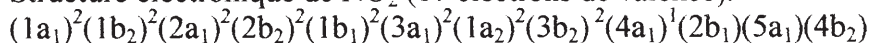


OA (N)                      OM (NO<sub>2</sub><sup>-</sup>)                      orbitales de groupe des O  
 L'ordre en énergie des différentes O.M. dépend de l'angle O-N-O (ici pour approximativement 120 °).

II.2.4.5. Structure électronique de NO<sub>2</sub><sup>-</sup> (18 électrons de valence).



Structure électronique de NO<sub>2</sub> (17 électrons de valence).



II.2.5. Résonance paramagnétique électronique (RPE).

L'électron célibataire d'un édifice est soumis à un champ magnétique extérieur B<sub>ext</sub> : il y a levée de dégénérescence des états de spin par effet Zeeman et il est possible d'assurer des transitions entre états de spin électronique par une onde microonde délivrée par un klystron pour la fréquence ν de l'onde incidente qui vérifie :

$$h\nu = g\beta_e B_{ext}$$

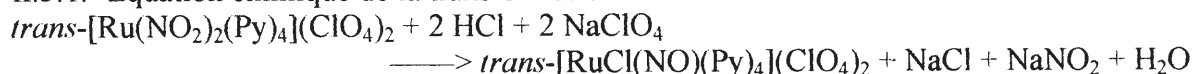
En pratique, on mesure la fréquence ν pour un champ extérieur fixé.

La détermination de g est caractéristique du système.

La multiplicité du signal (triplet) est due au couplage de l'électron célibataire avec le spin nucléaire I = 1 du noyau d'azote <sup>14</sup>N.

II.3. Préparation du complexe *trans*-[RuCl(NO)(Py)<sub>4</sub>](ClO<sub>4</sub>)<sub>2</sub>.

II.3.1. Equation chimique de la transformation.



II.3.2. Caractérisation du complexe *trans*-[RuCl(NO)(Py)<sub>4</sub>]<sup>2+</sup>.

II.3.2.1. On applique la formule de l'oscillateur harmonique qui relie la fréquence propre de l'oscillateur ν à la masse réduite μ du système et à la constante de raideur du ressort. On admet que cette constante de force n'est pas modifiée par la substitution de <sup>14</sup>N en <sup>15</sup>N.

$$(\nu_1/\nu_2) = (\mu_1/\mu_2)^{1/2} \quad \text{et donc : } \nu_2 = \nu_1(\mu_1/\mu_2)^{1/2}$$

$$1/\mu_1 = 1/14 + 1/16 \quad \mu_1 = 7,467 \quad \text{et} \quad 1/\mu_2 = 1/15 + 1/16 \quad \mu_2 = 7,742$$

ce qui donne :

$$\nu_2 = 1908.(7,467/7,742)^{1/2} = 1874 \text{ cm}^{-1}$$

II.3.2.2. Etude de l'entité RuNO.

La linéarité de l'échaînement RuNO peut s'expliquer par l'existence des formes mésomères suivantes :

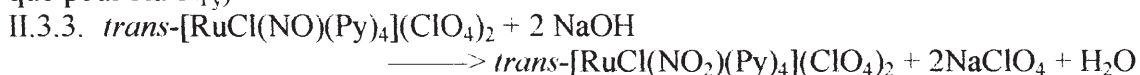


Le ligand nitrosyle porte la charge +I et le degré d'oxydation du métal est +II.

Le ligand nitrosyle est isoélectronique de CO.

La liaison Ru-NO peut s'expliquer par la donation  $\sigma$  du doublet non liant porté par l'azote et la rétrodonation d'électrons d de l'ion métallique vers le ligand.

Le double mouvement électronique renforce la liaison métal/ligand et diminue la distance N-Ru (ceci est conforme aux distances observées : la distance Ru-N est plus courte pour Ru-NO que pour Ru-N<sub>Py</sub>)



Le ligand nitrosyle se comporte comme un électrophile. La réaction avec l'ion OH<sup>-</sup> peut se décrire comme l'attaque nucléophile de OH<sup>-</sup> sur l'azote électrophile de NO.

## II.4. Magnétochimie.

### II.4.1. Généralités.

II.4.1.1. Dans un champ magnétique non homogène, une substance diamagnétique se dirige dans les zones de faibles champs magnétiques. Une substance paramagnétique se dirige vers les régions de fort champs magnétiques.

II.4.1.2. Dans une balance de Gouy, l'échantillon est suspendu entre les pôles d'un aimant de façon à ce que la partie inférieure soit dans une région de champ intense et la partie supérieure soit dans une région où le champ est nul. La force magnétique est dirigée selon la verticale : on mesure la modification de poids de l'échantillon (une substance paramagnétique subit une force dirigée du haut vers le bas, une substance diamagnétique du bas vers le haut), et cette mesure permet d'accéder à la susceptibilité magnétique volumique.

II.4.1.3. Le tracé de l'inverse de la susceptibilité magnétique en fonction de la température permet de mettre en évidence différents comportements :

- la courbe obtenue est une droite qui passe par l'origine ; la loi suivie est donc  $\chi = C/T$  (loi de Curie) où C est une constante.

- la courbe obtenue est une droite qui ne passe pas par l'origine  $\chi^{-1} = (T - \theta)/C$  (loi de Curie-Weiss). Le paramètre  $\theta$  est homogène à une température. Si  $\theta$  est négatif, le matériau est antiferromagnétique ; si  $\theta$  est positif, le matériau est ferromagnétique.

- la température  $\theta$  est notée  $\theta_C$  dans le cas d'un matériau ferromagnétique et est appelée température de Curie. Il existe une aimantation spontanée (aimant permanent) en-dessous de cette température. La loi de Curie-Weiss décrit assez bien la variation de la susceptibilité magnétique notablement au-dessus de la température de Curie. Au voisinage du point de Curie, la susceptibilité est proportionnelle à  $(T - \theta_C)^{-4/3}$ .

- la température  $\theta$  est notée  $\theta_N$  dans le cas d'un composé antiferromagnétique et est appelée température de Néel. Dans une substance antiferromagnétique, le moment total en dessous de la température de Néel est nul ; la susceptibilité magnétique est maximale à  $T = \theta_N$ .

- pour un composé diamagnétique, la susceptibilité magnétique est négative et indépendante de la température.

### II.4.2. Règle de Stoner.

II.4.2.1. La relation  $\mu = [n(n+2)]^{1/2}$  est suivie si la seule contribution au magnétisme est due aux moments cinétiques de spin. Cela signifie qu'il y a blocage des moments orbitaux par interaction des ligands avec les électrons d de l'ion métallique. Ceci est bien observé dans les ions à sous couche d incomplète lorsque le terme fondamental n'est pas T (E ou A).

II.4.2.2. Dans le complexe *trans*-[RuCl(O)(py)<sub>4</sub>](ClO<sub>4</sub>), le ruthénium est au degré d'oxydation +4 ; on peut donc attribuer (8 - 4) = 4 électrons d restant sur l'ion métallique central et prévoir un moment magnétique effectif de  $\sqrt{2 \times 4} = 2,83$  soit proche de 2,94. En symétrie D<sub>4h</sub>, le niveau le plus bas en énergie n'est pas dégénéré et celui qui est immédiatement au-dessus est dégénéré deux fois : les quatre électrons se répartissent de la façon suivante, deux appariés dans le niveau fondamental et deux de spin parallèles dans les deux niveaux dégénérés.

# Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Épreuve A : Composition de physique - Session : 1998

## ÉTUDE D'INSTALLATIONS DE DESSALEMENT D'EAU DE MER

1.1 Ouvert : échanges d'énergie et de matière avec l'extérieur.

Permanent : les grandeurs physiques intensives ont des valeurs indépendantes du temps.

1.2 Le système B comprend à la date  $t$  ( $A +$  la masse  $dm$  à l'entrée) et à la date  $t+dt$ , ( $A + dm$  à la sortie).

Appliquons au système fermé B le premier principe de la thermodynamique, en désignant par  $u_i$  l'énergie interne massique et par  $dV_i$  le volume occupé par  $dm$  :

la variation d'énergie totale est égale à la somme des énergies échangées avec l'extérieur :

$$E_B(t+dt) - E_B(t) = \delta W_{ind} + \delta Q + P_e dV_e - P_s dV_s$$

soit

$$(u_s + 1/2v_s^2 + gz_s)dm - (u_e + 1/2v_e^2 + gz_e)dm = \delta W_{ind} + \delta Q + P_e dV_e - P_s dV_s$$

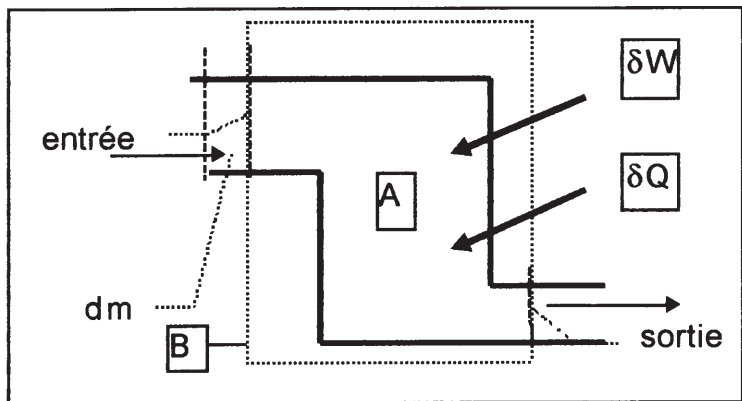
Comme

$$u_i dm + P_i dV_i = h_i dm,$$

$$(h_s + 1/2v_s^2 + gz_s)dm - (h_e + 1/2v_e^2 + gz_e)dm = \delta W_{ind} + \delta Q$$

Et en divisant les deux membres par  $dm$  :

$$(h_s + 1/2v_s^2 + gz_s) - (h_e + 1/2v_e^2 + gz_e) = q_{ex} + w_{ind}$$



1.3

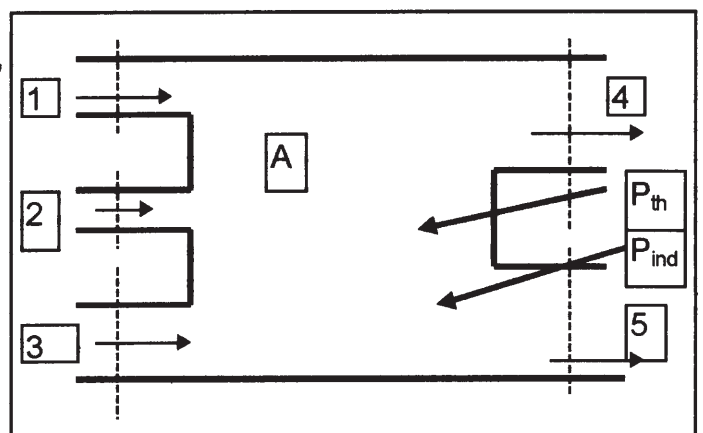
Désignons par  $D_{mi}$  les débits massiques, par  $P_{th}$  la puissance thermique échangée et par  $P_{ind}$  la puissance mécanique indiquée.

En régime permanent, la conservation de la masse impose :

$$\sum_{sorties} D_{mi} = \sum_{entrées} D_{mj}$$

Le raisonnement précédent permet d'obtenir, en divisant ici par  $dt$  :

$$\sum_{sorties} (h_i + 1/2v_i^2 + gz_i)D_{mi} - \sum_{entrées} (h_j + 1/2v_j^2 + gz_j)D_{mj} = P_{th} + P_{ind}$$





2.1

Calculons  $\Pi$  :

$$\Pi = 10^{-1} \cdot 8,314 \cdot 288 = 240 \text{ Pa}$$

D'après la relation de l'hydrostatique,

$$\Pi = \rho g H, \text{ d'où}$$

$$H = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

2.2.1

Avec les données, on calcule la somme des concentrations :

$$\Sigma C_i = 1,16 \text{ mol.L}^{-1} \quad \text{d'où :}$$

$$\Pi = 2,8 \cdot 10^6 \text{ Pa et}$$

$$\Delta P_{\min} = 83 \text{ bar}$$

2.2.2

La pompe est un système ouvert horizontal, où on néglige les variations d'énergie cinétique massique, sans échange thermique, d'où :

$$h_s - h_e = w_{\text{ind}}$$

D'autre part,

$$dh = T ds + V dP$$

Le fonctionnement étant réversible,  $ds = 0$  et d'après l'énoncé,

$$V = w = \text{cte}$$

Ainsi,

$$w_{\text{ind}} = h_s - h_e = w \Delta P$$

2.2.3

$$P_{\text{ind}} = D_m \cdot w_{\text{ind}} = D_m \cdot w \Delta P$$

$$P_{\text{ind}} = 10^4 \text{ kW}$$

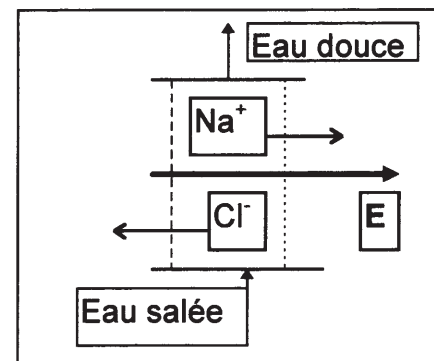
2.2.4

L'énergie nécessaire est  $15 \times 3600 = 5,4 \cdot 10^4 \text{ kJ}$  alors que le calcul précédent donne  $10^4 \text{ kJ}$  par mètre cube d'eau douce produite : l'ordre de grandeur est respecté, mais l'équilibre n'est certainement pas réalisé, ce qui explique la différence.

Le traitement préalable et la turbulence sont destinés à éviter le colmatage des membranes.

3.1

Le schéma ci-contre montre le principe de l'action du champ électrique sur les ions, qui se trouvent séparés de l'eau grâce aux membranes semi-perméables sélectives.



3.2

Quand une mole de  $\text{Na}^+$  traverse la membrane, la charge électrique transportée est  $N e$ .  
On en déduit :

$$q_1 = N e / M_{\text{NaCl}}$$

soit numériquement :

$$q_1 = 1,65 \cdot 10^6 \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$$

3.3 Par définition de la mobilité,

$$v_{\text{Na}^+} = \mu_{\text{Na}^+} E$$

D'où

$$j = (\rho_{\text{Na}^+} \cdot \mu_{\text{Na}^+} + |\rho_{\text{Cl}^-}| \cdot \mu_{\text{Cl}^-}) E = \gamma E$$

Et

$$\gamma = (\mu_{\text{Na}^+} + \mu_{\text{Cl}^-}) \cdot c \cdot N e / M_{\text{NaCl}}$$

numériquement :

$$\gamma = 0,93 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$$

3.4

A la cote  $z$ , la concentration vaut :

$$c(z) = (1 - 0,9 \cdot z/a) c_0$$

Ainsi,

$$\gamma(z) = (1 - 0,9 \cdot z/a) \gamma_0$$

La conductance de la tranche  $dz$  vaut donc :

$$dG(z) = a \cdot \gamma(z) / e \, dz = a \cdot (1 - 0,9 \cdot z/a) \gamma_0 \cdot dz / e$$

Par intégration,

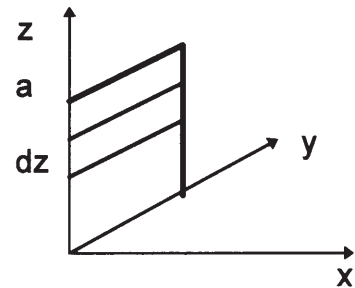
$$G = 0,55 \cdot \gamma_0 a^2 / e$$

soit

$$R = 1,82 e / (a^2 \cdot \gamma_0)$$

Numériquement,

$$R = 7,8 \cdot 10^{-2} \, \Omega$$

3.5

Un litre d'eau salée contient  $m = 5 \text{ g}$  de chlorure de sodium et nécessite donc le transit d'une charge  $0,9 \cdot m \cdot q_1$ , soit une intensité

$$i = 0,9 \cdot m \cdot q_1 \cdot D_m \quad D_m \text{ désignant le débit massique d'eau. AN : } i = 2,1 \text{ A}$$

La puissance électrique nécessaire est

$$P = R \cdot i^2 \quad \text{AN : } P = 0,33 \text{ W}$$

C'est aussi l'énergie électrique utilisée pour une masse de sel extraite égale à  $0,9 \cdot m \cdot D_m$ .

L'énergie nécessaire par kilogramme de sel extrait vaut donc :

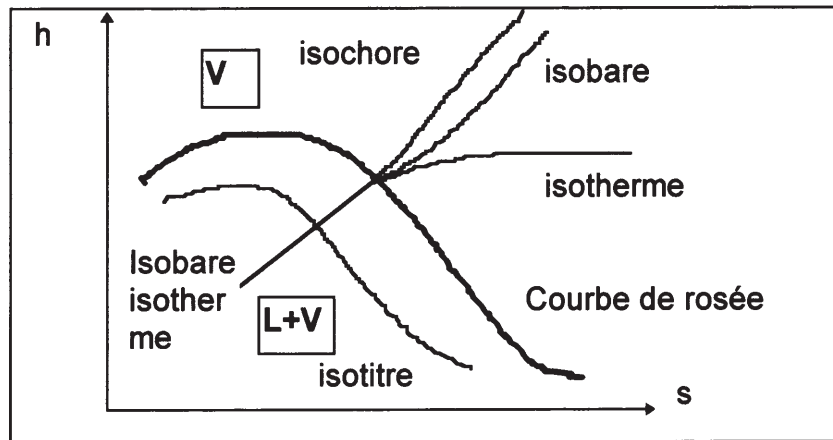
$$W_s = R \cdot i^2 / (0,9 \cdot m \cdot D_m) = 0,9 \cdot m \cdot D_m \cdot q_1^2 \cdot R$$

Numériquement,

$$W_s = 265 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} = 0,073 \text{ kWh}$$

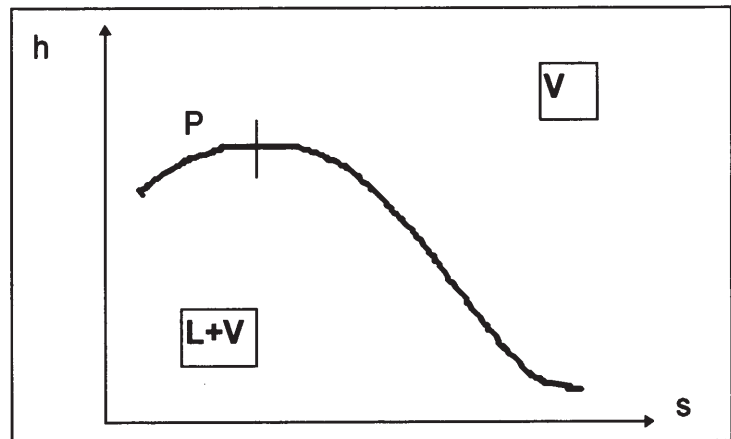
C'est une valeur assez nettement inférieure à la valeur observée, notamment à cause de la résistance électrique des membranes.

## 4.1.1



## 4.1.2

Les différentes isotitres ne se coupent pas en P : ce point ne peut donc être le point critique puisque on devrait pouvoir y trouver liquide et vapeur en toutes proportions : seule l'isotitre  $x = 1$  (courbe de rosée) passe en P.



## 4.1.3

Pour un fluide quelconque, lors d'une transformation réversible élémentaire,

$$dh = Tds + vdp$$

Pour un gaz parfait,

$$dh = c_p dT$$

Pour une isobare

$$dp = 0$$

Ainsi,

$$ds = c_p dT/T$$

$$s - s_0 = c_p \ln(T/T_0)$$

$$T = T_0 \exp((s-s_0)/c_p)$$

et par intégration ( $s = s_0$  à  $T = T_0$ ) :

soit

Et comme

$$h = h_0 + c_p (T - T_0),$$

$$h = h_0 - c_p T_0 [1 - \exp((s-s_0)/c_p)]$$

## 4.1.4

Un point à l'intérieur de la courbe de saturation représente un équilibre liquide-vapeur à  $T$  et  $P$  fixés. D'après ce qui précède,

$$dh = T ds, \text{ soit}$$

$$\boxed{dh/ds = T}$$

La pente de l'isobare est constante et égale à  $T$  : c'est une droite isotherme.



4.1.5

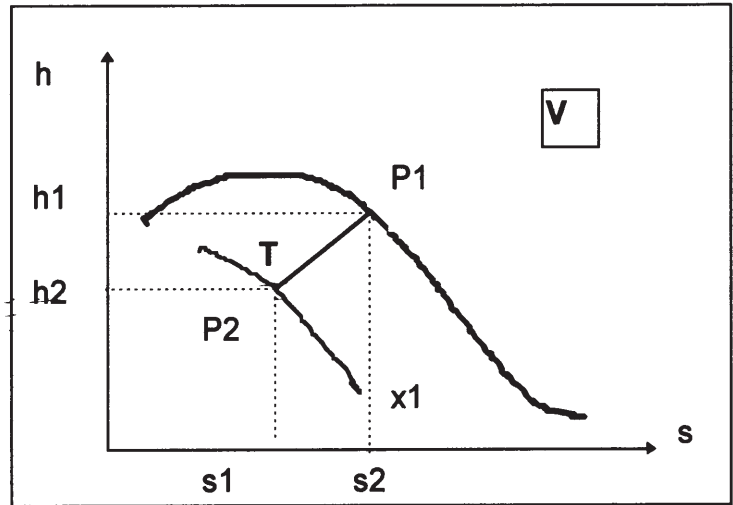
Le schéma ci-contre montre comment utiliser le diagramme. Il suffit de calculer

$$I_v = [T(s_1 - s_2)] / (1 - x_1)$$

ou

$$I_v = (h_1 - h_2) / (1 - x_1)$$

AN :  $I_v(60^\circ\text{C}) = 2360 \text{ kJ.kg}^{-1}$



4.1.6

Dans un écoulement, sans échange de chaleur et sans travail indiqué, à  $z = \text{cte}$ , d'après le premier principe (expression du 1.1.2),

$$h_s - h_e = \frac{1}{2} (v_e^2 - v_s^2)$$

soit, en choisissant  $v_e = 0$  et en notant  $v_s = w$ ,  $h_s - h_e$ ,

$$w = \sqrt{2 \Delta h}$$

C'est par exemple la vitesse obtenue à la sortie d'une tuyère adiabatique.

4.2.1

Le flux thermique traversant la longueur  $dz$  (de l'intérieur de la conduite vers l'extérieur) vaut

$$d\phi = v \cdot 2\pi R [\theta(z) - \theta_{sz}] dz$$

$$d\phi = v \cdot 2\pi R [\theta_{sz} - \theta_1] dz$$

On en déduit

$$\theta_{sz} = \frac{1}{2} [\theta(z) + \theta_1]$$

et

$$d\phi = v \cdot \pi R [\theta(z) - \theta_1] dz$$

Ce flux correspond à la variation de température de la tranche d'épaisseur  $dz$  d'eau de mer :

$$d\phi = k D_{md} c [\theta(z) - \theta(z+dz)] = -k D_{md} c \cdot [d\theta(z)/dz] \cdot dz$$

Ainsi,

$$d\theta(z) / [\theta(z) - \theta_1] = -\pi v R / k D_{md} c \cdot dz$$

Et par intégration,

$$\theta(z) = \theta_1 + (\theta_m - \theta_1) \exp(-\pi v R / k D_{md} c) z$$

On en déduit

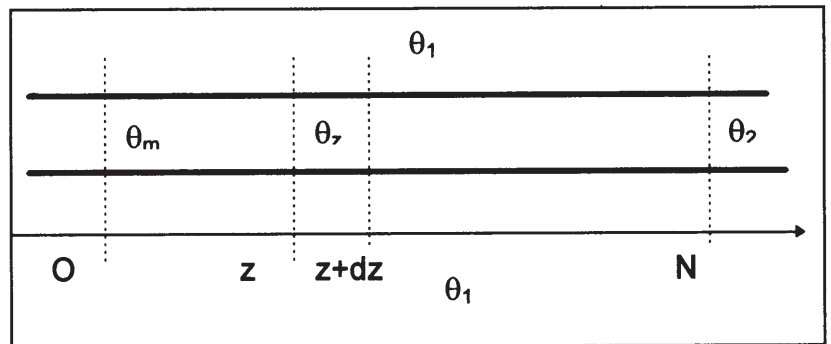
$$N = (k D_{md} c / \pi v R) \cdot \ln((\theta_1 - \theta_m) / (\theta_1 - \theta_2))$$

et  $d\phi = \pi v R (\theta_m - \theta_1) \exp(-\pi v R / k D_{md} c) z \cdot dz$

Puis

$$\phi_r = k c D_{md} [1 - \exp(-\pi v R / k D_{md} c) N] \cdot (\theta_m - \theta_1) = k c D_{md} (\theta_2 - \theta_m)$$

ce que l'on peut aussi trouver directement.



### 4.2.2

Le condenseur est un système ouvert en écoulement permanent, sans échange thermique avec l'extérieur, si on néglige l'échange thermique avec le reste de la cellule. Alors,

$$k D_{md} c (\theta_2 - \theta_m) = L D_{md}$$

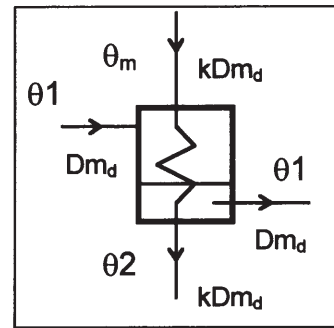
Si on considère maintenant l'ensemble de la cellule, en appliquant encore le premier principe au système ouvert en écoulement permanent, sans travail indiqué, qu'il constitue,

$$P_{th} + c D_{md} (\theta_m - \theta_1) + (k-1) c D_{md} (\theta_m - \theta_1) = 0$$

$$P_{th} = k c D_{md} (\theta_1 - \theta_m)$$

Soit, en utilisant la relation précédente et la notation  $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$  :

$$P_{th} = (k c \Delta\theta + L) D_{md}$$



### 4.2.3

Sur le diagramme, on lit :

$$\theta_1 = 65 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$h_{vap} = 2620 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

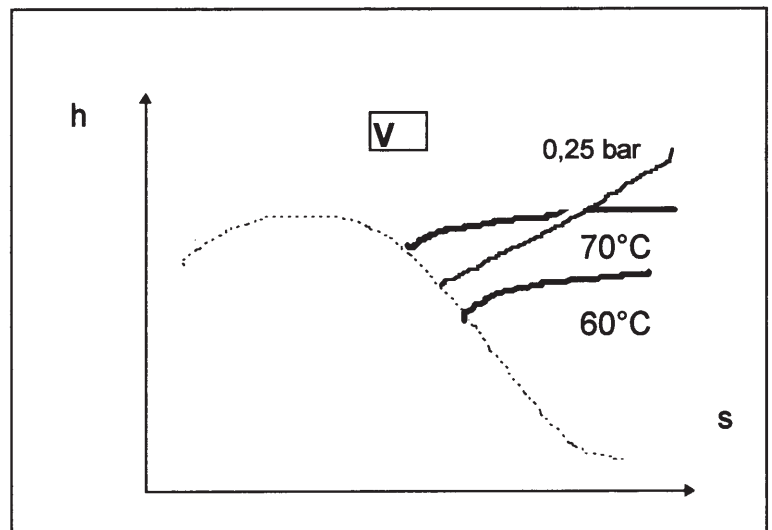
$$h_{x=0,8} = 2140 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

$$L = 2400 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Avec  $\Delta\theta = 10 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $\theta_2 = 55 \text{ } ^\circ\text{C}$

D'où

$$k = 12,8$$



### 4.2.4

Le résultat du 4.2.1 donne :

$$w = k c \Delta\theta + L$$

$$\text{A.N. : } w = 2900 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

C'est bien l'ordre de grandeur attendu.

### 5.1

En négligeant les variations de l'énergie cinétique massique et de la hauteur, le premier principe permet d'écrire :

$$w_{is} = h_{s is} - h_e = c_p (T_{s is} - T_e)$$

Pour une isentropique d'un gaz parfait,

$$0 = c_p dT/T - r dP/P$$

D'où par intégration

$$T_2/T_1 = (P_2/P_1)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

Ainsi,

$$T_{s\ is} = T_e [\tau^{(\gamma-1)/\gamma} - 1]$$

Et

$$w_{is} = c_p T_e [\tau^{(\gamma-1)/\gamma} - 1]$$

A.N.  $w_{is} = 62,5 \text{ kJ.kg}^{-1}$

5.2

$$T_{s\ is} = T_e [\tau^{(\gamma-1)/\gamma} - 1]$$

A.N.  $T_{s\ is} = 396 \text{ K}$        $\theta_{is} = 123 \text{ °C}$

5.3

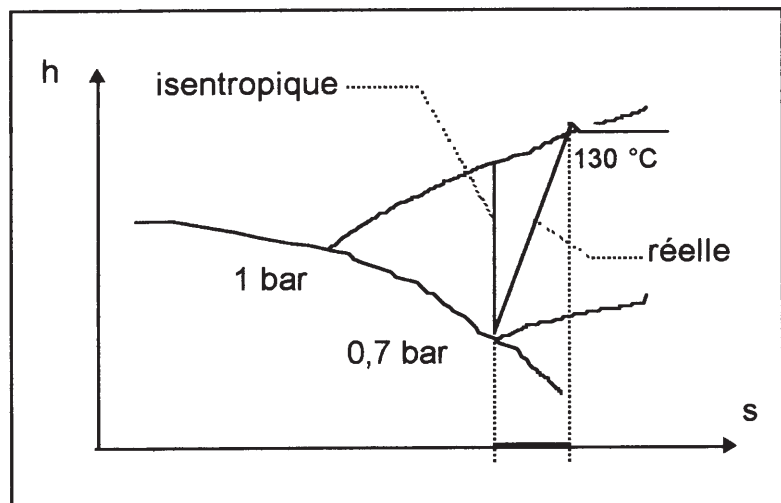
On lit pratiquement la même valeur sur le diagramme de Mollier :

$$\theta_{Ms} = 123 \text{ °C}$$

5.4

On lit sur le diagramme :

$$\underline{s_{\text{créat}} = 0,04 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}}$$



5.5

D'après la définition donnée,

$$\eta_{is} = (T_{is} - T_e) / (T_s - T_e)$$

Soit

$$\eta_{is} = [\tau^{(\gamma-1)/\gamma} - 1] / (T_s/T_e - 1)$$

A.N.  $\eta_{is} = 0,825$

5.6

Le travail nécessaire par kilogramme d'eau produite vaut

$$w = (w_{is} / \eta_{is}) / 0,9$$

A.N.  $w = 84 \text{ kJ.kg}^{-1}$

## ÉTUDE DE DISPOSITIFS ÉLECTROSTATIQUES

## 1.1.1

$$\boxed{\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t)}$$

En l'absence de charges et de courants,

$$\boxed{\text{div } \mathbf{E} = 0 \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t}$$

## 1.1.2

$$\boxed{\mathbf{P} = 1/\mu_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}$$

## 1.1.3

Utilisons la relation d'Ostrogradski, appliquée à  $\mathbf{P}$  :

$$\oint_{(S)} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \text{div } \mathbf{P} \, dv = \iiint_V \partial w / \partial t \, dv$$

On en déduit :

$$\boxed{\text{div } \mathbf{P} + \partial w / \partial t = 0}$$

## 1.1.4

$$\text{div } \mathbf{P} = 1/\mu_0 \text{div} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = 1/\mu_0 (\mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{B})$$

$$\text{div } \mathbf{P} = -1/\mu_0 [1/2 \partial(B^2)/\partial t + 1/2 \epsilon_0 \mu_0 \partial(E^2)/\partial t]$$

Soit

$$\partial w / \partial t = \partial / \partial t (1/2 B^2 / \mu_0 + 1/2 \epsilon_0 E^2)$$

Et enfin :

$$\boxed{w_{el} = 1/2 \epsilon_0 E^2 \quad ; \quad w_m = 1/2 B^2 / \mu_0}$$

## 1.1.5

$$\underline{w_m \max = 895 \text{ kJ.m}^{-3}}$$

$$\underline{w_{el} \max = 40 \text{ J.m}^{-3}}$$

Pour obtenir  $w_{el} \max = w_m \max$ , il faudrait  $\underline{E' = 4,5 \cdot 10^8 \text{ V.m}^{-1}}$

## 1.2.1

Le volume entre les plateaux par unité de surface vaut  $v = d$ .

La loi des gaz parfaits s'exprime alors par :

$$P \cdot d = m (R/M) T$$

Si  $V_0$  ne dépend que de  $m$ , à  $T$  fixée, il ne dépend que du produit  $P \cdot d$

## 1.2.2

Comme le montre le schéma ci-contre, la section efficace de collision vaut est un disque de rayon  $2r$  :

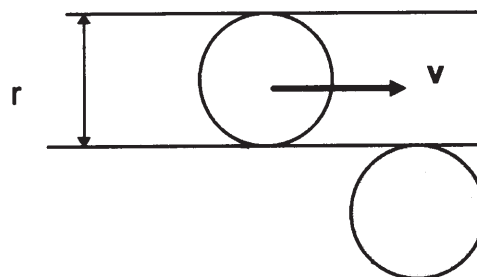
$$\boxed{S = 4\pi r^2}$$

Le volume du cylindre de section  $S$  et longueur  $\lambda$  vaut  $4\pi r^2 \lambda$  ; il contient  $N \cdot 4\pi r^2 \lambda$  molécules.

Ainsi,

$$N \cdot 4\pi r^2 \lambda = 1 \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\lambda = 1 / 4\pi r^2 N}$$



En désignant par  $N$  le nombre d'Avogadro, la quantité de matière par unité de volume est  $N/N$  et la loi des gaz parfaits s'écrit :

$$P = N/N RT = N k T \quad k \text{ désignant la constante de Boltzmann.}$$

Finalement,  $\lambda$  peut s'exprimer par

$$\lambda = kT / 4\pi r^2 P$$

### 1.2.3

Le travail de la force électrique s'exerçant sur un ion de charge  $e$  soumis à l'action du champ électrique  $E$  sur un parcours de longueur  $\lambda$  vaut  $eE\lambda$ ; d'après le théorème de l'énergie cinétique, il est égal à la variation d'énergie cinétique. Comme l'ion part sans vitesse initiale,

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = eE\lambda$$

Cette énergie cinétique doit être au minimum égale à l'énergie d'ionisation :

$$W_i = eE_{\min} \lambda$$

D'où

$$E_{\min} = e W_i / \lambda = 4\pi r^2 P W_i / kT e$$

Le champ entre les plaques étant uniforme  $E_{\min} = V_e / d$  et enfin,

$$V_e = (4\pi r^2 W_i / kT e) (P.d)$$

### 1.2.4

$(P.d) = 10^{-2} \gg 7.10^{-4}$  bar.cm donc on peut utiliser  $V_e = 32500 P.d = 32500 d$  avec  $P = 1$  bar. En outre,  $E_{\text{dis}} = V_e / d$ , d'où, dans ces conditions :

$$E_{\text{dis}} = 32500 \text{ V.cm}^{-1} = 3,25.10^8 \text{ V.m}^{-1}$$

D'après l'énoncé, pour  $P = 1$  bar,

$$d_{\min} = 7.10^{-4} \text{ cm} = 7 \mu\text{m}$$

Le champ disruptif correspondant se calcule alors par

$$E'_{\text{dis}} = V_{e \min} / d_{\min}$$

$$E'_{\text{dis}} = 4,9.10^7 \text{ V.m}^{-1}$$

Pour  $d < d_{\min}$ , la courbe donnée montre que  $V_e$  croît très rapidement lorsque  $Pd$  diminue, et comme  $E_{\text{dis}} = V_e / d$ ,  $E_{\text{dis}}$  croît encore plus rapidement.

L'interprétation physique est simple : les molécules sont de plus en plus rares entre les plateaux et  $d$  se rapproche de  $\lambda$  ; il y a donc très peu de chances pour que l'ionisation par chocs se produise.

### 2.1

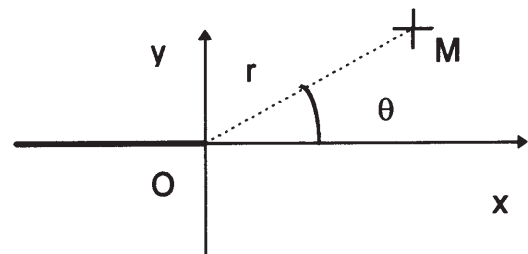
Le problème est invariant par translation de direction  $u_z$  : l'étude dans le plan  $xOy$  suffit donc.

Lorsque  $r \rightarrow 0$ ,

$$V(0, \theta) = A = V_0$$

Le plan  $y = 0$  est un plan de symétrie, donc

$$g(-\theta) = g(\theta)$$



2.2

L'équation de Laplace exprime que, en un point dépourvu de charge,

$$\Delta V = 0$$

Ici, en utilisant l'expression du laplacien en coordonnées polaires et la forme de V, on obtient :

$$f'g/r + f''g + \frac{1}{4}r^2 fg'' = 0$$

soit

$$r \cdot (f' + r f'')/f = -g''/g = K$$

On peut donc choisir

$$H(r) = r \cdot [f'(r) + r f''(r)] / f(r)$$

$$L(\theta) = -g''(\theta) / g(\theta)$$

2.3

$g(\theta)$  obéit à l'équation différentielle

$$g''(\theta) + K g(\theta) = 0$$

K doit être positive pour que g soit périodique.

Les solutions sont de la forme

$$g(\theta) = B \cos(\sqrt{K} \theta + \phi)$$

La parité de  $g(\theta)$  impose  $\phi = 0$ . En outre, pour  $\theta = \pi$ , on doit trouver  $V = V_0$  et seulement pour cette valeur de  $\theta$ , d'où  $\sqrt{K} = \frac{1}{2}$  :

$$g(\theta) = B \cos(\theta/2)$$

2.4

On calcule

$$f(r) = r^u$$

$$f'(r) = u r^{u-1}$$

$$f''(r) = u(u-1) r^{u-2}$$

L'équation

$$H(r) = K = 1/4$$

fournit alors

$$u^2 = 1/4$$

soit

$$u = \pm 1/2$$

Comme  $f(0) = 0$ , seule la valeur  $u = 1/2$  convient :

$$f(r) = \sqrt{r}$$

2.5

D'après les résultats précédents,

$$V(r, \theta) = V_0 + B \sqrt{r} \cos(\theta/2)$$

En P,

$$0 = V_0 + B \sqrt{r_0}$$

$$\text{d'où } B = -V_0 / \sqrt{r_0} \quad \text{et}$$

$$V(r, \theta) = V_0 \left[ 1 - \sqrt{\frac{r}{r_0}} \cdot \cos(\theta/2) \right]$$

2.6

Une équipotentielle est déterminée par

$$V = \alpha V_0$$

Soit

$$\alpha = 1 - \sqrt{\frac{r}{r_0}} \cdot \cos(\theta/2)$$

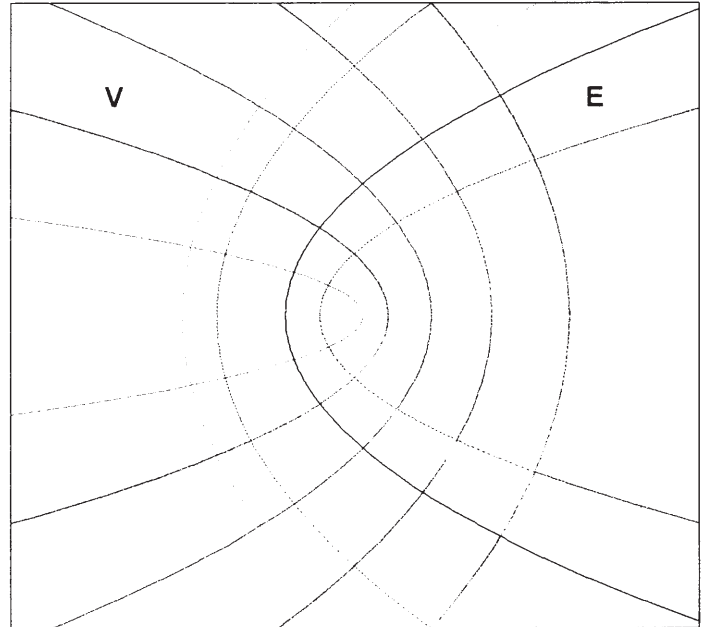
ou

$$r = r_0 (1 - \alpha)^2 / \cos^2(\theta/2) = 2 r_0 (1 - \alpha)^2 / (1 + \cos\theta)$$

On reconnaît l'équation polaire de paraboles.

Un traceur permet d'obtenir quelques équipotentielles.

Les lignes de champ sont aussi des paraboles, trajectoires orthogonales des équipotentielles.

2.7

Le théorème de Coulomb exprime qu'en un point très voisin de la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique, le champ électrique est normal à la surface du conducteur et a pour projection sur la normale sortante  $\sigma/\epsilon_0$  :

$$\mathbf{E} = \sigma/\epsilon_0 \mathbf{n}$$

2.8 On obtient  $\mathbf{E}$  grâce à

$$\mathbf{E} = - \text{grad } V$$

D'où

$$E_\theta = - (1/r) \cdot \partial V / \partial \theta = - V_0 / 2 \sqrt{r r_0} \cdot \sin(\theta/2)$$

Soit, pour  $\theta = \pi$  :

$$E_\pi(r) = - V_0 / 2 \sqrt{r r_0} \quad (\text{porté par } - \mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_y)$$

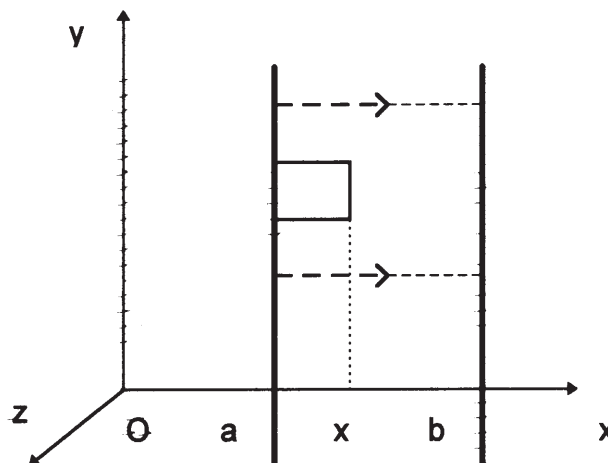
D'après le théorème de Coulomb,  $\mathbf{E} = \sigma / \epsilon_0$ , donc

$$\sigma(r) = \epsilon_0 V_0 / 2 \sqrt{r r_0}$$

$\sigma \rightarrow \infty$  lorsque  $r \rightarrow 0$  : c'est une manifestation de l'effet de pointe.

## 3.1.1

Choisissons un repère d'espace cartésien  $Oxyz$  et soient  $x = a$  et  $x = b$  les équations des plans conducteurs. En un point  $P(x_1, y_1, z_1)$  de l'espace, le plan  $z = z_1$  et le plan  $y = y_1$  sont des plans de symétrie pour la distribution de charges et donc contiennent  $\mathbf{E}$ . Il en résulte que  $\mathbf{E}$  est dirigé par  $\mathbf{u}_x$ . Les lignes de champ sont donc des droites de direction  $\mathbf{u}_x$ . Comme le flux de  $\mathbf{E}$  est conservatif en l'absence de charges, le champ électrique est uniforme entre les armatures.



Appliquons le théorème de Gauss à un tube de champ dont une section d'aire  $S$  est dans le métal à l'abscisse  $x = a$  (le champ  $y$  est nul) et l'autre section est à l'abscisse  $x$ .  $Q_S$  désignant la charge portée par cette portion d'armature,

$$E \cdot S = Q_S / \epsilon_0 = -dV/dx$$

D'où

$$dV = -Q_S / S \epsilon_0 dx$$

Et par intégration

$$V(a) - V(b) = Q_S / S \epsilon_0 (b - a) = Q_S / S \epsilon_0 \cdot e = Q_S / C$$

On en déduit  $C = \epsilon_0 S / e$  et,  $c$  désignant la capacité par unité de surface,

$$c = \epsilon_0 / e$$

## 3.1.2

La pression électrostatique  $p$  est le quotient par  $dS$  de la norme de la force électrostatique qui s'exerce sur un élément de surface d'aire  $dS$ .

$$p = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0}$$

Dans le cas du condensateur plan, la force par unité de surface sur une armature s'exprime donc par  $p$ .

Le calcul précédent a montré que  $\sigma = c U = (\epsilon_0 / e) U$  d'où

$$f = p = \epsilon_0 U^2 / 2 e^2$$

## 3.1.3

L'énergie électrostatique volumique a pour expression  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ . La capacité du condensateur plan vaut  $C = \epsilon_0 S / e$ . Le volume dans lequel existe le champ électrique est  $S \cdot e$ . L'énergie de ce condensateur vaut donc

$$W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot S \cdot e = \frac{1}{2} \epsilon_0 (U/e)^2 \cdot S \cdot e$$

Soit

$$W = \frac{1}{2} C U^2$$



Désignons par  $F$  l'action subie par l'armature. L'opérateur permettant un déplacement quasistatique exerce sur l'armature une force opposée à l'action électrostatique subie par l'armature. Le travail élémentaire qu'il fournit est égal à la variation d'énergie électrostatique :

$$- F \cdot u_x dx = dw$$

On en déduit

$$\boxed{F = - (\partial W / \partial x) u_x}$$

### 3.1.4

Si le déplacement quasistatique est envisagé à tension constante, au travail de l'opérateur s'ajoute l'énergie fournie par la source qui maintient le potentiel :

$$dW_{\text{gen}} = U dQ = U^2 dC = 2 \cdot dW$$

Ainsi,

$$- F \cdot u_x dx + 2 \cdot dW = dW$$

$$F \cdot u_x dx = dW$$

$$\boxed{F = (\partial W / \partial x) u_x}$$

Dans ce cas,

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 U^2 S / x$$

$$\partial W / \partial x = - \frac{1}{2} \epsilon_0 U^2 S / x^2$$

$$F = - \frac{1}{2} \epsilon_0 U^2 S / e^2 u_x$$

Dans le cas de la charge constante,

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q^2 / C = \frac{1}{2} Q^2 x / \epsilon_0 S$$

$$- \partial W / \partial x = - \frac{1}{2} Q^2 / \epsilon_0 S = - \frac{1}{2} \epsilon_0 U^2 S / e^2$$

Dans les deux cas,

$$\boxed{\|F\| / S = \frac{1}{2} \epsilon_0 U^2 / e^2}$$

C'est bien le résultat trouvé en 3.1.2

### 3.1.5

L'aire des armatures en regard vaut

$$(\pi - \theta) b^2 / 2 \quad \text{pour } 0 < \theta < \pi$$

$$(\theta - \pi) b^2 / 2 \quad \text{pour } \pi < \theta < 2\pi$$

Ainsi

$C(\theta) = \epsilon_0 (\pi - \theta) b^2 / 2e$	pour $0 < \theta < \pi$
$C(\theta) = \epsilon_0 (\theta - \pi) b^2 / 2e$	pour $\pi < \theta < 2\pi$

3.2.1

$$v = V_0 \quad q = \epsilon_0 (\theta - \pi) b^2 V_0 / 2e$$

$$q_0 = \epsilon_0 \pi b^2 V_0 / 2e$$

$$W = \frac{1}{2} C v^2 \quad \text{d'où } dW = \frac{1}{2} v^2 dC$$

$$dW = (\epsilon_0 b^2 V_0^2 / 4e) d\theta$$

$$\Delta W_1 = \int_{\pi}^{2\pi} (\epsilon_0 b^2 V_0^2 / 4e) d\theta = \pi \epsilon_0 b^2 V_0^2 / 4e$$

$$\Delta W_1 = q_0 V_0 / 2$$

3.2.2

Puisque (T) est isolé, q garde la valeur  $q_0$ .

$$v = q_0 / C = \pi V_0 / (\pi - \theta)$$

$$V_T = v + V_1 = v - V_0$$

$$V_T = \theta V_0 / (\pi - \theta)$$

Lorsque  $\theta$  atteint  $\theta_C$ ,

$$V_T = V_S \quad \text{soit}$$

$$\theta_C = \pi V_S / (V_0 + V_S) = \pi k / (1+k)$$

$$W = \frac{1}{2} q_0^2 / C = \pi^2 \epsilon_0 b^2 V_0^2 / 4 e (\pi - \theta)$$

D'où

$$dW = [\pi^2 \epsilon_0 b^2 V_0^2 / 4 e (\pi - \theta)^2] d\theta$$

Et par intégration,

$$\Delta W_2 = k \pi \epsilon_0 b^2 V_0^2 / 4 e = k q_0 V_0 / 2$$

3.2.3

$$v = (1+k)V_0$$

Comme en 3.2.1,  $v = \text{cte}$  et

$$dW = (-\epsilon_0 b^2 (1+k)^2 V_0^2 / 4e) d\theta$$

Par intégration,

$$\Delta W_3 = -\pi \epsilon_0 b^2 (1+k) V_0^2 / 4e = -(1+k) q_0 V_0 / 2$$

3.2.4

L'utilisation (S) reçoit la charge  $q_0$  au potentiel  $V_S = k V_0$ , soit l'énergie

$$W_{ut} = k q_0 V_0$$

## 3.2.5

Le tableau ci-dessous présente les énergies reçues par chaque partie du système lors d'un cycle. Un bilan des échanges permet pour chaque phase de trouver l'énergie reçue par le moteur.

	Phase I	Phase II	Phase III	Bilan
Source de tension	$-q_0 V_0$	0	$q_0 V_0$	0
Condensateur	$q_0 V_0/2$	$k q_0 V_0/2$	$-(1+k)q_0 V_0/2$	0
Moteur entraînant (T)	$q_0 V_0/2$	$-k q_0 V_0/2$	$-(1+k)q_0 V_0/2$	$-k q_0 V_0$
Utilisation (S)	0	0	$k q_0 V_0$	$k q_0 V_0$

Rien ne s'oppose à un fonctionnement inverse de cette machine.

## 4.1.1

Pour  $x < 0$  et  $x > 2a$ , les capacités sont nulles.

Pour  $0 < x < a$ ,

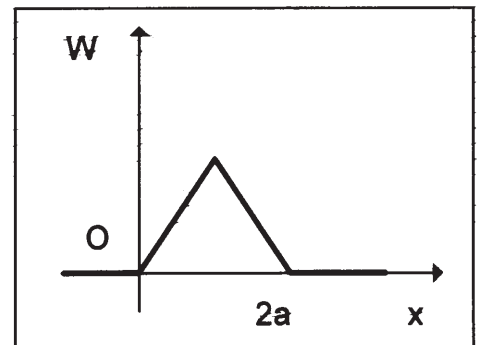
$$C_1 = \epsilon_0 b x / y \quad C_2 = \epsilon_0 b x / (2d - y)$$

$$W(x, y) = \frac{1}{2} \epsilon_0 b x V^2 [1/y + 1/(2d - y)]$$

Pour  $a < x < 2a$ ,

$$C_1 = \epsilon_0 b (2a - x) / y \quad C_2 = \epsilon_0 b (2a - x) / (2d - y)$$

$$W(x, y) = \frac{1}{2} \epsilon_0 b (2a - x) V^2 [1/y + 1/(2d - y)]$$



## 4.1.2

$$\mathbf{F} = \text{grad } W$$

à  $V = \text{cte}$

On déduit des expressions de  $W(x, y)$  :

$$F_x = \frac{1}{2} \epsilon_0 b V^2 [1/y + 1/(2d - y)] \quad F_y = \frac{1}{2} \epsilon_0 b x V^2 [1/(2d - y)^2 - (1/y)^2] \quad 0 < x < a$$

$$F_x = -\frac{1}{2} \epsilon_0 b V^2 [1/y + 1/(2d - y)] \quad F_y = \frac{1}{2} \epsilon_0 b (2a - x) V^2 [1/(2d - y)^2 - (1/y)^2] \quad a < x < 2a$$

## 4.1.3

Les expressions de  $F_x$  montrent que la position d'équilibre stable à  $y$  fixé est  $x = a$ .

Celles de  $F_y$  s'annulent pour  $y = d$ , mais c'est une position d'équilibre instable vis à vis des translations de direction  $Oy$ .

## 4.1.4

$$\begin{aligned} \text{A.N. : } C_1 &= 1,1 \cdot 10^{-14} \text{ F} & C_2 &= 7,4 \cdot 10^{-15} \text{ F} \\ F_x &= 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ N} & |F_y| &= 7,6 \cdot 10^{-8} \text{ N} \\ w &= 18,7 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

4.2.1

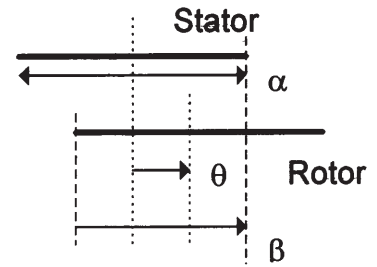
La figure ci-contre, où les courbures sont négligées, permet d'exprimer le recouvrement angulaire  $\beta$  des armatures :

$$\text{Si } 0 < \alpha < \theta \quad \beta = \alpha - \theta$$

$$\text{Si } -\alpha < \theta < 0 \quad \beta = \alpha + \theta$$

La capacité du condensateur formé a donc pour expressions :

$$C = \varepsilon_0 R_1 \beta h / (R_2 - R_1) \quad \text{soit}$$



$$C = \varepsilon_0 R_1 (\alpha - \theta) h / (R_2 - R_1) \quad 0 < \theta < \alpha$$

$$C = \varepsilon_0 R_1 (\alpha + \theta) h / (R_2 - R_1) \quad -\alpha < \theta < 0$$

Et l'énergie s'exprime par

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 R_1 (\alpha - \theta) h V^2 / (R_2 - R_1) \quad 0 < \theta < \alpha$$

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 R_1 (\alpha + \theta) h V^2 / (R_2 - R_1) \quad -\alpha < \theta < 0$$

4.2.2

Pour un pôle, on obtient le couple moteur par dérivation :

$$\Gamma_1 = dW/d\theta = \frac{1}{2} V^2 dC/d\theta = [\frac{1}{2} \varepsilon_0 R_1 h V^2 / (R_2 - R_1)] d\beta/d\theta$$

Il faut noter que  $\Gamma$  change de signe avec  $\theta$  : le système de commutation doit en tenir compte.

Pour  $\theta < 0$ , on obtient :

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 R_1 h V^2 / (R_2 - R_1)$$

4.2.3

$$\text{A.N. : } V_{\max} = E_{\max} (R_2 - R_1) = 2 \text{ kV}$$

$$\Gamma = 1,4 \cdot 10^{-9} \text{ N.m}$$

$$P_u = 7,2 \cdot 10^{-8} \text{ W}$$

# Agrégation

(Concours Externe)

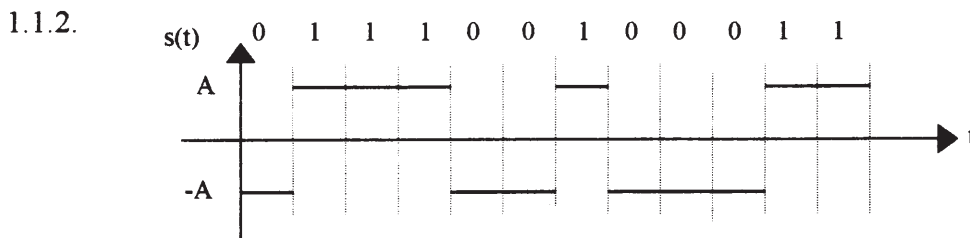
OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Épreuve B : Composition d'électricité, d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique  
Session : 1998

## Première partie : Etude de codes en ligne.

### 1. Code NRZ binaire.

1.1.1. Unité de R : le Baud  
Codage binaire : D=R.



1.2.1.  $a_k=1$  si  $d_k=1$  et  $a_k=-1$  si  $d_k=0$ .

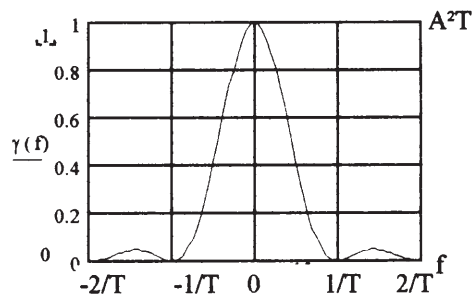
1.2.2.  $S_{moy}=0$ .

1.2.3.  $S^2_{eff}=A^2$ .

1.3.1. L'expression de  $M(f)$  est donnée par: 
$$M(f) = \int_0^T A e^{-j2\pi ft} dt = A T e^{-j\pi f T} \left[ \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right]$$

1.3.2. On en déduit :  $\gamma_s(f) = A^2 T \text{ sinc}^2(\pi f T)$  car  $E[a^2_k]=p_0(-1)^2+p_1(1)^2=1$ .

1.3.3. Représentation graphique de  $\gamma_s(f)$  :



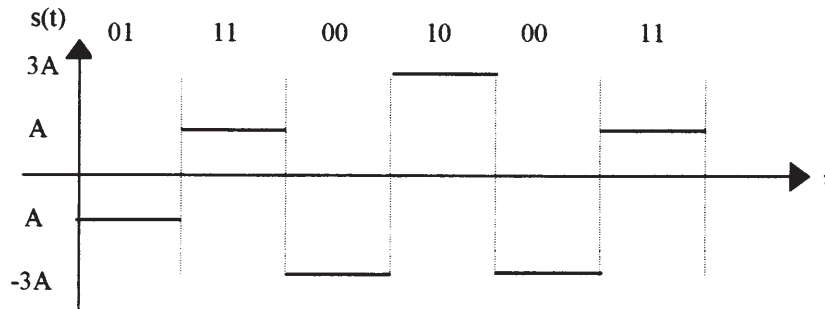
Encombrement spectral  $\approx [0, 1/T]$ .

1.3.4.  $\gamma_s(f)$  est maximale au voisinage de  $f=0$ , donc le couplage par transformateur ( passe-haut) est mal adapté.

1.3.5. Récupération du rythme impossible à partir du signal  $s(t)$  car  $\gamma_s(1/T)=0$ .

## 2. Codage NRZ M-aire.

2.1.1.



2.1.2. La durée d'un symbole étant 2 fois plus grande que la durée d'un bit, on a :  $R=D/2$ .

2.1.3. On obtient pour la rapidité de modulation dans le cas du RNIS :  $R=72\text{kBauds}$ .

2.1.4. Pour un codage utilisant  $n$  bits, on peut écrire :  $R=D/n$ .

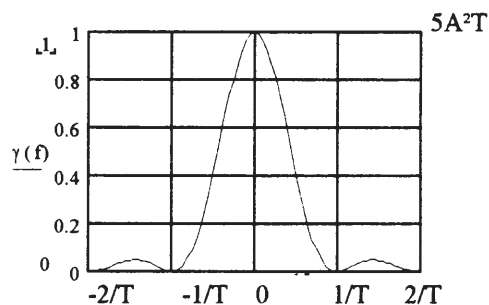
2.2.1.  $a_k \in \{-3, -1, 1, 3\}$ .

2.2.2.  $S_{\text{moy}} = E[a_k] \times \overline{m(t)} = 0$

2.2.3.  $S^2_{\text{eff}} = E[a_k^2] \times \overline{m^2(t)} = 5A^2$ .

2.2.4. D'après l'expression du 1.3., la densité spectrale de puissance est donnée par :  
 $\gamma_s(f) = 5A^2 T \text{sinc}^2(\pi f T)$ .

2.2.5. Représentation graphique de  $\gamma_s(f)$  pour un signal NRZ M-aire :



Encombrement spectral  $\approx [0, 1/T]$ .

Pour un même débit, on a divisé la bande passante par 2.

## Deuxième partie : Probabilité d'erreur par bit.

### 1. Calcul de la probabilité d'erreur par bit.

$$1.1. \quad P_e = p_0 \times P_{e_0} + p_1 \times P_{e_1} = \frac{1}{2}(P_{e_0} + P_{e_1}).$$

1.2. On a :  $y(t) = g_r(t) * x(t)$  donc lorsque le signal d'entrée est  $m_i(t)$  on peut écrire  $y_i(t) = g_r(t) * m_i(t)$ .

On en déduit :

- $u_1 = y_1(t_d) = g_r(t_d) * m_1(t_d)$
- $u_0 = y_0(t_d) = g_r(t_d) * m_0(t_d)$

$$1.3.1. \quad \text{La valeur efficace du bruit est donnée par : } \sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_r(f)|^2 df}.$$

1.3.2. On peut écrire pour les densités de probabilité respectives :

$$f_1(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-u_1)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{et} \quad f_0(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-u_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$1.3.3. \quad \text{Pour } P_{e_1} \text{ on peut écrire : } P_{e_1} = \int_{-\infty}^{\lambda} f_1(y) dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{(y-u_1)^2}{2\sigma^2}} dy = \text{Pr ob}(y < \lambda)$$

$$\text{On pose : } z = \frac{-(y-u_1)}{\sigma\sqrt{2}} \quad \text{donc} \quad dz = \frac{-dy}{\sigma\sqrt{2}} \quad \text{alors} \quad P_{e_1} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \sigma\sqrt{2} \int_{\frac{u_1-\lambda}{\sigma\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-z^2} dz.$$

$$\text{Soit : } P_{e_1} = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{u_1 - \lambda}{\sigma\sqrt{2}}\right).$$

$$1.3.4. \quad \text{Pour } P_{e_0} \text{ on peut écrire : } P_{e_0} = \int_{\lambda}^{+\infty} f_0(y) dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-\frac{(y-u_0)^2}{2\sigma^2}} dy = \text{Pr ob}(y > \lambda)$$

$$\text{On pose : } z = \frac{(y-u_0)}{\sigma\sqrt{2}} \quad \text{donc} \quad dz = \frac{dy}{\sigma\sqrt{2}} \quad \text{alors} \quad P_{e_0} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \sigma\sqrt{2} \int_{\frac{\lambda-u_0}{\sigma\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-z^2} dz.$$

$$\text{Soit : } P_{e_0} = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{\lambda - u_0}{\sigma\sqrt{2}}\right).$$

1.3.5. On remplace  $\lambda$  par son expression alors :

$$P_{e_1} = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{u_1 - \frac{u_1 + u_0}{2}}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{u_1 - u_0}{2\sigma\sqrt{2}}\right) \quad \text{et} \quad P_{e_0} = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{-u_0 + \frac{u_1 + u_0}{2}}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{u_1 - u_0}{2\sigma\sqrt{2}}\right)$$

On en déduit : 
$$Pe = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{u_1 - u_0}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

1.3.6.  $u_1 = -u_0 = U \Rightarrow Pe = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U}{\sigma\sqrt{2}}\right)$

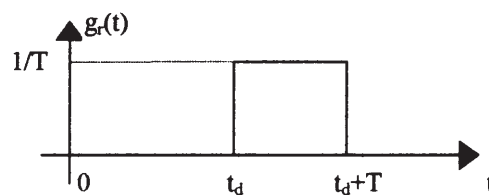
1.3.7.  $U = 1V$  et  $\sigma = 0,2V$

a) On obtient la valeur numérique suivante :  $Pe = 3 \times 10^{-7}$

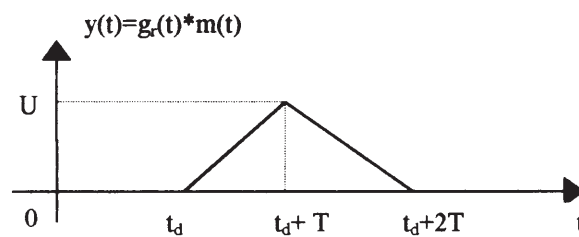
b)  $100 \text{Mbits} = 10^8 \text{bits}$  soit  $3 \times 10^{-7} \times 10^8 = 30$  bits erronés.

## 2. Calcul de la probabilité d'erreur par bit avec un filtre de réception adapté.

2.1. Réponse impulsionnelle du filtre de réception :



2.2. Réception d'un 1 : représentation de  $y(t)$  :



2.3. La réponse en fréquence du filtre optimal est donnée par :  $G_r(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_r(t) e^{-j2\pi ft} dt$  donc :

$$G_r(f) = \int_{t_d}^{t_d+T} \frac{1}{T} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{e^{-j2\pi f(t_d+T)} - e^{-j2\pi ft_d}}{-j2\pi fT}$$

$$G_r(f) = e^{-j2\pi f(t_d + \frac{T}{2})} \left( \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \right)$$

2.4. On peut écrire pour la puissance du bruit :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |G_r(f)|^2 \frac{N_0}{2} df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \right)^2 df$$



On pose  $x=\pi fT$  donc  $dx=\pi Tdf$  alors :  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \times \frac{1}{\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{N_0}{2T}$ .

On obtient bien pour la valeur efficace du bruit :  $\sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2T}}$ .

2.5. Pour l'énergie normalisée reçue par bit, on peut écrire:  $E_b = \int_0^T m^2(t)dt = U^2T$ .

2.6. La probabilité d'erreur par bit est donnée par :

$$Pe = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{U}{\sigma\sqrt{2}} \right) \text{ donc on en déduit : } Pe = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{U^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}.$$

2.7. D'après la courbe donnée dans l'énoncé, pour  $Pe=10^{-8}$  on obtient  $E_b/N_0=12\text{dB}$ .

## Troisième partie : Interférence Entre Symbole ( IES ).

### 1. Expression de l'IES.

1.1. A l'aide du produit de convolution, on peut écrire :  $y(t)=s(t)*g_e(t)*c(t)*g_r(t)+n(t)*g_r(t)$ .  
Pour une impulsion unique, on a :  $s(t)=a_k m_i(t)$  donc :

- signal utile :  $r(t)=a_k m_i(t)*g_e(t)*c(t)*g_r(t)$ .
- bruit :  $b(t)=n(t)*g_r(t)$ .

1.2. La valeur utile correspond à l'instant  $t_d$ , alors  $y(t_d+nT)$  peut se décomposer de la façon suivante :

$$y(t_d + nT) = \underbrace{a_n r(t_d)}_{\text{utile}} + \underbrace{\sum_{k \neq 0} [a_{n-k} r(t_d + kT)]}_{\text{IES}} + \underbrace{b(t_d + nT)}_{\text{bruit}}$$

### 2. Filtrage de Nyquist.

2.1. On obtient pour la réponse en fréquence de la chaîne de transmission :

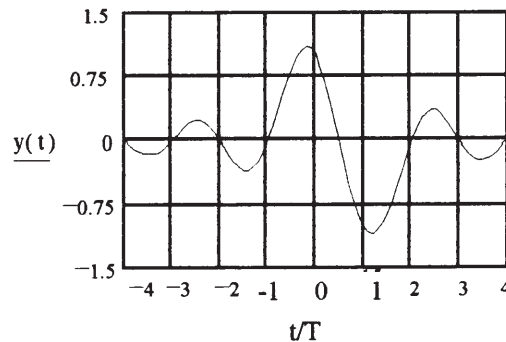
$$R(f)=M(f)C(f)G_e(f)G_r(f)$$

2.2.  $R(f)$  est la transformée de Fourier de  $r(t)$  :  $R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t)e^{-j2\pi ft} dt$ .

2.3.1. Calcul de la réponse impulsionnelle  $r(t)$  :

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(f)e^{j2\pi ft} df = \int_{-1/2T}^{1/2T} T e^{j2\pi ft} df = \frac{T}{j2\pi t} (e^{j\pi t/T} - e^{-j\pi t/T}) \text{ soit : } \boxed{r(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)}$$

2.3.2.  $y(t)=r(t)-r(t-T)$ .



On remarque que  $y(nT)=0$  sauf pour  $n=0$  et  $n=1$ , où on a :  $y(0)=1$  et  $y(1)=-1$ .  
Le filtre de Nyquist permet d'obtenir une réception sans IES.

2.3.3. Bande passante nécessaire :  $B=1/(2T)$ , donc si  $D=64\text{kbits/s}$  alors la transmission numérique nécessite une bande passante de 32kHz.

2.4.1. Avec un filtre en cosinus surélevé, la bande passante est donné par :  $B=(1+\alpha)/(2T)$ .

2.4.2. Pour  $\alpha=0,5$  , on obtient  $B=48\text{kHz}$ .

2.4.3. Le cas  $\alpha=0$ , correspond au filtre de Nyquist.

2.4.4. On s'intéresse au cas  $\alpha=1$ , on peut écrire pour la réponse impulsionnelle  $r(t)$  :

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(f)e^{j2\pi ft} df = \frac{T}{2} \int_{-1/T}^{1/T} [1 + \cos(\pi f T)] e^{j2\pi ft} df$$

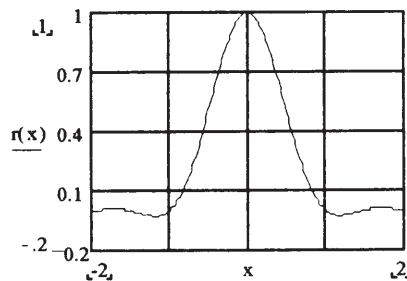
$$r(t) = \frac{T}{2} \times \frac{1}{j2\pi t} [e^{j2\pi t/T} - e^{-j2\pi t/T}] + \frac{T}{4} \int_{-1/T}^{1/T} [e^{j2\pi f(t+T/2)} + e^{j2\pi f(t-T/2)}] df$$

$$r(t) = \frac{\sin(2\pi t / T)}{(2\pi t / T)} - \frac{T \sin(2\pi t / T)}{4 \pi(t + T/2)} - \frac{T \sin(2\pi t / T)}{4 \pi(t - T/2)} = \sin(2\pi t / T) \left[ \frac{1}{2\pi t / T} - \frac{1}{\frac{4\pi}{T}(t + T/2)} - \frac{1}{\frac{4\pi}{T}(t - T/2)} \right]$$

$$r(t) = \frac{\sin(2\pi t / T)}{2\pi / T} \left[ \frac{1}{t} - \frac{1}{2(t + T/2)} - \frac{1}{2(t - T/2)} \right] \text{ soit :}$$

$$r(t) = \frac{\sin(2\pi t / T)}{\frac{2\pi}{T} \left( 1 - \frac{4t^2}{T^2} \right)}$$

On obtient la courbe suivante avec  $x=t/T$  :



2.4.5. Pour le cas  $\alpha=0$ , la transmission numérique nécessite la bande passante minimale :  $D/2$  , mais le réglage du filtre de Nyquist est difficile.

Pour le  $\alpha=1$ , la transmission numérique nécessite une bande passante égale à  $D$  , donc le double, mais le réglage du filtre est tout à fait réalisable.

### 3. Egalisation

3.1. D'après le schéma, on peut écrire :  $y_n = c_1 x_{n-1} + c_0 x_n + c_{-1} x_{n+1}$ .

3.2.1. On obtient les 3 équations suivantes :

$$y_0 = 0,6c_{-1} + 0,8c_0 - 0,2c_1 = 1$$

$$y_1 = 0,8c_1 - 0,2c_0 = 0$$

$$y_1 = 0,6c_0 + 0,8c_1 = 0$$

Ce qui nous donne :  $c_0 \approx 0,91$        $c_1 \approx -0,68$        $c_{-1} \approx 0,23$

3.2.2. Soit  $H(z)$  la transmittance de ce filtre numérique non récursif :

$$H(z) = c_{-1}z + c_0 + c_1z^{-1} \approx 0,23z + 0,91 - 0,68z^{-1}$$

3.2.3. Filtre à Réponse Impulsionnelle Finie donc toujours stable.

3.2.4. Pour obtenir la réponse en fréquence de ce filtre numérique, il suffit de faire le changement de variable  $z = e^{j\omega T}$ , donc :

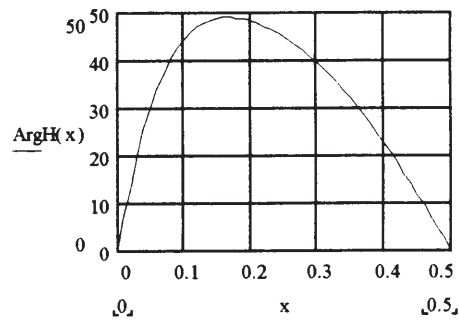
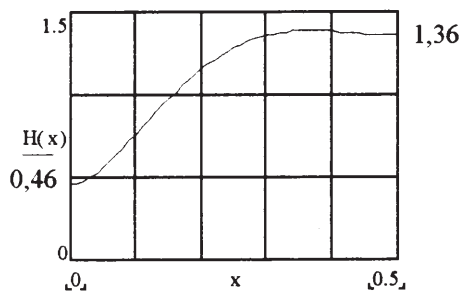
$$\underline{H}(j\omega) = c_{-1}e^{j\omega T} + c_0 + c_1e^{-j\omega T} \approx (0,91 - 0,45\cos(\omega T)) - j0,91\sin(\omega T)$$

On obtient pour le module et pour la phase, les expressions suivantes :

$$|\underline{H}(j\omega)| = \sqrt{(0,91 - 0,45\cos(\omega T))^2 + (0,91\sin(\omega T))^2}$$

$$\arg(\underline{H}(j\omega)) = \text{Arc tan} \left[ \frac{0,91\sin(\omega T)}{0,91 - 0,45\cos(\omega T)} \right]$$

Ce qui donne pour les représentations graphiques avec  $x = fT$ , les courbes suivantes:



**Quatrième partie : Génération du signal d'horloge.**

**1. Etude du quartz.**

1.1. Impédance motionnelle due à l'effet piézo-électrique : circuit r,L,C série.

Impédance statique :  $C_0$ .

1.2. On obtient pour l'impédance du quartz :

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{(1 - LC\omega^2) + j\omega rC}{-\omega^2 rCC_0 + j\omega[(C + C_0) - LCC_0\omega^2]}$$

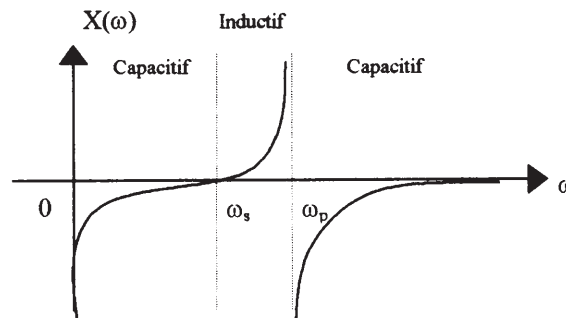
1.3. On se place dans le cas où  $r=0$ .

1.3.1. Alors :  $\underline{Z}(j\omega) = jX(\omega) = j \frac{LC\omega^2 - 1}{\omega(C + C_0) \left[ 1 - L \frac{CC_0}{C + C_0} \omega^2 \right]}$

1.3.2. On introduit la pulsation série et la pulsation parallèle :

$$X(\omega) = \frac{- \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_s} \right)^2 \right]}{\omega(C + C_0) \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \right]}$$

1.3.3. On obtient pour la représentation graphique de la réactance, la courbe suivante :



1.4. On se place dans le cas où  $r \neq 0$  :

1.4.1. A la pulsation  $\omega_s$ , on a :  $I_0 = \underline{U} \times jC_0\omega_s$  et  $\underline{I}_m = \frac{\underline{U}}{r + j\omega_s L + \frac{1}{j\omega_s C}} = \frac{\underline{U}}{r}$

Donc on obtient pour le facteur de mérite :  $M = \frac{I_m}{I_0} = \frac{1}{rC_0\omega_s}$

1.4.2. Le coefficient de qualité, à la pulsation  $\omega_s$ , de la branche r,L,C est donné par :

$$Q = \frac{L\omega_s}{r} = \frac{1}{rC\omega_s}, \text{ alors: } \boxed{M = Q \frac{C}{C_0}}$$

1.4.3. Application numérique :  $M=100$        $L=12,66\text{mH}$        $r=40\Omega$        $f_p=10,025\text{MHz}$ .

1.4.4. A la pulsation  $\omega_s$ , l'impédance du quartz est donnée par l'expression suivante :

$$\underline{Z}(j\omega_s) = \frac{j\omega_s rC}{(j\omega_s)^2 rCC_0 + (C + C_0) - LCC_0\omega_s^2} = \frac{rC}{j\omega_s rCC_0 + C} = \frac{r}{1 + \frac{j}{M}}$$

si  $M \gg 1$  alors :  $\underline{Z}(j\omega_s) \approx r$  le quartz est résistif.

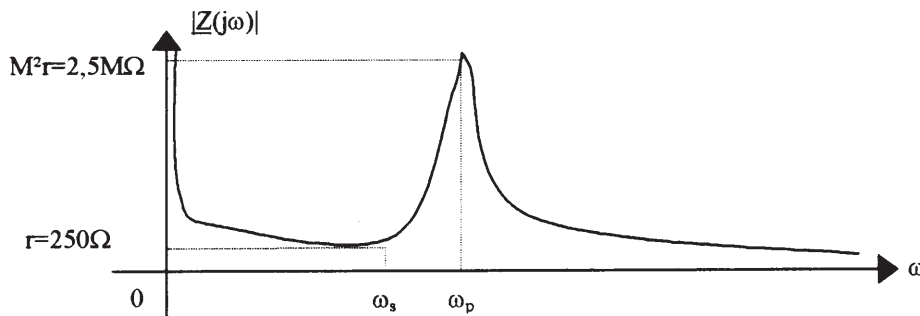
1.4.5. A la pulsation  $\omega_p$ , l'impédance du quartz est donné par l'expression suivante :

$$\underline{Z}(j\omega_p) = \frac{1 - LC\omega_p^2 + j\omega_p rC}{(j\omega_p)^2 rCC_0 + j\omega_p [(C + C_0) - LCC_0\omega_p^2]} = \frac{-\frac{C}{C_0} + j\omega_p rC}{-r \frac{C + C_0}{L}} = \frac{C}{C_0} (1 - j\omega_p rC_0) \frac{L}{r(C + C_0)}$$

Or  $r\omega_p C_0 \approx r\omega_s C_0 = 1/M$  alors :

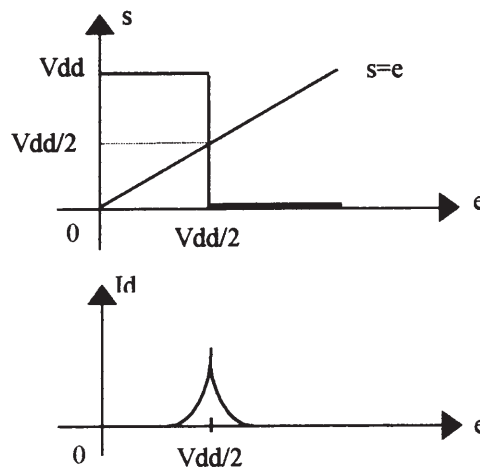
$$\underline{Z}(j\omega_p) \approx \frac{C}{C_0} \left(1 - \frac{j}{M}\right) \frac{L}{r(C + C_0)} \approx \frac{LC}{rC_0(C + C_0)} \approx \frac{LC}{rC_0^2} = M^2 r \quad \text{car } C \ll C_0 \text{ et } M \gg 1.$$

1.4.6. Représentation graphique de l'impédance lorsque  $r \neq 0$  :



## 2. Amplificateur à porte logique.

2.1. Caractéristiques de transfert :

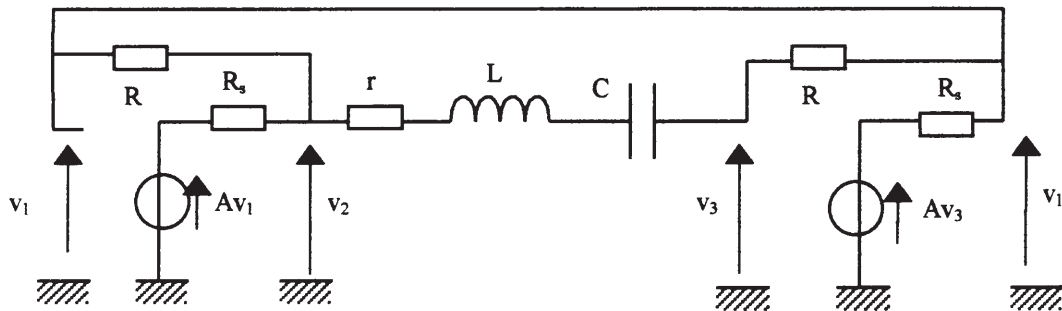


2.2. Grâce à la résistance  $R$  on a  $s=e$  pour les grandeurs statiques, donc pour le point de repos, on a :  $s=e=V_{dd}/2$ .

Les condensateurs de liaison  $C_L$  permettent d'isoler le circuit de polarisation vis à vis des composantes alternatives.

### 3. Etude de l'oscillateur à quartz.

3.1. On obtient le schéma équivalent suivant :



3.2. D'après la loi des noeuds, on peut écrire :

$$\frac{V_2 - AV_1}{R_s} + \frac{V_2 - V_1}{R} + \frac{V_2 - V_1}{r + R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = 0$$

$$\frac{V_1 - AV_3}{R_s} + \frac{V_1 - V_2}{R} + \frac{V_1 - V_2}{r + R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = 0$$

$$\frac{V_3 - V_1}{R} = \frac{V_2 - V_1}{r + R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \quad \text{donc : } \underline{V_3} = \frac{R}{\underline{Z}} \underline{V_2} + \underline{V_1} \left(1 - \frac{R}{\underline{Z}}\right)$$

$$\text{avec } \underline{Z} = r + R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}.$$

Soit :

$$\underline{V_1} \left[ \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{A-1}{R_s} \right] - \underline{V_2} \left[ \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}} \right] = 0$$

$$\underline{V_1} \left[ \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}} - \frac{A}{R_s} \left(1 - \frac{R}{\underline{Z}}\right) \right] - \underline{V_2} \left[ \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{R_s} \left(\frac{AR}{\underline{Z}} - 1\right) \right] = 0$$

Ce qui conduit aux équations demandées.

3.3. Pour obtenir  $\underline{V_1}$  et  $\underline{V_2}$  différents de zéro, il faut et il suffit que le déterminant du système soit nul.

On obtient alors :  $\boxed{R\underline{Z} + 2R_s\underline{Z} + 2RR_s + R^2A = 0}$

3.4. En remplaçant  $\underline{Z}$  par son expression, et en écrivant que la partie réelle et la partie imaginaire sont nulles.

On en déduit la pulsation des oscillations :  $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ .

3.5. On en déduit la condition d'entretien des oscillations pour l'amplification:

$$\boxed{A_L = - \left[ 1 + \frac{r}{R} + \frac{2rR_s}{R^2} + \frac{4R_s}{R} \right]}$$

3.6. Application numérique :  $r = 250\Omega$  ,  $R = 1k\Omega$  ,  $R_s = 1k\Omega$  alors  $A_L = -5,75$ .

3.7. Ce sont les tensions de saturation des portes logiques qui vont limiter l'amplitude des oscillations.



# Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Épreuve C : Problème d'électricité, d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique  
Session : 1998

## 1ère partie. Etude d'un circuit magnétique

1.1  $b_1.S_1 = b_2.S_2 = b_e.S_1$  (conservation du flux) (1)

1.2  $N_p.i_p - N_s.i_s = 2 h_1.l_1 + 2 h_2.l_2 + 4 h_e . e$  (2)

1.3.1 Le tronçon 1 commence à se saturer lorsque  $b_1 = B_{sat}$ , donc  $B_{sat1} = B_{sat} = 1,2 \text{ T}$

Le tronçon 2 commence à se saturer lorsque  $b_2 = B_{sat} = \frac{b_1.S_1}{S_2}$

$$\text{donc } B_{sat2} = \frac{S_2}{S_1} \cdot B_{sat} = 1,47 \text{ T}$$

1.3.2 Pour  $0 \leq b_1 \leq B_{sat1}$ , aucun tronçon n'est saturé, donc  $b_1 = a.h_1$  (3)

$b_2 = a.h_2$ ,  $b_e = \mu_0.h_e$ , où  $a$  représente la pente de la caractéristique  $b(h)$  dans la partie non saturée.

Des équations (1), (2) et (3), on tire  $\varepsilon = \frac{2}{S_1} \left( \frac{l_1}{a} + \frac{l_2.S_1}{a.S_2} + 2 \frac{e}{\mu_0} \right) b_1.S_1$  (4)

ou encore  $\varepsilon = 137,3 \cdot 10^3 \cdot \varphi$  (5)

1.3.3 Pour  $B_{sat1} \leq b_1 \leq B_{sat2}$ , les tronçons 1 et 3 sont saturés, les tronçons 2 et 4 ainsi que les entrefers ne sont pas saturés.

$$b_1 = c.h_1 + d \quad (6.1)$$

$$b_2 = a.h_2 \quad (6.2)$$

$$b_e = \mu_0 . h_e \quad (6.3)$$

avec  $c = 85,1 \cdot 10^6$  et  $d = 1,15 \text{ T}$

Des équations (1), (2) et (6), on tire

$$\varepsilon = \frac{2}{S_1} \left( \frac{l_1}{c} + \frac{l_2.S_1}{a.S_2} + 2 \frac{e}{\mu_0} \right) b_1.S_1 - 2l_1 \frac{d}{c} \quad (7)$$

ou encore  $\varepsilon = 1,06 \cdot 10^6 \varphi - 4860$  (8)

1.3.4 Pour  $b_1 \geq B_{sat2}$ , seuls les entrefers ne sont pas saturés, donc

$$b_1 = c \cdot h_1 + d \quad (9.1)$$

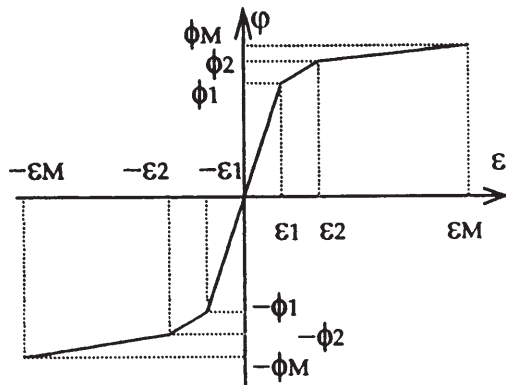
$$b_2 = c \cdot h_2 + d \quad (9.2)$$

$$b_e = \mu_o \cdot h_e \quad (9.3)$$

Des équations (1), (2) et (9) on tire

$$\varepsilon = \frac{2}{S_1} \left( \frac{l_1}{c} + \frac{l_2 \cdot S_1}{c \cdot S_2} + 2 \frac{e}{\mu_o} \right) b_1 \cdot S_1 - 2(l_1 + l_2) \frac{d}{c} \quad (10)$$

$$\text{ou encore } \varepsilon = 1,60 \cdot 10^6 \varphi - 8370 \quad (11)$$

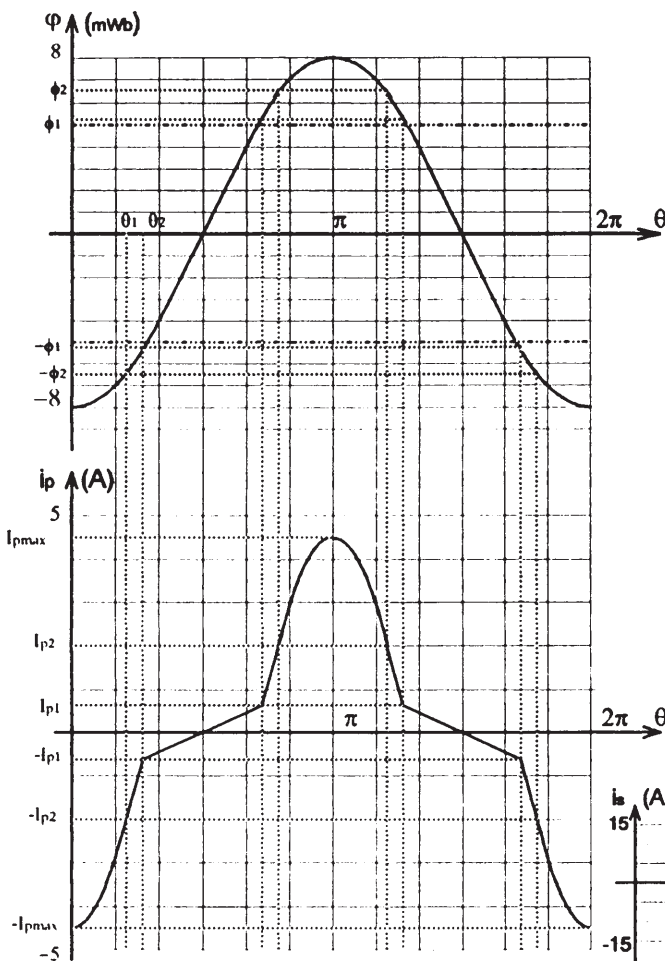


1.3.5 La caractéristique  $\varphi(\varepsilon)$  est symétrique par rapport à l'origine et est continue.

Les points particuliers correspondent à  $B_{sat1}$  et  $B_{sat2}$ , c'est-à-dire  $\phi_1 = B_{sat1} \cdot S_1 = 5,28 \text{ mWb}$  et  $\phi_2 = B_{sat2} \cdot S_1 = 6,48 \text{ mWb}$

Les valeurs correspondantes de  $\varepsilon$  sont  $\varepsilon_1 = 725 \text{ A}$  et  $\varepsilon_2 = 1990 \text{ A}$

Pour  $\varphi = \phi_M$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_M = 4420 \text{ A}$



1.4 Le transformateur est à vide, donc  $i_p = \frac{\epsilon}{N_p} = i_{pv}$

Les valeurs particulières de  $i_p$  correspondent à  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  et  $\epsilon_M$ ,

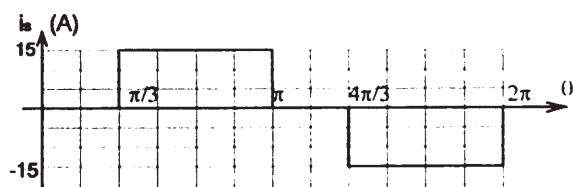
soit  $I_{p1} = \frac{\epsilon_1}{N_p} = 0,725 \text{ A}$  ,

$I_{p2} = \frac{\epsilon_2}{N_p} = 1,99 \text{ A}$

et  $I_{pmax} = \frac{\epsilon_M}{N_p} = 4,42 \text{ A}$

$\theta_1 = \text{Arccos} \frac{\phi_2}{\phi_M} = 36^\circ$

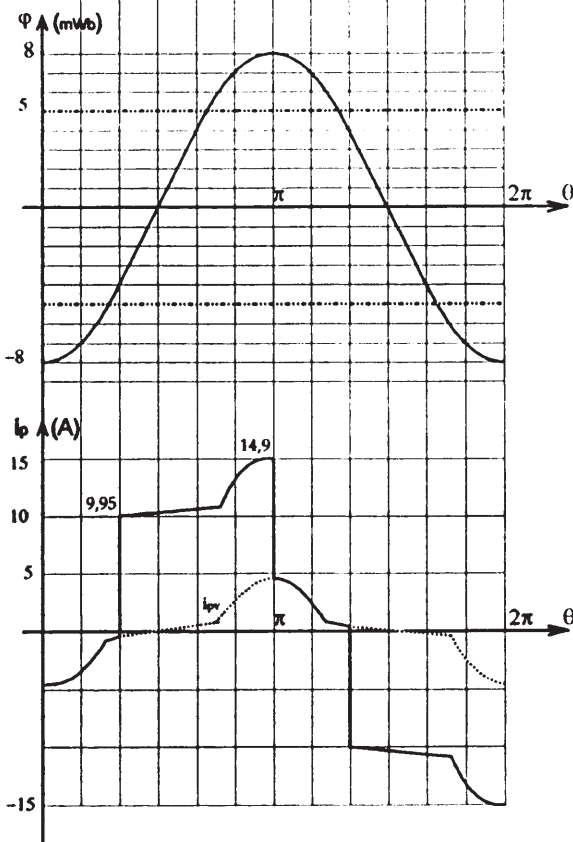
$\theta_2 = \text{Arccos} \frac{\phi_1}{\phi_M} = 49^\circ$



1.5 L'expression de  $\phi$  est la même qu'en 1.4,  $\epsilon$  a également la même expression, donc

$$i_p = \frac{\epsilon}{N_p} + \frac{N_s}{N_p} \cdot i_s = i_{pv} + \frac{N_s}{N_p} \cdot i_s$$

Le courant  $i_p$  est donc la superposition du courant à vide et du courant secondaire ramené au primaire.



1.6  $\mathfrak{R}$  est donné par la relation (5) ;  $\mathfrak{R} = 137,3 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1}$

## 2ème partie . Etude d'un transformateur monophasé basse fréquence

2.1.1  $v_p = r_p i_p + N_p \frac{d\phi}{dt}$ . En prenant la valeur moyenne de cette équation, il vient

$V_{pmoy} = r_p I_{pmoy}$ , donc  $I_{pmoy} = 0$  car la tension  $v_p$  est à valeur moyenne nulle

2.1.2 Compte tenu de 2.1.1  $\epsilon_{moy} = -N_s I_{smoy}$

2.1.3  $v_p = V_p \sqrt{2} \sin \omega t = N_p \frac{d\phi}{dt} = N_p \omega \phi_M \sin \omega t$ , donc  $\phi_M = \frac{V_p \sqrt{2}}{N_p \omega} = 5,51 \text{ mWb}$

D'autre part  $\phi(\pi/3) = -\phi_M \cos \pi/3 + \phi_{moy} = -\phi_{sat}$  donc  $\phi_{moy} = -2,48 \text{ mWb}$

2.1.4  $\phi$  évolue entre  $-\phi_M + \phi_{moy} = -7,99 \text{ mWb}$  et  $+\phi_M + \phi_{moy} = 3,03 \text{ mWb}$

Deux cas sont à distinguer  $-\phi_{sat} \leq \phi \leq \phi_{sat}$ , c'est-à-dire  $\theta_1 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_1$

et  $\phi \leq -\phi_{sat}$ , c'est-à-dire  $0 \leq \theta \leq \theta_1$  et  $2\pi - \theta_1 \leq \theta \leq 2\pi$

Lorsque le transformateur n'est pas saturé,  $\epsilon(t) = a \cdot \phi(t)$

Lorsque le transformateur est saturé,  $\epsilon(t) = c \cdot \phi(t) + d$

$$2.1.5 \quad \epsilon_{moy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \epsilon(\theta) \cdot d\theta = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\theta_1} (c\phi(\theta) + d) d\theta + \int_{\theta_1}^{\pi} a\phi(\theta) d\theta \right)$$

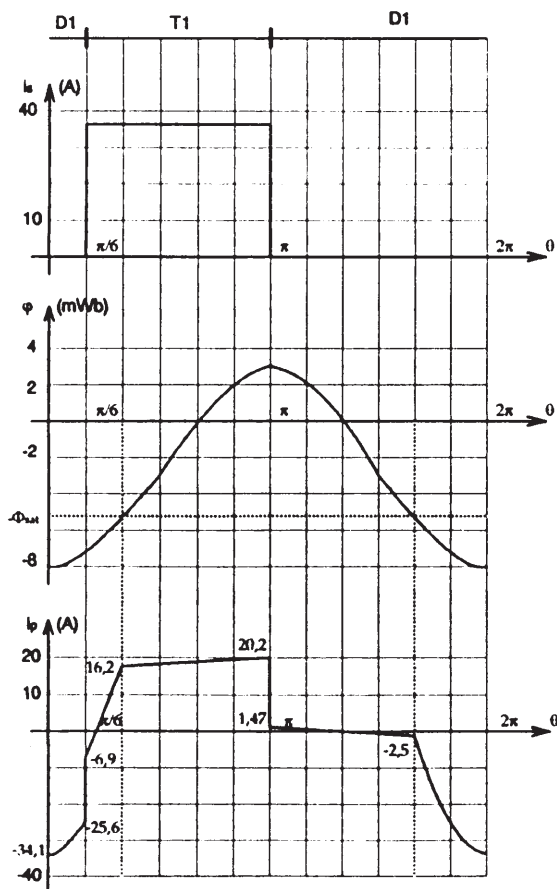
$$= \frac{1}{\pi} \left( \left[ -c\phi_M \cdot \sin\theta + c\phi_{moy}\theta + d\theta \right]_0^{\theta_1} + \left[ -a\phi_M \cdot \sin\theta + a\phi_{moy}\theta \right]_{\theta_1}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ (-c + a)\phi_M \cdot \sin\theta_1 + (c\phi_{moy} + d)\theta_1 + a\phi_{moy}(\pi - \theta_1) \right] = -1465 \text{ A}$$

donc  $I_{smoy} = 15,3 \text{ A}$  et

$$I_{cmoy} = \frac{2\pi}{\pi - \frac{\pi}{6}} \cdot I_{smoy} = 36,6 \text{ A.}$$

$$2.1.6 \quad i_p = \frac{\epsilon}{N_p} + \frac{N_s}{N_p} \cdot i_s$$



2.2.1  $\gamma \leq \theta \leq \theta_1$

$v_p = V\sqrt{2} \sin\theta = N_p\omega \frac{d\phi}{d\theta}$ . En intégrant cette équation, on obtient

$$\phi = -\frac{V\sqrt{2}}{N_p\omega} \cos\theta + K$$

Puisque  $\phi(\theta) = \phi_1$ ,  $\phi = -\frac{V\sqrt{2}}{N_p\omega}(\cos\theta - \cos\gamma) + \phi_1$  (12)

Le transformateur n'est pas saturé, donc  $N_p i_p - N_s i_s = a\phi$

D'autre part, la charge est supposée purement résistive, donc  $i_s = \frac{v_s}{R_1} = \frac{N_s v_1}{N_p R_1}$

donc  $i_p = \frac{a\phi}{N_p} + \frac{N_s^2 v}{N_p^2 R_1}$  (13)

\*  $i_p = -\frac{a V\sqrt{2}}{N_p^2 \omega}(\cos\theta_1 - \cos\gamma) + \frac{a\phi_1}{N_p} + \frac{N_s^2}{N_p^2 R_1} V\sqrt{2} \sin\theta_1 = 0$  (14)

De l'équation (14), on tire  $\phi_1 = -\frac{N_s^2}{a N_p R_1} V\sqrt{2} \sin\theta_1 + \frac{V\sqrt{2}}{N_p \omega}(\cos\theta_1 - \cos\gamma)$   
 $= -1,50 \text{ mWb}$

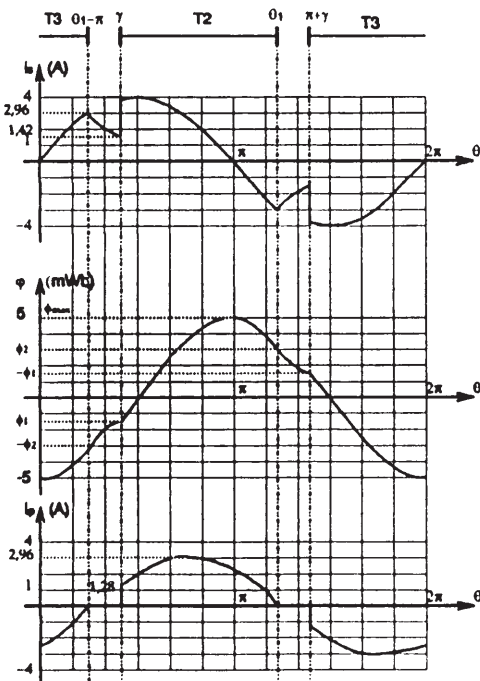
$\phi_2 = \phi(\theta_1) = 3,12 \text{ mWb}$

2.2.2  $\varepsilon = -N_s i_s = a \phi$  avec  $i_s = \frac{v_s}{R_1} = \frac{N_s d\phi}{R_1 dt}$ . En intégrant cette équation, on obtient

$\phi = \phi_2 e^{-\frac{a R_1}{N_s^2}(t-t_1)} = \phi_2 e^{-\frac{a R_1}{N_s^2 \omega}(\theta-\theta_1)}$

$\phi(\pi+\gamma) = 1,50 \text{ mWb} = -\phi_1$

$i_s = -\frac{a \phi}{N_s} = -\frac{a \phi_2}{N_s} e^{-\frac{a R_1}{N_s^2 \omega}(\theta-\theta_1)}$



2.2.3  $\phi$  est maxi lorsque  $\frac{d\phi}{dt} = 0$ , c'est-à-dire

lorsque  $v_p = 0$ , donc en  $\theta = \pi$ .

$\phi_{\max} = -\frac{V\sqrt{2}}{N_p\omega}(-1 - \cos\gamma) + \phi_1$

$= 4,95 \text{ mWb}$

$I_{s\max} = \frac{V\sqrt{2} N_s}{R_1 N_p} = 3,97 \text{ A}$

$i_s(\theta_1) = -I_{s\max} \sin\theta_1 = \frac{a \phi_2}{N_s} = 2,96 \text{ A}$

### 3ème partie Etude d'un transformateur monophasé haute fréquence

$$3.1.1 \quad v_{p1} = N_p \frac{d\phi}{dt}$$

$$N_p i_{p1} - N_s (i_{s2} - i'_{s2}) = \mathfrak{R}_1 \phi$$

$$3.1.2.1 \quad v_{p1} = \frac{N_p}{N_s} u_{c2} = V_{p1\max} = 200,6 \text{ V}$$

$$\phi = \frac{V_{p1\max}}{N_p} t' + K \quad \text{avec } t' = t + t_1$$

Le flux a donc une évolution triangulaire. Or sa valeur moyenne est nulle, donc  $\phi(T/2 - t_1) = \phi_{\max} = -\phi(-t_1)$ .

$$\text{On en déduit } K = -\phi_{\max} \text{ et } \phi_{\max} = \frac{V_{p1\max} \cdot T}{4 N_p} = 43,5 \text{ } \mu\text{Wb}$$

$$3.1.2.2 \quad * i_3 = i_{s2} = \frac{N_p}{N_s} i_{p1} - \frac{\mathfrak{R}_1}{N_s} \phi$$

$$= \frac{N_p}{N_s} I_{p1} \sqrt{2} \sin \omega t - \frac{\mathfrak{R}_1}{N_s} \frac{V_{p1\max}}{N_p} (t + t_1) + \frac{\mathfrak{R}_1}{N_s} \phi_{\max}$$

$$* i_3(-t_1) = -\frac{N_p}{N_s} I_{p1} \sqrt{2} \sin \omega t_1 + \frac{\mathfrak{R}_1}{N_s} \phi_{\max} = 0$$

$$\text{donc } t_1 = \frac{1}{\omega} \text{Arcsin} \frac{\mathfrak{R}_1 \phi_{\max}}{N_p I_{p1} \sqrt{2}} = 0,916 \text{ } \mu\text{s}$$

$$* i_3(T/2 - t_1) = +\frac{2\mathfrak{R}_1}{N_s} \phi_{\max} - \frac{\mathfrak{R}_1}{N_s} \frac{V_{p1\max}}{N_p} \times \frac{T}{2} = \frac{2\mathfrak{R}_1}{N_s} \left( \phi_{\max} - \frac{V_{p1\max} T}{4 N_p} \right) = 0$$

$$* \frac{di_3}{dt} = \frac{N_p}{N_s} I_{p1} \sqrt{2} \omega \cos \omega t - \frac{\mathfrak{R}_1}{N_s} \frac{V_{p1\max}}{N_p}$$

$$\text{Cette dérivée s'annule pour } t = t_2 = \frac{1}{\omega} \text{Arccos} \frac{\mathfrak{R}_1 V_{p1\max}}{N_p^2 I_{p1} \sqrt{2} \omega} = 9,83 \text{ } \mu\text{s}$$

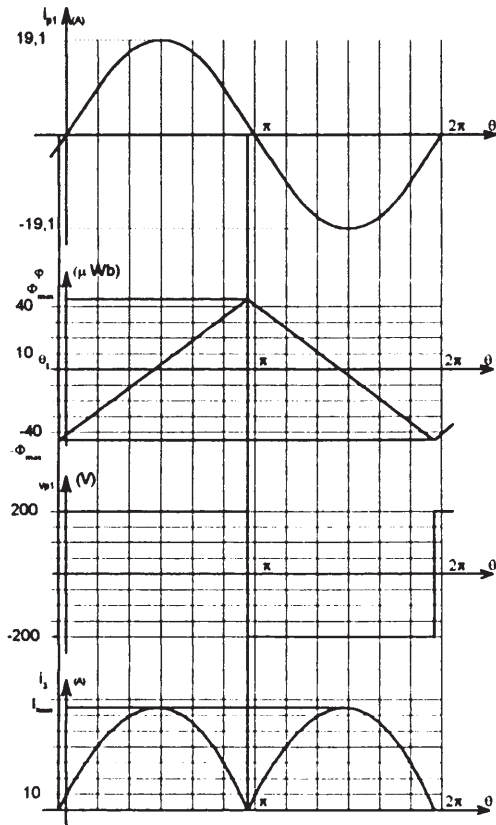
$$i_3(t_2) = I_{3\max} = \frac{N_p}{N_s} I_{p1} \sqrt{2} \sin \omega t_2 - \frac{\mathfrak{R}_1}{N_s} \frac{V_{p1\max}}{N_p} (t_2 + t_1) + \frac{\mathfrak{R}_1}{N_s} \phi_{\max} = 64,9 \text{ A}$$

$$3.1.2.3 \quad I_{4\text{moy}} = I_{3\text{moy}} = \frac{2}{T} \int_{-t_1}^{T/2 - t_1} \left( \frac{N_p}{N_s} I_{p1} \sqrt{2} \sin \omega t - \frac{\mathfrak{R}_1}{N_s} \frac{V_{p1\max}}{N_p} (t + t_1) + \frac{\mathfrak{R}_1}{N_s} \phi_{\max} \right) dt$$

$$= \frac{2}{T} \left( \frac{N_p}{N_s \omega} I_{p1} \sqrt{2} \cos \omega t_1 - \frac{\mathfrak{R}_1}{N_s} \frac{V_{p1\max}}{2N_p} \times \frac{T^2}{4} + \frac{\mathfrak{R}_1}{N_s} \phi_{\max} \times \frac{T}{2} \right) = 41,3 \text{ A}$$

$$3.1.3 \quad B_{\max} = \frac{\phi_{\max}}{S} = 0,335 \text{ T. Cette valeur de } B_{\max} \text{ correspond au champ de saturation des ferrites.}$$

3.1.4



3.1.5  $v_{p1}$  est un signal en créneau de rapport cyclique 0,5 donc  $V_{p1f} = \frac{2\sqrt{2}V_{p1max}}{\pi}$

$$= 181 \text{ V}$$

3.1.6  $\phi_{1f} = \frac{8\phi_{max}}{\pi^2\sqrt{2}} = 24,9 \text{ } \mu\text{Wb}$

3.1.7  $I_{p1fr} = \frac{\Re_1\phi_{1f}}{N_p} = 1,50 \text{ A}$

$$I_{p1fa} = \sqrt{I_{p1}^2 - I_{p1fr}^2} = 13,4 \text{ A}$$

$$\theta_1 = \text{Arctan} \frac{I_{p1fr}}{I_{p1fa}} = 6,4^\circ$$

$$\frac{N_s I_{3max}}{N_p \sqrt{2}} = 13,4 \text{ A} ; \omega t_1 = 7,9^\circ$$

En effectuant les calculs avec les fondamentaux de  $v_{p1}$  et  $\phi_{1f}$ , on retrouve, avec une bonne précision les valeurs exactes de  $I_{3max}$  et  $t_1$ .

3.1.8 Le courant  $i_3$  supposé sinusoïdal, ramené au primaire, a pour valeur efficace

$$I_{p1fa} = \frac{N_s}{N_p} \frac{I_{3max}}{\sqrt{2}} \quad (15)$$

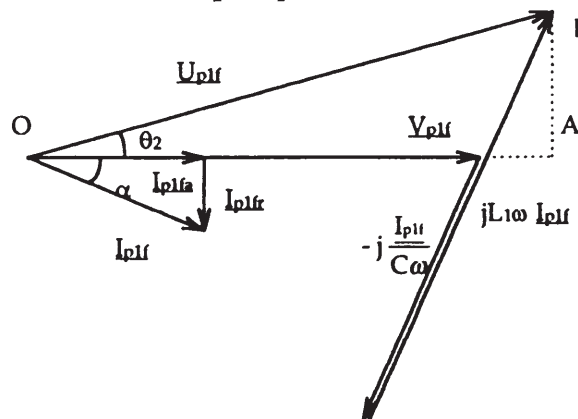
D'autre part,  $I_{4moy} = I_{3moy} = \frac{2 I_{3max}}{\pi} \quad (16)$

et  $V_{p1f} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_{p1max} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{N_p}{N_s} U_{c2moy} \quad (17)$

Des relations (15), (16) et (17) on tire  $\frac{V_{p1f}}{I_{p1fa}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{N_p}{N_s} U_{c2moy}}{\frac{N_s}{N_p} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} I_{4moy}} = \frac{8}{\pi^2} \frac{U_{c2moy}}{I_{4moy}} \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 \quad (18)$

Compte-tenu des valeurs numériques précédentes,  $R_{\text{eq}} = 13,5 \text{ } \Omega$

3.2.1



3.2.2 Pour le triangle OAB on peut écrire

$$\underline{U}_{p1f} = j\left(L_1\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\underline{I}_{p1fa} + j\left(L_1\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\frac{1}{jL_{eq}\omega}\underline{V}_{p1f} + \underline{V}_{p1f} \quad (19)$$

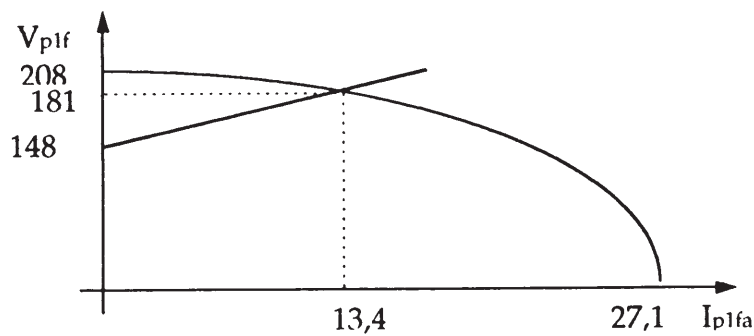
En passant aux valeurs efficaces

$$U_{p1f}^2 = \left(L_1\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 I_{p1fa}^2 + \left(\frac{V_{p1f}}{L_{eq}\omega}\right)^2 \left((L_1 + L_{eq})\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \quad (20)$$

$$3.2.3 \quad U_{p1f}^2 = 1,14 V_{p1f}^2 + 67,2 I_{p1fa}^2$$

$$\text{donc } V_{p1f} = \sqrt{43,2 \cdot 10^3 - 58,8 I_{p1fa}^2} \quad (22)$$

Le courant de court-circuit a pour expression  $\frac{U_{p1f}}{\left(L_1\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = 27,1 \text{ A}$



$$3.2.4 \quad U_{c2moy} = E_B + R_B I_{4moy}$$

$$\text{Or d'après (17)} \quad U_{c2moy} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{N_s}{N_p} V_{p1f}$$

$$\text{et d'après les relations (15) et (16)} \quad I_{4moy} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{N_p}{N_s} I_{p1fa}$$

$$\text{donc } V_{p1f} = E_B \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{N_p}{N_s} + R_B \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 I_{p1fa} \quad (23)$$

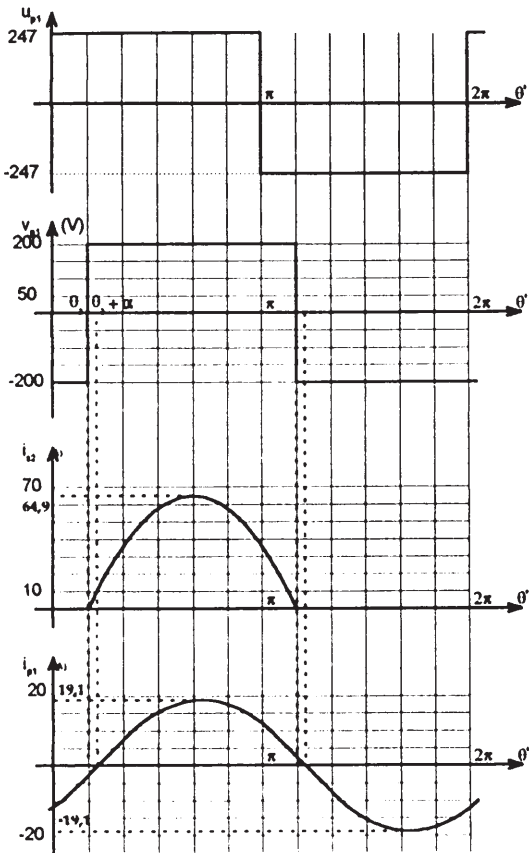
$$\text{ou numériquement } V_{p1f} = 148 + 2,42 I_{p1fa} \quad (24)$$

On peut déterminer  $V_{p1f}$  et  $I_{p1fa}$  à partir des relations (22) et (24) ou graphiquement. On obtient  $V_{p1f} = 181 \text{ V}$  et  $I_{p1fa} = 13,4 \text{ A}$

On retrouve les valeurs des questions 3.1.5 et 3.1.7

$$u_{c2} = 58,5 \text{ V} \quad \text{et} \quad i_4 = 41,4 \text{ A}$$





3.3 Le décalage entre  $v_{p1}$  et  $u_{p1}$  s'obtient en lère approximation sur le diagramme de Fresnel.

$$\theta_2 + \alpha = \text{Arccos} \frac{V_{p1f} \cos \alpha}{U_{p1f}} = 36,1^\circ$$

donc  $\theta_2 = 29,7^\circ$

## 4ème partie : transformateur triphasé

### 4.1.1 Expression des tensions primaires et secondaires

$$v_{pi} = N_p \frac{d\varphi_i}{dt} \quad v_{si} = N_s \frac{d\varphi_i}{dt}$$

### 4.1.2 Equations du circuit magnétique (figure 10)

$$\begin{aligned} \varepsilon_a - \mathfrak{R} \varphi_a &= \mathfrak{R}_h \varphi_h & \text{a)} \\ \varepsilon_b - \mathfrak{R} \varphi_b &= \mathfrak{R}_h \varphi_h & \text{b)} \\ \varepsilon_c - \mathfrak{R} \varphi_c &= \mathfrak{R}_h \varphi_h & \text{c)} \\ \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c &= \varphi_h & \text{d)} \\ \varepsilon_i &= N_p i_{pi} - N_s i_{si} \end{aligned} \quad (26)$$

### 4.2.1 Les tensions simples du réseau se retrouvent aux bornes des enroulements primaires donc

$$v_a = N_p \frac{d\varphi_a}{dt} \quad v_b = N_p \frac{d\varphi_b}{dt} \quad v_c = N_p \frac{d\varphi_c}{dt}$$

En effectuant la somme de ces équations, on obtient  $v_a + v_b + v_c = N_p \frac{d\varphi_h}{dt} = 0$ ,

donc  $\varphi_h = \text{constante}$

En effectuant la somme des équations (26), on peut écrire

$$\begin{aligned} \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c - \mathfrak{R}(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c) &= 3\mathfrak{R}_h \varphi_h \\ \text{ou encore } N_p(i_{pa} + i_{pb} + i_{pc}) - N_s(i_{sa} + i_{sb} + i_{sc}) &= (3\mathfrak{R}_h + \mathfrak{R})\varphi_h \end{aligned} \quad (27)$$

En prenant la valeur moyenne de (27), il vient

$$\phi_{hmoy} = \frac{N_p I_{pnmoy} - N_s I_{snmoy}}{3\mathfrak{R}_h + \mathfrak{R}}$$

Les courants  $i_{pi}$  sont à valeur moyenne nulle (2.1.1), donc  $I_{pnmoy} = 0$

$$\text{et } \phi_{hmoy} = - \frac{N_s I_{snmoy}}{3\mathfrak{R}_h + \mathfrak{R}} = \varphi_h \quad (28)$$

#### 4.2.2.1 Le transformateur est à vide, donc $I_{snmoy} = 0$ et $\phi_{hmoy} = 0$

$$4.2.2.2 \text{ D'après (25)} \quad \underline{\phi_a} = \frac{V_a}{jN_p\omega} = [2,81 \cdot 10^{-3} ; -90] \quad (29)$$

Les flux  $\phi_a, \phi_b, \phi_c$  forment un système triphasé équilibré donc  $\varphi_h = 0$

L'équation (26) permet d'obtenir les courants primaires

$$\underline{I_{pav}} = \frac{\mathfrak{R}\phi_a}{N_p} = [0,409 ; -90] \quad (30)$$

$$I_{pny} = I_{pav} + I_{pbv} + I_{pcv} = 0$$

#### 4.2.3.1 En intégrant l'équation (25), on obtient $\varphi_a = \varphi_{av} + Cte$

En prenant la valeur moyenne de l'équation (26.a), on obtient

$$-N_s I_{samoy} - \mathfrak{R} \phi_{amoy} = \mathfrak{R}_h \phi_{hmoy} \quad (31)$$

Chaque diode conduit pendant un tiers de période, donc  $I_{samoy} = \frac{I_{snmoy}}{3}$

$$\text{ou encore en tenant compte de (28)} \quad I_{samoy} = - \frac{(3\mathfrak{R}_h + \mathfrak{R})}{3N_s} \phi_{hmoy} \quad (32)$$

De (31) et (32), on tire  $\phi_{\text{moy}} = \frac{-\mathcal{R}_h \phi_{\text{moy}}}{\mathcal{R}} + \frac{3 \mathcal{R}_h + \mathcal{R}}{3 \mathcal{R}} \phi_{\text{moy}} = \frac{\phi_{\text{moy}}}{3}$

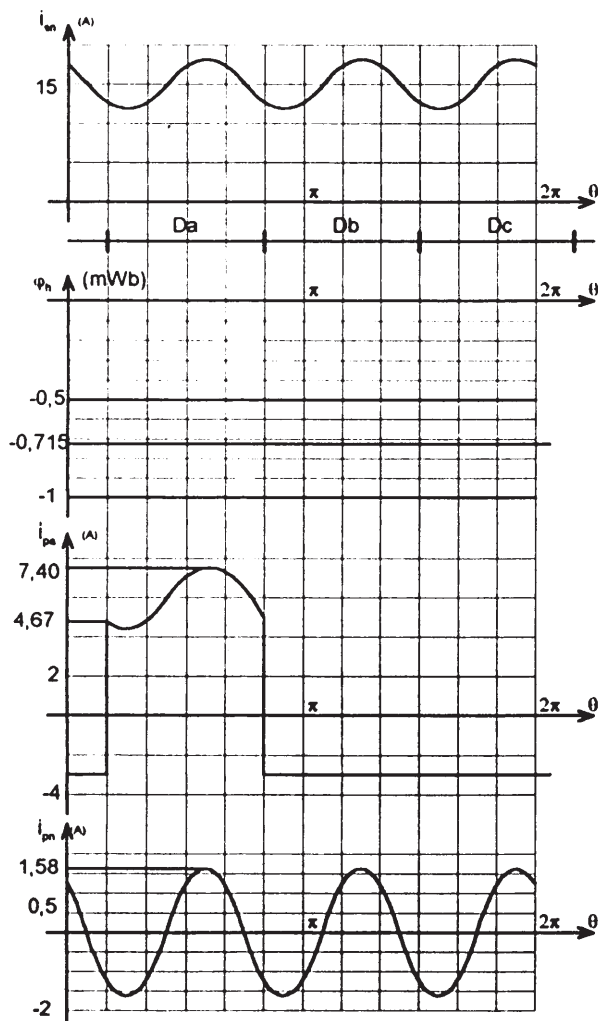
donc  $\phi_a = \phi_{\text{av}} + \frac{\phi_{\text{moy}}}{3}$  (33)

4.2.3.2 De l'équation (26.a), on tire  $i_{pa} = \frac{\mathcal{R}_h \phi_h + \mathcal{R} \phi_a}{N_p} + \frac{N_s}{N_p} i_{sa}$

$i_{pa} = \frac{\mathcal{R} \phi_{\text{av}}}{N_p} + \frac{N_s}{N_p} \left( i_{sa} - \frac{I_{\text{snmoy}}}{3} \right) = i_{\text{pav}} + \frac{N_s}{N_p} \left( i_{sa} - \frac{I_{\text{snmoy}}}{3} \right)$  (35)

4.2.3.3  $i_{pn} = i_{pa} + i_{pb} + i_{pc} = \frac{N_s}{N_p} (i_{sa} + i_{sb} + i_{sc} - I_{\text{snmoy}}) = \frac{N_s}{N_p} (i_{\text{sn}} - I_{\text{snmoy}})$

4.2.3.4



$\phi_h = - \frac{N_s I_{\text{snmoy}}}{3 \mathcal{R}_h + \mathcal{R}} = -0,715 \text{ mWb}$

$\frac{N_s}{N_p} = 0,582 \quad I_{\text{pnmax}} = 1,58 \text{ A}$

4.3.1 Les équations 26 restent valables. En effectuant leur somme, on obtient

$\phi_h = \frac{N_p(i_{pa} + i_{pb} + i_{pc}) - N_s(i_{sa} + i_{sb} + i_{sc})}{3\mathcal{R}_h + \mathcal{R}} = - \frac{N_s i_{\text{sn}}}{3 \mathcal{R}_h + \mathcal{R}}$  (36)

La loi des mailles au primaire s'écrit  $v_a = v_{pa} + v_{n'n}$  a)  
 $v_b = v_{pb} + v_{n'n}$  b) (37)  
 $v_c = v_{pc} + v_{n'n}$  c)

soit  $v_{n'n} = \frac{1}{3} (v_{pa} + v_{pb} + v_{pc})$  et, compte tenu des équations générales (25)

$$v_{n'n} = -\frac{1}{3} N_p \frac{d\varphi_h}{dt} \quad (38)$$

Si  $i_{sn}$  est constant,  $\varphi_h$  l'est également et donc  $v_{n'n} = 0$

4.3.2 Le transformateur est à vide, donc  $i_{sn} = 0$  et donc  $v_{n'n} = 0$ . Les tensions  $v_a$ ,  $v_b$  et  $v_c$  se retrouvent aux bornes des enroulements primaires comme dans le cas du couplage étoile neutre (4.2.2). Les expressions de  $\varphi_{av}$  et  $i_{pav}$  sont donc inchangées.

4.3.3.1  $v_{n'n}$  s'obtient à partir des équations (36) et (38)

$$v_{n'n} = \frac{1}{3} \times \frac{N_p \cdot N_s}{3\mathfrak{R}_h + \mathfrak{R}} \times \frac{di_{sn}}{dt} = \frac{N_p N_s \omega}{3\mathfrak{R}_h + \mathfrak{R}} \times I_{s1} \sqrt{2} \cos(3\omega t - \varphi_1) \quad (39)$$

4.3.3.2 De (37.a), on tire  $v_{pa} = N_p \frac{d\varphi_a}{dt} = v_a - v_{n'n} = N_p \left( \frac{d\varphi_{av}}{dt} + \frac{1}{3} \frac{d\varphi_h}{dt} \right)$  (40)

$$\text{ou encore } \varphi_a = \varphi_{av} + \frac{1}{3} \varphi_h + \text{Cte} \quad (41)$$

D'autre part, en prenant la valeur moyenne de (36), on obtient

$$\varphi_{hmoy} = -\frac{N_s I_{snmoy}}{3\mathfrak{R}_h + \mathfrak{R}} \quad (42)$$

Les diodes conduisent pendant un tiers de période donc  $I_{samoy} = \frac{I_{snmoy}}{3}$

De (31) et (42), on tire  $\frac{3\mathfrak{R}_h + \mathfrak{R}}{3} \varphi_{hmoy} - \mathfrak{R} \varphi_{amoy} = \mathfrak{R}_h \varphi_{hmoy}$

$$\text{soit } \varphi_{amoy} = \frac{3\mathfrak{R}_h + \mathfrak{R}}{3} \varphi_{hmoy} - \mathfrak{R} \varphi_{hmoy} = \frac{\varphi_{hmoy}}{3}$$

La constante de l'équation (41) est donc nulle, donc  $\varphi_a = \varphi_{av} + \frac{1}{3} \varphi_h$  (44)

4.3.3.3 De (26.a) et (43) on tire

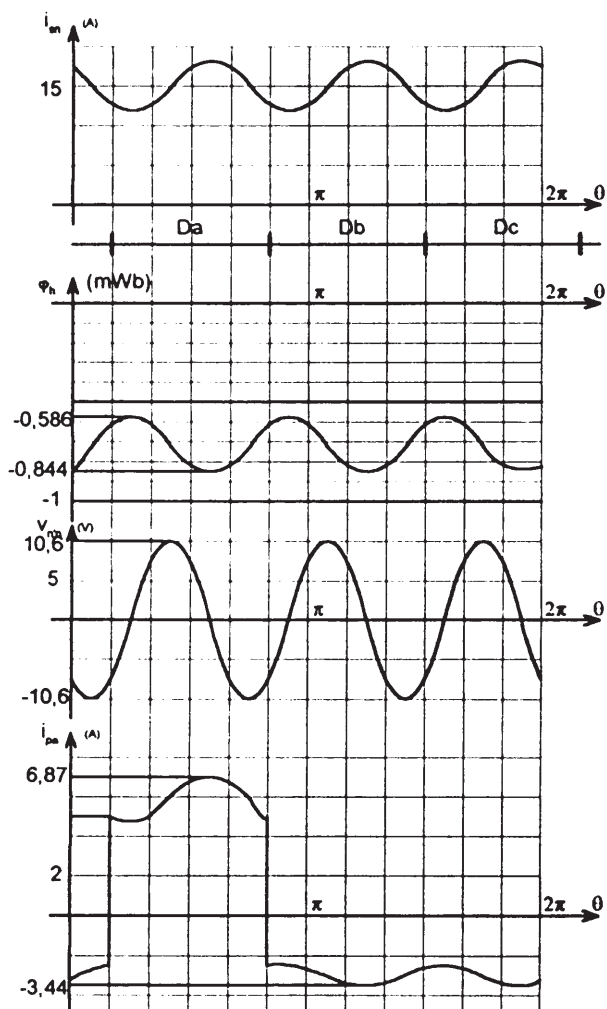
$$i_{pa} = \frac{\mathfrak{R}}{N_p} \varphi_{av} + \frac{3\mathfrak{R}_h + \mathfrak{R}}{3N_p} \varphi_h + \frac{N_s}{N_p} i_{sa} \quad (44)$$

$\varphi_h$  est donné par (36). En remplaçant dans (44), on obtient

$$i_{pa} = \frac{\mathcal{R}_h}{N_p} \varphi_{av} - \frac{N_s}{N_p} \frac{i_{sn}}{3} + \frac{N_s}{N_p} i_{sa}$$

$$\text{soit } i_{pa} = i_{pav} + \frac{N_s}{N_p} \left( i_{sa} - \frac{i_{sn}}{3} \right)$$

4.3.3.4



$$\varphi_h = - \frac{N_s i_{sn}}{3 \mathcal{R}_h + \mathcal{R}} =$$

$$-0,715 \cdot 10^{-3} - 0,129 \cdot 10^{-3} \sin(3\omega t - \varphi_1)$$

$$v_{n'n} = \frac{N_s N_p \omega}{3 \mathcal{R}_h + \mathcal{R}} \times I_{s1} \sqrt{2} \cos(3\omega t - \varphi_1)$$

$$= 10,6 \cdot \cos(3\omega t - \varphi_1)$$

$$i_{pa} = \frac{2}{3} \frac{N_s}{N_p} \cdot i_{sn} \quad \text{si } D_a \text{ conduit}$$

$$= - \frac{1}{3} \frac{N_s}{N_p} \cdot i_{sn} \quad \text{si } D_a \text{ est bloquée.}$$

# CAPES

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

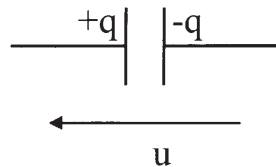
Composition de physique avec applications - Session : 1998

## A - ETUDE D'UNE ASSOCIATION « RLC série »

### A -I / Etude d'un condensateur électrique

A.I.1. Un condensateur électrique est constitué d'un ensemble de conducteurs en état d'influence totale séparés par un diélectrique. Les faces en regard des conducteurs sont appelées **armatures** et il s'y accumule des charges électriques de signes opposés si le composant est sous tension.

Représentation d'un condensateur électrique :



A.I.2. La charge  $q$  d'un condensateur représente la quantité d'électricité accumulée sur une des armatures. On remarquera qu'une armature porte la charge  $+q$  tandis que l'autre porte une charge  $-q$ . Pour un condensateur chargé sous la tension  $u$ , la relation  $q = C.u$  relie ces grandeurs avec  $C =$  Capacité du condensateur en Farad ( F ).

A.I.3. Condensateurs usuels du Lycée :  $qq. \text{ pF} < C < qq. 100 \text{ } \mu\text{F}$   
 Les condensateurs sont, par exemple, utilisés pour le fonctionnement des flashes d'appareils photos. Ceux-ci ont une capacité de plusieurs centaines de  $\mu\text{F}$  et une tension de claquage de plusieurs centaines de volts dans les jetables. Il y a accumulation de charges sur les armatures jusqu'à ce que la tension devienne suffisante pour déclencher le flash.

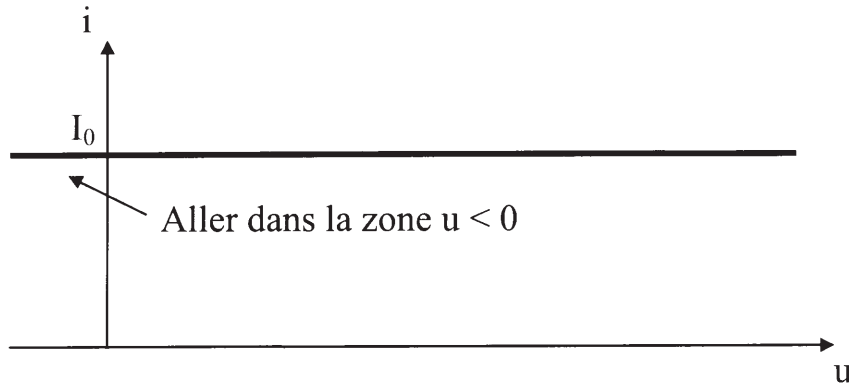
A.I.4.

$$C = \epsilon \cdot S / e$$

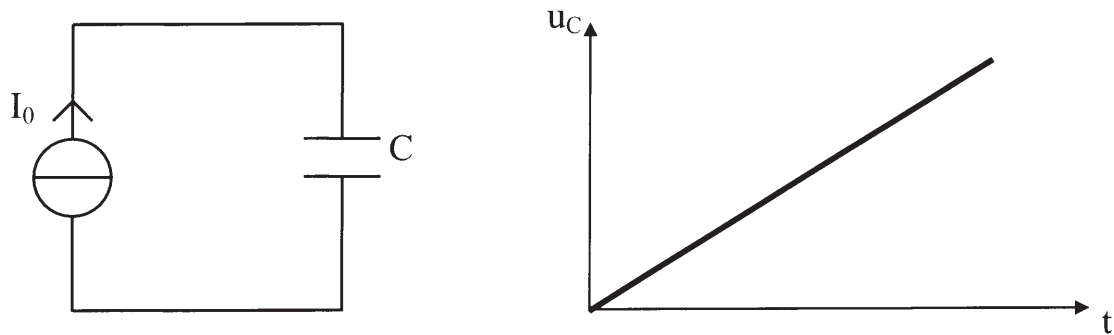
en F      en F/m      en m<sup>2</sup>

← en m

A.I.5. Une source idéale de courant continu est une source capable de délivrer un courant constant quelle que soit la charge.



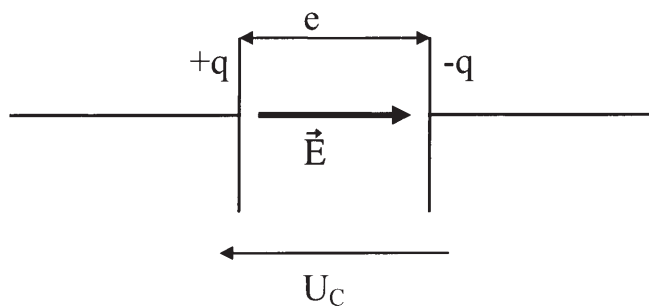
A.I.6.



A.I.7.

$$E_C(t) = 1/2 \cdot q \cdot u_C(t)$$

A.I.8.



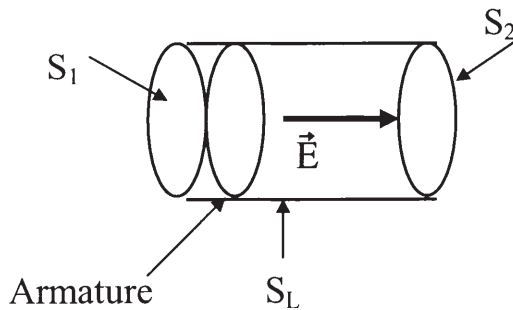
$$\vec{E} \begin{cases} - \text{perpendiculaire aux armatures} \\ - \text{dirigé vers les potentiels décroissants} \\ - E = U_C / e \end{cases}$$

A.I.9. Le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la somme des charges intérieures à cette surface divisée par la permittivité du milieu.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}} / \epsilon$$

Libre

pour un milieu linéaire  
et isotrope



La surface de Gauss ici choisie est  
cylindrique et contient l'armature  
chargé +q ( N'oublions pas que  
cette surface est virtuelle )

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Le 1<sup>er</sup> terme est nul car le champ considéré ici est extérieur au condensateur donc nul.

Le 2<sup>ème</sup> terme est nul car  $\vec{E}$  est perpendiculaire à  $d\vec{S}$ .

Il ne reste donc que le 3<sup>ème</sup> terme qui est égal à  $E \cdot S_2$  car  $\vec{E}$  est parallèle à  $d\vec{S}$ . Avec  $S_2 = S$  ; surface d'une armature.

La somme des charges intérieures à la surface de Gauss choisie est ici celle accumulée sur l'armature, donc +q.

Nous avons donc  $E \cdot S = q / \epsilon$

d'autre part  $E = U_C / e$  et  $q = C \cdot U_C$  que l'on injecte dans l'égalité ci-dessus pour obtenir

$$C = \epsilon \cdot S / e$$

A.I.10.  $E_C = 1/2 \cdot q \cdot U_C = 1/2 \cdot C \cdot U_C^2 = 1/2 \cdot (\epsilon \cdot S / e) \cdot e^2 \cdot E^2$

d'où

$$E_C = 1/2 \cdot \epsilon \cdot S \cdot e \cdot E^2$$

$w = E_C / v = E_C / (S \cdot e)$  avec  $v =$  volume entre les armatures

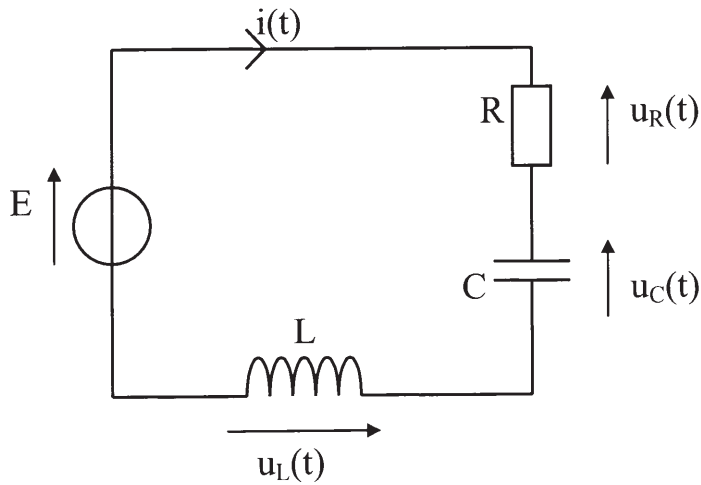
d'où

$$w = 1/2 \cdot \epsilon \cdot E^2$$



**A.II / Etude en régime transitoire**

A.II.1.



On applique la loi des mailles :

$$E = u_R + u_C + u_L$$

Avec 
$$u_R(t) = R.i(t) = R.dq/dt = R.C.du_C/dt$$

$$u_L(t) = L.di/dt = L.d^2q/dt^2 = L.C.d^2u_C/dt^2$$

d'où 
$$d^2u_C/dt^2 + (R/L).du_C/dt + (1/LC).u_C = E/LC$$

en posant  $\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$  et  $2m = R/L\omega_0$

nous avons :

$$\ddot{u}_C + 2m\omega_0\dot{u}_C + \omega_0^2u_C = \omega_0^2E$$

A.II.2. **a/**  $\omega_0$  est la pulsation propre du circuit, c'est la pulsation caractéristique du système qui évolue librement.  $\omega_0$  s'exprime en  $\text{rad s}^{-1}$  ou  $\text{s}^{-1}$ .  $m$  représente le facteur d'amortissement (sans unité).

**b/** E.S.S.M. 
$$\ddot{u}_C + 2m\omega_0\dot{u}_C + \omega_0^2u_C = 0$$

$$\Delta = 4\omega_0^2(m^2 - 1)$$

Si  $m < 1$   $\Delta < 0$ , on pose alors  $\Delta = 4\omega_0^2i^2(1 - m^2)$

$$r_1 = -m\omega_0 + i\omega_0(1 - m^2)^{1/2}$$

et 
$$r_2 = -m\omega_0 - i\omega_0(1 - m^2)^{1/2}$$

$$u_C(t) = A.e^{-m\omega_0 t}.\cos(\Omega.t + \varphi) \quad \text{avec } \Omega = \omega_0(1 - m^2)^{1/2}$$

Solution particulière,  $u_C(\infty) = E$

Solution générale : 
$$u_C(t) = A.e^{-m\omega_0 t}.\cos(\Omega.t + \varphi) + E$$

Recherche des constantes A et  $\varphi$  :

$$u_C(0) = 0 \text{ donc } A \cos \varphi + E = 0 \quad \Rightarrow \cos \varphi = -E/A$$

$$\dot{u}_C(0) = 0 \text{ donc } m\omega_0 \cos \varphi + \Omega \sin \varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = -(m\omega_0/\Omega)\cos\varphi$$

$$= (m\omega_0/\Omega).(E/A)$$

$$\text{avec } \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

$$\text{on trouve } A = \pm (E/\Omega).(\Omega^2 + m^2\omega_0^2)^{1/2} = \pm E. \omega_0/\Omega = \pm E/(1 - m^2)^{1/2}$$

et seule la solution négative convient car  $u_C(0) = 0$

nous avons donc finalement

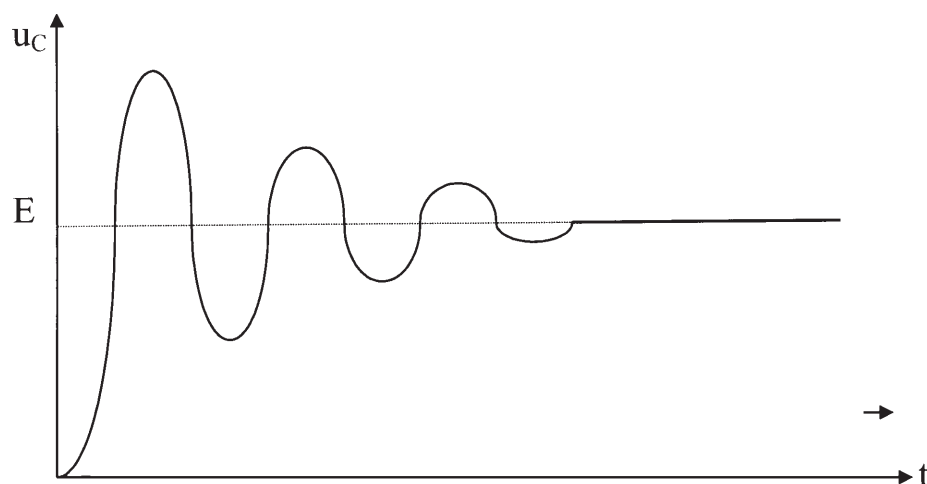
$A = - E/(1 - m^2)^{1/2}$ $\cos\varphi = (1 - m^2)^{1/2}$
---

$$u_C(t) = E [1 - e^{-m\omega_0 t} (\cos \omega_0 t + m \sin \omega_0 t)]$$

Si  $m \ll 1$  , au premier ordre nous avons  $\underline{\Omega = \omega_0}$

c/  $\Omega$  est la pulsation du régime transitoire pseudopériodique exprimée en rad/s.

A.II.3.



**Attention :** Il faut lire dans l'énoncé  $u_C(t + 2\pi/\Omega)$  et non  $u_C((t + 2\pi)/\Omega)$

$$E - u_C(t) = e^{-m\omega_0 t} . (1 - m^2)^{-1/2} . E . \cos(\Omega . t + \varphi)$$

$$E - u_C(t + 2\pi/\Omega) = e^{-m\omega_0 t} . e^{-m\omega_0 . 2\pi/\Omega} . (1 - m^2)^{-1/2} . E . \cos(\Omega . t + 2\pi + \varphi)$$

$$\ln (E - u_C(t)) / (E - u_C(t + 2\pi/\Omega)) = 2\pi m = \pi . R / L\omega_0 = \pi / Q$$

avec  $Q = L\omega_0 / R$  facteur de qualité du circuit.

$\pi / Q = \delta$  est appelé **décroissement logarithmique** et donne une idée de l'amortissement des oscillations.

**A.III / Etude en régime sinusoïdal forcé**

A.III.1.

$$X^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t).dt$$

$$X^2 = \frac{1}{T} \int_0^T X_{\max}^2 \cdot \cos^2 \omega t . dt = \frac{X_{\max}^2}{T} \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^T$$

d'où  $X^2 = 0,5 \cdot X_{\max}^2 \Rightarrow X = X_{\max} / \sqrt{2}$

A.III.2. En position DC , on peut lire la valeur instantanée à condition que les variations de la grandeur mesurée soient lentes.  
En position AC , on peut lire la valeur efficace de la grandeur mesurée.

**R.** Root

**M.** Mean ( Moyenne de la racine carrée )

**S.** Square

A.III.3. La loi des mailles est applicable avec les valeurs instantanées et non avec les valeurs efficaces aux bornes de composants qui introduisent des déphasages entre les tensions. Ici, le voltmètre mesure les valeurs efficaces, il faudrait donc un oscilloscope pour mesurer les déphasages entre ces trois tensions.  
Théoriquement,  $\varphi_L = + \pi/2$  et  $\varphi_C = - \pi/2$  donc  $u_L(t)$  et  $u_C(t)$  sont en opposition de phase. On retrouve bien  $e(t) = u_R(t)$  [  $E = U_R$  ]

A.III.4.  $e(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t)$   
avec  $u_R(t) = R.i(t)$  ;  $u_C(t) = (1/jC\omega).i(t)$  et  $u_L(t) = jL\omega.i(t)$

$$e(t) = [ R + j ( L\omega - 1/C\omega ) ].i(t)$$

$$E = [ R^2 + ( L\omega - 1/C\omega )^2 ]^{1/2} . I$$

$$= [ R^2 + ( L\omega - L\omega_0^2/\omega )^2 ]^{1/2} . I \quad \text{avec } LC\omega_0^2 = 1$$

$$= [ R^2 + L^2 \omega_0^2 \cdot (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2 ]^{1/2} \cdot I$$

$$= R \cdot [ 1 + (L^2 \omega_0^2 / R^2) \cdot (\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)^2 ]^{1/2} \cdot I$$

en posant  $x = \omega/\omega_0$  et  $Q = L\omega_0/R$  nous obtenons :

$$I = E / [ R \cdot ( 1 + Q^2 \cdot (x^2 - 1)^2 / x^2 )^{1/2} ]$$

A.III.5.  $U_C = I / C\omega = E / [ RC\omega \cdot ( 1 + Q^2 \cdot (x^2 - 1)^2 / x^2 )^{1/2} ]$

avec  $LC\omega_0^2 = 1 \Rightarrow C = 1 / L\omega_0^2$

$$U_C = E / [ (R/L\omega_0) \cdot (\omega/\omega_0) \cdot ( 1 + Q^2 \cdot (x^2 - 1)^2 / x^2 )^{1/2} ]$$

$$U_C = Q \cdot E / [ x^2 + Q^2 \cdot (x^2 - 1)^2 ]^{1/2}$$

A.III.6. Lorsque la source délivre un signal de pulsation voisine de la pulsation propre du circuit, il se trouve que certaines grandeurs voient leurs amplitudes croître d'une façon plus ou moins importante. **En théorie**, pour un facteur de qualité infini, ces amplitudes atteignent l'infini pour  $\omega = \omega_0$  !  
C'est ce qu'on appelle le phénomène de résonance.

$U_C$  extrême si  $x^2 + Q^2 \cdot (x^2 - 1)^2$  extrême

$$\Leftrightarrow 2x + Q^2 \cdot 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4 \cdot Q^2 \cdot (x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 - 1/2Q^2$$

Résonance seulement si  $1 - 1/2Q^2 \geq 0$

donc si  $Q^2 \geq 1/2$

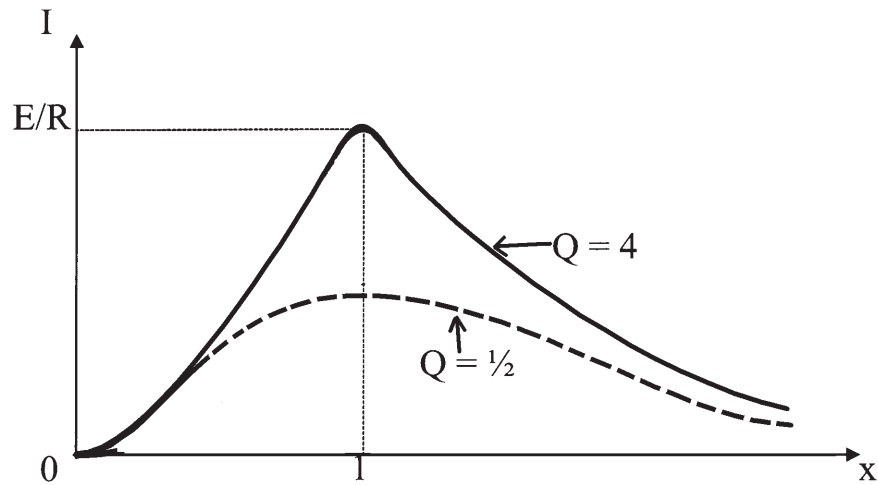
puisque  $Q > 0$ , il y a résonance si  $Q \geq 1/\sqrt{2}$

Supposons que cette condition soit vérifiée,

$$x = [ 1 - 1/2Q^2 ]^{1/2} \text{ donc } \underline{\omega = \omega_0 \cdot [ 1 - 1/2Q^2 ]^{1/2}}$$

**Q = facteur de qualité du circuit**

A.III.7.



$$\forall Q, I(0) = 0 \quad \text{et} \quad I(\infty) = 0$$

I présente toujours une résonance quand  $[(1 + Q^2 \cdot (x^2 - 1)^2 / x^2)^{-1/2}]'_x = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(4x^2 - 2x^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{donc ssi} \quad \underline{\omega = \omega_0}$$

A.III.8. On obtient la fréquence de coupure lorsque  $I = I_{\max} / \sqrt{2}$ .  
Le terme en  $1/\sqrt{2}$  provient de la définition énergétique des fréquences de coupure.

On a donc réalisé ici un filtre passe bande.

## B - PROPAGATION D'UNE ONDE SONORE DANS L'AIR

### B-1 / Généralités

- B.I.1. Une onde correspond à la propagation d'une perturbation.
- B.I.2. Pour un son, la perturbation est une surpression qui se propage au sein du fluide.
- B.I.3. La fréquence caractérise la hauteur d'un son pur.
- B.I.4. Une surface sur laquelle, à un instant  $t$ , la grandeur physique considérée est la même partout, est appelée surface d'onde.  
 Une onde est plane si la surface d'onde est un plan perpendiculaire à la direction de propagation.  
 Elle est sphérique si la surface d'onde est une sphère.
- B.I.5. On dit qu'une onde est **transversale** lorsque la grandeur physique « vibre » perpendiculairement à la direction de propagation, et **longitudinale** lorsque la « vibration » est suivant la direction de propagation.

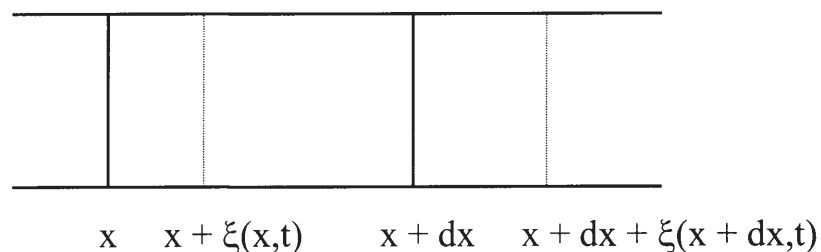
Exemples : Les ondes électromagnétiques dans le vide, les vagues d'un océan... sont des ondes transversales.

Le son dans un fluide parfait, les ondes de compression d'un ressort... sont des ondes longitudinales.

### B-II / Equation des ondes sonores se propageant dans un fluide parfait

B.II.1. Pas de question !

B.II.2.



$$dx' = x + dx + \xi(x + dx, t) - x - \xi(x, t) = dx + \xi(x + dx, t) - \xi(x, t)$$

avec  $\xi(x + dx, t) = \xi(x, t) + [\partial\xi(x, t)/\partial x].dx$  au premier ordre

nous avons,  $dx' = dx + [\partial\xi(x, t)/\partial x].dx$

d'où,  $dV' = \Sigma.dx' = \Sigma.dx.[1 + \partial\xi(x, t)/\partial x]$

B.II.3. Avec  $V = \Sigma.\delta x$ , on a :  $\boxed{\delta V/V = \partial\xi(x, t)/\partial x}$  (1)

B.II.4.  $\chi_s = - (1/V).(\partial V/\partial p)_s = - (1/V).\delta V/\delta p = - (\delta V/V).1/\bar{p}$

a/  $1/\bar{p} = - \chi_s / (\delta V/V)$  d'où  $\boxed{\bar{p} = - (1/\chi_s).[\partial\xi(x, t)/\partial x]}$  (2)

b/ Considérons la tranche de fluide entre  $x$  et  $x + dx$  à l'instant  $t$  :

$$m.\partial^2\xi(x, t)/\partial t^2 = p(x, t).\Sigma - p(x + dx, t).\Sigma$$

avec  $m$ , la masse de cette tranche de fluide ( $m = \mu_0.\Sigma.dx$ ) au 1<sup>er</sup> ordre

$$\mu_0.dx.\partial^2\xi(x, t)/\partial t^2 = - [p(x + dx, t) - p(x, t)] = - [\partial p(x, t)/\partial x].dx$$

$$\mu_0.\partial^2\xi(x, t)/\partial t^2 = - \partial(p_0 + \bar{p}(x, t))/\partial x = - \partial\bar{p}(x, t)/\partial x$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_0.\partial^2\xi(x, t)/\partial t^2 = - \partial\bar{p}(x, t)/\partial x}$$
 (3)

B.II.5. d'après (2),  $\partial\bar{p}(x, t)/\partial x = - (1/\chi_s).\partial^2\xi(x, t)/\partial x^2$

donc  $\mu_0.\partial^2\xi(x, t)/\partial t^2 = (1/\chi_s).\partial^2\xi(x, t)/\partial x^2$

$$\Rightarrow \boxed{\partial^2\xi(x, t)/\partial x^2 - \mu_0.\chi_s.\partial^2\xi(x, t)/\partial t^2 = 0}$$

B.II.6. C'est l'équation caractéristique de la propagation de la grandeur  $\xi$  à la célérité  $v = 1/(\mu_0.\chi_s)^{1/2}$

Rappel : Equation de d'Alembert

$$\partial^2 f(x, t)/\partial x^2 - (1/v^2).\partial^2 f(x, t)/\partial t^2 = 0$$

**B.III / Discussion des hypothèses et des ordres de grandeur**

$$B.III.1. \quad p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

avec  $p$  : pression totale des  $n$  moles de gaz ( en Pa )

$V$  : volume occupé par les  $n$  moles de gaz ( en  $m^3$  )

$R$  : constante des gaz parfaits ( en  $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$  )

$T$  : température du gaz ( en K )

$$B.III.2. \quad dS = du/T + (p/T) \cdot dV = n \cdot c_v \cdot dT/T + (p/T) \cdot dV$$

$$\text{or} \quad dT = (p/nR) \cdot dV + (V/nR) \cdot dp \Rightarrow dT/T = dV/V + dp/p$$

$$\text{d'où} \quad dS = n \cdot c_v \cdot dp/p + (n \cdot c_v + p \cdot V/T) \cdot dV/V$$

$$= n \cdot c_v \cdot dp/p + (n \cdot c_v + n \cdot R) \cdot dV/V$$

$$= n \cdot c_v \cdot dp/p + n \cdot c_p \cdot dV/V$$

avec  $c_v + R = c_p$   
Relation de Mayer

$$B.III.3. \quad \text{Transformation isentropique} \Rightarrow dS = 0$$

$$\text{d'où} \quad n \cdot c_v \cdot dp/p + n \cdot c_p \cdot dV/V = 0$$

$$\Leftrightarrow dp/p + (c_p/c_v) \cdot dV/V = 0$$

$$\Leftrightarrow dp/p + \gamma \cdot dV/V = 0$$

**Si  $\gamma = \text{constante}$**   
(indépendant de  $T$ )

$$\ln p + \gamma \cdot \ln V = \text{Cste}$$

$$\Leftrightarrow \ln p + \ln V^\gamma = \text{cste}$$

$$\Leftrightarrow \ln p \cdot V^\gamma = \text{cste}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{p \cdot V^\gamma = \text{cste}}}$$

$$B.III.4. \quad \chi_s = - (1/V_0) \cdot (\partial V / \partial p)_s$$

$$\text{et} \quad dp/p_0 + \gamma \cdot dV/V_0 = 0 \Leftrightarrow dV/dp = - V_0 / \gamma p_0$$

$$\text{donc} \quad \underline{\underline{\chi_s = 1 / \gamma p_0}}$$

$$B.III.5. \quad c = 1 / (\mu_0 \cdot \chi_s)^{1/2} = (\gamma p_0 / \mu_0)^{1/2}$$



$$\text{or } p_0 \cdot V_0 = n \cdot R \cdot T_0 \quad \Rightarrow \quad p_0 = (n / V_0) \cdot R \cdot T_0 = (\mu_0 / M) \cdot R \cdot T_0$$

$$\Rightarrow \quad p_0 / \mu_0 = R \cdot T_0 / M$$

$$\text{d'où } \boxed{c = (\gamma \cdot R \cdot T_0 / M)^{1/2}} \quad \text{pour un gaz à la température } T_0$$

( On remarquera que R est en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  et non en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$  )

$$\underline{c \approx 341 \text{ m/s}}$$

$$\text{B.III.6.} \quad \bar{v} = (3 \cdot R \cdot T / M)^{1/2} \quad \bar{v} \approx 500 \text{ m/s}$$

C'est donc le même ordre de grandeur. Il est tout à fait normal de trouver que la perturbation ( qui a pour support matériel les molécules ) se déplace à une vitesse proche de ces molécules.

$$\text{B.III.7.} \quad \text{Si } p \text{ augmente} \quad \Rightarrow \quad T \text{ augmente car}$$

$$pV^\gamma = \text{cste} \quad \Leftrightarrow \quad p \cdot (T/p)^\gamma = \text{cste}$$

$$\Leftrightarrow \quad T^\gamma = p^{\gamma-1} \cdot \text{cste}$$

L'hypothèse d'adiabaticité consiste à considérer que les échanges thermiques se font à une vitesse négligeable devant celle de la propagation des variations de pression.

B.III.8. La distance sur laquelle l'énergie thermique est transportée ( $\sqrt{D\tau}$ ) doit être négligeable devant la distance parcourue par les variations de pression pendant le même temps ( $c\tau$ ), c'est à dire une longueur d'onde.

$$[D\tau]^{1/2} \ll c\tau \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau \gg D / c^2}$$

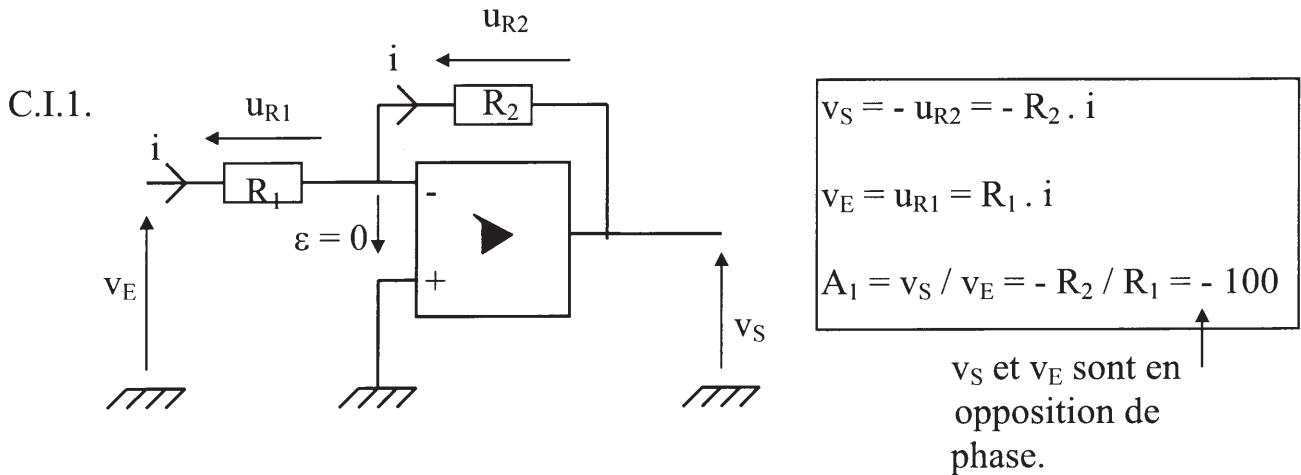
B.III.9. L'hypothèse est vérifiée tant que  $f = 1/\tau \ll c^2/D \approx 6 \text{ GHz}$

On peut estimer que cette hypothèse cesse d'être valable pour des fréquences inférieures à 50 MHz.

Celle-ci reste donc valable pour les ondes sonores [ 20 Hz - 20 kHz ]

## C - PRINCIPE D'UN CAPTEUR D'AMPLITUDE D'ONDE ULTRASONORE POUR SYSTEME INFORMATISE.

### C - I / Etude du premier bloc



C.I.2. C'est le phénomène d'induction électromagnétique qui est la cause de ces tensions parasites. On peut limiter celles-ci avec des connexions blindées par exemple câbles coaxiaux.

C.I.3. Dans l'expression précédente, il faut remplacer  $R_1$  par  $Z_1 = R_1 + 1/jC\omega$ , d'où :

$$H'_1(j\omega) = -R_2 / (R_1 + 1/jC\omega) = -jR_2C\omega / (1 + jR_1C\omega)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Si } \omega \rightarrow 0 & , \quad H'_1(j\omega) \rightarrow 0 \\ \text{Si } \omega \rightarrow \infty & , \quad H'_1(j\omega) \rightarrow -R_2 / R_1 \end{array}$$

Donc ce circuit a tendance à éliminer les tensions de basses fréquences et à amplifier les tensions de hautes fréquences.

$$\left| \left| H'_1(j\omega) \right| \right| = R_2C\omega / [1 + (R_1C\omega)^2]^{1/2}$$

$$\text{Si } f = 50 \text{ Hz}, \quad \left| \left| H'_1(j\omega) \right| \right| \approx 1,5$$

$$\text{Si } f = 40 \text{ kHz}, \quad \left| \left| H'_1(j\omega) \right| \right| \approx 100$$

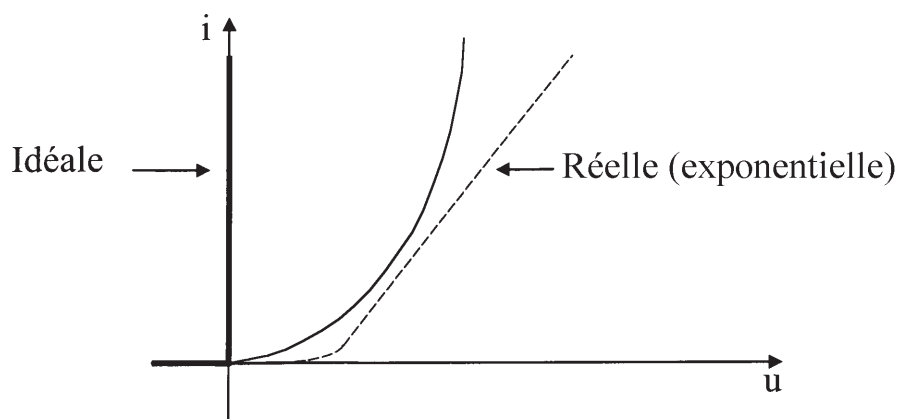
C.I.4.  $u_1(t) = H'_1(j\omega) \cdot e'_r(t)$   
 $u_1(t) \approx -(R_2 / R_1) \cdot E_r \cdot \sin(2\pi ft)$

$$u_1(t) \approx -100 \cdot E_r \cdot \sin(8 \cdot 10^4 \pi t)$$

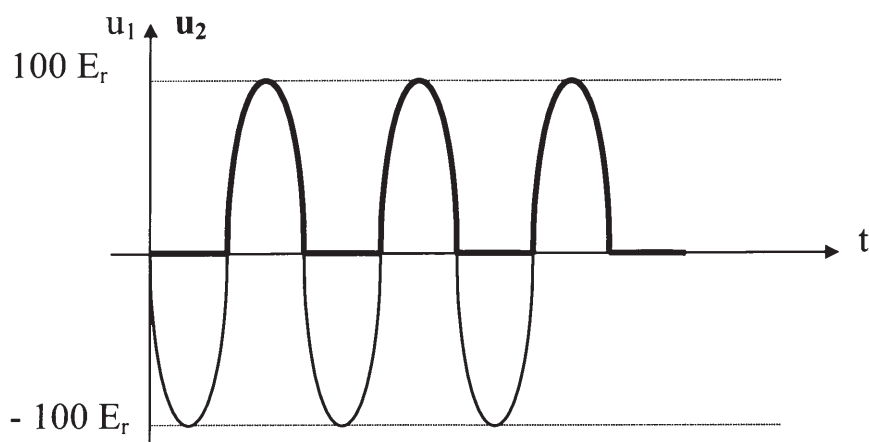
**C - II / Diode idéale**

## C.II.1.

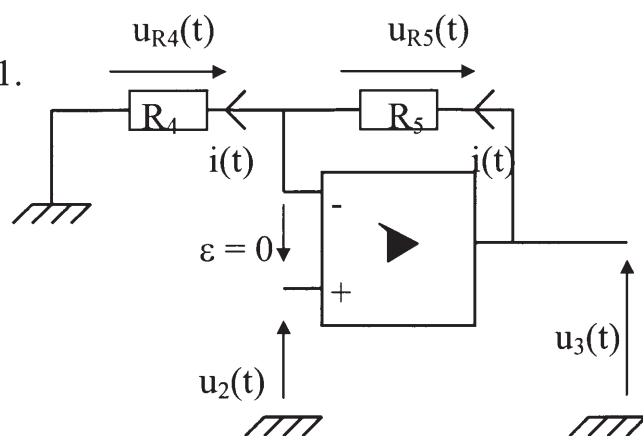
Diode	Tension de seuil (en V)	Résistance interne (en $\Omega$ )
Réelle	0,6	qqx1
Idéale	0	0



## C.II.2.

**C - III / Etude du troisième bloc**

## C.III.1.



$$u_3(t) = (R_4 + R_5) \cdot i(t)$$

$$u_2(t) = R_4 \cdot i(t)$$

$$H_3 = u_3(t) / u_2(t) = 1 + R_5 / R_4$$

$$H_3 = 11$$

C.III.2. C'est un amplificateur non inverseur de tension pour permettre d'atteindre des tensions de valeurs suffisantes pour être détectées par l'ordinateur.

### C - IV / Rôle du filtre

C.IV.1.  $Z_C = 1 / C\omega$  ( Impédance d'un condensateur )

Si  $f$  tend vers 0 ,  $Z_C$  tend vers l'infini donc  $C \equiv$  interrupteur ouvert.

Si  $f$  tend vers l'infini ,  $Z_C$  tend vers 0 donc  $C \equiv$  interrupteur fermé.

C.IV.2. Nous avons donc ici un filtre passe bas d'ordre 1.

$$\text{C.IV.3.} \quad H_4(j\omega) = u_C(t) / u_3(t) = \frac{1 / jC\omega}{R_6 + 1 / jC\omega}$$

$$H_4 = \left| \left| H_4(j\omega) \right| \right| = \frac{1 / C\omega}{[ R_6^2 + ( 1 / C\omega )^2 ]^{1/2}}$$

$$H_4 = 1 / [ (R_6 C\omega)^2 + 1 ]^{1/2}$$

$$\underline{H_4 \approx 4.10^{-3}}$$

On obtient la pulsation de coupure à - 3dB ( $\omega_C$ ) pour  $H_4 = H_{4\text{MAX}} / \sqrt{2}$   
Ici  $H_{4\text{MAX}} = 1$

$$H_4 = 1 / \sqrt{2} \Leftrightarrow R_6 C\omega = 1 \quad \text{d'où} \quad \omega_C = 1 / R_6 C$$

$$\underline{\omega_C = 1000 \text{ rad/s}}$$

C.IV.4.  $2\pi f = \omega \approx 250.10^3 \text{ rad/s}$  avec  $H_4(\omega) = 4.10^{-3}$   
or  $\omega_C = 10^3 \text{ rad/s}$

donc le deuxième terme de la série de Fourier est très fortement atténué ainsi que les termes suivants.

On obtient donc en sortie  $u_4(t) \approx U_3 / \pi$  donc indépendante du temps.

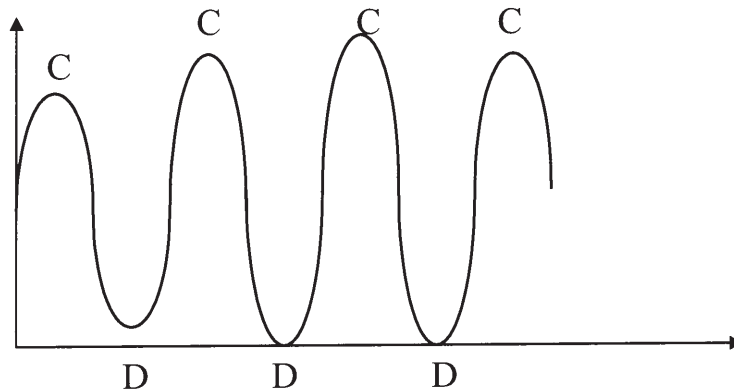
## D - INTERFERENCES ULTRASONORES

D.1. On notera  $\delta$ , la différence de marche.

Si  $\delta = p \cdot \lambda$  avec  $p \in \mathbb{N}$ , les interférences seront constructives.

Si  $\delta = (2p + 1) \cdot \lambda/2$ , les interférences seront destructives.

D.2.



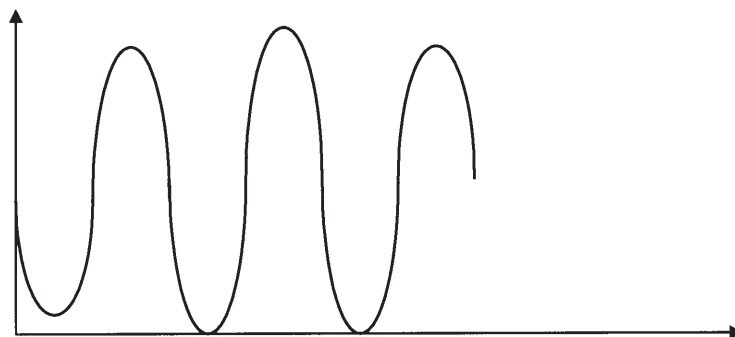
D.3. L'interfrange  $i = \lambda D/a$  avec  $a$  = distance entre les deux sources

D'après le graphique  $5i = 0,15$  donc  $i = 0,03$  m.

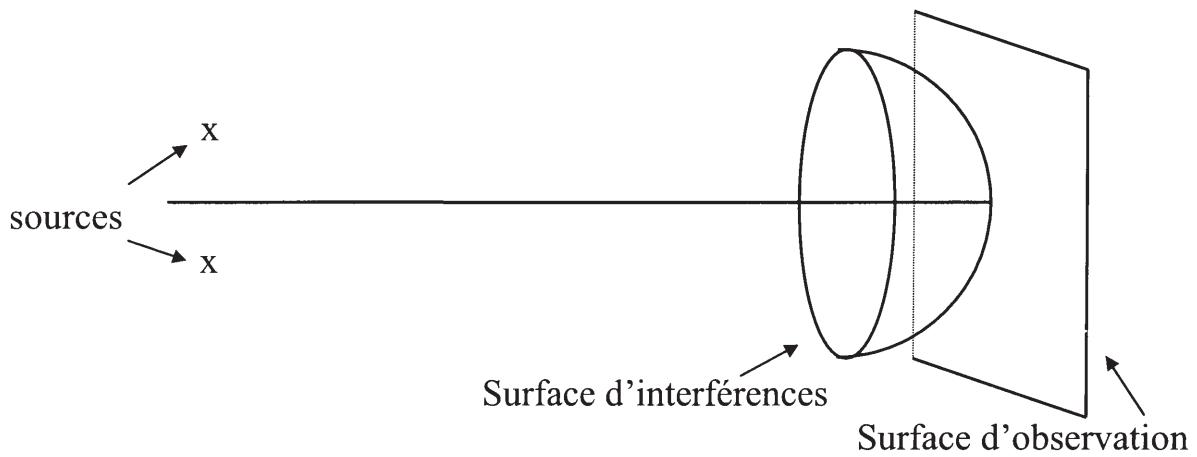
D'où  $a = \lambda D/i = (c/v) \cdot (D/i) \Rightarrow a \approx 11$  cm.

D.4. a/ Invertir les deux bornes d'un des émetteurs revient à introduire un déphasage supplémentaire de  $\pi$ . ( les deux sources sont alors en opposition de phase ).

b/ En  $x = 0$ , on aurait une intensité nulle. On obtient donc une courbe du même type mais avec inversion des maxima et minima.



- D.5. Les franges sont visibles non pas sur un plan mais sur une hyperboloïde, donc quand on s'éloigne du plan médiateur des deux sources nous ne sommes plus à la « bonne » distance d'observation.



Notons qu'il se superpose un problème de diffraction.

## E - ETUDE SIMPLIFIEE D'UN LASER

**E - I /**      Light  
                   Amplification  
 by            Stimulated  
                   Emission  
 of            Radiations

\* Amplification des radiations lumineuses par émission stimulée.

### **E - II / A propos de l'émission stimulée**

E.II.1.       $n_1 = K.exp(- \epsilon_1/k_b T)$        $n_0 = K.exp(- \epsilon_0/k_b T)$

$$n_1/n_0 = \exp[(\epsilon_0 - \epsilon_1)/k_b T]$$

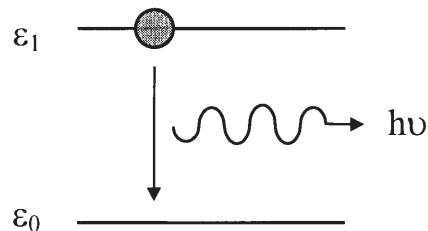
E.II.2.      Si  $T = 0$  K,  $n_1/n_0 = 0$       ( car  $\epsilon_1 > \epsilon_0$  )

Au zéro absolu, tous les atomes sont dans leur niveau fondamental donc  $n_1 = 0$ .

Si  $T \rightarrow \infty$  ,  $n_1 / n_0 \rightarrow 1$       ( car  $\epsilon_1 > \epsilon_0$  )

Le rapport ne peut pas être égal à 1,  $T = \infty$  ! impossible.

E.II.3.



$$\epsilon_1 - \epsilon_0 = h\nu = \epsilon_{\text{PHOTON}}$$

$$\epsilon_{\text{PHOTON}} = hc/\lambda = 2 \bar{e}V \approx 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

$$n_1/n_0 = \exp[(\epsilon_0 - \epsilon_1)/k_b T] \approx 1,5 \cdot 10^{-34}$$

Un milieu est le siège d'une émission lumineuse continue à condition qu'il y a toujours un nombre suffisant d'atomes dans un niveau excité. Pour cette raison, dans les lasers, on a recours à des « pompages » pour peupler les niveaux excités.

**E - III / Absorption et émission spontanées**

E.III.1.  $dN_1 = C.N_0.u(\nu).dt$

E.III.2. a/ Emission spontanée

b/  $dN_{1em} = - A.N_1.dt$

E.III.3.  $N_1 = \text{constant} \Rightarrow dN_{1abs} + dN_{1em} = 0$

donc  $C.N_0.u(\nu).dt = A.N_1.dt$

d'où 
$$N_1 / N_0 = ( C / A ).u(\nu)$$

E.III.4.  $N_1 / N_0 = ( C / A ).D(\nu).[ \exp(h\nu/k_bT) - 1 ]^{-1}$

Si  $T \rightarrow 0$ ,  $N_1 / N_0 \rightarrow 0$       donc même tendance qu'avec la distribution de Maxwell-Boltzmann.

Si  $T \rightarrow \infty$ ,  $N_1 / N_0 \rightarrow \infty$       contrairement au résultat de la distribution de Maxwell-Boltzmann qui nous indique une tendance vers 1 pour T tendant vers l'infini.

**E - IV / Emission induite**

E.IV.1.  $dN_{1ind} = - B.N_1.u(\nu).dt$

Nous avons donc maintenant avec  $N_1 = \text{constant}$ ,

$$dN_{1abs} + dN_{1em} + dN_{1ind} = 0$$

donc  $C.N_0.u(\nu).dt = A.N_1.dt + B.N_1.u(\nu).dt$

d'où 
$$N_1 / N_0 = C.u(\nu) / [ A + B.u(\nu) ]$$
  

$$\Rightarrow N_1 / N_0 = C / \{ B + ( A / D(\nu) ).[ \exp(h\nu/k_bT) - 1 ] \}$$

Les relations sont compatibles si  $A = BD$ .

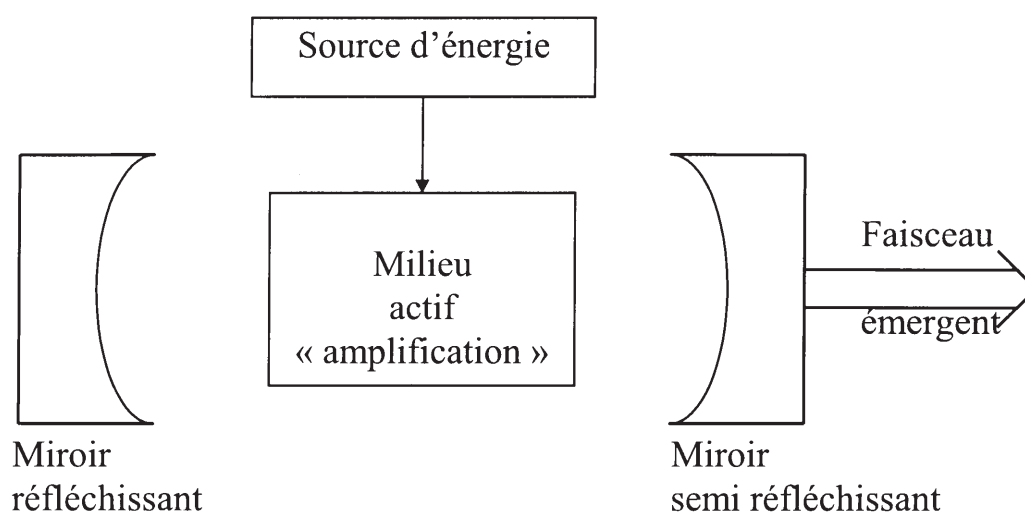
Sous réserve que  $B + ( A / D(\nu) ).[ \exp(h\nu/k_bT) - 1 ] \neq 0$



E.IV.2. Ces photons ont - même fréquence  
- même polarisation  
- même direction  
que les photons incidents.

E.IV.3. La très grande cohérence des sources LASER vient du fait que les photons émis ont presque tous ( sauf ceux émis par émission spontanée ) la même fréquence et à une date donnée, même phase en tout point d'une section droite du faisceau.

E.IV.4.



**F - TELEMETRIE TERRE -LUNE PAR IMPULSION LASER****F - I /**

F.I.1.  $E = P.\tau$  d'où  $P = E / \tau = 0,3 / 5.10^{-10}$

donc  $P = 600 \text{ MW}$

F.I.2.  $E = N.h.\nu$  avec  $N =$  nombre de photons émis par impulsion

d'où  $N = E / h\nu = 8,5.10^{17}$

F.I.3. L'écart maximal est donc égal à la durée de l'impulsion ( $\Delta t = \tau$ )

$d_{TL} = c.t$  donc  $\Delta d_{TL} = c.\Delta t = c.\tau$

d'où  $\Delta d_{TL} = 0,15 \text{ m.}$

F.I.4. En faisant une exploitation statistique ( ou graphique ) des mesures depuis plusieurs années.

**F - II /**

F.II.1. A cause des mouvements relatifs Terre - Lune , les réflexions seraient de directions « très » diverses. Un léger changement de direction au niveau de la surface lunaire aurait pour conséquence un retour sur Terre éloigné du récepteur.

F.II.2. On note respectivement  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy et Oz.

On considère un rayon incident quelconque  $a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k}$

Après réflexion sur le plan xOy, seule la composante suivant Oz a changé ( elle est devenue - c ) car l'angle de réflexion est égale à l'angle d'incidence d'après la deuxième loi de Descartes.

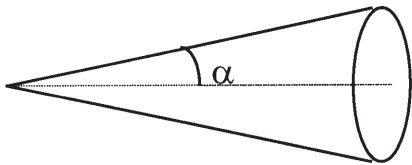
Nous avons donc le rayon  $a.\vec{i} + b.\vec{j} - c.\vec{k}$  après la première réflexion.

Après réflexion sur le plan  $xOz$ , seule la composante suivant  $Oy$  a changé ( elle est devenue  $-b$  ) pour la même raison que précédemment. Nous avons donc le rayon  $a.\vec{i} - b.\vec{j} - c.\vec{k}$  après la deuxième réflexion.

De la même manière, après la troisième réflexion, nous avons le rayon émergent  $-a.\vec{i} - b.\vec{j} - c.\vec{k}$  qui est exactement opposé au rayon incident.

Les déplacements lunaires n'ont donc plus aucune influence puisque ce qui précède est vérifié qu'elles que soient les coordonnées du rayon incident  $(a,b,c)$ .

F.II.3. a/ On note  $D$  le diamètre de la tache lumineuse sur la Lune.



$$D/2 = d_{TL} \cdot \tan \alpha \approx d_{TL} \cdot \alpha$$

$$\text{d'où } \boxed{D \approx 2 \cdot d_{TL} \cdot \alpha} \quad \underline{D \approx 15 \text{ km.}}$$

b/ La surface du miroir est  $s = 100 \text{ cm}^2 = 10^{-2} \text{ m}^2$ .  
La surface de la tache lumineuse est  $S = \pi \cdot (D/2)^2$

Si les photons sont uniformément répartis dans cette tache, le nombre de photons arrivant sur le miroir est :

$$N_a = (s/S) \cdot N = s \cdot (\pi D^2 / 4) \cdot N$$

d'où avec  $D \approx 2 \cdot d_{TL} \cdot \alpha$

$$\boxed{N_a \approx (s / \pi d_{TL}^2 \alpha^2) \cdot N}$$

$$\underline{N_a \approx 4 \cdot 10^7}$$

# CAPES

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

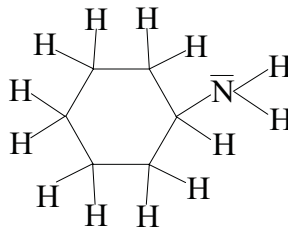
Composition de chimie avec applications - Session : 1998

## PREMIÈRE PARTIE

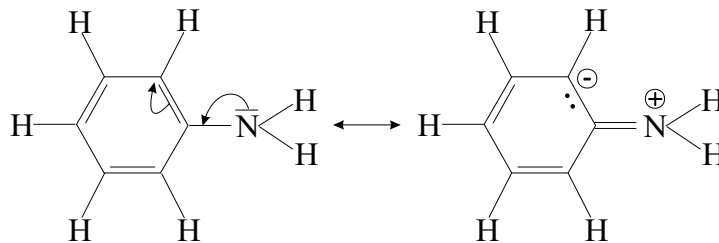
### L'ANILINE ; COMPARAISON À LA CYCLOHEXYLAMINE

#### 1. Représentation des molécules.

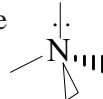
##### 1.1. Cyclohexylamine :



Aniline :



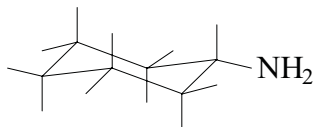
- 1.2. Dans la théorie VSEPR, autour de l'azote structure  $AX_3E$  (trois liens de covalence, un doublet libre)  $\Rightarrow$  structure tétraédrique pour l'azote



angles des liaisons un peu  $< 109^\circ 28'$  puisque la répulsion entre doublet liant et doublet non liant  $>$  à celle entre deux doublets liants.

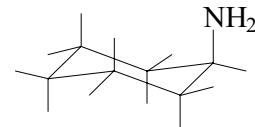
Dans l'aniline, la délocalisation du doublet de  $N$  avec les  $e\pi$  du noyau benzénique modifie les angles de liaison.

##### 1.3. Conformères de la cyclohexylamine :



$NH_2$  est en position équatoriale (e)

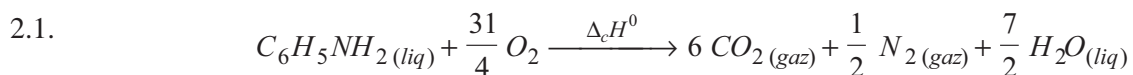
et



Ici position axiale (a)

l'encombrement stérique est moindre avec  $NH_2$  en (e)  $\Rightarrow$  conformère plus stable.

#### 2. Propriétés énergétiques.



$$2.2. \quad a. \quad \Delta_c H_{\phi NH_2 liq}^0 = \frac{7}{2} \Delta_f H_{H_2O(liq)}^0 + \frac{1}{2} \Delta_f H_{N_2(gaz)}^0 + 6 \Delta_f H_{CO_2(gaz)}^0 - \Delta_f H_{\phi NH_2(liq)}^0 - \frac{31}{4} \Delta_f H_{O_2}^0$$

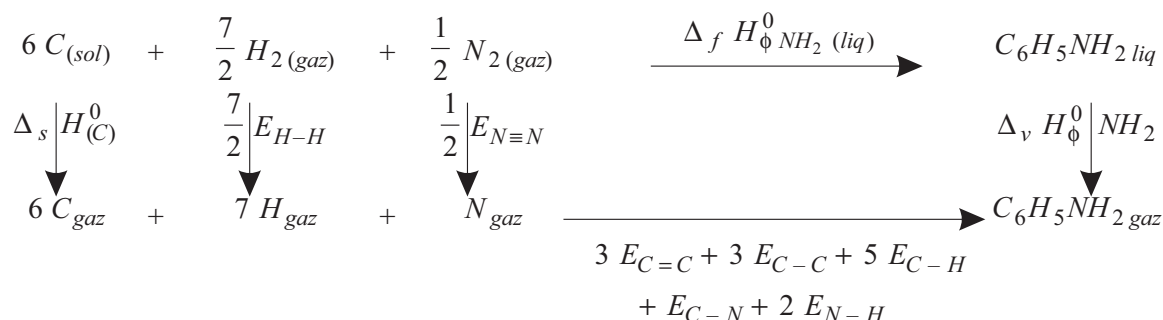
(d'après la loi de Hess).

$$\Delta_f H_{N_2(g)}^0 \quad \text{et} \quad \Delta_f H_{O_2(g)}^0 = 0$$

(corps simple pris dans leur état standard de référence).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta_f H_{\phi NH_2(liq)}^0 &= -\Delta_c H_{\phi NH_2(liq)}^0 + \frac{7}{2} \Delta_f H_{H_2O(liq)}^0 + 6 \Delta_f H_{CO_2(gaz)}^0 \\ &= 31 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

autre méthode de calcul.



$$\begin{aligned} \Delta_f H_{\phi NH_2(liq)}^0 + \Delta_v H_{\phi NH_2(liq)}^0 &= 6 \Delta_s H_C^0 + \frac{7}{2} E_{H-H} + \frac{1}{2} E_{N \equiv N} + 3 E_{C=C} + 3 E_{C-C} + \\ &+ 5 E_{C-H} + E_{C-N} + 2 E_{N-H} \\ \Rightarrow \Delta_f H_{\phi NH_2(liq)}^0 &= 173,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

b. De ces deux résultats on peut déduire l'énergie de résonance de l'aniline égale à :

$$173,5 - 31 = 142,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

2.3. a. La combustion de l'aniline liquide dans le dioxygène pur, sous un bar à 298 K est exothermique (chaleur dégagée).

b.  $-169,5 \text{ kJ}$  correspond à la variation d'enthalpie du système lors de la combustion.

$$Q_p = \Delta H^0 = \Delta_r H^0 (\xi_2 - \xi_1)$$

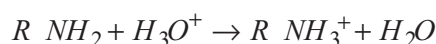
L'enthalpie de combustion  $\Delta_r H$  et l'enthalpie standard  $\Delta_r H^0$  sont exprimées en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  (pour une réaction donnée, ici celle de combustion d'un mol d'aniline liquide).

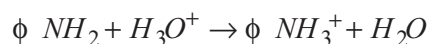
### 3. Propriétés basiques en solution aqueuse.

3.1. a. Cyclohexylamine = R - NH<sub>2</sub>      Aniline =  $\phi$  - NH<sub>2</sub>.

50,0 mL de solution dosée par HCl 0,100 mol.L<sup>-1</sup>.

Réaction de dosage :





- b. Dans la cyclohexylamine, le doublet de l'azote est plus disponible que dans l'aniline. Dans l'aniline, le doublet de N se délocalise avec des  $e\pi$  du noyau benzénique (effet + M du groupe  $\text{NH}_2$ ).

Dans l'acide conjugué  $\phi \text{ NH}_3^+$  L'étendue de la délocalisation électronique est moins grande que dans  $\phi \text{ NH}_2$ , l'aniline sera donc peu basique.

On a donc la cyclohexylamine plus basique de l'aniline.

- c. L'avancement  $\xi$  de la réaction de dosage sera donné par la quantité de matière de l'acide conjugué  $R \text{ NH}_3^+$  ou  $\phi \text{ NH}_3^+$ .

$$\frac{dn_i}{v_i} = d\xi$$

- d. A l'équivalence on aura fait réagir une quantité de matière d'acide égale à celle de base existant dans la solution.

$$n_A = C_A V_A = n_B = C_B V_B$$

à l'équivalence :

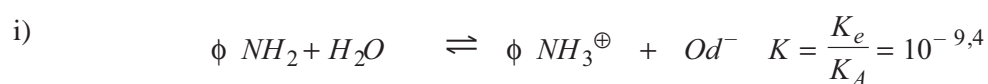
$$V_A = V_E = \frac{0,050 \times 50,0}{0,100}$$

$$V_e = 25 \text{ mL} \quad \text{et} \quad \xi_e = n_B = 50,0 \cdot 10^{-3} \times 0,050 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

### Étude du dosage pH-métrique.

- 3.2. a. Électrodes : de mesure : électrode de verre  
de référence : électrode au calomel saturé
- b. Réglages préliminaires : on règle l'origine et la pente ( $\Delta E = a + b \text{ pH}$ ) à l'aide de solutions tampons  $\text{pH} = 7$  et  $\text{pH} = 4$ .
- c. Calculs des pH :

- Pour  $V_a = 0$



RP :  $C = 0,050 \text{ mol.L}^{-1}$

$$C - \omega \qquad \qquad \qquad \omega \qquad \qquad \omega \qquad K = \frac{\omega^2}{C - \omega}$$

$$\omega \ll C \Rightarrow \omega = \sqrt{KC} = 4,46 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{pH} = 8,6$$

On a bien :  $\omega \ll C$

On vérifie que  $h \ll \omega$  (c'est-à-dire que l'autoprotolyse de l'eau des  $\ll$  devant la RP).

$$\Rightarrow \text{pH} = 8,6$$

- ii) Pour  $R \text{ NH}_2$  même calcul :

$$K = 10^{-3,3} \qquad \omega = \sqrt{KC} = 5.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow pH = 11,7$$

$\omega \ll C$  à  $10^{-1}$  près (correct puisque les PK sont donnés avec une décimale) et on a bien :

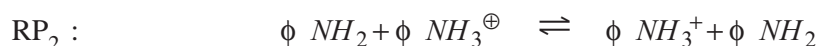
$$h \ll \omega \Rightarrow pH = 11,7$$

sinon on résout  $K = \frac{\omega^2}{C - \omega}$  et même résultat.

• Pour  $V_a = \frac{1}{2} V_e$



$$\text{RP}_1 : \frac{\frac{C_B V_B}{V_A + V_B}}{\frac{C_B V_B}{2(V_A + V_B)} + \frac{C_A V_A}{V_A + V_B}} = \frac{C_B V_B - C_A V_A}{V_A + V_B} \quad h = \varepsilon \quad \frac{C_A V_A}{V_A + V_B} = \frac{C_B V_B}{2(V_A + V_B)}$$



$K = 1$  ne modifie pas l'état précédent du système.

$$\Rightarrow pH = pK_A = 4,6$$

On vérifie que les espèces dont on n'a pas parlé (ici  $OH^-$ ) sont bien  $\ll$  devant celles dont on a parlé.

$$\text{Ici } \omega \ll h : \Rightarrow pH = 4,6$$

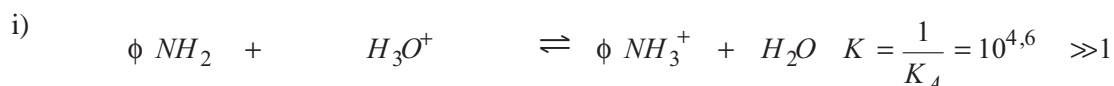


$$\text{même démarche : } \Rightarrow pH = pK_A = 10,7$$

$$\text{et } \omega = 10^{-3,3} \ll \frac{C_B V_B}{2(V_A + V_B)} \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}$$

$$\Rightarrow pH = 10,7$$

• Pour  $V_a = V_e$



$$\text{RP}_1 : \frac{\frac{C_B V_B}{V_A + V_B}}{\varepsilon + \frac{C_B V_B}{V_A + V_B}} = \frac{\frac{C_A V_A}{V_A + V_B}}{\varepsilon + \frac{C_B V_B}{V_A + V_B}}$$

$$\phi \text{ NH}_3^+ + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \phi \text{ NH}_2 + \text{H}_3\text{O}^+ \quad \text{H}_3\text{O}^+$$

$$\text{RP}_2 : \quad \frac{C_B V_B}{V_A + V_B}$$

$$\frac{C_B V_B}{V_A + V_B} - h \quad h \quad h$$

$$K = \frac{h^2}{\frac{C_B V_B}{V_A + V_B} - h} \quad h \ll \frac{C_B V_B}{V_A + V_B} \Rightarrow \text{pH} = 3,0$$

On a bien  $h \ll \frac{C_B V_B}{V_A + V_B}$  à  $10^{-1}$  près et  $\omega \ll h$ .

ii) Même étude  $\Rightarrow \text{pH} = 6,1$  et  $\omega \ll h$ .

• Pour  $V_a = 2 V_e$

$$\text{i) } \quad \phi \text{ NH}_2 + \text{H}_3\text{O}^+ \rightleftharpoons \phi \text{ NH}_3^+ + \text{H}_2\text{O} \quad K = 10^{4,6}$$

$$\text{RP}_1 : \quad \frac{C_B V_B}{V_A + V_B} \quad \frac{C_A V_A}{V_A + V_B}$$

$$\varepsilon \quad \frac{C_A V_A - C_B V_B}{V_A + V_B} \quad \frac{C_B V_B}{V_A + V_B}$$

$$\text{RP}_2 : \quad \text{H}_3\text{O}^+ + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O} + \text{H}_3\text{O}^+ \quad K = 1$$

ne modifie pas bilan des espèces précédent.

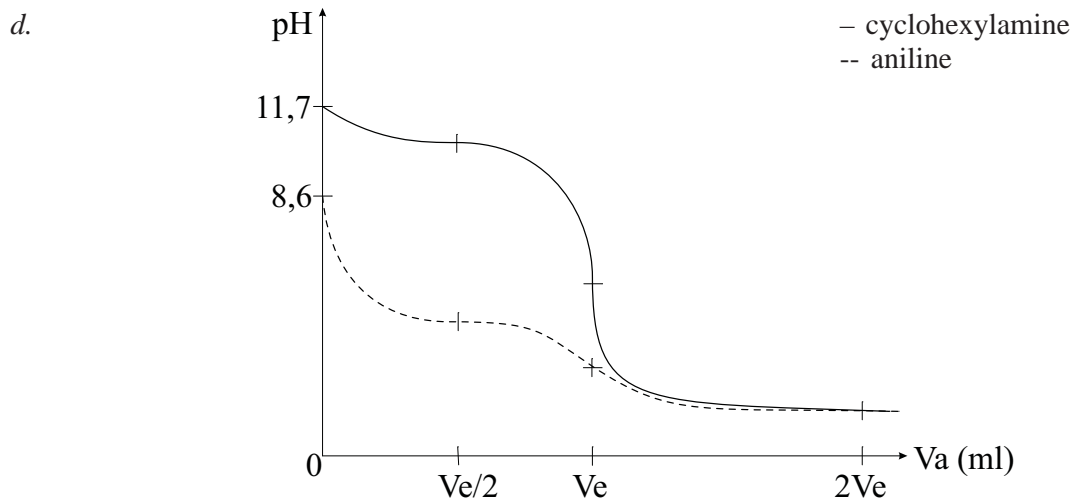
$$\Rightarrow \text{pH} = -\log \frac{C_A V_A - C_B V_B}{V_A + V_B} = 1,6 \quad \omega \ll h$$

ii) Pour  $R \text{ NH}_2$  même démarche et  $\text{pH} = 1,6$ .

Résultats :

$V_a$	0	$V_e / 2$	$V_e$	$2 V_e$
$\text{pH}$ $\phi \text{ NH}_2$	8,6	4,6	3,0	1,6
$\text{pH}$ $\text{C}_6\text{H}_{11}\text{NH}_2$	11,7	10,7	6,1	1,6





Le dosage de la cyclohexylamine sera précis (bon saut de  $pH$ ) contrairement à celui de l'aniline (faible saut de  $pH$ ).

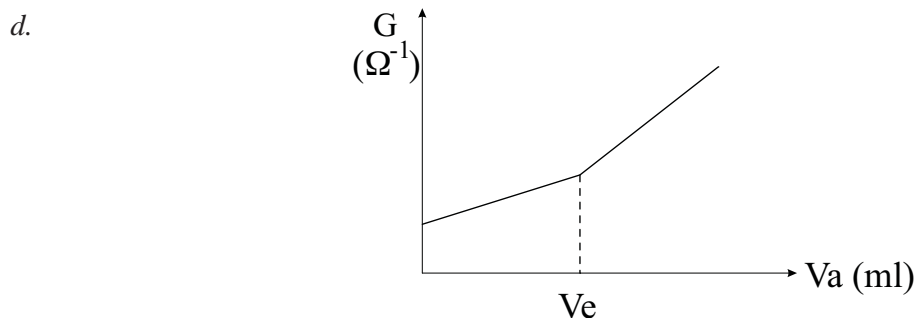
### Étude du dosage conductimétrique

3.3. a. On mesure la conductance  $G = \frac{1}{R}$  de la solution (ou plus exactement du parallélépipède de solution compris entre les deux plaques de la cellule du conductimètre) en fonction du volume d'acide versé (pour le cas traité ici).

b. Tension alternative pour éviter le phénomène d'électrolyse.

c. On ajoute de l'eau à la solution d'aniline pour pouvoir négliger la dilution lors de l'ajout d'acide titrant et aussi avoir des segments de droite pour  $\frac{1}{R} = f(V_e \text{ versé})$ .

Si l'on ne peut pas négliger la dilution il faudra tracer  $\frac{1}{R} (V_B + V_a) = f(V_a)$  pour obtenir des segments de droite.



Les molécules comme  $\phi NH_2$  ne conduisent pas.

Lorsque l'on verse des ions  $H_3O^+ + Cl^-$ ,  $H_3O^+$  est consommé mais il y a création d'ions  $\phi NH_3^+$ .

La conductance, faible au départ ( $\phi NH_2$  et  $H_2O$  en solution) augmente grâce aux  $Cl^-$  et  $\phi NH_3^+$ .

Quand on est après l'équivalence, les ions  $H_3O^+$  ajoutés ne réagissent plus donc la conductance augmente plus vite car les ions  $H_3O^+$  sont très mobiles (plus que  $\phi NH_3^+$ ) (et bien sûr on ajoute aussi des  $Cl^-$ ).

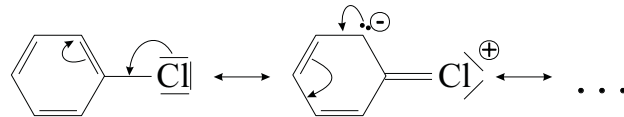
## 4. Propriétés nucléophiles.



réaction de substitution nucléophile  $SN_2$  (halogénure de classe primaire).

b.  $C_6H_{11}\bar{N}H_2$  plus nucléophile que l'aniline (doublet de  $N$  engagé dans la délocalisation  $\bar{e}$  avec les  $\bar{e} \pi$  du noyau  $\phi$ ). On obtient donc  $CH_3CH_2CH_2 - \bar{N}H - C_6H_{11}$  ou  $CH_3CH_2CH_2 - \bar{N}H - \phi$ .

c. La réaction n'a pas lieu avec le chlorobenzène.

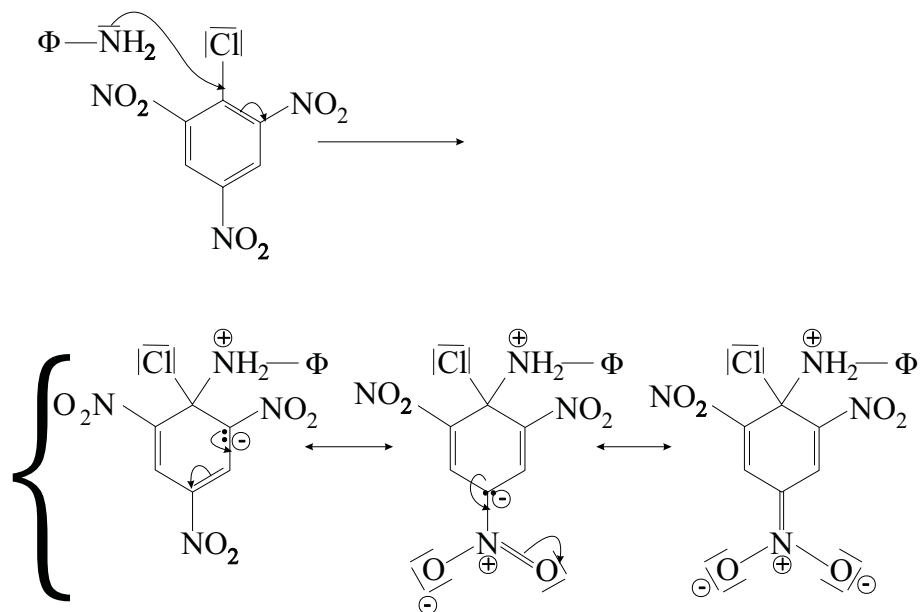


La liaison  $C-Cl$  est intermédiaire entre simple et double et est donc beaucoup plus difficile à casser.

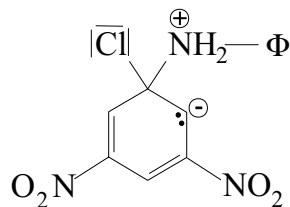
4.2. a. La réaction avec le 1-chloro-2,4,6-trinitrobenzène et l'aniline : on a une substitution nucléophile aromatique bimoléculaire rendue possible par la présence des groupes  $NO_2$  très désactivants.

b.

c.



d. L'aniline ne réagit pas avec le 1-chloro-3,5-dinitrobenzène. En effet les groupements nitro ne participent plus à la délocalisation du doublet électronique créé :



cet intermédiaire trop instable n'est donc pas créé.

- 4.3. a. Le produit P absorbe à 430 nm, longueur d'onde correspondant au violet-bleu d'où le composé est jaune.

b. Loi de Beer-Lambert :

$$\underbrace{A}_{\text{absorbance}} = \underbrace{\varepsilon_0}_{\substack{\text{caractéristique de la substance,} \\ \text{pour une } \lambda \text{ donnée}}} \underbrace{l}_{\substack{\text{épaisseur de la cuve} \\ \text{(ou de la solution absorbante)}}} \underbrace{C}_{\substack{\text{concentration de la solution} \\ \text{absorbante}}}$$

Pour la réaction  $An + R \rightarrow P$  seul P absorbe :

$$A = \varepsilon_0 l [P]$$

$$= \varepsilon_0 l \frac{\xi}{V}$$

- 4.4. a. Vitesse absolue :

$$V_{abs} = -\frac{dn_{(An)}}{dt} = -\frac{dn_{(R)}}{dt} = +\frac{dn_{(P)}}{dt}$$

- b. Vitesse volumique :

$$v = -\frac{d[(An)]}{dt} = -\frac{d[R]}{dt} = +\frac{d[P]}{dt}$$

$$v = k [An]^\alpha [R]^\beta$$

- c. Le temps de demi-réaction est le temps pour lequel la moitié de la quantité initiale du réactif limitant a disparu. Si la réaction a un ordre partiel par rapport au réactif limitant égal à 1 et si les autres réactifs sont introduits en quantité très supérieure.

Pour une réaction d'ordre 1  $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$  est donc indépendant de la concentration initiale. (On retrouverait une même situation pour une réaction d'ordre  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{2}$  pour un mélange équimolaire).

- 4.5. a. Études cinétiques réalisées  $\Rightarrow$  courbes (1), (2) et (3) ;

Le réactif limitant est (R).  $[A_n] \gg [R]$  dégradation de l'ordre. La courbe (1) tend vers une limite, donc  $A_\infty = 0,3$  on a alors une quantité de matière de (P) égale à celle de (R) initiale.

Le temps de demi-réaction correspond donc à une absorbance  $\frac{A_\infty}{2}$ , ici 0,15, donc  $t_{1/2} = 1,7$  s (lu sur la courbe). Si l'on change l'origine de la courbe (1), par exemple en prenant pour origine  $t = 1$  s et  $A = 0,1$ , l'absorbance pour  $t_\infty$  est alors  $0,3 - 0,1 = 0,2$  dans notre nouveau système  $t_{1/2}$  correspond à  $A = 0,1$  c'est-à-dire 0,2 dans les anciennes coordonnées. On lit alors  $t_{1/2} = 1,7$  s dans les nouvelles coordonnées. On peut reprendre plusieurs fois cette démarche et on retrouve la constance de  $t_{1/2} = 1,7$  s ce qui est caractéristique d'une réaction d'ordre 1.

Toute autre étude menant à la détermination de l'ordre 1 par rapport à (R) était acceptable.

On a donc :

$$\beta = 1$$

et :

$$v = k [R] [An]^\alpha \quad \text{et} \quad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k [An]^\alpha}$$

$t_{1/2}$  correspond à une absorbance de 0,15 donc pour les trois expériences réalisées on a :

	1	2	3
$t_{1/2}$ (s)	1,7	3,4	6,8

donc : 
$$\frac{Ln_2}{k} = 1,7 \times (0,260)^\alpha = 3,4 \times (0,100)^\alpha = 6,8 \times (0,050)^\alpha$$

On a donc : 
$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad v = k [R] [An]$$

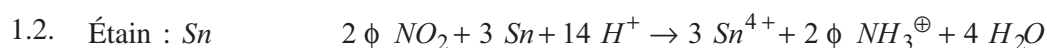
4.5. b. Et : 
$$k = 2,04 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$$

## DEUXIÈME PARTIE

### SYNTHÈSE DE L'ANILINE

#### 1. Équation-bilan.

Réduction du nitrobenzène en aniline :



1.3. On ajoute ensuite de la soude pour récupérer  $\phi \text{ NH}_2$  et non  $\phi \text{ NH}_3^\oplus$  et neutraliser l'acide chlorhydrique en excès.

$$\begin{array}{lll} \phi \text{ NO}_2 & M = 123 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} & \text{Sn} & M = 118,7 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} & \phi \text{ NH}_2 & M = 93 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Rightarrow n_{\phi \text{ NO}_2} = 0,203 \text{ mol} & & n_{\text{sn}} = 0,379 \text{ mol} & & n_{\phi \text{ NH}_2} = 0,148 \text{ mol} \\ r = \frac{n_{\phi \text{ NH}_2}}{n_{\phi \text{ NO}_2}} = 0,74 & & & & (\phi \text{ NO}_2 \text{ réactif limitant}) \end{array}$$

#### 2. Étude du diagramme binaire liquide - vapeur des mélanges d'eau et d'aniline.

2.1. a. Les portions de courbe miscibles à l'état liquide sont les courbes  $CC_0$  et  $AA_0$  du diagramme 2a.

b. Saniline = 3,6 g pour 100 g d'eau donc à saturation dans l'eau :

$$x_{\phi \text{ NH}_2} = \frac{n_{\phi \text{ NH}_2}}{n_{\phi \text{ NH}_2} + n_{\text{H}_2\text{O}}} = 6,9 \cdot 10^{-3}$$

c. La fraction molaire de l'eau à saturation dans l'aniline nous est donnée par l'abscisse du point  $C_0$  ( $t = 25^\circ\text{C}$ ) :

$$x_{\phi \text{ NH}_2} = 0,77$$

soit pour :

$$x_{\text{H}_2\text{O}} = 0,23$$

2.2. a. Le point B correspond à l'hétéroazéotrope.

b. Nature des phases dans les différents domaines :

- ① une phase vapeur : eau et aniline,
- ② phase vapeur (eau + aniline) et phase liquide (solution d'aniline saturée d'eau),
- ③ deux phases liquides : eau saturée d'aniline et aniline saturée d'eau,
- ④ une phase liquide : aniline saturée d'eau.

2.3. a. 50 mL d'eau + aniline  $\Rightarrow x_{\phi NH_2} = 0,50$

$$x_{\phi NH_2} = \frac{\frac{n_{\phi NH_2}}{93}}{\frac{n_{\phi NH_2}}{93} + \frac{50}{18}} = 0,50 \Rightarrow n_{\phi NH_2} = \mathbf{258,3 \text{ g}}$$

b. On est à 25°C. La composition des phases en présence est donnée par les abscisses des points  $A_0$  et  $C_0$  donc une phase liquide d'eau saturée en aniline (c'est-à-dire eau pratiquement pure  $x = 0,0069$ ) et une phase liquide d'aniline saturée d'eau avec  $x_{\phi NH_2} = 0,77$  ( $C_0$ ).

On peut appliquer la règle des moments chimiques pour connaître la quantité de matière de ces deux phases en présence :

$$\frac{n_{(A_0)}}{n_{(C_0)}} = \frac{0,77 - 0,50}{0,50 - 0} = 0,54 \quad \text{et} \quad n_{(A_0)} + n_{(C_0)} = n_T$$

avec :

$$n_T = \frac{m_{\phi NH_2}}{M_{\phi NH_2}} + \frac{m_{H_2O}}{M_{H_2O}} = 5,56$$

$\Rightarrow$  pour la phase liquide d'eau saturée en aniline :

$$n_{(A_0)} = \mathbf{1,95 \text{ mol}}$$

et pour la phase liquide d'aniline saturée d'eau :

$$n_{(C_0)} = \mathbf{3,61 \text{ mol}}$$

2.4. a. On chauffe le mélange de composition initiale :

$$x_{\phi NH_2} = 0,50$$

b. A la température de 98,5°C on voit apparaître la première bulle de vapeur. Sa composition est donnée par l'abscisse du point B. C'est la composition de l'hétéroazéotrope.

c. La vapeur étant plus riche en eau qu'en aniline, le mélange liquide s'enrichit en aniline, continue à bouillir à la température de 98,5°C jusqu'à ce que la composition du mélange liquide atteigne celle du point C.

### 3. Hydrodistillation.

3.1. Montages d'hydrodistillation : in-situ ou ex-situ.

3.2. On réalise un tel montage pour isoler ou récupérer un composé organique non miscible à l'eau, d'autres constituants ou éliminer l'eau présente dans le milieu organique.

*Exemple* : extraction du limonène de l'écorce d'orange,  
de l'essence de lavande de la fleur de lavande,  
séparation de l'orthonitrophénol du paranitrophénol,  
(l'isomère est ortho est insoluble dans l'eau contrairement au para).

Température d'ébullition élevée et nécessité d'hétéroazéotrope.

- 3.3. On utilise une grande proportion d'eau dans la technique d'hydrodistillation pour récupérer le produit organique cherché sous la forme d'hétéroazéotrope et donc éviter de trop chauffer ce qui pourrait dégrader le produit.
- 3.4. *a.* Le distillat refroidi est constitué de deux phases liquides eau et aniline à saturation.
- b.* Le chlorure de sodium augmente la densité de la phase aqueuse et diminue la solubilité de l'aniline dans l'eau. Cela permet donc une meilleure séparation de l'aniline et l'eau.
- c.* Extractions à l'éther - l'aniline est soluble dans l'éther (plus que dans l'eau). L'éther permet donc de récupérer l'aniline dissoute dans l'eau.
- d.* On manipule de l'éther loin d'une flamme (liquide très inflammable).  
Ne pas re-chauffer de l'éther distillé à pression atmosphérique. La présence de peroxydes peut entraîner des explosions.  
Ventilation.

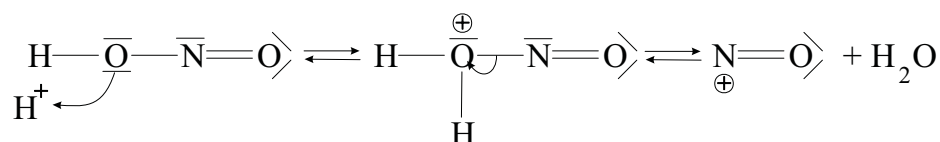
### TROISIÈME PARTIE

#### SYNTHÈSE DE COLORANTS

##### 1. Généralités sur la synthèse.

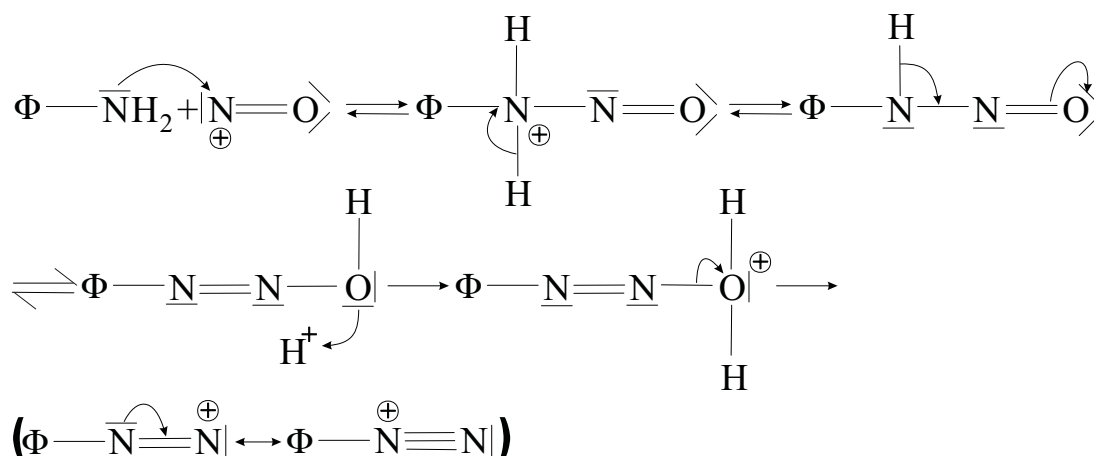
- 1.1. William Perkin 1856 dépôt de brevet pour le mauve, colorant synthétique à base d'aniline.  
1850 essor de la chimie industrielle des colorants

- 1.2.  $HNO_2$  acide nitreux :

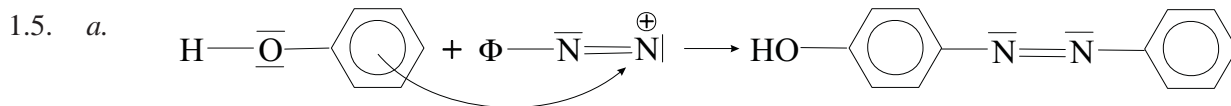
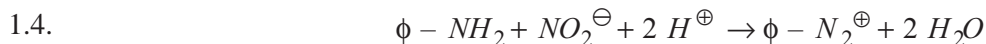


$NO^{\oplus}$  pourra réagir sur l'aniline.

- 1.3.



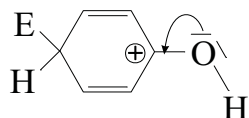
Ion phényldiazonium +  $H_2O$ .



Réaction quantitative en para.

b. C'est une substitution électrophile aromatique. Réaction sous contrôle cinétique. L'intermédiaire de Wheland le plus stable se forme préférentiellement.

Ici :



stabilisation par l'effet + M des doublets de l'oxygène.

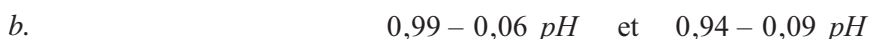
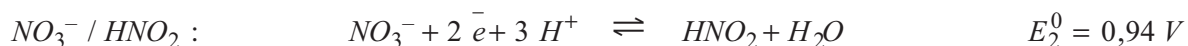
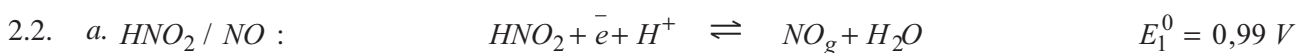
On avait une stabilisation analogue avec E substitué en ortho mais problème d'encombrement stérique.

Avec E en méta, on ne retrouve pas la charge  $\oplus$  de l'intermédiaire sur le carbone porteur du groupement OH (écrire les formes mésomères des trois intermédiaires de Wheland).

## 2. Étude du diagramme potentiel-pH de certains constituants de l'azote.

2.1. Degrés d'oxydation :

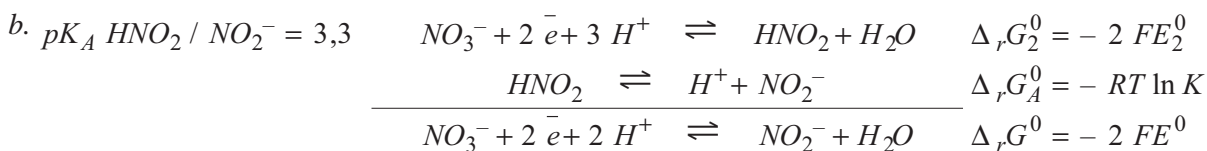
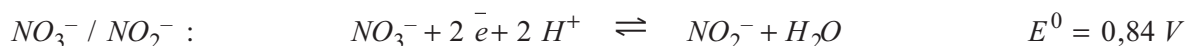
+ II	+ III	+ V
NO	HNO <sub>2</sub> NO <sub>2</sub> <sup>-</sup>	NO <sub>3</sub> <sup>-</sup>



c.  $\Rightarrow$  HNO<sub>2</sub> oxydant le plus fort oxyde HNO<sub>2</sub> réducteur - HNO<sub>2</sub> se dismute :



$$\text{et :} \quad - RT \ln K = - 2 FE_1^0 + 2 FE_2^0 \quad \Rightarrow \quad K = 46$$



$$\text{et :} \quad - 2 FE^0 = - 2 FE_2^0 - RT \ln K_A \quad \Rightarrow \quad E^0 = E_2^0 - 0,03 pK_A = 0,84 V$$

c. Les droites relatives aux couples  $NO_2^- / NO$  et  $NO_3^- / NO_2^-$  sont respectivement d'équation :

$$E = 1,19 - 0,12 \text{ pH} \quad \text{et} \quad E = 0,84 - 0,06 \text{ pH}$$

elles se coupent pour  $\text{pH} = 5,8$ .

Pour  $\text{pH} < 5,8$  :  $NO_2^-$  se dismute en  $NO$  et  $NO_3^-$  et pour  $\text{pH} > 5,8$  on n'a plus dismutation (domaines de prédominance de  $NO_2^-$  disjointes pour  $\text{pH} < 5,8$ ).

2.4. a. Il n'existe pas de bouteilles d'acide  $HNO_2$  (on vient de voir que  $HNO_2$  est thermodynamiquement instable et se dismute en  $NO$  et  $NO_3^-$ ).

b. On peut réaliser une solution de nitrite de sodium puisque  $NO_2^-$  est thermodynamiquement stable pour  $\text{pH} > 5,8$ .

c. Il faut ajouter la solution de nitrite de sodium au mélange aniline - acide chlorhydrique et non l'aniline au mélange acide chlorhydrique - nitrite de sodium.

En effet  $NO_2^- + H_3O^+ \rightleftharpoons HNO_2 + H_2O$  mais  $HNO_2$  instable se dismute en  $NO_3^-$  et  $NO_g$  (réaction écrite précédemment). On observe alors un dégagement de vapeurs rousses de  $NO_2$  résultant de l'oxydation spontanée à l'air de  $NO$  incolore.

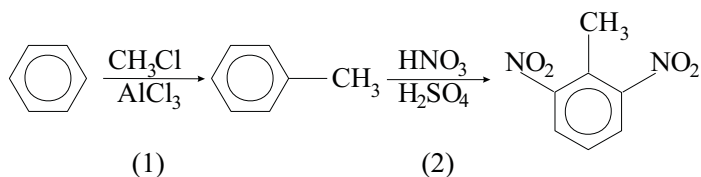
d. Il ne faut pas laisser aux élèves l'initiative du «sens des mélange» car les vapeurs de  $NO_2$  sont toxiques.

## QUATRIÈME PARTIE

### UTILISATION DE L'ANILINE POUR LA SYNTHÈSE DES TDI ET DU MDI

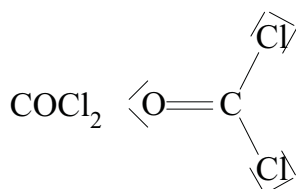
#### 1. Synthèse d'un TDI, le 2,6-diisocyanatotoluène, et du MDI.

1.1. Synthèse du 2,6-dinitrotoluène :



Dans la seconde étape il faut éviter la formation trinitrotoluène explosif, il faut donc contrôler la température du mélange.

1.2. a. Phosgène :



b. Gaz toxique qui a servi de gaz de combat lors de la Première Guerre mondiale.







# CAPES

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition de physique avec applications - Session : 1998

## PREMIER PROBLÈME

### DÉTERMINATION DE L'ACCÉLÉRATION DE LA PESANTEUR À L'AIDE D'UN PENDULE PESANT

#### Partie I

I-1 a. La relation fondamentale de la dynamique, appliquée dans le référentiel du laboratoire au point matériel P, s'écrit  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$ , d'où, par projection sur l'axe orthoradial :  $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta$ , avec  $\omega_0^2 = g/l$ .

b. Le moment cinétique en O du point matériel P vaut  $ml^2\dot{\theta}\vec{u}_z$ . Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe fixe Oz s'écrit ainsi :  $\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = -mgl \sin \theta$ , puisque le moment de  $\vec{T}$  est nul.

c. Méthode énergétique : la tension  $\vec{T}$  ne travaille pas, et le poids dérive de l'énergie potentielle  $E_p = mgl(1 - \cos \theta)$ ; ainsi  $E_C + E_p = E = cste$ , soit :  $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = cste$ ; par dérivation par rapport au temps et élimination de la solution triviale  $\dot{\theta} = 0$ , on retrouve bien l'équation différentielle obtenue au I.1.a. Bien entendu, la méthode lagrangienne était une autre solution acceptable.

I-2 a.  $\frac{g}{l} = \omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$ , soit  $g = \frac{4\pi^2 l}{T_0^2}$ .

b.  $[g] = [LT^{-2}]$ ; or  $\left[\frac{4\pi^2 l}{T_0^2}\right] = [LT^{-2}]$ , également.

c.  $g = 9,78 \text{ m.s}^{-2}$ .

I-3 a.  $\Delta T_0$  est plus faible (si l'on admet que la principale cause d'incertitude est due au déclenchement et à l'arrêt du dispositif chronométrique,  $\Delta T_0$  est divisé par 100); la précision de mesure de g est meilleure, mais l'exactitude inchangée (sans recentrer l'intervalle, on diminue sa largeur).

b. On améliore, cette fois, l'exactitude de la mesure de g (l'intervalle est recentré, mais sa largeur n'est pas modifiée).

#### Partie II

II-1  $\sigma_{Oz} = J_{Oz}\dot{\theta}$ ; la liaison pivot étant idéale, le moment par rapport à Oz des actions d'axe est nul. Ainsi, le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe fixe Oz de rotation donne, dans le cas des très petites oscillations :  $J_{Oz}\ddot{\theta} = -M'gh_G \theta$ , d'où  $T = 2\pi \left( \frac{J_{Oz}}{M'gh_G} \right)^{1/2}$ .

- II-2 a. De par la symétrie sphérique,  $J_{Gz} = J_{Gx} = J_{Gy} = \frac{2}{3}J_G$ , soit :

$$J_{GZ} = \frac{2}{3} \iiint r^2 dm = \frac{2}{3} \int_0^a r^2 \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3} 4\pi r^2 dr = \frac{2}{5} ma^2$$

- b. Oz et Gz étant parallèles et distants de l, on obtient, par application du théorème de Huygens :

$$T = 2\pi \left( \frac{l^2 + \frac{2}{5}a^2}{gl} \right)^{1/2}$$

c.  $\frac{\delta T_1}{T_0} = \left( 1 + \frac{2a^2}{5l^2} \right)^{1/2} - 1 \approx \frac{a^2}{5l^2}$ , à l'ordre le plus bas.

d.  $\delta T_1 \approx T \frac{\delta T_1}{T_0} \approx 71,9 \mu s$ .

- II-3 a.  $J_{OZ_{fil}} = \int_0^l u^2 \frac{m'}{l} du = m'l^2/3$  ; la correction sur le moment d'inertie par rapport à Oz vaut donc :

$$\delta J_{Oz} = m'l^2/3$$

- b.  $M'h_G = ml + m'l/2$ , par projection de la relation  $M'\overline{OG} = m\overline{OG_1} + m'\overline{OG_2}$  ; ainsi,

$$\delta(M'h_G) = m'l/2$$

c.  $\frac{\delta T_2}{T_0} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta J_{Oz}}{ml^2} - \frac{\delta(M'h_G)}{ml} \right] = -\left( \frac{m'}{12m} \right)$ .

d.  $\delta T_2/T_0 = -1,33 \cdot 10^{-4}$  d'où  $\delta T_2 = -463 \mu s$ .

### Partie III

- III-1 a. La direction est verticale et le sens ascendant.

La norme est égale à  $m_a g$ .

- b. La boule baignant intégralement dans l'air, les actions de pression extérieure constituent un glisseur dont l'axe passe par le centre d'inertie de l'air déplacé, soit ici le centre d'inertie de la boule.

- III-2 La résultante du poids et de la « poussée d'Archimède » vaut  $(m - m_a)\vec{g}$ , ainsi :

$$T = 2\pi \left( \frac{ml}{g(m - m_a)} \right)^{1/2}$$

III-3  $\frac{\delta T_3}{T_0} = -\frac{1}{2} \left( \frac{-m_a}{m} \right) = +\frac{m_a}{2m}$ .

**III-4**  $PV = \frac{m_a}{M} RT'$  ( $T'$  étant la température absolue). Ainsi  $\delta T_3 \approx \frac{T MPV}{2 mRT'}$  et  $\delta T_3 \approx 298 \mu s$ .

### Partie IV

**IV-1 a.** La force s'oppose au mouvement relatif de la boule par rapport à l'air; la puissance  $\vec{F} \cdot \vec{v}$  est négative.

**b.** La projection orthoradiale de la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :  $ml\ddot{\theta} = -mg\theta - \beta l\dot{\theta}$ , soit  $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ , avec  $2\lambda = \frac{\beta}{m}$  et  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ . Le mouvement étant supposé pseudo-périodique, la

pseudo-pulsation vaut :  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}$ .

**c.**  $\omega^2 - \omega_0^2 = -\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2$ .

**d.**  $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$ , donc  $\frac{8\pi^2}{T^3} \delta T_4 = -\delta(\omega^2) = \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2$ ;  $\delta T_4 = \frac{\beta^2 T^3}{32\pi^2 m^2} = 3,3 \cdot 10^{-2} \mu s$ ; ainsi  $\delta T_4$  est négligeable.

**IV-2 a.**  $V = l\dot{\theta}$  est de l'ordre de  $\theta_0 \omega_0 l = \theta_0 l \frac{2\pi}{T}$ ;  $R_B$  est de l'ordre de  $10^3$ , L étant égal à  $2a$ .

**b.**  $R_F$  est de l'ordre de la dizaine d'unités, L étant alors égal à  $d=0,32$  mm.

**c.** Ce nombre permet une classification des écoulements (laminaires/turbulents). Le comportement linéaire est plus vraisemblable si R est faible. Il y a alors prépondérance des termes diffusifs sur les termes convectifs.

### Partie V

**V-1** L'énergie mécanique est constante donc, sur chaque  $\frac{1}{2}$  période,  $\dot{\theta} = f(\theta)$  d'où la périodicité du mouvement.

**V-2**  $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \left( \theta - \frac{\theta^3}{6} \right)$

**V-3**  $\dot{\theta}(t) = \theta_0 f'(\tau) \frac{d\tau}{dt} = \theta_0 f'(\tau) \cdot \omega$ ; de même,  $\ddot{\theta}(t) = \theta_0 f''(\tau) \frac{d\tau}{dt} = \theta_0 f''(\tau) \cdot \omega^2$ , ainsi :

$$\omega^2 f''(\tau) + \omega_0^2 \left( f(\tau) - \frac{\theta_0^2}{6} f^3(\tau) \right) = 0.$$

V-4 a.  $\alpha) f_o'' + f_o = 0$

$\beta) f_o(\tau) = \cos(\tau)$  compte tenu des conditions initiales.

$$\gamma) f_1'' + f_1 = \frac{\cos^3 \tau}{6} + b \cos \tau = \frac{\cos 3\tau}{24} + \left(b + \frac{1}{8}\right) \cos \tau$$

$\delta)$  D'après le renseignement fourni dans l'énoncé, la périodicité de la solution complète (somme de trois termes, dont deux ont un caractère périodique évident) de l'équation différentielle impose la

valeur  $b = -\frac{1}{8}$ . Ainsi  $\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{8}\right)$ .

b.  $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{\varepsilon}{16}\right)$ , soit  $T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_o^2}{16}\right)$ .

c.  $\frac{\delta T_5}{T} = \frac{\theta_o^2}{16}$  et  $\delta T_5 = 596 \mu\text{s}$ .

V-5 Si  $n > 1$ ,  $\theta_{o_n} < \theta_{o_1}$  et  $T_n < T_1$ ; ainsi,  $T_n$  se rapprochant de  $T_0$ , la correction relative est donc inférieure à  $\theta_{o_1}^2/16$ .

## Partie VI

VI-1  $\overline{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ ; il existe donc un champ scalaire  $V$  (nommé potentiel des vitesses) dont  $\vec{v}$  soit le gradient (étant donné les symétries du modèle proposé, on ne soulevait pas de difficulté relative au problème des « potentiels multifformes »).

VI-2 La relation  $\text{div} \vec{v} = 0$  s'écrit aussi  $\Delta V = 0$ ; on reconnaît la forme du potentiel créé par un dipôle électrostatique; ce potentiel vérifie, pour  $r \neq 0$  l'équation de Poisson-Laplace  $\Delta V = 0$ , la région  $r \neq 0$  étant vide de charge.

VI-3  $v_r = \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{2A(t)\cos\alpha}{r^3}$  et  $v_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = -\frac{A(t)\sin\alpha}{r^3}$ ; ainsi:  $\vec{v}(r \rightarrow \infty) = \vec{0}$ .

VI-4 a. Pour  $r \rightarrow a$ ,  $\vec{v}_1 \cdot d\vec{S} = 0$  soit  $0 = (\vec{v} - \vec{v}_0) \cdot \vec{u}_r = v_{r(a,\alpha)} - v_0 \cos\alpha$ , d'où:

$$A(t) = -v_0 \frac{a^3}{2}.$$

b.  $\frac{v_r}{v_0} = \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos\alpha$ ;  $\frac{v_\alpha}{v_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin\alpha$ ;  $v_\phi = 0$ .

VI-5  $E_C = \frac{1}{2} \iiint v^2 dm = \frac{\rho}{2} \iiint v_{(r,\alpha)}^2 dr \cdot r d\alpha \cdot r \sin\alpha d\varphi = \frac{\rho\pi a^3}{3} v_0^2 = \frac{1}{4} m_a v_0^2$ , donc  $\mathbf{K} = \frac{1}{2}$ .

$$\text{VI-6} \quad \omega^2 = \frac{mg}{l(m + Km_a)}, \text{ ainsi } \frac{\delta T_6}{T} = -\frac{\delta \omega}{\omega} = -\frac{1}{2} \frac{\delta(\omega^2)}{\omega^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{-Km_a}{m} \right), \text{ d'où :}$$

$$\delta T_6 = T \frac{Km_a}{2m} = K\delta T_3 = 351,6 \mu\text{s}.$$

$$\text{VI-7} \quad \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \delta m v^2 \right) = \vec{v} \cdot \delta m \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{v} \cdot \overline{\text{grad}P} d\tau''; \text{ or } \delta P_{ext} = -\text{div}(P\vec{v}) d\tau''.$$

Comme  $\text{div}\vec{v} = 0$  (incompressibilité de l'écoulement),  $\text{div}(P\vec{v}) = P \cdot \text{div}\vec{v} + \vec{v} \cdot \overline{\text{grad}P} = \vec{v} \cdot \overline{\text{grad}P}$  et, dans ces conditions :

$$\delta P_{ext} = \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \delta m v^2 \right).$$

### Partie VII

$$\text{VII-1} \quad \bar{T} = 3,4788 \text{ s} ; \sigma_T = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ s} ; \sigma_{Tm} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{10}} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ s}.$$

$$\text{VII-2 a. } \delta T = 483 \mu\text{s} \approx 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ s}.$$

$$\text{b. } \bar{T}_o = \bar{T} - \delta T \approx 3,4783 \text{ s}.$$

$$\text{VII-3 a. Au premier ordre, } \bar{g} = g(\bar{l}, \bar{T}_o) + f_l' \bar{\delta l} + f_{T_o}' \bar{\delta T}_o = g(\bar{l}, \bar{T}_o), \text{ par nullité de } \bar{\delta l} \text{ et de } \bar{\delta T}_o.$$

$$\text{b. De par l'indépendance, } \overline{\delta l \cdot \delta T_o} = \bar{\delta l} \cdot \bar{\delta T}_o \text{ est nul ; ainsi : } \overline{(g_i - g)^2} = f_l'^2 \bar{\delta l}^2 + f_{T_o}'^2 \bar{\delta T}_o^2,$$

$$\text{d'où } \left( \frac{\sigma_g}{\bar{g}} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_l}{\bar{l}} \right)^2 + 4 \left( \frac{\sigma_T}{\bar{T}_o} \right)^2.$$

$$\text{c. } \bar{g} = \frac{4\pi^2 \bar{l}}{\bar{T}_o^2} = 9,8036 \text{ ms}^{-2}.$$

$$\text{d. } \frac{\sigma_{g_m}}{\bar{g}} = 1,15 \cdot 10^{-4}.$$

e. La précision a bien l'ordre de grandeur attendu. On pouvait, en guise de conclusion, donner le degré de confiance d'un intervalle centré sur  $\bar{g}$ , de demi-largeur  $\Delta g$ , pour quelques valeurs du quotient

$$\left( \frac{\Delta g}{\sigma_{g_m}} \right), \text{ dans le cas gaussien.}$$

SECOND PROBLÈME  
TRANSFERTS THERMIQUES

**PARTIE I**

- I.1. I.1.1.** Les transferts thermique se font des zones chaudes vers les zones froides
- I.1.2.**  $P_{th}(x)$  en W et  $\lambda$  en  $W.K^{-1}.m^{-1}$
- I.1.3.** a. La quantité de chaleur vaut  $P_{th}(x).dt$ , elle s'écrit ainsi  $j_{th}(x)Sdt$   
 b. On a de même  $j_{th}(x+dx)S.dt$  en  $x+dx$ .  
 c.  $j_{th}(x+dx) = j_{th}(x)$  ainsi  $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ .
- I.2. I.2.1.** a.  $T(x) = T_A + (T_B - T_A)x/L$   
 b. On obtient une droite de pente négative.
- I.2.2.** a.  $P_{th}(x) = j_{th}(x).S$  or  $j_{th}$  ne dépend pas de  $x$ , donc  $P_{th}$  également.  
 b.  $R_{th} = L/(\lambda.S)$   
 - unité :  $W^{-1}.K$   
 c.  $P_{th}$  est l'analogie de l'intensité  $I$  et  $T$  l'analogie de la tension  $V$ .
- I.2.3.** a.  $P_{th}$  traverse les deux résistances, ainsi  $R_{th} = L_1/(\lambda_1.S) + L_2/(\lambda_2.S)$   
 b.  $R_{th} = R_{th1} + R_{th2}$   
 c. - Il faut sommer les puissances thermiques qui traversent chaque résistance thermique.  
 -  $R_{th}^{-1} = R_{th1}^{-1} + R_{th2}^{-1}$
- I.2.4.** a.  $R_{th1} = 5.10^{-3} W^{-1}.K$   
 b.  $P_{th1} = 4000 W$   
 c.  $R_{th2} = 0.079 W^{-1}.K$   
 d.  $P_{th2} = 250 W$   
 e. - A priori l'efficacité du double vitrage est grande, mais comme le souligne le texte la prise en compte des échanges conducto-convectifs modère très largement ces conclusions.



## PARTIE II

**II.1. II.1.1.**  $P_{th} = 2\pi rL \vec{j}_n(r) \cdot \vec{e}_r$

**II.1.2.** On intègre l'équation  $\frac{dT}{dr} = -\frac{P_{th}}{\lambda_g 2\pi rL}$  entre  $r_1$  et  $r_2$  et on établit :

$$R_{th1} = \frac{1}{\lambda_g 2\pi L} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

**II.1.3.**  $R_{th1} = 0.79 \text{ W}^{-1} \cdot \text{K}$

**II.1.4.** On retrouve un calcul analogue lors de la détermination de la résistance électrique de fuite entre l'âme et la gaine d'un câble coaxial.

**II.2. II.2.1.**  $R_{th2} = 1/(h2\pi r_2L)$

**II.2.2.**  $R_{th2} = 11 \text{ W}^{-1} \cdot \text{K}$

**II.2.3.** Ce sont les échanges conducto-convectifs qui déterminent la résistance thermique.

**II.3. II.3.1.**  $R_e = L/(\gamma\pi r_1^2)$

**II.3.2.**  $P_J = R_e I^2$

**II.3.3.**

$I \text{ (A)}$	10	20	30
$P_J \text{ (W)}$	1,15	4,61	10,4

**II.4. II.4.1.** -  $T(r_1) = T_a + (R_{th1} + R_{th2}) \cdot P_J$

-  $T(r_2) = T_a + R_{th2} \cdot P_J$

**II.4.2.**

$I \text{ (A)}$	10	20	30
$T(r_1) \text{ (°C)}$	38,5	79,5	147,5
$T(r_2) \text{ (°C)}$	37,5	75,5	139,5

**II.4.3.** Il y a donc bien danger de fusion de l'isolant pour  $I = 30 \text{ A}$ .

**II.4.4.** La loi des mailles fournit bien l'équation :  $T(r_1) = T_a + (R_{th1} + R_{th2}) \cdot P_J$

## PARTIE III

**III.1. III.1.1.** a. Il faut simplement remarquer que  $\mu c S dx$  représente la capacité thermique de la portion élémentaire de cylindre. On établit alors la relation demandée.

b. Le bilan énergétique s'écrit :

$$\mu c S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = j_{th}(x) S dt - j_{th}(x + dx) S dt = - \frac{\partial j_{th}}{\partial x} S dx dt$$

ainsi en utilisant la loi de Fourier

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

**III.1.2.** La loi des noeuds s'écrit :  $P_{th}(x, t) = P_{th}(x + dx, t) + \mu c S dx \frac{\partial T}{\partial t}$

$$\text{ainsi } \frac{\partial P_{th}}{\partial x} = -\mu c S \frac{\partial T}{\partial t}$$

b. Par définition de la résistance thermique :

$$T(x, t) - T(x + dx, t) = \frac{dx}{\lambda S} P_{th}(x, t) \text{ soit } \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{1}{\lambda S} P_{th}$$

c. On retrouve bien l'équation de la diffusion thermique.

**III.2. III.2.1.** La température est presque uniforme en raison de la bonne conductivité thermique du cuivre.

**III.2.2.** 
$$P_J R_{rs} = R_{rs} C_r \frac{dT_r}{dt} + T_r - T_s$$

On établit :

$$0 = R_{rs} C_s \frac{dT_s}{dt} + T_s - T_r + \frac{R_{rs}}{R_{sa}} (T_s - T_a)$$

**III.2.3.** a.  $T_r(\infty) = 120 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $T_s(\infty) = 40 \text{ }^\circ\text{C}$

b.  $C_r = 673 \text{ J.K}^{-1}$

c.  $C_s = 2003 \text{ J.K}^{-1}$

**III.2.4.** - les conditions initiales s'obtiennent par lecture,

- Les valeurs asymptotiques sont cohérentes,

- la durée du régime transitoire est de l'ordre de 1000 s,

- c'est un système à deux constantes de temps.

## PARTIE IV

**IV.1. IV.1.1. a.**  $P_{\max} = (T_{\max} - T_a) / (R_{jb} + R_{ba})$ .

b.  $P_{\max} = 4,375 \text{ W}$

c.  $T_b = 193 \text{ °C}$

d.  $P = 1,875 \text{ W}$

**IV.1.2. a.**  $R_{da} = 1,5 \text{ W}^{-1} \cdot \text{K}$

b.  $T_d = 55 \text{ °C}$

c. Un dissipateur de  $500 \text{ cm}^3$  convient.

**IV.2. IV.2.1. a.** un bilan énergétique s'écrit :

$$-\lambda_{Al} \frac{dT}{dx}(x).ab = -\lambda_{Al} \frac{dT}{dx}(x+dx).ab + h(T(x) - T_a).2adx$$

soit  $\frac{d^2T}{dx^2} - m^2(T - T_a) = 0$

b. -  $T = T_o$  : contact avec le corps isotherme.

$$-\lambda_{Al} \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h(T(L) - T_a) : \text{ exprime qu'il n'y a pas}$$

d'accumulation d'énergie en  $x = L$ .

c. On pose  $u = m\lambda_{Al}/h$  et on établit que :

$$\frac{T(x) - T_a}{T_o - T_a} = \frac{(1+u)e^{m(L-x)} - (1-u)e^{-m(L-x)}}{(1+u)e^{mL} - (1-u)e^{-mL}}$$

**IV.2.2. IV.2.2.1.**  $P'_{th} = h2aL(T_o - T_a)$

**IV.2.2.2.**  $P_{th} = hab(T_o - T_a)$

**IV.2.2.3.**  $\eta = 2L/b$

**IV.2.2.4.**  $\eta = 40$

**IV.2.2.5. a.** S de l'ordre de  $120 \text{ cm}^2$

**IV.2.2.5.b.** -  $R_{th} = 1/(hS)$  ;  $R_{th} = 5,5 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

**IV.2.2.5.c.** - valeur compatible avec celle du diagramme IV.1.2.c.

- ne prend pas en compte la nature du matériau, l'état de la surface ( mat, brillant ), la position du dissipateur ( horizontal, vertical ).

# CAPES

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition d'électronique - électrotechnique avec applications - Session : 1998

## PREMIER PROBLÈME

### 1) Etude du quartz

1.1

$$\text{soit } \underline{Z}_s = r + j\omega + \frac{1}{jC_s\omega} = r + \frac{1 - jC_s\omega^2}{jC_s\omega} = \frac{j r C_s \omega + 1 - j C_s \omega^2}{j C_s \omega}$$

$$\underline{Y}_Q = \frac{1}{\underline{Z}_Q} = \frac{1}{\underline{Z}_s} + jC_p\omega = jC_p\omega + \frac{jC_s\omega}{j r C_s \omega + 1 - j C_s \omega^2}$$

1.2  $r=0$

$$\underline{Y}_Q = \frac{1}{\underline{Z}_Q} = \frac{1}{\underline{Z}_s} + jC_p\omega = jC_p\omega + \frac{jC_s\omega}{1 - jC_s\omega^2}$$

$$\underline{Y}_Q = \frac{jC_p\omega(1 - jC_s\omega^2) + jC_s\omega}{1 - jC_s\omega^2} = \frac{j(C_p + C_s)\omega(1 - \frac{C_p C_s}{C_p + C_s} j\omega^2)}{1 - jC_s\omega^2}$$

$$\underline{Z}_Q = \frac{1}{j(C_p + C_s)\omega} \frac{1 - jC_s\omega^2}{1 - \frac{C_p C_s}{C_p + C_s} j\omega^2}$$

1.3  $Z_Q \rightarrow \infty$  quand  $\omega \rightarrow 0$

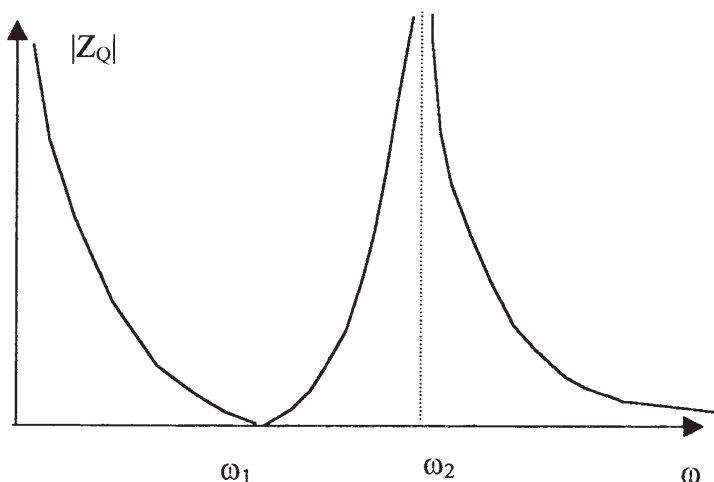
$$1.4 \omega_1^2 = \frac{1}{jC_s} \quad \omega_2^2 = \frac{(C_p + C_s)}{jC_s C_p} \quad C_{eq} = C_s + C_p$$

$$1.5 \omega_2^2 = \frac{1}{jC_s} \left(1 + \frac{C_s}{C_p}\right) = \omega_1^2 \left(1 + \frac{C_s}{C_p}\right) > \omega_1^2$$

1.6  $f_1$ : fréquence de résonance série  $Z_Q=0$

$f_2$ : fréquence de résonance parallèle  $Z_Q \rightarrow \infty$

1.7



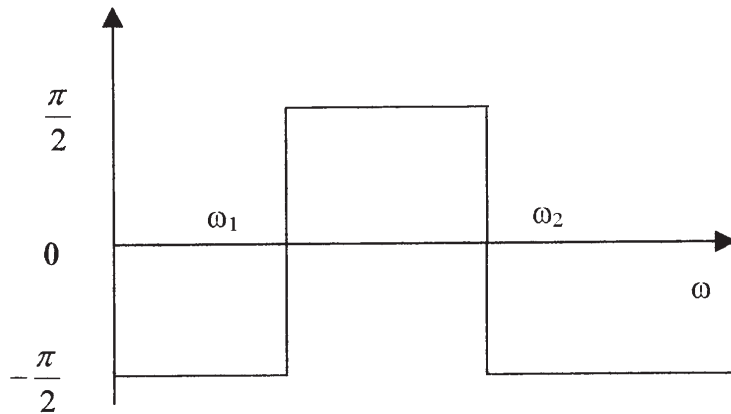
1.8 : A.N:

$$\omega_1 = 20588733 \text{ rd.s}^{-1} \text{ soit } f_1 = 3.276798 \text{ MHz}$$

$$\omega_2 = 20629869 \text{ rd.s}^{-1} \text{ soit } f_2 = 3.283345 \text{ MHz}$$

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 6547 \text{ Hz ou } \Delta\omega = 41136 \text{ rd/s}$$

1.9 a)



b) impédance capacitive pour  $\text{Arg}(\underline{Z}) = -\frac{\pi}{2}$

impédance inductive pour  $\text{Arg}(\underline{Z}) = \frac{\pi}{2}$

## 2. Etude de l'oscillateur

### 2.1 Inverseur CMOS

2.1.1 CMOS= Complementary Metal Oxide Semi conductor

2.1.2 L'inverseur possède une impédance d'entrée infinie, le courant absorbé est nul, la chute de tension dans  $R_{31}$  et  $R_{32}$  est nulle donc le régime statique est caractérisé par  $V_e = V_s$ , ce qui est

représenté par une droite passant par l'origine dans le plan de la caractéristique de l'inverseur; cette droite coupe la caractéristique au point:

$$V_e = V_s = \frac{V_{cc}}{2}$$

### 2.2 Association Inverseur quartz

2.2.1 Le bloc A correspond à l'inverseur qui fonctionne en régime linéaire autour de son point de fonctionnement tandis que le bloc  $\beta$  est constitué par le quartz,  $C_3$  et  $R_{32}$ .

2.2.2 A est donné par la pente de la caractéristique de l'inverseur:  $A = \frac{-V_{cc}}{0.05 \frac{V_{cc}}{2}} = -40$

2.2.3 L'entrée du réseau de réaction est  $\underline{V}_s$  tandis que la sortie est  $\underline{V}_e$ . Nous ne tenons plus compte de  $R_{31}$ . Soit  $\underline{V}$  la tension aux bornes de  $C_3$ .

Nous appliquons le théorème de Millman pour calculer  $\underline{V}$ .

$$\underline{V} = \frac{\frac{\underline{V}_s}{R_{32}}}{\frac{1}{R_{32}} + jC_3\omega + \frac{1}{\underline{Z}_Q + \frac{1}{jC_3\omega}}}$$

$$\underline{V} = \frac{\underline{V}_s}{1 + jR_{32}C_3\omega + \frac{jR_{32}C_3\omega}{\underline{Z}_Q jC_3\omega + 1}}$$

$$\underline{V} = \frac{\underline{V}_s (\underline{Z}_Q jC_3\omega + 1)}{(1 + jR_{32}C_3\omega)(\underline{Z}_Q jC_3\omega + 1) + jR_{32}C_3\omega}$$

$$\underline{V}_e = \underline{V} \frac{1}{1 + jC_3\omega \underline{Z}_Q}$$

Soit:

$$\underline{V}_e = \frac{\underline{V}_s}{(1 + jR_{32}C_3\omega)(\underline{Z}_Q jC_3\omega + 1) + jR_{32}C_3\omega}$$

$$\underline{\beta} = \frac{1}{(1 + jR_{32}C_3\omega) \left( \frac{C_3}{C_{eq}} \frac{1 - \left[ \frac{\omega}{\omega_1} \right]^2}{1 - \left[ \frac{\omega}{\omega_2} \right]^2} + 1 \right) + jR_{32}C_3\omega}$$

$$\underline{\beta} = \frac{1}{\left( \frac{C_3}{C_{eq}} \frac{1 - \left[ \frac{\omega}{\omega_1} \right]^2}{1 - \left[ \frac{\omega}{\omega_2} \right]^2} + 1 \right) + jR_{32}C_3\omega \left[ \frac{C_3}{C_{eq}} \frac{1 - \left[ \frac{\omega}{\omega_1} \right]^2}{1 - \left[ \frac{\omega}{\omega_2} \right]^2} + 2 \right]}$$

#### 2.2.4

$$\underline{A}\underline{\beta} \geq 1$$

$$A\beta \geq 1$$

Soit : *et*

$$\text{Arg}(\underline{A}) + \text{Arg}(\underline{\beta}) = 0$$

$$\text{Arg}(A) = \pm\pi \quad \Rightarrow \quad \text{Arg}(\underline{\beta}) = \mp\pi$$

2.2.5  $\text{Arg}(\beta)=\pm\pi$   $\text{Im}(\beta)=0$

$$\left[ \frac{C_3}{C_{eq}} \frac{1 - \left[ \frac{\omega_{osc}}{\omega_1} \right]^2}{1 - \left[ \frac{\omega_{osc}}{\omega_2} \right]^2} + 2 \right] = 0$$

$$\omega_{osc} = \sqrt{\frac{2 + \frac{C_3}{C_{eq}}}{\frac{2}{\omega_2^2} + \frac{C_3}{C_{eq}} \frac{1}{\omega_1^2}}}$$

A.N :

Pulsation d'oscillation  $\omega_{osc}=20601156 \text{ rd.s}^{-1}$  soit une fréquence d'oscillation  $f_{osc}=3,278776 \text{ MHz}$

2.2.6 Le point correspondant à  $-180^\circ$  est à la fréquence 3,2779 MHz.

Le module vaut alors 0.032, l'amplification de la chaîne directe doit être au moins égale à 31. Elle est égale à 40 : il y a bien oscillation.

## ELABORATION DE LA SINUSOÏDE

---

3.1.1 Document réponse n°1.

3.1.2 Le signal  $Q_{13}$  est à 50 Hz. soit  $f_{Q_{13}}/32$

3.1.3 Document réponse n°1.

3.2.1 Document réponse n°1.

3.2.2 Tableau n°1:

L'expression générale est :

$$v_x(t) = \frac{R_{58}}{R_{58} + R_{5i}} V_{Q_{13}} + \frac{R_{5i}}{R_{58} + R_{5i}} 7,5 \quad (\text{cf tableau n°1})$$

3.2.3 Document réponse n°1.

3.2.4 fréquence égale à 50 Hz

3.2.5 :

La tension  $v_x(t)$  présente une symétrie de glissement donc il n'y a que des harmoniques de rang impair et sa valeur moyenne est différente de zéro.

3.2.6 :  $V_{x0}=7,5V$

3.2.7 : 50 Hz : fondamental rang 1

1550 = 1600 - 50 rang 31

1650 = 1600 + 50 rang 33

1600 Hz est le fondamental de l'horloge  $Q_8$

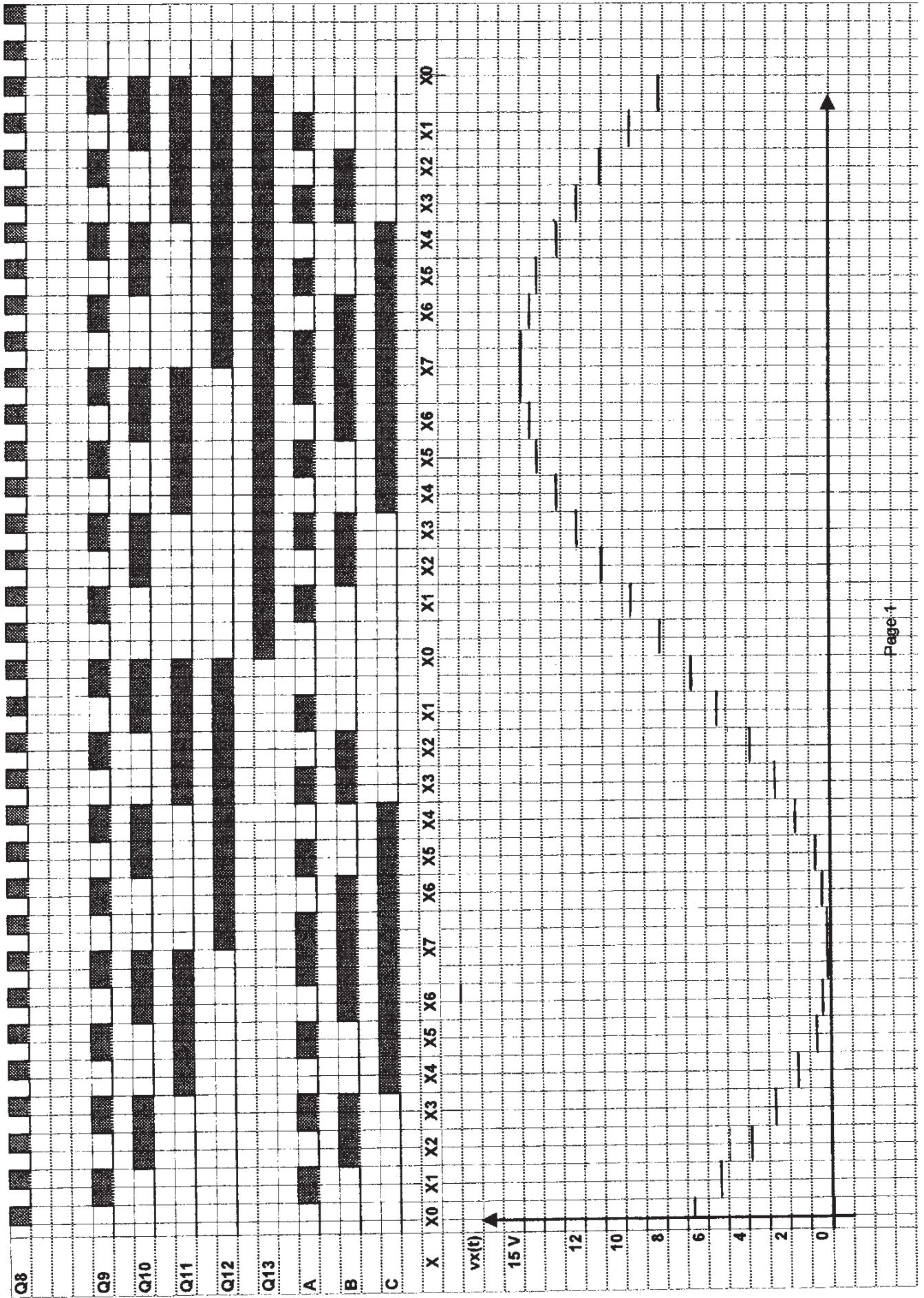




Tableau 1

$v_x(t)$	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$
$Q_{13}=0$	6.757	5.294	3.928	2.692	1.731	0.862	0.337	0.035
$Q_{13}=1$	8.243	9.706	11.071	12.307	13.269	14.137	14.663	14.965

Tableau 2

Fréquence	50Hz	1550Hz	1650Hz	3150Hz	3250Hz	4750Hz	4850Hz
Amplitude des harmoniques de $v_x(t)$	7,5V	238mV	218mV	107mV	115mV	73mV	70mV
Amplitude des harmoniques de $v_{7S}$	7.5	0.76mV	0.66mV	0.17mV	0.17mV	0.08mV	0.08mV

Les autres raies sont centrées sur les harmoniques de cette horloge, elles correspondent aux harmoniques de rang 63, 65, 95 et 97

On peut faire l'analogie avec l'échantillonnage blocage.

## FILTRE

---

### 4.1 Etude de $U_{62}$

Soit  $Z$  l'impédance correspondant à  $C_{61}$  et  $R_{62}$  en parallèle :

$$\underline{Z} = \frac{R_{62}}{1 + jR_{62}C_{61}\omega}$$

$$\underline{V}_{-6S} = -\frac{\underline{Z}}{R_{61}}\underline{V}_{-4} - \frac{\underline{Z}}{R_{62}}\underline{V}_{-6E}$$

### 4.2 Etude de $U_{61}$

$$\underline{E}_{+} = \frac{\underline{V}_{6S}}{1 + jR_{61}C_{61}\omega}$$

$$\underline{E}_{-} = \frac{jR_{61}C_{61}\omega\underline{V}_{-4}}{1 + jR_{61}C_{61}\omega}$$

$$\underline{V}_{-4} = \frac{\underline{V}_{-6S}}{jR_{61}C_{61}\omega}$$

$$4.3 \quad \underline{V}_{-6S} = -\frac{\underline{Z}}{R_{61}}\frac{\underline{V}_{-6S}}{jR_{61}C_{61}\omega} - \frac{\underline{Z}}{R_{62}}\underline{V}_{-6E}$$

$$\underline{V}_{-6S}\left(1 + \frac{\underline{Z}}{R_{61}}\frac{1}{jR_{61}C_{61}\omega}\right) = -\frac{\underline{Z}}{R_{62}}\underline{V}_{-6E}$$

$$\underline{V}_{-6S} = \frac{-\frac{\underline{Z}}{R_{62}}}{1 + \frac{\underline{Z}}{R_{61}}\frac{1}{jR_{61}C_{61}\omega}}\underline{V}_{-6E} = -\frac{jR_{61}C_{61}\omega R_{61}}{R_{62}\left(1 + \frac{jR_{61}C_{61}\omega R_{61}}{\underline{Z}}\right)}\underline{V}_{-6E}$$

$$4.4 \quad \underline{V}_{-6S} = -\frac{jR_{61}C_{61}\omega R_{61}}{R_{62}\left(1 + \frac{jR_{61}C_{61}\omega R_{61}}{R_{62}}(1 + jR_{62}C_{61}\omega)\right)}\underline{V}_{-6E}$$

$$V_{-6S} = -\frac{R_{61}}{R_{62}} \frac{1 + \frac{jR_{61}C_{61}\omega}{R_{62}}}{1 + \frac{jR_{61}C_{61}\omega R_{61}}{R_{62}} - R_{61}^2 C_{61}^2 \omega^2} V_{-6E}$$

$$4.5 \quad \omega_0 = \frac{1}{R_{61}C_{61}} \quad \frac{2m}{\omega_0} = \frac{R_{61}^2 C_{61}}{R_{62}} \quad \text{soit } m = \frac{1}{2} \frac{R_{61}}{R_{62}}$$

$$A_1 = -\frac{R_{61}}{R_{62}}$$

4.6 Il s'agit d'un filtre passe bande.

4.7 Bande passante : elle est définie par la relation qui permet de déterminer les deux pulsations correspondant à une atténuation de -3dB par rapport au gain maximal soit une amplification maximale divisée par  $\sqrt{2}$

$$\left| \frac{V_{-6S}}{V_{-6E}} \right|(\omega) = \frac{A_1}{\sqrt{2}}$$

soit :

$$\frac{A_1^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{A_1^2}{8m^2}$$

$$8m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4m^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]$$

$$\pm 2m \frac{\omega}{\omega_0} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

Il y a deux équations en  $\frac{\omega}{\omega_0}$  avec chacune une solution positive :

$$\Delta' = m^2 + 1$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = m + \sqrt{\Delta'}$$

et

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = -m + \sqrt{\Delta'}$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} = 2m$$

ou :

$$\omega_1 - \omega_2 = 2m\omega_0$$

$$f_1 - f_2 = 2mf_0 = \frac{f_0}{Q}$$

$$\text{avec } Q = \frac{1}{2m} \text{ coefficient de qualité du circuit}$$

$$4.8 \text{ A.N : } Q=10 \quad f_1 - f_2 = 2mf_0 = \frac{f_0}{Q} = 5 \text{ Hz}$$

$$R_{61} = 9650 \Omega \quad R_{62} = 96500 \Omega$$

#### 4.9 Diagramme asymptotique:

En basse fréquence c'est à dire pour  $\omega \ll \omega_0$ :

$$\frac{V_{6S}}{V_{6E}} \rightarrow A_1 \frac{j\omega}{\omega_0}$$

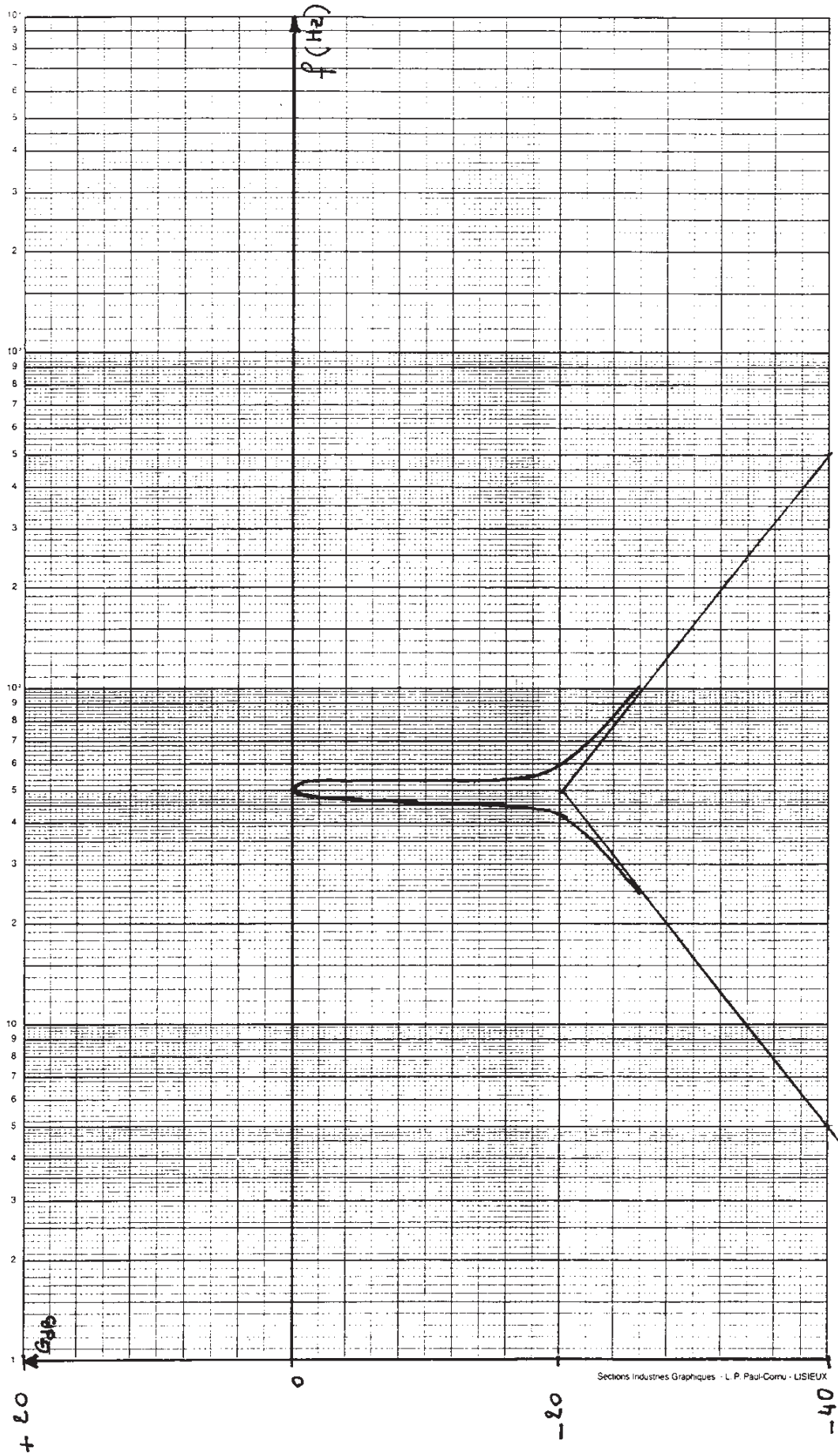
Le diagramme de Bode présente une pente de 20 dB par décade et l'argument est égal à  $+90^\circ$

En haute fréquence c'est à dire pour  $\omega \gg \omega_0$ :

$$\frac{V_{6S}}{V_{6E}} \rightarrow A_1 \frac{j\omega}{\omega_0^2} = -A_1 \frac{j\omega_0}{\omega}$$

Le diagramme de Bode présente une pente de -20 dB par décade et l'argument est égal à  $-90^\circ$

PREMIER PROBLÈME : Document-réponse n° 3



L'intersection des asymptotes se produit pour :  $\omega = \omega_0$  et  $\left| \frac{V_{-6S}}{V_{-6E}} \right| = |A_1| = 0.1$  soit  $-20dB$

La courbe réelle passe par :

$$\omega = \omega_0 \text{ et } \left| \frac{V_{-6S}}{V_{-6E}} \right|(\omega_0) = \frac{A_1}{2m} = 1 \text{ soit } 0dB \text{ et } \text{Arg}\left(\frac{V_{-6S}}{V_{-6E}}\right) = 0$$

Le diagramme est tracé sur le document réponse n°3.

4.10 cf tableau 2

4.11 Atténuation des harmoniques et maintien du fondamental.

4.12 Il est possible de régler la valeur efficace d'un signal en le découpant à l'aide d'un signal carré de fréquence plus élevée et de rapport cyclique variable.

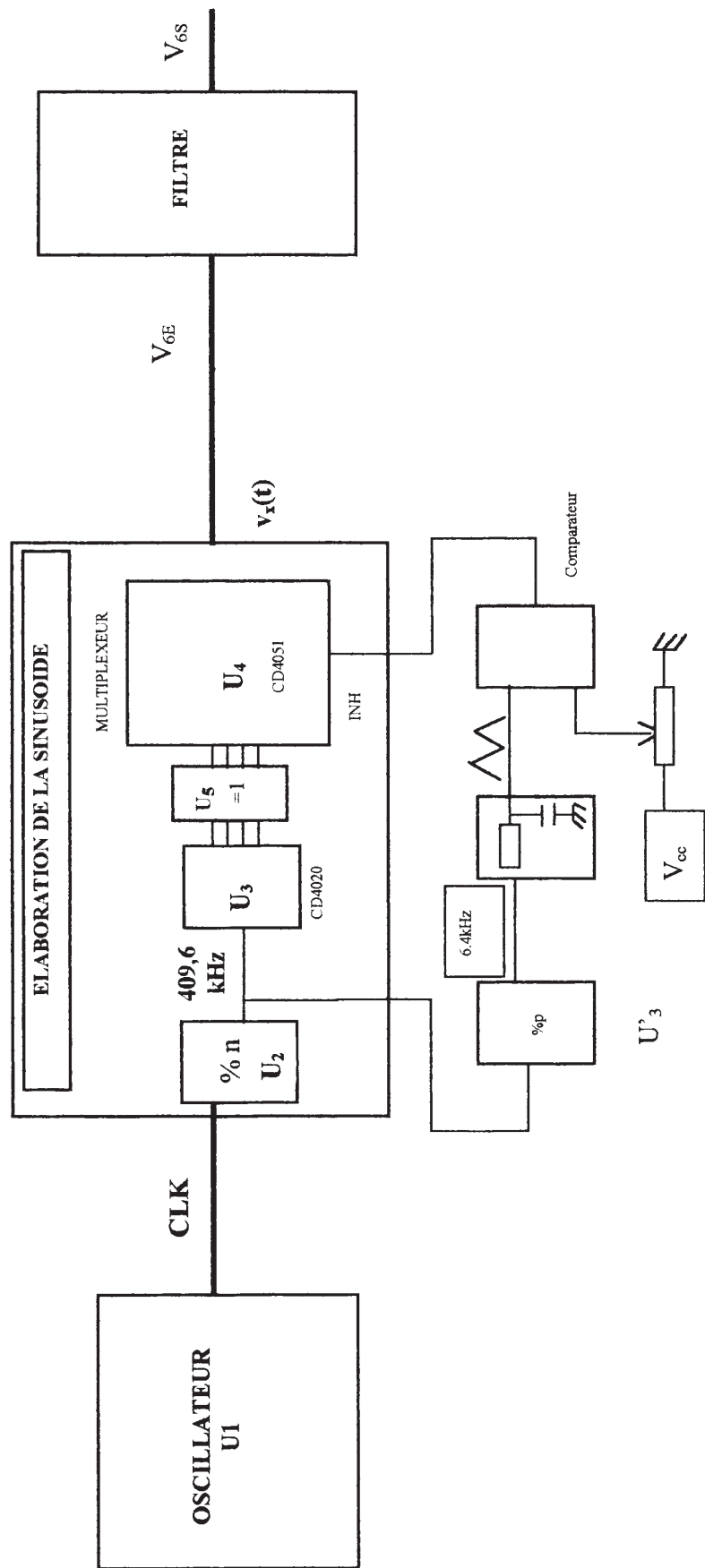
Ceci peut être réalisé en multipliant le signal sinusoïdal par un signal carré dont on peut ajuster le rapport cyclique ou bien en appliquant ce signal carré sur la borne ENH (enable) du circuit multiplexeur.

Le signal carré de découpage peut être obtenu simplement à partir d'un diviseur  $U_3$  placé après  $U_2$  et en parallèle avec  $U_3$  par exemple. cf « *synoptique modifié* »

- Ce diviseur nous fournit un signal carré de fréquence élevée  $f_H = 6.4kHz$
- Ce signal est intégré par un intégrateur passif RC de façon à donner un signal triangulaire.
- Le signal triangulaire est comparé à une tension continue variable
- Le résultat est un signal carré à rapport cyclique variable qui sert à découper la sinusoïde par l'intermédiaire de l'entrée ENH du multiplexeur.
- Le signal sinusoïdal découpé est ensuite filtré.

Ce principe peut être utilisé pour augmenter progressivement l'amplitude de la sinusoïde lors d'une mise sous tension par exemple.

## Synoptique modifié



## DEUXIÈME PROBLÈME

## I - ASSOCIATION MACH. SYNCHRONE-RESEAU

## I-1 Champs Tournants

I-1-1  $\omega$  = pulsation des tensions du réseau. ici on a  $\omega = 314 \text{ Rad s}^{-1}$ .

I-1-2  $p$  désigne le nombre de paires de pôles de la machine. La vitesse de synchronisme  $N_s$  étant de 1500 tr/min soit 25 tr/s, alors  $p = 2$ . (La théorie des champs tournants nous dit que  $N_s = \frac{f}{p}$  soit  $p = \frac{50}{25} = 2$ ).

I-1-3  $B_M \cos(\omega t - p\alpha) = B_M \Rightarrow \dots \cos(\omega t - p\alpha) = 1$  soit  $\omega t - p\alpha = 2k\pi$  d'où l'on tire  $\alpha = \frac{\omega}{p}t + k' \frac{2\pi}{p}$ .

Avec les données numériques  $\alpha = \frac{\omega}{2}t + k'\pi$ . L'abscisse à laquelle se situe  $+B_M$  se déplace dans l'entrefer à la vitesse angulaire  $\Omega = \frac{\omega}{2}$ .

I-1-4 Combien de valeurs de  $+B_M$ ? Faisons  $t = 0$  par exemple, on fait le tour complet de l'entrefer pour  $k' = 0$  et 1, soient **deux valeurs**

I-1-5 Un signe 'moins' traduirait une propagation dans un sens opposé au précédent.

## I-2 Alternateur

I-2-1 En valeur instantanée on a :  $e_v = Ri + L_s \frac{di}{dt} + v$ . Le régime est sinusoïdal  $\rightarrow$  vecteurs de *FRESNEL*.  
 $v$  désignant une tension simple sur la fig. 1 - (Il y a donc 230 V aux bornes d'une phase).

$\vec{E}_v = R\vec{I} + L_s \frac{d\vec{I}}{dt} + \vec{V}$  Cette équation vectorielle est traduite fig. 1 du document-réponse.

I-2-2 En convention générateur on a pour une phase :  $v = -Ri + e_c$  avec  $e_c = -\frac{d\Phi_T}{dt} = -\frac{d\Phi(J_e)}{dt} - L_s \frac{di}{dt}$ .

Si on néglige  $Ri$  alors  $v = -\frac{d\Phi_T}{dt}$ , la tension étant imposée alors le flux est forcé :  $\Phi_T = -\int v dt$  indépendant du courant débité. En régime sinusoïdal on a en valeurs efficaces  $\Phi_T = \frac{V}{\omega} \Rightarrow \Phi_T = \frac{230}{100\pi} = 0,732 \text{ Wb}$ .

$\Phi_T$  est en avance de  $+\frac{\pi}{2}$  par rapport à la tension simple.

I-2-3 Voir fig. 2 du document-réponse.  $\vec{\Phi}(I)$  étant colinéaire à  $\vec{I}$ .

I-2-4  $BAH = COB = \varphi$  angles à côtés perpendiculaires.

$AH = X_s I \cos \varphi$ ; sachant qu'une phase fournit  $P = VI \cos \varphi$  on en déduit :  $I \cos \varphi = \frac{AH}{X_s}$ . D'où

$P = \left(\frac{V}{X_s}\right) AH$ , avec  $\left(\frac{V}{X_s}\right) = \frac{230}{46} = 5$  (en ampères) pour une phase, et donc 15 pour la machine complète.

I-2-5 D'après la fig. 1 du document-réponse  $AH = E_v \sin \theta$  soit  $P = \left(\frac{V}{X_s}\right) E_v \sin \theta \times 3$

I-2-6 La vitesse de rotation du rotor étant  $\Omega = 2\pi N_s$  ou  $\frac{\omega}{p}$  alors  $3 \frac{V}{X_s} E_v \sin \theta = C_{em} \frac{\omega}{p}$ . En explicitant la

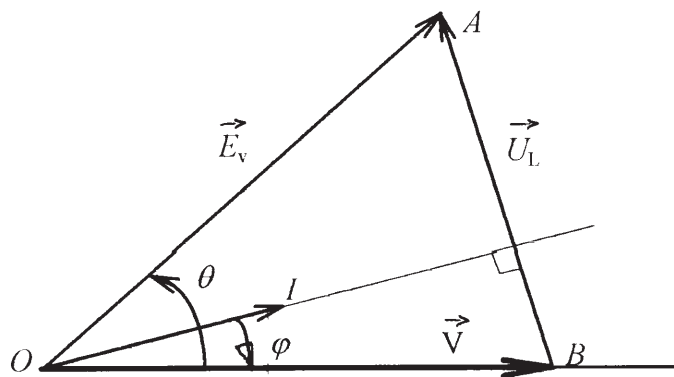
f.é.m.  $E_v = kJ_e$  on a  $C_{em} = 3p \frac{V}{\omega} \frac{kJ_e}{X_s} \sin \theta$

I-2-7  $J_e = 9 \text{ A} \Rightarrow E_v = 28,3 \times 9 = 254,7 \text{ V}$ . Si  $C_{mec}$  augmente alors  $C_{em}$  augmente avec  $C_{mec} = C_{em}$  en régime permanent.. Sachant que  $\vec{V}$  et  $\vec{E}_v$  ont leurs modules fixés, c'est  $\theta$  qui va varier entraînant la variation de  $\vec{I}$  lors de la déformation du triangle OAB.

I-2-7-1 Il faut surveiller la valeur de  $I$ . Sa valeur nominale  $I_n$  est telle que  $S = 3VI_n$  d'où  $I_n = \frac{3000}{3 \times 230} = 4,35 \text{ A}$ .



I-2-7-2 Valeur max. de  $\theta$  notée  $\theta_M$ . Soit le vecteur  $\vec{U}_L$  de module  $X_s I_n = 46 \times 4,35 = 200,1$  V. D'après le schéma vectoriel ci-dessous : Triangle  $OAB \rightarrow AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2 \times OA \cdot OB \cdot \cos \theta_M$ .



$$\cos \theta_M = \frac{230^2 + 254,7^2 - 200,1^2}{2 \times 230 \times 254,7} = 0,6635 \text{ soit } \theta_M = 0,8453 \text{ Rad. (ou } 48^\circ \text{ environ).}$$

I-2-7-3 Facteur de puissance : La relation du I-2-5 nous donne  $P = 3 \frac{V}{X_s} E_v \sin \theta = 3VI \cos \varphi$  d'où nous tirons

$$\cos \varphi = \frac{254,7 \times 0,7482}{46 \times 4,35} = 0,952 \text{ AV} \rightarrow \varphi = -0,31 \text{ Rad. et } \sin \varphi = -0,305.$$

I-2-8 Puissance réactive.  $Q = 3VI \sin \varphi$ . Numériquement on a  $Q = 3 \times 230 \times 4,35 \times (-0,305) = -915 \text{ VAR}$ . En convention générateur  $Q < 0$  signifie que  $Q$  est reçue (ou absorbée).

I-2-9 Indications  $P_1$  et  $P_2$  des deux wattmètres :

$$P_1 = UI \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right), \quad P_2 = UI \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \text{ avec } \varphi = -0,31 \text{ Rad}$$

$$P_1 = 400 \times 4,35 \times \cos(-0,8336) = 1170 \text{ W} \text{ et } P_2 = 400 \times 4,35 \times \cos(0,2136) = 1700 \text{ W}.$$

On vérifie que  $Q = \sqrt{3}(P_1 - P_2) = \sqrt{3}(1170 - 1700) = -918 \text{ VAR}$  (vérifié aux erreurs d'arrondi près).

## II -MACHINE A COURANT CONTINU

### II-1 Variation de $C_{em}$ à $\Phi(I_e)$ constant et à $U$ variable.

II-1-1 En valeurs moyennes on a  $U = R_0 I + E$ , la tension moyenne aux bornes de  $L$  étant nulle. Sachant que la conduction est ininterrompue on a  $U = U_0 \delta \Rightarrow I = \frac{U_0 \delta - E}{R_0}$

$$\text{II-1-2 } C_{em} = \frac{1}{\Omega} EI \text{ ou } C_{em} = \frac{E}{\Omega} \frac{U_0 \delta - E}{R_0} \quad (\text{Ici } E = \text{Cte car } I_e \text{ et } \Omega \text{ sont constants})$$

$$\text{II-1-3 Pour } C_{em} = 0 \text{ on a } \delta_m = \frac{E}{U_0} \rightarrow \delta_m = 0,80$$

$$C_{em} = C_{emM} \text{ pour } \delta_M \text{ tel que } 16,4 = \frac{90}{50\pi} \left( \frac{112\delta_M - 90}{0,65} \right) \rightarrow \delta_M = 0,97$$

II-1-4 On passe du couple nul au couple nominal pour une faible variation du rapport cyclique. Cette façon d'opérer n'est pas intéressante à cause de sa trop forte sensibilité.

### II-2 Variation de $C_{em}$ à $U$ fixe et $\Phi(I_e)$ variable

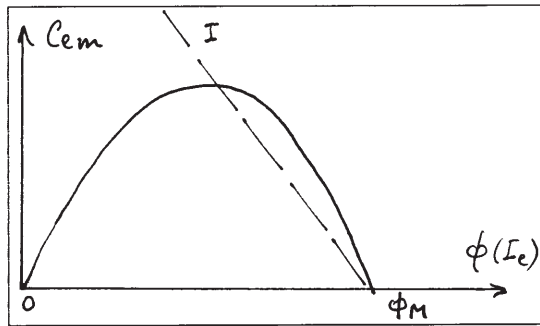
II-2-1 Même relation que précédemment mais on explicite  $E$ . Donc  $U = R_0 I + K\Omega\Phi(I_e)$

$$\text{soit } I = \frac{U - K\Omega\Phi(I_e)}{R_0}$$

$$\text{II-2-2 } C_{em} = \frac{EI}{\Omega} = \frac{K\Omega}{\Omega} \Phi(I_e) I = K\Phi(I_e) \frac{U - K\Omega\Phi(I_e)}{R_0} = \frac{K}{R_0} \left( -K\Omega\Phi^2(I_e) + U\Phi(I_e) \right)$$

Dans le plan  $(C_{em}, \Phi) \rightarrow$  parabole de concavité orientée vers le bas.

II-2-3 / II-2-4 Graphes

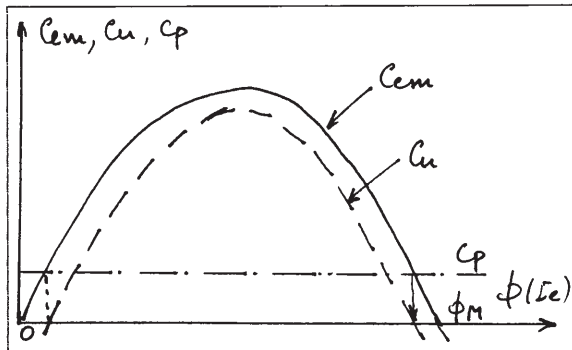


$C_{em} = 0$  pour  $\Phi(I_c) = 0$  c'est à dire pour  $I_c = 0$ .

$C_{em} = 0$  pour  $\Phi_M = \frac{U}{K\Omega}$

II-2-5 Pour  $\Phi(I_c)$  faible  $I$  prend des valeurs prohibitives. Il faut donc travailler avec des flux proches de  $\Phi_M$ . Dans ces conditions c'est en **défluxant** qu'on augmente le couple électromagnétique.

II-2-6  $C_p$  est supposé constant



$$C_u = C_{em} - C_p$$

II-2-7 Si  $C_{em}$  tout en restant positif mais inférieur à  $C_p$  alors M.C.C. = Moteur mais n'assure pas à elle seule le couple suffisant pour maintenir l'ensemble en rotation, c'est la machine synchrone qui fournit le supplément de couple nécessaire. **Les deux machines sont motrices.**

### III - ASSOCIATION-ALIMENTATION-HACHEUR-M.C.C.

#### III-1 Croissance de $u_G(t)$ .

III-1-1 Fig. 5 ou fig. 6 :  $K_2$  et  $D_2 =$  Hacheur survolteur.  $T_0$  ouvert pour  $u_G < u_{GMM}$  dans le sens croissant.  $u_G$  confondue avec  $U_0$  si  $D_0$  conduit.

$u_G > U_0 \rightarrow D_0$  bloquée.

$D_0$  ? : indique que le générateur qui délivre  $U_0$  n'est pas réversible en courant. Il traduit en fait la non réversibilité en courant d'un PD3 à diodes.

III-1-2  $T_0$  est un circuit ouvert, une partie de l'énergie stockée dans l'inductance dans l'intervalle de temps  $[0, \delta T]$  est transférée à  $C$ , ce qui a pour effet de faire croître la tension  $u_G$  à ses bornes. Dès que la tension  $u_G$  dépasse  $U_0$  la diode  $D_0$  se bloque. Ainsi  $u_G$  croît à chaque période de hachage. La résistance  $R$  servira de déversoir à chaque fermeture de  $T_0$ .

III-1-3 Le hacheur est en action avec  $u_G$  en phase de croissance.  $K_2$  est fermé donc  $E = R_0 i + L \frac{di}{dt}$  pour

$nT \leq t \leq nT + \delta T$ . La solution est notée  $i_1(t)$  telle que  $i_1(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{E}{R_0}$ . (En posant  $\tau = \frac{L}{R_0}$ ). La conduction

étant ininterrompue il y a une condition initiale non nulle notée  $i_1(nT)$ .  $\rightarrow i_1(0) = A + \frac{E}{R_0} - i_1(nT)$ . D'où

$$A = i_1(nT) - \frac{E}{R_0} \quad \text{et} \quad i_1(t) = \left( i_1(nT) - \frac{E}{R_0} \right) e^{-t/\tau} + \frac{E}{R_0}.$$

III-1-4 pendant cet intervalle de temps  $D_0$  et  $D_2$  sont bloquées donc  $u_G = \text{Cte}$ .

III-1-5 Intervalle  $nT + \delta T \leq t \leq (n+1)T$ ,  $K_2$  est ouvert, appelons  $i_2(t)$  la nouvelle intensité.

$$E = R_0 i_2 + L \frac{di_2}{dt} + u_G$$

$$i_2 = C \frac{du_G}{dt}$$

$$E = R_0 C \frac{du_G}{dt} + LC \frac{d^2 u_G}{dt^2} + u_G$$

$$\frac{d^2 u_G}{dt^2} + \frac{R_0}{L} \frac{du_G}{dt} + \frac{1}{LC} u_G = \frac{E}{LC}$$

Cette dernière relation pouvant se mettre sous la forme :  $\frac{d^2 u_G}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{du_G}{dt} + \omega_0^2 u_G = \omega_0^2 E$ .

En posant  $m = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$  et  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

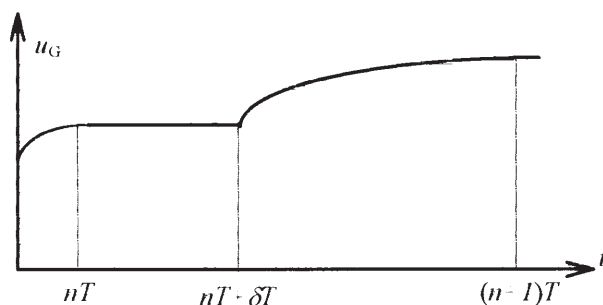
III-1-6 L'expression de  $u_G(t)$  ?

$\Delta' = (m\omega_0)^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 (m^2 - 1)$ . Les valeurs numériques sont les suivantes:  $\omega_0^2 = 10^5$ ,  $m^2 = 1,05625 \cdot 10^{-2}$ .

Soit:  $\Delta' = 10^5 \times (-) \times 0,99470,47 = -99470,47 \Rightarrow u_G(t)$  contient des termes sinusoïdaux amortis de la forme :

$u_G(t) = e^{-m\omega_0 t} (A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t) + E$  avec  $\Omega_0 = \sqrt{|\Delta'|}$  soit numériquement  $\Omega_0 = 315,4 \text{ Rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $m\omega_0 = 32,5 \text{ V/Rad}$ .

III-1-7 La forme de  $u_G(t)$



Entre  $nT$  et  $nT + \delta T$  le condensateur reste chargé  $\rightarrow u_G = \text{Cte}$ .

Puis dans l'intervalle  $[nT + \delta T, (n+1)T]$   $u_G \uparrow$ .

III-1-8 A la période suivante on retrouve le même processus jusqu'à ce qu'on atteigne  $U_{GMM}$ . (Fig. 3)

## III - 2 Décroissance de $u_G(t)$

III-2-1-1  $K_2$  est fermé,  $R$  est en parallèle sur  $C$ .

$E = R_0 i + L \frac{di}{dt}$  soit  $i = A e^{-t/\tau} + \frac{E}{R_0}$  l'origine des temps étant en  $kT$ .

Appelons  $i(kT)$  la condition initiale :  $\Rightarrow A = i(kT) - \frac{E}{R_0}$ . On a alors  $i(t) = \left( i(kT) - \frac{E}{R_0} \right) e^{-t/\tau} + \frac{E}{R_0}$ .

III-2-1-2 Dans cet intervalle de temps  $C$  se décharge dans  $R$  via  $T_0$ .

$$\left. \begin{array}{l} i_C = +C \frac{du_G}{dt} \\ u_G = R i_R \\ i_R + i_C = 0 \end{array} \right\} \quad u_G = -R i_C \quad \text{ou} \quad i_C = -\frac{u_G}{R} \quad \text{d'où} \quad -\frac{u_G}{R} = C \frac{du_G}{dt} \quad \text{ou bien} \quad \frac{du_G}{dt} + \frac{1}{RC} u_G = 0$$

Posons  $\tau' = RC \rightarrow u_G(t) = u_G(kT) e^{-t/\tau'}$  pour l'intervalle considéré.

III-2-2-1 Deuxième phase de la période,  $K_2$  ouvert : le courant de décharge de  $L$  alimente  $C$  et  $R$ .

$$i_C = C \frac{du_G}{dt} ; i_R = \frac{u_G}{R} ; i_C + i_R = i$$

III-2-2-2

$$u_G = -R_0 i - L \frac{di}{dt} + E$$

$$u_G = -R_0(i_R + i_C) - L \frac{d}{dt}(i_R + i_C) + E$$

$$u_G = -R_0 \frac{u_G}{R} - R_0 C \frac{du_G}{dt} - L \frac{d}{dt} \frac{u_G}{R} - LC \frac{d^2 u_G}{dt^2} + E$$

$$LC \frac{d^2 u_G}{dt^2} + (R_0 C + \frac{L}{R}) \frac{du_G}{dt} + (1 + \frac{R_0}{R}) u_G = E$$

$$\frac{d^2 u_G}{dt^2} + (\frac{R_0}{L} + \frac{1}{RC}) \frac{du_G}{dt} + \frac{R + R_0}{R} \omega_0^2 u_G = \omega_0^2 E$$

Compte tenu de la forme plus complexe que précédemment on se contentera de la forme suivante :

$$\frac{d^2 u_G}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_G}{dt} + \Omega^2 u_G = \omega_0^2 E, \text{ avec } \alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{R_0}{L} + \frac{1}{RC} \right) = 0,5 \left( \frac{0,65}{0,01} + \frac{1}{4,5 \cdot 10^{-3}} \right) = 143,6 \text{ V/s}$$

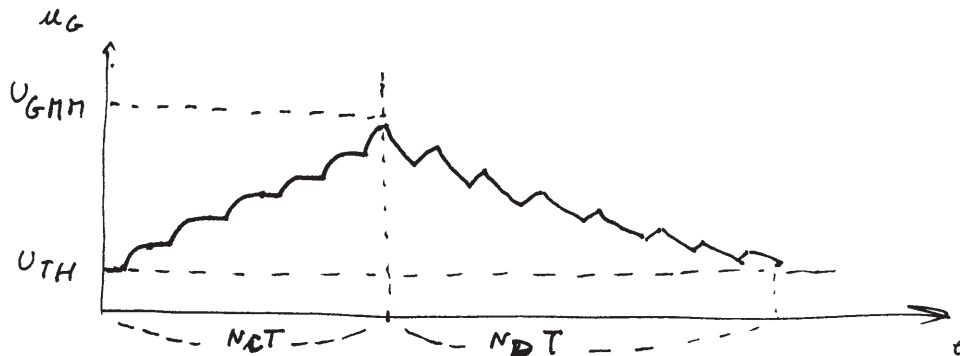
$$\text{et } \Omega^2 = \frac{R + R_0}{R} \omega_0^2 = \frac{4,5 + 0,65}{4,5} \times 10^5 = 114444 \text{ Rad}^2 \text{ s}^{-2} \text{ soit } \Omega = 338,3 \text{ Rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$m = \frac{RR_0 C + L}{\sqrt{4(R + R_0)RLC}} \text{ dont la valeur numérique est } \mathbf{0,4245}. \text{ (SI)}$$

III-2-3 La solution est du même type que précédemment :  $u_G(t) = e^{-\alpha t} (A' \cos \Omega t + B' \sin \Omega t) + \frac{R}{R + R_0} E$

III-2-4 Voir document-réponse. (Fig. 4)

III-2-5 Même processus que ci-dessus.



DEUXIÈME PROBLÈME : Document-réponse

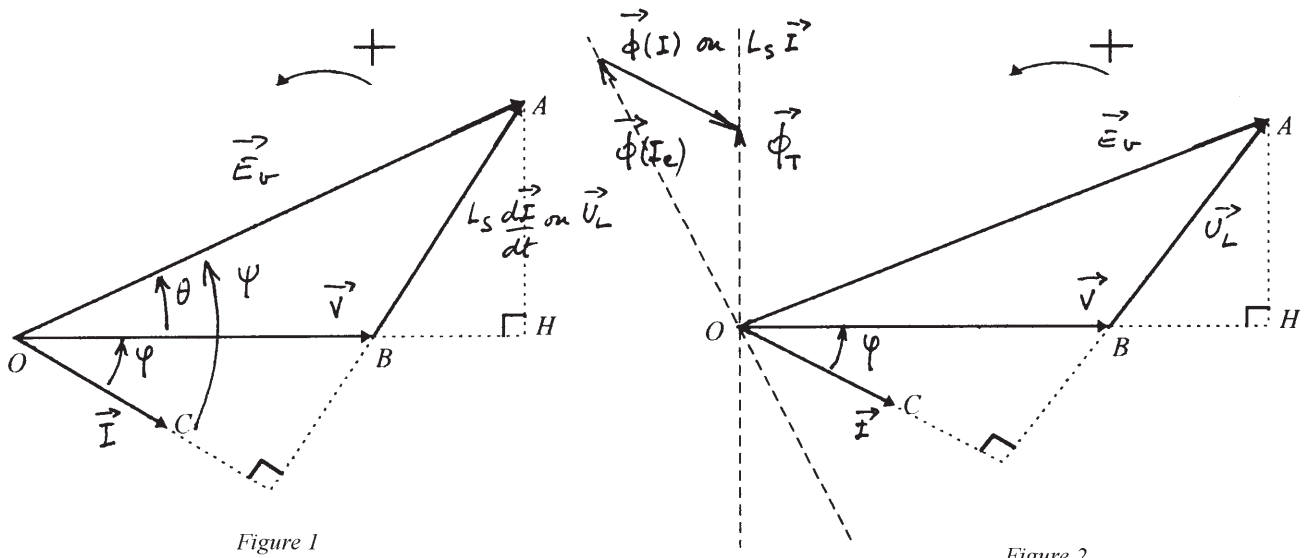


Figure 1

Figure 2

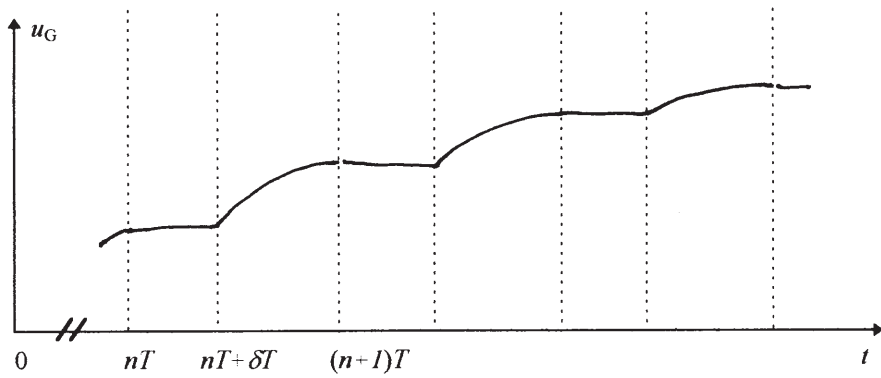


Figure 3

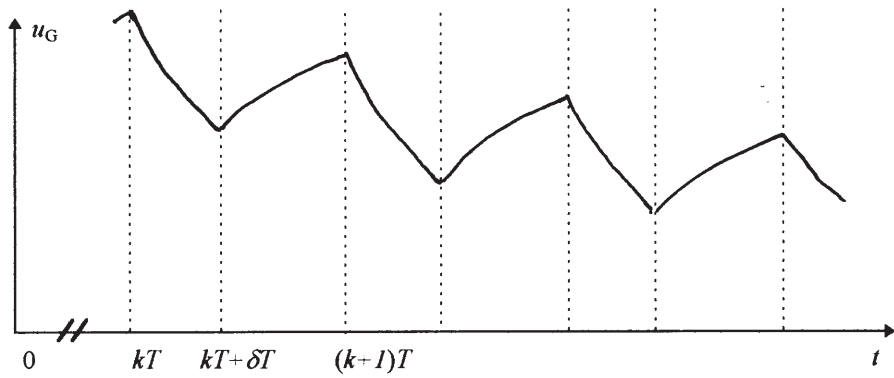


Figure 4

### III-3 Régime permanent de $u_G(t)$

III-3-1 Pendant un temps  $(N_1+N_2)T$  la machine à courant continu a cédé à l'extérieur une charge totale :

$Q_T=Q_M+Q_D$  sous une *f.é.m.* constante  $E$ .

L'énergie fournie est  $(Q_M+Q_D)E$  à laquelle correspond une puissance électromagnétique :  $P = \frac{(Q_M + Q_D)E}{(N_1 + N_2)T}$

Soit numériquement :  $P = \frac{(0,0539 + 0,0612) \times 104}{24 \times 2.10^{-4}} = 2494 \text{ W}$

III-3-2  $C_{uMS}$  ?

La machine synchrone doit fournir 2494 W + les pertes de *M.C.C.* qui sont de 378 W soit au total  $P=2872 \text{ W}$ .

D'où :  $C_{uMS} = \frac{2872}{50\pi} = 18,28 \text{ Nm}$ .

# CAPES

(Concours Interne)

## SECTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition de physique - Session : 1998

---

### A.- Définitions préliminaires

A.1) Une source de lumière principale est un corps qui émet des ondes lumineuses. Une source de lumière secondaire est un corps qui diffuse la lumière qu'elle reçoit, elle n'émet pas de lumière. Le Soleil est une source principale, la Lune est une source secondaire, elle diffuse la lumière reçu du Soleil.

A.2) La lumière se propage dans le vide rectilignement (en ligne droite). L'année lumière est la distance parcourue par la lumière en une année.

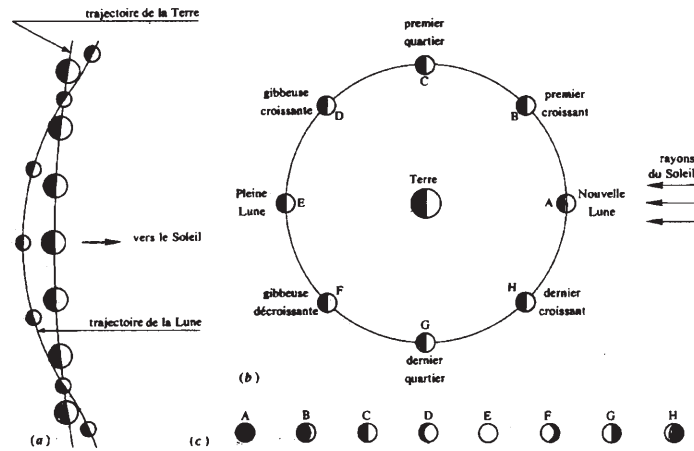
$$1 \text{ année lumière} = 3.10^8 \times 365,25 \times 86400 = 9,467.10^{15} \text{ m}$$

A.3) La lumière est composée de plusieurs ondes harmoniques de différentes fréquences, quand le milieu propage ces différentes fréquences à des vitesses distinctes, le milieu est dit dispersif. La lumière peut être ainsi décomposée. L'exemple le plus classique est l'arc en ciel mais on pourrait aussi les franges localisées irisées.

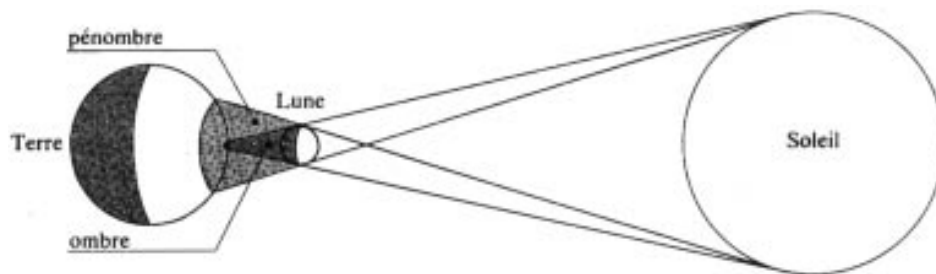
A.4) La réflexion est le renvoi de la lumière dans une direction parfaitement déterminée. La diffusion est le renvoi de la lumière dans toutes les directions.

A.5) Un corps opaque est éclairé par une source de lumière, la partie ne recevant pas de lumière est appelée ombre propre de cet objet. Un écran placé derrière cet objet présente une région obscure appartenant à la zone d'ombre, on l'appelle ombre portée de l'objet sur cet écran. Quand la source est étendue, il existe des parties de l'écran on ne voit pas du tout la source : ce sont les zones d'ombre; il existe des parties ou on voit partiellement la source ce sont les zones de pénombre.

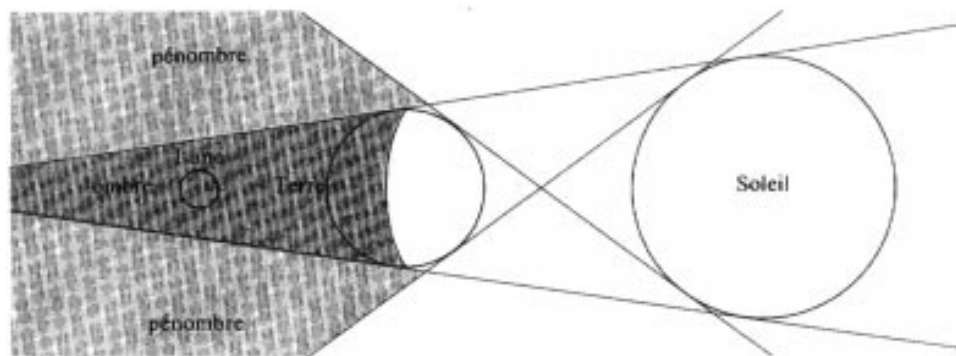
A.6) Selon les positions respectives de la Lune et du Soleil par rapport à la Terre, la face de la Lune visible de la Terre est différemment éclairée, ce sont les différentes phases de la Lune. [4]



A.7) Si la Lune, le Soleil et la Terre sont alignés, la Lune passant devant le Soleil peut le cacher partiellement ou totalement. [1]



Les éclipses de Lune se produisent quand la Lune passe dans le cône d'ombre de la Terre. [1]



## B.- Mesure des rayons des astres et des distances les séparant

B.1) Le diamètre apparent d'un objet est l'angle sous lequel d'un point on voit les deux extrémités de cet objet.

B.2) Il suffit de mesurer la hauteur d'un objet de se placer à une distance telle que l'on masque la Lune ou le Soleil (arbre, personne etc...).

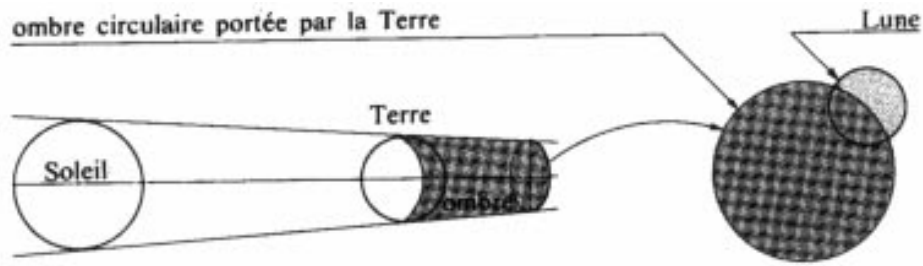
Pour le Soleil on trouve  $2.6,96.10^8 / 1.49.10^{11}$ . On trouve :  $\alpha_{\odot} = 0,00934 = 32,11'$ . Pour la

Lune on a de même  $2.1,740.10^6 / 3,84.10^8$ , soit  $\alpha_{\text{L}} = 0,00906 \text{ rad} = 31,15'$ .

On peut observer de la Terre des éclipses totales de Soleil.

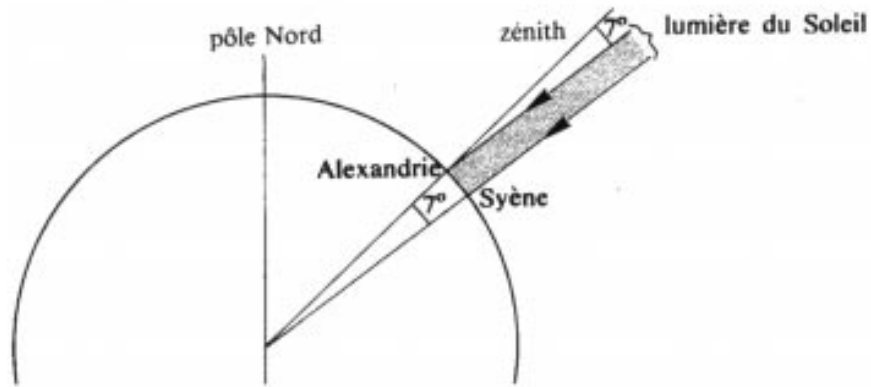


B.3) L'ombre portée par la Terre est un cône à base circulaire. On voit cette ombre se projeter sur la Lune lors d'une éclipse. [1]



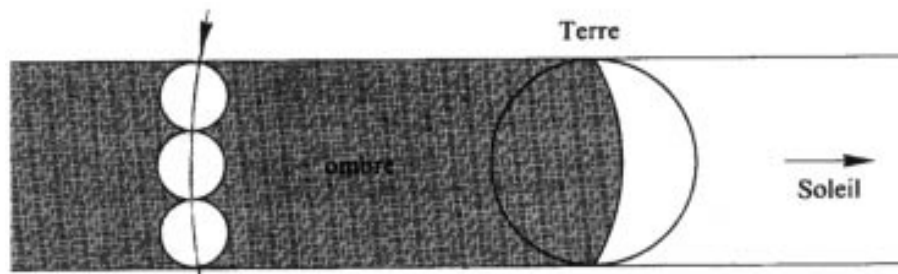
B.4) Le Soleil passe au zénith de Syène. Au même instant (d'où l'importance du méridien, il faut qu'il soit midi aux deux endroits) Alexandrie située plus au nord, le Soleil fait  $7^\circ$  avec la verticale, les rayons solaires étant quasi parallèles, cet angle représente également l'angle au centre. D'où

$7^\circ = 0,12226 \text{ rad}$ , avec  $R_T \alpha = SA$  et  $SA = 800 \text{ km}$ ,  $R = 6543 \text{ km}$  [1]



B.5) On peut noter qu'une lunaison durant 29,5 jours, la Lune parcourt environ  $\frac{360^\circ}{29,5 \times 24} = 0,5^\circ$  par heure. Le Soleil étant très éloigné on suppose que l'ombre de la Terre est cylindrique, la durée d'une éclipse de Lune étant de 2 heures, la Lune parcourt approximativement une distance égale à 3 fois son diamètre. Donc  $R_L = R_T/3$ . On en déduit la distance Terre-Lune

$d = \frac{2R_T}{\alpha}$  (Tous ces calculs ont été faits dans le référentiel géocentrique). [1]

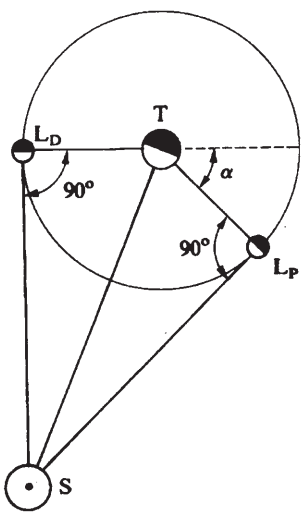


B.6) Le Soleil étant à une distance finie, les deux positions de la Lune correspondant au PQ et DQ ne sont pas diamétralement opposées. (voir figure ci-dessous) Appelons  $\beta$  l'angle entre TL et TS, on a  $\cos \beta = \frac{d}{D}$ , considérons que le mouvement de la Lune est circulaire et uniforme, on a alors en notant par  $\omega$  la vitesse angulaire de la Lune dans le référentiel géocentrique.  $T_1 = \frac{2\pi - 2\beta}{\omega}$

et  $T_2 = \frac{2\beta}{\omega}$ , d'où  $T_1 - T_2 = \frac{2\pi - 4\beta}{\omega}$ , avec  $T_L = \frac{2\pi}{\omega}$  il vient  $\Delta T = T_L \left[ 1 - \frac{2\beta}{\pi} \right]$ . Application

numérique  $\cos \beta = \frac{3,84 \cdot 10^8}{1,49 \cdot 10^{11}} = 0,00258$  ce qui donne  $89,85234^\circ$ , d'où  $\Delta T = 1 \text{ h } 10 \text{ min}$

Cette méthode est cependant très fantaisiste car elle suppose la trajectoire de la Lune circulaire, ce qui est faux! [1]



Il existe de nombreuses méthodes directes ou indirectes. Citons par exemple celle utilisant la conjonction intérieure de la planète Vénus observée par deux observateurs de la Terre.

### C.- Étude du champ de gravitation

C.1) On note par  $\vec{u}$ , le vecteur unitaire reliant le point P où se trouve la masse élémentaire  $dm$  et le point M, lieu où on calcule le champ.

$$\vec{dG} = -\mathcal{G} \frac{\mu dr \vec{u}}{PM^2}$$

C.2) En prenant deux points symétriques par rapport à la droite CM (C centre de la sphère, M point d'observation où on calcule le champ), on obtient deux champs de gravitation symétriques par rapport à la droite CM, le champ résultant est donc radial.

Toute rotation d'angle  $\theta$  et d'angle  $\varphi$  laisse la distribution de température inchangée donc  $\vec{G}$  ne dépend que de  $r$ . (en choisissant des coordonnées sphériques).

C.3) Le champ dérive d'un potentiel si sa circulation est nulle le long d'une courbe fermée, ou encore si sa circulation élémentaire est une différentielle exacte.

On écrit alors  $dC = \vec{G} \cdot d\vec{\ell} = -\mathcal{G} \frac{M dr}{r^2} = d \frac{\mathcal{G}M}{r}$  D'où l'expression de l'énergie potentielle,

$$E_p = -\mathcal{G} \frac{mM}{r}$$

## D.- Mouvement de la Lune par rapport à la Terre

D.1) Les trois lois de Newton sont :

- Il existe des référentiels, dits inertiels dans lesquels un point matériel libre de toute interaction est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

- Dans un référentiel inertiel, l'accélération  $\vec{a}$  d'un point de masse  $m$  soumis à une force  $\vec{F}$  est donnée par la relation :  $\vec{F} = m\vec{a}$

- Les forces d'interaction réciproque qui s'exercent entre deux points matériels sont opposées et ont pour support la droite joignant ces points.  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0}$  et

$$\vec{M}_1 M_2 \wedge \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}$$

D.2) Le référentiel de Copernic est lié à des axes issus du centre de masse du système solaire et dirigés vers des étoiles fixes  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Le référentiel géocentrique est lié à des axes issus du centre de masse de la Terre et dirigés vers ces mêmes étoiles.

Les deux référentiels utilisent la même horloge (même chronologie).

D.3) On applique le principe fondamental de la dynamique. La force est centrale et comme le mouvement est circulaire, il est nécessairement uniforme.

On a  $M_L \frac{v^2}{d} = \mathcal{G} \frac{M_L M_T}{d^2}$  avec  $v T_\ell = 2\pi d$  on obtient :

$$T_\ell = \sqrt{\frac{4\pi^2 d^3}{\mathcal{G} \cdot M_T}}$$

D.4) L'application numérique donne  $T_\ell = 27,41$  jours

Cela ne correspond pas à la période de lunaison, car pendant ces 27 jours, la Terre tourne autour du Soleil, la nouvelle Lune ne peut se produire que si la Lune accomplit un peu plus d'un tour. Appelons  $\theta$  cet angle supplémentaire, on a  $[2\pi + \theta] = \frac{2\pi}{T_\ell} \cdot T_L$ , avec  $\theta = \frac{2\pi}{T_a} \cdot T_L$ , on obtient alors

$$1 = \frac{T_L}{T_\ell} - \frac{T_L}{T_a}, \text{ d'où } T_L = \frac{T_\ell T_a}{T_a - T_\ell}, \text{ l'application numérique donne } T_L = 29,63 \text{ jours}$$

D.5) On écrit  $\alpha_1 = \frac{2 \cdot R_L}{d_1}$  et  $\alpha_2 = \frac{2 \cdot R_L}{d_2}$ , on trouve  $d_1 = 356773 \text{ km}$  et  $d_2 = 407915 \text{ km}$ .

D.6) La Lune décrit une trajectoire elliptique dont la Terre occupe l'un des foyers, en général la force n'est pas égal à l'accélération radiale (à la masse de la lune près) sauf au périégée et à l'apogée, il

est facile d'écrire alors  $\mathcal{G} \frac{M_L \cdot M_T}{d_1^2} = M_L \frac{v_1^2}{d_1}$ , d'où les vitesses  $v_2 = 998,6 \text{ m/s}$  et  $v_1 = 1057 \text{ m/s}$ .

D.7) La variation du diamètre apparent entraîne que certaines éclipses totales de Soleil, ne le sont plus car le disque lunaire ne recouvre plus totalement le disque solaire, l'éclipse est alors annulaire.

D.8) Il faut comparer les deux forces, ce qui revient à comparer les deux champs gravitationnels, on obtient facilement  $\frac{M_{\odot}}{M_T} \left(\frac{D}{d}\right)^2$ , l'application numérique donne  $\boxed{2,21}$ , **La force due au Soleil est deux fois plus importante!**

L'explication est simple, le référentiel géocentrique n'est pas galiléen car il est en translation circulaire par rapport à celui de Copernic, il faut donc tenir compte de la force d'inertie d'entraînement.

On peut alors écrire :

$$M_T \vec{a}_{\text{Copernic}}(\text{Terre}) = M_T \vec{G}_{\text{Soleil}}(\text{Terre}) + M_T \vec{G}_{\text{Lune}}(\text{Terre})$$

$$M_L \vec{a}_{\text{Terre}}(\text{Lune}) = M_L \vec{G}_{\text{Soleil}}(\text{Lune}) + M_L \vec{G}_{\text{Terre}}(\text{Lune}) - M_L \vec{a} \text{ (entraînement)}$$

l'accélération d'entraînement étant égal à l'accélération de la Terre dans le référentiel de Copernic.

$$\text{Il reste alors : } \vec{a}_{\text{Terre}}(\text{Lune}) = \vec{G}_{\text{Terre}}(\text{Lune}) + \vec{G}_{\text{Soleil}}(\text{Lune}) - \vec{G}_{\text{Soleil}}(\text{Terre}) - \vec{G}_{\text{Lune}}(\text{Terre}).$$

Plaçons nous dans le cas particulier où le Soleil, la Terre et la Lune sont alignés et dans le cas le plus défavorable pour la Lune, il reste alors

$$\|\vec{a}\|_{\text{Terre}}(\text{Lune}) = -\mathcal{G} \frac{M_T}{d^2} + \mathcal{G} \frac{M_{\odot}}{(d-D)^2} - \mathcal{G} \frac{M_{\odot}}{d^2} + \mathcal{G} \frac{M_L}{d^2}, \text{ en remarquant que } D \ll d \text{ et } M_L \ll M_T,$$

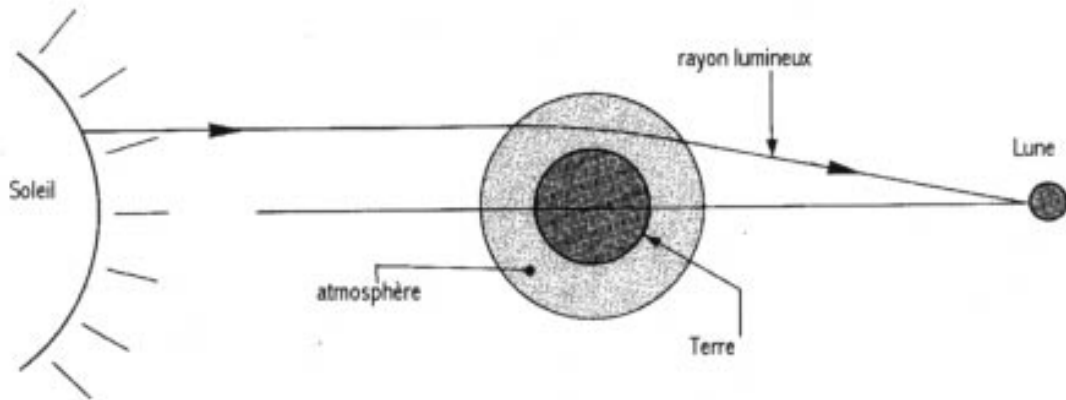
on retrouve alors l'expression obtenue à la question précédente.

## E.- Étude des éclipses

- E.1) La distance Terre-Soleil étant sensiblement constante et la trajectoire de la Terre étant dans un plan, le Soleil semble décrire un cercle en 1 an soit  $360^\circ$  en 365,25 jours, ce qui correspond (approximativement) à une vitesse angulaire de  $1^\circ$  par jour.
- E.2) C'est quand la Lune traverse ce plan que se produisent les éclipses.
- E.3) C'est une condition nécessaire mais non suffisante, car il faut de plus que la Lune se trouve à proximité du plan de l'écliptique.
- E.4) Les éclipses se produisent quand la NL ou PL se produisent aux nœuds, ce qui a lieu environ tous les 6 mois, il se produit en général 2 éclipses une de Lune une de Soleil, toutefois il peut arriver que la Lune ne soit pas encore trop éloignée du plan de l'écliptique, il se produit alors une troisième éclipse qui a comme nature la même que la première.
- E.5) C'est le temps universel TU ou le temps des éphémérides TE. Le premier suppose que la rotation de la Terre sur elle-même est uniforme et c'est l'angle de rotation qui permet de mesurer le temps, le second est repéré par la position du centre de la Terre sur son orbite autour du Soleil. Ce temps est le même pour tous les habitants de la planète.
- E.6) Approximativement, la Lune parcourt environ deux fois son diamètre apparent, on doit donc trouver que la durée de l'éclipse est de l'ordre de 2 heures, (on mesure 2 h 30 min) petite différence qui s'explique car pendant ces deux heures le Soleil se déplace dans le ciel, la Lune n'a pas une vitesse uniforme.
- E.7) Le Soleil se lève au Canada et se couche en Russie. Le Pôle Nord est plongé dans l'obscurité (en fait c'est le crépuscule de la nuit polaire).
- E.8) Aucune précaution pour observer une éclipse de Lune (sinon se couvrir chaudement!), il faut faire très attention à l'observation d'une éclipse de Soleil, utilisez uniquement du verre fumé au charbon (pas de lunettes de soleil), sinon la rétine risque de souffrir.
- E.9) (1) début de l'éclipse, (2) maxima de l'éclipse et (3) fin de l'éclipse.

E.10) La Terre, la Lune et Saturne seront alignés.

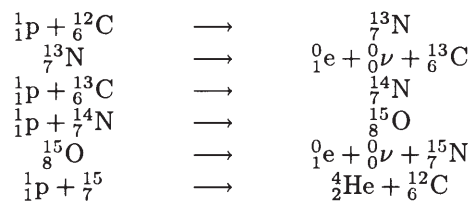
E.11) La lumière issue du Soleil est réfractée par l'atmosphère terrestre et est déviée vers la Lune. Cette lumière (qui arrive sur la Lune) est rouge car elle a traversé une très grande épaisseur d'atmosphère. La couleur rouge étant celle qui subit le moins le phénomène de diffusion. [1]



## F.- Étude du Soleil

F.1) La surface du Soleil étant égale à  $4.\pi.R_{\odot}^2$ , le résultat demandé est :  $4.\pi.R_{\odot}^2.\sigma.T^4 = 3,693.10^{26} \text{ W}$

F.2) Il suffit d'écrire les conservations du nombre de masse et de charge sans omettre l'apparition de neutrinos.



Le bilan s'écrit  $4 {}^1_1\text{P} \longrightarrow 2 {}^0_1\text{e} + 2 {}^0_0\nu + {}^4_2\text{He}$

F.3) L'unité de masse atomique (symbole  $u$ ) est le douzième de la masse d'un atome de carbone 12.

F.4) On calcule le défaut de masse par la relation d'Einstein  $\Delta mc^2 = \Delta U$ . On obtient

$$\Delta m = 4,1091.10^9 \text{ kg}$$

F.5) Dans un premier temps on calcule le défaut de masse de la réaction soit  $4p - 2e - \alpha = 0,02646 u = 4,3938.10^{-29} \text{ kg}$ .

On en déduit qu'il se passe  $9,352.10^{37}$  réactions nucléaires par seconde.

Il disparaît  $6,259.10^{11} \text{ kg}$  d'hydrogène par seconde, et

il apparaît  $6,216.10^{11} \text{ kg}$  d'hélium par seconde.

F.6) 80% d'hydrogène dans la masse du Soleil correspond à une masse égale à  $8 \times 1,989.10^{29} \text{ kg}$  d'hydrogène, sachant la quantité d'hydrogène consommée par seconde on peut évaluer la durée

de vie du Soleil. On trouve  $2,542.10^{18} \text{ s} = 80,56$  milliards d'années.

F.7) L'énergie émise chaque seconde  $P$  se propage de manière isotrope, et quelques 8 minutes plus tard elle est étalée sur une sphère de surface  $4\pi.D^2$ , la Terre n'intercepte qu'une surface égale

à  $\pi.R_T^2$ , d'où  $P_T = P \cdot \frac{R_T^2}{4D^2}$ . L'application numérique donne  $P_T = 1,6917 \cdot 10^{17} \text{ W}$ .

F.8) En régime permanent l'énergie reçue par la Terre de la part du Soleil est exactement compensée par les pertes énergétiques dues au rayonnement. On obtient  $\frac{4\pi\sigma.R_\odot^2.T^4 \cdot \pi.R_T^2}{4.D^2} = 4\pi.R_T^2 \cdot \sigma.T_t^4$ ,

il reste après simplification  $T_t = T \cdot \sqrt{\frac{R_\odot}{2.D}}$ . L'application numérique donne  $T_t = 275 \text{ K}$ . Le résultat est très insuffisant, il faut tenir compte de l'atmosphère terrestre et en particulier de l'effet de serre.

F.9) Pour Mars on trouve  $T = 223,5 \text{ K}$  et pour Vénus  $T = 324,5 \text{ K}$ . On retrouve le résultat pour Mars mais pour Vénus ou l'effet de serre est très important; L'interprétation est liée à l'absence pour Mars et à la présence pour Vénus d'une atmosphère planétaire.

F.10) Entre les deux on trouve  $\Delta T = 5,4 \text{ K}$ , le contraste entre les saisons est beaucoup plus marquée dans l'hémisphère Sud que dans l'hémisphère Nord. La Terre passe par le périhélie le 2 janvier et par l'aphélie le 2 juillet. C'est une explication pour interpréter la différence de surface des calottes polaires au Nord et au Sud.

## Bibliographie

[1] L. GOUGUENHEIM - Méthodes de l'astrophysique - Hachette

**CAPES****(Concours Interne)**

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de chimie - Session : 1998

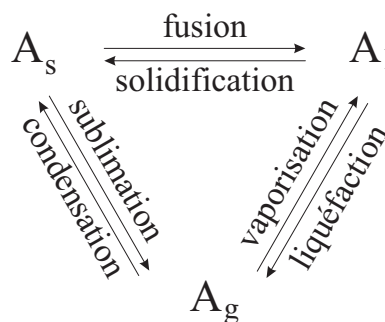
## PARTIE I

## AU FIL DE L'EAU

I.1. **Corps pur.**

- I.1.1. Un corps pur contient seulement un constituant chimique de formule chimique déterminé.
- I.1.2. Des critères de pureté pour l'eau sont, par exemple, sa température de fusion et d'ébullition sous un bar.

I.1.3.



- I.1.4. Les techniques permettant d'isoler l'eau dans un mélange hétérogène sont la distillation, la décantation, la filtration, la centrifugation.
- I.1.5. La synthèse de l'eau a été réalisée par :
- I.1.5.1. Cavendish (ou Priestley).
- I.1.5.2. Lavoisier.

I.2. **Structure de l'eau et dissolution.**

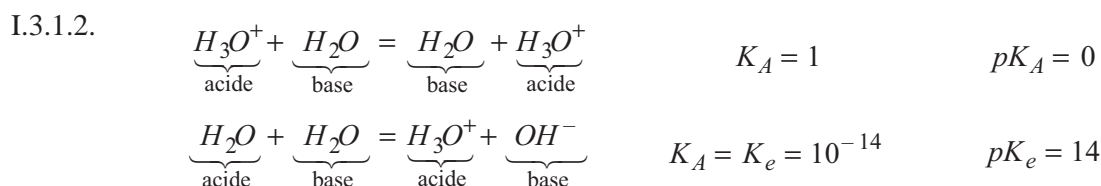
- I.2.2.  $A X_2 E_2$  : molécule coudée.
- I.2.3. I.2.3.1. Chaque liaison  $OH$  est une liaison de valence polarisée.
- I.2.3.2. Cette molécule d'eau est polaire.

- I.2.4. L'eau est un solvant dissociant et solvatant.  
(dissociant :  $\epsilon_r = 80$ , solvatant : formation d'aquacomplexes).
- I.2.5. Les composés polaires et les composés susceptibles de former des liaisons hydrogène sont facilement solubles dans l'eau.
- I.2.6. Suivant les valeurs de l'enthalpie de dispersion des ions, réaction endothermique, et l'enthalpie d'hydratation des ions, réaction exothermique, le bilan thermique de la dissolution d'un cristal ionique peut être athermique, exothermique ou endothermique.

### I.3. Les couples de l'eau.

#### I.3.1. Couples acide/base :

I.3.1.1.  $H_3O^+ / H_2O$  et  $H_2O / OH^-$  sont les deux couples acide/base de l'eau.



I.3.1.3. Le produit ionique de l'eau est par définition  $K_e = [H_3O^+] \cdot [OH^-]$ , sa valeur est  $K_e = 10^{-14}$  à 25°C.



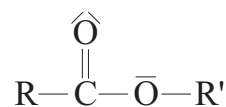
## PARTIE II

### COMPOSITION D'UNE LESSIVE

#### II.1. Savons.

##### II.1.1. Estérification.

II.1.1.1. La formule générale d'un ester est :



##### II.1.2. Hydrolyse.

II.1.2.1. L'hydrolyse d'un ester est la réaction de l'eau avec cet ester.





### II.1.3. Saponification.

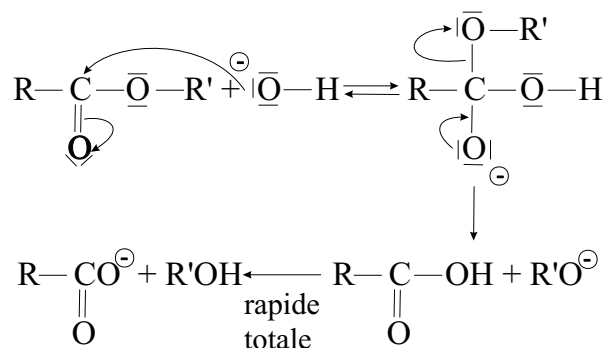
II.1.3.1. La saponification est la réaction d'un ester avec l'ion hydroxyde (hydrolyse basique).



II.1.3.3. La saponification est une réaction totale qui forme le sel de sodium et de potassium du carboxylate.

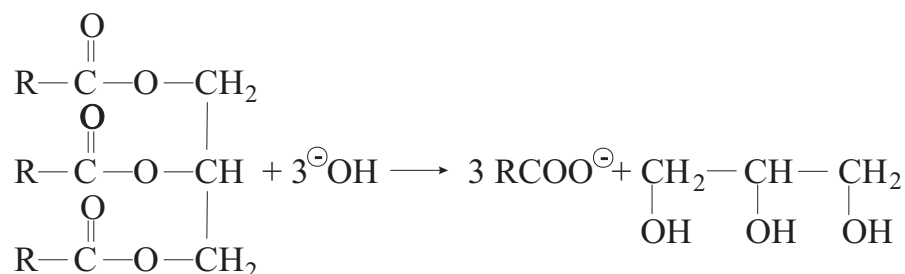
L'hydrolyse est une réaction équilibrée.

II.1.3.4.



### II.1.4. Saponification d'un triglycéride.

II.1.4.1.



II.1.4.2. Le polyol obtenu est le glycérol ou propane-1,2,3-triol.

II.1.4.3. La formule générale d'un savon est :

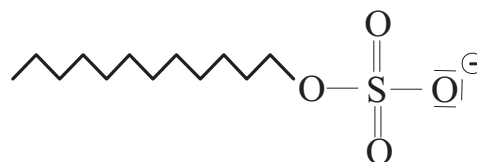


## II.2. Autres détergents.

II.2.1. alkyl : chaîne carbonée saturée (aliphatique).

aryl : chaîne carbonée aromatique.

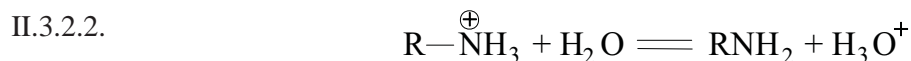
II.2.2.



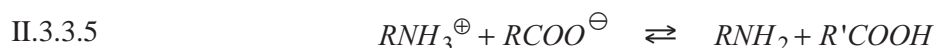
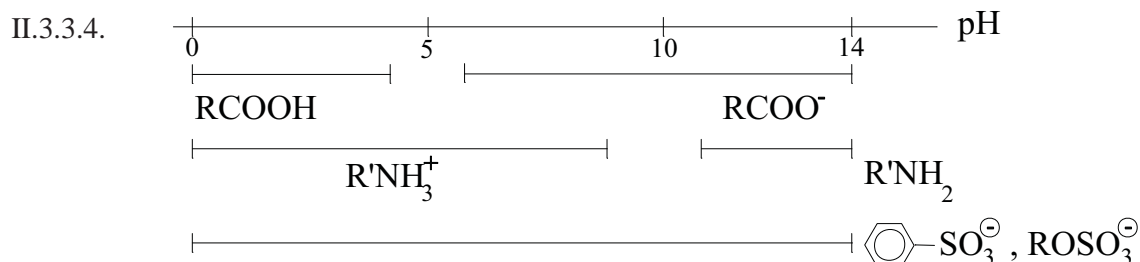
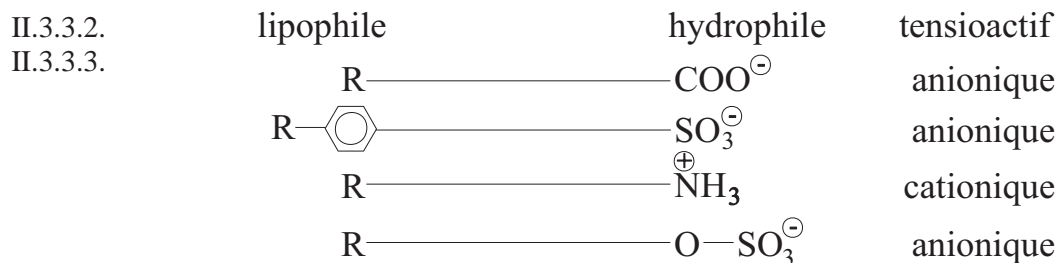
## II.3. Tensioactifs.

II.3.1. Un tensioactif modifie la tension superficielle d'un milieu.

II.3.2. II.3.2.1. Le chlorure de nonylammonium est un acide faible.



II.3.3. II.3.3.1. Un tensioactif possède une partie hydrophile et une partie lipophile (ou hydrophobe).



$$\text{II.3.3.6.} \quad K = \frac{[\text{R}'\text{COOH}][\text{RNH}_2]}{[\text{R}'\text{COO}^-][\text{RNH}_3^{\oplus}]} = \frac{K_A(\text{RNH}_3^+ / \text{RNH}_2)}{K_A(\text{R}'\text{COOH} / \text{R}'\text{COO}^-)} = 10^{-10+5} = 10^{-5}$$

L'équilibre est très peu déplacé : dans une lessive on peut donc mélanger ces tensioactifs anioniques et cationiques.

II.3.3.7. Un ammonium quaternaire n'a pas de propriétés acides, il reste sous forme  $\text{R}_4\text{N}^{\oplus}$  quelque soit les conditions de pH du milieu.

## II.4. Solubilité des savons.

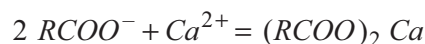
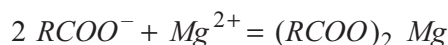
II.4.1. Solubilité.



II.4.1.2. La présence d'ions sodium diminue la solubilité du savon : déplacement d'équilibre par effet d'ion commun.

II.4.1.3. Cette propriété est utilisée au cours de l'opération de relargage par  $\text{NaCl}$  lors de la saponification.

II.4.2. En présence d'ions  $\text{Mg}^{2+}$  et  $\text{Ca}^{2+}$  se forment des carboxylates de sodium et de magnésium peu solubles :



Une eau riche en  $\text{Ca}^{2+}$  et  $\text{Mg}^{2+}$  est une eau dure.

II.4.3. Les ions polyphosphate complexent les ions  $Ca^{2+}$ .

II.4.4. Un tensioactif cationique ne peut pas former de précipité avec les cations magnésium et calcium. Il reste efficace dans une eau dure.

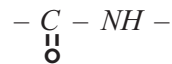
## II.5. Enzymes.

II.5.1. L'entité de base d'une protéine est un acide aminé, la glycine par exemple :



II.5.2.  $2 H_2N - CH_2 - COOH = H_2N - CH_2 - \underset{\text{O}}{\underset{\parallel}{C}} - NH - CH_2 - COOH + H_2O$

II.5.3. Les protéases hydrolysent les liaisons peptidiques :



## PARTIE III

### CINÉTIQUE

#### III.1. Étude cinétique de la réaction de saponification.

III.1.1. III.1.1.1.  $H_3C - COOC_2H_5 + {}^{\ominus}OH = CH_3COO^- + C_2H_5OH$

III.1.1.2. On définit la vitesse volumique de la réaction en fonction de l'avancement  $\xi$  :

$$v = \frac{1}{V} \cdot \frac{d\xi}{dt}$$

En fonction des concentrations des réactifs et produits elle s'écrit :

$$v = -\frac{d[OH^-]}{dt} = -\frac{d[ester]}{dt} = \frac{d[CH_3COO^-]}{dt} = \frac{d[C_2H_5OH]}{dt}$$

III.1.1.3.  $-\frac{dc}{dt} = k \cdot c^a \cdot c^b = k c^{a+b}$

d'après les notations et les proportions proposées dans l'énoncé.

III.1.1.4. Plusieurs suivis sont possibles : par exemple prélèvement, trempe et dosage de l'hydroxyde de sodium.

III.1.2. III.1.2.1.  $-\int_{C_0}^c \frac{dc}{c^2} = k \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{c} - \frac{1}{C_0} = kt$

si  $a + b = 2$ .

III.1.2.2. Le tracé de  $y = \frac{1}{c}$  en fonction du temps  $t$  est une droite.

$t_{\min}$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,6	10,0
$y \text{ mol}^{-1} \cdot L$	123	135	147	158	169	212

$$\text{III.1.3.} \quad k = 11 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{min}^{-1} \quad t_{1/2} = \frac{1}{k C_0} = 10 \text{ min}$$

III.1.4. La loi d'Arrhenius  $k = \mathcal{A} \cdot e^{-E_a/RT}$  se traduit après passage au logarithme népérien par la relation :

$$\ln \frac{t_{1/2}(60^\circ \text{C})}{t_{1/2}(20^\circ \text{C})} = -\frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

Application Numérique :  $t_{1/2} = 0,2 \text{ min}$

### III.2. Étude cinétique de la réaction précédente dans les conditions d'utilisation habituelles d'une lessive.

III.2.1. On maintient le pH constant : il y a dégénérescence de l'ordre par rapport aux ions hydroxyde. La loi de vitesse s'écrit alors :

$$v = -\frac{dc}{dt} = k [\text{OH}^-]^b \cdot c^a = k' c^a$$

III.2.2. La représentation graphique de  $z = \ln c$  en fonction du temps est une droite de pente  $k'$  si  $a = 1$  car :

$$-\frac{dc}{dt} = k' c \Rightarrow \ln \frac{c}{C_0} = -k' t$$

$t_{(h)}$	2	5	10	20	30	40
$-z$	0,14	0,34	0,70	1,40	2,0	2,8

On obtient une droite de pente  $k' = 0,07 \text{ h}^{-1} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ min}^{-1}$ .

III.2.3. L'ordre partiel par rapport à l'ester est de 1, l'ordre global de 2, l'ordre partiel par rapport à l'ion hydroxyde est donc de 1.

La constante apparente  $k'$  a été déterminée et :

$$k' = k [\text{OH}^-] \Rightarrow k = \frac{k'}{[\text{OH}^-]}$$

avec :  $k' = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ min}^{-1}$

et :  $[\text{OH}^-] = 1 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$$\Rightarrow k = 11 \text{ min}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{L}$$

## PARTIE IV

### ÉTUDE D'UN PARFUM, L'ESSENCE DE LAVANDE

#### IV.1. Exploitation d'un sujet de baccalauréat.

IV.1.1. La vapeur d'eau permet de former un hétéroazéotrope et «d'entraîner» l'essence de lavande lors de la distillation. Le nom de cette technique est entraînement à la vapeur d'eau ou hydrodistillation.

IV.1.2. Le rôle du serpentín est de condenser les vapeurs, un serpentín permet pour un encombrement réduit une plus grande longueur de tube et donc une plus grande efficacité par augmentation de la surface de contact avec l'extérieur.

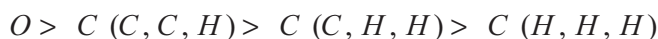
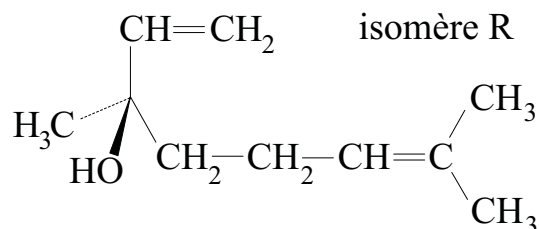
IV.1.3. L'essence de lavande de densité 0,9 constitue la phase supérieure.

## IV.2. Étude des constituants de l'essence de lavande.

IV.2.1. Stéréochimie du linalol.

IV.2.1.1. Il n'y pas d'isomérisation *Z*, *E* car deux substituants sont identiques (*H* ou  $CH_3$ ) sur un des carbones éthyléniques. La présence d'un carbone asymétrique qui peut être *R* ou *S* implique la présence de deux isomères de configuration. La fonction alcool est tertiaire.

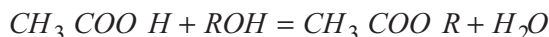
IV.2.1.2.



IV.2.2. Deux énantiomères sont images l'un de l'autre dans un miroir.

Deux diastéréoisomères sont deux stéréoisomères qui ne sont pas énantiomères.

IV.2.3. a.



b.

$$M_{linalol} = 154 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad M_{ester} = 196 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

On veut préparer  $\frac{1000}{196} = 5,10 \text{ mol}$  d'ester.

Le rendement étant de 5 % d'alcool estérifié il faut 102 moles de linalol soit :

$$m_{linalol} = n_{linalol} \cdot M_{linalol}$$

$$m_{linalol} = 15,7 \text{ kg}$$

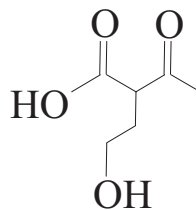
c. L'éthanoate de linalyle peut être préparé avec du chlorure d'éthanyle.

Le rendement attendu pour l'estérification d'un alcool tertiaire est bien de l'ordre de 5 %.

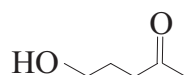
## IV.3. Synthèse du linalol.

IV.3.1. Les formules développées demandées sont :

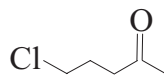
B (obtenu par hydrolyse de l'ester cyclique) :



C (décarboxylation de B)

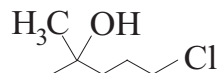


D (action de  $\text{SOCl}_2$  sur un alcool)

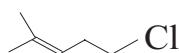


IV.3.2. IV.3.2.1. Ce composé est l'iodure de méthylmagnésium.

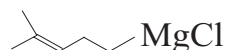
IV.3.2.2. E (addition d'un magnésien sur une cétone)



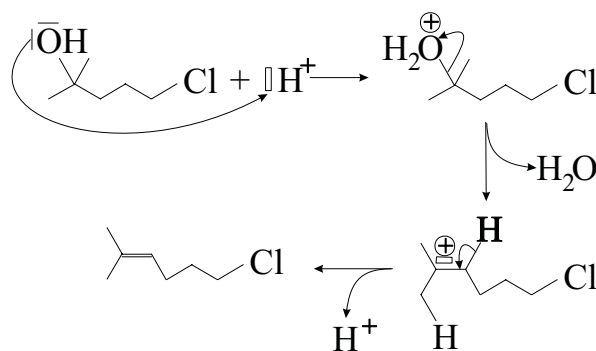
F (déshydratation d'un alcool)



G (synthèse d'un organomagnésien)



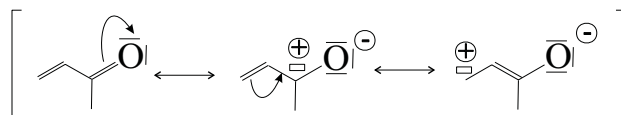
IV.3.2.3. Déshydratation intramoléculaire d'un alcool par un mécanisme  $E_1$ .



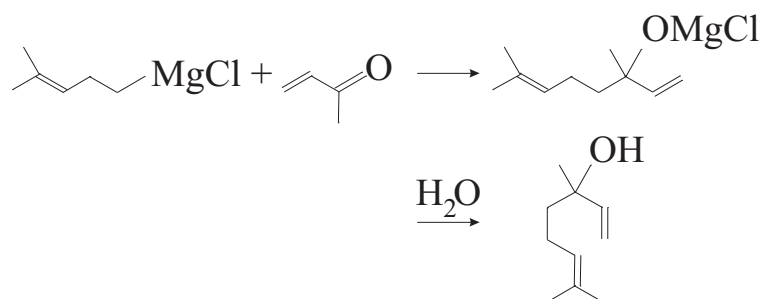
( ou Cl si départ d'un autre H en  $\beta$ )

IV.3.2.4. Pour la formation d'un organomagnésien : il faut nécessairement un solvant base de Lewis, anhydre et si possible une atmosphère inerte. On choisit généralement le diéthyléther sous courant de diazote.

IV.3.3. IV.3.3.1.



IV.3.3.2. Remarque : dans la pratique le produit d'addition 1 – 4 est obtenu, on additionnera plutôt un organolithien pour n'obtenir que l'addition 1 – 2.



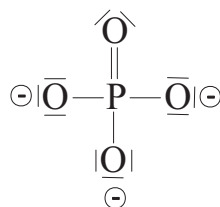
## PARTIE V

### DOSAGE DES POLYPHOSPHATES CONTENUS DANS UNE LESSIVE

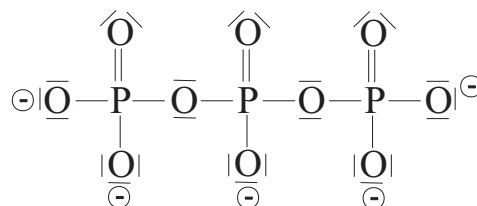
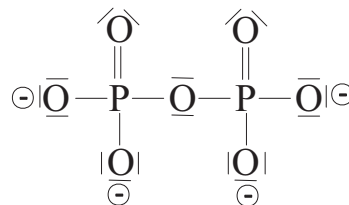
#### V.1. Généralités.

##### IV.1.1. Formules.

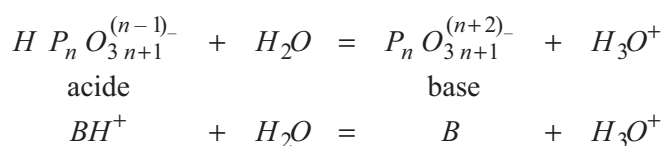
##### V.1.1.1.



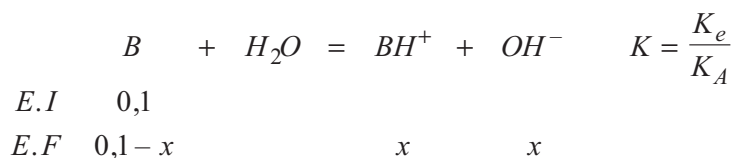
##### V.1.1.2.



##### IV.1.2. V.1.2.1.



V.1.2.2. Le pH est le pH d'une solution de base faible. La réaction prépondérante est :



On suppose que cette base faible est l'espèce majoritaire  $x \ll 0,1$ . Alors :

$$K = \frac{[OH^-]^2}{0,1} \Rightarrow [OH^-] = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow pH = 11,1$$

Les hypothèses du calcul sont vérifiées car :

$$[BH^+] = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \ll [B] = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$$

Le pH est basique, on ne doit pas tenir compte de l'autoprotolyse de l'eau.

## V.2. Dosage.

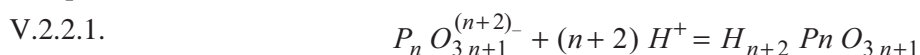
### V.2.1. Protocole opératoire.

V.2.1.1. L'éprouvette permet le prélèvement des 100 mL de S. La pipette jaugée et la propipette permettent de prélever précisément les 20 mL à doser.

V.2.1.2. La séparation des deux phases s'effectue avec une ampoule à décanter.

V.2.1.3. Par passage sur la résine le savon est passé sous forme  $RCOOH$  en phase organique ; les enzymes, le parfum se trouvent aussi dans la phase organique au-dessus de la phase aqueuse car l'éther est moins dense que l'eau.

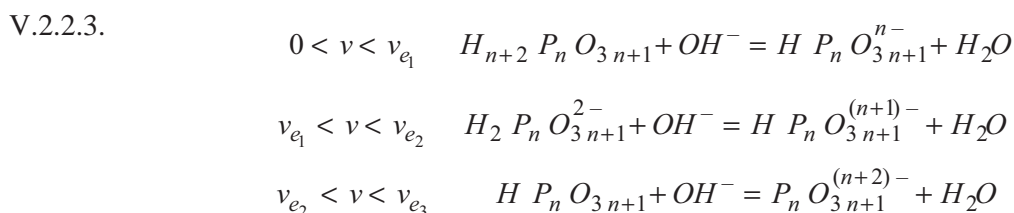
### V.2.2. Interprétations



On obtient l'acide polyphosphorique.



Les volumes équivalents sont lus aux maxima de la courbe  $dpH / dV$ .



V.2.2.4. On observe le dosage de toutes les acidités fortes (n) puis séparément des deux acidités faibles.

Il faut  $(v_{e3} - v_{e2}) \times C_{OH^-}$  pour doser une acidité. On peut donc rapidement déduire  $n$  :

$$n = \frac{v_{e1}}{(v_{e3} - v_{e2})} = 3$$

L'acide triphosphorique était donc présent.

L'ion triphosphate est présent dans la lessive.

V.2.2.5. Par exemple par utilisation du volume équivalent total  $v_{e3}$  : dosage des cinq acidités.

$$5 \cdot [TPP]_0 \cdot 20 = 19,5 \times 0,1 \Rightarrow [TPP]_0 = 0,0195 \text{ mol.L}^{-1}$$



V.2.2.6. On obtient alors la masse de phosphate présente :

$$\Rightarrow n_{TPP} = 0,0195 \text{ mol}$$

dans 1 L :

$$\Rightarrow m_{TPP} = 5,0 \text{ g}$$

$$M_{TPP} = 253 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Soit un pourcentage massique de  $5 / 15 = 33 \%$  de polyphosphate présent dans la lessive.

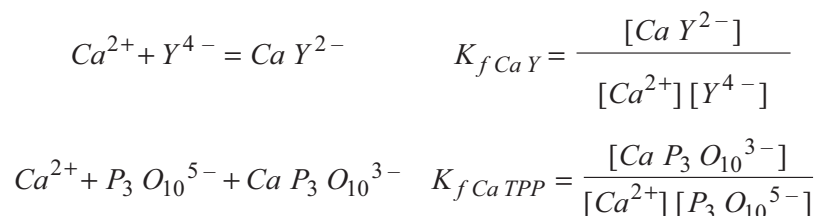
V.2.2.7. Il paraît intéressant de les récupérer pour les recycler comme engrais, dans les eaux usées qui arrivent en station d'épuration il est possible de les faire précipiter.

## PARTIE VI

### RÔLE DE L'E.D.T.A. DANS LES NOUVELLES GÉNÉRATIONS DE LESSIVE

#### VI.1. Intérêts.

##### VI.1.1.



VI.1.2. La réaction de complexation est quasi-totale et le réactif limitant est  $Ca^{2+}$  :

$$Ca^{2+} + Y^{4-} = Ca Y^{2-} \quad \text{et} \quad K_f = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{\varepsilon \cdot (10^{-2} - 4 \cdot 10^{-3})} = 10^{10,7}$$

$$E.I \quad 4 \cdot 10^{-3} \quad 10^{-2} \quad 0$$

$$E.F \quad \varepsilon \quad 10^{-2} - 4 \cdot 10^{-3} \quad 4 \cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = [Ca^{2+}] = 1,3 \cdot 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\frac{[Ca^{2+}]}{[Ca^{2+}]_0} = 3 \cdot 10^{-3}$$

Seulement  $3 \cdot 10^{-7} \%$  d'ions  $Ca^{2+}$  restent en solution.

VI.1.3. Par le même raisonnement dans le cas du ligand triphosphate :

$$[Ca^{2+}] = 5 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1} \quad \text{et} \quad \frac{[Ca^{2+}]}{[Ca^{2+}]_0} = 1,2 \cdot 10^{-6}$$

$1 \cdot 10^{-4} \%$  de calcium reste en solution.

VI.1.4. L'E.D.T.A. est un ligand beaucoup plus efficace que le polyphosphate, on le mettra dans la lessive à des concentrations beaucoup plus faibles que les phosphates.

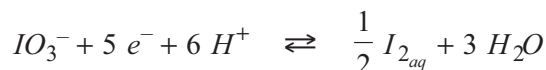
VI.1.5. Les ions  $Pb^{2+}$  sont peu complexés par les phosphates, en présence d'E.D.T.A. ils sont présents en solution sous forme d'espèces très stables (pollution de l'eau par les métaux lourds).

## VI.2. Étude d'une réaction d'oxydoréduction.

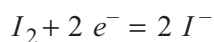
VI.2.1. Un oxydant est une espèce susceptible de capter des électrons.

Un réducteur est une espèce susceptible de céder des électrons.

VI.2.2.



$$E_1 = 1,17 + \frac{0,06}{5} \lg \frac{[IO_3^-] [H^+]^6}{[I_2]^{\frac{1}{2}}}$$



$$E_2 = 0,61 + \frac{0,06}{2} \lg \frac{[I_2]}{[I^-]^2}$$

VI.2.3. Le bilan de la réaction d'oxydoréduction s'écrit :



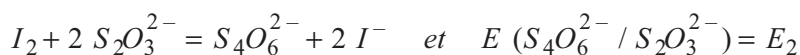
A l'équilibre il y a égalité des potentiels, soit :

$$E_1 = E_2$$

$$\Rightarrow \lg K = \frac{5 (1,17 - 0,61)}{0,06} = 46,6 \quad K = 4 \cdot 10^{46}$$

Cette réaction est quasi-totale.

VI.2.4.



à l'équilibre.

$$0,09 + \frac{0,06}{2} \lg \frac{[S_4O_6^{2-}]}{[S_2O_3^{2-}]^2} = 0,61 - \frac{0,06}{2} \lg \frac{[I_2]}{[I^-]^2}$$

$$\Rightarrow \log K = \frac{2 (0,61 - 0,09)}{0,06} = 17,3 \quad K = 2 \cdot 10^{17}$$

Cette réaction quasi-totale est utilisée comme réaction de dosage en iodométrie.

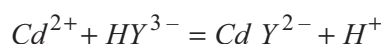
VI.2.5. L'indicateur de fin de réaction est l'empois d'amidon ou le thiodène à utiliser juste avant l'équivalence.

## VI.3. Dosage de l'E.D.T.A.

VI.3.1. Avant l'ajout d'E.D.T.A., il n'y a pas de  $H^+$  nécessaires à l'avancement de la réaction entre les ions iodate et iodure, le diiode ne se forme pas.

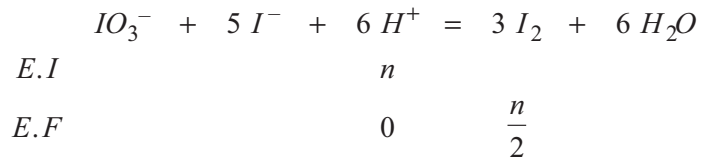
Dès que l'E.D.T.A. est ajouté, la formation de  $Cd Y^{2-}$  entraîne la libération de  $H^+$ , la réaction devient possible.

VI.3.2.



$$n(HY^{3-}) = n(H^+) = 5 \cdot [EDTA]_0 = n_{EDTA} (mmol)$$

VI.3.3.



puis dosage du diiode :  $I_2 + 2 S_2O_3^{2-} = S_4O_6^{2-} + 2 I^-$

Puisqu'il faut 10 mL de thiosulfate  $0,050 \text{ mol.L}^{-1}$  pour obtenir la décoloration :

$$\frac{n}{2} = \frac{0,05 \times 10}{2} \Rightarrow [EDTA]_0 = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$$

VI.3.4.

$$M_{Cd SO_4} = 112,4 + 32 + 4 \times 16 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$\Rightarrow n_{Cd SO_4} = \frac{m}{n_{Cd SO_4}} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ mole}$$

et

$$n_{EDTA} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ mole}$$

Le cadmium a bien été ajouté en excès.

VI.3.5. L'E.D.T.A. est un poison (propipette - gants).

# CAPES

(Concours Interne)

SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition d'électricité appliquée - Session : 1998

PREMIÈRE PARTIE - ÉLECTROTECHNIQUE

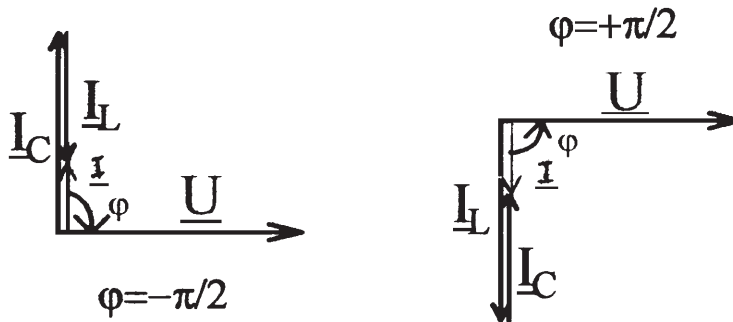
Chauffage par induction

## 1. Etude d'une charge oscillante LC parallèle alimentée par une tension sinusoïdale de pulsation $\omega$ :

$$1.1. \underline{Z} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

1.2. Z tend vers l'infini (circuit bouchon)

1.3. Pour  $\omega < \omega_0$ :  $\varphi = \pi/2$  charge inductive pure  
 Pour  $\omega > \omega_0$ :  $\varphi = -\pi/2$  charge capacitive pure



## 2. Etude d'une charge oscillante parallèle réelle alimentée par une tension sinusoïdale de pulsation $\omega$ :

$$2.1. \underline{Z} = \frac{R + j\omega(L - R^2C - L^2C\omega^2)}{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}$$

$$\arg(\underline{Z}) = \arctan \frac{b}{a}$$

$$\arg(\underline{Z}) = \arctan \frac{\omega(L - R^2C - L^2C\omega^2)}{R}$$

$$2.2. \text{résistance si } b=0 \text{ donc pour } \omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{1 - R^2 \frac{C}{L}}{LC}} \text{ et } \varphi=0$$

$$f_1 = 1010 \text{ Hz}$$

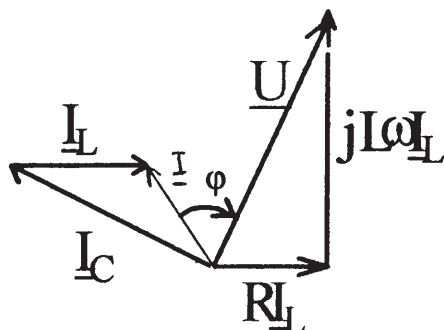
circuit inductif pour  $f < f_1$ ,  $b > 0$  et  $\varphi > 0$

circuit capacitif pour  $f > f_1$ ,  $b < 0$  et  $\varphi < 0$

$$2.3. I_c = C\omega U = 156 \text{ A}$$

$$I_L = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} = 151A$$

$$I = \frac{U}{Z} = 5,78A$$



### 3. Etude de l'onduleur à circuit oscillant parallèle:

3.1. Onduleur de courant (on impose le courant  $i(t)$  à la charge).

3.2. Un thyristor se désamorce si on lui impose une tension négative anode/cathode pendant un temps supérieur à son  $t_q$  (temps de désamorçage).

Ici, au moment où on amorce  $Th_3$ , la tension  $v_{Th1}=0$ , le thyristor  $Th_1$  ne peut s'ouvrir, la commutation naturelle entre  $Th_3$  et  $Th_1$  n'a donc pas lieu. Il en résulte un court-circuit de la source  $I_S$ . L'onduleur ne fonctionne donc pas; il faudrait lui adjoindre un système de commutation forcée (diodes et condensateurs) ou bien faire en sorte de prendre un déphasage minimum entre  $i(t)$  et  $u(t)$ .

### 3.3.

3.3.1. Commutation naturelle. L'onduleur est assisté par la charge RLC qui se comporte comme une charge capacitive, cette dernière fournissant l'énergie réactive nécessaire à la commutation des thyristors.

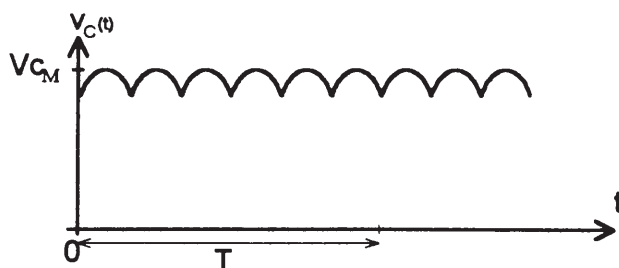
3.3.2. voir document réponse.  $u(t)$   
 $i(t)$

3.3.3. voir document réponse.  $i_{Th1}(t)$

3.3.4. voir document réponse.  $v_{Th1}(t)$   
 $v_S(t)$

### 3.4.

#### 3.4.1.



$$3.4.2. \quad V_{C_{moy}} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} mU_r$$

$$V_{C_{moy}} = 35V$$

$$3.4.3. \quad V_{L_{moy}} = 0 \text{ car } i_s = \text{constante}$$

$$V_{C_{moy}} = V_{smoy}$$

3.5.

$$3.5.1. \quad V_{smoy} = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} U \cos \psi$$

$$U = 44,9 \text{ V pour } \psi = 100^\circ$$

$$U = 224 \text{ V pour } \psi = 150^\circ$$

$$3.5.2. \quad P = V_{smoy} I_s = UI_f \cos \varphi = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} UI_s \cos \psi$$

$$3.5.3. \quad Q = -UI_f \sin \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} UI_s \sin \psi$$

$$3.5.4. \quad \psi = \varphi + \pi$$

#### 4. Etude du four à induction à $f = 1027 \text{ Hz}$ :

$$4.1. \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = nI$$

$$4.2. \quad H = \frac{nI}{h} = 10714 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$B = \mu H = 13,5 \text{ mT}$$

$$4.3. \quad \delta = 2,276 \text{ mm}$$

$$R = \rho_1 \frac{nD}{\delta(d - \delta)}$$

$$R = 10,3 \text{ m}\Omega$$

4.4.

4.4.1.

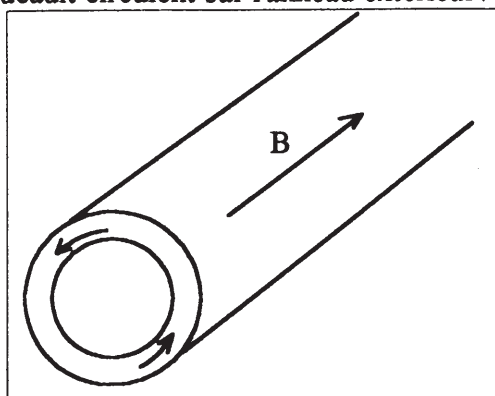
$$\varphi_T = nBS = LI \rightarrow L = \frac{n^2 \mu_0 \pi D^2}{4h}$$

$$L = 79,3 \mu\text{H}$$

L ne varie pas si on introduit une pièce en aluminium car la perméabilité relative de l'aluminium  $\mu_{R2} = 1$ .

$$4.4.2. \quad \delta = \sqrt{\frac{\rho_2}{\pi \mu_0 \mu_{R2} f}} = 4,632 \text{ mm}$$

Les courants de Foucault circulent sur l'anneau extérieur :



La résistance équivalente est celle de l'anneau déployé:  $R_{\acute{e}q} = \rho_2 \frac{l_2}{S_2}$

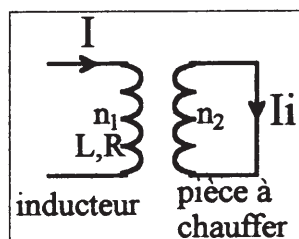
avec  $S_2 = a \delta_2$

la longueur  $l_2$  étant la circonférence moyenne de l'anneau:  $l_2 = \pi(b - \frac{\delta_2}{2}) \cong \pi b$

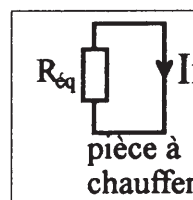
$$R_{\acute{e}q} = 2\pi^2 \frac{b}{a} \sqrt{10^{-7} \rho_2 \mu_{R2} f}$$

$$R_{\acute{e}q} = 17,7 \mu\Omega$$

#### 4.4.3.



$n_2 = 1$  spire



$$P_d = R_{\acute{e}q} I_i^2 = R_{\acute{e}q} \left( \frac{n_1}{n_2} I \right)^2$$

$$P_d = 995 \text{ W}$$

La pièce chauffe très faiblement.

$$\eta = \frac{P_d}{P_d + RI^2}$$

$$\eta = 0,816$$

#### 4.5.

4.5.1. Le théorème d'Ampère nous donne:  $H_0(h-a) + H_a a = nI$

$$\text{avec } H_0 = \frac{B}{\mu_0} \quad \text{et} \quad H_a = \frac{B}{\mu_0 \mu_{R3}}$$

$$\text{et } \varphi_T = nBS = LI \quad \text{avec } S = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$L' = \frac{n^2 \mu_0 \pi D^2}{4 \left( h - a + \frac{aD^2}{\mu_{R3} b^2} \right)}$$

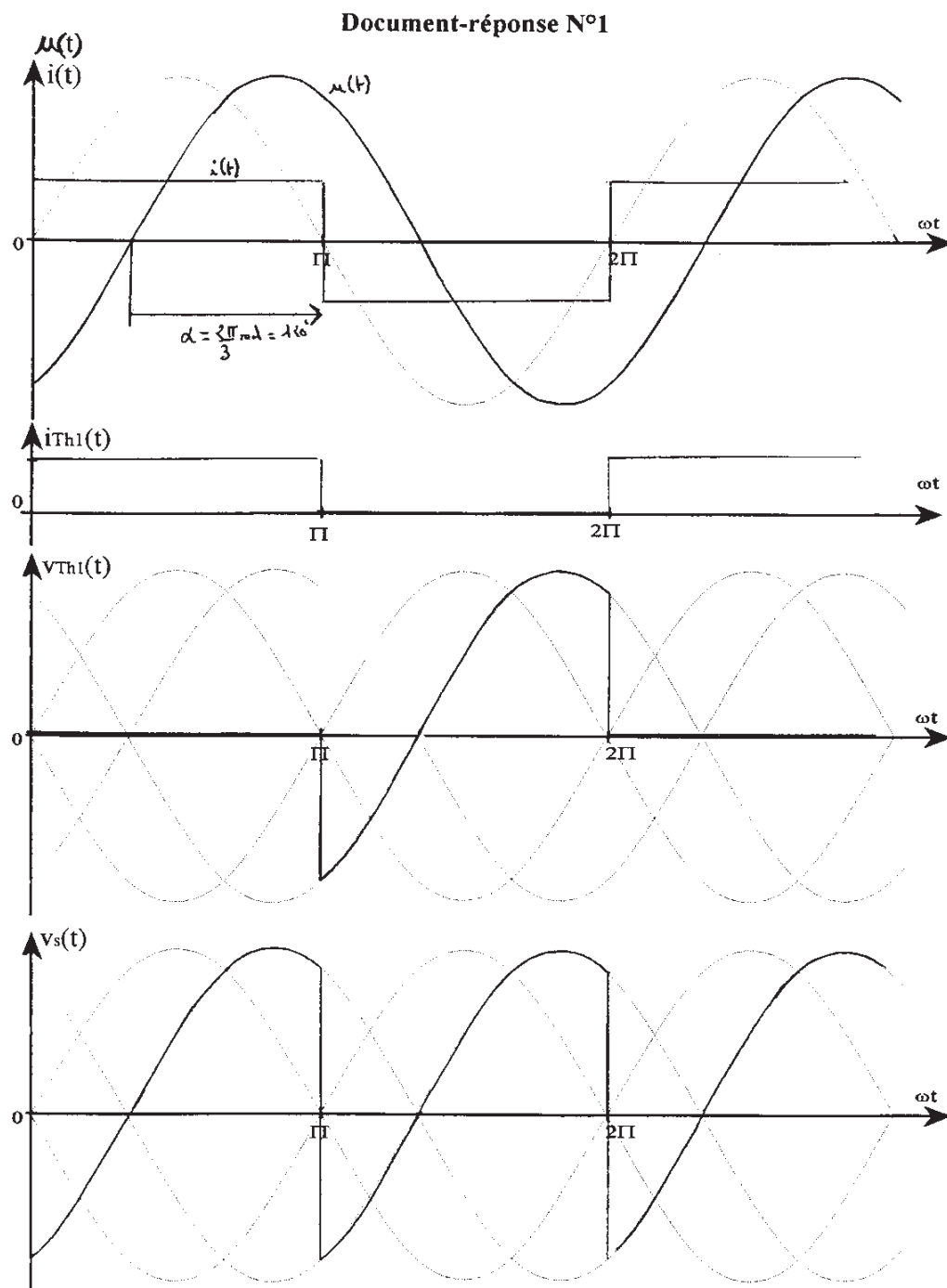
$$L' = 184 \mu\text{H} > L$$

$$4.5.2. R_{\epsilon q} = 1,004 \text{ m}\Omega \quad \text{et} \quad P_d = R_{\epsilon q} I_i^2 = R_{\epsilon q} \left( \frac{n_1}{n_2} I \right)^2$$

$$P_d = 56,5 \text{ kW}$$

$$\eta = 0,996$$

La puissance transmise au cylindre en acier est beaucoup plus importante. Cela est dû au couple  $\rho \cdot \mu_R$ .





## SECONDE PARTIE - ÉLECTRONIQUE

## A. Oscillateur à quartz

## 1. Étude du quartz.

## 1.1. Étude simplifiée du quartz sans pertes

$$1.1.1. \quad \underline{Z} = \frac{\frac{1}{j C_0 \omega} \left( j L_m \omega + \frac{1}{j C_m \omega} \right)}{j L_m \omega + \frac{1}{j C_m \omega} + \frac{1}{j C_0 \omega}} = \frac{1 - L_m C_m \omega^2}{j C_m \omega + j C_0 \omega - j L_m C_m C_0 \omega^2} = j \frac{L_m C_m \omega^2 - 1}{\omega (C_m + C_0 - L_m C_m C_0 \omega^2)}.$$

$$1.1.2. \quad X = 0 \text{ si : } \quad L_m C_m \omega^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_m C_m}}.$$

$$1.1.3. \quad X \rightarrow \infty \text{ si : } \quad C_m + C_0 = L_m C_m C_0 \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_p = \sqrt{\frac{C_m + C_0}{L_m C_m C_0}}.$$

1.1.4. Pour  $\omega = \omega_s$ ,  $Z = 0$  : correspond à la résonance d'un circuit LC série.

Pour  $\omega = \omega_p$ ,  $Z \rightarrow \infty$  : correspond à la résonance d'un circuit LC parallèle.

$$1.1.5. \quad 1.1.5.1. \quad \omega_p = \sqrt{\frac{C_m + C_0}{L_m C_m C_0}} = \omega_s \sqrt{1 + \frac{C_m}{C_0}} \approx \omega_s \left( 1 + \frac{C_m}{2 C_0} \right) \quad \text{car : } \frac{C_m}{C_0} \ll 1.$$

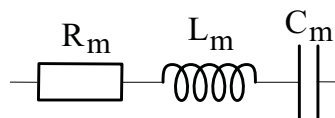
$$1.1.5.2. \quad f_s = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_m C_m}} = 10,066 \text{ MHz.} \quad f_p = 10,087 \text{ MHz.}$$

## 1.2. Étude du quartz avec pertes.

$$1.2.1. \quad \text{A la fréquence } f_s : \quad Z_m = R_m = 10 \Omega.$$

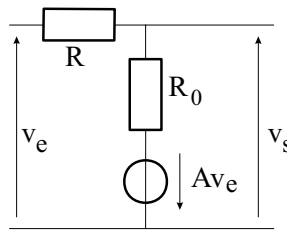
$$1.2.2. \quad Z_{C_0} = 2,63 \text{ k}\Omega.$$

1.2.3. Au voisinage de  $f_s$ , l'impédance de la branche  $R_m, L_m, C_m$  reste faible devant  $Z_{C_0}$ . Le quartz peut donc se ramener à :

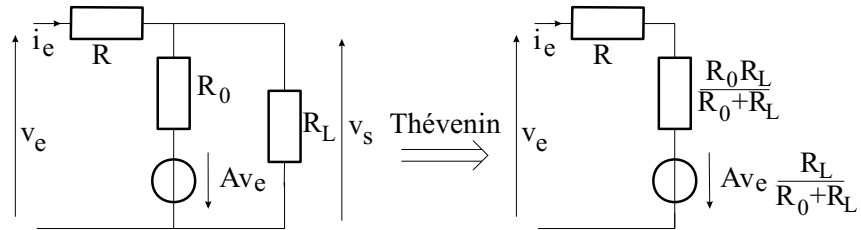


## 2. Étude d'un étage amplificateur à porte logique.

2.1.



2.2. 2.2.1.

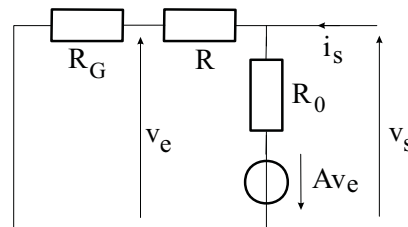


$$v_e = \left( R + \frac{R_0 R_L}{R_0 + R_L} \right) i_e - Av_e \frac{R_L}{R_0 + R_L} \approx R i_e - Av_e \frac{R_L}{R_0 + R_L}$$

$$\Rightarrow v_e \left( 1 + \frac{AR_L}{R_0 + R_L} \right) = R i_e \Rightarrow R_e = \frac{R}{1 + \frac{AR_L}{R_0 + R_L}} \approx \frac{R (R_0 + R_L)}{AR_L}$$

2.2.2.

$$R_e = 45 \Omega.$$

2.3. 2.3.1. On annule la tension  $v_e$ . Le montage devient alors :

$$\left. \begin{aligned} i_s &= \frac{v_s + Av_e}{R_0} + \frac{v_s}{R + R_G} \\ v_e &= v_s \frac{R_G}{R + R_G} \approx v_s \frac{R_G}{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow i_s = \frac{V_s + Av_s \frac{R_G}{R}}{R_0} + \frac{v_s}{R}$$

$$\Rightarrow R_s = \left( \frac{V_s}{i_s} \right)_{e=0} = \frac{R_0 R}{R + AR_G + R_0} \approx \frac{R_0 R}{R + AR_G}$$

2.3.2.

$$R_s = 20 \Omega.$$

2.4. Sortie à vide  $\Rightarrow$  montage équivalente de la question 2.1.

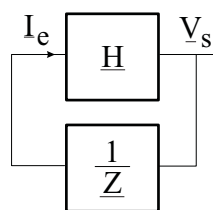
$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} v_s &= R_0 i_e - AV_e \\ v_e &= Ri_e + v_s \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_s = R_0 i_e - ARi_e - Av_s \Rightarrow v_s (1 + A) = (R_0 - AR) i_e$$

$$\Rightarrow A v_s \approx -ARi_e \Rightarrow \underline{H} = -R$$

### 3. Oscillateur à résonance série.

3.1. 3.1.1.

$$\underline{V}_s = \underline{H} \underline{I}_e = \underline{Z} \underline{I}_e$$



3.1.2. Oscillations si :  $\frac{\underline{H}}{\underline{Z}} = 1 \Rightarrow \text{si } \underline{H} = \underline{Z}.$

3.1.3.  $\underline{H}$  est réel  $\Rightarrow \underline{Z}$  est réel ( $\underline{Z} = R > 0$ )  $\Rightarrow \underline{H} > 0$   $H_{\min} = R.$

3.1.4. Si  $H > H_{\min}$ , l'amplitude de  $\underline{V}_s$  augmente à chaque période jusqu'à la non-linéarité de l'ampli (saturation)  $\Rightarrow$  oscillation non sinusoïdale.

3.2. 3.2.1.

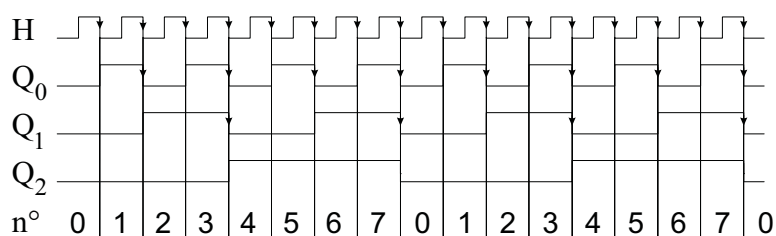
Le quartz joue le rôle du circuit RLC si  $f \approx f_s : \underline{Z} = R_m + j \left( L_m \omega - \frac{1}{C_m \omega} \right).$

IC1 est un ampli inverseur  $\Rightarrow$  il faut deux inversions (IC1 + IC2) pour avoir  $H > 0.$   
 $\Rightarrow$  l'ensemble IC1 + IC2 forme un ampli à faible résistance d'entrée, faible résistance de sortie et  $H > 0$  (voir questions 2.2.2., 2.3.2. et 2.4.).

3.2.2. IC3 sert à mettre en forme le signal  $v_s$  pour en faire un signal carré évoluant entre 0 et  $V_{DD}.$

3.2.3. L'oscillateur oscille à la fréquence pour laquelle  $\underline{Z}$  est réelle  $\Rightarrow f = f_s.$

## B. Compteur



## C. Convertisseur numérique analogique

1. S'étant mise à la masse, toutes les résistances  $2R$  sont reliées à la masse quelque soit l'état des interrupteurs. Les deux résistances  $2R$  les plus à droite sont donc en parallèle et équivalentes à une résistance  $R.$

$$\Rightarrow V_{N_0} = \frac{1}{2} V_{N_1}$$

Par un raisonnement analogue, on trouve :

$$V_{N_1} = \frac{1}{2} V_{N_2} \quad V_{N_2} = \frac{1}{2} V_{N_3} \quad \dots \quad V_{N_7} = V_{ref}.$$

$$I_7 = \frac{V_{ref}}{2R} \quad I_6 = \frac{V_{N_6}}{2R} = \frac{1}{2} \frac{V_{ref}}{2R} \quad I_5 = \frac{1}{4} \frac{V_{ref}}{2R} \quad I_4 = \frac{1}{8} \frac{V_{ref}}{2R}$$

D'où :

$$I_3 = \frac{1}{16} \frac{V_{ref}}{2R} \quad I_2 = \frac{1}{32} \frac{V_{ref}}{2R} \quad I_1 = \frac{1}{64} \frac{V_{ref}}{2R} \quad I_0 = \frac{1}{128} \frac{V_{ref}}{2R}$$

$$\Rightarrow I = I_7 + I_6 + \dots + I_0 = \frac{V_{ref}}{2R} \left( b_7 + \frac{b_6}{2} + \frac{b_5}{4} + \frac{b_4}{8} + \frac{b_3}{16} + \frac{b_2}{32} + \frac{b_1}{64} + \frac{b_0}{128} \right)$$

$$2. \quad V_s = V_{ref} - 2RI = V_{ref} - V_{ref} \left( b_7 + \frac{b_6}{2} + \frac{b_5}{4} + \frac{b_4}{8} + \frac{b_3}{16} + \frac{b_2}{32} + \frac{b_1}{64} + \frac{b_0}{128} \right).$$

3.

mot n°	$V_s$
0	7,81
1	5,55
2	0
3	- 5,55
4	- 7,81
5	- 5,55
6	0
7	5,55

#### D. Analyse du signal généré

1.  $C_0$  est la valeur moyenne de  $s(t)$ . Ici,  $C_0 = 0$ .2. Si le signal est pair,  $s(t) = s(-t) \Rightarrow b_n = 0$ . Seuls les  $a_n$  restent.

3. 3.1.

$$\begin{aligned} v_s(t) &= 7,81 && \text{pour } 0 < t < \frac{T_h}{2} \\ v_s(t) &= 5,55 && \text{pour } \frac{T_h}{2} < t < \frac{3T_h}{2} \\ v_s(t) & && \text{pour } \frac{3T_h}{2} < t < \frac{5T_h}{2} \\ v_s(t) &= -5,55 && \text{pour } \frac{5T_h}{2} < t < \frac{7T_h}{2} \\ v_s(t) &= -7,81 && \text{pour } \frac{7T_h}{2} < t < 4T_h \end{aligned}$$

$$3.2. \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T_h/2} 7,81 \cos n \frac{2\pi}{T} t dt + \frac{4}{T} \int_{T_h/2}^{3T_h/2} 5,55 \cos n \frac{2\pi}{T} t dt - \frac{4}{T} \int_{5T_h/2}^{7T_h/2} 5,55 \cos n \frac{2\pi}{T} t dt - \frac{4}{T} \int_{7T_h/2}^{4T_h} 7,81 \cos n \frac{2\pi}{T} t dt$$

$$a_n = \frac{4 \times 7,81}{T} \frac{T}{2n\pi} \sin n \frac{2\pi}{T} \frac{T_h}{2} + \frac{4 \times 5,55}{T} \frac{T}{2\pi n} \sin n \frac{2\pi}{T} \frac{3T_h}{2} - \frac{4 \times 5,55}{T} \frac{T}{2\pi n} \sin n \frac{2\pi}{T} \frac{T_h}{2}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4 \times 5,55}{T} \frac{T}{2n\pi} \sin n \frac{2\pi}{T} \frac{7T_h}{2} + \frac{4 \times 5,55}{T} \frac{T}{2\pi n} \sin n \frac{2\pi}{T} \frac{5T_h}{2} - \frac{2 \times 7,81}{T} \frac{T}{2\pi n} \sin n \frac{2\pi}{T} 4T_h \\
& \quad + \frac{4 \times 7,81}{T} \frac{T}{2\pi n} \sin n \frac{2\pi}{T} \frac{7T_h}{2} \quad (T = 8T_h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2 \times 7,81}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{8} + \frac{2 \times 5,55}{n\pi} \sin n \frac{3\pi}{8} - \frac{2 \times 5,55}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{8} - \frac{2 \times 5,55}{n\pi} \sin n \frac{7\pi}{8} \\
& \quad + \frac{2 \times 5,55}{n\pi} \sin n \frac{5\pi}{8} - \frac{2 \times 7,81}{n\pi} \sin n \pi + \frac{2 \times 7,81}{n\pi} \sin n \frac{7\pi}{8} \\
& = 0
\end{aligned}$$

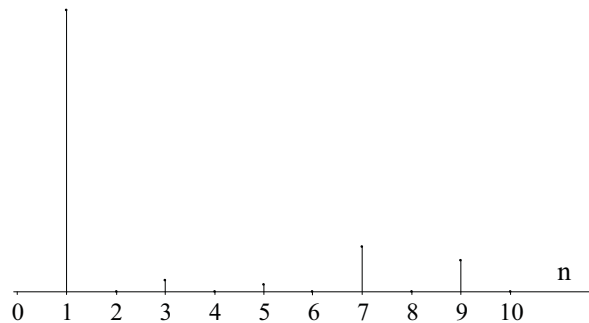
$$a_n = \frac{2}{n\pi} 2,26 \sin n \frac{\pi}{8} + \frac{2}{n\pi} 5,55 \sin n \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{n\pi} 5,55 \sin n \frac{5\pi}{8} + \frac{2}{n\pi} 2,26 \sin n \frac{7\pi}{8}.$$

$$a_n = \frac{4}{n\pi} 2,26 \sin n \frac{\pi}{2} \cos n \frac{3\pi}{8} + \frac{4}{n\pi} 5,55 \sin n \frac{\pi}{2} \cos n \frac{\pi}{8}$$

$$a_n = \frac{4}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{2} \left( 2,26 \cos n \frac{3\pi}{8} + 5,55 \cos n \frac{\pi}{8} \right).$$

$$\begin{array}{cccccc}
4. & a_1 = 7,63 & a_2 = 0 & a_3 = -15 \cdot 10^{-3} & a_4 = 0 & a_5 = -9 \cdot 10^{-3} \\
& a_6 = 0 & a_7 = 1,1 & a_8 = 0 & a_9 = -0,85 & a_{10} = 0
\end{array}$$

5.



6.

$$d = 18 \%$$

7. – Filtrer  $v_s$  avec un filtre passe-bas.

– Augmenter le nombre d'échantillons sur une période.

8.

On pourrait faire varier le facteur  $N$  du diviseur de fréquence (lui donner la valeur  $\frac{N_1}{N_2}$  avec un multiplieur-diviseur de fréquence par PLL)  $\Rightarrow$  modification de la largeur  $T_h$  des échantillons. Le filtrage passe-bas proposé à question 7 n'est alors plus utilisable puisqu'il faudrait changer sa fréquence de coupure en même temps que  $N$ .

# Agrégation

## (Concours Interne)

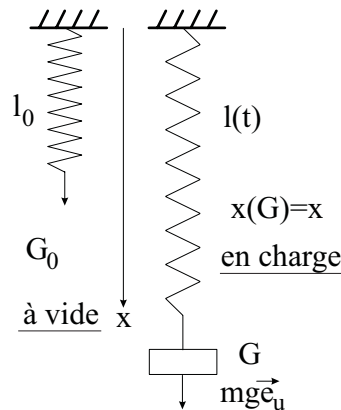
### OPTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE ET PHYSIQUE APPLIQUÉE

Composition sur la physique et le traitement automatisé de l'information - Session : 1998

#### PREMIÈRE PARTIE

**1. A propos d'oscillateurs élémentaires**

1 a)



Théorème de la ??? dynamique :  $m \ddot{x} = -k(x - x_0) + mg$

à l'équilibre :  $0 = -k(x_e - x_0) + mg$

On pose :  $u(t) = x(t) - x_e \quad \ddot{u} = \ddot{x}$

et par différence :  $m\ddot{u} = -ku$

d'où :

$$T_e = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

1 b)

$$T_g = 2\pi \sqrt{\frac{2}{g}}$$

1 c)  $T_e$  indépendant de  $\vec{g}$  car :

champ central  $-k \vec{OM}$  + champ uniforme  $\vec{g} \equiv$  champ central  $-k O_e \vec{M}$  + champ uniforme  $\vec{g}$

(il y a un **décalage** de l'équilibre, c'est tout  $\Rightarrow \vec{g}$  «disparaît» dans le mouvement au voisinage de l'équilibre.

$T_g$  indépendant de  $m$  car :  $m_{inertie} = m_{gravitationnelle} (E\ddot{ok}v_{\theta}g)$

## 2. Oscillateur linéaire spatial isotrope

$$2 \text{ a) } \quad -k (\vec{OG} - \vec{OG}_0) + \vec{mg} = -k \vec{CG}$$

$$\text{avec :} \quad -k \vec{OC} + \vec{OG}_0 + \vec{mg} = \vec{s}$$

ce qui fixe  $C$  de façon galiléenne.

**Oui** le pendule de Terminale est un OSLI (contraint à une dimension).

2 b) Le **théorème du moment cinétique** par rapport au **point fixe galiléen**  $O$ .

$$\frac{d}{dt} (\vec{OM} \wedge \vec{mv}) = \vec{OM} \wedge -k \vec{OM} = \vec{0}$$

$$\vec{OM} \wedge \vec{mv} = m\vec{C} \quad \vec{C} = \vec{cte}$$

$$\vec{OM} \wedge \vec{v} = \vec{C} \begin{cases} \blacktriangledown \vec{C} = \vec{0} & \vec{v} // \vec{OM} & \text{rectiligne} \\ \blacktriangle \vec{C} = \vec{0} & \vec{OM} + \vec{C} & \Rightarrow \text{plan} \end{cases}$$

$$2 \text{ c) } \quad \text{Si : } \vec{F} = -k \frac{m}{r^2} \hat{u}_r, \text{ Kepler}$$

$\Rightarrow$  trajectoire plane et loi des aires.

Les **théorèmes de Kepler**.

2 d) On projette dans le plan  $oxy$  de la trajectoire :

$$m\ddot{u} = -kx \quad m\ddot{y} = -ky$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_x)$$

$$y(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi_y)$$

Trajectoire **elliptique** de pulsation temporelle :

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

2 e)  $T_0$  période temporelle de l'ellipse de Hooke :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

2 f)	Hooke	Kepler
	Ellipse de centre. Le centre d'attraction de période indépendante des conditions initiales.	Ellipse de foyer. Le centre d'attraction de période ??? par les conditions initiales.

2 g) Questions possibles naturelles :

- Calculer le champ électrostatique créé par le proton.
- En déduire que l'électron constitue un OLSI (électron élastiquement lié).

- Calculer la fréquence caractéristique et la longueur d'onde de l'onde électromagnétique dans le vide correspondant.
- Le modèle rend-il compte du rayonnement de freinage ?
- Comment pourrait-on parer cette dernière objection.
- Estimer l'ordre de grandeur de la longueur ??? ??? spectrale d'émission atomique, etc.

2 h) Questions possibles naturelles :

- Montrer que  $\vec{F}(\vec{r})$  est un champ de gradient.
- Quelle est l'équation aux positions d'équilibre de m ?
- Développer  $\vec{F}(\vec{r})$  à l'ordre 1 au voisinage d'une position d'équilibre  $\vec{r}_e$ .
- Pourquoi la matrice  $\left[ \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{r} = \vec{r}_e) \right]$  est-elle symétrique réelle ?
- Est-elle diagonalisable ?
- Comment se traduit l'isotropie, matriciellement ?
- Comment se manifeste la stabilité ou ??? ???, etc. ?
- A quel ordre, dans quelles conditions peut-on donc parler d'OLSI ?

**3. Phénomènes de résonance**

3 a)

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

$\omega_0^2 = k / m$	$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{k}{m}$	$Q = \frac{1}{f} \sqrt{km}$
----------------------	------------------------------------	-----------------------------

3 b)

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi_v)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v)$$

Résonance d'amplitude d'élongation

$X_m(\omega)$
---------------

Résonance de phase d'élongation

$\phi_v(\omega)$
------------------

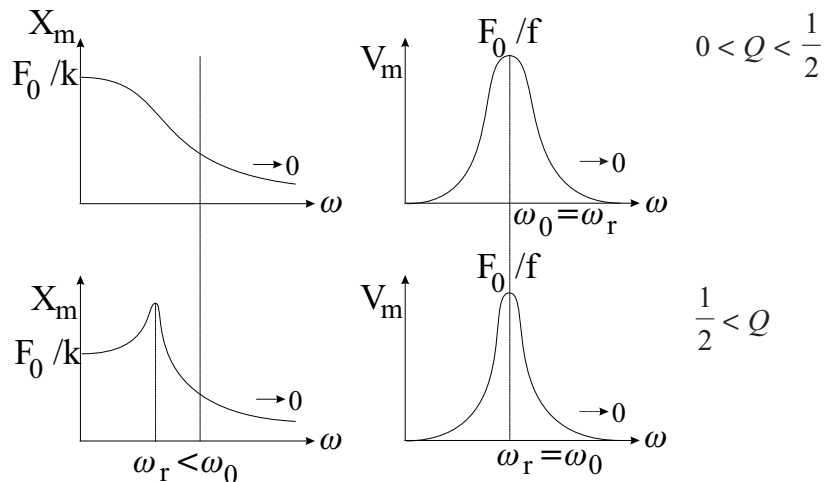
Résonance d'amplitude de vitesse

$V_m(\omega)$
---------------

Résonance de phase de vitesse

$\phi_v(\omega)$
------------------

3 c)





3 d) En ??? :

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$

$$P(t) = F_0 V_m(\omega) \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi_v(\omega))$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} F_0 V_M(\omega) \cos \varphi_v(\omega) = \frac{1}{2} F_0 \operatorname{Re}[\bar{v}]$$

avec :

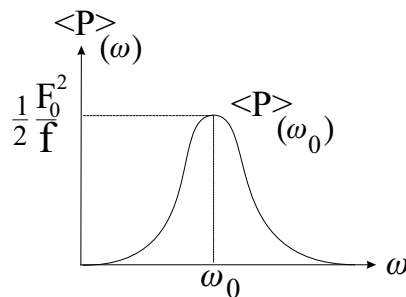
$$j m \omega \bar{v} + f \bar{v} + \frac{k}{j \omega} \bar{v} = F_0$$

$$\bar{v} = \frac{F_0}{f + j \left( m \omega - \frac{k}{\omega} \right)}$$

$$\operatorname{Re}(\bar{v}) = \frac{F_0 f}{f^2 + (m \omega - k / \omega)^2}$$

$$\langle P \rangle_{(\omega)} = \frac{1}{2} \frac{F_0^2 f}{f^2 + (m \omega - k / \omega)^2}$$

$$\boxed{\langle P \rangle_{(\omega)} = \frac{1}{2} \frac{F_0^2 f}{1 + \left( \frac{m \omega}{f} - \frac{k}{f \omega} \right)^2}}$$



Il y a **réponse** en puissance  $\forall Q$ .

3 e) Résonance en **puissance**.

Elle est générale  $\forall Q$  et situe bien le transfert énergétique de l'excitateur vers le résonateur ce qui est généralement ce qu'on cherche à améliorer.

#### 4. Oscillateur non linéaire

4 a) Recherche des **extrêmes** de l'énergie potentielle, **minimum** (stable), **maximum** (instable).

4 b) A l'ordre 0 :

$$F(v) = -kx$$

$$m \ddot{x}_0 = -kx_0$$

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$$

oscillateur harmonique

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x_0(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- 4 c) On remplace dans le terme correctif  $x(t)$  par son expression à l'ordre zéro. D'où l'équation du mouvement d'ordre 1 :

$$F(x) = -kx + k \frac{x}{L}$$

$$F_1(x) = -kx_1 + \frac{k}{L} x_0^2(t)$$

d'où :

$$m \ddot{x}_1 + kx_1 = \frac{k}{L} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$m \ddot{u}_1 + kx_1 = \frac{k A^2}{2 L} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$$

d'où :

$$x_1(t) = B \cos(\omega_0 t + \psi) + \frac{A^2}{2 L} + C \cos(2 \omega_0 t + \theta)$$

Oscillateur **non linéaire** à cause du terme en  $x^2$ , **quadratique** dans  $F(x)$  il y a génération de l'**harmonique 2**.

$$\langle x(t) \rangle_1 = \frac{A^2}{2L}$$

4 d)

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - 2\pi \underbrace{\vec{\Omega}}_{\text{terme perturbateur}} \wedge \vec{v}$$

C'est la méthode de perturbation, ou encore des approximations successives qui est commune aux deux raisonneurs.

???, en déviation vers l'Est :

$$m \frac{d\vec{v}_1}{dt} = m\vec{g} - 2\pi \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_0$$

avec :

$$\vec{v}_0 = \vec{g} t$$

- 4 e) A température grandissante, les oscillations de réseau voient leurs amplitudes croître. On n'est plus dans l'approximation parabolique de l'énergie potentielle d'interaction. Les termes cubiques interviennent dans  $E_p \Rightarrow$  décalage de position d'équilibre  $\Rightarrow$  dilatation.

## 5. Oscillateur paramétrique

- 5 a) Lors des passages  $2 \rightarrow 3$  et  $6 \rightarrow 7$ , le TMC entre  $t = 0^-$  et  $t = 0^+$  au voisinage de  $\theta = 0$  donne :

$$\vec{L}_{t=0^+} - \vec{L}_{t=0^-} = \int_{0^-}^{0^+} \vec{m} \vec{F}_{ext} \cdot dt$$

En  $\theta = 0$  ce moment est nul donc :  $\vec{L}_{t=0^-} = \vec{L}_{t=0^+}$

ce qui donne :  $m l_0^2 \dot{\theta}_{(t=0^-)} = m (l_0 - \Delta l)^2 \dot{\theta}_{t=0^+}$

soit donc :

$$\frac{\dot{\theta}_{t=0^+}}{\dot{\theta}_{t=0^-}} = \left( \frac{l_0}{l_0 - \Delta l} \right)^2$$

Le TEC donne :

$$m l_0^2 \dot{\theta}_{t=0^-}^2 = mg l_0 (1 - \cos \theta_1)$$

idem pour  $\dot{\theta}_{t=0^+}^2$  :

$$m (l_0 - \Delta l)^2 \dot{\theta}_{t=0^+}^2 = mg (l_0 - \Delta l) (1 - \cos \theta_5)$$

soit donc :

$$\frac{\dot{\theta}_{t=0^+}^2}{\dot{\theta}_{t=0^-}^2} = \frac{l_0}{l_0 - \Delta l} \frac{1 - \cos \theta_5}{1 - \cos \theta_1}$$

Dans l'approximation du pendule simple :  $1 - \cos \theta = \theta^2 / 2$ , soit :

$$\frac{\dot{\theta}_{t=0^+}}{\dot{\theta}_{t=0^-}} = \sqrt{\frac{l_0}{l_0 - \Delta l}} \frac{\theta_5}{\theta_1}$$

cela donne donc :

$$\frac{\theta_5}{\theta_1} = \left( \frac{l_0}{l_0 - \Delta l} \right)^{3/2}$$

et donc :

$$\frac{\theta_9}{\theta_1} = \frac{\theta_5}{\theta_1} \cdot \frac{\theta_9}{\theta_5} = \left( \frac{l_0}{l_0 - \Delta l} \right)^3$$

5 b) Le passage  $l_d \rightarrow l_a \rightarrow l_d$  se fait une  $\frac{1}{2}$  période du pendule.

La fréquence d'excitation est double de la fréquence propre.

5 c) On excite le paramètre  $l$  à la fréquence double de celle du pendule. Et l'amplitude d'oscillation **croît**.



Il y a **résonance paramétrique** (théorie générale des équations de Mathieu).

5 d) On peut expliquer comme cela la balançoire ou le ??? de Santiago de Compostelle.

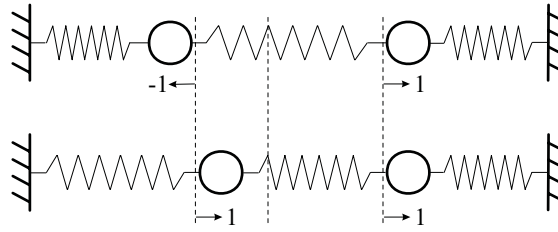
5 e) **Les «tireurs» apportent l'énergie nécessaire.**

## 6. Oscillateurs couplés

6 a) Il y a évidemment deux degrés de liberté de vibration.

6 b) Dans un mode propre, les deux degrés de liberté **oscillent** à la **même pulsation**, la pulsation propre, en **phase** ou en **opposition de phase**.

6 c) Deux modes propres : excitation symétrique 1 – 1 ou antisymétrique 1 – 1.



6 d) 1 1

$$\boxed{\sqrt{k/m}}$$

banal

1, - 1

$k$  op  $2k'+K + 2k'$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{\frac{k+2k'}{???}}}$$

plus subtil

6 e)

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos(\omega_{11} t + \varphi) \\ \cos(\omega_{11} t + \varphi) \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \cos(\omega_{1-1} t + \psi) \\ -\cos(\omega_{1-1} t + \psi) \end{bmatrix}$$

On injecte les C.I. de ??? :

$$a = \lambda \cos \varphi + \mu \cos \psi$$

$$0 = \lambda \cos \varphi + \mu \cos \psi$$

$$0 = -\lambda \omega_{11} \sin \varphi - \mu \omega_{1-1} \sin \psi$$

$$0 = -\lambda \omega_{11} \sin \varphi + \mu \omega_{1-1} \sin \psi$$

d'où nécessairement :

$$\lambda \sin \varphi - \mu \sin \psi = 0$$

$$\lambda \cos \varphi - \mu \cos \psi$$

$$a = \lambda \cos \varphi + \mu \cos \psi$$

d'où :

$$\varphi = \psi = 0 \quad \lambda = \mu = \frac{a}{2}$$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{a}{2} \left[ \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + \cos \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} t \right] \\ u_2(t) &= \frac{a}{2} \left[ \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t - \cos \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} t \right] \end{aligned}$$

6 f)

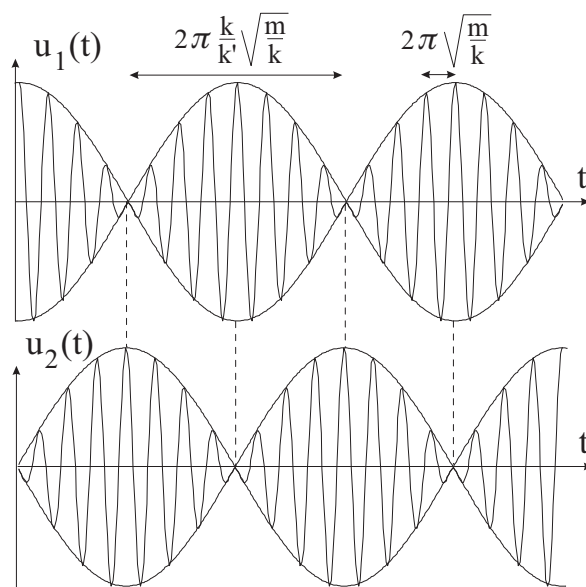
$$\omega_{1,-1} \approx \sqrt{\frac{k}{m} \left( 1 + \frac{2k'}{k} \right)} = \omega_{11} \sqrt{1 + \frac{2k'}{k}}$$

$$\omega_{1,-1} \approx \omega_{11} \left( 1 + \frac{k'}{k} \right) \sim \omega_{11}$$

$$u_1(t) = a \cos \frac{\omega_{1,-1} + \omega_{11}}{2} t \cos \frac{\omega_{1,-1} - \omega_{11}}{2} t$$

$$u_1(t) \sim a \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \cos \frac{k'}{2k} \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$u_2(t) \sim a \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \sin \frac{k'}{2k} \sqrt{\frac{k}{m}} t$$



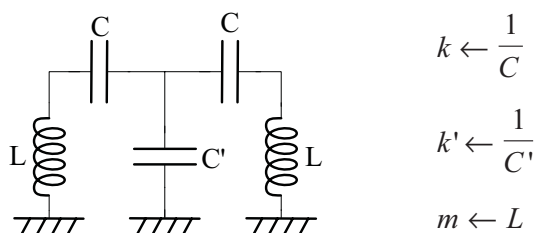
Phénomène de **battements**.

6 g)

$$\frac{k'}{k} = 0 \begin{cases} u_1(t) = a \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \\ u_2(t) = 0 \end{cases}$$

Normal, la masse n° 2 est découplée de la masse n° 1 et n'est pas excitée. La masse n° 2 ne bouge pas et la masse n° 1 est seule : c'est **pertinent**.

6 h)



$$\omega_{11} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_{1,-1} = \sqrt{\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C'}\right) \frac{1}{L}}$$

## 7. De la physique à la chimie, sans calculs

7 a) Le théorème de la répulsante dynamique appliqué à la molécule nous dit que le référentiel barycentrique est un référentiel galiléen.

CO :  $x_c$  et  $x_0$  sont liées dans le galiléen  $Gxyz$  :

$$mx_c + Mx_0 = cte$$

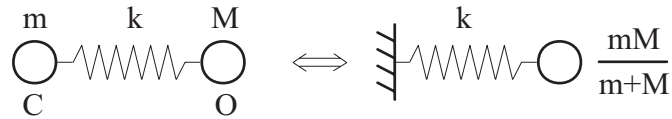
$CO_2$  :  $x_{01}, x_c, x_{02}$  sont liées dans le galiléen  $Gxyz$  :

$$Mx_c + m (x_{01} + x_{02}) = cte$$

d'où : 1 degré de liberté pour  $CO$

2 degrés de liberté pour  $CO_2$

7 b)  $CO$  : réduction canonique du système à deux corps

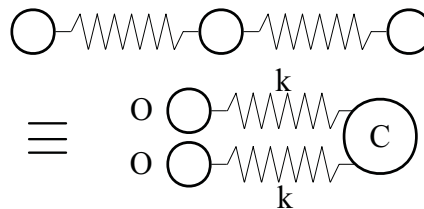


d'où :

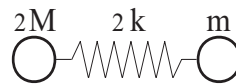
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{mM}} (m + M)$$

$CO_2$  :  $k_1$  opposé  $k_2 \equiv k_1 + k_2 \equiv k_1 // k_2$

d'où :



soit :



Avec un centre d'inertie **fixe** galiléen on peut avoir le problème à deux corps :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{2 M_m}} (2 M + m)$$

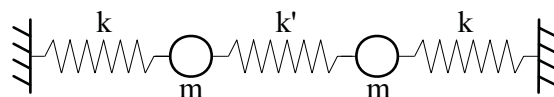
ou en fixant C, dans le centre d'inertie :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{2 M}} = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

7 c) On peut, via les énergies de liaison estimer les constantes de force k, où l'inverse. Spectre IR renseigne sur les fréquences propres.

### 8. Résonances d'un système d'oscillateurs couplés

8 a)



$$m\ddot{u}_1 = F_{(b)} - ku_1 - k'(u_1 - u_2)$$

$$m\ddot{u}_2 = -k'(u_2 - u_1) - ku_2$$

$$m\ddot{u}_1 + (k + k') u_1 - k' u_2 = F_0 \cos \omega t$$

$$m\ddot{u}_2 - k' u_1 + (k + k') u_2 = 0$$

en RSP :

$$-m\omega^2 \bar{u}_1 + (k + k') \bar{u}_1 - k' \bar{u}_2 = F_0$$

$$- m\omega^2 \bar{u}_2 - k' \bar{u}_1 + (k + k') \bar{u}_2 = 0$$

$$\bar{u}_1 [(k + k') - m\omega^2] - k' \bar{u}_2 = F_0$$

$$- k' \bar{u}_1 + [(k + k') - m\omega^2] \bar{u}_2 = 0$$

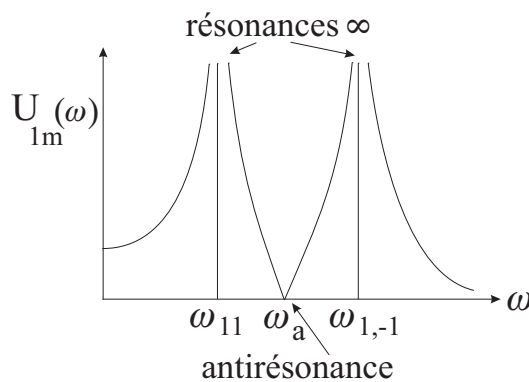
$$\bar{u}_1 = \frac{F_0 [(k + k') - m\omega^2]}{[(k + k') - m\omega^2 + k'] [(k + k') - m\omega^2 - k']}$$

$$\bar{u}_1 = \frac{F_0 [(k + k') - m\omega^2]}{m^2 [\omega^2 - \omega_{11}^2] [\omega^2 - \omega_{1,-1}^2]}$$

$$U_{1m}(\omega) = \frac{F_0}{m} \left| \frac{\omega^2 - \omega_a^2}{(\omega^2 - \omega_{11}^2)(\omega^2 - \omega_{1,-1}^2)} \right|$$

avec :

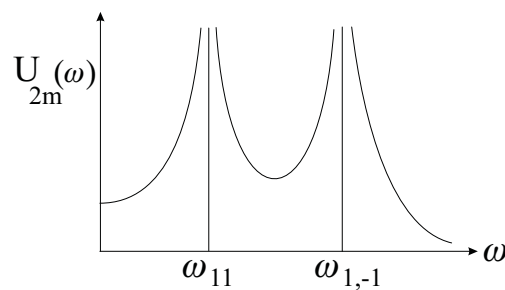
$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{k}{m}} < \omega_a = \sqrt{\frac{k + k'}{m}} < \omega_{1,-1} = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}$$



$$\bar{u}_2 = \frac{k' F_0}{m^2 (\omega^2 - \omega_{11}^2) (\omega^2 - \omega_{1,-1}^2)}$$

d'où :

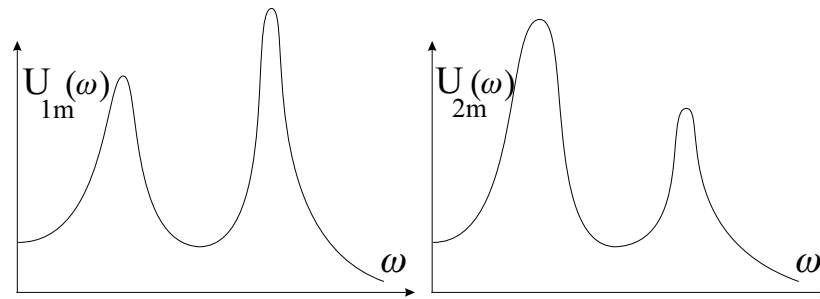
$$U_{2m}(\omega) = \frac{k' F_0}{m^2 (\omega^2 - \omega_{11}^2) (\omega^2 - \omega_{1,-1}^2)}$$



8 b) **Deux** fréquences de **résonance** :  $\omega_{11}$  et  $\omega_{1,-1}$

Une d'**antirésonance**, pour  $u_1$  :  $\omega_a = \sqrt{\frac{k + k'}{m}}$

- 8 c) Suppression des vibrations de  $u_1(b)$  à l'antirésonance. Ce peut être intéressant pour minimiser des contraintes mécaniques.
- 8 d) Les profils s'adoucissent et les pulsations de résonance se déplacent un peu.



Profils en **bosses de chameau**.

### 9. Perturbation d'un oscillateur linéaire, spatial, isotrope par amortissement fluide

- 9 a) Le théorème du moment cinétique en O fixe s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{OM} \wedge k \vec{OM} + \vec{OM} \wedge \frac{m\vec{v}}{\tau}$$

soit :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} + \frac{\vec{L}}{\tau} = \vec{0}$$

d'où :

$$\vec{L}(t) = \vec{L}_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\vec{L}$  est donc de **direction fixe** galiléenne.

Or :

$$\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$

d'où  $\vec{OM} \perp \vec{L} \Rightarrow$  le mouvement de  $M$  est plan, éventuellement rectiligne.

9 b) Dans le plan de la trajectoire :

$$m\ddot{u} = -kx - m \frac{\dot{x}}{\tau}$$

$$m\ddot{y} = -ky - x \frac{\dot{y}}{\tau}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

d'où :

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{\tau} \quad \tau = Q \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

idem pour  $y$ .

Suivant la place de  $Q$  par rapport à  $\frac{1}{2}$  les solutions seront :

apériodique :

$$0 < Q < \frac{1}{2} \left( \tau < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \right)$$



cinétique :  $Q = \frac{1}{2}$

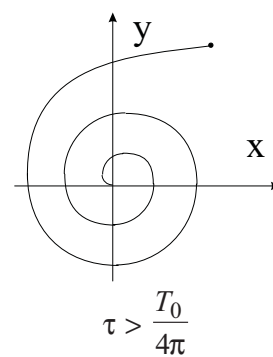
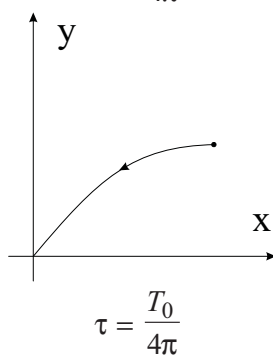
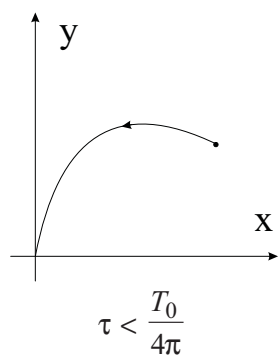
pseudopériodique :  $Q > \frac{1}{2} \left( \tau > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \right)$

$$T_0 = 2n \sqrt{\frac{m}{h}} \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{T_0}{2n}$$

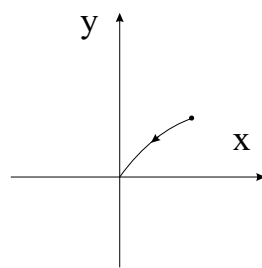
d'où :  $\tau < \frac{T_0}{4\pi}$  x et y apériodiques

$\tau = \frac{T_0}{4\pi}$  x et y critiques

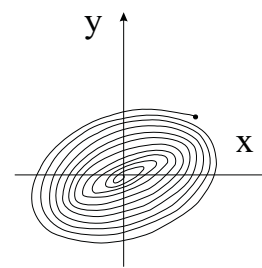
$\tau > \frac{T_0}{4\pi}$  x et y sinusoïdaux amortis.



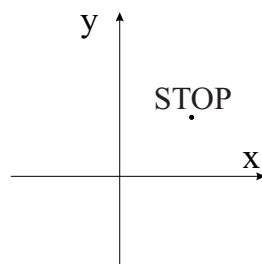
9 c)



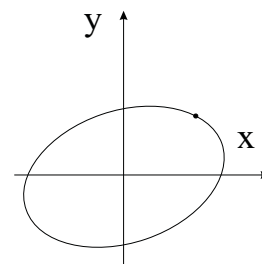
$T_0 \gg \tau$   
freinage **très fort.**



$T_0 \ll \tau$   
freinage **très faible.**



$\frac{T_0}{\tau} = +8$   
bloqué en position initiale.



$\frac{T_0}{\tau} = 0$   
ellipse.

**10. Perturbation d'un oscillateur linéaire, spatial, isotrope par un terme de type Larmor**

10 a) 
$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{r} + \alpha\vec{v} \wedge \vec{e}_z$$

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx + \alpha\dot{y} \\ m\ddot{y} &= -ky - \alpha\dot{x} \\ m\ddot{z} &= -kz \end{aligned} \right\}$$

10 b) Le mouvement projeté en z fait apparaître la pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Regardons le mouvement transversal à :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{\alpha}{m} \dot{y} = 0 \tag{1}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + \frac{\alpha}{m} \dot{x} = 0 \tag{2}$$

Posons :

$$Z = x + iy$$

$$(1) + i(2) = 0$$

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z + i \frac{\alpha}{m} \dot{Z} = 0$$

$$\ddot{Z} + i \frac{\alpha}{m} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$$

On résout l'équation caractéristique :

$$\Delta = -\frac{\alpha^2}{m^2} - 4\omega_0^2 \approx -\omega_0^2$$

(terme de Larmor faible).

Les racines sont donc approximativement :

$$\frac{-i \frac{\alpha}{m} \pm \sqrt{-4\omega_0^2}}{2}$$

$$\frac{-i \frac{\alpha}{m} \pm i 2\omega_0}{2} = -i \left[ \frac{\alpha}{2m} \pm \omega \right]$$

Il apparaît donc dans le mouvement les deux pulsations :

$$\boxed{\omega_+ = \omega_0 + \frac{\alpha}{2m}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_- = \omega_0 - \frac{\alpha}{2m}}$$

10 c) On considère le modèle de Thomson plongé dans un champ magnétostatique uniforme /

$$\vec{B} = B \vec{e}_z$$

- Montrer que le mouvement de l'électron se décompose en un mouvement longitudinal de pulsation  $\omega_0$  et un mouvement transversal composé de deux mouvements de pulsation :

$$\omega_0 + \frac{eB}{2m} \quad \text{et} \quad \omega_0 - \frac{eB}{2m}$$

- Connaissez-vous des effets liés à ce modèle ?
- Comment mettre en évidence pratique le détriplement «spectral» :

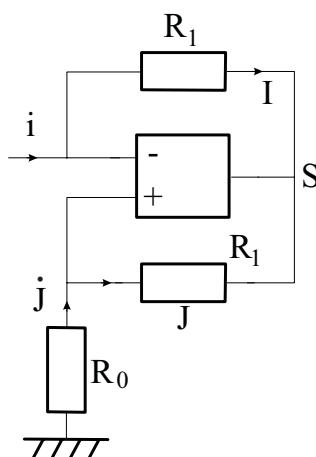
$$\omega_0, \omega_0 + \frac{eB}{2m}, \omega_0 - \frac{eB}{2m}$$

- Connaissez-vous l'effet ??? normal, classique ?

## 11. Oscillateur de Van der Pol

11 a)

$$\underbrace{V_+ = V_-}_{\text{régime linéaire}} = u_N = R_1 I + V_5 = R_1 J + V_5$$



d'où :

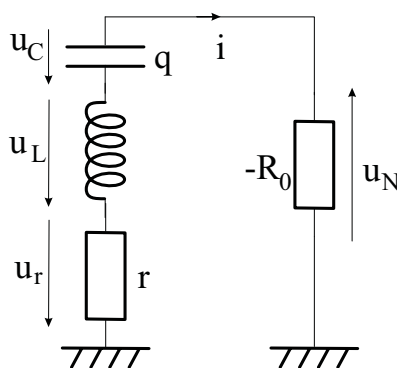
$$I = j = i$$

d'où aux bornes de  $R_0$  :

$$V_+ = V_- = u_N = -R_0 i$$

$$u_N = -R_0 i$$

(résistance négative  $-R_0$ ).



$$u_N + u_C + u_L + u_r = 0$$

soit :

$$-R_0 i + \frac{q}{c} + L \frac{di}{dt} + ri = 0$$

avec :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

d'où en dérivant :

$$-R_0 \frac{di}{dt} + \frac{i}{c} + L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} = 0$$

$$u = u_r = ri$$

soit :

$$L \frac{d^2u}{dt^2} + (r - R_0) \frac{du}{dt} + \frac{u}{C} = 0$$

$r > R_0$   $u(t)$  sinusoidal amorti ou critique ou apériodique mais  $\forall$  régime  $u(t) \rightarrow 0$  :

$$t_- + 8$$

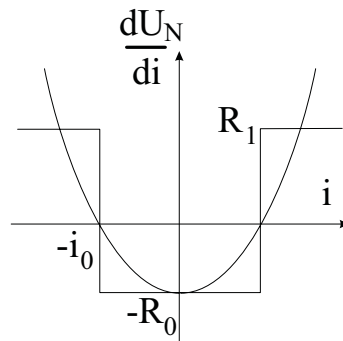
$r = R_0$   $u(t)$  sinusoidal ??? à la pulsation  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

$r < R_0$   $|u(t)|$  croît avec  $t \gg \tau$ .

Régime d'**amplification explosif** à la limite.

Si  $r < R_0$  l'amplificateur va faire saturer l'AO. Il faut alors reprendre le calcul.

11 b)



Approximation de Van der Pol :

$$i_0 = \frac{V_{sat}}{R_0 + R_1}$$

$$\frac{du_N}{di} = R_0 \left( \frac{i^2}{i_0^2} - 1 \right)$$

Or :

$$u_N + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} + ri = 0$$

d'où :

$$\frac{di}{dt} \frac{du_N}{di} + \frac{i}{c} + L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} = 0$$

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{du_N}{di} + \frac{i}{C} = 0$$

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + \left[ r + R_0 \left( \frac{i^2}{i_0^2} - 1 \right) \right] \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

$$i = \frac{u}{r}$$

$$L \frac{d^2 u}{dt^2} + \left[ r + R_0 \left( \frac{u^2}{r^2 i_0^2} - 1 \right) \right] \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{R_0}{L} \left[ \frac{u^2}{r^2 i_0^2} - 1 + \frac{r}{R_0} \right] \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{R_0}{L} \left( 1 - \frac{r}{R_0} \right) \left[ \frac{u^2}{r^2 i_0^2 \left( 1 - \frac{r}{R_0} \right)} - 1 \right] \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0$$

soit :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{r - R_0}{L} \left[ 1 - \frac{u^2}{r^2 i_0^2 \left( 1 - \frac{r}{R_0} \right)} \right] \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0$$

soit :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{\omega_0}{a} \left( 1 - \frac{u^2}{A^2} \right) \frac{du}{dt} + u \omega_0^2 = 0$$

avec :

$$\begin{aligned} LC \omega_0^2 &= 1 \\ A^2 &= \frac{r^2 i_0^2 (R_0 - r)}{R_0} \end{aligned}$$

pourvu que  $R_0 > r$

et :

$$\frac{R_0 - r}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$$

soit :

$$Q = \frac{L \omega_0}{R_0 - r}$$

11 c) Il y a entretien (amplification pour stabilisation) par le dipôle actif  $\frac{du_1}{di}$ .

11 d) Avec le bruit de fond initial on peut trouver :

$$u = \varepsilon \quad \text{et} \quad \dot{u}_0 = \varepsilon'$$

$u^2 \ll A^2 \Rightarrow$  l'ED est d'abord amplificateur en :

$$- \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt}$$

puis  $u$  prend de l'importance, bascule au-delà de  $A$  en module et l'ED devient amortissant avec un terme :

$$\propto \frac{du}{dt} \quad (\alpha > 0)$$

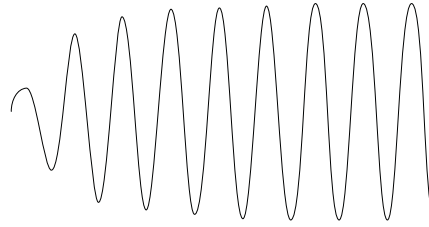
donc  $u$  est «ramené vers le bas», passe en-dessous de  $A$  croît et...

Il y a **stabilisation** après l'**accrochage** et l'**amplification**.

11 e)  $Q \gg 1$  : quasi-sinusoïdal (pas d'amortissement, ni d'amplification).

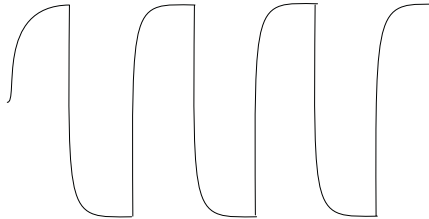
$Q \ll 1$  : la saturation est très vite obtenue, ça relaxe.

$Q \gg 1$



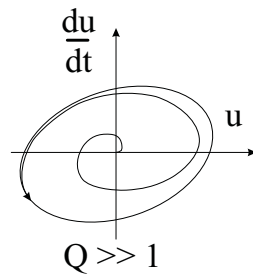
quasi-sinusoïdal.

$Q \ll 1$



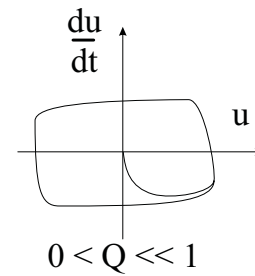
relaxation.

11 f)



$Q \gg 1$

Cycle limite quasi elliptique.



$0 < Q \ll 1$

Cycle limite rapidement atteint très déformé.

11 g) Sur la figure 6a le régime stable est quasi-sinusoïdal car on voit sur 6b un cycle limite quasi elliptique.

Sur la figure 6c en régime stable on est loin du quasi-sinusoïdal car sur 6d le cycle limite est loin d'être elliptique.

Oui on peut (énergétiquement, mais c'est long !) calculer l'amplitude maximale de cette oscillation stable.

Elle ne dépend pas de  $Q$ .

On trouve dans le sens ???.

L'intérêt est qu'il permet de traiter des questions de stabilité (???), attracteurs, approches étranges, chaos, etc.

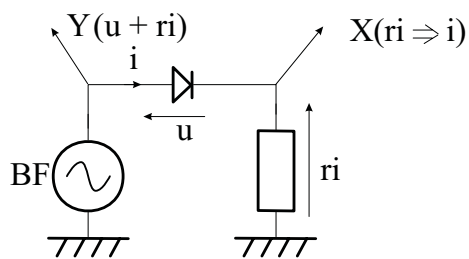
L'information sur l'énergie passe par l'interprétation dans le portrait de phase de l'évolution de  $u^2$  et  $\dot{u}^2$ .

## DEUXIÈME PARTIE

## TP-COURS SUR UN OSCILLATEUR DE RELAXATION

## 12. Étude d'une diode

12 a)



avec une approximation :

$$|ri| \ll |u|$$

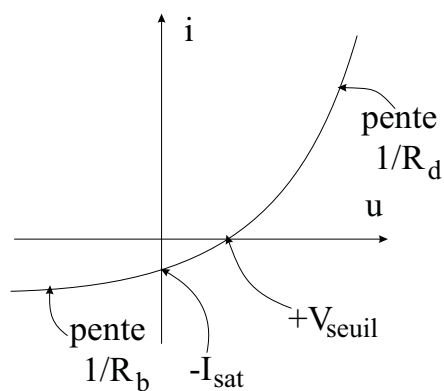
on a :

$$i(u)$$

Avec un oscilloscope différentiel ou pour avoir directement  $i(u)$ .

12 b)

12 c)

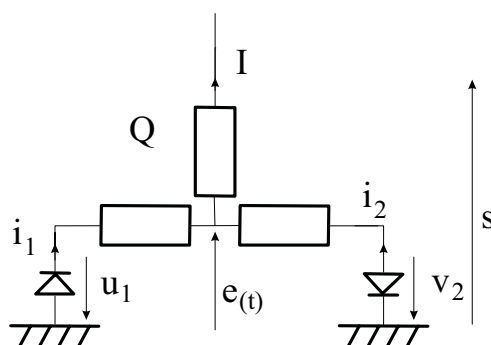


12 d)

$$R_b = +\infty \quad I_{sat} = 0 \quad v_r = 0 \quad R_d = 0$$

## 13. Caractéristiques de dipôles

13 a) On essaie :  
 $D_1$  passant  
 $D_2$  bloquant.



$$e = -x P \quad i_1 = -v_2$$

Cela exige :

$$i_1 \geq 0$$

soit :

$$-v_2 \leq 0 \quad \text{ou} \quad v_2 \geq 0$$

ça marche.

Cela donne également :

$$e \leq 0.$$

$$e \leq 0 \Rightarrow D_1 \text{ passant}$$

$$D_2 \text{ bloqué}$$

$$e = -xP i_1$$

$$i_1 = I$$

$$e - s = Q i_1 = QI = Q \left[ -\frac{e}{xP} \right]$$

$$1 = e \left[ 1 + \frac{Q}{xP} \right] \Rightarrow s \leq 0$$

La logique est donc :

$$s \leq 0 \quad \text{et} \quad e = \frac{s}{1 + \frac{Q}{xP}}$$

On essaie l'autre cas :

$$D_1 \text{ bloqué}$$

$$D_2 \text{ passant}$$

$$i_2 \leq 0 \quad v_2 = 0 \quad e = -(1-u)P i_2$$

$$i_2 = I$$

$$e - s = QI = Qi_2 = -\frac{Qe}{(1-u)P}$$

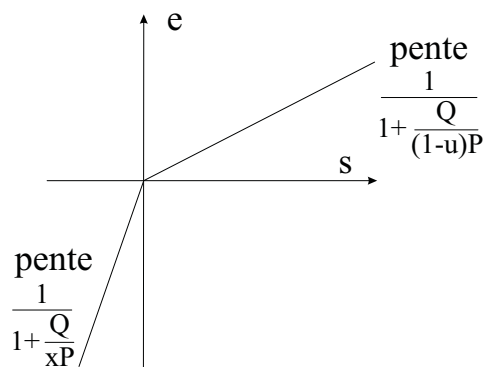
$$s = e \left[ 1 + \frac{Q}{(1-u)P} \right] \quad \text{et} \quad s \geq 0$$

$i_2 \leq 0$  exige  $e$  et donc  $s \geq 0$ .

$u_1 \leq 0$  or  $u_2 = -e$  est bien négatif.

Ça marche.

D'où la caractéristique  $e(s)$  :



13 b)  $e \rightarrow Y$  sur oscilloscope,

$s \rightarrow X$ ,

et lissajous  $Y(X)$ .

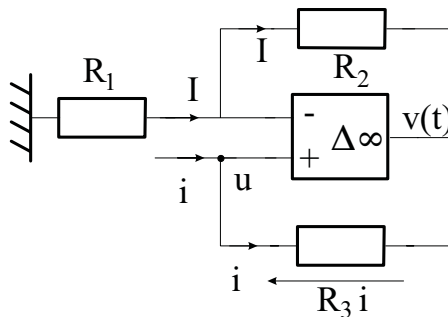


13 c) Pas de différence visible entre attaque triangulaire et sinusoïdale sauf à très basse fréquence (ça «cogne» aux extrémités en triangulaire).

En créneaux on ne voit en basse fréquence que les extrémités.

#### 14. Un dipôle actif un peu particulier

14 a)



$$V_- = -R_1 I = v + R_2 I = V_+ = u = v + R_2 I$$

$$v = -(R_1 + R_2) I = -(R_1 + R_2) \frac{R_3}{R_2} i$$

$$u = \left( R_3 - \frac{R_1 + R_2}{R_2} R_3 \right) i$$

$$u = -\frac{R_1}{R_2} R_3 i$$

14 b) ??? ??? d'un montage à **résistance négative**.

#### 15. Étude pratique d'un comparateur

15 a)  $\left. \begin{array}{l} s \text{ en } Y \\ v \text{ en } X \end{array} \right\}$  Lissajous à l'oscilloscope  $Y(X)$ .

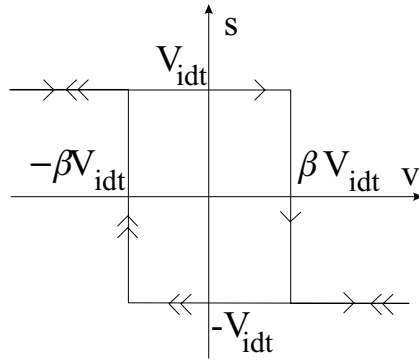
15 b) Figure 10a alimentation dissymétrique (**DC OFFSET**) et **amplitude insuffisante** pour provoquer les commutations.

15 c) Posons :

$$\varepsilon = V_+ - V_- = \beta s - v$$

La logique est donc :  $s = V_{sat}$  et  $\varepsilon > 0 \Leftrightarrow v \leq \beta V_{sat}$

ou :  $s = -V_{sat}$  et  $\varepsilon < 0 \Leftrightarrow v \geq -\beta V_{sat}$



$$s_2 = V_{sat} \quad s_1 = -V_{sat}$$

$$v_2 = \beta V_{sat} \quad v_1 = -\beta V_{sat}$$

Sens horaire sur le cycle.

15 d) En pratique pour visualiser le sens horaire, il faut opérer à très basse fréquence  $\sim 1$  Hz.

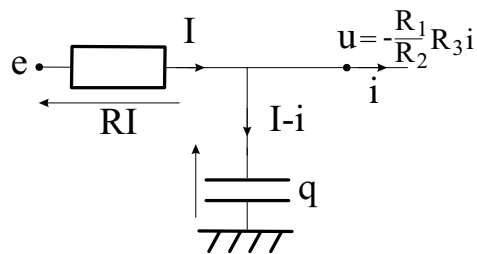
15 e) A l'aller, croissance en  $v$  depuis  $-\infty$ , on bascule à  $v_e = \beta V_{sat}$ .

Au retour en décroissant en  $v$  depuis  $+\infty$ , on bascule non pas à  $\beta V_{sat}$  mais plus tard à  $-\beta V_{sat}$ . C'est un cycle à retard, en grec :

$$u^2 \tau \epsilon \rho i \xi \omega \Rightarrow \text{hystérésis}$$

### 16. Étude d'un oscillateur de relaxation

16 a)



$$u = \frac{a}{C} \quad I - i = \frac{dQ}{dt} \quad e - u = RI$$

$$u = -\frac{R_1}{R_2} R_3 i$$

d'où :

$$I - i = C \frac{du}{dt}$$

$$e = u + RI = u + Ri + RC \frac{du}{dt}$$

$$e = \left( R - \frac{R_1}{R_2} R_3 \right) i + RC \frac{du}{dt} = RC \frac{du}{dt}$$

$$u(t) = \frac{1}{RC} \int^t e(x) du$$

$$u(t) = u(t_0) = \frac{1}{RC} \int_{t_0}^t e(x) du$$

or : 
$$v = - (R_1 + R_2) \frac{R_3}{R_2} i \quad (\text{question précédente})$$

$$v = - (R_1 + R_2) \frac{R_3}{R_2} \left( - \frac{R_2}{R_1 R_4} \right) u \quad v = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) u$$

d'où :

$$v(t) - v(t_0) = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{Rt} \int_{t_0}^t e(u) du$$

16 b) Supposons  $s$  saturé à  $V_{sat}$  ( $\varepsilon > 0$ ) :

$$s > 0 \Rightarrow e = \frac{V_{sat}}{1 + \frac{Q}{(1-u)P}}$$

$v$  intègre  $e$  donc  $v$  croît avec  $t$  de sorte que :

$$\varepsilon = V_+ - V_- = \beta_s - V_- - \beta_{sat-}$$

décroît et atteint  $\varepsilon = 0$ .

Alors  $s$  commute à  $-V_{sat}$  ( $\varepsilon < 0$ ) :

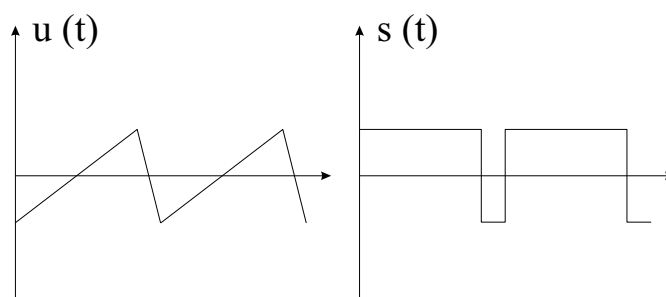
$$s < 0 \Rightarrow e = \frac{-V_{sat}}{1 + \frac{Q}{uP}}$$

$v$  intègre  $e$  donc  $v$  croît avec  $t$  de sorte que  $\varepsilon = V_+ - V_- = \beta_s - V_- - \beta V_{sat-}$  décroît et atteint  $\varepsilon = 0$ .

Alors  $s$  commute à  $-V_{sat}$  ( $\varepsilon < 0$ ) :

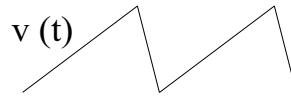
$$s < 0 \Rightarrow e = \frac{-V_{sat}}{1 + \frac{Q}{uP}}$$

$v$  intègre  $e (< 0)$  donc  $v$  décroît avec  $t$  de sorte que  $\varepsilon = V_+ - V_- = -\beta V_{sat} - v$  croît avec  $t$  et va donc retraverser 0  $s$  sature, etc.

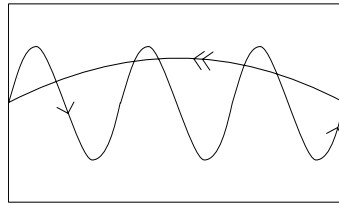


16 c) Le suiveur prélève la tension  $e$  sans prélever de courant, donc sans perturber la caractéristique  $e(s)$ .

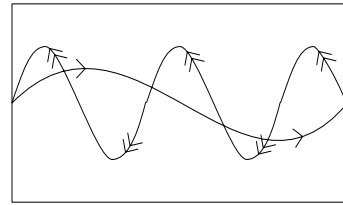
16 d) On a fabriqué un générateur de base de temps, **relaxé** dissymétrique à pentes réglées par  $x$  et  $1 - x$ .



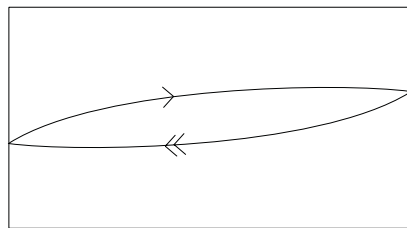
Si on fait un Lissajous entre  $v(t)$  et une tension  $(f, 2E_n)$  on aura :



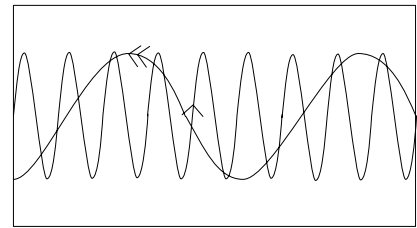
ou



16 e)



$f_c \gg f$   
combustion



$f_c \ll f$

# Agrégation

## (Concours Interne)

### OPTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE ET PHYSIQUE APPLIQUÉE

Composition avec exercices d'application - Session : 1998

Option : **PHYSIQUE ET CHIMIE**

#### Première partie

I.1. Un métal est un corps simple possédant un ensemble de propriétés électriques (conduction), mécaniques (malléabilité), physiques (éclat métallique)...

I.2. La couche ns est déjà occupée avec (n-1)d ou f incomplète.

I.3. Le mercure est liquide à température ordinaire.

I.4. Les principales structures sont : hexagonale compact, cubique à faces centrées, cubique centré.

I.5. Les atomes de carbone occupent un réseau cfc avec 1/2 sites tétraédriques alternés. D'autres variétés allotropiques sont : C graphite; C<sub>60</sub> et autres fullerènes

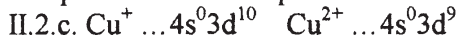
I.6. La théorie des OM généralisées montre l'existence de bandes d'énergie permise. Il y a une grande différence d'énergie entre la BV (dernière bande occupée) et la BC (première bande vide) pour le carbone ; cette différence est faible pour le silicium.

II.1. On peut imaginer l'action de l'acide nitrique sur le cuivre (1) puis l'action de la soude (2), chauffage (3) et réduction par le carbone (4) ou le dihydrogène.



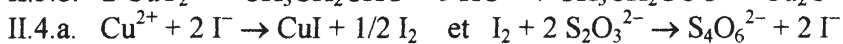
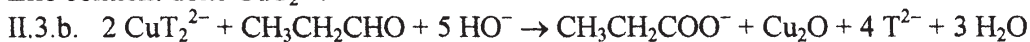
II.2.a. Cu :  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^9$  Le remplissage se fait à énergie croissante c'est-à-dire à (n+l) croissant et à n le plus petit si (n+l) identiques.

II.2.b. En fait la configuration électronique est en  $4s^1 3d^{10}$  car il y a plus grande stabilité d'une couche complète ou à 1/2 remplie.



II.2.d. La coordinence usuelle est 4, prévisible par la théorie du champ de ligand. L'ion central, en captant des doublets dans des cases quantiques vides, essaie d'acquiescer la structure du gaz rare qui suit : (Kr).

II.3.a. La liqueur de Fehling contient des ions  $\text{Cu}^{2+}$  complexés par du tartrate  $^- \text{OOC}(\text{CHOH})_2 \text{COO}^-$ :  $\text{T}^{2-}$  Elle contient donc  $\text{CuT}_2^{2-}$ .

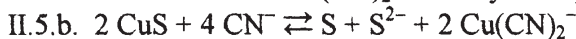


II.4.b. Par égalité de potentiels on montre que  $\log K = \frac{E_{\text{ox}} - E_{\text{red}}}{0,06}$  avec  $E_{\text{ox}} = E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{CuI}) = 0,16 + 0,06 \text{ pK}_s$

et  $E_{\text{red}} = E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-)$      $K = 10^6$  donc la réaction est quantitative.

II.4.c.  $n(\text{Cu}^{2+}) = n(\text{S}_2\text{O}_3^{2-})$  utilisé =  $1,52 \cdot 10^{-4}$      $M(\text{CuSO}_4, 5\text{H}_2\text{O}) = 249,6 \Rightarrow$  la masse dissoute est 0,038g

II.5.a. Le nom de l'ion  $\text{Cu}(\text{CN})_2^-$  est dicyanocupratel.



II.5.c. En décomposant la réaction précédente en \*solubilisation de 2 CuS de constante  $10^{-70}$  \*réaction d'oxydoréduction entre  $\text{S}^{2-}$  et  $2 \text{Cu}^{2+}$  de constante  $10^{[0,16 - (-0,48)]/0,03}$  \*réaction de complexation de  $2 \text{Cu}^+$  de constante  $10^{48,8}$  on trouve  $K = 1,34$

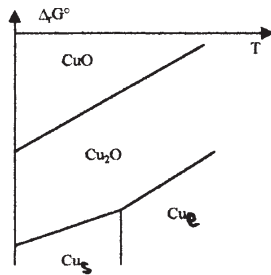
II.5.d.  $K = 0,5 \cdot 10^{-2} \cdot (10^{-2})^2 / (X - 2 \cdot 10^{-2})^4 \Rightarrow X = 4,47 \cdot 10^{-2}$  mole

III.1.a. (3) = 2(1) - (2)  $\Delta_r G^\circ_3(T) = -146000 + 110,4 T$

III.1.b.α. (4)  $\text{Cu}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{CuO} + \text{Cu}$  D'après la formule de Gibbs,  $v = 2 + 2 - 3 = 1$  La pression, qui n'est pas facteur d'équilibre, doit être choisie arbitrairement donc  $v = 0$ .

III.1.b.β.  $\Delta_r G^\circ_4(T) = 11300 + 17,3 T$  Cette enthalpie libre est toujours positive quelle que soit T ; donc  $\text{Cu}_2\text{O}$  ne se dismute pas  $\forall T$ .

III.1.b.γ. Il y a réaction totale entre  $\text{CuO}$  et  $\text{Cu}$  donc il reste 0,05  $\text{CuO}$  et il s'est formé 0,05  $\text{Cu}_2\text{O}$   
 $\text{RT} \ln [\text{P}(\text{O}_2)]^{1/2} = -68720$   $\text{P}(\text{O}_2) = 5,48 \cdot 10^{-11} \text{ bar}$  Il y a donc  $4,7 \cdot 10^{-13}$  mole de  $\text{O}_2$ .



III.1.c.α. Le diagramme se compose de 3 droites non sécantes dans l'ordre (2) → (1) → (3)

III.1.c.β. Si  $T > T_F$  les courbes (1) et (2) ont une pente qui augmente.

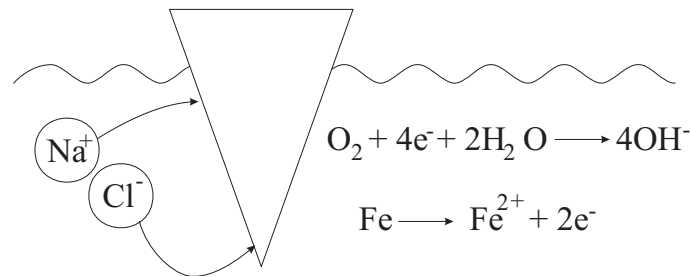
III.1.c.γ. Tous les domaines indiqués sont des domaines d'existence.

III.1.d. Sous  $\text{P}(\text{O}_2) = 1/5 \text{ bar}$ , tout  $\text{Cu}$  devrait se transformer en  $\text{CuO}$  noir. Il y a coexistence des diverses couches pour des raisons de cinétique (diffusion).

III.2.a. L'attaque du fer dans l'acide chlorhydrique est une corrosion uniforme.

III.2.b. La goutte d'Evans (goutte d'eau salée sur une plaque de fer) est un exemple de corrosion différentielle : le fer est attaqué au centre et l'oxygène dissous est réduit en périphérie.

III.2.c. Il y a corrosion à la pointe.

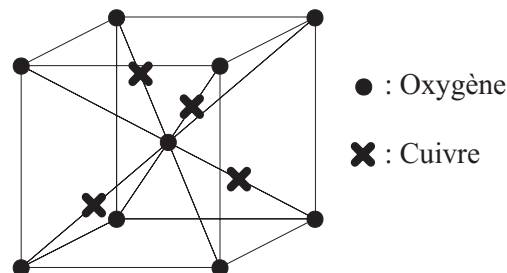


III.2.d. Le fer, anode, s'oxyde. Le cuivre est inaltéré, siège de réduction de  $\text{H}_2\text{O}$  ou  $\text{O}_2$

III.2.e. Le zinc, anode "sacrificielle", s'oxyde. Le fer inaltéré est le siège d'une réduction.

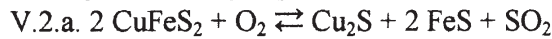
III.3. Galvaniser consiste à recouvrir de zinc un objet en le plongeant dans du zinc fondu. C'est une méthode de protection contre la corrosion. L'électrozingage est le dépôt cathodique  $\text{Zn}^{2+} \rightarrow \text{Zn}$ .

IV.1.a

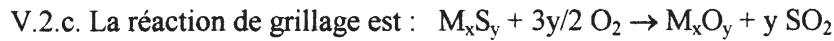


- IV.1.b. L'oxygène occupe 8 sommets et le centre :  $8 \cdot 1/8 + 1 = 2$ . Le cuivre, 4  $1/2$  diagonales: 4  
 IV.1.c. Les ions en contact sont  $\text{Cu}^+$  et  $\text{O}^{2-}$  ce qui permet de calculer  $a = 418 \cdot 10^{-12} \text{m}$  et  $d = 6,50$   
 IV.2.a. Un simple rapport de proportionnalité entre densité et masse molaire permet de calculer  $x$  :  
 $6,50/143 = 5,96/(143 - 63,5 x)$   $x = 0,187$   
 IV.2.b. Les défauts rencontrés sont des ions  $\text{Cu}^{2+}$  et des lacunes en cuivre :  $\square$   
 IV.2.c.  $\text{Cu}^+_{2-2x} \text{Cu}^{2+}_x \square_x \text{O}$   
 IV.2.d.  $1/2 \text{O}_2 + 2\text{Cu}^+ \rightleftharpoons \text{O}^{2-} + 2 \text{Cu}^{2+} + 2 \square$   
 IV.2.e. Il y a déplacement apparent d'une charge positive car  $\text{Cu}^+ \rightarrow \text{Cu}^{2+} + e^-$  et  $\text{Cu}^{2+} + e^- \rightarrow \text{Cu}^+$   
 IV.2.f.  $K_{2d} = (\text{Cu}^{2+})^2 (\square)^2 / [\text{P}(\text{O}_2)]^{1/2}$  et la conductivité est proportionnelle à  $(\text{Cu}^{2+})$  qui est égal à  $(\square)$ .  
 Donc on trouve bien proportionnalité entre la conductivité et la racine huitième de la pression partielle en dioxygène.

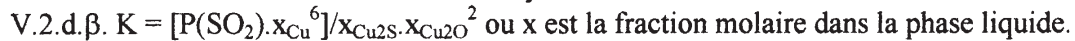
V.1. Pyroméallurgie, par voie sèche. Hydroméallurgie par voie humide.



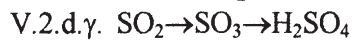
V.2.b. O et Cu sont réduits. S est oxydé.



V.2.d.α. L'élément Cu est réduit. S est oxydé.



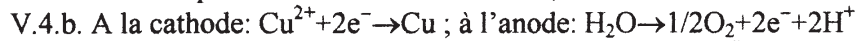
Il faut éliminer  $\text{SO}_2$  au fur et à mesure pour obtenir une réaction totale.



V.3. La lixiviation est le passage du "minerai" en solution  $\text{Cu}_2\text{O} \rightarrow \text{Cu}^{2+}$

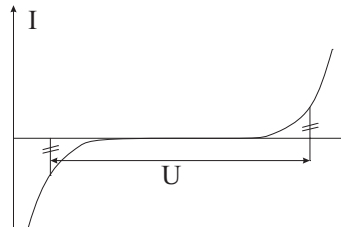
La cémentation est la précipitation de certains métaux (impuretés) par réaction redox :  $\text{Ag}^+ \rightarrow \text{Ag}$  sous l'action de la poudre de cuivre.

V.4.a. L'anode peut être recouverte de  $\text{PbSO}_4$



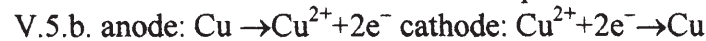
V.4.c.  $E_c = 0,34 + 0,03 \log 10^{-1} = 0,31$   $E_a = 1,23 + 0,03 \log [\text{P}(\text{O}_2)]^{1/2}$   $E_{\text{min}} = 0,92 \text{V}$

V.4.d.

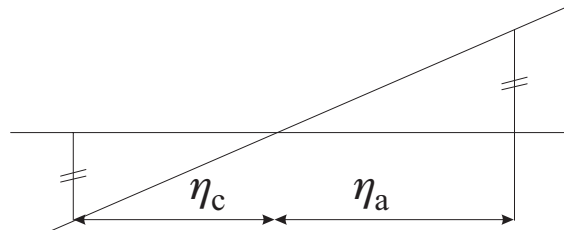


V.4.e.  $m_{\text{Cu}} = (I \cdot \Delta t / 2F) M_{\text{Cu}} \cdot \rho$  ( $\rho$ : rendement)  $\Rightarrow$  /tonne  $2FV / M_{\text{Cu}} \rho = 7,4 \cdot 10^6 \text{J} = 2060 \text{kWh}$

V.5.a. Cu se "dissout" à l'anode et se dépose à la cathode



V.5.c.




V.5.d. Il faut éviter le dépôt d'autres métaux ou le dégagement de dihydrogène.

V.5.e. Fe donne  $\text{Fe}^{2+}$  qui reste en solution. Ag et Au tombent au fond de l'électrolyseur (boues)

V.5.f.  $0,3 \cdot 2F / M_{\text{Cu}} \rightarrow 126 \text{kWh}$ . Cette valeur est importante mais beaucoup plus faible qu'au V.4.e.

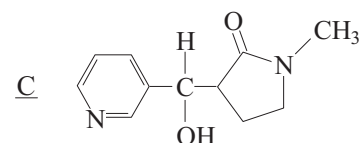
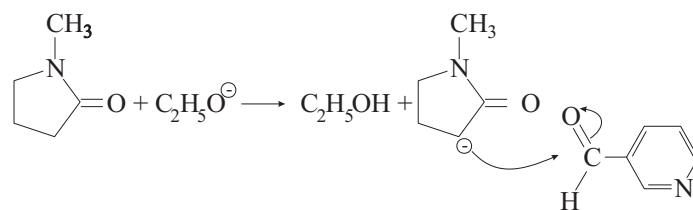
### Seconde partie

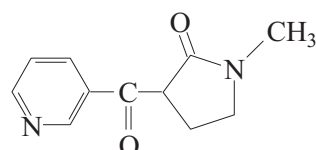
A.1. Il y a 5 insaturations. (on compare 14 au 22+2 hydrogène)

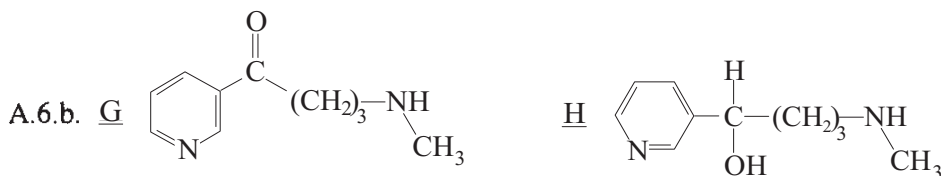
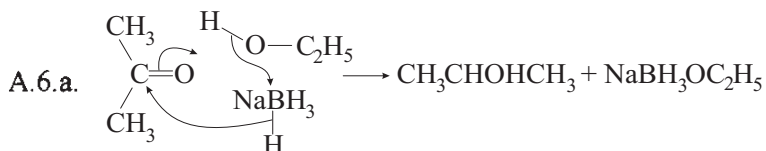
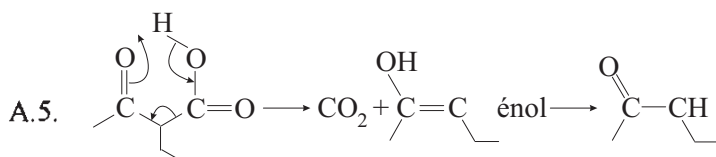
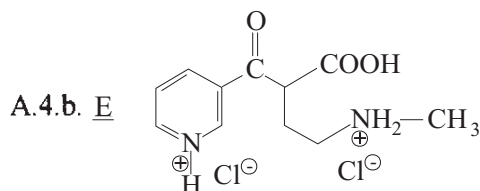
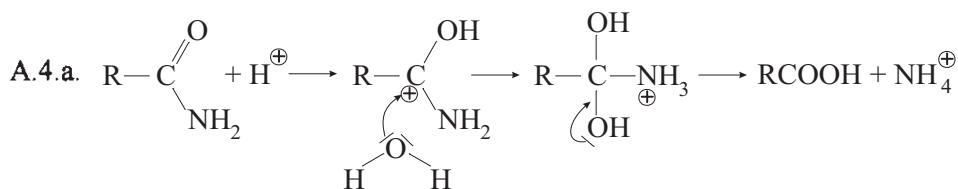
A.2.a. La pyridine, de formule  est aromatique car le cycle possède  $4n+2$  électrons  $\pi$ . Le doublet non liant sur N donne des propriétés basique.

A.2.b. Le caractère électroattracteur de C=O explique la mobilité 

A.2.c. A n'a pas de H en  $\alpha$ . B n'a que celui du  $-\text{CH}_2-$



A.3. D  D possède les fonctions : cétone et amide cyclique (lactame)

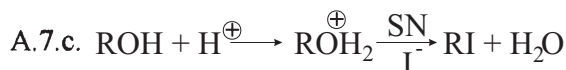
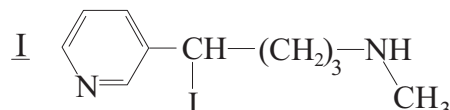




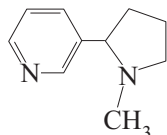
A.6.c.  $\text{AlLiH}_4$  réduirait l'éthanol.

A.7.a. Il faut utiliser un chauffage à reflux pour éviter le départ de produits volatils.

A.7.b.



A.8. La nicotine a pour formule



Il y a 2 stéréoisomères et pas de stéréospécificité lors de la synthèse.

B.1.a. La spectroscopie IR est basée sur des résonances en mécanique classique (spectre de vibration, rotation)

B.1.b. a priori  $\sigma_{\text{C=N}} < \sigma_{\text{C=O}}$  car la liaison est moins "forte".

B.1.c. La RMN est une spectroscopie de résonance en mécanique quantique basée sur des phénomènes de transition : Le proton dans champ  $B_0$  a 2 orientations de spin magnétique, de niveaux d'énergie différents.

B.1.d. En prenant comme référence  $\text{Si}(\text{CH}_3)_4$  "TMS" on définit le déplacement chimique

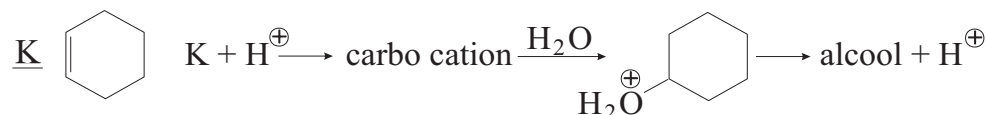
$$\delta = [(\sigma_0 - \sigma) / \sigma_0] \cdot 10^6$$

en ppm avec  $\sigma_0$  fréquence propre des H du TMS et  $\sigma$  fréquence des H plus ou moins déblindés.

B.1.e. La courbe d'intégration permet de compter le nombre de H équivalents.

B.2.a. La fonction acide peut être envisagée (bande large 2500.3500 et C=O vers 1750)

B.2.b.α. Il y a 3 types de C et de protons (2,4,4) ainsi qu'une seule double liaison, donc il y a 1 cycle.



B.2.b.β. K : cyclohexène; L : cyclohexanol; M : cyclohexanone, qui possède 4types de C et une double liaison C=O mise en évidence dans le spectre IR.

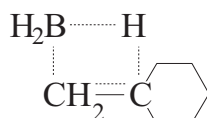
L'équation bilan est :  $2 \text{CrO}_3 + 3 \text{C}_6\text{H}_{11}\text{OH} + 6 \text{H}^+ \rightarrow 2 \text{Cr}^{3+} + 3 \text{C}_6\text{H}_{10}\text{O} + 6 \text{H}_2\text{O}$

B.2.b.γ. Il y a C=C et pas C=O dans N. La réaction (3) s'appelle réaction de Wittig

$\text{C=O} + \text{CH}_2=\text{P}(\text{C}_6\text{H}_5)_3 \rightarrow \text{C}=\text{CH}_2 + \text{O}=\text{P}(\text{C}_6\text{H}_5)_3$ . Le réactif est un ylure et peut être obtenu par action de  $\text{CH}_3\text{I}$  (SN) sur  $\text{P}(\text{C}_6\text{H}_5)_3$ . N est le méthylèncyclohexane

B.2.b.δ. Il existe dans Q une fonction alcool (C-O et O-H); il y a 2 protons très déblindés couplés à 1 qui l'est moins. Q est le cyclohexylméthanol. Il y a eu réduction par  $\text{BH}_3$  puis oxydation par  $\text{H}_2\text{O}_2$ .

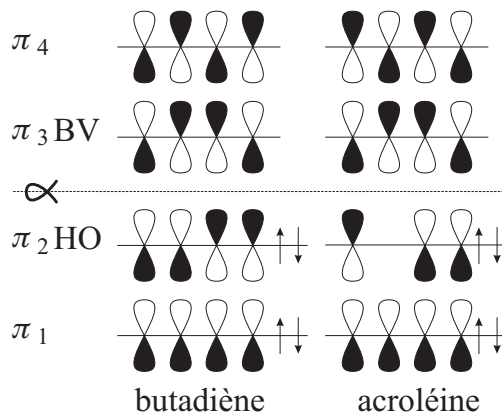
La réaction est régiosélective car B s'accroche au C le moins encombré.



- B.2.b.ε. Il faut un montage à reflux pour oxyder l'alcool 1<sup>aire</sup>. Il y a possibilité d'obtention d'aldéhyde ou d'alcène. P est l'acide cyclohexylméthanoïque, la fonction acide était prévue au B.2.a.  
 B.3. On peut penser à l'action de HCl ou SOCl<sub>2</sub>, puis Mg, puis CO<sub>2</sub> et enfin hydrolyse.  
 B.4. P avec NH<sub>3</sub> (→amide) puis NaOBr (→amine) puis perméthylation et AgOH → K  
 B.5.a. Hexan-dioate de diméthyle ou adipate...  
 5.b.α. L'oxydation (KMnO<sub>4</sub> ou ozonolyse) de K puis estérification avec CH<sub>3</sub>OH donnera le diester.  
 5.b.β. Méthode chimique: RCOCl sur R'ONa ; méthode physique: "Dean-Stark".

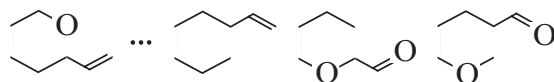
- C.1.a. α est l'intégrale coulombienne et β l'intégrale de résonance.  
 C.1.b. β < 0 et |β| donne une "mesure" de la force de liaison entre A et B  
 C.1.c. β<sub>ij</sub> ≠ 0 pour 2 atomes voisins, et β<sub>ij</sub> = 0 pour des non voisins  
 C.2.

«Les niveaux de l'acroléine sont plus bas que ceux du butadiène et la taille des lobes doit être proportionnelle au coefficient donné dans chaque orbitale πi».

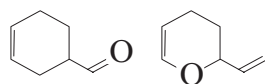


- C.3. Les interactions sont les plus fortes entre la HO (du nucléophile) et la BV (de l'électrophile) les plus proches.  
 C.4.a. La réaction est une cycloaddition de Diels Alder.  
 C.4.b. Il y a possibilités d'addition du butadiène sur lui même, de l'acroléine sur elle même ou les additions mixtes.

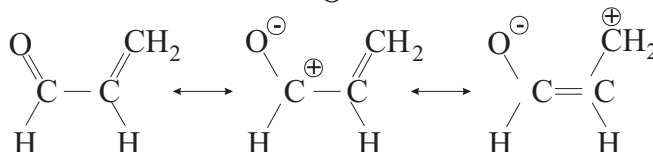
Exemple :



- C.4.c. Les produits majoritaires sont obtenus par les réactions mixtes car l'écart HO/BV = 0,965 β est le plus petit.



- C.5.a.



- C.5.b. La charge nette sur C<sub>2</sub> vaut 0,333 celle sur C<sub>4</sub> vaut 0,229  
 C.5.c. Sous contrôle orbitalaire Nu<sup>-</sup> s'approche du plus gros lobe, en C<sub>4</sub> ; sous contrôle de charge Nu<sup>-</sup> s'approche de la charge nette la plus élevée, en C<sub>2</sub>.  
 C.6. On peut imaginer une addition 1,4 de (CH<sub>3</sub>)<sub>2</sub>CuLi, hydrolyse (obtention d'énol tautomérisé en cétone ; tout se passe comme si l'organocuprate s'était additionné sur la double liaison alcénique), puis Alkylation par CH<sub>3</sub>I en milieu basique.

# Agrégation

## (Concours Interne)

### OPTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE ET PHYSIQUE APPLIQUÉE

Composition avec exercices d'application - Session : 1998

Option : **PHYSIQUE APPLIQUÉE**

### PROBLÈME D'ÉLECTRONIQUE

#### PREMIÈRE PARTIE

#### CELLULES ÉLÉMENTAIRES

#### I. Miroirs de courant.

I.1. Principe du miroir de courant.

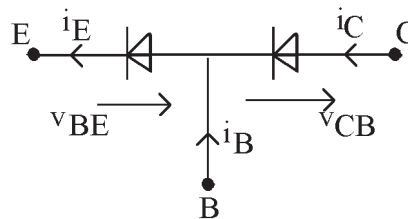
I.1.1.  $i_0 > 0$   $i_1 > 0$  en conduction (avec l'orientation choisie pour les transistors NPN de la figure 1).

I.1.2.  $v_{BE}(T_0) = v_{BE}(T_1)$  (loi des mailles)

$I_S, T, V_T$  sont les mêmes pour les transistors  $T_0$  et  $T_1$  identiques (intégrés sur le même substrat)  
 $\Rightarrow i_E(T_0) = i_E(T_1)$ .

I.1.3. 
$$\left. \begin{aligned} i_1 &\equiv i_c(T_1) = i_E(T_1) \\ i_0 &= i_c(T_0) + i_B(T_0) + i_B(T_1) \approx i_E(T_0) \end{aligned} \right\} \text{si } \beta \gg 1 \Rightarrow \frac{i_1}{i_0} \approx 1$$

I.1.4. I.1.4.1.



Puissance instantanée absorbée par les deux jonctions du transistor :

$$p = v_{BE} i_E + v_{CB} i_C$$

$$P_0 = \langle p_0(t) \rangle = \langle v_{BE}(T_0) i_E(T_0) \rangle \quad \text{car } v_{CB}(T_0) = 0$$

$$P_1 = \langle p_1(t) \rangle = \langle v_{BE}(T_1) i_E(T_1) + v_{CB}(T_1) i_C(T_1) \rangle$$

I.1.4.2.  $v_{CB}(T_1) \neq 0 \Rightarrow P_0 \neq P_1$

- les puissances dissipées dans les jonctions des transistors  $T_0$  et  $T_1$  étant différentes, un gradient thermique peut apparaître,
- la relation I.1.2. (qui supposait que  $T$  est le même pour tous les transistors) n'est donc plus valable.

## I.2. Étude d'un miroir de courant à transistors NPN.

$$I.2.1. \quad v_{CB}(T_0) = v_{BE}(T'_1) - v_{BE}(T'_0) \quad (\text{loi des mailles})$$

Les  $v_{BE}$  de transistors passants étant très proches, il en résulte que  $v_{CB}(T_0) \approx 0$  et que, par conséquent :

$$i_E(T_0) = I_S \exp \frac{v_{BE}(T_0)}{V_T}$$

dans ces conditions, il vient :  $P_0 \approx \langle v_{BE}(T_0) i_E(T_0) \rangle$

$$P_1 \equiv \langle v_{BE}(T_1) i_E(T_1) \rangle$$

Si la température T est la même pour les deux transistors intégrés sur le même substrat, alors :  $i_E(T_0) = i_E(T_1)$  [cf. § I.1.2.] d'où :

$$P_0 = P_1$$

La puissance dissipée étant la même dans les jonctions des deux transistors, cela valide l'hypothèse de température identique pour les transistors.

$$I.2.2. \quad I.2.2.1. \quad \left. \begin{array}{l} i_0 = i_E(T'_0) + \frac{1}{\beta_N} i_C(T'_1) \\ i_1 = \frac{\beta_N}{\beta_N + 1} i_E(T'_1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{on exprime } \begin{cases} i_C(T'_1) \\ i_E(T'_0) \end{cases} \text{ en fonction de } i_E(T_0) \\ \text{et } i_E(T_1) \end{array}$$

$$i_E(T_0) = i_E(T_1)$$

$$\text{il en résulte que :} \quad i_0 = i_1 \left[ \frac{1}{\beta_N} + \frac{\beta_N + 1}{\beta_N + 2} \right]$$

$$I.2.2.2. \quad R_0 I_0 + v_{CB}(T'_0) + v_{BE}(T'_0) + v_{CB}(T_0) + v_{BE}(T_0) = 0$$

$$v_{CB}(T'_0) \equiv 0 \quad v_{CB}(T_0) \approx 0$$

$$R_0 = \frac{E - 2 v_{BE}}{I_0} \quad R_0 \approx 14 \text{ k}\Omega$$

$$I.2.2.3. \quad F = \frac{i_1}{i_0} = 1 - \varepsilon$$

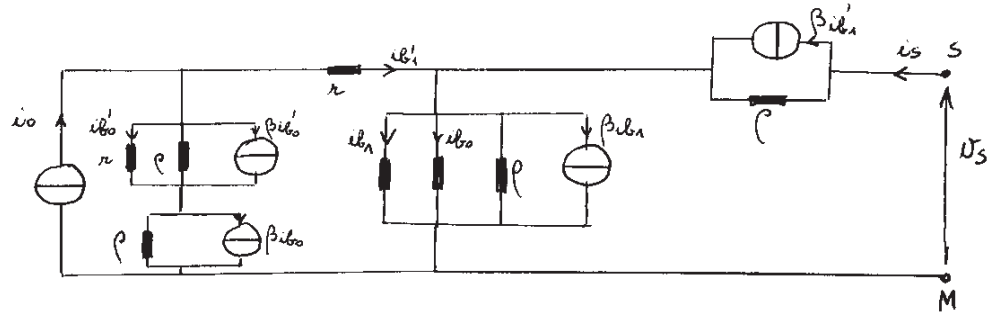
$$\text{avec :} \quad \varepsilon = \frac{2}{\beta_N^2 + 2\beta_N + 2}$$

$$\text{on veut :} \quad \varepsilon < 2 \times 10^{-4}$$

Le calcul approché ( $\beta_N$  grand) conduit à  $\beta_N \geq 100$ .

La modulation de l'opération du deuxième degré en  $\beta_N$  conduit à  $\beta_N \geq 99$ .

I.2.2.4. Modèle équivalent pour le régime de petits signaux, vu des bornes S et M.

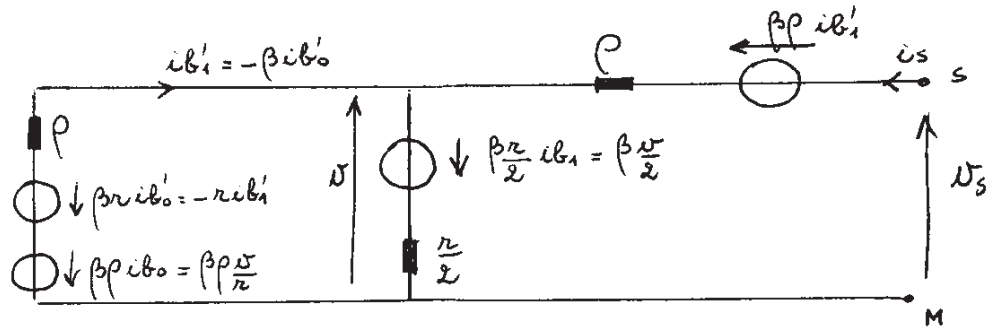


$$R_S = \left( \frac{v_S}{i_S} \right)_{i_0=0}$$

On simplifie le schéma ci-dessus en présentant toutes les sources de forme Norton en des sources de forme Thévenin.

On tient compte aussi des hypothèses :

$$\beta \gg 1 \text{ et } \rho \gg r$$



$$(1) \quad v_S = \rho i_S - \rho \beta i_{b1}' + v$$

$$(2) \quad v = -\beta \frac{v}{2} + \frac{r}{2} (i_S + i_{b1}')$$

$$(3) \quad v = -\rho \beta \frac{v}{r} - r i_{b1}' - \rho i_{b1}' \quad (3) \Rightarrow i_{b1}' = -\frac{1}{\rho} \left( 1 + \frac{\rho \beta}{r} \right) v$$

$$\text{soit :} \quad i_{b1}' \approx -\frac{\beta}{r} v \quad (4)$$

$$(2) \text{ et } (4) \quad v \left[ 1 + \frac{\beta}{2} + \frac{r}{2} \frac{\beta}{r} \right] = \frac{r}{2} i_S \Rightarrow v \approx \frac{r}{2\beta} i_S \quad (5)$$

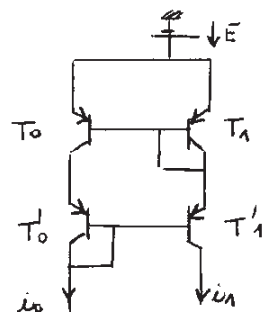
On reporte (4) et (5) dans (1) :

$$v_S = \rho i_S + \rho \beta \frac{\beta}{r} v + \frac{r}{2\beta} i_S \Rightarrow R_S = \rho + \frac{r}{2\beta} + \rho \beta \frac{\beta}{r} \frac{r}{2\beta}$$

$$R_S \approx \frac{\rho \beta}{2} = 7,5 \text{ M}\Omega$$

## I.3. Étude d'un miroir de courant à transistors PNP.

I.3.1.



Les courants sont orientés dans le sens passant des transistors PNP :

$$i_0 > 0 \quad i_1 > 0$$

I.3.2. L'expression trouvée au § I.2.2.3. reste valable à condition d'y remplacer  $\beta_N$  par  $\beta_P$ .

$$\text{miroir NPN :} \quad F_N = 1 - \varepsilon_N \quad \varepsilon_N = \frac{2}{\beta_N^2 + 2\beta_N + 2}$$

$$\text{miroir PNP :} \quad F_P = 1 - \varepsilon_P \quad \varepsilon_P = \frac{2}{\beta_P^2 + 2\beta_P + 2}$$

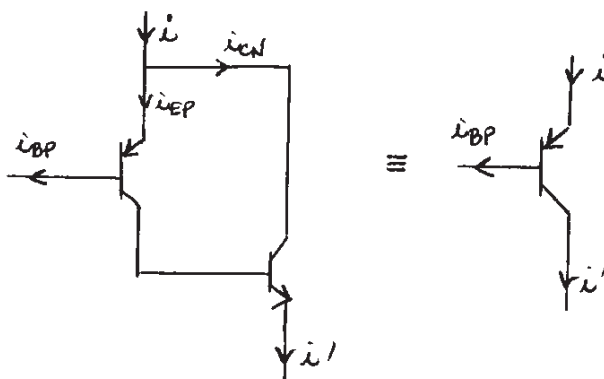
(la précision du miroir NPN est meilleure que celle du miroir PNP).

Application Numérique :

$$\beta_N = 150 \quad \varepsilon_N = 0,9 \times 10^{-4}$$

$$\beta_P = 80 \quad \varepsilon_P = 3,0 \times 10^{-4}$$

I.3.3.



$$\beta'_P = \frac{i'}{i_{BP}}$$

$$\begin{cases} i_{BP} = \frac{1}{\beta_P} \cdot \frac{i_{CN}}{\beta_N} \\ i' = \frac{\beta_N + 1}{\beta_N} i_{CN} \end{cases}$$

$$\text{il vient :} \quad \beta'_P = \beta_P (\beta_N + 1)$$

Application Numérique :

$$\beta'_P = 12 \times 10^3$$

I.3.4.

$$F'_P = 1 - \varepsilon'_P \quad \varepsilon'_P \approx \frac{2}{(\beta'_P)^2} = 14 \times 10^{-9}$$

**II. Principe de fonctionnement d'une cellule translinéaire mixte.**

II.1. Relations fondamentales d'une boucle translinéaire à quatre transistors.

II.1.1. Loi des mailles :  $v_{BE} (T_1) + v_{EB} (T_3) = v_{BE} (T_2) + v_{EB} (T_4)$

II.1.2.  $v_{CB} = 0$

pour les quatre transistors  $\Rightarrow i_E = I_S \exp \frac{v_{BE}}{V_T}$

soit :  $v_{BE} = V_T \ln \frac{i_E}{I_S}$

les transistors intégrés sur le même substrat sont supposés identiques et soumis à la même température :  $I_S, V_T$  les mêmes pour tous les transistors.

$$V_T \ln \left[ \frac{i_E (T_1)}{I_S} \right] + V_T \ln \left[ \frac{i_E (T_3)}{I_S} \right] = V_T \ln \frac{i_E (T_2)}{I_S} + V_T \ln \left[ \frac{i_E (T_4)}{I_S} \right]$$

les courants  $i_E$  sont orientés dans le sens passant pour les deux types de transistors.

Il en résulte que :  $\ln \left[ \frac{i_E (T_1) i_E (T_3)}{I_S^2} \right] = \ln \left[ \frac{i_E (T_2) i_E (T_4)}{I_S^2} \right]$

soit :  $i_E (T_1) \times i_E (T_3) = i_E (T_2) \times i_E (T_4)$

Les courants  $i_1, i_2, i_3, i_4$  sont les courants collecteur des transistors  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$

par conséquent :  $i_1 i_3 = i_2 i_4$

II.2.1. II.2.1.1.  $\left. \begin{matrix} i_1 = KI_0 \\ i_3 = I_0 \end{matrix} \right\}$  les transistors  $T_1$  et  $T_3$  sont uniquement parcourus par le courant de polarisation.

La loi des nœuds impose donc que  $i_A(t) = cte$  et, par conséquent, la borne A ne peut être la borne d'entrée du signal information.

II.2.1.2.  $i_1 i_3 = i_2 i_4 = KI_0^2$

$i_2$  et  $i_4$  sont tous deux positifs quand les transistors conduisent (ils sont nuls dans l'hypothèse inverse).

II.2.1.3.  $i_A(t) = \frac{\beta_{P+1}}{\beta_P} i_3 - \frac{\beta_{N+1}}{\beta_N} i_1 = I_0 \left[ \frac{\beta_{P+1}}{\beta_P} - K \frac{\beta_{N+1}}{\beta_N} \right] = cte$

II.2.2. II.2.2.1.  $K = 1$   $i_A(t) = I_0 \left[ \frac{\beta_{P+1}}{\beta_P} - \frac{\beta_{N+1}}{\beta_N} \right]$

II.2.2.2.  $\frac{i_A}{I_0} = \frac{1}{\beta_P} - \frac{1}{\beta_N} = 0,6 \%$

II.2.3. II.2.3.1.  $\left\{ \begin{matrix} i_2 i_4 = I_0^2 \\ i_4 - i_2 = i_B(t) \end{matrix} \right.$

si  $\beta_N \gg 1$  et  $\beta_P \gg 1$ .

$$\begin{cases} i_4^2 - i_B i_4 - I_0^2 = 0 \\ i_2^2 + i_B i_2 - I_0^2 = 0 \end{cases}$$

$i_4$  et  $i_2$  sont les racines positives de deux équations du second degré dont le discriminant  $\Delta = i_B^2 + 4 I_0^2$  est le même.

$$x^2 + bx - I_0^2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\begin{cases} i_2 = -\frac{i_B}{2} + I_0 \sqrt{1 + \left(\frac{i_B}{2 I_0}\right)^2} \\ i_4 = +\frac{i_B}{2} + I_0 \sqrt{1 + \left(\frac{i_B}{2 I_0}\right)^2} \end{cases}$$

II.2.3.2.

$$\begin{aligned} v_{BA} &= v_{EB}(T_4) + v_{BE}(T_3) \\ &= V_T l_n \frac{i_E(T_4)}{I_S} - V_T l_n \frac{i_E(T_3)}{I_S} \quad (\text{transistors PNP}) \end{aligned}$$

$$i_E(T_4) \approx i_4 \quad i_E(T_3) \approx i_3 = I_0 \quad \text{si } \beta_P \gg 1$$

$$v_{BA} = V_T l_n \frac{i_4}{I_0} = V_T l_n \left[ \frac{i_B}{2 I_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{i_B}{2 I_0}\right)^2} \right]$$

II.2.3.3. II.2.3.3.1.

$$R_A = \frac{v_{AB}}{i_A} \quad i_A \approx 0$$

$\Rightarrow R_A$  infiniment grande.

II.2.3.3.2.  $v_{BA}$  dépend de  $i_B$  par l'intermédiaire d'une expression non linéaire, on ne peut définir qu'une résistance différentielle qui variera en fonction du point de fonctionnement des composants :

$$R_B = \frac{d v_{BA}}{d i_B}$$

On peut écrire :  $v_{BA} = V_T l_n X$

$$\text{avec : } \begin{cases} X = x + \sqrt{1 + x^2} \\ x = \frac{i_B}{2 I_0} \end{cases}$$

$$R_B = \frac{V_T}{2 I_0} \frac{1}{X} \frac{dX}{dx}$$

$$R_B = \frac{V_T}{2 I_0} \frac{1 + x (1 + x^2)^{-1/2}}{x + (1 + x^2)^{1/2}}$$



II.2.3.4. II.2.3.4.1.  $i_2$  et  $i_4$  ne sont pas sinusoïdaux en général : il n'y a pas de distorsion si  $i_2$  et  $i_4$  sont du premier ordre en  $i_B$ .

$$i_4 = \frac{i_B}{2} + I_0 \sqrt{1 + \left(\frac{i_B}{2 I_0}\right)^2} = I_0 \left[ x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad x = \frac{c_B}{2 I_0}$$

développement limité :

$$\frac{i_4}{I_0} = x + \left( x + \frac{1}{2} x^2 + \dots \right) = 1 + x$$

$$\frac{i_2}{I_0} = 1 - x$$

$$\frac{1}{2} x^2 \ll x \quad \frac{1}{2} x \ll 1 \quad \frac{1}{2} x < 10^{-2} \quad \text{approximation 1 \%}$$

Avec une approximation de 1 % on peut écrire :

$$i_4 = \frac{i_B}{2} + I_0 = I_0 + \frac{I_{BM}}{2} \sin \omega t$$

$$i_2 = I_0 - \frac{I_{BM}}{2} \sin \omega t$$

$$\frac{1}{2} \frac{I_{BM}}{2 I_0} < 10^{-2} \Leftrightarrow I_{BM} < \frac{I_0}{25}$$

II.2.3.4.2. Puissance fournie par l'alimentation aux transistors :

$$p = i_1 E + i_2 E + i_3 E + i_4 E \\ = 2 I_0 E + E I_0 \left[ -x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \right] + E I_0 \left[ -x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$P = \langle p \rangle = 2 I_0 E + 2 I_0 E \langle (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \rangle$$

S'il n'y avait pas de distorsion  $i_2$  et  $i_4$  seraient sinusoïdaux et l'on aurait  $P = P_0 = 4 I_0 E$  puissance uniquement consommée pour la polarisation des quatre transistors.

La distorsion augmente la consommation du montage :

$$(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \dots$$

$$\langle (1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \rangle = 1 + \frac{1}{2} \langle x^2 \rangle = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{I_{BM}}{2 I_0} \right)^2 \left\langle \frac{1 - \cos 2 \omega t}{2} \right\rangle$$

$$= 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{I_{BM}}{2 I_0} \right)^2$$

$$P = 2 I_0 E + 2 I_0 E \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{I_{BM}}{2 I_0} \right)^2 \right\} = P_0 \left\{ 1 + \frac{1}{8} \right\}$$

l'harmonique 2f est responsable de 12,5 % de consommation supplémentaire de puissance si  $I_{BM} = 2 I_0$ .

### III. Étude d'un exemple de cellule translinéaire mixte.

III.1. III.1.1. Maille  $T_1 T_2 T_5 T_6$  :  $v_{CB}(T_1) = v_{BE}(T_6) - v_{BE}(T_5) \approx 0$

Maille  $T_3 T_4 T_7 T_8$  :  $v_{BC}(T_3) = v_{EB}(T_8) - v_{EB}(T_7) \approx 0$

Pour les quatre transistors  $T_1 T_2 T_3 T_4$  la condition de translinéarité  $v_{CB} = 0$  est donc réalisée :

$$i_1 i_3 = i_2 i_4 \text{ reste valable}$$

III.1.2. 
$$i'_1 = i_C(T_5) + i_B(T_5) + i_B(T_6) = i_1 + \frac{i'_2}{\beta_N}$$

$$i'_2 \equiv i_C(T_6) = \frac{\beta_N}{\beta_{N+1}} i_E(T_6) \approx i_C(T_2) + i_B(T_2) + i_B(T_1) = i_2 + \frac{i_1}{\beta_N}$$

d'où : 
$$i_1 = i'_1 - \frac{i'_2}{\beta_N} \quad \text{et} \quad i_2 = i'_2 - \frac{i'_1}{\beta_N}$$

III.1.3. L'indice 1 devient l'indice 3, le 2 devient 4, les transistors NPN deviennent des PNP,  $\beta_P$  remplace  $\beta_N$  :

$$i_3 = i'_3 - \frac{i'_4}{\beta_P} \quad i_4 = i'_4 - \frac{i'_3}{\beta_P}$$

III.2. III.2.1. 
$$i_A(t) = i_3 - i_1 = \left( i'_3 - \frac{i'_4}{\beta_P} \right) - \left( i'_1 - \frac{i'_2}{\beta_N} \right)$$

si on suppose les  $\beta \gg 1$ .

$$i_A(t) = \frac{i'_2}{\beta_N} - \frac{i'_4}{\beta_P}$$

car  $i'_1 = i'_3 = I_0$ .

Cette fois  $i_A(t)$  présente une faible composante de signal. Le point A ne peut constituer une entrée signal, l'impédance en A est très élevée.

III.2.2. III.2.2.1. 
$$i_B(t) = i_4 - i_2 = \left( i'_4 - \frac{I_0}{\beta_P} \right) - \left( i'_2 - \frac{I_0}{\beta_N} \right)$$

$$i_B(t) = i'_4 - i'_2 + I_0 \left( \frac{1}{\beta_N} - \frac{1}{\beta_P} \right)$$

$$i_B(t) \approx i'_4 - i'_2 \quad \text{si} \quad I_0 \left( \frac{1}{\beta_N} - \frac{1}{\beta_P} \right) \approx 0$$

obtenu par exemple si  $\beta_P = \beta_N$ .

III.2.2.2. Si  $\beta_P = \beta_N$  : 
$$i_B = i'_4 - i'_2$$

$$i_1 i_3 = i_2 i_4 \Rightarrow \left( I_0 - \frac{i'_2}{\beta} \right) \left( I_0 - \frac{i'_4}{\beta} \right) = \left( i'_2 - \frac{I_0}{\beta} \right) \left( i'_4 - \frac{I_0}{\beta} \right)$$

devient  $i'_2 i'_4 \approx I_0^2$  car  $\beta \gg 1$ .

$i'_2$  et  $i'_4$  satisfait au même système d'équations que  $i_2$  et  $i_4$  à la question II.2.3.1., donc on peut écrire :

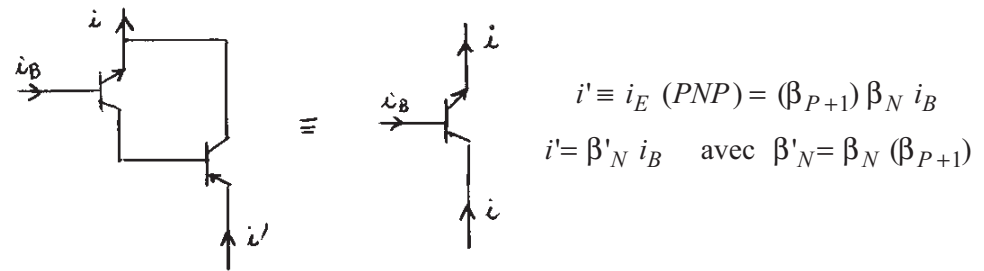
$$i'_2 = -\frac{i_B}{2} + I_0 \sqrt{1 + \left(\frac{i_B}{2I_0}\right)^2}$$

$$i'_4 = +\frac{i_B}{2} + I_0 \sqrt{1 + \left(\frac{i_B}{2I_0}\right)^2}$$

III.2.3. III.2.3.1. Pour réaliser l'égalité des coefficients « $\beta$ » des PNP et des NPN :

– on peut imaginer remplacer les transistors PNP par la structure de la question I.3.3. :  $\beta'_P = \beta_P / (\beta_{N+1})$ ,

– on peut imaginer remplacer les transistors NPN par la structure ci-dessous inspiré du modèle de la question I.3.3.



$$i' \equiv i_E \text{ (PNP)} = (\beta_{P+1}) \beta_N i_B$$

$$i' = \beta'_N i_B \quad \text{avec} \quad \beta'_N = \beta_N (\beta_{P+1})$$

Il en résulte que si  $\beta_P \gg 1$  et  $\beta_N \gg 1$  :

$$\beta'_P = \beta'_N = \beta_P \beta_N$$

III.2.3.2.  $v_{BA} = V_T l_n \frac{i_4}{i_3}$  reste valable (cf. § II.2.3.2.)

$$i_4 = i'_4 - \frac{i'_3}{\beta_P} = \left\{ +\frac{i_B}{2} + I_0 \sqrt{1 + \left(\frac{i_B}{2I_0}\right)^2} \right\} - \frac{1}{\beta_P} I_0 \approx \left\{ \quad \right\} \text{ si } \beta_P \gg 1$$

$$i_3 = i'_3 - \frac{i'_4}{\beta_P} = I_0 - \frac{1}{\beta_P} \left\{ \frac{i_B}{2} + I_0 \sqrt{1 + \left(\frac{i_B}{2I_0}\right)^2} \right\} \approx I_0 \text{ si } \beta_P \gg 1$$

On retrouve donc pour  $v_{BA}$  l'expression établie au § II.2.3.2.

$$v_{BA} = V_T l_n \left\{ \frac{i_B}{2I_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{i_B}{2I_0}\right)^2} \right\}$$

III.2.3.3.  $R_B = \frac{d v_{BA}}{d i_B}$  garde l'expression établie au § II.2.3.2.

$$R_B = \frac{V_T}{2I_0} \frac{1+x(1+x^2)^{-1/2}}{x+(1+x^2)^{1/2}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{i_B}{2I_0}$$

$$\lim_{i_B \rightarrow 0} R_B = \lim_{x \rightarrow 0} R_B = \frac{V_T}{2I_0}$$

III.2.3.4.

$I_{BM}$	( $\mu A$ )	0	60	600	1200
$v_{BA}$	mV	0	1,3	12,5	22,9
$R_B$	$\Omega$	21,7	21,6	19,4	15,3

$$\begin{cases} v_T = 26 \text{ mV} \\ I_0 = 600 \mu A \end{cases}$$

Valeurs extrêmes :  $R_B \searrow$  quand  $I_{BM} \nearrow$   $v_{BA} \nearrow$

La plus grande valeur de  $I_{BM}$  permettant la conduction des transistors est :

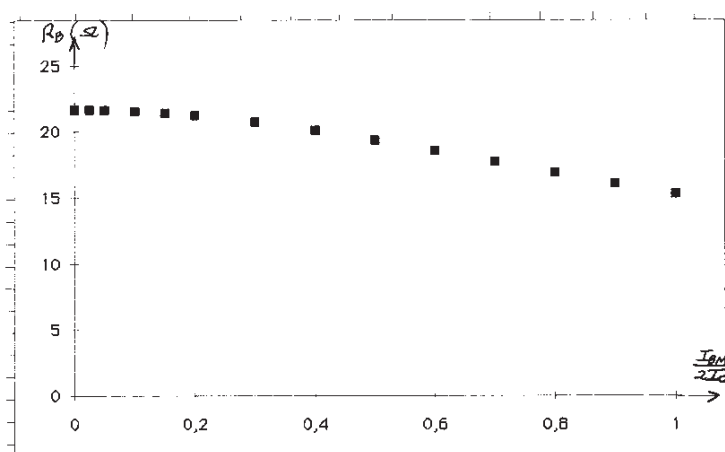
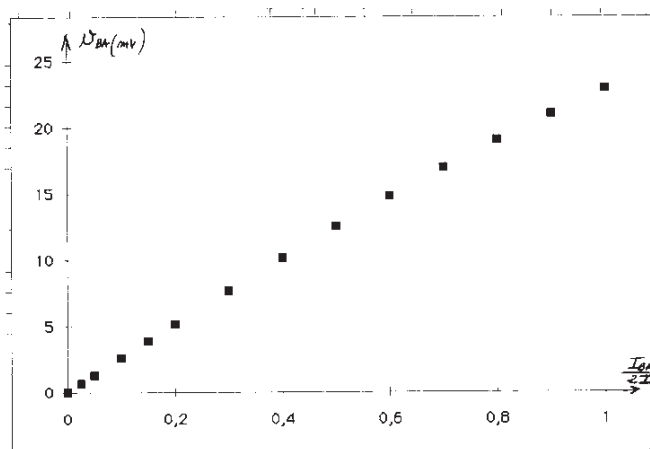
$$I_{BM} \approx 2 I_0 \quad \begin{cases} R_{B \text{ min}} = 15,3 \Omega \\ v_{BA} = 22,9 \text{ mV} \end{cases}$$

en effet :

$$\begin{aligned} i'_4 &= \frac{i_B}{2} + I_0 (1+x^2)^{1/2} \\ &\approx \frac{I_{BM}}{2} \sin \omega t + I_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} x^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

Si  $\frac{I_{BM}}{2} > I_0$ , risque de voir  $I_0 + \frac{I_{BM}}{2}$  s'annuler et devenir négatif ; pour diminuer  $R_B$  il faudrait augmenter  $I_0$ .

Voir ci-dessous les courbes donnant les variations de  $v_{BA}$  et  $R_B$  en fonction de  $\frac{I_{BM}}{2 I_0}$ .



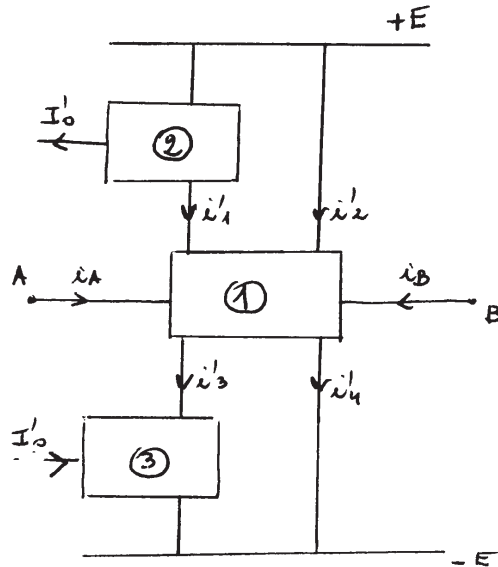
SECONDE PARTIE

QUELQUES MACROCELLULES TRANSLINÉAIRES

IV. Circuit suiveur translinéaire.

IV.1. Miroir PNP :  $E = 2 V_{EB} + R'_0 I'_0 \Rightarrow R'_0 = 8,6 \text{ k}\Omega$

IV.2.



① Cellule translinéaire mixte du III

$$i_A \approx 0$$

$$i_B \approx i'_4 - i'_2$$

$$A \equiv Y \quad B \equiv X$$

② Miroir PNP impose  $i'_1 = I'_0$ .

③ Miroir NPN impose  $i'_3 = I'_0$ .

IV.3. IV.3.1.  $i_y \equiv i_A \approx 0$ .

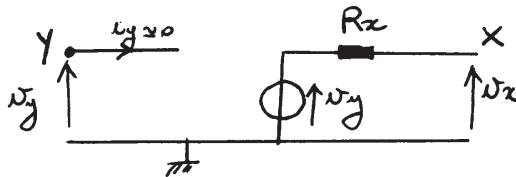
IV.3.2.  $R_A \equiv R_Y$  infiniment grande.

IV.3.3.  $i_x \equiv i_B = i'_4 - i'_2$ .

IV.3.4.  $v_{AB}$  est très faible  $< 23 \text{ mV} \Rightarrow v_x \approx v_y$ .

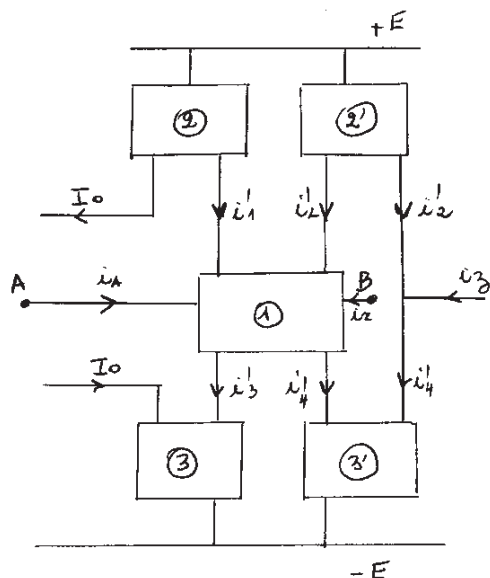
IV.3.5.  $R_x = R_B = \frac{V_T}{2 I'_0} = 13 \Omega$ .

IV.4. suiveur de tension



V. Circuit convoyeur de courant.

V.1.



① Cellule translinéaire du III :

$$A \equiv Y \quad B \equiv X$$

② Miroir PNP impose  $i_1' = I_0$ .

③ Miroir NPN impose  $i_3' = I_0$ .

② Miroir PNP recopie  $i_2'$ .

③ Miroir NPN recopie  $i_4'$ .

V.2. V.2.1.  $i_y \approx 0$ .

V.2.2.  $i_x = i_B = i_4' - i_2' = i_z \quad i_x = i_z$

V.2.3.  $v_{AB} \approx 0 \quad v_x = v_y$ .

V.2.4.  $R_x = \frac{V_T}{2 I_0} = 22 \Omega \quad \text{si } I_0 = 600 \mu A$ .

V.2.5.  $R_z$  résistance de sortie du miroir de courant, elle est très élevée (voir § I.2.2.4.).

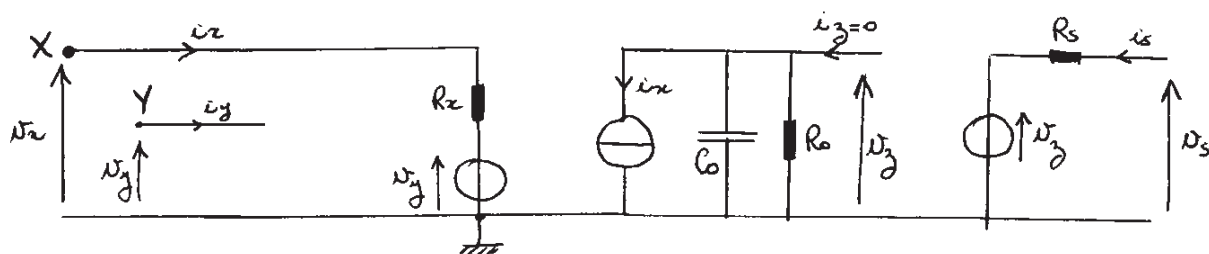
TROISIÈME PARTIE

APPLICATION À L'AMPLIFICATION

VI. Amplificateur de transimpédance fonctionnant en mode tension.

VI.1.

$$i_y = 0 \quad v_x = v_y + R_x i_x \quad i_z = i_x + Y_0 v_z$$

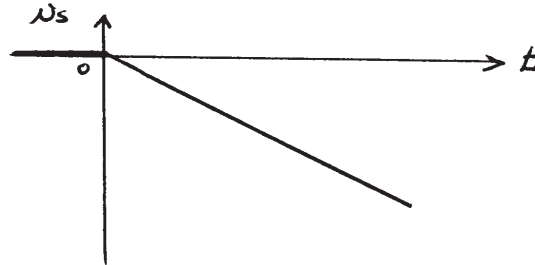


VI.2. VI.2.1.

$$v_{s_{is=0}} = v_z \quad i_x = -C_o \frac{d v_z}{dt} \quad \text{courant dans } R_0 \text{ négligé.}$$

$$\Rightarrow \frac{d v_s}{dt} = - \frac{i_x}{C_o}$$

$$i_x = I_{MAX} > 0 \quad (I_{MAX} = 9 \text{ mA})$$



VI.2.2. Vitesse d'évolution de  $v_s(t)$  :

$$\left| \frac{\Delta v_s}{\Delta t} \right| = \frac{I_{MAX}}{C_o} = 200 \text{ V} / \mu\text{s} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} I_{MAX} = 9 \text{ mA} \\ C_o = 4,5 \text{ pF} \end{matrix}$$

VI.2.3.

$$v_s = E \sin \omega t \quad \left( \frac{d v_s}{dt} \right)_{MAX} = E\omega$$

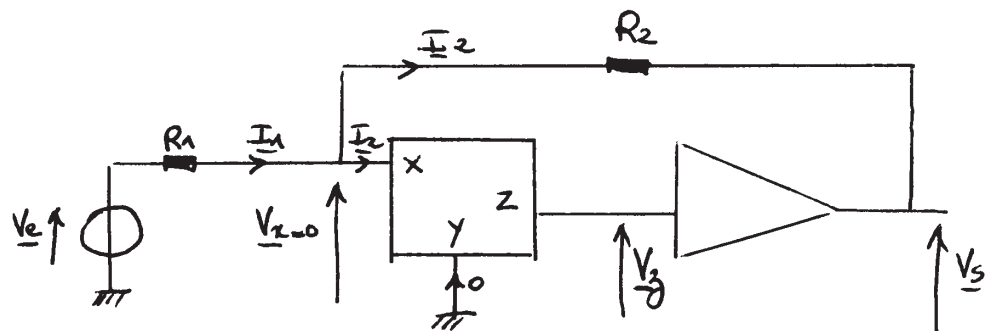
La transmission est correcte si :  $E 2\pi f < \frac{I_{MAX}}{C_o}$

or  $E = 10 \text{ V}$  au maximum si la tension d'alimentation est 10 V.

$$f_{lim} = \frac{I_{MAX}}{C_o 2\pi E} \approx 32 \text{ MHz}$$

VI.3. Amplificateur n° 1

VI.3.1. VI.3.1.1.



$$\underline{V_y} \equiv 0 \Rightarrow \underline{V_x} = 0$$

$$\underline{V_z} = \underline{V_s}$$

$$\underline{I_1} = \underline{I_2} + \underline{I_x}$$

$$\frac{\underline{V_e}}{R_1} = - \frac{\underline{V_s}}{R_2} = jC_o \omega \underline{V_s}$$

$$\underline{A}_1 = \frac{V_s}{V_e} = \frac{-\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + jC_o\omega}$$

$$\underline{A}_1 = \frac{A_{10}}{1 + j\frac{f}{f_1}} \quad A_{10} = -\frac{R_2}{R_1} \quad f_1 = \frac{1}{2\pi R_2 C_o}$$

VI.3.1.2.

$$f_1 = \frac{1}{2\pi R_2 C_o}$$

$C_o$  est imposé par le circuit intégré.  
 $R_2$  est le paramètre de réglage de  $f_1$ .

$$f_1 = 60 \text{ MHz} \Rightarrow R_2 = \frac{1}{2\pi C_o f_1} \approx 590 \Omega$$

VI.3.1.3.

$$|A_{10}| = \frac{R_2}{R_1}$$

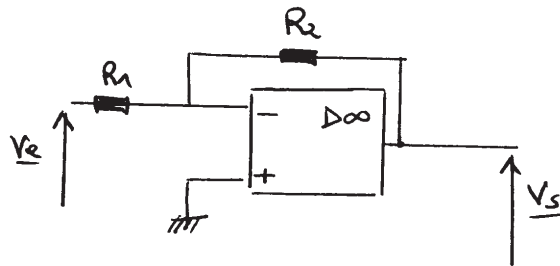
si  $R_2$  a servi à fixer  $f_1$ .  
 $R_1$  est le paramètre de réglage de  $A_{10}$ .

On veut 20 dB :  $|A_{10}| = 10 \quad R_1 = 59 \Omega$

Remarque :  $|A_1|(10 \text{ MHz}) = \frac{10}{\sqrt{1 + \left(\frac{10}{60}\right)^2}} = \frac{10}{\sqrt{1 + \frac{1}{36}}}$

$$A_1 \text{ dB} = 20 \text{ dB} - 10 \log\left(\frac{37}{36}\right) = 20 \text{ dB} - 0,1 \text{ dB}$$

VI.3.2.



$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_2}{R_1} \text{ en BF}$$

$$R_2 = 10 R_1 \quad \left| \frac{V_s}{V_e} \right|_{dB} = 20 \text{ dB}$$

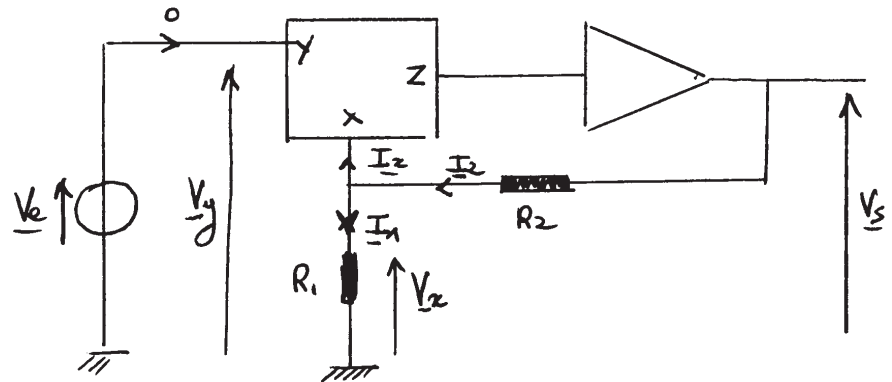
Avec un amplificateur opérationnel traditionnel on ne prendra jamais  $R_2 = 590 \text{ k}\Omega$  et  $R_1 = 59 \Omega$  pour réaliser  $\frac{R_2}{R_1} = 10$ . En effet ces CI ont des propriétés d'amplificateur de tension



pour de faibles courants de sortie. Si  $E = 10\text{ V}$  et  $R_2 = 590\ \Omega$  le courant de sortie est au maximum théorique  $\frac{E}{R_2} = 17\text{ mA}$ .

#### VI.4. Amplificateur n° 2

##### VI.4.1. VI.4.1.1.



$$\underline{V}_z = \underline{V}_s$$

$$\underline{V}_e \equiv \underline{V}_y = \underline{V}_x$$

$$\underline{I}_x = -\underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

$$-jC_o\omega \underline{V}_s = -\frac{\underline{V}_e}{R_1} + \frac{\underline{V}_s - \underline{V}_e}{R_2}$$

$$\underline{A}_2 = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + jC_o\omega}$$

$$\underline{A}_2 = \frac{A_{20}}{1 + j\frac{f}{f_2}}$$

$$A_{20} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi R_2 C_o} \equiv f_1$$

##### VI.4.1.2.

$$f_2 = \frac{1}{2\pi R_2 C_o}$$

$R_2$  est le seul paramètre de réglage.

$$f_2 = 60\text{ MHz} \quad R_2 = 590\ \Omega \quad (\text{cf. § VI.3.1.2.})$$

##### VI.4.1.3.

$$A_{20} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

si  $f_2$  est imposé.

$R_1$  est le paramètre de réglage de  $A_{20}$ .

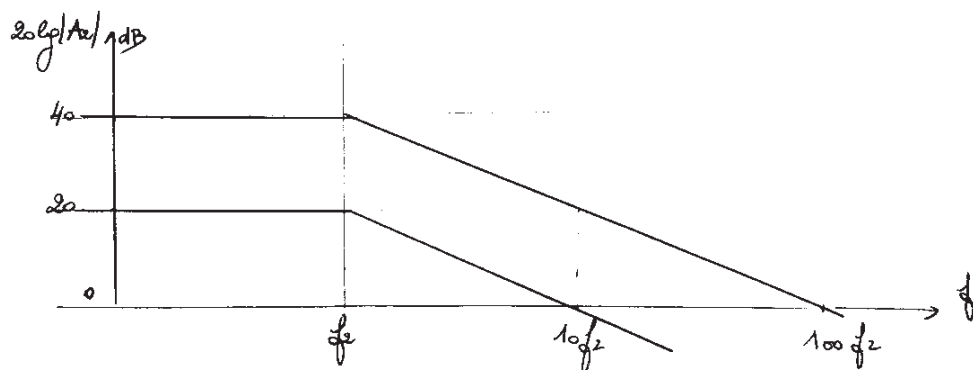
$$\text{On veut :} \quad A_{20} = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} = 9$$

$$R_1 \approx 65\ \Omega$$

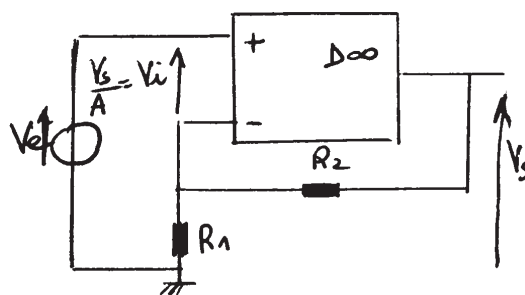
Remarque : on garde environ 20 dB jusqu'à 10 MHz.

$$\text{VI.4.1.4.} \quad R_2 = 590 \, \Omega \quad A_{20 \text{ dB}} = 20 \text{ dB} \quad A_{40 \text{ dB}} = 40 \text{ dB}$$

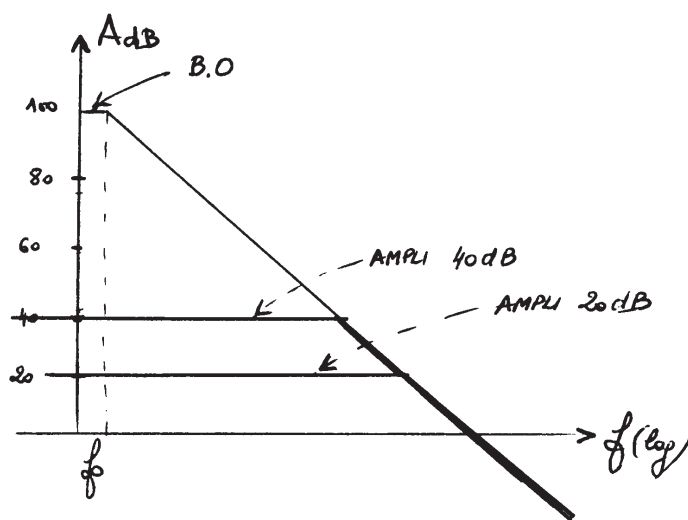
la fréquence de coupure est fixée par  $R_2$ , c'est  $R_1$  qui fixe 20 dB ou 40 dB.



VI.4.2. VI.4.2.1. Réalisation de la même fonction à l'aide d'un amplificateur opérationnel.



VI.4.2.2.



$$\text{VI.4.2.3.} \quad A = \frac{A_o}{1 + j \frac{f}{f_o}} \text{ en boucle ouverte.}$$

$$V_{-e} = \frac{V_s}{A} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s \quad \Rightarrow \quad \frac{V_s}{V_{-e}} = \frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}} = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_o} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

$$\underline{A'} \approx \frac{A'_o}{1 + j \frac{f}{f_o}} \quad A'_o \approx \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad f'_o = f_o \frac{A_o}{A'_o}$$

d'où :  $A'_o f'_o = A_o f_o$

Le produit «gain» bande passante est constant. Pour l'ampli de transimpédance le produit est égal à  $\frac{R_1 + R_2}{R_1} \times \frac{1}{2\pi f R_2 C_o}$  il varie donc avec  $R_1$  et  $R_2$ , c'est un avantage puisque l'on peut régler  $A_{20}$  et  $f_2$  indépendamment l'un de l'autre.

VI.5. Comparaison des deux types de CI du point de vue des entrées inverseuses et non inverseuses.

D'après VI.3.1.1. et VI.3.2.

X serait l'entrée inverseuse résistance très faible

Y serait l'entrée non inverseuse résistance très élevée.

Pour l'amplificateur opérationnel les deux entrées se font sous forte impédance en B.O. ; il y a une faible impédance sur l'entrée inverseuse uniquement en boucle fermée (masse virtuelle).

VI.6. VI.6.1. On reprend l'amplificateur inverseur. On a vu au § VI.3.1.2. que  $f_2$  ne dépend que de  $R_2$ , or ici, pour le même  $R_2 = 1000 \Omega$  cette fréquence peut varier de 32 MHz à 17 MHz ; pour le même  $R_2 = 5000 \Omega$  la fréquence  $f_2$  varie de 6,4 MHz à 3,2 MHz ; pour le même  $R_2 = 500 \Omega$  la fréquence  $f_2$  varie de 58 MHz à 33 MHz.

On voit que si  $R_2$  est multiplié par 2 la fréquence est divisée par deux à condition que  $R_1 = 1000 \Omega$ , mais c'est moins vrai si  $R_1 = 100 \Omega$ .

$$R_2 = 1000 \Omega \quad f_1 = \frac{1}{2\pi R_2 C_o} = 35 \text{ MHz}$$

le résultat est d'autant plus proche de la valeur «théorique» que  $R_1$  est plus élevé.

⇒ Il est probable que l'on n'a pas le droit de négliger  $R_x$  et  $R_s$  dans les calculs et qu'il convient de faire un calcul plus complet à partir du modèle ci-dessous.

VI.6.2.

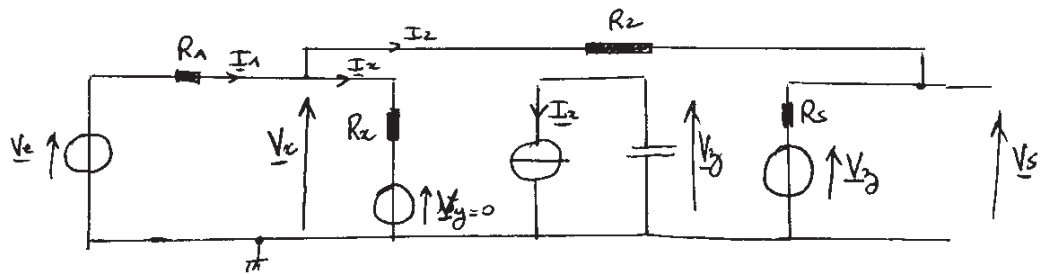
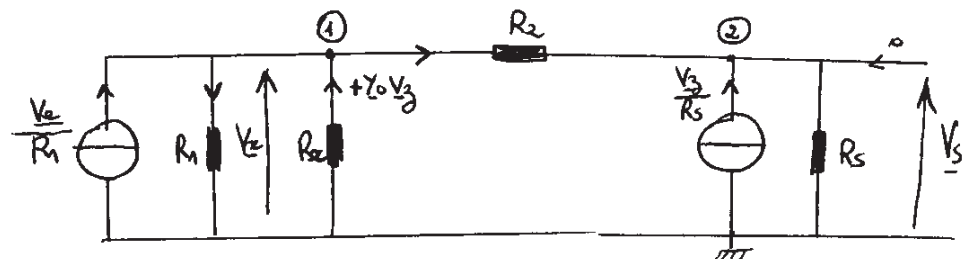


Schéma que l'on peut transformer :



$$\underline{V}_x = -R_x \underline{Y}_o \underline{V}_z$$

$$\underline{Y}_o = jC_o \omega$$

$$\text{Nœud 1 : } \frac{\underline{V}_e}{R_1} = -\frac{R_x}{R_1} \underline{Y}_o \underline{V}_z - \underline{Y}_o \underline{V}_z - \frac{R_x \underline{Y}_o \underline{V}_z - \underline{V}_s}{R_2}$$

$$\text{Nœud 2 : } \frac{-R_x \underline{Y}_o \underline{V}_z - \underline{V}_s}{R_2} + \frac{\underline{V}_z}{R_s} = \frac{\underline{V}_s}{R_s}$$

Après calculs il vient :

$$\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = -\frac{\frac{1}{R_1} \left( \frac{1}{R_s} - \frac{R_x}{R_2} \underline{Y}_o \right)}{\frac{1}{R_2 R_s} + \frac{\underline{Y}_s}{R_s} \left[ 1 + \frac{R_x}{R_1} + \frac{R_x}{R_2} \right] + \frac{\underline{Y}_o}{R_2} \left( 1 + \frac{R_x}{R_1} \right)}$$

ce qui peut se mettre sous la forme :

$$\underline{A} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1 - j \frac{f}{f_N}}{1 + j \frac{f}{f_D}}$$

$$\text{En posant : } f_N = \frac{R_2}{2\pi C_o R_x R_s}$$

$$\begin{aligned} f_D &= \frac{1}{2\pi R_2 C_o} \left[ \frac{1}{1 + \frac{R_x}{R_1} + \frac{R_x}{R_2} + \frac{R_s}{R_2} \left( 1 + \frac{R_x}{R_1} \right)} \right] \\ &= \frac{f_1}{\left( 1 + \frac{R_s}{R_2} \right) \left[ 1 + \frac{R_x}{R_1} + \frac{R_x}{R_2 + R_s} \right]} \end{aligned}$$

Comme  $f_N \approx 23 \text{ GHz}$ , aux fréquence de travail on peut dire que :

$$\underline{A} \approx -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_D}}$$

pour que  $f_D \approx f_1$  il faudrait simultanément :

$$R_s \ll R_2 \quad (\text{soit } R_2 > 1500 \Omega)$$

$$R_x \ll R_1 \quad (\text{soit } R_1 > 5000 \Omega)$$

Les résistances utilisées avec ce type d'amplificateur n'étant pas dans cette gamme de valeurs, on a rarement  $f_1 \approx f_D$  ce qui explique les anomalies apparentes du tableau.

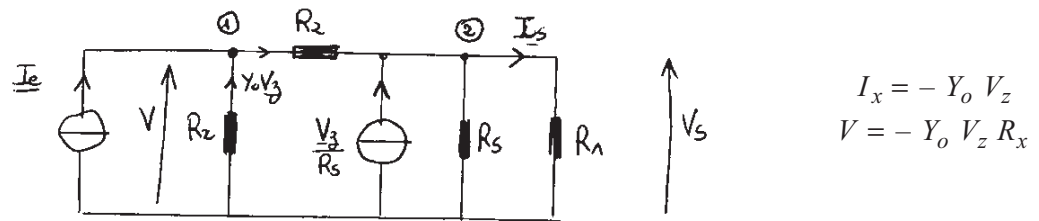
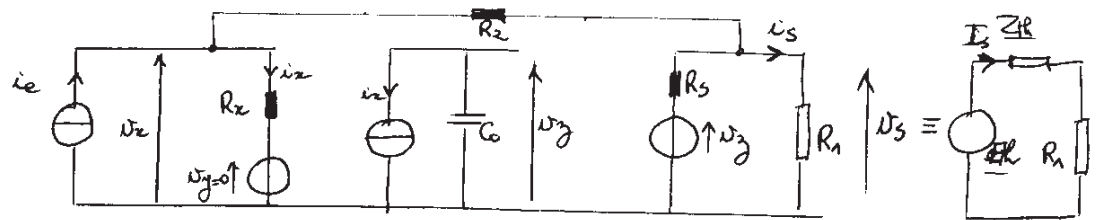
Le tableau ci-dessous permet de comparer les résultats numériques :

Gain (en dB)	0	0	6	6	14	14	20	20	26	40
$R_2$ (en $\Omega$ )	1000	500	2000	1000	5000	500	1000	500	1000	5000
$R_1$ (en $\Omega$ )	1000	500	1000	500	1000	100	100	50	50	50
$f_c$ (en MHz)	32	58	16	30	6,4	43	23	33	17	3,2
$f_1$ (en MHz)	35,4	70,7	17,7	35,4	7,1	70,7	35,4	70,7	35,4	7,1
$f_D$ (en MHz)	31,7	57,4	16,3	30,3	6,7	43,0	22,5	32,7	17,0	3,5

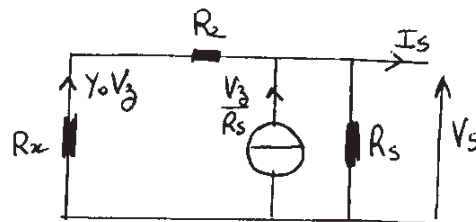
N.B. :  $f_1$  est la fréquence de coupure calculée à l'aide de la formule établie au § VI.3.1.1.  
 $f_D$  est la fréquence de coupure calculée à l'aide de la formule établie au § VI.6.2.

**VII. Amplificateur de transimpédance fonctionnant en mode courant.**

VII.1. VII.1.1. Schéma équivalent complet



VII.1.1.1.



$$Z_{th} = - \left( \frac{V_s}{I_s} \right)_{I_e=0}$$

$$\begin{cases} -I_s = + \frac{V_s}{R_s} - \frac{V_z}{R_s} - Y_o V_z \\ V_s = -Y_o V_z (R_2 + R_x) \end{cases}$$

$$- \frac{I_s}{V_s} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_x + R_2} + \frac{1}{R_s} \frac{1}{(R_2 + R_x) Y_o}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{th}} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_x + R_2} + \frac{1}{R_s (R_x + R_2) Y_o}$$

après calculs il vient :

$$\underline{Z}_{th} = Z_{tho} \frac{1 + \frac{jf}{f'_N}}{1 + j \frac{f}{f'_D}}$$

avec :

$$\begin{cases} f'_N \equiv f_1 = \frac{1}{2\pi R_o C_o} \\ 1 + \frac{R_x + R_2 + R_s}{R_o} \\ f'_D = \frac{1}{2\pi C_o (R_x + R_2 + R_s)} \end{cases}$$

et :

$$Z_{tho} = \frac{R_s (R_2 + R_x)}{R_o + R_x + R_2 + R_s}$$

on peut remarquer que :

$$f'_D \approx \left(1 + \frac{R_o}{R_2}\right) f'_N$$

Dans le cas le plus défavorable  $f'_D$  est le plus petit possible quand  $R_2$  est le plus grand.

On s'intéresse au cas où :

$$Z_{th} \approx Z_{tho} \left(1 + j \frac{f}{f_1}\right)$$

Cette formule est valable si  $\frac{R_o}{R_2} > 100 \Rightarrow R_2 < 30 \text{ k}\Omega$ .

Dans ces conditions :

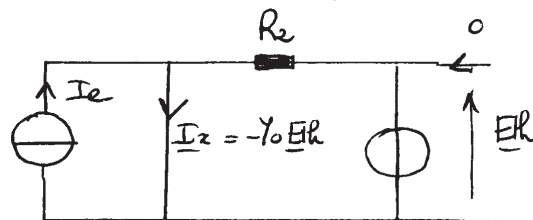
$$Z_{tho} \approx \frac{(R_2 + R_x) R_s}{R_o}$$

VII.1.1.2.

$$f_1 = \frac{1}{2\pi R_o C_o} = 11,8 \text{ kHz}$$

$$Z_{tho} \approx \frac{R_2 R_s}{R_o} = 0,15 \Omega \quad (\text{si } R_2 = 30 \text{ k}\Omega)$$

VII.1.2.

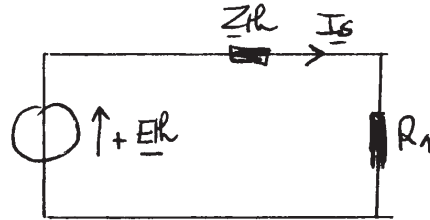


$$\underline{E}_{th} = \underline{V}_s \text{ quand } \underline{I}_s = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} R_x = R_s \approx 0 \\ R_o \rightarrow \infty \end{matrix}$$

$$\underline{E}_{th} = -R_2 \underline{I}_e - Y_o \underline{E}_{th} R_2$$

$$\underline{E}_{th} = -\frac{R_2}{1 + Y_o R_2} \underline{I}_e$$

VII.2. VII.2.1.



$$\underline{A}_i = \frac{\underline{I}_s}{\underline{I}_e} = \frac{I_s}{E_{th}} \cdot \frac{E_{th}}{I_e} = \frac{1}{Z_{th} + R_1} \left( \frac{-R_2}{1 + R_2 Y_0} \right)$$

si :  $R_1 > 1000 Z_{tho} \Leftrightarrow R_1 > 150 \Omega$

$$\underline{A}_i = - \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + j C_o R_2 \omega}$$

$f_{is} \equiv f_2$  de la question VI.3.1.1.

VII.2.2.

$$A_c = \frac{A_{io}}{1 + j \frac{f}{f_{io}}} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{io} = - \frac{R_2}{R_1} \\ f_{io} = \frac{1}{2\pi C_o R_2} \end{array} \right.$$

VII.3. VII.3.1.  $|A_{io}|$  est maximum quand  $R_1$  est minimum, or la formule de  $A_i$  est valable si :

-  $R_1 > 1000 Z_{tho} = 150 \Omega$

la formule de  $Z_{th}$  était valable pour  $R_2 < \frac{R_o}{100} : |A_{io MAX}| = \frac{30\,000}{150} = 200$ .

VII.3.2.

$$f_{io} = 12 \text{ MHz} \quad R_2 = 2,9 \text{ k}\Omega$$

cette valeur de  $R_2$  permet l'expression de  $Z_{th}$ .

On veut  $|A_{io}| = 200$  :  $R_1 = \frac{R_2}{200} = 14,5 \Omega$

or :  $Z_{tho} = \frac{R_2 R_s}{R_o} = \frac{2,9 \cdot 10^3 \times 15}{3 \cdot 10^6} = 15 \times 10^{-3} \Omega$

$R_1 \approx 1000 Z_{tho}$  donc la formule littérale de  $A_i$  reste valable.

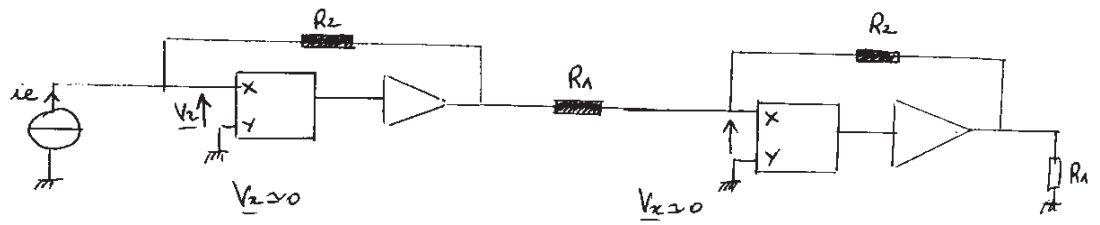
VII.3.3.

Si on veut :  $20 \lg \left| \frac{I_s}{I_e} \right| = 56 \text{ dB} \Rightarrow \left| \frac{I_s}{I_e} \right| = 400$

Si on veut garder  $f_{io}$ ,  $R_2$  reste fixé.

$R_1 = \frac{R_2}{400} = 7 \Omega \Rightarrow R_1$  ne vérifie pas le bonne condition.

Donc on va prendre deux étages en cascade.





## PROBLÈME D'ÉLECTROTECHNIQUE

### I. CELLULE MULTINIVEAUX A SOURCES DE TENSION EN SERIE

1. Si tous les interrupteurs sont ouverts, il y a ouverture de la source de courant. Si deux interrupteurs sont fermés, il y a court-circuit d'une source de tension. A chaque instant, un et un seul interrupteur doit être fermé.

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = 1 \quad \text{soit} \quad \sum f_j = 1$$

2.  $i_{Kj} = f_j i$ , le courant  $i_{Kj}$  est dans le même sens que  $i$ .

3.

$$3.1. \quad v_{Kj} = E \left[ -(j-1)f_1 - (j-2)f_2 \dots - f_{j-1} + 0f_j + f_{j+1} + 2f_{j+2} + \dots + (n-j)f_n \right]$$

soit

$$v_{Kj} = E \sum_{p=-(j-1)}^{n-j} p f_{j+p}$$

3.2.  $v_{Kj}$  est du signe de  $p$  puisque  $f_{j+p} = 1$  ou  $0$

. donc,  $v_{Kj}$  est positif si  $p$  est positif, donc si l'interrupteur fermé est situé au-dessus de lui, c'est-à-dire si  $K_{j+1}, K_{j+2}, \dots, K_n$  est fermé.

.  $v_{Kj}$  est négatif, si l'interrupteur fermé est situé en dessous de lui.

$$3.3. \quad v_{K1} = E \sum_{p=0}^{n-1} p f_{p+1} = [0f_1 + f_2 + 2f_3 + \dots + (n-1)f_n] E$$

soit

$$v_{K1} \in \{0, E, 2E, \dots, (n-1)E\} \quad \text{toutes} \geq 0$$

$$v_{Kn} = E \sum_{p=-(n-1)}^0 p f_{n+p} = + E [-(n-1)f_1 - (n-2)f_2 \dots - f_{n-1} - 0f_n]$$

soit

$$v_{Kn} \in \{0, -E, -2E, \dots, -(n-1)E\} \quad \text{toutes} \leq 0$$

4.  $n = 3$

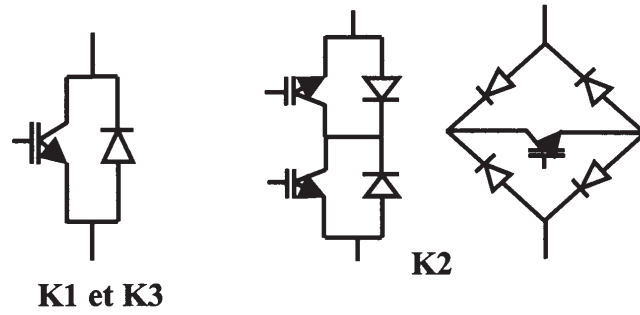
$$4.1. \quad j = 1 \quad v_{K1} = E \sum_{p=0}^2 p f_{p+1} = E [0f_1 + 1f_2 + 2f_3] \quad v_{K1} \in \{0, E, 2E\}$$

$$j = 2 \quad v_{K2} = E \sum_{p=-1}^1 p f_{p+2} = E [-f_1 + 0f_2 + f_3] \quad v_{K2} \in \{-E, 0, +E\}$$

$$j = 3 \quad v_{K3} = E \sum_{p=-2}^0 p f_{p+3} = E [-2f_1 - f_2 - 0f_3] \quad v_{K3} \in \{-2E, -E, 0\}$$

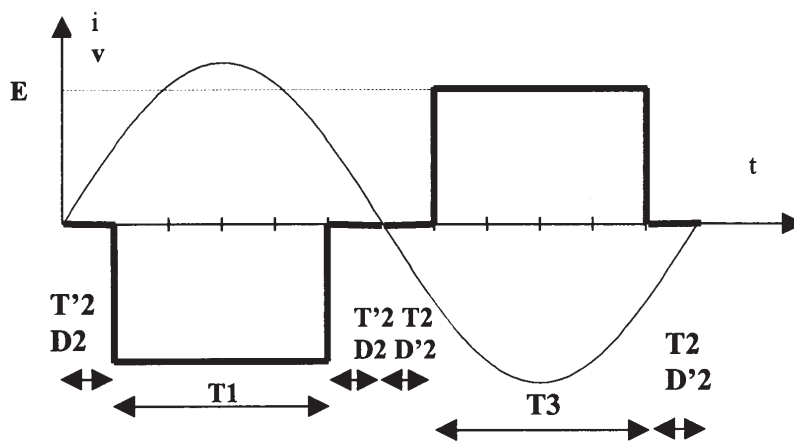
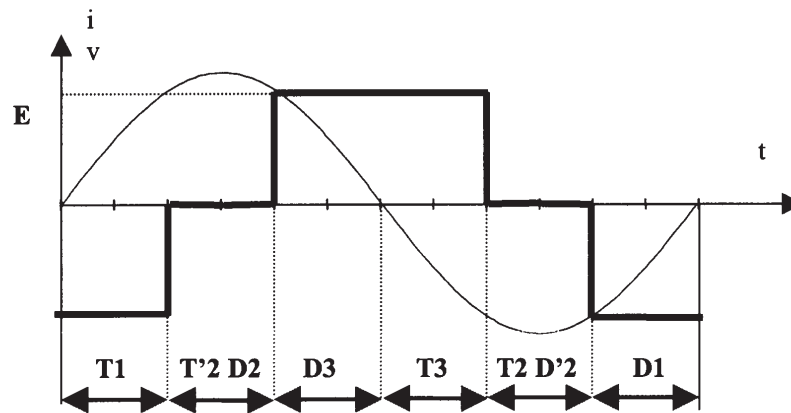
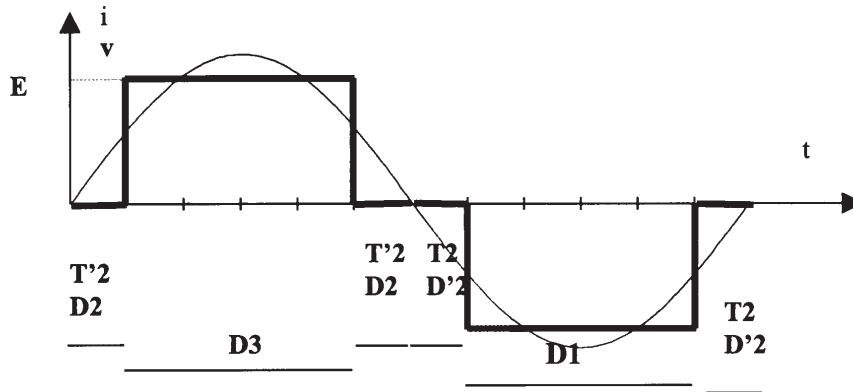
4.2.  $K_1$  et  $K_3$  sont unidirectionnels en tension et bidirectionnels en courant, on peut utiliser des transistors et des diodes connectées en parallèle inverse.

$K_2$  est bidirectionnel en tension et en courant, il faut utiliser soit 2 transistors et 2 diodes, soit 4 diodes et un transistor.



4.3. Le schéma est celui représenté figure 2.

5.  
5.1., 5.2., 5.3.



5.4.  $A_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega t \, dt$       Compte tenu des symétries et du glissement :

$$A_1 = \frac{4}{\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} E \sin \theta \, d\theta = \frac{4E}{\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{donc } V_1 = \frac{A_1}{\sqrt{2}}$$

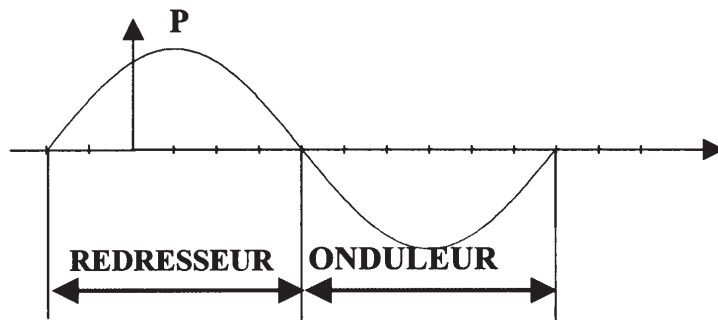
$$V_1 = \frac{\sqrt{6}}{\pi} E$$

5.5. Déphasage du fondamental de  $v$  par rapport à  $i$

$$\varphi = \psi - \pi/6 \quad \varphi > 0 \quad \text{correspondant à un déphasage arrière}$$

5.6. Puissance fournie par la source de courant

$$P = V_1 I \cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{\pi} E I \cos(\psi - \pi/6)$$

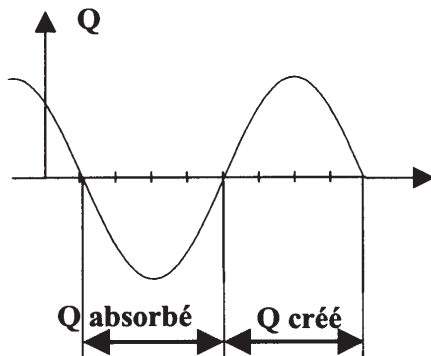


5.7.  $\psi \in (-\pi/3, 2\pi/3)$        $P > 0$  la source alternative fournit de la puissance, c'est un redresseur

$\psi \in (2\pi/3, 5\pi/3)$        $P < 0$  la source alternative reçoit de la puissance, c'est un onduleur.

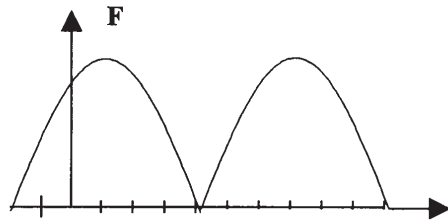
5.8. Puissance réactive fournie par la source de courant

$$Q = -V_1 I \sin \varphi = -\frac{\sqrt{6}}{\pi} E I \sin(\varphi - \pi/6)$$



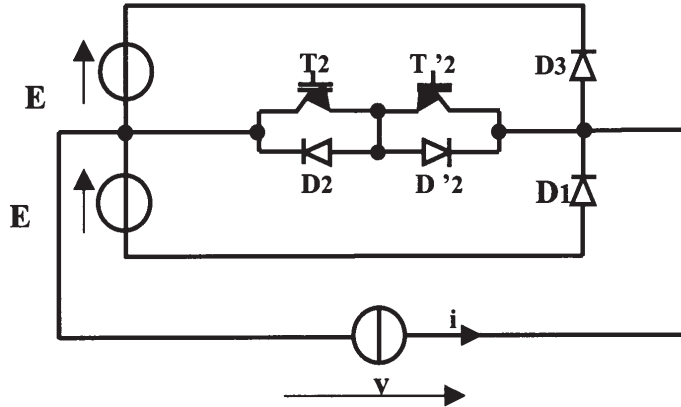
5.9.  $V^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/3} E^2 \, d\theta = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} E^2$        $V = E \sqrt{\frac{2}{3}}$

5.10.  $F = \frac{P}{S} = \frac{P}{VI} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} |\cos(\psi - \pi/6)| \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{\pi} |\cos(\psi - \pi/6)|$

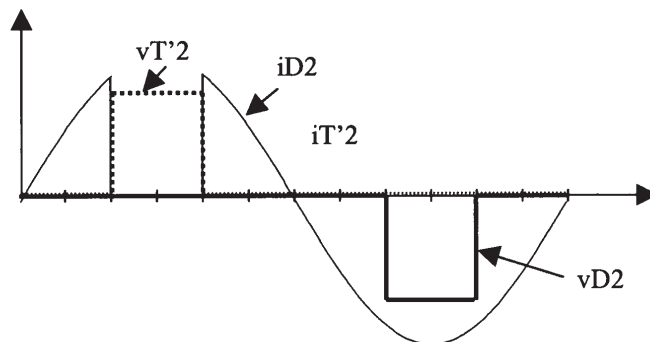
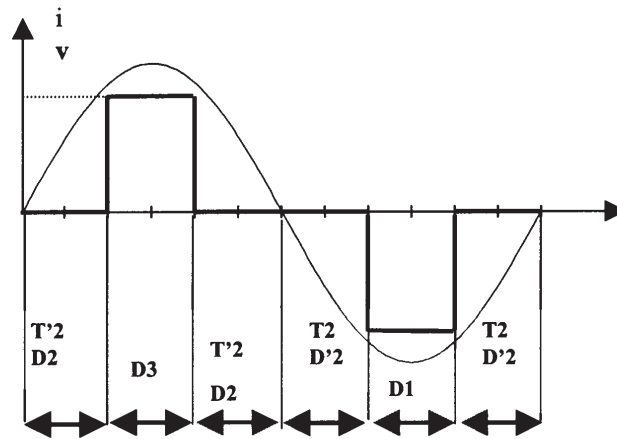


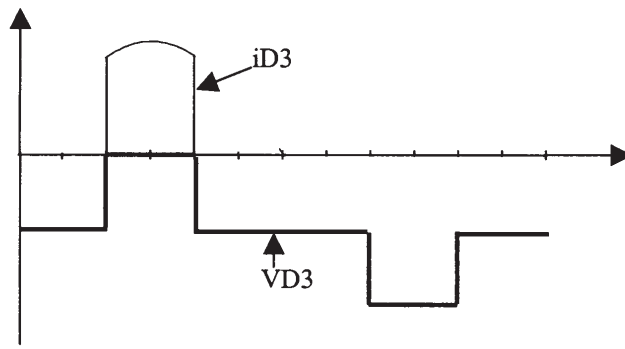
5.11. en redresseur à  $Q = 0$ ,  $\psi = \pi/6$ . Dans ces conditions,  $P$  est max et  $F = 3/\pi = 0,955$ .  
 Pour  $\psi = \pi/3$ ,  $T_3$  et  $T_1$  ne sont jamais passants et pourraient être supprimés.

6.



6.1., 6.2., 6.3.

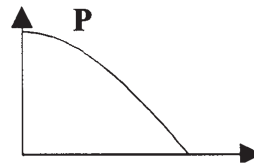




- 6.4. Les diodes  $D_1$  et  $D_3$  doivent tenir une tension inverse égale à  $-2E$ .  
 Les diodes  $D_2$  et  $D'_2$  doivent tenir une tension inverse égale à  $-E$ .  
 Les transistors  $T_2$  et  $T'_2$  doivent tenir une tension directe égale à  $E$ .

$$6.5. \quad A_1 = \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi/2} E \sin \theta \, d\theta = \frac{4E}{\pi} \cos \alpha \quad \text{et } V_1 = \frac{A_1}{\sqrt{2}} \quad V_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E \cos \alpha$$

$$6.6. \quad P = V_1 I = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} EI \cos \alpha$$



$$6.7. \quad V^2 = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi/2} E^2 \, d\theta = \frac{2E^2}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad V = E \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\pi}}$$

$$6.8. \quad F = \frac{P}{S} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{EI \cos \alpha}{IE \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\pi}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\pi}}} \cos \alpha$$

$\alpha$	0	30	60	90
F	0.90	0.955	0.779	0

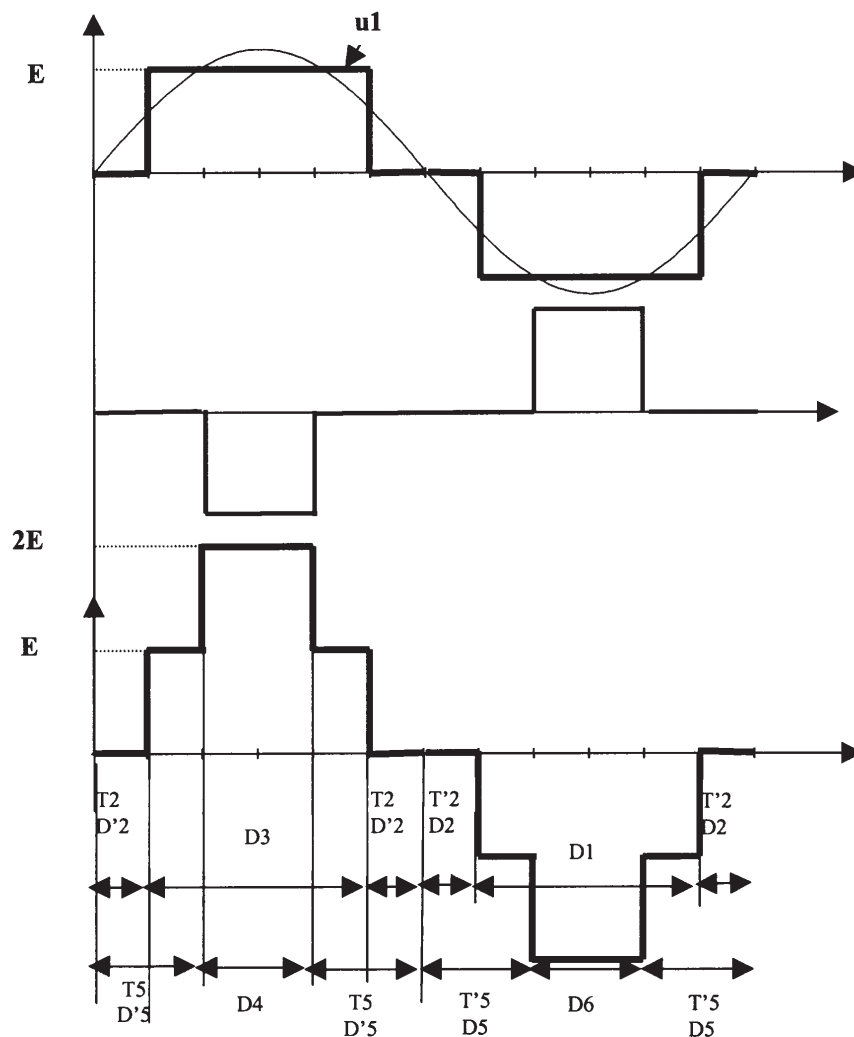
- 6.9. Le facteur de puissance est maximum et égal à 0.96 pour  $\alpha = 23^\circ$

$$F = \frac{K \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\pi}}} \quad \frac{dF}{d\alpha} = \frac{-\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} K \sin \alpha + \frac{2}{\pi} \frac{K \cos \alpha}{2\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\pi}}}}{1 - \frac{2\alpha}{\pi}}$$

$$\frac{dF}{d\alpha} = 0 \quad \text{si} \quad \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\pi}} \sin \alpha = \frac{\cos \alpha}{\pi \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\pi}}} \quad \text{soit } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\pi - 2\alpha} \quad \text{soit } \alpha = 23^\circ$$

7.

7.1., 7.2., 7.3., 7.4.



$$7.5. \quad A_1 = \frac{4}{\pi} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} E \sin \theta \, d\theta + \int_{\beta}^{\pi/2} 2E \sin \theta \, d\theta \right\} = \frac{4E}{\pi} [\cos \alpha - \cos \beta + 2\cos \beta] = \frac{4E}{\pi} (\cos \alpha + \cos \beta)$$

$$V_1 = \frac{A_1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}E}{\pi} (\cos \alpha + \cos \beta)$$

$$7.6. \quad V^2 = \frac{2}{\pi} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} E^2 \, d\theta + \int_{\beta}^{\pi/2} 4E^2 \, d\theta \right] = \frac{2E^2}{\pi} (\beta - \alpha + 2\pi - 4\beta) = \frac{2E^2}{\pi} (2\pi - \alpha - 3\beta)$$

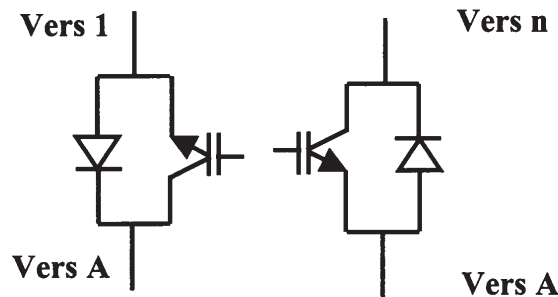
$$V = E \sqrt{4 - \frac{(\alpha + 3\beta)2}{\pi}} \quad V = E\sqrt{2} \sqrt{2 - \frac{(\alpha + 3\beta)}{\pi}}$$

$$7.7. \quad F = \frac{P}{S} = \frac{V_1 I}{VI} = \frac{V_1}{V} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{(\cos \alpha + \cos \beta)}{\sqrt{2} \sqrt{2 - \frac{(\alpha + 3\beta)}{\pi}}} = \frac{2}{\pi} \frac{(\cos \alpha + \cos \beta)}{\sqrt{2 - \frac{\alpha + 3\beta}{\pi}}} = F$$

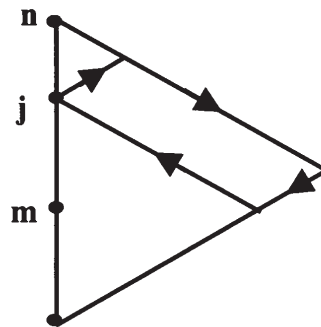
$$7.8. \quad \alpha = \pi/6, \beta = \pi/3 \quad F = \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{\sqrt{2 - \frac{\pi/6 + \pi}{\pi}}} = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{\pi\sqrt{5}} = 0,952$$

## II. ASSOCIATIONS DE CELLULES ELEMENTAIRES DE COMMUTATION

- 1.1. On ne peut passer que par l'extérieur  
pour réunir A à n, il faut fermer  $K_{12}, K_{24}, K_{36}, \dots, K_{(n-1), 2(n-1)}$   
pour réunir A à 1, il faut fermer  $K_{11}, K_{21}, K_{31}, \dots, K_{(n-1), 1}$
- 1.2. Si le courant est alternatif, i est tantôt positif, tantôt négatif et les interrupteurs doivent être réversibles en courant.
- 1.3.  $V_n - V_A$  peut prendre les valeurs  $0, E, 2E, \dots, (n-1)E$  toujours  $\geq 0$   
 $V_1 - V_A$  peut prendre les valeurs  $0, -E, -2E, \dots, -(n-1)E$  toujours  $\leq 0$  suivant le numéro de la borne connectée à A.
- 1.4. Ces interrupteurs sont connectés en série, ils doivent avoir les caractéristiques statiques de l'ensemble.  
Les interrupteurs  $K_{12}, K_{24}, \dots, K_{(n-1), 2(n-1)}$  ont une tension  $\geq 0$   
Les interrupteurs  $K_{11}, K_{21}, \dots, K_{(n-1), 1}$  ont une tension  $\leq 0$ .  
Ils ne sont donc pas réversibles en tension.
- 1.5. Il s'agit de composants unidirectionnels en tension et bidirectionnels en courant.

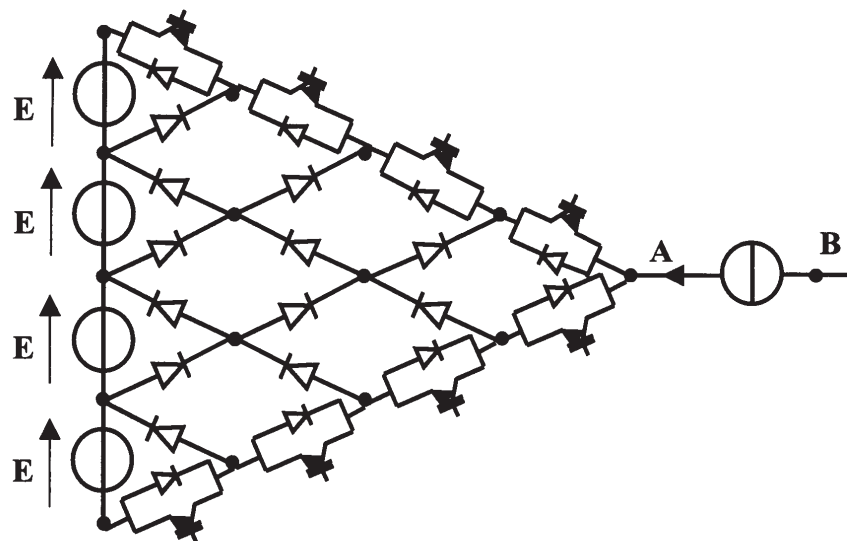


2.1.

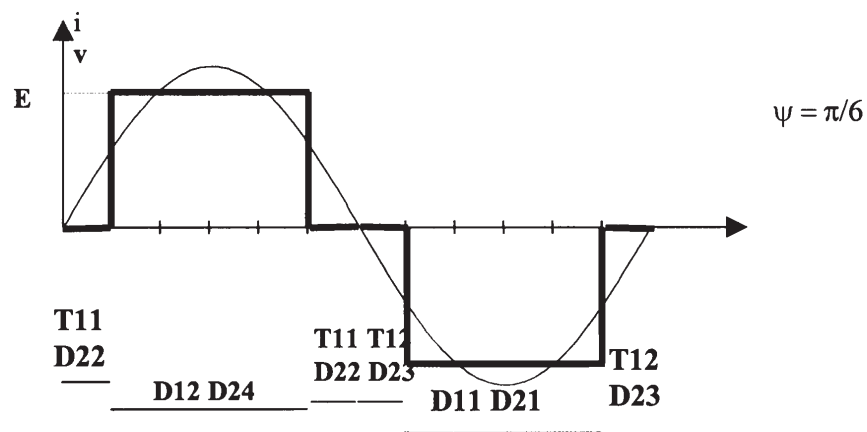


- 2.2. On a vu dans la première partie que la tension  $V_A - V_m$  est positive si A est relié à  $m+1, m+2, \dots, n$  et négative dans le cas contraire, ceci est vrai quel que soit l'assemblage des interrupteurs.
- 2.3. Les voies peuvent donc être soumises à des tensions positives ou négatives et doivent donc être bidirectionnelles en tension.
- 2.4. Pour obtenir la réversibilité en tension d'une voie, comprenant toujours une partie intérieure et une partie extérieure, il faut que les interrupteurs aient une réversibilité en tension opposée à celles des interrupteurs périphériques. Si l'on sélectionne le sens du courant dans une voie, de simples diodes suffisent puisque les transistors périphériques peuvent assurer la commande.

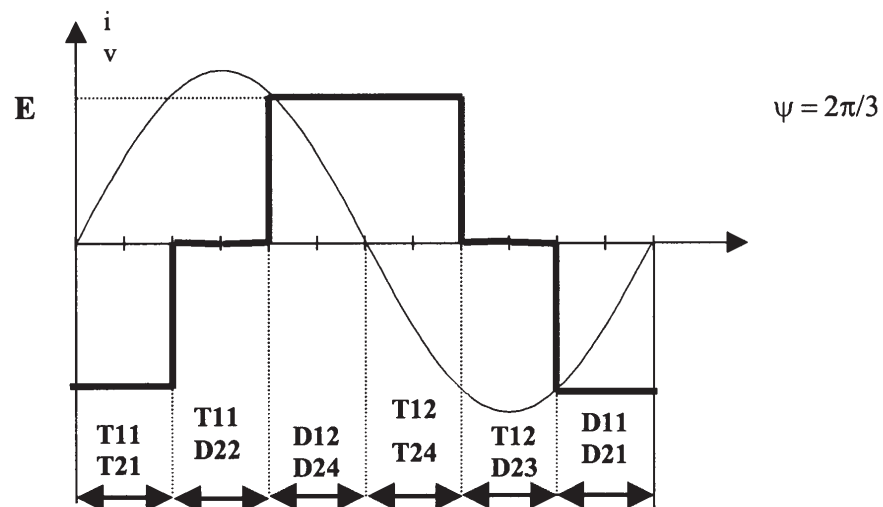
2.5.



3.1.



3.2.

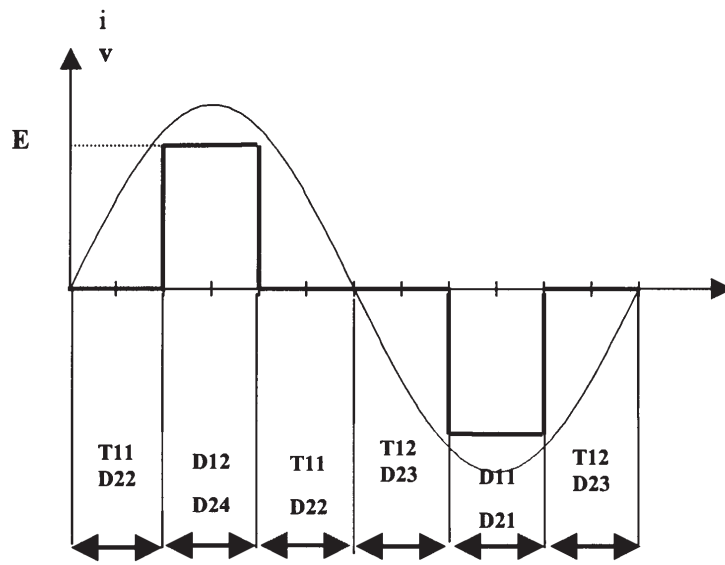


3.3. On obtient les mêmes résultats puisque les connexions réalisées sont les mêmes et que l'on a donc les mêmes formes d'onde.

3.4. Ces transistors servent à écouler un courant de signe opposé à celui de la tension, à facteur de déplacement unité cet événement n'existe pas et l'on peut supprimer ces transistors.

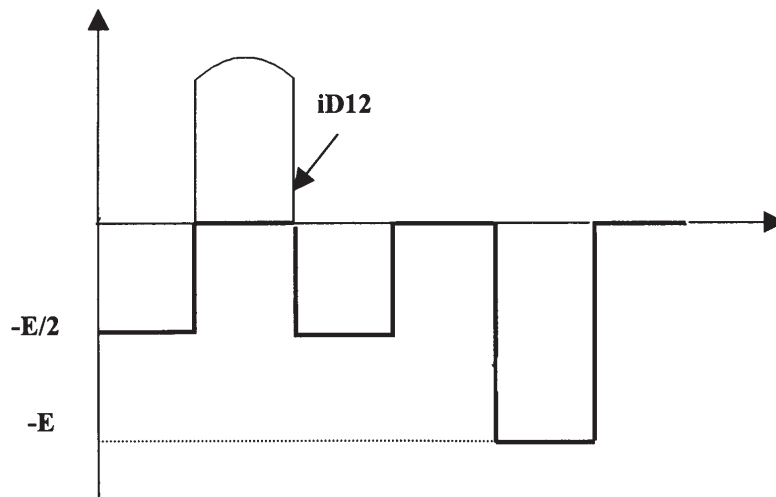
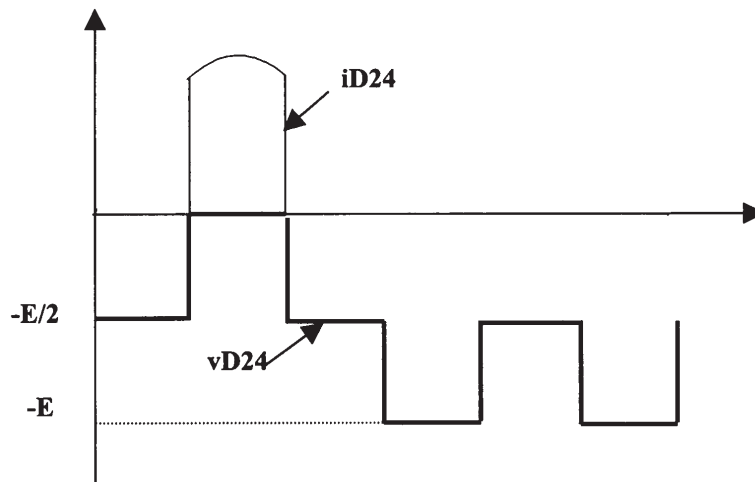


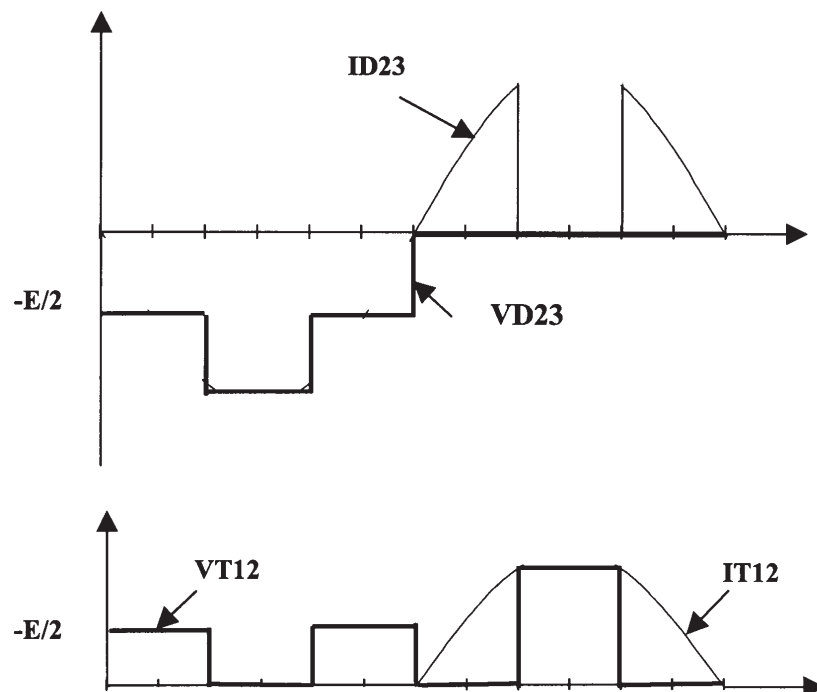
4.1.



$\alpha = \pi/3$

4.2.



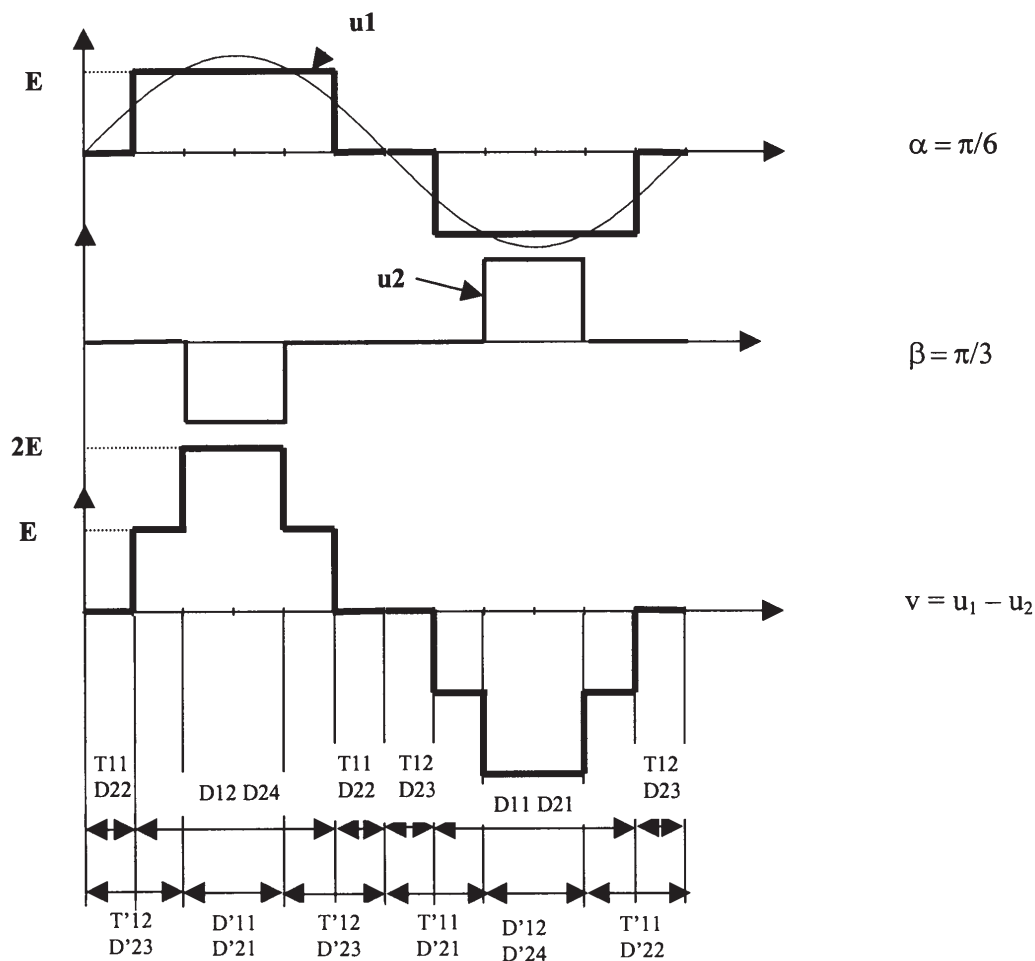


4.3. Les diodes doivent tenir  $-E$  en inverse et les transistors  $+E$  en tension directe.

4.4. Le convertisseur réalise les mêmes connexions, les résultats "vus des bornes" sont les mêmes. Le premier montage utilise moins de composants (2 transistors et 4 diodes) que le second (2 transistors et 6 diodes).

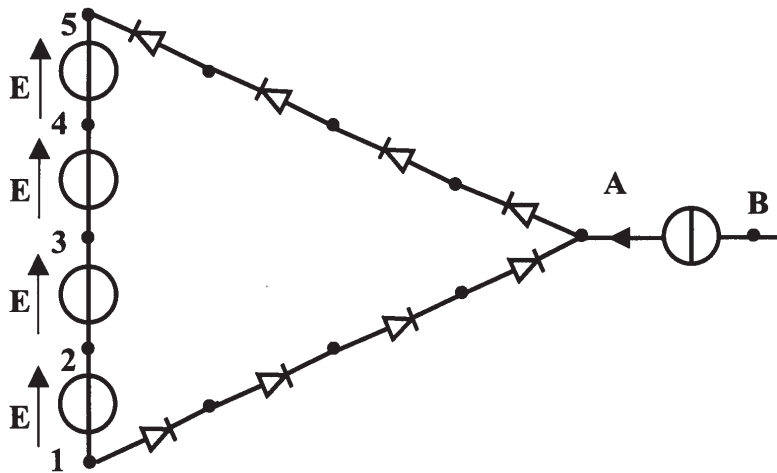
Les transistors ont les mêmes sollicitations, en revanche les diodes du second montage ont une contrainte en tension deux fois moins élevée.

5.1., 5.2., 5.3.

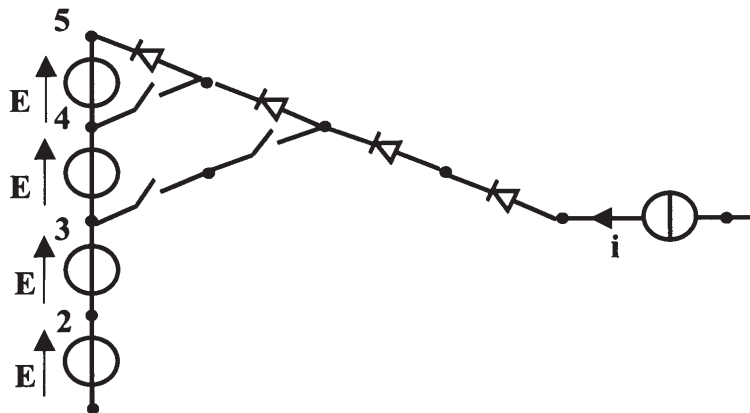


5.4. Les mêmes connexions conduisent évidemment aux mêmes résultats vus des bornes;

6.1. On a montré à la première question que les interrupteurs périphériques étaient unidirectionnels en tension, on impose leur unidirectionnalité en courant, des simples diodes peuvent donc, a priori, convenir.

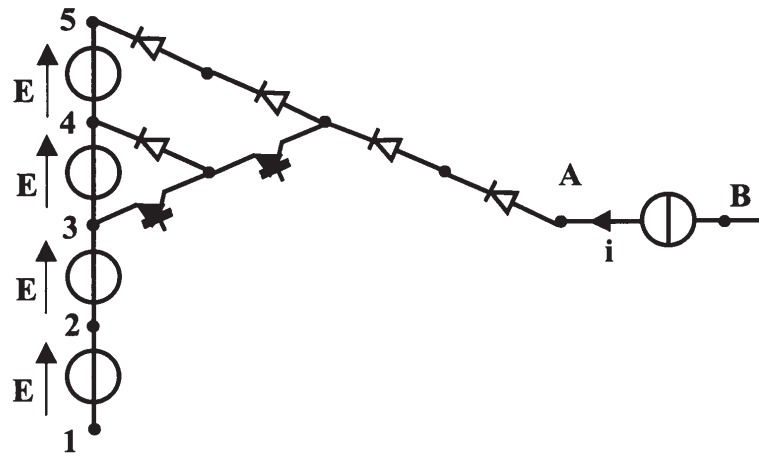
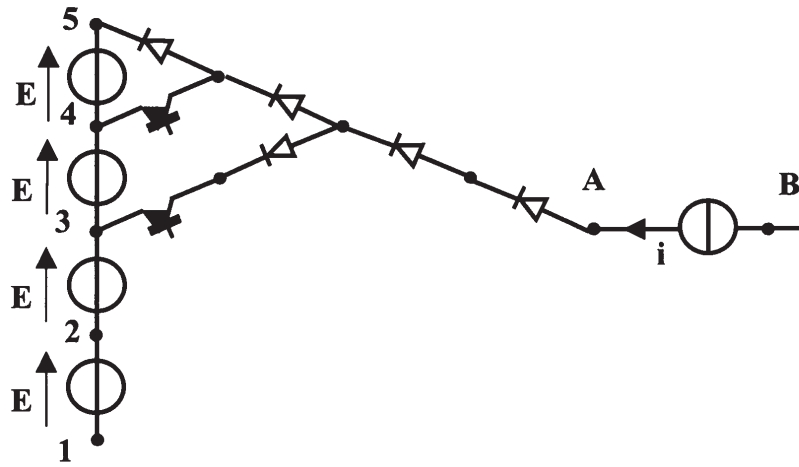


6.2.

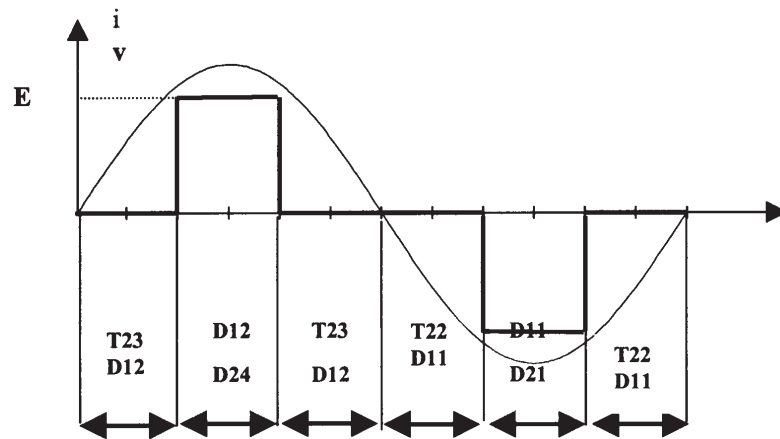


6.3. Ils sont unidirectionnels en courant, puisque situés au dessus de l'axe A, borne 3. La voie reliant les bornes 3 et 4 à A doit être bidirectionnelle en tension puisque la tension  $V_A - V_4$  est positive si A est réuni à 5 et négative dans les autres cas, et la tension  $V_A - V_3$  est positive si A est réuni à 4 ou 5 et négative dans les autres cas. Les diodes de la branche extérieure tiennent les tensions négatives, les autres interrupteurs doivent pouvoir tenir les tensions positives, les voies doivent comporter au moins un transistor, et ces composants peuvent être unidirectionnels.

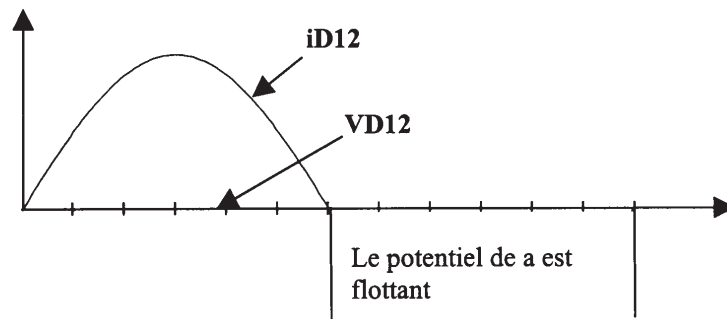
6.4.

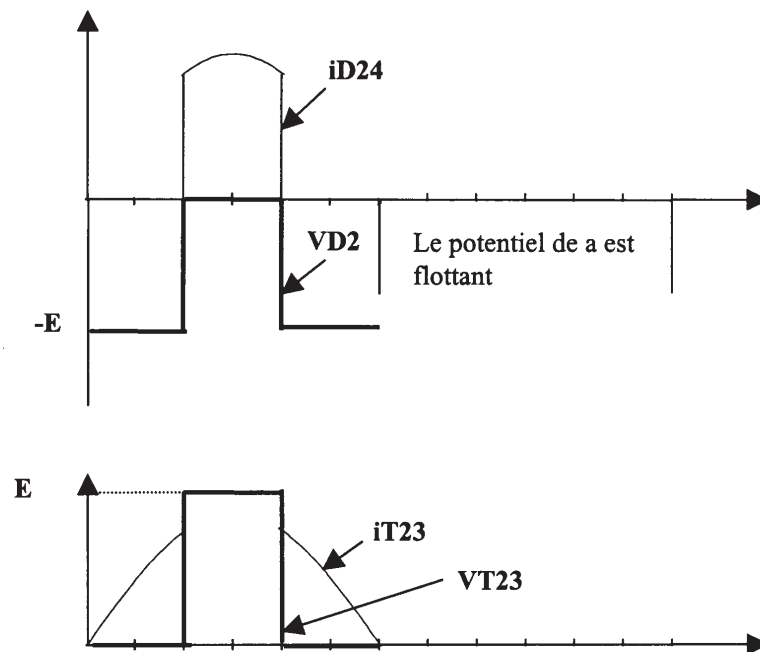


7.1.

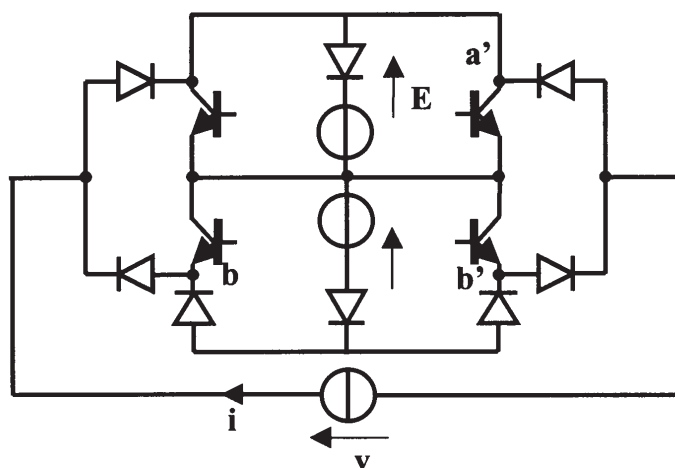


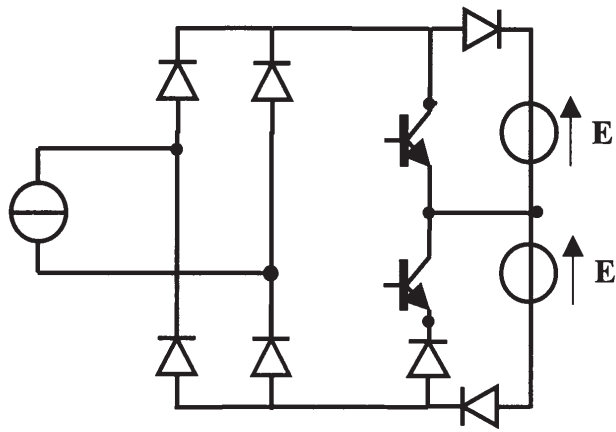
7.2.





- 7.3.1. Les mêmes connexions sont réalisées vu des bornes. Le montage a les mêmes performances externes, il ne nécessite que deux transistors et quatre diodes, comme celui de la première partie, mais la contrainte en tension sur les diodes n'est que  $E$ , au lieu de  $2E$ .
- 8.1. Le fonctionnement est celui du convertisseur de la question 5, figure 6. On peut reprendre les résultats de la question 5.
- 8.2. Quand le courant  $i$  est positif, les potentiels de  $a$  et  $b'$  sont déterminés, ceux de  $a'$  et  $b$  flottants. Quand le courant  $i$  est négatif, les potentiels de  $a'$  et  $b$  sont déterminés, ceux de  $a$  et  $b'$  flottants. On peut donc connecter  $a$  et  $a'$  ainsi que  $b$  et  $b'$  ce qui fixe à chaque instant les potentiels flottants sans dysfonctionnement de la structure.
- 8.3.





On obtient un redresseur de courant à diodes, suivi d'un hacheur à 3 niveaux utilisant 6 diodes et 2 transistors.