

N° 822
Cahier n° 2
Mars 2000

publication mensuelle
94^e année

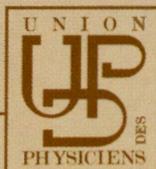
BUP

Bulletin

de l'union des physiciens



Concours Agrégations et CAPES 1999 :
Les solutions



ADMINISTRATION et RÉDACTION
44, bd Saint-Michel - 75270 PARIS cedex 06

Sommaire du N° 822 - Cahier n° 1 (Mars 2000)

ARTICLES GÉNÉRAUX

La forme de l'espace (Jean-Pierre LUMINET)	461
Les étudiants et le sens des forces de frottement solide : le modèle de la brosse (Helena CALDAS et Edith SALTIEL)	471
Phénomène d'induction associé au mouvement d'un aimant dans un tube de cuivre (André DEIBER, Laurent MARKIEWICZ, Olivier KEMPF et Frédéric PAVIET)	487
Enquête sur une bobine (Pierre PROVOST)	511
Antoine Masson ou Heinrich-Daniel Ruhmkorff, qui a inventé la bobine d'induction (Claude SPÉRANZA)	513
La science dans votre assiette : jeux de couleurs avec les anthocyanes (André FOUGEROUSSE)	521
Dosage microchimique du fer III (Jean-Christophe LARBAUD)	535
Utilisation de MAPLE en chimie : les diagrammes potentiel pH (Jean-Pierre SIMOND)	543
Remettons les pendules à l'heure (1) (François SAINT-JALM)	555
Remettons les pendules à l'heure (2) (Florence MOREAU)	558
Évaluation des capacités expérimentales pour l'année scolaire en cours (1999-2000)	Pages vertes : 1 à 12

ACTUALITÉS PÉDAGOGIQUES

BUP Pratique

- Expériences sur la pression... chez les pompiers (François PASSEBON).....561
- Enregistrement magnétique et mesure de g (Jean-Claude PIVOT)565
- Réalisation d'un analyseur de spectre (Alain ARBOUET)577

Formation - Débouchés...

- Une excellente voie pour physiciens en herbe (Claude BREESE).....593

Formation

- Compte-rendu de l'atelier de formation continue pour le personnel pédagogique
en sciences physiques.....603

Regards européens

- Analyse de la revue anglaise «School Science Review».....605

On cherche - On donne608

Les réglages optiques sont-ils une fatalité ? (Philippe RAIN SANT)609

Suite du sommaire en troisième de couverture.

*Le n° 822 comprend deux cahiers, le sommaire du cahier n° 2
est en quatrième de couverture.*

Suite du Sommaire du N° 822 - Cahier n° 1 (Mars 2000)

VIE DE L'ASSOCIATION - INFORMATIONS

Activités de l'UdP

- L'UdP au fil des jours615
- Bilan de l'enquête en première et terminale S.....616

Activités des sections académiques625

Paru au B.O.....628

Informations

- CERVOD629
- L'AFAS communique : conférences631
- Les grands rendez-vous de la science et de l'histoire632
- Sur les traces de l'invisible...633
- Planétarium de Vaulx-en-Velin communique : le ciel est un spectacle !634
- Centre Alexandre Koyré communique :
Journées de l'Enseignement des sciences physiques et naturelles635
- L'Actualité Chimique communique637
- La Société Française de Chimie communique :
Commission Interdivision Enseignement.....639

Parus ou à paraître640

PUBLICATIONS DE L'UdP653

L'UNION DES PHYSICIENS

Renseignements diversI à XIV

PUBLICITÉ XV à XXII

Sommaire du N° 822 - Cahier n° 2 (Mars 2000)

AGRÉGATION DE SCIENCES PHYSIQUES (concours externe)

Option Physique :	
Composition de physique	3
Composition de chimie	41
Problème de physique	69
Option Chimie :	
Composition de physique	89
Problème de chimie	103
Option Physique et Électricité appliquées :	
Composition de physique	115
Composition d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique	141
Problème d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique	157

AGRÉGATION DE SCIENCES PHYSIQUES (concours interne)

Options Physique et Chimie et Physique appliquée :	
Composition sur la physique et le traitement automatisé de l'information	173
Composition avec exercices d'application :	
Option physique et chimie	201
Option physique appliquée	219

CAPES DE SCIENCES PHYSIQUES (concours externe)

Section Physique et Chimie :	
Composition de physique avec applications	237
Composition de chimie avec applications	247
Section Physique et Électricité appliquée :	
Composition de physique avec applications	263
Composition d'électronique - électrotechnique avec applications	273

CAPES DE SCIENCES PHYSIQUES (concours interne)

Sections Physique et Chimie - Physique et Électricité appliquée :	
Composition de physique	291
Section Physique et Chimie :	
Composition de chimie	301
Section Physique et Électricité appliquée :	
Composition d'électricité appliquée	311

L'UNION DES PHYSICIENS

Renseignements divers	I à XIV
-----------------------------	---------

Union des Physiciens

Association des professeurs de Physique et de Chimie

MEMBRES D'HONNEUR

M. Georges CHARPAK

Membre de l'Académie des Sciences
Chercheur au CERN
Prix Nobel.

M. Pierre-Gilles de GENNES

Membre de l'Académie des Sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Louis LEPRINCE-RINGUET

Membre de l'Académie française
Membre de l'Académie des Sciences
Professeur au Collège de France.

M. Claude COHEN-TANNOUJJI

Membre de l'Académie des Sciences
Professeur au Collège de France.
Prix Nobel.

M. Jean-Marie LEHN

Membre de l'Académie des Sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Louis NÉEL

Membre de l'Académie des Sciences
Prix Nobel.

PRÉSIDENTS D'HONNEUR

F. BLAIN, A. DURUPHTY, J.-P. FOULON, J. GATECEL, J. TINNÈS, A. TOUREN.

MEMBRES DU CONSEIL

Membres de droit

F. BLAIN, A. DURUPHTY, J.-P. FOULON, J. GATECEL, J. TINNÈS, A. TOUREN.

Les Présidents des sections académiques font, de droit, partie du Conseil de l'Union des Physiciens (voir pages ci-après).

Membres élus (renouvelable par un tiers chaque année)

1997 : J. ADOUE, M. BASUYAUX, P. FONTES, B. HEUZE, M.-R. LECAUCHOIS, A. MATHIS, G. SERRA, D. THÉVENIN.

1998 : M. BARRAL, F. BLAIN, F. COUSSON, R.-E. EASTES, C. GUERNIGOU, O. KEMPF, J. MARÉCHÉ, B. MOMBELLI, J. REGOURD, M. VAN IMPE.

1999 : S. ALBRECHT, G. BAUDRANT, S. BETTON, L. DURAND, B. FABRE, H. GRIMAUD, O. LEFEBRE, M.-Th. SAGLIO.

Bureau de l'Union des Physiciens

Siège social

UNION DES PHYSICIENS - 44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS Cedex 06.

Aucune permanence n'est assurée à cette adresse.

Secrétariat des abonnements

Tél. : 01 43 25 61 53 - Fax : 01 43 25 07 48.

* * *

Présidente

Josette MAUREL - 164, avenue Ledru Rollin - 75011 PARIS

Tél. : 01 43 79 41 86 - mél : jomaurel@club-internet.fr

Questions générales, relations internationales.

Vice-présidents

André GILLES - Sauveterre - 31320 AUREVILLE - Tél. : 05 61 76 76 24 -

mél : agilles@ac-toulouse.fr - Chimie.

Jean JOURDAIN - 60, rue Carnot - 45400 FLEURY-LES-AUBRAIS - Tél. : 02 38 88 61 00 -

mél : jourdain.jean22@club.francetelecom.fr - Collèges.

Marie-Françoise KARATCHENTZEFF - 30 bis, rue Elisée-Reclus - 91120 PALAISEAU - Tél. : 01 60 10 13 92 -

mél : mfkarat@club-internet.fr - Lycées.

Madeleine SONNEVILLE - 29, rue Edmond About - 92350 LE PLESSIS-ROBINSON - Tél. : 01 43 50 79 12 -

mél : sonnevil@cicrp.jussieu.fr - Liaisons secondaire / post-bac - Physique.

Jean WINTHER - 73, rue de la Convention - 75015 PARIS - Tél. : 01 45 77 55 63 -

mél : jwinther@club-internet.fr - Enseignement technique (L.P. ; L.T.) - Informatique.

Rédacteur en chef et Directeur de la publication

Monique SCHWOB - 39, rue de la Prévôté - 57950 MONTIGNY-LÈS-METZ -

Tél. et Fax : 03 87 38 02 59 - mél : monique.schwob@wanadoo.fr

Rédacteur en chef adjoint

Jean-Pierre DAVAL - 5, rue Jean Jaurès - 92370 CHAVILLE - Tél. : 01 47 50 34 46.

Trésorier

Jacques BOULOUMIÉ - 17, hameau de la Caravelle - 91650 BREUILLET -

Tél. : 01 64 58 43 34 - Fax : 01 69 94 09 61 - mél : bouloumi@club-internet.fr

Trésorier adjoint

François VILLEDARY - 57, rue d'Estienne d'Orves - 91120 PALAISEAU - Tél. : 01 60 10 78 31 -

mél : Villedary.Fy@wanadoo.fr

Secrétaire général

Gilles GALLIN-MARTEL - 24, rue Alfred de Musset - 74600 SEYNOD - Tél. : 04 50 69 57 15 -

mél : Gilles.Gallin-Martel@edres74.cur-archamps.fr - Liaisons avec le serveur - Olympiades de physique.

Secrétaire générale adjointe

Edith PIGANEAU - 58, rue du Rôle - 91800 BRUNOY - Tél. et Fax : 01 69 43 72 81 -

mél : edith@club-internet.fr - Lycées - Conférence des présidents.

Responsable de la publicité

Patrick NÉEL - Villa 1 - Les Jardins de Juliette - 310, route d'Eguilles - 13090 AIX-EN-PROVENCE -
Tél. et Fax : 04 42 95 18 42 - mél : NEEL.PATRICK@wanadoo.fr - Publicité du BUP.

Membres

Serge BETTON - Lendrevie-Basse - 81600 BRENS - Tél. : 05 63 57 36 07
mél : sbetton@ac-toulouse.fr - Collèges.

François BOSSERT - 5, rue Debussy - 67116 REICHSTETT - Tél. : 03 88 20 43 49 -
mél : françois.bossert@pharma.u-strasbg.fr - Enseignement technique : baccalauréats
technologiques, série STI ; BTS.

Bernard CIROUX - 2 bis, rue Paul Claudel - 71530 CHAMPFORGEUIL - Tél. : 03 85 41 43 30
mél : bernard.ciroux@ac-dijon.fr - Laboratoires - Enseignement technologique, série STL.

Francine CHAVY - 39 bis, rue des Platanes - 94340 JOINVILLE-LE-PONT - Tél. : 01 43 97 29 79 -
mél : fychavy@club-internet.fr - Lycées.

Régine DUFOUR - Lycée Pirandello - 75013 Paris - Lycées - STL, BTS chimie.

Rosine FANGUET - 13, allée de la Butte - 13500 MARTIGUES - Tél. et Fax : 04 42 42 11 74 -
mél : michel.fanguet@wanadoo.fr - Lycées.

Danièle LAUNER - 32, chemin des Vallées - 95620 PARMAIN - Tél. : 01 34 08 84 92 -
mél : dlauner@club-internet.fr - Collèges - Audiovisuel.

Edouard TANTART - 32, rue Lacépède - 75005 PARIS - Tél. : 01 45 35 98 12 -
mél : ertant@micronet.fr - Classes préparatoires.

Commissions de l'Union des Physiciens

«Base de données - BUP»

Responsable : Monique SCHWOB.

«TICE»

Responsable : Jean WINTHER.

«Réforme des lycées»

Responsable : Marie-Françoise KARATCENTZEFF.

Olympiades

Olympiades de physique

Huguette GRIMAUD - Aurore E - 134, rue Curat - 34090 MONTPELLIER -
Tél. et Fax : 04 67 72 80 24 - mél : hgrimaud@univ-montp2.fr

Olympiades de chimie

André GILLES - Sauveterre - 31320 AUREVILLE - Tél. : 05 61 76 76 24 -
mél : agilles@ac-toulouse.fr

Projet européen (COMENIUS)

Janine MARÉCHÉ, membre du conseil (coordination)
10, allée de la Papellerie - 54250 CHAMPIGNEULLES
Tél. et Fax : 03 83 38 24 12 - mél : lc4838@wanadoo.fr

Françoise LANGLOIS - 91, rue Duguesclin - 69006 LYON
Tél. : 04 78 89 58 03 - mél : langlois@univ-lyon1.fr

Monique SCHWOB - 39, rue de la Prévôté - 57950 MONTIGNY-LÈS-METZ
Tél. et Fax : 03 87 38 02 59 - mél : monique.schwob@wanadoo.fr

Serveur UdP

<http://www.cnam.fr/hebergement/udp>

Relations avec le serveur

Gilles GALLIN-MARTEL
Gilles.Gallin-Martel@edres74.cur-archamps.fr

Administrateur

Olivier KEMPF
okempf@cybercable.tm.fr

Bulletin de l'Union des Physiciens

COMITÉ DE RÉDACTION

Rédacteur en chef : Monique SCHWOB.

Rédacteur en chef adjoint : Jean-Pierre DAVAL.

Comité de rédaction : A. BOUSSIÉ, L. DETTWILLER, A. GILLES, J. JOURDAIN, D. LAUNER, E. PIGANEAU, B. VELAY, J. WINTHER.

Numéros spéciaux : A. BOUSSIÉ (coordination), F. ROGER, C. VIEL.

PUBLICITÉ

Patrick NÉEL - Villa 1 - Les Jardins de Juliette - 310, route d'Eguilles - 13090 AIX-EN-PROVENCE - Tél. et Fax : 04 42 95 18 42 - mél : NEEL.PATRICK@wanadoo.fr

PUBLICATION DES ARTICLES

Tout article ou communication doit être adressé en **triple exemplaires** au «Rédacteur en chef du Bulletin de l'Union des Physiciens» : 44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS Cedex 06. Dès réception l'expéditeur en est avisé.

Les manuscrits sont ensuite soumis, par le Comité de Rédaction, au Comité de Lecture qui donne ou refuse son accord à la publication ou bien demande des modifications. L'avis du Comité de Lecture reste strictement anonyme. L'auteur en reçoit immédiatement communication. En cas d'acceptation, **aucun engagement sur la date de publication ne peut être fourni à l'auteur** ; les manuscrits acceptés ne sont pas rendus. En cas de refus, les manuscrits sont renvoyés à leurs auteurs.

Les auteurs reçoivent les épreuves de leur article aux fins de vérifier leur conformité à l'original et s'engagent à renvoyer les épreuves corrigées **dans les huit jours** suivant leur réception. Après publication, ils reçoivent vingt-cinq tirés à part.

RECOMMANDATIONS AUX AUTEURS

Tout article **doit impérativement être accompagné d'un résumé** de quelques lignes et de cinq à huit mots clés.

Les figures doivent être tracées avec soin (éviter de fournir des photocopies, qui ne permettent que des reproductions de qualité médiocre) sur une feuille séparée ; la position des figures sera repérée dans le texte.

Joindre le fichier informatique correspondant, enregistré sur disquette sous deux formats :

- un fichier ASCII permettant les transferts,
- un fichier original pour lequel on indiquera le logiciel utilisé et le numéro de version.

Tarifs des cotisations et abonnements

1. COTISATIONS ANNUELLES : membres actifs ou adhérents

Le paiement de la cotisation seule ne donne pas droit au service du bulletin.

a - Tarif normal :130 F (19,82 €)

b - Tarif réduit : retraité, étudiant ou militaire110 F (16,77 €)

Le tarif étudiant est accordé aux intéressés sur leur demande et après envoi d'une pièce justificative de leur qualité.

c - Tarif spécial : Enseignant de collège

Un enseignant en collège peut opter pour l'une des deux possibilités ci-dessous :

- cotiser selon les tarifs du paragraphe 1a,

- verser une cotisation de :135 F (20,58 €)

Dans ce cas les trois numéros spécialement consacrés aux collèges seront envoyés gracieusement.

Moyennant paiement de la cotisation, la qualité de membre actif est réservée aux professeurs et aux membres du personnel de laboratoire de sciences physiques de l'enseignement public et de l'enseignement privé sous contrat d'association avec l'état, en activité ou en retraite ; celle de membre adhérent à toute autre personne. Le non-paiement de la cotisation entraîne la radiation de membre de l'Union des Physiciens.

La qualité de membre de l'Union des Physiciens permet de participer aux activités nationales et académiques de l'Union des Physiciens.

2. ABONNEMENT AU BULLETIN DE L'UNION DES PHYSICIENS

(Année civile 2000)

L'abonnement est annuel et comprend :

- pour les individuels : les dix numéros du BUP de janvier à décembre.

- pour les collectivités **collèges** : les dix numéros du BUP, du 1^{er} mai 2000 au 30 avril 2001 plus les **deux cahiers** énoncés et corrigés des CAPES et Agrégations de 2000.

- pour les collectivités **non collèges**, l'abonnement comporte **en outre** le cahier Enseignement Supérieur.

L'abonnement individuel est à régler à compter du 15 septembre 1999 et doit être fait avant le 1^{er} décembre 1999. Pour tous règlements ultérieurs, les numéros du bulletin qui seront épuisés seront remplacés par des numéros des années antérieures.

a - Membres actifs ou adhérents (prix préférentiel réservé aux membres de l'association à jour de leur cotisation, voir paragraphes 1a et 1b)

	France métropolitaine et D.O.M. (dont TVA 2,1 %)	Étranger	
		Abonnement (exonéré de la TVA)	Expédition*
Normal	230 F (35,06 €)	225,30 F (34,35 €)	80 F (12,20 €)
Réduit (retraité, étudiant, militaire)	200 F (30,49 €)	195,90 F (29,86 €)	80 F (12,20 €)

* Pour l'expédition par voie aérienne, consulter les tarifs ci-après, paragraphe 4.

b - Collectivités (collège, autre établissement, personne morale, bibliothèque, laboratoire...)

Collège	530 F (80,80 €)	519,10 F (79,14 €)	135 F (20,58 €)
Autre que Collège	670 F (102,14 €)	656,22 F (100,04 €)	135 F (20,58 €)

c - Individuel non membre de l'association

Prix public	360 F (54,88 €)	352,60 F (53,75 €)	80 F (12,20 €)
-------------	-----------------	--------------------	----------------

Pour tout premier abonnement ajouter 10 F (1,52 €) au tarif indiqué.

3. CHANGEMENT D'ADRESSE

Toute demande de changement d'adresse d'expédition du bulletin doit comporter l'indication de l'ancienne et de la nouvelle adresse. Elle ne peut être prise en considération que si elle est accompagnée de la somme de 10 F (1,52 €) ou de son équivalent en timbres-poste.

4. TARIFS DES EXPÉDITIONS DU BULLETIN PAR VOIE AÉRIENNE

Les membres de l'Union des Physiciens qui en feront la demande lors du paiement de l'abonnement, pourront recevoir le bulletin par avion, à condition de rajouter les frais d'expédition indiqués ci-dessous au tarif d'abonnement : France pour le **Régime intérieur et assimilé**, Étranger (exonéré de TVA) pour le **Régime international**.

• Régime intérieur et régime assimilé

DÉPARTEMENTS D'OUTRE-MER : Guadeloupe, Martinique, Guyane Française, La Réunion, Saint-Pierre-et-Miquelon, Mayotte	125 F (19,06 €)
TERRITOIRES D'OUTRE-MER : Nouvelle-Calédonie, Polynésie Française, Terres Australes et Antarctiques Françaises, Wallis et Futuna.....	260 F (39,64 €)

• Régime international**ZONE 1**

EUROPE : Tous pays, sauf CEE.....	160 F (24,39 €)
AFRIQUE : Algérie, Maroc	

ZONE 2

PROCHE-ORIENT : Arabie Saoudite, Iran, Iraq, Israël, Jordanie, Liban, République Arabe Syrienne, Égypte, Libye.....	
AFRIQUE : Bénin, Burkina Faso, Cameroun, Centrafricaine (Rép.), Comores, Congo, Côte-d'Ivoire, Djibouti, Gabon, Guinée, Madagascar, Mali, Mauritanie, Madagascar, Mali, Mauritanie, Niger, Sénégal, Tchad, Togo, Tunisie.....	210 F (32,06 €)
AMÉRIQUE : Canada, États-Unis	

ZONE 3

AUTRES PAYS ÉTRANGERS d'Afrique, d'Amérique et d'Asie.....	275 F (41,92 €)
--	-----------------

ZONE 4

Océanie : Tous pays	335 F (51,07 €)
---------------------------	-----------------

Bureaux académiques

AIX - MARSEILLE

Président et Courrier : Michel FANGUET - 13, allée de la Butte - 13500 Martigues - Tél. et Fax : 04 42 42 11 74 -
mél : michel.fanguet@wanadoo.fr

Vice-présidente : Magali GIACINO - 5, rue Renoir - Domaine de Calas - 13480 Calas.

Trésorier : Pierre MARTIN - 10, rue Pierre de Coubertin - 13100 Aix-en-Provence.

Technique : Jean-Paul BELIN - Chemin des Prés - 13630 Eyragues.

Lycée professionnel : Martine JOLY - 77, rue du Château Payan - 13005 Marseille.

Collège : Nathalie BARDE - 144, rue du Rouet - 13008 Marseille.

Informatique : André MEGEL - Le Petit Colombier - 04100 Manosque.

Chimie : André DURUPHY - Chemin des Baux - 13510 Eguilles.

Chimie (olympiades) : Michel BARDE - 144, rue du Rouet - 13008 Marseille.

Physique : Gérard SERRA - La Grande Corniche - Bât C1 - Boulevard A. Cieussa - 13007 Marseille.

Physique (olympiades) : André MEGEL - Le Petit Colombier - 04100 Manosque.

Relations enseignement supérieur : Jean-Marie DONNINI - 11, boulevard Chave - 13005 Marseille.

AMIENS

Trésorier et Courrier : M. Dominique PAIN - 6, rue Boucher de Perthes - 80000 Amiens -
mél : dominique.pain@ac-amiens.fr

Technique : Jean-Philippe FOURNOU - Lycée Paul Langevin - 3, avenue Montaigne - BP 954 - 60000 Beauvais.

Collège : Alain BAZIN - 22, boulevard Pont Noyelles - 80000 Amiens.

Chimie : Jean-Yves SIMONIN - 23, rue Pointin - 80000 Amiens.

Physique : Daniel GUEANT - 1, rue Gérard Philippe - 80330 Cagny.

ANTILLES - GUYANE

Présidente et Courrier pour les Antilles : Nady MONTRÉSOR - 8, lotissement Petit - Étang 2 - Gissac -
97180 Sainte-Anne.

Vice-président et Courrier pour la Guyane : Jean-Pierre OCTAVIA - 8, rue Samuel Lubin - 97310 Kourou.

Physique et Chimie (olympiades) : Jean-Pierre OCTAVIA - 8, rue Samuel Lubin - 97310 Kourou.

BESANÇON

Présidente et Courrier : Maryse FISCHER - Le Hameau du Coteau - 25770 Franois - Tél. : 03 81 59 92 25 -
mél : christian-maryse.fischer@wanadoo.fr

Vice-président : André BRUNETTA - 32, rue de Fevery - 90700 Chatenois-les-Forges.

Trésorier : Jean-Claude POINSARD - 5, rue du Bougney - 25000 Besançon.

Technique : Hervé L'HUILLIER - Route de Geneuille - 25870 Devecey.

Collège : Christian THOMAS - 55, rue de Besançon - 25300 Pontarlier.

Informatique : Thierry GUILLOT - 32, rue Saint-Vincent - 25720 Avanne.

Philippe NICOLAS - 5, avenue du Parc - 25000 Besançon.

Chimie (olympiades) : Françoise CHAGRIN - 8, rue de Franche-Comté - 25000 Besançon.

Physique (olympiades) : Dominique OBERT - 5, rue Boudot - 25000 Besançon.

Relations enseignement supérieur : Daniel VAN LABEKE - Domaine de Maupaillol - Chemin du Lièvre -
25000 Besançon.

Correspondant Haute-Saône : Nicole PETITOT - 113, avenue de la République - 70200 Lure.

Correspondant Montbéliard : Christian QUENOT - 51, route de Voujeaucourt - 25420 Courcelles les Montbéliard.

Coordination TPE : Claire CHALNOT - 1, rue du Chanoine Mourot - 25000 Besançon.

BORDEAUX

Président : Daniel MARSAN - Résidence Macedo - 3, place Toulouse Lautrec - 33600 Pessac.
Tél. et Fax : 05 56 07 67 44.

Vice-président : Claude BIRAN - 27, rue Pierre Curie - 33400 Talence.

Secrétaire : Michèle VAN IMPE - 35, rue Mondenard - 33240 Saint-André-de-Cubzac.

Trésorière et retraités : Annie RECHINIAC - 100, rue du Docteur A. Barraud - 33300 Bordeaux.

Technique : Jean-Louis TISON - 10, rue du Domaine des Eyquem - 33700 Mérignac.

Lycée professionnel : Jean-François PEYRELONGUE - 6, impasse du Pradas - 33640 Beautiran.

Collège : Michel FAGET - Laudet - 47250 Guérin.

Informatique : Vincent BESNARD - 30, route de Cameyrac - 33450 Saint-Sulpice et Cameyrac.

Chimie : Françoise RIVOAL - Lycée Saint-Louis - Rue Jean Hameau - 33000 Bordeaux.

Physique (olympiades) : Guy BOUYRIE - Lycée Victor Louis - 33400 Talence.

Relations avec les CPGE : Roger CALLY - Lycée Bertrand de Born - 24000 Périgueux.

Relations enseignement supérieur : Lucie NGUYEN - SE.FI.CE.SP - 40, rue Lamartine - 33400 Talence.

Correspondant Béarn : Jean-Claude DANDONNEAU - 27, rue Charles de Foucauld - 6400 Pau.

Correspondant Dordogne : Roger CALLY - Lycée Bertrand de Born - 24000 Périgueux.

Correspondant Lot-et-Garonne : Michel FAGET - Laudet - 47250 Guérin.

CAEN

Président et Courrier : Jacques MARIE - 14, chemin de Touques - 14910 Benerville-sur-Mer - Tél. : 02 31 87 22 85.

Vice-présidente : Françoise HAIRIE - 14, rue du Blanc - 14000 Caen.

Secrétaire : François MARVIN - 24, rue de l'Arquette - 14000 Caen.

Trésorier : Rémi POIRIER - 7, clos Carel - 14920 Mathieu.

Technique : Jacques BESNARD - Allée des Marronniers - 14610 Colomby-sur-Thaon.

Collège : Sébastien DUVAL - Le clos Saint-Pierre - 14700 Saint-Pierre Canivet.

Informatique : Daniel GUÉRIN - Les Gigannières - 50140 Saint-Clement.

Chimie : Gérard GUIBERT - 45, rue des Tisserands - 14000 Caen.

Physique : Thérèse LEVALOIS - 20, rue de l'Église - 14610 Épron.

CLERMONT-FERRAND

Présidente et Courrier : Marie-Colette MORÉNAS - 1 bis, boulevard Fleury - 63000 Clermont-Ferrand -
Tél. : 04 73 91 61 70.

Vice-président : Roland FUSTIER - 4, rue Henri Pourrat - 63360 Gerzat.

Secrétaire et Informatique : Jean PELLERIN - Lycée Blaise Pascal - 36, avenue Carnot - 63000 Clermont-Ferrand.

Trésorière : Elyane YACINE - 4, rue des Bouleaux - 63100 Clermont-Ferrand.

Collège : Daniel CHAMBENOIS - Collège Blaise Pascal - 36, avenue Carnot - 63000 Clermont-Ferrand.

Chimie (olympiades) : Stéphanie MORTIER - 8, rue Alfred de Musset - 63000 Clermont-Ferrand.

Physique (olympiades) : Roland FUSTIER - 4, rue Henri Pourrat - 63360 Gerzat.

Relations enseignement supérieur : Gilles BOUTTEVILLE - 4, rue Victor Hugo - 63400 Chamalières.

CORSE

Président (par intérim) : François MORATI - 10, boulevard Dominique Fabiani - 20000 Ajaccio

Trésorière : Marcelle LONGAU - 16, allée des Hirondelles - 20166 Porticcio.

Technique : Jacques LINALI - Immeuble Sante Regina - 20260 Biguglia.

Collège : Antoine MURGIA - Route de Propriano - 20100 Sartene.

Informatique : Michèle L'HARIDON - Les Aloès - Rue des Aloès - Bâtiment C - 20000 Ajaccio.

Relations avec les CPGE : Marie-Françoise PALLIER - 21, cours Napoléon - 20000 Ajaccio.

Relations enseignement supérieur : Rose-Marie ALIBERTINI - 1 bis, place Vincetti - 20200 Bastia.

CRÉTEIL

Courrier : Marcelle PLOTARD - 1, allée Clotilde - 77500 Chelles.

Vice-présidente : Mauricette MAUGER - 18, place de la République - 92170 Vanves.

Trésorière : Marcelle PLOTARD - 1, allée Clotilde - 77500 Chelles.

Collège : Benoît RAULIN - 29, rue des Blondeaux - 94240 L'Hay-les-Roses.

Chimie : Mauricette MAUGER - 18, place de la République - 92170 Vanves.

DIJON (Section académique de Bourgogne)

Président d'honneur : Joseph ADAMSKI.

Présidente et Courrier : Christine FRIOUR - 7, rue Charles Dullin - 71100 Chalon-sur-Saône
mél : udp.bourgogne@wanadoo.fr

Président adjoint : Gérard GOUTHIERE - 2, allée des Vergers - 21370 Plombières-les-Dijon.

Secrétaire : Colette GRIFFON - 14, rue du Pont - 71880 Chatenoy-le-Royal.

Trésorier : Alain PELVILLAIN - 10, rue de la Gare - 21270 Talnay.

Diffusion du Trait d'Union : Florence CHARAU - 11, rue J.-F. Baudin - 21000 Dijon.

Technique : Bernard CIRoux - 2 bis, rue Paul Claudel - 71530 Champforgeuil.

Lycée : Michel LABOUREYRAS - 3, rue Maurice Genevoix - 58000 Nevers.

Collège : Stéphanie ÉVRARD - 10, rue des Fleurs - 21000 Dijon.

Chimie (olympiades) : Éliane SEMELET - Lycée Montchapeuil - 36, boulevard Pompon - 21000 Dijon.

Physique (olympiades) : Gérard GOUTHIERE - 2, allée des Vergers - 21370 Plombières-les-Dijon.

Relations enseignement supérieur : Marie-Thérèse OLLAGNIER - 9, impasse Gabriel Fauré - 21800 Chevigny-Saint-Sauveur.

GRENOBLE

Président et Courrier : Gilles GALLIN-MARTEL - 24, rue Alfred de Musset - 74600 Seynod -

mél : Gilles.Gallin-Martel@edres74.cur-archamps.fr

Trésorier : Daniel BIBOUD - 9, chemin du Marais - 38100 Grenoble.

Correspondant « Savoies » : Gilles GALLIN-MARTEL - 24, rue Alfred de Musset - 74600 Seynod.

Correspondant « Isère » : Mireille BARRAL - 430, chemin des Amiets, Les Mandières - 38330 Montbonnot -
mél : mbarral@ac-grenoble.fr

Correspondant « Drôme et Ardèche » : Gérard LE FAUCONNIER - 16, route d'Espeluche - 26200 Montélimar -
mél : lefauc@club-internet.fr

Technique : Didier PETITJEAN - Bâtiment Paroissial - 73590 Crest-Voland - mél : d.petitjean@wanadoo.fr

Collège : Josiane BOUVIER - Résidence du Château - 5, rue Guy Mocquet - 38130 Échirolles.

IUFM : Anne GOUBE - 10, avenue de l'Europe - 38120 Saint-Égrève - mél : A.Goube@ac-grenoble.fr

Chimie (olympiades) : Stéphanie MACQUET - Beau Rivage - Bâtiment C - 11, rue Antoine Polotti - 38400 Saint-Martin-d'Hères - mél : macquet.larbaud@wanadoo.fr

Physique (olympiades) : Gilles BAUDRANT - 7, rue Saint-Just - 38400 Saint-Martin-d'Hères

Post-bac : Philippe ODERMATT - 11, clos de Chapicolle - 38330 Montbonnot - mél : podermat@ac-grenoble.fr

LILLE

Président et Courrier : Christophe REHEL - 36, rue des Flandres - 59130 Lambersart - Tél. : 03 20 22 83 95 -
mél : rehel-leuridan@ac-lille.fr

Vice-président : Alain VANHOUTTE - 53, allée de la Crémaillère - 59650 Villeneuve d'Ascq -
mél : vanhoutte@ac-lille.fr

Secrétaire : Jean-Marc BOUGENIERE - Lycée Colbert - 18, rue de Gand - 59208 Tourcoing Cedex -
mél : bougeniere@ac-lille.fr

Trésorier : Daniel DEVAUX - 49, rue d'Eau - 62690 Berles-Monchel - mél : ddevaux.berles@wanadoo.fr

Technique : Jean-Pierre BOULET - 31, résidence Concorde - Rue du Marais - 62220 Carvin.
mél : Jean-Pierre.Boulet@wanadoo.fr

Collège : Daniel TAVERNE - 25, rue Salvador Allende - 59280 Armentières - mél : dtaverne@nordnet.fr

Informatique : Jean-Pierre BOULET - 31, résidence Concorde - Rue du Marais - 62220 Carvin.
mél : Jean-Pierre.Boulet@wanadoo.fr

Chimie : Isabelle MULLER - 60, avenue du Quennelet - 59493 Villeneuve d'Ascq - mél : imuller@nordnet.fr

Physique (Nord) : Michel BASUYAUX - 19/33, avenue Robert Schuman - 59370 Mons-en-Barœul -
mél : mbasuyaux@nordnet.fr

Physique (Pas-de-Calais) : Isabelle MULLER - 60, avenue du Quennelet - 59493 Villeneuve d'Ascq.
mél : imuller@nordnet.fr

Laboratoire et olympiades de physique : Daniel DROZ - 7, allée Bernard de Clairvaux - Hameau des Templiers - 59840 Lompret - mél : d.droz@ac-lille.fr

Relations enseignement supérieur : Jean-Marie BLONDEAU - USTL - 59650 Villeneuve d'Ascq.
mél : Jean-Marie.Blondeau@univ-lille1.fr

LIMOGES

Président et Courrier : Michel MÉTROT - 183, rue F. Perrin - 87000 Limoges - Tél. : 05 55 49 03 16.
Vice-présidente : Monique SAINT-GEORGES - 26, rue Jules Ferry - 87000 Limoges.
Trésorier : Gérard ROGUES - 13, rue du Pérou - 87570 Rilhac Rancon.
Collège : Françoise FABRE - 245, rue du Mas Loge - 87100 Limoges.
Informatique : Marie-Anne ESTRADÉ - 13, rue Élysée - 87000 Limoges.
Chimie : Guy AVOND - 35, rue Raymond Couty - 87100 Limoges.
Physique : Sophie RÉMY - 5, résidence d'Arliquet - 87700 Aix-sur-Vienne.
Relations enseignement supérieur : Thérèse MERLE - 12, rue de l'Amphithéâtre - 87000 Limoges.

LYON

Présidente et Courrier : Lucienne AUCLAIR-RAPOPORT - 7, rue H. Tessier - 69500 Bron.
Vice-président : Jean-Paul ZAYGEL - École Centrale de Lyon - Département d'électronique - 38, avenue Guy de Collongues - BP 163 - 69131 Écully Cedex.
Secrétaire : Françoise LANGLAIS - 91, rue Duguesclin - 69006 Lyon.
Trésorier : François-Jacques BACCHUS - 10, rue Sainte-Anne de Baraban - 69003 Lyon.
Technique : Jean-Marie BIAU - 3, allée Val Prévert - 69400 Limas.
Collège : Gérard VACHER - 169, cours Lafayette - 69006 Lyon.
Informatique : Bernadette HAGUENAUER - 765, route des Alpes - 01280 Prevessin.
Chimie : Daniel SIMON - ENS Lyon - 46, allée d'Italie - 69007 Lyon.
Physique : Florence CHAVANEL - 19, rue de Montriblond - 69009 Lyon.
Physique (olympiades) : Lucienne AUCLAIR-RAPOPORT - 7, rue H. Tessier - 69500 Bron.
Relations avec les CPGE : Sylvaine ALBRECHT KLEIM - 14, rue de Pizay - 69001 Lyon
Université : Roger DUFFAIT - 7, rue des Alouettes - 69890 La Tour de Salvagny.

MONTPELLIER

Présidente et Courrier : Marie BOURGAREL - 3, rue du Commerce - 34000 Montpellier - Tél. : 04 67 92 81 14.
Vice-présidente : Sylvie BEAUFORT - Parc des Amandiers - 5, rue Yourcenar - 34430 Saint-Jean-de-Vedas.
Secrétaire : René TORRA - Rue du Val de la Mosson - 34430 Saint-Jean-de-Vedas.
Trésorier : Jean-Paul FAVAND - 3, rue Proudhon - 34000 Montpellier.
Technique : Franck MILLOT - Lycée Mermoz - 717, avenue Mermoz - 34060 Montpellier Cedex I.
Collège : Bernard FABRE - 11, rue Jean-Baptiste Perdraut - 34500 Béziers - mél : fabre.bjam@wanadoo.fr
Informatique : Janine PARÈS - 6, rue Réservoir - 34680 Saint-Georges d'Orques.
Chimie : Jean-Pierre PONSÀ - 22, rue Edouard Vaillant - 66350 Toulouges.
Physique : Huguette GRMAUD - 134, rue du Curat - Bâtiment «Aurore» - 34090 Montpellier.
Relations enseignement supérieur : Sylvette ALMAIRAC - 37, rue Lacase Duthiers - 34090 Montpellier.

NANCY - METZ (Section académique de Lorraine)

Présidente et Courrier : Evelyne LAVOISIER - 6, rue Coislin - 57000 Metz - Tél. et Fax : 03 87 36 07 41
mél : e_lavois@worldnet.fr.
Vice-présidente : Monique SCHWOB - 39, rue de la Prévôté - 57950 Montigny-lès-Metz -
mél : monique.schwob@wanadoo.fr
Trésorier : Bernard CUNY - 10, allée de la Papellerie - 54250 Champigneulle - mél : lc4838@wanadoo.fr
Secrétaire : Claire HUTTIN - 4, rue de Bure - 57650 Havange - mél : chuttin@ploreaine.fr
Lycées Technique et Professionnel : Chantal FRIES - 57, rue de la Pépinière - 57970 Yutz -
mél : chantal.fries@iname.com
Expérimentation TP : Guy CHAMBON - 9, rue des Roses - 57365 Ennery - mél : Guy.chambon@cryogen.com
Réformes programmes : Michel BULTINGAIRE - 13, rue du Limousin - 57190 Florange -
mél : m.bultingaire@ac-nancy-metz.fr
Jean JONC - 80, avenue de Lorraine - 57190 Florange - mél : Jean.Jonc@wanadoo.fr
Collège : Frédéric CORDIER - 87, rue du Camp - 54700 Pont-à-Mousson - mél : f.cordier@ac-nancy-metz.fr
Informatique et pages web : Jean-Michel JACQUES - 37, rue de Paris - 54000 Nancy -
mél : Jean-Michel.Jacques@wanadoo.fr
Physique (olympiades) : Michel CLAUDON - 41, rue du Brocard - 54600 Villers-lès-Nancy -
mél : mclaudon@club-internet.fr
Post-bac et chimie (olympiades) : Maurice SCHWING - 25, rue de Touraine - 57160 Moulins-lès-Metz -
mél : Schwing.Maurice@wanadoo.fr
Relations européennes : Janine MARÉCHÉ - 10, allée de la Papellerie - 54250 Champigneulle -
mél : lc4838@wanadoo.fr
Formation continue : Evelyne LAVOISIER - 6, rue Coislin - 57000 Metz.
Interdisciplinarité : Madeleine MATILLO - 7, rue Augustin Hacquard - 54000 Nancy -
mél : m.matillo@ac-nancy-metz.fr
Retraités : Jacques SARRE - 2, allée Étienne Jodelle - 54600 Villers-lès-Nancy.

NANTES

Président et Courrier : Michel HAGNERE - 14, rue des Frènes - 44400 Rezé - Tél. : 02 51 70 24 35.
Vice-présidente : Michèle LE GOFF - 27, avenue de la Praudière - 44700 Orvault.
Trésorier : Alain LAFOND - 15, rue des Naudières - 44800 Saint-Herblain.
Technique : Michèle LE GOFF - 27, avenue de la Praudière - 44700 Orvault.
Collège : Claudine NIZOU - 23 bis, rue Charles Terront - 44300 Nantes.
Informatique : M. Claude CANCE - 4, rue de la Roche - 44800 Sautron.
Chimie : Catherine GENESTOUX - 59, boulevard G. Lauriol - 44300 Nantes.
Physique : Nicole CORTIAL - 16, rue Monte au Ciel - 44100 Nantes.
Relation enseignement supérieur : Daniel MITRE - La Fleurais - 44130 Fay-de-Bretagne.

NICE - TOULON

Président (Alpes-Maritimes) : Serge TRICOIRE - 557, route de la Colle de Revel - 06730 Saint-André - Tél. : 04 97 00 07 91 - mél : stricoire@rocketmail.com
Vice-président (Var) : Francis BERTHOMIEU - Place de l'Église - 83300 Draguignan.
Secrétaire : Chantal OTTO - Les Maisons de Villeneuve - 33, chemin des Ferrayonnes - 06270 Villeneuve-Loubet.
Trésorier : Serge OLIVIER - 8, route de Sospel - 06500 Menton.
Collège : Marie-Hélène CANAVESIO - 220, avenue Sainte-Marguerite - Bâtiment C3 - 06200 Nice.
Informatique : Patrice GARNIER - Avenue Darié La Madone - 06230 Villefranche-sur-Mer.
Physique : Annie VIVAUDO - 96, avenue des Arènes - 06000 Nice.

ORLÉANS - TOURS

Président et Courrier : Robert CATEL - 73, route de Gidy - La Touche - 45520 Cercottes.
Vice-président : Jean CASSANET - 15, rue Paul Gauguin - 37550 Saint-Avertin.
Trésorier : Jean JOURDAIN - 60, rue Carnot - 45400 Fleury-les-Aubrais.
Technique : Jean-Claude MOMMEJA - 20, rue du Chemin Vert - 37300 Joué-lès-Tours.
Collège : Jean-Charles LAPOSTOLLE - 6, place Henri IV - 27650 Muzy.
Informatique : Bruno de MARTEL - 15, rue Sourderie - 41000 Blois.
Physique : Marie-Christine BAURRIER - 2 bis, rue Marcel Proust - 45000 Orléans.

PARIS

Courrier : Jean-Charles JACQUEMIN - 2, boulevard Magenta - 75010 Paris.
Secrétaire : Maïté JUSTEL - 5, villa Félix Faure - 75019 Paris.
Trésorier : Jean-Claude CHAMEROY - 34, rue Marcheron - 92170 Vanves.
Technique : Jean-Charles JACQUEMIN - 2, boulevard Magenta - 75010 Paris.
Collège : Stéphane CHENEVOIS - 2, place de Catalogne - 75014 Paris.
Informatique : Michèle BROCHERY - 23, rue Paul Vaillant Couturier - 93140 Bondy.
Chimie : Jacqueline GUÉ - 11, rue de l'Industrie - 92400 Courbevoie.

POITIERS

Président : Denis PICARD - 19, rue de l'Abrevoir - 86440 Migné Auxances - mél : denis.picard@ac-poitiers.fr
Trésorière : Anne PELISSIER - 27, rue de Montplaisir - 86240 Liguge.
Technique : Francis VALLADE - 91, rue du Pré des Mottes - 86550 Mignaloux-Beauvoir.
Collège : Lucien NADEAU - 44, avenue Jean Moulin - 16400 La Couronne.
Informatique : Michel ANDRAUD - 32, rue des 4 Cyprés - 86000 Poitiers.
Chimie : Catherine BRUNE - Chandigon - 86100 Antrans.
Physique : Denis PICARD - 19, rue de l'Abrevoir - 86440 Migné Auxances - mél : denis.picard@ac-poitiers.fr
Université : Laurence BONNEAU - IUFM - 86000 Poitiers.

POLYNÉSIE FRANÇAISE

Président et Courrier : Pierre LEYRAL - BP 51152 - Pirae - Tahiti.

REIMS

Présidente et Courrier : Nicole HERMAN-MAURICE - 18, rue de Taissy - 51100 Reims.
Vice-président : Jean-Marie DEROUARD - 9, rue Buirette de Verrières - 51000 Châlons-sur-Marne.
Trésorière : Françoise SAINGERY - 13, rue Labori - 51100 Reims.
Technique : François SEVIN - 19, rue Folle Peine - 51100 Reims.
Collège : Daniel TOUSSAINT - 20, rue Georges Renaudot - 10160 Aix-en-Othe.
Informatique : Jean-Marie DEROUARD - 9, rue Buirette de Verrières - 51000 Châlons-sur-Marne.
Chimie : Luc LEPICIER - Lycée Libergier - Rue Libergier - 51100 Reims.

RENNES

Président et Courrier : Michel ETIENNE - 3, allée Flora Tristan - 35000 Rennes - Tél. : 02 99 51 63 57.
Vice-présidente : Pierrette MORA - Lycée Joliot Curie - 144, boulevard de Vitry - BP 1136 - 35014 Rennes Cedex.
Trésorier : Michel LAINE - 25, rue des Echevins - 35400 Saint-Malo.
Technique : Gérard MORA - 4, allée du Duc Nominoë - 35235 Thorigné-Fouillard.
Collège : Jacques SALLAIS - 53, rue du Parc - 35135 Chantepie.
Informatique : Alain LE GALL - 3, boulevard Montaigne - 29200 Brest.
Chimie : Louis GILLOIS - 3, allée du Haut-Moulin - 35760 Saint-Grégoire.
Physique : Loïc POUILLAIN - 39, avenue du Général de Gaulle - 22190 Plérin.
Université : Pierrette MORA - 4, allée du Duc Nominoë - 35235 Thorigné-Fouillard.

ROUEN

Présidente et Courrier : Jocelyne DURAND - 151, rue d'Orléans - 76230 Bois-Guillaume - Tél. : 02 35 15 41 33.
Vice-présidente : Sylvie ACCARD - Rue de la Souche - 27370 Le Thuit Signol.
Trésorière : Brigitte MARY - Appartement 20 - 6, rue Michaël Collins - 76120 Le Grand-Quevilly.
Technique (STI) : Brigitte MARY - Appartement 20 - 6, rue Michaël Collins - 76120 Le Grand-Quevilly.
Technique (STL) : Micheline IZBICKI - 50, chemin de Buglise - 76290 Montivilliers.
Collège : Jacques BOURET - 2B, rue Marc Lefebvre - 76300 Sotteville-lès-Rouen.
Informatique : Colette ETASSE - 4, avenue René Coty - 76120 Le Grand-Quevilly.
Chimie : Philippe PAULLIER - 10, allée du Parc - 76840 Hénouville.

STRASBOURG

Président et Courrier : Alain SPRAUER - 79, rue Baldung-Grien - 67720 Weyersheim -
mél : spraua@club-internet.fr
Vice-présidente : Odile LEIBER - 58, rue de Verdun - 68100 Mulhouse.
Trésorier et Lycée : Bernard GERIG - 14, rue Principale - 67300 Schiltigheim -
mél : bernard.goerig@wanadoo.fr
Technique : M. Claude LAHACHE - 32, route de Hausbergen - 67300 Schiltigheim.
Collège : Michèle DOLLÉ - 2, rue du Landsberg - 67800 Bischheim.
Informatique : François BOSSERT - 5, rue Claude Debussy - 67460 Reichstett -
mél : francois.boSSERT@aspirine.u-strasbg.fr
Chimie : Michel DELUZARCHE - Lycée Kléber - 25, place de Bordeaux - 67000 Strasbourg.
Chimie et Technique : Jean-Marc DIRRIG - 10, rue Prosper Mérimée - 67100 Strasbourg.
Sécurité chimie : Alfred MATHIS - 18, rue des Pommes - 67200 Eckbolsheim.
Physique (olympiades) : François SCHLOSSER - 57, boulevard d'Anvers - 67000 Strasbourg -
mél : francoisschlosser@voila.fr
Relations enseignement supérieur : Jean MEULLEMEESTRE - 20, rue d'Oslo - 67000 Strasbourg -
mél : Jean.MEULLEMEESTRE@chimie.u-strasbg.fr
Relation IUFM : Alain SPRAUER - 79, rue Baldung-Grien - 67720 Weyersheim -
mél : spraua@club-internet.fr
CPGE : Jean-François TRIVENT - 15, rue Victor Schoelcher - 67300 Schiltigheim - mél : TRIVENTJF@aol.com
Internet et Webmestre : Jean-Luc RICHTER - 36, rue Rivoli - 67600 Hilsenheim.
Europe : Lucie CHAUMONT - 61 A, rue Himmerich - 67000 Strasbourg - mél : Itnchaum@cybercable.tm.fr
Lycée et Rectorat : André ISEL - 15, rue Geiler - 67000 Strasbourg.
Lycée et IEP : Jean-Paul XUEREZ - 67, rue des Jardiniers - 67000 Strasbourg.
IUFM : Olivier KEMPF - 14, rue de Fegersheim - 67100 Strasbourg - mél : okempf@cybercable.tm.fr

TOULOUSE

Présidente : Marie-Laure MIEGEVILLE - 3, rue B. de Ventadorn - 31750 Escalquens - mél : miegeville@aol.com
Secrétaire : Anne BATAILLE - 302, route de Saint-Simon - 31100 Toulouse - mél : anne.bataille@infonie.fr
Trésorier et Technique : Jean-Marc LEMAIRE - Route de Rosières - 81350 Valderies.
Lycée : Dominique KAHRAMAN - 2, rue Duguay Trouin - 31400 Toulouse -
mél : dominique.kahraman@ac-toulouse.fr
Collège : Catherine PARIS - 11, rue Matabiau - 31000 Toulouse - mél : catherine.paris@ac-toulouse.fr
Serge BETTON - Lendrevie-Basse - 81600 Brens - mél : sbetton@ac-toulouse.fr
IUFM : Alain RABIER - 10, allée du Soulor - 31770 Colomiers -
mél : rabier@cict.fr et arabier@free.fr
Informatique : Michel TROPIS - 3, rue Picasso - 31240 Saint-Jean - mél : mtropis@ac-toulouse.fr
Chimie et Olympiades de chimie : Mireille GALIAN - 4, place del Rei Petit - 31120 Lacroix-Falgarde -
mél : mireille.galian@ac-toulouse.fr et galian@club-internet.fr
André GILLES - Sauveterre - 31320 Aureville - mél : agilles@ac-toulouse.fr

VERSAILLES

Présidente : Françoise COUSSON - 31, allée Marcel Jouhandeau - 92500 Rueil-Malmaison.

Trésorière : Nicole GUIBÉ - 15, allée de Trevisse - 92330 Sceaux.

Technique : Claudine GUERNIGOU - 9, avenue de la Guiterie - 78470 Saint-Rémy-lès-Chevreuse.

Collège : André CALLAS - 16, rue des Glacières - 75013 Paris.

Vincent MAS - 8, rue Jean-Baptiste Corot - Appartement 18 - 78200 Mantes-la-Jolie

Informatique : Catherine LION - 14, allée Claude Monet - 78160 Marly-le-Roi.

Chimie (olympiades) : Catherine RIPERT - 14, rue du Chemin Vert - 95170 Deuil-la-Barre.

Physique (olympiades) : Françoise COUSSON - 31, allée Marcel Jouhandeau - 92500 Rueil-Malmaison.

Sur votre agenda...

Du 19 au 21 septembre 2000

Physique 2000

Société Française de Physique - Paris.

Du 28 au 31 octobre 2000

48^{es} Journées Nationales - Lille.

Du 22 au 26 novembre 2000

Salon de l'Éducation.



Pensez à venir

surfer

sur le serveur de l'UdP

<http://www.cnam.fr/hebergement/udp>

94^e Année

N° 822

Cahier N° 2

Publication mensuelle

MARS 2000

Bulletin de l'Union des Physiciens

**Concours
Agrégations et C.A.P.E.S.
1999 : Les corrigés**

U N I O N
UP
DES
P H Y S I C I E N S

ADMINISTRATION et REDACTION
44, bd Saint-Michel - 75270 PARIS Cedex 06

Avertissement

Ce recueil des solutions de la plupart des épreuves écrites des concours de recrutement de professeurs en physique et chimie est destiné à faciliter le travail de toutes les personnes intéressées par ces épreuves et notamment des candidats à ces concours.

Nous remercions les collègues qui ont accepté de se charger de la rédaction des solutions. Ces solutions peuvent être plus ou moins détaillées selon les épreuves. En aucun cas elles ne constituent un modèle des méthodes ni des rédactions que les jurys pourraient souhaiter mais une simple aide permettant en particulier de contrôler la validité des résultats.

Ces épreuves de concours peuvent fournir l'occasion de prolongements et d'approfondissements qu'il n'est généralement pas possible aux auteurs de signaler ici autrement que par une bibliographie sommaire. Les candidats aux concours doivent pouvoir trouver ces incitations à d'intéressantes études en participant aux préparations ouvertes dans les différentes académies.

Afin de faciliter l'utilisation de ce numéro spécial, son service est inclus dans l'abonnement collectivités, tout en demeurant hors abonnement individuel. Il en est de même pour le numéro spécial comportant les énoncés correspondants. Les numéros des concours sont disponibles par correspondance au siège de l'UdP.

André BOUSSIÉ et Françoise ROGER
Coordonnateurs des Bulletins sur les Concours

Agrégation (Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE

Composition de physique - Session : 1999

PARTIE A : EFFETS DE MARÉE

1 Dynamique newtonienne du point matériel en référentiel géocentrique ; mise en évidence des effets gravitationnels différentiels

1.1 Référentiels

1. Référentiel galiléen

- (a) Dans des référentiels différents, les lois d'un même mouvement prennent une forme plus ou moins compliquée ; en particulier un corps n'interagissant avec aucun autre et initialement au repos dans un certain référentiel peut très bien ultérieurement, selon sa position initiale, rester au repos ou commencer à se déplacer dans une certaine direction ce qui signifie que dans un tel référentiel les différentes positions, les différentes directions et les différents instants ne sont pas mécaniquement équivalents.

Dans un cadre newtonien de pensée :

On postule l'existence d'une classe de référentiels dits galiléens où l'espace est homogène et isotrope et le temps uniforme [1]. Ces référentiels sont en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

On peut démontrer [1] qu'une conséquence de ces propriétés de l'espace et du temps d'un référentiel galiléen est que *tout* point matériel libre y est au repos ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme (loi de l'inertie).

Dans le cas de particules matérielles interagissantes, leur mouvement dans un référentiel galiléen est déterminé par la loi newtonienne de la dynamique : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ où $\vec{p} = m\vec{v}$ et \vec{F} est la résultante des forces extérieures exercées sur le point matériel considéré par l'ensemble des particules avec lesquelles il interagit (cf. lois d'interaction).

Dans un référentiel non galiléen, il apparaît des forces supplémentaires dites d'inertie ou "pseudo-forces" en ce sens qu'elles ne résultent pas d'une loi d'interaction mais dépendent du mouvement du référentiel considéré relativement à un référentiel galiléen.

Remarque 1 Si on se contentait de définir une force en l'identifiant simplement au taux de variation de la quantité de mouvement, cela reviendrait à donner deux noms différents à la même chose ! Giordano Bruno (1548-1600) avait d'ailleurs été amené avant Newton à postuler l'existence de causes ou mouvement, en particulier à celui des planètes ; ces causes, il les appela "âmes motrices" : pourquoi pas ? mais on n'est guère plus avancé car on ne sait toujours pas prévoir de mouvement d'une masselotte accrochée à un ressort !

Pour rendre opératoire le concept de force, il faut préciser la loi de force d'interaction ; c'est par exemple ce que fit Newton (1687) dans le cas de l'interaction gravitationnelle lorsqu'il écrit (avec des notations évidentes) : $\vec{F} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \vec{u}$. Ce n'est que lorsque l'on égale les deux expressions $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \vec{u}$ que l'on peut faire des calculs et prédire le mouvement des objets : on quitte alors le monde de la métaphysique pour entrer dans celui de la physique.

Il est clair que "tout" n'est pas résolu pour autant ! Dans ce cadre newtonien de pensée, des faits troublants apparaissent et des questions ne manquent pas de se poser :

étonnante cette coïncidence (accidentelle ?) entre la masse mertielle (celle de $m \frac{d\vec{v}}{dt}$, caractérisant la "résistance" des corps à modifier leur état de mouvement) et la masse gravitationnelle (celle de $\frac{GmM}{d^2} \vec{u}$, source d'une mystérieuse force). Une conséquence est que tous les corps "tombent" de la même façon sous l'influence de la gravité : la Lune tombe sur la Terre exactement comme une pomme trop mûre¹ ou encore une boule de pétanque comme une balle de tennis² si on veut bien ignorer le freinage occasionné par le frottement de l'air ! Une autre conséquence est qu'à l'intérieur d'une cabine d'ascenseur sans repère extérieur, il est impossible de savoir si le poids d'un objet est dû à la force gravitationnelle, à l'accélération de la cabine (via la force d'inertie) ou à une combinaison des deux.

L'idée d'action à distance est troublante : la loi de gravitation de Newton signifie-t-elle qu'une "planète regarde le soleil, voit à quelle distance il est, calcule l'inverse du carré de cette distance et décide de se déplacer en conséquence ?" [2]

D'où vient la loi de la gravitation universelle ? qu'elle exprime-t-elle ? A ces dernières questions, Newton a eu le courage de répondre : "je ne forge pas d'hypothèse". Avant Newton, la formulation mathématique des lois étaient censées représenter "l'essence" des phénomènes. Newton, lui, a utilisé les mathématiques pour construire un modèle. Cette conception "moderne" du rôle des mathématiques laisse bien sûr des zones d'ombre, n'en déplaise aux métaphysiciens, et du travail pour les générations futures ! en contrepartie, elle présente l'avantage d'une indéniable efficacité puisque l'on sait prévoir le mouvement d'une masselotte accrochée à un ressort.

En explorant les zones d'ombre de la théorie newtonienne, Einstein a développé un autre modèle, en adéquation avec l'expérience dans un plus grand nombre de situations. La théorie de la relativité générale est basée sur le principe d'équivalence, posé en principe, entre masse inerte et masse gravitationnelle et donc entre gravitation et accélération. Einstein postule que les lois physiques (pas seulement celles de la gravitation) sont localement identiques dans tous les référentiels quels que soient leurs mouvements relatifs ou leurs accélérations : la notion de référentiel gâchié n'a donc plus d'intérêt. La notion même de force gravitationnelle n'est plus vraiment nécessaire puisque Einstein postule que les objets en chute libre se déplacent librement dans l'espace-temps sans ressentir la moindre force : en revanche, cet espace-temps voit sa géométrie déformée, courbée par la présence de matière, et ne suit plus les règles d'Euclide : on comprend qu'un mouvement libre puisse apparaître comme contraint (déterminé par une force) si on essaie de le décrire dans notre espace "plat" de simple mortel !

Le modèle d'Einstein est "meilleur" que celui de Newton en ce sens que son champ d'application est plus vaste : de nombreux tests expérimentaux (le plus connu est sûrement l'avance du périhélie de Mercure de 43,03 seconde d'arc par siècle) ont tranché en faveur de la théorie de la relativité générale décrivant une distorsion de l'espace-temps où des objets se meuvent librement plutôt qu'en faveur de la théorie de Newton décrivant une force mettant en mouvement des objets dans un espace-temps euclidien. Cependant, la théorie de Newton a encore de beaux jours devant elle ! Des calculs simplement basés sur les lois de Newton, un mélange habile de rigueur mathématique, de simulations numériques et de savoir-faire intuitif permettent toujours de faire des miracles ! Citons l'un des grands projets européens des prochaines années : la sonde Rosetta devrait être lancée en janvier 2003, fera d'abord un détour par Mars, puis deux fois par la Terre pour gagner une vitesse lui permettant de rattraper en mai 2012 la comète Wirtanen, un point minuscule filant dans l'espace à 30000 km/h sur une trajectoire constamment perturbée. La sonde accompagnera la comète sur son orbite vers le soleil et il est prévu en octobre 2012 d'arrimer deux modules ("Champollion" et "Roland") sur le noyau de Wirtanen, un bloc de 3 kilomètres de diamètre ou la gravité est 20 fois plus faible que sur la Terre ! Pour réaliser cette prouesse, il serait inutile de prendre en compte les subtiles corrections de la théorie de la relativité car le frottement de l'atmosphère, la pression du rayonnement solaire, les attractions parasites d'innombrables petits corps ruinent de façon permanente la précision des équations [3].

Etant donné un objet de masse m , on peut estimer par simple analyse dimensionnelle la taille critique de l'objet à partir de laquelle la théorie de Newton est mise en défaut au sens que cet objet produit des effets gravitationnels relativistes significatifs. Pour cela, fabriquons une longueur pertinente développée sous la forme d'un monôme sur la "base" constituée par m et les constantes

¹D'après la légende, c'est en regardant tomber une pomme que Newton aurait eu l'intuition d'une Lune en chute libre sur la Terre : de là aurait germiné toute sa théorie

²D'après une "célèbre" expérience par la pensée de Claude Allègre !

fondamentales "naturelles" des théories de la gravitation (G) et de la relativité (c), soit $l_C = m^{\alpha} G^{\beta} c^{\gamma}$. Au plan dimensionnel, $F = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$ donne $MLT^{-2} = [G] \frac{M^2}{L^2}$ soit $[G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$; donc $|l_C| = L = M^{\alpha} (M^{-1} L^3 T^{-2})^{\beta} (L T^{-1})^{\gamma}$; on en déduit $\alpha - \beta = 0$, $3\beta + \gamma = 1$ et $-2\beta - \gamma = 0$ d'où $\alpha = \beta = 1$ et $\gamma = -2$; finalement $l_C = \frac{mG}{c^2}$. Les effets relativistes de la gravitation sont prépondérants si la taille de l'objet est comparable ou inférieure à l_C ; tandis qu'ils sont insignifiants pour une taille nettement plus grande que l_C . En particulier, si la taille de l'objet est inférieure au rayon de Schwarzschild égal à $2l_C$, la lumière est capturée par l'objet et ne peut s'échapper du "trou noir" ainsi constitué³. Le rayon de Schwarzschild de la Terre, de l'ordre du cm est très petit par rapport à son rayon, celui du Soleil, de l'ordre du km, est également nettement inférieur à son rayon: on comprend donc pourquoi les effets relativistes de la gravitation sont très faibles dans le système solaire.

Le modèle d'Einstein sera-t-il un jour "dépasse" ? c'est fort probable puisque la relativité générale est apparemment inconciliable avec la physique quantique. La théorie des "supercordes" ouvre peut-être une piste... à suivre...

Mais n'écrasons pas une mouche avec un pavé ! Il convient bien entendu de choisir le modèle le plus approprié au problème que l'on souhaite résoudre. Dans toute la suite, nous adopterons le modèle de Newton.

- (b) Le référentiel de Copernic d'origine le centre d'inertie du système solaire et d'axes dirigés vers des étoiles "fixes" (très lointaines dans la galaxie) est le "meilleur" référentiel galiléen identifiable expérimentalement à l'échelle du système solaire et à une échelle de temps nettement inférieure à la période de révolution du soleil dans la galaxie (≈ 200 millions d'années).

Remarque 2 Un référentiel présente un caractère "d'autant plus galiléen" que sont moins importantes les forces d'inertie qu'il faut ajouter aux forces résultant d'interactions pour pouvoir rendre compte des mouvements réellement observés. On peut dire aussi qu'un référentiel présente un caractère galiléen d'autant plus marqué qu'est plus étendu le domaine spatio-temporel dans lequel les forces d'inertie sont négligeables; c'est ainsi qu'au voisinage immédiat de la Terre et à une échelle de temps nettement inférieure au jour, le référentiel terrestre constitue un référentiel galiléen tout à fait honorable.

- (c) La recherche expérimentale des référentiels galiléens s'est faite par approximations successives en comparant les résultats des tests aux prédictions fondées sur la loi newtonienne de la dynamique. L'observation très précise des mouvements des planètes dans le domaine de Copernic permet de vérifier avec une excellente précision son caractère galiléen (à l'échelle spatiale du système solaire et à une échelle de temps "humaine") et révèle d'ailleurs aussi la nécessité de corrections relativistes. L'expérience du pendule de Foucault montre les limites du référentiel terrestre en tant que galiléen à une échelle de temps non négligeable devant le jour.

2. Référentiel barycentrique

- (a) On appelle référentiel barycentrique d'un système matériel (relativement à un référentiel galiléen) un référentiel animé d'un mouvement de translation par rapport au référentiel galiléen et dans lequel le centre d'inertie du système est fixe.
- (b) Un tel référentiel est galiléen si et seulement si le centre d'inertie du système considéré a un mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen, ce qui bien sûr n'est en général pas le cas.

1.2 Dynamique newtonienne du point matériel en référentiel géocentrique

1. On considère un référentiel galiléen (le référentiel de Copernic compte tenu des échelles considérées dans cette partie): le référentiel géocentrique R_T^* est a priori non galiléen. On a, en faisant apparaître les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis :

$$m\vec{a}(P/R_T^*) = \vec{F} + m\vec{h}(P) - m\vec{a}_e(P) - m\vec{a}_c(P)$$

³ Le rayon de Schwarzschild R_S d'un objet de masse m est le rayon pour lequel la vitesse de libération $\sqrt{\frac{2mG}{R_S}}$ de cet objet est égale à la célérité de la lumière; on a donc $R_S = \frac{2mG}{c^2} = 2l_C$. Ni la matière ni la lumière ne peuvent s'échapper d'un objet de rayon inférieur à R_S .

Le mouvement d'entraînement de R_T^* par rapport à R_g est une translation pure; le champ d'accélération d'entraînement est donc uniforme et le champ d'accélération de Coriolis est nul :

$$\vec{a}_c(P) = \vec{a}(P \in R_T^*/R_g) = \vec{a}(T/R_g) \text{ et } \vec{a}_c(P) = \vec{0}$$

On a donc :

$$\boxed{m\vec{a}(P/R_T^*) = \vec{F} + m\vec{h}(P) - m\vec{a}(T/R_g)}$$

2. D'après la relation précédente et les hypothèses de l'énoncé :

$$m\vec{a}(P/R_T^*) = \vec{F} + m\vec{h}_T(P) + m\vec{h}_S(P) + m\vec{h}_L(P) - m\vec{a}(T/R_g)$$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la Terre dans R_g (galiléen) :

$$m\vec{a}(T/R_g) = \iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}(M) dm(M) \text{ où } \vec{h}(M) = \vec{h}_T(M) + \vec{h}_S(M) + \vec{h}_L(M)$$

mais $\iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_T(M) dm(M) = \vec{0}$ car résultante des forces gravitationnelles intérieures (exercées par la Terre sur elle-même)

On obtient finalement :

$$\boxed{m\vec{a}(P/R_T^*) = \vec{F} + m\vec{h}_T(P) + m\vec{h}_S(P) + m\vec{h}_L(P) - \frac{m}{m_T} \iiint_{M \in \text{Terre}} [\vec{h}_S(M) + \vec{h}_L(M)] dm(M)} \quad (1)$$

3. Le soleil est supposé posséder la symétrie matérielle sphérique; on a donc (théorème de Gauss) :

$$\vec{h}_S(M) = Gm_S \frac{\overline{MS}}{MS^3} \Rightarrow \vec{h}_S(M) - \vec{h}_S(T) = Gm_S \left(\frac{\overline{MS}}{MS^3} - \frac{\overline{TS}}{TS^3} \right)$$

$$\overline{MS} = \overline{MT} + \overline{TS} \Rightarrow \frac{1}{MS^3} = \frac{1}{TS^3} \left(1 + 2\frac{\overline{MT} \cdot \overline{TS}}{TS^2} + \frac{\overline{MT}^2}{TS^2} \right)^{-3/2}$$

$\forall M \in \text{Terre}$, $MT \leq r_T \ll d_S$

on a $\frac{1}{MS^3} = \frac{1}{TS^3} \left(1 - 3\frac{\overline{MT} \cdot \overline{TS}}{TS^2} \right)$ à l'ordre 1 en $\frac{r_T}{d_S}$

et $\frac{\overline{MS}}{MS^3} = \frac{\overline{MT} + \overline{TS}}{TS^3} = \frac{1}{TS^3} \left(\overline{MT} + \overline{TS} - 3\left(\frac{\overline{MT} \cdot \overline{TS}}{TS^2}\right) \overline{TS} \right)$ à l'ordre 1 en $\frac{r_T}{d_S}$

en effet $\left\| 3\left(\frac{\overline{MT} \cdot \overline{TS}}{TS^2}\right) \overline{MT} \right\| \sim r_T \cdot \frac{r_T}{d_S} \ll \left\| 3\left(\frac{\overline{MT} \cdot \overline{TS}}{TS^2}\right) \overline{TS} \right\| \sim r_T$ (\sim signifie : égalité en ordre de grandeur)

donc, à l'ordre 1 en $\frac{r_T}{d_S}$:

$$\vec{h}_S(M) - \vec{h}_S(T) = Gm_S \left(\frac{\overline{MS}}{MS^3} - \frac{\overline{TS}}{TS^3} \right) = \frac{Gm_S}{(TS)^3} \left[3\frac{(\overline{TM} \cdot \overline{TS}) \overline{TS}}{(TS)^2} - \overline{TM} \right] \quad (1 \text{ bis})$$

donc, au second ordre près en $\frac{r_T}{d_S}$:

$$\vec{F}_{\text{Soleil} \rightarrow \text{Terre}} = \iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_S(M) dm(M) = m_T \vec{h}_S(T) + \frac{Gm_S}{(TS)^3} \iiint_{M \in \text{Terre}} \left[3\frac{(\overline{TM} \cdot \overline{TS}) \overline{TS}}{(TS)^2} - \overline{TM} \right] dm(M)$$

or, puisque T est centre d'inertie de la Terre :

$$\iiint_{M \in \text{Terre}} \overline{TM} dm(M) = \vec{0} \text{ et } \iiint_{M \in \text{Terre}} (\overline{TM} \cdot \overline{TS}) dm(M) = \left[\iiint_{M \in \text{Terre}} \overline{TM} \cdot dm(M) \right] \cdot \overline{TS} = 0$$

donc, au second ordre près en $\frac{r_T}{d_S}$, $\iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_S(M) dm(M) = m_T \vec{h}_S(T)$

de même, au second ordre près en $\frac{r_T}{d_S}$, $\iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_L(M) dm(M) = m_T \vec{h}_L(T)$

Finalement :

$$\boxed{\iiint_{M \in \text{Terre}} [\vec{h}_S(M) + \vec{h}_L(M)] dm(M) = m_T [\vec{h}_S(T) + \vec{h}_L(T)] \text{ au second ordre près en } \frac{r_T}{d_S} \text{ et } \frac{r_T}{d_L}} \quad (2)$$

Considérons l'interaction entre la Terre et une particule ponctuelle de masse m_S placée en S :

$\vec{F}_{S \rightarrow \text{Terre}} = \iiint_{M \in \text{Terre}} Gm_S \frac{\overline{MS}}{MS^3} dm(M)$ identique à la force exercée par le soleil supposé sphérique homogène sur la Terre

mais $\vec{F}_{S \rightarrow \text{Terre}} = -\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow S}$ d'après le principe des actions réciproques

or $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow S} = m_S \vec{h}_T(S)$ (la particule S est ponctuelle)

Si on suppose la Terre sphérique homogène, $\vec{h}_T(S) = Gm_T \frac{\vec{r}_T}{S^2}$ (par le théorème de Gauss)

$$\text{donc } \iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_S(M) dm(M) = \iiint_{M \in \text{Terre}} Gm_S \frac{M\vec{S}}{M^3 S^3} dm(M) = \vec{F}_{S \rightarrow \text{Terre}} = Gm_L m_S \frac{\vec{T}\vec{S}}{S^2} = m_T \vec{h}_S(T)$$

$$\text{de même } \iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_L(M) dm(M) = m_T \vec{h}_L(T)$$

Par conséquent, si la Terre est sphérique, la relation (2) est vérifiée à tout ordre

Remarque 3 Il est également possible de démontrer la relation (2) de manière non intrinsèque en considérant les coordonnées; en utilisant les notations de l'énoncé :

$$\vec{x} \cdot \vec{h}_S(M) = Gm_S \frac{x_S - x}{[(x_S - x)^2 + (y_S - y)^2 + (z_S - z)^2]^{3/2}}$$

un D.L à l'ordre 2 en $\frac{x}{d_S} \ll 1$, $\frac{y}{d_S} \ll 1$, et $\frac{z}{d_S} \ll 1$ donne :

$$\vec{x} \cdot \vec{h}_S(M) = \frac{Gm_S}{d_S^3} (x_S - x) \left[1 + 3 \left(\frac{xx_S + yy_S + zz_S}{d_S^2} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{d_S^2} \right) + \frac{15}{2} \frac{(xx_S + yy_S + zz_S)^2}{d_S^4} + o \left(\frac{x}{d_S} \right)^2 \right]$$

avec $dm(M) = \mu d\tau(M)$ (μ est la masse volumique supposée uniforme de la Terre) et compte tenu des symétries matérielles :

$$\iiint_{M \in \text{Terre}} x d\tau(M) = \iiint_{M \in \text{Terre}} y d\tau(M) = \iiint_{M \in \text{Terre}} z d\tau(M) = 0$$

$$\text{et } \iiint_{M \in \text{Terre}} xy d\tau(M) = \iiint_{M \in \text{Terre}} xz d\tau(M) = \iiint_{M \in \text{Terre}} yz d\tau(M) = 0$$

donc :

$$\vec{x} \cdot \iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_S(M) dm(M) = \frac{Gm_S}{d_S^3} \left[\begin{aligned} &x_S \mu \iiint d\tau - 3 \frac{x_S \mu}{d_S^2} \iiint x^2 d\tau - \frac{3}{2} \frac{x_S \mu}{d_S^2} (\iiint x^2 d\tau + \dots) \\ &\dots \iiint y^2 d\tau + \iiint z^2 d\tau + \frac{15}{2} \frac{x_S \mu}{d_S^2} \left(\frac{x_S^2}{d_S^2} \iiint x^2 d\tau + \dots \right) \\ &\dots \frac{y_S^2}{d_S^2} \iiint y^2 d\tau + \frac{z_S^2}{d_S^2} \iiint z^2 d\tau + o \left(\frac{x}{d_S} \right)^2 \end{aligned} \right]$$

Soit :

$$\vec{x} \cdot \iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_S(M) dm(M) = \frac{Gm_S}{d_S^3} \left[m_T x_S + o \left(\frac{x}{d_S} \right) \right]$$

On obtient les deux autres composantes en effectuant les permutations circulaires ($x \rightarrow y \rightarrow z$) et ($x_S \rightarrow y_S \rightarrow z_S$)

par conséquent, il vient : $\iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_S(M) dm(M) = \frac{Gm_S m_T}{(TS)^3} \vec{T}\vec{S} = m_T \vec{h}_S(T)$ au second ordre près en $\frac{x}{d_S}$

De même : $\iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_L(M) dm(M) = \frac{Gm_L m_T}{(TL)^3} \vec{T}\vec{L} = m_T \vec{h}_L(T)$ au second ordre près en $\frac{x}{d_L}$ (CQFV)

Dans l'hypothèse d'une Terre à symétrie sphérique : $\iiint x^2 d\tau(M) = \iiint y^2 d\tau(M) = \iiint z^2 d\tau(M)$

Le terme d'ordre 2 de $\vec{x} \cdot \iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_S(M) dm(M)$ est nul auquel cas le résultat précédent est acquis au troisième ordre près.

4. Les relations (1) et (2) donnent :

$$m\vec{a}(P/R_T^*) = \vec{F} + m\vec{h}_T(P) + m \underbrace{[\vec{h}_S(P) - \vec{h}_S(T)]}_{\vec{C}_S^*(P)} + m \underbrace{[\vec{h}_L(P) - \vec{h}_L(T)]}_{\vec{C}_L^*(P)} \quad (3)$$

5. D'après la relation (1 bis), on obtient sans calcul supplémentaire l'expression intrinsèque de $\vec{C}_S^*(P)$ à l'ordre 1 en $\frac{x}{d_S}$:

$$\vec{C}_S^*(P) = \frac{Gm_S}{(TS)^3} \left[3 \frac{(\vec{T}\vec{P} \cdot \vec{T}\vec{S}) \vec{T}\vec{S}}{(TS)^2} - \vec{T}\vec{P} \right] \quad (4)$$

$\vec{C}_L^*(P)$ s'obtenant par une expression analogue à l'ordre 1 en $\frac{x}{d_L}$:

$$\vec{C}_L^*(P) = \frac{Gm_L}{(TL)^3} \left[3 \frac{(\vec{T}\vec{P} \cdot \vec{T}\vec{L}) \vec{T}\vec{L}}{(TL)^2} - \vec{T}\vec{P} \right] \quad (4 \text{ bis})$$

Remarque 4 En considérant les composantes (on reprend le DL effectué remarque 3) :

$$\vec{x} \cdot [\vec{h}_S(P) - \vec{h}_S(T)] = \frac{Gm_S}{d_S^3} x_S \left[1 + 3 \left(\frac{xx_S + yy_S + zz_S}{d_S^2} \right) - \frac{x}{x_S} + o\left(\frac{r}{d_S}\right) \right] - \frac{Gm_S}{d_S^3} x_S$$

$$\text{soit } \vec{x} \cdot [\vec{h}_S(P) - \vec{h}_S(T)] = \frac{Gm_S}{d_S^3} x_S \left[3 \left(\frac{xx_S + yy_S + zz_S}{d_S^2} \right) - \frac{x}{x_S} + o\left(\frac{r}{d_S}\right) \right]$$

On obtient les deux autres composantes en effectuant les permutations circulaires ($x \rightarrow y \rightarrow z$) et ($x_S \rightarrow y_S \rightarrow z_S$)

On en déduit l'expression intrinsèque (4) de $\vec{C}_S(P)$ à l'ordre 1 en $\frac{r}{d_S}$ (CQFV)

6. Expression des énergies potentielles massiques de marée :

(a) La relation (4) donne :

$$\vec{C}_S(P) = \frac{Gm_S r}{d_S^3} \left[(3 \cos^2 \theta_S - 1) \vec{u}_r - 3 \cos \theta_S \sin \theta_S \vec{u}_{\theta_S} \right]$$

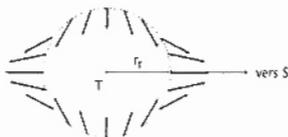
de manière analogue :

$$\vec{C}_L(P) = \frac{Gm_L r}{d_L^3} \left[(3 \cos^2 \theta_L - 1) \vec{u}_r - 3 \cos \theta_L \sin \theta_L \vec{u}_{\theta_L} \right]$$

(b) Il est facile de vérifier que l'on a bien $\vec{C}_S'(P) = -\vec{\nabla}_P(V_S(P)) = -\frac{\partial V_S}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V_S}{\partial \theta_S} \vec{u}_{\theta_S}$ (resp. $\vec{C}_L'(P) = -\vec{\nabla}_P(V_L(P))$); en intégrant les composantes des champs de marée, on trouve les expressions des énergies potentielles massiques de marées (à une constante près) :

$$V_S(P) = -\frac{3Gm_S r^2}{2d_S^3} (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3}) \text{ et } V_L(P) = -\frac{3Gm_L r^2}{2d_L^3} (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3})$$

7. Le champ de marée exercé par le Soleil (resp. la Lune) tend à déformer la matière en la "disloquant", plus précisément en l'étirant de part et d'autre du plan orthogonal en T à la direction TS (resp. TL). La représentation de ce champ à la surface de la Terre dans un plan méridien d'axe TS est représentée sur la figure ci-dessous.



Remarque 5 En coordonnées cartésiennes, le champ de marée s'exprime simplement :

avec $\vec{u}_r = \vec{x} \cos \theta + \vec{y} \sin \theta$, $\vec{u}_{\theta} = -\vec{x} \sin \theta + \vec{y} \cos \theta$, $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on obtient :

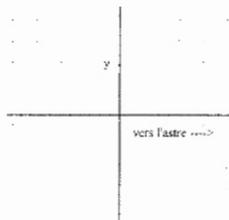
$$\vec{C} = \frac{Gm}{d^3} (2x\vec{x} - y\vec{y})$$

L'équation différentielle des lignes de champ s'écrit : $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y}$

Par intégration, on obtient l'équation des lignes de champ de marée : $xy^2 = \text{constante}$

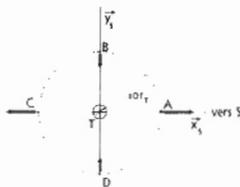
Les lignes de champ de marée sont représentées ci-dessous : l'axe des x est dirigé vers l'astre attracteur et les axes x et y se coupent au point T (centre de la Terre)

Plot 2D + Vector Field : $[2x, -y]$



Carte du champ de marée

8. Dans le voisinage de la Terre, i.e dans la région où les termes en $\left(\frac{r}{d_L}\right)^2$ et $\left(\frac{r}{d_S}\right)^2$ sont négligeables, h_T varie comme $\frac{1}{r^3}$ tandis que C_L et C_S varient comme r ; les effets gravitationnels différentiels de la Lune et du Soleil y sont donc d'autant plus marqués que l'on se trouve loin de T . Aux limites du "voisinage" de la Terre (sphère de centre T et de rayon $10r_T$), on calcule les champs de marée aux points A, B, C, D (cf. figure ci-dessous) :



$$\overline{C_S}(A) = \frac{20Gm_S r_T}{d_S^3} \vec{x}_S = C_S'(C) \text{ et } \overline{C_S}(D) = \frac{10Gm_S r_T}{d_S^3} \vec{y}_S = -\overline{C_S}'(B)$$

Aux limites du voisinage de la Terre considéré, l'intensité maximale du champ de marée du soleil est $\frac{20Gm_S r_T}{d_S^3}$ de l'ordre de $5.10^{-6} m.s^{-2}$, tandis que l'intensité maximale du champ de marée de la Lune est $\frac{20Gm_L r_T}{d_L^3}$ de l'ordre de $10^{-5} m.s^{-2}$, à comparer dans l'équation (3) à l'intensité du champ gravitationnel terrestre $h_T = \frac{Gm_T}{100r_T^2}$ de l'ordre de $10^{-1} m.s^{-2}$.

Les champs de marée du Soleil et de la lune sont donc d'intensités comparables (l'action du Soleil est environ deux fois plus faible que celle de la Lune) mais ils sont négligeables devant le champ gravitationnel terrestre (rapports inférieurs à 10^{-4}).

Dans le voisinage de la Terre, on peut donc, avec une "excellente approximation", écrire la relation fondamentale de la dynamique dans R_T^* sous la forme :

$$\boxed{m\vec{a}(P/R_T^*) = \vec{F} + m\vec{h}_T(P)}$$

En raison de l'égalité entre la masse inerte et la masse gravitationnelle, il y a exacte compensation au point T (et quasi-compensation dans le voisinage de ce point) entre la force d'inertie d'entraînement liée au caractère non galiléen de R_T^* et la résultante des forces gravitationnelles exercées par les astres autres que la Terre.

Puisque la force d'inertie disparaît de l'équation du mouvement, le référentiel géocentrique R_T^* apparaît donc comme un "excellent" référentiel galiléen (au sens qu'il n'y a pas lieu de prendre en compte la force d'inertie d'entraînement par rapport au référentiel galiléen de Copernic) à condition de ne considérer que la seule action de la Terre comme force d'origine gravitationnelle. On parlera de référentiel "pseudo-galiléen".

Remarque 6 Dans le voisinage de la Terre, la formulation de la relation fondamentale de la dynamique prend donc une forme plus "simple" dans le référentiel géocentrique R_T^* que dans le référentiel de Copernic puisque la force gravitationnelle extra-terrestre "disparaît". On pourrait dire que R_T^* est le "meilleur" référentiel au voisinage de T au sens que la RFD s'y exprime le plus simplement, et de manière plus générale que les référentiels "localement" en chute libre sont "meilleurs".

Insistons sur le caractère local de cette propriété :

au plan spatial d'abord : le domaine envisagé ne doit pas être trop étendu car nous avons vu que le champ de marée créé par un astre A au voisinage d'un point très éloigné ($r \ll d_A$) en chute libre croît avec la distance à ce point comme $\frac{1}{r^3}$; de plus, il faut limiter l'étude à des objets de "petite" taille car de faibles forces de marées peuvent tout de même produire des déformations significatives sur des objets étendus (cf. section 2)

au plan temporel ensuite : la durée de l'expérience ne doit pas être trop longue car même dans la région où le champ de marée est négligeable, ses effets séculaires i.e à long terme peuvent être importants; par exemple, les trajectoires de satellites doivent être régulièrement corrigées des phénomènes de dérives occasionnées par les champs de marée des astres extra-terrestres. En ordre de grandeur, $C_A \sim \frac{Gm_A t^2}{d_A^3}$ que l'on peut mettre sous la forme $C_A \sim \omega_A^2 r$, ce qui permet de définir un

temps caractéristique $T_A \sim \frac{1}{\omega_A} \sim \sqrt{\frac{d_A^3}{Gm_A}}$. Ce temps vaut 39 jours pour la Lune et 58 jours pour le Soleil

Bref, à condition de ne pas prendre en compte les forces gravitationnelles extra-terrestres, le référentiel géocentrique se comporte comme un "excellent" référentiel galiléen dans le voisinage de la Terre (par exemple dans une sphère de rayon $10r_T$ centrée sur T) et à une échelle de temps nettement inférieure au mois.

2 Quelques effets gravitationnels différentiels :

2.1 Pourquoi la Lune n'est-elle pas capturée par le Soleil ?

$$1. \frac{F_{SL}}{F_{TL}} \simeq \frac{m_S}{m_T} \left(\frac{d_L}{d_S} \right)^2 \simeq 2$$

Le Soleil exerce sur la Lune une force deux fois plus intense que celle exercée par la Terre : dans le référentiel galiléen de Copernic, la Lune est bien capturée par le Soleil puisqu'elle effectue un petit mouvement d'oscillation autour d'une trajectoire moyenne centrée sur le soleil. Pour étudier le mouvement relatif de la Terre et de la Lune, il est préférable de prendre le point de vue d'un observateur lié au référentiel pseudo-galiléen géocentrique ; en raison du mouvement de la Terre par rapport au Soleil, le soleil "n'agit" sur le mouvement relatif de la Lune et de la Terre que par l'intermédiaire d'un terme différentiel de marée.

2. En appliquant le théorème du centre d'inertie à la Lune dans le référentiel géocentrique, on obtient, d'après la relation (3) :

$$m_L \vec{a}(L/R_T^*) = m_L \vec{h}_T(L) + m_L [\vec{h}_S(L) - \vec{h}_S(T)] + m_L \underbrace{[\vec{h}_L(L) - \vec{h}_L(T)]}_{\delta}$$

soit :

$$\vec{a}(L/R_T^*) = [\vec{h}_T(L) - \vec{h}_L(T)] + [\vec{h}_S(L) - \vec{h}_S(T)]$$

L'accélération $\vec{a}(L/R_T^*)$ de la Lune par rapport à la Terre est composée de deux termes :

* $[\vec{h}_T(L) - \vec{h}_L(T)] = \frac{G(m_T+m_L)}{d_L^2} \vec{L}\vec{T} \simeq \frac{Gm_T}{d_L^2} \vec{L}\vec{T}$, terme attractif mesurant la capacité de la Lune à rester dans le voisinage de la Terre

* $[\vec{h}_S(L) - \vec{h}_S(T)]$ est le champ de marée créé par le soleil au point L tendant comme on l'a vu plus haut à "disloquer" le système Terre-Lune ; en effet, comme $TL = d_L \ll TS = d_S$, on peut calculer ce champ par la relation (4) ; lorsque S, T, L sont alignés, il est maximal et la relation (4) donne son expression $\frac{Gm_S}{d_S^3} 2\vec{T}\vec{L}$.

La condition de satellisation de la Lune par la Terre est donc : $\frac{Gm_T}{d_L^2} > 2 \frac{Gm_S}{d_S^3}$, soit :

$$d_L < d_S \left(\frac{m_T}{2m_S} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Cette distance critique vaut sensiblement $1,7 \cdot 10^6$ km ; elle est bien supérieure à la distance d_L actuelle ($3,8 \cdot 10^5$ km).

2.2 Fragmentation de la comète Shoemaker-Levy 9

Jupiter est une planète de masse particulièrement grande ; on peut concevoir que la comète Shoemaker-Lévy a "frôlé" Jupiter d'un peu trop près ! En passant en deçà de la limite de Roche, elle a pu se disloquer par effet de marée.

1. Il suffit d'adapter les résultats de la question 8 de la sous-section 1.2 au cas du référentiel jupiterocentrique; ce dernier est pseudo-galiléen lorsque l'on néglige les champs de marée produits par le Soleil et les autres planètes devant le champ gravitationnel créé par Jupiter. Ici, l'approximation est encore meilleure pour deux raisons :

- Jupiter est plus éloigné du Soleil que la Terre (le champ de marée décroît comme $\frac{1}{d^3}$)
- le champ de gravitation de Jupiter est plus intense que celui de la Terre (planète plus massive).

2. Limite de Roche

- (a) Appliquons le théorème du centre d'inertie à la sphère de centre C_1 dans le référentiel cométo-centrique R_C^* sous la forme de la relation (3) adaptée au cas considéré. D'après la question précédente, Jupiter constitue la seule source gravitationnelle "active" extra-comète; dans R_C^* , Jupiter "agit" sur la sphère de centre C_1 par le terme de marée $m(\vec{h}_J(C_1) - \vec{h}_J(C))$ tandis que la sphère de centre C_2 agit par la force gravitationnelle $m\vec{h}_{C_2}(C_1)$ ainsi que par la force de contact $\vec{F}_{C_2-C_1}^*$ empêchant, tant que le contact est établi, l'interpénétration des deux sphères; on a donc :

$$m\vec{a}(C_1/R_C^*) - m\vec{h}_{C_2}(C_1) + \vec{F}_{C_2-C_1} + m(\vec{h}_J(C_1) - \vec{h}_J(C))$$

Tant que les deux sphères sont en contact, la comète a un mouvement de rotation propre synchronisé sur son mouvement orbital puisque les points C_1 et C_2 restent constamment alignés avec J^4 . Le mouvement de C_1 dans R_C^* est donc circulaire uniforme de vitesse angulaire ω donnée par $\frac{Gm_J(2m)}{d^3} = 2m\omega^2 d$ (Théorème du centre d'inertie appliqué à la comète dans le référentiel pseudo-galiléen jupiterocentrique)

donc $m\vec{a}(C_1/R_C^*) = -m\omega^2 r \vec{u}$ (\vec{u} étant le vecteur unitaire de la direction $J \rightarrow C_1$)

$$\text{soit } m\vec{a}(C_1/R_C^*) = -\frac{Gmm_J}{d^3} r \vec{u}$$

$$\text{d'autre part, } m\vec{h}_{C_2}(C_1) = -\frac{Gm^2}{(2r)^2} \vec{u}$$

$$\text{et } m(\vec{h}_J(C_1) - \vec{h}_J(C)) = \frac{2Gmm_J}{d^3} r \vec{u} \text{ (cf relation (4) légitimée par } d \gg r)$$

$$\text{donc } \vec{F}_{C_2-C_1} \cdot \vec{u} = -\frac{Gmm_J}{d^3} r + \frac{Gm^2}{(2r)^2} - \frac{2Gmm_J}{d^3} r = \frac{Gm^2}{(2r)^2} - \frac{3Gmm_J}{d^3} r$$

On traduit la condition de non fragmentation par $\vec{F}_{C_2-C_1} \cdot \vec{u} > 0$ (condition de contact), soit $d > r \left(12 \frac{m_J}{m}\right)^{\frac{1}{3}}$ soit encore $d > d_{\min}$ avec

$$d_{\min} = r_J \left(12 \frac{\mu_J}{\mu_C}\right)^{\frac{1}{3}}$$

- (b) On calcule $\mu_J \simeq 1.25 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ et $d_{\min} \simeq 2.55 r_J$

3. La stalactite cylindrique de longueur l et de section S s'effondre sous l'effet de son poids lorsque $P_{\text{coh}} S = \mu_C g l S$; avec $l = 3 \text{ m}$, on a :

$$P_{\text{coh}} = \mu_C g l \simeq 2,68 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-2}$$

4. Taille des morceaux

- (a) Lien entre les deux modèles : $m = \mu_C \frac{4}{3} \pi r^3 = \mu_C \frac{2}{3} \pi r'^3$ donc

$$r' = 2^{\frac{1}{3}} r \simeq 1,26 r$$

- (b) A la limite de la fragmentation, on a : $P_{\text{coh}} \pi r'^2 + \frac{Gm^2}{(2r)^3} = \frac{3Gmm_J}{d_0^3}$; avec $\frac{Gm^2}{(2r)^3} = \frac{3Gmm_J r}{d_{\text{min}}^3}$, on obtient : $P_{\text{coh}} \pi r'^2 = \frac{3Gmm_J r}{d_{\text{min}}^3} \alpha$

Finalement :

$$r = \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}} \sqrt{\frac{P_{\text{coh}}}{\pi G \mu_C^2 \alpha}}$$

⁴Le phénomène de synchronisation du mouvement de rotation propre sur le mouvement orbital est réalisé pour bon nombre de satellites des planètes du système solaire; c'est également un effet de marée (cf. section 5)

(c) On trouve $r \simeq 13,1$ km (dans le cas de la glace I) ; ce modèle surestime la taille des fragments puisque ceux-ci avaient un diamètre variant entre 1 et 3 km.

5. Dans le modèle de la boule de neige peu compacte, avec $P_{coh} = 10^2 N.m^{-2}$ et $\mu_C = 0,5.10^3 kg.m^{-3}$, on recalcule $d_{min} = 3,11r_J$ et $\alpha = 6,63$ ce qui conduit à :

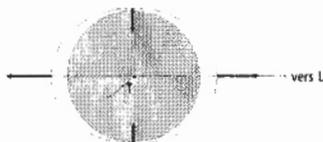
$$r \simeq 1,0 \text{ km}$$

ce qui est une bonne estimation de la taille réellement observée.

2.3 Marées océaniques

Bèves explications ...

1. Les océans se déforment sous l'effet des champs de marée de la Lune et du Soleil (cf. figure de la carte du champ de marée) ; on a vu (cf. question 8 de la sous-section 1.2) que le champ de marée de la Lune est deux fois plus intense que celui du soleil. En admettant que la déformation produite est proportionnelle à la contrainte appliquée (modèle statique linéaire), le champ de marée de la Lune (effet principal) crée un double "bourrelet" (cf. figure ci-dessous) de symétrie de révolution d'axe TL. La marée haute est observée lorsque la Lune passe au méridien du lieu, côté "jour lunaire" (bourrelet le plus proche de L) et côté "nuit lunaire" (bourrelet le plus éloigné de L) tandis que la marée basse est observée dans le plan orthogonal en T à l'axe TL.



2. En raison de la rotation propre de la Terre autour de l'axe des pôles (période 1 jour), chaque point de la Terre passe deux fois par jour sous un bourrelet ; il existe donc deux marées hautes et deux marées basses par jour en un lieu donné.
3. La durée séparant deux marées hautes consécutives en un lieu donné est évidemment le demi-jour lunaire, le jour lunaire étant la durée séparant deux passages consécutifs de la Lune par le méridien du lieu considéré. Pendant que la Terre tourne sur elle-même, la Lune tourne dans le même sens sur son orbite autour de la Terre. A la fin de sa rotation quotidienne (jour solaire), le méridien d'un lieu donné se retrouve dans la même position par rapport au Soleil mais doit tourner d'un angle supplémentaire pour se retrouver dans la même position par rapport à la Lune. Il est clair qu'au cours d'une lunaison, l'angle supplémentaire vaut 2π ; autrement dit, pendant ce temps, la Lune est passée au méridien d'un lieu donné exactement une fois de moins que le soleil ; on a donc :

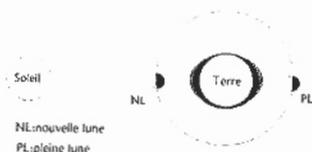
$$29,530 \text{ jours solaires} = (29,530 - 1) \text{ jours lunaires}$$

La période de la marée lunaire moyenne est donc :

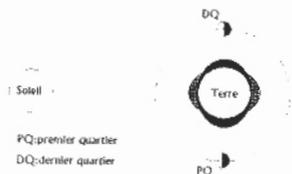
$$\frac{1}{2} \times \frac{29,530}{28,530} \times 24 \text{ heures} \simeq 12,420 \text{ heures} \simeq 12 \text{ heures } 25 \text{ minutes}$$

Le retard moyen de l'heure de marée d'un jour à l'autre est donc de 50 minutes.

4. L'effet du soleil est secondaire mais ne peut être négligé : en un mois, il y a deux vives-eaux et deux mortes-eaux. En vives-eaux, l'amplitude de marée est maximale tandis qu'en mortes-eaux, elle est minimale. Cette amplification du phénomène de marée en période de vives-eaux est due à la conjugaison des champs de marée lunaire et solaire ; les vives-eaux ont lieu au moment de la pleine Lune et de la nouvelle Lune lorsque le Soleil et la Lune passent tous deux dans le plan méridien du lieu considéré ; ces deux configurations sont appelées syzygies (cf. figure ci-dessous).



Les mortes-eaux ont lieu au premier et au dernier quartier lunaire. La Lune et le Soleil forment alors entre eux un angle de 90 degrés, configuration appelée quadrature; les champs de marée se "contrarient" et l'amplitude de marée est minimale (cf. figure ci-dessous).



5. Le globe terrestre n'est pas un solide totalement rigide: les champs de marée agissent dans tout le volume de la Terre, y compris le magma; ils engendrent des marées magmatiques qui provoquent des déformations de la croûte terrestre; ces déformations constituent les "marées terrestres". Des calculs ont montré que la fluctuation d'énergie du faisceau du LEP du CERN correspondait à une variation de 1mm du périmètre (26,7 km) de l'accélérateur.

3 Amplitude et périodicité de marée statique

3.1 Equation d'équilibre des océans en référentiel terrestre.

1. A cause de la révolution orbitale de la Terre autour du soleil s'effectuant dans le même sens que la rotation propre de la Terre, la Terre fait dans R_T un peu plus d'un tour entre deux passages consécutifs du Soleil au méridien d'un lieu considéré. En une année (365,25 jours solaires) la Terre fait $365,25 + 1 = 366,25$ tours autour de l'axe des pôles relativement à R_T .

La durée du jour sidéral est donc :

$$T = \text{un jour sidéral} = 86400 \times \frac{365,25}{366,25} \simeq 86164 \text{ s}$$

On a donc :

$$\Omega_T = \frac{2\pi}{T} \simeq 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

2. En considérant un volume V de fluide limité par la surface fermée S , la formule du gradient permet d'exprimer la résultante des forces de pression sous la forme d'une intégrale volumique étendue à V :

$$\iint_S -P d\vec{S} = \iiint_V (-\text{grad}P) d\tau$$

tandis que la formule du rotationnel permet d'exprimer le moment résultant des forces de pression calculé en un point O quelconque sous la forme d'une intégrale volumique étendue à V : $\iint_S \vec{OM} \wedge (-P d\vec{S}) = \iiint_V \vec{rot}(P \cdot \vec{OM}) d\tau$. Or $\vec{rot}(P \cdot \vec{OM}) = P \cdot \vec{rot}(\vec{OM}) + \text{grad}P \wedge \vec{OM} = \text{grad}P \wedge \vec{OM}$ puisque $\vec{rot}(\vec{OM}) = \vec{0}$.
Donc :

$$\iint_S \vec{OM} \wedge (-P d\vec{S}) = \iiint_V \vec{OM} \wedge (-\text{grad}P) d\tau$$

L'équivalence des forces de pression avec une distribution volumique de forces de densité $-\text{grad}P$ est donc établie pour la résultante et le moment résultant.

3. En appliquant la relation (3) à une particule mésoscopique de fluide de volume $d\tau$ située au point M , on obtient :

$$\mu(d\tau) \vec{a}(M/R_T^*) = -(d\tau) \overrightarrow{\text{grad}}_M P(M) + \mu(d\tau) \vec{h}_T(M) + \mu(d\tau) \vec{C}_S(M) + \mu(d\tau) \vec{C}_L(M)$$

D'autre part $\vec{a}(M/R_T^*) = \vec{0}$ (la particule est en équilibre dans R_T). Le mouvement d'entraînement de R_T par rapport à R_T^* est un mouvement de rotation à vitesse angulaire uniforme Ω_T autour de l'axe des pôles : l'accélération d'inertie d'entraînement du point M s'écrit donc $-\vec{a}_e(M) = \Omega_T^2 \cdot \overrightarrow{HM} = -\overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{\Omega_T^2 H M^2}{2} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{\Omega_T^2 r^2 \cos^2 \lambda}{2} \right)$ (H est la projection de M sur l'axe des pôles) ; l'accélération d'inertie de Coriolis est nulle puisque la particule est immobile dans R_T .

En outre, dans le cas d'une Terre à symétrie matérielle sphérique, $\vec{h}_T(M) = -Gm_T \frac{\vec{r}_M}{r^3} = -\overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{-Gm_T}{r} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{-Gm_T}{r} \right)$.

Enfin, $\vec{C}_S(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M(-V_S)$ et $\vec{C}_L(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M(-V_L)$ (cf. 6b) de la sous-section 1.2

En "rassembler les petits morceaux", on obtient ($\mu = \text{constante}$) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_M \left[\frac{P}{\mu} + \underbrace{(V_T + V_L + V_S + V_I)}_V \right] = \vec{0} \text{ où } \begin{cases} V_T = -\frac{Gm_T}{r} \\ V_L = -\frac{3Gm_L r^2}{2d_L^3} (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3}) \\ V_S = -\frac{3Gm_S r^2}{2d_S^3} (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3}) \\ V_I = -\frac{\Omega_T^2 r^2 \cos^2 \lambda}{2} \end{cases} \quad (5)$$

4. Compte tenu des hypothèses, la surface libre est isobare ; pour tout déplacement élémentaire $d\vec{M}$ sur la surface libre, on a :

$$dP(M) = \left(\overrightarrow{\text{grad}}_M P \right) \cdot d\vec{M} = 0 \text{ et d'après l'équation (5), } \left(\overrightarrow{\text{grad}}_M V \right) \cdot d\vec{M} = dV = 0$$

L'énergie potentielle massique V reste donc constante sur la surface libre isobare de l'océan ; donc :

$$\frac{Gm_T}{r} + \frac{3Gm_S r^2}{2d_S^3} (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3}) + \frac{3Gm_L r^2}{2d_L^3} (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3}) + \frac{\Omega_T^2 r^2 \cos^2 \lambda}{2} = \text{constante}$$

Remarque 7 Attention ! Il est faux d'affirmer que $\overrightarrow{\text{grad}} P$ est nul sur une surface isobare ; $\overrightarrow{\text{grad}} P$ est simplement orthogonal à la surface isobare passant par le point considéré.

3.2 Amplitude à l'équateur des composantes de marée statique générées par la "Lune moyenne" et le "Soleil moyen".

1. Effets du mouvement de rotation propre de la Terre

- (a) L'expression précédente donne :

$$\frac{Gm_L}{r_{\text{pôle}}} = \frac{Gm_L}{r_{\text{équateur}}} + \frac{\Omega_T^2 r_{\text{équateur}}^2}{2}$$

La profondeur des océans est en moyenne de $4 \text{ km} \ll r_T \simeq 6400 \text{ km}$; avec $r_{\text{équateur}} - r_{\text{pôle}} = \Delta h_I \ll r_T$ ($\Omega_T^2 r^2 \ll \frac{Gm_L}{r}$) et en faisant un calcul à l'ordre le plus bas non nul, on obtient :

$$\Delta h_I \simeq \frac{\Omega_T^2 r_T^4}{2Gm_T} \simeq 11 \text{ km}$$

Ce résultat est aberrant (la profondeur des plus grandes fosses marines est de 10 km !) ; le modèle considéré (Terre assimilée à une sphère solide recouverte entièrement d'eau) ne convient pas pour le calcul des variations de profondeur des océans dues aux seuls effets d'inertie de la rotation propre de la Terre. En particulier, la croûte terrestre présente elle-même un aplatissement.

- (b) Par contre, on remarque que ce modèle très sommaire fournit tout de même le bon ordre de grandeur de l'aplatissement de la Terre dans son ensemble. En effet, avec $\Delta h_I \simeq 11 \text{ km}$, on calcule $\frac{\Delta r}{r} \simeq 0,0017$, de même ordre de grandeur que la valeur $0,0034$ constatée. La raison est qu'aux échelles de temps géologiques, la Terre dans son ensemble est liquide.

2. En notant h la variation du niveau de la mer provoquée par les seuls effets de marée statique, on a :

$$\frac{Gm_T}{(r_m+h)} + \frac{3Gm_S(r_m+h)^2}{2d_S^3} (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3}) + \frac{3Gm_L(r_m+h)^2}{2d_L^3} (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3}) = \text{constante} = C$$

où r_m est le rayon moyen de la surface libre

avec $h \ll r_T \simeq r_m$ ($\frac{Gm_S r^2}{d_S^3}$ et $\frac{Gm_L r^2}{d_L^3} \ll \frac{Gm_T}{r}$) et en effectuant un calcul à l'ordre le plus bas non nul, on obtient :

$$h = \frac{r_T^2}{Gm_T} \left(\frac{Gm_T}{r_T} - C \right) + \frac{3r_T m_L}{2 m_T} \left(\frac{r_T}{d_L} \right)^3 (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3}) + \frac{3r_T m_S}{2 m_T} \left(\frac{r_T}{d_S} \right)^3 (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3})$$

Les forces de marée déforment la surface libre mais il y a conservation du volume d'eau (incompressibilité)

donc $\iint_{\text{sphère de centre } T} h \cdot dS = 0$

$$\text{On peut vérifier que } \iint_{\text{sphère de centre } T} (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3}) dS = \iint_{\text{sphère de centre } T} (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3}) dS = 0$$

on en déduit que $C = \frac{Gm_T}{r_T}$, et donc que :

$$h = \underbrace{\frac{3r_T m_L}{2 m_T} \left(\frac{r_T}{d_L} \right)^3 (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3})}_{h_L} + \underbrace{\frac{3r_T m_S}{2 m_T} \left(\frac{r_T}{d_S} \right)^3 (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3})}_{h_S}$$

À l'équateur, θ_L et θ_S varient entre 0 et 2π lorsque la Lune moyenne et le Soleil moyen décrivent leur trajectoire apparente autour de la Terre et $\cos^2 \theta_L$ et $\cos^2 \theta_S$ varient entre 0 et 1 ; on en déduit :

$$\Delta h_{\text{max}} = \underbrace{\frac{3r_T m_L}{2 m_T} \left(\frac{r_T}{d_L} \right)^3}_{\Delta h_{L, \text{max}} \simeq 54 \text{cm}} + \underbrace{\frac{3r_T m_S}{2 m_T} \left(\frac{r_T}{d_S} \right)^3}_{\Delta h_{S, \text{max}} \simeq 24 \text{cm}}$$

3.3 La marée statique en fonction de la latitude et des déclinaisons de la Lune et du Soleil

1. On a donc $h = \Delta h_{L, \text{max}} (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3}) + \Delta h_{S, \text{max}} (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3})$

$$\text{or } \overline{TL} \cdot \overline{TM} = r d_L \cos \theta_L \text{ avec } \overline{TM} = \begin{cases} r \cos \lambda \cos \varphi \\ r \cos \lambda \sin \varphi \\ r \sin \lambda \end{cases} \text{ et } \overline{TL} = \begin{cases} d_L \cos \delta_L \cos \varphi_L \\ d_L \cos \delta_L \sin \varphi_L \\ d_L \sin \delta_L \end{cases}$$

donc $\cos \theta_L = \cos \lambda \cos \varphi \cos \delta_L \cos \varphi_L + \cos \lambda \sin \varphi \cos \delta_L \sin \varphi_L + \sin \lambda \sin \delta_L = \cos \lambda \cos \delta_L \cos \varphi_{LM} + \sin \lambda \sin \delta_L$

$$\text{et } \cos^2 \theta_L - \frac{1}{3} = k_1 (1 - 3 \sin^2 \delta_L) + k_2 (\sin 2\delta_L \cos \varphi_{LM}) + k_3 (\cos^2 \delta_L \cos 2\varphi_{LM})$$

On obtient une expression "analogue" ($L \leftrightarrow S$) pour $\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3}$

Finalement :

$$h = \left[\begin{array}{l} \Delta h_{L, \text{max}} [k_1 (1 - 3 \sin^2 \delta_L) + k_2 (\sin 2\delta_L \cos \varphi_{LM}) + k_3 (\cos^2 \delta_L \cos 2\varphi_{LM})] + \dots \\ \Delta h_{S, \text{max}} [k_1 (1 - 3 \sin^2 \delta_S) + k_2 (\sin 2\delta_S \cos \varphi_{SM}) + k_3 (\cos^2 \delta_S \cos 2\varphi_{SM})] \end{array} \right] \quad (6)$$

où :

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1 - 3 \sin^2 \lambda}{6} \\ k_2 = \sin \lambda \cos \lambda \\ k_3 = \frac{\cos^2 \lambda}{2} \end{cases}$$

2. Différentes composantes

(a) L'expression de h comporte des composantes de différentes périodes en un lieu donné (λ donné) :

les composantes semi-diurne lunaire (terme en $\cos 2\varphi_{LM}$ de période $12h24mn$ -cf.3 de la sous-section 2.3) et semi-diurne solaire (terme en $\cos 2\varphi_{SM}$ de période $12h$), maximales à l'équateur et nulles aux pôles

- les composantes diurne lunaire (terme en $\cos \varphi_{LM}$ de période $24h48mn$) et diurne solaire (terme en $\cos \varphi_{SM}$ de période $24h$), maximales pour $\lambda = 45^\circ$ et nulles aux pôles et à l'équateur
 - des composantes à période "longue" ; au cours d'une période du mouvement apparent de la Lune ($\simeq 1\text{mois}$), δ_L varie entre -28° et $+28^\circ$, tandis qu'au cours d'une période du mouvement apparent du Soleil ($\simeq 1\text{an}$), δ_S varie entre -23° et $+23^\circ$; on note que l'amplitude des composantes à courtes périodes varie lentement avec δ_L et δ_S . On peut aussi remarquer que d_L et d_S varient lentement.
- (b) Considérons un lieu où les composantes semi-diurnes dominent ; nous avons vu plus haut que la composante lunaire est prépondérante et la relation (6) montre que son amplitude varie comme $\cos^2 \delta_L$; celle-ci varie donc avec une période semi-mensuelle. En outre, la composante semi-diurne solaire a une amplitude maximale pour $\delta_S = 0$ c'est-à-dire lorsque le Soleil se trouve dans le plan équatorial ce qui se produit aux équinoxes ; les marées de type semi-diurne lunaire sont donc renforcées par le Soleil aux équinoxes.
- (c) Lors des "grandes marées du siècle", T , L et S sont alignés dans le plan équatorial ; on a alors $\delta_L = \delta_S = 0$ auquel cas l'amplitude de marée est maximale ; cela se produit toutes les périodes chaldéennes en raison du mouvement de précession du plan de l'orbite apparente de la Lune de période environ 18 ans. Le plan de l'équateur précesse également avec une période beaucoup plus longue (26000 ans) si bien qu'après une période chaldéenne la configuration astrale est presque la même mais jamais rigoureusement identique. Le phénomène des marées n'est donc pas rigoureusement périodique. Ajoutons à cela que des travaux récents (J. Laskar) montrent que le système solaire constitue un système dynamique chaotique !

4 Mise en défaut du modèle statique de marée

1. C'est l'échec du modèle statique de Newton !

La marée est une déformation de la surface des océans ; elle prend naissance dans les grands bassins océaniques (Atlantique, Pacifique..) en réponse à l'attraction des astres en mouvement ; cette déformation se comporte comme une onde de gravité ; le phénomène est donc fondamentalement dynamique.

Le problème est celui de la recherche du mouvement d'un fluide se déplaçant sur une sphère tournante dans des bassins peu profonds (quelques kilomètres par rapport aux milliers de kilomètres d'étendue), soumis à l'action périodique des astres, à l'action du globe terrestre composé d'une partie solide fixe et d'une partie mobile dont on étudie précisément le mouvement, aux contraintes visqueuses et aux conditions aux limites de parois solides aux formes compliquées. Il s'agit là d'un problème des plus difficiles ! [5]

L'amélioration du modèle passe donc par la prise en compte de différents facteurs dynamiques : la marée est une onde dont le caractère progressif apparaît nettement sur la figure 4 montrant le trajet de la pleine mer en Manche et en Mer du Nord. On constate que l'onde provient du bassin atlantique et que la pleine mer met à peu près 6 heures pour remonter la Manche soit un parcours d'environ 500 km, ce qui donne une célérité de l'ordre de 23 ms^{-1} ; la marée étant principalement semi-diurne, la longueur d'onde est de l'ordre de $23 \times 12 \times 3600 \simeq 10^6 \text{ m} \simeq 1000 \text{ km}$. Cette longueur d'onde est nettement supérieure à la profondeur du bassin ; on montre dans la partie B que la célérité des ondes de gravité en eau peu profonde ($\lambda \gg h$) est \sqrt{gh} ; cela donne une profondeur de l'ordre de 50m, ce qui est bien le cas.

D'autre part, les ondes de marée :

- voient leur progression contrariée par la présence des continents (réflexions, réfraction, diffraction)
- sont freinées par contrainte visqueuse sur les fonds de faible profondeur variable
- sont déviées par les forces de Coriolis (cf. figure 4 : la rotation produite sur l'onde de marée et l'existence de points amphidromiques sont typiques d'un effet dû aux forces de Coriolis (cf. ondes de Kelvin)[5])

L'amplitude de marée peut croître lorsque les ondes arrivent sur un plateau continental étendu de faible profondeur, à l'image d'une vague lorsqu'elle arrive sur la plage ; la faible profondeur du golfe Normand-Breton explique en partie les marnages importants qu'on y observe.(cf. figure 6 : on constate à certains endroits une amplitude de marée très supérieure aux 78 cm d'amplitude maximale prévus par la théorie statique).

Le potentiel, en un lieu donné, ne dépend que des mouvements astronomiques périodiques ; si on postule la linéarité du système ("petites" déformations), il est naturel de considérer un régime forcé où les périodes astronomiques se retrouvent dans celles des mouvements des masses d'eau. Chaque terme du potentiel peut être considéré indépendamment des autres, engendrant sa marée propre, la marée totale étant la somme de ces composantes élémentaires. En raison des conditions aux limites très complexes, il se crée un système compliqué d'ondes en partie progressives et en partie stationnaires ; on est en présence d'un oscillateur mécanique présentant un certain nombre de fréquences propres a priori différentes des fréquences du potentiel et forcé aux fréquences du potentiel ; on sait que la réponse est en général en retard (algébrique) sur l'excitation ; cela explique "l'établissement du port" ou "l'âge de la marée" observé sur la figure 5, ainsi que la présence des déphasages α et β apparaissant dans la formule de Laplace donnée dans l'énoncé. L'amplitude et le déphasage de la réponse à une composante du potentiel se déterminent expérimentalement compte tenu de l'extraordinaire difficulté de la résolution théorique du problème. Certains bassins (Manche, baie de Fundy...), suffisamment ouverts sur un océan pour subir l'influence de l'onde de marée (contrairement aux mers fermées comme la Méditerranée), se comportent comme des oscillateurs quasi-indépendants dont une fréquence propre est proche de la demi-journée ; la marée semi-diurne fait alors entrer ces bassins en résonance ce qui explique les marnages particulièrement élevés qu'on y observe (cf. figure 6).

La figure 3 montre certaines "familles" de marée présentant un caractère marqué :

- (a) marée de type semi-diurne : le terme en k_3 est prépondérant
 - (b) marée de type diurne : le terme en k_2 est prépondérant
 - (c) marée à inégalité diurne : marée de type semi-diurne avec un terme en k_2 non négligeable
 - (d) marée mixte : marée de type semi-diurne avec un terme en k_3 non négligeable ; lorsque la déclinaison est faible, le terme semi-diurne devient prépondérant ($\sin 2\delta \ll 1$ et $\cos^2 \delta \simeq 1$)
2. Méthode harmonique proprement dite (*Kelvin, Doodson*)

La théorie de Fourier justifie la décomposition de l'onde de marée en une série de composantes harmoniques ; l'ensemble de ces ondes harmoniques, chacune par sa période, son amplitude et sa phase constitue le spectre de la marée qui forme la carte d'identité de la marée dans le port considéré.

On passe le signal de marée expérimental à l'analyseur de spectre et on constate l'existence d'un très grand nombre de fréquences de poids plus ou moins important. Cette méthode est très efficace ; contrairement à la méthode de Laplace, elle prend notamment en compte les inévitables phénomènes non linéaires, en particulier dans les régions de faible profondeur. On peut ainsi interpréter la "tenue de plein" dans certains ports de La Manche comme Ouistreham ou Le Havre, par l'existence d'ondes sixième-diurnes qui provoquent une inégalité entre le montant et le perdant. Par exemple, le 12 décembre 1996, on a pu observer au Havre : une première BM de 1,17m à 06h29, puis une PM de 8,05m à 10h39, une BM de 8,02m à 11h23, une PM de 8,04m à 11h59 et enfin une BM de 1m à 18h54. La BM intermédiaire n'est pas une basse mer à proprement parler mais la mise en évidence de la tenue de plein à PM, favorable à la navigation.[6]

Pour les sites où la marée est importante, la prise en compte d'une centaine d'ondes composantes (ayant plus de 1mm d'amplitude) est nécessaire pour un calcul précis (105 à Brest)[6]. Compte tenu de la complexité du problème, ce spectre est établi expérimentalement par analyse des observations réalisées pendant quelques années ; il fournit par ailleurs un test pour les modèles théoriques.

Pour terminer, ajoutons que le facteur limitant est actuellement la météorologie. On observe en effet une surcote lorsqu'il y a une dépression et une décote en régime anticyclonique. La correction est d'environ 10 cm pour 10 hPa. Les vents forts ont également une influence.

5 Evolution séculaire du système Terre-Lune

5.1 Théorèmes généraux

1. Théorèmes de König

- (a) * Théorème de König du moment cinétique :

Le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ calculé en un point O quelconque d'un système matériel fermé S quelconque dans son mouvement par rapport à un référentiel R quelconque est la somme du moment cinétique en O dans R de son centre d'inertie G où serait concentrée toute sa masse m , soit $\vec{OG} \wedge m\vec{v}_G$ (moment

cinétique "d'ensemble"), et de son moment cinétique relativement à son référentiel barycentrique R^* , soit $\vec{\sigma}^*$ (moment cinétique "propre").

En effet, avec $\vec{v}_P = \vec{v}_P + \vec{v}_G$ (R^* est en mouvement de translation dans R), on a :

$\vec{\sigma}_O = \iiint_S \overline{OP} \wedge \vec{v}_P \cdot dm(P) = \left(\iiint_S \overline{OP} dm(P) \right) \wedge \vec{v}_G + \iiint_S \overline{OP} \wedge \vec{v}_P \cdot dm(P) = \overline{OG} \wedge m\vec{v}_G + \vec{\sigma}_O^*$
 or $\vec{\sigma}_O^* = \vec{\sigma}^*$ (indépendant du point où on le calcule) car le torseur cinétique du système dans R^* est un couple ($\vec{p}^* = \vec{0}$). Donc :

$$\vec{\sigma}_O = \overline{OG} \wedge m\vec{v}_G + \vec{\sigma}^*$$

* Théorème de König de l'énergie cinétique :

L'énergie cinétique K d'un système matériel fermé S quelconque dans son mouvement par rapport à un référentiel R quelconque est la somme de son énergie cinétique d'ensemble (énergie cinétique de son centre d'inertie G où serait concentrée toute sa masse m , soit $\frac{1}{2}mv_G^2$) et de son énergie cinétique propre (son énergie cinétique relativement à son référentiel barycentrique R^* , soit K^*).

En effet,

$K = \iiint_S \frac{v_P^2}{2} dm(P) = \iiint_S \left(\frac{v_G^2}{2} + \frac{v_P^2}{2} + \vec{v}_P \cdot \vec{v}_G \right) dm(P) = K^* + \frac{1}{2}mv_G^2 + \vec{v}_G \cdot \iiint_S \vec{v}_P \cdot dm(P)$
 or $\iiint_S \vec{v}_P \cdot dm(P) = \vec{p}^* = \vec{0}$, donc :

$$K = \frac{1}{2}mv_G^2 + K^*$$

- (b) Si S est un solide dont l'axe $(G, \vec{\Omega})$ de rotation propre est une axe de symétrie matérielle donc axe principal d'inertie,

$\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}_G^* = \vec{J}_G \vec{\Omega} = J \vec{\Omega}$ (\vec{J}_G est l'opérateur d'inertie du solide calculé en G et J est son moment d'inertie par rapport à l'axe $(G, \vec{\Omega})$)

$$(G, \vec{\Omega}) \text{ est axe de symétrie matérielle du solide } \Rightarrow \vec{\sigma}^* = J \vec{\Omega}$$

et comme $\vec{v}_P = \vec{\Omega} \wedge \overline{GP}$, $K^* = \frac{1}{2} \iiint_S \vec{v}_P \cdot (\vec{\Omega} \wedge \overline{GP}) dm(P) = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \iiint_S \overline{GP} \wedge \vec{v}_P dm(P) = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}^* = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{J}_G \vec{\Omega} = \frac{1}{2} J \Omega^2$ et ceci est vrai même si l'axe $(G, \vec{\Omega})$ n'est pas un axe principal d'inertie.

$$\text{Pour un solide : } K^* = \frac{1}{2} J \Omega^2$$

2. Théorème du moment cinétique

- (a) Le moment dynamique barycentrique d'un système fermé quelconque est égal au moment résultant des forces extérieures calculé en son centre d'inertie ; ce moment dynamique barycentrique est la dérivée temporelle du moment cinétique barycentrique.

En effet, d'après le PFDLD : $\vec{\delta}_G^* = \vec{M}_G(\text{forces extérieures}) + \vec{M}_G(\text{forces d'inertie d'entraînement})$

Les forces d'inertie de Coriolis sont nulles puisque R^* est en mouvement de translation par rapport à un référentiel galiléen

De plus, $\vec{M}_G(\text{forces d'inertie d'entraînement}) = \iiint_S \overline{GP} \wedge (-\vec{a}_G dm) = - \left(\iiint_S \overline{GP} dm \right) \wedge \vec{a}_G = \vec{0}$

D'autre part, $\left(\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \right)_{R^*} = \left(\frac{d\vec{\sigma}_G^*}{dt} \right)_{R^*} = \iiint_S \left(\frac{d\overline{GP}}{dt} \right) \wedge \vec{v}_P \cdot dm(P) + \iiint_S \overline{GP} \wedge \vec{a}_P \cdot dm(P) = \iiint_S \vec{v}_P \wedge \vec{v}_P \cdot dm(P) + \vec{\delta}_G^* = \vec{\delta}_G^*$

Enfin $\vec{\delta}_G^* = \vec{\delta}^*$ (indépendant du point où on le calcule) car le torseur dynamique du système dans R^* est un couple ($\vec{a}_G^* = \vec{0}$). Donc :

$$\vec{\delta}^* = \left(\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \right)_{R^*} = \vec{M}_G(\text{forces extérieures})$$

- (b) Le moment en G des forces d'inertie d'entraînement est nul

3. Théorème de la puissance cinétique

(a) On a :

$$\frac{dK}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{inertie}$$

où \mathcal{P}_{ext} est la puissance totale des forces extérieures, \mathcal{P}_{int} est la puissance totale des forces intérieures et $\mathcal{P}_{inertie}$ est la puissance totale des forces d'inertie d'entraînement (les forces de Coriolis ne travaillent pas).

(b) On a : $\mathcal{P}_{int} = \iiint_S \vec{d}\vec{f}_{int}(P) \cdot \vec{v}_P$ relativement à un référentiel R et $\mathcal{P}'_{int} = \iiint_S \vec{d}\vec{f}'_{int}(P) \cdot \vec{v}'_P$ relativement à un référentiel R'

avec $\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}(P \in R'/R) = \vec{v}'_P + \vec{v}(O' \in R'/R) + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{O}'\vec{P}$, on obtient :

$$\mathcal{P}_{int} = \mathcal{P}'_{int} + \vec{v}(O' \in R'/R) \cdot \left(\iiint_S \vec{d}\vec{f}_{int}(P) \right) + \vec{\Omega}(R'/R) \cdot \left(\iiint_S \vec{O}'\vec{P} \wedge \vec{d}\vec{f}_{int}(P) \right)$$

or $\iiint_S \vec{d}\vec{f}_{int}(P) = \vec{0}$ et $\iiint_S \vec{O}'\vec{P} \wedge \vec{d}\vec{f}_{int}(P) = \vec{0}$ puisque le torseur des forces intérieures est nul ; donc $\mathcal{P}_{int} = \mathcal{P}'_{int}$

La puissance des forces intérieures est invariante par changement de référentiel

(c) Relativement au référentiel barycentrique R^* du système, on a :

$$\mathcal{P}^*_{inertie} = \iiint_S \vec{d}\vec{f}^*_{inertie}(P) \cdot \vec{v}^*_P$$

avec $\vec{d}\vec{f}^*_{inertie}(P) = -dm(P)\vec{a}_G$ on obtient $\mathcal{P}^*_{inertie} = -\vec{a}_G \cdot \iiint_S \vec{v}^*_P dm(P) = -\vec{a}_G \cdot \vec{p}^* = 0$

La puissance des forces d'inertie est donc nulle dans le référentiel barycentrique du système

(d) O étant un point quelconque lié au solide et $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation du solide dans le référentiel d'étude, on a :

$$\mathcal{P} = \iiint_S \vec{d}\vec{f}(P) \cdot \vec{v}_P = \iiint_S \vec{d}\vec{f}(P) \cdot \left(\vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \vec{O}\vec{P} \right) = \left(\iiint_S \vec{d}\vec{f}(P) \right) \cdot \vec{v}_O + \vec{\Omega} \cdot \left(\iiint_S \vec{O}\vec{P} \wedge \vec{d}\vec{f}(P) \right)$$

Or $\iiint_S \vec{d}\vec{f}(P) = \vec{R}$ (résultante des forces) et $\iiint_S \vec{O}\vec{P} \wedge \vec{d}\vec{f}(P) = \vec{M}_O$ (moment résultant en O des forces)

Donc \mathcal{P} est le moment du torseur associé au champ de forces et du torseur cinématique du solide :

$$\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{v}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\Omega}$$

5.2 Le problème à deux corps à symétrie matérielle sphérique

1. C est le barycentre de $T(m_T)$ et de $L(m_L)$; on a :

$$\vec{TC} = \frac{m_L}{m_T + m_L} \vec{TL} \text{ et } \vec{LC} = \frac{m_T}{m_T + m_L} \vec{LT}$$

2. En adaptant la relation (3), on obtient :

(a) $m\vec{a}(P/R_C^*) = \vec{F} + m\vec{h}_{T+L}(P) + m\vec{C}_S(P)$ où $\vec{h}_{T+L}(P) = \vec{h}_T(P) + \vec{h}_L(P)$ et $\vec{C}_S(P) = \vec{h}_S(P) - \vec{h}_S(C)$

Dans l'hypothèse où on néglige les effets gravitationnels différentiels produits par le Soleil, on obtient :

$$m\vec{a}(P/R_C^*) = \vec{F} + m\vec{h}_T(P) + m\vec{h}_L(P)$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit dans R_C^* comme dans un référentiel galiléen à condition de ne considérer que les seules actions de la Terre et de la Lune comme forces d'origine gravitationnelle. R_C^* se comporte donc comme un référentiel pseudo-galiléen ce qui revient à considérer le système particule-Terre-Lune isolé.

3. Les mouvements de T et de L dans R_C^* sont donc définis par les équations :

$$m_T \vec{a}(T/R_C^*) = m_T \vec{h}_L(T) \text{ et } m_L \vec{a}(L/R_C^*) = m_L \vec{h}_T(L)$$

- (a) Avec $\vec{CT} = -\frac{m_L}{m_T+m_L}\vec{TL}$ et $\vec{CL} = \frac{m_T}{m_T+m_L}\vec{TL}$, ces deux relations s'écrivent sous la forme commune :

$$\frac{m_L m_T}{m_T+m_L} \left(\frac{d^2 \vec{TL}}{dt^2} \right)_{R_C^*} = m_L \vec{h}_T(L)$$

C'est l'équation du mouvement dans R_C^* d'une particule située au point M tel que $\vec{CM} = \vec{TL} = \vec{r}$ (vecteur position relative de L par rapport à T), de masse $\mu = \frac{m_L m_T}{m_T+m_L}$, soumise à la force exercée par la Terre sur la Lune.

Les relations $\vec{CT} = -\frac{m_L}{m_T+m_L}\vec{r}$ et $\vec{CL} = \frac{m_T}{m_T+m_L}\vec{r}$ montrent que les mouvements des points T et L se déduisent par homothétie de celui de cette particule réduite.

4. Avec $\vec{CT} = -\frac{m_L}{m_T+m_L}\vec{TL}$, $\vec{CL} = \frac{m_T}{m_T+m_L}\vec{TL}$ et $\vec{v}_T = -\frac{m_L}{m_T+m_L}\vec{v}^*$, $\vec{v}_L = \frac{m_T}{m_T+m_L}\vec{v}^*$, on obtient :

$$K_{\text{orbital}}^* = \frac{1}{2} m_T (\vec{v}_T^*)^2 + \frac{1}{2} m_L (\vec{v}_L^*)^2 = \frac{1}{2} \mu (\vec{v}^*)^2$$

K_{orbital}^* s'identifie à l'énergie cinétique barycentrique de la particule réduite.

5. De même :

$$\vec{\sigma}_{\text{orbital}}^* = \vec{CT} \wedge m_T \vec{v}_T^* + \vec{CL} \wedge m_L \vec{v}_L^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}^*$$

6. $\vec{\sigma}_{\text{orbital}}^*$ ne dépend pas du point où on le calcule car la résultante du torseur cinétique du système des deux points, à savoir la quantité de mouvement totale est nulle dans R_C^* .

7. Éléments cinétiques du système Terre-Lune

- (a) $K^* = K^*(\text{Terre}) + K^*(\text{Lune})$

d'après les résultats précédents,

$$K^*(\text{Terre}) = \frac{1}{2} m_T (\vec{v}_T^*)^2 + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 \quad \text{et} \quad K^*(\text{Lune}) = \frac{1}{2} m_L (\vec{v}_L^*)^2 + \frac{1}{2} J_L \Omega_L^2$$

$$\text{donc } K^* = \frac{1}{2} m_T (\vec{v}_T^*)^2 + \frac{1}{2} m_L (\vec{v}_L^*)^2 + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 + \frac{1}{2} J_L \Omega_L^2 = K_{\text{orbital}}^* + K_{\text{propre}}^* = \frac{1}{2} \mu (\vec{v}^*)^2 + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 + \frac{1}{2} J_L \Omega_L^2$$

Finalement :

$$K^* = K_{\text{orbital}}^* + K_{\text{propre}}^* = \frac{1}{2} \mu (\vec{v}^*)^2 + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 + \frac{1}{2} J_L \Omega_L^2$$

- (b) D'après les résultats précédents,

$$\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}_C^* = \vec{\sigma}_C^*(\text{Terre}) + \vec{\sigma}_C^*(\text{Lune})$$

$$\text{et comme l'axe } (T, \vec{\Omega}_T) \text{ est un axe de symétrie matérielle, } \vec{\sigma}_C^*(\text{Terre}) = \vec{CT} \wedge m_T \vec{v}_T^* + J_T \vec{\Omega}_T$$

$$\text{de même } \vec{\sigma}_C^*(\text{Lune}) = \vec{CL} \wedge m_L \vec{v}_L^* + J_L \vec{\Omega}_L$$

$$\text{donc } \vec{\sigma}^* = \vec{CT} \wedge m_T \vec{v}_T^* + \vec{CL} \wedge m_L \vec{v}_L^* + J_T \vec{\Omega}_T + J_L \vec{\Omega}_L = \vec{\sigma}_{\text{orbital}}^* + \vec{\sigma}_{\text{propre}}^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}^* + J_T \vec{\Omega}_T + J_L \vec{\Omega}_L$$

$$\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}_{\text{orbital}}^* + \vec{\sigma}_{\text{propre}}^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}^* + J_T \vec{\Omega}_T + J_L \vec{\Omega}_L$$

8. $\vec{F}(\text{Terre} \rightarrow \text{Lune}) = m_L \vec{h}_T(L) = \frac{G m_T m_L}{(TL)^2} \vec{LT} = -\vec{\nabla}_L (E_P)$ où $E_P = -\frac{G m_T m_L}{TL}$

$$E_P = -\frac{G m_T m_L}{d_L}$$

9. * En appliquant le théorème du moment cinétique à la Terre dans son référentiel barycentrique R_T^* , on obtient :

$$\left(\frac{d(J_T \vec{\Omega}_T)}{dt} \right)_{R_T^*} = \vec{M}_T(\text{forces exercées par la Lune}) = \vec{0} \quad \text{car la Terre et la Lune possèdent la symétrie sphérique (on associe les contributions des points symétriques par rapport à l'axe } TL)$$

$$\text{soit } J_T \left(\frac{d\vec{\Omega}_T}{dt} \right)_{R_T^*} = J_T \left(\frac{d\vec{\Omega}_T}{dt} \right)_{R_C^*} = \vec{0} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{\Omega}_T}{dt} \right)_{R_C^*} = \vec{0}$$

En appliquant le théorème du moment cinétique à la Lune dans son référentiel barycentrique R_L^* , on obtient de même :

$$\left(\frac{d\vec{\Omega}_L}{dt}\right)_{R_C^*} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}_T^* \text{ et } \vec{\Omega}_L^* \text{ sont des vecteurs constants dans } R_C^*$$

$\vec{\sigma}_{propre} = J_T \vec{\Omega}_T^* + J_L \vec{\Omega}_L^*$ est donc constant dans R_C^*

* En appliquant le théorème du moment cinétique au système Terre-Lune dans son référentiel barycentrique R_C^* , on obtient :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right)_{R_C^*} = \left(\frac{d(\vec{\sigma}_{orbital} + \vec{\sigma}_{propre})}{dt}\right)_{R_C^*} = \left(\frac{d\vec{\sigma}_{orbital}}{dt}\right)_{R_C^*} = \vec{M}_C \text{ (forces extérieures au système Terre-Lune)}$$

= $\vec{0}$ car on a vu plus haut que le système Terre-Lune se comporte comme un système isolé dans R_C^* : donc

$$\vec{\sigma}_{orbital} = \vec{r} \wedge m\vec{v}^* \text{ est un vecteur constant dans } R_C^*$$

* En appliquant le théorème de la puissance cinétique au système Terre-Lune dans R_C^* , on obtient :

$$\frac{dK^*}{dt} = P_{ext} + P_{int} = P_{int} = -\frac{dE_p}{dt} \text{ (le système Terre-Lune se comporte comme un système isolé dans } R_C^*)$$

donc $K^* + E_p = E^*$ est une constante du mouvement

$$\text{L'énergie totale } E^* \text{ est une constante du mouvement}$$

10. $\vec{\sigma}_{orbital} = \vec{r} \wedge m\vec{v}^*$ étant un vecteur constant dans R_C^* , \vec{r} et \vec{v}^* restent constamment orthogonaux à un vecteur donné (défini par les conditions initiales); la particule réduite a donc un mouvement plan

$$\text{Le mouvement relatif orbital est plan}$$

11. Période du mouvement relatif circulaire

- (a) La trajectoire de la particule réduite est un cercle de rayon $TL = d_L$; la RFD appliquée à cette particule réduite dans R_C^* donne : $m\omega^2 d_L = \frac{Gm_T m_L}{d_L^2}$; la vitesse angulaire du mouvement orbital relatif est constante :

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_T + m_L)}{d_L^3}}$$

- (b) On trouve numériquement :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 27,2 \text{ jours solaires}$$

12. $\vec{\Omega}_L^* = \vec{\omega}$ donc

$$\text{La lune présente toujours la même face à la Terre}$$

13. * $\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v}^* + J_T \vec{\Omega}_T^* + J_L \vec{\Omega}_L^* = (\mu\omega d_L^2 + J_T \Omega_T + J_L \Omega_L) \vec{z} = \left(m_T m_L \sqrt{\frac{G d_L}{(m_T + m_L)}} + J_T \Omega_T + J_L \omega\right) \vec{z}$

Or, en supposant que la Terre et la Lune sont homogènes, on a $J_T = \frac{2}{5} m_T r_T^2$ et $J_L = \frac{2}{5} m_L r_L^2$

$$\text{donc } \frac{J_L \omega}{J_T \Omega_T} \simeq \frac{m_L}{m_T} \left(\frac{r_L}{r_T}\right)^2 \frac{\omega}{\Omega_T} \simeq 3,4 \cdot 10^{-5}$$

Le moment cinétique propre de la Lune est donc parfaitement négligeable devant celui de la Terre; on a donc, avec une excellente approximation :

$$\vec{\sigma} = \left(m_T m_L \sqrt{\frac{G d_L}{(m_T + m_L)}} + J_T \Omega_T\right) \vec{z} \quad (7)$$

$$* K^* = \frac{1}{2} \mu (\vec{v}^*)^2 + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 + \frac{1}{2} J_L \Omega_L^2 = \frac{1}{2} \frac{G m_T m_L}{d_L} + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 + \frac{1}{2} J_L \Omega_L^2$$

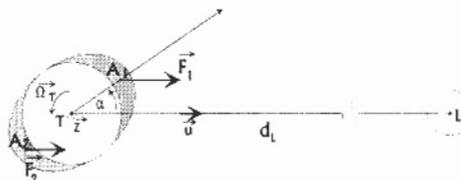
En négligeant l'énergie cinétique propre de la Lune devant celle de la Terre, on obtient, avec une excellente approximation :

$$E^* = K^* + E_p = -\frac{1}{2} \frac{G m_T m_L}{d_L} + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 \quad (8)$$

5.3 Effets séculaires de synchronisation des phénomènes dissipatifs de marée

1. Le fluide est entraîné par la contrainte de cisaillement exercée au fond par la partie solide de la Terre en raison de la viscosité du fluide (celui-ci "adhère" à la paroi solide)
2. Considérons pour ce calcul que la Terre et la Lune possèdent la symétrie sphérique.

Le moment résultant des forces qu'exerce la Lune sur la partie de la Terre à symétrie sphérique est nul (on associe les contributions des points symétriques par rapport à l'axe TL). En revanche, les forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 s'exerçant sur les deux "bulbes" (grisés sur la figure ci-dessous) ont un moment résultant non nul puisqu'elles ont des intensités légèrement différentes. Le champ gravitationnel créé par la Lune étant toutefois quasi uniforme à l'échelle de la Terre, ces forces sont donc quasi équivalentes, pour chacun de ces deux bulbes, à une force unique, la résultante appliquée à son centre d'inertie i.e sur l'axe de la déformation en un point situé à une distance pratiquement égale à r_T ($a \simeq b \simeq r_T$ et $a - b \simeq \Delta h_{L_{max}} \simeq 54\text{cm}$ -cf. résultat de la question 2 de la sous-section 3.2); les effets de ces deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 se contrarient mais l'effet de \vec{F}_1 i.e l'effet de freinage l'emporte car son intensité est légèrement supérieure à celle de \vec{F}_2 . (cf. figure ci-dessous)



3. Les deux bourrelets ont même masse : $\frac{1}{2}\rho \left(\frac{4}{3}\pi ab^2 - \frac{4}{3}\pi b^3 \right) \simeq \frac{2}{3}\rho\pi r_T^2 (a - b) \simeq \frac{2}{3}\rho\pi r_T^2 \Delta h_{L_{max}}$ où a (resp. b) est le demi-grand axe (resp. le demi-petit axe) de l'ellipsoïde.

Donc $\vec{F}_1 \simeq \frac{Gm_L \frac{4}{3}\rho\pi r_T^2 \Delta h_{L_{max}}}{(LA_1)^2} \vec{u}$ avec $(LA_1)^2 \simeq d_L^2 + r_T^2 - 2d_L r_T \cos \alpha$, donc $\vec{F}_1 \simeq \frac{Gm_L \frac{4}{3}\rho\pi r_T^2 \Delta h_{L_{max}}}{d_L^2} \left(1 + 2\frac{r_T}{d_L} \cos \alpha \right) \vec{u}$ (\vec{u} unitaire), de la forme $\vec{F}_1 = F_1 \vec{u}$

De même $\vec{F}_2 \simeq \frac{Gm_L \frac{4}{3}\rho\pi r_T^2 \Delta h_{L_{max}}}{d_L^2} \left(1 - 2\frac{r_T}{d_L} \cos \alpha \right) \vec{u} = F_2 \vec{u}$

Le moment de \vec{F}_1 par rapport à T est $\vec{T}\vec{A}_1 \wedge \vec{F}_1 \simeq -F_1 r_T \sin \alpha \vec{z}'$ et celui de \vec{F}_2 par rapport à T est $\vec{T}\vec{A}_2 \wedge \vec{F}_2 \simeq F_2 r_T \sin \alpha \vec{z}'$

Le moment résultant par rapport à T des forces exercées par la Lune est donc : $\vec{M}_T = \vec{T}\vec{A}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{T}\vec{A}_2 \wedge \vec{F}_2 \simeq -\frac{Gm_L \frac{4}{3}\rho\pi r_T^4 \Delta h_{L_{max}}}{d_L^3} \sin 2\alpha \vec{z}'$

Avec $\Delta h_{L_{max}} \simeq \frac{3}{2} r_T \frac{m_L}{m_T} \left(\frac{r_T}{d_L} \right)^3$ (cf. résultat de la question 2 de la sous-section 3.2), on obtient finalement :

$$\vec{M}_T = -\frac{B}{d_L^2} \sin 2\alpha \vec{z}' \text{ avec } B \simeq 2\pi G \rho r_T^8 \frac{m_L^2}{m_T} \quad (9)$$

4. On trouve numériquement $B \simeq 10^{69} \text{SI}$; avec $B \sin 2\alpha \simeq 1,35 \cdot 10^{68} \text{SI}$, on obtient :

$$\alpha \simeq 3,9^\circ$$

Remarque 8 Un calcul plus précis prenant en compte le champ de marée (calcul de $\vec{M}_T = \iiint_{\text{Terre}} \vec{T}\vec{P} \wedge \vec{C}'_L(P) \rho d\tau(P)$) donne $\alpha \simeq 6,5^\circ$

5. Solution séculaire

(a) La solution exacte de l'équation différentielle est :

$$X = X_0 \exp[\varepsilon \{\omega t + \sin \omega t\}]$$

(b) Appliquons le relation (10) :

$$\left(\frac{dX}{dt} \right)_{\text{sec}} = \langle f \rangle_{\text{mouvement non perturbé}} \quad (10)$$

Dans le mouvement non perturbé, $X = \text{constante}$; donc $\langle \varepsilon \omega X (1 + \cos \omega t) \rangle_{\text{mouvement non perturbé}} = \varepsilon \omega X$

Par conséquent, $\left(\frac{dX}{dt}\right)_{\text{sec}} = \varepsilon \omega X$ donc :

$$\boxed{X_{\text{sec}} = X_0 \exp(\varepsilon \omega t)}$$

(c) Aux temps "longs" ($\omega t \gg 1$), la solution exacte tend vers la solution séculaire; celle-ci "gomme" les variations "rapides" de la solution exacte.

6. * Appliquons le théorème du moment cinétique au bourrelet dans son référentiel barycentrique R_T^* :

$\vec{0} = \vec{M}_T(\text{Lune} \rightarrow \text{bourrelet}) + \vec{M}_T(\text{Terre} \rightarrow \text{bourrelet})$ car la masse du bourrelet est négligée autrement dit, le bourrelet "transmet les efforts" : $\vec{M}_T(\text{bourrelet} \rightarrow \text{Terre}) = \vec{M}_T(\text{Lune} \rightarrow \text{bourrelet}) = \vec{M}_T$

* Appliquons le théorème du moment cinétique à la partie solide de la Terre dans son référentiel barycentrique R_T^* :

$$\left(\frac{d(J_T \vec{\Omega}_T)}{dt}\right)_{R_T^*} = \vec{M}_T(\text{bourrelet} \rightarrow \text{Terre}) + \vec{M}_T(\text{Lune} \rightarrow \text{Terre}) = \vec{M}_T + \vec{0} = \vec{M}_T = \left(\frac{d(J_T \vec{\Omega}_T)}{dt}\right)_{R_T^*}$$

$$\boxed{\left(\frac{d(J_T \vec{\Omega}_T)}{dt}\right)_{R_T^*} = \vec{M}_T}$$

* Appliquons le théorème du moment cinétique au système Terre-Lune dans son référentiel barycentrique R_C^* :

$\left(\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right)_{R_C^*} = \vec{0}$ puisque le système Terre-Lune peut-être considéré comme isolé dans R_C^* ; donc :

$$\left(\frac{d(J_T \vec{\Omega}_T + \vec{\sigma}_{\text{orbital}}^*)}{dt}\right)_{R_C^*} = \vec{0} = \vec{M}_T + \left(\frac{d\vec{\sigma}_{\text{orbital}}^*}{dt}\right)_{R_C^*}$$

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{\sigma}_{\text{orbital}}^*}{dt}\right)_{R_C^*} = -\vec{M}_T}$$

On constate donc que le phénomène de marée couple le mouvement de rotation propre de la Terre et le mouvement relatif orbital Terre-Lune

* Appliquons le théorème de la puissance cinétique à la Terre (y compris le bourrelet) dans son référentiel barycentrique R_T^* :

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_T \Omega_T^2\right) = \mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ext}}$ avec $\mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{\text{dis}}$ (puissance totale des forces de frottement à l'interface bourrelet-partie solide)

et $\mathcal{P}_{\text{ext}} = \mathcal{P}(\text{Lune} \rightarrow \text{partie solide sphérique}) + \mathcal{P}(\text{Lune} \rightarrow \text{bourrelet}) = 0 + \vec{M}_T \cdot \vec{\omega}$. Donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_T \Omega_T^2\right) = \mathcal{P}_{\text{dis}} + \vec{M}_T \cdot \vec{\omega}$$

En multipliant scalairement par $\vec{\Omega}_T$ le théorème du moment cinétique appliqué à la Terre, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_T \Omega_T^2\right) = \vec{M}_T \cdot \vec{\Omega}_T$$

On en déduit :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{int}} = \vec{M}_T \cdot (\vec{\Omega}_T - \vec{\omega})}$$

* Appliquons le théorème de la puissance cinétique au système Terre-Lune dans son référentiel barycentrique R_C^* :

$\frac{dK^*}{dt} = \mathcal{P}'_{int} + \mathcal{P}'_{ext}$ avec $\mathcal{P}'_{int} = \mathcal{P}_{dis} + \mathcal{P}(Terre \leftrightarrow Lune) = \mathcal{P}_{dis} - \frac{dE_P}{dt}$ et $\mathcal{P}'_{ext} = 0$ (le système Terre-Lune peut-être considéré comme isolé dans R_C^*); donc :

$$\boxed{\frac{dE^*}{dt} = \frac{d(K^* + E_P)}{dt} = \mathcal{P}_{dis} = \vec{\mathcal{M}}_T \cdot (\vec{\Omega}_T - \vec{\omega})}$$

7. Au sens des évolutions séculaires :

(a) En utilisant les résultats de la question précédente et en appliquant la procédure perturbative, on obtient :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt}\right)_{sec} = \vec{0}, \quad \left(\frac{d\vec{\sigma}_{orbital}}{dt}\right)_{sec} = - \langle \vec{\mathcal{M}}_T \rangle_{\text{mouvement non perturbé}}, \quad \left(\frac{d(J_T \vec{\Omega}_T)}{dt}\right)_{sec} = \langle \vec{\mathcal{M}}_T \rangle_{\text{mouvement non perturbé}}$$

$$\left(\frac{dE^*}{dt}\right)_{sec} = \langle \vec{\mathcal{M}}_T \cdot (\vec{\Omega}_T - \vec{\omega}) \rangle_{\text{mouvement non perturbé}}$$

Or dans le mouvement non perturbé, on a vu que $\vec{\omega} = \omega \vec{z} = \sqrt{\frac{G(m_T + m_L)}{d_L^3}} \vec{z}$, $\vec{\Omega}_T = \Omega_T \vec{z}$, d_L et donc $\vec{\mathcal{M}}_T = \mathcal{M}_T \vec{z} = -\frac{B}{d_L^2} \sin 2\alpha \vec{z}$ sont constants, donc $\langle \vec{\mathcal{M}}_T \rangle_{\text{mouvement non perturbé}} = \vec{\mathcal{M}}_T = -\frac{B}{d_L^2} \sin 2\alpha \vec{z}$ (cf. relation 9) et

$$\langle \vec{\mathcal{M}}_T \cdot (\vec{\Omega}_T - \vec{\omega}) \rangle_{\text{mouvement non perturbé}} = \vec{\mathcal{M}}_T \cdot (\vec{\Omega}_T - \vec{\omega})$$

En supposant qu'en moyenne à une échelle de temps grande devant la période du mouvement non perturbé l'orbite relative reste circulaire, on peut utiliser les expressions (7) et (8) de $\vec{\sigma}^*$ et E^* ; on obtient donc, au sens des évolutions séculaires :

* relativement au moment cinétique et en projection sur \vec{z} :

$$\frac{d\sigma_z^*}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m_T m_L \sqrt{\frac{G d_L}{(m_T + m_L)}} + J_T \Omega_T \right) = \frac{d}{dt} \left(m_T m_L \sqrt{\frac{G d_L}{(m_T + m_L)}} \right) + \frac{d}{dt} (J_T \Omega_T) = 0 \text{ soit encore}$$

$$\frac{d}{dt} \left(m_T m_L \sqrt{\frac{G d_L}{(m_T + m_L)}} \right) - \frac{B}{d_L^2} \sin 2\alpha = 0 \text{ et finalement :}$$

$$\left(\frac{d(d_L)}{dt}\right)_{sec} = \frac{2B \sin 2\alpha}{m_T m_L} \sqrt{\frac{(m_T + m_L)}{G}} d_L^{-\frac{11}{2}}$$

* relativement à l'énergie totale :

$$\frac{dE^*}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \frac{G m_T m_L}{d_L} + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \frac{G m_T m_L}{d_L} \right) + \Omega_T J_T \frac{d(\Omega_T)}{dt} = \mathcal{M}_T \Omega_T - \mathcal{M}_T \omega$$

après simplification ($\Omega_T J_T \frac{d(\Omega_T)}{dt} = \mathcal{M}_T \Omega_T$), on obtient

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \frac{G m_T m_L}{d_L} \right) = -\mathcal{M}_T \omega = \frac{B}{d_L^2} \sin 2\alpha \sqrt{\frac{G(m_T + m_L)}{d_L^3}} \text{ soit finalement la même équation en } d_L. \text{ Les équations du mouvement séculaire sont donc bien compatibles avec une orbite relative qui évolue lentement en restant circulaire}$$

(b) La loi d'évolution séculaire de cette orbite est donc :

$$\boxed{\left(\frac{d(d_L)}{dt}\right)_{sec} = \frac{2B \sin 2\alpha}{m_T m_L} \sqrt{\frac{(m_T + m_L)}{G}} d_L^{-\frac{11}{2}}}$$

(c) Avec $B = 1,35.10^{68} SI$, on trouve $\left(\frac{d(d_L)}{dt}\right)_{sec} \simeq 1,13.10^{-9} m.s^{-1} \simeq 3,6 \text{ cm/an}$

La Lune s'éloigne donc lentement de la Terre à raison de 3,6cm par an

ce qui est en accord avec les mesures

(d) Comme $\omega = \sqrt{\frac{G(m_T + m_L)}{d_L^3}}$, la croissance de d_L entraîne une diminution de ω

La vitesse angulaire ω du mouvement orbital relatif décroît

(e) On a montré plus haut les relations suivantes :

$$\frac{dE^*}{dt} = \mathcal{P}_{dis} = \vec{\mathcal{M}}_T \cdot (\vec{\Omega}_T - \vec{\omega}) \text{ et } \left(\frac{d(J_T \vec{\Omega}_T)}{dt}\right)_{R_C^*} = \vec{\mathcal{M}}_T = J_T \left(\frac{d\vec{\Omega}_T}{dt}\right)_{R_C^*}$$

on en déduit :

$$\boxed{\frac{dE^*}{dt} = J_T (\Omega_T - \omega) \frac{d\Omega_T}{dt} = \mathcal{P}_{dis}} \quad (11)$$

- (f) Les phénomènes dissipatifs font décroître l'énergie totale E^* du système Terre-Lune ($\mathcal{P}_{dis} < 0$); comme $\Omega_T > \omega$, $d\Omega_T < 0$

La vitesse angulaire Ω_T de rotation propre de la Terre décroît

ce qui est conforme avec l'effet de freinage mis qualitativement en évidence plus haut.

- (g) Au "point final" de cette évolution séculaire, d_L ne varie plus; d'après les résultats des questions précédentes, on obtient donc (les grandeurs dans l'état final sont indicées par f) :

$$\omega_f - \text{constante} = \sqrt{\frac{G(m_T + m_L)}{d_{L,f}^3}}$$

$$\left(\frac{d(d_L)}{dt}\right)_{\text{sec}} = 0 \Rightarrow \alpha_f = 0 \Rightarrow \dot{M}_{T_f} = \vec{0} \Rightarrow \Omega_T = \text{constante} = \Omega_{T_f} \text{ et } \mathcal{P}_{dis_f} = 0$$

D'autre part, la dissipation trouvant son origine dans la différence entre ω et Ω_T , il est clair que dans l'état final où la dissipation d'énergie a disparu, on a $\omega_f = \Omega_{T_f}$. Dans le modèle utilisé, le glissement relatif entre le "solide" océan et la partie solide de la Terre a disparu (en réalité les contraintes visqueuses ne travaillent plus).

Le "point" final de l'évolution du système Terre-Lune est caractérisé par la synchronisation du mouvement de rotation propre de la Terre sur le mouvement orbital relatif ($\omega_f = \Omega_{T_f}$).

L'axe du double bourrelet océanique est alors confondu avec la direction Terre-Lune ($\alpha_f = 0$); les contraintes visqueuses ne travaillent plus; la dissipation d'énergie a disparu.

- (h) Par conservation du moment cinétique total, on a d'après la relation (7) :

$$m_T m_L \sqrt{\frac{G d_L}{(m_T + m_L)}} + J_T \Omega_T = m_T m_L \sqrt{\frac{G d_{L_f}}{(m_T + m_L)}} + J_T \Omega_{T_f}$$

soit, en négligeant Ω_{T_f} devant Ω_T :

$$m_T m_L \sqrt{\frac{G d_L}{(m_T + m_L)}} + J_T \Omega_T = m_T m_L \sqrt{\frac{G d_{L_f}}{(m_T + m_L)}}$$

avec $J_T \simeq \frac{2}{5} m_T r_T^2$, on obtient :

$$\boxed{\frac{d_{L_f}}{d_L} = \left(1 + \frac{2}{5} \frac{r_T^2}{m_L} \sqrt{\frac{(m_T + m_L)}{G d_L}} \Omega_T\right)^2 \simeq 1,56}$$

Puis, avec $\omega = \sqrt{\frac{G(m_T + m_L)}{d_L^3}}$, on obtient :

$$\boxed{\frac{\omega_f}{\omega} = \frac{\Omega_{T_f}}{\omega} = \left(\frac{d_L}{d_{L_f}}\right)^{\frac{3}{2}} \simeq 0,515}$$

Le jour solaire de l'état final sera :

$$\boxed{T_f = \frac{2\pi}{\Omega_{T_f}} \simeq \frac{27,322}{0,515} \simeq 53 \text{ jours solaires actuels}}$$

N.B : Ω_T est bien négligeable devant Ω_T puisque $\Omega_T / \Omega_T \simeq 0,019$

En injectant la valeur de Ω_{T_f} trouvée précédemment dans la relation de conservation du moment cinétique et ainsi de suite, on obtient les chiffres significatifs stables suivants après deux itérations :

$$\frac{d_{L_f}}{d_L} \simeq 1,545$$

$$\frac{\omega_f}{\omega} = \frac{\Omega_{T_f}}{\omega} \simeq 0,520 \text{ et } T_f = \frac{2\pi}{\Omega_{T_f}} \simeq 52,49 \text{ jours actuels}$$

- (i) Le mouvement de rotation propre de la Lune est actuellement synchronisé sur le mouvement orbital relatif ($\Omega_L = \omega$); on peut penser que c'est l'aboutissement d'un mécanisme désormais achevé de synchronisation comme celui que nous venons d'étudier; or il est clair que ce mécanisme est d'autant plus efficace (donc plus rapide) que la puissance dissipée est grande. La puissance dissipée par petite déformation d'un corps solide étant faible, il est légitime de soupçonner que la rapidité du phénomène de synchronisation est au moins en partie imputable au caractère visqueux d'une partie de la Lune en mouvement relatif par effet de marée par rapport à sa partie solide (dissipation par travail de contraintes visqueuses).

PARTIE B :
ONDES DE SURFACE LIBRE D'UN LIQUIDE
1 Analyse dimensionnelle de la compétition entre les effets de gravité et de capillarité
1.1 On ne prend en compte que les effets de pesanteur (on néglige les effets de tension superficielle)

$$1. \left. \begin{array}{l} P_A = P_C = P_0 \\ P_B \simeq P_0 + \mu g H \end{array} \right\} \Rightarrow P_B \simeq P_A + \mu g H > P_A$$

L'eau va donc se déplacer de B vers A

Le creux devient bosse et la bosse devient creux... il y a propagation de l'onde de gravité

2. Les paramètres pertinents du problème sont g , λ et μ ; on a donc

$$c_V = \alpha g^a \lambda^b \mu^d \quad (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} [c_V] = LT^{-1} \\ [g^a \lambda^b \mu^d] = (LT^{-2})^a L^b (ML^{-3})^d = L^{a+b-3d} T^{-2a} M^d \end{array} \right\} \Rightarrow a = b = \frac{1}{2} \text{ et } d = 0$$

Par conséquent, on obtient :

$$c_V = \alpha \sqrt{g\lambda}$$

3. Qualitativement, dans l'équation du mouvement $\vec{F} = m\vec{a}$, la masse intervient dans les deux membres de l'équation ($\vec{F} = m\vec{g}$) et s'élimine : par conséquent μ n'intervient pas.

1.2 On ne prend en compte que les effets de tension superficielle (on néglige les effets de pesanteur)

1. D'après la relation de Laplace :

$$P - P_0 = -\frac{\gamma}{R} \quad (13)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_A - P_0 = -\frac{\gamma}{R(A)} = \frac{\gamma}{R(C)} \\ P_C - P_0 = -\frac{\gamma}{R(C)} \\ P_B = P_C \end{array} \right\} \Rightarrow P_B = P_A - 2\frac{\gamma}{R(C)} > P_A \text{ car } R(C) = \left[\left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} \right) (C) \right]^{-1} < 0$$

L'eau va donc se déplacer de B vers A; le mécanisme de capillarité agit dans le même sens que la gravité. Le creux devient bosse et la bosse devient creux... il y a propagation de l'onde de capillarité

2. Les paramètres pertinents sont μ , λ et γ ; donc $c_S = \alpha' \mu^{a'} \lambda^{b'} \gamma^{d'}$; en remarquant que γ est homogène à une force par unité de longueur, on a :

$$\left. \begin{array}{l} [c_S] = LT^{-1} \\ [\mu^{a'} \lambda^{b'} \gamma^{d'}] = (ML^{-3})^{a'} L^{b'} (MT^{-2})^{d'} = M^{a'+d'} L^{-3a'+b'} T^{-2d'} \end{array} \right\} \Rightarrow a' = b' = -\frac{1}{2} \text{ et } d' = \frac{1}{2}$$

Par conséquent, on obtient :

$$c_S = \alpha' \sqrt{\frac{\gamma}{\mu\lambda}}$$

1.3 Longueur capillaire; nombre de Bond

1. (a) l_C est l'unique grandeur homogène à une distance que l'on puisse définir à partir des grandeurs γ , μ et g . En effet :

$$l_C = \gamma^{a''} \mu^{b''} g^{c''} \Rightarrow [l_C] = L = (MT^{-2})^{a''} (ML^{-3})^{b''} (LT^{-2})^{c''}; \text{ on trouve :}$$

$$l_C = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu g}}$$

(b) Dans le cas de l'eau, on calcule :

$$l_C \simeq 2,7 \text{ mm}$$

$$2. R(C) = \left[\left(\frac{\partial^2 z_{\text{su}}}{\partial x^2} \right) (C) \right]^{-1}$$

En termes d'ordres de grandeur (odg), on a : $R(C) \sim - \left[\frac{H/2}{(\lambda/2)^2} \right]^{-1}$, soit :

$$R(C) \sim - \left[\frac{\lambda^2}{H} \right]$$

(Le facteur 2 est non significatif en termes d'odg et n'est pas pris en compte)

(a) En négligeant les phénomènes de capillarité, on a, en termes d'ordres de grandeur :

$$[P_B - P_A]_V \sim \mu g H$$

En négligeant la gravité, on a, en termes d'ordres de grandeur :

$$[P_B - P_A]_S \sim - \frac{2\gamma}{R(C)} \sim - \frac{\gamma}{-\left[\frac{\lambda^2}{H} \right]} \sim \frac{\gamma H}{\lambda^2}$$

(Le facteur 2 est non significatif en termes d'odg et n'est pas pris en compte)

On remarque donc que :

$$\frac{[P_B - P_A]_V}{[P_B - P_A]_S} \sim \frac{\mu g \lambda^2}{\gamma} = \left(\frac{\lambda}{l_C} \right)^2 = B_0 \quad (14)$$

On a vu que la surpression $P_B - P_A$ constitue le "moteur" du phénomène de rappel assurant la propagation de l'onde ; le nombre de Bond, rapport des surpressions grave et capillaire, mesure donc la "balance" entre les effets de volume (gravité) et de surface (capillarité).

* Onde de gravité :

Lorsque $B_0 \gg 1$ soit $\lambda \gg l_C$, l'onde est contrôlée par la gravité (les effets de tension superficielle sont négligeables) ; la célérité de l'onde est alors $c \simeq c_V$

(b)

* Onde de capillarité :

Lorsque $B_0 \ll 1$ soit $\lambda \ll l_C$, l'onde est contrôlée par la capillarité (les effets de gravité sont négligeables) ; la célérité de l'onde est alors $c \simeq c_S$

* Onde de gravité :

Lorsque $B_0 \gg 1$ soit $\lambda \gg l_C$, on vérifie que $\frac{c_V}{c_S} \sim \sqrt{\frac{\mu g \lambda^2}{\gamma}} \sim \frac{\lambda}{l_C} \gg 1$

(c)

* Onde de capillarité :

Lorsque $B_0 \ll 1$ soit $\lambda \ll l_C$, on vérifie que $\frac{c_V}{c_S} \sim \sqrt{\frac{\mu g \lambda^2}{\gamma}} \sim \frac{\lambda}{l_C} \ll 1$

2 Equations générales des ondes linéaires

2.1 Généralités

1. Approximation hydrodynamique

(a) Cette approximation consiste à traiter le fluide comme un milieu continu

L'échelle mésoscopique est intermédiaire entre les échelles microscopique et macroscopique. Les grandeurs locales de la mécanique des milieux continus sont nivelées i.e moyennées spatialement sur un petit élément de volume entourant le point considéré : cet élément de volume est petit à notre échelle (mesure locale) mais grand à l'échelle des molécules (typiquement $(10 \text{ nm})^3$).

(b) Un milieu peut être considéré comme continu si le libre parcours moyen l des particules qui le constituent est petit devant la taille caractéristique L de ce milieu, i.e si le nombre de Knudsen $\frac{l}{L}$ est petit devant 1.

2. Dérivées lagrangienne et eulérienne

- (a) En variables d'Euler, on considère l'évolution de la grandeur physique en un point donné de l'espace ; cette grandeur concerne les différentes particules passant au point considéré au cours du temps. En variables de Lagrange, on considère l'évolution de la grandeur physique d'une particule matérielle déterminée qu'on suit dans son mouvement.

(b) $\frac{\partial G}{\partial t}(M, t)$ = dérivée eulérienne de $G = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{G(M, t + \Delta t) - G(M, t)}{\Delta t} \right)$

$\frac{DG}{Dt}(M, t)$ = dérivée lagrangienne de $G = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{G(M', t + \Delta t) - G(M, t)}{\Delta t} \right)$

où M' est la position à l'instant $t + \Delta t$ de la particule se trouvant en M à l'instant t

Où a $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ et $M(x, y, z)$ avec $\vec{v}(M, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{x} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{y} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{z} \right)$

donc $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{G(M', t + \Delta t) - G(M, t)}{\Delta t} \right) = \frac{\partial G}{\partial t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta t} \right)$

$v_x \frac{\partial G}{\partial x} + v_y \frac{\partial G}{\partial y} + v_z \frac{\partial G}{\partial z}$

Finalement :

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + v_x \frac{\partial G}{\partial x} + v_y \frac{\partial G}{\partial y} + v_z \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) G$$

3. Soit $M(t)$ la masse de la matière contenue à l'instant t dans un volume \mathcal{V} limité par une surface de contrôle S fixe (système ouvert).

La masse d'un système fermé étant conservative, on a :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\delta M_{\text{entrant par convection}}}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \mu d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mu}{\partial t} d\tau$$

et la masse entrant dans \mathcal{V} pendant dt par un élément de surface dS est $\mu dt \vec{v} \cdot d\vec{S}_e$ où $d\vec{S}_e$ est le vecteur élément de surface entrant (dirigé vers l'intérieur) ; donc :

$$\frac{\delta M_{\text{entrant par convection}}}{dt} = \iint_S \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}_e = - \iint_S \mu \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (\text{où } d\vec{S} \text{ est "ostrogradskien" i.e dirigé vers l'extérieur})$$

soit $\frac{\delta M_{\text{entrant par convection}}}{dt} = - \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\mu \vec{v}) \cdot d\tau$

On a donc à toute échelle de volume \mathcal{V} : $\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mu}{\partial t} d\tau = - \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\mu \vec{v}) \cdot d\tau$

Par conséquent :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0 = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \cdot \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mu$$

or $\frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \mu = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mu$

Finalement :

$$\boxed{\frac{D\mu}{Dt} + \mu \cdot \text{div} \vec{v} = 0} \quad (15)$$

2.2 Equation du mouvement

1. L'équation d'Euler est le théorème de la résultante dynamique appliqué à une particule fluide dans les conditions de l'énoncé ; le référentiel d'étude est galiléen ; les seules forces à distance sont les actions de pesanteur ; les forces de contact sont les forces de pression puisque l'écoulement est parfait (la viscosité de cisaillement η est nulle) et incompressible (la deuxième viscosité de volume ζ n'intervient pas puisque $\text{div} \vec{v} = 0$). On sait que les forces de pression équivalent à une distribution de forces de densité volumique $-\text{grad} P$. On a donc :

$$\boxed{\mu \vec{a} = \mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \mu \vec{g} - \text{grad} P} \quad (16)$$

2. Au cours d'une période T d'oscillation des particules dans l'onde, ces particules parcourent une distance de l'ordre de a ; l'ordre de grandeur de la vitesse de leur mouvement est donc $V \sim \frac{a}{T}$; d'autre part l'échelle spatiale caractéristique de variation de cette vitesse dans l'onde est $\lambda = cT$. Donc :

$$a \ll \lambda \Leftrightarrow V \ll c$$

3. $\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\| \sim \frac{V}{T}$ et $\left\| (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right\| \sim \frac{V^2}{\lambda}$ donc $\frac{\left\| (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right\|}{\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{V}{c} \ll 1$

A cet ordre d'approximation, l'équation d'Euler s'écrit donc :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \mu \vec{g} - \text{grad} P$$

4. Incompressibilité de l'écoulement

- (a) En considérant en termes d'ordre de grandeur l'équation d'Euler linéarisée (selon la direction de propagation de l'onde), on obtient :

$$\mu \frac{V}{T} \sim \frac{\Delta P}{\lambda} \text{ soit}$$

$$\Delta P \sim \frac{\lambda \mu V}{T} \sim \mu c V$$

- (b) (15) $\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mu + \mu \cdot \text{div} \vec{v} = 0$

En exploitant la relation :

$$\Delta P = c_{son}^2 \Delta \mu \quad (17)$$

on a, en termes d'ordres de grandeur :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mu}{\partial t} \right| &\sim \frac{\Delta \mu}{T} \sim \frac{c \Delta \mu}{\lambda} \sim \frac{c \Delta P}{\lambda c_{son}^2} \sim \frac{\mu V}{\lambda} \frac{c^2}{c_{son}^2} \\ \left| \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mu \right| &\sim \frac{V \Delta \mu}{\lambda} \sim \frac{V \Delta P}{\lambda c_{son}^2} \sim \frac{\mu V}{\lambda} \frac{c^2}{c_{son}^2} \frac{V}{c} \\ \left| \mu \cdot \text{div} \vec{v} \right| &\sim \mu \frac{V}{\lambda} \end{aligned}$$

$$(V \ll c \ll c_{son}) \Rightarrow \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mu}{\frac{\partial \mu}{\partial t}} \right| \sim \frac{V}{c} \ll 1 \text{ et } \frac{\left| \mu \cdot \text{div} \vec{v} \right|}{\left| \frac{\partial \mu}{\partial t} \right|} \sim \frac{c^2}{c_{son}^2} \ll 1$$

donc (15) se simplifie en :

$$(V \ll c \ll c_{son}) \Rightarrow \text{div} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \text{écoulement incompressible}$$

L'équation (15) donne alors $\frac{D\mu}{Dt} = 0$

La masse volumique de toutes les particules fluides se conservent donc sur leurs trajectoires; le fluide étant initialement homogène, la masse volumique est initialement uniforme et donc le reste.

$$\mu \text{ est donc une constante indépendante de } M \text{ et de } t$$

- (c) L'incompressibilité d'un fluide non confiné tient à la tendance des molécules à se partager l'espace disponible; si une action vient localement contrarier cette tendance, les molécules s'en informent de proche en proche, et cela avec une vitesse c_{son} ; par suite, si la célérité du son est très grande devant les vitesses caractéristiques V et c de l'écoulement considéré, on peut considérer que l'ensemble des molécules réagissent instantanément à cette action et donc que le fluide ne révèle pas son caractère compressible dans ces conditions.

- (d)

$$\text{Dans l'eau : } c_{son} \approx 1400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

5. En général, les inconnues sont \vec{v} , P et μ (5 inconnues scalaires) et les relations mécaniques (15) et (16) fournissent 4 relations scalaires; il faut donc ajouter une hypothèse thermodynamique pour résoudre le problème (prise en compte des éventuels transferts entre les formes macroscopiques de l'énergie et ses formes microscopiques).

Dans le cas d'un écoulement parfait incompressible, μ restant constant est connu ce qui réduit à 4 le nombre d'inconnues scalaires; les relations mécaniques (15) et (16) permettent à elles-seules de résoudre le problème: cela traduit le découplage entre les variables mécaniques et thermiques.

6. Avec $\mu = \text{constante}$ et $\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(gz)$, l'équation d'Euler linéarisée s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\mu} + gz\right) = \vec{0}$$

En prenant le rotationnel de la relation précédente, on obtient $\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v})}{\partial t} = \vec{0}$
 $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$ est donc indépendant de t , donc égal à sa valeur moyenne temporelle $\langle \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \rangle$

Donc $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \langle \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \rangle = \overrightarrow{\text{rot}} \langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$ (dans un tel mouvement vibratoire périodique la valeur moyenne temporelle de la vitesse est nulle)

L'écoulement est donc irrotationnel à cet ordre d'approximation ($\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$)

7. Donc $\exists \varphi$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$
 Avec $\text{div} \vec{v} = 0$, on obtient :

$$\Delta \varphi = 0 \tag{18}$$

L'équation d'Euler s'écrit alors :

$$\frac{\partial(\overrightarrow{\text{grad}}\varphi)}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\mu} + gz\right) = \vec{0} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{P}{\mu} + gz\right) \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{P}{\mu} + gz &= f(t) \\ f(t) &\text{ étant une fonction du temps} \end{aligned} \tag{19}$$

2.3 Conditions aux limites cinématiques

1. L'écoulement étant parfait (viscosité négligée), les c.a.l cinématiques expriment la conservation de la composante de la vitesse normale à tout interface; le mouvement relatif particule de l'interface/interface est donc purement tangentiel à l'interface; autrement dit les particules fluide glissent le long de l'interface sans la traverser; par conséquent :

Une particule fluide de la surface libre reste constamment sur cette surface

2. Si une particule vérifie $z = \xi$ à un instant t , elle le vérifie ultérieurement; donc :

$$(w)_{(z=\xi)} = \left(\frac{Dz}{Dt}\right)_{(z=\xi)} = \left(\frac{D\xi}{Dt}\right)_{(z=\xi)} \tag{20}$$

De même, si une particule vérifie $z = z_0$ à un instant t , elle le vérifie ultérieurement; donc :

$$(w)_{(z=z_0)} = \left(\frac{Dz}{Dt}\right)_{(z=z_0)} = \left(\frac{Dz_0}{Dt}\right)_{(z=z_0)} \tag{21}$$

3. (a) * Le fond fixe vérifie $z = 0$; on a donc $\xi = 0$ et la relation (20) s'écrit :

$$(w)_{(z=0)} = 0$$

Avec $\vec{v}(M \in \text{fluide}) = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$, on obtient :

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]_{(z=0)} = 0 \tag{22}$$

* La surface libre vérifie $z \approx z_0(x, t)$; la relation (21) s'écrit :

$$(w)_{(z=z_0)} = \left(\frac{Dz_0}{Dt}\right)_{(z=z_0)} = \frac{\partial z_0}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} z_0)_{(z=z_0)}$$

avec $\vec{v} = u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z}$ et $\vec{\nabla} z_0 = \frac{\partial z_0}{\partial x}\vec{x}$, on obtient :

$$(w)_{(z=z_0)} = \frac{\partial z_0}{\partial t} + (u)_{(z=z_0)} \frac{\partial z_0}{\partial x}$$

Avec $\vec{v}(M \in \text{fluide}) = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$, on obtient :

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{(z=z_0)} = \frac{\partial z_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{(z=z_0)} \frac{\partial z_0}{\partial x}$$

(b) Les particules fluides glissent le long de la surface libre ; autrement dit, la vitesse verticale w d'une particule est clairement la somme de la vitesse verticale de la surface libre (à savoir $\frac{\partial z_0}{\partial t}$) et de la composante verticale de la vitesse de glissement (à savoir $(u)_{z=z_0} \tan \alpha$ où α est l'angle que fait la tangente à la surface libre avec l'axe $Ox \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\partial z_0}{\partial x}$ et $(u)_{z=z_0} \tan \alpha = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{z=z_0} \cdot \frac{\partial z_0}{\partial x}$)

(c) Avec $a \ll \lambda$, on a, en o.d.g :

$$\left. \left(\frac{\partial z_0}{\partial t} \sim \frac{H}{T} \quad \frac{\partial z_0}{\partial x} \sim V \frac{H}{\lambda} \sim \frac{a}{T} \frac{H}{\lambda} \right) \right\} \Rightarrow \left(a \ll \lambda \Rightarrow \left\| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{(z=z_0)} \frac{\partial z_0}{\partial x} \right\| \ll \left\| \frac{\partial z_0}{\partial t} \right\| \right)$$

et la condition aux limites sur la surface libre s'écrit, à cet ordre d'approximation :

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{(z=z_0)} = \frac{\partial z_0}{\partial t}$$

4. La relation (19) pointée sur la surface libre donne :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=z_0} + \frac{P(z=z_0)}{\mu} + gz_0 = f(t)$$

D'après la relation de Laplace (13) :

$$P(z=z_0) = P_0 - \gamma \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}$$

donc : $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=z_0} + \frac{P_0}{\mu} - \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + gz_0 = f(t)$, ce qui donne, par dérivation par rapport au temps :

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{z=z_0} - \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial^3 z_0}{\partial t \partial x^2} + g \frac{\partial z_0}{\partial t} = f'(t)$$

en injectant la condition aux limites sur la surface libre : $\frac{\partial^3 z_0}{\partial t \partial x^2} = \frac{\partial^3 z_0}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=z_0} \right] = \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} \right)_{z=z_0}$, la condition aux limites portant sur φ sur la surface libre s'écrit donc :

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{(z=z_0)} = f'(t)$$

Avec $H \ll h$, z_0 est assimilable à h et on obtient à l'ordre un :

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{(z=h)} = f'(t) \quad (23)$$

3 Relation de dispersion et mise en évidence des cas limites

3.1 Relation de dispersion

- * Le milieu est illimité dans la direction \vec{x} ; il est donc "naturel" de chercher des solutions présentant un caractère progressif en x assuré par le couplage spatio-temporel entre x et t ; à z fixé, le potentiel réel candidat est du type $A \cos(\omega t - kx)$.

* Le milieu est limité dans la direction \vec{z} ; il est donc "naturel" de chercher des solutions présentant un caractère stationnaire en z assuré par le découplage spatio-temporel entre z et t ; à x fixé, le potentiel réel candidat est à variables séparées du type $\Psi(z) \cos(\omega t + \varphi)$.

2. φ satisfait à l'équation de Laplace (18) ainsi qu'aux conditions aux limites (22) et (23).

On cherche des solutions de la forme :

$$\varphi(x, z, t) = \Psi(z) \exp [i(\omega t - kx)] \quad (24)$$

* (18) donne : $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$ soit $-k^2 \Psi + \frac{d^2 \Psi}{dz^2} = 0$ soit $\Psi(z) = A \cosh(kz) + B \sinh(kz)$

* (22) $\rightarrow \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)_{z=0} = 0 \Rightarrow B = 0$

* (23) $\Rightarrow \left[-\omega^2 A \cosh(kh) + \frac{2}{\mu} A k^3 \sinh(kh) + g A k \sinh(kh)\right] \exp [i(\omega t - kx)] = f'(t)$

Cette dernière relation doit être vérifiée $\forall x$ et $\forall t$

$\Rightarrow \omega^2 = \left(gk + \frac{2}{\mu} k^3\right) th(kh)$ et $f' = 0$

Finalement, f est une constante et la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = \sqrt{gk \left[1 + (kl_C)^2\right] th(kh)} \quad (25)$$

où $l_C = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu g}}$ est la "longueur capillaire"

3.2 Cas des ondes de gravité (vagues).

1. Vitesse de phase

(a) Les effets de gravité dominent lorsque $(kl_C)^2 \ll 1$ i.e. $\lambda \gg l_C$

$$\text{ondes de gravité} \Leftrightarrow \lambda \gg l_C$$

$$(b) \sqrt{1 + (kl_C)^2} \simeq 1 + \frac{(kl_C)^2}{2}$$

En pratique, avec $l_C \simeq 2,7 \text{ mm}$, si on tolère une erreur maximale de 1%, il faut $\frac{(kl_C)^2}{2} < 0,01$, soit $\lambda > 12 \text{ cm}$

$$\text{Le domaine des ondes de gravité est défini par } \lambda > 12 \text{ cm}$$

(c) dans ce domaine, la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = \sqrt{gk th(kh)}$$

et la vitesse de phase :

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} th(kh)} = \sqrt{g \frac{\lambda}{2\pi} th(kh)}$$

2. Ondes de gravité en eau profonde

(a) En eau profonde ($kh \gg 1$), $th(kh) \simeq 1$ et

$$c \simeq \sqrt{g \frac{\lambda}{2\pi}}$$

On retrouve bien l'expression c_V obtenue à la question 1 de la sous-section 1.1 par analyse dimensionnelle.

On remarque que la célérité est contrôlée par la longueur d'onde

(b) En pratique, $\sqrt{th(kh)}$ est assimilable à 1 à mieux que 1% près pour $kh > 2,3$ soit $h > 0,4\lambda$

$$\text{Le domaine des ondes de gravité en eau profonde est défini par } 12 \text{ cm} < \lambda < 2,5h \Rightarrow h > 4,8 \text{ cm}$$

La vitesse de phase dépendant de la longueur d'onde, le milieu est dispersif : il présente une dispersion normale puisque la célérité est une fonction croissante de la longueur d'onde (les grandes longueurs d'onde se propagent plus vite que les courtes).

3. En eau peu profonde ($kh \ll 1$), $th(kh) \simeq kh$ et $c \simeq \sqrt{gh}$

La vitesse de phase est indépendante de la longueur d'onde; le milieu n'est donc pas dispersif mais on peut remarquer que la vitesse de phase dépend de la profondeur de la nappe d'eau.

En pratique, $\sqrt{th(kh)} \simeq \sqrt{kh - \frac{(kh)^3}{3}} \simeq \sqrt{kh} \left(1 - \frac{(kh)^2}{6}\right)$ est assimilable à \sqrt{kh} à mieux que 1% près pour $kh < 0.25$ soit $h < 0.04\lambda$

célérité des ondes de gravité en eau peu profonde :

$$c = \sqrt{gh} \text{ (pas de dispersion)}$$

la profondeur contrôle la célérité

Le domaine des ondes de gravité en eau peu profonde est défini par $\lambda > 12cm$ et $\lambda > 25h$

3.3 Cas des ondes de capillarité (rides).

1. Vitesse de phase

- (a) Les effets de capillarité dominent lorsque $(kl_C)^2 \gg 1$ i.e $\lambda \ll l_C$

$$\text{ondes de capillarité} \Leftrightarrow \lambda \ll l_C$$

- (b) $\sqrt{1 + (kl_C)^2} = kl_C \sqrt{1 + \frac{1}{(kl_C)^2}} \simeq kl_C \left(1 + \frac{1}{2(kl_C)^2}\right)$ est assimilable à kl_C à mieux que 1% près pour $kl_C > 7,1$

En pratique, avec $l_C \simeq 2,7mm$, il faut $\lambda < 2,4mm$

$$\text{Le domaine des ondes de capillarité est défini par } \lambda < 2,4mm$$

- (c) dans ce domaine, la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = \sqrt{gk^3 l_C^2 th(kh)}$$

et la vitesse de phase :

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gk l_C^2 th(kh)} = \sqrt{\frac{2\pi \gamma}{\lambda \mu} th(kh)}$$

2. Ondes capillaires en eau profonde

- (a) En eau profonde ($kh \gg 1$), $th(kh) \simeq 1$ et

$$c \simeq \sqrt{\frac{2\pi \gamma}{\lambda \mu}}$$

On retrouve bien l'expression c_S obtenue plus haut par analyse dimensionnelle.

On note que la longueur d'onde contrôle la célérité

- (b) En pratique, on a vu que $\sqrt{th(kh)}$ est assimilable à 1 à mieux que 1% près pour $h > 0,4\lambda$

$$\text{Le domaine des ondes de capillarité en eau profonde est défini par } \lambda < 2,4mm \text{ et } \lambda < 2,5h$$

- (c) La vitesse de phase dépendant de la longueur d'onde, le milieu est dispersif; il présente une dispersion anormale puisque la célérité est une fonction décroissante de la longueur d'onde (les grandes longueurs d'onde se propagent moins vite que les courtes).

3. En eau peu profonde, on a vu que $\sqrt{th(kh)}$ est assimilable à \sqrt{kh} à mieux que 1% près pour $h < 0,04\lambda$. Le domaine des ondes de capillarité en eau peu profonde est donc défini par $\lambda < 2,4mm$ et $h < 0,1mm$; or à cette échelle de profondeur la viscosité ici négligée joue un rôle important. L'expression de la célérité obtenue dans ce cas limite n'a donc pas beaucoup de sens!

4. Dans l'approximation en eau profonde ($\sqrt{th(kh)} \simeq 1$), réalisée à mieux que 1% près lorsque $h > 0,4\lambda$, la relation (25) s'écrit :

$$\omega = \sqrt{gk \left[1 + (kl_C)^2 \right]}$$

et la célérité :

$$c = \sqrt{g \left[\frac{1}{k} + k(l_C)^2 \right]}$$

c passe par un minimum lorsque $\frac{1}{k} = k(l_C)^2$ (somme de deux termes de produit constant)

$$c \text{ passe par un minimum pour } k = \frac{1}{l_C}$$

4 Ondes créées à la surface de l'eau (en eau profonde) par la chute d'un objet

1. La chute d'un objet dans l'eau crée une perturbation dont le spectre a une extension $[k_1, k_2]$ (ou $[\omega_1, \omega_2]$) liée à la masse de l'objet et à sa taille; les différentes composantes sinusoïdales de cette perturbation initiale se propagent indépendamment les unes des autres à des vitesses différentes puisque le milieu est dispersif en eau profonde : les composantes de Fourier se détachent du paquet initial, les plus rapides devant les autres.

Dans le cas de la chute d'une pierre, les "grandes" longueurs d'onde dominant dans le spectre et le paquet d'ondes est principalement constitué d'ondes de gravité ($\lambda > 12\text{cm}$) pour lesquelles la dispersion est normale; les plus grandes longueurs d'onde du spectre se propagent plus vite que les courtes, ce que mettent en évidence les trois clichés des figures 9, 10 et 11. Au fur et à mesure que le temps s'écoule, subsistent dans le champ les composantes les moins rapides i.e. de plus courtes longueurs d'onde.

2. Dans le cas de la figure 12 (chute d'un petit gravier), on peut penser que le spectre de la perturbation initiale est principalement constitué d'ondes de capillarité ($\lambda < 2,4\text{mm}$) ou d'ondes pour lesquelles la capillarité ne saurait être négligée. On observe effectivement un cas de dispersion anormale, les courtes longueurs d'onde se propageant plus vite que les grandes.

5 La houle irrotationnelle de Stokes

5.1 Généralités

1. Considérons une petite perturbation de la surface libre plane, faisant apparaître des "petits" creux et des "petites" bosses; la vitesse du vent est plus importante au niveau d'une bosse qu'au niveau d'un creux si bien que la pression régnant au dessus d'une bosse est plus faible que celle régnant au dessus d'un creux (d'après le théorème de Bernoulli) ce qui va dans le sens d'une amplification de la perturbation initiale.
2. La houle est une onde de gravité pure car $\lambda \gg l_C$.
3. Considérons la relation (19) pointée sur la surface libre :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=z_0} + \frac{P(z=z_0)}{\mu} + gz_0 = f$$

soit, à l'ordre d'approximation considéré ($H \ll h$) et en négligeant les effets de capillarité :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=h} + \frac{P_0}{\mu} + gz_0 = f$$

ce qui donne (cf. 2 de la sous-section 3.1) : $i\omega A \exp[i(\omega t - kx)] + \frac{P_0}{\mu} + gz_0 = f$

or on avait montré (2) que $f = \text{constante}$ que l'on peut déterminer en considérant la valeur moyenne de la relation précédente, soit $\frac{P_0}{\mu} + gh = f$, donc (sur \mathbb{C}) $z_0 = h - \frac{i\omega}{g} A \exp[i(\omega t - kx)]$

En en prenant la partie réelle et en faisant apparaître le creux H de la surface libre ($\frac{H}{2} = \frac{\omega^4}{g} ch(kh)$), on obtient :

$$\Psi(z) = Ach(kz) = \frac{Hg}{2\omega} \frac{ch(kz)}{ch(kh)}$$

4. et donc

$$z_0 = h + \frac{H}{2} \sin(\omega t - kx)$$

La surface libre est donc sinusoïdale à cet ordre d'approximation.

5. Champ des vitesses

(a) En prenant la partie réelle du potentiel complexe des vitesses :

$$\varphi = Ach(kz) \cos(\omega t - kx) = \frac{Hg}{2\omega} \frac{ch(kz)}{ch(kh)} \cos(\omega t - kx)$$

donc :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{Hgk}{2\omega} \frac{ch(kz)}{ch(kh)} \sin(\omega t - kx) \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{Hgk}{2\omega} \frac{sh(kz)}{ch(kh)} \cos(\omega t - kx) \end{aligned}$$

or $\frac{\omega}{k} = c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} th(kh)}$ (onde de gravité pure) et $\lambda = cT$ donc :

$$c = \frac{gT}{2\pi} th(kh)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\pi H}{T} \frac{ch(kz)}{sh(kh)} \sin(\omega t - kx) \\ w &= \frac{\pi H}{T} \frac{sh(kz)}{sh(kh)} \cos(\omega t - kx) \end{aligned}$$

(b) Donc

$$\begin{aligned} u_{\max} &= \frac{\pi H}{T} \frac{ch(kh)}{sh(kh)} \\ w_{\max} &= \frac{\pi H}{T} \end{aligned}$$

5.2 Cas de la houle en eau profonde ($kh \gg 1$ soit $h \gg \lambda$).

1. Hiérarchie des paramètres géométriques

(a) $kh \gg 1 \Rightarrow u_{\max} \sim w_{\max} \sim \frac{H}{T} \Rightarrow V \sim \frac{H}{T} \sim \frac{a}{T}$

Les vitesses horizontale et verticale ont même ordre de grandeur ($\frac{H}{T}$)

(b) L'échelle spatiale caractéristique du mouvement des particules fluides est donc $a \sim H$

(c) La condition de linéarisation de l'équation d'Euler impose $a \ll \lambda$ soit $H \ll \lambda$. On a donc :

$$H \ll \lambda \ll h$$

2. En eau profonde, $c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$; avec $\lambda = 100m$, on calcule :

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \simeq 12,5m.s^{-1} \text{ et } T = \frac{\lambda}{c} \simeq 8s$$

3. On a vu plus haut que cette relation est vérifiée à mieux que 1% près lorsque :

$$h > \frac{\lambda}{2,5} = 40m$$

4. En eau profonde, le milieu est dispersif; le spectre du train d'ondes produit dans le fetch a une certaine étendue; les composantes sinusoïdales de grande longueur d'onde se propagent plus vite ce qui provoque l'étalement du train. Loin du fetch, les composantes de grande longueur d'onde précèdent celles de courte longueur d'onde; or la période varie comme $\sqrt{\lambda}$

Les composantes de grande période précèdent celles de courte période

cf. clichés des figures 9, 10 et 11.

5. On peut interpréter le phénomène en évoquant les battements entre deux composantes sinusoïdales de périodes voisines du spectre de la houle.

5.3 Cas de la houle en eau peu profonde ($kh \ll 1$ soit $h \ll \lambda$).

1. Hiérarchie des paramètres géométriques

(a) $kh \ll 1 \Rightarrow u_{\max} \sim \frac{\pi H}{T} \frac{1}{kh} \sim \frac{H}{T} \frac{\lambda}{h}$ et $w_{\max} \sim \frac{H}{T} \Rightarrow \frac{w_{\max}}{u_{\max}} \sim \frac{h}{\lambda} \ll 1$
 donc $V \sim u_{\max} \sim \frac{H}{T} \frac{\lambda}{h} \sim \frac{g}{T}$

$$\frac{w_{\max}}{u_{\max}} \sim \frac{h}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow \text{La vitesse verticale est négligeable devant la vitesse horizontale}$$

(b) L'échelle spatiale caractéristique du mouvement des particules fluides est $a \sim H \frac{\lambda}{h}$

(c) La condition de linéarisation de l'équation d'Euler impose $a \sim H \frac{\lambda}{h} \ll \lambda$ soit $H \ll h$. On a donc :

$$H \ll h \ll \lambda$$

2. En eau peu profonde, $c = \sqrt{gh}$

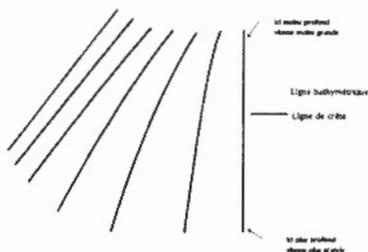
La diminution de c avec la profondeur h a les conséquences suivantes :

Si la houle se propage normalement aux lignes bathymétriques, sa longueur d'onde diminue à l'approche du rivage car sa période reste constante;

les lignes de crêtes sont donc de plus en plus serrées au fur et à mesure de la progression vers le rivage

3. Lorsque la direction de propagation de la houle est quelconque par rapport aux lignes bathymétriques, les célérités sont différentes en deux points d'une même ligne de crête de houle; les lignes de crête ne restent donc pas parallèles; elles se resserrent du côté des petites profondeurs (voir figure ci-dessous)

la houle "tourne" en ce sens que les lignes de crêtes tendent à devenir parallèles aux lignes bathymétriques



- (a) En eau peu profonde (à l'approche du rivage), $c = \sqrt{gh}$; la célérité de l'onde diminue lorsque la profondeur diminue tandis que la vitesse caractéristique des particules fluides ($V \sim c \frac{H}{h} \sim H \sqrt{\frac{g}{h}}$) augmente (h diminue et H augmente!).
Il est donc clair que la condition de linéarisation ($V \ll c$) finit par ne plus être vérifiée et les effets de non-linéarité finissent par se faire sentir.
- (b) La vitesse du fluide sur la crête des vagues augmente tandis que la célérité de la vague diminue; la vague se déforme donc par un "raidissement" de son front.
- (c) Ce raidissement peut conduire au déferlement de la vague lorsque la vitesse du fluide sur la crête devient supérieure à la célérité de l'onde.

6 Un exemple d'onde non linéaire : l'onde "solitaire"

1. Dispersion en fréquence

- (a) Par la relation $\Delta x \times \Delta k \sim 1$, on obtient $\Delta k \sim \frac{1}{d}$
D'autre part, $k_{\min} = 0$ puisque le profil présente une valeur moyenne non nulle
Donc :

$$k_{\min} = 0 \text{ et } k_{\max} \sim \frac{1}{d}$$

- (b) On a $kh < \frac{h}{d} < 1$

kh n'étant pas négligeable devant 1, on ne peut pas assimiler $th(kh)$ à kh ni donc c à \sqrt{gh}

Néanmoins, $(kh)^2 < (\frac{h}{d})^2 \ll 1$, donc $th(kh) \simeq kh - \frac{(kh)^3}{6}$

donc $c = \sqrt{\frac{g}{k} th(kh)} \simeq \sqrt{gh} \left(1 - \frac{(kh)^2}{6} \right)$

c dépend donc de k à cet ordre d'approximation : le milieu est dispersif.

Les composantes de Fourier de l'onde se propagent à des vitesses différentes ce qui tend à produire un étalement du profil.

- (c) En laissant "tomber" le facteur 6 dans ce calcul en ordres de grandeur :

$$\left. \begin{array}{l} c_{\min} \sim \sqrt{gh} \left[1 - \left(\frac{h}{d} \right)^2 \right] \\ c_{\max} = \sqrt{gh} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta c \sim \sqrt{gh} \left(\frac{h}{d} \right)^2$$

2. Dans le cas d'une onde sinusoïdale en eau peu profonde contrôlée uniquement par la profondeur, $c = \sqrt{gh}$

A la base du profil : $c = \sqrt{gh}$

Au sommet du profil : $c = \sqrt{g(h+H)} \simeq \sqrt{gh} \left(1 + \frac{H}{2h} \right)$

$$\Delta c' \sim \sqrt{\frac{g}{h}} H$$

3. Dans l'onde solitaire les phénomènes de dispersion en fréquence et en amplitude se compensent.
En ordres de grandeur, on a :

$$\Delta c \sim \Delta c' \Leftrightarrow U = \frac{Hd^2}{h^3} \sim 1$$

Références

- [1] L.LANDAU et E.LIFCHITZ : "*Mécanique*" (Mir,1969)
- [2] R.FEYNMAN : "*La nature de la physique*" (Ed. du seuil,1980)
- [3] J.M.BONNET-BIDAUD : "*Les éternels succès de Newton*" (Science et vie hors série, déc. 1998)
- [4] H.GIE : "*Les effets de marée*" (BUP n°652, mars 1983)
- [5] R.BONNEFILLE : "*Cours d'hydraulique maritime*" (Masson, 3^{ème} édition, 1992)
- [6] Site internet du S.H.O.M : "[http ://www.shom.fr/sci/marcour/maree11.html](http://www.shom.fr/sci/marcour/maree11.html)"
- [7] B.LAHAYE : "*Propagation de ondes ; vitesse de phase ; vitesse de groupe*" (BUP n°649, décembre 1982)
- [8] E.GUYON,C.BETRENCOURT,J.C.DEROCHE : "*Exploration de la matière*" (De Boeck Université, 1995)
- [9] E.GUYON,J.P.HULIN,L.PETIT : "*Hydrodynamique physique*" (Inter-Editions/CNRS,1991)
- [10] Problèmes de concours : *Mines TA 1989, X P' 1992, Ecrin P' 1995*



Agrégation

(Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE

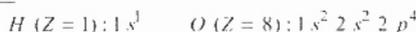
Composition de chimie - Session : 1999

L'EAU

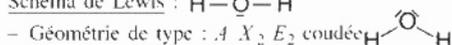
A. L'eau : constituant physico-chimique

1. La molécule d'eau

1.1. Configuration électronique :



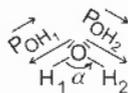
1.2. Schéma de Lewis : $H-\bar{O}-H$



- Angle : $\widehat{HOH} = 105^\circ < 109^\circ 28'$ (tétraédrique AX_4) car répulsion des doublets non-liants plus forte que celle des doublets liants.

1.3. - Mise en évidence du moment dipolaire : déviation du filet d'eau à l'aide d'une règle en Plexiglas, électrisée par frottement.

- Moment dipolaire des liaisons : $\vec{P}_{H_2O} = \vec{P}_{OH_1} + \vec{P}_{OH_2}$



or : $|\vec{P}_{OH_1}| = |\vec{P}_{OH_2}| = |\vec{P}_{OH}|$

donc : $P_{H_2O} = 2 P_{OH} \cos \frac{\alpha}{2}$

$$P_{OH} = \frac{P_{H_2O}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \quad \text{Application Numérique : } P_{OH} = 1,52 D$$

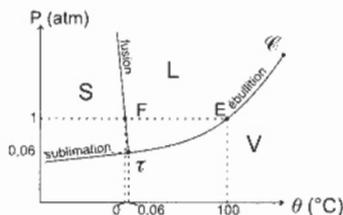
- Pourcentage de caractère ionique : $P_{OH} = \delta \times e \times d_{OH}$

$$\delta = \frac{P_{OH}}{e \times d_{OH}} \times 100 \% \quad \text{Application Numérique : } \delta = 32,6 \%$$

2. Propriétés physiques

2.1. Changements d'état

a. Diagramme d'état

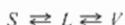


- Les trois états : S, L, G .

- Les courbes de changement d'état :



- Point triple τ : coexistence des trois états :



- Point critique \mathcal{C} au-delà duquel le passage $L \rightarrow V$ se fait de façon continue.

- Point F (0°C, 1 atm) - fusion sous 1 atm.

- Point E (100°C, 1 atm) - ébullition sous 1 atm.

b. Calcul variance

Domaine monophasé : S, L ou V $v = 1 + 2 - 1 = 2$ divariant

il faut fixer P et θ pour décrire le système $M(\theta, P)$.

Domaine diphasé : sur les courbes d'équilibre entre deux phases comme $S \rightleftharpoons L$ sur courbe de fusion $v = 2 + 2 - 2 - 1 = 1$ monovariant. Si on fixe θ alors $P(\theta)$ imposée. Un seul paramètre intensif permet de décrire le système à l'équilibre.

Domaine triphasé : au point τ où il y a les deux équilibres $S \rightleftharpoons L$ et $L \rightleftharpoons V$ $v = 3 + 2 - 3 - 2 = 0$. Tous les paramètres d'état du système sont fixés. La coexistence des trois phases n'existe que pour cette pression et cette température.

c. Particularité de la courbe de fusion

Elle a une pente négative car l'eau contrairement à la plupart des autres espèces augmente de volume en se solidifiant.

La relation de Clapeyron relative au changement d'état donne la pente $\frac{dP}{dT}$ en fonction de la chaleur latente L de changement d'état et des volumes massiques.

$$\boxed{\frac{dP}{dT} = \frac{L_{fus}}{T(u_S - u_L)}} \quad L_{fus} > 0 \quad u_S > u_L \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dP}{dT} < 0}$$

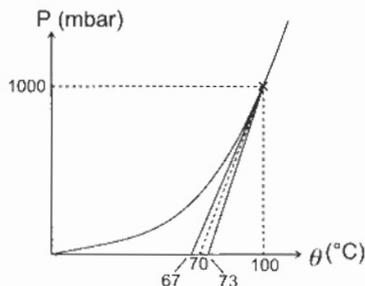
d. Pression de vapeur saturante

Définition : A une température donnée, la pression de vapeur saturante $P_{v,s}$ est la pression à laquelle il y a équilibre : $L \rightleftharpoons V$ $K(T) = \frac{P_{v,s}}{P_0}$.

A 100°C , $P_{v,s} = 1 \text{ atm}$ pour l'eau.

L'évolution de la pression de vapeur saturante avec la température est donnée par la courbe d'ébullition.

e. Chaleur latente de vaporisation



D'après la formule de Clapeyron :

$$L_{vap} = T \frac{dP}{dT} (u_V - u_L)$$

où $\frac{dP}{dT}$ pente de la tangente à la courbe $P_v(\theta)$ pour $P = 1 \text{ atm}$ et $\theta = 100^\circ\text{C}$.

$$\frac{dP}{dT} = \frac{1000 - 0}{100 - 70} = 3,3 \text{ mbar } ^\circ\text{C}^{-1} = 3333 \text{ Pa } \cdot \text{K}^{-1}$$

$$u_V = \frac{P}{RT} = \frac{1,013 \times 10^5}{8,314 \times 373} = 32,66 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} = 32,66 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$u_L \ll u_V$$

$$L_{vap} = 373 \times 3333 \times 32,66 \times 10^{-3} \text{ (J)} = 40603 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$L_{vap} = 40,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

NB : Dans les tables on donne $\Delta_{vap} H^0 = 40,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ à 100°C .

Pourcentage d'écart : 1 % !!! En fait la lecture graphique de la pente est difficile, il faut donc déterminer un encadrement possible des valeurs : en abscisse $67 < \Delta x < 73$

$$38 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} < L_{vap} < 43 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

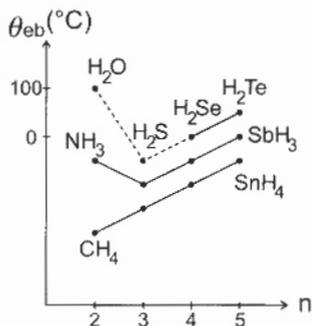
f. Température d'ébullition en haut du Mont-Blanc

En utilisant la courbe $P(h)$ $h = 4807 \text{ m}$ on lit :

$$P = 560 \text{ mbar}$$

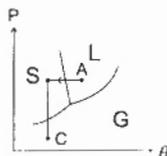
puis sur la courbe $P(\theta)$ on lit pour $P = 0,560 \text{ atm}$:

$$\theta_{eb} = 84^\circ \text{C}$$

g. Température d'ébullition des hydrides

Pour les éléments N et O on a une discontinuité dans l'évolution des températures d'ébullition. Ceci est dû à l'existence de « liaisons hydrogène » entre les molécules résultant de la polarisation des liaisons $\overset{\delta-}{O} \leftarrow \overset{\delta+}{H} \dots \overset{\delta-}{O}$ et $\overset{\delta-}{N} \leftarrow \overset{\delta+}{H} \dots \overset{\delta-}{N}$. Par contre pour C on n'observe pas ce phénomène car $\chi_c \approx \chi_H$ et la liaison $C-H$ n'est pas polarisée.

On peut compléter le tableau en mettant $\theta_{eb, H_2O} = 100^\circ \text{C}$ et pour l'élément S placé sous l'oxygène la liaison $S-H$ étant peu polaire on obtient sa température d'ébullition approximative en prolongeant la droite H_2Te, H_2Se $\theta_{eb, H_2S} \approx 82^\circ \text{C}$.

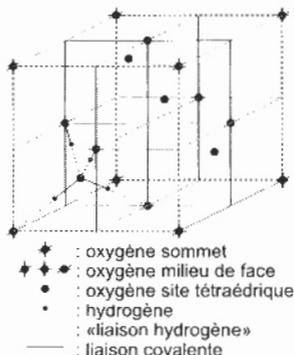
h. Lyophilisation

La lyophilisation ou cryodessiccation (crios : froid) est l'opération qui consiste à éliminer la plus grande partie de l'eau dans un corps congelé par sublimation sans altération des caractéristiques du corps. Le produit lyophilisé se réhydrate facilement (étymologie : lyophilisation - lueïn : dissoudre - phile : aimer).

2.2. Les états physiques de l'eau

2.2.1. L'eau solide

a. Glace III de type diamant

 a_1 . Maille cubique

Les atomes d'oxygène occupent les sommets, les milieux de face et la moitié des sites tétraédriques.

L'environnement de chaque O est tétraédrique avec deux atomes d'hydrogène liés par liaison covalente et deux autres par «liaisons hydrogène».

NB : On acceptera les représentations en plan de coupe.

 a_2 . Nature chimique du cristal

On a un cristal moléculaire : les entités élémentaires sont des molécules, les forces de cohésion des liaisons hydrogène.

 a_3 . Nombre de molécule d'eau par maille

$$n = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} + 4 = 8 \text{ molécules d'eau}$$

Nombre de liaison hydrogène : chaque molécule d'eau est liée par deux «liaisons hydrogène» il y en a donc seize par maille.

 a_4 . Énergie des liaisons hydrogène

La sublimation : $S \rightarrow V$ revient à séparer toutes les molécules donc à rompre toutes les liaisons hydrogène. Chaque molécule séparée nécessite la rupture de deux liaisons hydrogène, chaque mole sublimée nécessite la rupture de deux moles de liaisons hydrogène :

$$2 D(O \dots H) = L_{\text{sub}} \quad \text{et} \quad D(O \dots H) = \frac{L_{\text{sub}}}{2}$$

Application Numérique : $D(O \dots H) = 24,9 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

a_5 . Paramètre de la maille

La $\frac{1}{4}$ diagonale du cube $\frac{a\sqrt{3}}{4} = d_{(O-H)} + d_{(O...H)}$

donc :

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}} = (d_{(O-H)} + d_{(O...H)})$$

Application Numérique : $a = 637,4 \text{ pm}$

 a_6 . Masse volumique

$$\rho = \frac{8 \times M_{H_2O}}{N_A \times a^3}$$

Application Numérique : $\rho = 923,7 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

On retrouve bien : $\rho_{\text{glace}} < \rho_{\text{eau liquide}} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

b. Glace I de type Würtzite

b_1 . Nature de la maille : hexagonale.

 b_2 . Masse volumique

$$m_{H_2O} = 2 \times 1 \text{ (centre)} + \left(4 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{6}\right) \text{ (sommets)} + \left(2 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6}\right) \text{ (arêtes)}$$

$$= 4$$

Volume de la maille : $V = c \times a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,29 \cdot 10^{-28} \text{ m}^3$

Masse volumique : $\rho = \frac{4 \times M_{H_2O}}{N_A \times V} = 927,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

c. Clathrate

Ce sont des «complexes» d'inclusion : sorte de moules bâtis autour d'une molécule. dans le cas de l'eau, c'est une cage faite par des molécules d'eau autour d'autres molécules.

2.2.2. L'eau liquidea. Tension superficielle a_1 . Définition

Exprimée en $J \cdot \text{m}^{-2}$, c'est la variation d'enthalpie libre qui accompagne un accroissement de la surface de l'interface liquide/gaz d'une unité à P, T et nombre de moles constants.

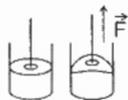
Elle résulte des forces qui apparaissent à la surface de séparation air - eau et est très forte pour l'eau à cause des «liaisons hydrogène».

a_2 . Comportement particulier

Formation de gouttes sphériques (dans l'air) ou en forme de poire à la sortie des pipettes ou burette...

 a_3 . Mesure

A l'aide d'un anneau placé à la surface d'un liquide que l'on cherche à soulever, on détermine le travail nécessaire pour cette traction.

 a_4 . Diminution

En introduisant dans l'eau des tensioactifs comme les détergents.

b. Permittivité relative

Elle est élevée pour l'eau. L'eau est un solvant dispersant car les forces coulombiennes (électrostatiques) y sont faibles, ainsi les ions de charges antagonistes sont facilement séparés.

c. Conductivité

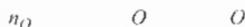
$\rho = 18,2 \text{ M}\Omega \cdot \text{cm}$ donc la conductivité de l'eau pure est :

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = 5,49 \cdot 10^{-6} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$$

 c_1 . Produit ionique de l'eau à 25°C

$$\sigma = \lambda_{H_3O^+} \times [H_3O^+] + \lambda_{OH^-} \times [OH^-]$$

Or d'après l'autoprotolyse de l'eau :



$$\text{d'où : } [H_3O^+] = [OH^-] = x = \frac{\sigma}{\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{OH^-}} \quad \text{et : } K_e = \left(\frac{\sigma}{\lambda_{H_3O^+} + \lambda_{OH^-}} \right)^2$$

Application Numérique :

$$x = \frac{5,49 \times 10^{-6} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}}{(34,985 + 19,918) 10^{-3} \text{ S} \cdot \text{m}^{-2} \text{ mol}^{-1}} = 1,0007 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} = 1,0007 \cdot 10^{-7} \text{ mol L}^{-1}$$

$$K_e = 1,0015 \cdot 10^{-14} \quad \text{et} \quad pK_e = 13,999 \approx 14$$

 c_2 . Grandeur thermodynamique

A 20°C :

$$K_e' = 6,81 \cdot 10^{-15}$$

Connaissant les constantes d'équilibre à deux températures proches pour l'autoproto-

lyse de l'eau, on peut en déduire l'enthalpie standard de la réaction d'autoprotolyse (1) en la considérant comme constante dans l'intervalle de température considéré.

D'après la loi de Van't Hoff :

$$\frac{d}{dT} \ln K = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2}$$

en intégrant :

$$\Delta_r H^0 = \frac{RTT'}{T - T'} \ln \frac{K_c(T)}{K_c(T')}$$

Application Numérique :

$$\Delta_r H_{(0)}^0 = \frac{8,314 \times 298 \times 293}{5} \ln \frac{1,0015 \cdot 10^{-14}}{6,81 \cdot 10^{-15}} = 55\,997 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\Delta_r H_{(0)}^0 = 56 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \gg 0 \quad \text{très endothermique}$$

d. Fluide caloporteur

L'eau possède une capacité calorifique massique (ou capacité thermique massique) très élevée : $C_{H_2O} = 4,18 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et une température d'ébullition élevée. Elle est donc utilisée pour le refroidissement (centrales) ou le transport de chaleur (installations industrielles) et participe à de nombreux échanges thermiques.

2.2.3. L'eau vapeur

a. Densité

$$d = \frac{M}{29} = 0,62 < 1$$

La vapeur d'eau plus légère que l'air s'élève, cela contribue au phénomène d'évaporation de l'eau (séchage du linge).

b. Degré d'humidité

$$\Delta \theta = 25^\circ \text{C}$$

$$P_{\text{vap sat}} = 0,031 \text{ bar} \quad \text{lu sur le graphe } P = f(\theta)$$

Si on a 80 % d'humidité :

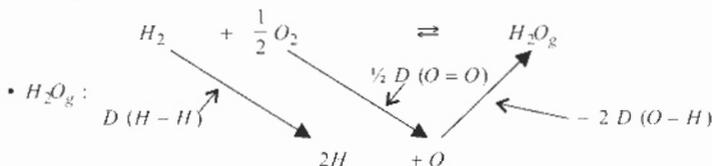
$$P_{H_2O} = \frac{80}{100} \times P_{\text{vap sat}} = 0,0248 \text{ bar} = 2480 \text{ Pa}$$

et :

$$C_{H_2O_{\text{vap}}} = \frac{P_{H_2O}}{RT} = 1 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$$

2.3. Stabilité thermodynamique de l'eau

2.3.1. Enthalpie standard de formation



$$\Delta_f H_{H_2O_2}^0 = D(H-H) + \frac{1}{2} D(O=O) - 2 D(O-H)$$

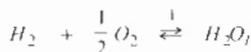
Application Numérique : $\Delta_f H_{H_2O_2}^0 = -239 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$



$$\Delta_f H_{H_2O_g}^0 = \Delta_f H_{H_2O_l}^0 - L_{vap}$$

$$\Delta_f H_{H_2O_l}^0 = -239 - 44,03 = -283,03 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

2.3.2. Synthèse de l'eau



$$\text{EI} : 2 n_0 \quad n_0 \quad 0$$

a. Réaction thermodynamiquement possible

$$\text{Calcul de l'affinité} : \quad \bullet \mathcal{A} = \bullet \mathcal{A}^0 - RT \ln \frac{a_{H_2O}}{a_{H_2} a_{O_2}^{1/2}}$$

$$\text{avec} : \quad \bullet \mathcal{A}^0 = -\Delta_r G^0 = -\Delta_f H_{H_2O_l}^0 + T \Delta_r S^0$$

$$\text{et} : \quad \Delta_r S^0 = S_{H_2O_l}^0 - S_{H_2}^0 - \frac{1}{2} S_{O_2}^0 = 163,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

$$\bullet \mathcal{A}^0 = 234,4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \gg 0 \quad \text{réaction thermodynamiquement favorisée dans le sens } \textcircled{1}$$

$$\text{EI} : a_{H_2O} = 0 \quad \bullet \mathcal{A} > 0 \quad (\bullet \mathcal{A} \rightarrow +\infty)$$

La synthèse est donc thermodynamiquement possible.

b. La réaction n'a pas lieu spontanément

Pour des raisons cinétiques, elle est infiniment lente. On peut l'initier avec une flamme, un catalyseur (mousse de platine).

$$\text{État final} : \quad \Delta_r G^0 = -\bullet \mathcal{A}^0 = RT \ln K$$

Loi d'action de masse car on atteint l'équilibre caractérisé par $\bullet \mathcal{A} = 0$.

$$K = \frac{a_{H_2O}}{P_{H_2} P_{O_2}^{1/2}} P^{0,5} = e^{\bullet \mathcal{A}^0 / RT} = 1,22 \cdot 10^{41} \gg \gg 1$$

la réaction est totale : $a_{H_2O} = 1$ H_2O corps pur seul dans sa phase

$$P_{H_2} = 2 P_{O_2} = 0$$

$$2 P_{O_2} = P_{H_2} = P^0 (\sqrt{2} e^{-\bullet \mathcal{A}^0 / RT}) = 1,44 \cdot 10^{-63} \text{ bar} = 0$$

2.3.3. Décomposition de l'eau

C'est la réaction inverse :
$$H_2O_l \rightleftharpoons H_2 + \frac{1}{2} O_2 \quad \Delta_r G^{\circ} = -234,4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\Delta_r G = \Delta_r G^{\circ} - RT \ln \frac{a_{H_2} a_{O_2}^{1/2}}{a_{H_2O}}$$

avec $\Delta_r G^{\circ} \ll 0$ réaction très peu favorisée thermodynamiquement.

Au départ $a_{H_2} = 0$ il n'y a pas de H_2 (un peu de O_2 dans l'air !!) $\Delta_r G \rightarrow +\infty$ la réaction peut avoir lieu mais l'équilibre est atteint pour :

$$K' = \frac{1}{K} = 8,2 \cdot 10^{-42} \lll 1$$

et à l'équilibre si : $p_{H_2} = 2 p_{O_2} = 1,44 \cdot 10^{-63} \text{ bar} \approx 0$

on peut donc en conclure que cette réaction n'est pas possible de façon quantitative même avec un bon initiateur.

3. Les solutions aqueuses

3.1. Propriétés chimiques de l'eau

3.1.1. Propriétés acido-basiques

a. Couples acide-base de l'eau

H_2O acide de Brønsted perd un proton pour donner OH^- :

couple H_2O / OH^- $pK_a = 14$ $K_a = 10^{-14}$

H_2O base de Brønsted capte un proton pour donner H_3O^+ :

couple H_3O^+ / H_2O $pK_a = 0$ $K_a = 1$

b. Nivellement des acides et des bases

L'action d'un acide sur l'eau se traduit par la réaction :

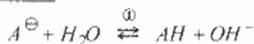


de constante :
$$K = \frac{K_{a AH/A^-}}{K_{a H_3O^+/H_2O}} = K_{a AH/A^-}$$

Si $K > 1$, l'équilibre est déplacé dans le sens $\textcircled{1}$ car AH acide plus fort que H_3O^+ ($K_{a AH/A^-} > K_{a H_3O^+/H_2O}$). Il n'y a pas dans l'eau d'acide plus fort que H_3O^+ ; ce phénomène est connu sous le nom d'effet de nivellement du solvant à l'égard des acides forts.

Ainsi HCl , H_2SO_4 , HNO_3 subissent le nivellement car : $K_a > 1$ $pK_a < 0$

De même pour l'action d'une base sur l'eau :



de constante :

$$K = \frac{K_{a H_2O/OH^{-}}}{K_{a AH/A}}$$

Si $K > 1$, $K_{a AH/A} < K_{a H_2O/OH^{-}} \Rightarrow pK_{a AH/A} > 14$ l'équilibre est déplacé dans le sens $\textcircled{1} \Rightarrow$ pas de base plus forte que OH^{-} dans l'eau.

Les bases associées au couple de $pK_a > 14$ subissent le nivellement comme : O^{2-} , NH_2^{-} .

Conséquences : Les acides subissant le nivellement se transforment intégralement en H_3O^{+} , les bases en OH^{-} lors de leur mise en solution dans l'eau.

c. Chlorure de cobalt

c_1 . Équation de la réaction



c_2 . Type de réaction

On a un échange de ligand. L'ion Co^{2+} complexé par H_2O échange ses ligands pour s'entourer d'ions chlorure Cl^{-} . C'est une complexation compétitive (acide-base de Lewis).

c_3 . Rôle de l'eau : H_2O ligand (présence des doublets sur O).

Propriété de l'eau : H_2O base de Lewis, donneur de doublet.

c_4 . Pics d'absorption

On obtient deux pics d'absorption :

- à $\lambda_1 \text{ max} = 500 \text{ nm}$ (vert) c'est d'après la complémentarité des couleurs, l'absorption de $Co(H_2O)_6^{2+}$ rose.

- à $\lambda_2 \text{ max} = 650 \text{ nm}$ (orange) c'est l'absorption due à $CoCl_4^{2-}$ bleu.

Endothermicité : quand $T \nearrow$ on observe que $[CoCl_4^{2-}] \nearrow$ donc l'équilibre se déplace dans le sens $\xrightarrow{\textcircled{1}}$ qui est donc le sens endothermique (cf. loi de Van't Hoff ou de Le Chatelier).

Application :

- thermomètre car en fonction de T si $T \nearrow$ rose \rightarrow bleu,

- détecteur d'humidité si $H_2O \nearrow$ bleu \rightarrow rose.

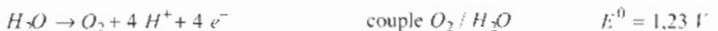
3.1.2. Propriétés oxydo-réductrices

a. Couple oxydant-réducteur de l'eau

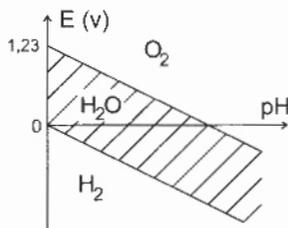
H_2O oxydant, capte un électron pour se transformer en H_2 :



H_2O réducteur, cède un électron pour se transformer en O_2 :



b. Diagramme potentiell-pH de l'eau



En prenant $p_{H_2} = p_{O_2} = 1 \text{ bar}$ pour le tracé :

$$E_{H_2O/H_2} = 0,06 \text{ pH}$$

$$E_{O_2/H_2O} = 1,23 - 0,06 \text{ pH}$$

Le domaine de stabilité de l'eau est compris entre les deux droites. Les espèces qui coexistent dans l'eau sont celles qui ont un domaine d'existence commun avec celui de l'eau.

c. Stabilité de solutions

c₁. Stabilité des différentes espèces

- Solution permanganate de potassium (K^+ , MnO_4^-)

MnO_4^- se trouve au-dessus du domaine de l'eau donc il est thermodynamiquement instable et doit oxyder l'eau.

- Solution sel de Mohr (F_2^{2+} , $2 SO_4^{2-}$, $2 NH_4^+$)

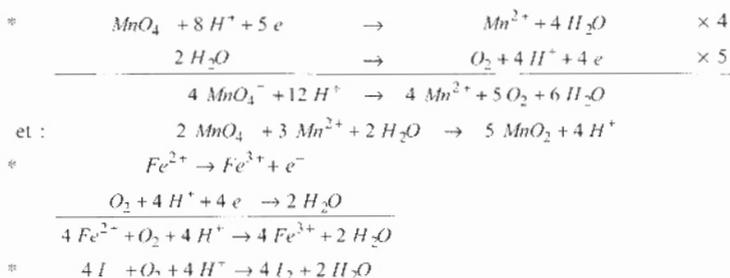
L'ion F_2^{2+} est stable dans l'eau mais il est en-dessous du domaine de O_2 et peut être thermodynamiquement oxydé par O_2 dissous.

- Solution de diiode (I_2)

I_2 stable dans l'eau. Attention néanmoins à sa dismutation en milieu basique en I^- et IO_3^- . Par contre I_2 est dissout dans KI et I^- peut être oxydé par O_2 dissous.

c₂. Préparation des solutions

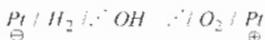
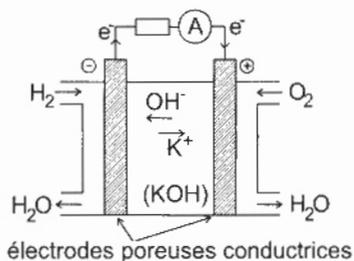
Les solutions de permanganate de potassium et de sel de Mohr doivent être fraîchement préparées même si les réactions qui leur confère leur instabilité sont lentes. A cause de I^- il faut aussi préparer les solutions de I_2 au dernier moment.

c₃. Réactions de «vieillesissement»

 c₄. Observation visuelle

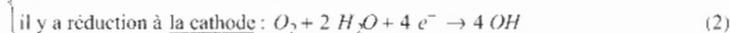
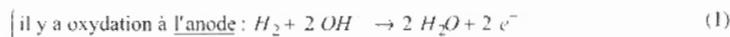
On observe un dépôt brun pour le permanganate dû à la réaction de Mn^{2+} sur MnO_4^- pour donner MnO_2 (brun).

Les solutions de sel de Mohr deviennent plus orangées. On peut tester leur vieillissement avec SCN^- qui donne FeSCN^{2+} rouge avec Fe^{3+} .

d. Piles à combustible

 d₁. Schéma de la pile

 d₂. Réactions électrochimiques

$$E_{\text{H}^+/\text{H}_2} = -0,06 \text{ pH} < E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}} = 1,23 - 0,06 \text{ pH}$$


 d₃. Réaction de pile

En faisant (1) + $\frac{(2)}{2}$ on obtient :



d₄. Circulation du courant

Dans le circuit électrique extérieur, le courant va du compartiment où il y a O_2 (pole +) à celui où il y a H_2 (pole -) et les électrons vont en sens inverse.

Dans le pont et les solutions il y a circulation d'ions pour qu'il y ait réactions aux électrodes et pour rétablir l'électroneutralité.

d₅. Détermination de la f.é.m. standard

En utilisant les potentiels standard :

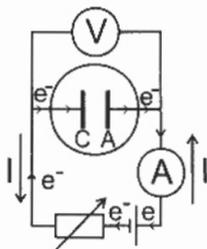
$$E^0 = E^0_{O_2/H_2O} - E^0_{H_2O/H_2} = 1,23 \text{ V}$$

En utilisant l'enthalpie libre standard :

$$E^0 = - \frac{\Delta_r G^0}{nF} \quad n = 4 \quad \Delta_r G^0 = 2 \cdot \Delta_r G^0 = \dots 468,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

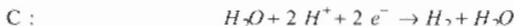
$$E^0 = \frac{+ 468,8 \times 10^3}{4 \times 96500} = 1,215 \text{ V}$$

e. Électrolyse de l'eau

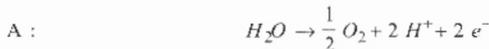


e₁. Électrolyseur et réactions

A la cathode C, il y a réduction (gain d' e^-) :



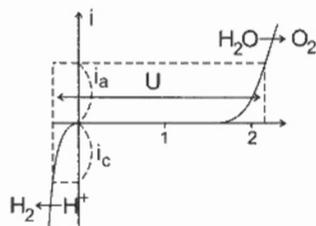
A l'anode A, il y a oxydation (perte d' e^-) :



c'est la réaction inverse de celle de la synthèse.

e₂. Acidification

L'eau n'est pas assez conductrice (résistance interne de l'électrolyseur trop forte), on rajoute un acide fort (dissocié en ion) qui n'intervient pas dans l'électrolyse. HCl est à proscrire car Cl^- oxydé en Cl_2 avant H_2O on peut acidifier avec H_2SO_4 car HSO_4^- n'intervient pas (cf. courbe ci-après).



e_3 . $ddp > 2,0 \text{ V}$

Le couple O_2 / H_2O étant un couple lent, il faut appliquer une $ddp U > \Delta E^0 = 1,23 \text{ V}$.

$U > 2,0 \text{ V}$ pour $i_a = |i_c|$ appréciable.

e_4 . Quantité de matière

$I = 1 \text{ A}$ or $I = \frac{Q}{T}$: charge circulant par unité de temps.

$\frac{Q}{T} = 1 \text{ C} \cdot \text{s}^{-1}$ or l'obtention de 1 mole de H_2 nécessite 2 moles d'électron.

$$\frac{Q}{T} = 1 \text{ C} \cdot \text{s}^{-1} = \frac{1}{1,6 \times 10^{-19}} \times \frac{1}{6,02 \cdot 10^{23}} = 1,04 \cdot 10^{-5} \text{ mol d'e}^- \cdot \text{s}^{-1}$$

et :

$$n_{H_2} = 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ mol s}^{-1}$$

soit à 20°C en volume ($1 \text{ mol} \leftrightarrow 24 \text{ L}$) :

$$v = 0,1 \text{ cm}^3 \text{ H}_2 \text{ par seconde}$$

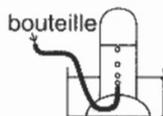
e_5 . Procédé industriel

- Électrolyse : trop onéreux (coût de l'électricité).
- Obtention H_2 par reformatage du méthane $CH_4 + 2 H_2O \rightarrow 3 H_2 + CO_2$.
- Produit secondaire du craquage des alcanes - exemple : $C_3 H_8 \rightarrow C_3 H_6 + H_2$.
- Utilisation principale : synthèse NH_3 .

3.2. Dissolution dans l'eau

3.2.1. Solubilité des gaz

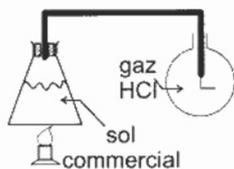
a. Recueil des gaz



O_2 et Cl_2 peu solubles dans l'eau, on peut les recueillir par déplacement d'eau. néanmoins pour Cl_2 on rajoute un peu de chlorure de sodium pour limiter la dismutation :



NH_3 et HCl très solubles dans l'eau, s'y trouvent dissous en fortes proportions dans les solutions commerciales concentrées. Leur solubilité diminuant avec la température, on fait



chauffer (sous la hotte car gaz toxiques) les solutions et après purge on recueille les gaz dans des flacons (HCl plus lourd que l'air est recueilli avec l'ouverture vers le haut, NH_3 plus léger avec l'ouverture vers le bas).

b. Plongée sous-marine

Que les plongeurs aient des bouteilles d'air comprimé ($O_2 + N_2$) ou plongent à l'hélium ($O_2 + He$) ou à l'hydrogène ($O_2 + H_2$, plongées très profondes), les gaz étant plus solubles à forte pression, se dissolvent de façon plus importante en profondeur. Si la remontée se fait trop vite comme $P \searrow$ le volume V occupé par ces gaz va augmenter ($PV = nRT$) et il y a alors risque d'embolie gazeuse. Les paliers permettent aux gaz de s'échapper...

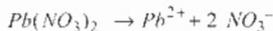
3.2.2. Solubilité des solides ioniques

a. Aspect de S_1 et S_2

- S_1 : solution de KI à $\frac{0,5}{50 \times 10^{-3}} = 10 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} < \text{solubilité de } KI \text{ à } 20^\circ \text{C} = 144 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$

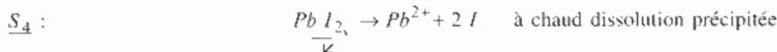
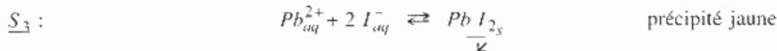
$KI_s \rightarrow K^+_{aq} + I^-_{aq}$ totale, les ions K^+ et I^- étant incolores, la solution S_1 est limpide et incolore.

- S_2 : solution de $Pb(NO_3)_2$ à $10 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} < 35,2 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ solubilité $Pb(NO_3)_2$ à 20°C
 S_2 est limpide et incolore car :



totale et ions incolores.

b. Équations-bilan



c. Refroidissement de S_4

On observe la précipitation de $Pb I_2$, selon :



$$K = \frac{a_{Pb} a_{I_2}}{a_{Pb^{2+}} a_{I^-}^2} = \frac{C^{0^2}}{\{Pb^{2+}\} [I^-]^2} = \frac{1}{K_{sp, I_2}(T)}$$

Relation avec la solubilité :

$$s = [Pb^{2+}] = \frac{[I^-]^2}{2} \quad \text{donc :} \quad K = \frac{1}{4s^3}$$

d. Relation entre $G - G_{cell}$ et s

$G_{conductance}$: $G = k_{cell} \times \sigma$, k_{cell} = constante de cellule et σ = conductivité

or :
$$\sigma = \sum_i \lambda_i \times c_i = \lambda_{Pb^{2+}} \times [Pb^{2+}] + \lambda_I [I^-] + G_{cell}$$

donc :
$$G - G_{cell} = k_{cell} (\lambda_{Pb^{2+}} + 2 \lambda_I) \times s \quad s \text{ solubilité à } T$$

e. Solution étalon de chlorure de potassium

e₁. Relation entre G et σ :

$$G = k_{cell} \times \sigma$$

e₂. Détermination de k_{cell}

$$k_{cell} = \frac{G_{KCl} 0,1 M}{\sigma_{KCl} 0,1 M} = 0,987 \text{ cm}$$

f. Détermination de s_1 et s_2

$$s = \frac{G - G_{cell}}{k_{cell} (\lambda_{Pb^{2+}} + 2 \lambda_I)}$$

Application Numérique :

	à $\theta_1 = 20^\circ \text{C}$	$s_1 = 1,12 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$
	à $\theta_2 = 11^\circ \text{C}$	$s_2 = 0,881 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

NB : Une erreur d'unité s'est glissée dans le texte. Il fallait lire $G_{cell} = 5.7$ et $5.9 \mu\text{S}$ et non mS . Cette erreur pouvait être détectée car G_{cell} ne peut être supérieure à G d'une solution ionique.

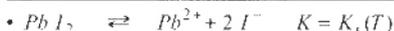
g. Produit de solubilité

• $K_s(T) = 4s^3$

Application Numérique :

	à θ_1	$K_{s_1} = 5,62 \cdot 10^{-9} \quad pK_{s_1} = 8,25$
	à θ_2	$K_{s_2} = 2,73 \cdot 10^{-9} \quad pK_{s_2} = 8,56$

Grandeurs thermodynamiques de la dissolution



D'après la loi d'action de masse :

$$\Delta_r S^0 = \frac{\theta_1 \Delta_r G^0_1 + \theta_2 \Delta_r G^0_2}{-RT \ln K_y(T)} = + 46,3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \quad \left| \right.$$

D'après la loi de Van't Hoff :

$$\Delta_r H^0 = \frac{RT_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{K_{y_1}(T)}{K_{y_2}(T)} = + 55,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} > 0 \quad \left| \right. \quad \text{endothermique}$$

Détermination de :

$$\Delta_r S^0 = \frac{\Delta_r H^0 - \Delta_r G^0}{T} = + 30,5 \text{ JK}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} > 0 \quad \left| \right. \quad \text{augmentation du désordre}$$

h. Opération de recristallisation

Cette opération consiste à dissoudre un solide dans un minimum de solvant porté à ébullition puis à laisser refroidir la solution obtenue après l'avoir filtrée à chaud (élimination des impuretés insolubles à chaud). Lors du refroidissement, il y a précipitation du solide (solubilité \searrow avec T) que l'on appelle alors recristallisation. On filtre sur Büchner et on récupère le produit. Ceci est très utilisé en chimie organique pour purifier les solides...

4. L'eau en chimie organique

4.1. Relation structure-propriétés

4.1.1. L'eau solvant

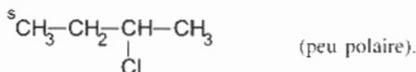
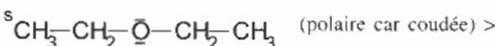
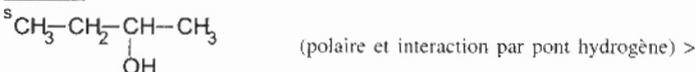
a. Qualitatifs

L'eau est un solvant polaire ($p = 1,85 D$) dispersant ou dissociant (ϵ_r , élevé = 80) et protique (présente un H à caractère acide).

b. Comparaisons des solvants

- Eau et cyclohexane : cyclohexane apolaire peu dispersant, il dissout aisément les molécules apolaires et favorise le mécanisme ne faisant pas intervenir d'intermédiaire chargé (SN_2 plutôt que SN_1).
- Eau et acétone : les deux molécules sont polaires mais H_2O est plus dispersante et l'acétone est aprotique (ne libère pas de H acide).
- Eau et acide éthanóique : molécules polaires, protiques mais l'acide éthanóique est moins dispersant que l'eau.

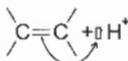
c. Solubilité



4.1.2. L'eau réactif

a. Électrophilie

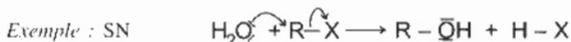
Un électrophile capte un doublet d'électron. L'eau n'est pas électrophile. Ainsi pour son addition électrophile sur les alcènes, il faut un catalyseur, acide minéral :



et l'eau intervient à la deuxième étape comme nucléophile.

b. Nucléophilie

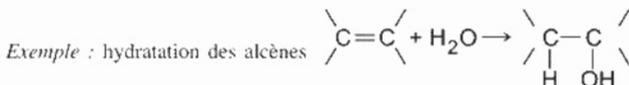
Un nucléophile cède à un doublet d'électron. L'eau est nucléophile et peut donner des réactions de substitution ou d'addition nucléophile :

c. Hydrolyse

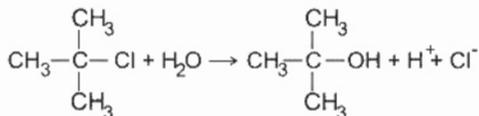
C'est une solvolysé : réaction au cours de laquelle le substrat subit une attaque par des molécules solvant puis une substitution.

Hydratation

C'est une réaction dont le bilan correspond à une addition d'eau.



4.2. L'eau et les dérivés halogénés

a. Équation-bilanb. Quantité de matière

$$(\text{CH}_3)_3\text{CCl} : n_0 = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

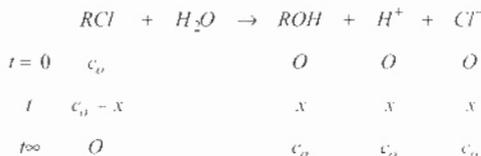
$$\text{H}_2\text{O} : n_1 = 1,39 \text{ mol} \gg n_0$$

On a une dégénérescence de l'ordre par rapport à H_2O :

$$v = k [\text{H}_2\text{O}]^\alpha [(\text{CH}_3)_3\text{CCl}]^\beta = k_{\text{app}} [(\text{CH}_3)_3\text{CCl}]^\beta$$

c. Ordre 1 par rapport au dérivé halogéné

$$\text{Si } \beta = 1 \quad v = k [R \cdot Cl] = \frac{-d[RCI]}{dt} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{Ln} \frac{[RCI]}{[RCI]_0} = -kt} \quad (1)$$



Or la conductance :

$$G_t = k_{cell} \times \sigma = k_{cell} (\lambda_{H^+} [H^+] + \lambda_{Cl^-} [Cl^-] + \sigma_{eau})$$

$$G_0 = k_{cell} \times \sigma_{eau}$$

$$G_{\infty} = k_{cell} (\lambda_{H^+} + \lambda_{Cl^-}) \times c_0 + \sigma_{eau}$$

$$\frac{G_t - G_0}{G_{\infty} - G_0} = \frac{c_0 - x}{c_0} = \frac{[RCI]}{[RCI]_0} \quad (2)$$

(1) et (2) si l'ordre est 1 on doit avoir $\text{Ln} \left(\frac{G_t - G_0}{G_{\infty} - G_0} \right) = -kt$ donc $\text{Ln} \left(\frac{G_t - G_0}{G_{\infty} - G_0} \right)$ droite affine décroissante de pente $-k$ passant par l'origine. On observe bien cette évolution donc l'ordre est 1 par rapport à RCl.

d. Mécanisme

Le dérivé halogéné étant tertiaire, on pencherait pour un mécanisme S_N1 . Expérimentalement on ne peut conclure car il faudrait un ordre 0 par rapport à H_2O or comme H_2O en excès, on ne peut déterminer l'ordre par rapport au nucléophile.

e. Énergie d'activation

$$A \theta_1 = 19,6^\circ C$$

$$T_1 = 292,6 K$$

$$k_1 = 0,0252 \text{ mm}^{-1}$$

$$\theta_2 = 8,2^\circ C$$

$$T_2 = 281,2 K$$

$$k_2 = 0,0033 \text{ mm}^{-1}$$

D'après la loi d'Arrhénius :

$$k = A e^{-\frac{E_a}{RT}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{E_{a1} = \frac{R \text{ Ln} \frac{k_1}{k_2}}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}}}$$

Application Numérique :

$$\boxed{E_{a1} = 122 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

4.3. L'eau et les alcènes

a. Rôle de l'eau dans le vapocraquage

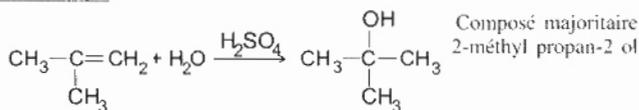
L'eau sert à abaisser la pression partielle des composés de façon à favoriser les réactions dans le sens d'une \nearrow du nombre de mole (loi de Le Chatelier) soit dans le sens ① du craquage.

Exemple : $C_2H_6 \xrightarrow{\text{①}} C_2H_4 + H_2$. Elle joue aussi le rôle de fluide caloporteur (apporte la chaleur) et empêche les dépôts de coke (C).

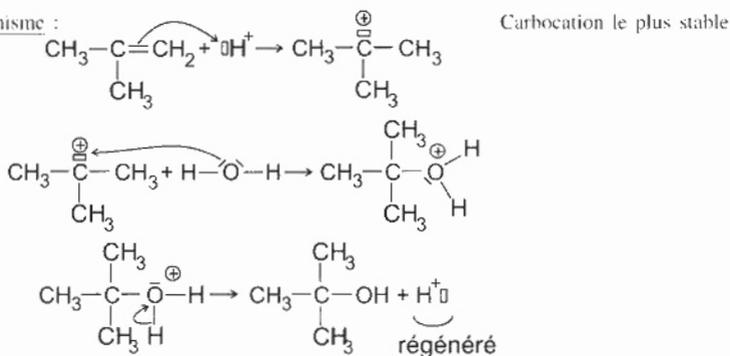
b. b_1 . Inertie de l'eau car H_2O peu électrophile, en effet la liaison ($H - \overset{\delta+}{O} - \overset{\delta-}{H}$) : $O - H$ est polarisée mais peu polarisable. A l'approche du réactif donc elle a du mal à se rompre de façon hétérolytique.

b_2 . En présence d'acide sulfurique :

• Équation-bilan :



• Mécanisme :



• Rôle H_2SO_4 : catalyseur.

• Utilisation HCl : non car Cl^- bon nucléophile et on aurait obtenu aussi $CH_3 - \overset{\text{CH}_3}{\underset{\text{CH}_3}{\text{C}}} - Cl$

• Séréospécificité : non car on passe par intermédiaire plan et H_2O peut attaquer des deux côtés.

• Régiosélectivité : oui cela suit la règle de Markovnikov, on obtient l'alcool le plus substitué...

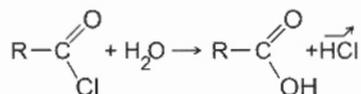
• Chauffage : à proscrire car il favorise les déshydratations (contrôle thermodynamique, les alcènes étant plus stables que les alcools...).

• Antidétonant : additif mis dans l'essence pour éviter les cognements du moteur à grande vitesse. La combustion est alors en mode déflagrant et non détonant.

4.4. L'eau et les dérivés d'acide

a. Propriétés lacrymogènes

On observe lors de l'ouverture de flacons de chlorure d'acyle des fumées dues au contact des chlorures avec l'air toujours humide, ce qui conduit à une hydrolyse selon :



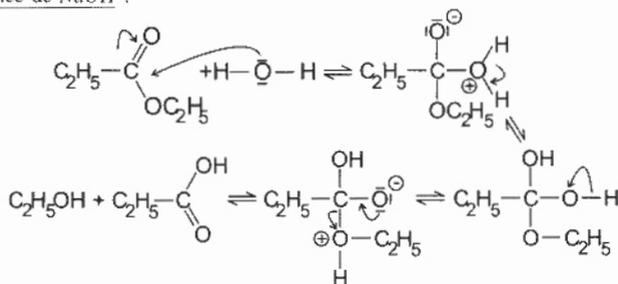
Les vapeurs de HCl arrivant dans l'œil se dissolvent dans le liquide lacrymal et produisent alors des ions $\text{H}_3\text{O}^+ \Rightarrow$ acidité et production de larmes pour lutter contre l'agression d'où la propriété lacrymogène.

Manipulation

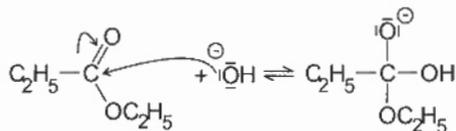
Sous la hotte avec des gants et dans de la verrerie bien sèche.

b. Action sur le propanoate d'éthyle

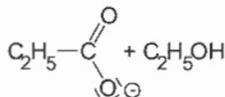
- En l'absence de NaOH :



- En présence de NaOH : c'est OH^- meilleur nucléophile qui donne la première étape d'addition selon :



On obtient ensuite :



- Avantages de NaOH : réaction plus rapide et si soude très concentrée on a alors saponification totale de l'ester.

B. L'eau : ressources, pollutions et traitements

1. Polluants minéraux

1.1. Les ions nitrate

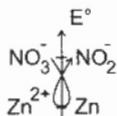
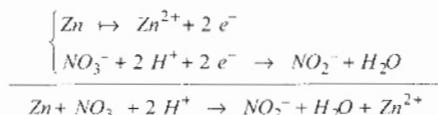
a. Sources de pollution

D'origine agricole avec les engrais (ammonitrates, nitrate de potassium...) et avec les élevages porcins. On les trouve dans les nappes phréatiques car ils ne sont pas retenus par le complexe argilo-humique.

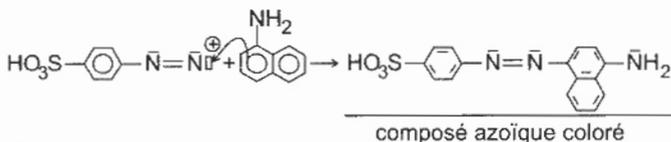
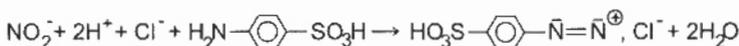
b. Dosage des nitrates

b₁. Formule du composé coloré

Action du zinc
sur les nitrates :



Formule du composé et mécanisme de sa formation :

b₂. Analyse de l'eau

Loi de Beer-Lambert

En effectuant une régression linéaire pour $A = f(c)$ on obtient $A = 0,031c + 0,024$, c en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$ avec un coefficient de corrélation $r = 0,9989 \approx 1$ donc on peut dire que la gamme étalon vérifie la loi de Beer-Lambert.

Eau du robinet

$$A = 0,340 \Rightarrow c = 10,2 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1} < 20 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$$

l'eau est consommable.

c. Traitements

Bactéries nitrifiantes :



1.2. Les ions phosphate

a. Sources de pollution

Les lessives et les engrais phosphatés.

b. Inconvénients

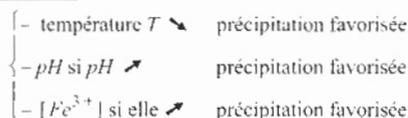
Eutrophisation des cours d'eau par prolifération d'algues (PO_4^{3-} engrais) consommation de O_2 , importante et disparition de la vie aquatique.

c. Traitements chimiques

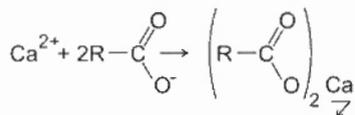
c_1 . Équation-bilan à $pH = 6$, $H_2PO_4^-$ espèce prépondérante.

 c_2 . Constante d'équilibre

$$K = \frac{K_{a_2} \cdot K_{a_3}}{K_v} = \frac{10^{-7,2} \times 10^{-12,3}}{10^{-21,9}} = 10^{2,4}$$

 c_3 . Facteurs influençant l'équilibre1.3. **Les ions calcium**a. Inconvénients

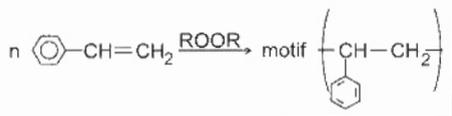
Les eaux dures, riches en ions calcium et magnésium favorisent le dépôt de tartre dans les canalisations ($CaCO_3$). De plus, elle précipitent les savons qui perdent alors leur pouvoir moussant selon :



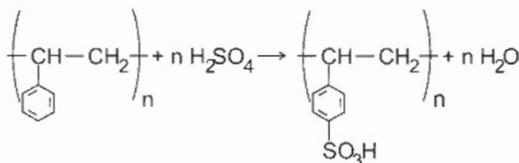
b. Détermination concentration par dosage compleximétrique par l'EDTA, en présence d'un indicateur coloré et à des conditions de pH bien déterminées.

c. Traitement par des résines c_1 . Synthèse de la résine

• Motif :

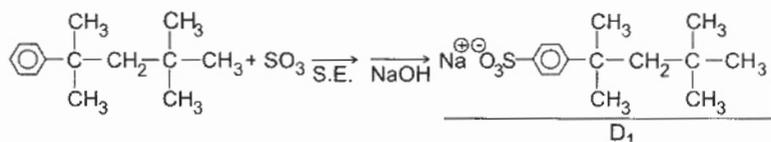


• Sulfonation :



la sulfonation se fait en para car $-CH-CH_2$ substituant + 1 (-o et p orienteur)

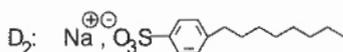
On forme un carbocation (le plus stable car tertiaire) qui donne un S.E. sur le benzène.



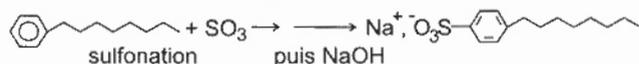
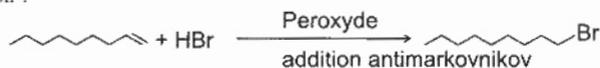
Effet + I (oriente en *o*, *p*)

Il y a orientation en *p* pour des raisons stériques.

b. Détergent D_2



Formé selon :

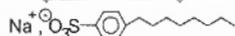


c. Détergent D_3

D_3 est le méta (1, 3, 5, 7 - tétra méthyl octyl) benzensulfonate de sodium.

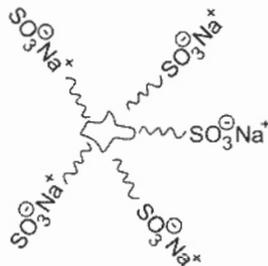
2.2. **Mode d'action des détergents**

Ces composés présentent une partie hydrophile et une lipophile ou hydrophobe.



a. Mode d'action général

L'eau étant un mauvais solvant des composés organiques (comme les hydrocarbures), les molécules de détergent en présence des composés organiques hydrophobes s'organisent en plaçant leur extrémité (hydrophobe) lipophile à proximité de la molécule organique et leur extrémité hydrophile à l'opposé, c'est-à-dire dans l'eau selon :



On a ainsi mise en suspension ou en émulsion fine de la substance organique.

b. Traitement des marées noires

Le détergent créé avec les molécules d'hydrocarbures des micelles et, par répulsion électrostatique, ces micelles se repoussent, il y a alors dispersion des molécules d'hydrocarbures. Il n'y a plus d'obstruction totale au passage de la lumière et biodégradabilité est rendue plus aisée...

2.3. Propriétés comparées des détergents

a. Comparaison avec savons

Les détergents ne présentent pas les inconvénients de précipitation avec les ions Ca^{2+} des eaux dures.

b. D_2 est un meilleur détergent que D_1 car sa partie lipophile (chaîne carbonée) est plus longue, ce qui lui permet une meilleure interaction avec les composés organiques pour former des micelles.

c. D_3 est en perte de vitesse car il présente une chaîne ramifiée qui est préjudiciable pour sa biodégradabilité. Les bactéries attaquent plus facilement les chaînes linéaires.

2.4. Utilisation de l'eau à l'état supercritique

a. A l'état supercritique

L'eau présente une grande capacité de dissolution des composés organiques (plus d'interaction par pont H entre les molécules d'eau vraisemblablement) et une solubilité pratiquement infinie pour le dioxygène O_2 .

b. Dépollution

D'après ce qui précède, on utilise H_2O supercritique pour transformer à l'aide d'oxydants des substances difficilement dégradables, en substances inertes comme CO_2 , H_2O , N_2 , sel... On prend pour cela H_2O sous 250 bar, $500^\circ C$ avec l'air comme oxydant. On a alors une bonne destruction des polluants, mieux que par combustion, il y a néanmoins des problèmes liés à la résistance de matériaux à ces conditions de T et P .

3. Polluants bactériologiques

a. Propriété commune

Cl_2 et O_3 sont des oxydants puissants qui attaquent les parois des cellules des micro-organismes, bactéries...

b. Avantage ozonation

L'ozone se transforme en O_2 qui se dégage et il n'y a donc pas de goût de l'eau traitée (différence avec les eaux chlorées)...

c. Synthèse ozone

Dans un ozoniseur qui produit des décharges électriques dans un courant de O_2 selon :



Cette réaction a lieu dans la stratosphère, elle est alors initiée par des rayons UV.



C. L'eau dans notre environnement et dans l'histoire

1. Les eaux naturelles

a. Salinité

C'est en général la teneur totale en sel dissous. Pour l'eau de mer on la calcule à partir du chlorure de sodium seulement.

b. Attribution des graphes

(3) → mer : car très riche en ions et surtout en Cl^- ($20 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$).

(1) → pluie : car très peu chargée en ions ($c_{\text{max}} < 4 \cdot 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$).

(2) → rivière : car concentration moyenne en ions obtenus par dissolution de minéraux des couches sédimentaires sur lesquelles l'eau est passée.

c. Cette phrase décrit le cycle de l'eau.

2. L'eau au quotidien

a - eau de javel : ClO^- - ion hypochlorite.

b - eau lourde : D_2O - (D atome de deutérium 2_1H)

c - eau oxygénée : H_2O_2 - peroxyde d'hydrogène

d - eau régale : HNO_3 - acide nitrique - et H_2SO_4 - acide sulfurique

e - eau douce : H_2O (ne contient pas de «sel», d'ions dissous)

f - eau de chlore : Cl_2 dissout dans l'eau - dichlore

g - eau dure : ions calcium Ca^{2+} et magnésium Mg^{2+}

h - eau-de-vie : éthanol - CH_3CH_2OH

i - eau forte : HNO_3 acide nitrique

3. Un peu d'histoire

a. La décomposition de l'eau et sa synthèse ont été réalisées par Cavendish et Lavoisier.

b. Procédés

- Pour la décomposition : passage vapeur d'eau sur fer chauffé au rouge.

- Pour la synthèse : combustion d'air inflammable H_2 dans l'air ou dans l'air phlogistique (O_2).

Agrégation (Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE

Problème de physique - Session : 1999

Première partie

Quelques propriétés des étalons de masse de 1 kilogramme.

I.1. Propriétés géométriques.

a. A volume donné (étalon homogène), la sphère assure la surface extérieure minimale. Cette forme est malcommode à réaliser et à utiliser.

b. Toujours pour un matériau homogène, le volume du cylindre de hauteur h et de diamètre D est :

$$V = h \cdot \pi \frac{D^2}{4}$$

et sa surface extérieure :

$$S = 2\pi \frac{D^2}{4} + \pi D h$$

A volume donné $dD = -\frac{D}{2h} dh$ et $dS = \pi(D-h)dD$. S est extrémale pour $D = h$. C'est un minimum car la fonction est continue et minorée par 0.

c. Application Numérique

i)

$$D_{kg} = h_{kg} = \left(\frac{4m}{\pi\rho} \right)^{1/3} = 3,898 \text{ cm}$$

$$S_{opt} = 71,60 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad V_{kg} = 46,51 \text{ cm}^3$$

ii)

$$D_{max} = h_{max} = 5,419 \text{ cm} \quad ; \quad S_{max} = 138,40 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad V_{max} = 125,0 \text{ cm}^3$$

En conservant $D = h$, $\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{3} \frac{\Delta m}{m} = 3,3 \cdot 10^{-9}$ pour les deux.

En valeur absolue $\Delta h_{Pt-Ir} = 0,13 \text{ nm}$ et $\Delta h_{Ptmax} = 0,18 \text{ nm}$.

Conclusions :

– Ces ajustements sont inaccessibles en mécanique. Les étalons auront une valeur mesurée différente de 1 kg exactement, compte tenu des ajustements géométriques. En fait l'écart est de l'ordre du milligramme.

– Comme $S_{Pt-Ir} < S_{max}$, l'étalon en platine iridié est préférable.

I.2. Poussée d'Archimède.

a. L'opposé du poids de la masse d'air déplacé est :

$$\vec{f}_{Ar} = -\rho_{air} V_{kg} \vec{g}$$

b. Cette force diminue la force de pesanteur et la masse apparente de l'étalon :

$$\Delta m_2 = - \frac{\rho_{\text{air}} V_{\text{kg}} g_0}{g_0} = - \rho_{\text{air}} V_{\text{kg}}$$

c. Application Numérique

i) D'après la loi des gaz parfaits :

$$\rho_{\text{air}} = \frac{p_{\text{air}} M}{N_A k_B T_{\text{air}}} = 1,201 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

ii) Pour l'étalon en Pt-Ir : $\Delta m_2 = - 55,87 \text{ mg}$

Pour l'étalon en Inox : $\Delta m_2 = - 150,16 \text{ mg}$

Ce sont des corrections considérables !

Variation relative $\frac{\delta \rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{air}}} = \frac{|\delta(\Delta m_2)|}{|\Delta m_2|}$ soit $1,8 \cdot 10^{-4}$ pour Pt-Ir et $6,7 \cdot 10^{-5}$ pour l'inox. Ceci illustre

l'exactitude avec laquelle doit être connue la masse volumique de l'air pour effectuer les corrections convenables.

I.3. **Propriétés magnétiques.**

a. L'aimantation est : $\frac{\delta \vec{m}}{\delta \tau} = \vec{M} = \chi \vec{H} = \chi \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \chi \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

L'énergie du moment cinétique $\delta \vec{m}$ dans le champ \vec{B} est :

$$\delta W_M = - \delta \tau \int \vec{B} \cdot d\vec{M}$$

et la densité :

$$\frac{\delta W_M}{\delta \tau} = - \frac{1}{2} \chi \frac{B^2}{\mu_0}$$

b. L'énergie totale du matériau dans le champ est :

$$W_M = - \frac{\chi}{2 \mu_0} \int B^2 \delta \tau$$

et la force verticale : $\vec{F}_z = - \frac{\partial W_M}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{\chi}{\mu_0} \int \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \delta \tau \vec{e}_z$

En ne tenant compte que du gradient vertical, pour une hauteur h faible,

$$F_z = \frac{\chi}{\mu_0} B_z \frac{\partial B_z}{\partial z} V_{\text{kg}}$$

c. $\Delta m_2 = - F_z / g_0$ (avec \vec{e}_z vers le haut).

d. Application Numérique

Comme $\chi_{\text{air}} \ll \chi$, il n'y a pas à en tenir compte.

Pour Pt-Ir, $|\Delta m_3| = 1,13 \mu\text{g}$ et pour l'inox, $|\Delta m_3| = 406 \mu\text{g}$.

D'où l'intérêt d'utiliser un alliage très peu magnétique.

1.4. Gravité.

- a. En supposant que les étalons sont placés successivement sur le même support de la balance, un biais est introduit par la différence d'altitude des deux centres de masse et la variation de g_0 avec l'altitude. L'étalon en acier a un centre de masse plus élevé, un poids plus faible et donc une masse apparente plus faible que l'autre.
- b. L'approche ne peut être que grossière car on ne connaît pas la distribution des masses à proximité ; on ne tient compte que de la distance au centre de la Terre.

Comme :

$$\vec{g}_0 = - \mathcal{G} \frac{M_{\text{terre}}}{(R_T + z)^2} \vec{e}_z$$

$$\delta g_0 = - \frac{2 g_0}{R_T} \delta h_0$$

c. Application Numérique

$$\Delta m_4 = M_{kg} \frac{\delta g_0}{g_0} = - \frac{2 M_{kg}}{R_T} \delta h_0 = - 2.4 \mu\text{g}$$

L'inox paraît plus léger qu'il n'est.

1.5. Adsorption d'atomes ou de molécules à la surface des étalons de masse.

a. Interaction entre une molécule et une paroi diélectrique

- i) Une fluctuation $\delta \vec{p}_A$ de \vec{p}_A (nul en moyenne) crée un champ \vec{E}_B en B , qui provoque l'apparition de $\delta \vec{p}_B = \alpha_B \vec{E}_B$. Comme le champ \vec{E}_B d'un dipôle est en $1/d^3$, l'énergie d'interaction, proportionnelle à δp_B et E_B est en $1/d^6$ et la force en $1/d^7$:

$$f_{AB} = K_{AB} / d^7$$

L'énergie d'interaction W_{AB} en $-\delta p_B \cdot \vec{E}_B$ est négative et donc la force est attractive :

$$W_{AB} = - \frac{K_{AB}}{6 d^6}$$

en prenant :

$$K_{AB} > 0$$

- ii) L'énergie d'interaction entre la molécule A et un volume $\delta\tau = r dr d\theta du$ du demi-espace $z < 0$ est :

$$\delta W = - \frac{n_B K_{AB}}{6 [(z-u)^2 + r^2]^3} \delta\tau$$

en coordonnées cylindriques (r, θ, u) .

La symétrie de révolution permet de prendre $\delta\tau = 2\pi r dr du$, d'où l'intégrale :

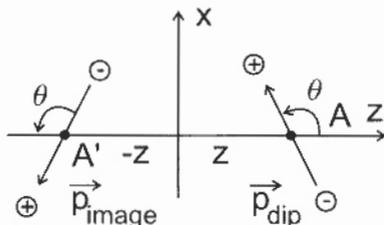
$$W_{ad_1}(z) = - \frac{n_B K_{AB}}{6} \int_{-\infty}^0 \left[du \int_0^{\infty} \frac{2\pi r dr}{6 [(z-u)^2 + r^2]^3} \right] = - \frac{\pi n_B K_{AB}}{36 z^3}$$

soit :

$$K_{ad_1} = - \frac{\pi n_B K_{AB}}{36}$$

a. Interaction entre une molécule et une paroi conductrice

- i) Images électriques : par interaction sur les porteurs du conducteur, l'image d'une charge + est une charge - et réciproquement. En explicitant le dipôle par deux charges on obtient :



La décomposition des dipôles selon Oz et selon le plan orthogonal à Oz permet d'exprimer le résultat sous la forme :

$$\dot{p}_{\text{image } z} = \dot{p}_{\text{dip } z} \quad \text{et} \quad \dot{p}_{\text{image } \perp} = - \dot{p}_{\text{dip } \perp}$$

- ii) Le champ électrique créé par \dot{p}_{dip} en A' a pour composantes :

$$\vec{E}_z = \frac{p_{\text{dip}}}{4\pi \epsilon_0} \frac{2 \cos \theta}{(2z)^3} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}_\perp = \frac{p_{\text{dip}}}{4\pi \epsilon_0} \frac{\sin \theta}{(2z)^3} (-\vec{e}_x)$$

soit une énergie d'interaction :

$$W = \dot{p}_{\text{image}} \cdot \vec{E} = - \frac{p_{\text{dip}}^2}{32\pi \epsilon_0 z^3} (1 + \cos^2 \theta)$$

- iii) La probabilité pour que l'angle θ soit compris entre θ et $\theta + d\theta$ est proportionnelle à l'angle solide correspondant :

$$\frac{2\pi}{4\pi} \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta$$

(probabilité normalisée puisque $\int_0^\pi \frac{1}{2} \sin \theta d\theta = 1$).

On en déduit : $W_{\text{ad}2}(z) = - \frac{p_{\text{dip}}^2}{64\pi \epsilon_0 z^3} \int_0^\pi (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = - \frac{p_{\text{dip}}^2}{24\pi \epsilon_0 z^3}$, soit :

$$K_{\text{ad}2} = - \frac{p_{\text{dip}}^2}{24\pi \epsilon_0}$$

Le signe négatif de $W_{\text{ad}2}(z)$ correspond à une force attractive.

iv) Application Numérique

Seul un ordre de grandeur est demandé :

$$p_{\text{dip}} \approx ed = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-10} \approx 10^{-29} \text{ Cm}$$

et :

$$K_{\text{ad}2} \approx - 10^{-49} \text{ J} \cdot \text{m}^3$$

c. Adsorption d'un «gaz moléculaire» à la surface d'un paroi

i) L'enthalpie libre molaire d'un gaz parfait est :

$$\mu(z) = \mu_0(T_0) + RT_0 \ln \frac{p(z)}{p(\infty)}$$

ii) En tenant compte de l'énergie d'interaction des molécules avec la paroi, le potentiel chimique effectif est :

$$\mu(z) + \int_1^z W_{ad}(z) \quad [\text{avec } R = \int_1^z k_B]$$

A l'équilibre, l'absence de diffusion impose l'uniformité du potentiel chimique, qui doit être indépendant de z :

$$\frac{\mu(z)}{\int_1^z} + W_{ad}(z) = Cte$$

iii) La valeur de la constante se calcule à l'infini :

$$Cte = \frac{\mu_0(\infty)}{\int_1^z}$$

On tire de l'équation :
$$p(z) = p(\infty) \exp \left[- \frac{K_{ad}}{z^3} \cdot \frac{1}{k_B T_0} \right]$$

on retrouve le facteur de Boltzmann classique.

Comme $K_{ad} < 0$ (attraction), l'argument de l'exponentielle est positif.iv) Quand z tend vers 0, la fonction $p(z)$ tend vers l'infini. Lorsque $p(z) > p_s(T_0)$, pour $z < d_{liq}$, le gaz se condense à l'état liquide, à la surface de la paroi, sous forme de couche d'épaisseur d_{liq} , que l'on tire de l'équation $p(d_{liq}) = p_s(T_0)$:

$$d_{liq} = \left[\frac{K_{ad}}{k_B T_0 \ln \left(\frac{p_s(T_0)}{p(\infty)} \right)} \right]^{1/3}$$

v) Application Numérique : $d_{liq} = 4,1 \cdot 10^{-10}$ m

à peine quelques couches moléculaires...

De quoi mettre à mal, peut-être, le modèle continu employé.

vi) Application aux étalons : $\Delta m_s = S_{ext} \cdot d_{liq} \cdot \rho_{bulk}$ soit $\Delta m_s = 2,9 \mu\text{g}$ pour l'étalon en Pt-Ir et $\Delta m_s = 5,7 \mu\text{g}$ pour l'étalon en inox.

1.6. Comparaison.

L'ordre de grandeur d'un effet ne conditionne pas son impact sur l'incertitude car des corrections peuvent être effectuées. Ainsi ce sont essentiellement la poussée d'Archimède (§ 1.2.) et l'adsorption à la surface (§ 1.5.) qui vont limiter la précision.

- Pour le § 1.1., la biais géométrique est traité par l'étalonnage.

- Pour le § 1.2., l'incertitude est de 10 μg si la masse volumique de l'air est mesurée à 10^{-4} près.

- Pour le § I.3., l'effet est très faible malgré les ordres de grandeur très forts adoptés pour le gradient de B (avec $Pt - Ir$).
- Pour le § I.4., l'effet de gravité peut être compensé.
- Pour le § I.5., la correction nécessite la connaissance de d_{liq} , ce qui est loin d'être acquis.

Deuxième partie

Création et manipulation d'un faisceau d'ions Au⁺.

II.1. Ordres de grandeur.

a. Le nombre d'ions à accumuler est :

$$N_{ions} = \frac{\delta M}{M_{Au}} \cdot N_A = 3,06 \cdot 10^{21}$$

b. La charge transportée par les ions étant $N_{ions} \times e$, l'intensité minimale est égale à :

$$I_{\text{mini}} = \frac{N_{ions} \cdot e}{\delta t_{\text{maxi}}} = 15,5 \mu\text{A} \quad \text{ou} \quad \frac{N_{ions}}{\delta t_{\text{maxi}}} = 9,7 \cdot 10^{13} \text{ ions} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'accumulation de masse sur des temps convenables nécessite des faisceaux intenses.

II.2. Constitution du faisceau.

a. Le théorème de l'énergie cinétique (ou la conservation de l'énergie mécanique) donne l'équation :

$$\frac{1}{2} m_{Au} v_0^2 = e (0 - V_0)$$

d'où :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2e(-V_0)}{m_{Au}}}$$

b. ij A l'équation précédente :

$$\frac{1}{2} m_{Au} v(z)^2 = -eV(z) \quad (1)$$

on ajoute l'équation de Poisson :

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} + \frac{\rho(z)}{\epsilon_0} = 0 \quad (2)$$

et l'équation de conservation de la charge :

$$\text{div } \vec{j}(z) = \frac{d}{dz} [\rho(z) v(z)] = 0 \quad (3)$$

L'intégration de (3) donne la densité de courant (constante en régime permanent) :

$$j_z = \rho(z) v(z)$$

En éliminant $\rho(z)$ et $v(z)$, on obtient :

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{j_z}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m_{Au}}{-2eV(z)}} \quad (4)$$

ii) En prenant $V(z) = V_0 \left(\frac{z}{\ell_0}\right)^\gamma$ d'après les conditions aux limites, l'équation (4) devient :

$$V_0 \frac{\gamma(\gamma-1)}{\ell_0^2} \left(\frac{z}{\ell_0}\right)^{\gamma-2} = -\frac{j_z}{\epsilon_0} \left(\frac{m_{Au}}{-2eV_0}\right)^{1/2} \left(\frac{z}{\ell_0}\right)^{\frac{\gamma}{2}}$$

d'où l'on déduit : $\gamma = \frac{4}{3}$ et $j_z = \frac{4}{9} \epsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m_{Au}}} \frac{1}{\ell_0^2} (-V_0)^{3/2}$

iii) Application Numérique

$$j_z \geq \frac{I_{\min}}{S_0} \quad \text{pour} \quad -V_0 \geq \left(\frac{4}{9} \frac{\ell_0^2}{\epsilon_0} \frac{I_{\min}}{S_0} \sqrt{\frac{m_{Au}}{2e}}\right)^{2/3} = 46,3 \text{ keV}$$

L'énergie cinétique de l'ion 46,3 keV est à comparer à son énergie de masse :

$$\frac{M_{Au}}{A_4} c^2 = 184 \cdot 10^6 \text{ keV}$$

Elle est $2,5 \cdot 10^{-7}$ fois plus faible ; l'approximation non relativiste est valable.

II.3. Sélecteur de masse.

a. Jet homocinétique.

i)
$$m_{Au} \frac{d\vec{v}}{dt} = e \vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

Comme la force est orthogonale à \vec{B}_0 ainsi que la vitesse initiale $\vec{v}(P)$, la trajectoire est plane, dans le plan xOz . Comme $\dot{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, la norme $\|\vec{v}\|$ est constante et égale à v_0 . Le rayon de courbure

$$\mathcal{R} = \frac{m_{Au} \|\vec{v}\|^2}{\|e \vec{v} \wedge \vec{B}_0\|} = \frac{m_{Au} v_0}{e B_0} \text{ est constant. Le mouvement est donc circulaire uniforme.}$$

ii) Pour que $e \vec{v}_0 \wedge \vec{B}_0$ soit dans le sens $P\vec{K}$, il faut que \vec{B}_0 soit dans le sens Oy : $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$.

$$\mathcal{R} = r_0 \text{ pour } B_0 = \frac{m_{Au} v_0}{e r_0} = \frac{\sqrt{-2eV_0} m_{Au}}{e r_0} = 0,87 \text{ T.}$$

iii) Au-delà de P' il n'y a aucun champ : le mouvement de l'ion libre est rectiligne uniforme selon la normale à (\mathcal{P}') en P' .

b. Sélection de masse.

i) La vitesse v d'un ion de masse m , accéléré par la même tension $-V_0$, est $v = v_0 \sqrt{\frac{m_{Au}}{m}}$ proportionnelle à $m^{-1/2}$.

Le rayon $\mathcal{R} = \frac{m v}{e B_0}$ est proportionnel à $m^{+1/2}$, ce qui sépare les différentes masses.

- ii) Si la longueur D_0 est faible, les trajectoires traversant la fente présentent un écart de rayon $\delta r = \pm \frac{D_0}{2}$, auquel correspond, d'après la question précédente, un écart de masse :

$$\delta m = 2 \frac{m_{Au}}{r_0} \delta r = \pm m_{Au} \frac{D_0}{r_0}$$

Tous les autres ions sont éliminés si $|\delta m|$ est inférieur à une unité de masse atomique $u = \frac{M(^{12}\text{C})}{12 \cdot N_A}$,

soit $D_0 < \frac{r_0}{197} = 2,5 \text{ mm}$. Cette valeur peut être multipliée par 2 ou 3 s'il n'existe pas de nucléides de masses différant de celle de Au de 1 ou 2 u.m.a.

c. Jet divergent.

- i) Quand la vitesse initiale reste dans le plan xOz , la trajectoire y reste également. L'angle $\varphi(t)$ étant orienté de KP vers KP' (d'après la définition de $\omega(t)$), on projette la relation fondamentale sur la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ des coordonnées polaires :

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -e r \dot{\varphi} B_0 \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = e \dot{r} B_0 \end{cases}$$

En exprimant $r(t)$ et $\dot{\varphi}(t)$ en fonction de $\gamma(t)$ et $\omega(t)$, en ne conservant que les termes du premier ordre et en remplaçant $\frac{e B_0}{m} = \frac{v_0}{r_0}$, il reste :

$$\begin{cases} \ddot{\gamma} = v_0 \omega \\ \dot{\gamma} = -\frac{r_0^2}{v_0} \dot{\omega} \end{cases}$$

- ii) En orientant l'angle α comme φ , l'ion issu de I intercepte le plan PK au point de coordonnées polaires $[r_0 - \alpha(\ell_1 - \ell_0), O]$, avec une vitesse de composantes polaires $[-v_0 \alpha, v_0]$ pour α petit. On en déduit les conditions initiales :

$$\gamma_0 = -\alpha(\ell_1 - \ell_0) \quad ; \quad \dot{\gamma}_0 = -v_0 \alpha \quad ; \quad \varphi_0 = 0 \quad ;$$

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{v_0}{r_0 - \alpha(\ell_1 - \ell_0)} = \frac{v_0}{r_0} + \frac{v_0(\ell_1 - \ell_0)}{r_0^2} \alpha$$

Compte tenu de ces conditions initiales, les équations de la question précédente s'intègrent successivement en :

$$\gamma = -\frac{r_0^2}{v_0} \omega \quad ; \quad \ddot{\gamma} = -\frac{v_0^2}{r_0^2} \gamma$$

puis :

$$\begin{cases} \gamma(t) = -\alpha \left[r_0 \sin \frac{v_0 t}{r_0} + (\ell_1 - \ell_0) \cos \frac{v_0 t}{r_0} \right] \\ \varphi(t) = \frac{v_0 t}{r_0} + \alpha \left(1 - \cos \frac{v_0 t}{r_0} \right) + \alpha \frac{\ell_1 - \ell_0}{r_0} \sin \frac{v_0 t}{r_0} \end{cases}$$

L'ion atteint le plan (\mathcal{P}') à l'instant $t_s \approx \Phi \frac{r_0}{v_0}$ (à l'ordre de plus bas) avec un écart :

$$\gamma(t_s) = -\alpha \left(\sin \phi + \frac{IP}{r_0} \cos \phi \right) r_0$$

et une vitesse radiale :

$$\dot{\gamma}(t_s) = -\alpha \left(\cos \phi - \frac{IP}{r_0} \sin \phi \right) v_0$$

Après (\mathcal{P}') la trajectoire suivie fait avec la trajectoire centrale l'angle (à l'ordre le plus bas) :

$$\alpha_s = -\frac{\dot{\gamma}(t_s)}{v_0} = \alpha \left(\cos \phi - \frac{IP}{r_0} \sin \phi \right)$$

iii) L'intersection se fait à la distance (algébrique) :

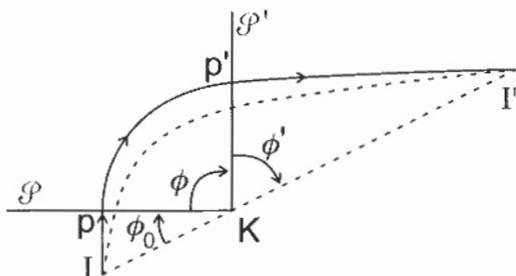
$$l' = \frac{\gamma(t_s)}{\alpha_s} = -r_0 \frac{\sin \phi + \frac{IP}{r_0} \cos \phi}{\cos \phi - \frac{IP}{r_0} \sin \phi}$$

Avec $\phi_0 = \text{Arc tan} \frac{IP}{r_0}$, $l' = -r_0 \tan(\phi + \phi_0)$ est indépendant de α : le point Γ est un point de focalisation du faisceau avec une modification de la divergence si $\alpha_s \neq \alpha$.

Remarque : on vérifie que, pour $\phi = 0$, $l' = -IP$ (faisceau issu de I).

iv) Comme $\tan \phi' = + \frac{l'}{r_0} = -\tan(\phi + \phi_0)$ (voir figure ci-dessous), ϕ' et $\phi + \phi_0$ sont supplémentaires :

$$\phi_0 + \phi + \phi' = \pi$$



v) Pour un faisceau parallèle, l' est infini, soit :

$$\phi + \phi_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \phi = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan} \frac{IP}{r_0} = 1,19 \text{ rad} = 68,2^\circ$$

II.4. Élargissement du faisceau.

a. Approximation cylindrique.

i)

$$j = \rho v = \frac{I_0}{\pi r^2}$$

d'où :

$$\rho = \frac{I_0}{\pi r^2 v}$$

\vec{E} est radial et, en appliquant le théorème de Gauss et les symétries, $\vec{E} = \frac{\rho r}{2 \epsilon_0} \vec{u}_r$.

ii) D'après les symétries et le théorème d'Ampère, \vec{B} est orthoradial :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

iii)

$$\vec{f} = e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \frac{\rho e r}{2 \epsilon_0} (1 - \epsilon_0 \mu_0 v^2) \vec{u}_r$$

Le terme magnétique est négligeable car $\epsilon_0 \mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2} \ll 1$ (approximation non relativiste).

b. Divergence faible.

i) De :

$$m_{Au} \frac{d v_r}{dt} = \vec{f}$$

on déduit :

$$v_r(t) = \frac{\rho e r_0}{2 \epsilon_0 m_{Au}} t$$

puis :

$$\beta = \frac{v_r \left(\frac{z_0}{v_0} \right)}{v_0} = \frac{I_0 e z_0}{2\pi \epsilon_0 r_0 v_0^3 m_{Au}}$$

ii)

$$r(z) - r_0 = \int_0^{z_0/v_0} v_r dt = \frac{\rho e r_0}{4 \epsilon_0 m_{Au}} \frac{z_0^2}{v_0^2} = \frac{z_0^2 r_0}{R_0^2}$$

avec :

$$R_0 = r_0 \left(\frac{8\pi \epsilon_0}{I_0} \right)^{1/2} \left(\frac{-2e V_0^3}{m_{Au}} \right)^{1/4}$$

iii)

$$R_0 = 0,47 \text{ m} \quad \text{et} \quad \frac{r - r_0}{r_0} = 0,18$$

c. Cas réel.

i) \vec{E} variant lentement avec z , on utilise l'expression précédente pour chaque valeur de r . L'enveloppe $r(z)$ du jet coïncide avec la trajectoire d'un ion du bord :

$$\ddot{r} = \frac{e}{m_{Au}} E(r) = \frac{e I_0}{2\pi \epsilon_0 m_{Au} v_0} \frac{1}{r}$$

ii) On multiplie par \dot{r} et on intègre (avec $\dot{r}(0) = 0$) :

$$\dot{r}(z)^2 = \frac{e I_0}{\pi \epsilon_0 v_0 m_{Au}} \ln \frac{r(z)}{r_0}$$

Avec $\dot{r} = 2 r_0 \xi \dot{\xi} e^{\xi^2}$ il vient :

$$dt = \left(\frac{\pi \epsilon_0 v_0 m_{Au}}{e I_0} \right)^{1/2} 2 r_0 e^{\xi^2} d\xi$$

En intégrant et en éliminant ξ , on obtient :

$$z = \left(\frac{4\pi \epsilon_0 m_{Au} v_0^3}{e I_0} \right)^{1/2} r_0 \int_0^{\sqrt{r u(r/r_0)}} \exp(u^2) du$$

où le coefficient est l'une des formes de R_0 du § 4.b.

iii) Avec les notations proposées :

$$r_1 = r_0 e^{\xi^2} \quad \text{et} \quad L = R_0 \int_0^{\xi} e^{u^2} du$$

$$\text{d'où :} \quad I_0^{1/2} = \frac{r_1}{L} \left(\frac{4\pi \epsilon_0 m_{Au} v_0^3}{e} \right)^{1/2} \left[e^{\xi^2} \int_0^{\xi} e^{u^2} du \right]$$

Pour la valeur maximale (0,54) du crochet :

$$\left. \frac{r_0}{r_1} \right|_m = e^{-(0,92)^2} = 0,428 \quad ; \quad r_{0_m} = 2,14 \text{ mm} \quad ; \quad I_{0_m} = 64,0 \mu\text{A}$$

Troisième partie

Supraconductivité : étalon de tension à effet Josephson.

III.1. Conduction dans un matériau supraconducteur.

a. Densité volumique.

$2 |\Psi|^2 = 2 n_0 (2e^- \text{ par paire})$, $n_0 \approx 3 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ (en prenant un électron de conduction par atome occupant 15 \AA^3 par exemple).

b. Densité de courant.

i)

$$\dot{p} = m\vec{v} + q\vec{A} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$$

si :

$$q = -2e \quad \text{et} \quad m = 2m_e$$

$$\vec{v} = \frac{1}{2m_e} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + 2e\vec{A} \right)$$

ii)

$$\vec{j}(\vec{r}) = -2e \langle \Psi | \vec{v}(\vec{r}) | \Psi \rangle = \frac{e n_0}{m_e} \left(-\hbar \vec{\nabla} \theta(\vec{r}) + [-2e\vec{A}(\vec{r})] \right)$$

iii) Comme :

$$\vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{grad}}(v(\vec{r})) \right) = \vec{0}$$

il vient :

$$\vec{\text{rot}} [\vec{j}(\vec{r})] = - \frac{2e^2 n_0}{m_e} \vec{B}(\vec{r})$$

iv) λ_0 longueur [voir London].

Application Numérique :

Si $n_0 = 3 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$: $\lambda_0 = 22 \text{ nm}$

III.2. Effet Tunnel.

a. Approche qualitative.

$E_0 \leq 0$, ne pas considérer ; $0 < E_0 < W_0$: mouvement classique \rightarrow réflexion, quantique \rightarrow possibilité de transmission ; $E_0 \geq W_0$, mouvement classique \rightarrow transmission, quantique \rightarrow possibilité de réflexion. Si $E_0 \ll W_0$, peu de transmission ; si $E_0 \gg W_0$, peu de réflexion. Comparer aussi $2a$ à la «longueur d'onde» $\frac{h}{\sqrt{2m(W_0 - E_0)}}$ sous la barrière [si $E_0 < W_0$], ou à $\frac{h}{\sqrt{2m(E_0 - W_0)}}$ [si $E_0 > W_0$]. la déviation au mouvement classique était d'autant plus grande que $2a \ll$ cette «longueur d'onde». Un traitement exact «clair» est difficile car il faut former des paquets d'onde pour interpréter...

b. Application Numérique : $\tau \approx 1,2 \cdot 10^{-2}$

III.3. Effet Josephson.

a. Polarisation nulle.

i)
$$\begin{cases} \dot{n}_A = -2 \omega_T (n_A n_B)^{1/2} \sin \delta & \text{et} & -n_A \dot{\theta}_A = \omega_T (n_A n_B)^{1/2} \cos \delta \\ \dot{n}_B = +2 \omega_T (n_A n_B)^{1/2} \sin \delta & \text{et} & -n_B \dot{\theta}_B = \omega_T (n_A n_B)^{1/2} \cos \delta \end{cases}$$

ii)
$$n_A = n_B = n_0$$

sauf pour : \dot{n}_A ; \dot{n}_B (...) ; $\dot{n}_A + \dot{n}_B = 0$

et :
$$\dot{\theta}_A = -\omega_T \cos \delta = \dot{\theta}_B$$

d'où :
$$\dot{\delta} = 0$$

De B vers A :
$$\dot{n}_A = -2 \omega_T (n_A n_B)^{1/2} \sin \delta$$

iii) Densité de courant proportionnelle à :

$$(-2e) \dot{n}_B \cdot \text{vitesse}$$

donc courant :
$$I_p = I_0 \sin \delta$$

b. Jonction polarisée.

Il faut ajouter :
$$(-2) \times \left(+ \frac{V}{2} \right) = -eV$$

pour ψ_A et $+eV$ pour ψ_B dans l'équation de Schrödinger à droite.

$$i) \quad \begin{cases} \dot{n}_A = 2 \omega_T (n_A n_B)^{1/2} \sin \delta & \text{et} & -n_A \dot{\theta}_A = \omega_T (n_A n_B)^{1/2} \cos \delta - \frac{eV}{\hbar} n_A \\ \dot{n}_B = +2 \omega_T (n_A n_B)^{1/2} \sin \delta & \text{et} & n_B \dot{\theta}_B = \omega_T (n_A n_B)^{1/2} \cos \delta + \frac{eV}{\hbar} n_B \end{cases}$$

$$ii) \quad \dot{n}_A = \dot{n}_B = -2 \omega_T n_0 \sin \delta$$

mais $\dot{\delta} = 2 eV / \hbar$; δ non stationnaire.

iii) • On en déduit :

$$I_p(t) = I_0 \sin \left[\delta(0) + \int_0^t \frac{2 eV}{\hbar} du \right] = I_0 \sin \left[\delta(0) + \frac{2 eVt}{\hbar} \right] \quad (\text{car } V = cte)$$

• Pas de composante continue si $V \neq 0$.

$$iv) \quad \text{Application Numérique :} \quad v = \frac{2 eV}{\hbar} \approx 485 \text{ GHz} \quad (\text{domaine des hyperfréquences}).$$

c. Jonction polarisée et irradiée.

i) Schrödinger reste vraie, donc :

$$I_p(t) = I_0 \sin \left[\delta(0) + \int_0^t \frac{2e}{\hbar} V(u) du \right]$$

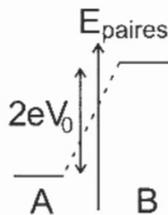
$$\text{En intégrant :} \quad I_p(t) = I_0 \sin \left[\delta(0) + \frac{2e V_0}{\hbar} t + \frac{2e}{\hbar} \frac{V_1}{\omega_{RF}} \sin(\omega_{RF} t) \right]$$

ii) • Le développement du sinus de sinus dans $I_p(t)$ fait apparaître tous les harmoniques de la pulsation ω_{RF} , combinées par addition ou soustraction à $\frac{2e V_0}{\hbar}$. Il n'y a de composante continue que si l'une de ces combinaisons est nulle, d'où :

$$v_{RF} = \frac{2e}{\hbar} V_0 \times \frac{1}{q}$$

avec q entier.

• Le passage de paires d' e^- est «assisté» par q «photons» d'énergie $\hbar \omega_{RF}$ qui permettent de rétablir la condition de résonance de part et d'autre de la jonction entre les niveaux d'énergie des paires, distants de $2e V_0$ compte tenu de la polarisation $A \leftarrow B$.



iii) Sur la caractéristique (I, v) continue de la jonction, on observe des discontinuités lorsqu'une «voix» résonnante est ouverte. Ces structures remarquables sont séparées par une différence de ten-

sion ($h\nu_{RF} / 2e$) : il suffit de mesurer v_{RF} (parfois $\approx 10^{12}$ en valeur relative !); $h / 2e$ est indépendante du matériau.

En fait, suivant V et la puissance RF, on obtient :



III.4. Étalon du courant.

Pas de question.

Quatrième partie

Comparateur de courants ; détecteur «SQUID».

IV.1. Blindage magnétique par un matériau supraconducteur

a. Effet Meissner.

i) Dans le vide ($z < 0$) : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0} \quad \text{div} \vec{B} = 0$

Dans le supraconducteur ($z \geq 0$) :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad \vec{\text{rot}} \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_0^2} \vec{B}$$

ii) En éliminant \vec{j} , on obtient l'équation :

$$\Delta \vec{B} = \frac{\vec{B}}{\lambda_0^2}$$

soit :

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = \frac{\vec{B}}{\lambda_0^2}$$

compte tenu des symétries.

Dans la solution générale : $\vec{B} = \vec{B}_1 e^{z/\lambda_0} + \vec{B}_2 e^{-z/\lambda_0}$

on prend $\vec{B}_1 = \vec{0}$ car $\vec{B}(\infty)$ est fini et $\vec{B}_2 = \vec{B}_a$ par continuité en $z = 0$. On obtient donc :

$$\vec{B} = \vec{B}_a e^{-z/\lambda_0}$$

puis :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\text{rot}} \vec{B} = -\frac{B_a}{\mu_0 \lambda_0} \vec{e}_y e^{-z/\lambda_0}$$

iii) \vec{j} est orthogonale à Oz et à \vec{B}_a . Elle crée un champ qui s'oppose à \vec{B}_a dans le supraconducteur et l'annule à partir d'une épaisseur de l'ordre de quelques λ_0 . Le champ est éjecté du supraconducteur : c'est l'effet Meissner.

b. Blindage.

- i) Les symétries du courant et du supraconducteur imposent $\vec{B}(\vec{r})$ orthoradial et donc tangent à la surface intérieure.

A l'intérieur du matériau, loin de la surface, l'effet Meissner impose $\vec{j} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$. Au voisinage de la surface intérieure il impose \vec{j} parallèle à Oz .

Le théorème d'Ampère appliqué au cercle extérieur de la couronne donne une circulation de \vec{B} et donc une intensité intérieure nulle : l'intensité dans la couronne est égale à $-I$.

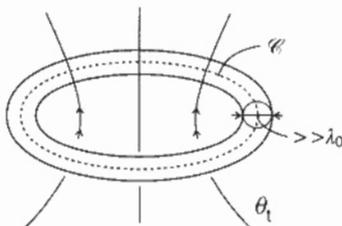
- ii) La conservation du courant en régime permanent entraîne que les tubes de courant se referment au voisinage de la surface extérieure (puisque \vec{j} et \vec{B} sont nuls loin des surfaces). L'intensité traversant la couronne extérieure et donc égale à $+I$ avec une symétrie de révolution par rapport à Oz et de translation selon Oz .

- iii) Le théorème d'Ampère permet (avec les symétries) de déterminer le champ orthoradial :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

C'est le même que celui d'un courant I situé sur l'axe du cylindre.

- iv) Toutes les équations étant linéaires, on peut superposer les champ de I_1 et de I_2 . $\vec{B}(\vec{r})$ à l'extérieur est nul pour $I_1 + I_2 = 0$.

IV.2. **SQUID.**a. Quantification du flux.

- i) $\vec{j} = \vec{0}$ et $\vec{B} = 0$ sur \mathcal{C}

ii)
$$\phi_i = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = -\frac{\hbar}{2e} \oint_{\mathcal{C}} \text{grad}(\theta(\vec{r})) \cdot d\vec{l}$$

iii) θ est la phase à 2π près, donc :
$$\oint_{\mathcal{C}} = 2\pi \times (\text{entier } q)$$

et :
$$\phi_i = q \phi_0 \quad \text{où} \quad \phi_0 = \hbar / 2e$$

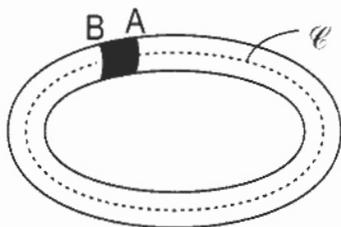
iv) Application Numérique :
$$\phi_0 = 2.06 \times 10^{-15} \text{ Wb}$$

- v) Si $T > T_c$, ϕ_a est ce qu'il est... dû à l'extérieur. Pour $T < T_c$, le flux dans l'anneau est quantifié : il peut donc être nécessaire qu'existe un courant I_S vérifiant :

$$\phi_a + \phi_{propre} = q \phi_0 \quad q \text{ entier}$$

$$\phi_{propre} = L \cdot I_S$$

b. SQUID unijonction.



$$i) \quad \phi_t = -\frac{\hbar}{2e} \oint_{\mathcal{C}} \text{grad} [\theta(r)] \cdot d\vec{r} = \frac{\hbar}{2e} [2\pi q' + \theta_A - \theta_B]$$

où q' est un entier et : $\theta_A - \theta_B = \delta$

$$ii) \quad I_S = I_0 \sin(\delta) \quad \text{et} \quad \phi_t = \phi_a + L I_S$$

En éliminant I_S et en divisant par ϕ_0 , il vient :

$$\frac{\phi_a}{\phi_0} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{2\pi L I_0}{\phi_0} \sin \delta + \delta \right\} = -q' = q \text{ entier}$$

$= \mathcal{L}$

Le «signe» trouvé pour δ n'a pas ici une importance cruciale et dépend tout de même de l'orientation A ou B choisie....

- iii) ϕ_t non quantifié, ϕ_a non plus....

Propriétés de ϕ_t (ϕ_a)

- $\phi_a \rightarrow -\phi_a \Rightarrow \delta \rightarrow -\delta \Rightarrow \phi_t \rightarrow -\phi_t$ impair, si $q = 0$.
- $\phi_a \rightarrow \phi_a + p \phi_0 \Rightarrow \delta \rightarrow \delta - p \cdot 2\pi$ solution avec même q , et $\phi_t \rightarrow \phi_t + p \phi_0$.

- $\left\{ \begin{array}{l} \phi_a = 0 \rightarrow \delta = 0 \text{ avec } q = 0 \text{ et } \phi_t = 0, \text{ OK puis période } \phi_0 \\ \phi_a = \phi_a / 2 \rightarrow \delta = -\pi \text{ et } \phi_t = \phi_0 / 2, \text{ OK puis période } \phi_0 \end{array} \right.$

- $\mathcal{L} \ll 1$, $\phi_t = \phi_a + L I_S \approx \phi_a + L I_0 = \phi_0$ car $|L I_0| < \mathcal{L} \phi_0 / 2\pi$.

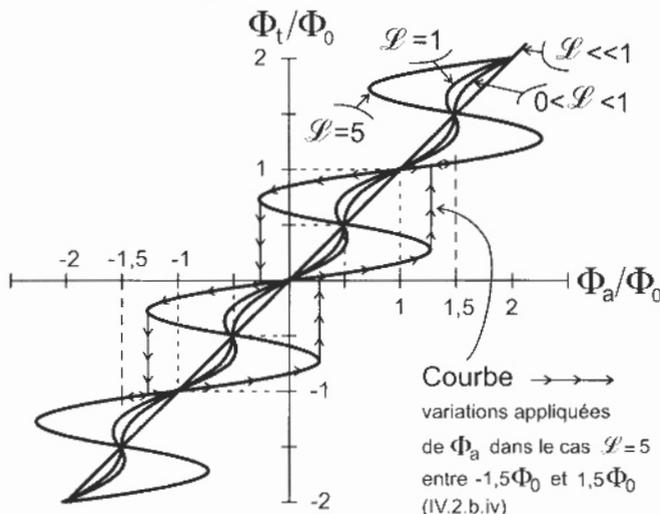
- $0 < \mathcal{L} \leq 1$, si $0 < \phi_a \ll \phi_0$, $\delta < 0$ et $|\delta| \ll \pi$ d'où $\phi_t < \phi_a$

et $\left. \frac{d\phi_t}{d\phi_a} \right|_{q=cste} = \frac{1}{1 + \mathcal{L} \cos \delta}$ de signe constant si $|\mathcal{L}| < 1$ et à tangente verticale en $(1/2, 1/2)$ si

$$\mathcal{L} = 1 \text{ (car } \delta = -1).$$

- $1 < \mathcal{L}$, divergence de $\left. \frac{d\Phi_t}{d\Phi_a} \right|_{\Phi_a = \Phi_0}$ et inversion du signe de la pente, bistabilité.

Ces résultats sont tracés sur la figure ci-dessous.



- iv) Voir courbe : les parties du graphe à pente négative ne peuvent correspondre à la réalité lorsqu'on impose une variation de Φ_a . Le comportement est du type hystérique. Une variation de flux appliqué $d\Phi_a$ provoque un courant $I_S \neq 0$ et donc l'apparition d'un travail $I_S d\Phi_a$. Il y a au final dissipation d'énergie sur les cycles.

c. Utilisation du SQUID.

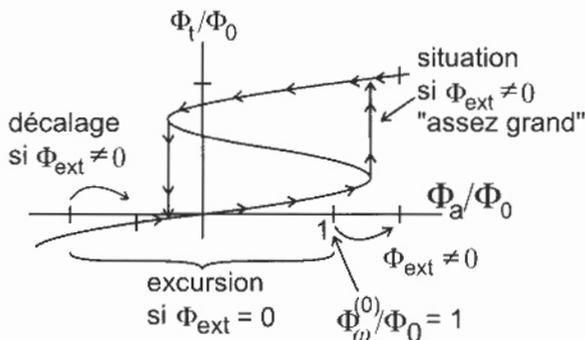
- i) Circuit «bouchon», résonance : $L_0 C_0 \omega_0^2 = 1$

et :
$$V_{\omega} \sim r_0 Q_0^2 I_{\omega} \left\{ \text{car } (Z_{\omega})^{-1} = \frac{1}{r_0} \frac{r_0 C_0 \omega_0}{1 - L_0 \omega_0^2} \right\}$$

- ii) • $\Phi_{\omega} = M I_{L, \omega}$ et $I_{L, \omega} = -j Q_0 I_{\omega}$ à résonance soit $\Phi_{\omega} = -j M Q_0 I_{\omega}$.
 $I_{L, \omega}$: intensité dans L : $j^2 = -1$.

• I_{ω} augmente ; le point décrivant le fonctionnement du SQUID est le point d'abscisse Φ_{ω} / Φ_0 , proportionnel à $I_{\omega} e^{j\omega t}$, donc oscillant tant que l'on n'atteint pas le seuil d'apparition de l'hystérésis : le SQUID n'influe pas sur le fonctionnement du circuit, et V_{ω} croît linéairement avec I_{ω} . Lorsque l'hystérésis apparaît, il y a dissipation et l'acuité de la résonance du circuit bouchon diminue. A priori, V_{ω} diminue brusquement, mais $I_{L, \omega}$, et donc Φ_{ω} ont également tendance à diminuer, ce qui fait augmenter l'acuité du circuit et donc V_{ω} . On a donc une stagnation de V_{ω} lorsque I_{ω} augmente à chaque fois qu'apparaît un nouveau cycle d'hystérésis (double) dans la fraction parcourue de la caractéristique, et une rupture de pente dans la croissance de V_{ω} avec I_{ω} .

- iii) Lorsqu'on ajoute un flux Φ_{ext} , on décale le centre de l'amplitude des variations de Φ_a sur le graphe par rapport à zéro. Si $\Phi_{\omega} \approx \Phi_0$ il n'y a pas d'hystérésis lorsque $\Phi_{ext} = 0$. Pour Φ_{ext} assez grand, on décrit un cycle et donc I_{ω} diminue. Puis, si Φ_{ext} augmente, il y a un décalage du point de fonctionnement le long de la deuxième arche, sans hystérésis, et V_{ω} reprend sa première valeur.



La courbe en fonction de Φ_{ext} est de période Φ_0 (lorsqu'on effectue un décalage d'une arche).

\mathcal{S} permet effectivement de détecter un flux donné par le réglage de I_{ω} , zéro initial et l'apparition de l'hystérésis. La meilleure sensibilité ($dV_{\omega} / d\Phi_{ext}$) est obtenue pour les discontinuités, évidemment...

- iv) En détecteur de «zéro», il faut que I_{ω} soit à la limite d'apparition de l'hystérésis.
- v) Le bruit propre du SQUID, la stabilité du générateur I_{ω} et des composants à basse température, limitent les performances.

IV.3. Comparateur de courant.

a. Choix de n_T .

i) Flux $\delta \Phi_T$ créé par δI

Calcul a priori par évident... Si l'on peut supposer que la bobine remplit tout l'intérieur, et que le tore est de faible section, alors δI crée dans la bobine un flux égal à $\frac{L_T}{n_T} \delta I$ [comme s'il parcourait un tour de cette même bobine...]. Donc :

$$\delta \Phi_T = \frac{L_T}{n_T} \delta I$$

Courant I_T dans le circuit

La conservation du flux donne : $(L_T + L') I_T + L_T \frac{\delta I}{n_T} = 0$ d'où I_T

Flux appliqué au SQUID

$$\Phi_{ext} = M' I_T = - M' \frac{n_T k_T \delta I}{n_T^2 k_T + \frac{L'}{\mu_0}}$$

ii) Φ_{ext} maximal si $n_T = \left(\frac{L'}{\mu_0 k_T} \right)^{1/2}$.

iii) Application Numérique : $k_T = \frac{\pi R_T}{2}$ en supposant le champ au centre d'une spire valable sur toute la surface ! alors $n_T \approx 4$.

b. Mesure de I_0 .

i) δI_{\min} est obtenue si ϕ_{ext} du § a) est $= \phi_b^* \cdot \Delta^{1/2}$ soit :

$$M \cdot \frac{\delta I_{\min}}{2 n_T} = \phi_b \left(\frac{\omega_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{Q_0} \right)^{1/2}$$

Application Numérique : $\delta I_{\min} = 0,5 \text{ nA}$

ii)
$$\frac{N_0}{N_{\text{ref}}} \approx \frac{I_{\text{ref}}}{I_0}$$

Numériquement $\approx 64,5$ soit 64 (on ajustera I_{ref} !).

Pour que $\frac{\delta I_{\min}}{N_0 I_0} \leq 5 \cdot 10^{-7}$, il faut $N_0 \geq 64,5$ aussi ! (c'est donc bien ajusté de prendre $I_{\text{ref}} = 1 \text{ mA}$ et $N_{\text{ref}} = 1$).



Agrégation (Concours Externe)

OPTION : CHIMIE

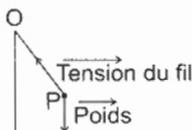
Composition de physique - Session : 1999

Du rythme au chaos

I. PENDULE SIMPLE dans le champ de pesanteur terrestre

I.1. Référentiel terrestre \approx galiléen si durée de l'expérience suffisamment petite par rapport à la période de rotation propre de la Terre, par exemple durée de l'expérience de $\frac{24 h}{100}$ soit environ $\frac{1}{4} h$.

I.2.



I.3. Principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{d^2 \vec{OP}}{dt^2} = \vec{Poids} + \vec{Tension\ du\ fil} = \vec{mg} + \vec{T}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} ml \dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + T \\ ml \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{array} \right. \rightarrow \text{la seule demandée}$$

I.4. Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} mv_P^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int_{rct}^P \vec{mg} \cdot \vec{dl} = \int_{rct}^P -mg l \sin \theta \, d\theta$$

$$\frac{1}{2} mv_P^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = mgl (\cos \theta_P - \cos \theta_0) \quad \text{et} \quad v_P = l \dot{\theta}$$

$$\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_0^2 = mgl (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Dériver / 1 temps :

$$ml^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta \dot{\theta}$$

Simplifier par $\dot{\theta}$:

$$ml^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$$

On retrouve bien :

$$\boxed{ml \ddot{\theta} = -mg \sin \theta}$$

I.5. Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d}{dt} (\vec{OP} \wedge m \vec{v}_p) = \vec{OP} \wedge m \vec{g} + \vec{O}$$

$$\frac{d}{dt} = (l \vec{u}_r \wedge m l \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = l \vec{u}_r \wedge (mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

$$ml^2 \ddot{\theta} \vec{u}_z = -mg l \sin \theta \vec{u}_z \quad \text{CQFV}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

I.6. Le pendule sera un oscillateur harmonique si θ assez petit tel que $\sin \theta \approx \theta$; alors :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta = -\omega_0^2 \theta$$

avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ pulsation.

I.7. Étude de quelques effets non-linéaires :

I.7.a.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right)$$

I.7.b. ω fondamental ; 3ω premier harmonique non nul (ou troisième harmonique).

I.7.c. Rechercher ω et ε : soit $\theta = \theta_0 \cos \omega t + \varepsilon \theta_0 \cos 3\omega t$

$$\ddot{\theta} = -\theta_0 \omega^2 [\cos \omega t + 9\varepsilon \cos 3\omega t]$$

L'équation (a) devient :

$$-\theta_0 \omega^2 (\cos \omega t + 9\varepsilon \cos 3\omega t) + \frac{g}{l} (\theta_0 (\cos \omega t + \varepsilon \cos 3\omega t))$$

$$- \frac{\theta_0^3}{6} (\cos^3 \omega t + 3\varepsilon \cos^2 \omega t \cos 3\omega t + 3\varepsilon^2 \cos \omega t \cos 3\omega t + \varepsilon^3 \cos 3\omega t) = 0$$

$$\text{avec : } \cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \quad ; \quad \cos^3 \omega t = \frac{3 \cos \omega t + \cos 3\omega t}{4}$$

ou encore, en se limitant au premier ordre en ε :

$$-\omega^2 (\cos \omega t + 9\varepsilon \cos 3\omega t) + \frac{g}{l} (\cos \omega t + \varepsilon \cos 3\omega t)$$

$$- g \frac{\theta_0^2}{6 l} \left[\left(\frac{3 \cos \omega t}{4} + \frac{\cos 3\omega t}{4} \right) + \frac{3\varepsilon (1 + \cos 2\omega t)}{2} \cos 3\omega t = 0 \right]$$

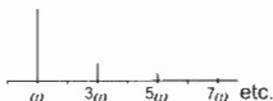
Par identification terme à terme, on obtient :

$$\omega^2 = \frac{g}{l} - g \frac{\theta_0^2}{8 l} = \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{8} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8} \right)$$

$$\text{et :} \quad -9 \varepsilon \omega^2 + \frac{g}{l} \varepsilon - \frac{g \theta_0^2}{24 l} - g \frac{\varepsilon \theta_0^2}{4 l} = 0$$

$$\text{d'où :} \quad \boxed{\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad \text{et} \quad \varepsilon = - \frac{\omega^2 \theta_0^2}{24 (9 \omega^2 - \omega_0^2)} = - \frac{\theta_0^2}{192}}$$

- I.8. I.8.a. D'après la question précédente, la pulsation ω est inférieure à la valeur ω_0 : la période réelle est donc supérieure à la période de la fonction $\sin \omega t$: la courbe $\theta(t)$ relative au mouvement réel est donc celle qui a la plus grande période.
- I.8.b. La courbe $\theta(t)$ est périodique ; sa pulsation fondamentale est ω ; elle contient les pulsations harmoniques **impaires**, l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta$ étant elle-même impaire, d'où l'allure du spectre de la solution $\theta(t)$ par analyse spectrale :



Amplitudes des harmoniques rapidement décroissantes : $\varepsilon = \theta_0^2 / 192$ pour l'amplitude du troisième harmonique de la pulsation fondamentale.

I.9. Pendule paramétrique :

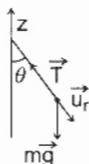
I.9.a. Accélération du point de suspension O :

$$\ddot{z} = -z_0 \Omega^2 \cos \Omega t$$

I.9.b. Le point O n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre ; même si le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen, le référentiel R n'est pas galiléen.

I.9.c. Accélération totale du pendule dans R :

$$\vec{a} = \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{u}_z + \frac{d^2 \vec{OP}}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{u}_z - l \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + l \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$



I.9.d. Principe fondamental de la dynamique :

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T}$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{u}_z - m l \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + m l \ddot{\theta} \vec{u}_\theta = m \vec{g} + \vec{T}$$

En projection sur \vec{u}_r , on obtient :

$$-m \ddot{z} \cos \theta - m l \dot{\theta}^2 = + mg \cos \theta - T$$

En projection sur \vec{u}_θ , on obtient

$$m \ddot{z} \sin \theta + m l \ddot{\theta} = - mg \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} = - \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{\dot{z}_0}{l} \Omega^2 \cos \Omega t \sin \theta$$

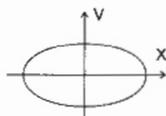
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \left(1 - \frac{\dot{z}_0 \Omega^2}{g} \cos \Omega t \right) \sin \theta = 0}$$

$$a = \omega_0^2, \quad b = - \frac{\dot{z}_0 \Omega^2}{g} \text{ (sans dimension, CQFV).}$$

1.9.e. 1.9.e.1. Le résultat chaotique est bien une réalité physique.

1.9.e.2. Trajectoire de phase de l'oscillateur harmonique :

$$x = x_0 \cos \omega t \quad \rightarrow \quad v = - \omega x_0 \sin \omega t$$

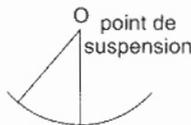


$v(x)$ est une ellipse (ou cercle selon échelle).

La trajectoire de phase de l'oscillateur harmonique est une courbe fermée unique, contrairement aux trois cas ci-dessus.

1.10. Balanoire

1.10.a. $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_0$ moment des forces.



Pendant le relèvement, toutes les forces passent sensiblement par O, point de suspension.

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_0 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \dot{0}$$

1.10.b. $\frac{dE_c}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$; lorsque la balançoire passe par un maximum d'amplitude, sa vitesse est nulle ; alors, $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$, on peut considérer que l'énergie cinétique ne varie pas.

$$I.10.c. \quad E_c = \frac{1}{2} J \Omega^2 \quad \text{et} \quad \vec{\sigma} = J \dot{\Omega}$$

$$I.10.d. \quad \Delta E_c = \frac{1}{2} (J_2 \Omega_2^2 - J_1 \Omega_1^2) \quad \text{et} \quad J_2 \Omega_2 = J_1 \Omega_1$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} J_1 \Omega_1^2 \left(\frac{J_1}{J_2} - 1 \right) > 0 \quad \text{car} \quad J_1 > J_2$$

(quand l'enfant se relève, J diminue).

I.10.e. La variation d'énergie cinétique se produit sans variation de moment cinétique quand l'enfant se relève à la verticale : la variation de moment cinétique se produit sans variation d'énergie cinétique quand l'enfant plie les genoux au maximum d'amplitude. A chaque passage par la verticale, l'enfant gagne de l'énergie cinétique en se relevant.
Fréquence d'excitation = $2 \times$ fréquence propre de la balançoire.

I.10.f. Le Botafumeiro se comporte donc comme un oscillateur paramétrique :

fréquence d'excitation = $2 \times$ fréquence propre de l'oscillateur
excitation analogue à celle décrite pour la balançoire

L'amplitude augmente donc brusquement à chaque passage de l'encensoir par la verticale. L'oscillateur peut devenir chaotique si la fréquence d'excitation n'est pas exactement le double de la fréquence propre, ou si l'excitation n'a pas lieu exactement au passage par la verticale, ou encore si la corde n'est pas relâchée correctement au moment où l'encensoir est au plus haut : ceci s'est produit quelquefois par le passé.

II. INTERACTIONS TERRE - LUNE : phénomènes de marées

II.1. II.1.a. Champ de gravitation exercé par la Lune au point P :

$$\vec{g} = -G \frac{m_L}{(LP)^2} \vec{u}_{LP}$$

$$II.1.b. \quad \Phi \text{ tel que :} \quad \vec{g} = -\vec{\text{grad}} \Phi \Rightarrow \Phi = \frac{G m_L}{LP}$$

$$II.1.c. \quad LP = \left[(\vec{OP} - \vec{OL})^2 \right]^{1/2} = (d^2 + r^2 - 2 dr \cos \theta)^{1/2}$$

$$II.1.d. \quad \Phi = \frac{G m_L}{d} \left(1 - \frac{2r}{d} \cos \theta + \frac{r^2}{d^2} \right)^{-1/2}$$

$$\Phi = -\frac{G m_L}{d} \left(1 + \frac{r}{d} \cos \theta - \frac{r^2}{2d^2} + \frac{3}{2} \frac{r^2}{d^2} \cos^2 \theta + o^3 \right)$$

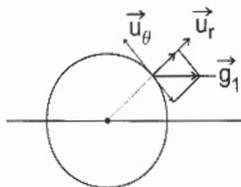
$$\Phi = -\frac{G m_L}{d} - \frac{G m_L}{d^2} r \cos \theta + \frac{G m_L}{2d^3} r^2 (1 - 3 \cos^2 \theta)$$

$$\Phi_0 = -\frac{G m_L}{d} ; \quad a(\theta) = +\Phi_0 \frac{r}{d} ; \quad b(\theta) = \frac{\Phi_0}{2} (1 - 3 \cos^2 \theta)$$

II.1.e.

$$\vec{g}_1 = \text{grad} \left(a(\theta) \frac{r}{d} \right) = \left(-\frac{\partial g_r}{\partial r} \right) \vec{u}_r - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (g_\theta) \right) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{g}_1 = + \frac{G m_L}{d^2} \cos \theta \vec{u}_r - \frac{G m_L}{d^2} \sin \theta \vec{u}_\theta$$



$$\vec{g}_1 \begin{cases} \frac{G m_L}{d^2} \cos \theta \\ \frac{G m_L}{d^2} \sin \theta \end{cases} \text{ est donc un vecteur de norme } \frac{G m_L}{d^2}$$

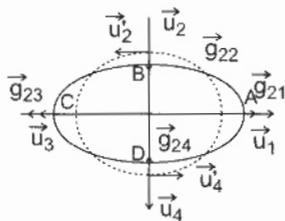
et porté par la parallèle à CL.

\vec{g}_1 représente le champ moyen uniforme créé par la Lune (champ créé en C).

II.1.f.

$$\vec{g}_2 = - \frac{G m_T r}{d^3} (1 - 3 \cos^2 \theta) \vec{u}_r$$

$$- \frac{G m_T r}{d^3} 3 \cos \theta \sin \theta \vec{u}_\theta$$



Les champs \vec{g}_{21} et \vec{g}_{23} produisent un gonflement de la surface des océans (marées hautes) :

les champs \vec{g}_{22} et \vec{g}_{24} tendent à abaisser le niveau des océans (marées basses).

Comme la Terre fait un jour sur elle-même en un jour, un point de la Terre se trouve en position A, puis C chaque jour (deux marées hautes), en position B, puis D chaque jour (deux marées basses).

Ceci ne tient compte ni des frottements fluides (qui tendent à ralentir la rotation du Soleil) ni de l'interaction Terre-Soleil.

Un alignement Terre-Lune-Soleil produit des grandes marées (effets renforcés) : Lune et Soleil à 90° (par exemple Lune \vec{u}_1 , Soleil sur \vec{u}_2) produit des petites marées.

II.2. Quelques conséquences des phénomènes de marées

- II.2.a. Freinage par frottement fluide lors des mouvements de marées \Rightarrow la longueur du jour augmente.
- II.2.b. Marées terrestres. La croûte terrestre subit, avec une amplitude moindre certes, les variations d'attraction gravitationnelle par la Lune.

II.3. Oscillation de relaxation

- II.3.a. Théorème de Bernoulli, en régime quasi-stationnaire de vitesses, en l'absence de tourbillons ou le long d'une ligne de courant, entre un point de la surface libre et le point d'eau B :

$$\frac{P_{atm}}{\rho g} + \frac{v^2_{surface}}{2g} + z = \frac{P_{atm}}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + 0$$

$$v^2_{surface} - v_B^2 + 2gz = 0$$

et :

$$v^2_{surface} = \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

- II.3.b. Si D et δ assez voisins, alors $v_{surface} \ll v_B$ d'où :

$$v_B = \sqrt{2gz} \quad \left(\text{sinon } v_B = \sqrt{2gz + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} \right)$$

- II.3.c. $\delta = s v_B$

- II.3.d. $D - \delta = S \frac{dz}{dt} \left(= D - s \sqrt{2gz + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} \right)$

- II.3.e. Siphon non amorcé :

$$\delta = 0, \quad S \frac{dz}{dt} = D \Rightarrow z = z_{\min} + \frac{D}{S} t$$

- II.3.f. Le siphon s'amorce pour :

$$z = H \rightarrow H = z_{\min} + \frac{D}{S} t_1$$

alors :

$$S \frac{dz}{dt} = D - s \sqrt{2gz + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2}$$

et si $v_{surf} \ll v_B$,

$$S \frac{dz}{dt} \approx D - s \sqrt{2gz}$$

équation différentielle non-linéaire,

- II.3.g. $\frac{dz}{dt} = 0 \rightarrow z_0 = \frac{D^2}{2gs}$

possible si $h < z_0 < H$.

Si c'est le cas, un équilibre dynamique s'établit. Niveau z_0 invariant.

Je propose calcul de période :

$$a. \quad z = h + \frac{D}{S} t \rightarrow H = h + \frac{D}{S} t_1$$

$$t_1 = \frac{S}{D} (H - h)$$

$$b. \quad \left. \begin{aligned} D \ln (D - s\sqrt{2g}h) + s\sqrt{2g}h \\ - (D \ln (D - s\sqrt{2g}H) + s\sqrt{2g}H) \end{aligned} \right\} = \frac{s^2}{S} g (-t_2)$$

$$t_2 = \frac{S}{g s^2} \left(D \ln \frac{(D - s\sqrt{2g}H)}{(D - s\sqrt{2g}h)} + s\sqrt{2g}H - s\sqrt{2g}h \right)$$

$$c. \quad T = t_1 + t_2 = \frac{S}{D} (H - h) + \frac{S\sqrt{2g}}{g s} (H - h) + \frac{S}{g s^2} D \ln \dots$$

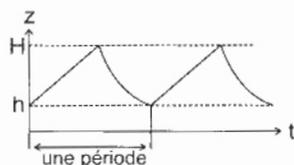
$$\left[T = \frac{S}{D} (H - h) + \frac{S}{g s^2} \left[D_2 - D_1 + D \ln \frac{D - D_2}{D - D_1} \right] \right]$$

avec :

$$D_1 = s\sqrt{2g}h$$

$$D_2 = s\sqrt{2g}H$$

II.3.h. Si $z_0 < h$, le siphon se désamorce lorsque z devient égal à h (à partir de $z = H$), on retrouve la phase e, puis f... d'où oscillations de z entre h et H .



Il s'agit d'oscillations non harmoniques appelées oscillations de relaxation.

Calcul de $z(t)$:

poser :

$$u = D - s\sqrt{2g}z$$

$$du = -\frac{s\sqrt{2g}}{2\sqrt{z}} dz \quad \text{et} \quad dz = \frac{u}{S} dt$$

$$du = -\frac{s\sqrt{2g}}{2S} \frac{u}{D-u} \times s\sqrt{2g} dt$$

$$du = -\frac{s^2 g}{S} \frac{u}{D-u} dt \Leftrightarrow \left(\frac{D-u}{u} \right) du = \frac{s^2}{S} g dt$$

$$D \ln u - u = \frac{s^2}{S} g t + cte$$

$$D \ln (D - s \sqrt{2g z}) - D + s \sqrt{2g z} = -\frac{s^2}{S} gt + cte$$

On peut calculer la période de l'oscillation de relaxation puisque Δt écoulement correspond à z variant de H à h , Δt remplissage obtenu à partir de e .

III. Phénomènes optiques et oscillateurs

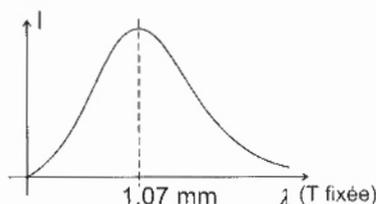
III.1. Spectroscopie optique et applications

III.1.a. Raies d'absorption.

III.1.b. Ions Na^+ de l'agitateur de verre absorbent la lumière du sodium \Rightarrow ombre sur l'écran.

III.1.c. $\lambda_m \rightarrow$ pic d'intensité du spectre continu du corps noir.

III.1.c.1.



III.1.c.2. Pour $2,7 \text{ K} \rightarrow \lambda_m = 1,07 \text{ mm}$ micro-ondes.
Détectée par Penzias et Wilson (astrophysiciens)
puis Cobe (satellite)
(prévue par Gamov).

III.1.c.3. $E = h\nu = hc/\lambda$

III.1.c.4. $e = 10^{-4} \text{ eV} \rightarrow e = 10^{-4} \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$

$$\lambda_{\text{associée}} = \frac{hc}{e} = \frac{6,62 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1,6 \times 10^{-19} \times 10^{-4}} = 10^{-2} \text{ m}$$

$\lambda \text{ cm} \rightarrow$ partie droite du pic (§ III.1.c.1).

III.1.c.5. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = \frac{\Delta T}{T} = \frac{3 \times 10^{-3}}{2,7} \Rightarrow v \approx 300 \text{ km/s}$

Cette vitesse correspond à la vitesse de la galaxie 600 km/s diminuée de la vitesse du système solaire par rapport à la galaxie (-300 km/s).

III.1.c.6. Détection des fluctuations liées aux origines de l'Univers si on échappe aux fluctuations atmosphériques d'où satellite COBE.

III.2. L'oscillateur LASER

III.2.a. Milieu amplificateur He-Ne (mélange gazeux).

Résonateur : cavité comprise entre deux miroirs (cf. cavité Fabry-Perot).

III.2.b. III.2.b.1. Émission spontanée : isotrope \Rightarrow ne peut contribuer à l'amplification du faisceau incident.Émission stimulée : la direction est imposée par le faisceau incident \Rightarrow amplification possible.III.2.b.2. $N_2 > N_1$ si amplification.A l'équilibre thermique $N_2 > N_1$ (cf. facteur de Boltzmann).Pour obtenir $N_2 > N_1$, faire appel à un procédé tel que le pompage optique.

III.2.b.3.

$$E_{12}(x+dx) - E_{12}(x) = (dN_2 - dN_1) h\nu_{12}$$

$$\Rightarrow dE_{12} = B E_{12} (N_2 - N_1) \times dt h\nu_{12}$$

et :

$$dx = c dt$$

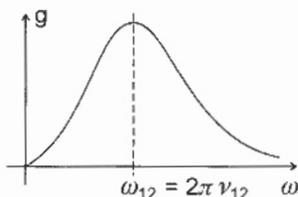
$$\Rightarrow \frac{dE_{12}}{E_{12}} = B (N_2 - N_1) h\nu_{12} \frac{dx}{c}$$

$$\ln \frac{E_{12}(x)}{E_0} = B (N_2 - N_1) h\nu_{12} \frac{x}{c}$$

$$G = \frac{E_{12}(2l)}{E_0} = \exp \left[B (N_2 - N_1) h\nu_{12} \times \frac{2l}{c} \right]$$

$$g = \sqrt{G} = \exp \left[B (N_2 - N_1) h\nu_{12} \frac{l}{c} \right]$$

III.2.b.4. Élargissement des raies $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{effet Doppler} \\ \rightarrow \text{inégalité d'Heinsenberg} \\ \rightarrow \text{collisions} \end{array} \right.$

D'où la fonction de transfert $g(\omega)$:

III.2.c. Le résonateur optique :

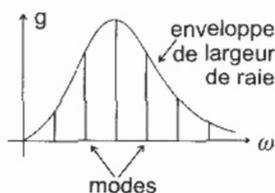
III.2.c.1.

$$\delta = p\lambda = 2L$$

III.2.c.2.

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} = p \frac{c}{2L}$$

III.2.c.3. D'où les raies correspondant aux modes de la cavité :



III.2.d. III.2.d.1. Compensation des pertes par pompage optique :

$$a = \frac{1}{g(\omega)} = \frac{1}{\exp\left(B h\nu_{12} (N_2 - N_1) \frac{l}{c}\right)}$$

$$N_2 - N_1 = -\frac{\ln a}{B h\nu_{12} \frac{l}{c}} \approx -\frac{\ln(1-\epsilon)}{B h\nu_{12} \frac{l}{c}}$$

$$N_2 - N_1 \approx +\frac{\epsilon}{B h\nu_{12} \frac{l}{c}} = \frac{1-a}{B h\nu_{12} \frac{l}{c}}$$

III.2.d.2. Facteur de qualité

$$\Delta E_0 = E_0 (1 - a^2) \Rightarrow \Delta E \text{ sur une période} = \frac{T_{\text{signal}}}{2L/c} \Delta E_0$$

III.2.d.3.

$$Q = \frac{2\pi E_0}{\Delta E_0} = \frac{2\pi}{(1-a^2)} \frac{2L}{cT} = \frac{4\pi L}{(1-a^2)cT} = \frac{4\pi L}{(1-a^2)\lambda}$$

or :

$$Q = \frac{\nu}{\Delta\nu} \Rightarrow \frac{\nu}{\Delta\nu} \approx \frac{4\pi L}{(1-a^2)c}$$

$$\Rightarrow \Delta\nu = \frac{c(1-a^2)}{4\pi L} \approx 1 \text{ MHz} \quad (L \approx \text{qqs } 10 \text{ cm})$$

$$\nu_{\text{optique}} \approx 10^{14} \text{ Hz} \gg \Delta\nu$$

raies très fines.

III.2.d.4. Source d'énergie : alimentation du pompage optique.

III.3. L'Oscillateur Paramétrique Optique ou O.P.O.

III.3.a. Doublement de fréquence $\rightarrow \lambda$ divisée par 2.

1,064 μm (I.R.) donne 0,532 μm (visible).

III.3.b. Le cristal non-linéaire fait apparaître des termes en E^2 , c'est-à-dire en $\cos^2 \omega_1 t$, $\cos^2 \omega_2 t$, $\cos \omega_1 t \cos \omega_2 t$, donc :

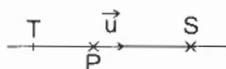
$$\begin{aligned} \cos^2 \omega_1 t &\rightarrow 2 \omega_1 \\ \cos^2 \omega_2 t &\rightarrow 2 \omega_2 \\ \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t &\rightarrow \omega_1 + \omega_2 \quad \text{et} \quad \omega_1 - \omega_2 \end{aligned}$$

On obtient un laser accordable ; si on se place dans l'infrarouge, on obtient le moyen d'explorer tout un domaine de pulsations (par accord ω_1 , ω_2) au lieu d'une seule pulsation. Et de façon plus pratique qu'avec les lasers à colorants, puisqu'on utilise un solide (cristal) au lieu d'un liquide.

IV. PÉRIODICITÉ ET CHAOS dans le système solaire

IV.1.

Les trois lois de Kepler $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{ellipse} \\ \rightarrow \text{loi des aires} \\ \rightarrow (T^2 / a^3) = \text{cte} \end{array} \right.$



IV.2. IV.2.a.

$$\vec{F}_{S \rightarrow s} = \frac{G m M_S}{(PS)^2} \vec{u}$$

IV.2.b.

$$\vec{F}_{T \rightarrow s} = - \frac{G m M_T}{(PT)^2} \vec{u}$$

IV.2.c.

$$\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

τ période du mouvement de la Terre autour du Soleil = un an.

IV.2.d. PFD :

$$m \Omega^2 PS = \frac{G m M_S}{(PS)^2} - \frac{G m M_T}{(PT)^2}$$

IV.2.e. Et $TP = \varepsilon \ll d$:

$$\begin{aligned} m \Omega^2 (d - \varepsilon) &= \frac{G m M_S}{(d - \varepsilon)^2} - \frac{G m M_T}{\varepsilon^2} \\ m \Omega^2 d \left(1 - \frac{\varepsilon}{d}\right) &= \frac{G m M_S}{d^2} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{d}\right) - \frac{G m M_T}{\varepsilon^2} \end{aligned} \quad (1)$$

En première approximation, la Terre décrit un cercle autour du Soleil :

$$\Rightarrow M_T \Omega^2 d = \frac{G M_T M_S}{d^2}$$

(1) devient :

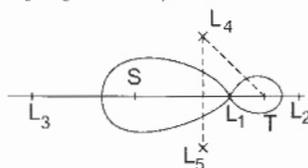
$$- m \Omega^2 \varepsilon = 2 G m M_S \frac{\varepsilon}{d^3} - \frac{G m M_T}{\varepsilon^2}$$

$$\varepsilon \left(\frac{2 G M_S}{d^3} + \Omega^2 \right) = \frac{G M_T}{\varepsilon^2} \Rightarrow \varepsilon^3 = \frac{G M_T}{\Omega^2 + \frac{2 G M_S}{d^3}}$$

$$\varepsilon \approx 1.5 \times 10^6 \text{ km} = \frac{d}{100}$$

IV.3. IV.3.a) Cartes des points de Lagrange dans le problème à trois corps :

IV.3.b.



Les points L_4 et L_5 sont utilisés par les satellites de Jupiter (points de Lagrange Jupiter-Soleil).

Lagrange a étudié ce problème en 1772. Son calcul a été confirmé en 1906 par la découverte d'Achille, astéroïde qui forme avec le Soleil et Jupiter un triangle équilatéral : on a découvert d'autres astéroïdes dans la même zone (nom : les Troyens). En 1990, on a découvert l'astéroïde Eurêka qui se trouve en un point de Lagrange Mars-Soleil.

IV.4. Orbite de la Terre stabilisée par la Lune.

IV.5. Ceinture d'astéroïdes : mouvements chaotiques, d'où chute possible d'astéroïdes sur la Terre (cratères de Rochechouart en France par exemple : possibilité d'explication de l'extinction de certaines espèces par suite des perturbations liées à une chute d'astéroïdes / cf. extinction des dinosaures, Annagedon et Deep Impact !).



Agrégation (Concours Externe)

OPTION : CHIMIE

Problème de chimie - Session : 1999

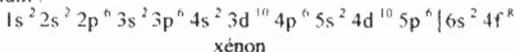
QUELQUES ASPECTS DE LA CHIMIE DES LANTHANIDES.

I. Structure électronique des atomes et des ions.

1/ Structure électronique des atomes.

a) La configuration électronique des atomes est obtenue par étude des spectres d'émission en phase gazeuse avec ou sans champ magnétique extérieur appliqué.

b) La règle de Klechkovsky est une règle empirique qui permet de retrouver avec une assez bonne précision l'ordre en énergie des différentes orbitales atomiques. Le remplissage des orbitales se fait à $(n+l)$ croissant avec $n+l$ fixé, l'orbitale de n le plus bas qui est la plus stable. On prévoit donc pour le gadolinium :



L'expérience montre (il est aussi possible de donner un support théorique à cette constatation) que les sous-couches à moitié remplies conduisent à un édifice plus stable. Donc la configuration $4f^7$ est favorisée.

c) L'évolution globale constatée est une augmentation du potentiel d'ionisation. Il est possible de rapprocher cette évolution de celle constatée dans la première série de transition. Lors d'un changement de colonne on ajoute un électron et un proton. Le nouvel électron n'écrante pas parfaitement le proton supplémentaire. Ceci se traduit par une diminution de la taille des atomes et des ions (contraction des lanthanides) et par l'augmentation du potentiel d'ionisation.

d) L'augmentation du potentiel d'ionisation quand on passe du samarium à l'euporium peut être attribuée d'une part au phénomène évoqué au c), d'autre part à la nécessité de dépeupler une sous-couche qui est à moitié remplie dans le degré d'oxydation +II de l'euporium. En revanche, le comportement particulier du gadolinium est dû à la stabilité plus grande des édifices à sous-couches à moitié remplies.

e) Dans le terbium au degré d'oxydation +IV, la sous-couche f est à moitié remplie tandis que le passage du gadolinium au degré +III au gadolinium au degré +IV nécessite le départ d'un électron de la sous-couche f à moitié remplie, donc un départ difficile.

2/ Structure électronique des ions.

a) L'atome polyélectronique est décrit par :

- la composition des moments cinétiques orbitaux individuels : $L = \sum l$

- la composition des moments cinétiques de spin individuels : $S = \sum s$

- puis la composition des L et de S , $J = L + S$, par couplage spin-orbite.

La notation aX_b précise les valeurs de L , S et J : $a = 2S + 1$, la valeur de L est liée à la nature de la lettre X ($L = 0$ correspond à $X = S$; $L = 1$, $X = P$; $L = 2$, $X = D$; $L = 3$, $X = F$; ...) et b prend la valeur de J .

b) Termes issus de la configuration f^2 .

b.1. On envisage les différents arrangements possibles des deux électrons dans des orbitales f pour lesquelles m_l varie de -3 à $+3$, m_s prenant deux valeurs possibles : $1/2$ ou $-1/2$. La valeur des nombres quantiques m_l et m_s est donnée par :

$$m_l = \sum m_{l_i} \quad \text{et} \quad m_s = \sum m_{s_i}$$

Par exemple, le microétat $(3, -; 3, +)$ correspond à deux électrons appariés dans l'orbitale atomique $m_l +3$.

b.2. Le principe de Pauli interdit à deux électrons de posséder les mêmes nombres quantiques orbitaux et de spin.

En conséquence, les microétats $(3, -; 3, -)$, $(3, +; 3, +)$, $(2, -; 2, -)$, $(2, +; 2, +)$, $(1, -; 1, -)$, $(1, +; 1, +)$, $(0, -; 0, -)$ et $(0, +; 0, +)$ sont interdits par le principe de Pauli.

b.3. Pour le premier électron à placer dans les 7 orbitales f, il y a $7 \times 2 = 14$ possibilités (7 pour le choix des fonctions d'onde orbitale et deux pour les fonctions d'onde de spin). Pour le second, il y a 13 possibilités, le second électron ne pouvant être décrit par les mêmes nombres quantiques que le premier d'après le principe de Pauli. On divise le nombre ainsi obtenu par $n!$, n étant ici égal à 2, pour tenir compte de l'indiscernabilité des électrons.

La dégénérescence de la configuration f^2 est donc :

$$14 \times 13 / 2 = 91$$

b.4. On compte les microétats pour m_l différent de 0, on multiplie par deux 0 (pour tenir compte des valeurs négatives de m_l) et on ajoute le nombre de microétats correspondant à $m_l = 0$. Soit : $2 \times 39 + 13 = 91$.

b.5. Il faut regrouper les microétats qui correspondent à des variations possibles de m_l de $-M$ à $+M$ et de m_s de $-S$ à $+S$.

Ainsi, on constate que m_l peut varier entre -5 et +5 avec m_s variant entre -1 et +1 : ceci correspond à un terme $M = 5$ et $S = 1$, soit un terme 3H .

Il reste, entre autres, un microétat $m_l = +6$ et $m_s = 0$, et on regroupe 13 microétats correspondant à m_l variant de -6 à +6, $m_s = 0$ correspondant à un terme $L = 6$ et $S = 0$, soit un terme 1I .

Parmi les microétats restant, on regroupe les microétats correspondant à m_l variant entre -3 et +3, m_s variant de -1 à +1, ce qui correspond à $M = 3$ et $S = 1$, soit un terme 3F .

Dans la colonne $m_s = -1$, la valeur maximale restante est égale à -1, ce qui permet de retrouver un terme 1P .

Les microétats restant dans la colonne $m_s = 0$ permettent de retrouver des termes 1G , 1D et 1S .

Ainsi les termes issus de la configuration f^2 sont :

3 triplets : 3H , 3F et 3P

4 singulets : 1I , 1G , 1D et 1S .

Un terme caractérisé par (L, S) a une dégénérescence de $(2L + 1)(2S + 1)$, c'est à dire m_l variant par incrément de 1 entre $-L$ et $+L$, m_s variant par incrément de 1 entre $-S$ et $+S$.

On retrouve la dégénérescence totale :

$$3 \cdot 11 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 13 \cdot 9 + 5 + 3 = 91$$

b.6. Le terme fondamental correspond à, parmi les termes à S maximal, celui qui est à L maximal, c'est-à-dire le terme 3H ($S = 1$; $L = 5$). J peut varier de $|L - S|$ à $L + S$ donc de 4 à 6. Les trois états possibles sont donc 3H_4 , 3H_5 et 3H_6 . La sous-couche f est moins qu'à moitié remplie, donc c'est l'état correspondant à J minimal qui est l'état de plus basse énergie (le plus stable).

L'état fondamental est donc 3H_4 .

c) C'est la répulsion interélectronique qui lève partiellement la dégénérescence de la configuration et conduit aux termes spectroscopiques.

II. Spectroscopie U.V.-visible.

1/ Transitions entre états issus d'une même configuration.

a) Les bandes d'absorption sont beaucoup plus étroites pour les transitions f-f que pour les transitions d-d : les électrons f sont moins sensibles à la présence des ligands que les électrons d : ils sont plus internes.

- b) Les effets des ligands sont faibles : ce n'est pas le cas des complexes où l'ion métallique central est à sous-couche d incomplète où l'effet des ligands est important. Le paramètre Δ_0 , qui mesure la force des ligands varie notablement d'un ligand à l'autre pour un ion métallique donné. Ce qui confirme que les électrons f sont peu sensibles à l'environnement chimique.
- c) Le massif d'absorption à basse longueur d'onde correspond à une bande de transfert de charge.

d) Coefficients d'extinction molaires.

d.1. Pour une transition autorisée, le coefficient d'extinction molaire peut atteindre 10^4 à $10^5 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{cm}^{-1}$.

d.2.	^3H	S = 1	L = 5	
	^3F	S = 1	L = 3	états triplets
	^1P	S = 1	L = 1	
	^1I	S = 0	L = 6	
	^1G	S = 0	L = 4	états singulets
	^1D	S = 0	L = 2	
	^1S	S = 0	L = 0	

Pour avoir $\Delta S = 0$, il faut envisager des transitions entre soit des états triplets, soit des états singulets. Mais dans ce cas, $\Delta L = \pm 2$, ce qui rend la transition interdite. Donc les transitions entre états issus de la configuration f^2 sont interdites.

2/ Transitions entre états issus de configurations différentes.

a) Etats issus de la configuration $4f^5 5d^1$.

^7H	S = 3	L = 5	J de 2 à 8
^7F	S = 3	L = 3	J de 0 à 6
^7G	S = 3	L = 4	J de 1 à 7
^7D	S = 3	L = 2	J de 1 à 5

L'état fondamental est $^7\text{F}_0$: il est issu de la configuration $4f^5$ et S = 3, L = 3 et J = 0.

Les transitions autorisées ont lieu entre états de S identiques.

D'autre part, si $\Delta L = 0$, alors l'état excité est de type ^7F (qui existent parmi ceux issus de la configuration $4f^5 5d^1$) avec $\Delta J = \pm 1$ ($\Delta J = 0$ n'est pas autorisé car cela correspond à une transition (0,0) interdite). Donc l'état excité est de type $^7\text{F}_1$. Il est présent.

Si $\Delta L = \pm 1$, L = 4 ou L = 2 avec $\Delta J = 0$ ou ± 1 .

Les transitions autorisées sont donc :

$^7\text{F}_0$	\rightarrow	$^7\text{F}_1$	(deux fois)
$^7\text{F}_0$	\rightarrow	$^7\text{G}_1$	(deux fois)
$^7\text{F}_0$	\rightarrow	$^7\text{D}_1$	(deux fois)

b) C'est la diminution de la répulsion interélectronique qui se traduit par une diminution de l'écart entre les niveaux d'énergie. Cet effet est appelé effet néphélauxétique.

c) On propose l'assignation suivante des transitions observées :

$^7\text{F}_0 \rightarrow ^7\text{F}_1$	16207 cm^{-1}	27880 cm^{-1}
$^7\text{F}_0 \rightarrow ^7\text{G}_1$	17699 cm^{-1}	27880 cm^{-1}
$^7\text{F}_0 \rightarrow ^7\text{G}_1$	23923 cm^{-1}	300050 cm^{-1}
$^7\text{F}_0 \rightarrow ^7\text{F}_1$	28571 cm^{-1}	34846 cm^{-1}
$^7\text{F}_0 \rightarrow ^7\text{D}_1$	35410 cm^{-1}	36347 cm^{-1}
	dans le complexe	dans l'ion libre

3/ Transitions hypersensibles.

a) Cas des nitrate et des perchlorate.

- a.1. L'addition de nitrate se traduit par l'augmentation de l'intensité du pic d'absorption ainsi qu'un léger décalage en fréquence (légèrement inférieur à 579 nm sans sel ajouté, légèrement supérieur à 579 nm en présence de nitrate de sodium). Le petit épaulement qui apparaît à grande longueur d'onde a été attribué au complexe possédant deux ions nitrate.
- a.2. Dans les cas d'ions perchlorate, il n'y a aucune différence entre le spectre d'absorption pour la solution sans perchlorate de sodium ajouté et une solution à 6 mol.L⁻¹ en perchlorate de sodium.
- a.3. Le complexe avec le nitrate est un complexe de sphère interne et le complexe avec le perchlorate est un complexe de sphère externe.
- a.4. Le fait que les électrons f sont internes, protégés de l'environnement chimique par les autres électrons explique la faible variation de longueur d'onde pour les transitions de l'aquacomplexe et celles où un ligand est remplacé par un nitrate.

b) Détermination de la constante de formation du complexe $\text{Eu}(\text{NO}_3)_x(\text{H}_2\text{O})_{(x-1)}^{2+}$.

b.1. La constante d'équilibre s'écrit :

$$K = [\text{Eu}(\text{NO}_3)_x(\text{H}_2\text{O})_{(x-1)}^{2+}] / \{ [\text{Eu}(\text{H}_2\text{O})_x^{3+}] \cdot [\text{NO}_3^-]^x \}$$

Ecrivons la relation de conservation de matière :

$$[\text{Eu}]_i = [\text{Eu}(\text{H}_2\text{O})_x^{3+}] + [\text{Eu}(\text{NO}_3)_x(\text{H}_2\text{O})_{(x-1)}^{2+}]$$

$$[\text{L}]_i = [\text{NO}_3^-] + [\text{Eu}(\text{NO}_3)_x(\text{H}_2\text{O})_{(x-1)}^{2+}]$$

Or la connaissance de la grandeur l permet de remplacer $[\text{Eu}(\text{NO}_3)_x(\text{H}_2\text{O})_{(x-1)}^{2+}]$ par une grandeur proportionnelle à l :

$$[\text{Eu}(\text{NO}_3)_x(\text{H}_2\text{O})_{(x-1)}^{2+}] = l/k$$

Donc :

$$[\text{Eu}(\text{H}_2\text{O})_x^{3+}] = [\text{Eu}]_i - l/k$$

$$[\text{NO}_3^-] = [\text{L}]_i - l/k$$

D'où l'expression de la constante d'équilibre :

$$K = (l/k) / \{ ([\text{Eu}]_i - l/k) \cdot ([\text{L}]_i - l/k) \}$$

b.2. Comme le ligand est en excès (au moins un rapport dix) par rapport à l'ion métallique, on propose l'approximation $[\text{L}]_i - l/k \approx [\text{L}]_i$.

La relation établie au b.1. se simplifie en :

$$1/K = [\text{L}]_i \cdot \{ (k \cdot [\text{Eu}]_i) / l - 1 \}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$[\text{Eu}]_i / l = (1/k) \cdot (1 + 1/([\text{L}]_i \cdot K))$$

b.3. Pour obtenir la constante K, on trace 1/l en fonction de 1/[L]_i ; si les approximations sont vérifiées, on doit obtenir une droite d'ordonnée à l'origine [Eu]_i/k et de pente [Eu]_i/(kK).

1/[L] _i (mol ⁻¹ .L)	10	8	6,67	5
[Eu] _i /l	1,516.10 ⁻²	1,25.10 ⁻²	1,075.10 ⁻²	0,862.10 ⁻²

Le tracé donne une droite de pente $p = 1,31.10^{-3}$ et d'ordonnée à l'origine o.o. = $2,06.10^{-2}$ avec un coefficient de corrélation de 0,99996.

On en déduit :

$$K = 1,57$$

b.4. Pour des concentrations aussi élevées en espèces ioniques, il n'est pas possible d'activité et concentration. On détermine une constante d'équilibre à force ionique assez élevée, fixée approximativement par la concentration en nitrate de sodium.

III. Luminescence des complexes des lanthanides(III) en solution et en phase solide.

1/ Détermination du nombre de molécules d'eau autour d'un ion lanthanide(III).

- a) La courbe ci-dessous montre que le tracé de Δk_{obs} en fonction de q , nombre de molécules d'eau complexée sur l'ion métallique, donne avec une bonne approximation des droites dans le cas de l'euporium(III) et du terbium(III).
- b) Les liaisons O-H et O-D ont des propriétés vibrationnelles différentes.
- c) La liaison O-H est plus efficace pour assurer la relaxation de l'ion complexe excité, par transfert de l'énergie électronique en énergie de vibration. La durée de l'état excité est donc plus faible dans le cas du complexe avec ligand H_2O que dans le cas de complexes avec les ligands D_2O .
- d) On calcule, pour chaque ligand, la grandeur Δk_{obs} et on la reporte sur les courbes établies au a).

	Europium (III)		Terbium (III)	
	Δk_{obs}	Q	Δk_{obs}	Q
sans ligand supplémentaire	9,27	9	2,26	9
NTA	5,75	6	1,19	5
EDTA	3,20	3	0,64	3
parvalbumine	1,24	1	0,31	1

2/ Cinétique de complexation.

a) Etude théorique.

$$a.1. \quad \begin{aligned} d[A^*]/dt &= -\tau_A^{-1}[A^*] - k_1'[A^*] + k_1[B^*] = -(\tau_A^{-1} + k_1')[A^*] + k_1[B^*] \\ d[B^*]/dt &= -\tau_B^{-1}[B^*] + k_1'[A^*] - k_1[B^*] = k_1'[A^*] - (\tau_B^{-1} + k_1)[B^*] \end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$d/dt \begin{pmatrix} [A^*] \\ [B^*] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\tau_A^{-1} + k_1') & k_1 \\ k_1' & -(\tau_B^{-1} + k_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [A^*] \\ [B^*] \end{pmatrix}$$

a.2. On recherche les valeurs propres de la matrice précédente : il faut résoudre l'équation du déterminant caractéristique.

$$\{\lambda + (\tau_A^{-1} + k_1')\} \cdot \{\lambda + (\tau_B^{-1} + k_1)\} - k_1 k_1' = 0$$

Les valeurs propres de la matrice sont les racines de l'équation du second degré :

$$\lambda^2 + (\tau_A^{-1} + \tau_B^{-1} + k_1' + k_1)\lambda + (\tau_A^{-1} \cdot \tau_B^{-1} + k_1 \cdot \tau_A^{-1} + k_1' \cdot \tau_B^{-1}) = 0$$

Posons :

$$s = -(\tau_A^{-1} + \tau_B^{-1} + k_1' + k_1) \quad \text{somme des deux racines } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2$$

$$p = (\tau_A^{-1} \cdot \tau_B^{-1} + k_1 \cdot \tau_A^{-1} + k_1' \cdot \tau_B^{-1}) \quad \text{produit des deux racines } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2$$

La résolution donne :

$$\lambda_1 = (s + (s^2 - 4p)^{1/2})/2 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = (s - (s^2 - 4p)^{1/2})/2$$

Les concentrations $[A^*]$ et $[B^*]$ sont donc de la forme :

$$[A^*] = a_1 \cdot \exp(\lambda_1 t) + a_2 \cdot \exp(\lambda_2 t)$$

$$[B^*] = b_1 \cdot \exp(\lambda_1 t) + b_2 \cdot \exp(\lambda_2 t)$$

Les constantes d'intégration a_1 et b_1 sont fixées, d'une part par les conditions initiales, d'autre part par la matrice de changement de base :

A $t = 0$:

$$[A^*] = [A^*]_0 = a_1 + a_2 \quad \text{équation (1)}$$

$$[B^*] = 0 = b_1 + b_2 \quad \text{équation (2)}$$

Il faut deux relations supplémentaires que l'on obtient en écrivant de deux façons différentes $d[A^*]/dt$ et $d[B^*]/dt$:

$$d[A^*]/dt = \lambda_1 a_1 \cdot \exp(\lambda_1 t) + \lambda_2 a_2 \cdot \exp(\lambda_2 t) = -(\tau_A^{-1} + k_1') [A^*] + k_{-1} [B^*] = \\ -(\tau_A^{-1} + k_1') (a_1 \cdot \exp(\lambda_1 t) + a_2 \cdot \exp(\lambda_2 t)) + k_{-1} (b_1 \cdot \exp(\lambda_1 t) + b_2 \cdot \exp(\lambda_2 t))$$

ce qui conduit par identification des facteurs respectifs de $\exp(\lambda_1 t)$ et $\exp(\lambda_2 t)$ a :

$$\lambda_1 a_1 = -a_1 (\tau_A^{-1} + k_1') + k_{-1} b_1 \quad \text{équation (3)}$$

$$\lambda_2 a_2 = -a_2 (\tau_A^{-1} + k_1') + k_{-1} b_2 \quad \text{équation (4)}$$

$$d[B^*]/dt = \lambda_1 b_1 \cdot \exp(\lambda_1 t) + \lambda_2 b_2 \cdot \exp(\lambda_2 t) = k_1' [A^*] - (\tau_B^{-1} + k_1) [B^*] - \\ k_1' (a_1 \cdot \exp(\lambda_1 t) + a_2 \cdot \exp(\lambda_2 t)) - (\tau_B^{-1} + k_1) (b_1 \cdot \exp(\lambda_1 t) + b_2 \cdot \exp(\lambda_2 t))$$

ce qui conduit par identification des facteurs respectifs de $\exp(\lambda_1 t)$ et $\exp(\lambda_2 t)$ a :

$$\lambda_1 b_1 = -a_1 (\tau_B^{-1} + k_1) + k_1' a_1 \quad \text{équation (5)}$$

$$\lambda_2 b_2 = -a_2 (\tau_B^{-1} + k_1) + k_1' a_2 \quad \text{équation (6)}$$

L'objectif est de trouver les expressions des a_1 et b_1 en fonction des conditions initiales et des constantes de vitesses.

On combine les équations (3) et (4) en remplaçant a_2 dans (4) par son expression tirée de (1) ($a_2 = [A^*]_0 - a_1$) et b_2 dans (4) par son expression tirée de (2) ($b_2 = -b_1$) :

ce qui conduit à résoudre :

$$\lambda_1 a_1 = -a_1 (\tau_A^{-1} + k_1') + k_{-1} b_1$$

$$\lambda_2 ([A^*]_0 - a_1) = -([A^*]_0 - a_1) (\tau_A^{-1} + k_1') - k_{-1} b_1$$

La somme de ces deux équations conduit a :

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 ([A^*]_0 - a_1) = -a_1 (\tau_A^{-1} + k_1') - ([A^*]_0 - a_1) (\tau_A^{-1} + k_1')$$

soit :

$$a_1 (\lambda_1 - \lambda_2) = -\lambda_2 [A^*]_0 - [A^*]_0 (\tau_A^{-1} + k_1')$$

$$a_1 = [A^*]_0 \{ \lambda_2 + \tau_A^{-1} + k_1' \} / \{ \lambda_1 - \lambda_2 \}$$

et donc :

$$b_1 = (\lambda_1 + \tau_A^{-1} + k_1') a_1 / k_{-1} = -[A^*]_0 (\lambda_1 + \tau_A^{-1} + k_1') (\lambda_2 + \tau_A^{-1} + k_1') / \{ k_{-1} (\lambda_1 - \lambda_2) \}$$

En utilisant les équations (1) et (2), on en déduit les expressions de a_2 et b_2 :

$$a_2 = [A^*]_0 \{ 1 + (\lambda_2 + \tau_A^{-1} + k_1') / (\lambda_1 - \lambda_2) \}$$

$$b_2 = -b_1$$

a.3. La concentration en B^* passe au temps t_m par un maximum lorsque $d[B^*]/dt = 0$, soit :

$$\lambda_1 b_1 \cdot \exp(\lambda_1 t_m) - \lambda_2 b_1 \cdot \exp(\lambda_2 t_m) = 0$$

Le temps t_m est défini par :

$$t_m = \ln(\lambda_1 / \lambda_2) / (\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$\text{avec } \lambda_2 - \lambda_1 = -(s^2 - 4p)^{1/2} \quad \text{et } \lambda_1 / \lambda_2 = \{ (s + (s^2 - 4p)^{1/2}) / 2 \} / \{ (s - (s^2 - 4p)^{1/2}) / 2 \}$$

$$\text{où } s = -(\tau_A^{-1} + \tau_B^{-1} + k_1' + k_{-1}) \quad \text{et } p = (\tau_A^{-1} \tau_B^{-1} + k_{-1} \tau_A^{-1} + k_1' \tau_B^{-1})$$

b) Comparaison avec l'expérience.

b.1. Les courbes A et B correspondent à l'excitation à la longueur d'onde qui produit A^* . Pour t voisin de 0, seul $[A^*]$ est non nulle. B^* est ensuite produit par voie chimique. La courbe qui enregistre l'émission de A^* est donc décroissante : A^* disparaît à la fois par voie photochimique (émission détectée à 610 nm) et par voie chimique (conversion en B^*). La courbe qui enregistre l'émission de B^* est d'abord croissante ($[B^*]$ croît par conversion chimique de A^* en B^*) puis décroissante (disparition de B^* par voie photochimique).

Pour les courbes C et D, les rôles de A^* et B^* sont intervertis par rapport au cas précédent.

b.2. Détermination de k_1 .

$$k_1' = k_1[L_2^-] \text{ avec } [L_2^-] = [L^2-] - [LH^-] + [LH_2]$$

$$K_{a1} = [LH^-][H^+]/[LH_2] \text{ et } K_{a2} = [L^2-][H^+]/[LH^-]$$

La relation de conservation du ligand L (noté dans l'énoncé IMDA) s'écrit, en tenant compte des constantes acido-basiques :

$$[L_2^-] = [L^2-] \{1 + [H^+]/K_{a2} + [H^+]^2 / \{K_{a1} \cdot K_{a2}\}\}$$

Dans les domaines de pH où sont conduites les expériences, la concentration en forme diprotonnée est négligeable devant les autres concentrations d'espèces contenant le ligand. Donc :

$$[L_2^-] = [L^2-] \{1 + [H^+]/K_{a2}\}$$

et :

$$k_1' = k_1' \{1 + [H^+]/K_{a2}\} / [L_2^-]$$

En utilisant les trois valeurs mesurées à trois pH différents, on en déduit la valeur de k_1 :

$$k_1 = 11,6 \pm 0,7 \cdot 10^6 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{l} \cdot \text{s}^{-1}$$

b.3. L'étude du a.3. montre que dans le cas où la concentration initiale en B^* est nulle, la concentration en B^* passe par un maximum au temps t_m . Ce temps est lu sur la courbe B.

Avec les valeurs numériques :

$$\tau_A = 0,320 \cdot 10^{-3} \text{ s}, \tau_B = 0,805 \cdot 10^{-3} \text{ s}, k_1 = 2,6 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1} \text{ et } k_1' = 13,4 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

on obtient $s = -20,37 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$, $p = 28,66 \cdot 10^6 \text{ s}^{-2}$, $\lambda_2 - \lambda_1 = -17,33 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ et $\lambda_1/\lambda_2 = 0,0807$

et donc :

$$t_m = \ln(0,0807) / \{-17,33 \cdot 10^6\} = 145 \mu\text{s}$$

La lecture de la figure 3.a. donne une valeur d'environ $140 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ compatible avec l'analyse précédente

IV. Etude électrochimique du couple europium(III)/europium(II).

I/ La voltampérométrie cyclique..

a) La première loi de Fick s'écrit :

$$\mathbf{j} = -D \text{grad}(c)$$

où \mathbf{j} est le vecteur densité de courant de matière.

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

est le nombre de mole de soluté de concentration c traversant la surface Σ par unité de temps.

En monodimensionnel cartésien, l'expression de l'opérateur gradient (grad) est :

$$\text{grad}(c) = (\partial c / \partial x) \cdot \mathbf{e}_x$$

d'où :

$$\mathbf{j} = -D(\partial c / \partial x) \cdot \mathbf{e}_x$$

c'est à dire :

$$j = -D(\partial c / \partial x) \quad \text{avec } j, \text{ composante de } \mathbf{j} \text{ selon } Ox.$$

Pour passer au courant, il faut tenir compte du nombre n d'électrons échangés à l'électrode :

$$i = \pm n F D A (\partial c / \partial x)_0 \quad \text{avec } \pm \text{ selon la convention}$$

où la dérivée est prise à la surface de l'électrode ($x = 0$).

Si $(\partial c / \partial x)_0 > 0$, cela signifie que l'oxydant disparaît à la surface de l'électrode et donc, si on choisit de compter positivement un courant d'oxydation (convention usuelle), la transformation envisagée ci-dessus étant une réduction, on aura :

$$i = -n F D A (\partial c_r / \partial x)_0 = n F D A (\partial c_o / \partial x)_0$$

b) Conservation de la matière.

La conservation de la matière est supposée vérifiée en tout point de la solution. Cela impose :

$$c_r(x,t) + c_o(x,t) = c_r^{\infty} + c_o^{\infty}$$

c) Cas d'un transfert électronique rapide.

c.1. La relation de conservation de la matière exprimée en chaque point de la solution, s'écrit :

$$\text{div } \mathbf{j} + \partial c / \partial t = 0$$

soit en monodimensionnel cartésien :

$$\partial j / \partial x + \partial c / \partial t = 0$$

En remplaçant j par son expression issue de la première loi de Fick, nous obtenons donc la deuxième loi de Fick (en monodimensionnel cartésien) :

$$D \partial^2 c / \partial x^2 = \partial c / \partial t$$

Comme le coefficient de diffusion est supposé être identique pour la forme oxydée et la forme réduite, l'équation ci-dessus est à la fois vérifiée par c_o et c_r .

Pour obtenir l'expression de $c_r(x,t)$ et $c_o(x,t)$, il faut disposer des conditions aux limites, en $x = 0$ et quand x tend vers l'infini.

Les valeurs de c_o et c_r quand x tend vers l'infini sont les valeurs en solution, loin de l'électrode.

Pour obtenir $c_o(0,t)$ et $c_r(0,t)$, on utilise le fait que la loi de Nernst s'applique à l'électrode :

$$E(t) = E^0 + (RT/nF) \cdot \ln(c_o(0,t)/c_r(0,t))$$

et on utilise ici la relation de conservation appelée au b) :

$$E(t) = E^0 + (RT/nF) \cdot \ln\{c_o(0,t)/(c_r^\infty + c_o^\infty - c_o(0,t))\}$$

ce qui montre que $c_o(0,t)$ est connu si $E(t)$ (potentiel de l'électrode au temps t), c_r^∞ et c_o^∞ sont connus.

c.2. On remarque que RT/nF est homogène à un potentiel et v est homogène à un potentiel divisé par un temps. On en déduit que :

$$\tau = RT/nFv$$

est homogène à un temps.

c.3. L'étude conduite au 3/2. fait apparaître un temps adimensionnel τ . Comment faire apparaître une distance adimensionnelle pour un processus physique qui est la diffusion de la matière caractérisée par un coefficient de diffusion D ? On utilise la dimension du coefficient de diffusion : $m^2 \cdot s^{-1}$. Ceci montre que si on souhaite faire apparaître une longueur caractéristique L de ce processus caractérisé par le temps τ , il faut poser :

$$L = (D\tau)^{1/2} = (DRT/nFv)^{1/2}$$

c.4. Considérons l'équation de Fick décrivant la concentration d'un des deux partenaires rédox, par exemple l'oxydant :

$$D \partial^2 c_o / \partial x^2 = \partial c_o / \partial t$$

Posons $T = t/\tau$ (temps adimensionnel), $X = x/L$ (longueur adimensionnelle) et $C = c/(c_r^\infty + c_o^\infty)$ (concentration adimensionnelle).

Le courant i traversant l'électrode est donné par :

$$i = -nFDA(\partial c_o / \partial x)_0 = -(nFDA(c_r^\infty + c_o^\infty)/L)(\partial C / \partial X)_0$$

On introduit donc un courant adimensionnel Ψ défini par :

$$\Psi = i / \{nFDA(c_r^\infty + c_o^\infty)/L\} = -(\partial C / \partial X)_0$$

D'autre part la condition au limite à l'électrode est donnée par la loi de Nernst :

$$c(0,t) = (c_r^\infty + c_o^\infty) \{1 + \exp(-nF(E(t) - E^0)/(RT))\}$$

et donc :

$$C(0,\tau) = 1 / \{1 + \exp(-nF(E(\tau) - E^0)/(RT))\}$$

Ainsi, les équations adimensionnelles définissant les voltammogrammes sont :

$$\partial^2 C / \partial X^2 = \partial C / \partial \tau$$

deuxième loi de Fick

$$i = -(\partial C / \partial X)_0$$

calcul du courant

$$C(0,\tau) = 1 / \{1 + \exp(-nF(E(\tau) - E^0)/(RT))\}$$

condition à l'électrode

Les deux paramètres adimensionnels qui définissent les voltammogrammes sont donc :

$$nFDA(c_r^\infty + c_o^\infty) / \{(DRT/nFv)^{1/2}\}$$

qui permet le calcul du courant et :

$$RT/nFv$$

qui permet le calcul du temps.

d) Cas d'un transfert électronique lent.

d.1. α est appelé coefficient de transfert. Il dépend de la position du complexe activé sur le chemin de réaction pour le transfert de l'électron. $\alpha \approx 0,5$ est souvent rencontré et correspond à un état de transition symétrique.

d.2. k^0 est appelée constante de vitesse standard pour le transfert de l'électron à l'électrode : k^0 grand correspond à un transfert rapide de l'électron.

d.3. Lorsque k^0 est grand, comme le courant reste fini, donc $D \cdot (\partial c_i / \partial x)_{x=0}$ reste fini, le terme $c_i(0, t) - c_{i,0} \cdot \exp(-(RT/(nF)) \cdot t)$ tend vers zéro.

On retrouve ainsi la loi de Nernst :

$$e(t) - E(t) - E^0 = (RT/(nF)) \cdot \ln(c_i(0, t)/c_i(0, t))$$

d.4. Posons $\Lambda = (k^0/L/D) = (k^0/D) \cdot (DRT/(nFv))^{1/2} = k^0/\{(nFvD)/(RT)\}^{1/2}$

k^0 est une mesure de la vitesse de transfert de l'électron et $\{(nFvD)/(RT)\}^{1/2}$ est une mesure de la vitesse de transfert de matière par diffusion.

Si le transfert de matière par diffusion est plus lent que le transfert de l'électron, le transfert électronique est dit rapide : ceci correspond au cas $\Lambda \gg 1$.

Si le transfert électronique est lent devant le transfert de masse, le système est qualifié de lent, ce qui correspond au cas $\Lambda \ll 1$.

d.5. Application numérique :

$$\Lambda = 10^{-2}/(96500 \cdot 1 \cdot 10^{-9}/(8,314 \cdot 300))^{1/2} = 50$$

Le système peut être qualifié de rapide

2/ Le couple $\text{Eu}^{3+}/\text{Eu}^{2+}$.

a)

Pour le couple $\text{Eu}^{3+}_{\text{aq}}/\text{Eu}^{2+}_{\text{aq}}$, on mesure :

- pour $v = 200 \text{ mV} \cdot \text{s}^{-1}$, $\Delta E_p = 284 \text{ mV}$

- pour $v = 50 \text{ mV} \cdot \text{s}^{-1}$, $\Delta E_p = 216 \text{ mV}$, soit $\chi = 0,1$ et $k^0 = \chi(D\pi v F/RT)^{1/2} = 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Pour le couple $\text{Eu}(2:2:1)^3/\text{Eu}(2:2:1)^{2+}$, on mesure :

- pour $v = 200 \text{ mV} \cdot \text{s}^{-1}$, $\Delta E_p = 74 \text{ mV}$, soit $\chi = 1,83$ et $k^0 = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

- pour $v = 50 \text{ mV} \cdot \text{s}^{-1}$, $\Delta E_p = 71 \text{ mV}$, soit $\chi = 2,43$ et $k^0 = 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

On propose donc :

$$k^0 = (2,4 \pm 0,5) \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Les systèmes lents sont ceux qui impliquent un réarrangement important lors du transfert du ou des électrons. La différence de solvatation importante des ions europium(II) et europium(III) peut être la cause du transfert lent. En revanche, la structure beaucoup plus figée autour des ions métalliques dans les cryptates peut expliquer un transfert électronique plus rapide.

c) Potentiels standard apparents.

C'est la demi-somme des pics anodiques et cathodiques.

Pour le couple $\text{Eu}^{3+}/\text{Eu}^{2+}$: on lit $E^{0a} = -0,600 \text{ V}$ et $E^{0c} = -0,608 \text{ V}$, soit :

$$E^{0a}(\text{Eu}^{3+}/\text{Eu}^{2+}) = -0,60 \text{ V}$$

Pour le couple $\text{Eu}(2:2:1)^3/\text{Eu}(2:2:1)^{2+}$: on lit $E^{0a} = -0,432 \text{ V}$ et $E^{0c} = -0,434 \text{ V}$, soit :

$$E^{0a}(\text{Eu}(2:2:1)^3/\text{Eu}(2:2:1)^{2+}) = -0,43 \text{ V}$$

En effectuant un cycle thermodynamique et en attribuant aux demi-équations redox une enthalpie libre électrochimique standard $\Delta G^0 = -nFE^{0a}$, on montre que :

$$-FE^{0a}(\text{Eu}(2:2:1)^3/\text{Eu}(2:2:1)^{2+}) = RT \ln K_{III} - FE^{0a}(\text{Eu}^{3+}/\text{Eu}^{2+}) - RT \ln K_{II}$$

soit :

$$\ln(K_{II}/K_{III}) = F/(RT) \cdot \{E^{0a}(\text{Eu}(2:2:1)^3/\text{Eu}(2:2:1)^{2+}) - E^{0a}(\text{Eu}^{3+}/\text{Eu}^{2+})\}$$

ce qui donne numériquement :

$$\log(K_{II}/K_{III}) = 2,9$$

Le complexe avec l'europium(II) est plus stable qu'avec l'europium(III).

d) Le perchlorate de sodium fixe la force ionique. Le perchlorate est choisi car il est très peu complexant. On parle de potentiel standard apparent car les coefficients d'activité sont certainement notablement différent de 1 : la force ionique est assez élevée et les concentrations ioniques assez importantes.

V. Organolanthanides.

1/ Etude générale.

a) Les solutions d'iodure de samarium(II) sont réductrices.

Il est possible de réduire un époxyde en alcène :



Il est possible de réduire un aldéhyde en alcool.

Les solutions d'iodure de samarium(II) permettent d'effectuer des couplages réducteurs (par exemple la réaction (4) du tableau) :



Les réactions (5) et (6) sont comparables à celles que l'on peut observer avec des réactifs de Grignard.

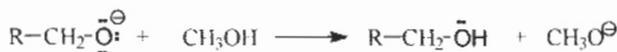
b) Outre le thulium qui est un élément très rare, le samarium est le plus réducteur des quatre. Néanmoins, les données du tableau sont relatives au solvant eau et la plupart des réactions utilisant l'iodure de samarium sont conduites dans d'autres solvants. De plus l'effet des ligands et contre-ions (les iodure ici) peuvent modifier notablement les propriétés rédox. Enfin des phénomènes cinétiques peuvent modifier notablement la réactivité.

2/ Réaction (1).

La triphénylphosphine permet cette transformation ; il y a attaque nucléophile de l'époxyde, ouverture de celui-ci, puis formation d'une bétaine et ensuite élimination d'oxyde de triphénylphosphine et formation d'alcène (pour cette dernière étape, il y a analogie avec la réaction de Wittig).

3/ Réactions (2) et (3).

a) On peut proposer des étapes de transferts monoélectroniques avec protonation des différents intermédiaires

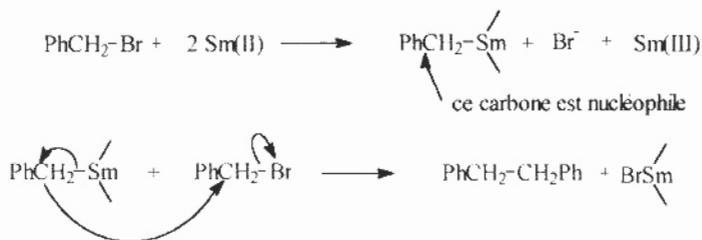


b) Le méthanol est donneur de protons.

4/ Réactions (4) à (6).

a) Les réactifs de Grignard et les organolithiens permettent des transformations similaires.

b) Mécanisme réactionnel :



c) Les réactions avec l'iodure de samarium(II) se font en une seule étape : il n'y a pas préparation préalable du réactif organométallique. D'autre part les réactions sont très rapides.

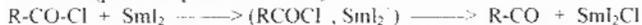
5/ Une réactions utilisant les chlorures d'acyle.

a) Les expériences (3) et (4) montrent qu'il se forme dans le milieu réactionnel des espèces où le carbone de -CO-Cl est basique (expérience(3)) et nucléophile (réaction avec le carbone électrophile d'un aldéhyde).

b) Le passage par R-CO est le seul chemin qui permet d'expliquer la formation du dimère de Ph-CH_2 ($\text{Ph-CH}_2\text{-CH}_2\text{-Ph}$) après décarbonylation de $\text{Ph-CH}_2\text{-CO}$.

c) Si on introduit $\text{Ph-CH}_2\text{COCl}$ dans une solution d'iodure de samarium(II), R-CO réagit avec SmI_2 en excès pour conduire à R-CO-SmI_2 (expérience (1)). Si l'addition a lieu dans l'ordre inverse, SmI_2 n'étant pas présent, R-CO se décarbonyle, donne R qui se dimérise (expérience(2)).

d) Le chemin réactionnel compatible avec les données expérimentales est celui qui passe par la formation de R-CO après transfert monoélectronique. Avec un excès d'iodure de samarium(II), il y a ensuite formation de l'organométallique R-CO-SmI_2 . En l'absence de SmI_2 , il y a évolution chimique de R-CO (par exemple dimérisation) :



En l'absence de SmI_2 en excès, et avec des conditions de réaction où on ne laisse pas le temps à R-CO d'évoluer (expérience (1)) :



En l'absence de SmI_2 en excès mais avec possibilité d'évolution chimique pour R-CO avant dimérisation (expérience (2)) :



Si Sml_2 est en excès, il y a formation de l'organométallique R-CO-Sml_2 :



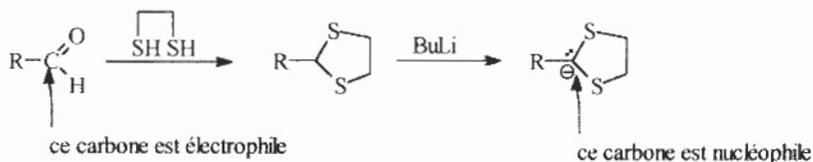
Le carbone de CO est alors nucléophile.

e) Le carbone d'une fonction aldéhyde est notablement électrophile, comme celui d'une fonction chlorure d'acyle.

Au cours de l'expérience (4), le carbone de la fonction chlorure d'acyle est nucléophile.

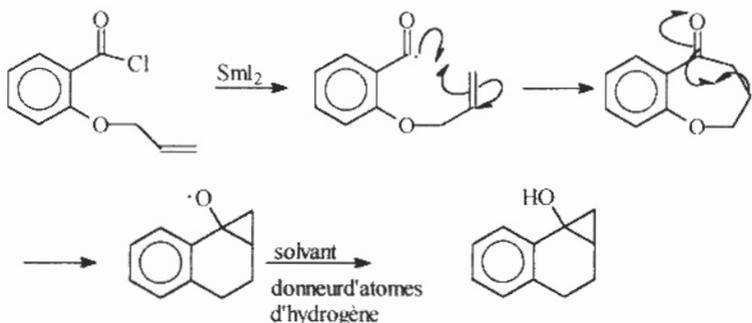
Cette modification de réactivité est appelée inversion de polarité (Umpolung).

Le passage par les dithianes permet d'obtenir une inversion de polarité du carbone des aldéhydes :

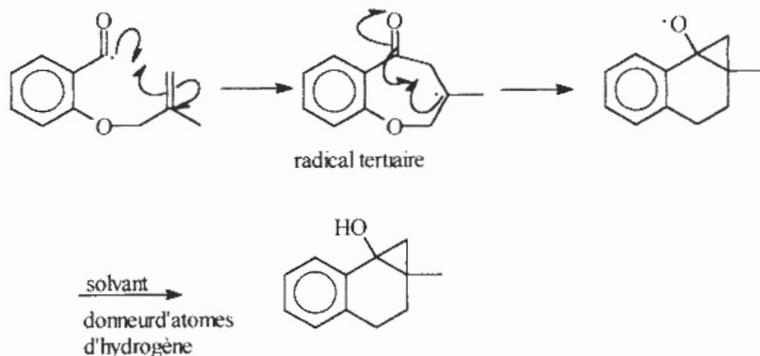


f) Les réactions décrites par la figure 7. confirment la nature radicalaire des réactions.

On propose les mécanismes réactionnels suivants :



La double liaison carbone-carbone ne peut pas réagir ici avec un nucléophile (elle n'est pas activée par un groupement électroattracteur).



Agrégation (Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉES

Composition de physique - Session : 1999

PREMIÈRE PARTIE - THERMODYNAMIQUE

1.1.1) Au cours du cycle, la variation d'énergie interne du fluide est nulle : $\Delta U = 0$

D'après le premier principe de la thermodynamique, $\Delta U = Q_1 + Q_2 + W$

Donc $Q_1 + Q_2 + W = 0$

1.1.2) Au cours du cycle, la variation d'entropie du fluide est nulle : $\Delta S_{\text{fluide}} = 0$

d'après le deuxième principe de la thermodynamique, l'entropie de l'ensemble isolé (fluide, source froide, source chaude) ne peut qu'augmenter : $\Delta S_{\text{ensemble}} \geq 0$

L'entropie est extensive : $\Delta S_{\text{ensemble}} = \Delta S_{\text{source froide}} + \Delta S_{\text{source chaude}} + \Delta S_{\text{fluide}}$

Pour une source à température constante $\Delta S_{\text{source}} = \int_{\text{état initial}}^{\text{état final}} \frac{\delta Q_{\text{recu par la source}}}{T_{\text{source}}}$

d'où $\Delta S_{\text{source}} = \frac{Q_{\text{recu par la source}}}{T_{\text{source}}} = - \frac{Q_{\text{donné par le fluide à la source}}}{T_{\text{source}}}$

donc $\Delta S_{\text{ensemble}} = - \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}$

$\Delta S_{\text{ensemble}} \geq 0$ donc $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$

On a $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$

lorsque $\Delta S_{\text{ensemble}} = 0$, la transformation est alors réversible.

1.1.3) Dans un **moteur thermique**, le fluide reçoit effectivement de la chaleur de la source chaude :

$Q_1 > 0$. Le fluide donne du travail à l'extérieur : $W < 0$. Le fluide donne effectivement de la chaleur à la source froide : $Q_2 < 0$

Le rendement du cycle peut être défini comme le rapport du gain et de la dépense énergétiques :

$\eta_{\text{cycle}} = \text{travail fourni par le fluide à l'extérieur} / \text{chaleur reçue par le fluide de la part de la source chaude}$

$\eta_{\text{cycle}} = -W / Q_1$

Pour un cycle réversible, $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$

et $Q_1 + Q_2 + W = 0$

donc $\eta_{\text{cycle}} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

1.1.4) Dans une machine frigorifique, le fluide reçoit effectivement de la chaleur de la source froide et du travail de la part de l'extérieur, il donne de la chaleur à la source chaude.

$$Q_2 < 0 \quad W < 0 \quad Q_1 < 0$$

L'efficacité du cycle est

$e =$ chaleur donnée par la source froide au fluide / travail reçu par le fluide sur le cycle

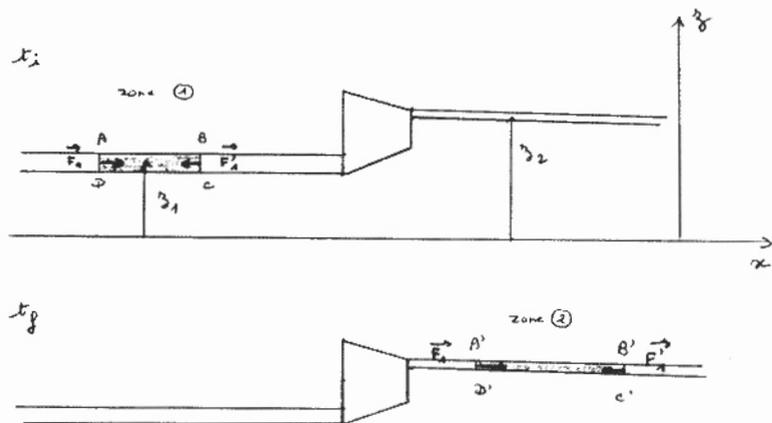
$$e = \frac{Q_2}{W} = -\frac{Q_2}{Q_1 + Q_2}$$

Pour un cycle réversible $e = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$

On peut avoir $e > 1$ ou $e \leq 1$

1.2) Un fluide est en écoulement permanent.

Considérons la masse m limitée par ABCD à l'instant t_i et limitée par A'B'C'D' à l'instant t_f .



On écrit, pour la masse m , entre les instants t_i et t_f , le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta(U + E_c) = W + Q$$

où E_c désigne l'énergie cinétique macroscopique $E_c = \frac{1}{2} m v^2$, v étant la vitesse du fluide.

Or la masse m de fluide reçoit les travaux suivants de la part de l'extérieur :

- * le travail des forces de pesanteur : $-mg(z_2 - z_1)$
- * le travail fourni au fluide par les parties mobiles de la machine : $m w$, où w , est le travail massique indiqué
- * le travail des actions exercées par les parois fixes : ce travail est nul
- * le travail des forces exercées sur m par le fluide en amont et en aval de m :

$$W(\vec{F}_1) = \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{l} = \int_A^B P \Sigma dx$$

où Σ est la section d'une conduite

$$W(\vec{F}_1) = \int_H^{H'} \vec{F}_1 \cdot d\vec{l} = \int_B^{B'} -P\Sigma dx$$

$$W(\vec{F}_1) + W(\vec{F}'_1) = \int_A^B P\Sigma dx + \int_B^A P\Sigma dx - \int_B^{B'} P\Sigma dx - \int_A^{A'} P\Sigma dx$$

$$W(\vec{F}_1) + W(\vec{F}'_1) = \int_A^B P\Sigma dx - \int_A^{A'} P\Sigma dx$$

De A à B, avant l'entrée dans la machine, P est uniforme et vaut P_1 , la section est uniforme aussi. Il en est de même de A' à B', donc :

$$\int_A^B \Sigma dx = V_1 = mv_1$$

où V_1 est le volume de ABCD et v_1 le volume massique en zone 1.

$$\text{De même } \int_{A'}^B \Sigma dx = mv_2$$

$$\text{donc } W(\vec{F}_1) + W(\vec{F}'_1) = m(P_1v_1 - P_2v_2)$$

Donc le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$m(u_2 - u_1) + m\left(\frac{c_2^2 - c_1^2}{2}\right) + g(z_2 - z_1) = -mg(z_2 - z_1) + mw_1 + m(P_2v_2 - P_1v_1) + mq_e$$

où u_1 et u_2 sont des énergies internes massiques et q_e le transfert thermique massique.

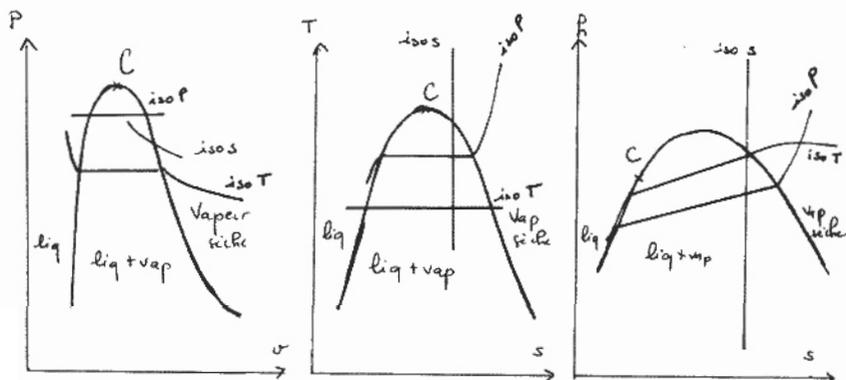
L'enthalpie massique est $h = u + Pv$ donc

$$h_2 - h_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = w_1 + q_e$$

1.3.1) A droite du point critique C, la courbe de saturation s'appelle « **courbe de rosée** » ; à gauche de

C, la courbe de saturation s'appelle « **courbe d'ébullition** ».

Si on chauffe un liquide à pression constante, lorsque la première bulle de vapeur apparaît, le point correspondant appartient à la courbe d'ébullition ; et lorsque la dernière goutte de liquide disparaît, le point correspondant appartient à la courbe de rosée.



Courbe isobare : $P = \text{constante}$

Dans les diagrammes (T, s) et (h, s) , dans le domaine de la vapeur sèche, une courbe isobare a l'allure d'une courbe exponentielle (voir démonstration en 3.2.3). dans le domaine du liquide, l'isobare est presque confondue avec la courbe d'ébullition. Dans le domaine liquide-vapeur, une isobare est isotherme et $g = h - Ts = \text{constante}$ d'où h est fonction affine de s .

Courbe isotherme : $T = \text{constante}$

dans le domaine de la vapeur sèche, $Pv \cong \text{constante}$ (modèle du gaz parfait)

$h \cong \text{constante}$

Dans le domaine liquide-vapeur une isotherme est isobare.

Courbe isentropique : $s = \text{constante}$

Dans le domaine de la vapeur sèche, $Pv^\gamma = \text{constante}$ (modèle du gaz parfait)

1.3.2) La masse du mélange est la somme des masses des phases liquide et vapeur : $m = m_l + m_g$

De même, le volume du mélange est $V = V_l + V_g$

$$V = m_l v_l + m_g v_g$$

$$\frac{V}{m} = \bar{v} = \frac{1}{m} (m(1-x)v_l + mxv_g)$$

$$\text{car } x = \frac{m_g}{m} = \frac{m - m_l}{m}$$

$$\text{donc } v = (1-x)v_l + xv_g$$

$$\text{d'où } x = \frac{v - v_l}{v_g - v_l}$$

L'entropie et l'enthalpie sont des fonctions extensives, donc de même :

l'entropie massique du système liquide-vapeur est égale à $s = (1-x)s_l + xs_g$

et son enthalpie massique est égale à $h = (1-x)h_l + xh_g$

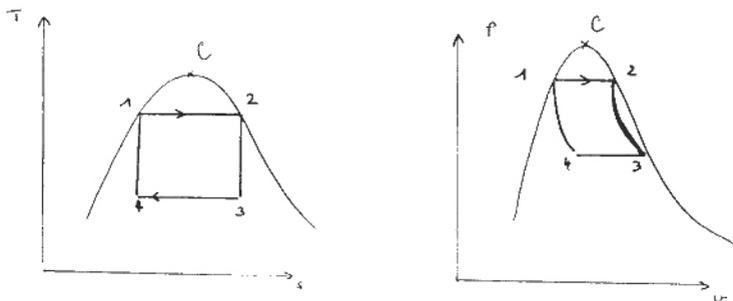
$$\text{donc : } x = \frac{s - s_l}{s_g - s_l} = \frac{h - h_l}{h_g - h_l}$$

2.1.1) Au point 1 on a du liquide juste saturant (sur la courbe d'ébullition).

Au point 2 on a de la vapeur saturante sèche (sur la courbe de rosée)

La transformation 2→3 est adiabatique réversible donc isentropique. Il en est de même de la transformation 4→1. (On s'aperçoit ainsi sur le diagramme que 3 et 4 sont forcément des systèmes liquide-vapeur).

Les transformations 1→2 et 3→4 sont des changements d'état isobares donc isothermes.



Les schémas ne sont pas à l'échelle. En réalité $v_4 > v_2$

Les équations des courbes de 2 à 3 et de 4 à 1 sont inconnues, on sait seulement que le volume massique diminue si la pression augmente.

2.1.2) Les pressions P sont données dans l'énoncé. On lit les températures t dans les tables d'équilibre liquide-vapeur. Les caractéristiques des points 1 et 2 sont lues dans les tables.

Au point 3 $s_3 = s_2$

$$x_3 = \frac{s_3 - s_l}{s_g - s_l} \text{ sur l'isobare } 0,10 \text{ bar}$$

$$h_3 = x_3 h_g + (1-x_3) h_l$$

On procède de même au point 4 à partir de $s_4 = s_1$

Les valeurs sont mises en mémoire dans la calculette au fur et à mesure pour éviter les erreurs d'arrondi.

	1	2	3	4
t (°C)	233,90	233,90	45,81	45,81
P (bar)	30	30	0,10	0,10
x	0	1	0,7383	0,2662
h (kJ/kg)	1008,42	2804,20	1958,39	828,70
s (kJ/kg/K)	2,6457	6,1869	6,1869	2,6457

2.1.3) La transformation 1→2 est isobare donc $q_{e1→2} = h_2 - h_1 = 1795,78 \text{ kJ/kg}$

$w_{1→2} = 0$ car il n'y a pas de parties mobiles dans la chaudière.

La transformation 2→3 est adiabatique donc $q_{e2→3} = 0$

On applique le premier principe de la thermodynamique pour les fluides en écoulement permanent :

$$h_3 - h_2 + \frac{c_3^2 - c_2^2}{2} + g(z_3 - z_2) = w_{12→3} + q_{e2→3}$$

On néglige (dans toute la suite) le travail des forces de pesanteur et les variations d'énergie cinétique massique.

$$q_{e2→3} = 0$$

$$\text{donc } w_{12→3} = h_3 - h_2 = -845,81 \text{ kJ/kg}$$

La transformation 3→4 est isobare donc $q_{e3\rightarrow4} = h_4 - h_3 = -1129,68 \text{ kJ/kg}$ et $w_{3\rightarrow4} = 0$

La transformation 4→1 est adiabatique donc $q_{e4\rightarrow1} = 0$ et $w_{4\rightarrow1} = h_1 - h_4 = 179,16 \text{ kJ/kg}$

2.1.4) Le rendement du cycle est : $\eta = \frac{\text{travail fourni par l'eau au cours du cycle}}{\text{chaleur donnée à l'eau par la source chaude}}$

$$\eta = \frac{-w_{\text{cycle}}}{q_{l \rightarrow 2}}$$

$w_{\text{cycle}} = -q_{\text{evale}} = w_{i \text{ cycle}}$ car $\Delta u_{\text{cycle}} = \Delta h_{\text{cycle}} = 0$

(on peut vérifier numériquement $w_{i \text{ cycle}} = -q_{e \text{ cycle}} = -666,1 \text{ kJ/kg}$)

On obtient ainsi $\eta = 37,1 \%$

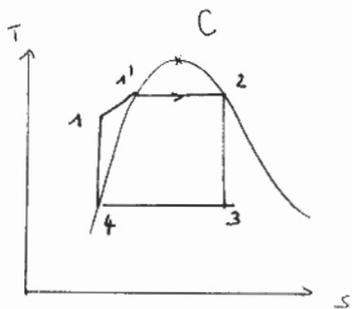
D'autre part, on a un cycle de Carnot qui est réversible donc $\eta = 1 - \frac{T_3}{T_1} = 37,1\%$

où T_3 est la température de la source froide et T_1 celle de la source chaude.

2.2.1) On place d'abord les points 2 (sur la courbe de rosée) et 4 (sur la courbe d'ébullition)

2→3 est isentropique et 4→1 aussi, donc d'après le diagramme 3 est forcément un système liquide-vapeur et 1 est du liquide.

1→2 est isobare : il y a une partie de courbe dans le domaine du liquide et une partie isobare-isotherme dans le domaine liquide-vapeur.



2.2.2) Les caractéristiques des points 2 et 4 sont lues dans les tables.

Le point 3 est tel que $s_2 = s_3$.

t_3 est lue dans les tables.

Sur l'isobare 0,10 bar, on écrit : $x_3 = \frac{s_3 - s_f}{s_g - s_f}$ et $h_3 = x_3 h_g + (1-x_3) h_f$

le point 4 est tel que $s_4 = s_1$

On ne demande pas la température t_1 .

Du point 4 au point 1 on a $dh = v dP + T ds = v dP$ car la transformation est adiabatique réversible.

le volume massique est quasi-constant pour le liquide donc $h_1 - h_4 = v(P_1 - P_4)$ ce qui permet de déterminer h_1 .

	1	2	3	4
t (°C)		233,90	45,81	45,81
P (bar)	30	30	0,10	0,10
x	/	1	0,7383	0
h (kJ/kg)	194,82	2804,2	1958,385	191,83
s (kJ/kg/K)	0,6493	6,1869	6,1869	0,6493

2.2.3) Le raisonnement est semblable à celui de 2.1.3 pour calculer les chaleurs massiques et travaux massiques indiqués.

pour les transformations isobares $1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$, $w_i = 0$

$$q_{el \rightarrow 2} = h_2 - h_1 = \mathbf{2609,38 \text{ kJ/kg}}$$

$$q_{e3 \rightarrow 4} = h_4 - h_3 = \mathbf{-1766,56 \text{ kJ/kg}}$$

Les transformations $2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 1$ sont adiabatiques donc $q_e = 0$

$$w_{2 \rightarrow 3} = h_3 - h_2 = \mathbf{-845,81 \text{ kJ/kg}}$$
 (comme dans le cycle de Carnot)

$$w_{4 \rightarrow 1} = h_1 - h_4 = \mathbf{2,99 \text{ kJ/kg}}$$
 (beaucoup moins que dans le cycle de Carnot)

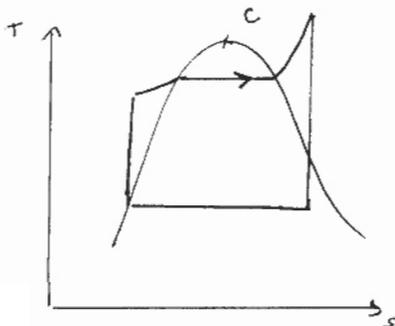
$$2.2.4) \text{ Le rendement du cycle est : } \eta = - \frac{w_{\text{cycle}}}{q_{el \rightarrow 2}} = \frac{q_{\text{cycle}}}{q_{el \rightarrow 2}} = \frac{q_{el \rightarrow 2} + q_{e3 \rightarrow 4}}{q_{el \rightarrow 2}}$$

$$\eta = 32,3\%$$

2.2.5) Le rendement du cycle de Rankine est un peu moins bon que celui de Carnot. La partie $1 \rightarrow 1'$ du cycle de Rankine ne peut être thermiquement réversible. C'est la seule partie du cycle qui ne correspond pas au cycle de Carnot. Sinon $4 \rightarrow 1$ et $2 \rightarrow 3$ sont isentropiques, $1' \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$ sont isothermes.

Mais l'énorme avantage du cycle de Rankine est que le travail indiqué massique reçu par le fluide dans la pompe est beaucoup plus faible que celui qu'il reçoit dans le compresseur (avec égalité des travaux indiqués massiques fournis par le fluide à la turbine ou au piston moteur).

2.2.6) On peut proposer les améliorations suivantes :



Dans le cycle de Hirn, une partie de la détente dans la turbine a lieu avec de la vapeur surchauffée. Cela permet à la transformation d'être vraiment adiabatique (alors qu'avec un liquide, il est très difficile d'avoir une transformation adiabatique, les conductivités thermiques des liquides étant très supérieures à celles des gaz).

De plus, la surchauffe permet d'avoir presque constamment de la vapeur sèche dans la turbine (en fin de détente le titre massique en vapeur est proche de 1) ce qui est meilleur pour les aubages (qui sinon s'abiment très vite).

On peut ensuite ajouter à l'installation un échangeur pour « récupérer » la chaleur donnée par le fluide au condenseur et aussi envisager des installations à soutirage (voir partie 3).

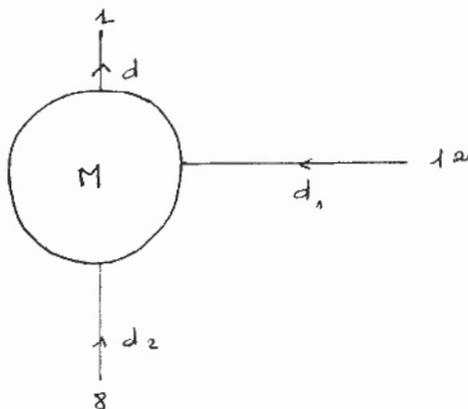
3.1.1) Le point 7 est du liquide juste saturant à 5 bar. On lit sa température dans les tables d'équilibre liquide-vapeur : $t_7 = 151,86 \text{ }^\circ\text{C}$

La transformation dans la pompe P' est quasiisotherme donc $t_8 = t_7 = 151,86 \text{ }^\circ\text{C}$

Le point 10 est du liquide juste saturant à 0,05 bar. On lit sa température dans les tables d'équilibre liquide-vapeur : $t_{10} = 32,88 \text{ }^\circ\text{C}$

La transformation dans la pompe P est quasiisotherme donc $t_{11} = t_{10} = 32,88 \text{ }^\circ\text{C}$

3.1.2)



Le mélangeur est calorifugé. Il n'y a aucun transfert thermique avec l'extérieur du mélangeur :

$$Q_{12 \rightarrow 1} + Q_{8 \rightarrow 1} = 0$$

Les transformations dans le mélangeur sont isobares donc le transfert thermique reçu par un fluide est égal à sa variation d'enthalpie :

$$\Delta H_{12 \rightarrow 1} + \Delta H_{8 \rightarrow 1} = 0$$

$$\text{Pendant la durée } dt \text{ on a : } dm_1 (h_1 - h_{12}) + dm_2 (h_1 - h_8) = 0$$

où dm_1 et dm_2 sont des masses élémentaires.

$$\text{En divisant par } dt \text{ l'équation précédente on obtient : } d_1 (h_1 - h_{12}) + d_2 (h_1 - h_8) = 0$$

où d_1 et d_2 désignent des débits massiques.

Or la conservation de la masse impose que $d = d_1 + d_2$

$$\text{donc } d_1 (h_1 - h_{12}) + (d - d_1)(h_1 - h_8) = 0$$

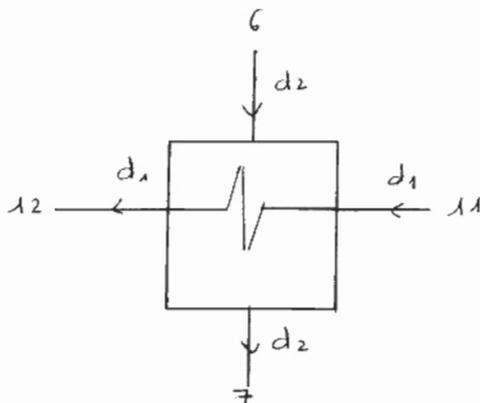
$$\text{d'où } \frac{d_1}{d} = \frac{h_1 - h_8}{h_{12} - h_8}$$

Aux points 1, 8, 12 l'eau est liquide donc $h = ct$ d'où

$$\frac{d_1}{d} = \frac{t_1 - t_8}{t_{12} - t_8} = \frac{128 - 151,86}{124,4 - 151,86} = 0,869$$

$$\text{d'où } \frac{d_2}{d} = 1 - \frac{d_1}{d} = 0,131$$

3.2.1)



L'échangeur est calorifugé et chaque courant de fluide y subit une transformation isobare, donc comme en 3.1.2 $d_1(h_{12} - h_{11}) + d_2(h_7 - h_6) = 0$

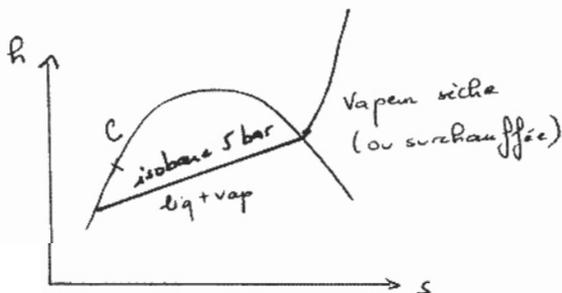
$$\text{donc } h_6 = h_7 + \frac{d_1}{d_2}(h_{12} - h_{11}) = h_7 + \frac{d_1}{d_2} c(t_{12} - t_{11})$$

h_7 est lu dans les tables (pour le liquide juste saturant à 5 bar)

$$h_6 = 640,23 + \frac{0,868}{0,131} \cdot 4,186(124,4 - 32,88)$$

$$h_6 = 3179,35 \text{ kJ/kg}$$

3.2.2)



$h_6 > h_g$ de 5 bar donc au point 6, l'eau est vapeur surchauffée.

$$h_{3\text{bar}, 350^\circ\text{C}} < h_g < h_{5\text{bar}, 400^\circ\text{C}}$$

donc au point 6, on a de la vapeur surchauffée entre 350 °C et 400 °C.

3.2.3) Pour un gaz parfait, d'après la deuxième loi de Joule, l'enthalpie ne dépend que de la température : $dh = c_p dT$

Si $c_p = \text{constante}$, $h = c_p T + \text{cste}$

$dh = v dP + T ds$ (en grandeurs massiques)

donc pour un gaz parfait, $c_p dT = v dP + T ds$

$$\text{donc } ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dP = c_p \frac{dT}{T} - r \frac{dP}{P} \text{ avec } r = R/M$$

$$\text{donc } s = c_p \ln \frac{T}{T_0} - r \ln \frac{P}{P_0} + \text{cste}$$

où P_0 et T_0 sont des constantes.

3.2.4) On considère l'isobare 5 bar entre 350 et 400°C. On connaît d'après les tables les caractéristiques des points A et B :

A : 350°C

B : 400°C

$h = 3167,7 \text{ kJ/kg}$

$h = 3271,9 \text{ kJ/kg}$

$s = 7,6329 \text{ kJ/kg/K}$

$s = 7,7938 \text{ kJ/kg/K}$

En considérant que l'enthalpie massique est fonction affine de la température, on peut écrire :

$$t_6 = t_A + \frac{t_B - t_A}{h_B - h_A} (h_6 - h_A)$$

$$t_6 = 350 + \frac{50}{3271,9 - 3168,7} (3179,35 - 3167,7)$$

$$t_6 = 355,59^\circ\text{C} \quad (T_6 = 628,74 \text{ K})$$

En considérant que s est fonction affine de $\ln(T)$ où T est la température absolue, on peut écrire :

$$s_6 = s_A + \frac{s_B - s_A}{\ln \frac{T_B}{T_A}} \ln \frac{T_6}{T_A}$$

$$3.2.4) \quad s_6 = 7,6329 + \frac{7,7938 - 7,6329}{\ln \frac{673,15}{623,15}} \ln \frac{628,74}{623,15}$$

$$s_6 = 7,6515 \text{ kJ/kg/K}$$

3.3.1) Dans la turbine TBP, on considère que le fluide subit une transformation isentropique donc

$$s_5 = s_6 = 7,6515 \text{ kJ/kg/K}$$

à $P_5 = 10 \text{ bar}$, $s_5 > s_g$, donc **au point 5, l'eau est à l'état de vapeur surchauffée.**

Et d'après les tables, compte-tenu de la valeur de l'entropie massique s_5 , la température t_5 est comprise entre 400 et 500 °C.

On fait donc une interpolation entre les points A et B tels que :

A 400 °C

B 500°C

$s = 7,4651 \text{ kJ/kg/K}$

$s = 7,7622 \text{ kJ/kg/K}$

$h = 3263,9 \text{ kJ/kg}$

$h = 3478,5 \text{ kJ/kg}$

s fonction affine de $\ln(T)$ d'où :

$$\ln T_3 = \frac{\ln \frac{T_B}{T_A}}{s_B - s_A} (s_3 - s_A) + \ln T_A$$

$$\ln T_3 = \frac{\ln \frac{773,15}{673,15}}{7,7622 - 7,4651} (7,6515 - 7,4651) + \ln 673,15$$

$$\ln(T_3) = 6,60$$

$$T_3 = 734,27 \text{ K} \quad \mathbf{t_3 = 461,12 \text{ }^\circ\text{C}}$$

l'enthalpie massique est fonction affine de la température d'où :

$$h_3 = \frac{h_B - h_A}{t_B - t_A} (t_3 - t_A) + h_A$$

$$h_3 = \frac{3478,5 - 3263,9}{100} (461,12 - 400) + 3263,9$$

$$\mathbf{h_3 = 3395,06 \text{ kJ/kg}}$$

3.3.2) Au point 3, d'après l'énoncé, $t_3 = t_3 = 461,12 \text{ }^\circ\text{C}$

t_3 est supérieure à la température d'équilibre liquide-vapeur de $P_3 = 90 \text{ bar}$ donc au point 3, l'eau est à l'état de vapeur surchauffée.

On fait une interpolation entre les points suivants :

A 450 $^\circ\text{C}$

B 500 $^\circ\text{C}$

$h = 3256,6 \text{ kJ/kg}$

$h = 3386,1 \text{ kJ/kg}$

$s = 6,4844 \text{ kJ/kg/K}$

$s = 6,6576 \text{ kJ/kg/K}$

$$h_3 = h_A + \frac{h_B - h_A}{t_B - t_A} (t_3 - t_A) = 3256,6 + \frac{3386,1 - 3256,6}{50} (461,12 - 450)$$

$$\mathbf{h_3 = 3285,40 \text{ kJ/kg}}$$

$$s_3 = s_A + \frac{s_B - s_A}{\ln \frac{T_B}{T_A}} \ln \frac{T_3}{T_A}$$

$$s_3 = 6,4844 + \frac{6,6576 - 6,4844}{\ln \frac{773,15}{723,15}} \ln \left(\frac{773,15 + 461,12}{723,15} \right)$$

$$\mathbf{s_3 = 6,5239 \text{ kJ/kg/K}}$$

3.4) La transformation dans la turbine TBP étant isentropique, $s_9 = s_3 = 7,6515 \text{ kJ/kg/K}$

à $P_9 = 0,05 \text{ bar}$, d'après les tables d'équilibre liquide-vapeur, $s < s_g < s_g$, donc au point 9 on a un système liquide-vapeur d'où $t_9 = 32,88 \text{ }^\circ\text{C}$ d'après les tables.

$$\text{D'après la règle des moments chimiques, } x_9 = \frac{s_9 - s_l}{s_g - s_l} = \frac{7,6515 - 0,4764}{8,3951 - 0,4764} = 0,9061$$

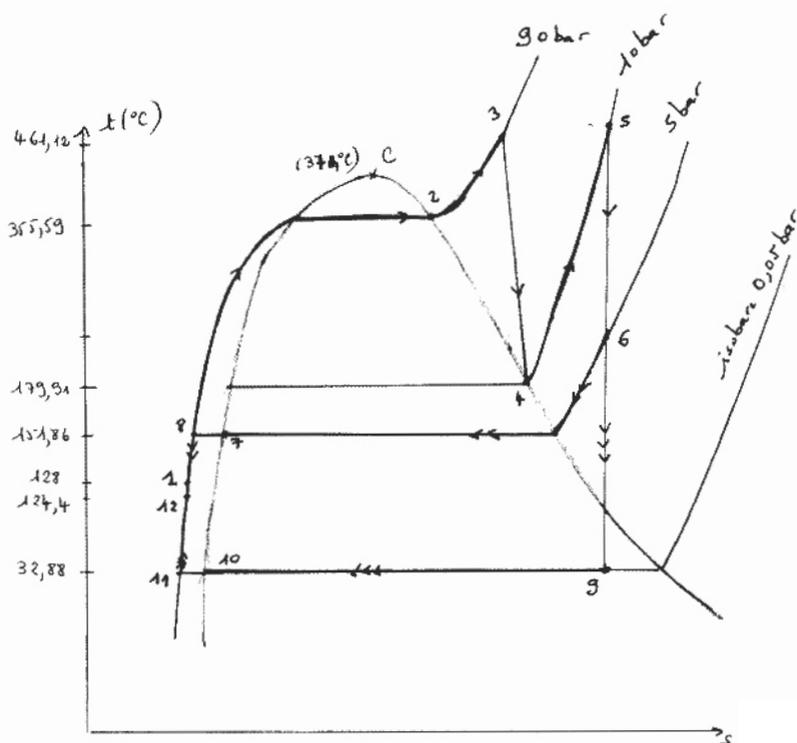
$$h_9 = x_9 h_g + (1 - x_9) h_l = 0,9061 \cdot 2561,5 + (1 - 0,9061) \cdot 137,82$$

3.5) Pour remplir le tableau suivant, on utilise les résultats des questions précédentes pour les points 6,

5, 3, 9, on lit dans les tables les caractéristiques des points 2, 4, 7, 10. On utilise « $h = ct$ » pour les

liquides : points 1, 8, 11, 12.

Point	pression (bar)	température (°C)	état du fluide	enthalpie massique en kJ/kg
1	90	128	liquide	535,81
2	90	303,40	vapeur saturante sèche $x_2 = 1$	2742,1
3	90	461,12	vapeur surchauffée	3285,40
4	10	179,91	vapeur saturante sèche $x_4 = 1$	2778,1
5	10	461,12	vapeur surchauffée	3395,06
6	5	355,59	vapeur surchauffée	3179,35
7	5	151,86	liquide juste saturant $x_7 = 0$	640,23
8	90	151,86	liquide	635,69
9	0,05	32,88	liquide et vapeur $x_9 = 0,9061$	2333,91
10	0,05	32,88	liquide juste saturant $x_{10} = 0$	137,82
11	90	32,88	liquide	137,64
12	90	124,4	liquide	520,74



Après avoir représenté la courbe de saturation, on représente les quatre isobares du problème. on place les points où le fluide est à l'état de liquide juste saturant ou de vapeur saturante sèche.

Les points 5, 6, 9 sont sur une même verticale (isentropique). On place ensuite le point 3 à même température que le point 5. on place les points 1, 8, 11, 12 grâce à leurs pressions et leurs températures.

3.7.1) La transformation 3→4 dans la turbine THP est adiabatique d'où

$$ds \geq \frac{\delta q_r}{T_{source}}$$

donc $ds \geq 0$

Or, $s_4 = 6,5865 \text{ kJ/kg/K}$ (valeur lue dans les tables)

On a calculé $s_3 = 6,5239 \text{ kJ/kg/K}$, donc $s_4 > s_3$ ce qui indique que la transformation 3→4 est adiabatique **irréversible**.

3.7.2) La transformation 3→4' est une transformation imaginaire idéale adiabatique réversible donc isentropique

$$s_{4'} = s_3 = 6,5239 \text{ kJ/kg/K}$$

$s_4 < s_4' < s_2$ sur l'isobare 10 bar

Donc au point 4' on a un système liquide-vapeur

$$x_{4'} = \frac{s_{4'} - s_l}{s_g - s_l} = \frac{6,5239 - 2,1387}{6,5865 - 2,1387}$$

$$x_{4'} = 0,9859$$

$$h_{4'} = x_{4'} h_g + (1-x_{4'}) h_l$$

$$h_{4'} = 0,9859 \cdot 2778,1 + (1-0,9859) \cdot 762,81 = 2749,75 \text{ kJ/kg}$$

3.7.3) On écrit pour le fluide dans la turbine THP le premier principe de la thermodynamique appliqué aux fluides en écoulement permanent. On en déduit, comme $q_e = 0$, que $w_i = \Delta h$

$$\eta_{th} = \frac{W_{trc} \text{ effectuée par eau}}{W_{trc} \text{ effectuée par eau}} = \frac{W_{trc} \text{ élect. génér. eau}}{W_{trc} \text{ élect. génér. eau}}$$

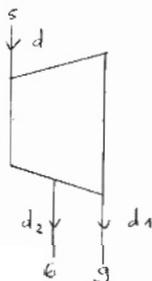
$$\eta_{th} = \frac{h_4 - h_3}{h_4 - h_3} = \frac{2778,1 - 3285,40}{2749,75 - 3285,40}$$

$\eta_{th} = 0,95$ donc la transformation 3→4 est assez voisine d'une transformation réversible.

3.8) La transformation 3→4 étant adiabatique, w_i reçu par le fluide dans THP = $h_4 - h_3$

donc le travail indiqué massique fourni par le fluide dans THP est $h_3 - h_4 = 507,30 \text{ kJ/kg}$

pour la turbine TBP, on a le schéma suivant :



Le travail massique indiqué fourni par le fluide est donc $w_{ITBP} = \frac{d_1}{d}(h_5 - h_9) + \frac{d_2}{d}(h_5 - h_6)$

$$w_{ITBP} = h_5 - \frac{d_1}{d} h_9 - \frac{d_2}{d} h_6$$

$$w_{ITBP} = 3395,06 - 0,869 \cdot 2333,91 - (1 - 0,869) \cdot 3179,35$$

$$w_{ITBP} = \mathbf{950,31 \text{ kJ/kg}}$$

3.9) La puissance indiquée donnée par l'eau aux deux turbines est

$$P_i = \frac{\delta W_i}{\delta t} = \frac{dm}{dt}(w_{ITBP} + w_{ITHP}) = d(w_{ITBP} + w_{ITHP})$$

pour chaque alternateur (monté sur l'arbre d'une turbine), la puissance électrique est $P_{elec} = \eta_{meca} P_i$

$$\text{donc } P_{elec} = 0,95 \cdot 640(507,30 + 950,31) = 886 \cdot 10^3 \text{ kW}$$

$$P_{elec} = \mathbf{886 \text{ MW}}$$

3.10) Dans le générateur de vapeur, le surchauffeur, le resurchauffeur, le fluide subit des transformations isobares : $q_e = \Delta h$

$$q_{e\ CV} + q_{e\ S} + q_{e\ RS} = h_2 - h_1 + h_3 - h_2 + h_5 - h_4 = h_3 - h_1 + h_5 - h_4$$

$$q_{e\ CV} + q_{e\ S} + q_{e\ RS} = 3285,40 - 4 \cdot 186,128 + 3395,06 - 2778,1$$

$$q_{e\ CV} + q_{e\ S} + q_{e\ RS} = \mathbf{3366,55 \text{ kJ/kg}}$$

3.11) En négligeant le travail indiqué au niveau des pompes, le rendement de l'installation est

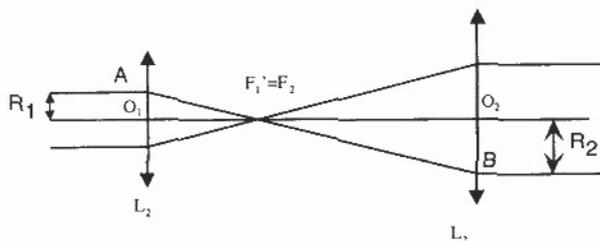
$$\eta = \eta_{meca} \frac{w_{ITBP} + w_{ITHP}}{q_{e\ CV} + q_{e\ S} + q_{e\ RS}} = 0,95 \frac{(950,31 + 507,30)}{3366,55}$$

$$\eta = \mathbf{41,1 \%}$$

SECONDE PARTIE - OPTIQUE

1 Elargissement d'un faisceau laser

Il suffit d'utiliser un **montage afocal** : les axes optiques des deux lentilles sont alignés et le foyer image, F_1 , de L_1 est confondu avec le foyer objet, F_2 , de L_2 . Si le faisceau incident est parallèle à l'axe optique, il va d'abord converger en F_1 , puis il ressort de L_2 parallèlement à l'axe optique.



Les triangles O_1F_1A et O_2F_2B sont semblables (isométriques), on a donc les relations :

$$\frac{O_2B}{O_1A} = \frac{O_2F_2}{O_1F_1} \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{f_2}{f_1}$$

On a $R_2 = 2\text{cm}$, $R_1 = 1\text{mm}$, $f_1 = 1\text{cm}$, donc $\frac{R_2}{R_1} = 20 \Rightarrow \boxed{f_2 = 20f_1 = 20\text{cm}}$

2 Mesure de la longueur d'onde d'un laser à l'aide d'un prisme

2.1 Lois de Descartes

On considère un dioptre plan séparant deux milieux d'indice n_1 et n_2 . Le rayon incident vient du milieu n_1 . Le plan d'incidence est le plan défini par le rayon incident et la normale au dioptre. Les angles d'incidence, θ , de réflexion, θ_r , et de transmission r , sont les angles des différents rayons par rapport à la normale.

La première loi de Descartes dit que les rayons réfléchis et transmis sont dans le plan d'incidence.

La seconde exprime l'égalité des angles d'incidence et de réflexion : $\theta = \theta_r$.

La dernière loi de Descartes relie les angles d'incidence et de transmission :

$$n_1 \sin(\theta) = n_2 \sin(r)$$

2.2 Déviation par un prisme

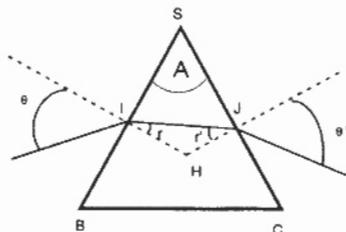
Equations du prisme La déviation est l'angle entre le rayon émergent et le rayon incident. Les 4 équations du prisme sont :

$$\sin(\theta) = n \sin(r) \quad (1)$$

$$\sin(\theta') = n \sin(r') \quad (2)$$

$$A = r + r' \quad (3)$$

$$D = \theta - r + \theta' - r' = \theta + \theta' - A \quad (4)$$



Les deux premières équations viennent des lois de Descartes appliquées au rayons incident et émergent. La troisième équation est purement géométrique : dans le triangle SIJ, la somme des angles est égale à π . Donc $A + (\pi/2 - r) + (\pi/2 - r') = \pi$. La dernière est obtenue simplement en ajoutant la déviation due au premier dioptre ($\theta - r$) et celle due au second ($\theta' - r'$).

Remarque l'énoncé précise que les angles sont comptés arithmétiquement et que le rayon incident est sous la normale. Pour traiter le cas général, il faut compter les angles algébriquement après avoir orientés avec soin les angles en I et J.

2.2.1 Courbe de déviation

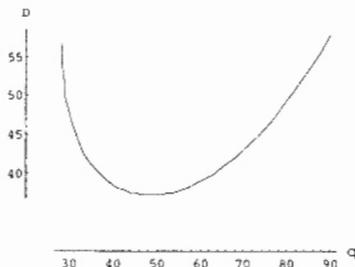
Pour pouvoir tracer numériquement la courbe donnant la déviation en fonction de θ , il faut exprimer θ' en fonction de θ :

$$\left. \begin{aligned} \theta' &= \text{Arcsin} [n \sin(r')] = \text{Arcsin} [n \sin(A - r)] \\ r &= \text{Arcsin} \left[\frac{\sin(\theta)}{n} \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta' = \text{Arcsin} \left[n \sin \left(A - \text{Arcsin} \left[\frac{\sin(\theta)}{n} \right] \right) \right]$$

Ce qui donne pour la déviation :

$$D = \theta - A + \text{Arcsin} \left[n \sin \left(A - \text{Arcsin} \left[\frac{\sin(\theta)}{n} \right] \right) \right] \quad (5)$$

Cette formule entrée dans une calculatrice programmable permet de tracer la courbe suivante ($n = 1,5$ et $A = 60^\circ$) :



On vérifie bien sur la courbe l'existence d'un minimum de déviation sur la courbe qu'il y a un minimum pour un angle d'incidence voisin de 49° (La valeur exacte est $48,59^\circ$).

Il est judicieux de signaler qu'il y a une valeur minimale, θ_0 , de l'angle d'incidence. Pour $\theta < \theta_0$ il n'y a pas de rayon émergent car il y a réflexion totale sur le deuxième dioptré. La courbe de déviation a une tangente verticale pour $\theta < \theta_0$. De plus, pour un angle d'incidence égal à 90° , la courbe de variation montre une pente égale à 45° . Ces dernières propriétés sont démontrées facilement à l'aide des 4 équations du prisme

Minimum de déviation Au minimum de déviation on a la relation : $\frac{dD}{d\theta} = 0$. Le calcul de la dérivée de la fonction (5) est une méthode peu efficace. Il est préférable de différencier les 4 équations du prisme (θ varie, n et A sont constants) :

$$\cos(\theta)d\theta = n \cos(r)dr \quad (6)$$

$$\cos(\theta')d\theta' = n \cos(r')dr' \quad (7)$$

$$0 = dr + dr' \quad (8)$$

$$dD = d\theta + d\theta' \quad (9)$$

La dernière équation permet de calculer $\frac{dD}{d\theta}$:

$$dD = d\theta + d\theta' \implies \frac{dD}{d\theta} = 1 + \frac{d\theta'}{d\theta}$$

Les deux premières équations, puis la troisième, permettent le calcul de $\frac{d\theta'}{d\theta}$:

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{n \cos(r') \cos(\theta) dr}{n \cos(r) \cos(\theta') dr'} = -\frac{\cos(r') \cos(\theta)}{\cos(r) \cos(\theta')} \quad (10)$$

Ce qui donne :

$$\frac{dD}{d\theta} = 1 - \frac{\cos(r') \cos(\theta)}{\cos(r) \cos(\theta')} \quad (11)$$

Au minimum de déviation, on a donc la relation :

$$\frac{dD}{d\theta} = 0 \implies \cos(r') \cos(\theta) = \cos(r) \cos(\theta') \quad (12)$$

En élevant au carré, puis en utilisant les lois de Descartes on obtient :

$$\cos^2(r') [1 - n^2 \sin^2(r)] = \cos^2(r) [1 - n^2 \sin^2(r')]$$

La dernière formule est symétrique en r et r' , mais il faut également remarquer que les fonctions $\cos(x)$ et $\sin^2 x$ sont des fonctions paires. Il y a donc deux solutions :

$$\frac{dD}{d\theta} = 0 \iff r = r' \quad \text{ou} \quad r = -r'$$

La deuxième solution ($r = -r'$) n'est pas physique car elle implique $A = r + r' = 0$.

Il faut retenir la première solution $\boxed{r = r'}$

Il faudrait montrer qu'il s'agit bien d'un minimum.

2.2.2 Angles au minimum de déviation

Grâce à l'équation (3), on peut facilement calculer les angles $r = r'$ au minimum de déviation : $r = r_M = r'_M = \frac{A}{2}$.

On a de plus

$$\begin{aligned}\sin(\theta_M) &= n \sin(r_M) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right) \\ \sin(\theta'_M) &= n \sin(r'_M) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right) \implies \theta_M = \theta'_M\end{aligned}$$

La valeur de la déviation, au minimum de déviation est donc :

$$D_M = \theta_M + \theta'_M - A = 2\theta_M - A$$

Au minimum de déviation, les angles d'incidence et de réfraction ont donc pour valeurs :

$$\theta_M = \frac{A + D_M}{2} \quad \text{et} \quad r_M = \frac{A}{2}$$

2.2.3 Applications mesure d'un indice

A l'aide de la loi de Descartes, on en déduit facilement la valeur littérale de l'indice :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_M}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

2.2.4 Application numérique :

$$D_M = 36^\circ 20' \quad \text{et} \quad A = 60^\circ \implies \boxed{n = 1,49}$$

2.3 Dispersion par un prisme

On désigne par λ la longueur d'onde dans le vide de la lumière incidente. L'indice dépend de λ . Pour étudier la dispersion, il faut différentier les équations du prisme. Mais maintenant, θ est fixe mais n varie :

$$\begin{aligned}0 &= dn \sin(r) + n \cos(r) dr \\ \cos(\theta') d\theta' &= dn \sin(r') + n \cos(r') dr' \\ dA &= 0 = dr + dr' \\ dD &= d\theta + d\theta' - dA = d\theta'\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$dr' = -dr = + \frac{dn \sin(r)}{n \cos(r)} \implies \cos(\theta') d\theta' = dn \left[\sin r' + \frac{\cos r' \sin r}{\cos r} \right] = dn \frac{\sin(A)}{\cos r}$$

$$\text{Donc} \quad \frac{dD}{dn} = \frac{\sin(A)}{\cos \theta' \cos r} \implies \boxed{\frac{dD}{d\lambda} = \frac{\sin(A)}{\cos \theta' \cos r} \frac{dn}{d\lambda}}$$

2.3.1 Dispersion angulaire au minimum de déviation

Au minimum de déviation, on a $r = A/2$ et $\theta' = (D_M + A)/2$, ce qui donne :

$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{\sin(A)}{\cos\left[\frac{A}{2}\right] \cos\left[\frac{D_M + A}{2}\right]} \frac{dn}{d\lambda} = \frac{2 \sin(A/2)}{\cos\left[\frac{D_M + A}{2}\right]} \frac{dn}{d\lambda}$$

2.4 Application : mesure de λ

Après le prisme l'image de la fente source a lieu dans le plan focal image de la lentille. Il y a 2 images car la fente est éclairée par 2 longueurs d'onde. Les deux images sont séparées de :

$$\Delta x = f'_2 \Delta D = f'_2 \frac{dD}{d\lambda} \Delta \lambda$$

$$D_M = 36^\circ 20' \theta_M = (A + D_M)/2 = 48^\circ 10' \Rightarrow \cos(\theta_M) = 0,667 \quad \left. \begin{array}{l} A = 60^\circ \Rightarrow \sin(A/2) = 0,5; \\ \end{array} \right\} \frac{dD}{d\lambda} \simeq 1,5 \frac{dn}{d\lambda}$$

$$f'_2 = 40 \text{ cm}, \quad \frac{dn}{d\lambda} = 1,0 \times 10^{-4} \text{ nm}^{-1} = 10^5 \text{ m}^{-1}, \quad \Delta x = 0,6 \text{ mm} \Rightarrow \Delta \lambda = \frac{\Delta x}{0,6 \frac{dn}{d\lambda}} = \frac{6 \times 10^{-4}}{0,6 \times 10^5} = 10^{-8} \text{ m} =$$

$10 \text{ nm} \Rightarrow$

$\lambda = 642,8 \text{ nm}$ ou $\lambda = 622,8 \text{ nm}$ car l'énoncé ne précise pas le signe de Δx .

3 Mesure de la longueur d'onde par utilisation d'un réseau

3.1 Formule du réseau

La distance entre eux traits du réseau est $a = 2,000 \mu\text{m}$. L'angle d'incidence est noté θ_0 . On observe la diffraction à l'infini dans une direction θ_i . Il y a interférence constructive dans des directions bien particulières qui sont repérées par un angle θ_p où p est un entier relatif :

$$\sin(\theta_p) - \sin(\theta_0) = p \frac{\lambda}{a} \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (13)$$

Une valeur de p caractérise un ordre de diffraction.

3.2 Expérience

Tous les ordres de diffractions ne sont pas possibles : il faut que $|\sin(\theta_p)| \leq 1$. Pour $\lambda = 500 \text{ nm}$ et $a = 2 \mu\text{m} = 2000 \text{ nm}$ ou $\frac{\lambda}{a} = \frac{1}{4}$. Pour $\theta_0 = 0$, les seules valeurs possibles de p sont celles où $|p| \leq 4$. Les angles de diffraction sont les suivants :

$$\begin{array}{ll} p = 0 & \theta_0 = 0 \\ p = \pm 1 & \theta_{\pm 1} = \pm 14^\circ 47' \\ p = \pm 2 & \theta_{\pm 2} = \pm 30^\circ \\ p = \pm 3 & \theta_{\pm 3} = \pm 48^\circ 30' \\ p = \pm 4 & \theta_{\pm 4} = \pm 90^\circ \end{array}$$

En éclairant le réseau en incidence normale avec un faisceau laser, on observe 9 faisceaux diffractés. L'ordre zéro est transmis parallèlement à la normale au réseau. Les ordres 4 et -4 sont parallèles au réseau et sont donc difficilement observables.

3.3 Mesure de λ

$\theta_0 = 0$, on mesure $\theta_1 = 15^\circ 04' \Rightarrow \lambda = 519,8 \text{ nm}$

3.4 Précision

La précision de la mesure est limitée par deux causes : l'incertitude sur la mesure de l'angle de diffraction et l'incertitude sur la période a du réseau. Aucune information est fournie sur la précision avec laquelle est mesurée l'angle d'incidence, cette incertitude est donc négligée.

En incidence normale et pour $p = 1$, on a la relation : $\sin(\theta_1) = \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \lambda = a \sin(\theta_1)$. En différentiant on obtient :

$$d\lambda = da \cos \theta_1 + a \cos \theta_1 d\theta_1$$

$$\text{En passant aux incertitudes : } \Delta\lambda = \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta a \cos \theta_1 + a \cos \theta_1 \Delta\theta_1$$

$$\Delta\theta_1 = 1' = 290 \times 10^{-6}, a = 2\mu\text{m}, \theta_1 = 15^\circ 04' \Rightarrow \Delta_2 = 0,55\text{nm}$$

$$a = 2,000\mu\text{m} \text{ donc } \Delta a = 1\text{nm} \Rightarrow \Delta_1 = 0,26\text{nm}$$

$$\Delta\lambda = \Delta_1 + \Delta_2 = 0,81\text{nm}$$

4 Diffraction et divergence d'un faisceau laser

L'énoncé fournissait l'amplitude complexe de l'onde diffractée à très grande distance d'une pupille diffractante :

$$A(X, Y, Z) = F \iint_P dx dy t(x, y) \exp \left[+ \frac{2i\pi}{\lambda Z} (xX + yY) \right]$$

X, Y, Z sont les coordonnées du point d'observation ($Z \gg X, Y$). L'intégration porte sur tous les points de la pupille, où la fonction de transmission est non nulle. x, y sont les coordonnées d'un point de la pupille.

4.1 Diffraction par une ouverture carrée

$t(x, y) = 1$ pour $-a \leq x \leq a$ et $-a \leq y \leq a$ et $t(x, y) = 0$ en dehors de ce domaine. L'intégrale se factorise :

$$A_1(X, Y, Z) = F \left\{ \int_{-a}^a dx \exp \left[+ \frac{2i\pi}{\lambda Z} xX \right] \right\} \left\{ \int_{-a}^a dy \exp \left[+ \frac{2i\pi}{\lambda Z} yY \right] \right\}$$

Les intégrales se calculent aisément. Par exemple : $\int_{-a}^a dx \exp \left[+ \frac{2i\pi}{\lambda Z} xX \right] = \frac{\exp \left[\frac{i\pi a X}{\lambda Z} \right] - \exp \left[-\frac{i\pi a X}{\lambda Z} \right]}{\frac{2i\pi X}{\lambda Z}} =$

$$\frac{\sin \left[\frac{\pi a X}{\lambda Z} \right]}{\frac{\pi X}{\lambda Z}}$$

L'amplitude diffractée est donc :

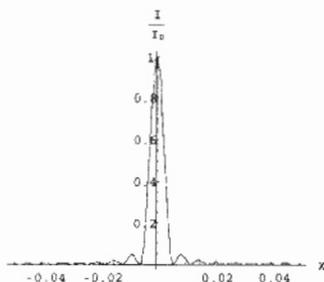
$$A_1(X, Y, Z) = F a^2 \frac{\sin \left[\frac{\pi a X}{\lambda Z} \right]}{\left(\frac{\pi a X}{\lambda Z} \right)} \frac{\sin \left[\frac{\pi a Y}{\lambda Z} \right]}{\left(\frac{\pi a Y}{\lambda Z} \right)}$$

L'intensité mesurée sur l'écran est proportionnelle au module carré de l'amplitude :

$$I_1(X, Y, Z) = \eta |A_1(X, Y, Z)|^2 = I_0 \left\{ \frac{\sin \left[\frac{\pi a X}{\lambda Z} \right]}{\left(\frac{\pi a X}{\lambda Z} \right)} \frac{\sin \left[\frac{\pi a Y}{\lambda Z} \right]}{\left(\frac{\pi a Y}{\lambda Z} \right)} \right\}^2$$

η est une constante de proportionnalité, $I_0 = \eta F^2 a^4$.

Allure de la fonction



Position du premier zéro La fonction $\frac{\sin u}{u}$ est égale à un pour $u = 0$. Elle s'annule ensuite pour les valeurs de u annulant $\sin u$: $u = p\pi$ ($p \neq 0$, p entier), donc pour :

$$X = p \frac{\lambda Z}{a}$$

Le premier zéro est obtenu avec $|p| = 1$, ce qui donne $X = \frac{\lambda Z}{a} = \frac{1 \times 610^{-7}}{10^{-4}} = 6 \text{ mm}$

4.2 Diffraction par une fonction de transmission gaussienne : $t(x, y) = \exp[-(x^2 + y^2)/\delta]$

Dans ce cas l'amplitude diffractée se factorise également :

$$A_1(X, Y, Z) = F \left\{ \int_{-a}^a dx e^{-\frac{x^2}{\delta^2}} e^{+\frac{2i\pi x X}{\lambda Z}} \right\} \left\{ \int_{-a}^a dy e^{-\frac{y^2}{\delta^2}} e^{+\frac{2i\pi y Y}{\lambda Z}} \right\}$$

En faisant un changement de variable de la forme : $x = \sqrt{\pi} \delta t$ et en utilisant l'intégrale donnée par l'énoncé, on obtient facilement :

$$A_2(X, Y, Z) = F\pi\delta^2 \exp \left[- \left(\frac{\pi\delta}{\lambda Z} \right)^2 (X^2 + Y^2) \right]$$

Largeur de diffraction à la distance Z Ce qui donne pour l'intensité :

$$I_2(X, Y, Z) = \eta (F\pi\delta^2)^2 \exp \left[-2 \left(\frac{\pi\delta}{\lambda Z} \right)^2 (X^2 + Y^2) \right]$$

L'intensité est bien de la forme $I_2(X, Y, Z) = I_0 \exp[-(X^2 + Y^2)/\Delta^2]$ avec pour largeur :

$$\Delta = \frac{\lambda Z}{\sqrt{2}\pi\delta}$$

Cette largeur est proportionnelle à Z , elle croît avec la distance. La diffraction provoque la divergence du faisceau laser.

Application numérique $\delta = 0,1 \text{ mm}$, $Z = 100 \text{ m}$, $\lambda = 0,52 \mu\text{m} \implies \Delta = 11,7 \text{ cm}$

5 Etude spectrale d'une diode laser par interférométrie

5.1 Interférences lumineuses

5.1.1 Définition

Pour observer des interférences entre deux ondes lumineuses il faut que les deux ondes soient monochromatiques et **cohérentes**. Cela signifie que la différence de phase entre les deux ondes ne doit pas varier dans le temps de façon aléatoire. Cette différence de phase doit être constante ou varier lentement dans le temps.

Pour cette raison, actuellement il est quasiment impossible de réaliser des interférences lumineuses avec des sources différentes. En fait, il a été réalisé de rares expériences avec des lasers monomodes et très bien stabilisés.

Dans la pratique, il est seulement possible d'obtenir des interférences en utilisant une seule source et par division d'amplitude ou division du front d'onde on fabrique deux ondes avec une différence de phase constante et semblant issues de deux sources différentes.

Pour obtenir une bonne visibilité, il faut que les deux ondes aient des amplitudes voisines, des directions presque colinéaires et des polarisation presque parallèles.

Si la source est non monochromatique, il y aura brouillage du système d'interférence. L'étude de ces phénomènes porte le nom de cohérence temporelle. Avec une source ponctuelle, le système d'interférence est délocalisé (localisé dans une grande région de l'espace). Pour augmenter la luminosité du système d'interférence, on peut essayer d'utiliser des sources non ponctuelles. En augmentant l'étendue de la source, il y a brouillage progressif du système d'interférence (cohérence spatiale). Dans ce cas, le système d'interférence est souvent localisé dans des régions de l'espace bien précises.

5.1.2 Formule donnant l'intensité d'interférence

En notation complexe, les amplitudes complexes des deux ondes sont :

$$a_1 = ae^{i\omega t - i\phi_1} \text{ et } a_2 = ae^{i\omega t - i\phi_2}$$

L'amplitude résultante est la somme des deux amplitudes. L'intensité détectée est proportionnelle au module carré de l'amplitude :

$$I = \eta |a_1 + a_2|^2 = \eta a^2 |e^{-i\phi_1} + e^{-i\phi_2}|^2 = a^2 [1 + 1 + 2 \cos(\phi_1 - \phi_2)]$$

On introduit $I_0 = \eta a^2$, l'intensité d'une onde et la différence de marche :

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$$

Ce qui donne pour l'intensité d'interférence :

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right]$$

5.2 Figure d'interférence

La lame séparatrice joue le rôle d'un miroir et le Michelson est ainsi équivalent à une **lame d'air à faces parallèles** distantes d'épaisseur d . Comme la source est étendue, on obtient ainsi des interférences d'**égale inclinaison** localisées à l'infini. La lentille L permet de ramener à distance finie le système d'interférence. On va observer une succession d'anneaux sombres et brillants. Le centre de la figure a en général une intensité qui est ni maximale ni nulle.

Pour $d = 0$ on obtient une teinte plate car lame n'a plus d'épaisseur.

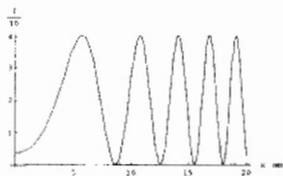
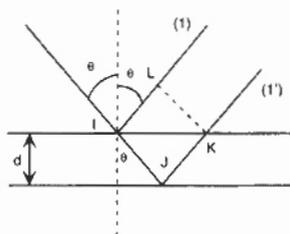


Figure 1:

5.3 Intensité d'interférence.

On considère un rayon incident, arrivant avec un angle d'incidence θ .



Ce rayon se réfléchit sur la lame supérieure, mais une partie pénètre dans la lame d'air et se réfléchit sur la lame inférieure puis ressort. Les rayons (1) et (1') sont parallèles et vont donner des interférences à l'infini. La différence de marche est obtenue par différence des deux chemins optiques : $\delta = (IJK) - (IL)$. Mais dans notre cas tous les indices sont égaux à "1"

$$(IJK) = \frac{2d}{\cos(\theta)}, \quad IK = 2d \tan(\theta), \quad IL = \sin(\theta)IK \quad \text{donc} \quad (IL) = 2d \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)} \implies \boxed{\delta = 2d \cos(\theta)}$$

Pour des angles faibles : $\cos(\theta) \simeq 1 - \theta^2/2$

Pour un angle d'incidence θ , les deux rayons réfléchis vont interférer à l'infini dans la direction repérée par l'angle θ . Ce qui donne un point à la distance x dans le plan focal de la lentille, avec $x = f'\theta$. En fonction de la coordonnée x du point d'observation, la différence de marche est : $\delta = 2d \left(1 - \frac{x^2}{2f'^2}\right)$. Ce qui donne pour l'intensité d'interférence :

5.3.1 Intensité d'interférence

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} 2d \left(1 - \frac{x^2}{2f'^2}\right) \right] \right)$$

5.3.2 Diamètres des anneaux

$\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$, $d = 7626 \mu\text{m}$, $f' = 1 \text{ m}$. La courbe donnant I/I_0 est obtenue facilement avec une calculatrice programmable.

On constate que l'intensité s'annule pour des valeurs de x irrégulièrement espacées. La détermination de ces zéros permet de calculer le diamètre des anneaux sombres.

Il faut d'abord déterminer l'ordre au centre. L'ordre d'interférence est $p = \delta/\lambda$. L'ordre au centre est obtenu en incidence normale, pour $\theta = 0$:

$$p_c = \frac{2d}{\lambda} = 24102,4$$

La différence de marche $\delta = 2d \left(1 - \frac{x^2}{2f^2}\right)$ diminue quand x augmente, quand on s'éloigne du centre. Les

premiers anneaux sombres sont obtenus pour des ordres demi-entiers à partir de p_c : $x = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{\lambda p}{2d}\right)}$

$$\begin{aligned} p &= 24101,5 & x &= 8,65 \text{ mm} \\ p &= 24100,5 & x &= 12,56 \text{ mm} \\ p &= 24099,5 & x &= 15,5 \text{ mm} \end{aligned}$$

5.4 Détermination de la largeur spectrale de la lumière du laser

5.4.1 Largeur de raie

$$dI = J(\sigma)d\sigma = J_0 \exp \left[- \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{a} \right)^2 \right] d\sigma$$

Le nombre d'onde central de la raie laser est σ_0 . La largeur de raie à mi hauteur est, en nombre d'onde, $\delta\sigma$. Elle vérifie la relation :

$$J(\sigma) = \frac{J(\sigma_0)}{2} = \frac{J_0}{2} \quad \text{pour } |\sigma - \sigma_0| = \frac{\delta\sigma}{2}$$

Ce qui donne $\exp \left[- \left(\frac{\delta\sigma}{2a} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \Rightarrow \delta\sigma = 2a \sqrt{\ln(2)}$. Le nombre d'onde étant l'inverse de la longueur d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \delta\sigma = \frac{\delta\lambda}{\lambda^2} \Rightarrow \delta\lambda = 2a\lambda_0^2 \sqrt{\ln(2)}$

5.4.2 Courant détecté en fonction du temps

La distance d dépend du temps $d = v_0 t$. La différence de marche est $\delta = 2d = 2v_0 t$. Pour une bande spectrale $\delta\sigma$ centrée autour de σ , l'intensité détectée est proportionnelle à l'intensité d'interférence : $di = K^2 J(\sigma) [1 + \cos(4\pi v_0 t \sigma)] d\sigma$

$$i(t) = K^2 \int_0^\infty J(\sigma) [1 + \cos(4\pi v_0 t \sigma)] d\sigma$$

Cette intégrale se calcule grâce à l'intégrale donnée par l'énoncé :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp \left[- \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{a} \right)^2 \right] d\sigma &\simeq a\sqrt{\pi} \\ \int_0^\infty \exp \left[- \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{a} \right)^2 \right] \cos[2\pi\delta\sigma] d\sigma &= a\sqrt{\pi} e^{-\pi^2 a^2 \delta^2} \cos[2\pi\delta\sigma_0] \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire le courant détecté sous la forme :

$$i(t) = i_0 [1 + V(t) \cos[4\pi v_0 t \sigma_0]]$$

5.4.3 Discussion

Dans cette expression $V(t)$ est un terme de visibilité $V(t) = \exp \left[- (2\pi a v_0 t)^2 \right]$

Pour t voisin de zéro, $V(t) \simeq 1$, le système d'interférence a une bonne "visibilité" : le courant minimum s'annule et les maxima ont pour valeur $2i_0$. Lorsque t augmente, d augmente, la visibilité diminue, les minima du courant ne sont plus nuls et les maxima sont inférieurs à i_0 .

5.4.4 Application : détermination de $\delta\lambda$

Pour $t = 0$, $V(t) = 1$. Pour $t = \delta t$ on a $V(\delta t) = 1/2$. δt vérifie la relation :

$(2\pi v_0 t a)^2 = \ln(2) \Rightarrow a = \frac{\sqrt{\ln(2)}}{2\pi v_0 \delta t}$. Or $\delta\lambda = 2a\lambda_0^2 \sqrt{\ln(2)} \Rightarrow \boxed{\delta\lambda = \frac{\ln(2) \lambda_0^2}{\pi v_0 \delta t}}$ La mesure de δt permet la détermination de $\delta\lambda$.

Application numérique : $v_0 = 1\mu\text{m/s}$ et $\delta t = 120\text{s} \Rightarrow \boxed{\delta\lambda = 0,736\text{nm}}$



Agrégation (Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉES

Composition d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique - Session : 1999

PREMIÈRE PARTIE

- I. 1.1. Le stator est en Δ · r d'une phase : $\frac{3}{2} \cdot 0,654 \Omega$. La résistance r_1 du schéma équivalent parcourue par I_1 est :

$$r_1 = \left(\frac{3}{2} \cdot 0,654 \right) \frac{1}{3} \quad r_1 = 0,327 \Omega$$

- 1.2. La tension simple V vaut $231 / \sqrt{3} = 133,4 V$. Soit avec $S = 3 VI$ et $P = C\Omega$:

$$1 \text{ cm} = 1 \text{ KVA} = 2,5 \text{ A} = 6,37 \text{ N} \cdot \text{m}$$

- 1.3. Point A $\begin{cases} P_{Fer} = P_0 - p_{mec} - 3 r_1 I_0^2 = P_0 - 100 = 200 \text{ W} \\ Q_0 = \sqrt{S_0^2 - P_0^2} = 1500 \text{ Vars} \end{cases}$

$$\text{Point D} \begin{cases} P_D = P_{red} \left(\frac{U}{U_{red}} \right)^2 = 5984 \text{ W} \\ Q_D = Q_{red} \cdot 16 = 17392 \text{ Vars} \end{cases}$$

$AK = 2 \mathcal{R} = AD / \sin \psi_D$ où ψ_D est l'argument de l'impédance parcourue par I_1 .

$$\text{tg } \psi_D = \frac{Ad}{Dd} = \frac{17392 - 1500}{5984 - 200} = \text{tg } 70^\circ = \frac{15892 \text{ VA}}{5784 \text{ VA}}$$

Donc :
$$\mathcal{R} = \frac{\sqrt{Ad^2 + Dd^2}}{2 \cdot \sin 70^\circ} = 9 \text{ KVA} = 22,5 \text{ A}$$

- 1.4. $\frac{Q_0}{3} = \frac{V^2}{X_\mu} \quad X_\mu = \frac{(231)^2}{1500} = 35,37 \Omega \quad \frac{P_{Fer}}{3} = \frac{V^2}{R_\mu}$

soit :
$$R_\mu = 267 \Omega \quad N_1 \omega = \frac{V}{AK} = 2,96 \Omega$$

- 1.5.
$$\sigma = \frac{N_1 \omega}{N_1 \omega + X_\mu} = 0,0768 = \frac{OA}{OK} = \frac{1,5 \text{ cm}}{19,5 \text{ cm}} = 0,0769$$

- 1.6. En D on a : $\text{tg } \psi_D = \frac{N_1 \omega}{r_1 + r'_2} = \text{tg } 70^\circ \quad r_1 + r'_2 = 1,077 \Omega \quad r'_2 = 0,75 \Omega$

- 1.7. La droite des couples sépare les p_{JR} des p_{JS} : $AM_{(g_{\infty})}$ à une pente :

$$\operatorname{tg} \Psi_{(g_{\infty})} = \frac{N_1 \omega}{n_1} = \operatorname{tg} 83,7^\circ$$

ou bien

Le segment Dd est partagé en $DT = p_{JR}$ et $Td = p_{JS}$ pour $g = 1$.

$$\text{Soit : } dT = \frac{Ad}{\operatorname{tg} 83,7^\circ} = 1755 \text{ W}$$

$$\text{d'où : } AT \text{ et } AM_{(g_{\infty})} \quad P \text{ en } M_{(g_{\infty})} \approx 2200 \text{ W}$$

- 1.8. Plusieurs constructions - basées sur l'angle Ψ - peuvent être utilisées pour l'axe des glissements. Ici on a tracé une parallèle à la droite des couples $AM_{g_{\infty}}$ et AD fixe $g = 1$.

Le point S , à C_{\max} , est sur une parallèle à $AM_{(g_{\infty})}$ tangente au cercle $g_S = 23\%$ (g_S peu différent de $r'_2/N_1\omega = 25\%$).

Le point N , avec $ON = I_1 \text{ nominal} = 15,5 \text{ A}$ donne : $g_n = 7\%$.

2. Influence de la tension (la pulsation ω restant constante).

- 2.1. Soit :

$$V' = \alpha \cdot V$$

donc :

$$OA = \frac{V}{Z_{\mu}} \quad \text{et} \quad AK = \frac{V}{N_1 \omega}$$

le diagramme circulaire subit une homothétie de centre O et de rapport α .

- 2.2. Sur le diagramme établi pour V , les couples et puissances sont à multiplier par α^2 et les courants par α .

$$\text{Donc : } 1 \text{ cm} = \alpha \cdot 2,5 \text{ A} = \alpha^2 \cdot kVA = \alpha^2 \cdot 6,37 \text{ Nm}$$

- 2.3. Sous V :

$$C_{\max} = 52 \text{ Nm} \quad \text{lu sur diagramme}$$

$$C_D = DT = 25,6 \text{ Nm}$$

Sous 0,707 V :

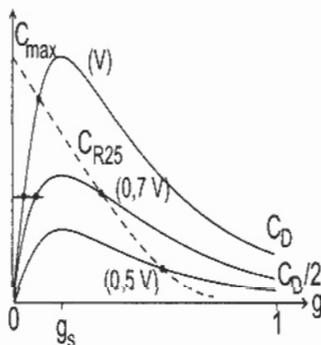
$$C_{\max} = 52 / 2 = 26 \text{ Nm}$$

$$C_D = 12,8 \text{ Nm}$$

Sous 0,5 V :

$$C_{\max} = 13 \text{ Nm}$$

$$C_D = 6,4 \text{ Nm}$$



- 2.4. Ce mode d'alimentation $\left\{ \begin{array}{l} \text{interdit le réglage de vitesse avec } g > g_S \text{ si } C_{résistant} = cte \\ \text{autorise } 0 < g < 1 \text{ pour des } C_{résistants} \text{ de forme quadratique} \end{array} \right.$

On rappelle qu'un fonctionnement est stable si à une augmentation de charge correspond un ralentissement et vice versa.

- 2.5. *Application au démarrage étoile-triangle.*

En démarrage $Y\Delta$, donc en sous voltage de $\sqrt{3}$, les courants dans les phases sont divisés par $\sqrt{3}$: l'appel de courant en ligne est divisé par 3 :

$$OD = \frac{18,5 \text{ cm} \cdot 2,5}{3} = 15,4 \text{ A}$$

3. Influence de la fréquence (à $V = cte$).

- 3.1. La vitesse doit être multipliée par α et l'excitation par $1/\alpha$.

- 3.2. $AK = \frac{V}{N\omega}$ est multiplié par $1/\alpha$ de même que $I_{\mu \text{ réactif}} = \frac{V}{X_{\mu}}$.

- 3.3. $I_{\mu \text{ actif}}$, soit les P_{Fer} , se partagent en $\left\{ \begin{array}{l} P_{hystérésis} + B^2\omega + \frac{1}{\omega} \\ P_{Foucault} + B^2\omega^2 = cte \end{array} \right.$ sous $V = cte$

soit : $I_{\mu} \nearrow$ si $\omega \searrow$

- 3.4. En admettant : $I_{\mu \text{ actif}} \propto \frac{1}{\omega}$

le diagramme subit une homothétie de centre O, de rapport $1/\alpha$.

- 3.5. Sur le diagramme établi pour ω , les courants et puissances lues sont à multiplier par $1/\alpha$ et les couples par $1/\alpha^2$.

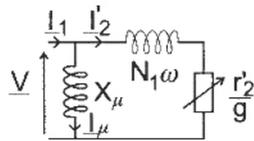
Donc : $1 \text{ cm} = \frac{2,5}{\alpha} \cdot A = \frac{1}{\alpha} \text{ kVA} = \frac{6,37}{\alpha^2} \cdot Nm$

- 3.6. L'inconvénient majeur est l'augmentation du courant appelé dès que ω diminue.

4. Alimentation à induction constante $\frac{V}{\omega} = cte$.

- 4.1. Soit $\frac{V}{\omega} = cte$, si V et ω sont multipliés par α , le diagramme reste inchangé.

- 4.2. On a alors : $1 \text{ cm} = 2,5 \cdot A = \alpha \cdot 1 \cdot \text{kVA} = 6,37 \text{ Nm}$

5. Alimentation à courant constant $I_1 = cte$ sous fréquence constante.

 5.1. Soit $I_1 = cte$ avec r_1 et R_μ négligeables.

Le diviseur de courant mène à :

$$I'_2 = \frac{j X_\mu \left(\frac{r'_2}{g} + j N_1 \omega \right)}{j X_\mu + j N_1 \omega + \frac{r'_2}{g}} = I'_2 \left(\frac{r'_2}{g} + j N_1 \omega \right)$$

soit :

$$I'_2 = I_1 \frac{j X_\mu}{\frac{r'_2}{g} + j (X_\mu + N_1 \omega)}$$

5.2.
$$C \Omega = P'_1 = 3 \cdot \frac{r'_2}{g} \cdot I_1^2$$

donc :

$$C = \frac{3}{\Omega} I_1^2 X_\mu^2 \cdot \frac{r'_2}{\frac{r'_2{}^2}{g} + (N_1 \omega + X_\mu)^2 \cdot g}$$

5.3. Le couple est maximum pour :
$$\frac{r'_2{}^2}{g} = (N_1 \omega + X_\mu)^2 \cdot g$$

soit :

$$g = \frac{r'_2}{N_1 \omega + X_\mu}$$

comme $\sigma = \frac{N_1 \omega}{N_1 \omega + X_\mu}$:

$$g = \sigma \cdot \frac{r'_2}{N_1 \omega} = \sigma \cdot g_s = \frac{0,75}{2,96} \cdot 0,077 = 2 \%$$

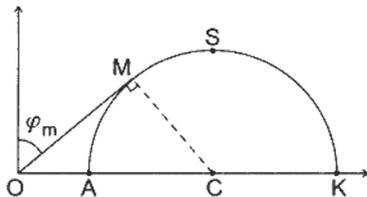
5.4.
$$C_{\max} (I_1 = cte) = \frac{3}{\Omega} \cdot I_1^2 X_\mu^2 \frac{1}{2 (N_1 \omega + X_\mu)} = 75,4 \text{ Nm} \quad \text{à } g = 2 \%$$

5.5. A $V = cte$:
$$C_{\max} = \frac{3}{\Omega} \cdot V^2 \cdot \frac{1}{2 N_1 \omega}$$

donc :

$$\frac{C_{\max} (I_1 = cte)}{C_{\max} (V = cte)} = \frac{I_1^2 X_\mu^2}{V^2} \cdot \sigma = \left(\frac{I_1}{I_\mu} \right)^2 \sigma$$

- 5.6. Pour le $\cos \varphi$ maximal, $\vec{OM} = \vec{I}_1$ est tangent au cercle tracé sous $V = cte$ et centré sur l'axe des abscisses car $P_{F_{el}} = 0$.



La puissance du point O par rapport au cercle donne :

$$OA \cdot OK = (OM)^2$$

avec :

$$OA = I_\mu \quad \text{et} \quad OK = \frac{V}{N_1 \omega // X_\mu}$$

$$OM = \frac{I_\mu}{\sqrt{\sigma}}$$

- 5.7. Pour avoir C_{\max} - en S - sous $V = cte$ (soit environ 57,3 Nm), il faut un courant $OS = 36 A$.

Pour avoir le même couple maximum - sous $I_1 = cte$ - il faut :

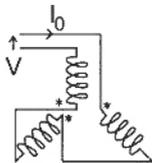
$$\left(\frac{I_1}{I_\mu / \sqrt{\sigma}} \right)^2 = 1$$

soit :

$$I_1 = OM = \sqrt{(CO)^2 - R^2} = 13,5 A$$

DEUXIÈME PARTIE

1. 1.1. Pour mesurer Z_0 , on peut mettre les trois phases en série sous une tension (faible) - 50 Hz. Selon le schéma :



(on peut aussi les mettre en parallèle, mais il faudrait encore baisser la tension).

Remarque : respecter les sens de parcours des bobinages :

$$\underline{V} = 3 \cdot \underline{Z}_0 \cdot \underline{I}_0$$

- 1.2. Point D :

$$\operatorname{tg} \psi_D = \frac{N_1 \omega}{r'_2} = \operatorname{tg} 75^\circ$$

$$Ad = 2 \mathcal{R} \cdot (\cos 15^\circ)^2 = 16,8 \text{ kVAR}$$

$$Od = 18,3 \text{ kVAR}$$

$$Dd = 2 \mathcal{R} \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = 4,5 \text{ kW}$$

d étant la projection de D sur l'axe réactif.

Toute parallèle à la droite des couples (ici l'axe réactif) peut porter une échelle des g , où D définit $g = 1$. On vérifie en S, à C_{\max} , $g_s = \frac{r_2'}{N_1 \omega} = 0,267$.

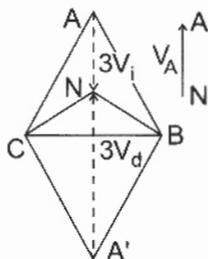
1.3. Selon $\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{V}$ toute mesure de I est mesure de Y à $V = cte$.

$$1 \text{ cm} = \frac{1000}{400} = 2,5 \text{ A} = \frac{2,5}{231/\sqrt{3}} = 18,74 \text{ m}\Omega^{-1}$$

2. 2.1. Le système NBC est déséquilibré. La construction graphique de deux triangles équilatéraux de base BC dont on joint les sommets A et A' sur N donne :

$$A'\vec{N} = 3 \vec{V}_d \quad A\vec{N} = 3 \vec{V}_i$$

$$\underline{V}_{d'} = \frac{2}{3} \cdot \underline{V}_{-A} \quad \underline{V}_i = -\frac{1}{3} \underline{V}_{-A} \quad \underline{V}_A = \frac{231}{\sqrt{3}} \underline{V}$$



2.2. A 1410 tr/min :

$$g_d = 6 \% \quad g_i = 2 - g_d = 194 \%$$

soit :

$$\psi_d = 12,67^\circ \quad \psi_i = 82,17^\circ$$

ordonnée de N_d :

$$\mathcal{R} \cdot \sin 2 \psi_d = 3,85 \text{ cm}$$

ordonnée de N_i :

$$\mathcal{R} \cdot \sin 2 \psi_i = 2,43 \text{ cm}$$

2.3. $OM_d = Y_d = 4 \text{ cm} = 75 \text{ m}\Omega^{-1}$ $ON_i = Y_i = 19,25 \text{ cm} = 361 \text{ m}\Omega^{-1}$

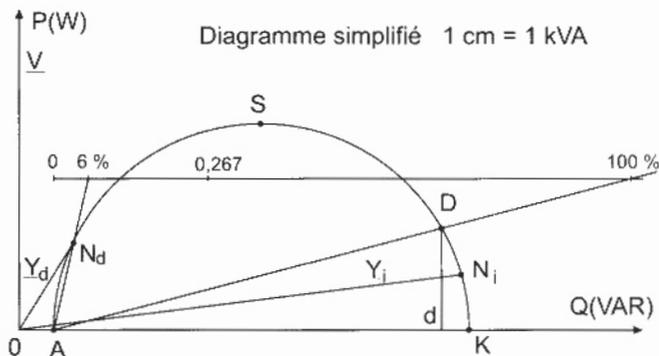
On lit :

$$\underline{Y}_d = 75 \text{ m}\Omega^{-1} \cdot e^{j \cdot 31^\circ} \quad \underline{Y}_i = 361 \text{ m}\Omega^{-1} \cdot e^{j \cdot 83^\circ}$$

donc :

$$\underline{I}_d = \underline{V}_{-d} \cdot \underline{Y}_d = 6,67 \text{ A} \cdot e^{j \cdot 31^\circ} \quad \underline{I}_i = \underline{V}_{-i} \cdot \underline{Y}_i = 16,05 \text{ A} \cdot e^{j \cdot 97^\circ}$$

avec \underline{V}_{-A} comme origine des phases.

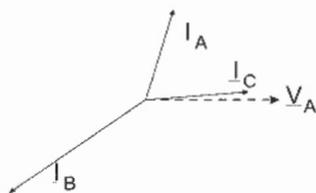


2.4. Soit :

$$\underline{I}_A = \underline{I}_d + \underline{I}_i = 3,76 + j 12,49 = 13,05 A \cdot e^{j 73,2^\circ}$$

$$\underline{I}_B = a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i = -18,65 - j 12,89 = 22,67 A \cdot e^{j 214,6^\circ}$$

$$\underline{I}_C = a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i = 14,89 + j 0,398 = 14,89 A \cdot e^{j 1,5^\circ}$$



2.5. Le couple $C = C_d - C_i$ où C_d et C_i sont les ordonnées de N_d et N_i à l'échelle des couples modifiée selon $(V_d/V)^2$ et $(V_i/V)^2$ sous $V : 1 \text{ cm} = 6,36 \text{ Nm}$.

$$C = 24,5 \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 15,5 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9,17 \text{ Nm}$$

3. 3.1. Les équations :

$$\underline{I}_A = 0 \quad \text{et} \quad \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0$$

donnent :

$$\underline{I}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{I}_d + \underline{I}_i = 0$$

3.2. Donc :

$$\underline{V}_0 = \underline{Z}_0 \underline{I}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{V}_d \underline{Y}_d + \underline{V}_i \underline{Y}_i = 0 \quad (1)$$

avec :

$$-j\sqrt{3} \underline{V}_A = \underline{U} = \underline{V}_B - \underline{V}_C = a^2 \underline{V}_d + a \underline{V}_i - a \underline{V}_d - a^2 \underline{V}_i = (a^2 - a)(\underline{V}_d - \underline{V}_i) = -j\sqrt{3}(\underline{V}_d - \underline{V}_i)$$

donc :

$$\underline{V}_A = \underline{V}_d - \underline{V}_i \quad (2)$$

De (1) et (2) on tire :

$$\underline{V}_d = \underline{V}_A \frac{\underline{Y}_i}{\underline{Y}_i + \underline{Y}_d} \quad \text{et} \quad \underline{V}_i = -\underline{V}_A \frac{\underline{Y}_d}{\underline{Y}_i + \underline{Y}_d}$$

$$3.3. \quad \underline{I} = \underline{I}_B = a^2 \underline{Y}_d \underline{V}_d + a \underline{Y}_i \underline{V}_i = (a^2 - a) \underline{V}_A \cdot \frac{\underline{Y}_d \underline{Y}_i}{\underline{Y}_d + \underline{Y}_i}$$

$$3.4. \quad \text{Donc :} \quad \underline{I} = -j 231 \cdot \frac{75 \cdot 361 \cdot 10^{-6} \cdot e^{j 194^\circ}}{411 \cdot e^{j 74.3^\circ} \cdot 10^{-3}} = 15,2 \text{ A} \cdot e^{j 39,8^\circ}$$

$$3.5. \quad \text{Avec :} \quad \underline{V}_d = \underline{V}_A \cdot \frac{0,361}{0,411} \quad \text{et} \quad \underline{V}_i = \underline{V}_A \cdot \frac{0,075}{0,411} \quad \text{et} \quad C = C_d \cdot \left(\frac{\underline{V}_d}{\underline{V}} \right)^2 \cdot C_i \left(\frac{\underline{V}_i}{\underline{V}} \right)^2$$

$$C = 24,5 \cdot 0,771 - 15,5 \cdot 0,033 = 18,4 \text{ Nm}$$

4. Utilisation d'un condensateur.

$$4.1. \quad \text{On écrit :} \quad \underline{U} = \underline{V}_A - \underline{V}_C \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 = 3 \underline{I}_0 \quad \underline{V}_A - \underline{V}_B = \frac{\underline{I}_2}{j \Gamma \omega}$$

(1) (2) (3)

$$\text{donc :} \quad \underline{I}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \underline{V}_0 = \underline{Z}_0 \underline{I}_0 = 0 = \underline{V}_A + \underline{V}_B + \underline{V}_C$$

$$4.2. \quad (1) + (3) \text{ donne :} \quad 2 \underline{V}_A - \underline{V}_B - \underline{V}_C = 3 \underline{V}_A = \underline{U} + \frac{\underline{I}_2}{j \Gamma \omega}$$

$$\text{donc :} \quad \underline{V}_A = \frac{\underline{U}}{3} + \frac{\underline{I}_2}{j 3 \Gamma \omega} \quad \underline{V}_B = \frac{\underline{U}}{3} - \frac{2 \underline{I}_2}{j 3 \Gamma \omega} \quad \underline{V}_C = -\frac{2}{3} \underline{U} + \frac{\underline{I}_2}{j 3 \Gamma \omega}$$

$$4.3. \quad \text{Avec :} \quad \left. \begin{aligned} 3 \underline{V}_d = \underline{V}_A + a \underline{V}_B + a^2 \underline{V}_C = -a^2 \underline{U} - a \frac{\underline{I}_2}{j \Gamma \omega} \\ \text{et :} \quad 3 \underline{V}_i = \underline{V}_A + a^2 \underline{V}_B + a \underline{V}_C = -a \underline{U} - a^2 \underline{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{et} \quad \underline{I}_2 = a^2 \underline{V}_d \underline{Y}_d + a \underline{V}_i \underline{Y}_i$$

$$\text{On obtient :} \quad 3 \underline{V}_d = -a^2 \underline{U} - \frac{\underline{V}_d \underline{Y}_d}{j \Gamma \omega} - \frac{a^2 \underline{V}_i \underline{Y}_i}{j \Gamma \omega} \quad \text{et} \quad 3 \underline{V}_i = -a \underline{U} - \frac{\underline{V}_d \underline{Y}_d}{j \Gamma \omega} - \frac{\underline{V}_i \underline{Y}_i}{j \Gamma \omega}$$

(4) (5)

$$4.4. \quad \text{Avec :} \quad \underline{U} = \underline{V}_A - \underline{V}_C = (1 - a) \underline{V}_d + (1 - a^2) \underline{V}_i \quad (6)$$

Soit (6) et (4) donnent :

$$3 \underline{V}_d = -a^2 \underline{U} - \frac{\underline{V}_d \underline{Y}_d}{j \Gamma \omega} - \frac{a^2 \underline{V}_i}{j \Gamma \omega} \left[\frac{\underline{U}}{1 - a^2} - \frac{1 - a}{1 - a^2} \underline{V}_d \right]$$

$$\text{en remarquant que :} \quad \frac{1 - a}{1 - a^2} = -a$$

$$\underline{V}_d [3 j \Gamma \omega + \underline{Y}_d + \underline{Y}_i] = \frac{\underline{U}}{\sqrt{3}} \cdot e^{j 30^\circ} [j \Gamma \omega (1 - a^2) + \underline{Y}_i]$$

$$\text{soit :} \quad \underline{V}_d = \frac{\underline{U}}{\sqrt{3}} \cdot e^{j 30^\circ} \frac{a \sqrt{3} \Gamma \omega + \underline{Y}_i}{3 j \Gamma \omega + \underline{Y}_d + \underline{Y}_i}$$

et de même :

$$\underline{V}_i = \frac{U}{\sqrt{3}} \cdot e^{j-30^\circ} \cdot \frac{-a^2 \sqrt{3} \Gamma \omega + \underline{Y}_d}{3 j \Gamma \omega + \underline{Y}_d + \underline{Y}_i}$$

4.5. Le coefficient de déséquilibre :

$$\frac{V_i}{V_d} = \left| \frac{\underline{Y}_d - a^2 \sqrt{3} \Gamma \omega}{\underline{Y}_i + a \sqrt{3} \Gamma \omega} \right|$$

4.6. Au démarrage $Y_d = Y_i$ est mesuré par $OD = 18,7 \text{ cm} = 0,35 \Omega^{-1}$:

$$\underline{Y}_d = \underline{Y}_i = 0,35 \Omega^{-1} \cdot e^{j-75^\circ}$$

pour $\Gamma = 500 \mu F$:

$$\Gamma \omega = 0,157 \Omega^{-1}$$

$$V_d = \frac{231}{\sqrt{3}} \left| \frac{\sqrt{3} \cdot 157 \cdot e^{j120^\circ} + 350 \cdot e^{j-75^\circ}}{3 \cdot 157 \cdot e^{j90^\circ} + 2 \cdot 350 \cdot e^{j-75^\circ}} \right| = \frac{231}{\sqrt{3}} \cdot \frac{248,2}{273,6} = 54,6 \text{ V}$$

$$V_i = \frac{231}{\sqrt{3}} \left| \frac{\sqrt{3} \cdot 157 \cdot e^{j60^\circ} + 350 \cdot e^{j-75^\circ}}{273,6} \right| = \frac{231}{\sqrt{3}} \cdot \frac{248,2}{273,6} = 121 \text{ V}$$

Donc :

$$C_{\text{Démarrage}} = C_d - C_i$$

Avec un couple de démarrage en D mesuré = 4,5 cm, soit : 28,65 Nm

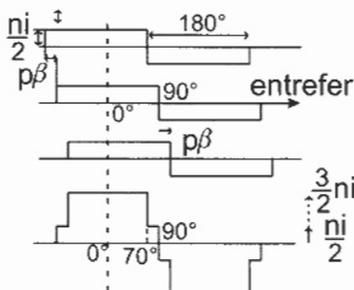
$$C_{\text{Démarrage}} = 28,65 \left[\left(\frac{54,6}{133,4} \right)^2 - \left(\frac{121}{133,4} \right)^2 \right] = -18,8 \text{ Nm}$$

Remarque : $V_d > V_i$ donc démarrage en sens inverse de la séquence directe.

TROISIÈME PARTIE

1. 1.1. $p\beta = 2 \cdot \frac{360^\circ}{36} = 20^\circ$ électrique $m = \frac{36}{3 \cdot 4} = 3$ $K_1 = \frac{\sin m \frac{p\beta}{2}}{m \cdot \sin \frac{p\beta}{2}} = 0,96$

1.2. Le créneau de f.m.m. d'une section vaut $\pm \frac{ni}{2}$ et a une ouverture de 180° . On obtient les formes d'onde ci-après. Vu la symétrie $f(\theta) = -f(\pi + \theta)$ il n'y a pas de termes pairs dans le développement en série de Fourier.



1.3. Tous les termes pairs sont nuls. Tous les termes impairs existent car A_h ne s'annule que pour :

$$1 + 2 \cdot \cos h \cdot 20^\circ = 0$$

soit : $h = 6K$ donc pair.

1.4. Pour $i = I_M \cos \omega t$, la f.m.m. en M , à θ° électriques de l'axe de la bobine A , est :

$$\mathcal{E}_A = \sum_1^{\infty} C_h \cdot \cos h \theta = I_M \cdot \cos \omega t \cdot \sum_1^{\infty} A_h \cos h \theta$$

1.5. Le terme de rang h :

$$\mathcal{E}_{A(h)} = I_M \cdot \cos \omega t \cdot A_h \cos h \theta = \frac{I_M \cdot A_h}{2} \left[\begin{array}{l} \cos(\omega t + h\theta) + \cos(\omega t - h\theta) \\ \text{champ tournant} \quad \text{direct à } +\Omega/h \\ \text{inverse à } -\Omega/h \end{array} \right]$$

Le champ tournant direct $\frac{I_M \cdot A_h}{2} \cdot \cos(\omega t - h\theta)$ reprend la même valeur en un point M donné pour :

$$\frac{\omega t}{h} = 2\pi$$

soit après :

$$t = \frac{2\pi}{\omega} \cdot h = T \cdot h$$

(période h fois plus longue que celle du réseau). L'onde s'est déplacée à $\frac{\Omega}{h}$ dans le DIRECT.

2. 2.1. On a de même :

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{E}_B = I_M \cdot \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \cdot \sum A_h \cos h \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \mathcal{E}_C = I_M \cdot \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \cdot \sum A_h \cos h \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \end{array} \right\} \mathcal{E} = \mathcal{E}_A + \mathcal{E}_B + \mathcal{E}_C$$

La f.m.m. tournante du fondamental $\mathcal{E}_{(1)}$ comporte :

- trois f.m.m. tournantes directes en phase soit $\mathcal{E}_{(1)} = 3 \cdot \frac{I_M A_1}{2} \cdot \cos(\omega t - \theta)$,

- trois f.m.m. tournantes inverses à somme nulle = 0.

- 2.2. Pour les termes de rang 3 et 3 K :

$$\mathcal{E}_{(3K)} = I_M \cdot A_{3K} \left[\cos \omega t \cdot \cos 3K \theta + \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \cdot \cos 3K \theta + \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \cdot \cos 3K \theta \right] = 0$$

Il ne reste donc que les termes de rang 1 5 7 11 13 17 19 ... soit de rang $6K \pm 1$.

A $\frac{I_M A_h}{2}$ près, on peut décomposer les f.m.m. tournantes dues aux trois phases selon :

$$\cos a \cdot \cos b \quad \text{et} \quad \cos p + \cos q$$

Sens inverse		Sens direct
$\cos(\omega t + h\theta)$	+	$\cos(\omega t - h\theta)$
$\cos \left[\omega t + h\theta + (h-1) \frac{2\pi}{3} \right]$	+	$\cos \left[\omega t - h\theta + (h-1) \frac{2\pi}{3} \right]$
$\cos \left[\omega t + h\theta + (h-1) \frac{4\pi}{3} \right]$	+	$\cos \left[\omega t - h\theta + (h-1) \frac{4\pi}{3} \right]$
$= 2 \cdot \cos(\omega t + h\theta) \cdot \cos(h-1) \cdot \frac{\pi}{3}$		

→ vaut $-\cos(\omega t + h\theta)$ avec $h = 6k + 1$

$$\mathcal{E} = 0 \text{ donc pas de champ inverse}$$

→ pour $h = 6k - 1$

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2} \cdot I_M A_h \cdot \cos(\omega t + h\theta)$$

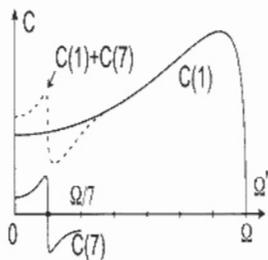
Champ INVERSE à $-\frac{\Omega}{h}$

→ pour $h = 6k + 1$

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2} I_M \cdot A_h \cdot \cos(\omega t - h\theta)$$

Champ DIRECT à $\frac{\Omega}{h}$

- 2.3. Le couple $C_{(7)}$ est un couple «rampant» se superposant à celui du fondamental. Pour cet harmonique d'ordre $h = 7$ tout se passe comme si le moteur avait $h = 2p$ pôles tournant ici dans le sens direct : risque de rampage à $\frac{\Omega}{7}$.



- 2.4. Sous V, ω , le couple maximal $C_{\max} = 3 \frac{p}{\omega} \cdot \frac{V^2}{2 N_1 \omega}$ est proportionnel à $p \frac{V^2}{\omega^2}$ soit :
- $$p \cdot (\text{flux})^2$$

Les couples maximaux de chaque harmonique rampant pour lequel il y a hp paire de pôles est donc proportionnel à $hp \cdot (A_h)^2$.

$$\text{Donc : } \frac{C_{\max (b)}}{C_{\max (7)}} = \frac{(A_1)^2}{7 (A_7)^2} = \frac{1}{7} \left[\frac{1 + 2 \cos \rho \beta}{\frac{1 + 2 \cos 7 \rho \beta}{7}} \right]^2 = 205$$

Remarques :

- On peut utiliser un schéma équivalent à $\omega / 7, 7 p, 7 g - 6$ et $V \left(\frac{A_7}{A_1} \right)$ au lieu de ω, p, g, V .
- Ce rapport ne concerne que les harmoniques d'espace dus à la répartition du bobinage et non à la réluctance des encoches : le rapport réel est donc bien plus faible.

3. 3.1. On peut créer un champ tournant avec deux courants sinusoïdaux en quadrature temporelle dans deux bobines en quadrature spatiale. Le champ sera circulaire pour des bobines identiques et courants de même valeur, sinon il sera elliptique.

Il sera aussi elliptique pour des déphasages de courants différents de 90° , mais on gardera quand même un couple de démarrage.

Tout champ elliptique est décomposable en un champ tournant direct et un champ tournant inverse.

- 3.2. Les équations sont :

$$\underline{U} = \underline{V}_A - \underline{V}_C \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_3 = 0 \quad \frac{\underline{I}_2}{j \Gamma \omega} = \underline{V}_A - \underline{V}_C - \underline{V}_B$$

avec : $\underline{I}_0 = \frac{1}{3} [\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3] = \frac{\underline{I}_2}{3}$ non nul a priori

- 3.3. \underline{I}_0 crée une f.m.m. en M :

$$\underline{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_{0A} = I_{OM} \cdot \cos \omega t \sum_1^{\infty} A_h \cdot \cos h \theta \\ + \varepsilon_{0B} = I_{OM} \cdot \cos \omega t \sum A_h \cdot \cos h \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ + \varepsilon_{0C} = I_{OM} \cdot \cos \omega t \sum A_h \cdot \cos h \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \end{cases}$$

3.4. Soit :

$$\underline{\varepsilon} = I_{OM} \cdot \cos \omega t \cdot \sum_1^{\infty} A_h \mathcal{R}_e \left[e^{j h \theta} + e^{j h \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right)} + e^{j h \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right)} \right]$$

$$\underline{\varepsilon} = I_{OM} \cdot \cos \omega t \cdot \sum_1^{\infty} A_h \mathcal{R}_e \left[e^{j h \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right)} \left(1 + e^{j h \frac{2\pi}{3}} + e^{j h \left(-\frac{2\pi}{3} \right)} \right) \right]$$

$$\underline{\varepsilon} = I_{OM} \cdot \cos \omega t \cdot \sum_1^{\infty} A_h \mathcal{R}_e \left[e^{j h \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right)} \left(1 + 2 \cdot \cos \left(h \cdot \frac{2\pi}{3} \right) \right) \right]$$

$$\underline{\varepsilon} = I_{OM} \cdot \cos \omega t \sum_1^{\infty} A_h \cdot \cos h \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \left[1 + 2 \cos \left(h - \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

3.5. Pour $h = 1$:

$$\varepsilon_{(1)} = 0$$

Pour $h = 3$:

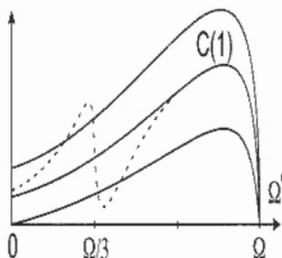
$$\varepsilon_{(3)} = I_{OM} \cdot \cos \omega t \cdot 3 \cdot A_3 \cdot \cos 3\theta$$

(les termes de rang $6K \pm 1$ sont nuls).

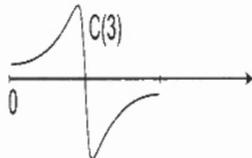
$$\text{Donc : } \varepsilon_{(3)} = \frac{3}{2} \cdot I_{OM} \cdot A_3 \cdot [\cos(\omega t - 3\theta) + \cos(\omega t + 3\theta)]$$

il y a donc un champ tournant direct à $\Omega / 3$ et un inverse à $-\Omega / 3$.

3.6.



3.7.

Risque de rampage si Ω' légèrement $> \Omega / 3$, soit vers 500 tr/min.

QUATRIÈME PARTIE

$$1. \quad 1.1. \quad \frac{(\eta_1 + r'_2)_{75^\circ}}{(\eta_1 + r'_2)_{0^\circ}} = \frac{1,6 (1 + \alpha \cdot 75)}{1,6} = 1,32 \quad \text{et} \quad \frac{C_d(75^\circ)}{C_d(0^\circ)} = \frac{r'_{2(75)} \left[(\eta_1 + r'_2)_{0^\circ}^2 + (N_1 \omega)^2 \right]}{\left[(\eta_1 + r'_2)_{75^\circ}^2 + (N_1 \omega)^2 \right] r'_{2(0^\circ)}}$$

$$\text{soit : } \frac{C_d(75^\circ)}{C_d(0^\circ)} = 1,32 \cdot \frac{\left(\frac{1}{1,32} \right)^2 + 2,96^2}{1^2 + 2,96^2} = 1,262$$

$$1.2. \quad N' = (1 - g_n) N = 0,93 \cdot N \quad \rightarrow \quad p_{mec} = 30 \cdot 0,93 + 56 \cdot (0,93)^3 = 73 \text{ W} = 28 + 45 \text{ W}$$

$$p_{Fev} = P_{Hl} + P_F = 120 + 80 = 200 \text{ W}$$

$$\text{avec : } \Sigma_{pertes} = \frac{4400}{\eta} - 4400 = 933 \text{ W}$$

$$\text{donc : } p_{joule} = 933 - 200 - 73 = 660 \text{ W}$$

$$2. \quad 2.1. \quad \text{Énergie rayonnée} = \sigma \cdot S \cdot T^4 \quad T \text{ en Kelvin.}$$

- 2.2. Pour le moteur à $T_m = 273 + 75 = 348 \text{ K}$ dans une ambiance $T_a = 273 + 20 = 293 \text{ K}$:

$$P_r = \sigma S [T_m^4 - T_a^4] = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 0,65 [348^4 - 293^4] = 269 \text{ W}$$

(→ ici 210 W).

- 2.3. En convection naturelle :

$$P_c = KS [T_m - T_a] = 6 \cdot 0,65 \cdot 55 = 214 \text{ W}$$

- 2.4. Il reste :

$$933 - 210 - 214 = 509 \text{ W} = P_d$$

à dissiper par autoventilation.



Agrégation (Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉES

Problème d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique - Session : 1999

$$\begin{aligned}
 \text{A-1- } u &= v_{BE1} + r_{iE1} \cdot i_{E1} - v_{BE2} - r_{iE2} \\
 i_{E1} &= I_S \cdot \exp(v_{BE1}/V_T) \\
 i_{E2} &= I_S \cdot \exp(v_{BE2}/V_T) \\
 I_0 &= i_{E1} + i_{E2}
 \end{aligned}$$

Par élimination de i_{E1}, v_{BE1}, v_{BE2} :

$$v_{BE1} - v_{BE2} = V_T \cdot \ln(i_{E1}/i_{E2}) = V_T \cdot \ln\left(\frac{I_0 - i_{E2}}{i_{E2}}\right)$$

$$u = V_T \cdot \ln\left(\frac{I_0 - i_{E2}}{i_{E2}}\right) + r_{iE2} \cdot (I_0 - 2 \cdot i_{E2})$$

$$a = \left(\frac{I_0 - i_{E2}}{i_{E2}}\right) \quad ; \quad \beta = (I_0 - 2 \cdot i_{E2})$$

$$\begin{aligned}
 \text{A-2-1- } u &= V_T \cdot \ln\left[\frac{I_0/2 + a \cdot (I_0/2) \cos\theta}{I_0/2 - a \cdot (I_0/2) \cos\theta}\right] + r_{iE2} \cdot I_0 \cdot \cos\theta \\
 &= V_T \cdot \ln\left[\frac{1 + a \cos\theta}{1 - a \cos\theta}\right] + a \cdot r_{iE2} \cdot I_0 \cdot \cos\theta
 \end{aligned}$$

A-2-2- $y(\theta)$ est périodique : décomposable en série de Fourier
 paire : La décomposition ne contient que des termes en cosinus
 $y(\theta + \pi) = -y(\theta)$: Il n'y a que des harmoniques impairs.

$$A_{2n+1} = (1/\pi) \int_0^{2\pi} y(\theta) \cdot \cos(2n+1)\theta \cdot d\theta$$

$$\begin{aligned}
 \text{A-2-2-a-- } (8U/\pi^2) \cdot [\cos\theta + (1/9) \cdot \cos 3\theta + (1/25) \cdot \cos 5\theta + \dots] = \\
 V_T \cdot [A_1(a) \cdot \cos\theta + A_3(a) \cdot \cos 3\theta + A_5(a) \cdot \cos 5\theta] + a \cdot r_{iE2} \cdot I_0 \cdot \cos\theta
 \end{aligned}$$

Par identification: $V_T \cdot A_1(a) + a \cdot r_{iE2} \cdot I_0 = 8U/\pi^2$
 $V_T \cdot A_3(a) = (8U)/(9\pi^2)$ $A_3(a)/A_5(a) - 25/9 = 2,78$
 $V_T \cdot A_5(a) = (8U)/(25\pi^2)$

A-2-2-b- Le calcul de $A_3(a)/A_5(a)$ permet de dresser le tableau suivant avec
 $\gamma = A_3(a)/A_5(a)$

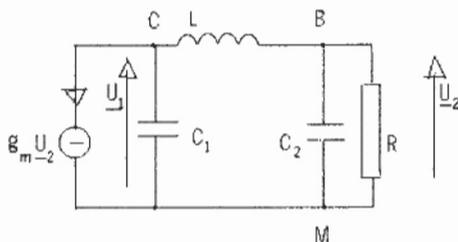
a	0,9	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1
γ	4,24	4,03	3,81	3,61	3,40	3,18	2,96	2,74	2,49	2,22	1,66

a partir du tableau on relève la valeur optimale de a : $a = 0,97$

on en déduit $(8U/9\pi^2) = A_3(0,97) \cdot V_T$ soit $U = 7,03 \cdot V_T = 176 \text{ mV}$

et $(8U/\pi^2) = A_1(0,97) \cdot V_T + 0,97 \cdot r \cdot I_0$ soit $r = 2,66 \cdot V_T / I_0$

B-1°-1-



$$\text{B-1-2- } g_m \cdot U_2 + jC_1 \omega \cdot U_1 + (1/jL\omega)(U_1 - U_2) = 0$$

$$(1/jL\omega)(U_1 - U_2) = jC_2 \omega \cdot U_2 + U_2 / R$$

$$\text{B-1-3- } (g_m - 1/jL\omega)(1/jL\omega) + (jC_1 \omega + 1/jL\omega)(1/jL\omega + jC_2 \omega + 1/R) = 0$$

$$\text{B-1-4- } LC_1 C_2 \omega^2 = C_1 + C_2 \quad \text{et} \quad g_m + (1 - LC_1 \omega^2) / R = 0 \quad \text{soit} \quad g_m = C_1 / (RC_2)$$

B-1-5- La condition $g_m = C_1 / (RC_2)$ est difficile à réaliser en toute rigueur les oscillations sont distordues. C'est la non linéarité du transistor qui fixe l'amplitude des oscillations.

B-2-1- $V_e \cos(\theta)$ est la tension sinusoïdale aux bornes de la résistance R
(le circuit L, C₁, C₂ est sélectif).

V_{BE0} est la somme des tensions constantes aux bornes des capacités C_B et C_E.

$$\text{B-2-2-a- } i_c = I_s \cdot \exp(V_{BE0} / V_T) \cdot \exp(x \cdot \cos \theta)$$

$$= I_s \cdot \exp(V_{BE0} / V_T) \cdot (1 + x \cos \theta)$$

$$I_{C0} = I_s \cdot \exp(V_{BE0} / V_T) \quad \text{et} \quad I_e = x \cdot I_s \cdot \exp(V_{BE0} / V_T) = x \cdot I_{C0}$$

$$\text{B-2-2-b- } I_e = (V_e / V_T) \cdot I_{C0} \quad \text{et} \quad g_m = I_e / V_e = I_{C0} / V_T = 100 \text{ mA/V}$$

B-2-3-a- i_c est périodique et paire. La décomposition en série de Fourier ne contient que des termes en cosinus.

$$I_{C0}(x) = (1/2\pi) \cdot I_S \cdot \exp(V_{BE0}/V_T) \int_0^{2\pi} \exp(x \cdot \cos\theta) \cdot d\theta = I_S \cdot \exp(V_{BE0}/V_T) \cdot B_0(x)$$

$$I_{C1}(x) = (1/\pi) \cdot I_S \cdot \exp(V_{BE0}/V_T) \int_0^{2\pi} \exp(x \cdot \cos\theta) \cdot \cos\theta \cdot d\theta = I_S \cdot \exp(V_{BE0}/V_T) \cdot B_1(x)$$

B-2-3-b- Lorsque x varie $B_0(x)$ varie. I_{C0} restant constant, V_{BE0} s'ajuste pour satisfaire l'équation $I_{C0} = I_S \cdot \exp(V_{BE0}/V_T) \cdot B_0(x)$. La tension constante aux bornes du condensateur C_B varie.

B-2-3-c- $I_{C1}(x)/I_{C0}(x) = B_1(x)/B_0(x)$. D'après la question B-2^o-b-b, $I_{C0}(x) = I_{C0} = g_m \cdot V_T$
 $G_m(x) = I_{C1}(x)/V_e = B_1(x)/B_0(x) \cdot g_m \cdot V_T/V_e = (g_m/x) \cdot B_1(x)/B_0(x)$

B-2-3-d-

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
G(x)(mA/V)	100	97	89	79	70	61	54	48	43	39	36

B-2-3-e- $g_m = C_1/(RC_2) = 43 \text{ mA/V}$.

D'après le tableau, $x = 4$ et $V_e = x \cdot V_T = 4.25 \text{ mV} = 100 \text{ mV}$

g_m ne peut dépasser 100 mA/V soit $C_1 < 0,1 \cdot R \cdot C_2$ et $R > 10 \cdot C_1/C_2 = 21,5 \Omega$

C-1-1

$$\sum_{n=0}^{N-1} [s_1(nT_e) + s_2(nT_e)] \cdot e^{-2\pi j n T_c} = \sum_{n=0}^{N-1} s_1(nT_e) \cdot e^{-2\pi j n T_c} + \sum_{n=0}^{N-1} s_2(nT_e) \cdot e^{-2\pi j n T_c}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a \cdot s(nT_e) \cdot e^{-2\pi j n T_c} = a \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_e) \cdot e^{-2\pi j n T_c}$$

C-1-2-

$$\underline{S}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} (S_0/2) \cdot [e^{2\pi j f n T_c} \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{-2\pi j n f T_c} + e^{-2\pi j f n T_c} \cdot e^{j\varphi_0} \cdot e^{-2\pi j n f T_c}]$$

$$= (S_0/2) \cdot [e^{j\varphi_0} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi j n f T_c} + e^{-j\varphi_0} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi j n f T_c}]$$

$$\text{sachant que } W_R(f) = 1 + e^{-2\pi j f T_c} + \dots + e^{-2\pi j (N-1) f T_c} = \frac{1 - e^{-2\pi j N f T_c}}{1 - e^{-2\pi j f T_c}}$$

$$= e^{-nj(N-1)\pi\tau_c} \frac{\sin(\pi N f \tau_c)}{\sin(\pi f \tau_c)}$$

$\underline{S}(f)$ s'écrit : $\underline{S}(f) = [S_0/2] \cdot [e^{j\omega_0} \underline{W}_R(f-f_0) + e^{-j\omega_0} \underline{W}_R(f+f_0)]$

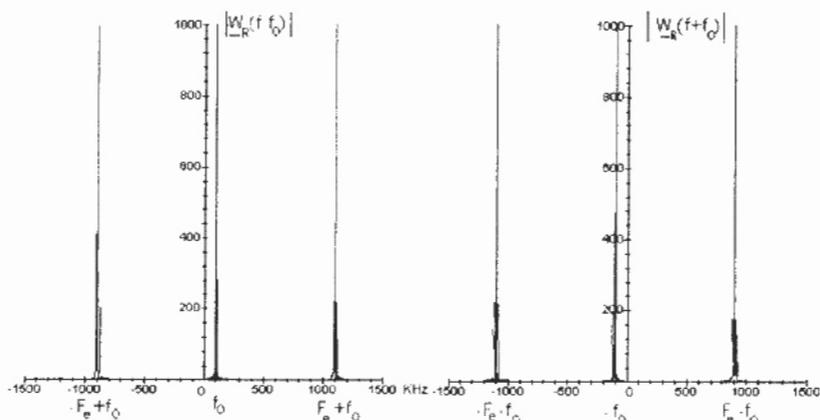
$$C-1-3- \quad |\underline{W}_R(f+kF_0)| = \left| \frac{\sin[\pi N(f+kF_0)\tau_c]}{\sin[\pi(f+kF_0)\tau_c]} \right| = |\underline{W}_R(f)|$$

$$C-1-4-a- \quad \underline{W}_R(0) = N \text{ car } e^0 = 1 \text{ et } \lim_{f \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(\pi N f \tau_c)}{\sin(\pi f \tau_c)} \right] = N$$

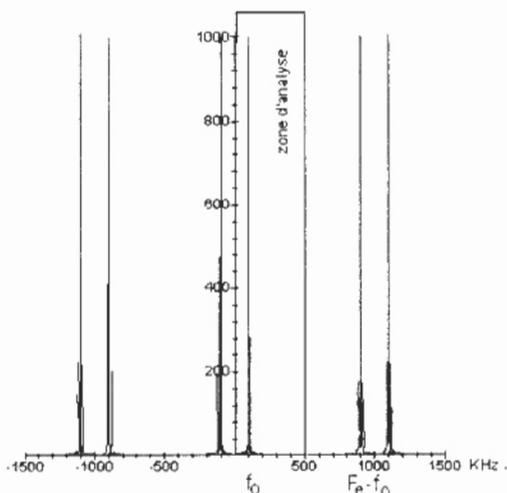
$\underline{W}_R(f) = 0$ pour $f = k/(N\tau_c)$ où k est un nombre entier qui n'est pas un multiple de N . La largeur du lobe central est donc $2/(N\tau_c) = 2F_0/N$.

La largeur des lobes latéraux est F_0/N

C-1-4-b-



- C-1-5-a- On peut admettre que le module de la somme est égal à la somme des modules à condition que les courbes représentatives de $|\underline{W}_R(f-f_0)|$ et $|\underline{W}_R(f+f_0)|$ n'empiètent pas l'une sur l'autre (quelque soit f , l'une au moins des deux fonctions peut être considérée comme nulle). D'après le graphe de la question C-1-4-b, on conclut qu'il n'y a pas d'empiètement
- en $f = 0$ si $f_0 > 30 F_0/N$ soit $f_0 > 30$ KHz
 - en $f = F_0/2$ si $F_0 - f_0 - 30 F_0/N > F_0/2$ soit $f_0 < F_0/2 - 30 F_0/N = 470$ KHz



C-1-5-b- Le lobe central a une amplitude $NS_0/2$ proportionnelle à l'amplitude de la sinusoïde $s(t)$, et il est centré sur la fréquence f_0 qui est bien la fréquence de la sinusoïde $s(t)$

C-1-5-c- Si la fréquence f_0 était supérieure à $F/2$, le motif utile centré sur la fréquence f_0 sortirait du domaine d'analyse compris entre 0 et $F/2$, alors que le motif parasite centré sur la fréquence $F_c - f_0$ entrerait dans le domaine d'analyse. Ce phénomène appelé repliement du spectre conduit à une erreur de fréquence. Il est conforme à la condition de SHANNON

$$C-2-1- \quad \underline{S}(k\Delta t) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_c) \cdot e^{-2\pi j n k \Delta t / T_c} = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_c) \cdot e^{-2\pi j k n \Delta t / T_c}$$

Pour satisfaire la condition de Shannon: $0 < k < N/2$

$$C-2-2- \quad f_0 = \gamma F_0/N \quad \text{et} \quad f = k F_0/N$$

Quelque soit γ les fonctions $|\underline{W}_k(f-f_0)|$ et $|\underline{W}_k(f+f_0)|$ s'écrivent:

$$|\underline{W}_k(f-f_0)| = |\underline{W}_k[(k-\gamma)F_0/N]| = N \quad \text{pour} \quad k = \gamma + i.N$$

$$= 0 \quad \text{pour} \quad k \neq \gamma + i.N$$

$$|\underline{W}_k(f+f_0)| = |\underline{W}_k[(k+\gamma)F_0/N]| = N \quad \text{pour} \quad k = -\gamma + i.N$$

$$= 0 \quad \text{pour} \quad k \neq -\gamma + i.N$$

Ainsi, pour $0 < f < F/2$, $0 < \gamma < N/2$, k variant de 0 à $N/2$, toutes les valeurs de

$|\underline{W}_k(f+f_0)|$ sont nulles et $|\underline{W}_k(f-f_0)|$ ne présente qu'une seule valeur non nulle pour

$k = \gamma$ correspondant à la fréquence $f_\gamma = \gamma F_0/N$ et de valeur N .

$|\underline{S}(k\Delta t)|$ ne présente alors qu'une seule valeur non nulle ($S_0 \cdot N/2$) pour $k = \gamma$ ce qui permet de reconstituer exactement le spectre de $s(t)$

Si cette condition n'est pas vérifiée on trouve des valeurs non nulles en dehors de f_0 et aucune de ces valeurs n'est égale à l'amplitude de la composante spectrale.

C-2-3-Si le signal $s(t)$ est périodique et de fréquence f_0 , il peut être décomposé en une somme de composantes sinusoïdales de fréquences $f_0, 2f_0, \dots$. Il suffit que la fréquence f_0 du fondamental soit un multiple entier de F_0/N pour que toutes les composantes spectrales vérifient cette condition. En appelant T_0 la période du signal $s(t)$, la relation $f_0 = \gamma F_0/N$ peut s'écrire sous la forme: $1/T_0 = \gamma/(NT_e)$ ou bien $\gamma T_0 = NT_e$. La durée NT_e du prélèvement temporel, affiché par l'oscilloscope numérique, doit correspondre à un nombre entier de périodes de $s(t)$.

Si le signal s'écrit $s(t) = A_c [1 + m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_p t)$, il comprend des composantes sinusoïdales de fréquences $f_p, f_p - f_m$ et $f_p + f_m$. Chacune de ces fréquences devant être un multiple entier de F_0/N , il est nécessaire que les fréquences f_p et f_m soient elles mêmes des multiples entiers de F_0/N . Le prélèvement temporel doit correspondre à un nombre entier de périodes de l'enveloppe et on ne doit pas observer de défilement de la porteuse dans l'enveloppe, ce qui est quasiment impossible à réaliser et ne correspond en aucune manière au problème pratique.

C-2-4-Lors du balayage fréquentiel au pas $\Delta f = F_0/N$, le premier point de mesure se situe à F_0/N . La fréquence f_0 doit donc vérifier la condition $f_0 \geq F_0/N$, ce qui correspond à $NT_e \geq T_0$. La durée NT_e du prélèvement temporel doit être au moins égale à une période de $s(t)$.

C-2-5--Le cas le plus défavorable correspond à $f_0 = (\gamma+0,5) F_0/N$.

L'erreur absolue maximale sur la fréquence est donc $0,5 F_0/N = 10^6/2048 \approx 500$ Hz,

L'amplitude du motif spectral qui devrait être égale à $NS_0/2$ est évaluée à

$$S_0/2 \cdot \frac{\sin(\pi/2)}{\sin(0,5\pi/N)} \approx (NS_0/2) \cdot \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} \approx (2/\pi)(NS_0/2) \approx 0,637 \cdot (NS_0/2)$$

ce qui correspond à une erreur relative de 36 %

C-2-6-Lorsque la fréquence d'échantillonnage augmente, l'erreur absolue maximale sur la fréquence augmente, alors que l'erreur maximale relative sur l'amplitude reste constante

Lorsque le nombre N d'échantillons augmente, l'erreur absolue maximale sur la fréquence diminue alors que l'erreur maximale relative sur l'amplitude reste constante

Le point important est que l'on ne peut pas espérer diminuer l'erreur relative sur l'amplitude en augmentant le nombre d'échantillons ou la fréquence d'échantillonnage. Elle reste égale à 36 %, ce qui n'est pas acceptable.

$$\begin{aligned} \text{C-3-1- } s'(mT_e) &= (1/N) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_e) \cdot e^{-2\pi jkn/N} \cdot e^{2\pi jkm/N} \\ &= (1/N) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_e) \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi jk(m-n)/N} = (1/N) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_e) \frac{1 - e^{2\pi j(m-n)}}{1 - e^{2\pi j(m-n)/N}} \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{1 - e^{2\pi j(m-n)}}{1 - e^{2\pi j(m-n)/N}} = \begin{cases} 0 & \text{pour } m-n \neq i.N \\ N & \text{pour } m-n = i.N \end{cases}$$

Le seul terme non nul de la somme sur n correspond donc à $n = m - i.N$, soit $s'(mT_e) = s(nT_e)$ pour $m = n + i.N$.

- C-3-2- $s'(mT_e)$ est donc constitué par la juxtaposition périodique de motifs égaux au prélèvement temporel. $s'(t)$ ne sera donc identique à $s(t)$ que si le prélèvement temporel effectué sur $s(t)$ correspond à un nombre entier de périodes.
Ce résultat est compatible avec celui de la question C-2-2.

- C-4-1- $\underline{s}(f)$ devient $\underline{s}'(f)$ telle que

$$\underline{s}'(f) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_e) \cdot e^{-2\pi j n b} \cdot e^{-2\pi j f n T_e} = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_e) \cdot e^{-2\pi j n f (T_e + b T_e)} = \underline{s}(f + b F_c)$$

ce qui correspond à un décalage fréquentiel de $b.F_c$.

- C-4-2- L'opération revient à multiplier le prélèvement temporel par une fonction d'allure sinusoïdale qui s'annule aux extrémités du prélèvement. On diminue ainsi le poids des échantillons situés aux extrémités ce qui limite le défaut dû au fait que le prélèvement temporel ne correspond pas à un nombre entier de périodes.

$$w_g(0) = w_g(N-1) = a_0 + 2 \cdot \sum_{i=1}^L (-1)^i a_i \cos(2\pi i) = a_0 + 2 \cdot \sum_{i=1}^L (-1)^i a_i = 0$$

$$w_g[(N-1)/2] = a_0 + 2 \cdot \sum_{i=1}^L (-1)^i a_i \cos(\pi i) = a_0 + 2 \cdot \sum_{i=1}^L a_i = 1$$

- C-4-3- L'échantillon temporel d'ordre n est multiplié par

$$\begin{aligned} w_g(n) &= a_0 + 2 \cdot \sum_{i=1}^L (-1)^i a_i \cos[2\pi n i / (N-1)] \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^L (-1)^i a_i [e^{2\pi j n i / (N-1)} + e^{-2\pi j n i / (N-1)}] \end{aligned}$$

Compte tenu de la question précédente (avec $b = \pm i / (N-1)$) et de la linéarité établie à la question C-1- tout se passe comme si la fonction $\underline{W}_R(f)$ était remplacée par la fonction $\underline{W}_C(f)$ telle que:

$$\underline{W}_C(f) = a_0 \underline{W}_R(f) + \sum_{i=1}^L (-1)^i a_i [\underline{W}_R[f - iF_c/(N-1)] + \underline{W}_R[f + iF_c/(N-1)]]$$

$$\text{C-4-4- } (-1)^i \underline{W}_R[f \pm iF_c/(N-1)] = (-1)^i e^{-\pi j (N-1) T_e [f \pm iF_c/(N-1)]} \frac{\sin[\pi N T_e [f \pm iF_c/(N-1)]]}{\sin[\pi T_e [f \pm iF_c/(N-1)]]}$$

$$\text{or } e^{-\pi j (N-1) T_e [f \pm iF_c/(N-1)]} = e^{-\pi j (N-1) T_e f} \cdot e^{\pm \pi j} = (-1)^i \cdot e^{-\pi j (N-1) T_e f}$$

d'où l'on déduit:

$$(-1)^j \underline{W}_k[f \pm iF_0/(N-1)] = e^{-\pi j(N-1)F_0} \frac{\sin[\pi NT_c(f \pm iF_0/(N-1))]}{\sin[\pi T_c(f \pm iF_0/(N-1))]}$$

puis par mise en facteur de $e^{\pi j(N-1)F_0}$,

$$\underline{W}_c(f) = e^{-\pi j(N-1)F_0} \left[a_0 \frac{\sin[\pi NT_c f]}{\sin[\pi T_c f]} + \sum_{i=1}^L a_i \left[\frac{\sin[\pi NT_c(f + iF_0/(N-1))]}{\sin[\pi T_c(f + iF_0/(N-1))]} + \frac{\sin[\pi NT_c(f - iF_0/(N-1))]}{\sin[\pi T_c(f - iF_0/(N-1))]} \right] \right]$$

et:

$$|\underline{W}_c(f)| = \left| a_0 \frac{\sin[\pi NT_c f]}{\sin[\pi T_c f]} + \sum_{i=1}^L a_i \left[\frac{\sin[\pi NT_c(f + iF_0/(N-1))]}{\sin[\pi T_c(f + iF_0/(N-1))]} + \frac{\sin[\pi NT_c(f - iF_0/(N-1))]}{\sin[\pi T_c(f - iF_0/(N-1))]} \right] \right|$$

Il n'est pas question ici d'écrire que le module de la somme est égal à la somme des modules car toutes les courbes empiètent l'une sur l'autre et c'est justement cet empiètement qui améliore le motif fréquentiel.

C-5-1-Compte tenu des équations de la question C-4-2, on écrit

$$a_0 + 2a_1 = 1$$

$$a_0 - 2a_1 = 0$$

$$\text{soit } a_0 = 0,5 \text{ et } a_1 = 0,25$$

C-5-2-En posant $y = fN \cdot T_c$ et compte tenu de $N-1 \cong N$, on écrit:

$$|\underline{W}_H(y)| \cong \left| a_0 \frac{\sin(\pi y)}{\sin(\pi y/N)} + a_1 \frac{\sin[\pi(y-1)]}{\sin[\pi(y-1)/N]} + a_1 \frac{\sin[\pi(y+1)]}{\sin[\pi(y+1)/N]} \right|$$

Sachant que:

$$\frac{\sin[\pi(y-k)]}{\sin[\pi(y-k)/N]} = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \text{ entier différent de } k \\ N & \text{pour } y = k \end{cases}$$

$$\text{On écrit: } \begin{cases} |\underline{W}_H(0)| = a_0 \cdot N = 0,5 \cdot N \\ |\underline{W}_H(\pm 1)| = a_1 \cdot N = 0,25 \cdot N \\ |\underline{W}_H(\pm 2)| = |\underline{W}_H(\pm 3)| = \dots = 0 \end{cases}$$

C-5-3-D'après la question précédente, $|\underline{W}_H(y)|$ s'annule pour $y = \pm 2, \pm 3, \dots$

La largeur Δf_{0H} du lobe central est donc telle que $4 = \Delta f_{0H}(NT_c)$ soit $\Delta f_{0H} = 4F_0/N$
L'amplitude W_{H0} du lobe central est $0,5 \cdot N$

La largeur Δf_{1H} d'un lobe latéral est donc telle que $1 = \Delta f_{1H}(NT_c)$ soit $\Delta f_{1H} = F_0/N$
La fenêtre de Hanning augmente donc la largeur du lobe central ce qui diminue la résolution spectrale. Par contre le balayage au pas $\Delta f = F_0/N$ donne 4 points de mesure sur le lobe central ce qui permet de passer plus près du maximum et de diminuer l'erreur relative sur l'amplitude de la composante spectrale.

C-5-4-La condition $f < 10 F_0/N$ donne $y < 10$ et $y/N < 10^{-2} \ll 1$

Sachant que $\sin(\pi y/N) \cong \pi y/N$; $\sin[\pi(y-1)/N] \cong \pi(y-1)/N$; ...

et que $\sin[\pi(y+k)] = (-1)^k \cdot \sin(\pi y)$, on peut écrire:

$$\begin{aligned} |W_{II}(y)| &\cong \left| a_0 \frac{\sin(\pi y)}{\pi y/N} + a_1 \frac{\sin[\pi(y-1)]}{\pi(y-1)/N} + a_1 \frac{\sin[\pi(y+1)]}{\pi(y+1)/N} \right| \\ &\cong (N/\pi) \cdot |\sin(\pi y)| \cdot \left| \frac{a_0/y - a_1/(y-1) - a_1/(y+1)}{|y^2(a_0 - 2a_1) - a_0|} \right| \\ &= (N/\pi) \cdot |\sin(\pi y)| \cdot \frac{a_0}{|y(y-1)(y+1)|} = (N/\pi) \cdot |\sin(\pi y)| \cdot \frac{a_0}{|y(y^2-1)|} \end{aligned}$$

car $a_0 = 2a_1$

C-5-5-Sachant que $|y^2 - 1| > 1$ dès que $|y| > 2^{0,5}$, $\frac{|\sin(\pi y)|}{|y(y^2-1)|} < \frac{|\sin(\pi y)|}{|y|}$ pour $|y| > 2$

Les lobes latéraux de $|W_{II}(y)|$ sont donc atténués par rapport à ceux de $|W_R(y)|$

D'après les questions précédentes $W_{10} = 0,5 \cdot N$ et la largeur du lobe central est $4F_d/N$

L'amplitude du premier lobe latéral en son milieu apparait donc pour $y = 2,5$

$$W_{II} \cong (N/\pi) \cdot \frac{0,5}{|2,5(2,5^2 - 1)|} = 0,0242(N/2)$$

$W_{II}/W_{10} = 0,0242$. L'amplitude du premier lobe latéral est très faible par rapport à celle du lobe central et on peut admettre que les lobes latéraux sont négligeables.

La largeur du lobe central étant $4F_d/N$, on ne commet pas d'erreur sur l'amplitude des composantes, due à la résolution spectrale, dès que les composantes sont distantes de plus de $2F_d/N$.

C-5-6-L'erreur maximale sur l'amplitude du lobe central se produit pour $y = 0,5$

$$W_{10}' \cong 0,5 (N/\pi) \cdot \frac{\sin(0,5\pi)}{|0,5(0,5^2 - 1)|} = 0,424 \cdot N \text{ au lieu de } 0,5 \cdot N$$

ce qui correspond à une erreur relative maximale de 15 %

C-6-1-

$$|W_R(y)| \cong \left| a_0 \frac{\sin(\pi y)}{\sin(\pi y/N)} + a_1 \frac{\sin[\pi(y-1)]}{\sin[\pi(y-1)/N]} + a_1 \frac{\sin[\pi(y+1)]}{\sin[\pi(y+1)/N]} + a_2 \frac{\sin[\pi(y-2)]}{\sin[\pi(y-2)/N]} + a_2 \frac{\sin[\pi(y+2)]}{\sin[\pi(y+2)/N]} \right|$$

Sachant que:

$$\frac{\sin[\pi(y-k)]}{\sin[\pi(y-k)/N]} = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \text{ entier différent de } k \\ N & \text{pour } y = k \end{cases}$$

On écrit: $\begin{cases} |W_R(0)| = |a_0| \cdot N \\ |W_R(\pm 1)| = |a_1| \cdot N \\ |W_R(\pm 2)| = |a_2| \cdot N \\ |W_R(\pm 3)| = |W_R(\pm 4)| = \dots = 0 \end{cases}$

C-6-2- La condition $|f| < 10 \cdot F_d/N$ donne $|y| < 10$ et $|y/N| < 10^{-2} \ll 1$

Sachant que $\sin(\pi y/N) \cong \pi y/N$; $\sin[\pi(y-1)/N] \cong \pi(y-1)/N$;
 et que $\sin[\pi(y+k)] = (-1)^k \cdot \sin(\pi y)$, on peut écrire:

$$\begin{aligned} |W_B(y)| &\cong (N/\pi) \cdot |\sin(\pi y)| \cdot \left| a_0/y - a_1 [1/(y-1)+1/(y+1)] + a_2 [1/(y-2)+1/(y+2)] \right| \\ &\cong (N/\pi) \cdot |\sin(\pi y)| \cdot \frac{|a_0(y^2-1)(y^2-4) - a_1 2y^2(y^2-4) + a_2 2y^2(y^2-1)|}{|y^2(y^2-1)(y^2-4)|} \\ &\cong (N/\pi) \cdot |\sin(\pi y)| \cdot \frac{|y^4(a_0 - 2a_1 + 2a_2) + y^2(8a_1 - 2a_2 - 5a_0) + 4a_0|}{|y^2(y^2-1)(y^2-4)|} \end{aligned}$$

$$A_2 = a_0 - 2a_1 + 2a_2 \quad ; \quad A_1 = 8a_1 - 2a_2 - 5a_0 \quad ; \quad A_0 = 4a_0$$

D'après la question C-4-2,

$$a_0 + 2 \cdot \sum_{r=1}^L (-1)^r \cdot a_r = a_0 - 2a_1 + 2a_2 = 0 \quad \text{d'où l'on déduit } A_2 = 0$$

C-6-3-Le polynôme $A_1 \cdot y^2 + A_0$ s'annulant pour $y = \pm 3$, on écrit $9A_1 + A_0 = 0$, soit

$$72a_1 - 18a_2 - 45a_0 + 4a_0 = 72a_1 - 18a_2 - 41a_0 = 0$$

A partir du système d'équations (voir question C-4-2)

$$a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 1$$

$$a_0 - 2a_1 + 2a_2 = 0$$

$$72a_1 - 18a_2 - 41a_0 = 0$$

on écrit par soustraction des deux premières équations

$$4a_1 = 1 \quad \text{d'où } a_1 = 0,25$$

et

$$a_0 + 2a_2 = 0,5$$

$$41a_0 + 18a_2 = 18$$

d'où on déduit $a_0 \cong 0,42$ et $a_2 \cong 0,04$

$$A_0 \cong 1,68 \quad \text{et} \quad A_1 \cong -0,18$$

C-6-4-D'après les questions précédentes, $|W_B(y)|$ s'annule pour $y = \pm 3, \pm 4, \dots$

La largeur Δf_{0B} du lobe central est donc telle que $6 = \Delta f_{0B}(NT_c)$ soit $\Delta f_{0B} = 6F_c/N$

L'amplitude W_{B0} du lobe central est 0,42.N

La largeur Δf_{1B} d'un lobe latéral est donc telle que $1 = \Delta f_{1B}(NT_c)$ soit $\Delta f_{1B} = F_c/N$

La fenêtre de Blackman augmente donc la largeur du lobe central ce qui diminue la résolution spectrale. Par contre le balayage au pas $\Delta f = F_c/N$ donne 6 points de mesure sur le lobe central ce qui permet de passer plus près du maximum et de diminuer l'erreur relative sur l'amplitude de la composante spectrale.

C-6-5-L'abscisse du milieu du premier lobe latéral correspond à $y = 3,5$. Soit

$$W_{B1} = (N/\pi) \cdot |\sin(3,5\pi)| \cdot \frac{|-0,18(3,5)^2 + 1,68|}{|3,5(3,5^2-1)(3,5^2-4)|} = 0,00051.N$$

$$W_{B1}/W_{B0} = 0,00051/0,42 = 0,0012$$

Les lobes latéraux sont donc très atténués par rapport à ceux de $|W_x(f)|$ et plus faibles que ceux de la fenêtre de Hanning

On peut ainsi admettre que la fonction $|W_H(f)|$ est négligeable pour $|f| > 3F_c/N$

On ne commet pas d'erreur sur l'amplitude des composantes, du fait de la résolution spectrale, dès que les composantes sont distantes de plus de $3F_c/N \cong 3 \text{ KHz}$

C-6-6-D'après la question précédente, la résolution spectrale est donc d'autant meilleure que $F_c/N = 1/(NT_c)$ est plus faible. Or NT_c est la durée du prélèvement temporel.

A cela s'ajoute la durée du calcul qui augmente lorsque le nombre N d'échantillons augmente (F_c ne peut être diminuée au delà de la condition de Shannon)

Résolution spectrale et vitesse d'analyse sont donc deux exigences contradictoires Pour les très basses fréquences c'est la durée du prélèvement temporel qui limite la vitesse d'analyse

Pour les très hautes fréquences c'est la durée du calcul qui limite la vitesse.

C-6-7-L'erreur maximale sur l'amplitude du lobe central apparaît pour $y = 0,5$

$$|W_H(0,5)| = (N/\pi) \cdot \sin(\pi/2) \cdot \frac{|-0,18(0,5)^2 + 1,68|}{|0,5(0,25-1)(0,25-4)|} = 0,370 N \text{ au lieu de } 0,42 N$$

ce qui correspond à une erreur relative maximale de 12 % qui est inférieure à celle réalisée avec une fenêtre de Hanning mais qui est encore assez importante.

C-6-8-En balayant la plage fréquentielle avec le pas $\Delta f = F_c/(2N)$, le pas de variation de y est $\Delta y = 0,5$ et l'erreur maximale apparaît pour $y = 0,25$.

$$|W_H(0,25)| = (N/\pi) \cdot \sin(\pi/4) \cdot \frac{|-0,18(0,25)^2 + 1,68|}{|0,25(0,25^2 - 1)(0,25^2 - 4)|} = 0,407 N \text{ au lieu de } 0,42 N$$

ce qui conduit à une erreur relative maximale de 3 % ce qui devient acceptable et ce d'autant plus qu'elle se produit toujours dans le même sens et qu'elle peut donc être ramenée à 1,5 % de part et d'autre en ajustant l'échelle.

C-6-9-Le choix d'une fenêtre dépend de la mesure souhaitée:

- Si on souhaite une forte résolution spectrale, le coefficient i de la question C-4-2 sera choisi plus faible voire nul (pas de fenêtre).
- Si on souhaite une bonne précision sur l'amplitude des composantes, il faut augmenter le coefficient i voire effectuer un balayage fréquentiel avec un pas plus faible (voir suite du problème).

C-7-1-La tension à la sortie du multiplicateur comprend deux termes respectivement de fréquences $f_0 + f_w$ et $|f_0 - f_w|$.

La fréquence de coupure du filtre passe bas est $f_c = 1/(2\pi\tau)$.

Le filtre passe bas élimine le terme de fréquence $f_0 + f_w$ et transmet le terme de fréquence $|f_0 - f_w|$ si $|f_0 - f_w| < f_c = 1/(2\pi\tau)$. La largeur d'un motif spectral à -3 dB est donc égale à $2f_c = 1/(\pi\tau)$ et la résolution spectrale augmente si le temps τ augmente (f_c diminue).

C-7-2-Apartir de l'équation $V_x(p)/V_i(p) = 1/(1 + \tau.p)$, on écrit l'équation différentielle

$$\tau \cdot dv_2(t)/dt + v_2(t) = v_1(t)$$

Le régime transitoire correspond à la solution de l'équation sans second membre, c'est à dire $v_2(t) = K \cdot e^{-t/\tau}$ dont la valeur initiale est K et qui est égale à 1% de cette valeur initiale pour t_r , tel que $t_r/\tau = \ln(100)$, soit $t_r = 4,6 \tau$

Ce temps de réponse est d'autant plus grand que τ est grand. La vitesse du balayage fréquentiel (vitesse de variation de la fréquence f_s) doit donc être d'autant plus faible que τ est grand.

C-7-3-Lorsque τ augmente:

-La résolution spectrale augmente

-La vitesse du balayage fréquentiel doit diminuer

Résolution spectrale et vitesse d'analyse sont deux exigences contradictoires

C-8-1-On décrit la plage fréquentielle $(N-1) \Delta f = (N-1)F_s/N \equiv F_s$, alors que la condition de Shannon interdit de dépasser $F_s/2$. Outre les composantes spectrales de fréquence f_s , le calcul fera apparaître des composantes aux fréquences $F_s - f_s$.

C-8-2-En séparant les échantillons d'ordre pair ($n = 2i$) et d'ordre impair ($n = 2i + 1$) il vient

$$\underline{S}_N(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} s(2i) e^{-2j\pi 2ik/N} + \sum_{i=0}^{N/2-1} s(2i+1) e^{-2j\pi 2ik/N} \cdot e^{-2j\pi k/N} = \sum_{i=0}^{N/2-1} s(2i) e^{-2j\pi k i(N/2)} + e^{-2j\pi k/N} \sum_{i=0}^{N/2-1} s(2i+1) e^{-2j\pi k i(N/2)}$$

$\underline{S}_{1(N/2)}(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} s(2i) \cdot e^{-2j\pi k i(N/2)}$ pour $0 \leq k < N/2$, est la transformée rapide d'ordre $N/2$ réalisée sur les échantillons temporels d'ordre pair.

$\underline{S}_{2(N/2)}(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} s(2i+1) \cdot e^{-2j\pi k i(N/2)}$ pour $0 \leq k < N/2$, est la transformée rapide d'ordre $N/2$ réalisée sur les échantillons temporels d'ordre impair

$$\text{Soit: } \underline{S}_N(k) = \underline{S}_{1(N/2)}(k) + e^{-2j\pi k/N} \cdot \underline{S}_{2(N/2)}(k) = \underline{S}_{1(N/2)}(k) + \underline{X}^k \cdot \underline{S}_{2(N/2)}(k)$$

$$\text{C-8-3- } \underline{S}_N(k+N/2) = \sum_{i=0}^{N/2-1} s(2i) \cdot e^{-2j\pi k i(N/2)} \cdot e^{-2j\pi i} + e^{-2j\pi k/N} \cdot e^{-2j\pi i} \sum_{i=0}^{N/2-1} s(2i+1) \cdot e^{-2j\pi k i(N/2)} \cdot e^{-2j\pi i}$$

Sachant que $e^{-2j\pi i} = 1$ et $e^{-2j\pi} = -1$, $\underline{S}_N(k+N/2)$ s'écrit:

$$\underline{S}_N(k+N/2) = \underline{S}_{1(N/2)}(k) - \underline{X}^k \cdot \underline{S}_{2(N/2)}(k)$$

C-8-4-Voir feuille annexe

C-8-5- D'après le schéma précédent, le calcul de la transformée d'ordre N à partir de 2 transformées d'ordre $N/2$ nécessite N additions complexes et $N/2$ multiplications complexes. N étant une puissance de 2, ($N = 2^p$), chaque transformée d'ordre $N/2$ peut être calculée à partir de 2 transformées d'ordre $N/4$, ce qui nécessite $2 \cdot (N/4) = N/2$ multiplications complexes et $2 \cdot (N/2) = N$ additions complexes. Le calcul complet fait ainsi apparaître g étapes nécessitant chacune N additions complexes et $N/2$

multiplications complexes soit au total $g.N = N \log_2(N)$ additions complexes et $g.N/2 = N/2 \log_2(N)$ multiplications complexes.

Le calcul direct de la transformée discrète de Fourier nécessite N multiplications complexes et N additions complexes pour chaque valeur de k . Pour décrire la plage utile s'étendant de 0 à $Fe/2$ il faut faire varier k de 0 à $N/2$ ce qui représente $N^2/2$ multiplications et $N^2/2$ additions complexes.

En ne tenant compte que des multiplications complexes le rapport des temps de calcul est donc : $[N^2/2]/[(N/2) \cdot \log_2(N)] = N/[\log_2(N)] = 1024/10 \approx 100$.

La transformée rapide de Fourier est donc 100 fois plus rapide bien qu'elle conduise au calcul d'échantillons fréquentiels inutiles (pour k compris entre $N/2$ et N).

C-8-6-Les échantillons temporels apparaissent dans l'ordre suivant des indices:

Multiples de 4, multiples de 2, (multiples de 4) + 1, (multiples de 2) + 1 soit:

0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7. On peut remarquer qu'ils apparaissent dans l'ordre binaire inversé (les bits entrent par la gauche). L'adressage indirect indexé permet de trier rapidement les échantillons en chargeant au préalable un tableau dans lequel les adresses varient dans l'ordre binaire direct et dont chaque case mémoire contient la valeur de l'adresse exprimée en binaire inversé.

C-9-1-

$$S_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) \cdot e^{-jnkn}$$

C-9-2-

$$\begin{aligned} S_N(k) &= \sum_{u=0}^{1-N/2-1} \sum_{v=0}^{1-N/2-1} s(u+2v) e^{-jn(j+2w)(u+2v)N} = \sum_{u=0}^{1-N/2-1} \sum_{v=0}^{1-N/2-1} s(u+2v) \cdot e^{-jn(j+2w)uN} \cdot e^{-2jn(v)N} \cdot e^{-2jnw(v)N} \\ &= \sum_{u=0}^{1-N/2-1} e^{-jn(j+2w)uN} \sum_{v=0}^{1-N/2-1} s(u+2v) \cdot e^{-2jn(v)N} \cdot e^{-2jnw(v)N} \end{aligned}$$

$N/2-1$

$\sum_{v=0}^{N/2-1} [s(u+2v) \cdot e^{-2jn(v)N}] \cdot e^{-2jnw(v)N}$ apparaît comme une transformée rapide de Fourier d'ordre

$N/2$ effectuée sur les échantillons temporels $s(u+2v)$ multipliés par $e^{-2jnw(v)N}$. Pour $u=0$ cette transformée rapide se fait à partir des échantillons d'ordre pair et pour $u=1$, elle se fait à partir des échantillons d'ordre impair.

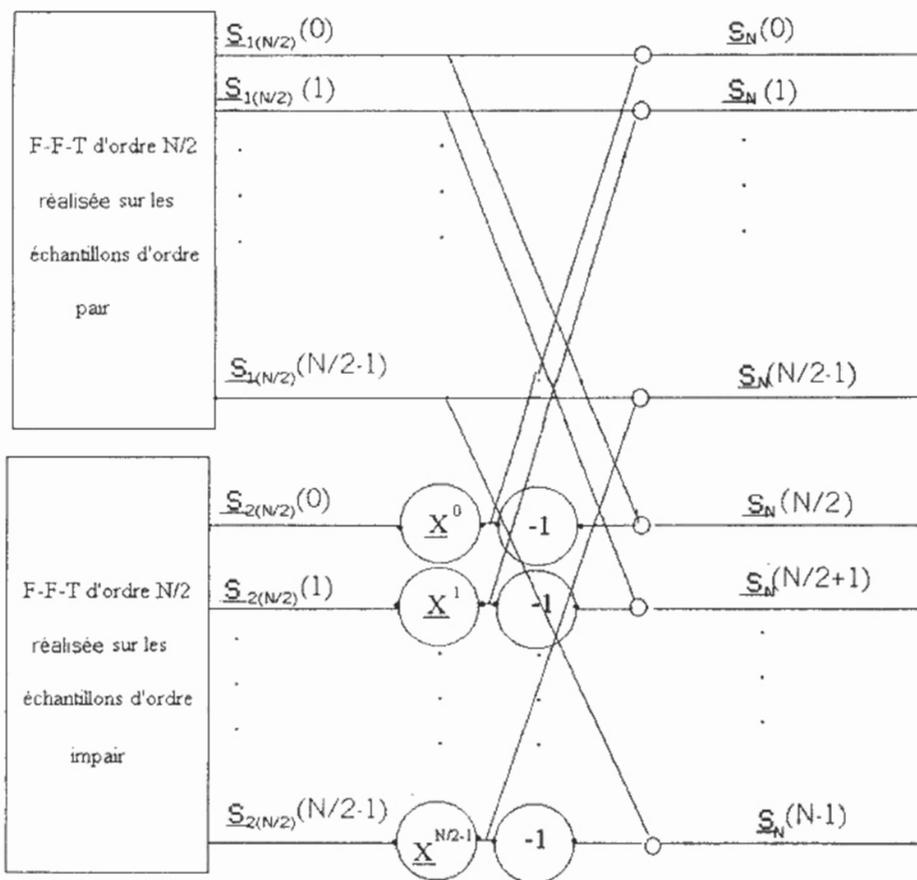
C-9-3-

- Faire $z=0$ pour calculer les échantillons fréquentiels d'ordre $k = 2w$ pair
 - .Effectuer une transformée rapide sur les échantillons temporels d'ordre $2v$ pair et ranger les parties réelles et imaginaires respectivement dans des tableaux $R(k)$ et $I(k)$.
 - .Faire de même pour les échantillons temporels d'ordre $1+2v$ impair multiplier les valeurs de sortie par $e^{-\pi jk^2/N}$ et les ajouter dans les tableaux $R(k)$ et $I(k)$
- Faire $z = 1$ pour calculer les échantillons fréquentiels d'ordre $k = 1 + 2w$ impair
 - .Effectuer une transformée rapide sur les échantillons temporels d'ordre $2v$ pair multipliés par $e^{-2\pi jv^2/N}$ ranger les valeurs de sortie dans les tableaux $R(k)$ et $I(k)$.
 - .Effectuer une transformée rapide sur les échantillons temporels d'ordre $1+2v$ impair multipliés par $e^{-2\pi jv^2/N}$, multiplier les valeurs de sortie par $e^{-\pi jk^2/N}$ et les ajouter dans les tableaux $R(k)$ et $I(k)$.

-Pour chaque valeur de k , calculer $S_s(k\Delta f) = [R^2(k) + I^2(k)]^{1/2}$

La plage de fréquence décrite s'étend de 0 à $[z + 2w]_{\max}$, $\Delta f = (N-1) F_s / (2N)$

$\cong F_s/2$, conforme au théorème de Shannon: Tous les échantillons fréquentiels calculés sont utiles.





Agrégation (Concours Interne)

OPTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE ET PHYSIQUE APPLIQUÉE

Composition sur la physique et le traitement automatisé de l'information - Session : 1999

PARTIE 1

THERMODYNAMIQUE

I. Systèmes thermodynamiques

1.1. Taille **macroscopique**. Exemples : 1 mole de gaz, un morceau de métal...

Système **fermé** : échange uniquement de l'énergie (travail et chaleur).

ouvert : échange énergie et matière.

isolé : n'échange rien.

1.2. *Grandeur d'état* : un état **d'équilibre thermodynamique** (noté EET) est caractérisé par un petit nombre de grandeurs **macroscopiques** (température, pression, volume...) appelées **grandeurs d'état**.

Intensives : définies en un point, indépendantes de la quantité de matière (température, pression...).

Extensives : relatives au système entier, additives lors de la réunion de deux systèmes (volume, masse...).

État d'équilibre thermodynamique : (EET).

Système isolé : gaz enfermé dans un récipient à parois indéformables et parfaitement calorifugées, la température et la pression évoluent puis au bout d'un certain temps elles n'évoluent plus, elles restent uniformes et constantes, le gaz est dans un (EET).

Système échangeant de l'énergie : gaz enfermé dans un cylindre vertical avec piston sans masse qui coulisse sans frottement, les parois sont conductrices de la chaleur. A l'extérieur la température est T_0 , la pression p_0 . On pose une masse m sur le piston. La température et la pression du gaz évoluent, au bout d'un certain temps elles restent uniformes et constantes $T = T_0$ $p = p_0 + \frac{mg}{S}$, le gaz est dans un (EET).

1.3. Équation d'état

C'est la relation $f(p, V, T) = 0$ entre les grandeurs d'état à l'(EET).

Exemples : gaz parfait $pV = nRT$ (n moles)

métal $V \approx V_0$

1.4.

Coefficient de dilatation isobare α	Coefficient de compressibilité isotherme χ_T	Coefficient sans nom β
$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$	$\chi_T = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$	$\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$
en K^{-1} intensif presque toujours positif	en Pa^{-1} intensif toujours positif	en K^{-1} intensif presque toujours > 0

Remarque : Eau exception entre $0^\circ C$ et $4^\circ C$ $\alpha < 0$, $\beta < 0$

Utilité :

- $dV = \alpha V dT - \chi_T V dp$ joue le rôle d'une véritable équation d'état dans le domaine de température et de pression où α et χ_T peuvent être considérés comme constants. C'est très utile pour les corps condensés (liquides et solides) dont on connaît mal les équations d'état.
- Grandeurs accessibles à l'expérience [$\alpha, \beta, \chi_T, C_p, C_v$] permettent de calculer les fonctions d'état des corps purs [U, H, S, \dots] et donc de réaliser des **tables thermodynamiques**.

Exercice :

$$V = V(T, p) \rightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial T} dT + \frac{\partial V}{\partial p} dp = \alpha V dT - \chi_T V dp$$

Le volume du système (métal) est constant, donc $dV = 0$, on en déduit $dp = \frac{\alpha}{\chi_T} dT$.

a.

$$P_2 - P_1 = \frac{\alpha}{\chi_T} (T_2 - T_1) \quad \boxed{P_2 = P_1 + \frac{\alpha}{\chi_T} (T_2 - T_1) \quad P_2 = 626 \text{ bars}}$$

b.

$$\boxed{T_{\max} = T_1 + \frac{\chi_T}{\alpha} [P_{\max} - P_1] \quad T_{\max} = 49^\circ C}$$

2. Bilans d'énergie pour un système fermé (Σ)

2.1. Énergie interne microscopique U

$$\boxed{U = E_c^{micro} + E_p^{micro}}$$

E_p^{micro} : énergie potentielle interne associée à toutes les forces intérieures entre les particules microscopiques (interactions principalement d'origine électromagnétique).

$E_c^{micro} = \sum e_c^{*micro}$ où e_c^{*micro} est l'énergie cinétique des particules microscopiques mesurée dans le référentiel barycentrique R^* d'un élément mésoscopique (\approx boule de rayon 100 nm pour un gaz dans les conditions ordinaires).

Remarque : Pour chaque élément mésoscopique on a :

$$e_c = e_c^* + \frac{1}{2} dm \cdot v_0^2$$

$\int \frac{1}{2} dm v_0^2$ est la contribution de l'élément mésoscopique à l'énergie cinétique macroscopique E_c^{macro} .

- 2.2. L'énergie totale E est définie par :

$$E = U + E_c^{macro} + E_{potenc}^{macro} + E_{potenc}^{micro}$$

- 2.3. Premier principe

a. Sous forme générale

$$\Sigma \text{ fermé} \quad E_F - E_I = W_{extérieures}^{non\ conservatives} + Q$$

I et F : états d'équilibre thermodynamique.

$W_{extérieures}^{non\ conservatives}$: travail des forces extérieures non conservatives algébriquement reçu par (Σ).

Q : transfert thermique (chaleur) algébriquement reçu par Σ .

b. Sous forme courante

$$U_F - U_I = W + Q$$

- 2.4. *Travail W* : Apport algébrique d'énergie dans lequel il y a déplacement macroscopique des points d'application des forces extérieures appliquées au niveau de sa frontière (exemple : travail de compression d'un gaz).

Transfert thermique (chaleur) Q : Apport algébrique d'énergie à la suite d'un très grand nombre d'interactions à l'échelle microscopique sans qu'il y ait travail macroscopique.

La chaleur est **de l'énergie qui passe d'un corps à un autre** sous l'effet d'une différence de température.

- 2.5. **U est une fonction d'état. $U_F - U_I$ ne dépend pas de la transformation** (dU est une différentielle totale).

A l'EET U dépend d'un très petit nombre de grandeurs d'état.

W et Q sont des grandeurs d'échange. $W_{I \rightarrow F}$ et $Q_{I \rightarrow F}$ dépendent de la transformation entre I et F . (δW , δQ sont des formes différentielles qui ne sont pas des différentielles totales).

- 2.6. La tasse de café ne contient pas de chaleur, elle contient de **l'énergie interne**.

Exercice :

Hypothèses utilisées : Les frottements de l'air sont négligés, on suppose que la température dans le plomb après collision s'uniformise très rapidement de sorte qu'on la mesure très rapidement (les échanges thermiques avec l'air sont négligés).

Système choisi : Les deux masses (2m) U E_{pot}^{macro}

État initial : Énergie totale $E_I = \overbrace{2m u(T_0)} + \overbrace{mgh}$

État final : Énergie totale $E_F = 2m u(T_1) + 0$

Premier principe : $E_F - E_I = 2m [u(T_1) - u(T_0)] - mgh = W_{ext}^{nc} + Q$

Compte tenu des hypothèses : le deuxième membre est nul :

$$W_{ext}^{nc} = 0 \quad Q = 0$$

On obtient :

$$2m [u(T_1) - u(T_0)] = mgh$$

comme pour un corps condensé $du \approx c dT$, $u(T_1) - u(T_0) \approx c(T_1 - T_0)$, on a :

$$2m c (T_1 - T_0) = mgh$$

$$T_1 - T_0 = \frac{gh}{2c}$$

$$Mc \approx 25 \quad c = 120,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \quad T_1 - T_0 = 0,4 \text{ K}$$

$$T_1 = 293,4 \text{ K}$$

3. La fonction d'état enthalpie H

3.1.

$$H = U + pV \quad \text{en J}$$

3.2. Premier principe :

$$U_F - U_I = W + Q$$

La pression extérieure est uniforme et constante :

$$W = - p_e (V_F - V_I)$$

On a donc :

$$(U_F + p_e V_F) - (U_I + p_e V_I) = Q$$

comme $p_i = p_F = p_e$,

$$(U_F + p_F V_F) - (U_I + p_I V_I) = Q$$

on obtient donc :

$$H_F - H_I = Q \quad \Delta H = Q$$

Remarque : Cette relation est a fortiori valable pour une évolution isobare pendant laquelle **la pression du système** reste uniforme et constante.

4. Fonctions d'état U et H et capacités thermiques pour quelques corps

4.1.

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad \text{en J} \cdot \text{K}^{-1} \text{ extensive}$$

$$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p \quad \text{en J} \cdot \text{K}^{-1} \text{ extensive}$$

Utilité :

$C_p, C_V, \alpha, \beta, \chi_T \rightarrow$ fonctions d'état $U, H, S, \dots \rightarrow$ tables thermodynamiques

4.2. Le gaz parfait

Définition macroscopique : Un gaz parfait est un gaz qui obéit dans toutes les conditions aux lois :

$$pV = nRT \quad \text{équation d'état} \quad \text{et} \quad U = U(T) \quad \text{première loi de Joule}$$

Ce **modèle** est correct pour **un gaz réel** à pression faible, loin du point de liquéfaction.

Gaz parfait monoatomique (GPM)

$$U = \frac{3}{2} nRT \quad H = \frac{5}{2} nRT \quad C_V = \frac{3}{2} nR \quad C_p = \frac{5}{2} nR$$

Gaz parfait polyatomique

$$U > \frac{3}{2} nRT \quad H > \frac{5}{2} nRT \quad C_V > \frac{3}{2} nR \quad C_p > \frac{5}{2} nR$$

Pour un gaz parfait

$$\begin{cases} C_p \cdot C_V = nR \\ C_{pm} - C_{Vm} = R \end{cases}$$

Pour un gaz parfait

$$\begin{cases} dU = C_V(T) dT = n C_{Vm}(T) dT \\ dH = C_p(T) dT = n C_{pm}(T) dT \end{cases}$$

4.3. Corps (phase) condensé

$$U \approx U(T) \quad H \approx H(T) \quad U \approx H \quad C_V \approx C_p \approx C(T)$$

$$dU \approx C(T) dT \text{ dans le cas où : } \quad C(T) = C = \text{constante}$$

$$\text{on a : } \quad dU \approx C dT \quad U \approx CT + \text{constante}$$

5. Le deuxième principe de la thermodynamique pour un système fermé (Σ)

5.1. Nécessité d'un deuxième principe

Exemple classique de la détente de Joule Gay-Lussac : Un gaz initialement contenu dans un volume V_1 (état 1) se détend dans le vide pour occuper finalement un volume $V_1 + V_2$ (état 2). L'évolution ($2 \rightarrow 1$) pour laquelle le gaz initialement contenu dans le volume $V_1 + V_2$ (état 2) se concentrerait spontanément dans le volume V_1 en laissant un volume V_2 vide derrière lui ne s'observe jamais.

Pour l'évolution $1 \rightarrow 2$ $W = 0$ car les parois sont indéformables.

$Q = 0$ car les parois sont calorifugées.

D'après le premier principe on a : $U_2 - U_1 = 0 \quad U_2 = U_1$

Pour l'évolution $2 \rightarrow 1$ on aurait aussi :

$$U_1 - U_2 = 0 + 0 = 0$$

Le premier principe est satisfait aussi bien pour $1 \rightarrow 2$ que pour $2 \rightarrow 1$.

Ce principe est un principe de conservation. **un principe d'évolution est nécessaire.**

5.2. Transformation réversible

Réversible : quasistatique **et on peut** en inverser le sens en passant exactement par les mêmes états intermédiaires.

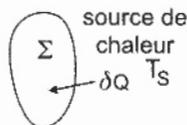
Causes d'irréversibilité : frottements, non uniformité des grandeurs intensives (pression, température, densité de particules...).

Remarque : C'est la possibilité d'évolution exacte en sens inverse du système et du milieu extérieur qui constitue le meilleur critère de réversibilité.

5.3. Énoncé du deuxième principe

Pour tout système fermé (Σ) il existe une fonction d'état appelée entropie et notée S (unité $J \cdot K^{-1}$).

- S est extensive additive.
- Pour une transformation infinitésimale $dS = \delta S_e + \delta S_c$,
pour une transformation finie $\Delta S = S_e + S_c$.
 S_e est l'entropie échangée algébrique.
 S_c est l'entropie créée positive ou nulle.
 $S_c = 0$ pour les transformations réversibles.
 $S_c > 0$ pour les transformations irréversibles.
- S est une fonction d'état, donc à l'(EET) elle dépend d'un très petit nombre de grandeurs d'état.

5.4. Cas particulier

source de chaleur = système capable d'échanger de la chaleur sans que sa température T_s varie.

Exemple : atmosphère, lac...

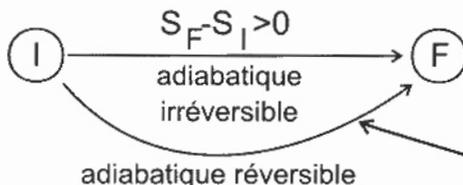
$$dS = \frac{\delta Q}{T_s} + \delta S_c \quad \Delta S = \frac{Q}{T_s} + S_c$$

Pour une transformation **réversible** élémentaire $\left\{ \begin{array}{l} dS = \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T} \\ T \text{ température thermodynamique du système } \Sigma \end{array} \right.$

5.5. Système thermiquement isolé

$$\delta S_e = 0 \quad dS = \delta S_c \quad \Delta S = S_c$$

$$\begin{array}{l} \Delta S = 0 \text{ réversible} \\ \Delta S > 0 \text{ irréversible} \end{array} \quad (\Sigma) \text{ thermiquement isolé}$$



Si cette transformation existait, on aurait $S_F - S_I = 0$, elle n'existe donc pas.

5.6. Identité thermodynamique

$$U = U(S, V) \rightarrow dU = \frac{\partial U}{\partial S} dS + \frac{\partial U}{\partial V} dV = TdS - pdV$$

$$dU = TdS - pdV$$

Fonction caractéristique : Sa connaissance est suffisante pour décrire complètement le corps étudié.

$U = U(S, V)$ est une fonction caractéristique.

$U = U(T, V)$ n'en est pas une.

$$H = U + pV \quad dH = dU + dp \cdot V + p dV = TdS - pdV + dp \cdot V + p dV$$

$$\boxed{dH = TdS + Vdp}$$

• Application : entropie d'un gaz parfait

Pour un GP on a : $dH = n C_{pm}(T) dT$ et $pV = nRT$

On utilise l'identité thermodynamique :

$$dH = TdS + Vdp$$

$$TdS = dH - Vdp = n C_{pm}(T) dT - \frac{nRT}{p} dp$$

$$\boxed{dS = n C_{pm}(T) \frac{dT}{T} - nR \frac{dp}{p}}$$

$$\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}} \quad \text{et} \quad C_{pm} - C_{vm} = R \quad \text{donc} \quad C_{pm} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$$

$$\boxed{dS = n \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} - nR \frac{dp}{p}}$$

Une évolution adiabatique et réversible est isentropique

$$dS = 0 \quad (S = \text{constante})$$

$$n \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} - nR \frac{dp}{p} = 0 \quad \gamma \frac{dT}{T} + (1 - \gamma) \frac{dp}{p} = 0$$

et comme $\gamma = \text{constante}$

$$\boxed{T^\gamma \cdot p^{1-\gamma} = \text{constante}}$$

Loi de Laplace.
GP, adiabatique, réversible, $\gamma = \text{cste}$

Application numérique :

$$T_1^\gamma p_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma p_2^{1-\gamma}$$

$$\boxed{T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad T_2 = 240 \text{ K} \quad \text{refroidissement}}$$

• Application : entropie d'un corps condensé

$$dU = TdS - pdV = TdS \quad (V = \text{constante} \quad dV = 0)$$

$$dS = \frac{dU}{T} \approx \frac{C(T)dT}{T}$$

si $C = mc$ c constante

$$dS \approx m c \frac{dT}{T}$$

$$S \approx m c \ln T + \text{constante}$$

Exercice :

Système (fer) $m \xrightarrow[\text{isobare}]{\text{irréversible}} m$
 $T_1 \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} T_2$

Le fer est un corps condensé et c constante donc :

$$\Delta S_{\text{fer}} = S_2 - S_1 = m c \ln \frac{T_2}{T_1} \quad \Delta S_{\text{fer}} = -10,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

L'évolution est isobare $dH = \delta Q$ et le fer est un corps condensé (avec c constante) $dH \approx m c dT$, on en déduit :

$$\delta Q = m c dT \quad \text{et} \quad Q = m c (T_2 - T_1)$$

L'entropie échangée est :

$$S_e = \frac{Q}{T_2} = \frac{m c (T_2 - T_1)}{T_2} \quad S_e = -11,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

L'entropie créée est : $S_c = \Delta S_{\text{fer}} - S_e \quad S_c = 1,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0$

$S_c > 0$, l'évolution est irréversible.

$$\Delta S_{\text{eau}} = \frac{Q_{\text{eau}}}{T_2} = -\frac{Q}{T_2} \quad \Delta S_{\text{eau}} = -S_e = 11,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0$$

5.7. Le moteur Diesel

A.
$$\left. \begin{array}{l} pV^\gamma = \text{constante} \\ pV = nRT \end{array} \right\} \frac{nRT}{V} \cdot V^\gamma = \text{constante} \quad T \cdot V^{\gamma-1} = \text{constante}$$

B. a.
$$pV = nRT \quad n = \frac{pV}{RT} \quad n = 0,998 \approx 1 \text{ mole}$$

$$\left. \begin{array}{l} C_p - C_v = nR \\ \frac{C_p}{C_v} = \gamma \end{array} \right\} \text{on en déduit} \quad \begin{array}{l} C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \quad C_p = 29,0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \\ C_v = \frac{nR}{\gamma-1} \quad C_v = 20,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \end{array}$$

b. Calcul des grandeurs d'état

$A \rightarrow B$ adiabatique, réversible, gaz parfait, γ constante ; on peut utiliser $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$.

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad V_B = V_A \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad V_B = 2,76 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Avec l'équation d'état, on calcule :

$$p_B = \frac{n R T_B}{V_B}$$

$$p_B = 2,17 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$B \rightarrow C$ isobare $p = p_B = p_C$

$$T_C = \frac{p_C V_C}{n R}$$

$$p_C = 2,17 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$T_C = 2176 \text{ K}$$

$C \rightarrow D$ (comme pour AB) on peut utiliser $pV^\gamma = \text{cste}$

$$p_D = p_C \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^\gamma$$

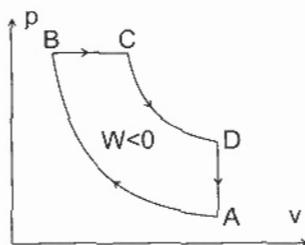
$$T_D = \frac{p_D V_D}{n R}$$

$$p_D = 4,68 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_D = 1404 \text{ K}$$

	A	B	C	D
p (Pa)	$1,00 \cdot 10^5$	$2,17 \cdot 10^6$	$2,17 \cdot 10^6$	$4,68 \cdot 10^5$
T (K)	300	723	2176	1404
V (m^3)	$2,49 \cdot 10^{-2}$	$2,76 \cdot 10^{-3}$	$8,32 \cdot 10^{-3}$	$2,49 \cdot 10^{-2}$

c. Allure



d. W et Q

$$Q_{AB} = 0$$

AB

$$\Delta U = W_{AB} \quad W_{AB} = C_V (T_B - T_A)$$

$$W_{AB} = 8,76 \text{ kJ}$$

$$\Delta H = Q_{BC} \text{ (isobare)}$$

$$Q_{BC} = C_p (T_C - T_B)$$

BC

$$Q_{BC} = 42,1 \text{ kJ}$$

$$W_{BC} = - p_B (V_C - V_B)$$

$$W_{BC} = - 12,1 \text{ kJ}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{CD} \\
 Q_{CD} = 0 \\
 \Delta U = W_{CD} \quad W_{CD} = C_V (T_D - T_C) \\
 W_{CD} = -16,0 \text{ kJ}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{DA} \\
 W_{DA} = 0 \\
 \Delta U = Q_{DA} \quad Q_{DA} = C_V (T_A - T_D) \\
 Q_{DA} = -22,8 \text{ kJ}
 \end{array}$$

	AB	BC	CD	DA
W_{kJ}	8,76	-12,1	-16,1	0
Q_{kJ}	0	42,1	0	-22,8

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = -19,4 \text{ kJ}$$

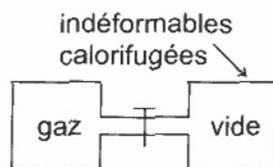
$$\eta = \frac{-W}{Q_{BC}} = \frac{\text{production}}{\text{dépense}} \quad \eta = \frac{19,4}{42,1} = 0,46$$

$$\eta_c = 1 - \frac{T_A}{T_C} = 0,86$$

($\eta < \eta_c$ les transferts thermiques BC et DA sont irréversibles).

6. La détente de Joule et Gay-Lussac

6.1.



C'est une détente
 - adiabatique
 - brutale
 - dans le vide

L'énergie interne U est conservée ($U_F = U_I$)

En choisissant comme système [le gaz + vide + parois], on lui applique le premier principe.

$$\Delta U_{\text{gaz}} + \Delta U_{\text{vide}} + \Delta U_{\text{parois}} = 0 + 0 = 0$$

$$\Delta U_{\text{vide}} = 0 \quad \Delta U_{\text{parois}} = 0 \quad \Delta U_{\text{gaz}} = U_F - U_I = 0 \quad U_F = U_I$$

6.2. Gaz parfait

- Pour un GP, on a $U = U(T)$, donc la température T est conservée.
- Première loi de Joule : $U = U(T)$.

$$\bullet \text{ Pour un GP : } dS = n C_{Vm} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta S &= n \int_{T_I}^{T_F} C_{Vm}(T) \frac{dT}{T} + nR \int_{V_I}^{V_F} \frac{dV}{V} = nR \ln \frac{V_F}{V_I} \\
 &= 0 \text{ car } T_I = T_F
 \end{aligned}$$

- $\Delta S = nR \ln 2 > 0$ ($V_F = 2V_I$, $V_I = V_I$)
 $S_e = 0$ donc $\Delta S = S_e > 0$ détente irréversible.

6.3. Gaz réel

L'équation d'état comporte deux termes correctifs $\frac{n^2 a}{V^2}$ et $-nb$ par rapport au GP.

nb est le **covolume**, il représente la partie inaccessible du volume réel (avec le modèle des sphères dures de rayon r , l'ordre de grandeur de b est $b = N_a \times \frac{4}{3} \pi r^3$), il traduit le caractère répulsif des interactions entre molécules à grande distance.

$-\frac{n^2 a}{V^2}$ est la pression moléculaire, elle traduit le caractère attractif des interactions à grande distance.

$U = U(T, V)$ donc ce gaz ne suit pas la première loi de Joule.

De $U_2 = U_1$, on déduit :

$$\boxed{T_2 - T_1 = \frac{-na}{2C_{Vm}V_1}}$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV = n C_{Vm} dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV$$

En utilisant l'identité thermodynamique $dU = TdS - pdV$, on écrit :

$$TdS - pdV = n C_{Vm} dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV$$

$$TdS = n C_{Vm} dT + \left(p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) dV = n C_{Vm} dT + \frac{nRT}{V-nb} dV$$

$$\boxed{dS = n C_{Vm} dT + \frac{nR}{V-nb} dV}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta S &= S_2 - S_1 = n C_{Vm} \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2 - nb}{V_1 - nb} \\ \Delta S &= S_C > 0 \text{ irréversible} \end{aligned}}$$

• Application Numérique

$$T_2 - T_1 = -5,2 \text{ K} \quad T_2 = 285,8 \text{ K} \quad \Delta S = 5,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0$$

L'affirmation est **fausse**, la détente de JGL est **insuffisante**.

 7. **La détente de Joule-Thomson (Kelvin)**

7.1. • (Σ) système fermé donc $M_{\Gamma}(t) + \delta m_e = M_{\Gamma}(t+dt) + \delta m_s$.

• Le régime est stationnaire donc $M_{\Gamma}(t) = M_{\Gamma}(t+dt)$.

• On déduit $\delta m_e = \delta m_s = \delta m$.

• Elles sont constantes.

• $E_{\Sigma}(t+dt) = E_{\Gamma} + \delta m u_s + \frac{1}{2} \delta m c_s^2 + \delta m g z_s$.

$$E_{\Sigma}(t) = E_{\Gamma} + \delta m u_e + \frac{1}{2} \delta m c_e^2 + \delta m g z_e.$$

$$dE_{\Sigma} = \delta m (u_s - u_e) + \frac{1}{2} \delta m (c_s^2 - c_e^2) + \delta m g (z_s - z_e).$$

Premier principe appliqué à (Σ) :

$$dE_{\Sigma} = \underbrace{\delta W_{\text{pression}} + \delta W^* + \delta Q}_{\substack{+ p_e v_e \delta m \\ - p_s v_s \delta m}}$$

$$\delta m [u_s + p_s v_s] - \delta m [u_e + p_e v_e] + \frac{1}{2} \delta m (c_s^2 - c_e^2) + \delta m g (z_s - z_e) = \delta W^* + \delta Q$$

$$\boxed{\delta m [h_s - h_e] + \frac{1}{2} \delta m (c_s^2 - c_e^2) + \delta m g (z_s - z_e) = \delta W^* + \delta Q}$$

7.2. Bilan entropique

$$dS_{\Sigma} = \frac{\delta Q}{T_S} + \delta S_c \quad S_{\Sigma}(t) = S_{\Gamma} + \delta m \cdot S_e$$

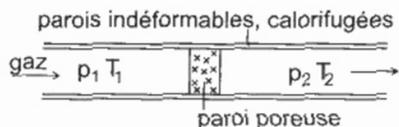
$$S_{\Sigma}(t + dt) = S_{\Gamma} + \delta m \cdot S_s$$

$$dS_{\Sigma} = \delta m (s_s - s_e)$$

$$\boxed{\delta m (s_s - s_e) = \frac{\delta Q}{T_S} + \delta S_c}$$

7.3. Application à la détente de Joule-Thomson

7.3.1.



La détente de JT est une détente adiabatique, lente, en régime stationnaire d'un gaz dans une conduite horizontale à travers une paroi poreuse.

On observe toujours $p_2 < p_1$ (détente).

Compte tenu des caractères de la détente, la relation du § 7.1. s'écrit :

$$(h_2 - h_1) \cdot \delta m + 0 + 0 = 0 + 0 \quad h_2 = h_1$$

L'enthalpie massique est conservée, et par conséquent l'enthalpie d'une certaine masse m l'est aussi $H_2 = H_1$.

GP : $H = H(T)$ (masse fixée) la température est conservée.

Un fluide suit la deuxième loi de Joule si $H = H(T)$.

7.3.2.

$$dS = n C_{pm} \frac{dT}{T} - nR \frac{dp}{p}$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p}$$

$$GP \quad T_2 = T_1 \quad s_2 - s_1 = -r \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$\delta m (s_2 - s_1) = \frac{\delta Q}{T_s} + \frac{\delta S_c}{\delta Q = 0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta S_c}{\delta m} = s_2 - s_1 = -r \ln \frac{p_2}{p_1} > 0 \\ \text{irréversible} \end{array} \right.$$

Une compression de JT ($p_2 > p_1$) donnerait $\frac{\delta S_c}{\delta m} < 0$, ce qui est impossible.

Application pratique : détendeur de bouteille de butane, dans réfrigérateur (détendeur).

7.3.3. *Test d'un gaz* : T conservée dans JGL et JT \Rightarrow modèle du GP utilisable.

8. Détection de la vitesse d'écoulement du fluide

$$8.1. \quad I = 0,4 \cdot 10^{-3} \left[1 + \cos(4 \pi V t / \lambda_0) \right]$$

L'expression est analogue à la relation fondamentale des interférences à deux ondes.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi \delta}{\lambda_0} \right) \text{ (éclairage)}$$

Exemple : miroirs de Fresnel.

$$8.2. \quad 8.2.1. \quad \text{L'admittance complexe est :} \quad \underline{Y} = j C \omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{j L \omega}$$

L'impédance complexe est :

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{R + j \left(C \omega - \frac{1}{L \omega} \right)} = \frac{R}{1 + j \left(RC \omega - \frac{R}{L \omega} \right)}$$

$$8.2.2. \quad \text{Module :} \quad Z = \frac{R}{\sqrt{1 + \left(RC \omega - \frac{R}{L \omega} \right)^2}}$$

$$\text{il est maximum pour :} \quad RC \omega = \frac{R}{L \omega}$$

$$LC \omega^2 = 1 \quad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z = Z_M = R \quad f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$$

$$8.2.3. \quad Q = \frac{R}{L\omega_0} = RC\omega_0 \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

$$8.2.4. \quad \omega_1 \text{ et } \omega_2 \text{ solutions de : } \frac{R}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 1 \quad Q \left(x - \frac{1}{x} \right) = -1 \quad \text{et} \quad Q \left(x - \frac{1}{x} \right) = 1$$

$$Qx^2 + x - Q = 0 \quad Qx^2 - x - Q = 0$$

$$\Delta = 1 + 4Q^2$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{\Delta}}{2Q} = \frac{\omega_1}{\omega_0} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2Q} = \frac{\omega_2}{\omega_0}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{Q} \quad \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

$$8.3. \quad 8.3.1. \quad LC \quad 4\pi^2 f_0^2 = 1 \quad L = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} \quad L = 2,53 \cdot 10^{-2} \text{ H}$$

$$8.3.2. \quad Q = \frac{R}{L \cdot 2\pi f_0} \quad Q = 62,9$$

$$8.3.3. \quad \omega_2 - \omega_1 = \frac{2\pi f_0}{Q} \quad \omega_2 - \omega_1 = 100 \text{ rad s}^{-1}$$

$$8.4. \quad 8.4.1. \quad \omega = \theta \quad \underline{Z} = \theta \quad Z = \theta$$

$U(t)$ purement sinusoïdale.

$$I(t) = \underbrace{0,4 \cdot 10^{-3}}_{\text{courant continu } (\omega = 0)} + \underbrace{0,4 \cdot 10^{-3} \cos \frac{4\pi Vt}{\lambda_0}}_{\text{composante sinusoïdale } \omega = \frac{4\pi V}{\lambda_0}}$$

Puisque : $Z(\omega = 0) = 0 \quad U_{AB}(\omega = 0) = 0$

la composante continue de la tension sera nulle, U sera purement sinusoïdale.

8.4.2. L'amplitude de U est maximale lorsque $Z = Z_M = R$, c'est-à-dire pour $\omega = \omega_0$.

La vitesse V telle que $\frac{4\pi V}{\lambda_0} = \omega_0$ donnera à l'amplitude de U sa valeur maximale.

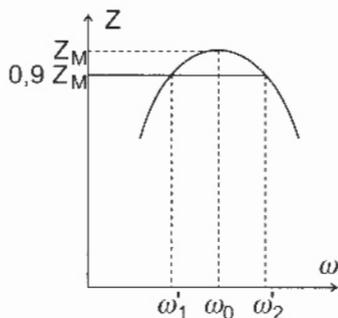
$$V = \frac{\lambda_0 \omega_0}{4\pi}$$

$$V = 0,316 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$8.5. \quad Z = 0,9 Z_M \quad Z^2 = 0,81 Z_M^2 \quad \frac{1}{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = 0,81$$

$$1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1,234 \quad Q \left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 0,484$$

On trouve : $x_2 - x_1 = 7,6 \cdot 10^{-3} \quad \omega'_2 - \omega'_1 = 7,6 \cdot 10^{-3} \omega_0 = 48$
 $\omega'_1 = \omega_0 - 24 = 6259 \quad \omega'_2 = \omega_0 + 24 = 6307 \quad (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$



Si on ne peut pas détecter des variations relatives de U inférieures à 10 %, on n'aura pas de différence de mesure lorsque Z varie entre $0,9 Z_M$ et Z_M .

Il en résulte une incertitude sur ω_0 égale à :

$$\frac{\omega'_2 - \omega'_1}{2} = \frac{\Delta\omega}{2}$$

$$V = \frac{\lambda_0 \omega_0}{4\pi} \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 4 \cdot 10^{-3}$$

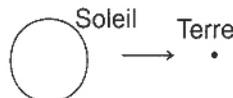
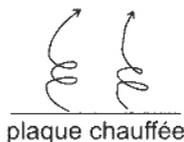
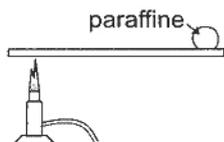
$$\Delta V = 4 \cdot 10^{-3} V \quad \Delta V = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,316 = 1,3 \cdot 10^{-3}$$

$$V = 0,316 \pm 0,0013 \quad V = 0,316 \pm 0,002 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$$

PARTIE 2

CONDUCTION OU DIFFUSION THERMIQUE

- | 1. Conduction | Convection | Rayonnement |
|---|---|---|
| Transfert thermique d'un point à un autre d'un même matériau sans aucun déplacement de matière. | Transfert thermique avec déplacement de matière (dans les fluides). | Électromagnétique, il traverse le vide. |



Instrument idéal pour empêcher la chaleur de passer : la bouteille thermos (s'oppose aux trois modes).

$$2. \quad \delta Q = j_Q S dt \quad \phi = \frac{\delta Q}{dt} = j_Q S$$

$$3. \quad \text{Loi de Fourier :} \quad j_Q = -K \frac{\partial T}{\partial x}$$

Signe \ominus : transfert thermique réel dans le sens des températures décroissantes.

Domaine de validité : le gradient de température ne doit pas être trop grand et la température ne doit pas varier trop rapidement.

\vec{j}_Q a le sens du transfert thermique réel dans le sens des températures décroissantes.

$$\vec{j}_Q = -K \vec{\text{grad}} T.$$

$$4. \quad dU_{\text{tranche}} = \delta Q \quad (\delta W = 0)$$

$$\underbrace{dm c dT}_{\text{corps condensé}} = \underbrace{j_Q(x, t) S dt}_{\text{«énergie entrante»}} - \underbrace{j_Q(x+dx, t) S dt}_{\text{«sortante»}}$$

$$\rho S dx c \frac{\partial T}{\partial t} dt = - \frac{\partial j_Q}{\partial x} dx S dt \quad \boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_Q}{\partial x}}$$

On utilise $j_Q = -K \frac{\partial T}{\partial x}$ pour déduire :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

(équation de la chaleur).

Commentaire : le changement de t en $-t$ ne laisse pas invariante cette équation, cela traduit l'irréversibilité de la conduction thermique.

5. En régime stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, $T = T(x)$, l'équation de la chaleur s'écrit :

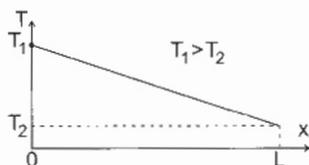
$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

$T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$ sont les conditions aux limites.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} = A \quad T(x) = Ax + B \quad T(0) = T_1 = B \\ T(L) = T_2 = AL + T_1 \\ A = \frac{T_2 - T_1}{L} \end{aligned}$$

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

$$j_Q = -K \frac{dT}{dx} = \frac{K}{L} (T_1 - T_2) \quad \phi = j_Q S = \frac{KS}{L} (T_1 - T_2)$$



Analogie :

$$V_1 - V_2 = RI = \frac{1}{\sigma S} I$$

$$I = \frac{\sigma S}{L} (V_1 - V_2) = \frac{1}{R} (V_1 - V_2)$$

Résistance thermique :

$$R_{TH} = \frac{L}{KS}$$

Intérêt de R_{TH} : En régime stationnaire on peut calculer la résistance thermique d'un système complexe en associant les résistances thermiques comme en électricité.

Tableau comparatif

Fourier	Ohm
\vec{j}_Q	\vec{j}
T	V
K	σ
$\vec{j}_Q = -K \vec{\text{grad}} T$	$\vec{j} = -\sigma \vec{\text{grad}} V$
$T_1 - T_2 = R_{TH} \cdot \phi \quad R_{TH} = \frac{L}{KS}$	$V_1 - V_2 = RI \quad R = \frac{L}{\sigma S}$

6. **Onde thermique**

$$A. \quad T(0, t) = T_0 + A \cos \omega t \quad A = \theta_0$$

δ est homogène à une longueur, puisque l'argument de l'exponentielle est sans dimension.

$$a^\alpha \omega^\beta = m \quad (m^2 s^{-1})^\alpha \cdot (s^{-1})^\beta = m$$

$$m^{2\alpha} \cdot s^{-\alpha-\beta} = m$$

en SI :

$$-\alpha - \beta = 0 \quad \alpha = -\beta$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\delta = \sqrt{2} a^{\frac{1}{2}} \omega^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$$

Type d'onde : $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0$ onde plane.

Signification physique de δ : l'amortissement de l'onde est caractérisé par une longueur de pénétration

$\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}$ d'autant plus faible que la pulsation est élevée.

Vitesse de phase :

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos \left(\omega t - \frac{x}{\delta} \right)$$

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos \omega \left(t - \frac{x}{\omega \delta} \right)$$

$$v = \omega \delta = \sqrt{2a\omega}$$

Les hautes fréquences ont une vitesse de propagation de la phase plus grande que les basses fréquences.

B. Fluctuations quotidiennes

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\delta = 0,12 \text{ m} \quad v = 8,54 \cdot 10^{-6} \text{ ms}^{-1} = 74 \text{ cm} \cdot \text{jour}^{-1}$$

$$T_0 = 5^\circ \text{C} \quad \theta_0 = 10^\circ \text{C} \quad \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} = 1 \quad x = 0,28 \text{ m}$$

Conclusion : On enterre les canalisations d'eau pour les protéger du gel.

C. Fluctuations annuelles

$$\omega = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 3600} = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\delta = 2,24 \text{ m} \quad v = 4,46 \cdot 10^{-7} \text{ ms}^{-1} = 3,8 \text{ cm} \cdot \text{jour}^{-1}$$

$$T_0 = 10^\circ \text{C} \quad \theta_0 = 20^\circ \text{C} \quad \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} = 1 \quad x = 6,7 \text{ m}$$

A 3,8 m de profondeur (environ 4 m) l'évolution de la température présente 100 jours de retard par rapport au sol et elle est atténuée de $e^{-3,8/2,24} = 0,18 \approx \frac{1}{5}$ (d'un facteur 5).

Conclusion : $T \approx$ constante dans une cave bien enterrée.

$$D. \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho C}{K} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

soit en représentation complexe :

$$\frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \underline{T}}{\partial t} \quad \theta = T - T_0 \quad \underline{\theta} = \underline{T} - T_0$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t} \quad \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t} = j\omega \underline{\theta} \quad \frac{\partial^2 \underline{\theta}}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} e^{j\omega t}$$

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dx^2} e^{j\omega t} = \frac{1}{a} \cdot j\omega \underline{f} e^{j\omega t} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{j\omega}{a} \underline{f} = 0}$$

La solution de cette équation différentielle est :

$$\underline{f}(x) = A e^{-rx} + B e^{+rx} \quad \text{avec} \quad r^2 = \frac{j\omega}{a}$$

$$\text{soit :} \quad r = \pm (1+j) \sqrt{\frac{\omega}{2a}} = \pm \frac{1+j}{\delta}$$

$$\text{d'où :} \quad \underline{f}(x) = A e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-j\frac{x}{\delta}} + B e^{+\frac{x}{\delta}} e^{+j\frac{x}{\delta}}$$

• Les variations de température restent finies quand $x \rightarrow \infty$, donc $B = 0$.

$$\bullet T(0, t) = T_0 + \theta_0 \cos \omega t \quad \begin{cases} \underline{T}(x, t) = T_0 + A e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-j\frac{x}{\delta}} e^{j\omega t} \\ \underline{T}(0, t) = T_0 + A \cos \omega t \end{cases} \quad \text{on a donc } A = \theta_0.$$

$$\underline{f}(x) = \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-j\frac{x}{\delta}}$$

$$\underline{\theta}(x, t) = \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-j\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}$$

$$\text{soit en notation réelle :} \quad \theta(x, t) = \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

$$\text{et :} \quad \boxed{T(x, t) = T_0 + \theta_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)}$$

PARTIE 3

ONDES

1.1. Équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad u = ct - x \quad v = ct + x \quad du = cdt - dx$$

$$dv = cdt + dx$$

$$s = s(x, t) \quad ds = \frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial t} dt$$

$$s = s(u, v) \quad ds = \frac{\partial s}{\partial u} du + \frac{\partial s}{\partial v} dv = \frac{\partial s}{\partial u} [cdt - dx] + \frac{\partial s}{\partial v} [cdt + dx]$$

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial v} - \frac{\partial s}{\partial u} \right) dx + \left(c \frac{\partial s}{\partial u} + c \frac{\partial s}{\partial v} \right) dt$$

en identifiant :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = c \frac{\partial s}{\partial u} + c \frac{\partial s}{\partial v} \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial v} - \frac{\partial s}{\partial u}$$

en dérivant et en permutant :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) + c \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)$$

en remplaçant $\frac{\partial s}{\partial t}$ par son expression :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= c \frac{\partial}{\partial u} \left(c \frac{\partial s}{\partial u} + c \frac{\partial s}{\partial v} \right) + c \frac{\partial}{\partial v} \left(c \frac{\partial s}{\partial u} + c \frac{\partial s}{\partial v} \right) \\ &= c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} + c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} + c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial v^2} \\ &= c^2 \left[\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 s}{\partial v^2} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial s}{\partial v} - \frac{\partial s}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial s}{\partial v} - \frac{\partial s}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 s}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 s}{\partial u^2}$$

l'équation de d'Alembert s'écrit :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} = \frac{c^2}{c^2} \left[\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 s}{\partial v^2} \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} = 0}$$

On peut aussi écrire : $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right) = 0$ donc $\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial v} = h(v) \\ \text{intégration à } v \text{ fixé} \end{cases}$

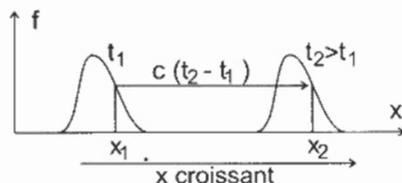
puis : $\begin{cases} s = \int h(v) dv + f(u) = g(v) + f(u) \\ \text{intégration à } u \text{ fixé} \end{cases}$

$$\begin{cases} s(u, v) = f(u) + g(v) \\ s(x, t) = f(ct - x) + g(ct + x) \end{cases}$$

1.2. Interprétation de $f(ct - x)$

Onde plane : la grandeur $f(ct - x)$ a la même valeur, à un instant t donné, en tous les points d'un plan perpendiculaire à l'axe Ox qui est la direction de propagation de l'onde. $f(ct - x)$ représente un signal qui se propage à la vitesse c , dans le sens des x croissants. En effet si à l'instant t_1 au point d'abscisse x_1 la fonction a la valeur $f(u_1)$ avec $u_1 = ct_1 - x_1$, elle retrouvera cette valeur à l'instant ultérieur $t_2 > t_1$ en un point d'abscisse x_2 tel que $ct_2 - x_2 = u_2$ reprenne la même valeur u_1 , on peut écrire $ct_1 - x_1 = ct_2 - x_2$ soit :

$$x_2 = x_1 + c(t_2 - t_1)$$



Même interprétation pour $g(ct + x)$, propagation dans le sens des x décroissants avec la vitesse c .

1.3. Onde plane monochromatique de pulsation ω (progressive) OPPM

- Propagation dans le sens des x croissants

$$s = A \cos(\omega t - kx) \quad \text{vecteur d'onde } \vec{k} = k \vec{u}_x$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda \text{ longueur d'onde, } v = \frac{\omega}{k} \text{ vitesse de propagation de l'onde (vitesse de phase).}$$

- Propagation dans le sens des x décroissants

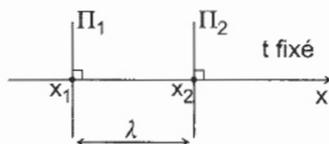
$$s = A \cos(\omega t + kx)$$

$$\text{En notation complexe } \underline{s} = \underline{A} e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{s} = \underline{A} e^{j(\omega t + kx)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow \text{multiplication par } j\omega \quad \frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow \text{multiplication par } \pm jk$$

les calculs sont souvent plus simples.

Longueur d'onde : λ



$$t \text{ fixé}$$

$$x_2 - x_1 = \lambda$$

s a la même valeur en tous les points des plans π_1 et π_2 .

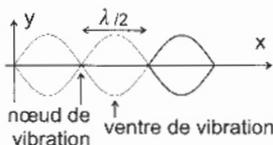
1.4. Méthode de séparation des variables

$s(x, t) = f(x) \cdot g(t)$ séparation des variables.

Type de solution : onde plane stationnaire.

Une OP stationnaire est différente d'une OPP : la dépendance spatiale intervient dans l'amplitude de l'oscillation temporelle et non plus dans la phase.

Un exemple : la corde de Melde



OS sur une corde.

Tous les points de la corde vibrent en phase ou en opposition de phase.

$$2.1. \quad dS = C_V \frac{dT}{T_0} + R \frac{dV}{V_0} \quad dS = C_P \frac{dT}{T_0} - R \frac{dP}{P_0}$$

2.2. $PV = RT$ (équation d'état du GP, 1 mole)

$$\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} \quad dS = C_V \left[\frac{dP}{P_0} + \frac{dV}{V_0} \right] + R \frac{dV}{V_0}$$

$$dS = C_V \frac{dP}{P_0} + (C_V + R) \frac{dV}{V_0} = C_V \frac{dP}{P_0} + C_P \frac{dV}{V_0}$$

$$\left. \begin{aligned} C_P - C_V &= nR = R \text{ (1 mole)} \\ C_P / C_V &= \gamma \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C_V &= \frac{R}{\gamma - 1} & C_P &= \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

$$dS = \frac{R}{\gamma - 1} \frac{dP}{P_0} + \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \frac{dV}{V_0}$$

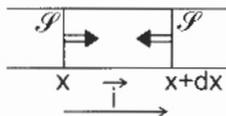
2.3. Coefficient de compressibilité isentropique

$$S = \text{constante} \quad dS = 0 = \frac{R}{\gamma - 1} \frac{dP_S}{P_0} + \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \frac{dV_S}{V_0}$$

$$\frac{dV_S}{dP_S} = - \frac{1}{\gamma} \frac{V_0}{P_0} = - \frac{1}{V_0} \frac{dV_S}{dP_S} = - \frac{1}{\gamma P_0} = - \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$$

$$\chi_S = \frac{1}{\gamma P_0} \quad \text{Application Numérique : } \chi_S = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$$

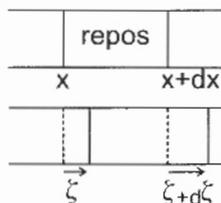
3.1. Onde acoustique plane



$$d\vec{F}_p = [(p(x) + P_0) \cdot \mathcal{S} - (p(x+dx) + P_0) \cdot \mathcal{S}] \vec{i}$$

$$d\vec{F}_p = - \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot \mathcal{S} \vec{i}$$

3.2. On applique la relation fondamentale de la dynamique à la tranche (système fermé).



$$(\rho_0 \mathcal{S} dx) \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = dF_p$$

$$\rho_0 \mathcal{S} dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x} dx \mathcal{S}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

 3.3. χ_S permet de déterminer la variation de volume due à la surpression :

$$- \frac{dV}{V_0} = \frac{dP}{\gamma P_0}$$

V_0 volume de la tranche au repos = $\mathcal{S} dx$.

$$dV = \mathcal{S} d\xi \quad dP = p$$

$$\frac{\mathcal{S} d\xi}{\mathcal{S} dx} = \frac{p}{\gamma P_0} \quad \left[p = -\gamma P_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{ou} \quad p = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]$$

$$3.4. \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad p = \frac{1}{\chi_S} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\chi_S} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$-\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\ \text{équation de d'Alembert} \end{array} \right.$$

$$3.5. \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \right) = -\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = -\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (-p \chi_S)$$

$$= \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

équation de d'Alembert

$$3.6. \quad u = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\chi_S} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_S} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{1}{\chi_S} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

équation de d'Alembert

Conclusion : La propagation d'une onde sonore dans le gaz est décrite par l'équation de propagation de d'Alembert vérifiée par le déplacement ξ , la surpression acoustique p et la vitesse acoustique $u = \frac{\partial \xi}{\partial t}$.

La célérité de l'onde (vitesse du son) est $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$

Homogénéité

$$[c^2] = \frac{1}{\frac{M}{L^3} \cdot \frac{1}{\text{pression}}} = \frac{L^3 \cdot \frac{\text{force}}{L^2}}{M} = \frac{L}{M} \cdot M \cdot LT^{-2} = L^2 \cdot T^{-2}$$

$[c] = \text{longueur} \times (\text{temps})^{-1}$.

$$3.7. \quad c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \frac{1}{\gamma P_0}}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \quad \left\{ \begin{array}{l} c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \end{array} \right.$$

$$3.8. \quad GP \quad \rho_0 = \frac{MP_0}{RT_0} \quad c^2 = \frac{\gamma P_0}{MP_0} RT_0 \quad c = 344 \text{ ms}^{-1}$$

$$T_0 = \frac{Mc^2}{\gamma R} \quad T_0 = 295 \text{ K}$$

3.9. Le gaz étudié est l'air. $\rho_0 = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$

$c = 344 \text{ ms}^{-1}$ à température ambiante.

3.10. Hypothèse isotherme : $\chi_T = \frac{1}{\rho_0}$ $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_T}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}$ $c = 291 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

4.1.
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho_0 c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = D_{TH} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} D_{TH} \text{ en } \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \\ D_{TH} = \frac{K}{\rho_0 c_p} \end{array}}$$

4.2. La propagation de la chaleur est beaucoup plus lente que celle d'une perturbation mécanique (la surpression).

Dans le cas d'ondes sinusoïdales :

• Pendant une période $x_{acoustique} = \lambda = c T_{\text{période}}$.

Pour la chaleur $\frac{x^2}{D_{TH}}$ est homogène à un temps (cf. § 4.1.), donc $x_{chaleur} \approx \sqrt{D_{TH} \cdot T_{\text{période}}}$.

L'approximation adiabatique suppose $x_{chaleur} \ll x_{acoustique}$, soit :

$$\boxed{T_{\text{période}} \gg \frac{D_{TH}}{c^2}}$$

Application Numérique : $c = 344 \text{ ms}^{-1}$ $D_{TH} = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

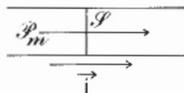
$$T_{\text{période}} \gg \frac{1,9 \cdot 10^{-5}}{344^2} = 1,6 \cdot 10^{-10}$$

$$v_{\text{propagation}} \ll 6 \cdot 10^9 \text{ Hz}$$

$$20 \text{ Hz} \ll v_{\text{audible}} < 20 \text{ kHz}$$

L'hypothèse adiabatique est toujours valable.

4.3.



$$p = p_0 \cos(\omega t - kx) \quad k = \frac{\omega}{c}$$

$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$ transcrit en complexe s'écrit :

$$\rho_0 i\omega \underline{u} = - (-jk) \underline{p}$$

$$\rho_0 \omega \underline{u} = k \underline{p} \quad \underline{p} = \rho_0 \frac{\omega}{k} \underline{u} = \rho_0 c \underline{u}$$

$$p = \rho_0 c u$$

La puissance instantanée est : $\mathcal{P}(t) = \text{force} \times \text{vitesse} = (p \cdot \mathcal{S}) \cdot u$

$$\mathcal{P}(t) = \rho_0 c u^2 \mathcal{S} = \rho_0 c \frac{p^2}{\rho_0^2 c^2} \mathcal{S} \quad \mathcal{P}(t) = \rho_0 c u^2 \mathcal{S} = \frac{p^2}{\rho_0 c} \mathcal{S}$$

$$\mathcal{P}_m = \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho_0 c} \mathcal{S}$$

$$4.4. \quad I = \frac{\mathcal{P}_m}{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho_0 c} \quad p_0 = \sqrt{2} p_{\text{eff}} \quad I = \frac{p_{\text{eff}}^2}{\rho_0 c}$$

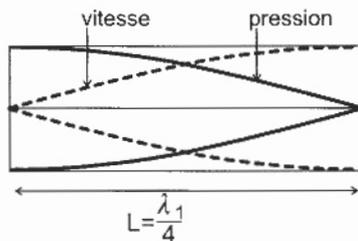
$$p_{\text{eff}} = \sqrt{\rho_0 c I_0} \quad p_{\text{eff}} = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$

seuil d'audibilité acoustique.

$$4.5. \quad p'_{\text{eff}} = \sqrt{\rho_0 c I} \quad N = 120 \text{ dB} \quad I = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \quad p'_{\text{eff}} = 21 \text{ Pa}$$

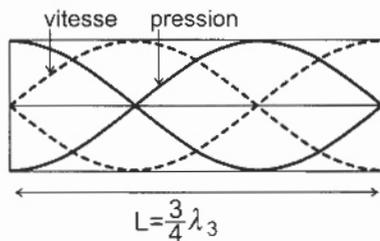
$$p'_{\text{eff}} (120 \text{ dB}) \ll P_0 = 10^5 \text{ Pa}$$

4.6. Ondes sonores stationnaires



fondamental : harmonique 1

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} \quad \nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{4L}$$



harmonique 3

$$\lambda_3 = \frac{c}{\nu_3} \quad \nu_3 = \frac{c}{\lambda_3} = 3 \cdot \frac{c}{4L} = 3 \nu_1$$

Remarque : Attention on n'a pas respecté les notations de l'énoncé.

$$\nu_1 = 86 \text{ Hz} \quad \nu_3 = 258 \text{ Hz}$$

$$4.7. \quad p = \rho_0 c u \quad \text{et} \quad u = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad \underline{u} = j \omega \underline{\xi} \quad u = \omega \xi$$

$$p = \rho_0 c \omega \xi \quad \xi = \frac{p}{\rho_0 c \omega} \quad \xi_0 = \frac{p_0}{\rho_0 c \omega}$$

$$p_0 = \rho_0 c \omega \xi_0 \quad \text{pour} \quad \xi_0 = 10^{-3} \text{ m} \quad p_0 = 1,3 \cdot 344 \cdot 2\pi \cdot 258 \cdot 10^{-3} \\ = 725 \text{ Pa}$$

Isentropique GP : $p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cste} \quad \gamma \frac{\Delta T}{T_0} + (1-\gamma) \cdot \frac{\Delta P}{P_0} = 0$

$$\Delta T = \frac{\gamma-1}{\gamma} \cdot T_0 \cdot \frac{p_0}{P_0} \quad \Delta T = 0,6 \text{ K}$$

Remarque : L'Application Numérique n'est pas réaliste $p_0 = 725 \text{ Pa}$ trop grand (ξ_0 non réaliste).

$$120 \text{ dB} \leftrightarrow 21 \text{ Pa}$$

5.1. Ondes électromagnétiques

loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ $\rho = 0$	Équations de Maxwell : $\text{div } \vec{E} = 0$ $\text{div } \vec{B} = 0$	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
--	--	--

5.2. Champ électrique

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\text{rot} (\text{rot } \vec{E}) = \Delta \vec{E} \quad \text{grad} \left(\frac{\text{div } \vec{E}}{0} \right)$$

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

5.3. $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(kx - \omega t)} \quad k = k' + j k''$

l'ED transcrit en complexe s'écrit :

$$k^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} - j \omega \mu_0 \sigma \vec{E}$$

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 + j \omega \mu_0 \sigma \quad \mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + j \frac{\mu_0 \sigma c^2}{\omega} \right) \quad k' \leftrightarrow \text{propagation} \quad v_\phi = \frac{\omega}{k'}$$

$$k'' < 0 \leftrightarrow \text{amortissement}$$

5.4. Le terme «diffusif» est $j \frac{\mu_0 \sigma c^2}{\omega}$ (provient de $\vec{j} = \sigma \vec{E}$)

On veut : $\mu_0 \sigma c^2 \gg \omega \quad 6,8 \cdot 10^{18} \gg \omega$

fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi} \quad f \ll 10^{18} \text{ Hz}$ condition peu restrictive.

5.5. $k^2 = j \mu_0 \sigma \omega \quad \sqrt{j} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+j) \quad k = \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}} (1+j)$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta_p}} \cdot e^{j \left(\frac{x}{\delta_p} - \omega t \right)} \quad \delta_p = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

Signification de δ_p : l'onde pénètre le métal sur une longueur de quelques δ_p .

f	1 kHz	1 MHz	1 GHz	$\delta_p = \frac{6,5 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{f}}$
δ_{pm}	$2 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$	

La longueur de pénétration diminue quand la fréquence augmente.

5.6. Comparaison

$$\delta_{TH} = \sqrt{\frac{2a}{\omega}} = \sqrt{\frac{2K}{\rho c \omega}} \quad \delta_p = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

Les conductivités K et σ jouent des rôles inverses. Une conductivité thermique élevée favorise la pénétration ; une conductivité électrique élevée défavorise la pénétration à cause du phénomène d'induction électromagnétique.

C'est un fait bien connu que les métaux, bons conducteurs de l'électricité, sont aussi bons conducteurs de la chaleur : dans les deux cas les agents actifs sont les **électrons libres**.

C'est l'effet de peau (δ_p est l'épaisseur de peau), le phénomène physique qui en est à l'origine est l'induction électromagnétique.

Agrégation (Concours Interne)

OPTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE ET PHYSIQUE APPLIQUÉE

Composition avec exercices d'application - Session : 1999

Option : **PHYSIQUE ET CHIMIE**

PARTIE A

AUTOUR DE L'ARGENT

1. L'atome d'argent et ses ions.

1.1. L'atome d'argent : $Z = 47$.

1.1.1. $1 \text{ uma} = 1/12$ masse de l'atome $^{12}_6\text{C}$.

1.1.2. $^{107}_{47}\text{Ag} \begin{pmatrix} 47 \text{ protons} \\ 60 \text{ neutrons} \end{pmatrix} \quad ^{109}_{47}\text{Ag} \begin{pmatrix} 47 \text{ protons} \\ 62 \text{ neutrons} \end{pmatrix}$

1.1.3. $M = 107,86 \text{ uma}$.

1.1.4. Klechkowsky : $(n+1) \nearrow$. A même $(n+1)$, $n \nearrow$. Prédiction : $[\text{Kr}] 4d^9 5s^2$.

Réel : $[\text{Kr}] 4d^{10} 5s^1$ (couche $4d$ complète).

1.1.5. Slater $\bullet [\text{Kr}] 4d^9 5s^2 \begin{cases} Z'_{5s} = 4,2 \\ Z'_{4d} = 8,2 \end{cases} \quad E_1 = E_{\text{calcul}} - 13,6 \times 46,46 \text{ eV.}$

$\bullet [\text{Kr}] 4d^{10} 5s^1 \begin{cases} Z'_{5s} = 3,7 \\ Z'_{4d} = 7,85 \end{cases} \quad E_2 = E_{\text{calcul}} - 13,6 \times 45,87 \text{ eV.}$

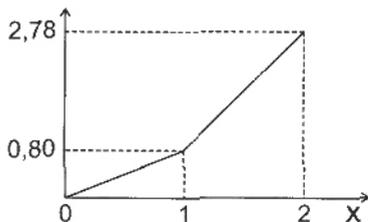
$E_1 < E_2$ donc anomalie (la méthode de Slater n'est pas assez précise dans ce cas).

Rayon atomique : rayon de Slater $r_0 = a_0 \frac{(n^*)^2}{Z'}$ soit 229 pm pour la configuration réelle (1 électron $5s$ externe).

1.2. Les ions.

1.2.1. $\text{Ag}^+ [\text{Kr}] 4d^{10}$.

1.2.2. $P.I. (\text{Ag}) = E(\text{Ag}^+) - E(\text{Ag}) = -E(5s) = 13,6 \left(\frac{3,7}{4} \right)^2 = 11,64 \text{ eV.}$

1.2.3. 1.2.3.1. Diagramme de Frost à $pH = 0$.

1.2.3.2. $\Delta_r G^0 = -nFE^0$

$$\text{Ag} + \text{Ag}^{2+} \rightleftharpoons 2\text{Ag}^{+} \quad \Delta_r G^0 = 2F [E^0(\text{Ag}^+ / \text{Ag}) - E^0(\text{Ag}^{2+} / \text{Ag})]$$

$$= -0,59 \times 2F < 0 \quad \text{stabilité de Ag}^+$$

2. Métallurgie de l'argent.

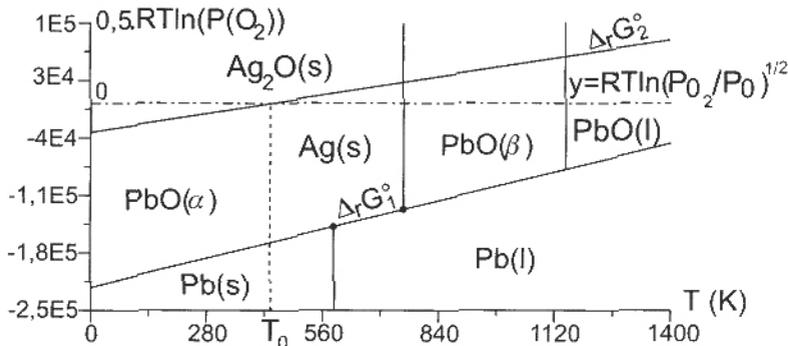
2.1. La coupellation.

2.1.1. $\Delta_r G_1^0 = -224,1 + 109,2 \cdot 10^{-3} T$ (kJ · mol⁻¹) pour la frontière $\text{PbO}(\alpha) / \text{Pb}(l)$.

2.1.2. $\Delta_r G_2^0 = -31 + 66,1 \cdot 10^{-3} T$ (kJ · mol⁻¹) pour la frontière $\text{Ag}_2\text{O}(s) / \text{Ag}(s)$.

2.1.3.

2.1.4



→ Oxydation préférentielle du plomb, à toute température.

A 1100°C (1373 K) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pb}(l) \rightarrow \text{PbO}(l), \text{ qui surnage } (d < 8,0) \\ \text{Ag} (d \approx 10,5) \text{ reste en dessous} \end{array} \right. \rightarrow \text{extraction}$

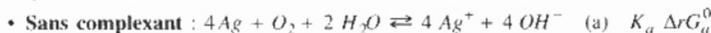
2.1.5. Intersection de la droite $y = RT \ln \left(\frac{P_{\text{O}_2}}{P_0} \right)^{1/2} = -6,69 \cdot 10^{-3} T$ (kJ · mol⁻¹) pour l'air ($P_{\text{O}_2} = 0,2 P_0$) et de la frontière $\text{Ag}_2\text{O}(s) / \text{Ag}(s)$ à $T_0 = 426$ K (soit 153°C).

Dans la vie courante, Ag s'oxyde, mais lentement → métal précieux : bijouterie, argenterie, électricité. En principe, destruction spontanée de la couche d'oxyde pour $T > T_0$.

2.2. La lixiviation.



Le calcul de la constante K permet de justifier le rôle des ions CN^- . On décompose en deux étapes :

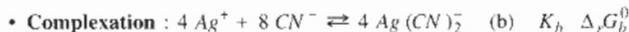


$$\left\{ \begin{array}{l} 4Ag^+ + 4e^- \rightleftharpoons 4Ag \quad E = 0,80 + \frac{0,06}{4} \log [Ag^+]^4 \\ 4e^- + O_2 + 2H_2O \rightleftharpoons 4OH^- \quad E' = 1,23 + \frac{0,06}{4} \log \frac{P_{O_2} K_e^4}{[OH^-]^4} \end{array} \right.$$

$$E = E' \rightarrow \frac{0,06}{4} \log K_a = 0,43 + 0,06 \log K_e$$

$$\log K_a = -26,8 \quad \Delta_r G_a^0 = 153 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

(a) non spontanée de gauche à droite, Ag stable.

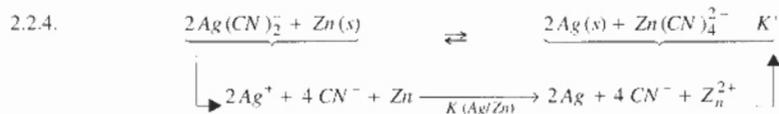


$K_b = \beta^4 \quad \Delta_r G_b^0 = -483,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \ll 0$ va largement contrebalancer $\Delta_r G_a^0$.

$$K = K_a K_b \quad \Delta_r G^0 = \Delta_r G_a^0 + \Delta_r G_b^0$$

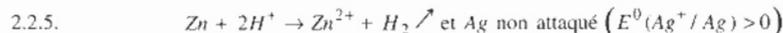
$$= 10^{57,6} \quad = -330,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \ll 0 \quad \text{(a) + (b) spontanée}$$

Donc rôle «dissolvant» du complexant CN^- .



$$\left(\begin{array}{l} E^0(Ag^+/Ag) \\ E^0(Zn^{2+}/Zn) \end{array} \right) \rightarrow K(Ag/Zn) = 10^{88} \quad K' = \frac{\beta_{Zn} K(Ag/Zn)}{\beta_{Ag}^2} = 10^{27}$$

réaction totale, récupération de Ag solide.



Il y a bien séparation, par dissolutions successives, de l'argent et du zinc.

3. L'argent et ses alliages.

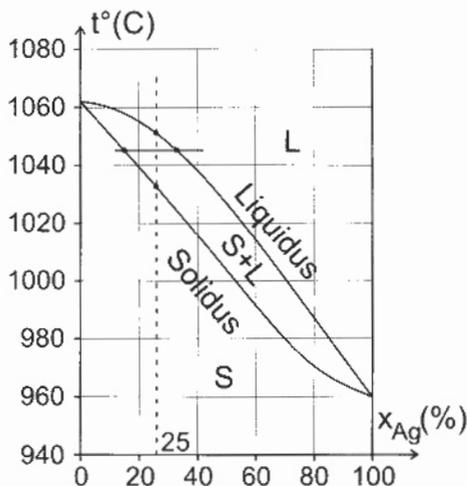
3.1. Alliage de substitution : un atome Ag remplace un atome Au, sans changement de structure.

3.2. Possible car les rayons atomiques sont égaux (144 pm).

3.3. Couronne de Hiéron - 4180 g.

$$\text{Composition massique} \begin{cases} \text{Ag } 684,44 \text{ g } (16,37 \%) \\ \text{Au } 3495,56 \text{ g } (83,63 \%) \end{cases}$$

$$\text{Composition molaire} \begin{cases} \text{Ag } 6,34 \text{ moles } (26,34 \%) \\ \text{Au } 17,74 \text{ moles } (73,66 \%) \end{cases}$$

soit la formule statistique $\text{Au}_{0,74} \text{Ag}_{0,26}$.3.4. 3.4.1.
3.4.2.3.4.3. Première goutte liquide à 1036°C .

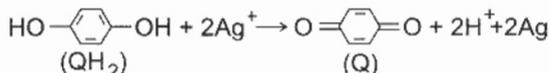
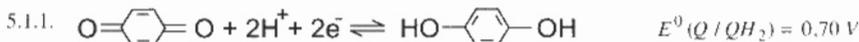
$$\text{Composition liquide} : \begin{cases} x_{\text{Ag}} = 0,40 \\ x_{\text{Au}} = 0,60 \end{cases}$$

3.4.4. Δ à 1045°C , composition molaire : Liquide $\begin{cases} x_{\text{Ag}}^{(l)} = 0,31 \\ x_{\text{Au}}^{(l)} = 0,69 \end{cases}$ Solide $\begin{cases} x_{\text{Ag}}^{(s)} = 0,17 \\ x_{\text{Au}}^{(s)} = 0,83 \end{cases}$

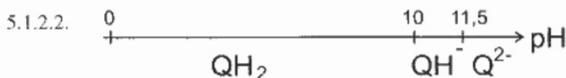
$$\text{d'où composition massique : Liquide} \begin{cases} w_{\text{Ag}}^{(l)} = 0,20 \\ w_{\text{Au}}^{(l)} = 0,80 \end{cases} \quad \text{Solide} \begin{cases} w_{\text{Ag}}^{(s)} = 0,10 \\ w_{\text{Au}}^{(s)} = 0,90 \end{cases}$$

5. Impression de la pellicule.

5.1. Étude redox du révélateur.



5.1.2. 5.1.2.1. Électrode de verre : mesure du pH.
 Électrode de Pt : mesure de V.
 Référence : ESC (calomel saturé) ou à Ag Cl (pour le § 5.1.2.3.).



$$E = 0,70 - 0,06 \text{ pH} + 0,03 \log \frac{[Q]}{[QH_2]}$$

Si $\text{pH} > 10$, on change de couple ($QH_2 \rightarrow QH^-$ puis Q^{2-}).

Mesure de E peut servir à la mesure du pH (ancienne électrode à quinhydrone).

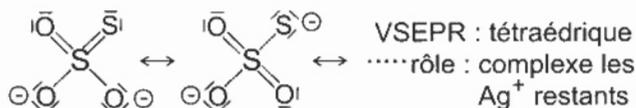
5.1.2.3. Électrode de référence à argent :

$$E = 0,8 - 0,06 \text{ p}K_s - 0,06 \log [Cl^-]$$

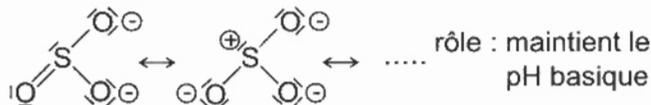
(Ag Cl saturé, $\text{p}K_s$ atteint) $E = 0,278 \text{ V}$ par rapport à l'ENH.

5.2. Étude du fixateur.

5.2.1. Thiosulfate :

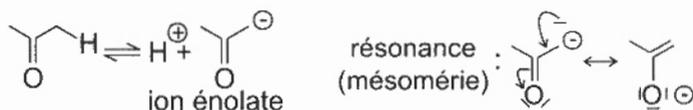


5.2.2. Sulfite :

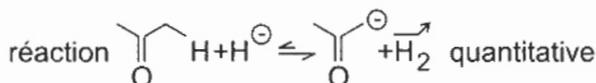
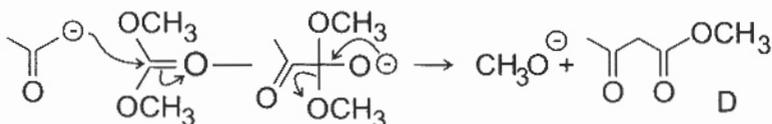


Si le milieu est trop acide : $2 \text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 4 \text{H}^+ \rightleftharpoons 2 \text{S} + 2 \text{SO}_2 + 2 \text{H}_2\text{O}$ dismutation

6. Synthèse d'un colorant photographique azoté.

6.1. Formation de **D**.6.1.1. Acidité de la propanone : présence de H sur le carbone en α du $C=O$.

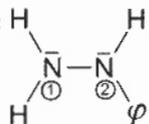
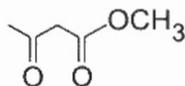
6.1.2.

Couple (H_2 / H^{\ominus}), $pK_a = 48$ très grand. ΔpK_a énorme avec celui de la propanone (≈ 20).6.1.3. Addition-élimination sur le $C=O$ du carbonate de méthyle :Il faut travailler en milieu anhydre car l'ion énolate (base plus forte que OH^{\ominus}) serait détruit par l'eau.

6.1.4. Rendement 70 % par rapport à la propanone (minoritaire au départ).

6.1.5.

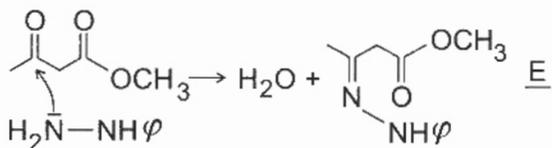
Réactions parasites $\left\{ \begin{array}{l} \text{aldolisation de la propanone} \\ \text{(et même crotonisation vu la basicité forte du milieu)} \\ \text{attaques successives} \end{array} \right.$

6.1.6. *Mode opératoire* : excès de carbonate, tandis que la propanone est ajoutée goutte à goutte (l'énolate se forme donc en quantité très faible et attaque essentiellement le carbonate).6.2. Passage à **F** et **F'**.6.2.1. Phénylhydrazine : H Doublet de N_1 reste libre.Doublet de N_2 est moins libre, car engagé dans une conjugaison avec le système délocalisé du noyau benzénique (ϕ).L'azote N_1 sera le plus nucléophile.Dans **D**, deux carbonyles :

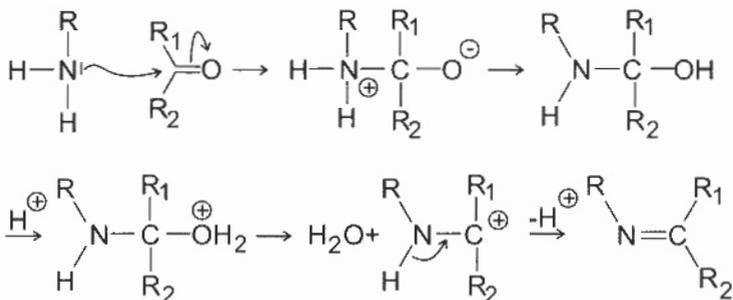
Celui de gauche est plus réactif vis-à-vis d'une attaque nucléophile (orbitale BV plus basse). On sait que les esters (carbonyle porteur d'un oxygène donneur par effet mésomère) réagissent moins vite que les cétones dans ce type de réaction.

6.2.2. *Première étape* : formation de E, qui est une phénylhydrazone. Réaction classique d'obtention de dérivés caractéristiques du carbonyle.

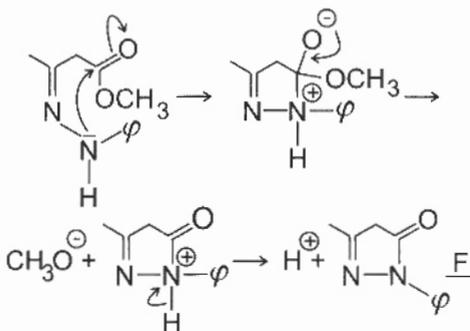
6.2.4.



Mécanisme :



Deuxième étape : le second azote réagit à son tour sur l'autre carbonyle, très proche :



La deuxième étape succède immédiatement à la première, bien que l'azote N_2 soit moins bon nucléophile et l'ester moins réactif.

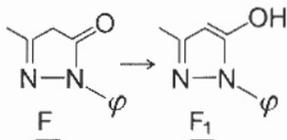
En effet :

- disponibilité géographique immédiate ;
- formation d'un cycle à 5, stériquement favorisé ;
- conjugaison (double liaison $C = N$, doublet de N , double liaison $C = O$) dans F.

6.2.5.

6.2.6.

6.2.7.



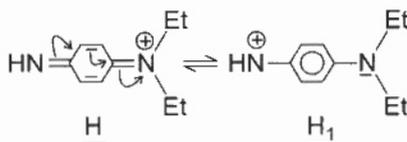
* Tautomérie céto-énolique.

* Caractère aromatique (deux doubles liaisons et un doublet sur le N de droite, donc $6 e^- \pi$) du cycle. Thermodynamiquement favorisé.

6.3. G est un développeur chronogène.

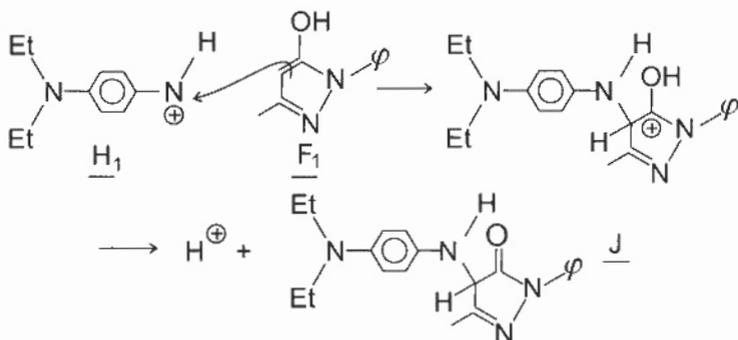
 6.3.1. G révélateur photographique, dans un premier temps, car il transforme en atomes d'argent les ions Ag^+ insolés (cf. rôle de l'hydroquinone QH_2 en 5.1.).

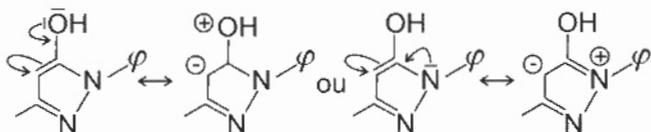
6.3.2.



6.3.3.

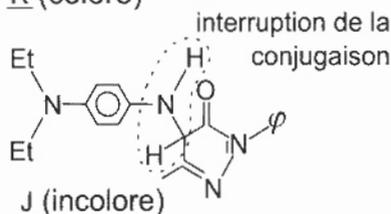
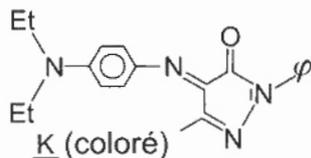
6.3.4.


 L'attaque initiale de H_1 sur F_1 est une attaque électrophile (analogue au début d'une SE_{Ar}).

 Rôle joué par les substituants de F_1 : OH donneur oriente en o - (ou p). On peut écrire des formes résonnantes :


6.3.5.

6.3.6.


 Dans K, la conjugaison s'étend sur toute la molécule. Dans J les deux parties insaturées, plus petites, sont séparées par une liaison $N - C$ simple.

6.3.7. Passage de J à K : redox.

6.3.8. Leucodérivé : forme incolore (cf. leucocyte).

6.3.9. G : forme réduite du développeur $\xrightarrow{Ag^{\oplus}}$ forme oxydée H₁ (rôle de révélateur), qui se couple avec F₁, initialement présent \rightarrow colorant K final, aux endroits où la pellicule a été impressionnée (donc chromogène).

NB : E₁ doit être incorporé dans la couche sensible au vert (ce qui va permettre la formation d'un colorant de la couleur complémentaire, le magenta).

PARTIE B THÉORIE DE HÜCKEL

1. Conjugaison et structure.

1.1. Préliminaires.

1.1.1. Système conjugué : ensemble d'atomes possédant des orbitales *p* se recouvrant latéralement.

1.1.2. Huit systèmes conjugués : A, B, E, F, G, H, I, J.

1.1.3. A : buta-1,3-diène D : cyclohexa-1,4-diène E : prop-2-énal H : vinylbenzène.



1.2. Systèmes hydrogénéocarbonés conjugués.

1.2.1. Théorie de Hückel.

1.2.1.1. Intégrale Coulombienne $\alpha = \int \varphi H \varphi dt$. Énergie d'un électron dans l'O.A. φ .

1.2.1.2. $\beta_{AB} = \int \varphi_A H \varphi_B dt$ intégrale de résonance. $|\beta|$ donne une « mesure » de la force de la liaison entre les atomes A et B.

1.2.1.3. Oxygène à un électron π dans

à deux électrons π dans ou

1.2.1.4. $\alpha_F = \alpha + 3\beta$ ($\alpha = \alpha_c, \beta = \beta_{cc}$). Fluor élément le plus électro-négatif.

1.2.1.5. Cation cyclopropénium : ou mieux

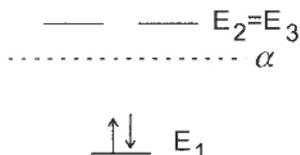
Déterminant séculaire :

$$\begin{vmatrix} \alpha - E & \beta & \beta \\ \beta & \alpha - E & \beta \\ \beta & \beta & \alpha - E \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \quad \text{en posant } x = \frac{\alpha - E}{\beta}$$

$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \text{ solution évidente} \\ \text{Puis } x = 1 \text{ encore une fois et } x = -2 \end{array} \right.$

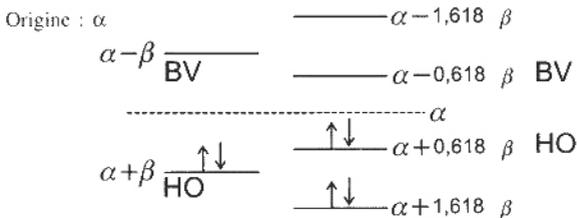
$$\text{énergies : } \begin{cases} E_2 = E_3 = \alpha - \beta & \text{BV } (\beta < 0) \\ E_1 = \alpha + 2\beta & \text{HO (deux électrons } \pi) \end{cases}$$

Diagramme des niveaux :



$$\text{Pour la HO, } \psi = \frac{1}{\sqrt{3}} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3).$$

1.2.2. Orbitales frontières.



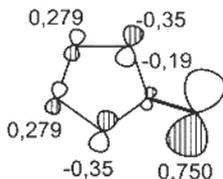
éthylène butadiène

1.3. Énergie de délocalisation.

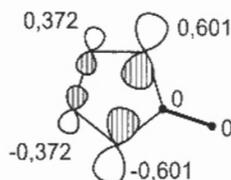
1.3.1. Fulvène.

Six électrons π

$$\text{BV : } \psi_4 \quad E_4 = \alpha - 0,254\beta$$



$$\underline{HO} : \psi_3 E_3 = \alpha + 0.618 \beta$$



1.3.2. Énergies de délocalisation.

1.3.3.

Système	$\Delta\epsilon$	Système	$\Delta\epsilon$
fulvène	1,466 β	buta-1, 3-diène	0,472 β
acroléine	0,52 β	cyclobuta-diène	0
hexa-1, 3, 5-triène	β	benzène	2 β
octa-1, 3, 5, 7-tétraène	1,52 β	cyclooctatétraène	1,64 β

Il y a stabilisation par conjugaison, pour des systèmes linéaires.

1.3.4. Énergies de résonance.

Système (nb. d'e π)	$\Delta\epsilon_{rés}$	Système (nb. d'e π)	$\Delta\epsilon_{rés}$
cation cyclopropénium (2)	2 β	benzène (6)	β
cyclobutadiène (4)	-0,472 β	cyclooctatétraène (8)	0,14 β

Critère de Hückel :

- aromaticité pour $4n + 2$ électrons π ;
- antiaromaticité pour $4n$ électrons π .

Bien respecté pour le cation cyclopropénium, le cyclobutadiène et le benzène. Pour le cyclooctatétraène, qui ne doit pas être aromatique (expérimentalement il s'avère non plan), la valeur calculée n'est pas satisfaisante, quoique faible en valeur absolue : ceci révèle une faiblesse ou une imprécision de la méthode.

1.3.5. Preuves thermodynamiques.

1.3.5.1. Énergie de délocalisation du benzène :

$$\Delta\epsilon = 206,3 - 119,7 \times 3 = -152,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

1.3.5.2. Naphtalène et azulène.

Six électrons π : les deux substances sont aromatiques.

Raisonnement thermodynamique sur les enthalpies de combustion.

→ naphtalène plus stable (de $137 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$), l'énergie de résonance y est supérieure en valeur absolue.



2. Applications de Hückel à la réactivité chimique.

2.1. Chlorure de vinyle.

2.1.1. Formes résonantes



2.1.2. Système π

Quatre électrons (deux de l'éthylène + un doublet de Cl ; cf. formes résonantes).

Éthylène perturbé, énergies $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ deviennent :

$$E_2 = \alpha + 0,93 \beta \quad \text{et} \quad E_3 = \alpha - 1,03 \beta$$

E_1 est voisine de celle de l'O.A. de Cl non perturbé ($\alpha + 2\beta$).

 2.1.3. Effet de l'atome de chlore

Relèvement de E_2 (surtout) et de E_3 (un tout petit peu). En outre, dans ψ_2 , introduction d'un déséquilibre entre les coefficients C_1 et C_2 ($0,710 > 0,660$) initialement égaux dans l'éthylène.

Chlore donneur par effet mésomère.

 2.1.4. Charges partielles π

Nombres d'électrons : $n_1 = n_2 = 2$; $n_3 = 0$ (quatre électrons π)

Avec les charges nettes

* $Q_i = 1 + q_i$ pour les carbones C_1 et C_2 , ceci donne :

$$Q_1 = -0,34 |e| \quad Q_2 = +0,015 |e|$$

* $Q_i = 2 + q_i$ pour Cl (qui contribue à hauteur de deux électrons au système π , par son doublet engagé dans la conjugaison), d'où :

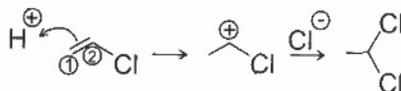
$$Q_{Cl} = +0,017 |e|.$$

L'effet inducteur du chlore n'intervient pas dans le système π . Charges en accord avec les formes résonantes.

 2.1.5. Réaction avec le chlorure d'hydrogène

Étape initiale : attaque électrophile de H^{\oplus} sur le système π .

Mécanisme :



En théorie de Hückel :

- électrophile H^{\oplus} réagit par sa BV (ici 1 s) :

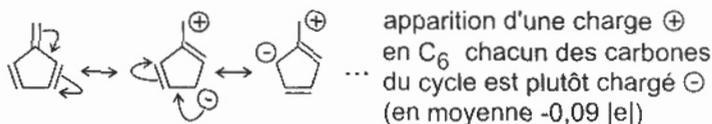
- nucléophile Cl^- réagit par sa HO, c'est-à-dire ψ_2 , où le plus gros coefficient est en C_1 (dans la numérotation utilisée pour le tableau des coefficients). Attaque de H^{\oplus} sur C_1 , ce qui fournit le résultat correct.

 2.2. Réactivité électrophile ou nucléophile.

 2.2.1. Fulvène.

2.2.1.1. Charge nette : $Q_6 = +0,378 |e|$.

2.2.1.2. Formules mésomères (cf. analogie du benzène) :



2.2.1.3. Attaque par un réactif nucléophile.

Sous contrôle de charge, attaque en C_6 (charge positivement).

Sous contrôle orbitalaire, attaque également en C_6 (gros coefficient dans la BV).

2.2.1.4. Activité nucléophile éventuelle du furène.

Sous contrôle de charge : charge négative faible sur C_2, C_3, C_4 et C_5 .

Activité nucléophile faible.

2.2.2. Enols.

2.2.2.1. Charges nettes dans l'ion éthénolate.

Atome	C_1	C_2	C_3
$Q_i / e $	- 0,14	+ 0,14	- 0,20

N.B. : Faute d'impression dans l'énoncé. L'O.M. ψ , n'est pas normalisée, la somme des Q_i diffère de $- |e|$.

Toutefois la répartition sur les divers atomes est correcte, ce qui ne nuit pas aux conclusions.

2.2.2.2.

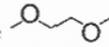
2.2.2.3. Attaque nucléophile.

Sous contrôle de charge, l'éthénolate attaque par son oxygène (charge négative la plus importante).

Sous contrôle orbitalaire, l'éthénolate attaque par le carbone C_1 (qui porte le plus gros coefficient dans la HO).

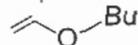
2.2.2.4. Réaction de l'éthénolate sur le 1-bromobutane.

L'ion éthénolate est toujours accompagné d'un contre-ion (par exemple Na^{\oplus} , accompagnant initialement la base forte ayant servi à le fabriquer par réaction acido-basique). Le rôle du solvant est de dissocier (ou non) la paire d'ions ainsi formée.

- Dans le diméthoxyéthane , apolaire, la paire d'ions n'est pas dissociée et l'oxygène est masqué. Seul le centre nucléophile en C_1 réagit



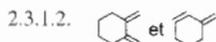
- Dans le diméthyl méthanamide (DMF), très polaire, la paire d'ions est dissociée, ce qui libère le centre nucléophile O. Il y a O-alkylation conduisant à



2.3. Réaction de Diels et Alder.

2.3.1. Stéréochimie.

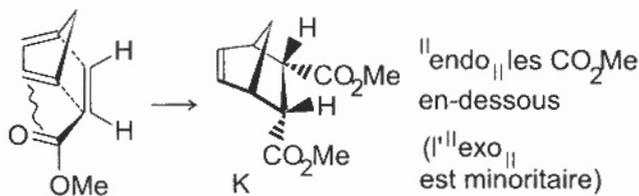
2.3.1.1. Butadiènes s-cis et s-trans indiscernables en théorie de Hückel (même connectivité).



Seul le premier possède la stéréochimie s-cis propre à la formation ultérieure d'un cycle par cycloaddition d'un alcène.

2.3.1.3. Stéréosélectivité.

Cycloaddition du cyclopentadiène et du maléate de diméthyle pour donner préférentiellement le composé "endo, K". Schéma réactionnel indiquant l'existence d'interactions secondaires favorables lors de l'attaque endo :

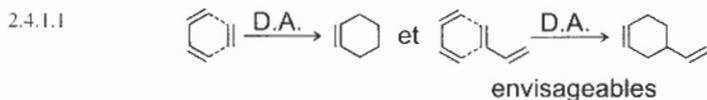


2.3.1.4. Enantiosélectivité.

On part de squelettes achiraux. (L) apparaît sous forme de la structure dessinée dans l'énoncé (et qui est chirale) et de son énantiomère, en quantités égales. Finalement on obtient un racémique.

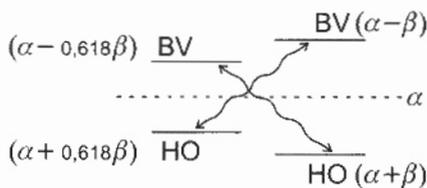
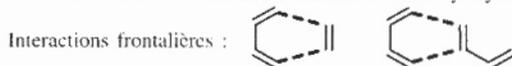
2.4. Étude de la réactivité du butadiène.

2.4.1. Réaction sur l'éthylène.

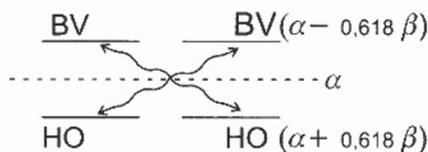


C'est l'isomère s-cis du butadiène qui réagit (cf. question § 2.3.1.2.).

2.4.1.2. Réaction observée : la deuxième (formation de vinyl cyclohexène).



$$\Delta E_1 = 1,618 |\beta|$$



$$\Delta E_2 = 1,236 |\beta|$$

$\Delta E_2 < \Delta E_1$ donc interaction butadiène-butadiène plus favorable.

2.4.2. Aspect cinétique de la réaction acroléine (A) + butadiène (B)

2.4.2.1. Équations cinétiques :

$$\frac{dx}{dt} = k_1[A][B]$$

$$= k_1(a-x)(a-x-2y)$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2[B]^2$$

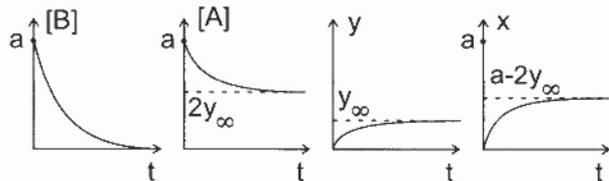
$$= k_2(a-x-2y)^2$$

avec forçement : $[A] = [B] + 2y > [B]$ (conservation matière).

2.4.2.2. Graphes.

$$[B] \rightarrow 0 \quad [A] \rightarrow 2y_\infty \quad y \rightarrow y_\infty \quad x \rightarrow a - 2y_\infty$$

$$a - x_\infty - 2y_\infty = 0 = [B]_\infty \quad [A]_\infty = 2y_\infty$$



2.4.2.3 Résultats expérimentaux.

Sans intégrer, on a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2}{k_1} \times \frac{a-x-2y}{a-x}$$

d'où, pratiquement, le rapport :

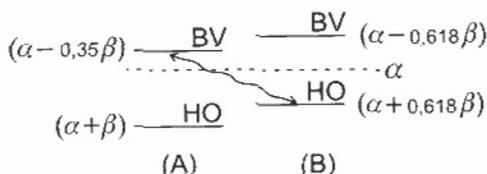
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k_2}{k_1} \times \frac{a-x-2y}{a-x}$$

en notant $\left. \begin{array}{l} \Delta y (= y) \\ \Delta x (= x) \end{array} \right\}$ les concentrations en B_2 et AB apparues au temps t depuis $t = \theta$ ($x_\theta = y_\theta = \theta$).

Pour $t = 40$ mn :

$$\left. \begin{array}{l} [A] = 0,35 \\ [B] = 0,22 \end{array} \right\} \begin{cases} x = 0,65 \\ y = 0,065 \end{cases} \quad \begin{array}{l} k_2 = 0,065 \\ k_1 \end{array} = \frac{0,065}{0,65} \times \frac{0,35}{0,22} = 0,16 \quad k_2 \ll k_1$$

Interaction frontalière A - B :

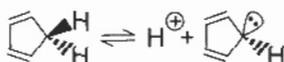


L'interaction la plus favorable est celle de BV(A) avec la HO(B), pour laquelle $\Delta E_3 = 0,968 |\beta| < \Delta E_2$ déjà rencontré pour l'interaction B / B (1,236 $|\beta|$).

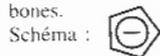
2.5. Propriétés acido-basiques.

2.5.1. Étude du cyclopentadiène.

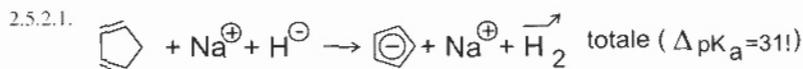
Base conjuguée formée par l'équilibre acido-basique donc stabilité par conjugaison.



Structure réelle plane, avec six électrons π (aromaticité) délocalisés sur le squelette à cinq carbones.

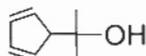


2.5.2. Application à la synthèse du diméthylfulvène.

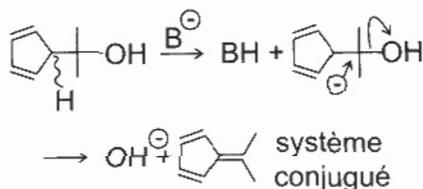


2.5.2.2. Comme tout diène, le cyclopentadiène a tendance à se dimériser spontanément (cf. § 2.4.). Lors de la distillation, le chauffage décompose le dimère en régénérant le monomère, plus volatil et séparé ensuite.

2.5.2.3. La propanone subit une attaque nucléophile de la part du carbanion cyclopentadiényle : il y a addition sur le carbonyle avec formation de l'alcool tertiaire.

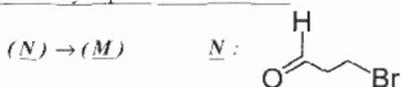


2.5.2.4. Ce dernier se déshydrate facilement en milieu basique (cf. crotonisation) :

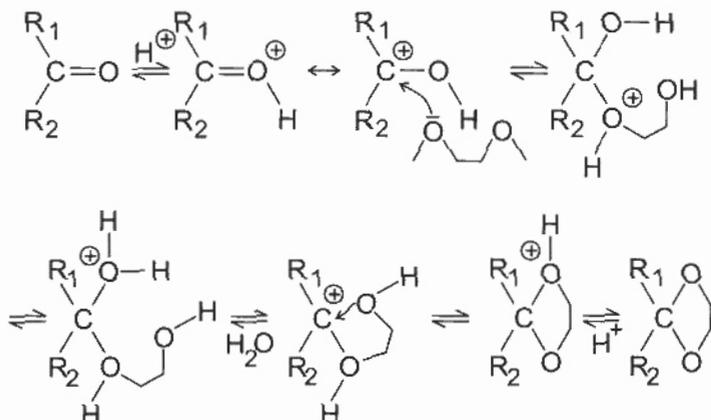


2.5.3. Obtention d'un cyclopentadiène substitué.

2.5.3.1.

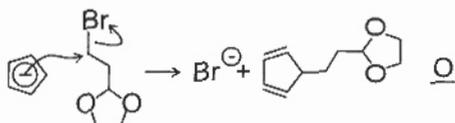


Le passage à (\underline{M}) est une acétalisation classique acido-catalysée, d'autant plus facile que le réactif est ici un diol :



2.5.3.2. Toutes les étapes sont réversibles.

2.5.3.3. Formation de \underline{O} . S_{N} de l'anion cyclopentadiényle sur \underline{M} :



2.5.3.4. Passage à \underline{P} .

Désacétalisation en milieu acide (réversibilité en 2.5.3.1.), avec régénération du groupe aldéhyde.

Agrégation (Concours Interne)

OPTION : PHYSIQUE APPLIQUÉE

Composition avec exercices d'application - Session : 1999

PREMIER PROBLÈME

ÉLECTRONIQUE - AUTOMATIQUE

A. ÉTUDE D'UN SYSTÈME DE SUIVI DE GISEMENT

A.1. Étude préliminaire du dispositif.

$$A.1.1. \quad a_{A_1}(t) = a_0 \sin \omega \left(t - \frac{l_1}{c} \right)$$

$$a_{A_2}(t) = a_0 \sin \omega \left(t - \frac{l_2}{c} \right)$$

$$A.1.2. \quad a_m(t) = a_0 \left\{ \sin \left[\omega \left(t - \frac{l_1}{c} \right) - \frac{2\pi}{\lambda} x \right] + \sin \left[\omega \left(t - \frac{l_2}{c} \right) - \frac{2\pi}{\lambda} (d - x) \right] \right\}$$

Posons : $\frac{2\pi}{\lambda} x = \varphi_x$ et $\frac{2\pi}{\lambda} d = \varphi_0$

$$a_m(t) = a_0 \left\{ \sin \left[\omega \left(t - \frac{l_1}{c} \right) - \varphi_x \right] + \sin \left[\omega \left(t - \frac{l_2}{c} \right) - \varphi_0 + \varphi_x \right] \right\}$$

$$a_m(t) = 2 a_0 \sin \frac{1}{2} \left(\omega t - \frac{\omega l_1}{c} - \varphi_x + \omega t - \omega \frac{l_2}{c} - \varphi_0 + \varphi_x \right)$$

$$\cos \frac{1}{2} \left(\omega t - \omega \frac{l_1}{c} - \varphi_x - \omega t + \frac{\omega l_2}{c} + \varphi_0 - \varphi_x \right)$$

$$a_m(t) = 2 a_0 \sin \left[\omega t - \frac{\omega}{c} \left(\frac{l_1 + l_2}{2} \right) - \frac{\varphi_0}{2} \right] \cos \left[\frac{\omega}{c} \left(\frac{l_2 - l_1}{2} \right) - \varphi_x + \frac{\varphi_0}{2} \right]$$

$$a_m(t) = 2 a_0 \sin \left[\omega t - \frac{\pi}{\lambda_0} (l_1 + l_2) - \frac{\varphi_0}{2} \right] \cos \left[\frac{\pi}{\lambda_0} (l_2 - l_1) - \varphi_x + \frac{\varphi_0}{2} \right]$$

λ_0 est la longueur d'onde dans le vide. En absence de précisions de l'énoncé, les deux interprétations $\lambda_0 \neq \lambda$ et $\lambda_0 = \lambda$ ont été admises.

A.1.3. Minima de $a_m(t)$ donnés par :

$$\frac{\pi}{\lambda_0} (l_2 - l_1) - \varphi_x + \frac{\varphi_0}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

soit :

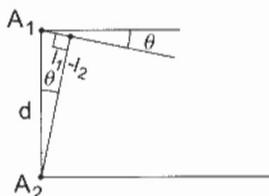
$$\frac{\cancel{\lambda}}{\lambda_0} (l_2 - l_1) - \frac{2\cancel{\lambda}}{\lambda} x_k + \frac{\cancel{\lambda}}{\lambda} d = \frac{\cancel{\lambda}}{2} + k\cancel{\lambda}$$

$$\frac{l_2 - l_1}{\lambda_0} = \frac{2x_k - d}{\lambda} + \left(k + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{2x_k}{\lambda} = \frac{l_2 - l_1}{\lambda_0} + \frac{d}{\lambda} - \frac{2k+1}{2}$$

$$x_k = \left(\frac{l_2 - l_1}{2}\right) \frac{\lambda}{\lambda_0} + \frac{d}{2} - \frac{(2k+1)\lambda}{4}$$

A.1.4.



$$\sin \theta = \frac{l_1 - l_2}{d} \quad \text{soit : } \theta \approx \frac{l_1 - l_2}{d}$$

A.1.5.

$$x_k = \frac{d}{2} \left(1 - \theta \frac{\lambda}{\lambda_0}\right) - (2k+1) \frac{\lambda}{4}$$

A.1.6.

$$\frac{d x_k}{d\theta} = -\frac{d}{2} \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

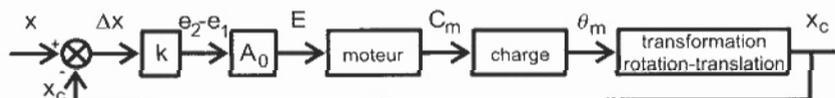
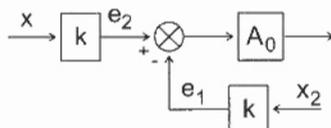
$$\text{soit : } \Delta x_k = -\frac{d}{2} \frac{\lambda}{\lambda_0} \Delta\theta$$

A.1.7. Application Numérique :

$$\Delta x_k = -\frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{\Delta\theta}{2} = -\frac{\Delta\theta}{2} \quad \text{si } \lambda = \lambda_0$$

A.2. Suivi des variations de gisement.

A.2.1. Schéma fonctionnel :



$$A.2.2. \quad \frac{X_c(p)}{E(p)} = \frac{X_c(p)}{\Theta_m(p)} \times \frac{\Theta_m(p)}{E(p)} = 5 \times 10^{-2} \times \frac{4}{p(1+0,1p)} = \frac{0,2}{p(1+0,1p)}$$

$$A.2.3. \quad \frac{E(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{k}{1+\tau p} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau p E(p) + E(p) = k \varepsilon(p) \\ \tau \frac{de}{dt} + e(t) = k \varepsilon(t) \end{cases}$$

en discrétisant (période T).

$$\tau \frac{e_{(n+1)T} - e_{nT}}{T} + e_{nT} = k \varepsilon_{nT}$$

$$\text{soit :} \quad \frac{\tau}{T} e_{(n+1)T} + e_{nT} \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) = k \varepsilon_{nT}$$

$$e_{(n+1)T} = k \frac{T}{\tau} \varepsilon_{nT} + \left(1 - \frac{T}{\tau}\right) e_{nT}$$

On montre que la relation $e_{(n+1)T} = a_1 \varepsilon_{nT} + a_2 e_{nT}$ (avec $e_{0T} = 1$) s'applique à la courbe.

$$1^{\text{er}} \text{ point } n = 0 \quad e_{1T} = 17,8$$

$$e_{0T} = 0 \rightarrow a_1 = 17,8$$

$$2^{\text{e}} \text{ point } n = 1 \quad e_{2T} = 32,3$$

$$e_{1T} = 17,8 \rightarrow 32,3 = 17,8 + 17,8$$

d'où : $a_2 = 0,81$

$$3^{\text{e}} \text{ point } n = 2 \quad e_{3T} = 44,1$$

$$e_{2T} = 32,3 \rightarrow 44,1 = 17,8 + 0,81 \times 32,3$$

$$4^{\text{e}} \text{ point } n = 3 \quad e_{4T} = 53,9$$

$$e_{3T} = 44,1 \rightarrow 53,9 = 17,8 + 0,81 \times 44,1$$

$$6^{\text{e}} \text{ point } n = 5 \quad e_{6T} = 68$$

$$e_{5T} = 62 \rightarrow 68 = 17,8 + 0,81 \times 62$$

Exact

Donc ça s'applique. Le système peut être assimilé à un premier ordre.

$$A.2.4. \quad \begin{cases} k \frac{T}{\tau} = 17,8 \\ \left(1 - \frac{T}{\tau}\right) = 0,81 \quad \text{avec } T = 10 \text{ ms} \end{cases}$$

$$\frac{T}{\tau} = 0,19 \rightarrow \tau = 54 \text{ ms}$$

$$k = 96 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$A.2.5. \quad \frac{X(p)}{\varepsilon(p)} = G(p) = \frac{0,2}{p(1+0,1p)} \times \frac{96}{(1+0,054p)} = \frac{19,2}{p(1+0,1p)(1+0,054p)}$$

$$A.2.6. \quad \text{Voir Bode de } \frac{20}{p(1+0,1p)(1+0,05p)} \quad (\text{corrigé autre}).$$

Le système est stable en boucle fermée.

- A.2.7. La marge de phase est de 12° .
Le coefficient de surtension est supérieur à 12 dB.

A.3. Étude de l'asservissement.

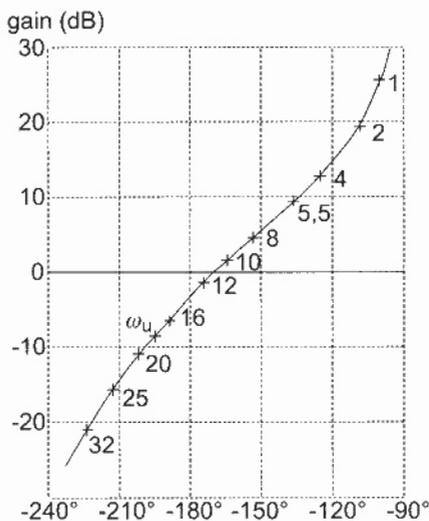
- A.3.1. Marge de phase :

$$G(p) = \frac{H}{i-H} = \frac{1}{p(5,2 \times 10^{-2} + 8 \times 10^{-3} p + 2,8 \times 10^{-4} p^2)}$$

$$G(p) = \frac{19,2}{p(1 + 0,154 p + 5,38 \times 10^{-3} p^2)} = \frac{19,2}{p(1 + 0,1 p)(1 + 0,054 p)}$$

On a bien la transmittance du § 1.2.5. d'où une marge de phase de 12° .

- A.3.2. Pour $\omega = 5,5 \text{ rad.s}^{-1}$, la phase vaut -135° et le gain 9,34 dB : il faudrait donc atténuer de 9,34 dB soit une division par 2,93.
- A.3.3. La précision se dégrade.
- A.3.4. L'erreur de position reste nulle (intégration en B.O).



L'erreur de vitesse passe pour un échelon de vitesse unité, de $\frac{1}{19,2}$ à $\frac{1}{6,55}$

$$5,21 \% \text{ à } 15,3 \%$$

- A.3.5. On a vu au § 1.1.7. que la relation entre Δv et $\Delta \theta$ était $\Delta v = \frac{d}{2} \Delta \theta$, soit en mètres : $\Delta v = \frac{\Delta \theta}{2}$. Donc $0,2 \text{ rad.s}^{-1}$ correspondent à $0,1 \text{ m.s}^{-1}$ de dérive du nœud de tension.

L'erreur de traînage est donnée par :

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{a}{K}$$

d'où :

$$K = \frac{a}{\varepsilon_{\infty}} = \frac{0,1}{10^{-3}} = 10^2 \text{ s}^{-1}$$

Il faudrait augmenter le gain de 14,3 dB (multiplication par 5,21).

A.3.6. On a toujours

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{a}{K}$$

d'où :

$$a = k\varepsilon_{\infty}$$

soit :

$$a = 19,2 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-1}$$

et :

$$\frac{d\theta}{dt} = 38,4 \times 10^{-3} \text{ rd. s}^{-1} \quad (2,2^{\circ} \text{ par seconde})$$

A.3.7. Correcteur : le gain statique de vitesse est fixé à 19,2.

A.3.7.1.

$$\frac{V_N(p)}{V_r(p)} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1 + R_1 C_1 p}{1 + R_2 C_2 p}$$

Convient en choisissant $\frac{R_2}{R_1} = 1$ et en faisant attention au signe moins introduit dans la boucle.

Si :

$R_1 C_1 > R_2 C_2$, on a une avance de phase.

$R_1 C_1 < R_2 C_2$, on a un correcteur P.I.

A.3.7.2. Correction à avance de phase (augmente la bande passante \Rightarrow système plus rapide, mais aussi plus bruité).

Correction P.I. (diminue la bande passante \Rightarrow système moins bruité, mais plus mou).

A.3.7.3. ① Avance de phase :

$$C(p) = \frac{1 + a \tau p}{1 + \tau p} \quad \text{avec : } a > 1$$

Marge de φ actuelle : $M_{\varphi} = 12^{\circ}$; il faut avancer de 38° . On majore pour tenir compte de l'effet parasite : soit une avance de 45 à 50° . Prenons 48° .

a) Calcul de a : Le maximum d'avance de phase est donné par $\varphi_M = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$

d'où :

$$a = \frac{1 + \sin \varphi_M}{1 - \sin \varphi_M}$$

soit :

$$a = 6,8 \quad (\text{pour } \varphi_M = 48^{\circ})$$

prenons :

$$\boxed{a = 7}$$

b) Calcul de τ : Au maximum d'avance de phase, le gain du correcteur vaut \sqrt{a} , soit : 8,45 dB.

On choisit de faire agir le correcteur de telle sorte que le maximum d'avance de phase

ait lieu à la pulsation à gain unité obtenue après correction. Cette pulsation correspond à un gain avant correction de $-8,45$ dB (par hypothèse).

$$\text{Donc :} \quad \omega_u \approx 18 \text{ rd.s}^{-1} \quad (17,85 \text{ exactement})$$

$$\text{Finalement :} \quad \omega_M \approx \frac{1}{\tau \sqrt{a}} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{1}{\omega_M \sqrt{a}} \quad \text{avec} \quad \omega_M = \omega_u$$

$$\text{d'où :} \quad \tau = 21 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Avec ce réglage on obtient une marge de phase $\varphi_{\text{marge}} = 34^\circ$.

On peut améliorer le résultat :

- en faisant agir le correcteur plus haut en fréquence (décalage d'un octave),
- en augmentant a .

Premier cas : on décale d'un octave vers les HF : $\tau = 10,5$ ms.

$$\text{Prenons } 10 \text{ ms :} \quad C(p) = \frac{1 + 0,07 p}{1 + 0,01 p}$$

Avec ce réglage on obtient une marge de phase $\varphi_{\text{marge}} = 37$ à 38° , c'est encore insuffisant.

Deuxième cas : on augmente a . On double sa valeur : $a = 14$

$$\sqrt{a} = 3,74 \rightarrow 11,5 \text{ dB}$$

$$\text{d'où :} \quad \omega_u \approx 21 \text{ rd.s}^{-1} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{1}{\omega_u \sqrt{a}} = 12,7 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

$$\text{prenons :} \quad a = 14 \quad \text{et} \quad \tau' = \frac{\tau}{2} = 7 \text{ ms}$$

La marge de phase est de 45° . C'est encore insuffisant.

Conclusion : un correcteur à avance de phase (avec une valeur de a raisonnable) ne permet pas de répondre à la question.

② Correcteur proportionnel et intégral :

$$C(p) = \frac{1 + a \tau p}{1 + \tau p} \quad \text{avec} \quad a < 1$$

On veut une marge de phase de 50° ; il faut donc atténuer de $10,9$ dB dans la zone critique. Le correcteur apporte un effet parasite (retard de phase). On limite cet effet à 10° (par exemple). L'atténuation nécessaire sera donc de $14,1$ dB (point pour lequel la phase vaut -120° , ce qui fera -130° après correction, compte tenu de l'effet parasite). La pulsation correspondante est d'environ $3,7 \text{ rd.s}^{-1}$.

$$a) \text{ Choix de } a$$
 : Atténuation en HF du correcteur : $20 \log a$ pour $14,1$ dB. $a \approx \frac{1}{5}$.

$$b) \text{ Détermination de } \tau$$
 : $\text{arc tg } a \tau \omega - \text{arc tg } \tau \omega = -10^\circ$

$$\tau\omega = 22,46$$

avec :

$$\omega = 3,7 \text{ rd.s}^{-1}$$

d'où :

$$C(p) = \frac{1 + 4,5 p}{1 + 22,5 p}$$

$$\boxed{\text{marge de phase : } 56^\circ}$$

Mais constantes de temps élevées, d'où ralentissement du système.

B. ÉTUDE DE L'AJUSTAGE D'UN FILTRE PASSE-BAS DU SECOND ORDRE INTÉGRÉ SOUS FORME D'ASIC

B.1. Détermination d'un modèle de comportement.

B.1.1. Ordre 2.

B.1.2.

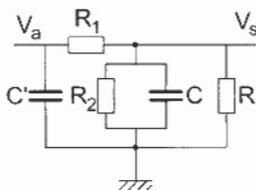
$$\frac{K}{\omega_n^2 + 2z \frac{p}{\omega_n} + 1}$$

 B.1.3. $K = -1$; $D_j = 73\% \Rightarrow z = 0,1$; $T_p = 63,15 \mu\text{s} \Rightarrow \omega_n = 10^5 \text{ rd.s}^{-1}$

$$\left(D_1 = \exp - \frac{z\pi}{\sqrt{1-z^2}} \right)$$

B.2. Détermination du modèle de connaissance.

B.2.1.


 B.2.2. La capacité C n'intervient pas dans la transmittance cherchée.

$$\frac{V_s(p)}{V_a(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}$$

$$Z_1(p) = R_1$$

avec :

$$Z_2(p) = R \parallel R_2 \parallel C = \frac{R R_2}{R + R_2 + R R_2 C p}$$

$$\boxed{\frac{V_s(p)}{V_a(p)} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R} + R_1 C p} = \frac{R R_2}{R R_1 + R_1 R_2 + R R_1 R_2 C p + R R_2}}$$

- B.2.3. Les données constructeur de l'ASIC spécifient que le gain statique de la cellule R_1, R_2, C isolée est voisin de un. L'expression de ce gain statique est $\frac{R_2}{R_1 + R_2}$; ceci impose donc $R_2 \gg R_1$.

D'après B.2.2. :

$$\frac{V_s(p)}{V_a(p)} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R} + R_1 C p} \approx \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R} + R_1 C p}$$

soit :

$$\left[\frac{V_s(p)}{V_a(p)} = \frac{R}{R + R_1 + R R_1 C p} = \frac{R}{R + R_1} \frac{1}{1 + \frac{R R_1}{R + R_1} C p} \right]$$

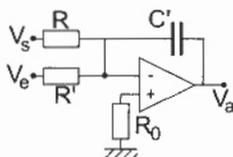
ou :

$$\frac{V_s(p)}{V_a(p)} = K \frac{1}{1 + \tau p}$$

avec :

$$K = \frac{R}{R + R_1} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{R R_1}{R + R_1} C$$

- B.2.4. Schéma équivalent permettant de déterminer $V_a(p)$ en fonction de $V_e(p)$ et de $V_s(p)$.



$$V_a(p) = -\frac{1}{R'C'p} V_e(p) - \frac{1}{RC'p} V_s(p)$$

- B.2.5. En remplaçant $V_a(p)$ par sa valeur en fonction de $V_s(p)$ (§ B.2.4.), il vient :

$$V_s(p) \frac{1 + \tau p}{K} = -\frac{1}{R'C'p} V_e(p) - \frac{1}{R'C'p} V_s(p)$$

soit :

$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = -\frac{\frac{1}{R'C'p}}{\frac{1 + \tau p}{K} + \frac{1}{R'C'p}} = -\frac{1}{\frac{R'C'p(1 + \tau p)}{K} + \frac{R'}{R}} = -\frac{R}{R'} \frac{1}{1 + \frac{RC'p(1 + \tau p)}{K}}$$

$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = -\frac{R}{R'} \frac{1}{1 + \frac{RC'}{K} p + \frac{RC'\tau}{K} p^2}$$

et en remplaçant K et τ par leurs expressions :

$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = -\frac{R}{R'} \frac{1}{1 + (R + R_1) C' p + R R_1 C C' p^2}$$

B.3. Exploitation des résultats - Réglage du filtre.

B.3.1. D'après le § B.1.3., on avait :

$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1 + \frac{2 \times 0,1}{10^5} p + \frac{p^2}{10^{10}}}$$

On en déduit :

$$\boxed{R = R'}$$

$$\boxed{(R + R_1) C' = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}}$$

$$\boxed{R R_1 C C' = 10^{-10} \text{ s}^2}$$

 B.3.2. La transmittance de la cellule isolée (R_1, R_2, C), s'écrit :

$$\frac{V_s(p)}{V_n(p)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} Cp}$$

avec :

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \approx 1$$

d'où :

$$R_2 \gg R_1$$

et :

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = 2 \times 10^{-4} \text{ s}$$

soit :

$$\boxed{R_1 C \approx 2 \times 10^{-4} \text{ s}}$$

D'après le § B.2.6., on déduit :

$$R C' = \frac{10^{-10}}{R_1 C} = \frac{10^{-10}}{2 \times 10^{-4}} = 5 \times 10^{-7} \text{ s}$$

$$\boxed{R C' = 5 \times 10^{-7} \text{ s}}$$

Toujours d'après le § B.2.6. :

$$R_1 C' = 2 \cdot 10^{-6} - R C' = 2 \cdot 10^{-6} - 5 \times 10^{-7} = 1,5 \times 10^{-6}$$

$$\boxed{R_1 C' = 1,5 \times 10^{-6} \text{ s}}$$

B.3.3.

$$\frac{R C'}{R_1 C'} = \frac{1}{3}$$

soit :

$$\boxed{R_1 = 3 R}$$

$$\frac{R_1 C}{R_1 C'} = \frac{2 \times 10^{-4}}{1,5 \times 10^{-6}}$$

soit :

$$\boxed{C' = 7,5 \times 10^{-3} \text{ C}}$$

B.3.4. $D_1 = 10\%$.

B.3.4.1. Calcul de z :

$$D_1 = \exp - \frac{z \pi}{\sqrt{1-z^2}} \quad \text{avec } A < 0$$

$$\ln D_1 = - \frac{z \pi}{\sqrt{1-z^2}} = A$$

$$\boxed{z = 0,591}$$

$$A \sqrt{1-z^2} = -z \pi \quad D_1 = 10\%$$

$$A^2 (1-z^2) = z^2 \pi^2 \quad \ln D_1 = -2,3$$

$$-z^2 (A^2 + \pi^2) = -A^2$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{A^2}{A^2 + \pi^2}} = \pm 0,591$$

B.3.4.2.
$$\frac{V_s(p)}{V_e(p)} = - \frac{R}{R'} \frac{1}{1 + (R + R_1) C' p + R R_1 C' C' p^2}$$

avec $R = R'$:
$$(R + R_1) C' = 2 \times 10^{-6} \text{ s}$$

et :
$$R R_1 C' C' = 10^{-10} \text{ s}^2$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{R R_1 C' C'}}$$

$$z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C'}{C} \frac{1}{R R_1}} (R + R_1) = \frac{1}{2 \sqrt{C}} \sqrt{\frac{C'}{R R_1}} (R + R_1)$$

En divisant C par 7, on multiplie z par $\sqrt{7} = 2,65$ d'où $z = 0,265$ (insuffisant).
Il faut donc agir sur R .

$$z = \frac{1}{2 \sqrt{C}} \sqrt{\frac{C'}{R R_1}} (R + R_1)$$

s'écrit aussi :
$$z = \frac{1}{2 \sqrt{C}} \sqrt{C' \left[\frac{R}{R_1} + \frac{R_1}{R} + 2 \right]}$$

La fonction $\frac{R}{R_1} + \frac{R_1}{R}$ passe par un minimum pour $R = R_1$. Or, le réglage initial correspond à $R_1 = 3 R$ (§ B.3.3.). Ainsi et dans un premier temps, l'augmentation de R jusqu'à $R = R_1$ correspond à une diminution de z . On peut calculer que :

$$\boxed{z = 0,59 \text{ pour } C^* = 7 C' \text{ et } R^* = 73,5 R}$$

(C^* et R^* sont les valeurs ajustées). On prend pour le calcul de R^* les valeurs initiales calculées de R_1 et C' soit, respectivement :

$$R_1 = 3 R \quad \text{et} \quad C' = 7,5 \times 10^{-3} C$$

La valeur de R^* (ajustée) sort largement du domaine d'ajustage précisé dans l'énoncé. soit :

$$R^* = 5 R$$

B.3.4.3. L'augmentation de R modifie le gain statique du filtre qui vaut :

$$-\frac{R}{R'} \quad (\S \text{ B.2.5.})$$

DEUXIÈME PROBLÈME

ÉLECTROTECHNIQUE

I. ANALYSE DIMENSIONNELLE, CONSERVATION DE L'ÉLECTRICITÉ

1.1. Équation (I) $\Rightarrow \quad (x) (m^{-1}) \equiv (Cb) (m^{-3}) \Rightarrow \quad (x) \equiv (Cb) (m^{-2})$

D peut s'exprimer en Cb par m^2 (dimension d'une densité superficielle de charge).

Équation (3) $\Rightarrow D = \epsilon E \quad (\epsilon) \equiv (D) (E)^{-1} \equiv (Cb) (m^{-2}) \times [(V) (m^{-1})]^{-1} = (Cb) (V^{-1}) (m^{-1})$

$$(Cb) (V^{-1}) \equiv (F)$$

ϵ est en Farad m^{-1} .

Équation (1) $\Rightarrow \quad (T) \equiv (\mu) (A) (m^{-1}) \Rightarrow \quad (\mu) \equiv (T) (A^{-1}) (m) \equiv (T) (m^2) (A^{-1}) (m^{-1})$
 $(\mu) \equiv (H) (m^{-1})$

Équation (III) : $(V) (m^{-2}) \equiv (T) (S^{-1}) \quad \text{ou} \quad (V) \equiv (T) (m^2) (S^{-1})$

$(wb) \equiv (T) (m^2)$ est une unité de flux, $(wb) (S^{-1}) \equiv (V)$

Équation (IV) : $(A) (m^{-2}) \equiv (A) (m^{-2}) + (Cb) (S^{-1}) (m^{-2}) \quad \text{et} \quad (Cb) (S^{-1}) \equiv (A)$

1.2. $\vec{\text{rot}} H = 0 \Rightarrow \text{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{div} J + \text{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \quad (\text{opérateur linéaire})$

$\text{div} \Rightarrow$ dérivées d'espace $\frac{\partial}{\partial t}$ dérivée par rapport au temps $\Rightarrow \text{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{D}) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho)$.

D'après (I) $\Rightarrow \quad \text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

D'après (13) $\Rightarrow \quad \iiint \text{div} \vec{J} = \iint \vec{J} \cdot \vec{ds} = I \quad \iiint \rho \, d\tau = Q$

la relation précédente donne : $I + \frac{\partial}{\partial t} Q = 0 \quad \text{ou} \quad I = - \frac{\partial Q}{\partial t}$

II. CAS STATIQUE

II.1. ($\partial/\partial t = 0$)

$\text{div } \vec{D} = \rho \Rightarrow \iiint \text{div } \vec{D} \, d\tau = \oiint \vec{D} \cdot \vec{ds} = \iiint \rho \, d\tau$: le flux de \vec{D} ($= \epsilon \vec{E}$) à travers la surface fermée est égal à la somme des charges enfermées dans cette surface.

(14) $\Rightarrow \oiint \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{ds} = \oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \iint \vec{J} \cdot \vec{ds} = I$: La circulation de \vec{H} le long d'une courbe fermée est égale à la somme des courants encerclés par cette courbe.

II.2. En statique : $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ (11) $\Rightarrow \vec{E}$ peut alors s'écrire sous la forme d'un gradient d'une fonction vectorielle.

$\text{div } \vec{B} = 0$ (9) $\Rightarrow \vec{B}$ peut s'écrire sous forme d'un rotationnel d'une fonction vectorielle.

II.3.

$$(6) \Rightarrow \text{rot } \vec{A} = \begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = B_y \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z \end{cases}$$

n'apparaissent ni $\frac{\partial A_x}{\partial x}$, ni $\frac{\partial A_y}{\partial y}$, ni $\frac{\partial A_z}{\partial z}$ qui peuvent être choisies arbitrairement pour simplifier les calculs.

On peut choisir : $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{A} = 0$

(I) $\Rightarrow \text{div } (\epsilon \vec{E}) = \rho$, ϵ étant constante $\Rightarrow \text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon$ ou $\text{div } (-\text{grad } V) = \rho/\epsilon$

(10) $\Rightarrow \Delta V = -\rho/\epsilon$.

(IV) $\Rightarrow \text{rot } \left(\frac{\vec{B}}{\mu} \right) = \vec{J}$, μ constante $\Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu \vec{J}$ ou $\text{rot } (\text{rot } \vec{A}) = \mu \vec{J}$

(12) $\Rightarrow \text{grad } (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu \vec{J}$ avec $\text{div } \vec{A} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{A} = -\mu \vec{J}$

II.4. II.4.1. $\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow f_n'' g_n + f_n g_n'' = 0$ en divisant par $f_n g_n$ on a : $-\frac{f_n''}{f_n} = \frac{g_n''}{g_n}$, le premier membre ne dépend que de x , le second que de y donc $-\frac{f_n''}{f_n} = \frac{g_n''}{g_n} = \lambda_n^2$ avec $\lambda_n \in \mathbb{C}$.

II.4.2. $\frac{f_n''}{f_n} = -\lambda_n^2$

cos $\lambda_n x$ et sin $\lambda_n x$ et toute combinaison linéaire de ces fonctions est solution de cette équation :

$$f_n(x) = a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x$$

$\frac{g_n''}{g_n} = \lambda_n^2$ admet comme solution toute combinaison d'exponentielles $e^{\lambda_n y}$, $e^{-\lambda_n y}$ ou de fonctions hyperboliques $ch \lambda_n y$, $sh \lambda_n y$.

$$g_n(y) = c_n ch \lambda_n y + d_n sh \lambda_n y$$

$$V_n(x, y) = f_n(x) g_n(y)$$

si : $\Delta V_n = 0 \quad V = \Sigma V_n \quad \Delta V = \Delta (\Sigma V_n)$

l'opérateur étant linéaire : $\Delta V = \Sigma (\Delta V_n) = 0$

II.4.3. $V(0, y) = 0 \Rightarrow \Sigma a_n g_n(y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow a_n = 0$

$V(\dots, y) = 0 \Rightarrow \Sigma b_n \sin \lambda_n a g_n(y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow \lambda_n a = n \pi \Rightarrow \lambda_n = n \pi / a$

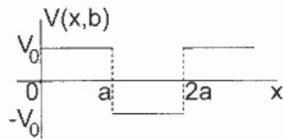
$V(x, 0) = 0 \Rightarrow \Sigma b_n \sin \lambda_n x \times c_n = 0 \quad \forall x \Rightarrow c_n = 0$

$$V(x, y) = \sum_n b_n \sin \left(n \pi \frac{x}{a} \right) \times d_n sh \left(n \pi \frac{y}{a} \right)$$

$$V(x, b) = \sum_n \beta_n \sin \left(n \pi \frac{x}{a} \right) V_0$$

Calcul de β_n :

Première méthode : on prolonge la fonction $V(x, b) \Rightarrow$



$$V(x, b) = \Sigma \beta_n \sin n \pi \frac{x}{a} = V_0$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{2}{2a} \int_0^{2a} V_0 \sin n \pi \frac{x}{a} dx = \frac{2 V_0}{a} \int_0^a \sin n \pi \frac{x}{a} dx = \frac{2 V_0}{a} \cdot \frac{1}{n \pi} \cos n \pi \frac{x}{a} \Big|_0^a \\ &= \frac{2 V_0}{n \pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

$$\beta_n = \frac{4 V_0}{n \pi} \quad (n \text{ impair}) \quad \beta_n = 0 \quad (n \text{ pair}) \Rightarrow \beta_k = \frac{4 V_0}{(2k+1) \pi}$$

Deuxième méthode : $V_0 = \Sigma \beta_n \sin n \pi \frac{x}{a}$

on multiplie les deux membres par $\sin m \pi \frac{x}{a}$ et on intègre :

$$\int_0^a V_0 \sin m \pi \frac{x}{a} dx = \sum_n \beta_n \int_0^a \sin n \pi \frac{x}{a} \sin m \pi \frac{x}{a} dx$$

$$\int_0^a \sin n \pi \frac{x}{a} \sin m \frac{\pi x}{a} dx = \frac{a}{2}$$

pour $n = m$, et 0 sinon.

$$V_0 \int_0^a \sin m \pi \frac{x}{a} = \frac{a V_0}{m \pi} \cos m \pi \frac{x}{a} \Big|_0^a = \frac{a V_0}{m \pi} [1 - \cos m \pi] =$$

$$\frac{a V_0}{m \pi} [1 - (-1)^m] = 2 \frac{a V_0}{m \pi} \text{ si } m \text{ impair}$$

$$= 0 \quad \text{si } m \text{ pair}$$

$$2 \frac{a V_0}{m \pi} = \beta m \times \frac{a}{2} \Rightarrow \beta_m = \frac{4 \cdot V_0}{m} \quad m \text{ impair} = 2k + 1$$

$$\beta_k = \frac{4 V_0}{(2k + 1) \pi} = b_k d_k \operatorname{sh}(\lambda_k b)$$

$$V(x, y) = \sum_k b_k d_k \sin n \pi \frac{x}{a} \operatorname{sh} n \pi \frac{y}{a} = \frac{4 V_0}{\pi} \sum_k \frac{1}{2k + 1} \cdot \frac{\operatorname{sh}(2k + 1) \pi \frac{y}{a}}{\operatorname{sh}(2k + 1) \pi \frac{b}{a}} \sin(2k + 1) \pi \frac{x}{a}$$

$$\text{II.4.4.} \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4 V_0}{\pi} \sum_k \frac{1}{2k + 1} \frac{\operatorname{sh}(2k + 1) \pi \frac{y}{a}}{\operatorname{sh}(2k + 1) \pi \frac{b}{a}} \times (2k + 1) \frac{\pi}{a} \cos(2k + 1) \pi \frac{x}{a}$$

$$= -\frac{4 V_0}{a} \sum_k \frac{\operatorname{sh} \lambda_k y}{\operatorname{sh} \lambda_k b} \cos \lambda_k x \quad \lambda_k = (2k + 1) \frac{\pi}{a}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{4 V_0}{\pi} \sum_k \frac{1}{2k + 1} \times \frac{\operatorname{ch}(2k + 1) \pi \frac{y}{a}}{\operatorname{sh}(2k + 1) \pi \frac{b}{a}} \sin(2k + 1) \pi \frac{x}{a}$$

$$= -\frac{4 V_0}{a} \sum_k \frac{\operatorname{ch} \lambda_k y}{\operatorname{sh} \lambda_k b} \times \sin \lambda_k x$$

$$\text{II.4.5.} \quad \sigma = \varepsilon E_y(x, b) = -\frac{4 V_0}{a} \varepsilon \sum_k \operatorname{ch} \lambda_k b \sin \lambda_k x \quad \forall z$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{En } y = h \quad \sigma \neq 0 \quad V = V_0 \\ \text{Sur les autres parois} \quad \sigma \neq 0 \quad V = 0 \\ \text{Dans le domaine étudié} \quad \sigma = 0 \quad V \neq 0 \end{array} \right\} e) \Rightarrow w = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^a V_0 \sigma(x, b) dx dz$$

$$\begin{aligned}
 w &= -\frac{2V_0^2}{a} L \sum_k \operatorname{cth} \lambda_k b \int_0^a \sin \lambda_k x \, dx = -\frac{2V_0^2}{a} L \varepsilon \sum_k \operatorname{cth} \lambda_k b \left. \frac{\cos \lambda_k x}{\lambda_k} \right|_0^a \\
 &= -\frac{2V_0^2}{a} L \varepsilon \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \operatorname{cth} \lambda_k b [1 - \cos(2k+1)\pi] = -4V_0^2 \frac{L}{a} \varepsilon \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \operatorname{cth} \lambda_k b \\
 &= \frac{1}{2} C V_0^2 \Rightarrow C = 8 \frac{L}{a} \varepsilon \sum_k \frac{1}{(2k+1)\pi} \operatorname{cth} \lambda_k b \quad c = \frac{8 \varepsilon L}{\pi} \sum_k \frac{1}{2k+1} \operatorname{cth} (2k+1) \pi \frac{b}{a}
 \end{aligned}$$

III. CAS QUASI STATIONNAIRE

III.1. Le second membre de (IV), $\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, s'écrit sous forme complexe : $\vec{J} + j \omega \vec{D}$ avec :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} \left(1 + j \frac{\omega \varepsilon}{\sigma} \right)$$

$$\frac{\omega \varepsilon}{\sigma} = \frac{2\pi f}{36\pi \cdot 10^9 \times 10^7} = 10^{-3} \Rightarrow f = 18 \times 10^{13} \text{ Hz, pour cette fréquence la partie imaginaire ne vaut}$$

qu'un millième de la partie réelle : pour nos fréquences il est évident que la partie imaginaire peut être négligée et on peut écrire (IV) :

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

III.2.
$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} \frac{\vec{j}}{\sigma} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{j} = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

et :
$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{j}) = -\mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{H}) \Rightarrow \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{j}) - \Delta \vec{j} = -\mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}$$

soit :
$$\Delta \vec{j} = \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}$$

ou en complexe :
$$\Delta \vec{j} = j \mu \sigma \omega \vec{j} = k^2 \vec{j}$$

III.3. \vec{j} n'a qu'une composante (suivant z) et ne dépend que de y et du temps. L'équation vectorielle ci-dessus devient :

$$\Delta \vec{j}_z = k^2 \vec{j}_z \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 j_z}{\partial y^2} = k^2 \vec{j}_z$$

qui admet comme solution :
$$\vec{j}_z = \alpha e^{ky} + \beta e^{-ky}$$

avec :
$$k^2 = \omega \mu \sigma e^{j\pi/2} \Rightarrow k = \sqrt{\omega \mu \sigma} e^{j\pi/4} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} (1 + j)$$

$$k = \frac{1+j}{\delta} \Rightarrow j_z = \alpha e^{\frac{y}{\delta}} e^{j\frac{y}{\delta}} + \beta e^{-\frac{y}{\delta}} e^{-j\frac{y}{\delta}}$$

seul le second terme est décroissant en y , d'où : $j_z = \beta e^{-\frac{y}{\delta}}$.

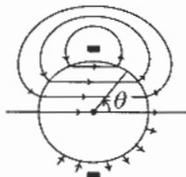
$$\text{En } y = 0 : \quad J_z = \hat{J}_s e^{j\omega t} = \beta \Rightarrow J_z = \hat{J}_s e^{j(\omega t - y/\delta)} e^{-y/\delta}$$

$$\begin{aligned} \text{III.4.} \quad \bar{i} &= \iint J \, ds = \int_0^1 \int_0^x J_z(y, t) \, dy \, dx = \beta \int_0^x e^{-ky} \, dy = \frac{\beta}{k} e^{-ky} \Big|_0^x = \frac{\beta}{k} = \hat{J}_s \delta \frac{e^{j\omega t}}{1+j} \\ &= \frac{\hat{J}_s \delta}{2} e^{j\omega t} (1-j) = \frac{\hat{J}_s \delta}{\sqrt{2}} e^{j(\omega t - \pi/4)} = J_s \delta e^{j(\omega t - \pi/4)} \quad I = J_s \delta \cos(\omega t - \pi/4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III.5.} \quad P &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^x \int_0^1 \frac{1}{\sigma} \bar{J} \bar{J}^* \, dx \, dy \, dz - \frac{\hat{J}_s^2}{2\sigma} \int_0^x e^{-2y/\delta} \, dy = \frac{\hat{J}_s^2}{2\sigma} \left. \frac{e^{-2y/\delta}}{(-2/\delta)} \right|_0^x = \frac{\hat{J}_s^2 \delta}{4\sigma} = \frac{J_s^2 \delta}{2\sigma} \\ &= R I_{\text{eff}}^2 = R J_s^2 \delta^2 \Rightarrow R = \frac{1}{2\sigma \delta} = \frac{\sqrt{\sigma \mu}}{2\sigma \sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda \pi f} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} \sqrt{f} \end{aligned}$$

IV. ÉTUDE D'UNE MACHINE ÉLECTRIQUE

$$\text{IV.1.} \quad i_{s1} = \hat{I}_s \cos \omega_s t \rightarrow h_s(\theta, t)$$

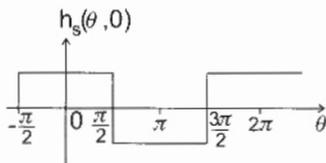


$H \rightarrow 0$ dans le fer, B restant fini, H tangential dans l'entrefer est nul (sauf là où il y a des courants).

Les lignes de champ sont radiales dans l'entrefer. Compte tenu du théorème d'Ampère, $|B|$ est constant dans l'entrefer

$$B > 0 \text{ si :} \quad \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$B < 0 \text{ si :} \quad \theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$$



Le théorème d'Ampère permet de trouver le module $t = 0 \Rightarrow i_{s1} = \hat{I}_s$,

$$2 h_s e = \hat{I}_s \Rightarrow h_s = \frac{\hat{I}_s}{2e} = h_s(0, 0).$$

$$h_s(\theta, 0) = \sum a_n \cos n\theta \quad a_n = \frac{4 h_s(0, 0)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos n\theta \, d\theta = \frac{4 h_s(0, 0)}{\pi} \frac{\sin n\theta}{n} \Big|_0^{\pi/2} \quad n \text{ impair}$$

$$h_s(\theta, 0) = \frac{4 h_s(0, 0)}{\pi} \sum \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos(2k+1)\theta$$

$$h_{s1}(\theta, 0) = \frac{4 h_s(0, 0)}{\pi} \cos \theta = \frac{2 \hat{I}_s}{\pi e} \cos \theta$$

$$h_{s1}(\theta, t) = \frac{2}{\pi e} \hat{I}_s \cos \omega_s t \cos p_s \theta = \hat{h}_s \cos \omega_s t \cos p_s \theta$$

IV.2. $h_{s1}(\theta, t) = \hat{h}_s \cos \omega t \cos p_s \theta = \frac{\hat{h}_s}{2} [\cos(\omega_s t - p_s \theta) + \cos(\omega_s t + p_s \theta)]$

$$h_{s2} = \hat{h}_s \cos\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(p_s \theta - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\hat{h}_s}{2} \left[\cos(\omega_s t - p_s \theta) + \cos\left(\omega_s t + p_s \theta - \frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

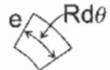
$$h_{s3} = \hat{h}_s \cos\left(\omega_s t + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(p_s \theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\hat{h}_s}{2} \left[\cos(\omega_s t - p_s \theta) + \cos\left(\omega_s t + p_s \theta + \frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$H_{s1}(\theta, t) = 3 \frac{\hat{h}_s}{2} \cos(\omega_s t - p_s \theta)$$

IV.3. $H_{e1}(\theta, t) = 3 \frac{\hat{h}_r}{2} \cos\{\omega_r t - \beta - p_r(\theta - \alpha)\} \quad \hat{h}_r = \frac{2 \hat{I}_r}{\pi e}$

IV.4. $d\tau = r d\theta dr dz$, ici le problème est indépendant de z et l'entrefer étant faible, on a :

$$d\tau = e R d\theta \times l = R e l d\theta$$



$$w = \frac{\mu_0}{2} \int_0^{2\pi} (H_s + H_r)^2 R e l d\theta = \frac{\mu_0 R e l}{2} \left[\int_0^{2\pi} H_s^2 d\theta + 2 \int_0^{2\pi} H_s H_r d\theta + \int_0^{2\pi} H_r^2 d\theta \right] \Rightarrow \text{avec le 1er harmonique.}$$

$$= \frac{\mu_0 R e l \cdot 9}{8} \pi \hat{h}_s^2 + \frac{9 \mu_0 R e l}{4} \frac{\hat{h}_s \hat{h}_r}{4} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos[(\omega_s + \omega_r)t - (P_s + P_r)\theta - \beta + P_r \alpha] d\theta + \int_0^{2\pi} \cos[(\omega_s - \omega_r)t - (P_s - P_r)\theta + \beta - P_r \alpha] d\theta \right\}$$

$$+ \frac{\mu_0 R e l \cdot 9}{8} \pi \hat{h}_r^2 d\theta$$

IV.5. Le terme α n'apparaît que dans l'intégrale centrale (interaction $H_s H_r$) : en la décomposant en 2 comme ci-dessus on voit que ces intégrales sont nulles sauf si $p_s = p_r = p$, dans ce cas la seconde intégrale est non nulle et vaut :

$$w_{rs} = \frac{9 \mu_0 R e l}{8} \hat{h}_s \hat{h}_r \times 2\pi \cos[(\omega_s - \omega_r)t + \beta - p\alpha]$$

$$\Gamma(t) = + p \frac{9 \mu_0 R e l \pi}{2} \hat{h}_s \hat{h}_r \sin[(\omega_s - \omega_r)t + \beta - p\alpha] \quad \alpha = \Omega_m t + \alpha_0$$

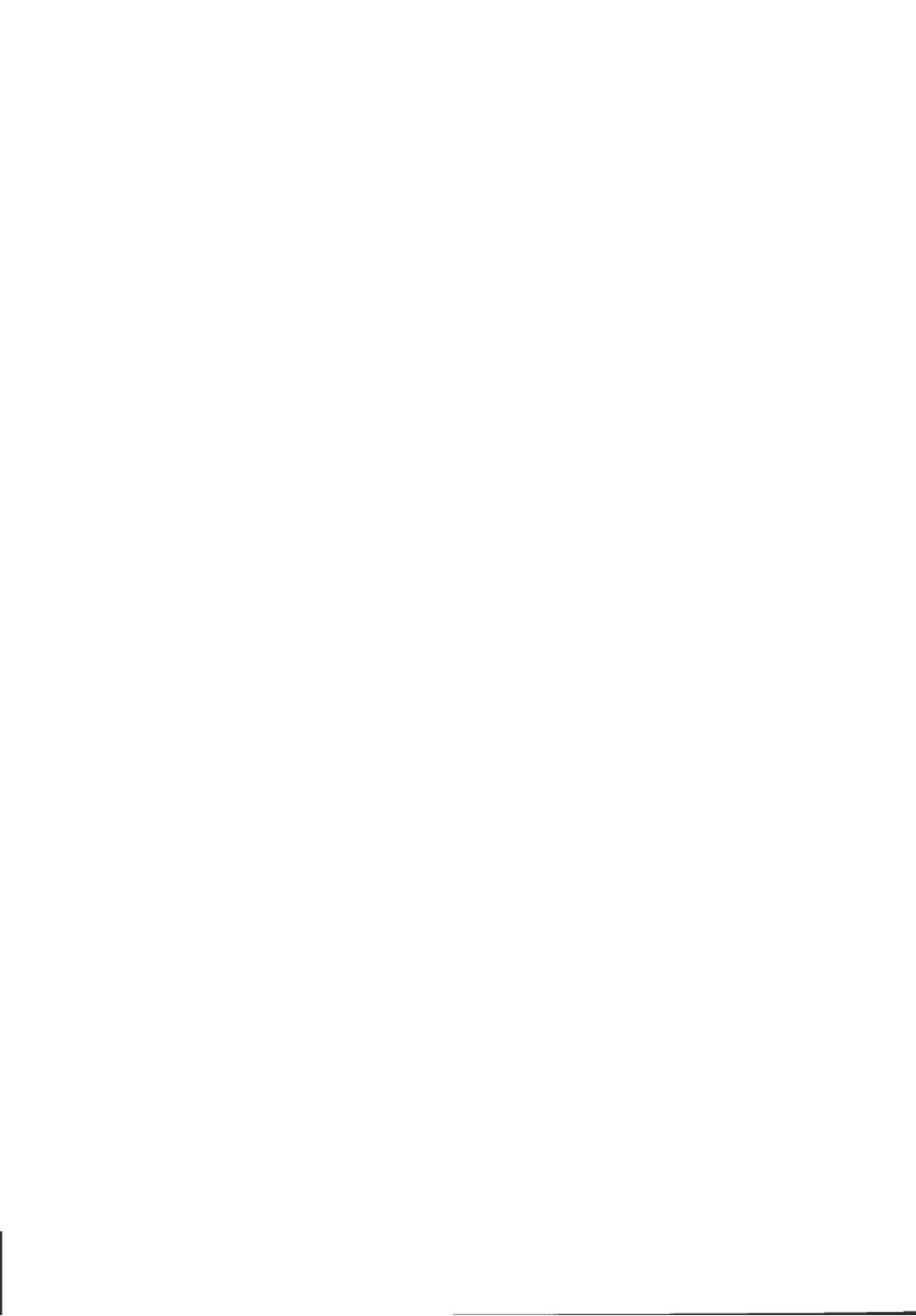
$$\Gamma(t) = p \frac{9 \mu_0 R e l \hat{I}_s \hat{I}_r}{2 \pi e^2} \sin[(\omega_s - \omega_r - p \Omega_m)t + \beta - p \alpha_0]$$

Le couple est sinusoïdal dans le temps, donc à valeur moyenne nulle, sauf si :

$$\omega_s - \omega_r - p \Omega_m = 0 \Rightarrow \omega_s = \omega_r + p \Omega_m$$

Dans ce cas le couple est maximum si $\beta - p \alpha_0 = \pi/2$ et vaut :

$$\Gamma = 9 p \frac{\mu_0 R l}{\pi e}$$



CAPES

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de physique avec applications - Session : 1999

PARTIE A

CHAMPS ET INTERACTIONS

A1. Forces centrales

$$A.1.1.a \quad \vec{f} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}$$

$$A.1.1.b. \text{ Par analogie avec } \Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \text{ et sachant que } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u} \text{ et } \vec{G} = -G \frac{m}{r^2} \vec{u},$$

$$\text{alors : } Q_{\text{int}} \leftrightarrow m_{\text{int}} \text{ et } \epsilon_0 \leftrightarrow -\frac{1}{4\pi G}$$

$$\text{Donc } \Phi = \iint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{int}}$$

$$\text{Soit } \vec{G} = \frac{\Phi}{4\pi r^2} \vec{u} = -G \frac{m_{\text{int}}}{r^2} \vec{u} \text{ d'où } \vec{f}_2 = -G \frac{m_{\text{int}} m_2}{r^2} \vec{u}$$

$$A.1.1.c. E_p = -W_{\infty \rightarrow r}; dE_p = -\delta W_{\Omega} = -\vec{f}_2 \cdot d\vec{r} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr$$

$$E_p = \int_{\infty}^r G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

$$A.1.2.a. (m_1 + m_2) \vec{O}\vec{G} = m_1 \vec{O}\vec{M}_1 + m_2 \vec{O}\vec{M}_2$$

A.1.2.b. Le système isolé, le théorème du centre d'inertie ou de la résultante dynamique donne $\vec{v}_G = \vec{CST\vec{E}}$; le référentiel R_G qui est en translation est donc galiléen

$$\text{ou bien : } (m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{O}\vec{G}}{dt^2} = m_1 \frac{d^2 \vec{O}\vec{M}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{O}\vec{M}_2}{dt^2} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$$

$$A.1.2.c. \vec{f}_2 = m_2 \frac{d^2 \vec{G}\vec{M}_2}{dt^2} \text{ comme } \vec{M}_2 \vec{G} = \frac{m_1 \vec{M}_2 \vec{M}_1}{m_1 + m_2}, \text{ on obtient immédiatement}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_2 \text{ et } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$A.1.3.a. \vec{\sigma}_N = m_1 \vec{N}\vec{M}_1 \wedge \vec{v}_1 + m_2 \vec{N}\vec{M}_2 \wedge \vec{v}_2$$

$$\vec{\sigma}_N = m_1 (\vec{N}\vec{G} + \vec{G}\vec{M}_1) \wedge \vec{v}_1 + m_2 (\vec{N}\vec{G} + \vec{G}\vec{M}_2) \wedge \vec{v}_2$$

$$\vec{\sigma}_N = \vec{N}\vec{G} \wedge (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) + m_1 \vec{G}\vec{M}_1 \wedge \vec{v}_1 + m_2 \vec{G}\vec{M}_2 \wedge \vec{v}_2$$

$$\vec{\sigma}_N = \vec{N}\vec{G} \wedge (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) + \vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}_G = \vec{\sigma} \text{ puisque } (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = \vec{0}$$

$$A.1.3.b. \vec{\sigma} = m_1 \vec{G}\vec{M}_1 \wedge \vec{v}_1 + m_2 \vec{G}\vec{M}_2 \wedge \vec{v}_2$$

En considérant G en M_1 , nous avons $\vec{M}_1 \vec{G} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{M}_1 \vec{M}_2$ et de même

$$\vec{M}_2 \vec{G} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{M}_2 \vec{M}_1, \text{ on obtient immédiatement}$$

$$\vec{\sigma} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (-\vec{M}_1 \vec{M}_2 \wedge \vec{v}_1 + \vec{M}_1 \vec{M}_2 \wedge \vec{v}_2) \text{ soit } \vec{\sigma} = \mu \vec{GM} \wedge \vec{v} \text{ avec } \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\text{A.I.3.c. } \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \mu \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v} + \mu \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = \mu \vec{v} \wedge \vec{v} + \mu \vec{r} \wedge \frac{1}{\mu} \vec{f}_2 = \vec{0}$$

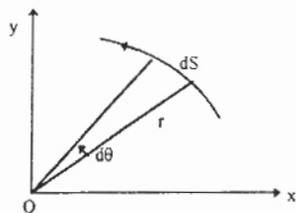
d'où $\vec{\sigma} = \vec{CST\bar{E}}$. Comme \vec{GM} est toujours perpendiculaire à $\vec{\sigma}$, M demeure donc dans le plan passant par G et perpendiculaire à $\vec{\sigma}$.

$$\text{A.I.3.d. } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \vec{u} + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta. \text{ Comme } \vec{\sigma} = \mu \vec{r} \wedge \vec{v}, \text{ alors } \vec{\sigma} = \mu r \vec{u} \wedge \left(\frac{dr}{dt} \vec{u} + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \right) = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta.$$

$$\text{D'où } C = r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{cste}$$

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{C}{2} dt.$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} \text{ (vitesse aréolaire constante)}$$



$$\text{A.I.3.e. } E_C = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2.$$

$$\text{Or } \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \text{ et } \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}, \text{ donc } E_C = \frac{1}{2} \left[m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \right] v^2 \text{ et}$$

$$\text{finalement } E_C = \frac{1}{2} \left[\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \right] v^2 = \frac{1}{2} \mu v^2.$$

$$\text{Comme } \vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u} + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta, \text{ alors } E_C = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{C^2}{r^2} \right]$$

$$\text{A.I.3.f. } E_T = E_C + E_p, \text{ soit } E_T = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{C^2}{r^2} \right] - G \frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\text{A.I.4. } f_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{79 \times 2 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{r^2} = \frac{3,64 \times 10^{-26}}{r^2} \text{ N}$$

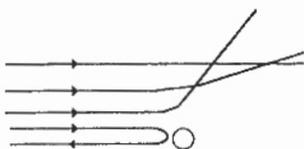
$$f_{grav} = G \frac{3,27 \times 10^{-25} \times 6,65 \times 10^{-27}}{r^2} = \frac{1,45 \times 10^{-31}}{r^2} \text{ N}$$

$$\text{Soit un rapport } \frac{f_{ele}}{f_{grav}} = 2,5 \times 10^{35}$$

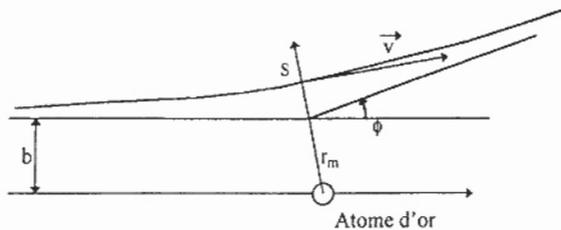
$$E_T = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{C^2}{r^2} \right] + \frac{2Zc^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

A.II. Application : diffusion de Rutherford

- A.II.1. Très peu de particules diffusées
 matière constituée de vide
 taille des noyaux très petite : $qq10^{-15} \text{ m}$
 charge positive des noyaux Ze
 1910 : structure de l'atome : noyau de charge Ze



A.II.2.a. Trajectoire hyperbolique



$$\text{A.II.2.b. } \frac{m}{\mu} = \frac{m}{\frac{mM}{m+M}} = 1 + \frac{m}{M} = 1 + \frac{6,65 \times 10^{-27}}{3,27 \times 10^{-25}} = 1,02. \text{ Donc } \mu \approx m \text{ à } 2\% \text{ près.}$$

A.II.2.c.

$$b = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2 \tan \frac{\phi}{2}} = \frac{2 \times 79 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{4 \times \pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 6,65 \times 10^{-27} \times (1,2 \times 10^{-2})^2 \tan 30^\circ} = 6,5 \times 10^{-12} \text{ m}$$

A.II.2.d. Voir schéma A.II.2.a : $\vec{v} \perp \vec{r}_m$.

Le système est conservatif $E_T = Cste = \frac{1}{2} m v_0^2$. D'autre part $C = b v_0$.

Or $E_T = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{C^2}{r^2} \right] + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ et comme on suppose que $m \approx \mu$ et qu'en S, $\frac{dr}{dt} = 0$, alors :

$$\frac{1}{2} m \frac{b^2 v_0^2}{r_m^2} + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_m} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{D'où } r_m = \frac{1}{m v_0^2} \left(\frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0} + \sqrt{\left(\frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0} \right)^2 + m^2 b^2 v_0^4} \right) = 1,1 \times 10^{-11} \text{ m}$$

A.III. Rayonnement d'un électron accéléré.

A.III.1.a. $E_C = -q_e(V_f - V_i)$, d'où $V_f - V_i = 3000 \text{ V}$

A.III.1.b. $E_{\text{masse}} = mc^2$ (en J) et $E_{\text{masse}} = \frac{mc^2}{e}$ (en eV)

$$E = \frac{9,11 \times 10^{-31} \times (3 \times 10^8)^2}{1,6 \times 10^{-19}} = 512 \text{ keV}$$

A.III.1.c. $E_C < \frac{E_{\text{masse}}}{100}$: électrons non relativistes.

$$\text{A.III.1.d. } v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times (-1,6 \times 10^{-19}) \times (-3000)}{1,6 \times 10^{-19}}} = 32,5 \times 10^6 \text{ m s}^{-1}$$

$$\text{A. III.2.a. } \frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\vec{n} \wedge \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \wedge \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right]|^2}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^5} \text{ avec } \frac{d\vec{\beta}}{dt} = \frac{\vec{a}}{c}. \text{ En mécanique classique, } \beta \rightarrow 0,$$

$$\text{donc } \frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\vec{n} \wedge \left[\vec{n} \wedge \left[\frac{\vec{a}}{c} \right] \right]|^2}{1} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\vec{n} \wedge \frac{\vec{a}}{c} \sin \theta \cdot \vec{u}|^2}{1} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} a^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{A. III.2.b. } P = \int_0^\pi \frac{dP}{d\Omega} 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{e^2 a^2}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$\text{Comme } \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \text{ alors } P = \frac{e^2 a^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

A. III.2.c. Le mouvement étant uniformément accéléré : $a = \frac{v^2}{2x}$.

$$\text{Alors : } P = \frac{e^2 \left(\frac{v^2}{2x} \right)^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} = \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2 \times \left(\frac{(32,5 \times 10^6)^2}{2 \times 10^{-6}} \right)^2}{6\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times (3 \times 10^8)^3} = 1,48 \times 10^{-12} \text{ W}$$

$$t = \frac{2x}{v} = 6,14 \times 10^{-14} \text{ s} \quad E_{\text{ray}} = P \times t = 9,72 \times 10^{-26} \text{ J} \quad E_C = 3 \text{ keV} = 4,8 \times 10^{-16} \text{ J}$$

Ce qui donne le rapport $E_{\text{ray}}/E_C = 2 \times 10^{-10}$. Il n'y a donc pratiquement pas de rayonnement.

A. III.3.a. Le mouvement est rectiligne uniformément varié, alors \vec{v} est colinéaire à $\frac{d\vec{\beta}}{dt}$.

$$\vec{n} \cdot \vec{\beta} = \frac{v}{c} \cos \theta \text{ et } \frac{d\vec{\beta}}{dt} = \frac{a}{c} \vec{u}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\vec{n} \wedge \left[\left(\vec{n} - \frac{v}{c} \vec{u} \right) \wedge \frac{a}{c} \vec{u} \right]|^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right)^5} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{a^2 \sin^2 \theta}{c^2 (1 - \beta \cos \theta)^5} = \frac{e^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$

$$\text{A. III.3.b. } \frac{d\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)}{d\theta} = 0 \text{ et } f(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}$$

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta (1 - \beta \cos \theta)^5 - 5(1 - \beta \cos \theta)^4 (-\beta)(-\sin \theta) \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^{10}}$$

Le numérateur s'annule pour $2 \cos \theta (1 - \beta \cos \theta) - 5\beta \sin^2 \theta = 0$ soit $3\beta \cos^2 + 2 \cos \theta - 5\beta = 0$. La

$$\text{racine à retenir est } \cos \theta_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 15\beta^2}}{3\beta}.$$

Cas classique : $\beta \rightarrow 0$ $\cos \theta_0 \rightarrow \frac{15\beta^2}{3\beta} \rightarrow 0$ soit $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

Cas relativiste : $\beta \rightarrow 1$ $\cos \theta_0 \rightarrow 1$ soit $\theta_0 \rightarrow 0$.

A.III.4. Spectre X : pics : niveaux d'énergie des atomes.
Fond continu : rayonnement de freinage.
Seuil : correspond à 30 keV environ. Énergie maximale du rayonnement de freinage

PARTIE B INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

B.I. Inductance propre et inductance mutuelle.

B.1.1. a. Soit Φ le flux du champ magnétique à travers un circuit.
Pour un seul circuit parcouru par un courant d'intensité i , $\Phi_{\text{propre}} = Li$. L est l'inductance propre du circuit.

On peut également définir L à partir de l'énergie magnétique : $W_m = \frac{1}{2} Li^2$

B.1.1.b. M_{21} est défini par $\Phi_{21} = M_{21}i_2$.

B.1.1.c. $M_{12} = M_{21} = M$.

B.1.1.d. d1 : $M_1 > 0$; d2 : $M < 0$; d3 : $M = 0$.

B.1.2. La composante du champ magnétique sur le vecteur unitaire axial a pour expression : *

$B = \frac{\mu_0 ni}{h}$ où n est le nombre total de spires et h la longueur de la bobine.

Le flux propre $\Phi = Bns$ où s est l'aire de la section droite du cylindre, donne $L = \frac{\mu_0 n^2 s}{h}$

Application numérique : $s = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ soit $L = 15,8 \text{ mH}$.

B.1.3.a. $\Phi_a = \Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{12} + \Phi_{21} = 2(L+M)i$, soit $L_a = 2(L+M)$

En tenant compte de l'inversion du branchement, nous avons $L_b = 2(L-M)$.

B.1.3.b. $Z_a = 2\sqrt{(L+M)^2 4\pi^2 f^2 + r^2}$

B.1.3.c. De même, nous avons $Z_b = 2\sqrt{(L-M)^2 4\pi^2 f^2 + r^2}$. On obtient le système :

$$\begin{cases} L + M = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{Z_a^2}{4} - r^2} = 14,9 \text{ mH} \\ L - M = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{Z_b^2}{4} - r^2} = 8,9 \text{ mH} \end{cases} \text{ qui donne } \begin{cases} L = 11,9 \text{ mH} \\ M = 3 \text{ mH} \end{cases}$$

B.1.4. Quand on place deux bobines en série, les impédances complexes s'ajoutent, donc $L = L_1 + L_2$ si l'inductance mutuelle est nulle.

En parallèle, ce sont les admittances qui s'ajoutent, donc $1/L = 1/L_1 + 1/L_2$ si les résistances sont négligeables.

B.II. Induction et conversion d'énergie.

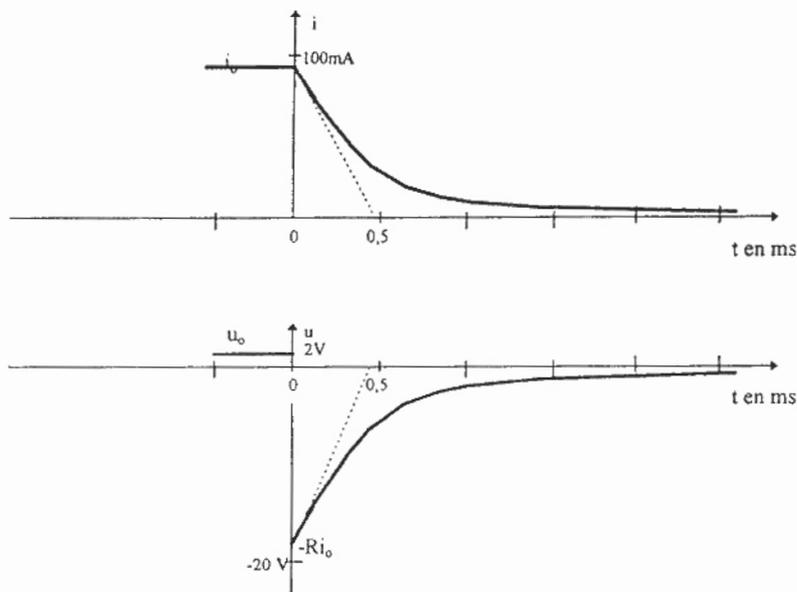
B.II.1. Echange d'énergie entre une bobine et une résistance.

B.II.1.a. $R_{\text{eq}} = r/R = 9,52 \Omega$. Diviseur de tension : $u_0 = \frac{2 \times 9,52}{19,52} = 0,975 \text{ V}$ et $i_0 = u_0/r = 97,5 \text{ mA}$

B.II.1.b. A l'ouverture de K : $Li' + (R+r)i = 0$ avec $i(0^+) = i_0$.

Solution : $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$ avec la constante de temps $\tau = \frac{L}{R+r} = 0,476 \text{ ms}$

Comme $u = -Ri$ alors $u(t) = -Ri_0 e^{-t/\tau}$ avec $Ri_0 = 19,5 \text{ V}$.



B.II.1.d. A $t=0$, $E_m = \frac{1}{2} Li_0^2$, et quand $t \rightarrow \infty$, $E_m = 0$.

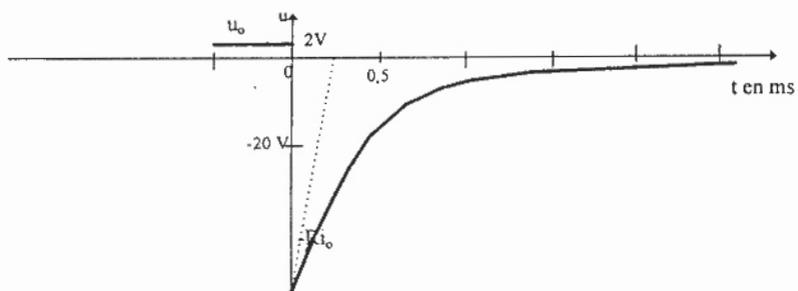
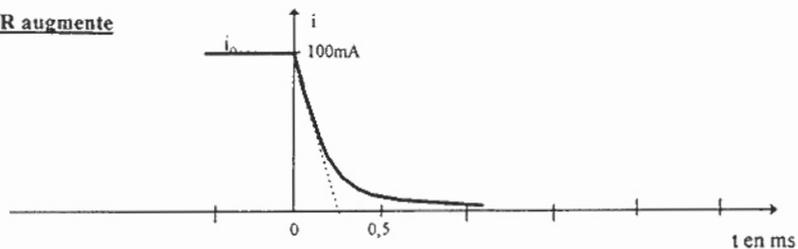
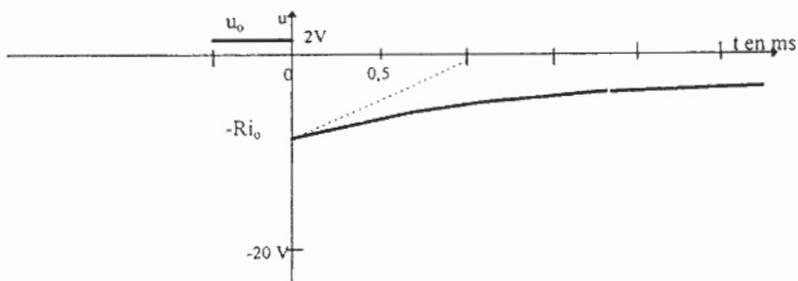
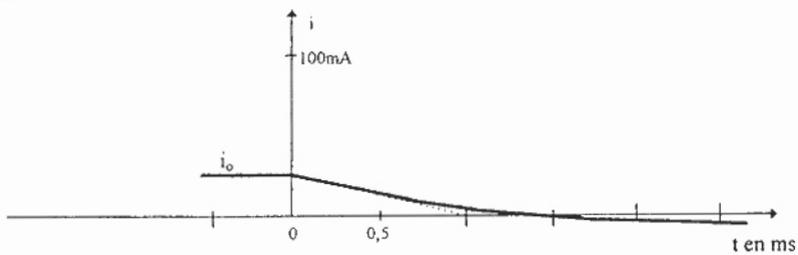
Comme $R=20r$ et que ces deux résistances sont parcourues par la même intensité, $W_R = 20W_r$.

Nous avons donc : $W_R = \frac{20}{21} \times \frac{1}{2} Li_0^2$ soit $W_R = 0,45 \text{ mJ}$.

B.II.1.e. Si R augmente, i_0 vaut pratiquement 100 mA , τ diminue et la surtension Ri_0 augmente.

Si R diminue, i_0 diminue, τ augmente et la surtension Ri_0 diminue.

On obtient pour ces deux situations les courbes suivantes :

i) R augmente**ii) R diminue**

B.II.2. Echange d'énergie entre une bobine et une machine tournante.

B.II.2.a. $i_0 = \frac{10}{40} = 250 \text{ mA}$ et à $t=0+$, $i=0$ car la diode est bloquée.

B.II.2.b. Equation électrique $Li' + ri + K\omega = 0$ (el).

B.II.2.c.1. L'énergie cinétique de m a pour expression $E_{cm} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{a^2}{C^2}\omega^2$, ce qui donne

la contribution $J_m = \frac{ma^2}{C^2} = 2 \times 10^{-7} \text{ kg.m}^2$

B.II.2.c.2.

(i) : le moment du couple moteur est $Ki_0 = 7,5 \text{ mN.m}$ et le moment du poids de m transmis par le réducteur est $\frac{mga}{C} = 2 \text{ mN.m}$. Donc la masselotte va monter.

(ii) : $\delta W = dE_c$. Pour m , nous avons $dz = \frac{a}{C}\omega dt$.

L'application du théorème de la puissance cinétique au système Rotor+m implique : $\Gamma\omega dt - \frac{mga}{C}\omega dt = d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right)$, soit après simplification par ω : $Ki - \frac{mga}{C} = J\omega'$ (me)

B.II.2.d. On reporte l'expression de ω' tirée de (me) dans (el), alors :

$$Li'' + ri' + \frac{K^2}{J}i = \frac{Kmg a}{JC} \quad (\text{dif})$$

B.II.2.e.

(i) $i'(t=0+) = -\frac{r}{L}i_0 = -3,5 \text{ A.s}^{-1}$ en utilisant (el) et la continuité de i et de ω .

$\omega'(t=0+) = \frac{Ki_0}{J} - \frac{mga}{JC} = 1,83 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-2}$ en utilisant (me)

$u(t=0+) = Li'(0+) + rLi_0 = -12,5 \text{ V}$

(ii) i_{lim} est égale à la solution particulière de l'équation avec second membre puisque la solution générale de l'équation sans second membre converge vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.

(iii) $i_{lim} = \frac{mga}{KC} = 66 \text{ mA}$, $\omega_{lim} = -\frac{ri_{lim}}{K} = -154 \text{ rad/s}$ en utilisant (el)

$u_{lim} = rLi_{lim} = 1,32 \text{ V}$.

B.II.2.f.1. i : courbe 1 et ω : courbe 2.

B.II.2.f.2. Soit t_0 tel que $\omega(t_0) = 0$, alors $t_0 = 0,21 \text{ s}$.

Pour $t < t_0$, le travail du poids de m est négatif : moteur.

Pour $t > t_0$, le travail du poids est positif : génératrice.

B.II.2.f.3. $i(0) = 250 \text{ mA}$ et $\omega(0) = 0 \text{ rd/s}$

$i_{lim} = 66 \text{ mA}$ et $\omega_{lim} = -154 \text{ rd/s}$

B.II.2.f.4. altitude maximale si $dz/dt=0$ soit $\omega=0$. Ceci se produit à l'instant $t_c=0,21$ s.

B.II.2.f.5. $\theta_{\max} = \frac{1}{2} 60 \times 0,21 = 6 \text{ rad}$

$$z_{\max} = \frac{a\theta_{\max}}{C} = 6 \text{ mm.}$$

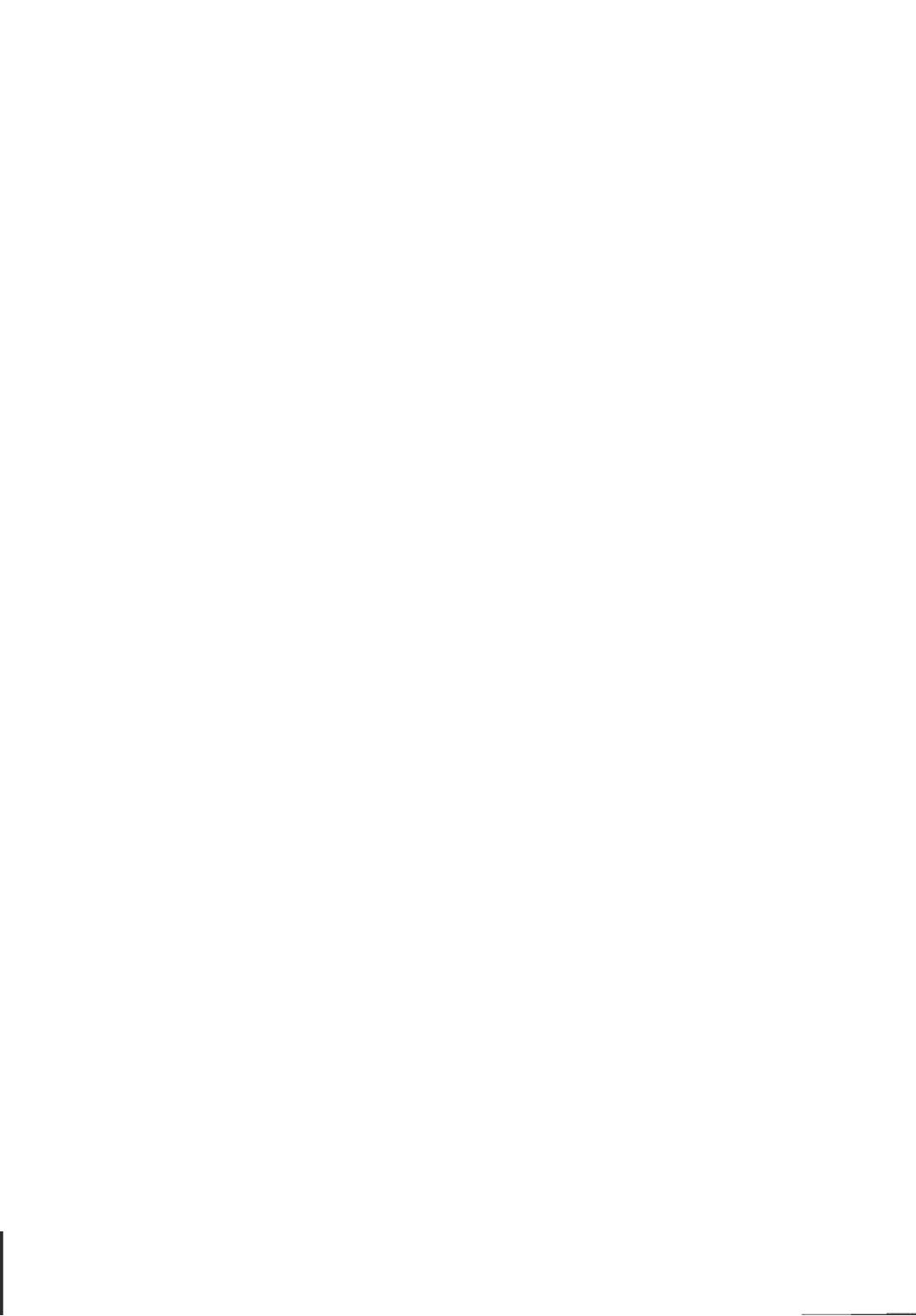
B.II.f.6. Pour z_{\max} , $E_{p\max} = mgz_{\max} = 12 \text{ mJ}$ en prenant $E_p(z=0)=0$.

L'énergie stockée initialement dans la bobine vaut $W_m = \frac{1}{2} L i_0^2 = 0,5 \times 5 \times (0,250)^2 = 156 \text{ mJ}$.

Le rapport est donc de 7,7% ; une partie de l'énergie initiale a été dissipée dans les résistances et a priori, une partie de cette énergie est encore stockée dans la bobine. Dans le cas étudié, quand $i=0$, alors $i'=0$, ce qui fait que si $\omega=0$, alors $i=i'=0$ selon (e1).

L'énergie cinétique est nulle dans les deux états.

Donc les 92,3% de l'énergie initiale ont été dissipés par effet Joule.



CAPES

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de chimie avec applications - Session : 1999

PARTIE A

L'EAU

I. Les éléments constituant de la molécule d'eau et sa formation.

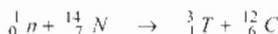
1.1. L'atome d'hydrogène.

1.1.a. On appelle isotopes d'un élément des nucléides ayant le même nombre de protons (celui caractéristique de l'élément) mais des nombres de neutrons différents.

Isotopes naturels de l'hydrogène : $Z = 1$. Ils ont respectivement zéro neutron (hydrogène, 1_1H), un neutron (deutérium, 2_1D), deux neutrons (tritium, 3_1T).

1.1.b. Équation de la réaction nucléaire

L'isotope radioactif étant 3_1T , par conservation on obtient :



1.2. L'atome d'oxygène.

1.2.a. Structure électronique : $O : Z = 8 : 1s^2 2s^2 2p^4$

1.2.b. Longueur d'onde du rayonnement capable de provoquer la rupture de O_2 . Il faut que l'énergie $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ du photon soit supérieure à l'énergie d'une liaison $O = O$ soit :

$$\frac{hc}{\lambda} \geq \frac{E(0=0)}{N} \quad \text{et} \quad \lambda \leq \frac{h \cdot N_c}{E(0=0)}$$

Application Numérique :

$$\lambda \leq 240 \text{ nm}$$

dans l'UV

Rôle de l'ozone stratosphérique : absorption d'une partie des rayons UV émis par le soleil (surtout les UV(B)) et protection des êtres vivants contre les cancers de la peau.

1.3. Structure électronique de la molécule de dioxygène.

1.3.a. Modèle de Lewis : Chaque atome d'oxygène ayant six électrons sur sa couche externe, les deux atomes de O_2 ont, à eux deux, douze électrons associés par deux en doublets. Il faut donc placer six doublets en respectant la règle de l'octet pour chaque oxygène. On obtient :



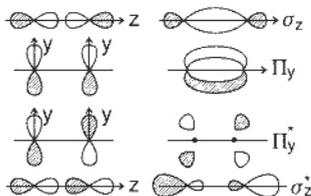
I.3.b. Le paramagnétisme du dioxygène ne peut s'interpréter avec la représentation de Lewis car elle ne présente que des électrons associés en doublet. Or le paramagnétisme est dû à la présence d'électrons célibataires. Nous rencontrons là, une limite du modèle de Lewis puisqu'il ne peut pas rendre compte d'un phénomène expérimental.

I.3.c. Diagramme des orbitales moléculaires (OM)

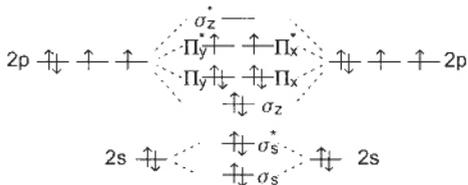
Nature et construction des OM

Par ordre d'énergie croissante on trouve :

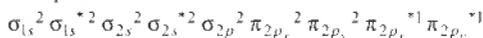
- 1 OM σ_{p_z} : recouvrement latéral de 2 OA $2 p_z$.
- 2 OM π_{p_x} et π_{p_y} : recouvrement latéral de 2 OA $2 p_x$ ou $2 p_y$.
- 2 OM $\pi_{p_x}^*$ et $\pi_{p_y}^*$: recouvrement latéral de 2 OA $2 p_x$ ou $2 p_y$.
- 1 OM $\sigma_{p_z}^*$: recouvrement axial de 2 OA $2 p_z$.



I.3.d. Remplissage des OM



Configuration électronique :



Elle justifie bien le paramagnétisme observé par la présence de deux électrons non appariés dans les orbitales antiliantes : $\pi_{2p_x}^*$ et $\pi_{2p_y}^*$.

I.3.e. Indice de liaison

$$n_{\text{liaison}} = \frac{\text{nombre électrons liants} - \text{nombre électrons antiliants}}{2}$$

Pour O₂ :

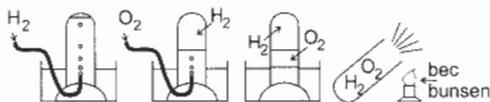
$$n_{\text{liaison}} = \frac{8 - 4}{2} = \boxed{2}$$

Cette valeur est cohérente avec la double liaison obtenue par le modèle de Lewis.

1.4. Formation de la molécule d'eau.

1.4.a. Préparation expérimentale

1.4.a.1. Obtention d'eau à partir de dihydrogène et de dioxygène



Par déplacement d'eau on remplit un flacon avec $2/3$ de H_2 et $1/3$ de O_2 et on le présente à la flamme. On a alors une explosion (mélange tonnant) provenant du caractère rapide et exothermique de la réaction.

1.4.a.2. Précautions

Il y a deux types de risque : celui lié à la manipulation de dihydrogène et celui dû à l'explosion. Il est conseillé de ne pas prendre de tube en verre (ou sinon très épais), de tenir le flacon avec un chiffon, d'avoir éventuellement des quantités peu importantes de réactifs.

1.4.a.3. Mise en évidence expérimentale de l'eau formée

En utilisant des cristaux blancs et sulfate de cuivre ($CuSO_4$) anhydre qui, en s'hydratant, deviennent bleus.

1.4.b. Vitesse de formation de l'eau

1.4.b.1. Type de mécanisme

C'est un mécanisme radicalaire (présence d'intermédiaires réactionnels qui sont des radicaux) en chaîne avec succession d'étapes correspondant à trois phases :

- phase d'initiation : formation de radicaux (1)
- phase de propagation : réaction des radicaux avec formation d'un plus grand nombre de radicaux (chaîne ramifiée) (2), (3), (4)
- phase de terminaison : disparition des radicaux (5), (6)

1.4.b.2. Approximation de l'état quasi-stationnaire

Quand la réaction a atteint un régime quasi-stationnaire, on considère que les intermédiaires réactionnels (espèces très réactives) ont une concentration faible et quasi constante.

On peut l'appliquer ici aux trois intermédiaires : H^\bullet , HO^\bullet et \ddot{O}

$$\frac{d[H^\bullet]}{dt} = 2k_1[H_2] + k_3[\ddot{O}][H_2] + k_4[{}^\bullet OH][H_2] - k_2[H^\bullet][O_2] - k_5[H^\bullet][M]$$

$$\frac{d[HO^\bullet]}{dt} = k_2[H^\bullet][O_2] + k_3[\ddot{O}][H_2] - k_4[HO^\bullet][H_2] - k_6[HO^\bullet][M]$$

$$\frac{d[\ddot{O}]}{dt} = k_2[H^\bullet][O_2] - k_3[\ddot{O}][H_2]$$

II. Structure et propriétés physiques de l'eau.

II.1. Structure de la molécule d'eau.

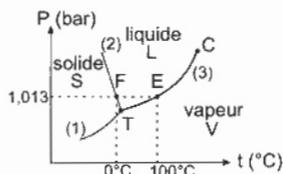
II.1.a. Géométrie de la molécule d'eau : $H - \bar{O} - H$.

D'après la théorie VSEPR, l'atome central est environné de quatre doublets de distribution spatiale tétraédrique : AX_2E_2 . La molécule est donc coucée.

II.1.b. L'angle de $104,5^\circ$ entre les liaisons est inférieur à celui de 109° qui correspondrait à une structure tétraédrique de type AX_4 . Il s'interprète par le fait que, les doublets liants, plus proches de l'atome central exercent une répulsion plus forte entre eux ce qui referme l'angle formé par les deux doublets liants.

II.2. Diagramme de phases de l'eau.

II.2.a



II.2.b. Transformations physiques

(1) $S \rightarrow V$: sublimation

(2) $S \rightarrow L$: fusion

(3) $L \rightarrow V$: vaporisation

II.2.c. Températures

Sous pression atmosphérique normale ($P = 1.013$ bar), la température de fusion de l'eau est de 0°C (point F) et d'ébullition de 100°C (point E).

II.2.d. Le point T

C'est le point triple de l'eau où coexistent les trois phases : S, L, V.

En ce point la variance est : $v = c + 2 - \phi$.

$c =$ nombre de constituant : $1 (H_2O)$ } $v = 0$, les paramètres d'état du système sont
 $\phi =$ nombre de phases : $3 (S, L, V)$ } fixés ; les trois phases ne peuvent exister simultanément qu'à T_T et P_T .

II.2.e. Coexistence eau liquide et eau vapeur

Entre le point triple T ($0,01^\circ\text{C}$) et le point critique C (374°C).

Au-delà du point critique il n'y a plus distinction entre la phase liquide et la phase vapeur.

On parle d'état supercritique pour $P > P_C$ et $T > T_C$.

II.3. Équilibre eau liquide - eau vapeur.

II.3.a. Potentiel chimique

$$H_2O_{liq} : \quad \mu_{H_2O_{liq}}(T) = \mu_{H_2O_{liq}}^0(T) + RT \ln a$$

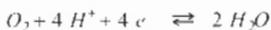
$$H_2O_{vap} : \quad \mu_{H_2O_{vap}}(T) = \mu_{H_2O_{vap}}^0(T) + RT \ln \frac{P}{P^0} \quad P^0 = 1 \text{ bar}$$

II.3.a. Pression de vapeur saturante

Cette pression P est celle de la vapeur, en équilibre à la température T avec le liquide. A équilibre il y a égalité des potentiels chimiques.

$$\mu_{H_2O_{liq}} = \mu_{H_2O_g} \quad \text{avec } a = 1 \text{ (eau pure)}$$

$$\text{d'où : } \quad \underline{\underline{Ln P = Ln P^\circ + (\mu_{H_2O_{liq}}^0 - \mu_{H_2O_{(g)}}^0) / RT}}$$

III. Stabilité et utilisation de l'eau.III.1. Domaine de stabilité de l'eau.III.1.a. Diagramme potentiel-pHCouple : O_2 / H_2O H_2O réducteur

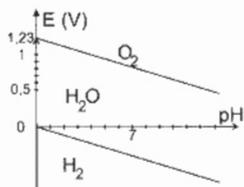
$$E_{O_2/H_2O} = E_{O_2/H_2O}^0 + \frac{RT}{4F} Ln P_{O_2} [H^+]^4$$

$$E_{O_2/H_2O} = \underline{\underline{1,23 - 0,06 pH}} \quad (P_{O_2} = 1 \text{ bar})$$

Couple : H_2O / H_2 ou H^+ / H_2 H_2O oxydant

$$E_{H^+/H_2} = E_{H^+/H_2}^0 + \frac{RT}{2F} Ln \frac{[H^+]^2}{P_{H_2}}$$

$$E_{H^+/H_2} = \underline{\underline{-0,06 pH}} \quad (P_{H_2} = 1 \text{ bar})$$

III.1.b. Espèces stablesIII.2. Utilisation comme réactif pour la production de gaz dihydrogène.III.2.a. Équations-bilans

Vapeur d'eau sur méthane :



Vapeur d'eau sur monoxyde de carbone :

III.2.b. Constante d'équilibre

Réaction (1) :

$$\Delta_r G_1^0(T) = \Delta_f G_{CO}^0(T) + 3 \Delta_f G_{H_2}^0(T) - \Delta_f G_{CH_4}^0(T) - \Delta_f G_{H_2O}^0(T)$$

$$\Delta_r G_1^0(T) = -52,46 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

or :

$$\Delta_r G_1^0(T) = -RT Ln K_1(T)$$

avec :

$$T = 1100 \text{ K}$$

d'où $K_1(1000 \text{ K}) = 308 \gg 1$ donc l'équilibre est déplacé vers la droite (synthèse H_2 favorisée thermodynamiquement).

III.3. Utilisation comme réactif pour la préparation de l'hydrogénocarbonate d'ammonium.

III.3.a. Températures

Pour la réaction en présence d'enzyme à $T_1 = 25^\circ\text{C} = 298 \text{ K}$ on a une constante de vitesse

$$k_1 = \nu_1 A_1 e^{-\frac{E_A(1)}{RT_1}}$$

$$\text{En l'absence d'enzyme à une température } T : k_2 = \nu_2 A_2 e^{-\frac{E_A(2)}{RT}}$$

Si on suppose que l'on a même ordre et même facteur de fréquence $\nu_1 = \nu_2$, les vitesses sont égales si $k_1 = k_2$.

$$\text{et : } \left. \begin{aligned} T &= \frac{E_A(2)}{E_A(1)} = T_1 \\ \text{soit : } T &= 1101 \text{ K} \\ T &= 828^\circ\text{C} \end{aligned} \right\}$$

III.3.b. Rôle du catalyseur

Le catalyseur abaisse l'énergie d'activation, en affaiblissant en général les liaisons à rompre au cours de la réaction.

III.4. Production de la vapeur d'eau.

III.4.a. Analyse préliminaire

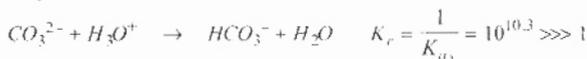
III.4.a.1. Dureté de l'eau due à la présence d'ions Ca^{2+} et Mg^{2+} .

III.4.a.2. Courbe pH métrique du dosage d'une eau contenant des ions carbonates (CO_3^{2-}) et hydrogénocarbonate (HCO_3^-) en même quantité, par de l'acide.

Les deux bases sont dosées séparément car $\Delta pK_a > 4$.

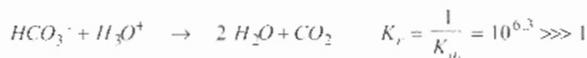
- $0 < V < V_{e1}$

Réaction de dosage :



- $V_{e1} < V < V_{e2}$

On dose les HCO_3^- présents au départ et ceux formés devant la première équivalence selon :

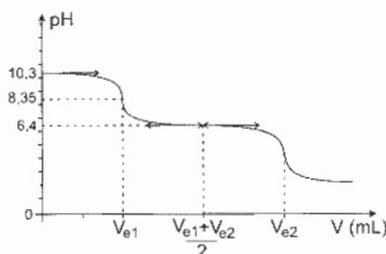


À V_{e1} : $n_{H_3O^+ \text{ ajoutés}} = n_{CO_3^{2-} \text{ au}} \quad \text{et} \quad n_{HCO_3^- \text{ au}} = n_{CO_3^{2-} \text{ au}}$

Entre V_{e1} et V_{e2} :

$$n_{H_3O^+ \text{ ajoutés}} = n_{HCO_3^- \text{ au}} + n_{HCO_3^- \text{ formés}} = n_{HCO_3^- \text{ au}} + n_{CO_3^{2-} \text{ au}} = 2 n_{CO_3^{2-} \text{ au}}$$

$$\text{donc : } (V_{e2} - V_{e1}) = 2 V_{e1} \quad \text{et} \quad \left. \begin{aligned} V_{e2} &= 3 V_{e1} \end{aligned} \right\}$$



- A $V = 0$, mélange équimolaire de HCO_3^- et CO_3^{2-} $\text{pH} = \text{p}K_{a_2} = 10,3$.
- A $V = V_{e_1}$, on a HCO_3^- ampholyte :

$$\text{pH} = \frac{1}{2} (\text{p}K_{a_1} + \text{p}K_{a_2}) = \frac{10,3 + 6,4}{2} = 8,35.$$
- A $V = \frac{V_{e_1} + V_{e_2}}{2}$, deuxième demi-équivalence on a un mélange équimolaire de CO_2 et HCO_3^- d'où $\text{pH} = \text{p}K_{a_1} = 6,4$.
- A $V = V_{e_2}$, on a CO_2 , la valeur dépend alors de la concentration de la solution (donnée non fournie).

III.4.a.3. Exploitation de la courbe de dosage

Soit V le volume d'eau dosée contenant CO_3^{2-} à la concentration $C_{\text{CO}_3^{2-}}$ et HCO_3^- à la concentration $C_{\text{HCO}_3^-}$.

A la première équivalence :

$$C_{\text{CO}_3^{2-}} \times V = C_{\text{H}_3\text{O}^+} \times V_{e_1}$$

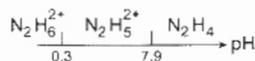
A la deuxième équivalence :

$$(C_{\text{CO}_3^{2-}} \times C_{\text{HCO}_3^-}) \times V = C_{\text{H}_3\text{O}^+} (V_{e_2} - V_{e_1})$$

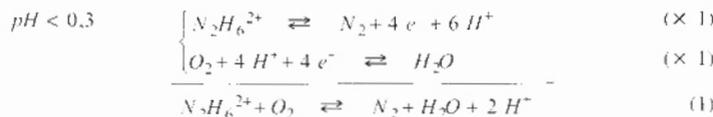
$$\text{d'où : } C_{\text{CO}_3^{2-}} = \frac{C_{\text{H}_3\text{O}^+} \times V_{e_1}}{V} \quad \text{et : } C_{\text{HCO}_3^-} = \frac{C_{\text{H}_3\text{O}^+} \times (V_{e_2} - V_{e_1})}{V}$$

III.4.b. Dégazage de l'eau

III.4.b.1. Domaine de prédominance :



III.4.b.2. Équations-bilan de l'oxydation en diazote





Potentiel standard apparent :

- $pH < 0,3$

$$E^{\circ'} = (N_2 / N_2H_6^{2+}) = E^{\circ} (N_2 / N_2H_6^{2+}) - 0,09 \text{ pH}$$

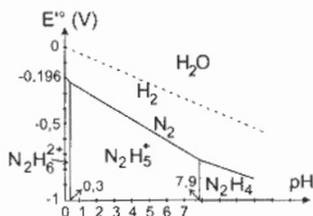
- $0,3 < pH < 7,9$

$$E^{\circ'} = (N_2 / N_2H_5^+) = E^{\circ} (N_2 / N_2H_5^+) - 0,075 \text{ pH}$$

- $pH > 7,9$

$$E^{\circ'} = (N_2 / N_2H_4) = E^{\circ} (N_2 / N_2H_4) - 0,06 \text{ pH}$$

III.4.b.3. Diagramme $E^{\circ'} = f(pH)$ pour l'hydrazine



III.4.b.4. Validité de la méthode chimique de dégazage

Quelque soit le pH de l'eau, le potentiel rédox du couple O_2 / H_2O est toujours supérieur à ceux des couples : $N_2 / N_2H_6^{2+}$, $N_2 / N_2H_5^+$ et N_2 / N_2H_4 .

L'hydrazine est donc toujours (d'après la thermodynamique) oxydé par le dioxygène dissout. O_2 dissout est alors remplacé par N_2 qui est moins soluble dans l'eau (moins polarisable) et surtout moins agressif pour les installations (risque de corrosion...).

III.4.b.5. Volume d'hydrazine nécessaire

D'après les équations (1), (2) et (3), il faut la même quantité de matière (en mol) de dioxygène et d'hydrazine :

$$n_{O_2} = \frac{m_{O_2}}{M_{O_2}} = \frac{7,68 \times 10^{-3} \times 100}{32} = n_{N_2H_4}$$

donc :

$$m_{N_2H_4} = n_{N_2H_4} \times M_{N_2H_4}$$

et :

$$V_{N_2H_4} = \frac{m_{N_2H_4}}{\rho_{N_2H_4}}$$

soit :

$$V_{N_2H_4} = m_{O_2} \times \frac{M_{N_2H_4}}{M_{O_2}} \times \frac{1}{\rho_{N_2H_4}} \quad V = 0,760 \text{ mL}$$

IV. Pollution de l'eau.

IV.1. Pollution par les pesticides.

Sur le spectre IR on observe :

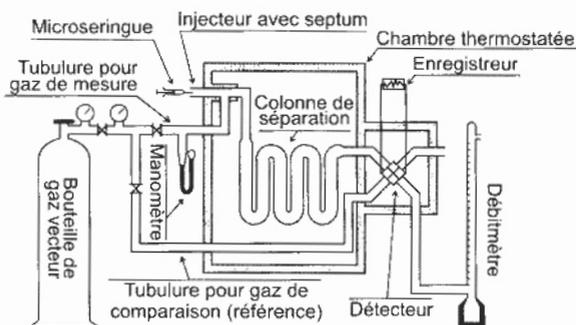
– une bande à 3300 cm^{-1} ; élongation amide $\begin{array}{c} \diagup \\ \text{N}-\text{H} \end{array}$

– une bande à 1720 cm^{-1} ; élongation ester $\begin{array}{c} \text{C}=\text{O} \\ \diagdown \\ \text{RO} \end{array}$

IV.2. Pollution par les hydrocarbures

IV.2.a. Méthode d'analyse : chromatographie en phase gazeuse.

Le chromatographe en phase gazeuse

IV.2.b. Choix de la colonne

Les molécules à analyser : le benzène C_6H_6 , le toluène $\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3$, et le 1,4 dichlorobenzène $\text{Cl}-\text{C}_6\text{H}_4-\text{Cl}$ sont des molécules apolaires. La phase stationnaire doit donc être apolaire.

IV.2.c. Ordre de sortie des produits

Les molécules à analyser exercent avec la phase stationnaire des interactions de type Van der Waals. Ces interactions sont d'autant plus fortes que la chaîne carbonée est longue. Plus les interactions sont fortes et plus l'alcane sera retenu donc le temps de rétention sera long.

Ainsi l'ordre de sortie sera : (1) pentane, (2) hexane, (3) heptane, (4) octane, (5) décane.

Le temps de rétention de l'octane (pic n° 4) correspond à un déroulement de $d = 5,4\text{ cm}$ du papier donc :

$$t_R = \frac{d}{v} = 2,7\text{ min}$$

V. Distillation de mélange aqueux.

V.1. Distillation d'un mélange eau / éthanoate d'éthyle.

V.1.a. Température d'ébullition

Pour un mélange de fraction molaire $x = 0,3$ en éthanoate d'éthyle, on élève la température depuis 20°C où le mélange est liquide jusqu'à la température où apparaît la première bulle de vapeur : point de rencontre (E) avec la courbe d'ébullition.

On lit alors : $\theta_{cb} = 78^{\circ}\text{C}$.

V.1.b. Composition de vapeurs émises

A l'équilibre liquide-vapeur, la pression et la température étant fixées, la composition de la vapeur est donnée par l'intersection (R) avec la courbe de rosée.

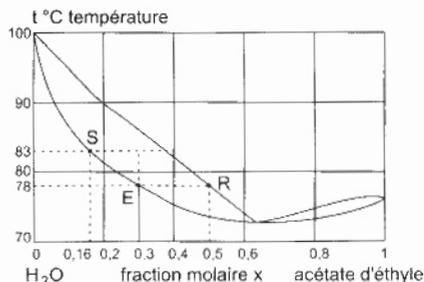
On lit : $x_V = 0,51$ pour l'acétate d'éthyle.

V.1.c. Composition de la solution

Pour $\theta = 83^{\circ}\text{C}$, la composition est donnée par l'intersection avec la courbe d'ébullition (S).

On lit : $x_L = 0,16$ pour l'acétate d'éthyle.

Diagramme isobare d'équilibre liquide-vapeur :
eau / éthanoate d'éthyle $P = 1,013 \text{ bar}$



V.2. Distillation continue de ce mélange.

La température en tête de colonne est la température d'ébullition de l'azéotrope : $\theta = 72,5^{\circ}\text{C}$.

La composition du distillat est donc celle du mélange azéotrope : $x = 0,67$ pour l'acétate d'éthyle.

On ne peut donc l'obtenir par distillation.

PARTIE B

SYNTHÈSE STÉRÉOSPÉCIFIQUE D'UN ANESTHÉSIQUE LOCAL : LA LÉVOBUPIVACAÏNE

I. Étude de quelques propriétés structurales.

I.1. La lysine : un composé d'intérêt biologique.

I.1.a. Famille

La lysine est de la famille des acides α aminés de formule générale :

$$\text{R}-\overset{\alpha}{\underset{\text{NH}_2}{\text{CH}}}-\text{COOH}$$

I.1.b. Définition d'une protéine

C'est une macromolécule résultant de la polycondensation d'acide α aminés. On la qualifie aussi de polypeptide. Il y a condensation de la fonction acide d'un acide α aminé avec la fonction amine de l'acide α aminé voisin ce qui conduit à la formation d'une fonction amide

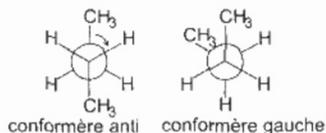


appelée aussi liaison peptidique, et d'une molécule d'eau.

I.1.c. Stéréoisomère de conformation

Deux stéréoisomères de conformation ont même formule brute, même formule développée plane et ne diffèrent que par la position des atomes dans l'espace due à la libre rotation autour des liaisons simples C - C.

Exemple : butane



En représentation de Newman, on dessine deux conformères particuliers du butane mais il en existe une infinité.

1.1.d. Interaction

Pour la conformation des protéines, type hélice α , on rencontre trois types d'interactions :

- ~ électrostatique (charge, charge) : très énergétique.
- ~ Van der Waals (dipôle, dipôle) : faible énergie.
- ~ par pont hydrogène $\left(\begin{matrix} \delta & \delta^- \\ \cdot & X \dots M \end{matrix} \right)$: directionnelle et d'énergie moyenne.

1.2. Éléments de stéréochimie.

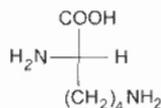
1.2.a. Stéréoisomère de la bupivacaïne

Elle possède un carbone asymétrique donc deux stéréoisomères de configuration (*R* et *S*).

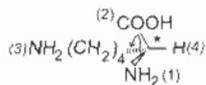
1.2.b. Nombre maximum de stéréoisomère

Avec *n* carbones asymétriques, il y a au maximum 2^n stéréoisomères.

1.2.c. Représentation de la L-lysine



Représentation de Fisher



Représentation de Cram

D'après les règles de préséance de Cahm Ingold Prélog (CIP), on se place selon l'axe $C^* - (4)$ et on tourne dans le sens $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3)$. On obtient une configuration *S*.

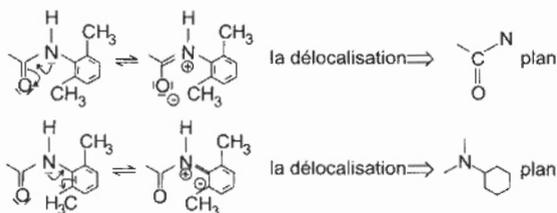
1.2.d. Signification de L et lévogyre (l)

L : vient de la position à gauche (Laevus) du groupement NH_2 dans la projection de Fisher.

(l) : vient du sens de rotation d'une lumière polarisée par traversée d'une solution de cette substance. Cela correspond, pour un observateur faisant face à la source lumineuse, à une rotation vers la gauche (lévogyre). On la note aussi (-) et on adopte un signe négatif pour son pouvoir rotatoire spécifique.

1.2.e. Racémate ou mélange racémique

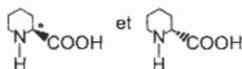
C'est un mélange équimolaire de deux émantiomères. Ce mélange est optiquement inactif par compensation.

I.2.f. Justification de la planéitéII. Étude de la synthèse du produit commercial (racémate).II.1. Étape 1.

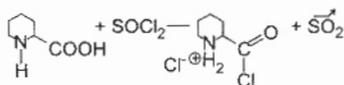
II.1.a. Réactif H_2 puisqu'il y a addition de 3 H_2 sur le cycle benzénique, il faut pour cela un catalyseur : Pt ou Ni (catalyse hétérogène).

II.1.b. Conséquence stéréochimique

Lors de l'addition il y a adsorption sur le catalyseur et syn addition. Les deux faces étant équivalentes, on obtient le racémique :

II.2. Étape 2.

II.2.a. Lors de la réaction 2, il y a passage de l'acide au chlorure d'acide, on peut pour cela utiliser $SOCl_2$ ou PCl_5 .

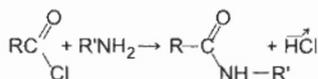
II.2.b. Équation-bilan

HCl dégagé réagit avec la fonction amine pour la protoner.

II.3. Étape 3.

II.3.a. Sous-produit de la 2,6 diméthylaniline sur C

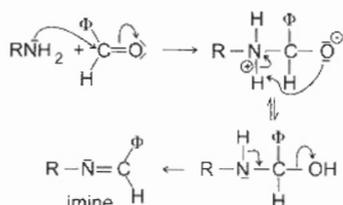
C'est la réaction entre une amine $R'NH_2$ et un chlorure d'acide $R-\overset{\text{O}}{\parallel}{C}-Cl$



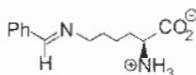
Le sous-produit est donc HCl . Il protonne la 2-,6 diméthylaniline (base) et la rend moins nucléophile donc moins réactive.

III.1.b. Amine I' sur benzaldéhyde

On a une addition nucléophile à la première étape.

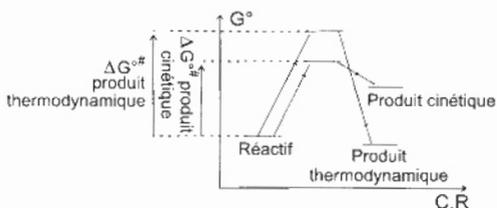


Formule de B'

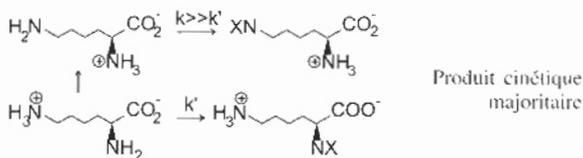
III.1.c. Contrôle cinétique

La réaction se fait à basse température. Le produit qui se forme de façon prépondérante est celui qui se forme le plus vite.

On peut voir la notion de produit cinétique (celui qui nécessite la plus faible énergie d'activation) et celui de produit thermodynamique (le produit le plus stable) sur un profil réactionnel.



III.1.d. La nucléophilie est une notion cinétique. Ce sont deux amines primaires. La plus nucléophile est celle qui est la moins encombrée (doublet plus disponible) donc celle de la chaîne latérale.



Produit cinétique majoritaire

III.1.e. Rendement de l'étape 2'

On obtient 10,0 g de C' soit une quantité de matière $n = \frac{m}{M}$.

Or : $M_{C'} = M(C_{14}H_{20}N_2O_4) = 280 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Donc : $n = \frac{10,0}{280} = 3,57 \times 10^{-2} \text{ mol}$

Le réactif en défaut est B'. Le rendement est :

$$r = \frac{n}{0.1} \times 100 = 36 \%$$

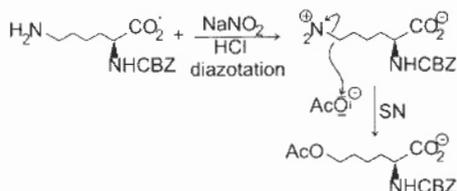
III.2. Fonctionnalisation de la fonction amine latérale.

III.2.a. Nom et formule développée

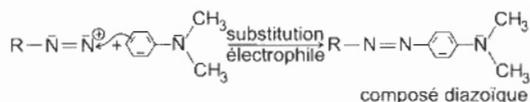
Par action de l'acide nitreux (HNO_2), formé in situ, sur l'amine RNH_2 , on obtient un ion diazonium R-N_2^{\oplus} (K^+) intermédiairement. L'amine étant aliphatique, cet ion n'est pas stable en solution, même à 0°C .



III.2.b. Intermédiaire formé dans la transformation 3'



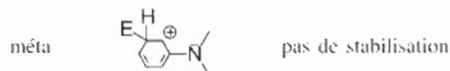
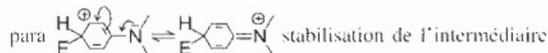
III.2.c. Réaction de RN_2^{\oplus} avec la N, N-diméthylaniline



III.2.d. Produit majoritaire

est un substituant mésomère donneur, il oriente en *o* et *p* la deuxième substitution (cf. ci-dessous les deux intermédiaires de Wheland les plus stables). Pour des raisons stériques, c'est la substitution en *para* qui est la plus probable.

Intermédiaires de Wheland



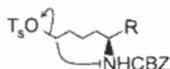
III.2.e. Colorant

Il y a conjugaison des deux cycles via le groupe azo - $\text{N}=\text{N}^-$ - et ses doublets non-liants. Cette conjugaison entraîne une diminution de l'écart d'énergie entre la HOMO et la LUMO

du système π . Les transitions ($n - \pi^*$) électroniques correspondent alors à des énergies plus faibles, à une longueur d'onde plus grande et à une absorption dans le visible.

III.3. Cyclisation et alkylation finale.

III.3.a. Mécanisme cyclisation



On a une substitution nucléophile intramoléculaire sur un carbone primaire. Il s'agit sans doute d'une S_N2 . T_5O^- est un bon nucléofuge et l'amine un bon nucléophile.

III.3.b. Isolation de H^+

On a une amine primaire très réactive et on pourrait avoir des SN intermoléculaires.

III.3.c. Réactif et conditions pour 8^+

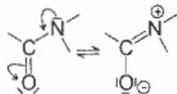
On a une alkylation de l'amine secondaire, c'est une SN sur un dérivé halogéné $nBuBr$, soit :



Pour neutraliser le départ du proton H^+ qui pourrait protoner une autre amine et lui faire perdre son caractère nucléophile, on travaille en présence d'une base faible : K_2CO_3 .

III.3.d. Pas d'alkylation sur l'azote de la fonction amide

La nucléophilie de l'azote de la fonction amide est bien plus faible. En effet, le doublet de l'azote est moins disponible car partiellement engagé dans la délocalisation selon :



III.3.e. Comment synthétiser la (R) bupivacaïne ?

Il suffit de partir de l'énantiomère (R) de la lysine.

III.3.f. Stéréospécificité de la synthèse

En partant de l'énantiomère (S) de la lysine, on synthétise uniquement l'énantiomère (S) de la bupivacaïne, de même en partant de la (R) lysine on obtient (R) bupivacaïne. La réaction est donc bien stéréospécifique et même énantiospécifique. Il est à noter qu'aucune étape ne vient affecter le carbone asymétrique qui conserve donc sa configuration.

CAPES

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition de physique avec applications - Session : 1999

PREMIER PROBLÈME

Partie I. Optique géométrique.

I.A.1.a. Le chemin optique entre deux points A et B le long d'une courbe \mathcal{C} s'écrit

$$[A, B] = \int_{\mathcal{C}} n \, ds \text{ où } s \text{ représente l'abscisse curviligne.}$$

I.A.1.b. Le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller de A à B est celui pour lequel le chemin optique $[A, B]$ est stationnaire par rapport à l'ensemble des chemins voisins.

Le chemin optique est extrémal le long d'un rayon lumineux.

Dans le cas d'un milieu transparent et homogène la lumière se propage en ligne droite.

I.A.2.a. Indice de réfraction $n = c_0 / c$.I.A.2.b. $A_1 I = \sqrt{z_1^2 + x^2}$ et $A_2 I = \sqrt{z_2^2 + (h-x)^2}$ en posant $h = OH$.La durée du trajet $A_1 A_2$ est $t = \frac{A_1 I}{c_1} + \frac{A_2 I}{c_2}$ soit $c_0 t = n_1 A_1 I + n_2 A_2 I$

$$t(x) = \frac{n_1}{c_0} \sqrt{z_1^2 + x^2} + \frac{n_2}{c_0} \sqrt{z_2^2 + (h-x)^2}$$

 $t(x)$ passe par une valeur minimale pour $\frac{dt}{dx} = 0$

$$\frac{2n_1 x}{\sqrt{z_1^2 + x^2}} - \frac{2n_2 (h-x)}{\sqrt{z_2^2 + (h-x)^2}} = 0$$

comme $\sin(i_1) = \frac{x}{\sqrt{z_1^2 + x^2}}$ et $\sin(i_2) = \frac{h-x}{\sqrt{z_2^2 + (h-x)^2}}$ on a la formule de Snell - Descartes

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

I.A.3.a. Au point d'incidence I $n_0 \sin(\alpha_0) = n_1 \sin(i_1)$ Le prolongement du rayon réfracté en I coupe le prolongement du rayon $A_0 O$ en A_1' ; la position de A_1' dépend de α_0 . Il n'y a donc pas stigmatisme; l'observateur voit une tâche floue au lieu d'un point.

I.A.3.b. Pour réaliser le stigmatisme approché avec un système

optique centré il suffit que les angles de tous les rayons avec

l'axe soient faibles, que les angles d'incidence de tous les rayons sur les dioptries ou les miroirs soient faibles.

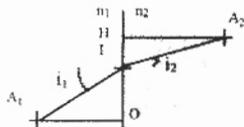
Dans le cas du dioptre plan (fig 2), si α_0 est petit alors $\tan(\alpha_0) \approx \alpha_0$ et $\sin(\alpha_0) \approx \alpha_0$ de même
 $\tan(i_1) = i_1$ et $\sin(i_1) = i_1$ d'où $OA_1' = OA_0 \frac{n_1}{n_0}$, la position de A_1' est indépendante de I voisin de O,


Fig 1

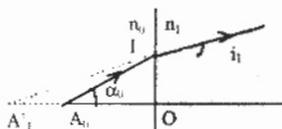


Fig 2

on parle alors de stigmatisme approché dans l'approximation de Gauss. A_1' est une image virtuelle.

I.A.3.c. Avec $z_0 = OA_0$ et $z_1 = OA_1'$ la relation du dioptre plan s'écrit $\frac{z_0}{n_0} = \frac{z_1}{n_1}$

I.B.1.a. Pour le dioptre plan $\{n_0, n\}$ $\frac{OA_0}{n_0} = \frac{OA}{n}$ et

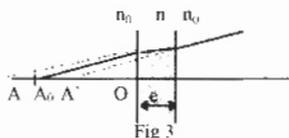
pour le dioptre plan $\{n, n_0\}$ $\frac{OA+e}{n} = \frac{OA'+e}{n_0}$

$$\frac{OA_0 - OA'}{n_0} = e \left(\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n} \right) \text{ d'où } A_0A' = e \left(1 - \frac{n_0}{n} \right)$$

I.B.1.b. A.N. Pour $n_0 = 1,00$ $n = n_1 = 1,50$ et $e = 3,0$ mm, A_0A' vaut 1,0 mm.

I.B.2. lame stratifiée $n(z) = n_0 + a \cdot z$ et $n_1 = n_0 + a \cdot e$ $a = (n_1 - n_0)/e$

$$A_0A' = \int_0^e \left(1 - \frac{n_0}{n(z)} \right) dz \text{ soit } A_0A' = e - \frac{n_0}{a} \int_0^e \frac{a \cdot dz}{n_0 + a \cdot z} \quad A_0A' = e - \frac{n_0}{n_1 - n_0} \ln \left(\frac{n_1}{n_0} \right)$$



I.C.1.a. Dans le triangle A_0CI $\frac{\sin(\omega)}{IA_0} = \frac{\sin(i_0)}{A_0C}$

Dans le triangle A_1CI $\frac{\sin(\omega)}{IA_1} = \frac{\sin(i_1)}{A_1C}$

$$\text{d'où } \frac{A_0C}{IA_0 \cdot \sin(i_0)} = \frac{A_1C}{IA_1 \cdot \sin(i_1)}$$

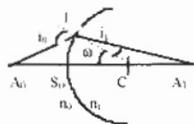


Fig 4

avec loi de réfraction en I : $n_0 \cdot \sin(i_0) = n_1 \cdot \sin(i_1)$ on a $n_0 \cdot \frac{A_0C}{IA_0} = n_1 \cdot \frac{A_1C}{IA_1}$ qui fait apparaître la notion d'invariant.

I.C.1.b. Dans l'approximation de Gauss I et S_0 sont confondus $IA_0 = S_0A_0$ et $IA_1 = S_0A_1$,
 $n_0 \cdot \frac{A_0C}{S_0A_0} = n_1 \cdot \frac{A_1C}{S_0A_1}$ et en écrivant algébriquement la quantité invariante $n_0 \cdot \frac{CA_0}{S_0A_0} = n_1 \cdot \frac{CA_1}{S_0A_1}$

En prenant l'origine en C $\overline{S_0A_0} = \overline{S_0C} + \overline{CA_0}$ et $\overline{S_0A_1} = \overline{S_0C} + \overline{CA_1}$,

on a la relation de conjugaison du dioptre sphérique : $\frac{n_0}{CA_1} - \frac{n_1}{CA_0} = \frac{n_0 - n_1}{CS_0}$

I.C.2.a. Le foyer est le point de convergence d'un faisceau de rayons qui arrive parallèlement sur le système optique. C'est aussi l'image d'un objet ponctuel infiniment éloigné.

I.C.2.b. A_0 infiniment éloigné, le dioptre $\{n_0, S_0, n_1\}$ en donne une image A_1 telle que

$$\frac{n_0}{CA_1} = \frac{n_0 - n_1}{CS_0}$$

Le dioptre $\{n_1, S_2, n_2\}$ donne de A_1 une image F' $\frac{n_2}{CA_1} - \frac{n_1}{CF} = \frac{n_2 - n_1}{CS_2}$

$$\overline{CF} = \frac{n_0 n_1}{n_0(n_1 - n_2) - n_2(n_0 - n_1)} \overline{CS_2}$$

Lentille boule $\overline{CF} = \frac{n_0 n_1}{n_0 n_1 + n_1 n_2 - 2n_0 n_2} R$ soit $\overline{CF} = 4,5$ mm.

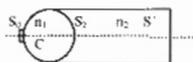


Fig 5

I.C.2.c. Soit S' l'image de S_0 dans le dioptre $\{n_1, S_2, n_2\}$

$$\frac{n_2}{CS_0} - \frac{n_1}{CS'} = \frac{n_2 - n_1}{CS_2}$$

$$-\frac{n_2}{R} - \frac{n_1}{CS} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \overline{CS} = \frac{R}{n_1 - 2n_2} \text{ comme } n_1 = 2n_2, S' \text{ est à l'infini.}$$

Dans le second milieu le faisceau est parallèle.

Partie II. Nature électromagnétique de l'onde lumineuse.

II.A.1.a. Densité volumique de charge libre $\rho = 0$ et vecteur densité de courant libre $\mathbf{j} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \text{ de plus } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{aligned}$$

II.A.1.b. Avec la permittivité relative ϵ_r , $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$

II.A.1.c.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

II.A.2.a $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathbf{E})) = \operatorname{rot}(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t})$ donne $\operatorname{grad}(\operatorname{div}(\mathbf{E})) - \Delta \mathbf{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \text{ et de même } \Delta \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

II.A.2.b On pose $c^2 = 1 / (\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r) = c_0^2 / \epsilon_r$,

II.A.2.c Puisque $n = c_0 / c$ (I.A.2.a) $n = \sqrt{\epsilon_r}$

II.A.3.a. \mathbf{k} est le vecteur d'onde

II.A.3.b. $k = 2\pi n / \lambda_0$

II.A.3.c. $\operatorname{div}(\mathbf{E}) = 0$ entraîne $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ donc \mathbf{k} est perpendiculaire à \mathbf{E} .

II.A.3.d.1. $\operatorname{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ entraîne $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$

II.A.3.d.2. $\mathbf{E} = c \mathbf{B}$

II.B.1.a. À la surface de séparation des deux milieux la composante tangentielle du champ électrique est continue ; de même pour la composante normale du champ magnétique.

II.B.1.b. En un point M de la surface de séparation la relation de continuité des ondes impose l'égalité des phases de l'onde monochromatique.

Dans le plan $z = 0$ on aura $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r}$ et $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}$

$$(\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{T} = 0 \quad \text{soit } \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1 = a_1 \cdot \mathbf{N} \quad (f)$$

$$(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{T} = 0 \quad \text{soit } \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 = a_2 \cdot \mathbf{N} \quad (g)$$

II.B.1.c. $\mathbf{k}_1 = (2\pi n_1 / \lambda_0) \mathbf{u}_1$, $\mathbf{k}'_1 = (2\pi n_1 / \lambda_0) \mathbf{u}'_1$, $\mathbf{k}_2 = (2\pi n_2 / \lambda_0) \mathbf{u}_2$

(f) s'écrit $n_1 \mathbf{u}'_1 - n_1 \mathbf{u}_1 = a_1 \cdot \mathbf{N}$, $\mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}_1 = a_1 \cdot \mathbf{N}$

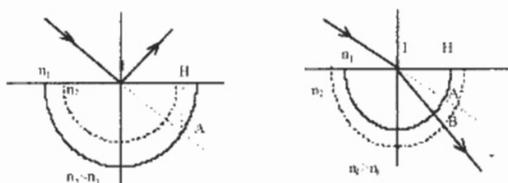
C'est la loi de la réflexion. Le plan de réflexion et le plan d'incidence sont confondus ; et $i_1 = i_1$

(g) s'écrit $n_2 \mathbf{u}_2 - n_1 \mathbf{u}_1 = b_1 \cdot \mathbf{N}$.

C'est la loi de la réfraction. Le plan de réfraction et le plan d'incidence sont confondus ; et

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

II.B.1.d. Fig 6



II.B.1.e Si $n_1 < n_2$ alors la construction est possible pour toute valeur de i_1 ; $\sin(i_2) = (n_1 / n_2)\sin(i_1) < \sin(i_1)$ donc $i_2 < i_1$

Si $n_2 < n_1$ alors la construction n'est possible que si $i_1 \leq i_L$; $\sin(i_L) = (n_2 / n_1)$. Pour $i_1 > i_L$, il y a réflexion totale.

II.B.2.α. $\underline{E}_1 = E_{01} \exp[j(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})]$ avec $\mathbf{k}_1 = k_{1x} \mathbf{e}_x + k_{1z} \mathbf{e}_z$, le champ électrique de l'onde incidente est selon la direction Oy C'est la direction de polarisation.

II.B.2.β $\underline{E}_1 = E_{01} \exp[j(\omega t - k_{1x} \sin(i_1) - k_{1z} \cos(i_1))]$ $\underline{E}_2 = E_{02} \exp[j(\omega t - k_{2x} \sin(i_2) - k_{2z} \cos(i_2))]$

$$k_{2x} = k_{1x} = k_1 \sin(i_1), k_{2y} = k_{1y} = 0, k_{1z} = k_1 \cos(i_1), k_1 = 2\pi n_1 / \lambda_0$$

$$k_2^2 = k_{2x}^2 + k_{2z}^2 \quad k_{2z}^2 = 4\pi^2 [n_2^2 - n_1^2 \sin^2(i_1)] / \lambda_0^2 \quad \text{donc } k_{2z}^2 < 0$$

$$k_{2z} = \pm j \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 \sin^2(i_1) - n_2^2}$$

II.B.2.γ $\underline{E}_2 = E_{02} \exp[j(\omega t - k_{1x} \sin(i_1) \pm jz \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 \sin^2(i_1) - n_2^2})]$ on ne retiendra que la solution bornée pour z infiniment grand.

II.B.2.γ.1. Propagation selon la direction Ox

$$\underline{E}_2 = E_{02} \exp(-\frac{z}{\delta}) \exp[j(\omega t - k_{1x} \sin(i_1))] \quad \text{avec } \delta = \lambda_0 / 2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2(i_1) - n_2^2}$$

II.B.2.γ.3. Dans la direction Oz l'amplitude décroît selon une loi exponentielle (onde évanescente).

II.B.2.γ.4. La vitesse de phase est $v_\varphi = c_1 / \sin(i_1)$

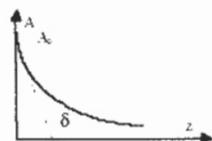


Fig 7

Partie III. Propagation avec guidage.

III.A.1.a. Au point d'incidence I $n_0 \cdot \sin(\theta_i) = n_1 \cdot \sin(\alpha)$

Le guidage est réalisé par la réflexion totale en A : $i > i_L$.

comme $\alpha + i = \pi / 2$ on a $\sin(i_L) = \cos(\alpha_L) = n_2 / n_1$

La condition de guidage est $\theta_i < \theta_m$ avec $\sin(\theta_m) = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

$$\text{III.A.1.b. } ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

III.A.1.c. Fibre de silice $ON = 0,244$ et $\theta_m = 14^\circ$

Fibre à AsGa $ON = 2,49$ et $\theta_m = 90^\circ$

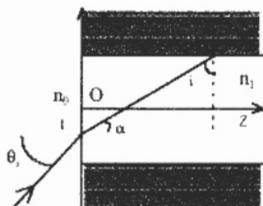


Fig 8

III.A.2.a. $t_{\text{mini}} = L / c_1 = L \cdot n_1 / c_0$ et $t_{\text{maxi}} = L' / c_1$ avec $L' = L / \sin(i_1)$ soit $\Delta t = \frac{n_1 L}{c_0} - \frac{L}{n_2 c_1}$

III.A.2.b. A.N. $\Delta t = 0,135 \mu\text{s}$

III.A.3.a. La différence de trajet est

$$d = I_1 I_2 + I_2 Q = I_1 I_2 [1 + \cos(2i)] = 2a \cos(i);$$

le déphasage est alors $\phi = \frac{2\pi n_1}{\lambda_0} 2a \cos i = 2\Phi$

Les interférences seront constructives pour $\phi = 2m\pi$ (m entier)

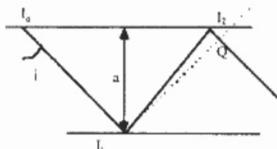


Fig 9

$$\text{III.A.3.b. } \frac{\Phi}{2} = \frac{\pi n_1}{\lambda_0} a \cos(i) = \frac{\pi}{2} m$$

$$\text{soit } \tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi n_1}{\lambda_0} a \cos(i) - m \frac{\pi}{2}\right)$$

En posant $x = \cos(i)$ on a les fonctions dont les graphes sont donnés dans l'annexe. Les 5 points d'intersections correspondent aux 5 modes.

III.A.4.a. En utilisant l'équation de propagation $\Delta E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ où $c = c_0 / n$ on a

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} - \alpha^2 E(x) = \left(-\frac{\omega^2 n^2}{c_0^2} \right) E(x)$$

$E(x)$ est bien solution de l'équation proposée.

III.A.4.b.1. Dans le milieu d'indice n_2

pour $x > a/2$ la solution est $E(x) = A \cdot \exp[-\gamma(x - a/2)]$ et

pour $x < -a/2$ elle est $E(x) = C \cdot \exp[\gamma(x + a/2)]$.

Ces solutions restent finies pour $\gamma > 0$.

Dans le milieu d'indice n_1 (pour $-a/2 < x < a/2$) la solution est $E(x) = B \cdot \cos[\beta(x + a/2)] + D \cdot \sin[\beta(x - a/2)]$

$$\text{III.A.4.b.2. } \gamma^2 = \alpha^2 - \frac{\omega^2 n_2^2}{c_0^2} \quad \text{et} \quad \beta^2 = \frac{\omega^2 n_1^2}{c_0^2} - \alpha^2$$

$$\text{III. A. 4 b. 3. } \alpha^2 + \beta^2 - \omega^2 \frac{n_1^2}{c_0^2} \text{ ou encore } \alpha^2 + \beta^2 = n_1^2 k_0^2 = k_1^2;$$

on pose $\alpha = k_1 \cos(\theta)$ et $\beta = k_1 \sin(\theta)$.

On a donc $\mathbf{k}_1 = \beta \mathbf{e}_x + \alpha \mathbf{e}_z$ et $\mathbf{k}'_1 = -\beta \mathbf{e}_x + \alpha \mathbf{e}_z$

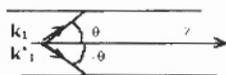


Fig 10

$$\text{III. B. 1 a. } \frac{\partial B_i}{\partial \lambda} = -\text{rot}(E_i)$$

Avec \mathbf{k} pour vecteur d'onde dans le vide :

$$B_{1x} = -\frac{E_1}{c_0} \cos(\theta) \exp[j(\omega t + k x \sin(\theta) - k z \cos(\theta))]$$

$$B_{1y} = 0$$

$$B_{1z} = -\frac{E_1}{c_0} \sin(\theta) \exp[j(\omega t + k x \sin(\theta) - k z \cos(\theta))]$$

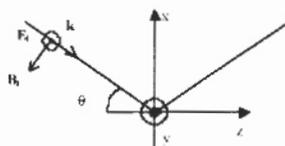


Fig 11

III. B. 1 b. Réflexion sur une surface métallique, $\mathbf{E}_T = \mathbf{0}$, $\mathbf{B}_N = \mathbf{0}$

$$\underline{E}_{1x} = 0$$

$$B_{1x} = B_1 \cos(\theta) \exp[j(\omega t - k x \sin(\theta) - k z \cos(\theta))]$$

$$\underline{E}_{1y} = -E_1 \exp[j(\omega t - k x \sin(\theta) - k z \cos(\theta))]$$

$$B_{1y} = 0$$

$$\text{avec } B_1 = \frac{E_1}{c_0}$$

$$\underline{E}_{1z} = 0$$

$$B_{1z} = -B_1 \sin(\theta) \exp[j(\omega t - k x \sin(\theta) - k z \cos(\theta))]$$

III. B. 1 c. L'onde résultante

$$\underline{\mathbf{E}} = j \cdot 2 \cdot E_1 \sin(k x \sin(\theta)) \exp[j(\omega t - k z \cos(\theta))] \mathbf{e}_y$$

$$B_x = -j \cdot 2 \cdot B_1 \cos(\theta) \sin(k x \sin(\theta)) \exp[j(\omega t - k z \cos(\theta))]$$

$$B_y = 0$$

$$B_z = -2 B_1 \sin(\theta) \cos(k x \sin(\theta)) \exp[j(\omega t - k z \cos(\theta))]$$

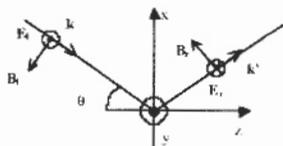


Fig 12

Selon la direction Ox , il y a un régime d'ondes stationnaires et propagation selon la direction Oz .

III. B. 2 a. Sur la plaque métallique $\mathbf{E} = \mathbf{0}$; $E_y = 0$ pour $\sin(k x \sin(\theta)) = 0$

soit $x = a = m \cdot \lambda_g / (2 \sin(\theta))$ ou $a = m \cdot \frac{\lambda_0}{2 \sin(\theta)}$ m entier 1, 2, 3, ...

$$\text{III. B. 2 b } \lambda_g = \frac{\lambda_0}{\cos(\theta)}$$

$$\text{III. B. 2 c. 1. } \sin(\theta) = m \frac{\lambda_0}{2a} \quad \cos(\theta) = \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \quad \text{donne } \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2$$

$$\text{III. B. 2 c. 2. } \left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{m}{2a}\right)^2 \quad \text{condition de propagation } \lambda_g \text{ réel pour}$$

$$\lambda_0 < 2a / m \quad m = 1, \lambda_0 < 2a \text{ avec } f_c = c_0 / 2a \quad f > f_c$$

$$\text{III. B. 2 c. 3. AN. } f_c = 6,25 \text{ GHz micro ondes (bande C).}$$

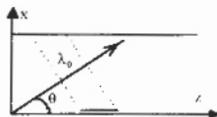


Fig 13

DEUXIÈME PROBLÈME

I Etude statique du matériau**I.1 Propriétés mécaniques**

$$I.1.a \quad \frac{x}{e} = \frac{\tau}{Y} = \frac{F}{Y\pi r^2} \quad \text{donc} \quad x = \frac{F}{Y} \frac{e}{\pi r^2} \quad \text{Numériquement, } x = +1,22 \cdot 10^{-10} \text{ m.}$$

$$I.1.b \quad k = \frac{F}{x} = Y \frac{\pi r^2}{e}$$

$$I.1.c \quad k = 1,6 \cdot 10^{11} \text{ N.m}^{-1}$$

$$I.1.d \quad E_{pm} = \frac{1}{2} kx^2$$

I.2 Condensateur plan

I.2.a

$$I.2.a.1 \quad C = \epsilon \frac{S}{e} = \epsilon \frac{\pi r^2}{e}$$

$$I.2.a.2 \quad C = 5,9 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 5,9 \text{ nF.}$$

I.2.b

$$I.2.b.1 \quad u = \frac{q_A}{C}$$

$$I.2.b.2 \quad E_{pe} = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} Cu^2$$

II Effet piézoélectrique**II.1**

$$II.1.a \quad q_A = KF.$$

$$II.1.b \quad V_A - V_B = q_A / C$$

$$II.1.c \quad u = \frac{q_A}{C} = \frac{KF}{C} = \frac{Kkx}{C} = \frac{KYse}{\epsilon S} x = \frac{KY}{\epsilon} x, \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{KY}{\epsilon} = 5,6 \cdot 10^8 \text{ V.m}^{-1}$$

II.2

$$\delta W = F \cdot dx + u dq = kx \cdot dx + \alpha q dx + \frac{q dq}{C} + \alpha x \cdot d\epsilon$$

$$\text{donc} \quad dE_p = kx \cdot dx + \frac{q dq}{C} + \alpha q dx + \alpha x \cdot d\epsilon \quad \text{et} \quad E_p = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{q^2}{2C} + \alpha qx + C\epsilon$$

L'énergie αqx peut être qualifiée d'énergie électromécanique. C'est une énergie de couplage.

II.3

$$\text{II.3 a } F = (k - \alpha^2 C)x \text{ d'où } \beta = \alpha^2 \frac{C}{k} = \left(\frac{KY}{\varepsilon} \right)^2 \frac{e \varepsilon s}{Y_s e} = \alpha K.$$

$Au \rightarrow 0$ correspond $k' = k(1 - \alpha K)$.

La raideur est plus faible. Le coefficient $1 - \alpha K$ est calculé plus loin.

$$\text{II.3 b } AF \rightarrow 0 \text{ correspond } u = \frac{q}{C}(1 - \alpha K). \text{ Soit } C' = \frac{C}{1 - \alpha K}$$

La capacité est plus grande.

$$\text{II.3 c } E_{pe} = \frac{1}{2} C' u^2 = \frac{1}{2} \frac{C u^2}{(1 - \alpha K)}. \text{ La variation relative est } \frac{\Delta E_{pe}}{E_{pe}} = \frac{\alpha K}{1 - \alpha K}.$$

Numériquement, $\alpha K = 1,1 \cdot 10^{-2}$, on peut donc écrire $\frac{\alpha K}{1 - \alpha K} \approx \alpha K$.

III Etude harmonique de la piézoélectricité.

$$\text{III.1 a } F_{\text{subipate film}} = kX + \alpha q \text{ et } F_{\text{subie par le film}} = -F_{\text{film plaque}}$$

La RFD s'écrit : $m \ddot{x} = F_{\text{film plaque}} + F_{\text{pression}}$

$$\text{III.1 b } \begin{cases} -m\omega^2 \underline{x}_0 + k \underline{x}_0 + \alpha \underline{q}_0 + \underline{p}_0 s = 0 \\ \underline{u}_0 = \frac{q_0}{C} + \alpha \underline{x}_0 \end{cases}$$

$$\text{III.1 c } \dot{i} = \frac{dq}{dt} \text{ donc } \underline{j} = j\omega \underline{q}$$

$$\text{III.1 d } \text{Le système devient } \begin{cases} -m\omega^2 \underline{x}_0 + k \underline{x}_0 - \alpha \frac{i_0}{j\omega} = 0 \\ \underline{u}_0 = \frac{i_0}{j\omega C} - \alpha \underline{x}_0 \end{cases}$$

De la première équation, on tire $\underline{x}_0 = \frac{\alpha}{k - m\omega^2} \frac{i_0}{j\omega}$, ce qui, reporté dans la se-

conde donne : $\underline{u}_0 = \frac{i_0}{j\omega C} - \alpha^2 \frac{i_0}{j\omega(k - m\omega^2)}$ soit $Z = \frac{1}{j\omega C} \left(\frac{1}{C} - \alpha^2 \frac{1}{k - m\omega^2} \right)$

III.2

$$\text{III.2 a } Y_{M\omega} = jC_0 \omega + \frac{1}{j\omega L_m + \frac{1}{C_m \omega}} = j\omega \left(C_0 + \frac{1}{\frac{1}{C_m} - L_m \omega^2} \right);$$

$$Z_{M\omega} = \frac{1}{j\omega} \left(\frac{\frac{1}{C_m} - L_m \omega^2}{\frac{C_0}{C_m} - L_m C_0 \omega^2 + 1} \right) = \frac{1}{j\omega C_0} \left(\frac{1 - L_m C_m \omega^2}{\frac{C_m}{C_0} - L_m C_m \omega^2 + 1} \right)$$

III.2.b On peut transformer l'expression précédente :

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega} \left(\frac{1}{C'} - \alpha^2 \frac{1}{k - m\omega^2} \right) = \frac{1}{j\omega} \frac{k - m\omega^2 - C\alpha^2}{k - m\omega^2}, \text{ dans laquelle } \frac{C}{k} \alpha^2 = \alpha K,$$

$$\text{d'où } \underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} \frac{1 - \frac{m}{k(1-\alpha K)} \omega^2}{1 - \alpha K - \frac{m}{k(1-\alpha K)} \omega^2}. \text{ On peut donc rapprocher les deux ex-}$$

pressions, et proposer les équivalences : $L_m C_m = \frac{m}{k(1-\alpha K)}$, $C_0 = C$,

$$1 + \frac{C_m}{C_0} = \frac{1}{1-\alpha K}, \text{ soit } C_m = C_0 \frac{\alpha K}{1-\alpha K} = C \frac{\alpha K}{1-\alpha K}, \text{ et donc } L_m = \frac{m}{k\alpha K}.$$

III.2.c $C_0 = C = 5,9 \text{ nF}$, $C_m = 66 \text{ pF}$, $m = 2,65 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ et $L_m = 2,55 \cdot 10^{-4} \text{ H}$.

III.2.d L'impédance du film n'est qu'une réactance.

$$\text{De } \underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} \frac{1 - \frac{m}{k(1-\alpha K)} \omega^2}{1 - \alpha K - \frac{m}{k(1-\alpha K)} \omega^2}, \text{ on peut tirer}$$

$$S = -\frac{1-\alpha K}{C\omega} \frac{1 - \frac{m}{k(1-\alpha K)} \omega^2}{1 - \frac{m}{k} \omega^2} = -\frac{1-\alpha K}{C\omega} \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}}, \text{ en notant } \omega_1^2 = \frac{k(1-\alpha K)}{m} \text{ et}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k}{m}. \text{ Le film ne dissipe donc pas d'énergie électrique.}$$

III.2.e S est une fonction croissante de ω .

III.2.f Numériquement, $\omega_2^2 = 6,2 \cdot 10^{13}$ soit $\omega_2 = 7,87 \cdot 10^6 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\omega_1^2 = 6,13 \cdot 10^{13}$ soit $\omega_1 = 7,83 \cdot 10^6 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. ω_2 correspond à la résonance mécanique du film, ω_1 correspond à la résonance du film piézoélectrique, avec une raideur $k' = k(1-\alpha K)$.

III.2.g Les frottements fluides : phénomènes dissipatifs : dus à la résistance mécanique de l'air, la résistance mécanique du disque et la résistance électrique des fils de liaison et du disque. Ces phénomènes dissipatifs introduisent des termes du premier ordre dans les équations : proportionnels à la vitesse ou à l'intensité. A la réactance obtenue s'ajoute une résistance : Il n'y a plus annulation, mais minimum égal à la résistance et non plus infini, mais maximum.



CAPES

(Concours Externe)

SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition d'électronique - électrotechnique avec applications - Session : 1999

PREMIER PROBLEME

PARTIE A

$$A1.1 \quad P = \frac{X J_{eff}^2}{(X + R_g)^2 + (Y + X_g)^2}$$

$$A1.2 \quad Y = -X_g \quad \text{et} \quad X = R_g$$

$$A1.3 \quad \underline{Z}_i = \underline{Z}_g^*$$

$$A1.4 \quad P_{max} = \frac{E_{eff}^2}{4R_g}$$

A.1.5

$$A1.5.1 \quad Y_e = G_e + jB_e \quad \text{d'où} \quad R_e = \frac{G_e}{G_e^2 + B_e^2} \quad \text{et} \quad L_e \omega = \frac{-B_e}{G_e^2 + B_e^2}$$

$$R_e = 28,5 \, \Omega \quad \text{et} \quad L_e = 1,3 \, \text{nH}$$

A.1.5.2 Le générateur (antenne) possède une impédance réelle pure et la charge est réactive. La condition de A.1.3 ne peut donc être vérifiée.

A.2

$$A2.1 \quad R_p = (1 + q_n^2) \cdot R_e \quad \text{et} \quad L_p = (1 + 1/q_n^2) \cdot (L_e + L_1)$$

$$A2.2 \quad q_n = 0,87 ; \quad L_e + L_1 = 39,5 \, \text{nH} ; \quad L_1 = 38,2 \, \text{nH} ; \quad L_p = 91,7 \, \text{nH} ; \quad C_1 = 27,6 \, \text{pF}$$

A.2.3 Filtrage passe bande-

$$A2.4 \quad Q_0 = \frac{R_g/2}{L_p \omega_0} = 0,435 \quad \Delta F = \frac{f_0}{Q_0} = 230 \, \text{MHz} \quad \text{Excessif !! Très peu sélectif !!}$$

$$A2.5 \quad \left| \frac{v_e}{v_i} \right| = \left| \frac{R_e + jL_e \omega_0}{R_e + j(L_e + L_1) \omega_0} \right| = 0,75$$

A.3

$$A3.1 \quad Q_0' \cong 5 \quad \text{donc} \quad \Delta F \cong 20 \, \text{Mhz} \quad \text{largeur de la bande F.M.}$$

$$A3.2 \quad R_{c,1} = \frac{R_c}{m^2}$$

$$A3.3 \quad R_{c,1} = \left(\frac{1}{Y_c} \right)^* \quad \text{donc} \quad Y_s = \left(\frac{R_c}{m^2} \right)^{-1}$$

$$A3.4 \quad |Y_c| R_c = m^2$$

$$A3.5 \quad m=4$$

$$A3.6 \quad A_c = 12,5 \, \text{à} \, f_0$$

$$A3.7 \quad G \approx 19,5 \, \text{dB}$$

PARTIE B

$$B.1.1 \quad v_s = KAU \cos(\omega_p t) \cos(\omega_o t)$$

$$B.1.2 \quad v_s = \frac{KAU}{2} [\cos(\omega_p + \omega_o)t + \cos(\omega_p - \omega_o)t] \text{ Fréquences présentes: } F_p + F_o \text{ et } F_p - F_o$$

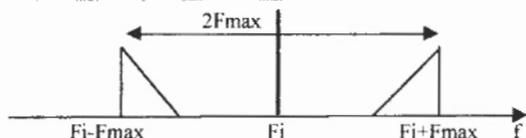
$$B.1.3 \quad F_i = |F_p - F_o| \text{ donc deux possibilités: } F_i = F_p - F_o \text{ et } F_i = F_o - F_p$$

$$\text{soit } F_{d,1} = F_p - F_o \text{ et } F_{d,2} = F_p + F_o$$

B.1.4

$$B.1.4.1 \text{ Bande Passante } \Delta F = (F_p + F_{\max}) - (F_p - F_{\max}) = 2F_{\max}$$

B.1.4.2



$$B.1.5 \text{ Fréquence Image } F_p = F_i + F_o \quad F_p' = F_i - F_o \text{ donc } F_p - F_p' = 2F_i$$

B.1.6.1 Si $B < 2F_i$ On ne peut trouver F_p et F_p' sur LA BANDE de largeur BSi $B > 2F_i$ On peut trouver F_p et F_p' sur LA BANDE de largeur BB.1.6.2 Bande G O $B = 105 \text{ kHz} < 2 \cdot 455 \text{ kHz}$ pas de possibilité de recevoir une fréquence et sa fréquence ImageB.1.6.3 Bande P O $B = 1100 \text{ kHz} > 2 \cdot 455 \text{ kHz}$ possibilité de recevoir une fréquence et sa fréquence ImageB.1.6.4.2 Bande .F.M $B = 20 \text{ MHz} < 2 \cdot 10,7 \text{ MHz}$ pas de possibilité de recevoir une fréquence et sa fréquence ImageB.1.6.5 Les circuits d'entrée doivent être très sélectifs: but séparer F_p et F_p' B.1.7 La fréquence F_i est choisie en dehors des bandes de réception et si possible de valeur pas trop élevée pour faciliter la réalisation des étages amplificateurs F.I.

B.2 Circuit mélangeur

$$B.2.1 \quad I_1 + I_2 = I_o \quad I_1 = I_s \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right) \quad I_2 = I_s \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right)$$

$$I_1 = I_o \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-(V_i - V_2)}{V_T}\right)} \quad I_2 = I_o \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{(V_i - V_2)}{V_T}\right)}$$

$$B.2.2.1 \quad I_3 = I_o \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{V_x}{V_T}\right)} \cdot \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{V_y}{V_T}\right)} \quad I_4 = I_o \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{V_x}{V_T}\right)} \cdot \frac{1}{1 + \exp\left(+\frac{V_y}{V_T}\right)}$$

$$I_5 = I_o \frac{1}{1 + \exp\left(+\frac{V_x}{V_T}\right)} \cdot \frac{1}{1 + \exp\left(+\frac{V_y}{V_T}\right)} \quad I_6 = I_o \frac{1}{1 + \exp\left(+\frac{V_x}{V_T}\right)} \cdot \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{V_y}{V_T}\right)}$$

$$B.2.2.2 \quad I_a - I_b = I_3 - I_4 + I_5 - I_6 \quad I_a - I_b = I_o \operatorname{th}\left(\frac{V_x}{2V_T}\right) \operatorname{th}\left(\frac{V_y}{2V_T}\right)$$

B.2.2.3

$$V_s = -R_c (I_a - I_b) = -R_c I_o \operatorname{th}(u) \operatorname{th}(v) = -R_c I_o \frac{(\exp(2u) - 1)}{\exp(2u) + 1} \frac{(\exp(2v) - 1)}{\exp(2v) + 1} = -R_c I_o \cdot u \cdot v$$

$$B.2.2.4.1 \quad V_s = -R_c (I_a - I_b) = \frac{-R_c I_o}{4 \cdot V_T^2} \cdot V_x \cdot V_y$$

$$B.2.2.4.2 \quad K = -9,25 \cdot 10^{-2}$$

PARTIE C RESTITUTION DE L' INFORMATION

C.1. DÉMODULATION D' AMPLITUDE

C1.1 Modulation avec porteuse

C.1.1.1 $v_s = KAU(1 + m \cos(\Omega t)) \cos(\omega t + \varphi) \cdot \cos \omega t$

C.1.1.2 $v_s = K \frac{AU}{2} (1 + m \cos(\Omega t)) (\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi))$

Composantes présentes (au facteur $KAU/2$ près) :

amplitude	pulsation
$\cos \varphi$	continu (0)
$m \cos \varphi$	Ω
1	2ω
0.5m	$2\omega - \Omega$
0.5m	$2\omega + \Omega$

C1.1.3 $\Omega_{\max} = 2\pi F_{\max} \leq \Omega_c \ll 2\omega$

C1.1.4 $s(t) = A_v \cdot \frac{KAU}{2} \cos \varphi (1 + m \cos \Omega t)$

Composante continue superposée et multiplication par $\cos \varphi$

C.1.1.5 $\cos \varphi = 0 \quad \varphi = \pi/2 \text{ ou } \varphi = 3\pi/2 \quad \text{pire condition } s(t) = 0$

$\cos \varphi = -1/+1 \quad \varphi = \pi \text{ ou } \varphi = 2\pi \quad \text{meilleure condition}$

Dans ce cas la porteuse et la porteuse reconstituée (émetteur) sont en phase(synchrones)

C.1.1.6

C.1.1.6.1 $U(1) = KUA \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad U(2) = KUA \cdot \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

$U(3) = \frac{KUA}{2} \cos \varphi \quad U(4) = \frac{KUA}{2} \sin \varphi \quad U(5) = K \left(\frac{KUA}{2} \right)^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \Lambda \sin 2\varphi$

C1.1.6.2 $v_s(t)$ contient une information sur φ donc utilisable pour corriger le déphasage entre la porteuse et la porteuse reconstituée

C1.1.7 $V_s(t) = KUA(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t \cos \omega' t =$

$$V_s(t) = KUA(1 + m \cos \Omega t) \frac{\cos(\omega + \omega')t + \cos(\omega - \omega')t}{2}$$

A la sortie du filtre passe bas, on récupérera : $s(t) = A_0 KUA(1 + m \cos \Omega t) \frac{\cos(\omega - \omega')t}{2}$

Donc inexploitable pour extraire le signal d'information.

C.2 BLU

C.2.1 $V_s(t) = KUA \cos(\omega + \Omega)t \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad s(t) = A_0 KUA \frac{1}{2} \cos(\Omega t + \varphi)$

C.2.2 Le signal d'information reconstitué est simplement déphasé; donc pas de problème en réception audio

C.3.1

C.3.1.1 $Q_{1,n+1,2} = C_1 \cdot e_n$

C.3.1.2 $Q_{2,n+1,2} = -C_2 \cdot s_n$

C.3.1.2.1 $Q_{1,n+1} = 0$

C.3.1.2.2 $Q_{2,n+1} = -C_2 \cdot s_{n+1}$

C.3.1.3 $\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0 = -C_1 \cdot e_n - C_2 \cdot s_{n+1} + C_2 \cdot s_n$
 $-C_1 \cdot e_n = C_2 \cdot s_{n+1} - C_2 \cdot s_n$ soit $s_{n+1} = s_n - \frac{C_1}{C_2} e_n$

C.3.1.4 $s_{n+1} - s_n = T_e \cdot s'(nT_e) = -\frac{C_1}{C_2} e_n$ $s'_n = -\frac{C_1}{C_2 T_e} e_n$

C.3.1.5 $\frac{ds(t)}{dt} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{e(t)}{T_e}$ donc $s(t) = -\frac{C_1}{C_2 T_e} \int e(x) dx$ « intégrateur »

C.3.2

C.3.2.1 $T(j\omega) = \frac{-1}{1 + j \frac{R}{R_1} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$

C.3.2.2 $2\lambda = R/R_1$ $T_0 = -1$

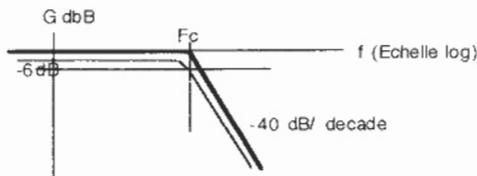
C.3.2.3 Filtre passe bas d'ordre 2

C.3.2.4 $\lambda = 1$ $R = 2 R_1$

C.3.2.5 $|T(\omega)| = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$

C.3.2.6 $F_c = 20 \text{ kHz}$ $F_e = 1 \text{ Mhz}$

C.3.2.7



C.3.2.8 Régime transitoire $s(t) = E \left(1 - \frac{\tau + t}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$ avec $\tau = \frac{1}{\omega_0}$

Temps de réponse $\lambda = 1$ $t_1 \omega_0 \approx 4,5$ $t_1 \approx 36 \mu s$

C.4 DEMODULATION DE FREQUENCE

C.4.1

C.4.1.1

$$T_1 = \frac{u}{v} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega + \frac{R}{jL\omega}} = \frac{jQ \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \omega_0^2 LC = 1 \quad Q = RC\omega_0 = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

C.4.1.2

$$|T_1| = \frac{jQ(1+\varepsilon)}{1 + jQ\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)} = \frac{jQ(1+\varepsilon)}{1 + j2Q\varepsilon} \approx jQ(1+\varepsilon)$$

$$\text{Arg}(T_1) = \frac{\pi}{2} - \arctan(2Q\varepsilon) \approx \frac{\pi}{2} - (2Q\varepsilon)$$

C.4.1.3

$$V_s(t) = \frac{KQV^2}{2} (\sin(2Q\varepsilon) + \cos(2\omega t + \frac{\pi}{2} - 2Q\varepsilon))$$

$$AV : V_s(t) = 4 \left[\sin(40\varepsilon) + \cos(2\omega t + \frac{\pi}{2} - 40\varepsilon) \right] = 4 \left[\sin(40\varepsilon) - \sin(2\omega t - 40\varepsilon) \right]$$

C.4.1.4

$$C4.1.4.1 \quad s(t) = A_0 \frac{KQV^2}{2} \sin(2Q\varepsilon)$$

$$C4.1.4.2 \quad s(t) \approx A_0 \frac{KQV^2}{2} (2Q\varepsilon) = \alpha Q^2 \varepsilon$$

$$C4.1.4.3 \quad \alpha = A_0 \frac{KV^2}{1} = 0.4 A_0$$

C.4.1.5

$$C4.1.5.1 \quad \omega(t) = \omega_0 + a \cdot f(t) = \omega_0 \left(1 + \frac{a}{\omega_0} f(t)\right) \quad \text{donc } \varepsilon = \frac{a}{\omega_0} f(t)$$

C4.1.5.2

$$s(t) = \alpha Q^2 \varepsilon = \alpha Q^2 \frac{a}{\omega_0} f(t) = \mu f(t)$$

$$\text{avec } A_0 = 1 \quad \mu = 16 \cdot 10^{-3}$$

DEUXIÈME PROBLÈME

1 POSITION DU PROBLÈME

1-1 Les trois grands types de moteurs électriques utilisés en traction électrique sont :

- moteur à courant continu ,
- moteur asynchrone ;
- moteur synchrone.

1-2 le moteur « traditionnel » de la traction électrique est le moteur à courant continu.

1-3 La propriété, qui fait que le moteur à courant continu a été choisi comme moteur en traction électrique, est que sa vitesse de rotation est facilement réglable dans une large plage par action sur sa tension U .

2 MOTORISATION PAR MCC

2-1 Schéma normalisé d'un MCC à excitation séparée : **figure a**

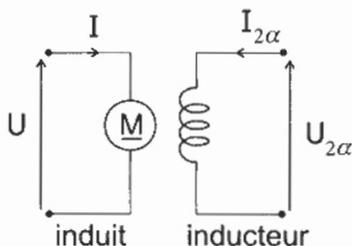
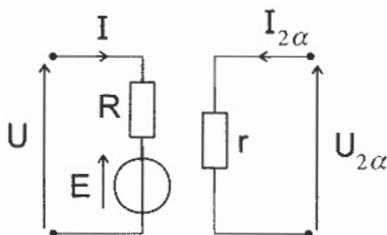


Schéma équivalent d'un MCC à excitation séparée : **figure b**



2-2 Dans la formule $E = K \Phi \Omega$, E est la fem induite (V), Φ le flux sous un pôle (Wb), Ω la vitesse de rotation du MCC (rad/s) et K une constante caractéristique du moteur. K dépend du nombre de paires de pôles (p), du nombre de paires de voies d'enroulement (a) et du nombre de conducteurs actifs (N).

$$K = (p/a) N / 2\pi$$

2-3 Si la machine est parfaitement compensée, alors le flux sous un pôle Φ est fixé uniquement par l'intensité d'excitation I_{ex} . Calculons $K\Phi$ dans le cas du fonctionnement nominal. D'après le schéma équivalent : $U_N = E_N + R I_N$ donc $E_N = U_N - R I_N$ or $E_N = K \Phi_N \Omega_N$ donc $K \Phi_N = E_N / \Omega_N$

$$\text{Soit : } K \Phi_N = 30 (U_N - R I_N) / \pi n_N$$

$$\text{A N : } K \Phi_N = 30 (120 - 0,1 \times 100) / 3,14 \times 6500 = 162 \text{ mWb}$$

2-4 Le moment du couple électromagnétique T est donné par : $T = K \Phi I$ donc $T_N = K \Phi_N I_N$

$$\text{A N : } T_N = 162 \cdot 10^{-3} \times 100 = 16,2 \text{ Nm}$$

Fonctionnements à moment du couple utile constant

2-5 On souhaite que le moteur travaille à moment du couple utile constant : $T_u = \text{constante}$ or ici $T_u = T$ car on néglige les pertes fer et les pertes mécaniques donc on souhaite $T = K \Phi I = \text{constante}$. Il faut donc maintenir Φ et I constants, c'est à dire I_{ex} et I constants.

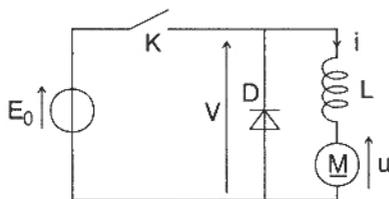
2-6 On impose $T_u = T = \text{constante}$ et $I = \text{constante}$ donc $\Phi = \text{constante}$. Or $U = E + R I = K \Phi \Omega + R I$ avec $\Omega = 2 \pi n / 60$; d'où $U = K \Phi (\pi n / 30) + R I$ avec $K \Phi = T / I$.

$$\text{Conclusion : } U = (T \pi / 30 I) n + R I$$

$$U = a n + b ; U \text{ est une fonction affine de } n$$

$$\text{A N : } T = 65,5 \text{ Nm et } I = 100 \text{ A d'où } U = 68,6 \cdot 10^{-3} n + 10 \text{ si } n > 0.$$

2-7 Le schéma de principe d'un hacheur série est le suivant : **figure c**



K : interrupteur électronique commandé

La diode D a pour rôle d'offrir un passage au courant d'intensité i quand K est ouvert ; quant à la bobine d'inductance L , elle a pour rôle de maintenir i lors de l'ouverture de K . Si L est assez importante, il y a lissage de i : $i = I = \text{constante}$.

D'après le schéma ci-dessus, on peut écrire : $v = L di/dt + u$; soit en passant aux valeurs moyennes $\langle v \rangle = \langle L di/dt \rangle + \langle u \rangle$

Or $\langle L di/dt \rangle = 0$ (la valeur moyenne aux bornes d'une bobine parfaite en régime périodique est nulle) et $\langle v \rangle = \alpha E_0$ où α désigne le rapport cyclique du hacheur. De plus nous avons établi que $U = a n + b$

$$\text{donc } \alpha E_0 = a n + b. \text{ A N : } 120 \alpha = 68,6 \cdot 10^{-3} n + 10 ; \text{ soit } n = 1750 \alpha - 146 \text{ si } n > 0.$$

2-9-a Le principe fondamental de la dynamique appliqué au moteur impose : $J d\Omega/dt = T_u - T_r$

avec $T_u = \text{constante} = 120 \text{ Nm}$ et T_r (moment du couple résistant) $= a \Omega + b$.

Donc $J d\Omega/dt = T_u - (a\Omega + b)$, soit $J d\Omega/dt + a\Omega = T_u - b$

Soit encore : $\Omega + (J/a) d\Omega/dt = (T_u - b) / a = \text{constante}$.

2-9-b L'équation différentielle précédente admet pour solution générale :

$\Omega = ((T_u - b) / a) + (\Omega_0 - (T_u - b) / a) e^{-t/\tau}$ avec $\tau = J/a$ et Ω_0 valeur de Ω à $t = 0$.

Or d'après les hypothèses : à $t = 0$, $\Omega = \Omega_0 = 0$ et à $t = t_1$, $\Omega = \Omega_1$ (et $v = v_1$), on en déduit que :

$$\Omega_1 = ((T_u - b) / a) (1 - e^{-t_1/\tau}) \text{ ce qui entraîne : } t_1 = \tau \ln ((T_u - b) / (T_u - b - a \Omega_1))$$

A N : $v_1 = 50 \text{ km/h}$ donc $n_1 = 72,2 \times 50 = 3610 \text{ tr/min}$ et $\Omega_1 = 2 \pi n_1 / 60 = 378 \text{ rad/s}$.

$$\tau = J/a = 1,62 / 8,73 \cdot 10^{-3} = 186 \text{ s}$$

$$t_1 = 186 \ln ((120 - 6,5) / (120 - 6,5 - 8,73 \cdot 10^{-3} \times 378)) = 5,5 \text{ s}$$

La voiture passe de l'arrêt à la vitesse 50 km/h en 5,5 s.

2-10 Si le moteur fonctionnait à couple constant jusqu'à la vitesse maximale, alors il devrait pouvoir développer une puissance maximale $P_{u\text{max}} = T_{u\text{max}} \Omega_{\text{max}} = T_{u\text{max}} 2 \pi n_{\text{max}} / 60$

$$\text{A N : } P_{u\text{max}} = 120 \times 2 \times 3,14 \times 72,2 \times 90 / 60 = 81,7 \text{ kW.}$$

Cette puissance est très largement supérieure à celle donnée par l'énoncé ($P_{u\text{max}} = 20 \text{ kW}$). Travailler à couple constant sur toute la plage des vitesses conduirait à surdimensionner le moteur.

Fonctionnements à puissance utile constante

La vitesse de la voiture v est ici supérieure à la vitesse de base v_b .

2-11 On impose que I reste constante, or $P_u = T_u \Omega$ avec $T_u = K \Phi I$ donc $P_u = K \Phi I \Omega = K I \Phi \Omega$

K et I sont constants et l'on souhaite que P_u le soit aussi. Il faut donc que le produit $\Phi \Omega$ reste constant, ce qui entraîne que si Ω croît, alors Φ décroît.

2-12 On envisage $P_u = P_{u\text{max}} = 20 \text{ kW}$ et $I = 200 \text{ A}$.

Calculons $K \Phi$ pour $v = v_b = 22 \text{ km/h}$; donc $n = n_b = 72,2 \times 22 = 1588 \text{ tr/min}$, soit $\Omega_b = 166 \text{ rad/s}$

or $P_u = T_u \Omega = K \Phi I \Omega$ d'où $K \Phi = P_u / I \Omega = 20 \cdot 10^3 / (166 \times 200) = 0,602 \text{ Wb}$.

Calculons $K \Phi$ pour $v = v_{\text{max}} = 90 \text{ km/h}$; donc $n = n_{\text{max}} = 72,2 \times 90 = 6500 \text{ tr/min}$, soit $\Omega_{\text{max}} = 680 \text{ rad/s}$

$$\text{D'où } K \Phi = P_u / I \Omega = 20 \cdot 10^3 / (680 \times 200) = 0,147 \text{ Wb.}$$

Pour augmenter la vitesse, on doit « défluxer » le moteur

2-13 Le principe fondamental de la dynamique impose toujours : $J d\Omega/dt = T_u - T_r$ avec $T_u = P_u / \Omega$ avec $P_u = P_{u\text{max}} = 20 \text{ kW}$ et $T_r = a' \Omega$. Donc $J d\Omega/dt = (P_u / \Omega) - a' \Omega$

$$\text{soit } J \Omega d\Omega/dt = P_u - a' \Omega^2$$

2-14 L'équation précédente s'écrit : $(J/2) d\Omega_-/dt + a' \Omega_- = P_u$

Soit encore : $\Omega_- + (J/2 a') d\Omega_-/dt = P_u / a' = \text{constante}$ (P_u et a' sont constants).

Posons $\Omega_- = y$; l'équation différentielle précédente s'écrit alors : $y + \tau' dy/dt = P_{u\max} / a' = \text{constante}$ avec $\tau' = J / 2a'$ et la solution de cette équation est : $y = (P_{u\max} / a') + (y_0 - (P_{u\max} / a')) e^{-t/\tau'}$ avec $y_0 = \Omega_{h-}$ puisque à $t = 0$, on a $v = v_b$.

2-15 D'après les hypothèses, on a : à $t = 0$, $v = v_b$ et à $t = t_2$, $v = v_1$,

d'où $\Omega_{1-} = (P_{u\max}/a') + (\Omega_{h-} - (P_{u\max}/a')) e^{-t_2/\tau'}$

$$e^{-t_2/\tau'} = (a' \Omega_{h-} - P_{u\max}) / (a' \Omega_{1-} - P_{u\max})$$

Soit : $t_2 = \tau' \ln ((P_{u\max} - a' \Omega_{h-}) / (P_{u\max} - a' \Omega_{1-}))$

A N : $t_2 = (1,62 / 2 \times 2,6 \cdot 10^{-2}) \ln ((20 \cdot 10^3 - 2,6 \cdot 10^2 \times 168) / (20 \cdot 10^3 - 2,6 \cdot 10^2 \times 378)) = 5,24 \text{ s}$.

Conclusion sur une motorisation par MCC

2-16 D'après 2-9-b : $t_1' = \tau \ln ((T_u - b) / (T_u - b - a \Omega_b))$

A N : $t_1' = 186 \ln ((120 - 6,5) / (120 - 6,5 - 8,73 \cdot 10^{-3} \times 168)) = 2,42 \text{ s}$.

2-17 Soit Δt le temps que met la voiture pour passer de l'arrêt ($v = 0$) à la vitesse $v_1 = 50 \text{ km/h}$.

$$\Delta t = t_1' + t_2 = 5,24 + 2,42 = 7,66 \text{ s}$$

Ce temps de mise en vitesse est tout à fait acceptable et correspond à ce que font les voitures à essence.

2-18 Les moteurs à courant continu sont chers à réaliser et à entretenir du fait de l'existence du collecteur et des balais frottant dessus. De plus, à cause du collecteur, leur vitesse de rotation maximale est inférieure à celle d'une machine synchrone.

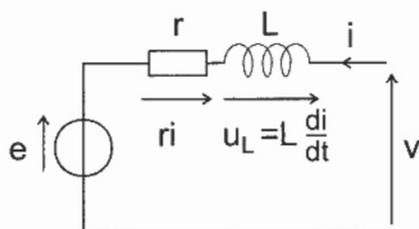
3 ETUDE DE LA MACHINE SYNCHRONE

3-1 Pour une machine synchrone, on a la relation : $f = p n$ où f désigne la fréquence au stator (Hz), n la fréquence de rotation du rotor (tr/s) et p le nombre de paires de pôles. Ici $p = 2$ (la machine possède 4 pôles). Si n est exprimée en tours par minute, la relation devient $f = p n / 60$, d'où ici $f = n / 30$.

Si $0 < n < 10\,000 \text{ tr/min}$ alors $0 < f < 333 \text{ Hz}$.

3-2 Le fait de confondre le moment du couple utile T_u avec le moment du couple électromagnétique T revient à négliger les pertes fer et mécaniques de cette machine.

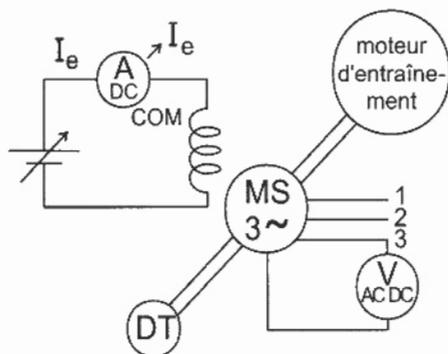
3-3 Le modèle équivalent d'une phase du stator est le modèle de Thévenin donné **figure d**.



3-4 Soit E la valeur efficace de la fem e . On a la relation suivante : $E = K N f \Phi$ où K désigne le coefficient de Kapp de la machine.

3-5-1 La relation $E = a \omega I_e$ avec $\omega = 2 \pi f$ suppose que flux maximal dans une spire Φ est proportionnel à I_e : $E = K N f \Phi = K N (\omega / 2 \pi) \Phi = a \omega I_e$; ce qui entraîne $\Phi = (2 \pi a / K N) I_e = k I_e$ avec $k = 2 \pi a / K N$. Ceci suppose une machine magnétiquement non saturée.

3-5-2 Pour relever expérimentalement la courbe $E=f(I_e)$, on réalise le montage de la **figure e**.

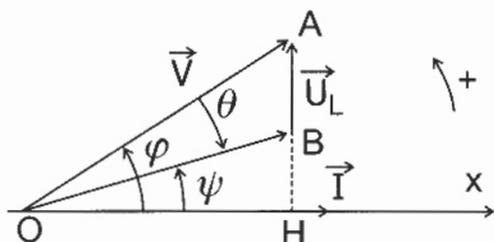


Le moteur d'entraînement (MCC à excitation indépendante) entraîne la machine synchrone à vitesse constante (ce qui est vérifié grâce à la dynamo tachymétrique). La machine synchrone fonctionne en alternateur à vide et l'on relève grâce à un voltmètre numérique AC-DC la valeur efficace $V_o = E$ en fonction de l'intensité continue I_e (ampèremètre DC) traversant la roue polaire.

3-6 D'après le schéma du 3-3 (figure d), on peut écrire : $v = e + r i + L di/dt$ (fonctionnement moteur, convention récepteur).

Ce qui donne en vecteurs de Fresnel : $\vec{V} = \vec{E} + r \vec{i} + \vec{U}_L$.

Si on néglige le terme $r i$, la relation se simplifie et devient : $\vec{V} = \vec{E} + \vec{U}_L$; ce qui donne le diagramme vectoriel de la **figure f**.



$$\varphi = \varphi_v - \varphi_i; \quad \Psi = \varphi_c - \varphi_i \text{ et } \theta = \varphi_c - \varphi_v \text{ d'où } \theta = \Psi - \varphi$$

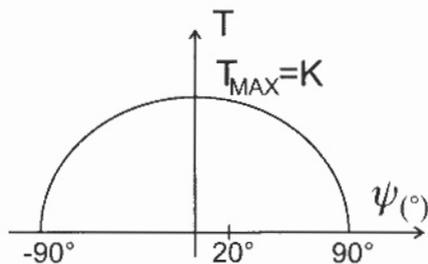
- 3-7-1 La puissance active absorbée par un moteur synchrone triphasé est $P = \sqrt{3} U I \cos\varphi = 3 V I \cos\varphi$ et elle est toujours positive (le moteur est effectivement récepteur). Or, d'après le diagramme du 3-6 (figure f), on a la relation $OH = V \cos\varphi = E \cos\Psi$. Donc $P = 3 V I \cos\varphi = 3 E I \cos\Psi > 0$ soit $\cos\Psi > 0$ ce qui entraîne : $-90^\circ < \Psi < +90^\circ$

- 3-7-2 Nous avons $P_u = P$ puisque toutes les pertes sont négligées. La résistance r est négligée donc les pertes Joule aussi. Or $P_u = T_u \Omega$ avec $T_u = T$.
Donc $3 V I \cos\varphi = 3 E I \cos\Psi = T \Omega$ avec $\omega = \Omega/p$ et $E = a \omega I_e$. Conclusion : $T = 3 p a I_e I \cos\Psi$

Ici $p = 2$ et $a = 1,73 \cdot 10^{-2} \text{ Wb/A}$

Si I_e et I sont fixées, alors T dépend de Ψ par la relation : $T = K' \cos\Psi$ avec $K' = 3 p a I_e I$.

D'où L'allure de la courbe $T(\Psi)$ donnée **figure g**.



T est maximal si $\cos\Psi = 1$ donc $\Psi = 0$.

- 3-7-3 Dans l'expression de T trouvée précédemment, la vitesse de rotation Ω n'intervient plus et T n'est donc déterminé que par I_e , I et Ψ . Calculons T pour $I = 116 \text{ A}$, $I_e = 10 \text{ A}$ et $\Psi = -5,77^\circ$.

$$\text{A N : } T = 3 \times 2 \times 1,73 \cdot 10^{-2} \times 10 \times 116 \cos(-5,77^\circ) = 120 \text{ Nm.}$$

- 3-7-4 En raisonnant sur le diagramme vectoriel du 3-3, nous pouvons écrire :
 $\cos\varphi = OH / OA$; avec $OA = OH + HA$ (théorème de Pythagore).
 D'où $\cos\varphi = E \cos\Psi / (E \cos\Psi + (E \sin\Psi + U_L)^2)^{1/2}$ avec $U_L = L\omega I$
 $\cos\varphi = E \cos\Psi / (E \cos\Psi + E \sin\Psi + U_L + 2 U_L E \sin\Psi)^{1/2}$
 $\cos\varphi = \cos\Psi / (1 + (L\omega I/E) + 2 L\omega I \sin\Psi/E)^{1/2}$, or $E = a \omega I_e$
 $\cos\varphi = \cos\Psi / (1 + (LI/aI_e) + 2 LI \sin\Psi/aI_e)^{1/2}$

Nous constatons que le facteur de puissance du moteur synchrone est indépendant de la pulsation ω et de la vitesse de rotation Ω .

3-7-5 On appelle Ψ_m la valeur de Ψ qui permet d'obtenir un facteur de puissance égal à 1.

Donc $1 = \cos\Psi_m / (1 + (LI/aI_c) + 2 LI \sin\Psi_m / aI_c)^{1/2}$

$$1 + (LI/aI_c) + 2 LI \sin\Psi_m / aI_c = \cos\Psi_m = 1 - \sin\Psi_m$$

$$\sin\Psi_m + 2 \sin\Psi_m (LI/aI_c) + (LI/aI_c) = 0$$

$$(\sin\Psi_m + (LI/aI_c)) = 0$$

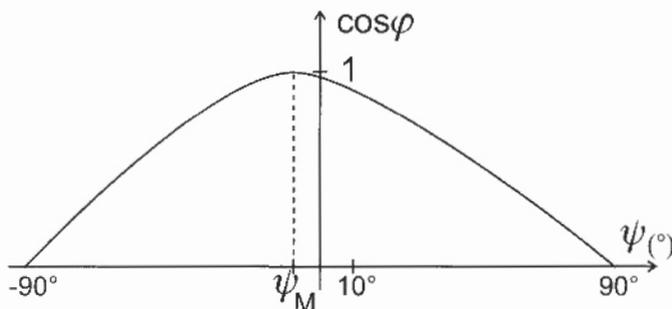
$$\sin\Psi_m = -LI/aI_c$$

Cette dernière égalité n'est possible que si LI/aI_c est inférieure ou égal à 1.

Traçons la courbe $\cos\varphi$ fonction de Ψ pour $I = 116$ A, $I_c = 10$ A et sachant que $L = 0,15$ mH et $a = 1,73 \cdot 10^{-2}$ Wb/A.

Calculons Ψ_m : $\sin\Psi_m = -LI/aI_c = -0,15 \cdot 10^{-3} \times 116 / (1,73 \cdot 10^{-2} \times 10) = -0,101$ d'où $\Psi_m = -5,77^\circ$.

Si $\Psi = -90^\circ$, $\cos\varphi = 0$; si $\Psi = +90^\circ$, $\cos\varphi = 0$; si $\Psi = 0^\circ$, $\cos\varphi = 0,995$ d'où l'allure de la courbe donnée **figure h**.



3-7-6 Si l'on souhaite un bon facteur de puissance ($\cos\varphi = 1$), il faut $\Psi = \Psi_m$ et si l'on souhaite un grand couple, il faut $\Psi = 0$. Pour concilier ces deux exigences, il faut prendre un compromis :

$$\Psi_m < \Psi < 0 \quad (\Psi_m < 0)$$

3-7-7 Raisonnons sur la figure de la question 3-6 : Dans le triangle OAB, nous pouvons écrire :

$$OB + BA - 2 OB BA \cos B = OA$$

$$E + (L\omega) - 2 E L\omega \cos(\Psi + \pi/2) = V, \text{ or } E = a \omega I_c$$

$$V = (a \omega I_c) + (L\omega) + 2 a \omega I_c L\omega \sin\Psi$$

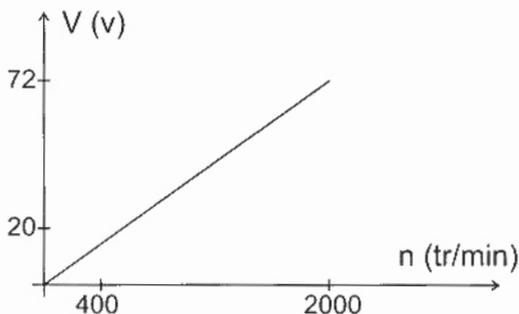
$$\text{Conclusion : } V = \omega ((aI_c) + (LI) + 2 aI_c LI \sin\Psi)^{1/2}$$

Cette dernière relation s'écrit si I , I_c et Ψ sont fixés sous la forme $V = \beta \omega$ avec β constant.

AN : $\Psi = \Psi_m$ donc $\sin\Psi_m = -0,101$ d'où $V = 0,172 \omega$. $\beta = 0,172$ Vs/rad.

Or $\omega = 2\pi f = 2\pi n/60$ d'où $V = (2\pi\beta/60)n = \beta' n$ avec $\beta' = 0,209$ $\beta = 3,6 \cdot 10^{-2}$ V min/tr.

La tension efficace V est proportionnelle à la fréquence de rotation du moteur synchrone. La courbe V fonction de n est donc une droite passant par l'origine et par le point $n = 2000$ tr/min, $V = 72$ V. D'où la courbe $V(n)$ représentée **figure i**.



- 3-7-8 Lorsque le moteur travaille à I , I_c et Ψ fixés, alors ϕ est fixé (voir 3-7-4) et donc les angles du diagramme synchrone (Ψ , ϕ et θ) restent constants quand n varie. Chaque vecteur est de longueur proportionnel à n . D'où diagramme se déforme de manière homothétique lorsque la fréquence de rotation varie.
- 3-7-9 Dans un fonctionnement à I , I_c et Ψ fixés, on travaille à T fixé (voir 3-7-3); or le point de fonctionnement du groupe moteur + charge est l'intersection des caractéristiques mécaniques du moteur $T(n)$ et de la charge $T_r(n)$. Si le moteur fixe T donc T_r alors la charge fixe n (et n fixe f : autopilotage).
- 3-8-1 D'après la figure 3, nous constatons que de 0 à 2000tr/min, T reste constant : fonctionnement à moment de couple constant.
- 3-8-2 Le principe fondamental de la dynamique impose $J d\Omega/dt = T - T_r$, donc l'intérêt de travailler à fort couple aux basses vitesses est d'obtenir une accélération $d\Omega/dt = (T - T_r) / J$ importante.
- 3-8-3 Si le moteur travaille à couple constant, alors I_c , I et Ψ sont eux mêmes constants (voir 3-7-3).
- 3-8-4 De 2000 à 10 000 tr/min, le moteur fonctionne à puissance constante avec I fixé et $\cos\phi = 1$.
Or $P = 3 V I \cos\phi$ donc $V = P / (3 I \cos\phi)$. Dans ce fonctionnement V est fixé.
A N : $P_u = 25 \text{ kW}$ $P_u = P$ (pas de pertes) : $I = 116 \text{ A}$; $\cos\phi = 1$: $V = 25 \cdot 10^3 / (3 \times 116 \times 1) = 72 \text{ V}$.
- 3-8-5 Reprenons le résultat de la question 3-7-7 sachant que $\cos\phi = 1$ donc $\Psi = \Psi_m$ avec $\sin\Psi_m = -LI/(aI_c)$. Nous en déduisons :

$$V = \omega \left((aI_c)_- + (LI)_- + 2 LI aI_c (-LI/aI_c) \right)^{1/2}$$

$$V = (2\pi n/60) \left((aI_c)_- - (LI)_- \right)^{1/2}$$

$$V_- = (\pi/30)_- n_- \left((aI_c)_- - (LI)_- \right)$$

$$(aI_c)_- = (30V/\pi)_- (1/n)_- + (LI)_-$$

Conclusion : $I_e = ((30V/\pi p) \cdot (1/n) + (LI))^{1/2} / a$.

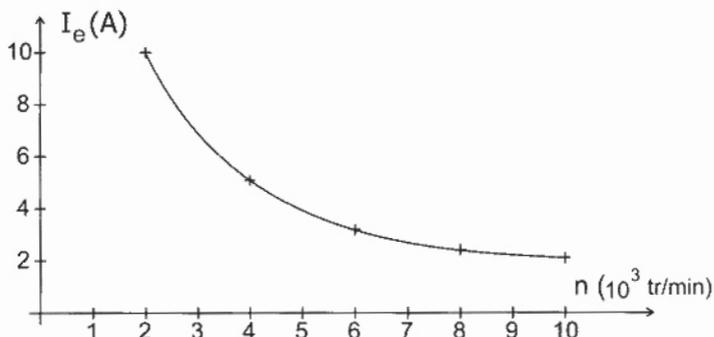
A N : $V = 72 \text{ V}$ et $I = 116 \text{ A}$ donc $I_e = 57,8 \cdot ((1,18 \cdot 10^5/n) + 3,03 \cdot 10^{-4})^{1/2}$

Quand n croît, I_e décroît.

On a : n (tr/min) : 2000 ; 4000 ; 6000 ; 8000 ; 10000 .

I_e (A) : 10 ; 5,06 ; 3,46 ; 2,68 ; 2,23 .

On obtient la courbe $I_e(n)$ de la figure j.



3-8-6 On constate que dans ce fonctionnement à P_u et I constants, on diminue I_e , donc le flux inducteur, au fur et à mesure que la vitesse augmente ; on parle donc de défluxage du moteur.

4 ETUDE D'UN ONDULEUR TRIPHASE DE TENSION

4-1 D'après la figure 4, on constate que si l'on fermait K_1 et K_1' en même temps, on court-circuiterait la source de tension de fem E_o . On s'interdit donc de fermer en même temps deux interrupteurs de même indice.

4-2 En considérant la figure 4 et les oscillogrammes de u_{12} , u_{23} et u_{31} , on constate que de :

$0 < t < T/6$: $u_{12} = E_o$ donc K_1 fermé et donc K_1' ouvert

K_2' fermé et K_2 ouvert ;

$u_{23} = -E_o$ donc K_2' fermé et K_2 ouvert

K_3 fermé et K_3' ouvert ;

$u_{31} = 0$ donc K_1 et K_3 fermés.

A chaque instant 3 interrupteurs sont fermés et 3 sont ouverts. Un interrupteur reste fermé pendant $T/2$ et ouvert pendant $T/2$. D'où le diagramme de fonctionnement suivant :

0	T/6	T/3	T/2	2T/3	5T/6	T	7T/6	4T/3	3T/2	5T/3	11T/6	T
<	K_1	\times	K_1'	\times	K_1	\times	K_1'	\times	K_1	\times	K_1'	>
	K_2'	\times	K_2	\times	K_2'	\times	K_2	\times	K_2'	\times	K_2	
	K_3	\times	K_3'	\times	K_3	\times	K_3'	\times	K_3	\times	K_3'	

4-3 Par définition des tensions composées, nous pouvons écrire :

$$u_{12} = v_1 - v_2 ; u_{23} = v_2 - v_3 ; u_{31} = v_3 - v_1$$

Or les systèmes de tension étant équilibrés, on doit avoir : $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ et $u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0$.

Donc $u_{12} - u_{31} = v_1 - v_2 - (v_3 - v_1) = 2v_1 - (v_2 + v_3) = 3v_1$.

Conclusion : $v_1 = (u_{12} - u_{31}) / 3$, d'où le tracé de v_1 figure 5.

4-4 Calculons la valeur efficace U des tensions composées.

$$U_{-} = \frac{1}{T} \int_0^T u_{-} dt.$$

Raisonnons sur $T/2$ car u_{-} est de période $T/2$ et prenons u_{12} comme exemple. u_{12} est nulle de

$T/3$ à $T/2$ et vaut E_0 de 0 à $T/3$; donc $U_{-} = \frac{2}{T} \int_0^{T/3} E_0 dt$.

Conclusion : $U = (2/3)^{1/2} E_0$.

A N : $E_0 = 160$ V alors $U = 131$ V.

4-5 La relation entre tension efficace simple et tension efficace composée est :

$$V = U / \sqrt{3} = 131 / 1,73 = 75,6 \text{ V.}$$

4-6 D'après la figure 5 complétée, v_1 est une fonction impaire et présentant une symétrie de glissement ($v_1(t+T/2) = -v_1(t)$). Donc v_1 s'écrit :

$$v_1 = V_{1m} \sin \omega t + V_{3m} \sin 3\omega t + V_{5m} \sin 5\omega t + \dots + V_{2j-1m} \sin(2j+1)\omega t + \dots$$

$$\text{Avec } V_{2j+1m} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} v_1(t) \sin[(2j+1)\omega t] dt$$

$$= (2E_0 / 3\pi(2j+1)) (2 + \cos(2j+1)\pi/3 - \cos(2j+1)2\pi/3)$$

On en déduit : $V_{1m} = 2 E_0 / \pi = 2 \times 160 / 3,14 = 102$ V (donc $V_1 = V_{1m} / 1,41 = 72$ V).

$V_{3m} = (2 E_0 / 9\pi) (2 + \cos \pi - \cos 2\pi) = 0$, donc il n'y a pas d'harmonique de rang 3.

$V_{5m} = 2 E_0 / 5\pi = 20,4$ V.

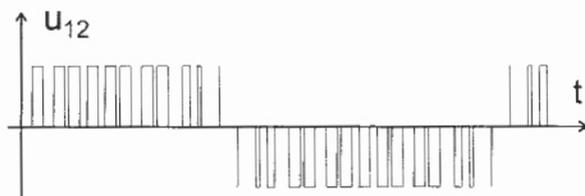
4-7 Le fondamental de v_1 s'écrit : $v_{1f} = 102 \sin \omega t$, il est représenté figure 5. L'intensité i_1 est supposée sinusoïdale et en retard sur v_{1f} de $30^\circ = \pi/6$ rad. On peut donc écrire : $i_1 = I_{1m} \sin(\omega t - \pi/6)$ et tracer l'oscillogramme de $i_1(t)$ sur la figure 5 (i_1 sinusoïde décalée vers la droite de $T/12$ par rapport à v_{1f}).

4-8 Quand K_1 est fermé, K_1' est ouvert donc $i_{K1} = i_1$ (loi des nœuds figure 4)

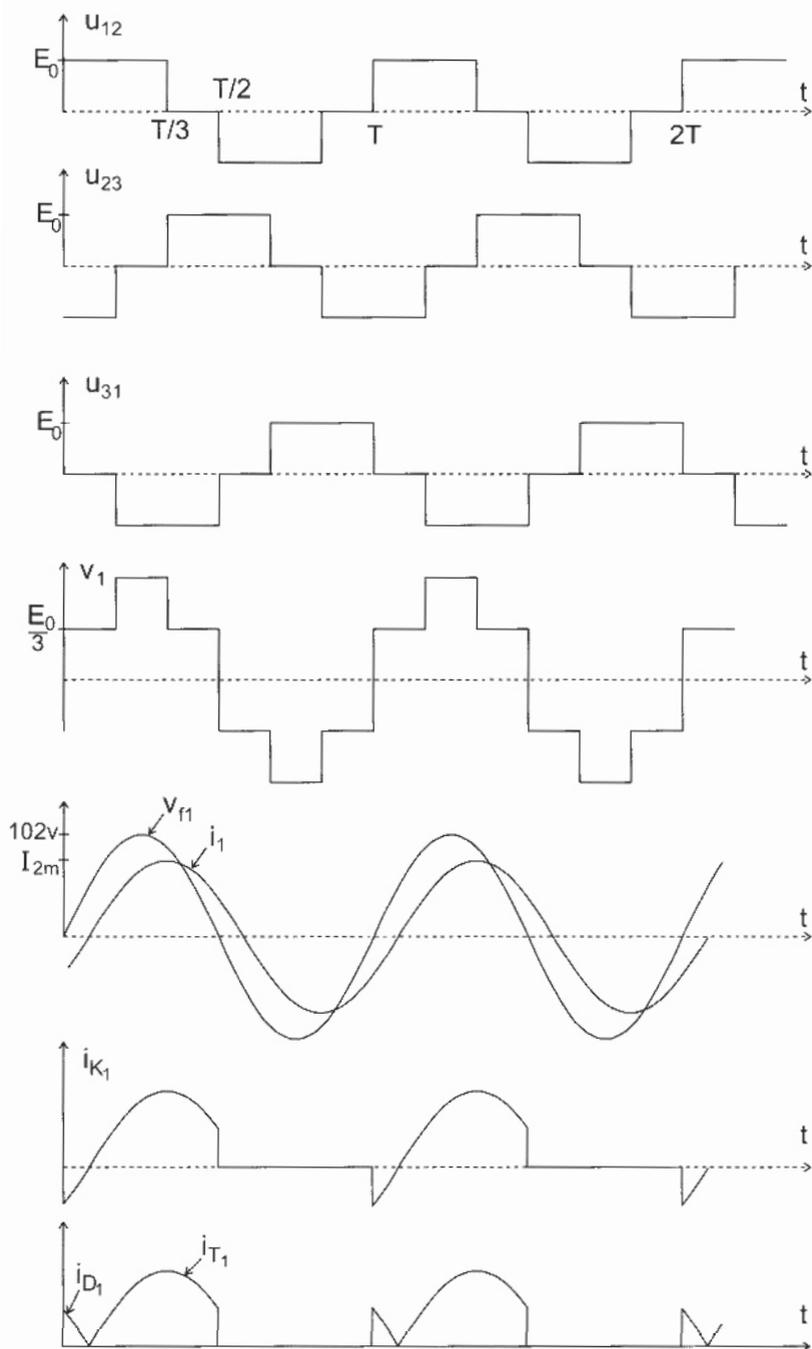
Quand K_1 est ouvert alors $i_{K1} = 0$ d'où la représentation de i_{K1} figure 5.

4-9 D'après la question précédente, nous constatons que lorsque l'interrupteur K_1 est fermé, l'intensité i_{K1} peut être positive ou négative. Or un transistor est un interrupteur unidirectionnel ($i_{T1} > 0$) et donc la diode montée en antiparallèle est là pour assurer la conduction de K_1 quand $i_{K1} < 0$. D'après la figure 6 : $i_{K1} = i_{T1} - i_{D1}$. Si $i_{K1} > 0$ alors $i_{D1} = 0$ et $i_{K1} = i_{T1}$ et si $i_{K1} < 0$ alors $i_{T1} = 0$ et $i_{D1} = -i_{K1}$. D'où les oscillogrammes représentés figure 5.

4-10-1 Dans le cas d'une commande en MLI, la tension u_{12} est formée d'impulsions entre E_0 et 0 ou 0 et $-E_0$ dont les largeurs sont modulées au cours du temps, d'où l'allure de u_{12} donnée figure k.



4-10-2 L'intérêt d'une commande en MLI est de modifier les spectres des tensions par rapport à la commande adjacente. Les harmoniques se trouvent à des fréquences plus élevées, donc plus facile à filtrer et inaudibles (> 20 kHz). De plus grâce à la MLI, on peut faire varier la valeur efficace du fondamental ce qui n'est pas possible en commande adjacente.





CAPES

(Concours Interne)

SECTIONS : PHYSIQUE ET CHIMIE - PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition de physique - Session : 1999

A-EXPLOITATION D'UN DOCUMENT SCIENTIFIQUE.

1. Deutérium: ${}^2_1\text{H}$ Tritium: ${}^3_1\text{H}$ Hélio: ${}^4_2\text{He}$.

2.a. ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$

La relation d'Einstein donne l'énergie E produite par la réaction de fusion en fonction du défaut de masse Δm : $E = \Delta m.c^2$.

En représentant par D et T les noyaux de deutérium et tritium et par m_X , la masse du noyau X:

$$\Delta m = m_D + m_T - m_{\text{He}} - m_n$$

Application numérique: $\Delta m = 0,01879\text{u}$ soit: $3,12.10^{-29}\text{ kg}$.

On en déduit l'énergie dégagée:

$$E = 2,81.10^{-12}\text{ J ou } 17,5\text{ MeV}$$

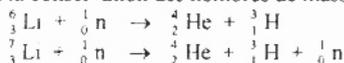
2.b. Le mélange d'une mole de D et d'une mole de T représente une masse $(m_D + m_T)N$ produisant, par fusion, une énergie NE .

On en déduit l'énergie E' libérée par une masse m' du mélange: $E' = \frac{m'.E}{m_D + m_T}$

$$E' = 3,4.10^{14}\text{ J soit } 8,0.10^3\text{ t.e.p.}$$

3.a. Isotopes: atomes de propriétés chimiques identiques, de propriétés physiques différentes. leurs noyaux ont le même nombre de protons, ils diffèrent par le nombre de neutrons.

3.b. On écrit la conservation des nombres de masse et de charges:



4. L'eau pure extraite de l'eau de mer de mer est constituée de molécules H_2O , D_2O et HDO .

Etant donné la faible abondance isotopique de D par rapport à H, on peut estimer la quantité de noyaux H dans 1 m^3 d'eau de mer à $2n$ moles, n étant la quantité de matière de H_2O dans une masse $m=1000\text{ kg}$ d'eau: en notant M la masse molaire de l'eau, on obtient:

$n = m/M = 5,6.10^4\text{ mol}$; la quantité correspondante de D est: $n' = 2n/6400$ soit: $17,4\text{ mol}$.

En notant M' la masse molaire de D, on trouve:

$$\text{masse de deutérium par mètre cube d'eau: } n'.M' = 35\text{ g}$$

5.a. On note \vec{u} , le vecteur unitaire reliant le point O où se trouve le noyau de tritium au point P, position du noyau de deutérium. Le noyau T exerce sur le noyau D distant de r une force donnée par la loi de Coulomb:

$$\vec{F} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

L'énergie potentielle E_p correspondante est:

$$E_p = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + cte.$$

La constante d'intégration peut être choisie égale à zéro en supposant que l'énergie potentielle tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini.

5.b. L'ensemble des deux noyaux constitue un système isolé:

son énergie mécanique $E = E_k + E_p$ est constante.

A l'infini le terme en $1/r$ de l'énergie potentielle tend vers zéro: $E = E_k$

A la distance r cherchée, l'énergie cinétique s'annule, la particule atteint la barrière de potentiel (infranchissable en mécanique classique):

$$E = E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

D'où,

$$E_k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

L'application numérique donne:

$$E_k = 2,3 \cdot 10^{-14} \text{ J ou } 0,14 \text{ MeV}$$

La fusion peut se produire lorsque les noyaux sont assez proches pour que les effets de l'interaction forte, attractive et de courte portée (de l'ordre de 10^{-15} m) se manifestent.

5.c. $T = \frac{2E_k}{3k}$

$$T = 1,1 \cdot 10^9 \text{ K}$$

L'article indique des valeurs de T dix fois plus faibles. Une interprétation pourrait en être donnée grâce à un effet quantique, l'effet tunnel: les noyaux D d'énergie inférieure à la valeur de E_k calculée à l'infini ont une probabilité non nulle de franchir la barrière de potentiel correspondant à la répulsion coulombienne, contrairement à ce qui est prévu par la mécanique classique.

B-ETUDE D'UN SPECTROMÈTRE DE MASSE

I. Questions préliminaires.

I.1. Il s'agit d'un référentiel dans lequel le principe d'inertie peut être vérifié

I.2. **Principe d'inertie** il existe des référentiels, dits galiléens (ou inertiels) dans lesquels un point matériel libre de toute interaction est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme

Relation fondamentale dans un référentiel galiléen, l'accélération \vec{a} d'une particule de masse m soumise à une force \vec{F} est donnée par la relation: $\vec{F} = m\vec{a}$

Principe de l'action et de la réaction: les forces d'interaction réciproque $\vec{F}_1 \rightarrow 2$ et $\vec{F}_2 \rightarrow 1$ qui s'exercent entre deux points matériels M_1 et M_2 sont opposées et ont pour support commun la droite M_1M_2 joignant ces deux points.

I.3.a. Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'une particule entre deux instants est égale au travail des forces agissant sur la particule entre ces deux instants.

I.3.b. Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un système de particules entre deux instants est égale au travail des forces tant intérieures qu'extérieures agissant sur le système entre ces deux instants.

II. Accélération des ions.

II.1. Il s'agit de la force électrostatique $\vec{F} = e \cdot \vec{E}$ due au champ électrostatique \vec{E} uniforme (aux effets de bords près) régnant à l'intérieur du condensateur plan. \vec{E} est de direction orthogonale aux armatures. La force est donc constante, de direction O_1O_2 .

II.2. $U_0 = V_2 - V_1$ d'après le sens de la flèche.

II.3. En supposant galiléen le référentiel du laboratoire, l'application de la relation fondamentale à un ion de masse m donne $\vec{F} = m\vec{a}$. La masse m étant invariable, l'accélération de l'ion est constante de direction O_1O_2 . Il s'agit donc d'un mouvement d'accélération constante et de vitesse initiale nulle. Le mouvement est rectiligne, de trajectoire O_1O_2 et uniformément accéléré.

II.4. Un ion positif est accéléré de O_1 vers O_2 lorsque le champ électrostatique est orienté de O_1 vers O_2 . On en déduit que V_1 est supérieur à V_2 d'où $U_0 < 0$

II.5. La variation d'énergie cinétique de l'ion est égale au travail de la force électrostatique. $E_c(O_2) - E_c(O_1) = e(V_1 - V_2) = -eU_0$. La vitesse de l'ion étant négligeable en O_1 , on a

$$E_c(O_2) = -eU_0$$

II.6.a. La vitesse v des ions est de faible valeur comparée à la célérité c de la lumière dans le vide. On peut appliquer aux ions les lois de la mécanique newtonienne.

II.6.b. $E_c(O_2) = mv^2/2$; $m = M/N$ d'où

$$v = \sqrt{\frac{-2eU_0N}{M}}$$

II.7.

$$v_1 = 99,5 \text{ km/s} \quad v_2 = 98,2 \text{ km/s}$$

III. Déviation des ions.

III.1. Aucune force n'agit sur l'ion, d'après le principe d'inertie, l'ion a un mouvement rectiligne uniforme: Il effectue le trajet O_2O_1 à la vitesse \vec{v} acquise en O_2 .

III.2. La force agissant sur l'ion en mouvement avec une vitesse \vec{v} dans le champ magnétostatique \vec{B} est la force de Lorentz $\vec{F} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$. D'après les propriétés du produit vectoriel, \vec{F} est:

- de direction orthogonale à \vec{B} et \vec{v} ;
- de sens tel, que le trièdre $(\vec{F}, \vec{v}, \vec{B})$ soit direct, l'ion étant positif;
- de norme : $e v B \cdot |\sin(\vec{v}, \vec{B})|$.

III.3. L'ion pénètre en (III) avec une vitesse située dans le plan de figure. Soit un axe $z'z$ de direction \vec{B} . La force \vec{F} est orthogonale à cet axe.

La relation fondamentale projetée sur $z'z$ donne: $a_z = F_z/m$ d'où $a_z = 0$.

L'intégration de a_z par rapport au temps donne, pour la vitesse, une composante v_z constante.

La composante de la vitesse initiale selon $z'z$ étant nulle, on obtient: $v_z = 0$. Le mouvement a lieu dans le plan de figure et l'angle (\vec{v}, \vec{B}) vaut 90° à tout instant.

III.4. La force de Lorentz doit être orientée vers O lorsqu'un ion passe en O. Le trièdre $(\vec{F}, \vec{v}, \vec{B})$ étant direct, \vec{B} est orienté vers le lecteur.

III.5. La relation fondamentale donne l'accélération $\vec{a} = e\vec{v} \wedge \vec{B}/m$ de l'ion dans le champ magnétique. En projetant \vec{a} sur le vecteur \vec{u}_t porté par \vec{v} de la base de Frenet (\vec{u}_t, \vec{u}_n) , on trouve: $a_t \cdot dv/dt = 0$. Par conséquent, v est indépendante du temps: Le mouvement est uniforme.

III.6. La même relation projetée sur \vec{u}_n donne, en tenant compte de $\sin(\vec{v}, \vec{B}) = 1$:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{evB}{m} \quad \text{Il vient: } \rho = \frac{mv}{eB} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{-2U_0 m}{e}}$$

expression dans laquelle toutes les grandeurs sont constantes.

La trajectoire est donc plane, de rayon de courbure constant: il s'agit d'un arc de cercle situé dans le plan de figure et dont le centre se trouve sur l'axe des ordonnées.

III.7.a. Les distances OO_3 et OO_4 sont égales: l'ion décrit l'arc de cercle de centre O et de rayon R_1

D'après la question précédente, on obtient: $B_1 = \frac{M_1 v_1}{Ne R_1}$ $B_1 = 0,20 \text{ T}$

III.7.b. Lorsque B augmente, le rayon de l'arc de cercle diminue: L'ion ressort à gauche de O_4

IV. Séparation des ions.

IV.1. D'après III-7, en éliminant B_1 et en remplaçant v par $\sqrt{\frac{-2eU_0 N}{M}}$, il vient: $R_2 = R_1 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$

$$R_2 = 20,3 \text{ cm.}$$

IV.2. $\sin\theta = C_2 C_1 / C_2 H$ d'où $\sin\theta = \frac{R_2 - R_1}{R_2}$ $\theta = 0,7^\circ$

IV.3. Les ions de type 1 et 2 décrivent respectivement les arcs de cercle de centres C_1 (confondu avec O) et C_2 . En appelant F le centre de la fente d'entrée dans le détecteur, la distance FG doit être supérieure à la demi-largeur de la fente.

$$FG = FH + H'G; \quad FH = O_4 H = R_2 \cos\theta - R_1; \quad H'G = H'H \tan\theta; \quad H'H = R_1.$$

On a donc: $FG = R_2 \cos\theta - R_1(1 - \tan\theta)$

L'application numérique donne $FG = 0,5 \text{ cm}$, soit une largeur maximum de fente de 1 cm.

V. Analyse du mélange d'ions.

V.1. On utilise une fente fine et on règle le champ magnétique à la valeur B_1 , permettant l'entrée des ions de l'isotope léger seul dans le détecteur, puis à la valeur B_2 permettant l'entrée des ions de l'isotope lourd.

Les rayons de courbure des trajectoires étant les mêmes: $\frac{M_1 v_1}{B_1} = \frac{M_2 v_2}{B_2}$. On en déduit le rapport des masses connaissant les valeurs des vitesses et du champ magnétique

V.2. En tenant compte de l'expression des vitesses, on trouve:

$$\frac{M_2}{M_1} = \left(\frac{B_2}{B_1} \right)^2$$

V.3. L'intensité du courant détecté étant proportionnelle au nombre d'ions collectés pendant l'unité de temps, la proportion d'ions $^{39}\text{K}^+$ est:

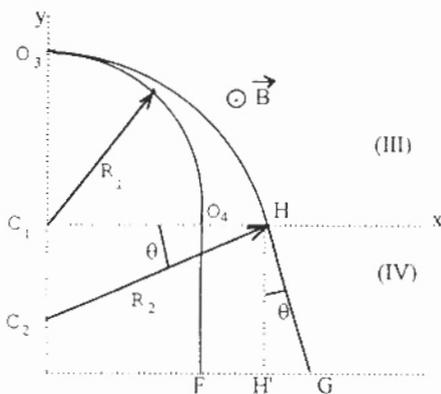
$$\frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

V.4. La quantité d'électricité collectée pendant la durée t est: $Q_1 = I_1 \cdot t$; on en déduit le nombre N_1 d'ions correspondant en divisant par la charge électrique d'un ion: $N_1 = \frac{I_1 t}{e}$.

La quantité de matière est: $n = N_1/N$; la masse cherchée est: $m = n \cdot M_1$ d'où le résultat:

$$m = \frac{I_1 t \cdot M_1}{N \cdot e}$$

$$m = 4,9 \cdot 10^{-10} \text{ g}$$



C-OSCILLATIONS D'UN HAUT-PARLEUR ELECTRODYNAMIQUE.

I.Principe du fonctionnement.

I.1. La force de Laplace $d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$ agissant sur l'élément $d\vec{l}$ d'une spire de la bobine est de direction $x'x$. L'ensemble des forces de Laplace agissant sur la bobine a donc pour résultante.

$$\vec{F} = -i.l.B.\vec{u}_x \quad (\vec{u}_x \text{ étant un vecteur unitaire de l'axe } x'x)$$

Cette force, de valeur proportionnelle à l'intensité du courant électrique, a un sens dépendant de celui du courant. Le déplacement de la membrane, solidaire de la bobine, dépend donc des variations du courant électrique alimentant la bobine.

I.2. On peut, par exemple, envoyer un faisceau laser sur un petit miroir collé sur la membrane du haut-parleur. La position du faisceau réfléchi par le miroir dépend du déplacement de la membrane (Fig1)

II.Equations mécanique et électrique.

II.1. Les termes de l'équation représentent, dans l'ordre, pour l'équipage mobile.

- la dérivée par rapport au temps de sa quantité de mouvement;
- une force de freinage proportionnelle à sa vitesse;
- une force de rappel élastique vers sa position d'équilibre;
- la force de Laplace s'exerçant sur la bobine.

II.2. $R.i$ représente la chute de tension ohmique due à la résistance de la bobine, c'est celle qui serait observée en courant continu.

$L.\frac{di}{dt}$ représente la force électromotrice auto-induite au sein de la bobine en régime

dépendant du temps.

$-Blv$ correspond à la force électromotrice induite par le déplacement de la bobine dans le champ magnétostatique.

II.3.

II.3.1. L'équipage mobile est soumis aux forces $m\vec{g}$, $M\vec{g}$, \vec{T} , \vec{F} (fig2) représentant respectivement les poids de l'équipage, de la surcharge, la force de rappel élastique et la force de Laplace.

Initialement, il n'y a ni surcharge sur la membrane ni courant dans la bobine. La membrane est en équilibre. $\vec{T} + m\vec{g} = \vec{0}$ (1); \vec{T} dépend de la position de la membrane

Avec la surcharge, lorsque l'équilibre est rétabli: $\vec{T} + m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{F} = \vec{0}$.

La membrane ayant repris sa position initiale, la relation (1) est vérifiée. Il vient: $M\vec{g} + \vec{F} = \vec{0}$. \vec{F} est donc dans le sens positif de l'axe $x'x$: le courant circule dans le sens négatif.

II.3.2. La représentation graphique de M en fonction de \vec{I} donne une droite passant par l'origine (Fig3). D'après la question précédente: $Mg = \vec{I}.l.B$. Donc, le coefficient directeur a de la droite représente la quantité $\frac{l.B}{g}$. D'après le graphique, $a = 0,259 \text{ kg.A}^{-1}$, on en déduit

B.1- a.g

$$\boxed{B.1- 2,5 \text{ T.m}}$$

III. Oscillations libres.

III.1.

III.1.1. L'intensité du courant est maintenue à une valeur nulle par le générateur de courant. L'équation électrique se réduit alors à: $u = -B.l.v$. L'oscilloscope à mémoire permet donc de visualiser une tension proportionnelle à la vitesse de l'équipage mobile.

III.1.2. Avec une intensité maintenue à une valeur nulle, l'équation mécanique est celle d'un oscillateur amorti. En dérivant cette équation par rapport au temps, on trouve une équation similaire faisant intervenir la vitesse. Le graphique B-c montre que les oscillations de u et donc de v (cf 3-1-1) sont pseudo-périodiques, de pseudo-période $T = 25$ ms. Les oscillations étant «peu amorties», on identifie T à T_0 , période propre de l'oscillateur, d'où:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m}$$

L'application numérique donne: $k/m = 6,3 \cdot 10^4 \text{ s}^{-2}$

A t_1 , le graphique donne $u = 400$ mV. On a: $v_1 = -\frac{u}{B.l} = -0,16$ m/s

III.2. Le théorème du centre d'inertie donne, en projetant sur $x'x$, l'accélération de l'équipage mobile en translation avec une vitesse v selon $x'x$:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B.l.i_0}{m}, \text{ donc constante puisque l'intensité du courant ne}$$

varie pas. L'intégration de cette relation entre les instants 0 et τ donne

$$m \cdot v_1 = -\frac{B.l.i_0 \cdot \tau}{v_1}$$

avec v_1 , la vitesse atteinte à la date τ

Application numérique: $m = 7,7 \text{ g}$

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

$$k = 4,9 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

IV. Oscillations forcées.

IV.1. $B.l.v$ est homogène à une tension u . Le numérateur $(B.l)^2$ de R_m est donc homogène à

$\left(\frac{u}{v}\right)^2$; R_m est homogène à $\frac{u^2}{f \cdot v^2}$. $f \cdot v$ représente une force, $f \cdot v^2$ est donc une puissance P .

Finalement, R_m est homogène à u^2/P qui a même unité qu'une résistance électrique

IV.2

IV.2.1. L'intensité efficace $I = U_d/Z_d$, en notant U la tension efficace constante délivrée par le générateur de tension, prend ici une valeur minimum et le circuit se comporte comme un conducteur ohmique: il s'agit du phénomène d'antirésonance du circuit bouchon. On peut d'ailleurs remarquer que $L_m \cdot C_m \cdot \omega_0^2 = 1$, les pulsations propres de l'oscillateur mécanique et de l'oscillateur électrique équivalent sont évidemment identiques

IV.2.2. L'impédance du condensateur tend vers zéro: c'est un court-circuit en haute fréquence. L'impédance équivalente de l'ensemble R_m, C_m, L_m tend donc vers zéro: l'impédance du circuit tend vers R

IV.2.3. L'impédance est quasiment constante entre 200 et 1000 Hz. Au-delà, elle augmente avec la fréquence. L'impédance correspondant à l'inductance propre de la bobine n'est pas négligeable au-delà de 1 kHz.

IV.3.

IV.3.1. Le circuit est équivalent à un conducteur ohmique: déphasage nul.

IV.3.2. En régime permanent, la somme des énergies mécanique et électromagnétique est constante, en moyenne temporelle. La puissance moyenne P_g fournie par le générateur compense alors les puissances moyennes transférées, du haut-parleur vers le milieu extérieur, par effet Joule et frottement. Ces deux effets correspondent respectivement aux résistances R et R_m (dont l'expression fait d'ailleurs intervenir le coefficient de frottement f).

A la résonance, u et i sont en phase, le facteur de puissance du dipôle est égal à 1, d'où

$$|Z| = R + R_m, \quad U = (R + R_m) I \quad \text{et} \quad P_g = U \cdot I = R I^2 + R_m I^2.$$

$$P_g = 0,16 \text{ W}$$

La puissance mécanique P_m fournie à l'oscillateur est la puissance moyenne des forces de Laplace; elle compense, en régime permanent (énergie mécanique constante en moyenne), la puissance mécanique moyenne perdue par frottement:

$$P_m = R_m I^2 = R_m \frac{|Z_0| - R}{|Z_0|} = 0,127 \text{ W}$$

IV.3.3 L'énergie mécanique, par le biais des frottements de la membrane sur l'air, est convertie en rayonnement acoustique émis par le haut-parleur.

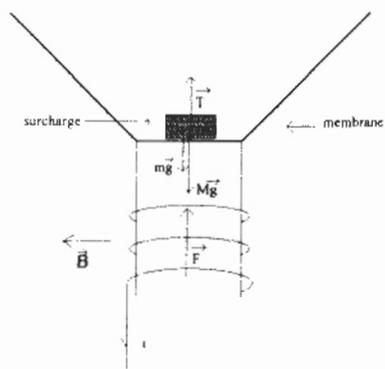


Fig1

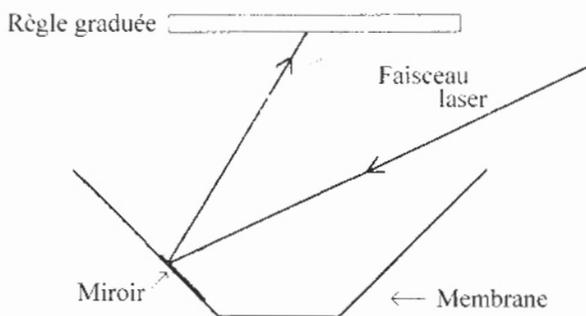


Fig2

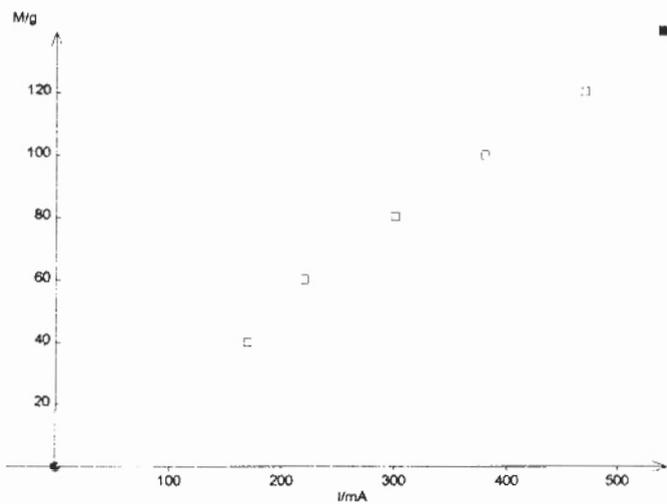


Fig3



CAPES

(Concours Interne)

SECTION : PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de chimie - Session : 1999

PARTIE A : LE SOUFRE

Le soufre est un solide jaune à température et pressions ordinaires.

- 2.1. symbole : S
 2.2.1. Z = nombre de protons du noyau
 2.2.2. A = nombre total de nucléons (protons + neutrons) du noyau
 2.3. Un nucléide est représenté par son symbole et son nombre de masse :
 A_ZX ou ${}_Z^AX$ Exemple : ${}^{12}_6C$ ou ${}^{12}_6C$
- 2.4.1. La configuration électronique du soufre (Z = 16) est : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$ ou $K^2 L^8 M^6$
 2.4.2. Le soufre se situe dans la 3^{ème} ligne (période) et la 4^{ème} colonne du bloc p, c'est à dire la 16^{ème} colonne de la classification périodique
 2.4.3. Le soufre est au-dessous de l'oxygène O (Z = 8) : configuration : $2s^2 2p^4$
 2.5. Un corps pur est dit simple si l'entité chimique qui le compose (de formule chimique déterminée) est formée à partir d'atomes identiques : exemple N_2 ; il est dit composé si l'entité chimique est formée à partir d'atomes différents : exemple H_2O

3.1.

S	SO_2	H_2S	FeS
Soufre	Dioxyde de soufre	Sulfure d'hydrogène	Sulfure de fer(II)



- 3.3. Les éléments chimiques du globe et de l'univers.
 Les prérequis sont la notion d'atome, sa représentation, l'écriture des équations-bilan.

- 3.4. Cet exercice peut être l'occasion d'expériences de cours et de TP illustrant la conservation des éléments chimiques au cours des réactions (l'élément dans tous ses états : voir programme de seconde).

- 3.5. Expériences réalisables à condition de travailler sous une hotte.

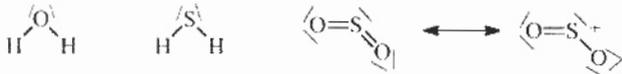
- 3.6.1. nombre d'oxydation du soufre dans :



- 3.6.2. Toutes les réactions sont des réactions d'oxydo-réduction sauf (1).

- 3.6.3. La réaction (2) est utilisée pour la désulfuration des gaz naturels.

- 3.7.1.



- 3.7.2. Les molécules H_2O et H_2S sont de type AX_2E_2 : elles sont coudées, l'angle entre les deux liaisons est approximativement celui du tétraèdre régulier : $\alpha \approx 109^\circ$. En fait, les doublets

non liants étant plus « encombrants » que les doublets liants, $\alpha < 109^\circ$. D'autre part, O étant plus électronégatif que S, $\alpha(\text{H}_2\text{O}) > \alpha(\text{H}_2\text{S})$.

SO_2 est de type AX_2E : SO_2 est coudée, α est légèrement inférieur à 120° .



4.2.

H_2S	S_m	H_2
$n_0(1-\alpha)$	$n_0\alpha/m$	$n_0\alpha$

4.3.

$$P_{\text{H}_2\text{S}} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha/m} P \quad P_{\text{S}_m} = \frac{\alpha/m}{1+\alpha/m} P \quad P_{\text{H}_2} = \frac{\alpha}{1+\alpha/m} P$$

$$m = \frac{\alpha}{\frac{P}{P_{\text{H}_2}} - 1} = 2.07 \Rightarrow m = 2$$

4.4.



4.5.

$$K^\circ = \frac{P_{\text{S}_2} (P_{\text{H}_2})^2}{P^\circ (P_{\text{H}_2\text{S}})^2} = \frac{\alpha^3 P}{2(1-\alpha)^2 (1+\alpha/2) P^\circ} = 0.0152$$

PARTIE B : L'ACIDE SULFURIQUE ET L'ACIDE SULFUREUX

- 1.1. La densité d'un corps est le rapport de la masse d'un volume V de ce corps à la masse du même volume d'eau, mesuré dans les mêmes conditions de température et de pression.

$$d = \frac{\rho(P, T)}{\rho_{\text{eau}}(P, T)}$$

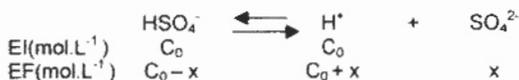
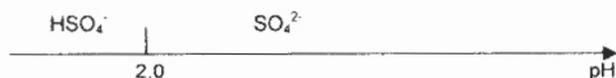
1.2. $\rho = \rho_{\text{eau}} \cdot d = 1,84 \text{ kg.L}^{-1}$

1.3. $C = \tau \cdot \rho / M = 17,8 \text{ mol.L}^{-1}$

- 1.4. Le volume de solution commerciale à prélever est : $v = C_0 \cdot 1 / C = 2,8 \text{ mL}$
Le volume d'eau est : $v_{\text{eau}} = 997,2 \text{ mL}$

- 1.5. Il faut verser l'acide dans l'eau car, la dissolution étant très exothermique, il y a des risques de projections. On mesure le volume d'acide avec une **pipette graduée de 5 mL** (ou avec une burette de 5 ou 10 mL) ; on le verse dans un becher contenant environ 0,5 L d'eau. On transvase dans une **fiole jaugée de 1L** ; on transvase également les eaux de rinçage du bécher, puis on complète au trait de jauge avec de l'eau distillée.

1.6.



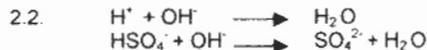
$$K_A = \frac{(C_0 + x)x}{C_0 - x} \Leftrightarrow x^2 + (C_0 + K_A)x - K_A C_0 = 0$$

$x = 7,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ soit : **pH = 1,2**

- 2.1. Le dioxyde de carbone contenu dans l'air peut réagir avec la soude selon :

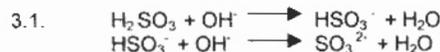


C'est le phénomène de carbonatation, qui modifie le titre de la solution.



- 2.3. La deuxième acidité est trop forte pour être dosée séparément : les deux réactions de dosage sont simultanées.

$$C \cdot v_e = 2C_0 v_0 \Rightarrow v_e = \mathbf{25,0 \text{ mL}}$$



- 3.2. La courbe 4 représente le pourcentage de l'espèce H_2SO_3 (par rapport à l'ensemble des espèces contenant l'élément soufre) : en effet, H_2SO_3 disparaît au début du dosage ($0 < v < v_{e1}$).

La courbe 3 représente le pourcentage de l'espèce HSO_3^- : HSO_3^- est formé par la première réaction, puis est consommé par la seconde.

La courbe 2 représente le pourcentage de l'espèce SO_3^{2-} .

- 3.3. Les deux acidités de l'acide sulfureux sont dosées séparément : on observe deux sauts de pH.

A la première équivalence : $C_0 v_0 = C v_{e1} \Rightarrow C_0' = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$

- 3.4. $\text{pH} = \text{pK}_{A1} \Leftrightarrow [\text{H}_2\text{SO}_3] = [\text{HSO}_3^-]$: on lit sur la courbe $\text{pK}_{A1} = 1,8$

$\text{pH} = \text{pK}_{A2} \Leftrightarrow [\text{HSO}_3^-] = [\text{SO}_3^{2-}]$: on lit sur la courbe $\text{pK}_{A2} = 7,6$

- 3.5. $v_1 = 15 \text{ mL}$ correspond à la première équivalence : on a alors une solution de l'ampholyte HSO_3^- . La réaction prépondérante est : $2 \text{HSO}_3^- \rightleftharpoons \text{H}_2\text{SO}_3 + \text{SO}_3^{2-}$

$[\text{H}_2\text{SO}_3] = [\text{SO}_3^{2-}] \Rightarrow \text{pH} = \frac{1}{2}(\text{pK}_{A1} + \text{pK}_{A2}) = 4,7$

Remarque : l'approximation utilisée pour faire ce calcul, et qui consiste à négliger la dissociation de HSO_3^- dans l'eau selon : $\text{HSO}_3^- + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{SO}_3^{2-} + \text{H}_3\text{O}^+$ n'est en réalité pas valide ($[\text{SO}_3^{2-}] = 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$). Un calcul plus complet conduit à $\text{pH} = 4,8$.

$v_2 = 30 \text{ mL}$ correspond à la deuxième équivalence. On a alors une solution de la base SO_3^{2-} .

La réaction prépondérante est : $\text{SO}_3^{2-} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{HSO}_3^- + \text{OH}^-$

$[\text{HSO}_3^-] = [\text{OH}^-] \Rightarrow \text{pH} = \frac{1}{2}(\text{pK}_e + \text{pK}_{A2} - \text{pC}')$ avec

$$C' = \frac{C_0 v_0}{v_0 + v_2}$$

$$\text{pH} = 9,9$$

Ces résultats sont conformes au graphe, compte tenu de la précision de la courbe.

4. $v < v'_{e1}$: on dose simultanément H^+ , HSO_4^- et H_2SO_3 (acidités trop proches pour être dosées séparément)

$v'_{e1} < v < v'_{e2}$: on dose HSO_3^- . La quantité de base versée entre v'_{e1} et v'_{e2} a neutralisé $c_2 v_0$ mol de HSO_3^- .

$c_2 v'_{e2} = c'(v'_{e2} - v'_{e1}) \Rightarrow c_2 = 8,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$

$(2c_1 + c_2) v'_{e1} = c' v'_{e1} \Rightarrow c_1 = 12,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$

- 5.1. $\text{MnO}_4^- + 8 \text{H}^+ + 5 \text{e}^- \rightleftharpoons \text{Mn}^{2+} + 4 \text{H}_2\text{O}$

$\text{HSO}_4^- + 3 \text{H}^+ + 2 \text{e}^- \rightleftharpoons \text{H}_2\text{SO}_3 + \text{H}_2\text{O}$

Bilan : $5 \text{H}_2\text{SO}_3 + 2 \text{MnO}_4^- + \text{H}^+ \rightleftharpoons 2 \text{Mn}^{2+} + 5 \text{HSO}_4^- + 3 \text{H}_2\text{O}$

$\Delta_r G^\circ = -RT \ln K^\circ = -10 F(E^\circ(\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}) - E^\circ(\text{HSO}_4^-/\text{H}_2\text{SO}_3))$

$$\log K^\circ = \frac{10(1,51 - 0,20)}{0,06} = 218,3$$

$K^\circ = 10^{218} \gg 1$: la réaction est totale.

- 5.2. A l'équivalence : $5c_3 V_e = 2c_2 V_0 \Rightarrow c_2 = 8,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$

Accord avec le résultat de la question 4.

- 5.3. L'ion MnO_4^- étant violet (rose en solution très diluée), on détecte l'équivalence par la persistance de la coloration rose.

PARTIE C : ETUDE CINÉTIQUE DE L'OXYDATION DES IONS IODURE PAR LES IONS PEROXODISULFATE

1. La concentration des réactifs, la température et la présence d'un catalyseur sont les principaux facteurs cinétiques d'une réaction chimique.

2.1.

$$C_0 = \frac{5,0 \cdot 10^{-2} \cdot 10}{20 + 1 + 1 + 10} = 1,56 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

- 2.2. Les réactions ayant lieu dans l'erlenmeyer sont :

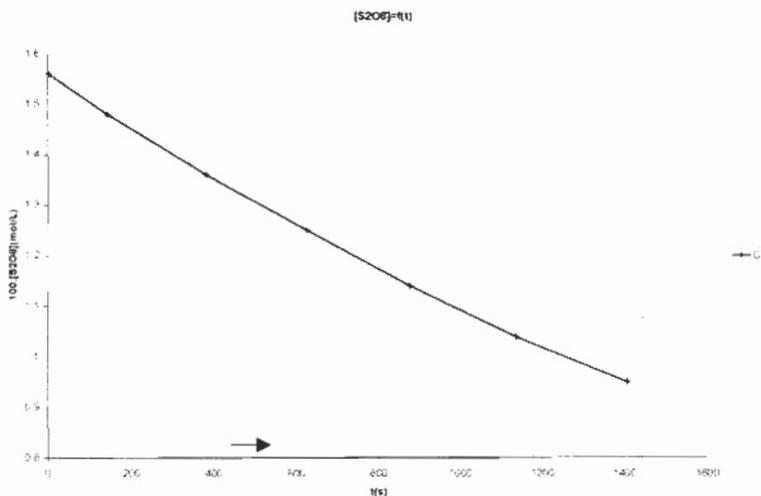


L'apparition de la coloration bleue à l'instant t_n correspond à la consommation totale de $n(\text{I}_2) = 5,10^{-2} \cdot n/2$ mmol de I_2 par les $5,10^{-2} \cdot n$ mmol de $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$. A cet instant la quantité de peroxodisulfate restant est $n(\text{S}_2\text{O}_8^{2-}) = n_0 - n(\text{I}_2) = 5,10^{-2} (10 - n/2)$ mmol ; soit une concentration :

$$[\text{S}_2\text{O}_8^{2-}] = \frac{5,10^{-2} (10 - n/2)}{31 + n} = \frac{20 - n}{40 (31 + n)}$$

2.3.

t (s)	0	142	381	625	876	1136	1406
100 [S ₂ O ₈ ²⁻] (mol.L ⁻¹)	1,56	1,48	1,36	1,25	1,14	1,04	0,95



- 2.4. $v = -d[\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]/dt$

v diminue au cours de la réaction (v est l'opposé de la pente de la tangente à la courbe précédente en chaque point).

- 2.5. Par construction graphique, on détermine $v = 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

- 3.1.1. La quantité de I⁻ dans la solution est celle qu'on a introduite car la deuxième réaction, instantanée, forme autant de I⁻ que la réaction étudiée en consomme.

$$[I^-] = \frac{20,5 \cdot 10^{-2} + n \cdot \frac{1}{31}}{31+n} = \frac{31+n}{31(31+n)} = \frac{1}{31} = 3,23 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} = \text{cte}$$

- 3.1.2.

$$-\frac{d[S_2O_8^{2-}]}{dt} = k_1[S_2O_8^{2-}] \quad \text{avec} \quad k_1 = k[I^-]^b \Rightarrow [S_2O_8^{2-}] = [S_2O_8^{2-}]_0 e^{-k_1 t}$$

- 3.1.3 On trace $\ln([S_2O_8^{2-}]) = f(t)$.

On obtient une droite : l'hypothèse de l'ordre 1 par rapport au peroxydisulfate est vérifiée.

- 3.1.4.

La pente de la droite est : $p = -3,53 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. On en déduit $k_1 = 3,53 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

$$[S_2O_8^{2-}]_{t=t_{1/2}} = \frac{[S_2O_8^{2-}]_0}{2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_1} = 1960 \text{ s}$$

- 3.1.5. $v_{13} = k_1 [S_2O_8^{2-}]_3 = 4,4 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, conforme au résultat de la question 2.5.

- 3.2.1.

$$\frac{k_2}{k_1} = \left(\frac{[I^-]_2}{[I^-]_1} \right)^b = 2^b = 2,04 \Rightarrow b = 1$$

- 3.2.2. $k = k_1 [I^-]_1 = 31 k_1 = 1,10 \cdot 10^{-2} \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$



Une réaction lente, entre deux anions, est remplacée par deux réactions plus rapides, entre un cation et un anion. Ce mécanisme est possible car le potentiel redox standard du catalyseur est compris entre les potentiels redox des deux réactifs mis en jeu (chaque étape du mécanisme est ainsi thermodynamiquement favorisée, et plus rapide que la réaction directe).

PARTIE D : THIOLS ET ALCOOLS

1.1.1.1. Une liaison hydrogène est une interaction intermoléculaire s'exerçant entre le dipôle formé par une liaison polarisée $\overset{\delta-}{S}-\overset{\delta+}{H}$ d'une molécule et le doublet non liant porté par un atome d'une autre molécule.

1.1.1.2. La température d'ébullition des composés croît quand la force des liaisons intermoléculaires croît.
 CH_3Cl : pas de liaison hydrogène car pas de liaison A-H polarisée ; les seules interactions intermoléculaires sont de type Van der Waals, donc beaucoup moins intenses que les liaisons hydrogène.
 CH_3SH : les liaisons hydrogène sont moins intenses que dans CH_3OH car S est plus volumineux (et moins électro-négatif) que O.

1.1.2.1. $H_3C-CH_2-O^-$ ion éthanolate

1.1.2.2. $H_3C-CH_2-S^-$ ion éthanethiolate

1.1.2.3. L'acide le plus fort est celui qui a la plus grande constante de dissociation dans l'eau, c'est à dire le plus petit pK_a : l'éthanethiol est un acide plus fort que l'éthanol.
 Plus l'acide est fort, plus sa base conjuguée est faible : l'éthanolate est une base plus forte que l'éthanethiolate.

1.1.2.4. La réaction : $CH_3CH_2S^- + CH_3CH_2OH \rightleftharpoons CH_3CH_2SH + CH_3CH_2O^-$ a une constante $K = K_a(ROH) / K_a(RSH) = 10^{-5.4} \ll 1$.
 Oui, l'ion éthanethiolate peut exister en présence d'éthanol (leurs domaines de prédominance ont une partie commune).

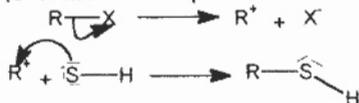
1.1.2.5. Non, l'éthanol est un acide plus faible que l'eau, donc indifférent dans l'eau.

1.1.2.6. L'éthanethiol est l'acide le plus fort car sa base conjuguée est plus stable que l'éthanolate : en effet, S étant plus gros et plus polarisable que O, la charge - est mieux répartie, et l'ion est plus stable.

1.2.1. C'est une réaction de substitution nucléophile.

1.2.2. Le nucléophile est HS^- .

1.2.3. SN_1 (Substitution Nucléophile monomoléculaire) :



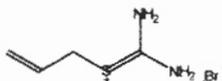
SN_2 (Substitution Nucléophile bimoléculaire) :



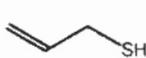
1.3. S est plus gros et plus polarisable que O : la charge + est donc mieux stabilisée dans B que dans le composé oxygéné.

1.4.

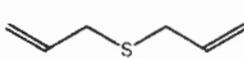
C :



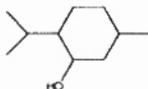
D :



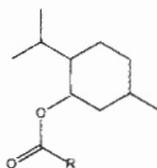
E :



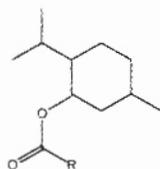
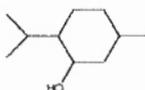
2.1.1.



2.1.2.

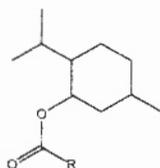
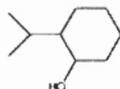


2.1.3.

+ H₂O

+ R-COOH

ou :

+ HO⁻+ R-COO⁻

2.1.4. La réaction d'estérification est lente, athermique et inversable.

La réaction de saponification est rapide et totale.

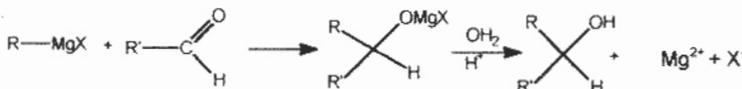
2.2.1. R-Mg-X

2.2.2. La liaison R-Mg étant fortement polarisée, les organomagnésiens se comportent comme des carbanions R⁻.

2.2.3. Les organomagnésiens réagissent avec l'eau selon :



2.2.4.



L'action d'un organomagnésien sur un aldéhyde conduit à un alcool secondaire ; sur une cétone, à un alcool tertiaire.

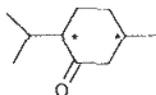
2.3.1. Aldéhyde et halogénure d'alkyle.

2.3.2.



2.4.1. Le menthol est un alcool secondaire ; son oxydation ménagée conduit à une cétone.

2.4.2.1.



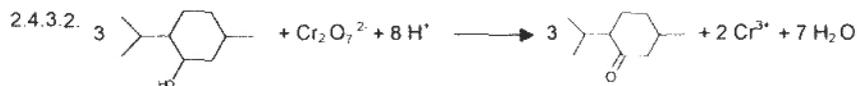
2.4.2.2. Un carbone asymétrique possède 4 substituants différents. La menthone en possède 2, notés C* sur la formule précédente.

2.4.2.3. La menthone possède $2^2 = 4$ stéréoisomères, formant 2 couples d'énantiomères, diastéréoisomères entre eux.

Enantiomères : stéréoisomères symétriques l'un de l'autre par rapport à un plan et non superposables.

Diastéréoisomères : stéréoisomères non énantiomères.

2.4.3.1. La couleur du contenu du ballon passe de orange, couleur des ions $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$, à vert, couleur des ions Cr^{3+} .



2.4.3.3. $n(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}) \approx 20/262 = 7,6 \cdot 10^{-2}$ mol

$n(\text{ROH}) = 0,1$ mol

$n(\text{ROH}) < 3 n(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-})$: l'alcool est le réactif limitant. Si le rendement de la réaction était de 100%, on obtiendrait 0,1 mol de menthone, soit $m = 15,4$ g.

2.4.4.1. On cherche un solvant non miscible au solvant d'origine, dans lequel le produit à extraire soit plus soluble que les autres constituants du mélange.

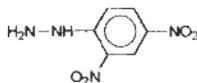
On a choisi le toluène en raison de sa non miscibilité à l'eau, de la solubilité de la menthone infinie dans le toluène et très faible dans l'eau.

2.4.4.2. La phase organique est au-dessus de la phase aqueuse.

2.4.4.3. Schéma comportant : un chauffe-ballon, un ballon, une colonne à distiller (par exemple de type Vigreux), un thermomètre, un réfrigérant droit à circulation d'eau froide, une allonge de recette et un récipient pour recueillir le distillat.

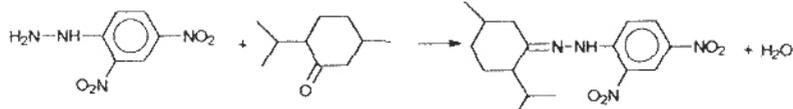
2.4.4.4. La menthone étant moins volatile que le toluène, si la colonne à distiller est suffisamment haute, et si le mélange menthone-toluène ne comporte pas d'azéotrope, le distillat ne contiendra pas de menthone.

2.4.5.1. Un réactif caractéristique est la 2,4-dinitrophénylhydrazine (2,4-DNPH), de formule



On obtient un précipité orange.

2.4.5.2.



Ce test est utilisé pour identifier une cétone, mais pas pour la purifier car la réaction n'est pas inversable.

2.4.5.3. Température de fusion.

2.4.5.4. Non, le test à la liqueur de Fehling est un test caractéristique des aldéhydes, mettant en jeu leurs propriétés réductrices.



CAPES (Concours Interne)

SECTION : PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition d'électricité appliquée - Session : 1999

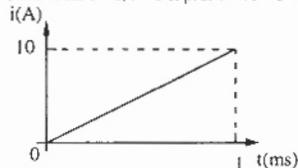
PREMIÈRE PARTIE - ÉLECTROTECHNIQUE

1. Etude d'une bobine en régime impulsionnel

1.1. Bobine parfaite

1.1.1. $E = L di/dt \Rightarrow i = Et/L + cte$; à $t = 0$, $i = cte = 0 \Rightarrow i = Et/L \Rightarrow i = 10^4 t$

1.1.2. Pour $t = 0$, $i = 0$ et pour $t = 10^{-3}$ s $\Rightarrow i = 10$ A, d'où :

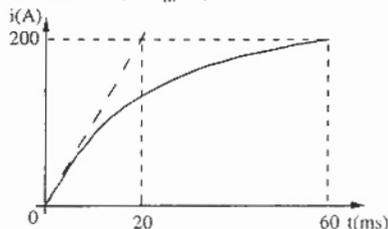


1.2. Bobine réelle

1.2.1. $E = ri + L di/dt \Rightarrow i = \frac{E}{r} (1 - e^{-t/\tau})$ avec $\tau = L/r \Rightarrow i = 200(1 - e^{-50t})$

1.2.2. $i_{\max} = E/r \Rightarrow i_{\max} = 200$ A ; durée $t = 3\tau = 3L/r \Rightarrow t = 60$ ms

1.2.3. A $t = 1$ ms, $i = I_m = 9,8$ A



1.2.4. Pour $0 < t < 1$ ms, la bobine réelle a le comportement d'une bobine parfaite.

1.3. Démagnétisation

En reprenant les résultats précédents, les conditions sont telles que la bobine peut être supposée parfaite.

1.3.1. Démagnétisation par diode

1.3.1.1. Magnétisation : $E = L di/dt \Rightarrow i = Et/L + cte$; à $t = 0$, $i = cte = 0 \Rightarrow i = Et/L \Rightarrow i = 10^4 t$

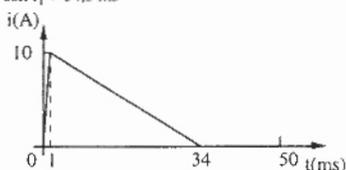
A $t = t_m = 1$ ms, $i = I_m = 10$ A

Démagnétisation : $u = -U_d = L di/dt \Rightarrow i = -U_d (t - t_m)/L + i(t_m)$; à $t = t_m$, $i = i(t_m) = I_m \Rightarrow$

$i = -U_d (t - t_m)/L + I_m \Rightarrow i = -0,6 (t - 10^{-3})/2 \cdot 10^{-3} + 10 \Rightarrow i = -300t + 10,3$

Le circuit est totalement démagnétisé lorsque $i = 0$, c'est-à-dire à l'instant $t_1 = (10,3/300)$ s.

soit $t_1 = 34,3$ ms



1.3.1.2. Durée de démagnétisation : $\Delta t = t_1 - t_m = 33,3$ ms. Pendant la démagnétisation la diode a un fonctionnement en roue libre. Le défaut majeur d'une telle démagnétisation est que la durée de démagnétisation est bien plus grande que celle de la magnétisation : c'est l'inverse qui est habituellement recherché.

1.3.2. Démagnétisation par diode et diode Zener.

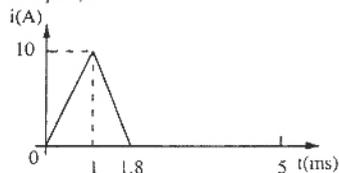
1.3.2.1. Magnétisation : $E = L di/dt \Rightarrow i = Et/L + cte$; à $t = 0$, $i = cte = 0 \Rightarrow i = Et/L \Rightarrow i = 10^4 t$

A $t = t_m = 1$ ms, $i = I_m = 10$ A

Démagnétisation : $u = -(V_Z + U_d) = L di/dt \Rightarrow i = -(V_Z + U_d)(t - t_m)/L + i(t_m)$; à $t = t_m$, $i = i(t_m) = I_m \Rightarrow i = -(V_Z + U_d)(t - t_m)/L + I_m \Rightarrow i = -25,7(t - 10^{-3})/2 \cdot 10^{-3} + 10 \Rightarrow i = -12850t + 22,85$

Le circuit est totalement démagnétisé lorsque $i = 0$, c'est-à-dire à l'instant $t' = (22,85/12850)s$,

soit $t' = 1,8$ ms



1.3.2.2. Durée de démagnétisation : $\Delta t = t' - t_m = 0,8$ ms. La durée de la démagnétisation est inférieure à celle de la magnétisation.

2. Etude d'un transformateur en régime impulsionnel

2.1. Magnétisation du transformateur

2.1.1. Fonctionnement à vide

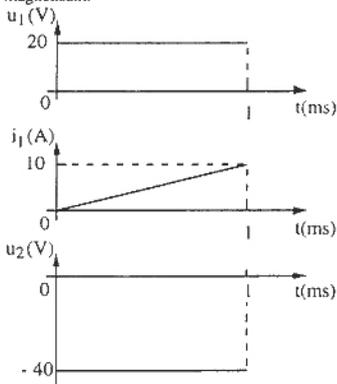
2.1.1.1. Les bornes repérées sont les bornes homologues (les courants rentrant au même instant par ces bornes donnent des flux de même signe).

2.1.1.2.

$$L_2 = L_1 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \Rightarrow L_2 = 8 \text{ mH}$$

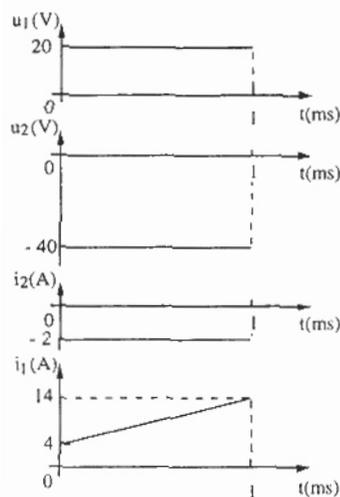
$$2.1.1.3. M_{12} = M_{21} = M = \sqrt{L_1 L_2} \Rightarrow M = 4 \text{ mH}$$

2.1.1.4. $m = n_2/n_1 = -u_2/u_1 \Rightarrow u_2 = -2u_1$ et $i_1 = Et/L_1 \Rightarrow i_1 = 10^4 t$; $i_1 = i_{10}$: c'est l'intensité du courant magnétisant.

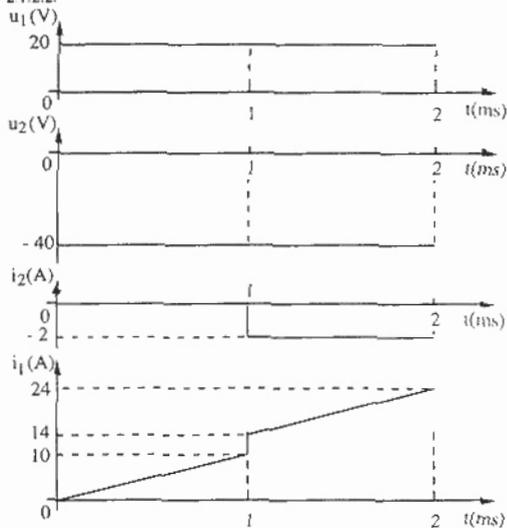


2.1.2. Fonctionnement en charge

2.1.2.1. $u_2 = -2u_1$; $i_2 = u_2/R_c$ et $i_1 = i_{10} - m i_2$.



2.1.2.2.



2.2. Dénagnétisation du transformateur par diode

2.2.1. A $t=0^+$, $u_1(0^+) = E = 20$ V, $u_2(0^+) = -m u_1(0^+) = -40$ V \Rightarrow la diode est bloquée $\Rightarrow i_2(0^+) = 0$ et $i_1(0^+) = 0$.2.2.2. A $t=t_m^-$, $u_1(t_m^-) = E = 20$ V, $i_1(t_m^-) = I_{1m} = 10$ A ; $u_2(t_m^-) = -m u_1(t_m^-) = -40$ V \Rightarrow la diode est bloquée $\Rightarrow i_2(t_m^-) = 0$.2.2.3. A $t=t_m^+$, $i_1(t_m^+) = 0 \Rightarrow i_2(t_m^+) = I_{2m} = I_{1m}/m = 5$ A (la diode D conduit) ; $u_2(t_m^+) = R_C i_2(t_m^+) = 100$ V ; $u_1(t_m^+) = -u_2(t_m^+)/m = -50$ V.

2.2.4. Au cours de la démagnétisation, $i_2(t)$ a pour expression : $i_2(t) = I_{2m} e^{-(t-t_m)/\tau}$ avec $\tau = L_2/R_C$

La démagnétisation est quasi-totale pour $\Delta t = t - t_m = 3\tau = 3L_2/R_C = 1,2$ ms

3. Principe d'une alimentation fly-back

3.1. Conduction discontinue

3.1.1. $i_1(t) = Et/L_1 \Rightarrow i_1(t) = 10^5 t$

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(\alpha T) = \frac{1}{2} L_1 I_{1m}^2 \text{ avec } I_{1m} = i_1(\alpha T) \Rightarrow W_1 = 2,5 \times 10^{-3} \text{ J}$$

3.1.2. Entre les instants αT et T , le circuit se démagnétise. Si la durée de démagnétisation est inférieure à $(1 - \alpha)T$, il existe deux phases de fonctionnement : l'une correspondant à $i_2(t) \neq 0$ et l'autre correspondant à $i_2(t) = 0$.

$$i_2(t) = -\frac{u_c + U_d}{L_2} (t - \alpha T) + i_2(\alpha T)$$

Pour la première phase :

$$\text{Soit : } i_2(t) = -\frac{u_c + U_d}{L_2} (t - \alpha T) + \frac{I_{1m}}{m}$$

$$i_2(t) = -88900t + 8,61$$

Pour la deuxième phase : $i_2(t) = 0$

Le passage entre les deux phases s'effectue à l'instant : $t_d = 8,61/88900 \Rightarrow t_d = 96,8 \mu\text{s}$; or la période est $T = 100 \mu\text{s}$, $t_d < T \Rightarrow$ deux phases de fonctionnement.

3.1.3. La magnétisation durant $\alpha T = 50 \mu\text{s}$, la démagnétisation dure donc $96,8 - 50$ soit $46,8 \mu\text{s}$, pendant les $3,2$ ms restant l'intensité i_2 est nulle.

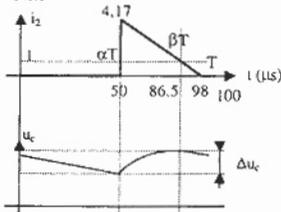
3.1.4. En sortie : $P = u_c i_c = u_c^2/R_C$. En entrée : $P = EI_{1m}\alpha/2$

Transformateur parfait $\Rightarrow P = P'$, donc : $u_c^2/R_C = EI_{1m}\alpha/2$. Comme $I_{1m} = E\alpha T/L_1$, on obtient :

$$u_c = \alpha E \sqrt{\frac{R_C}{2\alpha L_1}}$$

$\alpha = 0,5$, $E = 20 \text{ V}$, $R_C = 25 \Omega$, $f = 10^4 \text{ Hz}$, $L_1 = 0,200 \text{ mH} \Rightarrow u_c = 25 \text{ V}$ c'est la valeur souhaitée.

3.1.5.



$$\Delta u_c = \frac{i_2 - i_{2\text{max}}}{C} (\beta T - \alpha T)$$

d'où $C = 578 \mu\text{F}$.

3.2. Conduction continue

3.2.1. La conduction devient continue lorsque la démagnétisation n'est pas complète à la fin de la période. La limite est obtenue pour :

$$i_2(t) = -\frac{u_c + U_d}{L_2} (T - \alpha T) + i_2(\alpha T) = 0$$

Soit :

$$-\frac{u_c + U_d}{L_2} (1 - \alpha)T + \frac{E}{mL_1} \alpha T = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{u_c + U_d}{L_2}}{\frac{u_c + U_d}{L_2} + \frac{E}{mL_1}}$$

$\alpha = 0,52$

3.2.2.

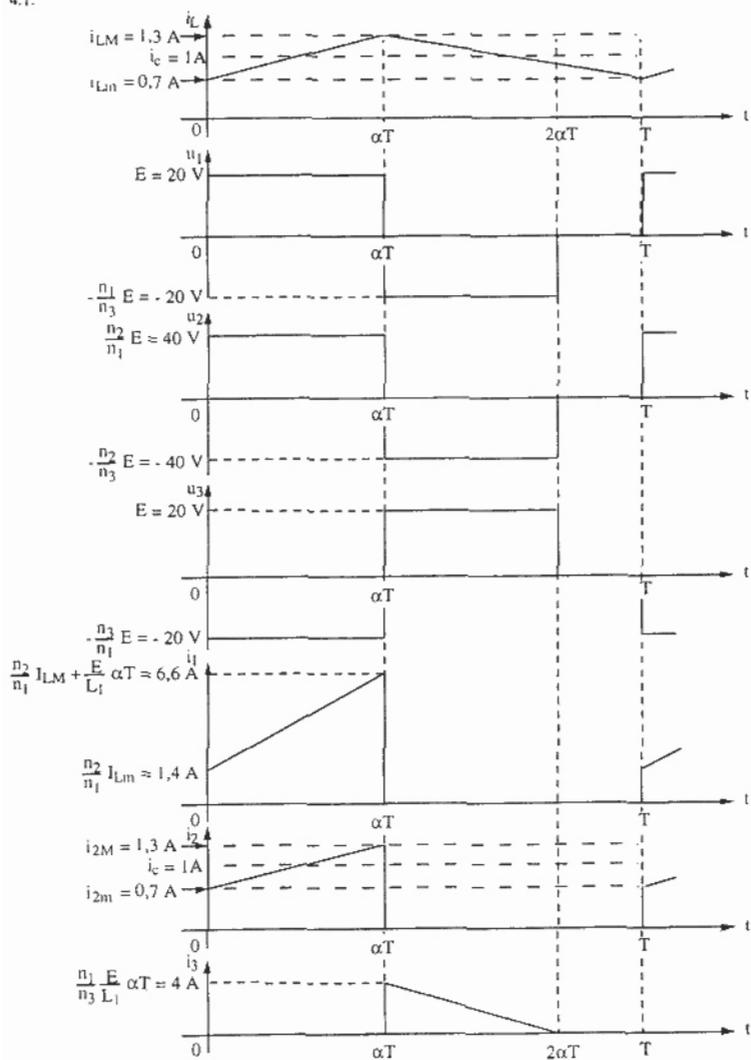
$$u_c - \bar{u}_c = mE \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

3.2.3. Avec $\alpha = 0,8$, on obtient $u_c = 96 \text{ V}$

$$\Delta u_c = i_c \frac{\alpha T}{2C} \Rightarrow \Delta u_c = 138 \text{ mV}$$

4. Principe d'une alimentation forward

4.1.



4.2.

$$u_c = \alpha E \frac{n_2}{n_1}$$

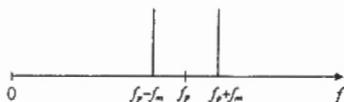
SECONDE PARTIE - ÉLECTRONIQUE

1- Etude d'une modulation et d'une démodulation

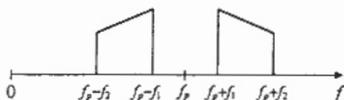
$$1.1.1- s_1(t) = KMP \cos \omega_m t \cos \omega_p t$$

Il s'agit d'une modulation d'amplitude à porteuse supprimée (modulation d'amplitude à double bande latérale BLD).

$$1.1.2- s_1(t) = \frac{KMP}{2} (\cos(\omega_p - \omega_m)t + \cos(\omega_p + \omega_m)t)$$



1.1.3-

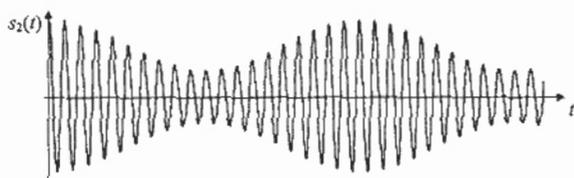


$$1.2.1- s_2(t) = K(A + M \cos \omega_m t)P \cos \omega_p t$$

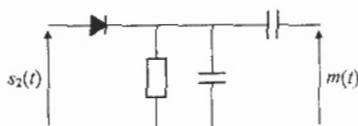
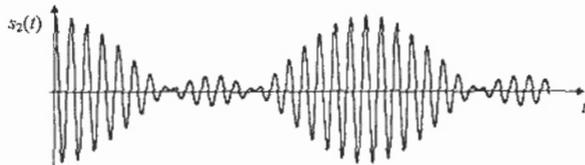
Il s'agit d'une modulation d'amplitude avec porteuse.

$$1.2.2- s_2(t) = AKP \left(1 + \frac{M}{A} \cos \omega_m t\right) \cos \omega_p t$$

On pose $\mu = \frac{M}{A}$ = taux de modulation.

1.2.3- $\mu \approx 0,5$ 

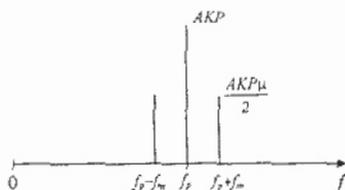
Pour démoduler le signal $m(t)$, on peut utiliser un détecteur d'enveloppe selon le schéma suivant :

1.2.4- $\mu = 1,5$ 

La méthode de détection précédente ne permet plus d'obtenir le signal $m(t)$ dès que $\mu > 1$.

1.2.5-

$$\begin{aligned} s_2(t) &= AKP \cos \omega_p t + AKP\mu \cos \omega_m t \cos \omega_p t \\ &= AKP \cos \omega_p t + \frac{AKP\mu}{2} \cos(\omega_p - \omega_m)t + \frac{AKP\mu}{2} \cos(\omega_p + \omega_m)t \end{aligned}$$



1.3.1-

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{K^2 V_{MP}}{2} \cos(\omega_p t + \phi) (\cos(\omega_p + \omega_m)t + \cos(\omega_p - \omega_m)t) \\
 &= \frac{K^2 V_{MP}}{4} (\cos((2\omega_p + \omega_m)t + \phi) + \cos(\omega_m t - \phi) + \cos((2\omega_p - \omega_m)t + \phi) + \cos(\omega_m t + \phi)) \\
 &= \frac{K^2 V_{MP}}{2} \cos \phi \cos \omega_m t + \frac{K^2 V_{MP}}{4} (\cos((2\omega_p + \omega_m)t + \phi) + \cos((2\omega_p - \omega_m)t + \phi))
 \end{aligned}$$



1.3.2-



1.3.3- Il faut un filtre passe-bas laissant passer la fréquence f_2 et éliminant la fréquence $2f_p - f_2$. Sa fréquence de coupure f_c est telle que $f_2 < f_c \ll 2f_p - f_2$, soit $15 \text{ kHz} < f_c \ll 1 \text{ MHz}$.

1.3.4- Le message obtenu en v_2 est multiplié par $\cos \phi$. Il faut donc choisir $\cos \phi$ aussi grand que possible, soit $\phi = 0$ (ou $\phi = \pm \pi$).

2- Etude du multiplieur

$$2.1.1- 2E = Ri + 2V_{BE} + Ri \quad \text{d'où} \quad i = \frac{E - V_{BE}}{R}$$

$$2.1.2- R'I = V_{BE} + Ri = E \quad \text{d'où} \quad I = \frac{E}{R'}$$

$$2.2.1- I_A = I_1 + I_2 \quad \text{d'où} \quad I_2 = I_A - I_1 = I_A(1 - x)$$

$$2.2.2- X = V_{BE} + RI_1 - RI_2 - V_{BE} = R(I_1 - I_2) = RI_A(2x - 1)$$

$$2.2.3- I_4 = I_B(1 - y) \quad Y = RI_B(2y - 1)$$

$$2.3.1- V_{BE5} + V_{BE7} - V_{BE8} - V_{BE6} = 0$$

$$2.3.2- \ln I_5 + \ln I_7 - \ln I_8 - \ln I_6 = 0 \quad \text{d'où} \quad I_5 I_7 = I_6 I_8$$

$$2.3.3- I_7 + I_8 = I_3 = yI_B$$

$$\left. \begin{array}{l} I_5 = I_1 = xI_A \\ I_6 = I_2 = (1-x)I_A \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{I_5}{I_6} = \frac{x}{1-x} = \frac{I_8}{I_7}$$

$$\text{d'où} \quad I_8 = I_7 \frac{x}{1-x} \quad \text{et} \quad I_7 + I_7 \frac{x}{1-x} = I_7 \frac{1}{1-x} = yI_B$$

$$\text{d'où} \quad I_7 = (1-x)yI_B \quad \text{et} \quad I_8 = xyI_B$$

$$2.3.4- V_{BE5} + V_{BE9} - V_{BE10} - V_{BE6} = 0$$

$$2.3.5- I_5 I_9 = I_6 I_{10}$$

$$2.3.6- I_9 + I_{10} = I_4 = (1-y)I_B$$

$$\frac{I_5}{I_6} = \frac{x}{1-x} = \frac{I_{10}}{I_9} \quad \text{d'où} \quad I_{10} = I_9 \frac{x}{1-x}$$

$$I_9 + I_9 \frac{x}{1-x} = (1-y)I_B \quad \text{d'où} \quad I_9 = (1-x)(1-y)I_B \quad \text{et} \quad I_{10} = x(1-y)I_B$$

$$2.4.1-$$

$$V_A = E - R(I' + i') \quad \text{avec} \quad i' = \frac{V_A}{2R} \quad \text{et} \quad Ri' = V_A = V_- = \frac{V_A}{2}$$

$$= E - RI' - \frac{V_A}{2}$$

$$\frac{3V_A}{2} = E - RI' \quad \text{d'où} \quad V_A = \frac{2}{3}E - \frac{2}{3}RI'$$

$$V_B = E - R(I + i) \quad \text{avec} \quad i = \frac{V_B - V_-}{R} = \frac{V_B}{R} - \frac{V_A}{2R}$$

$$= E - RI - V_B + \frac{V_A}{2}$$

$$2V_B = E - RI + \frac{1}{3}E - \frac{1}{3}RI' \quad \text{d'où} \quad V_B = \frac{2}{3}E - \frac{1}{2}RI - \frac{1}{6}RI'$$

$$2.4.2- V = V_A - V_B = -\frac{2}{3}RI' + \frac{1}{6}RI' + \frac{1}{2}RI = \frac{R}{2}(I - I')$$

2.4.3-

$$V = \frac{R}{2}(I_8 + I_9 - I_7 - I_{10})$$

$$= \frac{R}{2}(xyI_B + (1-x)(1-y)I_B - (1-x)yI_B - x(1-y)I_B)$$

$$= \frac{R}{2}(1 - 2x - 2y + 4xy)I_B$$

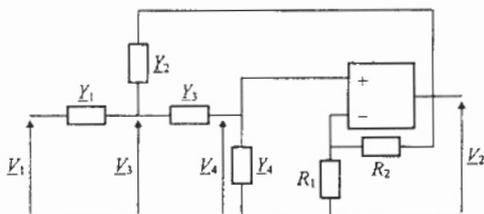
$$= \frac{R}{2}(2x - 1)(2y - 1)I_B$$

$$2.4.4- V = \frac{R}{2} \frac{X}{RI_A} \frac{Y}{RI_B} I_B = \frac{XY}{2RI_A} = \frac{R}{2ER} XY \quad \text{d'où} \quad K = \frac{1}{2RI_A} = \frac{R}{2ER}$$

$$2.4.5- K = 0,1 \text{ V}^{-1}$$

3- Etude du filtre

3.1-



$$V_4 = V_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = V_3 \frac{Y_3}{Y_3 + Y_4} \quad \text{et} \quad V_3 = \frac{V_1 Y_1 + V_2 Y_2}{Y_1 + Y_2 + \frac{Y_3 Y_4}{Y_3 + Y_4}}$$

$$\text{d'où} \quad V_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{V_1 Y_1 Y_3 + V_2 Y_2 Y_3}{Y_1 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_3 Y_4}$$

$$V_1 Y_1 Y_3 = V_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} (Y_1 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_3 Y_4) - V_2 Y_2 Y_3$$

$$\text{d'où} \quad H = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Y_1 Y_3}{R_1 + R_2 (Y_1 Y_3 + Y_1 Y_4 + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_4 + Y_3 Y_4) - Y_2 Y_3}$$

3.2-

$$\begin{aligned} H &= \frac{\frac{1}{R^2}}{\frac{R_1}{R_1 + R_2} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{jC\omega}{R} + \frac{jC\omega}{R} + j^2 C^2 \omega^2 + \frac{jC\omega}{R} \right) - \frac{jC\omega}{R}} \\ &= \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{1}{1 + 3jRC\omega + j^2 R^2 C^2 \omega^2 - jRC\omega \frac{R_1 + R_2}{R_1}} \\ &= \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1}}{1 + \left(3 - \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) jRC\omega + j^2 R^2 C^2 \omega^2} \end{aligned}$$

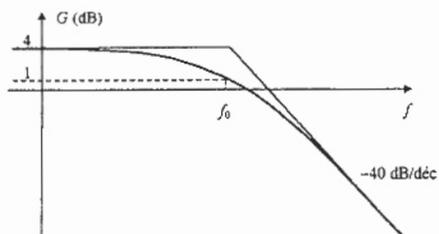
$$3.3- \quad H_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1,59 = \text{amplification statique}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = 3 \cdot 10^5 \text{ rad/s} = \text{pulsation propre}$$

$$a = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) = 0,7 = \text{coefficient d'amortissement}$$

3.4- Il s'agit d'un filtre passe-bas du 2^{ème} ordre de Butterworth

$$3.5- \quad G_0 = 20 \log H_0 = 4 \text{ dB}$$



3.6- Fréquence de coupure $f_c = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 48 \text{ kHz}$

Le Directeur de la Publication : Monique SCHWOB