

Sommaire du n° 838 - Cahier n° 2
(Novembre 2001)

AGRÉGATION DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours interne)	
Composition sur la physique et le traitement automatisé de l'information.....	3
Composition avec exercices d'application	
- Option physique et chimie.....	29
- Option physique appliquée : premier problème.....	51
- Option physique appliquée : second problème.....	79
CAPES DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours interne)	
Sections physique et chimie - physique et électricité appliquée	
- Composition de physique.....	95
Section physique et électricité appliquée	
- Composition d'électricité appliquée.....	101
CAPES DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours externe)	
Section physique et chimie	
- Composition de physique avec applications.....	125
- Composition de chimie avec applications.....	145
Section physique et électricité appliquée	
- Composition de physique avec applications.....	155
- Composition d'électronique - électrotechnique avec applications.....	175
AGRÉGATION DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours externe)	
Option physique	
- Composition de physique.....	187
- Composition de chimie.....	199
- Problème de physique.....	213
Option chimie	
- Composition de chimie.....	231
- Composition de physique.....	255
- Problème de chimie.....	273
Option physique et électricité appliquées	
- Composition de physique.....	287
- Composition d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique.....	299
- Problème d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique.....	311
L'UNION DES PHYSICIENS	
Les bons de commande.....	333
Renseignements divers.....	I à XIV

Le n° 838 comprend deux cahiers, le sommaire du cahier n° 1
est en deuxième de couverture.

ISSN 0366-3878



N° 838 - Cahier n° 2 : Agrégations et Capes 2000 : les corrigés

Novembre 2001

N° 838
Cahier n° 2
Novembre 2001

publication mensuelle
95^e année

BUP

Bulletin de l'Union
des Physiciens



Concours Agrégations et Capes 2000
Les corrigés



ADMINISTRATION et RÉDACTION
44, bd Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06
<http://www.cnam.fr/hebergement/udp/>

Sommaire du n° 838 - Cahier n° 1 (Novembre 2001)

ÉDITORIAL

ARTICLES GÉNÉRAUX

La différence entre le temps solaire moyen et le temps solaire vrai : l'équation du temps
(Thierry ALHAËL)

Lumière polarisée : matériel et expériences
(Roland JOUANISSON)

L'enseignement de l'optique au travers du prisme bourguignon
(Michel PAUTY)

De l'utilisation du théorème de Millman
(Claude LACOMBE)

Utiliser Dynamic au-delà de la classe de seconde
(Gérard AUSSEL)

L'apport du diagramme objets-interactions dans la résolution
des problèmes de mécanique en première S
(René TORRA)

Incertitude sur le déphasage avec la méthode de Lissajous
(Raymond LAAGEL et Bruno COLICCHIO)

Le modèle de Ruark de l'atome d'hydrogène
(Fabrice DESOMBRE)

Nomenclature des substituts des CFC de troisième génération
(Alfred MATHIS)

Le collage : le moyen intelligent d'assembler
(Michel BARQUINS)

ACTUALITÉS PÉDAGOGIQUES

VIE DE L'ASSOCIATION

INFORMATIONS - LIVRES ET LOGICIELS

*Le n° 838 comprend deux cahiers, le sommaire du cahier n° 2
est en quatrième de couverture.*

Union des Physiciens

Association des professeurs de Physique et de Chimie

MEMBRES D'HONNEUR

M. Georges CHARPAK

Membre de l'Académie des sciences
Chercheur au CERN
Prix Nobel.

M. Pierre-Gilles de GENNES

Membre de l'Académie des sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Claude COHEN-TANNOUJJI

Membre de l'Académie des sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Jean-Marie LEHN

Membre de l'Académie des sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

PRÉSIDENTS D'HONNEUR

F. BLAIN, A. DURUPHTY, J.-P. FOULON, J. GATECEL, J. TINNÈS, A. TOUREN.

MEMBRES DU CONSEIL

Membres de droit

F. BLAIN, A. DURUPHTY, J.-P. FOULON, J. GATECEL, J. TINNÈS, A. TOUREN.

Les présidents des sections académiques font, de droit, partie du Conseil de l'Union des Physiciens (voir pages ci-après).

Membres élus (renouvelable par un tiers chaque année)

1999 : S. ALBRECHT, G. BAUDRANT, S. BETTON, L. DURAND, B. FABRE, H. GRIMAUD, O. LEFÈBVRE, M.-TH. SAGLIO.

2000 : M. AUBERT, M. BASUYAUX, B. HEUZÉ, M. IZBICKI, M.-R. LECAUCHOIS, A. MATHIS, G. SERRA, D. THÉVENIN.

2001 : M. BOURGAREL, C. GUERNIGOU, O. KEMPF, J. MARÉCHÉ, V. MAS, J. REGOURD, G. REYMANN, J.-L. RICHTER, A. SEFFAR.

Bureau de l'Union des Physiciens

Siège social

UNION DES PHYSICIENS - 44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06.
Aucune permanence n'est assurée à cette adresse.

Secrétariat des abonnements

Tél. : 01 43 25 61 53 - Fax : 01 43 25 07 48.



Présidente

Josette MAUREL - 45, rue d'Avron - 75020 PARIS - Tél. : 01 43 79 41 86 -
jomaurel@club-internet.fr - *Questions générales, relations internationales.*

Vice-présidents

Serge BETTON - Lendrevie-Basse - 81600 BRENS - Tél. : 05 63 57 36 07 -
sbetton@wanadoo.fr - *Collèges.*

André GILLES - Sauveterre - 31320 AUREVILLE - Tél. : 05 61 76 76 24 -
agilles@ac-toulouse.fr - *Chimie.*

Marie-Françoise KARATCHENTZEFF - 30 bis, rue Elisée-Reclus - 91120 PALAISEAU -
Tél. : 01 60 10 13 92 - mfkarat@club-internet.fr - *Lycées.*

Madeleine SONNEVILLE - 29, rue Edmond About - 92350 LE PLESSIS-ROBINSON -
Tél. : 01 43 50 79 12 - sonnevil@cicrp.jussieu.fr - *Liaisons secondaire / post-bac - Physique.*

Jean WINTHER - 73, rue de la Convention - 75015 Paris - Tél. : 01 45 77 55 63 -
jwinther@club-internet.fr - *Enseignement technique (L.P. ; L.T.) - TICE.*

Rédacteur en chef et Directeur de la publication

Monique SCHWOB - 39, rue de la Prévôté - 57950 MONTIGNY-LÈS-METZ -
Tél. et Fax : 03 87 38 02 59 - monique.schwob@wanadoo.fr

Rédacteur en chef adjoint

Jean-Pierre DAVAL - 5, rue Jean Jaurès - 92370 CHAVILLE - Tél. : 01 47 50 34 46.

Trésorier

Jacques BOULOUMIÉ - 17, hameau de la Caravelle - 91650 BREUILLET - Tél. : 01 64 58 43 34 -
Fax : 01 69 94 09 61 - bouloumi@club-internet.fr

Trésorier adjoint

François VILLEDARY - 57, rue d'Estienne d'Orves - 91120 PALAISEAU - Tél. : 01 60 10 78 31 -
villedary.Fy@wanadoo.fr

Secrétaire général

Gilles GALLIN-MARTEL - 24, rue Alfred de Musset - 74600 SEYNOD - Tél. : 04 50 69 57 15 -
gallin-martel.gilles@wanadoo.fr - *Relations avec les sections académiques -
Liaison avec le serveur.*

Secrétaire générale adjointe

Edith PIGANEAU - 58, rue du Rôle - 91800 BRUNOY - Tél. et Fax : 01 69 43 72 81 -
edith@club-internet.fr - *Lycées - Conférence des présidents.*

Responsable de la publicité

Daniel MARSAN - Résidence Macedo - 3, place Toulouse Lautrec - 33600 PESSAC -
Tél. et Fax : 05 56 07 67 44 - u.d.p.bordeaux@wanadoo.fr - *Publicité du BUP*

Membres

François BOSSERT - 5, rue Debussy - 67116 REICHSTETT -Tél. : 03 88 20 43 49 -
françois.bossert@evc.net - *Enseignement technique : baccalauréats technologiques, série STI ;
BTS.*

Bernard CIRoux - 2 bis, rue Paul Claudel - 71530 Champforgeuil -Tél. : 03 85 41 43 30 -
bernard.ciroux@ac-dijon.fr - *Laboratoires - Enseignement technique : baccalauréats
technologiques, série STL.*

Rosine FANGUET - 13, allée de la Butte - 13500 MARTIGUES - Tél. et Fax : 04 42 42 11 74 -
rosine.fanguet@wanadoo.fr - *Lycées - Liaison avec le serveur.*

Michèle GOUÉDARD - 34 bis, rue du Docteur Le Savoureux - 92290 CHATENAY-MALABRY -
Tél. : 01 46 60 08 33 - Gerard.GOUEDARD@wanadoo.fr - *Classes préparatoires chimie.*

Michel HAGNERÉ - 14, rue des Fresnes - 44400 REZÉ - Tél. : 02 51 70 24 35 -
mihag@club-internet.fr - *Lycées.*

Danièle LAUNER - 32, chemin des Vallées - 95620 PARMAN - Tél. : 01 34 08 84 92
dlauner@club-internet.fr - *Collèges.*

Vincent MAS - 10, square du Vexin - L'orée du Lac - 78200 Mantes-la-Jolie - Tél. : 01 30 94 64 43 -
Vincent.Mas@ac-versailles.fr - *Collèges - Relations avec le primaire.*

Michel MÉTROT - 183, rue F. Perrin - 87000 LIMOGES - Tél. : 05 55 49 03 16 -
michelmetrot@limousin.iufm.fr - *IUFM - Lycées.*

Patrick NÉEL - Villa 1 - Les Jardins de Juliette - 310, route d'Eguilles - 13090 AIX-EN-PROVENCE -
NEEL.PATRICK@wanadoo.fr

Stéphane OLIVIER - 26, rue des Cordelières - 75013 PARIS - Tél. : 01 45 35 75 53 -
100620.3416@compuserve.com - *Classes préparatoires physique.*

Olympiades

Olympiades de physique

Huguette GRIMAUD - Aurore E - 134, rue Curat - 34090 MONTPELLIER
Tél. et Fax : 04 67 72 80 24 - huguette.grimaud@wanadoo.fr

Olympiades de la chimie

Micheline IZBICKI - 50, chemin de Buglise - 76290 MONTIVILLIERS
Tél. : 02 35 30 50 27 - Miizbicki@aol.com

Commissions de l'Union des Physiciens

« Base de données - BUP »

Responsable : **Monique SCHWOB**.

« TICE »

Responsable : **Jean WINTHER**.

« Réforme des lycées »

Responsable : **Marie-Françoise KARATCHENTZEFF**.

« Sécurité en chimie »

Responsable : **Micheline IZBICKI**.

Projet européen (COMENIUS)

Janine MARÊCHÉ, membre du Conseil (coordination)
10, allée de la Papellerie - 54250 CHAMPIGNEULLES
Tél. et Fax : 03 83 38 24 12 - 1c4838@wanadoo.fr

Françoise LANGLOIS - 91, rue Duguesclin - 69006 LYON
Tél. : 04 78 89 58 03 - langlois@univ-lyon1.fr

Monique SCHWOB - 39, rue de la Prévôté - 57950 MONTIGNY-LÈS-METZ
Tél. et Fax : 03 87 38 02 59 - monique.schwob@wanadoo.fr

Serveur UdP

<http://www.cnam.fr/hebergement/udp/>

Relations avec le serveur

Gilles GALLIN-MARTEL
gallin-martel.gilles@wanadoo.fr

Rosine FANGUET
rosine.fanguet@wanadoo.fr

Administrateur

Olivier KEMPF
okempf@club-internet.fr

Bulletin de l'Union des Physiciens

COMITÉ DE RÉDACTION

Rédacteur en chef : Monique SCHWOB.

Rédacteur en chef adjoint : Jean-Pierre DAVAL.

Comité de rédaction : A. BOUSSIÉ, L. DETTWILLER, A. GILLES, J. JOURDAIN, D. LAUNER, E. PIGANEAU, B. VELAY, J. WINTHER.

Numéros spéciaux : A. BOUSSIÉ (coordination), F. ROGER, C. VIEL.

PUBLICITÉ

Daniel MARSAN - Résidence Macedo - 3, place Toulouse Lautrec - 33600 PESSAC -
Tél. et Fax : 05 56 07 67 44 - u.d.p.bordeaux@wanadoo.fr

PUBLICATION DES ARTICLES

Tout article ou communication doit être adressé en **triple exemplaires** au « Rédacteur en chef du Bulletin de l'Union des Physiciens » : 44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06. Dès réception l'expéditeur en est avisé.

Les manuscrits sont ensuite soumis, par le Comité de rédaction, au Comité de lecture qui donne ou refuse son accord à la publication ou bien demande des modifications. L'avis du Comité de lecture reste strictement anonyme. L'auteur en reçoit immédiatement communication. En cas d'acceptation, **aucun engagement sur la date de publication ne peut être fourni à l'auteur** ; les manuscrits acceptés ne sont pas rendus. En cas de refus, les manuscrits sont renvoyés à leurs auteurs.

Les auteurs reçoivent les épreuves de leur article aux fins de vérifier leur conformité à l'original et s'engagent à renvoyer les épreuves corrigées **dans les huit jours** suivant leur réception. Après publication, ils reçoivent dix tirés à part.

RECOMMANDATIONS AUX AUTEURS

Tout article **doit impérativement être accompagné d'un résumé** de quelques lignes et de cinq à huit mots-clés.

Les figures doivent être tracées avec soin (éviter de fournir des photocopies, qui ne permettent que des reproductions de qualité médiocre) sur une feuille séparée ; la position des figures sera repérée dans le texte.

Joindre le fichier informatique correspondant, enregistré sur disquette sous deux formats :

- un fichier ASCII permettant les transferts ;
- un fichier original pour lequel on indiquera le logiciel utilisé et le numéro de version.

Tarifs des cotisations et abonnements

1. COTISATIONS ANNUELLES : membres actifs ou adhérents

Le paiement de la cotisation seule ne donne pas droit au service du bulletin.

☞ a - Tarif normal22 € (144,31 F)

b - Tarif réduit : retraité ou étudiant.....19 € (124,63 F)

Le tarif étudiant est accordé aux intéressés sur leur demande et après envoi d'une pièce justificative de leur qualité.

c - Tarif spécial : enseignant de collègue

Un enseignant en collège peut opter pour l'une des deux possibilités ci-dessous :

– cotiser selon les tarifs du paragraphe 1a,

– verser une cotisation de23 € (150,87 F)

Dans ce cas les trois numéros spécialement consacrés aux collèges seront envoyés gracieusement.

Moyennant paiement de la cotisation, la qualité de membre actif est réservée aux professeurs et aux membres du personnel de laboratoire de sciences physiques de l'enseignement public et de l'enseignement privé sous contrat d'association avec l'État, en activité ou en retraite ; celle de membre adhérent à toute autre personne. Le non-paiement de la cotisation entraîne la radiation de membre de l'Union des Physiciens. La qualité de membre de l'Union des Physiciens permet de participer aux activités nationales et académiques de l'Union des Physiciens.

2. ABONNEMENT AU BULLETIN DE L'UNION DES PHYSICIENS (Année civile 2002)

	France métropolitaine et D.O.M. (dont TVA à 2,1 %)	Étranger	
		Abonnement (exonéré de la TVA)	Expédition*
<i>a - Membres actifs ou adhérents (prix préférentiel réservé aux membres de l'association à jour de leur cotisation)</i>			
☞ Normal	36 € (236,14 F)	35,26 € (231,29 F)	12,20 € (80,03 F)
Réduit (retraité, étudiant)	31 € (203,35 F)	–	–
<i>b - Collectivités (collège, autre établissement, personne morale, bibliothèque, laboratoire...)</i>			
Collège	82 € (537,88 F)	–	–
Autre que Collège	106 € (695,31 F)	103,82 € (681,01 F)	21 € (137,75 F)
<i>c - Individuel non membre de l'association</i>			
Prix public	58 € (380,46 F)	56,81 € (372,65 F)	12,20 € (80,03 F)

* Pour l'expédition par voie aérienne, consulter les tarifs ci-après, paragraphe 4.

L'abonnement est annuel et comprend :

- pour les individuels : les dix numéros du BUP de janvier à décembre ;
- pour les collectivités collèges : les dix numéros du BUP, du 1^{er} mai 2002 au 30 avril 2003 plus les deux cahiers énoncés et corrigés des CAPES et Agrégations de 2002 ;
- pour les collectivités non collèges, l'abonnement comporte en outre le cahier Enseignement Supérieur.

L'abonnement individuel est à régler à compter du 1^{er} octobre 2001 et doit être fait avant le 1^{er} décembre 2001. Pour tous règlements ultérieurs, les numéros du bulletin qui seront épuisés seront remplacés par des numéros des années antérieures.

3. CHANGEMENT D'ADRESSE

Toute demande de changement d'adresse d'expédition du bulletin doit comporter l'indication de l'ancienne et de la nouvelle adresse.

4. TARIFS DES EXPÉDITIONS DU BULLETIN PAR VOIE AÉRIENNE (hors CEE)

Les membres de l'Union des Physiciens qui en feront la demande lors du paiement de l'abonnement, pourront recevoir le bulletin par avion, à condition de rajouter les frais d'expédition indiqués ci-dessous au tarif d'abonnement : France pour le Régime intérieur et assimilé, Étranger (exonéré de TVA) pour le Régime international.

• Régime intérieur et régime assimilé

DÉPARTEMENTS D'OUTRE-MER : Guadeloupe, Martinique, Guyane Française, La Réunion, Saint-Pierre-et-Miquelon, Mayotte	19 €
TERRITOIRES D'OUTRE-MER : Nouvelle-Calédonie, Polynésie Française, Terres Australes et Antarctiques Françaises, Wallis et Futuna.....	39 €

• Régime international

Zone 1

EUROPE 1 : Allemagne, Belgique, Danemark, Italie, Luxembourg, Norvège, Pays-Bas, Portugal et Suède.....	24 €
--	------

Zone 2

EUROPE 2 : Autriche, Espagne, Finlande, Grande-Bretagne, Grèce, Irlande, Islande et Suisse	21 €
---	------

Zone 3

États-Unis et Canada	32 €
----------------------------	------

Zone 4

Afrique, Europe de l'Est, Proche et Moyen Orient.....	29 €
---	------

Zone 5 (*reste du monde*)

Autre Amérique, Asie et Océanie	48 €
---------------------------------------	------

Bureaux académiques

Aix - Marseille

Président et Courrier : Michel FANGUET - 13, allée de la Butte - 13500 Martigues - Tél. et Fax : 04 42 42 11 74 - michel.fanguet@wanadoo.fr
Vice-présidente : Magali GIACINO - 5, rue Renoir - Domaine de Calas - 13480 Calas - magali.giacino@wanadoo.fr
Trésorier : Pierre MARTIN - 10, rue Pierre de Coubertin - 13100 Aix-en-Provence - pierre.madeleine@wanadoo.fr
Chimie : André DURUPHTY - Chemin des Baux - 13510 Eguilles - Andre.Duruphty@wanadoo.fr
Chimie (olympiades) : Michel BARDE - Parc des Chartreux - Bâtiment C8 - 61, avenue Saint-Just - 13013 Marseille - lesbarde@club-internet.fr
Collège : Nathalie BARDE - Parc des Chartreux - Bâtiment C8 - 61, avenue Saint-Just - 13013 Marseille - lesbarde@club-internet.fr
Informatique : Frédéric ALLARD - 19, lotissement « Le Petit Prince » - 84450 Saint Saturnin-lès-Avignon - frederic.allard@ac-grenoble.fr
Lycée professionnel : Martine JOLY - 3, rue Paul Manivet - 84000 Avignon - majoly@wanadoo.fr
Physique : Gérard SERRA - La Grande Corniche - Bâtiment C1 - Boulevard A. Cieussa - 13007 Marseille - serra.gerard@wanadoo.fr
Physique (olympiades) : Hervé IDDA - Bâtiment F13 - 20, avenue Jean Giono - 13090 Aix-en-Provence - h.idda@caramail.com
Relations enseignement supérieur : Jean-Marie DONNINI - 11, boulevard Chave - 13005 Marseille - DONNINI@newsup.univ-mrs.fr
Technique : Marie-Line MILLON - 153, chemin de Château Gombert - Les Prairies - Bâtiment B12 - 13013 Marseille - m_millon@club-internet.fr

Amiens

Trésorier et Courrier : M. Dominique PAIN - 6, rue Boucher de Perthes - 80000 Amiens - dominique.pain@ac-amiens.fr
Chimie : Jean-Yves SIMONIN - 23, rue Pointin - 80000 Amiens.
Collège : Alain BAZIN - 22, boulevard Pont Noyelles - 80000 Amiens.
Physique : Daniel GUEANT - 1, rue Gérard Philippe - 80330 Cagny.
Technique : Jean-Philippe FOURNOU - Lycée Paul Langevin - 3, avenue Montaigne - BP 954 - 60000 Beauvais.

Antilles - Guyane

Présidente et Courrier pour les Antilles : Nady MONTRÉSOR - 8, lotissement Petit - Étang 2 - Gissac - 97180 Sainte-Anne.
Vice-président et Courrier pour la Guyane : Jean-Pierre OCTAVIA - 8, rue Samuel Lubin - 97310 Kourou.
Physique et Chimie (olympiades) : Jean-Pierre OCTAVIA - 8, rue Samuel Lubin - 97310 Kourou.

Besançon

Président et Courrier : André BRUNETTA - 32, rue de Fevery - 90700 Châtenois-les-Forges - Tél. : 03 84 29 42 20 - Andre.Brunetta@worldonline.fr
Vice-président : Thierry GUILLLOT - 32, rue Saint-Vincent - 25720 Avanne - tguillot@wanadoo.fr
Trésorier : Jean-Claude POINSARD - 5, rue du Bougney - 25000 Besançon - poinsard@noos.fr
Chimie (olympiades) : Françoise CHAGRIN - 8, rue de Franche-Comté - 25000 Besançon - Francoise.chagrin@wanadoo.fr
Collège : Christian THOMAS - 55, rue de Besançon - 25300 Pontarlier - annie.christian-Thomas@wanadoo.fr
Coordination TPE : Claire CHALNOT - 1, rue du Chanoine Mourot - 25000 Besançon - clairemerychalnot@wanadoo.fr
Physique : Maryse FISCHER - Hameau du Coteau - 25770 Franois - christian-maryse.fischer@wanadoo.fr
Physique (olympiades) : Dominique OBERT - 5, rue Boudot - 25000 Besançon - Dominique.Obert@wanadoo.fr
Relations enseignement supérieur : Daniel VAN LABEKE - Domaine de Maupaillol - Chemin du Lièvre - 25000 Besançon - daniel.vanlabeke@univ-fcomte.fr
Technique : Hervé L'HUILLIER - Route de Geneuille - 25870 Devecey - lhuillier.herve@wanadoo.fr
Correspondant Haute-Saône : Nicole PETITOT - 113, avenue de la République - 70200 Lure - phys.colomb.lure@ac-besancon.fr

Bordeaux

Président : Daniel MARSAN - Résidence Macedo - 3, place Toulouse Lautrec - 33600 Pessac - Tél. et Fax : 05 56 07 67 44 - u.d.p.bordeaux@wanadoo.fr
Vice-président : Michèle VAN IMPE - 35, rue Mondenard - 33240 Saint-André-de-Cubzac.
Secrétaire : Françoise LAPENDRY - 3, rue Barrau - 33000 Bordeaux.
Trésorière : Annie RECHINIAC - 100, rue du Docteur A. Barraud - 33300 Bordeaux.

Chimie : Françoise RIVOAL - Lycée Saint-Louis - Rue Jean Hameau - 33000 Bordeaux.
Coordination TPE et Spécialité : Sylvie JUAN - Lycée Gustave Eiffel - 143, cours de la Marne - 33031 Bordeaux - sylvie.juan@wanadoo.fr
Formation continue : Thierry DULAURANS - 1, square Rubinstein - 33700 Mérignac.
Informatique : Vincent BESNARD - 30, route de Cameyrac - 33450 Saint-Sulpice et Cameyrac.
Laboratoires physique-chimie : Daniel MARSAN - Résidence Macedo - 3, place Toulouse Lautrec - 33600 Pessac - u.d.p.bordeaux@wanadoo.fr
Liaison collège-lycée : Sylvie NONY - 186, cours Balguerrie Stutzenberg - 33300 Bordeaux - snony@club-internet.fr
Lycée professionnel : Jean-François PEYRELONGUE - 6, impasse du Pradas - 33640 Beautiran - jfpeyrelongue@free.fr
Physique : Guy BOUYRIE - Lycée Victor Louis - 33400 Talence.
Physique (olympiades) : Bruno MONBELLI - 87, avenue du Parc Lescure - 33000 Bordeaux.
Relations avec les CPGE : Roger CALLY - Lycée Bertrand de Born - 24000 Périgueux.
Relations enseignement supérieur : Marie-Claude DIDIER - Lycée Les Iris - 13, rue Saint Cricq - 33305 Lormont.
Retraités : Annie RECHINIAC - 100, rue du Docteur A. Barraud - 33300 Bordeaux.
Technique : Jean-Louis TISON - 10, rue du Domaine des Eyquem - 33700 Mérignac.
Correspondant Dordogne : Jean-Pierre NADAL - Lycée Laure Gatet - BP 3085 - 24003 Périgueux Cedex - jipen@wanadoo.fr

Caen

Président et Courrier : Jacques MARIE - 14, chemin de Touques - 14910 Benerville-sur-Mer - Tél. : 02 31 87 22 85 - marie.j@club.francetelecom.fr
Vice-président : Bernard TAMAIN - 3, allée des Roses - 14610 Epron - tamain@in2p3.fr
Secrétaire : François MARVIN - 5, avenue Albert Sorel - Bâtiment E - 14000 Caen - F_marvin@club-internet.fr
Trésorier : François MARVIN - 5, avenue Albert Sorel - Bâtiment E - 14000 Caen - F_marvin@club-internet.fr
Chimie : Gérard GUIBERT - 45, rue des Tisserands - 14000 Caen.
Collège : Sébastien DUVAL - Le clos Saint-Pierre - 14700 Saint-Pierre Canivet - duvalrocher@libertysurf.fr
Informatique : Daniel GUÉRIN - Les Gigannières - 50140 Saint-Clément.
Physique : Thérèse LEVALOIS - 20, rue de l'Église - 14610 Épron.
Technique : Jacques BESNARD - Allée des Marronniers - 14610 Colomby-sur-Thaon.

Clermont-Ferrand

Président et Courrier : Roland FUSTIER - 4, rue Henri Pourrat - 63360 Gerzat - Tél. : 04 73 24 27 87 - roland.fustier@wanadoo.fr
Vice-présidente : Marie-Colette MORENAS - 1 bis, boulevard Fleury - 63000 Clermont-Ferrand - mcmorenas@auvergne.iufm.fr
Secrétaire : Jean PELLERIN - 199 bis, avenue Léon Blum - 63000 Clermont-Ferrand - jean.pellerin@wanadoo.fr
Trésorière : Elyane YACINE - 4, rue des Bouleaux - 63100 Clermont-Ferrand - eyacine@auvergne.iufm.fr
Chimie (olympiades) : Stéphanie MORTIER - 5, allée du Capitaine Diederich - 63170 Aubière - smortier@free.fr
Collège : Daniel CHAMBENOIS - 18, rue du Docteur Teilhol - 63170 Aubière.
Informatique : Frédéric BROMONT - 7, rue Haute - 63670 Corent - frederic.bromont@wanadoo.fr
Physique (olympiades) : Roland FUSTIER - 4, rue Henri Pourrat - 63360 Gerzat - roland.fustier@wanadoo.fr
Relations enseignement supérieur : Gilles BOUTEVILLE - 4, rue Victor Hugo - 63400 Chamalières - gbouteville@auvergne.iufm.fr
Technique : Abdessamad SEFFAR - Les Bardins - 63300 Thiers - a.seffar@wanadoo.fr

Corse

Président et Courrier : Marcel BERNACCHI - 51, résidence Terra Corsa - Minelli - 20200 Bastia - marcel.bernacchi@wanadoo.fr
Trésorier : Jacques LINALE - 20246 Pieve.
Chimie : Valérie DENIS - 27, boulevard Paoli - 20200 Bastia - vsd@net-up.com
Collège : Antoine MURGIA - Route de Propriano - 20100 Sartene - antoine.murgia@ac-corse.fr
Informatique : Michèle L'HARDON - Résidence Les Aloès - Rue des Aloès - Bâtiment C - 20000 Ajaccio - michele.lhardon@ac-corse.fr
Relations avec les CPGE : Marie-Françoise PALLIER - 21, cours Napoléon - 20000 Ajaccio.
Technique : Jacques LINALE - 20246 Pieve.

Créteil

Courrier : Marcelle PLOTARD - 1, allée Clotilde - 77500 Chelles - plotardj@club-internet.fr
Vice-présidente : Mauricette MAUGER - 18, place de la République - 92170 Vanves - mauricette.mauger@wanadoo.fr
Trésorière : Marcelle PLOTARD - 1, allée Clotilde - 77500 Chelles - plotardj@club-internet.fr
Chimie : Mauricette MAUGER - 18, place de la République - 92170 Vanves - mauricette.mauger@wanadoo.fr
Collège : Benoît RAULIN - 29, rue des Blondeaux - 94240 L'Hay-les-Roses - Benoit.Raulin@ac-creteil.fr
Daniel BARBAULT - 39, rue Jacques Hillairet - 75012 Paris.

Dijon (Section académique de Bourgogne)

Président d'honneur : Joseph ADAMSKI.

Présidente et Courrier : Christine FRIOUR - 7, rue Charles Dullin - 71100 Chalons-sur-Saône -
udp.bourgogne@wanadoo.fr

Président adjoint : Gérard GOUTHIÈRE - 2, allée des Vergers - 21370 Plombières-lès-Dijon.

Secrétaire : Colette GRIFFON - 14, rue du Pont - 71880 Chatenoy-le-Royal.

Trésorier : Alain PELVILLAIN - 10, rue de la Gare - 21270 Talnay.

Collège : Stéphanie ÉVRARD - 10, rue des Fleurs - 21000 Dijon.

Chimie (olympiades) : Éliane SEMELET - Lycée Montchapet - 36, boulevard Pompon - 21000 Dijon.

Diffusion du Trait d'Union : Florence CHARAU - 11, rue J.-F. Baudin - 21000 Dijon.

Lycée : Michel LABOUREYRAS - 3, rue Maurice Genevoix - 58000 Nevers.

Physique (olympiades) : Gérard GOUTHIÈRE - 2, allée des Vergers - 21370 Plombières-lès-Dijon.

Relations enseignement supérieur : Marie-Thérèse OLLAGNIER - 9, impasse Gabriel Fauré -
21800 Chevigny-Saint-Sauveur.

Serveur académique et Concours collège « T'as vu ma manip ? » : Michel NOUVEL - 19, rue Chaudot -
89300 Joigny - michel.nouvel@wanadoo.fr

Technique : Bernard CROUX - 2 bis, rue Paul Claudel - 71530 Champforgeuil.

Grenoble

Président et Courrier : Gilles GALLIN-MARTEL - 24, rue Alfred de Musset - 74600 Seynod -
gallin-martel.gilles@wanadoo.fr

Trésorier : Daniel BIBOUD - 9, chemin du Marais - 38100 Grenoble - daniel.biboud@ac-grenoble.fr

Collège : Josiane BOUVIER - Résidence du Château - 5, rue Guy Mocquet - 38130 Échirolles -

JOSIANE.BOUVIER@wanadoo.fr

Chimie (olympiades) : Stéphanie LARBAUD - 5, rue Jourdan Laporte - 38190 Brignoud -

macquet.larbaud@wanadoo.fr

Physique (olympiades) : Gilles BAUDRANT - 7, rue Saint-Just - 38400 Saint-Martin-d'Hères -

g-baudrant@wanadoo.fr

Relations enseignement supérieur : Philippe ODERMATT - 11, clos de Chapicolle - 38330 Montbonnot -
podermatt@ac-grenoble.fr

Responsable du secteur « 2 Savoies » : Didier PETITJEAN - Bâtiment Paroissial - 73590 Crest-Voland -
d.petitjean@wanadoo.fr

Technique : Didier PETITJEAN - Bâtiment Paroissial - 73590 Crest-Voland - d.petitjean@wanadoo.fr

Lille

Président et Courrier : Jean-Pierre BOULET - 31, résidence Concorde - 62220 Carvin - Tél. : 03 21 37 10 15 -
Jean-Pierre.Boulet@wanadoo.fr

Vice-présidente : Isabelle MULLER - USTL - 59650 Villeneuve d'Ascq - isabelle.muller@univ-lille1.fr

Secrétaire : Jean-Marc BOUGENIÈRE - Lycée Colbert - 18, rue de Gand - 59208 Tourcoing Cedex -
bougениere@ac-lille.fr

Trésoriers : Jean-Christophe NAZE - Lycée Condorcet - 62300 Lens - jc.naze@wanadoo.fr

Daniel DEVAUX - 49, rue d'Eau - 62690 Berles-Monchel - ddevaux.berles@wanadoo.fr

Chimie : Gérard DUPUIS - Lycée Faidherbe - 59000 Lille - gerarddupuis@infonie.fr

Collège : Daniel TAVERNE - 25, rue Salvador Allende - 59280 Armentières - dtaverne@nordnet.fr

Informatique université : Jean-Marie BLONDEAU - USTL - 59650 Villeneuve d'Ascq -

Jean-Marie.Blondeau@univ-lille1.fr

Lycée : Michel BASUYAUX - 19/33, avenue Robert Schuman - 59370 Mons-en-Baroeul - mbasuyaux@nordnet.fr

Olympiades de chimie : Isabelle MULLER - USTL - 59650 Villeneuve d'Ascq - isabelle.muller@univ-lille1.fr

Olympiades de physique : Daniel DROZ - Lycée Gustave Eiffel - 59280 Armentières - d.droz@ac-lille.fr

Relations avec les CPGE : Jean-Christophe NAZE - Lycée Condorcet - 62300 Lens - jc.naze@wanadoo.fr

Technique : Daniel DROZ - Lycée Gustave Eiffel - 59280 Armentières - d.droz@ac-lille.fr

Université : Chantal DUPREZ - USTL - 59650 Villeneuve d'Ascq - chantal.duprez@univ-lille1.fr

Autres membres : Marie-Dominique PORTIER-BASUYAUX - Lycée du Sacré Cœur - 59200 Tourcoing -
mbasuyaux@nordnet.fr

Thérèse COUCKE - Lycée Saint-Paul - 62300 Lens - tcoucke@wanadoo.fr

Alain VANHOUTTE - Lycée de l'Escaut - 59300 Valenciennes - vanhoutte@ac-lille.fr

Sabine DARTOIS - Lycée du Sacré Cœur - 59200 Tourcoing - dartoiss@club-internet.fr

Limoges

Président et Courrier : Michel MÉTROT - 183, rue F. Perrin - 87000 Limoges - Tél. : 05 55 49 03 16 -
michelmetrot@limousin.iufm.fr

Vice-présidente : Monique SAINT-GEORGES - 26, rue Jules Ferry - 87000 Limoges.

Trésorier : Gérard ROGUES - 13, rue du Pérou - 87570 Rilhac Rancon.

Chimie : Guy AVOND - 35, rue Raymond Couty - 87100 Limoges.

Collège : Françoise FABRE - 245, rue du Mas Loge - 87100 Limoges - francoise.fabre@wanadoo.fr

Informatique : Patrick LASSAILLE - Lycée Raoul Dautry - 14, rue du Puy Imbert - 87000 Limoges.

Physique : Sophie RÉMY - 5, résidence d'Arliquet - 87700 Aix-sur-Vienne - sofremy@aol.com
Relations enseignement supérieur : Thérèse MERLE - 12, rue de l'Amphithéâtre - 87000 Limoges.

Lyon

Président et Courrier : Jean-Marie BIAU - 3, allée Val Prévert - 69400 Limas - Jean-Marie.Biau@ac-lyon.fr
Vice-président : Jean-Paul ZAYGEL - École Centrale de Lyon - Département d'électronique - 38, avenue Guy de Collongues - BP 163 - 69131 Écully Cedex.
Secrétaire : Françoise LANGLOIS - 91, rue Duguesclin - 69006 Lyon.
Trésorier : François-Jacques BACCHUS - 10, rue Sainte-Anne de Baraban - 69003 Lyon.
Chimie : Daniel SIMON - ENS Lyon - 46, allée d'Italie - 69007 Lyon.
Collège : Gérard VACHER - 169, cours Lafayette - 69006 Lyon - Gerard.Vacher@ac-lyon.fr
Informatique : Bernadette HAGUENAUER - 765, route des Alpes - 01280 Prevessin.
Physique : Florence CHAVANEL - 19, rue de Montribloud - 69009 Lyon.
Physique (olympiades) : Florence CHAVANEL - 19, rue de Montribloud - 69009 Lyon.
Relations avec les CPGE : Sylvaine ALBRECHT KLEIM - 14, rue de Pizay - 69001 Lyon.
Technique : Jean-Marie BIAU - 3, allée Val Prévert - 69400 Limas.
Université : Roger DUFFAIT - 7, rue des Alouettes - 69890 La Tour de Salvagny.

Montpellier

Présidente et Courrier : Marie BOURGAREL - 3, rue du Commerce - 34000 Montpellier - Tél. : 04 67 92 81 14 - Marie.Bourgarel@wanadoo.fr
Vice-présidente : Sylvie BEAUFORT - Parc des Amandiers - 5, rue Yourcenar - 34430 Saint-Jean-de-Vedas - dbeaufor@club-internet.fr
Secrétaire : René TORRA - Rue du Val de la Mosson - 34430 Saint-Jean-de-Vedas - rtorra@libertysurf.fr
Trésorier : Jean-Paul FAVAND - 3, rue Proudhon - 34000 Montpellier - Favand@club-internet.fr
Chimie : Jean-Pierre PONSÀ - 22, rue Edouard Vaillant - 66350 Toulouges - Raymonde.Ponsa@wanadoo.fr
Collège : Bernard FABRE - 11, rue Jean-Baptiste Perdraut - 34500 Béziers - fabre.bjam@wanadoo.fr
Informatique : Janine PARÈS - 6, rue Réservoir - 34680 Saint-Georges d'Orques - jpires@club-internet.fr
Physique : Huguette GRIMAUD - 134, rue du Curat - Bâtiment «Aurore» E - 34090 Montpellier - huguette.grimaud@wanadoo.fr
Relations avec les CPGE : Henri ESCUDIER - 7, chemin des Prés - 34820 Teyran.
Relations enseignement supérieur : Sylvette ALMAIRAC - 37, rue Lacase Duthiers - 34090 Montpellier - almairac@club-internet.fr
Technique : Franck MILLOT - Lycée Mermoz - 717, avenue Mermoz - 34060 Montpellier Cedex 1 - Millotf@aol.com
Correspondant IUT : Henri LAVIE - 8, impasse des Garrigues - 11110 Vinasson - lavie@iutmontp.univ-montp2.fr
Responsables du site académique : Robert QUER et Martial CASANOVA - Lycée Mermoz - 717, avenue Mermoz - 34060 Montpellier Cedex 1.

Nancy - Metz (Section académique de Lorraine)

Président et Courrier : Evelyne LAVOISIER - 6, rue Coislin - 57000 Metz - Tél. et Fax : 03 87 36 07 41 - udplorraine@wanadoo.fr
Vice-présidente : Monique SCHWOB - 39, rue de la Prévôté - 57950 Montigny-lès-Metz - monique.schwob@wanadoo.fr
Trésorier : Bernard CUNY - 10, allée de la Papellerie - 54250 Champigneulles - bcuny@wanadoo.fr
Secrétaire : Claire HUTTIN - 4, rue de Bure - 57650 Havange - claire.huttin@guideo.fr
Activités expérimentales : Guy CHAMBON - 9, rue des Roses - 57365 Ennery - Guy.chambon@cryogen.com
Collège : Laurent PERTUY - 1, rue du Chemin de Fer - 57655 Boulange - laurent.pertuy@wanadoo.fr
Culture scientifique : Michel BULTINGAIRE - 13, rue du Limousin - 57190 Florange - m.bultingaire@ac-nancy-metz.fr
Jean JONC - 80, avenue de Lorraine - 57190 Florange - Jean.Jonc@wanadoo.fr
Formation continue : Evelyne LAVOISIER - 6, rue Coislin - 57000 Metz - udplorraine@wanadoo.fr
Interdisciplinarité : Madeleine MATILLO - 7, rue Augustin Hacquard - 54000 Nancy - m.matillo@ac-nancy-metz.fr
Lycées technique et professionnel : Chantal FRIES - 57, rue de la Pépinière - 57970 Yutz - chantal.fries@iname.com
Physique (olympiades) : Michel CLAUDON - 41, rue du Brocard - 54600 Villers-lès-Nancy - mclaudon@club-internet.fr
Post-bac et chimie (olympiades) : Maurice SCHWING - 25, rue de Touraine - 57160 Moulins-lès-Metz - Schwing.Maurice@wanadoo.fr
Relations avec l'enseignement privé : Jean-Michel JACQUES - 37, rue de Paris - 54000 Nancy - Jean-Michel.Jacques@wanadoo.fr
Relations européennes : Janine MARÉCHÉ - 10, allée de la Papellerie - 54250 Champigneulles - lc4838@wanadoo.fr
Retraités : Jacques SARRE - 2, allée Étienne Jodelle - 54600 Villers-lès-Nancy.

TICE : Jean-Michel JACQUES - 37, rue de Paris - 54000 Nancy - Jean-Michel.Jacques@wanadoo.fr

Nantes

Président et Courrier : Hervé GRAU - 110, boulevard de Longchamp - 44300 Nantes - Tél. : 02 40 76 93 66 - herve.grau@wanadoo.fr

Vice-président : Jacques ROYER - 35, rue des Tisserands - 44600 Saint-Nazaire - Jacquesroyer@free.fr

Trésorier : Alain LAFOND - 15, rue des Naudières - 44800 Saint-Herblain - alafond@wanadoo.fr

Chimie (olympiades) : Gaëlle JOBIC - 13, chemin Clos Saint-Julien - 44340 Bougenais.

Collège : Claudine NIZOU - 23 bis, rue Charles Terront - 44300 Nantes - Clinizou@aol.com

Informatique et site académique Udp : Jean-Marie PUYSILOUX - Jmpuysil@club-internet.fr

Physique (olympiades) : Jean-Luc CANCOUET - 71, rue des Renardières - 44100 Nantes - j.cancouet@wanadoo.fr

Technique et Professionnel : Philippe GUINEL - 85, boulevard de Charbonneau - 44470 Carquefou - philippe.guinel@wanadoo.fr

Nice - Toulon

Président (Alpes-Maritimes) : Serge TRICOIRE - 557, route de la Colle de Revel - 06730 Saint-André - Tél. : 04 97 00 07 91 - serge.tricoire@unice.fr

Vice-président (Var) : Francis BERTHOMIEU - Place de l'Église - 83111 Ampus - berthomi@ac-nice.fr

Secrétaire : Chantal OTTO - Les Maisons de Villeneuve - 33, chemin des Ferrayonnes - 06270 Villeneuve-Loubet.

Trésorier : Serge OLIVIER - 8, route de Sospel - 06500 Menton.

Collège : Marie-Hélène CANAVESIO - 220, avenue Sainte-Marguerite - Bâtiment C3 - 06200 Nice.

Informatique : Patrice GARNIER - Avenue Darié La Madone - 06230 Villefranche-sur-Mer.

Physique : Annie VIVAUDO - 96, avenue des Arènes - 06000 Nice.

Orléans - Tours

Président et Courrier : Jean JOURDAIN - 60, rue Carnot - 45400 Fleury-les-Aubrais - Tél. : 02 38 88 61 00 - ajj@club-internet.fr

Vice-présidente : Marie-Christine BAURRIER - Lycée Pothier - 2, rue Marcel Proust - 45000 Orléans - mcbaurrier@hotmail.com

Trésorier : Jean JOURDAIN - 60, rue Carnot - 45400 Fleury-les-Aubrais - ajj@club-internet.fr

Collège : Patrice MINIÈRE - La Roberdière - 37390 Mettray - p.miniere@free.fr

Informatique : Bruno DE MARTEL - 15, rue Sourderie - 41000 Blois - demartel@club-internet.fr

Physique (olympiades) : Arnaud SOULAS - Lycée Benjamin Franklin - 21 bis, rue Eugène Vignat - 45000 Orléans - asoulas@noos.fr

Technique : Mostafa MAKHCHAN - 1, rue René Cassin - 45100 Orléans - MostafaMakhchan@aol.com

Autres membres : Philippe CHEVALLIER - Lycée Rotrou - 28000 Dreux - philippe.che@wanadoo.fr

Michèle DEPRez - Lycée Pothier - Rue Marcel Proust - 45000 Orléans -

labophy.pothier4@fnac.net

Christiane SELLIER - Lycée Durzy - 45700 Villemandeur - c_sellier@hotmail.com

Membres associés : Chrystelle BLERIOT (*chimie olympiades*) - jerome.bleriot@wanadoo.fr

Denis POUZET (*collège*) - Denis.Pouzet@wanadoo.fr

Paris

Secrétaire et Courrier : Maité JUSTEL - 5, villa Félix Faure - 75019 Paris - mjustel@club-internet.fr

Trésozière : Jacqueline CHAUSSADE - 11-13, rue Lasson - 75012 Paris -

jacqueline.chaussade@scola.ac-paris.fr

Chimie (olympiades) : Jacqueline GUÉ - 11, rue de l'Industrie - 92400 Courbevoie - jacqgue@wanadoo.fr

Collège : Jean-David GUILLARD - 19, rue Censier - 75005 Paris - jdguillard@yahoo.fr

Informatique : Annick MACE - 6 bis, avenue des Tilleuls - 94140 Alfortville - annick.mace@wanadoo.fr

Technique : Jean-Charles JACQUEMIN - 2, boulevard Magenta - 75010 Paris - jcjacmin@club-internet.fr

Poitiers

Président : Denis PICARD - 19, rue de l'Abreuvoir - 86440 Migné Auxances - denis.picard@ac-poitiers.fr

Secrétaire : Florence EDARD - 4, rue de la Grange - 86800 Saint-Julien l'Ars - florence.edard@wanadoo.fr

Trésozière : Françoise ARNAUD - 51, rue Rémy Belleau - 86000 Poitiers - francoise.arnaud@ac-poitiers.fr

Chimie : Catherine BRUNE - Chandigon - 86100 Antrans.

Collège : Jean-Luc FOUQUET - Collège Les Salières - 17410 Saint-Martin de Ré.

Technique : Francis VALLADE - 91, rue du Pré des Mottes - 86550 Mignaloux-Beauvoir.

Université : Laurence BONNEAU - IUFM - 86000 Poitiers.

Polynésie Française

Président et Courrier : Pierre LEYRAL - BP 51152 - Pirae - Tahiti.

Reims

Président et Courrier : Nicole HERMAN-MAURICE - 18, rue de Taissy - 51100 Reims - herman@cnam.fr

Vice-président : Jean-Marie DEROUARD - 9, rue Buirette de Verrières - 51000 Châlons-sur-Marne.

Trésorière : Françoise SAINGERY - 13, rue Labori - 51100 Reims.

Chimie : Luc LEPICIER - Lycée Libergier - Rue Libergier - 51100 Reims.

Collège : Frédéric GÉRARD - 5, place de l'Hôtel de ville - 52200 Langres - frederic.gerard@reims.iufm.fr

Informatique : Jean-Marie DEROUARD - 9, rue Buirette de Verrières - 51000 Châlons-sur-Marne.

Technique : François SEVIN - 19, rue Folle Peine - 51100 Reims.

Rennes

Président et Courrier : Loïc POUILLAIN - 39 A, avenue du Général de Gaulle - 22190 Plerin -

Loic.Poullain@wanadoo.fr

Vice-président : Eric MARCADE - 6, avenue des Chevreuils - 22410 Lantic - emarcade@club-internet.fr

Secrétaire : Alain LE GALL - 3, boulevard Montaigne - 29200 Brest - alain.legall12@wanadoo.fr

Trésorier : Louis GILLOIS - 3, allée du Haut-Moulin - 35760 Saint-Grégoire - gillois@wanadoo.fr

Collège : Jacques SALLAIS - 53, rue du Parc - 35135 Chantepie - Jacques.Sallais@wanadoo.fr

Informatique : Alain LE GALL - 3, boulevard Montaigne - 29200 Brest - alain.legall12@wanadoo.fr

Lycée : Edith LE BUANEC - 2, route de Kerhervec - 22300 Ploulech.

Rouen

Présidente et Courrier : Jocelyne DURAND - 151, rue d'Orléans - 76230 Bois-Guillaume - Tél. : 02 35 15 41 33 -
jocelyne.durand@ac-rouen.fr

Trésorière : Brigitte MARY - Appartement 20 - 6, rue Collins - 76120 Le Grand-Quevilly -

brigitte.mary@wanadoo.fr

Chimie (olympiades) : Annick GUILLOUX - 11, rue de Zurich - 76000 Rouen.

Collège : Jacques BOURET - 12, rue Brisout de Barneville - 76100 Rouen - jacques.bouret@ac-rouen.fr

Informatique : Colette ETASSE - 4, avenue René Coty - Appartement 448 - 76120 Le Grand-Quevilly.

Technique (STI) : Brigitte MARY - Appartement 20 - 6, rue Collins - 76120 Le Grand-Quevilly -

brigitte.mary@wanadoo.fr

Technique (STL) : Micheline IZBICKI - 50, chemin de Buglise - 76290 Montivilliers - miizbicki@aol.com

Strasbourg

Président et Courrier : Alain SPRAUER - 79, rue Baldung-Grien - 67720 Weyersheim - spraua@club-internet.fr

Vice-présidente : Odile LEIBER - 58, rue de Verdun - 68100 Mulhouse.

Trésorier et Lycée : Bernard GOERIG - 14, rue Principale - 67300 Schiltigheim - bernardgoerig@evc.fr

Chimie (olympiades) : Jean-Michel TOLEDANO - 11, rue Victor Kessler - 67000 Strasbourg - jm.tole@wanadoo.fr

Chimie et Technique : Jean-Marc DIRRIG - 10, rue Prosper Mérimée - 67100 Strasbourg.

Collège : Michèle DOLLÉ - 2, rue du Landsberg - 67800 Hoenheim - michele.DOLLE@reda.net

CPGE : Jean-François THIVENT - 15, rue Victor Schoelcher - 67300 Schiltigheim - THIVENTJF@aol.com

Europe : Lucie CHAUMONT - 61 A, rue Himmerich - 67000 Strasbourg - Itnchaum@cybercable.tm.fr

Informatique : François BOSSERT - 5, rue Claude Debussy - 67460 Reichstett -

francois.bossert@evc.net

Internet et Webmestre : Jean-Luc RICHTER - 36, rue Rivoli - 67600 Hilsenheim - jeanluc.richter@iname.com

LEP et IUFM : Jean-Paul XUEREZ - 67, rue des Jardiniers - 67000 Strasbourg - jp-nat.xuerez@worldonline.fr

Lycée : André ISEL - 15, rue Geiler - 67000 Strasbourg.

Physique (olympiades) : François SCHLOSSER - 57, boulevard d'Anvers - 67000 Strasbourg -

francoisschlosser@voila.fr

Relations enseignement supérieur : Jean MEULLEMEESTRE - 20, rue d'Oslo - 67000 Strasbourg -

Jean.MEULLEMEESTRE@chimie.u-strasbg.fr

Sécurité chimie : Alfred MATHIS - 18, rue des Pommes - 67200 Eckbolsheim - AlfredMathis@chez.com

Technique : Nicolas ESQUENET - 4, rue Kirstein - 67000 Strasbourg - nicolas.esquenet@free.fr

Toulouse

Présidente : Marie-Laure MIEGEVILLE - 3, rue B. de Ventadorn - 31750 Escalquens - miegeville@aol.com

Secrétaire : Anne BATAILLE - 302, route de Saint-Simon - 31100 Toulouse - anne.bataille@infonie.fr

Trésorier et Technique : Jean-Marc LEMAIRE - Route de Rosières - 81350 Valderies.

Chimie et Olympiades de chimie : Mireille GALLIAN - 4, place del Rei Petit - 31120 Lacroix-Falgarde -

mireille.galian@ac-toulouse.fr et galian@club-internet.fr

André GILLES - Sauveterre - 31320 Aureville - agilles@ac-toulouse.fr

Collège : Cathy PARIS - 11, rue Matabiau - 31000 Toulouse - catherine.paris@ac-toulouse.fr

Serge BETTON - Lendrevie-Basse - 81600 Brens - sbetton@wanadoo.fr

Informatique : Thierry MARTIN - 3, lotissement Le Foulon - 31360 Saint-Martyrot -

thierry.martin@ac-toulouse.fr

IUFM : Alain RABIER - 10, allée du Soulor - 31770 Colomiers - rabier@cict.fr et arabier@free.fr
Lycée : Dominique KAHRAMAN - Route des Crêtes - 31320 Mervilla - dominique.kahraman@ac-toulouse.fr
TICE : Thierry MARTIN - 3, lotissement Le Foulon - 31360 Saint-Martory - thierry.martin@ac-toulouse.f

Versailles

Présidente et Courrier : Françoise COUSSON - 31, allée Marcel Jouhandeau - 92500 Rueil-Malmaison - Francoise.Cousson@ac-versailles.fr

Trésorière : Nicole GUBÉ - 15, allée de Tréville - 92330 Sceaux.

Chimie (olympiades) : Catherine RIPERT - 1, rue Félix Faure - 95880 Enghien-les-Bains.

Collège : André CALAS - 16, rue de la Glacière - 75013 Paris - Andrecalas@voila.fr

Vincent MAS - 10, square du Vexin - L'orée du Lac - 78200 Mantes-la-Jolie - Vincent.Mas@ac-versailles.fr

Informatique : Bernard RENAUD - 9, ruelle du Douaire - 95270 Viarmes - Josberen@aol.com

Physique (olympiades) : Françoise COUSSON - 31, allée Marcel Jouhandeau - 92500 Rueil-Malmaison - Francoise.Cousson@ac-versailles.fr

Technique : Claudine GUERNIGOU - 9, avenue de la Guiéterie - 78470 Saint-Rémy-lès-Chevreuse - e.guern@worldnet.fr

Sur votre agenda...

Du 21 au 25 novembre 2001

Salon de l'Éducation
Paris : Porte de Versailles.

Les 29 et 30 novembre 2001

Olympiades de physique
Paris : ENS et ENPCI.

Les 27 et 28 mars 2002

XVIII^e olympiades de la chimie.

Le 29 mars 2002

Remise des prix des XVIII^e olympiades de la chimie.

Bulletin de l'Union des Physiciens

Association des professeurs de Physique et de Chimie

Cahier des concours Agrégations et CAPES 2000 :

Les corrigés

N° 838 (2) - Novembre 2001

Administration et rédaction

44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06

<http://www.cnam.fr/hebergement/udp/>

Avertissement

Ce recueil des solutions de la plupart des épreuves écrites des concours de recrutement de professeurs en physique et chimie est destiné à faciliter le travail de toutes les personnes intéressées par ces épreuves et notamment des candidats à ces concours.

Nous remercions les collègues qui ont accepté de se charger de la rédaction des solutions. Ces solutions peuvent être plus ou moins détaillées selon les épreuves. En aucun cas elles ne constituent un modèle des méthodes ni des rédactions que les jurys pourraient souhaiter mais une simple aide permettant en particulier de contrôler la validité des résultats.

Ces épreuves de concours peuvent fournir l'occasion de prolongements et d'approfondissements qu'il n'est généralement pas possible aux auteurs de signaler ici autrement que par une bibliographie sommaire. Les candidats aux concours doivent pouvoir trouver ces incitations à d'intéressantes études en participant aux préparations ouvertes dans les différentes académies.

Afin de faciliter l'utilisation de ce numéro spécial, son service est inclus dans l'abonnement collectivités, tout en demeurant hors abonnement individuel. Il en est de même pour le numéro spécial comportant les énoncés correspondants. Ces deux numéros des concours sont disponibles par correspondance au siège de l'Union des Physiciens et tous les renseignements à ce sujet peuvent être obtenus sur le site de l'UdP :

<http://www.cnam.fr/hebergement/udp/>

André BOUSSIÉ et Françoise ROGER
Coordonnateurs des bulletins sur les concours

Agrégation de sciences physiques

Concours interne

Composition sur la physique et le traitement automatisé
de l'information - Session : 2000

I. Le temps uniforme

A. Le temps astronomique

0) Période J des conjonctions de O , A et C

- Première méthode : composition des vecteurs rotation (qui sont dirigés selon l'axe z).
 Ω est la vitesse angulaire absolue du disque.
 ω est la vitesse angulaire d'entraînement du disque.
La vitesse angulaire relative est :

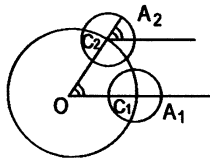
$$\Omega - \omega = \frac{2\pi}{J}$$

donc :

$$J = \frac{2\pi}{\Omega - \omega}$$

- Deuxième méthode : pendant la durée J , OC a tourné d'un angle ωJ et le disque a tourné à la vitesse angulaire Ω d'un tour (2π) plus l'angle ωJ . Soit :

$$2\pi + \omega J = \Omega J$$



On retrouve :

$$J = \frac{2\pi}{\Omega - \omega}$$

1) Le jour

- a. Le référentiel géocentrique est centré au centre de la Terre et ses trois axes pointent dans la direction de trois étoiles «fixes». En toute rigueur, il n'est pas galiléen (trajectoire non rectiligne du centre de la Terre autour du Soleil).

Toutefois, on peut le considérer comme galiléen pour une durée courte devant un an (ce qui revient à assimiler l'arc de trajectoire du centre de la Terre à un segment de droite et à considérer le mouvement comme uniforme durant cette courte durée).

- b. J_{sol} = période de passage du Soleil au-dessus du même méridien :

$$J_{sol} = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$$

c. Application du résultat de la question 0 :

$$\omega_{\text{absolue}} = \omega_{\text{relative}} + \omega_{\text{entraînement}}$$

$$\frac{2\pi}{J_{\text{sidéral}}} = \frac{2\pi}{J_{\text{solaire}}} + \frac{2\pi}{1 \text{ an}}$$

$$\frac{1}{J_{\text{sid}}} - \frac{1}{J_{\text{sol}}} \approx \frac{1}{365 J_{\text{sol}}} \quad \text{ou} \quad \frac{J_{\text{sol}} - J_{\text{sid}}}{J_{\text{sol}}^2} \approx \frac{1}{365 J_{\text{sol}}}$$

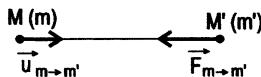
$$J_{\text{sol}} - J_{\text{sid}} = \frac{J_{\text{sol}}}{365} = \frac{24 \text{ h}}{365} \approx \frac{24 \text{ h}}{360} = \frac{1 \text{ h}}{15} = \frac{60 \text{ min}}{15} = 4 \text{ min}$$

$$J_{\text{sol}} - J_{\text{sid}} = 4 \text{ min}$$

2) L'année

a. • La force exercée par une masse ponctuelle m sur une masse ponctuelle m' distante de d est centrale, attractive et vaut :

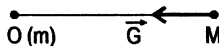
$$\vec{F}_{m \rightarrow m'} = - \frac{Gmm'}{d^2} \vec{u}_{m \rightarrow m'}$$



• C'est I. Newton (1642-1727) qui a énoncé cette loi au XVII^e siècle.

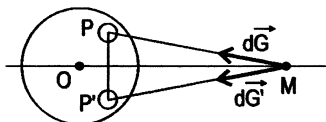
b. Le champ de gravitation universelle est la force de gravitation universelle créée sur une masse unité :

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}_{m \rightarrow m'}}{m'} = - \frac{Gm}{r^2} \vec{u}_r$$



c. • Première méthode : utiliser la propriété de symétrie du vecteur \vec{G} . Le champ de gravitation \vec{G} est un vrai vecteur, il est compris dans tout plan de symétrie de la distribution de masse. Or, tout plan contenant un point M et le centre O de la distribution est plan de symétrie de la distribution donc \vec{G} appartient à leur intersection, il est radial.

• Deuxième méthode : expliquer géométriquement la compensation des composantes vectorielles qui ne sont pas radiales pour les champs de gravitation élémentaires.



• Pour le calcul du champ de gravitation en M , on peut remplacer la distribution de masse à symétrie sphérique par une masse ponctuelle unique placée au centre O et égale à :

→ la masse totale pour un point M situé en dehors de la distribution ;

→ la masse intérieure à la sphère de centre O et de rayon OM pour un point M situé à l'intérieur de la distribution.

Pour le justifier, on applique le théorème de Gauss :

$$\phi_{\vec{G}} = - 4\pi G \Sigma m \text{ intérieures}$$

d. • **Première loi de Képler** : Dans le référentiel héliocentrique, les planètes décrivent des orbites elliptiques autour du Soleil, le Soleil est un foyer.

• **Deuxième loi de Képler ou loi des aires** : L'aire balayée par le rayon-vecteur est proportionnelle au temps.

• **Troisième loi** : $a^3 / T^2 = cte$

• **Exemple d'écart au mouvement képlérien des planètes** : avance du périhélie de Mercure.

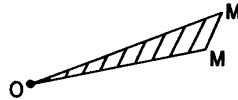
• **Origine des écarts** : perturbations dues aux autres planètes (Jupiter pour le mouvement de Saturne et Neptune pour le mouvement d'Uranus), effet de relativité générale (pour Mercure).

e. • **Démonstration de la deuxième loi de Képler par application du théorème du moment cinétique dans un référentiel galiléen pour un mouvement à force centrale** :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{O} \Rightarrow \vec{L} = cte = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = \vec{OM}_o \wedge m \vec{v}_o = \vec{L}_o$$

Donc le mouvement est plan (dans le plan perpendiculaire à \vec{L} passant par O).

$$\vec{L} = cte = \vec{OM} \wedge m \frac{d\vec{OM}}{dt} = 2m \frac{dS}{dt}$$



où dS est l'aire balayée dans le plan de la trajectoire par le rayon vecteur \vec{OM} pendant dt .

Donc :

$$\frac{dS}{dt} = cte \Rightarrow \text{l'aire «balayée» } S \text{ est proportionnelle au temps}$$

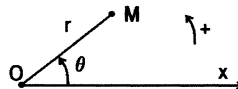
• On se place désormais dans le plan de la trajectoire et on repère la position du point M en coordonnées polaires de centre O :

$$OM = r \quad \text{et} \quad (\vec{e}_x, \vec{OM}) = \theta$$

$$L = m r^2 \dot{\theta} = cte \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{m} = C \quad (\text{constante de la loi des aires})$$

La première loi de Képler se démontre en utilisant, par exemple, les formules de Binet de l'accélération : on choisit pour variables θ et $u = \frac{1}{r}$:

$$r \dot{\theta}^2 = C^2 u^3$$



$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot C u^2 = -C \frac{du}{d\theta}$$

d'où :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(-C \frac{du}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(-C \frac{du}{d\theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{dt} = -C \frac{d^2u}{d\theta^2} \cdot C u^2$$

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{GM_S}{r^2} = -GM_S u^2$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM_S}{C^2}$$

on a posé : $M_S =$ masse du Soleil.

La solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$u = A \cos(\theta + \varphi) + \frac{GM_S}{C^2} \Rightarrow r = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{GM_S}{C^2} + A \cos(\theta + \varphi)}$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \varphi)}$$

avec :

$$p = \frac{C^2}{GM_S}$$

et :

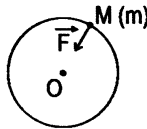
$$e = \frac{AC^2}{GM_S}$$

On reconnaît là l'équation d'une conique de paramètre p et d'excentricité e . C'est une ellipse quand : $e < 1$.

- Cas particulier d'une orbite circulaire de rayon R .

En appliquant le théorème du centre d'inertie à la planète de masse m , dans le référentiel héliocentrique galiléen :

$$\frac{m v^2}{R} = \frac{G M_S m}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{G M_S}{R}$$



La période T du mouvement circulaire est :

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 R^3}{G M_S}$$

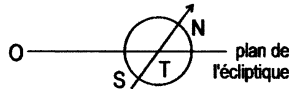
d'où :

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{G M_S}{4\pi^2}$$

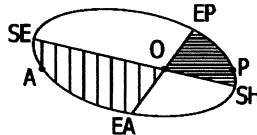
f. Mouvements non képlériens des satellites terrestres :

- **Manifestations** : la trajectoire des satellites n'est pas fermée (avance du périhélie) : le plan de la trajectoire est animé d'un lent mouvement de précession autour de l'axe des pôles terrestres.
- **Applications** : étude du potentiel gravitationnel terrestre par les satellites géodésiques qui étudient de façon détaillée la répartition des masses à l'intérieur de la Terre (études géologiques et prospection minière).

- **Raisons** : aplatissement non négligeable de la Terre, forces de traînée aérodynamique dues à l'atmosphère, effets dus à la Lune et au Soleil (terme de marée), répartition des masses à l'intérieur de la Terre n'ayant pas une parfaite symétrie sphérique.
- g. • **Périhélie** : point de la trajectoire elliptique du centre T de la Terre le plus proche du centre O du Soleil
- **Solstice** : point où l'angle (\vec{OT}, \vec{SN}) où \vec{SN} est l'axe des pôles terrestres est extrémal (minimal au solstice d'hiver).



- Les deux dates sont différentes car il s'agit d'effets sans rapport entre eux. Le décalage entre ces dates varie d'ailleurs dans le temps (mouvement de précession des équinoxes de période 26 000 ans environ).
 - Le décalage entre le solstice d'hiver et l'époque la plus froide de l'hémisphère nord est dû à l'inertie thermique de la Terre (continents et océans).
- h. Application de la loi des aires :
- SH → EP : hiver boréal ou été austral ;
- SE → EA : été boréal ou hiver austral.



On compare les aires hachurées (l'excentricité de l'orbite terrestre a été exagérée sur le schéma).

- i. cf. plus haut : question 2 : troisième loi de Képler :

$$a^3 / T^2 = \frac{G M_P}{4\pi^2}$$

On mesure a et T et on en déduit M_P .

- j. • Un satellite géostationnaire est immobile par rapport à la Terre. Sa période, dans le référentiel géocentrique, est : 23 h 56 min. Sa trajectoire est circulaire dans le plan équatorial. Son mouvement est uniforme.

- Calcul de son altitude :

$$h = r - R_T$$

par :

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G M_T}{4\pi^2}$$

$$r^3 = \frac{G M_T}{4\pi^2} T^2 = g_o R_T^2 \frac{T^2}{4\pi^2}$$

en utilisant :

$$\frac{G M_T}{R_T^2} \approx g_o$$

Application Numérique :

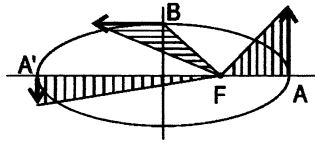
$$\tau^3 \approx 10 \cdot (6400 \cdot 10^3)^2 \frac{(86000)^2}{40} = 70 \cdot 10^{21}$$

$$r \approx 4,2 \cdot 10^7 \text{ m} = 42000 \text{ km}$$

$$h \approx 36000 \text{ km}$$

- Utilisations des satellites géostationnaires : relais de télécommunications, surveillance météorologique...

k. Représentation des trois vecteurs tangents à la trajectoire et de longueur respectant la constance du moment cinétique ou la loi des aires (les aires hachurées doivent être égales).



- Première constante du mouvement : l'énergie totale E :

$$E = -\frac{G M_T m}{r_A} + \frac{1}{2} m v_A^2 = -\frac{G M_T m}{r_{A'}} + \frac{1}{2} m v_{A'}^2$$

Seconde constante du mouvement : le mouvement cinétique

$$m(a-c)v_A = m(a+c)v_{A'} \Rightarrow v_{A'} = v_A \frac{a-c}{a+c}$$

D'où :

$$E = -\frac{G M_T m}{a-c} + \frac{1}{2} m v_A^2 = -\frac{G M_T m}{a+c} + \frac{1}{2} m v_A^2 \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^2$$

On tire :

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = G M_T m \frac{1}{2a} \cdot \frac{a+c}{a-c}$$

D'où, après simplifications :

$$E = -\frac{G M_T m}{2a}$$

- $L = m v_A r_A = m(a-c) \sqrt{\frac{G M_T (a+c)}{a(a-c)}} = m \sqrt{\frac{G M_T (a+c)(a-c)}{a}}$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} \frac{L}{m} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{G M_T (a^2 - c^2)}{a}} = \frac{S}{T} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi a}{T} \sqrt{a^2 - c^2}$$

Donc :

$$\frac{G M_T}{4} \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{\pi^2 a^2}{T^2} (a^2 - c^2)$$

Et :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G M_T}{4\pi^2}$$

Ceci est l'expression de la troisième loi de Képler dans le cas d'une orbite elliptique.

- l. Dans le modèle planétaire de l'atome, on décrit les électrons comme des particules ponctuelles (de charge $-e$ et de masse m) décrivant des orbites planes autour du noyau (de charge Zc et de masse $M \gg m$) comme les planètes autour du Soleil. En effet, comme la force d'attraction universelle, la force coulombienne est centrale, attractive et inversement proportionnelle au carré de la distance (en $1/r^2$).

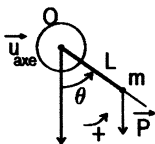
→ modèle de Bohr : orbites circulaires.
 → modèle de Sommerfeld : orbites elliptiques.
 n correspond à l'énergie totale (E).
 l correspond à la longueur du moment cinétique (L).

- La dégénérescence d'un niveau d'énergie est l'existence de plusieurs états atomiques correspondant à un même niveau d'énergie.
- On a vu, dans la question 2k, que toutes les orbites de même grand axe a (mais d'ellipticité différente donc de moment cinétique différent) ont même énergie E .

B. Le temps des pendules et des montres

3) Le pendule non amorti

- a. Le théorème du moment cinétique est appliqué au système {tige + masse m } dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les actions appliquées sont le poids et les actions de contact sur l'axe. A cause de l'absence de frottement, le torseur (à six composantes) des actions de contact est tel que la composante sur l'axe de rotation du moment est nulle.



$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{m}v_{O\text{ ext}} = \vec{m}v_{O\text{ poids}} + \vec{m}v_{O\text{ contact}} \right) \cdot \vec{u}_{\text{axe}}$$

$$m L^2 \ddot{\theta} = - m g L \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

- b. Pour les oscillations de faible amplitude :

$$\sin \theta \approx \theta \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

avec :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

et :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{et} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Commentaires :

- T_0 ne dépend pas de la masse m (identité de la masse inerte et de la masse pesante, caractéristique du champ de pesanteur).
- T_0 ne dépend pas de l'amplitude : isochronisme des petites oscillations.

$$c. \quad T_0 = 2s \Rightarrow L = g \frac{T_0^2}{4\pi^2} = 10 \cdot \frac{2^2}{40} \approx 1 \text{ m}$$

• A l'équateur, T_0 augmente parce que g diminue (force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre sur elle-même et non sphéricité de la Terre) et L augmente (il fait chaud à cette latitude et il y a dilatation des solides).

- Début du système métrique : juste après la Révolution française (1790-1792).
- On vient de voir que la relation entre L et T_0 dépend de g , donc de la latitude \Rightarrow difficulté.
- Le système international d'unités actuellement (en 2000) définit l'unité de longueur à partir de l'unité de temps et de la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, on voit donc que l'idée de relier les deux unités n'a pas été abandonnée !

d. • Le système n'est plus linéaire à cause du terme en θ^3 conservé.

• La linéarisation du terme en $\sin^3 \theta$ donne un terme en $\sin 3\theta$.

• En substituant $\theta = \theta_0 \sin \omega t + \varepsilon \theta_0 \sin 3\omega t$ dans $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0$, on obtient :

$$-\omega^2 \theta_0 \sin \omega t - \varepsilon 9 \omega^2 \theta_0 \sin 3\omega t + \omega_0^2 \left(\theta_0 \sin \omega t + \varepsilon \theta_0 \sin^3 \omega t - \frac{\theta_0^3}{6} \sin^3 \omega t \right) = 0$$

En linéarisant $\sin^3 \omega t = \frac{3 \sin \omega t - \sin 3\omega t}{4}$ et en regroupant :

$$0 = \left(-\omega^2 \theta_0 + \omega_0^2 \theta_0 - \frac{3\theta_0^3}{24} \omega_0^2 \right) \sin \omega t + \left(-9\varepsilon \omega^2 \theta_0 + \varepsilon \theta_0 \omega_0^2 + \frac{\omega_0^2 \theta_0^3}{24} \right) \sin 3\omega t$$

$$\forall t \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8} \right) \Rightarrow \omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow T = T_0 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

formule de Borda.

Pour le facteur du terme en $\sin 3\omega t$:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{24 (9\omega^2 - \omega_0^2)} \approx \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{24 (9\omega_0^2 - \omega_0^2)} = \frac{\theta_0^2}{192}$$

$$\varepsilon \approx \frac{\theta_0^2}{192}$$

Application Numérique :

Pour avoir $\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{T - T_0}{T_0} < 1 \%$, il faut : $\theta_0^2 < \frac{16}{100}$

soit : $\theta_0 < 0,4 \text{ rad}$

Commentaire : pour une pendule, destinée à repérer le temps, une précision de 1 % est une bien mauvaise précision, car cela fait une imprécision de 1 s pour 100 s, soit :

$$864 \text{ s} \approx 15 \text{ min}$$

pour : $86\,400 \text{ s} = 24 \text{ h}$

- e. • Un système est conservatif quand son énergie mécanique totale se conserve au cours du temps.
- Le pendule étudié possède cette propriété parce qu'il est soumis à :
 - son poids qui est une action conservative dérivant d'une énergie potentielle de pesanteur ;
 - des actions de contact au niveau de l'axe de rotation non conservatives mais dont le travail est nul s'il n'y a pas de frottement. En effet :

$$\mathcal{P}_{\text{contact}} = \vec{R} \cdot \vec{v}_0 + \vec{m}'_0 \cdot \vec{\Omega} = \vec{R} \cdot \vec{v}_0 + \vec{m}'_0 \cdot \dot{\theta} \vec{u}_{\text{axe}}$$

$$\mathcal{P}_{\text{contact}} = 0$$

car : $\vec{v}_0 = \vec{0}$ et $\vec{m}'_0 \cdot \vec{u}_{\text{axe}} = 0$

f. Conservation de l'énergie mécanique totale :

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}} = cte = -mgL \cos \theta + \frac{1}{2} mv^2$$

avec : $v = L\dot{\theta}$

$$E = -mgL \cos \theta + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 = E_0 = -mgL + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}_0^2$$

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + 2 \omega_0^2 (\cos \theta - 1)$$

$\dot{\theta}^2 \geq 0$ entraîne : $\dot{\theta}_0^2 \geq 2 \omega_0^2 (1 - \cos \theta)$

Pour que le pendule puisse faire un tour, il faut qu'il puisse atteindre :

$$\theta = \pi$$

soit : $\cos \theta = -1$

donc : $\dot{\theta}_0^2 \geq 4 \omega_0^2 = 4 (2\pi)^2 = 16 \pi^2$

$$|\dot{\theta}_0| \geq 4\pi \text{ en rad.s}^{-1}$$

- g. • En un point du plan de phase : θ et $\dot{\theta}$ sont définis, donc la trajectoire est définie de manière unique (solution d'une équation différentielle du second ordre) \Leftrightarrow déterminisme des lois de la mécanique.

- Points singuliers : $\theta = k\pi$ et $\dot{\theta} = 0$ (équilibres stables et instables)
- Mouvements pendulaires : trajectoires fermées.
- Mouvements révolutifs : trajectoires non fermées.
- Séparatrices : frontières entre les deux types de trajectoires.
- Symétrie du portrait de phase par rapport à l'axe des abscisses \leftrightarrow invariance par renversement du temps. En effet, dans cette question, on n'a fait apparaître aucun effet dissipatif.

4) La montre à quartz

- a. • La piézo-électricité est l'apparition d'une tension électrique sous l'action d'une contrainte mécanique et réciproquement (sous l'action d'une tension, il y a déformation).
- La piézo-électricité existe dans les cristaux anisotropes ne possédant pas de centre de symétrie (exemple : le quartz).
- Applications (basées sur la possibilité de transformer un signal électrique en signal mécanique et vice-versa) : transducteurs électromécaniques : capteurs de déformation, microphones, haut-parleurs. Résonateur mécanique de fréquence propre très bien définie dont les oscillations sont entretenues par un très faible apport d'énergie électrique : montre à quartz.
- b. Valeur de L_s irréalisable avec des bobines habituelles. Il s'agit d'une grandeur électrique équivalente à une grandeur mécanique à cause du couplage électromécanique.
NB : habituellement : $L_s \approx$ qqs 10 mH à 1 H
- c. • Calcul de l'impédance du circuit dans le cas où $R_s = 0$:

$$\underline{Z}^{-1} = j C_m \omega + \frac{1}{j L_s \omega + \frac{1}{j C_s \omega}} = j \frac{(C_s + C_m) \omega - L_s C_s C_m \omega^3}{1 - L_s C_s \omega^2}$$

$$\underline{Z} = \frac{1 - L_s C_s \omega^2}{j (C_s + C_m) \omega \left[1 - L_s \frac{C_s C_m}{C_s + C_m} \omega^2 \right]} = j X(\omega) = \text{imaginaire pur}$$

avec :

$$X(\omega) = - \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_s^2}}{(C_s + C_m) \omega \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \right)}$$

$$L_s C_s \omega_s^2 = 1$$

$$L_s \frac{C_s C_m}{C_s + C_m} \omega_p^2 = 1$$

Pour étudier le régime forcé, on passe en notation complexe :

$$\bar{v} = \underline{Z} \bar{i} = j X \bar{i} \Rightarrow \bar{i} \frac{\bar{v}}{j X} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{j X} = \frac{V_0}{X} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

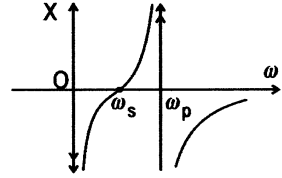
$$i(t) = \mathcal{Re}(\bar{i}) = \frac{V_0}{X} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_0}{X} \sin \omega t$$

On a donc bien :

$$i(t) = \frac{V_0}{X(\omega)} \sin \omega t$$

d. Le calcul a été fait en 4c.

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0^+ & \quad X(\omega) \rightarrow -\infty \\ \omega = \omega_s & \quad X(\omega) = 0 \\ \omega \rightarrow \omega_{p^-} & \quad X(\omega) \rightarrow +\infty \\ \omega \rightarrow \omega_{p^+} & \quad X(\omega) \rightarrow -\infty \\ \omega \rightarrow +\infty & \quad X(\omega) \rightarrow 0^- \end{aligned}$$



(E) a un comportement inductif quand $X > 0$, c'est-à-dire pour :

$$\omega_s < \omega < \omega_p$$

e. Résonance : i est maximal :

$$Z = 0 \Rightarrow X = 0 \text{ ou } \omega = \omega_s$$

Antirésonance : i est minimal :

$$Z \rightarrow \infty \Rightarrow |X| \rightarrow \infty \text{ ou } \omega = \omega_p$$

f. $32\,768 = 2^{15}$

En divisant la fréquence par deux un certain nombre de fois, on a une fréquence de 1 Hz et une période de 1 s, ce qui est commode pour une montre.

$$\begin{aligned} g. \quad \omega_p^2 - \omega_s^2 &= (\omega_p - \omega_s)(\omega_p + \omega_s) \approx 2\omega_s(\omega_p - \omega_s) \\ &= \frac{1}{L_s} \left(\frac{1}{C_p} - \frac{1}{C_s} \right) = \frac{1}{L_s} \left[\frac{C_s + C_m}{C_s C_m} - \frac{1}{C_s} \right] = \frac{1}{C_s L_s} \frac{C_s}{C_m} \\ &= \omega_s^2 \frac{C_s}{C_m} \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \frac{\omega_p - \omega_s}{\omega_s} = \frac{C_s}{2 C_m} = \frac{0,012}{2 \times 2} = 0,003 = 0,3 \% = 3 \text{ ‰}$$

A partir de l'expression de $X(\omega)$ obtenue en 4d, on a :

$$\frac{dX}{d\omega} = \frac{1}{(C_s + C_m)} \frac{1 + \frac{\omega^2}{\omega_s^2} - \frac{3\omega^2}{\omega_p^2} + \frac{\omega^4}{\omega_s^2 \omega_p^2}}{\omega^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \right)^2}$$

$$\text{et : } \left(\frac{dX}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_s} = \frac{2}{C_s + C_m} \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega_s^2 (\omega_p^2 - \omega_s^2)} = \frac{2}{C_s + C_m} \frac{\omega_p^2}{\omega_s^4} \frac{C_m}{C_s}$$

$$\left(\frac{dX}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_s} \approx \frac{2}{C_s \omega_s^2}$$

$$\left(\frac{dX}{d\omega} \right)_{\omega = \omega_s} \approx 2 L_s = 4000 \text{ H/rads}^{-1}$$

$$\Delta f = 1 \text{ Hz} \Rightarrow \Delta\omega = 2\pi \text{ rads}^{-1} \Rightarrow \Delta X \approx 25\,000 \Omega$$

Commentaires :

- On voit que le domaine de fréquence dans lequel le comportement du quartz est inductif est relativement étroit. On comprend la précision des montres à quartz.
- On voit que, dès que la fréquence varie un peu, l'impédance varie beaucoup et le système oscillant risque de s'opposer fortement aux variations accidentelles de fréquence \Rightarrow stabilisation possible en fréquence.

h.
$$Q = \frac{L_s \omega_s}{R_s} = \frac{L_s}{R_s} \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}} = \frac{1}{R_s} \sqrt{\frac{L_s}{C_s}}$$

Application Numérique :

$$Q = \frac{1}{20\,000} \sqrt{\frac{2000}{0,012 \cdot 10^{-12}}} = \frac{10^9}{2 \cdot 10^4 \sqrt{6}} \approx \frac{10^5}{5} = 2 \cdot 10^4$$

$$Q \approx 20\,000$$

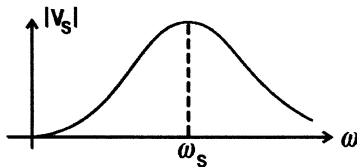
Commentaire :

Ce facteur de qualité est très élevé, jamais atteint par un circuit RLC réel.

i.
$$v_s = -Ri \quad \text{et} \quad i = \frac{V_0}{X(\omega)} \sin \omega t$$

$$|v_s| = R \frac{V_0}{|X(\omega)|}$$

la mesure de $|v_s|$ donne $|X(\omega)|$ à R et V_0 constant à la résonance $|X(\omega)|$ est très faible $\Rightarrow |v_s|$ est élevé. Il suffit de faire varier ω et d'enregistrer $|v_s|$. On peut utiliser un BF en wobulateur.

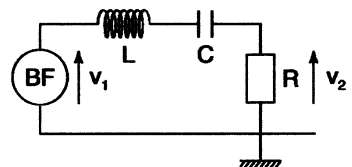


j. • Première méthode : utiliser $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$

- ω_0 fréquence de résonance ;
- ω_1 et ω_2 : limites de la bande passante à - 3 dB.

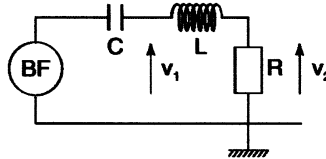
NB : On peut aussi utiliser un phasemètre :

- $\omega_0 \Leftrightarrow v_2$ et v_1 sont en phase ;
- ω_1 et $\omega_2 \Leftrightarrow v_2$ et v_1 sont déphasés de $\pm \frac{\pi}{4}$.



- Deuxième méthode : utiliser $Q = \frac{L \omega_0}{R}$ et un oscilloscope qui permette de mesure à la résonance :

$$v_1 \text{ et } v_1 + \underbrace{(-v_2)}_{\substack{\text{inversion d'un signal} \\ \text{sommation des deux signaux}}} = v_1 - v_2$$



On mesure ainsi l'amplitude du signal $v_2 \Leftrightarrow R$ et l'amplitude du signal $v_1 - v_2 \Leftrightarrow L \omega_0$.

Δ v_1 et v_2 ne sont pas en phase, leur rapport n'est pas égal au rapport des impédances (cf. construction de Fresnel).

Mais v_2 et $v_1 - v_2$ sont en quadrature, le rapport des amplitudes est bien égal au rapport des impédances.

- Troisième méthode : en régime transitoire, utiliser le décroissement logarithmique δ :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} = \frac{q(t)}{q(t+T)}$$

- Précision des méthodes : toutes ces méthodes (sauf celle du phasemètre) nécessitent la mesure de ddp avec un voltmètre (ce ne sont pas des méthodes de zéro), elles sont toutes de même imprécision.

C. Le temps atomique

5) Définition de la seconde en vigueur depuis 1967

- Isotope 133 du césium : $A = 133$ et $Z = 55 \Rightarrow N = 78$.
- Isotope stable du césium = alcalin ($1 e^-$ sur la couche externe).
- État fondamental = état de plus basse énergie.
- $f = 9,2 \cdot 10^9 \text{ Hz} = 9,2 \text{ GHz} \Leftrightarrow$ domaine micro-onde du spectre électromagnétique.
- Structure fine \Leftrightarrow valeurs de $J(\text{total}) = L(\text{orbital}) + S(\text{spin})$.
(électronique)
- Structure hyperfine \Leftrightarrow valeurs de $F(\text{total}) = I(\text{nucléaire}) + J(\text{électronique})$.
(isotopes impairs)

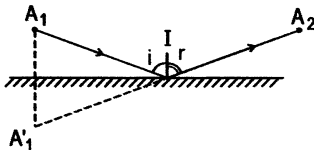
On peut raconter la nécessité d'observer les atomes pendant longtemps pour avoir une meilleure précision sur la fréquence \Rightarrow problème de ralentissement des atomes...

D. Le temps minimal

6) Lois fondamentales de l'optique géométrique

a. A'_1 est symétrique de A_1 par rapport au miroir.

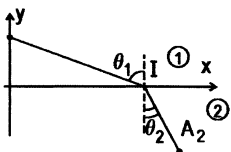
En minimisant A_1A_2 , on trouve la ligne droite A'_1IA_2 , donc la première loi de Descartes (IA_2 , normale et IA_1 coplanaires) et la deuxième loi de Descartes : $i = r$ de la réflexion.



b.

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{c}{v_2}$$

c.



$$\begin{aligned} \tau &= \frac{A_1I}{v_1} + \frac{IA_2}{v_2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}{v_2} \end{aligned}$$

extremum de τ :

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{(x_2 - x)}{v_2 \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} = 0$$

soit :

$$\frac{x}{v_1 A_1 I} = \frac{x_2 - x}{v_2 IA_2} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$$

c'est-à-dire :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

deuxième loi de Descartes de la réfraction

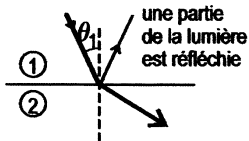
d. • Dans le cas où $n_2 < n_1$:

$$\sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2 \leq \frac{n_2}{n_1}$$

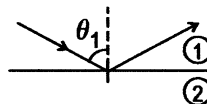
$\Rightarrow \theta_1 < \theta_{1 \text{ lim}}$ pour lequel :

$$\sin \theta_{1 \text{ lim}} = \frac{n_2}{n_1}$$

et pour $\theta_1 > \theta_{1 \text{ lim}}$, il n'y a plus réfraction, le rayon est réfléchi : c'est le phénomène de réflexion totale.

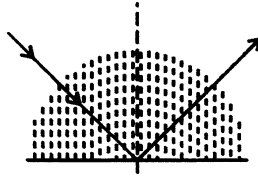


Réflexion partielle et réfraction
 $\theta_1 < \theta_{1 \text{ limite}}$.



Réflexion totale
 $\theta_1 > \theta_{1 \text{ limite}}$.

- Expérience de cours avec demi cylindre en plexiglas par exemple ; expliquer qu'il n'y a pas de déviation sous incidence normale.



- Applications :
 - prisme à réflexion totale ;
 - fibre optique à saut d'indice.

II. Le temps irréversible

A. Irréversibilité en mécanique

7) Effet de l'amortissement sur le portrait de phase

- a. • Le terme de frottements est le terme en $-\frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta}$, les frottements sont fluides.

- Il manque les frottements solides au niveau de l'axe de rotation.

- b. • Sens de parcours  = sens horaire.

- Conditions initiales : $\theta = 0$ $\dot{\theta} > 0$

- L'irréversibilité du phénomène (lié à l'existence des frottements) se traduit par une absence de symétrie des trajectoires de phase par rapport à l'axe des abscisses.

- Les attracteurs sont les points : $\theta = 2k\pi$ $\dot{\theta} > 0$, points autour desquels s'enroulent les trajectoires de phase.

- c. • Première trajectoire : $\dot{\theta}_1 = 12 \text{ rads}^{-1}$: mouvement pendulaire amorti, le pendule s'immobilise dans sa position d'équilibre stable ($\theta_{final} = 0$).

- Deuxième trajectoire : $\dot{\theta}_1 = 15 \text{ rads}^{-1}$: le pendule fait un tour puis il oscille et finit par s'immobiliser dans sa position d'équilibre stable ($\theta_{final} = 2\pi$).

- Troisième trajectoire : $\dot{\theta}_1 = 18 \text{ rads}^{-1}$: le pendule fait deux tours puis il oscille et s'immobilise également dans sa position d'équilibre stable ($\theta_{final} = 4\pi$).

- Le facteur de qualité Q s'évalue - *grosso modo* - en comptant le nombre d'oscillations avant l'immobilisation :

$$Q \sim 10$$

B. Irréversibilité en thermodynamique

8) Le transfert thermique conductif

a. • Le signe \ominus traduit le fait que la chaleur va du chaud vers le froid ou bien le fait que l'effet (le transfert thermique) s'oppose à la cause qui lui a donné naissance (inhomogénéité de température).

•
$$[\lambda] = \frac{[j_{th}]}{[grad\ T]} = \frac{[Puissance]}{[surface]} \frac{[longueur]}{[Température]}$$

$$\lambda \text{ s'exprime en } W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$$

• Analogies entre la loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \vec{grad} V$ et la loi de Fourier présentées sous forme d'un tableau :

Électricité	Transfert thermique
V	T
γ	λ
\vec{j}	\vec{j}_{th}
$dI = \vec{j} \cdot \vec{dS}$	$\delta P = \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS}$
$\delta^2 q = dI \cdot dt$ (charge)	$\delta^2 Q = \delta P \cdot dt$ (chaleur)

• Différences entre la loi de Fourier et la loi d'Ohm locale :

→ il s'agit d'une analogie formelle entre les deux lois et non d'une analogie entre les deux phénomènes : alors que le transfert thermique correspond à un transport passif d'énergie (en l'absence de champ extérieur), la conduction électrique correspond à un transport actif de charge électrique (en présence d'un champ extérieur et donc d'une vitesse de dérive).

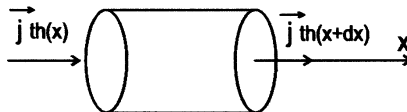
→ $\lambda(T)$ comme $\gamma(T)$ mais la dépendance de γ avec la température T ne modifie pas la linéarité de l'équation locale alors que la dépendance de λ avec la température T rend l'équation locale de la diffusion thermique non-linéaire en T a priori.

→ la loi de Fourier est une loi phénoménologique alors que la loi d'Ohm s'obtient à partir d'un modèle de la conduction électrique.

• On choisit un milieu solide pour éviter le transfert thermique par convection et opaque pour éviter le rayonnement.

• Une loi phénoménologique est une loi qui décrit le phénomène physique sans l'expliquer.

b. Bilan énergétique entre t et $t + dt$ pour la tranche comprise entre x et $x + dx$, de section S . On applique le premier principe.



$$dU + d\cancel{\phi_c} + d\cancel{\phi_{ext}} = \delta\cancel{W_e} + \delta Q$$

$$\mu c S dx dT = j_{th}(x) S dt - j_{th}(x+dx) S dt$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_{th}}{\partial x}$$

La loi de Fourier donne ici (conduction unidirectionnelle) :

$$j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

si on peut considérer ~~$\lambda(T)$~~

L'équation de diffusion unidirectionnelle de la chaleur est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

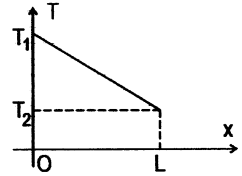
• L'irréversibilité du phénomène se traduit par l'existence d'une dérivée première par rapport au temps $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$: l'équation est modifiée par renversement du temps.

c. • Régime stationnaire : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T = ax + b$

et conditions aux limites :

$$\left. \begin{array}{l} T(x=0) = T_1 = b \\ T(x=L) = T_2 = aL + b \end{array} \right\} \Rightarrow b = T_1 \text{ et } a = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$



• Flux thermique ϕ traversant une section du barreau :

$$\phi = j_{th} \cdot A = -\lambda \frac{dT}{dx} \cdot A = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} A$$

$$\phi = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} A$$

NB :

$T_1 > T_2 \Rightarrow \phi > 0$...la chaleur va de la gauche vers la droite.

$T_1 < T_2 \Rightarrow \phi < 0$...la chaleur va de la droite vers la gauche.

• Définition de la résistance thermique R_{th} par analogie avec la résistance électrique R :

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi} = \frac{L}{\lambda A}$$

• Intérêts de cette notion de résistance thermique :

→ ① Utilisation des lois d'associations en série et en parallèle des résistances thermiques R_{th} .

→ ② Possibilité de prévision des flux thermiques ϕ connaissant la différence de température $T_1 - T_2$ et la résistance thermique R_{th} par :

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$$

d. Caractéristique essentielle des phénomènes diffusifs : si L est l'échelle des longueurs et θ l'échelle des durées, L^2 est proportionnel à $D\theta$ avec $D = \frac{\lambda}{\mu c}$ = la diffusivité, soit L proportionnel à $\sqrt{D\theta}$.

Si L_1 est connu pour la date t_1 ;

$$L_2 = L_1 \sqrt{\frac{t_2}{t_1}} = 2 L_1 ;$$

$$L_3 = L_1 \sqrt{\frac{t_3}{t_1}} = 3 L_1$$

ceci se vérifie aisément sur la figure 8d.

9) Entropie et irréversibilité

a. Pour un système fermé subissant une transformation :

$$\Delta S = S_{\text{échangée}} + \underbrace{S_{\text{créée par irréversibilité}}}_{\geq 0}$$

En particulier, pour un système thermiquement isolé :

$$S_{\text{échangée}} = 0 \quad \text{donc} \quad \Delta S = S_{\text{créée}} \geq 0$$

L'évolution d'un système ne peut s'effectuer que dans le sens où il y a création d'entropie.

b. Système : l'ensemble des deux corps (S_1) et (S_2).

Premier principe :

$$\Delta U = 0 = \Delta U_1 + \Delta U_2 \quad (\text{l'énergie interne est extensive})$$

$$0 = C (T_f - T_{1i}) + C (T_f - T_{2i})$$

$$\Rightarrow \quad T_f = \frac{T_{1i} + T_{2i}}{2}$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 \quad (\text{l'entropie est extensive})$$

$$= C \int_{T_{1i}}^{T_f} \frac{dT_1}{T_1} + C \int_{T_{2i}}^{T_f} \frac{dT_2}{T_2} = C \ln \frac{T_f}{T_{1i}} + C \ln \frac{T_f}{T_{2i}}$$

$$\Delta S = C \ln \frac{T_f^2}{T_{1i} \cdot T_{2i}} = C \ln \frac{(T_{1i} + T_{2i})^2}{4 T_{1i} \cdot T_{2i}} = C \ln \frac{(T_{1i} - T_{2i})^2 + 4 T_{1i} T_{2i}}{4 T_{1i} \cdot T_{2i}}$$

$$\Delta S = C \ln \left[1 + \frac{(T_{1i} - T_{2i})^2}{4 T_{1i} \cdot T_{2i}} \right] \geq 0 \quad \text{avec égalité pour } T_{1i} = T_{2i}$$

L'ensemble est un système thermiquement isolé, il n'a pu évoluer que dans un sens (celui pour lequel $\Delta S > 0$).

• Cas limite où les températures initiales sont voisines, on a alors :

$$\Delta S \approx C \ln \left[1 + \frac{\delta T^2}{4 T_i^2} \right] \approx \frac{C}{4} \left(\frac{\delta T}{T_i} \right)^2$$

Commentaire : la variation d'entropie est alors une quantité petite du second ordre en $\frac{\delta T}{T_i}$ (= écart relatif de T). C'est dans cette mesure qu'on peut considérer que l'échange thermique entre deux systèmes à des

températures très voisines est réversible (en toute rigueur, l'échange thermique n'est réversible que lorsque les températures sont égales).

c. Système : la tranche du barreau comprise entre les abscisses x et $x + dx$.

$$d^2 S = \delta^2 S \text{ échangée} + S^2 S \text{ créée} = 0$$

en régime stationnaire (S est une fonction d'état).

$$\begin{aligned} \delta^2 S \text{ échangée} &= \frac{\delta Q(x)}{T(x)} + \frac{\delta Q(x+dx)}{T(x+dx)} \\ &= \frac{j_{th}(x) A dt}{T(x)} - \frac{j_{th}(x+dx) A dt}{T(x+dx)} \\ \text{Or :} \quad &= A dt \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \cdot \frac{dT}{T(x) \cdot T(x+dx)} \\ &\approx \frac{\lambda A}{L} (T_1 - T_2) dt \cdot \frac{dT}{T(x)^2} = \frac{\lambda A}{L} (T_1 - T_2) dt \cdot \frac{dx}{T(x)^2} \end{aligned}$$

et :

$$\delta^2 S \text{ créée} = - \delta^2 S \text{ échangée}$$

$$\boxed{\delta S \text{ créée} = \lambda \frac{A}{L} dt \cdot \frac{(T_1 - T_2)^2}{T(x)^2} dx \geq 0} \quad \text{nullité pour } T_1 = T_2$$

• L'entropie créée dans tout le barreau pendant dt est donc :

$$\delta S \text{ créée} = - \lambda \frac{A}{L} dt (T_1 - T_2) \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T^2} = - \frac{\lambda A}{L} dt (T_1 - T_2) \left(- \frac{1}{T} \right)_{T_1}^{T_2}$$

$$\boxed{\delta^2 S \text{ créé} = \frac{\lambda A}{L} dt \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2} > 0} \quad \text{nullité pour } T_1 = T_2$$

Commentaire : l'état du barreau est stationnaire (la température en tout point est indépendante du temps) mais ce n'est pas un état d'équilibre thermodynamique (la température n'est pas uniforme au sein de tout le système) : ceci se traduit par une création continue d'entropie.

III. Le temps relatif

10) Le temps des astronomes

• Une année-lumière est la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant un an :

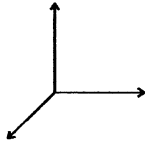
$$\text{Une année-lumière} = 3 \cdot 10^8 \cdot 365,25 \cdot 86400 \approx 3 \cdot 10^8 \times 400 \times 80000 \approx 10^{16} \text{ m}$$

NB : L'étoile la plus proche du Soleil (α du Centaure) est à quatre années-lumière du Soleil.

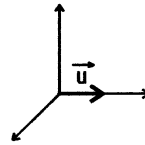
• La lumière reçue à une date t a été émise à une date d'autant plus antérieure que sa source est éloignée de nous (la vitesse de propagation est finie).

11) Invariance des équations de Maxwell dans un changement de référentiel galiléen

a. Transformation du champ \vec{E}, \vec{B} dans un changement de référentiel galiléen :



\mathcal{R} «absolu».



\mathcal{R}' «relatif» en translation à \vec{u} par rapport à \mathcal{R}

La force de Lorentz s'exerçant sur une particule chargée (de charge q) est :

$$\vec{f} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \equiv \vec{f}' = q (\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$$

La loi de composition des vitesses : \vec{v} absolue = \vec{v} relative + \vec{v} entraînement donne ici :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

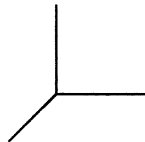
$$\Rightarrow \vec{E} + (\vec{v}' + \vec{u}) \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B} \quad \forall \vec{v}'$$

donc :

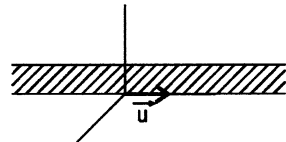
$\begin{aligned} \vec{B}' &= \vec{B} \\ \vec{E}' &= \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B} \end{aligned}$

Conclusion : même en mécanique galiléenne, le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) dépend du référentiel.

b. En considérant un faisceau homogène de particules chargées (positivement pour fixer les idées) homocinétiques de vitesse \vec{u} par rapport au référentiel \mathcal{R} du laboratoire (supposé galiléen). \mathcal{R}' est le référentiel lié au faisceau de particules.



\mathcal{R} (laboratoire).



\mathcal{R}' faisceau.

dans \mathcal{R} : le faisceau est équivalent à un courant. Il crée un champ \vec{B} orthoradial $\neq \vec{0}$

dans \mathcal{R}' : les charges sont immobiles.

Elles ne créent aucun champ magnétique : $\vec{B}' = \vec{0}$.

Donc, manifestement : $\vec{B} \neq \vec{B}'$ ce qui est en contradiction avec le résultat démontré au § 11.a. d'où le paradoxe.

c. Le paradoxe est levé quand on abandonne la mécanique newtonienne et qu'on se place dans le cadre plus général de la mécanique relativiste (le temps y perd son caractère absolu, il devient relatif au référentiel...).

12) Propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma

a. Les quatre équations de Maxwell s'écrivent dans ce milieu :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{M}\phi) \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (\text{MG})$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{MF}) \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{MA})$$

On en déduit :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{rot} \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) = - \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = - \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

d'où :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

avec : $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

b. • Un plasma est un gaz ionisé.

On rencontre cet état dans les flammes, les éclairs, les tubes lumineux à décharge, l'ionosphère (couches entourant la Terre à des altitudes comprises entre cinquante kilomètres et cinq cents kilomètres), les étoiles.

• On considère le plasma comme un fluide de charges comprenant des électrons (masse m) et des ions positifs (masse M). On s'intéresse d'abord aux électrons (charge $-e$).

L'équation du mouvement est : $m \vec{a} = -e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - h \vec{v}$

→ si le plasma n'est pas trop dense, on néglige l'effet dissipatif dû aux collisions (terme en $-h\vec{v}$) ;

→ s'il n'y a pas de champ magnétique autre que celui de l'onde électromagnétique : $\frac{vB}{E} < \frac{v}{c} \ll 1$ (mouvement non relativiste) ;

$$\rightarrow \vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \operatorname{grad} \right) \vec{v}$$

$$\frac{|\left(\vec{v} \cdot \operatorname{grad} \right) \vec{v}|}{\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|} \sim \frac{v k v}{\omega v} = \frac{k v^2}{\omega v} = \frac{k v}{\omega} = \frac{v}{v \phi} \sim \frac{v}{c} < 1$$

Il reste pour les électrons : $m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E}$

De même pour les ions positifs (charge $+e$) :

$$M \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = e \vec{E}$$

Et :

$$\vec{j} = n_{e^-} (-e) \vec{v} + n_{ions} e \vec{V}$$

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -n_{e^-} e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + n_{ions} e \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \left(n_{e^-} \frac{e^2}{m} + \frac{n_{ions} e^2}{M} \right)$$

On a donc :

$$\alpha = e^2 \left(\frac{n_{e^-}}{m} + \frac{n_{ions}}{M} \right)$$

NB : si le plasma est globalement neutre : $n_{e^-} = n_{ions}$ et comme :

$$M \gg m \Rightarrow \alpha \approx \frac{n_{e^-} e^2}{m}$$

en notant : n_{e^-} = densité volumique des électrons.

L'équation (EPPL) de propagation du champ électrique dans le plasma s'écrit alors :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \alpha \vec{E} \quad (\text{EPPL})$$

c. Le champ \vec{E} donné correspond au champ électrique d'une onde électromagnétique, plane, progressive (dans la direction de l'axe z et dans le sens positif), sinusoïdale ou monochromatique ou harmonique, polarisée circulairement gauche. Elle est transversale électrique.

d. • En projection sur Ox, par exemple, (EPPL) donne :

$$\begin{aligned} \Delta Ex - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Ex}{\partial t^2} &= \mu_0 \alpha Ex \\ \cancel{\frac{\partial^2 Ex}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 Ex}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 Ex}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Ex}{\partial t^2} &= \mu_0 \alpha Ex \\ -k^2 Ex + \frac{\omega^2}{c^2} Ex &= \mu_0 \alpha Ex \\ k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \alpha &= \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_c^2) \quad \text{avec : } \omega_c^2 = \mu_0 \alpha c^2 \end{aligned}$$

• ω_c est la pulsation de coupure parce qu'il n'y a propagation que si k est réel, c'est-à-dire $k^2 > 0$ ou $\omega^2 > \omega_c^2$:

$$\text{propagation} \Leftrightarrow \omega > \omega_c$$

NB : pour $\omega < \omega_c$: il n'y a plus propagation ; on peut montrer que l'onde est alors évanescence.

NB : ω_c est aussi pulsation caractéristique du plasma, liée à α caractéristique du plasma. La mesure de ω_c donne α et donc n_{e^-} , caractéristique du plasma.

e. v_ϕ = vitesse de propagation de la phase $\phi = \omega t - kz$.

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c u}{\sqrt{u^2 - 1}}$$

f. v_g = vitesse de propagation d'un paquet d'onde :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c \sqrt{u^2 - 1}}{u}$$

g. L'équation (MF) : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ permet de déterminer \vec{B} . En coordonnées cartésiennes et en supprimant tout champ statique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \Rightarrow B_x = -\frac{k}{\omega} E_0 \sin(\omega t - kz) \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow B_y = -\frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow B_z = 0 \end{aligned}$$

h.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Signification physique : le flux du vecteur de Poynting à travers une surface est la puissance rayonnée à travers cette surface : $d\mathcal{P} = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$

$$\vec{\Pi} = \frac{(E_x B_y - E_y B_x)}{\mu_0} \vec{u}_z \quad \vec{\Pi} = \frac{k}{\mu_0 \omega} E_0^2 \vec{u}_z$$

i.

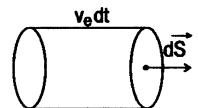
$$w_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2} \frac{k^2}{\mu_0 \omega^2} E_0^2$$

$$w_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \left(1 + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \right)$$

j. La vitesse de propagation de l'énergie est donnée par :

$$v_e = \frac{\Pi}{w}$$

où w est la densité volumique (totale) d'énergie.



Calcul de $w = w_{em} + w_{cinétique}$ des e^- :

$$w_{cin} = n_e \cdot \frac{1}{2} m v^2$$

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \alpha \vec{E} \text{ permet d'obtenir : } \begin{cases} jx = \frac{\alpha E_0}{\omega} \sin(\omega t - kz) \\ jy = -\frac{\alpha E_0}{\omega} \cos(\omega t - kz) \\ jz = 0 \end{cases}$$

Soit :
$$j^2 = \frac{\alpha^2 E_0^2}{\omega^2}$$

$\vec{j} = -n_e \vec{e} \vec{v}$ donne :
$$v^2 = \frac{j^2}{n_e^{-2} e^2} = \frac{\alpha^2 E_0^2}{n_e^{-2} e^2 \omega^2} = \frac{\alpha^2 E_0^2}{n_e m \omega^2}$$

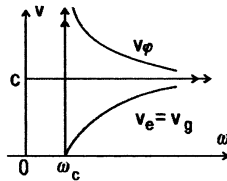
d'où :
$$w_{cin} = n_e \cdot \frac{1}{2} m v^2 = \frac{\alpha E_0^2}{2 \omega^2} = \frac{1}{2} \frac{\omega_e^2}{\omega^2} \epsilon_0 E_0^2$$

et :
$$w = w_{em} + w_{cin} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \left(1 + c^2 \frac{k^2}{\omega^2} + \frac{\omega_e^2}{\omega^2} \right) = \epsilon_0 E_0^2$$

La vitesse de propagation de l'énergie s'en déduit facilement :

$$v_e = \frac{k}{\mu_0 \epsilon_0 \omega} = \frac{c^2}{v_\phi} = v_g \quad \boxed{v_e = v_g}$$

k. Commentaires :



$v_\phi > c$ mais ce n'est pas en contradiction avec la relativité ;
 $v_e = v_g < c$ heureusement.

$\omega \gg \omega_c$: v_ϕ et $v_g = v_e \rightarrow c$: le plasma devient transparent : l'onde EM s'y propage comme dans le vide car ω est trop élevé (pour mettre en mouvement les charges) par rapport à ω_c (= pulsation de plasma).
 $\omega \rightarrow \omega_c$: $v_g = v_e \rightarrow 0$: l'onde devient stationnaire.

l. La proposition est vérifiée ici

• Le milieu n'est pas dissipatif. Pour s'en convaincre, il suffit de voir que : $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \alpha \vec{E}$ entraîne que \vec{j} est en quadrature avec \vec{E} , donc la puissance volumique transférée par le champ EM à la matière : $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$ est telle que :

$$\left\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} \right\rangle = 0$$

- Le milieu est dispersif.

NB : La proposition suppose que le milieu n'est pas trop dispersif sinon la vitesse de groupe perd son sens.

IV. Le temps quantique

13) Le temps de Planck

$$F = \frac{Gmm'}{d^2} \Rightarrow [G] = \frac{[F] L^2}{M^2} = M^{-1} L^3 T^{-2}$$

$$E = hv \Rightarrow [h] = \frac{[E]}{[v]} = ML^2 T^{-1}$$

$$[c] = LT^{-1}$$

- On cherche le «temps de Planck» τ_p sous la forme d'une fonction monôme des grandeurs G , h et c :

$$\tau_p = G^\alpha h^\beta c^\gamma$$

$$\begin{aligned} [\tau_p] &= [G]^\alpha [h]^\beta [c]^\gamma \\ &= (M^{-1} L^3 T^{-2})^\alpha (ML^2 T^{-1})^\beta (LT^{-1})^\gamma \\ &= M^{-\alpha+\beta} L^{3\alpha+2\beta+\gamma} T^{-2\alpha-\beta-\gamma} \end{aligned}$$

$$\text{soit : } \left. \begin{array}{l} -\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha - \beta - \gamma = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{5}{2}$$

$$\tau_p = G^{1/2} h^{1/2} c^{-5/2}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$$

- Application Numérique :

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ SI}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ SI}$$

$$\tau_p = 1,35 \cdot 10^{-43} \text{ s}$$

NB : les puristes utiliseront plutôt \hbar :

$$\tau_p = G^{1/2} \hbar^{1/2} c^{-5/2} = 5,38 \cdot 10^{-44} \text{ s}$$

- Commentaire :

C'est évidemment très bref et aucune expérience ne permet d'accéder à une durée aussi petite. S'agit-il du quantum du temps ?

Agrégation de sciences physiques

Concours interne

OPTION PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition avec exercices d'application - Session : 2000

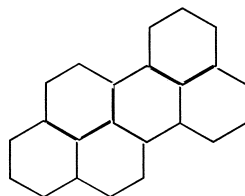
PARTIE A

Correction I - Structure du graphite .

I.1. Il s'agit d'un pavage hexagonal plan d'atomes de carbone .

I.2. L'arrangement des atomes dans un feuillet de graphite correspond - à peu de chose près - à des cycles benzéniques accolés ; l'indice de liaison entre 2 atomes de carbone voisins est $i = 3/2$.

La distance entre 2 atomes de carbone voisins (0,142 nm) est donc comprise entre la longueur d'une simple liaison C-C (0,154 nm dans l'éthane) et celle d'une liaison double C=C (0,134 nm dans l'éthène) .



I.3. Soit la maille élémentaire cylindrique du graphite ci-contre.

La base est un losange de côté a et la hauteur c est égale à 2 fois la distance d séparant 2 plans successifs ; on vérifie que cette maille contient bien 4 atomes de carbone .

Soit a le paramètre de la maille :

$$l_{CC} = d_1 = a \frac{\sqrt{3}}{3} \quad a = d_1 \sqrt{3}$$

On connaît la masse volumique ρ du graphite :

$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4 M_C}{N_A \cdot V_{\text{maille}}} = \frac{4 M_C}{N_A \cdot S_{\text{base}} \cdot 2d}$$

$$S_{\text{base}} = a^2 \sin \frac{\pi}{3} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} d_1^2$$

$$\text{Soit } d = \frac{4 M_C}{\rho \cdot N_A \cdot 3\sqrt{3} \cdot d_1^2} = \frac{4 \cdot 12 \cdot 10^{-3}}{2270 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 3\sqrt{3} \cdot (0,142)^2 \cdot 10^{-18}} = 0,335 \cdot 10^{-9} \text{ m .}$$

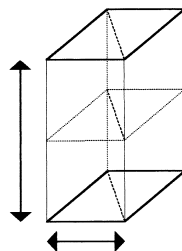
I.4.

I.4.1. Entre les feuillets de graphite, il y a des interactions de type Van der Waals .

I.4.2. La poudre de graphite est utilisée comme lubrifiant car les feuillets de graphite peuvent glisser les uns sur les autres .

I.4.3. Le graphite, du fait de la présence des électrons π est conducteur de l'électricité dans 2 directions de l'espace ; le courant ne peut pas traverser les plans de graphite .

I.4.4. Dans les conditions ordinaires de température et de pression, la forme stable du carbone est le graphite ; on ne peut réaliser la transformation $C_{\text{graphite}} \rightarrow C_{\text{diamant}}$ qu'à très haute pression .



En effet, $\frac{d}{dP}(\Delta_r G) = (\Delta_r V) = V_m(\text{diamant}) - V_m(\text{graphite}) = M \left(\frac{1}{\rho_{\text{diamant}}} - \frac{1}{\rho_{\text{graphite}}} \right) < 0$

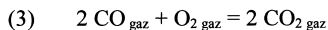
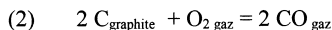
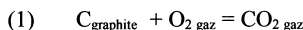
On fabrique ainsi à des pressions de 10^5 bars et à $T \geq 2300\text{K}$, des diamants industriels pour les têtes de foreuses par exemple .

I.5. On a découvert récemment les fullerènes et les nanotubes de carbone qui sont de nouvelles formes cristallines du carbone, de très grand avenir . Sinon, on peut citer le noir de carbone, le coke.

Correction : II - Oxydation du graphite par le dioxygène

II.1.

II.1.1. Soit les trois équations d'oxydation :



II.1.2. Soit la réaction de bilan $0 = \sum v_i A_i$ s'effectuant à t et P constantes et

caractérisée par un avancement ξ .

Soit Y une fonction d'état intensive caractérisant le système , la grandeur de réaction $\Delta_r Y$ est

$$\text{définie par } \Delta_r Y = \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_{T,P} = \sum v_i Y_i$$

La grandeur standard Y^0 du système s'écrit: $Y^0(T, P = P^0, \xi) = \sum_i n_i \cdot Y_i^0(T)$

La grandeur standard de réaction $\Delta_r Y^0$ est définie par $\Delta_r Y^0 = \left(\frac{\partial Y^0}{\partial \xi} \right)_T = \sum v_i Y_i^0$

II.1.3. Dans l'approximation d'Ellingham, l'enthalpie standard de réaction et l'entropie standard de réaction sont des constantes (indépendantes de la température) .

L'enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G^0(T)$ est donc une fonction affine de la température .

II.2.

II.2.1. La pente d'un tracé s'écrit : $\frac{d \Delta_r G^0(T)}{dT} = -\Delta_r S^0 = - \sum_i v_i \cdot S_i^0(T)$

* pour le bilan (1) : $\Delta_r S^0_1 = S^0(\text{CO}_2_{\text{gaz}}) - S^0(\text{O}_2_{\text{gaz}}) - S^0(\text{C}_{\text{graphite}}) = + 3,0 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

* pour le bilan (2) : $\Delta_r S^0_2 = 2 S^0(\text{CO}_{\text{gaz}}) - S^0(\text{O}_2_{\text{gaz}}) - 2 S^0(\text{C}_{\text{graphite}}) = + 178,8 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

* pour le bilan (3) : $\Delta_r S^0_3 = 2 S^0(\text{CO}_2_{\text{gaz}}) - S^0(\text{O}_2_{\text{gaz}}) - 2 S^0(\text{CO}_{\text{gaz}}) = - 172,8 \text{ J} \cdot \text{mole}^{-1} \text{ K}^{-1}$

On peut donc facilement identifier les tracés grâce à leurs pentes :

$\Delta_r G^0_1$ de pente quasiment nulle est représenté par le tracé (b) .

$\Delta_r G^0_2$ de pente négative est représenté par le tracé (c) .

$\Delta_r G^0_3$ de pente positive est représenté par le tracé (a) .

Il est bien évident, d'après les équation-bilan, que $(1) = \frac{(2)+(3)}{2}$ ce qui permet de vérifier les résultats trouvés car le tracé (1) est l'isobarycentre des tracés (2) et (3).

Les trois droites se coupent en un même point pour $T = 981 \text{ K}$.

$$\text{II-2. 2. On sait que : } \Delta_r G^0(T) = -RT \ln K^0(T) \quad \ln K^0 = -\frac{\Delta_r G^0}{RT}$$

Pour chacun des 3 bilans, dans l'intervalle de températures choisi :

$$\Delta_r G^0 < -200 \text{ kJ.mol}^{-1} \text{ donc } \ln K^0 > \frac{200 \cdot 10^3}{8,314 \times 2000} = 12 \text{ donc } K^0 > 10^5.$$

Dans l'intervalle de température considéré, les 3 réactions sont quantitatives.

II.3.

II.3. 1. Dismutation du monoxyde de carbone : (4) $2\text{CO}_{\text{gaz}} = \text{C}_{\text{graphite}} + \text{CO}_{2\text{gaz}}$

On constate que $(4) = (1) - (2)$

II.3. 2. La température d'inversion T_{14} est telle que $\Delta_r G^0_4(T_{14}) = 0$ donc telle que

$$\bullet \Delta_r G^0_1(T_{14}) = \Delta_r G^0_2(T_{14}) \text{ soit } T_{14} = 981 \text{ K}.$$

II.3. 3. On cherche l'expression de $\Delta_r G^0_4(T)$: on connaît la température d'inversion et on calcule facilement la pente du tracé :

$$\Delta_r S^0_4 = S^0(\text{CO}_{2\text{gaz}}) + S^0(\text{C}_{\text{graphite}}) - 2 S^0(\text{CO}_{\text{gaz}}) = -175,8 \text{ J.mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

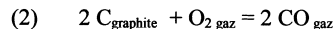
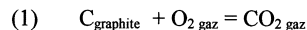
$$\text{Soit : } \Delta_r G^0_4 = -172,5 \cdot 10^3 + 175,8 T \quad \text{kJ.mol}^{-1}$$

La température T' cherchée est telle que :

$$\Delta_r G^0_4(T') = -172,5 \cdot 10^3 + 175,8 T' = -RT' \cdot \ln 0,6 \quad \text{soit } T' = 1005 \text{ K}$$

II.4.

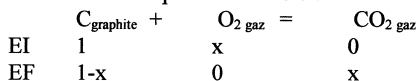
II.4.1. Il y a 2 réactions compétitives d'oxydation du graphite :



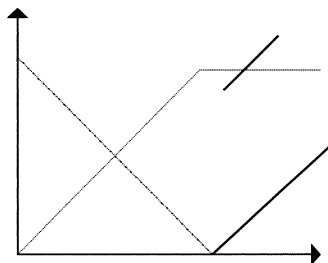
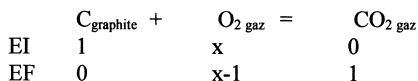
$$\text{A } 500 \text{ K, } (\Delta_r G^0_2 - \Delta_r G^0_1) > 80 \cdot 10^3 \text{ kJ.mol}^{-1} \text{ donc } \ln \frac{K_1^0}{K_2^0} > 19 \text{ et } \frac{K_1^0}{K_2^0} > 10^8$$

La réaction (1) se produit seule.

Bilan de matière pour $x \leq 1$ mole :

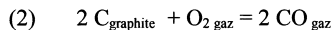
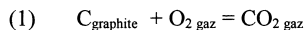


Bilan de matière pour $x \geq 1$ mole :



D'où le tracé demandé :

II.4.2. Il y a les 2 mêmes réactions compétitives d'oxydation du graphite :

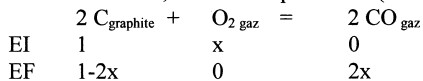


A 2000 K, $(\Delta_r G_1^0 - \Delta_r G_2^0) > 150.10^3 \text{ kJ.mol}^{-1}$ donc $\frac{K_2^0}{K_1^0} > 8.10^3$

et $(\Delta_r G_3^0 - \Delta_r G_2^0) > 300.10^3 \text{ kJ.mol}^{-1}$ donc $\frac{K_2^0}{K_3^0} > .10^5$

La réaction (2) se produit seule, suivie de l'oxydation de CO en CO₂ : on assiste donc à 2 réactions d'oxydations quantitatives et successives .

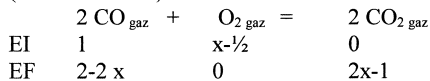
Bilan de matière , avant 1^{ère} équivalence ($n < \frac{1}{2}$ mole)



1^{ère} équivalence pour $n = \frac{1}{2}$ mole : $n(CO_{\text{gaz}}) = 1$ mole

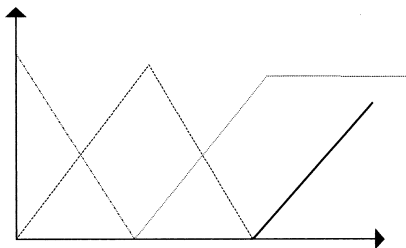
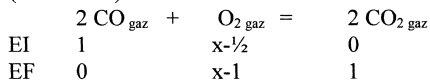
Bilan de matière , entre les 2 équivalences

($\frac{1}{2} < x < 1$ mole)



Bilan de matière , pour un excès de O₂

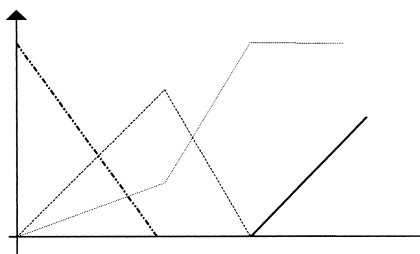
($x > 1$ mole)



II.4.3.

II.4.3.1. A la température $T' = 1005 \text{ K}$, les oxydations du graphite en CO et CO_2 sont compétitives et totales ; l'identification des tracés est facile (cf. diagramme ci-joint) .

- La seule espèce dont la quantité de matière décroît au début de l'addition est le graphite :
- Le monoxyde de carbone CO est la seule espèce dont la quantité de matière est nulle pour $x=0$ et nulle en présence d'un excès de dioxygène .
- En même temps que CO se forme le dioxyde de carbone CO_2 Lorsque l'oxydation est terminée, le dioxygène introduit reste en excès .



II.4.3.2. Les 3 réactions d'oxydations étant simultanées et quantitatives, elles sont terminées lorsqu'on a introduit 1 mole de dioxygène : $x_2 = 1 \text{ mole}$.

Lorsque $x = x_1$, $n(\text{CO}) + 2n(\text{CO}_2) = 2x$ conservation des atomes d'oxygène
 $n(\text{CO}) + n(\text{CO}_2) = 1$ conservation des atomes de carbone

Soit , $n(\text{CO}) = 2(1-2x)$ et $n(\text{CO}_2) = 2x-1$

D'autre part, la constante K_4^0 de dismutation de CO est vérifiée :

$$K_4^0 = \frac{p(\text{CO}_2) \cdot P^0}{p(\text{CO})^2} = \frac{n(\text{CO}_2) \cdot n(\text{gaz})}{n(\text{CO})^2} = \frac{(2x-1)}{4 \cdot (1-x)^2} = 0,6$$

Soit : $x_1 = 0,65 \text{ mole}$ et $n(\text{CO}) = n_2 = 0,70 \text{ mole}$.

n_1	n_2	x_1	x_2
1,00	0,70	0,65	1,00



Correction III: diagramme E-pH du fer en présence de carbonates .

Première partie

III.1.

espèce	Fe^{3+}	$\text{Fe}(\text{OH})_{3\text{solide}}$	Fe^{2+}	$\text{Fe}(\text{OH})_{2\text{solide}}$	$\text{Fe}_{\text{solide}}$
domaine	GFH	HFED	GFEBA	CBED	ABC

III.2.

III.2.1. Calcul du coefficient de Nernst : $\frac{RT}{F} \text{Ln } 10 = \frac{8,314 \times 293 \times \text{Ln}10}{6,02 \cdot 10^{23} \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 58,2 \text{ mV}$.

III.2.2.

- L'ordonnée du point G est égale à $E^0_1 = 0,77 \text{ V}$ puisque la convention du tracé de la frontière entre les domaines de 2 espèces dissoutes est l'égalité des concentrations .

III.7.

III.7.1. Lors de la dissolution du carbonate, on peut écrire :

$$s_2 = [\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_{s3}}{[\text{CO}_3^{2-}]}$$

$$\text{Or, } C_0 = [\text{H}_2\text{CO}_3] + [\text{HCO}_3^-] + [\text{CO}_3^{2-}] = [\text{CO}_3^{2-}] \left(1 + \frac{h}{K_{a2}} + \frac{h^2}{K_{a1} \cdot K_{a2}} \right)$$

$$\text{Soit : } s_2 = [\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_{s3}}{[\text{CO}_3^{2-}]} = \frac{K_{s3}}{C_0} \left(1 + \frac{h}{K_{a2}} + \frac{h^2}{K_{a1} \cdot K_{a2}} \right)$$

$$s_2 = 10^{-7,7} \cdot \left(1 + \frac{h}{K_{a2}} + \frac{h^2}{K_{a1} \cdot K_{a2}} \right)$$

III.7.2.

- $\text{pH} \geq 10,3$ on garde le terme majoritaire : $s_3 = 10^{-7,7}$

$$\log s_2 = -7,7$$

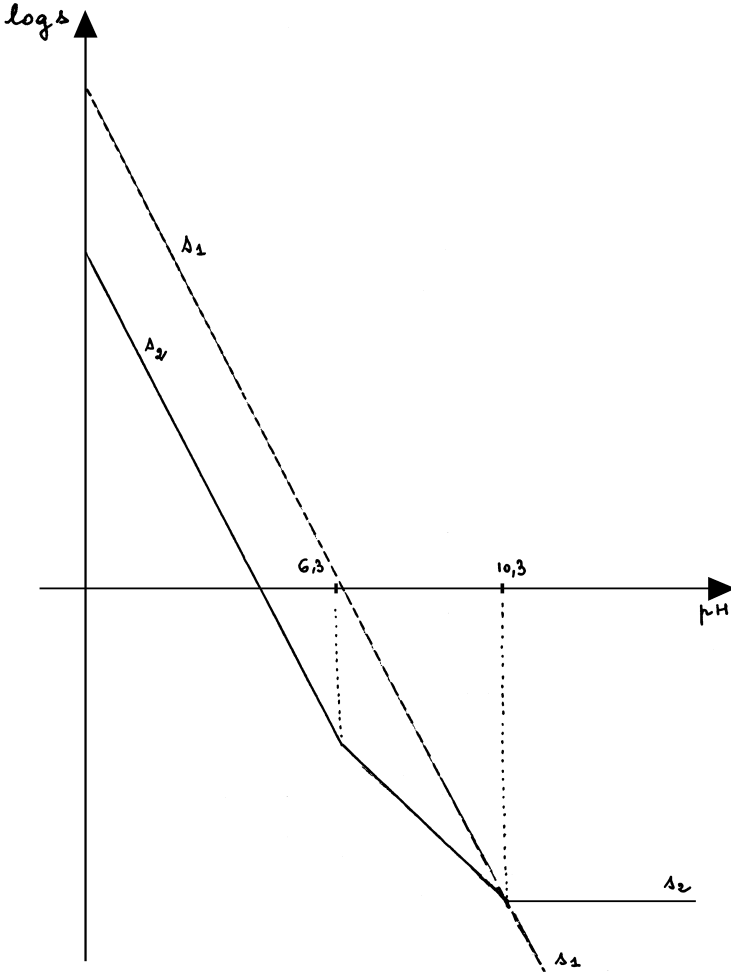
- $6,3 \leq \text{pH} \leq 10,3$ on garde le terme majoritaire : $s_2 = \frac{h}{K_{a2}} \cdot 10^{-7,7}$

$$\log s_2 = +2,6 - \text{pH}$$

- $\text{pH} \leq 6,3$ on garde le terme majoritaire : $s_2 = \frac{h^2}{K_{a2} K_{a1}} \cdot 10^{-7,7}$

$$\log s_2 = +8,9 - 2 \text{ pH}$$

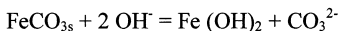
III.7.3. On trace la courbe demandée.



III.8. On constate que les tracés $\log s_1$ et $\log s_2$ se coupent pour $\text{pH} = \alpha = 10,3$; il y a alors une concentration d'ions Fe^{2+} en équilibre avec les 2 solides ; ils peuvent coexister .
 Pour $\text{pH} \neq 10,3$, les 2 solides étant en équilibre avec des concentrations d'ions Fe^{2+} différentes ne peuvent coexister .

III.9.

III.9.1. Soit le bilan de transformation du carbonate ferreux solide en hydroxyde ferreux solide :



- Si $\text{pH} = \alpha = 10,3$, l'affinité chimique est nulle :

$$A = RT \ln \frac{K^0}{Q} = RT \ln \frac{K^0 [\text{OH}^-]^2}{[\text{CO}_3^{2-}]} = RT \ln \frac{K^0 K_e^2}{C_0 \cdot h_\alpha^2} = 0$$

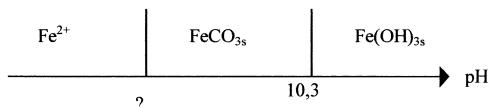
- Si $\text{pH} < \alpha$, $h > h_\alpha$, donc $A = RT \ln \frac{K^0 K_e^2}{C_0 \cdot h^2} < RT \ln \frac{K^0 K_e^2}{C_0 \cdot h_\alpha^2} < 0$

Il y a transformation totale de l'hydroxyde en carbonate .

- Si au contraire, $\text{pH} > \alpha$, $A = RT \ln \frac{K^0 K_e^2}{C_0 \cdot h^2} > RT \ln \frac{K^0 K_e^2}{C_0 \cdot h_\alpha^2} > 0$

Il y a transformation totale du carbonate en hydroxyde .

On peut donc déterminer les domaines d'existence des 2 solides l'un par rapport à l'autre

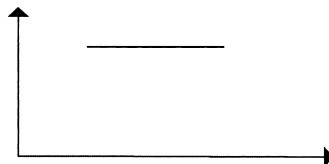


Reste à déterminer la limite entre les domaines de Fe^{2+} et FeCO_3

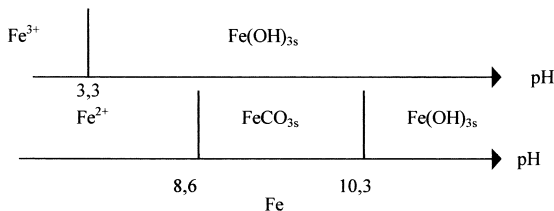
Il y a précipitation du carbonate ferreux dans la solution S dès que $s_2 \leq 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$

Le pH de précipitation du carbonate ferreux est donné par l'intersection du tracé avec la droite $\log s = -6$. On trouve $\text{pH} = 8,6$.

III.9.2. Le pH de la solution augmente de 9,0 à 10,3 par ajout de soude, puis reste constant pendant la transformation du carbonate de fer (II) en hydroxyde de fer (II).



III.10. On complète le diagramme tracé précédemment en l'absence de carbonate



Seuls les tracés pour $8,6 \leq \text{pH} \leq 10,3$ sont à modifier par rapport au tracé donné sans la présence des carbonates .

• Etude du couple $\text{Fe}(\text{OH})_3 / \text{FeCO}_3$.

On reprend l'expression du potentiel de Nernst du couple $\text{Fe}^{3+} / \text{Fe}^{2+}$, avec :

$$[\text{Fe}^{3+}] = \frac{K_{s2}}{[\text{OH}^-]^3} = \frac{K_{s2}}{K_e^{3/2}} h^3 = 10^{4,8} \cdot h^3 \quad \text{et}$$

$$[\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_{s3}}{[\text{CO}_3^{2-}]^3} = 10^{2,6 - \text{pH}}$$

Soit $E = 0,77 + 0,06 (4,8 - 3\text{pH} - 2,6 + \text{pH}) = 0,90 - 0,12 \text{ pH V}$

• Etude du couple $\text{FeCO}_3 / \text{Fe}$

On reprend l'expression du potentiel de Nernst du couple $\text{Fe}^{2+} / \text{Fe}$, avec :

$$[\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_{s3}}{[\text{CO}_3^{2-}]^3} = 10^{2,6 - \text{pH}}$$

Soit $E = -0,44 + 0,03 (2,6 - \text{pH}) = -0,36 - 0,03 \text{ pH V}$.

On trace le diagramme en vérifiant la continuité aux frontières des domaines .

III.11.

III.11.1. $p(\text{O}_2) = 10^{-3}$ et $\text{pH} = 10,6$ le point de captage correspond à une solution saturée en

$\text{Fe}(\text{OH})_3$: $E = 0,79 \text{ V}$.

$$[\text{Fe}^{3+}] = 10^{-37,2} \cdot 10^{24} = 10^{-12,8} \text{ mol.L}^{-1} \quad \text{et} \quad [\text{Fe}^{2+}] = 10^{-13,1} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{Fe}]_{\text{total}} = 10^{-12,5} \text{ mol.L}^{-1} \quad \text{c'est peu}$$

III.11.2. $\text{pH} = 6$ donc $[\text{CO}_3^{2-}] = 10^{-7,8} \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{Fe}^{2+}] = 10^{-2,9} \text{ mol.L}^{-1}$

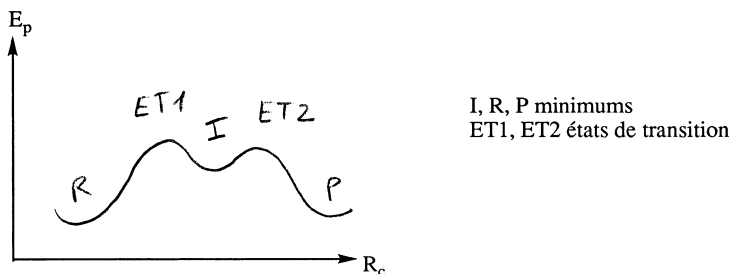
Lorsque cette eau arrive en surface, il y a oxydation du fer II en fer III et donc précipitation de $\text{Fe}(\text{OH})_3$.

Vive l'eau ferrugineuse dixit Bourvil ...

PARTIE B

I.1. Le profil de réaction est le graphe de l'énergie potentielle en fonction de la coordonnée de réaction, R_c . R_c représente la manière la moins coûteuse en énergie de déformer le système formé par le(s) réactif(s) pour donner le(s) produit(s). C'est une ligne dans l'espace à $3N-6$ variables géométriques de déformation d'un système de N atomes.

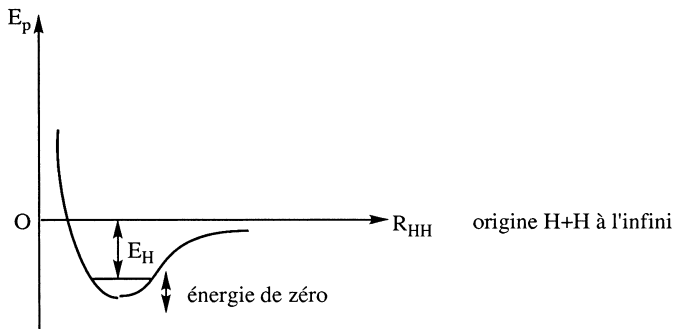
I.2.



I.3. On néglige l'énergie cinétique des noyaux (translation, rotation, vibration).

I.4.1.

La coordonnée de réaction se réduit à l'unique paramètre de déformation du système, R_{HH} .



I.4.2.

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad \text{avec } \mu = \frac{m^2}{2m} \quad (\text{masse réduite}), \text{ d'où } \sigma = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$\frac{\sigma_D}{\sigma_H} = \sqrt{\frac{m_H}{m_D}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sigma_D = 3107.7 \text{ cm}^{-1}$$

I.4.3. L'énergie vibrationnelle est $E_v = h\nu(v + \frac{1}{2})$; $v = 0, 1, 2$ etc.

Elle n'est pas nulle à 0 K ($v = 0$) et vaut $\frac{h\nu}{2}$

$$E_D - E_H = \frac{1}{2}(h\nu_H - h\nu_D) \approx 15.5 \text{ KJ mol}^{-1}$$

I.4.4. $k = k_0 e^{-\frac{E^*}{RT}}$ E^* s'identifie à E_H ou E_D

Si pour H_2 et D_2 k_0 est le même

$$\frac{k_H}{k_D} = e^{-\frac{(E_H - E_D)}{RT}} \approx 5$$

I.4.5. En l'absence de M le système H+H est isolé et a une énergie totale constante ≥ 0 dans le graphe de la question I.4.1. Quand les deux atomes se rapprochent pour former H_2 le système possède assez d'énergie interne (vibrationnelle en particulier) pour se dissocier sans variation d'énergie. Si lors d'un choc triple, une partie de l'énergie interne étant cédée au partenaire, l'énergie de H_2 devient < 0 et la molécule H_2 est "piégée" dans le puits de potentiel.

I.5. Dans une réaction exothermique, l'état de transition "ressemble" en structure et énergie aux réactifs :



c'est le contraire dans une réaction endothermique.

I.6. Contrôle cinétique : le produit le plus abondant est celui qui se forme le plus vite.

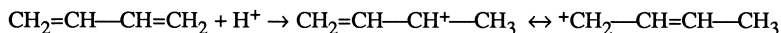
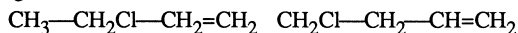
Contrôle thermodynamique : le produit le plus abondant est le plus stable.

I.7. D'après le postulat de Hammond l'énergie de l'état de transition reflète la stabilité des produits dans une réaction endothermique. Dans une réaction exothermique il dépend de l'interaction des réactifs (au début de la coordonnée de réaction).

II

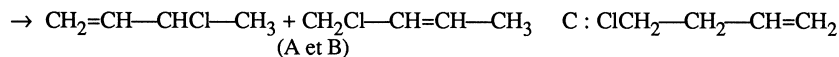
II.1.1.1

Trois régioisomères



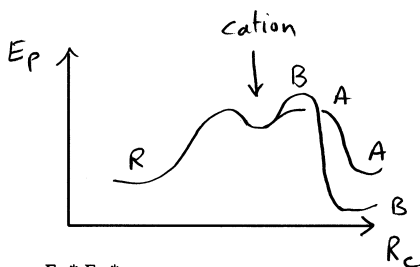
(plus stable que $^+CH_2-CH_2-CH=CH_3$)

Cl-



II.1.1.3 Cela signifie que A est le produit cinétique et B le produit thermodynamique.

II.1.1.4.



II.1.1.5.

$$\frac{k_A}{k_B} = \frac{k_{0A}}{k_{0B}} e^{\frac{E_B^* - E_A^*}{RT}}$$

Si $k_{0A} \approx k_{0B}$

$$RT \ln \frac{k_A}{k_B} = E_B^* - E_A^* \quad T = 213 \text{ K}$$

$$\frac{k_A}{k_B} = \frac{2}{8} = 0,25$$

$$E_B^* - E_A^* = -2,45 \text{ kJ mol}^{-1}$$

II.1.1.6 $\Delta_r G^0 = -RT \ln K \quad T = 298 \text{ K}$

$$K = \frac{[A]}{[B]} = 4 \quad \Delta_r G^0 = -3,44 \text{ kJ mol}^{-1}$$

(Peut varier selon la valeur adoptée par la température ambiante)

II.1.2.1. La fonction ϕ_i est l'orbitale atomique de type p perpendiculaire au plan moléculaire portée par l'atome i.

HO $E = -12,80 \text{ eV} \quad \Psi_{HO} = 0,54 \phi_1 + 0,37 \phi_2 - 0,37 \phi_3 - 0,54 \phi_4$

BV $E = -8,11 \text{ eV} \quad \Psi_{BV} = 0,64 \phi_1 - 0,47 \phi_2 - 0,47 \phi_3 + 0,64 \phi_4$

II.1.2.2. C'est la différence entre l'énergie totale π du butadiène et celle de deux liaisons π isolées (éthylène) soit

$$2(-14,37 + 12,80) - 2 \times 2(-13,55) = -0,14 \text{ eV} = -13,5 \text{ kJ mol}^{-1}$$

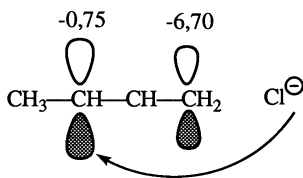
II.1.2.3. Si on applique à la 1ère étape (attaque de H^+) le postulat de Hammond, cette étape est contrôlée par la stabilité du cation :



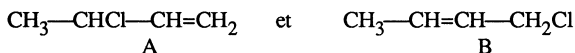
Le cation allyle est plus stable de $0,52 \text{ eV} = 50 \text{ kJ}$

II.1.2.4

2ème étape de Cl^- exothermique est contrôlée par l'interaction des réactifs : attaque 1-2 plus rapide, sur le site présentant le plus grand coefficient dans la BV.



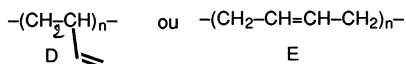
II.1.2.5 Il faudrait comparer l'énergie de



On n'a pas les données suffisantes. L'expérience montre que B est plus stable (alcène le plus substitué).

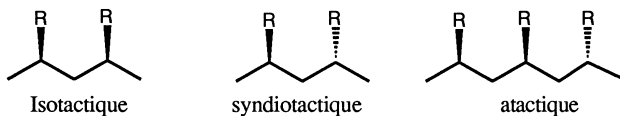
II.2

II.2.1.

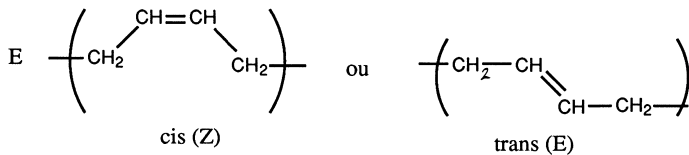


Monomère : butadiène - motif entre ()

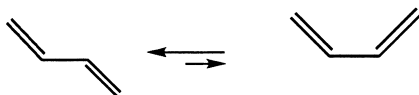
II.2.2.



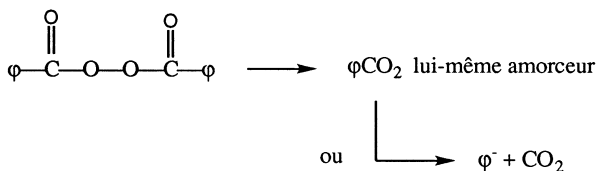
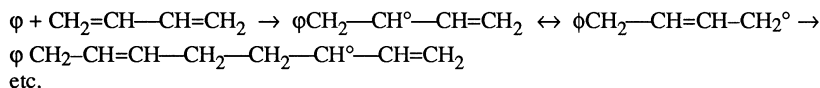
II.2.3.



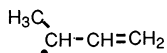
Le butadiène présente l'équilibre



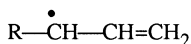
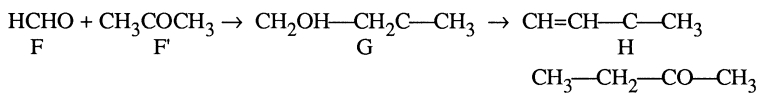
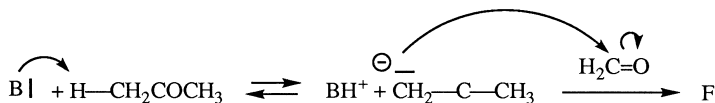
Si la conformation se conserve, on devrait obtenir le trans.

II.2.4.**II.2.5.**

II.2.6. D'après la SOMO du radical méthyl allyle, l'électron est davantage localisé en α du CH_3 :



On devrait donc obtenir le 1-2. On peut supposer que l'encombrement de la chaîne déjà formée R intervient pour favoriser l'attaque en 4.

**III****III.1.2.** Milieu basique

III.1.3. F se déshydrate facilement car G est stabilisé par conjugaison

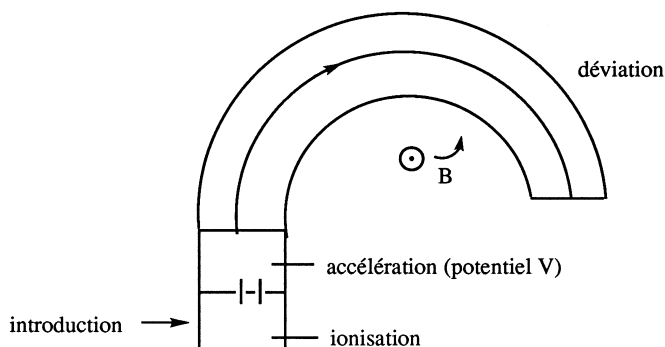
III.1.4. Nickel finement pulvérulent. On fait un alliage Ni/Al et on élimine Al par la soude. Il est pyrophorique. Ne pas le laisser à l'air libre.

III.2. 1718 CO non conjugué
 1690 CO conjugué : k est abaissé par conjugaison



1590 $\nu_{\text{C}=\text{C}}$ lui aussi abaissé par conjugaison

III.2.2.

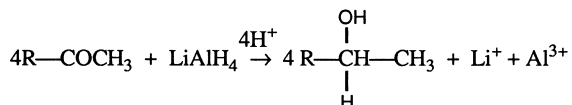


2.2.2. En abscisse m/e , en ordonnée % d'abondance par rapport à l'ion le plus abondant.

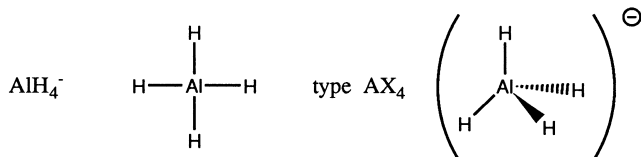
2.2.3. $43 [\text{CH}_3\text{CO}]^+$ $58 [\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CO}]^+$
 72M^{*+}
 73 provient de ^{13}C . L'abondance de ^{13}C étant 1,1 % la présence de $\text{M}+1$ à $x\%$ signifie que l'on a au maximum $\frac{x}{1.1}$ atomes de C. (Il peut y en avoir moins si d'autres éléments contribuent à $\text{M}+1$).

III.3.

3.1.

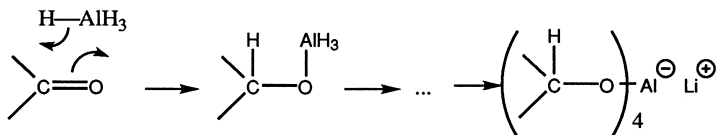


3.2.



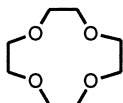
3.3. On peut utiliser éther, THF, anhydres. On ne peut pas utiliser : alcool, eau (destruction réactif)

3.4.



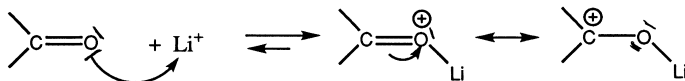
3.5.

3.5.1. Polyéther cyclique : 12-4 :



Forment des complexes très stables avec certains ions (alcalins) qui sont "cachés" à leurs réactifs. D'où le terme de cryptands.

Il y a catalyse par Li^+ (assistance électrojjile)



renforce l'électrophilie du carbone.

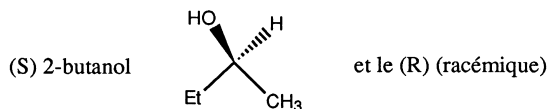
3.6. H: plus de CO à 1718, une bande alcool à 3330-3600.

3.7. A l'état pur, tous les OH sont engagés dans des liaisons hydrogène :

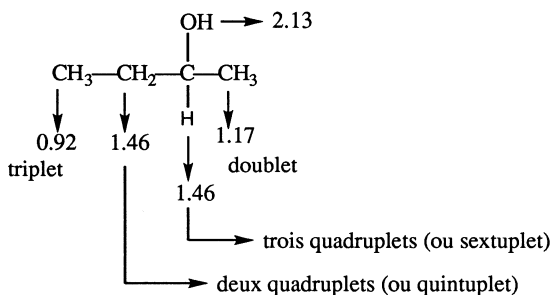


En diluant dans CCl_4 par exemple (pas dans l'eau, sous peine de détériorer les cellules en NaCl) on augmente la concentration d'alcool non associé $\text{ROH} \rightarrow 3650 \text{ cm}^{-1}$.

3.8.



3.9.



IV.1.1.

$$S_1 = C_1 C'_1 S_r + C_4 C'_2 S_r$$

$$S_2 = C_1 C'_2 S_r + C_4 C'_1 S_r$$

Si $C_1 > C_4$ on peut poser $C_1 = C_4 + \alpha$ $\alpha > 0$

et $C'_1 > C'_2$ " $C'_1 = C'_2 + \beta$ $\beta > 0$

Au terme constant S_r près :

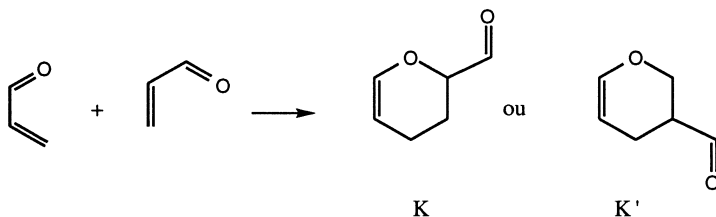
$$S_1 = (C_4 + \alpha)(C'_2 + \beta) + C_4 C'_2 = C_4 C'_2 + C_4 \beta + C'_2 \alpha + C_4 C'_2 + \alpha \beta$$

$$S_2 = (C_4 + \alpha)C'_2 + C_4(C'_2 + \beta) = C_4 C'_2 + \alpha C'_2 + C_4 C'_2 + \beta C_4$$

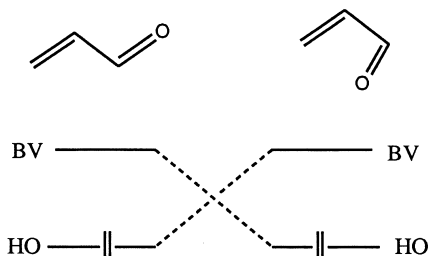
$$S_1 - S_2 = \alpha \beta > 0$$

Le régioisomère prédominant correspond à l'interaction des deux lobes de plus grand coefficient.

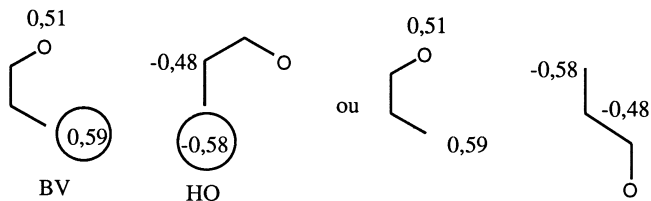
IV.2.



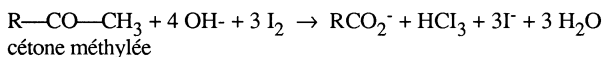
Il faut analyser les deux interactions HO–BV : elles sont d'importance égale puisque, évidemment, les deux ΔE sont les mêmes.



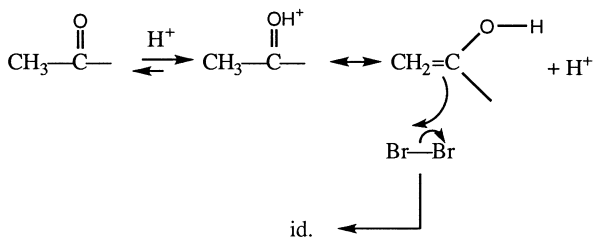
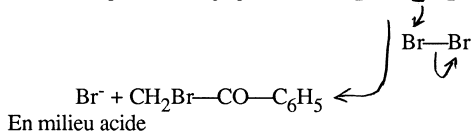
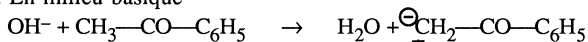
Mais on remarque que la HO a des coefficients égaux aux extrémités. Donc seule la BV de la molécule jouant le rôle de diène peut induire une régiosélectivité, en interagissant avec la HO de la molécule jouant le rôle de diénophile, avec les deux stéréochimies possibles :



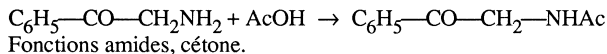
V.
V.1. Test à l'iodoforme



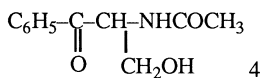
V.1.2. En milieu basique



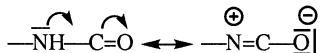
V.2.



V.3.



V.4.1. L'amide est moins électrophile (caractère π donneur de l'azote)



V.4.2. $\phi\text{—CHOH—CH}(\text{CH}_2\text{OH})\text{—NHCOCH}_3$

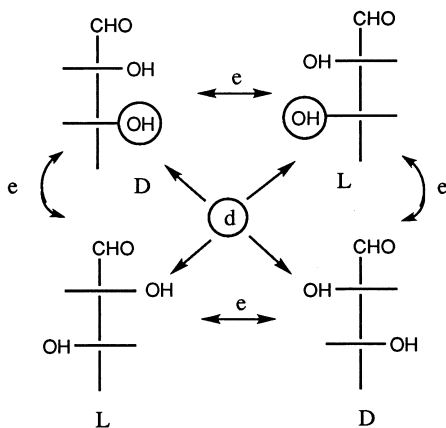
2 carbones asymétriques, tous les substituants différents donc 4 stéréoisomères.

V.5.

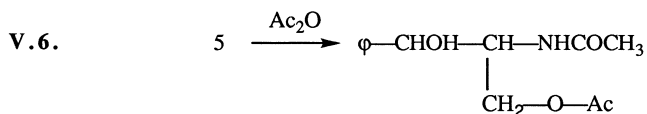
V.5.1.1. Sucres, hydrates de carbone.

Relations d'isomérisie : e = énantiomères, d = diastéréoisomères. Les lettres D et L signifient que dans la représentation de Fischer le OH situé en bas (entouré ci-dessous) sisite respectivement à droite ou à gauche.

Erythroses (OH en "cis")

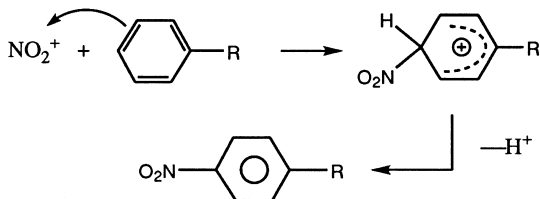


Thréoses (OH en "trans")

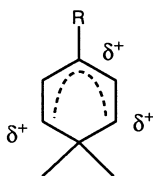


L'alcool primaire est plus réactif.

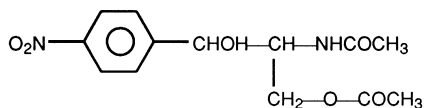
V.7. $2 \text{HNO}_3 \rightarrow \text{NO}_2^+ + \text{H}_2\text{O} + \text{NO}_3^-$



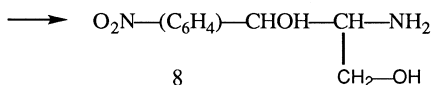
Le groupe donneur R oriente en ortho et para (stabilisation du cation intermédiaire) mais le site para est moins encombré :



V.8 et V.9

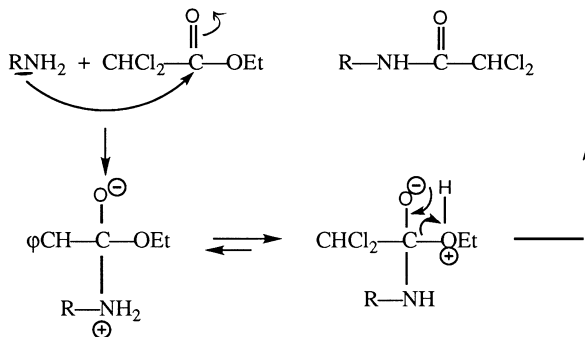


7



8

Pour éviter l'oxydation de l'alcool primaire



V.10

Lévogyre

Agrégation de sciences physiques

Concours interne

OPTION PHYSIQUE APPLIQUÉE

Composition avec exercices d'application - Session : 2000

PREMIER PROBLÈME ÉLECTRONIQUE - AUTOMATIQUE

I. MIROIRS DE COURANT

I.1. **Miroir de courant à transistors NPN** (figure 1).

I.1.1. $v_{BE}(T_1) = v_{BE}(T_2)$ (loi des mailles)

Transistors intégrés sur le même substrat, I_S et U_T sont les mêmes pour T_1 et T_2 .

$$\Rightarrow \boxed{i_E(T_1) = i_E(T_2) = i_E}$$

I.1.2. I.1.2.1. Miroir parfait : $i_1 = i_2 \Rightarrow F = 1$.

I.1.2.2. Relation entre β_N et i_1 et i_2 .

$$i_2 \equiv i_C(T_2) = \frac{\beta_N}{\beta_{N+1}} i_E(T_2) = \frac{\beta_N}{\beta_{N+1}} i_E$$

$$i_1 = \underbrace{i_C(T_1) + i_B(T_1)} + i_B(T_2)$$

$$i_1 = i_E(T_1) + \frac{i_E(T_2)}{\beta_{N+1}} = \left[1 + \frac{1}{\beta_{N+1}} \right] i_E$$

$$\frac{\beta_{N+1}}{\beta_N} i_2 = \frac{\beta_{N+1}}{\beta_{N+2}} i_1$$

$$\boxed{F = \frac{i_2}{i_1} = \frac{\beta_N}{\beta_{N+2}}}$$

$$F = 0,98$$

I.1.2.3. $F = \frac{i_2}{i_1} = 1 - \varepsilon$

$$F = \frac{i_2}{i_1} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\beta_N}} \simeq 1 - \frac{2}{\beta_N} \quad \boxed{\varepsilon = \frac{2}{\beta_N}} = 2 \cdot 10^{-2}$$

I.2. Miroir de courant à une entrée et deux sorties.

I.2.1.
$$i_1 = i_C(T_1) + i_B(T_1) + i_B(T_2) + i_B(T'_2)$$

$$= i_E(T_1) + \frac{i_E(T_2)}{\beta_{N+1}} + \frac{i_E(T'_2)}{\beta_{N+1}}$$

or :
$$i_E(T_1) = i_E(T_2) = i_E(T'_2)$$

car :
$$\left\{ \begin{array}{l} v_{BE}(T_1) = v_{BE}(T_2) = v_{BE}(T'_2) \\ \text{transistors identiques} \end{array} \right.$$

$$i_1 = i_E \left[1 + \frac{2}{\beta_{N+1}} \right] = \frac{\beta_{N+3}}{\beta_{N+1}} i_E$$

$$i_2 = \frac{i_E}{\beta_{N+1}} = i'_2$$

$$F = \frac{i_2}{i_1} = \frac{i_E}{\beta_{N+1}} \times \frac{\beta_{N+1}}{(\beta_{N+3})i_E} = \frac{1}{\beta_{N+3}}$$

$$F' = \frac{i'_2}{i_1} = F$$

I.2.2.
$$F = F' \simeq 1 - \frac{3}{\beta_N} = 1 - \varepsilon_2$$

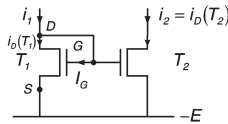
ε_1 précision d'un miroir à une sortie $\varepsilon_1 = \frac{2}{\beta_N}$;

ε_2 précision d'un miroir à deux sorties $\varepsilon_2 = \frac{3}{\beta_N}$.

La précision est moins bonne pour un miroir à deux sorties que pour un miroir à une seule sortie, mais la précision est la même pour les deux sorties.

I.3. Miroir de courant à transistors M.O.S.

I.3.1.



$$v_{GS}(T_1) = v_{GS}(T_2) \quad \text{(loi des mailles)}$$

Transistors identiques :
$$i_D(T_1) = i_D(T_2)$$

$$i_G(T_1) = i_G(T_2) = 0 \quad \text{(MOS)}$$

I.3.2.
$$i_1 = i_2 \Rightarrow F = 1$$

II. CONVOYEUR DE COURANT

II.1. Étude préliminaire.

II.1.1. Miroir NPN	T_{14}, T_{15}	1 entrée, 1 sortie
Miroir PNP	T_{13} et T_{12}	1 entrée, 1 sortie
Miroir MOS à canal N	T_3, T_6, T_7	1 entrée, 2 sorties
Miroir MOS à canal P	T_{10}, T_{11}	1 entrée, 1 sortie
Miroir NPN	$F \simeq 1 - \frac{2}{\beta_N} \quad \beta_N \gg 1$	$F = 1$
Miroir PNP par analogie	$F = 1 - \frac{2}{\beta_P}$	$F \simeq 1$
Miroir MOS canal N	$F = 1$	
Miroir MOS canal P	$F = 1$	par analogie.

II.1.2. Miroir T_5, T_6, T_7	$\Rightarrow i_3(t) = I_0$	
	$i_D(T_8) = I_0 = i_E(T_8) = i_E(T_9)$	car $\beta_N \gg 1$
	$i_e(T_9) = i_D(T_{10})$	car $i_G(T_{10}) = 0$
	\Rightarrow miroir T_{10}, T_{11}	impose $i_1(t) = I_0$

Les miroirs imposent :

$$i_1(t) = i_3(t) = I_0$$

c'est donc indépendant de ce qui pourrait être injecté ou appliqué en Y.

En revanche, rien ne s'oppose à ce que i_2 et i_4 varient au cours du temps (cela dépendra de ce qui pourrait être injecté ou appliqué en C ou en Z).

II.1.3. Pour les miroirs MOS $F = 1$ alors que pour les transistors bipolaires $F \simeq 1$: le courant

$$I_0 \text{ est donc parfaitement recopié } \begin{cases} i_1 \equiv I_0 \\ i_3 \equiv I_0 \end{cases}$$

II.1.4. Relations fondamentales d'une boucle translinéaire mixte.

II.1.4.1. $v_{BE}(T_1) + v_{EB}(T_3) = v_{BE}(T_2) + v_{EB}(T_4)$ (loi des mailles)

II.1.4.2. $i_E = I_S \exp\left(\frac{v_{BE}}{U_T}\right)$ pour un NPN

$i_E > 0 \quad v_{BE} > 0$ quand T passant.

$i_E = I_S \exp\left(\frac{v_{EB}}{U_T}\right)$ pour un PNP

quand transistor passant $\begin{cases} i_E > 0 \\ v_{EB} > 0 \end{cases}$ dans le sens indiqué sur le schéma.

$$i_E = I_S \exp \frac{v_{BE}}{U_T} \Rightarrow v_{BE} = U_T \ln \frac{i_E}{I_{S_N}} \quad \text{NPN}$$

$$v_{BE} = U_T \ln \frac{i_E}{I_{S_P}} \quad \text{PNP}$$

Les transistors intégrés sur le même substrat sont identiques.

$$U_T \ln \frac{i_E(T_1)}{I_S(T_1)} + U_T \ln \frac{i_E(T_3)}{I_S(T_3)} = U_T \ln \frac{i_E(T_2)}{I_S(T_2)} + U_T \ln \frac{i_E(T_4)}{I_S(T_4)}$$

$U_T = \frac{kT}{e}$ est le même pour tous (PNP ou NPN).

$$\ln \frac{i_E(T_1) \cdot i_E(T_3)}{I_{S_N} I_{S_P}} = \ln \frac{i_E(T_2) \cdot i_E(T_4)}{I_{S_N} I_{S_P}}$$

même si $I_{S_N} \neq I_{S_P}$

$$\boxed{i_E(T_1) \cdot i_E(T_3) = i_E(T_2) \cdot i_E(T_4)}$$

II.1.4.3. $\beta_N \gg 1 \quad \beta_P \gg 1$

$$\begin{aligned} i_E(T_1) &= i_1 & i_E(T_3) &= i_3 \\ i_E(T_4) &= i_4 & i_E(T_2) &= i_2 \end{aligned}$$

$$i_4 = i_3 = I_0$$

(cf. § II.1.1.)

$$i_E(T_4) \cdot i_E(T_2) = i_2 i_4 = i_E(T_1) \cdot i_E(T_3) = i_1 i_3 = I_0^2$$

II.1.4.4.

$$v = v_x - v_y$$

$$v = v_x - v_y = -v_{EB}(T_1) - v_{BE}(T_2) = v_{BE}(T_1) - v_{BE}(T_2)$$

$$v = U_T \ln \frac{i_1}{I_0} - U_T \ln \frac{i_2}{I_0}$$

$$v = U_T \ln \frac{i_1}{I_0} = U_T \ln \frac{i_1}{i_2} = U_T \ln \frac{I_0}{i_2} = U_T \ln \frac{i_4}{I_0} \quad \text{car } i_2 i_4 = I_0^2$$

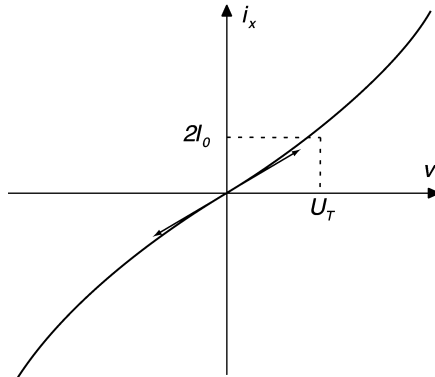
$$i_x = i_4 - i_2$$

$$i_x = I_0 \left[\exp \frac{v}{U_T} - \exp \left(-\frac{v}{U_T} \right) \right]$$

$$\boxed{i_x = 2 I_0 \sinh \frac{v}{U_T}}$$

II.2. Étude de la caractéristique de transfert $i = f(v)$.

II.2.1. Allure.



La courbe est tracée en faisant appel à une calculatrice graphique puisque la question est formulée de façon à ne pas obliger à une étude analytique de la fonction avant de la représenter.

Étude des propriétés du graphe de i_x en fonction de v .

$$i_x = 2 I_0 \operatorname{sh} \frac{v}{U_T}$$

formule valable uniquement quand les transistors sont passants.

$$\frac{di_x}{dv} = \frac{2 I_0}{U_T} \operatorname{ch} \frac{v}{U_T} > 0 \forall u$$

$$\frac{d^2 i_x}{dv^2} = \frac{2 I_0}{(U_T)^2} \operatorname{sh} \frac{v}{U_T}$$

$v < 0 \quad \frac{d^2 i_x}{dv^2} < 0 \quad \text{concavité vers le bas}$
 $v = 0 \quad \frac{d^2 i_x}{dv^2} = 0 \quad \text{point d'inflexion}$

$$\left(\frac{di_x}{dv} \right)_{v=0} = \frac{2 I_0}{U_T}$$

v	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{di_x}{dv}$	+	$\frac{2I_0}{U_T}$	+
$\frac{d^2 i_x}{dv^2}$	-	0	+
i_x	$-\infty$	0	$+\infty$

$\xrightarrow{\text{POINT D'INFLEXION}}$

II.2.2. II.2.2.1.

$$g = \frac{di_x}{dv}$$

$$i_x = 2 I_0 sh \frac{v}{U_T}$$

$$g = \frac{2 I_0}{U_T} ch \frac{v}{U_T}$$

II.2.2.2. $\frac{dg}{dv} = \frac{2 I_0}{(U_T)^2} sh \frac{v}{U_T} \quad \frac{dg}{dv} = 0$ pour $v = 0$

g atteint un extremum g_0 . $g_0 = \frac{2 I_0}{U_T}$

$$\frac{dg}{dv} < 0 \quad v < 0 \quad \frac{d^2 g}{dv^2} = \frac{2 I_0}{(U_T)^3} ch \frac{v}{U_T} > 0$$

car concavité tournée vers le haut.

La transconductance admet un minimum pour $v = 0$.

$$g = g_0 ch \frac{v}{U_T}$$

$$g_0 = \frac{2 I_0}{U_T}$$

II.2.2.3. Équation de la partie linéaire de la caractéristique de transfert.

Dans sa partie linéaire la caractéristique de transfert peut être assimilée à la tangente d'inflexion à la courbe, de pente g_0 , son équation est donc :

$$i_x = g_0 v$$

On veut assimiler la courbe à sa tangente :

$$\eta = \frac{g_0 v - 2 I_0 sh \frac{v}{U_T}}{g_0 v} \quad \text{avec: } g_0 = \frac{2 I_0}{U_T}$$

$$\eta = 1 - \frac{2 I_0}{g_0 v} sh \frac{v}{U_T} = 1 - \frac{2 I_0}{\frac{2 I_0}{U_T} v} sh \frac{v}{U_T}$$

$$= 1 - \frac{sh y}{y} \quad \text{où: } y = \frac{v}{U_T}$$

$$sh y \simeq y + \frac{y^3}{3!}$$

$$|\eta| = \left| 1 - \frac{y + \frac{y^3}{3!}}{y} \right| = \left| 1 - 1 - \frac{y^2}{6} \right|$$

$$|\eta| = 0 \quad \text{à } \frac{y^2}{6} \text{ près.}$$

$$\frac{y^2}{6} = 5.10^{-2} \quad y^2 = 30.10^{-2} = 0,3$$

$$y = 0,55 = \frac{v}{U_T} \quad \boxed{v < 0,55 U_T}$$

II.3. Propriétés relatives au port Y.

II.3.1. D'après II.1.2. $i_1(t) \equiv I_0$, $i_3(t) \equiv I_0$. $i_1(t)$ et $i_3(t)$ sont imposées par les miroirs de courant $T_{10} - T_{11}$ et $T_5 - T_6 - T_7$ pilotés par la source de courant constant I_0 .

$$i_y(t) + i_E(T_1) = i_E(T_3)$$

$$\left. \begin{array}{l} i_E(T_1) \simeq i_1 \quad \text{car } \beta_N \gg 1 \\ i_E(T_3) \simeq i_3 \quad \text{car } \beta_P \gg 1 \end{array} \right\} i_y = i_3 - i_1 = 0$$

Si on ne prend pas d'approximation, $i_y \neq 0$ mais $i_y(t)$ = cte indépendante du temps.
 ⇒ le port Y n'est pas une entrée de l'information.

II.3.2. $R_y = \frac{v_y}{i_y}$ $i_y \simeq 0$
 R_y est infiniment grande

II.4. Propriétés relatives au port Z.

II.4.1. $i_z = i_C(T_{12}) - i_C(T_{13}) = i_2 - i_4$ $\left\{ \begin{array}{l} \beta_N \gg 1 \\ \beta_P \gg 1 \end{array} \right\}$ miroirs

$$\beta_N \gg 1 \quad \beta_P \gg 1 \quad i_x = i_2 - i_4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_z = i_x}$$

II.4.2. $R_g = \frac{v_z}{i_z}$ il s'agit de la résistance de sortie d'un montage à transistors montés en CC : elle est donc très élevée.

II.5. Propriétés relatives au port X.

II.5.1. Étude des variations de i_2 et de i_4 .

II.5.1.1. $i_x = 0 \Rightarrow i_2 = i_4 \quad i_4 = I_0^2 \Rightarrow i_2 = i_4 = I_0$

II.5.1.2. i_4 et i_2 sont les solutions du système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} i_2(t) \times i_4(t) = I_0^2 \\ i_4(t) - i_2(t) = i_x(t) \end{array} \right.$$

$$i_2 = \frac{I_0^2}{i_4}$$

$$i_4 = \frac{I_0^2}{i_4} = i_x \Rightarrow i_4^2 - i_x i_4 - I_0^2 = 0$$

$$i_4 = \frac{I_0^2}{i_2}$$

$$\frac{I_0^2}{i_2} - i_2 = i_x \Rightarrow I_0^2 - i_2^2 - i_x i_2 = 0$$

soit: $i_2^2 + i_x i_2 - I_0^2 = 0$

i_2 et i_4 sont donc des solutions d'équations ayant la même structure :

$$\boxed{\begin{array}{l} i^2 + \alpha i_x i - I_0^2 = 0 \\ \alpha = -1 \quad i \equiv i_4 \\ \alpha = +1 \quad i \equiv i_2 \end{array}} \quad \Delta = i_x^2 + 4 I_0^2$$

$$\boxed{\begin{cases} i_4 = \frac{+i_x + \sqrt{i_x^2 + 4 I_0^2}}{2} \\ i_2 = \frac{-i_x + \sqrt{i_x^2 + 4 I_0^2}}{2} \end{cases}}$$

car seules les solutions positives sont à retenir.

II.5.1.3. Allures de $i_2(t)$ et de $i_4(t)$

NB : On admet que les candidats fassent appel à leur calculatrice graphique. C'est la raison de l'utilisation du mot allure : la question n'oblige pas à une étude analytique avant représentation graphique au contraire de ce que j'ai fait ici.

Propriétés des courbes

$i_4(-i_x) = i_2(i_x)$ la courbe représentative de i_2 est déduite de celle de i_4 par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées \Rightarrow il suffit d'étudier $i_4 = f(i_x)$.

$$i_4 = \frac{1}{2} i_x + \frac{1}{2} \sqrt{i_x^2 + 4 I_0^2}$$

$$\frac{di_4}{di_x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} (i_x^2 + 4 I_0^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 i_x = \frac{1}{2} + \frac{i_x}{2} (i_x^2 + 4 I_0^2)^{-\frac{1}{2}}$$

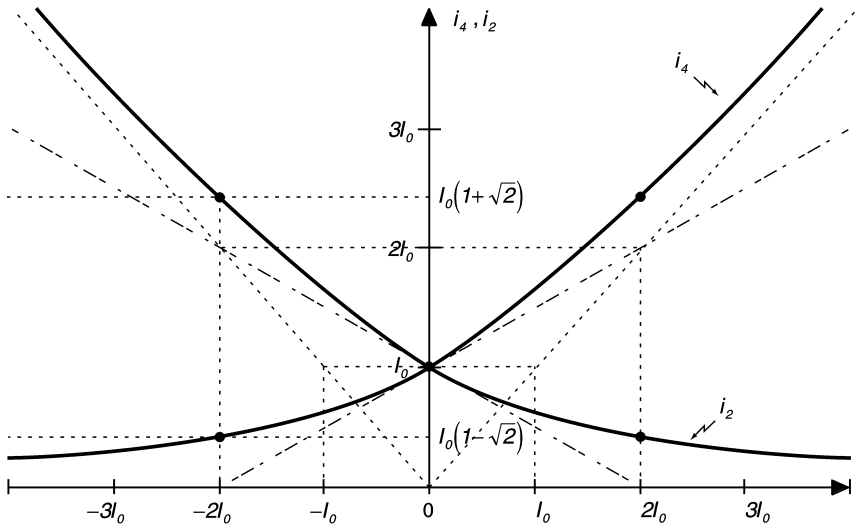
$$\frac{d^2 i_4}{di_x^2} = \frac{1}{2} \left\{ (i_x^2 + 4 I_0^2)^{-\frac{1}{2}} + i_x \left(-\frac{1}{2} \right) 2 i_x (i_x^2 + 4 I_0^2)^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} (i_x^2 + 4 I_0^2)^{-\frac{3}{2}} \left[(i_x^2 + 4 I_0^2) - i_x^2 \right] = 2 I_0^2 (i_x^2 + 4 I_0^2)^{-\frac{3}{2}} > 0 \forall i_x$$

i_x	$-\infty$	0	$\frac{l_0}{2}$	l_0	$2l_0$	$+\infty$
i_4	0	l_0	$\frac{l_0}{4}(1+\sqrt{17})$	$\frac{l_0}{2}(1+\sqrt{5})$		
$\frac{di_4}{di_x}$		+	$\frac{1}{2}$			+
$\frac{d^2i_4}{di_x^2}$		+	concavité tournée vers le haut			+
écart $\Delta = i_4 - l_0$			0,03 l_0	0,24 l_0		0,41 l_0

$$i_4 = \frac{1}{2} i_x + \frac{1}{2} (i_x) \sqrt{1 + \frac{4 I_0^2}{i_x^2}} \rightarrow \begin{cases} i_4 \simeq i_x & \text{si } i_x \rightarrow \infty \\ i_4 = 0 & \text{si } i_x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Intersection des deux courbes $i_x = 0 \quad i_2 = i_4 = I_0$



II.5.2. Étude de la résistance R_x vue entre le port X et le point M.

II.5.2.1.

$$R_x = \frac{dv_x}{di_x}$$

$$v = v_x - v_y$$

$$dv = dv_x - dv_y \quad R_x = \frac{dv}{di_x}$$

L'expression $i_x = 2 I_0 sh \frac{v}{U_T}$ n'est pas exploitable.

$$v = U_T \ln \frac{i_4}{I_0} = U_T \ln \frac{I_0}{i_2}$$

$$v = -U_T \ln \left[\frac{-\frac{1}{2}i_x + \frac{1}{2}\sqrt{i_x^2 + 4I_0^2}}{I_0} \right]$$

$$x = \frac{i_x}{2I_0} \quad \boxed{v = -U_T \ln \left[-x + \sqrt{1+x^2} \right]}$$

$$R_x = \frac{dv}{di_x} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{di_x} = \frac{1}{2I_0} \frac{dv}{dx}$$

$$\boxed{R_x = \frac{U_T}{2I_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

II.5.2.2. $\frac{dR_x}{dx} = \frac{U_T}{2I_0} - \frac{1}{2} ()^{-3/2} \cdot 2x$ signe opposé de x

R_x présente un maximum $\boxed{R_{x0} = \frac{U_T}{2I_0}}$: $R_x = \frac{R_{x0}}{\sqrt{1+x^2}}$.

II.5.2.3. $R_{x0} = f(I_0, T)$
 I_0 est le paramètre de contrôle.

II.5.2.4. $R_{x0} \simeq 360 \Omega$ pour : $\begin{cases} I_0 = 36 \mu A \\ T = 300 K \end{cases}$

II.6. **Étude énergétique.**

II.6.1. Puissance P_0 nécessaire à la polarisation du montage de la figure 3.

Polarisation : $i_x = 0$ $i_2 = i_4$

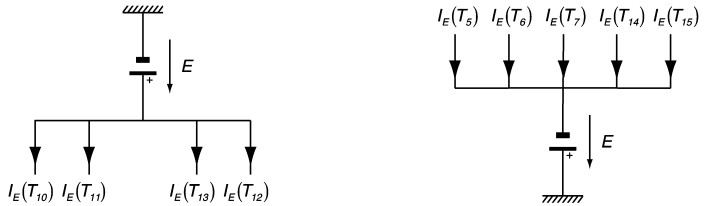
or : $\begin{cases} i_1 = i_3 = I_0 \\ i_2 i_4 = I_0^2 \end{cases}$

donc : $i_2 = i_4 = I_0$

toutes les grandeurs sont continues.

♦ Puissance moyenne fournie par l'alimentation + E aux miroirs $T_{10} - T_{11}$ et $T_{13} - T_{12}$: $4 E I_0$.

♦ Puissance moyenne fournie par l'alimentation - E aux miroirs $T_5 - T_6 - T_7$ et $T_{14} - T_{15}$: $5 E I_0$.



$$\boxed{P_0 = 9 E I_0} \quad P_0 = 9 \times 2,5 \times 36 \cdot 10^{-6} = \underline{\underline{0,8 \text{ mW}}}$$

II.6.2.

$$i_x = I_M \sin \omega t \quad \omega = 2\pi f$$

i_2 et i_4 n'étant pas des fonctions linéaires de i_x , les courants i_2 et i_4 présentent tous deux de la distorsion.

II.6.2.1. Spectre de i_2 et de i_4

La composition spectrale sera la même :

$$i_4 = \frac{1}{2} i_x + \frac{1}{2} \sqrt{i_x^2 + 4 I_0^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{i_x (2 I_0)}{2 I_0} + 2 I_0 \sqrt{1 + \left(\frac{i_x}{2 I_0} \right)^2} \right]$$

on pose : $\frac{i_x}{2 I_0} = x \quad i_4 = I_0 \left[x + \sqrt{1 + x^2} \right]$

$$i_x = I_M \sin \omega t \quad x = \frac{I_M}{2 I_0} \sin \omega t = x_M \sin \omega t$$

$$i_4 = I_0 \left[x_M \sin \omega t + \sqrt{1 + x_M^2 \sin^2 \omega t} \right]$$

Il faut développer $\sqrt{1 + u^2}$ en série :

$$(1 + u^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{8} u^4 + \frac{1}{16} u^6 \dots$$

$$\left[1 + x_M^2 \sin^2 \omega t \right]^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left[x_M^2 \sin^2 \omega t \right] - \frac{1}{8} \left[x_M^4 \sin^4 \omega t \right]$$

$$- \frac{1}{16} \left[x_M^6 \sin^6 \omega t \right]$$

$$= 1 + \frac{x_M^2}{2} [1 - \cos 2 \omega t] + \frac{x_M^4}{8} [1 - \cos 2 \omega t]^2 + \dots$$

Le signal i_4 comporte une composante continue :

$$i_4 = I_0 \left\{ x_M \sin \omega t + 1 + \frac{x_M^2}{2} [1 - \cos 2 \omega t] + \frac{x_M^4}{8} [1 - \cos 2 \omega t]^2 + \dots \right\}$$

$$i_4 = I_0 \left\{ 1 + \frac{x_M^2}{2} + \frac{x_M^4}{8} + \dots + x_M \sin \omega t - \frac{x_M^2}{2} \cos 2 \omega t + \dots \right\}$$

Le signal i_4 comporte $\left\{ \begin{array}{l} \text{une composante continue ;} \\ \text{le fondamental à la fréquence } f ; \\ \text{des harmoniques de rang pair.} \end{array} \right.$

II.6.2.2. II.6.2.2.1. $x = x_M \sin \omega t \quad x_M = \frac{i_x}{2I_0}$

Puissance fournie par l'alimentation « + E » aux miroirs $T_{10} - T_{11}$ et $T_{13} - T_{12}$:

$$E [I_0 + I_0 + i_2(t) + i_2(t)]$$

Puissance fournie par l'alimentation « - E » aux miroirs $T_5 - T_6 - T_7$ et $T_{14} - T_{15}$:

$$E (I_0 + I_0 + I_0 + i_4 + i_4)$$

$$p(t) = 5 E I_0 + 2 E (i_2 + i_4)$$

$$i_2 + i_4 = \sqrt{i_x^2 + 4 I_0^2} = 2 I_0 \sqrt{1 + \left(\frac{i_x}{2 I_0}\right)^2}$$

$$p(t) = 5 E I_0 + 4 E I_0 \sqrt{1 + x^2}$$

$$x = \frac{x_M}{2 I_0} \sin \omega t$$

$$(1 + x^2)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} [x_M^2 \sin^2 \omega t] - \frac{1}{8} [x_M^4 \sin^4 \omega t] + \dots$$

$$= 1 + \frac{x_M^2}{2} \left[\frac{1 - \cos 2 \omega t}{2} \right] - \frac{x_M^4}{8} \left[\frac{1 - \cos 2 \omega t}{2} \right]^2 + \dots$$

$$P = \langle p(t) \rangle = 5 E I_0 + 4 E I_0 \left\langle \sqrt{1 + x^2} \right\rangle$$

$$= 5 E I_0 + 4 E I_0 \left\{ 1 + \frac{x_M^2}{4} \left(1 - \frac{3 x_M^2}{16} + \dots \right) \right\}$$

$$= P_0 + \frac{4 E I_0 x_M^2}{4} \left(1 - \frac{3 x_M^2}{16} + \dots \right)$$

$$P \simeq P_0 + E I_0 x_M^2 \quad P > P_0$$

II.6.2.2.2. Quelle approximation fait-on quand on écrit que :

$$P = P_0 + E I_0 x_M^2 = P_0 \left(1 + \frac{x_M^2}{9} \right)$$

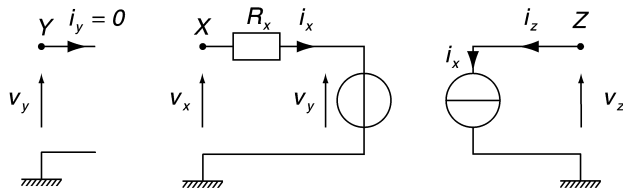
cela revient à écrire que $(1 + x_M^2)^{1/2} = 1 + \frac{x_M^2}{2}$.

I_M	x_M	$\sqrt{1 + x_M^2}$	$1 + \frac{x_M^2}{2}$	Δ	$\frac{x_M^2}{9}$	P
I_0	0,5	1,118	1,125	0,007 0,7 %	0,0069	P_0
$1,2 I_0$	0,6	1,166	1,18	0,014 1,4 %	0,04	P_0 à 4 %
$1,5 I_0$	0,75	1,25	1,281	0,031 3,1 %	0,06	P_0 à 6 %
$2 I_0$	1	1,414	1,5	0,086 9 %	0,11	P_0 à 11 %

III. FILTRE ANALOGIQUE

III.1. Réalisation de quelques fonctions élémentaires utilisant des convoyeurs de courant.

III.1.1. Modélisation.

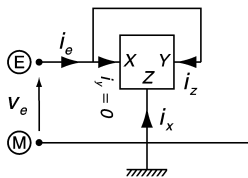


$$i_y = 0$$

$$v_x = v_y + R_x i_x$$

$$i_z = i_x$$

III.1.2. III.1.2.1. Fonction n° 1 (figure 5).



$$v_e \equiv v_y \quad i_e \equiv i_z = i_x$$

$$v_x = R_x i_x + v_y$$

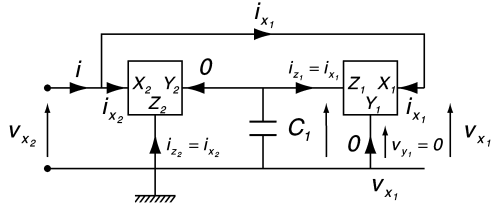
$$R_{EM} = \frac{v_e}{i_e} = \frac{v_y}{i_x} = \frac{-R_x i_x}{i_x}$$

$$\boxed{R_{EM} = -R_x} = -\frac{U_T}{2 I_0}$$

III.1.2.2. III.1.2.2.1. *Caractéristique i_e en fonction de v_e*

Elle est obtenue à partir de la courbe du § II.2.1. en faisant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

III.1.3. *Fonction n° 2 (figure 6).*



$$R_{x1} = R_{x2}$$

$$\begin{aligned} i_{y1} &= 0 & i_{y2} &= 0 \\ v_{x1} &= v_{y1} + R_{x1} i_{x1} = R_x i_{x1} & v_{x2} &= v_{y2} + R_{x2} i_{x2} \\ i_{z1} &= i_{x1} & i_{z2} &= i_{x2} \\ i_{x1} &= -C_1 \frac{d}{dt} v_{y2} & i_{z2} &= i_{x2} \end{aligned}$$

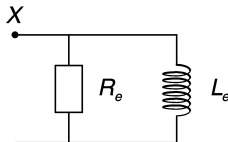
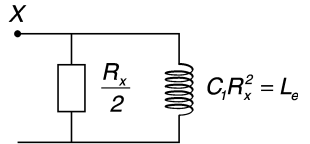
$\begin{cases} v_{x1} = v_{x2} \\ i = i_{x2} + i_{x1} \end{cases}$ il faut exprimer i en fonction de i_{x2} .

III.1.3.1.
$$\frac{1}{Z_e(p)} = \frac{I(p)}{V_e(p)} = \frac{I_{x1}(p)}{V_{x2}(p)} + \frac{I_{x2}(p)}{V_{x2}(p)} = \frac{1}{R_x} + \frac{I_{x2}(p)}{V_{x2}(p)}$$

$$I_{x2} = \frac{V_{x2} - V_{y2}}{R_x} = \frac{V_{x2}}{R_x} - \frac{1}{R_x} \left(-\frac{I_{x1}}{pC_1} \right) = \frac{V_{x2}}{R_x} + \frac{1}{R_x p C_1} \left(\frac{V_{x1}}{R_x} \right)$$

$$\frac{1}{Z_e(p)} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_x} + \frac{1}{p R_x C_1} \frac{1}{R_x}$$

$$\frac{1}{Z_e(p)} = \frac{2}{R_x} + \frac{1}{R_x^2 p C_1}$$



$$\begin{cases} R_e = \frac{R_x}{2} = \frac{V_T}{4 I_0} \\ L_e = C_1 R_x^2 = C_1 \left(\frac{V_T}{2 I_0} \right)^2 \end{cases}$$

III.1.3.2. *Application Numérique :*

À $T = 300 \text{ K}$

$U_T \approx 26 \text{ mV}$

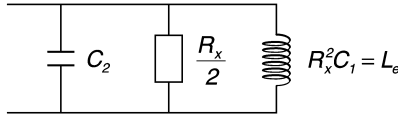
$R_e = 180 \Omega$

$L_e = 5.10^{-12} \times \left(\frac{26.10^2}{72} \right)^2 = 0,65 \cdot 10^{-6}$

$L_e \approx 0,65 \mu\text{H}$

III.1.4. Fonction n° 3 (figure 7).

III.1.4.1.



Sur la figure 7 on reconnaît le dipôle de la figure 6 sur lequel on branche C_2 en parallèle.

III.1.4.2.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{Le C_2}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{R_x^2 C_1 C_2}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_x \sqrt{C_1 C_2}}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_x C} \quad \text{si } C_1 = C_2 = C$$

$$= \frac{2 I_0}{2\pi V_T \omega_0} = \frac{I_0}{\pi V_T C} = f_0$$

$$Q_B = \frac{R_e}{Le \omega_0} = R_e C_2 \omega_0$$

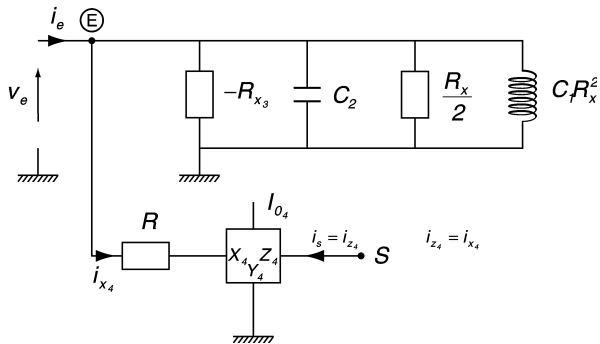
$$= \frac{R_x}{2} \cdot C_2 \frac{1}{\sqrt{R_x^2 C_1 C_2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = Q_B$$

Si $C_1 = C_2$: $Q_B = \frac{1}{2}$

$Q_B > \frac{1}{2}$ si $C_2 > C_1$ mais ça n'ira pas loin.

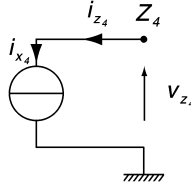
III.2. III.2.1. Rôle du convoyeur de courant n° 3.

Le circuit réalisé à l'aide des convoyeurs de courant n° 1 et n° 2 est un circuit bouchon ayant un mauvais coefficient de qualité ($Q_B = \frac{1}{2}$) : le convoyeur de courant n° 3 (résistance négative) permet de désamorcer ce circuit résonant.



III.2.2. Rôle du convoyeur de courant n° 4.

Il permet de disposer entre S et M^0 d'une sortie à haute impédance, ce qui facilite la mise en cascade de plusieurs étages sans faire usage d'étages adaptateurs d'impédance.



III.2.3. III.2.3.1.

$$I_e(p) = I_{x4}(p) + \frac{V_e}{-R_{x3}} + p C_2 V_e + \frac{V_e}{\frac{R_x}{2}} + \frac{V_e}{p C_1 R_x^2}$$

$$V = (R + R_x) I_{x4} = (R + R_{x4}) I_s(p)$$

$$I_e(p) = I_s(p) + \left[-\frac{1}{R_{x3}} + p C_2 + \frac{2}{R_x} + \frac{1}{p C_1 R_x^2} \right] (R + R_{x4}) I_s$$

$$\begin{aligned} \frac{I_s}{I_e} &= \frac{1}{1 + (R + R_{x4}) \left[-\frac{1}{R_{x3}} + \frac{2}{R_x} + p C_2 + \frac{1}{p C_1 R_x^2} \right]} \\ &= \frac{1}{1 + (R + R_{x4}) \left[-\frac{1}{R_{x3}} + \frac{2}{R_x} \right] + (R + R_{x4}) p C_2 + \frac{R + R_{x4}}{p C_1 R_x^2}} \end{aligned}$$

III.2.3.2. Cette expression peut manifestement se mettre sous la forme :

$$A(p) = \frac{A_0}{1 + Q_0 \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right)}$$

$$A_0 = \frac{\frac{1}{R + R_{x4}}}{R + R_{x4} + \frac{2}{R_x} - \frac{1}{R_{x4}}} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{C_1 C_2 R_x^2} = \frac{1}{C^2 R_x^2}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{C R_x}}$$

$$Q_0 = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \frac{1}{R_x \left[\frac{1}{R + R_{x4}} - \frac{1}{R_{x3}} + \frac{2}{R_x} \right]} = \frac{R_x}{\frac{1}{R + R_{x4}} - \frac{1}{R_{x3}} + \frac{2}{R_x}}$$

III.2.3.3. Stabilité du montage : les pôles de la fonction de transfert doivent avoir leur partie réelle strictement négative. Les pôles sont racines de :

$$1 + Q_0 \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right) = 0 \Leftrightarrow p^2 + \omega_0^2 + \frac{\omega_0 p}{Q_0} = 0$$

$$\Delta = + \left(\frac{\omega_0}{Q_0} \right)^2 - 4 \omega_0^2 \Rightarrow p = - \frac{\omega_0}{Q_0} \pm \sqrt{\Delta}$$

$$\frac{\omega_0}{Q_0} > 0 \Rightarrow \frac{1}{Q_0} > 0$$

$$\frac{1}{R + R_{x4}} - \frac{1}{R_{x3}} + \frac{2}{R_x} > 0$$

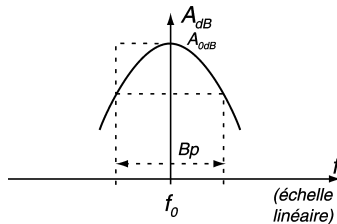
$$\frac{1}{R + R_{x4}} + \frac{4 I_0}{U_T} > \frac{2 I_{03}}{U_T}$$

$$I_{03} < 2 I_0 + \frac{U_T}{2(R + R_{x4})}$$

III.2.4. Régime harmonique.

III.2.4.1.

$$\underline{A}(f) = \frac{A_0}{1 + f Q_0 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f}{f_0} \right)}$$



III.2.4.2.

$$B_p = \frac{f_0}{Q_0}$$

(résultat connu)

$$B_p = \frac{1}{2\pi C} \left[\frac{1}{R + R_{x4}} + \frac{2}{R_x} - \frac{1}{R_{x4}} \right]$$

$$\omega_0 = \frac{1}{CR_e}$$

III.2.4.3. Pour un circuit intégré donné R et θ fixé, les expressions des résistances $R_x = \frac{V_T}{2 I_0}$ montrent qu'elles dépendent de U_T donc de la température T et de I_0 c'est-à-dire de la polarisation.

Le paramètre de réglage de f_0 est I_0 .

III.2.4.4.

$$C_1 = C_2 = 5 \text{ pF} \quad R = 7,6 \text{ k}\Omega$$

$$R_x = 360 \text{ }\Omega = R_{x4} \quad \text{car : } I_0 = I_{04} = 36 \text{ }\mu\text{A}$$

$$U_T = 26 \text{ mV} \quad \text{si } T = 300 \text{ K}$$

$$f_0 \simeq 88 \text{ MHz} \quad B_p = 6 \text{ MHz} \quad Q_0 \simeq 13,7$$

III.2.5. *Sensibilité du filtre.*

III.2.5.1.
$$\omega_0 = \frac{1}{CR_x} = \frac{2 I_0}{CU_T} \quad f_0 = \frac{2 I_0}{2\pi CU_T} \Rightarrow \boxed{f_0 = \frac{I_0}{\pi CU_T}}$$

$$S_a^G = \frac{\partial G}{\partial a} \frac{a}{G}$$

f_0 est une fonction de plusieurs variables I_0, C, T (par l'intermédiaire de $U_T = \frac{kT}{e}$).

$$df_0 = \left(\frac{\partial f_0}{\partial I_0} \right)_{T,C} dI_0 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial C} \right)_{I_0,T} dC + \left(\frac{\partial f_0}{\partial T} \right)_{I_0,C} dT$$

T, C ctes :
$$\frac{\partial f_0}{\partial I_0} = \frac{1}{\pi CU_T}$$

T, I_0 ctes :
$$\frac{\partial f_0}{\partial C} = \frac{I_0}{\pi U_T} \left(-\frac{1}{C^2} \right)$$

C et I_0 ctes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial T} &= \frac{\partial f_0}{\partial U_T} \frac{\partial U_T}{\partial T} = \left(\frac{I_0}{\pi C} \right) \left(-\frac{1}{U_T^2} \right) \frac{\partial U_T}{\partial T} = -\frac{1}{U_T^2} \left(\frac{k}{e} \right) \left(\frac{I_0}{\pi C} \right) \\ &= \left(\frac{I_0}{\pi C} \right) \left(-\frac{1}{U_T^2} \right) \left(\frac{U_T}{T} \right) = -\frac{I_0}{TU_T \pi C} \end{aligned}$$

$$S_{I_0}^{f_0} = \frac{\partial f_0}{\partial I_0} \cdot \frac{I_0}{f_0} = \frac{1}{\pi CU_T} \times \pi CU_T = \boxed{1 = S_{I_0}^{f_0}}$$

$$S_C^{f_0} = \frac{\partial f_0}{\partial C} \cdot \frac{C}{f_0} = -\frac{I_0}{\pi U_T} \left(\frac{1}{C^2} \right) C \frac{\pi CU_T}{I_0} = \boxed{-1 = S_C^{f_0}}$$

$$S_T^{f_0} = \frac{\partial f_0}{\partial T} \frac{T}{f_0} = -\frac{1}{TU_T} \cdot \frac{T}{f_0} \frac{I_0}{\pi C} = \boxed{-1 = S_T^{f_0}}$$

ω_0 est indépendant de R et de I_{03} .

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{I_0}^{f_0} = 0 \\ S_{I_{03}}^{f_0} \\ S_R^{f_0} = 0 \end{array} \right.$$

III.2.5.2. *Influence des paramètres du montage.*

III.2.5.2.1. C est définie à 20 % $\Rightarrow \frac{\Delta C}{C} = 0,2.$

$$S_C^{f_0} = \frac{df_0}{f_0} = -1 \quad \frac{df_0}{f_0} = -\frac{dC}{C} \quad \frac{\Delta f_0}{f_0} = 20\%$$

la variation de R n'intervient pas $S_R^{f_0} = 0$.

N.B. : L'élément C étant intégré sa valeur varie peu au cours du temps. La valeur de C étant mal définie, on ajuste f_0 en ajustant I_0 .

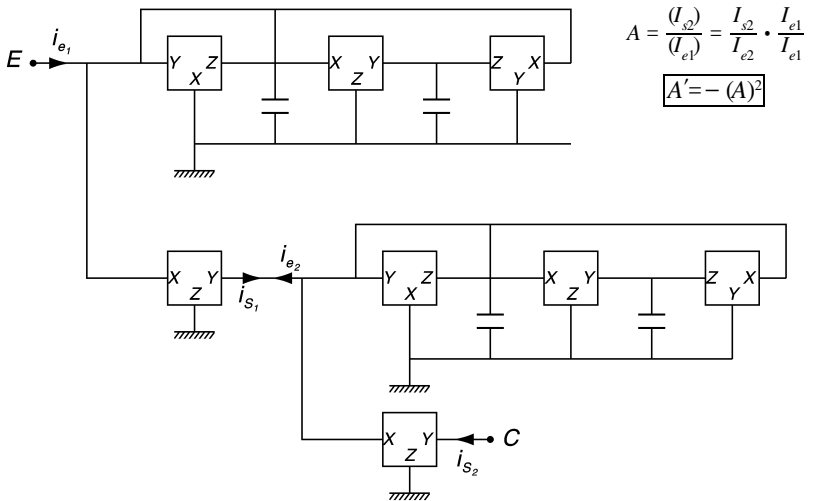
III.2.5.2.2. Au cours du fonctionnement la température d'utilisation est susceptible de varier de $-15\text{ }^\circ\text{C}$ à $+60\text{ }^\circ\text{C}$ $\Delta T = 65\text{ }^\circ\text{C}$.

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{75}{300} = 25\%$$

$$S_T^{f_0} = \frac{df_0}{f_0} = -1 \quad \frac{df_0}{f_0} = -\frac{dT}{T} \quad \frac{\Delta f_0}{f_0} = 25\%$$

la fréquence d'accord du filtre varie beaucoup au cours du fonctionnement, ce qui rend l'appareil inutilisable. [Cela justifie la partie IV : le PTAT).

III.3. III.3.1. Mise en cascade des deux filtres identiques.



III.3.2.

$$A' = - \left[\frac{A_0}{1 + j Q_o \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)} \right]^2$$

$$|A'| = \frac{A_{MAX}}{1 + Q_o^2 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2} \quad A_{MAX} = A_0^2$$

recherche des fréquences limites de la B_p à -3 dB, elles sont telles que :

$$|A'| = \frac{A_{MAX}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} = 1 + Q_o^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 1 + Q_o^2 u^2 \quad \begin{cases} x = \frac{f}{f_0} \\ u^2 = x - \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$2 = (1 + Q_o^2 u^2)^2$$

$$1 + 2 Q_o^2 u^2 + (Q_o u)^4 - 2 = 0$$

$$(Q_o u)^4 + 2 (Q_o u)^2 - 1 = 0$$

$$u^4 + \frac{2}{Q_o^2} u^2 - \frac{1}{Q_o^4} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{Q_o^2} \right)^2 - \left(-\frac{1}{Q_o^4} \right) = \frac{2}{Q_o^4}$$

$$u^2 = -\frac{1}{Q_o^2} \pm \sqrt{\frac{1}{Q_o^4} + \frac{1}{Q_o^4}}$$

$$= -\frac{1}{Q_o^2} \pm \frac{1}{Q_o^2} \sqrt{2}$$

$$u^2 > 0 \quad u^2 = -\frac{1}{Q_o^2} + \frac{\sqrt{2}}{Q_o^2}$$

or :

$$u^2 = \frac{1}{Q_o^2} (\sqrt{2} - 1)$$

$$u^2 = \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = \frac{1}{Q_o^2} (\sqrt{2} - 1)$$

Les fréquences de coupure à -3 dB sont les solutions positive des deux équations.

$$x - \frac{1}{x} = \pm \frac{1}{Q_o} \sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

$$x^2 - 1 = \pm x \frac{1}{Q_o} \sqrt{(\sqrt{2} - 1)}$$

$$x^2 \pm x \frac{1}{Q_o} \sqrt{\sqrt{2}-1} - 1 = 0$$

les deux équations ont le même discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[\frac{1}{Q_o} \sqrt{(\sqrt{2}-1)} \right]^2 + 4 \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{Q_o^2} + 4 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{2} \left[\pm \frac{1}{Q_o} \sqrt{(\sqrt{2}-1)} \pm \sqrt{\Delta} \right]$$

Pour chaque équation on ne conserve que la solution positive :

$$x_1 = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{Q_o} \sqrt{(\sqrt{2}-1)} + \sqrt{\Delta} \right]$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left[+\frac{1}{Q_o} \sqrt{\sqrt{2}-1} + \sqrt{\Delta} \right]$$

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{Q_o} \sqrt{(\sqrt{2}-1)}$$

$$Bp' = f_2 f_1 = \frac{f_0}{Q_o} \sqrt{(\sqrt{2}-1)} = Bp \sqrt{(\sqrt{2}-1)} \simeq 0,64 Bp$$

$$Bp' < Bp$$

$$Bp' = \frac{f_0}{Q'_o} \Rightarrow Q'_o = \frac{f_0}{Bp'} = \frac{f_0}{Bp \sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

$$Q'_o = \frac{Q_o}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \quad Q'_o \simeq 1,55 Q_o$$

Donc en doublant le nombre d'étages, on gagne en sélectivité.

IV. SOURCE DE COURANT TRANSLINÉAIRE

IV.1. IV.1.2. Relations fondamentales de la boucle translinéaire mixte.

IV.1.2.1. Expression de V_{AB}

On peut reprendre l'expression établie au § II.1.4.4. (formule de v) :

$$V_{AB} = U_T \ln \frac{I_1}{I_2} = U_T \ln \frac{I_4}{I_3}$$

miroirs de courants : $I_1 = I_2 \quad I_3 = I_4 \quad \boxed{V_{AB} = 0}$

IV.1.2.2. Relation entre I_S et I_A .

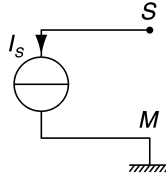
$$I_A = I_1 - I_3 \quad I_S = I_2 - I_4$$

or :
$$I_1 = I_2 \quad \text{et} \quad I_3 = I_4$$

$$\Rightarrow \boxed{I_S = I_A}$$

IV.1.3. Application du circuit de la figure 9.

IV.1.3.1. Sortie S sur un montage de type CC (déjà évoqué dans la question II.4.2.). Entre S et M le modèle équivalent au montage est une source de courant idéale dont l'intensité $I_S = I_A$, est proportionnelle au courant injecté par le port A.



IV.1.3.2. $V_{AB} \equiv 0$ si on relie le port B à la masse $V_{BM} = 0 \Rightarrow V_{AM} = 0$.

Si on relie le port B directement à la masse, alors le potentiel du port A par rapport à la masse B est nul.

A est un point de masse virtuelle.

IV.2. IV.2.1. Relations fondamentales de la boucle translinéaire mixte.

IV.2.1.1.

$$I_C = I_3 - I_1 = I_3 - I_{04}$$

$$I_D = I_4 - I_2 = I_{04} - I_2$$

$$I_1 I_3 = I_2 I_4 \Rightarrow I_{01} I_3 = I_2 I_{04}$$

$$I_C + I_{01} = I_3 \quad \frac{I_C + I_{01}}{I_D - I_{04}} = - \frac{I_{04}}{I_{01}}$$

$$I_D - I_{04} = - I_2$$

$$(I_C + I_{01}) I_{01} = - I_{04} (I_D - I_{04})$$

$$I_C = \frac{-I_{01}^2 - I_{04} I_D + I_{04}^2}{I_{01}}$$

$$I_C = - I_{01} + \frac{I_{04}^2}{I_{01}} - \frac{I_{04}}{I_{01}} I_D$$

on pose :

$$K = \frac{I_{01}}{I_{04}}$$

$$I_C = - K I_{04} + \frac{I_{04}}{K} - \frac{1}{K} I_D$$

$$\boxed{I_C = - \frac{I_D}{K} - \left(K - \frac{1}{K} \right) I_{04}}$$

IV.2.1.2. Calcul de V_{CD} .

C joue le rôle de A ;

D joue le rôle de B ci-dessus.

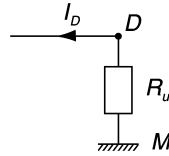
$$V_{CD} = U_T \ln \frac{I_2}{I_1}$$

$$I_1 = I_{01} \quad I_2 = I_{04} - i_D$$

$$V_{CD} = U_T \ln \frac{I_{04} - I_D}{I_{01}}$$

IV.2.2. IV.2.2.1.

$$V_{CM} = 0$$



$$I_D \ll I_{04}$$

$$V_{CD} = V_{CM} + V_{MD} = -V_{DM}$$

$$V_{DM} = -R_u I_D$$

$$V_{CD} = U_T \ln \frac{I_{04} - I_D}{I_{01}} = +R_u I_D$$

$$\ln \left(\frac{I_{04} - i_D}{I_{01}} \right) = \ln \left[\frac{I_{04}}{I_{01}} \left(1 - \frac{i_D}{I_{04}} \right) \right]$$

$$V_{CD} = U_T \left\{ \ln \frac{I_{04}}{I_{01}} + \underbrace{\ln \left(1 - \frac{I_D}{I_{04}} \right)}_{-\frac{I_D}{I_{04}}} \right\} = R_u I_D \quad I_D \ll I_{04}$$

$$I_D = \frac{U_T \ln \frac{I_{04}}{I_{01}}}{R_u + \frac{U_T}{I_{04}}}$$

On a intérêt à exprimer cela en fonction du paramètre I_{04} qui est constant.

$$I_{01} = KI_{04}$$

$$I_D = \frac{U_T \ln \frac{1}{K}}{R_u + \frac{U_T}{I_{04}}} = -\ln K \frac{\frac{U_T I_{04}}{R_u I_{04}}}{1 + \frac{U_T}{R_u I_{04}}}$$

$$I_D = -I_{04} \ln K \frac{X}{1+X} \quad \text{avec : } X = \frac{U_T}{R_u I_{04}}$$

Dans le cas général i_D n'est donc pas proportionnel à U_T , mais si X est faible devant 1 ($X \ll 1$) :

$$\text{alors on peut écrire : } I_D = -I_{04} \ln K X$$

$$\text{ou encore : } I_D = -\frac{U_T}{R_u} \ln K$$

$$I_D \simeq -\frac{\ln K}{R_u} U_T$$

L'approximation $X \ll 1$ est-elle licite ?

$$X = \frac{U_T}{R_u I_{04}} = \frac{|I_D|}{\ln K I_{04}} \quad X \ll 1$$

$$i_D \ll I_{04} \Rightarrow i_D \ll \ln K I_{04} \quad \text{si : } L_\eta K > 1$$

IV.2.2.2.

$$I_{04} = 500 \mu\text{A} \quad \frac{U_T}{R_u} = \frac{26 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^3} = 2,6 \cdot 10^{-6}$$

$$X = \frac{U_T}{R_u I_{04}} = \frac{2,6 \cdot 10^{-6}}{500 \cdot 10^{-6}} = 5,2 \cdot 10^{-3} \quad (0,5\%)$$

$I_{04} \mu\text{A}$	125	250	500	750	1000	1500	2000
$K = \frac{I_{01}}{I_{04}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$3/2$	2	3	4
$\ln K$	$-\ln 4$ $-1,3863$	$-\ln 2$ $-0,6931$	0	+ 0,4055	$\ln 2$ $+ 0,6931$	1,099	$2 \ln 2$ $+ 1,3863$
$i_D \mu\text{A}$ $-\ln K \frac{U_T}{R_u}$ $\frac{2,6}{2,6}$	36	18	0	- 10,5	- 18	- 28,5	- 36
$\frac{I_D}{I_{04}}$	0,007 0,7 %			0,2 %			

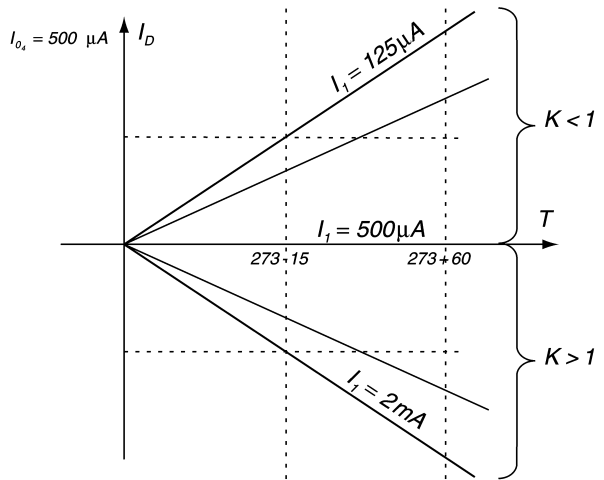
De tout cela il résulte qu'on peut toujours dire que $X \ll 1$ si on nous a donné R_u .

IV.2.2.3.

$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

I_1 varie de 125 μA à 2 mA.

$$I_D = \alpha T \quad I_D = -\frac{\ln K}{R_u} \frac{k}{e} T$$



$$\alpha = - \frac{\ln K}{R_u} \frac{k}{e}$$

$$\alpha_{125 \mu A} = - \ln \frac{1}{4} 10^{-3} \frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = \frac{1,3863 \times 1,38}{1,6} 10^{-7} = 0,12 \cdot 10^{-6} = 0,12 \mu A / K$$

$$\alpha_{2 mA} = - 0,12 \mu A / K$$

$$I_D (258 K) = 31 \mu A$$

$$I_D (333 K) = 40 \mu A$$

IV.3. IV.3.1.

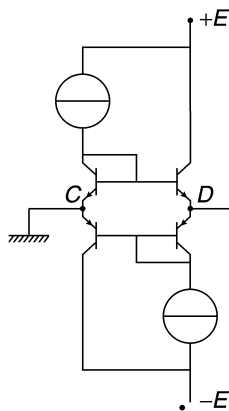


Figure 10

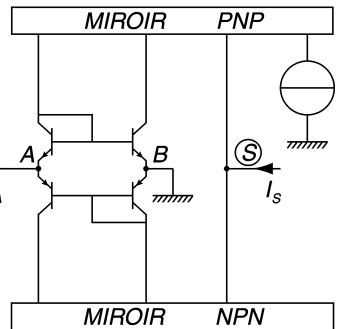


Figure 9

$$I_S = I_A$$

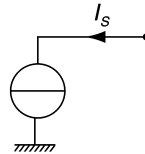
Liaison DA par
l'intermédiaire de R
B à la masse
⇒ $v_{AM} = 0$

On retrouve pour la figure 10 :

$$I_D = -\frac{\ln K}{R_u} U_T \quad I_S = I_A = -I_D$$

$$= \frac{\ln K}{R_u} U_T$$

$$I_S = \frac{\ln K}{R_u} \frac{k}{e} T$$



Ce courant I_S sert pour la polarisation I_0 des convoyeurs de courants utilisés dans le filtre passe-bande.

IV.3.2. IV.3.2.1. On se rappelle que la fréquence f_0 est inversement proportionnelle à la température T . Mais en polarisant les CC n° 1 et n° 2 par la source de courant que l'on vient de construire, la fréquence f_0 devient insensible aux variations de température.

IV.3.2.2.
$$f_0 = \frac{I_0}{\pi C U_T} = \frac{1}{\pi C U_T} \left(-\frac{\ln K U_T}{R_u} \right) = -\frac{\ln K}{\pi C R_u}$$

{ avec $\ln K < 0$ $K < 1$ }.

IV.3.2.3. Dimensionnement.

On veut $f_0 = 88$ MHz, il faut $I_0 = 36 \mu\text{A}$.

Il faut déterminer K :

♦ Première méthode :

$$I_0 = I_S = -\frac{\ln K}{R_u} U_T \Rightarrow \ln K = -\frac{R_u I_0}{U_T}$$

$$K = \exp -\frac{10^3 \times 36 \times 10^{-6}}{26 \cdot 10^{-3}} = \exp(-1,38\dots)$$

$$\boxed{K = \frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{I_{01} = 125 \mu\text{A}}$$

♦ Deuxième méthode :

$$\ln K = -\pi C R_u f_0$$

$$K = \exp -\pi \times 5.10^{-12} \times 10^3 \times 88.10^6 = \exp(-1,382)$$

◆ *Troisième méthode : utilisation des résultats établis au § IV.2.2.3.*

$$\text{NPN :} \quad R_{40} = \frac{E - V_{BE}}{I_{04}} = \frac{2,5 - 0,7}{500 \cdot 10^{-6}} \quad R_{40} = 3,6 \text{ k}\Omega$$

$$\text{PNP :} \quad R_{10} = \frac{E - V_{EB}}{I_{10}} = \frac{2,5 - 0,7}{125 \cdot 10^{-6}} \quad R_{10} = 14,4 \text{ k}\Omega$$

Difficile de réaliser exactement ces valeurs mais par intégration on sait réaliser $\frac{R_{10}}{R_{40}}$ avec une très grande précision, donc on sait réaliser $\frac{I_{04}}{I_{01}} = 4$ avec une grande précision.

Agrégation de sciences physiques

Concours interne

OPTION PHYSIQUE APPLIQUÉE

Composition avec exercices d'application - Session : 2000

SECOND PROBLÈME ÉLECTROTECHNIQUE

PREMIÈRE PARTIE

I. CHARGÉ RÉSONNANTE SÉRIE ALIMENTÉE PAR UN ONDULEUR DE TENSION

I.1. Étude de la charge.

$$\text{I.1.1. Pour } 0 < t : \quad v = e = E \quad e = u + L \frac{di}{dt} + Ri \quad i = C \frac{du}{dt}$$

L'équation différentielle régissant l'évolution de u s'écrit :

$$E = LC \frac{du^2}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u$$

I.1.2. La forme canonique de l'équation est : $E = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2u}{dt^2} + 2 \frac{du}{dt} + u$ par identification on déduit que $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Z = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$.

I.1.3. Le régime transitoire de la solution sera oscillatoire amorti si $Z < 1$.

I.2. Onduleur de tension, fonction de conversion.

I.2.1. La source de tension (E) ne doit pas être court-circuitée, en conséquence, les interrupteurs d'une cellule (x) ne peuvent être fermés simultanément.

La charge (R, L, C) possède un comportement de source de courant instantanée du fait de la présence de L ; en conséquence le courant ne peut être interrompu. Les interrupteurs d'une cellule (x) ne doivent être ouverts simultanément.

Les états des interrupteurs d'une même cellule sont nécessairement complémentaires. Les fonctions de connexion des interrupteurs sont liées par la relation :

$$\boxed{f_{x_1}(t) + f_{x_2}(t) = 1}$$

- I.2.2. I.2.2.1. $v_{x_n} = 0$ quand l'interrupteur K_{x_n} est fermé.
 $v_{x_n} = E$ quand l'interrupteur K_{x_n} est ouvert.

Donc :

$$v_{n_x}(t) = E \left(1 - f_{x_1}(t) \right)$$

- I.2.2.2. $i_{A_1}(t) = f_{A_1}(t) \cdot i$ $i_{B_1}(t) = -f_{B_1}(t) \cdot i$
 $i_{A_2}(t) = -f_{A_2}(t) \cdot i$ $i_{B_2}(t) = f_{B_2}(t) \cdot i$

- I.2.3. La tension $v(t)$ aux bornes de la charge s'explique en fonction des tensions aux bornes des interrupteurs, par exemple :

$$v(t) = -v_{A_1}(t) + v_{B_1}(t) = \left[f_{A_1}(t) - f_{B_1}(t) \right] \cdot E$$

$$\boxed{m(t) = f_{A_1}(t) - f_{B_1}(t)} \quad m(t) \in [-1, 0, +1]$$

- I.2.4. $i_E(t) = i_{A_1}(t) + i_{B_1}(t) = f_{A_1}(t) \cdot i - f_{B_1}(t) \cdot i$

$$\boxed{i_E(t) = \left[f_{A_1}(t) - f_{B_1}(t) \right] \cdot i = m(t) \cdot i}$$

- I.2.5. Les résultats établis dans les questions I.2.3. et I.2.4. peuvent être écrits sous forme matricielle :

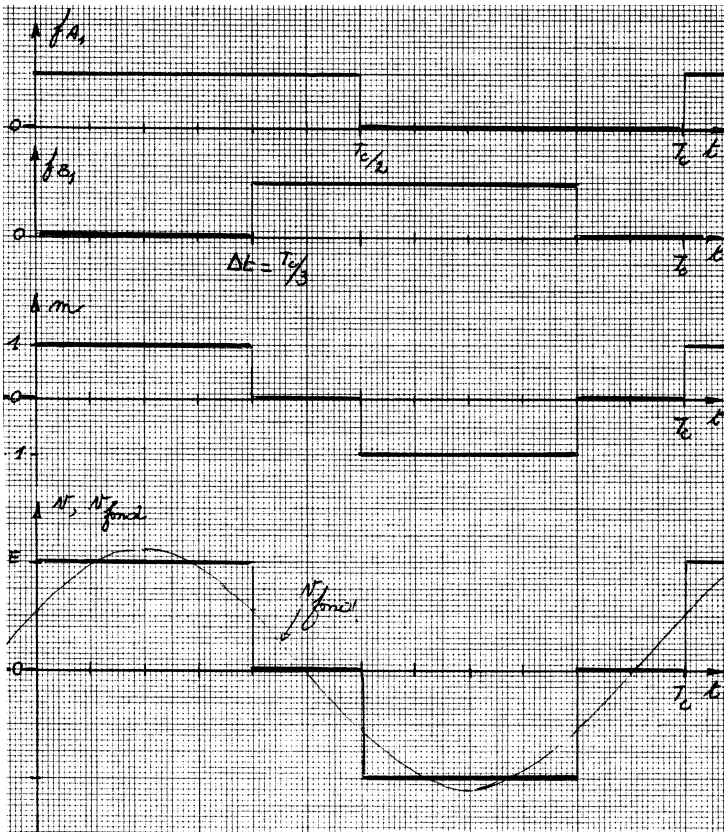
$$\begin{aligned} i_E(t) &= m(t) \cdot i \\ v(t) &= m(t) \cdot E \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} i_E \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(t) & 0 \\ 0 & m(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ E \end{pmatrix}$$

I.3. **Modes en commandes.**

I.3.1. **Commandes à fréquence fixe.**

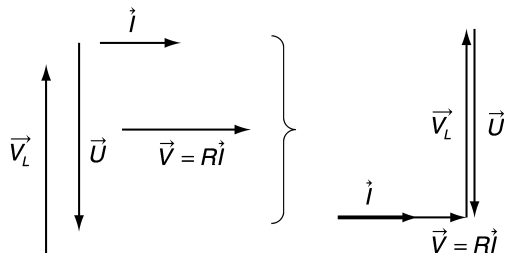
- I.3.1.1. Voir graphes sur le document réponse DR I 3.1.1. (cf. page ci-contre) l'amplitude du fondamental de $v(t)$ a pour valeur : $\hat{V}_{fond} = \frac{4E}{\pi} \cos \alpha$ avec :

$$\alpha = \frac{1}{2} \omega_c \cdot \left(\frac{T_C}{2} - \Delta t \right) = \frac{\pi}{6} \quad \text{soit: } \hat{V}_{fond} = 1,1 E$$



DR I 3-1-1

I.3.1.2. La loi des mailles $v = u + v_L + R_i$ se traduit vectoriellement par un diagramme de Fresnel : $\vec{V} = \vec{U} + \vec{V}_L + R\vec{i}$, associé aux grandeurs fondamentales.



- I.3.1.3. La puissance transmise à la charge a pour valeur $P = RI^2$
 I : valeur efficace de i , ce dernier étant assimilé à son fondamental i_f , la puissance $P = RI_f^2$.

Or $I_f = \frac{V_f}{R}$, d'où $P = \frac{V_f^2}{R}$; la puissance transmise à la charge est contrôlée par la valeur efficace du fondamental de $v(t)$. Le réglage est effectué par le décalage Δt des commandes des cellules A et B.

$$V_f = \frac{\hat{V}_f}{\sqrt{2}} = \frac{4E}{\pi\sqrt{2}} \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E \cdot \cos \frac{1}{2} (\pi - \omega_0 \Delta t)$$

I.3.1.4.
$$P = \frac{V_f^2}{R} = \frac{8E^2}{\pi^2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_0 \Delta t}{2} \right) \quad \text{soit: } \boxed{P = \frac{8E^2}{\pi^2} \sin^2 \frac{\omega_0 \Delta t}{2}}$$

$$P = P_{\max} \quad \text{si: } \Delta t = \frac{T_c}{2}$$

I.3.2. **Décalage constant entre les commandes des cellules.**

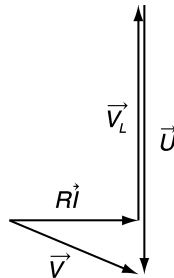
- I.3.2.1. Voir graphes sur le document réponse DR I 3-2-1 (cf. page ci-contre).

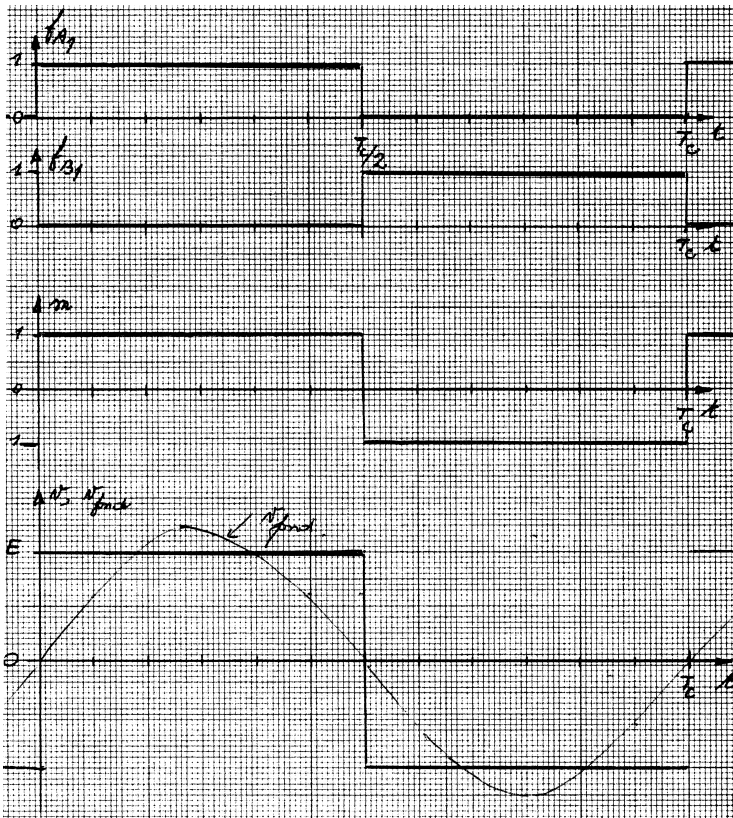
L'amplitude \hat{V}_f du fondamental de la tension $v(t)$ a pour valeur $\frac{4E}{\pi} = 1,27 E$.

- I.3.2.2. Diagrammes de FRESNEL appliqués aux grandeurs fondamentales.

a) Si $f_c = 0,9 f_0$:
$$L\omega_c \hat{I}_f < \hat{I}_f \frac{1}{l\omega_c}$$

le circuit présente un comportement **capacitif** : le courant est en avance sur la tension v .

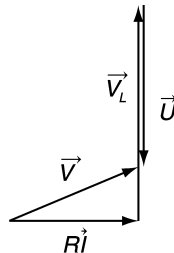




DR1 3-2-1

b) Si $f_C = 1,1 f_0$: $L\omega_C \hat{I}_f > \hat{I}_f \frac{1}{\omega_C}$

le circuit présente un comportement inductif : le courant est en retard sur la tension.



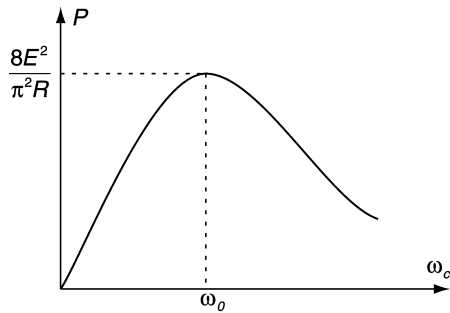
$$\text{I.3.2.3. } P = RI_f^2 \quad I_f = \frac{V_f}{Z(\omega_c)} = \frac{V_f}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_c - \frac{1}{C\omega_c}\right)^2}}$$

$$\text{avec : } V_f = \frac{4E}{\pi\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}E}{\pi}$$

$$\text{d'où : } P = \frac{8E^2}{\pi^2} \frac{R}{R^2 + \left(L\omega_c - \frac{1}{C\omega_c}\right)^2}$$

La grandeur de réglage de la puissance est la pulsation ω_c .

I.3.2.4.



DEUXIÈME PARTIE ALIMENTATION D'UN TUBE À RAYONS X PAR CONVERTISSEUR À RÉSONANCE

ÉTUDE EN RÉGIME ÉTABLI.

- II.1. Si $i > 0$, d_1 et d_4 conduisent $u_{CD} = V_2$.
Si $i < 0$, d_2 et d_3 conduisent $u_{CD} = -V_2$.

Le convertisseur à diodes se comporte entre les points C et D comme une source de tension, e_2 , contrôlée par le signe de i : $e_2(t) = V_2 \cdot (sg[i])$.

$$\text{II.2. } i(t) = I_M \sin \omega_c (t - \theta)$$

- II.2.1. Le courant $i(t)$, assimilé à un courant sinusoïdal, est de même période T_c que la source $e_1(t)$; la puissance fournie par cette source ne dépend que du fondamental $e_{1f}(t)$ et de $i(t)$.

$$e_{1f}(t) = \frac{4E}{\pi} \sin \omega_C t \quad \text{d'où} : P_1 = \left(\frac{4E}{\pi \sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{I_M}{\sqrt{2}} \right) \cos \omega_C \theta = \frac{2}{\pi} E I_M \cos \omega_C \theta$$

II.2.2. Le courant $i(t)$ est de même période T_C que la source $e_2(t)$. La puissance reçue par cette source n'est fonction que de son fondamental et de i :

$$P_2 = \left(\frac{4V_2}{\pi \sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{I_M}{\sqrt{2}} \right)$$

(le courant $i(t)$ est en phase avec le fondamental $e_{2f}(t)$ et $e_2(t)$), soit :

$$P_2 = \frac{2}{\pi} V_2 I_M$$

II.2.3. Les pertes étant négligées, la puissance fournie par la source e_1 est égalé à la puissance reçue par la source e_2 . Cette égalité permet d'établir la relation entre les amplitudes de e_1 et e_2 :

$$\underline{E \cos \omega_C \theta = V_2}$$

II.2.4. En continuant à raisonner sur les puissances, on peut écrire l'égalité entre la puissance reçue par la source e_2 et celle fournie à la charge (source de courant I_2).

$$\frac{2}{\pi} V_2 I_M = V_2 I_2 \quad \text{d'où} : \underline{I_M = \frac{\pi}{2} I_2}$$

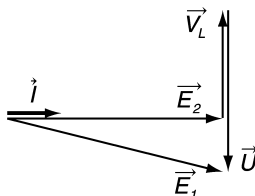
II.3. Modèle d'étude en régime établi : calcul appliqué au fondamental des grandeurs.

II.3.1. La puissance reçue par la charge entre les points C et D ne dépend que du fondamental e_{2f} de e_2 et de i ; d'autre part ces deux grandeurs sont en phase. On peut déterminer la résonance équivalente, à placer entre C et D , qui dissiperait la même puissance.

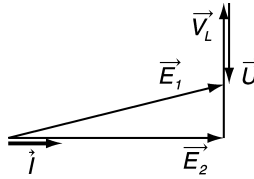
$$P_2 = E_{2f \text{ efficace}} \cdot I_{\text{eff}} = R_{eq} I_{\text{eff}}^2 \quad \text{avec} : \begin{cases} E_{2f \text{ eff}} = \frac{4V_2}{\pi \sqrt{2}} \\ I_{\text{eff}} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} I_2 \end{cases}$$

II.3.2. Diagrammes vectoriels associés aux grandeurs fondamentales

a) $f_C < f_0$ le système R_{eq}, L, C présente un comportement **capacitif**.



b) $f_0 < f_C$ le système R_{eq}, L, C présente un comportement **inductif**.



II.3.3. Calcul de V_2 :

$$E_{1_{f_M}}^2 = E_{2_{f_M}}^2 + \left(U_{f_M} - V_{2_{f_M}} \right)^2 \quad \text{avec : } \begin{cases} E_{1_{f_M}} = \frac{4E}{\pi} & E_{2_{f_M}} = \frac{4V_2}{\pi} \\ U_{f_M} = \frac{I_M}{C\omega_C} & V_{L_{f_M}} = L\omega_C \cdot I_M \end{cases}$$

soit : $V_2 = \sqrt{E^2 - \left(\frac{\pi^2}{8} I_2 \sqrt{\frac{L}{C}} g(f_C) \right)^2}$ avec : $g(f_C) = \frac{f_C}{f_0} - \frac{f_0}{f_C}$

III.3.4.1. La fréquence de commande f_C constitue la grandeur de réglage de V_2 ; la valeur maximale de V_2 est obtenue pour $f_C = f_0$ soit : $V_{2_{\max}} = E$.

III.3.4.2.

f_C	$0,9 f_0$	$0,95 f_0$	f_0	$1,1 f_0$	$1,15 f_0$
$V_{2(V)}$	460	506	520	472	409

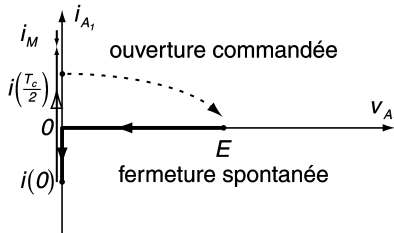
II.4. Synthèse des interrupteurs des cellules de commutation.

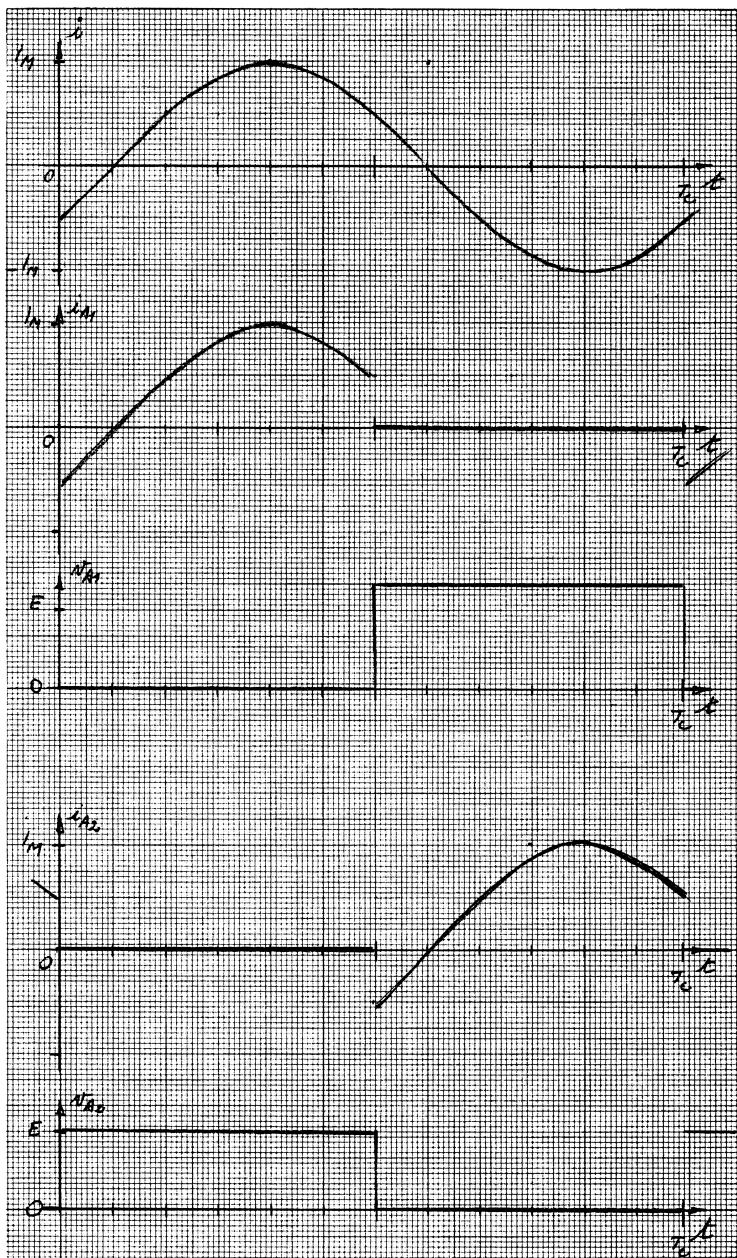
II.4.1. Régime hyperrésonnant.

II.4.1.1. Voir graphes sur le document réponse DR II 4-1-1 (cf. page ci-contre)

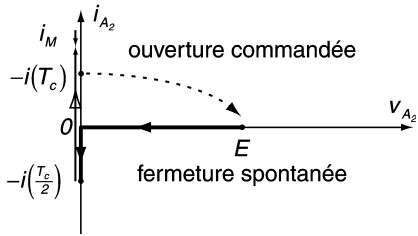
$$\begin{aligned} i_{A_1} &= i \text{ pour } 0 < t < T_{C/2} & i_{A_1} &= 0 \text{ pour } T_{C/2} < t < T_C \\ i_{A_2} &= 0 \text{ pour } 0 < t < T_{C/2} & i_{A_2} &= i \text{ pour } T_{C/2} < t < T_C \end{aligned}$$

II.4.1.2. Trajets des points de fonctionnement des interrupteurs K_{A1} et K_{A2} .





DR II 4-1-1



Interrupteurs bidirectionnels en courant, unidirectionnels en tension.

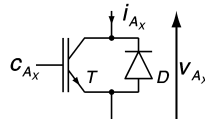
II.4.1.3. Un changement d'état est **spontané** si le point de fonctionnement évolue d'un demi-axe tension (respectivement courant) vers un demi-axe courant (respectivement tension) de **signe opposé** ; c'est le cas ici pour la **fermeture** des interrupteurs.

Lorsque les deux demi-axes sont de mêmes signes, le changement d'état est **commandé** ; c'est le cas ici pour l'**ouverture**.

II.4.1.4. Chaque interrupteur est constitué de l'association de deux composants réalisant les fonctionnalités **diode** (fermeture spontanée) et **transistor** (ouverture commandée).

Les caractéristiques statiques de ces composants possédant le demi-axe tension en commun, ils seront associés en parallèle.

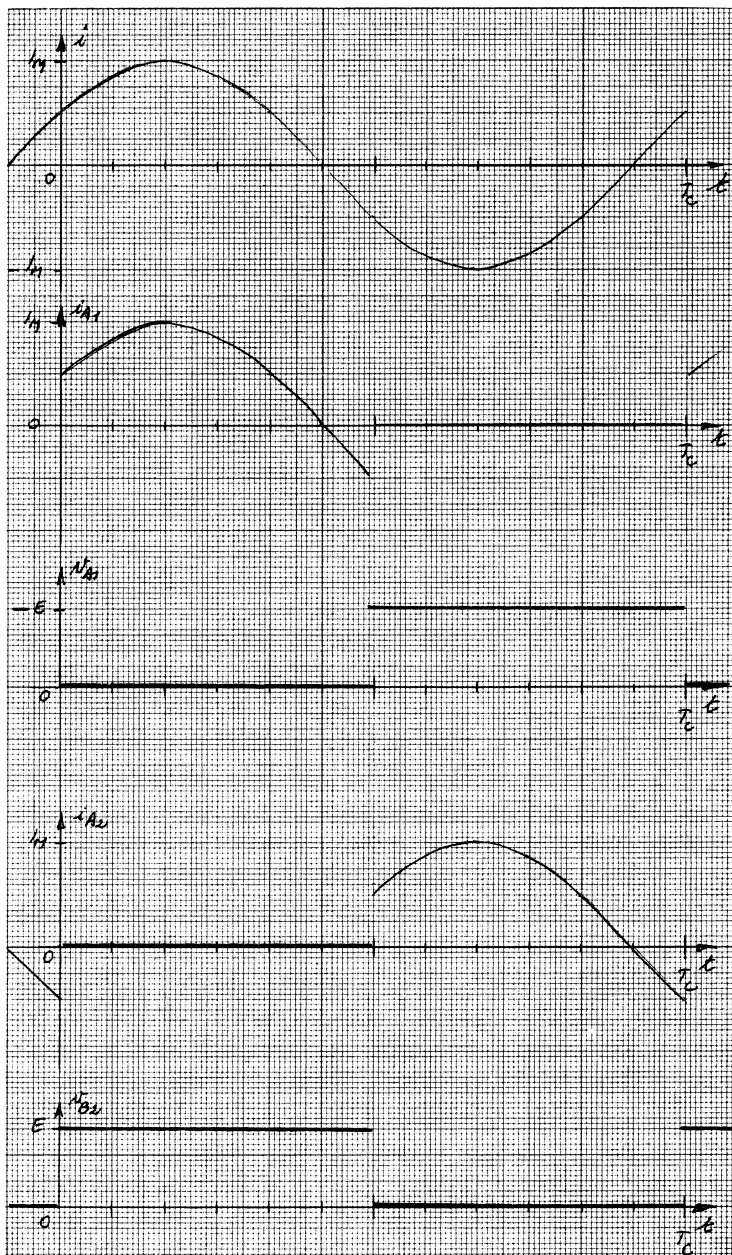
Notons que la commande à la conduction de l'élément transistor T doit être activée dès la mise en conduction de D .



La fonction transistor peut être assurée par divers composants (bipolaires, MOS, IGBT...), pour le cas étudié le transistor IGBT est adapté.

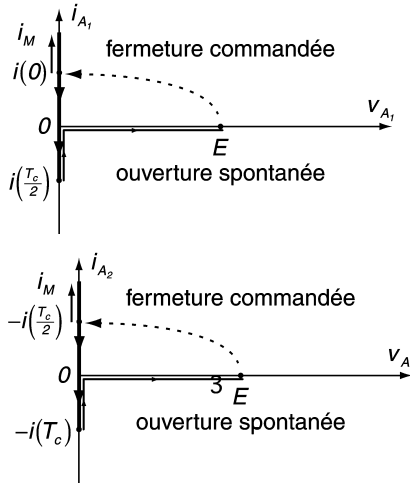
II.4.2. Régime hyporésonnant.

II.4.2.1. Voir les graphes sur le document réponse DR II 4-2-1 (cf. page ci-contre)



DR II 4-2-1

II.4.2.2. Trajets des points de fonctionnements des interrupteurs K_{A1} et K_{A2} .



Interrupteurs bidirectionnels en courant et unidirectionnels en tension.

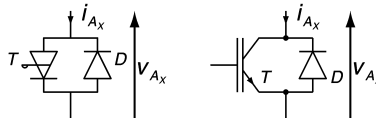
II.4.2.3. Les ouvertures sont spontanées : les points de fonctionnement passent du demi-axe courant négatif, en demi-axe tension positif.

Les fermetures sont commandées : les points de fonctionnement passent du demi-axe tension positif, au demi-axe courant positif.

II.4.2.4. Les interrupteurs sont à nouveau constitués de l'association de deux composants, en parallèles puisque les caractéristiques statiques possèdent le demi-axe tension en commun.

L'ouverture spontanée correspond à la fonctionnalité d'une diode au blocage. La fermeture commandée correspond à la fonctionnalité d'un thyristor ou d'un transistor.

Deux solutions sont donc possibles :

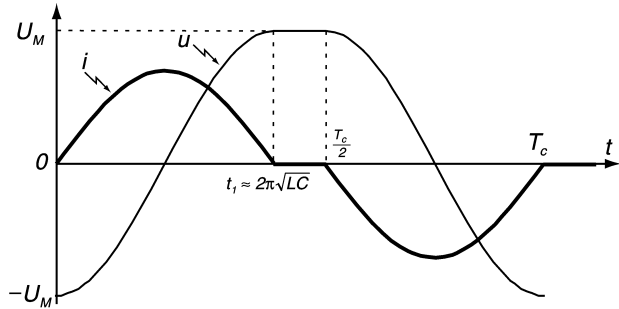


♦ *Note importante*

Pour l'étude proposée, seule **la solution transistor-diode** peut assurer le fonctionnement du convertisseur à une **fréquence de 50 kHz** ; dans ce cas le transistor fonctionne en « mode thyristor »

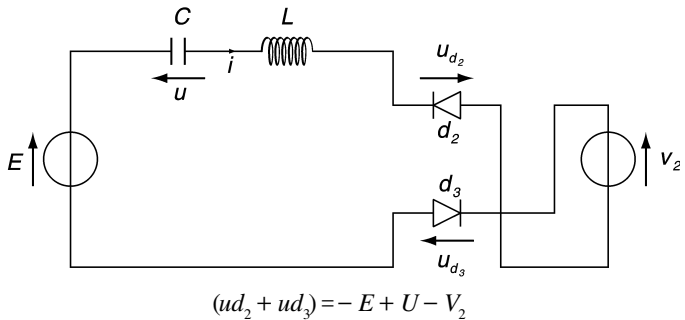
II.5. Approche de dimensionnement des éléments du circuit L-C en régime hypo-résonant.

II.5.1.



II.5.2. $0 < t < t_1$ les diodes d_1 et d_4 conduisent à l'instant t_1 , le courant i s'annule, les diodes se bloquent (courant nul) ;

Après l'instant t_1 , le schéma équivalent du montage est représenté sur la figure ci-dessous.



$$(u_{d_2} + u_{d_3}) = -E + U - V_2$$

Ci-dessus se trouve représenté le schéma équivalent après l'instant t_1 ; les diodes sont bloquées si $(u_{d_2} + u_{d_3}) < 0$.

Soit :

$$u < E + V_2$$

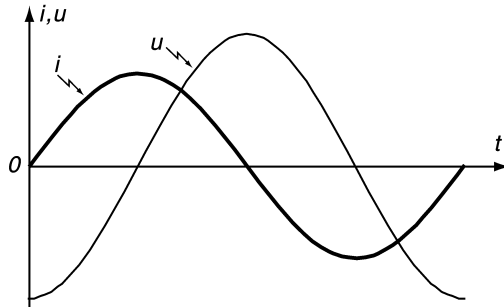
II.5.3. La conduction interrompue sera observée si $U_M > E + V_2$.

II.5.4.

$$i = C \frac{du}{dt} \quad i(t') \approx I_M \sin \omega_c t' \quad u(t') \approx \frac{I_M}{C\omega_2} \cdot \sin\left(\omega_c t' - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_M = \frac{I_M}{C\omega_c} \quad \text{or : } I_M = \frac{\pi}{2} I_2$$

$$U_M \approx \frac{\pi}{2} \frac{I_2}{C\omega_c}$$



$$\text{II.5.5.} \quad f_0 = 52 \text{ kHz} \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad LC = 9,4 \cdot 10^{-12} \left\{ \begin{array}{l} C = 416 \text{ nF} \\ L = 22,5 \mu\text{F} \end{array} \right. \quad \omega_c = 2\pi f_c = 3,14 \cdot 10^5$$

TROISIÈME PARTIE ÉTUDE DU TRANSFORMATEUR

Modélisation dans l'hypothèse de fonctionnement linéaire.

III.1. Pour un couplage parfait $M^2 = L_p L_s$ ce qui se traduit par un coefficient $\sigma = 0$.

Lorsque le couplage est imparfait $M^2 < L_p L_s$; le coefficient de dispersion est alors non nul : $0 < \sigma < 1$.

III.2. Le respect des orientations précisées sur le schéma de la figure III-1 permet d'écrire :

$$v_p(t) = + \frac{d\phi_p(t)}{dt} = L_p \frac{di_p(t)}{dt} - M \frac{di_s(t)}{dt} \tag{E_1}$$

$$v_s(t) = + \frac{d\phi_s(t)}{dt} = M \frac{di_p(t)}{dt} - L_s \frac{di_s(t)}{dt} \tag{E_2}$$

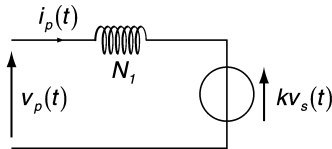
Modèle du transformateur aux fuites totalisées au primaire.

III.3. De l'équation (E₂) on tire : $\frac{di_s(t)}{dt} = - \frac{v_s(t)}{L_s} + \frac{M}{L_s} \frac{di_p(t)}{dt}$ expression que l'on reporte dans l'équation (E₁) ; d'où :

$$v_p(t) = L_p \left(1 - \frac{M^2}{L_p L_s} \right) \frac{di_p(t)}{dt} + \frac{M}{L_s} N_s = N_I \frac{di_p(t)}{dt} + kv_3(t) \tag{E_3}$$

$$N_I = \sigma L_p \quad \text{et} \quad K = \frac{M}{L_s}$$

Le schéma ci-dessous traduit l'équation (E₃).

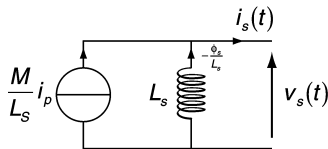


III.4. Au secondaire $\phi_s(t) = Mi_p(t) - L_s i_s(t)$ d'où :

$$i_s = \frac{M}{L_s} i_p(t) - \frac{\phi_s(t)}{L_s} \tag{E_4}$$

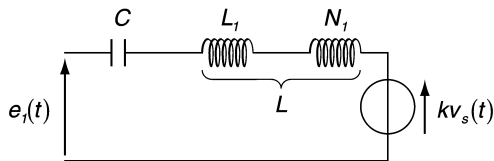
Le schéma ci-dessous traduit cette équation (E₄) :

$$v_s(t) = -L_s \frac{d}{dt} \left[-\frac{\phi_s(t)}{L_s} \right] = + \frac{d\phi_s(t)}{dt}$$



III.5. *Modèle au primaire.*

Le modèle ci-dessous est identique à celui qui est représenté sur la figure II 1 pour lequel $KN_B = e_2$.



Ce modèle fait abstraction des résistances des enroulements qui ont été négligées.

Modèle au secondaire.

En négligeant le courant magnétisant $\frac{\phi_s}{L_s}$ on retrouve le modèle utilisé dans la seconde partie L_s : le pont de diodes est alimenté par la source de courant $[Ki_p]$.

CAPES de sciences physiques

Concours interne

SECTIONS PHYSIQUE ET CHIMIE - PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition de physique - Session : 2000

Partie A

A.I

A.I.1 $f=k\Delta l$ pour une corde inextensible $\Delta l = 0$ et ceci $\forall f \Rightarrow k \rightarrow \infty$

A.I.2 $E_p = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$ La force qui s'exerce sur le ressort F a pour expression $\vec{F} = k(l-l_0)\vec{e}_l$

Le travail élémentaire de cette force s'écrit $\vec{F} \cdot d\vec{l} = -k(l-l_0)dl = \delta W = -dE_p$

L'énergie potentielle a alors pour forme $dE_p = k(l-l_0)dl$ soit en intégrant

$$E_p = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$

A.I.3 L'énergie est une grandeur extensive.

A.I.4 $mg = 2k(l-l_0)\sin\theta$ avec $l = \frac{d}{2\cos\theta} = 0,938m$

$$k = \frac{mg}{2\sin\theta\left(\frac{d}{2\cos\theta} - l_0\right)} = 1684 \text{ N.m}^{-1}$$

A.II

A.II.1 $\Delta E_c + \Delta E_p + \Delta E_{mg} = 0$ mais ΔE_{mg} est négligeable $\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = -k\left(\frac{d}{2} - l_0\right)^2 + k(l-l_0)^2$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{m} \left(-\left(\frac{d}{2} - l_0\right)^2 + (l-l_0)^2 \right)}$$

Application numérique : $v_0 = 51,39 \text{ ms}^{-1}$

A.II.2.1 $mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}$ Application numérique : $h = 134,6m$

A.II.2.2 $g = G \frac{M_T}{R_2^2} \Rightarrow g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$ et

$$g(h) = G \frac{M_T}{(R_T+h)^2} = \frac{GM_T}{R_T^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2} \approx g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R_T}\right)$$

La précision est de $3,54 \cdot 10^{-4}\%$.

A.II.3.1 Grâce à un système de visée à l'infini (lunette) munis de réticules, on mesure deux angles de droites dont on fait l'intersection.

A.II.3.2 $m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg_0 - \lambda \frac{dz}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = v_{lim} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } v_{lim} = \frac{-mg_0}{\lambda} \quad \text{et } \tau = \frac{m}{\lambda}$$

A.II.3.3 A la retombée, la vitesse limite est obtenue pour une accélération nulle soit $v_{lim} = \frac{-mg_0}{\lambda}$

A.II.3.4 $z = v_{lim}t + \tau(v_0 - v_{lim})(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

A.II.3.5 L'altitude maximale est atteinte pour $v=0$, l'instant correspondant sera noté t_{\max} .

$$v(t_{\max})=0 \Rightarrow e^{-\frac{t_{\max}}{\tau}} = \frac{v_{\text{lim}}}{v_{\text{lim}} - v_0}$$

$$h_m = z_{\max} = v_{\text{lim}} t_{\max} + \tau v_0$$

Application numérique : $v_{\text{lim}} = -34 \text{ms}^{-1}$ $h_m = 69,5 \text{m}$

$$\text{A.II.3.6 } W_i = \int \delta W_{i,x} = \int -\lambda v dz = \int -\lambda v v dt < 0$$

Le travail fourni se transforme en échauffement de la pointe de la flèche et de l'air.

$$\text{A.II.3. } W_i = \Delta E_c + \Delta E_p = -\frac{1}{2} m v_0^2 + m g_0 (h_m - 0)$$

A.III.

$$\text{A.III.1 } m_c \frac{d^2 z_c}{dt^2} = -k2(l-l_0) \sin \theta \quad (1) \quad z_c \ll \frac{d}{2} \quad \text{et} \quad l \cong \frac{d}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cong \frac{z_c}{\frac{d}{2}}$$

$$\Rightarrow m_c \frac{d^2 z_c}{dt^2} = -2k \left(\frac{d}{2} - l_0 \right) \frac{z_c}{\frac{d}{2}} \Leftrightarrow m_c \frac{d^2 z_c}{dt^2} = -2k \left(1 - 2 \frac{l_0}{d} \right) z_c$$

$$\text{A.III.2 L'équation (1) s'écrit en réalité } m_c \frac{d^2 z_c}{dt^2} = -2k(l-l_0) \sin \theta - m_c g$$

$$\text{Dans la position maximale } \sin \theta = -\frac{m_c g}{2k(l-l_0)} \ll 1$$

Les oscillations étant très petites on a $\theta \approx 0$

$$m_c g = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 = 9,81 \cdot 10^{-2} \text{N}$$

$$\text{Et } 2k(l-l_0) = 2 \cdot 2000 \cdot (0,85 - 0,80) = 200 \text{N}$$

La condition est vérifiée.

$$\text{A.III.3 } m_c \frac{d^2 z_c}{dt^2} = -2k \left(1 - 2 \frac{l_0}{d} \right) z_c \Rightarrow \frac{d^2 z_c}{dt^2} = -2 \frac{k}{m_c} \left(1 - 2 \frac{l_0}{d} \right) z_c \quad \text{C'est l'équation différentielle}$$

$$\text{caractéristique d'un mouvement sinusoïdal avec } \omega_0^2 = \frac{2k}{m_c} \left(1 - 2 \frac{l_0}{d} \right)$$

Il faut noter que $2l_0 = 160 \text{cm}$ et $d = 170 \text{cm}$ ce qui assure que $\omega_0^2 > 0$

Application numérique : $\omega_0 = 153,4 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ soit $f = 24 \text{Hz}$

A.III.4.1 La corde vibre à une fréquence qui est à la limite du domaine de l'audible (24Hz). Il resterait à déterminer la puissance pour savoir si la vibration est réellement audible.

A.III.4.2 Le système dissipe une énergie puisqu'il émet une onde sonore. Il provoque donc un amortissement du mouvement que l'on pourrait déterminer à partir d'un bilan énergétique.

A.III.4.3 Si la vibration est émise de manière isotrope, elle a même intensité sur tous les points d'une sphère centrée sur la source placée en O. La puissance transmise est alors constante sur cette sphère.

$$S \times 4\pi r^2 = \text{cste} \quad S \text{ étant le vecteur de Poynting.}$$

L'intensité du vecteur de Poynting décroît comme l'inverse du carré de la distance.

Partie B**B. Mesure de la vitesse de départ de la flèche****B.I Méthode balistique.**

B.I.1.1 Au cours d'un choc élastique, il y a conservation de la quantité de mouvement totale et de l'énergie cinétique.

B.I.1.2 Au cours d'un choc inélastique, il y a conservation de la quantité de mouvement mais pas de conservation de l'énergie cinétique.

B.I.1.3 Le choc entre la flèche et le bloc de plomb est inélastique.

B.I.2 Lors du choc, il y a conservation de la quantité de mouvement : $(m_p+m)v = mv_0$

B.I.3 En écrivant la conservation de l'énergie mécanique

$$\frac{1}{2}K\Delta l^2 = \frac{1}{2}(m_p+m)v^2$$

$$K\Delta l^2 = v_0^2 \frac{m^2}{m_p+m} \Rightarrow v_0 = \sqrt{K\Delta l^2 \frac{m_p+m}{m^2}} = \frac{\Delta l}{m} \sqrt{K(m_p+m)}$$

Application numérique : $v_0 = 55 \text{ms}^{-1}$

B.I.4 Au cours du choc, il n'y a pas de conservation de l'énergie cinétique. Le choc provoque une variation de la température du bloc. La quantité de chaleur reçue par le bloc ($C\Delta T$) est égale à la variation d'énergie cinétique.

$$C\Delta T = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(m+m_p)v^2$$

B.II Méthode Doppler

B.II.1 Par exemple, le bruit d'une moto ou la sirène d'une voiture. Le son paraît plus aigu quand l'élément s'approche et plus grave quand il s'éloigne.

B.II.2.1 $\Delta t = T - Tv/c$ si la source se rapproche

$\Delta t = T + Tv/c$ si la source s'éloigne

B.II.2.2 $v_r = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{T - T\frac{v}{c}} \cong \frac{1}{T} (1 + \frac{v}{c})$ approximation du premier ordre avec $v \ll c$

On obtient $v_r = v_e (1 + \frac{v}{c})$

B.II.2.3 De même, on obtiendra quand la source s'éloigne du détecteur la relation approchée

$$\text{suivante : } v_r = v_e (1 - \frac{v}{c})$$

B.II.2.4.1 Si la source est fixe, $v=0$, la fréquence reçue est égale à la fréquence émise, le signal n'est pas déformé. Si un signal carré est émis, le récepteur recevra un signal carré. Toutes les harmoniques constituant le signal carré seront transmises sans déformation et le signal reconstitué sera bien le même signal carré. L'air n'est pas dispersif pour les ondes acoustiques.

B.II.2.4.2 Si la source est mobile, les fréquences reçues sont modifiées et subissent une homothétie de rapport $1+v/c$ ou $1-v/c$ par rapport aux fréquences émises. Ainsi, si l'on décompose un signal, toutes les harmoniques subiront la même homothétie, la décomposition spectrale sera translatée la forme sera inchangée. Si l'impulsion émise est carrée, l'impulsion reçue le sera aussi.

B.II.3.1 Les spectres se situent dans la bande des fréquences audibles.

B.II.3.2 Dans cette mesure, la source flèche s'approche du détecteur b et s'éloigne du détecteur a.

$$v_{ra} = v_e (1 - \frac{v}{c}) \text{ et } v_{rb} = v_e (1 + \frac{v}{c}) \Rightarrow v = \frac{v_{rb} - v_{ra}}{v_{rb} + v_{ra}} c$$

Application numérique : $v = 45,5 \text{ms}^{-1}$

Partie C

C.1 Action du multiplieur

C.1.1 α est homogène à l'inverse d'une tension V^{-1}

Dans les multiplieurs courants, α est de l'ordre de 0,1

C.1.2 $u_M(t) = \alpha U U_0 \cos(\omega_u t + \varphi_u) \cos \omega t = \frac{1}{2} \alpha U U_0 (\cos((\omega + \omega_u)t + \varphi_u) + \cos((\omega - \omega_u)t - \varphi_u))$

$u_M(t)$ est la somme de deux fonctions sinusoïdales de même amplitude $1/2 \alpha U U_0$ et de pulsation respective $\omega_1 = \omega - \omega_u$ et $\omega_2 = \omega + \omega_u$

C.2 Action du filtre passe-bande

C.2.1 L'expression générale de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande alimenté par un tension sinusoïdale de pulsation ω s'exprime sous la forme
$$H = \frac{A}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

La formule donnée ici est générale. Il faut l'appliquer au signal d'entrée $u_M(t)$ qui n'est pas de pulsation ω .

C.2.2 u_p est maximale pour $\omega = \omega_0$ Or ici, $u_M(t)$ est la somme de deux fonctions up sera maximale pour les deux pulsations ω_1 et ω_2 .

$\omega_1 = \omega_0$ et $\omega_2 = \omega_0$

$\omega(t) = \omega_0 + \omega_u$ et $\omega(t) = \omega_0 - \omega_u$

C.2.3 Il y aura deux spectres symétriques par rapport à 20000Hz

C.2.4 Il y aura un seul spectre inversé. Ce qui obligera à avoir T_0 très grand pour la partie basse fréquence du signal.

C.3 Détecteur de crêtes

C.3.1.1 La diode est passante si $u_p \geq u_c$ et $i > 0$. Lorsque la diode est passante $u_d = 0$ et $u_p = u_c$

C.3.1.2 La tension $u_p(t) = V_0 \cos(\omega_0 t)$.

Quand la diode conduit : $i(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega_0 t$ et $i_c = C \frac{du_p}{dt} = -C \omega_0 V_0 \sin \omega_0 t$

Le courant total s'écrira : $i(t) = V_0 \left(\frac{\cos \omega_0 t}{R} - C \omega_0 \sin \omega_0 t \right)$

Les grandeurs n'étant pas sinusoïdales, le calcul de φ ne peut être fait en complexe qu'en utilisant le premier harmonique ω_0

$i_1(t) = i_{c1}(t) + i_{r1}(t)$ en notation complexe, on a

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{r1} + \underline{I}_{c1} = \frac{U_{p1}}{R} + jC \omega_0 U_{p1} \text{ et } \tan \varphi = RC \omega_0$$

$$i_1(t) = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

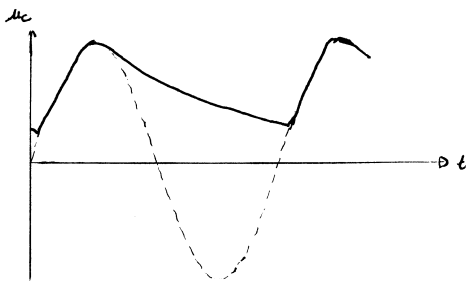
C.3.2 Le blocage aura lieu pour $i(t) = 0$, donc pour $\cos \omega_0 t_B = RC \omega_0 \sin \omega_0 t_B$ soit

$$\tan \omega_0 t_B = \frac{1}{RC \omega_0} = \frac{1}{\tan \varphi}$$

C.3.3 C'est une exponentielle décroissante

C.3.4 Il faut $\tau \gg \frac{2R}{\omega_0}$ On prendra $\tau \approx 10 \frac{2\pi}{\omega_0}$ soit $RC = 510^{-4}$ s

C.3.5

**C.4 Traceur**C.4.1 L'oscilloscope doit être déclenché sur la rampe de période T_0 C.4.2 $T_0 = 1\text{ s}$ Il faut une base de temps de $0,1\text{ s/carreau}$ **C.5 Résolution de l'analyseur de spectre**

C.5.1 L'écart minimal correspondra à une largeur du spot.

$$\Delta f = \frac{0,5 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-11}} \times 20000 = 100\text{ Hz}$$

C.5.2 Il ne faut pas que τ soit trop grand pour ne pas détecter la descente de la tension du détecteur de crêtes.On prendra $\tau \ll 1/100$ par exemple $\tau < 10^{-3}\text{ s}$ C.5.3.1 Il faut que la bande passante $\Delta f = f_0/Q < 100\text{ Hz}$

C.5.3.1.1 La tension devra être prise aux bornes de la résistance.

C.5.3.2.2 Pour un filtre RLC $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ Application numérique : $R = 62,8\Omega$ et $C = 6,34 \cdot 10^{-10}\text{ F}$

C.5.3.3 En prenant comme variable la charge du condensateur, on trouve l'équation différentielle du deuxième ordre

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0 \quad \ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

La solution du régime transitoire est en $e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_1 t + \varphi)$ avec $\tau = \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^{-1}$ Le temps du régime transitoire est $\tau' = 3,18 \cdot 10^{-3}\text{ s}$. Ce temps est un peu court, il faudra prendre un T_0 plus grand.**C.6 Problème de repliement du spectre**

C.6.1 Les harmoniques pairs ont la même moyenne sur chaque demi-période, ils n'apparaissent donc pas dans la décomposition du signal carré (symétrie de glissement).

C.6.2 Un signal triangulaire est l'intégrale du carré ; les harmoniques pairs seront donc absents dans la décomposition. Les amplitudes seront en $1/n^2$ C.6.3.1 $f_u = 1600\text{ Hz}$ C.6.3.2 En modulant entre 20000 Hz et 40000 Hz , on détecte ω_u tel que $\omega_0 = w(t) - w_u$ mais on détecte aussi ω_u tel que $\omega_0 = \omega_u - w(t)$ pour $\omega_u > 20000\text{ Hz}$ on assiste à un repliement du spectre.

Partie D

D.1 1997

D.2 La températureD.2.1 $E_c = 3/2 kT$ D.2.2 $\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT$ $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx 515 \text{ms}^{-1}$ D.2.3 $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_v$ ou encore $T = 273 + t$ t en °C ou bien $T = pV/nR$ pour un gaz parfait**D.3 Le photon et la matière**D.3.1 $E_\nu = h\nu$

D.3.2 En 1887, Hertz découvre l'effet photoélectrique : un faisceau lumineux monochromatique frappe un métal peut en arracher des électrons. Le faisceau lumineux doit avoir une longueur d'onde inférieure à une valeur limite qui dépend de la nature du métal.

En 1905 Einstein propose l'interprétation des photons. Tous les photons d'une lumière monochromatique de fréquence donnée ont le même quantum d'énergie.

D.3.3 Sa quantité de mouvement : $p = h\nu/c$ **D.4 Le temps**

D.4.1 9 milliards (plus précisément 9 192 631 770) périodes de la radiation hyperfine de l'état fondamental du Césium 133

D.4.2 La terre est âgée de 4 à 5 milliards d'années soit 4×10^9 ans
30 millions d'années représente $7.5 \cdot 10^3$ age de la terreD.5 $\lambda = h/p$

CAPES de sciences physiques

Concours interne

SECTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition d'électricité appliquée - Session : 2000

ELECTRONIQUE - SOLUTION.

Le problème comporte deux parties indépendantes. Il s'intéresse successivement:

- à l'étude d'un multiplieur intégré;
- à l'étude du traitement d'un signal de mesure.

1- ETUDE D'UN MULTIPLIEUR INTEGRE.

1.1. OPERATEUR DE MULTIPLICATION.

1.1.1 - Calcul de la constante K.

$$K = u_S / u_1 u_2 \quad K = 0,1 \text{ V}^{-1}$$

1.1.2 - Caractéristique de transfert d'un multiplieur quatre quadrants.

$u_S = (K u_2) u_1$; relation linéaire en u_1 . Exemple: $u_2 = 10 \text{ V}$; $K u_2 = 1$; $u_S = u_1$
Voir document réponse 1.

1.1.3 - Erreur de linéarité.

Voir document réponse 1 pour la définition de $\Delta u_{S\text{max}}$.

$$\Delta u_{S\text{max}} = e_L U_{S\text{max}} \quad \Delta u_{S\text{max}} = 10 \text{ mV.}$$

1.1.4 - Calcul de l'intensité i_E .

Circuit d'entrée:

$$u_1 = R_E i_E + u_2 \quad i_E = (u_1 - u_2) / R_E \quad i_E = 1,5 \mu\text{A.}$$

Circuit de sortie:

La résistance R_S est négligeable devant la résistance r_O .

$$u_V = [r_2 / (r_1 + r_2)] K u_1 u_2; \quad r_O = r_1 + r_2; \quad r_2 = r_O u_V / K u_1 u_2; \quad r_2 = 400 \Omega.$$

1.1.5 - Propriété des transistors bipolaires.

Type du transistor T_n : NPN.

Relation entre les intensités: $i_{En} = i_{Cn} + i_{Bn}$; si $i_{Bn} \ll i_{Cn}$ alors: $i_{En} = i_{Cn}$.

Relations courant - tension: $i_{En} = I_S \exp(\lambda u_{BE_n})$; $u_{BE_n} = (1/\lambda) \ln(i_{En} / I_S)$

Unité S.I. du paramètre λ : $USI(\lambda) = V^{-1}$, car l'argument de l'exponentielle est sans dimension.

Valeur numérique du paramètre λ lorsque $\theta = +20^\circ C$: $\lambda \cong 40 V^{-1}$.

1.2. ETUDE DES COURANTS.

L'étude porte sur le circuit multiplieur intégré présenté figure 5.

Pour chaque transistor T_n , le courant de base est négligé devant le courant de collecteur.

1.2.1 - Expressions des intensités i_1 et i_2 en fonction des intensités I_O et i_X .

La loi des noeuds appliquée en E_7 et E_8 (Fig. 5) conduit aux expressions:

$$i_1 = I_O + i_X \quad ; \quad i_2 = I_O - i_X.$$

1.2.2 - Expressions des grandeurs $(i_3 + i_4)$ et $(i_5 + i_6)$ en fonction des intensités I_O et i_Y .

La loi des noeuds appliquée en C_9 donne la somme $(i_3 + i_4)$, puis appliquée en E_9 elle conduit à l'expression:

$$i_3 + i_4 = I_O + i_Y.$$

Une démarche identique appliquée en C_{10} et E_{10} donne la somme $(i_5 + i_6)$:

$$i_5 + i_6 = I_O - i_Y.$$

1.2.3 - Tensions base-émetteur u_{BE_n} des transistors T_1, T_4, T_3 et T_2 .

L'équation de la maille [T_1, T_4, T_3, T_2] s'écrit:

$$u_{BE1} + u_{BE4} - u_{BE3} - u_{BE2} = 0 \quad ; \quad u_{BE1} + u_{BE4} = u_{BE3} + u_{BE2}$$

Tensions base-émetteur u_{BE_n} des transistors T_1, T_5, T_6 et T_2 .

L'équation de la maille [T_1, T_5, T_6, T_2] s'écrit:

$$u_{BE1} + u_{BE5} - u_{BE6} - u_{BE2} = 0 \quad ; \quad u_{BE1} + u_{BE5} = u_{BE2} + u_{BE6}$$

1.2.4 - Relations entre les intensités.

Pour chaque transistor T_n , on a:

$$i_{En} = I_S \exp(\lambda u_{BE_n}) \quad ; \quad u_{BE_n} = (1/\lambda) \ln(i_{En} / I_S)$$

La somme ($u_{BE1} + u_{BE4}$) vaut alors:

$$(u_{BE1} + u_{BE4}) = (1/\lambda) \ln(i_{E1}/I_S) + (1/\lambda) \ln(i_{E4}/I_S) = (1/\lambda) \ln(i_{E1} i_{E4}/I_S^2)$$

De même pour la somme ($u_2 + u_3$):

$$(u_{BE2} + u_{BE3}) = (1/\lambda) \ln(i_{E2}/I_S) + (1/\lambda) \ln(i_{E3}/I_S) = (1/\lambda) \ln(i_{E2} i_{E3}/I_S^2)$$

$$\text{Or: } u_{BE1} + u_{BE4} = u_{BE3} + u_{BE2}$$

D'où la relation entre les intensités i_1, i_4, i_2 et i_3 :

$$i_1 i_4 = i_2 i_3$$

Un raisonnement identique sur les sommes ($u_1 + u_5$) et ($u_2 + u_6$) conduit au résultat:

$$i_1 i_5 = i_2 i_6$$

1.2.5 - Expression des rapports i_3/i_4 et i_6/i_5 en fonction des intensités I_0 et i_X .

D'après les valeurs de i_1 et i_2 obtenues en 1.2.1 et le résultat précédent on a les relations suivantes:

$$i_3/i_4 = i_1/i_2 \quad \text{et} \quad i_6/i_5 = i_1/i_2$$

$$\frac{i_3}{i_4} = \frac{i_6}{i_5} = \frac{I_0 + i_X}{I_0 - i_X}$$

1.2.6 - Calcul de l'intensité i_3 en fonction des intensités I_0, i_X et i_Y .

Reprenons l'expression de la somme ($i_3 + i_4$) calculée en 1.2.2 et factorisons i_3 .

$$i_3 + i_4 = I_0 + i_Y ; \quad i_3 (1 + i_4/i_3) = I_0 + i_Y$$

Le résultat obtenu en 1.2.5 permet d'exprimer le rapport (i_4/i_3) en fonction des intensités I_0 et i_X d'où l'expression :

$$i_3 = \frac{I_0 + i_Y}{1 + \frac{I_0 - i_X}{I_0 + i_X}}$$

Calcul de l'intensité i_4 en fonction des intensités I_0, i_X et i_Y .

De façon analogue, il vient:

$$i_3 + i_4 = I_0 + i_Y ; \quad i_4 (1 + i_3/i_4) = I_0 + i_Y$$

$$i_4 = \frac{I_0 + i_Y}{1 + \frac{I_0 + i_X}{I_0 - i_X}}$$

Calcul de l'intensité i_5 en fonction des intensités I_0 , i_X et i_Y .

Reprenons l'expression de la somme $(i_5 + i_6)$ calculée en 1.2.2 et factorisons i_5 .

$$i_5 + i_6 = I_0 - i_Y \quad ; \quad i_5 (1 + i_6 / i_5) = I_0 - i_Y$$

Le résultat obtenu en 1.2.5 permet d'exprimer le rapport (i_6 / i_5) en fonction des intensités I_0 et i_Y d'où l'expression :

$$i_5 = \frac{I_0 - i_Y}{1 + \frac{I_0 + i_X}{I_0 - i_X}}$$

Calcul de l'intensité i_4 en fonction des intensités I_0 , i_X et i_Y .

De façon analogue, il vient:

$$i_5 + i_6 = I_0 - i_Y \quad ; \quad i_6 (1 + i_5 / i_6) = I_0 - i_Y$$

$$i_6 = \frac{I_0 - i_Y}{1 + \frac{I_0 - i_X}{I_0 + i_X}}$$

1.2.7- Calcul des intensités j_3 et j_6 en fonction des intensités I_0 , i_X et i_Y .

Calcul de l'intensité j_3 :

La loi des noeuds appliquée en S_1 donne l'expression de j_3 :

$$j_3 = i_3 + i_5$$

Les expressions de i_3 et i_5 calculées en 1.2.6 conduisent à la relation suivante:

$$j_3 = \frac{I_0 + i_Y}{1 + \frac{I_0 - i_X}{I_0 + i_X}} + \frac{I_0 - i_Y}{1 + \frac{I_0 + i_X}{I_0 - i_X}}$$

Après réduction au même dénominateur et simplification on trouve:

$$j_3 = \frac{1}{2I_0} [(I_0 + i_Y)(I_0 + i_X) + (I_0 - i_Y)(I_0 - i_X)]$$

D'où le résultat final après développement et simplification:

$$j_3 = I_0 + \frac{i_X i_Y}{I_0}$$

Calcul de l'intensité j_6 :

La loi des noeuds appliquée en S_2 donne l'expression de j_6 :

$$j_6 = i_4 + i_6$$

Les expressions de i_4 et i_6 calculées en 1.2.6 conduisent à la relation suivante:

$$j_6 = \frac{I_0 + i_Y}{1 + \frac{I_0 + i_X}{I_0 - i_X}} + \frac{I_0 - i_Y}{1 + \frac{I_0 - i_X}{I_0 + i_X}}$$

Après réduction au même dénominateur et simplification on trouve:

$$j_6 = \frac{1}{2I_0} [(I_0 + i_Y)(I_0 - i_X) + (I_0 - i_Y)(I_0 + i_X)]$$

D'où le résultat final après développement et simplification:

$$j_6 = I_0 - \frac{i_X i_Y}{I_0}$$

1.3. ETUDE DES TENSIONS.

1.3.1 - Calcul de la tension différentielle d'entrée $v_X = u_X^+ - u_X^-$ en fonction de R_X et i_X .

Par hypothèse, les transistors T_7 et T_8 sont soumis à la même tension base-émetteur:

$$u_{BE7} = u_{BE8}$$

La loi de la maille [$B_7, M, B_8, E_8, E_7, B_7$] permet d'écrire:

$$u_X^+ - u_X^- + u_{BE8} - R_X i_X - u_{BE7} = 0$$

D'où la relation:

$$v_X = R_X i_X$$

Calcul de la tension différentielle d'entrée $v_Y = u_Y^+ - u_Y^-$ en fonction de R_Y et i_Y .

De même, la loi de la maille [$B_9, M, B_{10}, E_{10}, E_9, B_9$] permet d'écrire:

$$u_Y^+ - u_Y^- + u_{BE10} - R_Y i_Y - u_{BE9} = 0 \quad \text{avec: } u_{BE9} = u_{BE10}$$

D'où la relation:

$$v_Y = R_Y i_Y$$

1.3.2 - Expression de la tension de sortie u_S en fonction de R , j_3 et j_6 .

La loi de la maille de sortie [R, S_1, S_2, R] permet d'écrire:

$$u_S = R(j_3 - j_6)$$

1.3.3- Calcul de la relation: $u_S = K v_X v_Y$.

Reprenons les expressions des intensités j_3 et j_6 , on a:

$$u_S = R \left[\left(I_0 + \frac{i_X i_Y}{I_0} \right) - \left(I_0 - \frac{i_X i_Y}{I_0} \right) \right] \quad ; \quad u_S = \frac{2R}{I_0} i_X i_Y$$

Soit après simplification et compte tenu des expressions de v_X et v_Y , il vient:

$$u_S = \left(\frac{2R}{R_X R_Y I_0} \right) v_X v_Y \quad \text{soit encore: } u_S = K v_X v_Y$$

Expression et unité S.I. de la constante K en fonction de R , R_X , R_Y et I_0 .

$$K = \left(\frac{2R}{R_X R_Y I_0} \right) \quad \text{avec: } \text{USI}(K) = \text{V}^{-1}$$

1.3.4 - Valeur numérique de I_0 :

$$I_0 = 2 \text{ mA}$$

2 - TRAITEMENT D'UN SIGNAL DE MESURE.

2.1. SIGNAL DE MESURE.

2.1.1 - Calcul de la mesure algébrique $E_A(t)$ du vecteur $\vec{E}_A(t)$ en fonction de $\alpha(t)$, ε et E_0 module du vecteur \vec{E}_0 .

$$\vec{E}_A = E_A \vec{u} ; \|\vec{u}\| = 1$$

$$E_A = E_M \cos \beta ; \quad \beta = \theta - \varepsilon ; \quad \theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$E_A = E_0 \cos\left(\alpha - \varepsilon + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_A(t) = - E_0 \sin[\alpha(t) - \varepsilon]$$

2.1.2 - Calcul de l'intensité lumineuse $J(t)$.

L'intensité lumineuse $J(t)$, reçue par la cellule C, est proportionnelle au carré de l'amplitude de la vibration lumineuse: $J(t) = k_1 |E_A(t)|^2$.

$$J(t) = k_1 E_0^2 \sin^2[\alpha(t) - \varepsilon]$$

$$\alpha(t) = k_2 i(t) = k_2 I_M \sin(\omega_M t)$$

$$J(t) = k_1 E_0^2 \sin^2[k_2 I_M \sin(\omega_M t) - \varepsilon]$$

$$J(t) = J_0 \sin^2[\alpha_M \sin(\omega_M t) - \varepsilon]$$

Avec: $J_0 = k_1 E_0^2$ et $\alpha_M = k_2 I_M$

2.1.3 - Calcul de l'expression du signal de mesure pour les faibles rotations.

La tension $u(t)$ est proportionnelle à l'intensité lumineuse $J(t)$: $u(t) = k_3 J(t)$.

Si les angles α_M et ε sont petits, le signal de mesure $u(t)$ s'écrit:

$$\text{Si } x \ll 1 \text{ rad} ; \sin x \cong x$$

$$u(t) \cong k_3 J_0 [\alpha_M \sin(\omega_M t) - \varepsilon]^2$$

En développant le carré, il vient:

$$u(t) = k_3 J_0 [\alpha_M^2 \sin^2(\omega_M t) - 2\alpha_M \varepsilon \sin(\omega_M t) + \varepsilon^2]$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

$$u(t) = \frac{1}{2} k_3 \alpha_M^2 J_0 - \frac{1}{2} k_3 \alpha_M^2 J_0 \cos(2\omega_M t) - 2k_3 \alpha_M J_0 \varepsilon \sin(\omega_M t) + k_3 J_0 \varepsilon^2$$

D'où l'expression finale:

$$u(t) = [k_3 J_0 (\varepsilon^2 + \frac{1}{2} \alpha_M^2)] - (2k_3 \alpha_M J_0 \varepsilon) \sin(\omega_M t) + (\frac{1}{2} k_3 \alpha_M^2 J_0) \cos(2\omega_M t)$$

$$u(t) \approx U_{M0} - U_{M1} \sin(\omega_M t) - U_{M2} \cos(2\omega_M t)$$

Dans laquelle les termes U_{M0} , U_{M1} et U_{M2} sont fonction des paramètres k_3 , J_0 , α_M et ε .

$$U_{M0} = k_3 J_0 (\varepsilon^2 + \frac{1}{2} \alpha_M^2)$$

$$U_{M1} = (2k_3 \alpha_M J_0) \varepsilon$$

$$U_{M2} = \frac{1}{2} k_3 \alpha_M^2 J_0$$

2.1.4 - Terme proportionnelle à l'angle de rotation ε à mesurer.

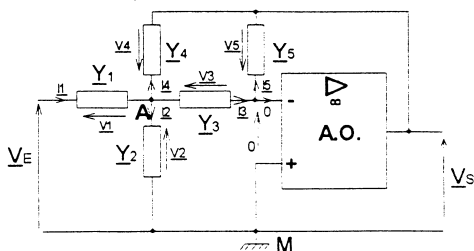
$$U_{M1} = (2k_3 \alpha_M J_0) \varepsilon$$

2.2. DETECTION PAR FILTRAGE.

2.2.1 - Calcul de la transmittance complexe $\underline{T}_O = \underline{V}_S / \underline{V}_E$ de la structure de Rauch.

On suppose un fonctionnement linéaire de l'amplificateur opérationnel A.O.

Ecrivons la loi des noeuds en A puis exprimons les amplitudes complexes des courants



$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4$$

$$Y_1(V_E - V_2) = Y_2 V_2 + Y_3 V_3 + Y_4 V_4$$

$$V_3 = V_2 \quad ; \quad V_4 = V_2 - V_S \quad ; \quad V_S = -V_5$$

$$I_3 = I_5 \quad ; \quad Y_3 V_3 = Y_5 V_5 \quad ; \quad Y_3 V_2 = -Y_5 V_S \quad ; \quad V_2 = -\frac{Y_5}{Y_3} V_S$$

$$Y_1(V_E - V_2) = Y_2 V_2 + Y_3 V_3 + Y_4 (V_2 - V_S)$$

$$Y_1 V_E = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) V_2 - Y_4 V_S$$

$$Y_1 V_E = \left[(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) \left(-\frac{Y_5}{Y_3} \right) - Y_4 \right] V_S$$

$$\frac{V_S}{V_E} = -\frac{Y_1 Y_3}{(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) Y_5 + Y_3 Y_4}$$

2.2.2- Calcul de la transmittance complexe $T_O(jx)$ du filtre passe-bande FO.

Compte tenu du résultat précédent et de la nature physique des dipôles d'admittance complexe

Y_k on a les relations suivantes:

$$\frac{V_S}{V_E} = -\frac{j \frac{C\omega}{R_1}}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2j C\omega \right) \frac{1}{2R_1} + (j C\omega)^2}$$

$$\frac{V_S}{V_E} = -\frac{j \frac{C\omega}{R_1}}{\frac{1}{2R_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + j \frac{C\omega}{R_1} + (j C\omega)^2}$$

⏟
 γ

$$\frac{V_S}{V_E} = -\frac{j \frac{C\omega}{\gamma R_1}}{1 + j \frac{C\omega}{\gamma R_1} + (j \frac{C\omega}{\sqrt{\gamma}})^2}$$

Pulsation propre ω_o du filtre:

$$x = \frac{\omega}{\omega_o} = \frac{C\omega}{\sqrt{\gamma}} \quad ; \quad \omega_o = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{1}{2R_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} = \frac{1}{R_1 C} \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{2R_2}}$$

Amortissement réduit m du filtre:

$$2m \frac{\omega}{\omega_o} = \frac{C\omega}{\gamma R_1} \quad ; \quad m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} = \sqrt{\frac{R_2}{2(R_1 + R_2)}}$$

Coefficient H: $H = -1$

$$\underline{T}_0(jx) = H \frac{2jmx}{1 + 2jmx + (jx)^2} ; x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Calcul de la bande passante à -3dB: $\Delta\omega = 2m\omega_0$.

$$\Delta\omega = 2m\omega_0 = \left(\frac{1}{R_1\sqrt{\gamma}}\right) \left(\frac{1}{C}\sqrt{\gamma}\right) = \frac{1}{R_1C}$$

2.2.3 - Calcul du module $T_0(x)$ de la transmittance complexe $\underline{T}_0(jx) = T_0(x) \exp [j \varphi_0(x)]$.

On obtient:

$$T_0(x) = \frac{2mx}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4m^2x^2}}$$

2.2.4 - Calcul des valeurs particulières T_{00} , T_{01} et T_{02} du module $T_0(x)$:

$$T_{0\infty} = 0 ; T_{01} = T_0(1) = 1 ; T_{02} = T_0(2) = \frac{4m}{\sqrt{9 + 16m^2}}$$

2.2.5 - Calcul de la valeur m_0 du facteur d'amortissement réduit m:

Les gains correspondant à $x = 1$ et $x = 2$ sont respectivement notés G_{01} et G_{02} .

$$G_{01} = 20 \log T_{01} = 0 \text{ dB} ; \Delta G_0 = G_{02} - G_{01} = -40 \text{ dB}$$

$$T_{02} = 1/100 ; m_0 \cong 3/400 = 7,5 \cdot 10^{-3}.$$

2.2.6 - Expression approchée de la tension de sortie $v_S(t)$ lorsque $\omega_0 = \omega_M$.

Le filtre passe-bande F0 est commandé par le signal de mesure $u(t)$.

$$v_S(t) = T_{0\infty} U_{M0} - T_{01} U_{M1} \sin(\omega_M t + \varphi_{01}) - T_{02} U_{M2} \cos(2\omega_M t + \varphi_{02})$$

$$v_S(t) \cong U_{M1} \sin(\omega_M t)$$

2.3. DETECTION SYNCHRONE.

2.3.1 - CELLULE DE DETECTION.

A - Analyse temporelle de la réponse de la cellule de détection.

2.3.1.1 - Calcul de l'expression générale de la tension $w_o(t) = K u_o(t) v_o(t)$.

$$w_o(t) = K V_M U_M \sin(\omega_v t + \varphi_v) \sin(\omega_u t + \varphi_u)$$

En développant le produit de sinus, il vient:

$$w_o(t) = \frac{1}{2} K V_M U_M \{ \cos[(\omega_v - \omega_u)t + (\varphi_v - \varphi_u)] - \cos[(\omega_v + \omega_u)t + (\varphi_v + \varphi_u)] \}$$

2.3.1.2 - Expression de la tension $V_o(t)$ en sortie d'un filtre passe-bas FB.

La composante de pulsation $(\omega_v + \omega_u)$ étant parfaitement filtrée, on obtient:

$$V_o(t) = \frac{1}{2} K V_M U_M \cos[(\omega_v - \omega_u)t + (\varphi_v - \varphi_u)]$$

2.3.1.3 - Détermination des contraintes à imposer au signal de référence $v_o(t)$ pour que la cellule synchrone détecte l'amplitude U_M du signal de mesure.

Il faut réaliser la condition: $V_o = A_o U_M$, d'où les contraintes:

$$\omega_v = \omega_u ; \varphi_v = \varphi_u ; V_o = \frac{1}{2} K V_M U_M ; A_o = \frac{1}{2} K V_M$$

B - Analyse fréquentielle de la réponse de la cellule de détection.

2.3.1.4 - Cas général: $\omega_v \neq \omega_u$ - Spectres en amplitude $A(\omega)$ des signaux d'entrée $v_o(t)$ et $u_o(t)$ puis des signaux de sortie $w_o(t)$ et $V_o(t)$.

Expressions numériques des signaux étudiés, exprimées en S.I.:

$$v_o(t) = V_M \sin(\omega_v t + \varphi_v) = 2 \sin(4 \cdot 10^3 t)$$

$$u_o(t) = U_M \sin(\omega_u t + \varphi_u) = 10 \sin(10 \cdot 10^3 t)$$

$$w_o(t) = \cos(6 \cdot 10^3 t) - \cos(14 \cdot 10^3 t)$$

$$V_o(t) = \cos(6 \cdot 10^3 t)$$

Voir document réponse 2 :

Les tracés sont en trait continu pour les signaux $v_O(t)$ et $w_O(t)$, en trait pointillé pour les signaux $u_O(t)$ et $V_O(t)$.

2.3.1.5 - Cas particulier: $\omega_V = \omega_U$ - Spectres en amplitude $A(\omega)$ des signaux d'entrée $v_O(t)$ et $u_O(t)$ puis des signaux de sortie $w_O(t)$ et $V_O(t)$.

Dans ce cas particulier $\omega_V = \omega_U = 10 \text{ krad/s}$.

Expressions numériques des signaux étudiés, exprimées en S.I.:

$$v_O(t) = 2 \sin (10.10^3 t) \qquad u_O(t) = 10 \sin (10.10^3 t)$$

$$w_O(t) = 1 - \cos (20.10^3 t) \qquad V_O(t) = 1$$

Voir document réponse 2 .

C - Réalisation du filtre passe-bas FB.

2.3.1.6 - Calcul la transmittance complexe $\underline{T}_1 = \underline{U}_{S1} / \underline{U}_{E1}$ du filtre F1.

Le filtre F1 n'est pas chargé, on obtient donc:

$$\underline{T}_1 = \frac{\underline{U}_{S1}}{\underline{U}_{E1}} = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j C_1 \omega}} = \frac{1}{1 + j R_1 C_1 \omega}$$

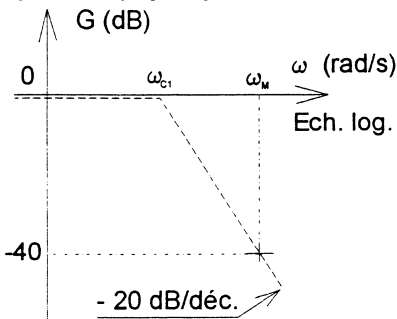
2.3.1.7- Pulsation de coupure ω_{c1} à - 3 dB du filtre F1.

Le gain $G_1 = - 3 \text{ dB}$ correspond a un module de transmittance égale à $1/\sqrt{2}$, d'où le résultat:

$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_1 C_1}$$

2.3.1.8 - Choix de la résistance R_1 .

Le diagramme asymptotique de Bode de ce filtre permet d'écrire les relations suivantes:



$$\omega_M = 10^2 \omega_{c1}$$

$$R_1 = \frac{100}{C_1 \omega_M}$$

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega$$

2.3.2. DETECTION DE L'AMPLITUDE U_{M1} .

2.3.2.1 - Calculer la tension $w_1(t)$.

$$w_1(t) = K u(t) v_1(t)$$

$$w_1(t) = -K V_M \sin(\omega_M t) [U_{M0} - U_{M1} \sin(\omega_M t) - U_{M2} \cos(2\omega_M t)]$$

En développant puis en linéarisant le sinus carré qui apparaît dans le calcul, il vient:

$$w_1(t) = -K V_M U_{M0} \sin(\omega_M t) + K V_M U_{M1} \sin^2(\omega_M t) + K V_M U_{M2} \sin(\omega_M t) \cos(2\omega_M t)$$

$$w_1(t) = -K V_M U_{M0} \sin(\omega_M t) + \frac{1}{2} K V_M U_{M1} (1 - \cos 2\omega_M t) + \frac{1}{2} K V_M U_{M2} [-\sin(\omega_M t) + \sin(3\omega_M t)]$$

$$w_1(t) = \frac{1}{2} K V_M U_{M1} - K V_M (U_{M0} + \frac{1}{2} U_{M2}) \sin(\omega_M t) - \frac{1}{2} K V_M U_{M1} \cos(2\omega_M t) + \frac{1}{2} K V_M U_{M2} \sin(3\omega_M t)$$

Les composantes spectrales de ce signal sont:

$$[0 ; \omega_M ; 2\omega_M ; 3\omega_M]$$

2.3.2.2 - Tension de sortie V_1 de la cellule CD1.

Si le filtrage est parfait, on a:

$$V_1 = \frac{1}{2} K V_M U_{M1}$$

2.3.2.3 - Expression de la tension V_1 en fonction de l'angle ϵ .

D'après l'expression de U_{M1} calculée en 2.1.3, on obtient:

$$V_1 = \frac{1}{2} K V_M U_{M1} = \frac{1}{2} K V_M (2k_3 \alpha_M J_0) \epsilon$$

$$V_1 = (k_3 K \alpha_M V_M J_0) \epsilon$$

2.3.3. DETECTION DES AMPLITUDES U_{M1} ET U_{M2} .

A - Détection de l'amplitude U_{M2} .

2.3.3.1 - Calcul de la tension $w_2(t)$.

$$w_2(t) = K u(t) v_2(t)$$

$$w_2(t) = -K V_M \cos(2\omega_M t) [U_{M0} - U_{M1} \sin(\omega_M t) - U_{M2} \cos(2\omega_M t)]$$

En développant puis en linéarisant le cosinus carré qui apparaît dans le calcul, il vient:

$$w_2(t) = -K V_M U_{M0} \cos(2\omega_M t) + K V_M U_{M1} \sin(\omega_M t) \cos(2\omega_M t) + K V_M U_{M2} \cos^2(2\omega_M t)$$

$$w_2(t) = -K V_M U_{M0} \cos(2\omega_M t) + \frac{1}{2} K V_M U_{M1} [-\sin(\omega_M t) + \sin(3\omega_M t)] + \frac{1}{2} K V_M U_{M2} [1 + \cos(4\omega_M t)]$$

$$w_2(t) = \frac{1}{2} K V_M U_{M2} - \frac{1}{2} K V_M U_{M1} \sin(\omega_M t) - K V_M U_{M0} \cos(2\omega_M t) + \frac{1}{2} K V_M U_{M1} \sin(3\omega_M t) + \frac{1}{2} K V_M U_{M2} \cos(4\omega_M t)$$

Les composantes spectrales de ce signal sont:

$$[0 ; \omega_M ; 2\omega_M ; 3\omega_M ; 4\omega_M]$$

2.3.3.2- Tension de sortie V_2 de la cellule CD2.

Si le filtrage est parfait, on a:

$$V_2 = \frac{1}{2} K V_M U_{M2}$$

B - Réalisation du signal de référence $v_2(t)$.

2.3.3.3 - Expression de la tension $s_0(t)$ avec $v_0(t) = V_M \sin(\omega_M t)$.

$$s_0(t) = K V_M^2 \sin^2(\omega_M t)$$

$$s_0(t) = \frac{1}{2} K V_M^2 [1 - \cos(2\omega_M t)]$$

$$s_0(t) = \frac{1}{2} K V_M^2 - \frac{1}{2} K V_M^2 \cos(2\omega_M t)$$

2.3.3.4 - Calcul de la tension $s_1(t)$.

$$s_1(t) = -\frac{1}{2} K V_M^2 \cos(2\omega_M t)$$

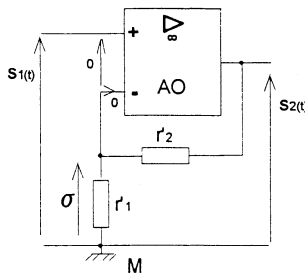
2.3.3.5- Calcul de l'amplification a_0 de l'amplificateur non inverseur A.

Afin d'obtenir $s_2(t) = v_2(t)$ on écrit:

$$s_2 = a_0 s_1 ; \quad v_2(t) = a_0 s_1 ; \quad a_0 = \frac{2}{K V_M}$$

Avec $K = 0,1$ S.I. et $V_M = 2$ V ; $a_0 = 10$.

2.3.3.6 - Montage amplificateur non inverseur.



2.3.3.7 - Valeur du rapport des résistances utilisées pour obtenir une amplification égale à a_0 .

On suppose un fonctionnement linéaire de l'amplificateur opérationnel A.O.

$$s_1 = \sigma \quad ; \quad \sigma = \frac{r_1}{r_1 + r_2} s_2 \quad ; \quad a_0 = 1 + \frac{r_2}{r_1} \quad ; \quad a_0 = 10 \quad ; \quad \frac{r_2}{r_1} = 9$$

2.3.3.8 - Calculer la transmittance complexe T_2 du filtre F2 non chargé (Fig. 13).

Calcul la transmittance complexe $T_2 = U_{S2}/U_{E2}$ du filtre F2.

Le filtre F2 n'est pas chargé, on obtient donc:

$$T_2 = \frac{U_{S2}}{U_{S1}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j C_2 \omega}} = \frac{j R_2 C_2 \omega}{1 + j R_2 C_2 \omega}$$

2.3.3.9 - Pulsation de coupure ω_{c2} à - 3 dB du filtre F2.

Le gain $G_2 = - 3$ dB correspond a un module de transmittance égale à $1/\sqrt{2}$, d'où le résultat:

$$\omega_{c2} = \frac{1}{R_2 C_2}$$

2.3.3.10 - Choix de la résistance R_2 .

Pour que $\omega_{c2} = \omega_M / 10$. avec $C_2 = 1 \mu\text{F}$ et $\omega_M = 10 \text{ krad/s}$, il faut avoir:

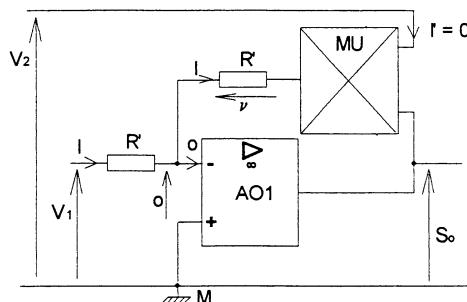
$$R_2 = \frac{10}{C_2 \omega_M} \quad ; \quad R_2 = 1 \text{ k}\Omega$$

C - Réalisation d'un diviseur de tension.

On suppose un fonctionnement linéaire des amplificateurs opérationnels A.O.1 et A.O.2.

2.3.3.11 - Expression de la tension S_0 en fonction des signaux V_1 et V_2 .

D'après la vue partielle de la figure 14, on a:



$$V_1 = R'I \quad ; \quad \nu = R'I = -K V_2 S_o \quad ; \quad S_o = -\frac{1}{K} \frac{V_1}{V_2}$$

2.3.3.12 - Calcul de la tension de sortie S en fonction des signaux V_1 et V_2 .

$$S = -\frac{R'_2}{R'_1} S_o = \left(\frac{1}{K} \frac{R'_2}{R'_1}\right) \frac{V_1}{V_2}$$

2.3.3.13 - Calcul des valeurs des résistances d'entrée R_{E1} et R_{E2} correspondant respectivement aux tensions d'entrée V_1 et V_2 .

$$R_{E1} = \frac{V_1}{I} = R' \quad ; \quad R_{E2} = \frac{V_2}{I'} \quad ; \quad I' = 0 \Rightarrow R_{E2} \rightarrow \infty$$

D - Mesure de l'angle de rotation ε .

2.3.3.14 - Structure complète du système étudié.

Voir le document réponse 3.

2.3.3.15 - Charges des filtres passe-bas F1 des cellules de détection CD1 et CD2.

La cellule de détection CD1 est chargée par la résistance d'entrée $R_{E1} = R'$.
Pour que le filtre F1 de CD1 fonctionne à vide, il faut imposer $R' \gg R_1$.

La cellule de détection CD2 est chargée par la résistance d'entrée R_{E2} .
Comme cette résistance est infinie, le filtre F1 de CD2 fonctionne à vide.

2.3.3.16 - Calcul de la tension de sortie S.

L'étude de l'amplificateur inverseur [AO2 ; R_1' ; R_2'] de la figure 14 conduit aux relations suivantes:

$$S = \left(\frac{1}{K} \frac{R'_2}{R'_1}\right) \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{1}{K} \frac{R'_2}{R'_1}\right) \left[\frac{\frac{1}{2} K V_M U_{M1}}{\frac{1}{2} K V_M U_{M2}} \right] \quad ; \quad S = \left(\frac{1}{K} \frac{R'_2}{R'_1}\right) \frac{2 k_3 \alpha_M J_o \varepsilon}{\frac{1}{2} k_3 \alpha_M^2 J_o}$$

Soit après simplification:

$$S = \left[\frac{4}{K \alpha_M} \frac{R'_2}{R'_1} \right] \varepsilon \quad ; \quad a = \frac{4}{K \alpha_M} \frac{R'_2}{R'_1} \quad ; \quad S = a \varepsilon$$

2.3.3.17 - Comparaison des deux méthode de détection.

L'étude de la première méthode de détection (2.3.2) montre l'influence des grandeurs J_o et α_M .
Ce dernier paramètre peut être maintenu constant par un contrôle de l'intensité du courant $i(t)$ qui commande le modulateur M.

$$V_1 = (k_3 K \alpha_M V_M J_0) \varepsilon.$$

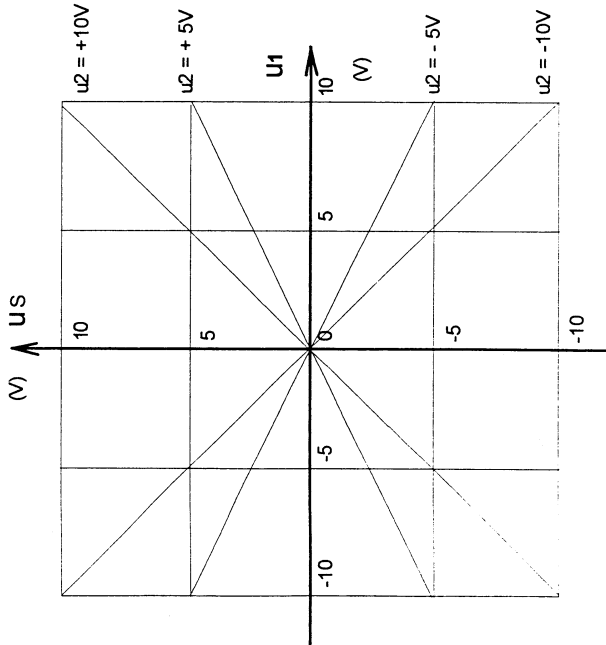
Cependant l'intensité lumineuse J_0 est un paramètre qui peut fluctuer. Ce qui constitue une grandeur d'influence qu'il convient d'éliminer afin d'améliorer la méthode de mesure.

L'étude de la deuxième méthode de détection (2.3.3) montre que le signal utile est indépendant de l'intensité lumineuse.

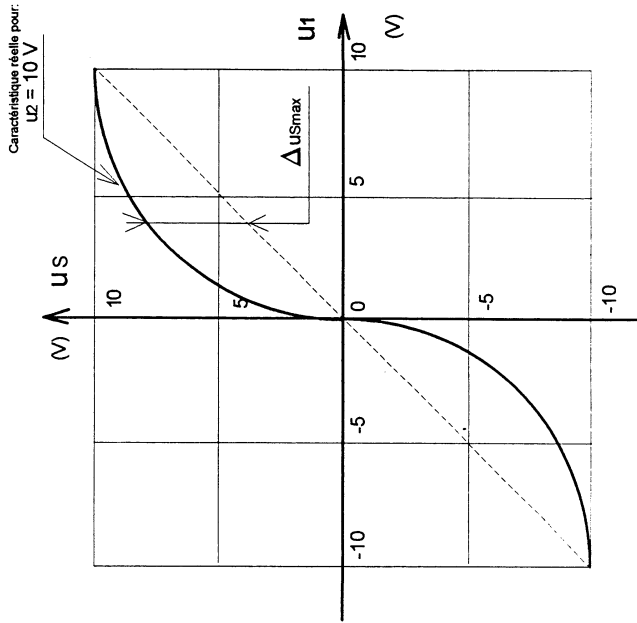
$$S = a \varepsilon.$$

ELECTRONIQUE - DOCUMENT REPOSE 1

Caractéristique de transfert

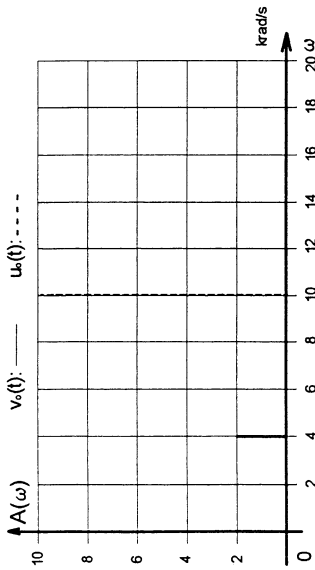


Erreur de linéarité



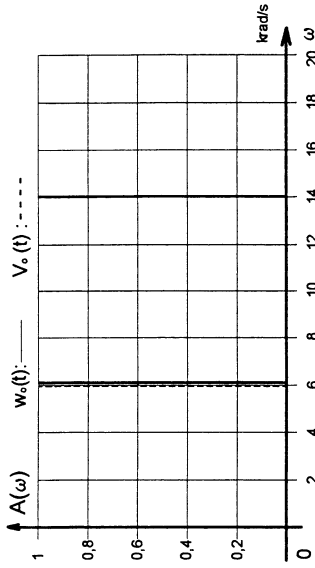
ELECTRONIQUE - DOCUMENT REPONSE 2

Specetres en amplitude des signaux d'entrée $v_o(t)$; $u_o(t)$

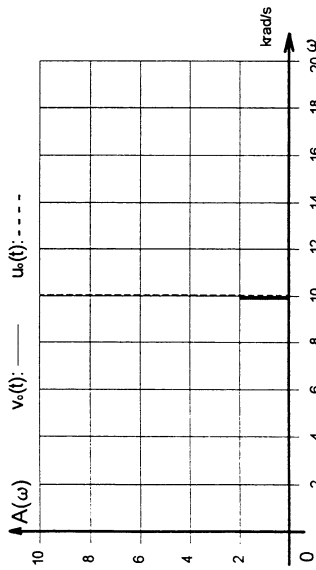


$$\omega_v \neq \omega_u$$

Specetres en amplitude des signaux de sortie $w_o(t)$; V_o



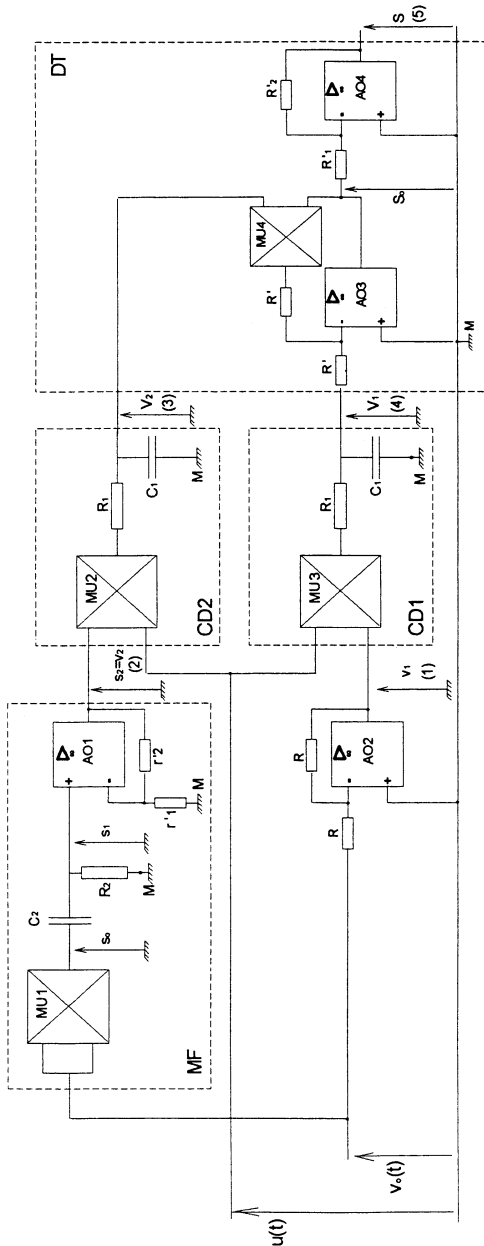
$$\omega_v = \omega_u$$



- Signaux d'entrée - Y: 1 div. pour 2 V ; X: 1 div. pour 2 krad/s -

- Signaux de sortie - Y: 1 div. pour 0,2 V ; X: 1 div. pour 2 krad/s -

ELECTRONIQUE - DOCUMENT REPONSE 3



EXPRESSIONS DES TENSIONS

(1):	$v_1(t) = -V_m \sin(\alpha_m t)$	(2):	$v_2(t) = -V_m \cos(2\alpha_m t)$	(3):	$V_2 = \frac{1}{2} K V_m U_m$	(4):	$V_1 = \frac{1}{2} K V_m U_m$	(5):	$S = \begin{bmatrix} 4 R_2 \\ K \alpha_m R_1 \end{bmatrix} \epsilon$
------	----------------------------------	------	-----------------------------------	------	-------------------------------	------	-------------------------------	------	--

Seconde partie: Electrotechnique et Electronique de Puissance.

1.1.1
$$\begin{cases} \underline{V}_1 + j.L\omega \underline{I}_{A1} + j.M\omega(\underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A3}) + r\underline{I}_{A1} = \underline{V}_{A1} \\ \underline{V}_2 + j.L\omega \underline{I}_{A2} + j.M\omega(\underline{I}_{A3} + \underline{I}_{A1}) + r\underline{I}_{A2} = \underline{V}_{A2} \\ \underline{V}_3 + j.L\omega \underline{I}_{A3} + j.M\omega(\underline{I}_{A1} + \underline{I}_{A2}) + r\underline{I}_{A3} = \underline{V}_{A3} \end{cases}$$

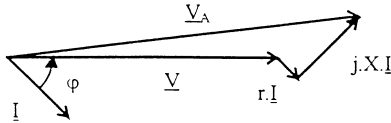
1.1.2

Comme $\underline{I}_{A1} + \underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A3} = 0$ (3 fils)

On a $\underline{I}_{A2} + \underline{I}_{A3} = -\underline{I}_{A1}$

et donc $\underline{V}_1 + j.(L-M)\omega \underline{I}_{A1} + r\underline{I}_{A1} = \underline{V}_{A1}$ de même pour \underline{V}_2 et \underline{V}_3 .

On appelle X la réactance synchrone définie par $X = (L-M)\omega$.



1.1.3

1.1.4 P s'exprime en Watt (symbole W)

Q s'exprime en Volt Ampère Réactifs (symbole VAR). Cette unité est homogène à des Watt.

1.1.5 Il s'agit d'une charge de nature inductive.

1.1.6
$$V_A = \sqrt{(V + r.I.\cos\phi + X.I.\sin\phi)^2 + (r.I.\sin\phi - X.I.\cos\phi)^2}$$

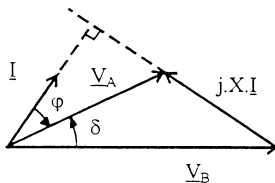
Or $I.\cos\phi = \frac{P}{3V}$ et $I.\sin\phi = \frac{Q}{3V}$

d'où
$$V_A = \sqrt{\left(V + r.\frac{P}{3V} + X.\frac{Q}{3V}\right)^2 + \left(r.\frac{Q}{3V} - X.\frac{P}{3V}\right)^2}$$

1.1.7 Notons δ l'angle entre \underline{V} et \underline{V}_A . Si δ est faible alors $V_A.\cos\delta \approx V$.

d'où $V_A - V \approx r.\frac{P}{3V} + X.\frac{Q}{3V}$

1.2.1



1.2.2 $P = 3.V_A I \cos\phi$

1.2.3 $Q = 3.V_A I \sin\phi$

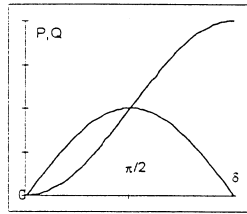
1.2.4 On a un triangle isocèle d'où $\phi = \delta/2$

$X.I = 2.V.\sin(\delta/2)$

$$P = \frac{3V^2.2}{X} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{3V^2}{X} \sin\delta$$

1.2.5 De même

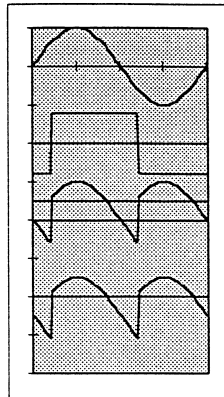
$$Q = \frac{3V^2}{X} (1 - \cos\delta)$$



1.2.6

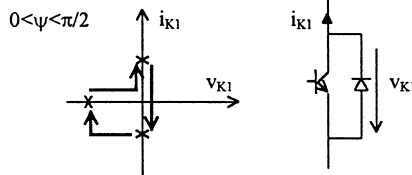
1.2.7 La stabilité du système impose de prendre $\delta = \pi/6$.

2.1.1

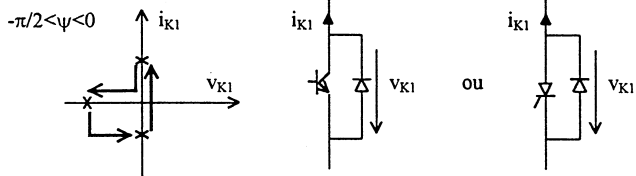


2.1.2

a- Blocage commandé, amorçage spontané, bidirectionnel en courant.



b- Blocage spontané, amorçage commandé, bidirectionnel en courant.



2.1.3
$$P_{source} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4V'}{\pi} \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \cos\psi = \frac{2V'}{\pi} I_{max} \cos\psi$$

2.1.4
$$P_R = \frac{V'^2}{R}$$

2.1.5 $P_{source} = P_R$
 $V' = \frac{2R}{\pi} I_{max} \cos \psi$ A.N. $V' = 49,6 \text{ V}$

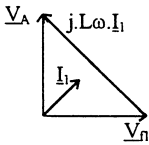
2.1.6 Si on ôte la résistance (i.e. $R \rightarrow +\infty$), maintenir $V' = \text{cst}$ revient à avoir $\cos \psi = 0$. Soit $\psi = \pm \pi/2$

2.1.7 avec $\psi = -\pi/2$, le fondamental de $v(t)$ est en quadrature avancée sur $i(t)$. L'ensemble Redresseur et Condensateur se comporte comme une inductance pure.

2.1.8

- a- $\cos \psi < 0$ $P_{source} < 0$ V' décroît et tend vers $-\infty$
- b- $\cos \psi > 0$ $P_{source} > 0$ V' croît et tend vers $+\infty$

2.2.1 Modulation de Largeur d'Impulsions (Pulse Width Modulation)



2.2.2

$V_{r1} = L\omega I_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$ A.N. $I_1 = 9,9 \text{ A}$
 $I_1 = \frac{V_{r1}}{L\omega} \sqrt{2}$

2.2.3

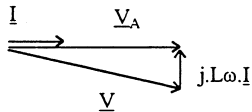
$V_B = 1/3 V_n$ $I_3 = \frac{V_{r1}}{3.3.L\omega} = 0,77 \text{ A}$ soit 7,8 % de I_1 .

$V_5 = 1/5 V_n$ $I_5 = \frac{V_{r1}}{5.5.L\omega} = 0,28 \text{ A}$ soit 2,8 % de I_1 .

2.2.4 Un calcul d'intégrale ou un simple raisonnement géométrique conduisent à

$\langle v(t) \rangle = + V' V_{ref}/a$
 comme $-a \leq V_{ref} \leq +a$ $-V' \leq \langle v(t) \rangle \leq +V'$

2.2.5



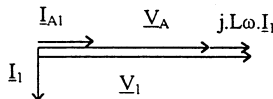
2.2.6 $P = V_A I \cos \phi$ et $\cos \phi = 1$

2.2.7 La charge absorbe une puissance $P = 3000 \text{ W}$ ce qui correspond à un courant $I = 13,63 \text{ A}$

La valeur crête de V est calculée par $V_{crête} = \sqrt{2} \sqrt{V_A^2 + (L\omega I)^2} = 316 \text{ V} > 300 \text{ V}$. Ce point de fonctionnement n'est pas réalisable. 300 V est une tension trop faible sur la charge (NB $220 * \sqrt{2} > 300$).

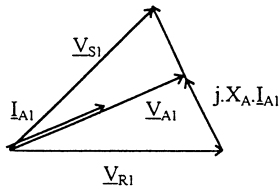
3.1.1 La charge est un condensateur. Au régime établi, la puissance fournie par le réseau doit donc être nulle. Cela correspond à un déphasage de $\pm \pi/2$.

3.1.2



Ici, le redresseur se comporte comme une inductance triphasée réglable.

3.2.1



3.2.2 Puisque $m \cdot \underline{V}$ est perpendiculaire au courant, la source continue ne fournit aucune puissance. Un simple condensateur suffira pour réaliser cette source.

3.2.3 Attendu que le déphasage entre \underline{I} et \underline{V}_s reste constant, un diagramme vectoriel permet d'écrire:

$$P = P_0 \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \theta / 2}{\operatorname{tg} \delta / 2} \right)$$

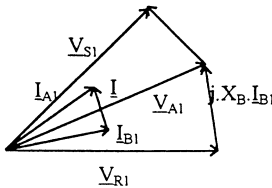
3.3.1

$$P = 3 \cdot V_A \cdot I_A \cdot \cos \varphi_1$$

3.3.2

$$P = 3 \cdot m V \cdot I_B \cdot \cos \varphi_2$$

3.3.3 Ces deux puissances doivent être égales.



3.3.4

3.3.5 On veut $P_0/2$ la projection de \underline{I}_A sur \underline{V}_s est donc fixée à la moitié du courant que l'on aurait sans aucun dispositif. De même pour la projection de \underline{I}_B sur \underline{V}_R . On souhaite aussi que \underline{V}_A et \underline{I}_A soient en phase.

CAPES de sciences physiques

Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de physique avec applications - Session : 2000

A OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

A.I. Oscillations électriques forcées.

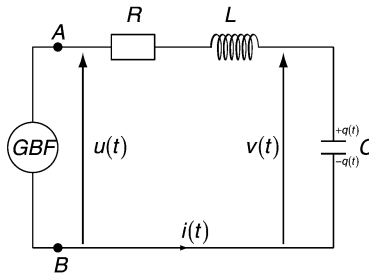


Figure 1

A.I.1. Étude de la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur de capacité C .

A.I.1.a. Relations entre $v(t)$ et $q(t)$, et entre $i(t)$ et $q(t)$.

D'après les conventions indiquées sur le schéma,

- la définition de la capacité $C = \frac{q(t)}{v(t)}$ donne $v(t) = \frac{1}{C} q(t)$

- la définition de l'intensité du courant i s'écrit $i = -\frac{dq(t)}{dt}$.

A.I.1.b. Calcul de la valeur des grandeurs $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q_0 = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \text{A.N.} : \frac{1}{\sqrt{0,04 \times 22 \cdot 10^{-9}}} = 33,709 \cdot 10^3 \text{ soit } \omega_0 = 34 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$Q_0 = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}} \cdot \text{A.N.} : \frac{\sqrt{0,04}}{135\sqrt{22 \cdot 10^{-9}}} = 9,988 \text{ soit } Q = 10$$

A.I.1.c. Équation différentielle vérifiée par la tension $v(t)$.

La loi des tensions appliquée au schéma électrique ci-dessus donnent :

$u(t) = v_R(t) + v_L(t) + v(t)$ avec compte tenu des expressions la question A.I.1.a et

- de la définition de la résistance ohmique en convention générateur $v_R(t) = -R \cdot i(t)$

- de la définition de l'auto-inductance en convention générateur $v_L(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$

On en tire $v_R(t) = RC \cdot \frac{dv(t)}{dt}$ et $v_L(t) = LC \frac{d^2v(t)}{dt^2}$

puis l'équation différentielle : $\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{1}{LC} u(t)$.

Avec les expressions de $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q_0 = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$ puis $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, $\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q_0}$ et $\omega_0 Q_0 = \frac{1}{RC}$,

cette équation différentielle prend la forme : $\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0} \frac{dv(t)}{dt} + \omega_0^2 v(t) = \omega_0^2 u(t)$.

A.I.2. Étude du régime forcé.

A.I.2.a. Le dipôle AB en régime forcé.

Le dipôle AB est en régime forcé, car on « force » l'oscillateur AB à osciller à la fréquence imposée par le générateur et ceci au bout d'une durée transitoire très courte de l'ordre de 5τ soit $\frac{5}{\omega_0 Q_0} \cong 3 \mu\text{s}$. On observe alors à l'oscillographe une sinusoïde $v(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$ c'est-à-dire la tension imposée par le générateur de même pulsation mais avec un déphasage φ que nous allons déterminer.

A.I.2.b. Expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{v(t)}{u(t)}$

Soit $\underline{u}(t) = U_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{v}(t) = V_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ où φ est l'avance de phase de $v(t)$ sur la tension $u(t)$. La dérivation temporelle de $v(t)$ se traduit en notation complexe par la multiplication par $j\omega$. La fonction de transfert se déduit de l'équation différentielle : $-\omega^2 \underline{v} + j \frac{\omega_0}{Q_0} \omega \underline{v} + \omega_0^2 \underline{v} = \omega_0^2 \underline{u}$ soit

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0}{Q_0} \omega \right) \underline{v} = \omega_0^2 \underline{u}$$

En posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on obtient $\left(1 - x^2 + j \frac{x}{Q_0} \right) \underline{v} = \underline{u}$ et la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}}{\underline{u}} = \frac{Q_0}{1 - x^2 + jx}$$

A.I.2.c. Calcul du déphasage φ entre $u(t)$ et $v(t)$

Le déphasage φ est directement relié à l'argument de \underline{H} soit

$\text{Arg}(\underline{H}) = \text{Arg}(Q_0) - \text{Arg}(Q_0(1 - x^2) + jx)$. Q_0 étant réel, on obtient $\varphi = -\text{Arg}(Q_0(1 - x^2) + jx)$

soit $\varphi = \arctan\left(-\frac{\frac{x}{Q_0}}{1 - \left(\frac{x}{Q_0}\right)^2}\right)$. On a d'après les données $x = \frac{\omega}{\omega_0} < 1$ donc φ est négatif est

$v(t)$ est donc en retard sur $u(t)$.

$$\text{A.N. : } \arctan\left(-\frac{\frac{31500}{33709}}{9,988\left(1 - \left(\frac{31500}{33709}\right)^2\right)}\right) = -36,428 \text{ soit } \varphi = -36,5^\circ.$$

A.I.3. Étude de la résonance en intensité.

A.I.3.a. L'impédance du dipôle AB

Par l'utilisation de la loi d'ohm généralisé sous sa forme complexe, l'impédance complexe du

dipôle AB s'écrit : $\underline{Z} = R + jL\omega - j\frac{1}{C\omega}$ soit $\underline{Z} = R\left(1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)\right)$. Compte tenu des expressions $\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q_0}$, $\omega_0 Q_0 = \frac{1}{RC}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ on obtient finalement $\underline{Z} = R\left(1 + jQ_0\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$ de

$$\text{module } Z = R\sqrt{1 + Q_0^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}.$$

$$\text{A.N. : } 135\sqrt{1 + 9,988^2\left(\frac{31500}{33709} - \frac{33709}{31500}\right)^2} = 227,489. \text{ Soit } Z = 227 \Omega$$

A.I.3.b. Condition de résonance.

Le module de l'intensité complexe i égal à $I_0 = \frac{U_0}{Z}$. Comme $Z(\omega)$ passe par un minimum pour $x = 1$ donc pour $\omega = \omega_0$, l'intensité I_0 passe par un maximum pour cette valeur $\omega = \omega_0$, on se trouve alors à la résonance.

A.I.3.c. Résonance d'intensité et de tension.

$$\text{On a donc } I_0|_{x=1} = \frac{U_0}{Z(x=1)} \text{ soit } I_0|_{x=1} = \frac{U_0}{R}.$$

$$\text{A. N. : } \frac{5,4}{135} = 0,04 \text{ soit } I_0|_{x=1} = 0,04 \text{ A}$$

À la résonance $\underline{v}(t) = j\frac{1}{C\omega_0}i(t)$ soit $\underline{v}(t) = j\frac{1}{RC\omega_0}u(t)$ et donc en module $V_0 = \frac{1}{RC\omega_0}U_0$ ou $V_0 = QU_0$.

$$\text{A. N. : } 9,988 \times 5,4 = 53,935 \text{ soit } V_0 = 54 \text{ V.}$$

A.I.3.d. La bande passante

On appelle bande passante à -3dB, le domaine de pulsation tel que l'atténuation

$$A = 20 \log_{10} \frac{I_0(\omega)}{I_{0,\max}} \text{ soit supérieure à } -3\text{dB. Soit } 20 \log_{10} \frac{I_0(\omega)}{I_{0,\max}} \geq -3 \text{ et } \frac{I_0(\omega)}{I_{0,\max}} \geq 10^{-\frac{3}{20}} \text{ soit}$$

$$\text{approximativement } I_0(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} I_{0,\max}.$$

La largeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ où ω_2, ω_1 sont les pulsations de coupures, c'est-à-dire les valeurs de ω pour lesquelles $I_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{0,\max}$. En effet $\frac{U_0}{Z(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U_0}{R}$ soit $Z(\omega) = R\sqrt{2}$ soit par

$$\text{identification à l'expression de } Z(\omega) = R\sqrt{1 + Q_0^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \text{ on a } Q_0\left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1. \text{ On a donc}$$

deux équations du second degré dont la résolution donne pour les solutions positives

$$\text{(physiquement acceptable) : } \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{\sqrt{4Q_0^2 + 1} + 1}{2Q_0} \text{ et } \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\sqrt{4Q_0^2 + 1} - 1}{2Q_0}. \text{ Soit}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}.$$

$$\text{A.N. : } \frac{33709}{9,988} = 3374,9 \text{ soit } \Delta\omega = 3375 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ caractérise l'acuité de résonance. Plus la largeur de bande $\frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ relative à ω_0 est petite (résonance aiguë) plus le facteur de qualité Q_0 est élevé.

A.II. Étude des oscillations électriques libres.

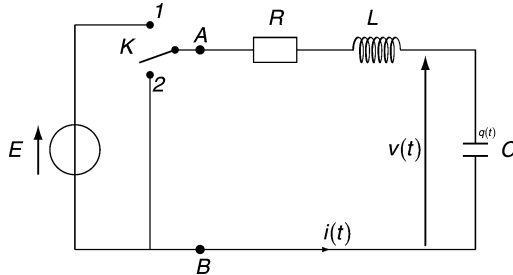


Figure 2

A.II.1. L'équation différentielle vérifiée par la tension $v(t)$.

En fait il s'agit de la même situation que dans la question A.I.1.c avec $u(t) = 0$. Soit

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_0} \frac{dv(t)}{dt} + \omega_0^2 v(t) = 0$$

A.II.2. Les conditions initiales de la décharge du condensateur.

L'énergie électrique W_e d'un condensateur est une fonction dérivable du temps. $\frac{dW_e}{dt} = P_{elec}$. $W_e(t)$ est donc aussi continue, ainsi que $u_c(t)$. Dans le cas présent, il en résulte $u_c(O^+) = u_c(O^-) = E$. De même, l'énergie magnétique $\frac{1}{2} Li^2$ de la bobine est continue car dérivable. Ce qui impose $i(O^+) = i(O^-) = 0$.

A.II.3. L'équation différentielle réduite vérifiée par la tension $v(\tau)$

En posant $\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}$ (ou $t = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tau$), $\alpha = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ (ou $\alpha = \frac{1}{2Q_0}$), on obtient pour chacun des termes de

l'équation différentielle : $\frac{d^2v(t)}{dt^2} = \omega_0^2 \frac{d^2v(\tau)}{d\tau^2}$, $\frac{\omega_0}{Q_0} \frac{dv(t)}{dt} = \frac{\omega_0^2}{Q_0} \frac{dv(\tau)}{d\tau}$ et $\omega_0^2 v(t)$. Soit en simplifiant par

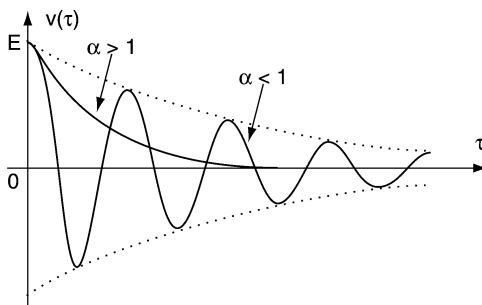
$$\omega_0^2 \neq 0, \text{ on obtient } \frac{d^2v(\tau)}{d\tau^2} + \frac{1}{Q_0} \frac{dv(\tau)}{d\tau} + v(\tau) = 0 \text{ soit } \frac{d^2v(\tau)}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{dv(\tau)}{d\tau} + v(\tau) = 0.$$

A.II.4. Deux régimes principaux d'évolution de la tension $v(\tau)$.

Les solutions de l'équation différentielle réduite sont de la forme $v(\tau) = Ve^{r\tau}$ où r est solution de l'équation caractéristique $r^2 + 2\alpha r + 1 = 0$. Le discriminant réduit vaut $\Delta' = \alpha^2 - 1$. L'étude du signe du discriminant réduit laisse apparaître deux principaux régimes d'évolution de la tension $v(\tau)$.

Premier cas : $\Delta' > 0$, alors $\alpha > 1$ (α est physiquement positif). Les solutions de l'équation caractéristique sont réelles et l'on observe un régime apériodique (cf graphe ci-après)

Second cas : $\Delta' < 0$, alors $\alpha < 1$ (α est physiquement positif). Les solutions de l'équation caractéristique sont complexes et l'on observe un régime oscillatoire amorti pseudo périodique (cf. graphe ci-après)



A.II.5. Le régime critique

On passe d'un régime à l'autre dans le troisième cas c'est-à-dire lorsque $\Delta' = 0$ soit $\alpha = 1$. D'après

l'expression de α , la résistance du circuit vaut : $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Cette valeur particulière de résistance

(difficile à atteindre expérimentalement) est la résistance critique sous-entendu limite du passage entre les deux régimes.

A.N. : $2\sqrt{\frac{0,04}{22 \cdot 10^{-9}}} = 2,6967 \cdot 10^3$ soit $R_c = 2,7 \cdot 10^3 \Omega$.

A.III. Oscillations électriques entretenues.

A.III.1. Résistance négative.

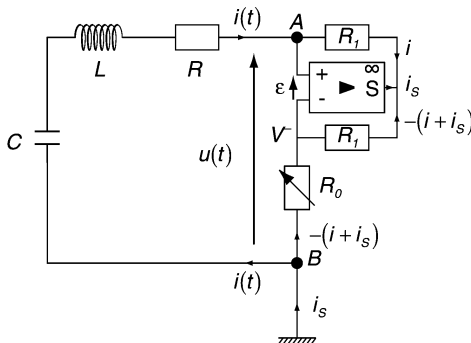


Figure 3

On a dans la maille ASB : $u = R_1 i + (R_1 + R_0)(i + i_s)$. De même dans la maille ASV⁻ :

$\epsilon = R_1(i + i_s) + R_1 i$. Mais $\epsilon = 0$ implique $-2R_1 i = R_1 i_s$ soit $-i_s = 2i$ donc $u = R_1 i + (R_1 + R_0)(-i)$ soit $u = -R_0 i$.

La puissance instantanée dissipée dans le dipôle RLC vaut $p(t) = u(t) \cdot i(t) = R i^2(t)$ (c'est le seul élément dissipatif du circuit).

L'équation différentielle du circuit RLC ; $\frac{d^2 v(\tau)}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{dv(\tau)}{d\tau} + v(\tau) = 0$ avec $\alpha = \frac{R - R_0}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ devient

$\frac{d^2 v(\tau)}{d\tau^2} + v(\tau) = 0$ si l'on choisit $R_0 = R$. On retrouve dans ce cas l'équation différentielle d'un

oscillateur harmonique.

L'énergie provient du dipôle générateur AB (à résistance négative) en fait un générateur de caractéristique $u(t) = -R_0 i(t)$ en convention récepteur qui vaut $p_G = -ui = R_0 i^2$. Comme $|i| = \frac{1}{2} |i_s|$

l'énergie provient de l'amplificateur opérationnel et plus précisément des alimentations de l'AO. On peut facilement s'en convaincre sur le schéma en observant les courants de masse et de sortie de l'amplificateur opérationnel.

A.III.2. Oscillateur de Van Der PoL

A.III.2.a. Modèle $u = f(i)$ du dipôle AB

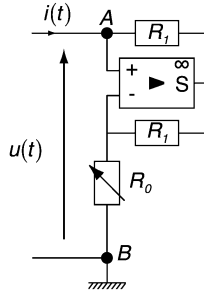
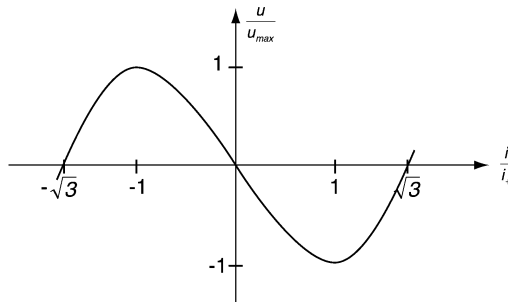


Figure 4

Étude de la fonction en supposant $b > 0$. Le domaine de définition est tel que i ne doit pas dépasser $\frac{1}{2} i_{s,max}$ (courant maximum en sortie de l'amplificateur opérationnel). La fonction est impaire, elle admet donc l'origine comme centre de symétrie. Les zéros de la fonction sont :

$i = 0, i = \pm \sqrt{\frac{R_0}{b}}$. La dérivée $\frac{du}{dt} = -R_0 + 3bi^2$, polynôme du second degré, admet deux zéros.

En conséquence $u(t)$ a deux extréma en $i_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{R_0}{3b}}$ de valeur $u_{max} = -u_{min} = \frac{2}{3} R_0 \sqrt{\frac{R_0}{3b}}$.



A.III.2.b. L'équation différentielle vérifiée par l'intensité $i(t)$.

Par application de la loi des mailles on a $u(t) = v_R(t) + v_L(t) + v(t)$ avec

- $v_R(t) = -R \cdot i(t)$,
- $v_L(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$,

$$-v(t) = \frac{1}{C} q(t) \text{ et}$$

$$-u = -R_0 i + b i^2.$$

$$\text{Soit } \frac{du(t)}{dt} = -L \frac{di(t)^2}{dt^2} - R \frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C} i(t) = -R_0 \frac{di(t)}{dt} + 3bi^2 \frac{di(t)}{dt} \text{ et}$$

$$\text{finalement l'équation différentielle en } i : LC \frac{di(t)^2}{dt^2} + C(R - R_0 + 3bi^2) \frac{di(t)}{dt} + i(t) = 0$$

A.III.2.c. Condition de stabilité de l'oscillateur de Van der Pol.

Procédons au changement de variable $x = i$ et $t = \omega_0^2 \tau$, on obtient pour chacun des termes de

$$\text{l'équation différentielle } \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 i(t)}{dt^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} \frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2},$$

$$C(R - R_0 + 3bi^2) \frac{di(t)}{dt} = \omega_0 C(R - R_0) \left(1 + \frac{3b}{R - R_0} x^2 \right) \frac{dx(\tau)}{d\tau} \text{ et } x(\tau). \text{ On obtient}$$

$$\frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} - \alpha(1 - \beta x^2) \frac{dx(\tau)}{d\tau} + x(\tau) = 0 \text{ avec par identification } \alpha = (R_0 - R) \sqrt{\frac{C}{L}} \text{ et } \beta = \frac{3b}{R_0 - R}.$$

$$\text{(Rem : on peut écrire } \alpha = (R_0 - R) \frac{1}{RQ_0} \text{ et } \alpha\beta = \frac{3b}{RQ_0}).$$

La condition de stabilité de l'oscillateur, à savoir $\beta \geq 0$, se traduit donc par $R_0 \geq R$

B OSCILLATIONS MÉCANIQUES

B.I. Détermination d'un coefficient de viscosité.

B.I.1. Questions préalables.

B.I.1.a. Référentiel galiléen.

Un référentiel est un système de trois axes auquel on attache un repère d'espace et un repère temporel (une horloge). Un référentiel est galiléen si le principe d'inertie y est vérifié, c'est-à-dire si un point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne uniforme (le repos étant un cas particulier du m.r.u)

B.I.1.b. La mécanique newtonienne.

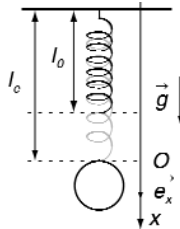
La mécanique Newtonienne est la mécanique dans laquelle les lois de Newton sont vérifiées. Le temps a un caractère absolu, c'est-à-dire que la durée séparant deux événements est indépendante du référentiel galiléen considéré.

B.I.1.c. Un fluide parfait.

Un fluide parfait est un fluide pour lequel les contraintes sont toujours normales aux surfaces délimitant le volume accessible au fluide. L'absence de composante tangentielle traduit simplement l'absence de viscosité et l'écoulement du fluide se fait alors sans dissipation d'énergie.

B.I.2. Expérience dans l'air.

B.I.2.a. Expression de l'allongement du ressort à l'équilibre.



Soit le système {bille} immobile dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$. La bille n'est soumise qu'à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la force de rappel exercée par le ressort : $\vec{F}_r = -k(\vec{l} - \vec{l}_0)$ si on néglige la poussée d'Archimède exercée par l'air.

À l'équilibre pour $l = l_e$ on a donc : $m\vec{g} - k(\vec{l}_e - \vec{l}_0) = \vec{0}$. On projetant cette relation sur la verticale descendante Ox, on obtient $mg - k(l_e - l_0) = 0$ soit finalement $l_e - l_0 = \frac{mg}{k}$ ou en

fonction des données du problème : $l_e - l_0 = \frac{g}{k} \mu_1 \frac{4}{3} \pi R^3$.

A.N. $\frac{9,81}{3} 2700 \frac{4}{3} \pi (1.10^{-2})^3 = 36,98.10^{-3}$ soit $l_e - l_0 = 3,7 \text{ cm}$.

B.I.2.b. Caractéristiques des oscillations.

D'après la conservation de l'énergie mécanique du système {bille} dans le champ de pesanteur (champ de force conservatif) et soumis à la force de rappel du ressort (force conservative) nous avons : $E_m = E_c + E_{pp} + E_{pr}$. L'énergie potentielle de pesanteur est telle que $\vec{P} = -\text{grad}E_{pp}$ tandis que l'énergie potentielle élastique est telle que $\vec{F}_r = -\text{grad}E_{pr}$.

Prenons comme origine des positions la position d'équilibre et notons $x = \vec{e}_x \cdot \vec{l} - \vec{l}_e$.

L'énergie potentielle de pesanteur vérifie : $mg = -\frac{dE_{pp}}{dx}$ d'où $\int_{E_{pp}(0)}^{E_{pp}(x)} dE_{pp} = -\int_0^x mg dx'$ soit $E_{pp}(x) - E_{pp}(0) = -mgx$. En prenant $E_{pp}(l = l_e) = E_{pp}(x = 0) = 0$, on a $E_{pp}(x) = -mgx$.

Pour l'énergie potentielle élastique, on a $-k(\vec{l} - \vec{l}_0) = -\text{grad}E_{pr}$ soit

$-k(\vec{x}e_x + \vec{l}_e - \vec{l}_0) = -\text{grad}E_{pr}$ soit $-k(x + l_e - l_0) = -\frac{dE_{pr}}{dx}$ d'où $\int_{E_{pr}(0)}^{E_{pr}(x)} dE_{pr} = \int_0^x k(x + l_e - l_0) dx'$

soit $E_{pr}(x) - E_{pr}(0) = \frac{1}{2} kx^2 + k(l_e - l_0)x$ en prenant $E_{pr}(l = l_e) = E_{pr}(x = 0) = 0$ on a

$E_{pr}(x) = \frac{1}{2} kx^2 + k(l_e - l_0)x$.

L'énergie mécanique vaut donc : $E_m = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2} kx^2 + k(l_e - l_0)x$. Comme nous avons montré que $mg - k(l_e - l_0) = 0$, il vient $E_m = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$. Le système étant conservatif, on a

$E_m = \text{cste}$. On en déduit que $\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = 0$ soit $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$. C'est l'équation

différentielle caractéristique d'un oscillateur harmonique de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Par identification, on a donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Soit en fonction des données du problème $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{4 \mu_1 \pi R^3}{3 k}}$ ou $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l - l_0}{g}}$.

A.N. : $2\pi\sqrt{\frac{4 \cdot 2700\pi(1 \cdot 10^{-2})^3}{3}} = 385,78 \cdot 10^{-3}$ soit $T_0 = 386 \cdot 10^{-3}$ s.

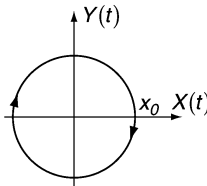
Les solutions de l'équation différentielle du mouvement sont de la forme $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec les conditions initiales : $x(0) = x_0 = 1$ cm et $\dot{x}(0) = 0$. On a donc $x_0 = A \cos(\varphi)$ et $-A\omega_0 \sin(\varphi) = 0$. Si l'on exclut à priori la solution $A = 0$, on a $\varphi = 0$ et $A = x_0$ soit $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$.

B.I.2.c. La trajectoire de phase.

On a donc $X(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ et $Y(t) = -x_0 \sin(\omega_0 t)$. La courbe paramétrée correspondante est donc un cercle de rayon x_0 , tel que $X^2(t) + Y^2(t) = x_0^2$.

Le sens de parcours est déduit des coordonnées du point à l'instant $t = 0^+$ et est indiqué sur le schéma ci-dessous.

La courbe se referme, ce qui traduit l'absence de phénomènes dissipatifs.



B.I.3. Étude dans de l'huile de viscosité η .

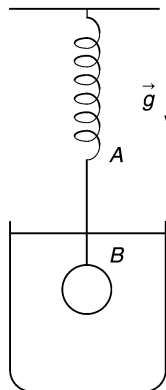


Figure 5

B.I.3.a. L'allongement du ressort dans sa position d'équilibre.

Par rapport au cas précédent la bille est soumise à une force supplémentaire, la poussée d'Archimède exercée par le fluide. C'est une force de direction verticale dirigée vers le haut, l'allongement du ressort sera donc plus petit qu'à la question B.I.2.a.

En tenant compte de la poussée d'Archimède soit $\vec{\pi}_A = -\mu_2 \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{g}$, on obtient à l'équilibre

l'équation : $m \vec{g} - k(\vec{l}' - \vec{l}_0) - \mu_2 \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{g} = \vec{0}$ qui s'écrit en projection sur Ox :

$$\mu_1 \frac{4}{3} \pi R^3 g - k(l'_e - l_0) - \mu_2 \frac{4}{3} \pi R^3 g = 0 \text{ soit finalement : } l'_e - l_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{g}{k} (\mu_1 - \mu_2).$$

$$\text{A.N. : } \frac{4}{3} \pi (1.10^{-3})^3 \frac{9,81}{3} (2700 - 800) = 26,02.10^{-3} \text{ soit } l'_e - l_0 = 2,60 \text{ cm.}$$

B.1.3.b. Dimension du coefficient de viscosité.

L'équation au dimension de l'équation $\eta = \frac{f}{6\pi r v}$ indique que η a comme unité

$$\frac{kg.m.s^{-2}}{m.m.s^{-1}} = kgm^{-1}s^{-1} \text{ soit la dimension } ML^{-1}T^{-1}.$$

B.1.3.c. Équation différentielle du mouvement

Nous l'avons vu, le système {bille} est soumis dans le référentiel du laboratoire à trois forces dont les expressions ont été déterminées. L'application de la relation fondamentale de la dynamique à ce système donne :

$$m \vec{g} - k(\vec{l}' - \vec{l}_0) - \mu_2 \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{g} - 6\pi \eta r \vec{v} = m \vec{a} \text{ soit en posant } x \quad \vec{e}_x = \vec{l}' - \vec{l}_e \text{ et en projetant sur l'axe}$$

Ox on obtient :

$$mg - k(x + l'_e - l_0) - \mu_2 \frac{4}{3} \pi R^3 g - 6\pi \eta r \dot{x} = m\ddot{x}. \text{ Comme } l'_e - l_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{g}{k} (\mu_1 - \mu_2), \text{ il vient}$$

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

B.1.3.d. Expression de Q.

$$\text{Soit } Q = \frac{4}{3} \pi \mu_1 r^3 \sqrt{\frac{k}{\frac{4}{3} \pi \mu_1 r^3}} \cdot \frac{1}{6\pi \eta r} = \sqrt{\frac{4}{3} \pi \mu_1 r^3 \frac{k}{36\pi^2 \eta^2 r^2}} \text{ soit } Q = \frac{1}{3\eta} \sqrt{\frac{\mu_1 k r}{3\pi}}.$$

B.1.3.e. Caractéristique du mouvement lorsque $Q > 1$.

• L'équation différentielle peut s'écrire $\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $2\lambda = \frac{h}{m}$. Le discriminant

réduit de l'équation caractéristique, $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$ ou $\Delta' = \frac{h^2}{4m^2} - \omega_0^2$ peut s'écrire

$$\Delta' = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4} \frac{h^2}{\omega_0^2 m^2} - 1 \right) \text{ ou } \Delta' = \omega_0^2 \left(\frac{1}{4} \frac{1}{Q^2} - 1 \right). \text{ Si } Q > 1 \text{ le discriminant réduit est négatif. Les}$$

solutions de l'équation différentielle sont des sinusoides amorties de la forme :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \text{ et donc } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$

• Le décrément logarithmique est donné par $\delta = \ln \left(\frac{Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)}{Ae^{-\lambda(t+T)} \cos(\omega(t+T) + \varphi)} \right)$ soit $\delta = \lambda T$ ou

$$\delta = \frac{h}{2m} T. \text{ Comme } Q = m\omega_0 / h \text{ il vient : } \delta = \frac{1}{2} \frac{\omega_0 T}{Q}.$$

x(t) en cm	6	4,45	3,30	2,45	1,8	1,35
ln(x(t))	1,791	1,493	1,194	0,896	0,587	0,300
δ		0,298	0,299	0,298	0,309	0,287

Ces valeurs permettent de supposer $Q \gg 1$.

Pour $Q \gg 1$, on a $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \cong T_0$ et donc $\delta = \frac{\pi}{Q}$.

La moyenne des valeurs de δ est 0,298 et $Q = 10,535$ soit $Q \cong 10,5$ et $\eta = \frac{1}{3Q} \sqrt{\frac{\mu_1 kr}{3\pi}}$.

A.N. : $\frac{1}{3 \times 10,535} \sqrt{\frac{2700 \times 3 \times 1.10^{-2}}{3\pi}} = 92,7579$ soit $\eta = 92,8$ Pl.

B.II. Étude d'un pendule simple.

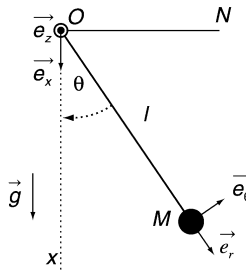


Figure 6

B.II.1. Oscillations de faible amplitude.

B.II.1.a. Énoncé du théorème du moment cinétique appliqué à un point matériel.

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment de la quantité de mouvement (moment cinétique) d'un point matériel M par rapport à un point O fixe est égale au moment par rapport à O des forces extérieures appliquées à ce point.

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{/O} = \sum \vec{OM} \wedge \vec{F}_{ext}$$

B.II.1.b. La trajectoire du point matériel M est plane.

Il n'est pas dit dans l'énoncé que le point d'attache fixe une contrainte de mouvement dans le plan. Il faut donc prendre en considération les conditions initiales du mouvement et les causes de celui-ci. L'écart angulaire initial est dans le plan xOy, il n'y a pas de vitesse initiale et enfin les forces appliquées au point matériel M sont dans le plan xOy. Donc le mouvement ne peut avoir lieu que dans un plan (xOy ici).

B.II.1.c. L'équation différentielle.

Compte tenu du caractère plan du mouvement, il est judicieux de travailler dans le repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ l'expression du moment cinétique $\vec{L}_{/O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ s'écrit

$$\vec{L}_{/O} = l\vec{e}_r \wedge m l \dot{\theta} \vec{e}_\theta \text{ (sachant que } l \text{ est une constante).}$$

Exprimons la dérivée $\frac{d\vec{L}_{/O}}{dt} = ml^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z$ ainsi que la somme des moments des forces extérieures

$\vec{l}e_r \wedge P\vec{e}_x + \vec{l}e_r \wedge (-T)\vec{e}_r$, soit $-mgl \sin \theta \vec{e}_z$. (Attention le sens positif choisi pour θ est cohérent avec un sens de rotation choisi arbitrairement positif selon \vec{e}_z). Par application du théorème ci-dessus il vient $ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$. Pour une elongation de petit angle ($\sin \theta \approx \theta$), l'équation différentielle du second ordre devient linéaire à coefficient constant sans second membre $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$. On retrouve l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique de la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$, de pulsation propre de $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

B.II.1.d. Une valeur de g .

La période propre est donnée par : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, soit $g = \frac{4\pi^2}{T_0^2} l$.

A. N. : $\frac{4\pi^2}{\left(\frac{40,12}{20}\right)^2} l = 9,810$. Compte tenu du peu de chiffre significatif donnée sur la longueur (un chiffre significatif) on a $g = 1.10^1 \text{ m.s}^{-2}$. Si l'on suppose que la longueur est connue avec plus de quatre chiffres significatifs alors $g = 9,810 \text{ m.s}^{-1}$.

B.II.2. Cas général.

B.II.2.a. Expressions des énergies cinétique et potentielle et l'équation de la trajectoire.

L'énergie cinétique du pendule vaut par définition du moment d'inertie $J_{I_O} E_c = \frac{1}{2} J_{I_O} \dot{\theta}^2$ soit

$$E_c = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2.$$

Le poids est la seule force conservative (la tension de la tige ne travaille pas) donc l'énergie potentielle est telle que $\vec{P} = -\text{grad} E_p$ soit dans le repère Oxy $mg\vec{e}_x = -\frac{d}{dx} E_p \vec{e}_x$ soit

$\int_{E_{p0}}^{E_p} dE_p' = -\int_{x_0}^x mg dx'$. Avec $x = l \cos \theta$ et compte tenu des conventions choisies $E_p = 0$ pour $\theta = 0$, on a $\int_0^{E_p} dE_p' = -mg \int_1^{\cos \theta} dx'$ d'où $E_p = mgl(1 - \cos \theta)$.

L'énergie mécanique du système : $E_m = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$ peut s'écrire

$\frac{2E_m}{mgl} = \frac{l}{g} \dot{\theta}^2 + 2(1 - \cos \theta)$. Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, on obtient l'expression demandée :

$$y^2 + 2(1 - \cos \theta) = \frac{2E_m}{mgl}.$$

B.II.2.b. Interprétation du portrait de phase de cette équation donnée à la Figure 7 ci-dessous.

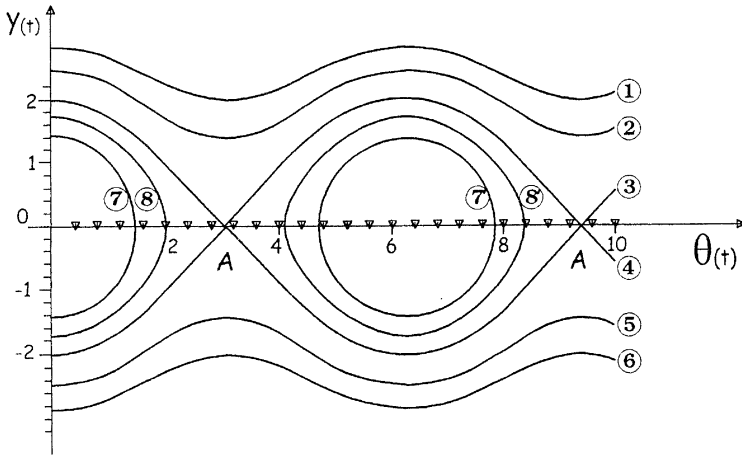


Figure 7

• Les trajectoires de phase correspondant à $E_m < 2mgl$ sont celles telles que l'énergie mécanique initiale est inférieure à celle pour faire juste un tour complet soit par exemple avec $E_p(\pi) = 2mgl$, $E_c(\pi) = 0$. La condition $E_m \ll 2mgl$ suppose des petites oscillations.

L'équation des portraits de phase peut s'écrire à l'ordre le plus pas $y^2 + x^2 = \frac{E_m}{2mgl}$. C'est

l'équation d'un cercle de rayon $\sqrt{\frac{E_m}{2mgl}}$ c'est donc la courbe 7 (modulo 2π) donc 7' aussi.

Rem : Les trajectoires 8 et 8' correspondent aussi à des oscillations, mais dans le cas où $E_m < 2mgl$. Dans ces conditions d'oscillation non isochrone, la période dépend de l'énergie mécanique initiale. L'oscillateur devient anharmonique. Les trajectoires de phase sont fermées, ce qui traduit l'absence de phénomène dissipatif, mais ne sont plus des cercles.

• Les points A de la figure appartenant aux courbes 3 et 4 correspondent à des mouvements de révolutions autour de O. C'est-à-dire que l'énergie mécanique est tel que $E_m \geq 2mgl$. Le point A correspond à l'annulation de y. En ce point, la vitesse angulaire s'annule. On est donc dans le cas où $E_m = 2mgl$: l'oscillateur à juste l'énergie mécanique nécessaire pour faire un tour sans vitesse au point $\theta = \pm\pi$. On reste sur la courbe 3. L'existence de ce point A de rebroussement ou de discontinuité traduit simplement l'instabilité de cette position d'équilibre.

a. Comme nous l'avons vu à l'une des questions précédentes, les courbes 7, 7', 8 et 8' correspondent à des mouvements oscillatoires

b. Les mouvements de révolution débutent avec les courbes 3 passages à 4 soit pour $E_m \approx 2mgl$ et 1, 2 (pour des vitesses positives) et 5, 6 pour les vitesses négatives soit $E_m > 2mgl$.

B.III.La résonance paramétrique.

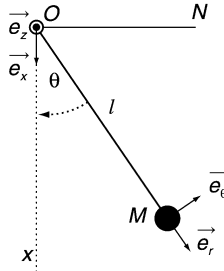


Figure 8

B.III.1. Intégrale première de l'énergie

B.III.1.a. Expression du moment cinétique du pendule par rapport à O.

Comme on l'a vu dans la première partie : $\vec{L}_{r/O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ soit dans le repère local $\vec{L}_{r/O} = l\vec{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ soit $\vec{L}_{r/O} = ml(t)^2 \dot{\theta}\vec{e}_z$

B.III.1.b. L'équation différentielle du mouvement.

La somme des moments des forces extérieures $\vec{l}e_r \wedge P\vec{e}_x + \vec{l}e_r \wedge (-T(t))\vec{e}_r$ se réduit à $-mgl\sin\theta \vec{e}_z$. Par application du théorème du moment cinétique en O fixe :

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{r/O} = \sum \vec{OM} \wedge \vec{F}_{ext} \text{ le mouvement est toujours plan, et } \frac{d\vec{L}_{r/O}}{dt} = m.l^2\dot{\theta} \vec{e}_z + 2l.l.m.\dot{\theta}\vec{e}_z. \text{ II}$$

vient alors $\ddot{\theta} + 2\frac{\dot{l}(t)}{l(t)}\dot{\theta} + \frac{g}{l(t)}\sin\theta = 0$. On reconnaît là une équation différentielle dont un des coefficient dépend explicitement du temps. Elle est du type $\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + \omega_0^2(t)\sin\theta = 0$ celle d'un oscillateur paramétrique.

B.III.1.c. Équation différentielle.

En fait en dérivant le premier terme, on constate qu'il s'agit de rechercher une expression de la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta$. Qui n'est rien d'autre que l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique classique multiplié par $\dot{\theta}$.

Faisons apparaître les termes de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique dans l'équation différentielle de l'encensoir moyennant des conditions d'approximation.

Avec $l(t) = l_0(1 + \epsilon\cos(\Omega t))$, $\dot{l} = -l_0\epsilon\Omega\sin(\Omega t)$ et $\ddot{\theta} + 2\frac{\dot{l}}{l}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$ on obtient

$$\ddot{\theta} - 2\frac{l_0\epsilon\Omega\sin\Omega t}{l_0(1 + \epsilon\cos\Omega t)}\dot{\theta} + \frac{g}{l_0(1 + \epsilon\cos\Omega t)}\sin\theta = 0$$

Approximation 1 : à l'ordre 2 en ϵ ($\epsilon \ll 1$) on a : $\frac{g}{l_0(1 + \epsilon\cos\Omega t)} \approx \frac{g}{l_0}(1 - \epsilon\cos\Omega t)$

Approximation 2 : à l'ordre 2 en θ (pour les petites oscillations) : $\sin\theta \approx \theta$

Le modèle proposé ne sera donc valable que pour de petites oscillations de l'encensoir.

Dans les conditions de l'approximation 1, l'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l_0}(1 - \epsilon\cos\Omega t)\sin\theta = 2\epsilon\Omega\sin\Omega t(1 - \epsilon\cos\Omega t)\dot{\theta}$$

$$\text{ou } \ddot{\theta} + \frac{g}{l_0} \sin \theta = 2\varepsilon \Omega \sin \Omega t (1 - \varepsilon \cos \Omega t) \dot{\theta} + \varepsilon \frac{g}{l_0} \sin \theta \cos \Omega t$$

soit compte tenu de l'approximation 2, de la relation $\frac{g}{l_0} = \omega_0^2$ et en développant :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l_0} \theta = 2\varepsilon \dot{\theta} \Omega \sin \Omega t + \varepsilon \theta \omega_0^2 \cos \Omega t - \varepsilon^2 2\dot{\theta} \Omega \sin \Omega t \cos \Omega t$$

À l'ordre 2, on néglige le terme en ε^2 et l'on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l_0} \theta = \varepsilon (\theta \omega_0^2 \cos \Omega t + 2\dot{\theta} \Omega \sin \Omega t)$$

En multipliant le tout par $\dot{\theta}$ on a finalement l'expression demandée :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \frac{\theta^2}{2} \right) = \varepsilon [\omega_0^2 \theta \dot{\theta} \cos(\Omega t) + 2\Omega \dot{\theta}^2 \sin(\Omega t)]$$

B.III.2. Détermination de la condition de résonance.

B.III.2.a. Expression de $\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}$

Montrons d'abord que l'expression précédente $\left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \frac{\theta^2}{2} \right)$ est proportionnelle à A^2 . Si c'est le cas cela signifie que l'expression dérivée n'est rien autre que l'énergie mécanique à une constante multiplicative près comme on le suppose dans l'énoncé.

On a $\theta = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ et $\dot{\theta} = -A \sin(\omega_0 t + \varphi) - A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ mais compte tenu de

l'approximation $A \ll \frac{\omega_0 A}{2\pi}$, $\dot{\theta}$ s'écrit $\dot{\theta} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

$$\text{Alors } \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2} A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{Soit } \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2} A^2 \omega_0^2.$$

Mais on nous dit dans l'énoncé que $E \propto A^2$ donc pour s'approcher de l'expression demandée on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \frac{\theta^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{d}{dt} (A^2)$$

puis par identification avec l'expression de la première partie :

$$\frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{d}{dt} (A^2) = \varepsilon [\omega_0^2 \theta \dot{\theta} \cos(\Omega t) + 2\Omega \dot{\theta}^2 \sin(\Omega t)]$$

soit en remplaçant θ et $\dot{\theta}$ par leur expression

$$\frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{d}{dt} (A^2) = \varepsilon [-\omega_0^3 A^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) \cos(\Omega t) + 2A^2 \omega_0^2 \Omega \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \sin(\Omega t)]$$

$$\frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{d}{dt} (A^2) = A^2 \omega_0^2 \varepsilon [-\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) \cos(\Omega t) + 2\Omega \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \sin(\Omega t)] \text{ mais :}$$

$$\cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t + 2\varphi) \text{ et } 2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = 1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$$

et l'équation devient :

$$A^2 \omega_0^2 \varepsilon \left[-\omega_0 \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t + 2\varphi) \cos(\Omega t) + \Omega [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)] \sin(\Omega t) \right]$$

mais :

$$\sin(\Omega t) \cos(2\omega_0 t + 2\varphi) = \frac{1}{2} [\sin(\Omega t + 2\omega_0 t + 2\varphi) + \sin(\Omega t - 2\omega_0 t - 2\varphi)]$$

$$\sin(2\omega_0 t + 2\varphi)\cos(\Omega t) = \frac{1}{2}[\sin(2\omega_0 t + 2\varphi + \Omega t) + \sin(2\omega_0 t + 2\varphi - \Omega t)]$$

et l'équation devient :

$$A^2 \omega_0^2 \varepsilon \left[2\Omega \sin(\Omega t) - \frac{\omega_0}{2} \frac{1}{2} [\sin(2\omega_0 t + 2\varphi + \Omega t) + \sin(2\omega_0 t + 2\varphi - \Omega t)] \right. \\ \left. - \frac{\Omega}{2} [\sin(\Omega t + 2\omega_0 t + 2\varphi) + \sin(\Omega t - 2\omega_0 t - 2\varphi)] \right]$$

soit après regroupement :

$$A^2 \omega_0^2 \varepsilon \left[2\Omega \sin(\Omega t) - \frac{\omega_0}{2} \frac{1}{2} [\sin((2\omega_0 + \Omega)t + 2\varphi) + \sin((2\omega_0 - \Omega)t + 2\varphi)] \right. \\ \left. - \frac{\Omega}{2} [\sin((2\omega_0 + \Omega)t + 2\varphi) - \sin((2\omega_0 - \Omega)t + 2\varphi)] \right]$$

et après mise en facteur :

$$\frac{1}{2} A^2 \omega_0^2 \varepsilon \left[2\Omega \sin(\Omega t) - \left(\frac{\omega_0}{2} + \Omega \right) [\sin((2\omega_0 + \Omega)t + 2\varphi)] - \left(\frac{\omega_0}{2} - \Omega \right) [\sin((2\omega_0 - \Omega)t + 2\varphi)] \right] \text{ Si}$$

l'on admet la proportionnalité de E avec A² (ce que nous suggère l'énoncé) alors :

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \varepsilon \left[\left(2\Omega \sin(\Omega t) - \left(\frac{\omega_0}{2} + \Omega \right) \sin((2\omega_0 + \Omega)t + 2\varphi) - \left(\frac{\omega_0}{2} - \Omega \right) \sin((2\omega_0 - \Omega)t + 2\varphi) \right) \right]$$

B.III.2.b. Moyenne de $\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}$.

a. Ω différent de $2\omega_0$;

Si $\Omega \neq \omega_0$ et compte tenu de $\langle \sin(at+b) \rangle_t = 0 \quad \forall a, \forall b$ on a $\left\langle \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} \right\rangle_t = 0$, c'est-à-dire qu'en moyenne l'accroissement relatif de l'énergie mécanique est nulle. On reste dans le cas d'un oscillateur à énergie constante.

b. Ω égal à $2\omega_0$. L'énergie croît exponentiellement.

Si $\Omega = 2\omega_0$ l'expression de $\frac{1}{E} \frac{dE}{dt}$ devient $\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \varepsilon \left[\left(2\Omega \sin(\Omega t) - \frac{3\omega_0}{2} \sin(4\omega_0 t + 2\varphi) \right) \right]$ et compte tenu que $\langle \sin(at) \rangle_t = 0$ et $\langle \sin(4\omega_0 t + 2\varphi) \rangle_t = \sin(2\varphi)$ on a :

$$\left\langle \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} \right\rangle_t = \varepsilon \left(\frac{3\omega_0}{2} \sin(2\varphi) \right) \text{ soit } \left\langle \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} \right\rangle_t = \alpha \text{ et en première approximation, l'équation}$$

différentielle de l'énergie moyenne $\frac{d\langle E \rangle}{dt} = \alpha \langle E \rangle$ dont la solution est tel que $\langle E \rangle \propto e^{\alpha t}$

C'est le phénomène de résonance paramétrique.

C À PROPOS DU LASER

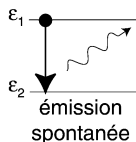
C.I. Étude de l'amplificateur.

C.I.1. Les trois types de transitions possibles

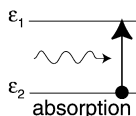
L'émission stimulée consiste dans le renforcement cohérent d'une onde de fréquence ν_{21} par la transition d'un atome d'un niveau $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1$. Elle est donc provoquée par l'arrivée d'un photon, de même énergie que celle susceptible d'être libéré par l'atome retombant au niveau d'énergie inférieur c'est-à-dire $h\nu_{21} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Le photon induit aura non seulement la même fréquence mais aussi la même quantité de mouvement, la même polarisation ainsi que la même phase que le photon inducteur.

Rappelons les trois types de transitions :

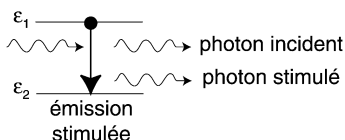
• $\epsilon_2 \rightarrow \epsilon_1$: l'émission spontanée : influencée par les collisions entre atomes et donc fortement aléatoire. L'émission spontanée est statistiquement isotrope sans relation avec un rayonnement incident



• $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2$: absorption induite : l'onde électromagnétique de fréquence $\nu_{21} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{h}$ s'amortit en cédant de l'énergie aux atomes du milieu.



• $\epsilon_2 \rightarrow \epsilon_1$: émission induite ou stimulée : l'onde excite l'atome qui en se désexcitant émet un rayonnement de fréquence $\nu_{21} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{h}$.



C.I.2. Loi de Boltzmann : $N = N_0 \exp(-\epsilon / kT)$.

C.I.2.a. Expression du rapport N_2/N_1 des populations d'atomes.

L'expression $N_i = N_0 \exp\left(\frac{-\epsilon_i}{kT}\right)$ donne la population N_i d'atomes occupant le niveau d'énergie atomique ϵ_i pour une température T , puis $\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{kT}}$.

C.I.2.b. Calcule du rapport N_2/N_1 à la température $T = 393$ K

$$A. N. : e^{-\frac{1,96 \times 10^4}{1,381 \times 10^{23} \times 393}} = 74,883 \cdot 10^{-27} \text{ soit } \frac{N_2}{N_1} = 74,8 \cdot 10^{-27}.$$

C.I.2.c. L'inversion de population.

Pour que l'amplification de la lumière ait lieu, il faut que dans le matériau, l'émission stimulée soit plus forte que l'absorption. Il faut donc qu'il ait inversion de population soit $N_2 > N_1$. Si on admet que $\alpha = K(N_1 - N_2)$ avec $K > 0$, la condition $N_2 > N_1$ implique que $\alpha < 0$. L'intensité lumineuse croît exponentiellement. Le milieu produit une amplification de l'intensité : on dit qu'il est actif. Différents systèmes de pompage permettent d'obtenir cette inversion de population sans laquelle l'émission stimulée ne pourrait avoir lieu.

C.I.3. Transition radiative d'un laser hélium-néon.

On a par définition : $\nu_0 = \nu_{12} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{h}$ et $c = \lambda_0 \nu_0$ soit $\lambda_0 = \frac{hc}{\epsilon_2 - \epsilon_1}$.

$$A. N. : \frac{1,96 \times 1,602 \cdot 10^{-19}}{6,626 \cdot 10^{-34}} = 473,87 \cdot 10^{12} \text{ soit } \nu_0 \cong 474 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$$

$$\text{Et } \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 2,99792458}{1,96 \times 1,602 \cdot 10^{-19}} = 632,63 \cdot 10^{-9} \text{ soit } \lambda_0 \cong 633 \cdot 10^{-9} \text{ m.}$$

C.II. Étude du résonateur

C.II.1. Réflexions successives sur les miroirs M et M'.

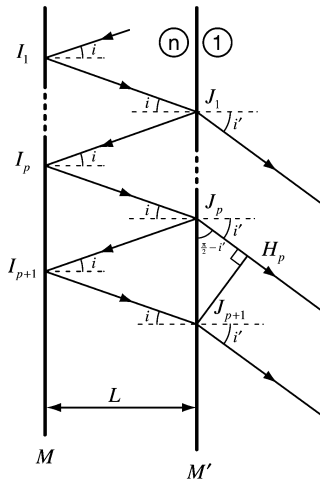


Figure 9

C.II.1.a. Soit c la vitesse de la lumière dans le vide. Expression du retard de phase Φ
 On a représenté sur la figure deux ondes transmises parallèles qui interfèrent donc à l'infini.

La différence de marche vaut : $\delta = [J_p I_{p+1} J_{p+1}] - [J_p H_p]$
 soit compte tenu des indices de réfraction : $\delta = 2nI_p J_p - J_p H_p$

Exprimons δ en fonction des grandeurs intrinsèques. On a : $L = I_p J_p \cos i$, puis

$$J_p H_p = J_p J_{p+1} \cos\left(i' + \frac{\pi}{2}\right) = J_p J_{p+1} \sin i', \text{ et } J_p J_{p+1} = 2L \tan i$$

Soit $\delta = 2n \frac{L}{\cos i} - 2L \tan i \sin i'$. La loi de la réfraction $\sin i' = n \sin i$ permet d'écrire

$$\delta = 2n \frac{L}{\cos i} - 2nL \tan i \sin i \text{ soit } \delta = 2nL \left(\frac{1}{\cos i} - \frac{\sin^2 i}{\cos i} \right) \text{ ou encore } \delta = 2nL \cos i.$$

Le retard de phase correspondant est $\Phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ soit $\Phi = 4n\pi \frac{L}{\lambda} \cos i$.

C.II.1.b. Les modes propres de la cavité.

Il y a interférence constructive lorsque δ est un multiple p de la longueur d'onde λ_0 ou encore $\Phi = 2\pi \times p$ ($p \in \mathbb{N}$). Compte tenu de l'expression du retard de phase, cette condition se

réécrit en $\lambda_p = \frac{1}{p} 2nL \cos i$. On en tire les modes propres $\nu_p = \frac{c}{\lambda} = p \frac{c}{2nL \cos i}$.

Dans toute la suite du problème, on suppose l'angle d'incidence i nul et l'indice n du milieu

actif égal à l'unité.

C.II.2. Détermination des fréquences des modes propres ν_p et de la distance spectrale $\Delta\nu_L$.

Avec les conditions proposées, on a $\nu_p = \frac{c}{\lambda} = p \frac{c}{2L}$

La distance spectrale vaut par définition $\Delta\nu_L = \nu_{p+1} - \nu_p$ soit $\Delta\nu_L = \frac{c}{2L}$.

A. N. : $\frac{299792458}{2 \times 0,25} = 599,585.10^6$ soit $\Delta\nu_L = 0,60.10^9$ Hz

C.II.3. Comparaison de $\Delta\nu_p$, $\Delta\nu_L$ et $\Delta\nu_A$.

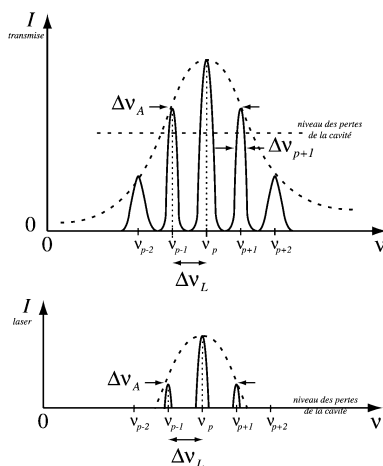
Par définition du facteur de qualité de la cavité, on a : $\Delta\nu_p = \frac{\nu_p}{Q_p}$.

A. N. : $\frac{4,74.10^{14}}{10^8} = 4,74.10^6$ soit $\Delta\nu_p \approx 5.10^6$ Hz.

On observe donc que $\Delta\nu_p < \Delta\nu_L < \Delta\nu_A$.

L'écart entre les modes propres $\Delta\nu_L$ est très supérieur à la largeur de raie laser centrée sur ν_{p_j} les résonances seront bien séparées.

La bande passante de l'amplificateur étant supérieure à $\Delta\nu_L$ et à $\Delta\nu_{p_j}$, on observera plus d'un mode propre.



C.III. Applications du LASER.

Applications	Médicales	Industrielles	Télécommunica tion	Laboratoire
Directivité	Cautérisation, microchirurgie, ophtalmologie	Découpe		
Cohérence		Téléométrie, qualité d'une surface, mesure de vitesse	Fibre optique CD-ROM etc...	Interférence holographie
Puissance		Découpe		

1. H. Mailet, *Le Laser - Principes et techniques d'application*. Technique et Documentation - Lavoisier, Ed. (PARIS, 1990).

CAPES de sciences physiques

Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de chimie avec applications - Session : 2000

PREMIERE PARTIE

ETUDE PHYSICO-CHIMIQUE DE DIVERS POLLUANTS

1. Phénomène des pluies acides.

1.1. *Cations acides*

De nombreux cations (tel Fe^{3+}) donnent dans l'eau des ions H_3O^+ ; ce sont des acides de Bronsted. Ils peuvent réagir avec des molécules comportant un doublet libre : ce sont des acides de Lewis.

1.2. *Cations basiques*

D'après le texte un cation "basique" est associé à un anion basique (tel CO_3^{2-})

1.3. *Isotopes d'un élément chimique*

Deux isotopes ont même numéro atomique (même nombre de protons) mais des nombres de masse différents (nombres de neutrons différents). On les dose par spectrométrie de masse.

1.4. *Le strontium*

Le strontium se trouve comme le calcium dans la deuxième colonne (alcalino-terreux) de la classification périodique. Les deux atomes possèdent le même nombre d'électrons externe, leur conférant le même comportement chimique.

1.5. *Densité de SO_2*

La densité relative, $d = \frac{\rho_{\text{SO}_2}}{\rho_{\text{air}}} = \frac{M_{\text{SO}_2}}{M_{\text{air}}} = \frac{64}{29} = 2,2$, le rend plus lourd que l'air.

1.6. *Écosystème*

Un écosystème est formé d'un milieu et des populations biologiques qui y vivent et qui présentent des interactions entre elles.

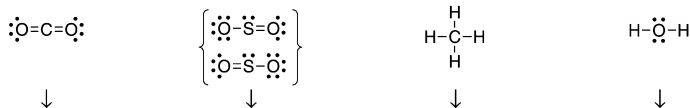
1.7. *Percolation*

La percolation est le phénomène de transport d'un fluide dans un milieu poreux.

2. Structure de quelques gaz.

2.1. Structure moléculaire de quelques composés.

2.1.1. Structures de Lewis de CO_2 , SO_2 , CH_4 , H_2O .



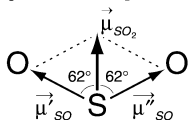
2.1.2. Géométrie selon Gillespie

Linéaire apolaire	Coudée polaire	Tétraédrique apolaire	Coudée polaire
Classement par angle décroissant : $CO_2 > SO_2 > CH_4 > H_2O$			

2.1.3. Molécules polaires

Les molécules avec centre de symétrie sont apolaires. Les molécules coudées avec liaisons polaires (dues à des électronégativités différentes des atomes) sont polaires.

2.1.4. Moment dipolaire de SO_2 .



$$\mu_{SO} = \frac{\mu_{SO_2}}{2 \cos 62} = 1,73 \text{ D} = 5,8 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$$

Proportion de caractère ionique :

$$\frac{\mu_{SO}}{e \cdot \text{longueur}} = 0,25 = 25 \%$$

2.2. Structure du monoxyde de carbone

2.2.1. Étude des atomes constitutifs de la molécule.

2.2.1.1. n : nombre quantique principal (> 0) lié à l'énergie

ℓ : nombre quantique azimutal ($0 \leq \ell \leq n - 1$) lié au moment cinétique

m : nombre quantique magnétique ($-\ell \leq m \leq \ell$) lié à une composante du moment cinétique (ou du moment magnétique orbital).

2.2.1.2. O : $1s^2 2s^2 2p^4$
C : $1s^2 2s^2 2p^2$

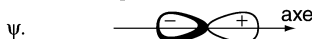
2.2.1.3. Les électrons de cœur sont les électrons $1s^2$ et les électrons de valence sont les électrons $2s^2 2p^k$.

2.2.1.4. $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

2.2.1.5. $Z(\text{O}) > Z(\text{C})$ entraîne une attraction plus forte.

2.2.1.6. Les orbitales « s » ont une symétrie sphérique. Leur représentation plane est un cercle. L'orbitale « 2s » présente en outre un nœud de la fonction d'onde ψ .

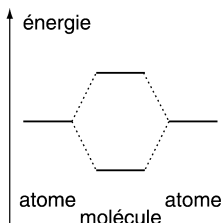
2.2.1.7. Il existe trois orbitales de base « 2p » : $|2p_x\rangle$, $|2p_y\rangle$, $|2p_z\rangle$, à symétrie axiales (de révolution respectivement autour de Ox, Oy, Oz), avec 2 nappes de signes différents de



2.2.2. Structure électronique de la molécule de CO

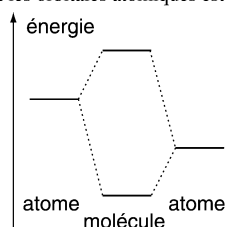
2.2.2.1. Combinaison Linéaire d'Orbitales Atomiques

2.2.2.2.



2.2.2.3. L'écart énergétique entre les orbitales moléculaires et les orbitales atomiques est d'autant plus faible que les niveaux atomiques sont plus éloignés l'un de l'autre.

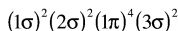
L'orbitale liante est stabilisée (énergie plus faible) par un plus grand recouvrement entre orbitales atomiques.



2.2.2.4. Orbitale σ : axe de symétrie de révolution avec recouvrement selon l'axe.
Orbitale π : plan de symétrie avec recouvrement de part et d'autre du plan.

2.2.3. Diagramme d'orbitales moléculaires du monoxyde de carbone.

2.2.3.1. Les dix électrons de valence (4 venant de C et 6 de O) se distribuent selon la structure :



L'absence d'électron célibataire impose le diamagnétisme.

2.2.3.2. Les deux liaisons π correspondent aux deux orbitales 1π . La liaison σ correspond à l'orbitale liante 1σ . Les deux doublets non liants correspondent alors aux deux orbitales 2σ et 3σ .

2.2.4. Propriétés chimique de CO

2.2.4.1. 3σ est la HO (HOMO).

2.2.4.2. 2π sont les BV (LUMO)

2.2.4.3. La HO (3σ) explique les propriétés complexantes de CO avec les métaux de transition. Son niveau étant plus proche de l'orbitale atomique de C (cf. 2.2.1.5 et 2.2.2.3) sa fonction d'onde a un module plus élevé du côté de C, qui est donc l'atome réactif.

2.2.4.4. CO complexe irréversiblement l'ion Fe^{2+} de l'hémoglobine, ce qui empêche la complexation réversible par le dioxygène et son transport.

2.2.4.5. Une pression d'oxygène élevée déplace l'équilibre dans le sens du remplacement de CO par O_2 .

3. Dissolution d'un gaz dans l'eau.

3.1. Étude théorique

3.1.1. Pression partielle d'un gaz.

Le gaz est à sa pression partielle quand il occupe seul le même volume, à la même température.

3.1.2. Potentiel chimique en phase gazeuse.

$${}^g\mu_X = {}^g\mu_X^\circ + RT \ln\left(\frac{P_X}{P^\circ}\right)$$

${}^g\mu_X^\circ$ est le potentiel chimique standard de X(g) et P° la pression standard de 1 bar.

3.1.3. Potentiel chimique en phase aqueuse.

$${}^A\mu_X = {}^A\mu_{X,C^\infty}^\circ + RT \ln\left(\frac{C_X}{C^\circ}\right)$$

${}^A\mu_{X,C^\infty}^\circ$ est le potentiel chimique standard de X(aq) avec l'échelle des concentrations pour l'état de référence infiniment dilué et C° est la concentration standard de 1 mol.L⁻¹.

3.1.4. Condition thermodynamique d'équilibre.

$${}^g\mu_X = {}^A\mu_X$$

3.1.5. Définition de la constante d'équilibre

La définition international (IUPAC) est $k_X = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) = \exp\left(-\frac{{}^g\mu_X - {}^A\mu_X}{RT}\right)$.

À l'équilibre elle est égale (cf. 3.1.4) à $k_X = \frac{C_X}{C^\circ} \frac{P^\circ}{P_X}$

3.2. Étude de l'effet thermique associé à la dissolution d'un gaz dans l'eau.

3.2.1. Détermination des $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$

Les données permettent le calcul de $k_X(T)$, d'où l'on déduit $\Delta_r H^\circ = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \frac{\Delta_r G^\circ}{T} = R T^2 \frac{d \ln k_X}{dT}$ et

$\Delta_r S^\circ = -\frac{\partial \Delta_r G^\circ}{\partial T} = R \frac{d}{dT} (T \ln k_X)$. On obtient :

T (K)	273	283	293	298	303
$\ln k_X$	-2,60	-2,96	-3,29	-3,40	-3,98
$T \ln k_X$	-710	-838	-964	-1013	-1206

Une régression linéaire à la calculatrice donne : $\Delta_r H^\circ = -22,5 \text{ kJ.mol}^{-1}$, $\Delta_r S^\circ = -103 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

3.2.2. Décarbonation de l'eau.

En chauffant l'eau, l'équilibre de la réaction de dissolution exothermique est déplacé vers le dégagement de CO₂.

3.3. Répartition d'une espèce entre phase gazeuse et phase aqueuse : solubilité de SO₂.

3.3.1. Nomenclature des espèces H₂SO₃, HSO₃⁻, SO₃²⁻.

H₂SO₃ est l'acide sulfureux, HSO₃⁻ est l'ion hydrogénosulfite et SO₃²⁻ est l'ion sulfite.

3.3.2. Expression des concentrations des espèces H₂SO₃, HSO₃⁻, SO₃²⁻.

$$[H_2SO_3] = k_{SO_2} C^\circ \frac{P_{SO_2}}{P^\circ}; [HSO_3^-] = K_{a1} k_{SO_2} \frac{C^\circ}{[H_3O^+]} \frac{P_{SO_2}}{P^\circ}; [SO_3^{2-}] = K_{a1} K_{a2} k_{SO_2} \frac{C^\circ}{[H_3O^+]^2} \frac{P_{SO_2}}{P^\circ}$$

3.3.3. Valeur du pH.

D'après la valeur des K_A , le premier équilibre est prépondérant et $[H_3O^+] \approx [HSO_3^-]$, d'où

$$[H_3O^+] = \sqrt{K_{a_1} k_{SO_2} C^{\circ} \frac{P_{SO_2}}{P^{\circ}}} \text{ et } \text{pH} = 4,7.$$

3.3.4. Définition et calcul de la solubilité s de SO_2 .

$$s = [H_2SO_3] + [HSO_3^-] + [SO_3^{2-}] \approx [HSO_3^-] \approx [H_3O^+] = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

3.3.5. Évolution de la solubilité à l'ajout d'une base.

Une augmentation de pH déplace les équilibres dans le sens d'augmentation de $[HSO_3^-]$ et $[SO_3^{2-}]$, ce qui accroît la solubilité.

4. Oxydation de l'élément soufre au degré d'oxydation +VI

4.1. Réaction (α)

4.1.1. Nombre d'électrons échangés : Deux électrons

4.1.2.

4.1.2.1. Relation entre $\Delta_r G_{\alpha}^{\circ}$ et E_1°

$$\Delta_r G_{\alpha}^{\circ} = -2\mathcal{F} \cdot E_1^{\circ}$$

4.1.2.2. Expression de K_{α}

$$K_{\alpha} = \exp\left(-\frac{-2\mathcal{F} \cdot E_1^{\circ}}{RT}\right) = 10^{69}. \text{ La réaction est totale.}$$

4.2. Réaction (β)

4.2.1. Degré d'oxydation du soufre.

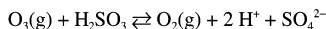
Le soufre est au degré d'oxydation +VI

4.2.2. Caractéristique de la réaction β

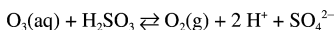
SO_4^{2-} est l'oxydant et H_2 le réducteur.

4.2.3. Expression de K_{β}

$$K_{\alpha} = \exp\left(-\frac{-2\mathcal{F} \cdot E_2^{\circ}}{RT}\right) = 4,6 \cdot 10^5$$

4.3. Réaction (γ)

$$K_{\gamma} = \frac{K_{\alpha}}{K_{\beta}} = 2 \cdot 10^{63}. \text{ La réaction est totale.}$$

4.4. Réaction (ν)

$$K_{\nu} = \frac{K_{\gamma}}{K_{O_3}} = 2 \cdot 10^{65}. \text{ La réaction est totale. En présence d'eau l'ozone oxyde tout le } SO_2 \text{ au degré VI.}$$

DEUXIEME PARTIE

LE PHENOL, INTERMEDIAIRE IMPORTANT DE L'INDUSTRIE CHIMIQUE

1. Étude physico-chimique du phénol.

1.1. Étude du spectre infrarouge.

1.1.1. La bande intense large $3200 - 3400 \text{ cm}^{-1}$ correspond à O-H lié. On observe la présence des pics de C-H à 3080 cm^{-1} , de C = C à $1450-1600 \text{ cm}^{-1}$ et de C-H aromatique monosubstitué à 690 et 750 cm^{-1} .

1.2. Étude du spectre RMN du phénol.

1.2.1. La référence

1.2.2. Pour $\delta = 5,7 \text{ ppm}$, $I = 1$ correspond à un seul proton : le H de O-H. La valeur élevée est due à l'effet inductif attracteur de O.

1.2.3. A $6,8 \text{ ppm}$, $I = 2$ correspond à deux protons équivalents, pour les H en ortho ou en méta. Par suite de l'effet électronique de O, H en ortho est le plus blindé, d'où le doublet.

1.2.4. Les H en méta et le H en para sont susceptibles de générer des triplets selon les valeurs de J_{om} et J_{mp} .

A $\delta = 6,9 \text{ ppm}$, $I = 1$: c'est le H en para

A $\delta = 7,2 \text{ ppm}$, $I = 2$: c'est le H en méta.

1.3. Étude de l'équilibre liquide-liquide : phénol-eau.

1.3.1. Au point A apparaît seconde phase liquide plus concentrée en phénol dont la composition est celle de B. La variance est $\nu = 2 + 2 - 2 = 2$. A T et P données, les fractions molaires en phénol dans chaque phases sont complètement fixées.

1.3.2. Le point M donne la composition globale des deux phases : une solution (1) de phénol dans l'eau majoritaire de fraction molaire x_A en phénol et une solution (2) d'eau dans le phénol majoritaire de fraction molaire x_B en phénol.

De $n = n_1 + n_2$ et $nx_M = n_1x_A + n_2x_B$, on tire $n_1(x_M - x_A) = n_2(x_B - x_M)$ soit géométriquement,
 $n_1 \overline{MA} = n_2 \overline{MB}$.

1.3.3. La fraction molaire du phénol dans le liquide (1) est constante et égale à x_A , de même que dans le liquide (2) ou elle vaut x_B .

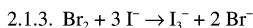
1.3.4. Au dessus de la température du sommet de la courbe, il n'existe qu'une seule phase et la solution enrichie en phénol.

2. Dosage du phénol dans un rejet industriel.

2.1. Dosage de la solution de bromate de potassium.

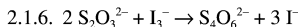
2.1.1. $6\text{H}^+ + 5\text{Br}^- + \text{BrO}_3^- \rightleftharpoons 3\text{Br}_2 + 3\text{H}_2\text{O}$

2.1.2. $n_{\text{Br}^-} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$, $n_{\text{H}^+} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ et $n_{\text{BrO}_3^-} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$. Le réactif en défaut est BrO_3^- . Une précision faible sur H^+ et Br^- est suffisante : on utilise une éprouvette graduée. En revanche, une grande précision sur BrO_3^- exige l'emploi d'une pipette jaugée (20 cm^3)



2.1.4. On a ajouté $n_{\text{I}^-} = 25 \cdot 10^{-3} \times 1,2 = 3 \cdot 10^{-2}$ mol, pour doser Br_2 à $3 \times 0,4 \cdot 10^{-3} \times 3 = 3,6 \cdot 10^{-3}$ mol.
 I^- est donc en très large excès.

2.1.5. L'éprouvette graduée.

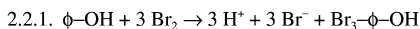


2.1.7. L'empois d'amidon ou le thiodène

2.1.8. On obtient successivement : $n_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-}} = 2n_{\text{I}_3^-}$, $n_{\text{I}_3^-} = n_{\text{Br}_2}$, $n_{\text{Br}_2} = 3n_{\text{BrO}_3^-}$, $n_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-}} = 6n_{\text{BrO}_3^-}$, d'où

$$c = \frac{1}{6} \frac{0,1 \times 21,5}{20} = 0,0179 \text{ mol.L}^{-1}$$

2.2. Dosage de la solution contenant le phénol.



2.2.2. On dose Br_2 en excès : $c_{\phi\text{-OH}} = \frac{V_2 - V_1}{V_0} \times \frac{0,1}{6} \text{ mol.L}^{-1}$. D'où

$$\rho = c_{\phi\text{-OH}} \cdot M = 1,567 \left(\frac{V_2 - V_1}{V_0} \right) = 0,924 \text{ g.L}^{-1}$$

3. A propos de deux herbicides préparés à partir du phénol.

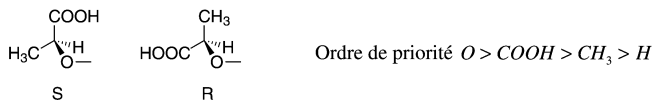
3.1. Le 2,4 DP

3.1.1. La molécule de 2,4 DP

3.1.1.1. Une fonction acide et une fonction éther

3.1.1.2. Le carbone tétraédrique de la fonction éther est chiral.

3.1.1.3.

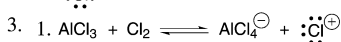
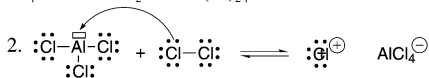
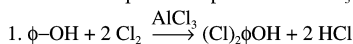


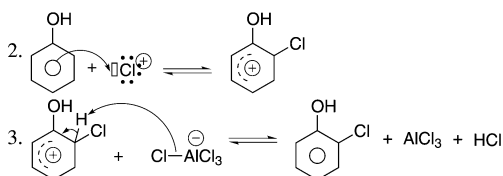
3.1.1.4. Ce sont des énantiomères.

3.1.1.5. Ils ne diffèrent que par le sens du pouvoir rotatoire.

3.1.2. Synthèse du 2,4 DP

3.1.2.1. Chloration du phénol en présence d' AlCl_3





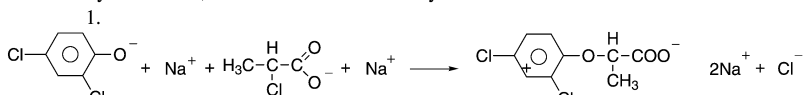
On obtient majoritairement les isomères ortho et para, dont l'état intermédiaire de Wheeland est plus stable par mésomérie que celui de l'isomère méta.

4. Dans le mécanisme précédent, l'étape limitante est la formation de l'intermédiaire de Wheeland. Dans le contrôle cinétique, l'équilibre chimique n'est pas atteint : le produit majoritaire obtenu est celui qui se forme le plus vite.

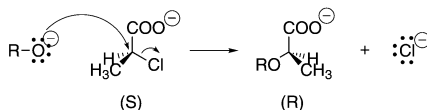
5. Pour le phénol, OH est un groupe activant +M, ce qui augmente la vitesse de l'étape limitante.

6. L'encombrement stérique est plus important pour l'isomère 2,6.

3.1.2.2. Synthèse du 2,4 DP sous forme de carboxylate de sodium.



2. La stéréospécificité s'explique par un mécanisme concerté SN_2 aboutissant à l'inversion de Walden.



Ici la substitution ne modifie pas l'ordre de priorité et on obtient l'énantiomère (R).

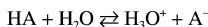
3. La solution de l'énantiomère (R) est douée de pouvoir rotatoire mais la connaissance de la configuration absolue ne permet pas d'en déduire le sens.

4. $\alpha_D^{20} = [\alpha]_D^{20} \cdot \ell \cdot c$. D est relatif à la raie jaune du sodium (589 nm) et 20 à la température (en °C).

La loi de Biot s'écrit $\alpha_D^{20} = [\alpha]_D^{20} \cdot \ell \cdot c$ où α est l'angle de rotation (en °), ℓ est l'épaisseur traversée (en dm), c est la concentration (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$) et $[\alpha]_D^{20}$ est en $^\circ \cdot \text{dm}^{-1} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{mL}$

3.2. Étude de la solubilité du 2,4 D en fonction du pH, en solution aqueuse.

3.2.1. L'acide HA est moyen et réagit avec l'eau selon la réaction prépondérante :



De la loi de l'équilibre $\frac{h^2}{s_0 - h} = K_a = 10^{-2.6}$, avec $s_0 = 4.10^{-3}$, on tire :

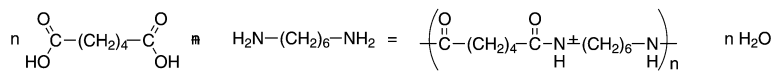
$$[\text{H}_3\text{O}^+] = h = [\text{A}^-] = 10^{-2.67} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}, [\text{HA}] = 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}, [\text{OH}^-] = 10^{-11.3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \ll [\text{H}_3\text{O}^+].$$

Le pH vaut donc 2,7.

3.2.2. $K = \frac{[\text{HA}]}{c^\circ} = 1.8 \cdot 10^{-3}$. K est la constant non dimensionnée.

$$3.2.3. \quad s = [\text{HA}] + [\text{A}^-] = [\text{HA}] \left(1 + \frac{K_a}{h} \right) = Kc^\circ \left(1 + \frac{K_a}{h} \right)$$

4.2.5. Dans le nylon 6,6, la polycondensation est réalisée entre l'acide adipique et l'hexaméthylène diamine :



CAPES de sciences physiques

Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE
Composition de physique avec applications - Session : 2000

PREMIER PROBLÈME MÉCANIQUE

PARTIE I

1. Le référentiel barycentrique (R*) de (S) relativement à (R) est le référentiel animé / (R) d'un mouvement de translation de vitesse $\vec{V}_{G/R}$.

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à (S) dans (R) en G :

$$(m_1 + m_2) \left(\frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2} \right)_R = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{V}_{G/R}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \underline{\vec{V}_{G/R} = C^{te}}$$

(R) est galiléen et (R*) est donc animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme / (R) donc **(R*) est un référentiel galiléen.**

2. ♦
$$\vec{GF} = \overrightarrow{M_1 M_2} \left(\frac{d\vec{GF}}{dt} \right)_{R^*} = \left(\frac{d\vec{GM}_2}{dt} \right)_{R^*} - \left(\frac{d\vec{GM}_1}{dt} \right)_{R^*} = \boxed{\vec{V}_{M_2}^* - \vec{V}_{M_1}^* = \vec{V}^*}$$

♦ Utilisons la loi de composition des vitesses :

$$\vec{V}_{M_2/R} = \vec{V}_e(M_2) + \vec{V}_{M_2}^* \quad \text{et} \quad \vec{V}_{M_1/R} = \vec{V}_e(M_1) + \vec{V}_{M_1}^*$$

or :
$$\vec{V}_e(M) = \vec{V}_{G/R} \quad \text{d'où} \quad \vec{V}_{M_2/R} = \vec{V}_{G/R} + \vec{V}_{M_2}^* \quad \text{et} \quad \vec{V}_{M_1/R} = \vec{V}_{G/R} + \vec{V}_{M_1}^*$$

 $\forall M \in (R^*)$

d'où :
$$\vec{V}_{M_2}^* = \vec{V}_{M_2/R} - \vec{V}_{G/R} \quad ; \quad \vec{V}_{M_1}^* = \vec{V}_{M_1/R} - \vec{V}_{G/R} \Rightarrow \boxed{\vec{V}^* = \vec{V}_{M_2/R} - \vec{V}_{M_1/R}}$$

3.
$$\vec{GF} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{GM}_2 - \vec{GM}_1 \tag{1}$$

et :
$$\overrightarrow{OG}(m_1 + m_2) = m_1 \overrightarrow{OM}_1 + m_2 \overrightarrow{OM}_2 \Rightarrow \text{avec } G \equiv 0 \quad m_1 \overrightarrow{GM}_1 + m_2 \overrightarrow{GM}_2 = \vec{0} \tag{2}$$

(2)
$$\Rightarrow \overrightarrow{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \overrightarrow{GM}_2 \quad \text{d'où} : \vec{GF} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \overrightarrow{GM}_2 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GF}}$$

or :
$$\overrightarrow{GM}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \overrightarrow{GM}_1 \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{GM}_1 = -\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \overrightarrow{GF}}$$

$$4. \quad \blacklozenge \quad \vec{P}_1^* = m_1 \vec{V}_1^* = m_1 \left(\frac{d \vec{GM}_1}{dt} \right)_{R^*} = - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{d \vec{GF}}{dt} \right)_{R^*} \Rightarrow \boxed{\vec{P}_1^* = \mu \vec{V}^*}$$

de même :

$$\boxed{\vec{P}_2^* = \mu \vec{V}^*}$$

$$\blacklozenge \quad \boxed{\vec{P}_1^* + \vec{P}_2^* = \vec{0}}$$

♦ soit (R_1) un référentiel quelconque pour lequel $\vec{V}_{G/R_1} = \vec{0}$ on a :

$$\vec{P}_{1/R_1} + \vec{P}_{2/R_1} = m_1 \left(\frac{d \vec{GM}_1}{dt} \right)_{R_1} + m_2 \left(\frac{d \vec{GM}_2}{dt} \right)_{R_1}$$

$$\Rightarrow (2) : \quad \vec{P}_{1/R_1} + \vec{P}_{2/R_1} = \frac{d}{dt} (m_1 \vec{GM}_1 + m_2 \vec{GM}_2) = \vec{0}$$

Cette propriété est non spécifique du référentiel barycentrique.

5. \vec{L}^* est indépendant du point par rapport auquel on le calcule. Calculons-le directement / G :

$$\vec{L}^* = \vec{GM}_1 \wedge m_1 \vec{V}_1^* + \vec{GM}_2 \wedge m_2 \vec{V}_2^* \quad \text{or} \quad \vec{V}_1^* = - \frac{\mu}{m_1} \vec{V}^* ; \quad \vec{V}_2^* = \frac{\mu}{m_2} \vec{V}^*$$

$$\text{d'où :} \quad \vec{L}^* = \vec{GM}_1 \wedge \mu \vec{V}^* + \vec{GM}_2 \wedge \mu \vec{V}^* = (\vec{GM}_2 - \vec{GM}_1) \wedge \mu \vec{V}^* \Rightarrow \boxed{\vec{L}^* = \mu \vec{GF} \wedge \vec{V}^*}$$

$$6. \quad K^* = \frac{1}{2} m_1 \vec{V}_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 \vec{V}_2^{*2} = \frac{1}{2} \mu^2 \left(\frac{1}{m_1} V^{*2} + \frac{1}{m_2} V^{*2} \right) \Rightarrow \boxed{K^* = \frac{1}{2} \mu V^{*2}}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad K &= \frac{1}{2} m_1 V_{1/R}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2/R}^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\vec{V}_1^* + \vec{V}_{G/R} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\vec{V}_2^* + \vec{V}_{G/R} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 V_1^{*2} + m_1 \vec{V}_1^* \cdot \vec{V}_{G/R} + \frac{1}{2} m_1 V_{G/R}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^{*2} + m_2 \vec{V}_2^* \cdot \vec{V}_{G/R} + \frac{1}{2} m_2 V_{G/R}^2 \\ &= K^* + \vec{V}_{G/R} \cdot \underbrace{\left(m_1 \vec{V}_1^* + m_2 \vec{V}_2^* \right)}_{\vec{0}} + \frac{1}{2} m_1 V_{G/R}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{G/R}^2 \Rightarrow \boxed{K = K^* + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{G/R}^2} \end{aligned}$$

8. Dans (R^*) galiléen, relation fond. de la dynamique à $M_1, m_1 ; M_2, m_2$.

$$\left(\frac{d^2 \vec{GM}_1}{dt^2} \right)_{R^*} = \vec{f}_1 \times \frac{1}{m_1} \quad (1)$$

et $\vec{f}_2 = -\vec{f}_1$

$$\left(\frac{d^2 \vec{GM}_2}{dt^2} \right)_{R^*} = \vec{f}_2 \times \frac{1}{m_2} \quad (2)$$

$$(2) - (1) : \quad \frac{d^2}{dt^2} (\vec{GM}_2 - \vec{GM}_1) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{f}_2 \Rightarrow \boxed{\mu \left(\frac{d^2 \vec{GF}}{dt^2} \right)_{R^*} = \vec{f}_2} \quad (*)$$

F dans (R*) est donc soumis à une force : \vec{f}_2 .

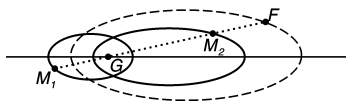
9. ♦ Par intégration de l'équation (*) on obtient : $\vec{GF}(t)$.

$$\text{or : } \vec{GM}_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \vec{GF}(t) \quad ; \quad \vec{GM}_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} \vec{GF}(t) \Rightarrow \text{mouvements de } M_1 \text{ et } M_2 \text{ dans } (R^*).$$

$$\diamond \frac{m_1}{m_2} = 2$$

$$\vec{GM}_2 = \frac{2}{3} \vec{GF} \quad ; \quad \vec{GM}_1 = -\frac{1}{3} \vec{GF}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{GM}_2 &= \frac{2}{3} \vec{GF} \\ \vec{GM}_1 &= -\frac{1}{3} \vec{GF} \end{aligned}}$$



PARTIE 2

1. Dans la partie I on a démontré que :

$$\vec{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{GF} \simeq -\frac{m_2}{m_1} \vec{GF} \simeq \vec{0} \Rightarrow \boxed{M_1 \simeq G}$$

$$\vec{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{GF} \simeq \vec{GF} \Rightarrow \boxed{M_2 \simeq F}$$

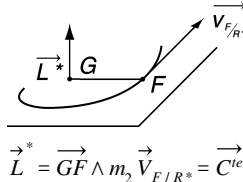
$$2. \quad \diamond \quad \vec{L}^* = \vec{GF} \wedge m_2 \left(\frac{d\vec{GF}}{dt} \right)_{R^*} ;$$

$$\left(\frac{d\vec{L}^*}{dt} \right)_{R^*} = \left(\frac{d\vec{GF}}{dt} \right)_{R^*} \times \left(\frac{d\vec{GF}}{dt} \right)_{R^*} \cdot m_2 + \vec{GF} \wedge \underbrace{\left(\frac{d^2 \vec{GF}}{dt^2} \right)_{R^*}}_{\vec{f}_r = -\frac{M_1 M_2}{M_1 M_2^3} = -k \frac{\vec{GF}}{GF^3}} m_2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{R^*} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L} = C^{te}}$$

◆



$\Rightarrow \vec{GF}$ et \vec{V}_{F/R^*} doivent toujours être perpendiculaire à \vec{L}^* donc le mouvement de F ou de M_2 est plan. Le plan est défini par : $(G, \vec{GF}(t=0) \ ; \ \vec{V}_{F/R^*}(t=0))$.

3. ◆

$$\vec{V}^R = \vec{V}_{M_2}^* = r \dot{\theta} \vec{u}_r = \boxed{r \dot{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \vec{V}^*}$$

◆

$$\boxed{\|\vec{V}^*\| = \sqrt{r^2 + \Lambda^2 \dot{\theta}^2}}$$

◆

$$\vec{a}^* = \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

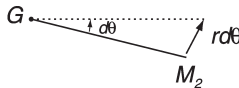
$$\vec{a}^* = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{a}^* = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r}$$

$$\vec{f} \text{ est colinéaire à } \vec{u}_r \Rightarrow r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} = 0 \quad \left(- \frac{dL^*}{dt} = 0 = m (r^2 \ddot{\theta} + 2 r \dot{r} \dot{\theta}) \right)$$

4. ◆

$$\vec{L}^* = m r^2 \dot{\theta} \vec{h} \Rightarrow \boxed{C = r^2 \dot{\theta}}$$

◆



L'aire balayée par le rayon vecteur pendant dt est :

$$\frac{r \cdot r d\theta}{2} = dS$$

d'où :

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{dS}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} C}$$

Loi des aires : le rayon $\vec{r} = \vec{GF} = M_1 M_2$ balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

apocentre : r_a
 Application : pericentre : $r_p \oplus$ vitesse orthoradiale \Rightarrow Loïs des aires :

$$\frac{dS}{dt} = C^{te} = \frac{1}{2} r_p V_{(P)}^* = \frac{1}{2} r_a V_{(A)}^* \Rightarrow \boxed{V_{(A)}^* < V_{(P)}^*}$$

5. A l'apocentre ou au pericentre : $\frac{du^-}{d\theta} = 0 \Rightarrow V^{*2} = \frac{C^2}{r^2} \Rightarrow \boxed{V^*(A) < V^*(P)}$.

6. $\vec{f}_1 \cdot d\vec{M}_1 + \vec{f}_2 \cdot d\vec{M}_2 = k \frac{M_1 M_2}{M_1 M_2^2} (d\vec{OM}_1 - d\vec{OM}_2) = k \frac{M_1 M_2}{M_1 M_2^3} \cdot d(\vec{M}_2 M_1) = -\frac{k dr}{r^2}$
 $= d\left(\frac{k}{r}\right) = -dE_p(r) \quad r = M_1 M_2$

$-dE_p = d\left(\frac{k}{r}\right) \Rightarrow E_p = -\frac{k}{r} + cte \quad \Rightarrow \boxed{E_p(r) = -\frac{k}{r}}$
// par hypothese

7. $E = K^* + E_p(r) = \frac{1}{2} m V^{*2} - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2} m C^2 \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}}_{W(r)}$

$$\boxed{W(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}}$$

♦ (S) est un système isolé \Rightarrow l'énergie de (S) se conserve $\Rightarrow \boxed{E = C^{te}}$.

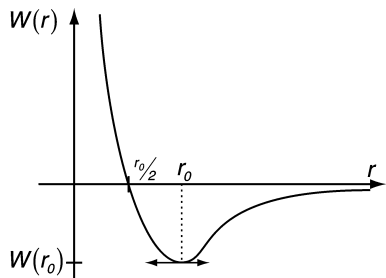
♦ $\frac{dW(r)}{dr} = 0 = \frac{1}{2} m C^2 (-2) \frac{1}{r^3} + \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow r = \frac{C^2}{GM} = M_0$

$W(r) = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2} r_0 \quad \text{ou} \quad r \rightarrow \infty$

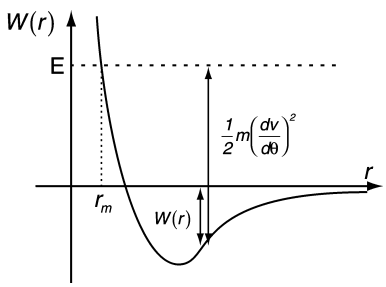
Tableau de variation :

	0	$\frac{r_0}{2}$	r_0	∞
$\frac{dW}{dr}$	-		0	+
$W(r)$	∞	0	$-\frac{G^2 M^2}{2C^2} m$	0

$$W\left(r_0 = \frac{C^2}{GM}\right) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{C^4} G^2 M^2 - \frac{GMm}{C^2} GM = -\frac{G^2 M^2}{2 C^2} m$$



8. ♦ $E \geq 0$



On a :

$$E = W(r) + \underbrace{\frac{1}{2} m \left(\frac{dv}{d\theta} \right)^2}_{\geq 0}$$

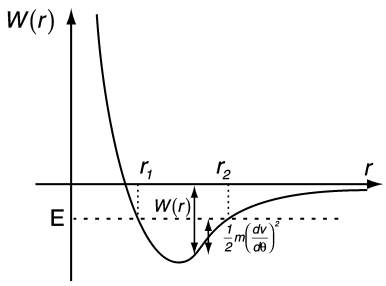
$$\Rightarrow E - W(r) \geq 0$$

$$\Rightarrow r \in \left[r_m, \infty \right]$$

\downarrow
 distance minimale
 d'approche

État de diffusion : car M_2 peut aller à l' ∞ .

♦ $E < 0$



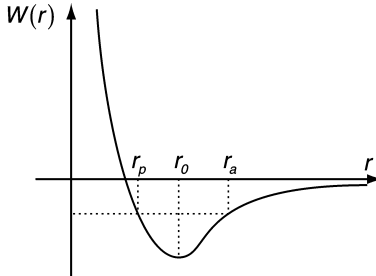
De même : $E - W(r) \geq 0$

$$\Rightarrow r \in [r_1, r_2]$$

La trajectoire est d'extension finie.

\Rightarrow **état lié.**

9. \blacklozenge Trajectoire elliptique \Rightarrow état lié $\Rightarrow E < 0$



$$r \in [r_p, r_a]$$

en $r = r_p$ ou $r = r_a$: $E = W(r_{a,p})$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} = E \Rightarrow \frac{1}{2} mC^2 - GMm = Er^2$$

d'où l'équation de 2^e degré dont r_a et r_p sont racines :

$$\boxed{Er^2 + GMmr - \frac{1}{2} mC^2 = 0}$$

\blacklozenge Somme des racines : $r_a + r_p = -\frac{b}{a} = -\frac{GMm}{E} = 2a \Rightarrow \boxed{E = -\frac{GMm}{2a}}$

10. Relation fondamentale de la dynamique appliquée à M_2 dans R^* galiléen :

$$m \vec{a} = -GMm u^2 \vec{u}_1 \Rightarrow -mC^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -GMm u^2 \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}$$

equ diff. lin. à coefficients cts.

La solution est : $u = \frac{1}{r} = A \cos(\theta + \varphi) + \frac{GM}{C^2} \Rightarrow r = \frac{1}{A \cos(\theta + \varphi) + GM/C^2}$

$$r = \frac{1}{\frac{GM}{C^2} \left(\frac{AC^2}{GM} \cos(\theta + \varphi) + 1 \right)} = \frac{C^2/GM}{1 + \frac{AC^2}{GM} \cos(\theta + \varphi)} \equiv \frac{P}{1 + e \cos \theta}$$

d'où :

$$\boxed{P = \frac{C^2}{GM} ; e = \frac{AC^2}{GM}}$$

($A > 0, \varphi = 0$)

$$\begin{aligned}
 11. \quad \blacklozenge \quad r &= \frac{P}{1 + e \cos \theta} \Rightarrow \frac{1}{r} = u = \frac{1}{P} + \frac{e}{P} \cos \theta \quad ; \quad \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{P} \sin \theta \\
 \text{II.7) } \Rightarrow \quad E &= W(r) + \frac{1}{2} m C^2 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 = \frac{1}{2} m C^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{2} m C^2 u^2 - G M m u \\
 E &= \frac{1}{2} m C^2 \frac{e^2}{P^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \frac{m C^2}{P^2} (1 + e \cos \theta)^2 - \frac{G M m}{P} (1 + \sin \theta) \\
 E &= \frac{1}{2} m C^2 / P^2 (e^2 \sin^2 \theta + 1 + 2e \cos \theta + e^2 \cos^2 \theta) - \frac{G M m}{P} (1 + e \cos \theta) \\
 E &= \frac{1}{2} \frac{m C^2}{P^2} (1 + e^2 + 2e \cos \theta) - \frac{G M m}{P} (1 + e \cos \theta) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{m C^2}{C^4} G^2 M^2 (1 + e^2 + 2e \cos \theta) - \frac{G M m}{C^2} G M (1 + e \cos \theta) \quad \text{or } : P = \frac{C^2}{GM}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{E = \frac{G^2 M^2 m}{2 C^2} (e^2 - 1)} \quad (**)$$

◆ On retrouve les résultats de II.8) :

$E \geq 0 \Rightarrow e > 1$ ou $e = 1$: conique : hyperbole ou parabole \Rightarrow état de diffusion.

$E < 0 \Rightarrow e < 1$: ellipse \Rightarrow état lié.

$$\begin{aligned}
 12. \quad \blacklozenge \quad r_p &= \frac{P}{1 + e} \quad ; \quad r_a = \frac{P}{1 - e} \Rightarrow 2a = \frac{2P}{1 - e^2} \\
 (***) \Rightarrow \left[E &= \frac{G^2 M^2 m}{2 C^2} (e^2 - 1) = \frac{G^2 M^2 m}{2 C^2} \times \left(\frac{-2P}{2a} \right) = -\frac{G^2 M^2 m}{2 C^2} \frac{2}{2a} \cdot \frac{C^2}{GM} = -\frac{G M m}{2a} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \blacklozenge \quad \frac{dS}{dt} &= \frac{S}{T} (= \text{cte}) = \frac{\pi a b}{T} = \frac{C}{2} \quad \text{or} \quad P = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{GM} \Rightarrow b^2 = \frac{a c^2}{GM} \\
 \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2} &= \frac{C^2}{4} \Rightarrow \frac{\pi^2 a^2 a C^2}{T^2 GM} = \frac{C^2}{4} \Rightarrow T^2 = \frac{4 \pi^2 a^3}{GM}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}}}$$

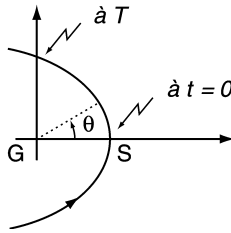
$$\begin{aligned}
 13. \quad E &= m \left(\frac{1}{2} \cdot (6333)^2 - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} - 5,99 \cdot 10^{24}}{9370 - 10^3} \right) = -m \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,99 \cdot 10^{24}}{2a} \\
 &\Rightarrow \boxed{2a = 17690 \text{ km}}
 \end{aligned}$$

14. ◆ $r = 9370 \text{ km}$

parabole :
$$E = 0 = \frac{1}{2} m V^{*2} - \frac{GMm}{M} \Rightarrow \boxed{V^* = \sqrt{\frac{2 GM}{r}} = 9234 \text{ ms}^{-1}}$$

◆ $\theta = 0$ en (S) :
$$r = \frac{P}{2} \Rightarrow \boxed{P = 2r = 18740 \text{ km}}$$

15.



Lois des aires :

$$r^2 \dot{\theta} = C$$

$$\frac{P^2}{(1 + \cos \theta)^2} \dot{\theta} = C \Rightarrow \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{C}{P^2} dt$$

posons :

$$tg \frac{\theta}{2} = x \quad ; \quad \cos x = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad ; \quad dx = \frac{1}{2} (1+x^2) d\theta$$

$$\frac{C}{P^2} dt = \frac{2 dx}{1+x^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} = \frac{2 dx}{(1+x^2) \frac{(1+x^2+1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{2 dx (1+x^2)}{2 \cdot 2}$$

$$\int_0^T \frac{C}{P^2} dt = \int_{x(0)}^{x(\pi/2)} \frac{(1+x^2)}{2} dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_{x(0)=0}^{x(\pi/2)=tg\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\frac{C}{P^2} T = \frac{1}{2} \left(tg \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \left(tg \frac{\pi}{4} \right)^3 \right) \Rightarrow T = \frac{1}{2} \frac{P^2}{C} \left(tg \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \left(tg \frac{\pi}{4} \right)^3 \right) = \frac{2}{3} \frac{P^2}{C}$$

Application Numérique :

$$p = 18740 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$C = (r^2 \dot{\theta})(S) = r_s \cdot V^s(S) = 9370 \cdot 10^3 \cdot 9234$$

$$T = \frac{2}{3} \frac{(18740 \cdot 10^3)^2}{9370 \cdot 10^3 \cdot 9234} = 2706 \text{ s} = 45,1 \text{ min}$$

DEUXIÈME PROBLÈME THERMODYNAMIQUE

1. Premier principe de la thermodynamique

1.1. Pour un système fermé il existe une fonction d'état énergie interne U telle que la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique macroscopique E_c varie par échange de chaleur ou de travail avec l'extérieur :

$$\Delta(U + E_c) = W + Q$$

1.2. a.

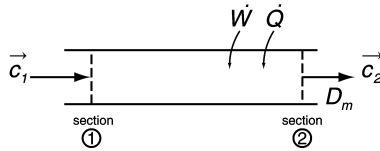
$$H = U + PV$$

b. H est une énergie : Joule dans le système SI.

1.3.

$$U_f - U_i + E_{ef} - E_{ci} = W_{np} + W_p + Q$$

1.4.



1.4.1. Entre t et $t + dt$:

$$U(t + dt) + E_c(t + dt) = U(t) + E_c(t) + \delta Q + \delta W_{np} + \delta W_p$$

$$U(t + dt) - U(t) = dt D_m (u_2 - u_1)$$

$$E_c(t + dt) - E_c(t) = dt D_m \left(\frac{1}{2} C_2^2 - \frac{1}{2} C_1^2 \right)$$

$$\delta Q = dt \dot{Q}$$

$$\delta W_{n,p} = dt \dot{W}$$

$$\delta W_p = P_1 \cdot v_1 \cdot D_m dt - P_2 v_2 D_m dt$$

$$u_2 - u_1 + \frac{1}{2} C_2^2 - \frac{1}{2} C_1^2 = \frac{\dot{Q} + \dot{W}}{D_m} + P_1 v_1 - P_2 v_2$$

$$u_2 + P_2 v_2 + \frac{1}{2} C_2^2 - (u_1 + P_1 v_1 - C_1^2) = \frac{\dot{Q} + \dot{W}}{D_m}$$

$$\left(h_2 + \frac{1}{2} C_2^2 - h_1 - \frac{C_1^2}{2} \right) D_m = \dot{W} + \dot{Q}$$

1.4.2. $|C_2^2 - C_1^2| \ll |h_2 - h_1| \Rightarrow \boxed{h_2 - h_1 = w + q}$

1.4.3. D_m en kg s^{-1} , w et q en J kg^{-1} .

1.5. a. En régime permanent la masse contenue dans le volume de contrôle est constante :

$$m_{\text{sortant}} = m_{\text{entrant}} \quad \text{entre } t \text{ et } t + dt$$

D'où :

$$D_{m1} + D_{m3} = D_{m4} + D_{m2}$$

b.

$$\dot{W} + \dot{Q} = \sum_i D_{mi} h_i$$

2. Deuxième principe de la thermodynamique

2.1. a. Pour un système, il existe une fonction d'état entropie S telle que lors d'une évolution la variation d'entropie soit la somme de deux termes : un terme lié à l'échange de cha-

leur avec l'extérieur et un terme de création lié aux irréversibilités :

$$dS = \delta S_{ech} + \delta S_{cree} \quad \delta S_{cree} \geq 0$$

- b. C'est une dissymétrie entre chaleur et travail qui apparaît alors que le premier principe ne fait pas de différence.

2.2.

$$\textcircled{1} \left| \begin{array}{c} S_1 \\ T_1 \end{array} \right. \longrightarrow \textcircled{2} \left| \begin{array}{c} S_2 \\ T_2 \end{array} \right.$$

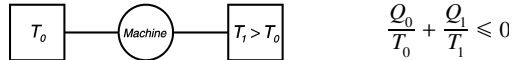
- a. En imaginant un chemin réversible on a le long de ce chemin $\delta S_{cree} = 0$. Alors on peut écrire :

$$S_2 - S_1 = \int_{1 \xrightarrow{rev} 2} \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

- b. S s'exprime en JK^{-1} .

2.3. Un thermostat est un système qui échange réversiblement de la chaleur sans que sa température soit modifiée. Donc pour un thermostat à T_0 : $dS_{Thermostat} = \frac{\delta Q_{thermostat}}{T_0}$.

2.4. 2.4.1. a.



En prenant pour système le fluide subissant dans la machine un cycle, Q_0 est la chaleur échangée par le fluide au cours du cycle avec T_0 et Q_1 est la chaleur échangée par le fluide au cours du cycle avec T_1 .

- b. Pour l'ensemble machine + les deux thermostats, on a pour un cycle :

$$\oint_{cycle} dS_{ensemble} \geq 0$$

or : $dS_{ens} = dS_{Th1} + dS_{Th0} + dS_{fluide} \quad \oint_{cycle} dS_{fluide} = 0$ (fonction d'état)

$$\oint dS_{Th1} = \frac{Q_{Th1}}{T_1} \quad \oint dS_{Th0} = \frac{Q_{Th0}}{T_0}$$

D'où : $\frac{Q_{Th1}}{T_1} + \frac{Q_{Th0}}{T_0} \geq 0$ et $\begin{matrix} Q_{Th1} = -Q_1 \\ Q_{Th0} = -Q_0 \end{matrix}$

D'où l'inégalité de Clausius.

2.4.2. a. Rendement : $\eta = \frac{|W_{cycle}|}{Q_1}$

b. D'après le premier principe : $W_{cy} + Q_1 + Q_0 = 0$
 $W_{cy} < 0$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 > 0 \quad \eta &= \frac{|-Q_1 - Q_0|}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_0}{Q_1} = 1 + \frac{Q_0}{Q_1} \\ -\frac{Q_0}{T_0} \geq \frac{Q_1}{T_1} \quad -\frac{Q_0}{Q_1} \geq \frac{T_0}{T_1} &\Rightarrow \frac{Q_0}{Q_1} \leq -\frac{T_0}{T_1} \end{aligned} \right\} \eta \leq 1 - \frac{T_0}{T_1}$$

- 2.4.3. a. Cycle de Carnot :
 + cycle réversible ;
 + deux isothermes ;
 + deux adiabatiques.

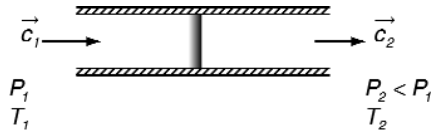
b. Comme il est réversible on a : $\eta = 1 - \frac{T_0}{T_1}$

3. Le gaz parfait

3.1. a. $Pv = rT$

b. $\mu = \frac{m}{V} = \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{P}{\mu} = rT \Rightarrow \mu = \frac{P}{rT}$

- 3.2. a. On considère un fluide en écoulement permanent dans une conduite calorifugée. Un dispositif permet de laminer le gaz.



- b. Pour un gaz parfait, $T_2 = T_1$ dans l'expérience de Joule-Thomson soit h fonction uniquement de T :

$$dh = C_p dT$$

- 3.3. $C_p - C_v = r$ pour un gaz parfait (relation de Mayer).

Or : $\gamma = \frac{C_p}{C_v} \Rightarrow C_v = \frac{C_p}{\gamma}$

Donc : $C_p \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = r$ ou $C_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}$

3.4. $du = \delta q - Pdv = Tds - Pdv$

$$dh = du + d(Pv) \Rightarrow dh = Tds + vdP$$

Soit : $C_p dT = Tds + vdP$ avec $v = r \frac{T}{P}$

$$C_p dT = T \left(ds + r \frac{dP}{P} \right)$$

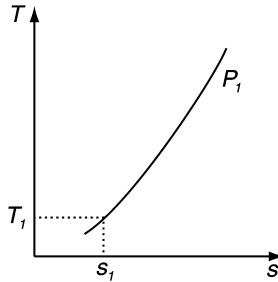
$$\boxed{ds = C_p \frac{dT}{T} - r \frac{dP}{P}}$$

3.5. 3.5.1. $s_2 - s_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - r \ln \frac{P_2}{P_1}$

3.5.2. $s_2 - s_1 = 1000 \ln \frac{350}{290} - \frac{8,314}{0,029} \ln \frac{16}{4}$

$s_2 - s_1 = 188 - 397,4 = -209 \text{ JK}^{-1} \text{ kg}^{-1}$

3.5.3.



a. Isobare P₁ : $s(T, P_1) - s(T_1, P_1) = C_p \ln \frac{T}{T_1}$

$$s(T, P_1) - s_1 = C_p \ln \frac{T}{T_1}$$

soit : $T = T_1 \exp \left(\frac{s - s_1}{C_p} \right)$

b. L'allure est une exponentielle.

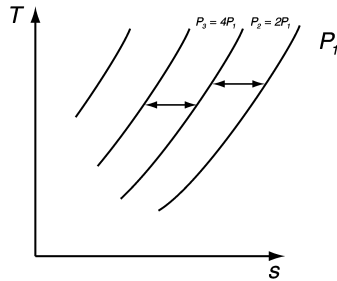
3.5.4. a. $P_2 = 2 P_1$

$$s(T, P_2) - s(T, P_1) = -r \ln \frac{P_2}{P_1}$$

soit : $s(T, P_2) = s(T, P_1) - r \ln 2$ $s(T, P_2) < s(T, P_1)$

b. Pour obtenir l'isobare P₂ à partir de l'isobare P₁, il faut retrancher, pour T fixé, une constante à l'entropie : donc tracer une courbe parallèle.

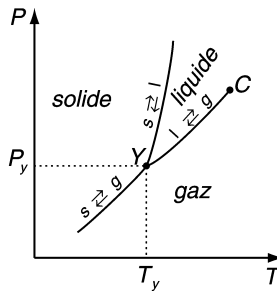
c.



Les isobares sont des courbes déduites par translation les unes des autres.

4. Changements d'état du corps pur

4.1.

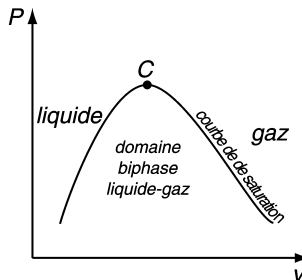


Y : point triple (équilibre *s, l, g*)

C : point critique.

Le domaine fluide présente une continuité entre *l* et *g*.

4.2. 4.2.1.



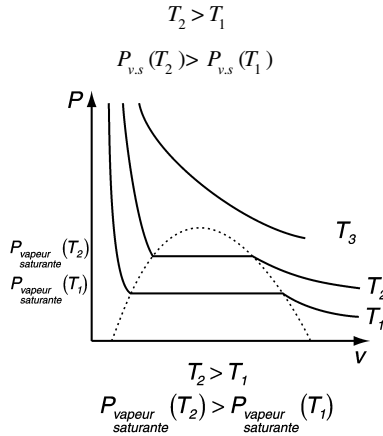
4.2.2. a. Pression de vapeur saturante à *T* : pression de la vapeur en équilibre avec du liquide.

b.

$$L(T) = h_g(T) - h_l(T)$$

La chaleur latente de vaporisation à *T* est la différence entre l'enthalpie massique du gaz et du liquide en équilibre.

4.2.3. Pour $T_3 > T_{critique}$ l'isotherme est continue :



La longueur du palier diminue si T augmente.

4.2.4. Le gaz peut être considéré comme parfait si l'on est loin des conditions de saturation donc si :

$$P < P_{v,s}(T)$$

$$v > v_{g,s}(T)$$

4.3. 4.3.1. m masse de fluide :

$$x = \frac{m_{vapeur}}{m}$$

$$H = H_{liq} + H_{vapeur}$$

$$H = m_{liq} h_l(T) + m_{gaz} h_g(T)$$

$$H = m(1 - x)h_l(T) + mx h_g(T)$$

4.3.2.
$$\frac{H}{m} = h = h_l(T) + x [h_g(T) - h_l(T)]$$

$$x = \frac{h - h_l(T)}{h_g(T) - h_l(T)}$$

4.3.3. De même :

$$S = S_{liq} + S_{vapeur}$$

$$\frac{S}{m} = (1 - x)s_l(T) + x s_g(T)$$

$$x = \frac{s - s_l}{s_g - s_l}$$

4.3.4. A l'équilibre à T fixé on a :

$$s_{liq} = s_{gaz} \quad g = h - Ts \quad \text{enthalpie libre massique}$$

$$h_l - T s_l = h_g - T s_g$$

$$T(s_g - s_l) = h_g - h_l = L(T)$$

$$\text{soit :} \quad s_g(T) - s_l(T) = \frac{L(T)}{T}$$

4.3.5. Eau (cf. lecture du diagramme).

$T_{(K)}$	s_g (en $\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$)	$s_{(l)}$	L (en kJ kg^{-1})
272	9,15	0	2498 \simeq 2500
373	7,35	1,25	2275 \simeq 2280
473	6,4	2,3	1940

On remarque bien que L diminue quand T augmente.

5. Étude d'une centrale à cycle combiné

5.1. Étude de la partie gaz

5.1.1. a.

$$1 \left| \frac{P_1}{T_1} \right. \xrightarrow{\text{isentropique}} 2 \left| \frac{P_2}{T_2} \right.$$

$$s_2 = s_1$$

$$\text{soit :} \quad C_p \ln \frac{T_2}{T_1} = r \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

$$b. \quad T_2 = 290 (8,80)^{\frac{0,4}{1,4}} = 540 \text{ K} \quad (539,8 \text{ K})$$

$$c. \quad w = h_2 - h_1 = C_p (T_2 - T_1)$$

$$w = 1000 (540 - 290) = 250 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} = 250 \text{ kJ kg}^{-1}$$

5.1.2. a.

$$2 \left| \frac{P_2}{T_2} \right. \xrightarrow{\text{isobare}} 3 \left| \frac{P_3 = P_2}{T_3 = 1220 \text{ K}} \right. \quad \dot{Q} = 800 \text{ MW}$$

$$h_3 - h_2 = C_p (T_3 - T_2) = q \quad \dot{Q} = D_m q$$

$$\text{D'où : } D_m = \frac{\dot{Q}}{C_p (T_3 - T_2)} \quad D_m = \frac{800 \cdot 10^6}{10^3 \times (1220 - 540)} = 1176 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$$

b. $s_3 - s_2 = C_p \ln \frac{T_3}{T_2}$

$$s_3 - s_2 = 1000 \ln \frac{1220}{540} = 815 \text{ JK}^{-1} \text{ kg}^{-1} > 0$$

$s_3 \gg s_2$: il y a une augmentation d'entropie due à l'apport de chaleur.

5.1.3.

$$3 \left| \text{scilabatique} \right. 4 \left. \right|$$

$$\dot{W} = -240 \text{ MW} \quad h_2 - h_1 + h_4 - h_3 = C_p (T_4 - T_3 + T_2 - T_1) = w$$

$$\dot{W} = D_m w \quad T_2 - T_1 + T_4 - T_3 = \frac{\dot{W}}{D_m C_p}$$

soit : $T_4 - T_3 = \frac{\dot{W}}{Q} (T_3 - T_2)$

$$T_2 - T_1 + T_4 - T_3 = \frac{-240 \cdot 10^6}{1176 \times 10^3} = -204 \Rightarrow \boxed{T_4 = 766 \text{ K}}$$

5.1.4. a. $s_4 - s_3 = C_p \ln \frac{T_4}{T_3} - r \ln \frac{1}{8,8}$

$$s_4 - s_3 = 1000 \ln \frac{766}{1220} + 285,7 \ln 8,8 = +4560 \text{ JK}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

Donc $s_4 > s_3$: il y a création d'entropie dans la turbine par détente irréversible.
L'évolution n'est pas isentropique.

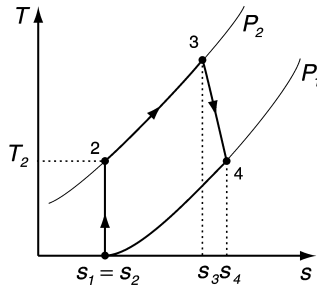
b. L'évolution est irréversible.

5.1.5. $\eta_{turbine} = \frac{|\dot{W}|}{\dot{Q}} = \frac{240}{800} = 0,30$

5.1.6. L'évolution $1 \rightarrow 2$ est isentropique.
 $P_2 > P_1$

$2 \rightarrow 3$: isobare à P_2 .

$3 \rightarrow 4$: $s_4 > s_3$.



5.2. Étude de l'échangeur

5.2.1.

$$D_m h_4 + D'_m h_6 = D_m h_5 + D'_m h_7$$

$$D'_m (h_7 - h_6) = D_m (h_4 - h_5) = \dot{Q}'$$

5.2.2. a.

$$\dot{Q}' = D_m C_{Pair} (T_4 - T_5)$$

b.

$$\dot{Q}' = 1176 \cdot 10^3 (766 - 490) 325 \cdot 10^6 \text{ W}$$

$$\boxed{\dot{Q}' = 325 \text{ MW}}$$

5.2.3.

$$\eta_{vapeur} = \frac{|\dot{W}|}{|\dot{Q}'|} = \frac{100}{325} = 0,308$$

5.2.4. Le condenseur est la source froide et l'eau suit un cycle :

$$\dot{W} + \dot{Q}' + \dot{Q}'' = 0$$

\dot{Q}'' échangé avec l'eau de refroidissement.

$$\dot{Q}'' = -\dot{W} - \dot{Q}'$$

$$\dot{Q}'' = -325 + 100 = \underline{\underline{-225 \text{ MW}}}$$

5.2.5.

$$\eta_{global} = \frac{W_{Global}}{Q_{recue}} = \frac{|\dot{W} + \dot{W}'|}{\dot{Q}}$$

$$\eta_{Global} = \frac{100 + 240}{800} = 0,425$$

Ce rendement est très supérieur à celui du cycle vapeur seul et à celui de la turbine seule.

5.3. Étude de la partie machine à vapeur

5.3.1. a.

$$s_6 = 1,45 \text{ kJ K}^{-1} \text{ kg}^{-1} \quad s_7 = 7,4 \text{ kJ K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$h_6 = 490 \text{ kJ kg}^{-1} \quad h_7 = 3520 \text{ kJ kg}^{-1}$$

b. Le fluide est de l'eau vapeur surchauffée.

$$5.3.2. \quad D'_m = \frac{325 \cdot 10^6}{(3520 \cdot 490) \cdot 10^3} = 107 \text{ kg s}^{-1}$$

Bonne compatibilité (aux arrondis près).

5.3.3. $-T_9$ est la température d'équilibre liq-vapeur à 0,060 bar, 35 °C.

soit :

$$\boxed{T_9 = 308 \text{ K}}$$

5.3.4. a. Pour le réchauffeur, isolé, on a :

$$y h_{10} + (1 - y) h_{11} = y h_{13} + (1 - y) h_{12}$$

et $P_{10} = 2,0$ bar vapeur saturée (120 °C) :

$$\boxed{T_{10} = 393 \text{ K}}$$

b. A 2 bar et 393 K l'équilibre liquide / vapeur est satisfait. Donc à 383 K l'eau est liquide.

$$5.3.4. \quad c. \quad \begin{aligned} y(h_{10} - h_{13}) &= (1 - y)(h_{12} - h_{11}) \\ &= (1 - y) C_{p \text{ eau}} (T_{12} - T_{11}) \end{aligned}$$

$$y(h_{10} - h_{13}) + y(h_{12} - h_{11}) = h_{12} - h_{11}$$

$$y = \frac{h_{12} - h_{11}}{h_{10} - h_{13} + h_{12} - h_{11}}$$

$$\boxed{y = \frac{C_{p \text{ eau}} (T_{12} - T_{11})}{C_{p \text{ eau}} (T_{12} - T_{11}) + h_{10} - h_{13}}}$$

d.

$$h_{10} = 2700 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$h_{13} = 500 \text{ kJ kg}^{-1}$$

$$y = \frac{4,18(383 - 308)}{4,18(383 - 308) + 2200} = \frac{313,5}{2513,5} \Rightarrow \boxed{y = 0,125 \approx 0,12}$$

$$5.3.5. \quad (1 - y) h_8 + y h_{10} - h_7 = w^3 \quad w^3 = \frac{\dot{W}}{D_m}$$

$$\boxed{h_8 = \frac{w^3 + h_7 - y h_{10}}{1 - y}}$$

$$5.3.6. \quad h_8 = \frac{-\frac{10^5}{110} + 3360 - 0,12 \times 2700}{0,88} = 2417 \text{ kJ kg}^{-1}$$

5.3.7.
$$x = \frac{h_8 - h_l}{h_g - h_l}$$

$$x = \frac{2417 - 175}{2575 - 175} = 0,934$$
 $x = 0,93$
 $0,92 < x < 0,95$

5.3.8. a. $s_8 = x s_g + (1 - x) s_l = 0,934 \cdot 8,3 + 0,066 \times 0,5 = 7,785$

$$\dot{S}_{crec} = D_m [y s_{10} + (1 - y) s_8 - s_7]$$

$$= 100 [0,12 \times 7,2 + 0,88 \times 7,785 - 7,4]$$

$$\boxed{\dot{S} = 34,6 \text{ kJ K}^{-1} \text{ s}^{-1}}$$

b. La turbine est une source d'entropie. La production de travail s'accompagne obligatoirement de production d'entropie dans les systèmes réels.

État n°	T(k)	P(bar)	Fluide
1	290	1,00	Air
2	540	8,80	Air
3	1220	8,80	
4	766	1,00	Air
5	490	1,00	Air
6	383	20	Eau-liquide $D_m = 110 \text{ kgs}^{-1}$ $s_6 = s_{l \cdot s}$
7	723	20	
8		0,060	
9	308	0,060	Liquide
10	393	2,0	Vapeur saturée
11	$T_{11} = T_9$	20	Liquide
12	383	20	Liquide
13	383	2,0	Liquide
14		20	

CAPES de sciences physiques

Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition d'électronique - électrotechnique avec applications - Session : 2000

PREMIER PROBLÈME

Partie 1 :

$$I.1.1.1 \quad v(t) = R_0 i(t) + L_0 \frac{di(t)}{dt} + e(t)$$

$$I.1.1.2 \quad e(t) = k' \Omega_p(t) = \frac{k'}{a} \Omega(t)$$

$$I.1.1.3 \quad \Gamma(t) = ki(t)$$

$$I.1.1.4 \quad v(t) = Au(t)$$

$$I.1.2 \quad u(t) = \frac{1}{A} \left\{ \frac{R_0 J}{ka} \cdot \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{L_0 J}{ka} \cdot \frac{d^2\Omega(t)}{dt^2} + \frac{k'}{a} \Omega(t) \right\}$$

$$I.1.3 \quad G_1(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{Aa}{k' + \frac{R_0 J}{k} \cdot p + \frac{L_0 J}{k} \cdot p^2} = \frac{\frac{Aa}{k'}}{1 + \frac{R_0 J}{kk'} \cdot p + \frac{L_0 J}{kk'} \cdot p^2}$$

$$I.1.4.1 \quad K_1 = \frac{Aa}{k'} = \frac{Aa}{k} \quad (k=k')$$

$$\Delta = \left(\frac{R_0 J}{k^2} \right)^2 - 4 \cdot \frac{L_0 J}{k^2}$$

$$p_1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{R_0 J}{k^2} + \sqrt{\Delta} \right) \frac{k^2}{L_0 J} \quad \rightarrow \quad \tau_1 = \frac{-1}{p_1}$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{R_0 J}{k^2} - \sqrt{\Delta} \right) \frac{k^2}{L_0 J} \quad \rightarrow \quad \tau_2 = \frac{-1}{p_2}$$

$$I.1.4.2 \quad p_1 = -20,04 \quad \rightarrow \quad \tau_1 = 49,9 \text{ ms}$$

$$p_2 = -9980 \quad \rightarrow \quad \tau_2 = 0,1 \text{ ms}$$

$$K_1 = 2,5$$

$$I.1.5.1 \quad L_0 = 0 \text{ mH} \quad G_1(p) = \frac{\frac{Aa}{k'}}{\frac{R_0 J}{kk'} \cdot p} = \frac{K_1}{1 + \frac{R_0 J}{kk'} \cdot p}$$

$$I.1.5.2 \quad G_1(p) = \frac{2,5}{1 + 0,05 \cdot p} \# \frac{K_1}{1 + \tau_1 \cdot p}$$

I.1.6 On peut utiliser l'approximation (simplification) de $G_1(p)$ lorsque le dispositif est utilisé à des fréquences inférieures à $\frac{1}{2\pi \cdot \tau_2} \approx 1,6$ kHz

$$I.2.1.1 \quad \theta_p(t) = \int_0^t \Omega_p(\tau) \cdot d\tau \quad \theta(t) = \frac{a'}{a} \int_0^t \Omega(\tau) \cdot d\tau$$

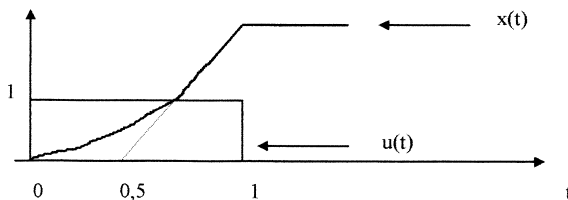
$$I.2.1.2 \quad x_p(t) = R \cdot \theta_p(t) \quad \theta(t) = \frac{a'}{a'''} \cdot \frac{1}{R} \cdot x(t)$$

$$I.2.1.3 \quad x(t) = R \cdot \frac{a'''}{a} \int_0^t \Omega(\tau) \cdot d\tau$$

$$I.2.2 \quad G_2(p) = \frac{X(p)}{U(p)} = \frac{X(p)}{\Omega(p)} \cdot \frac{\Omega(t)}{U(t)} = G_2(p) \cdot G_1(p) = \frac{125}{p \cdot (1 + 0,05p)}$$

I.2.3 Voir document réponse n°1

I.2.4



I.3.1 Régulateur proportionnel intégral (PI)

$$I.3.2.1 \quad R_1(j\omega) = K_{p1} \left(1 + \frac{1}{T_{i1} \cdot j\omega} \right)$$

I.3.2.2 Voir document réponse n°1

I.3.2.3 Voir document réponse n°1

$$I.3.3.1 \quad H_1(p) = \frac{R_1(p) \cdot G_1(p)}{1 + R_1(p) \cdot G_1(p)}$$

I.3.3.2 Pour obtenir un système du premier ordre en boucle fermée, on utilise la méthode de compensation d'un pôle.

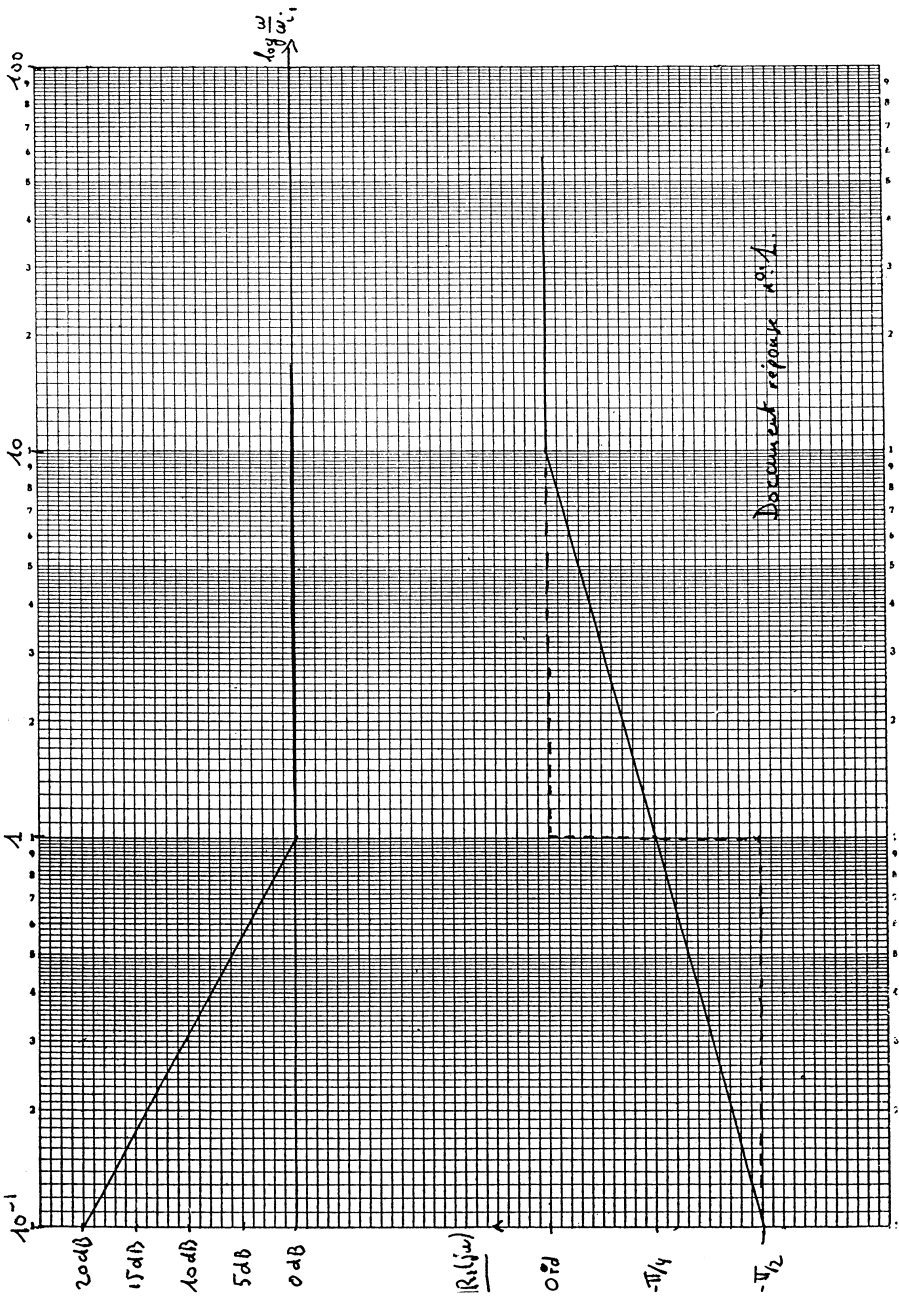
$$\bullet \quad T_{i1} = \tau_1 \quad \rightarrow \quad R_1(p) \cdot G_1(p) = \frac{K_1 K_{p1}}{\tau_1 \cdot p} \quad \text{donc } H_1(p) = \frac{1}{1 + \frac{\tau_1}{K_1 K_{p1}} \cdot p} = \frac{1}{1 + \tau_{BF} \cdot p}$$

$$\bullet \quad K_{p1} = \frac{5}{K_1}$$

I.3.3.3 $K_{p1} = 2$ et $T_{i1} = \tau_1 = 50$ ms

$$I.4.1 \quad F_1(p) = \frac{X(p)}{\mathcal{E}(p)} = H_1(p) \cdot G_2(p) \cdot R_2(p)$$

I.4.2.1 La marge de phase d'un système correspond au retard de phase supplémentaire qu'il faudrait lui appliquer pour que l'argument de sa fonction de transfert soit égal à π lorsque le module de sa fonction de transfert vaut 1 (0 dB).



I.4.2.2 Argument de $\frac{X(j\omega)}{\varepsilon(j\omega)} = 135^\circ \rightarrow \omega \approx 100 \text{ rad.s}^{-1}$ ($f \approx 15.9 \text{ Hz}$)

I.4.2.3 Pour $\omega = 100 \text{ rad.s}^{-1}$ $\left| \frac{X(j\omega)}{\varepsilon(j\omega)} \right| \approx -29 \text{ dB}$ (0.032)

I.4.2.4 $K_{p2} \approx 28.9$ (29 dB)

Partie 2 :

II.1.1 $G_0 = 1$

II.1.2.1 Lorsque $\omega \rightarrow 0 \text{ rad.s}^{-1}$ $|G(j\omega)|_{dB} \rightarrow 0 \text{ dB}$ et $\text{Arg}(G(j\omega)) \rightarrow 0 \text{ rad}$ (0°)

II.1.2.2 Lorsque $\omega \rightarrow +\infty \text{ rad.s}^{-1}$ $|G(j\omega)|_{dB} \rightarrow -\infty \text{ dB}$ et $\text{Arg}(G(j\omega)) \rightarrow -\pi \text{ rad}$ (180°)

II.1.2.3 Pour $\omega = \omega_0$ $\text{Arg}(G(j\omega_0)) = -\pi/2 \text{ rad}$ (-90°)

II.1.3.1

II.1.3.2

II.1.3.3

II.1.3.4

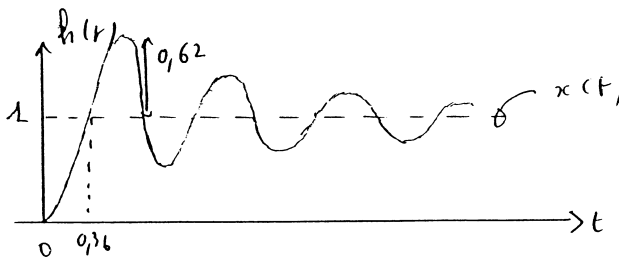
II.1.3.5

II.1.3.6

II.1.4.1 $M_G = \infty$

II.1.4.2 $M_\phi = 14^\circ$

II.1.5



II.2.1 Régulateur PID avec filtrage de l'effet dérivé

II.2.2 Amélioration de la stabilité du système en boucle fermée (diminution des oscillations pour une réponse indicielle - augmentation de la marge de phase).

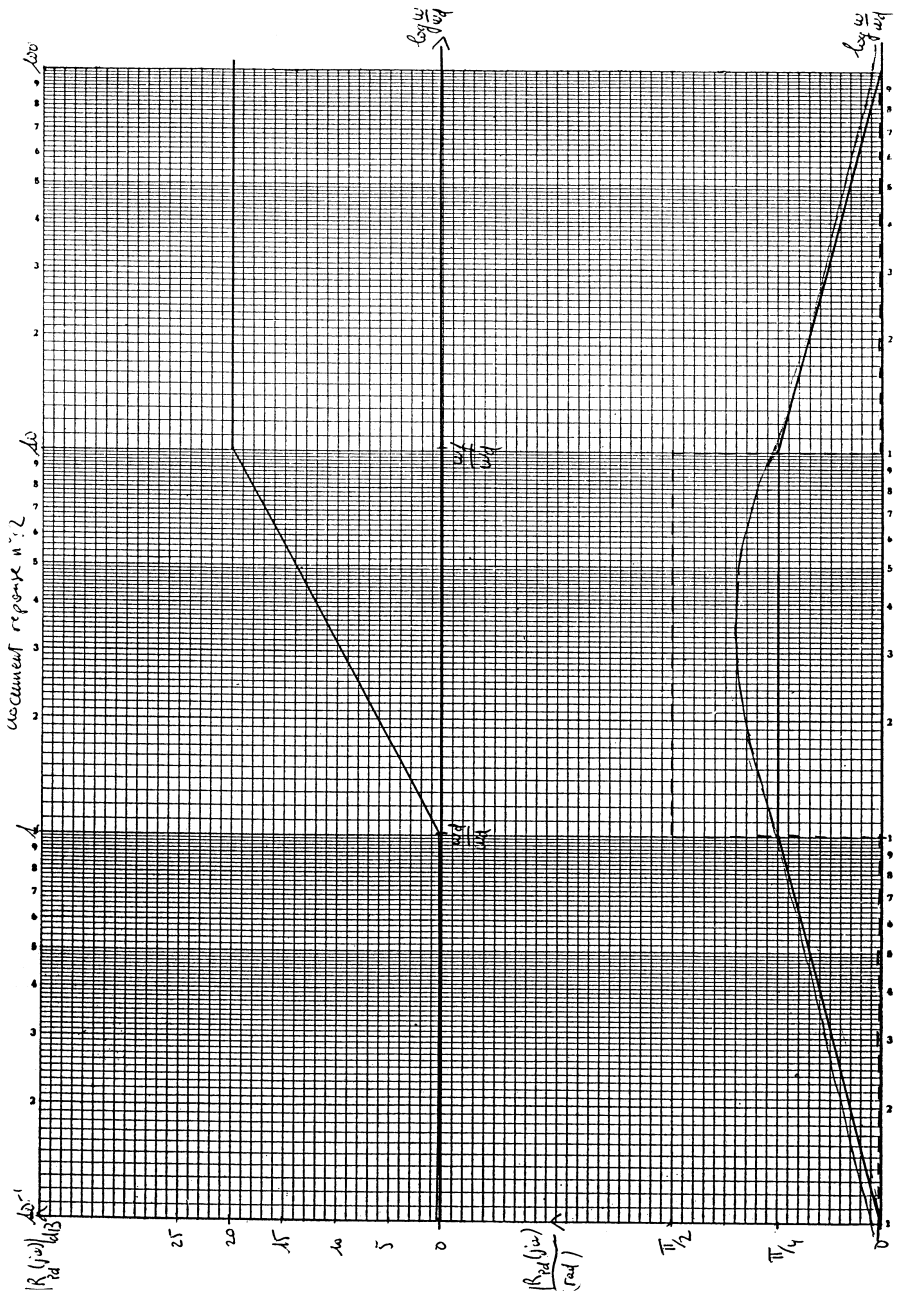
II.2.3 Voir document réponse n°2

II.2.4 Voir document réponse n°2

II.2.5.1 $\log\left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_d}\right) = \frac{1}{2} \left(\log\frac{\omega_d}{\omega_d} + \log\frac{\omega_f}{\omega_d} \right) = \log\sqrt{\frac{\omega_f}{\omega_d}}$ donc $\omega_{\max} = \sqrt{\omega_d \omega_f} = \frac{\sqrt{10}}{T_i}$

II.2.5.2 $R_{PD}(j\omega_{\max}) = \frac{1 + j\sqrt{10}}{1 + j\frac{1}{\sqrt{10}}}$ $\text{Arg}(R_{PD}(j\omega_{\max})) = \text{Arctan}\sqrt{10} - \text{Arctan}\frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0.958 \text{ rad}$ (54.9°)

II.2.6.1 $\omega_{\max} = 4.3 \text{ rad.s}^{-1}$



$$\text{II.2.6.2 } T_d = \frac{\sqrt{10}}{\omega_{\max}} = 0.73 \text{ s} \quad \text{et} \quad T_f = \frac{T_d}{10} = 0.073 \text{ s}$$

$$\text{II.2.7.1 } M_\phi = 65^\circ$$

$$\text{II.2.7.2 } K_p = 10 \text{ dB} \quad (3.16)$$

$$\text{II.2.8 } M_G = \infty$$

II.2.9 Le système est stable en boucle fermée. De plus le système en boucle fermée possède une bonne marge de phase et une bonne marge de gain ce qui assure une certaine robustesse de la stabilité.

Partie 3 :

III.1.1 Limite les recouvrements des spectres liés à l'échantillonnage.

III.1.2 Filtre anti repliement

$$\text{III.1.3.1 } \frac{V'(j\omega)}{Ve(j\omega)} = \frac{1}{1 + 2jRC_1\omega + (j\omega R)^2 C_1 C_2}$$

III.1.3.2 Voir réponse précédente

$$\text{III.1.3.3 } A_0 = 1 \quad m_f = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \quad \omega_f = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}}$$

$$\text{III.1.3.4 } R = 10 \text{ k}\Omega \quad C_1 = 281 \text{ nF} \quad C_2 = 562 \text{ nF}$$

$$\text{III.1.3.5.1 } \left| \frac{V'(j\omega)}{Ve(j\omega)} \right| = 0.54 \quad \text{pour } \omega = \frac{\omega_e}{2} = 157 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\left| \frac{Vs(j\omega)}{Ve(j\omega)} \right| = 0.54^2 = 0.29$$

III.1.3.5.2 L'atténuation à $\omega_e/2$ est plus importante (le filtre anti repliement joue mieux son rôle).

$$\text{III.1.3.6 } f_c = F_s/2 = 50 \text{ Hz}$$

$$\text{III.2.1 } R(p) = \left(K_p + K_p \cdot \frac{T_d}{T_i} \right) + \frac{K_p}{T_i \cdot p} + K_p T_d \cdot p$$

$$\text{III.2.2 } K'_p = K_p + K_p \cdot \frac{T_d}{T_i} \quad T'_i = \frac{T_i}{K_p} \quad T'_d = K_p T_d$$

$$\text{III.2.3 } u(t) = K'_p \cdot \varepsilon(t) + \frac{1}{T'_i} \int_0^t \varepsilon(x) \cdot dx + T'_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

$$\text{III.2.4.1 } \int_{(n-1)T_e}^{nT_e} \varepsilon(x) dx = \frac{T_e}{2} (\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n)$$

$$\text{III.2.4.2 } u_{in} = \frac{1}{T'_i} \int_0^{nT_e} \varepsilon(x) dx = \frac{1}{T'_i} \int_0^{(n-1)T_e} \varepsilon(x) dx + \frac{1}{T'_i} \int_{(n-1)T_e}^{nT_e} \varepsilon(x) dx$$

$$u_{in} = u_{in-1} + \frac{T_e}{2T'_i} (\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n)$$

$$\text{III.2.4.3 } \frac{U_i(Z)}{\varepsilon(Z)} = \frac{T_e}{2T'_i} \left(\frac{1+Z^{-1}}{1-Z^{-1}} \right)$$

$$\text{III.2.5.1 } u_d(t) = T'_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad u_{dn} = \frac{T'_d}{T'_e} (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})$$

$$\text{III.2.5.2 } \frac{U_d(Z)}{\varepsilon(Z)} = \frac{T'_d}{T'_e} (1-Z^{-1})$$

$$\text{III.2.6 } R(Z) = \frac{U(Z)}{\varepsilon(Z)} = K'_p + \frac{T'_d}{T'_e} (1-Z^{-1}) + \frac{T'_e}{2T'_i} \left(\frac{1+Z^{-1}}{1-Z^{-1}} \right)$$

$$\text{III.2.7.1 } R(Z) = \frac{1}{1-Z^{-1}} \left\{ \left(K'_p + \frac{T'_d}{T'_e} + \frac{T'_e}{2T'_i} \right) + \left(\frac{T'_e}{2T'_i} - K'_p - 2 \frac{T'_d}{T'_e} \right) Z^{-1} + \left(\frac{T'_d}{T'_e} \right) Z^{-2} \right\}$$

$$\text{III.2.7.2 } C_0 = K'_p + \frac{T'_d}{T'_e} + \frac{T'_e}{2T'_i} \quad C_1 = \frac{T'_e}{2T'_i} - K'_p - 2 \frac{T'_d}{T'_e} \quad C_2 = \frac{T'_d}{T'_e}$$

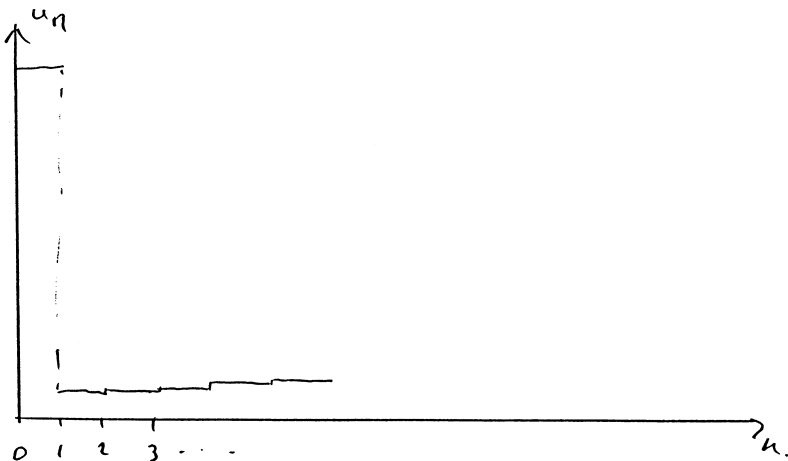
$$\text{III.2.8 } K'_p = 4,2 \quad T'_i = 0,67 \text{ s} \quad T'_d = 2,4 \text{ s} \quad T'_e = 0,01 \text{ s}$$

$$C_0 = 244,2075 \quad C_1 = -484,1925 \quad C_2 = 240$$

$$\text{III.2.9 } u_n = u_{n-1} + C_0 \varepsilon_n + C_1 \varepsilon_{n-1} + C_2 \varepsilon_{n-2}$$

III.2.10	$u_0 = 244,2075$	$u_1 = 4,2225$	$u_2 = 4,2375$
	$u_3 = 4,2525$	$u_4 = 4,2675$	$u_5 = 4,2825$
	$u_6 = 4,2975$	$u_7 = 4,3125$	$u_8 = 4,3275$
	$u_9 = 4,3425$	$u_{10} = 4,3575$	$u_{11} = 4,3725$
	$u_{12} = 4,3875$	$u_{13} = 4,4025$	$u_{14} = 4,4175$
	$u_{15} = 4,4325$	$u_{16} = 4,4475$	$u_{17} = 4,4625$
	$u_{18} = 4,4775$	$u_{19} = 4,4925$	$u_{20} = 4,5075$

III.2.11 Voir document réponse n°5.



III.3.1 $\Delta U=4.88 \text{ mV}$

III.3.2 Bruit sur la commande du système (b(t)).

III.3.3 Il faut que l'algorithme de calcul (régulateur numérique) arrondisse les valeurs u_{n-1} , $u_{n-2} \dots$ à celle permises en sortie de CNA.

SECOND PROBLÈME

PARTIE A :

A.1 Redresseur en pont mixte monophasé :

A.1.1 présence d'une inductance infinie dans la branche continue

A.1.2 $\omega t \in [\psi_d; \pi]$ T_1 conduit, D_1 conduit sur le reste de la période

$\omega t \in [\psi_d + \pi; 2\pi]$ T_2 conduit, D_2 conduit sur le reste de la période

A.1.3 voir figure

A.1.4 $U_d = (1 + \cos \psi_d) \cdot V \cdot \sqrt{2} / \pi$

A.1.5 $U_{dmax} = 2V \cdot \sqrt{2} / \pi$

A.1.6 $I_e = I_d \cdot \sqrt{1 - \psi_d / \pi}$

A.1.7 $f_p = P/S = U_d I_d / VI_e = \sqrt{2} / \pi \cdot (1 + \cos \psi_d) / \sqrt{1 - \psi_d / \pi}$

A.1.8 $\cos \psi_d = 2 \cdot U_d / U_{dmax} - 1$

A.1.9

U_d / U_{dmax}	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
ψ_d	180°	127°	101.6°	78.4°	53°	0
f_p	0	0.33	0.54	0.72	0.86	0.9

A.2 Mise en série de deux ponts mixtes :

A.2.1 $u_d = u_{d1} + u_{d2}$ et $i = i_1 + i_2$

A.2.2 même retard

A.2.2.1 $U_d = 2 \cdot (1 + \cos \psi_d) \cdot V \cdot \sqrt{2} / \pi$

A.2.2.2 pour $\psi_d = 0$ alors $U_d = 2U_{dmax}$

A.2.2.3 $I_e = 2 \cdot I_d \cdot \sqrt{1 - \psi_d / \pi}$

A.2.2.4 le facteur de puissance est le même

A.2.2.5 le tableau aussi !

A.2.3 commande séquentielle

A.2.3.1 pour $\psi_{d2} = \pi$ alors $u_{e2} = 0$; et $U_{d1} = (1 + \cos \psi_{d1}) \cdot V \cdot \sqrt{2} / \pi$

Il n'y a donc qu'un seul pont qui fonctionne ; On retrouve donc toujours les mêmes résultats, c'est à dire :

a) $U_d = U_{dmax} (1 + \cos \psi_{d1}) / 2$

b) $I_e = I_d \cdot \sqrt{1 - \psi_{d1} / \pi}$

c) $f_p = P/S = \sqrt{2} / \pi \cdot (1 + \cos \psi_{d1}) / \sqrt{1 - \psi_{d1} / \pi}$

d)

$U_d/2U_{dmax}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
ψ_{d1}	180°	127°	101.6°	78.4°	53°	0
f_p	0	0.33	0.54	0.72	0.86	0.9

A.2.3.2 pour $\psi_{d1}=0$ alors $u_{c1}=U_{dmax}$ et $U_{d2}=(1+\cos\psi_{d2}) * U_{dmax}/2$

- a) $U_d = U_{dmax} + (1 + \cos\psi_{d2}) * U_{dmax}/2$
- b) Voir figure
- c) $I_e = I_d * \text{sqr}(4 - 3\psi_{d2}/\pi)$
- d) $f_p = P/S = \text{sqr}(2)/\pi * (3 + \cos\psi_{d2}) / \text{sqr}(4 - \psi_{d2}/\pi)$
- e) $\cos\psi_{d2} = 4 * U_d/2U_{dmax} - 3$

$U_d/2U_{dmax}$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
ψ_{d2}	180°	127°	101.6°	78.4°	53°	0
f_p	0.9	0.79	0.83	0.88	0.91	0.9

A.2.4 voir tracé ; la commande séquentielle améliore sensiblement le facteur de puissance.

PARTIE B : Commutateur de courant à thyristors

- B.1 $U'_d < 0$ donc $\pi/2 < \psi < \pi$
- B.2 pour $\psi = 5\pi/6$ on obtient le tracé suivant : T1, T2, T3 entrent en conduction lorsque respectivement v_1, v_2, v_3 deviennent positives.
T'1, T'2, T'3 conduisent en opposition de phase avec T1, T2, T3.
On voit alors que i_1 est en avance sur v_1 d'un angle $\varphi = -\pi/6$
- B.3 pour $\psi = \pi$ alors v_1 et i_1 sont en phase, soit $\varphi = 0$
- B.4 d'où la relation générale $\varphi = \psi - \pi$
- B.5 le récepteur est donc de nature capacitive
- B.6 $I_f = I_d * \text{sqr}(6)/\pi$
- B.7 $P = 3VI_d * \text{sqr}(6)/\pi * \cos\psi$ et $Q = 3VI_d * \text{sqr}(6)/\pi * \sin\psi$

PARTIE C : Machine synchrone

- C.1 $L\omega$, réactance synchrone = réaction magnétique d'induit + fuite stator
- C.2 $\Omega = \omega$ pour une machine à une seule paire de pôles
- C.3.1 $C = 3K\Phi_j I * \cos(\varphi - \delta)$
- C.3.2 il faut $\varphi < 0$ (comportement capacitif)
- C.3.3.1 $I = I_{max}$ lorsque $\varphi = 0$; dans ces conditions :

$$I_{max}^2 = \frac{E^2 - V^2}{(L\omega)^2}$$

C.3.3.2 et $C_{max} = 3 I_{max} \frac{V}{\omega}$

C.3.3.3 à partir de I_{\max} , on trouve :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{L^2 I_{\max}^2}{K^2 \Phi_f^2}}}$$

C.4.1 pour $\alpha=0$ alors la f.e.m est nulle (le flux est maximal)

C.4.2 pour $\alpha=-\pi/2$, la f.e.m est minimale

C.4.3 pour $\alpha=\pi/2$ alors la f.e.m est maximale

C.4.4 et C.4.5 l'angle α donne directement la phase de la f.e.m à vide

PARTIE D : Machine synchrone alimentée par un onduleur de courant à thyristors

D.1 T_1 et T_{aux} conduisent simultanément d'où $L di_{T1}/dt = -U_{c0}$

En supposant u_c constant alors i_{T1} s'annule pour $t_1 = LI_d/U_{c0}$

D.2 T_1 est donc à présent bloqué et seul T_{aux} conduit ; le condensateur se décharge à courant constant soit $C du_c/dt = -I_d$, d'où $u_c = U_{c0} - I_d/C * (t - t_1)$

D.3 $v_{T2} = -u_c$ donc devient positif à $t_2 = t_1 + CU_{c0}/I_d$

D.4 T_2 et T_{aux} conduisent simultanément : l'inductance L de la deuxième phase et le condensateur C forment un circuit du 2^o ordre non amorti, d'où les équations suivantes :

$i_{T2} - C du_c/dt = I_d$ et $L di_{T2}/dt + u_c = 0$, avec les conditions initiales : $i_{T2} = 0 = u_c$

D.5 en posant $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, la commutation est terminée lorsque $i_{T2} = I_d$, soit un quart de tour sur un plan de phase ; d'où $t_3 - t_2 = \pi/2\omega_0$

A cet instant t_3 , la commutation est terminée et la tension aux bornes du condensateur s'est inversée permettant ainsi la réalisation d'une commutation sur le commutateur négatif.

D.6 Pour des raisons de symétrie, et si on suppose le régime permanent établi, on peut donc écrire que :

$$u_c(t_3) = -U_{c0} = -I_d/C\omega_0$$

D.7 $0 < t < t_1$: décroissance linéaire de i_{T1} de I_d à 0 ; $u_c = U_{c0}$ et $i_{T2} = 0$

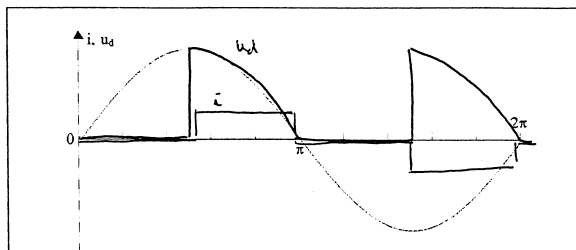
$t_1 < t < t_2$: $i_{T1} = 0$; décroissance linéaire u_c de U_{c0} à 0 ; $i_{T2} = 0$

$t_2 < t < t_3$: $i_{T1} = 0$; décroissance sinusoidale de u_c de 0 à $-U_{c0}$; croissance sinusoidale de i_{T2} de 0 à I_d

D.8 applications numériques : $L = 0.5 \text{ mH}$, $C = 100 \mu\text{F}$, $I_d = 700 \text{ A}$

$U_{c0} = 1565.25 \text{ V}$; $t_1 = 223.6 \mu\text{s}$; $t_2 = 447.2 \mu\text{s}$; $t_3 = 798.5 \mu\text{s}$

Annexe : document-réponse



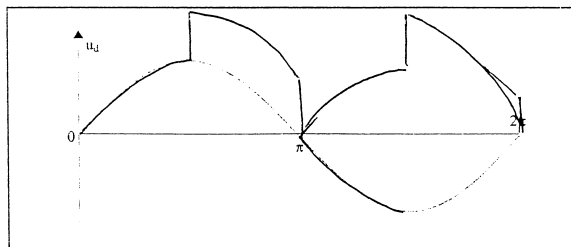
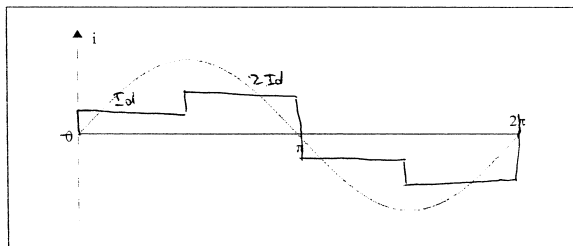
Annexe 1 : tension de sortie u_d

U_d/U_{dmax}	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
ψ_{d1}						
f_p						

Annexe 2 : un seul pont

$U_d/2U_{dmax}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
ψ_{d1}						
f_p						

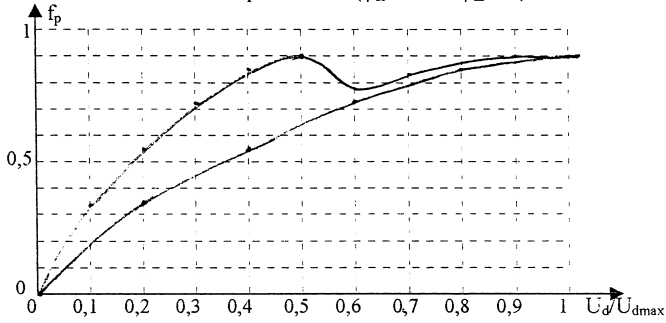
Annexe 3 : deux ponts en série ($0 < \psi_{d1} < \pi$ et $\psi_{d2} = \pi$)



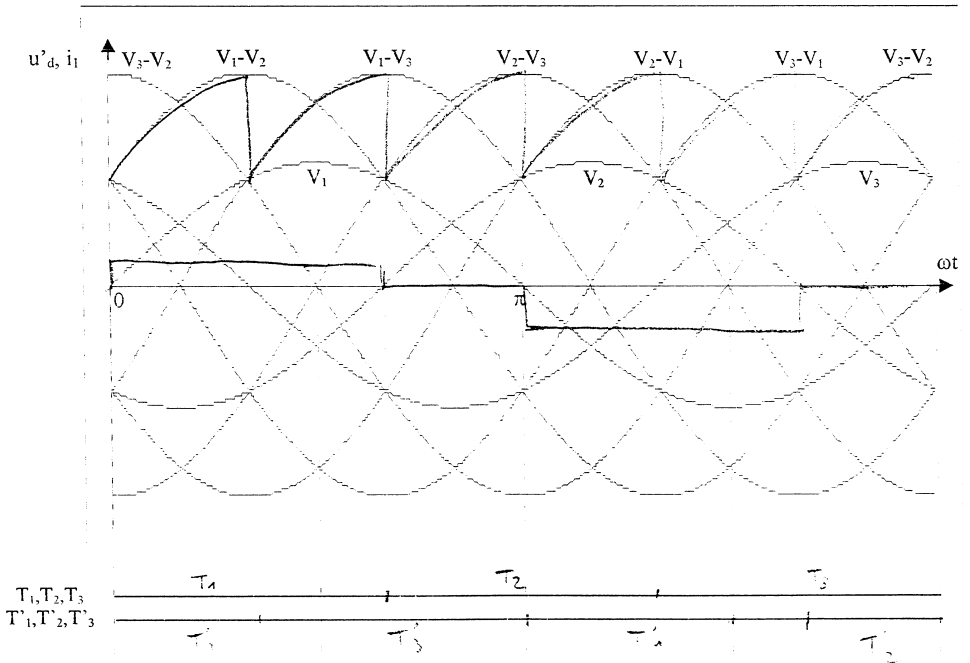
Annexe 4 : formes d'onde pour deux ponts en série ($\psi_{d1} = 0$ et $\psi_{d2} = \pi/2$)

$U_d/2U_{dmax}$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Ψ_{d2}						
f_p						

Annexe 5 : deux points en série ($\psi_{d1}=0$ et $0 < \psi_{d2} < \pi$)



Annexe 6 : facteur de puissance pour les deux stratégies de commande



Annexe 7 : allure de u_d et de i_1 pour $\psi=5\pi/6$

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE

Composition de physique - Session : 2000

Question préliminaire

QP.1.a La différence de marche $\delta = S_2P - S_1P$, le déphasage $\delta\phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 2\pi \frac{S_1P - S_2P}{\lambda}$ permettent d'obtenir l'intensité sur l'écran : $I = 2I_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{S_2P - S_1P}{\lambda}\right) \right]$. Les surfaces d'égale ordre d'interférence sont des hyperboloïdes de révolution de foyers S_1 et S_2 .

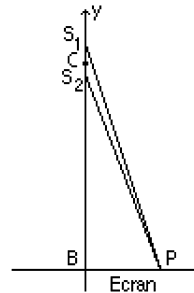
QP.1.b. On pose $BC = L$

La droite S_1S_2 est axe de symétrie de révolution du système. Les franges ont cette symétrie ; ce sont des cercles centrés sur B. En B, la frange est brillante (p_0 entier) $\delta(B) = \delta_0$; en P, ce sera la n-ième frange brillante si $\delta = S_1P - S_2P = p(P)\lambda$ avec : $p(P) = p_0 - n$.

$\delta = S_1P - S_2P = (S_1B - S_2B) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{BP^2}{BC^2} \right)$, que l'on peut

encore écrire $p\lambda = p_0\lambda \left(1 - \frac{1}{2} \frac{BP^2}{BC^2} \right)$. D'où :

$r_n = BP = L \sqrt{2 \frac{p_0 - p}{p_0}}$. Le rayon des anneaux croît comme la racine carrée des nombres entiers successifs.

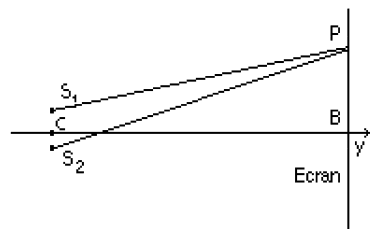


QP.1.c. Cette fois, les franges ont la forme d'hyperboles, obtenues en prenant l'intersection des hyperboloïdes avec le plan de l'écran. Au voisinage du point B, on peut assimiler ces franges à des droites parallèles à Oy .

L'interfrange est la période spatiale du phénomène observé sur l'écran.

$$i = \frac{\lambda L}{a} \quad \delta = S_1B - S_2B = \frac{ax}{L}$$

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{ax}{\lambda L}\right) \right]$$

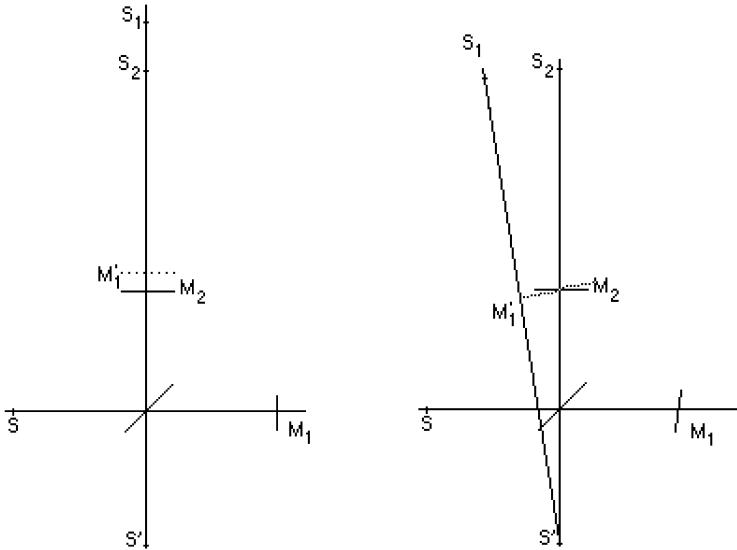


QP.2. L'intensité s'écrit $I = 2I_0 \left[1 + \cos((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{OP}) \right]$. Les surfaces d'égale intensité sont des plans normaux au vecteur $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$. On observe généralement sur un écran normal à ces plans (donc parallèle à $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$).

I.1 On utilise un laser et une lentille de courte focale (L_1 par exemple). On peut aussi utiliser un objectif de microscope.

I.2.a. Dans ce cas, S_1S_2 sont les images de S dans l'ensemble miroir (M_1)-séparatrice, et dans l'ensemble séparatrice-miroir (M_2) ; $S_1S_2 = 2e = 1 \text{ mm}$ et $L = D + d + 2d' = 40 \text{ cm}$.
 On obtiendra les franges en plaçant un écran n'importe où ; les franges seront circulaires (cas de la question préliminaire 1.b.) si l'écran est normal à OB au point B .

I.2.b. On obtient des interférences non localisées dues au dédoublement géométrique de la source S . Si l'interféromètre est réglé, S_1 et S_2 sont alignées sur l'axe Oy . Les franges sont circulaires de centre B .



$p_0 = 2e/\lambda = 1580,28$. On cherchera les franges correspondant à p demi entier soit :

$$p_1 = 1579,5 ; p_2 = 1578,5 ; p_3 = 1577,5.$$

$$BP_1 = 40 \sqrt{\frac{0,78.2}{1580}} = 1,26 \text{ cm} \quad BP_2 = 40 \sqrt{\frac{1,78.2}{1580}} = 1,90 \text{ cm}$$

$$BP_3 = 40 \sqrt{\frac{2,78.2}{1580}} = 2,37 \text{ cm}$$

I.2.c. S_1 et S_2 sont les images du point source S dans les deux miroirs (M'_1) et (M_2), ces deux miroirs étant eux-mêmes éclairés par l'intermédiaire de la séparatrice.

I.3.a. Le dédoublement de la source se produit maintenant latéralement.
 $S_1S_2 = \alpha(D+D'+2d) = 40 \cdot \frac{\pi}{180.30} = 0,23 \text{ mm}$. L'interfrange vaut : $i = \frac{\lambda L}{a} = \frac{\lambda}{\alpha} = 0,95 \text{ mm}$. Les franges sont rectilignes parallèles à Oz .

I.3.b. Le système de franges est invariant par translation parallèle à Oz . Si on remplace la source par une fente fine parallèle à Oz , la figure d'interférence est inchangée.

I.3.c. On a l'équivalent de 2 fentes (images de la source primaire) dont les points interfèrent deux à deux. Deux points qui interfèrent (provenant donc du dédoublement d'un même point de la source primaire) sont à la distance a l'un de l'autre.

On découpe la source primaire en éléments de longueur du, placés à la distance u du centre. L'interfrange est égal à i.

$$dI = 2dI_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi(X-u)}{i} \right) \quad \text{avec} \quad dI_0 = I_0 \frac{du}{b} \quad (\text{la source est uniformément éclairée})$$

$$I = \frac{2}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi(X-u)}{i} \right) du \quad \text{soit} : \quad I = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi X}{i} \cdot \sin c \frac{\pi b}{i} \right)$$

[en fait les franges sont décalées par rapport au centre, puisque S₂ est sur Oy et que S₁ est déplacé de la quantité calculée ci-dessus. Ce décalage est sans intérêt expérimentalement, puisque le miroir (M₁) tourne autour d'un axe qui n'est pas rigoureusement A₁Z].

Le contraste est $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$. Le résultat précédent donne : $C = \left| \sin c \frac{\pi b}{i} \right|$

Numériquement : C = 0,93. Le "contraste" permet de quantifier les différences de luminosité des franges sombres et claires. Un bon contraste correspondra à des franges d'intensité très différenciée.

I.3.d. La cohérence spatiale est liée à la largeur géométrique de la source. L'élargissement de la source diminue le contraste par perte de cohérence spatiale.

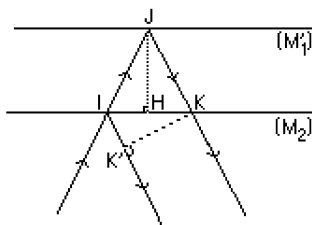
Ici, la condition pour avoir un bon degré de cohérence spatiale est $\frac{b}{i} \ll 1$, soit $b \ll \frac{\lambda L}{a}$ ou $a \ll \frac{\lambda L}{b}$

$\frac{L}{b} = \theta$ est l'angle sous lequel on voit la source. $\frac{\lambda}{\theta}$ s'appelle largeur de cohérence spatiale l_c. La condition ci-dessus peut encore s'écrire $a \ll l_c$.

$$\frac{\lambda L}{b} = \frac{0,546 \times 0,4}{0,2} = 1,1 \text{ mm} \quad \frac{\lambda L}{b} = \frac{0,546 \times 0,4}{0,2} = 1,1 \text{ mm}$$

I.3.e. Si la source est étendue, les franges se localisent (ici franges du coin d'air d'angle α). On observera dans le plan des miroirs, ou bien dans le plan conjugué dans une lentille de projection.

II.1. Nous avons l'équivalent d'une réflexion sur une lame à faces parallèles formée de (M₂) et de (M'₁) (évidemment sans réflexions multiples !)



II.2

$$\delta = 2IJ - IK' = \frac{2e}{\cos i} - 2e \tan i \sin i = 2e \cos i$$

II.3. δ ne dépend que de i. L'ordre d'interférence aussi. Pour une valeur de i donnée, les rayons vont se répartir sur un cercle de l'écran qui sera vu depuis le centre optique de la lentille sous l'angle i.

→ franges d'interférences circulaires localisées à l'infini.

II.4. Au centre $p = p_0$. La valeur de p décroît à partir du centre.

Ici, $p_0 = \frac{2e}{0,546} = 1831,5$, c'est une frange sombre [on admet que la séparatrice n'introduit pas

de déphasage]. $p_1 = 1830,5$; $p_2 = 1829,5$. $r = f \sqrt{\frac{(p_0 - p)\lambda}{e}}$, avec $p_0 - p = 1$ ou 2 .

$$r_1 = 3,30 \text{ cm} \quad r_2 = 4,67 \text{ cm}.$$

II.5. La largeur de la source influe seulement sur l'intensité du phénomène ; les franges sont localisées à l'infini (ou dans le plan focal d'une lentille convergente).

II.6. On diminue p , les anneaux rentrent (vers le centre), mais leur espacement augmente.

II.7. Pour montrer des interférences à toute une classe, il convient d'utiliser une lentille de grande focale, pour avoir des anneaux les plus grands possibles.

Pour réaliser un enregistrement, on utilisera une lentille de focale plus courte, de manière à obtenir une intensité suffisamment grande.

III.1 $I(t) = I_0 \left[1 + \cos 2\pi \frac{\delta(t)}{\lambda} \right]$ avec $\delta(t) = 2(X - d')$ $X = d' - e + Vt$ soit $\delta(t) = 2(-e + Vt)$

$$I(t) = I_0 \left[1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda} (-e + Vt) \right]; \text{ on enregistre donc des sinusoïdes de période } T = \frac{\lambda}{2V}.$$

III.2. L'intensité est la somme des intensités obtenues pour chacune des raies du doublet :

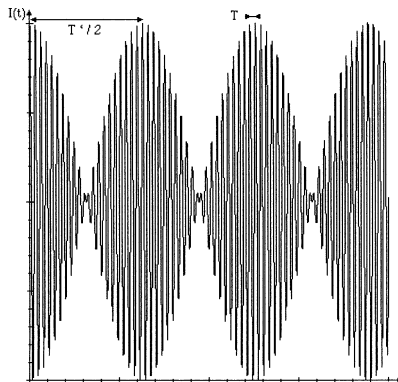
$$I(t) = I_0 \left[1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda_1} (-e + Vt) + 1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda_2} (-e + Vt) \right] = 2I_0 \left[1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda} (-e + Vt) \right] \cdot \cos \frac{2\pi(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2} (-e + Vt)$$

Le terme en $\cos \frac{2\pi \delta\lambda}{\lambda^2} (-e + Vt)$ a une période $T' = \frac{\lambda^2}{\delta\lambda V} = \frac{2\lambda}{\delta\lambda} T$ $T' \gg T$.

Ce terme varie lentement : il s'agit de l'enveloppe des sinusoïdes (fréquence des battements).

Pour le doublet jaune du mercure, entre deux anticoncurrences, on mesure $\frac{T'}{2} \cdot \frac{T'}{2T} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{578}{2}$

$\frac{T'}{2T} = 289$: il y a 289 sinusoïdes serrées à l'intérieur de chacun des fuseaux.



III.3.a. Pour une radiation non monochromatique, l'intensité délivrée s'écrit : $dI = B(\sigma)d\sigma$, soit, après interférence, sur l'écran : $dI = B(\sigma)(1 + \cos 2\pi\sigma\delta)d\sigma$.

Au total, $I = \int B(\sigma) d\sigma + \int B(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta)d\sigma$.

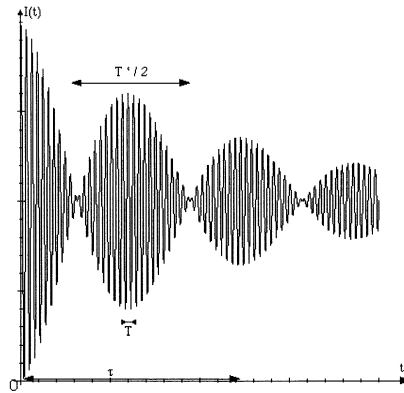
Pour une lorentzienne :

$$B(\sigma) = B_0 \frac{\Delta\sigma^2}{(\sigma - \sigma_0)^2 + \Delta\sigma^2} \Rightarrow I = \pi \frac{\Delta\sigma}{2} B_0 \cos(2\pi\sigma_0\delta) \exp(-2\pi\Delta\sigma\delta) + \int B(\sigma) d\sigma$$

soit : $\Rightarrow I = I_0 [1 + \exp(-4\pi(-e + Vt)\Delta\sigma) \cos(4\pi\sigma_0(-e + Vt))]$ et donc :

$$\tau = \frac{1}{4\pi V \Delta\sigma} = \frac{\lambda^2}{4\pi V \Delta\lambda}$$

III.3.b. Pour le doublet, on obtient un enregistrement du type ci-dessous, où les amplitudes des fuseaux décroissent exponentiellement.



Chaque maximum de fuseau est obtenu pour $t_n = n \frac{\lambda_1^2}{2V\delta\lambda} \cdot \frac{2\tau}{T'} = \frac{\delta\lambda}{2\pi\Delta\lambda} \frac{2\tau}{T'} = \frac{\delta\lambda}{2\pi\Delta\lambda}$.

Son amplitude est : $a_n = K \exp(-2\pi\Delta\sigma 2Vt_n) = K \exp(-\pi n \frac{\Delta\lambda}{\delta\lambda})$

Avec $\Delta\lambda = 0,1 \text{ nm}$ et $\delta\lambda = 2 \text{ nm}$, $a_n = K \exp(-0,16 n)$

On peut porter $\log a_n$ en fonction de n . Le coefficient directeur de la droite obtenue est égal à $-\frac{\pi\Delta\lambda}{\delta\lambda}$

III.4.a. La raie sera de type lorentzienne pour une lampe à vapeur de mercure "haute pression", l'élargissement étant dû aux collisions entre atomes de mercure. On aurait une raie de type gaussienne pour un élargissement ayant comme origine l'effet Doppler.

III.4.b. T doit être plus grand que le temps de réponse du système d'enregistrement, qui est limité par les performances de l'enregistreur.

Le temps caractéristique de l'enregistreur est de 0,05 seconde. $V < \frac{10^{-3} \cdot 0,5}{2 \cdot 0,05} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mm.s}^{-1}$

Le moteur d'enregistrement de la vis du chariot tourne à la vitesse de 1 tour en 10 minutes, soit : $\frac{0,5}{600} = 8,3 \cdot 10^{-4} \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. Les conditions d'enregistrement sont donc correctement remplies.

IV.1. Si on considère l'onde produite comme incohérente, ce sont des interférences localisées sur le coin d'air. On peut les observer en regardant directement les miroirs, ou plus commodément en faisant l'image de ceux-ci sur l'écran à l'aide d'une lentille convergente. L'écran sera dans le plan conjugué du plan des miroirs.

Franges rectilignes parallèles à l'intersection de (M'_1) et (M_2).

IV.2. $\delta = 2 \alpha x'$, x' étant la distance à la droite commune à (M'_1) et (M_2).

Franges brillantes si $\delta = p \lambda$, sombres pour $\delta = (p + \frac{1}{2}) \lambda$

Interfrange $i = \frac{\lambda}{2 \alpha}$; avec $\alpha = 2'$, $i = 0,54 \text{ mm}$.

Avec la lentille de 20 cm de focale, soit (L_2), le système sera moins encombrant qu'avec (L_1), et plus lumineux qu'avec (L_3).

$|\gamma| = \frac{2}{0,54} = 3,67$; $\gamma < 0$; on utilise les formules de Newton : $\gamma = \frac{\overline{FO}_1}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}_1}$. On en déduit :

$\overline{FA} = \frac{\overline{FO}_1}{\gamma} = -5,43 \text{ cm}$ et $\overline{F'A'} = \gamma \overline{F'O}_1 = 73,5 \text{ cm}$. L'encombrement total sera de 1,2 m environ (la lentille, placée à 15,4 cm de O, et l'écran à 109 cm de la lentille).

IV.3.a. Pour une direction incidente caractérisée par i , les ondes qui interfèrent font entre elles un angle 2α . : leurs vecteurs d'onde s'écrivent : $\vec{k}_1 = k \sin i \vec{e}_x - k \cos i \vec{e}_y$

$$\vec{k}_2 = k \sin(i + 2\alpha) \vec{e}_x - k \cos(i + 2\alpha) \vec{e}_y$$

IV.3.b. $\varphi = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}$ et $I = 2I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} 2\alpha (x \cos(i + \alpha) + y \sin(i + \alpha)) \right]$

I dépendra peu de i si $\frac{dI}{di} = 0$, soit pour i_0 tel que : $-x \sin(i_0 + \alpha) + y \cos(i_0 + \alpha) = 0$;

C'est le plan (Π) normal à la direction moyenne des rayons émergents.

IV.3.c. $\delta = 2 \epsilon \cos i_0$ (voir calcul plus haut) ; $\delta = 2 x \alpha \cos i_0 = 2 x \alpha \left(1 - \frac{i_0^2}{2} \right)$ si i_0 est petit.

Il y aura brouillage si $\delta - \delta_0 = \pm \frac{\lambda}{2}$ avec $\delta_0 = 2 x \alpha$ $2 x \alpha \frac{i_0^2}{2} = \frac{\lambda}{2}$ et $2 x \alpha = p \lambda$.

soit : $p i_0^2 = 1$; $i_0^2 = \frac{1}{p}$ $i_0 = 0,0447 \text{ rad}$. Pour $p = 500$; $i_0 = \frac{b}{2f}$ $b = 1 \text{ cm}$. Cette condition

n'est pas très restrictive.

IV.4.a. Fente parallèle à Oz

IV.4.b. $I = 2I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_1} (2\alpha x' + 2x) + 1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_2} (2\alpha x' + 2x) \right]$

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} (2\alpha x' + 2x) \cdot \cos \frac{\pi \delta \lambda}{\lambda^2} (2\alpha x' + 2x) \right]$$

Au voisinage de $x' = 0$ (c'est le coin), il y aura disparition des franges, puis réapparition pour

$$\frac{\delta \lambda}{\lambda^2} (2x) = 1, \text{ soit : } x = \frac{\lambda^2}{2\delta \lambda} = 0,29 \text{ mm.}$$

V.1. On obtient autour de l'ordre 0 des franges très contrastées, puis irisées. Enfin, pour p plus grand (au moins égal à 15), on obtient du "blanc d'ordre supérieur". Lorsqu'on déplace (M_1), le contraste diminue.

V.2. Le spectroscopie analyse la lumière provenant du Michelson \rightarrow spectre cannelé.

$$\delta = 2e : \text{ les cannelures sombres correspondent à : } 2e = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

a. Pour $e = 0,02$ mm, on a à résoudre : $2e = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda$, avec $0,4 < \lambda < 0,75 \mu\text{m}$.

$2e = 40 \mu\text{m}$ $\frac{2e}{0,75} < p < \frac{2e}{0,4}$ soit $53 < p < 100$. Il y aura environ 47 cannelures sombres dans le spectre.

b. Pour $e = 1,5$ mm, il y aura un nombre très important de cannelures dans le spectre ; celles-ci ne seront plus visibles.

V.3. Les franges se déplacent, la lame introduisant une différence de marche supplémentaire $2(n-1)e$. On doit donc déplacer le chariot de $(n-1)e$ (en le rapprochant du centre O) pour rattraper ce décalage.

V.4.a. En lumière blanche, il en sera de même avec un contraste qui diminue rapidement.

V.4.b. En fait, la différence de marche $\delta = 2(n-1)e$ dépend elle-même de la longueur d'onde.

V.4.c. Ordre 0 : $\delta = 0$. Il y a un ordre 0 pour chaque longueur d'onde en général.

Frange achromatique : elle est définie par $\frac{d\delta}{d\lambda} = 0$; l'ordre ne dépend pas de la longueur d'onde

(cette frange peut être sombre ou brillante -ou intermédiaire-, selon la valeur de p qui satisfait à la condition précédente.

Teinte plate : intensité uniforme : $\frac{d\delta}{di} = 0$ (en lumière monochromatique)

$$\delta = 2[x + (n-1)e] \text{ avec } n = A + \frac{B}{\lambda^2}. \text{ D'où } p = 2 \left[\frac{x + (A-1)e}{\lambda} + \frac{Be}{\lambda^3} \right] \quad \frac{dp}{d\lambda} = 0 :$$

$$-\frac{x + (A-1)e}{\lambda^2} - \frac{3Be}{\lambda^4} = 0. \text{ On en tire : } x = -(A-1)e + \frac{3B}{\lambda^2} e = - \left[(n-1) + \frac{2B}{\lambda^2} \right] e < 0. \text{ On obtient}$$

la frange achromatique en rapprochant le miroir (M_1).

$$p_0 = -\frac{4B}{\lambda^3} e \text{ pour la longueur d'onde pour laquelle l'œil est le plus sensible.}$$

V.5. On se règle à la teinte plate en lumière monochromatique, en recherchant à obtenir une intensité uniforme sur tout l'écran. Pour la teinte plate, il faut envisager des incidences non normales dans le Michelson, et donc dans la lame équivalente.

$$\delta = 2(x-e)\cos i + 2ne\cos r \approx 2(x-e)\left(1 - \frac{i^2}{2}\right) + 2ne\left(1 - \frac{r^2}{2}\right)$$

$$\delta = 2(x + (n-1)e) - (x-e)i^2 - nr^2 = \delta_0 - (x-e)i^2 - e\frac{i^2}{n} = \delta_0 - i^2 \left[x - e\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right]$$

d sera indépendant de i pour $x = e \left(1 - \frac{1}{n}\right) > 0$. Il faut donc *rapprocher* (M_1) pour obtenir la teinte plate.

Il faut *éloigner* (M_1) pour retrouver la frange achromatique en lumière blanche.

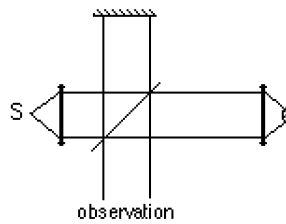
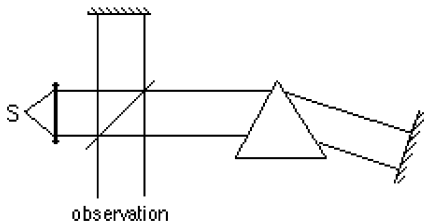
V.6. La compensatrice sert à compenser la différence de marche subie par l'un des deux trajets à l'intérieur de la séparatrice. Cette compensatrice est utile surtout en lumière blanche, car la différence de marche subie se traduirait sans elle par une variation de l'ordre d'interférence en fonction de la longueur d'onde. La compensatrice doit être réalisée dans le même verre que la séparatrice.

VI.1. Franges d'égale épaisseur. Analogue à des anneaux de Newton (mais sans déphasage de π).

Si le réglage est parfait, le centre doit être clair (égalité des chemins optiques).

$\delta = 2e$, avec $e = (2R - r) = r^2$, c'est-à-dire $e \approx \frac{r^2}{2R}$. Il y aura des franges brillantes pour $\delta = p\lambda$, le

rayon des franges brillantes sera donné par : $r = \sqrt{pR\lambda}$. Il n'y a pas de différence entre miroir convexe et miroir concave.



VI.2. Si (M_1) est concave, l'ordre 0, et donc tous les autres se déplacent vers l'extérieur. Les anneaux "sortent".

Si (M_1) est convexe, au contraire, les anneaux "rentrent".

VI.3. On utilise un miroir (supposé idéal) derrière le prisme ou derrière la lentille. Si le prisme ou la lentille sont parfaits, on observera des franges du coin d'air parfaitement rectilignes. Sinon, la figure d'interférence permettra de visualiser (et de localiser) le défaut d'indice ou d'épaisseur.

VII.1 Initialement, les franges sont parallèles à Oz.

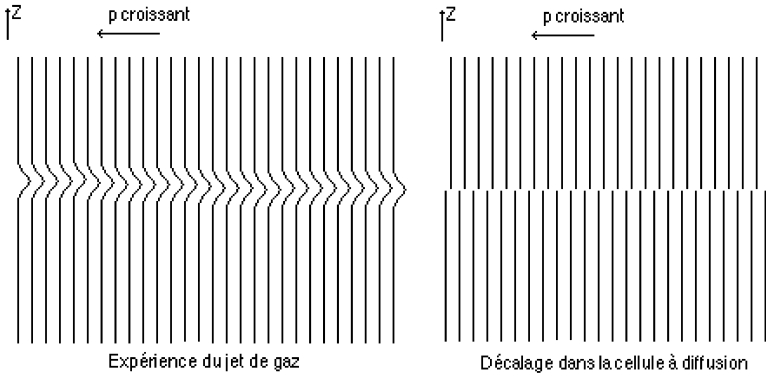
Si l'angle de rotation est positif, (M_1) et (M_2) sont disposés comme sur la figure (vue de dessus).

$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{(SS_1P) - (SS_2P)}{\lambda}$ croît vers la gauche. Les franges sont localisées. Le jet de gaz augmente

localement le trajet optique et donc l'ordre d'interférence observé. $\Delta\delta = 2e(n_b - n_a) = 0,66 \cdot 10^{-3}$ mm

$$\frac{\Delta\delta}{\lambda} = \Delta p \approx 1$$

Le décalage est d'une frange environ. L'aspect des franges est schématisé ci-dessous.



VII.2.a. On suppose que, loin des bandes d'absorption, $n-1$ est proportionnel à la masse volumique du gaz, ici de l'air. D'où :

$$\frac{\Delta(n-1)}{n-1} = \frac{\Delta P}{P} \quad \Delta n = (n-1) \frac{\Delta P}{P}$$

$$\Delta p = \frac{2e}{\lambda} \Delta n = (n-1) \frac{2e}{\lambda} \frac{\Delta P}{P} \quad \text{avec } \Delta p = 0,05,$$

$\Delta P = \frac{0,05 \cdot 0,633 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-4} \cdot 20} = 5,3 \cdot 10^{-3}$ bar. Si $\Delta P > 0$, alors $\Delta p > 0$, les franges se déplacent vers les X décroissants.

VII.2.b. $\frac{\Delta(n-1)}{n-1} = -\frac{\Delta T}{T} \quad \frac{\Delta T}{T} = -5,3 \cdot 10^{-3}$; $\Delta T = -1,6$ K. Si $\Delta T > 0$, alors $\Delta p < 0$, les franges se déplacent vers les X croissants.

VII.3.a. $n(z,t) = n_s + A C(z,t)$.

VII.3.b. $\delta = 2\alpha x + 2[n(z,t) - 1]a$. Les franges sont rectilignes, mais décalées de $\frac{2A(C_{o1} - C_{o2})a}{\lambda}$ interfranges.

VII.3.c. $\tau \approx \frac{l^2}{D}$. Le phénomène est très lent. Au bout d'un temps très long, le décalage tend vers 0.

VII.3.d. pour $z < 0$, $C(z,0) = C_{o2}$; pour $z > 0$, $C(z,0) = C_{o1}$;
 Pour $t > 0$, $C(-\infty, t) = C_{o2}$; pour $t > 0$, $C(+\infty, t) = C_{o1}$.

Il y a continuité de C : $C(0^-, t) = C(0^+, t)$ et continuité du flux de particules : $\frac{\partial C}{\partial z}(0^-, t) = \frac{\partial C}{\partial z}(0^+, t)$.

VII.3.e. Exprimons les conditions aux limites à l'infini : $C_{o2} = E$, $C_{o1} = G$; $E + \frac{\sqrt{\pi}}{2} F = G - \frac{\sqrt{\pi}}{2} H$

$$F \left[e^{-u^2} \right]_{u=0} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}} \right) \right)_{z=0} = H \left[e^{-u^2} \right]_{u=0} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}} \right) \right)_{z=0}$$

On en déduit : $G = C_{o1}$, $E = C_{o2}$ $F = H = \frac{C_{o1} - C_{o2}}{\sqrt{\pi}}$.

VII.3.f. L'équation d'une frange s'écrira : $x = p \frac{\lambda}{2a} + \frac{a[n(z,t)-1]}{\alpha} = K - \frac{aAC(z,t)}{\alpha}$

$\Delta = y(z = +\infty) - y(z = -\infty) = \frac{aA}{\alpha} (C_{o1} - C_{o2})$ La pente s'écrira :

$m = \frac{dx}{dz} = \frac{aA}{\alpha} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right) = -\frac{aA}{\alpha} \frac{B_2}{\sqrt{Dt}} = -\frac{aA}{\alpha} \frac{C_{o1} - C_{o2}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{Dt}}$

La valeur de Δ mesurée doit être divisée par $|m|$. La pente ne change pas par projection.

$\frac{\Delta}{|m|} = 2\sqrt{\pi Dt}$ $D = \frac{\Delta^2}{4\pi \gamma^2 m^2 t} = \frac{10^{-6}}{4\pi \cdot 120} = 6,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

$\tau = \frac{c^2}{D} = \frac{10^{-2}}{6,6 \cdot 10^{-10}} = 1,5 \cdot 10^7 \text{ s} \approx 175 \text{ jours}$. La condition $t \ll \tau$ est facilement remplie.

VIII.1. Les interférences auront une bonne visibilité, les ondes qui interfèrent étant polarisées dans la même direction.

VIII.2. Les interférences disparaissent : pas d'interférences entre deux ondes de polarisations orthogonales.

VIII.3. On n'obtient jamais d'interférences, les ondes ayant subi les trajets 1 et 2 sont incohérentes. Elles ne peuvent en aucun cas interférer.

VIII.4. De toute façon, pas d'interférences, les ondes ayant subi les trajets 1 et 2 sont polarisées orthogonalement. $E_1 = E_o \cos \alpha_e$, $E_2 = E_o \sin \alpha_e$ $I_1 = I_o \cos^2 \alpha_e$, $I_2 = I_o \sin^2 \alpha_e$.
 $I = I_1 + I_2 = I_o = \text{cte}$

VIII.5. Cette fois, on observera des interférences : c'est l'expérience de Fresnel et Arago. Si E_o est l'amplitude de l'onde à la sortie de P_e , $E_1 = E_o \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha_e$, $E_2 = E_o \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha_e$ sont les amplitudes des projections des deux ondes sur la direction de P_s . D'où, après interférence :

$E' = E_o \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha_e + \exp(j\varphi) \sin \alpha_e)$ et $I = 2I_o [1 + \sin 2\alpha_e \cos \varphi]$

VIII.6. On obtient deux ondes polarisées rectilignement : chaque onde traverse deux fois la lame quart d'onde, ce qui donnera des ondes polarisées dans le plan horizontal. On observera des interférences avec des franges du coin d'air rectilignes.

VIII.7. A l'aller et au retour, les angles de rotation sont opposés, sur chaque bras. Donc les lames sont inactives, comme au (VII.2). Les franges sont inchangées.

VIII.8. Ici, en revanche, les rotations à l'aller et au retour s'ajoutent. L'angle de rotation est égal à :

$530 \times 0,1 \times 0,1 = 5,3^\circ$ à l'aller ; au total : $\theta_1 = 5,3^\circ$ et $\theta_2 = -5,3^\circ$ pour l'autre bras.

$\vec{E}_1 = E_o \cos \theta_1 \vec{e}_z + E_o \sin \theta_1 \vec{e}_x$, $\vec{E}_2 = E_o \cos \theta_1 \vec{e}_z - E_o \sin \theta_1 \vec{e}_x$

$\vec{E} = E_o \cos \theta_1 (1 + \exp(j\varphi)) \vec{e}_z + E_o \sin \theta_1 (1 - \exp(j\varphi)) \vec{e}_x$

$$I = 2I_0 \cos^2 \theta_1 (1 + \cos \varphi) + 2I_0 \sin^2 \theta_1 (1 - \cos \varphi) = 2I_0 (1 + \cos 2\theta_1 \cos \varphi)$$

Le contraste est égal à $c = \cos 2\theta_1 = \cos 20,6^\circ = 0,98$

IX.1.a. La célérité est $c - v$ à l'aller, et $c + v$ au retour, par rapport à R_0 .

$$t_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L}{c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

IX.1.b. Pendant le temps $\frac{t_2}{2}$, O parcourt $v \frac{t_2}{2}$ et donc la lumière parcourt le trajet $\sqrt{L^2 + \frac{v^2 t_2^2}{4}}$, à la

célérité c : $c t_2 = 2 \sqrt{L^2 + \frac{v^2 t_2^2}{4}}$ et donc $t_2 = \frac{2L}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

IX.1.c. $\Delta t = t_1 - t_2 = 2 \frac{L}{c} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] \approx 2 \frac{L}{c} \frac{v^2}{2c^2}$. Pour $L = 20 \text{ m}$ et $v = 30 \text{ km.s}^{-1}$, Δt vaut

environ $0,67 \cdot 10^{-15} \text{ s}$: impossible à mesurer classiquement.

Si les bras sont inégaux :

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2}{c} \left[L_1 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - L_2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] \approx \frac{2}{c} \left[L_1 \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - L_2 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \right]$$

$\Delta t = \frac{2}{c} (L_1 - L_2) + \frac{v^2}{c^2} (2L_1 - L_2)$. On fait ensuite tourner l'appareil de 90° , le nouveau

décalage est : $\Delta t' = \frac{2}{c} (L_2 - L_1) + \frac{v^2}{c^2} (2L_2 - L_1)$. On mesure en fait $\Delta t + \Delta t'$ qui est le décalage :

$$\Delta t + \Delta t' = \frac{v^2}{c^2} \frac{(L_2 + L_1)}{c}$$

IX.1.d. L'écart de temps se traduit par un déphasage : $\varphi = 2\pi \frac{c \Delta t}{\lambda} = 2\pi \frac{L}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}$.

Si l'on tourne l'interféromètre, le déphasage deviendra 2φ entre les deux expériences.

$\Delta p = \frac{2\varphi}{2\pi} = \frac{2L}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}$; pour $L = 1 \text{ m}$, $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ $v/c = 10^{-4}$, $\Delta p = \frac{1}{25}$ interfrange.

On augmente la sensibilité en augmentant la valeur de L . Avec $L = 20 \text{ m}$, $\Delta p = 0,8$ interfrange. On utilise pour cela des réflexions multiples entre miroirs, ce qui allonge le trajet de la lumière.

IX.2. Les lois de la mécanique s'expriment de la même façon dans tous les référentiels galiléens et le temps est absolu en mécanique newtonnienne. On peut étendre ce principe à la physique toute entière, électromagnétisme compris, dans le cadre de la relativité; mais alors le temps n'a plus un caractère absolu. La composition des vitesses galiléenne n'est pas compatible avec l'invariance de c .

IX.3.a. Le calcul du (IX.1.a) et (IX.1.b.) n'est pas correct en relativité. La longueur L est contractée dans le sens de la vitesse d'entraînement : $L_0 = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ [on peut utiliser par exemple la transformation de Lorentz donnée dans l'énoncé].

IX.3.b. On peut dire que la symétrie interdit une modification de la longueur du bras normal à Ox : il est impossible que les règles se déplaçant dans le sens de l'axe Ox (vers la "droite") soient raccourcies (par exemple) [le mieux est de dire qu'en effectuant une mesure de la règle dans le référentiel R_0 , c'est-à-dire en repérant au même instant les deux points de O_0y_0 en coïncidence avec les extrémités de la règle placée dans R , on ne peut pas trouver un résultat différent de L].

IX.3.c. $t'_1 = t'_2 = \frac{2L}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ dans le référentiel R_0 . Dans le référentiel R , $t = \frac{2L}{c}$. La relation entre t et

t' est bien une relation entre temps "impropre" t' et temps propre t .

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE

Composition de chimie - Session : 2000

PARTIE A

REPRÉSENTATIONS THERMODYNAMIQUES

1. Construction et utilisation du diagramme d'Ellingham du zirconium

1.1. *État standard d'un composé à la température T*

- état standard du gaz : gaz parfait de même composition, sous la pression de 1 bar. (c'est un état hypothétique).
- état standard du solide : solide pur sous la pression de 1 bar.

1.2. *Réaction de formation d'un corps pur composé*

C'est la réaction de formation d'une mole de corps pur à partir des éléments pris dans leur état de référence à P et T considérés.

Dans les conditions où Zr est solide : $\text{Zr(s)} + \text{O}_2(\text{g}) \rightleftharpoons \text{ZrO}_2(\text{s})$

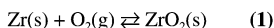
1.3. *Réactions d'oxydoréduction en phase sèche.*

1.3.1. Diagramme d'Ellingham d'une réaction de formation : $\Delta_r G^\circ(T) = f(T)$

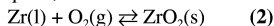
1.3.2. $\Delta_r G^\circ(T) = \Delta_r H^\circ(T) - T \cdot \Delta_r S^\circ(T)$. Si on fait l'approximation $\Delta_r C_p^\circ(T) = 0$, alors $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$ sont indépendants de T et le diagramme est constitué de segments de droites.

1.4. *Diagramme d'Ellingham de ZrO_2 .*

1.4.1. Pour $T < 2133 \text{ K}$, Zr est solide, la réaction de formation de ZrO_2 est :



Pour $T > 2133 \text{ K}$, Zr est liquide, la réaction de formation change et devient :



1.4.2. $T < 2133 \text{ K}$

$$\begin{cases} \Delta_r H^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^\circ = -1086 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r S^\circ = \sum_i \nu_i S_i^\circ = -193,4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{cases}$$

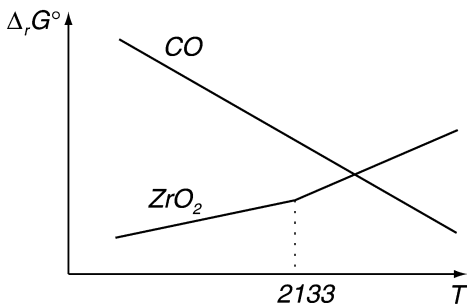
Pour $T > 2133$ K, on superpose à (1) l'équilibre : $Zr(l) \rightleftharpoons Zr(s)$. On a donc :

$$\begin{cases} \Delta_r H^\circ = \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^\circ - L_F = -1106 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1} \\ \Delta_r S^\circ = \sum_i \nu_i S_i^\circ - \frac{L_F}{T_F} = -202,8 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} \end{cases}$$

1.4.3. Lorsque $T = T_F$ on a : $\mu_{Zr}^{oL}(T_F) = \mu_{Zr}^{oS}(T_F)$. $\Delta_r G^\circ = \sum_i \nu_i \mu_i^\circ$. Pour $T = T_F$, les deux valeurs de $\Delta_r G^\circ$ sont donc égales.

1.4.4. L'état liquide est plus désordonnée que l'état solide, la diminution du désordre est donc plus importante lorsque Zr est liquide. $|\Delta_r S^\circ|$ de la réaction (pente de la courbe) est donc plus important.

1.5. Tracé du diagramme.



Pour CO : $2 \text{ C}(s) + \text{O}_2 \rightarrow 2 \text{ CO}(g)$

$$\Delta_r H^\circ = 2\Delta_f H_{CO}^\circ = -220 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$$

$$\Delta_r S^\circ = 2S_{CO}^{o(g)} - 2S_C^{o(s)} - S_{O_2}^{o(g)} = -179,4 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

On a donc :

$$\Delta_r G^\circ = -220 - 0,179,4 \cdot T \quad (= 2\Delta_f G_{CO}^\circ)$$

1.6. Réduction de la Zirconie par le carbone.

1.6.1. $ZrO_2(s) + 2 \text{ C}(s) \rightleftharpoons Zr(s) + 2\text{CO}(g)$ ou $ZrO_2(s) + 2 \text{ C}(s) \rightleftharpoons Zr(l) + 2\text{CO}(g)$

1.6.2. Règle des phases : $\nu = n - k + 2 - \phi = 4 - 1 + 2 - 4 = 1$. La pression totale étant fixée (à 1 bar : cf. texte), l'équilibre ne peut se produire qu'à une seule température.

1.6.3. Affinité : $\mathcal{A} = -\sum_i \nu_i \mu_i$. Tous les constituants sont dans l'état standard, donc $\mu_i = \mu_i^\circ$ et

$$\mathcal{A} = -\sum_i \nu_i \mu_i^\circ = -\Delta_r G^\circ$$

Pour la réaction de réduction : $\Delta_r G^\circ = 2\Delta_f G_{CO}^{o(g)} - \Delta_f G_{ZrO_2}^{o(s)}$. Soit $\mathcal{A} = \Delta_f G_{ZrO_2}^{o(s)} - 2\Delta_f G_{CO}^{o(g)}$. On obtient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} T < 2133 \text{ K} \quad \mathcal{A} = -866 + 0,3728 \cdot T \quad (\text{toujours } < 0) \\ T > 2133 \text{ K} \quad \mathcal{A} = -886 + 0,3822 \cdot T \end{array} \right.$$

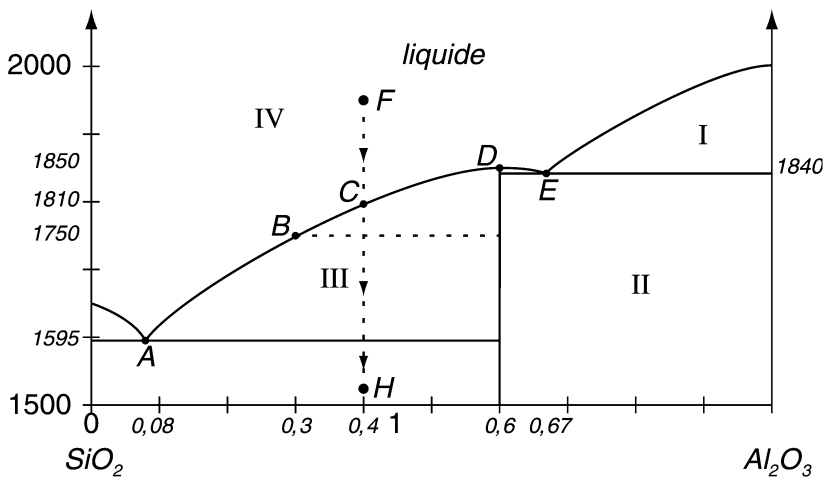
Conclusion : $T < 2318 \text{ K}$, $\mathcal{A} < 0$ pas de réduction
 $T > 2318 \text{ K}$, $\mathcal{A} > 0$ réduction

1.6.4. Le zirconium est obtenu sous forme liquide.

1.7. Préparation dans l'industrie.

Avantages du procédé : on travaille à une température beaucoup plus basse et on évite la formation possible de carbure ZrC.

2. Étude du diagramme binaire $\text{SiO}_2\text{-Al}_2\text{O}_3$.



2.1. Étude préliminaire

- 2.1.1. $v = n - k + 2 - \varphi = 2 - 0 + 2 - 3 = 1$ ($\varphi = 2$ solides + 1 liquide). La pression étant fixée, 3 phases ne peuvent coexister en équilibre que pour un couple de valeurs (x, T) .
- 2.1.2. Ce couple (x_E, T_E) définit un point eutectique. A et E sont des points eutectiques.

2.2. Le domaine IV.

- 2.2.1. IV est le domaine du liquide. La courbe séparant le domaine IV des autres est le liquidus.
- 2.2.2. Le liquidus donne la variation de la température d'équilibre liquide-solide, en fonction de la composition du liquide.

2.3. Composé défini.

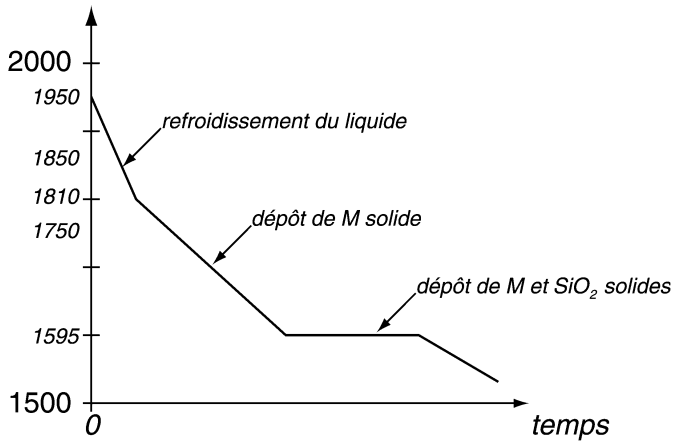
- 2.3.1. Composé défini : phase solide de composition fixée.
- 2.3.2. $(\text{Al}_2\text{O}_3)_{0,6}(\text{SiO}_2)_{0,4}$: mullite noté M température de fusion repérée en D : 1850 °C.

2.4. Domaine I, II, III, IV.

I : Al_2O_3 + Liq ; II : mullite + Al_2O_3 ; III : mullite + liquide ; IV : liquide.

2.5. Refroidissement d'un mélange.

- 2.5.1. Cf. schéma, à 1900 °C le mélange est liquide (point F)
- 2.5.2. On suit la ligne pointillée : allure de la courbe d'analyse thermique.



2.6. Composition du mélange.

A 1750 °C, la composition du liquide est donnée par l'abscisse du point B, soit $x^{liq} = 0,3$. On a alors en présence un mélange liquide et la mullite solide.

Les masses molaires de Al_2O_3 et SiO_2 valent respectivement $102 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $60 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$. La masse molaire de la mullite solide apparue vaut : $M_{mullite} = 0,4 \times 60 + 0,6 \times 102 = 85,2 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Le plus simple est d'écrire la conservation de la masse en faisant intervenir les nombres de mole en phase liquide n^{Liq} et le nombre de moles de M, unique solide apparu :

$$n^{Liq} \left[\underbrace{(0,3 \times 102)}_{\text{masse liquide}} + \underbrace{(0,7 \times 60)}_{\text{masse solide}} \right] + n^M \times 85,2 = 768$$

Par ailleurs, le théorème des moments chimiques donne : $0,1 \cdot n^{Liq} = 0,2 \cdot n^M$.

Finalement : $n^M = 3,33$ moles et $n^{Liq} = 6,66$ moles.

2.7. Observations microstructurales de la phase solide.

2.7.1. La lecture du diagramme (point H) prévoit plutôt la formation de cristaux de mullite et de silice.

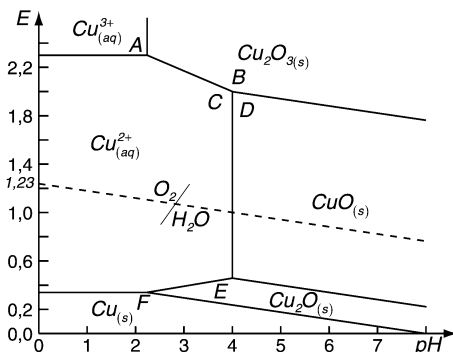
2.7.2. On peut envisager un problème de cinétique dans la formation de la mullite (diffusion de matière en phase solide)

PARTIE B

**STRUCTURE DE MATÉRIAUX CÉRAMIQUES
Composition d'une céramique supraconductrice**

1. Diagramme potentiel pH du cuivre à 25 °C.

1.1. Étude du diagramme potentiel-pH

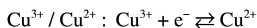


1.2. Emploi du terme « prédominance » et « existence »

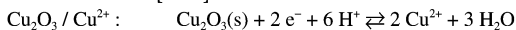
Pour les espèces dissoutes comme Cu^{2+} et Cu^{3+} : $E < E_{eq}$ signifie que $[\text{Cu}^{2+}] \gg [\text{Cu}^{3+}]$, on parle de domaine de prédominance.

Pour les solides comme $\text{Cu}_2\text{O}_3(\text{s})$ et $\text{CuO}(\text{s})$: $E > E_{eq}$ signifie que CuO n'existe pas (K_s non vérifié). Un solide n'existe que dans le domaine qui correspond à la vérification du K_s .

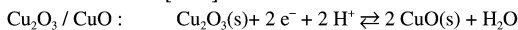
1.3. Pentes des frontières cuivre (II) cuivre (III)



$E = E^\circ + 0,06 \log \left[\frac{[\text{Cu}^{3+}]}{[\text{Cu}^{2+}]} \right]$ indépendant du pH : la pente est nulle.

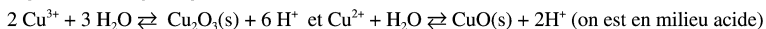


$E = E^\circ + \frac{0,06}{2} \log \left[\frac{[\text{H}^+]^6}{[\text{Cu}^{2+}]^2} \right] = A - 0,18 \cdot \text{pH}$: la pente est de $-0,18$

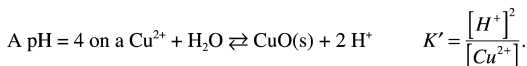


$E = E^\circ + \frac{0,06}{2} \log [\text{H}^+]^2 = B - 0,06 \cdot \text{pH}$: la pente est de $-0,06$

1.4. Équilibres de précipitation

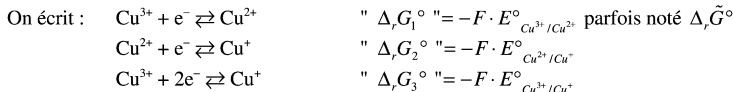


1.5. Constante d'équilibre correspondant à la verticale à pH = 4



Avec $[\text{H}^+] = 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{Cu}^{2+}] = 1 \text{ mol.L}^{-1}$ on a $K' = 10^{-8}$ ($K_s = 10^{-20}$)

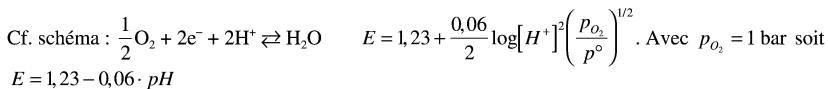
1.6. Potentiel standard du couple $\text{Cu}^{3+}/\text{Cu}^+$ à 25 °C



$$\Delta_r G_3^\circ = \Delta_r G_1^\circ + \Delta_r G_2^\circ \text{ soit } E^\circ_{\text{Cu}^{3+}/\text{Cu}^+} = \frac{E^\circ_{\text{Cu}^{3+}/\text{Cu}^{2+}} + E^\circ_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+}}{2} = 1,235 \text{ V}$$

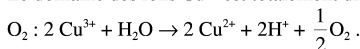
Autre solution : écrire l'égalité des potentiels redox des couples en présence, cette voie est cependant moins rapide.

1.7. Droite potentiel pH du couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$



1.8. Réaction pour Cu^{2+} à pH = 0

Le domaine des ions Cu^{3+} est totalement disjoint de celui de l'eau, celle-ci doit donc être oxydée en



1.9. Réaction non observée à froid.

La réaction est trop lente pour être observée.

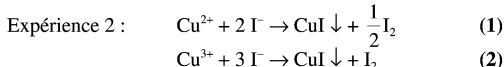
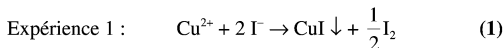
2. Détermination expérimentale de la composition du supraconducteur.

2.1. Degré d'oxydation de cuivre

Au départ le solide contient Cu^{2+} et Cu^{3+} . Dans l'expérience 1, à chaud, la réduction de Cu^{3+} sur H_2O a pu se faire et on n'a donc en solution que des ions Cu^{2+} .

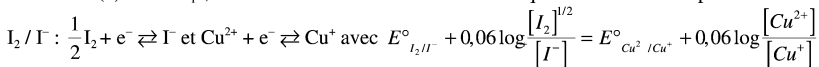
Dans l'expérience 2, à froid, les ions Cu^{3+} n'ont pas réagi (réaction trop lente) et on a un mélange d'ions Cu^{2+} et Cu^{3+} .

2.2. Réaction lors de l'ajout d'un excès d'iodure de potassium



2.3. Calcul des constantes d'équilibre.

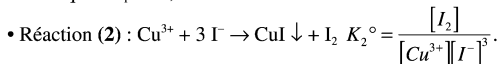
• Réaction (1) : Soit K_1° , sa constante. On écrit la condition d'équilibre entre les couples $\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+$ et



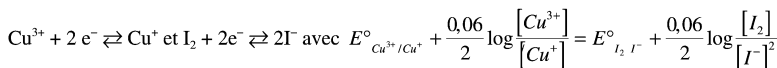
il vient alors $0,06 \log \frac{[\text{I}_2]^{1/2}}{[\text{I}^-]} \frac{[\text{Cu}^+]}{[\text{Cu}^{2+}]} = E^\circ_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+} - E^\circ_{\text{I}_2/\text{I}^-}$ soit

$$0,06 \log \frac{[\text{I}_2]^{1/2} [\text{I}^-] [\text{Cu}^+]}{[\text{I}^-]^2 [\text{Cu}^{2+}]} = E^\circ_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+} - E^\circ_{\text{I}_2/\text{I}^-} \text{ ou } 0,06 \log K_s K_1^\circ = E^\circ_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+} - E^\circ_{\text{I}_2/\text{I}^-} \text{ avec les données}$$

numériques $K_1^\circ = 3,16 \cdot 10^4$.



On écrit l'équilibre entre les couples $\text{Cu}^{3+}/\text{Cu}^+$ et I_2/I^- :



il vient alors $0,06 \log \frac{[\text{Cu}^+]}{[\text{Cu}^{3+}]} \frac{[\text{I}_2]}{[\text{I}^-]^2} = E^\circ_{\text{Cu}^{3+}/\text{Cu}^+} - E^\circ_{\text{I}_2/\text{I}^-}$ ou $0,06 \log K_s K_2^\circ = E^\circ_{\text{Cu}^{3+}/\text{Cu}^+} - E^\circ_{\text{I}_2/\text{I}^-}$ avec les données numériques $K_2^\circ = 3,16 \cdot 10^{32}$.
 Remarque : le passage par les $\Delta_r G^\circ$ est également possible.

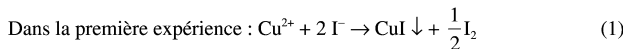
2.4. Justification de l'emploi du thiosulfate pour le dosage du diiode.

La réaction est très favorisée ($\Delta E^\circ = 0,53 \text{ V}$), rapides et son équivalence se détecte aisément.
 Équivalence : détectée par la décoloration de l'iode (plus net en présence d'empois d'amidon).

2.5. Réaction de dosage.

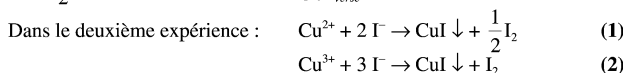
Réaction iode-thiosulfate : $\text{I}_2 + 2 \text{S}_2\text{O}_3^{2-} \rightarrow 2\text{I}^- + \text{S}_4\text{O}_6^{2-}$. A l'équivalence $n_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-}} = 2n_{\text{I}_2}$

2.6. Justification du mode opératoire.



Le nombre de mole d'I₂ formé est la moitié du nombre total d'ions cuivre contenus dans l'échantillon :

$$n_{\text{I}_2} = \frac{1}{2} (n_{\text{Cu}^{2+}} + n_{\text{Cu}^{3+}}). \text{ On a donc } n_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-} \text{ versé}} = n_{\text{Cu}^{2+}} + n_{\text{Cu}^{3+}}$$



$$n_{\text{I}_2} = n_{\text{Cu}^{2+}} + \frac{1}{2} n_{\text{Cu}^{3+}} \text{ soit } n_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-} \text{ versé}} = n_{\text{Cu}^{2+}} + 2n_{\text{Cu}^{3+}}. \text{ On a donc accès aux deux nombres de moles de } \text{Cu}^{2+} \text{ et } \text{Cu}^{3+}.$$

2.7. Détermination de la quantité total d'ions cuivre.

La quantité totale d'ions cuivre est donnée par le premier volume équivalent :

$$n_{\text{Cu}^{2+}} + n_{\text{Cu}^{3+}} = C_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-}} V_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-} (1)} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$$

2.8. Détermination de la quantité total d'ions Cu²⁺ et Cu³⁺.

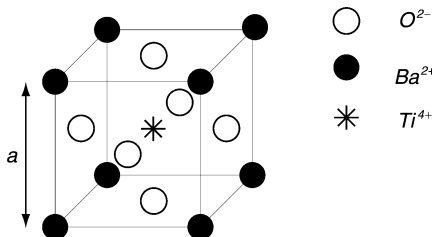
$$n_{\text{Cu}^{3+}} = C_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-}} (V_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-} (2)} - V_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-} (1)}) = 2,67 \cdot 10^{-4} \text{ mol et } n_{\text{Cu}^{2+}} = 5,33 \cdot 10^{-4} \text{ mol.}$$

2.9. Formule du supraconducteur

Il y a deux fois plus d'ions Cu²⁺ que Cu³⁺ dans le matériau. La neutralité électrique impose donc $\text{Y}^{3+}(\text{Ba}^{2+})_2(\text{Cu}^{2+})_2(\text{Cu}^{3+})(\text{O}^{2-})_7$. On a donc YBa₂Cu₃O₇.

3. Structure du titane de baryum.

3.1. Maille cubique.



3.2. *Ti et Ba dans la classification périodique.*

3.2.1. Ti : [Ar] 4s²3d²,

3.2.2. Ba : alcalinoterreux 6^{ème} période et 2^{ème} colonne.

3.3. *Titanate de baryum.*

3.3.1. Par maille, le décompte des ions donne : $Ti^{4+} : 1$; $Ba^{2+} : 8 \times \frac{1}{8} = 1$ et $O^{2-} : 6 \times \frac{1}{2} = 3$.

3.3.2. On a une formule BaTiO₃, soit une charge 4+2+3(-2) = 0

3.4. *Espèces voisines de Ba²⁺ et Ti⁴⁺.*

3.4.1. Chaque Ba²⁺ appartient à 12 faces (4 dans le plan de la feuille, 4 dans le plan perpendiculaire horizontal et 4 dans le plan perpendiculaire vertical). On a un oxyde au centre de chaque face. Un Ba²⁺ a donc 12 oxydes qui sont ses plus proches voisins.

3.4.2. L'ion Ti⁴⁺ est au centre de l'octaèdre formé par les centres des 6 faces du cube. Il y a donc 6 oxydes proches voisins.

3.5. *Structure perovskite et paramètre cristallin.*

3.5.1. Soit « a » l'arête du cube : $r_{Ba^{2+}} + r_{O^{2-}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ et $r_{Ti^{4+}} + r_{O^{2-}} = \frac{a}{2}$ s'il y a contact. La relation doit donc être : $r_{Ba^{2+}} + r_{O^{2-}} = \sqrt{2}(r_{Ti^{4+}} + r_{O^{2-}})$.

3.5.2. D'après les rayons donnés, la relation n'est pas vérifiée.

3.5.3. Si on suppose les ions Ba²⁺ tangent aux O²⁻, on trouve une valeur de a :

$a = \sqrt{2}(r_{Ba^{2+}} + r_{O^{2-}}) = 389$ pm. Cette valeur est inférieure à $2(r_{Ti^{4+}} + r_{O^{2-}})$, ce qui ne donne pas une structure stable.

En revanche, si on suppose qu'il y a contact entre les ions Ti⁴⁺ et les oxydes, on trouve a = 416 pm, ce qui permet de placer les ions baryum sans problème.

PARTIE C

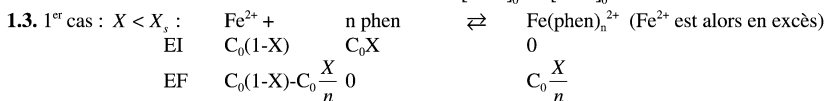
ÉTUDE DU COMPLEXE Fe(II)-(1,10)PHÉNANTROLINE

1. Détermination de la stœchiométrie du complexe par la méthode des variations continues.

1.1. $A = \epsilon_1 [Fe^{2+}] \ell + \epsilon_2 [Fe(phen)_n]^{2+} \ell$

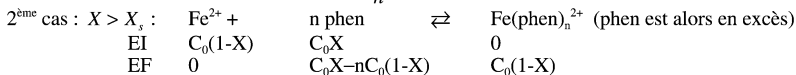
1.2. On utilise les notations du texte : $X_s = \frac{[phen]_0}{[Fe^{2+}]_0 + [phen]_0}$.

Si les réactifs de la réaction de formation : $Fe^{2+} + nphen \rightleftharpoons Fe(phen)_n^{2+}$ sont introduits en proportion stœchiométriques, on a $[phen]_0 = n[Fe^{2+}]_0$. Soit $X_s = \frac{n[Fe^{2+}]_0}{[Fe^{2+}]_0 + n[Fe^{2+}]_0}$ soit $X_s = \frac{n}{1+n}$.



Soit $A = \epsilon_1 \ell \left[C_0(1-X) - C_0 \frac{X}{n} \right] + \epsilon_2 \ell C_0 \frac{X}{n}$ avec $A_0 = \epsilon_1 \ell C_0(1-X)$ l'absorbance sans "réaction".

On obtient donc : $Y = A - A_0 = (\epsilon_2 - \epsilon_1) \ell C_0 \frac{X}{n}$.

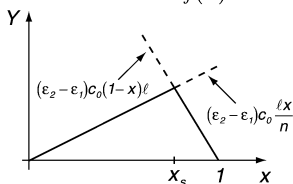


On a alors : $A = \epsilon_2 \ell C_0(1-X)$ et $A_0 = \epsilon_1 \ell C_0(1-X)$.

Dans ces conditions $Y = A - A_0 = (\epsilon_2 - \epsilon_1) C_0(1-X) \ell$

Pour $X = X_s$: on utilise l'une ou l'autre des expressions, avec $X_s = \frac{n}{1+n}$ soit $Y = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) C_0 \ell}{n+1}$.

1.4. Le tracé de la "courbe" $Y = f(X)$ donne :

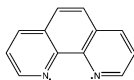


X_s correspond à l'intersection des deux droites. Sa valeur $\left(X_s = \frac{n}{n+1} \right)$ permet de déterminer n.

1.5. Le tracé donne $X_s \approx 0,75$ soit $n = 3$.

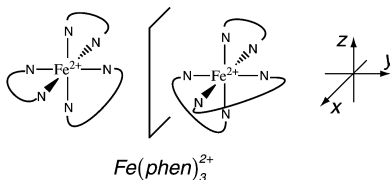
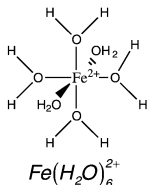
2. Géométrie et structure électronique des complexes $Fe(H_2O)_6^{2+}$ et $Fe(phen)_3^{2+}$

2.1.



Les deux atomes d'azote constituent deux sites de coordination (présence d'un doublet non liant). On a un ligand bidentate.

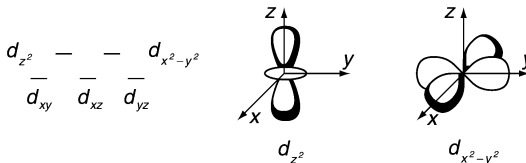
2.2.



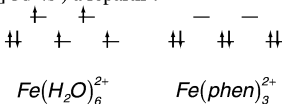
2.3. $\text{Fe}(\text{H}_2\text{O})_6^{2+}$ n'a pas de stéréo-isomérisation. $\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}$ est chiral, ses deux énantiomères sont représentés ci-dessus.

2.4. Dans le modèle électrostatique du champ cristallin, les électrons "d" du métal sont stabilisés par l'approche des doublets non liants des ligands.

Les orbitales "d" correspondant à des maxima de densité de probabilité de présence dans la direction des ligands sont plus déstabilisées. On assiste donc à une levée de dégénérescence du niveau des orbitales d ; si les axes de liaison correspondent aux directions x, y, z, les orbitales d_{z^2} et $d_{x^2-y^2}$ sont plus déstabilisées que d_{xy} , d_{xz} et d_{yz} :



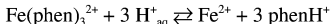
2.5. $\text{Fe}(\text{H}_2\text{O})_6^{2+}$: paramagnétique \rightarrow spin élevé : champ faible.
 $\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}$: diamagnétique \rightarrow spin faible (nul) : champ fort
 Il y a six électrons d ($\text{Fe}^{2+} : [\text{Ar}] 3d^6 4s^0$) à répartir :



3. Étude cinétique de la dissociation du complexe $\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}$ en milieu acide.

3.1. La phénantroline est une base de Lewis et de Bronsted, à cause de la présence des doublets libres de l'azote.

En milieu acide, il peut se produire la réaction de destruction du complexe :



3.2. On veut que la réaction ci-dessus se produise jusqu'à ce que $[\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}] = 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$. On écrit la conservation du fer : $[\text{Fe}^{2+}] + [\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}] = 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

On en déduit $[\text{Fe}^{2+}] = 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$. On utilise alors la constante de formation de $\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}$:

$$\frac{[\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}]}{[\text{Fe}^{2+}][\text{phen}]^3} = 2.10^{20} \text{ soit } [\text{phen}] = \sqrt[3]{\frac{10^{-6}}{10^{-4} \times 2.10^{20}}} = 3.7.10^{-8} \text{ mol.L}^{-1} \text{ (très faible).}$$

La conservation de phen : $[\text{phen}] + 3[\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}] + [\text{phenH}^+] = 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ mène à

$$[\text{phenH}^+] = 3.10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \text{ on en déduit } \text{pH} = \text{p}K_a + \log \frac{[\text{phen}]}{[\text{phenH}^+]} = 5 + \log \frac{3.7.10^{-8}}{3.10^{-4}} = 1,1. \text{ La couleur}$$

disparaît à $\text{pH} \leq 1,1$.

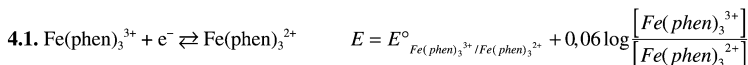
3.3. Réaction d'ordre 1 : $[\text{complexe}] = [\text{complexe}]_0 e^{-kt}$. L'absorbance est proportionnelle à la concentration en complexe : $A = A_0 e^{-kt}$

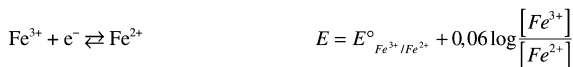
3.4. Le tracé de $\ln A$ est bien linéaire, ce qui confirme l'ordre 1. $\ln A = \ln A_0 - kt$ / La mesure de la pente mène à $k = 4,4.10^3 \text{ min}^{-1}$.

3.5. $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$ et $\frac{d}{dT} \ln k = \frac{E_a}{RT^2}$ ($k = A \exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right)$). On a donc : $k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$ soit

$$\frac{d}{dT} \ln k = -\frac{d}{dT} \ln t_{1/2} = +\frac{14900}{T^2}. \text{ En identifiant : } \frac{E_a}{RT^2} = \frac{14900}{T^2} \text{ on obtient } E_a = 123,8 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

4. Propriétés oxydoréductrices du couple $\text{Fe}(\text{phen})_3^{3+} / \text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}$.





A l'équilibre les potentiels des deux couples sont égaux :

$$E^\circ_{\text{Fe}(\text{phen})_3^{3+}/\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}} = E^\circ_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}} + 0,06 \log \frac{[\text{Fe}^{3+}][\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}]}{[\text{Fe}^{2+}][\text{Fe}(\text{phen})_3^{3+}]}$$

On peut introduire les constantes : $\beta_2 = \frac{[\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}]}{[\text{Fe}^{2+}][\text{phen}]^3}$ et $\beta_3 = \frac{[\text{Fe}(\text{phen})_3^{3+}]}{[\text{Fe}^{3+}][\text{phen}]^3}$. Il vient :

$$E^\circ_{\text{Fe}(\text{phen})_3^{3+}/\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}} = E^\circ_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}} + 0,06 \log \frac{\beta_2}{\beta_3} \stackrel{=2,10^{20}}{\beta_2} \stackrel{\beta_3}{=10^{14}}. \text{ Soit numériquement } E^\circ_{\text{Fe}(\text{phen})_3^{3+}/\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}} = 1,15 \text{ V.}$$

4.2. On utilise maintenant $E^\circ_{\text{Fe(III)}/\text{Fe(II)}} = 1,06 \text{ V}$ (cf. texte). On a donc $1,12 = 1,06 + 0,06 \log \frac{[\text{Fe}(\text{phen})_3^{3+}]}{[\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}]}$

soit $\frac{[\text{Fe}(\text{phen})_3^{3+}]}{[\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}]} = 10$.

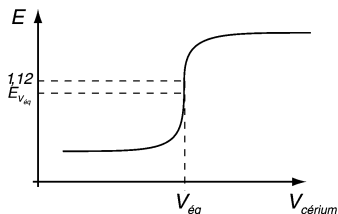
Le changement de teinte correspond à une égalité des absorbances, mais il n'y a aucune raison pour que les coefficients d'extinction molaires soient les mêmes, aux longueurs d'onde où les complexes absorbent :

$A_{II} = \epsilon_2 \ell [\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}]$ et $A_{III} = \epsilon_3 \ell [\text{Fe}(\text{phen})_3^{3+}]$, les deux concentrations au changement de teinte se sont donc pas les mêmes.

4.3. $\text{Ce}^{4+} + \text{Fe}^{2+} \rightarrow \text{Ce}^{3+} + \text{Fe}^{3+}$

A l'équivalence $C_{\text{Fe}} V_{\text{Fe}} = C_{\text{Ce}} V_{\text{eq}}$ soit $V_{\text{eq}} = \frac{C_{\text{Fe}} V_{\text{Fe}}}{C_{\text{Ce}}} = \frac{100 \cdot 10^{-2}}{10^{-1}} = 10 \text{ mL}$.

4.4.



0,5 V_{eq} : demi équivalence

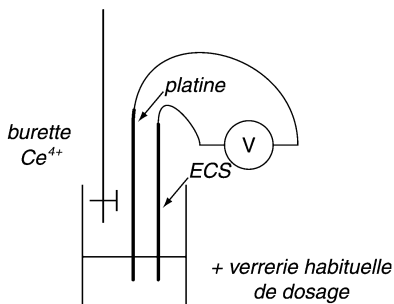
$$[\text{Fe}^{3+}] = [\text{Fe}^{2+}], E = E^\circ_{\text{apparent}} = 0,68 \text{ V.}$$

$$V_{\text{eq}} : E = \frac{0,68 + 1,43}{2} = 1,055 \text{ V}$$

$$1,5 V_{\text{eq}} : [\text{Ce}^{4+}] = \frac{1}{2} [\text{Ce}^{3+}] \text{ soit } E = 1,43 + 0,06 \log 0,5 = 1,41 \text{ V}$$

4.5. Le potentiel théorique à V_{eq} vaut 1,055 V, il est proche du potentiel de changement de teinte (1,12 V), qui se situe bien au voisinage de V_{eq} (cf. schéma).

4.6.

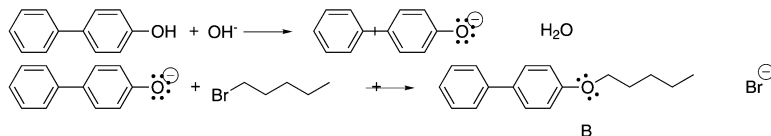


PARTIE D

SYNTHÈSE DE MOLÉCULES DÉRIVÉES DU DIPHÉNYLE

1. Obtention de B à partir de A.

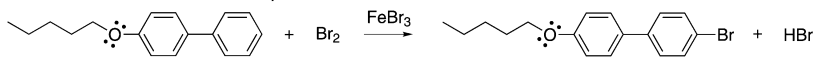
1.1. Équation de la réaction.



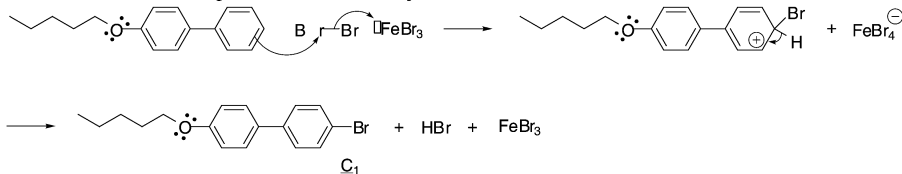
1.2. Schéma réactionnel.



On peut proposer un mécanisme $\text{S}_\text{N}2$ (halogénoalcane primaire, solvant propanone qui est polaire aprotique)

2. Action du dibrome sur B en présence de FeBr_3 .2.1. Réaction de formation de C_1 .

Mécanisme : électrophile Br^+ , formé de façon concertée :

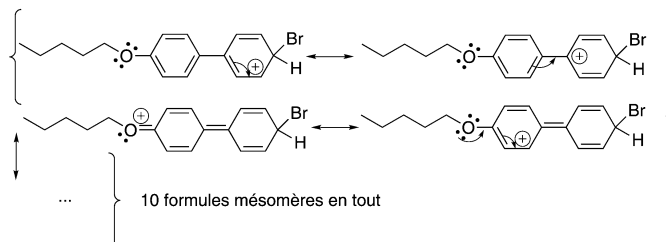


FeBr_3 : acide de Lewis qui catalyse la réaction en permettant la formation de l'électrophile.

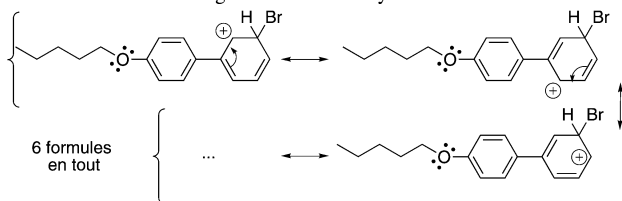
2.2. Formation très majoritaire d'un produit de substitution en 4'.

Si l'on suppose un contrôle cinétique, on compare la stabilité des intermédiaires menant aux formations respectives des produits de substitution en 4' et 3'.

Substitution en 4' : formules mésomères possibles (entre autres)



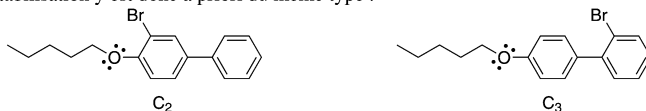
Substitution en 3' : la charge "+" reste sur le cycle substitué :



La stabilisation de l'intermédiaire est meilleure pour la substitution en 4'

2.3. Formation de C_2 et C_3 .

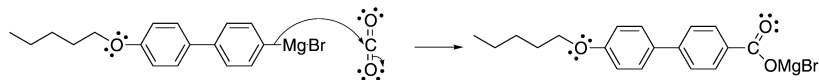
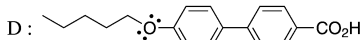
Les autres sites de substitution électrophile possibles sont 2 et 2', car les charges "+" des formules mésomères des intermédiaires correspondants apparaissent sur les mêmes atomes que dans les cas de 4', la stabilisation y est donc a priori du même type :



L'approche de l'électrophile est cependant plus gênée stériquement que dans le cas de 4'. C_2 et C_3 sont donc minoritaires par rapport à C_1 .

3. Réaction de C_1 avec du magnésium dans l'éther anhyre.

3.1. Formule de D et schéma réactionnel.

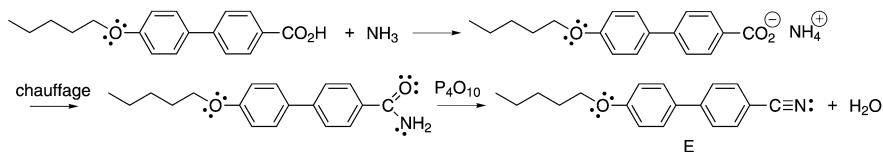


3.2. Rôle de l'hydrolyse acide.

- obtention de R-CO₂H

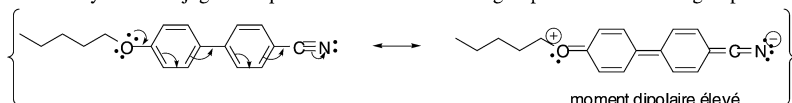
- destruction de Mg(OH)₂ : $Mg(OH)_2 + 2H^+ \rightarrow Mg^{2+} + 2H_2O$

4. Passage de D à E.

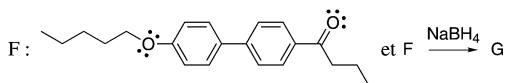


5. Moment dipolaire de E.

E présente un système conjugué comportant à ses extrémités un groupe à effet +M et un groupe à effet -M :

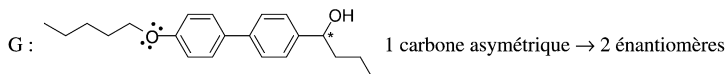


6. Formule de F.



7. Obtention de G.

7.1. Formule de G et stéréoisomérisation.



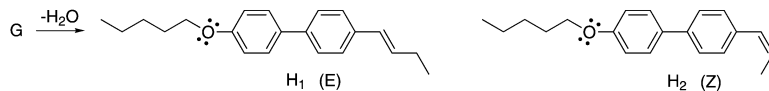
7.2. Activité optique de G.

Les deux faces de la cétone sont attaquées de façon équiprobable par le borohydrure. G est donc obtenu sous forme de racémique. On n'observe pas d'activité optique.

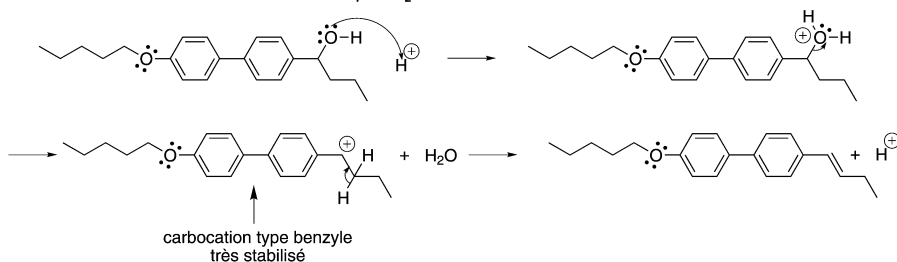
7.3. Autre hydrure possible.

LiAlH_4 , très réactif, utilisé dans l'éther anhydre.

8. Formation de I.

8.1. Formule de H₁ et H₂ et stéréoisomérisation.

H₁ et H₂ sont diastéréoisomères

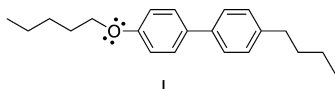
8.2. Mécanisme de formation de H₁ et H₂

Réaction favorisée thermodynamiquement (obtention d'un alcène conjugué) et cinétiquement (carbocation stabilisé)

8.3. Catalyseur d'hydrogénation.

Ni (Raney), Pd et Pt.

8.4. Formule de I.



Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE

Problème de physique - Session : 2000

QUELQUES ASPECTS DE LA PHYSIQUE DES POLYMÈRES

Première partie : Structure d'une chaîne de polymère idéale. Aspects qualitatifs

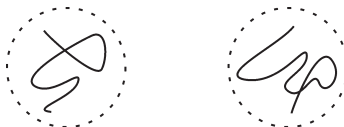
$$I.1) \quad \left\langle \vec{R} \right\rangle = \sum_i \left\langle \vec{a}_i \right\rangle = 0 \quad \left\langle R^2 \right\rangle = \sum_{ij} \left\langle \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j \right\rangle = Na^2 \quad \boxed{R_0 = N^{1/2} a} = 20 \text{ nm}$$

$$I.2) \quad a. \quad c^* \sim N/R^3 = \frac{1}{a^3} N^{-1/2} \quad \boxed{\phi^* = c^* a^3 = N^{-1/2}}$$

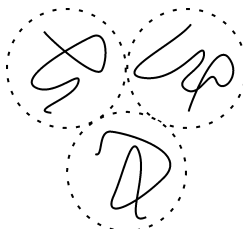
$$b. \quad \phi^* = 1\% \quad \phi \times \text{densité} = \text{concentration en poids} = c_{\text{poids}}$$

$$c_{\text{poids}} = 0,01 \text{ g/cm}^3 = 10 \text{ g/litre (c'est peu)}.$$

c. $c < c^*$: chaînes disjointes



$c = c^*$: chaînes au contact



$c > c^*$: chaînes enchevêtrées



$$I.3) \quad a. \quad \left\langle \left(\vec{r}_n - \vec{r}_m \right)^2 \right\rangle = |n - m| a^2 \text{ relation identique à } R^2 = N a^2.$$

Si $R_0 \gg r \gg a$ la chaîne idéale est fractale.

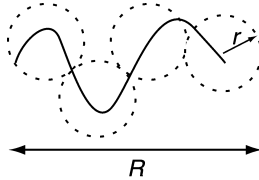
$$R^2 = Na^2 \Rightarrow N = \left(\frac{R}{a} \right)^2 \Rightarrow \boxed{d_f = 2}$$

b. $g(r) a^2 = r^2 \leftarrow$ self similarité

$$g(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^{d_f}$$

$$c(r) : \text{concentration dans la sphère} = \frac{g(r)}{r^3} \sim \frac{1}{r}$$

c.



$$\mathcal{N}(r) r^2 = N a^2 = R^2$$

$$\mathcal{N}(r) = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^{d_f}$$

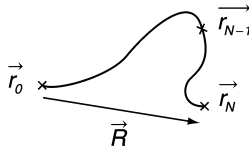
$$\mathcal{N}(r) \times g(r) = N = \left(\frac{R}{a}\right)^2 \text{ comme il se doit.}$$

Deuxième partie : Statistique des conformations d'une chaîne

II.1) $\psi_N \left(\left\{ \vec{a}_i \right\} \right) = \prod_{i=1}^N \rho \left(\vec{a}_i \right)$ indépendante des probabilités.

$$\begin{aligned} G_0(\vec{R}, N) &= \int d\vec{r} \dots d\vec{r}_{N-1} p(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \dots p(\vec{r}_N - \vec{r}_{N-1}) \\ &= \int d\vec{a}_1 \dots d\vec{a}_N \delta \left(\vec{R} - \sum_i \vec{a}_i \right) \psi_N \left(\left\{ \vec{a}_i \right\} \right) \end{aligned}$$

On a la relation de récurrence :



$$G_0(\vec{R}, N) = \int d\vec{r}_{N-1} G_0(\vec{r}_{N-1} - \vec{r}_0, N-1) p(\vec{r}_N - \vec{r}_{N-1})$$

Plus généralement, la probabilité d'aller de \vec{r}_0 à \vec{r}_N est égale au produit des probabilités d'aller de \vec{r}_0 à \vec{r}' en $N-p$ pas, puis de \vec{r}' à \vec{r}_N en p pas, sommée sur toutes les valeurs possibles de \vec{r}' . D'où l'équation intégrale.

II.2) Par définition :

$$G_0(\vec{R}, N=1) = p(\vec{R})$$

L'équation intégrale est valable pour $p = 0$ si on prend :

$$G_0(\vec{r}', p = 0) = \delta(\vec{r}')$$

II.3) $G_0(\vec{R}, N = 1)$ varie sur une distance $\sim a$.

$G_0(\vec{R}, N)$ varie sur une distance $\sim R_0 \sim \sqrt{Na} \gg a$.

$G_0(\vec{R}, N)$ varie plus lentement que $G_0(\vec{R}, 1) = p(\vec{R})$ si $N \gg 1$.

Si \vec{r}' varie sur un domaine d'ordre a :

$$G_0(\vec{R} - \vec{r}', N) = G_0(\vec{R}, N) - \sum_i x'_i \frac{\partial G_0}{\partial R_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} x'_i x'_j \frac{\partial^2 G_0}{\partial R_i \partial R_j}$$

après multiplication par $p(\vec{r}')$ et intégration :

$$G_0(\vec{R}, N + 1) = G_0(\vec{R}, N) + 0 + \frac{1}{2} \left\{ \langle x^2 \rangle \frac{\partial^2 G}{\partial R_x^2} + \langle y^2 \rangle \frac{\partial^2 G}{\partial R_y^2} + \langle z^2 \rangle \frac{\partial^2 G}{\partial R_z^2} \right\}$$

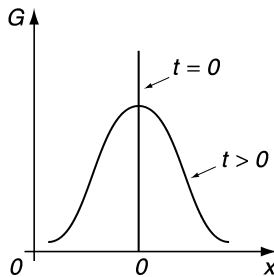
avec : $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{a^2}{3}$

D'où l'équation.

II.4) On a une équation de type équation de diffusion, équation de la chaleur, ou équation de Schrödinger.

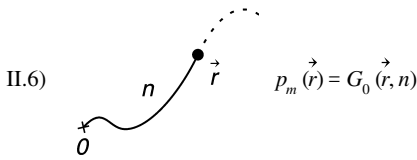
Cette équation est valable à grande échelle, les détails microscopiques ne jouent pas.

II.5) La solution est gaussienne.



On vérifie directement par dérivation que la forme proposée est solution. On pourrait le prouver directement par transformée de Fourier (sur \vec{R}) – Laplace (sur N).

La forme donnée est une conséquence du théorème de la limite centrale. $\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{a}_i$ est la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et de variance finie.



donc :

$$\rho_2(\vec{r}) \simeq \int_0^N dn G_0(\vec{r}, \vec{n}) \simeq \int_0^\infty dn G_0(\vec{r}, \vec{n}) \quad \text{si : } \left| \vec{r} \right| \ll R_0$$

$$\rho_2(\vec{r}) \simeq \int_0^\infty dn \left(\frac{3}{2\pi na^2} \right)^{3/2} \exp - \frac{3}{2} \frac{r^2}{na^2}$$

Il est naturel de poser :

$$u = \frac{r}{\sqrt{na}}$$

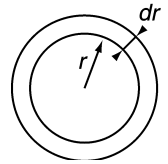
$$\begin{aligned} \rho_2(\vec{r}) &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{3/2} \times \frac{1}{r} \times \int_0^\infty u du \exp - \frac{3}{2} u^2 \\ &= \frac{1}{a^2} \times \frac{\sqrt{3}}{(2\pi)^{3/2}} \times \frac{1}{r} \end{aligned}$$

En comparant avec I.3.c on trouve : $\rho_2(r) \sim \frac{c(r)}{r^3}$

ou plutôt : $4\pi r^2 \rho_2 r \sim dc(r)$

$c(r)$ concentration de monomères dans une sphère de rayon r .

Conséquence naturelle de l'invariance d'échelle.



II.7) a.

$$\begin{aligned} \Delta S &= k_B \log G_0(\vec{R}, N) \\ &= - \frac{3}{2} k_B \frac{R^2}{Na^2} \end{aligned}$$

b. Validité : $R < Na$ (chaîne pour étirée) (validité de l'approximation gaussienne) :

$$\Delta F = - T \Delta S = \frac{3}{2} k_B T \frac{R^2}{Na^2}$$

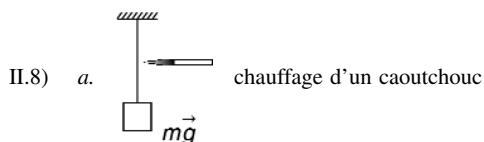
c.

$$\begin{aligned} \frac{\delta U}{\text{travail}} &= \frac{\vec{F}}{\text{force}} \cdot \frac{\delta \vec{R}}{\text{energie libre}} = \frac{\delta \Delta F}{\text{energie libre}} \\ \vec{F} = \vec{\nabla} \Delta F(\vec{R}) &= 3 k_B T \frac{\vec{R}}{Na^2} = K \vec{R} \\ K &= \frac{3 k_B T}{Na^2} \end{aligned}$$

constante de ressort

$$\vec{R} = \frac{1}{K} \vec{F} = \frac{Na^2}{3k_B T} \vec{F} = \sum_i (\delta \vec{a}_i)$$

- ◆ $\frac{1}{K}$ est additif en N , car les monomères contribuent indépendamment à \vec{R} .



$$\vec{F} = mg = cte \quad T \uparrow \quad \vec{R} \downarrow$$

- b. Adiabatique : $S = cte \rightarrow \vec{R} \approx cte \quad \vec{F} \downarrow \quad T \downarrow$

Refroidissement du fil lors d'une « détente » adiabatique (équivalence formelle avec la désaimantation adiabatique et la théorie du paramagnétisme de Langevin).

II.9) Application Numérique :

$$\begin{aligned} \frac{R}{R_0} &= 2 \\ |F| &= \frac{3k_B T}{R_0} \frac{R}{R_0} = \frac{6k_B T}{R_0} = \frac{6k_B T}{N^{1/2} a} \\ &= 6 \cdot 10^{-13} \text{ N} \sim 1 \text{ pN} \end{aligned}$$

(ça commence à être mesurable).

- ◆ Force de rupture d'une chaîne d'énergie $U = 1 \text{ eV}$:

$$f \simeq \frac{U}{a} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{0,2 \cdot 10^{-9}} = 8 \cdot 10^{-10} \text{ N} \sim 1 \text{ nN}$$

Troisième partie : Chaîne confinée dans une boîte

III.1) Quand la chaîne ne touche pas les parois, les conformations sont pondérées de la même façon que dans l'espace libre, l'équation différentielle est la même, seules les conditions aux limites changent.

III.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial N} &= \frac{a^2}{6} \Delta G \quad \leftrightarrow \quad i\hbar \frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta G \\ N &\leftrightarrow it \quad \frac{\hbar}{2m} \leftrightarrow \frac{a^2}{6} \end{aligned}$$

L'analogie est profonde quand on considère le point de vue de Feynmann sur la mécanique quantique, dans lequel on somme sur les amplitudes de probabilités de toutes les trajectoires possibles. G s'appelle propagateur ou fonction de Green en mécanique quantique. C'est l'amplitude de probabilité d'aller d'un point à un autre pendant le temps t .

III.3) On peut vérifier que la solution proposée est correcte par dérivation.

La condition aux limites $G(\vec{R}, N = 0) = \delta(\vec{R})$ correspond à la relation dite « de fermeture » caractérisant les états de base d'un espace de Hilbert.

Ici :

$$\frac{2}{L_x} \sum_p \sin \frac{p\pi r_r}{L_x} \cdot \sin \frac{p\pi r'_r}{L_x} = \delta(r_r - r'_r)$$

De façon directe, on recherche les solutions propres de l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{a^2}{6} \Delta \psi_p = \varepsilon_p \psi_p$$

On trouve :

$$\varepsilon_p = \frac{a^2}{6} \pi^2 \left(\frac{p_1^2}{L_x^2} + \frac{p_2^2}{L_y^2} + \frac{p_3^2}{L_z^2} \right) \quad p_1, p_2, p_3 \text{ entiers}$$

et :

$$\psi_p = (\text{norme}) \quad \sin p_1 \frac{\pi}{L_x} \quad \sin p_2 \frac{\pi}{L_y} \quad \sin p_3 \frac{\pi}{L_z}$$

(particule quantique dans une boîte).

$$G_N(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_p \psi_p(\vec{r}) \psi_p^*(\vec{r}') e^{-\varepsilon_p N}$$

$$\sum_p \psi_p(\vec{r}) \psi_p^*(\vec{r}') = \sum_p \left| \psi_p \right\rangle \langle \psi_p | = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Relation de fermeture

III.4)

$$W = W_x W_y W_z$$

avec :

$$W_x = \int dx dx' g_r(x, x', N)$$

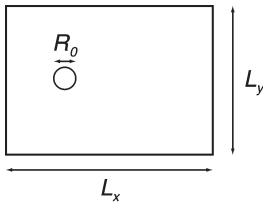
$$W_x = \frac{2}{L_x} \sum_{p=1}^{\infty} \int \int_0^{L_x} dx dx' \sin \frac{p\pi x}{L_x} \sin \frac{p\pi x'}{L_x} \exp - \left(p^2 \pi^2 \frac{Na^2}{L_x^2} \right)$$

$$\int_0^{L_x} \sin \frac{p\pi x}{L_x} = \frac{L_x}{p\pi} [1 - (-1)^p] = \begin{cases} 0 & p \text{ pair} \\ 2 & p \text{ impair} \end{cases}$$

$$W_x = \frac{8 L_x}{\pi^2} \sum_{p=1,3,\dots} \frac{1}{p^2} \exp - \left(p^2 \pi^2 \frac{Na^2}{L_x^2} \right)$$

Deux cas :

a. $R_0 = N^{1/2} a \ll L_x, L_y, L_z \Leftrightarrow$ pas de confinement ni de déformation de la chaîne.



$$\exp - p^2 \pi^2 \frac{Na^2}{L_x^2} \approx 1$$

$$W_x = 8 \frac{L_x}{\pi^2} \sum_{p=1,3,\dots} \frac{1}{p^2} = L_x$$

$$W = L_x \cdot L_y \cdot L_z = \Omega$$

$S = k_B \ln W = k_B \ln \Omega$: entropie de translation du centre de gravité de la chaîne.

$$F = -TS = -k_B T \ln \Omega$$

$$p = \frac{-\partial F}{\partial \Omega} = \frac{k_B T}{\Omega} \text{ : loi des gaz parfaits (pour une chaîne).}$$

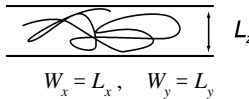
- b. Si c est la concentration en monomère, $\frac{C}{N}$ est la concentration en chaîne, c_p ,

La pression osmotique est :
$$\Pi = \frac{C}{N} k_B T \quad \text{(loi de Van't Hoff)}$$

Si on connaît Π , on connaît $C (\propto \text{poids}) \rightarrow N$.

III.5) Confinement fort

- a. Par exemple entre deux plaques : $L_z \ll R_0 = N^{1/2} a$



Mais $W_z = \frac{8 L_z}{\pi^2} \exp - \pi^2 \frac{Na^2}{6 L_z^2}$ (la somme est dominée par le premier terme, $p = 1$).

$$S = k_B \left[\underbrace{\text{Log } \Omega}_{\text{entropie de translation}} + \text{Log} \left[\underbrace{\frac{8}{\pi^2} \exp - \pi^2 \frac{Na^2}{6 L_z^2}}_{\text{entropie de confinement}} \right] \right]$$

$$S_{\text{conf.}}(L_z) = -k_B \pi^2 \frac{Na^2}{6 L_z^2}$$

Linéaire en N car chaque monomère contribue indépendamment, en $\frac{1}{L_z^2}$ comme l'énergie d'un électron confiné, à cause du principe d'incertitude de Heisenberg.

- b. La pression n'est plus isotrope :
$$P_x = P_y = \frac{k_B T}{\Omega}$$

$$P_z = \frac{1}{L_x L_y} \frac{\partial F}{\partial L_z} \quad \text{avec : } F = -TS$$

$$= \frac{k_B T}{L_x L_y} \frac{\pi^2}{3} \frac{Na^2}{L_z^3}$$

correspond à la force :

$$F_z = \frac{\pi^2}{3} k_B T \frac{Na^2}{L_z^3}$$

Application Numérique :

$$L_z = 5 \text{ nm} \quad R_0 = 20 \text{ nm}$$

$$F = \frac{\pi^2}{3} \frac{k_B T}{L_z} \frac{R_0^2}{L_z^2} = 4,2 \cdot 10^{-11} \text{ N}$$

$$\sim 42 \text{ pN}$$

Quatrième partie : Interactions entre monomères dans les polymères en solution

IV.1) La chaîne à volume exclus est fractale, on attend :

$$R > R_0 = N^{1/2} a \quad \text{et : } \gamma > \frac{1}{2}$$

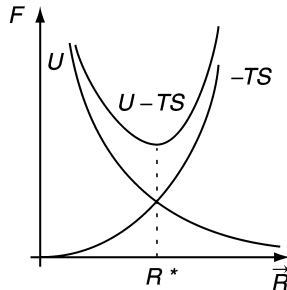
IV.2)

$$u(\vec{r}) = k_B T v(T) c(\vec{r})$$

- a. – La concentration dans la chaîne est : $c = c^* \sim \frac{N}{R^3}$
 – Le potentiel auquel est soumis un monomère est : $u \approx k_B T v(T) \frac{N}{R^3}$
 – L'énergie d'interaction de la chaîne est $U = \frac{1}{2} Nu$ (le facteur $\frac{1}{2}$ évite les doubles comptages)
 donc : $U \sim k_B T v(T) \frac{N^2}{R^3}$.

b. $S \sim -k_B \frac{R^2}{Na^2}$ (cf. partie II)

c. $F(R, N) = U - TS = k_B T \frac{R^2}{Na^2} + k_B T v(T) \frac{N^2}{R^3}$



R^* optimum donné par :
$$\frac{R^2}{Na^2} \sim v(T) \frac{N^2}{R^3}$$

Donc :
$$R^* \sim N^{3/5} a \left(\frac{v(T)}{a^3} \right)^{1/5}$$

(Loi de Flory) $\rightarrow v = \frac{3}{5} = 0,6$ (c'est pas mal).

d. Dans le matériau massif $C = \frac{1}{a^3}$.

$u = k_B T \frac{v}{a^3}$ le potentiel auquel sont soumis les monomères est **constant**, il n'y a donc pas d'effet (ou plutôt, les effets interchaînes compensent les effets intrachaînes), les chaînes sont **idéales** (ce qui n'est pas évident).

IV.3) Polyélectrolytes.

Charge totale :

$$Q = Ne$$

a.

$$U_e \sim \frac{Q^2}{\epsilon \epsilon_0 R} \sim \frac{N^2 e^2}{\epsilon \epsilon_0 R}$$

b.

$$S(R) = -k_B \frac{R^2}{Na^2}$$

$$F(R) = k_B T \left[\frac{R^2}{Na^2} + \frac{N^2 e^2}{\epsilon \epsilon_0 k_B T} \times \frac{1}{R} \right]$$

Optimum : $R^* = Na \left(\frac{l_B}{a} \right)^{1/3} \rightarrow$ les chaînes sont étirées par les répulsions électrostatiques.

$$l_B = \frac{e^2}{4\pi \epsilon \epsilon_0 k_B T} \sim 7 \text{ \AA}$$

Cinquième partie : Étude de la structure des polymères par diffraction des neutrons

V.1)

$$\psi_d(\vec{R}) = \sum_j \underbrace{e^{i \vec{k}_i \cdot \vec{r}_j}}_{\substack{\text{facteur de phase} \\ \text{de l'onde incidente}}} \times \underbrace{\frac{b_j}{|\vec{R} - \vec{r}_j|} e^{i \left| \vec{k}_i \right| \left| \vec{R} - \vec{r}_j \right|}}_{\substack{\text{onde sphérique diffusee}}}$$

(c'est comme Huyghens).

Et :
$$\frac{e^{i k \left| \vec{R} - \vec{r}_j \right|}}{\left| \vec{R} - \vec{r}_j \right|} \approx \frac{e^{i k R}}{R} e^{-i k \frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{r}_j}$$

V.2) $\left| \psi_d(\vec{R}) \right|^2 dS$ est la probabilité de détecter un neutron dans le détecteur par unité de flux incident.

$$\left| \psi_d \right|^2 dS = \left| b(\vec{q}) \right|^2 \frac{dS}{R^2} = \left| b(\vec{q}) \right|^2 d\Omega \quad \text{angle solide}$$

$$I(q) = \left| b(\vec{q}) \right|^2 = \sum_{ij} b_i b_j e^{iq(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}$$

Donc :

V.3) a.

$$P(q) = \sum_{0, j=1}^N \left\langle \exp i\vec{q} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right\rangle$$

$$\left\langle \exp iq_x (x_i - x_j) \right\rangle = \exp -\frac{q_x^2}{2} \left\langle (x_i - x_j)^2 \right\rangle$$

$$= \exp -\frac{q_x^2}{2} |i-j| \frac{a^2}{3}$$

$$P(q) = \int di dj \exp -\frac{q^2}{6} |i-j| a^2 \rightarrow 2 \text{ termes}$$

$$P(q) = \int_0^N di \left\{ \int_0^i dj \exp -\frac{q^2}{6} (i-j) a^2 + \int_i^N dj \exp -\frac{q^2}{6} (j-i) a^2 \right\}$$

b. $u \rightarrow 0$

$$\exp -u = 1 - u + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!}$$

$$P(q) = N^2 \left[1 - \frac{u}{3} \right]$$

$u \rightarrow \infty$

$$P(q) = \frac{2N^2}{u} = \frac{12N}{q^2 a^2} \sim \frac{1}{q^2}$$

$$\left(\frac{1}{q^2} = \text{Transf. Fourier de } \rho_2(\vec{r}) \sim \frac{1}{r} \right)$$

Sixième partie : Équation d'état de films de savon et membranes de lipides

VI.1) Le volume occupé par une chaîne est Na^3 , c'est aussi en moyenne Σh , car la couche est dense.

$$h = \frac{Na^3}{\Sigma} = Na \left(\frac{a^2}{\Sigma} \right)$$

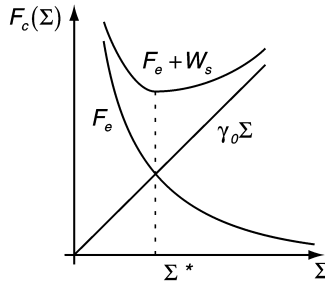
Remarque : si $\Sigma \sim a^2$ la chaîne est complètement étirée !

$$h > R_0 = N^{1/2} a \quad \text{si : } N^{1/2} \left(\frac{a^2}{\Sigma} \right) > 1 \Rightarrow \Sigma < N^{1/2} a^2 \quad \text{où : } D < N^{1/4} a$$

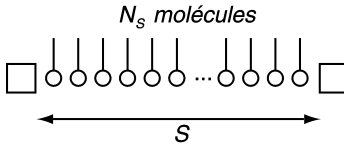
VI.2) $W_s = \gamma_0 \Sigma$

VI.3) $F_e = \frac{3}{2} k_B T \frac{h^2}{Na^2}$ (cf. partie II)

$$F_c = W_s + F_e = \frac{3}{2} k_B T N \left(\frac{a^2}{\Sigma} \right)^2 + \gamma_0 \Sigma$$



VI.4) Monocouche :



$$F_T : \text{énergie libre totale} = N_s F_c \left(\Sigma = \frac{S}{N_s} \right).$$

$$\left(\frac{\partial F_T}{\partial S} \right)_{N_s} = \frac{\partial F_c(\Sigma)}{\partial \Sigma} = \gamma = \gamma_0 - 3 k_B T \frac{N a^4}{\Sigma^3}$$

$$\gamma = \gamma_0 - \Pi \quad (\text{équation de Langmuir})$$

Avec Π : pression de surface exercée par les molécules du film. On peut la mesurer par des mesures de tension superficielle.

VI.5) Membrane, S n'est pas fixé a priori, le système optimise son énergie libre :

$$\frac{\partial F_T}{\partial S} = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

la tension est **nulle** !

Donc $\Sigma = \Sigma^*$ donnée par :

$$\gamma_0 = 3 k_B T N \frac{a^4}{\Sigma^3} = \frac{3 k_B T}{a^2} N \left(\frac{a^6}{\Sigma^3} \right)$$

$$\Sigma^* = N^{1/3} a^2 \left(\frac{3 k_B T}{\gamma_0 a^2} \right)^{1/3}$$

($\Rightarrow h^* \approx N^{2/3} a$ (vérifié expérimentalement)).

Remarque : $\frac{k_B T}{\gamma_0 a^2}$ est d'ordre 1.

Application Numérique : $N = 20$ $a = 2 \text{ \AA}$ $\gamma_0 = 30 \text{ mN/m}$

$\rightarrow \Sigma \approx 23 \text{ \AA}^2$, c'est le bon ordre de grandeur (on compte 25 \AA^2 par chaîne carbonée).

Septième partie : Dynamique des polymères

VII.1)

$$M \dot{\vec{r}} = -\zeta \dot{\vec{r}} + \vec{f}(t)$$

$$\dot{\vec{r}} = -\frac{\zeta}{M} \vec{r} + \frac{1}{M} \vec{f}(t)$$

$\tau = \frac{M}{\zeta}$ est le temps de relaxation des effets inertiels.

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \times d \quad \zeta = 6\pi \eta_s R$$

$$\tau = \frac{2}{9} \frac{R^2}{\eta_s} d \quad \sim 10^{-11} \text{ s (temps moléculaire)}$$

VII.2) On vérifie directement par dérivation ou on dérive le résultat par la méthode de variation des constantes ou par transformation de Fourier.

VII.3)

$$\langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{M^2} \int_0^t dt' dt'' \left\langle \frac{\vec{f}(t') \cdot \vec{f}(t'')}{3 A \delta(t'-t'')} \right\rangle \exp \frac{-(t-t')}{\tau} \exp \frac{-(t-t'')}{\tau}$$

$$= \frac{1}{M^2} 3A \int_0^t dt' \exp -\frac{2}{\tau} (t-t')$$

$$= \frac{3}{2} \frac{A\tau}{M^2} \left[1 - \exp -\frac{2t}{\tau} \right]$$

$t \rightarrow \infty \quad \langle v^2 \rangle \rightarrow cte$; équipartition de l'énergie à l'équilibre thermodynamique.

$$3 k_B \frac{T}{M} = \frac{3 A \tau}{M^2} = \frac{3 A}{2 M \zeta}$$

$\Rightarrow A = 2 k_B T \zeta$ (théorème de fluctuation - dissipation ou théorème de Nyquist en électricité).

VII.4) a.

$$t \gg \tau = \frac{M}{\zeta} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \frac{1}{\zeta} \vec{f}(t)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{1}{\zeta} \int_0^t dt' \vec{f}(t') \Rightarrow \left\langle \dot{\vec{r}}^2(t) \right\rangle = \frac{1}{\zeta^2} \int_0^t dt' dt'' \left\langle \vec{f}(t') \vec{f}(t'') \right\rangle$$

$$\left\langle \dot{\vec{r}}^2(t) \right\rangle = \frac{6 k_B T}{\zeta} t = 6 \eta t \quad \text{avec : } D = \frac{k_B T}{\zeta} \quad \text{relation d'Einstein}$$

b. Rouse :

$$\zeta_c = N \zeta_0 \quad D_{\text{rouse}} = \frac{k_B T}{N \zeta_0} = \frac{D_0}{N}$$

D_0 : coefficient de diffusion moléculaire $D_0 \sim \frac{k_B T}{6\pi \eta_s a} \sim 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$

Zimm :

$$\zeta_c \sim 6\pi \eta R_0 \quad D = \frac{k_B T}{6\pi \eta_0 a N^{1/2}}$$

$$D_{\text{zimm}} \sim \frac{D_0}{N^{1/2}}$$

Pour des chaînes dans un solvant, les pelotes de polymères entraînant le fluide avec elles et se comportant comme des sphères pleines, c'est Zimm qui a raison.

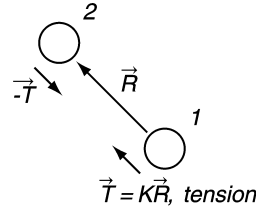
VII.5) a. $K = \frac{3k_B T}{Na^2}$ que l'on peut retrouver par le théorème d'équipartition $\frac{1}{2} K \langle \vec{R}^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$.

b.

$$\zeta \vec{r}_1 = K \vec{R} + \vec{f}_1(t)$$

$$\zeta \vec{r}_2 = -K \vec{R} + \vec{f}_2(t)$$

$$\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



Le temps de relaxation des mouvements internes est :

$$\tau_N \sim \frac{\zeta}{K}$$

◆ $\tau_{Rouse}^{-1} \sim \frac{k_B T}{Na^2} \frac{1}{6\pi \eta_0 a N} \Rightarrow \tau_{Rouse} \sim \tau_0 N^2$ τ_0 : temps moléculaire

$$\tau_0 \sim 6\pi \eta_s \frac{a^3}{k_B T} \sim \frac{a^3}{D_0} \sim 4 \cdot 10^{-11} \text{ s} \quad (a = 2 \text{ \AA})$$

$$\tau_{Rouse} = 3,8 \text{ ms!} \quad \text{si : } N = 10^4$$

$$\tau_{Zimm} = \tau_0 N^{3/2} = 3,8 \cdot 10^{-5} \text{ s} \quad (N = 10^4)$$

Ces temps croissent très vite avec N .

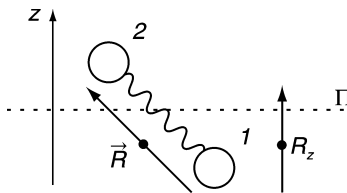
La dynamique des chaînes de polymères est lente à grande échelle.

c.

$$\tau_{Rouse}(p) \sim \tau_0 p^2$$

$$\tau_{Zimm}(p) \sim \tau_0 p^{3/2}$$

p : nombre de monomères dans une sous unité. La dynamique des polymères dépend de l'échelle spatiale, elle est rapide à l'échelle microscopique, d'autant plus rapide qu'elle met en jeu moins de monomères → on a une distribution continue de temps de relaxation.



VII.6) a.

– Pour couper le plan Π , le centre de gravité d'une haltère d'orientation \vec{R} doit être dans le volume $A \times R_z$ (A : aire du plan Π) ; le nombre d'haltères d'orientation \vec{R} dans ce volume est :

$$\frac{C}{N} \times \Psi(\vec{R}, t) d^3 \vec{R} \times A \cdot R_z$$

– La force transmise pour chaque haltère selon Ox est :

$$T_x = K R_x$$

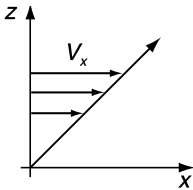
b. Donc :

$$\delta\sigma_{xz} = \int d^3R \frac{C}{N} \psi(\vec{R}, t) K R_x R_z$$

$$\delta\sigma_{xz} = \frac{C}{N} K \langle R_x R_z \rangle$$

(formule due au physicien Kramers).

c.



$$V_x = gz = g \frac{z}{2} + g \frac{z}{2}$$

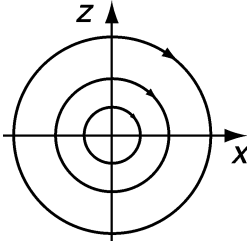
$$V_y = 0 = 0 + 0$$

$$V_z = 0 = -g \frac{x}{2} + g \frac{x}{2}$$

♦ $\vec{v}_r = \begin{pmatrix} g \frac{z}{2} \\ 0 \\ -g \frac{x}{2} \end{pmatrix}$ écoulement à rotationnel non nul : $\vec{rot} \vec{v}_r \neq 0 = \frac{g}{2} \vec{e}_y$

lignes de champs de \vec{v} déterminées par : $\frac{dx}{g \frac{z}{2}} = \frac{dz}{-g \frac{x}{2}}$.

$x^2 + y^2 = cte \rightarrow$ ce sont des cercles.

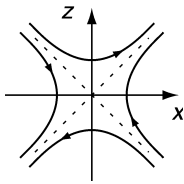


\vec{v}_r fait tourner les molécules à la vitesse angulaire $\omega = -\frac{g}{2}$ autour de O_y .

♦ $\vec{v}_e = \begin{pmatrix} g \frac{z}{2} \\ 0 \\ g \frac{x}{2} \end{pmatrix}$ dérive d'un potentiel : $\vec{v}_e = \vec{\nabla} \left(g \frac{zx}{2} \right)$ ($\vec{rot} \vec{v}_e = 0$)

lignes de champ : $\frac{dx}{g \frac{z}{2}} = \frac{dz}{g \frac{x}{2}} \rightarrow x^2 - y^2 = cte$

hyperboles équilatères dont les asymptotes sont les diagonales $x = z$ et $x = -z$.



\vec{V}_e étire les molécules selon la première diagonale $x = y$.

En général $\langle R_x \cdot R_y \rangle$ est une fonction compliquée de g , donc le comportement « rhéologique » (sous écoulement) des macromolécules est non Newtonien.

VII.7) a.

$$\begin{cases} \zeta \vec{r}_1 = \zeta \vec{v}_1 + K \vec{R} + \vec{f}_1(t) \\ \zeta \vec{r}_2 = \zeta \vec{v}_2 - K \vec{R} + \vec{f}_2(t) \end{cases}$$

\vec{v}_1 et \vec{v}_2 : vitesses du fluide aux points où se trouvent les particules 1 et 2.

b.

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = R_z g$$

L'équation du mouvement relatif s'écrit :

$$\begin{cases} \zeta \dot{R}_x = \zeta g R_z - 2K R_x + f_{2x} - f_{1x} \\ \zeta \dot{R}_y = -2K R_y + f_{2y} - f_{1y} \\ \zeta \dot{R}_z = -2K R_z + f_{2z} - f_{1z} \end{cases}$$

L'écoulement crée une corrélation entre l'évolution de $R_x(t)$ et celle de $R_z(t)$. C'est elle qui contribue à l'augmentation de viscosité et à la dissipation d'énergie.

Attention, point subtil, cette corrélation n'est créée que par la partie « élongationnelle » de l'écoulement, \vec{v}_e . On peut s'en rendre compte sur les équations du mouvement :

$$\begin{array}{llll} \zeta \dot{R}_x = \frac{\zeta g}{2} R_z & + & \frac{\zeta g}{2} R_z - 2K R_x & + & 4f_x \\ \zeta \dot{R}_z = -\frac{\zeta g}{2} R_x & + & \frac{\zeta g}{2} R_x - 2K R_z & + & 4f_z \\ \underbrace{\text{rotation à } \vec{\omega} = -\frac{g}{2} \vec{e}_y}_{\text{causé par } \vec{v}_r} & & \underbrace{\text{élongation selon la première diagonale}}_{\text{causée par } \vec{v}_e} & & \text{force aléatoire} \end{array}$$

En moyenne sur des temps longs ($t \gg \tau$) et sur plusieurs cycles ($gt \gg 1$), la partie R_x corrélée à R_z à cause de l'élongation moyenne de l'haltere sous l'effet du courant est telle que :

$$\delta R_x = \frac{\zeta g}{4K} R_z = \frac{g\tau}{2} R_z$$

avec :

$$\tau \sim \frac{\zeta}{2K}$$

La constante est exacte mais n'est pas demandée, il suffit d'affirmer que d'après les équations, la première en particulier on doit avoir :

$$\zeta g \delta R_z \sim K R_x$$

ou :

$$K \delta R_x \sim \zeta g R_z$$

donc :

$$\langle \delta R_x R_z \rangle = \frac{g\tau}{2} \langle R_z^2 \rangle \approx \frac{g\tau}{2} \frac{k_B T}{K}$$

si $\langle R_z^2 \rangle$ garde sa valeur à l'équilibre non perturbée par l'écoulement (cas où $g\tau \ll 1$).

En fait, le résultat ci-dessus reste toujours vrai (par hasard ici) quel que soit g , comme un calcul exact basé sur la résolution (fastidieux mais non difficile) des équations des mouvements, peut le montrer.

On a ainsi, pour la condition initiale particulière $R_x(t=0) = R_y(t=0) = R_z(t=0) = 0$ qui ne restreint pas la généralité :

$$R_x(t) = \int_0^t dt' \left(g R_z(t') + \frac{1}{\zeta} \Delta f_x(t') \right) \exp \left[- \left(\frac{t-t'}{\tau} \right) \right]$$

avec :

$$\tau = \frac{\zeta}{2K} \quad \vec{\Delta f} = \vec{f}_2 - \vec{f}_1$$

et :

$$R_z(t) = \int_0^t dt' \left(\frac{1}{\zeta} \Delta f_z(t') \right) \exp \left[- \left(\frac{t-t'}{\tau} \right) \right]$$

On a alors, en valeur moyenne, compte tenue des conditions sur les forces aléatoires :

$$\langle R_x(t) R_z(t) \rangle = g \int_0^t \langle R_z(t) R_z(t') \rangle e^{-\frac{(t-t')}{\tau}}$$

et :

$$\langle R_z(t) R_z(t') \rangle = \frac{k_B T}{T} \left[\exp - \frac{|t-t'|}{\tau} - \exp - \frac{(t+t')}{\tau} \right]$$

soit :

$$\langle R_x(t) R_z(t) \rangle = \frac{k_B T}{K} g \left\{ \frac{\tau}{2} \left(1 - \exp - \frac{2t}{\tau} - t \exp - \frac{2t}{\tau} \right) \right\}$$

Soit aux temps longs :

$$\langle R_x(t) R_z(t) \rangle = \frac{k_B T}{K} \frac{g\tau}{2} = \frac{g\tau}{2} \langle R_z^2 \rangle_0$$

On en déduit l'accroissement de viscosité induit par le polymère :

$$\delta\eta = \eta - \eta_s = \frac{\delta\sigma_{xz}}{g} = \frac{C}{N} k_B T \frac{\tau}{2}$$

Dans le modèle de Zimm :

$$\zeta \sim \eta_s R_0 \sim \eta_s a N^{1/2}$$

$$\tau_{Zimm} \sim \frac{\zeta}{K} \sim \frac{N a^2}{k_B T} \zeta$$

$$\delta\eta \sim c \eta_s N^{1/2} a^3 \sim \phi \eta_s N^{1/2}$$

$\phi = c a^3 =$ fraction volumique du polymère.

$$\frac{\delta\eta}{\eta_s} \sim \phi N^{1/2} = \frac{\phi}{\phi^*} \quad \text{avec: } \phi^* = N^{-1/2}$$

concentration de recouvrement des chaînes (*cf.* I).

(Relation en fait analogue à la loi d'Einstein pour la viscosité de sphères dures).

Si $\phi = \phi^*$:

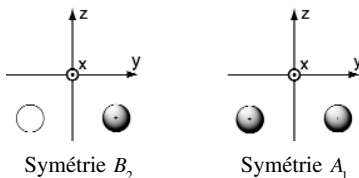
$$\frac{\delta\eta}{\eta_s} \sim 1$$

l'effet sur la viscosité est grand avec une quantité de matière minimale.

Pour $c > a^*$, il faut tenir compte des enchevêtrements et la théorie est plus difficile, mais les effets sont encore plus forts.

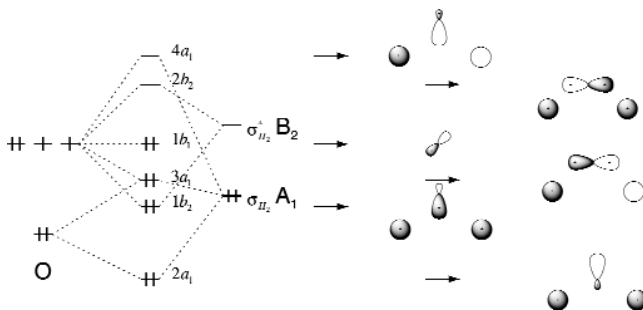
I.1/3. H_2O coude géométrie C_{2v}

On a les fragments issus des $2H$:

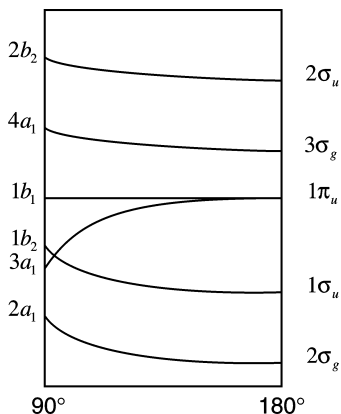


et ceux issus de O : $2s : A_1$ $2p_x : B_1$ $2p_y : B_2$ $2p_z : A_1$

Le diagramme des OM est le suivant :



I.1/4. Règle de Walsh : c'est l'énergie de l' OM la plus haute occupée qui détermine la géométrie, ici $3a_1 \rightarrow 1\pi_u$.



Méthode VSEPR : O type $AX_2 E_2 \rightarrow$ coudeé.
C'est en accord.

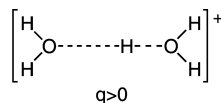
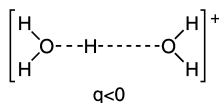
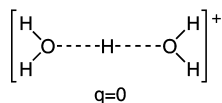
I.2/ Spectroscopie infrarouge

I.2/1. Molécule non-linéaire $\rightarrow 3N - 6 = 3$ modes normaux ($N = 3$ atomes).I.2/2.

E	C_2	σ_u	σ'_u
9	-1	+1	+3

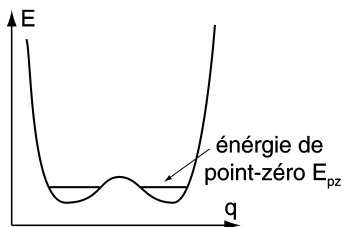
 $\rightarrow 3A_1 + A_2 + 2B_1 + 3B_2$ I.2/3. Translation de la molécule (centre de masse) $\rightarrow A_1 + B_1 + B_2$.Rotation d'ensemble $\rightarrow A_2 + B_1 + B_2$.Il reste $2A_1 + B_2$ pour les vibrations. A_1 est actif en IR (contient z) et en raman (contient x^2, y^2, z^2) B_2 aussi (y) (yz).

I.3/ Spectroscopie photoélectrique

I.3/1. Molécule $H_2O \xrightarrow{h\nu} H_2O^+ + e^-$. On analyse $E_c(e^-)$ et on connaît $h\nu \rightarrow$ on obtient des informations sur les niveaux d'énergie dans la molécule.I.3/2. Pour $h\nu$: $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 3,4 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 21,2 \text{ eV}$ Pic 1 : $E_1 \simeq 8,7 \text{ eV} \rightarrow$ énergie de l'OM = $21,2 - 8,7 = 12,5 \text{ eV}$ (1 b_2)Pic 2 : $E_2 \simeq 6,8 \text{ eV} \rightarrow$ OM à $14,6 \text{ eV}$ (3 a_1)Pic 3 : $E_3 \simeq 3,0 \text{ eV} \rightarrow$ OM à $18,2 \text{ eV}$ (1 b_1)I.3/3. I.3/3.1. Elle montre les niveaux vibrationnels de H_2O^+ .I.3/3.2. $0,41 \text{ eV}$ correspond à $\sigma = \frac{E}{h\nu} = 3300 \text{ cm}^{-1}$ proche de 3652 cm^{-1} . Donc l'OM correspondante était non liante (peu de variation de σ entre H_2O et H_2O^+).I.3/3.3. $0,125 \text{ eV}$ correspond à $\sigma = 1000 \text{ cm}^{-1}$ au lieu de 1596 cm^{-1} . Écart important donc OM liante.II. L'ion $H_3O_2^+$ II.1/ Structure de l'ion $H_3O_2^+$ 

II.2/ Modélisation de quelques propriétés de l'ion $H_5O_2^+$

II.2/1.



E_{pz} rend la barrière à franchir moins élevée.

L'effet tunnel conduit à une probabilité non nulle de franchir la barrière (à partir de E_{pz} par exemple) → l'énergie libre (grandeur thermodynamique) présente une barrière moins haute (voire nulle) pour $q = 0$ en calcul quantique.

II.2/2. $RT = 2,5 \text{ kJ.mol}^{-1}$. Barrière classique $\simeq 0,8 \text{ kJ mol}^{-1} < RT$. Donc la barrière est aisément franchie.

II.2/3. Le minimum de W correspond à $q = 0$ ($H_5O_2^+$ symétrique).

II.2/4. En accord avec l'observation de la courbe (q est souvent nulle). Tandis qu'en simulation classique, q est soit < 0 , soit > 0 .

III. Mobilité de l'ion H^+_{aq}

III.1/ H^+ quatre fois plus mobile que H_2O .

III.2/ Conductivité molaire limitée de $H^+_{aq} \gg$ à celle des autres ions en solution aqueuse.

III.3/ Mobilité par sauts, à l'aide des liaisons hydrogènes.

III.4/ $H_5O_2^+$ symétrique n'est pas en accord avec ces sauts.

Deuxième partie.

Étude de polyélectrolytes linéaires.

I. Modélisation électrostatique

I.1/ On étudie la symétrie du problème et on applique le théorème de Gauss.

I.2/ On a $\frac{dV}{dr} = -E$ ce qui donne $V(r)$ par intégration.

I.3/ I.3/1.

$$dP(r) = C \times \frac{2\pi r dr}{\text{volume du cylindre de longueur unite}} \times \exp\left(-\frac{E_p(r)}{kT}\right)$$

C = cste de proportionnalité telle que $\int_{\text{espace}} dP(r) = 1$.

$$E_p(r) = eV(r) \text{ pour un cation } Na^+ \\ = e\left(V_0 - \frac{2\lambda \ln r}{4\pi \epsilon}\right) \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$$dP(r) = 2\pi c r dr \exp\left(-\frac{eV_0}{kT}\right) \times \exp\left[\frac{2e\lambda \ln r}{4\pi \epsilon kT}\right] \\ = \frac{2\pi c}{W_0} r dr r^{-2\xi}$$

$$dP(r) = \frac{2\pi c}{W_0} r^{(1-2\xi)} dr$$

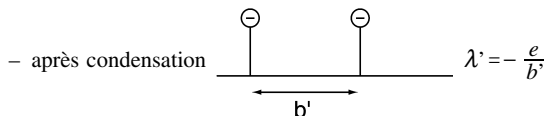
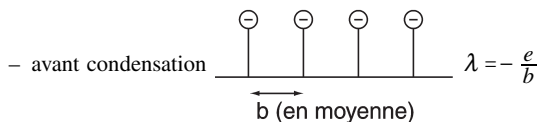
I.3/2.

$$\int_{r=0}^{\infty} dP(r) = 1 \rightarrow \frac{2\pi c}{W} \int_0^{\infty} r^{1-2\xi} dr = 1 \\ \rightarrow \frac{2\pi c}{W} \left[r^{2-2\xi}\right]_0^{\infty} = 1$$

Pour qu'il y ait convergence pour la borne $r = 0$, il faut que l'exposant $2 - 2\xi$ soit $> 0 \iff \xi < 1$. Si $\xi \geq 1$, il y a divergence.

I.3/3. Si $\xi_{initial} > 1$ il y a condensation d'ions Na^+ pour faire baisser ξ jusqu'à la valeur $\xi = 1$.

Fraction de charge centralisée :



b' tel que ξ est ramené à $\xi' = 1$.

Fraction de charge restante :

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{-e/b'}{-e/b} = \frac{b}{b'} = \frac{\xi'}{\xi} = \frac{1}{\xi}$$

Fraction de charge neutralisée : $\boxed{1 - \frac{1}{\xi}}$

I.4/ Expression de la densité volumique de charge

I.4/1. $C_2^0 = C_s^0$

I.4/2. $C_1^0 = C_s^0 + Z_p C_p^0 = C_s^0 + C_p^0$ si : $\xi < 1$

$$C_1^0 = C_s^0 + \frac{C_p^0}{\xi} \quad \text{si : } \xi \geq 1 \text{ (avec condensation)}$$

I.4/3. $n_1(r) = n_1^0 \exp\left\{-\frac{eV(r)}{kT}\right\} = \mathcal{N}_A C_1^0 \exp\left(-\frac{eV(r)}{kT}\right)$

$$n_2(r) = \mathcal{N}_A C_2^0 \exp\left\{+\frac{eV(r)}{kT}\right\}$$

I.5/ Équation vérifiée par le potentiel

I.5/1. $\rho = e(n_1(r) - n_2(r))$

Donc : $\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{e}{\epsilon} (n_2(r) - n_1(r))}$

I.5/2. DL au premier ordre de $n_2(r) - n_1(r)$ donne, le terme d'ordre zéro étant nul :

$$n_2(r) - n_1(r) \simeq \frac{\mathcal{N}_A eV(r)}{kT} (C_2^0 + C_1^0)$$

D'où : $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{e^2 \mathcal{N}_A V(r)}{\epsilon kT} (C_2^0 + C_1^0)$

II. Étude des polyélectrolytes où $\xi \leq 1$

II.1/ Ions monovalents présents en solution

$$n_2(r) = n_s^0 \exp\left(+\frac{eV(r)}{kT}\right)$$

$$n_1(r) = (n_s^0 + n_p^0) \exp\left(-\frac{eV(r)}{kT}\right)$$

II.2/ Équation différentielle vérifiée par $V(r)$

On reprend l'équation de Poisson avec n_1^0 et n_2^0 :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{e^2 (n_1^0 + n_2^0) V(r)}{\epsilon kT}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \alpha^2 V(r)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} = \alpha \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\alpha kT}{e} \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{\alpha^2 kT}{e} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Cela donne :

$$\frac{\alpha^2 kT}{e} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{x} \frac{\alpha kT}{e} \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha^2 kT}{e} y$$

d'où :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - y = 0$$

II.3/ Résolution

II.3/1. Exprimons $V(r)$ avec la fonction K_0 :

$$V(r) = \frac{kT}{e} y(x) \Rightarrow V(r) = \frac{kT}{e} C K_0(\alpha r)$$

puis :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow E = -\frac{kT}{e} C \frac{d}{dr} (K_0(\alpha r))$$

$$\Rightarrow E = \frac{kT \alpha C}{e} K_1(\alpha r)$$

II.3/2. On rappelle le résultat de la question I.1/ :

$$E = -\frac{e}{2\pi \epsilon b} \frac{1}{r} \quad (\text{ligne infinie})$$

On doit obtenir le même champ avec l'expression du II.3/1. quand $r \rightarrow 0$:

$$E \simeq \frac{kT C}{e} \frac{1}{r}$$

car $K_1(\alpha r) \simeq \frac{1}{\alpha r}$ pour $r \rightarrow 0$.

L'identification des deux donne :

$$C = -\frac{e^2}{2\pi \epsilon b kT}$$

II.3/3. La linéarisation de $\exp\left(\pm \frac{eV(r)}{kT}\right)$ pour $r \rightarrow 0$ est critiquable.

II.3/4. On reprend $V(r) = \frac{kT C}{e} K_0(\alpha r)$ cela donne : $V(r) = -\frac{e}{2\pi \epsilon b} K_0(\alpha r)$ qui se comporte comme $V(r) \simeq \frac{e}{2\pi \epsilon b} [\ln(\alpha) + \ln(r)]$ au voisinage de $r = 0$.

$$\Rightarrow V_{poly} = \frac{e}{2\pi \epsilon b} \ln(r) \text{ comme au I.2/ avec } V_0 = 0.$$

On identifie donc l'autre terme comme étant dû à l'atmosphère ionique qui écrante la charge du polyanion.

Donc :

$$\boxed{V_{atm} = \frac{e}{2\pi \epsilon b} \ln(\alpha)}$$

II.4/ Calcul du coefficient d'activité de l'ion commun au polyélectrolyte et au sel monovalent

II.4/1. $V_{atm} = \frac{e}{2\pi \epsilon b} \ln \alpha$, $w_e = \int V_{atm} z_p de = \frac{e^2}{4\pi \epsilon b} z_p \ln \alpha = z_p kT \xi \ln \alpha$.

II.4/2. On a $F_{ex} = V W_e$ avec $W_e = n_p^0 w_e = C_p^0 \mathcal{N}_A w_e$, ce qui donne :

$$F_{ex} = -k \mathcal{N}_A TV C_p^0 z_p \xi \ln(\alpha)$$

$$\boxed{F_{ex} = -RTV C_p^0 \xi \ln(\alpha)}$$

II.4/3.
$$\mu_i = \left(\frac{\partial F}{\partial n_i} \right)_{T, V, n_j \neq i}$$

II.4/4.
$$\mu_i = \underbrace{\mu_i^0 + RT \ln \left(\frac{C_i}{C_{ref}} \right)}_{\text{ideal}} + \underbrace{RT \ln(\gamma_i)}_{\substack{\text{terme d'excès} \\ \text{(écart à l'idealité)}}$$

D'où :

$$\boxed{\left(\frac{\partial F_{ex}}{\partial n_i} \right)_{T, C, n_j \neq i} = RT \ln \gamma_i}$$

II.4/5. Il faut faire la dérivation de F_{ex} par rapport à N_1 à T, V, N_2 :

$$RT \ln \gamma_1 = \left(\frac{\partial F_{ex}}{\partial N_1} \right)_{T, V, N_2}$$

$$RT \ln \gamma_1 = \left(\frac{\partial F_{ex}}{\partial C_1^0} \right) \left(\frac{\partial C_1^0}{\partial N} \right) = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial F_{ex}}{\partial C_1^0} \right)$$

On calcule :
$$\left(\frac{\partial F_{ex}}{\partial C_1^0} \right) = \frac{\partial}{\partial C_1^0} \left[-RTV C_p^0 \xi \ln \left(\sqrt{\frac{C_1^0 + C_2^0}{kT \epsilon}} e^2 \mathcal{N}_A \right) \right]$$

ou :
$$\ln \gamma_1 = -C_p^0 \xi \frac{\partial}{\partial C_1^0} \left[\ln \sqrt{\frac{C_1^0 + C_2^0}{kT \epsilon}} e^2 \mathcal{N}_A \right]$$

$$\ln \gamma_1 = -C_p^0 \xi \frac{1}{2} \frac{1}{C_1^0 + C_2^0}$$

On est dans le cas $\xi < 1$ (sans condensation), tel que $C_2^0 = C_s^0$ et $C_1^0 = C_s^0 + C_p^0$ (voir I.4/2).

$$\Rightarrow \ln \gamma_1 = -\frac{\xi C_p^0}{2(C_s^0 + C_p^0)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\ln \gamma_1 = \frac{\xi}{2} \frac{X}{2+X}}$$

II.4/6. On obtient $\ln \gamma_2$ en dérivant par rapport à N_2 , ce qui donne le même résultat :

$$\ln \gamma_2 = -\frac{\xi}{2} \frac{X}{2+x}$$

III. Étude des polyélectrolytes où $\xi > 1$

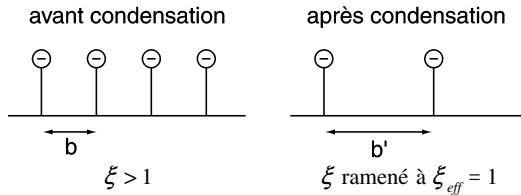
III.1/ Valeurs effectives

III.1/1. ξ a été abaissé de sa valeur initiale à la valeur 1 par condensation des contreions Na^+ :

– avant condensation : $\lambda = -\frac{e}{b}$, $\xi = \frac{e^2}{4\pi \epsilon kT} \frac{1}{b} > 1$;

– après condensation : $\lambda_{eff} = -\frac{e}{b'}$, $\xi_{eff} = 1 = \frac{e^2}{4\pi \epsilon kT} \frac{1}{b'}$;

avec b = distance moyenne entre sites monovalents sur le polyion avant condensation et b' = distance moyenne entre sites monovalents sur le polyion après condensation.



On obtient donc : $\lambda_{eff} = -\frac{e}{b'} = -\frac{e}{b\xi} = \frac{\lambda}{\xi}$

$$\Rightarrow \lambda_{eff} = \frac{\lambda}{\xi}$$

λ_{eff} intervient dans l'expression de V_{atm} et dans celle de F_{exces} :

♦ Pour V_{atm} avant condensation, V_{atm} s'écrit :

$$V_{atm} = \frac{e}{2\pi \epsilon} \frac{1}{b} \ln(\alpha)$$

Maintenant, après condensation, il faut y remplacer b par b' :

$$V_{atm} = \frac{e}{2\pi \epsilon} \frac{1}{b'} \ln(\alpha) \quad \text{avec } b' = b\xi$$

c'est-à-dire :

$$V_{atm} = \frac{e}{2\pi \epsilon} \frac{1}{b\xi} \ln \alpha$$

♦ Pour F_{ex} : il faut prendre la charge effective z'_p au lieu de z_p avec $z'_p = \frac{z_p}{\xi}$ dans

$$w_e = - \int V_{atm} \underbrace{z_p}_{\text{remplace par } \frac{z_p}{\xi}} de.$$

Cela donne :

$$F_{ex} = -RTV \frac{C_p^0}{\xi} \ln(\alpha)$$

Il est intéressant de comparer les deux expressions de F_{ex} :

$$- \xi < 1 : F_{ex} = -RTV C_p^0 \xi \ln(\alpha) ;$$

$$- \xi > 1 : F_{ex} = -RTV \frac{C_p^0}{\xi} \ln(\alpha).$$

Tout se passe comme si l'on avait divisé par ξ^2 pour passer du cas $\xi < 1$ à celui où $\xi > 1$: on a divisé une fois par ξ dans V_{atm} , puis une fois encore dans le calcul de w_e où z_p a été remplacée par $\frac{z_p}{\xi}$.

$$\text{III.1/2.} \quad C_2^0 = C_s^0 \quad \text{et} \quad C_1^0 = C_s^0 + \frac{C_p^0}{\xi}$$

III.1/3. n_1^0 et n_2^0 sont modifiées dans α .

III.2/ Coefficients d'activité

III.2/1. Commençons par calculer $\ln \gamma_2$ pour $\xi > 1$ en repartant de son expression pour $\xi < 1$ (question II.4/5.) : on avait $\ln \gamma_2 = -\frac{C_p^0 \xi}{2} \frac{1}{C_1^0 + C_2^0}$, obtenue par une dérivation par rapport à C_1^0 . Pour $\xi > 1$, l'expression de F_{ex} conduit à remplacer $C_p^0 \xi$ par $\frac{C_p^0}{\xi}$; dans $\ln \gamma_1$, on doit donc remplacer $C_p^0 \xi$ par $\frac{C_p^0}{\xi}$ et aussi C_1^0 par $C_s^0 + \frac{C_p^0}{\xi}$.

$$\text{Cela donne :} \quad \ln \gamma_2 = -\frac{C_p^0}{2\xi} \frac{1}{C_1^0 + C_2^0} = -\frac{C_p^0}{2\xi} \frac{1}{C_s^0 + \frac{C_p^0}{\xi} + C_s^0}$$

$$\text{d'où :} \quad \ln \gamma_2 = -\frac{1}{2} \frac{C_p^0}{\xi} \frac{1}{2C_s^0 + \frac{C_p^0}{\xi}} = -\frac{1}{2} \frac{X/\xi}{2 + \frac{X}{\xi}}$$

$$\boxed{\ln \gamma_2 = -\frac{1}{2} X \xi^{-1} / (2 + X \xi^{-1})}$$

Pour le coefficient d'activité γ_1 du contreion, c'est un peu plus délicat ; on peut raisonner de la façon suivante : $\ln \gamma_1 = \ln \gamma_2 +$ terme correctif lié au fait qu'une partie des ions 1 se condensent.

C'est-à-dire qu'il faut diminuer γ_1 d'un facteur correctif par rapport à γ_2 tenant compte des ions Na^+ que l'on a réellement en solution par rapport aux ions Na^+

total : par rapport à γ_2 , γ_1 est corrigé d'un facteur :

$$\frac{[Na^+] \text{ que l'on a reellement libre}}{\underbrace{\frac{C_s^0 + C_p^0 / \xi}{C_s^0 + C_p^0}}_{[Na^+] \text{ total}}}$$

ce qui donne :

$$\gamma_1 = \gamma_2 \frac{C_s^0 + \frac{C_p^0}{\xi}}{C_s^0 + C_p^0}$$

D'où :

$$\gamma_1 = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{X \xi^{-1}}{2 + X \xi^{-1}}\right) \cdot \frac{1 + X \xi^{-1}}{1 + X}$$

III.2/2. $\frac{X \xi^{-1}}{2 + X \xi^{-1}}$ terme de « Debye Hückel » dû à la condensation ;

$\frac{1 + X \xi^{-1}}{1 + X}$ terme de « Manning » dû à la condensation.

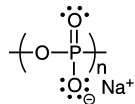
IV. Étude expérimentale

IV.1/ Le polyélectrolyte étudié

IV.1/1. Osmométrie ; diffusion de la lumière.

IV.1/2. L'osmométrie ne convient pas car elle mesure la même quantité de cation et d'anion (le polyélectrolyte se dissocie). La diffusion de la lumière convient.

IV.1/3. Motif monomère :



→ motif $NaPO_3$ de masse moléculaire :

$$M = 30,97 + 23 + 16 \times 3 = 101,97$$

→ $n = \frac{21000}{10497} \simeq 206$. $n \gg 1 \Rightarrow$ on peut négliger les effets de bord.

IV.2/ Mesure des activités et coefficients d'activité

IV.2.1 Échange d'ion sur une membrane possédant des sites susceptibles d'accueillir l'ion :



Exemples :

- Électrode de verre (ions H^+ ou Na^+)
- Membrane en polymère (Cl^- , Br^-).

IV.2/2. Électrode au calomel saturé.

IV.2/3.
$$\Delta E = C^{ste} + \frac{RT}{nF} \ln a_{(ion)}$$

On part de solutions pour lesquelles $a_{(ion)}$ est connu. On étalonne $\Delta E = f(a_{(ion)})$. On peut ensuite mesurer $\Delta E_{(solution \text{ a } \text{étudier})} \Rightarrow$ on obtient $a_{(ion)}$.

Hypothèses éventuelles :

- les variations des potentiels de jonction sont négligées ;
- évaluation des $\gamma_{(ion)}$ lors de l'étalonnage.

IV.3/ Comparaison théorie / expérience

IV.3/1. $\xi = 2,86$; il y a donc condensation.

On calcule γ_1 à partir de l'expression de III.2/1. :

X	$\frac{1 + X \xi^{-1}}{1 + X}$	$\exp - \frac{1}{2} \frac{X \xi^{-1}}{2 + X \xi^{-1}}$	γ_1
0,2	0,8914	0,9833	0,8765
0,6	0,7557	0,9538	0,7207
1	0,6742	0,9285	0,6260
2	0,5656	0,8788	0,4971
3	0,5113	0,8423	0,4307
6	0,4570	0,7923	0,3621

L'accord modèle par rapport à l'expérience est meilleur pour les solutions diluées, ce qui correspond, comme dans la théorie de Debye et Hückel, à une situation où les approximations sont meilleures.

ou encore :

$$h^2 + K_a h + \frac{K_e^2 C}{K_s} = 0$$

La résolution donne : $h = 5,710^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$ ou $\boxed{pH = 6,25}$

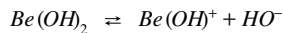
I.1/4. I.1/4.1. On a : $Be(OH)_2 \rightleftharpoons Be_s^{2+} + 2HO^-$

ce qui donne : $K_s = [Be^{2+}][HO^-]^2 = 4s^3$

$\rightarrow K_s = 8,810^{-15}$ ou $\boxed{pK_s = 14,1}$. L'écart par rapport à la valeur de $pK_s = 17,7$ est important.

I.1/4.2. On a : $K_a = \frac{[Be(OH)^+][H_3O^+]}{[Be^{2+}]}$, avec $[H_3O^+] = \frac{K_e}{[HO^-]}$

$[H_3O^+] = \frac{K_e}{2s} = 3,810^{-10} \text{ mol.L}^{-1}$ ou $pH = 9,41$. On est donc dans le domaine de prédominance de $Be(OH)^+$. La réaction prépondérante de dissolution de $Be(OH)_2$ à prendre en compte est donc :



de constante.

$$K = [HO^-][Be(OH)^+] = [HO^-][Be^{2+}] \frac{K_a}{[H^+]} = \frac{K_s K_a}{K_e}$$

et $K_s = s^2$ ce qui donne : $s^2 = \frac{K_s K_a}{K_e}$ ou $K_s = \frac{K_e s^2}{K_a}$.

Application Numérique : $K_s = 5,310^{-18}$ ou $\boxed{pK_s = 17,3}$

L'amélioration en donc sensible.

I.1/4.3. Dans la solution, les ions majoritaires sont HO^- et $Be(OH)^+$. On calcule donc la force ionique I de la solution par :

$$I = \frac{1}{2} \sum_{ions i} z_i^2 C_i$$

ou : $I = \frac{1}{2} ([HO^-] + [Be(OH)^+]) = s = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$

Le coefficient d'activité des ions peut être estimée par la loi limite de

Debye et Hückel : $\log \gamma_{\pm} = -0,51 |z| I^{\frac{1}{2}}$ ce qui donne :

$$\log \gamma_{\pm} = -1,84 \cdot 10^{-3} \text{ puis } \gamma_{\pm} = 0,996$$

K_s devient alors : $K_s = \frac{K_e}{K_a} a_{HO^-} a_{Be(OH)^+}$

ou :
$$K_s = \frac{K_e}{K_a} [HO^-] [Be(OH)^+] \gamma_{\pm}^2 \quad (a_i = \gamma_i C_i)$$

$K_s = 5,3 \cdot 10^{-18}$ la prise en compte des coefficients d'activité n'a rien changé.

I.1/4.4. On conserve la valeur de $s = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$ ainsi que celle de $K_s = 10^{-17,7}$. On ne prend plus en compte les coefficients d'activité puisque leur influence est négligeable. Comme le pH est supérieur à $pK_a + 1$, on ne prend en compte comme espèce chargée que $Be(OH)^+$. On rajoute la présence de $Be(OH)_2$. On a donc :

$$s = [Be(OH)_2] + [Be(OH)^+]$$

et :
$$[Be(OH)^+] = [HO^-] \quad (\text{électroneutralité})$$

Comme au I.1/4.2., on a $K = \frac{K_s K_a}{K_e} = [HO^-] [Be(OH)^+]$ et pour l'équilibre $Be(OH)_2_{solide} \rightleftharpoons Be(OH)_2_{solution} \quad K_d = [Be(OH)_2]_{solution}$.

On peut donc calculer $[Be(OH)^+] : \frac{K_s K_a}{K_e} = [Be(OH)^+]^2$ ce qui donne :

$$[Be(OH)^+] = 7,94 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$$

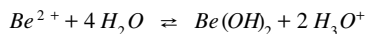
et :
$$[Be(OH)_2] = s - [Be(OH)^+] = 5,06 \cdot 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1}$$

Finalement :
$$K_d = 5,06 \cdot 10^{-6}$$



$$\beta_{11} = 10^{-6,3} \text{ (milieu eau-éthanol).}$$

On a donc : $[Be^{2+}] = [Be(OH)^+]$ pour $pH = 6,3$

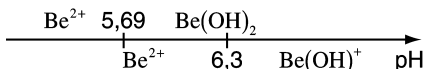


$$\beta_{21} = \frac{[H_3O^+]^2 [Be(OH)_2]}{[Be^{2+}]}$$

d'où :
$$[Be(OH)_2]_{solution} = [Be^{2+}]$$

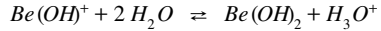
pour :
$$[H_3O^+] = \sqrt{\beta_{21}} \text{ ou } pH = 5,69$$

Cela donne les prédominances provisoires :

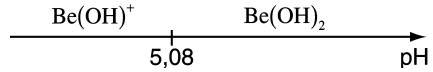


ce qui fait disparaître la frontière à $pH = 6,3$.

On peut achever de s'en convaincre en étudiant l'équilibre entre $Be(OH)_2$ et $Be(OH)^+$:

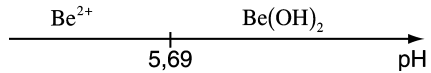


$$K = \frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} = 10^{-5,08} \text{ avec la prédominance éventuelle :}$$



qui comparée à la précédente montre que $Be(OH)^+$ n'a pas de domaine de prédominance.

Conclusion : on garde :



et $Be(OH)^+$ n'apparaître plus dans la suite.

I.1/5.2. Il faut lire $[Be_2(OH)]^{3+} : 2 Be^{2+} + 2 H_2O \rightleftharpoons Be_2(OH)^{3+} + H_3O^+$

$$\beta_{12} = \frac{[Be_2(OH)^{3+}][H_3O^+]}{[Be^{2+}]^2} = 10^{-3,5}$$

On a : $c = [Be^{2+}] + 2 [Be_2(OH)^{3+}]$

et sur la frontière, $[Be^{2+}] = 2 [Be_2(OH)^{3+}]$ ce qui donne $[Be^{2+}] = \frac{c}{2}$
 puis $\beta_{12} = \frac{C/4 \times h}{(C/2)^2}$ ou $\beta_{12} = \frac{h}{C}$.

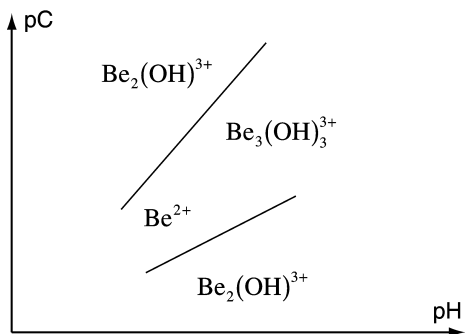
→ $pC = pH - 3,50$. On a Be^{2+} majoritaire au-dessus de la frontière.

I.1/5.3. On a : $\frac{\beta_{33}^2}{\beta_{12}^2} = \frac{[Be_3(OH)_3^{3+}][H_3O^+]^3}{[Be_2(OH)^{3+}]}$

ainsi que : $C = 2 [Be_2(OH)^{3+}] + 3 [Be_3(OH)_3^{3+}]$

et : $2 [Be_2(OH)^{3+}] = 3 [Be_3(OH)_3^{3+}]$ sur la frontière

On obtient finalement l'équation de la frontière : $pC = 3 pH - 6,83$ et le tracé provisoire :

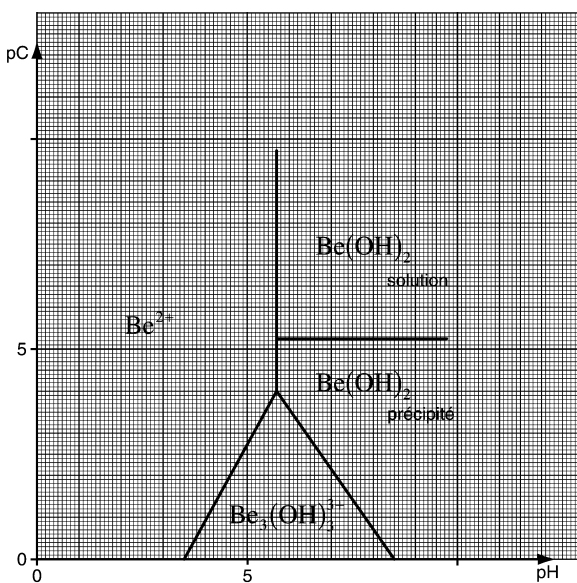


Donc $Be_2(OH)^{3+}$ n'est pas stable.

I.1/5.4. On trouve :
$$\beta_{33} = \frac{[Be_3(OH)_3^{3+}][H_3O^+]^3}{[Be^{2+}]^3}$$

qui conduit à la frontière : $pc = 1,5 pH - 4,33$.

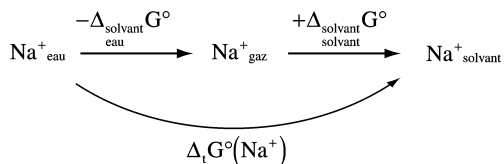
I.1/5.5. On établit la frontière entre $[Be_3(OH)_3]^{3+}$ et $Be(OH)_2$, d'équation : $pC = 12,74 - 1,5 pH$.



I.1/5.6. Milieu concentré, légèrement acide.

I.1/5.7. Segment de droite horizontal.

I.1/6. I.1/6.1. On envisage le passage intermédiaire par l'état gazeux :



qui donne : $\Delta_t G^0(\text{Na}^+) = \Delta_{\text{solvant, solvant}} G^0 - \Delta_{\text{solvant, eau}} G^0$

ou :

$$\Delta_t G^0(\text{Na}^+) = \frac{N_A e^2}{8\pi \epsilon_0} \frac{Z^2}{r} \left(\frac{1}{\epsilon_{\text{solvant}}} - \frac{1}{\epsilon_{\text{eau}}} \right)$$

N.B. : Dans l'énoncé, il fallait lire :

$$\Delta_{\text{solvant}} G^0 = - \frac{N_A e^2}{8\pi \epsilon_0} \frac{z^2}{r} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right)$$

Pour le rayon de l'ion solvaté, on prend :

$$r = 0,121 + 0,085 = 0,206 \text{ nm}$$

On obtient :

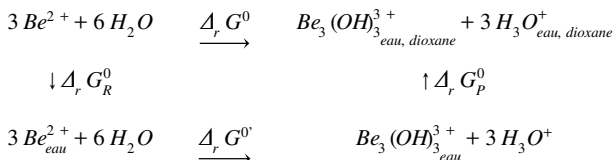
Solvant	MeOH	EtoH	PrOH
$\Delta_t G_{\text{exp}}$	8,2	14	17
$\Delta_t G_{\text{calculé}}$	6,0	9,4	12,3
Écart (en kJ mol ⁻¹)	2,2	4,6	4,7

L'écart est faible ; l'évolution en passant d'un solvant à un autre est correctement donnée par le calcul.

I.1/6.2. β_{33} correspondant à : $3 \text{ Be}^{2+} + 6 \text{ H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{Be}_3(\text{OH})_3^{3+} + 3 \text{ H}_3\text{O}^+$

On compare $\beta_{33}^* = 10^{-8,8}$ dans l'eau, LiClO_4 0,1 mol.L⁻¹.

L'enthalpie libre standard pour ces réactions sont notées $\Delta_r G^0$ (eau-dioxane) et $\Delta_r G^0$ (eau). On a :



Pour les réactifs :

$$\Delta_r G^0_R \simeq 3 \left(\Delta_{solva, H_2O} G^0(Be^{2+}) - \Delta_{solva, H_2O, dioxane} G^0(Be^{2+}) \right)$$

Pour les produits :

$$\begin{aligned}
 \Delta_r G^0_P &= \Delta_{solva, H_2O, dioxane} G^0(Be_3(OH)_3^{2+}) - \Delta_{solva, H_2O} G^0(Be_3(OH)_3^{2+}) \\
 &+ 3 \left(\Delta_{solva, H_2O, dioxane} G^0(H_3O^+) - \Delta_{solva, H_2O} G^0(H_3O^+) \right)
 \end{aligned}$$

On a donc : $\Delta_r G^0 = \Delta_r G^0_P + \Delta_r G^0_R + \Delta_r G^0_R$

ou en remplaçant :

$$\begin{aligned}
 \Delta_r G^0 - \Delta_r G^{0'} &= \frac{N_A e^2}{8\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_{r, eau, dioxane}} - \frac{1}{\epsilon_{r, eau}} \right) \\
 &\left(\frac{3}{r_{H_3O^+}} + \frac{3}{r_{Be_3(OH)_3^{2+}}} - \frac{12}{r_{Ba^{2+}}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta_r G^0 - \Delta_r G^{0'} = -207 \text{ kJ mol}^{-1}} \quad (\text{calculé})$$

Expérimentalement, β_{33} et β^*_{33} étant très voisins, on a :

$$\Delta_r G^0 - \Delta_r G^{0'} \simeq 0,2 \text{ kJ mol}^{-1}$$

L'écart est considérable.

I.1/6.3. Le modèle de Born ne convient pas.

I.1/6.4. Une explication possible est que dans le mélange eau-dioxane, les ions sont solvatés par l'eau seulement, ce qui conduit à des $\Delta_{solva} G^0$ comparables et à des constantes β_{33} très proches.

I.2/ *Évolution des propriétés acido-basiques*

Lorsque $\frac{Z^2}{r}$ augmente, le caractère polarisant du cation augmente, ce qui accroît la polarisation des liaisons O-H des molécules d'eau complexées sur le cation, et les rend plus acides. Il ne s'agit cependant que d'une évolution générale avec de nombreuses irrégularités (effets électroniques non expliqués).

II. Propriétés spectroscopiques

II.1/ Étude de chrome(III)

$$\text{II.1/1. } Cr : 1s^2 2s^2 2p^2 3s^2 3p^6 3d^5 4s^1$$

$$Cr^{3+} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^3$$

$$\text{II.1/2. } \text{II.1/2.1. } {}^4A_{2g} \text{ (axe des abscisses du diagramme } d^3\text{).}$$

II.1/2.2. Les deux transitions sont :

$$- {}^4T_{2g} \leftarrow {}^4A_{2g} \quad \nu_1 ;$$

$$- {}^4T_{2g} \leftarrow {}^4A_{2g} \quad \nu_2.$$

$$\text{On calcule : } \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{17400}{24500} = 0,71$$

On cherche la valeur de D_q/B donnant ce rapport entre les ordonnées de deux droites 4T_1 et 4T_2 .

On trouve $\frac{D_q}{B} \simeq 2,4$ puis $\frac{\nu_1}{B} = 24$ ce qui donne : $D_q = 1740 \text{ cm}^{-1}$, $\Delta_0 = 17400 \text{ cm}^{-1}$ ($=\nu_1$ évidemment) et $B_r = 730 \text{ cm}^{-1}$ environ.

II.1/2.3. B : répulsion interélectronique.

B diminue quand on passe à l'ion complexé (effet nephélauxétique) car les électrons sont plus délocalisés et se repoussent moins.

II.1/3. Bandes moins intenses, donc interdites de spin :

$${}^2T_{1g} \leftarrow {}^4A_{2g} \quad \text{ou} \quad {}^2E_g \leftarrow {}^4A_{2g}$$

et :

$${}^2T_{2g} \leftarrow {}^4A_{2g}$$

$$\text{II.1/4. } \text{II.1/4.1. } \underbrace{{}^4T_{1g}}_{\text{issues de } 4p} \leftarrow {}^4A_{2g} \quad \text{pour} \quad \frac{\nu_3}{B} \simeq 52$$

$$\text{soit : } \nu_3 = 37600 \text{ cm}^{-1}$$

II.1/4.2. Elle est masquée par les bandes de transfert de charge.

II.1/5. Le ligand Cl^- est progressivement remplacé par le ligand H_2O , plus fort (pour Δ_0).

II.2/ Évolution du paramètre de champ cristallin

II.2/1. Δ_0 augmente avec la charge (interaction plus forte avec le ligand).

II.2/2. Δ_0 augmente quand on descend (les orbitales 4d plus étendues spatialement interagissant davantage avec les ligands).

II.3/ Signification de Δ_0 Corrélation avec d'autres grandeurs physico-chimiques

II.3/1. Δ_0 : écart énergétique entre les orbitales t_{2g} et e_g .

Non, pas nécessairement car d'autres facteurs peuvent dominés (solvation par exemple).

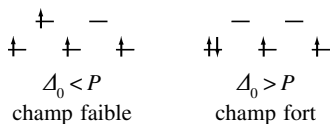
II.3/2. $Ni(H_2O)_6^{2+}$ est plus stable que $Ni(CH_3CN)_6^{2+}$ alors que Δ_0 est plus grand pour $Ni(CH_3CN)_6^{2+}$.

II.3/3. La diminution de la répulsion inter électronique semble être un facteur très important.

III. Propriétés magnétiques

III.1/ Une première approche

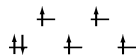
III.1/1. Exemple pour d^4 :



Le nombre d'électrons non appariés n'est pas le même, d'où des propriétés magnétiques différentes.

III.1/2. Champ fort : $\Delta_0 > P$
 Champ faible : $\Delta_0 < P$

III.1/3. $\Delta_0 = 18200 \text{ cm}^{-1} < P$ d'où champ faible : paramagnétique



III.1/4. On doit avoir P(complexe) < P (ion libre) c'est-à-dire une illustration de l'effet nephélanxétique.

III.2/ Utilisation des diagrammes de Tanabe-Sugano

III.2/1. Rupture de pentes au milieu du diagramme.

III.2/2. C pris en compte pour des écarts entre termes de multiplicité de spins différents.

Diagramme d^6 : pour $Dq/B = 2$, les termes $^1A_{1g}$ et $^5T_{2g}$ ont la même énergie.

On a alors :
$$-24 D_q + 5 B + 8 C - \frac{120}{\Delta_0} B^2 = -4 D_q$$

On obtient : $8C = 41B \Rightarrow \boxed{\frac{C}{B} = 5,1}$

IV. Échange de ligands

IV.1/ Analyse des entropies et enthalpies d'activation

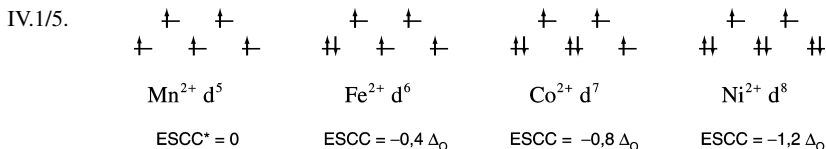
IV.1/1. Mécanisme D : augmentation du désordre dans l'état de transition ; donc $\Delta_r S^{0\neq} > 0$. De la même façon, $\Delta_r S^{0\neq} < 0$ pour un mécanisme A et pour interéchange, $|\Delta_r S^{0\neq}|$ sera faible.

Ainsi : Al^{3+} , mécanisme D et Ga^{3+} : A . Pour les autres ions, il est plus difficile de trancher.

IV.1/2. On a : Al^{3+} mécanisme D (ion de petite taille) et Ga^{3+} : A ; c'est un ion plus gros pour lequel une molécule d'eau supplémentaire peut venir se coordonner dans l'état de transition.

IV.1/3. Cr^{3+} et Al^{3+} : les mécanismes diffèrent à cause des valeurs différentes des $\Delta_r S^{0\neq}$. Pour Cr^{3+} , les énergies des électrons d interviennent ; ce qui peut rendre le $\Delta_r H^{0\neq}$ élevé avec un mécanisme I .

IV.1/4. Le mécanisme est probablement D , mais il est difficile de conclure pour $M_n^{2+} = \Delta_r S^{0\neq}$ proche de zéro.



* ESCC : Énergie de stabilisation de champ cristallin

Si l'on admet que dans l'état de transition, l'ESCC est beaucoup plus faible que dans le réactif, alors l'évolution des $\Delta_r H^{0\neq}$ pour ces quatre ions est bien corrélée à l'ESCC.

IV.2. Influence de la pression

IV.2/1. 1 mol H_2O = volume $\simeq 18 \text{ cm}^3$.

Cela donne :

- $\Delta_r V^{0\neq} = -18 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ (associatif) ;

- $\Delta_r V^{0\neq} = +18 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ (dissociatif).

Interéchange : $\Delta_r V^{0\neq} \simeq 0$

IV.2/2. Les valeurs ci-dessous sont des valeurs maximales. Les complexes à 7 molécules de H_2O (resp. 5) sont moins volumineux (resp. plus volumineux) que ceux avec 6.

IV.2/3. Avec M_m^{2+} : associatif.

Puis avec $\Delta_r V^0 \neq 0$, plus cette grandeur augmente, plus on s'approche du dissociatif.

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION CHIMIE

Composition de physique - Session : 2000

I - LA MACHINE TERRE

A. Sismologie

A.1. Préliminaires

A.1.1. Onde transversale : déplacement mésoscopique perpendiculaire à la direction de propagation ; exemple : corde vibrante.

Onde longitudinale : déplacement mésoscopique parallèle à la direction de propagation ; exemple : onde sonore.

A.1.2. Corde de guitare : vibration transversale.

Onde sonore : onde longitudinale.

A.1.3.
$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = - 2 kX$$

A.1.4.
$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = 0 = (T - T') \cos \alpha \Rightarrow T = T'$$

$$m \frac{d^2 Y}{dt^2} = - 2 T \sin \alpha = - 2 T \frac{Y}{a}$$

A.1.5. Introduction de la notion de propagation

A.1.5.a.
$$m\vec{a} = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)$$

A.1.5.b. Sur \vec{u}_x :
$$m \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = [\vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t)] \cdot \vec{u}_x = 0$$

$$m = \mu dl, \vec{T}(x + dx, t) \cdot \vec{u}_x = T(x + dx, t) \cos(\alpha + d\alpha)$$

$$\vec{T}(x, t) \cdot \vec{u}_x = T(x, t) \cos \alpha \quad ; \quad \alpha_{\text{petit}} \Rightarrow \cos \alpha \approx 1 \approx \cos(\alpha + d\alpha)$$

d'où :
$$T(x + dx, t) = T(x, t)$$

norme invariante le long de la corde.

A.1.5.c. Sur \vec{u}_y :
$$\mu dl \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = T (\sin(\alpha + d\alpha) - \sin \alpha) \approx T d\alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_l \Rightarrow \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad \text{et} \quad dx \approx dl$$

d'où :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

A.1.5.d. Cette équation dépend de x et de t , d'où propagation.

$$\text{Soit :} \quad y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) = f(u)$$

$$\text{où :} \quad u = t - \frac{x}{v}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{du^2} ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 f}{du^2}$$

En reportant dans l'équation de d'Alembert, on obtient :

$$\frac{T}{\mu} = v^2$$

v vitesse de phase, vitesse de propagation de l'onde.

De même pour $g\left(t + \frac{x}{v}\right)$ ou $g(w)$ avec :

$$w = t + \frac{x}{v}$$

$$\text{on retrouve :} \quad \frac{T}{\mu} = v^2$$

A.2. Modélisation d'une vibration longitudinale

A.2.1. Forces de rappel

soit X_n positif.

Le ressort de droite exerce sur la masselotte numéro n une force $+k(X_{n+1} - X_n)$ (pour trouver le signe, voir $X_{n+1} = 0$, $X_n > 0$, alors force négative).

Le ressort de gauche exerce sur la masselotte numéro n une force $+k(X_{n-1} - X_n)$ (pour trouver le signe, voir $X_{n-1} = 0$, $X_n > 0$, alors force négative).

A.2.2. Principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{d^2 X_n}{dt^2} = k(X_{n+1} + X_{n-1} - 2X_n)$$

d'où l'équation différentielle demandée :

$$m \frac{d^2 X_n}{dt^2} + k(2X_n - X_{n-1} - X_{n+1}) = 0$$

A.2.3.

$$X_n = A \exp i(\omega t - \beta na)$$

$$X_{n-1} = A \exp i(\omega t - \beta(n-1)a) = X_n \exp i\beta a$$

$$X_{n+1} = A \exp i(\omega t - \beta(n+1)a) = X_n \exp(-i\beta a)$$

En reportant dans l'équation différentielle, on a :

$$-m\omega^2 = k (\exp(i\beta a) + \exp(-i\beta a) - 2)$$

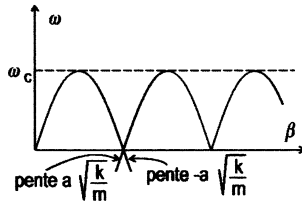
$$m\omega^2 = 2k(1 - \cos\beta a) = 4k \sin^2 \frac{\beta a}{2}$$

d'où :
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \times 4 \sin^2 \frac{\beta a}{2}$$

d'où :
$$\omega = 2 \sqrt{\frac{k}{m}} \left| \sin \frac{\beta a}{2} \right|$$

De même avec $B \exp i(\omega t + \beta na)$.

A.2.4.



$$\omega_{\max} = \omega_c = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Pentes au contact de l'axe $\omega = 0$:

$$\left(\frac{d\omega}{d\beta}\right)_{\omega=0} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \frac{a}{2} \left(\pm \cos \frac{\beta a}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin \frac{\beta a}{2} = 0$$

d'où :
$$\left(\frac{d\omega}{d\beta}\right)_{\omega=0} = \pm a \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{point anguleux}$$

A.2.5.

$$X_{n+1} = X_n + \frac{\partial X_n}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 X_n}{\partial x^2} \frac{(dx)^2}{2}$$

$$X_{n-1} = X_n + \frac{\partial X_n}{\partial x} (-dx) + \frac{\partial^2 X_n}{\partial x^2} \frac{(-dx)^2}{2}$$

$$m \frac{d^2 X_n}{dt^2} \approx \mu \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \right)_n \right| = \mu \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \right)_x \right|$$

$$= 2k \frac{\partial^2 X_n}{\partial x^2} \frac{(dx)^2}{2} = k \frac{\partial^2 X_n}{\partial x^2} (dx)^2$$

$dl \approx dx$, d'où :
$$\approx k \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} (dx)^2$$

$$\mu \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = k dx \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

$$\mu = \frac{m}{a} \quad \text{masse linéique}$$

$$T = k \, dx \approx k \, a \quad \text{tension du fil}$$

A.2.6. Soit : $V = x - vt$

d'après le § A.1.5.c., on a : $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ vitesse de propagation.

De même pour : $W = x + vt$

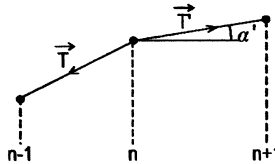
A.3. Modélisation d'une vibration transversale

A.3.1. Fil sans masse et sans raideur :

$$m = 0 \rightarrow \vec{0} = \vec{T}' - \vec{T} = \vec{0}$$

même norme, sens opposés.

A.3.2.



- $T' \cos \alpha' - T \cos \alpha = 0 \quad \cos \alpha \approx 1, \cos \alpha' \approx 1$
 $T' \approx T$

- $T' \sin \alpha' - T \sin \alpha = m \ddot{y}_n$
 $m \ddot{y}_n = T \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{a} - \frac{y_n - y_{n-1}}{a} \right)$

$$m \ddot{y}_n = \frac{T}{a} (y_{n+1} - y_{n-1} - 2 y_n)$$

En reportant : $- m \omega'^2 = \frac{T}{a} (\exp \beta' a + \exp (-\beta' a) - 2)$

$$m \omega'^2 = 2 \frac{T}{a} (1 - \cos \beta' a) = 4 \frac{T}{a} \sin^2 \frac{\beta' a}{2}$$

$$\omega' = 2 \sqrt{\frac{T}{ma}} \left| \sin \frac{\beta' a}{2} \right|$$

même forme que le § A.2.2. $\frac{T}{a} \rightarrow k$.

A.3.3. Passage à la limite, à partir d'un développement limité d'ordre 2 :

$$m \ddot{y}_n = \frac{T}{a} \left(y_n + a \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_n + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_n + y_n - a \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_n + \frac{(-a)^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_n - 2 y_n$$

$$m \ddot{y}_n = \frac{T}{a} \times a^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_n$$

$$\ddot{y}_n = \frac{T a}{m} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_n$$

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ <p>avec : $\mu = \frac{m}{a}$</p>
--

μ est une masse linéique.

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

où :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

A.4. Enregistrement des mouvements sismiques à l'aide d'un sismographe

A.4.1. A.4.1.a.

$$m \vec{a} = -k(z - z_o) \vec{u}_z + m \vec{g}$$

Équilibre :
$$\vec{O} = -k(z_{\acute{e}q} - z_o) \vec{u}_z + m \vec{g}$$

d'où :
$$m \vec{a} = -k(z - z_{\acute{e}q}) \vec{u}_z$$

A.4.1.b.

$$m \vec{a} = -k(z - z_{\acute{e}q}) \vec{u}_z - m \vec{a}_e$$

$$m \vec{a} = -k(z - z_{\acute{e}q}) \vec{u}_z + m \omega^2 Z_{sol} \vec{u}_z$$

En régime permanent sinusoïdal :

$$(-m \omega^2 + k)(z - z_{\acute{e}q}) = m \omega^2 Z_{sol}$$

$z - z_{\acute{e}q} = \frac{m \omega^2}{k - m \omega^2} Z_{sol}$
--

A.4.2. A.4.2.1. Bilan mécanique :

Il faut ajouter la force de Laplace :

$$\vec{f}_{Laplace} = Nil \vec{u}_0 \wedge B \vec{u}_r$$

$$m \vec{a} = -k (z - z_e) \vec{u}_z + m\omega^2 Z_{sol} \vec{u}_z - Nil B \vec{u}_z$$

$$(k - m\omega^2) (z - z_e) = m\omega^2 Z_{sol} - Nil B$$

A.4.2.2. Bilan électrique :

$$R i = \int_{bobine} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int \left[\frac{d}{dt} (z - z_e) \right] \vec{u}_z \wedge B \vec{u}_r \cdot d\vec{l} \vec{u}_0$$

$$R i = j \omega B l N (z - z_e)$$

A.4.2.3.

$$(z - z_e) \left(k - m\omega^2 + j \frac{\omega (BIN)^2}{R} \right) = m\omega^2 Z_{sol}$$

A.4.2.4.

$$z - z_e \approx Z_{sol}$$

$$m\omega^2 \gg k$$

si :

$$\gg \frac{\omega (BIN)^2}{R}$$

alors :

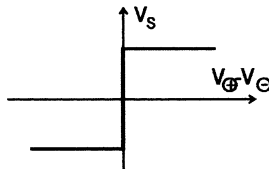
$$z - z_e = - Z_{sol}$$

$$i = - j\omega \frac{BIN}{R} Z_{sol}$$

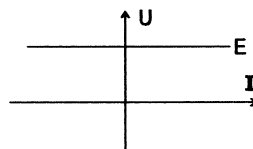
Si on introduit un intégrateur, alors on divise par $j\omega$, ce qui rend i proportionnel à Z_{sol} .

A.4.3. Montage intégrateur à amplificateur opérationnel

A.4.3.1.



A.4.3.2. A.4.3.2.a.

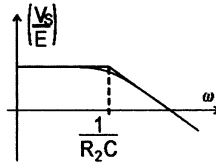


A.4.3.2.b.
$$\frac{(V_s - 0)}{Z_{\acute{e}q}} + \frac{E - 0}{R_1} = 0$$

avec :
$$\frac{1}{Z_{\acute{e}q}} = \frac{1}{R_2} + jC\omega = \frac{1 + j R_2 C \omega}{R_2}$$

d'où :
$$V_s = - E \frac{R_2}{R_1 (1 + j R_2 C \omega)}$$

A.4.3.2.c.



$$\omega_c \rightarrow R_2 C \omega_c = 1$$

Ce montage est un intégrateur si $\omega \gg \frac{1}{R_2 C}$ ce qui est compatible

avec :

$$\omega \gg \sqrt{\frac{k}{m}}$$

et :

$$\omega \gg \frac{(BIN)^2}{mR}$$

A.4.3.2.d. Dans ce domaine :

$$V_s = - E \frac{R_2}{j R_1 R_2 C \omega} = - \frac{E}{j R_1 C \omega}$$

On aura par exemple :

$$E = R_1 i = j \omega BIN (z - z_e)$$

$$V_s = - \frac{E}{j R_1 C \omega} = \frac{BIN}{R_1 C} (z - z_e) = \frac{BIN}{R_1 C} A Z_{sol}$$

$$V_s \% Z_{sol}$$

CQFV

A.5. Analyse spectrale

On distingue une première partie rapide (20 Hz et 48 Hz) et une deuxième partie plus lente (13 Hz) ; ceci correspond aux ondes P (premières) et S (secondaires) observées en sismologie.

B. Champs magnétiques

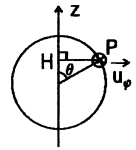
B.1. Contribution du noyau terrestre

B.1.1. B.1.1.1.

$$\vec{v}_{rotation} = \omega HP \vec{u}_\phi$$

d'où :

$$\vec{j} = \rho \omega r \sin \theta \vec{u}_\phi$$



B.1.1.2. B.1.1.2.a.

$$d\vec{l} = \vec{j} \cdot d\vec{S} = \rho \omega r \sin \theta \times r dr d\theta$$

B.1.1.2.b. Rayon de la boucle (si le candidat ne l'a pas fait avant) :

$$HP = r \sin \theta$$

$$\vec{S}_{boucle} = \pi (r \sin \theta)^2 \vec{u}_z$$

B.1.1.2.c. Moment magnétique $d\vec{m} = (d\vec{l}) S_{boucle}$

$$d\vec{m} = \rho \omega r^2 \sin \theta dr d\theta \times \pi r^2 \sin^2 \theta \vec{u}_z$$

$$\vec{m} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R d\vec{m} = \pi \rho \omega \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \vec{u}_z$$

B.1.1.2.d.

$$\vec{m} = \pi \rho \omega \frac{R^5}{5} \times \frac{4 \vec{u}_z}{3} = \frac{4}{15} \pi \rho \omega R^5 \vec{u}_z$$

B.1.2. Modélisation du champ magnétique dû au noyau terrestre

B.1.2.1. On reprend le calcul précédent, mais en intégrant de R_1 à R_2 , d'où :

$$\vec{m} = \frac{4}{15} \pi \rho \omega [R_2^5 - R_1^5] \vec{u}_z$$

Vérification d'homogénéité :

$$[m] = [JS] = I L^2$$

$$\rho \omega R^5 = \frac{Q}{L^3} \times \frac{1}{T} \times L^5 = I L^2$$

CQFV

B.1.2.2. B.1.2.2.a. Lignes de champ du dipôle magnétique terrestre :

$$\frac{dD}{B_r} = \frac{(Dd\theta)}{B_\theta} = \frac{D (d\theta)}{B_\theta}$$

$$\frac{dD}{\cos \theta / D^3} = \frac{D (d\theta)}{\sin \theta / 2 D^3}$$

$$\frac{dD}{\cos \theta} = \frac{2 D (d\theta)}{\sin \theta} \Rightarrow \frac{dD}{D} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \Rightarrow$$

$$D = K \sin^2 \theta$$

B.1.2.2.b. Ordre de grandeur du moment magnétique du dipôle équivalent :

$$0,3 \times 10^{-4} \approx \mu_0 \frac{M}{4\pi d^3}$$

$$M \approx \frac{0,3 \times 10^{-4}}{\frac{4\pi}{\mu_0} \times 10^{-7}} \times (6,4)^3 \times 10^{18} = 10^{23} \text{ Am}^2$$

$$M \approx 10^{23} \text{ Am}^2 \text{ bon ordre de grandeur}$$

B.1.2.2.c. Puissance volumique dissipée par effet Joule dans le noyau externe :
à partir de Puissance = $R i^2$

$$\text{Puissance volumique } \mathcal{P} = \vec{j} \cdot \vec{E} \text{ et } \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\text{Puissance volumique } \mathcal{P} = \frac{j^2}{\sigma}$$

B.1.2.2.d. Bilan énergétique :

$$\eta c \Delta T \times \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1 siècle}}}{\int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{(\rho \omega r \cos \theta)^2}{\sigma} \times d\mathcal{V}}$$

$$\text{où : } d\mathcal{V} = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr$$

$$\eta \text{ en kg/m}^3 ; c \text{ en J/kg/K} ; \sigma \text{ en } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$\Delta T \approx 10^{-7} \text{ à } 10^{-8} \text{ K}$$

B.2. Aperçu sur le champ cristallin

B.2.1. Modèle des spins à 2 niveaux sans interaction

\vec{s} moment magnétique de spin.

B.2.1.1. Spin parallèle : $E = - \vec{s} \cdot \vec{B} = - s B$

B.2.1.2. Spin antiparallèle : $E' = - \vec{s}' \cdot \vec{B} = + s B$

B.2.1.3. $M = n_1 s + n_2 s' = (n_1 - n_2) s$

$$n_1 = A e^{-\frac{E}{k_B T}} = A e^{\frac{sB}{k_B T}}$$

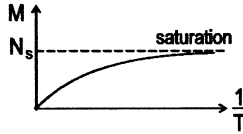
$$n_2 = A e^{-\frac{E'}{k_B T}} = A e^{-\frac{sB}{k_B T}}$$

$$N = A \left(e^{\frac{sB}{k_B T}} + e^{-\frac{sB}{k_B T}} \right)$$

d'où :

$$M = N s \tanh \frac{sB}{k_B T}$$

B.2.1.4. Courbe



B.2.1.5.

$$T \text{ grand} \rightarrow \frac{1}{T} \text{ petit} \rightarrow th \frac{sB}{k_B T} \approx \frac{sB}{k_B T}$$

alors :

$$M = \frac{N s^2 B}{k_B T} = \frac{a}{T} \quad (\text{loi de Curie})$$

où :

$$a = \frac{N s^2 B}{k_B}$$

B.2.2. Spins à 2 niveaux en interaction dans le modèle du champ moyen

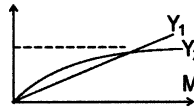
$$B_{\text{effectif}} = B + \lambda M$$

B.2.2.1. On reprend le calcul de la question précédente, en remplaçant B par B_{effectif} :

$$M = Ns th \frac{s(B + \lambda M)}{k_B T}$$

Le candidat sera resté en exp. s'il ne connaît pas th .

B.2.2.2.



Un état d'équilibre existe si Y_1 coupe Y_2 , c'est-à-dire si la pente à l'origine de Y_2 est supérieure à celle de Y_1 . Or, plus T augmente, plus la pente de Y_2 diminue. Donc, c'est seulement pour une température inférieure à celle qui donne pente de $Y_2 =$ pente de Y_1 que l'on observera ce type de magnétisme (qui est en fait du FERRO magnétisme).

→ Pour $B = 0$, on a :

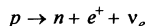
$$\frac{1}{Ns} \leq \frac{\lambda s}{k_B T} \Rightarrow T \leq \frac{N \lambda s^2}{k_B}$$

B.2.2.3. Quand les roches de surface se refroidissent, le type de magnétisme ci-dessus apparaît.

B.3. Aperçu sur le champ magnétique externe

B.3.1. Vent solaire : essentiellement particules élémentaires p , n , e^- , neutrinos électroniques.

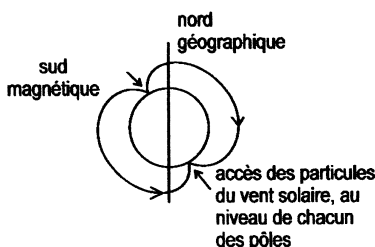
B.3.2. Le proton à l'état libre se désintègre en :



Un candidat peut aussi donner : $n + \nu_e \rightarrow p + e^-$

B.3.3. Le Soleil émet des neutrinos, insensibles à toute interaction sauf nucléaire faible ; les neutrinos ne sont donc quasiment pas arrêtés par la matière ; ils traversent presque toute la Terre et atteignent donc la Terre du côté nuit.

B.3.4. L'activité solaire crée le vent solaire, dont les particules chargées peuvent approcher les pôles, compte tenu des lignes de champ magnétique.



Les particules chargées du vent solaire excitent les molécules d'oxygène et d'azote de l'air ; leur désexcitation s'accompagne d'une émission lumineuse, à dominante rose et vert.

II - LA MACHINE OCÉAN

A. Équation d'Euler appliquée à la Machine Océan

A.1. Vocabulaire de la mécanique des fluides

Particule mésoscopique = particule très grande à l'échelle atomique, très petite à l'échelle macroscopique.

A.2. Étude dans le repère terrestre :

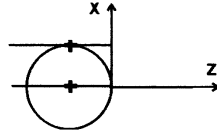
A.2.1. Le repère terrestre est lié à la Terre, qui tourne sur elle-même et tourne autour du Soleil ; ce repère n'est donc pas galiléen.

A.2.2. A.2.2.a. Force volumique de pesanteur $\rho \vec{g}$.

A.2.2.b. Force volumique de pression $-\vec{\text{grad}} p$.

A.2.2.c. Équation d'Euler : $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\text{grad}} p - 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{v}$

A.2.2.d.



A.2.2.e.

$$\frac{m \, dv_x}{dt} = 2 \, \Omega \, (\sin \lambda) \, v_z$$

A.2.2.f.

$$\frac{m \, dv_z}{dt} = 2 \, \Omega \, v_x \, (\sin \lambda)$$

A.2.2.g. $\frac{2 \, \Omega \, \sin \lambda}{m} = a$ d'où : $m \frac{dV}{dt} = -i \, 2 \, \Omega \, (\sin \lambda) \, V \Rightarrow V = v_{x_0} e^{-\frac{i \, 2 \, \Omega \, \sin \lambda}{m} t}$
 $x = \frac{v_{x_0}}{a} \sin at$ et $z = \frac{v_{x_0}}{a} (\cos at - 1) \rightarrow$ cercle

B. Repérage de la bouée

B.1. Soit M point de masse m en mouvement sur un cercle de centre O , rayon R ; sa vitesse s'écrit, en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \frac{d \vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} (R \vec{u}_r) = R \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

Son moment cinétique par rapport à O s'écrit :

$$\vec{\sigma} = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = m R^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z$$

et le théorème du moment cinétique, dans un champ de forces centrales, s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = m R^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_z = \vec{0}$$

Bilan : $\frac{d\theta}{dt} = \text{constante}$; $\|\vec{v}\| = \left| \frac{R \, d\theta}{dt} \right| = \text{constante}$

B.2. La norme du vecteur vitesse est proportionnelle au rayon de l'orbite.

B.3. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m R \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\theta - m R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}_r$$

= somme des forces, ici force centrale

d'où : $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ et $-m R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{GMm}{R^2}$

M masse de la Terre : $\frac{d\theta}{dt} = \text{constante} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$ (troisième loi de Kepler)

B.4. Une orbite circulaire est un cercle dont le centre est le centre de la Terre ; elle sera à latitude constante si elle est située dans le plan équatorial (latitude 0).

B.5. Tableau numérique

Les applications numériques reposent sur une bonne utilisation de la troisième loi de Kepler ; on introduit :

$$g_0 = \frac{GM}{R_T^2} = 10 \text{ ms}^{-2}$$

$$\text{d'où : } \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = g_0 \frac{R_T^2}{4\pi^2} \quad \text{et} \quad R = R_T + h_{\text{altitude}}$$

Calcul de vitesse :

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \left(g_0 \frac{R_T^2}{R} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(10 \times \frac{6,4^2 \times 10^{12}}{Rm} \right) = \text{valeur en ms}^{-1}$$

$$\text{GPS : } v = \left(409,6 \times \frac{10^6}{27,4} \right)^{\frac{1}{2}} = 3,87 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{Topex : } v = \left(409,6 \times \frac{10^6}{7,736} \right)^{\frac{1}{2}} = 7,27 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$$

$$\text{Argos : } v_1 = \left(409,6 \times \frac{10^6}{7,23} \right)^{\frac{1}{2}} = 7,53 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$$

$$v_2 = \left(409,6 \times \frac{10^6}{7,27} \right)^{\frac{1}{2}} = 7,51 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$$

Calcul de période :

$$T = 2\pi \frac{R}{R_T} \sqrt{\frac{R}{g_0}} \Rightarrow \begin{cases} T_{GPS} = 44,5 \times 10^3 \text{ s} \\ T_{GPS} = 12 \text{ h } 22 \text{ min} \end{cases}$$

De même, on calcule : $T_{\text{Topex}} = 6676,6 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 51 \text{ min}$

$$T_{\text{Argos}} = 6032 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 41 \text{ min}$$

(valeur quasi identique pour les deux satellites Argos).

D'où le tableau :

	Rayon orbite	Vitesse	Période	Nombre d'orbites par jour
GPS	27 400 km	3,87 km.s ⁻¹	12 h 22 min	1,94
Topex	7 736 km	7,27 km.s ⁻¹	1 h 51 min	12,9
Argos	7 230 km et 7 270 km	7,53 km.s ⁻¹ et 7,51 km.s ⁻¹	1 h 41 min	14,3

B.6. Quelques questions propres au système GPS

- a. La distance d'un point par rapport à trois satellites permet de tracer trois cercles dont l'intersection est le point cherché. De manière générale, on appelle triangulation l'ensemble des opérations géodésiques consistant à diviser un terrain en triangles à partir desquels on établit des mesures.

Exemples de triangulation antérieurs à l'existence des satellites artificiels :

- méthode imaginée en 1615 aux Pays-Bas par Willebrord Snell Van Royen et appliquée par lui au calcul de la longueur d'un arc de méridien : la règle sert à mesurer les côtés d'un triangle, le théodolite sert à mesurer les angles ; le sextant sert aussi à mesurer les angles ;
- méthode utilisée à la Révolution pour construire l'étalon «mètre» $\left(10^{-7} \times \frac{\text{méridien terrestre}}{4}\right)$.

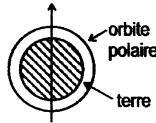
- b. Un aller-retour de signal électromagnétique entre le sol et un satellite GPS parcourt plus de quarante mille kilomètres, ce qui, à la vitesse de la lumière, nécessite quelques dixièmes de seconde :

$$50 \text{ km/h} \rightarrow 13,9 \text{ m/s}$$

La précision pourrait donc être de quelques mètres. Depuis mai 2000, le GPS civil est aussi précis que le GPS militaire ; la précision des horloges joue aussi un rôle important.

B.7. Quelques questions propres au système Argos

- a. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$ décalage par augmentation de la longueur d'onde apparente si le satellite s'éloigne de la balise.
 c : vitesse de la lumière pour un signal radar. On prendrait c vitesse du son pour un signal acoustique.



- b. Orbite polaire : Orbite contenant l'axe des pôles.

Une orbite polaire circulaire est donc concentrique des méridiens.

Orbite héliosynchrone : Tout en restant polaire, l'orbite peut tourner autour de cet axe polaire de manière à rester toujours positionnée de la même manière par rapport au Soleil, quand la Terre et son centre O tournent autour du Soleil.

- c. Un satellite Argos a une période de 1 h 41 min. En une période, la Terre a tourné sur elle-même de :

$$2\pi \times \frac{R_T}{T_T} \times T_{Argos} = 2806 \text{ km}$$

Dans le même temps, la Terre a tourné par rapport au Soleil de l'angle :

$$\frac{2\pi}{365 \times 24 \times 3,6} \times 6,032 \text{ radians}$$

ce qui joue peu sur une période du satellite, par rapport aux 2806 km précédents.

B.8. Quelques questions propres au satellite Topex-Poséidon

a. Orbite inclinée à 66° pour mieux couvrir les grandes surfaces océaniques (environ 90 % des surfaces océaniques sont balayées par Topex-Poséidon).

b. Une période de la rotation de la Terre sur elle-même contient p périodes du satellite :

$$p \approx \frac{24 \times 3600}{6676} \approx 12,94$$

$\frac{1}{10}$ de période de Topex correspond à un déplacement, sur l'équateur, de :

$$\frac{2\pi \times 6400}{24 \times 3600} \times 667,6 \approx 311 \text{ km}$$

En prenant une durée dix fois plus grande que p , l'écart se réduit d'un facteur 10 sur la distance :

10 jours → 129 révolutions

Les données ne permettant qu'un raisonnement sommaire, la réponse attendue est :

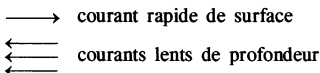
quelques jours
(réalité : 9,9156 jours) à un kilomètre près

C. Mise en évidence des courants de profondeur

Le rapport CFC 11 / CFC 12 augmente (pollution due à l'activité humaine) au fil des ans. Les eaux de taux plus faible proviennent donc de courants antérieurs de surface.

D'après la figure 15, on trouve aujourd'hui des valeurs inférieures à 0,6, c'est-à-dire correspondant à des taux datant de cinquante ans en arrière.

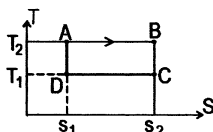
Les eaux de surface vont assez rapidement d'Ouest en Est ; le courant de retour Est-Ouest, en profondeur est beaucoup plus lent (donc de section droite plus grande, par conservation de la masse).



III - LA MACHINE ATMOSPHÈRE

A. Le cyclone comme machine de Carnot géante

A.1. Diagramme entropique :



Ici sens moteur (voir § A.2.).

Ce diagramme ne dépend pas de l'équation d'état du corps. Par contre, le cycle de Carnot, en coordonnées de Clapeyron, dépend de l'équation d'état.

A.2. Cycle de Carnot moteur :

$$W < 0 \Rightarrow Q > 0 \Rightarrow T_2 (s_2 - s_1) + T_1 (s_1 - s_2) > 0$$

$$(T_2 - T_1) (s_2 - s_1) > 0$$

ce qui est bien le cas lorsque le cycle est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.

Rendement :
$$\rho = \frac{|W|}{|Q_2|} = -\frac{W}{Q_2}$$

Q_2 chaleur échangée avec la source chaude ; les deux principes s'écrivent, pour un cycle de Carnot réversible :

$$\begin{cases} \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = 0 & \text{d'où : } \rho = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \\ W + Q_1 + Q_2 = 0 & \text{où les } T_i \text{ sont en kelvins} \end{cases}$$

Application Numérique :

$$\rho = 1 - \frac{273 - 60}{273 + 28} = \frac{88}{301} = 0,29$$

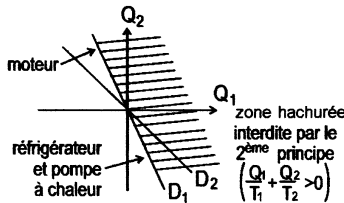
A.3. En pratique, un moteur de Carnot a une masse importante (anciennes machines à vapeur, centrales thermiques), ce qui pour une énergie cinétique donnée $\frac{1}{2}mv^2$, limite la vitesse.

Pour gagner en vitesse, il faut diminuer la masse, d'où des moteurs plus légers, bien que de rendement théorique moindre que le moteur de Carnot.

A.4. D'après les considérations précédentes, un cycle de Carnot récepteur, parcouru en sens inverse du sens moteur, est parcouru en sens inverse des aiguilles d'une montre.

Comme pompe à chaleur, efficacité = $\frac{|Q_2|}{|W|}$ ou ici $W > 0$, $Q_2 < 0$.

NB : On peut utiliser le diagramme de Raveau :



$$D_1 : \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

$$D_2 : Q_1 + Q_2 = 0$$

Efficacité pompe à chaleur : $e = \frac{|Q_2|}{|W|} = -\frac{Q_2}{W}$ valeur exactement inverse du rendement du moteur de Carnot.

Application Numérique :
$$e = \frac{301}{88} = 3,42$$

Cela peut donc constituer un moyen de chauffage avantageux (mais l'installation est assez onéreuse, d'où des compromis à chercher entre coût d'installation et gains d'utilisation).

B. Circulation des courants atmosphériques

$$\text{B.1.} \quad m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{R} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

réaction compensant le poids.

B.2. En régime de vitesse constante, dans le plan horizontal :

$$\vec{O} = \vec{F} - (2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v})_{\text{projeté}}$$

sur la base de projection $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$:

$$\vec{\Omega} = \Omega \cos \lambda \vec{u}_1 + \Omega \sin \lambda \vec{u}_2$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{u}_1 + \frac{dz}{dt} \vec{u}_3$$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \wedge \vec{v} &= -\Omega \cos \lambda \frac{dz}{dt} \vec{u}_2 - \Omega \sin \lambda \frac{dx}{dt} \vec{u}_3 \\ &+ \Omega \sin \lambda \frac{dz}{dt} \vec{u}_1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où : sur } u_1 \quad O = -2m\Omega \sin \lambda \frac{dz}{dt}$$

$$\text{sur } u_3 \quad O = 2m\Omega \sin \lambda \frac{dx}{dt} + F_3$$

d'où $\frac{dz}{dt} = 0$, pas de déplacement parallèle à F_3

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{F_3}{2m\Omega \sin \lambda} \text{ déplacement perpendiculaire à } F_3, \text{ sin } \lambda > 0 \text{ dans l'hémisphère}$$

Nord.

Soit $F_3 > 0$, donc orienté d'Ouest en Est ; $\frac{dx}{dt}$ est alors négatif si $\sin \lambda > 0$ (hémisphère Nord), positif si $\sin \lambda < 0$ (hémisphère Sud), c'est-à-dire orienté :

- du pôle Nord vers l'Équateur dans l'hémisphère Nord ;
- du pôle Sud vers l'Équateur dans l'hémisphère Sud.

B.3. Un axe anticyclone - cyclone correspond à un gradient de pression, donc à une force dirigée de l'anticyclone vers le cyclone, d'où vents venant du Nord si axe anticyclone-cyclone orienté d'Ouest en Est (cf. § B.2.).

B.4. Vent soufflant d'Ouest en Est ; cela crée une force d'Ouest en Est sur l'eau de surface (force F_3 subie par l'eau) d'où, dans le cadre du modèle précédent, une vitesse des eaux de surface vers le Sud, ce qui entraîne une remontée d'eau froide vers la côte d'Agde.

Ce phénomène dit d'«upwelling» existe aussi sur la côte Ouest d'Amérique du Sud, où il favorise la remontée des poissons.

Agrégation de sciences physiques

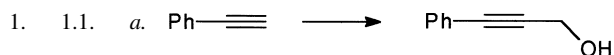
Concours externe

OPTION CHIMIE

Problème de chimie - Session : 2000

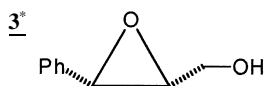
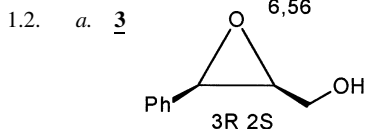
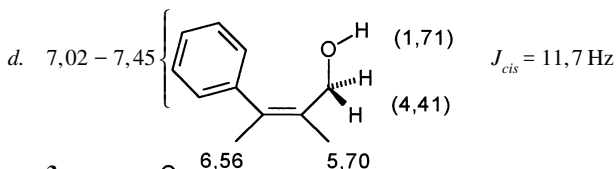
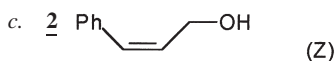
LE TAXOL

Première partie : Synthèse de la chaîne latérale



Buli / THF sur $\text{Ph}-\text{C}\equiv\text{C}$ puis add. sur $\text{H}_2\text{C}=\text{O}$.

b. Lindlar : $\text{Pd}/\text{CaCO}_3/\text{Pb}(\text{OAc})_2$ Cinq étapes / cata hétérogène

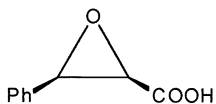
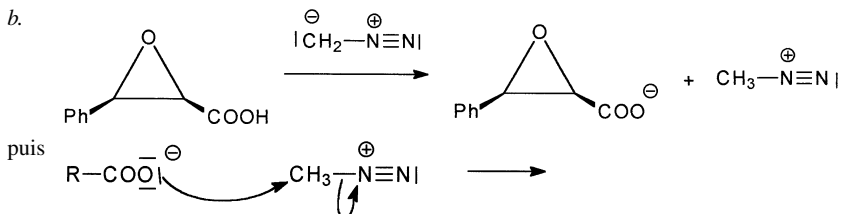


b.
$$ee = \frac{[3] - [3^*]}{[3] + [3^*]} = 0,78 \rightarrow [3] = 89\%$$

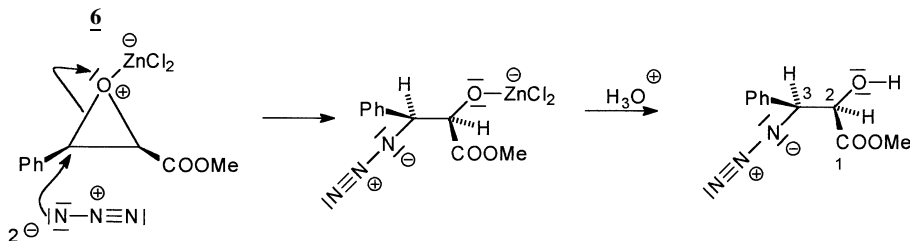
$$\text{Rdt } \underline{3} = 0,89 \times 0,63 = 0,56$$

c. « attaque » / face $R_e \rightarrow \underline{3}$

avec (-) tartrate $\underline{3^*}$

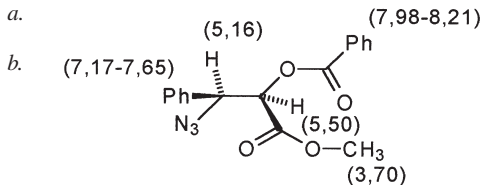
2. 2.1. 42.2. a. $RCOOH + CH_2N_2 \rightarrow RCOOCH_3 + N_2$ 

3. 3.1. ♦ $ZnCl_2$ acide de Lewis = assistant électrophile.
 ♦ Ouverture du cycle, régiosélective / C benzylique :

3.2. $\bar{\nu}_{OH}$ (3450 cm^{-1}) $\bar{\nu}_{(N \equiv N)}$ (2100) $\bar{\nu}_{(>O)}$ (1735)3.3. $M_6 = 221$ ($C_{10}H_{21}N_3O_3$) $221 - 179 = 42 \text{ g.mol}^{-1}$ (= azide N_3)179 \equiv pic de l'ion $M(-N_3)^{\oplus}$

3.4. (2R, 3S)-3-azido-2-hydroxy-3-phénylpropanoate de méthyle.

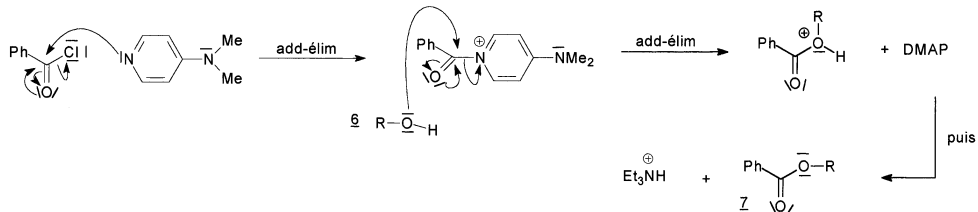
4. 4.1. a.



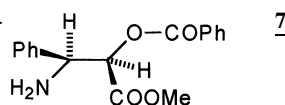
c. Et_3N basse faible inucléophile

DMAP meilleur nucléophile (doublet dégagé + effet (+ M) de Me_2N^-).

DMAP joue le rôle de catalyseur nucléophile / réaction d'estérification (le carbone du carboxyle devient plus électrophile).

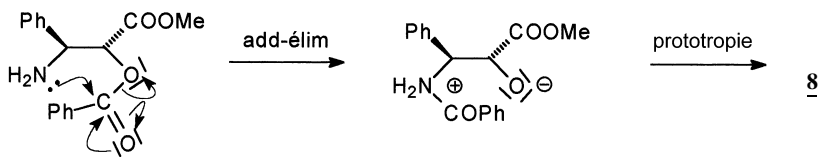


4.2. a. Hydrogénolyse de $-N_3$ en $-NH_2$ →

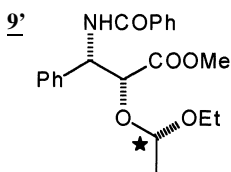
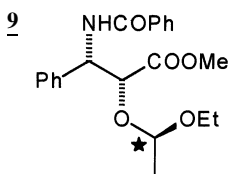


b.

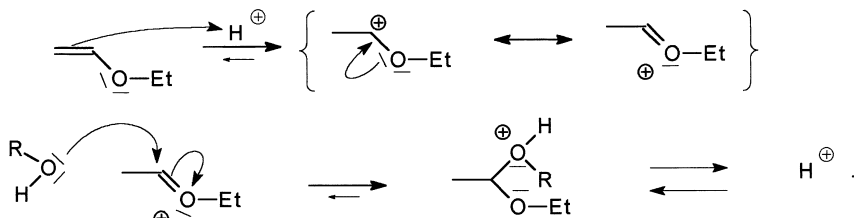
c. N-benzoylation intramoléculaire (pour 7 → 8)



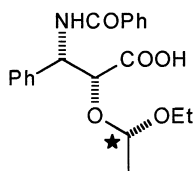
5. 5.1.



En notant **8** (ROH)



5.2. a. **10**



♦ Rendement en considérant le rendement de 63 % pour **3** = 28,7 %.

$$\rightarrow \text{rendement moyen par étape} \left(\frac{28,7}{100} \right)^{1/9} = \underline{87\%}$$

♦ Rendement en considérant le ee de 78 % % de [3] = 89 % $\text{Rdt} = 0,89 \times 28,7 \approx 25,5\%$

$$\rightarrow \text{rendement moyen par étape} (0,255)^{1/9} \approx \underline{86\%}$$

b. Manque la correction

Deuxième partie : Synthèse du Taxol

1. 1.1. Protection (position 7) : $\text{ClSiEt}_3 / \text{Pyridine} \rightarrow ()-\text{OSiEt}_3$

1.2. Protection (position 10) : / pyridine $\rightarrow ()-\text{OAc}$

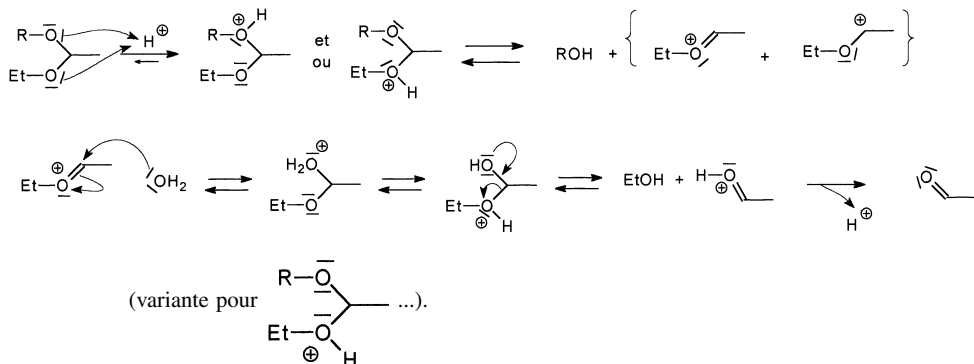
2. 2.1. Déprotection :

- hydrolyse à froid (HCl dilué aq, $\sim 0^\circ\text{C}$) / milieu hydroalcoolique ;
- milieu fluorure convient aussi.

2.2. a.

b. Pour esters $-\text{OAc}$ et $-\text{OBZ}$: procéder à chaud ou faire une saponification (milieu basique).

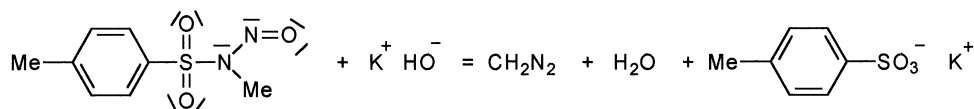
2.3. On note l'acétol dissymétrique :



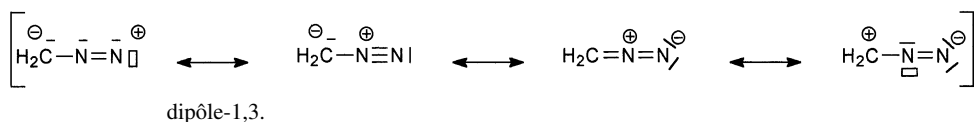
EXEMPLES DE SYNTHÈSE D'α-AMINOACIDES CYCLIQUES NATURELS

1. Synthèse de l'acide 1-aminocyclopropanecarboxylique (ACC) 3

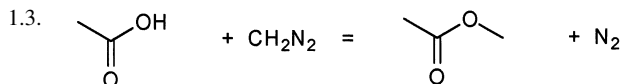
1. 1.1.



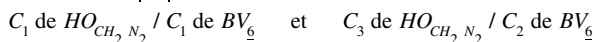
1.2. a.

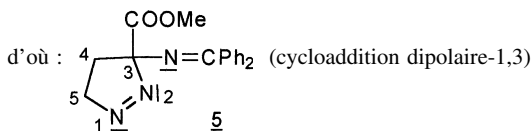


b. Gaz toxique explosif.

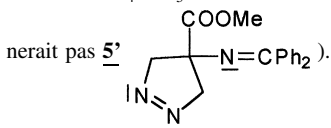


1.4. $BV_6 - HO_{CH_2N_2} < BV_{CH_2N_2} - HO_6$, d'où l'interaction la plus stabilisante $BV_6 - HO_{CH_2N_2}$. Les valeurs les plus élevées des $|C_i|$ donnent :





- 1.5. a. Les 4 H de C_4 et C_5 ne sont pas magnétiquement équivalents, d'où 4 ddd (ce que ne donnerait pas $\underline{5'}$).

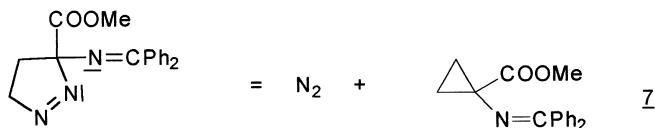


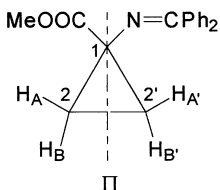
- b. Les C quaternaires donnent des signaux moins intenses : relaxation plus difficile.

$C = 0$: 170,7 ppm ; $C = N$: 168,6 ppm ; 8 signaux pour les carbones des cycles aromatiques (C quaternaire ; $2 C_{ortho}$; $2 C_{para}$ \Rightarrow 4 signaux \times 2 cycles \Rightarrow 8).

C_3 : 111,5 ppm (quaternaire) ; C_5 : 78,2 ppm ; Me : 52,4 ppm ; C_4 : 30,6 ppm ; moins déblindé que ???.

- 1.6. a.

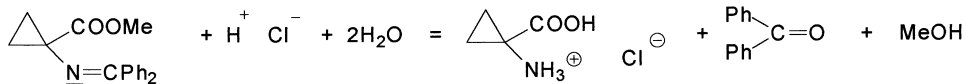


- b. 

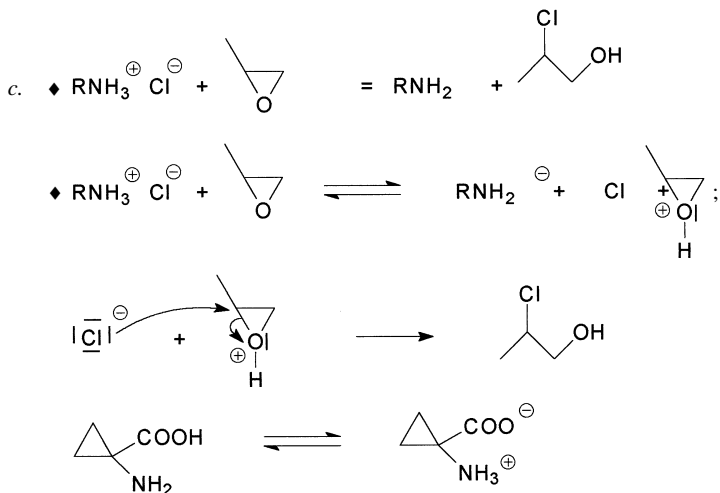
- H_A et $H_{A'}$ chimiquement équivalents
 - H_B et $H_{B'}$ chimiquement équivalents
- } plan de symétrie π
- $J_{AB} = J_{A'B'}$; $J_{AB'} = J_{A'B}$; $J_{AB'} \neq J_{A'B}$ donc H_A et $H_{A'}$ non magnétiquement équivalents ; idem pour H_B et $H_{B'}$.
- D'où le système $AA'BB'$.

- c. $C = 0$: 174,3 ppm ; $C = N$: 172,9 ppm ; 8 signaux pour C aromatiques ; Me : 51,9 ppm ; C_1 : 45,3 ppm ; C_2 et C_3 : 20,4 ppm, moins déblindés que C_1 .

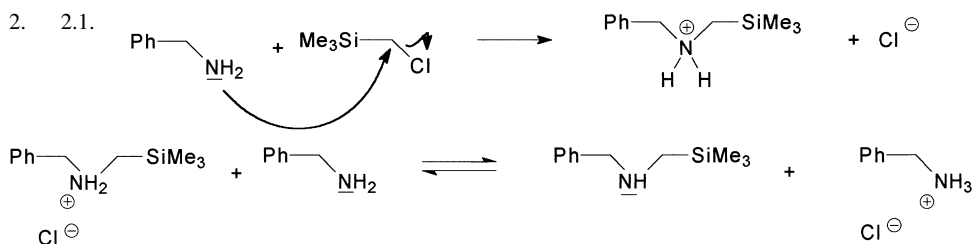
1.7. a. Déprotection de $-COOMe$ en $-COOH$ et de $-N=CPh_2$ en $-NH_3^+ Cl^-$.



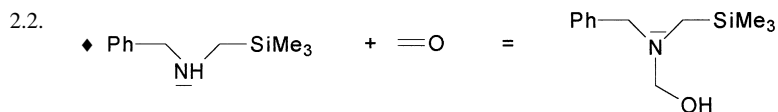
b. $Ph_2C=O$, éliminé par extraction à l'éther.

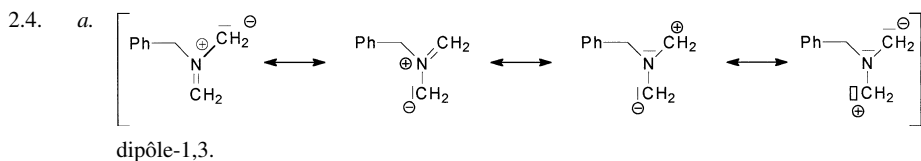
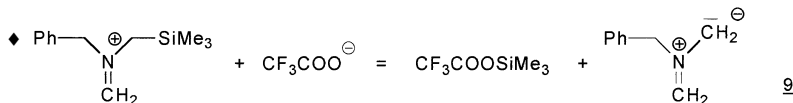
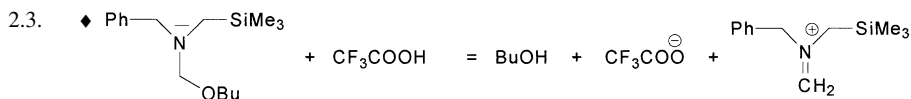
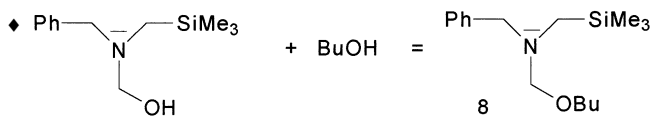


2. Synthèse de l'acide 3-amino-3-pyrrolidinecarboxylique 4



d'où les deux équivalents de $PhCH_2NH_2$.





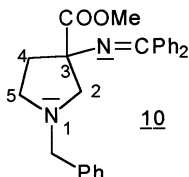
b. $BV_6 - HO_2 < BV_2 - HO_2$, d'où l'interaction la plus stabilisante $BV_6 - HO_2$. Les valeurs les plus élevées des $|C_i|$ donnent :

$$C_1 \text{ de } HO_2 \text{ (ou } C_3) / C_1 \text{ de } BV_6$$

et :

$$C_3 \text{ de } HO_2 / C_2 \text{ de } BV_6$$

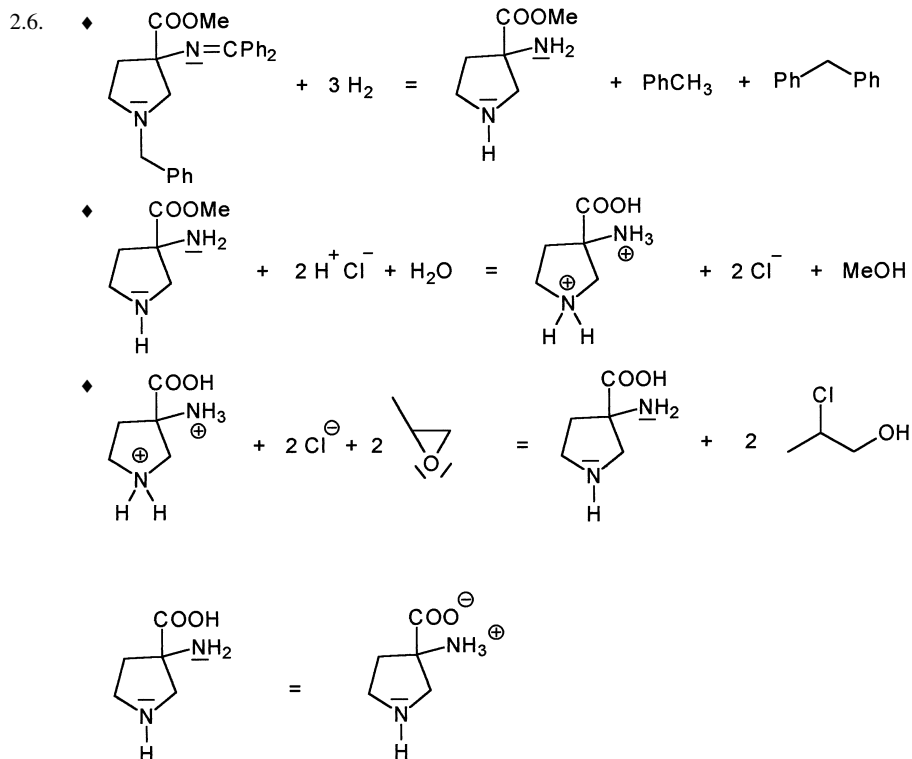
d'où :



c. En 1.4. $BV - HO = 8,45 \text{ eV}$; en 2.4. $BV - HO = 6,53 \text{ eV} < 8,45 \text{ eV}$, d'où la plus grande facilité de la seconde.

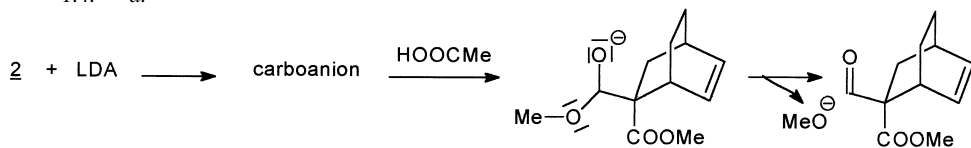
2.5 $\delta = \begin{cases} 2,54 \\ 2,20 \end{cases} : H \text{ de } C_4$; $\delta = \begin{cases} 2,78 \\ 2,66 \end{cases} : H \text{ de } C_3$, plus déblindé que H de C_4 (4 H non équivalents, d'où ddd).

$\delta = 3,05$ et $3,10 : H$ de C_1 ; $\delta = 3,62$ et $3,68 : H$ de CH_2 benzylique (plus déblindé que H de C_2) ; $\delta = 3,29 \text{ ppm} : H$ de Me ; $\delta = 7,03 - 7,59$: les 15 H des trois Ph.



UNE SYNTHÈSE TOTALE DE L'ACIDE LYSERGIQUE

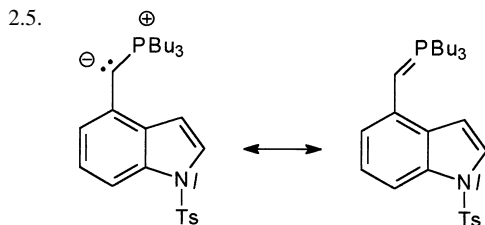
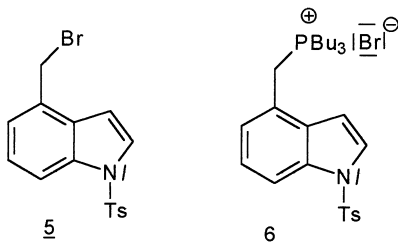
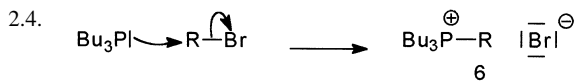
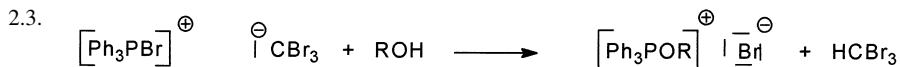
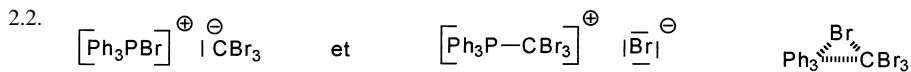
- I. 1.1. Bicyclo [2.2.1] hept-5-ényl-2-carboxylate de méthyle endo.
- 1.2. Cycloaddition [4 + 2].
- 1.3. $pK \text{ HNiPr}_2 / \text{I}^- \text{ iPr}_2 \sim 35$ base comme $\text{Bu}^\ominus, \text{H}^\ominus / \text{THF} + \text{amine}$.
- 1.4. a.



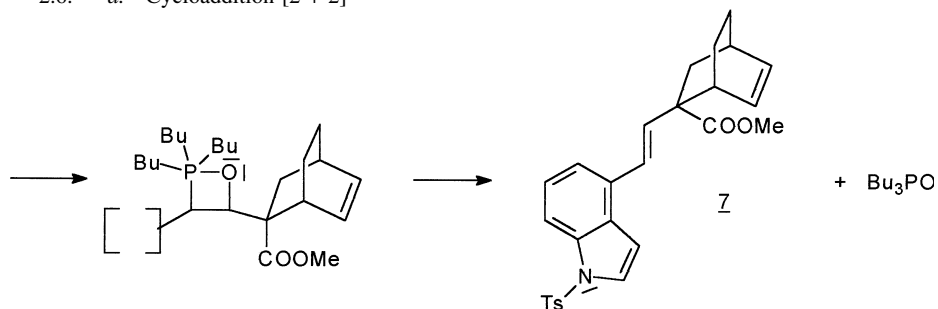
b. Électrophile en exo + interactions secondaires des O.F.

c. $\text{HCOOEt} \rightarrow$ transestérfication + β -élimination sur HCOOEt .

II. 2.1. $\text{PX}_3 + \text{RMgX}$.



2.6. a. Cycloaddition [2 + 2]

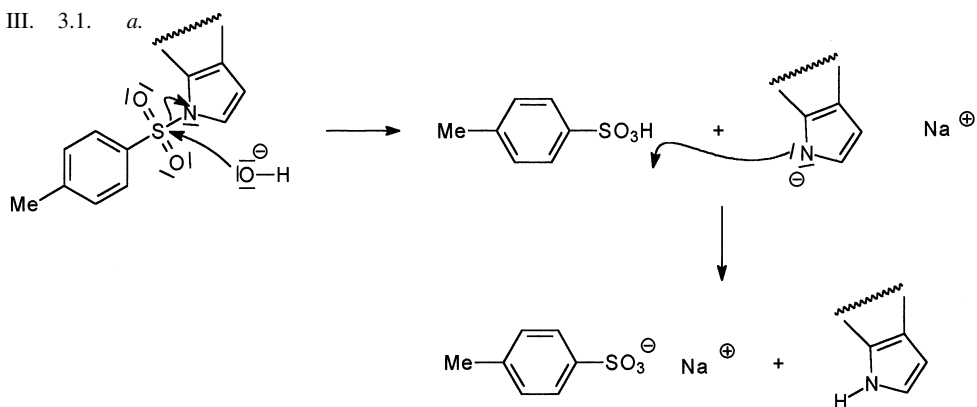


Configuration (E) / contrôle cinétique

% (E) / % (Z) dépend des proportions d'oxaphosphétanes « cis » ou « trans » donc intervention du paramètre encombrement stérique entr'autre.

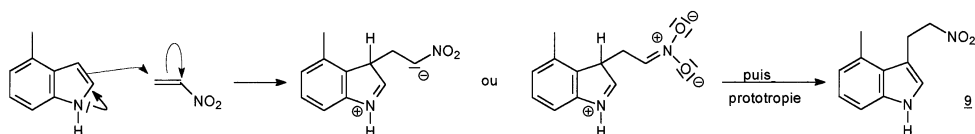
b. Sel de $\text{Li}^{\oplus} \rightarrow \text{RO}^{\ominus} \text{Li}^{\oplus}$ qui défavorise la cyclisation.

III. 3.1. a.

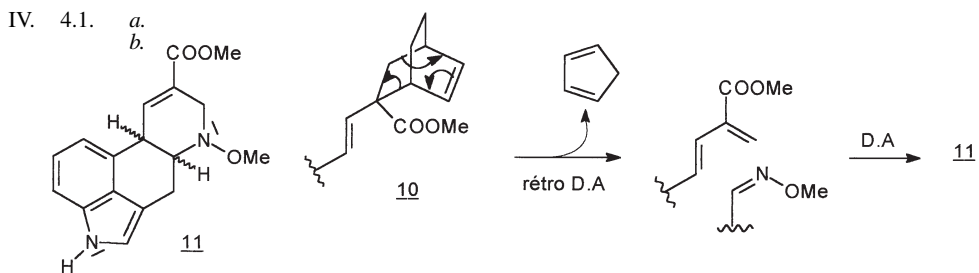
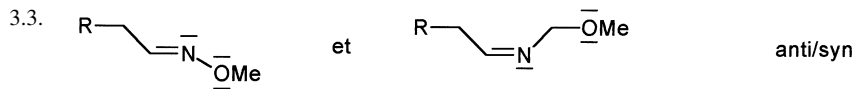


b. Autre fonction transformable ()-COOMe mais il faut une hydrolyse basique.

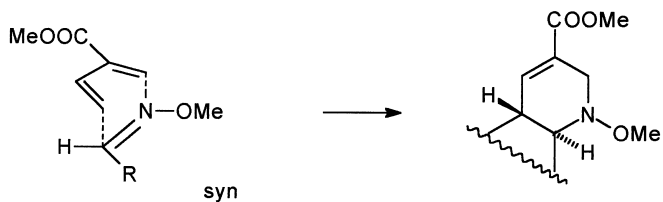
3.2. a. Assistance de l'azote indolique.



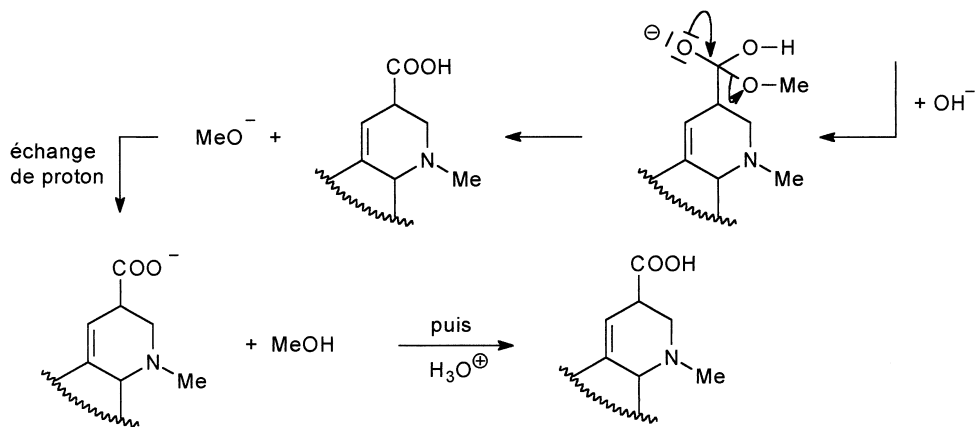
b. Mécanisme concerté / contrôle cinétique
théorie des O.F. (HO indole + BV \rightleftharpoons NO_2 + coefficient).



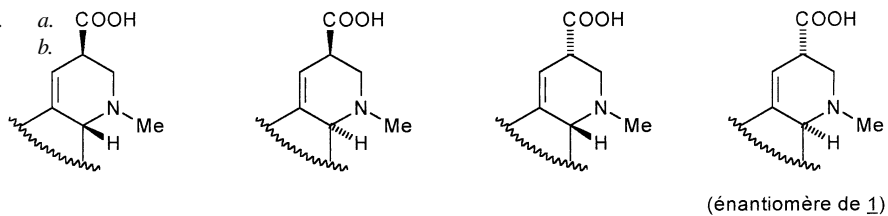
Obtention de deux diastéréoisomères.



4.2. Déconjugaison + saponification (ou l'inverse).



4.3.



Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉES

Composition de physique - Session : 2000

PARTIE A

A.1.1

$$\mathbf{F}_{12} = - G m_1 m_2 \rho / \rho^3 = - \mathbf{F}_{21}$$

A.1.2

$$\mathbf{V}_{12} = - G m_1 m_2 / \rho$$

$\mathbf{F}_{12} = - \text{grad } V_{12}$, ce qui définit V_{12} et de plus, on choisit $V_\infty = 0$.

A.1.3

L'élément de masse $\mu(\mathbf{r}) d\tau$ en M crée en A le champ gravitationnel

$$d(\Gamma) = - G \mathbf{MA} \mu(\mathbf{r}) d\tau / \text{MA}^3 = - G (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \mu(\mathbf{r}) d\tau / \|\mathbf{R} - \mathbf{r}\|^3$$

La répartition continue de masse du domaine P crée donc :

$$\Gamma(\mathbf{R}) = - \int_P G (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \mu(\mathbf{r}) d\tau / \|\mathbf{R} - \mathbf{r}\|^3$$

A.1.4

Un potentiel créé en A par l'élément de masse $\mu(\mathbf{r}) d\tau$ en M a pour expression

$$dU = - G \mu(\mathbf{r}) d\tau / \text{MA}$$

puisque $d(\Gamma) = - \text{grad } (dU)$

On en déduit

$$U(\mathbf{R}) = - \int_P G \mu(\mathbf{r}) d\tau / \|\mathbf{R} - \mathbf{r}\|$$

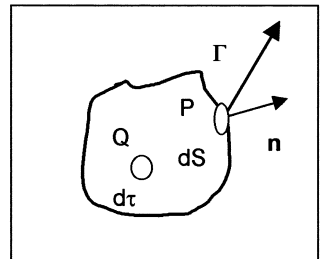
Ainsi, $\Gamma(\mathbf{R}) = - \text{grad } U(\mathbf{R})$

A.1.5

L'interaction gravitationnelle (toujours attractive) est analogue à l'interaction coulombienne si on substitue à la charge électrique q la masse et à $\epsilon_0 1/(-4\pi G)$. Le théorème de Gauss usuellement énoncé pour le champ électrostatique devient donc :

"Le flux du champ gravitationnel sortant d'une surface fermée (S) est égal au produit par $(-4\pi G)$ de la masse totale contenue à l'intérieur du volume (V) dont (S) est la frontière" :

$$\iint_S \Gamma(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} dS = (-4\pi G) \iiint_V \mu(\mathbf{Q}) d\tau$$



La formulation locale est la suivante :

$$\boxed{\operatorname{div}_{\mathbf{R}} \Gamma = (-4\pi G) \mu(\mathbf{R})}$$

A.1.6

D'après ce qui précède,

$$\operatorname{div}_{\mathbf{R}} \Gamma = (-4\pi G) \mu(\mathbf{R}) = \operatorname{div}_{\mathbf{R}}(-\mathbf{grad} U(\mathbf{R})) = -\Delta U(\mathbf{R})$$

On obtient ainsi l'équation de Poisson

$$\boxed{\Delta U(\mathbf{R}) - 4\pi G \mu(\mathbf{R}) = 0}$$

qui devient l'équation de Laplace en l'absence de masse (à l'extérieur de P) :

$$\boxed{\Delta U(\mathbf{R}) = 0}$$

A.2.1

Tout plan contenant A et le centre de la planète est plan de symétrie pour la distribution de masse et donc contient Γ ; le champ gravitationnel appartient donc à l'intersection de ces plans : il est radial.

$$\Gamma(\mathbf{R}) = \Gamma(R) \mathbf{u}_r$$

Plus précisément, sur une sphère de rayon R, tous les points sont équivalents, donc le champ gravitationnel y a même norme :

$$\boxed{\Gamma(\mathbf{R}) = \Gamma(R) \mathbf{u}_r}$$

A.2.2

Utilisons le théorème de Gauss appliqué à la sphère de centre O et rayon R ; compte tenu du résultat précédent,

$$4\pi R^2 \Gamma(R) = -4\pi G M_P$$

On en déduit :

$$\boxed{\Gamma(R) = -G M_P \mathbf{u}_r / R^2} \quad (R \geq R_P)$$

Comme $\Gamma(\mathbf{R}) = -\mathbf{grad} U(\mathbf{R}) = -(dU / dR) \mathbf{u}_r$

$$dU = G M_P dR / R^2$$

$$U - U_\infty = G M_P \int_\infty^R dR / R^2 = -G M_P / R$$

En choisissant $U_\infty = 0$,

$$\boxed{U(\mathbf{R}) = -G M_P / R}$$

A.2.3

Exprimons la masse totale de la planète :

$$M_P = \int_0^{R_P} \mu_0(1-r/R_P) \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi\mu_0 \left[r^3/3 - r^4/4R_P \right] \Big|_0^{R_P} = \pi\mu_0 R_P^3 / 3$$

$$\boxed{\mu_0 = 3 M_P / \pi R_P^3}$$

Le théorème de Gauss permet encore de calculer Γ , pour $R < R_P$:

$$4\pi R^2 \Gamma(R) = -4\pi G \int_0^R 4\pi r^2 \mu(r) dr = -(12 M_P / R_P^3) \int_0^R (1-r/R_P) \cdot r^2 dr$$

$$\boxed{\Gamma(R) = (G M_P / R_P^3) (3 R^2 / R_P - 4 R) \mathbf{u}_r} \quad (R \leq R_P)$$

Pour exprimer $U(R)$, ($R \leq R_P$), il faut d'abord calculer $U(R_P)$ grâce à l'expression obtenue dans la question précédente, puisque $U(R)$ est une fonction continue :

$$U(R_P) = - G M_P / R_P$$

On utilise ensuite

$$dU = - \Gamma(R) dR = - (G M_P / R_P^3) (3 R^2 / R_P - 4 R) dR$$

Et par intégration :

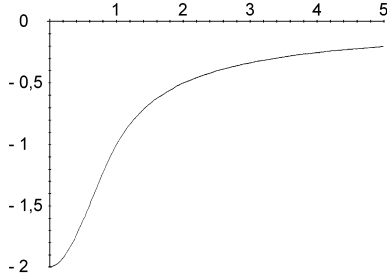
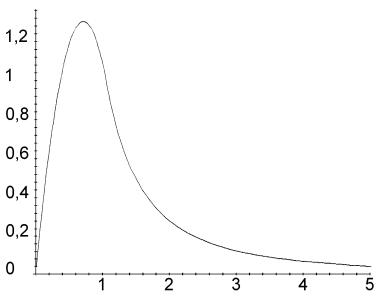
$$U(R) - U(R_P) = - (G M_P / R_P^3) \int_{R_P}^R (3 R^2 / R_P - 4 R) dR$$

On obtient après calcul :

$$U(R) = - (2 G M_P / R_P) [1 + (R/R_P)^2 (R/2R_P - 1)]$$

A.2.4

L'allure des graphes de Γ et U est donnée ci-dessous, en coordonnées réduites ($x = R/R_P$ et $GM_P = 1$) , pour les régions intérieure et extérieure à la planète.



A.3.1

On obtient $1/MA$ grâce à :

$$MA = OA - OM = R - r \quad \text{d'où} \quad MA^2 = R^2 + r^2 - 2R.r = R^2(1 + (r/R)^2 - 2 R.r / R^2)$$

En prenant le développement limité à l'ordre 2 en (r/R) de $(MA^2)^{-1/2}$:

$$1/ MA \approx (1/R) [1 + R.r / R^2 - 1/2(r/R)^2 + 3/2 (R.r/R^2)^2]$$

A.3.2.1

Utilisons l'expression obtenue en A.1.4 :

$$U(R) = - \int_P G \mu(r) d\tau / MA = - G/R \int_P [1 + R.r / R^2 - 1/2(r/R)^2 + 3/2 (R.r/R^2)^2] \mu(r) d\tau$$

Par identification,

$$K_1 = \int_P \mu(r) d\tau = M_P$$

A.3.2.2

De même,

$$K_1 = \int_P \mu(r) R.r / R d\tau = \mathbf{p.e}_R \quad \text{avec}$$

$$\mathbf{p} = \int_P \mathbf{r} . \mu(r) d\tau$$

\mathbf{p} est le moment dipolaire de la planète.

Si O coïncide avec le centre de masse C, par définition de C,

$$\int_P \mathbf{CM} \cdot \mu(\mathbf{CM}) \, d\tau = \mathbf{CC} = \mathbf{0} = \mathbf{p}$$

Alors, $K_2 = 0$

A.3.2.3

Enfin,

$$K_3 = \int_P [-r^2 + 3(\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{r})^2] \cdot \mu(\mathbf{r}) \, d\tau$$

A.3.3

Comme $\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} = R \cdot r \cdot \cos\theta$,

$$K_2 = \int_P r \cos\theta \cdot \mu(\mathbf{r}) \, d\tau \quad K_3 = \int_P r^2 [-1 + 3\cos^2\theta] \cdot \mu(\mathbf{r}) \, d\tau$$

A.3.4

Le moment d'inertie par rapport à l'axe Ox a pour expression :

$$I_{Ox} = \int_P (y^2 + z^2) \mu(\mathbf{r}) \, d\tau$$

Les moments d'inertie par rapport aux autres axes ont des expressions analogues. D'autre part, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$. Ainsi,

$$K_3 = \int_P 2r^2 \mu(\mathbf{r}) \, d\tau - \int_P 3r^2 \sin^2\theta \mu(\mathbf{r}) \, d\tau$$

$$K_3 = I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz} - 3K$$

Si la planète est sphérique, $K_3 = 0$, puisque $U(R)$ est en $1/R$, et $I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz} = I$, donc

$$K = I = 2/5 M_P R_P^2$$

Pour une planète "presque sphérique", K_3 est faible.

A.3.5

K_2 correspond au terme dipolaire, K_3 au terme quadrupolaire.

A.3.6

K_1 et $1/R$ ne dépendent pas de ϕ et λ et K_2 non plus si O coïncide avec C : ainsi seul K_3 peut-il varier avec ϕ et λ .

A.4

Pour un satellite, la condition $R \gg R_P$ n'est en général pas vérifiée. Ainsi un développement en série à un ordre aussi élevé que nécessaire est-il mieux adapté.

PARTIE B ATMOSPHERE TERRESTRE

B.1.1

Les différentes composantes gazeuses ne doivent pas interagir entre elles.

B.1.2

La forme classique de l'équation d'état des gaz parfaits, faisant intervenir le nombre n' de moles est :

$$pV = n'RT$$

Si $n(h)$ désigne la concentration moléculaire volumique,

$$n' = n(h) V / N \quad \text{On en déduit :}$$

$$p(h) = n(h) k_B T$$

B.1.3

L'équation locale de la statique des fluides peut s'exprimer par

$$\mathbf{g} = (\mathbf{grad} p) / \rho = (\mathbf{grad} p) / m n(h)$$

Comme la seule variable d'espace envisagée est h et l'axe orienté vers le haut :

$$dp(h) / dh = - g_0 m n(h) = - (mg_0 / k_B T) p(h)$$

$$dn(h) / n(h) = - (mg_0 / k_B T) dh$$

B.1.4

Par intégration, compte tenu de la condition $n(h_0) = n_0$:

$$n = n_0 \exp[- mg_0(h - h_0)/k_B T]$$

B.1.5

L'expression montre que la longueur L est

$$L = k_B T / mg_0$$

$$\text{A.N. : } L_{N_2} = 42 \text{ km} ; L_{H_2} = 590 \text{ km}$$

B.1.6

La composition de l'atmosphère varie avec l'altitude : la concentration en diazote diminue beaucoup plus vite que celle de dihydrogène ; les hautes couches sont plus riches en gaz de faible masse volumique.

B.1.7

Comme $\rho = m n(h) = mn_0 \exp[-(h - h_0)/L(T)]$

$$\ln(\rho) = A - (h - h_0)/L(T)$$

Si on admet n_0 constant et $h > h_0$, quand T décroît, $L(T)$ fait de même et donc $\ln(\rho)$ aussi : c'est bien ce que montrent les courbes.

B.1.8

Avec les notations de la partie A,

$$\Gamma(R) = \|\Gamma(\mathbf{R})\| = GM_P/R^2 = GM_P/(R_P+h)^2$$

$$g_0 = GM_T/(R_T+h_0)^2 \quad (P = T)$$

Ainsi,

$$\Gamma(h) = g_0 [(R_T+h_0)/(R_T+h)]^2$$

B.1.9

L'équation différentielle du B.1.3 devient :

$$dn(h) / n(h) = - (mg_0[(R_T+h_0)/(R_T+h)]^2 / k_B T) dh$$

Par intégration, on obtient :

$$n(h) = n_0 \exp[-(mg_0/k_B T) (h-h_0) (R_T+h_0) / (R_T+h)]$$

Si h et $h_0 \ll R_T$, $(R_T+h_0) / (R_T+h) \approx 1$ et on retrouve

$$n(h) = n_0 \exp[-(mg_0/k_B T) (h-h_0)] \text{ comme en B.1.4}$$

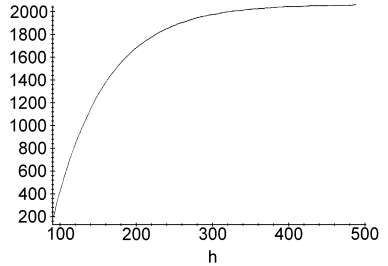
B.2.1

Le calcul numérique donne 35,6 km < 1/s < 70,8 km

B.2.2

T(h) suit une loi exponentielle décroissante vers T_{exo} avec 1/s comme longueur caractéristique

Comme 300 km > 4*70,8 km, T(h>300km) ≈ T_{exo}.



B.2.3

On utilise encore l'expression

$$\Gamma(h) = g_0 [(R_T+h_0)/(R_T+h)]^2$$

qui permet d'exprimer :

$$dn(h)/n(h) + (1+\alpha)dT/T = - (m \Gamma(h) / k_B T) dh$$

Et par intégration,

$$[n(h)/n(h_0)] [T(h)/T(h_0)]^{1+\alpha} = \exp[-F(h)] \quad \text{où}$$

$$F(h) = \int_{h_0}^h m \Gamma(z) dz / k_B T(z)$$

$$F(h) = mg_0(R_T+h_0)^2/k_B \int_{h_0}^h dz/[T(z) (R_T+z)^2]$$

Si h >> h₀, on a vu que T ≈ T_{exo} et donc dT/dh = 0 : on retrouve l'équation différentielle de la question B.1.3.

B.3.1

Les forces de Coulomb subies par les électrons et par les ions sont de même intensité, mais les masses sont très différents : la masse d'un nucléon est environ deux mille fois plus grande que celle d'un électron. L'accélération d'un ion est donc négligeable devant celle d'un électron et il en est de même pour la vitesse si les vitesses initiales sont comparables : les ions peuvent être considérés comme immobiles par rapport aux électrons.

Cherchons l'intensité du champ électrique qui permettrait d'obtenir la même action sur un électron que celle du champ gravitationnel terrestre (avec g ≈ 10 m.s⁻²) :

$$e E / 4\pi\epsilon_0 = m g \quad \text{soit} \quad E = 4\pi\epsilon_0 m g / e \approx 10^{-21} \text{ V.m}^{-1}$$

La faiblesse de cette valeur montre que l'action du champ gravitationnel est négligeable devant les actions électromagnétiques.

B.3.2

La charge électrique est due aux ions et aux électrons :

$$\rho = [n_0 - n(t,r)] e$$

Le courant électrique est dû aux seuls électrons :

$$\mathbf{j} = - n(t,r) e \mathbf{v}(t,r)$$

B.3.3

Si on considère une surface fermée quelconque (S) limitant un volume intérieur (V), le flux de charge électrique sortant pendant dt est égal à la diminution de charge intérieure :

$$\left[\int_{(S)} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS \right] dt = - d \left[\int_{(V)} \rho d\tau \right]$$

On en déduit, en utilisant la formule d'Ostrogradski

$$\int_{(S)} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{(V)} \text{div } \mathbf{j} \, d\tau = - \int_{(V)} (d\rho / dt) d\tau$$

L'équation locale de conservation de la charge est ainsi :

$$\boxed{\text{div } \mathbf{j} + d\rho/dt = 0}$$

B.3.4

Le membre de gauche représente la dérivée particulaire de la vitesse, comprenant l'accélération "locale" $\partial \mathbf{v} / \partial t$ et l'accélération "convective". Dans le membre de droite, le terme en **grad** p correspond aux forces de pression subies par l'unité de masse électronique et le dernier terme correspond à la force de Lorentz subie par la même masse.

B.3.5

Le milieu est le vide, avec charges (ρ) et courants (\mathbf{j}) :

$$\boxed{\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + 1/c^2 \partial \mathbf{E} / \partial t}$$

B.3.6

A l'équilibre, $\rho = 0$, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $p = \text{cte}$. En l'absence de champ, les équations sont bien vérifiées.

B.3.7

D'après l'énoncé,

$$p(\mathbf{t}, \mathbf{r}) = p_0 + \zeta p_1(\mathbf{t}, \mathbf{r}) = p_0 + [\partial \pi / \partial n (n_0)] (n - n_0) = p_0 + [\partial \pi / \partial n (n_0)] \zeta n_1(\mathbf{t}, \mathbf{r})$$

On en déduit

$$\boxed{p_1(\mathbf{t}, \mathbf{r}) = [\partial \pi / \partial n (n_0)] n_1(\mathbf{t}, \mathbf{r})}$$

En tenant compte du fait que n_0 est une constante, on obtient le système :

$$\boxed{\begin{aligned} \partial n_1 / \partial t + n_0 \text{div } \mathbf{v}_1 &= 0 & \partial \mathbf{v}_1 / \partial t &= - e/m_e \mathbf{E}_1 - 1/n_0 m_e \text{grad } p_1 \\ \text{div } \mathbf{E}_1 &= -e/\epsilon_0 n_1 & \text{rot } \mathbf{E}_1 &= - \partial \mathbf{B}_1 / \partial t & \text{div } \mathbf{B}_1 &= 0 & \text{rot } \mathbf{B}_1 &= - \mu_0 e n_0 \mathbf{v}_1 + 1/c^2 \partial \mathbf{E}_1 / \partial t \end{aligned}}$$

B.3.8

Lors d'une transformation isentropique d'un gaz parfait,

$$p v^\gamma = \text{cte, soit } p \cdot n^\gamma = \text{cte, ou } dp/p - \gamma dn/n = 0 \quad \text{ou encore, } dp/dn = \gamma p/n$$

D'après l'équation d'état, pour une isentropique,

$$dp/dn = (\partial \pi / \partial n)_s$$

Ainsi,

$$\partial \pi / \partial n (n_0) = \gamma p_0 / n_0 = \gamma k_B T$$

Et comme $\gamma = 3$,

$$\boxed{\partial \pi / \partial n (n_0) = 3 k_B T}$$

B.3.9

Il s'agit d'une onde plane progressive sinusoidale monochromatique polarisée rectilignement, de longueur d'onde $\lambda = 2\pi / \|\mathbf{k}\|$.

B.3.10

On sait qu'en représentation complexe, la dérivation par rapport à t se traduit, pour la formulation $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$ adoptée ici, par multiplication par $-i\omega$, tandis que la dérivation par rapport aux variables d'espace fait intervenir des multiplications par \mathbf{k} :

$$\text{div } \mathbf{A} = i \mathbf{k} \cdot \mathbf{A} \quad \text{grad } U = i \mathbf{k} U \quad \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{A}$$

L'équation de continuité permet ainsi d'obtenir :

$$\boxed{n_{10} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{10}) n_0 / \omega}$$

A partir de l'équation d'Euler, et en utilisant $p_1(t, \mathbf{r}) = [\partial \pi / \partial n(n_0)] n_1(t, \mathbf{r})$, on obtient

$$\boxed{\mathbf{v}_{10} = -(ie/m_e \omega) \mathbf{E}_{10} + (3k_B T n_{10} / m_e n_{00} \omega) \mathbf{k}}$$

Enfin, grâce aux équations de Maxwell, on trouve :

$$\boxed{\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{10} = ie n_{10} / \varepsilon_0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{10} = 0 \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_{10} = \omega \mathbf{B}_{10} \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_{10} = -(\omega/c^2) \mathbf{E}_{10} + ie n_0 \mu_0 \mathbf{v}_{10}}$$

B.3.11

D'après (3) et (2),

$$(3k_B T / m_e) \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{10}) = (3k_B T / m_e) \mathbf{k} \cdot ie n_{10} / \varepsilon_0 = (ie n_0 \omega / \varepsilon_0) [\mathbf{v}_{10} + (ie/m_e \omega) \mathbf{E}_{10}]$$

En utilisant maintenant (6) et (5), on obtient :

$$(3k_B T / m_e) \mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{10}) = (\omega^2 - e^2 n_0 / \varepsilon_0 m_e) \mathbf{E}_{10} + c^2 [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{10}) \cdot \mathbf{k} - k^2 \mathbf{E}_{10}]$$

C'est la relation proposée par l'énoncé avec

$$\boxed{\omega_p^2 = e^2 n_0 / \varepsilon_0 m_e}$$

$$\underline{\underline{A.N. \omega_p = 5,6 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}}}$$

B.3.12

Pour les ondes transverses, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{10} = 0$, d'où

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2}$$

B.3.13

On doit utiliser des ondes de pulsation $\omega > \omega_p$. Dans le cas contraire, l'onde est amortie dans l'ionosphère et ne peut se propager.

B.3.14

Pour la fréquence 400 MHz, $\omega = 8\pi \cdot 10^8$ Hz, soit $\omega \gg \omega_p$. Ainsi, $k \approx \omega/c$ et $\lambda \approx 2\pi c / \omega$, soit $\lambda \approx 0,75$ m. On a vu dans la première partie que les longueurs caractéristiques des variations des grandeurs thermodynamiques, donc de n_0 , étaient de l'ordre du kilomètre. Il est donc raisonnable de considérer n_0 comme uniforme à l'échelle de la longueur d'onde des ondes se propageant dans l'ionosphère.

B.3.15

Si $\mathbf{k} // \mathbf{E}$, $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{10}) \cdot \mathbf{k} = k^2 E_{10} \mathbf{u}$; alors,

$$\omega^2 - \omega_p^2 - k^2 c^2 + (c^2 - 3k_B T / m_e) k^2 = 0$$

Soit

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + 3k_B T k^2 / m_e}$$

Ces ondes longitudinales ne peuvent se propager dans le vide (les équations de Maxwell avec $\rho = 0$ et $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ imposent des solutions transversales), donc elles ne peuvent pas être utilisées pour des communications entre un satellite et la Terre.

PARTIE C
MOUVEMENT D'UN SATELLITE
SOUS L'INFLUENCE DU CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

C.1

La Terre est soumise aussi à l'action du Soleil ainsi qu'à celle de la Lune, voire des autres planètes. Il est difficile de donner une durée caractéristique sans fixer le niveau de précision recherché. Néanmoins, on peut affirmer qu'au delà de quelques jours l'approximation n'est plus acceptable.

C.2.1

La Terre et le satellite ne sont soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle entre eux :

$$\begin{cases} m_T d^2 \mathbf{R}_T / dt^2 = G m_T m_S \mathbf{r} / r^3 \\ m_S d^2 \mathbf{R}_S / dt^2 = - G m_T m_S \mathbf{r} / r^3 \end{cases}$$

C.2.2

Par définition du centre d'inertie, $(m_T + m_S) \mathbf{R} = m_T \mathbf{R}_T + m_S \mathbf{R}_S$.

En faisant la somme puis la différence membre à membre des équations précédentes, on obtient donc :

$$\begin{cases} d^2 \mathbf{R} / dt^2 = \mathbf{0} \\ d^2 \mathbf{r} / dt^2 = - G(m_T + m_S) \mathbf{r} / r^3 \end{cases}$$

C.2.3

L'intégration de la première équation donne :

$$d\mathbf{R} / dt = \mathbf{V}_I = \text{cte}$$

Le mouvement du centre d'inertie du système Terre-satellite est rectiligne et uniforme.

C.2.4

Le référentiel R' , nommé référentiel barycentrique, est galiléen, puisqu'il est en translation uniforme par rapport à R supposé lui-même galiléen.

En utilisant $\mathbf{v} = (d\mathbf{r} / dt)_{R'}$, $\mathbf{p}_{S/R'} = m_S \mathbf{v}$, comme $\mathbf{I}_S = m_T \mathbf{r} / (m_T + m_S)$,

$$d(\mathbf{I}_S) / dt = m_T \mathbf{v} / (m_T + m_S) \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_{S/R'} = m_S m_T \mathbf{v} / (m_T + m_S)$$

Posons

$$\mu = m_S m_T / (m_T + m_S)$$

$\mathbf{p}_{S/R'} = \mu \mathbf{v}$ est bien la quantité de mouvement d'un point matériel de masse μ et de position $\mathbf{I}_S' = \mathbf{r}$ dans R' .

Par dérivation de l'expression de $\mathbf{p}_{S/R'}$, on obtient :

$$d(\mathbf{p}_{S/R'}) / dt = \mu dv/dt = [m_S m_T / (m_T + m_S)] d^2 r / dt^2 = - [m_S m_T / (m_T + m_S)] G(m_T + m_S) \mathbf{r} / r^3$$

$$\mathbf{F} = d(\mathbf{p}_{S/R'}) / dt = - m_S m_T G \mathbf{r} / r^3$$

C'est bien l'expression d'une force centrale dans R' de centre I tel que $\mathbf{I}_S' = \mathbf{r}$.

C.3.1

Le théorème du moment cinétique en I fixe dans R' exprime que

$$d\mathbf{L} / dt = \mathbf{M}_{I,F} = \mathbf{0} \quad \text{puisque } \mathbf{F} \text{ est une force centrale.}$$

Il en résulte que $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 = \text{cte}$. Comme, par définition de \mathbf{L} , \mathbf{r} et \mathbf{v} sont dans un plan perpendiculaire à \mathbf{L} , ils restent dans un plan perpendiculaire à \mathbf{L}_0 , fixe : le mouvement est

plan.

C.3.2

Puisque $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$,

$$\mathbf{r} \bullet = r \bullet \mathbf{u}_r + r \theta \bullet \mathbf{u}_\theta \quad \text{et} \quad \mathbf{r} \bullet \bullet = (r \bullet \bullet - r \theta \bullet^2) \mathbf{u}_r + (2r \bullet \theta \bullet + r \theta \bullet \bullet) \mathbf{u}_\theta$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \mu(r \bullet \bullet - r \theta \bullet^2) = -m_S m_T G / r^2 \\ 2r \bullet \theta \bullet + r \theta \bullet \bullet = 0 \end{cases}$$

C.3.3

En multipliant par r la seconde équation,

$$2r r \bullet \theta \bullet + r^2 \theta \bullet \bullet = d/dt(r^2 \theta \bullet) = 0$$

On en déduit

$$r^2 \theta \bullet = C$$

Le moment cinétique a ainsi pour expression :

$$\mathbf{L} = r \wedge \mathbf{r} \bullet = r^2 \theta \bullet \mathbf{u}_z = C \mathbf{u}_z : \text{on retrouve le fait qu'il est constant.}$$

D'autre part, on retrouve la loi des aires : l'aire balayée pendant dt par \mathbf{r} vaut :

$$dA = 1/2 ||r \mathbf{u}_r \wedge r d\theta \bullet|| = 1/2 r^2 \theta \bullet dt = 1/2 C dt$$

La vitesse aréolaire est donc constante :

$$dA/dt = 1/2 C$$

C.4

L'équation $\mu(r \bullet \bullet - r \theta \bullet^2) = -m_S m_T G / r^2$ devient :

$$\mu(r \bullet \bullet - C^2/r^3) = -m_S m_T G / r^2$$

En multipliant par $r \bullet$ et en intégrant,

$$\mu/2(r \bullet^2 + C^2/r^2) - m_S m_T G / r = \text{cte}$$

Or,

$$\mu/2(r \bullet^2 + C^2/r^2) = \mu/2(r \bullet^2 + r^2 \theta \bullet^2) = 1/2 \mu v^2 = E_{C/R'}, \text{ énergie cinétique de } S' \text{ dans } R'$$

Et

$$-m_S m_T G / r = E_p \quad \text{énergie potentielle}$$

Ainsi,

$$\mu/2(r \bullet^2 + C^2/r^2) - m_S m_T G / r = E_0$$

C.5.1

D'après le résultat précédent,

$$r \bullet^2 = (2/\mu) \cdot [E_0 + m_S m_T G / r] - C^2/r^2$$

Dans le cas où $r \bullet > 0$,

$$r \bullet = dr/dt = \{(2/\mu) \cdot [E_0 + m_S m_T G / r] - C^2/r^2\}^{1/2}$$

On en déduit

$$dt = dr / \{(2/\mu) \cdot [E_0 + m_S m_T G / r] - C^2/r^2\}^{1/2} = I(r) dr, \text{ soit}$$

$$I(r) = \{(2/\mu) \cdot [E_0 + m_S m_T G / r] - C^2/r^2\}^{-1/2}$$

Si $r \bullet < 0$, on obtient encore $dt = I_1(r) dr$ en prenant

$$I_1(r) = -\{(2/\mu) \cdot [E_0 + m_S m_T G / r] - C^2/r^2\}^{-1/2}$$

Enfin, si $r_0 = 0$,

$$E_0 + m_s m_T G / r - \mu C^2 / 2r^2 = 0$$

Il n'y a plus de relation entre r et t , on est à un extrémum dont les valeurs de r sont solution de l'équation du second degré ci-dessus.

C.5.2

On a vu que $\theta_0 = d\theta/dt = C/r^2$, d'où

$$d\theta = C dt/r^2 = C l(r) dr / r^2 = J(r) dr :$$

$$J(r) = C l(r) / r^2$$

C.5.3

Avec les notations proposées, comme $dz = \mu C / r^2 dr$,

$$J(r) = \frac{dz}{\sqrt{\mu(2E_0 - \frac{\mu C^2}{r^2} + \frac{2K}{r})}}$$

Soit $d\theta = \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2 - z^2}}$ avec

$$\alpha^2 = 2\mu E_0 + K^2 / C^2$$

C.6

En admettant que α^2 est bien positif, $\alpha = (2\mu E_0 + K^2 / C^2)^{1/2}$. Alors,

$$d\theta = \frac{dz / \alpha}{\sqrt{1 - (z / \alpha)^2}}$$

Par intégration,

$$\theta - \theta_0 = - \text{Arc cos}((z / \alpha))$$

En choisissant l'origine des angles en une position telle que $z = \alpha$, $\theta_0 = 0$, d'où

$$\cos\theta = -z / \alpha = \frac{\mu C / r - K / C}{\sqrt{2\mu E_0 + K^2 / C^2}}$$

On en déduit

$$r = \frac{p}{1 + e \cos\theta} \quad \text{avec} \quad p = \mu C^2 / K \quad \text{et} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\mu E_0 C^2}{K^2}}$$

C.7

Si $E_0 > 0$, $e > 1$ et r peut devenir infini : la trajectoire n'est pas bornée, c'est une hyperbole.

Si $E_0 < 0$, $e < 1$ et r ne peut devenir infini : la trajectoire est bornée, c'est une ellipse.

Si $E_0 = 0$, $e = 1$ et r peut devenir infini : la trajectoire n'est pas bornée, c'est une parabole.

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉES

Composition d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique - Session : 2000

Partie I : Origine physique du bruit de fond, schémas équivalents

I-1 En raison de l'hypothèse suivant laquelle il ne peut y avoir qu'un ou zéro événement pendant dt si $P(1, dt) = \lambda dt$ alors $P(0, dt) = 1 - \lambda dt$.

I-2 $[N, t + dt] = [N - 1, t] \times [1, dt] + [N, t] + [0, dt]$

I-3 Dans ce cas nous avons $P(N, t + dt) = P(N, t) \times (1 - \lambda dt) + P(N - 1, t) \times \lambda dt$

I-4 on peut donc écrire que $\frac{P(N, t + dt) - P(N, t)}{dt} = -\lambda [P(N, t) - P(N - 1, t)]$

D'où l'équation différentielle cherchée.

I-5 pour $N=0$: $\frac{dP(0, t)}{dt} = -\lambda P(0, t)$ soit en intégrant et en remarquant que $P(0, 0) = 1$ il vient $P(0, t) = \exp(-\lambda t)$

Pour $N=1$ l'équation différentielle s'écrit : $\frac{dP(1, t)}{dt} + \lambda P(1, t) = -\lambda \exp(-\lambda t)$

La solution générale de l'équation sans second membre est : $K \exp(-\lambda t)$ où K est une constante, une solution particulière de l'équation sans second membre est (variation de la constante) : $\lambda t \exp(-\lambda t)$.

La solution s'écrit donc $K \exp(-\lambda t) + \lambda t \exp(-\lambda t)$. Si on remarque que $P(1, 0) = 0$ on trouve la solution $P(1, t) = \lambda t \exp(-\lambda t)$.

I-6 Raisonnement par récurrence. On admet le résultat pour $N-1$.

En utilisant le résultat précédent il vient avec la méthode de la variation de la constante

$\frac{dK}{dt} = \frac{\lambda^N}{(N-1)!} \times t^{N-1}$ la solution s'écrit donc :

$$P(N, t) = K \exp(-\lambda t) + \frac{(\lambda t)^N}{N!} \exp(-\lambda t)$$

en tenant compte du fait que $P(N,0) = 0$ on trouve le résultat demandé.

I-7 Les hypothèses du passage des porteurs à travers la jonction font qu'on se ramène à une loi de Poisson dépendant du temps comme à la question I-6.

La probabilité $P(p = k, t)$ est donc égale à $\frac{(\lambda t)^k}{k!} \times \exp(-\lambda t)$

I-8 le nombre moyen de trous traversant la jonction est égal à

$$\bar{p}_t = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} \times \exp(-\lambda t) \quad \text{cette expression est égale à:} \quad \bar{p}_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} \exp(-\lambda t)$$

soit, après la mise en facteur de $\lambda t \times \exp(-\lambda t)$ et en utilisant le développement en série de l'exponentielle nous obtenons $\bar{p}_t = \lambda t$

Le nombre moyen de trous par unité de temps est donc égal à λ .

I-9 La charge moyenne par unité de temps \bar{q} est donc $e\lambda$.

I-10 Si on intègre $e\delta(t - t_i)$ par rapport au temps (soit $\int_{-\infty}^{+\infty} e \cdot \delta(t - t_i) dt$) on trouve la charge

e , l'expression initiale était bien de la forme $\frac{dq}{dt}$ et donc homogène à un courant.

I-11 $E(z(t))$ représente la charge moyenne par unité de temps, en raison de I-9, c'est donc $e\lambda$.

I-12 La densité spectrale de puissance comprend un terme réparti sur toutes les fréquences de valeur $e^2 \cdot \lambda$ (qui est égal à eI_0 il correspond à un bruit blanc et donc au courant $i(t)$ de l'énoncé) et un terme "à fréquence nulle" de valeur $e^2 \cdot \lambda^2$ soit I_0^2 .

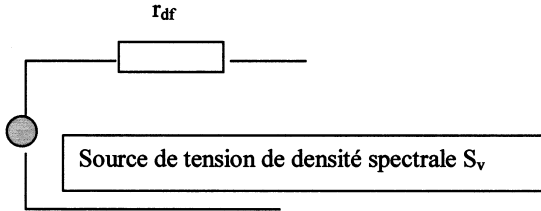
I-13 C'est l'application directe du théorème de la limite centrale. Les propriétés statistiques deviennent "Gaussiennes".

I-14 Autour d'un point de fonctionnement, la résistance dynamique va s'écrire

$$r_d = \frac{1}{\left. \frac{dI}{dV} \right|_{I_f, V_f}} \quad \text{soit, avec l'hypothèse suivant laquelle } I_f \gg I_s, \text{ on trouve } r_d = \frac{kT}{eI_f}.$$

I-15 La densité spectrale $S_v = r_d^2 S_i$, d'après I-12, $S_i = eI_f$ donc $S_v = \left(\frac{kT}{eI_f}\right)^2 \cdot eI_f = \frac{(kT)^2}{eI_f}$.

D'où le générateur de Thévenin où la source de bruit a pour densité spectrale de puissance : $\frac{(kT)^2}{eI_f}$. Cette source de bruit est représentée par sa densité spectrale de puissance.



Remarque : en pratique la bande passante n'est pas infinie. Si on appelle Δf la bande passante de bruit du système ramenée aux fréquences positives on a $\bar{v}^2 = 2 \cdot \frac{(kT)^2}{eI_f} \Delta f$

I-16 $S_v = 1.07 \times 10^{-18} V^2 / Hz$

I-17 De l'équation différentielle on obtient directement la vitesse d'entraînement en régime stationnaire ($\frac{d}{dt} u_e = 0$) soit $u_e = \frac{-eE\tau_c}{m}$

I-18 En écrivant la définition de $j = -enu_e$ il vient $j = \frac{ne^2 \tau_c}{m} E$ soit $j = \sigma E$ où σ est la conductivité. On a alors, $R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A} = \frac{m}{ne^2 \tau_c} \cdot \frac{l}{A}$.

I-19 En raison de l'hypothèse ergodique on peut écrire que $u_e = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N u_i$

Si on exprime v sous la forme $v = R \frac{j}{A} = R \frac{-enA \cdot \sum_{i=0}^N u_i}{nAl} = \sum_{i=1}^N v_i$. On introduit donc une variable aléatoire $v_i = -\frac{Re}{l} \cdot u_i$

I-20 Pour $\tau = 0$ on trouve bien la puissance (sur 1Ω). La décroissance (exponentielle $\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c}\right)$) de la fonction d'autocorrélation est physiquement compréhensible si on prend en compte le fait que le temps τ_c représente un temps moyen entre collisions et que l'électron "perd la mémoire" de sa vitesse après une collision.

I-21 Pour calculer la densité spectrale (bilatérale) il faut calculer la transformée de Fourier de $R_{v_v}(\tau)$ soit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v_i^2} \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_c}\right) \exp(-2j\pi f\tau) d\tau = -\tau_c \frac{\overline{v_i^2}}{1+2j f \tau_c} \left[\exp\left(-\frac{1}{\tau_c} + 2j\pi f\right) \tau \right]_0^{+\infty} - \tau_c \frac{\overline{v_i^2}}{1-2j f \tau_c} \left[\exp\left(-\frac{1}{\tau_c} + 2j\pi f\right) \tau \right]_0^{+\infty}$$

$$= 2\tau_c \frac{\overline{v_i^2}}{1+4\pi^2\tau^2 f^2}$$

En tenant compte de I-19 et pour des fréquences inférieures à $\frac{1}{2\pi\tau_c} = 1,59.10^{12} \text{ Hz}$ (cette

hypothèse est toujours vérifiée en électronique) on trouve bien que $S_w = 2 \cdot \left(\frac{Re}{l}\right)^2 \cdot \overline{u_i^2} \cdot \tau_c$;

I-22 Si on se place en dessous de la fréquence calculée en I-21, le bruit est blanc.

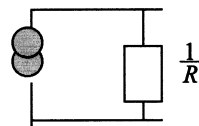
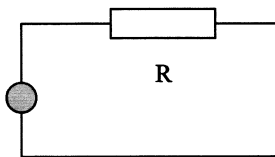
Dans ce cas, et si on se limite aux fréquences positives et dans la bande de fréquences où le

bruit est blanc, on a $\overline{v^2} = 2S_v(f)\Delta f = 2 \cdot nAlS_v(f)\Delta f = 4 \cdot nAl \cdot \tau_c \cdot \left(\frac{Re}{l}\right)^2 \cdot \overline{u_i^2}$ si on tient

compte du fait que $\overline{u_i^2} = \frac{kT}{m}$ et que $\tau_c = \frac{l}{R} \cdot \frac{m}{ne^2} \cdot \frac{l}{A}$, on trouve $\overline{v^2} = 4kTR\Delta f$

Le processus donnant le résultat précédent est dû à un grand nombre de processus élémentaires (processus électroniques): toujours à cause du théorème de la limite centrale, le bruit est Gaussien.

I-23 Schéma équivalents de Thévenin et Norton. On représente généralement les générateurs par générateur de bruit (source de tension $\sqrt{\overline{v^2}}$ ou source de courant $\sqrt{\overline{i^2}}$)



Application numérique :densité spectrale bilatérale : pour

$$R = 100\Omega, S_v = 8.28 \times 10^{-19} V^2 / \text{Hz}$$

$$R = 10M\Omega, S_v = 8.28 \times 10^{-14} V^2 / \text{Hz}$$

Remarque : on pourrait tout aussi bien représenter aussi les générateurs de bruit par leur densité spectrale puissance.

I-24 La densité spectrale (bilatérale) trouvée précédemment (question I-16) était $1.07 \times 10^{-18} \text{ V}^2 / \text{Hz}$ ceci correspondrait à une résistance (par analogie au bruit thermique) de valeur $\frac{1.07 \times 10^{-18}}{2kT} = 130 \Omega$.

Si on modifie le point de fonctionnement de la diode, on fait varier I_f et donc la densité spectrale de puissance.

Partie II : Bruit filtré, détection synchrone

II-1 Le bruit filtré transporte une puissance $P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f) df$

Si on écrit $P_s = 2 \cdot S_b \cdot H_{0n}^2 \Delta f_n$ il vient par identification $\Delta f_n = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f) df}{2 \cdot S_b \cdot H_{0n}^2}$

La densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation ;

On a donc $R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f) \exp(-2j\pi f\tau) df$ si $\tau=0$ on retrouve bien la puissance totale avec la fonction d'autocorrélation.

II-2 on considère un filtre passe bas du premier ordre :

$$\Delta f_n = S_b \cdot H_{0n}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|1 + 4\pi^2 \tau_0^2 f^2|} df \cdot \frac{1}{2 \cdot S_b \cdot H_{0n}^2}$$

Le formulaire nous dit que le terme à intégrer a pour transformée de Fourier inverse

$$R_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\tau_0} \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_0}\right) \text{ la valeur de cette fonction pour } \tau = 0 \text{ est } \frac{1}{2\tau_0}, \text{ on a donc } \Delta f_n = \frac{1}{4\tau_0}$$

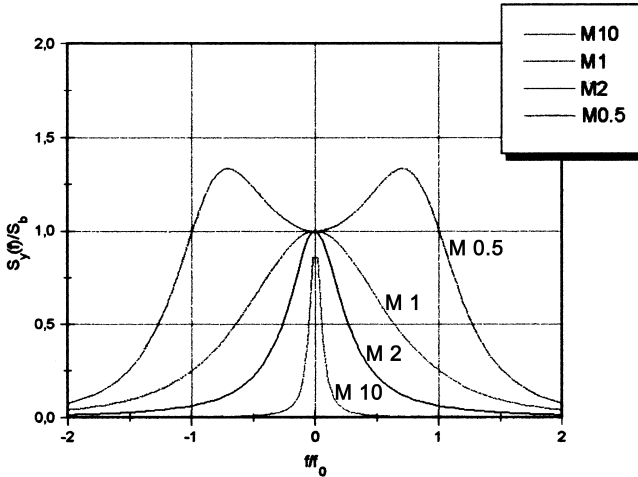
sachant de plus que $f_c = \frac{1}{2\pi\tau_0}$ il vient $\Delta f_n = \frac{\pi}{2} \cdot f_c$.

II-3 $jC\omega_s = \frac{v_e}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}}$ on obtient le résultat demandé avec $f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ et

$$m = 2\pi RCf_o \cdot H_o = 1.$$

II-4 On a $S_y(f) = S_b \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right]^2 + 4m^2 \cdot \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$

II-5 On a représenté la densité spectrale sur la figure suivante :



Pour trouver la fréquence de coupure à -3dB il faut résoudre l'équation :

On détermine la bande passante à -3dB de la façon suivante :

$$\left[1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right]^2 + 4m^2 \cdot \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 = 2$$

soit en posant $x = \left(\frac{f}{f_0}\right)^2$ et en développant $x^2 - 2[1 - 2m^2]x - 1 = 0$

cette équation a pour solution $x_{1,2} = 1 - 2m^2 \pm \sqrt{(1 - 2m^2)^2 + 1}$ où seule la solution positive est retenue ;

Il vient donc $f_{-3\text{dB}} = f_0 \sqrt{1 - 2m^2 + \sqrt{(1 - 2m^2)^2 + 1}}$

II-6 On procède par identification en développant la formule de l'énoncé :

$$S_y(f) = S_b \cdot H_0^2 \cdot \frac{f_0}{4m} \left[\frac{A_1}{D_1} + \frac{A_2}{D_2} \right],$$

en développant D_1 et D_2 on trouve

$$D_1 = f_0^2 - f^2 + 2jmf_0f \quad \text{et} \quad D_2 = f_0^2 - f^2 - 2jmf_0f,$$

ces deux quantités sont conjuguées l'une de l'autre, on remarque qu'il en est de même pour les numérateurs. Donc

$$S_y(f) = S_b \cdot H_0^2 \cdot \frac{f_0}{4m} \left[\frac{A_1 \cdot D_2 + A_2 D_1}{D_1 D_2} \right] = S_b \cdot H_0^2 \cdot \frac{f_0}{4m} \left[\frac{2R_e(A_1 D_2)}{|D_1|^2} \right]$$

$$R_e(A_1 D_2) = R_e(2mf_0^3 + jff_0^2 - 2mf_0f^2 - jf^3 - 4jm^2f_0^2f + 2mf_0f^2) = 2mf_0^3$$

$$|D_1|^2 = f_0^4 \left(\left(1 - \left(\frac{f^2}{f_0^2} \right) \right)^2 + 4m^2 \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right)$$

$$\text{Donc } S_y(f) = S_b \cdot H_0^2 \cdot \frac{f_0}{4m} \cdot \frac{4mf_0^3}{f_0^4 \left(\left(1 - \left(\frac{f^2}{f_0^2} \right) \right)^2 + 4m^2 \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 \right)} \text{ cqfd.}$$

II-7 On utilise la table en remarquant que 1) La densité spectrale mise sous la forme préconisée au II-6 est la somme de deux quantités conjuguées; de plus elle est paire. La transformée inverse sera donc réelle et paire.

Il suffit de déterminer la transformée inverse de $\frac{A_1}{D_1}$. Cette quantité est la somme de deux

quantités $\frac{2mf_0}{f_0^2 \left(1 - \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 + 2jm \frac{f}{f_0} \right)} + jf \frac{1}{f_0^2 \left(1 - \left(\frac{f}{f_0} \right)^2 + 2jm \frac{f}{f_0} \right)}$. On obtient la TF inverse du

premier terme en lisant directement sur la table (pour $m < 1$), et la transformée inverse du deuxième terme en dérivant la formule donnée par la table.

L'expression obtenue n'est valable que pour $t > 0$ car multipliée par $U(t)$, il suffit de remarquer qu'on obtient la formule demandée en prenant le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées de l'expression trouvée pour $\frac{A_1}{D_1}$.

On procède de la même manière pour $m = 1$ et $m > 1$

II-8 La puissance moyenne de bruit est donnée directement pour la valeur de la fonction d'autocorrélation pour $\tau=0$ soit $R_{yy}(0) = \frac{\pi f_0}{2m} S_b H_0^2$.

II-9 On en déduit directement la bande passante équivalente de bruit (question II-1) :

$$\Delta f_n = \frac{\pi f_0}{4m}$$

II-10 Le rapport de la bande équivalente de bruit sur la bande passante à -3dB donne

$$\text{directement } r(m) = \frac{\pi}{4m\sqrt{1-2m^2 + \sqrt{(1-2m^2)^2 + 1}}}$$

II-11 Pour les faibles amortissements il est clair que $r(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$

Si le système est très amorti on cherche un équivalent du dénominateur quand $m \rightarrow \infty$ (il faut conserver les termes en $\frac{1}{m^4}$):

$$\sqrt{(1-2m^2)^2 + 1} = 2m^2 \sqrt{1 - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{2m^4}} \approx 2m^2 \left[1 + \frac{1}{8m^4} - \frac{1}{2m^2} \right]$$

Le dénominateur est équivalent à $4m\sqrt{1-2m^2 + 2m^2 + \frac{1}{4m^2} - 1} = 2$

donc $r(m) \rightarrow \frac{\pi}{2}$

Pour déterminer le minimum de $r(m)$ il faut étudier le comportement de

$\sqrt{1-2m^2 + \sqrt{(1-2m^2)^2 + 1}}$, le terme sous la racine carrée est la somme d'une fonction

$1-2m^2$ qui décroît continûment et qui passe par zéro en $m^2 = \frac{1}{2}$ et d'un terme qui décroît de

$\sqrt{2}$ jusqu'à 1 (pour $m^2 = \frac{1}{2}$) puis qui croît pour $m^2 > \frac{1}{2}$. On fait l'hypothèse que le minimum

de la fonction $r(m)$ aura lieu pour une valeur m voisine de $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Soit en faisant un

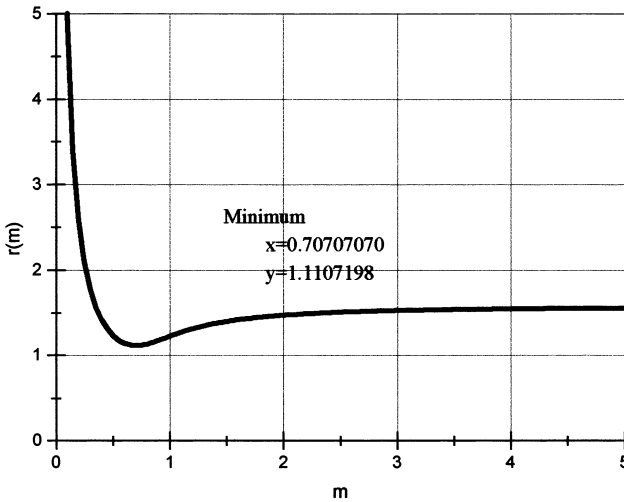
développement limité autour de cette valeur il vient :

$$r(m) \approx \frac{\pi}{4\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \cdot \sqrt{-2\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}}}$$

si on ne garde que les termes d'ordre 1 en ε et que l'on

calcule la dérivée $\frac{dr}{dm} = \frac{dr}{d\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dm} = -2\varepsilon \cdot \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{2} + \varepsilon}$ cette dérivée s'annule pour $\varepsilon = 0$ ce

qui signifie que la valeur de m^2 qui rend $r(m)$ minimum est 0.5 soit $m = 0.707$. Ce résultat est très voisin de celui trouvé numériquement.



II-12 L'amortissement qui correspond à l'optimum sur la bande passante de bruit correspond au minimum de la courbe $r(m)$ soit pour $m = 0.707$. C'est pour cette valeur de m que le filtrage du bruit est le meilleur avec la bande passante du filtre maximale.

II-13 On écrit $x(t) = s + b(t)$ soit en multipliant par $M \cos 2\pi f_m t$ on obtient un signal modulé en amplitude de la forme $x_m(t) = [s + b(t)] \cdot M \cdot \cos 2\pi f_m t$
 Par multiplication il vient :
 $y(t) = [s + b(t)] M \cdot M_a [\cos(4\pi f_m t + \phi_m) + \cos \phi_m]$

II-14 Si on intègre le signal $y(t)$ on trouve $M \cdot M_a \cdot \cos \phi_m \cdot s$
 La détection est optimum pour $\phi_m = 0$.

II-15 à l'entrée du filtre sélectif le rapport signal sur bruit est égal à $R_e = \frac{s^2}{2 \cdot S_b \cdot \Delta B}$

$$\text{En sortie du filtre } R'_e = \frac{s^2}{2 \cdot S_b \cdot \Delta f_n}$$

Dans le cas où il existe une durée d'intégration nous avons en sortie de l'intégrateur :

$$R_s = \frac{s^2}{S_b} \cdot T_i = 2 \cdot \Delta B \cdot T_i \cdot R_e$$

On peut remarquer que le gain en rapport signal sur bruit ne dépend pas de la bande passante du filtre sélectif.

II-16 On suppose maintenant que le signal n'est plus continu mais est lentement variable. En l'absence de bruit (ce que nous considérons maintenant) nous avons :

$$Z(f) = Y(f) \cdot \frac{\sin \pi f T_i}{\pi f T_i}$$

on écrit que $y(t) = s(t) [\cos 4\pi f_m t + 1]$

La transformée de Fourier de $y(t) = Y(f) = S(f) + S(f) * \frac{1}{2} [\delta(f - 2f_m) + \delta(f + 2f_m)]$

Dans ce cas on peut décomposer $Z(f) = Z_1(f) + Z_2(f)$ avec :

$$Z_1(f) = S(f) \cdot \frac{\sin \pi f T_i}{\pi f T_i}$$

$$\text{et } Z_2(f) = \left\{ S(f) * \frac{1}{2} [\delta(f - 2f_m) + \delta(f + 2f_m)] \right\} \cdot \frac{\sin \pi f T_i}{\pi f T_i}$$

Le terme sous l'accolade est égal à $\frac{1}{2} [S(f - 2f_m) + S(f + 2f_m)]$

D'où le résultat demandé.

II-17 Le terme $Z_2(f)$ est nul partout sauf dans une bande de fréquence autour de $2f_m$, le dénominateur dans le terme $\frac{\sin \pi f T_i}{\pi f T_i}$ à donc pour ordre de grandeur $2\pi f_m T_i$

La condition demandée est donc vérifiée pour $T_i \gg \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_m}$

$$\text{AN: } \frac{|Z_2(f)|}{|Z_1(f)|} < 10^{-4} \Leftrightarrow T_i > \frac{1}{2\pi f_m} \text{ soit } T_i > 0.15\text{s}$$

II-18 Il suffit de trouver ΔF tel que $\frac{\sin \pi \Delta F T_i}{\pi \Delta F T_i} \leq 0.99$

Soit en faisant un dl de $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$, il vient en posant $x = \pi \Delta F T_i$

$$\Delta F \cdot T_i \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{0.01 \cdot 6} = 7.6 \times 10^{-2} \right.$$

II-19 Le gain en rapport signal sur bruit est égal à $2 \cdot \Delta B \cdot T_i$ d'après la question II-13.

Nous avons démontré en II-18 que $\Delta F \cdot T_i$ doit être inférieur à $7.6 \cdot 10^{-2}$ pour pouvoir reconstituer le signal. Le gain maximum en rapport signal sur bruit ne peut donc excéder

$$2 \cdot \Delta B \cdot \frac{7.6 \times 10^{-2}}{\Delta F}$$

Dans le cas où $\Delta F = 0.01\text{Hz}$ on doit avoir $T_i > 0.15\text{s}$ d'après II-17, et $T_i < 7.6\text{s}$ d'après II 18 .
 On pourra donc améliorer le rapport signal sur bruit et obtenir une restitution correcte de $s(t)$.
 Dans le cas où $\Delta F = 10\text{Hz}$ on doit avoir $T_i > 0.15\text{s}$ d'après II-17 et $T_i < 7.6 \times 10^{-3}\text{s}$ d'après II 18
 on ne peut pas traiter le signal bruité de cette façon, en fait la fréquence de modulation est mal choisie.

Partie III : Chaîne de mesures en spectroscopie d'électrons, conversion analogique numérique

III-1 A l'entrée du convertisseur on a la résistance R_a/R_k .

$$R_a/R_k (I_{ae}) = 5\text{V}$$

$$I_{ae} = 10\mu\text{A}, R_k = 3\text{M}\Omega \Rightarrow R_a = 600\text{k}\Omega$$

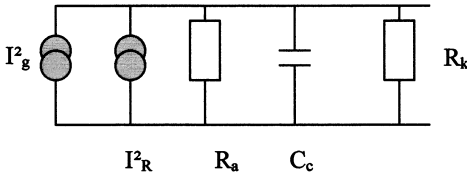
III-2 La plage de tension correspondant à une unité du bit le plus faible est égale à : $\delta v_{\min} = \frac{5}{2^n}$

$$16 \text{ bits } \delta v_{\min} = 0,076 \text{ mV}, \delta i_{\min} = 0.15\text{nA}$$

III-3 Le courant I_{ae} est obtenu par émission d'électrons secondaires, c'est un phénomène lié à la nature granulaire de l'électricité. le bruit généré est donc modélisable par un bruit de grenaille.

$$\text{III-4 } I^2_R = \frac{2kT}{R_a} \text{ [A}^2/\text{Hz]}, I^2_g = e \cdot I_{ae} \text{ [A}^2/\text{Hz]} \text{ donc } I^2_{\text{total}} = I^2_R + I^2_g$$

III-5 On caractérise les sources de bruit par leur densité spectrale de puissance :



Pour les densités spectrales bilatérales

$$I^2_R = \frac{2kT}{R_a} \text{ A}^2/\text{Hz} \quad \text{pour } T=300\text{K on trouve } 1.38 \cdot 10^{-26} \text{ A}^2/\text{Hz}$$

$$I^2_g = e \cdot I_{ae} \quad I_{ae} = 10\mu\text{A}, \text{ on trouve } 1.6 \cdot 10^{-24} \text{ A}^2/\text{Hz}; I_{ae} = 1\text{nA}, \text{ on trouve } 1.6 \cdot 10^{-28} \text{ A}^2/\text{Hz}$$

Si $I_{ae} = 170 \text{ nA}$ il y a égalité entre les deux densités spectrales. Ce qui signifie que pour les courants inférieurs il ne faudra considérer que le bruit thermique de la résistance.

III-6

La bande passante équivalente de bruit $\Delta f_n = \frac{\pi}{2} \cdot \Delta f_{-3db}$ soit ici 100kHz.

$$\text{III-7 Le rapport signal/bruit à l'entrée du convertisseur est égal à } \left[\frac{S}{N} \right]_1 = \frac{I_{ae}^2}{(I_g^2 + I_R^2) \cdot 2\Delta f_n}$$

III-8 On cherche I_{ae} pour que $\left[\frac{S}{N} \right]_1$ soit plus grand que 100 ;

On trouve $I_{ae} > 0.6nA$.

III-9 Il faut rajouter une source de bruit de densité spectrale eI_0 dans le schéma équivalent trouvé précédemment.

III-10 Le bruit supplémentaire induit par le courant I_0 est très faible par rapport au bruit thermique de la résistance. Le courant I_{aemin} est donc semblable au précédent mais sa détection sera entachée d'erreur par l'existence de I_0 .

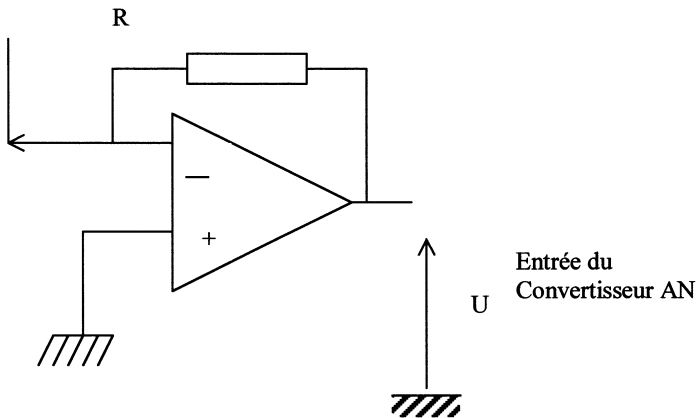
III-11 Il faut ajouter un condensateur en parallèle avec C_c pour avoir $\Delta f_n = 20Hz$.
On trouve $C = 157nF$ (les autres composants sont identiques).

III-12 Dans le cas où la bande passante de bruit est de 20Hz I_{aemin} est égal à 8pA. Mais cette détection est limitée par le courant I_{on} qui est supérieur à I_{aemin} . L'intérêt de la réduction de la bande passante est donc "faible".

III-13 Le courant total obtenu est de la forme $I_0 + I_{ae} \cos \omega t$ car I_0 existe même s'il n'y a pas de flux incident ; sur la résistance on obtient une tension de la forme $V_0 + V_{ac} \cos \omega t$. Une multiplication par une tension $V_m \cos \omega t$ et un filtrage passe-bas permet de retrouver V_{ac} .

III-14 On ne peut pas utiliser le même montage avec une simple résistance car l'impédance d'entrée du convertisseur devient plus faible que la résistance de conversion.

III-15 L'amplificateur opérationnel est utilisé en convertisseur courant-tension :



La tension U à l'entrée du convertisseur doit valoir 5 V pour un courant de 0,5 nA (si on tient compte de $I_{pol} = 10pA$., il vient $RI_{ae} + RI_{pol} = 5V$ soit $R = 5 / (0.5 + 0.01) = 10 G\Omega$).

III-16 Le courant de polarisation entraîne un décalage systématique dans la mesure.

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉES

Problème d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique - Session : 2000

Première partie

Redresseur à absorption sinusoïdale de courant

1.

Le courant $i_r(t)$, représenté sur le document-réponse n°1, n'est pas sinusoïdal. Il contient beaucoup d'harmoniques.

2.1.1. De 0 à αT_d , K est passant et D est ouverte ; le courant $i_e(t)$ croît linéairement et :

$$v_e(t) = L di_e/dt = E \Rightarrow$$

$$E = L \frac{I_M - I_m}{\alpha T_d} \quad \text{et} \quad I_M - I_m = \frac{\alpha E T_d}{L} \quad (1)$$

De αT_d à T_d , K est ouvert et D est passante ; il y a décroissance du courant et :

$$E - V_s = L di_e/dt \Rightarrow$$

$$E - V_s = L \frac{I_m - I_M}{(1 - \alpha) T_d} \quad \text{et} \quad I_M - I_m = \frac{(1 - \alpha) T_d}{L} (V_s - E) \quad (2)$$

En identifiant (1) et (2), on obtient :

$$V_s = \frac{E}{(1 - \alpha)} \quad (3)$$

Tous les composants sont parfaits. La puissance se conserve : $E I_e = V_s I_s \Rightarrow I_s = (1 - \alpha) I_e$ (4)

2.1.2.1. Équation de la maille d'entrée : $v_e(t) = v_K(t) + v_L(t)$ et $v_L(t) = L di_e/dt + R_L i_e$.

En valeur moyenne : $E = 0 + R_L I_e + (1 - \alpha) V_s$.

En utilisant (4) et sachant que $V_s = R_s I_s$, il vient : $E = R_L \frac{V_s}{R_s (1 - \alpha)} + (1 - \alpha) V_s$, soit :

$$V_s [(1 - \alpha)^2 R_s + R_L] = E R_s (1 - \alpha)$$

Finalement :

$$V_s = \frac{E (1 - \alpha)}{\frac{R_L}{R_s} + (1 - \alpha)^2} \quad (5)$$

2.1.2.2. En dérivant par rapport à α l'expression (5), on trouve l'extrémum de la fonction :

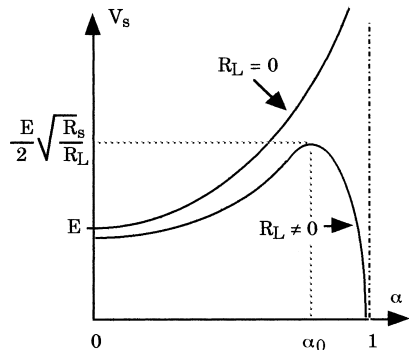
pour $\alpha = \alpha_0 = 1 - \sqrt{\frac{R_L}{R_s}}$,

V_s est maximum et vaut $\frac{E}{2} \sqrt{\frac{R_s}{R_L}}$

2.1.2.3.

Dans le modèle théorique sans résistance interne, la tension de sortie V_s tend vers l'infini quand le rapport cyclique α tend vers 1.

En pratique, la résistance interne de la bobine limite la tension de sortie V_s à une valeur finie.



2.2.1.

La loi du noeud en sortie s'écrit : $i_d(t) = i_c(t) + i_s(t)$

En régime permanent et selon les hypothèses : $v_s(t) = V_s = \text{constante}$. Comme : $i_c(t) = Cdv_s/dt$, on peut écrire, en valeurs moyennes :

$$\langle i_c(t) \rangle = I_c = 0 \quad \text{et} \quad I_s = I_d.$$

L'allure des courants $i_e(t)$, $i_c(t)$ et $i_d(t)$ est représentée sur le document-réponse n° 2.

L'allure de $v_s(t)$ se construit à partir de la relation : $v_s(t) = (1/C) \int i_c(t) dt$.

Entre 0 et αT_d : $i_c(t) = -I_s$ et $v_s(t) = -(I_s/C)t + \text{constante}$ (fonction linéaire décroissante).

Entre αT_d et T_d : $i_c(t)$ décroît linéairement selon une loi de la forme : $-at + b$. Donc $v_s(t)$ est de la forme : $v_s(t) = -at^2/2 + bt + c$. C'est une portion de parabole dont la concavité est tournée vers le bas.

De plus, il y a continuité de $v_s(t)$ en $t = 0, \alpha T_d$ et T_d .

2.2.2.

Comme le montrent les formes d'ondes, il existe un instant t_0 , entre αT_d et T_d , pour lequel $i_c(t_0) = 0$ et donc $V_s(t_0)$ est maximum.

Calcul de t_0 :

$$i_c(t) = -\frac{I_M}{(1-\alpha)T_d}t + \text{cste} \quad \text{et} \quad i_c(T_d) = -I_s \Rightarrow i_c(t) = -\frac{I_M}{(1-\alpha)T_d}(t - T_d) - I_s \quad \text{avec} \quad i_c(t_0) = 0,$$

et donc :

$$(t_0 - T_d) = -I_s \frac{(1-\alpha)T_d}{I_M} \quad \text{et finalement :} \quad t_0 = T_d \left[1 - \frac{(1-\alpha)I_s}{I_M} \right] \quad (7)$$

2.2.3.

En intégrant la relation $i_c(t) = Cdv_s/dt$ entre αT_d (minimum de v_s) et t_0 (maximum de v_s), on obtient :

$$\int_{\alpha T_d}^{t_0} dv_s = (1/C) \int_{\alpha T_d}^{t_0} i_c(t) dt \Rightarrow \Delta V_s = (1/C) \cdot \text{aire hachurée de } i_c(t), \text{ soit :}$$

$$\Delta V_s = (1/C) \left(\frac{I_s - I_M}{2} \right) (t_0 - \alpha T_d)$$

et, en éliminant t_0 à l'aide de la relation (7) :

$$\Delta V_s = \left[\frac{(1-\alpha)T_d}{2C} \right] \left[\frac{(I_M - I_s)^2}{I_M} \right]$$

La structure fonctionne en limite de conduction continue. On a donc : $I_s = (1-\alpha)I_e = (1-\alpha)I_M/2$.

On peut alors exprimer I_M en fonction de I_s et obtenir l'expression de ΔV_s demandée :

$$\Delta V_s = (1+\alpha)^2 \left[\frac{T_d I_s}{4C} \right] \quad (8)$$

2.2.4.

Le condensateur, en réalité, n'est pas parfait. Il présente une résistance équivalente série R_s . A la tension étudiée précédemment s'ajoute un terme : $R_s i_c(t)$.

Au front raide d'intensité qui se produit à la date $t = \alpha T_d$, correspond un front raide de tension aux bornes de C. Ce front raide a pour amplitude : $R_s I_M$.

3.1.1.

La structure est celle d'un hacheur élévateur. A tout instant, la tension de sortie doit être supérieure à la tension d'entrée, soit :

$$V_s > V_e \sqrt{2}$$

La relation (3) reste valable en limite de conduction continue : $V_s = \frac{v_e(t)}{(1-\alpha)} = \frac{V_e \sqrt{2} \sin \omega t}{(1-\alpha)}$

On en déduit :

$$\alpha(t) = 1 - \frac{V_e \sqrt{2}}{V_s} \sin \omega t \quad (9)$$

3.1.2.

Compte tenu des hypothèses :

$$i_{ef}(t) = |i_r(t)| = i_{em}(t)/2 \quad (10)$$

On a donc : $I_{LM} = 2\sqrt{2} I_r$. Puisque tous les composants sont parfaits, la puissance se conserve :

$$P_s = V_s I_s = V_e I_r \Rightarrow I_{LM} = \frac{2\sqrt{2} V_s I_s}{V_e} = \frac{2\sqrt{2} P_s}{V_e} \quad (11)$$

Dans le cas le plus défavorable, $V_e = V_{emin}$ et

$$I_{LMM} = \frac{2\sqrt{2} P_s}{V_{emin}} = 4,0 \text{ A.}$$

3.1.3.

Pendant une période de découpage autour de l'instant t , la tension $v_e(t)$ est pratiquement constante.

Or, lorsque l'interrupteur K est fermé, on a : $v_e = L di_e/dt$ et $i_e(t) = v_e t/L$. A l'instant $t = t_{on}$, $i_e(t_{on})$ est maximum et rejoint l'enveloppe d'équation : $2\sqrt{2} I_r |\sin \omega t|$.

On a :

$$2\sqrt{2} I_r |\sin \omega t| = (1/L) V_e \sqrt{2} |\sin \omega t| t_{on} \text{ et donc : } t_{on} = \frac{2L I_r V_e}{V_e^2} \Rightarrow t_{on} = \frac{2L P_s}{V_e^2} \quad (12)$$

Si P_s et V_e sont constantes, le temps de conduction t_{on} est constant.

3.1.4.

Si l'interrupteur K est bloqué, la diode D conduit. On a : $di_e/dt = (1/L)(v_e(t) - V_s)$ mais $v_e(t)$ est pratiquement constante au cours d'une période de découpage. On peut donc considérer que $i_e(t)$ décroît linéairement, au cours de cette même période de découpage, de $2\sqrt{2} I_r |\sin \omega t|$ à 0. On a donc :

$$- 2\sqrt{2} I_r |\sin \omega t| = (1/L) [V_e \sqrt{2} |\sin \omega t| - V_s] t_{off}$$

soit : $t_{off} = \frac{2\sqrt{2} L I_r |\sin \omega t|}{[V_s - V_e \sqrt{2} |\sin \omega t|]}$

On exprime ce résultat en fonction de t_{on} :

$$t_{off} = \frac{\sqrt{2} V_e |\sin \omega t|}{[V_s - V_e \sqrt{2} |\sin \omega t|]} \quad (13)$$

Si P_s et V_e sont constantes, le temps t_{off} dépend de t .

3.1.5

$T_d = t_{on} + t_{off}$ soit :

$$T_d = t_{on} \left(\frac{V_s}{[V_s - V_e \sqrt{2} |\sin \omega t|]} \right) \quad (14)$$

3.1.6.

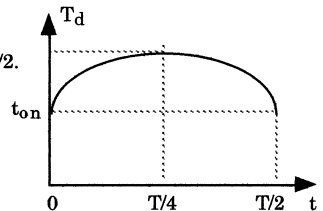
T_d est minimum lorsque $|\sin \omega t| = 0$ c'est-à-dire en $t = 0$ et $t = T/2$.

On a alors : $T_{dmin} = t_{on}$.

T_d est maximum lorsque $|\sin \omega t| = 1$ c'est-à-dire en $t = T/4$.

On a alors :

$$T_{dmax} = t_{on} \left[\frac{V_s}{(V_s - V_e \sqrt{2})} \right] \quad (15)$$



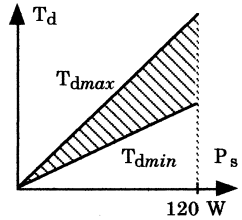
3.1.7.

Si la tension V_e est constante, les durées $T_{dmin} = \frac{2L}{V_e^2} P_s$ et

$$T_{dmax} = \frac{2L V_s}{V_e^2 (V_s - V_e \sqrt{2})} P_s$$

sont des fonctions affines de P_s .

On constate que, à vide, la fréquence tend vers l'infini. Il faut donc prévoir, en pratique, de limiter la fréquence maximale de fonctionnement.



3.1.8.1.

$\frac{T_{dmin}}{K} = \frac{1}{V_s V_e^2}$ est une fonction monotone décroissante de V_e .

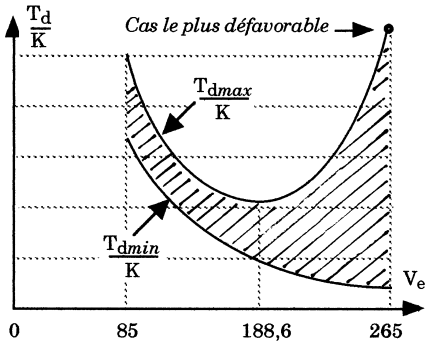
$\frac{T_{dmax}}{K} = \frac{1}{V_e^2 (V_s - V_e \sqrt{2})}$ passe par un minimum pour $V_e = (\sqrt{2}/3) V_s = 188,6$ V.

Les points remarquables des courbes sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

3.1.8.2

V_e (V)	85	188,6	265
$\frac{T_{dmax}}{K}$	4,95 10^{-7}	2,11 10^{-7}	5,64 10^{-7}
$\frac{T_{dmin}}{K}$	3,46 10^{-7}	7,07 10^{-8}	3,56 10^{-8}

L'allure des courbes est représentée ci-contre. La zone de fonctionnement est située entre les deux courbes.



3.1.9.1.

La bobine est à noyau de fer. A trop basse fréquence, il y a un risque de saturation du matériau magnétique. C'est pourquoi la période T_d est limitée à 40 μs . Pour conserver la même inductance, on pourrait augmenter la section du noyau mais cela se ferait au détriment du volume de la bobine.

3.1.9.2.

Le cas le plus défavorable se produit pour $V_e = 265$ V. Comme le montre le graphe précédent, c'est pour cette valeur de V_e que T_{dmax} est le plus grand. T_{dmax} est aussi maximum quand la puissance de sortie P_s est maximale.

Des relations (12) et (15) on extrait la valeur de l'inductance de la bobine :

$$L = \frac{T_{dmax} V_e^2 (V_s - V_e \sqrt{2})}{2 P_s V_s} \quad (16)$$

L'application numérique donne : $L = 738 \mu\text{H}$

3.1.9.3.

$$f_{\text{mini}} = 1/T_{\text{dmax}} = 25 \text{ kHz} ; f_{\text{maxi}} = 1/T_{\text{dmin}} = 396,5 \text{ kHz} \Rightarrow \boxed{25 \text{ kHz} < f < 396,5 \text{ kHz}}$$

(Remarque : en pratique, la fréquence maximum serait plus basse car, au voisinage du zéro secteur, on ne peut pas considérer que la tension V_e reste constante au cours d'une période de découpage).

3.2.1.

Le condensateur C sert de réserve d'énergie. C'est lui qui fournit l'énergie à la charge quand la tension du réseau diminue et passe par zéro. Inversement, quand la tension du réseau est grande (autour de sa valeur crête), le condensateur peut se recharger.

La tension aux bornes du condensateur présente, autour de sa valeur moyenne de 400 V, une ondulation de fréquence 100 Hz.

3.2.2.

On note $\langle i_d(t) \rangle$ la valeur moyenne de $i_d(t)$ sur une période de découpage, autour de l'instant t.

On a :

$$\langle i_d(t) \rangle = i_{\text{em}}(t) \cdot (1 - \alpha) / 2 \quad \text{avec} \quad i_{\text{em}}(t) = 2 |i_r(t)| \quad \text{et} \quad 1 - \alpha = 1 - T_{\text{on}} / T_d$$

En utilisant la relation (14), on obtient :

$$1 - \alpha = 1 - \frac{[V_s - V_e \sqrt{2} |\sin \omega t|]}{V_s} = \frac{V_e \sqrt{2} |\sin \omega t|}{V_s}$$

Alors :

$$\langle i_d(t) \rangle = \frac{V_e \sqrt{2} |\sin \omega t| \cdot 2 I_r \sqrt{2} |\sin \omega t|}{2 V_s} = \frac{2 V_e I_r (\sin \omega t)^2}{V_s} = \frac{V_e I_r (1 - \cos 2\omega t)}{V_s}$$

et comme la puissance se conserve : $V_e I_r = V_s I_s$.

$$\text{On a finalement : } \boxed{\langle i_d(t) \rangle = I_s (1 - \cos 2\omega t)} \quad \text{avec} \quad V_e I_r = V_s I_s \quad (17)$$

3.2.3.

Voir document-réponse n°3. Le courant $i_c(t)$ est sinusoïdal, de période T/2. Il s'annule aux instants T/8 et 3T/8.

La loi du noeud s'écrit : $i_c(t) = i_d(t) - I_s = -I_s \cos 2\omega t$.

On en déduit l'ondulation crête à crête par : $\Delta V_{sBF} = 2 I_s / 2 C \omega$, soit : $\boxed{\Delta V_{sBF} = I_s / C \omega}$

L'application numérique donne : $\boxed{C = 63,7 \mu\text{F}}$

3.2.4.1.

L'ondulation haute fréquence est maximale quand l'intensité du courant $i_d(t)$ est maximale.

Cela suppose que :

- la tension du réseau soit minimale ($V_e = 85 \text{ V}$),

- au cours de la période T, l'intensité du courant $i_e(t)$ passe par sa valeur crête (aux instants

T/4 et 3T/4). La période T_d est alors maximale.

3.2.4.2.

T_{dmax} est obtenu à partir du 3.1.8.1. : $T_{\text{dmax}} = 4,95 \cdot 10^{-7} \cdot K$ avec $K = 2 L P_s \sqrt{V_s} = 70,85$.

$$\boxed{T_{\text{dmax}} = 35,1 \mu\text{s}}$$

Autour de $t = T/4 = 5 \text{ ms}$, le rapport cyclique α est donné par : $V_e \sqrt{2} = \frac{L I_{\text{LMM}}}{\alpha T_d} \Rightarrow$

$$\boxed{\alpha = \frac{L I_{\text{LMM}}}{V_e \sqrt{2} T_d} = 0,7}$$

3.2.4.3.

La relation (8) permet de calculer :

$$\boxed{\Delta V_{sHF} = 0,16 \text{ V}}$$

En tenant compte de la résistance série du condensateur ($R_c = 1,3 \Omega$) et sachant que l'amplitude du front raide du courant est de 4 A, il en résulte un front raide de tension de $1,3 \times 4 = 5,2 \text{ V}$. On constate que l'ondulation de la tension, en haute fréquence, est essentiellement due à la résistance équivalente série du condensateur ! Le calcul effectué en 2.2.3. ne rend pas compte de l'ondulation réellement observable.

**Deuxième partie :
Alimentation Fly-Back.**

1.1.1.

Lorsque l'interrupteur K est passant ($0 < t < \alpha T$), il y a stockage d'énergie dans l'inductance magnétisante L_m . La diode D est bloquée.

Lorsque l'interrupteur K est ouvert, la diode D conduit. L'énergie stockée dans L_m s'écoule, à travers la diode D, vers la sortie.

Les enroulements primaire et secondaire de l'élément magnétique ne sont jamais conducteurs simultanément.

1.1.2.

- $0 < t < \alpha T$: $i_p(t) = (E/L_m) t$
- $A t = \alpha T$, $i_p(\alpha T) = (E/L_m) \alpha T \Rightarrow I_{pm} = \alpha E T / L_m$ (18)

Le bilan de puissance donne :

- $P_{entrée} = (1/T) \int_0^T E i_p(t) dt = \alpha E I_{pm} / 2 = \alpha^2 E^2 T / 2 L_m$
- $P_{sortie} = V_s I_{ch} = V_s^2 / R_{ch}$

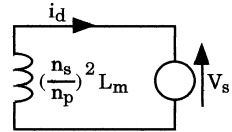
$P_{entrée} = P_{sortie} \Rightarrow V_s = \alpha E (R_{ch} T / 2 L_m)^{1/2}$ (19)

1.1.3.

Quand l'interrupteur K est bloqué, la diode D conduit. On transforme le modèle de la figure 7 en ramenant l'inductance magnétisante au secondaire. Compte-tenu des hypothèses, on obtient le schéma équivalent ci-contre.

En écrivant la loi de la maille, on a : $-(n_s/n_p)^2 L_m di_d/dt = V_s \Rightarrow$

$i_d(t) = I_{dm} - (V_s/L_m) \cdot (n_p/n_s)^2 (t - \alpha T)$ (20)



Il y a conservation du flux dans le noyau magnétique du transformateur :

- de 0 à αT : $n_p \varphi(t) = L_m i_p(t)$,
- de αT à T : $n_s \varphi(t) = (n_s/n_p)^2 L_m i_d(t)$,

à l'instant $t = \alpha T$: $L_m i_p(\alpha T) / n_p = (n_s/n_p)^2 L_m i_d(\alpha T) / n_s \Rightarrow n_s I_{dm} = n_p I_{pm}$ (21)

(on pouvait également écrire la conservation de l'énergie dans l'inductance magnétisante L_m à l'instant αT).

1.1.4.

On exploite l'expression (20) à l'instant $\alpha T + t_{off}$ pour lequel $i_d(\alpha T + t_{off}) = 0$. On obtient :

$t_{off} = I_{dm} (L_m / V_s) \cdot (n_s/n_p)^2$.

En remplaçant V_s par l'expression (19), on arrive à : $t_{off} = (n_s/n_p) (2 T L_m / R_{ch})^{1/2}$ (22)

1.1.5.

Aux bornes de l'interrupteur K : $v_k(t) = E - u_p(t)$

Lorsque l'interrupteur K est bloqué et que la diode D est passante : $u_p(t) = - (n_p/n_s)V_s$.

Ainsi :
$$v_{kmax} = E + (n_p/n_s)V_s \quad (23)$$

Application numérique :
$$(n_s/n_p) = 0,48$$

1.1.6.1.

En limite de conduction continue :

$$t_{off} = (1 - \alpha)T = (n_s/n_p)(2TL_m/R_{ch})^{1/2} \Rightarrow (1 - \alpha) = (n_s/n_p)(2L_m/TR_{ch})^{1/2}$$

En exploitant la relation (19), on obtient :
$$\frac{V_s}{E} = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} \frac{n_s}{n_p} \quad (23)$$

(Cette relation reste vraie pour un fonctionnement en démagnétisation incomplète.)

1.1.6.2.

De la relation (23), on en déduit :
$$\alpha = \frac{V_s}{V_s + \frac{n_s}{n_p} E} \quad (24)$$

Numériquement :
$$\alpha = 0,2$$

1.1.6.3.

La relation (19) permet d'exprimer L_m : $L_m = (R_{ch}T/2)(\alpha E/V_s)^2$ avec $R_{ch} = V_s/I_s \Rightarrow$

$L_m = (\alpha^2 E^2 T)/(2V_s I_s)$ et comme α est donné par la relation (24), on a finalement :

$$L_m = \frac{E^2 V_s T}{2 I_s (V_s + \frac{n_s}{n_p} E)^2} \quad \text{Application numérique : } L_m = 666,7 \mu H$$

1.1.6.4.

D'après la relation (18) :
$$I_{pm} = \alpha ET/L_m \quad \text{soit : } I_{pm} = 2,4 \text{ A.}$$

1.1.6.5.

Voir le document-réponse n°4.

Comme la puissance s'exprime par : $P = \alpha^2 E^2 T/2L_m$, si on divise la puissance par 2, le rapport cyclique est divisé par $\sqrt{2}$. Il vaut : $\alpha = 0,14$.

De même : la durée t_{off} passe de 0,8 T à 0,56 T. Pour toute puissance de sortie inférieure à la puissance nominale, le convertisseur fonctionne en conduction discontinue (ou démagnétisation complète).

1.2.1.1.

En limitant le champ magnétique à 0,2 T, on limite les pertes ferromagnétiques dans le noyau magnétique du transformateur.

1.2.1.2.

Le flux embrassé s'exprime par : $n_p \varphi(t) = n_p SB(t) = L_m i_p(t) \Rightarrow n_p = L_m i_p(t)/SB(t)$

On y ajoute la condition : $B = B_{max}$ lorsque I_{pm} et on en déduit :

$$n_p = \frac{L_m I_{pm}}{SB_{max}} \quad (25)$$

Numériquement, en arrondissant à l'entier supérieur :

$$n_p = 83 \text{ spires.}$$

1.2.1.3.

Comme : $n_g/n_p = 0,48$

\Rightarrow

$$n_s = 40 \text{ spires.}$$

1.2.1.4.

Théorème d'Ampère • si K est conducteur : $n_p i_p = (B/\mu_0)e + (B/\mu_0\mu_r)l$

• si D est conductrice : $n_s i_d = (B/\mu_0)e + (B/\mu_0\mu_r)l$

Comme $B = B_{max}$ lorsque $i_p(t) = I_{pm}$, on obtient :

$$e = \frac{\mu_0 \mu_r I_{pm}}{B_{max}} - \frac{l}{\mu_r} \quad (26) \text{ et numériquement : } e = 1,2 \text{ mm.}$$

L'application numérique montre que la valeur de L_m est pratiquement fixée par e , n_p et S (c'est-à-dire le nombre de spires et les dimensions de l'entrefer). Le matériau utilisé n'intervient que par μ_r dans le deuxième terme qui est négligeable dès que $\mu_r > 2000$, ce qui est le cas de nombreux matériaux ferrites.

1.2.2.

• L'énergie magnétique volumique dans l'air s'exprime par : $dW_e/d\tau = B^2_{max}/2\mu_0$

• L'énergie magnétique volumique dans le matériau s'exprime par : $dW_m/d\tau = B^2_{max}/2\mu_0\mu_r$

(si le milieu est homogène, linéaire et isotrope).

$$\Rightarrow W_e = (B^2_{max}/2\mu_0)Se \quad \text{Numériquement : } 1,85 \cdot 10^{-3} \text{ J.}$$

$$\Rightarrow W_m = (B^2_{max}/2\mu_0\mu_r)Sl \quad \text{Numériquement : } 6,77 \cdot 10^{-5} \text{ J.}$$

Pratiquement toute l'énergie est stockée dans l'entrefer.

Cette énergie est stockée à chaque période. La puissance s'exprime par :

$$P = (W_e + W_m)f = 96 \text{ W}$$

On retrouve bien la puissance de sortie nominale du convertisseur.

1.3

L'allure théorique du courant dans le condensateur C est identique à celle du hacheur élévateur. La relation (8) reste valable.

Avec $\alpha = 0,2$, on obtient :

$$C = 144 \mu\text{F}$$

(la valeur normalisée est de $150 \mu\text{F}$).

Si $I_{pm} = 2,4 \text{ A}$, $I_{dm} = 2,4/0,48 = 5 \text{ A}$. Le front raide de courant provoque, à cause de la résistance série du condensateur (ici $R_s = 0,8 \Omega$), un front raide de tension de 4 V .

La valeur théorique de la capacité calculée ici est très insuffisante. En pratique, on choisit le condensateur C en fonction de sa résistance série. Étant donnée la technologie actuelle des condensateurs chimiques, on utilise environ $1000 \mu\text{F}$ par Ampère de courant de sortie.

2.1.1.

Le schéma équivalent du montage, en l'absence d'écrêteur, est représenté ci-contre.

L'écriture de la maille d'entrée donne :

$$V_k = E - u_p - L_f \frac{di_p}{dt}$$

avec $u_p(t) = -(n_p/n_s)V_s$

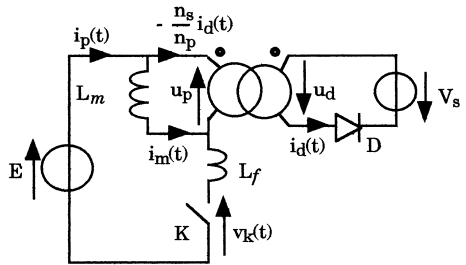
et $di_p/dt = -I_{pm}/t_d$

Finalement :

$$V_k = E + (n_p/n_s)V_s + L_f I_{pm} / t_d$$

$$\text{et } \Delta V = L_f I_{pm} / t_d$$

(27)



2.1.2.

Voir le document-réponse n° 5.a.

2.1.3.

L'énergie s'exprime par :

$$W_k = \int_{\alpha T}^{\alpha T + t_d} P dt = \int_{\alpha T}^{\alpha T + t_d} (E + (n_p/n_s)V_s + \Delta V) i_p dt = (E + (n_p/n_s)V_s + \Delta V) \int_{\alpha T}^{\alpha T + t_d} i_p dt$$

soit : $W_k = (E + (n_p/n_s)V_s + \Delta V) (I_{pm} t_d / 2) = (E + (n_p/n_s)V_s) I_{pm} t_d / 2 + \Delta V (I_{pm} t_d / 2)$ et, en utilisant la relation (27) :

$$W_k = [E + (\frac{n_p}{n_s}) V_s] I_{pm} (\frac{t_d}{2}) + \frac{1}{2} L_f I_{pm}^2$$

Interprétation :

le premier terme correspond à l'énergie perdue à chaque période pendant la commutation à l'ouverture et le deuxième terme correspond à l'énergie stockée dans l'inductance de fuite L_f qui est dissipée dans l'interrupteur K.

L'expression de la puissance se déduit de celle de l'énergie :

$$P_k = [E + (\frac{n_p}{n_s}) V_s] \frac{I_{pm} t_d}{2T} + \frac{1}{2} L_f \frac{I_{pm}^2}{T}$$

(28)

2.2.1

Entre αT et $\alpha T + t'_d$

- la diode D conduit $\Rightarrow u_p = -(n_p/n_s) V_s$,
- le courant i_k s'annule instantanément à $t = \alpha T$
 $\Rightarrow i_p(t) = i_e(t)$.

La loi de la maille donne :

$$L_f \frac{di_e}{dt} = (n_p/n_s)V_s - V_z$$

$$\Rightarrow i_e(t) = -(V_z - n_p/n_s)V_s t / L_f + I_{pm}$$

Pour $t = \alpha T + t'_d$, $i_e(t) = 0$

$$\Rightarrow t'_d = \frac{L_f I_{pm}}{V_z - (n_p/n_s)V_s}$$
(29)

2.2.2.

La durée t'_d doit être positive . Il faut donc que :

$$V_z > (n_p/n_s)V_s$$

(30)

Sans cette condition, le réseau écrêteur interviendrait avant que la diode D puisse entrer en conduction. Alors, l'énergie stockée dans l'inductance de fuite L_f mais aussi l'énergie principale stockée dans l'inductance magnétisante L_m seraient dissipées dans le réseau écrêteur. Il ne passerait aucune énergie au secondaire.

2.2.3.

La loi de la maille donne : $V_k = E + (n_p/n_s)V_s - L_f di_e/dt$ avec $di_e/dt = -I_{pm}/t_d$
 $\Rightarrow V_k = E + (n_p/n_s)V_s + L_f I_{pm}/t_d$

et donc :

$$\Delta V = L_f I_{pm}/t_d \quad (31)$$

En utilisant la relation (29), on obtient : $\Delta V = V_z - (n_p/n_s)V_s$ (32)

En comparant (27) et (31) :

$$\Delta V t_d = \Delta V' t_d' \quad (33)$$

2.2.4.

Voir le document-réponse n° 5.b.

2.2.5.

Avec ce modèle, en présence de l'écrêteur, il n'y a plus de pertes dans l'interrupteur K puisque :
 - le courant dans cet interrupteur s'annule instantanément à l'ouverture,
 - la fermeture se fait à courant nul (en limite de conduction continue).

L'énergie s'exprime par :

$$W_e = \int_{\alpha T}^{\alpha T + t_d} V_z i_e dt = V_z \int_{\alpha T}^{\alpha T + t_d} i_e dt = V_z I_{pm} t_d/2 = V_z I_{pm}^2 L_f / 2 \Delta V'$$

soit :

$$P_e = \frac{1}{2} L_f \frac{I_{pm}^2}{T} \left(\frac{V_z}{\Delta V'} \right) = \frac{1}{2} L_f \frac{I_{pm}^2}{T} \left(\frac{V_z}{V_z - (n_p/n_s)V_s} \right) \quad (34)$$

La puissance P_e qui vient d'être exprimée représente également les pertes totales en commutation.

2.3.1.

$V_z = 150 \text{ V}$; $(n_p/n_s)V_s = 99,6 \text{ V}$.

La relation (32) donne :

(33) donne :

(31) (ou (27)) donne :

$$\begin{aligned} \Delta V' &= 50 \text{ V.} \\ \Delta V &= 400 \text{ V.} \\ L_f &= 25 \mu\text{H} \end{aligned}$$

2.3.2.

La relation (28) donne :

(34) donne :

$$\begin{aligned} P_k &= 8,1 \text{ W} \\ P_e &= 10,8 \text{ W} \end{aligned}$$

On constate que la présence de l'écrêteur augmente les pertes liées à la commutation mais :

- avec l'écrêteur la tension maximale aux bornes de l'interrupteur $V_{kmax} = E + V_z = 550 \text{ V}$,
- sans écrêteur $V_{kmax} = E + (n_p/n_s)V_s + \Delta V = 900 \text{ V}$.

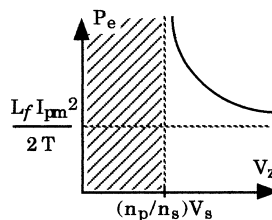
D'autre part, les pertes en conduction sont généralement plus importantes pour l'interrupteur dont la tenue en tension est la plus élevée. L'optimisation des pertes n'est pas évidente.

2.3.3.

L'allure de la puissance P_e dissipée dans l'écrêteur en fonction de la tension V_z est représentée ci-contre.

Une partie seulement de la courbe est à prendre en compte puisqu'il faut respecter la relation (30).

Il existe une valeur de V_z à partir de laquelle la puissance P_e devient inférieure à la puissance P_k dissipée sans écrêteur. Mais, en contrepartie, la contrainte en tension sur l'interrupteur augmente.



Le choix technologique de l'interrupteur résulte d'un compromis...

2.4.1.

Les diodes D_1 et D_2 vont écreter toute surtension supérieure ou égale à la valeur E de la source d'alimentation. Ce sont des diodes de "clamping".

2.4.2.

Ce sont les deux diodes de "clamping" et la source de tension E qui servent de réseau écreteur. La tension E doit donc vérifier la relation (30). Il faut que :

$$(n_p/n_s)V_s < E$$

Dans le cas contraire, les diodes D_1 et D_2 se mettraient en conduction à la place de la diode D et renverraient l'énergie stockée dans l'élément magnétique vers la source d'entrée.

2.4.3.

Dans cette structure, le réseau écreteur est inutile. Le rendement du convertisseur sera meilleur puisque l'énergie stockée dans l'inductance de fuite L_f n'est plus dissipée dans l'écreteur.

Il faut utiliser deux interrupteurs mais, à l'état bloqué, la tension à leurs bornes ne peut pas dépasser la valeur E (ici 400 V).

Troisième partie : Etude d'une structure de convertisseur Fly-back à résonance

1.1.

Lorsque l'interrupteur K est passant, on a :

$E = L di_L/dt + v_C$ et $i_L = C dv_C/dt$, soit $E = LC d^2 v_C/dt^2 + v_C$ et, avec les notations de l'énoncé :

$$E = LC d^2 V(t)/dt^2 + V(t)$$

En posant $\Omega^2 = 1/LC$, la solution est de la forme :

$$V(t) = E + A \cos(\Omega t + \varphi)$$

A et φ sont les constantes d'intégration.

On en déduit que $i_L(t) = -AC\Omega \sin(\Omega t + \varphi)$ soit, avec les notations de l'énoncé :

$$v_I(t) = -A \sin(\Omega t + \varphi)$$

La constante d'intégration A s'exprime par : $A = [(V_0 - E)^2 + (L/C)I_{L0}^2]^{1/2}$ (résultat non demandé).

1.2.

En éliminant t , on obtient :

$$(V(t) - E)^2 + (v_I(t))^2 = A^2$$

Dans le plan (V, v_I) - l'équation est celle d'un cercle de centre $(E, 0)$. $v_C = E$ et $i_L = 0$ correspondent au régime forcé de ce circuit.

- L'angle θ est égal à Ωt . La durée t du régime oscillatoire décrit par un arc de cercle est proportionnelle à θ .

2.1.1.

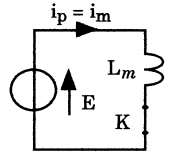
- $0 < t < t_1$

Le schéma équivalent est représenté ci-contre. Il y a une évolution linéaire du courant $i_m(t)$:

$$i_m(t) = i_p(t) = Et/L_m \quad (36)$$

A l'instant $t = t_1$: $i_m(t_1) = I_{pm} = Et_1/L_m$ Comme $V_k = 0$, ce n'est pas une phase oscillatoire.

Le point M se déplace sur l'axe vertical. Il évolue de 0 à $M_1[0, I_{pm}(L_m/C_r)^{1/2}]$.



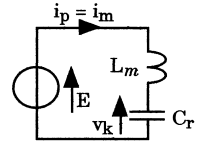
2.1.2.

- $t_1 < t < t_2$: Le schéma équivalent montre qu'il s'agit d'une phase oscillatoire.

Le point M décrit un arc de cercle de centre $\phi(E, 0)$.

L'arc de cercle débute en M_1 et se termine au point M_2 correspondant à la mise en conduction de la diode D. Alors :

$$v_k(t_2) = E + (n_p/n_s)V_s \quad (37)$$



2.1.3.

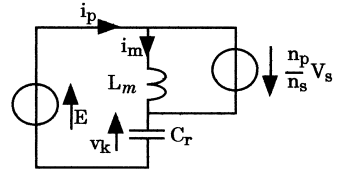
- $t_2 < t < t_3$: la diode D conduit.

La tension ramenée au primaire du transformateur est égale à $(n_p/n_s)V_s$.

On a :

$$v_k = E + (n_p/n_s)V_s = \text{constante,}$$

$$i_p = Cdv_k/dt = 0.$$



Donc : $L_m di_m/dt = - (n_p/n_s)V_s$ et $i_m(t) = - (n_p/n_s)V_s t/L_m + \text{constante}$.

$$i_p(t) = 0 \text{ et } i_m(t) \text{ décroît linéairement.}$$

Le point M décrit une portion de la droite verticale d'équation $V = E + (n_p/n_s)V_s$ de M_2 jusqu'en $M_3[E + (n_p/n_s)V_s, 0]$.

2.1.4.

- $t_3 < t < t_4$: la diode D est bloquée. On retrouve le schéma équivalent du paragraphe 2.1.2.

Le point M décrit un arc de cercle de centre $(E, 0)$ qui part de M_3 et finit au point M_4 d'intersection du cercle avec l'axe vertical.

On constate que, suivant la position de M_3 , le cercle peut ne pas couper cet axe.

A l'instant $t = t_4$, la tension v_k tend à être négative. La diode D_r entre en conduction.

On est ramené au schéma équivalent du paragraphe 2.1.1.

2.1.5.

Au-delà de l'instant t_4 , la diode D_r conduit et le courant i_p est négatif et augmente linéairement. Il faut réamorcer l'interrupteur K avant que le courant i_p s'annule. Une nouvelle période peut alors s'enchaîner.

2.2.1.

Voir le document-réponse n°6.

2.2.2.

Voir le document-réponse n°7.

2.2.3.

• Il y a stockage d'énergie dans l'inductance de magnétisation L_m entre les instants 0 et t_2 . On peut remarquer que la phase oscillatoire entre les instants t_1 et t_2 permet d'accumuler puis de reperdre un peu d'énergie puisque le courant magnétisant augmente, passe par un maximum et décroît.

• Il y a transfert d'énergie vers le secondaire entre les instants t_2 et t_3 quand la diode D conduit.

3.1.

On exploite le diagramme du document-réponse n°7. On y trouve que :

$$V_{km} = E + (n_p/n_s)V_s \quad (38)$$

D'autre part, l'intensité I_{pmax} correspond au segment " $\emptyset M_1$ " (rayon du premier arc de cercle) :

$$I_{pmax} = [I_{pm}^2 + (\frac{C_r}{L_m}) E^2]^{1/2} \quad (39)$$

3.2.

Pour qu'il y ait transfert d'énergie, il faut que la diode D puisse conduire, c'est à dire que la tension v_k doit pouvoir atteindre la valeur : $E + (n_p/n_s)V_s$. Comme il s'agit d'un régime oscillatoire, la tension v_k dépend des conditions initiales sur le courant $i_m(t)$. Sur le document-réponse n°7, on constate que si le point M_1 est trop bas, le cercle de centre \emptyset et de rayon $\emptyset M_1$ ne peut pas couper la droite verticale d'équation : $v_k(t) = E + (n_p/n_s)V_s$. Il y a deux cas :

• si $(n_p/n_s)V_s < E$, il y aura transfert d'énergie quel que soit la valeur I_{pm} .

• si $(n_p/n_s)V_s > E$, il faut que : $I_{pm}^2 (\frac{L_m}{C_r}) + E^2 \geq [(\frac{n_s}{n_p}) V_s]^2 \quad (40)$

3.3.

Il faut que la diode D_r puisse entrer en conduction. L'arc de cercle de centre \emptyset qui part du point M_3 doit pouvoir couper l'axe vertical au point M_4 . Il faut que :

$$\frac{n_s}{n_p} \leq \frac{V_s}{E} \quad (41)$$

Alors, on ne peut pas se trouver dans la situation du § 3.2. pour laquelle il y aurait transfert d'énergie quel que soit le courant I_{pm} .

3.4.1.

Voir le document-réponse n° 8 (le plan de phase est symétrique).

Durée des phases linéaires.

- La durée t_1 est obtenue par : $t_1 = L_m I_{pm} / E$.
- La durée $t_3 - t_2$ est identique à t_1 : $t_3 - t_2 = L_m I_{pm} / E$.

Durée des phases oscillantes.

• La durée $t_2 - t_1$ s'exprime par :

$$t_2 - t_1 = 2\theta_0 (L_m C_r)^{1/2} \text{ avec } \theta_0 \text{ défini par : } \tan\theta_0 = \frac{E}{I_{pm} (\frac{L_m}{C_r})^{1/2}}$$

Donc : $t_2 - t_1 = 2(L_m C_r)^{1/2} \text{Arctan} [\frac{E}{I_{pm} (\frac{L_m}{C_r})^{1/2}}]$

- La durée $t_4 - t_3$ s'exprime par : $t_4 - t_3 = \pi (L_m C_r)^{1/2}$

La période T s'exprime par :

$$T = 2L_m I_{pm}/E + \pi (L_m C_r)^{1/2} + 2(L_m C_r)^{1/2} \text{Arctan}\left[\frac{E}{I_{pm} \left(\frac{L_m}{C_r}\right)^{1/2}}\right]$$

Numériquement, on obtient :

$$T = 10,9 \mu s.$$

3.4.2.

L'énergie transférée vers la sortie entre les instants t_2 et t_3 correspond à celle qui est stockée dans l'inductance magnétisante L_m à l'instant t_2 soit : $(1/2) L_m I_{pm}^2$.

La puissance nominale de sortie s'exprime par :

$$P = (1/2) L_m I_{pm}^2 (1/T) \text{ soit, numériquement : } P = 176 \text{ W.}$$

Comparons cette structure à celle du convertisseur fly-back classique étudié auparavant. On a utilisé la même inductance magnétisante et on fonctionne avec la même tension d'entrée et le même courant coupé par l'interrupteur. Le fly-back en mode résonnant peut fournir en sortie une puissance de 176 W (au lieu de 96 W). Ce résultat est normal puisque l'énergie stockée à chaque période est la même dans les deux cas mais que, en mode résonnant, la fréquence est quasiment deux fois plus élevée (91,7 kHz au lieu de 50 kHz). La contrainte en tension sur l'interrupteur est ici de 800 V.

3.4.3.

Voir document-réponse n°8.

Dans le fonctionnement limite à vide, les phases linéaires sont inexistantes. La période théorique est celle du circuit oscillant sans amortissement soit :

$$T_{\text{à vide}} = 2\pi (L_m C_r)^{1/2} = 5,2 \mu s.$$

La fréquence du convertisseur varie, théoriquement, entre les limites suivantes :

$$91,7 \text{ kHz} < f < 192 \text{ kHz}$$

Quatrième Partie :

Principe d'une structure de convertisseur DC / AC dérivée du montage fly-back

1.

Il y a une erreur sur la position des points de repère des bobines à la figure 14.

On applique le théorème d'Ampère sur un contour passant par la colonne centrale et la colonne 1 :

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = n_p i_p + n_s i_{D1}$$

De même, sur un contour passant par la colonne centrale et la colonne 2 :

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = n_p i_p + n_s i_{D2}$$

Les diodes D_1 et D_2 conduisent quand l'interrupteur K est ouvert. Alors : $i_p = 0 \Rightarrow i_{D1} = i_{D2}$

Si l'interrupteur K_2 est fermé (et si le court-circuit réalisé est parfait), toute l'énergie stockée dans l'entrefer entre 0 et αT_d est récupérée en sortie via la diode D_1 et l'enroulement secondaire 1.

2.

En limite de conduction continue, la relation (23), établie pour le convertisseur fly-back, est valable. On a donc :

$$\frac{v_{af}}{E} = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} \frac{n_s}{n_p}$$

ici, au cours d'une période T_d , $v_{af}(t) \approx v_s(t) \Rightarrow$

$$\frac{V_s \sqrt{2} \sin \omega t}{E} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \frac{n_s}{n_p} \Rightarrow \frac{\alpha}{(1-\alpha)} = A \sin \omega t \Rightarrow \alpha = \frac{A \sin \omega t}{1 + A \sin \omega t} \quad \text{avec } A = \frac{n_s}{n_p} \frac{V_s \sqrt{2}}{E} \quad (42)$$

3.

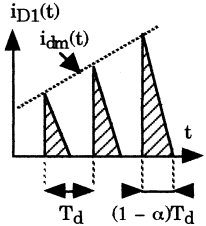
La valeur moyenne de $i_d(t)$ sur une période T_d est égale à $i_s(t)$ et :

$$i_s(t) = v_s(t) / R_{ch}$$

Comme le montre la figure ci-contre :

$$i_s(t) = (1/2)(1-\alpha) i_{dm}(t) = V_s \sqrt{2} \sin \omega t / R_{ch}$$

Finalement :
$$i_{dm}(t) = \frac{2\sqrt{2}V_s n_p \sin \omega t (1+A \sin \omega t)}{R_{ch}} \quad (43)$$



D'autre part, à l'ouverture de l'interrupteur K, à chaque période de découpage : $n_s i_d = n_p i_p$.

On a donc : $i_{pm}(t) = (n_s/n_p) i_{dm}(t)$ et
$$i_{pm}(t) = \frac{2\sqrt{2}V_s n_s}{R_{ch} n_p} \sin \omega t (1+A \sin \omega t) \quad (44)$$

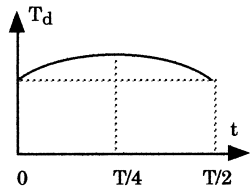
4.

Au primaire du convertisseur, on a : $E = L_m di_p/dt \Rightarrow i_p(t) = (E/L_m)t$ et $i_{pm} = \alpha(E/L_m)T_d$
 $\Rightarrow T_d(t) = (L_m/E)[i_{pm}(t)/\alpha(t)]$ et, finalement :

$$T_d(t) = \frac{2L_m}{R_{ch}} \left(\frac{n_s}{n_p}\right)^2 (1+A \sin \omega t)^2 \quad (45)$$

L'allure de $T_d(t)$ est reproduite ci-contre.

On remarque que lorsque la tension sinusoïdale de sortie est maximale, autour de $T/4$, la période de découpage T_d est maximale ainsi que le courant coupé par l'interrupteur.



5.1.

Aux bornes de l'interrupteur K : $v_k = E + (n_p/n_s)V_s$. Dans le pire des cas :

$$v_{kmax} = E + (n_p/n_s)\sqrt{2}V_s \quad (46)$$

Pour calculer le rapport n_s/n_p , il faut connaître la valeur numérique de v_{kmax} . Or, cette valeur n'est donnée qu'en 5.2.

En prenant $v_{kmax} = 100$ V, on en déduit : $n_s/n_p = 6,25$. On choisit ici l'entier le plus proche et donc :

$$n_s/n_p = 6$$

5.2.

T_d est maximum à l'instant $t = T/4$, c'est à dire pour $\omega T/4 = \pi/2$. On utilise la relation (45) dans ce cas particulier ($\sin \omega T/4 = 1$).

$$T_{dm} = \frac{2L_m}{R_{ch}} \left(\frac{n_s}{n_p}\right)^2 (1+A)^2 \Rightarrow L_m = \frac{T_{dm} R_{ch}}{2} \left(\frac{n_p}{n_s}\right)^2 \frac{1}{(1+A)^2}$$

L'application numérique donne : $L_m = 78 \mu H$.

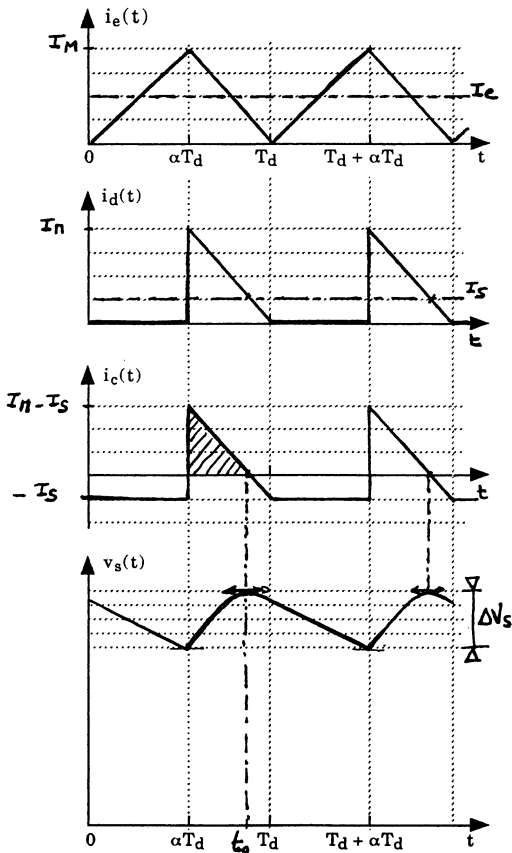
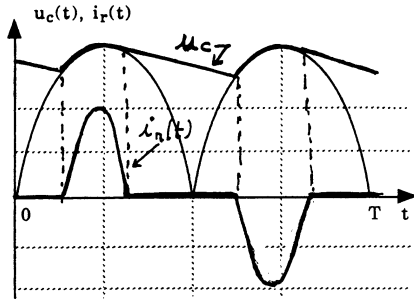
5.3.

C'est pour $t = T/4$, quand $\sin\omega t = 1$, que le courant coupé est maximum.

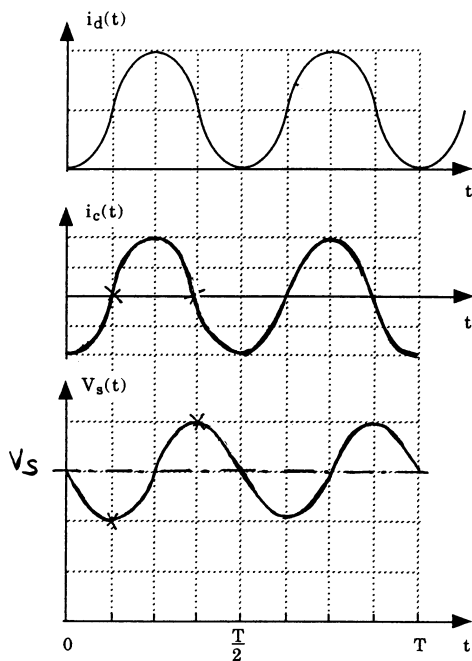
On a :

$$I_{\text{pm max}} = \frac{2\sqrt{2}V_s}{R_{\text{ch}}} \frac{n_s}{n_p} (1+A) = 16 \text{ A.}$$
$$I_{\text{dm max}} = \frac{2\sqrt{2}V_s}{R_{\text{ch}}} (1+A) = 2,56 \text{ A.}$$

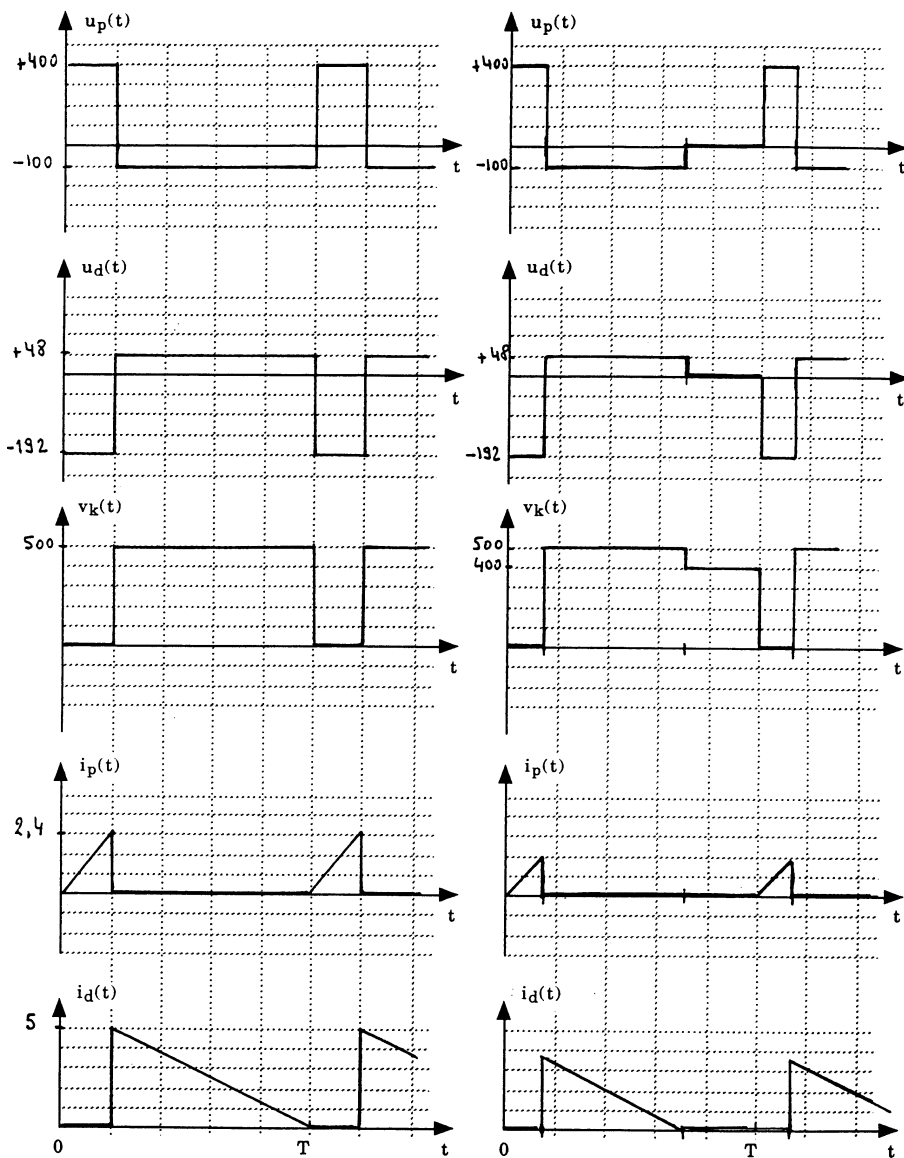
Document-réponse n° 1



Document-réponse n° 2



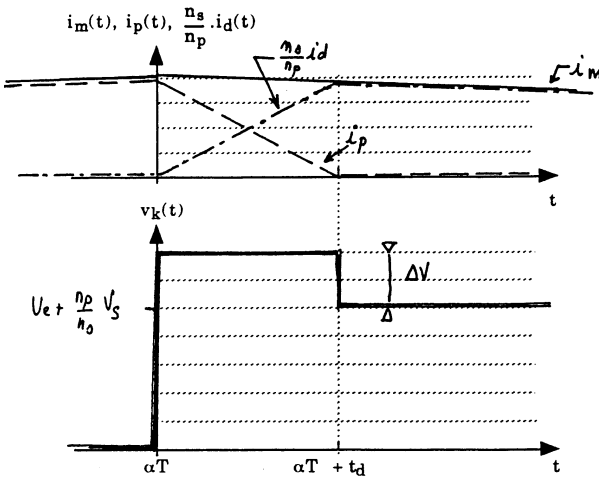
Document-réponse n° 3



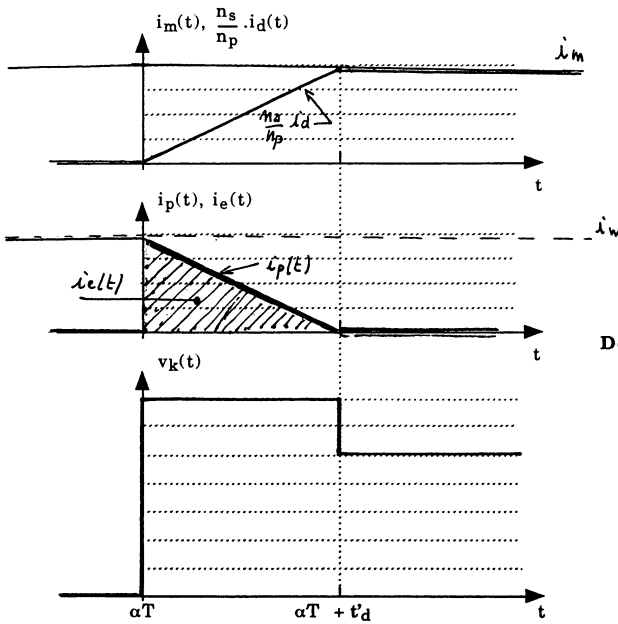
Courbes à puissance nominale

Courbes à demi puissance

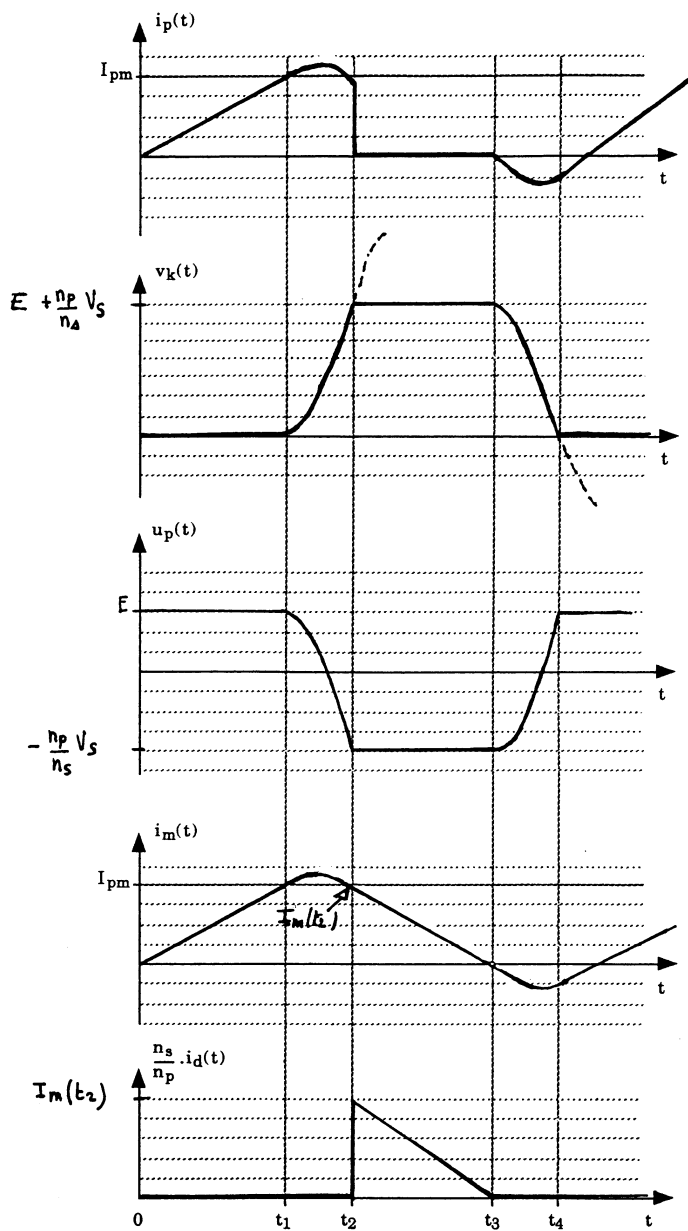
Document-réponse n° 4



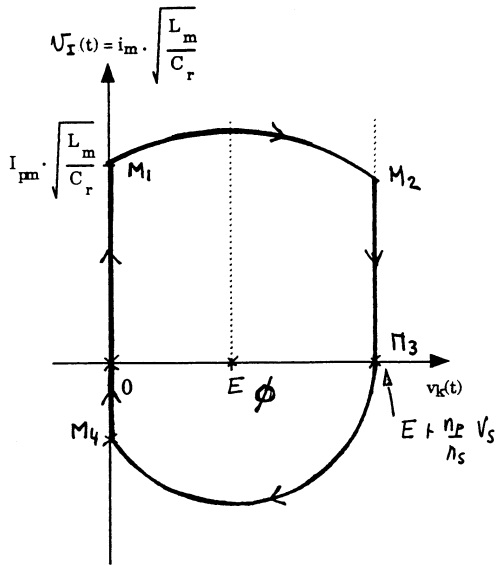
Document-réponse n° 5.a



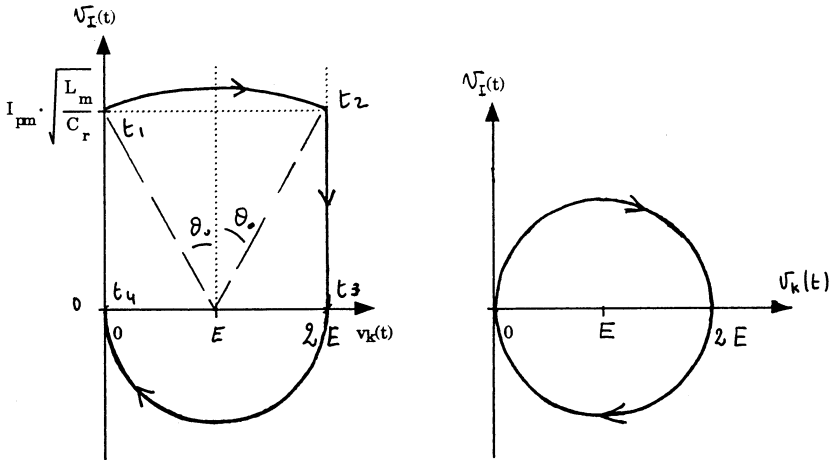
Document-réponse n° 5.b



Document-réponse n° 6



Document-réponse n° 7



Document-réponse n° 8



Bons de commande

BONS DE COMMANDE – BONS DE COMMANDE – BONS DE COMMANDE

Publications hors abonnement et numéros anciens

	Année ou numéro	Prix unitaire	Nombre d'exem- plaires	Prix total
BROCHURES DOCUMENTAIRES ET PÉDAGOGIQUES				
♦ Nouveaux programmes du cycle central 5 ^e - 4 ^e	1997	100 F × =
♦ Nouveaux programmes de 3 ^e	1999	110 F × =
♦ Données sur les principaux produits chimiques... (Jean-Louis VIGNES et al.) :				
– L'ouvrage	1997	150 F × =
– La disquette		100 F × =
♦ L'adhérence des solides (Michel BARQUINS)	1997	80 F × =
CONCOURS : CAPES ET AGRÉGATION				
	1995	1996	1997	1998
♦ Énoncés	63 F		67 F	72 F
♦ Solutions	80 F	85 F	90 F	93 F
	1999	2000	2001	
♦ Énoncés	79 F	81 F	80 F	
♦ Solutions	96 F	98,39 F		
CONCOURS DES GRANDES ÉCOLES				
♦ 1998 (235 F), 1999 (240 F), 2000 (245 F), 2001 (249,26 F)		 × =
BREVETS DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR				
♦ 1996 (92 F), 1997 (94 F), 1998 (80 F), <i>Sur le serveur : 1999</i>		 × =
BACCALAURÉATS TECHNOLOGIQUES				
♦ <i>Sur le serveur : 1999, 2000</i>		 × =

Serveur de l'UdP :

<http://www.cnam.fr/hebergement/udp/>

BONS DE COMMANDE – BONS DE COMMANDE – BONS DE COMMANDE

	Année ou numéro	Prix unitaire	Nombre d'exem- plaires	Prix total
BULLETINS				
◆ Bulletin spécial de chimie	717 sup	75 F × =
◆ Tables des matières quinquennales : 641 (jusqu'à 1980) - 795 (1) (1991-1995)	40 F × =
◆ Autres bulletins : 740 à 743, 746, 748, 749, 757, 758, 764, 767 à 769, 771, 773 à 785, 787, 788, 790-791*, 792 à 795, 797*, 798 à 805, 806*, 807 à 820, 821*, 822 à 827, 829*, 830 à 837	40 F × = = = =
NUMÉROS SPÉCIAUX				
◆ « Calculette »	789 (2)	40 F × =
◆ « Matériaux » (numéro double)	790-791	70 F × =
◆ « 90 ans »	797	80 F × =
◆ « La Main à la pâte »	806	40 F × =
◆ « Le génie des procédés »	821	40 F × =
◆ « La sécurité au laboratoire de chimie »	829	40 F × =
◆ « Enseignement supérieur » : 1995 à 2000	40 F × =
TOTAUX		 = F
Supplément pour expédition à l'étranger (le volume : 6 F)				+
MONTANT DE LA COMMANDE (Titre de paiement ci-joint à l'ordre de l'UDP)				=

* Numéro spécial (voir tarif dans la rubrique « Numéros spéciaux »).

		Prix unitaire	Quantité	Prix total
BASE DE DONNÉES « BUPDOC »				
◆ Un cédérom comprenant logiciel d'interrogation base de références, base de textes (1990-1999)	code INF-L49	250 F × = F

BONS DE COMMANDE – BONS DE COMMANDE – BONS DE COMMANDE

SUR LE SERVEUR

<http://www.cnam.fr/hebergement/udp/>

Les énoncés des sujets des baccalauréats technologiques et des brevets de technicien et de technicien supérieur sont maintenant disponibles sur le serveur sous forme de « documents à coût partagé »⁽¹⁾. Il n'est plus proposé de version papier.

- (1) Documents à coûts partagés : envoyer à l'UdP un chèque forfaitaire de 20 à 50 F selon le nombre de sujets que vous téléchargez (de 1 à 5 et plus) avec la mention « Téléchargement serveur ».

PAIEMENT

Envoyer le bon de commande et le titre de paiement à :

UNION DES PHYSICIENS

44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06

Adresse d'expédition (à remplir en majuscules)

M. Mme Mlle NOM : Prénom :

Adresse :

Code postal : Localité :

Pays :

Ci-joint mon règlement de F par chèque bancaire chèque postal

Le Directeur de la publication : Monique Schwob

Réalisation : Union des Physiciens

Imprimé en France par Graphic Express - 92240 Malakoff

Numéro commission paritaire : 62628 - Dépôt légal : 4^e trimestre 2001