

**Sommaire des pages spéciales du n° 857
(Octobre 2003)**

AGRÉGATION DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours externe)

Option physique	
– Composition de physique	3
– Composition de chimie	27
– Problème de physique	39
Option chimie	
– Composition de chimie	83
– Composition de physique	91
– Problème de chimie	95
Option physique et électricité appliquées	
– Composition de physique	131
– Composition d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique.....	151
– Problème d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique	163

AGRÉGATION DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours interne)

Composition sur la physique et le traitement automatisé de l'information.....	189
Composition avec exercices d'application	
– Option physique et chimie.....	199
– Option physique appliquée	217

CAPES DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours externe)

Section physique et chimie	
– Composition de physique avec applications	237
– Composition de chimie avec applications.....	243
Section physique et électricité appliquée	
– Composition de physique avec applications	257
– Composition d'électronique - électrotechnique avec applications.....	267

CAPES DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours interne)

Section physique et chimie	
– Épreuve de physique et chimie.....	277

CA/PLP (Concours externe)

Section mathématiques - sciences physiques	
– Composition de physique-chimie (énoncé et corrigé)	287

CA/PLP (Concours interne)

Section mathématiques - sciences physiques	
– Composition de physique-chimie (énoncé et corrigé)	305

Le sommaire du n° 857 est en deuxième et troisième de couverture.

ISSN 0366-3876

PAGES SPÉCIALES

du n° 857

Octobre 2003

publication mensuelle

97^e année

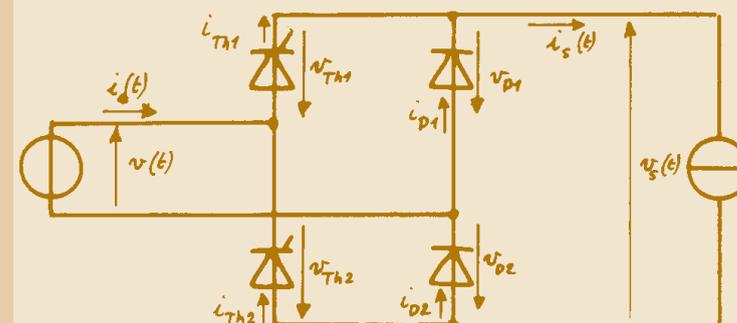
Octobre 2003

PAGES SPÉCIALES DU N° 857 : Agrégations et Capes 2002 : les corrigés

Le Bup

Physique

Chimie



Agrégations et Capes 2002 Les corrigés



UNION DES PROFESSEURS DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE

44, bd Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06

<http://www.cnam.fr/hebergement/udp/>

Sommaire du n° 857 (Octobre 2003)

ARTICLES GÉNÉRAUX

La lumière polarisée dans la nature (Roland JOUANISSON).....	1259
L'hydrométallurgie (Jean-Louis VIGNES et Yves JEHANNE)	1281
À propos de l'élément 118 (Alfred MATHIS).....	1301
Les équations différentielles en terminale scientifique.....	1303
– Activité physique n° 3 (Nicole PITHON).....	1304
– Activité physique et mathématiques n° 4 (Jacques PERIES et Jacques SALLES).....	1311
– Activité mathématiques n° 5 (Rémy COSTE).....	1327
– Errata.....	1332

ACTUALITÉS PÉDAGOGIQUES

Travaux personnels encadrés	
– TPE, utile ou non ? (Jean-François LE MARÉCHAL)	1335
Travaux pratiques	
– Le TP « Nasa » (Pierre LE FUR)	1341
– Contributions à une réflexion sur les opérations unitaires en synthèse organique : la recristallisation (Groupe d'enseignants de lycées).....	1349
Internet	
– Des souris et des profs... (Thibaut PLISSON)	1359

Suite du sommaire en troisième de couverture

*Le sommaire des pages spéciales du n° 857
est en quatrième de couverture.*

VIE DE L'ASSOCIATION

Activités de l'UdPPC	
– L'UdPPC au fil des jours.....	1363
– Seuils de dédoublement en travaux pratiques de physique et chimie dans la voie générale du lycée	1365
– Les travaux personnels encadrés et l'évaluation des capacités expérimentales.....	1366

INFORMATIONS - LIVRES ET LOGICIELS

Paru au B.O. (Jean WINTHER)	1369
Informations	
– Fête de la Science	1372
– Exposition : François ARAGO et l'Observatoire de Paris	1373
– Colloque : Mesure de température	1374
– L'Actualité Chimique	1375
– Compte-rendu du 94 ^e congrès MNU.....	1377
Parus ou à paraître	1378
Les bons de commande	1385

L'UNION DES PHYSICIENS

Adhésion et abonnement pour l'année 2004	Encart cartonné
Renseignements divers	I à XIV
Publicités	XV à XXII

Union des professeurs de physique et de chimie

MEMBRES D'HONNEUR

M. Michel BOYER

Professeur à l'Université Paris VI
Président des Olympiades nationales de la chimie.

M. Claude COHEN-TANNOUJJI

Membre de l'Académie des sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Jean-Marie LEHN

Membre de l'Académie des sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Georges CHARPAK

Membre de l'Académie des sciences
Chercheur au CERN
Prix Nobel.

M. Pierre-Gilles de GENNES

Membre de l'Académie des sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Pierre LÉNA

Membre de l'Académie des sciences
Professeur à l'Université Paris VII.

PRÉSIDENTS D'HONNEUR

F. BLAIN, A. DURUPHTY, J.-P. FOULON, J. GATECEL, J. MAUREL, J. TINNÈS, A. TOUREN.

MEMBRES DU CONSEIL

Membres de droit

F. BLAIN, A. DURUPHTY, J.-P. FOULON, J. GATECEL, J. MAUREL, J. TINNÈS, A. TOUREN.

Les présidents des sections académiques font, de droit, partie du Conseil de l'Union des professeurs de physique et de chimie (UdPPC) (voir pages ci-après).

Membres élus (renouvelable par tiers chaque année)

2001 : J. BOULOUMIÉ (élu 2003), M. BOURGAREL, D. LAUNER (élu 2003), J. MARÉCHÉ, P. NÉEL (élu 2003), G. REYMANN, J.-L. RICHTER, A. SEFFAR, J. VINCE (élu 2003).

2002 : M. BASUYAUX (élu 2003), G. BAUDRANT, G. DUPUIS, S. GRUNEISEN, O. LEFEBVRE, M. RUFFENACH, G. TORCHET, J. WINTHER.

2003 : G. BOUYRIE, R. CARPENTIER, N. CHEYMOL, D. DUCOURANT, B. HEUZÉ, A. LEURIDAN, M.-A. MARTENS, G. SERRA.

Le bureau national

Siège social

Union des professeurs de physique et de chimie - 44, bd Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06.
Aucune permanence n'est assurée à cette adresse.

Secrétariat administratif (adhésions et abonnements)

Tél. : 01 43 25 61 53 (10 h - 12 h et 14 h - 16 h sauf mercredi après-midi)

Fax : 01 43 25 07 48 - Mél. : udp.bup@udp-bup.org

Serveur administratif (adhésions et abonnements) : <http://www.udp-bup.org>

Secrétariat général de l'association

Mél. : udp@club-internet.fr - Serveur : <http://www.cnam.fr/hebergement/udp/>

Secrétariat de la rédaction du bulletin

Mél. : bup.secretaire@club-internet.fr



Présidente

Madeleine SONNEVILLE - 29, rue Edmond About - 92350 LE PLESSIS-ROBINSON -

Tél. : 01 43 50 79 12 - madeleine.sonneville@planetis.com

Questions générales, relations internationales.

Vice-président(e)s

Bernard CIRoux - 2 bis, rue Paul Claudel - 71530 CHAMPFORGEUIL -

Tél. : 03 85 41 43 30 - bernard.ciroux@ac-dijon.fr

Laboratoires - Enseignement technique : baccalauréats technologiques STL - Lycées professionnels.

Rosine FANGUET - 13, allée de la Butte - 13500 MARTIGUES -

Tél. et Fax : 04 42 42 11 74 - rosine.fanguet@wanadoo.fr

Chimie.

Marie-Françoise KARATCHENTZEFF - 30 bis, rue Elisée-Reclus - 91120 PALAISEAU -

Tél. : 01 60 10 13 92 - mfkarat@club-internet.fr

Lycées.

Vincent MAS - 10, square du Vexin - L'orée du Lac - 78200 MANTES-LA-JOLIE -

Tél. : 01 30 94 64 43 - vincent.mas@ac-versailles.fr

Collèges - Relations avec le primaire.

Stéphane OLIVIER - 26, rue des Cordelières - 75013 PARIS -

Tél. : 01 45 35 75 53 - solivier@9online.fr

Physique - Liaisons secondaire supérieur.

Bulletin de l'Union des professeurs de physique et de chimie

Directeur de la publication

Madeleine SONNEVILLE - 29, rue Edmond About - 92350 LE PLESSIS-ROBINSON -

Tél. : 01 43 50 79 12 - madeleine.sonneville@planetis.com

Rédacteur en chef

André GILLES - Sauveterre - 31320 AUREVILLE -

Tél. : 05 61 76 76 25 - Fax : 05 61 76 76 24 - andre.gilles@infonie.fr

Rédacteur en chef adjoint

Jean-Pierre DAVAL - 5, rue Jean Jaurès - 92370 CHAVILLE -

Tél. : 01 47 50 34 46.

Trésorier

François VILLEDARY - 10, rue de la Bergerie - 91300 MASSY -
Tél. : 01 69 30 47 43 - Villedary.Fy@wanadoo.fr

Secrétaire général

Gilles GALLIN-MARTEL - 24, rue Alfred de Musset - 74600 SEYNOD -
Tél. : 04 50 69 57 15 - gallin-martel.gilles@wanadoo.fr
Relations avec les sections académiques.

Secrétaires générales adjointes

Edith PIGANEAU - 58, rue du Rôle - 91800 BRUNOY -
Tél. et Fax : 01 69 43 72 81 - edith@club-internet.fr
Lycées.

Monique SCHWOB - 39, rue de la Prévôté - 57950 MONTIGNY-LÈS-METZ -
Tél. : 03 87 38 02 59 - monique.schwob@wanadoo.fr
Secrétariat de l'association - Serveurs et bases de données - Relations avec les associations étrangères.

Membres

Serge BETTON - Lendrevie-Basse - 81600 BRENS -
Tél. : 05 63 57 36 07 - sbetton@wanadoo.fr
Collèges.

Jean-Marie BIAU - 3, allée Val Prévert - 69400 LIMAS -
Tél. : 04 74 65 37 50 - jean-marie.biau@ac-lyon.fr
Enseignement technique : baccalauréats technologiques STI - BTS.

Michèle GOUÉDARD - 34 bis, rue du Docteur Le Savoureur - 92290 CHATENAY-MALABRY -
Tél. : 01 46 60 08 33 - Gerard.GOUEDARD@wanadoo.fr
Relations extérieures chimie.

Micheline IZBICKI - 50, chemin de Buglise - 76290 MONTVILLIERS
Tél. : 02 35 30 50 27 - Miizbicki@aol.com
Olympiades de chimie - Sécurité en chimie.

Jean-Charles JACQUEMIN - 2, boulevard Magenta - 75010 PARIS -
Tél. : 01 42 06 02 37 - jc.jacquemin@noos.fr
Enseignement technique : baccalauréats technologiques STI - Lycées.

Olivier KEMPF - 15, rue Louis Flamant - 02400 CHÂTEAU-THIERRY -
Tél. : 03 23 69 28 30 - okempf@club-internet.fr
Serveurs et bases de données.

Cathy PARIS - 11, rue Matabiau - 31000 TOULOUSE -
Tél. : 05 61 62 22 79 - cathy.paris@ac-toulouse.fr
Collèges.

Michel MÉTROT - 183, rue François Perrin - 87000 LIMOGES -
Tél. : 05 55 49 03 16 - michelmetrot@limousin.iufm.fr
IUFM - Lycées.

Chargé(e)s de mission auprès du bureau

Jacques BOULOUMIÉ - 17, hameau de la Caravelle - 91650 BREUILLET -
Tél. : 01 64 58 43 34 - Fax : 01 69 94 09 61 - bouloumi@club-internet.fr
Chargé de mission auprès du trésorier.

Huguette GRIMAUD - Aurore E - 134, rue Curat - 34090 MONTPELLIER
Tél. et Fax : 04 67 72 80 24 - huguette.grimaud@wanadoo.fr
Chargée de mission aux olympiades de physique.

Élyane YACINE - 4, rue des Bouleaux - 63100 CLERMONT-FERRAND
Tél. : 04 73 30 85 07 - yacine@wanadoo.fr
Chargée de mission à la publicité.

Les olympiades

Olympiades de physique

Huguette GRIMAUD - Aurore E - 134, rue Curat - 34090 MONTPELLIER

Tél. et Fax : 04 67 72 80 24 - huguette.grimaud@wanadoo.fr

Site des olympiades de physique : <http://olympiades-physique.in2p3.fr>

Olympiades nationales de la chimie

Micheline IZBICKI - 50, chemin de Buglise - 76290 MONTIVILLIERS

Tél. : 02 35 30 50 27 - miizbicki@aol.com

Site des olympiades nationales de la chimie : <http://www.sfc.fr/Olympiades/olympiades.htm>

Les commissions de l'UdPPC

« Base de données - BUPDOC »

Responsable : Monique SCHWOB.

« Formation des maîtres - IUFM »

Responsable : Michel MÉTROT.

« Réforme des lycées »

Responsable : Marie-Françoise KARATCHENTZEFF.

« Sécurité en chimie »

Responsable : Micheline IZBICKI.

Le serveur de l'UdPPC

<http://www.cnam.fr/hebergement/udp/>

Relations avec le serveur

Rosine FANGUET

rosine.fanguet@wanadoo.fr

Monique SCHWOB

monique.schwob@wanadoo.fr

Administrateur

Olivier KEMPF

okempf@club-internet.fr

Le Bup

Comité de rédaction

Rédacteur en chef : André GILLES.

Rédacteur en chef adjoint : Jean-Pierre DAVAL.

Comité de rédaction : L. DETTWILLER, G. DUPUIS, A. GILLES, J. JOURDAIN, D. LAUNER, F. LAVERNHE, E. PIGANEAU, F. ROGER, J. TINNÈS, B. VELAY, J. WINTHER.

Publicité

Elyane YACINE - 4, rue des Bouleaux - 63100 CLERMONT-FERRAND -

Tél. : 04 73 30 85 07 - yacine@wanadoo.fr

Secrétariat de la rédaction du bulletin

Mél. : bup.secretaire@club-internet.fr

Publication des articles

Tout article ou communication doit être adressé en **triple exemplaires** à : Union des professeurs de physique et de chimie - A l'attention du rédacteur en chef - 44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06. Dès réception l'expéditeur en est avisé (ne pas oublier de fournir une adresse postale complète, et si possible une adresse mél et un numéro de téléphone).

Les manuscrits sont ensuite soumis, par le comité de rédaction, au comité de lecture pour avis. L'avis du comité de lecture est strictement anonyme. Le comité de rédaction donne ou refuse son accord à la publication ou bien demande des modifications. L'auteur en est immédiatement avisé. En cas d'acceptation, **aucun engagement sur la date de publication ne peut être fourni** ; les manuscrits acceptés ne sont pas rendus. En cas de refus, les manuscrits sont renvoyés à l'auteur.

L'auteur reçoit les épreuves de son article (éventuellement par mél) aux fins de vérifier sa conformité à l'original et s'engage à renvoyer les épreuves corrigées dans les huit jours suivant leur réception. Après publication, il reçoit dix tirés à part sur demande et un fichier pdf de l'article sous sa forme définitive.

Recommandations aux auteurs

Tout article doit impérativement être accompagné d'un résumé de quelques lignes et de cinq à huit mots-clés.

Joindre le fichier informatique correspondant, sur disquette ou cédérom, dans un format usuel (indiquer le logiciel utilisé et le numéro de version).

Si l'article comporte **des figures** :

- ◆ Celles-ci seront insérées dans le texte ou leur position repérée clairement.
- ◆ Si les figures n'existent que sous forme papier, elles doivent être tracées avec soin sur feuille séparée (éviter le calque). Fournir des originaux, éviter les photocopies ; en cas de nécessité fournir des photocopies laser d'excellente qualité.
- ◆ Si les figures existent sous forme numérique :
 - l'épaisseur des traits, dans le cas de graphiques, doit être au minimum de 0,5 point ;
 - pour des images au trait, la définition doit être au minimum de 1200 dpi dans la dimension finale souhaitée ;
 - pour des images en niveau de gris ou en couleur, la définition doit être au minimum de 300 dpi dans la dimension finale souhaitée ;
 - **fournir impérativement les fichiers séparés de chaque image au format tif ou eps** ;
 - insérer éventuellement les images dans le texte pour en repérer la position.

Si l'article comporte **des photos**, fournir dans la mesure du possible les originaux papier ou diapositives. Ces originaux seront retournés à l'auteur dès la publication.

Les tarifs des cotisations et abonnements

Réadhésion par Internet

<http://www.udp-bup.org>

Réadhésion « papier » : Voir encart cartonné dans les bulletins de juillet/août/septembre, octobre, novembre et décembre.

Dans les deux cas :

- adressez-vous à votre correspondant d'établissement (s'il existe) ;
- envoyez votre chèque par voie postale à l'Union des professeurs de physique et de chimie.

1. COTISATIONS ANNUELLES : membres actifs ou adhérents

Le paiement de la cotisation seule ne donne pas droit au service du bulletin.

☞ a - Tarif normal.....24 €

b - Tarif réduit : retraité ou étudiant.....21 €

Le tarif étudiant est accordé aux intéressés sur leur demande et après envoi d'une pièce justificative de leur qualité.

c - Tarif spécial : enseignant de collège

Un enseignant en collège peut opter pour l'une des deux possibilités ci-dessous :

- cotiser selon les tarifs du paragraphe 1a,
- verser une cotisation de.....25 €

Dans ce cas les trois numéros spécialement consacrés aux collèges seront envoyés gracieusement.

Moyennant paiement de la cotisation, la qualité de membre actif est réservée aux professeurs et aux membres du personnel de laboratoire de sciences physiques de l'enseignement public et de l'enseignement privé sous contrat d'association avec l'État, en activité ou en retraite ; celle de membre adhérent à toute autre personne. Le non-paiement de la cotisation entraîne la radiation de membre de l'Union des professeurs de physique et de chimie. La qualité de membre de l'Union des professeurs de physique et de chimie permet de participer aux activités nationales et académiques de l'Union des professeurs de physique et de chimie.

2. ABONNEMENT AU BULLETIN « LE BUP » (Année civile 2004)

	France métropolitaine et D.O.M. (dont TVA à 2,1 %)	Étranger	
		Abonnement (exonéré de la TVA)	Expédition*
a - Membres actifs ou adhérents (prix préférentiel réservé aux membres de l'association à jour de leur cotisation)			
☞ Normal	36 €	35,26 €	13 €
Réduit (retraité, étudiant)	31 €	–	–
b - Collectivités (collège, autre établissement, personne morale, bibliothèque, laboratoire...)			
Collège	83 €	–	–
Autre que Collège	108 €	105,78 €	22 €
c - Individuel non membre de l'association			
Prix public	60 €	58,77 €	13 €

* Pour l'expédition par voie aérienne, consulter les tarifs ci-après, paragraphe 4.

L'abonnement est annuel et comprend :

- pour les individuels : les dix numéros du BUP de janvier à décembre.
- pour les collectivités **collèges** : les dix numéros du BUP, du 1^{er} mai 2004 au 30 avril 2005 plus les deux cahiers énoncés et corrigés des concours d'Agrégations et CAPES de 2004 ;
- pour les collectivités **sauf collèges** : les dix numéros du BUP, du 1^{er} mai 2004 au 30 avril 2005 plus les deux cahiers énoncés et corrigés des concours d'Agrégations et CAPES de 2004 plus **le cahier Enseignement Supérieur**.

L'abonnement individuel est à régler à compter du 1^{er} octobre 2003 et avant le 1^{er} décembre 2003. Pour tous règlements ultérieurs, les numéros du bulletin qui seront épuisés seront remplacés par des numéros des années antérieures.

3. CHANGEMENT D'ADRESSE

Toute demande de changement d'adresse d'expédition du bulletin peut être faite directement par Internet. Par courrier, précisez l'ancienne et de la nouvelle adresse.

4. TARIFS DES EXPÉDITIONS DU BULLETIN PAR VOIE AÉRIENNE (hors CEE)

Les membres de l'Union des professeurs de physique et de chimie qui en feront la demande lors du paiement de l'abonnement, pourront recevoir le bulletin par avion, à condition de rajouter les frais d'expédition indiqués ci-dessous au tarif d'abonnement : France pour le Régime intérieur et assimilé, Étranger (exonéré de TVA) pour le Régime international.

• Régime intérieur et régime assimilé

DÉPARTEMENTS D'OUTRE-MER : Guadeloupe, Martinique, Guyane Française, La Réunion, Saint-Pierre-et-Miquelon	20,5 €
TERRITOIRES D'OUTRE-MER : Nouvelle-Calédonie, Polynésie Française, Terres Australes et Antarctiques Françaises, Wallis et Futuna.....	42 €

• Régime international

Zone 1

EUROPE 1 : Allemagne, Belgique, Danemark, Italie, Luxembourg, Norvège, Pays-Bas, Portugal et Suède.....	26 €
--	------

Zone 2

EUROPE 2 : Autriche, Espagne, Finlande, Grande-Bretagne, Grèce, Irlande, Islande et Suisse	23 €
---	------

Zone 3

États-Unis et Canada	34 €
----------------------------	------

Zone 4

Afrique, Europe de l'Est, Proche et Moyen Orient.....	31 €
---	------

Zone 5 (reste du monde)

Autres : Amérique, Asie et Océanie	51 €
--	------

Les bureaux académiques

Aix - Marseille

Président et Courrier : Michel FANGUET - 13, allée de la Butte - 13500 Martigues - Tél. et Fax : 04 42 42 11 74 - michel.fanguet@wanadoo.fr

Vice-présidente : Magali GIACINO - 5, rue Renoir - Domaine de Calas - 13480 Calas - magali.giacino@wanadoo.fr

Trésorier : Pierre MARTIN - 10, rue Pierre de Coubertin - 13100 Aix-en-Provence - pierre.madeleine@wanadoo.fr

Chimie : André DURUPHY - Chemin des Baux - 13510 Eguilles - Andre.Duruphy@wanadoo.fr

Chimie (olympiades) : Nathalie BARDE - 8, rue Elzéard Rougié - 13004 Marseille - lesbarde@club-internet.fr

Collège : Michel BARDE - 8, rue Elzéard Rougié - 13004 Marseille - lesbarde@club-internet.fr

Informatique : Frédéric ALLARD - 19, lotissement « Le Petit Prince » - 84450 Saint Saturnin-lès-Avignon - f.allard@laposte.net

IUFM : Michèle CLEMENTE - Tour 9 Andalousie - Le Roy d'Espagne - 13009 Marseille - m.clemente@aix-mrs.iufm.fr

Physique : Hervé IDDA - Bâtiment F13 - 20, avenue Jean Giono - 13090 Aix-en-Provence - h.idda@caramail.com

Physique (olympiades) : Hervé IDDA - Bâtiment F13 - 20, avenue Jean Giono - 13090 Aix-en-Provence - h.idda@caramail.com

Relations enseignement supérieur : Jean-Marie DONNINI - 7, boulevard Chave - 13005 Marseille -

jean-marie.Donnini@newsup.univ-mrs.fr

Technique : Marie-Line MILLON - Plan Redon d'Auriol - 13720 La Bouilladisse - m_millon@yahoo.fr

Amiens

Président et Courrier : Jan DUDA - 6, rue de Villeneuve - 60110 Lormaison - Tél. : 06 79 29 03 71 -

jan.duda@ac-amiens.fr

Vice-président : Patrick PIERENS - 1, rue Jean de La Fontaine - 02100 Saint-Quentin - patrick.pierens@wanadoo.fr

Secrétaire : Savério CALLEA - 22, rue de Mulhouse - 02100 Saint-Quentin - callea@club-internet.fr

Trésorier : M. Dominique PAIN - 6, rue Boucher de Perthes - 80000 Amiens - dominique.pain@ac-amiens.fr

Chimie (olympiades) : Christophe DEBLANGY - 4, rue Bigaudet - 80290 Taisnil - cdeblangy@aol.com

Collège : Bertrand LEMASLE - 4, rue Porchez - 80000 Amiens - lemasle.bertrand@wanadoo.fr

Informatique : Laurent LAROCHE - 25, rue de la République - 60160 Montataire - larroche.laurent@free.fr

IUFM : Daniel GUEANT - 1, rue Gérard Philippe - 80330 Cagny.

Physique (olympiades) : Olivier GRAS - 33, résidence « La clé des Champs » - 80160 Plachy Buyon -

olivier.gras@ac-amiens.fr

Jean-Luc JUGUET

Technique : Jean-Philippe FOURNOU - Lycée Paul Langevin - 3, avenue Montaigne - 60009 Beauvais Cedex -

jean-philippe.fournou@ac-amiens.fr

Université : Daniel GUEANT - 1, rue Gérard Philippe - 80330 Cagny.

Antilles - Guyane

Présidente et Courrier pour les Antilles : Nady MONTRÉSOR - 8, lotissement Petit - Étang 2 - Gissac - 97180 Sainte-Anne.

Vice-président et Courrier pour la Guyane : Jean-Pierre OCTAVIA - BP 49 - 97372 Kourou Cedex.

Chimie et Physique (olympiades) : Jean-Pierre OCTAVIA - 8, rue Samuel Lubin - 97310 Kourou.

Besançon

Président et Courrier : Thierry GUILLOT - 32, rue Saint-Vincent - 25720 Avanne - Tél. : 03 81 41 04 02 -

tguillot@wanadoo.fr

Vice-président : André BRUNETTA - 32, rue de Fevery - 90700 Châtenois-les-Forges - Andre.Brunetta@worldonline.fr

Secrétaire : Anne-Marie STUDER - 13 bis, rue du Rosaire - 90850 Essert - anne-marie.studer@ac-besancon.fr

Trésorier : Jean-Claude POINSARD - 5, rue du Bougney - 25000 Besançon - poinsard@noos.fr

Classes préparatoires : Jean-Noël BERNARD - 101, rue des Granges - 25000 Besançon - jnbernard@hotmail.com

Chimie (olympiades) : Françoise CHAGRIN - 8, rue de Franche-Comté - 25000 Besançon - Francoise.chagrins@wanadoo.fr

Collège : Christian THOMAS - 55, rue de Besançon - 25300 Pontarlier - annie.christian-thomas@wanadoo.fr

Commission Olympiades de physique : Maryse FISCHER - Hameau du Coteau - 25710 Franois -

christian-maryse.fischer@wanadoo.fr

Physique (olympiades) : Dominique OBERT - 5, rue Boudot - 25000 Besançon - Dominique.Obert@wanadoo.fr

Relations enseignement supérieur : Daniel VAN LABEKE - Domaine de Maupailol - Chemin du Lièvre - 25000 Besançon -

daniel.vanlabeke@univ-fcomte.fr

Technique : Hervé L'HUILLIER - Route de Geneuille - 25870 Devecey - lhuillier.herve@wanadoo.fr

Correspondant Haute-Saône : Nicole PETITOT - 113, avenue de la République - 70200 Lure -

phys.colomb.lure@ac-besancon.fr

Bordeaux

Présidente et Courrier : Michèle VAN IMPE - 35, rue Mondenard - 33240 Saint-André-de-Cubzac - Tél. : 05 57 43 90 89 -

Fax : 05 57 43 98 26 - michele.van-impe@wanadoo.fr

Secrétaire : Françoise LAPENDRY - 3, rue Barrau - 33000 Bordeaux.

Trésorière : Annie RECHINIAC - 100, rue du Docteur A. Barraud - 33300 Bordeaux.

Chimie : Thierry DULAURANS - 1, square Rubinstein - 33700 Mérignac.
Coordination TPE et Spécialité : Sylvie JUAN - Lycée Gustave Eiffel - 143, cours de la Marne - 33031 Bordeaux - sylvie.juan@wanadoo.fr
Formation continue : Thierry DULAURANS - 1, square Rubinstein - 33700 Mérignac.
Informatique : Vincent BESNARD - 33, rue du Jardin Public - 33000 Bordeaux - vincent.besnard@ac.bordeaux.fr
Laboratoires physique-chimie : Daniel MARSAN - Résidence Macedo - 3, place Toulouse Lautrec - 33600 Pessac - u.d.p.bordeaux@wanadoo.fr
Liaison collège-lycée : Sylvie NONY - 186, cours Balguerie Stutzenberg - 33300 Bordeaux - snony@club-internet.fr
Lycée professionnel : Jean-François PEYRELONGUE - 6, impasse du Pradas - 33640 Beautiran - jfpeyrelongue@free.fr
Physique : Guy BOUYRIE - Lycée Victor Louis - 33400 Talence.
Physique (olympiades) : Bruno MONBELLI - 87, avenue du Parc Lescure - 33000 Bordeaux.
Relations enseignement supérieur : Marie-Claude DIDIER - Lycée Les Iris - 13, rue Saint Cricq - 33305 Lormont.
Retraités : Annie RECHINIAC - 100, rue du Docteur A. Barraud - 33300 Bordeaux.
Correspondant Dordogne : Jean-Pierre NADAL - Lycée Laure Gatet - BP 3085 - 24003 Périgueux Cedex - jipen@wanadoo.fr

Caen

Président et Courrier : Jacques MARIE - 14, chemin de Touques - 14910 Benerville-sur-Mer - Tél. : 02 31 87 22 85 - marie.j@club.francetelecom.fr
Vice-président : Bernard TAMAIN - 3, allée des Roses - 14610 Epron - tamainin2p3.fr
Secrétaire : François MARVIN - 5, avenue Albert Sorel - Bâtiment E - 14000 Caen - F_marvin@club-internet.fr
Trésorier : François MARVIN - 5, avenue Albert Sorel - Bâtiment E - 14000 Caen - F_marvin@club-internet.fr
Chimie : Gérard GUIBERT - 45, rue des Tisserands - 14000 Caen.
Collège : Mireille GERVAIS - La Gatellerie - 61250 Colombiers - mireille.gervais@caramail.com
Informatique : Daniel GUÉRIN - Les Gigantières - 50140 Saint-Clément.
Physique : Thérèse LEVALOIS - 20, rue de l'Église - 14610 Épron.
Technique : Jacques BESNARD - Allée des Marronniers - 14610 Colomby-sur-Thaon.

Clermont-Ferrand

Président et Courrier : Roland FUSTIER - 4, rue Henri Pourrat - 63360 Gerzat - Tél. : 04 73 24 27 87 - roland.fustier@wanadoo.fr
Vice-présidente : Marie-Colette MORENAS - 1 bis, boulevard Fleury - 63000 Clermont-Ferrand - mcmorenas@auvergne.iufm.fr
Secrétaire : Jean PELLERIN - 199 bis, avenue Léon Blum - 63000 Clermont-Ferrand - jean.pellerin@wanadoo.fr
Trésorière : Elyane YACINE - 4, rue des Bouleaux - 63100 Clermont-Ferrand - eyacine@auvergne.iufm.fr
Chimie (olympiades) : Stéphanie MORTIER - 5, allée du Capitaine Diederich - 63170 Aubière - smortier@free.fr
Collège : Daniel CHAMBENOIS - 18, rue du Docteur Teilhol - 63170 Aubière - chambenois.daniel@voila.fr
Informatique : Frédéric BROMONT - 7, rue Haute - 63670 Corent - frederic.bromont@wanadoo.fr
IUFM : Elyane YACINE - 4, rue des Bouleaux - 63100 Clermont-Ferrand - eyacine@auvergne.iufm.fr
Physique (olympiades) : Roland FUSTIER - 4, rue Henri Pourrat - 63360 Gerzat - roland.fustier@wanadoo.fr
Relations enseignement supérieur : Gilles BOUTEVILLE - 4, rue Victor Hugo - 63400 Chamalières - gbouteville@auvergne.iufm.fr
Technique : Abdessamad SEFFAR - Les Bardins - 63300 Thiers - a.seffar@wanadoo.fr

Corse

Présidente et Courrier : Valérie DENIS - 27, boulevard Paoli - 20200 Bastia - Tél. : 04 95 32 67 06 - simeoni.denis@laposte.net
Trésorier : Marcel BERNACCHI - 51, résidence Terra Corsa - Minelli - 20200 Bastia - marcel.bernacchi@wanadoo.fr
Collège : Antoine MURGIA - Route de Propriano - 20100 Sartene - antoine.murgia@ac-corse.fr
Informatique : Michèle L'HARIDON - Résidence Les Aloès - Bâtiment C - 20000 Ajaccio - michèle.lharidon@ac-corse.fr
Relations avec les CPGE : Marie-Françoise PALLIER - 21, cours Napoléon - 20000 Ajaccio.
Technique : Jacques LINALE - 20246 Pieve - jacques.linale@wanadoo.fr

Créteil

Courrier : Marcelle PLOTARD - 1, allée Clotilde - 77500 Chelles - plotardj@club-internet.fr
Trésorière : Marcelle PLOTARD - 1, allée Clotilde - 77500 Chelles - plotardj@club-internet.fr
IUFM : Madeleine MASLE - 33, avenue de la Sibelle - 75014 Paris - masle@wanadoo.fr

Dijon (Section académique de Bourgogne)

Président d'honneur : Joseph ADAMSKI - joseph.adamski@free.fr
Secrétaire et Courrier : Christine FRIOUR - 7, rue Charles Dullin - 71100 Chalon-sur-Saône - udp.bourgogne@wanadoo.fr
Trésorier : Alain PELVILLAIN - 10, rue de la Gare - 21270 Talnay - pelvillain.alain@wanadoo.fr
Chimie (olympiades) : Éliane SEMELET - Lycée Montchapet - 36, boulevard Pompon - 21000 Dijon.
Collège : Stéphanie ÉVRARD - 10, rue des Fleurs - 21000 Dijon - many_e@yahoo.fr
Concours collège « T'as vu ma manip ? » : Michel NOUVEL - 19, rue Chaudot - 89300 Joigny - michel.nouvel@wanadoo.fr

Diffusion du Trait d'Union : Florence CHARAU - 11, rue J.-B. Baudin - 21000 Dijon.
Relations (olympiades) : Gérard GOUTHIERE - 2, allée des Vergers - 21370 Plombières-lès-Dijon - gemo@ipac.fr
Relations enseignement supérieur : Marie-Thérèse DOUET-GIRARD - 9, impasse Gabriel Fauré - 21800 Chevigny-Saint-Sauveur - mt.oilagnier@wanadoo.fr
Site Internet : Michel NOUVEL - 19, rue Chaudot - 89300 Joigny - michel.nouvel@wanadoo.fr
Technique : Bernard CIROUX - 2 bis, rue Paul Claudel - 71530 Champforgeuil - bernard.ciroux@ac-dijon.fr

Grenoble

Président et Courrier : Gilles GALLIN-MARTEL - 24, rue Alfred de Musset - 74600 Seynod - Tél. : 04 50 69 57 15 - gallin-martel.gilles@wanadoo.fr
Vice-président : Gilles BAUDRANT - 7, rue Saint-Just - 38400 Saint-Martin d'Hères - g-Baudrant@wanadoo.fr
Trésorier : Hugues DE SAINTE FOY - 45, montée de l'Epallud - 38300 Domarin - hugues.desaintefoy@wanadoo.fr
Trésorier adjoint : Daniel BIBOUD - 9, chemin du Marais - 38100 Grenoble - Daniel.Biboud@ac-grenoble.fr
Collège : Josiane BOUVIER - Résidence du Château - 5, rue Guy Mocuquet - 38130 Échirolles - josiane.bouvier@wanadoo.fr
Chimie (olympiades) : Stéphanie LARBAUD - 5, rue Jourdan Laforte - 38190 Brignoud - macquet.larbaud@wanadoo.fr
IUFM : Anne GOUBE - 10, avenue de l'Europe - 38120 Saint-Égrève - anne.goube@grenoble.iufm.fr
Physique (olympiades) : Gilles BAUDRANT - 7, rue Saint-Just - 38400 Saint-Martin d'Hères - g-Baudrant@wanadoo.fr
Post-bac : Philippe ODERMATT - 11, clos de Chapicolle - 38330 Montbonnot - podermat@ac-grenoble.fr
Responsable du secteur « 2 Savoies » : Didier PETITJEAN - Bâtiment Paroissial - 73590 Crest-Voland - didier.petitjean@ac-grenoble.fr
Technique : Didier PETITJEAN - Bâtiment Paroissial - 73590 Crest-Voland - didier.petitjean@ac-grenoble.fr

Lille

Président et Courrier : Jean-Christophe NAZE - 69, rue Leconte Baillon - 59100 Roubaix - Tél. : 03 20 81 01 44 - jc.naze@wanadoo.fr
Vice-présidente : Isabelle MULLER - 60, avenue du Quennelet - 59493 Villeneuve d'Ascq - imuller@nordnet.fr
Secrétaire général : Jean-Marc BOUGENIERE - 2, allée de la Forge - 59830 Louvil - jean-marc.bougeniere@ac-lille.fr
Secrétaire générale adjointe : Sabine DARTOIS - Résidence Gambetta-Leclerc - 6, rue Corbet - 59800 Lille - sabdar@wanadoo.fr
Trésorière : Nathalie GAIGNARD - 49, rue Delsaux - 59300 Valenciennes - ngaignard@aol.com
Chimie : Isabelle MULLER - 60, avenue du Quennelet - 59493 Villeneuve d'Ascq - imuller@nordnet.fr
Chimie (olympiades) : Isabelle MULLER - 60, avenue du Quennelet - 59493 Villeneuve d'Ascq - imuller@nordnet.fr
Collège : Daniel TAVERNE - 25, rue Salvador Allende - 59280 Armentières - dtavernen@nordnet.fr
Marie-Dominique BASUYAUX-PORTIER - A54 Le Parc du Château Blanc - 135, rue Faubourg de Roubaix - 59800 Lille - mbasuyaux@nordnet
Enseignement privé : Marie-Dominique BASUYAUX-PORTIER - A54 Le Parc du Château Blanc - 135, rue Faubourg de Roubaix - 59800 Lille - mbasuyaux@nordnet
Informatique : Nathalie LEBRUN - 4, rue Pascal - 59650 Villeneuve d'Ascq - Nathalie.Lebrun@univ-lille1.fr
IUFM : Chantal DUPREZ - 24, allée Turgot - 59650 Villeneuve d'Ascq - chantal.duprez@univ-lille1.fr
Laboratoire : Michel BASUYAUX - A54 Le Parc du Château Blanc - 135, rue Faubourg de Roubaix - 59800 Lille - mbasuyaux@nordnet
Lycée : Michel BASUYAUX - A54 Le Parc du Château Blanc - 135, rue Faubourg de Roubaix - 59800 Lille - mbasuyaux@nordnet
Thérèse COUCKE - 71, rue Roland - 59800 Lille - tcoucke@nordnet.fr
Physique : Arnaud DURIEUX - 4, rue des Teinturiers - 59126 Linselles - durieux.arnaud@wanadoo.fr
Physique (olympiades) : Arnaud DURIEUX - 4, rue des Teinturiers - 59126 Linselles - durieux.arnaud@wanadoo.fr
Relations avec les CPGE : Gérard DUPUIS - 53, rue Alfonse Mercier - 59000 Lille - gerarddupuis@infonie.fr
Site Internet : Nathalie LEBRUN - 4, rue Pascal - 59650 Villeneuve d'Ascq - Nathalie.Lebrun@univ-lille1.fr
Isabelle MULLER - 60, avenue du Quennelet - 59493 Villeneuve d'Ascq - imuller@nordnet.fr
Technique : Arnaud DURIEUX - 4, rue des Teinturiers - 59126 Linselles - durieux.arnaud@wanadoo.fr
Université : Chantal DUPREZ - 24, allée Turgot - 59650 Villeneuve d'Ascq - chantal.duprez@univ-lille1.fr
Nathalie LEBRUN - 4, rue Pascal - 59650 Villeneuve d'Ascq - Nathalie.Lebrun@univ-lille1.fr
Visite d'entreprises : Marie-Dominique BASUYAUX-PORTIER - A54 Le Parc du Château Blanc - 135, rue Faubourg de Roubaix - 59800 Lille - mbasuyaux@nordnet

Limoges

Président et Courrier : Julien BARDET - 12, Les Grandes Loges - 23320 Fleurat - Tél. : 05 55 52 61 08 - julien.bardet@limousin.iufm.fr
Vice-présidents : Sophie RÉMY - 5, résidence d'Arliquet - 87700 Aix-sur-Vienne - sofremy@aol.com
Michel MÉTROT - 183, rue François Perrin - 87000 Limoges - michelmetrot@limousin.iufm.fr
Trésorier : Gérard ROGUES - 13, rue du Pérou - 87570 Rilhac Rancon.
Bar des sciences : Sophie RÉMY - 5, résidence d'Arliquet - 87700 Aix-sur-Vienne - sofremy@aol.com
Chimie : Jean-Christophe JOUVY - Lycée Guy-Lussac - 87036 Limoges - Jean-christophe.jouvy@ac-limoges.fr
Collège : Françoise FABRE - 245, rue du Mas Loge - 87100 Limoges - fabre.francoise@wanadoo.fr
Informatique : Patrick LASSIAILLE - Lycée Raoul Dautry - 14, rue du Puy Imbert - 87000 Limoges.
Physique : Sophie RÉMY - 5, résidence d'Arliquet - 87700 Aix-sur-Vienne - sofremy@aol.com

Physique (olympiades) : Sophie RÉMY - 5, résidence d'Arliquet - 87700 Aix-sur-Vienne - sofremy@aol.com
Relations enseignement supérieur : Thérèse MERLE - 12, rue de l'Amphithéâtre - 87000 Limoges.
Relations extérieures : Michel MÉTROT - 183, rue François Perrin - 87000 Limoges - michelmetrot@limousin.iufm.fr

Lyon

Président et Courrier : Jean-Marie BIAU - 3, allée Val Prévert - 69400 Limas - Jean-Marie.Biau@ac-lyon.fr
Vice-présidente : Hélène PRUVOT - 21, domaine des Essarts - 69390 Vernaison - helene.pruvot@free.fr
Secrétaire : Françoise KHANTINE-LANGLAIS - 91, rue Duguesclin - 69006 Lyon - langlois@iuta.univ-lyon.fr
Trésorier : François-Jacques BACCHUS - 10, rue Sainte-Anne de Baraban - 69003 Lyon - fj.bacchus@free.fr
Chimie : Daniel SIMON - ENS Lyon - 46, allée d'Italie - 69364 Lyon Cedex 07 - dsimon@chimie.ens-lyon.fr
Chimie (olympiades) : Josette CARRETTO - 177 bis, avenue Félix Faure - 69003 Lyon - jo.carretto@wanadoo.fr
Collège : Gérard VACHER - 169, cours Lafayette - 69006 Lyon - Gerard.Vacher@ac-lyon.fr
Laboratoire : M. Dominique JANTON - 1, impasse de l'école - 42660 Jonzieux - Dominique.Janton@ac-lyon.fr
Physique : Bernadette HAGUENAUER - 765, route des Alpes - 01280 Preussin - bernadette_haguenauer@yahoo.fr
Physique (olympiades) : Florence CHAVANEL - 25, rue de Montribloud - 69009 Lyon - florence_chavanel@yahoo.fr
Relations avec les CPGE : Sylvaine ALBRECHT - 14, rue de Pizay - 69001 Lyon - sylvaine.albrecht@free.fr
Relations extérieures : Annie LESTRADE - 177 bis, avenue Félix Faure - 69003 Lyon - jo.carretto@wanadoo.fr
Site Internet : Sylvaine ALBRECHT - 14, rue de Pizay - 69001 Lyon - sylvaine.albrecht@free.fr
Technique : Jean-Marie BIAU - 3, allée Val Prévert - 69400 Limas - Jean-Marie.Biau@ac-lyon.fr
Université : Roger DUFFAIT - 7, rue des Alouettes - 69890 La Tour de Salvagny - r.duffait@ipnl.in2p3.fr

Montpellier

Président et Courrier : Franck MILLOT - Lycée Mermoz - 717, avenue Mermoz - 34060 Montpellier Cedex 1 -
Tél. : 04 67 20 60 32 - millotfranck@wanadoo.fr
Vice-présidents : Jean-Pierre PONS - 22, rue Edouard Vaillant - 66350 Toulouges - Raymonde.Pons@wanadoo.fr
René TORRA - Rue du Val de la Mosson - 34430 Saint-Jean-de-Vedas - rtorra@libertysurf.fr
Secrétaire : Marie BOURGAREL - 3, rue du Commerce - 34000 Montpellier - Marie.Bourgarel@wanadoo.fr
Secrétaires adjoints : Christophe REY - 14, rue Bourseul - 34500 Béziers - christophe.rey@ac-montpellier.fr
Martine JEANJEAN - Lycée Docteur Lacroix - Rue Gay Lussac - 111000 Narbonne -
jeanmarjean@yahoo.fr
Trésorière : Sylvie BEAUFORT - Parc des Amandiers - 5, rue Yourcenar - 34430 Saint-Jean-de-Vedas -
dbeaufor@club-internet.fr
BUP, contractuels, PLC2 et T1 : Mathieu RUFFENACH - 1, La Source - 34570 Montarnaud - mathieu.ruffenach@free.fr
Chimie : Jean-Pierre PONS - 22, rue Edouard Vaillant - 66350 Toulouges - Raymonde.Pons@wanadoo.fr
Chimie (olympiades) : Jean-Pierre PONS - 22, rue Edouard Vaillant - 66350 Toulouges - Raymonde.Pons@wanadoo.fr
Collège : Bernard FABRE - 11, rue Jean-Baptiste Perdraut - 34500 Béziers - fabre.bjam@wanadoo.fr
Mme Dominique DUCOURANT - 7, rue des Martres - 34090 Montpellier - dominique.ducourant@free.fr
Informatique : Martial CASANOVA - Lycée Mermoz - 717, avenue Mermoz - 34060 Montpellier Cedex 1 -
mermoziesp@yahoo.com
Liaison lycée - post-bac : Sylvette ALMAIRAC - 37, rue Lacase Duthiers - 34090 Montpellier - salmairac@ac-montpellier.fr
Suzanne CAUSSIGNAC - Lycée Jean Lurçat - 25, avenue Albert Camus - 66000 Perpignan -
alain.caussignac@wanadoo.fr
Henri ESCUDIER - 7, chemin des Prés - 34820 Teyran - henri.escudier@wanadoo.fr
Ferial TERKI - Université Montpellier II - Bâtiment 21 - Case courrier 074 -
34095 Montpellier Cedex 5 - terki@ges.univ-montp2.fr
Henri LAVIE - 8, impasse des Garrigues - 11110 Vinasson - lavie@iutmontp.univ-montp2.fr
Physique : Christophe REY - 14, rue Bourseul - 34500 Béziers - christophe.rey@ac-montpellier.fr
Relation avec les enseignants étrangers : Witold KUBEL - Lycée Jules Fil - 23, boulevard Joliot Curie - 11000 Carcassonne -
dylewo@aol.com
Site Internet : Robert QUER - Lycée Mermoz - 717, avenue Mermoz - 34060 Montpellier Cedex 1 - r_quer@club-internet.fr
Technique : Franck MILLOT - Lycée Mermoz - 717, avenue Mermoz - 34060 Montpellier Cedex 1 - millotfranck@wanadoo.fr

Nancy - Metz (Section académique de Lorraine)

Courrier : Monique SCHWOB - 39, rue de la Prévôté - 57950 Montigny-lès-Metz - monique.schwob@wanadoo.fr
Trésorier : Frédéric CORDIER - 85 bis, rue Camp - 54700 Pont-à-Mousson - f.cordier@ac-nancy-metz.fr
Secrétaire : Claire HUTTIN - 4, rue de Bure - 57650 Havange - claire.huttin@guideo.fr
Collège : Laurent PERTUY - 1, rue du Chemin de Fer - 57655 Boulange - laurent.pertuy@wanadoo.fr
Lycée : Karine LADMIRAL - 50, quai Charles François - 54700 Pont-à-Mousson - ladmiral@club-internet.fr
Lycées technique et professionnel : Chantal FRIES - 57, rue de la Pépinière - 57970 Yutz - chantal-fries@libertysurf.fr

Nantes

Trésorier et Courrier : Alain LAFOND - 15, rue des Naudières - 44800 Saint-Herblain - alafond@wanadoo.fr
Chimie (olympiades) : Gaëlle JOBIC - 13, chemin Clos Saint-Julien - 44340 Bougenais.
Collège : Claudine NIZOU - 23 bis, rue Charles Terront - 44300 Nantes - clnizou@aol.com
Informatique : Jean-Marie PUYSILOUX - Jmpuysil@club-internet.fr

Physique (olympiades) : Jean-Luc CANCOUET - 71, rue des Renardières - 44100 Nantes - j.cancouet@wanadoo.fr
Site Internet : Jean-Marie PUYSILOUX - Jmpuysil@club-internet.fr
Technique et professionnel : Philippe GUINEL - 85, boulevard de Charbonneau - 44470 Carquefou - philippe.guinel@wanadoo.fr

Nice - Toulon

Président (Alpes-Maritimes) et Courrier : Serge TRICOIRE - 557, route de la Colle de Revel - 06730 Saint-André - Tél. : 04 97 00 07 91- serge.tricoire@unice.fr
Vice-président (Var) : Francis BERTHOMIEU - Place de l'Église - 83111 Ampus - berthomi@ac-nice.fr
Secrétaire : Chantal OTTO - Les Maisons de Villeneuve - 33, chemin des Ferrayonnes - 06270 Villeneuve-Loubet.
Trésorier : Serge OLIVIER - 8, route de Sospel - 06500 Menton.
Collège : Marie-Hélène CANAVESIO - 220, avenue Sainte-Marguerite - Bâtiment C3 - 06200 Nice.
Informatique : Patrice GARNIER - Avenue Darié La Madone - 06230 Villefranche-sur-Mer.

Orléans - Tours

Président et Courrier : Jean JOURDAIN - 60, rue Carnot - 45400 Fleury-les-Aubrais - Tél. : 02 38 88 61 00 - ajj@club-internet.fr
Vice-président : Philippe CHEVALLIER - Lycée Rotrou - 28000 Dreux - philippe.che@wanadoo.fr
Trésorier : Jean JOURDAIN - 60, rue Carnot - 45400 Fleury-les-Aubrais - ajj@club-internet.fr
BTS : Christian MABILAT - 23, rue des tlempliers - 37400 Amboise - chrn.mabilat@oreka.com
Chimie (olympiades) : Chrystelle BLERIOT - 1, rue du Moulin - 45170 Crottes-en-Pithiverais - jerome.berliot@wanadoo.fr
Collège : Jean JOURDAIN - 60, rue Carnot - 45400 Fleury-les-Aubrais - ajj@club-internet.fr
Informatique : Bruno DE MARTEL - 15, rue Sourderie - 41000 Blois - demartel@club-internet.fr
Physique (olympiades) : Arnaud SOULAS - Lycée Benjamin Franklin - 21 bis, rue Eugène Vignat - 45000 Orléans - asoulas@noos.fr
Technique : Christiane SELLIER - Lycée Durzy - 45700 Villemandeur - c_sellier@hotmail.com
Université : Caroline ANDREAZZA - CRMD UMR 6619 - Université d'Orléans - CNRS - 1 bis, rue de la Férollerie - 45071 Orléans Cedex 2 - caroline.andreazza@univ-orleans.fr
Autre membre du bureau : Michèle DEPRez - Lycée Pothier - 2 bis, rue Marcel Proust - 45000 Orléans - deprez.michele@wanadoo.fr

Paris

Secrétaire et Courrier : Jean-Charles JACQUEMIN - 2, boulevard Magenta - 75010 Paris - jc.jacquemin@noos.fr
Trésorière : Jacqueline CHAUSSADE - 11-13, rue Lasson - 75012 Paris - jacqueline.chaussade@paris.iufm.fr
Chimie (olympiades) : Jacqueline GUÉ - 11, rue de l'Industrie - 92400 Courbevoie - jg.sion@free.fr
Collège : Christian LARCHER - 19 bis, rue de Verdun - 94170 Le Perreux-sur-Marne - larcher2@wanadoo.fr
Informatique : Annick MACE - 6 bis, avenue des Tilleuls - 94140 Alfortville - annick.mace@wanadoo.fr
IUFM : Christian LARCHER - 19 bis, rue de Verdun - 94170 Le Perreux-sur-Marne - larcher2@wanadoo.fr
Lycées privés : Christian LARCHER - 19 bis, rue de Verdun - 94170 Le Perreux-sur-Marne - larcher2@wanadoo.fr
Technique : Jean-Charles JACQUEMIN - 2, boulevard Magenta - 75010 Paris - jc.jacquemin@noos.fr

Poitiers

Président et Courrier : Denis PICARD - 19, rue de l'Abreuvoir - 86440 Migné Auxances - denis.picard@ac-poitiers.fr
Vice-présidents : Jean-Luc FOUQUET - Collège Les Salières - 17410 Saint-Martin de Ré - jean-luc.fouquet@wanadoo.fr
Thomas MARSH - 8, rue des Amandiers - 17130 Puilboreau - tmarsh@univ-lr.fr
Secrétaire : Florence EDARD - 4, rue de la Grange - 86800 Saint-Julien l'Ars - florence.edard@wanadoo.fr
Trésorière : Françoise ARNAUD - 51, rue Rémy Belleau - 86000 Poitiers - francoise.arnaud@ac-poitiers.fr
Chimie : Catherine BRUNE - Chandigon - 86100 Antrons.
Collège : Jean-Luc FOUQUET - Collège Les Salières - 17410 Saint-Martin de Ré.
Technique : Francis VALLADE - 91, rue du Pré des Mottes - 86550 Mignaloux-Beauvoir.
Université : Thomas MARSH - 8, rue des Amandiers - 17130 Puilboreau - tmarsh@univ-lr.fr

Polynésie Française

Président et Courrier : Pierre LEYRAL - BP 51152 - Pirae - Tahiti.

Reims

Présidente et Courrier : Nicole HERMAN - 18, rue de Taissy - 51100 Reims - Tél. : 03 26 85 43 17 - nicole.herman@wanadoo.fr
Trésorière : Françoise SAINGERY - 11, rue Labori - 51100 Reims.
Chimie (olympiades) : Luc LEPICIER - Lycée Libergier - Rue Libergier - 51100 Reims.
Physique (olympiades) : Nicole HERMAN - 18, rue de Taissy - 51100 Reims - nicole.herman@wanadoo.fr
Technique : François SEVIN - 19, rue Follépine - 51100 Reims.

Rennes

Président et Courrier : Loïc POUILLAIN - 39 A, avenue du Général de Gaulle - 22190 Plerin - Tél. : 02 96 74 42 60 - Loic.Poullain@wanadoo.fr
Vice-président : Éric MARCADE - 6, avenue des Chevreuils - 22410 Lantic - emarcade@club-internet.fr
Secrétaire : Edith LE BUANEC - 2, route de Kerhervrec - 22300 Ploulech - edith.lebuanec@wanadoo.fr
Trésorier : Louis GILLOIS - 3, allée du Haut-Moulin - 35760 Saint-Grégoire - gilloy@wanadoo.fr
Action culturelle et Collège : Laurence LE CALVEZ - L'horizon - 35135 Chantepie - family.lecalvez@wanadoo.fr
Collège : Jacques SALLAIS - 53, rue du Parc - 35135 Chantepie - Jacques.Sallais@wanadoo.fr
Informatique : Louis GILLOIS - 3, allée du Haut-Moulin - 35760 Saint-Grégoire - gilloy@wanadoo.fr
IUFM : Alain JAMEAU - 39, avenue de l'Étang - 35590 Saint-Gilles - alain.jameau@wanadoo.fr
Lycée : Claudine ROLLIN - 14, rue de la Tour d'Auvergne - 56000 Vannes - claudine.rollin@lesage-mail.net
Physique (olympiades) : Éric MARCADE - 6, avenue des Chevreuils - 22410 Lantic - emarcade@club-internet.fr
Post-bac : Marie-Annick MARÉCHAL - 4, rue Surcouf - 35740 Pace - Marie-Annick.Marechal@univ-rennes1.fr
Technique : Alain JAMEAU - 39, avenue de l'Étang - 35590 Saint-Gilles - alain.jameau@wanadoo.fr

Rouen

Trésorière et Courrier : Brigitte MARY - Appartement 20 - 6, rue Collins - 76120 Grand-Quevilly - Tél. : 02 35 67 07 74 - Brigitte.mary@wanadoo.fr
Chimie (olympiades) : Annick GUILLOUX - 11, rue de Zurich - 76000 Rouen.
Collège : Jacques BOURET - 12, rue Brisout de Barneville - 76100 Rouen - Jacques.bouret@ac-rouen.fr
Informatique : Colette ETASSE - 4, avenue René Coty - Appartement 448 - 76120 Grand-Quevilly.
Technique (STD) : Brigitte MARY - Appartement 20 - 6, rue Collins - 76120 Grand-Quevilly - Brigitte.mary@wanadoo.fr
Technique (STL) : Micheline IZBICKI - 50, chemin de Buglise - 76290 Montivilliers - Miizbicki@aol.com

Strasbourg

Président et Courrier : Alain SPRAUER - 79, rue Baldung-Grien - 67720 Weyersheim - Tél. : 03 88 51 76 83 - sprauaal@club-internet.fr -
Vice-présidente : Odile LEIBER - 58, rue de Verdun - 68100 Mulhouse - oleiber@yahoo.fr
Trésorier : Bernard GOERIG - 14, rue Principale - 67300 Schiltigheim - bernardgoerig@evc.net
Chimie (olympiades) : Jean-Michel TOLEDANO - 11, rue Victor Kessler - 67000 Strasbourg - jm.tole@wanadoo.fr
Collège : Michèle DOLLÉ - 2, rue du Landsberg - 67800 Hoenheim - micheledolle@wanadoo.fr
Contact extérieur : André ISEL - 15, rue Geiler - 67000 Strasbourg - andre.isel@wanadoo.fr
CPGE : Jean-François THIVENT - 15, rue Victor Schoelcher - 67300 Schiltigheim - THIVENTJF@aol.com
CPGE (technique) : Brigitte JUNCKER - 11, rue de Niederbourg - 67400 Illkirch Graffenstaden - brigitte.juncker@free.fr
Europe : Lucie CHAUMONT - 61 A, rue Himmerich - 67000 Strasbourg - Lechaum@wanadoo.fr
Informatique : François BOSSERT - 5, rue Claude Debussy - 67460 Reichstett - francois.bossert@evc.net
IUFM : Alain SPRAUER - 79, rue Baldung-Grien - 67720 Weyersheim - sprauaal@club-internet.fr
LP - TICE : Jean-Paul XUEREH - 19, rue Sainte-Marguerite - 67201 Eckbolsheim - jeanpaul.xuereh@free.fr
Lycée : Bernard GOERIG - 14, rue Principale - 67300 Schiltigheim - bernardgoerig@evc.net
Lycée (privé) : Marie-Noëlle EASTES - 15, rue des Frères Stoeffler - 67000 Strasbourg - mneastes@wanadoo.fr
Physique (olympiades) : François SCHLOSSER - 57, boulevard d'Anvers - 67000 Strasbourg - francoisschlosser@voila.fr
Rectorat : Alain SPRAUER - 79, rue Baldung-Grien - 67720 Weyersheim - sprauaal@club-internet.fr
Relations enseignement supérieur IUFM : Jean MEULLEMEESTRE - 20, rue d'Oslo - 67000 Strasbourg - Jean.MEULLEMEESTRE@chimie.u-strasbg.fr
Sécurité chimie : Alfred MATHIS - 18, rue des Pommes - 67200 Eckbolsheim - AlfredMathis@chez.com
Site Internet et webmestre : Jean-Luc RICHTER - 36, rue Rivoli - 67600 Hilsenheim - jean-luc.richter@wanadoo.fr
Technique : Nicolas ESQUENET - 4, rue Kirstein - 67000 Strasbourg - nicolas.esquenet@free.fr
Technique post-bac : Jean-Marc DIRRIJ - 16 A, rue de la Brigade Alsace-Lorraine - 67114 Eschau - jmdirrij@wanadoo.fr
Bruno HERRBACH - 15, rue du Sport - 67130 Lutzelhouse - bruno.herrbach@laposte.net

Toulouse

Présidente et Courrier : Marie-Laure MIEGEVILLE - 3, rue B. de Ventadorn - 31750 Escalquens - miegeville@aol.com
Secrétaire : Anne BATAILLE - 302, route de Saint-Simon - 31100 Toulouse - anne.bataille@wanadoo.fr
Trésorier : Jean-Marc LEMAIRE - Route de Rosières - 81350 Valderies.
Chimie : Mireille GALLIAN - 4, place del Rei Petit - 31120 Lacroix-Falgarde - mireille.galian@ac-toulouse.fr et galian@club-internet.fr
André GILLES - Sauveterre - 31320 Aureville - agilles@ac-toulouse.fr
Chimie (olympiades) : Mireille GALLIAN - 4, place del Rei Petit - 31120 Lacroix-Falgarde - mireille.galian@ac-toulouse.fr et galian@club-internet.fr
André GILLES - Sauveterre - 31320 Aureville - agilles@ac-toulouse.fr
Collège : Cathy PARIS - 11, rue Matabiau - 31000 Toulouse - cathy.paris@ac-toulouse.fr
Serge BETTON - Lendrevie-Basse - 81600 Brens - sbetton@wanadoo.fr
Informatique : Thierry MARTIN - 3, lotissement Le Foulon - 31360 Saint-Marty - thierry.martin@ac-toulouse.fr
IUFM : Alain RABIER - 10, allée du Souler - 31770 Colomiers - rabier@cict.fr et arabier@free.fr

Lycée : Dominique KAHRAMAN - Route des Crêtes - 31320 Mervilla - dominique.kahraman@ac-toulouse.fr
Technique : Jean-Marc LEMAIRE - Route de Rosières - 81350 Valderies.
TICE : Thierry MARTIN - 3, lotissement Le Foulon - 31360 Saint-Martyr - thierry.martin@ac-toulouse.fr

Versailles

Présidente et Courrier : Françoise COUSSON - 31, allée Marcel Jouhandeau - 92500 Rueil-Malmaison -
Francoise.Cousson@ac-versailles.fr

Trésorière : Nicole GUIBÉ - 15, allée de Trévisse - 92330 Sceaux.

Chimie (olympiades) : Catherine RIPERT - 1, rue Félix Faure - 95880 Enghien-les-Bains -
Catherine.Ripert@ac-versailles.fr

Collège : André CALAS - 40, rue des Boulangers - 75005 Paris - andreascalas@voila.fr

Vincent MAS - 10, square du Vexin - L'Orée du Lac - 78200 Mantes-la-Jolie - Vincent.Mas@ac-versailles.fr

Informatique : Bernard RENAUD - 9, ruelle du Douaire - 95270 Viarmes - Bernard.Renaud@ac-versailles.fr

IUFM : Pierre FONTES - 48, rue Jean Moulin - 92160 Antony - fontes@ac-csnsm.in2p3.fr

Physique (olympiades) : Françoise COUSSON - 31, allée Marcel Jouhandeau - 92500 Rueil-Malmaison -
Francoise.Cousson@ac-versailles.fr

Jérôme BOHIN - 39, rue Gabriel Péri - 92300 Levallois-Perret - jerome.bohin@freesbee.fr

Technique : Olivier JALLU - 40 bis, rue Jules Larose - 92230 Gennevilliers - Olivier.Jallu@ac-versailles.fr

Sur votre agenda...

Du 24 au 27 octobre 2003

51^{es} Journées Nationales de l'UdP

Strasbourg.

<http://www.udpstrasbourg2003.org>

Du 19 au 22 novembre 2003

Salon de l'éducation

Paris : *Porte de Versailles.*

Union des professeurs de physique et de chimie

Cahier des concours Agrégations et CAPES 2002 : *Les corrigés*

N° 857 (2) - Octobre 2003

Administration et rédaction
44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06
<http://www.cnam.fr/hebergement/udp/>

Avertissement

Ce recueil des solutions de la plupart des épreuves écrites des concours de recrutement de professeurs en physique et chimie est destiné à faciliter le travail de toutes les personnes intéressées par ces épreuves et notamment des candidats à ces concours.

Nous remercions les collègues qui ont accepté de se charger de la rédaction des solutions. Ces solutions peuvent être plus ou moins détaillées selon les épreuves. En aucun cas elles ne constituent un modèle des méthodes ni des rédactions que les jurys pourraient souhaiter mais une simple aide permettant en particulier de contrôler la validité des résultats.

Ces épreuves de concours peuvent fournir l'occasion de prolongements et d'approfondissements qu'il n'est généralement pas possible aux auteurs de signaler ici autrement que par une bibliographie sommaire. Les candidats aux concours doivent pouvoir trouver ces incitations à d'intéressantes études en participant aux préparations ouvertes dans les différentes académies.

Afin de faciliter l'utilisation de ce numéro spécial, son service est inclus dans l'abonnement collectivités, tout en demeurant hors abonnement individuel. Il en est de même pour le numéro spécial comportant les énoncés correspondants. Ces deux numéros des concours sont disponibles par correspondance au siège de l'Union des professeurs de physique et chimie et tous les renseignements à ce sujet peuvent être obtenus sur le site de l'UdPPC :

<http://www.cnam.fr/hebergement/udp/>

André GILLES
Rédacteur en chef du bulletin

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE

Composition de physique ♦ Session : 2002

PREMIERE PARTIE A

Approche macroscopique des phénomènes de transport

A. Lois phénoménologiques

I.A.1.a. On peut encore définir localement les champs de température, pression, etc. mais ils évoluent spatialement à l'échelle macroscopique. C'est le domaine des faibles déséquilibres, nécessitant des libres parcours moyens petits à l'échelle mésoscopique.

b.

- ♦ Ohm : $\vec{j}_q = \gamma \vec{E}$ où \vec{E} représente le champ électrique dans le référentiel où le milieu conducteur est sans mouvement d'ensemble.
- ♦ Fick : $\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} \rho_n$
- ♦ Fourier : $\vec{j}_u = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ où T représente la température définie localement.

c. Ces lois prévoient un courant dans le sens des « potentiels » décroissants. Un changement de sens du temps inversant les courants sans changer le sens des déséquilibres conduit à une situation ne satisfaisant plus à ces lois.

d. Le courant est provoqué par le déséquilibre, l'inhomogénéité spatiale du « potentiel », pour des faibles déséquilibres on linéarise d'où $\vec{j} \propto \overrightarrow{\text{grad}}$ (potentiel), le signe – assurant que le transport est dans le sens décroissant et non dans le sens croissant (irréversibilité).

e.

- ♦ $[\gamma] = \left[\frac{i}{s} \right] \left[\frac{V}{L} \right] = \left[\frac{i}{V} \right] \left[\frac{1}{L} \right] \Rightarrow [\gamma] = \Omega^{-1} m^{-1} = Sm^{-1}$
- ♦ $[D] = \left[\frac{i_n}{s} \right] \left[\frac{\rho_n}{L} \right] = [i^{-1}] [L^{-1}] [L^{+3}] \Rightarrow [D] = [L^2 t^{-1}] = m^2 s^{-1}$
- ♦ $[\lambda] = \left[\frac{i_u}{s} \right] \left[\frac{T}{L} \right] \Rightarrow [\lambda] = WK^{-1} m^{-1}$

ODG D $10^{-5} m^2 s^{-1}$ dans les gaz
 D $10^{-9} m^2 s^{-1}$ dans les liquides
 D $10^{-30} m^2 s^{-1}$ dans les solides

γ 10^7 à $10^8 Sm^{-1}$ dans un bon conducteur métallique
 γ 10^{-4} à $10^2 Sm^{-1}$ dans un semi-conducteur
 γ $10^{-6} Sm^{-1}$ dans un isolant

- λ $10^2 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ dans un métal
- λ $10^{-1} \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ verre, eau
- λ $10^{-2} \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ gaz

I.A.2.a. Dans le cas de la loi d'Ohm \vec{E} ne dérive d'un potentiel qu'en statique (sinon terme $-\delta_t \vec{A}$) ou en régime très lent plus ou moins variable.

- ◆ Lien densité / potentiel :
 - coïncidence pour loi Fick ;
 - proportionnalité des variations pour Fourier ($d\rho_u = \rho c dT$) ;
 - proportionnalité au laplacien pour loi Ohm $\rho_q = -\epsilon_0 \Delta V$.

b. Analogies sur les formes des lois avec courants dans le sens des potentiels décroissants mais il y a différents cas dans le lien entre potentiel et densité, surtout dans le cas de la loi d'Ohm.

B. Bilans

I.B.1. L'augmentation de la quantité (de la grandeur étudiée) contenue dans un volume donné est due aux courants entrant par la surface et aux sources existant en volume.

I.B.2.

- ◆ Dans le cas des charges, il n'y a pas de sources (conservation de la charge) $\tau_q = 0$;
- ◆ Dans le cas thermique, on peut considérer l'énergie interne récupérée par effet Joule à partir de la circulation d'un courant électrique dans le volume (solide métallique). On a alors :

$$\tau_{th} = \frac{j_q^2}{\gamma} = \gamma E^2 = \vec{j}_q \cdot \vec{E}$$

- ◆ Dans le cas de la diffusion, on peut envisager la création de neutrons dans les réactions nucléaires avec $\tau_n = K\rho_n$ ou si l'absorption l'emporte $\tau_n = -K'\rho_n$.
- ◆ On peut aussi envisager la création ou la disparition d'électrons ou de trous dans les semiconducteurs.

I.B.3.a.

- ◆ Mouvement de convection : mouvement d'ensemble, toutes catégories de particules constituant le milieu confondues.
- ◆ Mouvement de dérive : mouvement « différentiel » de catégories différentes de particules dans un champ extérieur (qui les différencie), le cas le plus usuel étant la dérive dans un champ électrique. Le mouvement de dérive est alors le mouvement d'ensemble de chaque catégorie par rapport au mouvement d'ensemble global. C'est lui qui donne les courants électriques.

Remarque : Ces « définitions » varient quelque peu dans la littérature, la frontière entre convection et dérive n'étant pas toujours très claire (par exemple, le mouvement descendant des molécules d'air sous l'influence de la gravité qui est contrebalancé par la diffusion : dérive ou convection ? ...).

- ◆ Mouvement de diffusion : purement microscopique, c'est la partie résiduelle du mouvement.

b. La loi d'Ohm se rattache à un mouvement de dérive, les autres à un mouvement de diffusion (auquel peut toujours se superposer un mouvement de convection).

c. Volume fixe V :

$$\begin{aligned} X(t+dt) - X(t) &= \iiint_V \rho_X(M, t+dt) d\tau - \iiint_V \rho_X(M, t) d\tau = \iiint_V \partial_t \rho_X(M, t) d\tau dt \\ &= \left(\iiint_V \vec{j}_X \cdot d\vec{S}_m \right) dt + \iiint_V \tau_X(M, t) d\tau dt - \iiint_V \text{div} \vec{j} d\tau dt \end{aligned}$$

d'où en passant à l'écriture locale puisque V est quelconque.

$$\partial_t \rho_X = -\text{div} \vec{j}_X + \tau_X$$

C. Diffusion ou relaxation

$$\text{I.C.1.a.} \begin{cases} \vec{j}_u = -\lambda \vec{\nabla} T \\ \partial_t (\rho_u) = \rho c \partial_t T \end{cases} \Rightarrow \partial_t T = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T$$

$$\text{b.} \begin{cases} \vec{j}_n = -D \vec{\nabla} \rho_n \\ \partial_t \rho_n = \partial_t \rho_n \end{cases} \Rightarrow \partial_t \rho_n = D \Delta \rho_n$$

$$\text{c.} \begin{cases} \vec{j}_n = -\gamma \vec{\nabla} V \\ \Delta V = -\rho / \epsilon_0 \end{cases} \Rightarrow \partial_t \rho_q + \frac{\gamma \rho_q}{\epsilon_0} = 0$$

I.C.2.a. L'équation réagissant ρ ne fait plus intervenir les variations spatiales de ρ mais seulement sa valeur locale. Tout excès de charge disparaît alors localement avec une constante de temps $\tau_r = \epsilon_0 / \gamma$: relaxation.

Dans les autres cas, la dérivée par rapport à t est proportionnelle au laplacien de la densité volumique : diffusion liée à la moyenne des variations spatiales environnantes.

L'ordre 1 en t est ici le signe de l'irréversibilité phénoménologique.

b. $\tau_r = \epsilon_0 / \gamma \Rightarrow \tau_r \approx 10^{-19} s$ dans le cas du cuivre... le modèle lentement variable ne tient pas à une telle échelle !

c. $D_{th} = \frac{\lambda}{\rho_0 c} \rightarrow$ alors T et ρ_n satisfont à la même équation avec des diffusivités toutes exprimées en $m^2 s^{-1}$.

I.C.3.

◆ Diffusion de la quantité de mouvement dans un gaz \rightarrow viscosité.

Ici la grandeur transportée est vectorielle et le courant est alors un tenseur d'ordre deux.

La viscosité cinématique joue alors le rôle de coefficient de diffusion.

◆ Diffusion du champ électromagnétique dans un conducteur à effet de peau. Ici aussi la grandeur transportée est vectorielle, on retrouve ici une diffusivité qui vaut $\frac{1}{\mu_0 \gamma}$.

On pourrait aussi citer la magnéto hydrodynamique, ou l'évolution de la vorticité, mais les équations obtenues contiennent en plus des termes visqueux des termes supplémentaires traduisant une physique plus complexe.

DEUXIEME PARTIE**Approches microscopiques simplifiées****A. Marche au hasard à une dimension**

II.A.1.a. Le nombre de façons de réaliser n_+ pas à droite et $n_- = N - n_+$ pas à gauche en N pas est

$C_N^{n_+}$, la probabilité d'un trajet donné est $\left(\frac{1}{2}\right)^N$ d'où le résultat. En outre on a : $n_+ + n_- = N$ et $n_+ - n_-$

$= n$ c'est-à-dire $n_+ = (N + n) / 2$ et $n_- = (N - n) / 2$ (n et N ont donc même parité).

b. Si on suppose que $\left|\frac{n}{N}\right| \ll 1$ et en utilisant Stirling, on écrit :

$$\ln(N!) = \left(N + \frac{1}{2}\right) \ln N + \frac{1}{2} \ln 2\pi - N$$

$$\ln(n_+!) = \left(\frac{N+n}{2} + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{N+n}{2} + \ln \left(1 + \frac{n}{N}\right) + \frac{1}{2} \ln 2\pi - \left(\frac{N+n}{2}\right)$$

$$\text{avec } \ln\left(1 + \frac{n}{N}\right) \approx \frac{n}{N} - \frac{n^2}{2N^2}$$

même chose pour $\ln(n_-!)$ avec $n \leftrightarrow -n$.

$$D'où : \ln\left(\frac{N!}{n_+!n_-!}\right) (0,5)^N = -0,5 \ln N - 0,5 \ln 2\pi + \ln 2 - \left(\frac{N+n}{2}\right) \left(\frac{n}{N} - \frac{n^2}{2N^2}\right) - \left(\frac{N-n}{2}\right) \left(-\frac{n}{N} + \frac{n^2}{2N^2}\right)$$

ce qui donne en conservant les termes en n^2/N et en négligeant ceux en n^2/N^2 .

$$P(n, N) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi N}} \exp\left(-\frac{n^2}{2N}\right)$$

hypothèse restrictive : $|n| \ll N$ qui ne rend cette loi valable qu'au voisinage de la valeur moyenne $\bar{n} = 0$: on ne décrit pas correctement la probabilité pour $|n|$ grand, aux faibles valeurs de $P(n, N)$.

C'est une perte partielle d'information sur le système.

c. Le lien micro/méso est ici $x = na$ et $t = NT$ d'où $\frac{n^2}{2N} = \frac{x^2}{2a^2 \frac{t}{T}}$.

$$\exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right) = \exp\left(\frac{-n^2}{2N}\right) \text{ pour } D = \frac{a^2}{2T}$$

La normalisation s'écrit : $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_p(x, t) dx = 1$

$$\text{avec : } \rho_p(x, t) = \frac{B}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right)$$

En utilisant le préambule on obtient $\frac{B}{\sqrt{t}} \cdot \sqrt{4\pi Dt} = 1$ soit $B = \frac{1}{\sqrt{4\pi D}}$.

Remarque : On retrouve ce résultat en remarquant que : $\rho_p(x, t) \delta x = P(n, N) \cdot \frac{\delta n}{2}$, le facteur $1/2$ provenant du fait que n a forcément la même parité que N .

$$d. \partial_t \rho_p = \rho_p \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4Dt^2} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x \rho_p = -\frac{2x}{4Dt} \rho_p \\ \partial_{xx}^2 \rho_p = \rho_p \left(-\frac{2}{4Dt} + \frac{4x^2}{16D^2t^2} \right) \end{array} \right.$$

On a donc bien $\partial_t \rho_p = D \partial_{xx}^2 \rho_p$.

e. En utilisant le formulaire : $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \rho_p(x,t) dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi(4Dt)^3}$

d'où : $\langle x^2 \rangle = 2Dt$

On retrouve le comportement classique de la diffusion où l'échelle spatiale caractéristique évolue comme la racine carrée du temps.

II.A.2. On écrit que $X_N = \sum_{i=1}^N x_i$ où x_i est le déplacement associé à un pas.

$$\langle X_N^2 \rangle = \sum_i \langle x_i^2 \rangle + \sum_{i \neq j} \langle x_i x_j \rangle$$

Les pas étant indépendants on a alors $\langle x_i x_j \rangle = \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle = 0$.

D'où $\langle X_N^2 \rangle = N \langle x_i^2 \rangle = Na^2$ avec $a^2 = \langle x_i \rangle^2$ et $N = t/T$ car $t = \sum_i t_i = N \langle t_i \rangle = NT$

Soit : $\langle X_N^2 \rangle = \frac{a^2}{T} t = 2Dt$

II.A.3.a.

b. La marche au hasard décrit ici de façon simple l'influence des collisions entre les molécules, a représentant alors la distance moyenne parcourue entre deux collisions c'est-à-dire le libre parcours moyen et T la durée moyenne entre deux collisions.

D'où : $D \propto \frac{l^2}{\tau} \propto \frac{l^2}{l/v} = lv$

avec : $\left\{ \begin{array}{l} v \propto \sqrt{\frac{kT}{m}} \\ l \propto \frac{1}{n\sigma} = \frac{kT}{P\sigma} \end{array} \right.$

par un gaz parfait où σ est la section efficace de collision des molécules.

D'où : $D \propto \frac{T^{3/2}}{P}$

c. Dans le cas d'un milieu poreux dont les dimensions caractéristiques sont plus faibles que le libre parcours moyen, ce sont les collisions avec le milieu et non entre molécules qui dominent ce qui modifie la dépendance de a vis-à-vis de la pression et de la température.

d. La dépendance en P est correcte. Par contre la dépendance en T est accentuée. Ceci est dû en

particulier au fait que σ dépend de T , la section efficace étant d'autant plus faible que la vitesse relative des particules est élevée (moins de sensibilité des particules à leur interaction mutuelle à grande vitesse).

Si $\sigma \propto T^{-\epsilon}$ avec $0,1 \leq \epsilon \leq 0,5$ on rend compte des écarts observés.

B. Modèle classique de la loi d'Ohm

II.B.1.a. Le terme en $-\frac{m\vec{v}}{\tau}$ traduit l'influence des collisions des électrons sur les défauts du réseau.

b. En champ uniforme et permanent, une particule entre deux collisions est soumise seulement à la force électrique d'où $\vec{v}_{micro} = \vec{v}_o - \frac{e\vec{E}t}{m}$.

Lors des collisions, la particule repart avec une vitesse aléatoire en cédant en moyenne la quantité de mouvement « organisée » acquise au réseau.

D'où $\langle \vec{v}_{micro} \rangle = \langle \vec{v}_o \rangle - \frac{e\vec{E}\tau}{m}$ où $\langle \vec{v}_o \rangle = \vec{0}$ et où τ désigne le temps nécessaire à l'oubli des conditions initiales (plusieurs collisions peuvent être nécessaires à un tel oubli, une approche statistique détaillée permettrait de préciser ce point).

c. On en déduit en régime permanent $\langle \vec{v} \rangle = -\frac{e\vec{E}\tau}{m}$ d'où $\vec{j} = -ne\langle \vec{v} \rangle = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}$

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

$$\text{II.B.2.a.} \quad \begin{cases} \gamma \approx 10^8 \text{ S.m}^{-1} \\ n \approx 10^{29} \text{ m}^{-3} \end{cases}$$

(1 électron libre par atome de cuivre en moyenne) d'où $\tau = \frac{m\gamma}{ne^2} \approx \frac{10^{-30} \cdot 10^8}{10^{29} \cdot 10^{-38}} \approx 10^{-13}$ ce qui est un ordre de grandeur très approximatif.

b. Avec une vitesse quadratique moyenne de l'ordre de $\left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}$ et une durée entre collisions de

l'ordre de 10^{-13} on obtient : $\left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2} \approx 10^5 \text{ m.s}^{-1}$ et $lpm \approx 10^{-8} \text{ m}$ (en fait τ est un peu surévalué, plus proche de quelques 10^{-14} s).

Ce libre parcours moyen est très élevé par rapport à la distance entre les ions du réseau donc les collisions ne peuvent avoir lieu sur ces ions. C'est bien plutôt les défauts de périodicité qui sont en cause (vibrations = phonons, ou défauts).

c. Classiquement $n\tau \propto \frac{1}{\ell} \cdot \frac{\ell}{v}$ où l est le libre parcours moyen d'où : $\gamma \propto v^{-1} \propto T^{-1/2}$ et alors ρ_{el} serait en \sqrt{T} ce qui ne correspond pas à la loi de Matthiessen.

d. $\rho_L(T)$ est due aux interactions entre électrons et phonons.

II.B.3.a. La loi d'Ohm n'est valable qu'en ARQS, tant que le terme inertiel ne joue pas de rôle dans l'équation donnant le mouvement moyen des électrons.

En dehors de ce domaine, si on utilise une décomposition spectrale de \vec{E} , on a en RSF :

$$i\omega m \bar{v}_o e^{i\omega t} = -e \bar{E}_o e^{i\omega t} - \frac{m \bar{v}_o e^{i\omega t}}{\tau}$$

(en négligeant l'action de \vec{B} et en considérant que le déplacement des électrons reste petit devant la longueur d'onde).

$$\bar{v}_o = -\frac{e\tau}{m} \frac{\bar{E}_o}{1 + i\omega\tau}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\gamma_{statique}}{1 + i\omega\tau}$$

b. Si le mouvement est non relativiste, on peut assimiler $\partial_t \bar{v}$ et $\frac{d\bar{v}}{dt}$

$$\tau \partial_t \bar{v} = -\frac{e}{m} \bar{E}; -\bar{v} \Rightarrow \tau \partial_t \bar{j} = +\gamma_{stat} \bar{E} - \bar{j}$$

en prenant la divergence de cette équation on obtient en utilisant $div \bar{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_o}$ et $div \bar{j} = -\partial_t \rho_{el}$:

$$-\tau \partial_{t,t}^2 \rho_{el} = +\frac{\gamma_{stat}}{\epsilon_o} \rho_{el} + \partial_t \rho_{el} \Rightarrow \partial_{t,t}^2 \rho_{el} + \frac{1}{\tau} \partial_t \rho_{el} + \frac{1}{\tau \tau_r} \rho_{el} = 0$$

==> oscillations de relaxation avec une pulsation propre $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{\tau \tau_r}}$ et un facteur de qualité donné

par $\frac{\omega_o}{Q_o} = \frac{1}{\tau}$ soit $Q_o = \sqrt{\frac{\tau}{\tau_r}}$ avec $\tau_r = 10^{-19} s$ et $\tau \approx 10^{-13} s$ on obtient $Q_o = 10^3$.

La pseudo période de la relaxation est alors $\frac{2\pi}{\omega_o}$ et la décroissance exponentielle des pseudo-

oscillations est $\left(\frac{\omega_o}{2Q_o}\right)^{-1}$ soit 2τ environ.

La relaxation a donc lieu plutôt sur le temps caractéristique τ que sur τ_r . La neutralité locale reste très bien vérifiée pour des pulsations très inférieures à $10^{13} s^{-1}$ c'est-à-dire en dessous du domaine infrarouge proche, visible, UV, RX.

C. Compétition entre dérive et diffusion : l'atmosphère isotherme

II.C.1. $\overline{grad}P = \rho \vec{g}$ où ρ est la masse volumique, $\rho = nm$ (m = masse moléculaire) et $P = nkT$ d'où

$$kT \frac{dn}{dz} = -nmg \Rightarrow n = n(0) \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right).$$

II.C.2. Le courant diffusif est lié à l'inhomogénéité de concentration et dirigé verticalement vers le haut :

$$\bar{j}_n = -D \frac{dn}{dz} \bar{u}_z = +\frac{nmg}{kT} D \bar{u}_z$$

II.C.3. Le champ de pesanteur joue ici le rôle du champ électrique dans la partie II.B. d'où :

$$\vec{j}_{\text{dérive}} = n\vec{v}_{\text{dérive}}$$

avec : $m\vec{g} - m\frac{\vec{v}_{\text{dérive}}}{\tau} = \vec{0}$

soit : $\vec{j}_{\text{dérive}} = n\vec{g}\tau$

II.C.4. A l'équilibre on a : $\vec{j}_{\text{dérive}} + \vec{j}_{\text{diffusion}} = \vec{0}$ d'où avec $\vec{j}_{\text{dérive}} = n\vec{v}_{\text{dérive}} = n\mu m\vec{g}$ (d'après l'énoncé) où μ est la mobilité.

$$n\mu m\vec{g} = \frac{nmgD}{kT} \Rightarrow D = \mu kT$$

II.C.5. La cohérence du modèle n'est pas modifiée car μ aussi dépend de P, car $\mu = \frac{\tau}{m}$ et $\tau = \frac{\ell_{pm}}{\langle v \rangle}$.

Le rapport $\frac{D}{\mu}$ reste ainsi indépendant de P.

TROISIEME PARTIE

Etude de quelques solutions particulières de l'équation de la diffusion.

A. Déséquilibre permanent : Régime stationnaire

III.A.1. En régime stationnaire, en l'absence de sources, le flux de \vec{j} est conservatif. On peut alors définir l'intensité dans un tube de courant à partir d'une surface du flux de \vec{j} au travers d'une surface quelconque sectionnant le tube.

La linéarité entre courant et « potentiel » ($\vec{j} = -K\overrightarrow{\text{grad}}V$ sous la forme générale) conduit alors à

$$\text{écrire le rapport } R = \frac{V_1 - V_2}{I_{1 \rightarrow 2}} \text{ comme } \frac{\int_1^2 \vec{j} / K \cdot d\vec{\ell}}{\iint \vec{j} d\vec{S}_{1 \rightarrow 2}}$$

Il ne dépend alors plus que de la nature du transport (via K) et de la géométrie.

A 1D on obtient ($\text{div}\vec{j} = 0 \Rightarrow j = \text{cste}$ le long d'une ligne de courant).

$$R = \frac{1}{K} \cdot \frac{L}{\Sigma}$$

avec : $K = \gamma$ pour R_{el}

$$K = D \text{ pour } R_{\text{d}}$$

$$K = \lambda \text{ pour } R_{\text{th}}$$

III.A.2.a. cf. ci-dessus.

$$R = \frac{1}{K} \frac{\int_1^2 \vec{j} / K \cdot d\vec{\ell}}{\iint \vec{j} d\vec{S}_{1 \rightarrow 2}}$$

b. En électricité cette notion se conserve en ARQS car on conserve la neutralité locale (relaxation en 10^{-13} s) pour un bon conducteur.

c. Dans le cas thermique il faut pouvoir annuler le terme $\rho c \partial_t T$ pour que le flux de \vec{j}_{th} reste conservatif, il faut donc être dans un milieu de très faible inertie thermique $c \rightarrow 0$.

B. Régime variable : Diffusion unidimensionnelle de particules marquées

III.B.1.a. Conservation des N_0 particules : $\int_{-\infty}^{+\infty} n^*(x,t) dx = N_0$

b. Pour $x \neq 0$ $n^*(x,t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0^+$) car les N_0 particules n'ont pas eu le temps de diffuser.

c. $n^*(x,0) = \frac{N_0}{\Sigma} \delta(x)$

III.B.2. Une solution de l'équation de diffusion est :

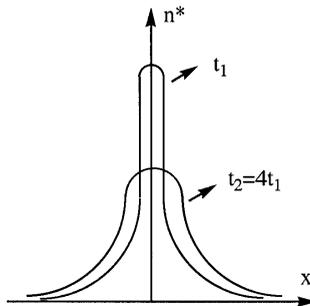
$$n^*(x,t) = \frac{A}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

avec ici pour satisfaire la normalisation $A = \frac{N_0}{\Sigma}$ (ρ_p était normée à 1).

Les deux autres conditions sont alors également satisfaites.

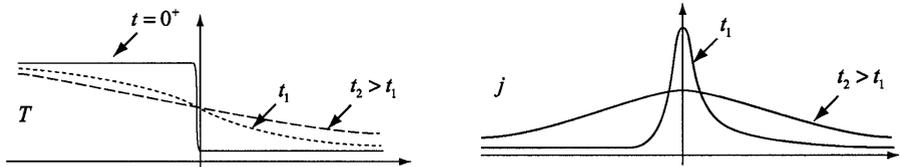
III.B.3.

- ◆ Décroissance maxi en $t^{-1/2}$;
- ◆ Augmentation de la largeur mi-hauteur en $t^{1/2}$;
- ◆ surface sous la courbe constante.



C. Température de contact de deux corps : Effusivité

III.C.1.a.



b. j étant maximum en $x=0$, on en déduit $\partial_x j = 0$ en $x = 0$ et vu que $\text{div} \vec{j} + \rho_c \partial_t T = 0$ on en déduit que $\partial_t T = 0$ en $x = 0 \rightarrow T(0,t) = T_0$ ne dépend pas du temps.

c. $j_i(x,t) = -\lambda_i \partial_x T_i$

d'où :
$$\begin{cases} \int_{-\infty}^0 j_1 dx = -\lambda_1(T_0 - T_1) \\ \int_0^{+\infty} j_2 dx = -\lambda_2(T_2 - T_0) \end{cases}$$

d. T_1 satisfait à l'équation de la diffusion, donc $\partial_x T_i$ aussi en dérivant cette équation par rapport à x , donc $j_i = -\lambda_i \partial_x T_i$ vérifie cette équation.

III.C.2.a. j_i satisfait l'équation de la diffusion et une normalisation indépendante du temps comme $n^*(x,t)$.

Dans chaque demi espace on remplace $\frac{N_0}{2\Sigma}$ par $-\lambda_1(T_0 - T_1)$ ou $-\lambda_2(T_2 - T_0)$ et on pose $D_i = \frac{\lambda_i}{\rho_i c_i}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} j_1(x,t) = -\frac{\lambda_1(T_0 - T_1)}{\sqrt{4\pi D_1 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_1 t}\right) \\ j_2(x,t) = -\frac{\lambda_2(T_2 - T_0)}{\sqrt{4\pi D_2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_2 t}\right) \end{cases}$$

b. La continuité de j en $x = 0$ donne $-\frac{\lambda_1(T_0 - T_1)}{\sqrt{D_1}} = -\frac{\lambda_2(T_2 - T_0)}{\sqrt{D_2}}$.

Si on pose $E_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{D_i}} = \sqrt{\rho_i c_i \lambda_i}$ l'équation fournit $E_1(T_0 - T_1) = E_2(T_2 - T_0) \Rightarrow T_0 = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$

c. Application Numérique

On obtient

	Cuivre	bois	marbre	muscles
E (SI)	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$7,1 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$
T_0 (100°C)	99°C	78,1°C	90,3°C	
T_0 (25°C)	25,2°C	29,2°C	26,8°C	

On retrouve les sensations classiques, le marbre est plus froid que le bois, et le métal que le marbre. Pour l'eau bouillante les différences sont moins sensibles car l'échelle de température associée au toucher est subjective et surtout sensible entre 0°C et 50°C environ.

III.C.3.a. En régime stationnaire j_i est uniforme dans chaque tige et la continuité donne :

$$G_1(T_0 - T_1) = G_2(T_2 - T_0)$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{G_1 T_1 + G_2 T_2}{G_1 + G_2}$$

b. T_0 et T_0' apparaissent comme des barycentres de T_1 et T_2 qui ne coïncident que si les poids sont

les mêmes : $\frac{G_1}{G_1 + G_2} = \frac{E_1}{E_1 + E_2} \Rightarrow \frac{G_1}{G_2} = \frac{E_1}{E_2}$

c. La diffusion ici se fait sur une distance finie puis il y a retour de l'onde de diffusion vers l'origine. Si ces retours sont simultanés alors il est logique que T_0 reste constant. Or les temps de

parcours sont en $\frac{L_i^2}{D_{th}}$ et ne sont égaux donc que si $\frac{L_1^2}{D_1} = \frac{L_2^2}{D_2}$

Avec : $G_i = \frac{\lambda_i \Sigma}{L_i}$

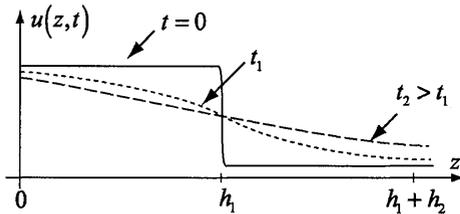
$$\Rightarrow \left(\frac{G_1}{G_2}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 \quad \text{et} : \quad \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)$$

$$\text{donc} : \quad \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^2 = \left(\frac{G_1}{G_2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 = \frac{D_2}{D_1}$$

CQFD.

D. Visualisation de la gaussienne de diffusion

III.D.1.a.



Le profil est ici très voisin de celui de $T(x,t)$ étudié en III.C.

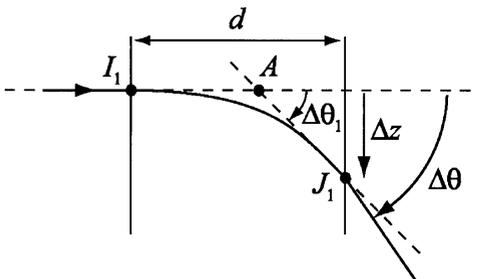
b. L'indice de l'eau et celui du glycérol sont voisins mais distincts. Donc l'indice dans le mélange dépend de u .

On peut en première approximation linéariser cette dépendance (D.L. au premier ordre) :

$$n(u) = n(0) + u \frac{dn}{du}(0)$$

$$\text{d'où ensuite} : \quad \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{dn}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dn}{du}(0)$$

c.



On écrit la loi de Descartes entre l'entrée et la sortie dans le milieu :

$$n(z) = n(z + \Delta z) \cos(\Delta\theta_1) \quad (1)$$

On assimile la trajectoire à un arc de cercle, les tangentes se recoupent en A équidistant de I_1 et J_1 d'où

$$\Delta z \approx \frac{d}{2} \tan \Delta\theta_1 \approx \frac{d}{2} \Delta\theta_1.$$

On développe l'équation (1) :

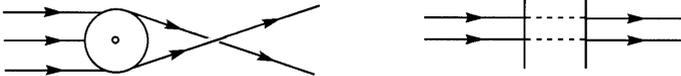
$$n(1 - \cos \Delta\theta_1) = \frac{dn}{dz} \Delta z \cos(\Delta\theta_1) \Rightarrow n \left(\frac{\Delta\theta_1^2}{2} \right) = \frac{dn}{dz} \cdot \frac{d}{2} \Delta\theta_1$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_1 = \frac{d}{n} \frac{dn}{dz}$$

Réfraction de sortie : $\Delta\theta = n\Delta\theta_1$ CQFD

d. La baguette joue le rôle d'une lentille cylindrique qui fait converger les rayons dans une direction et pas dans une l'autre. Le faisceau initial peu large garde donc sa largeur initiale parallèlement à l'axe du cylindre et s'étale dans l'autre direction.

La nappe est donc dans un plan perpendiculaire à l'axe de la baguette.

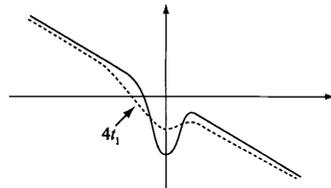


III.D.2. Les rayons incidents arrivent à différentes altitudes (suivant la deuxième bissectrice de xOz) et subissent alors des déviations proportionnelles à $\frac{dn}{dz}$ qui a exactement l'allure de j en III.C.

(dérivée spatiale de u ici, de T en III.C.).

On obtient alors sur l'écran la gaussienne de diffusion à une déformation près : l'axe qui correspondrait à l'axe horizontal est la deuxième bissectrice. En soustrayant à chaque ordonnée d'impact de rayon une quantité égale à l'opposé de son abscisse, on récupérerait exactement la gaussienne (aux approximations près sur $\Delta\theta$...).

A $t_2 = 4 t_1$, le maximum est diminué de moitié et la largeur à mi-hauteur doublée, le tout à surface constante (cf. discussion en III.B.).



QUATRIEME PARTIE

Irréversibilité et transport :

bilan entropique associé à la conduction thermique

A. Mise en contact de deux corps à des températures différentes

IV.A.1.a. Conductivité $\infty \implies$ homogénéisation instantanée de la température dans tout le volume.

b. On ne détaille pas ce qui se passe dans la paroi car elle a une chaleur massique nulle donc ni son énergie interne, ni son entropie ne varient.

On écrit les deux principes pour le système total isolé :

$$\begin{aligned} \diamond \Delta U &= \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0 \\ mc(T_F - T_1) + mc(T_F - T_2) &= 0 \\ \Rightarrow T_F &= \frac{T_1 + T_2}{2} \end{aligned}$$

$$\diamond \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc \ln \frac{T_F^2}{T_1 T_2}$$

Il s'agit ici de $S_{crée}$ (pas d'échanges avec l'extérieur) et on vérifie que $T_F^2 > T_1 T_2 \Rightarrow \Delta S > 0$ ce qui traduit l'irréversibilité (pour $T_1 > T_2$).

c. (Solide 1 + paroi) / (Solide 2) : le solide 2 joue le rôle de source à T_2 uniforme.

$$\begin{cases} dS_2 = S^{éch} = -\frac{\delta Q_{2 \rightarrow 1}}{T_2(t)} \\ dU_2 = mcdT_2 = -\delta Q_{2 \rightarrow 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta S_2 = mc \ln \left(\frac{T_F}{T_2} \right)$$

$$\Delta S_1((paroi + 1)) = \Delta S_1 = mc \ln \left(\frac{T_F}{T_1} \right)$$

$$S^{échangée} = \frac{\delta Q_{2 \rightarrow 1}}{T_{frontière}} = \frac{\delta Q_{2 \rightarrow 1}}{T_2}$$

$$\Rightarrow S^{éch} = -mc \ln \left(\frac{T_F}{T_2} \right)$$

$$\Rightarrow S^{crée} = \Delta S_1 - S^{éch} = \Delta S_{tot}$$

Même raisonnement en permutant les rôles, \rightarrow le terme de création est toujours dans le sous-système qui contient la paroi, donc la création se fait dans la paroi.

IV.2.a. Bilan d'énergie : cf. partie I.

$$\Rightarrow \mu c' \partial_i T = -\partial_x j \quad (1)$$

Bilan d'entropie :

$$\Delta S = S^{éch} + S^{crée}$$

$$\begin{cases} S^{crée} = \tau_s \sum dxdt \\ S^{éch} = \frac{j(x,t)}{T(x,t)} \sum dt - \frac{j(x+dx,t)}{T(x+dx,t)} \sum dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum dxdt \frac{\mu c' \partial T}{T \partial t} = \left(-\partial_x \left(\frac{j}{T} \right) + \tau_s \right) \sum dxdt \quad (2)$$

2.b. On divise (1) par T et on obtient dans (2) :

$$\tau_s = \partial_x \left(\frac{j}{T} \right) - \frac{1}{T} \partial_x j$$

$$\Rightarrow \tau_s = j \partial_x \left(\frac{1}{T} \right)$$

2.c. Si $j = -\lambda \partial_x T$ on obtient $\tau_s = -\lambda \partial_x T \partial_x \frac{1}{T} = +\frac{\lambda}{T^2} (\partial_x T)^2$

λ est donc ≥ 0 via le second principe.

3.a. $R = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{\Sigma}$ (cf III.A)

C'est nul donc le bilan d'énergie se traduit par le fait que $j(x,t)$ est à flux conservatif (cf discussion en III.A.2), donc on peut écrire :

$$j(x,t)\Sigma = \frac{(T_1 - T_2)\lambda(t)}{R}$$

$$P_{[s]} = \sum_0^L \tau_s dx$$

avec $\partial_x j = 0 \Rightarrow \tau_s = \partial_x \left(\frac{j}{T} \right)$

$$\Rightarrow P_{[s]} = \sum j \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

$$P_{[s]} = \frac{1}{R} (T_1 - T_2) \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

3.b.

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU_1}{dt} + \frac{dU_2}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow (T_1 + T_2)\lambda(t) = T_{10} + T_{20} = 2T_F$$

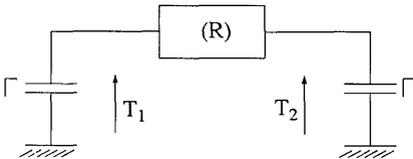
Solide 1 : $\frac{dU_1}{dt} = mc \frac{dT_1}{dt} = -j\Sigma = -\frac{T_1 - T_2}{R}$

De même, $\frac{dU_2}{dt} = +j\Sigma = \frac{T_1 - T_2}{R} = mc \frac{dT_2}{dt}$

On pose $\Gamma = mc$, on obtient $\frac{d(T_1 - T_2)}{dt} = -\frac{2(T_1 - T_2)}{R\Gamma}$

$$T_1 - T_2 = (T_{10} - T_{20}) \exp\left(-\frac{2T}{R\Gamma}\right)$$

Analogie électrique :



3.c.

$$P_{[s]} = \frac{(T_1 - T_2)}{RT_1 T_2}$$

avec $T_1 T_2 = \frac{1}{4} \left[(T_1 + T_2)^2 - (T_1 - T_2)^2 \right]$

$$T_1 T_2 = \frac{1}{4} \left[4T_F^2 - \Delta T_0 \exp\left(-\frac{4t}{R\Gamma}\right) \right]$$

$$\Rightarrow P_{[s]} = \frac{d}{dt} \left[\Gamma \ln \left\{ T_F^2 - \frac{\Delta T_0^2}{4} \exp\left(-\frac{4t}{R\Gamma}\right) \right\} \right]$$

$$\Rightarrow S^{\text{créée}} = \int_0^{+\infty} P_{[s]}(t) dt$$

$$\Rightarrow S^{\text{créée}} = \Gamma \ln \left(\frac{T_F^2}{\left(T_F^2 - \frac{\Delta T_0^2}{4} \right)} \right) = \Gamma \ln \left(\frac{T_F^2}{T_{10} T_{20}} \right)$$

CQFD

IV.B. Etat stationnaire et minimum de création d'entropie

1.a. $\varepsilon(0) = \varepsilon(L) = 0$ (T_1 et T_2 imposés quel que soit le profil).

$$1.b. \tau_s(T + \varepsilon, \dot{T} + \dot{\varepsilon}) = \tau_s(T, \dot{T}) + \varepsilon \frac{\partial \tau_s}{\partial T} + \dot{\varepsilon} \frac{\partial \tau_s}{\partial \dot{T}}$$

Si $P_{[s]}$ est extrémal alors il ne doit pas dépendre au premier ordre du profil choisi, d'où :

$$\int_0^L \left(\varepsilon \partial_T \tau_s + \dot{\varepsilon} \partial_{\dot{T}} \tau_s \right) dx = 0$$

$$\int_0^L \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{\partial \tau_s}{\partial \dot{T}} dx = \left[\varepsilon \frac{\partial \tau_s}{\partial T} \right]_0^L - \int_0^L \varepsilon \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tau_s}{\partial \dot{T}} \right) dx$$

$$\text{Avec } \varepsilon(0) = \varepsilon(L) = 0 \text{ on obtient : } \int_0^L \varepsilon(x) \left(\frac{\partial \tau_s}{\partial T} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tau_s}{\partial \dot{T}} \right) \right) dx = 0 \text{ pour tout } \varepsilon(x), \text{ d'où :}$$

$$\frac{\partial \tau_s}{\partial T} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tau_s}{\partial \dot{T}} \right)$$

2. Avec la loi de Fourier on a :

$$\tau_s = \lambda \frac{\dot{T}}{T^2} \Rightarrow \partial_T \tau_s = -\frac{2\lambda \dot{T}}{T^3}$$

$$\text{et } \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tau_s}{\partial \dot{T}} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{2\lambda \dot{T}}{T^2} \right) = \frac{2\lambda \ddot{T}}{T^2} - \frac{4\lambda \dot{T}^2}{T^3}$$

d'où, si la condition est remplie :

$$\ddot{T} T = \dot{T}^2 \Rightarrow \frac{\ddot{T}}{\dot{T}} = \frac{\dot{T}}{T} \quad \text{soit} \quad \frac{d\dot{T}}{\dot{T}} = \frac{dT}{T} \quad \text{et donc} \quad \dot{T} = AT$$

Ce profil ne donne pas $\partial_x j = 0$ et n'est donc pas le profil stationnaire, celui-ci ne minimise donc pas $P_{[s]}$.

3. Avec $\theta = -\frac{1}{T}$ et $\vec{J} = -L_0 \vec{\nabla} \theta$ τ_s reste égal à $\partial_x \left(\frac{j}{T} \right) - \frac{1}{T} \partial_x j$

Soit : $\tau_s = -\partial_x(j\theta) + \theta \partial_x j = -j \partial_x \theta \Rightarrow \tau_s = +L_0 (\partial_x \theta)^2$

$\Rightarrow j$ est bien à flux conservatif si on minimise $P_{[S]}$

4.a.

$$\tau_s = L_0 (\partial_x \theta)^2 \Rightarrow \frac{\partial \tau_s}{\partial t} = 2L_0 \partial_x \theta \partial_x (\partial_t \theta) = -2j \partial_x (\partial_t \theta)$$

$$\frac{dP_{[S]}}{dt} = -2\Sigma \int_0^L j \partial_x (\partial_t \theta) dx = -2\Sigma [j \partial_t \theta]_0^L + 2\Sigma \int_0^L \partial_x j \partial_t \theta dx$$

avec $\partial_x j = -\rho c' \partial_t T$ d'où $\frac{dP_{[S]}}{dt} = -2\rho \Sigma c' \int_0^L (\partial_t T) (\partial_t \theta) dx$

car $\partial_t \theta = 0$ en $x = 0$ et $x = L$, températures fixées aux extrémités.

$$\partial_t \left(-\frac{1}{\theta} \right) = +\frac{1}{\theta^2} \partial_t \theta \text{ d'où } \frac{dP_{[S]}}{dt} = -2\rho c' \Sigma \int_0^L \left(\frac{\partial_t \theta}{\theta} \right)^2 dx$$

$P_{[S]}$ décroît donc lorsqu'on évolue vers l'état stationnaire qui correspond donc bien à un minimum.

5.a. Pour l'ensemble des deux corps on a

$$\begin{cases} dU_1 + dU_2 = 0 & (a) \\ dS_1 + dS_2 \geq 0 & (b) \end{cases}$$

Le corps le plus froid reçoit de l'énergie donc si c' est (2) : $dU_2 > 0$

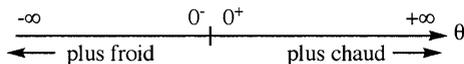
Donc en divisant (b) par $dU_2 > 0$

$$\frac{dS_1}{dU_1} + \frac{dS_2}{dU_2} \geq 0 \Rightarrow \frac{dS_2}{dU_2} \geq \frac{dS_1}{dU_1} \Rightarrow -\frac{dS}{dU} = \theta \text{ est une relation d'ordre sur les états thermiques}$$

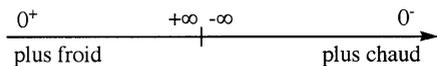
qui classe avec θ plus élevé pour les corps les plus chauds. C'est une échelle de température.

5.b.

Si $\frac{dS_2}{dU_2} \geq \frac{dS_1}{dU_1} > 0$ et si on diminue $\frac{dS}{dU}$ c'est $\frac{dS_1}{dU_1}$ qui s'annule et devient < 0 d'abord, donc θ_1 qui devient > 0 d'abord (le plus chaud) donc :



Pour $-\frac{1}{\theta} = T$ cela donne



Les températures < 0 sont alors plus chaudes que les > 0 .

Le choix de θ est donc plus logique (mais donnerait toutes les températures usuelles négatives).

5.c. Exemples de spins nucléaires (interagissant avec l'environnement : on peut définir leur

température différente de celle du réseau, comme dans un plasma on peut parler de température électronique et de température ionique).

Ces systèmes ont nécessairement un nombre fini d'états individuels possibles, sinon l'entropie est forcément une fonction croissante de l'énergie (cf Diu p. 185 note 10)

On observe ces systèmes si la relaxation spin-réseau est beaucoup plus lente que les relaxations dans chaque sous-système. Grâce à un champ \vec{B} bien choisi on peut forcer les spins à atteindre $T < 0$. Ils relaxent ensuite en réchauffant alors le réseau sous-jacent.

Partie V : Approche linéaire des phénomènes irréversibles

V-A Expression de la création d'entropie

$$1.a. dU_{(1)} = T_{(1)} dS_{(1)} - P_{(1)} dV_{(1)} + \sum_j \mu_{(1),j} dN_{(1),j}$$

$$d'où dS_{(1)} = \frac{dU_{(1)}}{T_{(1)}} + \frac{P_{(1)}}{T_{(1)}} dV_{(1)} - \sum_j \frac{\mu_{(1),j}}{T_{(1)}} dN_{(1),j}$$

idem pour $dS_{(2)}$.

1.b. On écrit pour le système global

$$P_{[S]} dt = dS_{(1)} + dS_{(2)} \quad (\text{système isolé})$$

et, en l'absence de sources (donc entre autres de réactions chimiques)

$$\begin{cases} dU_{(2)} = -dU_{(1)} = I_{U,1 \rightarrow 2} dt \\ dV_{(2)} = -dV_{(1)} = I_{V,1 \rightarrow 2} dt \\ dN_{(2),j} = -dN_{(1),j} = I_{N,1 \rightarrow 2,j} dt \end{cases}$$

d'où l'expression demandée.

2. $I_{V,1 \rightarrow 2}$ est associé à une variation de volume à $N_{(1),j}$ constants donc sans déplacement de matière.

Dans le cas d'un solvant liquide, la quasi incompressibilité du liquide rend ce terme négligeable devant les autres sources d'irréversibilité.

3.a. A l'équilibre, les paramètres intensifs P , T et μ s'équilibrent entre les deux compartiments donc les forces thermodynamiques sont nulles.

3.b. De même à l'équilibre, les courants sont nuls.

4. On remplace alors les discontinuités par des gradients. Le taux de production d'entropie a alors une expression locale ramenée à l'unité de volume : $\tau_{[S]} = \sum_j \vec{j} \cdot \vec{\gamma}$

où \vec{j} est la densité volumique de courant associée à l'un des transports et $\vec{\gamma}$ le gradient de force correspondant :

$$\tau_{[S]} = \vec{j}_U \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{T} \right) + \vec{j}_{vol} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{P}{T} \right) + \sum_j \vec{j}_{N,j} \cdot \vec{\nabla} \left(-\frac{\mu_j}{T} \right)$$

La loi phénoménologique obtenue en IV-B-3 est un cas particulier de linéarisation lorsqu'un seul

transport intervient en l'absence de couplage : $\vec{j} = +L_0 \vec{\nabla} \left(\frac{1}{T} \right)$

(3) devient alors : $\vec{j}_{i1 \rightarrow 2} = \sum_j \Lambda_{ij} \vec{y}_j$

et on retrouve en l'absence de couplage les lois étudiées dans les premières parties.

B – Potentiel électrochimique

Un terme supplémentaire intervient dans l'expression de $dU_{(1)}$ ou $dU_{(2)}$ à partir de l'expression du travail électrique réversible associé au transfert de charges :

$$\begin{cases} \Phi_{(1)} dq_1 = \sum_j \Phi_{(1)} F z_j dN_{(1),j} \\ \Phi_{(2)} dq_2 = \sum_j \Phi_{(2)} F z_j dN_{(2),j} \end{cases}$$

d'où une modification de $dS_{(1)}$ et $dS_{(2)}$ qui revient à remplacer dans le terme $dN_{(i,j)} \frac{\mu_{(i),j}}{T_{(i)}}$ par :

$$\frac{\mu_{(i),j} + z_j F \Phi_{(i)}}{T_{(i)}} \text{ sauf pour le solvant neutre.}$$

2. immédiat

3. Egalité des $T_{(i)}$, $P_{(i)}$ et $\tilde{\mu}_{(i),j}$ de part et d'autre de la membrane.

$$4. \Gamma_{N,j}(1,2) = -\frac{\tilde{\mu}_{(2),j}}{T_{(2)}} + \frac{\tilde{\mu}_{(1),j}}{T_{(1)}}$$

V-C – Cohérence avec les parties précédentes

1.a. : on utilise l'expression de μ rappelée en préambule :

$$\mu(P, T, x) = \mu^\circ(P, T) + RT \ln(x_{\text{soluté}})$$

d'où $\partial_x \mu = RT \frac{\partial_x x_{\text{soluté}}}{x_{\text{soluté}}}$

Avec $x_{\text{soluté}} = \frac{n_{\text{soluté}}}{n_{\text{total}}} = \frac{c_{\text{soluté}}}{n_{\text{total}}}$ et $n_{\text{total}} \approx \text{cste}$

$$\partial_x \mu = \frac{RT}{c} \partial_x c$$

$$J_{\text{molaire}} = -\frac{L}{T} \partial_x \mu = -\frac{RL}{c} \partial_x c$$

$$J_{\text{part}} = 6,02 \cdot 10^{23} J_{\text{mol}} = -6,02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{RL}{c} \partial_x c \Rightarrow D = \frac{RL}{c}$$

1.b. Avec la loi de Fick, on obtient un flux infini associé à la discontinuité de concentration particulière de l'interface, ce qui contredit l'observation de l'équilibre.

Par contre, avec $J = L \partial_x \left(-\frac{\mu}{T} \right)$, on obtient un flux nul car les potentiels chimiques du corps pur sont égaux dans les deux phases à l'équilibre. Cette expression est donc plus générale que la loi de Fick.

2.a. Ici les masses sont mobiles dans le champ de pesanteur.

$$\text{Travail } \Phi_{(i)} dm = \sum_j \Phi_{(i)} M_j dN_{(i),j}$$

avec $\Phi_{(i)} = gh_i$ où h_i est l'altitude du compartiment (i).

$$\bar{\mu} = \mu + Mgh$$

2.b. Annuler la force revient, pour une température uniforme à écrire $\bar{\nabla}\bar{\mu} = \bar{0}$ soit

$$\bar{\nabla}(\mu^0 + RT \ln \frac{P}{P^0}) + Mg\bar{\nabla}h = 0 \quad \text{d'où } \frac{RT}{P} \bar{\nabla}P = Mg\bar{g}$$

$$\text{et avec } \frac{RT}{P} = \frac{1}{n} \quad \text{et } nM = \rho \quad \bar{\nabla}P = \rho\bar{g} \quad \text{CQFD}$$

$$2.c. \quad J = -\frac{L}{T} \partial_z \mu - \frac{L}{T} Mg$$

(diffusion) (dérive)

$$J_{diff} = -\frac{L}{T} \frac{\partial \mu}{\partial P} \partial_z P = -\frac{L}{T} \bar{v} \partial_z (nRT)$$

$$J_{diff} = -\frac{LR}{n} \partial_z n = -D \partial_z n$$

$$J_{dérive} = n v_{dérive} = -\frac{L}{T} Mg$$

$$\Rightarrow |v_{dérive}| = \frac{L}{T} \frac{M}{n} g = \mu mg$$

(m particulière)

$$\text{d'où : } \frac{D}{\mu} = \frac{LR}{n} \cdot \frac{nTm}{ML} = \frac{RT}{6,02 \cdot 10^{23}} = kT$$

on retrouve bien $D = \mu kT$.

Partie VI : Membranes biologiques

VI-A Electro-osmose

1. D'après V-A et V-b on a

$$P_{[s]} = I_{N,1 \rightarrow 2,s} \frac{\mu_{(1),s} - \mu_{(2),s}}{T} + \sum_j I_{N,1 \rightarrow 2,s} \frac{\mu_{(1),j} - \mu_{(2),j}}{T} + \sum_j I_{N,1 \rightarrow 2,s} \frac{Fz_j}{T} (\Phi_{(1)} - \Phi_{(2)})$$

$$\text{avec } I_{N,1 \rightarrow 2,j} = \frac{dN_{(2),j}}{dt}$$

$$\text{d'où } I = \sum_j Fz_j \frac{dN_{(2),j}}{dt}$$

De plus $\Delta\mu_i = \Delta\mu_i^0$ puisque les compositions sont identiques, et $\Delta\mu_i^0 \approx \bar{v}_i \Delta P$

$$\text{donc } J = \bar{v}_s \frac{dN_{(2),s}}{dt} + \sum_j \bar{v}_j \frac{dN_{(2),j}}{dt}$$

I représente le courant électrique à travers la membrane, dirigé de (1) vers (2).

J représente l'échange de volume lié à l'échange de matière entre les deux compartiments.

$$2.a. \quad T^2 P_{[s]} = L_{11} \Delta P^2 + 2L_{12} \Delta \Phi \Delta P + L_{22} \Delta \Phi^2$$

$P_{[S]}$ apparaît aussi comme une forme quadratique positive (second principe) des variables $\Delta P, \Delta\Phi$

d'où :
$$\begin{cases} L_{11} \geq 0, L_{22} \geq 0 \\ L_{11}L_{22} - L_{12}^2 \geq 0 \end{cases}$$

2.b. à $\Delta\Phi$ constant on cherche le minimum de $P_{[S]}$:

$$\frac{dT^2 P_{[S]}}{d(\Delta P)} = 0 \Leftrightarrow 2L_{11}\Delta P + 2L_{12}\Delta\Phi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} J = 0 \\ \Delta P_0 = -\frac{L_{12}}{L_{11}}\Delta\Phi \end{cases}$$

On vérifie que $\frac{d^2 T^2 P_{[S]}}{d(\Delta P)^2} = 2L_{11} \geq 0 \implies$ c'est bien un minimum.

2.c. Même raisonnement en permutant les rôles des variables

$$\implies I = 0 \text{ et } \Delta\Phi_0 = -\frac{L_{21}}{L_{22}}\Delta P.$$

3.a.
$$J = L_{11} \frac{\Delta P_0}{T} + L_{12} \frac{\Delta\Phi}{T} + L_{11} \frac{\alpha}{T} = L_{11} \frac{\alpha}{T}$$

d'où :

$$P_{[S]} = L_{11} \frac{\alpha}{T^2} (\Delta P_0 + \alpha) + \left(I_{eq} + L_{21} \frac{\alpha}{T} \right) \frac{\Delta\Phi}{T}$$

$$\implies \frac{dP_{[S]}}{dt} = \frac{L_{11}}{T^2} (\Delta P_0 + \alpha) \dot{\alpha} + \frac{\alpha \dot{\alpha} L_{11}}{T^2} + \frac{\dot{\alpha} L_{21} \Delta\Phi}{T^2}$$

avec $L_{11}\Delta P_0 + L_{21}\Delta\Phi = 0$ d'après 2b

d'où
$$\frac{dP_{[S]}}{dt} = \frac{2L_{11}}{T^2} \alpha \dot{\alpha}$$

3.b. On écrit que $\Delta P = P_{(1)} - P_{(2)} = \rho gh \implies \alpha = \rho gh$

De plus $\frac{dv_2}{dt} = -\frac{dv_1}{dt}$ (incompressibilité) et $\Sigma_0 \frac{dh}{dt} = \frac{d(v_1 - v_2)}{dt}$

d'où
$$\dot{\alpha} = \rho g \dot{h} = -\frac{2\rho g}{\Sigma_0} \frac{dv_2}{dt}$$

$$\implies \dot{\alpha} = -\frac{2\rho g}{\Sigma_0} J = -\frac{2\rho g}{\Sigma_0} \frac{L_{11}}{T} \alpha$$

$$\implies \frac{dP_{[S]}}{dt} = -\frac{4\rho g}{\Sigma_0} \alpha^2 \frac{L_{11}^2}{T^3} \leq 0$$

3.c. On en déduit que pour tout écart au régime stationnaire $P_{[S]}$ diminue et revient à son minimum qui est donc stable.

4.a. On raisonne par analogie en permutant le rôle des variables.

D'où
$$I = \frac{L_{22}\beta}{T} \text{ et } \frac{dP_{[S]}}{dt} = \frac{2L_{22}\beta}{T^2} \dot{\beta}$$

4.b. Le courant électrique à travers la membrane reste faible au voisinage de l'état stationnaire, donc les charges apparaissent de part et d'autre en quantité faible, essentiellement localisées au voisinage de la membrane donc en surface, le reste de la solution étant très peu affecté.

4.c. On a alors comme pour une capacité

$$I_{1 \rightarrow 2} = c \frac{d}{dt} (\Phi_{(2)} - \Phi_{(1)})$$

$$\text{soit } I_{1 \rightarrow 2} = I = -c \dot{\beta} = \frac{L_{22} \beta}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{dP_{[S]}}{dt} = -\frac{2L_{22}^2 \beta^2}{cT^3}$$

à nouveau $P_{[S]}$ diminue pour retrouver une valeur minimale stable.

5.a. On peut ici raisonner en choisissant d'exprimer ΔP et $\Delta \Phi$ en fonction de I , J (comme une dualité série/parallèle en électrocinétique).

$$I \leftrightarrow \Delta \Phi$$

$$J \leftrightarrow \Delta P$$

$$\Delta \Phi \leftrightarrow I$$

$$\Delta P \leftrightarrow J$$

Travailler à J constant équivaut à travailler à ΔP imposé c'est à dire à $I = 0$ qui équivaut donc à $\Delta \Phi = 0$ ici.

5.b.

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta \Phi} \right)_{J=0} = -\frac{L_{12}}{L_{11}}$$

$$\left(\frac{I}{J} \right)_{\Delta \Phi=0} = \frac{L_{21}}{L_{11}} = -\left(\frac{\Delta P}{\Delta \Phi} \right)_{J=0}$$

5.c. Les résultats donnent une bonne concordance avec la théorie avec, dans le cas de 1% CdSO_4 des résultats très différents, manifestement obtenus avec des membranes différentes. On ne peut par contre a priori dégager aucune loi simple de dépendance par rapport à la concentration, vraisemblablement entre autres à cause d'une grande sensibilité de la réponse des membranes en fonction d'impuretés plus ou moins présentes par exemple.

6. Ici c'est la viscosité qui sera responsable de l'apparition d'un $\bar{\nabla} P$ dans les capillaires essentiellement, vu leur faible diamètre. L'état stationnaire de déséquilibre serait alors $I = 0$ et $\Delta \Phi \neq 0$. Donc une différence de potentiel entre l'extérieur et l'intérieur du capillaire ainsi qu'un gradient le long du capillaire (considéré comme une membrane épaisse vis à vis du gradient de pression).

VI - B Transport actif

1. On dissocie à présent chaque compartiment

$$dN_{(i),J} = dN_{(i),J \text{ réaction}} + dN_{(i),J \text{ transfert}}$$

$$\Rightarrow dN_{(i),J} = v_j d\xi + dN_{(i),J \text{ transfert}}$$

Le second terme donne alors une contribution à $P_{[S]}$ en terme de courant d'échange identique à celle étudiée en V-A alors que le premier terme donne en sommant une contribution à $dS_{[1]}$

$$-\sum_j \frac{\mu_{(i),j}}{T_{(i)}} v_j d\xi = \frac{A_{(i),r}}{T_{(i)}} d\xi$$

d'où pour $P_{[S]} = \frac{A_{(i),r}}{T_{(i)}} I_{(i),r}$

$$I_{(i),r} = \frac{d\xi}{dt}$$

2. On calcule A_r à partir de A_r^0 par $A_r = A_r^0 + RT \ln \frac{[ATP]}{[ADP][P]}$

en utilisant l'expression des potentiels chimiques en solution idéale, d'où :

$$A_r = A_r^0 + 8,31.300 \cdot \ln \left(\frac{10^{-2}}{10^{-4}} \right)$$

$$\Rightarrow A_r = 40,8 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

$$\Rightarrow \delta S_{réaction}^{créé} = \frac{A_r}{T} d\xi \approx 136 \text{ J.mol}^{-1} \text{K}^{-1}$$

On calcule ensuite

$$\tilde{\mu}_{Na^+}^{int} - \tilde{\mu}_{Na^+}^{ext} = RT \ln \left(\frac{50}{440} \right) - 6 \cdot 10^{-2} F = -11,2 \cdot 10^{-3} \text{ J.mol}^{-1}$$

$\Delta N_{Na^+} = +3$ par mole d'ATP hydrolysée

$$\Rightarrow \delta S_{Na^+}^{créé} = -112 \text{ J.mol}^{-1} \text{K}^{-1}$$

Le transfert a lieu ici à l'envers par rapport au sens « logique » d'où ce signe de $\delta S_{Na^+}^{créé}$.

$$\tilde{\mu}_{K^+}^{int} - \tilde{\mu}_{K^+}^{ext} = RT \ln \left(\frac{400}{20} \right) - 6 \cdot 10^{-2} F = +1,68 \cdot 10^3 \text{ J.mol}^{-1}$$

$\Delta N_{K^+} = -2$ par mole d'ATP hydrolysée

$$\Rightarrow \delta S_{K^+}^{créé} = -11,2 \text{ J.mol}^{-1} \text{K}^{-1}$$

Les deux transits d'ions ont donc lieu à contresens grâce à la réaction chimique qui autorise un bilan entropique conforme au second principe

$$\delta S_{Total}^{créé} \approx 12,8 \text{ J.mol}^{-1} \text{K}^{-1}$$

3.a. Il faut que la réaction soit source d'entropie, donc qu'elle se déroule dans le sens de la création d'entropie et en particulier ceci impose de ne pas être à l'équilibre...

$$A_r I_r \text{ doit être } >0 \text{ et } A_r I_r > -I_r \Delta \tilde{\mu}_i$$

3.b. On peut exprimer $P_{[S]}$ comme une forme quadratique positive des courants d'où :

$$\begin{cases} R_{ii} \geq 0, R_{rr} \geq 0 \\ R_{ii} R_{rr} - R_{ir}^2 \geq 0 \end{cases}$$

4.a. On forme le rapport $\alpha = \frac{\Delta \tilde{\mu}_i}{A_r}$

$$\alpha = \frac{R_{ii} \theta + R_{ir}}{R_{ir} + R_{rr}} = \frac{\sqrt{R_{rr} R_{ii}} \theta / z + R_{ir}}{R_{ir} \sqrt{R_{rr} / R_{ii}} \theta / z + R_{rr}}$$

$$\Rightarrow z\alpha = \frac{\theta/z - q}{1 - q\theta/z}$$

$$\Rightarrow \theta/z = \frac{q + z\alpha}{1 + qz\alpha}$$

4.b. Vu 3-b $q \in [-1; 1]$.

4.c. Le changement de q en $-q$ et $z\alpha$ en $-z\alpha$ change θ/z en $-\theta/z$.
Une symétrie de centre (0,0) transforme la courbe q en la courbe $-q$.
Pour un transport actif on a $I_i \Delta \tilde{\mu}_i \leq 0$ et $I_r A_r > 0$ d'où $\theta\alpha \leq 0$.

D'autre part $A_r I_r \geq -I_i \Delta \tilde{\mu}_i$ donc $\frac{-I_i \Delta \tilde{\mu}_i}{A_r I_r} \leq 1 \Rightarrow \theta\alpha \geq -1$.

Pour $q = 0$, il s'agit donc d'avoir $\theta/z \geq 0$ et $z\alpha \leq 0$ avec des courbes qui sont ensuite automatiquement en dessous de l'hyperbole $y = -1/x$.

4.d. $q = 1 \Rightarrow \theta/z = 1$ pour toute valeur de $\Delta \tilde{\mu}_i$. Couplage total. z mesure alors les rapports dans lesquels se font les échanges d'ions par rapport à la réaction chimique (nombre d'ions échangés par mole de réactif consommé par réaction : stoechiométrie).

Dans ce cas, c'est l'avancement de la réaction, sa cinétique, qui contrôle directement I_i , et non $\Delta \tilde{\mu}_i$.

5.a. On cherche à réaliser un courant fort inversé c'est à dire $I_i \Delta \tilde{\mu}_i \leq 0$ et $|I_i \Delta \tilde{\mu}_i|$ le plus grand possible pour une même consommation en terme de réaction chimique, mesurée par $A_r I_r$. D'où l'expression de η qui varie comme cela entre 0 et 1, d'autant plus proche de 1 que le transport actif est efficace.

$$5.b. y = \frac{\theta}{z} \text{ et } x = z\alpha.$$

$$5.c. \text{ Alors } \eta(q, z\alpha) = -yx$$

$$\text{Ce produit est extremum pour } -\frac{dy}{dx}x - y = 0 \text{ soit } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Ceci, d'après le graphe, est le cas pour $y = -x$, et correspond à un maximum de η car η vaut zéro pour $y = 0$ ou $x = 0$, et est 0 dans le quadrant du transport actif.

$$\Rightarrow \eta^*(q) = x_{\max}^2$$

$$\text{avec } x_{\max} = -y(x_{\max})$$

c'est à dire

$$q + x_{\max} = -(1 + qx_{\max})x_{\max}$$

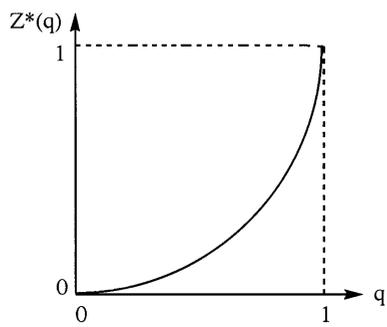
$$\Rightarrow x^2 + \frac{2}{q}x + 1 = 0$$

On retient que la racine ≤ 0 est plus petite que 1 en valeur absolue, c'est à dire $-\frac{1}{q} + \sqrt{\frac{1}{q^2} - 1}$

$$\text{et } \eta^*(q) = \frac{2}{q^2} - 1 - \frac{2}{q} \sqrt{\frac{1}{q^2} - 1}$$

5.d. L'allure de $\eta^*(q)$ se déduit de la figure 8 en notant que $\eta^*(q) = x_q^2$ où x_q est la valeur de

l'abscisse où la courbe coupe la deuxième bissectrice.



Le rendement n'est vraiment appréciable que si le couplage q est voisin de 1 en valeur absolue, c'est à dire si le couplage entre réaction chimique membranaire et transfert des ions dans la membrane est suffisant. Ceci ne donne évidemment pas le détail du couplage (qui fait en général intervenir un caractère stérique fort).

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE

Composition de chimie ♦ Session : 2002

Première partie

1-1-1. Oxygène : $1s^2, 2s^2, 2p^4$; azote : $1s^2, 2s^2, 2p^3$

1-1-2. Énergie d'ionisation d'un atome : Énergie minimale à fournir pour arracher un électron à l'atome gazeux dans son état fondamental $M(g) \rightarrow M^+(g) + e(g)$

1-1-3. Évolution générale : EI_1 augmente avec Z le long de la période : les électrons arrachés appartiennent à la même sous-couche, la charge effective augmente avec Z , l'électron est donc de plus en plus difficile à arracher.

1-1-4. Les irrégularités des EI des paires Be/B et N/O illustrent le fait que l' EI ne dépend pas seulement de Z , mais également de la structure électronique de l'atome : la sous couche $2s$ est remplie dans le cas du Béryllium ($2s^2$) la sous couche $2p$ est à demi remplie dans le cas de l'Azote ($2p^3$), ces configurations électroniques correspondent à une stabilisation maximale des édifices et donc à des énergies plus élevées. Dans les cas du Bore et de l'Oxygène, après ionisation on obtient une configuration électronique de stabilité maximale.

1-1-5. Énergie de deuxième ionisation : les électrons arrachés appartiennent à la même sous-couche, mais l'électron arraché à l'ion formé après première ionisation est moins écranté que dans l'atome non chargé.

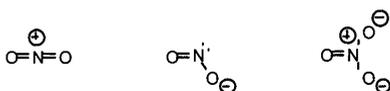
1-1-6. Singularités des énergies de deuxième ionisation de Li, B et O Analyse des valeurs, interprétation

Pour le Lithium, en deuxième ionisation, on doit arracher des électrons de type $1s$ liés plus fortement au noyau.

Dans les cas du Bore et de l'Oxygène, après ionisation on obtient une configuration électronique de stabilité maximale (sous couche $2s$ remplie dans le cas du B^+ ($2s^2$), sous couche $2p$ demie remplie dans le cas de O^+), la situation est similaire à celle observée en première ionisation pour le Béryllium et l'Azote.

1-1-7. Théorie VSEPR : Autour de chaque atome, les paires d'électrons de valence (libres ou liés) s'éloignent le plus possible les unes des autres de façon à minimiser leurs interactions répulsives (formulation minimale).

1-1-8. Structure de Lewis : les doublets non liants ne sont pas indiqués sur les atomes d'oxygène : deux sur chaque O et trois sur chaque O chargé négativement.

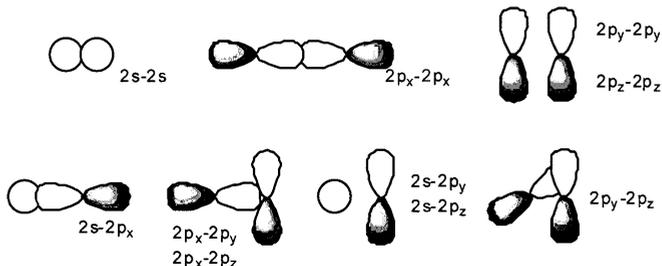


Géométrie : NO_2^+ : linéaire ; NO_2^- : coudée ; NO_3^- : trigonale

1-1-9. Angle ONO entre NO₂ et NO₂⁻: diminution de l'angle ONO en passant de NO₂ à NO₂⁻ en raison de l'augmentation de la répulsion avec les doublets liants quand on passe d'un électron célibataire sur N à un doublet libre.

1-1-10. Évolution de l'angle XNO : l'interaction répulsive entre le doublet non liant porté par l'azote et le doublet liant de O-X est plus faible si X est plus électro-négatif, l'angle XNO diminue avec l'augmentation de l'électro-négativité de X.

1-2-1. Orbitales moléculaires



1-2-2. Type d'orbitales moléculaires :

2s-2s, 2p_x-2p_x et 2s-2p_x sont de type σ ; 2p_y-2p_y et 2p_z-2p_z sont de type π

1-2-3. Diagramme d'orbitales moléculaires corrélé :

Diagramme non corrélé (simple) lorsque les interactions 2s-2p_x sont négligeables (forte différence d'énergie)

Diagramme corrélé lorsque les interactions 2s-2p_x sont prises en compte (différence d'énergie plus faible)

1-2-4. Diagramme d'orbitales O₂/N₂

Diagramme non corrélé pour O₂ car ΔE = 16,5 eV

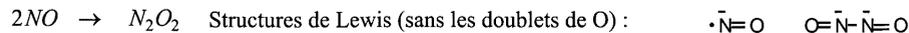
Diagramme corrélé pour N₂ car ΔE = 12,7 eV

1-2-5. Remplissage (cf schéma)

Spin total non nul : il existe un électron célibataire sur l'orbitale moléculaire la plus haute occupée.

Cette configuration électronique confère au radical des propriétés paramagnétiques

1-2-6. Diamagnétisme à l'état solide



1-2-7. Oxydo-réduction de NO



Structure de Lewis des produits :



sans les doublets non liants de O

NO⁻ OL = 2

NO⁺ OL = 3

Localisation de la charge :

On écrit les formules de Lewis telles que la règle de l'octet soit respectée :

Pour NO^- , la charge négative est portée par l'azote

Pour NO^+ , la charge positive est portée par l'oxygène.

1-2-8. Constante de force k de NO , NO^+ et NO^- .

Dans le modèle de l'oscillateur harmonique, la fréquence de vibration est donnée par la loi de Hooke :

$\nu = 1/2\pi \cdot (k/\mu)^{1/2}$, μ est la masse réduite du système $\mu = m_1 \cdot m_2 / (m_1 + m_2)$

$$\mu = 14.16 \cdot 10^{-3} / (30.6,023 \cdot 10^{-23}) = 12,4 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

On trouve $k_{(\text{NO})} = 1490$; $k_{(\text{NO}^+)} = 2330$; $k_{(\text{NO}^-)} = 730$ (en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$)

Évolution de k et de d

On observe une évolution régulière de la constante de force en passant de NO^- à NO puis à NO^+ et simultanément une diminution de la longueur de liaison selon la même séquence. En prenant NO comme référence, la liaison N-O dans NO^+ correspond à une liaison plus énergétique que dans NO

($k_{(\text{NO}^+)} > k_{(\text{NO})}$; $d_{(\text{NO}^+)} < d_{(\text{NO})}$)

La liaison N-O dans NO^- correspond à une liaison moins énergétique que dans NO

($k_{(\text{NO}^-)} < k_{(\text{NO})}$; $d_{(\text{NO}^-)} > d_{(\text{NO})}$)

Ceci est en accord avec les ordres de liaison établis en 1-2-7.

2 - Deuxième partie

2-1. Cinétique d'oxydation du monoxyde d'azote

2-1-1. Intérêt des deux séries de mesures : on effectue une dégénérescence d'ordre par rapport à l'un des réactifs, ce qui permet de connaître l'ordre partiel.

2-1-2. Ordres partiels de réaction :

ordre 2 pour NO et ordre 1 pour O_2 d'après la stœchiométrie de la réaction.

On vérifie cette hypothèse en traçant $1/[\text{NO}] = f(t)$ et $\text{Ln}[\text{O}_2] = f(t)$. On trouve des droites.

Pour $1/[\text{NO}] = f(t)$ on trouve une droite de pente de 73 soit $k_{\text{app1}} = 36,5 \text{ s}^{-1}$

Pour $\text{Ln}[\text{O}_2] = f(t)$, on trouve une droite de pente $k_{\text{app2}} = 0,0074 \text{ s}^{-1}$

On a $k_{\text{app1}} = k [\text{O}_2]$ et $k_{\text{app2}} = k [\text{NO}]^2$. On en tire k par deux calculs différents et on trouve $k = 7235 \text{ L}^2 \text{ mol}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

2-1-3. Vitesses de disparition du dioxygène et du monoxyde d'azote en fonction de $[\text{O}_2]$ et de $[\text{NO}]$.

$$-\frac{d[\text{O}_2]}{dt} = k \cdot [\text{O}_2] \cdot [\text{NO}]^2 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} \frac{d[\text{NO}]}{dt} = k \cdot [\text{O}_2] \cdot [\text{NO}]^2$$

2-1-4. Molécularité des deux étapes ; 2. Lois de vitesses des étapes élémentaires.

$$(1) \frac{d[\text{N}_2\text{O}_2]}{dt} = k_1 \cdot [\text{NO}]^2 - k_{-1} \cdot [\text{N}_2\text{O}_2] \quad \text{et} \quad (2) \frac{1}{2} \frac{d[\text{NO}_2]}{dt} = k_2 \cdot [\text{N}_2\text{O}_2] \cdot [\text{O}_2]$$

2-1-5. Différence ordre / molécularité

La notion de molécularité est une notion de cinétique microscopique : c'est le nombre d'entités participant au processus élémentaire considéré ; l'ordre est une notion de cinétique macroscopique : lorsque la loi de vitesse d'une réaction chimique peut s'écrire sous la forme $v = k \cdot [A]^a \cdot [B]^b \dots$, a, b, ... sont les ordres partiels de la réaction et l'ordre global est égal à $a + b + \dots$

2-1-6. Principe de l'état quasi-stationnaire : après une période d'induction initiale pendant laquelle la concentration des intermédiaires I croît, la vitesse associée à chacun des intermédiaires est négligeable pendant la majeure partie de la réaction : $d[I]/dt = 0$.

Équation de vitesse

$$\frac{d[N_2O_2]}{dt} = k_1 \cdot [NO]^2 - k_{-1} \cdot [N_2O_2] - k_2 \cdot [N_2O_2] \cdot [O_2] = 0 \quad (AEQS)$$

$$\text{alors } k_1 \cdot [NO]^2 = (k_{-1} + k_2 \cdot [O_2]) \cdot [N_2O_2] \quad d \text{ où } \frac{d[NO_2]}{dt} = \frac{2 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot [O_2]}{(k_{-1} + k_2 \cdot [O_2])} \cdot [NO]^2$$

2-1-7. Comparaison théorie / expérience

$$v = k_{app} [O_2] [NO]^2 \text{ avec } k_{app} = \frac{2 \cdot k_1 \cdot k_2}{(k_{-1} + k_2 \cdot [O_2])} \quad \text{Si } k_{-1} \gg k_2 \cdot [O_2] \text{ alors } k_{app} = \frac{2 \cdot k_1 \cdot k_2}{k_{-1}}$$

2-1-8. Nouvelle loi de vitesse : si $k_2[O_2] \gg k_{-1}$, alors la loi de vitesse devient :

$v = k_1 [NO]^2$. L'étape cinétiquement déterminante de la vitesse est l'étape 1.

2-1-9. Loi de vitesse similaire

$$\frac{d[NO_3]}{dt} = k'_1 [O_2] [NO] - k'_{-1} [NO_3] - k'_2 [NO_3] [NO] = 0$$

$$\text{alors } k'_1 [O_2] [NO] = (k'_{-1} + k'_2 [NO]) [NO_3] \quad d \text{ où } \frac{d[NO_2]}{dt} = \frac{2 \cdot k'_1 \cdot k'_2 [O_2]}{(k'_{-1} + k'_2 [NO])} [NO]^2$$

2-2. Dosage des nitrites

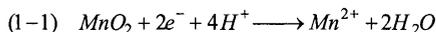
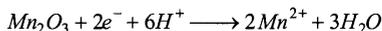
2-2-1 Structure de MnO_4^- : Nombre d'oxydation : +VII

2-2-2 : Domaines

Prédominance		Existence	
A	MnO_4^-	B	MnO_2
C	Mn^{2+}	D	Mn
		E	$Mn(OH)_2$
		F	Mn_3O_4
		G	Mn_2O_3

2-2-3 : Domaines :

$$(1-2) \quad E = E^0_{(Mn_2O_3/Mn^{2+})} - 0,03 \log [Mn^{2+}] - 0,18 \text{ pH} \quad E = 2,38 - 0,18 \text{ pH}$$

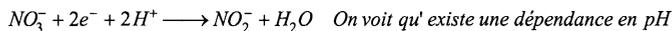


Pente $-0,12$ car échange de $2H^+$ par électron

2-2-4 Tracé de la droite du couple O_2/H_2O : cf schéma

2-2-5 MnO_4^- n'a pas de domaine commun avec H_2O quel que soit le pH. D'après le diagramme potentiel/pH on a oxydation de l'eau par MnO_4^- sur tout le diagramme et formation de MnO_2 (sauf a $pH < 1$). Il se produit une erreur sur le dosage.

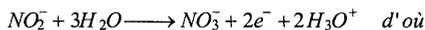
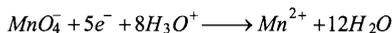
2-2-6



$$E = E_{(NO_3^- / NO_2^-)}^0 + 0,03 \log \frac{[NO_3^-][H^+]^2}{[NO_2^-]}$$

Sur la droite frontière $[NO_3^-] = [NO_2^-]$ donc $E = E_{(NO_3^- / NO_2^-)}^0 - 0,06pH = 0,94 - 0,06pH$

2-2-7



2-2-8

$$K = \frac{[Mn^{2+}]^2 [NO_3^-]^5}{[MnO_4^-]^2 [NO_2^-]^5 [H_3O^+]^6} \quad K = 10^{10 \cdot (1,52 - 94) \cdot 0,059} = 10^{95,2}. \quad \text{A } pH = 0 \text{ la réaction est totale.}$$

2-2-9 La réaction d'oxydation est possible quel que soit le pH, mais les produits sont différents à partir de $pH > 6$ (environ).

2-2-10 A $pH > 7$ le produit de la réaction n'est plus l'ion Mn^{2+} mais Mn_2O_3 , lequel est oxydé en ion MnO_2 par MnO_4^- . L'équation du dosage change.

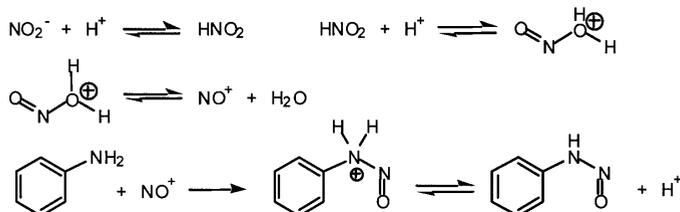
2-2-11. Irreproductibilité : l'acide nitreux formé avec les ions H^+ est instable et se dismute rapidement ; on perd une partie des ions nitrites à doser.

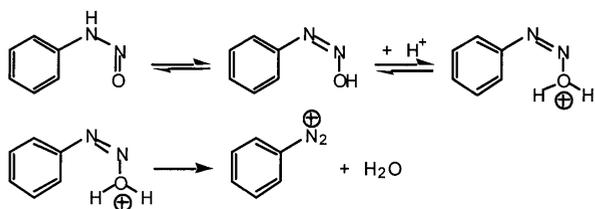
2-2-12. Réaction ferroïne / permanganate $\Delta E = 0,45 \text{ V}$ ($E^\circ(MnO_4^- / Mn^{2+}) = 1,51 \text{ V}$)



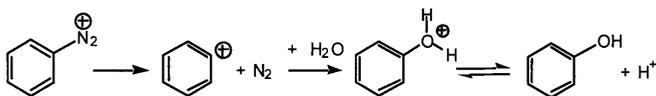
Intérêt de la ferroïne : plus grande sensibilité lors du virage du fait de la différence des ϵ_{\max} entre les formes oxydée et réduite.

2-2-13. Mécanisme des étapes élémentaires de formation du diazonium.



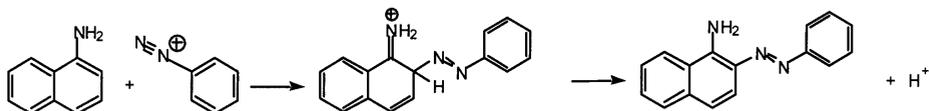


2-2-14. Mécanisme de la réaction de décomposition :



Produit obtenu par chauffage : le phénol

2-2-15. Mécanisme de la réaction : substitution électrophile aromatique.



Régiosélectivité : réaction en position 4 et en position 2 possibles, l'attaque en 4 est favorisée en raison du plus grand dégagement stérique et de la stabilisation de l'intermédiaire réactionnel.

2-2-16. λ_{\max} du produit de substitution en 4 doit être différent de celui obtenu par attaque en 2 car le système conjugué possède une structure différente.

Importance de la régiosélectivité pour la fiabilité du dosage : pour une valeur de λ donnée lors de la mesure, si le rapport (attaque en 2/attaque en 4) reste constant sur une série d'échantillons alors la régiosélectivité est sans effet sur la fiabilité du dosage.

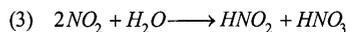
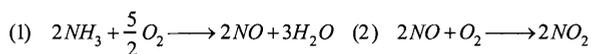
2-2-17. Introduction simultanée l'acide sulfanilique et l' α -naphthylamine dans la solution d'ions nitrites : possibilité de diazotation de manière compétitive de l'acide sulfanilique et de l' α -naphthylamine : mélanges et dosages non fiables.

3 - Troisième partie

3-1. L'acide nitrique

3-1-1. Synthèse industrielle de l'acide nitrique à partir de l'ammoniac

Équations bilan des différentes étapes :



3-1-2. Phases des domaines du diagramme

1 : domaine monophasé vapeur

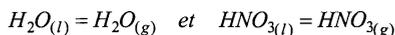
2 et 4 : domaines biphasés liquide-vapeur

3 : domaine monophasé liquide-vapeur

3-1-3. Noms des courbes : courbe inférieure : ébullition, courbe supérieure : rosée

3-1-4. Mélange liquide dont la composition correspond à l'abscisse du maximum A : azéotrope.

Variance du système au point A : il existe deux équilibres :



$v = c + 2 - \phi$ avec $c = n - r - k$; $\phi = 2$, $n = 2$, $r = 0$, $k = 1$ (car au point A, les phases liquides et gazeuses ont même composition) d'où $v = 1$. La pression étant fixée, tous les autres paramètres le sont.

3-1-5. Propriétés du mélange : lors de l'ébullition du mélange azéotrope, la température reste constante ; phase gazeuse et phase liquide ont même composition.

3-1-6. Fraction massique en acide nitrique du mélange :

$$x_{(HNO_3)} = \frac{m_{(HNO_3)}}{m_{(HNO_3)} + m_{(H_2O)}} = \frac{n_{(HNO_3)} \cdot M_{(HNO_3)}}{n_{(HNO_3)} \cdot M_{(HNO_3)} + n_{(H_2O)} \cdot M_{(H_2O)}}$$

$$\text{Soit} \quad x_{(HNO_3)} = \frac{0,3.63}{0,3.63 + 3,7.18} = 0,22$$

A $T = 100^\circ\text{C}$, le point se situe dans le domaine du liquide homogène.

3-1-7. Masse m de la phase liquide et fraction massique en acide nitrique à 110°C

Le système est fermé, on a conservation de la masse $m = m_{(l)} + m_{(g)}$. A 110°C , le point se situe dans un domaine biphasé liquide-vapeur. On lit sur le diagramme à $T=110^\circ\text{C}$,

$$x_{(HNO_3)}^l = 0,34 \quad (\text{et} \quad x_{(HNO_3)}^g = 0,07).$$

D'où on tire, d'après le théorème des moments chimiques : $m_l \cdot (0,34 - 0,22) = m_g \cdot (0,22 - 0,07)$

$$\text{Masse totale: } m_{(HNO_3)} = n_{(HNO_3)} M_{(HNO_3)} + n_{(H_2O)} M_{(H_2O)} \Rightarrow 3,7.18 + 0,3.63 = 85,5\text{g}$$

$$m_{\text{totale}} = m_l + m_g = m_l + \frac{0,12}{0,15} m_l \Rightarrow m_l = \frac{85,5 \cdot 1,5}{2,7} = 47,5\text{g}$$

3-1-8. Distillation fractionnée de l'échantillon ; suite des opérations effectuées (cf schéma)

3-1-9. Constitution du distillat (à la sortie de la colonne de fractionnement) : le distillat est l'eau pure, puis par élimination (système ouvert), la phase liquide s'enrichit progressivement en acide nitrique jusqu'à obtention d'un mélange dont la composition est celle de l'azéotrope.

Constitution du résidu de distillation dans le ballon : le mélange azéotrope.

3-2. Purification de l'uranium

3-2-1. Rendement de l'extraction :

$$P = \frac{m_s \cdot V_{aq}}{V_s (m_{\text{tot}} - m_s)} \Rightarrow PV_s (m_{\text{tot}} - m_s) = m_s \cdot V_{aq} \Rightarrow \frac{m_{\text{tot}}}{m_s} - 1 = \frac{V_{aq}}{PV_s} \Rightarrow \rho = \frac{100 \cdot P \cdot V_s}{(V_{aq} + P \cdot V_s)}$$

3-2-2. Masse de produit extrait :

$$P = \frac{m_s \cdot V_{aq}}{V_s(m_i - m_s)} \quad m_i = 5g \quad \text{il vient : } 0,2 = \frac{m_s \cdot 0,05}{0,1(5 - m_s)} \quad d'ou\ m_s = 1,43g$$

3-2-3. Augmentation du rendement : expérimentalement on peut :

- augmenter la quantité de solvant S
- diminuer la quantité d'eau (en concentrant l'échantillon)
- changer de solvant S pour avoir P_s plus grand

3-2-4. Le rendement d'extraction de la n^{ième} opération est :
$$\rho_n = 100 \left(\frac{P \cdot V_s}{V_{aq} + P \cdot V_s} \right)^n$$

Le rendement d'extraction diminue pour deux extractions successives.

3-2-5. Constantes d'équilibre

$$K_1 = \frac{[UO_2^{2+}(NO_3^-)_2(TBP)_x]_{aq}}{[UO_2^{2+}]_{aq} [NO_3^-]_{aq}^2 [TBP]_{aq}^x} \quad K_2 = \frac{[UO_2^{2+}(NO_3^-)_2(TBP)_x]_s}{[UO_2^{2+}(NO_3^-)_2(TBP)_x]_{aq}} \quad K_3 = \frac{[TBP]_s}{[TBP]_{aq}}$$

3-2-6. Relation entre $\log P_{(U)}$ et $\log [TBP]$

$$\begin{aligned} [UO_2^{2+}(NO_3^-)_2(TBP)_x]_{aq} &= \frac{[UO_2^{2+}(NO_3^-)_2(TBP)_x]_s}{K_2} \quad [TBP]_{aq} = \frac{[TBP]_s}{K_3} \Rightarrow \\ K_1 &= \frac{[UO_2^{2+}(NO_3^-)_2(TBP)_x]_{aq}}{K_2 [UO_2^{2+}]_{aq} [NO_3^-]_{aq}^2 [TBP]_{aq}^x} \Rightarrow \frac{[UO_2^{2+}(NO_3^-)_2(TBP)_x]_s}{[UO_2^{2+}]_{aq}} = K_1 K_2 [NO_3^-]_{aq}^2 [TBP]_{aq}^x \\ \frac{[UO_2^{2+}(NO_3^-)_2(TBP)_x]_s}{[UO_2^{2+}]_{aq}} &= \frac{K_1 K_2}{K_3} [NO_3^-]_{aq}^2 [TBP]_s \Rightarrow P_{(U)} = \frac{K_1 K_2}{K_3^2} [NO_3^-]_{aq}^2 [TBP]_s^x \\ d'ou\ \log P_{(U)} &= x \log [TBP]_s + \log A \quad \text{avec } A = \frac{K_1 K_2}{K_3^2} [NO_3^-]_{aq}^2 \end{aligned}$$

3-2-7. En procédant à $[NO_3^-]$ constante, la valeur de A est fixée puisque K_1 , K_2 , K_3 et x sont fixés. A l'aide du tableau, on trouve $x = 2$ par régression.

Le complexe est donc de formule $UO_2^{2+}(NO_3^-)_2(TBP)_2$

3-2-8. La déviation peut être due à un écart à l'idéalité aux concentrations plus élevées en TBP. (Autres réponses plausibles : précipitation ou limitation des solubilités)

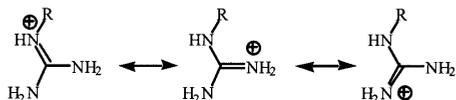
3-2-9. Le complexe UO_2^{2+}/TBP est formée par interaction forte entre le cation et le pôle oxygéné du phosphate chargé négativement.

4 - Quatrième partie

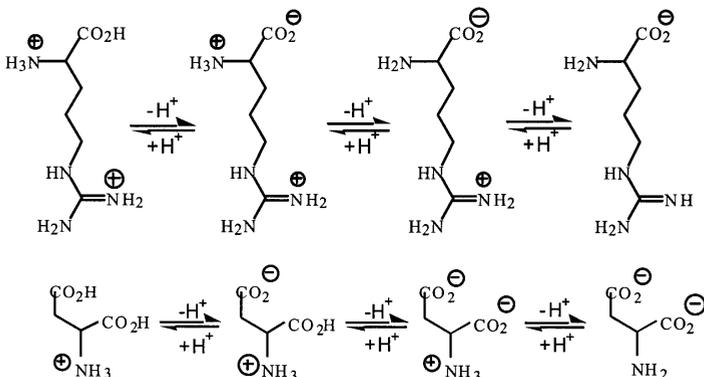
4-1. L'électrophorèse.

4-1-1. Définition solution tampon : solution dont le pH varie peu par ajout de quantité modérée d'acide ou de base (pouvant être forts) ou par dilution.

4-1-2. pKa du groupe fonctionnel de l'arginine (pKa = 12,48). On peut justifier cette dernière valeur de pKa en écrivant les formules limites des espèces protonées qui montrent une stabilisation par délocalisation de la charge.



4-1-3. Équilibres acido-basiques pour l'acide aspartique et l'arginine en solution aqueuse.



Attention deuxième forme : inverser OH et O⁻

4-1-4. Évolution de la charge de l'acide aspartique en fonction du pH :

- charge + pour pH < 2,1 ;
- charge 0 pour 2,1 < pH < 3,9 ;
- charge - pour 3,9 < pH < 10 ;
- charge 2- si pH > 10

Évolution de la charge de l'arginine en fonction du pH :

- charge 2+ pour pH < 2,1 ;
- charge + pour 2,1 < pH < 9 ;
- charge 0 pour 9 < pH < 12,5 ;
- charge - si pH > 12,5

4-1-5. Charge nette des deux α-aminoacides à pH = 6

A pH = 6 l'acide aspartique est chargé négativement ; l'arginine chargée positivement.

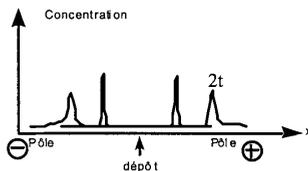
4-1-6. Identification des acides aminés ; justification de leur position.

A pH = 6 l'acide aspartique chargé négativement a migré vers le pôle positif ; l'arginine chargée positivement a migré vers le pôle négatif.

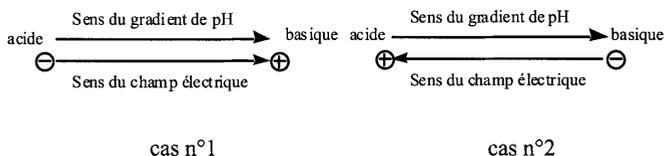
4-1-7. Évolution au cours du temps du profil de concentration du mélange en l'absence de champ électrique : le pic initialement fin s'élargit progressivement avec le temps.

Phénomène modifiant le profil initial en l'absence de champ électrique : la diffusion

4-1-8. Aspect du profil de concentration = $f(x)$ pour le mélange après un temps de migration $t' = 2t$.



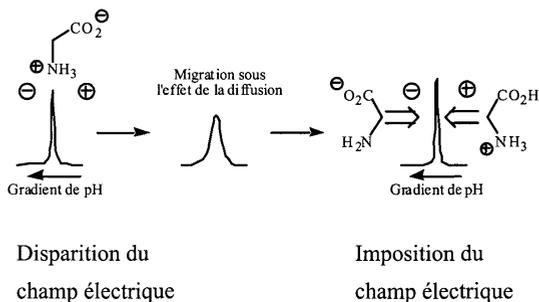
4-1-9 Electrofocalisation



Dans le cas n°1, à pH acide, les espèces sont chargées positivement et leur charge tend à augmenter lorsque l'espèce se déplace vers le pôle -. Au bout d'un temps suffisant, toutes les espèces ont migré vers le pôle -.

Dans le cas n°2, à pH acide, les espèces sont chargées positivement et leur charge tend à augmenter lorsque l'espèce se déplace vers le pôle +. Le sens du champ électrique contribue à repousser les espèces vers le pôle -, donc vers un pH plus basique. Une position d'équilibre est possible même après un temps long. Les espèces ne migrent plus lorsqu'elles ont atteint une position où le pH est tel que leur charge nette est nulle.

4-1-10.



4-2. Synthèse d'un amino-acide précurseur du monoxyde d'azote dans les cellules.

4-2-1. Centres stéréogènes de la N-hydroxyarginine :

le carbone asymétrique : $C(H)(R)(NH_2)(CO_2H)$; la liaison $C=N$

Configuration absolue :

Le carbone asymétrique est de configuration S

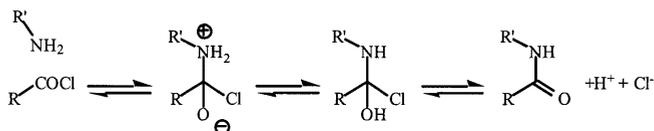
(ordre de priorité des substituants : $\text{NH}_2 > \text{CO}_2\text{H} > \text{R} > \text{H}$)

L'hydroxyimine est de configuration E

(ordre de priorité des substituants : $\text{NHR} > \text{NH}_2$ et $\text{OH} > \text{doublet}$)

4-2-2. Nombre de stéréoisomères de configuration : 4 (2^n), $n = 2$

4-2-3. Fonction chimique formée : amide. Mécanisme :

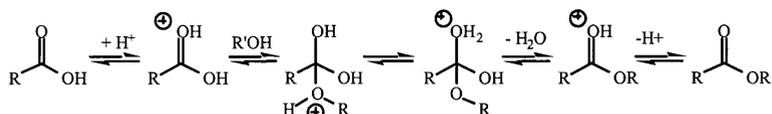


Rôle de la base : neutralisation

4-2-4. Équation-bilan de la réaction d'estérification



Mécanisme des étapes élémentaires en catalyse acide



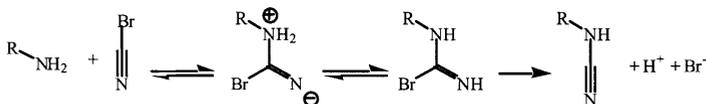
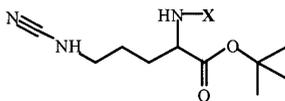
Le catalyseur n'a pas d'effet sur la thermodynamique de la réaction ($\Delta_r G$ est inchangé par ajout d'un catalyseur). Le catalyseur a un effet sur la cinétique de la réaction.

4-2-5. Ester à partir du 2-méthylpropan-2-ol (*tert*iobutanol) : la réaction d'estérification est défavorable avec les alcools tertiaires. C'est la réaction inverse qui est favorisée

4-2-6. Polarité de la liaison Br-CN

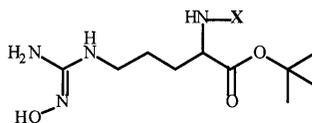


Structure du composé A



Mécanisme pour le passage au produit noté A.

4-2-7. Structure de B.



Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE

Problème de physique ♦ Session : 2002

Propriétés mécaniques de l'ADN

A. Caractéristiques géométriques de la molécule

1. a. La longueur au repos L_0 de l'ADN du bactériophage λ

est :

$$L_0 = M_0 d_0$$

Remarque: En vertu du théorème "des intervalles et des friquets", la distance séparant les paires de base extrêmes de cet ADN est $(M_0 - 1)d_0$. Mais compte tenu de la valeur de M_0 ($M_0 = 48502$), et de la précision de la valeur de d_0 ($d_0 = 0,34 \text{ nm}$), on peut assimiler $M_0 - 1$ à M_0 .

Numériquement, on obtient $L_0 = 16,5 \mu\text{m}$

1. b. La longueur développée est la longueur de l'hélice.

Imaginons de dérouler un tour de cette hélice (voir fig. 1) : on obtient un segment, de longueur x , faisant un angle avec l'axe Oz de l'hélice. On a

$$x^2 = r_0^2 + (\pi \phi_0)^2$$

Par homothétie, le rapport de la longueur développée L_d par la longueur au repos est :

$$\frac{L_d}{L_0} = \frac{x}{r_0}$$

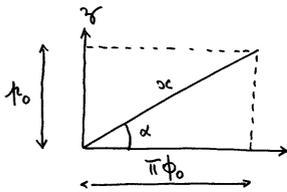


Figure 1. : une tour de l'hélice de l'ADN, déroulée sur un plan.

On en déduit :

$$L_d = L_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\pi \phi_0}{l_0}\right)^2}$$

Numériquement, on obtient : $L_d = 34,6 \text{ } \mu\text{m}$

2. a - Puisque la distribution de probabilité de \vec{r}_m est à symétrie sphérique :

$$\langle \vec{r}_m \rangle = 0$$

et parce que le segment \vec{r}_m a une longueur b (soit $r_m^2 = b^2$), on a :

$$\langle r_m^2 \rangle = b^2$$

2. b - Chaque segment s'oriente indépendamment des autres segments, donc \vec{r}_m et \vec{r}_m sont des variables aléatoires non corrélées, et :

$$\langle \vec{r}_m \cdot \vec{r}_m \rangle = \langle \vec{r}_m \rangle \langle \vec{r}_m \rangle$$

si $m \neq n$. Par ailleurs, on a montré $\langle \vec{r}_m \rangle = 0$ à la question précédente. D'où

$$\langle \vec{r}_m \cdot \vec{r}_m \rangle = 0 \quad \text{pour } m \neq n$$

2. c - L'opération $\langle \rangle$ étant linéaire, on a :

$$\langle \vec{R} \rangle = \sum_{n=1}^N \langle \vec{r}_n \rangle$$

$$\text{or } \langle \vec{r}_m \rangle = 0, \text{ donc : } \langle \vec{R} \rangle = 0$$

On a de la même façon :

$$\langle R^2 \rangle = \sum_{n=1}^N \langle r_n^2 \rangle + \sum_{n=1}^N \sum_{m \neq n} \langle \vec{r}_n \cdot \vec{r}_m \rangle$$

En utilisant les résultats de 2-b, on obtient

$$\langle \vec{R}^2 \rangle = N b^2$$

2-d - les résultats de 2-b, et par conséquent ceux de 2-c, sont indépendants de la dimension d .

2-e - La longueur au repos de l'ADN est $L_0 = N b$. D'où :

$$N = \frac{L_0}{b} \simeq 165 \quad \text{et} \quad \bar{R} = \sqrt{\langle \vec{R}^2 \rangle} = \sqrt{N} b = 1,3 \mu\text{m}$$

3-a - $\vec{R} = \sum_{n=1}^N \vec{r}_n$ est la somme d'un grand nombre ($N=165$) de variables aléatoires, indépendantes (i.e. non corrélées), distribuées toutes selon la même loi de probabilité. Donc, en utilisant le théorème de la limite centrale, on sait que \vec{R} est distribué selon une loi Gaussienne (qu'on connaît, puisqu'on a calculé $\langle \vec{R} \rangle$ et $\langle \vec{R}^2 \rangle$).

3-b - la distribution d'une coordonnée x de \vec{R} est une Gaussienne centrée en 0 (cf figure 2)

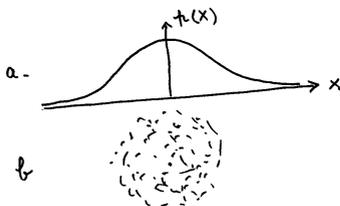


figure 2: a - distribution de probabilité d'une coordonnée x de \vec{R} - b - probabilité de trouver l'extrémité \vec{R}_0 de la molécule d'ADN (si \vec{R}_0 est fixé à 0).

D'où la probabilité de trouver l'extrémité \vec{R}_0 de la molécule d'ADN (en fixant $\vec{R}_0 = 0$). (cf figure 2-b)

La distribution de probabilité de \vec{R} étant à symétrie sphérique, la forme de la molécule est sphérique.

Sa dimension caractéristique (son rayon) est \bar{R} (c'est la seule longueur qui intervient dans la distribution de probabilité).

3-c - la distribution de probabilité est proportionnelle à $\exp(-\frac{\vec{R}^2}{2\bar{R}^2})$

$$f(\vec{R}) = A e^{-\frac{\vec{R}^2}{2\bar{R}^2}}$$

Elle suppose donc qu'on peut trouver la molécule aussi longue qu'on veut, ce qui n'est évidemment pas possible dans le modèle proposé initialement (où on a $R \leq L_0$). Donc, pour les grandes valeurs de R (de l'ordre ou supérieures à L_0), cette distribution est fautive.

Toutefois $f(R)$ devient très faible dès que $R \gg \bar{R}$. Donc la probabilité d'observer des élongations importantes ($R \gg L_0$) est très faible (car $L_0 \gg \bar{R}$, soit $Nb \gg \sqrt{N} \cdot b$, c'est-à-dire parce que N est grand). Donc ces événements où la molécule est très allongée ($R \gg L_0$), très rares, n'interviennent asymptotiquement (si $N \rightarrow +\infty$) pas dans les valeurs moyennes.

4. Puisque le segment \vec{r}_m ne peut pas occuper certaines régions à l'intérieur de la pelote (si on tient compte de l'impossibilité de 2 segments de se chevaucher), il aura donc une probabilité plus grande d'être à l'extérieur. Donc le rayon moyen \bar{R} de la pelote va grossir.

À titre de complément, mentionnons que \bar{R} va croître d'autant plus vite que N est grand. \bar{R} suit une loi du type

$\bar{R} \propto N^{\nu}$ où l'exposant ν est appelé l'exposant de Flory.

On s'attend donc que, dans une polyénaire où les segments ne peuvent se chevaucher, l'exposant de Flory ν soit plus grand que dans le cas de la pelote Gaussienne, on aura donc $\nu > \frac{1}{2}$.

B. Elasticité de l'ADN

1. a - On décrit ici une situation d'équilibre : le centre de masse de chaque segment est au repos. Donc la résultante des forces appliquées sur le segment \vec{r}_m est nulle.

Compte tenu de la loi de l'action et de la réaction et de ce que, en \vec{R}_0 et \vec{R}_N , les forces appliquées sont $-\vec{F}$ et \vec{F} , les forces appliquées à chaque segment s \vec{r}_m sont $-\vec{F}$ (à son extrémité \vec{R}_{m-1}) et \vec{F} (à son extrémité \vec{R}_m).

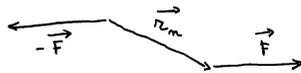


Figure 3 : forces s'exerçant sur le segment \vec{r}_m

1-b. Lors d'un mouvement du segment \vec{r}_m , les travaux des forces qui lui sont appliquées sont $\vec{F} \cdot d\vec{R}_m$ et $-\vec{F} \cdot d\vec{R}_{m-1}$ (où $d\vec{R}_m$ et $d\vec{R}_{m-1}$ désignent les déplacements des 2 extrémités du segment \vec{r}_m); leur somme s'écrit :

$$dW = \vec{F} \cdot (d\vec{R}_m - d\vec{R}_{m-1}) = \vec{F} \cdot d\vec{r}_m = d(\vec{F} \cdot \vec{r}_m)$$

puisque \vec{F} est constante. Donc chaque segment \vec{r}_m possède l'énergie potentielle $E_p(\vec{r}_m) = -\vec{F} \cdot \vec{r}_m$ (définie à une constante près)

1-c. On repère l'orientation de \vec{r}_m dans l'espace par 2 angles θ, φ , coordonnées sphériques du vecteur \vec{r}_m (d'axe Oz étant défini par \vec{F}), d'où :

$$\vec{r}_m = b (\cos\theta \vec{u}_z + \sin\theta \cos\varphi \vec{u}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{u}_y)$$

La probabilité $d^2\mathcal{P}$ que \vec{r}_m soit orienté dans l'angle solide $d^2\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ autour de la direction θ, φ est donnée par la loi de Boltzmann :

$$d^2\mathcal{P}(\theta, \varphi) = A e^{-\frac{E_p(\vec{r}_m)}{k_B T}} d^2\Omega$$

où A est une constante de normalisation, telle que $\int d^2\mathcal{P} = 1$

$$d^2\mathcal{P}(\theta, \varphi) = A e^{-\frac{Fb \cos\theta}{k_B T}} \sin\theta d\theta d\varphi$$

Cette distribution est à symétrie cylindrique autour de \vec{u}_z ; par conséquent la seule composante de \vec{r}_m dont la valeur moyenne est non nulle est celle selon \vec{u}_z , et :

$$\langle \vec{r}_m \rangle = l \langle \cos \theta \rangle \vec{u}_z$$

avec

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_0^\pi \cos \theta \exp\left(\frac{Fl \cos \theta}{k_B T}\right) \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \exp\left(\frac{Fl \cos \theta}{k_B T}\right) \sin \theta d\theta}$$

Posant $x = \frac{Fl}{k_B T}$ et $\alpha = \cos \theta$, l'intégrale du dénominateur s'écrit

$$\int_{-1}^{+1} e^{x\alpha} d\alpha = \frac{2}{x} \operatorname{sh} x$$

Celle du numérateur s'obtient en intégrant $\int_{-1}^{+1} \alpha e^{x\alpha} d\alpha$ par parties, d'où :

$$\int_{-1}^{+1} \alpha e^{x\alpha} d\alpha = \frac{2}{x^2} (x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)$$

et finalement :

$$\langle \cos \theta \rangle = \coth x - \frac{1}{x} = \alpha(x)$$

On a ainsi :

$$\langle \vec{r}_m \rangle = l \alpha\left(\frac{Fl}{k_B T}\right) \frac{\vec{F}}{F}$$

1.d. Dans l'expression de $\langle \vec{R} \rangle = \sum_{n=1}^N \langle \vec{r}_m \rangle$, les N termes de la somme sont égaux. D'où

$$\langle \vec{R} \rangle = N l \alpha\left(\frac{Fl}{k_B T}\right) \frac{\vec{F}}{F} = L_0 \alpha\left(\frac{Fl}{k_B T}\right) \frac{\vec{F}}{F}$$

La longueur à l'équilibre de l'ADN est $L = |\langle \vec{R} \rangle|$, d'où :

$$L = L_0 \alpha\left(\frac{Fl}{k_B T}\right)$$

1.e. Le raisonnement qui précède est analogue à celui fait pour traiter la paraélectricité ou le paramagnétisme de Langevin. La polarisation \vec{P} (ou l'aimantation \vec{I}) est la moyenne du dipôle électrique (ou magnétique) total par unité de volume, c'est-à-dire de la somme de tous les dipôles contenus dans l'unité de volume. C'est donc le résultat d'une marche aléatoire biaisée (par le champ \vec{E} ou \vec{B}) dont chacun des pas a une longueur constante (le dipôle individuel) et est orienté selon une

distribution de Boltzmann $e^{-\frac{\mu F \cos \theta}{k_B T}}$ (ou $e^{-\frac{m_B \cos \theta}{k_B T}}$).

2.a - si $x = \frac{F}{F_0} \ll 1$, $\alpha(x) \approx \frac{x}{3}$. Donc :

$$L = \frac{L_0}{3} \frac{F}{F_0}$$

L est donc proportionnel à F (loi de Hooke).

La constante de raideur est :

$$K = \frac{F}{L} = \frac{3F_0}{L_0} = \frac{3 k_B T}{N b^2}$$

Pour l'ADN d, à température ambiante ($k_B T = 4,2 \cdot 10^{-21} \text{ J}$), on obtient :

$$F_0 = 4,2 \cdot 10^{-14} \text{ N} = 0,042 \text{ pN}$$

$$\text{et } K = 7,6 \cdot 10^{-9} \text{ N/m}$$

2.b - si $F \gg F_0$, $\alpha(x) \approx 1$. Donc L tend vers L_0 . Dans ce cas, la molécule est totalement dépliée (c'est une situation équivalente à la saturation pour le paramagnétisme de Langevin).

3.a - On a $x_m = b \sin \theta \cos \varphi$, $y_m = b \sin \theta \sin \varphi$; $z_m = b \cos \theta$

• Dans le cas $m=n$, on calcule $\langle z_n^2 \rangle = b^2 \langle \cos^2 \theta \rangle$

$$\text{avec } \langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{\int_0^\pi \cos^2 \theta \exp(x \cos \theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi \exp(x \cos \theta) \sin \theta d\theta} = \frac{\int_{-1}^1 a^2 e^{x a} da}{\int_{-1}^1 e^{x a} da}$$

en utilisant une mise en équation analogue à celle de la question 1.c. L'intégrale du numérateur se calcule en intégrant $\int_{-1}^1 a e^{x a} da$ par parties. On obtient :

$$\int_{-1}^1 a^2 e^{x a} da = \frac{2}{x} \left\{ \text{sh } x - \alpha(x) \int_{-1}^1 e^{x a} da \right\}$$

$$\text{D'où : } \langle \cos^2 \theta \rangle = 1 - \frac{2}{x} \alpha(x)$$

$$\text{et } \langle z_n^2 \rangle = b^2 \left(1 - \frac{2}{x} \alpha(x) \right)$$

Parce que $\langle \cos^2 \varphi \rangle = \langle \sin^2 \varphi \rangle$, on a $\langle x_m^2 \rangle = \langle y_m^2 \rangle$.

La valeur de ces 2 moyennes se déduit de $\langle x_m^2 \rangle + \langle y_m^2 \rangle + \langle z_m^2 \rangle = b^2$

d'où $\langle x_m^2 \rangle = \langle y_m^2 \rangle = b^2 \frac{d(x)}{x}$

• Si $m \neq m'$, \vec{r}_m et $\vec{r}_{m'}$ ne sont pas corrélés, donc

$$\langle x_m x_{m'} \rangle = \langle x_m \rangle \langle x_{m'} \rangle$$

(mêmes relations pour y et z). D'où :

$$\langle x_m x_{m'} \rangle = \langle y_m y_{m'} \rangle = 0$$

$$\langle z_m z_{m'} \rangle = \langle z_m^2 \rangle = b^2 d(x)^2$$

avec $\alpha = \frac{Fb}{k_B T} = \frac{F}{F_0}$

• On peut regrouper les résultats obtenus dans les cas $m=m'$ et $m \neq m'$ en écrivant :

$$\langle x_m x_m \rangle = \langle y_m y_m \rangle = b^2 \frac{d(x)}{x} \delta_{mm}$$

$$\langle z_m z_m \rangle = b^2 \left\{ d(x)^2 + \left(1 - \frac{2}{x} d(x) - d(x)^2\right) \delta_{mm} \right\}$$

$$3.b. \quad \langle x^2 \rangle = \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^N \langle x_m x_{m'} \rangle = \sum_{m=1}^N \langle x_m^2 \rangle + \sum_{m=1}^N \sum_{m' \neq m}^N \langle x_m x_{m'} \rangle$$

$\langle x^2 \rangle$ peut donc être déduit des résultats précédents, de même que $\langle y^2 \rangle$ et $\langle z^2 \rangle$. On obtient :

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = N b^2 \frac{d(x)}{x}$$

$$\langle z^2 \rangle = N b^2 \left(1 - 2 \frac{d(x)}{x}\right)^2 + N(N-1) b^2 d(x)^2$$

On en déduit ensuite ΔX^2 , ΔY^2 et ΔZ^2 : en remarquant que $\Delta \vec{r}^2 = \langle \vec{r}^2 \rangle - \langle \vec{r} \rangle^2$

on obtient :

$$\Delta X^2 = \Delta Y^2 = N b^2 \frac{d(x)}{x}$$

$$\Delta Z^2 = N b^2 \left\{ 1 - 2 \frac{d(x)}{x} - d(x)^2 \right\}$$

(Notons que dans l'expression de ΔZ^2 , les termes en N^2 disparaissent)

3.c On calcule $\Delta R^2 = \langle \vec{R}^2 \rangle - \langle \vec{R} \rangle^2$ en utilisant par exemple

$$\langle \vec{R}^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle \quad \text{et} \quad \langle \vec{R} \rangle^2 = \langle z \rangle^2. \quad \text{On obtient}$$

ainsi $\Delta R^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2$

D'où : $\Delta R^2 = N b^2 \left(1 - d(x)\right)^2$

3.d- si $F \ll F_0$, donc si $x \ll 1$, sachant que $d(x) \approx \frac{x}{3}$, on

$$\begin{aligned} \text{obtient :} \quad \Delta X^2 &= \Delta Y^2 \approx \frac{N b^2}{3} \\ \Delta Z^2 &\approx \frac{N b^2}{3} \\ \Delta R^2 &\approx N b^2 \end{aligned}$$

On retrouve ainsi les résultats caractéristiques de la pelote sphérique (question A2)

3.e- si $F \gg F_0$, donc si $x \gg 1$, $d(x) \approx 1 - \frac{1}{x}$ d'où :

$$\begin{aligned} \Delta X^2 &= \Delta Y^2 \approx \frac{N b^2}{x} \\ \Delta Z^2 &\approx \frac{N b^2}{x^2} \\ \Delta R^2 &\approx \frac{2 N b^2}{x} \end{aligned}$$

On remarque que, dans ce cas : $\Delta X^2 = \Delta Y^2 \gg \Delta Z^2$

3.f- x_n, y_n et z_n sont des variables aléatoires indépendantes.

En utilisant le théorème de la limite centrale, on en déduit que $X = \sum_{n=1}^N x_n$, $Y = \sum_{n=1}^N y_n$, $Z = \sum_{n=1}^N z_n$ sont des variables

Gaussiennes. Ainsi les distributions de $X, Y, Z - \langle Z \rangle$ sont des Gaussiennes centrées en 0, donc les largeurs sont $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$. Et X, Y, Z ont des distributions Gaussiennes centrées en 0, 0, L_0 .

La forme de la molécule est donc

- si $F \ll F_0$, une pelote Gaussienne de rayon \bar{R} ; à la limite où $F=0$, la distance entre ses 2 extrémités est $L = |\langle \vec{R} \rangle| = 0$

- si $F \gg F_0$, une molécule allongée, de longueur L_0 , avec des fluctuations surtout en x et y

- Entre ces deux cas limite, la molécule aura la forme d'une ellipsoïde (d'un cigare) de rayon ΔX , de longueur moyenne L , avec des fluctuations sur la longueur égales à ΔZ .

4-a. Si $\frac{l}{l_0}$ est petit par rapport à 1, c'est que $\alpha \ll 1$, d'où

$$\frac{l}{l_0} \approx \frac{\alpha}{3} . \text{ Ainsi } \alpha = \frac{F}{F_0} \approx 3 \frac{l}{l_0}$$

Pour $\frac{l}{l_0} = 0,01$, on obtient : $F = 0,03 F_0 = 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ N} = 1,3 \text{ fN}$

4-b. Si $\frac{l}{l_0}$ est proche de 1, c'est que α est grand par rapport à 1,

$$\text{d'où } d(\alpha) \approx 1 - \frac{1}{\alpha} \approx \frac{l}{l_0} . \text{ Ainsi } \alpha = \frac{F}{F_0} \approx \frac{1}{1 - \frac{l}{l_0}}$$

Pour $\frac{l}{l_0} = 0,99$, on obtient $F = 100 F_0 = 4,2 \text{ pN}$

C. Expérience de mesure de force par un micro-levier

1.a. Reprenons la figure 4

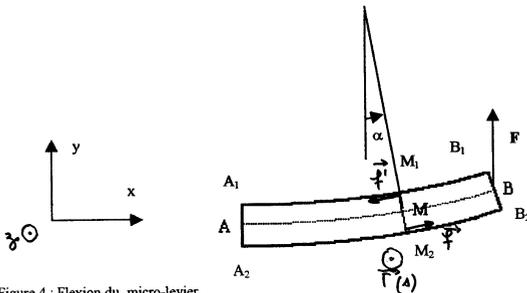


Figure 4 : Flexion du micro-levier.

Les fibres A_2B_2 sont étirées : la partie de ces fibres au delà de l'abscisse curviligne s (caractéristique de la surface M, M_2) exerce donc une force de traction (\vec{T}) sur la section M, M_2 . Au contraire les fibres A_1B_1 sont comprimées. Elles exercent donc une force de compression sur la section M, M_2 . L'ensemble de ces actions donne lieu à un couple qui est $\vec{\Gamma}(s)$.

La force $\vec{T}(s)$ est orientée selon \vec{u}_y et le couple $\vec{\Gamma}(s)$ est orienté selon \vec{u}_z . On a :

$$\vec{T}(s) = T(s) \vec{u}_y \quad \text{avec } T(s) > 0 \quad (\text{ce qui signifie le poids de la tige})$$

et $\vec{\Gamma}(s) = + \Gamma(s) \vec{u}_z$ avec $\Gamma(s) > 0$

1.-b. On fait le bilan des actions mécaniques exercées sur le morceau de tige de longueur ds , situé entre s et $s+ds$. (cf figure 5)

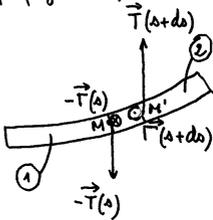


figure 5 : les actions mécaniques exercées sur le segment de tige situé entre s et $s+ds$

les force et couple exercés par l'extrémité de la tige ② (zone entre $s+ds$ et l) sont $\vec{T}(s+ds)$ et $\vec{\Gamma}(s+ds)$

les force et couple exercés par l'autre partie de la tige ① (zone comprise entre 0 et s) sont $-\vec{T}(s)$ et $-\vec{\Gamma}(s)$

On néglige le poids. Le système est à l'équilibre, donc :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{T}(s+ds) - \vec{T}(s) = 0$$

d'où $\frac{d\vec{T}}{ds} = 0$. Donc $\vec{T}(s)$ est une constante. Or $\vec{T}(l) = \vec{F}$

(en $s=l$), donc :

$$\vec{T}(s) = F \vec{u}_y$$

De même la somme des moments des forces par rapport au point M est :

$$\vec{\Gamma}(s+ds) - \vec{\Gamma}(s) + \vec{MM}' \wedge \vec{T}(s+ds)$$

Elle est nulle, puisque le système est en équilibre.

De plus $\vec{MM}' \approx ds \vec{u}_x$ (puisque les angles sont petits)

Donc

$$\left\{ +\Gamma(s+ds) - \Gamma(s) + ds \Gamma(s+ds) \right\} \vec{u}_z = 0$$

D'où, à l'ordre le plus bas en ds :

$$\left\{ \frac{d\Gamma(s)}{ds} + \Gamma(s) \right\} ds = 0$$

Finalement $\frac{dT}{ds} = -T(s) = -F$

1. c. Prenons une fibre située au repos en y . $y=0$ correspond à la fibre neutre, qui n'a subi aucun allongement lors de la déformation de la tige.

• La longueur de la fibre y au repos est la longueur de la fibre neutre au repos, ou sous contrainte. Entre deux abscisses s et $s+ds$, cette longueur est

$$ds = \rho(s) d\alpha(s)$$

où $\rho(s)$ est le rayon de courbure de la fibre neutre en s .

• La longueur sous contrainte de la même portion de fibre est :

$$ds' = (\rho(s) - y) d\alpha(s)$$

(voir figure 6)

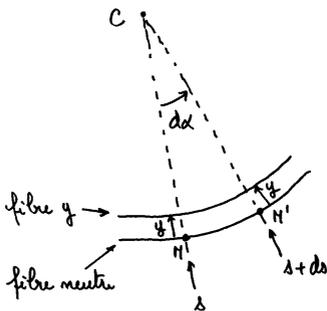


figure 6. La fibre neutre peut localement être assimilée à un cercle de rayon $\rho(s) = CM$. Sa longueur sous contrainte est donc

$$ds = \rho(s) d\alpha$$

La fibre située au repos en y peut localement être assimilée à un cercle de rayon $\rho(s) - y$, d'où sa longueur sous contrainte

$$ds' = (\rho(s) - y) d\alpha$$

L'allongement relatif de la fibre y est donc

$$\frac{ds' - ds}{ds} = - \frac{y}{\rho(s)}$$

Cette fibre, de section d^2S , exerce donc une force :

$$d^2\vec{f} = -E d^2S \frac{y}{\rho(s)}$$

sur la section M_1M_2 (noter que $d^2\vec{f} = d^2f \vec{u}_z$; si $y > 0$, cette force est orientée selon $-\vec{u}_x$ - cf figure 4)

Bien que ce ne soit pas demandé dans l'énoncé, il est facile de voirⁱⁱⁱ que la somme de ces forces est nulle :

$$\iint d^2\vec{f} = -\frac{E}{\rho(s)} \iint y d^2S = 0$$

car $\iint y d^2S = 0$ (pour une tige cylindrique)

(Remarquons que c'est précisément cette propriété qui définit la position de la fibre neutre) selon la coordonnée y).

Le couple résultant est $\vec{\Gamma}(s)$. En calculant le moment des forces $d^2\vec{f}$ par rapport à M (point d'abscisse s situé sur la fibre neutre), on a :

$$\vec{\Gamma}(s) = \iint \vec{r} \wedge d^2\vec{f}$$

avec $\vec{r} = \overrightarrow{MM'} = y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$ (M' représente ici le point courant de l'intégration). D'où :

$$\vec{\Gamma}(s) = \frac{E}{\rho(s)} \left\{ \iint y^2 d^2S \vec{u}_z - \iint yz d^2S \vec{u}_y \right\}$$

Pour une tige cylindrique $\iint yz d^2S = 0$

(Remarquons que, dans un cas plus général, c'est précisément l'annulation de la composante de $\vec{\Gamma}(s)$ selon \vec{u}_y qui fournit la position selon z de la fibre neutre).

On pose $I = \iint y^2 d^2S$

I peut être considéré comme le moment d'inertie de la section de la tige (portée d'une masse surfacique unité) autour

de l'axe \vec{u}_y . I est homogène à une longueur à la puissance 4.

On a finalement
$$\Gamma(s) = \frac{EI}{\rho(s)}$$

Par ailleurs on a vu que $ds = \rho(s) d\alpha$. Donc

$$\frac{1}{\rho(s)} = \frac{d\alpha(s)}{ds}$$

d'où la seconde expression de $\Gamma(s)$:

$$\Gamma(s) = EI \frac{d\alpha(s)}{ds}$$

1-d On appelle ici $y(s)$ la coordonnée selon y de la fibre neutre (cf figure 7). $\alpha(s)$ est l'angle que la tangente en s

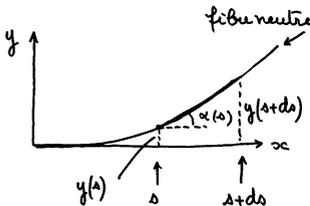


figure 7 : paramétrisation de la fibre neutre (les angles sont évidemment exagérés).

à cette fibre fait avec \vec{u}_x . On a (cf fig. 7) :

$$dy(s) = \alpha(s) ds$$

D'où :

$$\alpha(s) = \frac{dy(s)}{ds}$$

et :

$$\Gamma(s) = EI \frac{d^2 y(s)}{ds^2}$$

$$\Gamma(s) = - \frac{d\Gamma(s)}{ds} = - EI \frac{d^3 y(s)}{ds^3} = F$$

Par intégrations successives, on obtient :

$$\Gamma(s) = \int_0^s -F ds \quad \text{car } \Gamma(s=l) = 0$$

d'où : $\Gamma(s) = F(l-s)$

puis: $\alpha(s) = \int_0^s \frac{F}{EI} (l-s) ds$ car $\alpha(s=0) = 0$

d'où: $\alpha(s) = \frac{F}{EI} \left(l - \frac{s}{2} \right) s$

et finalement $y(s) = \int_0^s \alpha(s) ds$ car $y(s=0) = 0$

d'où: $y(s) = \frac{F}{EI} \left(\frac{ls^2}{2} - \frac{s^3}{6} \right)$

Ainsi: $h = y(s=l) = \frac{F l^3}{3EI}$

La constante de raideur de la tige est:

$$K_f = \frac{F}{h} = \frac{3EI}{l^3}$$

1-e. Pour calculer $I = \iint y^2 d^2S$, il vaut mieux se placer en coordonnées polaires ρ, φ (même si on peut exprimer I en coordonnées cartésiennes, on finit toujours par faire un changement de variables se ramenant à des coordonnées polaires), d'où:

$$y = \rho \cos \varphi \quad ; \quad z = \rho \sin \varphi \quad ; \quad d^2S = \rho d\rho d\varphi$$

$$\text{D'où: } I = \int_0^r \rho^3 d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{r^4}{4} \cdot \pi$$

On en déduit: $K_f = \frac{3\pi}{4} E \frac{r^4}{l^3}$

1-f. Pour la fibre amincie, on trouve:

$$K_f = 3 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}$$

1-g. i. Pour un déplacement $h = 5 \text{ mm}$, v exerce une force

$$F = K_f h = 1,5 \mu\text{N}$$

ii. et pour un déplacement $h = 5 \mu\text{m}$, $F = 1,5 \text{ nN}$

2-a. s_1 et s_2 sont proportionnels à la surface de l'image interceptée par chacune des photodiodes (compte tenu de l'hypothèse - assez grossière - selon laquelle l'éclairage de l'extrémité de la

fibres est uniforme). Si h est petit devant r , on a (cf fig. 8):

$$s_1 \approx \frac{\pi r^2}{2} + 2rh \qquad s_2 \approx \frac{\pi r^2}{2} - 2rh$$

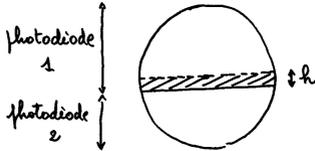


Figure 8: Zones de l'extrémité de la fibre éclairant chaque photodiode, lorsque l'extrémité de la fibre est déplacée de h . Si h est petit devant r , la surface de la zone hachurée est $2rh$.

On en déduit
$$s = \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2} = \frac{4h}{\pi r}$$

Donc s est proportionnel à h .

2-b. Si h devient de l'ordre de r , on ne peut plus assimiler la zone hachurée de la figure 8 à un rectangle dont l'un des côtés est h . Le signal devient non linéaire en h .

Remarque : il n'est pas difficile de calculer s dans ce cas (bien que ce ne soit pas demandé par l'énoncé). En définissant l'angle β comme indiqué sur la figure 9, on a

$$s_1 \approx \frac{\pi r^2}{2} + 2 \left(\frac{\alpha r^2}{2} \right) + r \cos \beta h$$

et $s_1 + s_2 \approx \pi r^2$

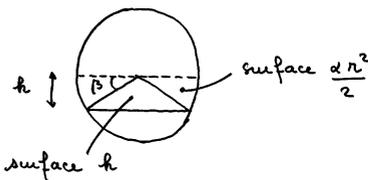


Figure 9: Zones de l'extrémité de la fibre éclairant chaque photodiode, dans le cas où le déplacement h est une fraction quelconque du rayon r de la fibre.

Sachant que $\sin \beta = \frac{h}{r}$ ou $\cos \beta = \sqrt{r^2 - h^2}$, on obtient :

$$s = \frac{2}{\pi} \left\{ \arcsin \frac{h}{r} + \frac{h}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{r} \right)^2} \right\}$$

et on constate bien que la fonction $s(h)$ est non linéaire

• la valeur maximale de h qui peut être mesurée ainsi est R : si $|h| \geq R$, l'un des deux signaux s_1 ou s_2 est nul et l'autre est constant. On a alors $s = \pm 1$

2. c. la valeur minimale de h qui soit mesurable est donc :

$$h_{\min} = \frac{\Delta Y}{G} \quad \text{soit} \quad h_{\min} = 5 \text{ mm}$$

2. d. les forces mesurables sont donc comprises entre $K_f h_{\min} = 1,5 \mu\text{N}$ et $K_f R = 1,5 \text{ nN}$.

En comparant avec les valeurs obtenues à la question B4, on constate qu'on est toujours dans le cas où $F \gg F_0$, donc où la molécule d'ADN est complètement étirée.

3. a. la fibre est maintenant soumise à son poids et à la poussée d'Archimède :

$$P = V(d-d_0)g = \pi r^2 \ell (d-d_0)g$$

soit numériquement :

$$P = 6,5 \text{ mN}$$

C'est une force beaucoup plus grande que celle qu'on est capable d'exercer sur l'ADN. On a $P < F$ (voire $P \ll F$).

3. b. la fibre optique a l'allure indiquée sur la figure 10

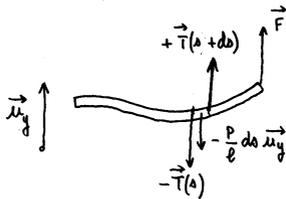


Figure 10. Fibre optique en tenant compte de son poids. On a reporté les différentes forces s'exerçant sur l'élément de fibre optique, d'abscisse curviligne comprise entre s et $s+ds$.

La force par unité de longueur due à la gravité est $-\frac{P}{\ell} \vec{x}_y$ (car $\vec{g} = -g\vec{x}_y$). Le bilan des forces s'exerçant sur l'élément de fibre optique situé entre s et $s+ds$ est donc (cf fig. 10) :

$$\vec{T}(s+ds) - \vec{T}(s) - \frac{P}{\ell} ds \vec{x}_y = 0$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{dT(s)}{ds} = \frac{P}{\ell}$$

d'où on déduit $T(s)$:

$$T(s) = \int_0^s \frac{P}{\ell} ds + F$$

(On a toujours $T(s=l) = F$). Ainsi :

$$T(s) = \frac{P}{\ell}(s-l) + F$$

3.-c. On a toujours $\frac{d\Gamma(s)}{ds} = -T(s)$; $\frac{d\alpha(s)}{ds} = \frac{\Gamma(s)}{EI}$; $\frac{dy(s)}{ds} = \alpha(s)$

avec les conditions aux limites $T(l) = 0$; $\alpha(0) = 0$; $y(0) = 0$

d'où, par intégrations successives :

$$\Gamma(s) = -\int_0^s T(s) ds = -\frac{P}{\ell} \left[\frac{s^2}{2} - ls + \frac{l^2}{2} \right] - F(s-l)$$

$$\alpha(s) = \int_0^s \frac{\Gamma(s)}{EI} ds = -\frac{P}{\ell EI} \left[\frac{s^3}{6} - \frac{ls^2}{2} + \frac{l^2s}{2} \right] - \frac{F}{EI} \left(\frac{s^2}{2} - ls \right)$$

$$y(s) = \int_0^s \alpha(s) ds = -\frac{P}{2\ell EI} \left[\frac{s^4}{12} - \frac{ls^3}{3} + \frac{l^2s^2}{2} \right] - \frac{F}{2EI} \left(\frac{s^3}{3} - ls^2 \right)$$

Enfin $h = y(s=l) = \frac{l^3}{3EI} \left(F - \frac{3}{8}P \right) = \frac{1}{k_f} \left(F - \frac{3}{8}P \right)$

Si $P=0$, on retrouve : $h_F = \frac{F}{k_f}$; si au contraire $F=0$, on a : $h_P = \frac{3}{8} \frac{P}{k_f}$

et finalement, puisque toutes les équations sont linéaires, on trouve sans surprise que : $h = h_F + h_P$

3.-d. Le résultat montre qu'il faut comparer F à $\frac{3}{8}P \approx 2,5 \text{ mN}$.

En général on a donc $h_P \gg h_F$. Cette configuration expérimentale est donc peu utilisable.

En pratique, il vaut mieux placer la fibre verticalement : dans ce cas, la composante du poids transverse à la fibre est à peu près nulle (elle est de l'ordre de $\bar{\alpha}P$ où $\bar{\alpha}$ est l'angle moyen de la fibre avec la verticale). Donc le déplacement de l'extrémité de la fibre est dû uniquement à F .

4.-a. La fibre est un oscillateur harmonique 2D. Si y et z sont les coordonnées transverses de l'extrémité de la fibre, on a :

$$E_P = \frac{1}{2} k_f (y^2 + z^2) = E_{Py} + E_{Pz}$$

D'après le théorème d'équipartition de l'énergie, on a :

$$\langle E_{py} \rangle = \frac{k_f}{2} \langle y^2 \rangle = \frac{k_B T}{2}$$

Par ailleurs $\langle y \rangle = 0$ (la fibre n'étant soumise à aucune force permanente), donc $\Delta h^2 = \langle y^2 \rangle = \frac{k_B T}{k_f}$

Où :

$$\Delta h = \left(\frac{k_B T}{k_f} \right)^{1/2}$$

Numériquement, à température ambiante, on trouve :

$$\Delta h = 3,7 \text{ nm}$$

4-b. On a donc $\Delta h \ll r$, et par conséquent on est dans la zone où s est proportionnel à h (cf question 2.a) :

$$s = \frac{4h}{\pi r}$$

D'où $\Delta s = \frac{4}{\pi r} \Delta h$

Connaissant Δs , on peut en déduire Δh , donc mesurer k_f :

$$k_f = \frac{k_B T}{\Delta h^2} = \frac{k_B T}{\Delta s^2} \left(\frac{4}{\pi r} \right)^2$$

5-a. Un cristal (ou une céramique) est dit piézoélectrique lorsqu'il apparaît une tension entre ses faces quand on exerce sur le cristal une force de compression (selon un axe cristallographique), ou inversement lorsque ce cristal voit une de ses dimensions géométriques varier quand on applique une tension entre deux de ses faces en regard (le quartz est piézoélectrique).

Donc le signal appliqué sur la coque piézoélectrique est une tension électrique.

5-b- La longueur de l'ADN est : $L = y_0 - h$
(cf figure 11)

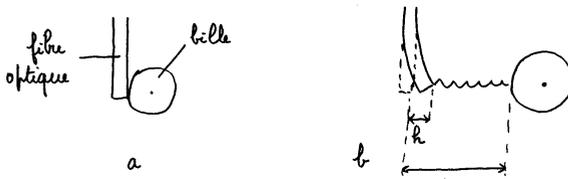


figure 11 : a. situation où la bille est en contact avec la fibre ($y_0=0$) - b. situation où l'ADN est élié ($y_0 \neq 0$)

La force à laquelle est soumis l'ADN est : $F = k_p h$

En mesurant h et y_0 , on connaît donc F et L et on peut construire la "courbe de force" $F = F(L)$. D'après la partie B, on s'attend à :

$$L = L_0 \alpha \left(\frac{F}{F_0} \right)$$

$$\text{avec } F_0 = \frac{k_B T}{b}$$

6-a. Si on observe $L > L_0$, ça veut dire que la double hélice est déformée (son pas est modifié sous l'effet de F).

6-b. On a :

$$k' = \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{a}{L_0}$$

soit numériquement : $k' = 3,8 \cdot 10^{-5} \text{ N/m} = 38 \text{ pN}/\mu\text{m}$

Cette valeur est très supérieure à la valeur de la constante de raideur de l'ADN calculée à la question B2a

($k = 7,6 \cdot 10^{-9} \text{ N/m}$).

6-c. En assimilant maintenant chacun des N segments à un ressort de raideur k , la molécule d'ADN est constituée de N ressorts en série. Sous l'effet de F , la molécule

s'allonge de $\frac{F}{k'}$, et chaque segment s'allonge donc de $\frac{F}{Nk'} = \frac{F}{k''}$. D'où la constante de raideur d'un segment :

$$k'' = Nk'$$

soit numériquement :

$$k'' = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

7-a. Par analogie avec la courbe $P = f(V)$ pour un corps pur (la force de traction sur l'ADN correspond à la force de compression du corps pur, donc à P , et la longueur L de l'ADN correspond au volume V du corps pur), on peut assimiler le phénomène observé à une transition de phase. (du 1^{er} ordre)

Remarque : il s'agit ici d'un changement de structure de l'ADN, qui passe de la forme double hélice (appelée ADN B) à une forme "déroulée" (voir figure 12).

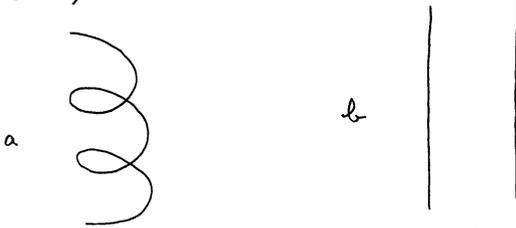


Figure 12: a. ADN B (un seul brin de la double hélice est représenté) - b. forme étirée de l'ADN (chaque brin de la double hélice est à peu près rectiligne).

Les paires de base de la double hélice se sont écartées.

7-b. Pour $L/L_0 > 1,8$, il y a cassure de l'ADN (donc $F=0$ et L quelconque). Cette cassure se produit à :

$$L = 1,8 L_0 \approx 30 \mu\text{m}$$

soit une valeur du même ordre que L_d ($L_d = 34,6 \mu\text{m}$, cf question A-1-b), ce qui justifie l'interprétation de la structure de l'ADN étiré donnée à la question précédente

D. Pièges optiques en régime de Rayleigh

1-a- Dans un volume d^3r' situé en un point \vec{r}' intérieure à la bille, il y a un dipôle :

$$d^3\vec{d} = \vec{P} d^3r'$$

ce dipôle crée au point \vec{r} un potentiel :

$$d^3V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} d^3\vec{d} \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Ainsi le potentiel créé en \vec{r} par l'ensemble de la répartition de polarisation est :

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3r'$$

où l'intégrale porte sur la sphère de rayon a . On peut écrire :

$$V(\vec{r}) = \vec{P} \cdot \vec{w}(\vec{r}) \quad \text{avec} \quad \vec{w}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3r'$$

$\vec{w}(\vec{r})$ apparaît comme le champ électrique créé par une sphère de rayon a , portant une densité de charge volumique $\rho=1$. Ainsi $\vec{w}(\vec{r})$ est radial, et peut être calculé par le

théorème de Gauss :

$$w(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} r^3 \quad \text{si } r \leq a$$

$$\text{ou } w(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} a^3 \quad \text{si } r \geq a$$

$$\begin{aligned} \text{d'où: } \vec{W}(\vec{r}) &= \frac{r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{3\epsilon_0} & \text{si } r \leq a \\ \text{et } \vec{W}(\vec{r}) &= \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^3} \vec{r} & \text{si } r \geq a \end{aligned}$$

On en déduit :

* si $r \leq a$:

$$V(\vec{r}) = V_{\text{int}}(\vec{r}) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{3\epsilon_0}$$

$$\text{d'où } \vec{E}_{\text{pint}} = - \vec{\text{grad}} V_{\text{int}} = - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

* si $r \geq a$

$$V(\vec{r}) = V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{a^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{P} = \frac{a^3}{3\epsilon_0} \frac{P \cos \theta}{r^2}$$

en exprimant le potentiel en coordonnées sphériques, l'axe Oz étant pris colinéaire à \vec{P} ($\vec{P} = P \vec{u}_z$). Sur cette dernière expression, on constate que $V(\vec{r})$ est le potentiel créé en \vec{r} par le dipôle $\frac{4\pi}{3} a^3 P$ (c'est-à-dire le moment dipolaire porté par la bille) situé à l'origine O. On en déduit le champ créé à l'extérieur de la bille

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{pext}} &= - \vec{\text{grad}} V_{\text{ext}} = - \vec{u}_r \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial r} - \vec{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial \theta} \\ &= \frac{2a^3}{3\epsilon_0} \frac{P \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{a^3}{3\epsilon_0} \frac{P \sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

Enfin $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$ où \vec{n}

Enfin les densités surfaciques σ_p et volumiques ρ_p de charges de polarisation sont :

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire suivant la normale sortante à la sphère (soit $\vec{n} = \vec{u}_r$), d'où

$$\sigma_p = P \cos \theta$$

$$\text{et } \rho_p = - \text{div} \vec{P} = 0$$

1. b. - Le champ électrique total à l'intérieur de la bille est :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_{\text{pint}} = \vec{E}_i - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Le milieu étant linéaire, on a : $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$

D'où :
$$\vec{E} = \vec{E}_i - \frac{\chi_e}{3} \vec{E}$$

dont on déduit :
$$\vec{E} = \frac{3 \vec{E}_i}{3 + \chi_e}$$

On constate donc que \vec{E} est uniforme à l'intérieur de la bille, donc $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ l'est aussi, en accord avec l'hypothèse faite à la question 1.a.

1.c. - Le moment dipolaire électrique porté par la bille est :

$$\vec{d} = \frac{4\pi}{3} a^3 \vec{P} = \frac{4\pi}{3} a^3 \epsilon_0 \chi_e \frac{3\vec{E}_i}{3 + \chi_e} = 4\pi a^3 \frac{\chi_e}{3 + \chi_e} \epsilon_0 \vec{E}_i$$

d'où la polarisabilité^α de la bille, définie par $\vec{d} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_i$:

$$\alpha = 4\pi a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \quad (\text{car } \chi_e = \epsilon_r - 1)$$

2.a. - La bille n'étant pas chargée, on a : $\text{div } \vec{D} = 0$. A l'interface entre les 2 milieux (en $r = a$), cette propriété se traduit par une relation de continuité entre composantes normales de \vec{D} , d'où :

$$\vec{D}_{\text{int}} \vec{u}_r = \vec{D}_{\text{ext}} \vec{u}_r \quad (\text{en } r = a)$$

Écrite en terme de composantes de \vec{E} et \vec{P} , cette relation devient :

$$(\vec{E}_{\text{ext}} - \vec{E}_{\text{int}}) \vec{u}_r = \frac{1}{\epsilon_0} (\vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_{\text{ext}}) \vec{u}_r \quad (= \frac{\sigma_p}{\epsilon_0})$$

Par ailleurs, du fait de l'équation locale $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, il existe aussi une relation de continuité entre composantes tangentielles de \vec{E} à l'interface : On peut combiner les 2 relations et écrire (en $r = a$) :

$$\vec{E}_{\text{ext}} - \vec{E}_{\text{int}} = \frac{1}{\epsilon_0} [(\vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_{\text{ext}}) \vec{u}_r] \vec{u}_r$$

2.b. - Les charges de polarisation sont :

• à l'intérieur de la bille : $\rho_p = -\text{div } \vec{P}_{\text{int}} = 0$ (cf hypothèse i)

• à l'extérieur de la bille : $\rho_p = 0$ car \vec{P}_{ext} est à divergence nulle (cf hypothèse iii)

• à l'interface $r = a$: $\sigma_p = \vec{P}_{\text{int}} \vec{m}_{\text{int}} + \vec{P}_{\text{ext}} \vec{m}_{\text{ext}}$

où \vec{m}_{int} et \vec{m}_{ext} sont les normales sortantes au milieu intérieur

à la bille et au milieu extérieur. On a :

$$\vec{m}_{\text{int}} = -\vec{m}_{\text{ext}} = \vec{u}_r$$

D'où :
$$\vec{P}_p = \left(\vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_{\text{ext}}(a) \right) \vec{u}_r$$

soit encore (en utilisant l'hypothèse ii) :

$$\vec{P}_p = \left(\vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_0 \right) \vec{u}_r$$

En appelant θ l'angle entre \vec{u}_r et $\vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_0$, on obtient :

$$\vec{P}_p = \left| \vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_0 \right| \cos \theta$$

On retrouve la même répartition de charges de polarisation qu'à la question 1, à ceci près que \vec{P}_{int} est remplacé par $\vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_0$.

Le champ de polarisation \vec{E}_p est donc :

• si $r < a$
$$\vec{E}_p = - \frac{\vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_0}{3\epsilon_0} = \vec{E}_{p_{\text{int}}}$$

• si $r > a$
$$\vec{E}_p = \vec{E}_{p_{\text{ext}}}$$
 est le champ créé par

le dipôle $\frac{4\pi}{3} a^3 (\vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_0)$ situé à l'origine, soit :

$$\vec{E}_{p_{\text{ext}}} = \frac{a^3}{3\epsilon_0} \left| \vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_0 \right| \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta \right)$$

(en coordonnées sphériques - l'axe Oz étant défini par le vecteur $\vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_0$).

2.c. Le champ électrique total est : $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_p$

On vérifie maintenant les hypothèses i à iii :

• hypothèse i : le champ intérieur à la bille

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{E}_i - \frac{\vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_0}{3\epsilon_0}$$

est uniforme. Donc $\vec{P}_{\text{int}} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_{\text{int}}$ est aussi uniforme.

• hypothèse iii : dans le milieu extérieur, la polarisation est donnée par :

$$\vec{P}_{\text{ext}} = \epsilon_0 \chi'_e \vec{E}_{\text{ext}} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_i + \vec{E}_{p_{\text{ext}}}$$

Donc sa divergence s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{P}_{\text{ext}} = \epsilon_0 \chi_e' \left(\operatorname{div} \vec{E}_i + \operatorname{div} \vec{E}_{\text{pert}} \right)$$

or, \vec{E}_i étant uniforme, sa divergence est nulle. Par ailleurs, on a noté que \vec{E}_{pert} est le champ créé par un dipôle à l'origine, donc par une distribution de charges telle que $\rho = 0$ si $r > a$. Ainsi sa divergence est nulle en $r > a$. En finalité on a bien :

$$\operatorname{div} \vec{P}_{\text{ext}} = 0$$

• hypothèse ii : On calcule :

$$\vec{P}_{\text{ext}}(a) \vec{u}_r = \epsilon_0 \chi_e' \vec{E}_{\text{ext}}(a) \vec{u}_r = \epsilon_0 \chi_e' \left(\vec{E}_i + \vec{E}_{\text{pert}}(a) \right) \vec{u}_r$$

De l'expression de $\vec{E}_{\text{pert}}(r, \theta)$, on déduit :

$$\vec{E}_{\text{pert}}(a) \vec{u}_r = \frac{2}{3\epsilon_0} |\vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_0| \cos \theta = \frac{2}{3\epsilon_0} (\vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_0) \vec{u}_r$$

Donc :

$$\vec{P}_{\text{ext}}(a) \vec{u}_r = \epsilon_0 \chi_e' \left(\vec{E}_i + \frac{2}{3\epsilon_0} (\vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_0) \right) \vec{u}_r$$

est bien le produit scalaire d'un vecteur constant

$$\vec{P}_0 = \epsilon_0 \chi_e' \left(\vec{E}_i + \frac{2}{3\epsilon_0} (\vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_0) \right)$$

et de \vec{u}_r , ce qui vérifie l'hypothèse ii.

La relation qui vient d'être obtenue est une équation implicite en \vec{P}_0 , qui permet d'en calculer la valeur en fonction de \vec{E}_i et \vec{P}_{int} :

$$\vec{P}_0 = \frac{3\chi_e'}{3+2\chi_e'} \left(\epsilon_0 \vec{E}_i + \frac{2}{3} \vec{P}_{\text{int}} \right)$$

Une deuxième relation entre \vec{P}_0 , \vec{E}_i et \vec{P}_{int} est obtenue en exprimant \vec{P}_{int} :

$$\vec{P}_{\text{int}} = \epsilon_0 \chi_e' \vec{E}_{\text{int}} = \epsilon_0 \chi_e' \left(\vec{E}_i - \frac{\vec{P}_{\text{int}} - \vec{P}_0}{3\epsilon_0} \right)$$

2. d - le moment dipolaire associé aux charges de polarisation est : $\vec{d} = \frac{4\pi}{3} a^3 (\vec{P}_{int} - \vec{P}_o)$

(Remarquons qu'il s'agit de la même expression qu'à la question 1, où on a remplacé \vec{P}_{int} par $\vec{P}_{int} - \vec{P}_o$).

Chacun des vecteurs \vec{P}_{int} et \vec{P}_o est proportionnel au champ \vec{E}_i et il en est de même pour \vec{d} . La polarisabilité de la bille est définie par $\vec{d} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_i$. La quantité pertinente à calculer en fonction de \vec{E}_i est donc $\vec{P}_{int} - \vec{P}_o$, qui on peut facilement obtenir en faisant la différence des deux expressions implicites obtenues pour \vec{P}_{int} et \vec{P}_o :

$$\vec{P}_{int} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}_i - \frac{\chi_e}{3} (\vec{P}_{int} - \vec{P}_o)$$

$$\vec{P}_o = \chi'_e \epsilon_0 \vec{E}_i + \frac{2}{3} \chi'_e (\vec{P}_{int} - \vec{P}_o)$$

d'où :

$$\vec{P}_{int} - \vec{P}_o = \frac{\chi_e - \chi'_e}{1 + \frac{\chi_e + 2\chi'_e}{3}} \epsilon_0 \vec{E}_i$$

$$\text{et } \vec{d} = 4\pi a^3 \frac{\chi_e - \chi'_e}{3 + \chi_e + 2\chi'_e} \epsilon_0 \vec{E}_i$$

d'où l'on déduit la polarisabilité α (exprimée en fonction de $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ et $\epsilon'_r = 1 + \chi'_e$) :

$$\alpha = 4\pi a^3 \frac{\epsilon_r - \epsilon'_r}{\epsilon_r + 2\epsilon'_r}$$

3. a - Si le champ appliqué \vec{E}_i est un champ oscillant à la pulsation ω , les raisonnements effectués aux questions précédentes s'appliquent encore, dans la mesure où le champ extérieur appliqué est uniforme à l'échelle de la bille, donc si $a \ll \lambda_0$ (où λ_0 est la longueur d'onde de l'onde).

On a alors $\epsilon_r = \epsilon_r(\omega) = n^2$ et $\epsilon'_n = m_0^2$

$$\text{D'où} \quad \alpha = 4\pi a^3 \frac{n^2 - m_0^2}{n^2 + 2m_0^2} = 4\pi a^3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$$

où $n = \frac{n}{m_0}$ est l'indice relatif des 2 milieux à la fréquence de l'onde incidente.

3. b. On obtient numériquement $\alpha = 7,4 \cdot 10^{-22} \text{ m}^3$

4. a. Le dipôle étant induit ($\vec{d} \propto \vec{E}$), on a :

$$E_p = - \frac{\vec{d} \cdot \vec{E}}{2} = - \frac{\alpha \epsilon_0 E^2}{2}$$

4. b. La force qui s'exerce sur la bille est $\vec{F} = - \text{grad } E_p$, d'où :

$$\vec{F} = \frac{\epsilon_0 \alpha}{2} \text{grad } (E^2)$$

5. a. L'onde considérée ici n'est pas une onde plane.

En particulier le fait que $\varphi(\vec{r})$ dépend du point où on se place implique qu'une surface d'onde (d'équation $kz + \varphi(\vec{r}) = c^{ste}$) n'est pas un plan.

5. b. La force dipolaire est définie par

$$\vec{F}_{\text{dip}} = \langle \vec{F} \rangle_T = \frac{\epsilon_0 \alpha}{2} \langle \text{grad } (E_i^2) \rangle$$

\vec{E}_i s'écrivant ici sous la forme $\vec{E}_i = \vec{E}_{i0}(\vec{r}) \cos \phi(\vec{r})$

où $\phi(\vec{r})$ est la phase de l'onde au point \vec{r} à l'instant t :
 $(\phi(\vec{r}) = kz + \varphi(\vec{r}) - \omega t)$, on a

$$\text{grad } E_i^2 = \text{grad } (E_{i0}^2) \cos^2 \phi - E_{i0}^2 2 \sin \phi \cos \phi \text{grad } \phi$$

En moyennant sur une période, le second terme disparaît (car $\langle 2 \sin \phi \cos \phi \rangle_T = \langle \sin 2\phi \rangle_T = 0$).

En utilisant de plus $\langle \cos^2 \phi \rangle_T = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\vec{F}_{\text{dip}} = \frac{\epsilon_0 \alpha}{4} \text{grad } E_{i0}^2$$

- 5.c - Pour piéger la bille, il faut que E_{10} soit maximum en un point, donc avoir focalisé le faisceau (cf figure 13).

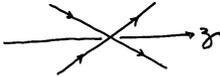


figure 13: le champ d'une onde électromagnétique est maximum au voisinage du point de focalisation

6. Dans l'expression de $\vec{E}_{10}(\vec{r})$ donnée dans l'énoncé, il s'est glissé une erreur. Si $E_{10}(\vec{r})$ est proportionnel à $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$, le champ sur l'axe Oz est minimum en 0, et croît de part et d'autre. Par ailleurs la section du faisceau croît lorsqu'on s'éloigne du point 0. Donc la puissance de l'onde croît au fur et à mesure qu'on s'éloigne de 0, ce qui viole évidemment la conservation de l'énergie. Au contraire dans un faisceau focalisé dans le plan $z=0$, l'amplitude de champ est maximum en 0, et décroît si on s'éloigne de 0. Pour que la puissance traversant un plan $z=c^{te}$ soit constante, sachant que la section du faisceau croît comme z^2 à grande distance, il faut que la puissance par unité de surface varie comme z^{-2} , donc que le champ électrique sur l'axe varie comme z^{-1} , soit $w(z)^{-1}$. Le champ électrique d'un faisceau Gaussien est donc donné par:

$$\vec{E}_{10}(\vec{r}) = \vec{u}_E \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{w(z)^2}\right)$$

- 6.a. θ , demi-angle d'ouverture du faisceau, est défini par:

$$\tan \theta = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{w(z)}{z}$$

Or, si $z \gg z_R$, on a $w(z) \approx w_0 \frac{z}{z_R}$. Donc :

$$\tan \theta = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} = \frac{\lambda_0}{\pi w_0 n_0}$$

où $\lambda = \frac{\lambda_0}{n_0}$ est la longueur d'onde de l'onde dans l'eau.

$$\text{Inversement } w_0 = \frac{\lambda_0}{\pi n_0 \tan \theta} = 0,7 \mu\text{m} \quad (\text{pour } \lambda_0 = 1,06 \mu\text{m})$$

et $\theta = 20^\circ$.

La longueur de Rayleigh z_R est donnée par :

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{\pi w_0^2 n_0}{\lambda_0}$$

soit numériquement : $z_R = 1,9 \mu\text{m}$

6-b - Le vecteur de Poynting, moyenné sur une période, est relié à la densité moyennée d'énergie de l'onde par :

$$\langle P \rangle_T = \frac{c}{n_0} \langle u \rangle_T$$

$$\text{et } \langle u \rangle_T = \frac{\varepsilon E_{i0}^2}{2} = \frac{1}{2} n_0^2 \varepsilon_0 E_{i0}^2$$

le plus simple est de calculer la puissance du faisceau traversant le plan $z = 0$. Dans ce plan, on a

$$\langle P \rangle_T = n_0 \frac{c \varepsilon_0}{2} A^2 e^{-2 \frac{z^2}{w_0^2}}$$

D'où la puissance P du faisceau :

$$P = \int_0^\infty \langle P \rangle_T 2\pi \rho d\rho = \pi n_0 \frac{c \varepsilon_0}{4} A^2 w_0^2$$

6-c Si la bille est située sur l'axe Oz , on a $\varphi = 0$

d'où :

$$E_{i0}^2 = A^2 \frac{w_0^2}{w(z)^2} = \frac{A^2}{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$$

(en utilisant l'expression "corrigée" de \vec{E}_{i0}). On en déduit :

$$\vec{F}_{\text{diff}} = \frac{\alpha \varepsilon_0}{4} A^2 \left(-\frac{2z/z_R^2}{\left(1 + (z/z_R)^2\right)^2} \right) \vec{u}_z$$

Dans la suite de cette question, on utilisera l'abscisse adimensionnée $Z = z/z_R$ et on posera $f(Z) = \frac{Z}{(1+Z^2)^2}$.

La valeur algébrique de la force dipolaire, soit :

$$F_{\text{dip}} = - \frac{\alpha \epsilon_0}{2} \frac{A^2}{z_R} f(Z)$$

est représentée en fonction de Z sur la figure 14. Elle est toujours de signe opposé à Z . Donc la force dipolaire est une force de rappel.

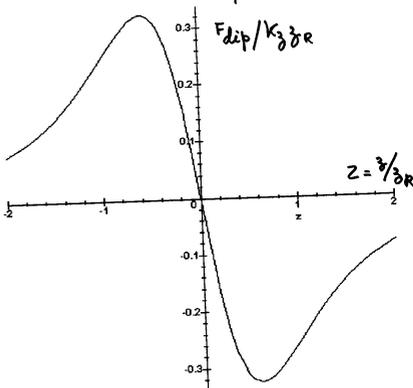


Figure 14: Variations de la force dipolaire F_{dip} sur l'axe Oz ($p=0$), en fonction de $Z = z/z_R$.

Au voisinage de la position d'équilibre $z=0$ (ou effet $F_{\text{dip}}(z=0)=0$), c'est-à-dire pour $|Z| \ll 1$, on a :

$$F_{\text{dip}} = - \frac{\alpha \epsilon_0}{2} \frac{A^2}{z_R^2} z$$

D'où la constante de rappel K_z du piège :

$$K_z = \frac{\alpha \epsilon_0}{2} \frac{A^2}{z_R^2} = \frac{2 \alpha}{\pi m_0 c} \frac{P}{w_0^2 z_R^2}$$

Numériquement, en prenant $P = 1 \text{ W}$, $\alpha = 7,4 \cdot 10^{-22} \text{ m}^3$ (cf question 3b) et $w_0 = 0,7 \mu\text{m}$, $z_R = 1,9 \mu\text{m}$ (cf question 6a), on obtient :

$$K_z = 6,7 \cdot 10^{-7} \text{ N/m} = 0,67 \text{ pN/mm}$$

La force dipolaire maximale s'obtient lorsque $\varphi'(z) = 0$

$$\text{Soit : } \frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{1 - 3z^2}{(1+z^2)^3} = 0$$

donc pour $z = \pm \frac{\sqrt{3}R}{16}$. Elle a pour valeur

$$F_{\text{dip max}} = \frac{\alpha \varepsilon_0}{2} \frac{A^2}{zR} \left| \varphi\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right| = k_z z R \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

soit numériquement $F_{\text{dip max}} = 4,1 \cdot 10^{-13} \text{ N} = 0,41 \text{ pN}$

Ainsi on exerce des forces plus faibles avec ce dispositif qu'avec celui de la partie C. On peut donc espérer tester l'allongement de l'ADN tel qu'on a pu le modéliser à la partie B.

6.d. Si la bille se déplace transversalement ($\rho \neq 0$) par rapport à sa position d'équilibre ($z=0$), on a :

$$\varepsilon_{\text{io}} = A e^{-\rho^2/w_0^2}$$

$$\text{d'où : } \vec{F}_{\text{dip}} = \frac{\alpha \varepsilon_0}{4} A^2 \frac{d}{d\rho} (e^{-2\rho^2/w_0^2}) \vec{u}_\rho$$

$$\text{soit : } \vec{F}_{\text{dip}} = -\alpha \varepsilon_0 \frac{A^2}{w_0^2} \rho e^{-2\rho^2/w_0^2} \vec{u}_\rho$$

Cette force est encore une force de rappel (puisque elle est orientée selon $-\vec{u}_\rho$). L'allure des variations de son module en fonction de $\rho' = \frac{\rho}{w_0}$ est donnée par la figure 15.

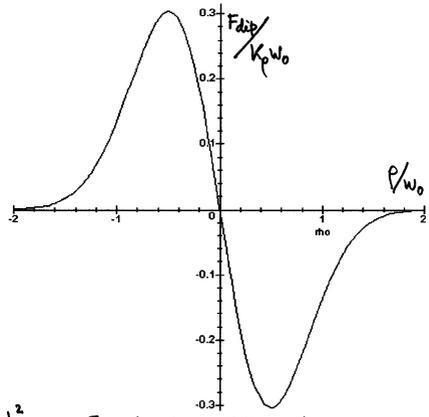
Au voisinage de la position d'équilibre, on a

$$\vec{F}_{\text{dip}} \approx -\alpha \varepsilon_0 \frac{A^2}{w_0^2} \rho \vec{u}_\rho$$

d'où la valeur de la constante de raideur correspondante

$$K_\rho = \alpha \varepsilon_0 \frac{A^2}{w_0^2} = 2 k_z \left(\frac{\sqrt{3}R}{16} \right)^2$$

Figure 15: Variations de la force dipolaire F_{dip} dans le plan transverse ($z=0$), en fonction de ρ/w_0



Numériquement $\frac{k_p}{k_z} = 2 \left(\frac{\partial R}{w_0} \right)^2 \approx 15$ et $k_p = 9,9 \text{ pN}/\mu\text{m}$

le piège est plus raide transversalement que longitudinalement.

• la valeur maximale de cette force s'obtient lorsque :

$$\frac{d}{d\rho} (\rho^4 e^{-2\rho^2}) = 0$$

$$\text{soit pour : } (1 - 4\rho^2) e^{-2\rho^2} = 0$$

$$\text{ou encore pour } \rho = \frac{w_0}{2}$$

$$\text{Elle vaut } F_{dip \max}(\rho) = k_p w_0 \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

$$\text{soit numériquement } F_{dip \max}(\rho) = 2 \text{ pN}$$

C'est la force minimale qu'il faut exercer sur la bille pour la faire sortir transversalement du piège.

7-a. On a :

$$\vec{\mathcal{F}} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$$

7-b. C'est l'équation de bilan de la composante selon \vec{u} de l'impulsion du champ électromagnétique. Du fait que le champ électromagnétique exerce sur la matière (i.e. la densité de charge ρ et la densité de courant \vec{j}) la force par unité de volume $\vec{\mathcal{F}}$, il perd pendant un temps dt l'impulsion par unité de volume $\vec{\mathcal{F}} dt$. $\vec{\pi}$ apparaît comme

la densité d'impulsion du rayonnement et $\vec{T}(\vec{u})$
comme la densité de courant de la composante selon \vec{u}
de l'impulsion du rayonnement

Remarque : la densité de courant de l'impulsion est un
tenseur d'ordre 2, dont les composantes cartésiennes T_{ij}
($i, j = x, y, z$) sont (dans le vide) :

$$T_{ij} = \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \delta_{ij} - \epsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{\mu_0} B_i B_j = \vec{T}(\vec{u}) \cdot \vec{u}_i$$

7-c. On sait que, dans le vide, le vecteur de Poynting est :

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\text{d'où } \vec{p} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{P} = \frac{\vec{P}}{c^2}$$

7-d. L'énergie reçue par σ est : $dW = P \sigma dt$

L'impulsion reçue est l'impulsion du rayonnement dans
le volume $\sigma c dt$, soit : $d\vec{p} = \vec{p} \sigma c dt$

$$\text{ou encore } dp = \frac{P}{c^2} \sigma c dt, \text{ d'où : } dp = \frac{dW}{c}$$

On obtient donc $dW = c dp$, en accord avec le fait
que l'énergie E du photon est reliée à son impulsion p
par la relation $E = c p$

(On a $E = h\nu$ et $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hc\nu}{c}$, d'où la relation $E = c p$
qui traduit que le photon a une masse nulle ; pour
une particule de masse non nulle, la relation entre
l'énergie (incluant l'énergie de masse) et l'impulsion
de la particule est $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$).

8-a. Dans un milieu diélectrique, magnétiquement parfait, ϵ_0
 μ_0 et c sont respectivement remplacés par $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 = m^2 \epsilon_0$, μ_0 et
 $\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{m}$.

D'autre part la bille (plongée dans l'eau) a une diélectrique $\vec{d} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_i$
(où α est donné par la question 2). Enfin le champ \vec{E}_i de l'onde

électromagnétique oscille à la pulsation ω ; donc

$$\nabla^2 \vec{d} = -\omega^2 \vec{d}$$

Finalement les champs rayonnés sont :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 \frac{1}{r} \vec{u}_r \wedge (\vec{u}_r \wedge \alpha \varepsilon_0 \vec{E}_i)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_0}{c} \omega^2 \frac{1}{r} (\vec{u}_r \wedge \alpha \varepsilon_0 \vec{E}_i)$$

$$\text{où } \vec{E}_i = \vec{E}_i(\vec{r}=0, t=t_r)$$

8-b- Le vecteur de Poynting associé aux champs rayonnés est :

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{m_0}{c} \omega^4 \frac{1}{r^2} (\vec{u}_r \wedge \vec{a}) \wedge \vec{a}$$

où $\vec{a} = \vec{u}_r \wedge \alpha \varepsilon_0 \vec{E}_i$. En utilisant le double produit vectoriel,

il vient :

$$\vec{a} \wedge (\vec{u}_r \wedge \vec{a}) = a^2 \vec{u}_r \quad (\text{car } \vec{a} \cdot \vec{u}_r = 0)$$

$$\text{et } a^2 = \alpha^2 \varepsilon_0^2 [E_i^2 - (\vec{E}_i \cdot \vec{u}_r)^2]$$

d'où :

$$\vec{P} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{m_0}{c} \frac{\omega^4}{r^2} \alpha^2 \varepsilon_0^2 [E_i^2 - (\vec{E}_i \cdot \vec{u}_r)^2] \vec{u}_r$$

$$\text{soit : } \vec{P} = \frac{\varepsilon_0}{16\pi^2 c^3} m_0 \alpha^2 \omega^4 \frac{1}{r^2} E_i^2 (1 - \cos^2 \theta_E) \vec{u}_r$$

où θ_E est l'angle entre \vec{u}_r et \vec{E}_i . Enfin

$$P_r = \iint P r^2 d^2\Omega = \iint P r^2 \sin \theta_E d\theta_E d\varphi_E$$

en utilisant les coordonnées sphériques r, θ_E, φ_E définies en prenant \vec{E}_i comme axe Oz . D'où

$$P_r = \frac{\varepsilon_0}{16\pi^2 c^3} m_0 \alpha^2 \omega^4 E_i^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta_E d\theta_E \times 2\pi$$

on calcule $\int_0^\pi \sin^3 \theta_E d\theta_E = \frac{4}{3}$. D'où

$$P_r = \frac{\varepsilon_0}{6\pi c^3} m_0 \alpha^2 \omega^4 E_i^2$$

8-c - d'impulsion du rayonnement émis dans l'angle solide $d^2\Omega$ autour de la direction θ_E, φ_E est orientée selon \vec{u}_r et est proportionnelle à \vec{P} , donc à $\sin^2 \theta_E$. Elle est donc égale (en module) et opposée (en direction) à celle émise dans la direction opposée $-\vec{u}_r$.

Donc l'impulsion totale emmenée par le rayonnement est nulle.

8. d. Pendant le temps dt , la bille reçoit du rayonnement incident une énergie $dW_i = P_r dt$ (soit l'énergie diffusée pendant le même temps), donc une impulsion

$$d\vec{p}_i = \frac{dW_i}{c} \vec{u}_z$$

(cf question 7d). Mais pendant le même temps, elle ne diffuse aucune impulsion (cf question 8c). Donc elle est soumise à une force \vec{F} telle que :

$$\vec{F} dt = d\vec{p}_i$$

$$\text{Soit : } \vec{F} = \frac{P_r}{c} \vec{u}_z$$

En moyenne sur une période, cette force est

$$\vec{F}_{pr} = \langle \vec{F} \rangle_T = \frac{\epsilon_0}{6\pi c^4} n_0 \alpha^2 \omega^4 \langle E_i^2 \rangle_T \vec{u}_z$$

avec $\langle E_i^2 \rangle = \frac{E_{i0}^2}{2}$. Finalement, on a :

$$\vec{F}_{pr} = \frac{\epsilon_0}{12\pi c^4} n_0 \alpha^2 \omega^4 E_{i0}^2 \vec{u}_z$$

Remarquons que la force de pression de radiation est orientée dans la direction du faisceau incident (ici selon \vec{u}_z).

9. a. En 0 ($\rho=0; z_0=0$), on a $E_{i0} = A$, d'où $E_{i0}^2 = A^2 = \frac{4}{\pi n_0 c \epsilon_0} \frac{P}{W_0^2}$ (cf question 6b). Ainsi :

$$F_{pr} = \frac{1}{3\pi^2 c^5} \alpha^2 \omega^4 \frac{P}{W_0^2}$$

En introduisant la longueur d'onde dans le vide λ_0 , il vient

$$F_{pr} = \frac{16\pi^2}{3c} \alpha^2 \frac{1}{\lambda_0^4} \frac{P}{W_0^2}$$

Soit numériquement $F_{pr} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ N} = 160 \text{ fN} = 0,16 \text{ pN}$

En 0 l'amplitude du champ E_i est maximum, donc la force de pression de radiation est maximum. Or elle est

inférieure à $F_{\text{dip max}}(z) = 0,44 \mu\text{N}$. Donc le piège reste stable (mais la position d'équilibre de la bille est déplacée) si on prend en compte la force de pression de radiation.

g.b. La nouvelle position d'équilibre est telle que $\vec{F}_{\text{dip}} + \vec{F}_{\text{pr}} = 0$. Puisque \vec{F}_{pr} est orienté selon \vec{u}_z , l'équilibre selon ρ n'est pas modifié. Par contre, l'équilibre selon z est modifié. En $\rho=0$ et z quelconque, la force de pression de radiation est :

$$F_{\text{pr}} = F_{\text{pr max}} \frac{1}{1+z^2} \quad \text{avec} \quad z = \frac{z}{z_R}$$

(puisque $E_{i0}^2 = A^2 \frac{1}{1+z^2}$), où $F_{\text{pr max}} = \frac{16\pi^2}{3c} \alpha^2 \frac{1}{d_0^4} \frac{P}{W_0^2}$

et la force dipolaire est :

$$F_{\text{dip}} = -k_z z_R \frac{z}{(1+z^2)^2}$$

si on admet que, à l'équilibre, $z \ll z_R$ (donc $z \ll 1$),

on a $F_{\text{pr}} \approx F_{\text{pr max}}$ et $F_{\text{dip}} \approx -k_z z$.

D'où la nouvelle position d'équilibre :

$$z_0 = \frac{F_{\text{pr max}}}{k_z} = z_{0e}$$

Numériquement on obtient : $z_0 = 0,24 \mu\text{m}$. On vérifie qu'on a bien $z \ll z_R = 1,9 \mu\text{m}$, ce qui justifie la méthode utilisée (notons que l'hypothèse effectuée consiste à négliger z^2 devant 1, or $z = 0,12$, donc l'erreur effectuée est de l'ordre du %, soit inférieure aux erreurs d'arrondi dans les applications numériques).

• les constantes de rappel k_ρ et k_z sont inchangées :

• k_ρ parce que l'équilibre selon ρ n'est pas modifié,

• k_z parce que, au voisinage de $z=0$, la résultante

des 2 forces colinéaires à \vec{u}_z est $F = F_{\text{dip}} + F_{\text{pr}} \approx F_{\text{pr max}} - k_z z$

donc la constante de rappel $\frac{dF}{dz}(z=z_0) = k_z$ n'a pas changé.

10-a- La position d'équilibre z_e selon Oz résulte est donnée par l'équation:

$$F_{dip} + F_{pr} = 0$$

or F_{dip} et F_{pr} sont l'une et l'autre proportionnelles à P .

Donc la position d'équilibre ne dépend pas de P . La

constante d'équilibre $\frac{dF}{dz}(z=z_e) = k_z$ est donc proportionnelle

à P (cf question 6.c).

Il en est de même pour k_p (cf question 6.d).

10-b- Si $z_0 \approx d_0$, le champ électrique E_i de l'onde incidente ne peut plus être considéré comme uniforme sur tout le volume de la bille de rayon a . Donc l'estimation de son moment dipolaire induit \vec{d} devient beaucoup plus compliquée (que ce qui a été fait à la question 2).

En outre, la répartition de polarisation ayant une taille de l'ordre de d_0 , il peut y avoir des effets d'interférences (constructives ou destructives) entre les champs rayonnés par les différents points de la bille (c'est-à-dire apparition d'effets de diffraction), donc la force de pression de radiation ne se calcule pas aussi simplement qu'à la question 8.

E. Expériences de mesure de force avec des pièges optiques

1-a- Le nombre de Reynolds de cet écoulement est:

$$Re = \frac{\phi \rho_0 v_e}{\eta}$$

où $\phi = 2a$ est la dimension caractéristique de la bille.

Pour v_e comprise entre 100 $\mu\text{m/s}$ et 1000 $\mu\text{m/s}$, on obtient:

$$10^{-4} \leq Re \leq 10^{-3}$$

Dans tous les cas, Re est très petit devant 1, et l'écoulement est laminaire.

1-b. La force exercée sur la bille par l'écoulement est :

$$\vec{F} = 6\pi\eta a \vec{v}_e$$

(Elle est orientée comme la vitesse de l'écoulement \vec{v}_e)

1-c. A l'équilibre, on a $-K_p \rho + 6\pi\eta a v_e = 0$

Connaisant ρ et v_e , on peut donc déterminer $K_p = \frac{6\pi\eta a v_e}{\rho}$

2-a. La force exercée sur la bille par l'écoulement est alors :

$$\vec{F} = 6\pi\eta a (\vec{v}_e - \vec{v})$$

(elle est proportionnelle à la vitesse relative du liquide par rapport à la bille, soit $\vec{v}_e - \vec{v}$).

2-b. La relation fondamentale pour la bille est :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\pi\eta a (\vec{v}_e - \vec{v})$$

avec: $m = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho$ (= masse de la bille). En posant $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_e$ (\vec{v}' représente la vitesse relative de la bille par rapport au fluide), l'équation du mouvement devient :

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = -\frac{6\pi\eta a}{m} \vec{v}'$$

A l'instant $t=0$, $\vec{v} = 0$ (donc $\vec{v}' = -\vec{v}_e$). La solution de l'équation précédente est donc :

$$\vec{v}' = -\vec{v}_e e^{-\frac{6\pi\eta a}{m} t}$$

D'où :

$$\vec{v} = \vec{v}_e \left(1 - e^{-\frac{6\pi\eta a}{m} t} \right)$$

• La constante de temps τ est : $\tau = \frac{m}{6\pi\eta a} = \frac{2}{9} \frac{a^2 \rho}{\eta}$

soit numériquement : $\tau = 0,12 \mu\text{s}$

• La vitesse limite atteinte est \vec{v}_e , vitesse de l'écoulement.

2-c. La bille a atteint sa vitesse limite à 10% près lorsque

$$\left| \frac{v - v_e}{v_e} \right| = e^{-t/\tau} = 0,1$$

$$\text{d'où : } t = z \ln 10$$

$$\text{soit numériquement : } t = 0,28 \mu\text{s}$$

Au delà de cette valeur de t , on peut considérer que $v \approx v_e$ à 10% près, donc mesurer v_e (à 10% près).

2.d. La longueur du trajet effectué par la bille est :

$$l(t) = \int_0^t v dt = v_e \int_0^t (1 - e^{-t/z}) dt = v_e (t - z(1 - e^{-t/z}))$$

Connaissant la longueur $l(t)$ de la trace de la bille et t (et sachant que z est connu), on peut déterminer :

$$v_e = \frac{l(t)}{t - z(1 - e^{-t/z})}$$

(On a d'ailleurs tout intérêt à choisir $t \gg z$, d'où $v_e \approx \frac{l(t)}{t - z}$).

3.a. L'équation du mouvement de la bille est :

$$m \frac{d^2 p}{dt^2} = -k_p p + 6\pi\eta a \left(\frac{dx_p}{dt} - \frac{dp}{dt} \right)$$

car la vitesse du liquide est $v_e = \frac{dx_e}{dt}$.

Cette équation est linéaire en p (et son terme d'excitation, proportionnel à $\frac{dx_e}{dt}$, est sinusoïdal).

On peut donc utiliser la notation complexe pour en étudier le régime forcé à la pulsation ω .

(noter que utiliser la notation complexe consiste à prendre la transformée de Fourier de l'équation du mouvement). On pose $p = p_0 e^{i\omega t}$.

3.b. En utilisant la notation complexe et en introduisant $z = \frac{m}{6\pi\eta a}$, on obtient :

$$-\omega^2 \underline{p} = -\frac{k_p}{m} \underline{p} + \frac{i\omega}{z} (\underline{x}_p - \underline{p})$$

En introduisant la pulsation propre ω_0 du mouvement non amorti : $\omega_0^2 = \frac{k_p}{m}$, on a :

$$\left(\omega_0^2 - \Omega^2 + i \frac{\Omega}{\tau} \right) \underline{p} = i \frac{\Omega}{\tau} \underline{X}_0$$

D'où:

$$\underline{p}(t) = \frac{i \Omega \tau^{-1}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i \Omega \tau^{-1}} X_0 e^{i \Omega t}$$

3.c - D'une part, $\Omega = 40\pi \text{ s}^{-1}$ est très petit devant $\tau^{-1} = 8,3 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$, donc $\Omega^2 \ll \Omega \tau^{-1}$

D'autre part, $p(t)$ est en quadrature avec $X_p(t)$, ce qui se traduit par $\omega_0^2 - \Omega^2 + i \Omega \tau^{-1}$ réel, donc $\omega_0^2 - \Omega^2 \gg \Omega \tau^{-1}$

D'où les ordres de grandeur relatifs : $\omega_0^2 \gg \Omega \tau^{-1} \gg \Omega^2$

Dans ces conditions $\underline{p} = \frac{i \Omega \tau^{-1}}{\omega_0^2} X_0 e^{i \Omega t}$

L'amplitude de $p(t)$ est donc : $p_0 = \frac{\Omega \tau^{-1}}{\omega_0^2} X_0 = \frac{\Omega}{k_p} X_0$

D'où on déduit :

$$k_p = 6\pi a \gamma \Omega \frac{X_0}{p_0}$$

Numériquement, on obtient : $k_p = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ N/m} = 74 \text{ pN}/\mu\text{m}$.

4. La force minimale accessible est : $F_{\min} = k_p \Delta p$, soit

$$F_{\min} = 150 \text{ fN}$$

Pour pouvoir exercer une force minimale égale à F_0 , il faut un piège de constante de raideur $k'_p = \frac{F_0}{\Delta p}$, soit $k'_p = 20 \text{ pN}/\mu\text{m}$.

Puisque k_p est proportionnel à P , ce piège Δp est obtenu pour une puissance P' égale à :

$$P' = P \frac{k'_p}{k_p} = P \frac{F_0}{F_{\min}}$$

Sachant que $P = 150 \text{ mW}$, on obtient : $P' = 40 \text{ mW}$.

$F_0 \approx 40 \text{ fN}$ correspond à la force caractéristique $F_0 = \frac{k_B T}{\ell}$ intervenant dans l'expression de la longueur de l'ADN sous

contrainte :

$$\frac{L}{L_0} = \sqrt{\left(\frac{F}{F_0} \right)}$$

avec $d(x) = \coth x - \frac{1}{x}$ (cf question B2)

Si on sait produire des forces $F \geq F_0$, on peut observer la partie de la "courbe de force" telle que $\frac{L}{L_0} \geq d(1)$

$$\text{Or } d(1) = \frac{e + 1/e}{e - 1/e} - 1 = 0,31$$

On peut ainsi observer la partie $L \geq 0,3 L_0$ de la courbe de force de l'ADN.

- 5-a- la paire de bases A-T est liée par 2 liaisons hydrogène et la paire de bases G-C est liée par 3 liaisons hydrogène. Donc leurs énergies de liaison sont respectivement :

$$E_{A-T} = 2 k_B T \quad ; \quad E_{G-C} = 3 k_B T$$

Et l'énergie moyenne de liaison d'une paire de base

$$\text{est : } E = \frac{E_{A-T} + E_{G-C}}{2} = \frac{5}{2} k_B T$$

la force moyenne nécessaire pour ouvrir une paire de base est le travail de F_{ouv} pendant l'ouverture de la paire de base :

$$E = F_{\text{ouv}} \cdot l$$

où l est la distance parcourue par la bille pendant l'ouverture d'une paire de base, soit : $l = 2d_0$.

$$\text{D'où } F_{\text{ouv}} \approx \frac{\frac{5}{2} k_B T}{2d_0} = \frac{5}{4} \frac{k_B T}{d_0}$$

En prenant $k_B T = 4,2 \cdot 10^{-21} \text{ J}$ et $d_0 = 3,4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, on obtient :

$$F_{\text{ouv}} \approx 15 \text{ pN}$$

- 5-b- Entre les paires de base A-T et G-C, il y a une différence d'énergie de liaison égale à $k_B T$. On peut donc considérer que l'énergie de la liaison rompue fluctue de $\Delta E = k_B T$. La valeur de la force qui doit être exercée pour ouvrir une paire de base fluctue aussi, de :

$$\Delta F_{\text{ouv}} = \frac{\Delta E}{2d_0} = \frac{k_B T}{2d_0}$$

soit numériquement $\Delta F_{\text{ouv}} = 6 \text{ pN}$.

Remarque: une telle expérience peut servir au séquençage de l'ADN, si on savait distinguer la force d'ouverture de la liaison A-T ($F_{\text{ouv}}(\text{A-T}) = F_{\text{ouv}} - \frac{1}{2}\Delta F_{\text{ouv}} = 12 \text{ pN}$) de celle de la liaison G-C ($F_{\text{ouv}}(\text{G-C}) = F_{\text{ouv}} + \frac{1}{2}\Delta F_{\text{ouv}} = 18 \text{ pN}$).

6. la force développée par l'ARN polymérase est:

$$F = k_p \rho$$

soit numériquement: $F = 13 \pm 4 \text{ pN}$

Pour en savoir plus: on pourra se reporter à un article de vulgarisation publié par une revue du CNRS, dont les références sont jointes ci-dessous:

Référence:

"L'ADN, un polymère modèle", Images de la Physique 1997 (Revue du CNRS), pp 111-118.

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

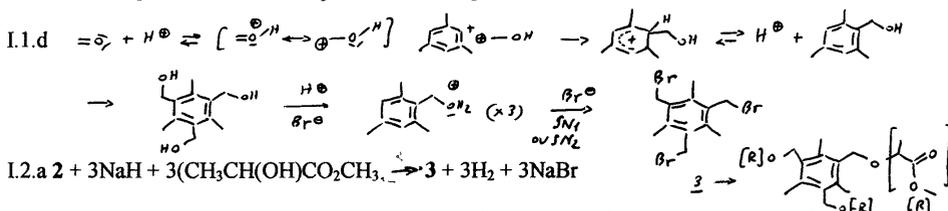
OPTION CHIMIE

Composition de chimie ♦ Session : 2002

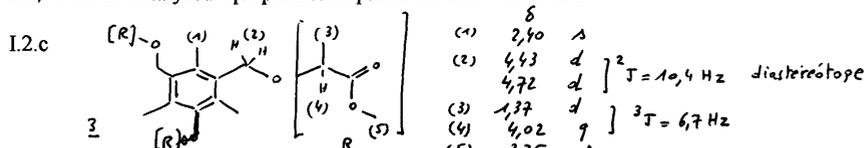
I.1.a Existence d'un axe de symétrie d'ordre 3 : invariance par rotation de $2\pi/3$

I.1.b Equivalence pour chaque type de protons due à l'axe C₃.

I.1.c Les 4 pics sont dus à la présence de trois atomes de brome dont l'abondance isotopique naturelle est de 50 : 50 pour ⁷⁹Br et ⁸¹Br. L'intensité relative des pics est fonction des combinaisons possibles des 3 Br à partir des 2 isotopes.



I.2.b NaH est une base qui sert à déprotonner la fonction alcool du lactate de méthyle, et Bu₄NI est un catalyseur qui permet de passer au dérivé iodé de 2.



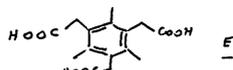
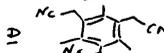
I.2.d Pour le composé A1, il y a disparition du signal à 3,75 en RMN-H et apparition de deux singulets à 1,11 et 1,19 dus aux méthyles géminés.

Le rôle de D₂O est d'effectuer un échange des protons labiles (OH) par le deutérium, et donc absence de signal OH.

I.2.e La complexité du spectre de A2 est due à la perte de symétrie C₃ ; probablement due à des interactions intramoléculaires (electrons π : π stacking, ou effet stérique : atropoisométrie).

I.3.a $2 + 3\text{KCN} \rightarrow \text{D} + 3\text{KBr}$

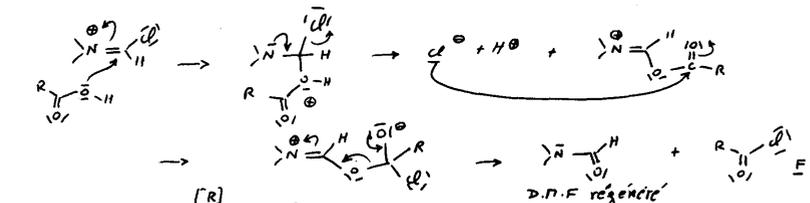
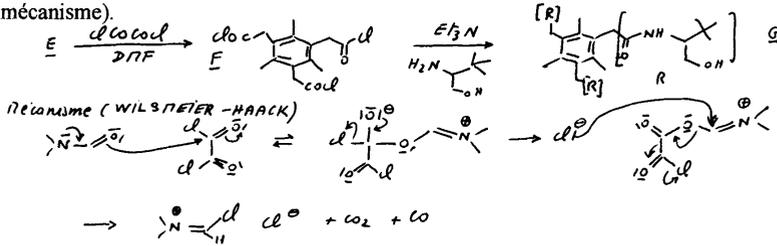
L'éther couronne sert à piéger K⁺, et exalte la nucléophilie de CN⁻ (augmente la solubilité des sels).



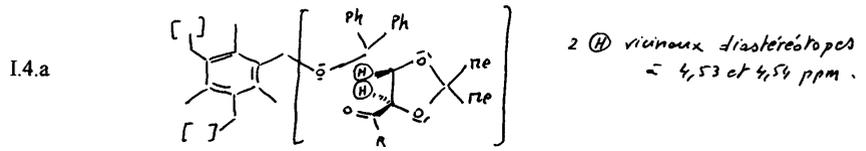
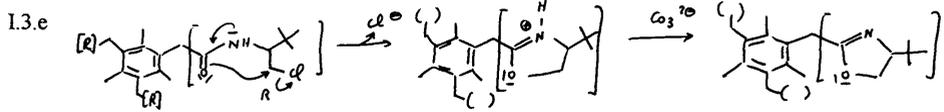
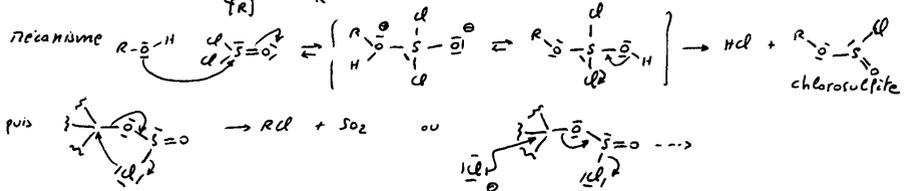
I.3.b $\text{RCH}_2\text{CN} \rightarrow \text{RCH}_2\text{CONH}_2 \rightarrow \text{RCH}_2\text{CON}_2 \rightarrow \text{RCH}_2\text{CO}_2\text{H}$

Par formation du diazonium, on facilite le passage de l'amide (donc du nitrile) à l'acide carboxylique.

I.3.c Le chlorure d'oxalyle est un agent chlorant et le DMF est un catalyseur (voir mécanisme).



I.3.d Cl_2

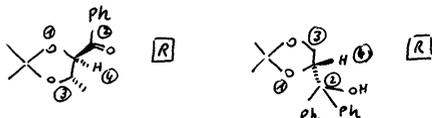


I.4.b B étant stéréochimiquement pur (au vu de la RMN), ne peut être obtenu qu'avec : ee = 92% = 96 - 4 donc rdt max = $0,96^3 = 0,885$, donc 88,5 %

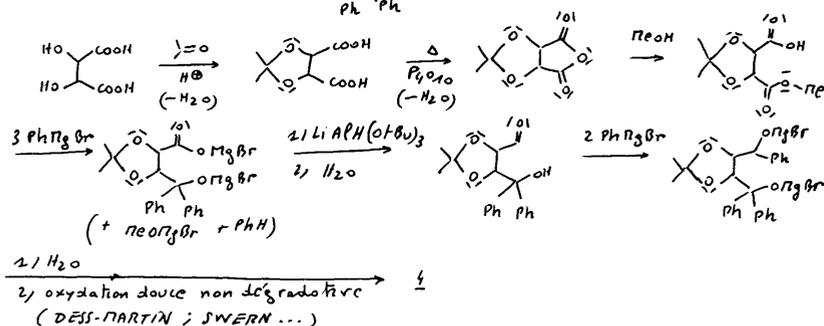
I.4.c ee de B = $x\text{B} - x\text{B}'$ avec $x\text{B}' = 1 - x\text{B}$ et $x\text{B} = 0,96^3 / (0,96^3 + 0,04^3)$, donc ee de B = $2x\text{B} - 1 = 0,9998$

I.4.d Les diastéréomères de B ne présentent pas de symétrie C3.

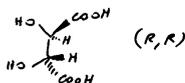
I.4.e

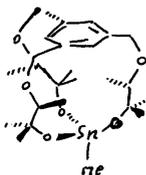


I.4.f.



il faut partir de


 I.5.a Le sel est : Et_3NH_3Cl

 I.5.b schéma du complexe obtenu \rightarrow

 $Me Sn(OEt)_3$

I.5.c Plusieurs explications plausibles sont acceptées : les 2 signaux en RMN- ^{119}Sn sont dus à deux Sn magnétiquement non équivalents, en raison d'atropoisométrie, ou de présence de plusieurs espèces dues à des agrégations (dimères, oligomères).

I.5.d L'élargissement des raies n'est pas dû au couplage Sn-H (valeurs trop élevées des J) mais dues soit à de l'atropoisométrie soit à l'existence de plusieurs espèces ;

I.5.e sensibilités relatives : $^{119}Sn : 0,9971^3 \times 8,58 / 2,6753^3 \times 99,98 = 4,44 \cdot 10^{-3}$
 $^{13}C : 0,6728^3 \times 1,10 / 2,6753^3 \times 99,98 = 1,45 \cdot 10^{-4}$

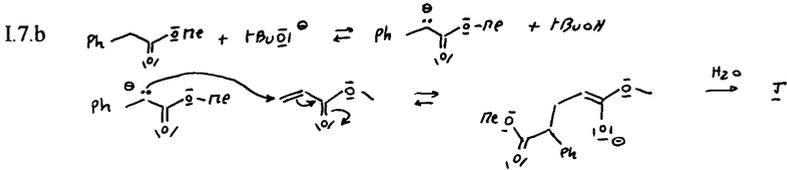
La RMN ^{119}Sn est donc plus sensible que la RMN- ^{13}C mais moins sensible que la RMN- 1H .

I.6.a On peut effectuer soit des mesures polarimétriques, soit des études RMN sur des dérivés diastéréomères (type esters de Mosher), soit des études par chromatographie sur support solide chiral (CLHP, GC).

I.6.b $2EtI + Zn \rightarrow Et_2Zn + I_2$ (ou par transmétallation, acceptée).

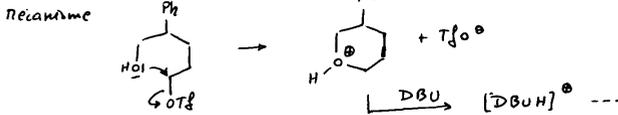
I.6.c ee de 10% : c'est très faible, la méthode est peu efficace par comparaison à des réactions énantiosélectives effectuées de nos jours.

I.7.a J = MeOCOCH(Ph)CH₂CH₂CO₂Me

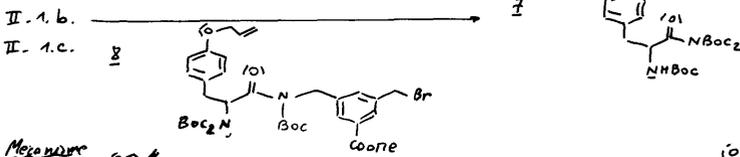


I.7.c K = HOCH₂CH(Ph)CH₂CH₂CH₂OH

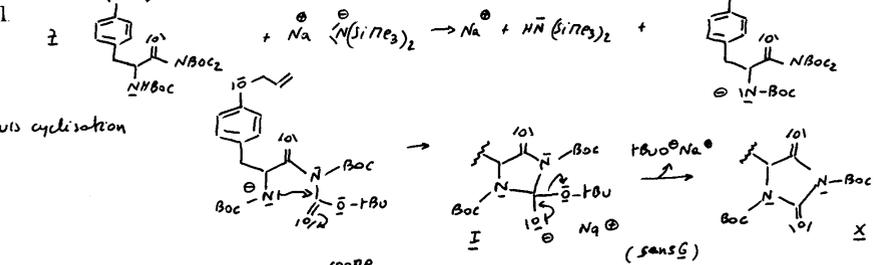
I.7.d Deux intermédiaires possibles : TfOCH₂CH(Ph)CH₂CH₂CH₂OH et HOCH₂CH(Ph)CH₂CH₂CH₂OTf



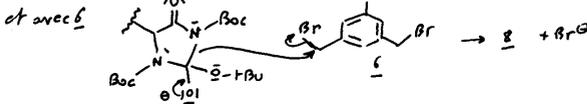
II.1.a DMAP est un catalyseur nucléophile



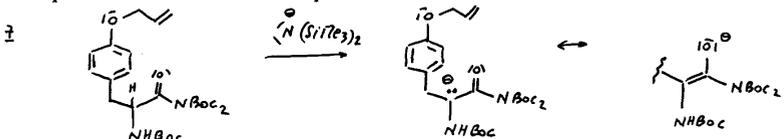
Mécanisme



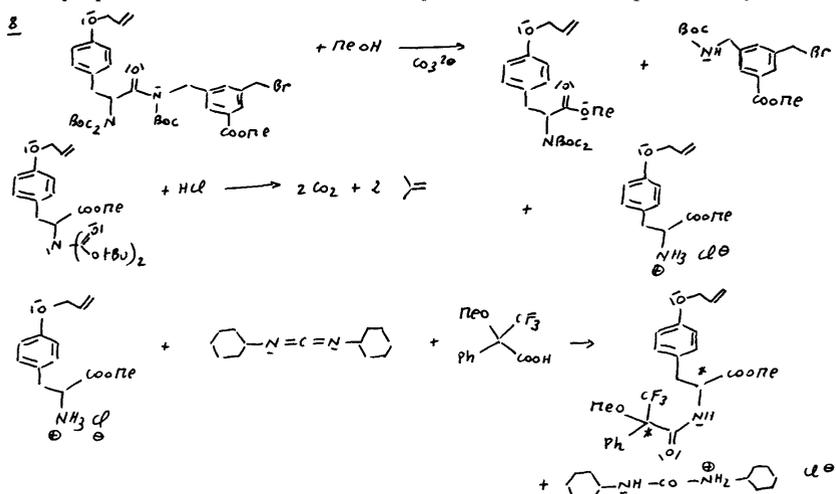
puis cyclisation



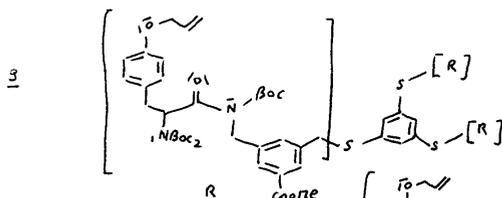
II.1.d Une déprotonation sur le C en α est possible :



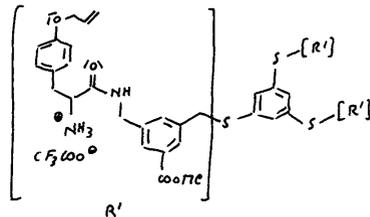
II.1.e Par la formation de deux diastéréomères différenciables par RMN-1H, on peut par intégration de signaux caractéristiques quantifier l'épimérisation. L'emploi d'un dérivé trifluorométhylé permet d'étudier les diastéréomères par RMN-19F, et de simplifier l'analyse.



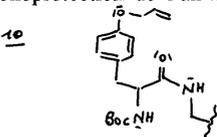
II.2.a



II.2.b

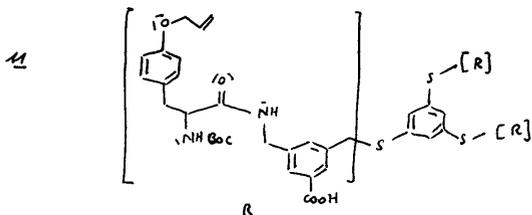


II.2.c La monoprotection de l'amine est réalisée et non celle de l'amide qui est moins nucléophile.

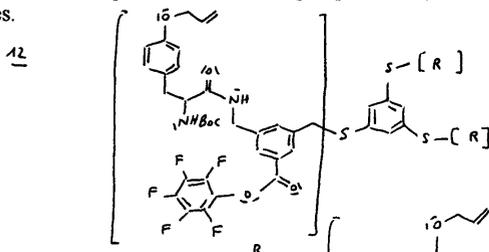


II.2.d Il aurait été impossible de déprotéger sélectivement l'amide et une seule fois l'amine.

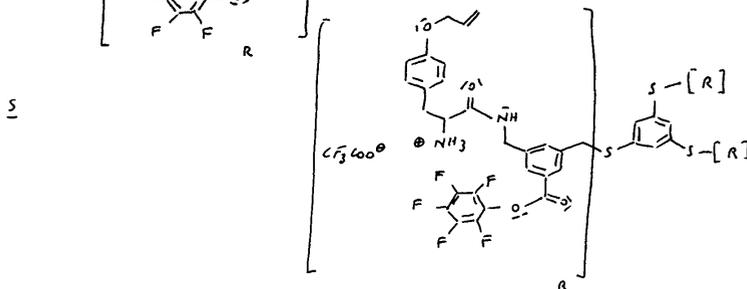
II.3.a



II.3.b Le diimide permet d'activer le groupe carboxyle du composé 11, dans des conditions douces.



II.3.c



II.3.d Pour réaliser la macrolactonisation, l'amine permet de passer de l'ammonium à l'amine puis au lactame.

II.3.e $C_6F_5O^-$ est un meilleur nucléofuge que MeO^- .

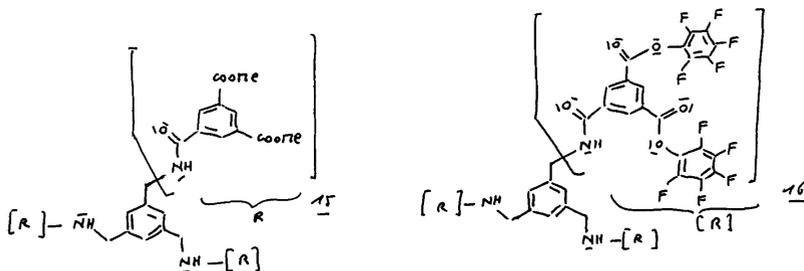
II.3.f -l'extraction à $AcOEt$ permet de récupérer C1 plus soluble dans ce solvant que dans THF

- lavage à HCl permet d'éliminer iPr_2NEt
- lavage à $NaHCO_3$ permet de rétablir un pH légèrement basique
- lavage à $NaCl$ saturé permet de sécher la phase organique

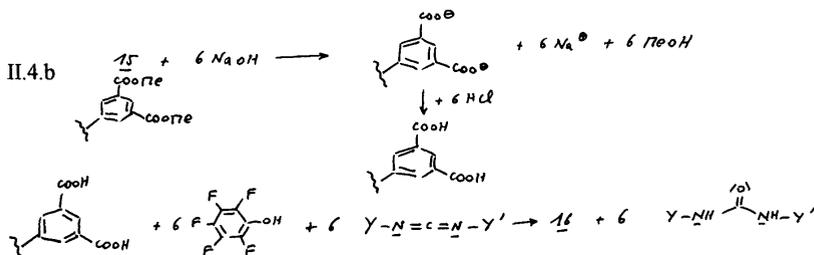
II.3 : $g\ rdt\ global = 0,97 \cdot 0,90 \cdot 0,82 \cdot 0,78 \cdot 0,86 \cdot 0,68 \cdot 0,78 = 0,2547$ donc 25%

Rdt moyen = $0,25^{1/7} = 0,8225$ donc 82 %

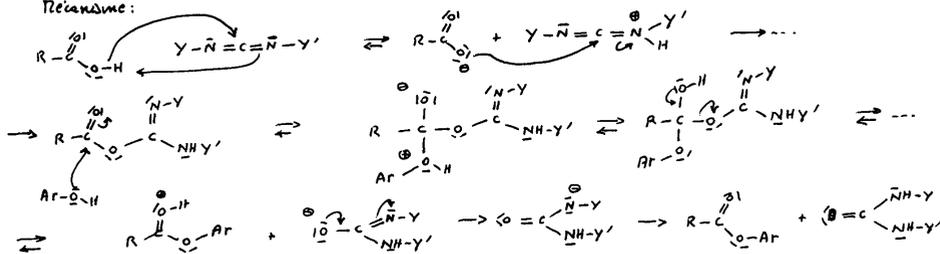
II.4.a



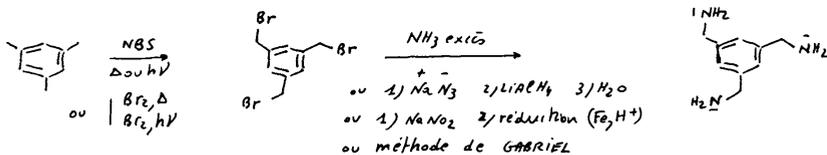
II.4.b



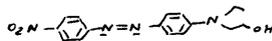
Mécanisme :



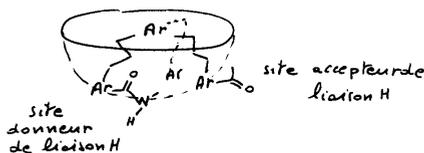
II.4.c



II.4.d La couleur rouge est due au groupement diazo :



II.4.e Il y a existence de sites donneurs (NH) et accepteurs (C=O) de liaisons H à la périphérie de la molécule.



II.5.a La couleur rouge persistante même après lavage est due à une complexation C-
/tripeptides

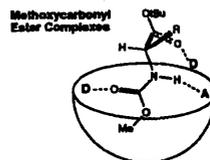
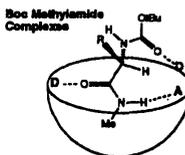
II.5.b $50000/96 = 521$ plaques

II.5.c La mesure de l'absorbance par UV-visible spectrométrie à $\lambda = \lambda_{max}$ permet d'accéder
à la constante d'équilibre K^0 où $K^0 = [\text{complexe}]/[C2][\text{tripeptide}]$

II.6.a Par spectrométrie IR ou toute autre technique explicitée.

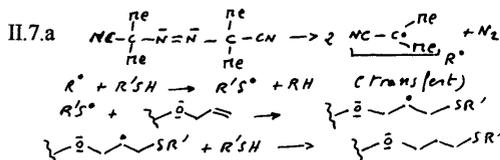
- Associations C_2 avec A: liaisons H

sur les : A = site accepteur (de C_2)
schémas: D = site donneur (de C_2)



II.6.b $K^0_L / K^0_D = \exp(-(\Delta G^0_L - \Delta G^0_D)/RT)$ et $ee = ([C1-A_L] - [C1-A_D]) / ([C1-A_L] + [C1-A_D]) = (K^0_L / K^0_D - 1) / (K^0_L / K^0_D + 1)$

série	K^0_L / K^0_D	ee	série	K^0_L / K^0_D	ee
MeO ₂ C-Ala-OtBu	66,0	97,01	NBoc-Ala-NHMe	39,8	95,10
MeO ₂ C-Val-OtBu	40,0	95,12	NBoc-Val-NHMe	128,9	98,46
MeO ₂ C-Ser-OtBu	47,1	95,84	NBoc-Ser-NHMe	47,3	95,86



Principe: addition radicalaire
du thiol sur groupement
"o-allyle".

II.7.b Par comparaison de l'analyse élémentaire par calcination de la silice avant puis après greffage.

II.7.c On avait trouvé $K^0_L \gg K^0_D$ ce qui est conforme ici par l'examen des temps de rétention
où temps de rétention de L \gg temps de rétention de D.

II.7.d $\alpha = 4,64 / 0,51 = 9,1 = K^0_L / K^0_D$ or on avait trouvé $K^0_L / K^0_D = 39,8$; il y a donc un
écart important selon la méthode utilisée.

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION CHIMIE

Composition de physique ♦ Session : 2002

Partie I : Eléments de magnéto-statique

I.1. Les propriétés du champ magnétique

- I 1 a) Expérience d'Oersted : une aiguille aimantée placée au voisinage d'un circuit électrique est déviée par le passage du courant ; 1819
- I 1 b) $d\mathbf{B} = \mu_0 I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u} / 4\pi r^2$; Biot et Savart ; 1820 ; $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$
- I 1 c) Le flux de \mathbf{B} à travers une surface fermée est nul ; A travers une surface ouverte il est dépend que du contour sur lequel elle s'appuie ; Le long d'un tube de champ il est conservé ; Les lignes de champ se referment.
- I 1 d) \mathbf{B} est perpendiculaire à un plan de symétrie et appartient au plan d'antisymétrie ; Les composantes du champ ne sont alors pas fonction de z ou θ
- I 1 e) Le théorème d'Ampère, 1820, est plus facile d'emploi que Biot et Savart, mais nécessite des symétries et des invariances suffisantes ; Le signe des courants est donné par la règle du tire-bouchon après avoir orienté arbitrairement le contour.
- I 1 f) Flux, oui ; Biot et Savart et th. d'Ampère en ARQS (jusqu'à ≈ 10 MHz)

I 2. Le fil rectiligne

- I 2 a) $\mathbf{B} = B(r)\mathbf{u}_\theta$; $B_e = \mu_0 I / 2\pi r$ et $B_r = \mu_0 I r / 2\pi a^2$; continuité de \mathbf{B}_{Tang} car $\mathbf{j}_s = \mathbf{0}$
- I 2 b) $B = 2 \cdot 10^{-5}$ T ; même valeur que la composante horizontale du champ terrestre
- I 2 c) Distance $r < 8,3$ m

I 3. La spire circulaire

- I 3 a) \mathbf{B} sur l'axe ; $\mathbf{B} = B(0)\sin^3\alpha\mathbf{u}_z$; expression de $B_0(z)$ en remplaçant $\sin\alpha$
- I 3 b) $B_r(r, z) \approx -\frac{r}{2} \frac{dB_0(z)}{dz}$; $B_r > 0$ car $|\mathbf{B}| \downarrow$; Lignes de champ refermées sur la spire.
- I 3 c) Distance $d = a$; bobines de Helmholtz ; application au champ uniforme

I 4. Le solénoïde

- I 4 a) $\mathbf{B} = \mu_0 n I / 2 (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\mathbf{u}_z$
- I 4 b) $B_c = \mu_0 n I \cos\alpha$ avec $\cos\alpha = L / 2\sqrt{a^2 + L^2/4}$; $B_\infty = \mu_0 n I$; $L/2a \approx 7$
- I 4 c) \mathbf{B}_i et \mathbf{B}_e uniformes en appliquant le th. D'Ampère sur des petits contours orientés ; $\mathbf{B}_i = \mu_0 n I \mathbf{u}_z$ et $\mathbf{B}_e = \mathbf{0}$; \mathbf{B}_{Tang} discontinu car $\mathbf{j}_s = n I \mathbf{u}_\theta$

I 5. Le dipôle magnétique

- I 5 a) Approximation dipolaire $r \gg a$; moment magnétique $\mathbf{M} = I\mathbf{S}$
- I 5 b) $B_{\text{spire}}/B_{\text{dipôle}} = \cos^3\alpha$; $\alpha_m = 4,7^\circ$
- I 5 c) $r = r_0 \sin^2\theta$; lignes orientées comme pour un dipôle électrique ; B diminue de $\theta = 0$ à $\theta = \pi/2$; en O, le modèle ne s'applique plus.
- I 5 d) Magnétisme de la matière ; $\mu_B = e\hbar/2m = 0,92 \cdot 10^{-23} \text{ A}\cdot\text{m}^2$

Partie II : Le moteur synchrone

II.1. Production d'un champ tournant

- II 1 a) $k = \frac{\mu_0 N}{L} \left(\frac{L+l}{\sqrt{(L+l)^2 + a^2}} - \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}} \right)$; $k = 1,62 \cdot 10^{-3} \text{ T} \cdot \text{A}^{-1}$; $B = 6,48 \cdot 10^{-3} \text{ T}$
- II 1 b) C déphase i' sur i ; $\mathbf{B}(O) = k(i'(t)\mathbf{u}_x + i(t)\mathbf{u}_y)$ est un champ tournant
- II 1 c) $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega_0^2}}$ et $\tan\varphi = \frac{L\omega_0}{R}$
 $I' = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega_0 - 1/C\omega_0)^2}}$ et $\tan\varphi' = \frac{L\omega_0 - 1/C\omega_0}{R}$
- II 1 d) $L = R/\omega_0$ et $C = 1/2R\omega_0$; $I = I' = \sqrt{2}U/2R$; $\varphi = -\varphi' = \pi/4$
- II 1 e) $L = 80 \text{ mH}$; $C = 63 \text{ }\mu\text{F}$; $2L' < L < 4L'$ où $L' = 32,5 \text{ mH}$; $I = I' = 3,1 \text{ A}$ pour $U = 110 \text{ V}$
- II 1 f) $B_0 = kU/R$; $\mathbf{B}(O) = B_0(\cos(\omega_0 t + \pi/4)\mathbf{u}_x + \sin(\omega_0 t + \pi/4)\mathbf{u}_y)$;
 $f_0 = 50 \text{ Hz}$; $B_0 = 7,1 \cdot 10^{-3} \text{ T}$
- II 1 g) 3 bobines d'axes à 120° et de courants déphasés de $2\pi/3 \dots$

II 2. Principe d'un moteur synchrone

- II 2 a) $\Gamma(t) = MB_0 \sin((\omega_0 - \omega)t + \alpha)\mathbf{u}_z$
 $\langle \Gamma \rangle = 0$ si $\omega \neq \omega_0$; $\langle \Gamma \rangle = MB_0 \sin\alpha \mathbf{u}_z$ si $\omega = \omega_0$; L'aimant et le champ tournent à la même vitesse angulaire d'où le nom de moteur synchrone.
- II 2 b) Moteur si $\omega = \omega_0$ et $0 < \alpha < \pi$; \mathbf{M} suit \mathbf{B} ; $P_m = MB_0\omega_0$; La source d'alimentation $u(t)$ des bobines qui créent le champ tournant.
- II 2 c) Graphe $\Gamma(\alpha)$: une arche de sinuséide pour $0 < \alpha < \pi$; $\Gamma = \Gamma_u < \Gamma_m$ il existe 2 valeurs de α ; Le domaine de stabilité: $0 < \alpha < \pi/2$
- II 2 d) Non puisqu'il faut $\omega = \omega_0$ dès le départ

Partie III : Actions sur les charges électriques

III.1. Particule libre dans un champ uniforme

- III 1 a) Poids négligeable; $m\mathbf{d}\mathbf{v}/dt = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$
- III 1 b) En multipliant la RFD par \mathbf{B} puis par \mathbf{v} , on a $v_z = 0$ et $|\mathbf{v}| = v_0$; La trajectoire est un cercle décrit à la période $T = 2\pi m/|q|B$ et de rayon $R = mv_0/|q|B$
- III 1 c) \mathbf{B} incurve la trajectoire; mais la force de Lorentz ne travaille pas
- III 1 d) $v_z = v_{0z} = \text{cste}$ d'où une trajectoire en hélice
- III 1 e) 1: $v_0 = \sqrt{2e\Delta V/m} = 59,3 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $R = 6,7 \text{ cm}$; $T = 7 \text{ ns}$
 2: $v_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $R \approx 11 \text{ }\mu\text{m} \gg d$; $T \approx 4 \cdot 10^{-11} \text{ s} \gg \tau$; pas de sens
- III 1 f) $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \omega_c r \dot{\theta}$; $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -\omega_c \dot{r}$; $\ddot{z} = 0$
- III 1 g) $\dot{\omega}' = \omega_c \varepsilon/R$
- III 1 h) $\ddot{\varepsilon} + \omega_c^2 \varepsilon = 0$; stabilité radiale et orthoradiale
- III 1 i) Dérive selon Oz , donc pas de stabilité axiale; champ \mathbf{B} non uniforme

III 2. L'effet Zeeman

- III 2 a) $\mathbf{r} \wedge \mathbf{f} = \mathbf{0}$ d'où $\sigma_0 = \text{cste}$; plan initial de \mathbf{r}_0 et \mathbf{v}_0 ;
 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \cos \omega t + (\mathbf{v}_0/\omega) \sin \omega t$ avec $\omega = \sqrt{k/m}$; trajectoire elliptique
- III 2 b) Projection en 3 mouvements sinusoïdaux rectilignes, d'où la décomposition
- III 2 c) $\mathbf{B} // Oz$, $m \ddot{z} = -kz$, le mouvement de l'électron suivant Oz est inchangé
- III 2 d) Dans l'équation du mouvement, $\ddot{\mathbf{r}} = \omega_1 r \mathbf{u}_0$; $\omega_1^2 = \omega^2 + \omega_1 eB/m$
- III 2 e) $\omega \approx 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$; $eB/m \approx 2.10^{11} \text{ rad.s}^{-1} \ll \omega$; alors $\Delta v_1 \approx eB/4\pi m$
- III 2 f) $\Delta v_2 \approx -eB/4\pi m = -\Delta v_1$
- III 2 g) // à \mathbf{B} , deux polarisations circulaires de fréquences $\nu \pm \Delta\nu$
 \perp à \mathbf{B} , trois polarisations rectilignes de fréquences ν et $\nu \pm \Delta\nu$
- III 2 h) $\Delta\lambda = 4.10^{-3} \text{ nm}$; résolution $\mathfrak{R} \geq \lambda/\Delta\lambda \approx 10^5$

Partie IV : Action sur les conducteurs**IV.1. Effet Hall dans un ruban conducteur**

- IV 1 a) Apparition d'un champ électrique de Hall (dont la force compense celle de la force magnétique de Lorentz), d'où une différence de potentiel ; V_h est du signe de q
- IV 1 b) $\mathbf{E}_h = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = v\mathbf{B}_y$; $V_h = R_h IB/b$
- IV 1 c) $n = \rho N/M = 8,5.10^{28} \text{ m}^{-3}$; $R_h = -0,74.10^{-10} \text{ m}^3.C^{-1}$; $V_h = -0,7 \mu\text{V}$; effet faible
- IV 1 d) Sonde à effet Hall ; semi-conducteur ; n plus faible $\approx 10^{21} \text{ m}^{-3}$

IV 2. Anisotropie et loi d'Ohm

- IV 2 a) $m\mathbf{d}\mathbf{v}/dt \approx \mathbf{0} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} - m\mathbf{v}/\tau$;
 $\Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma + R_h \mathbf{B} \wedge \mathbf{j}$ avec $\sigma = nq^2\tau/m$ et $R_h = 1/nq$; effets du signe de q

- IV 2 b) $\mathbf{j} = [\sigma]\mathbf{E}$ avec $[\sigma] = \sigma \begin{bmatrix} a & b0 \\ -b\alpha0 & 0 & 01 \end{bmatrix}$ où $a = \frac{1}{1+(\omega_c\tau)^2}$ et $b = \frac{\omega_c\tau}{1+(\omega_c\tau)^2}$

- IV 2 c) Relation linéaire ; \mathbf{j} et \mathbf{E} non colinéaires ; $\mathbf{B} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ isotropie
 L'effet ne s'aligne pas sur la cause : lié au terme non diagonal $\omega_c\tau$

IV 3. Magnétorésistance

- IV 3 a) Construction graphique ; $\tan \theta_h = -\sigma R_h B = -\omega_c\tau$
- IV 3 b) $r = r_0 \exp\left(-\frac{\theta - \theta_0}{\sigma R_h B}\right)$; spirales logarithmiques
- IV 3 c) $j_r = \frac{j_0}{1+(\sigma R_h B)^2}$; $R = R_0(1+(\sigma R_h B)^2)$; $\delta = \frac{R - R_0}{R_0} = (\sigma R_h B)^2$; augmentation de la résistance car les électrons parcourent une distance plus grande que $b - a$
- IV 3 d) Cu : $\delta \approx 2.10^{-5}$; InAs : $\delta \approx 0,5$; plus notable avec un semi-conducteur
- IV 3 e) $R_0 = \frac{lnb/a}{2\pi\sigma h}$

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION CHIMIE

Problème de chimie ♦ Session : 2002

Premier problème

I DÉCOMPTÉ ÉLECTRONIQUE ET DEGRÉ D'OXYDATION DANS LES COMPLEXES MÉTALLIQUES

I.1 Calcul de degré d'oxydation

I.1.1

Dans un complexe de métal de transition, les ligands forment avec le cation métallique deux types de liaisons : M-X : la liaison est plutôt covalente

M-L : la liaison est une liaison dative du ligand vers le métal.

Dans le modèle covalent de décompte électronique, chaque ligand X apporte un électron, chaque ligand L en apporte deux et le centre métallique est neutre. Le degré d'oxydation est alors le nombre de ligands X modulé par la charge totale du complexe. Dans le modèle ionique, les deux électrons de la liaison M-X sont affectés au ligand X et la charge du métal augmente d'une unité. Pour le ligand L rien ne change par rapport au cas covalent. Dans ce cas, le degré d'oxydation correspond à la charge du centre métallique modulée par la charge totale du complexe.

Modèle covalent : $[V(CO)_6]^-$: CO Ligand L, V groupe 5, DO = $0.X + (-1) = -I$

$[Cu(H_2O)_6]^{2+}$: H_2O Ligand L, Cu groupe 11, DO = $0.X + (+2) = +II$

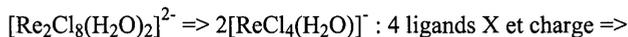
$[Re_2Cl_8(H_2O)_2]^{2-} \Rightarrow 2[ReCl_4(H_2O)]^-$: H_2O Ligand L, Cl Ligand X, Re groupe 7, DO = $4 + (-1) = +III$

$VOCl_3$: Cl Ligand X, O Ligand X2, V groupe 5, DO = $5.X = +V$

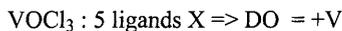
Modèle ionique : $[V(CO)_6]^-$: Pas de ligand X donc V neutre mais charge globale DO = -I

$[Cu(H_2O)_6]^{2+}$: Pas de ligand X donc le degré d'oxydation est la charge

du complexe. DO = +II



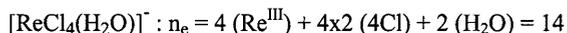
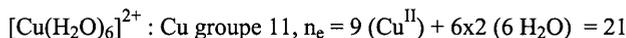
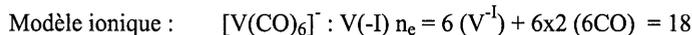
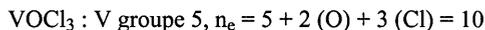
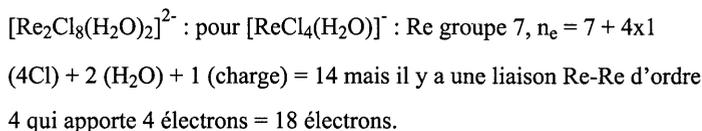
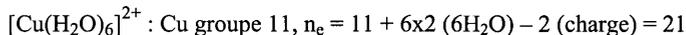
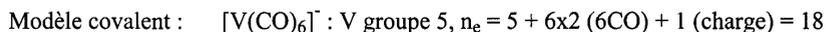
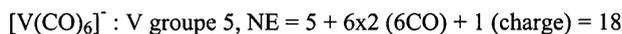
Re(+III)



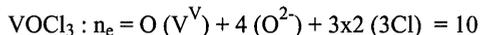
I.1.2

La détermination du degré d'oxydation permet de connaître le nombre d'électrons plutôt centrés autour du métal. On peut alors mieux appréhender la réactivité du complexe et discuter les propriétés rédox.

I.1.3



Avec une liaison Re-Re d'ordre 4 on arrive à 18 électrons.



I.2 Le ligand borohydrure

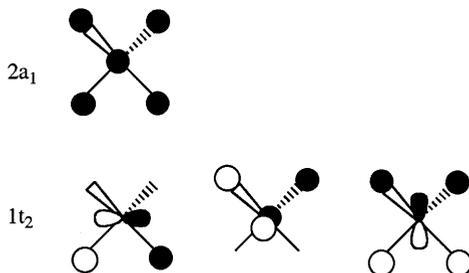
I.2.1

$\text{C} = 1s^2 2s^2 2p^2$ $\text{H} = 1s^1$ on a 8 électrons de valence à placer sur le diagramme.

Configuration électronique fondamentale : $(2a_1)^2 (1t_2)^2$

I.2.2

Le bore est moins électronégatif que le carbone donc ses OA de valence sont plus hautes en énergie. Par rapport au niveau des orbitales du fragment H_4 , le bore sera situé plus haut. Par conséquent les OM liantes de BH_4^- seront développées principalement sur les hydrogènes.



I.2.3

La structure de Lewis pour BH_4^- contient 4 liaisons simples B-H avec une charge formelle négative sur le bore ce qui est en accord avec le diagramme d'OM de BH_4^- qui prédit 4 OM liantes occupées soit 4 liaisons. Il y a néanmoins désaccord en ce qui concerne la répartition de la charge. Dans le cadre de la théorie de Lewis, la charge est portée par le bore alors qu'avec la théorie des OM, les orbitales liantes sont développées sur les hydrogènes qui portent donc une charge négative partielle.

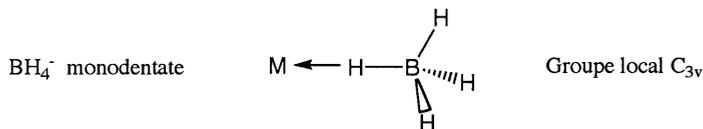
I.2.4

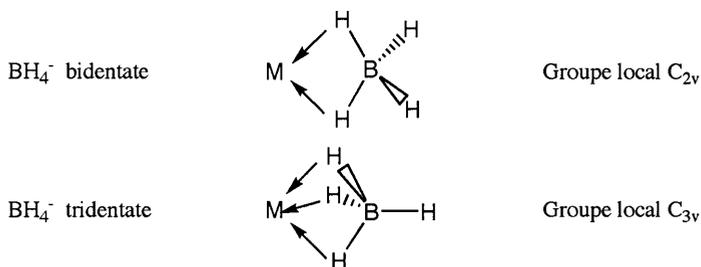
C'est le dernier niveau occupé ($1t_1$)⁶ qui doit être responsable des principales propriétés de ligand. Ces OM sont fortement localisées sur les H ce qui favorise l'interaction du ligand BH_4^- avec un métal.

I.2.5

Les OM de valence de BH_4^- sont plus hautes en énergie que celles de CH_4 et plus développées sur les H donc BH_4^- est un meilleur ligand.

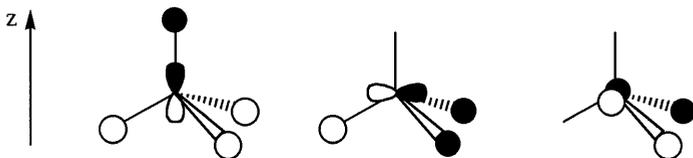
I.2.6





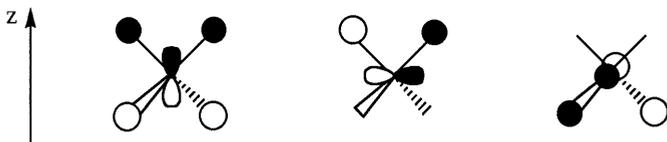
I.2.7

Si BH_4^- est monodentate, on peut représenter les 3 OM du bloc $1t_1$:



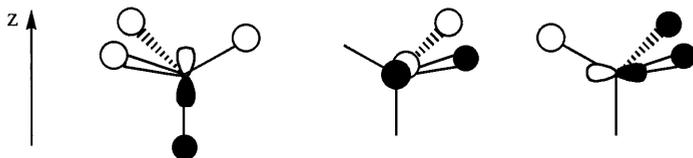
On a une seule orbitale susceptible d'interagir le long de l'axe z avec le métal, c'est celle de gauche qui donne 2 électrons.

Si BH_4^- est bidentate, on peut représenter les 3 OM en faisant un changement d'axe :



Les deux premières (à gauche) peuvent interagir le long de l'axe z avec le métal : donneur de 4 électrons.

Si BH_4^- est tridentate, on représente alors le bloc t_1 :



Les trois OM peuvent interagir avec le métal : donneur de 6 électrons.

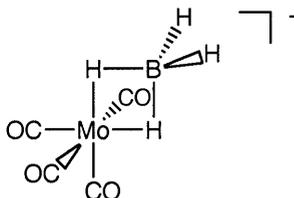
I.2.8

$(\text{CO})_4\text{Mo}(\text{BH}_4)^-$: Mo groupe 6

$$4 \times 2 + 6 + x = 18 \text{ soit } x = 4$$

Le ligand BH_4^- est donc donneur de 4 électrons donc bidentate.

Géométrie possible :



I.3 Retour sur les décomptes électroniques

I.3.1

Les décomptes électroniques supposent qu'un ligand donné apporte toujours le même nombre d'électrons. Or l'étude de BH_4^- a montré que ce nombre peut varier selon la géométrie de coordination. A priori cette géométrie n'est pas connue, cela pose donc un problème pour le décompte. Même lorsque la géométrie n'est pas un problème, on peut avoir certaines incertitudes. Ainsi, le ligand Cl peut donner de 1 à 5 électrons selon la participation des paires libres à la liaison.

I.3.2

Il faudrait au moins voir le nombre d'électrons de chaque ligand susceptibles d'interagir par symétrie ou alors bâtir l'intégralité du diagramme d'interaction et identifier les OM non liantes.

I.3.3

Le décompte ne présente aucune ambiguïté pour les ligands ne pouvant apporter que 1 ou 2 électrons par interaction σ_σ . Exemple : CO, NH_3 , H^+ .

I.3.4

La règle des 18 électrons prédit qu'un complexe octaédrique est particulièrement stable si le métal est entouré de 18 électrons. Elle est valable en géométrie octaédrique et lorsque les ligands engendrent un champ fort (ligand σ donneur et π accepteur). Elle est particulièrement efficace en chimie organométallique.

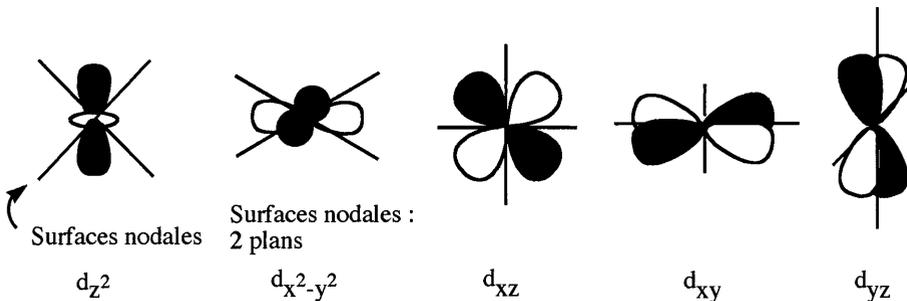
- Respecte la règle : $[\text{V}(\text{CO})_6]^-$

- Moins de 18 électrons : VOCl_3 10 électrons mais l'insaturation peut être stabilisée par le caractère π donneur des ligands O^{2-} et Cl^- .
- Plus de 18 électrons : $[\text{Cu}(\text{H}_2\text{O})_6]^{2+}$: 21 électrons. Une distortion Jahn-Teller éloigne deux ligands ce qui permet de se rapprocher du nombre de 18 électrons.

II. ÉTUDE DE LA STRUCTURE ÉLECTRONIQUE DE COMPOSÉS BIMÉTALLIQUES

II.1 Orbitales du fragment ML_5 .

II.1.1



II.1.2

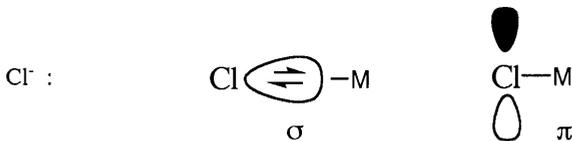
Ligand σ donneur :

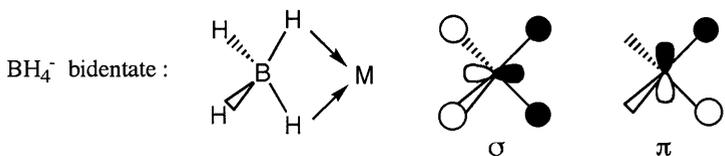
H^- : OA 1s

NH_3 : paire libre

II.1.3

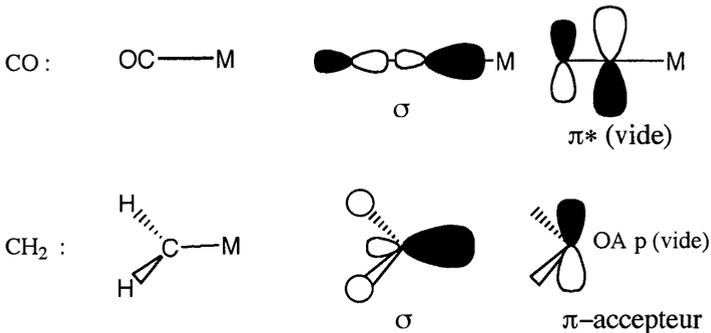
Ligand σ , π donneur :





II.1.4

Ligand σ donneur π accepteur :

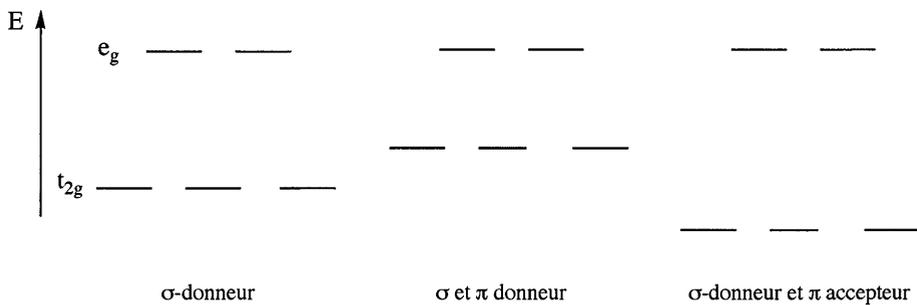


II.1.5

BH_4^- est un ligand σ et π donneur

II.1.6

Diagramme ML_6 octaédrique :



II.1.7

Les orbitales e_g sont en interaction antiliante avec les ligands. Pour ce qui est des orbitales t_{2g} on a trois situations : purement σ -donneur : non-liant

π -donneur : interaction antiliante avec les ligands

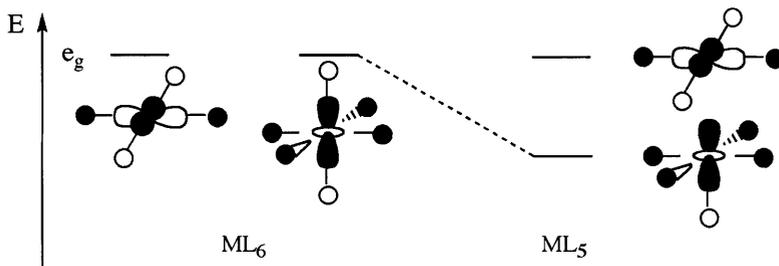
π -accepteur : interaction liante avec les ligands

II.1.8

II.1.8.a

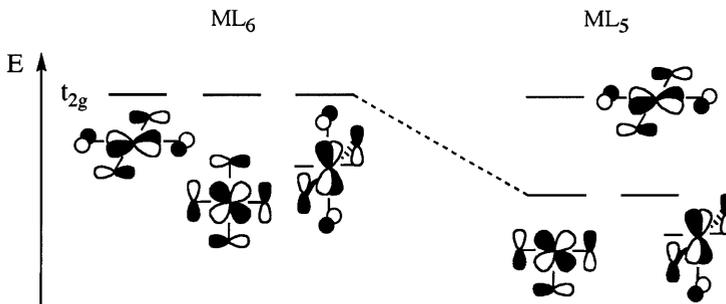
Lorsque l'on passe de ML_6 à ML_5 , on supprime une interaction antiliante le long de l'axe z.

L'OM fortement développée sur d_{z^2} est alors stabilisée :



II.1.8.b

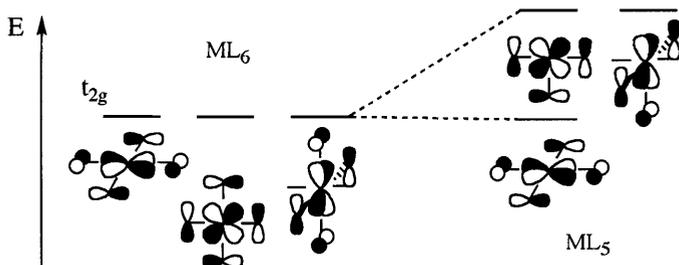
Dans le cas d'un ligand π -donneur, on a des interactions antiliantes que l'on supprime d'où une stabilisation des OM développées sur d_{xz} et d_{yz} :



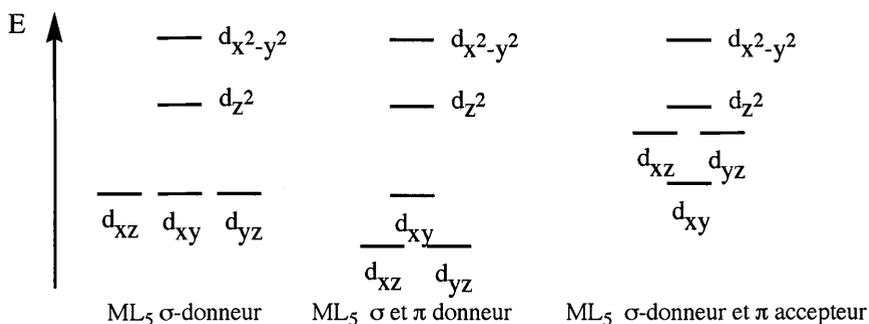
II.1.8.c

Dans le cas d'un ligand π -accepteur, on a des interactions liantes que l'on supprime lorsque

l'on enlève un ligand. Les OM développées sur d_{xz} et d_{yz} sont alors moins stabilisées :



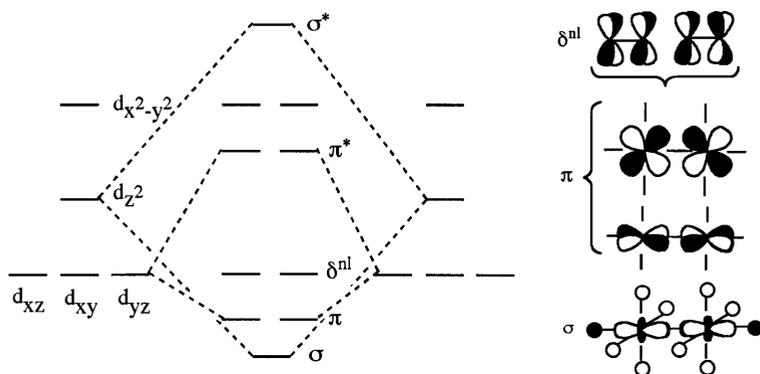
II.1.9



II.2 Complexe bimétallique M_2L_{10}

II.2.1

Le recouvrement entre les deux fragments ML_5 se fait le long de l'axe z. Par conséquent les OM essentiellement développées sur d_{z^2} donneront un recouvrement σ fort. Ensuite les OM essentiellement développées sur d_{xz} et d_{yz} conduiront à des recouvrements π intermédiaires. Enfin pour $d_{x^2-y^2}$ et d_{xy} on a des recouvrements δ que l'on peut négliger.



Selon la nature des ligands les positions relatives de σ , π et δ peuvent varier. Dans le cas π donneur, les deux orbitales d_{xz} et d_{yz} sont plus basses et alors les OM π de M_2L_{10} peuvent passer en-dessous de σ_σ .

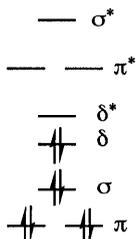
Dans le cas de π accepteur, elles sont au-dessus de d_{xy} et les niveaux non liants δ peuvent rester en-dessous des orbitales π .

II.2.2.a

Les ligands Cl^- et H_2O sont tous les deux à champ faible.

II.2.2.b

Nous avons vu que le complexe $[Re_2Cl_8(H_2O)_2]^{2-}$ correspond à un $Re^{III} d^4$. Il faut placer 8 électrons sur le diagramme. Comme le spin total est nul nous sommes amenés à considérer que les niveaux δ ne sont pas complètement liants. $n_1 = 4$: on a une liaison Re-Re quadruple.

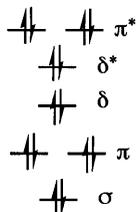


II.2.2.c

Les liaisons M-M sont rarement aussi courtes que la liaison quadruple Re-Re.

II.2.3.a

Lorsque l'on passe à $\text{Re}_2(\text{CO})_{10}$ on a tout d'abord un complexe de $\text{Re}^0 d^7$. Il y a donc 14 électrons à placer. $n_1 = 1/2 (8-6) = 1$: on a une liaison Re-Re simple.



II.2.3.b

La liaison Re-Re est simple

II.2.3.c

Lorsque l'on passe de $[\text{Re}_2\text{Cl}_8(\text{H}_2\text{O})_2]^{2-}$ à $\text{Re}_2(\text{CO})_{10}$ on passe d'une liaison quadruple à une liaison simple. On a donc une liaison plus longue pour Re-Re dans $\text{Re}_2(\text{CO})_{10}$.

III. ÉTUDE DE SYSTÈMES PÉRIODIQUES

III.1. Préliminaires

III.1.1

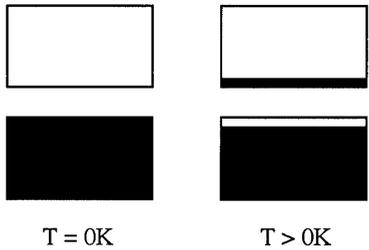
Sous l'effet d'un champ électrique \vec{E} , certains électrons sont accélérés et occupent des états permis se trouvant juste au-dessus du dernier niveau occupé à $T = 0 \text{ K}$ et $\vec{E} = \vec{0}$.

III.1.2

La résistivité augmente lorsque la température augmente car plus la température augmente, plus le réseau cristallin vibre et les phonons générés ralentissent le mouvement des électrons.

III.1.3

Pour qu'il y ait de la conduction, il faut faire intervenir la bande d'énergie permise suivante :



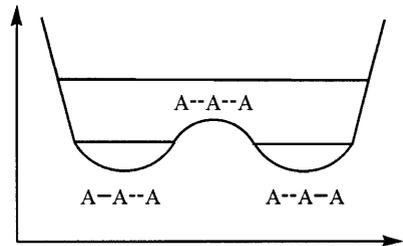
A $T = 0\text{ K}$, le système est isolant. Plus la température augmente, plus l'occupation partielle de la bande suivante augmente, plus la conduction peut avoir lieu. On a donc ρ qui décroît lorsque la température augmente. On a des semi-conducteurs.

III.1.4

La notion de résistivité ne peut être comprise que si l'on envisage l'existence de défauts. Ces derniers en général s'opposent à la conduction électrique et introduisent un terme dissipatif.

III.1.5

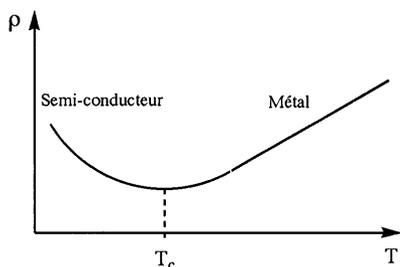
Lorsqu'il y a dimérisation, la distorsion peut se faire dans deux directions, on a donc une courbe d'énergie potentielle du réseau présentant deux minima équivalents.



Plus la température augmente, plus le réseau vibre et alors on se situe au-dessus de la barrière : toutes les distances sont équivalentes. On ne peut piéger une structure distordue qu'à basse température.

III.1.6

Pour une température inférieure à T_c on a une structure localisée donc un comportement de type semi-conducteur (ou isolant) donc ρ diminue lorsque T augmente. Pour $T > T_c$ on a une structure délocalisée donc un comportement métallique : ρ augmente lorsque T augmente. On a la courbe suivante :



On parle d'anomalie car au changement de pente il y a changement de propriétés.

III.1.7 et III.1.8

La chaîne H_n possède une bande s à moitié remplie donc il s'agit d'un métal. Il est susceptible de subir une dimérisation.

La chaîne $(H^{+1/2})_n$ possède une bande s au quart remplie donc il a un comportement métallique. Il est susceptible de subir une tétramérisation.

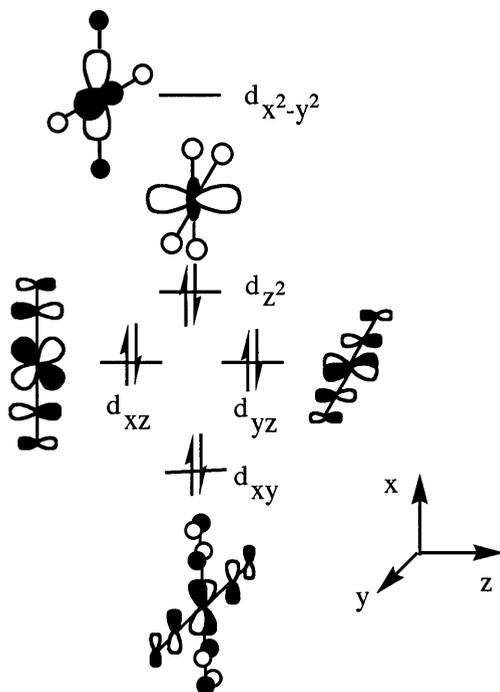
III.2 Application à l'étude de la chaîne KCP

III.2.1

$Pt(CN)_4^{2-}$ est un complexe plan carré de symétrie D_{4h} . Les ligands CN^- sont des π accepteurs qui stabilisent les OA d_{xy} , d_{yz} , d_{xz} . L'OA d_{xy} est plus stabilisée que les deux autres car elle permet aux quatre ligands CN^- d'intervenir.

Pour les OA $d_{x^2-y^2}$ et d_{z^2} on a les OM classiques. d_{z^2} est occupée et quasi non liante.

$Pt(CN)_4^{2-}$ est un complexe de Pt^{II} avec 8 électrons d d'où le remplissage et le diagramme suivant :



III.2.2

Dans $\text{Pt}(\text{CN})_4^{2-}$ on a un complexe de type $\text{Pt}^{\text{II}}(4\text{L}^-)$. Le platine est au degré d'oxydation +II. Pour le KCP, à cause du brome le complexe a pour charge 1,7 soit un degré d'oxydation $-x+4 = 1,7$ soit $x = 2,3$ pour Pt.

III.2.3

Les interactions de type σ le long de la chaîne que peuvent développer les orbitales d_{z^2} sont à l'origine de la formation de la chaîne. Le fort recouvrement des OA d_{z^2} va conduire à une bande large.

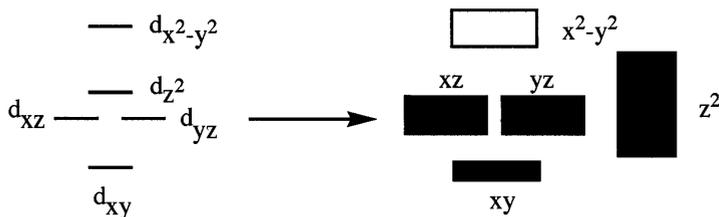
III.2.4

Le recouvrement entre les OA d_{xy} est de type δ et donnera lieu à une bande très peu dispersée

et totalement occupée.

Les orbitales d_{xz} et d_{yz} présentent un recouvrement de type π et donneront lieu à deux bandes de dispersion relativement faibles et totalement occupées.

Enfin l'orbitale d_{z^2} donnera une bande avec une grande dispersion. On a le diagramme de bandes suivant :



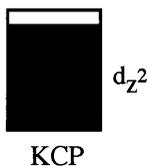
Si Pt est au degré d'oxydation +II alors d_{z^2} est occupée et la bande z^2 est pleine.

III.2.5

Le niveau de Fermi se trouve au sommet de la bande d_{z^2} donc finalement la considération de seulement cette bande suffit à comprendre les propriétés du matériau. On se ramène à une chaîne dont on étudie les propriétés grâce à une OA par maille donc identique à H_n .

III.2.6

Dans le KCP, le degré d'oxydation du Pt est 2,3. Tout se passe comme si on avait la moyenne de 1,7 électrons par OA d_{z^2} . La bande d_{z^2} n'est donc occupée qu'à 85% (1,7/2).



Le dernier niveau occupé se situe dans la bande d_{z^2} un peu en dessous du sommet. Pour le composé non dopé nous avons vu que la bande d_{z^2} est pleine.

III.2.7

Le composé non dopé est un semi-conducteur car la bande d_{z^2} est pleine et la bande $d_{x^2-y^2}$ est vide et proche en énergie.

Pour le composé dopé, le niveau de Fermi se situe dans la bande d_{z^2} qui n'est pas totalement remplie, on a donc un comportement métallique.

III.2.8

Pour les deux composés les bandes d_{z^2} sont occupées quasiment jusqu'en haut où les niveaux sont fortement antiliants. Lorsque l'on passe de $K_2Pt(CN)_4$ à KCP on vide une partie de ces niveaux antiliants donc la distance Pt-Pt diminue. Donc pour $K_2Pt(CN)_4$ on a 347 pm et pour KCP on a 287 pm.

III.2.9

Pour KCP, la bande d_{z^2} est occupée aux 17/20 donc le KCP métallique peut subir une 20-mérisation conduisant à un état isolant à basse température.

III.2.10

La bande z^2 responsable des propriétés de conduction présente un recouvrement σ le long de la chaîne donc insensible à la conformation.

III.3 Etude du composé quasi 1D $NbSe_3$

III.3.1

Le comportement métallique est associé à une augmentation de ρ lorsque la température augmente donc 3 domaines :

$$T < 50$$

$$60 < T < 120$$

$$T > 150$$

III.3.2

On néglige les interactions entre chaînes de type van der Waals. Une connaissance des distances Se-Se interchaînes par diffraction des rayons X pourrait permettre d'estimer leur importance.

III.3.3

Pour les chaînes de type II on a comme motif NbSe_3 avec Se^{2-} soit Nb^{6+} : DO = VI.

Pour les chaînes I et III on a NbSe_3 avec Se^{2-} et Se_2^{2-} soit Nb^{4+} : DO = IV.

III.3.4

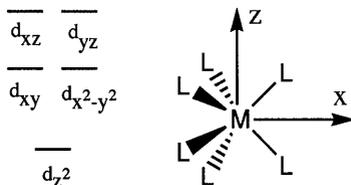
Le Nb a pour configuration de valence $[\text{Kr}]3d^34s^2$ donc on ne peut pas avoir Nb au degré d'oxydation +VI. La chaîne II présente un déficit électronique.

III.3.5

Chacune des chaînes I et III va transférer un demi électron par site pour faire que dans la chaîne II le Nb soit au degré d'oxydation +V. Il reste alors un demi électron par site Nb sur les chaînes I et III et 0 électron par Nb pour la chaîne II.

III.3.6

Dans cette géométrie avec ce choix d'axes, l'OA d_{z^2} sera quasiment non liante. Les OA les plus perturbées sont les OA d_{xz} et d_{yz} . On a le diagramme ci-contre.

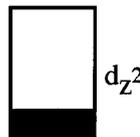


III.3.7

Etant donné le taux d'occupation inférieur à 1, et compte tenu du fort recouvrement entre les orbitales d_{z^2} le long de la chaîne, seule l'orbitale d_{z^2} va jouer un rôle important.

III.3.8

Pour les trois chaînes on ne considère que la bande d_{z^2} . Cette bande est vide pour la chaîne II et 1/4 remplie pour les chaînes I et III.



III.3.9.a

Pour les chaînes I et III on peut avoir distorsion car les bandes sont partiellement occupées. On aurait dans chacun des cas une tétramérisation (bandes 1/4 remplies).

III.3.9.b

A 150 K une des deux chaînes subit une distorsion et s'arrête de conduire.

III.3.9.c

Par une étude cristallographique on pourrait se rendre compte d'un changement de périodicité.

III.3.9.d

A 50 K la seconde chaîne s'arrête de conduire.

III.3.9.e

A basse température on a un comportement métallique (ρ augmente si T augmente). On peut penser qu'alors on a une faible conduction entre chaînes le long de l'axe \vec{a} qui est masquée à plus haute température par la conduction le long de \vec{b} .

Second problème

I L'INTERACTION MÉTAL-CARBÈNE

I.1 A propos de la méthode EHT

I.1.1

$h_{\mu\mu}$ représente l'énergie de l'orbitale atomique χ_{μ} . $h_{\mu\nu}$ représente l'interaction entre les OA χ_{μ} et χ_{ν} . Cette interaction est proportionnelle au recouvrement entre les OA. De plus, plus les OA sont proches en énergie plus l'interaction sera forte.

I.1.2

Dans l'approche Hückel simple, on ne considère que les électrons de valence de type π . De plus les termes d'interaction $h_{\mu\nu}$ ne sont considérés qu'entre atomes plus proches voisins et

$$S_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}.$$

I.1.3

On a $h_{1s,1s} = -13,6 \text{ eV}$.

I.1.4

H : OA 1s et 1 électron

C : OA 2s, 2p_x, 2p_y, 2p_z et 4 électrons

CH₂ : OA 2s, 2p_x, 2p_y, 2p_z sur C et OA 1s sur H avec au total 6 électrons de valence.

I.1.5

Dans la méthode EHT il n'y a pas de répulsion entre électrons. Par conséquent à courte distance il n'y a pas de terme répulsif associé à l'interpénétration des nuages électroniques. A cause du terme $S_{\mu\nu}$ dans $h_{\mu\nu}$ on favorise artificiellement les situations pour lesquelles le recouvrement entre OA est maximal.

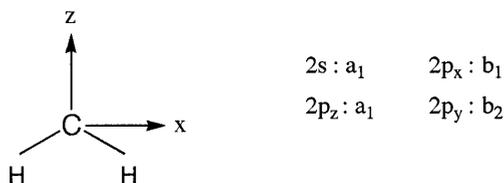
H_2 : fusion froide

NH_3 : plan

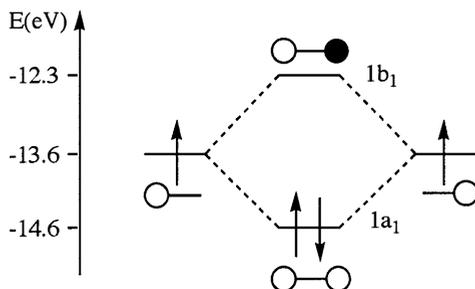
La conséquence pratique est que la méthode EHT n'est pas du tout adaptée à l'optimisation de la géométrie des molécules.

I.2 La molécule de carbène libre

I.2.1



I.2.2



Pour l'orbitale $1a_1$ on a $1a_1 = c_1 (\chi_1 + \chi_2)$

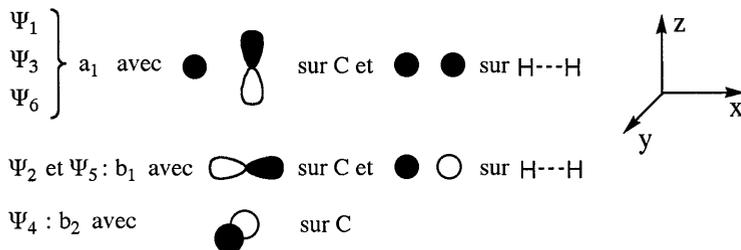
soit $\langle 1a_1 | 1a_1 \rangle = c_1^2 (\langle \chi_1 | \chi_1 \rangle + \langle \chi_2 | \chi_2 \rangle + 2 \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle)$

On a donc $1 = c_1^2 (2 + 2S)$

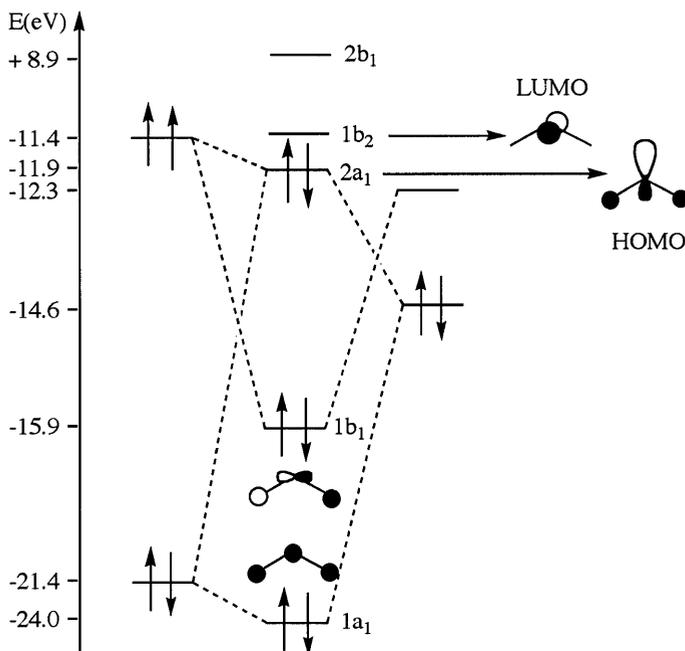
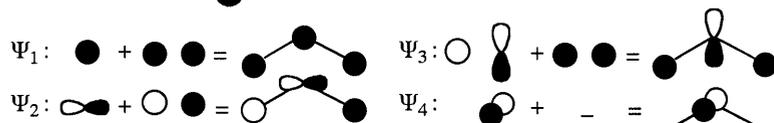
soit $S = 1/(2c_1^2) - 1 = 0,11$ d'où $c_1 = 0,6711$.

I.2.3.a

Comme seules des orbitales de fragments de même symétrie peuvent interagir il est facile d'affecter les étiquettes de symétrie. Dès que l'OA 2s de C est impliquée on a a_1 , lorsqu'il n'y a aucun poids sur H...H on a b_2 , et enfin les autres sont b_1 .

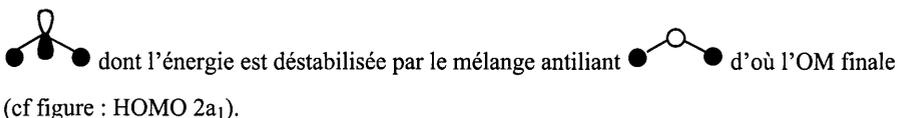


I.2.3.b



I.2.3.c

La plus haute occupée est l'OM $2a_1$. Elle résulte d'un mélange à trois orbitales. On peut la considérer selon deux points de vue selon la proximité énergétique des orbitales atomiques. On peut la considérer comme un recouvrement antiliant entre \bigcirc et $\bullet\cdots\bullet$ dont le caractère antiliant est diminué par un mélange liant entre l'orbitale p_z et $\bigcirc\cdots\bigcirc$. Dans le cas présent, compte tenu des énergies des OA on peut considérer que l'on a la combinaison liante



I.2.3.d

A l'état fondamental, la configuration électronique de CH_2 est $(1a_1)^2(1b_1)^2(2a_1)^2$ soit un état électronique 1A_1 .

I.2.3.e

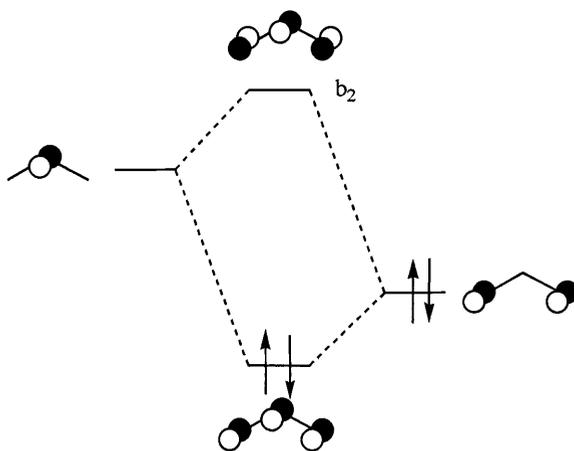
Si on envisage la configuration électronique $(2a_1)^1(1b_2)^1$ on a un état triplet 3B_2 . Cet état est préféré car l'écart énergétique $2a_1-1b_2$ est faible donc il y a préférence pour une configuration haut spin.

I.2.4.a

Un groupe π -donneur est un groupe possédant des orbitales occupées susceptibles d'interagir de manière π et à relativement haute énergie.

I.2.4.b

Les OA p_y des fluors sont occupées et on peut envisager la combinaison représentée à droite sur le diagramme ci-dessous. Il va y avoir deux OM :



L'effet est de repousser la LUMO b_2 ce qui a pour conséquence d'augmenter le gap HOMO-LUMO et ainsi de favoriser la configuration singulet.

I.3 La molécule de carbène coordonnée

I.3.1

Pour interagir avec un fragment carbène singulet, il faut une LUMO du fragment métallique suffisamment basse : bonne interaction avec la paire libre σ sur le carbène. Il faut aussi des orbitales d_π occupées à suffisamment haute énergie pour faire une rétro-donation efficace dans la LUMO vide b_2 . Un métal riche en électrons a des orbitales basses en énergie ce qui joue aussi sur la position de la LUMO. Pour avoir un métal riche en électrons, il faut un bas degré d'oxydation ce qui laisse des électrons dans les orbitales de type t_{2g} et permet la rétro-donation. Des ligands π -accepteurs stabilisent les OA t_{2g} donc facilitent la présence à bas degré d'oxydation. Enfin, un groupe π -donneur sur le carbène favorise un état singulet par accroissement du gap HOMO-LUMO.

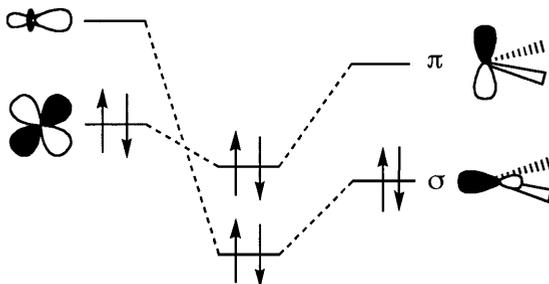
I.3.2

Pour interagir avec un carbène triplet il faut que pour le fragment métallique une configuration triplet soit facilement accessible. Avec un métal pauvre en électrons, on a des orbitales hautes en énergie qui vont pouvoir interagir de manière covalente avec les OA du carbène. Des groupes π -donneurs sur le métal vont déstabiliser le bloc t_{2g} ce qui rendra les

configurations triplet plus accessibles. Enfin sur le carbène l'absence de groupe π -donneur favorise une configuration triplet.

I.3.3

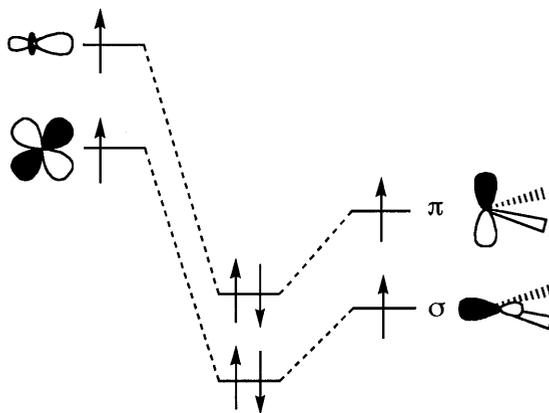
Dans les carbènes de Fisher on a le schéma d'interaction suivant :



La donation σ affaiblit la densité électronique sur C qui est en partie compensée par la rétro-donation. Au final on a un carbone δ^+ donc sensible à l'attaque par les nucléophiles.

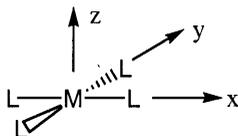
I.3.4

Pour les carbènes de Schrock on a plutôt le schéma d'interaction suivant :



Il y a plutôt formation de deux liaisons covalentes. Comme le carbone est plus électronégatif que le métal à un haut degré d'oxydation les deux liaisons covalentes sont plutôt développées sur C. Le résultat en est que le carbone porte une charge δ^- et est donc sensible à l'attaque par les électrophiles.

I.3.5.a



RuH_4^{2-} : Ru groupe 8

H : ligand X

$$8 (\text{Ru}) + 4 (4\text{H}) + 2 (2-) = 14$$

RuH_4^{2-} est un complexe à 14 électrons du Ru^{II}.

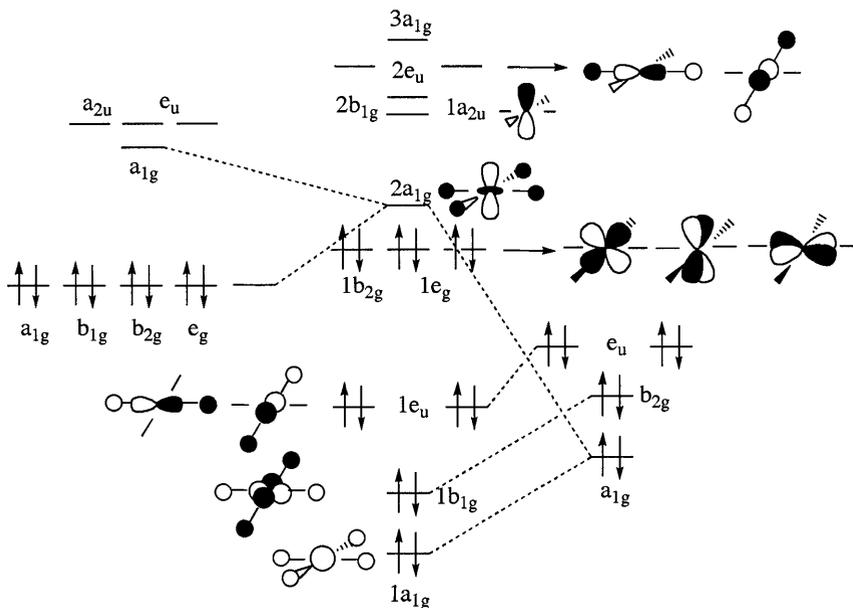
I.3.5.b

$$\Gamma_{4d} = A_{1g} \oplus B_{1g} \oplus B_{2g} \oplus E_g$$

$$\Gamma_{5s} = A_{1g}$$

$$\Gamma_{5p} = A_{2u} \oplus E_u$$

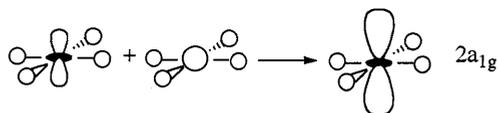
$$\Gamma_{\text{H}} = A_{1g} \oplus B_{1g} \oplus E_u$$



I.3.5.c

Dans le champ de ligand ML_4 D_{4h} on a trois orbitales a_{1g} : $4d_{z^2}$, $5s$ et la combinaison totalement symétrique des 4 ligands.

Pour des raisons de recouvrement les orbitales σ des ligands n'interagissent que faiblement avec l'OA d_{z^2} . Ce recouvrement antiliant au niveau de l'orbitale $2a_{1g}$ de ML_4 est de plus atténué par un recouvrement favorable entre l'OA $5s$ et les OA des ligands :

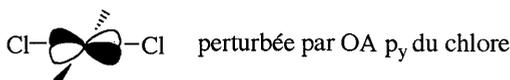


C'est pourquoi l'OM $2a_{1g}$ est quasiment non liante et se trouve proche des OA strictement non liantes.

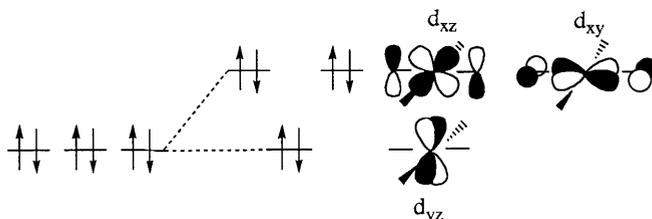
I.3.6.a

Le chlore est un atome σ et π donneur.

I.3.6.b



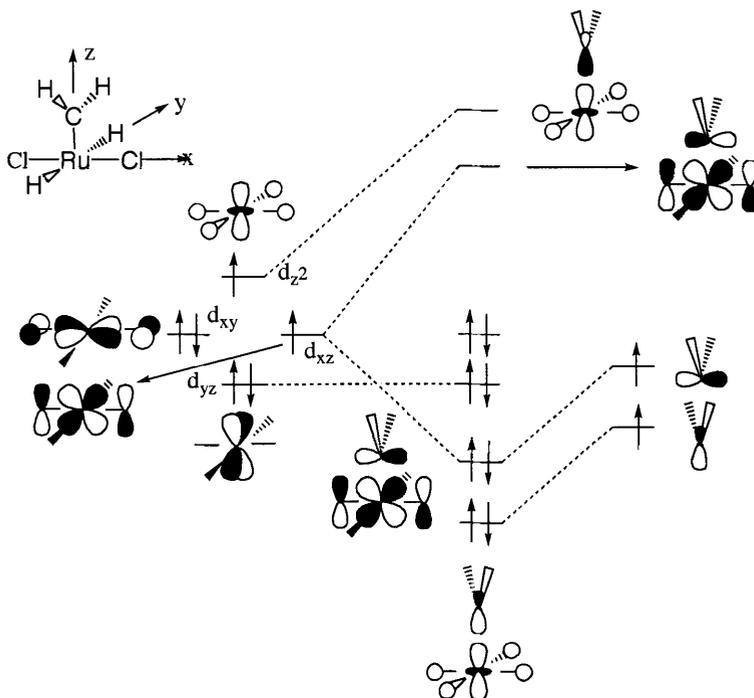
Au niveau des OA non liantes c'est la combinaison antiliante qu'il faut considérer.



I.3.6.c

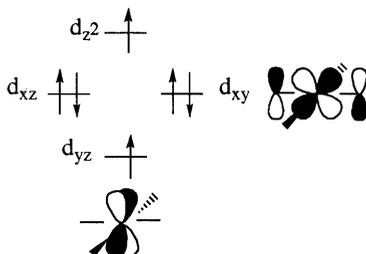
En déstabilisant les 2 OA d on réduit le gap HOMO-LUMO donc on rend plus accessibles des configurations triplet.

I.3.7.a



I.3.7.b

Pour coordonner le carbène dans le plan de départ xOz , il faudrait considérer l'état triplet de départ suivant qui est plus haut en énergie donc moins favorable.

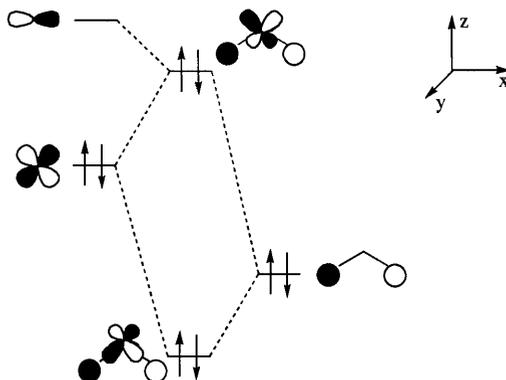


En conclusion le plan yOz est le plan de coordination le plus favorable pour CH_2 .

I.3.7.c

Pour abaisser la barrière de rotation il faut rendre plus favorable la coordination dans le plan

xOz. Pour cela il faut déstabiliser l'orbitale d_{yz} . En basculant les hydrogènes on change de symétrie :



L'orbitale d_{yz} est déstabilisée et se mélange avec la p_y ce qui par hybridation rend le recouvrement avec CH_2 meilleur.

I.3.8

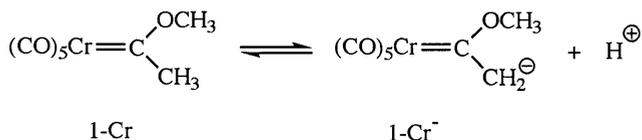
Pour **1** l'orbitale acceptrice du carbène est dans la conformation idéale pour assurer la meilleure rétro-donation. Dans le cas de **2** les groupes Cy sur les phosphines sont trop gros et la conformation préférentielle du carbène est empêchée par gêne stérique. Le plan de coordination du carbène est donc Cl-Ru-Cl. Les phosphines basculent pour améliorer la rétro-donation.

II L'ACIDITÉ DES CARBÈNES DE FISCHER

II.1 Principe chimique de la mesure

II.1.1

CH_3OD est un solvant protique capable de libérer D^+ . Si on retrouve D incorporé dans une molécule, alors cela signifie que cette molécule est susceptible de perdre un proton pour le substituer par un deutérium. Il s'agit donc d'une molécule qui a des propriétés acides.



Comme on forme $(\text{CO})_5\text{Cr}[\text{C}(\text{OCH}_3)(\text{CD}_3)]$, on peut en déduire que les H du méthyl sont plus acides que les H du méthoxy.

II.1.2.a

On voit clairement la présence d'un point isobestique ce qui signifie que CH se transforme en une autre espèce ionique avec laquelle elle est en équilibre. On peut proposer un équilibre de transfert de proton entre CH et la base B.



II.1.2.b

La base conjuguée C^- a la formule :



On voit qu'il y a deux protons vinyliques qui résonnent plutôt vers 4 ppm et la présence d'une double liaison empêche l'échange d'où deux signaux.

II.1.3.a



On a $K_1 = [\text{C}^-][\text{BH}^+] / [\text{CH}][\text{B}]$

$$[\text{CH}] + [\text{C}^-] = [\text{CH}]_0$$

$$[\text{B}] + [\text{BH}^+] = [\text{B}]_0$$

On a aussi $[\text{BH}^+] = [\text{C}^-]$

On en déduit $[\text{C}^-] = [\text{CH}]_0 (1-r)$

$$[\text{BH}^+] = [\text{CH}]_0 (1-r)$$

$$[\text{CH}] = r [\text{CH}]_0$$

$$[\text{B}] = [\text{B}]_0 - [\text{CH}]_0 (1-r)$$

Si on connaît r , $[\text{B}]_0$ et $[\text{CH}]_0$ on connaît toutes les concentrations à l'équilibre donc K_1 .

II.1.3.b

On définit le pK_a de CH dans l'acétonitrile par :



Pour la base B on a : $K_a(\text{CH}) = [\text{C}^-][\text{CH}_3\text{CNH}^+] / [\text{CH}][\text{CH}_3\text{CN}]$

$$K_a(\text{BH}^+) = [\text{B}][\text{CH}_3\text{CNH}^+] / [\text{BH}^+][\text{CH}_3\text{CN}]$$

Il en résulte : $K_a(\text{CH}) / K_a(\text{BH}^+) = [\text{C}^-][\text{BH}^+] / [\text{CH}][\text{B}] = K_1$

On a donc $pK_a(\text{CH}) = pK_a(\text{BH}^+) + pK_1$

Une fois que l'on connaît K_1 et $K_a(\text{BH}^+)$ on a facilement $K_a(\text{CH})$

II.1.3.c

Pour λ_{max} on a : $A(\lambda_{\text{max}}) = \epsilon_{\text{C}^-}[\text{C}^-] + \epsilon_{\text{CH}}[\text{CH}] = \epsilon_{\text{C}^-}[\text{CH}]_0 \cdot (1-r) + \epsilon_{\text{CH}}[\text{CH}]_0 \cdot r$

On connaît ϵ_{C^-} , $[\text{CH}]_0$ et ϵ_{CH} donc une fois $A(\lambda_{\text{max}})$ connu, on obtient r . Une fois r connu, on a toutes les concentrations à l'équilibre, donc K_1 . Une fois K_1 connue, on peut estimer $K_a(\text{CH})$.

II.1.4.a

Si la base est en excès, on peut supposer que l'équilibre est totalement déplacé vers la droite soit $r = 0$ soit $[\text{C}^-] = [\text{CH}]_0$.

II.1.4.b

Lorsque la base est absente, on peut supposer que l'équilibre est très peu déplacé vers la droite soit $r = 1$.

$$A_0 = \epsilon_{\text{CH}}[\text{CH}]_0$$

Pour un excès de base on a $[\text{C}^-] = [\text{CH}]_0$.

$$A_\infty = \epsilon_{\text{C}^-}[\text{CH}]_0$$

II.1.4.c

Pour une portion quelconque de l'équilibre, on a :

$$A(\lambda_{\text{max}}) = \epsilon_{\text{C}^-}[\text{C}^-] + \epsilon_{\text{CH}}[\text{CH}]$$

$$\text{Or : } \epsilon_{\text{C}^-} = A_\infty / [\text{CH}]_0 \text{ et } \epsilon_{\text{CH}} = A_0 / [\text{CH}]_0$$

$$\text{Soit } A = A_{\infty} ([C^-] / [CH]_0) + A_0 ([CH] / [CH]_0)$$

$$\text{Soit } A = A_{\infty} \cdot (1-r) + A_0 r \quad \text{d'où : } r = (A - A_{\infty}) / (A_0 - A_{\infty})$$

II Exploitation des résultats

II.1

On remarque que le maximum d'absorption de CH est plutôt vers 370 nm alors que pour C⁻, c'est plutôt vers 350 nm. En faisant la moyenne, on assure une précision comparable entre les mesures pour lesquelles la base est en faible quantité et celles pour lesquelles la base est en excès.

II.2

On a pour K₁ l'expression :

$$K_1 = \{ [CH]_0 (1-r)^2 \} / r \{ [B]_0 - [CH]_0 (1-r) \}$$

On obtient donc les valeurs :

[CH] ₀	[B] ₀	r	K ₁	pK _a (CH)
2,08 . 10 ⁻⁴	3,92 . 10 ⁻⁵	0,82	4,67	22,63
1,31 . 10 ⁻⁴	2,60 . 10 ⁻⁵	0,81	5,26	22,58
2,06 . 10 ⁻⁴	7,84 . 10 ⁻⁵	0,65	6,16	22,51
1,31 . 10 ⁻⁴	5,20 . 10 ⁻⁵	0,62	13,74	22,16
1,31 . 10 ⁻⁴	7,80 . 10 ⁻⁵	0,44	20,12	22,00
7,92 . 10 ⁻⁵	5,20 . 10 ⁻⁵	0,40	15,91	22,10
2,06 . 10 ⁻⁴	1,57 . 10 ⁻⁴	0,33	14,76	22,13
1,31 . 10 ⁻⁴	1,04 . 10 ⁻⁴	0,29	20,72	21,98
2,10 . 10 ⁻⁴	1,96 . 10 ⁻⁴	0,23	15,78	22,10
7,92 . 10 ⁻⁵	7,80 . 10 ⁻⁵	0,23	12,0	22,22
5,08 . 10 ⁻⁵	5,00 . 10 ⁻⁵	0,19	19,8	22,00
2,06 . 10 ⁻⁴	2,35 . 10 ⁻⁴	0,16	14,66	22,13

II.3

En faisant la moyenne on obtient : pK_a (CH) = 22,2 ± 0,2

II.4

Comme on a trois protons équivalents, tout se passe comme si la concentration effective en

donneur de proton était multipliée par trois, d'où :

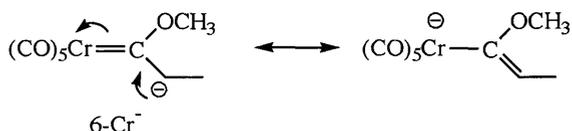
$$K_a^{\text{Corr.}}(\text{CH}) = ([\text{C}^-][\text{CH}_3\text{CNH}^+]) / (3[\text{CH}][\text{CH}_3\text{CN}]) = K_a(\text{CH}) / 3$$

$$\text{On a donc } pK_a^{\text{Corr.}} = pK_a(\text{CH}) + \log 3 = 22,7 \pm 0,2$$

III. GÉNÉRALISATION À D'AUTRES COMPLEXES

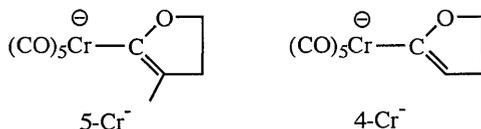
III.1.a

6-Cr devrait être plus acide que 1-Cr car le groupe méthyle stabilise la base conjuguée :



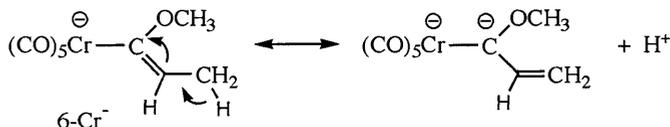
Le groupe méthyle stabilise la double liaison par rapport à 1-Cr⁻ pour lequel seuls des H sont présents.

La situation devrait être la même pour 5-Cr par rapport à 4-Cr (5-Cr devrait être plus acide que 4-Cr).



III.1.b

On explique la plus grande stabilité des doubles liaisons par des effets d'hyperconjugaison :



III.1.c

Ces formes d'hyperconjugaison impliquent une séparation importante de charge et seront d'autant plus favorisées que le solvant sera polaire.

III.1.d

On voit que l'ordre d'acidité attendu est observé lorsque l'on se trouve dans un solvant acétonitrile-eau (50 :50). Dans ce cas, la polarité du solvant doit être suffisante pour stabiliser

les formes résultant de l'hyperconjugaison. Dans le cas de l'acétonitrile pur, la polarité n'est pas suffisante.

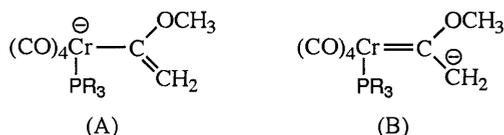
III.2

Pour 9-Cr et 12-Cr, le groupe PR_3 sur Cr déstabilise la base conjuguée. En effet, dans la base conjuguée se développe une charge formelle négative sur le Cr qui est défavorisée par les groupes donneurs PR_3 .

III.3

Lorsque l'on passe de 1-Cr à 9-Cr ou 12-Cr, on a une augmentation des pK_a de seulement 3,2 et 4,3 unités, alors que pour les hydrures on avait un changement de 10 unités.

Dans le cas des carbènes, on déstabilise la forme mésomère (A) par effet donneur de PR_3 . Mais la charge négative n'est pas entièrement localisée sur le métal puisqu'une forme mésomère telle que B peut exister. Donc l'effet de PR_3 est moins marquée que pour les hydrures où de telles formes n'existent pas.



CATALYSE DE MÉTATHÈSE DES OLÉFINES

I. DISSOCIATION DE LA PHOSPHINE

I.1

Le complexe C est un complexe de ruthénium au degré d'oxydation +II avec $6 + 4 \times 2 = 14$ électrons.

I.2

Le complexe C est un complexe très déficient en électrons donc il sera très réactif vis à vis de toutes les bases de Lewis présentes dans le milieu. On peut donc considérer que dans l'expérience d'échange de PCy_3 , l'étape cinétiquement déterminante est la dissociation de PCy_3 pour former C ; donc la constante k_B déterminée expérimentalement peut être assimilée

à k_1 .

I.3

On trace $\ln(k_B)$ en fonction de $1/T$ et on obtient une droite de pente $-\Delta_r H^\ddagger / R$.

Pour A on obtient : $\Delta_r H^\ddagger = 98,8 \text{ kJ.mol}^{-1}$

Pour B on obtient : $\Delta_r H^\ddagger = 113 \text{ kJ.mol}^{-1}$

I.4

On voit que la dissociation de la phosphine est plus difficile pour B que pour A. On en conclut que ce n'est pas dans cette étape que se trouve l'explication de la plus grande activité catalytique de B.

I.5

A 353 K, on voit que pour B la constante k_B est indépendante de la concentration initiale en phosphine libre ce qui est en faveur d'un mécanisme dissociatif et non pas associatif.

II. COMPÉTITION ENTRE DISSOCIATION ET COORDINATION

II.1.a

L'intensité du pic est proportionnelle à la concentration donc si on a une cinétique d'ordre 1, en traçant $\ln I$ en fonction de t , on doit avoir une droite de pente $-k_{\text{obs}}$.

II.1.b

On obtient pour k_{obs} la valeur $k_{\text{obs}} = 4,53 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

II.1.c

En étudiant k_B en fonction de T , on a établi : $\ln k_B = 36,886 - 13756 / T$

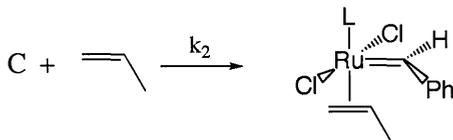
Il en résulte pour $T = 308\text{K}$ la valeur $k_B = -4,2 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

Or on avait vu que k_B était assimilable à k_1 et ici les valeurs de k_{obs} déterminée et k_B extrapolée sont les mêmes aux erreurs de mesure près.

On peut en conclure qu'en présence d'un excès d'oléfine, l'étape cinétiquement déterminante est la dissociation de PCy_3 .

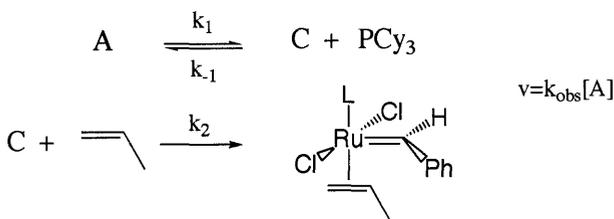
II.2.a

Si on est en excès d'oléfine libre, la réaction de décoordination de l'oléfine est défavorisée thermodynamiquement. On peut donc se contenter de la réaction :



II.2.b

On a le schéma cinétique suivant :



Une fois le complexe oléfinique formé, toutes les étapes ultérieures sont rapides, on a donc :

$$V = k_2 [C][\text{oléfine}].$$

Comme C est un intermédiaire très réactif, on peut lui appliquer l'approximation des états quasi-stationnaires :

$$0 = k_1[A] - k_{-1} [C][\text{PCy}_3] - k_2[C][\text{oléfine}]$$

$$[C] = k_1[A] / \{ k_{-1}[\text{PCy}_3] + k_2[\text{oléfine}] \}$$

$$\text{On en déduit } v = k_1 k_2 [\text{oléfine}][A] / \{ k_{-1}[\text{PCy}_3] + k_2[\text{oléfine}] \}$$

$$\text{Il en résulte } k_{\text{obs}} = k_1 k_2 [\text{oléfine}] / \{ k_{-1}[\text{PCy}_3] + k_2[\text{oléfine}] \}$$

$$\text{D'où } 1/k_{\text{obs}} = \{ k_{-1} / k_1 k_2 \} \times \{ [\text{PCy}_3] / [\text{Oléfine}] \} + \{ 1 / k_1 \}$$

II.2.c

L'activité de catalyseur réside dans la capacité qu'a l'intermédiaire C à coordonner une oléfine pour ensuite conduire au cycle catalytique. Par conséquent, les valeurs relatives de $k_{-1}[\text{PCy}_3]$ et $k_2[\text{oléfine}]$ sont cruciales pour savoir si C coordonne préférentiellement la phosphine ($k_{-1}[\text{PCy}_3]$) ou bien l'oléfine ($k_2[\text{oléfine}]$).

II.3.a

On trace $1/k_{\text{obs}}$ en fonction de $[\text{PCy}_3] / [\text{oléfine}]$ et on obtient bien une droite pour les deux catalyseurs.

II.3.b

Pour A on a $3,8557 + 95569 ([\text{PCy}_3] / [\text{oléfine}])$ soit $k_{-1} / k_2 = 95569 / 3,8557 = 24786$

Pour B on a $327,21 + 417,3([\text{PCy}_3] / [\text{oléfine}])$ soit $k_{-1} / k_2 = 417,3 / 327,21 = 1,27$

II.3.c

On voit que pour le catalyseur A, la recoordination de la phosphine est beaucoup plus efficace que la coordination de l'oléfine alors que pour B les deux processus sont compétitifs. Ainsi, même si la phosphine est plus difficile à dissocier pour B, l'espèce intermédiaire C va plus facilement coordonner les alcènes et effectuer un grand nombre de cycles catalytiques avant d'être désactivé.

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

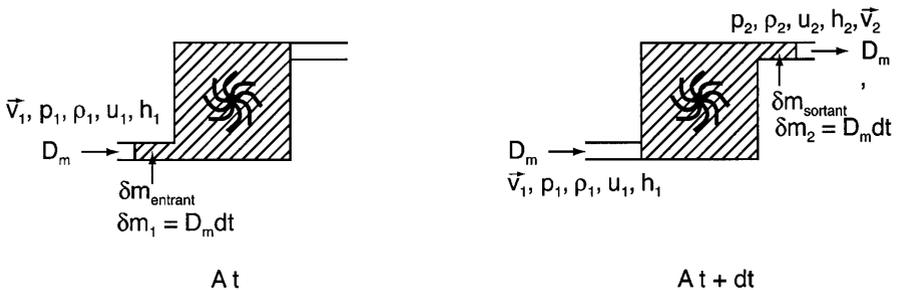
OPTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉES

Composition de physique ♦ Session : 2002

A MACHINES FRIGORIFIQUES

1 Réfrigérateur à condensation

1.1 Préliminaire



$$h = u + p/\rho$$

1.1.1 Considérons le système fermé qui à t comprend le fluide contenu dans le système ouvert et la masse $\delta m_1 = D_m dt$ qui va rentrer par la section d'entrée entre t et $t+dt$.

Ce système à $t+dt$ comprend le fluide contenu dans le système ouvert et la masse $\delta m_2 = D_m dt$ qui sort par la section de sortie entre t et $t+dt$.

En régime stationnaire $\delta m_1 = \delta m_2 = D_m dt$ et le fluide à l'intérieur du système ouvert a les mêmes caractéristiques cinétiques et thermodynamiques : son énergie totale $E_0 = U_0 + E_{k0} + E_{p0}$ (somme de son énergie interne U_0 , de son énergie cinétique macroscopique E_{k0} et de l'énergie potentielle des actions extérieures E_{p0}) reste constante.

L'application du 1^{er} principe de la thermodynamique au système fermé donne :

$$dE = \delta W + \delta Q \quad \text{avec : } dE = E(t+dt) - E(t) \text{ et :}$$

$$E(t + dt) = \left[E_0(t + dt) + \delta m u_2 + \frac{1}{2} \delta m v_2^2 + \delta m g z_2 \right]$$

$$E(t) = \left[E_0(t) + \delta m u_1 + \frac{1}{2} \delta m v_1^2 + \delta m g z_1 \right]$$

$$\delta W = \delta W_{ind} + p_1 \frac{\delta m}{\rho_1} - p_2 \frac{\delta m}{\rho_2} \quad \text{en comptant le travail des forces de pression à l'entrée et à la}$$

$$\text{sortie } (\delta V_1 = -\frac{\delta m}{\rho_1} \text{ et } \delta V_2 = -\frac{\delta m}{\rho_2})$$

$$\delta Q = \delta Q_{th} + 0$$

δQ_{th} est le transfert thermique avec l'extérieur au niveau du système ouvert, et l'on suppose qu'au niveau de l'entrée et de la sortie les échanges thermiques n'ont pas le temps de s'effectuer.

En remarquant qu'en régime stationnaire $E_0(t+dt) = E_0(t)$ pour le système ouvert, il vient :

$$\delta m \left[u_2 + \frac{v_2^2}{2} + g z_2 \right] - \delta m \left[u_1 + \frac{v_1^2}{2} + g z_1 \right] = \delta W_{ind} + \frac{P_1}{\rho_1} \delta m - \frac{P_2}{\rho_2} \delta m + \delta Q_{th}$$

$$\text{Soit, en utilisant } D_m = \frac{\delta m}{dt}, P_{ind} = \frac{\delta W_{ind}}{dt} \text{ et } P_{th} = \frac{\delta Q_{th}}{dt} :$$

$$D_m \left[\left(g z_2 + \frac{v_2^2}{2} + u_2 + \frac{P_2}{\rho_2} \right) - \left(g z_1 + \frac{v_1^2}{2} + u_1 + \frac{P_1}{\rho_1} \right) \right] = P_{ind} + P_{th}$$

$$\text{ou : } D_m \left[\left(g z_2 + \frac{v_2^2}{2} + h_2 \right) - \left(g z_1 + \frac{v_1^2}{2} + h_1 \right) \right] = P_{ind} + P_{th} \text{ avec } h = u + \frac{P}{\rho}$$

1.1.2 Vanne de détente supposée adiabatique : on a donc $P_{th} = 0$.

Par ailleurs il n'y a aucun échange de travail pour le système ouvert et donc $P_{ind} = 0$.

En négligeant les énergies potentielle et cinétique massiques devant les enthalpies massiques on a donc : $D_m (h_2 - h_1) = 0$

Donc $h_2 = h_1$ la détente est isenthalpique.

Dans le cas d'un gaz parfait, comme h n'est fonction que de la température T , la détente se fait sans variation de température : $T_2 = T_1$.

1.1.3 Pour un compresseur adiabatique, $P_{th} = 0$, et avec les approximations données, on a :

$$D_m(h_2-h_1) = P_{ind}$$

Taux de compression
$$r = \frac{P_2}{P_1}$$

Compression isentropique
$$P_{ind\ S} = D_m(h_{2S}-h_1)$$

Rendement isentropique du compresseur
$$\eta_{comp} = \frac{P_{ind\ S}}{P_{ind}} = \frac{h_{2S} - h_1}{h_2 - h_1}$$

Dans le cas d'un gaz parfait avec $\gamma = cte$, l'équation de Laplace pour une isentropique

donne :
$$P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_{2S}^\gamma \Rightarrow T_{2S} = T_1 r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Pour un gaz parfait on a par ailleurs $dh = c_p dT$, d'où le rendement isentropique :

$$\eta_{comp} = \frac{T_{2S} - T_1}{T_2 - T_1}$$

D'où
$$T_2 = T_1 + \frac{T_{2S} - T_1}{\eta_{comp}} \quad \text{soit} \quad T_2 = T_1 \left[1 + \frac{r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\eta_{comp}} \right]$$

A.N. $T_1 = 263 \text{ K} ; r = 5,10 ; \eta_{comp} = 0,75 ; \gamma = 1,15$

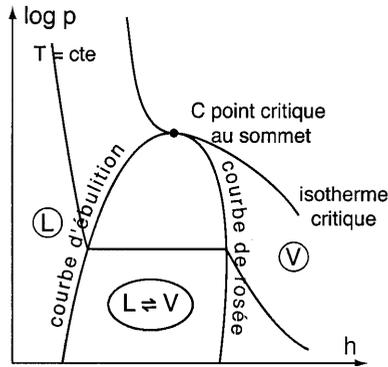
$T_{2S} = 325 \text{ K} \quad T_2 = 346 \text{ K} \quad \text{soit} \quad \theta_{2S} = 52^\circ\text{C} \quad \theta_2 = 73^\circ\text{C}$

1.2 Diagramme (log p, h) du Fréon

1.2.1 A l'intérieur de la courbe de saturation la variance vaut $v = 1+2-2 = 1$: on a une relation entre p et T, soit $p = p(T)$ pour l'équilibre liquide-vapeur : une isotherme est donc une isobare. On a : $l_{vap} = \Delta_{vap}h = h(x=1,T) - h(x=0,T)$ pour l'équilibre liquide-vapeur ou $l_{vap} = T\Delta_{vap}s = T[s(x=1,T) - s(x=0,T)]$ pour l'équilibre liquide-vapeur.

- Par la première méthode on a par lecture $h_1 = 258 \text{ kJ.kg}^{-1} ; h_0 = 101 \text{ kJ.kg}^{-1}$ à $-10^\circ\text{C} \Rightarrow l_{vap} = 157 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

.. Par la deuxième méthode on a $s_1 = 1115 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1} ; s_0 = 520 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1} ;$
 $v_{ap} s = 595 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1} ; T = 263,15 \text{ K} \Rightarrow l_{vap} = 157 \text{ kJ.kg}^{-1}$.



1.2.2 Dans le domaine des faibles pressions la vapeur se comporte comme un gaz parfait. Or $h = h(T)$ uniquement pour un gaz parfait : les isothermes auront une pente verticale lorsque $p \rightarrow 0$.

Au voisinage d'un point on peut écrire à $p = \text{cte}$ que $dh = c_p dT$.

A $T = 313,15 \text{ K}$ soit $\theta = 40^\circ\text{C}$ et $p = 6,31 \text{ bar}$, soit $\log p = 0,80$, on lit autour de ce point dans le diagramme : ($\log p = 0,8$, $\theta = 30^\circ\text{C}$) et ($\log p = 0,8$, $\theta = 50^\circ\text{C}$)

$$\implies h = 13,4 \text{ kJ.kg}^{-1} \implies c_p = h/\theta = 670 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$$

$$\text{On a } c_p - c_v = \frac{R}{M} \text{ et } \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

$$c_v = 600 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1} \implies \gamma = 1,12.$$

1.2.3 Pour une isentrope on a $dS = 0$. Comme $dH = TdS + Vdp$ on a pour une isentrope :

$$dh = \frac{1}{\rho} dp \text{ d'où } \left(\frac{\partial p}{\partial h} \right)_s = \rho.$$

$$\text{On a donc } \left(\frac{\partial p}{\partial h} \right)_s > 0 \text{ et donc } \left(\frac{\partial \log p}{\partial h} \right)_s > 0.$$

Les isentropes sont toujours croissantes.

Au passage des courbes $x = 0$, ou $x = 1$, il n'y a pas de discontinuité de la masse volumique, les isentropes ne subissent donc pas de réfraction. On voit sur le diagramme dans le domaine de la vapeur sèche que les isentropes s'écartent de la courbe de rosée lorsque la pression augmente : on ne peut liquéfier la vapeur sèche par compression isentropique.

1.3 Cycle du fréon dans un réfrigérateur à condensation

1.3.1 Au point 1, on a $\theta_1 = -10^\circ\text{C}$ et $\log p_1 = 0,343$, d'où $p_1 = 2,20$ bar.

On a évidemment $x_1 = 1$ pour la vapeur saturante et on lit :

$$h_1 = 258 \text{ kJ.kg}^{-1} \text{ et } s_1 = 1115 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}.$$

1.3.2 $r = \frac{p_2}{p_1} = 5,10 \implies p_2 = 11,2$ bar $\implies \log p_2 = 1,05 \implies \theta_2 = 70^\circ\text{C}$

On a de la vapeur sèche surchauffée

$$x_2 = 1 \text{ et on lit sur le diagramme } h_2 = 298 \text{ kJ.kg}^{-1} \text{ et } s_2 = 1150 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}.$$

1.3.3 On doit avoir $s_2' = s_1 = 1115 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et $p_2' = 11,2$ bar $\implies \log p_2' = 1,05$

D'où la position du point (2') : on a donc $\theta_2' = 55^\circ\text{C}$; $x_2' = 1$ (vapeur sèche) ; $T_2' = 328 \text{ K}$;

$$h_2' = 288 \text{ kJ.kg}^{-1} ; \eta_{comp} = \frac{h_2' - h_1}{h_2 - h_1} \approx 0,75.$$

1.3.4 $\theta_3 = 35^\circ\text{C}$; $p_3 = 11,2$ bar ; $h_3 = 144 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $s_3 = 670 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$

On n'a que du liquide sous-refroidi : $x_3 = 0$.

1.3.5 On a $h_4 = h_3 = 144 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $p_4 = p_1 = 2,20$ bar d'où le point (4).

On a un équilibre liquide-vapeur : $x_4 = 0,275$ et $s_4 = 685 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

$$1.3.6 \quad P_{ind} = D_m (h_2 - h_1)$$

$$D_m = 4,50 \text{ kg.min}^{-1} = 75.10^{-3} \text{ kg.s}^{-1} \text{ et } h_2 - h_1 = 40 \text{ kJ.kg}^{-1} \implies P_{ind} = 3000 \text{ W.}$$

$$P_{th F} = D_m (h_1 - h_4)$$

$$h_1 - h_4 = 114 \text{ kJ.kg}^{-1} \implies P_{th F} = 8550 \text{ W.}$$

1.3.7 Efficacité ou coefficient de performance $\eta = \frac{P_{th F}}{P_{ind}} \approx 2,85$

Réfrigérateur de Carnot entre $\theta_1 = -10^\circ\text{C}$ et $\theta_2 = 46^\circ\text{C}$ d'après le diagramme.

Pour un cycle de Carnot on a : $\dot{W} + \dot{Q}_C + \dot{Q}_F = 0$ et $\frac{\dot{Q}_C}{T_C} + \frac{\dot{Q}_F}{T_F} = 0$

Et $\eta = -\frac{\dot{Q}_F}{\dot{Q}_C + \dot{Q}_F} = -\frac{1}{1 + \dot{Q}_C / \dot{Q}_F}$ et $\frac{\dot{Q}_C}{\dot{Q}_F} = -\frac{T_C}{T_F} \implies \eta_{Carnot} = \frac{T_F}{T_C - T_F}$.

Entre $T_F = 263,15 \text{ K} (-10^\circ\text{C})$ et $T_C = 319 \text{ K} (46^\circ\text{C})$, $\eta_{Carnot} = 4,71$.

Pour le réfrigérateur prendre $T_F = 273,15$ (local à réfrigérer) au lieu de la température du fluide dans l'évaporateur et prendre $T_C = 293,15 \text{ K}$ (température extérieure) au lieu de la température du fluide dans le condenseur lorsqu'il y a deux phases, semble moins caractéristique de la performance du réfrigérateur.

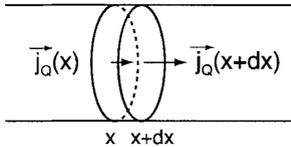
Entre $T_F = 273,15 \text{ K} (0^\circ\text{C})$ et $T_C = 293,15 \text{ K} (20^\circ\text{C})$, $\eta'_{Carnot} = 13,7$.

Il faut donc comparer $\eta = 2,85$ à $\eta_{Carnot} = 4,71$: cela correspond à une efficacité de l'ordre de 60% de l'efficacité maximale.

2. Réfrigérateur thermoélectrique

2.1 Effets thermoélectriques

2.1.1 La loi de Fourier s'écrit $\vec{J}_q = -\lambda \overrightarrow{grad}T$.



La puissance électrique reçue (effet Joule) par l'élément de conducteur de section S et de hauteur dx vaut :

$P_J = dRI^2$ où $dR = R \frac{dx}{L}$ est la résistance de l'élément.

A $p = cte$, le bilan enthalpique en régime stationnaire s'écrit :

$dH = 0 = \delta Q_{\text{échangée}} + \delta W_{\text{électrique}}$

($\delta Q_{\text{échangée}}$: algébriquement reçue ; $\delta W_{\text{électrique}}$: effet Joule, travail de forces extérieures autres que celles de pression).

$(dH = \rho c_p S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = 0 \text{ si } \frac{\partial T}{\partial t} = 0)$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\delta Q_{\text{échangée}}}{dt} &= \vec{J}_q(x) \cdot S \vec{e}_x - \vec{J}_q(x+dx) \cdot S \vec{e}_x = -\frac{\partial J_q}{\partial x} S dx \\ \frac{\delta W_{\text{électrique (effet Joule)}}}{dt} &= \frac{RI^2}{L} dx \end{aligned} \right.$$

On a donc : $-\frac{\partial J_q}{\partial x} S dx + \frac{RI^2}{L} dx = 0$ avec $\vec{J}_q = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x$

D'où : $\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{RI^2}{\lambda SL}$

$$T(x) = -\frac{RI^2}{2\lambda SL} x^2 + Ax + B$$

En $x = 0$, $T(0) = B = T_C$

En $x = L$, $T(L) = -\frac{RI^2 L}{2\lambda S} + AL + B = T_F$

D'où $A = -\frac{T_C - T_F}{L} + \frac{RI^2}{2\lambda S}$

$$T(x) = \frac{RI^2}{2\lambda SL} (L-x)x - \frac{T_C - T_F}{L} x + T_C$$

$$P_C = \vec{J}_q(0) \cdot S \vec{e}_x = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0}$$

$$P_C = -\frac{RI^2}{2} + \frac{\lambda S}{L} (T_C - T_F)$$

$$P_F = \vec{J}_q(L) \cdot (-S \vec{e}_x) = \lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L}$$

$$P_F = -\frac{RI^2}{2} - \frac{\lambda S}{L} (T_C - T_F)$$

$$P_C + P_F = -RI^2$$

$$P_{C \text{ reçu}} + P_{F \text{ reçu}} + P_{\text{électrique reçu (effet Joule)}} = 0$$

On a bien $P_{\text{th échangée}} + P_{\text{électrique (effet Joule)}} = 0$

($P_{\text{él}} + P_{\text{th}}$ algébriquement reçues en régime stationnaire).

2.1.2 On a :

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{J}_q &= L_{11} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{T} \right) - L_{12} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T} \\ \vec{J}_e &= L_{21} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{T} \right) - L_{22} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T} \end{aligned} \right. \quad \text{et} \quad L_{21} = L_{12}.$$

- Conducteur à température uniforme $\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{T} \right) = \vec{0}$, on a :

$$\vec{J}_e = -\frac{L_{22}}{T} \overrightarrow{\text{grad}V} \text{ soit } \vec{J}_e = \gamma \vec{E} \text{ (loi d'Ohm sous forme locale) avec } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V}.$$

$$\gamma = \frac{L_{22}}{T}.$$

- Conducteur où ne circule aucun courant électrique : $\vec{J}_e = \vec{0}$

$$\text{On a } \frac{\overrightarrow{\text{grad}V}}{T} = \frac{L_{12}}{L_{22}} \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) \text{ or } \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) = -\frac{1}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}T}$$

$$\vec{J}_q = \left(L_{11} - \frac{L_{12}^2}{L_{22}}\right) \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right)$$

$$\vec{J}_q = -\frac{1}{T^2} \left(L_{11} - \frac{L_{12}^2}{L_{22}}\right) \overrightarrow{\text{grad}T}$$

$$\text{On a } \vec{J}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T} \text{ avec } \lambda = \frac{1}{T^2} \left(L_{11} - \frac{L_{12}^2}{L_{22}}\right) \text{ (loi de Fourier)}$$

$$\text{On a aussi } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} = -T \frac{L_{12}}{L_{22}} \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{L_{12}}{TL_{22}} \overrightarrow{\text{grad}T}$$

soit la relation $\vec{E} = \varepsilon \overrightarrow{\text{grad}T}$ avec $\varepsilon = \frac{L_{12}}{TL_{22}}$ (coefficient de Seebeck).

2.1.3 - Un mélange à l'équilibre d'eau et de glace fondante à la pression atmosphérique normale $p = 101325 \text{ Pa}$ constitue une source idéale de chaleur à une température très voisine de $\theta = 0^\circ\text{C}$.

$$-V_M - V_N = \int_M^{j_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{j_1}^{j_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{j_2}^N \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_M^{j_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

or $\vec{E} = \varepsilon \overrightarrow{\text{grad}T} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varepsilon dT$ le long du conducteur

$$V_M - V_N = \int_{T_a}^{T_{ref}} \varepsilon_{Cu} dT + \int_{T_a}^{T_{ref}} \varepsilon_A dT + \int_{T_c}^{T_{ref}} \varepsilon_B dT + \int_{T_{ref}}^{T_a} \varepsilon_{Cu} dT$$

$$\text{On a bien } V_M - V_N = \int_{T_{ref}}^{T_a} (\varepsilon_A - \varepsilon_B) dT = e_{AB}$$

$$\varepsilon_A - \varepsilon_B = \varepsilon_{AB}$$

Cette valeur ne dépend pas de T_a si les conducteurs de j_1 à M et j_2 à N sont de même nature (le cuivre ici).

- Les coefficients L_{12} , L_{22} , comme ε dépendent a priori de T , donc ε_{AB} dépend de T et ε_{AB} n'est pas fonction affine de T .

A.N. : $e(500^\circ\text{C}) - e(450^\circ\text{C}) = 2127 \mu\text{V}$

$e(550^\circ\text{C}) - e(500^\circ\text{C}) = 2132 \mu\text{V}$

On constate que la relation n'est pas tout à fait linéaire mais presque.

On a $\varepsilon_{AB} \delta e / \delta T = 42,6 \mu\text{V.K}^{-1}$ à 500°C .

- On a, sans les soudures à T_{ref} : $V_M - V_N = \int_{T_f}^{T_c} \varepsilon_A dT + \int_{T_c}^{T_f} \varepsilon_B dT$

D'où $V_M - V_N = \int_{T_f}^{T_c} \varepsilon_{AB} dT$.

Il faut donc ajouter $\int_{T_{\text{ref}}}^{T_c} \varepsilon_{AB} dT$ pour obtenir ε_{AB} précédent ce qui nécessite une compensation.

2.1.4 Pour un conducteur à température uniforme on a :

$$\vec{J}_q = -\frac{L_{12}}{T} \overrightarrow{\text{grad}V} \text{ et } \vec{J}_e = -\frac{L_{22}}{T} \overrightarrow{\text{grad}V}$$

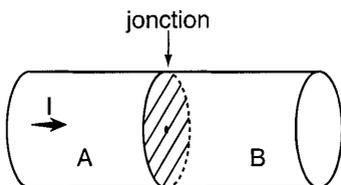
D'où : $\vec{J}_q = \frac{L_{12}}{L_{22}} \vec{J}_e$.

Or $\varepsilon = \frac{L_{12}}{TL_{22}}$ donc on a bien $\vec{J}_q = \varepsilon T \vec{J}_e$.

2.1.5 A la jonction AB la puissance thermique dégagée par effet Peltier, c'est à dire la puissance algébriquement reçue du circuit conducteur vaut : $P_p = \vec{J}_q(A) \cdot \vec{S}e_x - \vec{J}_q(B) \cdot \vec{S}e_x$

$$P_p = \varepsilon_A T \vec{J}_e \cdot \vec{S}e_x - \varepsilon_B T \vec{J}_e \cdot \vec{S}e_x = (\varepsilon_A - \varepsilon_B) T I$$

$$P_p = \Pi_{AB} I \text{ avec } \Pi_{AB} = (\varepsilon_A - \varepsilon_B) T = \varepsilon_{AB} T$$



- Alors que la puissance dégagée par effet Joule dans une résistance R $P_j = RI^2$ ne dépend pas du sens du courant, la puissance dégagée par effet Peltier $P_p = \Pi_{AB}I$ dépend du sens du courant, et peut donc être positive ou négative.

2.2 Réfrigérateur à effet Peltier

2.2.1 Bilan thermique pour les soudures froides (M et n) et (p et M) :

$$0 = P_{th\ froid} - \left[-\frac{R_n I^2}{2} - \frac{\lambda_n S}{L} (T_c - T_f) \right] + (\epsilon_M - \epsilon_n) T_f I - \left[-\frac{R_p I^2}{2} - \frac{\lambda_p S}{L} (T_c - T_f) \right] + (\epsilon_p - \epsilon_M) T_f I$$

$$P_{th\ froid} = -\frac{RI^2}{2} - \frac{\lambda S}{L} (T_c - T_f) + \epsilon_{np} T_f I$$

avec $\begin{cases} \lambda = \lambda_n + \lambda_p \\ \epsilon_{np} = \epsilon_n - \epsilon_p \\ R = R_n + R_p \end{cases}$

Bilan thermique pour les soudures chaudes (n et M) et (M et p) :

$$0 = P_{th\ chaud} - \left[-\frac{R_n I^2}{2} + \frac{\lambda_n S}{L} (T_c - T_f) \right] + (\epsilon_n - \epsilon_M) T_c I - \left[-\frac{R_p I^2}{2} + \frac{\lambda_p S}{L} (T_c - T_f) \right] + (\epsilon_M - \epsilon_p) T_c I$$

$$P_{th\ chaud} = -\frac{RI^2}{2} + \frac{\lambda S}{L} (T_c - T_f) - \epsilon_{np} T_c I.$$

Le travail électrique reçu par unité de temps vaut $P_m = -P_{th\ froid} - P_{th\ chaud}$

D'où $P_m = RI^2 + \epsilon_{np} (T_c - T_f) I.$

2.2.2 $P_{th\ froid} > 0 \implies \epsilon_{np} > \frac{1}{T_f I} \left[\frac{RI^2}{2} + \frac{\lambda S}{L} (T_c - T_f) \right]$

$$P_{th\ chaud} < 0 \implies \epsilon_{np} > \frac{1}{T_c I} \left[-\frac{RI^2}{2} + \frac{\lambda S}{L} (T_c - T_f) \right].$$

Cette dernière inégalité est vérifiée lorsque la première l'est.

2.2.3 $T_c = 293\text{ K}$; $T_f = 273\text{ K}$; $I = 15\text{ A}$; $\lambda S/L = 10^{-2}\text{ W.K}^{-1}$; $R = 5.10^{-3}\ \Omega$ et $\epsilon_{np} = 6,5.10^{-4}\text{ V.K}^{-1}$

Efficacité de l'élément de réfrigérateur : $\eta = \frac{P_{th\ froid}}{P_m}$

$$\eta = \frac{\varepsilon_{np} T_f I - \frac{RI^2}{2} - \frac{\lambda S}{L} (T_c - T_f)}{RI^2 + \varepsilon_{np} (T_c - T_f) I}$$

$$\eta_{Carnot} = \frac{T_f}{T_c - T_f} \approx 13,65$$

A.N. : $P_{th \text{ froid}} = 1,90 \text{ W}$ $P_m = 1,32 \text{ W}$ d'où $\eta = 1,44 \ll \eta_{Carnot}$.

Il faut 27 éléments en série pour avoir $P_{th \text{ froid}} = 50 \text{ W}$.

PARTIE B- MECANIQUE DE QUELQUES SPORTS OU JEUX

1. Jeu de tables

1.1. Préliminaire

1.1.1 - Un référentiel galiléen est la réunion d'un repère spatial et d'un repère temporel, tels que par rapport à ce repère, le centre d'inertie de tout système soumis à des forces extérieures de somme nulle est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme (« principe d'inertie ») : la relation fondamentale est applicable.

- Un très bon référentiel galiléen est le référentiel de Copernic : il est constitué d'un repère d'origine le centre d'inertie du système solaire, dont les axes pointent vers trois étoiles fixes, et d'un repère de temps.

- Comme le centre de la Terre, origine du repère géocentrique, décrit dans le référentiel de Copernic, une trajectoire quasi-circulaire, le repère géocentrique est pratiquement en mouvement de translation circulaire : il n'est pas galiléen.

- Un référentiel terrestre est constitué d'un repère terrestre dont l'origine est située en un point de la Terre et dont les axes sont liés à la Terre, et d'un repère de temps : il n'est donc pas galiléen.

- Le repère terrestre est animé par rapport au référentiel géocentrique d'un mouvement de rotation autour de l'axe des pôles. Pour des expériences courantes, de durée et d'étendue géographique peu importantes, ce référentiel peut être considéré comme galiléen.

- Une balle de petites dimensions peut être assimilable à un point matériel si elle est assimilable à un solide dépourvu de mouvement de rotation propre dans son référentiel barycentrique.

1.1.2 La durée du choc étant très brève, on peut négliger la contribution des actions extérieures sur M_1 comme sur M_2 dans la variation de la quantité de mouvement de chacun des deux points matériels pendant la durée Δt du choc. On a par rapport à un référentiel galiléen (R) :

$$\begin{cases} \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = \int_0^{\Delta t} (\sum \vec{F}_{ext/1} + \vec{F}_{2/1}) dt \approx \int_0^{\Delta t} \vec{F}_{2/1} dt \\ \vec{p}'_2 - \vec{p}_2 = \int_0^{\Delta t} (\sum \vec{F}_{ext/2} + \vec{F}_{1/2}) dt \approx \int_0^{\Delta t} \vec{F}_{1/2} dt \end{cases}$$

Or, selon le principe des actions réciproques $\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$ pendant le choc, d'où :

$$\vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = -(\vec{p}'_2 - \vec{p}_2)$$

$$\implies (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2)_{\text{après le choc/R}} = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)_{\text{avant le choc/R}}$$

$$\text{D'où : } m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \quad (1)$$

1.1.3 Lors d'un choc élastique, il y a conservation de l'énergie cinétique du système des deux points matériels dans le référentiel galiléen d'étude R :

$$\text{On a donc : } \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\text{On en déduit : } m_1 (v_1'^2 - v_1^2) = -m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

$$m_1 (\vec{v}'_1 - \vec{v}_1)(\vec{v}'_1 + \vec{v}_1) = -m_2 (\vec{v}'_2 - \vec{v}_2)(\vec{v}'_2 + \vec{v}_2)$$

Comme, d'après (1) on a : $m_1 (\vec{v}'_1 - \vec{v}_1) = -m_2 (\vec{v}'_2 - \vec{v}_2)$, on en déduit la relation :

$$\vec{v}'_1 + \vec{v}_1 = \vec{v}'_2 + \vec{v}_2$$

$$\text{et } \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 = -(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \quad (2)$$

Cette relation (2) revient à écrire que la vitesse relative de M_1 par rapport à M_2 après le choc est opposée à celle avant le choc (et que la composante tangentielle relative, nulle avant le choc, se conserve).

1.1.4

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \\ \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2 = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ m_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 1 \\ -m_1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\vec{v}'_1 = (m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2 \\ (m_1 + m_2)\vec{v}'_2 = (m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1 \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{v}'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_2 \\ \vec{v}'_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 \end{cases}$$

1.1.5

$$\vec{v}_2 = \vec{0} \text{ et } m_1 = m_2 \implies \vec{v}'_1 = \vec{0} \text{ et } \vec{v}'_2 = \vec{v}_1$$

C'est ce que l'on appelle un « carreau » à la pétanque, pour un choc direct. Toute l'énergie cinétique de (1) est alors transférée à (2) dans ce cas.

$$\vec{v}_2 = \vec{0} \text{ et } m_2 \gg m_1 \implies \vec{v}'_1 = -\vec{v}_1 \text{ et } \vec{v}'_2 = \vec{0}$$

C'est le cas d'un rebond élastique sur un autre corps de masse très grande.

1.2 Choc de balles contre le sol

1.2.1 Par application du théorème de l'énergie cinétique dans (R) supposé galiléen :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_0 \implies \vec{v}_0 = -\sqrt{2gh_0} \vec{u}_z.$$

Par application du 2^{ème} cas du 1.1.5 on a donc $\vec{v}_1 = -\vec{v}_0 = \sqrt{2gh_0} \vec{u}_z$

Par application du théorème de l'énergie cinétique on a : $\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_1$

D'où : $h_1 = h_0$ la balle remonte à la même hauteur h_0 .

1.2.2 A t_0^- on a pour la grosse balle B₁ : $\vec{v}_0 = -\sqrt{2gh_0} \vec{u}_z$ avant le choc avec le sol

$$\vec{v}_1 = \sqrt{2gh_0} \vec{u}_z \text{ après le choc avec le sol}$$

A t_0^+ la petite balle a la vitesse : $\vec{v}_2 = -\sqrt{2gh_0} \vec{u}_z$ avant le choc avec B₁

Après le choc avec B₁ la petite balle B₂ a la vitesse \vec{v}'_2 , avec $m_2 \ll m_1$.

$$\vec{v}'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_2 \approx 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \text{ et donc : } \vec{v}'_2 \approx 3\sqrt{2gh_0} \vec{u}_z.$$

Par application du théorème de l'énergie cinétique on en déduit :

$$\frac{1}{2}m_2v'^2_2 = m_2gh_2 \implies h_2 = 9h_0$$

Ainsi la petite balle remonte, si le choc est bien direct, à neuf fois la hauteur initiale, si les

chocs sont bien élastiques. Dans le cas où les chocs ne sont pas tout à fait élastiques, l'expérience reste spectaculaire puisque la balle remonte à plusieurs fois la hauteur initiale.

2. Modélisation simplifiée d'un plongeur

2.1 Actions de pesanteur équivalentes au poids $\vec{P} = m\vec{g}$ appliqué en G.

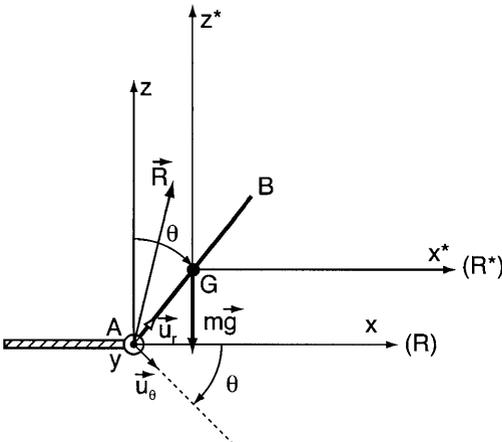
Actions de contact exercées par le plongeur équivalentes à \vec{R} appliqué en A.

On a : $\vec{AG} = l\vec{u}_r$ $\vec{v}_G = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$$\vec{a}_G = -l\dot{\theta}^2\vec{u}_r + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \begin{cases} a_n = -l\dot{\theta}^2 \\ a_t = l\ddot{\theta} \end{cases}$$

On a dans R galiléen : $m\vec{a}_G = m\vec{g} + \vec{R} \implies \begin{cases} -ml\dot{\theta}^2 = R_n - mg \cos \theta \\ ml\ddot{\theta} = R_t + mg \sin \theta \end{cases}$

$$\implies \begin{cases} R_n = mg \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \\ R_t = ml\ddot{\theta} - mg \sin \theta \end{cases}$$



2.2.1 D'après le théorème de Huygens on a : $J_{Ay} = J_{Gy} + ml^2 = \frac{4ml^2}{3}$

Energie cinétique du plongeur : $E_k = \frac{1}{2} J_{Ay} \dot{\theta}^2 = \frac{2ml^2}{3} \dot{\theta}^2$

Energie potentielle du plongeur : $E_p = mg(z_G - l) = -mgl(1 - \cos \theta)$

Tant qu'il y a contact en A, il y a conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = E_k + E_p = \frac{2ml^2}{3} \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) = 0 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2l} (1 - \cos \theta)$$

D'où : $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{2l} (1 - \cos \theta)}$ et $2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l} \sin \theta \cdot \dot{\theta}$

D'où : $\ddot{\theta} = \frac{3g}{4l} \sin \theta$.

2.3

$$\begin{cases} R_n = mg \cos \theta - \frac{3mg}{2} (1 - \cos \theta) \\ R_t = -mg \sin \theta + \frac{3mg}{4} \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_n = \frac{5mg}{2} \cos \theta - \frac{3mg}{2} \\ R_t = -\frac{mg}{4} \sin \theta \end{cases}$$

On trouve $R_t < 0$ qui s'oppose au mouvement. Le modèle n'est valable que pour $R_n \geq 0$, tant qu'il y a contact en A : on a bien $R_n > 0$ au début du mouvement.

Il y a perte de contact pour $R_n = 0$, soit pour $\theta = \theta_1 = \arccos 3/5 = 53^\circ = 0,927 \text{ rad}$

Lors d'un plongeon réel, le plongeur est un système déformable : il plie ses jambes avant de plonger, puis fournit un travail de ses actions intérieures pour augmenter son appui sur le plongoir (c'est à partir de l'énergie chimique libérée par certaines liaisons de l'ATP, adénosine triphosphate, que peuvent s'effectuer les processus de consommation d'énergie chimique dans l'organisme et ainsi faire travailler les muscles).

2.4 On a $\cos \theta_1 = 3/5$ et $\sin \theta_1 = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ $\dot{\theta}_1 = \sqrt{\frac{3g}{2l} (1 - \cos \theta_1)}$

D'où $\dot{\theta}_1 = \sqrt{\frac{3g}{5l}}$ $\begin{cases} x_1 = l \sin \theta_1 = \frac{4l}{5} \\ z_1 = l \cos \theta_1 = \frac{3l}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = l \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{3}{5}} gl \\ \dot{z}_1 = -l \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 = -\frac{4}{5} \sqrt{\frac{3}{5}} gl \end{cases}$

A.N. $\dot{\theta}_1 \approx 2,43 \text{ rad/s}$ $\begin{cases} x_1 = 80 \text{ cm} \\ z_1 = 60 \text{ cm} \end{cases}$ $\begin{cases} \dot{x}_1 = 1,46 \text{ m.s}^{-1} \\ \dot{z}_1 = -1,94 \text{ m.s}^{-1} \end{cases}$ $\|\vec{v}_1\| = 2,43 \text{ m.s}^{-1}$

2.5 Dès que le contact avec le plongoir cesse, le plongeur n'est plus soumis qu'à l'action de

la pesanteur, donc à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ appliqué en son centre d'inertie G.

Le référentiel barycentrique R^* est un référentiel en mouvement de translation par rapport à R supposé galiléen et animé de la vitesse $\vec{v}_{(G)}$ égale à celle du centre d'inertie de la barre. Comme le mouvement de G n'est pas un mouvement rectiligne et uniforme, le référentiel barycentrique n'est pas galiléen (pour repère barycentrique on prend le repère $Gx^*y^*z^*$ où les axes Gx^* , Gy^* et Gz^* sont parallèles à ceux de R).

Dans le référentiel barycentrique, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique propre est égale à la somme des moments en G des actions extérieures.

$$\left(\frac{d\vec{L}^*}{dt}\right)_{/R^*} = \sum \vec{M}_{Gext} \quad \text{or ici } \sum \vec{M}_{Gext} = \vec{0} \text{ puisque } m\vec{g} \text{ est appliqué en G.}$$

D'où $\vec{L}^* = cte$

Comme $\vec{L}^* = J_{Gy} \dot{\theta} \vec{e}_y$, on en déduit $J_{Gy} \dot{\theta} = Cte \Rightarrow \dot{\theta} = cte = \dot{\theta}_1$.

Le mouvement de rotation propre du plongeur est donc uniforme $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{5l}}$.

Comme lors d'un plongeon réel, le plongeur se ramasse en boule, son moment d'inertie par rapport à l'axe Gy , $J_{Gy} = \sum m_i r_i^2$ diminue, puisque les distances r_i par rapport à l'axe de rotation de chaque partie du corps diminuent. La conservation du moment cinétique propre \vec{L}^* fait que sa vitesse angulaire de rotation $\dot{\theta}$ augmente.

2.6 Le théorème du centre d'inertie dans le référentiel galiléen R donne :

$$m\vec{a}_G = m\vec{g} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_G = 0 \\ \ddot{z}_G = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x}_1 = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}gl \\ \dot{z}_G = -gt' + \dot{z}_1 = -gt' - \frac{4}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}gl \end{cases}$$

$$D'où : \begin{cases} x_G = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}gl t' + \frac{4l}{5} \\ z_G = -\frac{1}{2}gt'^2 - \frac{4}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}gl t' + \frac{3l}{5} \end{cases}$$

Lorsque le plongeur atteint l'eau on a : $\theta_2 = \pi$ rad, B est en bas.

On a $\theta(t) = \theta_1 + \dot{\theta}_1 t'$ soit $\theta(t) = \theta_1 + \sqrt{\frac{3g}{5l}} t'$

Durée du plongeon : $\Delta t' = \frac{\pi - \theta_1}{\sqrt{3g/5l}}$ A.N. : $\Delta t' = 913$ ms.

$z_{B_2} = z_G(\Delta t') - l = -\frac{1}{2} g \Delta t'^2 - \frac{4}{5} \sqrt{\frac{3}{5}} g l \Delta t' - \frac{2l}{5}$ A.N. : $z_{B_2} = -6,26$ m.

En suivant cette « technique » de plongeon, on a toutes les chances de faire un « plat » en entrant dans l'eau si la hauteur du plongeur est inférieure de 5 m de haut ! Tout l'art du plongeur est dans le travail des actions intérieures, tant pour prendre son appel lorsque la hauteur du plongeur est faible qu'au cours de la chute libre pour se ramasser en boule et tourner juste de l'angle qu'il faut pour rentrer dans l'eau.

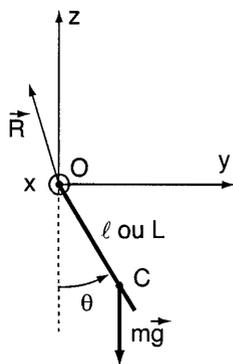
3. Mouvement d'une balançoire

3.1 Le système n'est pas un solide puisqu'il est déformable. Il existe d'ailleurs un travail des actions intérieures à chaque fois que l'enfant se lève ou s'accroupit.

Le système est soumis à l'action de la pesanteur équivalente au poids $\vec{P} = m\vec{g}$ appliqué au point C, et à la réaction \vec{R} de l'axe appliquée en O.

Le moment cinétique σ_x par rapport à l'axe Ox vaut : pour $OC = l$ $\sigma_x = ml^2 \dot{\theta}$

ou $\sigma_x = mL^2 \dot{\theta}$ pour $OC = L$.



L'énergie potentielle vaut $E_p = -mg(z_C - L)$

D'où : $E_p = mgL(1 - \cos\theta) = 2mgL \sin^2 \frac{\theta}{2}$ pour $OC = L$

ou $E_p = mgL - mgl \cos\theta = mg(L - l) + mgl(1 - \cos\theta)$

D'où : $E_p = -mg(L - l) + 2mgl \sin^2 \frac{\theta}{2}$ pour $OC = l$.

3.2 Comme il n'y a pas de frottement ni de travail des actions intérieures, l'énergie mécanique se conserve entre la position (0) et la position (1) pour laquelle $\theta_1 = 0$.

$$E_m = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 + 2mgL \sin^2 \frac{\theta}{2} = \text{Cte entre (0) et (1)}$$

D'où : $2mgL \sin^2 \frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}_1^2 \Rightarrow \dot{\theta}_1^2 = \frac{4g}{L} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \Rightarrow \dot{\theta}_1 = -2\sqrt{\frac{g}{L}} \sin \frac{\theta_0}{2}$

3.3 Le théorème du moment cinétique en O appliqué au système déformable dans (R) galiléen donne :

$$\frac{d\overline{\sigma}_O}{dt} = \overline{M}_O(\text{actions extérieures}) = \overline{OC} \wedge \overline{mg}$$

Entre (1) et (2) le moment des actions de pesanteur reste nul et $\overline{\sigma}_O$ se conserve.

On a donc $\sigma_x = \text{cte} \Rightarrow ml^2 \dot{\theta}_2 = mL^2 \dot{\theta}_1 \Rightarrow \dot{\theta}_2 = \frac{L^2}{l^2} \dot{\theta}_1$

$$\dot{\theta}_2 = -2\frac{L^2}{l^2} \sqrt{\frac{g}{L}} \sin \frac{\theta_0}{2}.$$

3.4 Entre (2) et (3) l'énergie mécanique se conserve :

$$E_m = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mg(L - l) + 2mgl \sin^2 \frac{\theta}{2} = \text{cte}$$

Comme $\dot{\theta}_3 = 0$ pour $\theta = \theta_3$, on a $\frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_2^2 = 2mgl \sin^2 \frac{\theta_3}{2}$

D'où $\sin^2 \frac{\theta_3}{2} = \frac{l}{4g} \dot{\theta}_2^2 = \frac{l}{4g} \frac{L^4}{l^4} \frac{4g}{L} \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$

$$\sin \frac{\theta_3}{2} = -\sqrt{\frac{L^3}{l^3}} \sin \frac{\theta_0}{2}$$

On a $\dot{\theta}_4 = 0$ et $\theta_4 = \theta_3$.

$$3.5 \quad E_m = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2 + 2mgL \sin^2 \frac{\theta}{2} = \text{cte entre (4) et (5)}$$

$$\frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}_5^2 = 2mgL \sin^2 \frac{\theta_4}{2}$$

$$\dot{\theta}_5^2 = 4 \frac{g}{L} \sin^2 \frac{\theta_4}{2} \Rightarrow \dot{\theta}_5 = 2 \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{\frac{L^3}{l^3}} \sin \frac{\theta_0}{2}$$

Entre (5) et (6) on a : $mL^2 \dot{\theta}_5 = ml^2 \dot{\theta}_6$ (conservation de σ_x)

$$\Rightarrow \dot{\theta}_6 = \frac{L^2}{l^2} \dot{\theta}_5 = 2 \frac{L^2}{l^2} \sqrt{\frac{g}{L}} \sqrt{\frac{L^3}{l^3}} \sin \frac{\theta_0}{2}$$

$$3.6 \quad E_m = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mg(L-l) + 2mgl \sin^2 \frac{\theta}{2} = \text{cte entre (6) et (7)}$$

$$\text{D'où } \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}_6^2 = 2mgl \sin^2 \frac{\theta_7}{2} \quad \text{et } \theta_8 = \theta_7$$

$$\sin^2 \frac{\theta_8}{2} = \frac{l}{4g} \dot{\theta}_6^2 = \frac{L^6}{l^6} \sin^2 \frac{\theta_0}{2}$$

D'où $\sin \frac{\theta_8}{2} = \frac{L^3}{l^3} \sin \frac{\theta_0}{2}$: l'amplitude θ_8 est plus grande que θ_0 .

L'oscillateur est dit paramétrique car on fait varier un paramètre de l'oscillateur, la longueur OC, avec une période double de celle de l'oscillateur.

C'est le travail des actions intérieures, de l'enfant qui déplace son centre de gravité entre (1) et (2) puis entre (3) et (4) qui fournit l'énergie à l'oscillateur et assure l'entretien des oscillations.

$$3.7 \quad \text{Entre (0) et (1) : } E_m = \text{cte ; } \dot{\theta}^2 = \frac{4g}{L} \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

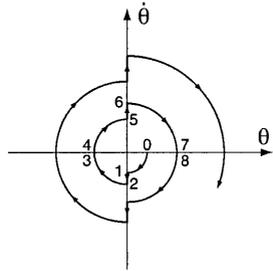
Entre (1) et (2) : $\theta = \text{cte}$ et $\dot{\theta}$ augmente

$$\text{Entre (2) et (3) : } E_m = \text{cte ; } \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{l}{4g} \left(\dot{\theta}_2^2 - \dot{\theta}^2 \right)$$

Entre (3) et (4) : θ et $\dot{\theta}$, qui est nul, restent continus.

Petit à petit l'amplitude des oscillations va croissant à chaque période de l'oscillateur.

L'existence de frottements va limiter l'amplitude des oscillations, comme on peut le constater en regardant un enfant qui se balance sur une balançoire.



Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉES

Composition d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique ♦ Session : 2002

Partie I

I.1.1. $\Omega_{r0} = \pi N_p / 30 = 754 \text{ rad/s}$; $\Omega_{l0} = 25,1 \text{ rad/s}$

I.1.2. $C_{fm} = kI_m = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$; $C_{rM} = kI_M = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$; $C_{f\text{moy}} = 1,95 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$

I.1.3. $U_r = k\Omega_{r0} + R_m I_{\text{moy}} = 11,6 \text{ V}$; $U_l = 2,13 \text{ V}$

I.1.4. Mode rapide : $\Omega_{rm} = (U_r - R_m I_m) / k = 800 \text{ rad/s}$; $\Omega_{rM} = 708 \text{ rad/s}$

Mode lent : $\Omega_{lm} = 71,5 \text{ rad/s}$; $\Omega_{lM} = 0$ (un couple de frottement ne peut inverser le sens de rotation)

I.1.5. En mode lent, la variation relative de vitesse est beaucoup trop grande : on passe de l'arrêt à trois fois la vitesse souhaitée.

I.2.1 Millman : $V_- = \frac{\frac{u_e + u_s}{R_1} + \frac{u_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = V_+ = R_4 i \Rightarrow u_s = -\frac{R_2}{R_1} u_e + R_4 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3} \right) i$

I.2.2 $\Omega = [u_s - (R_4 + R_m)I] / k$ et $I = C_f / k$ d'où $\Omega = \frac{1}{k} \left[-\frac{R_2}{R_1} u_e + R_4 \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3} - \frac{R_m}{R_4} \right) \frac{C_f}{k} \right]$ I.2.3

$\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3} = \frac{R_m}{R_4}$ soit $R_{3a} = 8,34 \text{ k}\Omega$

I.2.4 Posons : $R_{eq} = \left(\frac{R_m}{R_4} - \frac{R_2}{R_1} - \frac{R_2}{R_3} \right) R_4 = 0,63 \Omega$ alors $u_e = -\frac{R_1}{R_2} (k\Omega + R_{eq} i)$

Vitesse lente et $i = 0,15 \text{ A}$; $u_e = -0,28 \text{ V}$ et $u_s = 2,46 \text{ V}$

I.2.5. * Lorsque le couple est égal à C_{fm} , $i = 0,1 \text{ A}$ d'où $\Omega = 27,5 \text{ rad/s}$ et $u_s = 1,78 \text{ V}$

* Lorsque le couple est égal à C_{rM} , $i = 0,2 \text{ A}$ d'où $\Omega = 22,7 \text{ rad/s}$ et $u_s = 3,13 \text{ V}$

I.2.6 La variation de vitesse est inférieure à 10% ($\pm 2,4 \text{ rad/s}$ soit 9,5%) donc le cahier des charges est respecté. Lorsque le couple de frottement augmente, la réaction sur l'entrée + fait augmenter u_s et compense partiellement la chute de tension $R_m I$ dans le moteur.

I.3.1 $U_s(p) = -\frac{R_2}{R_1} U_e(p) + R_4 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3} \right) I(p)$ d'où $\alpha = -\frac{R_2}{R_1}$ et $\beta = R_4 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3} \right)$

I.3.2 $J \frac{d\Omega}{dt} = ki - C_f$ et $u_s = k\Omega + (R_m + R_4) i + L_m \frac{di}{dt}$ on pose $R = R_4 + R_m = 14,2 \Omega$

En variable p : $Jp\Omega(p) = kI(p) - C_f(p)$ et $U_s(p) = k\Omega(p) + (R + L_m p)I(p)$

$$\text{Soit : } I(p) = \frac{U_s(p)}{\frac{k^2}{Jp} + R + L_m p} + \frac{\frac{k}{Jp} C_f(p)}{\frac{k^2}{Jp} + R + L_m p}$$

$$\text{I.3.3 } G_1(p) = \frac{\frac{Jp}{k^2}}{1 + \frac{RJp}{k^2} + \frac{L_m Jp^2}{k^2}} \text{ d'où } \omega_0 = \frac{k}{\sqrt{L_m J}} = 1108 \text{ rad/s} \quad m = \frac{R_m + R_4}{2k} \sqrt{\frac{J}{L_m}} = 11,6$$

$$\text{Et } G_{10} = \frac{1}{R_m + R_4} = 0,07 \text{ A/V}$$

$$\text{I.3.4 } G_2(p) = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{RJp}{k^2} + \frac{L_m Jp^2}{k^2}} \text{ soit } G_2(p) = \frac{G_{20}}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \text{ avec } G_{20} = \frac{1}{k}$$

$$\text{I.3.5 } I(p) = \frac{\alpha G_1(p)}{1 - \beta G_1(p)} U_e(p) + \frac{G_2(p)}{1 - \beta G_1(p)} C_f(p)$$

$$\text{I.3.6 } G'_1(p) = \frac{\alpha G_{10} 2m \frac{p}{\omega_0}}{1 + 2m(1 - \beta G_{10}) \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \text{ soit } \omega'_0 = \omega_0 ; m' = m(1 - \beta G_{10}) ; G'_{10} = \frac{\alpha G_{10}}{1 - \beta G_{10}}$$

$$\text{I.3.7 } G'_2(p) = \frac{G_{20}}{1 + 2m' \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\text{I.3.8 } \omega'_0 = 1108 \text{ rad/s} \quad m' = 0,52 \quad G'_{10} = 2,35 \text{ A/V}$$

I.3.9 a) si $m' = 0$, le système devient un oscillateur de pulsation ω'_0 ; condition $\beta G_{10} = 1$

(on peut aussi utiliser le critère de Barkhausen sur la transmittance de boucle)

On retrouve $R_3 = R_{3a} = 8,34 \text{ k}\Omega$

b) la fréquence des oscillations est $f_0 = 176 \text{ Hz}$

c) Le système est stable si $R_3 > R_{3a}$; lorsque la variation de vitesse due au couple résistant est nulle, le système est instable.

I.3.10 a) C_f est une grandeur continue ; la composante alternative de i_n est lié qu'à celle de u_s par :

$$I(j\omega_0) = G_1(j\omega_0) U_s(j\omega_0) \quad \text{soit} \quad \hat{i}_a = G_{10} \hat{u}_{sa} = 0,07 \hat{u}_{sa}$$

b) Si on sature en tension : $\hat{u}_{sa} = U_{s\max} - U_{s0} = 12 - 2,46 = 9,54 \text{ V}$ alors $\hat{i}_a = 0,67 \text{ A}$

donc on sature en courant : $\hat{i}_a = I_{\max} - I_{\text{moy}} = 0,5 - 0,15 = 0,35 \text{ A}$ d'où $\hat{u}_{sa} = 5 \text{ V}$

c) $J \frac{d\Omega}{dt} = ki - C_f$ avec C_f grandeur continue ; les composantes sinusoïdales sont donc liées par :

$$Jj\omega_0 \Omega(j\omega_0) = kI(j\omega_0) \quad \text{donc} \quad \hat{\Omega}_a = \frac{k\hat{i}_a}{J\omega_0} = 16,4 \text{ rad/s}$$

d) Il faut faire la somme des composantes continues

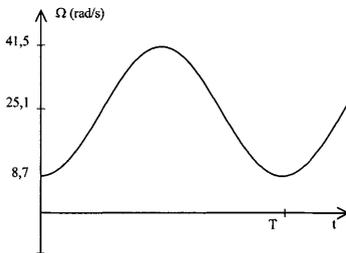
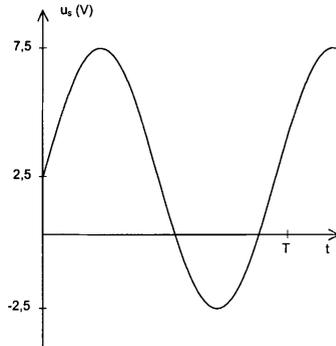
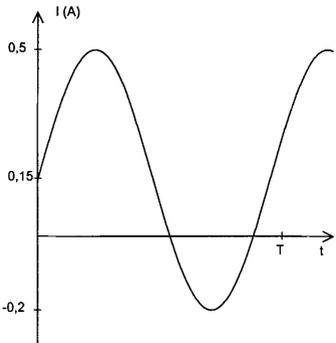
($U_{s0} = 2,46 \text{ V}$; $I_0 = 0,15 \text{ A}$; $\Omega_0 = 25 \text{ rad/s}$)

et des composantes alternatives ;

la vitesse reste positive, le couple de frottement est donc bien continu.

La composante alternative de Ω est en retard de $\pi/2$ sur celles de i et u_s .

La période est $T = 1/f_0 = 5,7 \text{ ms}$.



e) $P = P_0 + P_a$ (puissance en continu + puissance de la composante sinusoïdale)

$$P = U_{s0} I_0 + \frac{\hat{u}_{sa} \hat{i}_a}{2} = 1,24 \text{ W}$$

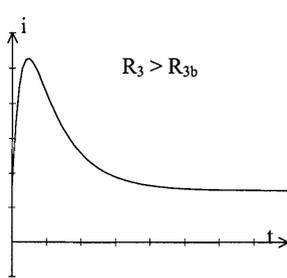
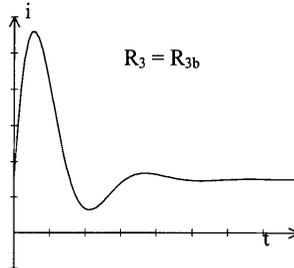
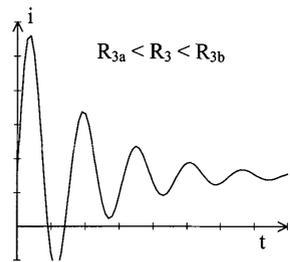
f) $P' = R_m \left(I_0^2 + \frac{\hat{i}_a^2}{2} \right) = 1 \text{ W}$ c'est la même puissance que dissiperait un courant continu $I = 0,29 \text{ A}$.

Le courant nominal du moteur étant égal à $0,3 \text{ A}$, cela ne doit pas entraîner une détérioration du moteur.

I.3.11 * Le courant ne peut pas varier instantanément à cause de l'inductance donc $i(0^+) = 0,15 \text{ A}$

* Le courant en régime établi est $i(\infty) = C_{fmoy}/k = 0,15 \text{ A}$

I.3.12

Régime aperiodique ($m > 1$)Régime légèrement
pseudopériodique ($m = 0,52$)Régime pseudopériodique
($0 < m < 0,5$)

Pour régler R_3 , on applique en entrée une tension en créneaux (avec une composante continue) de fréquence suffisamment basse ; on observe $i(t)$ en mettant un oscilloscope aux bornes de R_4 . Il suffit de régler R_3 de façon à obtenir le chronogramme du milieu.

I.3.13 La fréquence propre étant $f_0 = 176$ Hz très inférieure à 1 MHz, il est justifié de négliger le pôle introduit par l'aop.

Partie II

II.1 Le montage est un demi-pont en H car les transistors fonctionnent en commutation ; dans un amplificateur en classe B, T_1 serait un MOS à canal n.

II.2 T_1 est un MOS à canal p car la flèche part du canal (sens p vers n)

II.3 T_1 est un MOS à enrichissement car le canal est représenté en « pointillés » ; le canal n'existe pas quand la tension de commande est nulle.

II.4 La durée de commutation est lié au temps de charge de la capacité C_{GS} ,

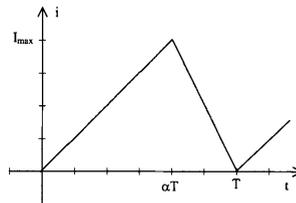
soit une constante de temps $\tau = R_{TH}C_{GS}$; plus la résistance interne de la source, R_{TH} , est faible, plus les durées de commutation seront courtes.

II.5 Lorsque $u_2 = -V_{cc}$, T_1 est passant donc $u_3 = +V_{cc}$ donc $\langle u_3 \rangle = (2\alpha - 1)V_{cc}$

II.6 $\langle u_4 \rangle = U_4 = k\Omega_1 + R_m I_{moy} = 2,13$ V ; or $\langle u_3 \rangle = \langle u_4 \rangle$ car la tension moyenne aux bornes d'une bobine est nulle en régime périodique d'où $\alpha = 0,59$

II.7 $I_{moy} = C_{fmoy}/k = 0,15$ A

Donc $I_{max} = 0,3$ A et $I_{min} = 0$

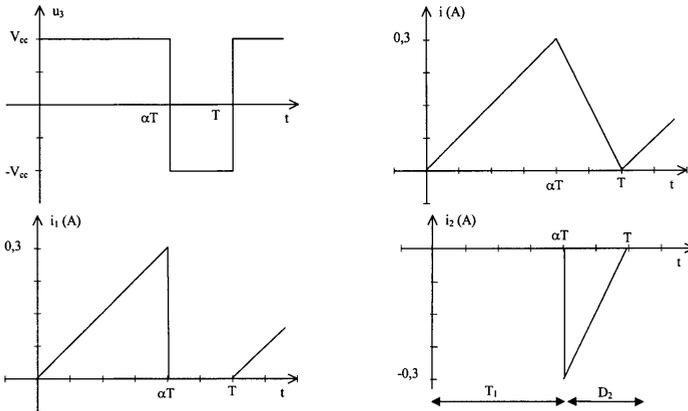


II.8 De $t = 0$ à $t = \alpha T$:

$$u_3 = +V_{cc} = L \frac{di}{dt} + U_4 \text{ soit } \frac{di}{dt} = \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{V_{cc} - U_4}{L} \text{ avec } \Delta i = 0,3 \text{ A ; } \Delta t = \alpha T = 0,68 * 256 \mu\text{s}$$

$$U_4 = 2,13 \text{ V d'où } \boxed{L = 4,95 \text{ mH}}$$

II.9



II.10 Si la valeur de L est plus faible, l'allure de i reste la même mais le courant change de signe ; il y aura conduction successive de D_1, T_1, D_2, T_2 .

II.11 Alim + V_{cc} : $P_1 = V_{cc} \langle i_1 \rangle = V_{cc} \alpha I_{moy} = 1,06 \text{ W}$

Alim - V_{cc} : $P_2 = V_{cc} \langle i_2 \rangle = -0,74 \text{ W}$; l'alimentation négative reçoit de la puissance ; elle doit donc être réversible.

- II.12 Le condensateur C_2 se chargerait à courant constant ($\langle i_2 \rangle$) pendant toute la durée du fonctionnement à vitesse lente ; conséquences :
La tension $-V_{cc}$ ne serait pas fixe mais deviendrait de plus en plus grande en valeur absolue
- Il y aurait destruction du régulateur.

II.13 Si on inverse les bornes du moteur, le fonctionnement en vitesse lente se fera avec $\alpha = 1 - 0,68 = 0,41$; c'est l'alimentation positive qui fonctionnera en récupération ; mais comme elle fournit par ailleurs une puissance égale à 2W , elle fournira globalement une puissance positive ($2\text{W} - 0,74\text{W} = 1,26\text{W}$) ; elle n'a donc pas besoin d'être réversible.

En sens inverse, la vitesse est toujours maximale ; on aura donc un fonctionnement avec $\alpha = 1$, aucune alimentation ne fonctionne en récupération.

Partie III

III.1 En régime établi, le courant i est lié au couple de frottement par $C_f = ki$; or les valeurs du courant en régime établi sont les mêmes ($0,15 \text{ A}$) lorsque la vitesse vaut 158 rad/s ou 325 rad/s ; le couple de frottement est donc indépendant de la vitesse ; or un frottement fluide est proportionnel à la vitesse ; le frottement fluide est donc négligeable.

III.2 à $t_1 = 0^-$: $u_1 = k\Omega_1 + Ri_1 + 0$ ($Ldi/dt = 0$) de même à $t \rightarrow \infty$ $u_2 = k\Omega_2 + Ri_2$ et $i_1 = i_2$

$$D'où : k = \frac{u_2 - u_1}{\Omega_2 - \Omega_1} = \frac{6 - 4}{325 - 158} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ V.s.rad}^{-1}$$

$$R = \frac{u_1 - k\Omega_1}{i_1} = 14,05\Omega \approx 14\Omega \quad C_f = ki = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$$

III.3.1 Les équations régissant le système étudié se ramènent à :

$$u_3 = k\Omega + Ri + L \frac{di}{dt} \quad \text{et} \quad J \frac{d\Omega}{dt} = ki - C_f$$

Si on néglige L, il n'y a plus qu'une dérivée, c'est donc un système d'ordre 1.

III.3.2 $J \frac{d\Omega}{dt} = \frac{k}{R}(u_3 - k\Omega) - C_f$; l'équation différentielle régissant $\Omega(t)$ est donc :

$$\boxed{\frac{JR}{k^2} \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{u_3}{k} - \frac{RC_f}{k^2}} \quad \text{c'est un passe-bas d'ordre 1 de constante de temps } \tau_1 = \frac{JR}{k^2}$$

III.3.3 La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$\Omega = \Omega_{\text{initial}} + (\Omega_{\text{final}} - \Omega_{\text{initial}}) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right); \text{ en utilisant les données de la figure 7, la vitesse}$$

est égale à 242 rad/s à l'instant $t = 14$ ms, on en déduit

$$\boxed{\tau_1 = \frac{-t}{\ln\left(\frac{325-242}{325-158}\right)} = 20\text{ms}}$$

III.4.1 De $u_3 = k\Omega + Ri + L \frac{di}{dt}$ et $J \frac{d\Omega}{dt} = ki - C_f$, on peut tirer une relation entre les transformées de Laplace des variations (C_f s'élimine puisque c'est une grandeur continue) :

$$\Delta U_3(p) = k\Delta\Omega(p) + (R + Lp)\Delta I(p) \quad \text{et} \quad Jp\Delta\Omega(p) = k\Delta I(p) \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{H_1(p) = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{JRp}{k^2} + \frac{JLp^2}{k^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{H_2(p) = \frac{\frac{Jp}{k^2}}{1 + \frac{JRp}{k^2} + \frac{JLp^2}{k^2}}}$$

III.4.2 Il faut que les racines du dénominateur soient réelles soit $b^2 - 4ac > 0$

$$\text{Donc } \left(\frac{JR}{k^2}\right)^2 > 4 \frac{JL}{k^2} \quad \text{ou} \quad \frac{JR}{k^2} > 4 \frac{L}{R}$$

Il faut que la constante de temps « mécanique » soit au moins 4 fois plus grande que la constante de temps « électrique », ce qui est généralement le cas.

$$\boxed{(\tau_1 + \tau_2) = \frac{JR}{k^2}}$$

et

$$\boxed{\tau_1 \tau_2 = \frac{JL}{k^2}}$$

$$\text{III.4.3 } \Delta I(p) = H_2(p) \frac{\Delta U_3}{p} = \frac{\Delta U_3}{R} \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

En décomposant en éléments simples, il vient :

$$\Delta I(p) = \frac{\Delta U_3}{R} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \left(\frac{1}{p + \frac{1}{\tau_1}} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_2}} \right) \quad \text{D'où : } \boxed{\Delta i(t) = \frac{\Delta U_3}{R} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)}$$

III.4.4 a) et b) Lorsque $i = I_{\text{max}}$, la dérivée de $\Delta i(t)$ est nulle, l'instant t vérifie donc l'équation :

$$\frac{1}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} = \frac{1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad \text{soit :} \quad e^{-\frac{t}{\tau_2}} = \frac{\tau_2}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} = \frac{1}{x} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

En reportant dans l'expression de $\Delta i(t)$, il vient :

$$\Delta I_{\text{max}} = \frac{\Delta U_3}{R} \frac{x+1}{x-1} \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad \text{et} \quad \Delta I_{\text{max}} = \frac{\Delta U_3}{R} \frac{x+1}{x-1} (x-1) e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

D'où $A = \frac{x+1}{x} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ et $A = (x+1)e^{-\frac{t}{\tau_2}}$

D'où $\ln A = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{t}{\tau_1}$ et $\ln A = \ln(x+1) - \frac{t}{\tau_2}$

Soit $\left[\ln A - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \right] \tau_1 = [\ln A - \ln(x+1)] \tau_2$

Donc $x \left[\ln A - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \right] = [\ln A - \ln(x+1)] \tau_2$ $(x-1) \ln A = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln(x+1)$

$$\ln A = \ln(x+1) - \frac{x}{x-1} \ln x$$

ou

$$\ln A = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{\ln x}{x-1}$$

Ce type d'équation ne peut être résolu que de manière approchée avec un solveur d'équation.

c) d'après les relevés de la figure 6 : $A = 0,896$ donc $\ln A = -0,11$
 pour $x = 20$, le deuxième membre de l'équation vaut $-0,109$; $x = 20$ est donc une solution approchée.

d) on en déduit $\tau_2 = 1$ ms

e) si I_{\max} mesuré varie de $\pm 2\%$, on obtient $I_{\max} = 283,6$ mA soit $\Delta I_{\max} = 133,6$ mA donc $\ln A = -0,067$
 soit une valeur de x entre 40 et 50, donc τ_2 entre 0,4 et 0,5 ms

Une erreur de mesure de 2% entraîne une variation du simple au double de la valeur de τ_2 !

III.4.5 a) $\tau_1 \gg \tau_2$ donc pour $t > 3\tau_2$, $e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ est négligeable devant $e^{-\frac{t}{\tau_1}}$

Donc $\Delta i(t) \approx \frac{\Delta U_3}{R} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$

b) $\ln(\Delta i) \approx \ln\left(\frac{\Delta U_3}{R} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 - \tau_2}\right) - \frac{t}{\tau_1}$ donc $B = \ln\left(\frac{\Delta U_3}{R} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 - \tau_2}\right)$ et $C = -\frac{1}{\tau_1}$

c) seules les 4 dernières valeurs satisfont à la condition $t > 3\tau_2$; l'exploitation de ces valeurs conduit aux résultats suivants :

t (ms)	5	10	20	30
$\ln(\Delta i)$	-2,103	-2,343	-2,847	-3,352
$\frac{\ln(\Delta i_2) - \ln(\Delta i_1)}{t_2 - t_1}$		-48	-50,4	-50,4

On en déduit : $C \approx 50$ d'où $\tau_1 = 20$ ms (ce qui est conforme à l'identification faite au III.3.3)
 et $B \approx -1,84$ ce qui donne $x = 19$ soit $\tau_2 = 1,05$ ms

d) si les valeurs mesurées de i varient de +2% :

t (ms)	5	10	20	30
i (mA)	277	251	212	189
Δi (mA)	127	101	62	39
$\ln(\Delta i)$	-2,06	-2,293	-2,778	-3,252
$\frac{\ln(\Delta i_2) - \ln(\Delta i_1)}{t_2 - t_1}$		-47	-48,5	-47,4

D'où $C \approx 48$ soit $\tau_1 \approx 21$ ms et $B \approx -1,81$ soit $x \approx 15$ et $\tau_2 \approx 1,4$ ms

La variation sur la détermination de τ_2 est de 35 % ; un peu moins si on garde la valeur de τ_1 mesurée précédemment (20 ms) ; d'autre part, on peut améliorer sans doute la précision en mesurant plus de points.

III.4.6 La deuxième méthode est moins sensible aux erreurs de mesure

$$\text{III.5 } J = \frac{(\tau_1 + \tau_2)k^2}{R} = \frac{21 \cdot 10^{-3} \times (12 \cdot 10^{-3})^2}{14} = 2,16 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^2$$

$$\text{Et } \frac{L}{R} = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \text{ d'où } L = 13,3 \text{ mH}$$

Partie IV

$$\text{IV.1.1 } Y(z) = \frac{T_0(1-A)}{z-A} X(z) \quad \text{soit} \quad Y(z)(1-Az^{-1}) = T_0(1-A)z^{-1}X(z)$$

$$\text{D'où : } \boxed{y(n) = Ay(n-1) + T_0(1-A)x(n-1)}$$

IV.1.2 Ordre 1

IV.1.3. a) Si l'entrée est un échelon, la transformée en z de la sortie s'écrit :

$$Y(z) = \frac{T_0(1-A)}{z-A} \frac{z}{z-1} \text{ qui peut se décomposer en « éléments simples » sous la forme :}$$

$$Y(z) = \frac{a_1 z}{z-A} + \frac{a_2 z}{z-1} = \frac{(a_1 z)(z-1) + (a_2 z)(z-A)}{(z-A)(z-1)}$$

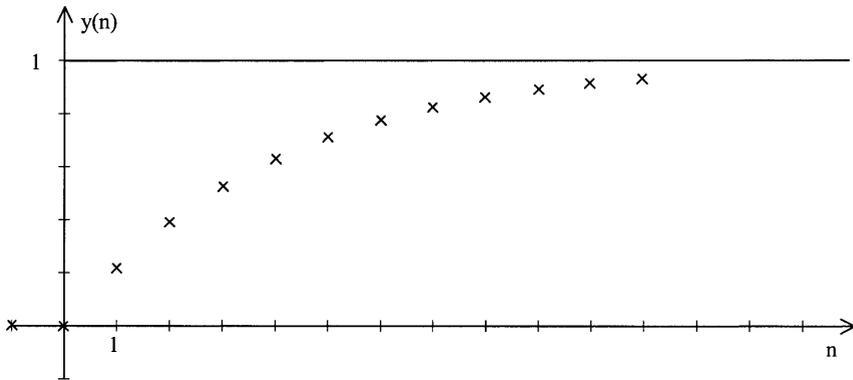
$$\text{Soit, en identifiant : } a_1 + a_2 = 0 \quad -a_1 - Aa_2 = T_0(1-A)$$

$$a_2 = T_0 \text{ et } a_1 = -T_0 \text{ donc } Y(z) = -T_0 \frac{z}{z-A} + T_0 \frac{z}{z-1}$$

$$\text{b) } \{y(n)\} = \{T_0 u(n)\} - \{T_0 A^n u(n)\} = \{T_0(1-A^n)u(n)\}$$

c)

n	0	1	2	3	4			∞
$y(n)$	0	0,22	0,39	0,53	0,63			1



IV.1.4 La réponse indicielle d'un passe-bas d'ordre 1 de transmittance statique T_0 et de constante de temps

$$\tau \text{ est : } y(t) = T_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ soit } y(nT_c) = T_0 \left(1 - e^{-\frac{nT_c}{\tau}} \right) = T_0 (1 - A^n) \text{ avec } \boxed{A = e^{-\frac{T_c}{\tau}}}$$

IV.2.1 D'après le III, le moteur, système d'entrée u_3 et de sortie Ω , est un passe-bas d'ordre 2 avec deux constantes de temps τ_1 et τ_2 ; or, $\tau_2 = 1 \text{ ms} < T_c = 5 \text{ ms}$; il est donc légitime de faire l'approximation d'un passe-bas d'ordre 1 avec la constante de temps τ_1 ; par ailleurs, il y a une relation de proportionnalité entre e_c et u_3 ; le système d'entrée $e_c(n)$ et de sortie $\Omega(n)$ peut être modélisé par une transmittance passe-bas d'ordre 1 telle que celle qui a été étudiée dans le IV.1

IV.2.2 D'après la partie III, $H_1(p) = \frac{\Omega(p)}{U_3(p)} = \frac{1}{1 + p\tau_1}$; d'autre part, lorsque e_c varie entre -512 et $+511$ (10

bits), le rapport cyclique α varie entre 0 et 1, u_3 varie entre $-V_{cc}$ et $+V_{cc}$, le système d'entrée e_c et de sortie Ω se comporte donc comme un passe-bas d'ordre 1, de constante de temps τ_1 et de transmittance statique

$$H_0 = \frac{2V_{cc}}{2^{10}} \frac{1}{k} = 1,95 \text{ rad.s}^{-1} \quad (\text{Attention : } k = 12.10^{-3} \text{ résultat de l'identification du III}).$$

D'après le IV.1. dans le formalisme de la transformée en z, la transmittance se mettra sous la forme :

$$H(z) = \frac{H_0(1-a)}{(z-a)} \text{ avec } a = e^{-\frac{T_c}{\tau_1}} = 0,779 \approx 0,78$$

IV.2.3 En régime établi, $\Omega = \frac{u_3}{k} - \frac{RC_f}{k^2}$ donc $K_3 = -\frac{R}{k^2} = -\frac{14}{(12.10^{-3})^2} = -9,72.10^4 \text{ rad.N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

IV.2.4 Pour une variation $\Delta\Omega = \pm 1000 \text{ rad/s}$, la variation de x_r est $\Delta x_r = \pm 2^{11}$ donc $K_2 = 2,048 \text{ s.rad}^{-1}$

IV.2.5 Lorsque e_c varie de une unité, Ω varie de $H_0 = 1,95 \text{ rad/s}$; la résolution de réglage de la vitesse est donc d'environ 2 rad/s ; le cahier des charges impose une vitesse lente de $25 \pm 2,5 \text{ rad/s}$; la résolution est donc tout juste suffisante.

IV.3.1 En régime établi, la variation de vitesse due à un échelon de couple résistant est :

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\Delta\Omega(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{H'(z)}{1 + K_2 C_0 H(z)} \Delta C_f(z) \text{ avec } \Delta C_f(z) = \Delta C_f \frac{z}{z-1} \text{ soit}$$

$$\Delta\Omega = \frac{K_3}{1 + K_2 C_0 H_0} \Delta C_f ; \text{ on veut que } \Delta\Omega = \pm 2,5 \text{ rad/s} ; \text{ or } \Delta C_f = \pm 0,6 \text{ Nm} \text{ donc } \boxed{C_0 = 5,58}$$

IV.3.2 En régime établi, $\Omega = H_0 e_c + K_3 C_{\text{moy}}$ avec $C_{\text{moy}} = 1,8 \cdot 10^{-3}$ Nm soit :

- En vitesse rapide, $e_c = 476$ d'où $e = e_c / C_0 = 85,3$; $x_r = K_2 \Omega = 1546$; $x_c = x_r + e = 1631,3$
- En vitesse lente, $e_c = 103$ d'où $e = e_c / C_0 = 18,5$; $x_r = K_2 \Omega = 51$; $x_c = x_r + e = 69,5$

IV.3.3 Il faut que le module des pôles de $T(z)$ soit inférieur à 1

IV.3.4 Il faut chercher les pôles de la transmittance $T(z)$ en boucle fermée

$$T(z) = \frac{C_0 H(z)}{1 + K_2 C_0 H(z)} = \frac{C_0 H_0 (1-a)}{(z-a) + K_2 C_0 H_0 (1-a)}$$

Il faut donc que $|a - K_2 C_0 H_0 (1-a)| < 1$ soit $\boxed{C_0 < \frac{1+a}{(1-a)H_0 K_2} = 2,02}$

IV.3.5 Pour que le système soit stable, il faut $C_0 < 2$; pour qu'il soit assez précis, il faut $C_0 > 5,6$; le système ne peut donc pas être à la fois suffisamment précis et stable.

On pourrait agir sur la fréquence d'échantillonnage ; par exemple, avec $F_e = 1$ kHz, $a = 0,95$.

La condition de stabilité deviendrait $C_0 < 10$ ce qui est compatible avec la condition sur la précision.

IV.4.1 $E_c(z) (1 - z^{-1}) = E(z) (1 - bz^{-1})$ d'où $e_c(n) = e_c(n-1) + e(n) - b \cdot e(n-1)$

IV.4.2 On applique le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \Delta\Omega(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{H'(z)}{1 + K_2 C(z) H(z)} \Delta C_f \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{K_3 (1-a) z (z-1) \Delta C_f}{(z-a)(z-1) + K_2 H_0 (1-a)(z-b)}$$

L'erreur statique due à la variation de couple résistant est donc nulle.

IV.4.3 L'erreur statique est nulle donc $e(n) = 0$ en régime établi.

Soit $x_c(n) = x_r(n) = K_2 \Omega$ en régime établi

- Vitesse rapide : $x_c(n) = 1546$ et $e_c(n) = 476$ (comme dans la question IV.3.2)
- Vitesse lente : $x_c(n) = 51$ et $e_c(n) = 103$

IV.4.4 La transmittance en boucle fermée s'écrit :

$$T(z) = \frac{C(z) H(z)}{1 + K_2 C(z) H(z)} = \frac{H_0 (z-b)(1-a)}{(z-1)(z-a) + H_0 K_2 (1-a)(z-b)}$$

Il faut chercher les racines du dénominateur : $P(z) = (z-1)(z-a) + H_0 K_2 (1-a)(z-b) = z^2 - 0,9z + 0,12$

Les racines sont : $z_1 = 0,74$ et $z_2 = 0,16$; leur module est inférieur à 1, le système est donc stable.

IV.5.1 $\frac{1}{K_2} = 0,5 \text{ rad/s}$

IV.5.2 $e_c(n) = e_c(n-1) + e(n) - b \cdot e(n-1)$; en régime établi, $e_c(n) = e_c(n-1)$ et $e(n) = e(n-1)$

Soit : $e(n) (1-b) = 0$ soit $e(n)/4 = 0$ ce qui est possible lorsque $e(n) = 3$ à cause de l'arrondi par

troncature ; l'erreur correspondante sur la vitesse sera : $\varepsilon_\Omega = \frac{3}{K_2} = 1,5 \text{ rad/s}$

IV.5.3 $\Omega(n) > 0$ dès que $H_0 e_c(n-1) > -K_3 C_{\text{f moy}}$ soit $e_c(n-1) > 89,7$

Tant que le moteur est à l'arrêt, $x_r = 0$ donc $e(n) = x_c(n) = 51 \forall n \quad 0$

- $n = 0$: $e_c(0) = 0 + e(0) + 0 = 51$
- $n = 1$: $e_c(1) = 51 + \frac{1}{4}(51) = 63$ à cause de l'arrondi
- $n \geq 2$ $e_c(n) = 51 + 12n$

Donc $e_c(n) > 89,7$ pour $n = 4$; la première valeur non nulle de la vitesse sera obtenue lorsque $n = 5$

Soit $t = 5 T_e = 25$ ms.

IV.5.4 $X_r(z) = K_2 H(z) E_c(z) + K_2 H'(z) C_f(z)$

$X_r(z)(1-az^{-1}) = K_2 H_0(1-a)z^{-1} E_c(z) + K_2 K_3(1-a)z^{-1} C_f(z)$

D'où : $x_r(n) = ax_r(n-1) + H_0 K_2(1-a)e_c(n-1) + K_2 K_3(1-a)c_f(n-1)$

IV.5.5 L'erreur était nulle avant l'application de l'échelon donc $x_r(-1) = 51$

- $n < 0$ $x_c(n) = x_r(n) = 51$ $e(n) = 0$ $e_c(n) = 103$
- $n = 0$ $x_c(n) = X_{c1} = 102$; le comportement est régi par les équations suivantes :
 - $e(n) = 102 - x_r(n)$
 - $e_c(n) = e_c(n-1) + e(n) - 0,75.e(n-1)$
 - $x_r(n) = 0,78 x_r(n-1) + 0,88 e_c(n-1) - 78,9$
- $n = 1$ $e(0) = 51$; $e(-1) = 0$; $e_c(0) = 103 + 51 - 0 = 154$; $x_r(0) = 51$ (inchangé)
- $n = 1$ $x_r(1) = 0,78*51 + 0,88*154 - 78,9 = 96,4 = 96$ (arrondi)
 $e(1) = 102 - 96 = 6$; $e_c(1) = 154 + 6 - 0,75*154 = 121,7 = 121$ (arrondi)
- $n = 2$ $x_r(2) = 0,78*96 + 0,88*121 - 78,9 = 102,5 = 102$ (arrondi)
 $e(2) = 102 - 102 = 0$; $e_c(2) = 121 + 0 - 0,75*121 = 116,5 = 116$ (arrondi)
- $n = 3$ $x_r(3) = 0,78*102 + 0,88*116 - 78,9 = 102,7 = 102$ (arrondi)
 $e(3) = 0$; $e_c(3) = 116 + 0 - 0,75*116 = 116$

La durée de la réponse indicielle est donc égale à $2T_e = 10$ ms

Agrégation de sciences physiques

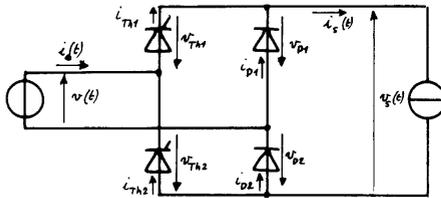
Concours externe

OPTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉES

Problème d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique ♦ Session : 2002

Première partie.

1.1.a. En décrivant l'état des interrupteurs du pont mixte au moyen des d.d.p. et des intensités



mesurées comme indiqué sur la figure ci-contre, les lois de Kirschoff permettent d'écrire les relations suivantes:

- loi des nœuds:

$$i_{Th1}(t) + i_{D1}(t) = i_s(t) \quad (1.1)$$

$$i_{Th2}(t) + i_{D2}(t) = i_s(t) \quad (1.2)$$

- loi des mailles:

$$v(t) = v_{Th1}(t) - v_{D1}(t) \quad (1.3)$$

$$v(t) = -v_{Th2}(t) + v_{D2}(t) \quad (1.4)$$

Les deux premières relations, associées à la conduction ininterrompue imposée par la

charge $\forall t: i_s(t) = Cte = I_s \neq 0$, impliquent que chaque cellule de commutation $\{[Th_1; D_1]$ et $[Th_2; D_2]\}$ présente à chaque instant un interrupteur fermé.

Les changements d'état des composants résultent:

- pour les commutations spontanées:

- du changement de sens (ou de l'extinction) d'un courant électrique forcé par une source indépendante: cela ne se produit pas puisque le seul courant forcé est celui d'intensité: $i_s(t) = I_s > 0$;
- du changement de signe d'une tension imposée; d'où les dates: $t_{n1k} = k.T$ $\{k \in \mathbb{Z}\}$

et $t_{n2k} = T/2 + k.T$ où $v(t)$ change de signe;

- pour les commutations commandées, des ordres de pilotage reçus par les thyristors qui parviennent aux composants aux dates {symétries des tensions et de la commande}:

- pour le thyristor Th_2 : $t_{2k} = T/2 + \alpha/\omega + k.T$

- pour le thyristor Th_1 {et par symétrie due à (1.3) et (1.4)}: $t_{1k} = \alpha/\omega + k.T$.

1.1.b. À la date: $t = -\varepsilon$ {avec: $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon \ll T = 2.\pi/\omega$ } les composants D_1 et Th_2 {dernier thyristor enclenché} sont fermés tandis que Th_1 et D_2 sont ouverts; d'où (loi des mailles):

$$v_s(-\varepsilon) = -v_{D1}(-\varepsilon) - v(-\varepsilon) - v_{Th2}(-\varepsilon) = -v(-\varepsilon)$$

et (loi des nœuds): $i_s(-\varepsilon) = i_{Th1}(-\varepsilon) - i_{Th2}(-\varepsilon) = -i_{Th2}(-\varepsilon) = -\{i_s(-\varepsilon) - i_{D2}(-\varepsilon)\} = -i_s(-\varepsilon) = -I_s$.

Étudions le fonctionnement du montage sur la période $]0, T[$ du régime permanent:

- intervalle: $0 < t' \leq \alpha/\omega$; la tension $v(t)$ change de signe à la date: $t = 0$ et: $v(t') = V.(\sqrt{2}).\sin(\omega.t') > 0$

{car: $V > 0$ }. Cet événement n'a pas d'effet sur la cellule $[Th_1, D_1]$ dont le thyristor Th_1 , ouvert, ne peut se fermer que sur commande {et sous certaines conditions de tension}; la diode D_1 reste donc fermée {puisque (1.1) impose: $i_{D1}(t') = i_s(t') - i_{Th1}(t') = I_s > 0$, d'où: $v_{D1}(t') = 0$

et {relation (1.3)}: $v_{Th1}(t') = v(t') + v_{D1}(t') = v(t') > 0$: le thyristor Th_1 est donc désormais amorçable.

En revanche, au niveau de la cellule $[Th_2, D_2]$, (1.4) donne: $-v_{Th2}(t') + v_{D2}(t') = v(t') > 0$, ce qui implique:

$v_{Th2}(t') < 0$ {car: $v_{D2}(t') \leq 0$ }; le thyristor Th_2 s'est donc ouvert spontanément à la date: $t = 0$; d'où:

$i_{Th2}(t') = 0$ et (1.2): $i_{D2}(t') = i_s(t') - i_{Th2}(t') = I_s > 0$, ce qui traduit la fermeture de D_2 et: $v_{D2}(t') = 0$.

- intervalle: $\alpha/\omega < t' \leq T/2$; le thyristor Th_1 , amorçable depuis $t_{n1} = 0$, a reçu une impulsion de commande à la date $t_1 = \alpha/\omega$ et s'est amorcé; d'où: $v_{Th1}(t_1) = 0$ et {relation (1.3)}:

$$v_{D1}(t_1) = -v(t_1) + v_{Th1}(t_1) = -v(t_1) < 0;$$

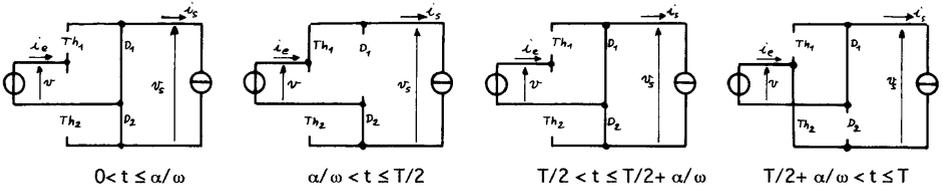
la diode D_1 s'est donc spontanément ouverte à la date t_1 et: $i_{D1}(t_1) = 0$, d'où {relation (1.1)}:

$i_{Th1}(t_1) = i_s(t_1) - i_{D1}(t_1) = I_s > 0$; le thyristor Th_1 reste donc fermé après la date t_1 ; par ailleurs, le pilotage de Th_1 n'a pas d'effet sur la cellule $[Th_2, D_2]$ dont le thyristor est ouvert.

Conclusion (l'autre demi-période étant analysée symétriquement):

- sur l'intervalle: $0 < t' \leq \alpha/\omega$, les diodes D_1 et D_2 sont fermées tandis que Th_1 et Th_2 sont ouverts; d'où (loi des mailles): $v_s(t') = -v_{D1}(t') - v_{D2}(t') = 0$ et (loi des nœuds): $i_e(t') = i_{Th1}(t') - i_{Th2}(t') = 0$;
- sur l'intervalle: $\alpha/\omega < t' \leq T/2$, les composants Th_1 et D_2 sont fermés, D_1 et Th_2 sont ouverts; d'où (loi des mailles): $v_s(t'') = -v_{Th1}(t'') + v(t'') - v_{D2}(t'') = v(t'')$ et (loi des nœuds): $i_e(t'') = i_{Th1}(t'') - i_{Th2}(t'') = i_{Th1}(t'') - i_{D2}(t'') = i_s(t'') = i_s$.
- sur l'intervalle: $T/2 < t''' \leq T/2 + \alpha/\omega$, les diodes D_1 et D_2 sont fermées, Th_1 et Th_2 sont ouverts; d'où (loi des mailles): $v_s(t''') = -v_{D1}(t''') - v_{D2}(t''') = 0$ et (loi des nœuds): $i_e(t''') = i_{Th1}(t''') - i_{Th2}(t''') = 0$.
- sur l'intervalle: $T/2 + \alpha/\omega < t'''' \leq T$, les composants Th_2 et D_1 sont fermés, D_2 et Th_1 sont ouverts; d'où (loi des mailles): $v_s(t''') = -v_{Th2}(t''') - v(t''') - v_{D1}(t''') = -v(t''')$ et (loi des nœuds): $i_e(t''') = i_{Th1}(t''') - i_{Th2}(t''') = -i_{Th2}(t''') = -i_{D2}(t''') = -i_s(t''') = -i_s$.

D'où le schéma équivalent au pont mixte pendant chaque intervalle d'une période:



1.1.c. On reporte sur le document-réponse n°1 les graphes des ondes $[v(t); i_e(t)]$ et $[v_s(t); i_s(t)]$:

Intervalle:	$0 < t \leq \alpha/\omega$	$\alpha/\omega < t \leq T/2$	$T/2 < t \leq T/2 + \alpha/\omega$	$T/2 + \alpha/\omega < t \leq T$
Expression de $v(t)$	$V \cdot (\sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t)$			
Expression de $i_e(t)$	0	i_s	0	$-i_s$
Expression de $v_s(t)$	0	$V \cdot (\sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t)$	0	$-V \cdot (\sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t)$
Expression de $i_s(t)$	i_s	i_s	i_s	i_s

1.2.a. La tension $v_s(t)$ est périodique {propriété triviale du régime permanent} et de période $T_s = T/2$. Par propriété d'une grandeur intégrable et périodique, sa valeur moyenne converge vers:

$$V_s = \left[\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T_s} v_s(t) \cdot dt \right] / [n \cdot T_s], \text{ et ce quels que soient } t_1 \{t_1 \in \mathbb{R}\} \text{ et } n \{n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Si on choisit: $t_1 = 0$ et: $n = 1$ {et si on tient compte de: $T_s = T/2$ } V_s se calcule donc par:

$$V_s = \left[\int_0^{T/2} v_s(t) \cdot dt \right] / T_s = [2/T] \cdot \left[\int_0^{T/2} v_s(t) \cdot dt \right] = [2/T] \cdot \left[\int_0^{\alpha/\omega} 0 \cdot dt + \int_{\alpha/\omega}^{T/2} V \cdot (\sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot dt \right]$$

D'où: $V_s = [2 \cdot V \cdot \sqrt{2} / (2 \cdot \pi)] \cdot [-\cos(\pi) + \cos(\alpha)] = [V \cdot \sqrt{2} / \pi] \cdot [1 + \cos(\alpha)]$

Par propriété d'une grandeur périodique de carré intégrable, sa valeur efficace, l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, converge vers la valeur de: $V_{\text{sef}} = \left[\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T_s} v_s^2(t) \cdot dt \right] / (n \cdot T_s)^{1/2} \{ \forall t_1 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* \}$.

Si on choisit: $t_1 = 0$ et: $n = 1$ l'expression de V_{sef} se calcule par:

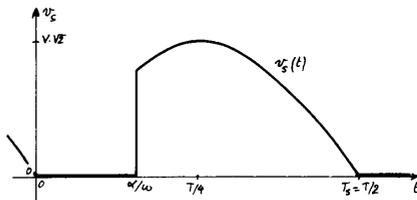
$$V_{\text{sef}} = \left[\left(\int_0^{T/2} v_s^2(t) \cdot dt \right) / T_s \right]^{1/2} = \left[(2/T) \cdot \left(\int_0^{\alpha/\omega} 0 \cdot dt + \int_{\alpha/\omega}^{T/2} 2 \cdot V^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) \cdot dt \right) \right]^{1/2}$$

D'où: $V_{\text{sef}} = [V^2 \cdot (1 - 2 \cdot \alpha / (\omega \cdot T) + 2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha) / (2 \cdot \omega \cdot T))]^{1/2} = V \cdot [1 - \alpha / \pi + \sin(2 \cdot \alpha) / (2 \cdot \pi)]^{1/2}$ {car: $V > 0$ }.

Conclusion: les valeurs moyenne et efficace de la tension $v_s(t)$ s'expriment:

$$V_s = [V \cdot (\sqrt{2}) / \pi] \cdot [1 + \cos(\alpha)]$$

$$V_{\text{sef}} = V \cdot [1 - \alpha / \pi + \sin(2 \cdot \alpha) / (2 \cdot \pi)]^{1/2}$$



1.2.b. Déterminons la décomposition harmonique de $v_s(t)$. Cette tension étant périodique et de période: $T_s = T/2$, la pulsation de son terme fondamental vaut: $\omega_s = 2 \cdot \pi / T_s = 4 \cdot \pi / T = 2 \cdot \omega$ et sa série harmonique s'exprime:

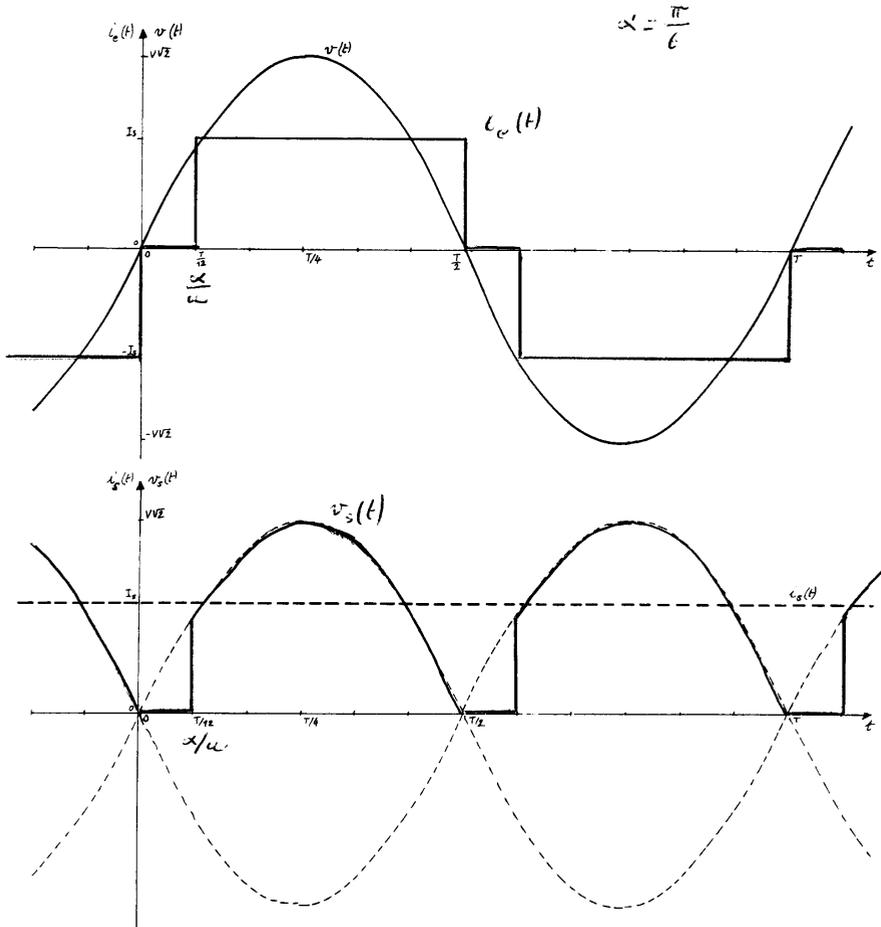
$$v_s(t) = V_s + \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n \cdot \cos(2 \cdot n \cdot \omega \cdot t) + b_n \cdot \sin(2 \cdot n \cdot \omega \cdot t) \} \quad \{ \text{où: } n \in \mathbb{N}^* \}$$

avec: $a_n = (2/T_s) \cdot \int_0^{T_s} v_s(t) \cdot \cos(2 \cdot n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt = (4/T) \cdot \int_{\alpha/\omega}^{T/2} V \cdot (\sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$

et: $b_n = (2/T_s) \cdot \int_0^{T_s} v_s(t) \cdot \sin(2 \cdot n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt = (4/T) \cdot \int_{\alpha/\omega}^{T/2} V \cdot (\sqrt{2}) \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot n \cdot \omega \cdot t) \cdot dt$

AG.Documents-Réponses
Document-Réponse n°1.

page 1/3



En observant que: $\sin(\omega.t).\cos(2.n.\omega.t) = \frac{\sin([2.n+1].\omega.t) - \sin([2.n-1].\omega.t)}{2}$

et que: $\sin(\omega.t).\sin(2.n.\omega.t) = \frac{-\cos([2.n+1].\omega.t) + \cos([2.n-1].\omega.t)}{2}$

ces calculs donnent: $a_n = -2.V.\sqrt{2}.[1 + \cos(\alpha).\cos(2.n.\alpha) + 2.n.\sin(\alpha).\sin(2.n.\alpha)] / [(4.n^2 - 1).\pi]$

et: $b_n = 2.V.\sqrt{2}.[2.n.\sin(\alpha).\cos(2.n.\alpha) - \cos(\alpha).\sin(2.n.\alpha)] / [(4.n^2 - 1).\pi]$

On en déduit l'amplitude maximale de la composante de rang n:

$$c_n = [a_n^2 + b_n^2]^{1/2} = 2.V.\sqrt{2}.[2 + (4.n^2 - 1).\sin^2(\alpha) + 4.n.\sin(\alpha).\sin(2.n.\alpha) + 2.\cos(\alpha).\cos(2.n.\alpha)]^{1/2} / [(4.n^2 - 1).\pi]$$

et (par propriété des fonction sinusoidales), la valeur efficace de la composante de rang n de $v_s(t)$:

$$V_{sn} = c_n / \sqrt{2} = 2.V. / [2 + (4.n^2 - 1).\sin^2(\alpha) + 4.n.\sin(\alpha).\sin(2.n.\alpha) + 2.\cos(\alpha).\cos(2.n.\alpha)]^{1/2} / [(4.n^2 - 1).\pi]$$

Si on note V_{s0} la valeur maximale {pour: $\alpha = 0$ } de V_s : $V_{s0} = [V.\sqrt{2}/\pi].[1 + \cos(0)] = 2.V.\sqrt{2}/\pi$

alors: $V_{sn} = V_{s0}.[1 + \{(4.n^2 - 1)/2\}.\sin^2(\alpha) + 2.n.\sin(\alpha).\sin(2.n.\alpha) + \cos(\alpha).\cos(2.n.\alpha)]^{1/2} / (4.n^2 - 1)$

La décomposition harmonique de $v_s(t)$ s'exprime: $v_s(t) = V_s + \sum_{n=1}^{\infty} \{V_{sn}.\sqrt{2}.\sin(2.n.\omega.t + \psi_n)\}$

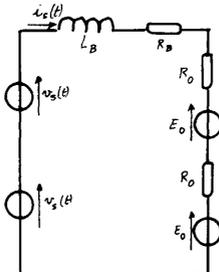
En identifiant cette expression à: $v_s(t) = V_s + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n.\cos(2.n.\omega.t) + b_n.\sin(2.n.\omega.t)\}$

on obtient: $a_n = V_{sn}.\sqrt{2}.\sin(\psi_n)$ et: $b_n = V_{sn}.\sqrt{2}.\cos(\psi_n)$ et: $\tan(\psi_n) = a_n/b_n$

On en déduit que: $\psi_n = \text{Arctan}(a_n/b_n)$ si: $b_n > 0$; $\psi_n = \pi + \text{Arctan}(a_n/b_n)$ si: $b_n < 0$.

1.2.c. Les spectres de l'Annexe 1 montrent que la valeur moyenne V_s diminue lorsque la valeur de α augmente (comme la fonction: $1 + \cos(\alpha) = f(\alpha)$) tandis que les composantes harmoniques calculées ont une amplitude efficace qui augmente {sur la plage: $0 \leq \alpha \leq \pi/8$ }; pour: $\alpha = \pi/8$, la valeur de V_{s1} représente près de 54% de la valeur moyenne V_s . Ces composantes harmoniques n'apportant pas d'énergie utilisable à l'onduleur {si $2.\omega$ et la pulsation de travail du moteur synchrone sont incommensurables; cf. Théorème de Parseval}, il convient donc de limiter l'amplitude des courants générés par les composantes sinusoidales de $v_s(t)$.

1.2. Application. 1.2.A.a. Chaque entrée d'onduleur est alimentée par le courant d'intensité $i_s(t)$, de valeur moyenne: $I_s = 750$ A; les composantes harmoniques $i_{sn}(t)$ $\{n \in \mathbb{N}^*\}$ ne produisent que des pertes par effet Joule négligeables devant celles $\{P_{JO}\}$ dues à I_s {en effet, si: $I_{sn} < I_s/20$, on a: $P_{JO_n} < P_{JO}/400$ }; ces composantes ne développent aucune autre puissance dans l'ensemble "Onduleur-Moteur synchrone" {théorème de Parseval}, qui ne reçoit de l'énergie que de la composante moyenne $\{I_s\}$ de $i_s(t)$ et est donc assimilable à une f.e.m. constante {d'amplitude E_{OM} } en série avec un résistor, de résistance R_{OM} , qui modélise les pertes par effet Joule {on a supposé négligeables les autres pertes d'induit}. Connaissant { $\eta = 96,5\%$ } on en déduit la puissance absorbée par chaque onduleur: $P_{OA} = P_{mu} / \eta = 1140$ kW ainsi que les pertes totales: $\Sigma(\text{pertes}) = 1140$ kW - 1100 kW = 40 kW; d'où les pertes par effet Joule: $P_{OJ} = 0,5.\Sigma(\text{pertes}) = 20$ kW et la puissance électromagnétique: $P_{Oem} = P_{OA} - P_{OJ} = 1120$ kW Cette puissance est développée par la composante I_s de $i_s(t)$; l'entrée de l'onduleur se comporte donc comme une f.e.m. constante d'amplitude: $E_{OM} = P_{Oem} / I_s = 1120.10^3 \text{ W} / (750 \text{ A}) = 1493$ V tandis que les pertes par effet Joule, dues aussi principalement à I_s , peuvent être attribuées à un résistor {série} de résistance: $R_{OM} = P_{OJ} / (I_s)^2 = 20.10^3 \text{ W} / (750 \text{ A})^2 = 35,5$ m Ω .



1.2.A.b. La maille étudiée est linéaire {si: $L_B = \text{Cte}$, $R_B = \text{Cte}$ et $R_O = \text{Cte}$ } et fonctionne en régime permanent établi; les composantes de $i_s(t)$ s'obtiennent donc au moyen du théorème de superposition des états d'équilibre.

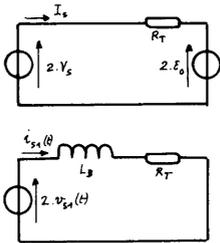
La composante constante {moyenne} I_s n'est due qu'aux f.e.m. V_s et E_{OM} {schéma équivalent ci-contre} et s'exprime: $I_s = 2.(V_s - E_{OM}) / R_T$ {avec: $R_T = R_B + 2.R_{OM} = 175$ m Ω }; d'où: $V_s = E_{OM} + R_T.I_s/2$

soit (numériquement): $V_s = 1493 \text{ V} + (175.10^{-3}\Omega).(750 \text{ A})/2 = 1559$ V

Or, V_s est liée à V et α par: $V_s = [V.\sqrt{2}/\pi].[1 + \cos(\alpha)]$

D'où: $\alpha = \text{Arccos}(\pi.V_s/[V.\sqrt{2}] - 1)$

Numériquement: $\alpha = 0,3928$ rad $\approx (\pi/8)$ rad = $22,5^\circ$.



1.2.A.c. La composante harmonique de rang 1 { pulsation : $\omega_s = 2.\omega$ } de $V_s(t)$, que l'on notera $v_{s1}(t)$, gène la composante de même module de $i_s(t)$, notée $i_{s1}(t)$, comme l'indique le schéma ci-contre {théorème de superposition}; on en déduit l'expression de sa valeur efficace {loi d'Ohm généralisée dans le formalisme complexe}:

$$I_{s1ef} = 2.V_{s1ef} / [(2.L_B.\omega)^2 + R_T^2]^{1/2}; \text{ pour avoir: } I_{s1ef} \leq I_s/20 \{37,5 \text{ A}\}$$

$$\text{il faut que: } L_B \geq [(40.V_{s1ef}/I_s)^2 - R_T^2]^{1/2} / (2.\omega)$$

L'annexe 1 indique que, pour: $\alpha = \pi/8$ rad on a: $V_{s1ef} = 0,518.V_{s0}$; soit: $V_{s1ef} = 2.(\sqrt{2}).0,518.1800/\pi = 839 \text{ V}$; d'où:

$$L_B \geq [(40.839 \text{ V}/750 \text{ A})^2 - (0,175 \Omega)^2]^{1/2} / (200.\pi \text{ s}^{-1}) = 71,24 \text{ mH}$$

1.2.A.d. Pour: $\alpha = \pi/8$ rad, l'annexe 1 indique que: $V_{s2ef} = 0,127.V_{s0}$

et: $V_{s3ef} = 0,0608.V_{s0}$

On en déduit: $V_{s2ef} = 2.(\sqrt{2}).0,127.(1800 \text{ V})/\pi = 205,8 \text{ V}$

et $V_{s3ef} = 2.(\sqrt{2}).0,0608.(1800 \text{ V})/\pi = 98,6 \text{ V}$.

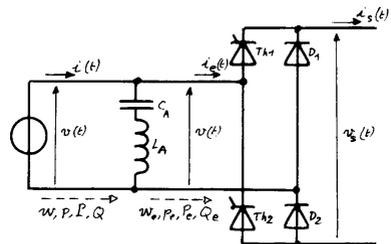
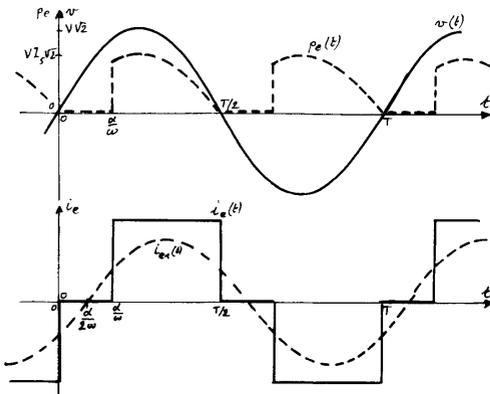
D'où: $I_{s2ef} = 2.V_{s2ef} / [(4.L_B.\omega)^2 + R_T^2]^{1/2} = 4,6 \text{ A}$; $I_{s3ef} = 2.V_{s3ef} / [(6.L_B.\omega)^2 + R_T^2]^{1/2} = 1,47 \text{ A}$ {si: $L_B = 71,2 \text{ mH}$ }.

1.3. Analyse de l'onde d'entrée [v(t); i_a(t)], dont on a établi plus haut les chronogrammes.

1.3.a. Par propriété des grandeurs périodiques la valeur efficace I_{eef} de $i_a(t)$ s'obtient par:

$\forall t_1 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* : I_{eef} = \{ \int_{t_1}^{t_1+n.T} i_a^2(t).dt / (n.T) \}^{1/2}$; si on choisit: $t_1 = 0$ et: $n = 1$ il vient:

$$I_{eef} = \{ \int_0^T i_a^2(t).dt / T \}^{1/2} = [2.I_s^2 \cdot \{ \int_0^{\alpha/\omega} \}^{1/2} / T]^{1/2} = I_s [1 - \alpha/\pi]^{1/2} \{ \text{car: } I_e > 0 \}.$$



1.3.b. Par définition, la puissance apparente de l'onde électrique établie sur une ligne bifilaire s'exprime: $S_e = V_{ef}.I_{eef}$; or: $V_{ef} = V$ {car: $V > 0$ }; d'où, par substitution: $S_e = V.I_{eef} = V.I_s [1 - \alpha/\pi]^{1/2}$.

1.3.c. La puissance moyenne, P_e , développée par l'onde électrique [v(t); i_a(t)] est, par définition, la valeur moyenne de la puissance instantanée: $p_a(t) = v(t).i_a(t)$

Les graphes de v(t) et $i_a(t)$ montrent que $p_a(t)$ est une grandeur périodique de période T/2 et sa valeur moyenne se calcule par: $\forall t_1 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* : P_e = \{ \int_{t_1}^{t_1+n.T/2} v(t).i_a(t).dt / (n.T/2) \}$

Finalement: $P_e = V.I_s.\sqrt{2}.[1 + \cos(\alpha)]/\pi$.

On aurait pu établir plus rapidement ce résultat en notant que, les composants du pont mixte étant supposés parfaits, on a {conservation de l'énergie}:

$$P_e = P_s = \langle v_s(t).i_s(t) \rangle_{\text{moy}} = \langle v_s(t).I_s \rangle_{\text{moy}} = I_s \cdot \langle v_s(t) \rangle_{\text{moy}} = V_s \cdot I_s = V.I_s.\sqrt{2}.[1 + \cos(\alpha)]/\pi \{ \text{car: } I_s(t) = \text{Cte} = I_s \}.$$

1.3.d. Le théorème de Parseval exprime la puissance moyenne développée par une onde périodique:

$$P_e = V_{\text{moy}}.I_{\text{moy}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \{ V_k \cdot I_k \cdot \cos(\varphi_{ek}) \}$$

Comme la décomposition de $v(t)$ se limite à son terme fondamental, il vient: $P_e = V \cdot I_{e1} \cdot \cos(\varphi_{e1})$.

Chaque élément de la décomposition harmonique d'une grandeur périodique possède les symétries du signal original, ce qui impose à $i_{e1}(t)$ d'être déphasée de: $\varphi_{e1} = \omega \cdot [\alpha / (2 \cdot \omega)] = \alpha / 2$ par rapport à $v(t)$ {voir figure}.

Par substitution: $P_e = V \cdot I_{e1} \cdot \cos(\alpha/2) = V \cdot I_s \cdot \sqrt{2} \cdot [1 + \cos(\alpha)] / \pi$; on en déduit que: $I_{e1} = 2 \cdot I_s \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha/2) / \pi$.

1.3.e. La tension $v(t)$ étant sinusoïdale, seule l'onde sinusoïdale élémentaire de pulsation ω (composante fondamentale) développe une puissance réactive qui s'exprime: $Q_e = V \cdot I_{e1} \cdot \sin(\varphi_{e1})$

D'où: $Q_e = 2 \cdot V \cdot I_s \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha/2) \cdot \sin(\alpha/2) / \pi = V \cdot I_s \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\alpha) / \pi$ {car: $2 \cdot \cos(\alpha/2) \cdot \sin(\alpha/2) = \sin(\alpha)$ }.

1.3.f. La puissance déformante d'une onde est définie comme la grandeur D telle que: $S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$ soit: $D_e = \pm [S_e^2 - P_e^2 - Q_e^2]^{1/2} = [V^2 \cdot I_s^2 \cdot (1 - \alpha/\pi) - 2 \cdot V^2 \cdot I_s^2 \cdot (1 + \cos(\alpha))^2 / \pi^2 - 2 \cdot V^2 \cdot I_s^2 \cdot \sin^2(\alpha) / \pi^2]^{1/2}$,

ou: $D_e = \pm V \cdot I_s \cdot [1 - \alpha/\pi - 4 \cdot (1 + \cos(\alpha))^2 / \pi^2]^{1/2}$.

1.3.g. Le facteur de puissance d'une onde électrique dont on sait exprimer la puissance apparente se détermine {par définition} par: $f_p = P/S$.

D'où: $f_{pe} = P_e/S_e = [V \cdot I_s \cdot \sqrt{2} \cdot (1 + \cos(\alpha)) / \pi] / [V \cdot I_s \cdot [1 - \alpha/\pi]^{1/2}] = \sqrt{2} \cdot [1 + \cos(\alpha)] / (\pi \cdot [1 - \alpha/\pi]^{1/2})$.

1.3.A. Application. Cas où: $V = 1800$ V, $I_s = 750$ A, $f = 50$ Hz et: $\alpha = \pi/8$ rad.

1.3.A.a. Les grandeurs caractéristiques de l'onde électrique d'entrée valent alors:

$$I_{\text{eff}} = I_s \cdot [1 - \alpha/\pi]^{1/2} = 702 \text{ A}$$

$$S_e = V \cdot I_s \cdot [1 - \alpha/\pi]^{1/2} = 1263 \text{ kVA}$$

$$P_e = V \cdot I_s \cdot \sqrt{2} \cdot [1 + \cos(\alpha)] / \pi = 1169 \text{ kW}$$

$$I_{e1} = 2 \cdot I_s \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha/2) / \pi = 662 \text{ A}$$

$$Q_e = V \cdot I_s \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\alpha) / \pi = 233 \text{ kvars}$$

$$D_e = V \cdot I_s \cdot [1 - \alpha/\pi - 4 \cdot (1 + \cos(\alpha))^2 / \pi^2]^{1/2} = 417 \text{ kvars}$$

$$f_{pe} = \sqrt{2} \cdot [1 + \cos(\alpha)] / (\pi \cdot [1 - \alpha/\pi]^{1/2}) = 0,926$$

1.3.A.b. Pour que le transformateur (et la caténaire) n'ait pas à fournir la composante de rang 3 de $i_k(t)$ il suffit que le dipôle L_A - C_A présente une impédance nulle à la pulsation correspondante: $\omega_3 = 3 \cdot \omega$,

soit: $Z_{A3} = j \cdot L_A \cdot (3 \cdot \omega) + 1/[j \cdot C_A \cdot (3 \cdot \omega)] = j \cdot [3 \cdot L_A \cdot \omega - 1/(3 \cdot C_A \cdot \omega)] = 0$

D'où la condition: $9 \cdot L_A \cdot C_A \cdot \omega^2 = 1$ ou: $L_A \cdot C_A = 1/(9 \cdot \omega^2)$ {avec: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 100 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ }.

1.3.A.c. Au régime sinusoïdal fondamental {pulsation ω } le filtre présente une impédance complexe d'expression: $Z_{A1} = j \cdot L_A \cdot \omega + 1/(j \cdot C_A \cdot \omega) = j \cdot [L_A \cdot \omega - 1/(C_A \cdot \omega)]$

Si les valeurs L_A et C_A satisfont à la condition établie ci-avant $\{C_A = 1/(9 \cdot L_A \cdot \omega^2)\}$, l'impédance Z_{A1} s'écrit alors:

$$Z_{A1} = j \cdot [L_A \cdot \omega - 9 \cdot L_A \cdot \omega] = -8 \cdot j \cdot L_A \cdot \omega = -j \cdot X \text{ où: } X = 8 \cdot L_A \cdot \omega > 0 \text{ car: } L_A > 0 \text{ et: } \omega > 0$$

Le dipôle L_A - C_A se comporte donc comme un élément capacitif et fournit la puissance réactive Q_e

"consommée" par le pont si: $Q = V^2/(-X) + Q_e = 0$; d'où: $8 \cdot L_A \cdot \omega = X = V^2/Q_e = V \cdot \pi / [\sqrt{2} \cdot I_s \cdot \sin(\alpha)]$.

1.3.A.d. Si on veut que le filtre L_A - C_A fournisse l'harmonique 3 de $i_k(t)$ et l'énergie réactive (dans le cas analysé), il faut donc que: $L_A = V^2/(8 \cdot Q_e \cdot \omega) \approx 5,5$ mH et: $C_A = 1/(9 \cdot L_A \cdot \omega^2) \approx 200$ μF .

La composante fondamentale $i_1(t)$ de $i(t)$ présente alors une amplitude efficace I_1 telle que: $P_e = V \cdot I_1$

{puisque $i_1(t)$ est en phase avec $v(t)$ }; d'où: $I_1 = P_e/V = I_s \cdot \sqrt{2} \cdot [1 + \cos(\alpha)] / \pi = 649,5$ A.

La composante de rang 3 de $i(t)$ est évidemment d'amplitude nulle: $I_3 = 0$.

1.3.A.e. L'amplitude efficace I_{eff} de $i(t)$ est liée à celles de ses composantes harmoniques par {théorème de Parseval}: $I_{\text{eff}}^2 = I_1^2 + I_3^2 + \sum_{k=5}^{+\infty} I_k^2$ {avec k entier impair}

Pour les mêmes raisons la valeur efficace I_{eff} de $i_k(t)$ s'exprime: $I_{\text{eff}}^2 = I_{e1}^2 + I_{e3}^2 + \sum_{k=5}^{+\infty} I_{ek}^2$.

Si on admet que le filtre L_A - C_A n'a pas d'effet sur les composantes de rangs 5 et plus, on en déduit que:

$$\sum_{k=5}^{+\infty} I_k^2 = \sum_{k=5}^{+\infty} I_{ek}^2 = I_{\text{eff}}^2 - I_{e1}^2 - I_{e3}^2; \text{ d'où: } I_{\text{eff}}^2 = I_1^2 + I_{\text{eff}}^2 - I_{e1}^2 - I_{e3}^2 \text{ {car: } I_3 = 0}$$

Numériquement: $I_1 = 649,5$ A, $I_{\text{eff}} = 701,6$ A, $I_{e1} = 662$ A, $I_{e3} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot I_s \cdot \cos(3 \cdot \pi/16) / (3 \cdot \pi) = 187$ A

et: $I_{\text{eff}} = [I_1^2 + I_{\text{eff}}^2 - I_{e1}^2 - I_{e3}^2]^{1/2} = 663,7$ A

On en déduit la puissance apparente: $S = V \cdot I_{\text{eff}} = (1800 \text{ V}) \cdot (663,7 \text{ A}) = 1194,6$ kVA

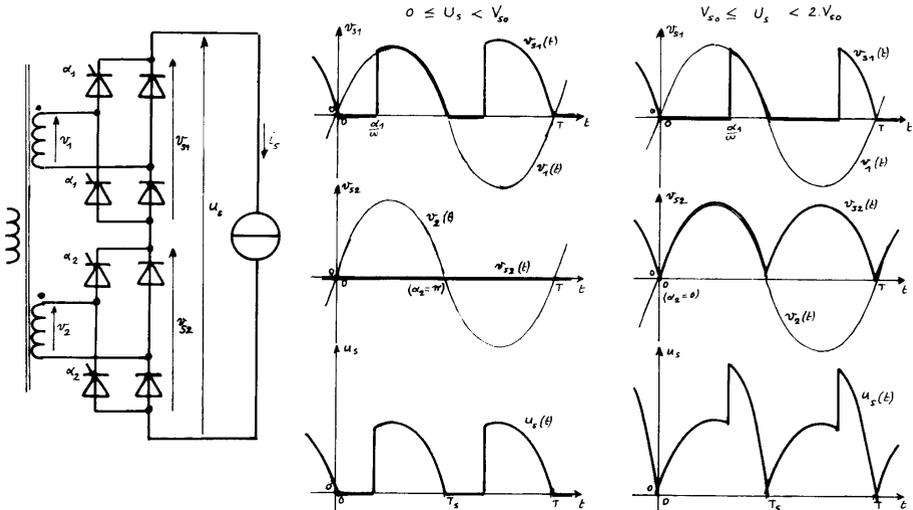
Comme la puissance active n'est pas modifiée par le filtre: $P = P_e = 1169$ kW

et le facteur de puissance de l'onde $[v(t); i(t)]$ a pour valeur: $f_p = P/S = 0,979 \approx 0,98$

Le filtre a donc sensiblement amélioré le facteur de puissance de l'onde fournie par le transformateur.

1.3.A.f. Si un seul des ponts mixtes est commandé avec un retard réglable:

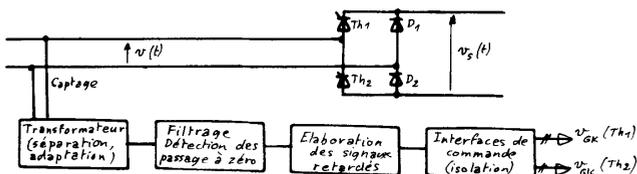
- le pont commandé {lorsque: $0 < U_s < V_{s0}$ } provoque un courant dans la maille d'entrée des onduleurs (si la valeur moyenne de la tension produite par ce pont est supérieure à la somme des f.c.e.m. opposées par les onduleurs) et ce courant force la conduction du second pont qui fonctionne alors en roue-libre;
- les chronogrammes de $u_s(t)$ se déduisent de la loi des mailles: $u_s(t) = v_{s1}(t) + v_{s2}(t)$
- et ont les allures indiquées sur la figure ci-dessous:



- les retards angulaires α_1 et α_2 donnant le même résultat que lorsque: $\alpha = \pi/8$ rad, s'obtiennent en notant que U_s vaut alors: $U_s = 2.V_s = V_{s0} \cdot [1 + \cos(\alpha)] > V_{s0}$ {car: $0 < \alpha < \pi/2$ }; le pont 2 est donc piloté avec un retard nul { $\alpha_s = 0$, d'où: $v_{s2} = V_{s0}$ } tandis que 1 produit: $v_{s1} = V_{s0} \cdot [1 + \cos(\alpha)]/2$; d'où, pour produire une tension $u_s(t)$ de même valeur moyenne: $U_s = V_{s0} \cdot [1 + \cos(\alpha)] = V_{s0} + V_{s0} \cdot [1 + \cos(\alpha)]/2$; soit: $\cos(\alpha_1) = 2 \cdot \cos(\alpha) - 1 = 2 \cdot \cos(\pi/8) - 1 = 0,85$ et: $\alpha_1 = 0,56$ rad = $32^\circ = \pi/(5,6)$ rad.

1.4.a. Le théorème de Parseval implique que la tension $v(t)$ à l'entrée du pont redresseur, sinusoïdale, ne développe de la puissance, d'expression: $P_o = V_{\text{eff}} \cdot i_{\text{eff}}$, que s'il existe une composante sinusoïdale $i_{\text{eff}}(t)$ de $i_s(t)$. La solution la plus simple est de commander "naturellement" les commutations par $v(t)$ {cas d'un pont de diodes} ou de piloter les cellules au synchronisme de $v(t)$. Sinon {thyristors pilotés avec une fréquence: $f_c = f/n$, avec n entier} il n'y a pas de composante de $i_s(t)$ de même pulsation que $v(t)$ et, en moyenne, aucun flux d'énergie ne s'opère sur la ligne.

1.4.b. D'où le principe du pilotage d'un pont à thyristors (mixte ou complet):

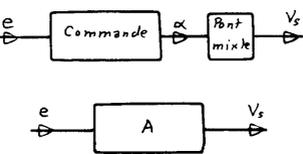


- une sonde capte la tension à l'entrée du redresseur;
- un transformateur sépare la commande de la puissance et adapte la tension de sortie aux circuits de traitement des signaux;
- un filtrage élimine les signaux parasites;
- un détecteur repère les dates particulières de $v(t)$ {passages par zéro};
- un circuit élabore des signaux retardés d'une même durée {retard réglable};
- des interfaces de commande (isolées) génèrent les impulsions d'amorçage des thyristors.

1.4.c. Si le retard α est généré de sorte que: pour $0 < e < e_M$: $\alpha = \text{Arccos}(2.e/e_M - 1)$; pour $e \geq e_M$: $\alpha = 0$, alors la valeur moyenne V_s de la tension de sortie $v_s(t)$ $\{V_s = V.\sqrt{2}.(1+\cos(\alpha))/\pi\}$ évolue ainsi:

- pour $0 \leq e < e_M$: $\alpha = \text{Arccos}(2.e/e_M - 1)$; $\cos(\alpha) = 2.e/e_M - 1$; $V_s = [2.\sqrt{2}.V/(\pi.e_M)].e = [V_{s0}/e_M].e = A.e$ {où: $A = 2.\sqrt{2}.V/(\pi.e_M) = V_{s0}/e_M = \text{Cte}$ [à: $V = \text{Cte}$ et: $e_M = \text{Cte}$]};
- pour $e \geq e_M$: $\alpha = 0$; $V_s = 2.\sqrt{2}.V/\pi = V_{s0}$.

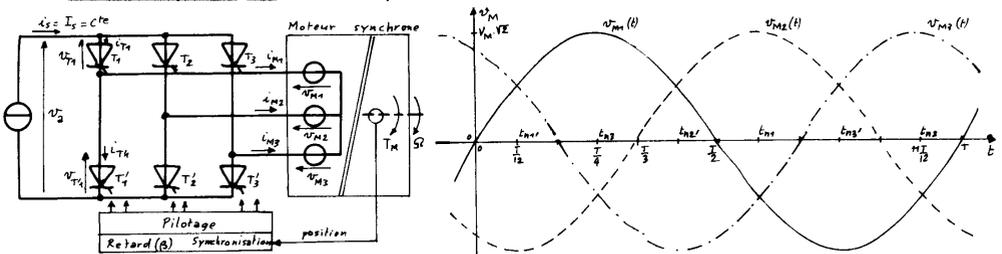
1.4.d. La chaîne d'action produisant V_s à partir du signal e est donc analogue à un dispositif linéaire de transmittance A et -donc- de fonction de transfert:



- $V_s = A.e$ {avec: $A = 2.\sqrt{2}.V/(\pi.e_M) = V_{s0}/e_M$ }
 lorsque les conditions suivantes sont remplies:
- le pont redresseur est alimenté par une tension $v(t)$ fonction sinusoïdale du temps et de valeur efficace constante: $V = \text{Cte}$;
 - la charge du redresseur lui impose un régime de conduction ininterrompu: $\forall t: i_s(t) > 0$ {dans les conventions choisies};
 - la grandeur de commande e est positive et d'amplitude inférieure à e_M : $0 \leq e \leq e_M$;

- les composants du redresseur (diodes, thyristors) ne provoquent que des chutes de tension négligeables devant V ; les thyristors sont commandés de façon symétrique {i.e. avec le même retard angulaire α , relativement à leurs amorçages naturels respectifs};
- les durées caractéristiques de l'évolution de $e(t)$ au cours du temps {constante de temps, période, temps de montée, temps de réponse...} sont très grandes devant la période T de $v(t)$, de sorte qu'au niveau de ces durées la valeur de la tension de sortie $v_s(t)$ soit assimilable à sa moyenne V_s .

Deuxième partie. 2.1. Onduleur triphasé de courant.



2.1.a. L'expression "onduleur assisté" signifie que, les tensions $\{v_{M1}, v_{M2}, v_{M3}\}$ de l'onde triphasée de sortie étant imposées par la charge {ici la machine synchrone triphasée dont le nombre de pôles $\{p\}$ et la pulsation de rotation Ω fixent la fréquence: $f_M = \omega_M / (2.\pi) = p.\Omega / (2.\pi)$ }, le convertisseur doit nécessairement produire, au régime permanent, des courants dont les intensités $\{i_{M1}, i_{M2}, i_{M3}\}$ soient de même période $\{T_M = 1/f_M\}$ que les tensions, de sorte que leurs composantes fondamentales $\{i_{M1f}, i_{M2f}, i_{M3f}\}$ soient de même pulsation $\{\omega_M\}$ que les forces électromotrice de la machine synchrone et puissent assurer un transfert d'énergie entre l'onduleur et la machine triphasée (théorème de Parseval). La chaîne "capteur de position du rotor-élaboration des signaux de pilotage de l'onduleur" réalise la synchronisation des dates de commutation des cellules du pont avec le mouvement du rotor, donc l'égalité des fréquences des courants d'intensités $\{i_{M1}, i_{M2}, i_{M3}\}$ et des f.e.m. $\{e_{M1}, e_{M2}, e_{M3}\}$.

2.1.b. La loi des nœuds conduit à écrire: $i_{T1}(t) + i_{T2}(t) + i_{T3}(t) = i_s(t)$, tandis que la source de courant impose (par construction): $\forall t \ i_s(t) > 0$; on en déduit qu'à chaque instant il y a nécessairement un $i_{T_k}(t)$ {avec: $k = 1, 2$ ou 3 } strictement positif; il y a donc toujours un thyristor -au moins- du commutateur $[T_1, T_2, T_3]$ en conduction, le même raisonnement s'appliquant au commutateur $[T_1, T_2, T_3]$.

2.1.c. Le composant passant du commutateur $[T_1, T_2, T_3]$, avant l'amorçage de T_1 , est T_3 {symétrie de pilotage et ordre direct des tensions}; d'où: $v_{T3} = 0$ et: $v_{T1} = v_{T3} + v_{M3} - v_{M1} = v_{M3} - v_{M1}$. Pour que T_1 soit amorçable il faut que: $v_{T1} > 0$ {par propriété d'un thyristor}; soit: $v_{M3} > v_{M1}$; on en déduit la date d'amorçage naturel de T_1 {compte tenu des expressions de v_{M1} , v_{M2} et v_{M3} et -donc- de l'origine des temps choisie}: $t_{n1} = 7.T_M/12$; la tension composée: $u_{M31} = v_{M3} - v_{M1}$ étant sinusoidale et de même pulsation ω_M , T_1 est amorçable pendant la demi-période: $t_{n1} < t < t_{n1} + T_M/2$; T_1 doit donc être amorcé avec un retard temporel Δt , relativement à la date t_{n1} , satisfaisant à: $0 < \Delta t < T_M/2$, donc avec un retard angulaire: $\beta = \omega_M \Delta t$ tel que: $0 < \beta < \omega_M T_M/2 = \pi$.
Par symétrie, T_2 est amorçable après: $t_{n2} = 11.T_M/12$ et T_3 après la date: $t_{n3} = 3.T_M/12$.
De même, on montre que: $t_{n1'} = T_M/12$, $t_{n2'} = 5.T_M/12$ et: $t_{n3'} = 9.T_M/12$.

2.1.d. La première impulsion de commande parvient au thyristor T_k {avec: $k = 1, 2, 3, 1', 2', 3'$ } à la date {si les signaux de commande sont retardés symétriquement d'un angle β }: $t_{ak} = t_{nk} + \beta/\omega_M$.

2.1.e. L'impulsion reçue par le thyristor T_1 à la date: $t_{a1} = t_{n1} + \beta/\omega_M = (7/12).T_M + \beta/\omega_M$, provoque son amorçage {si: $0 < \beta < \pi$ }; alors: $v_{T1}(t_{a1}) = 0$ et {loi des mailles}: $v_{T3} = v_{T1} + v_{M1} - v_{M3} = v_{M1} - v_{M3} < 0$; le thyristor T_3 s'ouvre spontanément ($i_{T3} = 0$); d'où (loi des nœuds): $i_{T1} = i_s - i_{T2} - i_{T3} = i_s = i_s > 0$; le thyristor T_1 devient donc conducteur (fermé); cet état ne peut plus être modifié par la source de courant d'entrée {courant ininterrompu}, l'ouverture de T_1 n'aura lieu que lors de l'amorçage de T_2 .

2.1.f. On en déduit le diagramme de fermeture des interrupteurs de l'onduleur {cas où: $\beta = 3.\pi/4$, d'où: $\Delta t = \beta/\omega_M = (3/8).T_M = 4,5.(T_M/12)$ } et les chronogrammes $v_a(t)$ et $i_{M1}(t)$ {doc.-réponse n°2}:
- intervalle: $t_{a1} = 11,5.(T_M/12) < t \leq t_{a1} + T_M/6$: T_1 est fermé, T_2 et T_3 ouverts, T_2 , fermé, T_1 et T_3 , ouverts; loi des mailles: $v_a(t) = v_{T1}(t) + v_{M1}(t) - v_{M2}(t) + v_{T2}(t) = v_{M1}(t) - v_{M2}(t) = u_{M12}(t)$
et {loi des nœuds}: $i_{T1}(t) = i_s(t) - i_{T2}(t) - i_{T3}(t) = i_s(t) = i_s$, $i_{T2}(t) = i_s(t) - i_{T1}(t) - i_{T3}(t) = i_s(t) = i_s$; d'où: $i_{M1}(t) = i_{T1}(t) - i_{T1'}(t) = i_{T1}(t) = i_s$, $i_{M2}(t) = i_{T2}(t) - i_{T2'}(t) = -i_{T2}(t) = -i_s$, $i_{M3}(t) = i_{T3}(t) - i_{T3'}(t) = 0$.
- intervalle: $t_{a1} + T_M/6 < t \leq t_{a1} + T_M/3$: $i_{M1}(t) = i_{T1}(t) - i_{T1'}(t) = i_s$
- intervalle: $t_{a1} < t \leq t_{a1'} + T_M/3$: $i_{M1}(t) = i_{T1}(t) - i_{T1'}(t) = -i_{T1'}(t) = -i_s$.

2.1.g. Les symétries de l'ensemble "pont convertisseur-moteur-pilotage" font que la tension $v_a(t)$ est périodique et de période: $T_a = T_M/6$; d'où sa valeur moyenne {par propriété de la valeur moyenne d'une fonction périodique}: $\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall t_0: V_a = [\int_{t_0}^{t_0+n.T_a} v_a(t).dt]/(n.T_a)$

soit {en prenant: $n = 1$ et: $t_0 = t_{a1}$, et en remarquant que, pour: $t_{a1} < t \leq t_{a1} + T_a$, la tension $v_a(t)$ s'exprime: $v_a(t) = u_{M12}(t) = V_M \cdot \sqrt{2} \cdot [\sin(\omega_M t) - \sin(\omega_M t - 2.\pi/3)] = V_M \cdot \sqrt{6} \cdot \sin(\omega_M t + \pi/6)$,
ou, en posant: $\theta = \omega_M t$ et en observant que: $\omega_M t_{a1} = 7.\pi/6 + \beta$, $\omega_M (t_{a1} + T_a) = 9.\pi/6 + \beta$ et: $\omega_M T_a = \pi/3$]:

$$V_a = [\int_{7.\pi/6+\beta}^{9.\pi/6+\beta} V_M \cdot \sqrt{6} \cdot \sin(\theta + \pi/6)] / (\pi/3) = (3 \cdot \sqrt{6} \cdot V_M / \pi) \cdot [\cos(\beta + 8.\pi/6) - \cos(\beta + 10.\pi/6)]$$

$$\text{soit: } V_a = - (3 \cdot \sqrt{6} / \pi) \cdot V_M \cdot \cos(\beta)$$

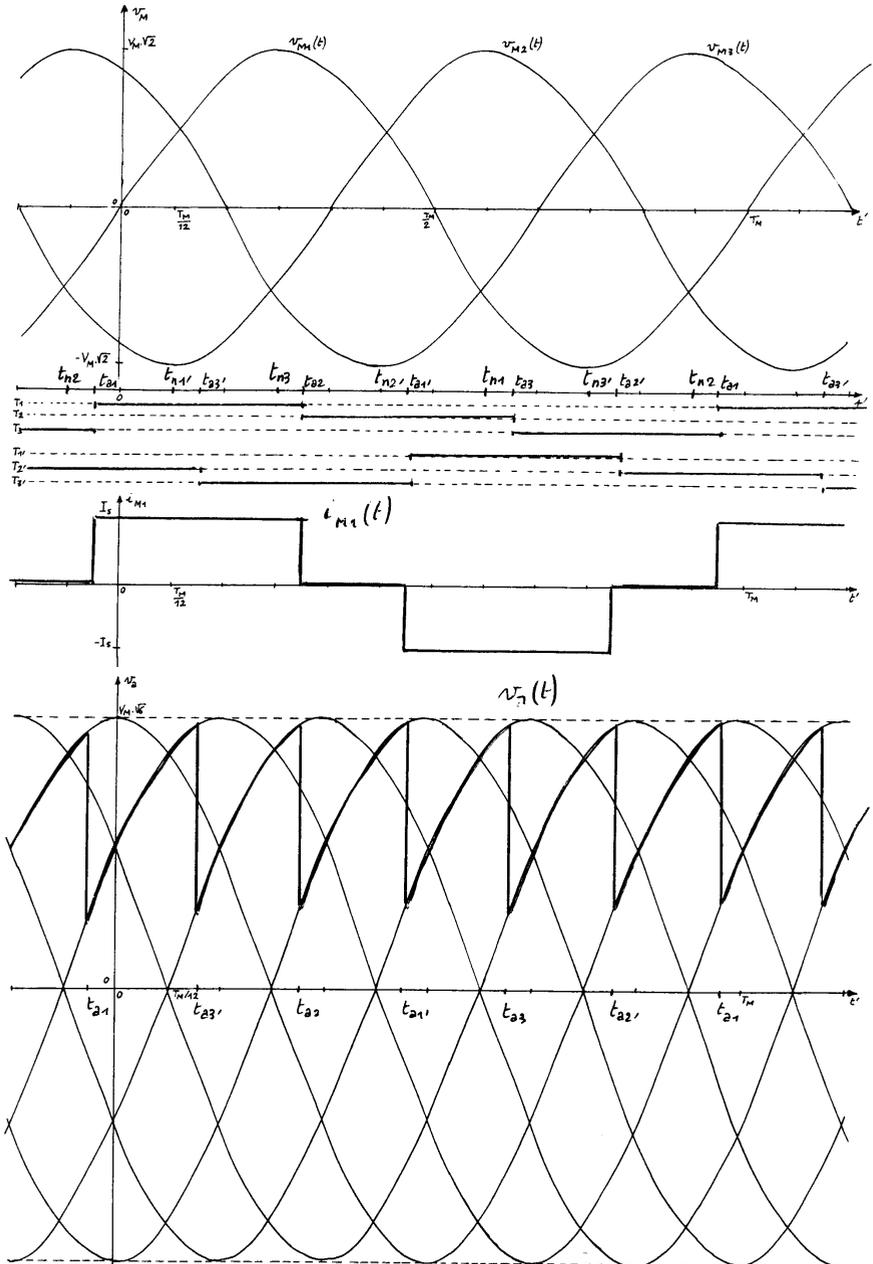
2.1.h. Dans les conventions adoptées {figure 5} la puissance développée à l'entrée s'exprime en moyenne: $P_a = \langle v_a(t) \cdot i_s(t) \rangle_{\text{moy}} = \langle v_a(t) \cdot i_s \rangle_{\text{moy}} = i_s \cdot \langle v_a(t) \rangle_{\text{moy}} = V_a \cdot i_s = - (3 \cdot \sqrt{6} / \pi) \cdot V_M \cdot i_s \cdot \cos(\beta)$.
Le convertisseur fonctionne en onduleur lorsque: $P_a > 0$; or, par construction: $V_M > 0$ et: $i_s > 0$; ce fonctionnement implique donc: $\cos(\beta) < 0$ ou {comme: $0 < \beta < \pi$ }: $\pi/2 < \beta < \pi$ rads.

2.1.i. Le graphe de $i_{M1}(t)$ montre que sa composante fondamentale $i_{M1f}(t)$, qui présente les mêmes symétries, s'exprime: $i_{M1f}(t) = I_{Mf} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega_M t - \omega_M (t_{a1} - T_M/12))$ {où: $I_{Mf} > 0$ }.

D'où: $i_{M1f}(t) = I_{Mf} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega_M t - \beta + \pi) = I_{Mf} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega_M t - \varphi_{Mf})$ {si on note: $\varphi_{Mf} = \beta - \pi$ }

Comme: $v_{M1}(t) = V_M \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega_M t)$ {où: $V_M > 0$ } l'angle φ_{Mf} représente {par définition} le déphasage de $i_{M1f}(t)$ relativement à $v_{M1}(t)$; φ_{Mf} lié à β { $0 < \beta < \pi$ } par: $\varphi_{Mf} = \beta - \pi$, évolue sur la plage: $-\pi < \varphi_{Mf} < 0$.

Document-Réponse n°2.



De même, la composante $i_{mk}(t)$ {où: $k = 1, 2, 3$ } de $i_{mk}(t)$ présente le même déphasage: $\varphi_{Mf} = \beta - \pi$, par rapport à la tension simple correspondante $v_{mk}(t)$.

2.1.j. Puisqu'on a supposé parfaits les composants (thyristors) de l'onduleur, le principe de conservation de l'énergie impose que: $P_M = P_a = V_a \cdot I_s = - (3 \cdot \sqrt{6}/\pi) \cdot V_M \cdot I_s \cdot \cos(\beta)$

Les tensions $v_{mk}(t)$ étant sinusoïdales, le théorème de Parseval implique que:

$$P_M = \langle v_{M1}(t) \cdot i_{M1f}(t) + v_{M2}(t) \cdot i_{M2f}(t) + v_{M3}(t) \cdot i_{M3f}(t) \rangle_{\text{moy}}$$

Les symétries font que les intensités $[i_{M1f}(t), i_{M2f}(t), i_{M3f}(t)]$ constituent un système sinusoïdal triphasé, équilibré et direct, comme les tensions $[v_{M1}(t), v_{M2}(t), v_{M3}(t)]$; alors, par propriété d'une

telle onde triphasée {sinusoïdale, triphasée, équilibrée et symétrique}: $P_M = 3 \cdot V_M \cdot I_{Mf} \cdot \cos(\varphi_{Mf})$

D'où, en identifiant P_M et P_a : $- (3 \cdot \sqrt{6}/\pi) \cdot V_M \cdot I_s \cdot \cos(\beta) = 3 \cdot V_M \cdot I_{Mf} \cdot \cos(\beta - \pi) = - 3 \cdot V_M \cdot I_{Mf} \cdot \cos(\beta)$

On en déduit que: $I_{Mf} = (\sqrt{6}/\pi) \cdot I_s$.

2.1.k. L'expression fournie, appliquée à un signal composé de créneaux de durée: $T_c = T_M/3$, donc de coefficient de décalage a vaut: $a = 1 - 2 \cdot T_c/T_M = 1/3$, donne: $I_{Mf} = (2 \cdot \sqrt{2} \cdot I_s / \pi) \cdot \cos(\pi/6) = (\sqrt{6}/\pi) \cdot I_s$. On détermine la valeur efficace des composantes de rang 3, 5, 7 et 9 il n'y a pas de composantes de rang pair, du fait des symétries des intensités $i_{mk}(t)$:

$$I_{M3} = [2 \cdot \sqrt{2} \cdot I_s / (3 \cdot \pi)] \cdot I \cdot \cos(3 \cdot \pi/6) = 0$$

$$I_{M5} = [2 \cdot \sqrt{2} \cdot I_s / (5 \cdot \pi)] \cdot I \cdot \cos(5 \cdot \pi/6) = [(\sqrt{6}/(5 \cdot \pi))] \cdot I_s = I_{Mf}/5$$

$$I_{M7} = [2 \cdot \sqrt{2} \cdot I_s / (7 \cdot \pi)] \cdot I \cdot \cos(7 \cdot \pi/6) = [(\sqrt{6}/(7 \cdot \pi))] \cdot I_s = I_{Mf}/7$$

$$I_{M9} = [2 \cdot \sqrt{2} \cdot I_s / (9 \cdot \pi)] \cdot I \cdot \cos(9 \cdot \pi/6) = 0$$

2.1.l. L'amplitude efficace des intensités $i_{mk}(t)$, symétriques, se détermine {propriété des grandeurs périodiques} par: $I_M = [\int_{(T_M)} i_M^2(t) \cdot dt / T_M]^{1/2} = [(I_s^2 \cdot T_M/3 + I_s^2 \cdot T_M/3) / T_M]^{1/2} = [2/3]^{1/2} \cdot I_s$ {car: $I_s > 0$ }.

D'où: $I_{Mf}/I_M = [(\sqrt{6}/\pi) \cdot I_s] / [[2/3]^{1/2} \cdot I_s] = 3/\pi = 0,954$.

2.1.m. Les résultats établis ci-dessus {notamment au 2.1.k et 2.1.l} permettent de conclure:

- qu'il n'y a pas de composantes harmoniques des intensités $i_{mk}(t)$ qui soient de rangs pairs ou de rangs multiples de 3, ce qui limite les premiers termes harmoniques aux rangs: 5, 7, 11, 13, 17...
- que les composantes harmoniques ne transportent aucune énergie utile au moteur synchrone;
- que ces composantes harmoniques sont de faible amplitude, relativement à la composante fondamentale {la plus importante, I_{M5} , ne représente que 20% de I_{Mf} , et ne participant que de façon négligeable aux pertes par effet Joule: I_{Mf} représente 95,4% de I_M et, donc, dissipe plus de 91% des pertes par effet Joule des courants d'induit du moteur.

2.1.n. On a vu {question 2.1.h} que le convertisseur fonctionne en onduleur {et la machine synchrone en moteur} lorsque les thyristors sont commandés avec un retard angulaire β tel que: $\pi/2 < \beta < \pi$ (rad).

On a aussi établi {question 2.1.i} que le déphasage φ_{Mf} {retard des composantes fondamentales $i_{mk}(t)$ sur les tensions $v_{mk}(t)$ } est lié au retard β par: $\varphi_{Mf} = \beta - \pi$.

On en déduit que, lors de la traction {pont de thyristors fonctionnant en onduleur, machine synchrone fonctionnant en moteur}, la machine synchrone présentera {pour le régime sinusoïdal fondamental} un déphasage φ_{Mf} {dans la convention générateur} dont la valeur est située sur la plage: $-\pi/2 < \varphi_{Mf} < 0$.

La machine synchrone doit alors fournir de "l'énergie réactive" $\{Q_M = 3 \cdot V_M \cdot I_{Mf} \cdot \sin(\varphi_{Mf}) < 0\}$ au convertisseur, ce qui impose de surexciter son inducteur.

2.2. Moteur synchrone.

2.2.1. Les forces électromotrices induites dans les enroulements statoriques se déduisent de la loi de LENZ-FARADAY {et des conventions "générateur" de la figure: $e > 0 \rightarrow i > 0 \rightarrow \Phi > 0$ }: $e_{mk} = - d\Phi_{mk}/dt$ et les tensions $[v_{M1}, v_{M2}, v_{M3}]$ s'obtiennent par application des lois des mailles et d'Ohm:

$$v_{mk} = R_M \cdot i_{mk} - e_{mk} = R_M \cdot i_{mk} + d\Phi_{mk}/dt$$

2.2.2. Avec les conventions de la figure, les flux enlacés par les enroulements statoriques s'expriment: $\Phi_{M1}(t) = L_{11} \cdot i_{M1}(t) + M_{12} \cdot i_{M2}(t) + M_{13} \cdot i_{M3}(t) + M_{1a} \cdot i_a(t) + M_{1a'} \cdot i_{a'}(t) + M_{1at} \cdot i_{at}(t)$

$$\Phi_{M2}(t) = M_{21} \cdot i_{M1}(t) + L_{22} \cdot i_{M2}(t) + M_{23} \cdot i_{M3}(t) + M_{2a} \cdot i_a(t) + M_{2a'} \cdot i_{a'}(t) + M_{2at} \cdot i_{at}(t)$$

$$\Phi_{M3}(t) = M_{31} \cdot i_{M1}(t) + M_{32} \cdot i_{M2}(t) + L_{33} \cdot i_{M3}(t) + M_{3a} \cdot i_a(t) + M_{3a'} \cdot i_{a'}(t) + M_{3at} \cdot i_{at}(t)$$

ou: $\Phi_{M1} = \Phi'_{M1} + \Phi''_{M1}$ où: $\Phi'_{M1} = L_{11} \cdot i_{M1} + M_{12} \cdot i_{M2} + M_{13} \cdot i_{M3}$ et; $\Phi''_{M1} = M_{1a} \cdot i_a + M_{1a'} \cdot i_{a'} + M_{1at} \cdot i_{at}$

$$\Phi_{M2} = \Phi'_{M2} + \Phi''_{M2} \quad \text{où: } \Phi'_{M2} = M_{21} \cdot i_{M1} + L_{22} \cdot i_{M2} + M_{23} \cdot i_{M3} \quad \text{et; } \Phi''_{M2} = M_{2a} \cdot i_a + M_{2a'} \cdot i_{a'} + M_{2at} \cdot i_{at}$$

$$\Phi''_{M3} = M_{se} \cdot \cos(\alpha_X - 4\pi/3) \cdot i_e + M_{sa} \cdot \cos(\alpha_X - 4\pi/3) \cdot i_a + M_{sa} \cdot \cos(\alpha_X + \pi/2 - 4\pi/3) \cdot i_{at}$$

2.2.3.a. Les flux $[\Phi'_{M1}, \Phi'_{M2}, \Phi'_{M3}]$ s'écrivent aussi:

$$\Phi'_{M1} = \{(3L_0/2) + \lambda\} \cdot i_{M1} - (L_0/2) \cdot (i_{M1} + i_{M2} + i_{M3}) + L \cos(2\alpha_X) \cdot i_{M1} + L \cos(2\alpha_X - 2\pi/3) \cdot i_{M2} + L \cos(2\alpha_X - 4\pi/3) \cdot i_{M3}$$

$$\Phi'_{M2} = \{(3L_0/2) + \lambda\} \cdot i_{M2} - (L_0/2) \cdot (i_{M1} + i_{M2} + i_{M3}) + L \cos(2\alpha_X) \cdot i_{M3} + L \cos(2\alpha_X - 2\pi/3) \cdot i_{M1} + L \cos(2\alpha_X - 4\pi/3) \cdot i_{M2}$$

$$\Phi'_{M3} = \{(3L_0/2) + \lambda\} \cdot i_{M3} - (L_0/2) \cdot (i_{M1} + i_{M2} + i_{M3}) + L \cos(2\alpha_X) \cdot i_{M2} + L \cos(2\alpha_X - 2\pi/3) \cdot i_{M3} + L \cos(2\alpha_X - 4\pi/3) \cdot i_{M1}$$

et leurs images $[\Phi'_{Md}, \Phi'_{Mq}, \Phi'_{Mo}]$ s'écrivent (propriétés P1, P2 et P5):

$$\Phi'_{Md} = \{(3L_0/2) + \lambda\} \cdot i_{Md} - (L_0/2) \cdot 0 + (3L/2) \cdot \{\cos(2\alpha_X - 2\theta) \cdot i_{Md} + \sin(2\alpha_X - 2\theta) \cdot i_{Mq}\}$$

$$\Phi'_{Mq} = \{(3L_0/2) + \lambda\} \cdot i_{Mq} - (L_0/2) \cdot 0 + (3L/2) \cdot \{\sin(2\alpha_X - 2\theta) \cdot i_{Md} - \cos(2\alpha_X - 2\theta) \cdot i_{Mq}\}$$

$$\Phi'_{Mo} = \{(3L_0/2) + \lambda\} \cdot i_{Mo} - (3L_0/2) \cdot i_{Mo} + 0 = \lambda \cdot i_{Mo}$$

D'autre part, les flux $[\Phi''_{M1}, \Phi''_{M2}, \Phi''_{M3}]$ se transforment (propriété P6) en $[\Phi''_{Md}, \Phi''_{Mq}, \Phi''_{Mo}]$:

$$\Phi''_{Md} = M_{se} \cdot \cos(\alpha_X - \theta) \cdot i_e + M_{sa} \cdot \cos(\alpha_X - \theta) \cdot i_a + M_{sa} \cdot \cos(\alpha_X + \pi/2 - \theta) \cdot i_{at}$$

$$\Phi''_{Mq} = M_{se} \cdot \sin(\alpha_X - \theta) \cdot i_e + M_{sa} \cdot \sin(\alpha_X - \theta) \cdot i_a + M_{sa} \cdot \sin(\alpha_X + \pi/2 - \theta) \cdot i_{at}$$

$$\Phi''_{Mo} = 0 + 0 + 0 = 0$$

D'où, finalement, la transformée $[\Phi_{Md}, \Phi_{Mq}, \Phi_{Mo}]$ des flux statoriques $[\Phi_{M1}, \Phi_{M2}, \Phi_{M3}]$ (linéarité, P1):

$$\Phi_{Md} = \Phi'_{Md} + \Phi''_{Md}, \Phi_{Mq} = \Phi'_{Mq} + \Phi''_{Mq}, \Phi_{Mo} = \Phi'_{Mo} + \Phi''_{Mo}$$

$$\Phi_{Md} = [\lambda + 3 \cdot \{L_0 + L \cos(2\alpha_X - 2\theta)\} / 2] \cdot i_{Md} + (3L/2) \cdot \sin(2\alpha_X - 2\theta) \cdot i_{Mq} + \cos(\alpha_X - \theta) \{M_{se} \cdot i_e + M_{sa} \cdot i_a\} - M_{sa} \cdot \sin(\alpha_X - \theta) \cdot i_{at}$$

$$\Phi_{Mq} = [\lambda + 3 \cdot \{L_0 - L \cos(2\alpha_X - 2\theta)\} / 2] \cdot i_{Mq} + (3L/2) \cdot \sin(2\alpha_X - 2\theta) \cdot i_{Md} + \sin(\alpha_X - \theta) \{M_{se} \cdot i_e + M_{sa} \cdot i_a\} + M_{sa} \cdot \cos(\alpha_X - \theta) \cdot i_{at}$$

$$\Phi_{Mo} = \lambda \cdot i_{Mo}$$

2.2.3.b. Ces expressions se simplifient si: $\theta = \alpha_X + \text{Cte}$ puisque les images deviennent constantes; si on choisit: $\theta = \alpha_X$, c'est-à-dire un référentiel $[d, q, o]$ lié au rotor (OX_d confondu avec OX_r , OX_q avec OX_t):

$$\Phi_{Md} = [(3/2) \cdot (L_0 + L) + \lambda] \cdot i_{Md} + M_{se} \cdot i_e + M_{sa} \cdot i_a$$

$$\Phi_{Mq} = [(3/2) \cdot (L_0 - L) + \lambda] \cdot i_{Mq} + M_{sa} \cdot i_{at}$$

$$\Phi_{Mo} = \lambda \cdot i_{Mo}$$

2.2.3.c. Transformée $[v_{Md}, v_{Mq}, v_{Mo}]$ des tensions [propriétés P1 (linéarité) et P3 (dérivation)]:

$$v_{Md} = R_M \cdot i_{Md} + d\Phi_{Md}/dt - (d\theta/dt) \cdot \Phi_{Mq}$$

$$v_{Mq} = R_M \cdot i_{Mq} + (d\theta/dt) \cdot \Phi_{Md} + d\Phi_{Mq}/dt$$

$$v_{Mo} = R \cdot i_{Mo} + d\Phi_{Mo}/dt$$

2.2.3.d. D'où, par combinaison des résultats de 2.2.3.b et 2.2.3.c (équations de PARK):

$$v_{Md} = R_M \cdot i_{Md} + [(3/2) \cdot (L_0 + L) + \lambda] \cdot di_{Md}/dt + M_{se} \cdot di_e/dt + M_{sa} \cdot di_a/dt - (d\theta/dt) \cdot \{[(3/2) \cdot (L_0 - L) + \lambda] \cdot i_{Mq} + M_{sa} \cdot i_{at}\}$$

$$v_{Mq} = R_M \cdot i_{Mq} + (d\theta/dt) \cdot \{[(3/2) \cdot (L_0 + L) + \lambda] \cdot i_{Md} + M_{se} \cdot i_e + M_{sa} \cdot i_a\} + [(3/2) \cdot (L_0 - L) + \lambda] \cdot di_{Mq}/dt + M_{sa} \cdot di_{at}/dt$$

$$v_{Mo} = R_M \cdot i_{Mo} + \lambda \cdot di_{Mo}/dt$$

2.2.4.a. Si on simule un régime permanent où les intensités des courants statoriques s'expriment:

$$i_{M1}(t) = I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha_X + \pi/2 + \psi_M)$$

$$i_{M2}(t) = I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha_X + \pi/2 + \psi_M - 2\pi/3)$$

$$i_{M3}(t) = I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha_X + \pi/2 + \psi_M - 4\pi/3)$$

alors, dans la transformation de Park, les intensités ont pour image, d'après la propriété P6 (ou P7):

$$i_{Md} = I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha_X + \pi/2 + \psi_M - \theta) = -I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\psi_M)$$

$$i_{Mq} = I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\alpha_X + \pi/2 + \psi_M - \theta) = I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\psi_M)$$

$$i_{Mo} = 0.$$

2.2.4.b. D'où les expressions des flux, par substitution dans $[\Phi_{Md}, \Phi_{Mq}, \Phi_{Mo}]$:

$$\Phi_{Md} = -[(3/2) \cdot (L_0 + L) + \lambda] \cdot I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\psi_M) + M_{se} \cdot i_e + M_{sa} \cdot i_a$$

$$\Phi_{Mq} = [(3/2) \cdot (L_0 - L) + \lambda] \cdot I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\psi) + M_{sa} \cdot i_{at}$$

$$\Phi_{Mo} = 0$$

Au régime permanent, les sources $\{i_d, i_q, i_e\}$ de forces magnéto-motrices $\{E_{Md} = N_d \cdot i_{Md} = \text{Cte}, E_{Mq} = N_q \cdot i_{Mq} = \text{Cte}, E_e = N_e \cdot i_e = \text{Cte}\}$ et les flux qu'elles génèrent sont constants; les courants induits dans l'amortisseur sont d'intensité nulle ($\Phi_{at} = \text{Cte} \rightarrow e_{at} = 0 \rightarrow i_{at} = 0$; de même: $\Phi_{at} = \text{Cte} \rightarrow e_{at} = 0 \rightarrow i_{at} = 0$).

2.2.4.c. Le théorème de Parseval impose (si la machine synchrone convertit de l'énergie) que les grandeurs $v_{Mk}(t)$ et $i_{Mk}(t)$ soient de même pulsation: $\alpha_X = \omega_M \cdot t + Cte$, d'où: $\theta = \alpha_X = \omega_M \cdot t + Cte$, $\omega_M = d\theta/dt$.

2.2.4.d. D'où l'image des tensions d'induit (par substitution dans les relations établies au 2.2.3.d):

$$V_{Md} = -R_M \cdot I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\psi_M) - [(3/2) \cdot (L_0 + l) + \lambda] \cdot \omega_M \cdot I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\psi_M)$$

$$V_{Mq} = R_M \cdot I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\psi_M) - [(3/2) \cdot (L_0 + l) + \lambda] \cdot \omega_M \cdot I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\psi_M) + M_{se} \cdot \omega_M \cdot I_e$$

et: $V_{M0} = 0$.

2.2.4.e. Tout système sinusoïdal, triphasé et équilibré peut s'exprimer comme un système direct et la propriété P7 montre que son image est un vecteur du plan $[d, q]$, de norme: $[g_d^2 + g_q^2]^{1/2} = G_M \cdot CQFD$.

2.2.4.f. Dans le plan de Fresnel choisi, on a:

$$V_{Mx} = V_{Mq} / \sqrt{2} = R_M \cdot I_M \cdot \cos(\psi_M) - [(3/2) \cdot (L_0 + l) + \lambda] \cdot \omega_M \cdot I_M \cdot \sin(\psi_M) + M_{se} \cdot \omega_M \cdot I_e / \sqrt{2}$$

$$V_{My} = -V_{Md} / \sqrt{2} = R_M \cdot I_M \cdot \sin(\psi_M) + [(3/2) \cdot (L_0 + l) + \lambda] \cdot \omega_M \cdot I_M \cdot \cos(\psi_M)$$

que l'on peut encore écrire {si on note: $E'_{M0} = M_{se} \cdot \omega_M \cdot I_e / \sqrt{2}$ }:

$$V_{Mx} = R_M \cdot I_M \cdot \cos(\psi_M) + [(3/2) \cdot (L_0 + l) + \lambda] \cdot \omega_M \cdot I_M \cdot \cos(\psi_M + \pi/2) + E'_{M0}$$

et: $V_{My} = R_M \cdot I_M \cdot \sin(\psi_M) + [(3/2) \cdot (L_0 + l) + \lambda] \cdot \omega_M \cdot I_M \cdot \sin(\psi_M + \pi/2) - 3 \cdot L \cdot \omega_M \cdot I_M \cdot \sin(\psi_M + \pi/2)$

en notant: $X_{ML} = [(3/2) \cdot (L_0 + l) + \lambda] \cdot \omega_M$, ces expressions deviennent:

$$V_{Mx} = R_M \cdot I_M \cdot \cos(\psi_M) + X_{ML} \cdot I_M \cdot \cos(\psi_M + \pi/2) + E'_{M0}$$

$$V_{My} = R_M \cdot I_M \cdot \sin(\psi) + X_{ML} \cdot I_M \cdot \sin(\psi + \pi/2) - 3 \cdot L \cdot \omega_M \cdot I_M \cdot \cos(\psi_M)$$

Ce sont bien les projections d'un vecteur dont l'image complexe s'exprime:

$\underline{V}_M = R_M \cdot \underline{I}_M + j \cdot X_{ML} \cdot \underline{I}_M - j \cdot X'_{M} \cdot \underline{I}_{Mx} + \underline{E}'_{M0}$ où: $\underline{I}_{Mx} = I_{Mq} / \sqrt{2} = I_M \cdot \cos(\psi_M)$ est bien la composante de \underline{I}_M suivant OX}, que l'on peut aussi écrire {en remarquant que: $\underline{I}_M = \underline{I}_{Mx} + \underline{I}_{My}$ }:

$$\underline{V}_M = R_M \cdot \underline{I}_M + j \cdot X_{ML} \cdot \underline{I}_{My} + j \cdot (X_{ML} - X'_{M}) \cdot \underline{I}_{Mx} + \underline{E}'_{M0} = R_M \cdot \underline{I}_M + j \cdot X_{ML} \cdot \underline{I}_{My} + j \cdot X_{MT} \cdot \underline{I}_{Mx} + \underline{E}'_{M0}$$

2.2.4.g. On a immédiatement, par identification:

$$X_{ML} = (L_L + \lambda) \cdot \omega_M = [(3/2) \cdot (L_0 + l) + \lambda] \cdot \omega_M, \text{ d'où: } L_L = (3/2) \cdot (L_0 + l) \text{ et: } X'_{M} = 3 \cdot L \cdot \omega_M,$$

d'où: $X_{MT} = (L_T + \lambda) \cdot \omega_M = [(3/2) \cdot (L_0 + l) + \lambda - 3 \cdot L] \cdot \omega_M = [(3/2) \cdot (L_0 - l) + \lambda] \cdot \omega_M$; donc: $L_T = (3/2) \cdot (L_0 - l)$.

2.2.4.h. Par identification aussi, la valeur efficace E'_{M0} s'exprime:

$$E'_{M0} = M_{se} \cdot \omega_M \cdot I_e / \sqrt{2} = \Phi_{se} \cdot \omega_M / \sqrt{2} \text{ {car, par définition de la mutuelle inductance } M_{se}, \text{ le flux maximal généré par l'inducteur et embrassé par les enroulements d'induit vaut: } \Phi_{se} = M_{se} \cdot I_e \text{.}}$$

Si on écrit Φ_{se} sous la forme: $\Phi_{se} = n_s \cdot \Phi_e = (K_{bs} \cdot N_s / 2) \cdot \Phi_e$ où: $n_s = K_{bs} \cdot N_s / 2$ il vient {car: $\omega_M = 2 \cdot \pi \cdot f_M$ }:

$$E'_{M0} = (K_{bs} \cdot N_s / 2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_M \cdot \Phi_e / \sqrt{2} = (\pi / \sqrt{2}) \cdot K_{bs} \cdot N_s \cdot f_M \cdot \Phi_e = 2,22 \cdot K_{bs} \cdot N_s \cdot f_M \cdot \Phi_e \text{ {relation de Boucherot}}.$$

2.2.4.i. Voir document-réponse n°3.

2.2.4.j. Les diagrammes du document-réponse n°3 montrent que V_M et E'_{M0} (par phase) sont liées par {si la résistance R_M est négligeable devant les réactances X_{ML} et X_{MT} }:

- si \underline{I}_M est en avance de ψ_M { $\psi_M > 0$ } sur \underline{E}'_{M0} {d'où: $\underline{I}_{Mx} = I_M \cdot \cos(\psi_M)$ et: $\underline{I}_{My} = I_M \cdot \sin(\psi_M)$ }

$$V_M \approx [(E'_{M0} - X_{ML} \cdot \underline{I}_{My})^2 + (X_{MT} \cdot \underline{I}_{Mx})^2]^{1/2};$$

- si: $\psi_M = 0$ alors: $V_M \approx [(E'_{M0})^2 + (X_{MT} \cdot I_M)^2]^{1/2}$;

- si: $\psi_M = +\pi/2$ alors: $V_M \approx E'_{M0} - X_{ML} \cdot I_M$;

- si: $\psi_M = -\pi/2$ alors: $V_M \approx E'_{M0} + X_{ML} \cdot I_M$;

- si: $E'_{M0} = 0$ et \underline{I}_M suivant OX: $V_M \approx X_{MT} \cdot I_M$;

- si: $E'_{M0} = 0$ et \underline{I}_M suivant -OY: $V_M \approx X_{ML} \cdot I_M$.

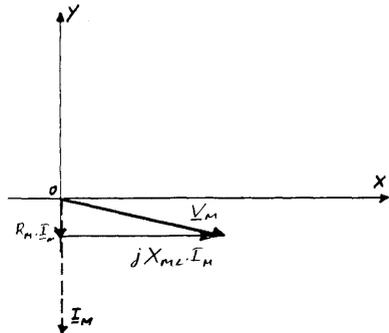
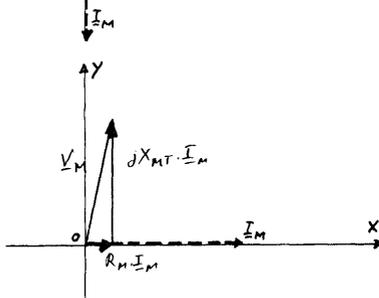
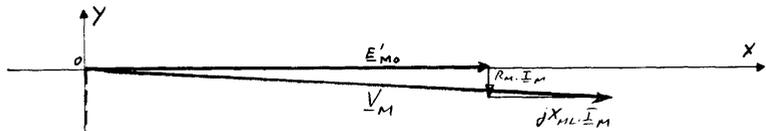
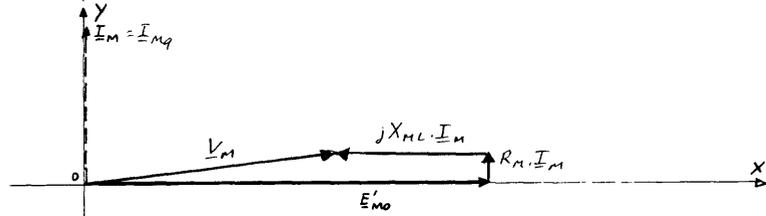
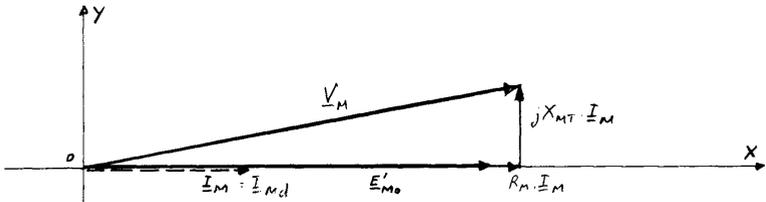
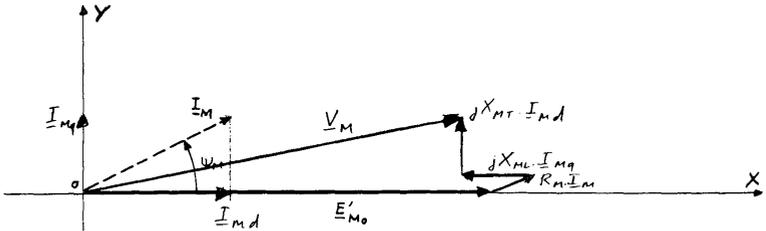
2.2.4.k. Si: $R_M \cdot I_M \ll V_M$ et: $\lambda \cdot \omega_M \cdot I_M \ll V_M$; on peut admettre, avec une approximation suffisante pour la comparaison envisagée, que la f.c.e.m. résultante { $\underline{E}'_{Mk} \approx \underline{V}_M - R_M \cdot \underline{I}_M - j \cdot \lambda \cdot \omega_M \cdot \underline{I}_M$ } et la tension simple sont de valeurs voisines { $\underline{E}'_{Mk} \approx \underline{V}_M$ }; d'où la comparaison entre \underline{E}'_{M0} et \underline{E}'_{Mk} lors des différents services:

- courant purement actif { $\psi_M = 0$ }: $\underline{E}'_{Mk} \approx \underline{V}_M \approx [(E'_{M0})^2 + (X_{MT} \cdot I_M)^2]^{1/2} \approx \underline{E}'_{M0} \cdot (1 + (X_{MT} \cdot I_M)^2 / [2 \cdot (E'_{M0})^2])$;

- courant réactif avant { $\psi_M = +\pi/2$ }: $\underline{E}'_{Mk} \approx \underline{V}_M \approx (E'_{M0} - X_{ML} \cdot I_M) \approx (E'_{M0} - X_{ML} \cdot I_M) < E'_{M0}$;

- courant réactif arrière { $\psi_M = -\pi/2$ }: $\underline{E}'_{Mk} \approx \underline{V}_M \approx (E'_{M0} + X_{ML} \cdot I_M) > E'_{M0}$.

Document-Réponse n°3.



Conclusion:

C.1. Les composantes actives des courants d'induit n'ont qu'un effet réduit sur la magnétisation.

C.2. Les composantes réactives (longitudinales) ont des effets magnétiques importants:

- si elles sont en avance sur les f.c.e.m. {comportement capacitif du moteur: il fournit de l'énergie réactive}, le flux résultant est inférieur à celui engendré par l'inducteur {puisque: $E'_{M'} < E'_{M0}$ }; la réaction d'induit est démagnétisante {et il faudra surexciter le moteur, à tensions imposées};
- réciproquement, des composantes réactives en retard sur les f.c.e.m. {le moteur consomme alors de l'énergie réactive} augmentent le flux magnétique de la machine ($E'_{M'} > E'_{M0}$), qu'il faut alors sous-exciter {à tensions de travail fixes}.

2.2.4.A.a. Lors du fonctionnement en moteur à vide {à: $I_{Mv} \ll I_{Mn}$ } on a approximativement: $E_{M0} = V_{Mv}$; or {par propriété des systèmes sinusoïdaux triphasés équilibrés}: $V_{Mv} = U_{Mv}/(\sqrt{3})$; de plus, on a mesuré: $U_{Mv} = 310$ V, $f_{Mv} = 50$ Hz et: $I_e = 160$ A; on en déduit le coefficient de flux:

$$K_M = E_{M0}/(f_{Mv} I_e) = U_{Mv}/(\sqrt{3} \cdot f_{Mv} \cdot I_e) = 22,37 \cdot 10^{-3} \text{ V.s/A} \approx 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ O.s}$$

2.2.4.A.b. Lors du fonctionnement à vide, surexcité { $I_e = 225$ A > 160 A}, le moteur est presque purement capacitif {la composante active des courants est toujours négligeable devant: $I_{Mv} = 200$ A} et on a: $\varphi_M \approx -\pi/2$ ou: $\psi_M \approx +\pi/2$; on a montré qu'alors: $V_M \approx E'_{M0} - X_{ML} \cdot I_{Mv}$; d'où: $X_{ML} = (E'_{M0} - V_{Mv})/I_{Mv}$. Numériquement: $X_{ML} = (22,37 \cdot 225 \cdot 50 \text{ V} - 179 \text{ V})/(200 \text{ A}) = 0,36 \text{ } \Omega$

et: $\mathcal{L}_L = X_{ML}/\omega_M = (0,364 \text{ } \Omega)/(100 \cdot \pi \text{ s}^{-1}) = 1,16 \text{ mH}$.

Sans excitation, à vitesse non synchrone {ralentissement}, l'intensité des courants évolue entre:

- la valeur maximale {lorsque le champ est transversal}: $I_{M\max} = V_M/X_{MT}$;

- la valeur minimale {lorsque le champ est longitudinal}: $I_{M\min} = V_M/X_{ML}$.

D'où: $X_{MT} = (I_{M\min}/I_{M\max}) \cdot X_{ML} = 0,36 \text{ } \Omega/1,75 = 0,21 \text{ } \Omega$ et: $\mathcal{L}_T = X_{MT}/\omega_M = 0,21 \text{ } \Omega/(100 \cdot \pi \text{ s}^{-1}) = 0,66 \text{ mH}$.

2.2.4.A.c. On sait que {question 2.2.4.g}: $\mathcal{L}_L = X_{ML}/\omega_M = L_L + \lambda = (3/2) \cdot (L_0 + l) + \lambda$

et: $\mathcal{L}_T = X_{MT}/\omega_M = L_T + \lambda = (3/2) \cdot (L_0 - l) - \lambda$;

on en déduit {si: $\lambda = 40 \text{ } \mu\text{H}$ }: $L_0 + l = (2/3) \cdot (\mathcal{L}_L - \lambda) = 0,74 \text{ mH}$ et: $L_0 - l = (2/3) \cdot (\mathcal{L}_T - \lambda) = 0,41 \text{ mH}$.

D'où: $L_0 = 0,58 \text{ mH}$; $l = 0,16 \text{ mH}$.

2.2.4.A.d. Simulons le service nominal: $U_{Mn} = 1246$ V, $I_{Mn} = 588$ A, $n'_n = 4000$ tr/min, $\cos(\varphi_M) = 0,7$ AV. On en déduit {convention "récepteur"}: $\varphi_M = -\text{Arccos}(0,7) = -0,795$ rad {d'où: $\sin(\varphi_M) = -0,714$ }.

Par ailleurs: $f_{Mn} = \omega_{Mn}/(2 \cdot \pi) = p \cdot \Omega_{Mn}/(2 \cdot \pi) = p \cdot \pi \cdot n'_n/(60 \cdot \pi) = p \cdot n'_n/60 = 3 \cdot (4000 \text{ min}^{-1})/60 = 200$ Hz.

D'où la valeur des deux réactances: $X_{ML} = \mathcal{L}_L \cdot \omega_{Mn} = 1,157 \cdot 10^{-3} \text{ H} \cdot (400 \cdot \pi \text{ s}^{-1}) = 1,45 \text{ } \Omega$

et: $X_{MT} = \mathcal{L}_T \cdot \omega_{Mn} = 0,661 \cdot 10^{-3} \text{ H} \cdot (400 \cdot \pi \text{ s}^{-1}) = 0,83 \text{ } \Omega$,

ainsi que l'amplitude (efficace) des différentes chutes de tension:

$$R_M \cdot I_M = (0,019 \text{ } \Omega) \cdot (588 \text{ A}) = 11,2 \text{ V}$$

$$X_{ML} \cdot I_M = (1,454 \text{ } \Omega) \cdot (588 \text{ A}) = 855 \text{ V}$$

$$X_{MT} \cdot I_M = (0,831 \text{ H}) \cdot (588 \text{ A}) = 488 \text{ V}$$

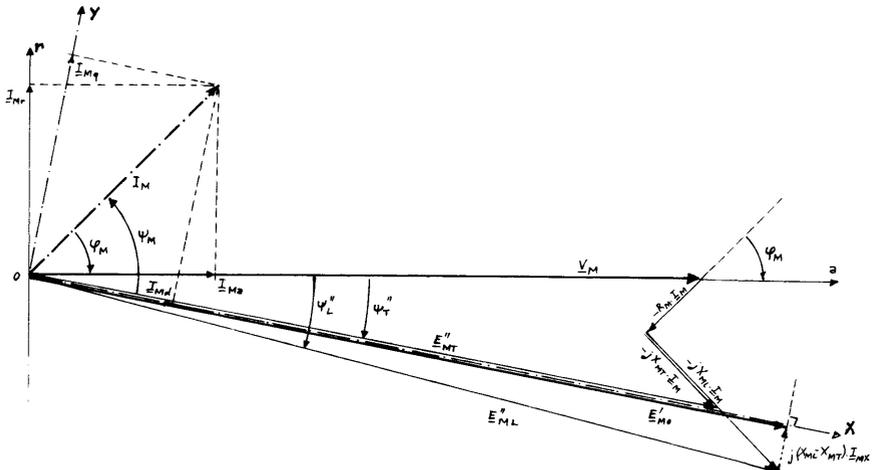
La valeur efficace de la f.c.e.m. à vide du moteur synchrone (par phase) se déduit du modèle de la

double réactance: $E'_{M0} = \underline{V}_M - R_M \cdot \underline{I}_M - j \cdot X_{ML} \cdot \underline{I}_{MY} - j \cdot X_{MT} \cdot \underline{I}_{MX} = \underline{V}_M - R_M \cdot \underline{I}_M - j \cdot X_{ML} \cdot (\underline{I}_M - \underline{I}_{MX}) - j \cdot X_{MT} \cdot \underline{I}_{MX}$

ou: $E'_{M0} = \underline{V}_M - R_M \cdot \underline{I}_M - j \cdot X_{ML} \cdot \underline{I}_M + j \cdot (X_{ML} - X_{MT}) \cdot \underline{I}_{MX}$;

On construit: $E''_{ML} = \underline{V}_M - R_M \cdot \underline{I}_M - j \cdot X_{ML} \cdot \underline{I}_M$ et: $E''_{MT} = \underline{V}_M - R_M \cdot \underline{I}_M - j \cdot X_{MT} \cdot \underline{I}_M$

La f.c.e.m. E'_{M0} cherchée est la projection de E''_{ML} sur la direction de E''_{MT} {diagrammes vectoriels}.



La résolution en complexes conduit {si on choisit la tension \underline{V}_M comme référence de phases} à :

$$\underline{E}''_{ML} = [V_M - R_M \cdot I_M \cdot \cos(\varphi_M) - X_{ML} \cdot I_M \cdot \sin(\varphi_M)] + j \cdot [R_M \cdot I_M \cdot \sin(\varphi_M) - X_{ML} \cdot I_M \cdot \cos(\varphi_M)]$$

soit: $\underline{E}''_{ML} = (719,4 - 11,2,0,7 + 855,0,714 \text{ V}) + j \cdot (-11,2,0,714 - 855,0,7 \text{ V}) = 1322 \text{ V} - j \cdot 606 \text{ V}$

ou encore: $\underline{E}''_{ML} = [E''_{ML}; \psi''_L]$, avec: $E''_{ML} = 1454 \text{ V}$ et: $\psi''_L = -0,43007 \text{ rad}$;

$$\underline{E}''_{MT} = [V_M - R_M \cdot I_M \cdot \cos(\varphi_M) - X_{MT} \cdot I_M \cdot \sin(\varphi_M)] + j \cdot [R_M \cdot I_M \cdot \sin(\varphi_M) - X_{MT} \cdot I_M \cdot \cos(\varphi_M)]$$

$$\text{ou: } \underline{E}''_{MT} = (719,4 - 11,2,0,7 + 488,0,714 \text{ V}) + j \cdot (-11,2,0,714 - 488,0,7 \text{ V}) = 1060 \text{ V} - j \cdot 350 \text{ V}$$

donc: $\underline{E}''_{MT} = [E''_{MT}; \psi''_T]$, avec: $E''_{MT} = 1117 \text{ V}$ et: $\psi''_T = -0,3187 \text{ rad}$.

On en déduit: $E'_{M0} = E''_{ML} \cdot \cos(\psi''_{ML} - \psi''_{MT}) = (1322 \text{ V}) \cdot \cos(0,43007 - 0,3187) = 1314 \text{ V}$

Si on suppose la machine non saturée {donc applicable la relation: $E'_{M0} = K_M \cdot f_M \cdot I_e$ }, on en déduit la valeur de l'intensité du courant d'excitation: $I_e = E'_{M0} / (K_M \cdot f_M) = (1314 \text{ V}) / (200,22,37,10^{-3} \Omega) = 294 \text{ A}$.

2.2.5. Modélisation dynamique de la machine synchrone.

2.2.5.1. On a établi (2.2.3.b et 2.2.3.c) les relations:

$$\Phi_{Md} = \mathcal{L}_L \cdot i_{Md} + M_{se} \cdot i_e + M_{sar} \cdot i_{a'}$$

$$\Phi_{Mq} = \mathcal{L}_T \cdot i_{Mq} + M_{sat} \cdot i_{a'}$$

$$\Phi_{M0} = \lambda \cdot i_{M0}$$

et: $V_{Md} = R_M \cdot i_{Md} + d\Phi_{Md}/dt - (d\theta/dt) \cdot \Phi_{Mq}$

$$V_{Mq} = R_M \cdot i_{Mq} + (d\theta/dt) \cdot \Phi_{Md} + d\Phi_{Mq}/dt$$

$$V_{M0} = R_M \cdot i_{M0} + d\Phi_{M0}/dt$$

D'où, par substitution (et en tenant compte du fait que: $d\theta/dt = d\alpha_X/dt = \omega_M = \text{Cte}$):

$$V_{Md} = R_M \cdot i_{Md} + \mathcal{L}_L \cdot di_{Md}/dt - \mathcal{L}_T \cdot \omega_M \cdot i_{Mq} + M_{se} \cdot di_e/dt + M_{sar} \cdot di_{a'}/dt - M_{sat} \cdot \omega_M \cdot i_{a'}$$

$$V_{Mq} = \mathcal{L}_T \cdot \omega_M \cdot i_{Md} + R_M \cdot i_{Mq} + \mathcal{L}_T \cdot di_{Mq}/dt + M_{se} \cdot \omega_M \cdot i_e + M_{sar} \cdot \omega_M \cdot i_{a'} + M_{sat} \cdot di_{a'}/dt$$

$$V_{M0} = R_M \cdot i_{M0} + \lambda \cdot di_{M0}/dt$$

2.2.5.2. Le flux magnétique total embrassé par chacun des trois enroulements considérés s'exprime, compte tenu des inductances (propres et mutuelles), des intensités et des bornes homologues:

$$\Phi_0 = M_{1e} \cdot i_{M1} + M_{2e} \cdot i_{M2} + M_{3e} \cdot i_{M3} + L_e \cdot i_e + M_{sar} \cdot i_{a'}$$

$$\Phi_{a'} = M_{1a'} \cdot i_{M1} + M_{2a'} \cdot i_{M2} + M_{3a'} \cdot i_{M3} + M_{sar} \cdot i_e + L_{a'} \cdot i_{a'}$$

$$\Phi_{a''} = M_{1a''} \cdot i_{M1} + M_{2a''} \cdot i_{M2} + M_{3a''} \cdot i_{M3} + L_{a''} \cdot i_{a''}$$

2.2.5.3. Compte tenu des expressions des inductances mutuelles en fonction de α_X , on obtient, en fonction de l'image $[i_{Md}; i_{Mq}; i_{M0}]$ de la transformation de Park {avec: $\theta = \alpha_X$ }:

$$M_{1e} \cdot i_{M1} + M_{2e} \cdot i_{M2} + M_{3e} \cdot i_{M3} = (3/2) \cdot M_{se} \cdot i_{Md}$$

$$M_{1a'} \cdot i_{M1} + M_{2a'} \cdot i_{M2} + M_{3a'} \cdot i_{M3} = (3/2) \cdot M_{sar} \cdot i_{Md}$$

$$\begin{aligned}
 M_{1at} \cdot i_{M1} + M_{2at} \cdot i_{M2} + M_{3at} \cdot i_{M3} &= (3/2) \cdot M_{sat} \cdot i_{Mq} \\
 \text{D'où: } \Phi_0 &= (3/2) \cdot M_{se} \cdot i_{Md} + L_e \cdot i_e + M_{ea'} \cdot i_{a'} \\
 \Phi_{a'} &= (3/2) \cdot M_{sa'} \cdot i_{Md} + M_{ea'} \cdot i_e + L_{a'} \cdot i_{a'} \\
 \Phi_{at} &= (3/2) \cdot M_{sat} \cdot i_{Mq} + L_{at} \cdot i_{at}
 \end{aligned}$$

2.2.5.4. D'où le système total des relations exprimant les flux dans la transformation de Park:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{Md} &= \mathcal{L}_L \cdot i_{Md} && + M_{se} \cdot i_e + M_{sa'} \cdot i_{a'} \\
 \Phi_{Mq} &= && \mathcal{L}_T \cdot i_{Mq} && + M_{sat} \cdot i_{at} \\
 \Phi_{M0} &= && && \lambda \cdot i_{M0} \\
 \Phi_0 &= (3/2) \cdot M_{se} \cdot i_{Md} && + L_e \cdot i_e + M_{ea'} \cdot i_{a'} \\
 \Phi_{a'} &= (3/2) \cdot M_{sa'} \cdot i_{Md} && + M_{ea'} \cdot i_e + L_{a'} \cdot i_{a'} \\
 \Phi_{at} &= && (3/2) \cdot M_{sat} \cdot i_{Mq} && + L_{at} \cdot i_{at}
 \end{aligned}$$

ou la matrice inductance [L]:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{Md} \\ \Phi_{Mq} \\ \Phi_{M0} \\ \Phi_0 \\ \Phi_{a'} \\ \Phi_{at} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_L & 0 & 0 & M_{se} & M_{sa'} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_T & 0 & 0 & 0 & M_{sat} \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ (3/2) \cdot M_{se} & 0 & 0 & L_e & M_{ea'} & 0 \\ (3/2) \cdot M_{sa'} & 0 & 0 & M_{ea'} & L_{a'} & 0 \\ 0 & (3/2) \cdot M_{sat} & 0 & 0 & 0 & L_{at} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i_{Md} \\ i_{Mq} \\ i_{M0} \\ i_e \\ i_{a'} \\ i_{at} \end{pmatrix}$$

On constate l'indépendance des trois axes [d,q,0] (orthogonalité géométrique). Les intensités i_{Md} , i_e et $i_{a'}$ participent à la magnétisation longitudinale (inducteur, bobine d et amortisseur longitudinal).

Les intensités i_{Mq} et i_{at} magnétisent la bobine q et l'amortisseur transversal.

2.2.5.5. Dans les conventions de la figure 6 les lois des mailles, d'Ohm et de Lenz-Faraday conduisent à:

$$\begin{aligned}
 v_e &= R_e \cdot i_e - (-d\Phi_0/dt); \quad v_{a'} = R_{a'} \cdot i_{a'} - (-d\Phi_{a'}/dt) = 0; \quad v_{at} = R_{at} \cdot i_{at} - (-d\Phi_{at}/dt) = 0 \\
 \text{D'où: } v_e &= (3/2) \cdot M_{se} \cdot di_{Md}/dt + R_e \cdot i_e + L_e \cdot di_e/dt + M_{ea'} \cdot di_{a'}/dt \\
 0 &= (3/2) \cdot M_{sa'} \cdot di_{Md}/dt + M_{ea'} \cdot di_e/dt + R_{a'} \cdot i_{a'} + L_{a'} \cdot di_{a'}/dt \\
 0 &= (3/2) \cdot M_{sat} \cdot di_{Mq}/dt + R_{at} \cdot i_{at} + L_{at} \cdot di_{at}/dt
 \end{aligned}$$

2.2.5.6. D'où les relations exprimant les tensions aux bornes des six bobines:

$$\begin{aligned}
 v_{Md} &= R_M \cdot i_{Md} + \mathcal{L}_L \cdot di_{Md}/dt - \mathcal{L}_T \cdot \omega_M \cdot i_{Mq} + M_{se} \cdot di_e/dt + M_{sa'} \cdot di_{a'}/dt - M_{sat} \cdot \omega_M \cdot i_{at} \\
 v_{Mq} &= \mathcal{L}_L \cdot \omega_M \cdot i_{Md} + R_M \cdot i_{Mq} + \mathcal{L}_T \cdot di_{Mq}/dt + M_{se} \cdot \omega_M \cdot i_e + M_{sa'} \cdot \omega_M \cdot i_{a'} + M_{sat} \cdot di_{at}/dt \\
 v_{M0} &= R_M \cdot i_{M0} + \lambda \cdot di_{M0}/dt \\
 v_e &= (3/2) \cdot M_{se} \cdot di_{Md}/dt + R_e \cdot i_e + L_e \cdot di_e/dt + M_{ea'} \cdot di_{a'}/dt \\
 0 &= (3/2) \cdot M_{sa'} \cdot di_{Md}/dt + M_{ea'} \cdot di_e/dt + R_{a'} \cdot i_{a'} + L_{a'} \cdot di_{a'}/dt \\
 0 &= (3/2) \cdot M_{sat} \cdot di_{Mq}/dt + R_{at} \cdot i_{at} + L_{at} \cdot di_{at}/dt
 \end{aligned}$$

Dans le formalisme opérationnel (en supposant nulles les valeurs initiales des grandeurs dérivées):

$$\begin{aligned}
 V_{Md}(p) &= (R_M + \mathcal{L}_L \cdot p) \cdot i_{Md}(p) - \mathcal{L}_T \cdot \omega_M \cdot i_{Mq}(p) && + M_{se} \cdot p \cdot i_e(p) + M_{sa'} \cdot p \cdot i_{a'}(p) - M_{sat} \cdot \omega_M \cdot i_{at}(p) \\
 V_{Mq}(p) &= \mathcal{L}_L \cdot \omega_M \cdot i_{Md}(p) + (R_M + \mathcal{L}_T \cdot p) \cdot i_{Mq}(p) && + M_{se} \cdot \omega_M \cdot i_e(p) + M_{sa'} \cdot \omega_M \cdot i_{a'}(p) + M_{sat} \cdot p \cdot i_{at}(p) \\
 V_{M0}(p) &= && (R_M + \lambda \cdot p) \cdot i_{M0}(p) \\
 V_e(p) &= (3/2) \cdot M_{se} \cdot p \cdot i_{Md}(p) && + (R_e + L_e \cdot p) \cdot i_e(p) + M_{ea'} \cdot p \cdot i_{a'}(p) \\
 0 &= (3/2) \cdot M_{sa'} \cdot p \cdot i_{Md}(p) && + M_{ea'} \cdot p \cdot i_e(p) + (R_{a'} + L_{a'} \cdot p) \cdot i_{a'}(p) \\
 0 &= && (3/2) \cdot M_{sat} \cdot p \cdot i_{Mq}(p) && + (R_{at} + L_{at} \cdot p) \cdot i_{at}(p)
 \end{aligned}$$

Dans le formalisme matriciel:

$$[V_{Md}(p), V_{Mq}(p), V_{M0}(p), V_e(p), 0, 0] = [Z(p)] \cdot [i_{Md}(p), i_{Mq}(p), i_{M0}(p), i_e(p), i_{a'}(p), i_{at}(p)]$$

où la matrice impédance s'écrit:

$$[Z(p)] = \begin{pmatrix} (R_M + \mathcal{L}_L \cdot p) & -\mathcal{L}_T \cdot \omega_M & 0 & M_{se} \cdot p & M_{sa'} \cdot p & -M_{sat} \cdot \omega_M \\ \mathcal{L}_L \cdot \omega_M & (R_M + \mathcal{L}_T \cdot p) & 0 & M_{se} \cdot \omega_M & M_{sa'} \cdot \omega_M & M_{sat} \cdot p \\ 0 & 0 & (R_M + \lambda \cdot p) & 0 & 0 & 0 \\ (3/2) \cdot M_{se} \cdot p & 0 & 0 & (R_e + L_e \cdot p) & M_{ea'} \cdot p & 0 \\ (3/2) \cdot M_{sa'} \cdot p & 0 & 0 & M_{ea'} \cdot p & (R_{a'} + L_{a'} \cdot p) & 0 \\ 0 & (3/2) \cdot M_{sat} \cdot p & 0 & 0 & 0 & (R_{at} + L_{at} \cdot p) \end{pmatrix}$$

2.2.5.7. Études la magnétisation des bobines longitudinales.

2.2.5.7.a. Si on néglige l'amortisseur longitudinal {pas de 5^{ème} relation et: $i_w = 0$, d'où: $i_w(p) = 0$ }, les images $I_{Md}(p)$ et $I_e(p)$ sont liées par (équations 1 et 4 du système précédent):

$$V_{Md}(p) + \mathcal{L}_T \cdot \omega_M \cdot I_{Mq}(p) + M_{sat} \cdot \omega_M \cdot I_{at}(p) = (R_M + \mathcal{L}_L \cdot p) \cdot I_{Md}(p) + M_{se} \cdot p \cdot I_e(p)$$

$$V_e(p) = (3/2) \cdot M_{se} \cdot p \cdot I_{Md}(p) + (R_e + L_e \cdot p) \cdot I_e(p)$$

D'où: $I_e(p) = [V_e(p) - (3/2) \cdot M_{se} \cdot p \cdot I_{Md}(p)] / (R_e + L_e \cdot p)$ et, par substitution dans la première:

$V_{Md}(p) + \mathcal{L}_T \cdot \omega_M \cdot I_{Mq}(p) + M_{sat} \cdot \omega_M \cdot I_{at}(p) = [R_M + \mathcal{L}_L \cdot p - (3/2) \cdot M_{se}^2 \cdot p^2 / (R_e + L_e \cdot p)] \cdot I_{Md}(p) + M_{se} \cdot p \cdot V_e(p) / (R_e + L_e \cdot p)$

qui est bien de la forme: $V_{Md}(p) - E_{Md}(p) = Z''_L(p) \cdot I_{Md}(p) + F'_L(p) \cdot V_e(p)$

avec: $E_{Md}(p) = -\mathcal{L}_T \cdot \omega_M \cdot I_{Mq}(p) - M_{sat} \cdot \omega_M \cdot I_{at}(p)$, $F'_L(p) = M_{se} \cdot p / (R_e + L_e \cdot p)$

et: $Z''_L(p) = R_M + \mathcal{L}_L \cdot p - (3/2) \cdot M_{se}^2 \cdot p^2 / (R_e + L_e \cdot p)$

2.2.5.7.b. L'impédance longitudinale opérationnelle peut aussi s'écrire:

$$Z''_L(p) = R_M + \mathcal{L}_L \cdot p \cdot [1 - (3/2) \cdot M_{se}^2 \cdot p / \{\mathcal{L}_L \cdot (R_e + L_e \cdot p)\}]$$

ou {comme: $\mathcal{L}_L = (3/2) \cdot L_{OL}$ }: $Z''_L(p) = R_M + \mathcal{L}_L \cdot [1 - M_{se}^2 \cdot p / \{L_{OL} \cdot (R_e + L_e \cdot p)\}] \cdot p$

soit: $Z''_L(p) = R_M + \mathcal{L}_L \cdot [(R_e + L_e \cdot p - M_{se}^2 \cdot p / L_{OL}) / (R_e + L_e \cdot p)] \cdot p$

ou encore: $Z''_L(p) = R_M + \mathcal{L}_L \cdot [1 + (L_e / R_e) \cdot (1 - M_{se}^2 / (L_e \cdot L_{OL})) \cdot p] / [1 + (L_e / R_e) \cdot p] \cdot p$

qui est bien de la forme: $Z''_L(p) = R_M + \mathcal{L}'_L \cdot p$, avec: $\mathcal{L}'_L = \mathcal{L}_L \cdot [(1 + \tau'_{LC} \cdot p) / (1 + \tau'_{LO} \cdot p)]$

où τ'_{LC} {constante de temps transitoire d'axe longitudinal en court-circuit} et τ'_{LO} {constante de temps transitoire d'axe longitudinal en circuit ouvert} s'expriment:

$$\tau'_{LC} = (L_e / R_e) \cdot [1 - M_{se}^2 / (L_e \cdot L_{OL})] \quad ; \quad \tau'_{LO} = L_e / R_e$$

2.2.5.7.c. Le résultat de 2.2.5.7.a et 2.2.5.7.b montre que le couplage magnétique de deux bobines amène une modification de l'inductance de chaque bobine traduite, dans le formalisme opérationnel, par deux constantes de temps (ou une racine et un pôle); la prise en compte de la troisième bobine longitudinale (la partie longitudinale de l'amortisseur) va donc modifier l'inductance opérationnelle de la bobine [d] {déjà associée à l'inducteur} en introduisant une racine et un pôle supplémentaires. D'où: $Z'_L(p) = R_M + \mathcal{L}'_L \cdot p$, avec: $\mathcal{L}'_L = \mathcal{L}_L \cdot (1 + \tau'_{LC} \cdot p) \cdot (1 + \tau'_{LC} \cdot p) / [(1 + \tau'_{LO} \cdot p) \cdot (1 + \tau'_{LO} \cdot p)]$ où τ'_{LO} et τ'_{LC} sont les constantes de temps sub-transitoires d'axe longitudinal en circuit ouvert et en court-circuit.

2.2.5.8. Selon l'axe transversal on peut écrire (équations 2 et 6 de la matrice des impédances):

$$V_{Mq}(p) - \mathcal{L}_L \cdot \omega_M \cdot I_{Md}(p) - M_{se} \cdot \omega_M \cdot I_e(p) - M_{sat} \cdot \omega_M \cdot I_w(p) = (R_M + \mathcal{L}_T \cdot p) \cdot I_{Mq}(p) + M_{sat} \cdot p \cdot I_{at}(p)$$

et: $0 = (3/2) \cdot M_{sat} \cdot p \cdot I_{Mq}(p) + (R_{at} + L_{at} \cdot p) \cdot I_{at}(p)$

D'où: $I_{at}(p) = - (3/2) \cdot M_{sat} \cdot p \cdot I_{Mq}(p) / (R_{at} + L_{at} \cdot p)$ et, par substitution:

$$V_{Mq}(p) - \mathcal{L}_L \cdot \omega_M \cdot I_{Md}(p) - M_{se} \cdot \omega_M \cdot I_e(p) - M_{sat} \cdot \omega_M \cdot I_w(p) = [R_M + \mathcal{L}_T \cdot p - (3/2) \cdot M_{sat}^2 \cdot p^2 / (R_{at} + L_{at} \cdot p)] \cdot I_{Mq}(p)$$

Soit: $V_{Mq}(p) - E_{Mq}(p) = Z'_T(p) \cdot I_{Mq}(p)$ avec: $E_{Mq}(p) = \mathcal{L}_L \cdot \omega_M \cdot I_{Md}(p) + M_{se} \cdot \omega_M \cdot I_e(p) + M_{sat} \cdot \omega_M \cdot I_w(p)$

et: $Z'_T(p) = R_M + \mathcal{L}_T \cdot p - (3/2) \cdot M_{sat}^2 \cdot p^2 / (R_{at} + L_{at} \cdot p)$

Comme en 2.2.1.5.7.b on peut exprimer l'impédance opérationnelle transversale sous la forme:

$$Z'_T(p) = R_M + \mathcal{L}_T \cdot [(R_{at} + L_{at} \cdot p - M_{sat}^2 \cdot p / L_{OT}) / (R_{at} + L_{at} \cdot p)] \cdot p \quad \text{[car: } \mathcal{L}_T = (3/2) \cdot L_{OT}]$$

D'où: $Z'_T(p) = R_M + \mathcal{L}_T \cdot [1 + (L_{at} / R_{at}) \cdot (1 - M_{sat}^2 / (L_{at} \cdot L_{OT})) \cdot p] / [1 + (L_{at} / R_{at}) \cdot p] \cdot p$

qui est de la forme: $Z'_T(p) = R_M + \mathcal{L}'_T \cdot p$, avec: $\mathcal{L}'_T = \mathcal{L}_T \cdot [(1 + \tau''_{TC} \cdot p) / (1 + \tau''_{TO} \cdot p)]$

où la constante de temps sub-transitoire d'axe transversal en court-circuit s'exprime:

$$\tau''_{TC} = (L_{at} / R_{at}) \cdot [1 - M_{sat}^2 / (L_{at} \cdot L_{OT})]$$

et la constante de temps sub-transitoire d'axe transversal en circuit ouvert vaut: $\tau''_{TO} = L_{at} / R_{at}$.

2.2.5.A. Application numérique: la valeur des différentes constantes de temps se déduit ainsi des données:

$$\tau''_{TO} = L_{at} / R_{at} = (1,2 \cdot 10^{-3} \text{ H}) / (23 \cdot 10^{-3} \Omega) = 52,2 \text{ ms};$$

$$L_{OT} = (2/3) \cdot \mathcal{L}_T = 0,466 \text{ mH, d'où:}$$

$$\tau''_{TC} = (L_{at} / R_{at}) \cdot (1 - M_{sat}^2 / (L_{at} \cdot L_{OT})) = (1,2 \text{ mH} / 23 \text{ m}\Omega) \cdot [1 - (0,45 \text{ mH})^2 / (1,2 \text{ mH} \cdot (0,466 \text{ mH}))] = 33 \text{ ms};$$

$$\tau'_{LO} = L_e / R_e = (0,52 \text{ H}) / (80 \cdot 10^{-3} \Omega) = 6,5 \text{ s};$$

$$L_{OL} = (2/3) \cdot \mathcal{L}_L = 0,8 \text{ mH, d'où:}$$

$$\tau'_{LC} = (L_g/R_g) \cdot (1 - M_{se}^2 / (L_g \cdot L_{OL})) = (0,52 \text{ H} / 0,08 \Omega) \cdot [1 - (17 \text{ mH})^2 / ((520 \text{ mH}) \cdot (0,8 \text{ mH}))] = 1,98 \text{ s} \approx 2 \text{ s};$$

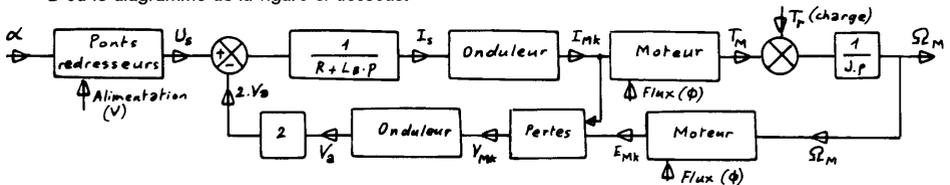
$$\tau_{gl} = L_{gl} / R_{gl} = (2,3 \cdot 10^{-3} \text{ H}) / (15 \cdot 10^{-3} \Omega) = 153 \text{ ms}; \text{ d'où: } \tau''_{LO} \approx \tau_{gl} / (3,5) = 44 \text{ ms}$$

$$\text{et: } \tau''_{LC} \approx \tau''_{TC} = 33 \text{ ms.}$$

2.2.6.1. Le fonctionnement de la chaîne de motorisation s'analyse ainsi:

- le retard angulaire α influe sur la valeur moyenne U_s de la tension produite par les ponts mixtes;
- la bobine de lissage et la résistance de la maille d'entrée régissent l'évolution de l'intensité I_s ;
- l'onduleur commute I_s et génère les courants d'induit i_{mk} ;
- le moteur développe un couple moteur de moment T_M fonction de I_M (donc de I_s) et du flux (donc de I_d);
- le couple de moment T_M engendre le mouvement (compte tenu de la résistance opposée sur l'arbre et des inerties des parties en mouvement);
- le mouvement (décrit par la pulsation Ω_M de l'arbre) influe sur les f.e.m. E_{mk} de la machine synchrone qui, associées aux propriétés de l'onduleur, fixent les tensions V_a .

D'où le diagramme de la figure ci-dessous:



2.2.6.2. On a établi (2.2.5.7 et 2.2.5.8) le système de relations (matrice impédance):

$$V_{Mq}(p) + \mathcal{L}_T \cdot \omega_M \cdot I_{Mq}(p) + M_{sat} \cdot \omega_M \cdot I_{at}(p) = Z'_L(p) \cdot I_{Md}(p) + F_L(p) \cdot V_e(p)$$

$$V_{Mq}(p) - \mathcal{L}_L \cdot \omega_M \cdot I_{Md}(p) - M_{se} \cdot \omega_M \cdot I_e(p) - M_{sat} \cdot \omega_M \cdot I_{ar}(p) = Z'_T(p) \cdot I_{Mq}(p)$$

ou:

$$V_{Mq}(p) + M_{sat} \cdot \omega_M \cdot I_{at}(p) - F_L(p) \cdot V_e(p) = Z'_L(p) \cdot I_{Md}(p) - \mathcal{L}_T \cdot \omega_M \cdot I_{Mq}(p)$$

$$V_{Mq}(p) - M_{se} \cdot \omega_M \cdot I_e(p) - M_{sar} \cdot \omega_M \cdot I_{ar}(p) = \mathcal{L}_L \cdot \omega_M \cdot I_{Md}(p) + Z'_T(p) \cdot I_{Mq}(p)$$

Ces expressions sont bien de la forme:

$$V_{Mq}(p) - E'_{Mq}(p) = Z'_L(p) \cdot I_{Md}(p) - \mathcal{L}_T \cdot \omega_M \cdot I_{Mq}(p) = (R_M + \mathcal{L}'_L(p) \cdot p) \cdot I_{Md}(p) - \mathcal{L}_T \cdot \omega_M \cdot I_{Mq}(p)$$

$$V_{Mq}(p) - E'_{Mq}(p) = \mathcal{L}_L \cdot \omega_M \cdot I_{Md}(p) + Z'_T(p) \cdot I_{Mq}(p) = \mathcal{L}_L \cdot \omega_M \cdot I_{Md}(p) + (R_M + \mathcal{L}'_T(p) \cdot p) \cdot I_{Mq}(p)$$

avec: $\mathcal{L}'_L(p) = \mathcal{L}_L \cdot (1 + \tau'_{LC} \cdot p) \cdot (1 + \tau''_{LC} \cdot p) / [(1 + \tau'_{LO} \cdot p) \cdot (1 + \tau''_{LO} \cdot p)]$ et: $\mathcal{L}'_T(p) = \mathcal{L}_T \cdot (1 + \tau''_{TC} \cdot p) / (1 + \tau''_{TO} \cdot p)$

2.2.6.3. Une variation brusque de U_s provoque une évolution de I_s et des $i_{mk}(t)$; si on l'assimile à des échelons de $i_{Md}(t)$ et $i_{Mq}(t)$, la matrice impédance permet alors de prévoir une réponse de la forme:

$$v_{Md}(t) - E'_{Md}(t) = [V_{MqF} - E'_{MqF}] \cdot [1 + V_{d1} \cdot \exp(-t/\tau'_{LO}) + V_{d2} \cdot \exp(-t/\tau''_{LO})]$$

$$v_{Mq}(t) - E'_{Mq}(t) = [V_{MqF} - E'_{MqF}] \cdot [1 + V_q \cdot \exp(-t/\tau''_{TO})]$$

{où: V_{MqF} , E'_{MqF} , V_{MqF} et E'_{MqF} sont les valeurs finales des images correspondantes}.

Les tensions $v_{mk}(t)$, qui se déduisent de leurs images $[V_{Md}, V_{Mq}, V_{Mq}]$ au moyen de la transformation de Park réciproque, sont donc le sièges de régimes transitoires de constantes de temps: τ'_{LO} , τ''_{LO} et τ''_{TO} .

2.2.6.A. On prend: $\tau'_{LO} = 6,5 \text{ s}$, $\tau''_{LO} = 44 \text{ ms}$, $\tau''_{TO} = 52 \text{ ms}$, $\tau'_{LC} = 2 \text{ s}$, $\tau''_{LC} = \tau''_{TC} = 33 \text{ ms}$

{à défaut: $\tau'_{LO} = 7 \text{ s}$, $\tau''_{LO} = 40 \text{ ms}$, $\tau''_{TO} = 50 \text{ ms}$, $\tau'_{LC} = 2 \text{ s}$, $\tau''_{LC} = \tau''_{TC} = 30 \text{ ms}$ }

2.2.6.A.a. Compte-tenu de 2.2.6.3, le temps de réponse des tensions $v_{mk}(t)$ peut être estimé {par propriété des systèmes de premier ordre, pour une réponse à 95 % et en majorant sa valeur}:

$$t_{Rv} \approx 3 \cdot (\tau'_{LO} + \tau''_{LO} + \tau''_{TO}) = 19,8 \text{ s} \approx 20 \text{ s} \quad \text{ou: } t_{Rv} \approx 21,3 \text{ s}$$

Les expressions des réponses $v_{Md}(t)$ et $v_{Mq}(t)$ {voir 2.2.6.3} montrent aussi que vont apparaître, au niveau des tensions $v_{mk}(t)$, des régimes plus rapides {constantes de temps: $\tau''_{LO} = 44 \text{ ms}$, $\tau''_{TO} = 52 \text{ ms}$ } et probablement de grande amplitude, dus aux effets de l'amortisseur (loi de Lenz-Faraday) lors des variations du flux généré par les courants d'induit; d'où des surtensions sub-transitoires aux bornes du moteur.

2.2.6.A.b. Si la maille d'entrée des onduleurs est modélisée, en régime dynamique, par le schéma de la figure 3 {avec: $L_B = 70$ mH, $R_B = 104$ m Ω et $R_{OM} = 30$ m Ω }, sa réponse à un échelon de U_s {à $E_{OM} = Cte$ } est la somme du régime permanent final est d'un régime transitoire:

$$I_s(t) = I_{sf} + (I_{si} - I_{sf}).\exp(-t/\tau_i) \text{ où: } I_{si} \text{ et } I_{sf} \text{ sont les valeurs initiale et finale de } I_s \text{ et: } \tau_i = L_B/\Sigma R$$

Par propriété des systèmes du premier ordre, son temps de réponse s'exprime:

$$t_{ri} \approx 3.\tau_i = 3.L_B/(R_B + R_{OM}) = 3.(522 \text{ ms}) = 1,57 \text{ s}$$

Cette durée est compatible avec la production de $u_s(t)$ car une variation de la consigne de retard α est mise en œuvre en une période $\{T = 20$ ms} du fonctionnement du redresseur; d'où variation de U_s très rapide devant le temps de réponse en courant de la maille d'entrée des onduleurs $\{t_{ri} \approx 80.T\}$.

2.2.6.A.c. La comparaison des résultats $\{T = 20$ ms, $t_{ri} = 1,57$ s, $t_{rv} = 20$ s} conduit à énoncer que:

- les intensités I_s et $i_{Mk}(t)$ évoluent beaucoup plus rapidement que les tensions $v_{Md}(t)$ et $v_{Mq}(t)$, ce qui justifie d'avoir assimilé les évolutions des intensités à des échelons. En revanche, le temps de réponse de la machine à une variation de U_s est fixé par ses éléments les plus lents: $t_{RM} \approx 20$ s $\{t_{Me} \approx 7$ s}.
- les surtensions observées {cf. 2.2.6.A.a} aux bornes de la machine synchrone devront être supportées par les interrupteurs (thyristors) des onduleurs.
- les fuites de flux des enroulements d'une machine synchrone interdisent la commutation instantanée du courant d'une "phase" entre deux thyristors d'un même commutateur. Il y a alors empiètement de la conduction des thyristors; ce phénomène a une durée qui augmente avec l'intensité du courant à commuter (toutes choses égales par ailleurs) et conduit à une augmentation de la valeur de V_a {par rapport à celle établie dans cette analyse}. Les variations brusques de I_s vont donc provoquer des variations de même sens de la durée d'empiètement et de la valeur de V_a .

2.3. Modélisation électro-mécanique de la chaîne d'action "onduleur-moteur".

2.3.1.a. La relation: $\underline{V}_M = R_M \underline{I}_M + j.X_{ML} \underline{I}_M - j.(X_{ML} - X_{MT}) \underline{I}_{MX} + \underline{E}'_{MO}$

s'écrit aussi, compte tenu de: $X_{ML} = (L_L + \lambda).\omega_M$ et de: $X_{ML} - X_{MT} = (L_L - L_T).\omega_M$:

$$\underline{E}'_{MO} = \underline{V}_M - R_M \underline{I}_M - j.\lambda.\omega_M \underline{I}_M - j.L_T.\omega_M \underline{I}_M + j.(L_L - L_T).\omega_M \underline{I}_{MX} = \underline{E}'_{Mr} - j.L_L.\omega_M \underline{I}_M + j.(L_L - L_T).\omega_M \underline{I}_{MX}$$

On reconnaît en: $\underline{V}_M - R_M \underline{I}_M - j.\lambda.\omega_M \underline{I}_M = \underline{E}'_{Mr}$ l'expression de la f.c.e.m. résultante induite dans un enroulement. D'où: $\underline{E}'_{MO} = \underline{E}'_{Mr} - j.L_L.\omega_M \underline{I}_M + j.(L_L - L_T).\omega_M \underline{I}_{MX}$

2.3.1.b. La relation précédente s'écrit: $\underline{E}'_{MO} = \underline{E}'_{Mr} - j.L_T.\omega_M \underline{I}_M - j.(L_L - L_T).\omega_M \underline{I}_M + j.(L_L - L_T).\omega_M \underline{I}_{MX}$

ce que traduit la figure 8 avec: $\Delta_1 = -R_M \underline{I}_M$; $\Delta_2 = -j.\lambda.\omega_M \underline{I}_M$; $\Delta_3 = -j.L_T.\omega_M \underline{I}_M$; $\Delta_4 = -j.(L_L - L_T).\omega_M \underline{I}_M$;

$$\Delta_5 = j.(L_L - L_T).\omega_M \underline{I}_{MX}; \Delta_6 = \underline{I}_{MX}; \Delta_7 = \underline{I}_{MY}$$

2.3.1.c. Par projection de \underline{V}_M et \underline{E}'_{Mr} sur la direction de \underline{I}_M il vient: $V_M \cos(\varphi_M) = E'_{Mr} \cos(\psi_M) + R_M I_M$

Or, on a établi que: $V_a = -[3.\sqrt{6}/\pi].V_M \cos(\beta)$ {où: $\beta = \varphi_M + \pi$ } et: $I_M = I_{Mf} = [3\sqrt{6}/\pi].I_s$

D'où, par substitution: $V_a = [3.\sqrt{6}/\pi].V_M \cos(\varphi_M) = [3.\sqrt{6}/\pi].[E'_{Mr} \cos(\psi_M) + R_M I_M]$

2.3.1.d. Si de plus on admet que: $\psi_{Mr} \approx \psi_M = \pi - \beta_c$, il vient:

$$V_a = [3.\sqrt{6}/\pi].[-E'_{Mr} \cos(\beta_c) + (\sqrt{6}/\pi).R_M I_s] = -[3.\sqrt{6}/\pi].\cos(\beta_c).E'_{Mr} + (18/\pi^2).R_M I_s$$

Le diagramme vectoriel de tensions de la figure 8 montre enfin que, si: $\psi_{Mr} \approx \psi_M$, on peut aussi écrire:

$$E'_{Mr} \approx E'_{MO} - L_L.\omega_M I_M \sin(\psi_M); \text{ d'où (puisque: } E'_{MO} = K_M f_M I_e, \psi_M = \pi - \beta_c \text{ et: } I_M = [3\sqrt{6}/\pi].I_s \text{)}$$

$$V_a = -[3.\sqrt{6}/\pi].\cos(\beta_c).[K_M f_M I_e - (\sqrt{6}/\pi).L_L.\omega_M \sin(\beta_c).I_s] + (18/\pi^2).R_M I_s$$

Or, la pulsation de rotation Ω_M au synchronisme est liée à la pulsation ω_M par: $\omega_M = 2.\pi.f_M = p.\Omega_M$;

d'où: $V_a = [- (3.\sqrt{6}/(2.\pi^2)).p.K_M \cos(\beta_c).I_e + (9/\pi^2).p.L_L \sin(2.\beta_c).I_s].\Omega_M + (18/\pi^2).R_M I_s$

qui est bien de la forme: $V_a = E_0 + R_0 I_s = [K_{Me} I_e - K_{Ms} I_s].\Omega_M + R_0 I_s$

avec: $K_{Me} = - (3.\sqrt{6}/(2.\pi^2)).p.K_M \cos(\beta_c)$; $K_{Ms} = - (9/\pi^2).p.L_L \sin(2.\beta_c)$ et: $R_0 = (18/\pi^2).R_M$

2.3.1.A. Application numérique: $K = 22.10^{-3}$ U.S.I; $\beta_c = 2,26$ rad; $L = 1,1$ mH; $R_M = 19$ m Ω ; $p = 3$.

On en déduit la valeur des différents coefficients établis précédemment:

$$K_{Me} = - (3.\sqrt{6}/(2.\pi^2)).p.K_M \cos(\beta_c) = 15,6.10^{-3} \text{ H}$$

$$K_{Ms} = - (9/\pi^2).p.L_L \sin(2.\beta_c) = 2,95.10^{-3} \text{ H}$$

$$R_0 = (18/\pi^2).R_M = 34,6 \text{ m}\Omega$$

2.3.2. Si on négligeable les pertes autres que celles dues à l'effet Joule, le principe de conservation de l'énergie conduit à écrire que l'énergie reçue par la source de tension E_0 est intégralement disponible sur l'arbre, où est développé un couple électromagnétique de moment T_{Mem} tel que: $E_0 \cdot I_s = P_{\text{Mem}} = T_{\text{Mem}} \cdot \Omega_M$; d'où: $T_{\text{Mem}} = E_0 \cdot I_s / \Omega_M = [K_{Me} \cdot I_e - K_{Ms} \cdot I_s] \cdot I_s$.

Troisième partie.

3.1. Démarrages de la rame.

3.1.1. Si l'énergie cinétique de translation $\{E_{CT} = (1/2) \cdot M \cdot v^2\}$ est très supérieure à celle de la rotation des parties tournantes $\{E_{CR} = (1/2) \cdot J_R \cdot \Omega^2\}$, alors l'énergie cinétique total s'exprime: $E_c = E_{CT} + E_{CR} \approx E_{CT}$ et on peut la distribuer entre les huit moteurs de traction que l'on affecte d'un moment d'inertie équivalent {noté J} tel que: $8 \cdot (1/2) \cdot J \cdot \Omega_M^2 = E_c \approx (1/2) \cdot M \cdot v^2$

D'où l'expression du moment d'inertie ramené sur l'arbre d'un moteur de traction: $J = M \cdot (v/\Omega_M)^2 / 8$

3.1.1.A.a. Avec: $M = 490 \text{ t} = 490 \cdot 10^3 \text{ kg}$ et une vitesse: $v_n = 300 \text{ km/h} = 83,33 \text{ m/s}$ lorsque les moteurs tournent à: $n'_n = 4000 \text{ tr/min}$ {d'où une pulsation nominale: $\Omega_{Mn} = \pi \cdot n'_n / 30 = 418,9 \text{ rad/s}$ }, la valeur de J vaut: $J = M \cdot (v/\Omega_M)^2 / 8 = (490 \cdot 10^3 \text{ kg}) \cdot [(83,33 \text{ m/s}) / (418,9 \text{ rad/s})]^2 / 8 = 2424 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

3.1.1.A.b. Les coefficients de: $T_r(\Omega_M) = T_{r0} + K_r \cdot \Omega_M$ se déduisent des valeurs particulières fournies $\{T_r(0) = 60 \text{ N.m}$ et $T_r(\Omega_{Mn}) = 1600 \text{ N.m}\}$ par: $T_{r0} = T_r(0) = 60 \text{ N.m}$; $K_r = [T_r(\Omega_{Mn}) - T_r(0)] / \Omega_{Mn} = 3,68 \text{ U.S.I.}$

3.1.1.A.c. Le mouvement, analysé au niveau d'un moteur, lors du régime libre, est régi par l'équation fondamentale de la dynamique: $T_{\text{Mem}} - T_r = -T_{r0} - K_r \cdot \Omega_M = J \cdot d\Omega_M / dt$ {car: $T_{\text{Mem}} = 0$ }.

Sa solution {si: $\Omega_M(0) = \Omega_{Mn}$ } s'exprime: $\Omega_M(t) = (\Omega_{Mn} + T_{r0}/K_r) \cdot \exp(-t/\tau) - T_{r0}/K_r$ {avec: $\tau = J/K_r$ }.

Le mouvement s'arrêtera à la date t_a telle que: $\Omega_M(t_a) = 0$; d'où: $t_a = \tau \cdot \text{Ln}(1 + K_r \cdot \Omega_{Mn} / T_{r0})$

et la distance $x(t)$ parcourue par la rame satisfait à: $dx/dt = v = K \cdot \Omega_M$ {où: $K = v_n / \Omega_{Mn} = 0,199 \text{ m}$ };

d'où: $x(t) = K \cdot [\tau \cdot (\Omega_{Mn} + T_{r0}/K_r) \cdot (1 - \exp(-t/\tau)) - (T_{r0}/K_r) \cdot t]$

Application numérique: constante de temps: $\tau = J/K_r = 659 \text{ s} \approx 11 \text{ min}$;

durée du régime libre: $t_a = \tau \cdot \text{Ln}(1 + K_r \cdot \Omega_{Mn} / T_{r0}) = 2165 \text{ s} \approx 36 \text{ min}$;

distance parcourue avant l'arrêt: $x(t_a) = K \cdot [\tau \cdot (\Omega_{Mn} + T_{r0}/K_r) \cdot (1 - \exp(-t_a/\tau)) - (T_{r0}/K_r) \cdot t_a]$

ou: $x(t_a) = (K \cdot J / K_r) \cdot [\Omega_{Mn} - (T_{r0}/K_r) \cdot \text{Ln}(1 + K_r \cdot \Omega_{Mn} / T_{r0})] = 47,92 \text{ km}$.

3.1.1.A.d. La constante de temps électrique de la chaîne de traction $\{\tau_{Me} \approx 7 \text{ s}\}$ présente une valeur près de cent fois inférieure à celle $\{\tau \approx 659 \text{ s}\}$ de la constante de temps mécanique du régime libre de la rame. On en déduit que:

- le comportement dynamique de la rame n'est influencé que par son inertie mécanique;
- la rame se comporte donc, mécaniquement, comme un système du premier ordre;
- la simulation du comportement électrique de la chaîne de traction ne dépend que les constantes de temps de l'induit du moteur synchrone;
- cette dernière conclusion valide la détermination des constantes de temps électriques du moteur effectuée dans la deuxième partie de ce problème.

3.1.2.a. À couple moteur de moment constant: $T_{\text{Mem}} = T_{D1} = \text{Cte}$, le démarrage est régi par l'équation de la dynamique: $T_{D1} - T_{r0} - K_r \cdot \Omega_M = J \cdot d\Omega_M / dt$

ou: $\Omega_M + (J/K_r) \cdot d\Omega_M / dt = (T_{D1} - T_{r0}) / K_r$

Solution {si: $\Omega_M(0) = 0$ }: $\Omega_M(t) = [(T_{D1} - T_{r0}) / K_r] \cdot [1 - \exp(-t/\tau)]$ {avec: $\tau = J/K_r$ }.

3.1.2.b. La rame atteint v_n (300 k/h) lorsque Ω_{Mn} ($n'_n = 4000 \text{ tr/min}$), soit à la date t_{D1} telle que:

$\exp(-t_{D1}/\tau) = 1 - K_r \cdot \Omega_{Mn} / (T_{D1} - T_{r0})$ {à la condition évidente que: $T_{D1} - T_{r0} > K_r \cdot \Omega_{Mn}$ }

d'où: $t_{D1} = \tau \cdot \text{Ln}\{(T_{D1} - T_{r0}) / (T_{D1} - T_{r0} - K_r \cdot \Omega_{Mn})\} = (J/K_r) \cdot \text{Ln}\{(T_{D1} - T_{r0}) / (T_{D1} - T_{r0} - K_r \cdot \Omega_{Mn})\}$.

3.1.2.c. La distance parcourue par la rame, notée $x(t)$, est liée à la pulsation de rotation des moteurs (si les roues ne patinent pas) par la relation: $dx(t)/dt = v(t) = K \cdot \Omega_M(t)$ {où: $K = v_n / \Omega_{Mn}$ }

Si on choisit qu'à l'origine des temps choisie on a aussi: $x(0) = 0$, la distance parcourue pendant le démarrage s'obtient par: $x(t) = \int_0^t K \cdot \Omega_M(t) \cdot dt = K \cdot [(T_{D1} - T_{r0}) / K_r] \cdot \int_0^t [1 - \exp(-t/\tau)] \cdot dt$

soit: $x(t) = K.[(T_{D1} - T_{r0})/K_r].[t + \tau.(exp(- t/\tau) - 1)]$

D'où l'expression de la distance de démarrage {puisque: $exp(- t_{D1}/\tau) = 1 - K_r.\Omega_{Mn}/(T_{D1} - T_{r0})$ }:

$$x_{D1} = K.[(T_{D1} - T_{r0})/K_r].t_{D1} - J.K.\Omega_{Mn}/K_r.$$

3.1.2.A.a. Avec: $J = 2424 \text{ kg.m}^2$, $K_r = 3,68 \text{ U.S.I.}$, $T_{r0} = 60 \text{ N.m}$, $K = v_n/\Omega_{Mn} = 0,199 \text{ m}$ et un couple de démarrage de moment: $T_{D1} = 2500 \text{ N.m}$, les expressions précédentes donnent:

$$t_{D1} = 657,6 \text{ s} \approx 11 \text{ min}$$

et: $x_{D1} = 31,9 \text{ km}.$

3.1.2.A.b. La vitesse de la rame s'écrit: $v(t) = K.\Omega_M(t) = K.[(T_{D1} - T_{r0})/K_r].[1 - exp(- t/\tau)]$

D'où l'accélération: $\gamma(t) = dv(t)/dt = [K.(T_{D1} - T_{r0})/J].exp(- t/\tau)$

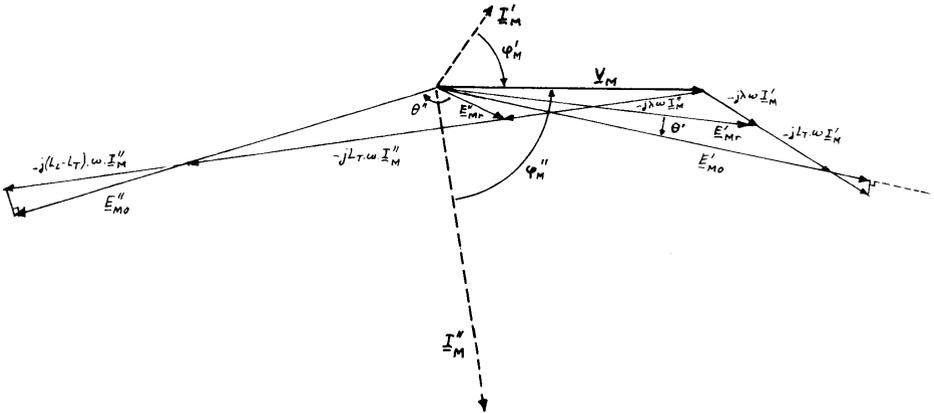
et sa valeur maximale {obtenue à la date: $t = 0$ }: $\gamma_{D1} = K.(T_{D1} - T_{r0})/J = 0,2 \text{ m.s}^{-2} \approx g/49.$

3.1.2.A.c. L'intensité I_s est liée au moment du couple par: $T_{Mem} = [K_{Me}.I_e - K_{Ms}.I_s].I_s$

Sa valeur est donc solution de l'équation du second degré: $K_{Ms}.I_s^2 - (K_{Me}.I_e).I_s + T_{D1} = 0$

Ces solutions, données par: $I_s = (K_{Me}.I_e \pm [(K_{Me}.I_e)^2 - 4.K_{Ms}.T_{D1}]^{1/2})/(2.K_{Ms})$,

ont pour valeurs (si: $I_e = 450 \text{ A}$, $K_{Me} = 15,5 \text{ mH}$ et $K_{Ms} = 3 \text{ mH}$): $I_s' = 1882 \text{ A}$ et $I_s'' = 442,7 \text{ A} \approx 443 \text{ A}.$



Les diagrammes montrent deux fonctionnements à même Ω_M , même I_e {d'où même: $E'_{MO} = K_M.f_M.I_e$ }, même V_M et même puissance { $P_{Mem} = T_{Mem}.\Omega_M \approx 3.V_M.I_M.\cos(\varphi_M)$ } présentant des valeurs distinctes (I'_M et I''_M) de l'intensité I_M {et de: $I_s = (\pi/\sqrt{6}).I_M$ }; ces services diffèrent par la valeur du déphasage φ_M et par celle du décalage électrique {noté θ }; le premier de ces fonctionnements (I'_M , φ'_M et θ') est compatible avec les contraintes du système étudié puisque la machine synchronise présente alors (dans la convention récepteur) le comportement réactif capacitif ($-\pi/2 \leq \varphi'_M < 0$) attendu et que, de plus, ce fonctionnement est stable ($0 < \theta' < \pi/2$); dans l'autre cas, le moteur est instable ($\pi/2 < \theta' < \pi$) et inductif ($0 < \varphi''_M < \pi/2$). D'où la valeur de I_s cherchée: $I_s = 443 \text{ A}.$

3.1.3.a. Si le moment du couple moteur est réglé de sorte que: $T_{Mem} = T_{D2} - K_D.\Omega_M$

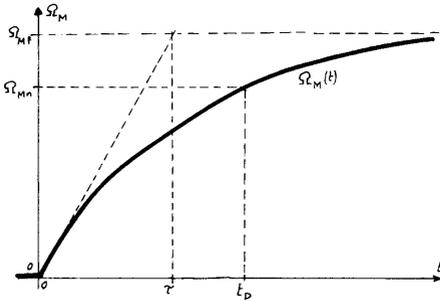
le démarrage est régi par l'équation: $T_{D2} - K_D.\Omega_M - (T_{r0} + K_r.\Omega_M) = J.d\Omega_M/dt$

ou: $\Omega_M + [J/(K_r + K_D)].d\Omega_M/dt = (T_{D2} - T_{r0})/(K_r + K_D)$

La solution se déduit de celle établie en 3.1.2.a en substituant $(K_r + K_D)$ à K_r et T_{D2} à T_{D1} .

Durée t_{D2} de la montée en vitesse (jusqu'à Ω_{Mn}): $t_{D2} = [J/(K_r + K_D)].Ln\{(T_{D2} - T_{r0})/[T_{D2} - T_{r0} - (K_r + K_D).\Omega_{Mn}]\}$

Distance parcourue pendant ce démarrage: $x_{D2} = K.[(T_{D2} - T_{r0}).t_{D2} - J.\Omega_{Mn}]/(K_r + K_D)$



3.1.3.b. Par propriété d'un mouvement dont la vitesse tend exponentiellement vers une valeur finale asymptotique } l'accélération maximale se produit à la date: $t = 0$ et vaut:

$\gamma_{Dmax} = K \cdot (\Omega_{Mf} - \Omega_{M0}) / \tau$ où Ω_{Mf} est la valeur finale, Ω_{M0} la valeur initiale et τ la constante de temps de l'exponentielle;

ici: $\Omega_{Mf} = (T_{D2} - T_{r0}) / (K_r + K_D)$, $\Omega_{M0} = 0$

et: $\tau = J / (K_r + K_D)$; d'où: $\gamma_{D2} = K \cdot (T_{D2} - T_{r0}) / J$

3.1.3.A.a. Si: $J = 2424 \text{ kg.m}^2$, $K_r = 3,68 \text{ U.S.I.}$,
 $T_{r0} = 60 \text{ N.m}$ $K = v_r / \Omega_{Mn} = 0,199 \text{ m}$,
 $T_{D2} = 3500 \text{ N.m}$

et: $K_D = (3500 - 2500) / 419 = 2,387 \text{ U.S.I.}$

On obtient: $t_{D2} = 536 \text{ s} \approx 9 \text{ min}$, $x_{D2} = 27,18 \text{ km}$ et: $\gamma_{D2} = 0,282 \text{ m.s}^{-2} \approx g / (34,75)$

3.1.3.A.b. L'équilibre suppose l'alignement de l'axe du passager sur la composition de l'accélération de la pesanteur $\{g = 9,91 \text{ m.s}^{-2}\}$ et de l'accélération horizontale due au mouvement; d'où l'inclinaison (relativement à la verticale) α telle que: $\text{tg}(\alpha) = \gamma_{D2} / g = (0,282 \text{ m.s}^{-2}) / (9,81 \text{ m.s}^{-2}) = 0,02878$
 Soit: $\alpha = 0,02877 \text{ rad} = 1,65^\circ$.

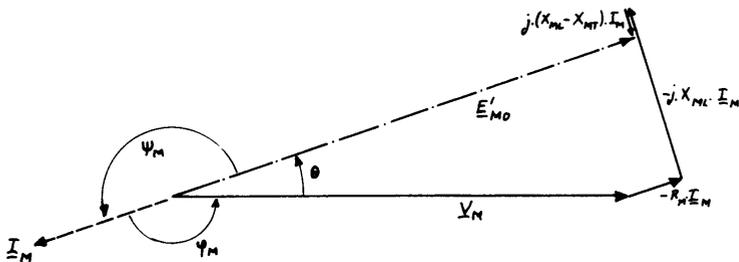
3.1.3.A.c. La voie monte de 5 mètres par kilomètre et fait, avec le plan horizontal, un angle β tel que: $\text{tg}(\beta) = 5 / 1000$; le poids de la rame ($P = M \cdot g = 490 \cdot 10^3 \cdot 9,81 = 4,81 \cdot 10^6 \text{ N}$) provoque une force résistante appliquée à la rame et d'intensité: $F_R = P \cdot \sin(\beta) = 24,034 \cdot 10^3 \text{ N}$
 D'où un couple résistant de moment T_R : $F_R \cdot v = 8 \cdot T_R \cdot \Omega_M$; d'où: $T_R = F_R \cdot (v / \Omega_M) / 8 = K \cdot F_R / 8 = 597,68 \text{ N.m}$ qui s'ajoute à celui, T_{r0} , dû aux frottements de la rame; d'où:

$$t'_{D2} = [J / (K_r + K_D)] \cdot \text{Ln} \{ (T_{D2} - T_{r0} - T_R) / [T_{D2} - T_{r0} - T_R - (K_r + K_D) \cdot \Omega_{Mn}] \} = 895,9 \text{ s} \approx 15 \text{ min};$$

$$x'_{D2} = K \cdot [(T_{D2} - T_{r0} - T_R) \cdot t'_{D2} - J \cdot \Omega_{Mn}] / (K_r + K_D) = 50,226 \text{ km}; \quad \gamma'_{D2} = K \cdot (T_{D2} - T_{r0} - T_R) / J = 0,233 \text{ m.s}^{-2}.$$

3.2. Freinages.

3.2.1.a. Si le retard au pilotage est nul $\{\beta_c = 0\}$, la phase de I_M (par rapport à E'_{M0}) vaut: $\psi_M = \beta_c + \pi = \pi$ et le diagramme vectoriel traduisant: $E'_{M0} = \underline{V_M} - R_M \cdot I_M + j \cdot X_{ML} \cdot I_M + j \cdot (X_{MT} - X_{MT}) \cdot I_M$ a l'allure ci-dessous:



3.2.1.b. On en déduit {si: $R_M \cdot I_M \ll V_M$ et: $X_{MT} \cdot I_M < X_{ML} \cdot I_M \ll V_M$ } que (en modules):

$$E'_{M0} = V_M \cdot \cos(\theta) + R_M \cdot I_M, \text{ avec: } \sin(\theta) = X_{MT} \cdot I_M / V_M \ll 1, \text{ d'où: } \cos(\theta) \approx 1 \text{ et: } E'_{M0} \approx V_M + R_M \cdot I_M.$$

3.2.1.c. En substituant: $E'_{M0} \approx V_M + R_M \cdot I_M$ et: $\psi_M \approx \pi$ dans l'expression de V_a $\{V_a = [3 \cdot \sqrt{6} / \pi] \cdot V_M \cdot \cos(\psi_M)\}$ il vient: $V_a \approx - [3 \cdot \sqrt{6} / \pi] \cdot V_M \approx - [3 \cdot \sqrt{6} / \pi] \cdot [E'_{M0} - R_M \cdot I_M]$. Or: $I_M = (\sqrt{6} / \pi) \cdot I_e$ et: $E'_{M0} = K_M \cdot f_M \cdot I_e$

D'où: $V_a = -(3 \cdot \sqrt{6} / \pi) \cdot K_M \cdot f_M \cdot I_e + (18 / \pi^2) \cdot R_M \cdot I_M$

En identifiant au schéma équivalent de la figure 9 il vient immédiatement: $R_0 = (18 / \pi^2) \cdot R_M$

et: $E_0 = -(3 \cdot \sqrt{6} / \pi) \cdot K_M \cdot f_M \cdot I_e$; or {propriété de la machine synchrone}: $f_M = \omega_M / (2 \cdot \pi) = p \cdot \Omega_M / (2 \cdot \pi)$

D'où enfin: $E_0 = -[3 \cdot \sqrt{6} / (2 \cdot \pi^2)] \cdot p \cdot K_M \cdot I_e \cdot \Omega_M.$

3.2.1.d. Les pertes par effet Joule (des composantes fondamentales des courants d'induit) étant modélisées par le résistor de résistance R_0 , la conservation de l'énergie permet d'écrire (si la machine synchrone et le convertisseur ne présentent pas d'autres sources de pertes sensibles):

$$P_{\text{Mem}} = E_0 \cdot I_s = T_{\text{Mem}} \cdot \Omega_M$$

D'où: $T_{\text{Mem}} = E_0 \cdot I_s / \Omega_M = -[3 \cdot \sqrt{6} / (2 \cdot \pi^2)] \cdot p \cdot K_M \cdot I_e \cdot I_s$.

3.2.1.e. La relation établie au 3.2.1.c $\{E_0 = -[3 \cdot \sqrt{6} / (2 \cdot \pi^2)] \cdot p \cdot K_M \cdot I_e \cdot \Omega_M\}$ montre que, à: $\Omega_M > 0$ (et: $I_e > 0$), E_0 est négative (dans la convention de mesure adoptée). Cette f.c.e.m. fait circuler dans la maille d'entrée des ponts de (figure 9) un courant d'intensité I_s positive, dont les demi ponts de diodes assurent la circulation, satisfaisant à: $2 \cdot E_0 + (R_B + 2 \cdot R_0 + R_F) \cdot I_s = 0$, ou: $I_s = -2 \cdot E_0 / (R_B + 2 \cdot R_0 + R_F) > 0$.

Le couple électromagnétique "moteur" est de moment: $T_{\text{Mem}} = -[3 \cdot \sqrt{6} / (2 \cdot \pi^2)] \cdot p \cdot K_M \cdot I_e \cdot I_s < 0$ {car: $I_e \cdot I_s > 0$ }. La machine développe bien alors un couple de freinage de moment:

$$T_{\text{MF}} = -T_{\text{Mem}} = [3 \cdot \sqrt{6} / (2 \cdot \pi^2)] \cdot p \cdot K_M \cdot I_e \cdot I_s = [3 \cdot \sqrt{6} / (2 \cdot \pi^2)] \cdot p \cdot K_M \cdot I_e \cdot [-2 \cdot E_0 / (R_B + 2 \cdot R_0 + R_F)]$$

ou: $T_{\text{MF}} = [3 \cdot \sqrt{6} / \pi^2] \cdot p \cdot K_M \cdot I_e \cdot [3 \cdot \sqrt{6} \cdot p \cdot K_M \cdot I_e \cdot \Omega_M / (2 \cdot \pi^2)] / (R_B + 2 \cdot R_0 + R_F)$

soit: $T_{\text{MF}} = [27 \cdot (p \cdot K_M \cdot I_e / \pi^2)^2 / (R_B + 2 \cdot R_0 + R_F)] \cdot \Omega_M = K_{\text{MF}} \cdot \Omega_M$ {avec: $K_{\text{MF}} = 27 \cdot (p \cdot K_M \cdot I_e / \pi^2)^2 / (R_B + 2 \cdot R_0 + R_F)$ }.

La relation: $T_{\text{MF}} = [3 \cdot \sqrt{6} / (2 \cdot \pi^2)] \cdot p \cdot K_M \cdot I_e \cdot I_s$ montre que l'on pourrait maintenir constante la valeur de T_{MF} , à I_e constante, en maintenant constante l'intensité I_s lorsque la f.e.m. $-E_0$ diminue (avec la pulsation Ω_M); il suffirait de commander les ponts mixtes de façon à avoir: $V_s + E_0 = \text{Cte}$, mais ce freinage suppose le captage de la tension caténaire, ce qui limite son emploi et le rend inopérant dans les cas critiques.

3.2.1.A.a. Avec: $K_M = 22 \cdot 10^{-3}$ U.S.I., $I_e = 450$ A, $p = 3$ et: $T_{\text{MF}} = 3000$ N.m pour: $\Omega_M = \Omega_{Mn} = 400 \cdot \pi / 3$ rad/s on déduit du résultat précédent que: $R_B + 2 \cdot R_0 + R_F = 27 \cdot (p \cdot K_M \cdot I_e / \pi^2)^2 \cdot \Omega_{Mn} / T_{\text{MF}n} = 34,14 \Omega$

Or: $R_B = 104$ mΩ et: $R_0 = 35$ mΩ ; d'où: $R_F = 33,965 \Omega \approx 34 \Omega$.

3.2.1.A.b. À: $I_e = \text{Cte} = 450$ A, $\beta_c = 0$ et: $R_B + 2 \cdot R_0 + R_F = \text{Cte} = 34,14 \Omega$, le coefficient K_{MF} prend une valeur constante: $K_{\text{MF}} = 27 \cdot (p \cdot K_M \cdot I_e / \pi^2)^2 / (R_B + 2 \cdot R_0 + R_F) = 7,162$ U.S.I.

et la caractéristique mécanique de freinage de la machine est la droite d'expression: $T_{\text{MF}} = K_{\text{MF}} \cdot \Omega_M$.

3.2.1.A.c. L'équation de la dynamique impose alors que: $J \cdot d\Omega_M / dt = T_{\text{Mem}}(\Omega_M) - T_r(\Omega_M) = -T_{r0} - (K_r + K_{\text{MF}}) \cdot \Omega_M$

ou: $[J / (K_r + K_{\text{MF}})] \cdot d\Omega_M / dt + \Omega_M = -T_{r0} / (K_r + K_{\text{MF}})$

dont la solution {satisfaisant à: $\Omega_M(0) = \Omega_{Mn}$ } s'exprime:

$$\Omega_M(t) = -T_{r0} / (K_r + K_{\text{MF}}) + (\Omega_{Mn} + T_{r0} / (K_r + K_{\text{MF}})) \cdot \exp(-t / \tau_{F1})$$
 {avec: $\tau_{F1} = J / (K_r + K_{\text{MF}}) = 223,7$ s}

L'arrêt est obtenu à la date t_{F1} telle que: $\exp(-t_{F1} / \tau_{F1}) = T_{r0} / [T_{r0} + (K_r + K_{\text{MF}}) \cdot \Omega_{Mn}]$

soit: $t_{F1} = [J / (K_r + K_{\text{MF}})] \cdot \text{Ln}\{1 + (K_r + K_{\text{MF}}) \cdot \Omega_{Mn} / T_{r0}\} = 970,6$ s ≈ 16 min 11 s.

La distance parcourue par la rame s'obtient par:

$$x(t) = \int_0^t v \cdot dt = \int_0^t K \cdot \Omega_M(t) \cdot dt = K \cdot [-T_{r0} \cdot t / (K_r + K_{\text{MF}}) + \tau_{F1} \cdot (\Omega_{Mn} + T_{r0} / (K_r + K_{\text{MF}})) \cdot (1 - \exp(-t / \tau_{F1}))]$$

D'où: $x_{F1} = x(t_{F1}) = K \cdot [-T_{r0} \cdot t_{F1} / (K_r + K_{\text{MF}}) + \tau_{F1} \cdot \Omega_{Mn}] = 17,57$ km.

3.2.1.A.d. La rame disposant de 15 boggies (11 porteurs et 4 moteurs), il y a donc 30 essieux pourvus de freins à disques; le moment T_{FD} du couple "résistant", ramené sur l'arbre d'une machine synchrone, s'obtient donc par (conservation de la puissance): $30 \cdot T_{\text{FDes}} \cdot \Omega_{es} = 8 \cdot T_{\text{rFD}} \cdot \Omega_M$

La bande de roulement de chaque roue ayant un diamètre: $D = 0,7$ m, la pulsation de rotation Ω_{es} de chaque essieu est liée à la vitesse v de la rame par: $v = \Omega_{es} \cdot D / 2$; or: $v = K \cdot \Omega_M$;

on en déduit donc que: $\Omega_{es} = 2 \cdot v / D = 2 \cdot K \cdot \Omega_M / D$; d'où, par substitution: $60 \cdot K \cdot T_{\text{FDes}} \cdot \Omega_M / D = 8 \cdot T_{\text{rFD}} \cdot \Omega_M$.

Donc: $T_{\text{rFD}} = 60 \cdot K \cdot T_{\text{FDes}} / (8 \cdot D) = 5009$ N.m {avec: $K = 0,199$ m, $T_{\text{FDes}} = 2350$ N.m et: $D = 0,7$ m}.

L'équation fondamentale de la dynamique exprime alors que:

$$J \cdot d\Omega_M / dt = T_{\text{Mem}}(\Omega_M) - T_r(\Omega_M) - T_{\text{rFD}} = - (T_{r0} + T_{\text{rFD}}) - (K_r + K_{\text{MF}}) \cdot \Omega_M$$

ou: $[J / (K_r + K_{\text{MF}})] \cdot d\Omega_M / dt + \Omega_M = - (T_{r0} + T_{\text{rFD}}) / (K_r + K_{\text{MF}})$

Solution {telle que $\Omega_M(0) = \Omega_{Mn}$ }: $\Omega_M(t) = - (T_{r0} + T_{\text{rFD}}) / (K_r + K_{\text{MF}}) + [\Omega_{Mn} + (T_{r0} + T_{\text{rFD}}) / (K_r + K_{\text{MF}})] \cdot \exp(-t / \tau_{F2})$

Durée de l'arrêt: $t_{F2} = [J / (K_r + K_{\text{MF}})] \cdot \text{Ln}\{1 + (K_r + K_{\text{MF}}) \cdot \Omega_{Mn} / (T_{r0} + T_{\text{rFD}})\} = 143$ s = 2 min 23 s.

Distance parcourue avant l'arrêt: $x_{F2} = x(t_{F2}) = K \cdot [- (T_{r0} + T_{\text{rFD}}) \cdot t_{F2} / (K_r + K_{\text{MF}}) + \tau_{F2} \cdot \Omega_{Mn}] = 5329$ m.

3.2.2.A.a. On a établi précédemment que, lors de l'arrêt d'une rame lancée à sa vitesse de croisière nominale: $v_n = 300 \text{ km/h}$ {où les moteurs tournent à 4000 tr/min; d'où: $\Omega_{Mn} = 400.\pi/3 \text{ rad/s}$ et un rapport: $K = v/\Omega_M = 0,199 \text{ m}$ } sur une voie rectiligne horizontale, les huit machines synchrones fonctionnant en génératrices sur rhéostat et développant un couple résistant de moment: $T_{MF} = K_{MF}.\Omega_M$ {avec: $K_{MF} = 7,162 \text{ U.S.I.}$ }, la rame présentant (au niveau de l'arbre d'une machine) une inertie de moment J [$J = 2424 \text{ kg.m}^2$] et un couple résistant de moment: $T_r(\Omega_M) = T_{r0} + K_r.\Omega_M$ {avec: $T_{r0} = 60 \text{ N.m}$; $K_r = 3,68 \text{ U.S.I.}$ } et les freins à disque développant un couple T_{FDs} au niveau de chaque essieu {d'où un couple ramené sur l'arbre d'une machine synchrone de moment: $T_{rFD} = 60.K.T_{FDs}/(8.D)$ }, la distance parcourue avant l'arrêt complet s'exprime: $x_f = K.[-(T_{r0} + T_{rFD}).t_f / (K_r + K_{MF}) + t_f.\Omega_{Mn}]$
 où: $t_f = J / (K_r + K_{MF})$ et: $t_f = [J / (K_r + K_{MF}).\text{Ln}\{1 + (K_r + K_{MF}).\Omega_{Mn} / (T_{r0} + T_{rFD})\}]$.
 D'où: $x_f = [K.J / (K_r + K_{MF}).\Omega_{Mn} - (T_{r0} + T_{rFD}).\text{Ln}\{1 + (K_r + K_{MF}).\Omega_{Mn} / (T_{r0} + T_{rFD})\}] / (K_r + K_{MF})$
 soit, numériquement {et en notant: $X = T_{r0} + T_{rFD}$ }: $x_f = (44,5).[419 - X.\text{Ln}\{1 + 4540/X\}] / (10,84)$
 Calculons x_f pour quelques valeurs de X :

$X = 8000 \text{ N.m}$	$x_f = 3876 \text{ m}$
$X = 9000 \text{ N.m}$	$x_f = 3547 \text{ m}$
$X = 9500 \text{ N.m}$	$x_f = 3403 \text{ m}$
$X = 9150 \text{ N.m}$	$x_f = 3503 \text{ m}$

On en déduit que le freinage de sécurité est obtenu pour: $X = T_{r0} + T_{rFD} \approx 9150 \text{ N.m}$.
 D'où: $T_{rFD} \approx 9150 - 60 = 9090 \text{ N.m}$ et le moment du couple de freinage à réaliser au moyen des freins à disques, au niveau de chaque essieu, vaut: $T_{FDs} = 8.D.T_{rFD} / (60.K) = 4264,5 \text{ N.m}$.

3.2.2.A.b. Si deux machines synchrones (un boggie) sont en défaut, toutes les propriétés de l'ensemble de la rame sont à répartir entre les six machines encore en service {au lieu de huit précédemment};

d'où: $J = M.(v/\Omega_M)^2/8$ devient: $J' = M.(v/\Omega_M)^2/6 = (8/6).J = 3232,25 \text{ kg.m}^2$

$T_r(\Omega_M) = T_{r0} + K_r.\Omega_M$ devient: $T'_r(\Omega_M) = (8/6).T_r(\Omega_M) = T'_{r0} + K'_r.\Omega_M$
 {avec: $T'_{r0} = (8/6).T_{r0} = 80 \text{ N.m}$ et: $K'_r = (8/6).K_r = 4,902 \text{ U.S.I.}$ }

Par ailleurs, si la voie descend avec une pente de 25/1000, son poids {M.g} provoque une force d'entraînement: $F_i = M.g.\sin(\beta)$ {où: $\beta = \text{Arctg}(0,025)$ }, laquelle force est équivalente à un couple "moteur" de moment: $T_i = F_i.(v/\Omega_M)/6 = K.M.g.\sin(\text{Arctg}(0,025))/6 = 3983,3 \text{ N.m}$.

D'où le moment du couple "résistant" total dû à la rame et ramené sur l'arbre d'une machine:

$T'_r(\Omega_M) = T'_{r0} + K'_r.\Omega_M - T_i = T''_{r0} + K'_r.\Omega_M$ {avec: $T''_{r0} = T'_{r0} - T_i = -3903,25 \text{ N.m}$ }.

3.2.2.A.c. Si le freinage pneumatique (à disques) assure, sur chaque essieu {il y a quinze boggies, soit trente essieux et soixante disques}, un couple résistant de moment: $T_{FDs} = 5300 \text{ N.m}$, le moment du couple ramené sur l'arbre de chacune des six machines s'exprime:

$T'_{rFD} = 60.K.T_{FDs} / (6.D) = 15062,9 \text{ N.m}$.

La distance de freinage (rame lancée à vitesse nominale) s'exprime alors {expression établie en 3.2.2.A.a}: $x_f = [K.J' / (K'_r + K'_{MF}).\Omega_{Mn} - (T''_{r0} + T'_{rFD}).\text{Ln}\{1 + (K'_r + K'_{MF}).\Omega_{Mn} / (T''_{r0} + T'_{rFD})\}] / (K'_r + K'_{MF})$
 Numériquement {et en notant: $Y = K'_r + K'_{MF}$ }: $x_f = (643/Y).[419 - (11160/Y).\text{Ln}\{1 + (37,5).Y\}]$

On vérifie que, pour: $Y = 12,064$ {correspondant à: $K' = 4,9 \text{ U.S.I.}$ et $K = 7,162$, c'est-à-dire aux conditions du freinage "électrique" établies en 3.2.1.A.b}, la distance de l'arrêt { $x_f = 3911 \text{ m}$ } est supérieure à la zone de sécurité située devant la rame, ce qui justifie la prise en compte du freinage "pneumatique" maximal (et insuffisant).

On recherche la valeur du coefficient K'_{MF} permettant le freinage d'urgence en donnant plusieurs valeurs à l'inconnue Y :

$Y = 14$	$x_f = 3777 \text{ m}$
$Y = 16$	$x_f = 3650 \text{ m}$
$Y = 18$	$x_f = 3531 \text{ m}$
$Y = 19$	$x_f = 3475 \text{ m}$
$Y = 18,55$	$x_f = 3500 \text{ m}$.

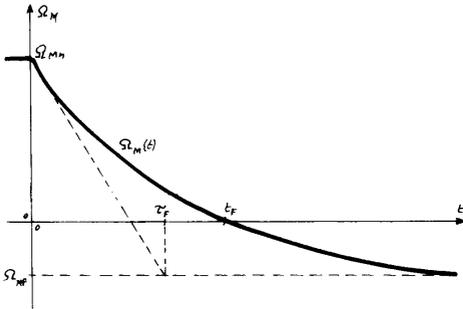
Le freinage d'urgence est alors assuré {dans les pires conditions, telles que prévues par le cahier des charge} lorsque: $K'_r + K'_{MF} = 18,55 \text{ U.S.I.}$; d'où: $K'_{MF} = 18,55 - K'_r = 18,55 - 4,9 = 13,65 \text{ U.S.I.}$

On a de plus établi que (question 3.2.1.A.b): $K_{MF} = 27.(p.K_M.1/\pi^2) / (R_B + 2.R_0 + R_f)$

et que: $K_{MF} = 7,162 \text{ U.S.I.}$ lorsque: $I_a = 450 \text{ A}$; et les choses égales par ailleurs {machine non saturée, donc: $K_M = \text{Cte}$, et: $R_B + 2.R_0 + R_f = \text{Cte}$ }, on obtiendra donc: $K'_{MF} = 13,65 \text{ U.S.I.}$ lorsque l'intensité du

courant d'excitation prendra la valeur I'_e telle que: $K'_{MF}/I'_e{}^2 = K_{MF}/I_e{}^2$;

d'où: $I'_e = I_e [K'_{MF}/K_{MF}]^{1/2} = 621 \text{ A}$.



L'allure exponentielle de la réponse $\Omega_M(t)$ permet de prévoir que l'accélération se calcule par {propriété: la sous tangente en tout point est égale à la constante de temps}:

$$\gamma_{FMax} = K \cdot (d\Omega_M/dt)_{Max} = K \cdot (\Omega_{MF} - \Omega_{M0}) / \tau_F$$

ici: $\Omega_{MF} = - (T''_{r0} + T''_{rFD}) / (K'_r + K'_{MF})$
soit: $\Omega_{MF} = -11160 \text{ N.m} / 18,55 \text{ U.S.I} = -601,6 \text{ rad/s}$

$\Omega_{M0} = \Omega_{Min} = 400.\pi/3 = 419 \text{ rad/s}$

et: $\tau_F = J' / (K'_r + K'_{MF}) = 3232 \text{ kg.m}^2 / 18,55 \text{ USI}$

soit: $\tau_F = 174 \text{ s}$.

Donc: $\gamma_{FMax} = - 1,165 \text{ m.s}^{-2} \approx g / (8,4)$

L'inclinaison du passager (relativement à la verticale terrestre) est l'angle α tel que:

$$\text{tg}(\alpha) = [\gamma_{FMax} \cdot \cos(\beta)] / [g + \gamma_{FMax} \cdot \sin(\beta)]$$

où: $\beta = \text{Arctg}(0,025)$

Donc: $\alpha = \text{Arctg}(0,1184) = 6,75^\circ$.

Agrégation de sciences physiques

Concours interne

COMPOSITION SUR LA PHYSIQUE ET LE TRAITEMENT AUTOMATISÉ DE L'INFORMATION ♦ Session : 2002

A.I.1.a. Le champ électromagnétique dans le vide satisfait l'équation de d'Alembert ; pour le champ \vec{E} , par exemple :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

avec $\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$. La recherche de solutions en $\exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ conduit à la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, soit, pour une onde se propageant selon \vec{e}_x : $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_x$

A.I.1.b. Les vecteurs \vec{E} , \vec{B} et \vec{k} forment un trièdre direct, avec en norme $E = cB$; on a donc :

$$\vec{E} = c \vec{B} \wedge \frac{\vec{k}}{k} ; \quad c \vec{B} = \frac{\vec{k}}{k} \wedge \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_i = \frac{E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}{c} \vec{e}_z$$

A.I.1.c. $\epsilon = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2 \mu_0} \vec{B}^2$; $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$

$$e_i = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \langle e_i \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 ;$$

$$\Pi_i = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \langle \Pi_i \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

A.I.2.a. Dans un conducteur ohmique, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Dans un conducteur parfait, la conductivité γ est infinie ; la densité de courant \vec{j} étant finie, \vec{E} est nécessairement nul : $\vec{E} = \vec{0}$. En conséquence, la densité de charge ρ est nulle dans un tel conducteur (équation de Maxwell-Gauss).

A.I.2.b. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit, dans un conducteur parfait : $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$ si l'on exclut les champs statiques.

Remarque : l'équation de Maxwell-Faraday permet de montrer que $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0}$, mais ne permet pas de conclure, même en y ajoutant l'équation de Maxwell-flux $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{0}$. Un champ *uniforme* non *stationnaire* satisfierait ces deux équations.

A.I.3.a. • De façon générale, la relation de passage s'écrit : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ où σ est la densité surfacique de charge et \vec{n} la normale orientée du milieu 1 au milieu 2. Ici, le champ étant nul dans le conducteur, la relation se réduit à : $\vec{E}(x=0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$

\vec{E}_i étant dirigé selon \vec{e}_y , cette condition ne peut être réalisée que s'il existe une onde réfléchie de champ électrique \vec{E}_r tel que : $\vec{E}_r(x=0^-) - \vec{E}_i(x=0^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$.

- Les électrons, mis en mouvement accéléré par l'onde incidente, rayonnent une onde :
 - du côté $x < 0$, cette onde rayonnée est l'onde réfléchie ; elle interfère avec l'onde incidente pour donner une onde stationnaire ;
 - du côté $x > 0$, l'onde rayonnée interfère totalement destructivement avec l'onde incidente : il n'y a pas d'onde résultante dans le conducteur parfait.

• Structure de l'onde réfléchie

- L'onde incidente et l'interface sont invariantes par translation orthogonale à Ox . L'onde réfléchie possède nécessairement la même invariance ; elle est donc plane, de plans d'onde orthogonaux à Ox . Il en découle qu'elle se propage selon Ox .
- La relation de passage à l'interface est linéaire : elle ne peut donc être satisfaite que par une onde réfléchie de même pulsation que l'onde incidente. Le vecteur d'onde de l'onde réfléchie est : $\vec{k}_r = -\vec{k} = -\frac{\omega}{c}\vec{e}_x$.
- La direction de polarisation peut être justifiée par des considérations de symétrie ou par l'étude de la polarisation du champ rayonné. Elle implique que $\sigma = 0$.

• $\vec{E}_r(\vec{r}, t) = -E_o \cos(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_y$; $\vec{B}_r(\vec{r}, t) = \frac{E_o}{c} \cos(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_z$

A.I.3.b. • La relation générale de passage à une interface $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_o \vec{j}_s \wedge \vec{n}$ s'écrit ici :

$$\vec{B}(x = 0^-) = -\mu_o \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$$

avec : $\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r \Rightarrow 2 \frac{E_o}{c} \cos(\omega t) \vec{e}_z = -\mu_o \vec{j}_s \wedge \vec{e}_x$

d'où, en faisant le produit vectoriel par \vec{e}_x :

$$2 \frac{E_o}{c} \cos(\omega t) (\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x) = -\mu_o (\vec{j}_s \wedge \vec{e}_x) \wedge \vec{e}_x = \mu_o \vec{j}_s \Rightarrow \boxed{\vec{j}_s = 2\epsilon_o c E_o \cos(\omega t) \vec{e}_y}$$

Commentaire : dans le cas d'un conducteur réel (conductivité finie), le champ électromagnétique pénètre à l'intérieur du conducteur sur une épaisseur de l'ordre de $\delta = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_o \sigma \omega}}$ (épaisseur de peau). Le conducteur est alors parcouru par un courant volumique sur une épaisseur de l'ordre de δ (courant pelliculaire). Lorsque l'on fait tendre la conductivité vers l'infini (conducteur parfait), l'épaisseur de peau tend vers zéro : la densité de courant \vec{j} devient nulle en tout point intérieur au conducteur et infinie à la surface. La densité de courant surfacique \vec{j}_s correspond à cette singularité de \vec{j} .

• Il s'exerce sur un élément de surface dS une force de Laplace :

$$d\vec{F} = \vec{j}_s dS \wedge \vec{B}_i = 2\epsilon_o c E_o \cos(\omega t) dS \vec{e}_y \wedge \frac{E_o}{c} \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow d\vec{F} = 2\epsilon_o E_o^2 \cos^2(\omega t) dS \vec{e}_x \Rightarrow \boxed{\langle d\vec{F} \rangle = \epsilon_o E_o^2 dS \vec{e}_x}$$

Rappel : la force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ est une force qui s'exerce sur une particule de charge q ; la force de Laplace $d\vec{F} = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}$ est une force qui s'exerce sur un élément de courant $\vec{j} d\tau$ (en schématisation volumique). Physiquement, la force de Laplace correspond à la résultante des forces de Lorentz qui s'exercent sur les charges contenues dans l'élément de volume $d\tau$.

• $\langle d\vec{F} \rangle = P_{rad} dS \vec{e}_x \Rightarrow \boxed{P_{rad} = \epsilon_o E_o^2}$; $\boxed{P_{rad} = 2 \langle e_i \rangle}$

• Le champ \vec{B}_r est créé par la densité de courant \vec{j}_s qui ne se soumet pas elle-même à une force.

A.I.4.a. Les photons frappant dS pendant dt sont contenus dans un cylindre de génératrice cdt (selon \vec{e}_x) et de base dS (orthogonale à \vec{e}_x) ; leur nombre est donc $ncdSdt$.

La variation de quantité de mouvement d'un photon au cours de sa réflexion est : $-2\frac{h}{2\pi} \frac{\omega}{c} \vec{e}_x$. On en déduit :

$$\delta^2 \vec{p} = -2n \frac{h}{2\pi} \omega dS dt \vec{e}_x ; \langle d\vec{F} \rangle = -\frac{\delta^2 \vec{p}}{dt} \Rightarrow \boxed{\langle d\vec{F} \rangle = +2n \frac{h}{2\pi} \omega dS \vec{e}_x}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{rad} = 2n \frac{h}{2\pi} \omega}$$

La densité d'énergie incidente est : $\langle e_i \rangle = nE = n \frac{h}{2\pi} \omega \Rightarrow \boxed{P_{rad} = 2 \langle e_i \rangle}$. On retrouve la même relation entre P_{rad} et $\langle e_i \rangle$ qu'avec le modèle ondulatoire.

A.I.4.b. Dans le cas où le photon est absorbé, sa variation de quantité de mouvement est deux fois moins importante : $\delta^2 \vec{p} = -n \frac{h}{2\pi} \omega dS dt \vec{e}_x$. La pression de radiation est donc divisée par 2 : $\boxed{P_{rad} = n \frac{h}{2\pi} \omega}$.

A.II.1.a. La conservation de la quantité de mouvement totale de l'atome et du photon s'écrit :

$$m \Delta \vec{v}_a = \frac{h\nu_L}{c} \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{v}_a = \frac{h\nu_L}{mc} \vec{e}_x = \frac{h\nu_L N_A}{M c} \vec{e}_x}$$

Pour $\nu_L = \nu_o = \frac{c}{\lambda_o}$: $\Delta \vec{v}_a = \frac{h\nu_L N_A}{M \lambda_o} \vec{e}_x \Rightarrow \boxed{\Delta v_a = 2,95 \cdot 10^{-2} m \cdot s^{-1}}$.

La vitesse quadratique moyenne d'un gaz parfait à la température T (vitesse d'agitation thermique) est : $v_{th} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$; pour un gaz d'atomes de sodium, à 300 K : $v_{th} = 570 m \cdot s^{-1} \Rightarrow$

$$\boxed{\Delta v_a \ll v_{th}}$$

A.II.1.b. La direction d'émission étant aléatoire : $\boxed{\langle \Delta \vec{v}_e \rangle = \vec{0}}$.

A.II.1.c. $\vec{a} = A_o \Delta \vec{v}_a \Rightarrow \boxed{A_o \frac{h\nu_L}{mc} \vec{e}_x}$ soit numériquement : $a = 2,95 \cdot 10^5 m \cdot s^{-2}$.

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = A_o \frac{h\nu_L}{c} \vec{e}_x} ; \quad \boxed{\|\vec{F}\| = 1,12 \cdot 10^{-20} N}$$

$$\frac{\|\vec{F}\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{A_o \frac{h\nu_L}{c}}{mg} = \frac{A_o h N_A}{\lambda_o M g} \Rightarrow \boxed{\frac{\|\vec{F}\|}{\|\vec{P}\|} = 3 \cdot 10^4 \gg 1}$$
 : la force de pesanteur est négligeable devant

la force exercée par le rayonnement.

A.II.2.a. Les atomes rapides subissent par unité de temps plus de chocs sur les parois que les atomes lents. Leur probabilité par unité de temps d'arriver sur l'orifice (c'est à dire de quitter l'enceinte) est donc plus grande et leur proportion dans le jet plus importante que dans l'enceinte.

A.II.2.b. On applique à un atome le principe fondamental de la dynamique, dans la zone d'interaction, en négligeant le poids : $m\vec{a} = \vec{F} = F\vec{e}_y$

- la composante v_x de la vitesse n'est pas modifiée par le rayonnement : $v_x = v_m$; on en déduit la durée Δt_1 de la traversée de la zone : $\Delta t_1 = \frac{c}{v_m}$;
- la composante v_y varie linéairement en fonction du temps ; la vitesse transversale acquise à la sortie de la zone vaut donc : $v_y = F_m \Delta t_1 = \frac{F c}{m v_m}$.

Le mouvement de l'atome hors de la zone est rectiligne uniforme : le temps mis pour arriver à l'écran est donc : $\Delta t_2 = \frac{D}{v_m}$ et la déviation sur l'écran : $d = v_y \Delta t_2 = \frac{F c}{m v_m^2} D \Rightarrow$

$$\boxed{d = \frac{F c}{3 k_B T} D = 2,72 mm}$$

A.II.2.c. • La vitesse initiale des atomes selon Ox est de l'ordre de v_m ; l'accélération étant $\vec{a} = -a\vec{e}_x$, le temps Δt nécessaire pour les arrêter est : $\Delta t = \frac{v_m}{a}$ avec $v_m = 740 m \cdot s^{-1} \Rightarrow$

$$\boxed{\Delta t = 2,5 \cdot 10^{-3} s}$$

Par ailleurs, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit : $\Delta(1/2 mv^2) = ma\Delta x$
 $\Rightarrow \Delta x = \frac{v_m^2}{2a}$ soit $\boxed{\Delta x = 92 cm}$.

- D'une part on ne peut arrêter tous les atomes, puisqu'ils n'ont pas tous la même vitesse ; d'autre part, si on éclaire trop longtemps, on les accélère dans l'autre sens.

A.II.3.a. Il s'agit d'une "mélasse optique".

A.II.3.b. En supposant l'équilibre thermique réalisé au sein du gaz d'atomes, la vitesse quadratique moyenne est toujours donnée par la formule : $v_{th} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$.

Pour le césium ($M = 133g.mol^{-1}$) à $T = 3\mu K$: $v_m = 2,4cm.s^{-1}$.

Cette vitesse n'est pas aussi petite qu'on aurait pu le penser, à notre échelle, compte tenu de la valeur extrêmement faible de la température (là aussi, à notre échelle).

A.II.3.c. Applications métrologiques (horloge atomique ...) ; étude des propriétés quantiques de l'atome.

B.I.1.a. Pour un gaz parfait monoatomique : $C_v = 3/2 R$; $C_p = C_v + R = 5/2 R \Rightarrow \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$.

B.I.1.b. $dU = nC_v dT$.

B.I.1.c. La transformation est adiabatique : $\delta Q = 0$ et réversible : $\delta W = -PdV \Rightarrow dU = -PdV$

B.I.1.d. $nC_v dT = -PdV$ avec $PV = nRT$

$$\Rightarrow nC_v dT = \frac{C_v}{C_p - C_v} (PdV + VdP) = -PdV \Rightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow PV^\gamma = cte$$

B.I.2.a. La résultante des forces exercées sur le piston est : $\vec{F} = (P - P_0)S \vec{e}_x$

Au premier ordre, $PV^\gamma = cte$ s'écrit : $\frac{P - P_0}{P_0} + \gamma \frac{V - V_0}{V_0} = 0$ avec $V - V_0 = Sx \Rightarrow \frac{P - P_0}{P_0} + \gamma \frac{Sx}{V_0} = 0$.

On en déduit : $\vec{F} = -\gamma \frac{P_0 S^2}{V_0} x \vec{e}_x \Rightarrow K = \gamma \frac{P_0 S^2}{V_0}$.

B.I.2.b.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + Kx = 0$$

$$K = 5.10^3 N.m^{-1}; \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 1,58.10^4 rad.s^{-1} \Rightarrow T = 3,97.10^{-4} s$$

B.II.1.a. Un choc est dit élastique si l'énergie cinétique totale des systèmes interagissant se conserve au cours du choc. Cette propriété est indépendante du référentiel. Dans le cas particulier du choc élastique entre une particule et une paroi, elle implique que l'énergie cinétique de la particule se conserve dans le référentiel lié à la paroi. Ce cas peut en effet être considéré comme la limite du choc entre un projectile (1) de masse m_1 et une cible (2) de masse m_2 , lorsque la masse m_2 tend vers l'infini (en pratique $m_2 \gg m_1$). Si on assimile les particules à des points matériels, les relations de conservation s'écrivent, dans le référentiel R dans lequel la cible est initialement immobile :

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 = m_1 \vec{v}_1$$

- Conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m_1 \vec{v}'_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}'_2{}^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1{}^2$$

en notant \vec{v}_i et \vec{v}'_i la vitesse de la particule (i) respectivement avant et après le choc. En éliminant \vec{v}'_2 entre ces deux relations, on obtient :

$$E'_{c1} \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = E_{c1} \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) + 2 \frac{m_1^2}{m_2} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}'_1$$

où E_{c1} et E'_{c1} représentent l'énergie cinétique de la particule (1) respectivement avant et après le choc. Si maintenant, on fait tendre m_1/m_2 vers zéro, on obtient bien : $E'_{c1} = E_{c1}$. On peut aisément se persuader que l'hypothèse que m_2 est une masse ponctuelle ne limite pas en fait la généralité du résultat.

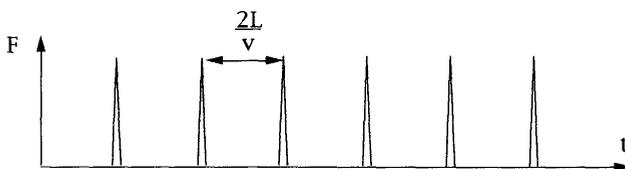
Cette démonstration n'était évidemment pas demandée.

Dans le cas étudié, la conservation de l'énergie cinétique implique donc $\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu v'^2$

$$\Rightarrow \boxed{v = v'}$$

B.II.1.b. $\boxed{\Delta p_x = -2\mu v}$; $\boxed{\Delta t = \frac{2L}{v}}$.

B.II.1.c. Avec la modélisation proposée, la particule n'exerce sur la paroi aucune force sauf au moment des contacts où elle exerce une force infinie.



On a donc une succession de pics équidistants. La surface sous chaque pic correspond (au signe près) à la variation de quantité de mouvement de la particule au cours du choc. A la limite où la durée de chaque choc est nulle, la variation de quantité de mouvement de la particule étant finie, chaque pic est infiniment fin et infiniment haut, de surface finie $-\Delta p_x = 2mv$; l'ensemble des pics constitue alors un peigne de Dirac.

B.II.1.d. • Force moyenne sur un intervalle de temps θ : $\boxed{F_\theta = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty F(t) dt}$.

• $\langle F \rangle = +2\mu v \frac{1}{\Delta t} = +\frac{2\mu v^2}{2L} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{\mu v^2}{L} \vec{e}_x}$.

B.II.2.a. $\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N \mu v_i^2 \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{2N\bar{E}_c}{L} \vec{e}_x}$.

B.II.2.b.

Les particules ont un seul degré de liberté (de translation selon Ox) ; d'après le théorème d'équipartition de l'énergie, on a bien : $\bar{E}_c = 1/2 k_B T$. (Pour un gaz parfait monoatomique, il y a trois degrés de liberté $\Rightarrow \bar{E}_c = 3/2 k_B T$).

En remplaçant \bar{E}_c par $1/2 k_B T$ dans l'expression de \vec{F} , on obtient : $\vec{F} = \frac{Nk_B T}{L} \vec{e}_x \Rightarrow PS = \frac{Nk_B T}{L}$
 $\Rightarrow \boxed{PV = Nk_B T}$.

B.II.2.c. $U = N\bar{E}_c = 1/2 Nk_B T \Rightarrow C_v = 1/2 R$.

D'autre part : $PV = Nk_B T \Rightarrow C_p - C_v = R$ (Mayer) $\Rightarrow C_p = 3/2 R$.

On a donc, pour ce gaz bien particulier : $\boxed{\gamma = 3}$.

B.III.1.a. On considère deux référentiels : le référentiel R du cylindre et le référentiel R' du piston, en translation à la vitesse \vec{V}_p . Les formules de composition des vitesses s'écrivent :

$$v'_n \vec{e}_x = v_n \vec{e}_x - V_p \vec{e}_x \quad ; \quad -v'_{n+1} \vec{e}_x = -v_{n+1} \vec{e}_x - V_p \vec{e}_x$$

Dans le référentiel R' , le choc est élastique $\Rightarrow v_{n+1} = v'_n$. On en déduit : $\boxed{v_{n+1} = v_n - 2V_p}$.

B.III.1.b Entre les chocs (n) et ($n + 1$), la particule a la vitesse v_{n+1} . Elle parcourt la distance $L(t_n)$ du piston jusqu'au fond du cylindre, puis la distance $L(t_{n+1})$ du fond du cylindre jusqu'au piston, avec : $L(t_{n+1}) = L(t_n) + V_p \Delta t_n$.

On a donc :
$$\Delta t_n = \frac{L(t_n) + L(t_{n+1})}{v_{n+1}} = \frac{2L(t_n) + V_p \Delta t_n}{v_n - 2V_p} \Rightarrow \boxed{\Delta t_n = \frac{2L(t_n)}{v_n - 3V_p}}$$

B.III.1.c. •
$$\frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t_n} \approx \frac{dv}{dt} = -\frac{2V_p}{L} \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} = -\frac{V_p}{L} v}$$

• $V_p = \frac{dL}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dL}{L} \Rightarrow vL = v_o L_o = k \Rightarrow \boxed{\beta = 1}$

• Ce résultat reste valable même si V_p varie, pourvu que le temps caractéristique de variation soit très grand devant Δt_n .

B.III.2. • Pour la particule i : $v_i^2 L^2 = k_i^2$; pour l'ensemble des particules : $N \bar{v}_c L^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mu k_i^2 = k'^2$
 $\Rightarrow 1/2 N k_B T L^2 = k'^2 \Rightarrow P V L^2 = 2k'^2$ avec : $V = L S \Rightarrow \boxed{P V^3 = c t e}$

- On retrouve la loi de Laplace $P V^\gamma = c t e$, puisqu'ici $\gamma = 3$ (cf.B.II.2.c.) :
 - l'hypothèse $V_p \ll v$ correspond à la réversibilité thermodynamique ;
 - l'hypothèse des chocs élastiques correspond à l'adiabaticité.

C.I.1.a. La conservation de la masse de la tranche de fluide s'écrit : $\rho_o \delta x = \rho(\delta x + \delta s)$
 $\Rightarrow \rho_o = \rho(1 + \partial s / \partial x)$ avec : $\rho = \rho_o(1 + \theta)$ $\Rightarrow \boxed{(1 + \theta)(1 + \partial s / \partial x) = 1}$

En ne conservant que les termes du premier ordre (approximation acoustique) : $\boxed{\theta = -\frac{\partial s}{\partial x}}$ (1)

C.I.1.b. Au premier ordre : $\rho - \rho_o = \phi'(P_o)[P - P_o] \Rightarrow \boxed{\theta = \chi_o P}$ (2)

C.I.1.c. La tranche de fluide est soumise aux forces de pression sur toutes ses faces. En projection sur l'axe des x , le PFD s'écrit : $\rho_o S \delta x \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = [P(x) - P(x + \delta x)] S \Rightarrow \boxed{\rho_o S \delta x \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$ (3)

C.I.1.d. • Des relations (1) et (2), on tire, en éliminant θ : $\chi_o p = -\frac{\partial s}{\partial x}$ (4)

On dérive la relation (3) par rapport à x : $\rho_o \frac{\partial^3 s}{\partial x \partial t^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$

On applique le lemme de Schwartz : $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \Rightarrow \rho_o \frac{\partial^3 s}{\partial t^2 \partial x} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$
 soit, en utilisant la relation (4) : $-\rho_o \chi_o \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_o \chi_o \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}}$

La surpression p satisfait donc l'équation de d'Alembert (équation d'onde classique).

• Les relations (2) et (1) montrent que θ et s satisfont la même équation d'onde (le contraire eût été étonnant).

C.I.2.a. • On pose : $y = t - x/c_s$. On a alors : $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{d}{dy} = -\frac{1}{c_s} \frac{d}{dy}$ et : $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{d}{dy} = \frac{d}{dy}$
 d'où : $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c_s^2} f''(y)$ (et) $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = f''(y)$. L'équation d'onde s'écrit ainsi : $f''(y)(\frac{1}{c_s^2} - \rho_o \chi_o) = 0$; elle est vérifiée par toute fonction $f(y)$ (ou presque) pourvu que : $\boxed{c_s = \frac{1}{\rho_o \chi_o}}$

• L'état vibratoire constant correspond à $f(y) = c t e$, soit $y = c t e \Leftrightarrow x = c_s t + c t e$: on a bien une onde progressive de célérité c_s .

C.I.2.b. D'après les résultats démontrés en (C.I.2.a.), pour une onde progressive : $\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{c_s} \frac{\partial}{\partial t}$.
 La relation (4) s'écrit alors : $\chi_o p = -\frac{1}{c_s} \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{c_s} u \Rightarrow \boxed{u = c_s \chi_o p}$

C.I.2.c. • Au cours d'une transformation isentropique d'un gaz parfait : $P \rho^{-\gamma} = c t e$ (équation de Laplace) $\Rightarrow \boxed{\phi(P) = K P^{1/\gamma}}$

- En prenant la différentielle logarithmique de $P\rho^{-\gamma} = cte$, il vient : $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{P} \Rightarrow \chi_o = \frac{1}{\gamma P_o}$.
Par ailleurs, l'équation d'état s'écrit : $\rho_o = \frac{P_o M}{RT_o}$. D'où finalement : $c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT_o}{M}}$ (relation de Laplace, toujours lui !).
- Pour un gaz parfait diatomique : $\gamma = 7/5$. On constate que c_s est de l'ordre de grandeur de la vitesse quadratique moyenne des molécules (ou de toute vitesse "thermique" des molécules : vitesse moyenne, vitesse la plus probable, etc.). Cela tient au fait que c'est le déplacement des molécules qui permet la propagation de l'onde.

C.I.3.a. Par définition : $\Pi_a = pu$.

C.I.3.b. On a vu en (C.I.2.b.) que, pour une onde progressive, $u = c_s \chi_o p$; on a alors : $\Pi_a = c_s \chi_o p^2$.

$$I = \langle \Pi_a \rangle = c_s \chi_o \langle p^2 \rangle \Rightarrow I = \frac{1}{2} c_s \chi_o p_m^2$$

$$\text{Par ailleurs : } c_s^2 = \frac{1}{\rho_o \chi_o} \Rightarrow c_s \chi_o = \frac{1}{\rho_o c_s} = \frac{RT_o}{MP_o} \sqrt{\frac{M}{\gamma RT_o}} = \frac{1}{P_o} \sqrt{\frac{RT_o}{\gamma M}}$$

$$\text{On en déduit une autre expression de I : } I = \frac{1}{2 P_o} \sqrt{\frac{RT_o}{\gamma M}} p_m^2$$

C.I.3.c. $p_{mo} = [2I_o P_o \sqrt{\frac{\gamma M}{RT_o}}]^{1/2} \Rightarrow p_{mo} = 3.10^{-5} Pa$.

La cavité auriculaire est une cavité résonante pour un spectre de fréquences donné (fréquences audibles). Les fluctuations de grande amplitude correspondent à des fréquences qui se trouvent à des fréquences beaucoup trop basses ; dans le domaine audible, les fluctuations sont de très faible amplitude.

C.I.3.d.

$$N = 120 \Rightarrow \frac{f}{f_o} = 10^{12} \Rightarrow \frac{p_m}{p_{mo}} = 10^6 \Rightarrow p_m = 30 Pa$$

La relation fondamentale de l'hydrostatique s'écrit, en orientant l'axe des z vers le haut :

$$P - P_o = -\rho_e g \Delta z$$

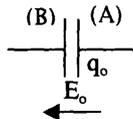
avec $\rho_e = 1g.cm^{-3}$.

Pour $P - P_o = p_m = 30 Pa$, on obtient : $\Delta z = -3mm$!

C.II.1. • K_r prend en compte l'élasticité de la membrane et la compressibilité de l'air contenu dans la capsule (cf.B.I.2.a. où la valeur de K calculée correspond au cas d'une capsule de microphone ...).

- f prend en compte le frottement de l'air intérieur et extérieur ainsi que les dissipations internes au matériau constituant la membrane.

C.II.2.a. $C_o = \frac{\epsilon_o S}{x_o} \Rightarrow q_o = -\frac{\epsilon_o S}{x_o} E_o$.



C.II.2.b. $U = \frac{1}{2} \frac{q_o^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{q_o^2}{\epsilon_o S} x \Rightarrow \delta U = \frac{1}{2} \frac{q_o^2}{\epsilon_o S} \delta x$.

Le déplacement s'effectuant à charge constante, le seul travail fourni au système est le travail de l'opérateur ; le bilan énergétique s'écrit donc : $\delta U = \delta W_{op} \Rightarrow \delta W_{op} = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{\epsilon_0 S} \delta x$.

Par ailleurs, $\delta W_{op} = \vec{F}_{op} \cdot \vec{e}_x \delta x \Rightarrow \vec{F}_{op} = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{\epsilon_0 S} \vec{e}_x$. Le déplacement s'effectuant très lentement, à tout instant l'accélération de l'armature (A) est nulle, donc $\vec{F}_0 + \vec{F}_{op} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_0 = -\frac{1}{2} \frac{q_0^2}{\epsilon_0 S} \vec{e}_x \Rightarrow P_e = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$.

La force de pression électrostatique est donc toujours dirigée vers l'extérieur de la surface du conducteur, quel que soit le signe de σ : la pression électrostatique tend à dilater le conducteur. Dans le cas qui nous intéresse, les armatures (A) et (B) s'attirent, ce que le signe des charges qu'elles portent permettait évidemment de prévoir.

C.II.3.a.

Le PFD appliqué à l'armature (A) s'écrit : $m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + K_r(x - x_e) = F_0 - P_1 S \cos(\omega t)$.

A l'équilibre, $x = x_0 \Rightarrow K_r(x_0 - x_e) = F_0$.

On en déduit par différence : $m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + K_r x_1 = -P_1 S \cos(\omega t)$.

Cette équation s'écrit en complexes, en utilisant la bijection $\frac{d}{dt} \leftrightarrow j\omega$:

$$\underline{X}_1(-m\omega^2 + j\omega f + K_r) = -P_1 S \Leftrightarrow \underline{X}_1 = -\frac{P_1 S}{K_r - m\omega^2 + j\omega f}$$

La résonance est obtenue pour $(K_r - m\omega^2)^2 + (\omega f)^2$ minimal $\Rightarrow -4m\omega(K_r - m\omega^2) + 2f^2\omega = 0$

$$\Rightarrow \omega_R = \sqrt{\frac{K_r}{m} - \frac{f^2}{2m^2}}. \text{ On note que cette valeur dépend du coefficient d'amortissement.}$$

Avec les valeurs numériques de l'énoncé : $\omega_R = 4,810^4 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow \nu_R = 7630 \text{ Hz}$.

Cette valeur est en plein dans le domaine audible. Cet effet est souhaitable (le résultat précédent n'est pas fortuit) : le microphone doit avoir une bonne réponse dans le domaine audible.

C.II.3.b. $E_0 = u + v$ avec : $u = -\frac{q}{C}$ et : $v = Ri = -R \frac{dq}{dt} \Rightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = -E_0$.

$$q = q_0 + q_1 \Rightarrow R \frac{dq_1}{dt} + \frac{x_0 + x_1}{\epsilon_0 S} (q_1 + q_0) = -E_0 \text{ avec : } \frac{q_0}{C_0} = -E_0 \Leftrightarrow \frac{x_0}{\epsilon_0 S} q_0 = -E_0$$

On en déduit par différence, en négligeant le terme en $x_1 q_1$ (2ème ordre) : $R \frac{dq_1}{dt} + \frac{x_0}{\epsilon_0 S} q_1 + \frac{q_0}{\epsilon_0 S} x_1 = 0$.

$$v = Ri = -R \frac{dq}{dt} = -R \frac{dq_1}{dt}$$

En dérivant l'équation différentielle satisfaite par q_1 , on obtient : $R \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{1}{C_0} \frac{dq_1}{dt} = -\frac{q_0}{\epsilon_0 S} \frac{dx_1}{dt}$ soit :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC_0} v = \frac{q_0}{\epsilon_0 S} \frac{1}{R} \frac{dx_1}{dt} \text{ avec } q_0 = -\frac{\epsilon_0 S}{x_0} E_0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC_0} v = -\frac{E_0}{x_0} \frac{dx_1}{dt}$$

En complexes : $\underline{V}(j\omega + \frac{1}{RC_0}) = -\frac{E_0}{x_0} j\omega \underline{X}_1 \Rightarrow \underline{V} = -\frac{E_0}{x_0} \frac{j\omega RC_0}{1 + j\omega RC_0} \underline{X}_1$.

C.II.3.c. • On élimine \underline{X}_1 entre les expressions (C.II.3.a.) et (C.II.3.b.) de \underline{X}_1 et \underline{V} ; il vient :

$$e = \frac{\underline{V}}{P_1} = \frac{E_0 S}{x_0} \frac{j\omega RC_0}{(1 + j\omega RC_0)(K_r + j\omega f - m\omega^2)} = \frac{E_0 S}{x_0 K_r} \frac{j\omega RC_0}{(1 + j\omega RC_0)(1 + j\omega \frac{f}{K_r} - \frac{m}{K_r} \omega^2)}$$

On a bien :

$$e = A \frac{j \frac{\omega}{\omega_1}}{(1 + j \frac{\omega}{\omega_1})(1 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_2} - \frac{\omega^2}{\omega_2^2})}$$

avec : $\omega_1 = \frac{1}{RC_o}$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{K_r}{m}}$.

$$\frac{1}{Q\omega_2} = \frac{f}{K_r} \Rightarrow Q = \frac{1}{f} \sqrt{K_r m} \quad A = \frac{E_o S}{x_o K_r} \quad \text{avec } C_o = \frac{\epsilon_o S}{x_o} \Rightarrow A = \frac{C_o E_o}{\epsilon_o K_r}$$

A.N. $\omega_1 = 5,00.10^4 \text{rd.s}^{-1}$ $\omega_2 = 5,00.10^4 \text{rd.s}^{-1}$ soit : $\nu_1 = 8 \text{Hz}$ $\nu_2 = 8 \text{kHz}$.
 $Q = 2,5$ $A = 2,26.10^{-3} \text{V.Pa}^{-1}$.

- Pour que e soit pratiquement indépendant de ω , il faut que le dénominateur de l'expression rigoureuse de e soit à peu près proportionnel à $j\omega$. Il y a a priori deux possibilités :

- 1ère possibilité : $\omega \gg \omega_1$ et $\omega \ll \omega_2 \Rightarrow (1 + j \frac{\omega}{\omega_1})(1 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_2} - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}) \approx j \frac{\omega}{\omega_1}$
 - 2ème possibilité : $\omega \ll \omega_1$ et $\omega_2 Q \ll \omega \ll \frac{\omega_2^2}{Q} \Rightarrow (1 + j \frac{\omega}{\omega_1})(1 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_2} - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}) \approx j \frac{\omega}{\omega_2}$
- Cette deuxième possibilité est clairement impossible ($Q > 1$).

Il faut donc : $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$ soit numériquement : $50 \text{rd.s}^{-1} \ll \omega \ll 50.10^3 \text{rd.s}^{-1}$.

Ce domaine de pulsations correspond au domaine audible : ce n'est pas, là encore, un hasard. Les valeurs des différents paramètres sont choisies pour que, dans ce domaine, l'efficacité soit la plus indépendante possible de la fréquence sonore.

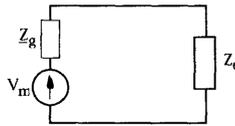
- Dans ce domaine : $e \approx A \Rightarrow V_m = AP_1 \Rightarrow 2,3.10^{-8} < V_m < 2,3.10^{-2} (\text{volt})$.

C.II.4.a. On ne s'intéresse évidemment qu'à la composante sinusoïdale de la tension.

$$Z_g = R // C \approx R // C_o = R_1 + jRC_o\omega \quad \text{avec : } \omega \gg \omega_1 \Leftrightarrow jRC_o\omega \gg 1 \Rightarrow Z_g \approx \frac{1}{jC_o\omega}$$

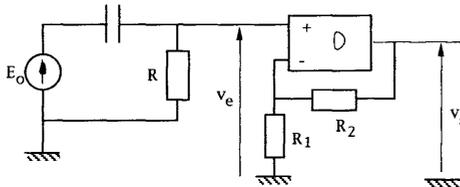
$$\Rightarrow Z_g = \frac{1}{C_o\omega} ; Z_g(\omega_1) = 10^9 \Omega ; Z_g(\omega_2) = 10^6 \Omega$$

On a le montage équivalent :



Pour un coaxial : $Z_e \sim 50 \Omega$; on a donc $Z_g \gg Z_e$: la tension appliquée à l'enregistreur est de l'ordre de $V_m \frac{Z_e}{Z_g}$ beaucoup trop faible.

C.II.4.b. L'A.O. est monté en amplificateur non inverseur : $\frac{v_s}{v_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 10$ avec $v_e = v$
 $\Rightarrow v_s = 10 \times v$.



Le montage présente un double avantage :

- on gagne un facteur 10 sur la tension de sortie ;
mais surtout :
- l'impédance d'entrée de l'A.O. est infinie et son impédance de sortie nulle : on a adapté l'impédance et on applique (quasi) intégralement la tension $v_s = 10 \times v$ à l'enregistreur.

Agrégation de sciences physiques

Concours interne

COMPOSITION AVEC EXERCICES D'APPLICATION

Option physique et chimie ♦ Session : 2002

Partie A

I. Le chlore dans la stratosphère

I.1. Cl : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$ ($\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow$)

O : $1s^2 2s^2 2p^4$ ($\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow$)

I.2.1. Pour O_2 , en ne considérant que les OA 2s et 2p : $(\sigma_s)^2 (\sigma_s^*)^2 (\sigma_z)^2 (\pi_x, \pi_y)^4 (\pi_x^*)^1 (\pi_y^*)^1$

Pour Cl_2 , en ne considérant que les OA 3s et 3p : $(\sigma_s)^2 (\sigma_s^*)^2 (\sigma_z)^2 (\pi_x, \pi_y)^4 (\pi_x^*)^2 (\pi_y^*)^2$

Pour ClO, les OA de l'oxygène sont plus basses en énergie que celle du chlore.

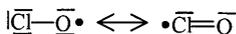
$(\sigma_s)^2 (\sigma_s^*)^2 (\sigma_z)^2 (\pi_x, \pi_y)^4 (\pi_x^*)^2 (\pi_y^*)^1$

I.2.2. indice = $(n-n^*)/2$, n étant le nombre d'électrons dans les OM liantes, n^* dans les OM antiliantes.

O_2 : indice = $(8-4)/2 = 2$, conforme au schéma de Lewis.

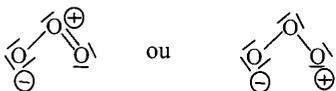
Cl_2 : indice = $(8-6)/2 = 1$, conforme au schéma de Lewis.

ClO : indice = $(8-5)/2 = 1,5$; explicable par les formules de résonance :



I.2.2. O_2 et ClO sont paramagnétiques (2 électrons célibataires dans O_2 , 1 célibataire dans ClO) alors que Cl_2 est diamagnétique.

I.3.1.1.



La forme triangulaire cyclique aurait un moment dipolaire nul et ne peut donc pas convenir.

I.3.1.2. $hcN/\lambda_0 = D_{O=O}$ (enthalpie de dissociation de O_2).

et $D_{O=O} = 2 \Delta_f H^\circ(O(g)) = 498 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

$\lambda_0 = 6,63 \times 10^{-34} \times 3,00 \times 10^8 \times 6,02 \times 10^{23} / 498000 = 2,40 \times 10^{-7} \text{ m} = 240 \text{ nm}$.

I.3.1.3. Les UV lointains, nocifs, sont absorbés. Le rayonnement UV réémis par la molécule d'ozone excitée produite par (2) est de moindre énergie.

I.3.2.1. Le chlore atomique catalyse la décomposition de l'ozone : la production d'un seul atome de chlore peut induire une chaîne de destruction de O_3 en O_2 selon la réaction



I.3.2.2. M est un "auxiliaire de choc" capable d'absorber l'énergie produite par la réaction de recombinaison des radicaux.

I.3.2.3. AEQS à Cl : $0 = v_4 - v_5 + v_6 - 2 v_7$

AEQS à ClO : $0 = v_5 - v_6$

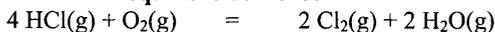
donc $v_4 = 2 v_7$; $J_4 = 2 k_7 [Cl]^2 [M]$, soit $[Cl] = (J_4/2 k_7 [M])^{1/2}$

$v = -d[O_3]/dt = k_5 [Cl] [O_3]$; finalement : $v = k_5 [O_3] (J_4/2 k_7 [M])^{1/2}$

I.3.2.4. M représente une particule quelconque du milieu ; $[M] = n_{tot}/V = P_{tot}/RT$.

À pression (et température) constantes, le terme $k_5 (J_4/2 k_7 [M])^{1/2}$ est constant = k et on peut en déduire la loi de vitesse $[O_3] = [O_3]_0 e^{-kt}$.

II. Un équilibre industriel : l'équilibre de Deacon



II.1. $\Delta_r H^\circ = 2 \times 0 + 2 \times -242 - 0 - 4 \times -92 = -116 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

$\Delta_r S^\circ = 2 \times 223 + 2 \times 188 - 205 - 4 \times 187 = -131 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ = -116000 + 623 \times 131 = -34387 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$

II.2. $K^\circ = (p_{Cl_2})^2 (p_{H_2O})^2 P^\circ / (p_{HCl})^4 (p_{O_2})$, où P° est la pression standard.

$K^\circ = \exp(-\Delta_r G^\circ / RT) = \exp(34387 / (8,31 \times 623)) = 767$.

II.3.1. Le rendement en dichlore est égal au rapport de la quantité de dichlore obtenue à l'équilibre à la quantité maximale possible (qui est égale à la moitié de la quantité initiale de HCl, O₂ étant en excès)

II.3.2.

	4 HCl(g) + O ₂ (g)		=	2 Cl ₂ (g) + 2 H ₂ O(g)		N ₂ (g)
Initial	4	n		0	0	4n
Équilibre	4-4x	n		2x	2x	4n

Le rendement maximal x est obtenu pour une quantité d'air "infinie", on peut donc considérer que la quantité de dioxygène est constante.

Le quantité totale de gaz est égale à 5n+4, voisine de 5n (car 5n >> 4).

$K^\circ = (2x)^2 (2x)^2 \times 5n \times P^\circ / (4-4x)^4 \times n \times P_{tot}$

$K^\circ = 5x^4 / 16(1-x)^4$, soit $x \approx 87,7 \%$

Une autre manière de faire consiste à poser $p_{O_2} = 0,2 \text{ bar}$ (excès d'air) et, en remarquant que $p_{Cl_2} = p_{H_2O}$, il vient :

$0,2 \times K^\circ = (p_{Cl_2})^4 / (p_{HCl})^4$, soit $p_{Cl_2} / p_{HCl} = 3,56 = 2x / (4-4x)$, donc $x \approx 87,7 \%$

II.3.3.

a – la réaction est exothermique ; le rendement diminue si T augmente (loi de Van't Hoff).

b – la quantité de gaz diminue, donc le rendement augmente si la pression augmente. On peut aussi raisonner sur la constante K° , qui ne dépend que de la température : si P_{tot} augmente, il faut donc que x augmente pour conserver K° fixée.

III. Dosages de l'ion chlorure

III.1.1. $K_{RD} = 1/K_s = 10^{9,8} = 6,3 \times 10^9$

III.1.2. L'équivalence du dosage se produit lorsque la quantité d'ions Ag^+ introduite est strictement égale à la quantité initiale d'ions chlorure.

A l'équivalence, $[Ag^+] = [Cl^-] = (K_s)^{1/2} = 1,3 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$

III.1.3. $0,02 = (K_s)^{1/2}/c_0$ donc $c_0 = 6,3 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$

III.1.4. On voit que la précision d'un dosage dépend de la constante de la réaction de dosage et de la concentration de l'espèce à doser. Une solution trop diluée d'ions chlorure ne pourra pas être dosée de façon satisfaisante par la méthode proposée.

III.2.1. L'électrode au calomel saturé contient des ions chlorure libres qui pourraient précipiter avec les ions argent et boucher le fritté qui sert de jonction.

III.2.2. Le volume à l'équivalence est $v_{eq} = 9,0 \text{ mL}$.

$9 \times 0,2 = 100 \times c_0$ donc $c_0 = 1,8 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Précision théorique = $1,3 \times 10^{-5} / 1,8 \times 10^{-2} = 0,07 \%$

III.2.3. Avant l'équivalence : $[Cl^-] = (c_0 V_0 - cv)/(v + V_0)$; $[Ag^+] = K_s(v + V_0)/(c_0 V_0 - cv)$

$\Delta E = \Delta E^\circ + 0,059 \lg [K_s(v + V_0)/(c_0 V_0 - cv)]$

Après l'équivalence : $[Ag^+] = (cv - c_0 V_0)/(v + V_0)$; $\Delta E = \Delta E^\circ + 0,059 \lg [(cv - c_0 V_0)/(v + V_0)]$

III.2.4. La seconde partie de la courbe permet d'accéder à ΔE° en calculant numériquement la grandeur

$\Delta E - 0,059 \lg [(cv - c_0 V_0)/(v + V_0)]$; on trouve $\Delta E^\circ = 0,554 \text{ V}$.

La première partie (avant l'équivalence) peut être exploitée en calculant numériquement la grandeur

$\Delta E + 0,059 \lg [(c_0 V_0 - cv)/(v + V_0)] = \Delta E^\circ + 0,059 \lg K_s = -0,024 \text{ V}$;

$\lg K_s = (-0,024 - 0,554)/0,059 = -9,8$

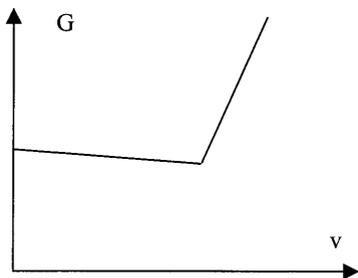
III.3.1. On mesure la résistance d'un volume de solution piégé dans une cellule de mesure de dimensions connues (conductimètre = ohmmètre). La mesure se fait en courant alternatif pour empêcher la polarisation des électrodes constituant la cellule.

III.3.2. Cette précaution permet d'obtenir, en mesurant la conductance de la solution au cours du dosage, des portions de droite (ce qui suppose que la dilution est négligeable, soit $V_{tot} \gg v_{ajouté}$).

III.3.3. Ag^+ (burette) + NO_3^- (burette) + Cl^- (bêcher) $\rightarrow AgCl(s)$ + NO_3^- (bêcher)

tout se passe comme si, avant l'équivalence, on remplaçait des ions chlorure par des ions nitrate qui conduisent un peu moins bien. Donc droite légèrement descendante avant l'équivalence.

Après l'équivalence, on ajoute des ions Ag^+ et NO_3^- : droite montant.



$$\text{III.4.1. } K_{s1} = [\text{Ag}^+][\text{Cl}^-]/C^{o2}; K_{s2} = [\text{Ag}^+]^2[\text{CrO}_4^{2-}]/C^{o3}$$

On ne peut pas comparer $K_{s1}C^{o2}$ et $K_{s2}C^{o3}$, grandeurs de dimensions différentes.

Dans la solution initiale,

$$[\text{Cl}^-]_0 \approx 0,02 \text{ mol.L}^{-1} \text{ et } [\text{CrO}_4^{2-}]_0 = 2,5 \times 10^{-3} \times 1/101 \approx 2,5 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}.$$

La concentration minimale nécessaire en ions argent pour faire précipiter AgCl est

$$K_{s1}/[\text{Cl}^-]_0 = 10^{-9,8}/0,02 = 8 \times 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1} \text{ alors que pour faire précipiter } \text{Ag}_2\text{CrO}_4, \text{ la valeur est } (K_{s2}/[\text{CrO}_4^{2-}]_0)^{1/2} = 2 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}.$$

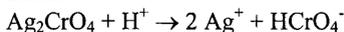
AgCl précipite donc le premier.

$$\text{III.4.2. } 9,0 \times 0,2 = c_0 \times 100, \text{ soit } c_0 = 0,018 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{III.4.3. Précision théorique} = 2 \times 10^{-4} / 0,018 = 1,1 \%$$

$$\text{III.4.4.1. } K_s = [\text{Ag}^+]^2[\text{OH}^-]^2 = 10^{-15,4} \text{ et } [\text{Ag}^+] = 2 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \text{ au plus (juste à l'équivalence); } [\text{OH}^-] = 1,0 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \text{ donc pH} = 10,0 \text{ au plus.}$$

III.4.4.2. L'ion chromate a des propriétés basiques ; le précipité se redissout donc en milieu acide.



III.4.4.3. La précision théorique demandée donne accès à

$$[\text{Ag}^+] = 0,018 \times 0,02 = 3,6 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} \text{ à l'équivalence.}$$

Donc

$$[\text{CrO}_4^{2-}] = (K_{s2}/[\text{Ag}^+]^2) = 7,7 \times 10^{-6} \text{ mol.L}^{-1} \text{ et } [\text{HCrO}_4^-] = 2,5 \times 10^{-5} - 7,7 \times 10^{-6} = 1,7 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}.$$

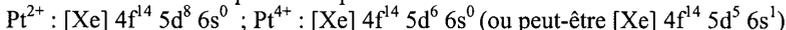
soit $\text{pH} = \text{pKa} + \lg[\text{CrO}_4^{2-}]/[\text{HCrO}_4^-] = 6,2$ au moins.

IV. Les ions chlorure en tant que ligands : les chlorocomplexes du platine

IV.1.1. PtCl_4^{2-} : ion tétrachloroplatinate(II)

PtCl_6^{2-} : ion hexachloroplatinate(IV)

IV.1.2. Les électrons *s* partent en premier :



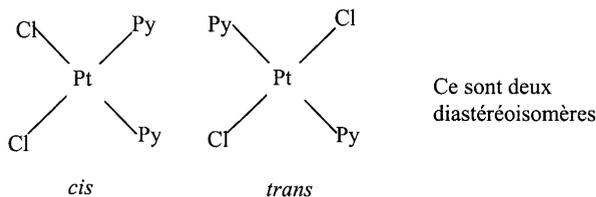
IV.1.3. 6 électrons à répartir : $(t_{2g})^4 (e_g)^2$

IV.1.4.1. Dans le complexe octaédrique, les OA d_{xy} , d_{zx} et d_{yz} sont dégénérées et constituent le niveau t_{2g} . Si on éloigne infiniment deux des six ligands selon l'axe Oz, on voit que les OA d_{zx} et d_{yz} restent dégénérées et sont stabilisées par rapport à d_{xy} .

Dans le complexe octaédrique, les OA d_{z^2} et $d_{x^2-y^2}$ sont dégénérées. Dans le complexe plan carré, l'OA $d_{x^2-y^2}$ reste fortement déstabilisée, tandis que l'OA d_{z^2} (qui ne pointe plus vers aucun ligand) se voit peu déstabilisée.

IV.1.4.2. 8 électrons à ranger ; comme le complexe est diamagnétique, cela signifie qu'aucun électron n'est célibataire. Donc : $(d_{zx}, d_{yz})^4, (d_{z^2})^2, (d_{xy})^2$.

IV.2.1.



IV.2.2. AEQS : $v_1 = v_2$,

La vitesse de la réaction est donc

$v = v_1$ (étape cinétiquement limitante) = $k_1[\text{trans}][\text{Y}]$, $k_Y = k_1$.

IV.2.3.1. Pour l'ammoniac : $n_{\text{Pt}} = 3,1$; pour l'ion iodure : $n_{\text{Pt}} = 5,4$

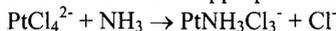
IV.2.3.2. Sur la série des halogénures, on constate que $\text{Cl}^- < \text{Br}^- < \text{I}^-$ (ordre de polarisabilité).

De même, pour des raisons de polarisabilité de l'atome porteur du doublet :

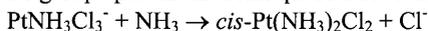
$\text{MeOH} < \text{MeSH}$ et $\text{NH}_3 < \text{PPh}_3$

IV.2.3.3. La constante de l'équilibre est $K = k_I/k_{\text{Cl}} = 10^{5,4}/10^{3,0} = 10^{2,4} = 250$

IV.2.4.1. Il suffit d'appliquer l'effet trans :

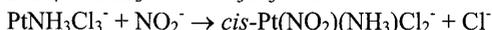
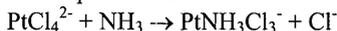


Le groupe partant est celui qui se trouve en face d'un Cl, qui a un pouvoir supérieur à NH_3 .



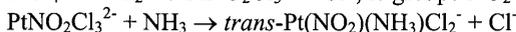
IV.2.4.2. L'ordre d'entrée des substituants est ici important.

- Préparation du *cis* :



- Préparation du *trans* :

$\text{PtCl}_4^{2-} + \text{NO}_2^- \rightarrow \text{PtNO}_2\text{Cl}_3^- + \text{Cl}^-$; le groupe NO_2 est meilleur que Cl, donc :

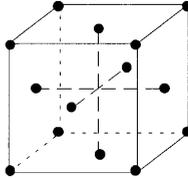


Partie B

I. L'aluminium et le silicium : exemples de métal et de semi-conducteur

Vers les polymères semi-conducteurs

I.1.1. Réseau cfc :



I.1.2. Coordinence : la coordinence est le nombre de plus proches voisins ; si on considère par exemple, l'atome au centre de la face supérieure, ses plus proches voisins sont situés :

- aux 4 sommets de la face supérieure
 - sur les 4 faces latérales du cube représenté
 - et sur les 4 faces latérales du cube non représenté qui se situeraient au-dessus de celui-ci
- au total 12 atomes donc la coordinence est 12.

I.1.3. Compacité

Il y a 4 atomes par maille : $(8 \cdot 1/8 + 6 \cdot 1/2)$

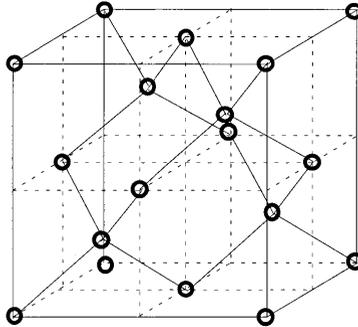
$$C = \frac{4 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} \quad \text{avec} \quad a\sqrt{2} = 4r \quad (\text{contact suivant les diagonales des faces})$$

$$\text{d'où } C = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} = 0,74$$

I.1.4. Masse volumique

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4M(\text{Al})/N_a}{a^3} = \frac{\sqrt{2}M(\text{Al})}{8N_a r^3} = 2,71 \text{ g/cm}^3$$

I.2.1. Le silicium cristallise dans la même structure que le diamant : structure cfc avec occupation d'un site tétraédrique sur deux par un atome :



I.2.2. Coordinnence : 4 (chaque Si est au centre d'un tétraèdre)

I.2.3. Compacité :

Il y a huit atomes par maille , alors :

$$C = \frac{8 * 4 / 3 \pi r^3}{a^3} \quad \text{avec} \quad \frac{a}{4} \sqrt{3} = 2r \quad (\text{contact suivant la grande diagonale des petits cubes})$$

$$\text{d'où } C = \frac{\pi \sqrt{3}}{16} = 0,34$$

I.2.4. Masse volumique

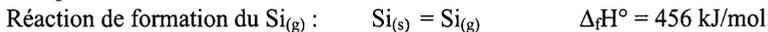
$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{8M(\text{Si})/N_a}{a^3} = \frac{3\sqrt{3}M(\text{Si})}{64N_a r^3} = 2,31 \text{ g/cm}^3$$

I.2.5. La liaison est de type covalent

Les différences essentielles avec la liaison métallique sont :

- La liaison covalente est dirigée
- La coordinnence est plus faible dans les cristaux de type covalent
- La liaison covalente est plus forte que la liaison métallique

I.2.6. Enthalpie de liaison $E_{\text{Si-Si}}$:



Pour sublimer le cristal, il faut casser 4 liaisons Si-Si, mais chacune de ces liaisons étant communes à deux Si, elle ne compte que pour $\frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } \Delta_f H^\circ = \frac{1}{2} * 4 E_{\text{Si-Si}} \quad \text{d'où} \quad E_{\text{Si-Si}} = 228 \text{ kJ/mol}$$

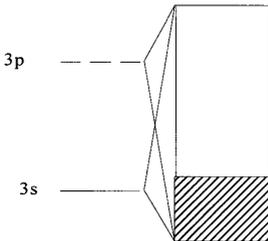
I.3.1. Une bande d'énergie est constituée de l'ensemble des niveaux d'énergie associés aux N combinaisons linéaires des N orbitales atomiques des N atomes du solide.

Ces niveaux d'énergie étant énergétiquement très voisins, ils forment une bande d'énergie.

I.3.2. La bande de conduction est la plus basse bande d'énergie partiellement ou totalement vide (selon les auteurs).

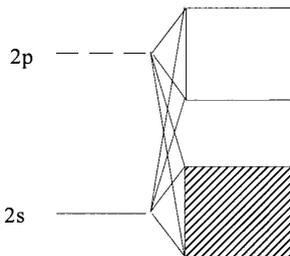
La bande interdite est la zone énergétique située - entre la bande de conduction et la bande juste au-dessus, si on prend comme bande de conduction la bande partiellement vide,
- juste en dessous de la bande de conduction, si on prend comme bande de conduction la bande totalement vide.

I.3.3. Al : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$



Une bande sp : nombre de niveaux : $4N$ et 2 électrons par niveau ; $3N$ électrons à placer donc $3/8$ des niveaux d'énergie sont remplis soit $3N/2$ niveaux d'énergie remplis.

I.3.4. C : $1s^2 2s^2 2p^2$



Deux bandes σ et σ^* : nombre de niveaux : $2N$ dans chaque bande ; $4N$ électrons à placer ; donc la bande la plus basse est pleine, la bande la plus haute (bande de conduction) est vide.

Si : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$

Même schéma que dans le cas du carbone diamant mais la bande interdite est plus petite.

I.3.5. La largeur de la bande interdite est à l'origine du caractère isolant du diamant ($\Delta E = 6 \text{ eV}$) et du caractère semi-conducteur du silicium ($\Delta E = 1,1 \text{ eV}$).

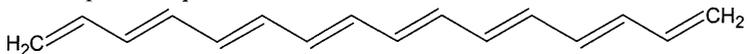
I.3.6.

Quand la température augmente, l'énergie thermique est plus élevée et permet au nombre d'électrons venant peupler la bande de conduction d'augmenter, parallèlement le nombre de "trous" dans la bande de valence augmente également ; donc la conductivité intrinsèque augmente.

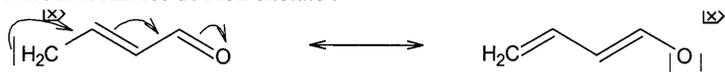
II Le polyacétylène

II. Le polyacétylène

II.1. La structure spatiale la plus stable est la structure tout trans :

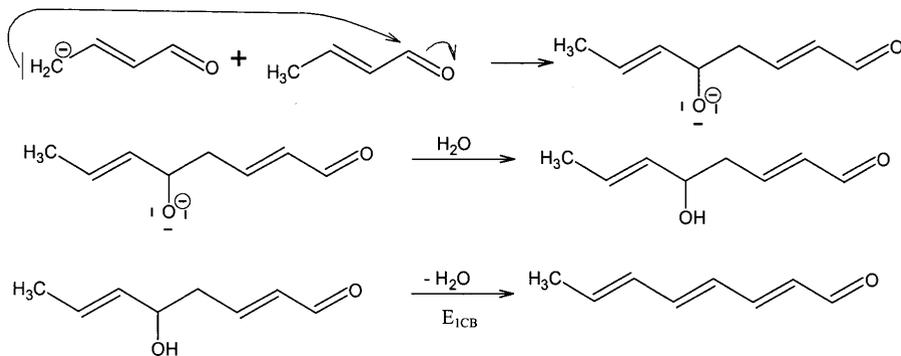


II.2.1.1. Formes mésomères de l'ion énolate :



C'est un réaction de crotonisation.

Mécanisme :

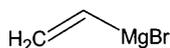


Puis on recommence... On obtient (1)

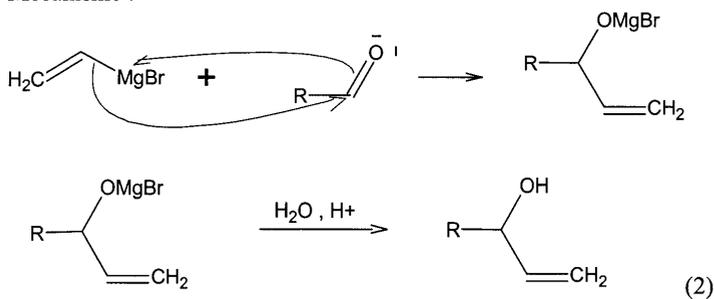
L'obtention de (1) est facilitée car (1) est une molécule à forte conjugaison donc stable.

II.2.1.2. Étape 2

Réactif X :

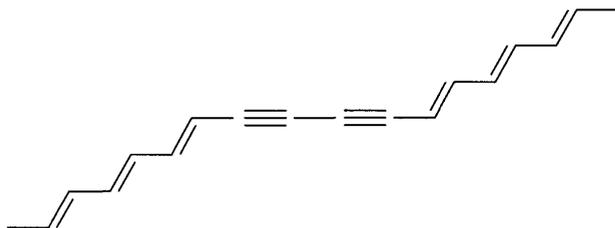


Mécanisme :



(2)

Le produit obtenu est donc :



(3)

II.2.2.2. a)

On peut utiliser le palladium empoisonné comme catalyseur. On obtient l'isomère cis qui s'isomérise en isomère trans sous l'effet de la chaleur.

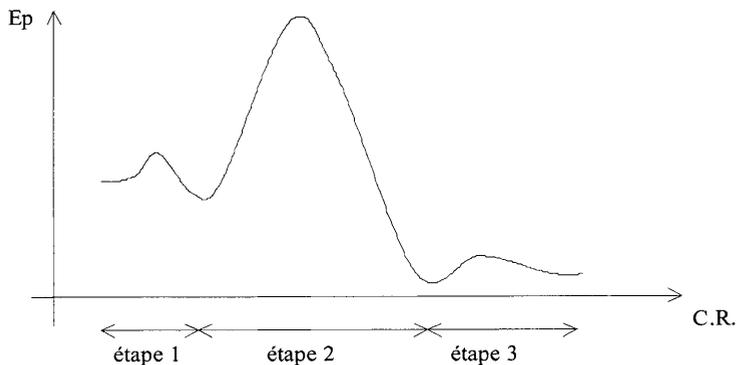
Le Nickel de Raney conduirait à l'alcane.

II.2.2.2. b)

C'est une catalyse hétérogène.

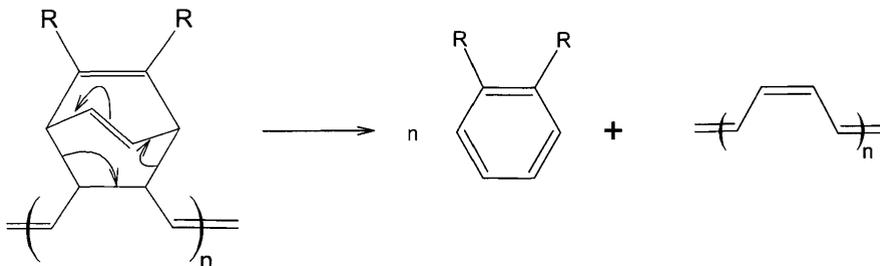
Elle comporte trois étapes : chimisorption des réactifs (étape 1), réaction à la surface du catalyseur (étape 2), désorption des réactifs (étape 3).

Profil réactionnel :



II.2.3.1.

C'est une rétro-Diels-Alder. Condition opératoire : Chauffage



II.2.3.2.

Il faut chauffer pour accélérer la mise à l'équilibre (équilibre déplacé vers la droite) et obtenir ainsi le polyacétylène le plus stable.

II.3. Une approche de la conduction du polyacétylène

$$\text{II.3.1.1.} \quad \alpha = \text{intégrale coulombienne} = H_{ii} = \iiint \varphi_i^* H \varphi_i \, d\tau$$

$$\beta = \text{intégrale d'échange} = H_{ij} = \iiint \varphi_i^* H \varphi_j \, d\tau$$

II.3.1.2. Pour écrire le déterminant simplifié, on pose : $x = \frac{\alpha - E}{\beta}$

Le déterminant séculaire simplifié est alors :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

II.3.1.3. Les solutions en E sont donc :

$$E_6 = \alpha - 1,802 \beta$$

$$E_5 = \alpha - 1,247 \beta$$

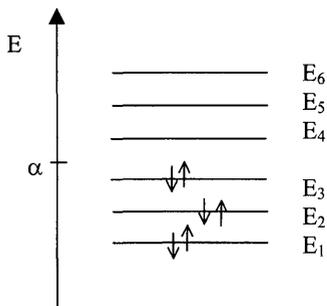
$$E_4 = \alpha - 0,445 \beta$$

$$E_3 = \alpha + 0,445 \beta$$

$$E_2 = \alpha + 1,247 \beta$$

$$E_1 = \alpha + 1,802 \beta$$

Dans le diagramme énergétique, il y a six électrons Pi à placer :



II.3.2.1.

Pour $C_{20}H_{22}$:

$$E_{20} - E_1 = 2\beta \left[\cos\left(\frac{20\pi}{21}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{21}\right) \right] = -3,956 \beta$$

Il y a 20 électrons Pi à placer, la HO a donc pour énergie : E_{10} et la BV : E_{11} .

$$E_{10} = \alpha + 2\beta \cos\left(\frac{10\pi}{21}\right) = \alpha + 0,149 \beta$$

$$E_{11} = \alpha + 2\beta \cos\left(\frac{11\pi}{21}\right) = \alpha - 0,149 \beta$$

II.3.2.2.

Lorsque n devient très grand :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n - E_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\beta \left[\cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \right] = -4\beta$$

$E_n - E_1$ tend donc vers une limite finie.

Quand n augmente, les n niveaux d'énergie se resserrent jusqu'à n'être quasiment plus distinguables et forment donc une bande d'énergie.

La HO se situe au milieu : à $E_{n/2}$.

La bande d'énergie est donc à moitié remplie (les niveaux situés sous la HO ainsi que la HO sont remplis, les niveaux au-dessus de la HO sont vides).

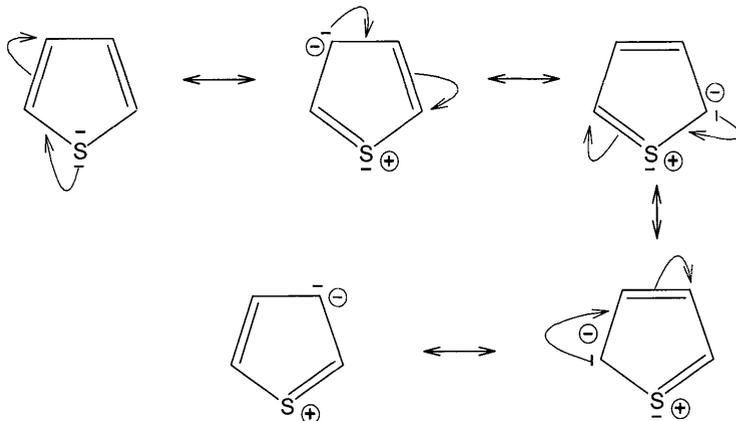
II.3.3.

Le "gap" du silicium est de 1,1 eV. Les "gaps" du polyacétylène et du silicium sont donc du même ordre de grandeur ; le polyacétylène est donc aussi un semi-conducteur.

III. Le polythiophène

III.1. Étude du monomère

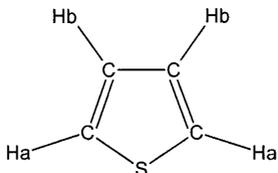
III.1.1. Formes mésomères du thiophène :



Le thiophène est un cycle comportant 6 électrons Pi délocalisés ($4n + 2$). Il est donc aromatique.

III.1.2.

S a un effet inductif attracteur, les H proches de lui sont donc plus déblindés. On en déduit :

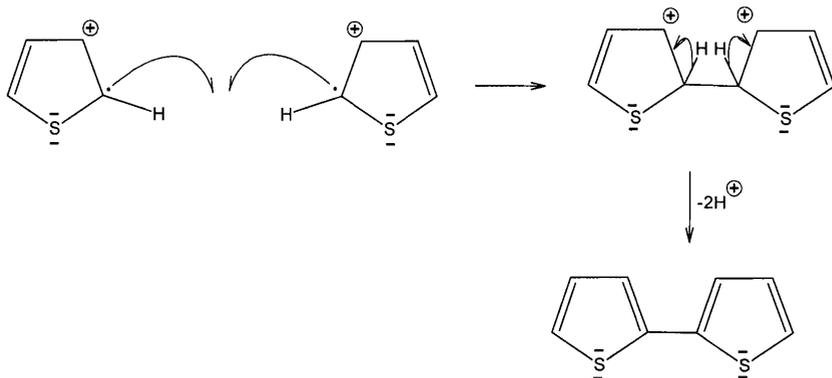


Les valeurs élevées des déplacements chimiques sont dues au cône d'anisotropie du cycle aromatique, similaire à celui du benzène.

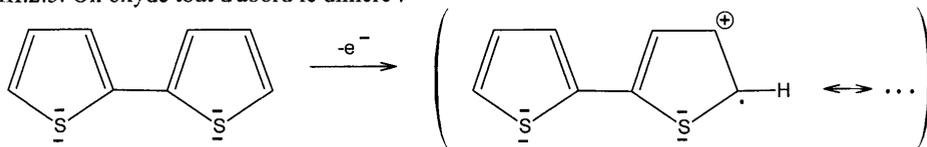
III.2. Le polythiophène électrochimique

III.2.1. C'est une oxydation, elle a donc lieu à l'anode.

III.2.2. Couplage de deux radicaux cations :



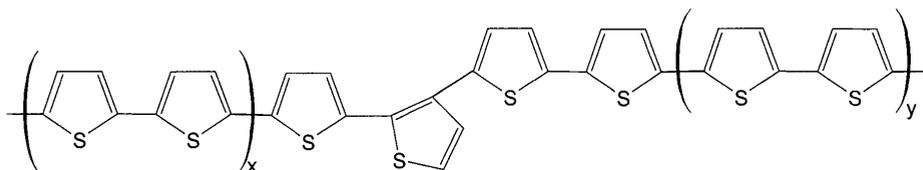
III.2.3. On oxyde tout d'abord le dimère :



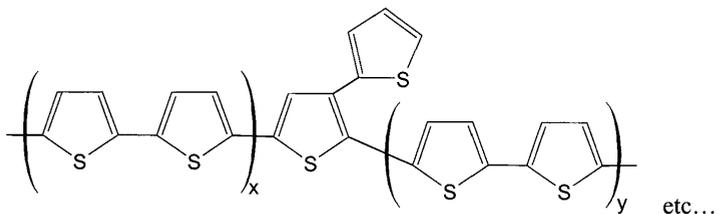
Puis : idem III.2.2.

III.2.4.

Les défauts proviennent du couplage sur d'autres positions. Exemples :



ou bien :



etc...

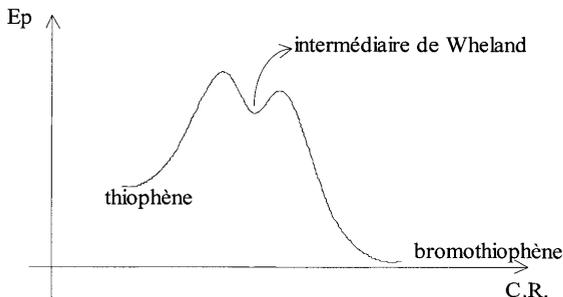
III.2.5.

Le perchlorate permet la conduction du courant : c'est le sel de fond.

III.3. Synthèse chimique du terthiophène :

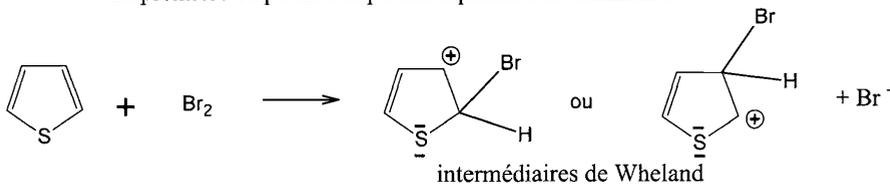
III.3.1.1. C'est une substitution électrophile aromatique.

III.3.1.2 a) Profil réactionnel :



III.3.1.2. b)

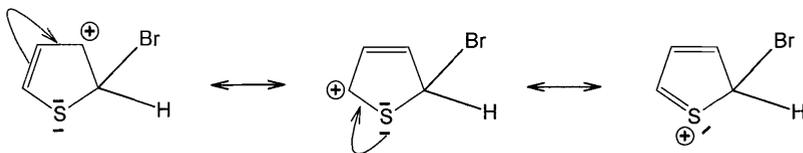
- La première étape est l'étape cinétiquement déterminante :



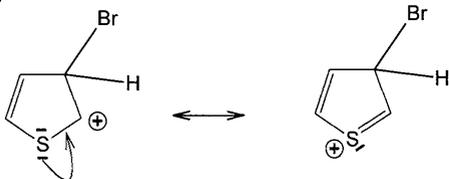
L'intermédiaire le plus stable sera obtenu le plus rapidement (postulat de Hammond) et conduira au produit majoritaire, sous contrôle cinétique.

- Comparaison des stabilités à travers les formes mésomères pour les deux intermédiaires :

α -bromation :



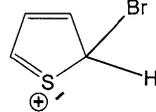
β -bromation :



On en déduit que l' α -bromation conduit à l'intermédiaire le plus stable ; le composé α -bromé est donc obtenu majoritairement sous contrôle cinétique.

III.3.1.2. c)

Le thiophène possède une grande réactivité vis à vis de la substitution électrophile aromatique et comparativement au benzène : l'intermédiaire de Wheland est plus stable que pour le

benzène ; la forme mésomère  présentant une stabilité particulière.

III.3.2.1.



III.3.2.2

Verrerie : on utilise un bicol avec réfrigérant à eau et ampoule de coulée, tous deux munis d'une garde à chlorure de calcium (on peut aussi faire passer un courant de diazote).

On place dans le bicol du magnésium recouvert d'éther anhydre, et dans l'ampoule de coulée, une solution de bromothiophène dans l'éther anhydre. On fait couler lentement cette solution dans le bicol.

III.3.2.3.

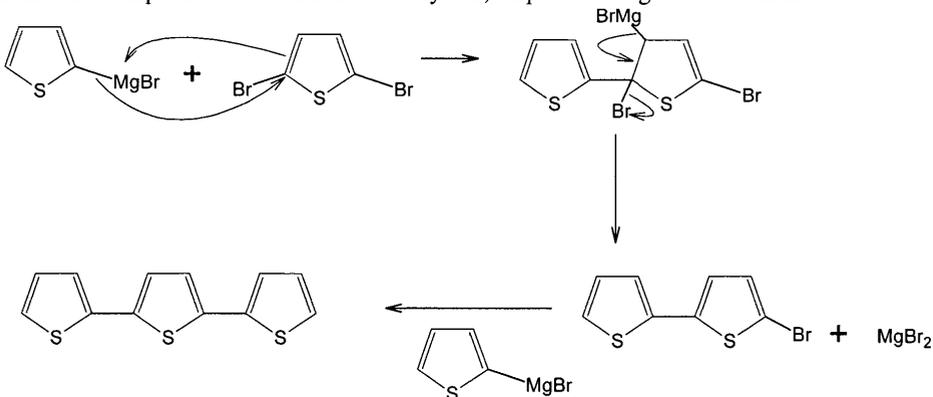
La réaction de formation du magnésien est exothermique ; la chaleur dégagée provoque le reflux de l'éther.

III.3.2.4.

Il faut essentiellement éviter la présence d'eau qui détruit le magnésien (et de tout autre composé protique ou composé réagissant sur le magnésien). (Une addition lente permet de minimiser le couplage de Würtz.)

III.3.3.

Sans tenir compte de l'intervention du catalyseur, on peut envisager le mécanisme suivant :



Agrégation de sciences physiques

Concours interne

COMPOSITION AVEC EXERCICES D'APPLICATION

Option physique appliquée ♦ Session : 2002

PREMIER PROBLÈME ÉLECTRONIQUE - AUTOMATIQUE

A.I.1)

⇒ Voir document - réponse N°1.

A.I.2)

La valeur moyenne de la fonction j_{ch} est nulle.

a) Calcul des coefficients "A_k"

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} j_{ch} \cos k\theta d\theta$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\alpha (-J_0 \cos k\theta d\theta) + \int_\alpha^{\alpha+\pi} (J_0 \cos k\theta d\theta) + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi} (-J_0 \cos k\theta d\theta) \right]$$

$$A_k = \frac{J_0}{k\pi} \left[[-\sin k\theta]_0^\alpha + [\sin k\theta]_\alpha^{\pi+\alpha} + [-\sin k\theta]_{\pi+\alpha}^{2\pi} \right]$$

$$A_k = \frac{2J_0}{k\pi} [\sin k(\alpha + \pi) - \sin k\alpha] = \frac{2J_0}{k\pi} \sin k\alpha [\cos k\pi - 1]$$

b) Calcul des coefficients "B_k"

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} j_{ch} \sin k\theta d\theta$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\alpha (-J_0 \sin k\theta d\theta) + \int_\alpha^{\alpha+\pi} (J_0 \sin k\theta d\theta) + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi} (-J_0 \sin k\theta d\theta) \right]$$

$$B_k = \frac{J_0}{k\pi} \left[[\cos k\theta]_0^\alpha + [-\cos k\theta]_\alpha^{\pi+\alpha} + [\cos k\theta]_{\pi+\alpha}^{2\pi} \right]$$

$$B_k = \frac{2J_0}{k\pi} [\cos k\alpha - \sin k(\alpha + \pi)] = \frac{2J_0}{k\pi} \cos k\alpha [1 - \cos k\pi]$$

$$d'où j_{ch} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2J_0}{k\pi} \sin k\alpha [\cos k\pi - 1] \cos k\omega t + \frac{2J_0}{k\pi} \cos k\alpha [1 - \cos k\pi] \sin k\omega t \right]$$

$$j_{ch} = \frac{2J_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1 - \cos k\pi}{k} \right] [\cos k\alpha \sin k\omega t - \sin k\alpha \cos k\omega t] = \frac{2J_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1 - \cos k\pi}{k} \right] \sin k(\omega t - \alpha)$$

Tous les harmoniques de rang pair sont nuls, donc

$$j_{ch} = \frac{4J_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k(\omega t - \alpha)}{k} \quad \text{avec } k = 2p + 1$$

$$\Rightarrow j_{ch} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}J_0}{(2p+1)\pi} \sqrt{2} \sin[(2p+1)(\omega t - \alpha)] \quad \text{avec } J_k = J_{2p+1} = \frac{2\sqrt{2}J_0}{(2p+1)\pi}$$

A.I.3)

On a

$$\Rightarrow \varphi_k = k\alpha = (2p+1)\alpha$$

A.II.1.1)

$$v = V\sqrt{2} \sin \omega t \text{ et } j_1 = \frac{2\sqrt{2}J_0}{\pi} \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha) \text{ (k = 1 ou p = 0) donc}$$

$$\Rightarrow P_{ch} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} VJ_0 \cos \alpha$$

A.II.1.2)

$$e = E\sqrt{2} \sin(\omega t + \beta) \text{ et } j_1 = \frac{2\sqrt{2}J_0}{\pi} \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha), \text{ le déphasage entre } e \text{ et } j_1 \text{ est } \beta - (-\alpha) = \psi_1$$

donc

$$\Rightarrow P = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} EJ_0 \cos \psi_1$$

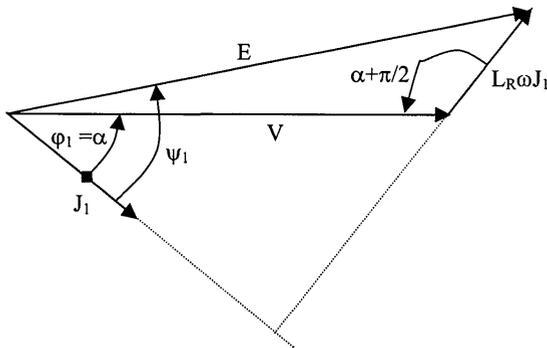
A.II.1.3)

Par définition

$$\Rightarrow Q_{ch} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} VJ_0 \sin \alpha$$

A.II.1.4)

En valeur instantanée $v = e - L_R \frac{dj_1}{dt}$, soit en écriture complexe $\underline{V} = \underline{E} - L_R(j\omega)\underline{J}_1$ d'où le diagramme de Fresnel.



On a la relation immédiate $V \sin \alpha + L_R \omega J_1 = E \sin \psi_1 \Rightarrow V J_1 \sin \alpha + L_R \omega J_1^2 = E J_1 \sin \psi_1$

$$\text{Soit } \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V J_0 \sin \alpha + \frac{8}{\pi^2} L_R \omega J_0^2 = Q = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E J_0 \sin \psi_1$$

La puissance réactive appelée par la charge est $Q_{ch} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V J_0 \sin \alpha$, l'inductance L_R met en jeu l'énergie réactive $Q_{L_R} = L_R \omega J_1^2 = L_R \omega \left[\frac{2\sqrt{2} J_0}{\pi} \right]^2 = \frac{8 L_R \omega J_0^2}{\pi^2}$, d'après la conservation de la puissance réactive on peut écrire:

$$\Rightarrow Q = Q_{ch} + Q_{L_R} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V J_0 \sin \alpha + \frac{8 L_R \omega}{\pi^2} J_0^2$$

A.II.1.5)

La valeur efficace du courant est $J_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} J_0$ d'où la puissance apparente de la source

$$\Rightarrow S = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} E J_0$$

A.II.2.6)

En utilisant le diagramme de Fresnel et en appliquant la relation dans les triangles quelconques:

$$E^2 = V^2 + (L_R \omega J_1)^2 - 2 V L_R \omega J_1 \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Rightarrow E^2 = V^2 + (L_R \omega J_1)^2 + 2 V L_R \omega J_1 \sin \alpha$$

A.II.1.7)

$$E^2 = V^2 + (L_R \omega J_1)^2 + 2 V L_R \omega J_1 \sin \alpha = V^2 \left[1 + \frac{2 L_R \omega J_1 \sin \alpha}{V} + \left[\frac{L_R \omega J_1}{V} \right]^2 \right] \approx V^2 \left[1 + \frac{2 L_R \omega J_1 \sin \alpha}{V} \right]$$

$$E \approx V \sqrt{1 + \frac{2 L_R \omega J_1 \sin \alpha}{V}} \approx V \left[1 + \frac{L_R \omega J_1 \sin \alpha}{V} \right]$$

$$\Rightarrow E \approx V + L_R \omega J_1 \sin \alpha$$

A.II.1.8)

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{E - V}{V} = \frac{L_R \omega J_1 \sin \alpha}{V} = \frac{L_R \omega V J_1 \sin \alpha}{V^2} = \frac{L_R \omega Q}{V^2} \approx \frac{L_R \omega}{E^2} Q$$

$$\text{or } 0 = E - L_R(j\omega)I_{1cc} \rightarrow J_{1cc} = \frac{E}{L_R \omega} \rightarrow J_{1cc} E = \frac{E^2}{L_R \omega} = S_{cc} \rightarrow \frac{L_R \omega}{E^2} = \frac{1}{S_{cc}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{Q}{S_{cc}}$$

A.II.2.1)

Puisque le courant présente des harmoniques, ceux-ci engendrent des harmoniques de tension aux bornes de l'inductance L_R .

A.II.2.2)

$$v = e - L_R \frac{dj_{ch}}{dt} = e - L_R \frac{d}{dt} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}J_0}{(2p+1)\pi} \sqrt{2} \sin[(2p+1)(\omega t - \alpha)] \right]$$

$$v = e - \sum_{p=0}^{\infty} L_R \omega \frac{2\sqrt{2}J_0}{\pi} \sqrt{2} \cos[(2p+1)(\omega t - \alpha)]$$

$$\Rightarrow v = E\sqrt{2} \sin(\omega t + \beta) - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} L_R \omega J_0 \sqrt{2} \sum_{p=0}^{\infty} \cos[(2p+1)(\omega t - \alpha)]$$

(La tension instantanée comporte effectivement des harmoniques de rang impair).

A.II.2.3)

La puissance active est due à la combinaison des harmoniques de tension et de courant de même rang, de façon générale $P = \sum_{k=1}^{\infty} V_k J_k \cos \varphi_k$; V_k et J_k étant les valeurs efficaces des harmoniques de tension et de courant de rang k et φ_k le déphasage respectif entre ces grandeurs.

Rang	Tension	Courant	Déphasage	Puissance active
1	$E\sqrt{2} \sin(\omega t + \beta)$	$\frac{2\sqrt{2}J_0}{\pi} \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha)$	ψ_1	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} EJ_0 \cos \psi_1$
1	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} L_R \omega J_0 \sqrt{2} \cos(\omega t - \alpha)$	$\frac{2\sqrt{2}J_0}{\pi} \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha)$	$\frac{\pi}{2}$	0
3	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} L_R \omega J_0 \sqrt{2} \cos 3(\omega t - \alpha)$	$\frac{2\sqrt{2}J_0}{3\pi} \sqrt{2} \sin 3(\omega t - \alpha)$	$\frac{\pi}{2}$	0

$$\Rightarrow P_{ch}' = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} EJ_0 \cos \psi_1$$

A.II.2.4)

$$\text{On a } P_{ch}' = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} EJ_0 \cos \psi_1 \text{ or } \frac{2\sqrt{2}}{\pi} EJ_0 \cos \psi_1 = P_{ch}$$

$$\Rightarrow P_{ch}' = P_{ch}$$

(Ce résultat est évident puisqu'il n'y a pas de puissance active mise en jeu dans la bobine parfaite d'inductance L_R).

A.2.5)

Par définition la puissance réactive est due à la combinaison des harmoniques de tension et de courant de même rang, de façon générale $Q = \sum_{k=1}^{\infty} V_k J_k \sin \varphi_k$; V_k et J_k étant les valeurs

efficaces des harmoniques de tension et de courant de rang k et φ_k le déphasage respectif entre ces grandeurs.

Rang	Tension	Courant	Déphasage	Puissance réactive
1	$E\sqrt{2} \sin(\omega t + \beta)$	$\frac{2\sqrt{2}J_0}{\pi} \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha)$	ψ_1	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} EJ_0 \sin \psi_1$
1	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} L_R \omega J_0 \sqrt{2} \cos(\omega t - \alpha)$	$\frac{2\sqrt{2}J_0}{\pi} \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{8}{\pi^2} L_R \omega J_0^2$
3	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} L_R \omega J_0 \sqrt{2} \cos 3(\omega t - \alpha)$	$\frac{2\sqrt{2}J_0}{3\pi} \sqrt{2} \sin 3(\omega t - \alpha)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{8}{3\pi^2} L_R \omega J_0^2$
5	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} L_R \omega J_0 \sqrt{2} \cos 5(\omega t - \alpha)$	$\frac{2\sqrt{2}J_0}{5\pi} \sqrt{2} \sin 5(\omega t - \alpha)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{8}{5\pi^2} L_R \omega J_0^2$

On a donc $Q_{ch}' = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} EJ_0 \sin \psi_1 + \frac{8}{\pi^2} L_R \omega J_0^2 + \frac{8}{3\pi^2} L_R \omega J_0^2 + \frac{8}{5\pi^2} L_R \omega J_0^2 + \dots$

$$\Rightarrow Q_{ch}' = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} EJ_0 \sin \psi_1 + \frac{8}{\pi^2} L_R \omega J_0^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2p+1}$$

A.2.6)

L'intensité efficace à pour valeur $J = \sqrt{\sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{2}}{(2p+1)\pi} J_0 \right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} J_0 \sqrt{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}}$ d'où

$$\Rightarrow S' = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} EJ_0 \sqrt{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}}$$

A.2.7)

$$\Rightarrow S' = S \sqrt{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}}$$

B.1.1)

On a

$$\Rightarrow e = E\sqrt{2} \sin \omega t = L \frac{di_L}{dt}$$

B.1.2)

$$di_L = \frac{E\sqrt{2}}{L} \sin \omega t dt = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega} \sin \theta d\theta \rightarrow \int_0^{i_L} di_L = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega} \int_{\gamma}^{\theta} \sin \theta d\theta = -\frac{E\sqrt{2}}{L\omega} [\cos \theta]_{\gamma}^{\theta}$$

$$i_L = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega} [\cos\gamma - \cos\theta] > 0 \text{ et } \gamma > \pi \text{ donc}$$

\Rightarrow l'extinction a lieu pour $\theta = 2\pi - \gamma$

B.1.3)

La durée de conduction est $\Delta\theta = (2\pi - \gamma) - \gamma = 2(\pi - \gamma)$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{2(\pi - \gamma)}{\omega}$$

B.1.4) L'équation différentielle est inchangée seules les bornes d'intégration sont modifiées

$$di_L = \frac{E\sqrt{2}}{L} \sin\omega t dt = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega} \sin\theta d\theta \rightarrow \int_0^{i_L} di_L = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega} \int_{\gamma+\pi}^{\theta} \sin\theta d\theta = -\frac{E\sqrt{2}}{L\omega} [\cos\theta]_{\gamma+\pi}^{\theta}$$

$\Rightarrow \pi + \gamma < \theta < 3\pi - \gamma$

B.1.5) Document -réponse N°2

B.1.6)

Il faut calculer le premier terme de la décomposition en série de Fourier, $|A_1| = I_L \sqrt{2}$.

La fonction est paire par rapport à la période et la demi-période donc

$$A_1 = 4 \times \frac{1}{\pi} \int_{\gamma}^{\pi} i_L(\theta) \cos\theta d\theta = \frac{4}{\pi} \int_{\gamma}^{\pi} \frac{E\sqrt{2}}{L\omega} (\cos\gamma - \cos\theta) \cos\theta d\theta$$

$$A_1 = \frac{4E\sqrt{2}}{\pi L\omega} \left[\sin\theta \cos\gamma - \frac{\sin 2\theta}{4} - \frac{\theta}{2} \right]_{\gamma}^{\pi} = \frac{4E\sqrt{2}}{\pi L\omega} \left[-\frac{\pi}{2} - \sin\gamma \cos\gamma + \frac{\sin 2\gamma}{4} + \frac{\gamma}{2} \right]$$

$$A_1 = \frac{4E\sqrt{2}}{\pi L\omega} \left[-\frac{\pi}{2} - \frac{2\sin 2\gamma}{4} + \frac{\sin 2\gamma}{4} + \frac{\gamma}{2} \right] = \frac{2E\sqrt{2}}{\pi L\omega} \left[\gamma - \pi - \frac{\sin 2\gamma}{2} \right]$$

$$\Rightarrow I_L = \frac{|A_1|}{\sqrt{2}} = \frac{2E}{\pi L\omega} \left[\frac{\sin 2\gamma}{2} + \pi - \gamma \right]$$

B.1.7)

La tension est sinusoïdale, la puissance réactive provient du fondamental du courant donc

$$\Rightarrow Q = \frac{2E2}{\pi L\omega} \left[\frac{\sin 2\gamma}{2} + \pi - \gamma \right]$$

B.2.1)

\Rightarrow On sait que pour une fréquence particulière (résonance), l'impédance de la cellule L_k, C_k est nulle ce qui entraîne le court-circuit du générateur de courant j_k .

B.2.2)

A la résonance

$$\Rightarrow L_k C_k (k\omega)^2 = 1$$

B.2.3)

⇒ Puisque tous les harmoniques sont court-circuités respectivement par chaque cellule, le courant débité par le générateur est purement sinusoïdal.

B.2.4)

L'impédance complexe de la cellule (L_k, C_k) à la pulsation ω est $z_k = (j\omega)L_k + \frac{1}{(j\omega)C_k}$

$$z_k = \frac{1 - L_k C_k \omega^2}{(j\omega)C_k} \text{ or d'après III.2.2.) } \omega^2 = \frac{1}{L_k C_k k^2} \rightarrow z_k = \frac{1 - \frac{1}{k^2}}{(j\omega)C_k} \rightarrow z_k = \frac{1 - \frac{1}{k^2}}{C_k \omega}$$

$$\Rightarrow z_k = \frac{k^2 - 1}{k^2 C_k \omega}$$

⇒ La cellule est capacitive

B.2.5)

La cellule fournira au réseau la puissance réactive $Q_k = \frac{E^2}{k^2 - 1} \frac{1}{k^2 C_k \omega}$

$$\Rightarrow Q_k = \frac{E^2 C_k \omega k^2}{k^2 - 1}$$

B.2.6)

⇒ Puisque chaque cellule est capacitive, l'ensemble peut remplacer la capacité C en fournissant la même quantité d'énergie réactive.

C.1.1)

$$v_1 = k_j J \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi)$$

$$v_2 = k_v \sqrt{2} \sin(\omega t)$$

$$v_3 = k_j J \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_4 = k_v E \sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$s(t) = v_1 v_4 - v_2 v_3$$

$$s(t) = 2k_v k_j E J \left[\sin(\omega t - \varphi) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(\omega t) \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$s(t) = 2k_v k_j E J [\sin(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) - \sin(\omega t - \varphi) \cos(\omega t)] = 2k_v k_j E J \sin[(\omega t) - (\omega t - \varphi)]$$

$$s(t) = 2k_v k_j E J \sin \varphi$$

$$\Rightarrow s(t) = 2k_v k_j Q$$

C.1.2)

$$\underline{V}^- = \frac{\frac{V_5}{R_1} + \frac{V_8}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \text{ et } \underline{V}^+ = \frac{\frac{V_6}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}, \text{ l'amplificateur contre-réactionné fonctionne en régime}$$

$$\text{linéaire donc } \underline{V}^+ = \underline{V}^- \rightarrow \frac{V_5}{R_1} + \frac{V_8}{R_2} = \frac{V_6}{R_1}$$

$$\Rightarrow \underline{V}_8 = \frac{R_2}{R_1} [\underline{V}_6 - \underline{V}_5]$$

C.1.3)

$$\underline{V}^- = \frac{V_1 + V_3}{2} \text{ et } \underline{V}^+ = \frac{\frac{V_1}{R_0}}{\frac{1}{R_0} + (j\omega)C_0} = \frac{V_1}{1 + (j\omega)R_0C_0}$$

l'amplificateur contre-réactionné fonctionne en régime linéaire donc $\underline{V}^+ = \underline{V}^-$

$$\frac{V_1}{1 + (j\omega)R_0C_0} = \frac{V_1 + V_3}{2} \rightarrow \frac{V_3}{2} = V_1 \left[\frac{1}{1 + (j\omega)R_0C_0} - \frac{1}{2} \right] = V_1 \left[\frac{2 - 1 - (j\omega)R_0C_0}{2(1 + (j\omega)R_0C_0)} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{V_3}{V_1} = \frac{1 - (j\omega)R_0C_0}{1 + (j\omega)R_0C_0}$$

C.1.4)

\Rightarrow Nous avons $\frac{V_3}{V_1} = (\rho, \xi)$ avec $\frac{V_3}{V_1} = \rho = 1$ et $\text{Arg} \left[\frac{V_3}{V_1} \right] = \xi = -2 \text{Arctan } R_0C_0\omega$ d'où le diagramme de Bode document-réponse N°3.

C.1.5)

On veut $\xi = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{4} = \text{Arctan } R_0C_0\omega$

$$\Rightarrow R_0C_0\omega = 1$$

C.1.6)

$$v_3 = \frac{v_2 v_3}{10}; v_6 = \frac{v_1 v_4}{10}; v_8 = 50[v_6 - v_5] \rightarrow v_8 = 5[v_1 v_4 - v_2 v_3]$$

$$v_1 = \frac{j}{100} = \frac{J\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi)}{100} \text{ et } v_3 = \frac{J\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}{100}$$

$$v_2 = \frac{1}{100} e = \frac{E\sqrt{2} \sin(\omega t)}{100} \text{ et } v_4 = \frac{E\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}{100}$$

$$v_s = \frac{5 \times 2}{10^4} E J \left[\sin(\omega t - \varphi) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(\omega t) \sin\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{Q}{10^3}$$

$$\Rightarrow v_s = \frac{Q}{10^3}$$

D.1)

K est ouvert $v^- = \frac{v_1 + v_2}{2}$ et $v^+ = v_1$ puisqu'il n'y a pas de courant à l'entrée non inverseuse;

Le régime de fonctionnement est linéaire $v^+ = v^- \rightarrow v_1 = \frac{v_1 + v_2}{2} \rightarrow v_1 = v_2$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = 1$$

D.2)

K est fermé $v^- = \frac{v_1 + v_2}{2}$ et $v^+ = 0 \rightarrow v_2 = -v_1$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = -1$$

D.3) Document-réponse N°4

D.4)

$$V_Z = V_{be1} + R_2 I_E \rightarrow I_C \approx I_E = \frac{V_Z - V_{be1}}{R_2}$$

$$\Rightarrow I_C \approx \frac{V_Z - V_{be1}}{R_2}$$

D.5)

\Rightarrow Lorsque $v_2 > 0$ on a $v_4 = 0$ et T_2 est bloqué

\Rightarrow Lorsque $v_2 < 0$ on a $v_4 = V_{cc}$ et T_2 est saturé

D.6)

\Rightarrow Lorsque $v_0 \geq 0$ on a $v_3 = +V_{cc}$ et K est ouvert

\Rightarrow Lorsque $v_0 < 0$ on a $v_3 = 0$ et T_2 est fermé

DV.7)

Supposons T_2 saturé alors $v_5 = 0$, lorsque T_2 passe à l'état bloqué, le condensateur C est chargé par le courant de collecteur I_C du transistor T_1 , courant est constant.

$$I_C = \frac{V_Z - V_{be1}}{R_2} = C \frac{dv_5}{dt} \rightarrow dv_5 = \frac{V_Z - V_{be1}}{R_2 C} dt$$

$$\Rightarrow v_5(t) = \left[\frac{V_Z - V_{be1}}{R_2 C} \right] t \quad (\text{Origine des temps à l'instant du blocage de } T_2)$$

D.8)

Document-réponse N°4

D.9)

De $t = 0$ jusqu'à $t = \frac{T}{4}$, on a $v_4 = V_{cc} \Rightarrow T_2$ est saturé, le condensateur est en court-circuit donc $v_5 = 0$.

De $t = \frac{T}{4}$ jusqu'à $t = \frac{T}{2}$, on a $v_4 = 0 \Rightarrow T_2$ est bloqué, le condensateur est chargé par le courant I_C du transistor T_1 .

A $t = \frac{T}{2}$ de nouveau T_2 est saturé et $v_5 = 0$; la tension v_5 passe de la valeur nulle à $\frac{V_{cc}}{2}$ entre

les instants $\frac{T}{4}$ et $\frac{T}{2}$, soit la durée $\frac{T}{4}$.

$$\text{Donc } v_{5\max} = \frac{V_{CC}}{2} = \left[\frac{V_Z - V_{be1}}{R_2 C} \right] \frac{T}{4} = \left[\frac{V_Z - V_{be1}}{R_2 C} \right] \frac{\pi}{2\omega}$$

$$\Leftrightarrow R_2 C \omega = \left[\frac{V_Z - V_{be1}}{V_{CC}} \right] \pi$$

D.10)

Document-réponse N°4

D.11)

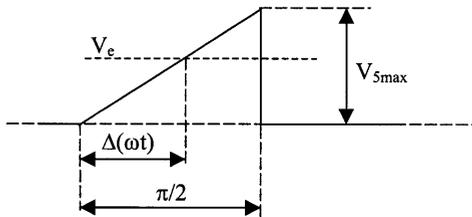
Document-réponse N°4

D.12)

Nous avons toujours $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$

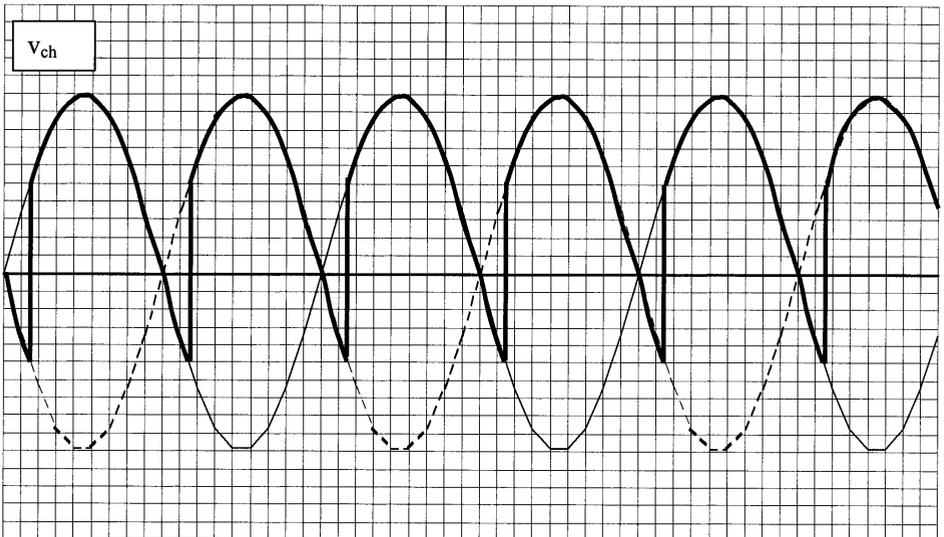
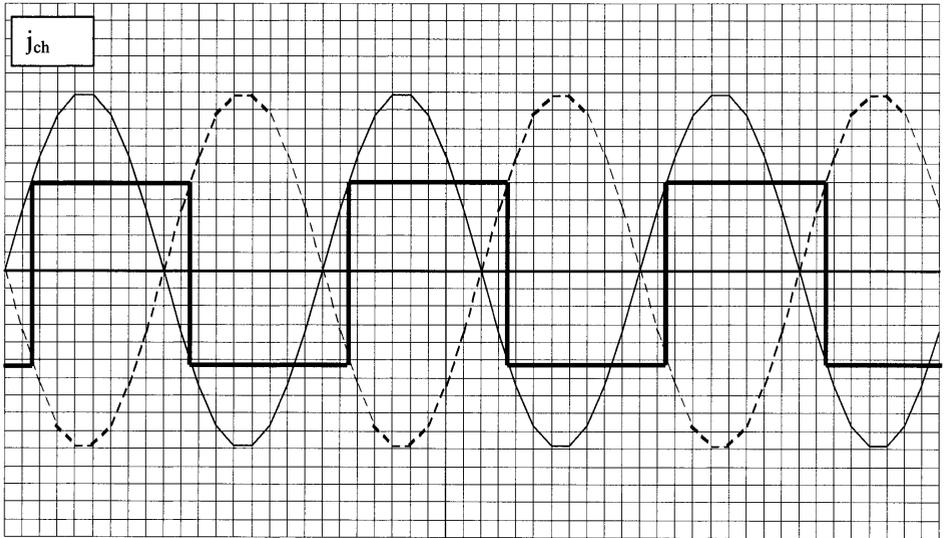
En relation avec les tracés du document N°4, pour $\omega t = \gamma$ on $v_5 = V_e$. Par ailleurs

$\gamma = \frac{\pi}{2} + \Delta(\omega t)$, la croissance de la tension v_5 étant linéaire (schéma ci-dessous)

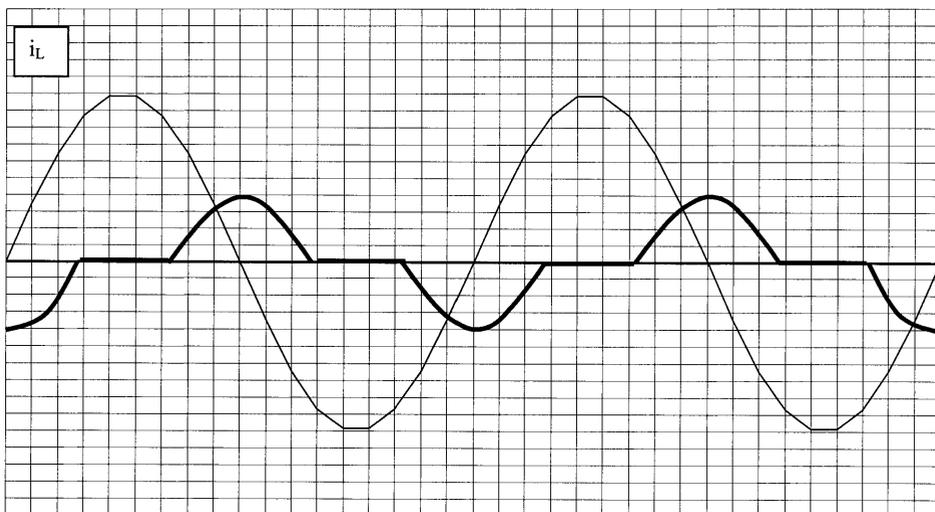


$$\text{On peut écrire une loi de proportionnalité } \frac{\Delta(\omega t)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{V_e}{V_{5\max}} = \frac{V_e}{\frac{V_{cc}}{2}} \text{ d'où } \Delta(\omega t) = \pi \frac{V_e}{V_{cc}}$$

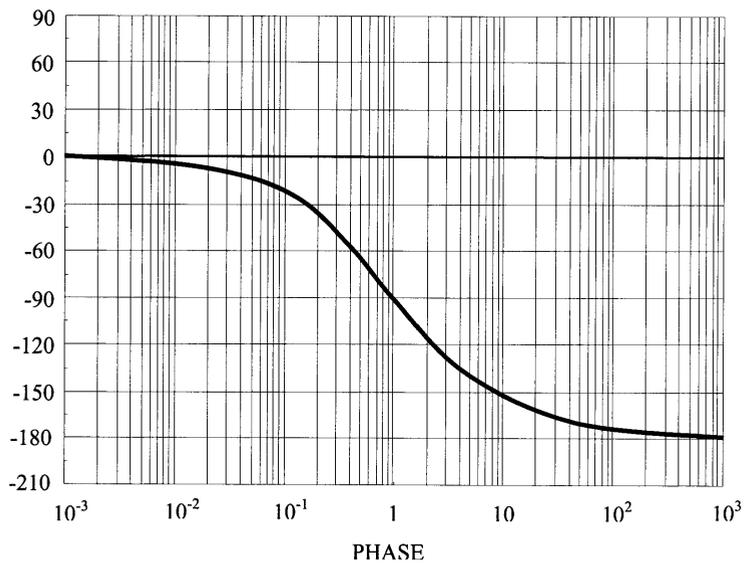
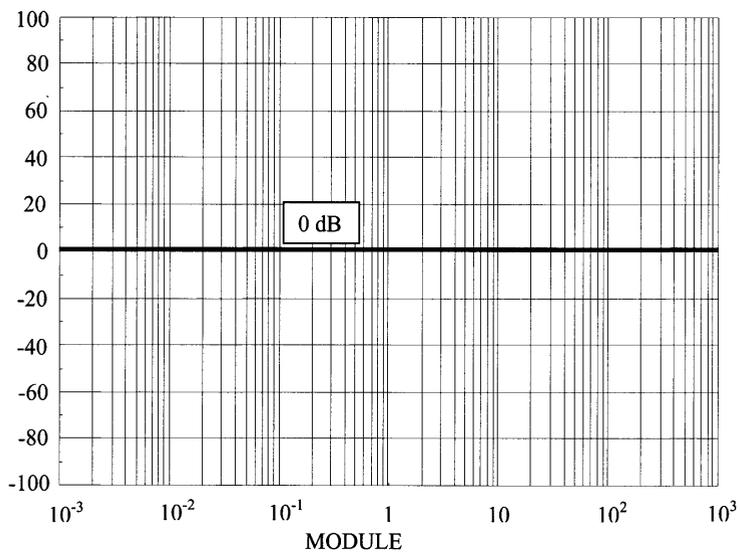
$$\Leftrightarrow \gamma = \pi \left[\frac{V_e}{V_{cc}} + \frac{1}{2} \right]$$



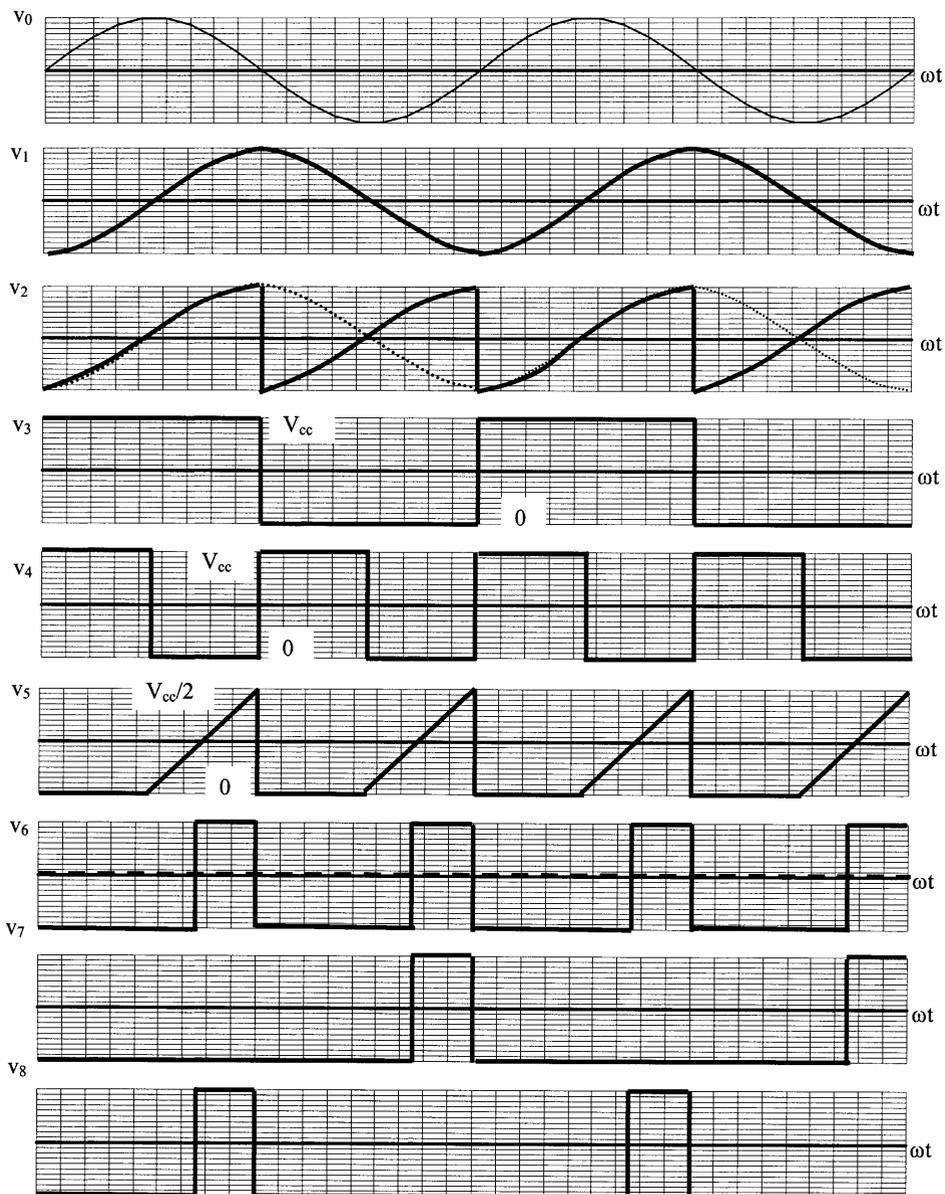
Document-réponse N°1



Document-réponse N°2



Document-réponse N°3



Document-réponse N°4

Agrégation de sciences physiques

Concours interne

COMPOSITION AVEC EXERCICES D'APPLICATION

Option physique appliquée ♦ Session : 2002

DEUXIÈME PROBLÈME ÉLECTROTECHNIQUE

I.1 : La machine asynchrone est entraînée à la vitesse de synchronisme (1500 tours/mn) dans le sens direct ou inverse par rapport à la rotation de son propre champ tournant, donc $g = 0$ ou $g = 2$.

- $g = 0$: les puissances active et réactive consommées donnent respectivement R_r et $L_s \omega$.
- $g = 2$: correspond à l'essai à tension faible, on a alors $\bar{I} \simeq \bar{I}'_r$ et les puissances absorbées donneront respectivement $R'_2/2$ et $N'_2 \omega$.

Ces essais ne nécessitent pas l'accès aux parties mécaniques, en particulier il n'y a pas à bloquer le rotor.

I.2 : Parmi les 2 essais, celui à forte tension correspond à $g = 0$.

$U' = U_n = 416 \text{ V}$, soit $V' = V_n = 240 \text{ V}$. S'agissant d'un schéma monophasé :

$$P' / 3 = V'^2 / R_r \text{ et } Q'^2 = (\sqrt{3} U' I')^2 - P'^2 \Rightarrow Q' = 3 \text{ 238 VAR}, R_r = 109 \Omega \text{ et } L_s \omega = 53,8 \Omega.$$

Les pertes mécaniques étant négligées, la puissance utile $P_u = (1 - g)P_2$ où P_2 est la puissance transmise au rotor et vaut (avec les hypothèses faites) : $P_2 = P_e - p_{fs}$ avec P_e la puissance électrique absorbée par la machine asynchrone et p_{fs} les pertes « fer » au stator. Ainsi pour le fonctionnement nominal :

$$P_{2n} = 73 \text{ 684 W}, P_{en} = 73 \text{ 684} + 1 \text{ 580} = 75 \text{ 264 W}, \text{ d'où } I_n = 123 \text{ A}.$$

La tension étant faible dans le premier essai ($I_{Rf} \sim 0,1 \text{ A}$ et $I_{Ls} \sim 0,2 \text{ A}$), on a $I'_r \sim 123 \text{ A}$

$$\text{soit } P / 3 = R'_r I_r'^2 / 2 \Rightarrow R'_r = 0,046 \Omega,$$

$$\text{et } Q = 1 \text{ 854 VAR} \Rightarrow N'_r \omega_s = 0,041 \Omega, N'_r = 131 \times 10^{-6} \text{ H}.$$

$$I.3 : \Gamma = 3 \frac{p}{\omega_s} \frac{R'_r}{g} I_r'^2 \text{ et } I_r'^2 = V_s^2 / \left[\left(\frac{R'_r}{g} \right)^2 + (N'_r \omega_s)^2 \right] \text{ donnent l'expression cherchée.}$$

I.4 : Le couple peut s'écrire sous la forme : $\Gamma(g) = 3p \frac{V_s^2}{\omega_s} \left[\frac{R_r'}{(R_r')^2/g + g(N_r'\omega_s)^2} \right]$, cette

fonction atteint son extremum si les 2 termes du dénominateur sont égaux. Soit pour :

$$g_{ex} = \pm R_r' / (N_r'\omega_s) \text{ et } g_f = R_r' / (N_r'\omega_s) \text{ et alors } \hat{\Gamma} = \frac{3}{2} p \frac{V_s^2}{\omega_s^2} \frac{1}{N_r'}. \text{ Pour } g \text{ faible : } \Gamma \approx 3p \frac{V_s^2}{\omega_s} \frac{g}{R_r'}$$

II.1 : Le glissement étant faible ($g = 4\%$) nous avons, au point de fonctionnement :

$$k\Omega_M^2 = 3p \frac{V_s^2}{\omega_s} \frac{g}{R_r'} \Rightarrow k = 0,042 \text{ (N.m.s}^2\text{.rad}^{-2}\text{)},$$

P_2 est proportionnel à g pour les faibles glissements, $V_s = V_{sn}$, les pertes fer stator restent

fixes : $P_e = 0,8P_{2n} + p_{fs} = 60\,527 \text{ W}$.

$$\text{II.2 : } \Gamma = 3 \frac{p}{R_r'} \frac{V_s^2}{\omega_s} \frac{\omega_s / p - \Omega_M}{\omega_s / p} = \frac{3}{R_r'} \frac{V_s^2}{\Omega_s^2} (\Omega_s - \Omega_M) \text{ avec } \Omega_s = \omega_s / p.$$

$$\text{II.3 : } \frac{V_s}{f_s} = \frac{416/\sqrt{3}}{50} = 4,8 \text{ V.s, ou } \frac{V_s}{\Omega_s} = \frac{V_s}{2\pi f / p} = 1,529 \text{ (V.s)} = \alpha = \text{constante, } \Omega_s = V_s / \alpha,$$

$$\frac{3}{R_r'} \alpha^2 (\Omega_s - \Omega_M) = k\Omega_M^2, \text{ ou } k\Omega_M^2 + \frac{3}{R_r'} \alpha^2 \Omega_M - \frac{3}{R_r'} \alpha^2 \Omega_s = 0, \Delta = \left(\frac{3}{R_r'} \alpha^2 \right)^2 + 4k \frac{3}{R_r'} \alpha^2 \Omega_s, \text{ d'où}$$

$$\Omega_M = \frac{\sqrt{\Delta} - 3\alpha^2 / R_r'}{2k} \quad (1) \text{ et } N_M = \Omega_M \times \frac{60}{2\pi}, \text{ et le tableau :}$$

V_s (V)	0	$120/\sqrt{3}$	$240/\sqrt{3}$	$520/\sqrt{3}$
Ω_M (rad/s)	0	44,8	88,5	186,9
N_M (tours/mn)	0	428	845	1784

$$\text{II.4 : } \hat{\Gamma} = \frac{3}{2} p \frac{V_{s\max}^2}{\omega_s^2} \frac{1}{N_r'} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{131 \times 10^{-6}} \times \frac{520/\sqrt{3}}{\omega_{s\lim}} = 0,042 (1-g)^2 \left(\frac{\omega_{s\lim}}{2} \right)^2.$$

Cette équation traduit que la machine asynchrone peut entraîner le ventilateur tant que le couple résistant $k\Omega_M$ reste inférieur à $\hat{\Gamma}$. Il faut de plus que la puissance ne soit pas trop grande.

On se rappelle que pour $\hat{\Gamma}$ on a $g = R_r' / (N_r'\omega_s) = 353,8 / \omega_s$. En remplaçant on trouve encore une équation du second degré avec $\omega_s = \omega_{s\lim}$. $\omega_{s\lim} = 867 \text{ rad.s}^{-1}$ et $g = 41\%$, valeur

particulièrement importante qui donne $\Omega_M = 256 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\Gamma = k\Omega_M = 2765 \text{ N.m}$, dont on déduit $P_2 = \Gamma\Omega_M = 1200 \text{ kW}$, valeur incompatible avec le fonctionnement de la machine.

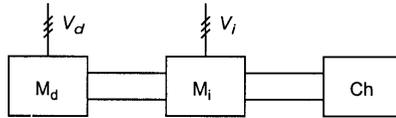
$\hat{P}_u = 1,5 P_{u \text{ nom}} = 105000 = k\hat{\Omega}_M^3 \Rightarrow \hat{\Omega}_M = 135,7 \text{ rad.s}^{-1}$, valeur qui se situe dans la zone de fonctionnement définie en II.3. L'équation (1) permet de déduire V_s et f_s .

III.1 : En écriture complexe on a : $P_2 = 3 \Re \text{éel} (\bar{V}_s \bar{I}_r^*)$ avec $\bar{I}_r^* = \bar{V}_s^* \frac{(R_r'/g) + jN_r'\omega}{(R_r'/g)^2 + (N_r'\omega)^2}$.

$$\Gamma = \frac{p}{\omega_s} P_2 = \frac{3p}{\omega_s} \Re \text{éel} \left[\bar{V}_s \bar{V}_s^* \frac{(R_r'/g) + jN_r'\omega}{(R_r'/g)^2 + (N_r'\omega)^2} \right] = \frac{3p}{\omega_s} |V_s|^2 \Re \text{éel} [\bar{Y}(g)], \text{ car (en ôtant } R_l) :$$

$$\bar{Y}(g) = \frac{\bar{I}_s}{\bar{V}_s} = \frac{(R_r'/g)}{(R_r'/g)^2 + (N_r'\omega)^2} - j \frac{(R_r'/g)^2 + (N_r'\omega + L_s\omega)N_r'\omega}{[(R_r'/g)^2 + (N_r'\omega)^2]L_s\omega} = \alpha(g) - j\beta(g).$$

III.2 : Pour les valeurs moyennes, tout se passe comme si l'on avait 2 machines identiques alimentées par un système direct de tension pour l'une et par le système inverse pour l'autre.

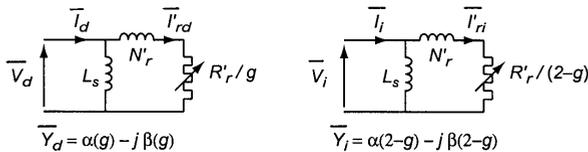


L'amplitude de la tension la plus élevée impose le sens de rotation avec un glissement g par rapport à la vitesse de son champ tournant. La pulsation des courants rotoriques de cette première machine est donc $g\omega_s$.

Concernant la seconde machine, le champ tournant imposé par le second système de tension est en sens inverse de la rotation du rotor. Cette machine fonctionne en frein. La pulsation de ses courants rotoriques vaut : $(2-g)\omega_s$.

Ce type de fonctionnement correspond à une consommation de puissance active et à un couple de freinage qui s'ajoute au couple de charge.

En supposant que l'amplitude de la tension directe est la plus grande, alors :



$$P_{e, \text{Tot}} = P_{e, d} + P_{e, i}$$

$$\Gamma_{\text{Tot}} = \Gamma_d - \Gamma_i$$

III.3.1 : On a les relations suivantes (selon la figure 3 de l'énoncé) :

$$\begin{cases} \bar{I}_a + \bar{I}_b = \bar{I} & \left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_b - \bar{V}_a = \bar{Z}\bar{I}_a \\ \bar{V}_c - \bar{V}_a = U \end{array} \right. \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{I}_c = -\bar{I} & \left\{ \begin{array}{l} \bar{V}_b - \bar{V}_a = \bar{Z}\bar{I}_a \\ \bar{V}_c - \bar{V}_a = U \end{array} \right. \quad (2) \end{cases}$$

A partir de la transformation de Fortescue, nous avons :

$$\bar{I}_0 = \frac{1}{3}(\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c) = 0, \text{ donc } \bar{I}_a = \bar{I}_d + \bar{I}_i = \bar{Y}_d\bar{V}_d + \bar{Y}_i\bar{V}_i \quad (3)$$

$$\bar{V}_b = \bar{V}_0 + a^2\bar{V}_d + a\bar{V}_i \quad (4)$$

$$\bar{V}_a = \bar{V}_0 + \bar{V}_d + \bar{V}_i \quad (5)$$

$$\bar{V}_c = \bar{V}_0 + a\bar{V}_d + a^2\bar{V}_i \quad (6)$$

En combinant (1) et (4), (5), (3) puis (2) et (4), (6), il vient :

$$(a^2 - 1)\bar{V}_d + (a - 1)\bar{V}_i = \bar{Z}\bar{Y}_d\bar{V}_d + \bar{Z}\bar{Y}_i\bar{V}_i \quad (7)$$

$$(a^2 - a)\bar{V}_d + (a - a^2)\bar{V}_i = U \quad (8)$$

En tenant compte des relations données en annexe I de l'énoncé (voir p. 257 des pages spéciales du BUP n° 845) on déduit les équations ci-dessous :

$$\bar{V}_d = \frac{U(-j\sqrt{3}a^2 - \bar{Z}\bar{Y}_i)}{3j\sqrt{3} + j\sqrt{3}\bar{Z}(\bar{Y}_d + \bar{Y}_i)} \quad \bar{V}_i = \frac{-U(j\sqrt{3}a - \bar{Z}\bar{Y}_d)}{3j\sqrt{3} + j\sqrt{3}\bar{Z}(\bar{Y}_d + \bar{Y}_i)}$$

III.3.2 : Quand la machine est à l'arrêt, $g = 1$. Les schémas monophasés de la question précédente, III.2, deviennent strictement identiques. On a alors :

$$\bar{V}_d = \bar{V}_i = \bar{V} = \alpha(1) - j\beta(1) = \alpha - j\beta$$

III.3.3 : Des équations III.1 et III.2 on tire le couple total de démarrage,

$$\Gamma_{\text{dem}} = 3 \frac{P}{\omega_s} (\bar{V}_d\bar{V}_d^* - \bar{V}_i\bar{V}_i^*) = 3 \frac{P\alpha}{\omega_s} (|\bar{V}_d|^2 - |\bar{V}_i|^2)$$

III.3.4 : si $Z = 0$ alors $\bar{V}_d = -\frac{a^2}{3}U$ et $\bar{V}_i = -\frac{a}{3}U$, qui ont même module,

et si $Z \rightarrow \infty$ alors $\bar{V}_d = -\frac{1}{2j\sqrt{3}}U$ et $\bar{V}_i = \frac{1}{2j\sqrt{3}}U$, qui ont même module.

Si la première phase est directement reliée à la seconde ou si elle est coupée, le démarrage est impossible.

III.3.5 : Pour que la machine démarre il faut que les modules de V_d et de V_i soient différents. En nommant \bar{N}_d et \bar{N}_i les numérateurs des expressions de \bar{V}_d/U et \bar{V}_i/U trouvées

en III.3.1 et \bar{D} leur dénominateur commun, il vient : $\bar{V}_d = \frac{\bar{N}_d}{\bar{D}}U$ et $\bar{V}_i = \frac{\bar{N}_i}{\bar{D}}U$.

Pour qu'il y ait possibilité de démarrage, il faut donc que $\eta = \bar{N}_d\bar{N}_d^* - \bar{N}_i\bar{N}_i^* \neq 0$, soit :

$$j\sqrt{3}(a^2 + a)\bar{Z}^*\bar{Y}^* - j\sqrt{3}(a^2 + a)\bar{Z}\bar{Y} = -j\sqrt{3}(\bar{Z}^*\bar{Y}^* - \bar{Z}\bar{Y}) = 2\Re\{j\sqrt{3}\bar{Z}\bar{Y}\} \neq 0 \Rightarrow$$

$$2\sqrt{3}(a\beta - b\alpha) \neq 0.$$

$$\bar{Z} = R = a \quad \text{avec } b = 0 \quad \eta = 2\sqrt{3}\beta R \quad \text{la machine démarre, sens 1,}$$

$$\bar{Z} = jL\omega = jb \quad \text{avec } a = 0 \quad \eta = -2\sqrt{3}\alpha L\omega \quad \text{la machine démarre, sens 2,}$$

$$\bar{Z} = -j/C\omega = jb \quad \text{avec } a = 0 \quad \eta = 2\sqrt{3}\alpha/C\omega \quad \text{la machine démarre, sens 1.}$$

Le condensateur contribue à la diminution de puissance réactive absorbée par la machine.

$$\text{III.3.6 : } a = 0, \quad b = -1/(C\omega), \quad |D|^2 = DD^* = 3[(3 + 2\beta b)^2 + 2(\alpha b)^2], \quad \eta = -2\sqrt{3}\alpha b.$$

$$\Gamma_{\text{dem}} \text{ est proportionnel à } \frac{\eta}{|D|^2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\alpha b}{(3 + 2\beta b)^2 + (2\alpha b)^2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} f(b).$$

Il faut trouver la valeur de b qui rend maximum la fonction f (ou qui minimise son inverse).

$$\text{On peut écrire } f(b) = \frac{\alpha}{\frac{9}{b} + 12\beta + 4(\alpha^2 + \beta^2)b}, \text{ qui est maximale lorsque :}$$

$$\frac{9}{b} = 4(\alpha^2 + \beta^2)b \quad \text{soit} \quad \frac{1}{b} = \frac{2}{3}(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2} = C\omega,$$

d'où la valeur demandée de la capacité du condensateur qui assure le couple de démar-

$$\text{rage maximum : } C(\omega, \alpha, \beta) = \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{3\omega}.$$

Capès de sciences physiques

Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de physique avec applications ♦ Session : 2002

A Interférométrie stellaire optique

A.I. Optique géométrique

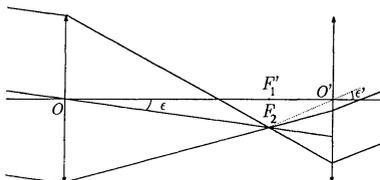
1. a)

Le télescope est préférable à la lentille, car celle-ci est plus lourde, plus difficile à réaliser lorsque les diamètres deviennent importants, et elle est à l'origine d'aberrations chromatiques.

b) Un grand diamètre limite les effets de la diffraction et permet de récolter une plus grande énergie lumineuse.

2. a) Le positionnement relatif permet d'observer un objet à l'infini sans effort d'accommodation.

b) $OO' = f'_1 + f'_2 = 24,025 \text{ m}$.



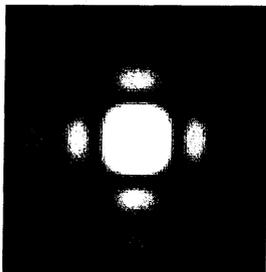
c)

3. a) $\epsilon < \alpha_{lim}$; il n'y a pas séparation à l'oeil nu.

b) L'écart angulaire à la sortie du système afocal est $\epsilon' = -\frac{f'_1}{f'_2}\epsilon = -3,6 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$. En l'absence d'autres limitations (diffraction, aberrations, effets des turbulences atmosphériques), on devrait résoudre le système binaire.

A.II. Limitation due à la diffraction

1. a)

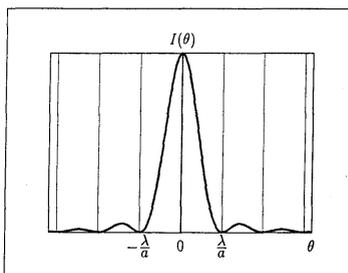


b) $\theta = \frac{\lambda}{D}$, ce qui donne l'intensité

$$I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi a \theta}{\lambda} \right).$$

c) La demi-largeur angulaire est

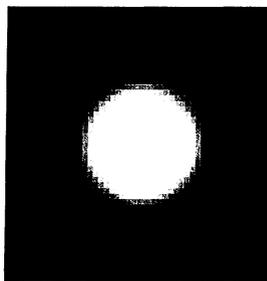
$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a}.$$



2. Quand $b \gg a$, il n'y a pratiquement plus de diffraction selon Oy ; la figure de diffraction est pratiquement rectiligne sur l'axe FX .

3. Si l'onde incidente est inclinée sur l'axe optique, la figure de diffraction est traduite; elle reste centrée sur l'image géométrique, au point $A(f'_1 \epsilon, 0, f'_1)$.

4. a) Allure de la figure de diffraction



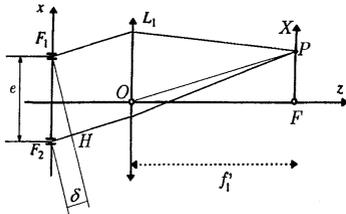
b) $\Delta\theta = 0,61 \frac{\lambda}{R}$.

5. a) $\epsilon_{lim} = 0,61 \frac{\lambda}{D/2} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$.

b) En prenant une valeur particulièrement défavorable pour la longueur d'onde, soit 800 nm, on obtient $\epsilon_{lim} = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$. Ce n'est donc pas la diffraction qui est limitative.

A.III. Fentes de Young : méthode de Fizeau

1.



b) La différence de phase entre les ondes émises par les deux fentes dans la direction \vec{u} est

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \cdot e \vec{e}_z = \frac{2\pi e X}{\lambda f_1}$$

Les fentes étant allongées selon les ordonnées, il n'y a pratiquement diffraction que dans la direction des abscisses ; on obtient

$$I = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi a X}{\lambda f_1} \right) \left[1 + \cos \frac{2\pi e X}{\lambda f_1} \right]$$

c) Pour $Y \neq 0$, ϕ est inchangé ; on obtient

$$I = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi a X}{\lambda f_1} \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{\pi b Y}{\lambda f_1} \right) \left[1 + \cos \frac{2\pi e X}{\lambda f_1} \right]$$

2. a) La différence de phase entre les deux voies en amont des fentes est, pour E_1

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{e}{2} = \frac{\pi e}{\lambda}$$

On en déduit l'intensité lumineuse correspondante :

$$I_1 = I_s \left(1 + \cos \frac{2\pi e (X + f_0 \theta)}{\lambda f} \right)$$

en remplaçant ϕ par $\phi + \phi_1$.

b) On a $\phi_2 = -\phi_1$ pour E_2 , soit

$$I_2 = I_s \left(1 + \cos \frac{2\pi e (X - f_0 \theta)}{\lambda f} \right)$$

c) L'éclairement est uniforme lorsque les éclairagements individuels sont en opposition de phase, soit lorsque $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$; on obtient

$$\epsilon = \frac{\lambda}{2e} \quad e = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{\epsilon}$$

d) $\epsilon = 2,73 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 0,056''$.

B Satellites artificiels

B.I. Orbites circulaires

1. Le référentiel héliocentrique étant le référentiel centré au centre du Soleil dont les axes pointent vers des étoiles éloignées, le référentiel géocentrique est le référentiel en translation par rapport au référentiel héliocentrique, à la vitesse du centre de la Terre. Ce référentiel est un référentiel galiléen approché suffisant pour l'étude du mouvement des satellites terrestres.

2. a) Dans l'approximation d'une répartition des masses à symétrie sphérique, le champ gravitationnel terrestre est de la forme

$$g(r) = g_0 \frac{R_T^2}{r^2}$$

b) En appliquant le théorème de la résultante cinétique dans le référentiel géocentrique, on obtient

$$-m \frac{v(r)^2}{r} = -m g_0 \frac{R_T^2}{r^2}$$

soit

$$v(r) = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r}}$$

c) La vitesse étant constante, on a $v(r) = \frac{2\pi r}{T(r)}$. On en déduit la période

$$T(r) = \frac{2\pi r}{v(r)} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{g_0 R_T^2}}$$

On retrouve sur un cas particulier la troisième loi de Kepler.

d) L'énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2} m v(r)^2 = \frac{1}{2} m g_0 \frac{R_T^2}{r}$$

et l'énergie potentielle vaut

$$E_p = -m g_0 \frac{R_T^2}{r} \text{ soit } E_p = -2E_c$$

3. $T(R_T) = 2\pi \sqrt{\frac{R_T^3}{g_0}} \simeq 1 \text{ h}25 \text{ min}$. La durée de vie d'un tel satellite est (très !) faible en raison des frottements aérodynamiques. La vitesse correspondante est $v(R_T) = 8130 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

4. a) Un satellite géostationnaire est fixe dans le référentiel terrestre.

b) Les satellites géostationnaires sont particulièrement utiles dans le domaine des télécommunications. Ils permettent des communications par ondes électromagnétiques au-delà de l'horizon.

c) Le plan de l'orbite est le plan équatorial (seul plan pour lequel \vec{HM} et \vec{OM} sont colinéaires). Le rayon r_G de l'orbite d'un satellite géostationnaire est déterminé par la

condition $T(r_G) = T_J$ où $T_J = 86164$ s est le jour sidéral. En explicitant $T(r_G)$, on obtient

$$r_G = \left(g_0 R_T^2 \frac{T_J^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \simeq 42260 \text{ km.}$$

d) Un satellite géostationnaire ne peut rester qu'à la verticale d'un point situé sur l'Equateur.

e)

— une période nulle correspond à un mouvement infiniment rapide (fréquence infinie) et non à un mouvement infiniment lent;

— la période de révolution d'un satellite géostationnaire est infinie dans le référentiel terrestre;

— 86400 s représentent la durée du jour solaire moyen;

— 86164 s représentent la durée du jour sidéral (période de rotation diurne du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique); en un an, le soleil passe 365,25 fois au zénith, tandis que la Terre effectue 366,25 tours par rapport au référentiel géocentrique; on peut vérifier que

$$86400 \text{ s} \times \frac{365,25}{366,5} = 86164 \text{ s.}$$

B.II. Problème du transfert

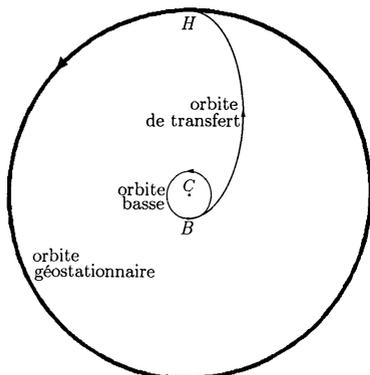
1. L'énergie d'un satellite en orbite circulaire de rayon r est

$$E = E_c + E_p = -\frac{1}{2}E_p + E_p = \frac{1}{2}E_p = -\frac{1}{2}mg_0 \frac{R_T^2}{r}.$$

En considérant ce cercle comme une ellipse d'excentricité nulle et de demi-grand axe r , on en déduit par identification :

$$K = \frac{1}{2}mg_0 R_T^2.$$

2. a) Schéma



b) Le demi-grand axe de l'orbite de transfert est tel que

$$2a = R_T + r_G \text{ soit } a = \frac{1}{2}(R_T + r_G) = 24300 \text{ km.}$$

c) Au point B, l'énergie massique du satellite passe de $e_B = -\frac{1}{2R_T}g_0 R_T^2$ à $e_T = -\frac{1}{R_T + r_G}g_0 R_T^2$; la vitesse v_B au point B sur l'orbite de transfert est alors donnée par

$$-\frac{g_0 R_T^2}{R_T + r_G} = \frac{v_B^2}{2} - \frac{g_0 R_T^2}{R_T}$$

soit

$$v_B = \sqrt{2g_0 \frac{R_T r_G}{R_T + r_G}} = 10,4 \text{ km/s.}$$

La variation de vitesse est

$$\Delta v_B = \sqrt{2g_0 \frac{R_T r_G}{R_T + r_G}} - \sqrt{g_0 R_T} = 2,5 \text{ km/s.}$$

Elle est orthoradiale.

d) Par le même raisonnement, la variation de vitesse en H est

$$\Delta v_H = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_G}} - \sqrt{2g_0 \frac{R_T^3}{r_G(R_T + r_G)}} = 1,5 \text{ km/s,}$$

également orthoradiale.

3. Les variations de vitesse Δv_B et Δv_H étant obtenues par la mise en action d'un moteur qui éjecte des produits de combustion avec une vitesse relative d'éjection u et un débit massique D , on a :

$$\Delta v_B + \Delta v_H = u \ln \frac{m_B}{m_G}.$$

Application numérique : Pour satelliser $m_G = 1$ t en orbite stationnaire, il faut donc satelliser en orbite basse une masse

$$m_B = m_G \exp\left(\frac{\Delta v_B + \Delta v_H}{u}\right) = 3,82 \text{ t.}$$

4. En pratique, l'orbite elliptique de transfert fait passer d'une orbite circulaire d'altitude 200 km à l'orbite géostationnaire. Une altitude inférieure à 200 km soumettrait le satellite à des frottements aérodynamiques.

B.III. Frottements

1. a) Pour un satellite en orbite basse elliptique, c'est au voisinage du périégée que les frottements sont les plus intenses. En effet, c'est au voisinage du périégée que la vitesse est la plus élevée, et que l'atmosphère est la plus dense.

b) Au passage au périégée, le satellite perd de l'énergie. Au passage suivant, il repasse au même périégée, mais le demi-grand axe a de l'ellipse a diminué. L'excentricité de la trajectoire a donc diminué.

2. a) Pour un satellite en orbite quasi-circulaire, le théorème de l'énergie peut s'écrire, en notant \mathcal{P} la puissance des forces de frottement :

$$\mathcal{P} = \frac{dE}{dt} = -\frac{dE_c}{dt}$$

puisque $E = E_c + E_p = E_c - 2E_c = -E_c$. La puissance des forces de frottement étant négative, l'énergie diminue, mais l'énergie cinétique augmente. L'augmentation d'énergie cinétique est due à une perte d'énergie potentielle, qui, en valeur absolue, est égale au double du travail des forces de frottement.

b) Il n'y a pas contradiction entre ce résultat et celui de la première question. Le raisonnement de la première question est en fait applicable à une trajectoire elliptique de forte excentricité ; dans ce cas, les frottements n'agissent qu'au voisinage du périhélie. Le raisonnement de la seconde question correspond à l'autre cas limite, pour lequel les frottements agissent de la même façon tout au long du mouvement.

C Propulsion par réaction

C.I. Préambule

1. Le mouvement du ballon peut se comprendre :

— par un transfert de quantité de mouvement (le fluide sortant emporte une partie de la quantité de mouvement du système) ;

— par une non-compensation de la somme des forces pressantes sur l'enveloppe du ballon (lacune au niveau de l'orifice).

Le mouvement est désordonné car le jet sortant n'est pas orienté dans une direction fixe par rapport au ballon.

2. Le transfert de quantité de mouvement est plus important lorsque de l'eau est éjectée.

C.II. Etude du mouvement d'une fusée : ordres de grandeur

1. La quantité de mouvement du système est

- à la date t : $\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t)$;
- à la date $t + \Delta t$:

$$\vec{p}(t + \Delta t) = m(t + \Delta t)\vec{v}(t + \Delta t) + D\Delta t(\vec{v} + \vec{v}(t + \alpha\Delta t))$$

où $\alpha \in [0; 1]$. On en déduit

$$\frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} = \frac{m(t + \Delta t)\vec{v}(t + \Delta t) - m(t)\vec{v}(t)}{\Delta t} + D(\vec{v} + \vec{v}(t + \alpha\Delta t))$$

soit, en effectuant le passage à la limite $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{d}{dt}(m(t)\vec{v}(t)) + D(\vec{v} + \vec{v}(t)) \\ &= -D\vec{v}(t) + m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + D\vec{v} + D\vec{v}(t) \\ &= m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + D\vec{v} \end{aligned}$$

Le théorème de la résultante cinétique

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_0$$

devient

$$m(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}_0 - D\vec{v}$$

ce qui montre que $-D\vec{v}$ apparaît comme une force supplémentaire jouant le rôle de force propulsive.

2. a) En posant $T_0 = 298 \text{ K}$, et $C_p = C_0 + \alpha T$, le bilan enthalpique s'écrit, pour une quantité n d'eau formée :

$$H_f - H_i = 0$$

avec

$$H_f - H_i = n \left(\Delta H_{\text{formation}} + \int_{T_0}^{T_f} C_p(T) dT \right)$$

soit

$$\Delta H_{\text{formation}} + C_0(T_f - T_0) + \frac{\alpha}{2}(T_f^2 - T_0^2) = 0.$$

T_f est ainsi solution d'une équation du second degré ; numériquement, on obtient $T_f = 4680 \text{ K}$.

L'excès d'hydrogène abaisse la température de flamme, car il faut échauffer l'hydrogène excédentaire, et permet d'avoir un fluide réducteur en sortie de chambre de combustion, et donc d'éviter la corrosion des pièces métalliques en contact avec ce fluide.

b) En l'absence de travail et d'échange thermique à l'intérieur de la tuyère, la somme $h + e_c + e_p$, où e_c désigne l'énergie cinétique molaire, et e_p l'énergie potentielle molaire, se conserve. La variation éventuelle d'énergie potentielle est négligeable, même si la tuyère est verticale. On a donc

$$h_1 + 1/2 M u_1^2 = h_2 + 1/2 M u_2^2.$$

En négligeant u_1 , on obtient

$$\begin{aligned} u_2 &= \sqrt{\frac{2}{M}(h_1 - h_2)} = \sqrt{\frac{2C_p}{M}(T_1 - T_2)} \\ &= \sqrt{\frac{2\gamma R}{(\gamma - 1)M}(T_1 - T_2)}. \end{aligned}$$

c) Les transferts thermiques étant la principale source d'irréversibilité dans un fluide en équilibre thermodynamique local, et la transformation étant adiabatique, elle peut être supposée isentropique, de telle sorte que

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} - \frac{dp}{p} = 0$$

soit, en intégrant

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{P_2}{P_1}.$$

On peut ainsi exprimer u_2 en fonction des données :

$$u_2 = \sqrt{\frac{2\gamma RT_1}{(\gamma - 1)M} \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right)}$$

A.N. : $u_2 = 4400$ m/s. On propose pour ce moteur une masse molaire de 12 g/mol, inférieure à celle de l'eau, en raison de l'excès d'hydrogène.

d) Pour l'étage principal de ARIANE 5, les caractéristiques données correspondent à un débit massique $D = 250$ kg/s. Avec la vitesse relative d'éjection, on obtient une poussée de 1100 kN, en accord avec la poussée obtenue en croisière. Au décollage, la poussée est inférieure, car la pression en sortie de tuyère est supérieure à la pression atmosphérique, ce qui rend la détente moins complète et diminue la vitesse relative d'éjection.

On peut vérifier que l'hydrogène est en excès ; en effet, le rapport des masses d'oxygène et d'hydrogène est

$$\frac{m_{O_2}}{m_{H_2}} = \frac{125}{25} = 5$$

alors qu'il serait

$$\frac{m_{O_2}}{m_{H_2}} = \frac{2M_O}{4M_H} = 8$$

dans les proportions stoechiométriques.

C.III. Nécessité d'une fusée à plusieurs étages

1. En négligeant les frottements de l'air et en supposant le vol horizontal, la vitesse de la fusée est régie par l'équation différentielle

$$(M_i - Dt) \frac{d\vec{v}}{dt} = -D\vec{u}$$

soit, en intégrant entre l'instant initial et l'instant t courant :

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_i = \ln\left(\frac{M_i - Dt}{M_i}\right) \vec{u}.$$

On en déduit

$$\Delta\vec{V} = -\ln(M_i/M_f) \vec{u}$$

La distance parcourue par la fusée pendant la combustion des ergols est

$$d = \int_0^{t_f} v(t) dt = u \int_0^{t_f} \ln\left(\frac{M_i - Dt}{M_i}\right) dt.$$

On posant $x = 1 - \frac{Dt}{M_i}$, on obtient

$$d = -\frac{M_i u}{D} \int_1^{\frac{M_f}{M_i}} \ln x dx = [x \ln x - x]_1^{\frac{M_f}{M_i}},$$

soit

$$d = \frac{u}{D} \left(M_f - M_i - M_f \ln \frac{M_f}{M_i} \right).$$

2. Pour une fusée à un seul étage ayant les caractéristiques du premier étage d'ARIANE 4, le débit massique est $D = 1090$ kg/s ; la vitesse relative d'éjection est, en valeur absolue $|u| = \left| \frac{Du}{D} \right| = 2476$ m/s. Le rapport des masses est $\frac{M_f}{M_i} = 7,66 \cdot 10^{-2}$. On obtient $\Delta V = 6360$ m/s, en négligeant l'influence du poids, ce qui est insuffisant pour procéder à une satellisation.

Avec une fusée à multiples étages, on peut obtenir une vitesse finale plus importante, car on se débarrasse progressivement des structures devenues inutiles.

Capes de sciences physiques

Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de chimie avec applications ♦ Session : 2002

Partie A GÉNÉRALITÉS

A.1.1 Classe d'équivalence des atomes iso z.

A.1.2 1870. C'est un classement par masse atomique croissante avec retour à la ligne quand on a un métal alcalin. On place en colonnes les corps simples ayant des propriétés chimiques voisines.

A.1.3 Oxydation = perte d'électron

A.1.4 La forme de Lewis et la différence d'électronégativité permettent d'attribuer un nombre d'oxydation à chaque atome.

A.1.5 Un même élément s'oxyde et se réduit ex : $\text{Cl}_2 + 2 \text{OH}^- \rightarrow \text{Cl}^- + \text{ClO}^- + \text{H}_2\text{O}$

A.2.1 Le potentiel rédox standard E^0 .

A.2.2 $\Delta_{1/2}G^0 = \sum v_i \mu_i^0$ ou $\Delta_R G^0$ de la réaction $\text{Ox} + n/2 \text{H}_2 \rightarrow \text{Red} + n \text{H}^+$

A.2.3 $\Delta_{1/2}G^0 = -nF E^0$

A.2.4 Dans les conditions standard $E_1^0 > E_2^0$: $\text{Ox}(1) + \text{Red}(2) \rightarrow \text{Ox}(2) + \text{Red}(1)$

Dans les conditions non standard, remplacer E^0 par E calculé grâce à la formule de Nernst.

A.2.5 Si on choisit comme critère de quantitativité $K^0 > 10^4$ alors $\log K_0 = \frac{n}{0.06}(E_1^0 - E_2^0)$

==> écart des E^0 de $4 \times 0.06/n$ V min

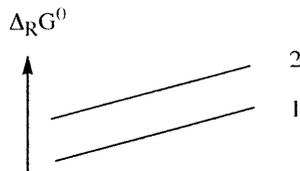
Partie B LES RÉACTIONS D'OXYDATION EN PHASE SÈCHE PAR O_2 GAZEUX

B.1.1 On trace $\Delta_R G^0 = f(T)$ avec $\Delta_R H^0 = \text{cte}$ et $\Delta_R S^0 = \text{cte}$ hors changement d'état.

B.1.2 La même stoechiométrie en oxygène permet, par différence, de prévoir la réaction d'un oxydant sur un réducteur.

B.2.1 $4 \text{ Cu} + \text{O}_2 \rightarrow 2 \text{ Cu}_2\text{O}$ $\Delta_R G^0 (1) = -337200 + 151,6 T$

$2 \text{ Cu}_2\text{O} + \text{O}_2 \rightarrow 2 \text{ CuO}$ $\Delta_R G^0 (2) = -292000 + 200,8 T$



B.2.2 Cu existe en dessous de 1

Cu_2O existe entre 1 et 2

CuO existe au dessus de 2

B.2.3 Le tracé de $RT \ln 0,2$ coupe la courbe 2 en $T_2 = 1250$ K

CuO existe entre 250 K et T_2 , coexiste avec Cu_2O en T_2

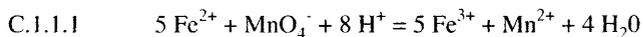
Cu_2O existe entre T_2 et 1350 K

B.2.4 $\text{Cu}_2\text{O} \rightarrow \text{Cu} + \text{CuO}$ $\Delta_R G^0 = + 28,6 \text{ kJ.mol}^{-1}$

Il y a formation de Cu_2O jusqu'à disparition de Cu ou CuO.

B.2.5 $q = 1$; il n'y a pas de possibilité de réaliser $\Delta_R G^* = 0$ donc il n'y a pas d'équilibre.

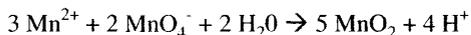
Partie C LA THERMODYNAMIQUE DES RÉACTIONS D'OXYDORÉDUCTION EN PHASE AQUEUSE



C.1.1.2 En milieu acide, H_2O est oxydée en O_2 par MnO_4^- , et cette réaction est plus rapide qu'en milieu neutre.

C.1.1.3 L'équivalence est repérée par la couleur rose persistante.

C.1.1.4 Si on inverse les réactifs, il y a médiamutation :



C.1.2.1 Le schéma doit comporter : béccher, agitation, burette avec pinces, voltmètre et électrodes (une électrode au calomel en référence et une électrode en platine pour la mesure).

C.1.2.2 Hg, solution saturée de Hg_2Cl_2 , solution saturée de KCl.

C.1.2.3 Solution à doser (précision) : pipette jaugée

acide sulfurique (peu précis) : éprouvette graduée.

C.1.2.4 On cherche à éviter la précipitation des hydroxydes.

C.1.2.5 Nernst donne $E \rightarrow -\infty$ ce qui ne correspond pas à l'expérience. On a un potentiel mixte $\text{Fe}^{2+} / \text{H}_2\text{O}$.

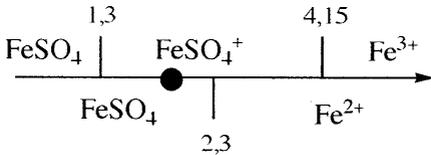
C.1.2.6 On a la réaction de dosage unique et quantitative $\text{Fe}^{2+} + \text{Ce(IV)} \rightarrow \text{Fe}^{3+} + \text{Ce(III)}$

$$[\text{Fe}^{2+}] = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

Le cobalt n'est pas dosé et le but n'est pas atteint.

C.1.2.7 On est en milieu riche en sulfate $[\text{SO}_4^{2-}] = x$

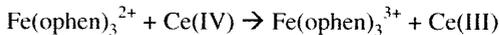
$$10^{-1,94} = \frac{x(x + 5 \cdot 10^{-1})}{5 \cdot 10^{-1} - x} \implies x \approx 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$



Les espèces majoritaires sont FeSO_4 et FeSO_4^+ .

$E_{1/2} < E^{\text{O}}_{\text{Fe(III)/Fe(II)}}$ car le degré III est plus stabilisé par complexation que le degré II.

C.1.2.8 On s'attend à trouver ce E^{O} au double de l'équivalence.



On doit retrouver le volume équivalent du C.2.6, donc c'est le cobalt qui est dosé en premier.

$$[\text{Co}^{\text{II}}] = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{Fe}^{\text{II}}] = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

Le but proposé est atteint.

C.1.3.2 les valeurs aux demi-équivalences donnent :

$$E^{\text{O}} (\text{Fe}^{\text{III}} / \text{Fe}^{\text{II}}) = 1,08 \text{ V}$$

$$E^{\text{O}} (\text{Co}^{\text{III}} / \text{Co}^{\text{II}}) = 0,61 \text{ V}$$

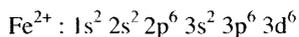
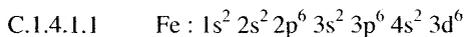
Le potentiel du cobalt est abaissé et celui du fer relevé donc :

- pour le cobalt, le DO III est plus stabilisé que le II.
- pour le fer, le DO II est plus stabilisé que le III.

$$\text{C.1.3.3 } \Delta E^{\text{O}} = 0,06 \log \frac{K_{\text{III}}}{K_{\text{II}}}$$

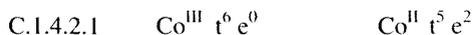
$$\Rightarrow \text{fer} \quad \frac{K_{III}}{K_{II}} = 10^{-5.2}$$

$$\text{cobalt} \quad \frac{K_{III}}{K_{II}} = 10^{20.5}$$



C.1.4.1.2 Fe : période 4 colonne 8

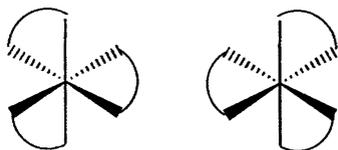
La sous-couche d est incomplète, c'est un élément de transition. C'est aussi le cas d chrome, ce n'est le cas ni de l'aluminium ni du zinc pour leurs DO classiques.



C.1.4.2.2 Le Co^{III} est diamagnétique, le Co^{II} paramagnétique.

C.1.4.2.3 L'orthophénanthroline intervient par ses deux atomes d'azote.

C.1.4.2.4 Les complexes sont chiraux.

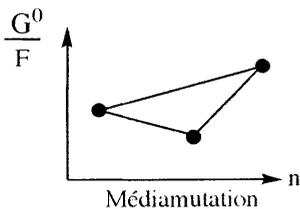
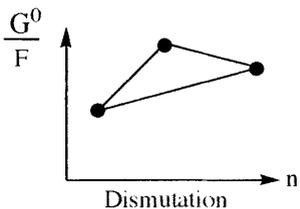


C.2.1 $G_{ox}^O / F = (n_1 - n_2) E^O$

C.2.2 G^O est une fonction d'état et ne dépend pas du chemin suivi pour calculer sa valeur.

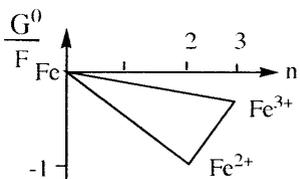
C.2.3 La pente vaut E^O

C.2.4



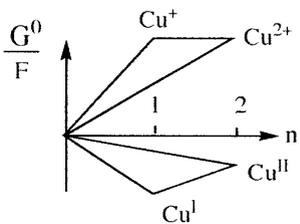
C.2.5

Le fer médiamute.



C.2.6

Le cuivre(I) non complexé dismute.



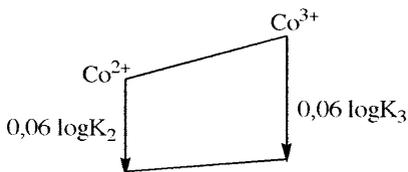
$$\Delta_R G^0 = G^0(\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+) - G^0(\text{Cu}^{2+}) = -RT \text{Ln}(K)$$

Le complexe se situe sous l'ion non complexé dans les schémas précédents à $0,06 \log \beta$ soit $0,06 (11,8) = 0,708 \text{ V}$ pour Cu^{2+} complexé.

$0,06 (20,8) = 0,648 \text{ V}$ pour Cu^+ complexé.

Il en résulte que le cuivre médiamute.

C.2.8 la question C.1.3.3 peut être traitée graphiquement avec la méthode précédente :



Partie D ÉTUDE CINÉTIQUE D'UNE RÉACTION D'OXYDORÉDUCTION

D.1.1 $E^0(\text{S}_2\text{O}_8^{2-} / \text{SO}_4^{2-}) \gg E^0(\text{I}_2 / \text{I}^-) \implies$ évolution quantitative

D.1.2 La cinétique est lente car les deux espèces sont chargées négativement.

D.1.3 $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ oxyde Fe^{2+} en Fe^{3+}

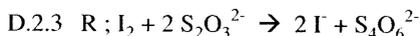
I^- réduit Fe^{3+} en Fe^{2+}

$$4v = (1/v) \left(\frac{d\xi}{dv} \right) = k[\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]^a [\text{I}^-]^b$$

D.2.1 A $t = 0$ $[\text{I}^-] = 3,33 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

$\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ contient aussi des iodures à la même concentration. Les ajouts successifs ne modifient pas la concentration par dilution.

D.2.2 I_2 donne une coloration bleue avec l'empois d'amidon.



D.2.4 A $t = 0$ $[\text{I}^-] = 3,33 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Comme $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ contient la même concentration en iodure et que l'iode formé lentement est réduit rapidement, la concentration reste constante.

$$\text{D.2.5 } [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]_{\text{restant}} = (10 \cdot 0,05 - 0,5 n \cdot 0,05) / (30 + n)$$

D.2.6 $\ln[S_2O_8^{2-}] - \ln[S_2O_8^{2-}]_0 = f(t)$ est une droite $\implies a = 1$.

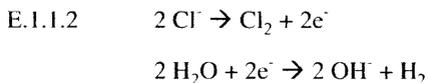
D.2.7 $k_1 = k(t) [I^-]^b$ $t_{1/2} = \ln 2 / k_1$ en s^{-1}
 $k_1 = 2,45 \cdot 10^{-4} s^{-1}$ $t_{1/2} = 2830 s$

D.2.8 $k_2 / k_1 = 2^b \implies b = 1$ $k = 7,36 \cdot 10^{-3} L \cdot mol^{-1} \cdot s^{-1}$

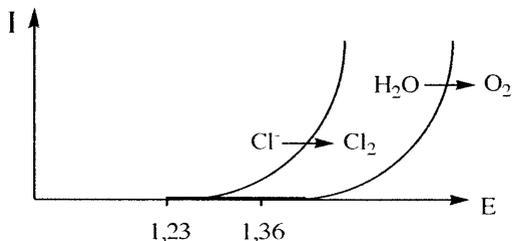
D.2.9 $\ln(k_1 / k_2) = (E_a / k) [(1/t') - (1/t)] \implies E_a = 55 kJ \cdot mol^{-1}$

Partie E ELECTROLYSE INDUSTRIELLE DE LA SOLUTION AQUEUSE DE CHLORURE DE SODIUM

E.1.1.1. Anode : lieu de l'oxydation
 Cathode : lieu de la réduction



E.1.1.3 Il y a une forte surtension anodique pour l'oxydation de l'eau.



E.1.1.4 Il faut un dispositif à 3 électrodes :

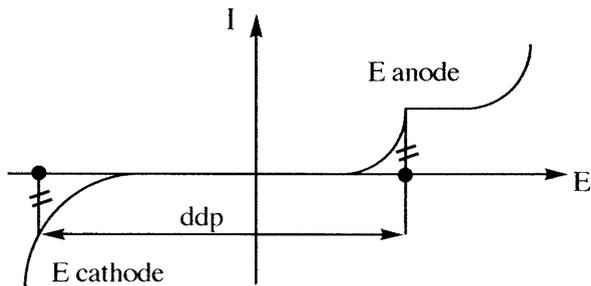
Électrode de travail : suivi de I et de E

Electrode de référence : $i = 0$ permet de suivre E par ddp.

Contre-électrode : permet le retour de l'intensité.

E.1.1.5 Il y a palier de diffusion quand l'espèce réagit dès son arrivée à l'électrode. Il est observable pour le chlore pas pour l'oxygène.

E.1.1.6 Cette étude ne tient pas compte de l'effet Joule dans la cellule.



E.1.1.72 $\text{Cl}^- + 2 \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Cl}_2 + 2 \text{OH}^- + \text{H}_2$. On obtient de la soude.

E.1.2.1 $\Delta_f H^0 (\text{Cl}_2)$ est nulle car c'est le corps simple stable.

$\Delta_f H^0 (\text{H}^+)$ est nulle par convention pour les ions.

E.1.2.2 $\Delta_R H^0 = + 444,8 \text{ kJ.mol}^{-1}$ réaction endothermique

$$\Delta_R S^0 = 79,2 \text{ J.mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad \Delta v_{\text{gaz}} > 0$$

E.1.2.3 $\Delta_R G^0 = + 421,2 \text{ kJ.mol}^{-1} \quad K^0 = 1,35 \cdot 10^{-74}$

E.1.2.4 $Q = 1 \gg K^0$ L'évolution spontanée est dans le sens 2.

E.1.2.5 $\xi = n\text{Cl}_2 = 14,1 \text{ mol} \quad t = 19,4 \text{ s}$

E.1.2.6-7 $\Delta H = \Delta_R H^0 \times \xi = 6,27 \cdot 10^3 \text{ kJ}$

$$\Delta G = \Delta_R G \times \xi = 5,94 \cdot 10^3 \text{ kJ}$$

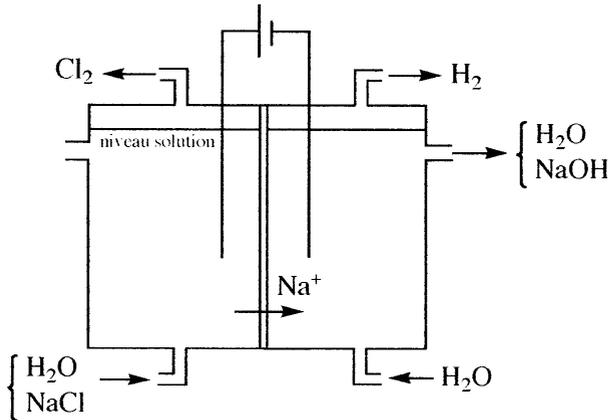
$$\Delta S = \Delta_R S \times \xi = 1,12 \cdot 10^3 \text{ J.K}^{-1}$$

$W_{\text{elec.rev}} = 5,94 \cdot 10^3 \text{ kJ} \quad Q_{\text{rev}} = +334 \text{ kJ}$

E.1.2.8 $W_{\text{elec. reel}} = U_{\text{it}} = 8,15 \cdot 10^3 \text{ kJ}$

$\Delta H = Q + W_{\text{elec}} \implies Q_{\text{reel}} = -1,88 \cdot 10^3 \text{ kJ} < 0$ L'échange de chaleur se fait donc vers l'extérieur.

E.2.1 Les produits sont obtenus séparés.



E.2.2 La membrane est un polymère muni de pores tapissés de groupements chargés négativement qui laissent passer les cations et bloquent les anions.

E.2.3 Le mercure est fortement toxique.

E.3.1 En chimie organique : PVC, solvants chlorés

En chimie minérale : eau de javel

E.3.2 Production du dihydrogène à partir du pétrole.

E.3.3 Synthèse de l'ammoniac.

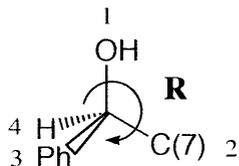
Partie F OXYDORÉDUCTION EN CHIMIE ORGANIQUE

F.1.1.1 2-hydroxy-1,2-diphényléthanone.

F.1.1.2 Un groupe hydroxyle et un carbonyle.

F.1.1.3 C7 trigonal, C9 tétragonal.

F.1.1.4 On a deux énantiomères.



F.1.2.1-3



F.1.3.2 La réduction n'est pas totalement répétitive. Par ailleurs, l'eau oxyde le borate.

F.1.3.3 On a trois stéréoisomères.

F.1.3.4 Méso : structure à carbone asymétrique globalement symétrique (ici RS) dl : mélange racémique d'énantiomères chiraux (mélange RR et SS 50 :50).

F.1.4.1.1 Schéma avec boy, chauffe-ballon, réfrigérant, pierre ponce et pinces.

F.1.4.1.2 Test à la liqueur de Fehling.

F.1.4.1.3 Carbonyle vers 1700 cm^{-1} ; pas de bande O-H.

F.1.4.1.4 $\text{Ph-CHOH-CHOH-Ph} + 2\text{ Cu}^{2+} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Cu}_2\text{O} + \text{Ph-CO-CO-Ph}$
(avec Cu_2O qui précipite)

F.1.4.1.5 On a une seule configuration.

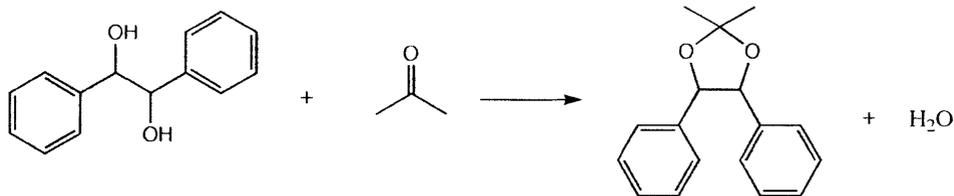
F.1.4.2.1 Pas de pic correspondant au carbonyle, un pic fin pour le OH libre et une bande large correspondant au OH lié.

F.1.4.2.2 $2\text{ Ph-CO-CO-Ph} + \text{NaBH}_4 + 4\text{ H}_2\text{O} \rightarrow 2\text{ Ph-CHOH-CHOH-Ph} + \text{Na}^+ + \text{B(OH)}_4^-$

F.1.4.2.3 On a un seul isomère, le méso.

F.1.4.2.4 La réaction est concertée sur les deux sites.

F.1.5.1.1



F.1.5.1.2 Action du catalyseur acide.

Mécanisme : attaque nucléophile sur le carbonyle (addition), substitution nucléophile du second groupe OH.

F.1.5.1.3 L'équilibre défavorable est déplacé par un excès d'acétone.

F.1.5.2.1 1,5 et 1,7 ppm : les deux CH₃.
5,45 ppm : les deux CH
6,8 - 7,1 : 10 protons benzéniques

F.1.5.2.2 Les deux méthyles sont diastéréotopiques, les deux CH énantiotopiques.

F.2.1

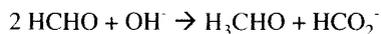
F.2.1.1 La base conjuguée est stabilisée par résonance.

F.2.1.2- Formation du carbanion

- Attaque nucléophile sur le carbonyle
- Réaction acidobasique de l'alcoolate

F.2.1.3-hydroxybutanal

F.2.2 Il n'y a pas de carbone en α , on a une réaction de Cannizzaro :



F.2.3 Il y a aldolisation croisée éthanal-méthanal, réaction avec deux nouvelles molécules de méthanal, réaction de Cannizzaro.

On obtient le di(hydroxyméthyl)propane-1,3-diol

Capès de sciences physiques

Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition de physique avec applications ♦ Session : 2002

PREMIER PROBLÈME

ÉCHANGEUR THERMIQUE

Partie A - Thermique

1. Conduction, convection, rayonnement, définitions : voir la littérature

2.1.a. Conduction

φ , densité surfacique de flux thermique en W.m^{-2}

Φ , flux thermique en Watt

2.1.b. S , surface d'échange thermique en m^2

λ , conductivité thermique en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

T , température en Kelvin

x , variable spatiale unidirectionnelle en mètre

Dans un milieu matériel, le flux thermique "s'écoule" spontanément des hautes vers les basses températures.

Si l'on convient de comptabiliser positivement ce flux "spontané" et si $T(x)$ caractérise la distribution en

2.1.c. température dans ce milieu, le flux thermique est proportionnel à l'opposé du gradient de température. Le

coefficient de proportionnalité est précisément la conductivité thermique (λ) qui dépend de la nature du milieu.

2.2.a.
$$\varphi = \frac{\lambda}{e} (T_1 - T_2)$$

2.2.b. En électrocinétique $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, $j_x = -\gamma \frac{\partial V}{\partial x}$, $R = \frac{(V_1 - V_2)}{I} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{e}{S}$.

L'analogie $\varphi = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$ $R_{th} = \frac{(T_1 - T_2)}{\Phi} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{e}{S}$

Flux radial $d\Phi = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \cdot dS$. S et r ne sont plus indépendants, $S = 2\pi \cdot r$ par unité de longueur de

tube, soit $\Phi = -2\pi \cdot \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \cdot r$ par unité de longueur de tube. Le flux thermique est indépendant de r

2.2.c.1 donc $\frac{\partial T}{\partial r} \cdot r = C^{te}$ constante à déterminer. $\int_{r_1}^{r_2} dT = C^{te} \times \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \Rightarrow C^{te} = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$, soit

$$\Phi = k \cdot S_{ext} \cdot (T_1 - T_2)$$

2.2.c.2 $k = 5462 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ $\Sigma = 6,12 \text{ m}^2$

3.1. $d\Phi = -Q_1 \cdot dT_1 = -Q_2 \cdot dT_2 = k \cdot (T_1 - T_2) \cdot dS$

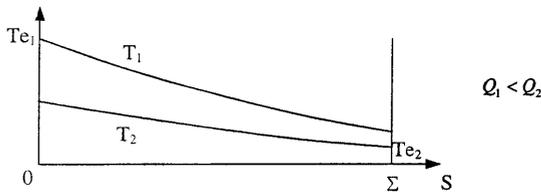
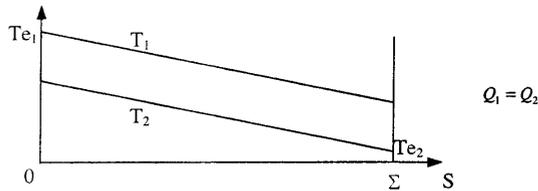
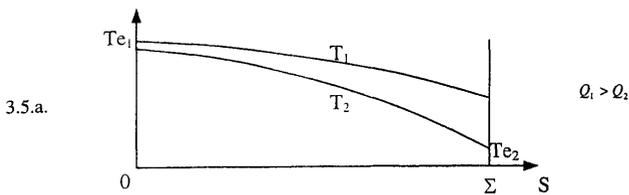
3.2. On néglige les transferts par rayonnement et on considère l'échangeur parfaitement isolé de l'extérieur en régime permanent.

3.3. Des relations établies en 3.1, on tire : $dT_1 = -\frac{k}{Q_1} (T_1 - T_2) \cdot dS$ $dT_2 = -\frac{k}{Q_2} (T_1 - T_2) \cdot dS$. En faisant

la différence membre à membre et en intégrant, on obtient la relation recherchée.

3.4. A partir des relations établies en 3.1, on tire : $T_1 - T_2 = -\frac{Q_2}{k} \cdot \frac{dT_2}{dS}$.

En reportant dans (1) et en intégrant, on obtient la relation (2) recherchée.



Pour $Q_1 > Q_2$, $T_{s2} = T_{e1}$
 Pour $Q_1 < Q_2$, $T_{s2} = T_{e2} + (T_{e1} - T_{e2}) \cdot \frac{Q_1}{Q_2}$

3.5.b. $T_{e1} - T_{e2}$ est l'élévation maximale de température de la saumure. Elle peut être obtenue pour $Q_1 > Q_2$.
 Pour $Q_1 < Q_2$ l'élévation de température rapportée à l'élévation maximale est égale au rapport des débits.

3.5.c. $T_{s2} = 79.6 \text{ }^\circ\text{C}$. Sur la figure 2, on relève 60°C pour $q_{m1} = 3 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$, la modélisation n'est pas satisfaisante.

4.1. $d\Phi = k \cdot (T_1 - T_2) \cdot dS = k \cdot (T_{e1} - T_{s2}) \cdot \exp\left(a \frac{S}{\Sigma}\right) \cdot dS$. En intégrant de 0 à Σ , on met Φ sous la forme recherchée $\Phi = k \cdot \Sigma \cdot \Delta T_{LM}$.

4.2. $k = 1100 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$

4.3. 5 fois plus faible que k calculé

5.1. Définition de la viscosité : voir littérature

5.2.a. $Rth_{liq1} = \frac{1}{h_1 \cdot S_{int}} \quad Rth_{paroi} = \frac{1}{k \cdot S_{ext}} \quad Rth_{liq2} = \frac{1}{h_2 \cdot S_{ext}} \quad Rth = \frac{1}{\Sigma} \cdot \left(\frac{1}{h_1 \cdot \frac{S_1}{2}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{h_2} \right)$

5.2.b. $\frac{1}{k'} = \frac{1}{h_1 \cdot \frac{S_1}{2}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{h_2}$

5.2.c. $k' = 1080 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ valeur numérique estimée cohérente avec le résultat 4.2.

- 5.3 Quand les débits augmentent, les épaisseurs des couches fluides sur les parois des tubes diminuent, les coefficients de convection h augmentent, k aussi. La croissance est limitée par l'effet des épaisseurs limites des couches fluides.
- 6.1. $\Phi = Q_2 \cdot (T_{s_2} - T_{e_2}) = 300 \text{ kW}$
 $\Phi = Q_1 \cdot (T_{e_1} - T_{s_1})$, Q_1 et T_{s_1} sont inconnus et non indépendants
- 6.2.a $\Phi = k \cdot \Sigma \cdot \Delta T_{LM}$, k dépend des débits par les coefficients de convection et $\Delta T_{\Sigma} = T_{s_1} - T_{e_2}$ est inconnu et dépend aussi des débits. La connaissance des évolutions des coefficients de convection h en fonction des débits permettrait de rechercher la solution par approches successives et encadrement.
- 6.2.b $\Delta T_{LM} = \frac{\Phi}{k\Sigma} = 35,9^\circ\text{C}$ $\Delta T_{\Sigma} = 58,2^\circ\text{C} \Rightarrow T_{s_1} = 66,2^\circ\text{C}$ $q_{m1} = 5,1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$

Partie B - Fluidique

- 1.1.a. fluide parfait : voir littérature
- 1.1.b. En multipliant les deux membres de l'équation par $d\tau$, l'analyse dimensionnelle donne :
 masse \times accélération = force

$$\rho \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \text{grad}(\vec{v}^2) - \vec{v} \wedge (\text{rot} \vec{v}) \right\} = \vec{f} - \text{grad} P$$

Régime permanent $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ $\vec{f} = \rho \vec{g} = -\text{grad} \rho g z$

1.1.c. $\rho \cdot \{ \vec{v} \wedge (\text{rot} \vec{v}) \} = +\text{grad} \rho g z + \text{grad} P + \text{grad} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right)$

$$\rho \cdot \{ \vec{v} \wedge (\text{rot} \vec{v}) \} = \text{grad} \left(\rho g z + P + \frac{1}{2} \rho v^2 \right)$$

Projection sur une ligne de courant $\rho \vec{v} \cdot \{ \vec{v} \wedge (\text{rot} \vec{v}) \} = \vec{v} \cdot \text{grad} \left(\rho g z + P + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = 0$

1.1.d. $\left(\rho g z + P + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = Cte$

2. Interprétation énergétique

Aspiration, indice 1 à l'entrée du circuit, indice 2 à l'entrée de la pompe.

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_2 + \rho \cdot g z_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + \Delta P_{asp} \quad P_1 = P_a + \rho_{20^\circ\text{C}} \cdot g h \quad v_1 = v_2$$

$$P_2 = P_a + \rho_{20^\circ\text{C}} \cdot g h - \rho_{20^\circ\text{C}} \cdot g z_2 - \Delta P_{asp} = 25470 \text{ Pa}$$

Refoulement, indice 3 en sortie de la pompe, indice 4 à l'entrée de la buse d'injection, indice 5 en sortie de la buse d'injection.

$$P_4 + \rho_{60^\circ\text{C}} \cdot g z_4 + \frac{1}{2} \rho_{60^\circ\text{C}} \cdot v_4^2 = P_u + \rho_{60^\circ\text{C}} \cdot g z_4 + \frac{1}{2} \rho_{60^\circ\text{C}} \cdot v_5^2$$

3.1. $P_4 = P_u + \frac{1}{2} \rho_{60^\circ\text{C}} \cdot (v_5^2 - v_4^2)$

Calcul des vitesses $v_5 = \frac{q m_2}{\rho \pi r_5^2} = 7,61 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ $v_4 = \left(\frac{r_5}{r_4} \right)^2 \cdot v_5 = 0,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ $P_4 = 56400 \text{ Pa}$

$$P_3 + \rho_{20^\circ\text{C}} \cdot g z_3 + \frac{1}{2} \rho_{20^\circ\text{C}} \cdot v_3^2 = P_4 + \rho_{20^\circ\text{C}} \cdot g z_4 + \frac{1}{2} \rho_{60^\circ\text{C}} \cdot v_4^2 + \Delta P_{ref} + \Delta P_{éch}$$

Conservation de la masse à travers l'échangeur, donc $\rho_{20^\circ\text{C}} \cdot v_3 = \rho_{60^\circ\text{C}} \cdot v_4$ (correction négligeable)

$$P_3 = 192850 \text{ Pa} \quad HMT = P_3 - P_2 = 167380 \text{ Pa}$$

3.2. Puissance utile $\frac{qm_2}{\rho} \cdot HMT = 255 \text{ W}$

4.1. NPSH disponible : 23100 Pa

4.2. cavitation

4.3. $h \leq NSPH_{requis} + z_2 + \frac{\Delta P_{asp} - P_a + P_{vsat}}{\rho_{20^\circ\text{C}} \cdot g}$ Cavitation pour $h \leq 1,6 \text{ m}$

DEUXIÈME PROBLÈME

TÉLESCOPE

partie I

1.1.1

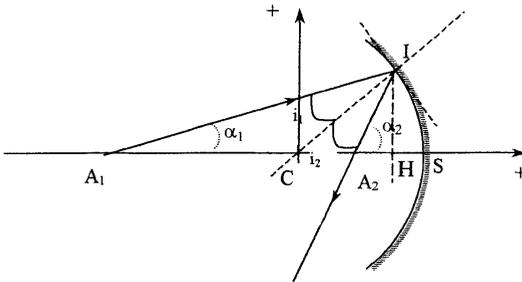


fig 1 : miroir sphérique

angle incidence (\vec{IC}, \vec{IA}_1) ; angle de réflexion (\vec{IC}, \vec{IA}_2)

1.1.2 Lois de la réflexion : $i_1 = i_2$ et le rayon réfléchi IA_2 appartient au plan d'incidence (\vec{IC}, \vec{IA}_1)

1.1.3 Expressions de i_1 et i_2
 dans le triangle A_1CI : $\alpha_1 + i_1 + (\pi - \theta) = \pi$ soit $i_1 = \theta - \alpha_1$
 on obtient de même dans le triangle A_2CI : $i_2 = \alpha_2 - \theta$

1.1.4 Conditions de Gauss :
 les rayons paraxiaux sont faiblement inclinés par rapport à l'axe optique
 les rayons passent au voisinage du centre optique

1.1.5 Relation de conjugaison
 $i_1 = i_2 \Rightarrow \theta - \alpha_1 = \alpha_2 - \theta \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 2\theta$ (1)
 dans les conditions de Gauss $\tan \alpha_1 \approx \alpha_1$, $\tan \alpha_2 \approx \alpha_2$, $\tan \theta \approx \theta$
 et $AH = A_1S + SH \approx SA_1$

$$\text{soit } \alpha_1 = \frac{HI}{AH} = -\frac{HI}{SA_1}, \alpha_2 = -\frac{HI}{SA_2}, \theta = \frac{HI}{SC}$$

$$\text{en remplaçant dans (1) : } \frac{1}{SA_1} + \frac{1}{SA_2} = \frac{2}{SC}$$

1.1.6 Positions des foyers

Si l'objet A_1 est à l'infini sur l'axe optique, le faisceau de lumière est parallèle à l'axe et converge au foyer image F' . Quand $SA_1 \rightarrow \infty$, $A_2 \equiv F'$ et $SF' = SC/2$

Foyer objet F : $SA_2 \rightarrow \infty$, $A_1 \equiv F$ et $\overline{SF} = \overline{SC} / 2$

F et F' sont confondus, ils sont au milieu du segment SC

- 1.2.1 Un système est rigoureusement stigmatique si tout rayon issu d'un point objet passe A passe après la traversée du système optique par un point unique image A'.
- 1.2.2 Condition de stigmatisme : $L(\overline{AA'}) = Cte$. Pour le miroir plan, quelque soit le point I appartenant au miroir, on a $\overline{AI} + \overline{IA'} = 0$, le miroir plan est rigoureusement stigmatique. Ce n'est pas le cas du miroir de salle de bain formé de l'association d'une lame à face parallèle et d'un miroir. La lame à face parallèle est un système dioptrique qui n'est pas rigoureusement stigmatique.
- 1.2.3 Un miroir parabolique est rigoureusement stigmatique pour deux points : le foyer F et un point à l'infini sur l'axe.
Intérêt en astronomie : l'observation d'un objet à l'infini dans la direction de l'axe optique donne une image nette dans le plan focal.
- 1.2.4 La relation de conjugaison du miroir sphérique (§1.1.5) n'est vraie que dans certaines conditions : les conditions de Gauss. Le miroir sphérique ne présente donc qu'un stigmatisme approché.
- 1.2.5 Il y a aplanétisme, si pour tout objet AB plan et perpendiculaire à l'axe optique du système, son image A'B' est plane et perpendiculaire à l'axe optique.
Le miroir sphérique présente un aplanétisme approché dans les conditions de Gauss
- 1.2.6 On suppose que les conditions de Gauss sont réalisées et que le système présente un aplanétisme et un stigmatisme approché.
Tout rayon issu de B_1 et passant par C se réfléchit sur lui-même.
Le rayon passant par B_1 et parallèle à l'axe optique donne un rayon réfléchi passant par F ou dont le prolongement passe par F.

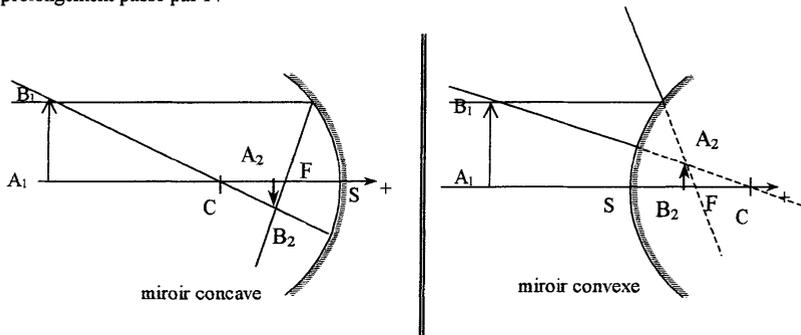


fig 2 construction des images.

Avec le miroir concave : l'image est réelle et renversée.

Avec le miroir convexe : l'image est virtuelle et droite

- 1.3.1 Objet et image conjuguée à travers les systèmes optiques notés [...]
 AB_∞ objet réel [miroir sphérique M1] image conjuguée A_1B_1 réelle dans le plan focal F
 A_1B_1 objet virtuel [miroir plan M2] image conjuguée A_2B_2 réelle
 A_2B_2 objet réel [lentille L] $A'B'_\infty$ image conjuguée virtuelle à l'infini dans le cas du télescope afocal.
- 1.3.2 Le télescope est afocal si l'image intermédiaire A_2B_2 est dans le plan focal de la lentille oculaire.
Il faut que le foyer objet F_1 de la lentille soit confondu avec l'image du foyer F du miroir sphérique donnée par le miroir plan.

1.3.3

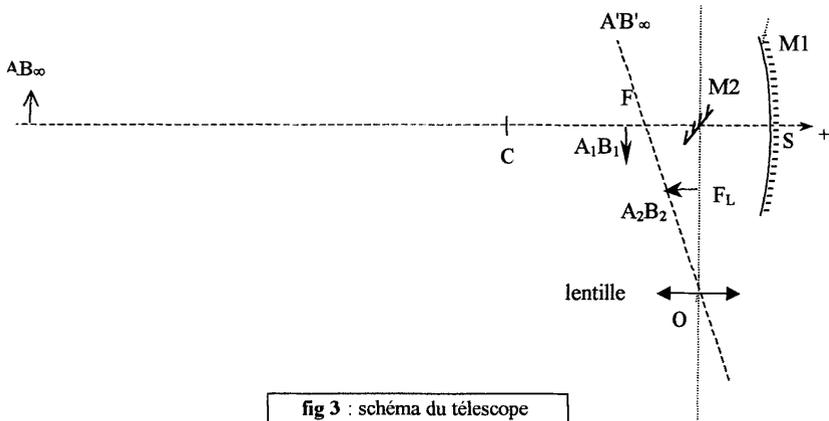


fig 3 : schéma du télescope

1.3.4

par définition, $G = \widehat{B_\infty SC} / \widehat{F_L O B'_\infty}$

dans les conditions de Gauss $G \approx \frac{SF}{A_1 B_1} \frac{A_2 B_2}{f} \approx \frac{SF}{f}$ soit $G = 16$

partie II

2.1.1

à partir de $\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ et comme $R_1 = R_2 = R$ il vient $\Delta f' = \frac{R}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{m-1} \right)$

$\Delta f' = 1,3 \text{ cm}$

2.1.2

Il s'agit de la dispersion, l'image est irisée

2.1.3

la mise en évidence est d'autant plus facile $\Delta f'$ est grand. Il faut une lentille de grand rayon de courbure R c'est à dire la moins convergente donc celle de plus petite vergence

2.2.1

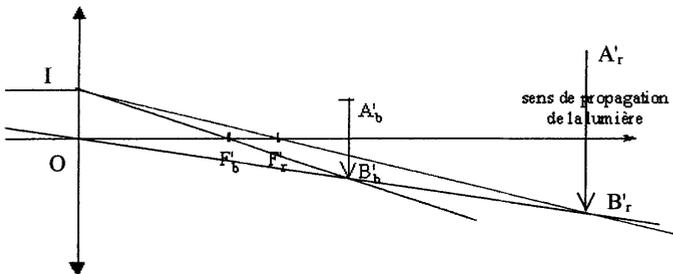


fig 4 : construction de l'image en lumière rouge

le rayon issu du point B de l'objet et passant par O n'est pas dévié quelle que soit la couleur de la radiation.

Le rayon IB'_b qui passe par F'_b après la lentille provient d'un rayon parallèle à l'axe optique avant la lentille. En lumière rouge, ce rayon parallèle à l'axe optique est moins dévié et passe par F'_r . L'intersection des rayons OB'_b et IF'_r donne l'image B'_r du point B en lumière rouge.

2.2.2.

a

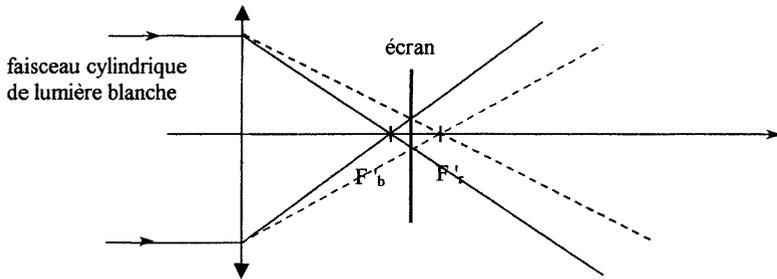


fig 5 : enveloppe des faisceaux images en lumière bleue et rouge

- 2.2.2. Pour obtenir une image non irisée, il faut placer l'écran comme indiqué sur le schéma fig5, là où les deux faisceaux ont les m^{mes} sections. Placé avant, on observe une irisation rouge. Placé après, on observe une irisation bleue.
- 2.3 les systèmes réflecteurs ne présentent pas d'aberrations chromatiques car la lumière ne changent pas de milieu. On n'obtient pas d'image irisée.

partie III

3.1.1 $\text{div} \vec{E} = 0 ; \overline{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\text{div} \vec{B} = 0 ; \overline{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

3.1.2 équation de propagation

on dérive par rapport au temps $\overline{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et en utilisant $\overline{\text{rot}} (\overline{\text{rot}} \vec{V}) = \overline{\text{grad}} (\text{div} \vec{V}) - \Delta \vec{V}$

on obtient $\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

3.1.3 onde plane progressive $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_+(t-z/c)$ est solution de l'équation avec $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

en effet $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \vec{E}_+}{\partial u^2} \right)$ et $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}_+}{\partial u^2}$ avec $u = t-z/c$

3.1.4. en notation complexe $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \exp(j\omega t - kz)$ avec $\vec{k} = (w/c) \vec{e}_z$

a $\text{div} \vec{E} = -j \vec{k} \cdot \vec{E}$
 $\overline{\text{rot}} \vec{E} = -j \vec{k} \wedge \vec{E}$

3.1.4. onde transverse

b $\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow j \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ soit $\vec{k} \perp \vec{E}$

3.1.4.

c $\overline{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow j \vec{k} \wedge \vec{E} = j \omega \vec{B}$ d'où $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$ $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ forme un trièdre direct

3.2.1 principe Huygens : chaque point M d'une surface Σ peut être considérée comme une source secondaire émettant une onde sphérique.

3.2.2 Différence de marche $\delta = \vec{OM} \cdot \vec{u}$

3.2.3 $A_\infty = \iint_{\Sigma} dA = \iint_{\Sigma} A_0 \exp(-j\varphi) ds$ avec $\varphi = 2\pi\delta/\lambda$

3.3.1 expression de δ

$\vec{OM}(x=r\cos\theta ; y=r\sin\theta ; z=0) \vec{u}(u_x=r\cos\alpha ; u_y=r\sin\alpha ; u_z)$

$\delta = \vec{OM} \cdot \vec{u} = r\rho(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) = r\rho\cos(\theta - \alpha)$

3.3.2 expression de A_∞ en fonction de J_0 ; $t = 2\rho r/\lambda$

$A_\infty = \iint A_0 \exp\left[-\frac{2j\pi r\rho\cos(\theta - \alpha)}{\lambda}\right] ds$ avec $ds = r d\theta dr$

$A_\infty = A_0 \int_0^{D/2} r dr \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{2j\pi r\rho\cos(\theta - \alpha)}{\lambda}\right] d\theta$

or $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-jx \cos(\theta - \alpha)) d\theta$

en posant $t = \frac{2\pi r\rho}{\lambda}$ on obtient

$A_\infty = A_0 \int_0^{D/2} 2\pi r J_0(t) dt$

3.3.3 expression de A_∞ en fonction de J_1

$t = \frac{2\pi r\rho}{\lambda}$ et $dt = \frac{2\pi\rho}{\lambda} dr$

$A_\infty = A_0 \int_0^{\pi\rho D/\lambda} \frac{\lambda t}{2\pi\rho} 2\pi J_0(t) \frac{\lambda}{2\pi\rho} dt = A_0 \frac{\lambda^2}{2\pi\rho^2} \int_0^{\pi\rho D/\lambda} t J_0(t) dt$

or $x_0 J_1(x_0) = \int_0^{x_0} x J_0(x) dx$

$A_\infty = A_0 \frac{\lambda^2}{2\pi\rho^2} \times \frac{\pi\rho D}{\lambda} \times J_1\left(\frac{\pi\rho D}{\lambda}\right) = A_0 \frac{\lambda^2}{2\pi\rho^2} \times \left(\frac{\pi\rho D}{\lambda}\right)^2 \times \frac{J_1\left(\frac{\pi\rho D}{\lambda}\right)}{\frac{\pi\rho D}{\lambda}}$

soit $A_\infty = A_0 \frac{\pi D^2}{2} \times \frac{J_1\left(\frac{\pi\rho D}{\lambda}\right)}{\frac{\pi\rho D}{\lambda}} = 2A_0 S \frac{J_1\left(\frac{\pi\rho D}{\lambda}\right)}{\frac{\pi\rho D}{\lambda}}$

3.4.1 $\sin i = \frac{\rho}{\mu}$ soit $\sin i = \rho$

3.4.2 valeurs de t' correspondant aux deux premiers minima $t'_1 = 1,22 ; t'_2 = 2,23$

$t' = \frac{\rho D}{\lambda} = \frac{D \sin i}{\lambda}$ pour des petits angles $i \approx \sin i = \frac{\lambda t'}{D}$

soit $i_1 = 1,22\lambda/D ; i_2 = 2,23\lambda/D$

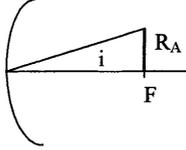
partie IV

4.1.1 on observe une figure diffraction due à l'ouverture du télescope

4.1.2 Les hypothèses étaient : onde plane monochromatique et diffraction due à une surface circulaire.
Il est probable que la lumière soit non monochromatique

4.1.3 Expression de R_A

la figure de diffraction est dans le plan focal du miroir M1



$$\tan i \approx i \approx \frac{R_A}{f}$$

$R_A = 1,22 \frac{\lambda f}{D}$ pour le premier anneau sombre.

4.2 Pouvoir de résolution α tel que $\alpha f \geq R_A \rightarrow \alpha \geq 1,22 \lambda / D$
pour une même radiation

$$\alpha_{\text{palomar}} / \alpha_{\text{Newton}} = D_{\text{Newton}} / D_{\text{palomar}} = 7,4 \times 10^{-3}$$

4.3.1 Chili

4.3.2 interférence

4.3.3 car le pouvoir de résolution $\alpha = 1,22 \lambda / D$ est fonction de λ

4.3.4

$$h = \frac{\pi}{3600} \times 10^{-3} \times 4 \times 10^8 = 1,9 m \text{ ordre de grandeur correct}$$

Capes de sciences physiques

Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition d'électronique - électrotechnique avec applications ♦ Session : 2002

Premier problème

1 Fonctionnement du moto-variateur.

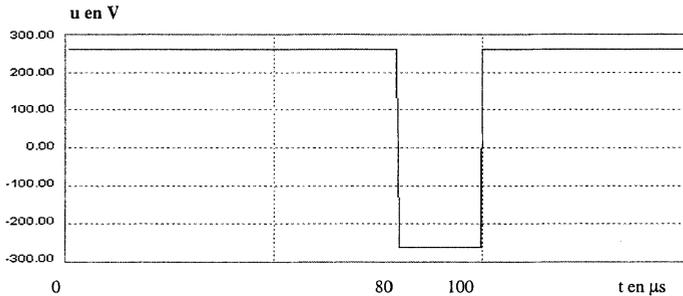
1.1. Fonctionnement en régime nominal.

- La force électromotrice (f.e.m.) E est proportionnelle à la vitesse angulaire Ω car la machine fonctionne à flux constant.
- La valeur de K est donnée par la relation : $K = U_{\text{nom}}/\Omega = 1,65 \text{ V.s.rad}^{-1}$
- Le moment du couple électromagnétique Γ_{nom} nominal est proportionnel à Ω : $\Gamma_{\text{nom}} = K \cdot I_{\text{nom}} = 149 \text{ N.m}$.

1.2. Le fonctionnement en moteur.

La voiture roule à vitesse constante sur une route plane. Le moment du couple Γ opposé à la machine à courant continu est constant.

- On règle $\alpha = 0,8$: l'amplitude est de 260 V et la période 100 μs .

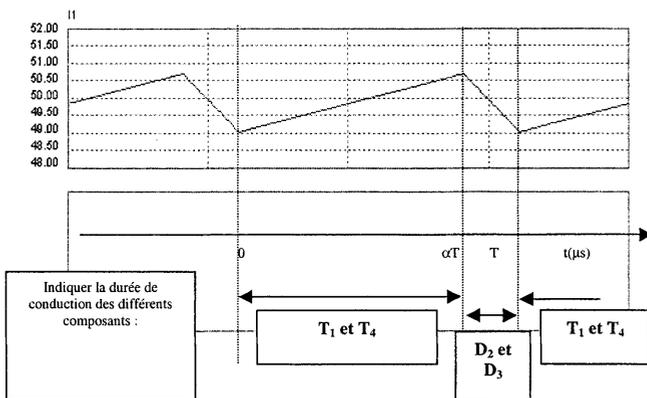


- Etablir l'expression de la valeur moyenne de la tension u :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} [\alpha T \cdot U_C + (T - \alpha T) \cdot (-U_C)] = U_C \cdot (2\alpha - 1).$$

- La vitesse angulaire est donnée par $\Omega = \frac{(2\alpha - 1)U_C}{K}$ d'où $n = 903 \text{ tr.min}^{-1}$

d Le document réponse 1 donne le courant i qui est positif, on en déduit les composants passants :



e L'équation différentielle est : $u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + E$

f La valeur moyenne de la tension aux bornes de l'inductance est nulle car le courant est périodique, on en déduit $\langle u \rangle = E$.

g Pour l'intervalle de temps compris entre 0 et αT : $u(t) = U_c$, l'équation donne : $\frac{di(t)}{dt} = \frac{U - E}{L}$ qui est positive puisque $E = (2\alpha - 1)U_c$, on en déduit que $i(t)$ est une droite de pente positive.

h Pour l'intervalle de temps compris entre αT et T , $u(t) = -U_c$, le raisonnement est identique (dérivée négative).

i Pour t compris entre 0 et αT , l'équation du courant est la suivante : $i(t) = \frac{U_c - (2\alpha - 1)U_c}{L} t - I_{\min}$.

$$\text{A l'instant } t = \alpha T, i(\alpha T) = I_{\max} = \frac{2U_c(1 - \alpha)}{L} \alpha T - I_{\min}$$

$$D'où \Delta i = I_{\max} - I_{\min} = \frac{2U_c}{L} (1 - \alpha) \alpha T$$

j Le graphe de $i(t)$ donne $\Delta i = 1,6 \text{ A}$, on calcule $L = 5 \text{ mH}$.

1.3. Etude du freinage électrique de la voiture.

La voiture roule en descente à vitesse constante, le moment du couple exercé sur l'arbre du moteur devient négatif :

$$\Gamma = -120 \text{ N.m et } n = 900 \text{ tr.min}^{-1}.$$

131 Calcul des grandeurs.

a La valeur moyenne n'est pas modifiée $\langle u \rangle = E = K\Omega = 155 \text{ V}$ et le courant d'induit $\langle i \rangle = \frac{\Gamma}{K} = -72,7 \text{ A}$.

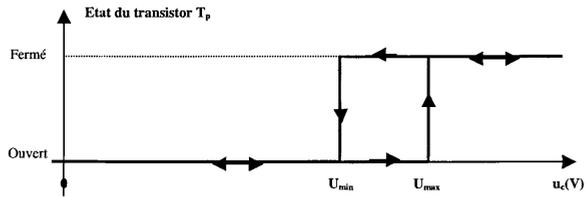
b Le rapport cyclique α est toujours de 0,8 car la vitesse n'est pas modifiée.

c La puissance active absorbée par la machine $P = \langle ui \rangle = I \langle u \rangle$

$P = -11,3 \text{ kW}$; le signe négatif indique que la machine fonctionne en génératrice : elle fournit de la puissance électrique.

132 Etude du module de dissipation.

a

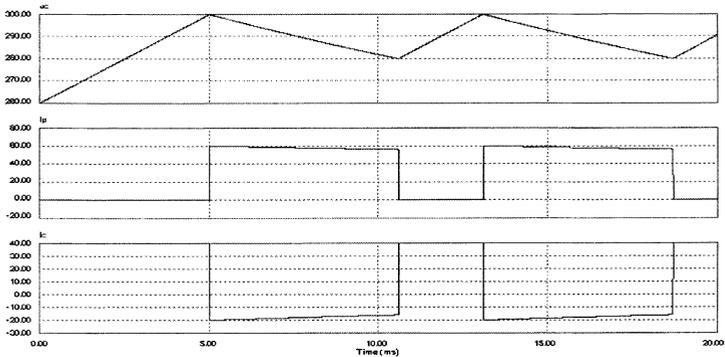


- b Pour l'intervalle de temps compris entre 0 et t_1 : $I_S = C \frac{du_c}{dt}$ car T_P est fermé.
- c Le courant I_S est constant ainsi que la dérivée de la tension u_c . La tension $u_c(t)$ est une fonction linéaire.
- d Le calcul de la capacité du condensateur donne $C = 5\text{mF}$ avec $\Delta u_c = 40\text{V}$ et $t_1 = 5\text{ms}$.
- e La puissance restituée par le hacheur est dissipée par la résistance R_p d'où $I_p = \sqrt{\frac{P}{R_p}} = 47,5\text{A}$.
- f Graphe du courant $i_p(t)$:

- i_p est nulle lorsque T_P est bloqué
- i_p est égal à u_c/R_p lorsque T_P est passant. Il décroît de 60 A à 56 A en régime permanent.

Le graphe de $i_c(t)$ est donné par la loi des nœuds (on vérifie que $\langle i_c \rangle = 0$) :

- $i_c(t) = 40\text{A}$ lorsque T_P est passant,
- $i_c(t)$ croît de -20A à -16A lorsque T_P est bloqué.

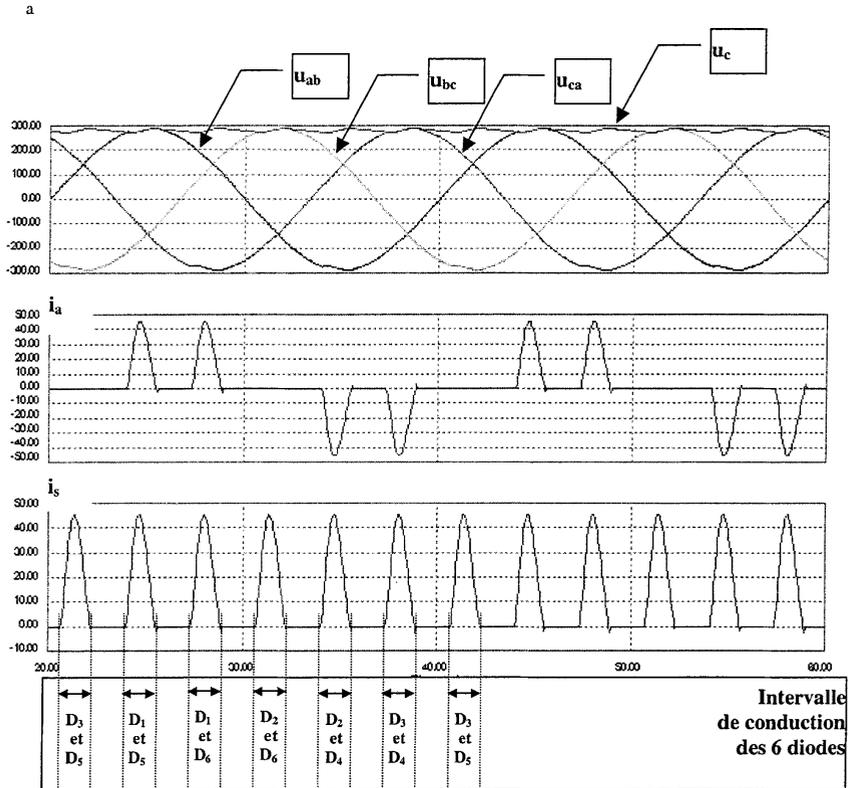


133 Comparaison des temps de freinage.

- a Le moteur n'est pas alimenté. Le moment du couple d'accélération est tel que $J \frac{d\Omega}{dt} = -\Gamma_C$.
- b La vitesse s'annule après un temps Δt tel que $\Delta t = -J \frac{\Delta\Omega}{\Gamma_C} = 9,4\text{s}$.

c Le hacheur fonctionne en récupération, l'intensité du courant d'induit est constante $\langle i \rangle = -73$ A. Le moment du couple électromagnétique permet de réduire le temps de freinage: $\Delta t = \frac{J\Delta\Omega}{K \langle i \rangle - \Gamma_c} = 2,35$ s

2 Charge de la batterie d'accumulateurs par le réseau.



b Le document 4 donne la fréquence et la valeur efficace I_1 du fondamental du courant : $f = 50$ Hz et $I_1 = 14/\sqrt{2}$ A.

c La valeur efficace du courant I est telle que : $I^2 = I_1^2 + \sum_{k=2}^{\infty} I_k^2$ et évidemment $\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2 = I^2 - I_1^2$ qui peut être placée dans l'expression précédente de THD%. On a $I = 16,6$ A et $I_1 = 9,9$ A d'où THD % = 135 %.

d Le spectre ne comporte pas d'harmonique de rang pair car le courant $i_a(t)$ est une fonction telle que $i_a(t) = i_a(t+T/2)$.

e On sait que $\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2} = 10^2 \cdot \text{THD}\%$. D'où la relation : $D = 3VI_1 \frac{\text{THD}\%}{100}$. On calcule $D = 4651$ VA

f On rappelle $S^2 = P^2 + D^2 + Q^2$ on en déduit $Q^2 = (3VI)^2 - (P^2 + D^2)$, on calcule $Q = 180$ VAR qui est très faible vis à vis des autres puissances mises en jeu.

g Le facteur de puissance du fondamental $\cos \varphi_1$ est proche de 1 car $\cos \varphi_1 = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$, on en déduit que i_1 , la composante fondamentale de i_a , est en phase avec v_a .

h Le facteur de puissance $F_p = \frac{P}{S}$ est égal à 0,59. Cette valeur faible est due à la présence importante d'harmoniques de courant appelés par le montage redresseur. Pour améliorer le facteur de puissance, il faut filtrer les courants harmoniques :

- en plaçant une bobine en sortie du pont redresseur,
- en plaçant un filtre à l'entrée du montage.

2.2. Le transformateur triphasé.

Les caractéristiques sont les suivantes :

Couplage Yd, S = 6,3 kVA, la tension efficace composée au primaire $U_p = 400$ V et la tension efficace composée à vide au secondaire $U_{SV} = 208$ V.

a $I_{1nom} = \frac{S}{\sqrt{3}U_p} = 9,09$ A et $I_{2nom} = \frac{S}{\sqrt{3}U_{SV}} = 17,5$ A

b $m = \frac{U_{SV}}{U_p} = 0,52$ et $N_2/N_1 = \sqrt{3}m = 0,90$

c La tension appliquée aux bornes de Z_S est mV_{PCC} donc $mV_{Pcc} = Z_S \cdot I_{Snom}$ avec $I_{Snom} = I_{Pnom}/m$. On en déduit l'expression de

$$U_{Pcc} = \sqrt{3} V_{Pcc} = \sqrt{3} Z_S \frac{I_{Pnom}}{m^2}$$

d L'impédance ramenée au secondaire est $Z_S = \frac{m^2 U_{Pcc}}{\sqrt{3} I_{Pcc}}$

avec $U_{Pcc} = \frac{U_{Pcc} \cdot U_{Pnom}}{100} = 19,2$ V, on calcule $Z_S = 330$ mΩ.

e On sait que $U_{Snom} = U_{SV} \cdot (1 - \Delta U) = 199,7$ V

f La puissance active nominale : $P_S = \sqrt{3} U_{Snom} I_{Snom} \cos \varphi = 4842$ W.

g Le constructeur donne $\eta = 0,92$ d'où $P_p = 5263$ W.

h Les pertes du transformateur valent 421 W et les pertes Joule $p_j =$ pertes – pertes fer = 296 W . Les pertes Joule $p_j = 3 \cdot R_S \cdot I_S^2$ ceci donne la résistance ramenée au secondaire $R_S = 322$ mΩ.

i On en déduit la valeur de $X_S = \sqrt{Z_S^2 - R_S^2} = 72$ mΩ.

j La valeur efficace du courant traversant un court-circuit franc au secondaire est $I_{Scc} = \frac{mV_{Pnom}}{Z_S} = 364$ A.

Deuxième problème

PARTIE A : le capteur Pt_{100} :

A1

A11 - $R = \rho \frac{l}{\pi d^2}$ d'où $d = \sqrt{\frac{4 \rho l}{\pi R}}$ soit un diamètre de 11,2 μm.

A12-II faut d'une part R assez grand pour améliorer la sensibilité donc, soit grande longueur mais alors problème d'encombrement, soit petit diamètre mais alors problème de solidité. D'où un compromis sensibilité robustesse.

A2

A21- A l'ordre 2 : $\frac{R_T}{R_0} = 1 + \alpha T + \alpha \frac{\delta T}{100} - \alpha \frac{\delta T^2}{10^4}$ donc $A = \alpha (1 + 10^{-2} \delta)$ et $B = -\alpha \delta 10^{-4}$

A22- à 20°C $1,0779 = 1 + 20A + 400B$ et à 100°C $1,385 = 1 + 100A + 10^4 B$
soit $A = 3,906 \cdot 10^{-3}$ et $B = -5,625 \cdot 10^{-7}$.

A23- A a pour unité K^{-1} ou $^{\circ}C^{-1}$ et B a pour unité K^{-2} ou $^{\circ}C^{-2}$.

A24- L'écart maximal se situe aux environs de $T = 45^{\circ}C$ et vaut alors environ $1,2 \cdot 10^{-3}$.

A25- La linéarisation de tels capteurs se fait en plaçant en série une résistance d'un métal dont le coefficient B est positif le nickel par exemple.

A31

A311-II existe un double bouclage mais le taux de réaction positive sur E^+ fait avec $R_T // R_1$ est inférieur au taux de réaction négative sur E^- donc fonctionnement linéaire de l'A.O.

A312-Même courant I_2 dans les deux résistances R_2 $I_2 = \frac{V_{E^-} - V_{s1}}{R_2} = \frac{V - V_{E^-}}{R_1}$. Avec une loi des

nœuds sur E^+ $I = I_1 - I_2$ d'où $I = -\frac{V_{E^+}}{R_1} - \frac{V}{R_1} + \frac{V_{E^-}}{R_1}$ donc $I = -V/R_1$ A.N. : $I = -1 \text{ mA}$.

A313-II faut une faible intensité dans la sonde pour éviter l'auto-échauffement. (ASCH).

A314-Avec $R_2 = R_1$ on limite l'excursion de V_{E^+} à $\pm 1/2 V_{\text{sat}}$. Alors qu'avec $R_1 > R_2$ on a une plus grande plage d'excursion de tension.

A315- $V_R = -R_T \cdot I$ à $T = 0^{\circ}C$ $V_{R0} = -0,1 \text{ V}$ et à $T = 100^{\circ}C$ $V_{R100} = -0,1385 \text{ V}$.

A32

A321- l'A.O. n°3 est inverseur amplificateur et sommateur. $V_T = -\frac{R_3}{R_4} V_R - \frac{R_3}{R_3} V'$.

A322- Condition 1 on veut $V_T = 0$ à $T = 0^{\circ}C$ soit $V' = -V_{R0} \frac{R_3}{R_4}$ A.N. $V' = 1 \text{ V}$.

A323- Condition 2 on veut $V_T = 10 \text{ V}$ à $T = 100^{\circ}C$ A.N. $R_5 = 260 \text{ k}\Omega$.

A324- R_5 sera réalisée par un potentiomètre ajustable en série avec une résistance talon.

A325 - $V_T = kT$ avec $k = 0,1 \text{ V} \cdot K^{-1}$. (ou $\text{V} \cdot ^{\circ}C^{-1}$).

Partie B : la commande en tout ou rien :

B1

B11- On minimise ainsi les pertes d'énergie liées aux commutations du transistor.

B12- L'étage de sortie d'un A.O. type 081 est un push-pull avec résistances d'émetteur. Il existe donc au moins le $V_{C\text{Esat}}$ de chacun des deux transistors.

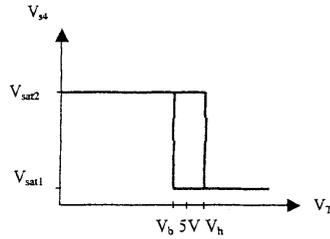
B13- $V^+ = \frac{V_C R_T}{R_6 + R_T} + \frac{V_{\text{sat}} R_6}{R_6 + R_T}$ seuils $V_b = \frac{V_C R_T}{R_6 + R_T} + \frac{V_{\text{sat}} R_6}{R_6 + R_T}$ et $V_h = \frac{V_C R_T}{R_6 + R_T} + \frac{V_{\text{sat}} R_6}{R_6 + R_T}$ ou encore :

$V_b = \frac{V_C (R_6 + R_T)}{R_6 + R_T} + \frac{(V_{\text{sat}} - V_C) R_6}{R_6 + R_T}$ soit $V_b < V_C$ et $V_h = \frac{V_C (R_6 + R_T)}{R_6 + R_T} + \frac{(V_{\text{sat}} - V_C) R_6}{R_6 + R_T}$ soit $V_h > V_C$.

B14- $\Delta V = \frac{(V_{\text{sat}2} - V_{\text{sat}1}) R_6}{R_6 + R_T}$

B15- $R_T = R_6 \left(\frac{V_{\text{sat}2} - V_{\text{sat}1}}{\Delta V} - 1 \right)$ d'où $R_T = 39 \text{ k}\Omega$.

B16- Avec $V_C = 5 \text{ V}$, $V_b = 4,91 \text{ V}$ et $V_h = 5,21 \text{ V}$ d'où :



B17- Les températures extrêmes de consigne sont 15°C et 135°C.

B2

B21- A l'origine. $V_T = 2V$, $V_{s4} = 13,5V$, la diode zéner et le transistor sont passants.

B22- Au vu des caractéristiques des relais, intensité nominale de l'ordre de 30mA, il faut un courant de base minimum, compte tenu du transistor, de l'ordre de 300µA. Pour tenir compte d'un sursaturation on peut prendre un courant de 500 à 600µA. Aux bornes de R_B on a une tension de 10,2V ce qui conduit à une valeur de résistance R_B de l'ordre de 19 kΩ.

La différence entre les deux relais est la tension nominale ou leur résistance. Le second relais permet une meilleure saturation.

B23- L'indice IP renseigne sur les degrés de protection procurés par les enveloppes du matériel électrique. Le 1^{er} chiffre pénétration des solides le 2nd pénétration des liquides.

B24- D_1 sert de diode de roue libre pour le relais.

B25- D_2 assure un blocage correct du transistor, nécessaire quand $v_{s4} = 1,5V$.

B26- Au départ avec $T_{amb} < T_c$, le transistor est passant, la résistance chauffante est alimentée donc V_T augmente jusqu'à V_h , v_{s4} bascule, le transistor se bloque et la résistance n'étant plus alimentée, V_T diminue jusqu'au nouveau basculement. Donc régulation autour d'une consigne.

PARTIE C : modèle thermique :

C1

C11- R_{th3} , résistance thermique, traduit l'échange d'énergie entre la plaque de test et l'air ambiant. $R_{th3} = \frac{T_3 - T_{amb}}{P_3}$

C12- La plaque de chauffage nécessite pour s'échauffer de T_{amb} à T_2 une quantité d'énergie ;

On définit C_2 , capacité thermique de la plaque de chauffage par $C_2 = \frac{T_2 - T_{amb}}{dt} = P_2$

C13- D'après les définitions des grandeurs R_{th} est en KW^{-1} et C en JK^{-1} . τ est en seconde A.N. $\tau_2 = 1600s$ et $\tau_3 = 1000s$.

C14-Analogies :

Grandeur électrique	Grandeur électrique
Différence de potentiel	Différence de température
Intensité	Puissance
Résistance	Résistance thermique
Capacité	Capacité thermique

C2

C21- $P_{1(p)} = P_{2(p)} + P_{3(p)}$.

$P_{2(p)} = X_{2(p)} / Z_{2(p)}$ avec $Z_{2(p)} = \frac{R_{th2}}{1 + \tau_2 p}$

$$P_{3(p)} = X_{3(p)} / Z_{3(p)} \quad \text{avec} \quad Z_{3(p)} = \frac{R_{H3}}{1 + \tau_3 p}$$

C22- $X_{3(p)} = X_{2(p)} \frac{Z_{3(p)}}{R_{H4} + Z_{3(p)}}$ donc il vient $X_{2(p)} = X_{3(p)} \left[1 + \frac{R_{H4}}{R_{H3}} (1 + \tau_3 p) \right]$

C23- $P_{(p)} = P_{1(p)} = P_{2(p)} + P_{3(p)}$. Soit : $P_{(p)} = \frac{X_{2(p)}^2}{R_{H2}} (1 + \tau_2 p) + \frac{X_{3(p)}^2}{R_{H3}} (1 + \tau_3 p)$

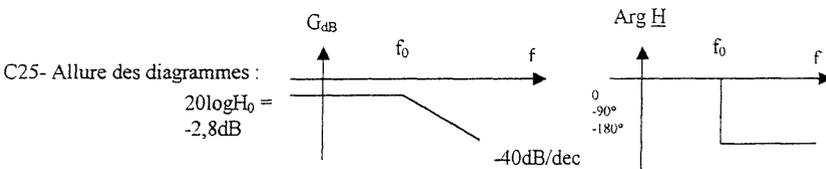
C24- $P_{(p)} = X_{3(p)}^2 \left[\frac{1 + \tau_2 p}{R_{H2}} + \frac{R_{H4}}{R_{H3}} (1 + \tau_3 p) + \frac{1 + \tau_3 p}{R_{H3}} \right]$

Après calculs et mise en forme :

$$H(p) = \frac{\frac{R_{H2} R_{H3}}{R_{H2} R_{H3} R_{H4}}}{1 + \frac{R_{H4}(\tau_2 + \tau_3) + R_{H3}\tau_2 + R_{H2}\tau_3}{R_{H2} + R_{H3} + R_{H4}} p + \frac{R_{H4}\tau_2\tau_3}{R_{H2} + R_{H3} + R_{H4}} p^2} \quad \text{ou} \quad H(p) = \frac{0,727}{1 + 1254p + 1,45510^2 p^2}$$

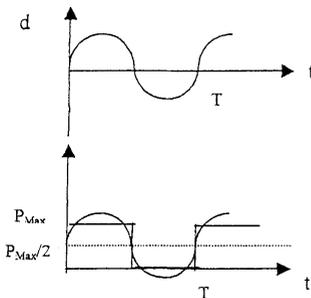
A.N. $H_0 = 0,727 \text{KW}^{-1}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{R_{H2} + R_{H3} + R_{H4}}{R_{H4}\tau_2\tau_3}}$ soit $\omega_0 = 2,62 \text{mrads}^{-1}$ ou $f_0 = 0,417 \text{mHz}$

$m = \frac{R_{H4}(\tau_2 + \tau_3) + R_{H3}\tau_2 + R_{H2}\tau_3}{R_{H2} + R_{H3} + R_{H4}} \sqrt{\frac{R_{H2} + R_{H3} + R_{H4}}{R_{H4}\tau_2\tau_3}}$ soit $m = 1,64$.



C3
C31

$$P_{1(t)} = (2P_{\text{Max}}/\pi) \sin \omega t$$



C32- On ne garde que le fondamental parce que le processus est de type passe-bas et que les harmoniques seront donc fortement atténués par l'inertie thermique.

C33- $NL_{1(\omega)} = \frac{2P_{\text{Max}}}{\pi D}$ constante positive.

C34

C341- Il faudrait $[NL_{1(\omega)} H_{1(\omega)} = -1]$

C342- Ici la condition n'est pas possible car avec $NL_1 > 0$ il faudrait $\text{arg } H = -180^\circ$ et alors H tend vers 0. Donc pas d'oscillation spontanée.

C35

C351- Sur le diagramme du gain pente de -6dB/dec quand f tend vers l'infini, donc ordre 3.Sur le diagramme de phase $\arg \underline{H}$ tend vers -270° quand f tend vers l'infini, ordre 3.C352- Pour $\arg \underline{H} = -180^\circ$ on trouve $G = -32\text{dB}$ donc $NL_1 = 39,1\text{WK}^{-1}$.

C36

C361- $D = \frac{2P_{\text{Max}}}{\pi N L_1}$ soit $D_{\text{lim}} = 4,8^\circ\text{C}$.C362- Crête à crête $9,6^\circ\text{C}$.C363- Compte tenu de la sensibilité k on a $\Delta V_T = 0,96\text{V}$.C364- Avec la valeur $\Delta V = 0,3\text{V}$ de la question B15 il y a oscillation du système thermique.C365- Pour remédier à cela il faut augmenter le ΔV_T donc ici diminuer la valeur de R_7 .

Capès de sciences physiques

Concours interne

SECTION PHYSIQUE ET CHIMIE

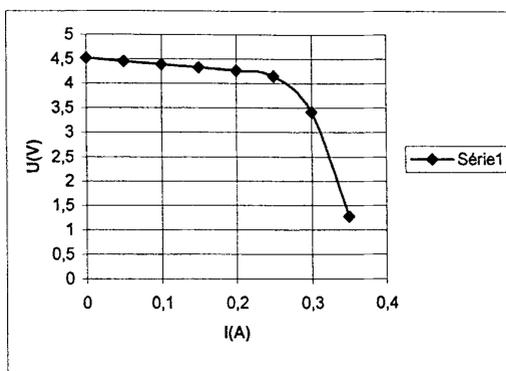
Épreuve de physique et chimie ♦ Session : 2002

I. Réalisation d'un générateur idéal de tension

1.1 Etude d'une pile électrochimique

1.1.1. Le bouton poussoir sert d'interrupteur. On peut faire passer le courant un bref instant.

1.1.2. On obtient la courbe suivante :



Jusqu'à environ 250mA la courbe est une droite de pente $a = -1,33 \text{ V/A}$ et d'ordonnée à l'origine 4,52V.

$$\text{Équation : } U_{PN} = -1,33I + 4,52$$

$$E = 4,52 \text{ V et } r = 1,33 \Omega$$

1.2 Montage avec amplificateur opérationnel

L'amplificateur est idéal donc $i_+ = i_- = 0$ et $U_{E+E-} = 0$

Boucle SM passant par E+ et E- :

$$U_{SM} = U_{SE+} + U_{E-E+} + U_{E+M} = 0 + 0 + E - r i^+ = E$$

R n'intervient plus, on obtient un générateur de tension idéal de fem égale à E

2. Mesure de la résistance R d'un conducteur ohmique par une méthode électrocinétique

$$2.1. u_{SM} = u_R + u_C = E$$

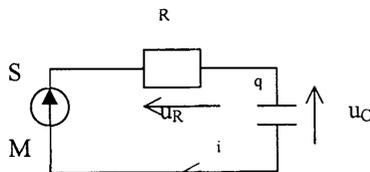
$$u_C = q/C \text{ et } u_R = Ri \text{ et } i = dq/dt \text{ d'où}$$

$$E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$$

2.2 solution sans second membre

$$u_C = A e^{-t/RC} \text{ solution particulière } u_C = E \text{ d'où en tenant compte de } u_C = 0 \text{ pour } t = 0$$

$$u_C = E - E e^{-t/RC} = E(1 - e^{-t/RC})$$



2.3. $\tau = RC$

Méthode possible : pour $t = RC$ on a $u_c = E(1 - e^{-1}) = 0,63 E$. τ est l'abscisse du point de concours de la courbe avec la droite horizontale d'équation $u_c = 0,63 E$

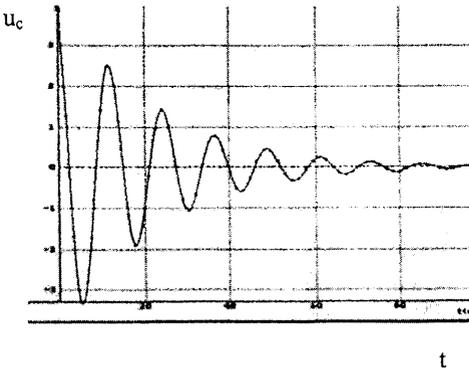
2.4. On lit $\tau_1 = KC = 16 \text{ ms}$ et $\tau_2 = RC = 46 \text{ ms}$

d'où $R = K \tau_2 / \tau_1 = 220 \times 46 / 16 = 632 \Omega$

d'où $C = \tau_1 / K = 73 \mu\text{F}$

3. Mesure de la résistance R d'un conducteur ohmique par recherche du régime critique

3.1. On obtient des oscillations libres amorties, régime pseudo-périodique



3.2. Énergie électrostatique stockée dans le condensateur au départ puis transformée en énergie électromagnétique par la bobine puis à nouveau emmagasinée dans le condensateur, etc...

L'énergie diminue par pertes par effet Joule dans les résistances du circuit.

3.3. Acquisitions successives de $u_c = f(t)$ en modifiant K jusqu'à disparition des oscillations ou..... ?

$$3.4. R_{\text{tot}} = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Q = CU = It \text{ donc } C \text{ en } \text{A.s.V}^{-1} \quad e = -L \frac{di}{dt} \text{ donc } L \text{ en } \text{V.s.A}^{-1}$$

$$\text{donc } R_{\text{tot}} = \left(\frac{\text{V.s.A}^{-1}}{\text{A.s.V}^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} = \text{V.A} = \Omega$$

Plus rigoureux avec les grandeurs mais plus lourd (à discuter)

$$R_{\text{tot}} = 2 \sqrt{\frac{0,40}{2,2 \cdot 10^{-6}}} = 853 \Omega \text{ d'où } R = 853 - 189 - 20 = 644 \Omega$$

4. Mesure de la résistance R d'un conducteur ohmique par calorimétrie

4.1. calorimètre : cuve à double paroi isolante, couvercle percé pour thermomètre et agitateur.

4.2. On part de l'hypothèse que toute la glace est passée de -20°C à 0°C puis qu'une masse m de glace a fondu.

$$Q1 \text{ calorimètre et eau} = C (\theta_e - \theta_i) + m_e c_e (\theta_e - \theta_i)$$

$$Q2 \text{ glace} = m_g c_g (\theta_e - \theta_g) + m L_f$$

Le système est thermiquement isolé donc $Q1 + Q2 = 0$

$$C (\theta_e - \theta_i) + m_e c_e (\theta_e - \theta_i) + m_g c_g (\theta_e - \theta_g) + m L_f = 0$$

$$\text{Donc } m = - [C (\theta_e - \theta_i) + m_e c_e (\theta_e - \theta_i) + m_g c_g (\theta_e - \theta_g)] / L_f$$

$m=16,2 \text{ g}$

$m'_g = 88,7-16,2 = 72,5\text{g}$

$m'=100+16,2 = 116,2\text{g}$

4.3. On suppose que la chaleur dégagée par effet Joule est entièrement absorbée par la glace.

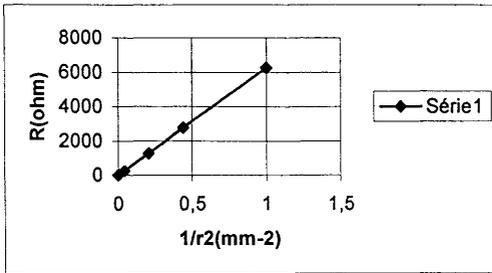
$W = RI^2t = m'_g L_f$ d'où $R = m'_g L_f / I^2t = 652 \Omega$

4.4. résultats successifs : 632Ω , 644Ω et 652Ω

5. Etude de la conduction électrique des métaux

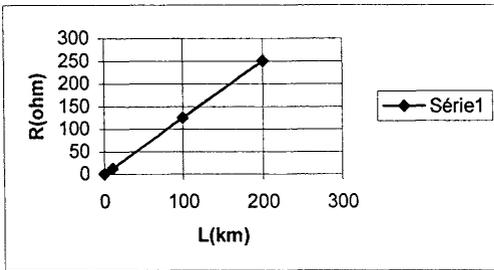
5.1. Les résistances en série s'ajoutent ; les conductances en parallèle également.

5.2. On fixe une valeur de L, par exemple 200km. On représente R en fonction de $1/r^2$



La représentation est bien une droite de pente $p1 = \frac{\rho L}{\pi} = 6,3 \cdot 10^{-3} \Omega \cdot m$

On représente R en fonction de L, en fixant par exemple $r = 5\text{mm}$



La représentation est bien une droite de pente $p2 = \frac{\rho}{\pi r^2} = 1,25 \cdot 10^{-3} \Omega/m$

Calcul de ρ grâce aux valeurs $r=1\text{mm}$, $L=200\text{km}$ et des pentes $p1$ et $p2$:

$$p1 \times p2 = \frac{\rho L}{\pi} \times \frac{\rho}{\pi r^2} \text{ d'où } \rho = \sqrt{\frac{p1 p2 \pi^2 r^2}{L}}$$

$\rho = 9,8 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$

5.3.

5.3.1. μ/M désigne la quantité de matière d'atomes de métal par m^3 , donc la quantité de matière d'électrons libres par m^3 .

Donc $\delta = \frac{\mu}{M} \times N$ avec N nombre d'avogadro

5.3.2.

$$dx = v \cdot dt$$

$$dV = S \cdot v \cdot dt$$

$$dN = \delta \cdot S \cdot v \cdot dt$$

$$|dq| = \delta \cdot S \cdot v \cdot e \cdot dt \text{ or } |I| = \left| \frac{dq}{dt} \right| \text{ donc } I = \delta \cdot S \cdot v \cdot e$$

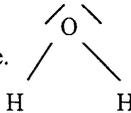
5.3.3. Application numérique : $\delta = 8,48 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ et $v = 7,34 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$
Valeur très faible, les électrons avancent très lentement.

Partie B : chimie

1. Etude du solvant eau.

1.1. Structure de l'eau

Type AX_2E_2 , molécule coudée.



1.2. L'eau, solvant polaire

1.2.1. La différence d'électronégativité entre H et O explique la polarisation des liaisons.

1.2.2. Les liaisons hydrogène.

1.2.3. Interaction électrostatique entre le bâton, porteur de charges et les molécules d'eau, qui se comportent comme des dipôles.

1.3. Conductivité de l'eau pure

L'eau contient des ions H_3O^+ et HO^- en quantités faibles mais non nulles.

$$\gamma_0 = \lambda^\circ_{(H_3O^+)} \times [H_3O^+] + \lambda^\circ_{(HO^-)} \times [HO^-] = 3,498 \times 10^{-2} \times 10^{-4} + 1,986 \times 10^{-2} \times 10^{-4}$$

$$\gamma_0 = 5,48 \times 10^{-6} \text{ S.m}^{-1} \text{ valeur inférieure à la valeur mesurée.}$$

L'écart provient du fait que l'eau fraîchement distillée s'est sans doute chargée d'ions pendant la distillation (dissolution de dioxyde de carbone)

1.4. Électrolytes forts et électrolytes faibles

Un électrolyte fort est entièrement dissocié dans l'eau, un électrolyte faible ne l'est pas.

Acide chlorhydrique : fort acide acétique : faible

Justification ?

2. Applications aux réactions autres que les réactions acide-base.

2.1 Réactions de précipitation

2.1.1. Solubilité du chlorure d'argent

2.1.1.1. $AgCl(s) \Leftrightarrow Ag^+ + Cl^-$

La solution est saturée donc la concentration des ions est égale à la solubilité de AgCl

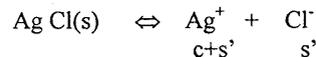
$$\gamma = s \times \lambda(Ag)^+ + s \times \lambda(Cl)^- \text{ d'où } s = \frac{\gamma}{\lambda_{Ag^+} + \lambda_{Cl^-}} = \frac{1,84 \cdot 10^{-4}}{6,19 \cdot 10^{-3} + 7,63 \cdot 10^{-3}} = 1,33 \times 10^{-2} \text{ mol.m}^{-3}$$

$$s = 1,33 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$Ks = s^2 = 1,76 \times 10^{-10}$$

$$pKs = 9,75$$

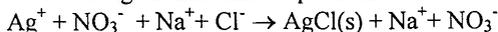
2.1.1.2.



$K_s = (c + s')(s') = c \cdot s'$ car s' est très certainement très négligeable devant c ($2,0 \cdot 10^{-1}$ mol/L)
 D'où $s' = \frac{K_s}{c} = 8,8 \cdot 10^{-10}$ mol.L⁻¹ qui est bien très inférieur à c et aussi à s (effet d'ion

commun)

2.1.2. Dosage conductimétrique d'une solution de sérum physiologique



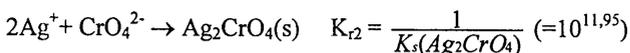
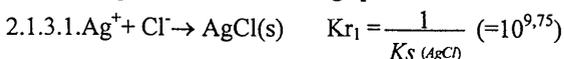
Avant l'équivalence, dans le becher, cela revient à remplacer les ions Cl⁻ par des ions NO₃⁻ de conductivité molaire ionique plus faible donc γ diminue. Après l'équivalence, on ajoute dans la solution des ions Ag⁺ et NO₃⁻ qui ne sont pas consommés donc γ augmente. On opère dans une grande quantité d'eau pour négliger les considérations de volume.

On lit $v_e = 15$ mL

A l'équivalence, les réactifs ont été mis en présence dans les proportions stoechiométriques donc $c_0 v_0 = c v_e$

$$c_0 = 0,15 \text{ mol.L}^{-1}$$

2.1.3. Comparaison avec le dosage par la méthode de Mohr.



$$[\text{Cl}^-]_0 = \frac{c_0 v_0}{v_0 + v_{\text{eau}} + v'} \quad [\text{CrO}_4^{2-}] = \frac{c' v'}{v_0 + v_{\text{eau}} + v'} \quad (= \frac{2,0 \cdot 10^{-1} \times 0,25 \cdot 10^{-3}}{60,25 \cdot 10^{-3}} = 8,3 \cdot 10^{-4} \text{ mol/L})$$

2.1.3.2. $c_0 = \frac{c' v_e}{v_0} = 0,151$ mol/L résultat semblable au dosage précédent (chiffres significatifs ?)

2.1.3.3. La couleur rouge apparaît dès que $[\text{Ag}^+][\text{CrO}_4^{2-}] = K_s(\text{Ag}_2\text{CrO}_4)$

c'est à dire quand $[\text{Ag}^+] = \sqrt{\frac{K_s}{[\text{CrO}_4^{2-}]}} = 4,11 \times 10^{-5}$ mol/L avec

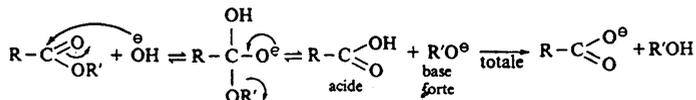
$$[\text{CrO}_4^{2-}] = \frac{2,0 \cdot 10^{-1} \times 0,25 \cdot 10^{-3}}{60,25 \cdot 10^{-3}} = 8,3 \cdot 10^{-4} \text{ mol/L}$$

Alors $[\text{Cl}^-] = \frac{K_s(\text{AgCl})}{[\text{Ag}^+]} = 4,3 \cdot 10^{-6}$ mol/L, négligeable devant les concentrations initiales.

2.2. Réaction de saponification



Mécanisme:



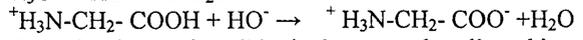
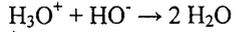
HO⁻ est le nucléophile et le carbone de COOR' est l'électrophile

Réaction lente et totale

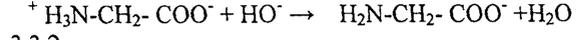
D'où $K_{a1} \times K_{a2} = [H_3O^+]^2$ et $pH = \frac{1}{2} (pK_{a1} + pK_{a2})$

3.3.1. Avant l'ajout de base, les espèces majoritaires sont AH_2^+ , H_3O^+ en excès et Cl^-

On dose d'abord l'acide fort en excès puis la forme acide de la glycine jusqu'à V_{e1}



Entre les deux points d'équivalence, on dose l'amphion



3.3.2.

Entre les deux équivalences on dose une acidité de l'acide aminé donc

$$c_0 V_0 = c_b (V_{e2} - V_{e1}) \text{ d'où } c_0 = \frac{1 \times 5}{50} = 0,1 \text{ mol/L réfléchir aux chiffres significatifs}$$

Avant la première équivalence, cela revient à doser la quantité d'acide chlorhydrique versé :

$$n_{\text{acide versé}} = c_b V_{e1} = 1,00 \times 6 \times 10^{-3} = 6 \times 10^{-3} \text{ mol.}$$

$$\text{On retrouve bien } c_a V_a = 60,0 \times 10^{-3} \times 1,00 \times 10^{-1} = 6 \times 10^{-3} \text{ mol.}$$

Cahier des concours
CA/PLP 2002 :
Les énoncés - Les corrigés

1129

JF.2

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

CA/PLP

CONCOURS EXTERNE

ÉNONCÉ

Section : MATHÉMATIQUES - SCIENCES PHYSIQUES

COMPOSITION DE PHYSIQUE-CHIMIE

Durée : 4 heures

*Calculatrice autorisée (conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999)***Il est recommandé aux candidats de partager également le temps entre la physique et la chimie.**

La composition comporte cinq exercices **tous indépendants**. Les candidats peuvent donc les résoudre dans l'ordre qui leur convient ; ils sont cependant tenus de **respecter la numérotation de l'énoncé**.

Les énoncés des exercices sont souvent longs mais les questions posées n'appellent généralement que des réponses ne justifiant pas de longs développements.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.

Les correcteurs tiendront le plus grand compte des qualités de soin et de présentation.

PLAN DU SUJET

PARTIE A. – CHIMIE

EXERCICE I . – **Le phosphore et ses dérivés.**EXERCICE II . – **Synthèse du paracétamol.**

PARTIE B. – PHYSIQUE

EXERCICE I . – **Étude de l'objectif d'un photocopieur.**EXERCICE II . – **Circuit en courant alternatif.**EXERCICE III. – **Étude d'un barrage.**

III. Les chlorures de phosphore

III.1. Le trichlorure de phosphore PCl_3 et le pentachlorure de phosphore PCl_5 sont des agents de chloruration (encore appelés agents de « chloration »), très utilisés en chimie organique.

- Écrire la structure de Lewis de la molécule PCl_3 . En déduire sa géométrie.
- Interpréter électroniquement l'existence de la molécule PCl_5 . Quelle en est la géométrie ? La dessiner.

III.2. Par chauffage, le pentachlorure de phosphore se dissocie selon l'équilibre :



À 230°C et sous une pression $p_1 = 1,0$ bar, la densité d du mélange gazeux par rapport à l'air vaut 4,62.

- Déterminer la valeur du degré de dissociation α_1 de PCl_5 dans ces conditions de température et de pression.
- En déduire la valeur de la constante d'équilibre non dimensionnée relative aux pressions, K° .
- En chimie organique pour réaliser une chloruration à partir de PCl_5 on procède plutôt sous basse pression. Expliquer pourquoi.
Calculer le degré de dissociation α_2 à la température de 230°C , sous une pression totale $p_2 = 0,50$ bar.
- Quelle serait la composition volumique du mélange obtenu à l'équilibre sous une pression de 1,0 bar et à 230°C par chauffage d'un mélange initial contenant 0,3 mole de PCl_5 et 0,3 mole de PCl_3 ? Interpréter qualitativement le résultat obtenu.
- Calculer la variation d'enthalpie standard $\Delta_r H^\circ$ de la réaction considérée.

Établir l'expression $\ln K^\circ = f(T)$ pour l'équilibre correspondant.

À quelle température faudrait-il opérer pour que le degré de dissociation du pentachlorure de phosphore soit de 80 % sous une pression de 1 bar ? Commenter le résultat obtenu.

IV. L'acide phosphorique

L'acide phosphorique est un triacide de formule moléculaire H_3PO_4 .

- Écrire sa formule développée.
- Écrire les équations des trois réactions mises en jeu lors de la dissolution dans l'eau de l'acide phosphorique.
- Que peut-on dire de l'ion H_2PO_4^- dans la théorie de Brönsted ? Justifier par une définition précise.
- On verse progressivement, dans 20 mL d'une solution d'acide phosphorique de concentration égale à $5,0 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ une solution d'hydroxyde de sodium de concentration égale $1,0 \times 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$. La courbe pH-métrique révèle deux points d'équivalence. Soient v_{e_1} et v_{e_2} les volumes de soude correspondants.

- a) En comparant les trois fonctions acide de H_3PO_4 dans l'eau, quelle approximation peut-on faire dans le calcul du pH d'une solution d'acide phosphorique, lorsqu'on se contente d'une précision de l'ordre de 0,1 unité de pH?
- b) Écrire les équations des réactions qui ont lieu lors du dosage. Pourquoi les réactions sont-elles successives?
- c) Déterminer les valeurs de v_{e_1} et v_{e_2} .
- d) À partir de relations simplifiées qui ne seront pas démontrées, calculer, à 0,1 unité près, le pH du milieu réactionnel correspondant à des ajouts de soude de :
 $v \text{ (mL)} = 0 ; 5 ; 10 ; 15 ; 20$.
- e) Tracer l'allure du graphe $\text{pH} = f(v)$. Porter les coordonnées des points remarquables.
- f) Lors du dosage de l'acide phosphorique présent dans le coca-cola, on constate souvent que le volume v_{e_2} de soude versée à la seconde équivalence est supérieur à la valeur théorique. Proposer une explication.

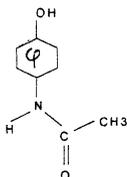
EXERCICE II. –

SYNTHÈSE DU PARACÉTAMOL

Dans cet exercice, on se propose d'examiner la préparation du paracétamol, principe actif de certains médicaments, utilisé pour ses propriétés analgésiques et antipyrétiques.

• **DONNÉES :**

Formule du paracétamol :



Une des synthèses industrielles les plus intéressantes du paracétamol comporte les étapes suivantes :

- * nitration du phénol (hydroxybenzène)
- * réduction du para-nitrophénol (1-hydroxy-4-nitrobenzène) en para-aminophénol (1-amino-4-hydroxybenzène).
- * acylation du para-aminophénol par l'anhydride acétique. Cette dernière étape peut aisément être réalisée en travaux pratiques dans les établissements secondaires.

Le phénol initial est obtenu à partir du benzène. Le procédé actuellement le plus employé (plus de 85% de la production de phénol) est le « procédé au cumène ». Ce procédé a été découvert en 1844 par Hock et Lang et il est utilisé dans l'industrie depuis les années 1950.

	état physique (25°C et 1 bar)	densité	température de fusion (°C)	température d'ébullition (°C)
1-amino-4-hydroxybenzène	Solide		186	
Anhydride éthanóique	Liquide	1,08	-73	136
acide éthanóique	Liquide	1,03		118
Paracétamol	Solide		171	
Phénol	Solide		43	182

Énergies de dissociation (coupure) de liaisons à 25°C : E_{C-H} : 410 kJ.mol⁻¹, E_{C-C} : 348 kJ.mol⁻¹, E_{C-O} : 612 kJ.mol⁻¹

Masses molaires atomiques exprimées en g.mol⁻¹ : M_H = 1 ; M_C = 12 ; M_N = 14 ; M_O = 16.

A Synthèse du cumène

- 1) On obtient le cumène ou isopropylbenzène en faisant réagir du benzène et du propylène (ou propène). Donner les formules semi-développées du benzène, du propylène et du cumène puis écrire le bilan de la réaction.
- 2) Les réactifs sont portés à 190°C sous une pression de 34 bar. La réaction a lieu en phase liquide en présence d'un catalyseur acide. La température du cumène à la sortie du réacteur est 250°C, on le sépare des sous-produits par distillation.
 - 2a) Définir un catalyseur et expliquer son effet à partir d'un diagramme énergétique que vous commenterez.
 - 2b) Quel est l'intermédiaire réactionnel obtenu à partir du propène en milieu acide ? Ecrire l'équation de la réaction de formation de cet intermédiaire.

B Synthèse du phénol

Pour obtenir du phénol, le cumène est oxydé par le dioxygène en présence d'un catalyseur.

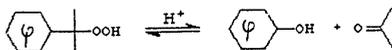
Cette synthèse, dont le rendement est de 90 %, a lieu en deux étapes indépendantes :

- La première consiste à oxyder le cumène par de l'air, à une température comprise entre 90°C et 130°C, sous une pression de 5 à 10 bar en phase liquide et à un pH d'environ 9,5. La réaction est exothermique ($\Delta_r H^0 = -117 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$). Elle aboutit à la formation d'hydroperoxyde de cumyle :



Par entraînement à la vapeur d'eau du mélange obtenu, on recueille 80% de l'hydroperoxyde de cumyle formé. Le taux de conversion est de 40%.

- La seconde est la scission de l'hydroperoxyde de cumyle suivant la réaction exothermique suivante qui se déroule en milieu acide :



($\Delta_r H^0 = -252 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$).

Cette réaction a lieu à 50°C en présence d'acide sulfurique (0,1 à 2 %). Lorsque la réaction est terminée on ajoute au mélange du phénolate de sodium puis l'ensemble est soumis à une hydrodistillation. En plus du phénol, on obtient des sous-produits valorisables, en particulier de l'acétophénone mais surtout 0,6 tonne de propanone par tonne de phénol.

- 3a) Pourquoi la scission de l'hydroperoxyde de cumyle ne se produit-elle pas lors de la première étape de la synthèse ?
- 3b) Faire un schéma légendé d'un montage d'hydrodistillation réalisable en laboratoire.
- 3c) Donner la formule brute et le nom de chacun des deux produits qui se forment lors de la scission de l'hydroperoxyde de cumyle.

C Nitrification du phénol

La nitration du phénol aboutit à un mélange d'isomères comportant 73% de composé ortho et 27% de composé para.

- 4) 4a) Pourquoi n'obtient-on pas le composé méta ?
- 4b) Comment peut-on expliquer que le composé ortho soit majoritaire dans les produits formés ?

D Synthèse du paracétamol à partir du para-aminophénol

Le 1-hydroxy-4-nitrobenzène est réduit en 1-amino-4-hydroxybenzène. Ce dernier peut être traité par l'anhydride acétique, au laboratoire comme dans l'industrie, pour donner le paracétamol. La réaction est exothermique.

Le protocole ci-dessous est proposé à des élèves de Terminale S :

Dans un erlenmeyer, on introduit successivement une masse $m = 2,8$ g de 1-amino-4-hydroxybenzène, 25 mL d'eau et 2 mL d'acide éthanóique pur. L'erlenmeyer est placé dans un bain marie à 80 °C et le mélange réactionnel est agité jusqu'à la dissolution complète. Après avoir refroidi le mélange, on introduit lentement un volume $V = 3,5$ mL d'anhydride éthanóique mesuré à l'éprouvette, tout en agitant.

En plaçant l'erlenmeyer dans un bain d'eau glacée, le paracétamol formé, ou paracétamol brut (PB), précipite sous forme de cristaux. Après filtration, lavage avec un peu d'eau et séchage, on pèse le paracétamol brut (PB) obtenu. Sa masse m , est égale à 3,2 g.

- 5)
 - 5a) Pour qualifier la réaction entre l'anhydride acétique et le 1-amino-4-hydroxybenzène, choisir deux termes appropriés parmi ceux proposés ci-après : Addition, Élimination, Substitution, Électrophile, Nucléophile. Justifier votre choix.
 - 5b) Que peut-on conclure sur la réactivité des différents sites nucléophiles de la molécule de 1-amino-4-hydroxybenzène du fait que la réaction avec l'anhydride acétique aboutit à la formation de paracétamol ?
- 6)
 - 6a) Quel est le rôle du chauffage dans le protocole ci-dessus ?
 - 6b) Pourquoi n'est-il pas nécessaire de monter un reflux ?
 - 6c) Justifier l'emploi d'une éprouvette graduée pour la mesure du volume d'anhydride acétique utilisé.
 - 6d) Comment justifier l'utilisation de l'anhydride acétique pour agir sur le 1-amino-4-hydroxybenzène alors que le milieu réactionnel contient de l'eau ?
- 7) Pour recueillir les cristaux de paracétamol on procède à une filtration sous vide.
 - 7a) Faire un schéma légendé du montage.
 - 7b) Quel est l'intérêt de cette méthode de filtration par rapport à une filtration simple par gravité ?
 - 7c) Le produit brut (PB) est ensuite recristallisé dans l'eau. Donner le principe de la technique de recristallisation.
 - 7d) Quel est l'intérêt de procéder à une recristallisation ?
 - 7e) Donner deux méthodes permettant de vérifier que le produit obtenu est bien du paracétamol ?
- 8) En procédant à l'expérience avec les quantités données dans le protocole, on a recueilli 2,01 g de paracétamol pur.

Calculer le rendement en paracétamol recristallisé obtenu.
- 9) Indiquer ce que l'on entend par propriétés analgésiques et propriétés antipyrétiques d'un médicament.

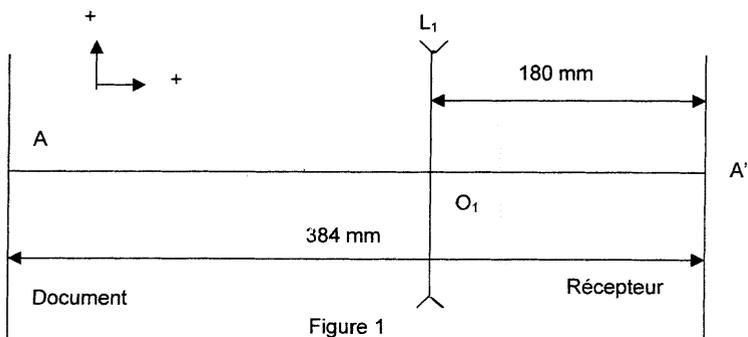
PARTIE B – PHYSIQUE

Exercice 1. Optique géométrique : étude simplifiée d'un objectif de photocopieur.

Les procédés actuels de reprographie nécessitent la formation de l'image du document sur une surface photosensible par l'intermédiaire d'un objectif de reproduction. On désire reproduire un document de format A4 soit en A4 (même format), en A3 (format double en surface) ou en A5 (format moitié en surface). On réalise ces différents tirages à l'aide d'un objectif formé d'un système à plusieurs lentilles minces en modifiant les positions respectives des lentilles à l'intérieur de ce système.

La distance entre le document et le récepteur photosensible est de 384 mm et l'on positionne une première lentille mince divergente L_1 de distance focale image $f_1 = -90$ mm à 180 mm du récepteur (figure 1).

Remarque : Les figures ci-dessous sont des schémas de principe ; ils n'ont pas été construits en respectant une échelle.



I.1. La lentille L_1 peut-elle donner une image du document sur le récepteur ? Justifier la réponse.

I.2. On ajoute alors une lentille mince L' derrière la lentille L_1 , à 180 mm du document (figure 2), les axes optiques principaux des deux lentilles étant confondus.

I.2.1. La lentille L' peut-elle être divergente ? Justifier la réponse.

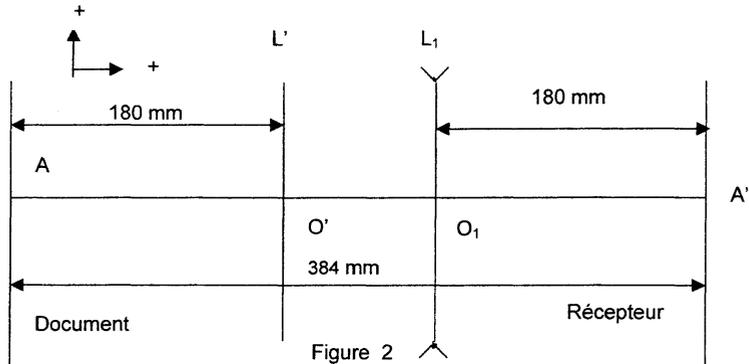
I.2.2. Calculer la distance focale image f' de cette lentille pour obtenir une image réelle du document sur le récepteur. Quelle est la puissance de cette lentille ?

I.2.3. En déduire le grandissement transversal γ_1 de l'association des deux lentilles et indiquer quel type de tirage permettra cet objectif : transformation de A4 en A3 ou de A4 en A5

I.3. En fait la lentille L' est constituée de deux lentilles minces accolées L_2 et L_3 , L_2 étant identique à L_1 .

Calculer la distance focale image f_3 de la lentille L_3 . Quelle est la nature de cette lentille mince ?

I.4. On glisse alors, parallèlement à elle-même, la lentille L_3 afin de l'accoler à L_1 en maintenant L_2 à 180 mm du document. Montrer, par exemple en utilisant le principe du retour inverse de la lumière, que l'image du document reste sur le récepteur et calculer le grandissement transversal γ_2 correspondant à l'association des trois lentilles ; en déduire le type de tirage obtenu.



I.5. Le grandissement transversal $\gamma = -1$ est obtenu par déplacement des trois lentilles de l'objectif.

I.5.1. En exploitant la symétrie du système, indiquer ce que l'on peut dire des positions relatives des trois lentilles permettant d'obtenir le grandissement transversal $\gamma = -1$.

I.5.2. Déterminer, dans ce cas, la position des points conjugués à travers la lentille L_3 . Montrer que dans ce cas les points conjugués à travers la lentille L_3 sont symétriques par rapport au centre optique de la lentille L_3 .

I.5.3. En déduire les distances entre les centres optiques O_2 , O_3 et O_1 des lentilles respectives L_2 , L_3 et L_1 .

Exercice 2. Circuit en courant alternatif sinusoïdal.

On considère un dipôle électrocinétique D . On utilise la notation récepteur (voir figure 3). On applique aux bornes du dipôle D une tension alternative sinusoïdale de valeur maximale U_M et de pulsation ω : $u(t) = U_M \cos(\omega t)$. Le dipôle est alors parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi)$.

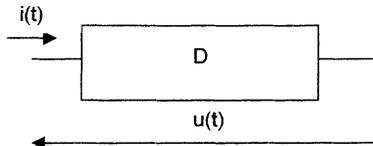


Figure 3

II.1. Définir et calculer les valeurs efficaces U et I de la tension et de l'intensité.

II.2. Définir et donner l'expression de :

- la puissance instantanée $P(t)$ consommée dans le dipôle,
- la puissance moyenne $\langle P \rangle$ consommée dans le dipôle. Avec quelle unité du système international la mesure-t-on ?
- la puissance apparente P_a . Avec quelle unité du système international la mesure-t-on ?
- du facteur de puissance f_p .

II.3. On considère un moteur électrique modélisé par un dipôle comprenant en série une bobine parfaite de coefficient d'auto-induction L et un dipôle résistif linéaire de résistance R . On alimente ce dipôle avec une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace U et de fréquence ν . La puissance moyenne consommée par le dipôle est $\langle P \rangle$.

II.3.1. Déterminer les expressions littérales de l'intensité efficace I , du coefficient d'auto-induction L et du facteur de puissance f_p en fonction de U, ν, R et $\langle P \rangle$.

II.3.2. Applications numériques : calculer I, L et f_p avec :

$$U = 220 \text{ V} \quad \nu = 50 \text{ Hz} \quad R = 55 \text{ } \Omega \quad \langle P \rangle = 400 \text{ W.}$$

II. 4. On désire relever le facteur de puissance de ce moteur. Pour cela, on ajoute un condensateur de capacité C (ou une association de condensateurs), supposé parfait, branché en parallèle sur l'installation.

II.4.1. Déterminer l'impédance équivalente de la nouvelle association.

II.4.2. On choisit $C = 16 \mu\text{F}$. Déterminer la nouvelle valeur numérique du facteur de puissance.

II.4.3. Déterminer la valeur numérique de l'intensité efficace I' du courant total absorbé par l'ensemble moteur-condensateur.

II.4.4. Quel est l'intérêt, pour la société fournissant l'électricité, d'imposer un facteur de puissance proche de l'unité ?

Exercice 3. Statique des fluides : étude d'un barrage-poids.

On se réfère au schéma de la figure 4. Un barrage est formé d'un solide indéformable, en forme de pentaèdre de base rectangulaire. Sa section est un triangle isocèle, de hauteur h , de demi-angle au sommet égal à α . Sa masse volumique est égale à μ . Il est posé sur le sol horizontal et permet de retenir l'eau d'un lac dont la masse volumique est égale à ρ .

On suppose que les seules forces qui interviennent sont liées à la pression des fluides (eau et air), au poids du barrage et aux forces de contact exercées par le sol. La longueur L du barrage est suffisamment grande pour que l'on puisse négliger les forces de liaison à ses extrémités.

On appellera P_0 la pression supposée uniforme de l'air au voisinage du barrage et g l'accélération de la pesanteur.

III.1. Exprimer la pression P exercée par l'eau sur le barrage en fonction de P_0 , z , ρ , g et h .

III.2. Calculer la résultante des forces pressantes par unité de longueur sur la face immergée du barrage. En déduire la résultante des forces pressantes par unité de longueur sur la face émergée.

III.3 On admet que ni l'air, ni l'eau ne peuvent pénétrer sous le barrage. On considère que ce dernier ne tient alors en équilibre sur le sol que par l'action de forces de frottement solide. Dans ce cas la réaction du sol par unité de longueur, sur le barrage est représentée par :

- une composante normale N verticale ascendante,
- une composante tangentielle T horizontale qui s'oppose au glissement du barrage.

Déterminer les composantes N et T , composantes de la réaction du sol sur l'unité de longueur de barrage.

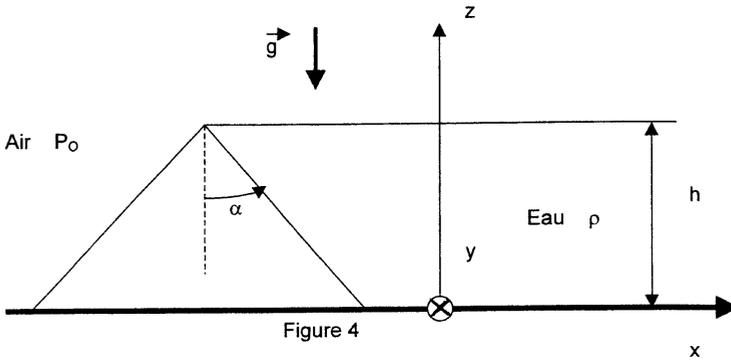
III.4. L'équilibre statique n'est garanti que si $|T| < f |N|$, expression dans laquelle f est un coefficient constant positif, appelé coefficient de frottement statique du barrage sur le sol. En déduire la valeur minimale du coefficient de frottement, pour que le barrage reste en équilibre sur le sol, sans glisser.

III.5. Application numérique.

Déterminer la valeur limite de f pour que le barrage ne glisse pas.

Données :

$$h = 10 \text{ m} ; g = 10 \text{ m.s}^{-2} ; \mu = 2.10^3 \text{ kg.m}^{-3} ; \rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3} ; \alpha = 45^\circ ; P_0 = 10^5 \text{ Pa}$$



ERRATUM

CONCOURS EXTERNE PLP

MATHEMATIQUES SCIENCES
PHYSIQUES SESSION 2002

composition de physique-chimie
(erreur concernant le phosphore)

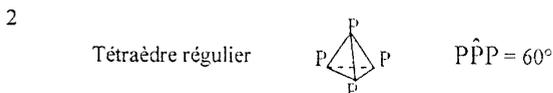
QUESTION G3 2 d

Lire: $\alpha = 3 = 0.13/0.30 = 0.43$ au lieu de 0.50

CORRIGÉ

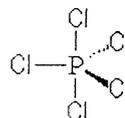
- I.
- $1 s^2 \quad 2 s^2 \quad 2 p^6 \quad 3 s^2 \quad 3 p^3$
 - L'azote et l'arsenic
 - $^{31}_{15}\text{P} : 15 p \text{ et } 16 n$ $^{32}_{15}\text{P} : 15 p \text{ et } 17 n$
 - $-III \leq n.o \leq V$ $\text{PH}_3 / \text{P}_4\text{O}_{10} \text{ ou } \text{PCl}_5$

- II.
- Le phosphore rouge car $\Delta H_f^0(\text{P}_{\text{rouge}}) < \Delta H_f^0(\text{P}_{\text{blanc}})$
 P_{rouge} utilisé dans l'industrie des allumettes



- III.
- 1.a $\left[\begin{array}{c} \text{Cl} - \text{P} - \text{Cl} \\ | \\ \text{Cl} \end{array} \right]$ arrangement de type AX_3E
 donc molécule pyramidale à base triangulaire

- 1.b Promotion d'1 é $3s \rightarrow 3d$
 Modification de structure $3 s^2 \quad 3 p^3 \rightarrow 3 s^1 \quad 3 p^3 \quad 3 d^1$
 Donc P devenu pentavalent
 Molécule bipyramidale à base triangulaire



- 2.a $M_{\text{mélange}} = 29 \times d = 134 \text{ g.mol}^{-1}$
 $M_{\text{mélange}} = [(1-\alpha) M_{\text{PCl}_5} + \alpha M_{\text{PCl}_3} + \alpha M_{\text{Cl}_2}] / (1+\alpha)$
 $= 208,5 / (1+\alpha) \Rightarrow \alpha_1 = 0,56$

- 2.b $K_0 = \alpha_1^2 / (1 - \alpha_1^2)$ avec $p_1 = p^0 = 1,0 \text{ bar}$
 $K_0(230^\circ\text{C}) = 0,45$

- 2.c Un abaissement de la pression déplace l'équilibre dans le sens d'une augmentation du nombre de moles de gaz, donc dans le sens de la formation de Cl_2
 $K_0(230^\circ\text{C}) = [\alpha_2^2 / (1 - \alpha_2^2)] (p_2 / p^0) \Rightarrow \alpha_2 = 0,69$

- 2.d
- | | | | | | |
|--------------|--------------------|----------------------|--------------------|---|-------------------|
| | PCl_5 (g) | \rightleftharpoons | PCl_3 (g) | + | Cl_2 (g) |
| Etat initial | 0,3 | | 0,3 | | 0 |
| Etat final | 0,3-x | | 0,3+x | | x |
- $K_0(230^\circ\text{C}) = (0,3+x)x / (0,6+x)(0,3-x) = 0,45$
 $x = 0,13 \text{ mol}$

$\text{Cl}_2 : 18\% \quad \text{PCl}_3 : 59\% \quad \text{PCl}_5 : 23\%$

$\alpha_3 = 0,13/0,30 = 0,50 < 0,56$: un ajout de PCl_3 déplace l'équilibre dans le sens de sa consommation donc de la formation de PCl_5

- 2.e $\Delta_r H^0 = \Delta H_f^0(\text{PCl}_3) + \Delta H_f^0(\text{Cl}_2) - \Delta H_f^0(\text{PCl}_5) = 88 \text{ kJ.mol}^{-1}$

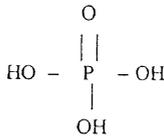
Loi de Van't Hoff
$$\frac{d \ln K_{\text{e}}}{dt} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2}$$

$$\ln K_0(T) = \ln K_0(503 \text{ K}) - \frac{\Delta_r H^0}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{503} \right)$$

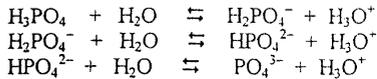
$K_o(T) = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \approx 1,8 \Rightarrow T = 538 \text{ K} = 265 \text{ °C}$ au lieu de 230 °C : c'est bien le comportement d'une réaction endothermique.

IV.

1



2



3

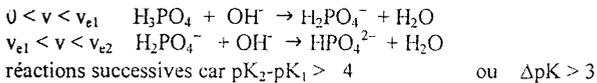
L'ion H_2PO_4^- est un ampholyte car il se comporte soit comme un acide de Brønsted (donneur d'un proton H^+) soit comme une base de Brønsted (accepteur d'un proton H^+)

4 a

$$pK_2 - pK_1 \approx pK_3 - pK_2 \approx 5$$

On peut négliger la deuxième et la troisième fonction acide devant la première et considérer H_3PO_4 comme un monoacide faible.

4.b



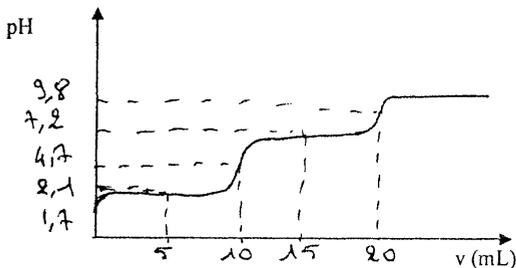
4.c

$$v_{e1} = C_a v_a / C_b = 10 \text{ mL} \quad v_{e2} = 2 v_{e1} = 20 \text{ mL}$$

4.d

$$\begin{array}{l} v = 0 \quad \text{pH} = (pK_1 - \log c) / 2 = 1,7 \\ v = 5 \text{ mL} \quad \text{pH} = pK_1 = 2,1 \\ v = 10 \text{ mL} \quad \text{pH} = (pK_1 + pK_2) / 2 = 4,7 \\ v = 15 \text{ mL} \quad \text{pH} = pK_2 = 7,2 \\ v = 20 \text{ mL} \quad \text{pH} = (pK_2 + pK_3) / 2 = 9,8 \end{array}$$

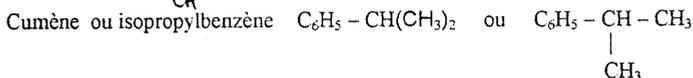
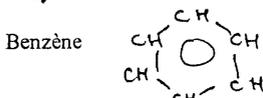
4.e



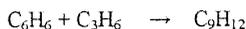
- 4.f $v_{e2} > 2 v_{e1}$ car c'est une boisson gazeuse gazeifiée au dioxyde de carbone. Il reste toujours dans la boisson décarbonatée un peu de dioxyde de carbone, acide du couple $\text{CO}_2/\text{HCO}_3^-$ qui réagit lui aussi avec OH^-

A Synthèse du cumène

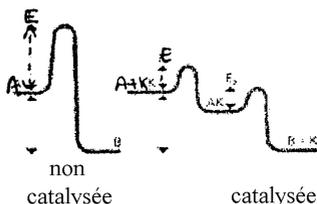
1



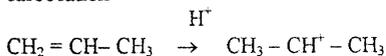
cumène



- 2a Un catalyseur est un composé qui augmente la vitesse de formation des produits mais n'apparaît pas dans le bilan réactionnel.
Le catalyseur abaisse le seuil de la barrière énergétique AE (ou diminue l'énergie d'activation)



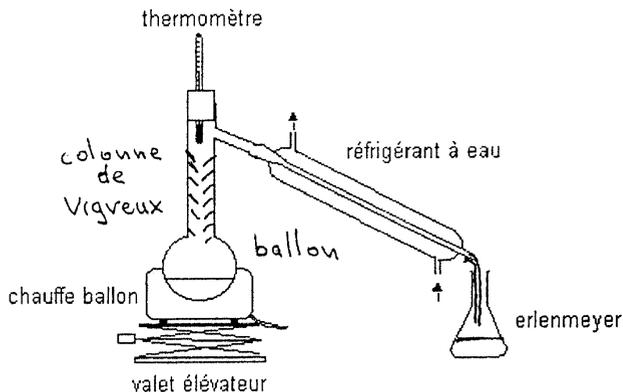
- 2b carbocation



B Synthèse du phénol

- 3a La première étape se déroule en milieu basique ($\text{pH} = 9,5$) : l'espèce prédominante est l'espèce basique, plus stable dans ces conditions que l'hydroperoxyde de cumyle.
La scission se déroule en milieu acide.

3b Hydrodistillation



- 3c phénol C_6H_5OH ou C_6H_6O
 propanone (acétone) C_3H_6O

C Nitration du phénol

4a Le composé méta ne se forme pas car les composés ortho et para sont favorisés grâce à OH : OH a un encombrement réduit donc la substitution en ortho est possible.

OH a un effet mésomère donneur marqué donc cela accentuerait plutôt la substitution en para

4b mais il a un effet inductif attracteur faible qui diminue la densité électronique sur le carbone en ortho ce qui augmente la réactivité en ortho sans défavoriser celle en para.

Globalement la substitution en ortho est donc favorisée.

D Synthèse du paracétamol à partir du para-aminophénol**5a substitution ; électrophile**

le 1-amino-4-hydroxybenzène comporte deux sites nucléophiles : l'oxygène du groupe hydroxyle et l'azote de la fonction amine.

L'anhydride acétique comporte deux sites électrophiles au niveau des carbones fonctionnels.

Il y a ici attaque de l'azote nucléophile sur le carbone électrophile de l'anhydride.

5b le site nucléophile de l'azote est plus réactif que celui de l'oxygène donc la nucléophilie de l'azote est supérieure à celle de l'oxygène.

6a La synthèse du paracétamol est exothermique donc le chauffage a pour but d'augmenter la vitesse de formation du paracétamol (facteur cinétique)

6b toutes les températures d'ébullition des réactifs et des produits sont inférieures à celle à laquelle on porte le mélange réactionnel

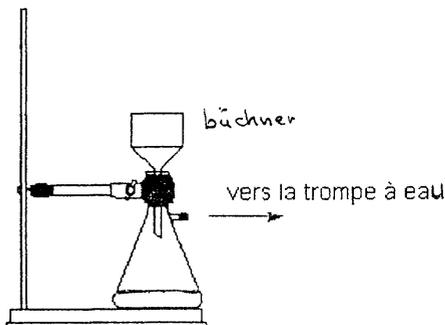
6c $n(\text{anhydride})_{\text{introduit}} = dV/M = 3,7 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$

$n(C_6H_5OH)_{\text{introduit}} = 2,8/109 = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$

L'anhydride acétique est introduit en excès, il n'est donc pas nécessaire de faire une mesure précise du volume.

6d l'attaque nucléophile de l'amine sur l'anhydride est plus rapide que l'hydrolyse de l'anhydride.

7a



7b la filtration sous vide est plus rapide que la filtration simple par gravité

la recristallisation permet de purifier le produit brut (PB) en utilisant les différences de solubilité dans le solvant pour le PB et les impuretés. On dissout totalement le PB recueilli par filtration dans une quantité suffisante de solvant chaud puis on laisse refroidir le mélange. Au cours du refroidissement il se forme des cristaux de produit pur que l'on peut recueillir par filtration. Les impuretés restent dans le solvant.

7d la recristallisation permet de recueillir du paracétamol pur car le paracétamol est moins soluble dans l'eau que les impuretés.

7e Exemples :

on peut vérifier qu'il s'agit de paracétamol pur en relevant le point de fusion sur un banc Köffler, on peut faire une chromatographie sur couche mince et comparer à un échantillon pur.

8 Masse de paracétamol que l'on pouvait théoriquement obtenir :

$$m = n(\text{C}_8\text{H}_9\text{NO}_2)_{\text{formé}} M = n(\text{C}_6\text{H}_7\text{NO})_{\text{introduit}} M \quad \text{AN : } m \text{ 3,93 g}$$

$$\text{rendement } 2,01/3,93 = 0,51 = 51\%$$

9 Analgésique : qui diminue ou supprime la douleur

Antipyrétique : qui combat la fièvre

- I.1. NON : une L.D. donne d'un objet réel
une image virtuelle ou formule conjug.
- I.2.1. NON : car L' donne une image virtuelle
qui est objet réel pour L₃ (on est ramené
au cas précédent)
- I.2.2. $A \xrightarrow{L'} A_1 \xrightarrow{L_1} A'$
 $1/p' - 1/p = 1/f'$
 $\overline{O_1 A_1} = 60 \text{ mm}$
 $\overline{O' A_1} = 84 \text{ mm}$
 $f' = 57,3 \text{ mm}$
 $p = 1/f' = 17,5 \delta$
- I.2.3. $\gamma = p'/p \quad \gamma_1 = -1,40$
 $A_4 \longrightarrow A_3$
- I.3. $1/f' = 1/f_2 + 1/f_3$
 $f'_3 = 35 \text{ mm}$
 convergente
- I.4. $\gamma_3 = 1/\gamma_1 = 1/(-1,40) = -0,71$
 $A_4 \longrightarrow A_5$
- I.5.1. L₃ au centre
 L₁ et L₂ symétriques par rapport à L₃
- I.5.2. image donnée par L₃ doit être identique
 à l'objet (au sens près)
 donc points symétriques à $2f_3 = 70 \text{ mm}$
- I.5.3. Soit $x = \overline{AO}$ en mm
 $OA' = 122 - x$
 $1/(122 - x) - 1/(-x) = 1/(-90)$
 $x - 122x - 1,10 \cdot 10^4 = 0$
 $x = 182 \text{ mm}$ seule solution physiquement
 acceptable (l'autre est < 0)

- II.1. $I_2 = (1/T) \int_0^T i(t)^2 dt$ idem pour U
 $I = I_M / \sqrt{2} \quad U = U_M / \sqrt{2}$
- II.2. $P(t) = u(t)i(t)$
 $\langle P \rangle = (1/T) \int_0^T P(t) dt = UI \cos \varphi$
 $\langle P \rangle$ en watt (W)
 $P_a = UI$
 P_a en V.A.
 $\langle P \rangle / P_a = f_p = \cos \varphi$
- II.3.1. $I = (\langle P \rangle / R)^{1/2}$
 $L = ((U^2 R) / (\langle P \rangle) - R^2)^{1/2} / (2\pi\nu)$
 $f_p = (R \langle P \rangle)^{1/2} / U$
- II.3.2. $I = 2,70 \text{ A}$
 $L = 0,192 \text{ H}$
 $f_p = 0,674$
- II.4.1. $Z = (R + jL\omega) / (1 - LC\omega^2 + jRC\omega)$
- II.4.2. A.N. $Z = 97,9 + 47,7 j$ (en Ω)
 $\cos \varphi' = 0,899$
- II.4.3. $\langle P \rangle = UI' \cos \varphi'$
 $I' = 2,02 \text{ A}$
- II.4.4. Pertes en ligne plus faibles
- III.1. $P(z) = P_0 + \rho g (h - z)$
- III.2. $F_{e, \text{stat}} = (P_0 h + (\rho g h^2) / 2) / \cos \alpha$
 $F_{p, \text{stat}} = (P_0 h) / \cos \alpha$
- III.3. Equilibre \longrightarrow Somme des forces = 0
 $T = (\rho g h^2) / 2$
 $N = (\tan \alpha h) ((\rho g h) / 2 + \mu g h + 2 P_0)$
- III.4. $f_{\text{app}} = (\rho g h) / (\tan \alpha (\rho g h + 2\mu g h + 4 P_0))$
- III.5. $f_{\text{app}} = 0,111$

1028

DE.2
repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

CA/PLP

CONCOURS INTERNE

ÉNONCÉ

Section : MATHÉMATIQUES - SCIENCES PHYSIQUES

COMPOSITION DE PHYSIQUE-CHIMIE

Durée : 4 heures

*Calculatrice autorisée (conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999)***Il est recommandé aux candidats de partager également le temps entre la physique et la chimie.**

La composition comporte cinq exercices **tous indépendants**. Les candidats peuvent donc les résoudre dans l'ordre qui leur convient ; ils sont cependant tenus de **respecter la numérotation de l'énoncé**.

Les énoncés des exercices sont souvent longs mais les questions posées n'appellent généralement que des réponses ne justifiant pas de longs développements.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.

Les correcteurs tiendront le plus grand compte des qualités de soin et de présentation.

PLAN DU SUJET

PARTIE A. – CHIMIE

EXERCICE I . – **Réaction de polymérisation.**EXERCICE II . – **Étude de l'eau oxygénée.**

PARTIE B. – PHYSIQUE

EXERCICE I . – **Mécanique.**EXERCICE II . – **Électromagnétisme.**EXERCICE III. – **Acoustique.**

PARTIE A. - CHIMIE

EXERCICE 1.- Chimie organique

Extrait d'un sujet de baccalauréat professionnel (Plasturgie 2001)

Le polychlorure de vinyle (PVC) servant à la fabrication de badges est obtenu par polymérisation du chlorure de vinyle de formule semi-développée $\text{H}_2\text{C} = \text{CHCl}$.

1. a) Calculer la masse moléculaire du chlorure de vinyle.
On donne : $M(\text{H}) = 1 \text{ g/mol}$ $M(\text{C}) = 12 \text{ g/mol}$ $M(\text{Cl}) = 35,5 \text{ g/mol}$
b) Ecrire l'équation bilan de polymérisation du chlorure de vinyle.
2. Une usine de récupération des déchets brûle entre autres des morceaux de polychlorure de vinyle.
 - a) Écrire l'équation équilibrée de combustion du chlorure de vinyle dans le dioxygène.
 - b) Calculer, en litre, le volume de dioxyde de carbone obtenu par la combustion de 750 kg de chlorure de vinyle. (Le volume molaire dans les conditions de cette combustion est de 24 L).
 - c) Calculer le nombre de moles de chlorure d'hydrogène fourni par la combustion de 750 kg de chlorure de vinyle dans le dioxygène.
 - d) Le chlorure d'hydrogène est un gaz dangereux qui ne peut pas être rejeté dans l'atmosphère. Ce gaz est soluble dans l'eau à raison de 20 moles par litre. On obtient de l'acide chlorhydrique concentré. Calculer le nombre de litres d'acide chlorhydrique concentré obtenu à partir de 750 kg de chlorure de vinyle.

Questions destinées aux candidats du concours PLP

- 1.1. Rédiger une solution de l'extrait de sujet (le barème n'est pas demandé).
- 1.2. Définir les termes : monomère, polymère, polymérisation.
- 1.3. Pour la polymérisation du chlorure de vinyle, s'agit-il d'une réaction de polyaddition ou de polycondensation ? Justifier la réponse.
- 1.4. Détailler les deux grandes étapes de la préparation industrielle du chlorure de vinyle.
- 1.5. On détermine expérimentalement le degré de polymérisation moyen n et la masse molaire moyenne M d'un composé de polyaddition, composé uniquement de carbone et d'hydrogène. On obtient : $n = 1\,500$ et $M = 63 \text{ kg/mol}$
 - 1.5.1. Déterminer la formule semi-développée du monomère correspondant et le nommer.
 - 1.5.2. Écrire l'équation bilan de la polymérisation.

EXERCICE 2.- Chimie générale

L'eau oxygénée ou peroxyde d'hydrogène est un produit industriel important, utilisé principalement dans le blanchiment des pâtes à papier et des textiles, dans le traitement des eaux ou pour la stérilisation de matériels et emballages agro-alimentaires. C'est aussi un antiseptique pharmaceutique. Le peroxyde d'hydrogène de haute pureté est employé pour nettoyer et graver les plaques de silicium en microélectronique.

Données :

numéros atomiques : H : Z = 1 O : Z = 8
 masses molaires : M(H) = 1 g/mol M(C) = 12 g/mol M(O) = 16 g/mol
 potentiels standard : E° à 298 K et pH = 0 d'espèces en solution aqueuse (aq)

couple	H ₂ O _{2(aq)} / H ₂ O	O _{2(g)} / H ₂ O _{2(aq)}	Cl ₂ /Cl ⁻ _(aq)	MnO ₄ ⁻ _(aq) / Mn ²⁺ _(aq)
E° (V)	1,78	0,68	1,36	1,51

pK_a du couple H₂O₂ / HO₂⁻ à 298 K : 12

Questions destinées aux candidats du concours PLP

Les trois parties sont indépendantes.

Première partie : Structure de la matière

- 1.1. Donner la configuration électronique dans l'état fondamental des atomes d'hydrogène et d'oxygène.
- 1.2. Le peroxyde d'hydrogène a pour formule H₂O₂. Donner le modèle de Lewis de cette molécule.
- 1.3. Calculer la masse molaire du peroxyde d'hydrogène.
- 1.4. Historiquement, c'est le chimiste Thénard qui, en 1818, découvrit l'eau oxygénée par acidification d'une solution de peroxyde de baryum BaO₂. Ecrire l'équation de cette réaction.
- 1.5. Actuellement, plusieurs procédés sont utilisés pour préparer le peroxyde d'hydrogène. Le plus utilisé est le procédé à la 2-éthylantraquinone. Il a pour bilan H₂ + O₂ → H₂O₂. Dans ce procédé, le peroxyde d'hydrogène est séparé de la phase organique par extraction à l'eau ; la concentration massique dans l'eau atteint alors 0,47 (47 % en masse). Quelle est la concentration, en mol/L et arrondie à 10⁻¹, de cette solution aqueuse de peroxyde d'hydrogène sachant que la densité de la solution vaut 1,20 ?

Deuxième partie : Oxydoréduction

- 1.6. Le peroxyde d'hydrogène participe à deux couples rédox : H₂O_{2(aq)} / H₂O et O_{2(g)} / H₂O_{2(aq)}. Écrire les demi-équations d'oxydoréduction correspondant à ces deux couples. Quel est celui où le peroxyde d'hydrogène joue le rôle d'oxydant et celui où il joue le rôle de réducteur ? Justifier la réponse.
- 1.7. Pourquoi peut-on dire que le peroxyde d'hydrogène est un agent de blanchiment « écologique » ?

- 1.8. Le dosage direct du peroxyde d'hydrogène peut être réalisé par une solution de permanganate de potassium. Pour déterminer la concentration d'une eau oxygénée du commerce dont la concentration est d'environ 10 mol/L, on place dans un bécher 10,0 mL d'une solution obtenue à partir de l'eau oxygénée du commerce diluée 100 fois ; on y ajoute 1 mL de solution d'acide sulfurique concentré ; puis on verse progressivement la solution de permanganate de potassium de concentration 0,020 mol/L ; on observe la persistance de la coloration rose violacé jusqu'à un volume de permanganate de potassium versé de 19,6 mL.
- 1.8.1. Dresser la liste complète du matériel utilisé et faire un schéma légendé de l'expérience.
- 1.8.2. L'eau oxygénée (ou peroxyde d'hydrogène) se comporte-t-elle comme oxydant ou comme réducteur ?
- 1.8.3. Écrire l'équation bilan de la réaction.
- 1.8.4. Justifier que la réaction mise en jeu permet bien de réaliser un dosage. Pourquoi ajoute-t-on de l'acide sulfurique ?
- 1.8.5. L'acidification par l'acide chlorhydrique conviendrait-elle ? Pourquoi ?
- 1.8.6. Calculer la concentration, en mol/L, de la solution de l'eau oxygénée du commerce.

Troisième partie : Acide et base en solution aqueuse

Le peroxyde d'hydrogène est en solution aqueuse un monoacide, dont le couple acide-base a un pK_a égal à 12.

- 1.9. Donner la définition d'un acide et d'une base selon Brønsted.
- 1.10. Le peroxyde d'hydrogène est-il un acide fort ? Pourquoi ?
- 1.11. Écrire la réaction de dissociation acido-basique du peroxyde d'hydrogène en solution aqueuse, ainsi que l'expression de la constante d'acidité. Donner la valeur numérique de cette constante.

PARTIE B.- PHYSIQUE

La partie B, consacrée à la Physique, est constituée de trois exercices indépendants construits à partir de sujets de baccalauréat professionnel.

EXERCICE 1.-Mécanique**Extrait d'un sujet de baccalauréat professionnel
(Bois construction et aménagement du bâtiment 2001)**

On se propose d'étudier le mouvement d'un tapis roulant.

Le tapis roulant se met en mouvement à l'aide d'un détecteur photoélectrique qui actionne un moteur. L'arbre du moteur est couplé à l'axe du tambour qui entraîne le tapis. Ce tapis roulant se met en mouvement suivant deux phases.

Dans la première phase, son mouvement est uniformément accéléré. Il met 1,2 s pour atteindre une vitesse de 90 m/min.

La deuxième phase correspond à un mouvement uniforme de vitesse constante $v = 90$ m/min.

1. a) Donner en m/s la vitesse du tapis dans la deuxième phase.
b) Calculer l'accélération du tapis (en m/s²) dans la première phase.
2. Le tambour a un diamètre de 30 cm.

Calculer la fréquence de rotation du moteur en tour/seconde correspondant à la vitesse de 1,5 m/s.

Questions destinées aux candidats du concours PLP

- 1.1. Rédiger une solution de l'extrait de sujet (le barème n'est pas demandé).
- 1.2. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen.
- 1.3. Définir les termes « mouvement accéléré », « mouvement uniforme ».
- 1.4. L'espace est repéré par un repère cartésien d'origine O et d'axes (Ox, Oy, Oz), lié à la surface de la Terre. L'axe Oz est l'axe vertical ascendant, le plan (Ox, Oy) est le plan horizontal. L'accélération de la pesanteur est notée \vec{g} .
- 1.4.1. On néglige dans un premier temps toute force de frottement et toute force d'inertie. Le tapis roulant permet de déplacer des pièces mécaniques. Au bout du tapis roulant, ces pièces tombent d'une hauteur h **sans vitesse initiale** grâce à un dispositif approprié, et repartent sur un autre tapis roulant dans une autre direction. On appelle O l'extrémité du tapis roulant, et on étudie le mouvement d'une pièce mécanique qui tombe à partir du point O. On suppose que le référentiel terrestre est un référentiel galiléen.
 - 1.4.1.1. Exprimer le principe fondamental de la dynamique pour une pièce mécanique à l'instant t .
 - 1.4.1.2. Déterminer les équations $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de la trajectoire d'une pièce mécanique.
 - 1.4.1.3. Déterminer à quelle vitesse la pièce mécanique arrive sur le second tapis roulant, et combien de temps dure la chute. On prendra $h = 0,5$ m et $g = 9,8$ m/s².
- 1.4.2. On considère un solide S de masse m lâché d'une hauteur h sans vitesse initiale. Le solide est soumis à l'action de son poids ainsi qu'à celle d'une force de frottement $-\alpha\vec{v}$, où α désigne une constante positive et \vec{v} le vecteur vitesse du solide S.

- 1.4.2.1. Exprimer le théorème du centre d'inertie pour le solide S à l'instant t .
- 1.4.2.2. En quelle unité du système international peut s'exprimer α ?
- 1.4.3.3. La projection sur l'axe vertical de la relation vectorielle traduisant l'équation du mouvement peut s'écrire à l'aide d'une équation différentielle. Etablir cette équation différentielle.
- 1.4.3.4. Résoudre cette équation différentielle. On rappelle que $v(0) = 0$.
- 1.4.3.5. Montrer que le solide atteint alors une vitesse limite, notée v_{lim} .

Exercice 2.- Electromagnétisme

Extrait d'un sujet de baccalauréat professionnel (Construction Bâtiment Gros œuvre 2001)

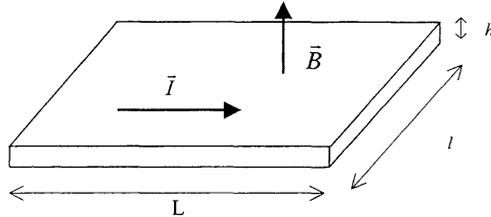
Le fonctionnement d'un appareil électrique nécessite l'utilisation d'un transformateur. Ce transformateur possède 1 500 spires au primaire et 300 spires au secondaire, et est alimenté sous une tension de 230 V.

1. Calculer le rapport de transformation de ce transformateur.
2. Calculer la tension disponible aux bornes du secondaire.
3. Quel est le rôle de ce transformateur ?

Questions destinées aux candidats du concours PLP

- 1.1. Rédiger une solution de l'extrait de sujet (le barème n'est pas demandé).
- 1.2. Décrire les différentes parties d'un transformateur, et faire un schéma légendé.
- 1.3. Quel est le principe de fonctionnement d'un transformateur ?
- 1.4. Quel intérêt présente un transformateur dont le nombre de spires du primaire est égal nombre de spires du secondaire ? Quel intérêt présente un transformateur qui n'a qu'une spire au secondaire ?
- 1.5. Soit les trois dispositifs suivants :
 - un fil rectiligne supposé infini, parcouru par un courant électrique d'intensité I constante ;
 - une spire circulaire plane, filiforme, parcourue par un courant électrique d'intensité I constante ;
 - un solénoïde, parcouru par un courant électrique d'intensité I constante.
- 1.5.1. Pour chacun de ces trois dispositifs supposé seul dans l'espace, tracer qualitativement l'allure des lignes du champ magnétique créé.
- 1.5.2. Indiquer le sens des lignes de champ et celui du courant électrique. Préciser la règle utilisée dans chaque cas.
- 1.5.3. Proposer une expérience permettant de visualiser ces lignes de champ.
- 1.6. Dans quelle unité s'exprime la valeur du champ magnétique \vec{B} ? Avec quel appareil la mesure-t-on ?
- 1.7. L'étude qui suit porte sur la sonde à effet Hall.
On considère une plaquette réalisée dans un matériau conducteur dans lequel il n'existe qu'un seul type de porteurs de charge, ici des électrons de charge q ($q = -1,6 \times 10^{-19}$ C). La plaquette a la forme d'un parallépipède rectangle de longueur L , de largeur l et d'épaisseur h .

La plaquette est traversée dans le sens de la longueur par un courant continu d'intensité I . A l'instant $t = 0$, elle est soumise à un champ magnétique \vec{B} uniforme et permanent, orthogonal à la direction de \vec{I} .



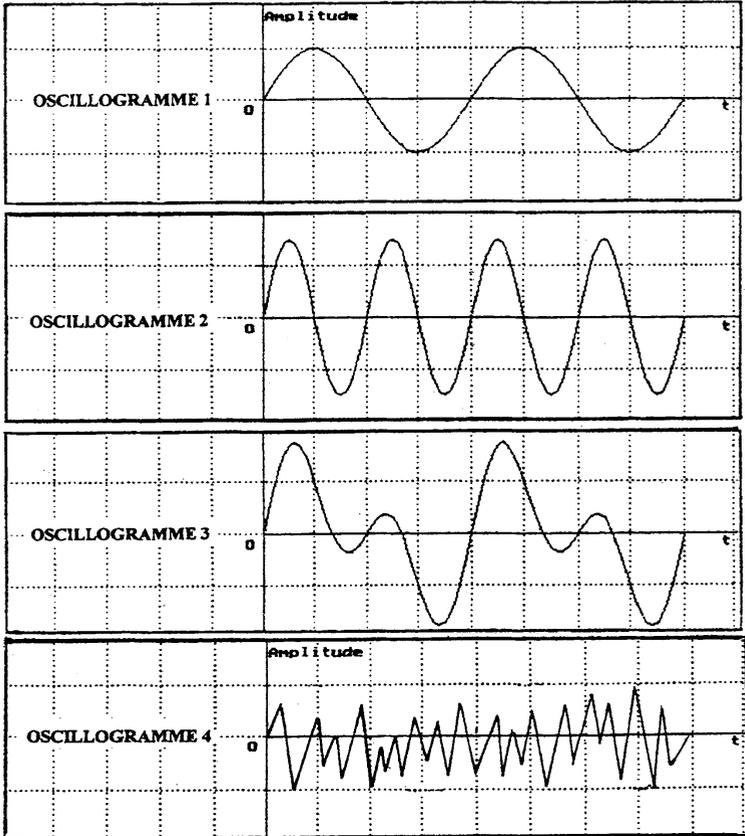
- 1.7.1. a) Exprimer la force magnétique \vec{F} (force de Lorentz) qui s'exerce sur une particule de charge q , évoluant à la vitesse \vec{v} dans un champ magnétique \vec{B} .
- 1.7.1. b) Représenter la force de Lorentz sur le schéma de la plaquette reproduit sur la copie.
- 1.7.2. Dans une phase transitoire, à partir de $t = 0$, les électrons vont s'accumuler sur l'une des faces de la plaquette conductrice. De quelle face s'agit-il ? Justifier la réponse.
- 1.7.3. Entre les deux faces, s'établit une différence de potentiel, appelée « tension de Hall » U_H . Un champ électrique \vec{E} est alors créé ; il exerce sur les électrons une force électrique \vec{f}_{elec} . Exprimer \vec{f}_{elec} en fonction de \vec{E} , puis représenter sur le même schéma la force \vec{f}_{elec} .
- 1.7.4. On note n le nombre de porteurs de charge par unité de volume. Sachant que la densité de courant sur une section S est : $J = n|q|v$, exprimer la tension de Hall U_H , lors du régime permanent, en fonction de $I, B, n, |q|$, et h .
- 1.7.5. Préciser alors comment la sonde à effet Hall peut servir à la mesure d'un champ magnétique.

Exercice 3.- Acoustique

Extrait d'un sujet de baccalauréat professionnel
(Equipements et Installations Electriques 2001)

On visualise sur un oscilloscope quatre signaux sonores. On obtient les quatre oscillogrammes ci-dessous :

Echelle : 0,5 ms/div sur l'axe des abscisses



1. Les oscillogrammes 1 et 2 représentent des signaux sonores émis par des diapasons en vibration dans l'air.
 - a) Déterminer la période T_1 puis la fréquence f_1 du signal 1.
 - b) Déterminer la période T_2 puis la fréquence f_2 du signal 2.
 - c) Dire, du premier ou deuxième son, lequel est le plus grave. Justifier la réponse.
2. Préciser, en justifiant, pour chaque signal sonore, s'il s'agit d'un bruit, d'un son complexe ou d'un son pur.

3. L'oscillogramme 2 représente un signal sonore émis avec une intensité acoustique moyenne $I = 2 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2$. Calculer le niveau d'intensité acoustique L correspondant à cette intensité.

On donne $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$ et on précisera l'unité de L .

Questions destinées aux candidats du concours PLP

- 1.1. Rédiger une solution de cet extrait de sujet (le barème n'est pas demandé).
- 1.2. Représenter le schéma de l'expérience ayant permis de visualiser les quatre signaux sonores.
- 1.3. Quel est le nom de l'appareil permettant de mesurer le niveau d'intensité acoustique ?
- 1.4. Qu'appelle-t-on « intensité acoustique » ?
- 1.5. Un haut-parleur est alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence f_0 constante. On étudie la propagation du son émis dans l'air. L'air est considéré comme un milieu homogène, non absorbant et non dispersif. La température de l'air est supposée constante. On rappelle que, d'une source sonore, part une onde progressive longitudinale qui possède une périodicité spatiale et une périodicité temporelle.
 - 1.5.1. Pourquoi peut-on dire qu'une onde sonore est longitudinale ?
 - 1.5.2. Préciser les termes « périodicité spatiale » et « périodicité temporelle ». Quelle relation lie T et λ ?
 - 1.5.3. Au repos, la membrane du haut-parleur est perpendiculaire à l'axe $x'x$. Le centre de la membrane est un point O de coordonnées $(0 ; 0 ; 0)$.

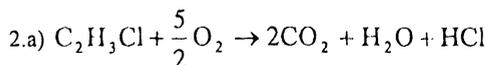
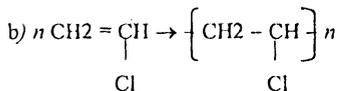


- 1.5.3.1. Donner l'expression $f(t)$ de l'élongation du centre de la membrane en fonction de t et T , sachant qu'il a un mouvement sinusoïdal d'amplitude a , et qu'à l'instant $t = 0$, $x = 0$.
- 1.5.3.2. Soit un point M situé à l'abscisse x du point O . Donner l'expression $f(x, t)$ de l'élongation de ce point :
- 1.5.4. A quelle(s) abscisse(s) doit se trouver le point M pour vibrer en phase avec la source ?
- 1.5.5. On dispose du haut-parleur ci-dessus, d'un microphone et d'un oscilloscope bi-courbe. Présenter succinctement une méthode de mesure de la célérité du son.

CORRIGE (Chimie organique)**CORRIGÉ**

1.1. Solution de l'extrait de sujet :

$$1.a) M(C_2H_3Cl) = 2 \times 12 + 3 \times 1 + 35,5 = 62,5 \text{ g/mol}$$



$$b) \text{ Nombre de moles de } C_2H_3Cl : n = \frac{750\,000}{62,5} = 12\,000$$

$$\text{Volume de } CO_2 : 2 \times 12\,000 \times 24 = 576\,000 \text{ L}$$

$$c) \text{ Nombre de moles de } HCl : 1 \times 12\,000 = 12\,000$$

d) Volume d'acide chlorhydrique :

$$\frac{12\,000}{20} = 600 \text{ L}$$

1.2. Un *polymère* est une molécule de très grande dimension, ou macromolécule, constituée par la répétition d'un motif élémentaire.

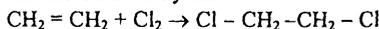
Un *monomère* est une molécule à partir de laquelle le polymère est formé.

La *polymérisation* est la réaction de synthèse qui, à partir des monomères, conduit au polymère.

1.3. La polymérisation du chlorure de vinyle se fait par l'ouverture de la liaison fragile de la double liaison et soudure des motifs, bout à bout. Il s'agit donc d'une *polyaddition*.

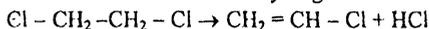
1.4. La fabrication industrielle du chlorure de vinyle utilise comme produit de départ l'éthylène et comporte deux grandes étapes :

- l'addition de dichlore sur l'éthylène :



(à 60 ° C, sous une pression de 5 bars environ, et en présence d'un catalyseur comme $FeCl_3$).

- l'élimination de chlorure d'hydrogène :



(sous une pression de 30 bars environ, par chauffage vers 500 ° C : réaction de pyrolyse).

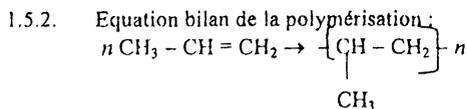
1.5.1. La masse molaire d'un motif élémentaire du polymère est :

$$M_0 = \frac{63\,000}{1\,500} = 42 \text{ g/mol}$$

Ce motif élémentaire ne contient que les éléments C et H. Ecrivons-le C_xH_y .

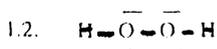
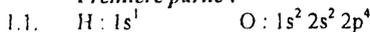
$$12x + y = 42, \text{ d'où } x = 3 \text{ et } y = 6$$

Il s'agit du *propène* : $CH_3 - CH = CH_2$.

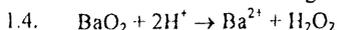


CORRIGE (Chimie générale)

Première partie :

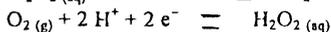
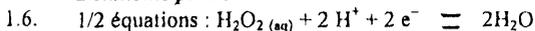


1.3. $M = 2 \times 1 + 2 \times 16 = 34 \text{ g/mol}$



1.5. La densité de la solution est 1,20, 1 litre de solution a donc une masse de 1 200 g et il y a $1 200 \times 0,47 = 564 \text{ g}$ de peroxyde d'hydrogène par litre. La concentration est alors : $\frac{564}{34} \approx 16,6 \text{ mol/L}$.

Deuxième partie

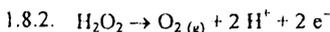


L'oxydant capte un ou plusieurs électrons, un réducteur en cède un ou plusieurs

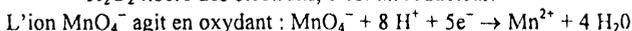
Donc, c'est dans le couple $\text{H}_2\text{O}_2(\text{aq})/\text{H}_2\text{O}$ que H_2O_2 joue le rôle d'oxydant et dans le couple $\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}_2(\text{aq})$ qu'il joue celui de réducteur.

1.7. Le peroxyde d'hydrogène est un agent de blanchiment « écologique » car les produits formés par oxydoréduction (dioxygène et eau) sont non polluants.

1.8.1. matériel utilisé : b cher, burette graduée, pipette et propipette, support (et noix de serrage), agitateur magnétique, eau, solution de peroxyde d'hydrogène, solution d'acide sulfurique à 0,1 mol/L, solution de permanganate de potassium à 0,020 mol/L, *file jaugée*
schéma légendé.



H_2O_2 lib re des électrons, c'est un réducteur.



1.8.4. On a $E^\circ(\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}_2(\text{aq})) = 0,68 \text{ V}$ et $E^\circ(\text{MnO}_4^-(\text{aq})/\text{Mn}^{2+}(\text{aq})) = 1,51 \text{ V}$; la différence des potentiels standard est supérieure à 0,3 V, donc l'oxydation du peroxyde d'hydrogène par le permanganate est une réaction totale.

Il faut ajouter de l'acide sulfurique car la réaction nécessite des ions H^+ ; en milieu insuffisamment acide, MnO_4^- est réduit en MnO_2

1.8.5. Non, il y aurait formation de dichlore.

1.8.6. En utilisant la relation fondamentale des dosages redox : $n_o C_o V_o = n_r C_r V_r$
 avec $n_o = 5$ $C_o = 0,020 \text{ mol/L}$ $V_o = 19,6 \text{ mL}$ $n_r = 2$ $V_r = 10 \text{ mL}$

$$C_r = \frac{5 \times 0,020 \times 19,6}{2 \times 10} = 0,098 \text{ mol/L}.$$

La solution ayant été diluée 100 fois, la concentration de l'eau oxygénée du commerce est :
 $100 \times 0,098 = 9,8 \text{ mol/L}$.

Troisième partie

- 1.9. Un acide est une espèce chimique capable de céder un proton H^+ .
 Une base est une espèce chimique capable de capter un proton H^+ .
- 1.10 Un acide fort est une substance chimique qui réagit avec l'eau en produisant des ions H_3O^+ au cours d'une réaction totale. Le peroxyde d'hydrogène n'est pas totalement dissocié dans l'eau (existence du pK_a), il n'est pas un acide fort.
- 1.11. $H_2O_2 + H_2O \rightleftharpoons HO_2^- + H_3O^+$

$$K_a = \frac{[\text{base}][H_3O^+]}{[\text{acide}]} = \frac{[HO_2^-][H_3O^+]}{[H_2O_2]}$$

$K_a = 10^{-12}$

CORRIGE (Mécanique)

- 1.1. Solution de l'extrait de sujet :
 - 1.a) Vitesse du tapis dans la deuxième phase : $v = \frac{90}{60} = 1,5 \text{ m/s}$
 - b) Accélération du tapis dans la première phase :

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1,5 - 0}{1,2 - 0} \text{ soit } a = 1,25 \text{ m/s}^2$$
- 2. Fréquence de rotation du moteur :

$$V = \pi D N$$

donc
$$N = \frac{V}{\pi D} = \frac{1,5}{\pi \times 0,3} \text{ soit } N \approx 1,59 \text{ tr/s}$$
- 1.2. Un référentiel galiléen est un référentiel considéré comme fixe ou qui se déplace d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel considéré comme **absolu** ; le **principe d'inertie est vérifié**
- 1.3. Un « mouvement accéléré » est un mouvement pour lequel la vitesse varie avec le temps.
 Un « mouvement uniforme » est un mouvement pour lequel la vitesse est constante.

1.4.1.1. Principe fondamental de la dynamique : dans un repère galiléen, la somme vectorielle de toutes les forces appliquées à un solide est égale à la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement du solide cet instant :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (\text{ou } \Sigma \vec{F} = m\vec{a}). \text{ La seule force qui s'applique sur la pièce}$$

mécanique est son poids. On a donc $\vec{P} = m \vec{a}$ d'où $\vec{a} = \vec{g}$

1.4.1.2. 1.4.1.2. Compte tenu des conditions initiales, et des orientations des axes du repère :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t) = \text{Cte} = 0 \\ v_y(t) = \text{Cte} = 0 \\ v_z(t) = -gt \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = \text{Cte} = 0 \\ y(t) = \text{Cte} = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \text{Cte} = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

1.4.1.3. $h = 0,5 \text{ m}$ se traduit par $z = -0,5$. On a $g = 9,8$

On obtient :

$$t = \sqrt{-\frac{2z}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,5}{9,8}} \approx 0,32 \text{ s} \quad \text{et} \quad v \approx 3,13 \text{ m/s.}$$

1.4.2.1. Théorème du centre d'inertie d'un solide :

Dans un repère galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un solide est égale au produit de sa masse par le vecteur accélération de son centre d'inertie.

OU : Le mouvement de ce point est celui d'un point affecté de toute la masse et subissant toutes les forces extérieures.

$$\text{OU : } \sum \vec{F} = m \vec{a}_G$$

1.4.2.2. α peut s'exprimer en N.s/m, ou en kg/s.

1.4.2.3. Les seules forces extérieures en présence sur le solide S sont le poids et la force de frottement. L'équation du mouvement peut s'écrire :

$$m \vec{g} - \alpha \vec{v} = m \vec{a}$$

En divisant les deux membres par m et en projetant sur l'axe vertical, on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v = g$$

1.4.3.4. La solution générale de cette équation différentielle est de la forme :

$$v(t) = C e^{-\frac{\alpha t}{m}} + \frac{m g}{\alpha} \quad \text{Comme } v(0) = 0, \quad C = -\frac{m g}{\alpha} \text{ et on a :}$$

$$v(t) = \frac{m g}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}} \right)$$

1.4.3.5. Vitesse limite : pour $t \rightarrow \infty$, $v(t) \rightarrow \frac{mg}{\alpha}$,

$$\text{donc } v_{\text{lim}} = \frac{mg}{\alpha}.$$

CORRIGE (Electromagnétisme)

1.1. Solution de l'extrait de sujet :

- $m = \frac{300}{1500} = 0,2$

- $U_2 = m \times U_1 = 0,2 \times 230$ $U_2 = 46 \text{ V}$

- Il joue le rôle d'un abaisseur de tension.

1.2. Un transformateur comprend :

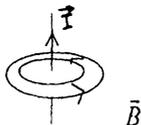
- un noyau magnétique constitué de tôles de fer doux isolées les unes des autres (afin de réduire les pertes dues aux courants de Foucault) et formant un circuit magnétique fermé ;
- deux bobinages comportant en général des nombres de spires différents. L'enroulement alimenté par une tension sinusoïdale joue le rôle de récepteur : il est appelé enroulement primaire. L'autre enroulement joue le rôle de générateur : c'est le secondaire.

Le schéma légendé doit comprendre les termes : primaire, secondaire, et circuit magnétique.

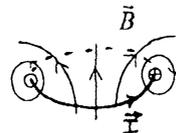
1.3. La tension variable alimentant le primaire produit un flux dont la variation crée une tension au secondaire, elle-même variable (loi de Faraday).

1.4. Si $N_1 = N_2$, le transformateur est un transformateur d'isolement. S'il ne présente qu'une spire au secondaire, l'intensité du courant I_2 est très élevée, et on peut utiliser cette spire pour chauffer des métaux.

1.5.1. Dans le fil rectiligne, les lignes de champ sont des cercles concentriques dont le centre est situé sur le fil.



Dans la spire circulaire :

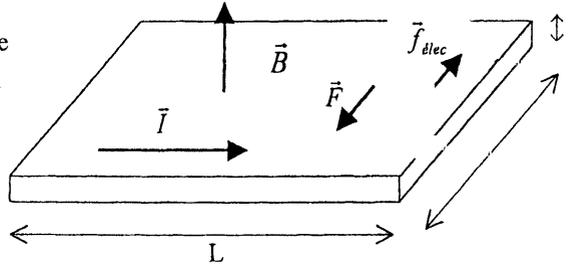


A l'intérieur du solénoïde, les lignes de champ sont sensiblement parallèles ; à l'extérieur, les lignes de champ s'écartent en s'éloignant des extrémités et constituent des courbes fermées.

- 1.5.2. La règle utilisée peut être la règle du bonhomme d'Ampère ou celle de la main droite (les doigts indiquent le sens du courant, le pouce celui du champ \vec{B}).
- 1.5.3. Expériences classiques avec de la limaille de fer et de petites aiguilles aimantées.
- 1.6. 1.1. L'unité de B est le Tesla (T). Elle se mesure avec un teslamètre.

1.7.1. $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$.

La vitesse \vec{v} des électrons est dirigée dans le sens contraire de celle de \vec{I} .
 Donc la force magnétique \vec{F} est dirigée vers l'avant.



- 1.7.2. Les électrons vont s'accumuler sur la *face avant* sous l'effet de cette force magnétique.
- 1.7.3. $\vec{f}_{elec} = q\vec{E}$. La force \vec{f}_{elec} , qui s'oppose à \vec{F} , est dirigée vers l'arrière.
- 1.7.4. Quand le régime devient permanent, la tension de Hall se stabilise quand les deux forces se compensent, c'est-à-dire quand

$$q v B = q E . \text{ Comme } E = \frac{U_H}{l} \text{ et que } I = n |q| v l h$$

$$(\text{car } I = J S), \text{ on obtient : } v B = \frac{U_H}{l}$$

$$\text{d'où } U_H = v B l = \frac{v B I}{n |q| v h} = \frac{I B}{n |q| h}$$

- 1.7.5. Si on connaît I , n , et h , une mesure de U_H peut servir à mesurer un champ magnétique (Inversement, si on connaît B , on peut en déduire n).

CORRIGE (Acoustique)

1.1. Solution de l'extrait de sujet :

- 1. a) $T_1 = 2 \text{ ms}$ $f_1 = 500 \text{ Hz}$
- b) $T_2 = 1 \text{ ms}$ $f_1 = 1\,000 \text{ Hz}$

c) Le son 1 est plus grave, car $f_1 < f_2$.

2. Signaux 1 et 2 sinusoïdaux : sons purs. Signal 3 périodique, non sinusoïdal : son complexe. Signal 4 non périodique : bruit.

3. $L \approx 43 \text{ dB}$

1.2. schéma comportant diapason, microphone et oscilloscope.

1.3. le sonomètre.

1.4. L'intensité acoustique est le rapport P/S , P étant la puissance du son reçu par une source ponctuelle et S l'aire latérale de la sphère qui représente la surface atteinte par l'onde sonore.

1.5.1. Une onde sonore correspond à la propagation d'une variation de pression, c'est-à-dire à un mouvement de molécules dans le sens de la propagation, d'où l'emploi « d'onde longitudinale ».

1.5.2. Périodicité spatiale : si on fixe la variable, t , on a une sinusoïde, donc une fonction périodique par rapport à x . Sa période est la longueur d'onde λ . Périodicité temporelle : si on fixe x , on a une sinusoïde, donc une fonction périodique par rapport au temps t . Sa période est T .

On a $\lambda = C T$, avec C la célérité du son.

1.5.3.1. Expression de l'élongation de la membrane : $x = 0$, donc $f(t) = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$

1.5.3.2 Expression de l'élongation du point M : $f(x, t) = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

1.5.4. Le point M vibre en phase avec la source si $2\pi \frac{x}{\lambda} = 2k\pi$
soit $x = k \lambda$

1.5.5. On détermine la position des points où le haut-parleur et le microphone sont en phase, ce qui donne la longueur d'onde, d'où la célérité du son si on connaît la fréquence.

Publications hors abonnement et numéros anciens

Serveur de l'UdPPC : http://www.cnam.fr/hebergement/udp/	Année ou numéro	Prix unitaire	Nombre d'exem- plaires	Prix total				
BROCHURES DOCUMENTAIRES ET PÉDAGOGIQUES								
♦ Nouveaux programmes de 3 ^e	1999	16,5 € × =				
♦ Données sur les principaux produits chimiques... (Jean-Louis VIGNES et al.) :								
– L'ouvrage	1997	23 € × =				
– La disquette		15 € × =				
♦ Le collage : le moyen intelligent d'assembler (Michel BARQUINS)	2001	11 € × =				
CONCOURS : CAPES ET AGRÉGATION								
	1995	1996	1997	1998				
♦ Énoncés	784 (2) 9,5 €		802 (2) 10 €	812 (2) 11 € × =
♦ Solutions	784 (3) 12 €	792 (3) 13 €	802 (3) 13,5 €	812 (3) 14 € × =
	1999	2000	2001	2002				
♦ Énoncés	817 (2) 12 €	824 (2) 12,5 €	834 (2) 12 €	845 (2) 13 € × =
♦ Solutions	822 (2) 14,5 €	838 (2) 15 €	849 (2) 16 €	857 (2) 17 € × =
CONCOURS DES GRANDES ÉCOLES								
♦ 1998 (36 €), 1999 (36,5 €), 2000 (37 €), 2001 (38 €), 2002 (38,5 €)				 × =
BREVETS DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR								
♦ 1997 (14,5 €), 1998 (12 €) <i>Sur le serveur : 1999</i>				 × =
BACCALAURÉATS TECHNOLOGIQUES								
♦ <i>Sur le serveur : 1999, 2000</i>				 × =

	Année ou numéro	Prix unitaire	Nombre d'exem- plaires	Prix total
BULLETINS				
♦ Tables des matières quinquennales : 641 (<i>jusqu'à 1980</i>) - 795 (1) (<i>1991-1995</i>)	6,50 € × =
♦ Autres bulletins : 787, 788, 790-791*, 792 à 793, 795, 797*, 798 à 805, 806*, 807 à 820, 821*, 822 à 827, 829*, 830 à 839*, 840 à 843, 845, 846, 849 à 853, 853*, 854, 855	6,50 € × = = =
NUMÉROS SPÉCIAUX				
♦ « Calculette »	789 (2)	6,50 € × =
♦ « Matériaux » (<i>numéro double</i>)	790-791	11 € × =
♦ « 90 ans »	797	12 € × =
♦ « La Main à la pâte »	806	6,50 € × =
♦ « Le génie des procédés »	821	6,50 € × =
♦ « La sécurité au laboratoire de chimie »	829	6,50 € × =
♦ « Regards européens »	839	6,50 € × =
♦ « Enseignement technologique »	853 (2)	6,50 € × =
♦ « Enseignement supérieur » : 1995 à 2002	6,50 € × =
TOTAUX		 = €
Supplément pour expédition à l'étranger (le volume : 1 €)				+
MONTANT DE LA COMMANDE (<i>Titre de paiement ci-joint à l'ordre de l'UdPPC</i>)				=

* Numéro spécial (voir tarif dans la rubrique « Numéros spéciaux »).

Le Directeur de la publication : Madeleine Sonnevile

Réalisation : Union des professeurs de physique et de chimie

Imprimé en France par SPEI - 54425 Pulnoy

Numéro commission paritaire : 62628 - Dépôt légal : 4^e trimestre 2003