

Sommaire des pages spéciales du n° 845
(Juin 2002)

AGRÉGATION DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours externe)	
Option physique	
– Composition de physique	3
– Composition de chimie	21
– Problème de physique.....	39
Option chimie	
– Composition de chimie	55
– Composition de physique	71
– Problème de chimie	85
Option physique et électricité appliquées	
– Composition de physique	109
– Composition d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique.....	129
– Problème d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique	145
Option procédés physico-chimiques	
– Composition de physique	173
– Composition de modélisation et commande de procédés.....	187
– Problème de chimie, génie chimique et de procédés physico-chimiques.....	193
AGRÉGATION DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours interne)	
Composition sur la physique et le traitement automatisé de l'information.....	205
Composition avec exercices d'application	223
– Option physique et chimie.....	225
– Option physique appliquée	241
CAPES DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours externe)	
Section physique et chimie	
– Composition de physique avec applications	263
– Composition de chimie avec applications.....	273
Section physique et électricité appliquée	
– Composition de physique avec applications	283
– Composition d'électronique - électrotechnique avec applications.....	301
CAPES DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours interne)	
Section physique et chimie.....	319
– Épreuve de physique et chimie	
Section physique et électricité appliquée	333
– Épreuve de physique et électricité appliquée	

Le sommaire du n° 845 est en deuxième de couverture.

ISSN 0366-3876



PAGES SPÉCIALES
du n° 845
Juin 2002

publication mensuelle
96^e année

Juin 2002

PAGES SPÉCIALES DU N° 845 : Agrégations et Capes 2002 : les énoncés

BUP

Bulletin de l'Union
des Physiciens



Concours Agrégations et Capes 2002
Les énoncés



ADMINISTRATION et RÉDACTION
44, bd Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06
<http://www.cnam.fr/hebergement/udp/>

Sommaire du n° 845 (Juin 2002)

UN ÉDITORIAL...

Des « campagnes » de questions aux fiches de synthèse en passant par les rapports et les colloques : une année « politique »
(Josette MAUREL et Madeleine SONNEVILLE)

ARTICLES GÉNÉRAUX

Chimie et nature (acte III) : itinéraire de quelques éléments chimiques en marge du vivant
(Suzanne FERY-FORGUES, Robert PINCE et Robert WOLF)

Un archétype d'oscillateur : le résonateur acoustique de Helmholtz
(Frederick BERNARDOT, Janine BRUNEAUX et Jean MATRICON)

Petite histoire de chute libre
(Jean-Marie VIGOUREUX)

Marches aléatoires
(Jimmy ROUSSEL)

Étude théorique de la stabilité relative des intermédiaires réactionnels
(Claire GILLÉRY, Mathieu DIEHR et Majdi HOCHLAF)

Mise en œuvre d'un capteur de mouvements à ultrasons avec Candibus, sous Linux
(Vincent NENZEL)

Expérience, démonstration et instrumentation, dans les lycées au XIX^e siècle
(Claudette BALPE)

ACTUALITÉS PÉDAGOGIQUES

Parlons sécurité

- La sécurité en TP de chimie organique (Micheline IZBICKI)

Olympiades de la chimie

- Les XVII^{es} olympiades de la chimie (Micheline IZBICKI)

VIE DE L'ASSOCIATION

Activités de l'UdP

INFORMATIONS - LIVRES ET LOGICIELS

Paru au B.O. (Jean WINTHER)

Informations

Parus ou à paraître

Les bons de commande

*Le sommaire des pages spéciales du n° 845
est en quatrième de couverture.*

Union des Physiciens

Association des professeurs de Physique et de Chimie

MEMBRES D'HONNEUR

M. Michel BOYER

Professeur à l'Université Paris VI
Président des Olympiades nationales de la chimie.

M. Claude COHEN-TANNOUJJI

Membre de l'Académie des sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Jean-Marie LEHN

Membre de l'Académie des sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Georges CHARPAK

Membre de l'Académie des sciences
Chercheur au CERN
Prix Nobel.

M. Pierre-Gilles de GENNES

Membre de l'Académie des sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Pierre LÉNA

Membre de l'Académie des sciences
Professeur à l'Université Paris VII.

PRÉSIDENTS D'HONNEUR

F. BLAIN, A. DURUPHY, J.-P. FOULON, J. GATECEL, J. TINNÈS, A. TOUREN.

MEMBRES DU CONSEIL

Membres de droit

F. BLAIN, A. DURUPHY, J.-P. FOULON, J. GATECEL, J. TINNÈS, A. TOUREN.

Les présidents des sections académiques font, de droit, partie du Conseil de l'Union des Physiciens (voir pages ci-après).

Membres élus (renouvelable par un tiers chaque année)

1999 : S. ALBRECHT, G. BAUDRANT, S. BETTON, L. DURAND, B. FABRE, H. GRIMAUD, O. LEFÈBVRE, M.-Th. SAGLIO.

2000 : M. AUBERT, M. BASUYAUX, B. HEUZÉ, M. IZBICKI, M.-R. LECAUCHOIS, A. MATHIS, G. SERRA, D. THÉVENIN.

2001 : M. BOURGAREL, C. GUERNIGOU, O. KEMPF, J. MARÉCHÉ, V. MAS, J. REGOURD, G. REYMANN, J.-L. RICHTER, A. SEFFAR.

Bureau de l'Union des Physiciens

Siège social

UNION DES PHYSICIENS - 44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06.
Aucune permanence n'est assurée à cette adresse.

Secrétariat des abonnements

Tél. : 01 43 25 61 53 - Fax : 01 43 25 07 48.



Présidente

Josette MAUREL - 45, rue d'Avron - 75020 PARIS - Tél. : 01 43 79 41 86 -
jomaurel@club-internet.fr - *Questions générales, relations internationales.*

Vice-présidents

Serge BETTON - Lendrevie-Basse - 81600 BRENS - Tél. : 05 63 57 36 07 -
sбетton@wanadoo.fr - *Collèges.*

André GILLES - Sauveterre - 31320 AUREVILLE - Tél. : 05 61 76 76 24 -
agilles@ac-toulouse.fr - *Chimie.*

Marie-Françoise KARATCHENTZEFF - 30 bis, rue Elisée-Reclus - 91120 PALAISEAU -
Tél. : 01 60 10 13 92 - mfkarat@club-internet.fr - *Lycées.*

Madeleine SONNEVILLE - 29, rue Edmond About - 92350 LE PLESSIS-ROBINSON -
Tél. : 01 43 50 79 12 - sonnevil@cicrp.jussieu.fr - *Liaisons secondaire / post-bac - Physique.*

Jean WINTHER - 73, rue de la Convention - 75015 Paris - Tél. : 01 45 77 55 63 -
jwinther@club-internet.fr - *Enseignement technique (L.P. ; L.T.) - TICE.*

Rédacteur en chef et Directeur de la publication

Monique SCHWOB - 39, rue de la Prévôté - 57950 MONTIGNY-LÈS-METZ -
Tél. et Fax : 03 87 38 02 59 - monique.schwob@wanadoo.fr

Rédacteur en chef adjoint

Jean-Pierre DAVAL - 5, rue Jean Jaurès - 92370 CHAVILLE - Tél. : 01 47 50 34 46.

Trésorier

Jacques BOULOUMIÉ - 17, hameau de la Caravelle - 91650 BREUILLET - Tél. : 01 64 58 43 34 -
Fax : 01 69 94 09 61 - bouloumi@club-internet.fr

Trésorier adjoint

François VILLEDARY - 10, rue de la Bergerie - 91300 MASSY - Tél. : 01 69 30 47 43 -
villedary.Fy@wanadoo.fr

Secrétaire général

Gilles GALLIN-MARTEL - 24, rue Alfred de Musset - 74600 SEYNOD - Tél. : 04 50 69 57 15 -
gallin-martel.gilles@wanadoo.fr - *Relations avec les sections académiques -
Liaison avec le serveur.*

Secrétaire générale adjointe

Edith PIGANEAU - 58, rue du Rôle - 91800 BRUNOY - Tél. et Fax : 01 69 43 72 81 -
edith@club-internet.fr - *Lycées - Conférence des présidents.*

Responsables de la publicité

Patrick NÉEL - Villa 1 - Les Jardins de Juliette - 310, route d'Eguilles - 13090 AIX-EN-PROVENCE -
Tél. et Fax : 04 42 20 39 98 - NEEL.PATRICK@wanadoo.fr

Assisté par **Jacques MARIE** (*président de la section académique de Caen*) - 14, chemin de Touques -
14910 BENERVILLE-SUR-MER - Tél. : 02 31 87 22 85 - marie.j@club.francetelecom.fr

Membres

François BOSSERT - 5, rue Debussy - 67116 REICHESTETT -Tél. : 03 88 20 43 49 -
francois.bossert@evc.net - *Enseignement technique : baccalauréats technologiques, série STI ;
BTS.*

Bernard CIROUX - 2 bis, rue Paul Claudel - 71530 Champforgeuil -Tél. : 03 85 41 43 30 -
bernard.ciroux@ac-dijon.fr - *Laboratoires - Enseignement technique : baccalauréats
technologiques, série STL.*

Rosine FANGUET - 13, allée de la Butte - 13500 MARTIGUES - Tél. et Fax : 04 42 42 11 74 -
rosine.fanguet@wanadoo.fr - *Lycées - Liaison avec le serveur.*

Michèle GOUÉDARD - 34 bis, rue du Docteur Le Savoureux - 92290 CHATENAY-MALABRY -
Tél. : 01 46 60 08 33 - Gerard.GOUEDARD@wanadoo.fr - *Classes préparatoires chimie.*

Michel HAGNERÉ - 14, rue des Fresnes - 44400 REZÉ - Tél. : 02 51 70 24 35 -
mihag@club-internet.fr - *Lycées.*

Danièle LAUNER - 32, chemin des Vallées - 95620 PARMAN - Tél. : 01 34 08 84 92
dlauner@club-internet.fr - *Collèges.*

Vincent MAS - 10, square du Vexin - L'orée du Lac - 78200 Mantes-la-Jolie - Tél. : 01 30 94 64 43 -
Vincent.Mas@ac-versailles.fr - *Collèges - Relations avec le primaire.*

Michel MÉTROT - 183, rue F. Perrin - 87000 LIMOGES - Tél. : 05 55 49 03 16 -
michelmetrot@limousin.iufm.fr - *IUFM - Lycées.*

Stéphane OLIVIER - 26, rue des Cordelières - 75013 PARIS - Tél. : 01 45 35 75 53 -
100620.3416@compuserve.com - *Classes préparatoires physique.*

Olympiades

Olympiades de physique

Huguette GRIMAUD - Aurore E - 134, rue Curat - 34090 MONTPELLIER
Tél. et Fax : 04 67 72 80 24 - huguette.grimaud@wanadoo.fr
Site des olympiades de physique : <http://olym-phy.in2p3.fr>

Olympiades nationales de la chimie

Micheline IZBICKI - 50, chemin de Buglise - 76290 MONTVILLIERS
Tél. : 02 35 30 50 27 - Miizbicki@aol.com

Site des olympiades nationales de la chimie : <http://www.sfc.fr/Olympiades/omlympiades.htm>

Commissions de l'Union des Physiciens

« **Base de données - BUP** »

Responsable : **Monique SCHWOB**.

« **TICE** »

Responsable : **Jean WINTHER**.

« **Réforme des lycées** »

Responsable : **Marie-Françoise KARATCHENTZEFF**.

« **Sécurité en chimie** »

Responsable : **Micheline IZBICKI**.

Projet européen (COMENIUS)

Janine MARÊCHÉ, membre du Conseil (coordination)
10, allée de la Papellerie - 54250 CHAMPIGNEULLES
Tél. et Fax : 03 83 38 24 12 - lc4838@wanadoo.fr

Françoise LANGLOIS - 91, rue Duguesclin - 69006 LYON
Tél. : 04 78 89 58 03 - langlois@univ-lyon1.fr

Monique SCHWOB - 39, rue de la Prévôté - 57950 MONTIGNY-LÈS-METZ
Tél. et Fax : 03 87 38 02 59 - monique.schwob@wanadoo.fr

Serveur UdP

<http://www.cnam.fr/hebergement/udp/>

Relations avec le serveur

Gilles GALLIN-MARTEL
gallin-martel.gilles@wanadoo.fr

Rosine FANGUET
rosine.fanguet@wanadoo.fr

Administrateur

Olivier KEMPF
okempf@club-internet.fr

Bulletin de l'Union des Physiciens

COMITÉ DE RÉDACTION

Rédacteur en chef : Monique SCHWOB.

Rédacteur en chef adjoint : Jean-Pierre DAVAL.

Comité de rédaction : A. BOUSSIÉ, L. DETTWILLER, A. GILLES, J. JOURDAIN, D. LAUNER, E. PIGANEAU, B. VELAY, J. WINTHER.

Numéros spéciaux : A. BOUSSIÉ (coordination), F. ROGER, C. VIEL.

PUBLICITÉ

Patrick NÉEL - Villa 1 - Les Jardins de Juliette - 310, route d'Eguilles - 13090 AIX-EN-PROVENCE - Tél. et Fax : 04 42 20 39 98 - NEEL.PATRICK@wanadoo.fr

PUBLICATION DES ARTICLES

Tout article ou communication doit être adressé en **triple exemplaires** au « Rédacteur en chef du Bulletin de l'Union des Physiciens » : 44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06. Dès réception l'expéditeur en est avisé.

Les manuscrits sont ensuite soumis, par le Comité de rédaction, au Comité de lecture qui donne ou refuse son accord à la publication ou bien demande des modifications. L'avis du Comité de lecture reste strictement anonyme. L'auteur en reçoit immédiatement communication. En cas d'acceptation, **aucun engagement sur la date de publication ne peut être fourni à l'auteur** ; les manuscrits acceptés ne sont pas rendus. En cas de refus, les manuscrits sont renvoyés à leurs auteurs.

Les auteurs reçoivent les épreuves de leur article aux fins de vérifier leur conformité à l'original et s'engagent à renvoyer les épreuves corrigées **dans les huit jours** suivant leur réception. Après publication, ils reçoivent dix tirés à part.

RECOMMANDATIONS AUX AUTEURS

Tout article **doit impérativement être accompagné d'un résumé** de quelques lignes et de cinq à huit mots-clés.

Les figures doivent être tracées avec soin (éviter de fournir des photocopies, qui ne permettent que des reproductions de qualité médiocre) sur une feuille séparée ; la position des figures sera repérée dans le texte.

Joindre le fichier informatique correspondant, enregistré sur disquette sous deux formats :

- un fichier ASCII permettant les transferts ;
- un fichier original pour lequel on indiquera le logiciel utilisé et le numéro de version.

Tarifs des cotisations et abonnements

1. COTISATIONS ANNUELLES : membres actifs ou adhérents

Le paiement de la cotisation seule ne donne pas droit au service du bulletin.

☞ **a - Tarif normal.....22 €**

b - Tarif réduit : retraité ou étudiant.....19 €

Le tarif étudiant est accordé aux intéressés sur leur demande et après envoi d'une pièce justificative de leur qualité.

c - Tarif spécial : enseignant de collègue

Un enseignant en collège peut opter pour l'une des deux possibilités ci-dessous :

- cotiser selon les tarifs du paragraphe 1a,
- verser une cotisation de.....23 €

Dans ce cas les trois numéros spécialement consacrés aux collèges seront envoyés gracieusement.

Moyennant paiement de la cotisation, la qualité de membre actif est réservée aux professeurs et aux membres du personnel de laboratoire de sciences physiques de l'enseignement public et de l'enseignement privé sous contrat d'association avec l'État, en activité ou en retraite ; celle de membre adhérent à toute autre personne. Le non-paiement de la cotisation entraîne la radiation de membre de l'Union des Physiciens. La qualité de membre de l'Union des Physiciens permet de participer aux activités nationales et académiques de l'Union des Physiciens.

2. ABONNEMENT AU BULLETIN DE L'UNION DES PHYSICIENS (Année civile 2002)

	France métropolitaine et D.O.M. (dont TVA à 2,1 %)	Étranger	
		Abonnement (exonéré de la TVA)	Expédition*
a - Membres actifs ou adhérents (prix préférentiel réservé aux membres de l'association à jour de leur cotisation)			
☞ Normal	36 €	35,26 €	12,20 €
Réduit (retraité, étudiant)	31 €	-	-
b - Collectivités (collège, autre établissement, personne morale, bibliothèque, laboratoire...)			
Collège	82 €	-	-
Autre que Collège	106 €	103,82 €	21 €
c - Individuel non membre de l'association			
Prix public	58 €	56,81 €	12,20 €

* Pour l'expédition par voie aérienne, consulter les tarifs ci-après, paragraphe 4.

L'abonnement est annuel et comprend :

- pour les individuels : les dix numéros du BUP de janvier à décembre ;
- pour les collectivités collèges : les dix numéros du BUP, du 1^{er} mai 2002 au 30 avril 2003 plus les deux cahiers énoncés et corrigés des CAPES et Agrégations de 2002 ;
- pour les collectivités non collèges, l'abonnement comporte en outre le cahier Enseignement Supérieur.

L'abonnement individuel est à régler à compter du 1^{er} octobre 2001 et doit être fait avant le 1^{er} décembre 2001. Pour tous règlements ultérieurs, les numéros du bulletin qui seront épuisés seront remplacés par des numéros des années antérieures.

3. CHANGEMENT D'ADRESSE

Toute demande de changement d'adresse d'expédition du bulletin doit comporter l'indication de l'ancienne et de la nouvelle adresse.

4. TARIFS DES EXPÉDITIONS DU BULLETIN PAR VOIE AÉRIENNE (hors CEE)

Les membres de l'Union des Physiciens qui en feront la demande lors du paiement de l'abonnement, pourront recevoir le bulletin par avion, à condition de rajouter les frais d'expédition indiqués ci-dessous au tarif d'abonnement : France pour le Régime intérieur et assimilé, Étranger (exonéré de TVA) pour le Régime international.

• Régime intérieur et régime assimilé

DÉPARTEMENTS D'OUTRE-MER : Guadeloupe, Martinique, Guyane Française, La Réunion, Saint-Pierre-et-Miquelon, Mayotte	19 €
TERRITOIRES D'OUTRE-MER : Nouvelle-Calédonie, Polynésie Française, Terres Australes et Antarctiques Françaises, Wallis et Futuna.....	39 €

• Régime international

Zone 1

EUROPE 1 : Allemagne, Belgique, Danemark, Italie, Luxembourg, Norvège, Pays-Bas, Portugal et Suède.....	24 €
--	------

Zone 2

EUROPE 2 : Autriche, Espagne, Finlande, Grande-Bretagne, Grèce, Irlande, Islande et Suisse	21 €
---	------

Zone 3

États-Unis et Canada	32 €
----------------------------	------

Zone 4

Afrique, Europe de l'Est, Proche et Moyen Orient.....	29 €
---	------

Zone 5 (*reste du monde*)

Autre Amérique, Asie et Océanie	48 €
---------------------------------------	------

Bureaux académiques

Aix - Marseille

Président et Courrier : Michel FANGUET - 13, allée de la Butte - 13500 Martigues - Tél. et Fax : 04 42 42 11 74 - michel.fanguet@wanadoo.fr

Vice-présidente : Magali GIACINO - 5, rue Renoir - Domaine de Calas - 13480 Calas - magali.giacino@wanadoo.fr

Trésorier : Pierre MARTIN - 10, rue Pierre de Coubertin - 13100 Aix-en-Provence - pierre.madeleine@wanadoo.fr

Chimie : André DURUPHTY - Chemin des Baux - 13510 Eguilles - Andre.Duruphty@wanadoo.fr

Chimie (olympiades) : Michel BARDE - Parc des Chartreux - Bâtiment C8 - 61, avenue Saint-Just - 13013 Marseille - lesbarde@club-internet.fr

Collège : Nathalie BARDE - Parc des Chartreux - Bâtiment C8 - 61, avenue Saint-Just - 13013 Marseille - lesbarde@club-internet.fr

Informatique : Frédéric ALLARD - 19, lotissement « Le Petit Prince » - 84450 Saint Saturnin-lès-Avignon - frederic.allard@ac-grenoble.fr

Lycée professionnel : Martine JOLY - 3, rue Paul Manivet - 84000 Avignon - majoly@wanadoo.fr

Physique : Gérard SERRA - La Grande Corniche - Bâtiment C1 - Boulevard A. Cieussa - 13007 Marseille - serra.gerard@wanadoo.fr

Physique (olympiades) : Hervé IDDA - Bâtiment F13 - 20, avenue Jean Giono - 13090 Aix-en-Provence - h.idda@caramail.com

Relations enseignement supérieur : Jean-Marie DONNINI - 11, boulevard Chave - 13005 Marseille - DONNINI@newsup.univ-mrs.fr

Technique : Marie-Line MILLON - 153, chemin de Château Gombert - Les Prairies - Bâtiment B12 - 13013 Marseille - m_millon@club-internet.fr

Amiens

Trésorier et Courrier : M. Dominique PAIN - 6, rue Boucher de Perthes - 80000 Amiens - dominique.pain@ac-amiens.fr

Chimie : Jean-Yves SIMONIN - 23, rue Pointin - 80000 Amiens.

Collège : Alain BAZIN - 22, boulevard Pont Noyelles - 80000 Amiens.

Physique : Daniel GUEANT - 1, rue Gérard Philippe - 80330 Gagny.

Technique : Jean-Philippe FOURNOU - Lycée Paul Langevin - 3, avenue Montaigne - BP 954 - 60000 Beauvais.

Antilles - Guyane

Présidente et Courrier pour les Antilles : Nady MONTRÉSOR - 8, lotissement Petit - Étang 2 - Gissac - 97180 Sainte-Anne.

Vice-président et Courrier pour la Guyane : Jean-Pierre OCTAVIA - 8, rue Samuel Lubin - 97310 Kourou.

Physique et Chimie (olympiades) : Jean-Pierre OCTAVIA - 8, rue Samuel Lubin - 97310 Kourou.

Besançon

Président et Courrier : André BRUNETTA - 32, rue de Fevery - 90700 Châtenois-les-Forges - Tél. : 03 84 29 42 20 - Andre.Brunetta@worldonline.fr

Vice-président : Thierry GUILLOT - 32, rue Saint-Vincent - 25720 Avanne - tguillot@wanadoo.fr

Trésorier : Jean-Claude POINSARD - 5, rue du Bougney - 25000 Besançon - poinsard@noos.fr

Chimie (olympiades) : Françoise CHAGRIN - 8, rue de Franche-Comté - 25000 Besançon - Francoise.chagrin@wanadoo.fr

Collège : Christian THOMAS - 55, rue de Besançon - 25300 Pontarlier - annie.christian-Thomas@wanadoo.fr

Coordination TPE : Claire CHALNOT - 1, rue du Chanoine Mourot - 25000 Besançon - clairemerychalnot@wanadoo.fr

Physique : Maryse FISCHER - Hameau du Coteau - 25770 Franois - christian-maryse.fischer@wanadoo.fr

Physique (olympiades) : Dominique OBERT - 5, rue Boudot - 25000 Besançon - Dominique.Obert@wanadoo.fr

Relations enseignement supérieur : Daniel VAN LABEKE - Domaine de Maupaillol - Chemin du Lièvre - 25000 Besançon - daniel.vanlabeke@univ-fcomte.fr

Technique : Hervé L'HUILLIER - Route de Geneuille - 25870 Devecey - lhuillier.herve@wanadoo.fr

Correspondant Haute-Saône : Nicole PETTITOT - 113, avenue de la République - 70200 Lure - phys.colomb.lure@ac-besancon.fr

Bordeaux

Présidente : Michèle VAN IMPE - 35, rue Mondenard - 33240 Saint-André-de-Cubzac - Tél. : 05 57 43 90 89 - Fax : 05 57 43 98 26 - michele.van-impe@wanadoo.fr

Secrétaire : Françoise LAPENDRY - 3, rue Barrau - 33000 Bordeaux.

Trésorière : Annie RECHINIAC - 100, rue du Docteur A. Barraud - 33300 Bordeaux.

Chimie : Thierry DULAURANS - 1, square Rubinstein - 33700 Mérignac.

Coordination TPE et Spécialité : Sylvie JUAN - Lycée Gustave Eiffel - 143, cours de la Marne - 33031 Bordeaux - sylvie.juan@wanadoo.fr
Formation continue : Thierry DULAURANS - 1, square Rubinstein - 33700 Mérignac.
Informatique : Vincent BESNARD - 33, rue du Jardin Public - 33000 Bordeaux - vincent.besnard@ac.bordeaux.fr
Laboratoires physique-chimie : Daniel MARSAN - Résidence Macedo - 3, place Toulouse Lautrec - 33600 Pessac - u.d.p.bordeaux@wanadoo.fr
Liaison collège-lycée : Sylvie NONY - 186, cours Balguerier Stutenberg - 33300 Bordeaux - snony@club-internet.fr
Lycée professionnel : Jean-François PEYRELONGUE - 6, impasse du Pradas - 33640 Beautiran - jfpeyrelongue@free.fr
Physique : Guy BOUYRIE - Lycée Victor Louis - 33400 Talence.
Physique (olympiades) : Bruno MONBELLI - 87, avenue du Parc Lescure - 33000 Bordeaux.
Relations avec les CPGE : Roger CALLY - Lycée Bertrand de Born - 24000 Périgueux.
Relations enseignement supérieur : Marie-Claude DIDIER - Lycée Les Iris - 13, rue Saint Cricq - 33305 Lormont.
Retraités : Annie RECHINAC - 100, rue du Docteur A. Barraud - 33300 Bordeaux.
Technique : Jean-Louis TISON - 10, rue du Domaine des Eyquem - 33700 Mérignac.
Correspondant Dordogne : Jean-Pierre NADAL - Lycée Laure Gatet - BP 3085 - 24003 Périgueux Cedex - jipen@wanadoo.fr

Caen

Président et Courrier : Jacques MARIE - 14, chemin de Touques - 14910 Benerville-sur-Mer - Tél. : 02 31 87 22 85 - marie.j@club.francetelecom.fr
Vice-président : Bernard TAMAIN - 3, allée des Roses - 14610 Epron - tamain@in2p3.fr
Secrétaire : François MARVIN - 5, avenue Albert Sorel - Bâtiment E - 14000 Caen - F_marvin@club-internet.fr
Trésorier : François MARVIN - 5, avenue Albert Sorel - Bâtiment E - 14000 Caen - F_marvin@club-internet.fr
Chimie : Gérard GUIBERT - 45, rue des Tisserands - 14000 Caen.
Collège : Sébastien DUVAL - Le clos Saint-Pierre - 14700 Saint-Pierre Canivet - duvalrocher@libertysurf.fr
Informatique : Daniel GUÉRIN - Les Gigannières - 50140 Saint-Clément.
Physique : Thérèse LEVALOIS - 20, rue de l'Église - 14610 Épron.
Technique : Jacques BESNARD - Allée des Marronniers - 14610 Colomby-sur-Thaon.

Clermont-Ferrand

Président et Courrier : Roland FUSTIER - 4, rue Henri Pourrat - 63360 Gerzat - Tél. : 04 73 24 27 87 - roland.fustier@wanadoo.fr
Vice-présidente : Marie-Colette MORENAS - 1 bis, boulevard Fleury - 63000 Clermont-Ferrand - mcmorenas@auvergne.iufm.fr
Secrétaire : Jean PELLERIN - 199 bis, avenue Léon Blum - 63000 Clermont-Ferrand - jean.pellerin@wanadoo.fr
Trésorier : Elyane YACINE - 4, rue des Bouleaux - 63100 Clermont-Ferrand - eyacine@auvergne.iufm.fr
Chimie (olympiades) : Stéphanie MORTIER - 5, allée du Capitaine Diederich - 63170 Aubière - smortier@free.fr
Collège : Daniel CHAMBENOIS - 18, rue du Docteur Teilhol - 63170 Aubière - chambenois.daniel@voila.fr
Informatique : Frédéric BROMONT - 7, rue Haute - 63670 Corent - frederic.bromont@wanadoo.fr
IUFM : Elyane YACINE - 4, rue des Bouleaux - 63100 Clermont-Ferrand - eyacine@auvergne.iufm.fr
Physique (olympiades) : Roland FUSTIER - 4, rue Henri Pourrat - 63360 Gerzat - roland.fustier@wanadoo.fr
Relations enseignement supérieur : Gilles BOUTEVILLE - 4, rue Victor Hugo - 63400 Chamalières - gbouteville@auvergne.iufm.fr
Technique : Abdessamad SEFFAR - Les Bardins - 63300 Thiers - a.seffar@wanadoo.fr

Corse

Président et Courrier : Marcel BERNACCHI - 51, résidence Terra Corsa - Minelli - 20200 Bastia - marcel.bernacchi@wanadoo.fr
Trésorier : Jacques LINALE - 20246 Pieve.
Chimie : Valérie DENIS - 27, boulevard Paoli - 20200 Bastia - vsd@net-up.com
Collège : Antoine MURGIA - Route de Propriano - 20100 Sartene - antoine.murgia@ac-corse.fr
Informatique : Michèle L'HARIDON - Résidence Les Aloès - Rue des Aloès - Bâtiment C - 20000 Ajaccio - michele.lharidon@ac-corse.fr
Relations avec les CPGE : Marie-Françoise PALLIER - 21, cours Napoléon - 20000 Ajaccio.
Technique : Jacques LINALE - 20246 Pieve.

Créteil

Courrier : Marcelle PLOTARD - 1, allée Clotilde - 77500 Chelles - plotardj@club-internet.fr
Vice-présidente : Mauricette MAUGER - 18, place de la République - 92170 Vanves - mauricette.mauger@wanadoo.fr
Trésorière : Marcelle PLOTARD - 1, allée Clotilde - 77500 Chelles - plotardj@club-internet.fr
Chimie : Mauricette MAUGER - 18, place de la République - 92170 Vanves - mauricette.mauger@wanadoo.fr
Collège : Benoît RAULIN - 29, rue des Blondeaux - 94240 L'Hay-les-Roses - Benoît.Raulin@ac-creteil.fr
Danielle BARBAULT - 39, rue Jacques Hillairet - 75012 Paris.

Dijon (Section académique de Bourgogne)

Président d'honneur : Joseph ADAMSKI.

Présidente et Courrier : Christine FRIOUR - 7, rue Charles Dullin - 71100 Chalon-sur-Saône -
udp.bourgogne@wanadoo.fr

Président adjoint : Gérard GOUTHIERE - 2, allée des Vergers - 21370 Plombières-lès-Dijon.

Secrétaire : Colette GRIFFON - 14, rue du Pont - 71880 Chatenoy-le-Royal.

Trésorier : Alain PELVILLAIN - 10, rue de la Gare - 21270 Talnay.

Collège : Stéphanie ÉVRARD - 10, rue des Fleurs - 21000 Dijon.

Chimie (olympiades) : Éliane SEMELET - Lycée Montchapet - 36, boulevard Pompon - 21000 Dijon.

Diffusion du Trait d'Union : Florence CHARAU - 11, rue J.-F. Baudin - 21000 Dijon.

Lycée : Michel LABOUREYRAS - 3, rue Maurice Genevoix - 58000 Nevers.

Physique (olympiades) : Gérard GOUTHIERE - 2, allée des Vergers - 21370 Plombières-lès-Dijon.

Relations enseignement supérieur : Marie-Thérèse OLLAGNIER - 9, impasse Gabriel Fauré -
21800 Chevigny-Saint-Sauveur.

Serveur académique et Concours collège « T'as vu ma manip ? » : Michel NOUVEL - 19, rue Chaudot -
89300 Joigny - michel.nouvel@wanadoo.fr

Technique : Bernard CIRoux - 2 bis, rue Paul Claudel - 71530 Champforgeuil.

Grenoble

Président et Courrier : Gilles GALLIN-MARTEL - 24, rue Alfred de Musset - 74600 Seynod -
gallin-martel.gilles@wanadoo.fr

Trésorier : Daniel BIBOUD - 9, chemin du Marais - 38100 Grenoble - Daniel.Biboud@ac-grenoble.fr

Collège : Josiane BOUVIER - Résidence du Château - 5, rue Guy Mocquet - 38130 Échirolles -
JOSIANE.BOUVIER@wanadoo.fr

Chimie (olympiades) : Stéphanie LARBAUD - 5, rue Jourdan Laporte - 38190 Brignoud -
macquet.larbaud@wanadoo.fr

Physique (olympiades) : Gilles BAUDRANT - 7, rue Saint-Just - 38400 Saint-Martin-d'Hères -
g-Baudrant@wanadoo.fr

Relations enseignement supérieur : Philippe ODERMATT - 11, clos de Chapicolle - 38330 Montbonnot -
podermatt@ac-grenoble.fr

Responsable du secteur « 2 Savoies » : Didier PETITJEAN - Bâtiment Paroissial - 73590 Crest-Voland -
d.petitjean@wanadoo.fr

Technique : Didier PETITJEAN - Bâtiment Paroissial - 73590 Crest-Voland - d.petitjean@wanadoo.fr

Lille

Président et Courrier : Jean-Pierre BOULET - 31, résidence Concorde - 62220 Carvin - Tél. : 03 21 37 10 15 -
Jean-Pierre.Boulet@wanadoo.fr

Vice-présidente : Isabelle MULLER - USTL - 59650 Villeneuve d'Ascq - isabelle.muller@univ-lille1.fr

Secrétaire : Jean-Marc BOUGENIERE - Lycée Colbert - 18, rue de Gand - 59208 Tourcoing Cedex -
bougeniere@ac-lille.fr

Trésoriers : Jean-Christophe NAZE - Lycée Condorcet - 62300 Lens - jc.naze@wanadoo.fr

Daniel DEVAUX - 49, rue d'Eau - 62690 Berles-Monchel - ddevaux.berles@wanadoo.fr

Chimie : Gérard DUPUIS - Lycée Faidherbe - 59000 Lille - gerarddupuis@infonie.fr

Collège : Daniel TAVERNE - 25, rue Salvador Allende - 59280 Armentières - dtaverne@nordnet.fr

Informatique université : Jean-Marie BLONDEAU - USTL - 59650 Villeneuve d'Ascq -

Jean-Marie.Blondeau@univ-lille1.fr

Lycée : Michel BASUYAUX - 19/33, avenue Robert Schuman - 59370 Mons-en-Baroeul - mbasuyaux@nordnet.fr

Olympiades de chimie : Isabelle MULLER - USTL - 59650 Villeneuve d'Ascq - isabelle.muller@univ-lille1.fr

Olympiades de physique : Daniel DROZ - Lycée Gustave Eiffel - 59280 Armentières - d.droz@ac-lille.fr

Relations avec les CPGE : Jean-Christophe NAZE - Lycée Condorcet - 62300 Lens - jc.naze@wanadoo.fr

Technique : Daniel DROZ - Lycée Gustave Eiffel - 59280 Armentières - d.droz@ac-lille.fr

Université : Chantal DUPREZ - USTL - 59650 Villeneuve d'Ascq - chantal.duprez@univ-lille1.fr

Autres membres : Marie-Dominique PORTIER-BASUYAUX - Lycée du Sacré Cœur - 59200 Tourcoing -
mbasuyaux@nordnet.fr

Thérèse COUCKE - Lycée Saint-Paul - 62300 Lens - tcoucke@wanadoo.fr

Alain VANHOUTTE - Lycée de l'Escaut - 59300 Valenciennes - vanhoutte@ac-lille.fr

Sabine DARTOIS - Lycée du Sacré Cœur - 59200 Tourcoing - dartoiss@club-internet.fr

Limoges

Président et Courrier : Michel MÉTROT - 183, rue F. Perrin - 87000 Limoges - Tél. : 05 55 49 03 16 -
michelmetrot@limousin.iufm.fr

Vice-présidente : Monique SAINT-GEORGES - 26, rue Jules Ferry - 87000 Limoges.

Trésorier : Gérard ROGUES - 13, rue du Pérou - 87570 Rilhac Rancon.

Chimie : Guy AVOND - 35, rue Raymond Cauty - 87100 Limoges.

Collège : Françoise FABRE - 245, rue du Mas Loge - 87100 Limoges - francoise.fabre@wanadoo.fr

Informatique : Patrick LASSAILLE - Lycée Raoul Dautry - 14, rue du Puy Imbert - 87000 Limoges.

Physique : Sophie RÉMY - 5, résidence d'Arliquet - 87700 Aix-sur-Vienne - sofremy@aol.com
Relations enseignement supérieur : Thérèse MERLE - 12, rue de l'Amphithéâtre - 87000 Limoges.

Lyon

Président et Courrier : Jean-Marie BIAU - 3, allée Val Prévert - 69400 Limas - Jean-Marie.Biau@ac-lyon.fr
Vice-présidente : Hélène PRUVOT - 127, rue Bugeaud - 69006 Lyon - helene.pruvot@free.fr
Secrétaire : Françoise KHANTINE-LANGLAIS - 91, rue Duguesclin - 69006 Lyon - langlois@iuta.univ-lyon.fr
Trésorier : François-Jacques BACCHUS - 10, rue Sainte-Anne de Baraban - 69003 Lyon - fj.bacchus@free.fr
Chimie : Daniel SIMON - ENS Lyon - 46, allée d'Italie - 69364 Lyon Cedex 07 - dsimon@chimie.ens-lyon.fr
Chimie (olympiades) : Josette CARRETTO - 177 bis, avenue Félix Faure - 69003 Lyon - jo.carretto@wanadoo.fr
Collège : Gérard VACHER - 169, cours Lafayette - 69006 Lyon - Gerard.Vacher@ac-lyon.fr
Laboratoire : M. Dominique JANTON - 1, impasse de l'école - 42660 Jonzieux - Dominique.Janton@ac-lyon.fr
Physique : Bernadette HAGUENAUER - 765, route des Alpes - 01280 Preveessin - bernadette_haguenauer@yahoo.fr
Physique (olympiades) : Florence CHAVANEL - 25, rue de Montribloud - 69009 Lyon - florence_chavanel@yahoo.fr
Relations avec les CPGE : Sylvaine ALBRECHT - 14, rue de Pizay - 69001 Lyon - sylvaine.albrecht@free.fr
Relations extérieures : Annie LESTRADE - 177 bis, avenue Félix Faure - 69003 Lyon - jo.carretto@wanadoo.fr
Site Internet : Sylvaine ALBRECHT - 14, rue de Pizay - 69001 Lyon - sylvaine.albrecht@free.fr
Technique : Jean-Marie BIAU - 3, allée Val Prévert - 69400 Limas - Jean-Marie.Biau@ac-lyon.fr
Université : Roger DUFFAIT - 7, rue des Alouettes - 69890 La Tour de Salvagny - r.duffait@ipnl.in2p3.fr

Montpellier

Secrétaire et Courrier : Marie BOURGAREL - 3, rue du Commerce - 34000 Montpellier - Tél. : 04 67 92 81 14 - Marie.Bourgarel@wanadoo.fr
Trésorier : Jean-Paul FAVAND - 3, rue Proudhon - 34000 Montpellier - Favand@club-internet.fr
Trésorière adjointe : Sylvie BEAUFORT - Parc des Amandiers - 5, rue Yourcenar - 34430 Saint-Jean-de-Vedas - dbeaufor@club-internet.fr
Chimie : Jean-Pierre PONSÀ - 22, rue Edouard Vaillant - 66350 Toulouges - Raymonde.Ponsa@wanadoo.fr
Collège : Bernard FABRE - 11, rue Jean-Baptiste Perdraut - 34500 Béziers - fabre.bjam@wanadoo.fr
Informatique : Janine PARÈS - 6, rue Réservoir - 34680 Saint-Georges d'Orques - jpires@club-internet.fr
Physique : Huguette GRIMAUD - 134, rue du Curat - Bâtiment «Aurore» E - 34090 Montpellier - huguette.grimaud@wanadoo.fr
Relations avec les CPGE : Henri ESCUDIER - 7, chemin des Prés - 34820 Teyran - henri.escudier@wanadoo.fr
Relations avec les enseignants étrangers : Witold KUBEL - Lycée Jules Fil - 23, boulevard Joliot Curie - 11000 Carcassonne - dylewo@aol.com
Relations université : Sylvette ALMAIRAC - 37, rue Lacase Duthiers - 34090 Montpellier - sylvette.almairac@libertysurf.fr
Technique : Franck MILLOT - Lycée Mermoz - 717, avenue Mermoz - 34060 Montpellier Cedex 1 - millotf@aol.com
Correspondant IUT : Henri LAVIE - 8, impasse des Garrigues - 11110 Vinasson - lavie@iutmontp.univ-montp2.fr
Correspondant matériel informatique : René TORRA - Rue du Val de la Mosson - 34430 Saint-Jean-de-Vedas - rtorra@libertysurf.fr
Responsables du site web : Robert QUER - Lycée Mermoz - 717, avenue Mermoz - 34060 Montpellier Cedex 1 - r_quer@club-internet.fr
Jean JONG - 80, avenue de Lorraine - Lycée Mermoz - 717, avenue Mermoz - 34060 Montpellier Cedex 1 - mermoziesp@yahoo.com
Autre membre : Suzanne CAUSSIGNAC - Lycée Jean Lurçat - 25, avenue Albert Camus - 66000 Perpignan - alain.caussignac@wanadoo.fr

Nancy - Metz (Section académique de Lorraine)

Présidente et Courrier : Evelyne LAVOISIER - 6, rue Coislin - 57000 Metz - Tél. et Fax : 03 87 36 07 41 - udplorraine@wanadoo.fr
Vice-présidente : Monique SCHWOB - 39, rue de la Prévôté - 57950 Montigny-lès-Metz - monique.schwob@wanadoo.fr
Trésorier : Bernard CUNY - 10, allée de la Papellerie - 54250 Champigneulle - bcuny@wanadoo.fr
Secrétaire : Claire HUTTIN - 4, rue de Bure - 57650 Havange - claire.huttin@guideo.fr
Activités expérimentales : Guy CHAMBON - 9, rue des Roses - 57365 Ennery - Guy.chambon@cryogen.com
Collège : Laurent PERTUY - 1, rue du Chemin de Fer - 57655 Boulange - laurent.pertuy@wanadoo.fr
Culture scientifique : Michel BULTINGAIRE - 13, rue du Limousin - 57190 Florange - m.bultingaire@ac-nancy-metz.fr
Jean JONG - 80, avenue de Lorraine - 57190 Florange - Jean.Jonc@wanadoo.fr
Formation continue : Evelyne LAVOISIER - 6, rue Coislin - 57000 Metz - udplorraine@wanadoo.fr
Interdisciplinarité : Madeleine MATILLO - 7, rue Augustin Hacquard - 54000 Nancy - m.matillo@ac-nancy-metz.fr
Lycées technique et professionnel : Chantal FRIES - 57, rue de la Pépinière - 57970 Yutz - chantal.fries@iname.com

Physique (olympiades) : Michel CLAUDON - 41, rue du Brocard - 54600 Villers-lès-Nancy -
mclaudon@club-internet.fr

Post-bac et chimie (olympiades) : Maurice SCHWING - 25, rue de Touraine - 57160 Moulins-lès-Metz -
Schwing.Maurice@wanadoo.fr

Relations avec l'enseignement privé : Jean-Michel JACQUES - 37, rue de Paris - 54000 Nancy -
Jean-Michel.Jacques@wanadoo.fr

Relations européennes : Janine MARÉCHÉ - 10, allée de la Papellerie - 54250 Champigneulle - 1c4838@wanadoo.fr

Retraités : Jacques SARRE - 2, allée Étienne Jodelle - 54600 Villers-lès-Nancy.

TICE : Jean-Michel JACQUES - 37, rue de Paris - 54000 Nancy - Jean-Michel.Jacques@wanadoo.fr

Nantes

Président et Courrier : Hervé GRAU - 110, boulevard de Longchamp - 44300 Nantes - Tél. : 02 40 76 93 66 -
herve.grau@wanadoo.fr

Vice-président : Jacques ROYER - 35, rue des Tisserands - 44600 Saint-Nazaire - Jacquesroyer@free.fr

Trésorier : Alain LAFOND - 15, rue des Naudières - 44800 Saint-Herblain - alafond@wanadoo.fr

Chimie (olympiades) : Gaëlle JOBIC - 13, chemin Clos Saint-Julien - 44340 Bouguenais.

Collège : Claudine NIZOU - 23 bis, rue Charles Terront - 44300 Nantes - c1nizou@aol.com

Informatique et site académique UfP : Jean-Marie PUYSILOUX - Jmpuysil@club-internet.fr

Physique (olympiades) : Jean-Luc CANCOUET - 71, rue des Renardières - 44100 Nantes - j.cancouet@wanadoo.fr

Technique et Professionnel : Philippe GUINEL - 85, boulevard de Charbonneau - 44470 Carquefou -
philippe.guinel@wanadoo.fr

Nice - Toulon

Président (Alpes-Maritimes) : Serge TRICOIRE - 557, route de la Colle de Revel - 06730 Saint-André -
Tél. : 04 97 00 07 91- serge.tricoire@unice.fr

Vice-président (Var) : Francis BERTHOMIEU - Place de l'Église - 83111 Ampus - berthomi@ac-nice.fr

Secrétaire : Chantal OTTO - Les Maisons de Villeneuve - 33, chemin des Ferrayonnes - 06270 Villeneuve-Loubet.

Trésorier : Serge OLIVIER - 8, route de Sospel - 06500 Menton.

Collège : Marie-Hélène CANAVESIO - 220, avenue Sainte-Marguerite - Bâtiment C3 - 06200 Nice.

Informatique : Patrice GARNIER - Avenue Darié La Madone - 06230 Villefranche-sur-Mer.

Physique : Annie VIVAUDO - 96, avenue des Arènes - 06000 Nice.

Orléans - Tours

Président et Courrier : Jean JOURDAIN - 60, rue Carnot - 45400 Fleury-les-Aubrais - Tél. : 02 38 88 61 00 -
ajj@club-internet.fr

Vice-présidente : Marie-Christine BAURRIER - Lycée Pothier - 2, rue Marcel Proust - 45000 Orléans -
mcbaurrier@hotmail.com

Trésorier : Jean JOURDAIN - 60, rue Carnot - 45400 Fleury-les-Aubrais - ajj@club-internet.fr

Collège : Patrice MINÈRE - La Roberdière - 37390 Mettray - p.miniere@free.fr

Informatique : Bruno DE MARTEL - 15, rue Sourderie - 41000 Blois - demartel@club-internet.fr

Physique (olympiades) : Arnaud SOULAS - Lycée Benjamin Franklin - 21 bis, rue Eugène Vignat - 45000 Orléans -
asoulas@noos.fr

Technique : Mostafa MAKHCHAN - 1, rue René Cassin - 45100 Orléans - MostafaMakhchan@aol.com

Autres membres : Philippe CHEVALLIER - Lycée Rotrou - 28000 Dreux - philippe.che@wanadoo.fr
Michèle DEPREZ - Lycée Pothier - Rue Marcel Proust - 45000 Orléans -
labophy.pothier4@fnac.net

Christiane SELLIER - Lycée Durzy - 45700 Villemandeur - c_sellier@hotmail.com

Membres associés : Chrystelle BLERIOT (*chimie olympiades*) - jerome.bleriot@wanadoo.fr
Denis POUZET (*collège*) - Denis.Pouzet@wanadoo.fr

Paris

Secrétaire et Courrier : Maïté JUSTEL - 5, villa Félix Faure - 75019 Paris - mjustel@club-internet.fr

Trésorière : Jacqueline CHAUSSADE - 11-13, rue Lasson - 75012 Paris -

jacqueline.chaussade@scola.ac-paris.fr

Chimie (olympiades) : Jacqueline GUÉ - 11, rue de l'Industrie - 92400 Courbevoie - jacggue@wanadoo.fr

Collège : Jean-David GUILLARD - 19, rue Censier - 75005 Paris - jdguillard@yahoo.fr

Informatique : Annick MACE - 6 bis, avenue des Tilleuls - 94140 Alfortville - annick.mace@wanadoo.fr

Technique : Jean-Charles JACQUEMIN - 2, boulevard Magenta - 75010 Paris - jcjacmin@club-internet.fr

Poitiers

Président : Denis PICARD - 19, rue de l'Abreuvoir - 86440 Migné Auxances - denis.picard@ac-poitiers.fr

Secrétaire : Florence EDARD - 4, rue de la Grange - 86800 Saint-Julien l'Ars - florence.edard@wanadoo.fr

Trésorière : Françoise ARNAUD - 51, rue Rémy Belleau - 86000 Poitiers - francoise.arnaud@ac-poitiers.fr

Chimie : Catherine BRUNE - Chandignon - 86100 Antrains.

Collège : Jean-Luc FOUQUET - Collège Les Salières - 17410 Saint-Martin de Ré.

Technique : Francis VALLADE - 91, rue du Pré des Mottes - 86550 Mignaloux-Beauvoir.
Université : Laurence BONNEAU - IUFM - 86000 Poitiers.

Polynésie Française

Président et Courrier : Pierre LEYRAL - BP 51152 - Pirae - Tahiti.

Reims

Présidente et Courrier : Nicole HERMAN - 18, rue de Taissy - 51100 Reims - herman@cnam.fr
Vice-président : Jean-Marie DEROUARD - 9, rue Buirette de Verrières - 51000 Châlons-sur-Marne.
Trésorière : Françoise SAINGERY - 13, rue Labori - 51100 Reims.
Chimie : Luc LEPICIER - Lycée Libergier - Rue Libergier - 51100 Reims.
Collège : Frédéric GÉRARD - 5, place de l'Hôtel de ville - 52200 Langres - frederic.gerard@reims.iufm.fr
Informatique : Jean-Marie DEROUARD - 9, rue Buirette de Verrières - 51000 Châlons-sur-Marne.
Technique : François SEVIN - 19, rue Folle Peine - 51100 Reims.

Rennes

Président et Courrier : Loïc POUILLAIN - 39 A, avenue du Général de Gaulle - 22190 Plerin -
Loic.Poullain@wanadoo.fr
Vice-président : Eric MARCADE - 6, avenue des Chevreuils - 22410 Lantic - emarcade@club-internet.fr
Secrétaire : Alain LE GALL - 3, boulevard Montaigne - 29200 Brest - alain.legall12@wanadoo.fr
Trésorier : Louis GILLOIS - 3, allée du Haut-Moulin - 35760 Saint-Grégoire - gilloy@wanadoo.fr
Collège : Jacques SALLAIS - 53, rue du Parc - 35135 Chantepie - Jacques.Sallais@wanadoo.fr
Informatique : Alain LE GALL - 3, boulevard Montaigne - 29200 Brest - alain.legall12@wanadoo.fr
Lycée : Edith LE BUANEC - 2, route de Kervhrec - 22300 Ploulech.

Rouen

Présidente et Courrier : Jocelyne DURAND - 151, rue d'Orléans - 76230 Bois-Guillaume - Tél. : 02 35 15 41 33 -
jocelyne.durand@ac-rouen.fr
Trésorière : Brigitte MARY - Appartement 20 - 6, rue Collins - 76120 Le Grand-Quevilly -
brigitte.mary@wanadoo.fr
Chimie (olympiades) : Annick GUILLOUX - 11, rue de Zurich - 76000 Rouen.
Collège : Jacques BOURET - 12, rue Brisout de Barneville - 76100 Rouen - jacques.bouret@ac-rouen.fr
Informatique : Colette ETASSE - 4, avenue René Coty - Appartement 448 - 76120 Le Grand-Quevilly.
Technique (STI) : Brigitte MARY - Appartement 20 - 6, rue Collins - 76120 Le Grand-Quevilly -
brigitte.mary@wanadoo.fr
Technique (STL) : Micheline IZBICKI - 50, chemin de Buglise - 76290 Montivilliers - miizbicki@aol.com

Strasbourg

Président et Courrier : Alain SPRAUER - 79, rue Baldung-Grien - 67720 Weyersheim - spraua@club-internet.fr
Vice-présidente : Odile LEIBER - 58, rue de Verdun - 68100 Mulhouse - oleiber@yahoo.fr
Trésorier et Lycée : Bernard GOERIG - 14, rue Principale - 67300 Schiltigheim - bernardgoerig@evc.net
Chimie (olympiades) : Jean-Michel TOLEDANO - 11, rue Victor Kessler - 67000 Strasbourg - jm.tole@wanadoo.fr
Chimie et Technique : Jean-Marc DIRRIG - 10, rue Prosper Mérimée - 67100 Strasbourg.
Collège : Michèle DOLLÉ - 2, rue du Landsberg - 67800 Hoenheim - micheledolle@wanadoo.fr
CPGE : Jean-François THIVENT - 15, rue Victor Schoelcher - 67300 Schiltigheim - THIVENTJF@aol.com
Europe : Lucie CHAUMONT - 61 A, rue Himmerich - 67000 Strasbourg - LCchaum@wanadoofr
Informatique : François BOSSERT - 5, rue Claude Debussy - 67460 Reichstett -
francois.bossert@evc.net
Internet et Webmestre : Jean-Luc RICHTER - 36, rue Rivoli - 67600 Hilsenheim - jeanluc.richter@iname.com
LEP et IUFM : Jean-Paul XUEREBS - 67, rue des Jardiniers - 67000 Strasbourg - jp-nat.xuereb@worldonline.fr
Lycée : André ISEL - 15, rue Geiler - 67000 Strasbourg.
Physique (olympiades) : François SCHLOSSER - 57, boulevard d'Anvers - 67000 Strasbourg -
francoisschlosser@voila.fr
Relations enseignement supérieur : Jean MEULLEMEESTRE - 20, rue d'Oslo - 67000 Strasbourg -
Jean.MEULLEMEESTRE@chimie.u-strasbg.fr
Sécurité chimie : Alfred MATHIS - 18, rue des Pommés - 67200 Eckbolsheim - AlfredMathis@chez.com
Technique : Nicolas ESQUENET - 4, rue Kirstein - 67000 Strasbourg - nicolas.esquenet@free.fr

Toulouse

Présidente : Marie-Laure MIEGEVILLE - 3, rue B. de Ventadorn - 31750 Escalquens - miegeville@aol.com
Secrétaire : Anne BATAILLE - 302, route de Saint-Simon - 31100 Toulouse - anne.bataille1@wanadoo.fr
Trésorier et Technique : Jean-Marc LEMAIRE - Route de Rosières - 81350 Valderies.

Chimie et Olympiades de chimie : Mireille GALLIAN - 4, place del Rei Petit - 31120 Lacroix-Falgarde - mireille.galian@ac-toulouse.fr et galian@club-internet.fr

André GILLES - Sauveterre - 31320 Aureville - agilles@ac-toulouse.fr

Collège : Cathy PARIS - 11, rue Matabiau - 31000 Toulouse - catherine.paris@ac-toulouse.fr

Serge BETTON - Lendrevie-Basse - 81600 Brens - sbetton@wanadoo.fr

Informatique : Thierry MARTIN - 3, lotissement Le Foulon - 31360 Saint-Martory - thierry.martin@ac-toulouse.fr

IUFM : Alain RABIER - 10, allée du Soulor - 31770 Colomiers - rabier@cict.fr et arabier@free.fr

Lycée : Dominique KAHRAMAN - Route des Crêtes - 31320 Mervilla - dominique.kahraman@ac-toulouse.fr

TICE : Thierry MARTIN - 3, lotissement Le Foulon - 31360 Saint-Martory - thierry.martin@ac-toulouse.f

Versailles

Présidente et Courrier : Françoise COUSSON - 31, allée Marcel Jouhandeau - 92500 Rueil-Malmaison - Francoise.Cousson@ac-versailles.fr

Trésorière : Nicole GUIBÉ - 15, allée de Trévis - 92330 Sceaux.

Chimie (olympiades) : Catherine RIPERT - 1, rue Félix Faure - 95880 Enghien-les-Bains.

Collège : André CALAS - 16, rue de la Glacière - 75013 Paris - Andrecalas@voila.fr

Vincent MAS - 10, square du Vexin - L'orée du Lac - 78200 Mantes-la-Jolie -

Vincent.Mas@ac-versailles.fr

Informatique : Bernard RENAUD - 9, ruelle du Douaire - 95270 Viarmes - Josberen@aol.com

Physique (olympiades) : Françoise COUSSON - 31, allée Marcel Jouhandeau - 92500 Rueil-Malmaison -

Francoise.Cousson@ac-versailles.fr

Technique : Claudine GUERNIGOU - 9, avenue de la Guiéterie - 78470 Saint-Rémy-lès-Chevreuse -

claudine.guernigou@wanadoo.fr

Sur votre agenda...

Du 8 et 11 juillet 2002

Congrès SFC

Toulouse

Du 26 et 29 août 2002

Université d'été : « La physique pour la santé : du diagnostic à la thérapie »

Université Claude Bernard - Lyon-1

Du 26 et 29 octobre 2002

50^{es} Journées Nationales de l'UdP

Clermont-Ferrand

Du 20 et 23 novembre 2002

Salon de l'Éducation

Paris : Porte de Versailles

Février 2003

Dixième concours des olympiades de physique

Palais de la Découverte - Paris

Bulletin de l'Union des Physiciens

Association des professeurs de Physique et de Chimie

Cahier des concours Agrégations et Capes 2002 :

Les énoncés

N° 845 (2) - Juin 2002

Administration et rédaction

44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06

<http://www.cnam.fr/hebergement/udp/>

Présentation

Ce premier volume des concours de recrutement, Agrégations et Capes, internes et externes, en sciences physiques, de l'an 2002, contient les énoncés de toutes les épreuves écrites.

Comme l'an passé, nous avons tenu à mettre le plus tôt possible les textes de ces énoncés à la disposition des collègues intéressés.

Le deuxième volume, contenant les solutions de la plupart des épreuves écrites publiées dans ce premier volume, sera disponible dans le courant de l'année scolaire.

Les deux volumes des concours sont inclus dans le service d'abonnement des établissements. Ils sont également disponibles par commande expédiée au siège de l'Union des Physiciens.

André BOUSSIÉ

Coordonnateur des bulletins sur les concours

1469

22921

*repère à reporter sur la copie***SESSION DE 2002****concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques****option : physique**

composition de physique

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

THERMODYNAMIQUE DES PROCESSUS IRRÉVERSIBLES AU VOISINAGE DE L'ÉQUILIBRE

PRÉAMBULE

Cette épreuve aborde la thermodynamique hors d'équilibre dans le cadre d'une théorie linéaire valable seulement au voisinage de l'équilibre.

Les différentes parties sont assez largement indépendantes, mais il est conseillé de les aborder dans l'ordre afin de suivre la logique de la progression proposée. Tout résultat donné dans le texte peut être utilisé même s'il n'a pas été établi.

Les trois premières parties abordent différentes causes d'évolution irréversible de façon indépendantes. Dans la quatrième partie, on s'intéresse plus particulièrement dans le cas de déséquilibre thermique à la création d'entropie associée. La généralisation de cette étude en présence de plusieurs phénomènes irréversibles simultanés est traitée dans les deux dernières parties et conduit à dégager les couplages entre ces différents phénomènes et à étudier quelques applications dans le domaine de la biologie.

On apportera aux questions qualitatives des réponses concises et précises.

Rappel de quelques formules et définitions utiles :

❖ **Formule de Stirling :**

$$N! \approx N^N \sqrt{2\pi N} e^{-N}$$

❖ **Quelques intégrales :** (a réel positif)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

❖ **Potentiels chimiques :**

➤ Gaz parfait : $\mu(T,P) = \mu^0(T,P^0) + RT \ln\left(\frac{P}{P^0}\right)$

➤ Solution idéale : $\mu_i(P,T,x_i) = \mu_i^0(P,T) + RT \ln(x_i)$ où x_i représente la fraction molaire du constituant i dans la solution et où $\mu_i^0(P,T)$ est le potentiel chimique de référence du constituant i , indépendant de x_i , et tel que $d\mu_i^0 = \bar{v}_i dP - \bar{s}_i dT$ où \bar{v}_i (respectivement \bar{s}_i) représente le volume molaire partiel (resp. l'entropie molaire partielle) du constituant i .

❖ **Réaction chimique :**

L'équilibre chimique $\sum_{l \in \text{ISIR}} \alpha_l A_l \rightleftharpoons \sum_{r \in \text{ISISP}} \beta_r A_r$ où les termes de gauche représentent les réactifs et ceux de droite les produits s'écrit aussi :

$$\sum_{l \in \text{ISISP}} \nu_l A_l = 0 \quad \text{avec} : \begin{cases} \nu_l = \beta_l & \text{pour les produits} \\ \nu_l = -\alpha_l & \text{pour les réactifs} \end{cases} \quad \text{et on définit l'affinité chimique de la réaction}$$

par : $A_r = - \sum_i \nu_i \mu_i$ et le degré d'avancement ξ par $d\xi = \frac{dN_{i,r}}{\nu_i}$ où $dN_{i,r}$ représente la variation élémentaire du nombre de moles du constituant i due uniquement à la réaction chimique.

PREMIÈRE PARTIE

Approche macroscopique des phénomènes de transport

A. Lois phénoménologiques

On s'intéresse aux phénomènes de transport de charges, de particules ou d'énergie thermique, cette étude étant menée dans le cadre des hypothèses de « l'équilibre thermodynamique local » (ETL). On note \vec{j}_p , \vec{j}_h et \vec{j}_U les densités volumiques de courant associées, ρ_q , ρ_n et ρ_U les densités volumiques des grandeurs transportées correspondantes.

I.A.1.

- a) Préciser le cadre de « l'équilibre thermodynamique local ».
- b) Énoncer les lois d'Ohm, de Fick et de Fourier associées à ces trois types de transport.
- c) En quoi ces lois traduisent-elles l'irréversibilité des transports associés ?
- d) Expliquer la démarche phénoménologique qui conduit à ce type de loi.
- e) Les coefficients phénoménologiques introduits sont la conductivité électrique γ , la diffusivité particulaire D et la conductivité thermique λ . Préciser leurs dimensions respectives, et donner des ordres de grandeur caractéristiques dans différents milieux.

I.A.2.

- a) Les lois précédentes relient le courant à des variations de « potentiel ». Est-ce toujours le cas ? Préciser le lien existant entre le « potentiel » et la densité volumique de grandeur transportée. On se placera dans le cas du transport d'énergie dans un solide ou dans un liquide.
- b) Quelles sont les analogies et les différences apparaissant à ce stade entre les trois phénomènes étudiés ?

B. Bilans

On s'intéresse à présent à la détermination des équations traduisant les bilans des grandeurs transportées. Pour cela on introduit si nécessaire les taux de création volumiques τ_q , τ_n et τ_U associés à l'existence éventuelle de sources (ou de puits) dans le milieu étudié.

I.B.1.

Traduire physiquement d'une phrase à quoi correspond un tel bilan.

I.B.2.

Donner des exemples de sources pour chaque phénomène en précisant à chaque fois l'expression du taux de création associé.

I.B.3.

- a) Qu'entend-on par mouvement de convection, mouvement de dérive, diffusion ?
- b) À quelle(s) catégorie(s) se rattachent les phénomènes étudiés ici ?
- c) En l'absence de tout mouvement d'ensemble, et en présence de sources éventuelles, établir la forme générale locale de l'équation bilan liant \vec{j} , ρ et τ .

C. Diffusion ou relaxation

Dans cette question, on considère l'évolution lente en l'absence de sources.

I.C.1.

En reportant les lois phénoménologiques dans les équations bilans, déterminer la forme de :

- l'équation « de la chaleur » dans le cas d'un solide
- l'équation de la diffusion
- l'équation régissant le transport de charge.

I.C.2.

- Pourquoi parle-t-on de relaxation de la charge et de diffusion dans les autres cas ?
- En considérant la loi d'Ohm valable à toute échelle de temps sous sa forme statique, exprimer le temps caractéristique τ_c de relaxation de la charge et donner l'ordre de grandeur de τ_c dans un métal bon conducteur comme le cuivre.
- Définir la diffusivité thermique et l'exprimer en fonction de la conductivité thermique λ , de la masse volumique ρ_0 et de la chaleur massique c dans le cas d'un solide. On considérera que ces grandeurs sont uniformes dans le solide.

I.C.3.

Il existe d'autres phénomènes de diffusion. Donner deux exemples, en précisant à chaque fois les analogies et les différences avec les cas précédents.

DEUXIÈME PARTIE

Approches microscopiques simplifiées

A. Marche au hasard à une dimension

On considère le mouvement à une dimension d'une particule initialement située à l'origine et se déplaçant par pas d'égalles longueurs a sur un axe Ox orienté de la gauche vers la droite. Ces pas sont indépendants et la particule a la même probabilité d'effectuer un pas à droite que d'effectuer un pas à gauche.

II.A.1.

- Établir que la probabilité $P(n,N)$ que la particule se retrouve en $x=na$ après N pas est donnée par :

$$P(n,N) = \frac{N!}{n^+! n^-!} \left(\frac{1}{2}\right)^N$$
 où n^+ représente le nombre de pas effectués à droite et n^- le nombre de pas effectués à gauche.

- En utilisant la formule de Stirling rappelée en préambule, en déduire une expression approchée de $P(n,N)$ sous forme d'une loi gaussienne :

$$P(n,N) = \frac{A}{\sqrt{N}} \exp\left(-\frac{n^2}{2N}\right) \text{ où l'on précisera l'expression de } A. \text{ Quelles sont}$$

les hypothèses restrictives qui conduisent à cette loi ? Discuter de leur validité.

- Tous les pas ont la même durée T . T et a sont deux paramètres microscopiques et on cherche la densité de probabilité $\rho_p(x,t)$ pour que l'abscisse de la particule soit comprise entre x et $x+\delta x$ à la date t où δx représente un intervalle mésoscopique. En précisant le lien entre la description mésoscopique et le modèle ci-dessus et en utilisant la condition de normalisation, en déduire l'expression de la densité de probabilité $\rho_p(x,t)$:

$$\rho_p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (1) \quad \text{où on précisera l'expression de } D \text{ en fonction}$$

de a et de T .

- Vérifier que ρ_p satisfait à l'équation de la diffusion.
- Déterminer la moyenne $\langle x^2(t) \rangle$.

II.A.2.

On considère à présent que le déplacement est fait de pas indépendants de longueur variable et de durée variable, effectués avec la même probabilité vers la droite ou vers la gauche. On note X_N le déplacement après N pas et t_N la durée du déplacement correspondant.

Montrer que la loi donnant $\langle X_N^2(t) \rangle$ est identique à celle obtenue en **II.A.1.e**).

II.A.3.

- Proposer une modélisation des phénomènes de diffusion construite à partir des résultats précédents.
- En déduire la dépendance du coefficient d'autodiffusion d'un gaz par rapport à la pression P et à la température T .
- Dans le cas de la diffusion d'un gaz dans un milieu poreux, un tel résultat reste-t-il encore valable ? Pourquoi ?
- Expérimentalement, pour l'autodiffusion, on obtient $D \propto P^{-1}T^b$ avec $1,6 \leq b \leq 2$. Commenter et interpréter les différences.

B.Modèle classique de la loi d'Ohm

Dans le modèle de Drude, on considère que le mouvement des électrons sous l'action d'un champ électrique \vec{E} appliqué est régi par l'équation :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - m \frac{\vec{v}}{\tau} \quad \text{où } \vec{v} \text{ représente la vitesse de dérive des électrons.}$$

II.B.1.

- Que traduit le terme $-m \frac{\vec{v}}{\tau}$?
- Proposer une interprétation microscopique de τ à partir d'une étude en champ \vec{E} uniforme et permanent.
- En déduire la loi d'Ohm et l'expression de la conductivité électrique γ en fonction des caractéristiques microscopiques.

II.B.2.

- À partir de l'ordre de grandeur de γ dans le cuivre, en déduire celui de τ .
- Déterminer l'ordre de grandeur du libre parcours moyen des électrons dans un métal comme le cuivre dans le cadre du modèle et discuter le résultat obtenu.
- Déterminer la loi de variation de la résistivité ρ_{el} avec la température et la comparer avec la loi de Matthiessen : $\rho_{el} = \rho_i + \rho_L(T)$ où ρ_i ne dépend que des défauts statiques et où $\rho_L(T)$ est une fonction linéaire de T à température ambiante.
- À quoi est due $\rho_L(T)$ dans la théorie quantique ?

II.B.3.

- Dans quel domaine de fréquences la loi d'Ohm est-elle valide ? Que devient-elle en dehors de ce domaine ?
- Reprendre alors si nécessaire l'étude menée en I.C.2.b. et déterminer une nouvelle expression et valeur de τ_r . Conclure quant à la relaxation des charges et à la neutralité locale dans un métal.

C.Compétition entre dérive et diffusion : l'atmosphère isotherme

On considère l'air comme un gaz parfait.

II.C.1.

À partir de l'hydrostatique, retrouver l'expression de la densité particulaire en fonction de l'altitude z dans le cas de l'atmosphère en équilibre isotherme.

II.C.2.

En déduire l'existence d'un courant diffusif dont on précisera l'expression et le sens.

II.C.3.

Montrer que dans un cadre analogue à celui du modèle de la partie II.B., il existe un courant de dérive dont on précisera l'expression et le sens.

II.C.4.

En déduire un lien entre le coefficient d'auto-diffusion D de l'air et sa mobilité dans le champ de pesanteur (définie comme le rapport entre la vitesse de dérive et la force de pesanteur particulaire).

II.C.5.

Dans le modèle de II.A.3., on a vu que D dépendait de P , cela modifie-t-il la cohérence de ce modèle ? Pourquoi ?

TROISIÈME PARTIE

Étude de quelques solutions particulières

de l'équation de la diffusion

A. Déséquilibre permanent : Régime stationnaire

III.A.1.

On considère un transport unidimensionnel de charges, de particules ou d'énergie thermique, entre deux réservoirs où le « potentiel » est imposé, en régime permanent. Le milieu de transport est de section Σ et de longueur L , sans sources. Définir la résistance R_{el} , R_d ou R_{th} du milieu et l'exprimer en fonction de la nature du transport et de la géométrie du milieu.

III.A.2.

- a) Généraliser cette définition à une géométrie quelconque
- b) Cette notion de résistance est conservée en électricité dans le cadre de l'ARQS. Pourquoi ?
- c) À quelle condition peut-on aussi généraliser cette notion à un régime instationnaire dans le cas thermique ?

B. Régime variable : Diffusion unidimensionnelle de particules marquées

Dans un gaz de densité volumique de particules n uniforme, on injecte à $t=0$ N_0 particules marquées uniformément réparties dans le plan $x = 0$. Le récipient utilisé est un cylindre d'axe Ox et de section Σ , et on néglige tout effet de bord. On note $n^*(x,t)$ la densité volumique de particules marquées présente à l'abscisse x à l'instant t .

III.B.1.

- a) Quelle est la condition de normalisation de n^* à l'instant t ?
- b) Quelle est la limite de $n^*(x,t)$ quand $t \rightarrow 0^+$, pour $x \neq 0$?
- c) En déduire l'expression de la distribution représentant $n^*(x,0)$.

III.B.2.

En utilisant les résultats de la question II.A.1., en déduire l'expression de $n^*(x,t)$.

III.B.3.

Représenter sur un graphe $n^*(x,t)$ en fonction de x pour différentes valeurs de t en faisant ressortir les caractéristiques importantes.

C. Température de contact de deux corps : Effusivité

On considère deux tiges cylindriques de même section Σ , dont les parois latérales sont calorifugées, et qui sont mises en contact en $x = 0$, à $t = 0$ (figure 1)

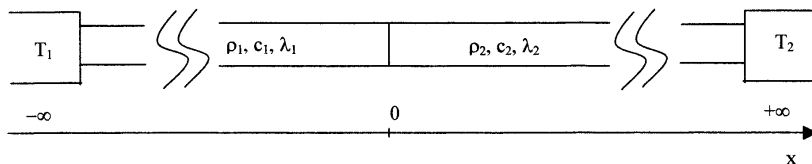


Figure 1

On note ρ_i (respectivement c_i , λ_i) la masse volumique (resp. la chaleur massique, la conduction thermique) de la barre i ($i = 1 : x \leq 0$, $i = 2 : x \geq 0$). À $t < 0$, la température de chaque barre est uniforme T_i (avec par exemple $T_1 > T_2$). Pour $t \geq 0$ les extrémités des barres, considérées comme étant à l'infini, sont en contact avec des thermostats aux températures T_1 (en $-\infty$) et T_2 (en $+\infty$).

III.C.1.

- a) Représenter l'allure a priori du profil de température $T_i(x,t)$ et celle du profil de courant $j_i(x,t)$ en fonction de x à différents instants.
- b) En déduire que la température de contact $T_0 = T(0,t)$ ne dépend pas du temps.
- c) Déterminer $\int_{-\infty}^0 j_1(x,t) dx$ et $\int_0^{+\infty} j_2(x,t) dx$.
- d) Montrer que j_i satisfait à l'équation de la diffusion.

III.C.2.

- a) En utilisant III.B., en déduire par analogie, sans calcul supplémentaire, l'expression de $j_i(x,t)$ pour $x \leq 0$ et celle de $j_2(x,t)$ pour $x \geq 0$.
- b) En déduire que $T_0 = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}$ en faisant intervenir une nouvelle caractéristique de chacun des deux corps, l'effusivité E_i que l'on exprimera en fonction de ρ_i , c_i et λ_i .
- c) Application numérique :

	Cuivre	Bois	Marbre	Muscles
Conductivité λ (U.S.I.)	$3,9 \cdot 10^7$	0,12	3,1	0,59
Capacité calorifique volumique ρc (U.S.I.)	$1,2 \cdot 10^6$	$4,2 \cdot 10^6$	$1,4 \cdot 10^6$	$2,4 \cdot 10^7$

Déterminer T_0 pour la prise en main d'un objet fabriqué avec un des trois matériaux ci-dessus (cuivre, bois ou marbre) si celui-ci sort de l'eau bouillante, et si celui-ci est à la température ambiante. Quelles remarques tirer des résultats obtenus ?

III.C.3.

- a) Les tiges sont en réalité de longueurs finies L_i . On note G_i leurs conductances thermiques respectives. Au bout d'une durée suffisamment longue, on observe l'établissement d'un régime stationnaire. Déterminer alors T'_0 température de contact en fonction de G_1, G_2, T_1 et T_2 .
- b) Montrer que T'_0 ne coïncide avec T_0 que si $\frac{E_1}{E_2} = \frac{G_1}{G_2}$
- c) Expliquer qualitativement pourquoi en général on observe une phase intermédiaire où $T(0,t)$ varie de T_0 à T'_0 et interpréter la condition ci-dessus à partir d'une analyse en terme de temps de parcours.

D. Visualisation de la gaussienne de diffusion

On introduit dans une cuve parallélépipédique de hauteur h , de profondeur d et de largeur L (figure 2), du glycérol d'indice n_1 sur une hauteur h_1 surmonté d'eau d'indice n_2 sur une profondeur h_2 telle que $h_1 + h_2 = h$. Les différentes faces de la cuve sont transparentes, d'épaisseur négligeable.

À l'instant $t=0$, l'interface entre les deux liquides est bien marquée puis il y a diffusion du glycérol dans l'eau et inversement. On note $u(z,t)$ la fraction molaire du glycérol à l'altitude z à l'instant t .

On éclaire la cuve à l'aide d'un faisceau laser en nappe plane inclinée à 45° de l'axe Oz , arrivant sur la cuve sous incidence normale sur la face d'entrée perpendiculaire à Oy et on observe à l'instant $t_1 > 0$ sur un écran situé après la cuve une figure telle que celle représentée figure 3.

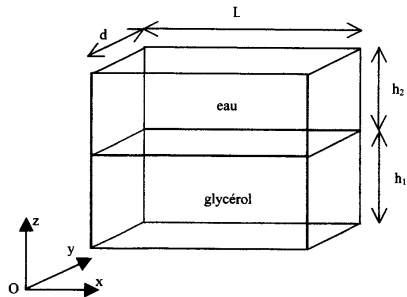


Figure 2

III.D.1.

- a) Représenter l'allure de $u(z,t)$ à différents instants.
- b) Justifier qu'on puisse considérer que le gradient d'indice apparaissant dans le milieu soit proportionnel au gradient de fraction molaire.
- c) En utilisant les lois de Descartes relatives à la réfraction, justifier qu'on puisse écrire pour un rayon incident normal à la face d'entrée à l'altitude z :

$$\Delta\theta(z) \approx d \frac{dn}{dz}(z) \quad \text{où } \Delta\theta$$

représente la déviation subie par le rayon entre l'entrée et la sortie de la cuve (Figure 4).

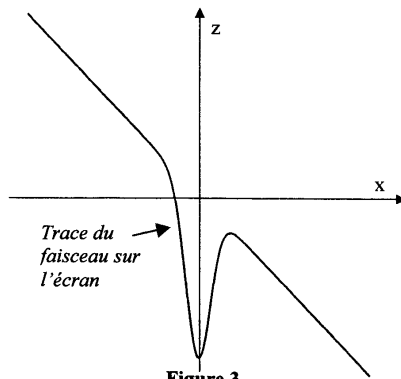


Figure 3

- d) Comment réaliser une nappe plane arrivant sur la cuve sous incidence quasi-normale à l'aide d'une bague de verre cylindrique (agitateur) ?

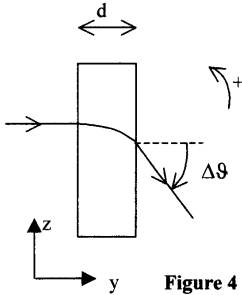


Figure 4

III.D.2.

En procédant par analogie avec les exemples étudiés précédemment, expliquer la forme de la figure observée à l'instant t_1 et représenter sur un même graphe cette figure et celle observée à l'instant $t_2 = 4 t_1$. Le raisonnement sera précisément argumenté et tous les points importants justifiés, mais on ne demande pas de refaire le détail des calculs.

QUATRIÈME PARTIE

Irréversibilité et transport :

bilan entropique associé à la conduction thermique

A. Mise en contact de deux corps à des températures différentes

On considère deux corps solides identiques, de même masse m , de même chaleur massique c , et de conductivité thermique infinie. Ces deux corps initialement aux températures respectives T_1 et T_2 sont mis en contact (Figure 5) au travers d'une paroi de section Σ , de largeur L , de chaleur massique c' négligeable, et de conductivité thermique λ . L'ensemble est totalement isolé de l'extérieur.

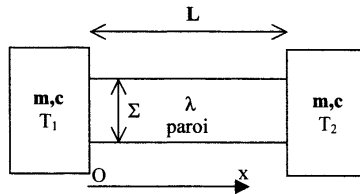


Figure 5

IV.A.1.

- a) Que signifie l'hypothèse de conductivité infinie pour les deux solides ?
- b) Par une étude globale, sans détailler ce qui se passe dans la paroi (préciser pourquoi), déterminer la température finale T_F et la variation d'entropie associée à cette transformation.
- c) En découpant le système en sous-systèmes que l'on précisera, et en distinguant alors dans le bilan entropique les termes d'échange et de création, montrer que la création d'entropie est entièrement localisée dans la paroi.

IV.A.2.

On s'intéresse à présent au détail du bilan entropique et énergétique dans la paroi en considérant d'abord pour plus de généralité le cas où c' est non nulle. On note $j(x,t)$ la mesure algébrique sur Ox du courant thermique volumique et $\tau_s(x,t)$ le taux de création volumique d'entropie.

- a) Établir le bilan d'énergie, puis le bilan entropique sur une tranche de paroi d'épaisseur dx .
- b) En déduire que :
$$\tau_s(x,t) = j(x,t) \partial_x \left(\frac{1}{T} \right)$$
- c) Que devient cette expression si j satisfait à la loi de Fourier ?

IV.A.3.

Dans cette question, on suppose que $c^*=0$.

- En introduisant la résistance thermique R de la paroi dont on donnera l'expression, déterminer le taux de création d'entropie $P_{[S]}$ dans toute la paroi en fonction de R , $T_1(t)$ et $T_2(t)$ en justifiant l'utilisation de R en régime variable (cf.III.A.2.c.).
- Déterminer les lois d'évolution des températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$ des solides 1 et 2. Analogie électrique ?
- Retrouver alors la variation totale d'entropie du système calculée en IV.A.1.b.

B.État stationnaire et minimum de création d'entropie

On considère un solide de masse volumique ρ analogue à la paroi ci-dessus, maintenu en état de déséquilibre permanent par sa mise en contact avec un thermostat de température T_1 constante à l'abscisse $x = 0$ et un thermostat de température T_2 constante à l'abscisse $x = L$. Il s'établit alors un profil de température stationnaire dans le solide et on cherche à quelle condition ce profil stationnaire minimise le taux de création d'entropie qui s'écrit :

$$P_{[S]} = \Sigma \int_0^L \tau_s(T(x), \dot{T}(x)) dx \quad \text{où } \dot{T}(x) = \frac{dT}{dx}$$

IV.B.1.

On considère deux profils $T(x)$ et $T(x)+\varepsilon(x)$ voisins.

- Préciser les conditions aux limites satisfaites par $\varepsilon(x)$.
- En développant τ_s au premier ordre par rapport aux variables T et \dot{T} et en intégrant par parties, établir que $T(x)$ rend $P_{[S]}$ extrémal pourvu que :

$$\frac{\partial \tau_s}{\partial T} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \tau_s}{\partial \dot{T}} \right)$$

IV.B.2.

Cette condition est-elle satisfaite par le profil stationnaire déduit de la loi de Fourier ?

IV.B.3.

On choisit comme nouvelle échelle de température $\theta = -\frac{1}{T}$ et on écrit alors la loi phénoménologique $\vec{j} = -L_0 \vec{\nabla} \theta$ où L_0 est considéré comme constant. Montrer qu'alors le profil stationnaire rend bien extrémal le taux de création d'entropie $P_{[S]}$.

IV.B.4.

On considère, en utilisant la nouvelle échelle de température, un profil $\theta(x,t), \dot{\theta}(x,t)$ instationnaire, satisfaisant aux conditions aux limites et on cherche à savoir comment évolue $P_{[S]}$ avec le temps.

- Montrer que :
$$\frac{dP_{[S]}}{dt} = -2\Sigma \rho c' \int_0^L (\partial_t \theta) (\partial_t T) dx$$
- En déduire que l'état stationnaire observé est bien un minimum vis-à-vis de la création d'entropie. Ce résultat sera généralisé dans les parties V et VI.

IV.B.5.

On considère à nouveau deux corps solides que l'on met en contact, le transfert d'énergie se faisant du corps le plus chaud (corps 1) vers le corps le plus froid (corps 2), l'ensemble étant isolé.

- Montrer que la traduction des deux principes conduit naturellement à introduire $\theta = - \frac{dS}{dU}$ comme échelle de température.
- Étudier comment se classent les températures négatives par rapport aux températures positives sur cette échelle et faire de même avec l'échelle habituelle T . Conclure quant au bien-fondé de l'étude précédente.
- Connaissez-vous des systèmes à température T négative ? De tels systèmes peuvent-ils avoir une énergie cinétique ? Comment peut-on les observer ?

CINQUIÈME PARTIE

Approche linéaire des phénomènes irréversibles

Il est bien connu depuis le siècle dernier que les différents phénomènes de transport étudiés précédemment peuvent être couplés, un déséquilibre thermique entre deux jonctions de deux métaux différents pouvant provoquer l'apparition d'une force électromotrice (effet Seebeck) par exemple. Ces couplages jouent un rôle essentiel en particulier en biologie pour assurer les différents échanges transmembranaires entre les cellules.

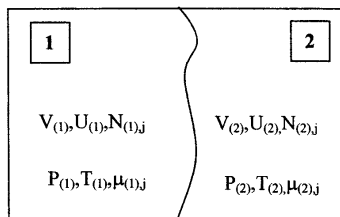


Figure 6

Afin de modéliser simplement ces différents couplages et de généraliser l'étude menée dans les parties précédentes, on considère le système représenté figure 6 dans lequel deux récipients de volume $V_{(1)}$ et $V_{(2)}$ sont séparés par une membrane souple a priori perméable à l'ensemble des espèces présentes, l'ensemble étant isolé dans un récipient indéformable rigide.

Dans chaque compartiment les grandeurs intensives sont supposées homogènes, par contre elles peuvent avoir des valeurs distinctes de part et d'autre de la membrane, les échanges au travers de celle-ci étant beaucoup plus lents que les transferts à l'intérieur de chaque compartiment. Il n'y a aucun mouvement d'ensemble.

A. Expression de la création d'entropie

On considère d'abord le cas où deux espèces neutres sont présentes de part et d'autre de la membrane. On note $N_{(1,j)}$ et $\mu_{(1,j)}$ (respectivement $N_{(2,j)}$ et $\mu_{(2,j)}$) le nombre de moles et le potentiel chimique du constituant j ($1 \leq j \leq 2$) dans le compartiment (1) (resp. (2)). De même, $U_{(1)}$, $T_{(1)}$ et $P_{(1)}$ (respectivement $U_{(2)}$, $T_{(2)}$ et $P_{(2)}$) désignent l'énergie interne, la température et la pression dans le compartiment (1) (resp. (2)). Il n'y a aucune réaction chimique entre les différents constituants du système.

V.A.1.

- À partir des deux principes de la thermodynamique, exprimer la variation d'entropie $dS_{(1)}$ (resp. $dS_{(2)}$) accompagnant une variation élémentaire des variables extensives.
- En déduire par un bilan que le taux de production d'entropie $P_{[S]}$ dans le système total s'écrit :

$$P_{[S]} = I_{U,1 \rightarrow 2} \left(\frac{1}{T_{(2)}} - \frac{1}{T_{(1)}} \right) + I_{\text{vol},1 \rightarrow 2} \left(\frac{P_{(2)}}{T_{(2)}} - \frac{P_{(1)}}{T_{(1)}} \right) + \sum_j I_{N,1 \rightarrow 2,j} \left(\left(- \frac{\mu_{(2,j)}}{T_{(2)}} \right) - \left(- \frac{\mu_{(1,j)}}{T_{(1)}} \right) \right) \quad (2)$$

où l'on précisera l'expression des courants.

V.A.2.

Le courant $I_{\text{vol},1 \rightarrow 2}$ est-il associé à un déplacement de matière ? Dans le cas de solutions dans un solvant liquide s , ce terme joue-t-il un rôle important ? Pourquoi ?

V.A.3.

Le taux de production d'entropie $P_{[S]}$ peut s'écrire sous la forme : $P_{[S]} = \sum I_{i,1 \rightarrow 2} \Gamma_i(1,2)$ où Γ_i représente la force thermodynamique associée au flux I_i de la grandeur extensive U, V ou N_j .

a) Que valent les forces thermodynamiques à l'équilibre ?

b) Lorsque l'équilibre est réalisé, que valent les différents courants ?

Compte-tenu de ce qui précède, on suppose que les courants s'expriment en fonction des forces thermodynamiques, et au voisinage de l'équilibre, on linéarise cette expression :

$$I_{i,1 \rightarrow 2} = \sum_j L_{ij} \Gamma_j(1,2) \quad (3)$$

En l'absence de champ magnétique et de phénomènes de rotation, on admettra que la réversibilité temporelle des phénomènes au niveau microscopique entraîne :

$$L_{ij} = L_{ji} \quad \forall (i,j) \quad (\text{relations de réciprocité d'Onsager}).$$

V.A.4.

Comment pourrait-on envisager d'adapter ces résultats à des milieux où les variables extensives varient continûment ? On se restreint à des problèmes unidimensionnels, et on ne demande pas ici d'établir rigoureusement les démonstrations correspondantes mais d'effectuer une synthèse a priori entre les résultats obtenus dans les parties IV et V. À quoi correspond la loi phénoménologique obtenue en IV.B.3. ? Proposer en particulier un équivalent aux équations (2) et (3).

B.Potentiel électrochimique

On reprend le système précédent, mais les espèces présentes sont le solvant s neutre et des espèces chargées $A_j^{z_j+}$ où z_j est un entier positif ou négatif. Les deux compartiments sont à présent à des potentiels électriques distincts $\Phi_{(1)}$ et $\Phi_{(2)}$.

V.B.1.

Montrer que la prise en compte des termes électriques conduit à modifier les expressions $dS_{(1)}$ et $dS_{(2)}$ déterminées en V.A.1.a. et préciser de quelle manière.

V.B.2.

En déduire que cela revient à remplacer dans $P_{[S]}$ le potentiel chimique $\mu_{(0),j}$ par un potentiel électrochimique $\tilde{\mu}_{(0),j}$ dont on établira que $\tilde{\mu}_{(0),j} = \mu_{(0),j} + z_j F \Phi_{(i)}$ (F représentant la quantité de charge $N e$ où N est le nombre d'Avogadro et e la charge élémentaire)

V.B.3.

Que devient alors la condition d'équilibre thermodynamique ?

V.B.4.

Préciser l'expression de la force thermodynamique reliée au flux de particules A_j .

C.Cohérence avec les parties précédentes

On considère dans cette question que toutes les forces thermodynamiques sont nulles sauf celles associées à la diffusion des particules du soluté A_j et on néglige ici le couplage existant entre les différents flux et forces :

$$L_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j$$

V.C.1.

On considère un soluté neutre. La solution est idéale, la pression et la température uniformes, et on suppose ici que la concentration de soluté varie continûment suivant la direction Ox. Dans ce cas la mesure algébrique suivant Ox de la densité volumique de courant du soluté est liée à son potentiel chimique par :

$$J = L \partial_x \left(- \frac{\mu}{T} \right) \quad \text{d'après ce qui précède.}$$

- En explicitant μ , retrouver la loi de Fick et relier le coefficient de diffusion D à L , R constante des gaz parfaits et c concentration du soluté.
- On considère l'interface liquide/vapeur d'un corps pur à l'équilibre. Comparer le flux de particules à travers l'interface selon que l'on utilise la loi de Fick ou l'expression ci-dessus.

V.C.2.

On revient à présent au cas de l'atmosphère isotherme étudiée en II.C.

- Par analogie avec V.B.1. et V.B.2., préciser quelle doit être la forme du potentiel chimique généralisé $\tilde{\mu}$ à considérer ici.
- Vérifier que l'annulation de la force thermodynamique conduit bien à la loi hydrostatatique établie en II.C.1.
- Montrer que la loi $J = L \partial_z \left(- \frac{\tilde{\mu}}{T} \right)$ conduit à identifier le courant de dérive et le courant de diffusion évoqués en II.C. à des termes que l'on précisera et retrouver la relation établie en II.C.4. entre mobilité et diffusion.

SIXIÈME PARTIE**Application aux membranes biologiques****A. Couplage électrocinétique : électro-osmose**

On reprend ici la description adoptée en V.B. en considérant en outre que la température est uniforme : $T_{(1)} = T_{(2)}$ et que la solution étudiée a la même composition dans les deux compartiments. On néglige le courant $I_{vol,1 \rightarrow 2}$, considérant le fluide incompressible. La solution est idéale.

En utilisant le dispositif représenté figure 7, on constate alors que l'application d'une différence de potentiel $E = \Delta\Phi$ entre les deux compartiments s'accompagne d'un courant de matière jusqu'à apparition d'une différence de pression ΔP (appelée dans ce cas pression électro-osmotique) entre les compartiments correspondant à un état stationnaire. De même, l'application d'une différence de pression entraîne le passage d'un courant électrique jusqu'à ce qu'une différence de potentiel s'établisse en régime stationnaire.

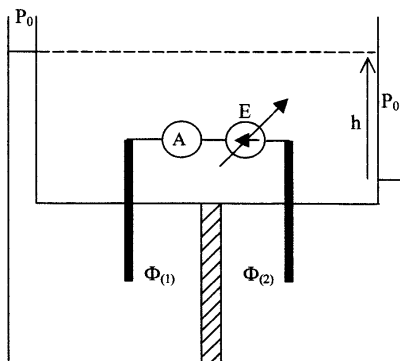


Figure 7

VI.A.1.

Établir à partir des résultats obtenus en V.B. que dans ces conditions on a :

$$P_{[S]} = \frac{J}{T} \Delta P + \frac{I}{T} \Delta \Phi \quad \text{avec } \Delta P = P_{(1)} - P_{(2)} \text{ et } \Delta \Phi = \Phi_{(1)} - \Phi_{(2)}$$

où :

$$\begin{cases} J = \bar{v}_s \frac{dN_{(2),s}}{dt} + \sum_j \bar{v}_j \frac{dN_{(2),j}}{dt} \\ I = \sum_j Z_j F \frac{dN_{(2),j}}{dt} \end{cases} \quad \bar{v}_s \text{ et } \bar{v}_j \text{ représentant les volumes molaires}$$

partiels du solvant et des différentes espèces de soluté. Préciser le sens physique de chacun des courants I et J.

VI.A.2.

Conformément à la démarche de V.A., on relie alors courants et forces thermodynamiques par :

$$\begin{cases} J = L_{11} \frac{\Delta P}{T} + L_{12} \frac{\Delta \Phi}{T} \\ I = L_{21} \frac{\Delta P}{T} + L_{22} \frac{\Delta \Phi}{T} \end{cases} \quad \text{où } L_{12} = L_{21} \text{ d'après les relations de réciprocité.}$$

- Exprimer $P_{[S]}$ en fonction des seules variables ΔP et $\Delta \Phi$. Quelles sont les inégalités portant sur les coefficients phénoménologiques L_{ij} liées au second principe ?
- On suppose qu'un générateur extérieur impose $\Delta \Phi$ constant (figure 7). En déduire l'existence d'un état de minimum de création d'entropie, stationnaire, donné par $J=0$ et exprimer ΔP_0 associé à ce minimum en fonction de $\Delta \Phi$.
- De même dans le cas où on applique une différence de pression ΔP (à l'aide d'un piston par exemple), en l'absence de générateur dans le circuit électrique extérieur, établir l'existence d'un état de minimum de création d'entropie, stationnaire, donné par $I = 0$ et exprimer $\Delta \Phi_0$ associé en fonction de ΔP .

VI.A.3.

On cherche à présent à vérifier que le régime stationnaire obtenu en VI.A.2.b. est stable. Pour cela on considère un état voisin de cet état stationnaire, où la différence de pression est $\Delta P(t) = \Delta P_0 + \alpha(t)$, la différence de potentiel imposée étant toujours maintenue constante.

- Établir alors que : $J = \frac{L_{11}\alpha}{T}$ et en déduire que : $\frac{dP_{[S]}}{dt} = \frac{2L_{11}}{T^2} \alpha \frac{d\alpha}{dt}$
- Compte-tenu de la lenteur des phénomènes observés, la différence de pression est mesurée par une différence de niveau des surfaces libres (figure 7). On note Σ_0 la section des parties verticales des tubes reliés aux compartiments (1) et (2), ρ la masse volumique de la solution et g l'accélération de la pesanteur. Établir alors le lien existant entre variation de la différence de pression et courant de matière et en déduire que : $\frac{dP_{[S]}}{dt} = -\frac{4L_{11}^2}{T^3} \frac{\rho g}{\Sigma_0} \alpha^2$
- Conclure.

VI.A.4.

On cherche à établir des résultats similaires dans le cas où ΔP est imposé et où $\Delta \Phi = \Delta \Phi_0 + \beta(t)$.

- Établir l'expression de $\frac{dP_{[S]}}{dt}$ en fonction de $\beta(t)$ et de ses dérivées.
- Dans le cadre d'une modélisation simple, pourquoi peut-on assimiler la membrane à un condensateur ?
- En déduire par un raisonnement analogue à celui de VI.A.3.b. l'extension des résultats précédents.

VI.A.5.

Expérimentalement, on constate que les états stationnaires sont stables, et on cherche à vérifier que $L_{12} = L_{21}$. On a vu en VI.A.2. que l'on pouvait mesurer $\left(\frac{\Delta P_0}{\Delta \Phi_{\text{imposé}}}\right) = \left(\frac{\Delta P}{\Delta \Phi}\right)_{J=0}$. On peut réaliser aussi une deuxième expérience qui consiste à réaliser un état de déséquilibre où J est imposé (par déplacement à vitesse constante d'un piston).

- Par analogie avec VI.A.2., montrer que travailler à J constant revient à travailler à $\Delta \Phi = 0$, ce qui donne ainsi accès à $\left(\frac{I}{J}\right)_{\Delta \Phi=0}$.
- Préciser la relation existant entre les deux coefficients mesurés si les relations de réciprocité sont vérifiées (relation de Saxén).
- Le tableau ci-dessous reprend les résultats expérimentaux publiés par Saxén en 1892 (Saxén, U : Ann. Physik, 47, 46 (1892)) avant la publication des travaux d'Onsager en 1931 (Onsager, L : Phys Rev., 37, 405 (1931) et 38, 2265 (1931)) :

Solution aqueuse	$\left(\frac{I}{J}\right)_{\Delta \Phi=0}$ en $\text{g}^{1/2} \text{cm}^{-5/2}$	$-\left(\frac{\Delta P}{\Delta \Phi}\right)_{J=0}$ en $\text{g}^{1/2} \text{cm}^{-5/2}$
0.5% ZnSO ₄	2,81	2,84
0.75% ZnSO ₄	2,59	2,58
	2,65	2,65
	2,62	2,64
1% ZnSO ₄	2,86	2,96
	2,92	2,86
1% CuSO ₄	2,55	2,63
	2,60	2,57
	2,65	2,58
2% CuSO ₄	4,29	4,22
0.5% CdSO ₄	1,58	1,64
1% CdSO ₄	1,88	1,76
	8,62	8,70

Les résultats sur une même ligne correspondent à des mesures effectuées avec la même membrane et lors de la même séance de mesure. Commenter ce tableau.

VI.A.6.

Pourquoi et comment l'étude précédente peut-elle s'appliquer à la circulation sanguine au niveau de la circulation capillaire ?

B. Transport actif

On constate dans de nombreux organismes vivants que le flux de certaines espèces au travers de membranes cellulaires est orienté de la phase de potentiel électrochimique le plus bas vers la phase de potentiel électrochimique le plus élevé (échange chlorure/bicarbonate à travers la membrane des globules rouges, échange Na⁺/K⁺ au niveau des membranes cellulaires par exemple). Ceci est rendu possible par l'existence d'un couplage entre ces échanges et une réaction chimique « orientée » se déroulant au niveau de la membrane. On se propose dans cette dernière partie de mettre en évidence quelques caractéristiques très générales associées à ce phénomène qualifié de transport actif.

VI.B.1.

En reprenant l'analyse effectuée à la partie V.A., montrer que la présence d'une réaction chimique dans le compartiment (1) conduit à l'apparition d'un terme supplémentaire au niveau de la création

d'entropie de la forme $\frac{A_{(1),r}}{T_{(1)}}$ I_{(1),r} où A_r est l'affinité chimique de la réaction (définition rappelée en préambule), et où I_r est lié simplement au degré d'avancement ξ de la réaction.

VI.B.2.

On admet que, la réaction ayant lieu au niveau de la membrane, l'expression reste identique et on suppose donc que le transport d'un soluté i mettant en jeu une seule réaction chimique conduit à :

$$P_{[S]} = I_i \frac{\Delta\tilde{\mu}_i}{T} + I_r \frac{A_r}{T} \quad \text{où } \Delta\tilde{\mu}_i = \tilde{\mu}_{(1),i} - \tilde{\mu}_{(2),i} \text{ est la différence de potentiel}$$

électrochimique entre les deux compartiments.

On considère ici à titre d'exemple les échanges Na⁺/K⁺ ayant lieu à travers la membrane de l'axone de calmar, avec les données suivantes :

- Différence de potentiel électrique – 60 mV (intérieur de l'axone négatif par rapport à l'extérieur)
- Concentrations de Na⁺ et K⁺ à l'intérieur respectivement de 50 et 400 mmol L⁻¹
- Concentrations de Na⁺ et K⁺ à l'extérieur respectivement de 440 et 20 mmol L⁻¹
- Réaction chimique au niveau de la membrane :
 ATP + eau → ADP + phosphate (hydrolyse de l'ATP, source essentielle d'énergie au niveau biologique) avec 1 ATP hydrolysée pour 3 Na⁺ sortants et 2 K⁺ entrants dans l'axone.
- Concentrations de l'ATP, de l'ADP et du phosphate sous forme inorganique de 10 mmol L⁻¹
- Affinité standard de la réaction 29,3 kJ mol⁻¹ (définie comme l'affinité de la réaction, mais avec les potentiels chimiques de référence des réactifs et produits)

Déterminer séparément les contributions à la création d'entropie à T = 300 K des échanges de Na⁺, de K⁺ et de la réaction chimique, par mole d'ATP hydrolysée, puis la création totale d'entropie, et discuter le résultat obtenu.

VI.B.3.

On revient à la description générale du phénomène de transport actif.

- a) À quelle condition sur la réaction chimique le transport actif est-il possible ? On supposera cette condition réalisée dans la suite.
- b) On considère que l'on peut encore se placer dans le cadre de la théorie développée précédemment et on considère donc les relations de couplage suivantes :

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\mu}_i = R_{ii}I_i + R_{ir}I_r \\ A_r = R_{ri}I_i + R_{rr}I_r \end{cases} \quad \text{avec } R_{ri} = R_{ir}$$

Préciser les différentes inégalités satisfaites par les coefficients phénoménologiques.

VI.B.4.

Afin d'étudier de façon générale l'efficacité du couplage dans le transport actif, on introduit les variables sans dimension $\theta = \frac{I_i}{I_r}$ et $\alpha = \frac{\Delta\tilde{\mu}_i}{A_r}$, ainsi que les paramètres sans dimension $Z = \sqrt{\frac{R_{rr}}{R_{ii}}}$ et

$$q = -\frac{R_{ir}}{\sqrt{R_{ii}R_{rr}}} \text{ (coefficient de couplage).}$$

- a) Établir l'expression de θ/Z en fonction de q et de $Z\alpha$.
- b) Préciser l'intervalle de valeurs possibles de q .
- c) On restreint la discussion au cas où $|I_i| \leq |ZI_r|$, les courbes donnant l'allure de θ/Z en fonction de $Z\alpha$ pour différentes valeurs de q sont représentées figure 8. En déduire les courbes associées à des valeurs de q négatives. En utilisant la condition VI.B.3.a., préciser les domaines correspondant au transport actif.
- d) Dans le cas où $q = 1$, préciser la relation entre les flux et expliquer pourquoi Z est appelé coefficient stoechiométrique phénoménologique. Dans ce cas, $\Delta\tilde{\mu}_i$ influence-t-il I_i ?

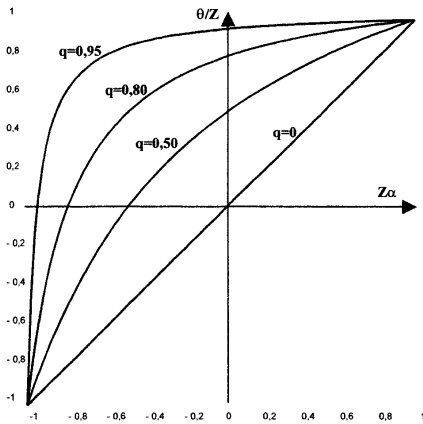


Figure 8

VI.B.5.

Dans le cas où $q \neq 1$, on définit le rendement η du transport actif par : $\eta(q, Z\alpha) = -\frac{I_i \Delta\tilde{\mu}_i}{I_r A_r}$

- a) Justifier le sens d'une telle définition.
- b) Montrer que pour chaque valeur de q , η passe par un maximum $\eta^*(q)$ que l'on exprimera.
- c) Déterminer le lieu des points $(Z\alpha, \theta/Z)$ associés à ces maxima.
- d) Tracer la courbe $\eta^*(q)$ et discuter le résultat obtenu.

1470-A

22922

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques**

option : physique

composition de chimie

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet aborde différents aspects de la chimie des dérivés oxygénés de l'azote et est constitué de quatre parties indépendantes **1**, **2**, **3** et **4** ; il est vivement conseillé aux candidats de les aborder toutes les quatre. Chaque partie contient deux sous-parties.

La partie **1** examine les aspects structuraux des dérivés oxygénés de l'azote

La partie **2** porte sur les dérivés oxygénés de l'azote dans l'atmosphère et leur dosage dans les eaux.

La partie **3** considère les dérivés oxygénés de l'azote en chimie industrielle.

La partie **4** étudie une méthode d'isolement d'un α -aminoacide précurseur de la molécule de monoxyde d'azote dans les cellules animales et examine certaines étapes de sa synthèse.

Données numériques :

Constante d'Avogadro : $6,023 \cdot 10^{23} \text{ mole}^{-1}$

Masses molaires atomiques : $M_{\text{H}} = 1,007 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M_{\text{N}} = 14,007 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M_{\text{O}} = 15,999 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

On prendra $(RT \cdot \ln 10)/F = 0,059 \text{ V}$ à 25°C .

Potentiels standards à $\text{pH} = 0$ et 25°C

$$E^\circ (\text{MnO}_4^- / \text{MnO}_{2(s)}) = 1,69 \text{ V}$$

$$E^\circ (\text{O}_{2(g)} / \text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$$

$$E^\circ (\text{MnO}_{2(s)} / \text{Mn}^{2+}_{(aq)}) = 1,22 \text{ V}$$

$$E^\circ (\text{Fe}[\text{Phen}]_3^{3+} / \text{Fe}[\text{Phen}]_3^{2+}) = 1,06 \text{ V} \quad \text{Phen : orthophénanthroline}$$

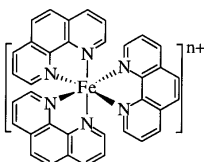
$$E^\circ (\text{NO}_3^- / \text{NO}_2^-)_{(aq)} = 0,94 \text{ V}$$

$$E^\circ (\text{MnO}_{2(s)} / \text{Mn}_2\text{O}_3)_{(s)} = 0,18 \text{ V}$$

$$E^\circ (\text{Mn}_2\text{O}_3 / \text{Mn}_3\text{O}_4)_{(s)} = -0,15 \text{ V}$$

$$E^\circ (\text{Mn}_3\text{O}_4 / \text{Mn}(\text{OH})_2)_{(s)} = -0,38 \text{ V}$$

$$E^\circ (\text{Mn}^{2+}_{(aq)} / \text{Mn}_{(s)}) = -1,17 \text{ V}$$



Ferroïne

Partie 1

STRUCTURE ET PROPRIÉTÉS PHYSICO-CHIMIQUES DES DÉRIVÉS OXYGÉNÉS DE L'AZOTE.

1-1. Structure électronique de l'azote et de l'oxygène et géométrie des oxydes d'azote.

1-1-1. Donner la structure électronique des atomes d'oxygène ($Z = 8$) et d'azote ($Z = 7$).

Les énergies de première et deuxième ionisation (en électronvolts) des éléments de la deuxième période sont portées dans le tableau 1

Tableau 1

	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne
Numéro atomique Z	3	4	5	6	7	8	9	10
Energie de première ionisation	5,32	9,32	8,29	11,26	14,53	13,62	17,42	21,56
Energie de deuxième ionisation	75,63	18,21	25,15	24,38	29,60	35,11	34,97	40,96

1-1-2. Rappeler la définition de l'énergie d'ionisation d'un atome.

1-1-3. Commenter l'évolution générale, en fonction du numéro atomique, des énergies de première ionisation observées.

1-1-4. Dans cette série, analyser les énergies de première ionisation des paires béryllium / bore d'une part et azote / oxygène d'autre part. Pour chaque paire, montrer que la structure électronique des atomes permet d'expliquer les valeurs relatives des énergies de première ionisation observées.

1-1-5. Pour un même atome, l'énergie de deuxième ionisation est plus importante que l'énergie de première ionisation. Expliquer l'origine de cette différence.

1-1-6. Les atomes de lithium, de bore et d'oxygène présentent des singularités pour les énergies de deuxième ionisation. Analyser les valeurs observées et proposer une interprétation pour chaque cas.

1-1-7. Rappeler le principe et les règles de la théorie VSEPR (Valence Shell Electron Pair Repulsion).

1-1-8. Donner la structure de Lewis des espèces suivantes : NO_2^+ , NO_2^- , NO_3^- ; puis à l'aide de la théorie VSEPR, prévoir leur géométrie.

1-1-9. Peut-on attendre un angle ONO identique pour les espèces NO_2^- et NO_2 .

1-1-10. Expliquer l'évolution de l'angle XNO dans le tableau 2 :

Tableau 2

Composé	FNO	ClNO	BrNO
Angle XNO	110°	113°	117°

1-2. Diagrammes d'orbitales moléculaires et remplissage.

Les diagrammes d'orbitales moléculaires des espèces de type AB, qui mettent en jeu des éléments de la deuxième période, peuvent être construits en utilisant le diagramme corrélé des molécules de type A₂.

1-2-1. Sur différents schémas, représenter les orbitales moléculaires résultant de l'interaction des orbitales atomiques suivantes :

(les noyaux seront placés sur l'axe x ; préciser sur votre schéma la position des axes y et z)

* 2s-2s

* 2p-2p (en détaillant les différents cas p_x, p_y et p_z). Expliquer pourquoi certaines interactions que l'on précisera ne conduisent pas à des orbitales moléculaires.

* 2s-2p (en détaillant les différents cas p_x, p_y et p_z)

1-2-2. Préciser le type d'orbitales moléculaires obtenues.

1-2-3. Préciser la différence entre diagramme d'orbitales moléculaires corrélé et diagramme non corrélé.

1-2-4. Expliquer pourquoi il est possible d'avoir une représentation satisfaisante de la structure électronique de la molécule de dioxygène avec un diagramme d'orbitales moléculaires non corrélé alors qu'un diagramme corrélé est nécessaire pour la molécule de diazote.

Niveaux d'énergie des orbitales de valence de l'atome d'oxygène :

2s : -32,4 eV 2p : -15,9 eV.

Niveaux d'énergie des orbitales de valence de l'atome d'azote :

2s : -25,6 eV 2p : -12,9 eV.

1-2-5. Dans le cas de la molécule de monoxyde d'azote, effectuer, sur le schéma représenté en annexe 1 et à rendre avec la copie, le remplissage des différents niveaux pour les atomes d'azote, d'oxygène et pour la molécule de NO. Montrer que la molécule obtenue possède un spin total non nul. Quelle propriété physique présente cet état ?

1-2-6. A l'état solide, la molécule de monoxyde d'azote est diamagnétique. Expliquer comment cette propriété peut être attribuée à la formation d'un dimère dont on donnera les structures de Lewis possibles.

1-2-7. Le monoxyde d'azote peut donner lieu à une oxydation ou à une réduction selon un processus monoélectronique. Écrire les deux demi-équations d'oxydo-réduction ; donner la structure de Lewis et l'ordre de liaison des produits. Justifier dans les deux cas la localisation de la charge portée par les espèces obtenues.

1-2-8. A partir du tableau 3 suivant donnant les fréquences de vibration de la liaison NO respectivement pour le monoxyde d'azote, l'ion nitrosonium, l'ion nitroxyde, déterminer la constante de force k de la liaison pour chaque molécule. On considérera que le modèle de l'oscillateur harmonique s'applique à ces molécules. Discuter l'évolution des valeurs des constantes de force obtenues et des longueurs de liaison portées dans le tableau 3 en fonction des structures de Lewis précédemment établies.

Tableau 3

	Distance N-O (en pm)	Fréquence de vibration (en Hz)
Monoxyde d'azote	115	55,2. 10¹²
Ion nitrosonium	95	69,0. 10¹²
Ion nitroxyde	126	38,7. 10¹²

Partie 2

LES DÉRIVÉS OXYGÉNÉS DE L'AZOTE DANS L'ATMOSPHÈRE.

2-1. Cinétique d'oxydation du monoxyde d'azote.

2-1-1. Le monoxyde d'azote est oxydé par le dioxygène selon l'équation-bilan :



Pour déterminer l'ordre et la constante de vitesse de la réaction d'oxydation du monoxyde d'azote en dioxyde d'azote, on effectue deux séries de mesures de vitesse de réaction.

* La première série en présence d'un excès de dioxygène par rapport au monoxyde d'azote ; on examine la variation de la concentration en monoxyde d'azote en fonction du temps (Tableau 4)

Tableau 4 ($[\text{O}_2] = 5.10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$; $([\text{NO}]_{\text{initial}} = 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1})$)

Temps en min	1	2	4	8	12	20	30
[NO] en mol.L ⁻¹	9,6.10 ⁻⁶	9,2.10 ⁻⁶	8,5.10 ⁻⁶	7,4.10 ⁻⁶	6,5.10 ⁻⁶	5,3.10 ⁻⁶	4,3.10 ⁻⁶

* La deuxième série en présence d'un excès de monoxyde d'azote par rapport au dioxygène; on examine la variation de la concentration en dioxygène en fonction du temps (Tableau 5)

Tableau 5 ($[\text{NO}] = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$; $[\text{O}_2]_{\text{initial}} = 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$)

Temps en s	10	20	30	60	120	240	360
[O ₂] en mol.L ⁻¹	9,3.10 ⁻⁶	8,6.10 ⁻⁶	8.10 ⁻⁶	6,4.10 ⁻⁶	4,1.10 ⁻⁶	1,7.10 ⁻⁶	0,7.10 ⁻⁶

Quel est l'intérêt de faire deux séries de mesures avec dans chaque cas un réactif utilisé en excès ?

2-1-2. Montrer que ces résultats expérimentaux sont compatibles avec un ordre 2 pour [NO] et un ordre 1 pour [O₂]. Calculer les constantes de vitesse apparentes pour les deux séries de mesures et la constante de vitesse de la réaction (on pourra utiliser une méthode de régression ou bien le papier millimétré fourni qui sera joint, dans ce cas, à la copie).

2-1-3. Exprimer les vitesses de disparition du dioxygène et du monoxyde d'azote en fonction de [O₂] et de [NO].

2-1-4. Un mécanisme proposé pour expliquer cette réaction fait intervenir deux étapes élémentaires :

Étape 1 :



Pour cette étape, on notera k_1 la constante de vitesse dans le sens de formation de N_2O_2 et k_{-1} la constante de vitesse dans le sens de dissociation de N_2O_2 en NO.

Étape 2 :



Pour cette étape, on notera k_2 la constante de vitesse dans le sens direct.

Donner la molécularité de chacune de ces étapes et écrire les lois de vitesses correspondant aux différentes étapes élémentaires.

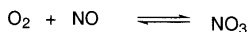
2-1-5. Expliquer la différence entre les notions d'ordre et de molécularité des réactions chimiques.

2-1-6. Rappeler le principe de l'état quasi-stationnaire et en l'appliquant au cas étudié ici, donner l'équation de vitesse de la réaction chimique d'oxydation.

2-1-7. Montrer que la loi de vitesse ainsi obtenue est comparable à la loi de vitesse trouvée expérimentalement à une condition que l'on précisera.

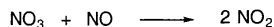
2-1-8. En augmentant la concentration en dioxygène dans le milieu réactionnel, il est possible d'obtenir des cas où k_{-1} peut être négligeable devant $k_2 \cdot [\text{O}_2]$. Donner la nouvelle loi de vitesse obtenue dans ce cas et expliquer l'ordre de la réaction. Quelle est alors l'étape cinétiquement déterminante de la vitesse ?

2-1-9. Suivant un autre mécanisme applicable quand la concentration en dioxygène est élevée devant celle du monoxyde d'azote, la première étape élémentaire du mécanisme est :



avec k'_1 constante de vitesse de la réaction dans le sens de la formation de NO_3 et k'_{-1} constante de vitesse dans le sens de la dissociation de NO_3 en NO et O_2

La deuxième étape élémentaire est :



Avec une constante de vitesse k'_2 .

Vérifier que ce mécanisme conduit à une loi de vitesse similaire à celle établie précédemment.

2-2. Dosage des nitrites.

Les nitrites issus des oxydes d'azote atmosphérique (NO_x) peuvent être dosés dans l'eau selon différentes méthodes : la méthode par oxydation au permanganate et la méthode par formation d'un colorant azoïque (Méthode de Griess) sont examinées ici.

2-2-1. La méthode de dosage par oxydation emploie l'ion permanganate (MnO_4^-). Écrire la structure de Lewis de cet ion. Donner, en le justifiant, le nombre d'oxydation de l'atome de manganèse dans cet ion. $Z_{(\text{Mn})} = 25$.

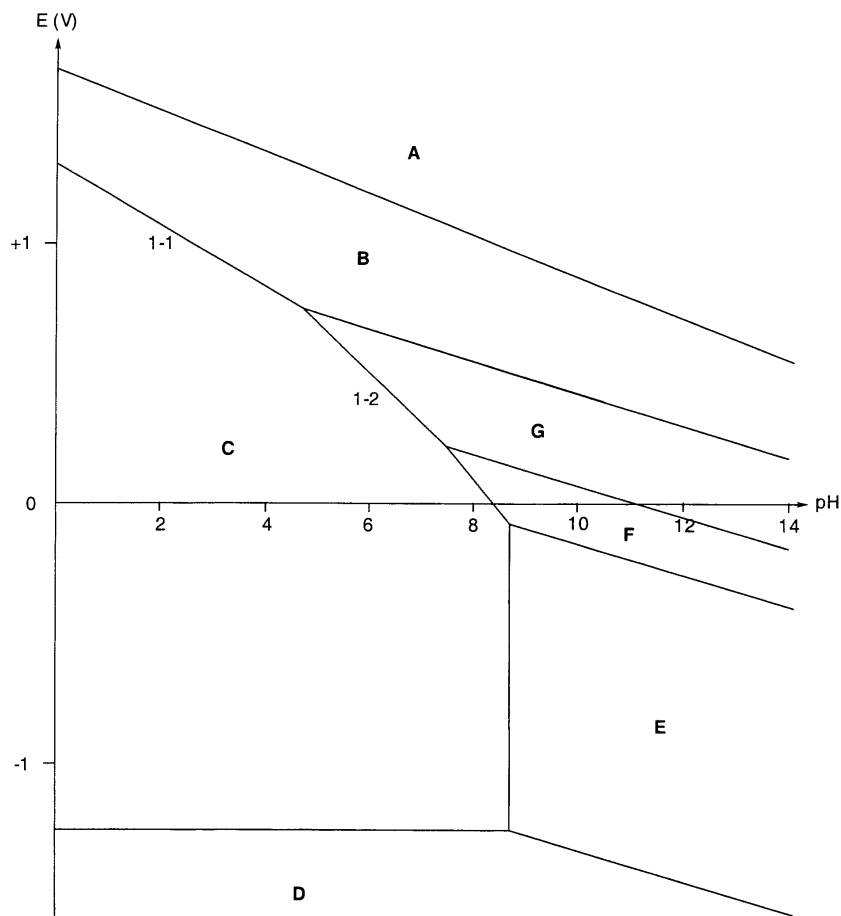
La figure page suivante représente le diagramme potentiel - pH du manganèse, relatif aux espèces $\text{Mn}_{(s)}$, $\text{Mn}^{2+}_{(aq)}$, $\text{Mn}(\text{OH})_{2(s)}$, $\text{Mn}_3\text{O}_{4(s)}$, $\text{Mn}_2\text{O}_{3(s)}$, $\text{MnO}_{2(s)}$, $\text{MnO}_4^-_{(aq)}$. Le tracé a été effectué pour une concentration totale en espèces dissoutes de $10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

2-2-2. Attribuer à l'aide d'un tableau les domaines A, B, C, D, E, F et G aux différentes espèces envisagées. Préciser dans chaque cas s'il s'agit de domaines de prédominance ou d'existence.

2-2-3. Établir par le calcul l'équation complète de la droite frontière notée 1-2. Déterminer sur le diagramme potentiel - pH la valeur de la pente de la droite frontière 1-1 et justifier sans calcul cette valeur.

2-2-4. Tracer, sur le diagramme fourni en annexe 2 et à rendre avec la copie la droite représentant les variations du potentiel du couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ en fonction du pH (la pression en O_2 sera prise égale à 1 bar).

2-2-5. Expliquer à l'aide du diagramme potentiel-pH pourquoi une solution de permanganate de potassium utilisée pour un dosage ne peut être conservée sans dégradation au cours du temps. Préciser la nature des produits formés et les conséquences de la dégradation sur une réaction de dosage.



2-2-6. Tracer, sur le diagramme fourni en annexe 2 la droite représentant les variations du potentiel du couple $\text{NO}_3^- / \text{NO}_2^-$ en fonction du pH. (On prendra $[\text{NO}_3^-] = [\text{NO}_2^-]$ comme convention de frontière).

2-2-7. Écrire les deux demi-équations d'oxydo-réduction des couples mis en jeu dans la réaction d'oxydation des ions nitrite par les ions permanganate à $\text{pH} = 0$ et l'équation-bilan de cette réaction.

2-2-8. Donner l'expression de la constante d'équilibre de cette réaction et calculer sa valeur. Que peut on conclure de cette valeur de K_{eq} ?

2-2-9. La réaction d'oxydation des ions nitrite en ions nitrate par les ions permanganate est elle possible, quel que soit le pH ?

2-2-10. Le dosage des nitrites par les ions permanganates est effectué à pH = 0. Expliquer, en vous servant du diagramme potentiel-pH, ce qui se passe si le dosage est effectué à pH = 7.

2-2-11. Les protocoles expérimentaux précisent que les dosages ne sont reproductibles que si les ions nitrite sont dosés par une solution acide d'ions permanganate. Au cas où l'acide est ajouté à la solution d'ions nitrite avant le dosage, les résultats ne sont pas reproductibles. Proposer une explication.

2-2-12. La fin du dosage peut être repérée au moyen de la coloration rose du permanganate ou par ajout de ferroïne. Montrer que la ferroïne réagit avec les ions permanganate, écrire l'équation-bilan de la réaction. Expliquer l'intérêt d'utiliser la ferroïne comme indicateur.

Permanganate de potassium en solution aqueuse : $\lambda_{max} = 572 \text{ nm}$; $\epsilon_{max} = 7\,000 \text{ L.mol}^{-1}.\text{cm}^{-1}$.

Ferroïne :	forme réduite	$\lambda_{max} = 510 \text{ nm}$	$\epsilon_{max} = 11\,100 \text{ L.mol}^{-1}.\text{cm}^{-1}$.
	forme oxydée	$\lambda_{max} = 630 \text{ nm}$	$\epsilon_{max} = 800 \text{ L.mol}^{-1}.\text{cm}^{-1}$.

λ_{max} est la longueur d'onde pour laquelle ϵ , le coefficient d'absorption molaire, est maximal (noté ϵ_{max}).

2-2-13. La méthode de Griess de dosage des ions nitrite consiste à former un colorant azoïque avec l'acide sulfanilique et l' α -naphthylamine.



Le mode opératoire est le suivant : à la solution de nitrite à doser, on ajoute l'acide sulfanilique en solution dans l'acide chlorhydrique et on laisse réagir 5 minutes. On ajoute alors l' α -naphthylamine en solution aqueuse.

Écrire le mécanisme des étapes élémentaires successives qui conduisent à la formation du composé de formule brute $C_{12}H_{11}ClN_2O_3S$, espèce ionique soluble dans le milieu réactionnel.

2-2-14. Le produit obtenu est un sel de diazonium, stable à 0°C. Il se décompose par chauffage. Écrire le mécanisme de la réaction de décomposition et donner le produit obtenu.

2-2-15. Ce sel de diazonium réagit sur l' α -naphthylamine. Écrire le mécanisme de la réaction et donner les deux produits possibles de la réaction. Le composé majoritaire est celui issu de l' α -naphthylamine substituée en 4. Proposer une explication pour cette régiosélectivité.

2-2-16. Peut-on attendre pour l'autre produit de substitution une valeur de λ_{max} identique à celle du composé obtenu ? La régiosélectivité de la réaction sur l' α -naphthylamine est-elle déterminante pour la fiabilité du dosage ?

2-2-17. Que se passerait-il si l'acide sulfanilique et l' α -naphthylamine en milieu acide étaient introduits simultanément dans la solution d'ions nitrite ?

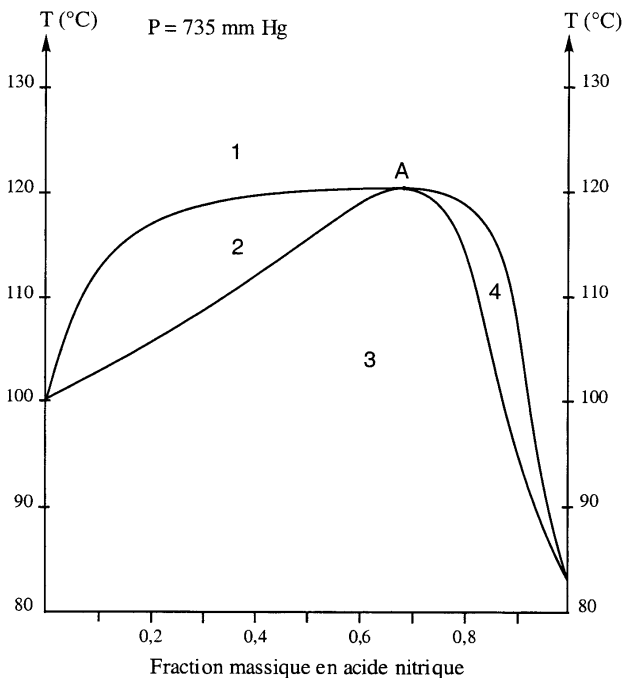
Partie 3

LES DÉRIVÉS OXYGÉNÉS DE L'AZOTE EN CHIMIE INDUSTRIELLE.

3-1. L'acide nitrique

3-1-1. Donner le schéma de la synthèse industrielle de l'acide nitrique à partir de l'ammoniac et préciser les équations bilan des différentes étapes.

3-1-2. Après préparation, l'acide nitrique est purifié par distillation. Le diagramme d'équilibre liquide-vapeur du binaire eau-acide nitrique sous une pression de 735 mm de mercure est représenté ci-dessous. La fraction massique en acide nitrique est portée en abscisse, la température en ordonnée.



A quelles phases correspondent les domaines du diagramme notés 1, 2, 3 et 4.

3-1-3. Comment sont appelées les différentes courbes ?

3-1-4. Quel nom donne-t-on au mélange liquide dont la composition correspond à l'abscisse du maximum A. Calculer la variance du système au point A.

3-1-5. Quelles propriétés possède ce mélange ?

3-1-6. Un échantillon du mélange eau-acide nitrique constitué de 4 moles contient 0,3 moles d'acide nitrique. Calculer la fraction massique en acide nitrique du mélange et montrer que le système est homogène à $T = 100^{\circ}\text{C}$ (préciser la nature de la phase).

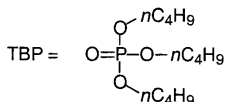
3-1-7. On chauffe en système fermé jusqu'à la température de 110°C . Quelles sont à cette température, la masse m de la phase liquide et sa fraction massique $n_{(\text{HNO}_3)}$ en acide nitrique ?

3-1-8. On effectue une distillation fractionnée de l'échantillon. Indiquer sur l'annexe 3 à rendre avec la copie la suite des opérations effectuées.

3-1-9. En considérant que le fractionnement est efficace, préciser de quoi sont constitués :
 - le distillat (à la sortie de la colonne de fractionnement).
 - le résidu de distillation restant dans le ballon.

3.2. Purification de l'uranium par extraction liquide-liquide.

La préparation de l'uranium à partir du minerai, ainsi que le traitement des déchets nucléaires mettent en œuvre un procédé d'extraction sélective. Dans les deux cas, une oxydation par l'acide nitrique conduit à la formation de nitrate d'uranyle UO_2^{2+} , 2NO_3^- aqueux. Une extraction liquide-liquide entre l'eau et une solution de tributylphosphate (abrégé TBP par la suite) dans un solvant organique non miscible à l'eau, permet d'extraire sélectivement le cation uranyle.



L'efficacité de l'extraction liquide-liquide d'un composé C en solution aqueuse par un solvant organique non miscible est mesurée à l'aide d'un paramètre appelé coefficient de partage, noté P, égal au rapport des concentrations massiques à l'équilibre de l'espèce C dans les deux phases.

$$P = c_{(s)} / c_{(aq)}$$

3-2-1. Le rendement massique ρ de l'extraction (exprimé en %) est défini par : $\rho = 100 \cdot m_s / m_{\text{tot}}$
 m_s est la masse de composé dans le solvant S.

m_{tot} est la masse totale de composé présent initialement dans la solution aqueuse.
 Exprimer ρ en fonction de $P_{(A)}$, V_{aq} et V_s .

3-2-2. On dispose de 50 mL de solution aqueuse d'un composé A à la concentration initiale $100 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$ que l'on désire extraire à l'aide d'un solvant organique S. Le coefficient de partage de A entre le solvant d'extraction et l'eau est $P_{(A)} = 0,2$. Déterminer la masse de produit A qu'il est possible de récupérer au moyen d'une extraction par 100 mL de solvant S.

3-2-3. Expérimentalement, quelles opérations permettent d'améliorer ce rendement ?

3-2-4. On effectue, à partir du même volume de la solution aqueuse V_{aq} , une série de n extractions successives avec des volumes V_s de solvant. Exprimer le rendement d'extraction de la n ème opération. Comment évolue le rendement pour deux extractions successives.

3-2-5. Dans le cas de l'extraction du nitrate d'uranyle par le dodécane, on utilise la propriété de complexation du cation uranyle avec les solvants organiques oxygénés. Étudiée au début du XX^{ème} siècle, cette propriété est exploitée industriellement depuis les années 1950. Les réactions considérées sont :





Indice aq : espèces en solution aqueuse, indices s : espèces dans le solvant organique. Les constantes d'équilibres associées sont notées K_1 , K_2 , K_3 . Donner l'expression de ces constantes.

3-2-6. Au cours des travaux sur ce procédé, les chimistes ont entrepris d'établir la valeur de x (nombre de molécules de TBP par cation uranyle). Montrer qu'il est possible d'écrire la relation :

$$\log P_{(U)} = x \cdot \log [\text{TBP}]_{(S)} + \log A$$

dans laquelle $P_{(U)} = [\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2(\text{TBP})_x]_{(S)} / [\text{UO}_2^{2+}]_{(aq)}$ et A une fonction des constantes d'équilibres et de $[\text{NO}_3^-]_{(aq)}$ dont on donnera l'expression.

3-2-7. Expérimentalement, on procède à concentration constante en ions nitrate. Pourquoi ? En utilisant les données du tableau 6, déterminer la valeur de x .

Tableau 6

% de TBP dans la phase organique	0,5	1	2	3	4
$P_{(U)}$	0,07	0,3	0,9	2,2	4

3-2-8. Si on utilise des solutions de plus en plus concentrées de TBP, on observe une déviation par rapport à la linéarité. Proposer une explication de ce phénomène.

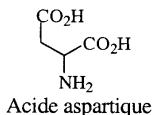
3-2-9. Pourquoi le TBP peut-il former un complexe avec le cation uranyle ?

Partie 4

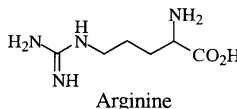
ISOLEMENT ET SYNTHÈSE D'UN α -AMINOACIDE PRÉCURSEUR DU MONOXYDE D'AZOTE DANS LES CELLULES.

4-1. L'électrophorèse

L'électrophorèse est une technique qui consiste à séparer des espèces chimiques chargées à l'aide d'un champ électrique. Le mélange à analyser est déposé sur une bande de papier imbibée d'une solution tampon dont le pH est fixé ; la concentration des espèces à séparer est telle que le tampon impose son pH à tout instant. Un champ électrique est appliqué aux extrémités du papier durant un temps variable selon les espèces à séparer. Les composés séparés sont ensuite détectés. On examine la séparation de deux α -aminoacides selon cette technique dans une solution tampon de pH = 6. Les pKa des deux α -aminoacides sont :

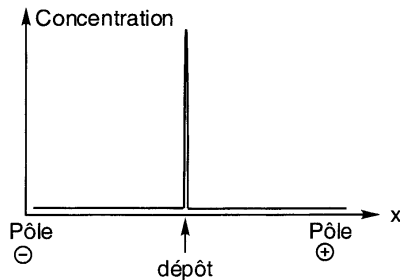


$$pK_{a1} = 2,09 ; pK_{a2} = 3,86 ; pK_{a3} = 9,82$$

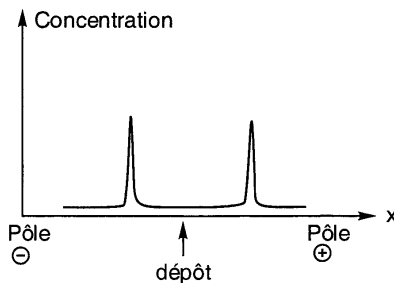


$$pK_{a1} = 2,17 ; pK_{a2} = 9,04 ; pK_{a3} = 12,48$$

Le profil de concentration le long de la bande de papier, en fonction de la distance x à l'extrémité de la bande constituant le pôle -, a l'allure suivante pour le mélange de départ.



Après application du champ électrique durant un temps t , on obtient le profil de concentration suivant :



4-1-1. Rappeler en quelques lignes la définition d'une solution tampon.

4-1-2. Le pK_a des acides carboxyliques des α -aminoacides est compris entre 2 et 4 et le pK_a des fonctions amines primaires des α -aminoacides est compris entre 9 et 10 ; justifier la valeur du pK_a du groupe fonctionnel spécifique de l'arginine.

4-1-3. Écrire les équilibres acido-basiques pour l'arginine et l'acide aspartique en solution aqueuse.

4-1-4. Comment évolue la charge des deux α -aminoacides en fonction du pH ?

4-1-5. Quelle est la charge nette des deux α -aminoacides à $pH = 6$?

4-1-6. Identifier les acides aminés sur le profil de concentration final, en justifiant leur position.

4-1-7. A l'aide d'un schéma du type concentration = $f(x)$, indiquer de manière qualitative l'évolution au cours du temps du profil de concentration du mélange en l'absence de champ électrique en précisant la nature du phénomène qui modifie le profil initial en l'absence de champ électrique ?

4-1-8. Donner l'aspect du profil de concentration = $f(x)$ pour le mélange à séparer (acide aspartique + arginine) après un temps de migration $t' = 2t$.

La technique de l'électrophorèse peut être améliorée en travaillant avec un gradient de pH parallèle au champ électrique, on parle alors d'électrofocalisation. Le principe de la technique est identique (migration des espèces chargées dans un champ électrique), cependant, par rapport à l'électrophorèse précédemment examinée, on observe des bandes beaucoup plus fines, même après un long temps de séparation. D'autre

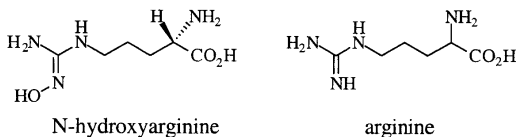
part, on observe que chaque espèce se rassemble en un point précis du gradient de pH et que la migration cesse. L'ouverture du circuit électrique provoque un élargissement de ces bandes, le rétablissement du courant permet de retrouver des bandes fines.

4-1-9. Quel doit être le sens du gradient de pH par rapport au champ électrique appliqué pour observer une séparation des espèces chargées.

4-1-10. Expliquer la nature des phénomènes décrits ci-dessus.

4-2. Synthèse d'un α -aminoacide précurseur du monoxyde d'azote dans les cellules

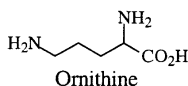
Dans les milieux biologiques, le monoxyde d'azote est obtenu par oxydation de la N-hydroxyarginine par le dioxygène ; la N-hydroxyarginine est issue de l'arginine.



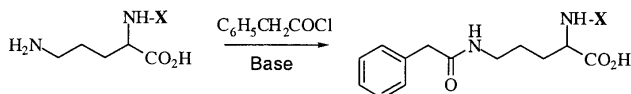
4-2-1. Combien la N-hydroxyarginine contient-elle de centres stéréogènes. Donner, en la justifiant, leur configuration absolue.

4-2-2. Combien cette molécule possède-t-elle de stéréoisomères de configuration ?

Pour synthétiser la N-hydroxyarginine, on utilise un dérivé de l'ornithine dans lequel la fonction amine en α de l'acide carboxylique est protégée (la fonction amine protégée est notée NH-X).

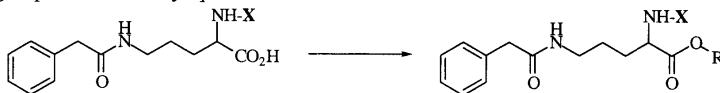


4-2-3. Cette molécule d'ornithine protégée est mise à réagir avec un chlorure d'acide ($C_6H_5-CH_2-COCl$).



Quelle est le nom de la fonction chimique formée ? Écrire le mécanisme de sa formation. Préciser le rôle de la base.

4-2-4. Le groupe acide carboxylique est ensuite estérifié.

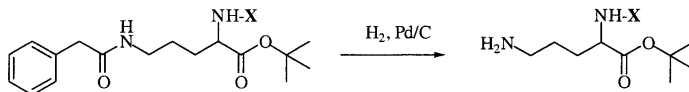


Écrire l'équation-bilan de la réaction d'estérification entre un alcool primaire (éthanol par exemple) et un acide carboxylique (acide éthanoïque). Détailler le mécanisme des différentes étapes élémentaires de cette

réaction en présence d'un catalyseur acide (acide sulfurique par exemple). Préciser l'effet du catalyseur sur les aspects thermodynamique et cinétique de la réaction d'estérification ?

4-2-5. La réaction d'estérification d'un acide carboxylique par le 2-méthyle propan-2-ol (*tertiobutanol*) en catalyse acide est-elle possible avec un bon rendement ? Pourquoi ?

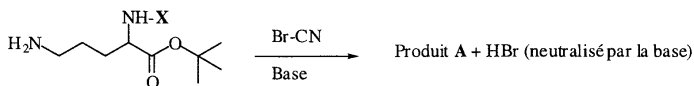
4-2-6. L'ornithine fonctionnalisée est soumise à une hydrogénation qui libère une fonction amine.



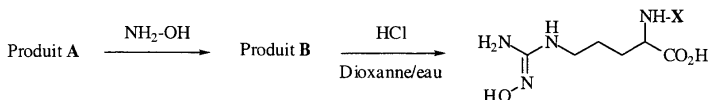
Ce composé est traité par du bromure de cyanogène Br-CN en présence d'une base.

Discuter la polarité de la liaison Br-CN dans le bromure de cyanogène, puis donner la structure du composé A obtenu.

Proposer une séquence d'étapes élémentaires pour le passage au produit A, sachant que le bromure de cyanogène réagit selon un mécanisme d'addition-élimination.



4-2-7. Le produit A est traité par l'hydroxylamine $\text{NH}_2\text{-OH}$. Le composé obtenu est hydrolysé en milieu acide. On obtient la N-hydroxyarginine protégée sur la fonction aminé.

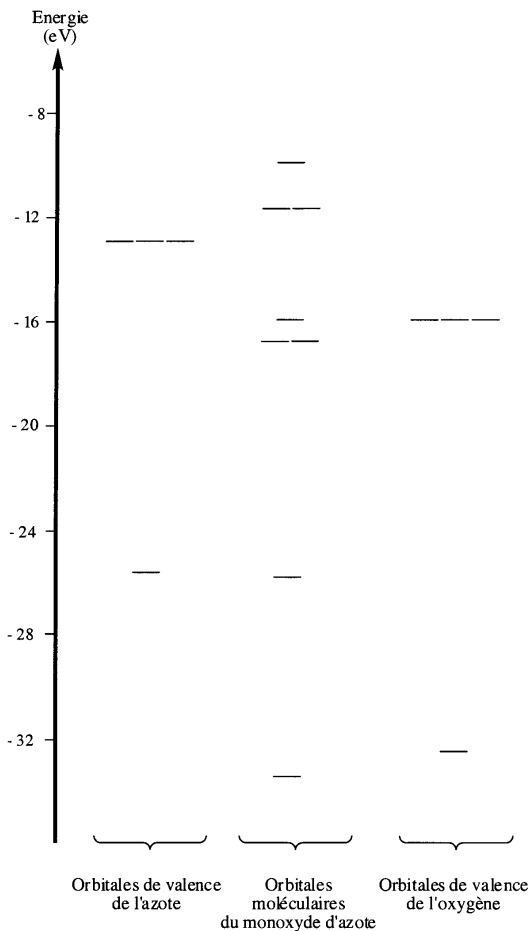


Proposer une structure pour le produit B.

ANNEXE 1

Document à rendre avec la copie

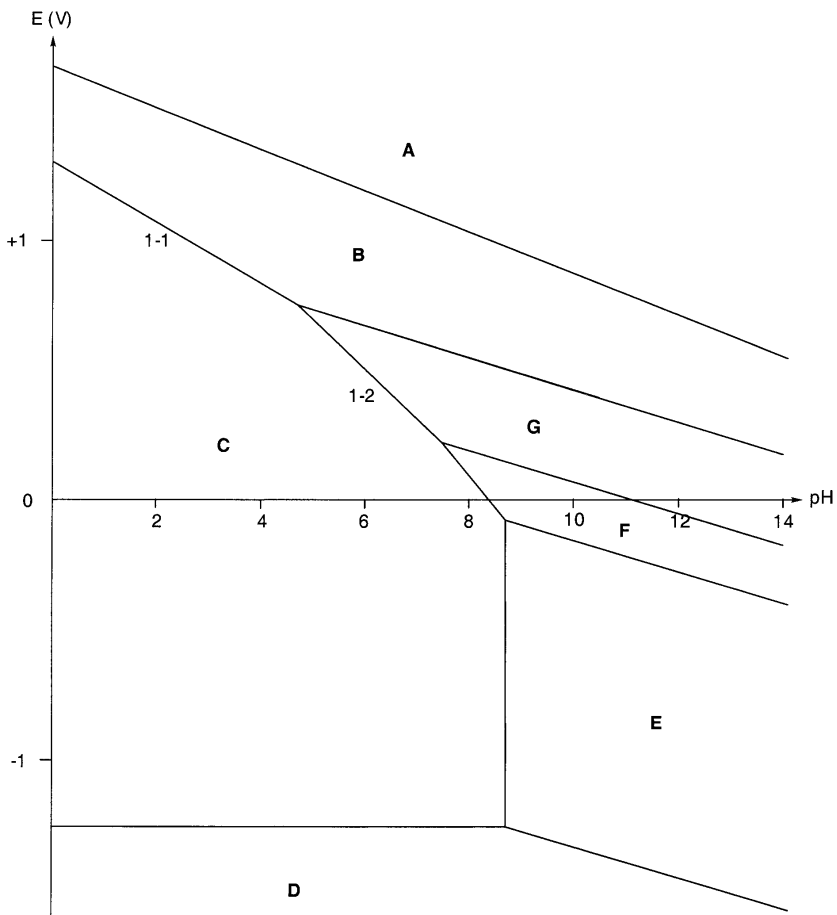
Diagramme d'orbitales moléculaires corrélié de la molécule de monoxyde d'azote



ANNEXE 2

Document à rendre avec la copie

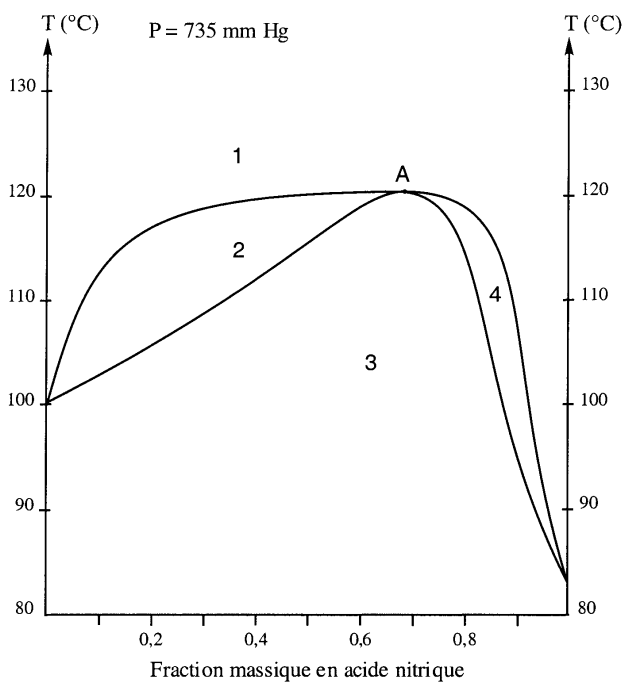
Diagramme Potentiel - pH du manganèse



ANNEXE 3

Document à rendre avec la copie

Diagramme liquide-vapeur du binaire eau-acide nitrique sous une pression de 735 mm de mercure



1471

22923*repère à reporter sur la copie***SESSION DE 2002****concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques****option : physique**

problème de physique

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

PROPRIETES MECANIQUES DE L'ADN

Parce qu'il contient l'information pour la production de protéines spécifiques, l'ADN est le matériel génétique porteur de l'hérédité. Ce type de molécule, à la base de la vie, fait l'objet de très nombreuses études relevant de la génétique, de la biologie moléculaire, de la biochimie, etc. Les physiciens y contribuent aussi. Ce problème a pour but d'illustrer certaines de ces contributions concernant l'étude de propriétés mécaniques de l'ADN.

Dans sa forme la plus courante (ADN B), l'ADN est constitué de deux macromolécules très longues, enroulées, qui forment la double hélice découverte par Watson et Crick (cf. figure 1). Le squelette de chacun des brins de cette hélice (droite) est formé en alternance d'un groupement phosphate (chargé négativement) et d'un sucre (le désoxyribose), porteur lui-même d'une base azotée. Les deux brins sont reliés par des liaisons hydrogène entre les paires de bases. Dans l'ADN, il y a 4 bases possibles (A, T, G et C), qui s'apparient deux à deux : A s'apparie uniquement avec T (par deux liaisons hydrogène), et G uniquement avec C (par trois liaisons hydrogène). Les deux brins ont donc des structures complémentaires. Les paires de bases ont une forme à peu près plane et s'empilent à l'intérieur de la double hélice (un peu comme une pile d'assiettes).

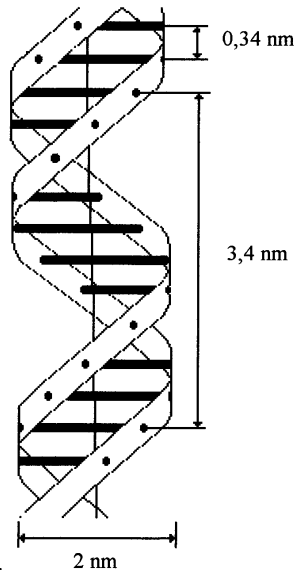


Figure 1 : Structure en double hélice de l'ADN.

Les paramètres géométriques de la structure en double hélice sont les suivants (en l'absence de toute contrainte mécanique extérieure) :

diamètre de l'hélice :	$\Phi_0 = 2 \text{ nm}$
pas de l'hélice :	$p_0 = 3,4 \text{ nm}$

distance entre les plans de deux paires de bases consécutives : $d_0 = 0,34 \text{ nm}$

Dans tout le problème, on étudie l'ADN du bactériophage λ (un virus), qui possède $M_0 = 48502$ paires de bases. Cet ADN est considéré en phase aqueuse, et à la température $T = 300 \text{ K}$.

On donne les valeurs numériques suivantes :

constante de Boltzmann :	$k_B = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
charge élémentaire :	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
célérité de la lumière dans le vide :	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
accélération de la pesanteur :	$g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$
masse volumique de l'eau :	$\mu_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
masse volumique de la silice :	$\mu = 2,2 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
indice optique de l'eau :	$n_0 = 1,33$
indice optique de la silice :	$n = 1,45$
module d'Young de la silice :	$E = 7,2 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$
viscosité de l'eau (à 20°C) :	$\eta = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$

L'espace est rapporté à un repère orthonormé Oxyz, dont on note \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y , \mathbf{u}_z les vecteurs unitaires .

Les différentes parties du problème, voire même les diverses questions à l'intérieur d'une même partie, sont très largement indépendantes.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

A - Caractéristiques géométriques de la molécule

- 1 – a – Déterminer la longueur au repos L_0 de cet ADN.
- b – Quelle est la longueur développée L_d de chaque brin ?

2 – L'ADN est une molécule flexible, dont on représente la conformation au repos par le modèle de la chaîne idéale : la molécule y est représentée par une suite de N segments rigides, de longueur $b = 100 \text{ nm}$. Le $n^{\text{ème}}$ segment est noté :

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{R}_n - \mathbf{R}_{n-1}$$

(où les vecteurs \mathbf{R}_{n-1} et \mathbf{R}_n correspondent à la position de chacune de ses extrémités). Chaque segment s'oriente de manière aléatoire, isotrope, et indépendamment des autres segments. Dans la suite du problème, on note entre crochets la moyenne statistique d'une grandeur aléatoire f , soit $\langle f \rangle$.

- a – Exprimer les valeurs moyennes $\langle \mathbf{r}_n \rangle$ et $\langle \mathbf{r}_n^2 \rangle$.
- b – Calculer $\langle \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_m \rangle$ pour $n \neq m$.
- c – On note $\mathbf{R} = \mathbf{R}_N - \mathbf{R}_0$ le vecteur joignant les deux extrémités de la chaîne. Calculer $\langle \mathbf{R} \rangle$ et $\langle \mathbf{R}^2 \rangle$ en fonction de N et b .
- d – Les résultats obtenus dépendent-ils de la dimension d de l'espace dans lequel se situe la chaîne aléatoire ?

e – Combien chaque segment de la molécule d'ADN contient-il de paires de bases ?
Calculer numériquement N et $\bar{R} = \sqrt{\langle R^2 \rangle}$.

3 – Dans le modèle précédent, on suppose N grand.

a – Pourquoi la densité de probabilité de la variable \mathbf{R} est-elle Gaussienne ? Pour répondre à cette question, aucun calcul n'est à effectuer, mais on précisera le théorème utilisé.

b – En déduire que, en l'absence de contrainte extérieure, une macromolécule linéaire flexible, suffisamment longue, adopte la forme d'une pelote sphérique, de rayon caractéristique \bar{R} .

c – La distribution de probabilité ainsi obtenue paraît-elle en mesure de représenter convenablement la molécule très étirée ? Doit-on pour autant remettre en cause ce modèle ?

4 – Dans le modèle précédent, rien n'interdit à deux segments de se chevaucher. Dans la réalité, deux morceaux de l'ADN ne peuvent évidemment se chevaucher, ne serait ce que pour des raisons d'encombrement stérique. Expliquer qualitativement quelle incidence a cet effet sur la valeur de $\bar{R} = \sqrt{\langle R^2 \rangle}$.

B – Elasticité de l'ADN

1 – On soumet maintenant les deux extrémités de l'ADN à une force de traction F (plus précisément on exerce une force constante $\mathbf{F} = F\mathbf{u}_z$ sur l'extrémité \mathbf{R}_N , et une force $-\mathbf{F}$ sur l'autre extrémité \mathbf{R}_0 ; cf. figure 2), et on cherche à déterminer sa longueur moyenne $L = \langle |\mathbf{R}| \rangle$ à l'équilibre. On représente toujours la molécule comme une succession de N segments rigides de longueur constante b .

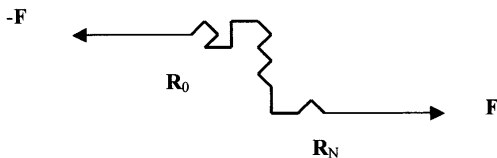


Figure 2 : Traction sur la molécule d'ADN.

a – Montrer que chaque segment est soumis de la part de ses voisins immédiats à deux forces, \mathbf{F} et $-\mathbf{F}$, en ses extrémités, qui tendent à aligner le segment \mathbf{r}_n colinéairement à \mathbf{F} .

b – En déduire que, dans ce champ de forces, chaque segment \mathbf{r}_n possède une énergie potentielle $E_p(\mathbf{r}_n) = -\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{F}$ (à une constante additive près).

c – Compte tenu de ces forces, l'orientation des différents segments n'est plus isotrope: chaque segment s'oriente indépendamment des autres, selon une distribution de Boltzmann à la température T . Ecrire la probabilité $d^2\mathcal{P}$ de trouver le segment \mathbf{r}_n orienté à l'intérieur de l'angle solide $d^2\Omega$. En déduire $\langle \mathbf{r}_n \rangle$.

d – Calculer $\langle \mathbf{R} \rangle$. Montrer que la longueur moyenne de l'ADN à l'équilibre est donnée par :

$$L = L_0 \mathcal{L}\left(\frac{Fb}{k_B T}\right)$$

où $\mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}$ est la fonction de Langevin. On posera $F_0 = \frac{k_B l}{b}$.

e – Etablir une analogie entre ce modèle et un modèle équivalent rencontré dans un autre domaine de la physique.

2 - a – Montrer que, si la force F est suffisamment faible, elle devient proportionnelle à la longueur de la molécule (loi de Hooke). Calculer sa constante de raideur K . Calculer numériquement F_0 et K pour l'ADN étudié.

b – Vers quelle limite tend $\langle \mathbf{R} \rangle$ si la force F est très grande devant F_0 ? Interpréter physiquement ce résultat.

3 – On appelle x_n, y_n, z_n les composantes de \mathbf{r}_n et X, Y, Z celles de \mathbf{R} selon les directions $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$ et \mathbf{u}_z (On rappelle que \mathbf{F} a été choisie colinéaire à \mathbf{u}_z).

a – Calculer $\langle x_n x_m \rangle, \langle y_n y_m \rangle$ et $\langle z_n z_m \rangle$. On envisagera séparément les cas $n = m$ et $n \neq m$.

b – En déduire $\langle X^2 \rangle, \langle Y^2 \rangle$ et $\langle Z^2 \rangle$, ainsi que les écarts quadratiques moyens $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$. On rappelle que l'écart quadratique moyen Δf d'une variable aléatoire f est défini par :

$$(\Delta f)^2 = \langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle$$

c – En déduire $(\Delta R)^2 = \langle (\mathbf{R} - \langle \mathbf{R} \rangle)^2 \rangle$.

d – Comment se comportent $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ et ΔR à la limite des faibles forces (soit $F \ll F_0$) ? Commenter les résultats obtenus.

e – Donner les expressions de $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ et ΔR à la limite des forces élevées (soit $F \gg F_0$).

f – On suppose N grand. Indiquer qualitativement comment sont distribuées les variables aléatoires X, Y et Z . En déduire la forme d'une macromolécule linéaire flexible lorsqu'elle est soumise à une force de traction. Discuter cette forme en fonction de la valeur de la force de traction.

4 – Calculer l'ordre de grandeur de la force F qui doit être appliquée à l'ADN étudié ici pour que sa longueur moyenne L soit égale à :

a – $L = 0,01 L_0$,

b – $L = 0,99 L_0$.

C – Expérience de mesure de force avec un micro-levier

Diverses techniques de micromanipulation permettent désormais d'exercer des forces contrôlées sur une macromolécule unique. Nous allons en explorer quelques unes qui ont permis d'étudier les propriétés mécaniques d'une molécule d'ADN.

La première expérience consiste à utiliser comme capteur de force une fibre optique amincie, en silice, de longueur $l = 7$ mm et de diamètre $2r = 10 \mu\text{m}$ (de façon pratique, une fibre aussi fine est réalisée par attaque chimique d'une fibre optique commerciale). La fibre est tenue rigidement à l'une de ses extrémités A, et à l'autre B est fixée une des extrémités de la molécule d'ADN (par des techniques biochimiques). A l'autre extrémité de l'ADN est greffée une micro-bille, maintenue par dépression à l'extrémité d'une pipette. La bille peut

être déplacée très précisément en utilisant une platine piézo-électrique (le dispositif expérimental est illustré par la figure 3). Si on déplace l'extrémité de l'ADN solidaire de la bille, on tire transversalement sur l'extrémité de la fibre optique et on exerce ainsi une force contrôlée et mesurable sur l'ADN. On va maintenant estimer l'ordre de grandeur de cette force.

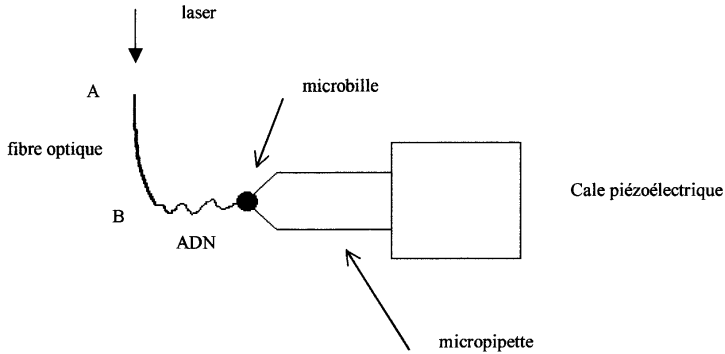


Figure 3 : Expérience de mesure de force avec un micro-levier.

1 – On assimile ici la fibre optique à une tige de longueur ℓ , fléchée sous l'effet d'une force F transversale appliquée à son extrémité B (cf. figure 4). On représente la déformation de la tige selon le modèle suivant : la tige est décomposée en fibres. La fibre A_2B_2 s'est allongée, tandis que la fibre A_1B_1 a diminué. Il existe une fibre AB , appelée fibre neutre, dont la longueur n'a pas changé. On admettra que, pour une tige cylindrique (de rayon r), la fibre neutre est son axe de symétrie.

La position d'une section droite de la tige est repérée par l'abscisse curviligne s du point M de cette section appartenant à la fibre neutre ($0 \leq s \leq \ell$, avec $s = 0$ en $M = A$). On notera $\alpha(s)$ l'angle que fait la section droite de la fibre avec l'axe Oy , et $\rho(s)$ le rayon de courbure de la fibre neutre en s . L'angle $\alpha(s)$ ainsi introduit sera toujours considéré comme petit. Enfin dans la suite, on supposera que la section de la tige n'est pas déformée.

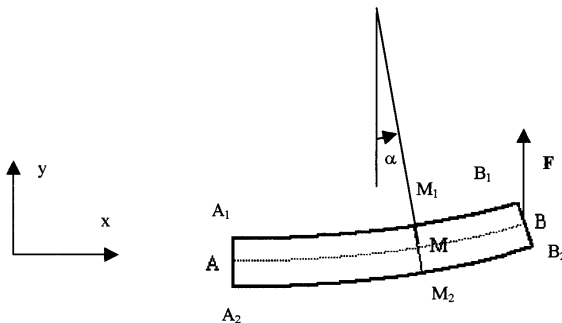


Figure 4 : Flexion du micro-levier.

a – La partie $M_2M_1B_1B_2$ de la tige exerce sur la section M_1M_2 une force $T(s)$ et un couple $\Gamma(s)$. Expliquer qualitativement l'origine physique du couple. Préciser les orientations de $T(s)$ et $\Gamma(s)$ (on rappelle que l'angle α est supposé petit).

b – On néglige le poids de la tige. En appliquant les lois de la mécanique à un élément de tige de longueur ds , montrer que, dans ce cas, T ne dépend pas de l'abscisse curviligne s , et relier $\frac{d\Gamma(s)}{ds}$ à T .

c – On rappelle que, lorsqu'on exerce une force de traction f sur une tige élastique, de longueur au repos a_0 , on constate que, à la limite des petites déformations, cette force est proportionnelle à l'allongement relatif $\frac{a-a_0}{a_0}$ et à la section S de la tige ; on pose :

$$f = ES \frac{a-a_0}{a_0}$$

où le coefficient de proportionnalité E est caractéristique du matériau étudié et est appelé son module d'Young.

En décomposant un élément ds de la tige en fibres élémentaires auxquelles s'applique la loi précédente, montrer que :

$$\Gamma(s) = \frac{EI}{\rho(s)} = EI \frac{d\alpha(s)}{ds}$$

où I est une grandeur que l'on définira, dont on donnera la dimension et pour laquelle on proposera une interprétation physique.

d – En déduire le déplacement $h = y(s = \ell)$ de l'extrémité B de la tige sous l'effet de la force F , et calculer la constante de raideur K_r du ressort ainsi constitué.

e – Calculer I pour une tige de section circulaire (de rayon r). En déduire que :

$$K_r = \frac{3\pi}{4} E \frac{r^4}{\ell^3}$$

f – Calculer numériquement la constante de raideur de la fibre amincie utilisée pour étirer l'ADN. On donne le module d'Young de la silice : $E = 7,2 \cdot 10^{10}$ Pa.

g – Calculer la valeur de la force F qui est ainsi exercée sur l'ADN pour un déplacement h de l'extrémité de la fibre égal à :

- i) $h = 5$ nm
- ii) $h = 5$ μ m

2 – Pour mesurer le déplacement de l'extrémité de la fibre optique, on injecte un faisceau laser dans la fibre optique amincie, et on fait l'image de son extrémité par un objectif de microscope (dans une situation où le grandissement est $G = 40$) sur un détecteur composé de deux photodiodes identiques (cf. figure 5), couvrant chacune un demi plan de part et d'autre de la droite $Y = 0$ ($Y = 0$ correspond à la position du centre de l'image en l'absence de déplacement, i.e. si $F = 0$). Chacune des photodiodes fournissant un signal de sortie s_1 ou s_2 ,

on construit ensuite le signal différentiel normalisé $s = \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2}$.

a – En supposant uniforme l'éclairement de l'extrémité de la fibre optique, montrer que, pour les très petites déviations h de cette extrémité, le signal mesuré s est proportionnel à h . Calculer s en fonction de h et r .

b – Montrer que, pour des valeurs de h plus grandes, le signal s n'est plus proportionnel à h . Quelle est la valeur maximale de h qui peut être mesurée par un tel dispositif ?

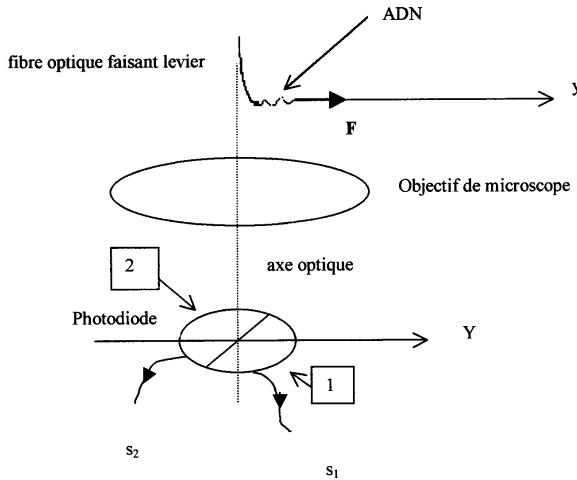


Figure 5 : Mesure optique de la position de l'extrémité de la fibre. Les photodiodes 1 et 2 ont une dimension latérale beaucoup plus grande que la taille de l'image de l'extrémité de la fibre optique.

c – On considère que la résolution spatiale d'un tel dispositif est $\Delta Y = 0,2 \mu\text{m}$. En déduire la valeur minimale de h qui peut être ainsi mesurée.

d – Calculer la plage de valeurs de la force F qui peut être exercée sur l'ADN par un tel dispositif. En comparant aux résultats obtenus à la question B4, préciser si on peut espérer observer le régime de Hooke, où l'élongation de l'ADN est proportionnelle à la force appliquée.

3 – Jusqu'à maintenant, on n'a pas tenu compte des forces dues à la gravité. On veut revenir ici sur cette hypothèse.

a – La fibre optique étant totalement immergée dans l'eau, quelle est la résultante \mathbf{P} des forces supplémentaires exercées sur la fibre ? Cette force vous paraît-elle négligeable devant la force F exercée par l'ADN ?

On donne : masse volumique de la silice : $\mu = 2,2 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

b – On suppose ici que la fibre optique est tenue horizontalement et que l'axe OY (cf. figure 5) est orienté selon la verticale ($\mathbf{g} = -g\mathbf{u}_y$). Montrer que $T(s)$ dépend désormais de s .

Calculer $\frac{dT(s)}{ds}$ en fonction de $\frac{P}{\ell}$. En déduire $T(s)$.

c – Dans cette configuration géométrique, calculer le déplacement $h = y(\ell)$ de l'extrémité de la fibre en fonction de F , P et K_f . Montrer que les déplacements dus à F et P s'ajoutent algébriquement.

d – Cette configuration de l'expérience vous paraît-elle utilisable de façon pratique ? Expliquer l'intérêt qu'il y a à orienter la fibre optique selon la verticale.

4 – Les dimensions de la fibre étant mal connues, il est indispensable de déterminer expérimentalement sa constante de raideur K_f . On le fait en observant les fluctuations de l'extrémité de la fibre à la température T lorsqu'elle n'est soumise à aucune contrainte.

a – En utilisant le théorème de l'équipartition de l'énergie, calculer l'écart quadratique Δh des fluctuations de l'extrémité de la fibre. Calculer numériquement l'ordre de grandeur de ces fluctuations pour la fibre optique étudiée à la question C1f.

b – Montrer que la mesure de l'écart quadratique moyen Δs du signal permet de déterminer ainsi la constante de raideur de la fibre.

5 – On appelle y_0 la position de la bille (avec $y_0 = 0$ lorsque la bille est en contact avec l'extrémité de la fibre optique au repos). On fait varier y_0 en agissant sur la cale piézoélectrique.

a – Rappeler succinctement en quoi consiste la piézoélectricité. On suppose qu'en mesurant un signal physique approprié (préciser lequel), on est en mesure de déterminer y_0 .

b – On mesure simultanément y_0 et la position h de l'extrémité de la fibre. Montrer qu'on peut ainsi reconstruire la "courbe de force" $F(L)$ de l'ADN. A quelle courbe s'attend on si on fait confiance à la théorie développée dans la partie B ?

6 – En fait l'expérience conduit au résultat présenté sur la figure 6.

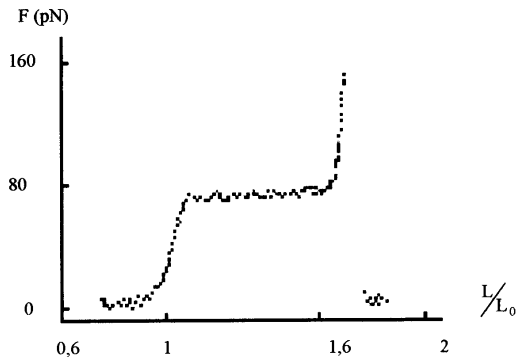


Figure 6 : Courbe de force $F(L)$ de l'ADN déterminée expérimentalement.

a – Comment peut-on expliquer l'observation de valeurs de L supérieures à L_0 ?

b – Dans la plage $1 \leq \frac{L}{L_0} \leq 1,05$, on constate que la pente de la courbe présentée sur la figure 6 est $a = \frac{dF}{d(L/L_0)} \approx 0,62$ nN. Déterminer la constante de raideur K' de la double hélice de l'ADN. Comparer ce résultat à K .

c – En déduire la constante de raideur d'un des N segments de longueur b constituant la molécule d'ADN dans les modèles utilisés dans les parties A et B.

7 - a – Pour $F \approx 70$ pN, la longueur L de l'ADN croît brusquement, de sorte qu'on observe un palier sur la courbe $F(L)$ (ce palier correspond à la partie de la courbe pour $1,1 < \frac{L}{L_0} < 1,7$).

En utilisant des analogies avec d'autres grandeurs physiques présentant un tel palier, proposer une interprétation du phénomène observé ici.

b – Pour $\frac{L}{L_0} \geq 1,8$, on obtient expérimentalement $F \approx 0$. Proposer une interprétation de cette constatation. Comparer la longueur où laquelle se produit cet "accident" à la longueur L_d de l'hélice développée (cf. question A1b).

D – Pièges optiques en régime de Rayleigh

Une autre méthode pour manipuler l'ADN et l'étirer est de fixer à une de ses extrémités une bille transparente, d'indice n et de rayon a (cf. figure 7). Cette bille est piégée ensuite dans un faisceau laser (de longueur d'onde dans le vide λ_0), focalisé avec un objectif de microscope. Dans cette partie, les mécanismes du piégeage de la bille seront étudiés, dans le cas où celle-ci est de petite dimension par rapport à la longueur d'onde du faisceau incident, soit $a \ll \lambda_0$. Ce régime correspond à celui de la diffusion Rayleigh.

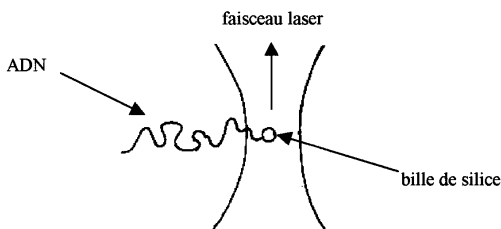


Figure 7 : Principe de la manipulation de l'ADN par un piège optique.

1 - Dans cette question, on se propose de déterminer la polarisabilité α d'une bille (de rayon a) constituée d'un diélectrique linéaire, homogène, isotrope, de susceptibilité électrique χ_e . La bille, non chargée, est supposée ici seule dans l'espace (en particulier, du point de vue diélectrique, le milieu dans lequel elle est plongée est assimilé au vide). Elle est placée dans une région de l'espace où, *en son absence*, règne un champ électrique \mathbf{E}_i , qu'on suppose ici statique et uniforme.

a – Montrer que, dans l'hypothèse où le vecteur polarisation \mathbf{P} est uniforme à l'intérieur de la bille, le champ électrique $\mathbf{E}_{P \text{ int}}$ créé à l'intérieur de la bille par la répartition de polarisation est uniforme et s'écrit :

$$\mathbf{E}_{P \text{ int}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Quel est le champ électrique $\mathbf{E}_{P \text{ ext}}$ créé à l'extérieur de la bille par cette répartition de polarisation ? Quelles sont les densités surfacique σ_P et volumique ρ_P de charges de polarisation caractérisant cette répartition de polarisation ?

b – En déduire le champ électrique total à l'intérieur de la bille et vérifier la validité de l'hypothèse effectuée à la question précédente.

c – Montrer que la polarisabilité α de la bille, définie par $\mathbf{d} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}_i$, où \mathbf{d} est le moment dipolaire électrique associé à la répartition de charges de polarisation, s'écrit :

$$\alpha = 4\pi a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

où ϵ_r est la permittivité relative du matériau constituant la bille.

2 – La même bille est désormais plongée dans un milieu de permittivité relative ϵ_r' . Le champ \mathbf{E}_i est toujours le champ électrique régnant dans le milieu extérieur, *en l'absence de la bille*. On le suppose encore uniforme et statique. On se propose de déterminer la susceptibilité de la bille dans ces conditions (et en particulier l'influence de ϵ_r'). La bille n'est pas chargée.

a – Désormais, il existe un champ de polarisation non seulement à l'intérieur de la bille, mais aussi à l'extérieur. Par la suite, on désignera ces champs de polarisation par \mathbf{P}_{int} et \mathbf{P}_{ext} . De même, les champs électriques à l'intérieur et à l'extérieur de la bille seront désignés par $\mathbf{E}_{\text{int}}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r})$, où \mathbf{r} désigne la position du point considéré par rapport au centre de la bille.

Ecrire la relation de continuité entre $\mathbf{E}_{\text{int}}(r = a)$ et $\mathbf{E}_{\text{ext}}(r = a)$ à la surface de la bille.

b – Comme à la question précédente (cf. question D1a), on fait des hypothèses sur le champ de polarisation (hypothèses qu'il conviendra de vérifier ultérieurement). Ces hypothèses sont :

(i) \mathbf{P}_{int} est uniforme,

(ii) La dépendance angulaire de la composante radiale de \mathbf{P}_{ext} à la surface de la bille (en $r = a$) est la même que celle d'un champ de vecteur uniforme \mathbf{P}_0 , soit :

$$\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{P}_{\text{ext}}(r = a) = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{P}_0,$$

(iii) Dans le milieu extérieur (en $r > a$), le champ de polarisation \mathbf{P}_{ext} est à divergence nulle.

Quelles sont les charges de polarisation caractérisant une telle répartition de polarisation ? En utilisant les résultats de la question D1a, calculer le champ \mathbf{E}_p créé par cette répartition de polarisation tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la bille.

c – Calculer le champ électrique total à l'intérieur et à l'extérieur de la bille, et vérifier que les hypothèses proposées à la question précédente sont justifiées. On donnera en particulier l'expression de \mathbf{P}_0 .

d – On définit ici la polarisabilité α de la bille par $\mathbf{d} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}_i$, où \mathbf{d} est le moment dipolaire électrique associé à la distribution de charges de polarisation. Montrer que :

$$\alpha = 4\pi a^3 \frac{\epsilon_r - \epsilon_r'}{\epsilon_r + 2\epsilon_r'}$$

3 – Le champ extérieur appliqué \mathbf{E}_i est maintenant celui d'une onde électromagnétique, de pulsation ω et de longueur d'onde dans le vide λ_0 . La bille, de rayon $a \ll \lambda_0$, est constituée de silice, d'indice n . Le milieu extérieur est une solution aqueuse, d'indice n_0 . Les deux milieux sont considérés comme parfaitement transparents à la longueur d'onde λ_0 .

a – Montrer que la bille se comporte comme un dipôle induit, et déduire sa polarisabilité α de la question précédente. Exprimer α en fonction de l'indice relatif des deux milieux $n_r = \frac{n}{n_0}$ et de a .

b – On donne : $\lambda_0 = 1,06 \mu\text{m}$, $a = 0,1 \mu\text{m}$, $n = 1,45$ et $n_0 = 1,33$. Calculer numériquement α .

4 - a – Donner l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle induit $\mathbf{d} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}$ plongé dans un champ extérieur \mathbf{E} .

b – Démontrer que la force à laquelle est soumis ce dipôle de la part du champ \mathbf{E} s'écrit :

$$\mathbf{F} = \frac{\epsilon_0 \alpha}{2} \mathbf{grad}(\mathbf{E}^2)$$

5 – L'onde électromagnétique incidente sur la sphère de silice se propage selon la direction Oz. Son champ électrique est de la forme :

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{i0}(\mathbf{r}) \cos(kz - \omega t + \varphi(\mathbf{r}))$$

a – Que signifie physiquement le fait que l'amplitude $\mathbf{E}_{i0}(\mathbf{r})$ et la phase $\varphi(\mathbf{r})$ dépendent du point \mathbf{r} ?

b – Calculer la force dipolaire moyenne (pendant une période d'oscillation de l'onde) exercée sur la bille. Cette force sera désormais notée \mathbf{F}_{dip} .

c – Quelle forme doit on donner au faisceau incident pour pouvoir piéger la bille au voisinage d'un point ?

6 – Pour piéger la bille, on utilise le faisceau d'un laser à YAG (longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 1,06 \mu\text{m}$, puissance $P = 1 \text{ W}$) qu'on focalise *dans l'eau* avec un objectif de microscope. On obtient alors un faisceau qu'on considère comme Gaussien (voir figure 8). En prenant comme origine le point où la section du faisceau est minimale, on a alors :

$$\mathbf{E}_{i0}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_e A \frac{w(z)}{w_0} e^{-\frac{\rho^2}{w(z)^2}}$$

où \mathbf{u}_e est le vecteur unitaire dans la direction de polarisation, et où $\rho^2 = x^2 + y^2$ et $w(z)^2 = w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)$. $w(z)$ représente le rayon du faisceau dans le plan d'abscisse z . $w(z)$

est minimum en $z = 0$ et est alors égal à w_0 . Le paramètre z_R , appelé longueur de Rayleigh, est relié à w_0 et à la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique dans l'eau par :

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

Les expressions données ici sont valables à la limite où $w_0 \gg \lambda$. On admettra qu'elles le sont encore pour un faisceau d'ouverture $\theta = 20^\circ$.

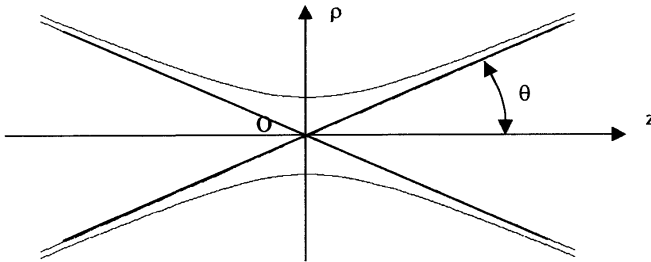


Figure 8 : Schéma du faisceau Gaussien au voisinage de son point de focalisation O.

a – Calculer le demi-angle d'ouverture θ du faisceau (cf. figure 8) en fonction de w_0 , n_0 et λ_0 . Déterminer numériquement w_0 et z_R pour $\theta = 20^\circ$.

b – Calculer la puissance P de ce faisceau en fonction de A , w_0 et n_0 .

c – Calculer la force dipolaire \mathbf{F}_{dip} , exercée par ce faisceau sur la bille lorsqu'elle est située sur l'axe Oz. Montrer qu'il s'agit d'une force de rappel et calculer la constante de rappel K_z de la bille selon l'axe Oz au voisinage de sa position d'équilibre. En donner la valeur numérique pour $P = 1 \text{ W}$.

Quelle est la valeur maximale de la force qu'on peut ainsi exercer sur la bille de silice? Calculer numériquement cette valeur pour $P = 1 \text{ W}$, et la comparer aux ordres de grandeur des forces exercées sur l'ADN avec l'expérience décrite dans la partie C (question C2d).

d – Montrer que la bille est également piégée transversalement (c'est-à-dire pour des déplacements perpendiculaires à l'axe Oz). Calculer littéralement et numériquement la constante de rappel K_p de la bille pour des mouvements transversaux au voisinage de sa position d'équilibre, et la valeur minimale de la force qu'il faut exercer sur la bille pour la faire sortir transversalement du piège.

7 – En réalité, la force dipolaire n'est pas la seule force exercée par le faisceau laser sur la bille. Il existe une seconde force, appelée force de pression de radiation, \mathbf{F}_p .

a – Donner, sans démonstration, l'expression de la force par unité de volume \mathbf{f} exercée dans le vide par un champ électromagnétique (\mathbf{E} , \mathbf{B}) sur une répartition de charges et de courants caractérisée par la densité de charge ρ et par la densité de courant \mathbf{j} .

b – A partir des équations de Maxwell, on montre que, dans le vide, cette densité de force est reliée aux champs \mathbf{E} et \mathbf{B} par :

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} + \text{div} \mathbf{T}(\mathbf{u}) = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$$

$$\text{avec } \mathbf{p} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{u} - \varepsilon_0 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}.$$

\mathbf{u} est ici un vecteur unitaire quelconque, fixe.

Interpréter cette relation en terme de conservation d'une grandeur physique. Donner les interprétations physiques de \mathbf{p} et $\mathbf{T}(\mathbf{u})$.

c – Montrer que \mathbf{p} est relié au vecteur de Poynting \mathbf{P} du champ électromagnétique par :

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{P}}{c^2}$$

d – On considère une onde électromagnétique plane, de pulsation ω , se propageant selon \mathbf{u}_z . Calculer l'énergie et l'impulsion reçues pendant un temps dt sur une surface σ perpendiculaire à \mathbf{u}_z . Le rapport de ces deux quantités vous paraît-il conforme à vos connaissances sur le photon ?

8 – On souhaite ici effectuer un bilan de l'impulsion reçue et rayonnée par la bille de silice. On admettra dans la suite du problème que, dans un milieu diélectrique, la densité d'impulsion du rayonnement est encore reliée au vecteur de Poynting \mathbf{P} par $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{P}}{c^2}$.

a – On rappelle qu'un dipôle \mathbf{d} , dépendant du temps, situé à l'origine O, dans le vide, rayonne à grande distance un champ électromagnétique :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \mathbf{u}_r \times \left(\mathbf{u}_r \times \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2}(t_r) \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c r} \mathbf{u}_r \times \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2}(t_r)$$

où $t_r = t - \frac{r}{c}$ et où \mathbf{u}_r désigne le vecteur unitaire dans la direction \mathbf{r} .

Quel est le champ rayonné par la bille de silice plongée dans l'eau et éclairée par un faisceau laser incident $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{i0}(\mathbf{r}) \cos(kz - \omega t + \varphi(\mathbf{r}))$?

b – Quelle est la puissance rayonnée \mathcal{P}_r par cette bille ?

c – Quelle est l'impulsion totale par unité de temps rayonnée par la bille ?

d – En effectuant un bilan des impulsions échangées par la bille et le rayonnement, montrer que la bille est soumise à une force supplémentaire, dite de pression de radiation, qui, moyennée sur une période du rayonnement incident, est égale à :

$$F_{pr} = \frac{\epsilon_0}{12\pi c^4} n_0 \alpha^2 \omega^4 E_{10}^2$$

où α est la polarisabilité de la bille. Préciser son orientation.

9 - a – Calculer numériquement cette force lorsque la bille est située au centre du faisceau Gaussien (soit au point O de la figure 8). La comparer à l'ordre de grandeur de la force dipolaire étudiée à la question D6. Le piège est-il encore stable ?

b – En déduire comment l'équilibre de la bille de silice est modifié lorsqu'on prend en compte la force de pression de radiation. Calculer la nouvelle position d'équilibre (on pourra supposer que le déplacement de la position d'équilibre est faible devant z_R , hypothèse qu'on vérifiera a posteriori). Comment sont modifiées les constantes de rappel longitudinale K_z et transversale K_p du piège ?

10 – a – Comment varient K_p et K_z lorsqu'on fait varier la puissance P du faisceau laser ?

b - Dans le cas où on utilise des billes plus grosses, dont le diamètre est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde dans le vide λ_0 du faisceau laser, quelles sont la ou les hypothèses effectuées précédemment qui ne sont plus valables ?

E – Expériences de mesures de force avec des pièges optiques

Dans la pratique, on utilise des billes dont les dimensions ne sont pas négligeables par rapport à la longueur d'onde du faisceau laser incident. Ces billes sont aussi piégées au voisinage du point de focalisation d'un faisceau laser. Mais les constantes de raideur du piège ne peuvent plus être calculées comme dans la partie D. On est donc amené à les mesurer.

Dans toute cette partie, on utilise des billes de silice de diamètre $2a = 1 \mu\text{m}$. Leur masse sera désignée par m. Par ailleurs le piège optique est supposé harmonique.

1 – Pour étalonner la constante de raideur K_p , on capture une bille dans le piège optique immobile. La solution aqueuse dans laquelle baigne la bille s'écoule à la vitesse v_t , transversalement au faisceau laser (cf. figure 9). La bille est supposée très loin des parois de la cellule contenant la solution, et la viscosité de la solution est assimilée à celle de l'eau, prise égale à $\eta = 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$.

a – La valeur de v_t est choisie dans la gamme $100 \mu\text{m/s}$ à $1000 \mu\text{m/s}$. Calculer le nombre de Reynolds associé à cet écoulement. Quelle est la nature de l'écoulement autour de la bille ?

b – Donner l'expression de la force créée sur la bille immobile par l'écoulement qui l'entoure (force de Stokes). On l'exprimera en fonction de η , a et v_t .

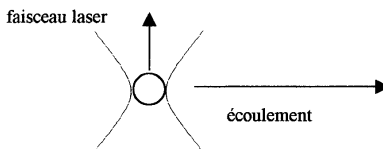


Figure 9 : Principe de l'étalonnage de la constante de raideur du piège optique.

c – Par des méthodes optiques, on sait mesurer très précisément la position ρ de la bille par rapport au centre du piège. Montrer que la mesure de la position de la bille à l'équilibre et la connaissance de v_ℓ permettent d'étalonner le piège.

2 – Pour mesurer la vitesse d'écoulement v_ℓ de la solution, on coupe instantanément le faisceau laser (à l'instant $t = 0$), et on observe le déplacement de la bille.

a – Donner l'expression de la force créée sur la bille animée d'une vitesse v par l'écoulement (de vitesse v_ℓ) qui l'entoure.

b – Calculer la vitesse de la bille à un instant $t > 0$. Quelle est la constante de temps caractéristique τ d'établissement du régime permanent ? Calculer numériquement τ . Quelle est la vitesse limite atteinte ?

c – La première méthode pour mesurer v_ℓ consiste à enregistrer le mouvement de la bille avec une caméra. Au bout de combien de temps peut on considérer que la bille a atteint sa vitesse limite, à 10% près ?

d – Toutefois la précision de cette méthode est limitée par le temps de pose fini de la caméra. C'est pourquoi on lui préfère une autre méthode, consistant à enregistrer la trace de la bille entre les instants $t = 0$ et t . Calculer la longueur $\ell(t)$ de cette trace, et en déduire que la mesure de $\ell(t)$ permet de déterminer v_ℓ .

3 – Une autre méthode d'étalonnage de la constante de raideur K_p du piège consiste à faire osciller (avec une cale piézoélectrique) la cellule perpendiculairement au faisceau laser et par conséquent le liquide entourant la bille piégée dans le piège optique, immobile. La position de la cellule en fonction du temps est :

$$X_\ell(t) = X_0 \cos(\Omega t)$$

où l'amplitude X_0 des déplacements de la cellule et leur pulsation Ω sont imposées par la tension de commande de la cale piézoélectrique.

a – Après avoir écrit l'équation du mouvement de la bille, expliquer pourquoi il est possible d'utiliser ici la notation complexe ($\underline{X}_\ell(t) = X_0 e^{i\Omega t}$) pour déterminer la position ρ de la bille après établissement du régime forcé.

b – Calculer la position ρ de la bille par rapport au centre du piège en fonction du temps (on fera apparaître le temps caractéristique d'amortissement τ et la pulsation propre

$$\omega_0 = \left(\frac{K_p}{m} \right)^{1/2}.$$

c – On choisit des amplitude et fréquence de modulation égales respectivement à $X_0 = 10 \mu\text{m}$ et $\Omega/2\pi = 20 \text{ Hz}$. Dans ces conditions, on constate que la position $\rho(t)$ de la bille est en quadrature avec le signal $X_\ell(t)$, et qu'elle est modulée avec une amplitude $\rho_0 = 160 \text{ nm}$ pour une puissance laser $P = 150 \text{ mW}$. En déduire la constante de raideur K_p du piège.

4 – Si la résolution de la mesure de la position de la bille est $\Delta\rho = 2 \text{ nm}$, calculer la force minimale qu'il est possible d'appliquer sur l'ADN avec ce dispositif. En admettant que la constante de raideur K_p est proportionnelle à la puissance laser P , quelle est la puissance du faisceau laser à utiliser pour pouvoir exercer une force $F_0 \approx 40 \text{ fN}$? Montrer qu'il est possible d'observer ainsi une partie significative de la "courbe de force" $F(L)$ de l'ADN calculée dans la partie B ?

5 – On sait que la duplication de l'ADN implique l'ouverture de la double hélice. Des expériences ont été réalisées, où la force nécessaire pour ouvrir mécaniquement la double hélice a été mesurée. Leur principe est illustré sur la figure 10. L'extrémité de l'un des brins de l'ADN est fixée sur une surface de verre (qui peut être déplacée de façon contrôlée), tandis que celle de l'autre brin est fixée à une bille de verre. Le piège optique permet de mesurer la force exercée sur l'ADN.

a – En considérant que l'énergie de liaison d'une liaison hydrogène est de l'ordre de $k_B T$ à température ambiante ($T = 300\text{ K}$), estimer la force moyenne F_{ouv} nécessaire pour ouvrir l'ADN.

b – On constate expérimentalement que cette force F_{ouv} fluctue au cours de l'ouverture d'une portion d'ADN. Montrer que la nature des liaisons entre les paires de base permet d'interpréter cette fluctuation et en estimer l'amplitude.

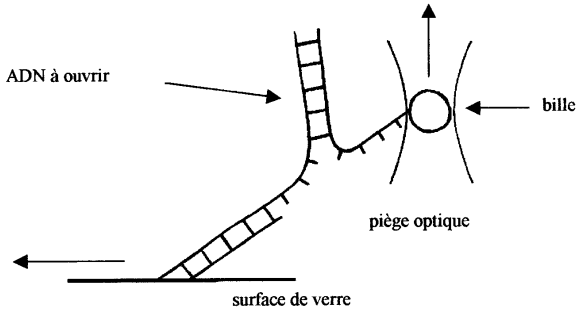


Figure 10: Ouverture de la double hélice.

6 – Le message génétique de l'ADN peut être recopié sous forme d'ARN messager, sous l'effet d'une enzyme, l'ARN polymérase. On veut déterminer ici la force qu'exerce cette enzyme sur un ADN au fur et à mesure qu'elle le transcrit. Pour cela on réalise l'expérience schématisée sur la figure 11. L'ARN polymérase est fixé sur une surface de verre. La transcription ne peut avoir lieu que dans un sens (indiqué sur la figure). L'ADN en train d'être transcrit est retenu par son extrémité à laquelle est fixée une bille. Lorsqu'on bloque ainsi la transcription avec un piège de constante $K_p = 100\text{ pN}/\mu\text{m}$, on observe un déplacement transversal $\rho = 130 \pm 40\text{ nm}$ (la barre d'erreur étant due à la dispersion des résultats). Déterminer la force développée par l'ADN polymérase au cours de son déplacement le long de l'ADN lors de la transcription.

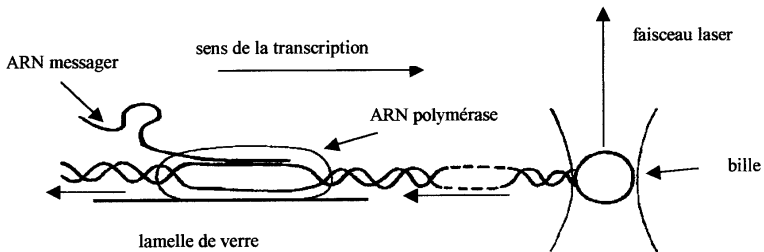


Figure 11 : Mesure de la force exercée sur l'ADN par l'ARN polymérase lors de la transcription de l'ADN en ARN messager.

1472

23021

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques**

option : chimie

composition de chimie

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.

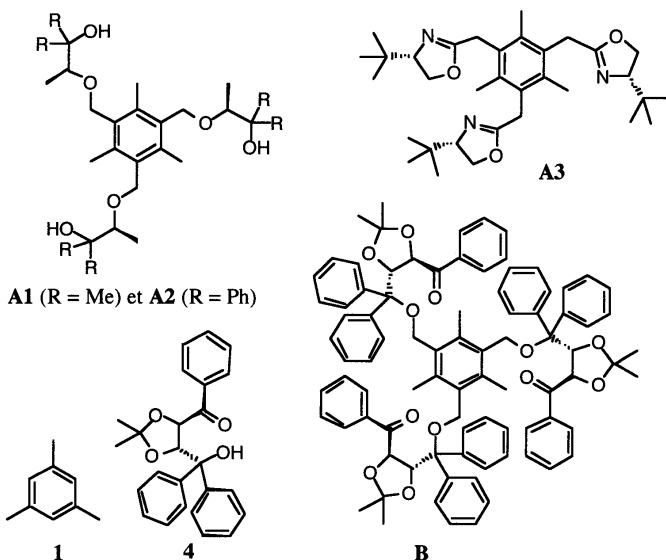
Macromolécules possédant un axe de symétrie d'ordre 3

L'étude de macromolécules chirales a permis de nombreux développements ces dernières années dans plusieurs domaines. Ces édifices moléculaires sont en effet des outils formidables pour étudier les phénomènes de reconnaissance moléculaire, phénomènes qui sont à la base de la chimie dans le monde du vivant. Une meilleure connaissance de ces processus d'interaction entre la « molécule-hôte » (macromolécule) et la « molécule-invitée » a permis de nombreuses applications, telles la séparation de mélanges d'énantiomères et l'extraction sélective d'ions d'un mélange complexe. Parmi les macromolécules étudiées, une nouvelle classe de composés possédant un axe de symétrie C_3 se révèle très prometteuse. Nous allons voir ci-dessous quelques exemples de leurs synthèses et de leurs utilisations en chimie organique.

Recommandations :

- 1) Si plusieurs groupes ou parties de molécules sont identiques, il sera possible de les représenter une seule fois de manière détaillée.
- 2) Pour l'interprétation des spectres RMN, il est conseillé de présenter les résultats sous forme de tableau après avoir clairement numéroté les atomes de carbone.

I. Synthèse et utilisation des molécules A1, A2, A3 et B



Synthèses de A1, A2, A3 et B :

Les synthèses des molécules A1, A2 et B sont effectuées à partir du mésitylène **1**. Celui-ci est traité par de l'acide sulfurique concentré, du méthanal et du bromure de sodium, tous les deux en excès, dans l'acide acétique à 90 °C pendant 6h. Après retour à la température ambiante et l'ajout d'eau, le précipité obtenu est recristallisé dans le dichlorométhane pour conduire au produit **2** (25 %), dont le spectre RMN du proton montre deux singulets à 2,46 et 4,58 ppm intégrant pour 9 et 6 protons respectivement. Le spectre de masse par ionisation chimique du composé **2** présente quatre pics à $m/z = 396, 398, 400$ et 402 d'intensité relative 1:3:3:1.

- I. 1. a Le mésitylène possède-t-il un axe de symétrie d'ordre 3 ? Justifier.
- I. 1. b Donner la structure de **2**. Justifier le spectre RMN du proton obtenu.
- I. 1. c Interpréter le spectre de masse de **2** et donner sa masse molaire.
- I. 1. d Proposer un mécanisme pour l'obtention de **2** à partir de **1**.

Le (*S*)-lactate de méthyle (possédant un excès énantiomérique de 99 %) (3 mmole) est traité par l'hydrure de sodium (3 mmole) dans le THF anhydre, puis l'on ajoute successivement de l'iodure de tétrabutylammonium (0,3 mmole) et 1 mmole du composé **2**. Après 12 h d'agitation, on effectue l'évaporation du solvant. Après une purification par chromatographie sur silice le composé **3** (62 %) est obtenu. Le spectre RMN du proton de **3** présente les caractéristiques suivantes : δ (ppm) : 4,72 (d, $J = 10,4$ Hz), 4,43 (d, $J = 10,4$ Hz), 4,02 (q, $J = 6,7$ Hz), 3,75 (s), 2,40 (s), 1,37 (d, $J = 6,7$ Hz). Le spectre de masse présente un seul pic à $m/z = 468$. Le composé **3** est ensuite traité par un large excès de bromure de méthylmagnésium dans l'éther éthylique anhydre, puis porté au reflux du solvant pendant 4 h. Après retour à la température ambiante, ajout d'eau, extraction à l'éther, et enfin élimination des solvants, le produit **A1** ainsi obtenu est purifié par chromatographie sur silice (rendement 63 %). Son spectre de RMN du proton, après ajout de D_2O , est identique à celui de **3** en ce qui concerne la partie située entre 5 et 4 ppm ; en revanche le signal à 3,75 ppm a disparu et deux nouveaux singulets sont apparus à 1,19 et 1,11 ppm. D'autre part, si le composé **3** est traité par un excès de bromure de phénylmagnésium dans l'éther éthylique anhydre porté au reflux, le spectre de RMN du proton du produit **A2** (rendement 57 %) est maintenant très différent de celui de **3** et de nombreux pics apparaissent dans la région située entre 5 et 4 ppm.

I. 2. a Donner la structure de **3** et l'équation-bilan de sa formation.

I. 2. b Quels sont les rôles respectifs de l'hydrure de sodium et de l'iodure de tétrabutylammonium ?

I. 2. c Attribuer, en justifiant, les signaux du spectre de RMN du proton de **3**.

I. 2. d Interpréter le spectre RMN du proton de **A1** par comparaison à celui de **3**, et préciser le rôle de D_2O .

I. 2. e Quelle conclusion peut-on tirer de la complexité inattendue du spectre RMN du proton de **A2** ?

Un équivalent du composé **2**, en suspension dans du DMSO anhydre, est traité par 8 équivalents de cyanure de potassium en présence d'éther-couronne 18-C-6, sous argon. Le mélange est agité

pendant 4 heures puis versé sur de la glace. Le précipité obtenu est lavé avec de l'acétone, puis séché sous vide. Le composé **D** est obtenu avec un rendement de 80 %. Ce dernier est traité en milieu sulfurique dilué aqueux, pendant 5 heures, à 150 °C. Après refroidissement à 80 °C, du nitrite de sodium est ajouté par petites quantités durant 2 heures, sous agitation vigoureuse. Au cours de cette opération, il se forme un précipité. Le mélange hétérogène est refroidi à température ambiante, puis versé dans l'eau froide. Après extraction à l'éther éthylique, puis séchage au sulfate de magnésium et concentration sous pression réduite, un solide **E** est alors obtenu (92 % de rendement). Ce composé **E** est dissous dans le dichlorométhane, et l'on ajoute 5 équivalents de chlorure d'oxalyle, puis 3 gouttes de DMF. Après 2 h d'agitation à la température ambiante, le mélange réactionnel est concentré par évaporation sous vide des réactifs volatils, pour conduire à un intermédiaire **F**. Ce dernier, non isolé, est dissous dans le dichlorométhane à 0 °C. On y additionne une solution de triéthylamine (3,5 équivalents) et de (*S*)-2-amino-3,3-diméthyl-1-butanol (3,5 équivalents) dans du dichlorométhane. La température est remontée à 20 °C et l'agitation maintenue 12 h. Le mélange réactionnel est ensuite versé dans une solution aqueuse d'hydrogénocarbonate de sodium et extrait au dichlorométhane. Après séchage de la phase organique et filtration puis évaporation, un composé huileux **G** est obtenu. Celui-ci est dissous dans du dichlorométhane. Après ajout de 10 équivalents de chlorure de thionyle, le mélange est agité pendant 12 h à température ambiante. La solution est ensuite concentrée sous vide et l'intermédiaire **H** ainsi obtenu est alors directement dilué dans l'acétonitrile, sans purification. On ajoute alors une solution aqueuse de carbonate de potassium. Après un reflux de 5 h, les solvants sont évaporés et le mélange hétérogène est alors extrait à l'éther éthylique, puis lavé par une solution aqueuse saturée de chlorure de sodium. Après séchage sur sulfate de sodium, suivi d'une évaporation, une purification par chromatographie sur colonne de silice conduit au composé **A3** avec 22 % de rendement.

I. 3. a Donner la structure du composé **D** et l'équation-bilan de sa formation. Justifier l'emploi de l'éther-couronne.

I. 3. b Donner la structure du solide **E**. Préciser le rôle du nitrite de sodium utilisé lors de cette séquence et donner les structures des intermédiaires réactionnels mis en jeu.

I. 3. c Donner les structures de l'intermédiaire **F** et celle du composé huileux **G**, en précisant les rôles du chlorure d'oxalyle et du DMF. Préciser le mécanisme mis en jeu au cours de cette transformation.

I. 3. d Donner la structure du composé intermédiaire **H** obtenu après le traitement au chlorure de thionyle. Préciser le mécanisme mis en jeu au cours de la transformation.

I. 3. e Proposer un mécanisme plausible pour le passage de l'intermédiaire **H** au composé **A3**.

Quand l'alcool **4** (possédant un excès énantiomérique de 92 %) est traité par l'hydrure de sodium dans le THF anhydre, puis par l'iodure de tétrabutylammonium et le composé **2**, on obtient, après purification par chromatographie sur silice, le composé **B** (rendement 58 %), dont le spectre RMN du proton est à nouveau très simple dans la région située entre 5 et 4 ppm, deux signaux seulement apparaissant à 4,53 (d, $J = 11,9$ Hz) et 4,44 (d, $J = 11,9$ Hz). Des composés diastéréomères de **B** sont également obtenus (avec un rendement de 11,5 %) et séparés de **B** au cours de la purification sur silice. L'analyse par RMN du proton de chacun de ces diastéréomères montre maintenant une complexité dans la région située entre 5 et 4 ppm.

I. 4. a Attribuer les deux signaux de RMN du proton (à 4,53 et 4,44 ppm) de **B**.

I. 4. b Donner le rendement chimique maximum théorique en produit **B**.

I. 4. c Déterminer la pureté énantiomérique du composé **B** en considérant que la réaction n'est pas diastéréosélective.

I. 4. d Donner la raison de la complexité du spectre RMN du proton (entre 5 et 4 ppm) des diastéréomères de **B**.

I. 4. e Déterminer la configuration absolue des centres asymétriques de **4** en précisant les ordres de priorité des substituants.

I. 4. f Proposer une synthèse de **4** à partir de l'un des stéréomères de l'acide tartrique dont on précisera la configuration (possédant lui-même un excès énantiomérique de 92 %).

Applications :

Les macromolécules de type **A** ou **B** peuvent être utilisées pour complexer sélectivement des cations métalliques, soit pour des utilisations médicales (détoxification due aux métaux lourds, transport de cations métalliques en imagerie médicale, etc.), soit pour des utilisations en synthèse asymétrique.

Ainsi, le composé **A1** est mis en solution dans du deutérochloroforme avec 1 équivalent de trichlorure de méthylétain et 3 équivalents de triéthylamine. Après filtration du précipité, le surnageant est analysé par RMN. Le spectre RMN du proton montre un élargissement de tous les signaux alors que le spectre RMN de l'étain (^{119}Sn) présente deux pics à $\delta = -233,8$ et $-227,0$ ppm par rapport à SnMe_4 .

I. 5. a Quel est le précipité formé ?

I. 5. b Dessiner schématiquement le complexe obtenu.

I. 5. c Sachant que le déplacement chimique de MeSnCl_3 en RMN de l'étain est -18 ppm, interpréter l'existence des deux signaux en RMN- ^{119}Sn .

I. 5. d A partir des données suivantes sur l'étain, proposer une (ou plusieurs) interprétation (s) pour justifier les observations en RMN du proton.

I. 5. e Calculer les sensibilités relatives à champ constant des signaux en RMN- ^{119}Sn et RMN- ^{13}C par rapport au proton. Comparer.

Isotope	abondance (%)	spin	rapport gyromagnétique ($\text{rad}\cdot\text{T}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$)	fréquence RMN (MHz)
^1H	99,98	1/2	$2,6753\cdot 10^8$	100
^{13}C	1,10	1/2	$0,6728\cdot 10^8$	25
^{119}Sn	8,58	1/2	$-0,9971\cdot 10^8$	37

On donne par ailleurs les constantes de couplage suivantes : ${}^3J({}^{119}\text{Sn}-{}^1\text{H}) \approx 200 \text{ Hz} > {}^2J({}^{119}\text{Sn}-{}^1\text{H}) \approx 120 \text{ Hz}$.

Le composé **A1** a été également testé en synthèse asymétrique afin d'évaluer ses propriétés d'induction asymétrique. Pour cela, **A1** est mis en solution dans le toluène et l'on ajoute 10 équivalents de tétraisopropanolate de titane ($\text{Ti}(\text{O}i\text{Pr})_4$) et un équivalent de benzaldéhyde. La solution est refroidie à $-10 \text{ }^\circ\text{C}$ et trois équivalents de diéthylzinc sont alors additionnés. Après ajout d'eau et extraction à l'éther, le (*R*)-1-phénylpropan-1-ol est obtenu avec un excès énantiomérique de 10 %.

I. 6. a Proposer une méthode analytique pour mesurer l'excès énantiomérique du produit obtenu et justifier ce choix.

I. 6. b Proposer une voie de synthèse pour préparer le diéthylzinc.

I. 6. c Commenter l'excès énantiomérique observé.

Le composé **A3** est utilisé lors de l'étape-clé de la préparation du 3-phényltétrahydropyrane énantiomériquement enrichi. Ainsi, 1 équivalent de *tert*-butanolate de potassium et 1 équivalent de phénylacétate de méthyle, dans du toluène anhydre, sont agités quinze minutes à $-78 \text{ }^\circ\text{C}$, puis on ajoute 0,2 équivalent de la macromolécule **A3** et enfin 1 équivalent d'acrylate de méthyle. Après huit heures d'agitation, le milieu réactionnel est hydrolysé par simple ajout d'eau, et, après extraction et purification, le produit attendu **J** est obtenu avec 83% de rendement et un excès énantiomérique de 82%. Le composé **J** est ensuite dissous dans l'éther éthylique anhydre et l'on ajoute 2 équivalents de tétrahydrualuminate de lithium à $0 \text{ }^\circ\text{C}$. Après 30 minutes d'agitation, une solution aqueuse de chlorure d'ammonium est ajoutée, et la solution est ensuite acidifiée jusqu'à $\text{pH} = 5$ à l'aide d'une solution d'acide chlorhydrique $1 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$. Le milieu est extrait à l'acétate d'éthyle, les phases organiques réunies sont séchées, filtrées et concentrées. Le brut réactionnel est purifié par chromatographie sur silice pour conduire au produit **K** avec 60 % de rendement. Ce dernier est dissous dans du dichlorométhane et la température abaissée à $-78 \text{ }^\circ\text{C}$. On ajoute alors l'anhydride trifluorométhanesulfonique (1 équivalent) et deux équivalents de DBU

(1,8-diazabicyclo[5.4.0]undec-7-ène). Le suivi de la réaction par chromatographie sur couche mince (CCM) montre l'apparition de deux produits majoritaires moins polaires que le produit de départ. Après 30 minutes d'agitation, le milieu est hydrolysé par ajout d'une solution de chlorure d'ammonium. Après extraction à l'acétate d'éthyle, les phases organiques réunies sont séchées sur sulfate de sodium, filtrées et concentrées. Le brut réactionnel est purifié par chromatographie sur silice pour conduire au 3-phényltétrahydropyrane avec 71 % de rendement.

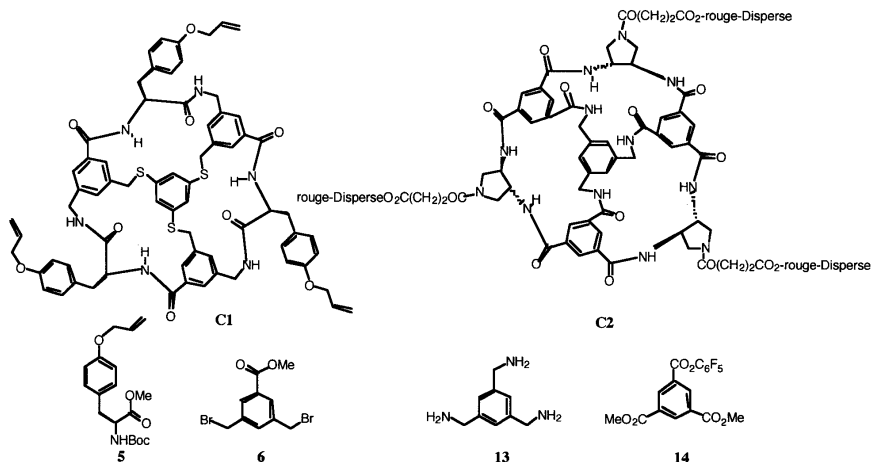
I. 7. a Donner la structure du produit **J**.

I. 7. b Proposer un mécanisme pour expliquer la formation de **J**, sans considération stéréochimique.

I. 7. c Donner la structure du produit **K**.

I. 7. d Justifier la présence des deux produits intermédiaires observés par CCM et donner leurs structures. Proposer un mécanisme plausible pour expliquer la formation du 3-phényltétrahydropyrane à partir du produit **K**.

II. Synthèse et utilisation des molécules C1 et C2



Synthèses de C1 et C2 :

La synthèse de la molécule C1 est effectuée à partir de l'ester méthylique de l'acide α -aminé suivant : la tyrosine protégée sous-forme d'éther allylique et de *N*-*tert*-butyloxycarbonyl, **5**. Ce dernier, mis en présence d'ammoniac dans le méthanol à la température ambiante dans un réacteur fermé sous pression, conduit après deux jours à l'amide attendu (rendement 97 %). Celui-ci est alors transformé en son composé tri-Boc protégé **7** (C₂₇H₄₀N₂O₈, rendement 90 %) par traitement avec la diisopropyléthylamine en présence d'une quantité catalytique de 4-diméthylaminopyridine (DMAP) et d'anhydride di-*tert*-butylcarbonique (excès). Le composé **7** est ensuite mis en solution dans le THF anhydre à -78 °C et traité par 1 équivalent d'hexaméthyldisilylamidure de sodium et 1 équivalent du composé **6** en présence d'une quantité catalytique d'iodure de tétrabutylammonium. La température est ajustée à 10-15 °C et, après 45 minutes d'agitation, une solution aqueuse de chlorure d'ammonium est ajoutée. Après extraction à l'éther, le produit **8** (C₃₇H₄₉BrN₂O₁₀) est purifié par chromatographie sur silice (rendement 82 %).

II. 1. a Quel est le rôle de la DMAP ?

II. 1. b Préciser la structure du composé tri-Boc protégé **7**, sachant que pour obtenir **8**, on est obligé de passer par un intermédiaire cyclique à cinq chaînons **I**.

II. 1. c Donner la structure de **8** et proposer un mécanisme pour la transformation de **7** en **8**, en faisant intervenir l'intermédiaire cyclique **I**. On indique qu'en absence d'électrophile, **I** donnerait un produit **X** ($C_{23}H_{30}N_2O_7$) et du *tert*-butanolate de sodium. Donner la structure de **X**, ainsi que le mécanisme de sa formation.

II. 1. d Pourquoi le centre asymétrique de **7** pourrait-il se racémiser au cours de la réaction conduisant à **8** ?

II. 1. e Afin d'évaluer l'éventuelle racémisation, on traite **8** par 1 équivalent de carbonate de potassium dans le méthanol. On ajoute ensuite de l'acide chlorhydrique et enfin du (*S*) acide de Mosher (acide (*S*)-2-méthoxy-2-trifluorométhyl-2-phénylacétique) en présence de dicyclohexylcarbodiimide (DCC). Donner les équations-bilan des différentes réactions mises en jeu. Comment l'étude par RMN, du produit final obtenu, permettrait-elle la mise en évidence et l'évaluation quantitative de cette racémisation du composé **7** ? Justifier l'emploi du réactif trifluorométhylé.

Le produit **8** (3 équivalents) est ensuite ajouté à une suspension de benzène-1,3,5-trithiol (1 équivalent) dans le THF contenant un excès de diisopropyléthylamine. Après 16 h d'agitation à la température ambiante, on ajoute une solution aqueuse de chlorure d'ammonium et, après extraction à l'éther, le brut réactionnel est purifié par chromatographie sur silice pour donner **9** ($C_{117}H_{150}N_6O_{30}S_3$) avec 78 % de rendement. Ce dernier est ensuite traité successivement par de l'acide trifluoroacétique en excès, en présence d'anisole (méthoxybenzène) dans le dichlorométhane, pour conduire à un intermédiaire **I'** qui, après évaporation du solvant, est mis directement sans purification en solution dans le dichlorométhane contenant un excès de carbonate de potassium, de la diisopropyléthylamine et de l'anhydride de di-*tert*-butylcarbonique. Après 17 h d'agitation et extraction à l'acétate d'éthyle, le produit **10** ($C_{87}H_{102}N_6O_{18}S_3$), recristallisé dans l'éther, est obtenu avec 86 % de rendement.

II. 2. a Donner la structure de **9**.

II. 2. b Donner la structure de l'intermédiaire **I'**.

II. 2. c Donner la structure de **10** et justifier son obtention à partir de **I'** (mécanisme non demandé).

II. 2. d Pourquoi déprotège-t-on totalement les fonctions azotées avant de reprotéger une seule fois ?

Le produit **10** (0,309 mmole) est traité pendant 8h par une solution molaire d'hydroxyde de lithium (15 mL) dans le mélange THF/Et₂O/H₂O (dans une proportion en volume de 6:6:2, 100 mL). Une solution aqueuse d'hydrogénosulfate de potassium est alors additionnée. Après extraction à l'acétate d'éthyle, le produit **11** est obtenu sous forme de cristaux présentant en infrarouge une bande large centrée à 3000 cm⁻¹. Ce dernier est ensuite mis en solution dans du THF contenant du pentafluorophénol et du chlorhydrate de 1-(3-(diméthylamino)propyl)-3-éthylcarbodiimide. Après 4 h d'agitation et concentration sous vide, le brut réactionnel est purifié par chromatographie sur silice pour conduire au produit **12** (68 %). Celui-ci est alors traité par de l'acide trifluoroacétique en présence d'anisole dans le dichlorométhane pendant 6 h à la température ambiante. Après évaporation du solvant, le sel obtenu **S** est mis en solution dans le N,N-diméthylacétamide (DMA) et ajouté goutte à goutte très lentement à une solution de diisopropyléthylamine dans le THF. Après 12 h supplémentaires d'agitation, une partie du solvant est évaporée, puis la solution est extraite à l'acétate d'éthyle et lavée avec une solution aqueuse diluée d'acide chlorhydrique, puis avec une solution aqueuse d'hydrogénocarbonate de sodium et enfin avec une solution aqueuse saturée de chlorure de sodium. Après purification, la macromolécule **C1** est obtenue avec 78 % de rendement.

II. 3. a Donner la structure du composé **11**.

II. 3. b Donner la structure de **12**, et préciser le rôle du chlorhydrate de 1-(3-(diméthylamino)propyl)-3-éthylcarbodiimide.

II. 3. c Donner la composition du sel intermédiaire **S** obtenu.

II. 3. d Commenter les conditions opératoires de la dernière étape permettant d'obtenir **C1**.

II. 3. e Justifier le remplacement du groupement ester méthylique par un groupement ester pentafluorophénylique.

II. 3. f Expliquer les traitements effectués sur le brut réactionnel avant d'obtenir **C1**.

II. 3. g Calculer le rendement global en composé **C1** et donner le rendement moyen par étape.

La molécule **C2** est préparée selon un mode opératoire très similaire au précédent. Pour cela, le composé **13** (1 équivalent) est mis en solution dans du DMA, auquel on ajoute le triester **14** (3 équivalents), puis de la diisopropylamine en excès. Après 8 h d'agitation, le solvant est évaporé et le brut réactionnel est purifié par chromatographie sur silice pour conduire au produit **15** ($C_{42}H_{39}N_3O_{15}$) avec 78 % de rendement. Ce dernier est dissous dans un mélange de solvants THF/MeOH/H₂O (dans une proportion en volume de 5:3:1) et l'on ajoute une solution molaire de soude. Après 5 h d'agitation, le milieu réactionnel est acidifié à l'aide d'une solution aqueuse molaire d'acide chlorhydrique, puis extrait à l'acétate d'éthyle. Après évaporation des solvants organiques, le brut réactionnel est directement traité par du pentafluorophénol et du chlorhydrate de 1-(3-(diméthylamino)propyl)-3-éthylcarbodiimide dans un mélange THF/CH₂Cl₂. Après 5 h d'agitation et évaporation des solvants, le produit **16** est obtenu par purification par chromatographie sur silice (rendement 30 %). Le composé **16** est alors traité par 3 équivalents de (3*R*, 4*R*)-3,4-diaminopyrrolidine protégée par un motif succinique estérifié à une extrémité par du Rouge-Disperse-1, en présence de diisopropyléthylamine dans le THF, pour conduire, après traitement et purification habituels, à la molécule **C2**, de couleur rouge, avec un rendement de 26 %.

II. 4. a Donner les structures des produits **15** et **16**.

II. 4. b Donner les équations-bilan des réactions permettant le passage de **15** à **16** et le mécanisme de la réaction mettant en jeu le 1-(3-(diméthylamino)propyl)-3-éthylcarbodiimide.

II. 4. c Proposer une synthèse de **13** à partir du mésitylène **1**.

II. 4. d Quelle est la nature du groupement fonctionnel à l'origine de la couleur rouge du Rouge-Disperse-1?

II. 4. e Représenter une structure tridimensionnelle schématisée de **C2**, en tentant de mettre en évidence des sites de liaison H alternativement donneurs-accepteurs, à la périphérie du macrocycle.

Applications :

Les composés **C1** et **C2** sont étudiés pour mettre en évidence leurs propriétés de reconnaissance moléculaire vis-à-vis de « molécules- invitées » non chargées. Ces propriétés sont mises à profit pour effectuer la séparation d'énantiomères en solution ou sur support solide. De plus, une meilleure compréhension des interactions entre la molécule-hôte et la molécule-invitée permet de mieux cerner les processus mis en jeu lors de la reconnaissance entre une protéine et un substrat (médicament, agent pathogène, agent de régulation etc...).

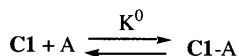
Dans un premier temps, le composé **C2**, en solution dans le chloroforme, est combiné simultanément à 50 000 tripeptides acylés dans leur position C-terminale et liés à une bille de polystyrène, chaque bille portant un tripeptide étant mise dans un micro-puits d'une plaque comprenant 96 puits. L'expérience est menée en agitant les plaques pendant 24 h, puis en analysant, après traitement aqueux, les puits restés fortement teintés en orange-rouge en fin d'expérience, appelés « positifs ». Les résultats montrent que seulement 1 % des tripeptides répondent à ce critère, mettant en évidence une très bonne sélectivité. On peut également noter que des modifications minimales de la structure de **C2** entraînent la disparition des cas positifs.

II. 5. a Quelles conclusions peut-on tirer de ces « positifs » ?

II. 5. b De combien de plaques a-t-on besoin pour évaluer tous les tripeptides ?

II. 5. c Expliquer comment une technique spectroscopique appropriée permettrait d'avoir accès aux valeurs de constantes thermodynamiques K^0 associées aux processus de complexation entre **C2** et le substrat supporté sur polymère.

Le composé **C1**, quant à lui, est mis en solution dans du deutérochloroforme, et différents acides α -aminés protégés sont ajoutés dans des proportions variables. La complexation entre l'acide α -aminé (noté **A** ci-dessous) et **C1** est suivie par RMN du proton en étudiant la variation du déplacement chimique d'un proton donné en fonction de la quantité d'acide aminé ajouté ($[A]$). Le processus de complexation entre **C1** et **A** est représenté par l'équation-bilan suivante, à laquelle on associe une constante thermodynamique standard K^0 et une enthalpie libre standard d'association $\Delta_r G^0$.



Le tableau suivant donne les valeurs expérimentales en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ des enthalpies libres standard d'association $\Delta_r G^0$ ($T = 300 \text{ K}$) de certains acides aminés protégés (alanine, valine, sérine, notés respectivement : Ala, Val, Ser), en fonction de leur configuration (D, L) et des types de groupements protecteurs, avec **C1**.

série	L	D
MeO ₂ C-Ala-O <i>t</i> Bu	-20,06	-9,61
MeO ₂ C-Val-O <i>t</i> Bu	-15,47	-6,27
MeO ₂ C-Ser-O <i>t</i> Bu	-29,26	-19,65
N-Boc-Ala-NHMe	-16,30	-7,11
N-Boc-Val-NHMe	-18,39	-6,27
N-Boc-Ser-NHMe	-25,50	-15,88

II. 6. a Quel type de liaisons peut intervenir dans les associations de **C1** avec **A** ? Proposer un schéma. Quelle technique expérimentale permettrait de mettre ces liaisons en évidence ?

II. 6. b Calculer les valeurs du rapport K_L^0/K_D^0 des constantes thermodynamiques standard, puis faire une estimation des valeurs de l'énantioselectivité observée, sous la forme excès énantiomérique (ee %), dans les six cas proposés ici. Regrouper dans un tableau, les valeurs K_L^0/K_D^0 ainsi que les ee % correspondants. Commenter.

On prendra comme valeur de la constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

La molécule **C1** peut être greffée sur un support solide constitué de gel de silice mercaptopropylée (Si-O-Si(CH₂)₃SH). Puis, dans les conditions de pression de chromatographie liquide haute performance (CLHP), plusieurs acides aminés racémiques sont injectés ainsi que des tripeptides. Les chromatogrammes montrent des temps de rétention d'environ 1 h pour les composés de la série L, et de seulement 3 à 5 minutes pour les composés de la série D.

II. 7. a Proposer un type de réaction de couplage pouvant être effectuée entre la silice mercaptopropylée et **C1**, sachant que de l'AIBN (2,2'-azobisisobutyronitrile) a été utilisé. Donner le mécanisme de cette réaction.

II. 7. b Proposer une méthode d'évaluation du taux de greffage de la silice.

II. 7. c Ces résultats confirment-ils les conclusions observées lors de l'étude par RMN ?

II. 7. d Dans le cas de la N-Boc-Ala-NHMe, les facteurs de rétention sont de 0,51 et 4,64 respectivement pour les composés D et L. En déduire la valeur du rapport K_L^0/K_D^0 , et la comparer avec celle obtenue à la question II.6.b.

1473

23022

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques**

option : chimie

composition de physique

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.

Le **CHAMP MAGNETIQUE** est présent dans les quatre parties de ce problème.
 La partie I concerne la **magnétostatique**, et les parties II, III et IV, indépendantes entre elles, traitent essentiellement de **mécanique** et d'**électrocinétique**.
 Des valeurs numériques sont rassemblées à la fin de l'énoncé, page 14.

Partie I. Eléments de magnétostatique

I.1. Les propriétés du champ magnétique

- I.1.a) Décrire l'expérience historique d'Oersted qui a fait apparaître le rapport insoupçonné entre l'électricité et le magnétisme. La dater.
- I.1.b) Un élément $d\vec{l}$ d'un conducteur filiforme parcouru par un courant électrique d'intensité I est placé en un point P de l'espace. En posant $\vec{r} = \overrightarrow{PM} = r \vec{u}$ où \vec{u} est un vecteur unitaire, exprimer la contribution $d\vec{B}(M)$ au champ magnétique total, créée par cet élément en un point d'observation M .
 Comment s'appelle cette loi ? En quelle année approximativement a-t-elle été énoncée ?
 Par quelle relation simple la perméabilité du vide μ_0 est-elle liée à la permittivité du vide ϵ_0 ?
- I.1.c) Le champ magnétique est dit à flux conservatif. Traduire physiquement cette propriété en termes de surface fermée, de surface ouverte et de section d'un tube de champ.
 Quelle est la conséquence sur les lignes de champ ?
- I.1.d) Définir les notions de plan de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courants.
 Quelle propriété possède le champ magnétique en un point M d'un plan de symétrie ou d'antisymétrie ?
 A quels types de renseignements sur le champ magnétique conduisent les propriétés d'invariance par translation ou par rotation d'une distribution de courants ?
- I.1.e) Enoncer et dater le théorème d'Ampère. Quel est son intérêt ?
 Expliquer à l'aide d'un dessin comment le signe est affecté aux courants algébriques.
- I.1.f) Les résultats des questions I.1.b), c) et e) restent-ils valables lorsque le courant électrique, source du champ magnétique, est variable dans le temps ? (dans les trois cas préciser les domaines éventuels de fréquence permettant de conserver ces lois).

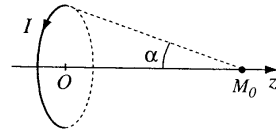
I.2. Le fil rectiligne

On se place en coordonnées cylindriques de vecteurs unitaires \vec{u}_r , \vec{u}_θ et \vec{u}_z .

- I.2.a) Un fil rectiligne illimité, de section circulaire de rayon a , dont l'axe de révolution coïncide avec l'axe Oz , est parcouru par un courant continu d'intensité I ; la densité volumique de courant \vec{j} y est supposée uniforme sur une section. Après avoir examiné les propriétés de symétrie et d'invariance, donner l'expression du champ \vec{B} créé en un point quelconque, intérieur ou extérieur au fil, à une distance r . Tracer la courbe $B(r)$. Le champ est-il continu en $r = a$? Commenter cette propriété.
- I.2.b) Application numérique. Calculer B à $r = 1$ cm pour $I = 1$ A et $a = 1$ mm; comparer cette valeur à celle de la composante horizontale du champ magnétique terrestre.
- I.2.c) Au cours d'un orage, un éclair peut être assimilé à un fil rectiligne de rayon $a = 12$ cm et parcouru par un courant d'intensité $I = 10^5$ A. A moins de quelle distance du point de chute de l'éclair, l'aiguille d'une boussole risque-t-elle d'être désaimantée sachant que cela se produit lorsqu'elle est placée dans un champ supérieur à $B_l = 2,4 \cdot 10^{-3}$ T ?

I.3. La spire circulaire

Une spire circulaire de centre O , d'axe Oz et de rayon a est parcourue par un courant d'intensité I . A partir d'un point M_0 de son axe, elle est vue sous un angle 2α .



- I.3.a) Après avoir examiné les propriétés de symétrie, déterminer le champ $\vec{B}(M_0)$ en fonction de α et de la valeur du champ au centre $B(O) = \frac{\mu_0 I}{2a}$. Tracer la courbe $B_0(z)$ correspondante.

- I.3.b) Un point M voisin de M_0 se trouve à la même abscisse z , mais à une distance r de l'axe. On note $B_0(z) = B_z(r = 0, z)$. Montrer à partir de la conservation du flux, que si r est suffisamment petit par rapport à a , la composante radiale du champ en M s'écrit

$$B_r(r, z) \approx -\frac{r}{2} \frac{dB_0(z)}{dz}$$

Quel est le signe de $B_r(r, z)$? Était-il prévisible ?

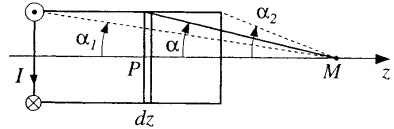
Esquisser et orienter les lignes de champ magnétique autour de la spire, et de son axe.

- I.3.c) On dispose deux spires identiques à la précédente sur le même axe Oz en $z = \pm \frac{d}{2}$. Elles sont parcourues par le même courant I dans le même sens. A l'aide d'arguments graphiques nécessitant un minimum de calculs, déterminer la distance d , à exprimer en fonction du rayon a , à laquelle il faut placer les spires pour obtenir le champ le plus uniforme possible dans le voisinage du centre O ? Quel nom donne-t-on à ce dispositif? En donner une application.

I.4. Le solénoïde

Un solénoïde d'axe Oz est constitué d'un bobinage serré modélisé par n spires circulaires par unité de longueur. Les spires ont un rayon a et sont parcourues par un courant d'intensité I .

On considère une épaisseur dz de spires au point P de cote z et un point M sur l'axe à partir duquel les extrémités du solénoïde sont vues sous des angles α_1 et α_2 (orientés positivement dans le sens indiqué sur la figure).



I.4.a) Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M)$ en un point M quelconque de l'axe en fonction de α_1 et α_2 .

I.4.b) Quelle est, en fonction de a et de la longueur L du solénoïde, la valeur du champ au centre du solénoïde. Que devient cette valeur si le solénoïde est infiniment long ?

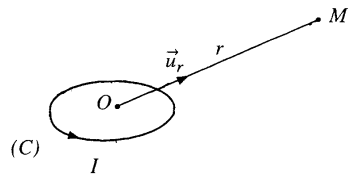
Pour quelles valeurs du rapport $L/2a$ peut-on considérer que le champ au centre diffère de moins de 1% de celui du solénoïde infiniment long ?

I.4.c) Montrer qu'à l'intérieur et à l'extérieur d'un solénoïde infiniment long le champ magnétique est uniforme ; quelles sont ses valeurs respectives \vec{B}_i et \vec{B}_e . Le champ est-il continu ? Commenter.

I.5. Le dipôle magnétique

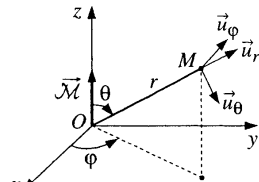
I.5.a) Soit (C) une boucle filiforme circulaire de rayon a , de centre O , et parcourue par un courant d'intensité I . Le point d'observation est M tel que $OM = r$.

- En quoi consiste l'approximation dipolaire ? par quelle inégalité se traduit-elle ici ?
- Comment est défini le moment magnétique dipolaire $\vec{\mathcal{M}}$ dans ce cas ?



I.5.b) Les composantes B_r , B_θ et B_φ en coordonnées sphériques du champ magnétique créé au point M par un dipôle magnétique placé en O , de moment $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \vec{u}_z$, sont données par les expressions :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}\cos\theta}{r^3} ; B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}\sin\theta}{r^3} ; B_\varphi = 0 .$$



Pour quelles valeurs de l'angle α , le champ au point M_0 sur l'axe de la spire circulaire de la question I.3 diffère-t-il de moins de 1% de celui du dipôle équivalent ? Il est conseillé pour répondre d'établir le rapport $B_{\text{spire}}/B_{\text{dipôle}}$ au point M_0 en fonction de α et de donner la valeur numérique de l'angle limite en degrés.

I.5.c) Etablir dans un plan $\varphi = \text{constante}$ l'équation $r(\theta)$ des lignes de champ en introduisant pour chaque ligne de champ une constante $r_0 = r(\theta = \pi/2)$ et les représenter graphiquement en pensant à les orienter.

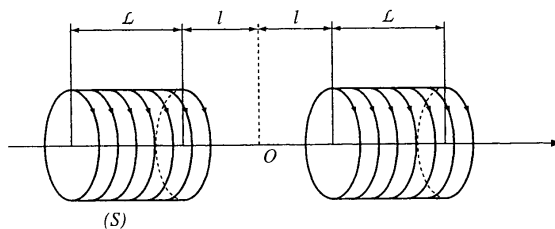
En déduire qualitativement comment varie l'intensité du champ magnétique le long d'une ligne de champ. Que se passe-t-il au voisinage du point O ?

I.5.d) Quelle est l'importance de la notion de dipôle magnétique au niveau microscopique ? Donner la définition, l'expression et la valeur numérique du magnéton de Bohr.

Partie II. Le moteur synchrone

II.1. Production d'un champ tournant

Un système (S) est constitué de deux solénoïdes identiques et coaxiaux comportant chacun N spires circulaires de rayon a et possédant chacun une longueur \mathcal{L} ; leurs faces en regard sont distantes de $2l$. Ils sont montés en série de telle sorte que le courant d'alimentation d'intensité I y circule dans le même sens.



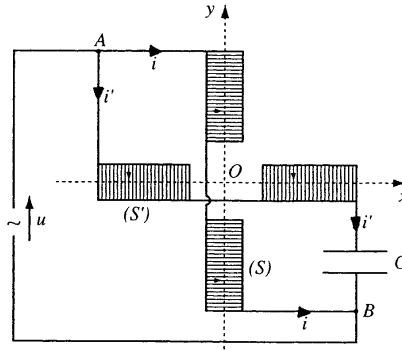
II.1.a) A l'aide de la question I.4.a) montrer que le champ au centre O du système (S) peut, en module, se mettre sous la forme

$$B = kI$$

où k est un coefficient à exprimer en fonction des caractéristiques géométriques du système. Applications numériques. Calculer k pour $\mathcal{L} = 7 \text{ cm}$; $l = 5 \text{ cm}$; $a = 3 \text{ cm}$; $N = 800$.

En déduire la valeur de B lorsque $I = 4 \text{ A}$.

On met en place deux systèmes (S) et (S') identiques au précédent selon la disposition de la figure ci-dessous : les axes Oy de (S) et Ox de (S') sont orthogonaux et se coupent en O , milieu commun. Chaque système a une résistance électrique totale R et une inductance totale L .



Entre les points A et B sont branchés en parallèle :

- un générateur de tension de force électromotrice sinusoïdale : $u(t) = U\sqrt{2} \cos \omega_0 t$
- le système (S)
- le système (S') monté en série avec un condensateur de capacité C .

II.1.b) A tension $u(t)$ donnée, prévoir qualitativement le rôle de la capacité C sur le courant $i'(t)$ dans (S') par rapport au courant $i(t)$ dans (S). En s'appuyant par exemple sur le cas de la polarisation des ondes électromagnétiques, prévoir qu'au point O le champ magnétique total est un vecteur tournant dans le plan xOy .

II.1.c) Déterminer, en utilisant la méthode complexe, les intensités instantanées $i(t)$ et $i'(t)$ sous la forme :

$$i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad \text{et} \quad i'(t) = I'\sqrt{2} \cos(\omega_0 t - \varphi')$$

et donner les expressions des intensités efficaces I et I' ainsi que de $\tan \varphi$ et $\tan \varphi'$.

II.1.d) Montrer, en supposant que R et ω_0 sont imposées, qu'il est possible d'exprimer L et C pour satisfaire la double condition : $I = I'$ et $\varphi = \varphi' - \pi/2$.

Que valent dans ces conditions I , I' , φ et φ' ?

II.1.e) Application numérique. Calculer L et C sachant que $R = 25,1 \, \Omega$ et $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 50 \, \text{Hz}$;

- la valeur de L (inductance totale d'un système) est-elle plausible sachant que l'inductance propre L' d'une bobine unique est donnée par l'expression $L' = \pi\mu_0 \frac{N^2 a^2}{L}$?

- que valent numériquement I et I' ?

II.1.f) Déterminer dans les conditions de II.1.d) le vecteur représentant le champ magnétique \vec{B} au point O en notant B_0 son module (à exprimer en fonction de k , U et R) et \vec{u}_x et \vec{u}_y , les vecteurs unitaires des deux axes.

A quelle fréquence ce champ tourne-t-il dans le plan xOy ?

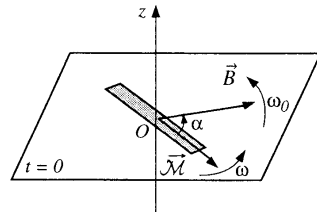
Quelle est la valeur numérique de B_0 avec les conditions précédentes ?

II.1.g) Connaissez-vous un autre montage simple, susceptible de donner un champ magnétique tournant ?

II.2. Principe d'un moteur synchrone

Le montage précédent de bobines parcourues par des courants alternatifs de pulsation ω_0 produit dans un certain volume un champ magnétique \vec{B} uniforme, d'amplitude B_0 , qui tourne dans le plan xOy autour de l'axe Oz avec la pulsation ω_0 constante (le stator).

D'autre part, une pièce mobile autour de l'axe Oz (le rotor) constituée d'un petit aimant portant un moment magnétique permanent \vec{M} , orthogonal à Oz , tourne dans le plan xOy d'un mouvement de rotation uniforme de pulsation ω .



La valeur de l'angle (\vec{M}, \vec{B}) à l'instant initial est notée α comme indiqué sur la figure.

On note \vec{u}_z le vecteur unitaire de l'axe Oz .

Rappelons que le moment $\vec{\Gamma}$ des forces exercées par un champ magnétique \vec{B} sur un dipôle magnétique de moment \vec{M} a pour expression : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$.

II.2.a) Calculer la valeur instantanée de ce couple magnétique $\vec{\Gamma}(t)$ exercé par le champ \vec{B} sur la pièce mobile.

En déduire sa valeur moyenne au cours du temps $\langle \vec{\Gamma} \rangle$ et commenter le résultat en distinguant le cas $\omega = \omega_0$ du cas $\omega \neq \omega_0$.

II.2.b) Pour quelles valeurs de ω et α ce dispositif fonctionne-t-il en moteur ? Justifier la terminologie de « moteur synchrone » ; l'aimant suit-il ou précède-t-il alors le champ magnétique dans son mouvement ?

Quelle est dans ce cas la puissance maximale P_m qu'il peut fournir en régime permanent ? Où est précisément la source d'énergie dans ce montage ?

II.2.c) On note $\Gamma = |\langle \vec{\Gamma} \rangle|$ le module de la valeur moyenne du couple magnétique, Γ_m la valeur maximale de Γ et $\Gamma_u \leq \Gamma_m$ le couple utile fourni par le moteur en régime permanent.

Tracer le graphe $\Gamma(\alpha)$ pour les valeurs de α correspondant à un dispositif fonctionnant en moteur.

Quelle relation lie Γ et Γ_u en régime permanent de fonctionnement du moteur ? Que constate-t-on alors graphiquement pour une valeur donnée de Γ_u ?

Énoncer le critère de stabilité de fonctionnement du moteur en régime permanent (lorsque par exemple celui-ci prend accidentellement de l'avance ou du retard sur son régime permanent), puis déterminer qualitativement à partir du graphe $\Gamma(\alpha)$ le domaine de α correspondant à un régime stable.

II.2.d) Ce type de moteur peut-il démarrer seul ? Expliquer.

Partie III. Action sur des charges électriques

III.1. Particule libre dans un champ uniforme

Une particule non relativiste de masse m et de charge q (de signe quelconque) se déplace à la vitesse \vec{v}_0 dans un référentiel galiléen ; cette vitesse est contenue dans le plan xOy . À partir de l'instant $t = 0$, elle pénètre dans un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{u}_z$ ($B > 0$), uniforme et constant.

Nature de la trajectoire

III.1.a) Comment peut-on justifier que seule la force de Lorentz soit en prendre en compte pour décrire le mouvement de la particule ? Écrire la relation fondamentale de la dynamique à l'aide du vecteur vitesse \vec{v} .

III.1.b) Montrer que la trajectoire est plane et que la vitesse est constante en module. Quelle est cette trajectoire ? Exprimer en fonction de m , v_0 , $|q|$ et B , la période de rotation T ainsi que le rayon de giration R . Dessiner la trajectoire orientée et le champ \vec{B} dans le cas $q < 0$.

III.1.c) Quel est le rôle du champ magnétique sur la trajectoire ?

III.1.d) Comment la trajectoire est-elle modifiée si la vitesse initiale \vec{v}_0 possède une composante v_{0z} suivant l'axe Oz ?

III.1.e) Application numérique 1. Un électron libre, de vitesse initiale négligeable, est initialement accéléré sous une différence de potentiel $\Delta V = 10$ kV. Quelle est alors sa vitesse v_0 au moment où il est injecté dans un appareil de Crookes dans lequel règne un champ magnétique $B = 5 \cdot 10^{-3}$ T. Que valent R et T ?

Application numérique 2. Dans un métal, un électron de conduction parcourt en moyenne une distance $d \approx 20$ nm entre deux chocs séparés en moyenne d'un temps $\tau \approx 10^{-14}$ s. En déduire sa vitesse moyenne v_0 ; les notions de période et de rayon de giration conservent-elles dans ce cas encore un sens en présence d'un champ fort $B \approx 1$ T ? Justifier.

Stabilité de la trajectoire

Pour étudier les petits mouvements de la particule au voisinage de l'orbite d'équilibre dans le champ \vec{B} , il est commode de se placer en coordonnées cylindriques (r, θ, z) et de considérer les petites variations autour des grandeurs d'équilibre :

$$r = R + \varepsilon ; \quad \frac{d\theta}{dt} = -\omega_c + \omega' ; \quad z = 0 + z$$

III.1.f) Projeter l'équation du mouvement sur les trois axes \vec{u}_r , \vec{u}_θ et \vec{u}_z en introduisant la grandeur algébrique $\omega_c = qB/m$ (dont la valeur absolue est la pulsation cyclotron $2\pi/T$).

III.1.g) Montrer que la projection sur \vec{u}_θ conduit, en se limitant aux termes d'ordre un, à une relation simple entre les variations ε du rayon et ω' de la vitesse angulaire.

III.1.h) En déduire que la projection sur \vec{u}_r conduit alors à une équation différentielle du second ordre en ε ; conclure quant à la stabilité radiale et à la stabilité orthoradiale.

III.1.i) Qu'en est-il de la stabilité axiale pour v_{0z} quelconque ? Comment peut-on procéder expérimentalement pour obtenir la stabilité ?

III.2. L'effet Zeeman

L'action d'un champ magnétique sur une source de lumière provoque des modifications de la lumière émise. La théorie classique étudie les perturbations des mouvements électroniques dans les atomes émetteurs.

L'oscillateur harmonique spatial

Dans la théorie classique de l'émission d'une radiation lumineuse par un atome de centre O fixe, l'électron émetteur, de masse m et de charge $-e$ en un point P , est élastiquement lié, c'est-à-dire qu'il se déplace dans l'atome sous l'action d'une force de la forme $\vec{f} = -k \vec{r}$ où $k > 0$ et $\vec{r} = \vec{OP}$.

III.2.a) Montrer que dans un repère orthonormé $R(Oxyz)$ d'origine O et d'axes quelconques la trajectoire de l'électron est plane. Préciser le plan du mouvement. Déterminer la nature de la trajectoire fermée suivie par la particule et la pulsation ω de parcours.

III.2.b) Justifier que ce mouvement de l'électron peut être décomposé en trois mouvements de même pulsation ω : un mouvement rectiligne sinusoïdal le long de Oz , et deux mouvements circulaires dans le plan xOy de même rayon, l'un dans le sens direct et l'autre dans le sens rétrograde par rapport à Oz .

Il est admis que la pulsation de la radiation émise par l'atome est égale à la pulsation du mouvement de l'électron.

Théorie de Lorentz de l'effet Zeeman

L'atome est plongé dans un champ magnétique \vec{B} uniforme et constant. Le repère $R(Oxyz)$ est choisi de telle sorte que \vec{B} soit porté par Oz . L'étude s'appuie sur la décomposition rappelée ci-dessus.

III.2.c) Montrer que la projection sur Oz du mouvement de l'électron n'est pas modifiée par la présence du champ magnétique.

III.2.d) Soit maintenant, dans le plan xOy , la composante de mouvement circulaire dans le sens direct. En supposant qu'en présence du champ magnétique la trajectoire reste circulaire mais de pulsation ω_1 , montrer que la nouvelle pulsation doit satisfaire la relation

$$\omega_1^2 = \omega^2 + \frac{\omega_1 e B}{m}.$$

III.2.e) Donner un ordre de grandeur des valeurs de ω dans le domaine visible et du rapport eB/m pour un champ fort ($B \approx 1$ T). Commenter ces résultats et en déduire une expression approchée du décalage en fréquence $\Delta\nu_1 = (\omega_1 - \omega)/2\pi$.

III.2.f) Reprendre le raisonnement pour la composante circulaire rétrograde de pulsation modifiée ω_2 et donner l'expression approchée de $\Delta\nu_2 = (\omega_2 - \omega)/2\pi$; comparer à cet ordre $\Delta\nu_2$ à $\Delta\nu_1$.

Conséquence sur l'émission des atomes

En un point M à grande distance, dans une direction d'observation Δ , le champ électrique de l'onde électromagnétique émise par un atome en O est proportionnel à la projection du vecteur \vec{OM} sur le plan perpendiculaire à Δ .

III.2.g) En présence d'un champ magnétique \vec{B} uniforme et constant, caractériser pour une raie de fréquence initiale ν donnée, la constitution de la lumière émise ; en particulier, justifier :

- qu'une observation dans la direction du champ (Δ parallèle à \vec{B}) fait apparaître une lumière constituée par deux radiations de fréquences $\nu + \Delta\nu$ et $\nu - \Delta\nu$; quelle est leur polarisation ?
- qu'une observation dans une direction perpendiculaire au champ (plan perpendiculaire à \vec{B}) fait apparaître une lumière constituée par trois radiations de fréquences ν et $\nu \pm \Delta\nu$; quels sont leurs états de polarisation ?

Ces modifications de la lumière émise constituent l'effet Zeeman.

III.2.h) En plongeant une lampe à vapeur de calcium dans un champ magnétique uniforme et constant, la radiation violette de longueur d'onde $\lambda = 422,7$ nm se décompose par effet Zeeman en trois radiations polarisées rectilignement de longueurs d'onde voisines λ , $\lambda + \Delta\lambda$ et $\lambda - \Delta\lambda$.

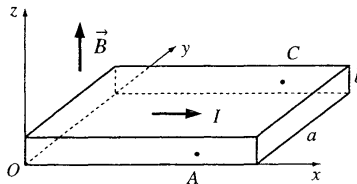
Calculer numériquement $\Delta\lambda$ pour $B = 0,5$ T.

Quelle résolution minimale doit posséder un appareil capable de réaliser l'étude expérimentale de cet effet ?

Partie IV. Action sur les conducteurs

IV.1. Effet Hall dans un ruban conducteur

Une plaquette conductrice de grande longueur suivant Ox , de largeur a et d'épaisseur b , est parcourue par un courant d'intensité I réparti uniformément sur toute la section droite.



En présence d'un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B \vec{u}_z$ perpendiculaire au ruban, les lignes de courant restent, en régime permanent, des droites parallèles à Ox . AC est un segment parallèle à Oy .

IV.1.a) En raisonnant qualitativement sur un porteur mobile de charge q (positive ou négative), montrer qu'une différence de potentiel $V_h = V_A - V_C$ prend naissance entre les points A et C des deux côtés de la plaquette ; quel est son signe ? dépend-il de celui de q ?

IV.1.b) Donner le champ de Hall \vec{E}_h puis calculer algébriquement la tension de Hall V_h qui apparaît aux extrémités du segment AC en fonction de I , B , b et de $R_h = 1/nq$, constante de Hall où n est le nombre de porteurs par unité de volume.

IV.1.c) Le matériau est un conducteur métallique, le cuivre, de masse volumique ρ et de masse molaire M dont on admet que chaque atome met en jeu un électron libre.

- Donner l'expression puis la valeur numérique de n .
- En déduire la valeur de la constante de Hall R_h .

- Calculer la tension de Hall V_h (à exprimer dans une unité adaptée) pour un champ magnétique $B = 1$ T, une intensité $I = 1$ A et une épaisseur $b = 0,1$ mm. Commenter ces valeurs numériques.

IV.1.d) Citer une application de l'effet Hall que l'on rencontre dans les classes de lycée. Quel type de matériau utilise-t-on dans cette application ? Justifier la réponse en l'appuyant sur une application numérique.

IV.2. Anisotropie et loi d'Ohm

Un matériau conducteur comporte n porteurs de charge par unité de volume, de charge q de signe quelconque, mais tous de même signe, responsables de la conduction électrique sous l'action d'un champ électrique permanent \vec{E} . L'action du matériau sur les porteurs de charge est modélisée par une force de type $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$ où \vec{v} est leur vitesse de dérive, m leur masse et τ un temps caractéristique dit de « collision » entre les porteurs, non réellement libres, et le réseau.

Le matériau est de plus soumis à un champ magnétique extérieur \vec{B} uniforme et permanent (le champ magnétique créé par les porteurs en mouvement est négligeable).

L'étude est faite en supposant le régime permanent atteint.

IV.2.a) Par application du principe fondamental de la dynamique, établir la relation

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} + R_h \vec{B} \wedge \vec{v} \quad (1)$$

où \vec{j} est le vecteur densité de courant ; exprimer la conductivité électrique σ et la constante de Hall R_h en fonction de n , q , m et τ . Ces grandeurs sont-elles fonction du signe de q ?

IV.2.b) L'axe Oz est choisi pour être celui du champ magnétique, soit $\vec{B} = B \vec{u}_z$.

Montrer par des projections en coordonnées cartésiennes et en introduisant l'expression algébrique de la pulsation $\omega_c = \frac{qB}{m}$, que la loi d'Ohm locale habituelle se généralise en

$$\vec{j} = [\sigma] \vec{E} \quad (2)$$

où $[\sigma]$ est une matrice 3×3 appelée tenseur conductivité dans laquelle n'interviennent que σ et $\omega_c \tau$.

IV.2.c) Dans cette loi d'Ohm (2) la relation entre les vecteurs \vec{j} et \vec{E} est-elle linéaire ? les vecteurs \vec{j} et \vec{E} sont-ils colinéaires ?

Que redonne la relation (2) en l'absence de champ magnétique ?

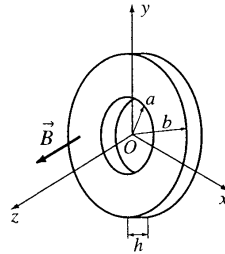
Préciser ce que signifie le terme « anisotropie » ? par quelle grandeur est-il caractérisé ?

IV.3. Magnétorésistance

Un disque de Corbino est un conducteur ayant la forme d'une couronne comprise entre deux cylindres de même axe, de rayons a et b et d'épaisseur h .

On maintient entre les deux cylindres une différence de potentiel constante $V = V_a - V_b > 0$ imposant au champ électrique \vec{E} une direction purement radiale.

Le champ magnétique \vec{B} , uniforme et permanent, reste colinéaire à Oz .



IV.3.a) Montrer à l'aide d'une construction graphique représentant la relation vectorielle (1) appliquée à cette situation que les lignes de courant, planes, font un angle θ_h avec les lignes du champ \vec{E} . Exprimer $\tan\theta_h$ d'abord en fonction de σ , R_h et B , puis en fonction de la grandeur $\omega_c\tau$.

IV.3.b) Déterminer en coordonnées polaires l'équation des lignes de courant passant par un point de coordonnées $r = r_0$, $\theta = \theta_0$ et $z = \text{constante}$. Quelle est leur forme ?

IV.3.c) Exprimer la composante radiale j_r du vecteur densité de courant \vec{j} en fonction de j_0 , densité de courant obtenue sans champ magnétique et de σ , R_h et B .
En déduire l'expression de la résistance R de cette couronne en fonction de R_0 , sa résistance sans champ magnétique (et dont l'expression n'est pas utile à ce stade) et de σ , R_h et B .

Donner la variation relative de résistance $\delta = \frac{(R - R_0)}{R_0}$.

Comment peut-on expliquer qualitativement cet effet de magnétorésistance ?

IV.3.d) L'application numérique pour un champ intense $B = 1$ T concerne le cas :

– d'un métal comme le cuivre où $R_h \approx -0,7 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$ et $\sigma \approx 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

– d'un semi-conducteur comme l'arséniure d'indium où $R_h \approx +0,7 \text{ m}^3 \cdot \text{C}^{-1}$ et $\sigma \approx 1 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

Donner dans chaque cas la valeur numérique de δ et commenter.

IV.3.e) Déterminer explicitement l'expression de R_0 en fonction de a , b , σ et h .

Données numériques

perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
nombre d'Avogadro : $\mathcal{N} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

pour l'électron

- masse : $m = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$
- charge : $q = -e$ avec $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

pour le cuivre

- masse molaire : $M = 63,5 \text{ g.mol}^{-1}$
- masse volumique : $\rho = 8,96 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

1474

23023

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques****option : chimie**

problème de chimie

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.

Premier Problème

Etude de la structure électronique de composés mono et bi-métalliques et de composés périodiques quasi 1D

Ce problème est consacré à l'étude de la structure électronique de composés métalliques moléculaires ou périodiques. Nous nous intéresserons tout particulièrement aux informations apportées par l'analyse de la structure électronique dans le but d'établir un lien entre la structure d'un composé et ses propriétés physiques.

I DÉCOMPTÉ ÉLECTRONIQUE ET DEGRÉ D'OXYDATION DANS LES COMPLEXES MÉTALLIQUES

I.1 Calcul de degré d'oxydation

- I.1.1. Proposer une méthode permettant de déterminer le degré d'oxydation d'un métal dans un complexe métallique ou bimétallique. Appliquer cette démarche aux composés suivants en déterminant le degré d'oxydation du métal de transition : $[\text{V}(\text{CO})_6]^-$, $[\text{Cu}(\text{H}_2\text{O})_6]^{2+}$, $[\text{Re}_2\text{Cl}_8(\text{H}_2\text{O})_2]^{2-}$ et VOCl_3 .
- I.1.2. Quel intérêt présente la détermination d'un tel degré d'oxydation ?
- I.1.3. Décompter le nombre d'électrons entourant le métal de transition dans les composés : $[\text{V}(\text{CO})_6]^-$, $[\text{Cu}(\text{H}_2\text{O})_6]^{2+}$, VOCl_3 et $[\text{Re}_2\text{Cl}_8(\text{H}_2\text{O})_2]^{2-}$.

I.2 Le ligand borohydrure

- I.2.1. La figure 1 représente le diagramme énergétique des O.M. du méthane CH_4 . Pour construire ce diagramme, seules les orbitales atomiques de valence des atomes C et H ont été considérées. Déterminer la configuration électronique fondamentale du méthane.
- I.2.2. En quoi le diagramme d'O.M. de BH_4^- diffère-t-il de celui du méthane ? Représenter l'allure des orbitales moléculaires occupées de BH_4^- . Les énergies des orbitales atomiques 2s et 2p du bore sont estimées à -11.6 eV et -5.5 eV, alors que celles du carbone sont estimées à -21.4 eV et -11.4 eV respectivement.
- I.2.3. Peut-on établir un lien entre cette description en terme d'O.M. et la structure de Lewis de BH_4^- ? Qu'en est-il de la localisation de la charge dans BH_4^- ?
- I.2.4. BH_4^- est un ligand se liant à des métaux. Quelle(s) est (sont) l' (les) O.M. principalement responsable(s) de cette propriété ?
- I.2.5. BH_4^- est-il un meilleur ou moins bon ligand que le méthane ? Justifier votre réponse.
- I.2.6. BH_4^- se lie au métal par l'intermédiaire de 1, 2 ou 3 atomes d'hydrogène. Représenter la géométrie d'interaction de la liaison métal- BH_4^- dans chacun de ces trois cas. A quels groupes de symétrie ces trois systèmes Métal- BH_4^- appartiennent-ils ?
- I.2.7. Déterminer la (les) orbitale(s) moléculaire(s) impliquée(s) dans cette interaction dans chacune de ces trois géométries. Combien d'électrons apporte BH_4^- lorsqu'il se comporte comme un ligand -monodentate, -bidentate, ou -tridentate ?

- I.2.8. En supposant que le métal Mo soit entouré de 18 électrons dans le composé $[(\text{CO})_4\text{Mo}(\text{BH}_4)]^-$, proposer une géométrie pour ce complexe.

I.3 Retour sur les décomptes électroniques

- I.3.1. A la lumière de cette étude du ligand BH_4^- et des décomptes électroniques effectués à la question I.1.3, expliquer en quoi ces décomptes effectués habituellement sont sujets à discussion ?
- I.3.2. Quelle étude faudrait-il effectuer pour dénombrer plus précisément le nombre d'électrons impliqués dans l'interaction métal-ligand ?
- I.3.3. Pour quel type de ligands, ces décomptes rapides permettent-ils de conclure quant au nombre d'électrons impliqués dans l'interaction métal-ligand ?
- I.3.4. Qu'est ce que la règle des 18 électrons ? Quel est son domaine d'application et son intérêt ? Illustrer votre réponse à l'aide de systèmes respectant cette règle ainsi qu'à l'aide de systèmes ne la respectant pas par défaut (moins que 18 électrons) ou par excès (plus que 18 électrons).

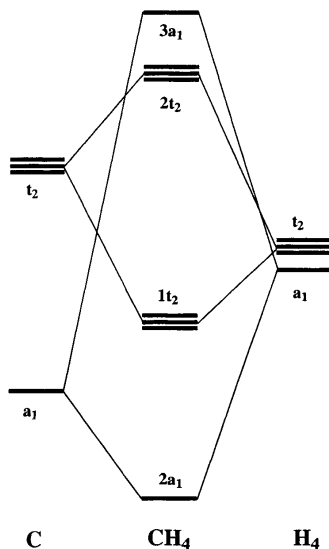


FIG. 1 – Diagramme énergétique des O.M. du méthane construites à partir des O.A. de valence de C et H. L'échelle n'est pas respectée mais les positions relatives des niveaux le sont. On supposera que les énergies des orbitales du fragment H_4 sont très proches de l'énergie de l'orbitale $1s$ de l'atome d'hydrogène.

II ETUDE DE LA STRUCTURE ÉLECTRONIQUE DE COMPOSÉS BIMÉTALLIQUES

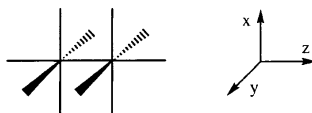
Nous allons rendre compte dans les questions qui suivent des liaisons métal-métal dans les composés bi-métalliques suivants $(\text{Re}_2\text{Cl}_8(\text{H}_2\text{O})_2)^{2-}$, $\text{Re}_2(\text{CO})_{10}$ et $(\text{Cr}_2\text{H}(\text{CO})_{10})^-$.

II.1 Etude des orbitales moléculaires du fragment ML_5 (M métal du groupe d et L ligand)

- II.1.1. Donner une représentation des orbitales d d'un métal de transition. Préciser sur ces schémas les surfaces nodales de ces orbitales.
- II.1.2. Donner deux exemples de ligands purement σ -donneur en précisant la (les) orbitale(s) impliquée(s) dans l'interaction métal-ligand.
- II.1.3. Même question pour un ligand σ et π donneur.
- II.1.4. Même question pour un ligand σ donneur et π accepteur.
- II.1.5. Dans quelle catégorie doit-on placer le ligand BH_4^- étudié précédemment ?
- II.1.6. Considérons un complexe octaédrique ML_6 (M : métal de transition du groupe d et L un ligand). Placer, sur un axe énergétique, les énergies associées aux 5 orbitales moléculaires à fort caractère métallique d d'un complexe octaédrique dans les trois cas suivants :
 - L est un ligand σ -donneur pur.
 - L est un ligand σ et π donneur.
 - L est un ligand σ donneur et π accepteur.
- II.1.7. Préciser les différences entre ces 3 diagrammes en terme d'énergie des orbitales et de nature des interactions orbitales métal-ligand.
- II.1.8. Nous allons maintenant construire à partir des questions précédentes les orbitales moléculaires à fort caractère métallique d d'un complexe ML_5 obtenu en arrachant un ligand L se trouvant sur l'axe z d'un complexe octaédrique ML_6 .
- II.1.8.a Expliquer qualitativement comment sont perturbées les OM e_g à fort caractère métallique du champ ML_6 lorsque l'on passe à ML_5 .
- II.1.8.b Expliquer pourquoi, dans le cas d'un ligand L σ et π donneur, les orbitales d_{zz} et d_{yz} du bloc t_{2g} du complexe ML_6 sont stabilisées lorsque l'on passe à ML_5 .
- II.1.8.c Comment évoluent les orbitales du bloc t_{2g} de ML_6 lorsque l'on passe à ML_5 pour des ligands L σ donneurs et π accepteurs ?
- II.1.9. Préciser les différences entre ces 3 diagrammes en terme d'énergie des orbitales et de nature des interactions orbitales métal-ligand. Préciser également les différences avec le diagramme obtenu pour le complexe octaédrique.

II.2 Complexe bimétallique M_2L_{10}

Nous allons étudier la liaison métal-métal des composés résultant de l'interaction de deux fragments ML_5 . L'axe z contient les deux métaux (c.f. représentation ci-dessous). Nous allons supposer que la liaison métal-métal résulte de l'interaction des orbitales à fort caractère métallique d pour ces deux fragments ML_5 .



II.2.1. Bâtir le diagramme d'interaction de ces deux fragments ML_5 en précisant les orbitales pouvant interagir entre elles. Représenter l'allure des O.M. décrivant la liaison métal-métal. En quoi ce diagramme pourrait-il varier selon la nature du ligand ?

II.2.2. Etude du composé $(Re_2Cl_8(H_2O)_2)^{2-}$

Ce composé $(Re_2Cl_8(H_2O)_2)^{2-}$ a la particularité de présenter une liaison Re-Re exceptionnellement courte de 222 pm que l'on peut comparer au rayon métallique de Re égal à 135 pm. Nous allons supposer que ce composé réel se comporte comme le composé modèle $(Re_2Cl_{10})^{4-}$.

II.2.2.a En quoi cette modélisation est-elle satisfaisante ?

II.2.2.b Sachant que le spin total de $(Re_2Cl_8(H_2O)_2)^{2-}$ est nul, préciser les orbitales moléculaires occupées de ce système et calculer l'indice de liaison Re-Re.

II.2.2.c En quoi est-il exceptionnel ?

II.2.3. Etude de $Re_2(CO)_{10}$

II.2.3.a En quoi le diagramme d'O.M. et son taux d'occupation sera-t-il modifié lorsque l'on passe de $(Re_2Cl_8(H_2O)_2)^{2-}$ à $Re_2(CO)_{10}$?

II.2.3.b De ce fait, quelle est la nature de la liaison Re-Re dans $Re_2(CO)_{10}$?

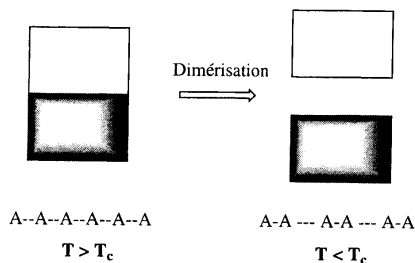
II.2.3.c Est-elle plus ou moins longue que dans $(Re_2Cl_8(H_2O)_2)^{2-}$?

III ETUDE DE SYSTÈMES PÉRIODIQUES À 1 DIMENSION

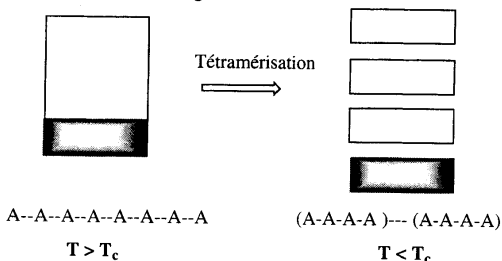
Nous allons nous intéresser maintenant à la compréhension des propriétés de conduction de deux systèmes périodiques $K_2Pt(CN)_4Br_{0.3}$ et $NbSe_3$ pouvant, en première approximation, être supposés constitués de chaînes (respectivement $Pt(CN)_4$ et $NbSe_3$) indépendantes les unes des autres entre lesquelles se trouvent les éventuels ions K^+ et Br^- .

III.1 Préliminaires

Nous admettons que, tout système périodique à 1 dimension présentant, dans le cadre d'une méthode monoélectronique, une bande d'énergie partiellement occupée, est susceptible de subir une distorsion de Peierls. A basse température, la distorsion conduit à une perte du comportement métallique. A partir d'une température critique, notée T_c , cette distorsion n'est plus observable et on retrouve un comportement métallique. Ainsi, un système à bande *demi-occupée* est susceptible de subir une *dimérisation* et par là-même la modification de son diagramme de bande selon :



Un système dont la dernière bande est occupée au *quart* est susceptible de subir une *tétramérisation* qui résulte en la modification de son diagramme de bande selon :



Plus généralement, un système dont la dernière bande est occupée dans la proportion p/n (p et n entiers, $p < n$) est susceptible de subir une n -mérisation, c'est à dire le regroupement de n motifs et l'apparition de n bandes d'énergie.

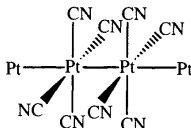
- III.1.1. Comment expliquer qu'un système périodique à bande partiellement occupée à $T=0$ K puisse avoir un comportement métallique ?
- III.1.2. Comment évolue la résistivité d'un tel composé métallique en fonction de la température ? Justifier ce comportement.
- III.1.3. Considérons maintenant un système dont le dernier niveau occupé à $T=0$ K se situe en haut d'une bande. Comment évolue la résistivité d'un tel composé métallique en fonction de la température ? Justifier ce comportement. Comment qualifie-t-on les propriétés d'un tel composé ?
- III.1.4. Dans un souci de simplification, il est souvent supposé que le cristal est parfait (sans défaut). En réalité, tout cristal réel comporte des défauts. Ces derniers favorisent-ils ou s'opposent-ils à la conduction électrique ? Argumenter votre réponse.
- III.1.5. Comment comprendre que les distorsions de Peierls n'apparaissent que dans un domaine de température donné $0 < T < T_c$, c'est à dire qu'elles disparaissent pour des températures supérieures à T_c ?
- III.1.6. Nous noterons T_c la température du changement de structure. Représenter schématiquement l'allure de la courbe décrivant les variations de la résistivité en fonction de la température pour un tel composé. On dit qu'une telle courbe présente une anomalie. Pourquoi utiliser ce qualificatif ?
- III.1.7. Considérons maintenant les systèmes modèles unidimensionnels H_n et $(H^{+1/2})_n$, n étant grand. Ces composés supposés réguliers seraient-ils isolants ou métalliques ? Justifier votre

réponse.

- III.1.8. Les systèmes H_n et $(H^{+1/2})_n$ sont-ils susceptibles de subir une distorsion de Peierls ? De quelle nature est cette distorsion ?

III.2 Application à l'étude de la chaîne KCP

Le KCP de formule $K_2Pt(CN)_4Br_{0.3}$ est constitué de chaînes de $[Pt(CN)_4]^{2-}$ entre lesquelles se trouvent des cations K^+ et Br^- . Nous supposons que la structure des chaînes est la suivante :



- III.2.1. Représenter, sur un diagramme énergétique, les orbitales à fort caractère métallique d du fragment moléculaire $Pt(CN)_4^{2-}$.
- III.2.2. Déterminer le degré d'oxydation du platine dans le KCP ainsi que dans le composé non dopé $K_2Pt(CN)_4$.
- III.2.3. Quelle orbitale à fort caractère métallique d doit jouer un rôle important dans la formation de la liaison Pt-Pt dans cette chaîne ?
- III.2.4. Considérons maintenant la chaîne $Pt(CN)_4^{2-}$ dans laquelle le platine se trouve au même degré d'oxydation que dans le KCP (voir question III.2.2). Quelles interactions orbitales existe-t-il entre les différentes orbitales à fort caractère métallique d des différents fragments ? Proposer un diagramme de bandes pour cette chaîne.
- III.2.5. Montrer que les propriétés de conduction de ces composés dépendent finalement du taux d'occupation d'une seule bande n'impliquant qu'une orbitale d du métal. Quelle est cette orbitale ? En quoi l'étude de cette chaîne réelle peut-elle tirer profit de celle effectuée précédemment pour la chaîne modèle H_n ?
- III.2.6. Déterminer à $T=0$ K le dernier niveau occupé du KCP et du composé non dopé $K_2Pt(CN)_4$.
- III.2.7. Ces composés sont-ils métalliques ?
- III.2.8. Une analyse cristallographique révèle une différence de longueur de liaison Pt-Pt assez importante lorsque l'on passe du composé non dopé $K_2Pt(CN)_4$ au composé dopé $K_2Pt(CN)_4Br_{0.3}$. On obtient alors des distances Pt-Pt égales à 347 pm et 287 pm. A quel composé est associée la plus courte distance ? Justifier votre réponse.
- III.2.9. Dans le cas où ces composés seraient métalliques, sont-ils susceptibles de subir une distorsion pouvant modifier leurs propriétés métalliques ?
- III.2.10. En réalité, la conformation adoptée par les chaînes de $Pt(CN)_4^{2-}$ dans le KCP est décalée et non pas éclipsée comme nous l'avons supposé.
Quelle est la conséquence de cette information sur les propriétés de conduction de ce composé ?

III.3 Etude du composé quasi 1D $NbSe_3$

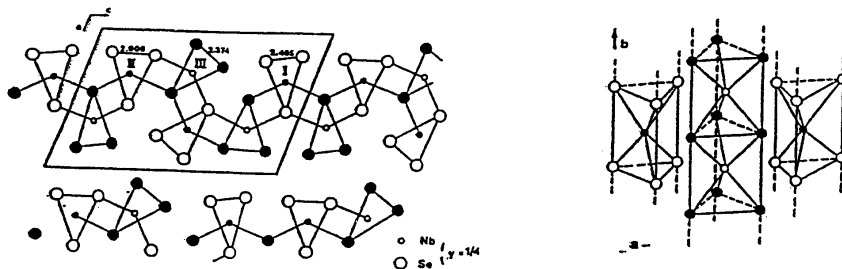
Un composé périodique quasi 1D est un composé réel tridimensionnel dont la structure cristallographique fait apparaître des chaînes parallèles paraissant en interaction faible. De ce

fait, on s'attend à ce que les propriétés de ces composés soient fortement anisotropes et, qu'en première approximation, on puisse analyser les propriétés de conduction de tels composés en les considérant comme étant constitués de chaînes indépendantes.

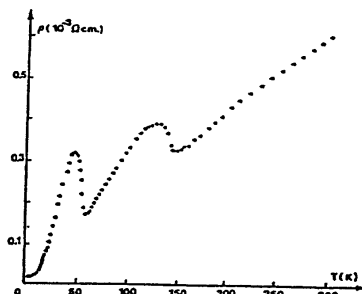
Le composé NbSe_3 a fait l'objet d'études approfondies tant expérimentales que théoriques dans le but de comprendre ses propriétés de conduction. Ce composé dont la structure est reproduite ci-dessous révèle l'existence de trois types de chaînes différentes (types nommés I, II et III) se différenciant principalement par les distances Se-Se des triangles Se_3 . Ainsi, la structure cristallographique fait apparaître des chaînes NbSe_3 dans lesquelles les triangles de Se sont :

- *équilatéraux* (Chaîne de type II), chaque côté du triangle a une longueur correspondant plutôt à la distance longue (de l'ordre de 300 pm) séparant deux ions Se^{2-} .
- *isocèles* (Chaînes de type I et III). La longueur des deux côtés équivalents est longue (de l'ordre de 300 pm) tandis que celle du dernier côté est plus courte (de l'ordre de 240 pm) et correspond plutôt à une distance de liaison possédant un caractère covalent Se-Se. A titre indicatif, on donne pour l'ion Se_2^{2-} une distance Se-Se de 238 pm.

Chaque maille contient 6 atomes de Nb, deux appartenant à des chaînes I, deux à des chaînes II et 2 à des chaînes III. Les chaînes de types I et III ne sont pas cristallographiquement équivalentes mais se ressemblent beaucoup.



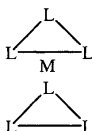
III.3.1. Expérimentalement, la courbe représentant la résistivité de NbSe_3 en fonction de la température est la suivante :



D'après la courbe ci-dessus, dans quel domaine de température NbSe_3 a-t-il un compor-

tement métallique ? L'étude qui suit a pour objectif de comprendre ces changements de comportement de conduction.

- III.3.2. Nous allons considérer dans un premier temps que les propriétés de conduction de ce composé sont dues aux chaînes NbSe_3 parallèles au vecteur \vec{b} en les supposant indépendantes les unes des autres. Quelle interaction pouvant être à l'origine de conductivité perpendiculairement à \vec{b} néglige-t-on dans ce cas ? Quelle donnée cristallographique permettrait de valider une telle hypothèse ?
- III.3.3. Dans le cas où les chaînes seraient totalement indépendantes, déterminer le degré d'oxydation du Nb dans les chaînes de type II. Même questions pour les chaînes de type I et III.
- III.3.4. Quelle est la chaîne présentant un déficit électronique ?
- III.3.5. En réalité, des transferts électroniques inter-chaînes ont lieu pour combler le déficit de cette chaîne. On admettra que le transfert vers cette chaîne a lieu. De combien d'électrons sont alors entourés en moyenne les atomes de Nb des différentes chaînes ?
- III.3.6. Considérons le complexe métallique ML_6 régulier suivant :



En analysant les interactions possibles entre orbitales d du métal et orbitales des ligands dans cette géométrie, représenter sur un diagramme énergétique les énergies des orbitales d dans cet environnement.

- III.3.7. Intéressons nous maintenant à ces orbitales d dans la chaîne NbSe_3 . Parmi les orbitales mentionnées à la question précédente, quelle est celle présentant de faibles interactions avec les ligands mais pouvant interagir avec les orbitales des atomes de Nb se trouvant au dessous ou au dessus ?
- III.3.8. A l'aide des trois questions précédentes, indiquer l'unique bande d'énergie partiellement occupée impliquant des orbitales d ? Ce composé est-il métallique ? Dans quelle proportion est occupée cette bande d'énergie ?
- III.3.9. Interprétation de la courbe représentant la résistivité de NbSe_3 en fonction de la température.
- III.3.9.a Nous avons vu que les chaînes H_n et $(\text{H}^{+1/2})_n$ étaient susceptibles de se distordre. Un phénomène semblable peut-il avoir lieu dans le cas de NbSe_3 ? Quelle serait la nature de cette distorsion ?
- III.3.9.b Pouvez vous proposer une interprétation de l'anomalie (c'est-à-dire un changement de pente) observée environ à la température de 150 K ?
- III.3.9.c Par quelle donnée expérimentale pourrait on confirmer une telle interprétation ?
- III.3.9.d Comment pouvez vous expliquer la seconde anomalie observée environ à $T=50$ K ?
- III.3.9.e A basse température, le composé se comporte-t-il comme un métal ou un isolant ? Comment peut-on comprendre un tel comportement ?

Second Problème

Physico-Chimie des Complexes Carbéniques de Métaux de Transition

L'objet de ce problème est d'étudier différentes propriétés qui résultent de l'interaction entre une molécule organique et un fragment ML_n comportant un métal de transition M. Dans une première partie, on s'intéresse à la structure électronique de la molécule organique libre ainsi qu'à l'influence de la coordination avec le fragment métallique. Dans la seconde partie, on étudie les propriétés acido-basiques de certains complexes. Dans la troisième partie, la réactivité de la molécule organique coordonnée est abordée. Ces trois parties sont largement indépendantes entre elles.

I L'INTERACTION MÉTAL-CARBÈNE : ASPECTS THÉORIQUES

Dans le cadre de l'approximation orbitale, la structure électronique d'une molécule est décrite à l'aide d'un ensemble de fonctions d'onde monoélectroniques : les orbitales moléculaires (O.M.). Compte tenu du spin de l'électron, ces O.M. peuvent être occupées, au plus, par deux électrons à spins antiparallèles. L'expression de ces fonctions d'onde $|\psi_i\rangle$ est obtenue par résolution de l'équation de Schrödinger,

$$\mathbf{h}_e |\psi_i\rangle = \varepsilon_i |\psi_i\rangle$$

où \mathbf{h}_e est un hamiltonien monoélectronique effectif et où $|\psi_i\rangle$ est développée sur un ensemble fini (dimension P) de fonctions de bases : les orbitales atomiques $|\chi_\mu\rangle$ (O.A.).

$$|\psi_i\rangle = \sum_{\mu=1}^P c_{i,\mu} |\chi_\mu\rangle$$

Dans le cadre de la méthode de Hückel étendue (méthode EHT), on ne considère que les électrons de la couche de valence et les O.A. associées, et l'hamiltonien effectif \mathbf{h}_e est paramétrisé selon :

- $h_{\mu\mu} = \langle \chi_\mu | \mathbf{h}_e | \chi_\mu \rangle = -PI_\mu$
où PI_μ est le potentiel d'ionisation d'un électron occupant l'orbitale atomique $|\chi_\mu\rangle$.
- $h_{\mu\nu} = \langle \chi_\mu | \mathbf{h}_e | \chi_\nu \rangle = \frac{K}{2} S_{\mu\nu} (h_{\mu\mu} + h_{\nu\nu})$
où $S_{\mu\nu} = \langle \chi_\mu | \chi_\nu \rangle$ est le recouvrement entre les O.A. $|\chi_\mu\rangle$ et $|\chi_\nu\rangle$ et K est une constante ($K = 1,75$).

Nous allons décrire, dans un premier temps, la structure électronique de la molécule de méthylène CH_2 à l'aide de la méthode EHT. Nous examinerons ensuite l'effet d'un substituant π -donneur et enfin, nous aborderons l'interaction de ce type de molécule, les carbènes, avec un fragment métallique.

I.1 A propos de la méthode EHT

- I.1.1. Discuter brièvement la signification physique des paramètres employés $h_{\mu\mu}$ et $h_{\mu\nu}$.
- I.1.2. Quelles sont les hypothèses supplémentaires de l'approche Hückel simple ?

- I.1.3. Quelle est la valeur (en eV) du paramètre $h_{1s,1s}$ pour l'électron de l'atome d'hydrogène ?
- I.1.4. Décrire, pour la molécule de méthylène CH_2 , les O.A. de base sur lesquelles seront construites les O.M. Combien d'électrons doit-on considérer ?
- I.1.5. Avec la méthode EHT, la géométrie optimale pour la molécule de dihydrogène H_2 correspond à une distance internucléaire nulle. Et, en ce qui concerne NH_3 , on obtient une géométrie plane. Proposer une explication, et quelle en est la conséquence pratique ?

I.2 La molécule de carbène libre

On considère tout d'abord une molécule de méthylène CH_2 de symétrie C_{2v} orientée de telle façon que l'axe principal de rotation C_2 est le long de l'axe Oz et le plan de la molécule est le plan xOz. On donne $\text{C-H} = 1,08 \text{ \AA}$ et $\angle \text{H-C-H} = 130^\circ$.

Les O.M. de CH_2 seront obtenues par interaction entre les orbitales de deux fragments : C d'une part et H...H d'autre part.

- I.2.1. Nommer les orbitales du fragment C selon les représentations irréductibles du groupe C_{2v} . Pour le carbone on donne $\text{PI}_{2s} = 21.4 \text{ eV}$ et $\text{PI}_{2p} = 11.4 \text{ eV}$.
- I.2.2. Les résultats d'un calcul EHT pour le fragment H...H sont consignés dans le tableau ci-dessous.

	ϕ_1	ϕ_2
$\varepsilon \text{ (eV)}$	-14,6	-12,3
c_1	0,6711	0,7496
c_2	0,6711	-0,7496

Représenter le diagramme d'interaction orbitaire pour le fragment H...H en prenant soin de nommer ϕ_1 et ϕ_2 selon leurs propriétés de symétrie. On n'oubliera pas de placer les électrons et de positionner énergétiquement les différents niveaux (atomes séparés et fragment H...H). Calculer le recouvrement S entre les O.A. 1s de chacun des atomes d'hydrogène.

- I.2.3. On donne dans la table ci-dessous les résultats du calcul EHT pour CH_2 dans la base des orbitales de fragment. Ainsi, au lieu de développer les O.M. sur les O.A. de tous les atomes, on construit au préalable les O.M. pour chacun des fragments séparés (c.f. question précédente) et on développe les O.M. sur ces orbitales moléculaires de fragment.

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6
$\varepsilon \text{ (eV)}$	-24,0	-15,9	-11,9	-11,4	8,9	16,8
c (H...H)	0,3760	0,5781	0,1727	0,000	-1,2211	-1,3915
c (2s)	0,7105	0,000	-0,2380	0,000	0,000	1,1747
c (2p)	0,0172	0,5151	0,9368	1,000	1,2490	0,5368

- I.2.3.a Expliquer en quoi ces données, présentées de cette manière, sont suffisantes pour établir le diagramme orbitaire de CH_2 .
- I.2.3.b Construire ce diagramme orbitaire en représentant schématiquement les O.M. de CH_2 . Prendre soin notamment de nommer les O.M. en fonction de leur symétrie et de respecter l'échelle des énergies (on ne représentera pas ψ_6).
- I.2.3.c Montrer qu'un raisonnement qualitatif simple permet de retrouver la forme de la H.O. (orbitale moléculaire la plus haute occupée).
- I.2.3.d Quelle est la configuration électronique fondamentale du méthylène? A quel état électronique correspond-elle?

- I.2.3.e En réalité, l'état fondamental de CH_2 est le triplet 3B_2 . A quelle configuration électronique est-il associé? Comment expliquez-vous la préférence pour cet état?
- I.2.4. Pour stabiliser l'état singulet par rapport à l'état triplet, on peut introduire des substituants π -donneurs. On peut envisager le cas de CF_2 à titre d'exemple.
- I.2.4.a Comment définiriez-vous un groupe π -donneur?
- I.2.4.b Montrer qu'un raisonnement orbitalaire simple permet d'expliquer comment l'état singulet est stabilisé par un groupe π -donneur.

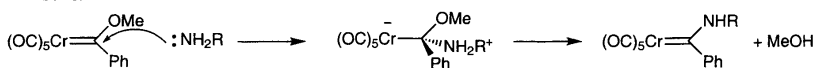
I.3 La molécule de carbène coordonnée

Dans les questions précédentes, nous avons vu que la molécule de carbène libre peut exister sous deux états de spin : singulet et triplet. En fonction de l'état de spin privilégié de la molécule, les propriétés du fragment métallique avec lequel elle va se coordonner seront différentes. Ainsi il existe deux grandes familles de complexes carbéniques : les carbènes dits de Fischer et les carbènes dits de Schrock.

Les carbènes de Fischer sont caractérisés par un métal riche en électrons à un bas degré d'oxydation, par la présence de ligands π -accepteurs, et par la présence d'un groupe π -donneur sur le carbène. Un exemple type de tels complexes est le complexe de formule $(\text{CO})_5\text{Cr}[\text{C}(\text{OCH}_3)(\text{Ph}_3)]$.

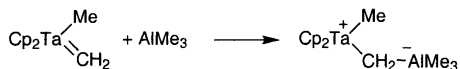
Les carbènes de Schrock sont caractérisés par un métal pauvre en électrons à un haut degré d'oxydation, par la présence de groupes σ ou π donneurs sur le métal, et par l'absence de groupe π -donneur sur le carbène. Un exemple type de tels complexes est le complexe de formule générale $\text{Cp}_2\text{Ta}(\text{CH}_3)(\text{CH}_2)$ où $\text{Cp} = \text{C}_5\text{H}_5$.

- I.3.1. Montrer en quoi, pour les carbènes de Fischer, les caractéristiques du fragment métallique sont tout à fait adaptées à une interaction métal-carbène avec un carbène à l'état singulet.
- I.3.2. Montrer en quoi, pour les carbènes de Schrock, les caractéristiques du fragment métallique sont tout à fait adaptées à une interaction métal-carbène avec un carbène à l'état triplet.
- I.3.3. La réaction ci-dessous est un exemple typique de réactivité associée aux carbènes de Fischer.



Expliquer pourquoi l'atome de carbone du carbène lié au métal est attaqué par les nucléophiles dans le cas des carbènes de Fischer.

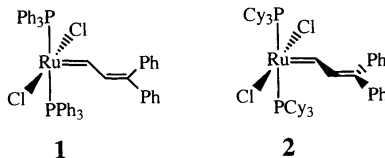
- I.3.4. La réaction ci-dessous est un exemple typique de réactivité associée aux carbènes de Schrock.



Expliquer pourquoi l'atome de carbone du carbène lié au métal est attaqué par les électrophiles dans le cas des carbènes de Schrock.

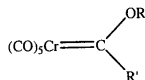
- I.3.5. On considère dans cette question un fragment plan carré ML_4 de symétrie D_{4h} . Les ligands L seront disposés le long des axes x et y. Les ligands L sont des σ -donneurs purs. A titre d'exemple on pourra envisager le complexe de formule RuH_4^{2-} .
- I.3.5.a Le complexe RuH_4^{2-} vérifie-t-il la règle des 18 électrons? Quel est le degré d'oxydation du ruthénium?

- I.3.5.b Pour le ruthénium, on ne considèrera comme orbitales atomiques de valence que les O.A. 4d, 5s et 5p. Construire de manière qualitative le diagramme d'orbitales moléculaires pour RuH_4^{2-} en symétrie D_{4h} . Prendre soin notamment de préciser les étiquettes de symétrie des différentes O.M., ainsi que de représenter de manière schématique les O.M. obtenues.
- I.3.5.c Expliquer pourquoi l'O.M. $2a_{1g}$ peut être considérée comme quasi non-liante.
- I.3.6. Dans cette question on s'intéresse au fragment métallique de formule générale *trans*- $\text{RuCl}_2\text{H}_2^{2-}$ modèle pour le fragment $\text{RuCl}_2(\text{PR}_3)_2$ où R est un groupe alkyle ou aryle. La géométrie de ce fragment sera carrée, avec les atomes de chlore le long de l'axe x et les atomes d'hydrogène le long de l'axe y. La distance Ru-Cl est de 2,38 Å et la distance Ru-H est de 1,60 Å. Les orbitales de valence considérées pour le ruthénium sont les O.A. 4d, 5s et 5p.
- I.3.6.a Caractériser le chlore en termes de propriétés donneur / accepteur.
- I.3.6.b Montrer que les orbitales d purement non-liantes du fragment ML_4 étudié à la question précédente sont perturbées par l'introduction des ligands chlorures. On supposera que les effets σ de H et Cl sont identiques.
- I.3.6.c En quoi l'introduction des ligands chlorures rend-elle plus accessible un état triplet pour le fragment $\text{RuCl}_2\text{H}_2^{2-}$? On considèrera toujours que l'orbitale assimilable à l'orbitale $2a_{1g}$ du complexe RuH_4^{2-} est à plus haute énergie que les trois orbitales essentiellement développées sur les O.A. 4d et ne présentant pas de recouvrement σ avec les ligands.
- I.3.7. On s'intéresse dans cette question à l'interaction entre le fragment métallique étudié précédemment et la molécule de carbène CH_2 . La molécule CH_2 sera placée le long de l'axe Oz (z positif) avec les atomes d'hydrogène dans le plan yOz. La liaison Ru-C est de 1,8 Å et le ligand CH_2 a la même géométrie que dans la partie I.2. En ce qui concerne le fragment $\text{RuCl}_2\text{H}_2^{2-}$, on ne considèrera que les orbitales moléculaires de fragment essentiellement développées sur les O.A. d du ruthénium discutées à la question précédente.
- I.3.7.a On supposera que le carbène et le fragment sont chacun dans un état triplet de spin. Proposer un diagramme d'interaction orbitaire décrivant la liaison métal-carbène. On se limitera aux orbitales frontières.
- I.3.7.b Le plan yOz est-il le plan de coordination de CH_2 le plus favorable?
- I.3.7.c Montrer qu'un basculement des deux atomes d'hydrogène liés au métal dans le plan yOz à l'opposé de la liaison Ru-C permet d'abaisser la barrière de rotation du ligand CH_2 autour de la liaison Ru-C.
- I.3.8. Les complexes carbéniques **1** et **2** (c.f. ci-dessous) ont été synthésés par Grubbs et collaborateurs et sont d'excellents catalyseurs de méthathèse des alcènes. Dans le cas pour lequel la phosphine est PPh_3 ($\text{Ph} = \text{C}_6\text{H}_5$) les substituants du carbène sont alignés avec l'axe P-Ru-P, alors que pour PCy_3 ($\text{Cy} = \text{C}_6\text{H}_{11}$) ils sont le long de l'axe Cl-Ru-Cl.
- A la lumière des questions précédentes, proposer une explication.



II ACIDITÉ DES CARBÈNES DE FISCHER

On s'intéresse dans cette partie à la détermination expérimentale de la constante d'acidité de complexes carbéniques dits de Fischer de formule générale :



Ces mesures sont effectuées dans l'acétonitrile comme solvant par spectrophotométrie d'absorption dans l'UV/visible. On prendra comme exemple de complexe expérimental le complexe de formule $(\text{CO})_5\text{Cr}[\text{C}(\text{OCH}_3)(\text{CH}_3)]$ noté **1-Cr**.

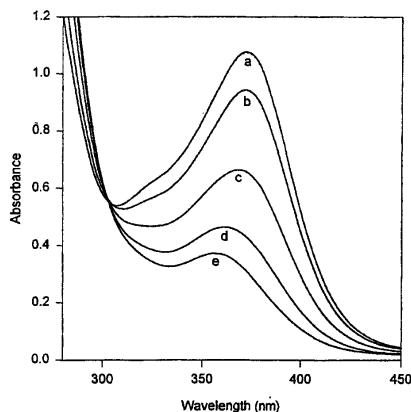


FIG. 2 - Spectres d'absorption pour **1-Cr** ($1,31 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$) en présence de quantités croissantes de TMG. (a) pas de TMG ajouté, (b) $[\text{TMG}]_0 = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$, (c) $[\text{TMG}]_0 = 7,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$, (d) $[\text{TMG}]_0 = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$, (e) $[\text{TMG}]_0 = 2,08 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.

II.1 Principe chimique de la mesure

II.1.1. Le complexe **1-Cr** est converti rapidement en **1-Cr-d₃** de formule $(\text{CO})_5\text{Cr}[\text{C}(\text{OCH}_3)(\text{CD}_3)]$ lorsqu'il est dissous dans une solution diluée de NaOCH_3 dans CH_3OD .

Expliquer pourquoi ce résultat met en évidence la caractère acide de **1-Cr** et donner la formule semi-développée de la base conjuguée notée **1-Cr⁻**.

II.1.2. La Figure 2 représente le spectre d'absorption UV/visible de **1-Cr** dans l'acétonitrile à une concentration de $1,31 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$. Les différents spectres correspondent à différentes concentrations initiales en 1,1,2,2-tétraméthylguanidine (notée TMG) de formule :



Pour simplifier, on notera CH le carbène, C⁻ sa base conjuguée, B l'amine et BH⁺ son acide conjugué. Le pK_a dans l'acétonitrile du couple BH⁺/B (B = TMG) vaut pK_a^{BH} = 23,3. BH⁺ et B n'absorbent pas dans le domaine de longueur d'onde étudié.

- II.1.2.a En quoi les spectres de la Figure 2 montrent-ils l'existence d'un équilibre chimique bien défini ? Quel est cet équilibre ? On notera K₁ la constante d'équilibre associée.
- II.1.2.b Pour une solution à 0,06 mol.L⁻¹ de 1-Cr avec 0,088 mol.L⁻¹ de TMG, le spectre RMN ¹H ne montre plus le signal du groupe méthyle à 2,38 ppm mais présente deux nouveaux singlets à 3,82 et 4,62 ppm chacun correspondant à un hydrogène.
Montrer que ce résultat est en accord avec la présence de l'équilibre mentionné ci-dessus.
- II.1.3. On suppose que, pour des conditions initiales [CH]₀ et [B]₀ données, l'équilibre est atteint rapidement et qu'il n'existe aucun processus secondaire susceptible de perturber cet équilibre. On note [CH], [B], [C⁻] et [BH⁺] les différentes concentrations à l'équilibre.
- II.1.3.a Montrer que la connaissance de $r = \frac{[\text{CH}]}{[\text{CH}]_0}$ permet de connaître toutes les concentrations à l'équilibre.
- II.1.3.b Montrer alors que l'on peut déterminer le pK_a, noté pK_a^{CH}, du couple CH/C⁻ dans l'acétonitrile.
- II.1.3.c Montrer que, lorsque ε_C et ε_{CH} sont connus pour λ_{max}, il suffit de mesurer l'absorbance A(λ_{max}) à l'équilibre pour obtenir r et donc pK_a^{CH}. On notera ℓ la largeur de la cuve du spectrophotomètre. ε_C et ε_{CH} sont respectivement les coefficients d'extinction molaire de la forme basique (C⁻) et de la forme acide (CH).
- II.1.4. Lorsque les valeurs de ε_{CH} et ε_C ne sont pas connues avec précision, il est nécessaire de procéder différemment pour accéder à r. En jouant sur les concentrations initiales [CH]₀ et [B]₀, on peut faire varier les diverses concentrations à l'équilibre.
On note A₀ l'absorbance à l'équilibre lorsque la base est absente ([B]₀ = 0). On note A_∞ l'absorbance à l'équilibre lorsque la base est en excès.
- II.1.4.a Quelle hypothèse peut-on faire sur la position de l'équilibre lorsque la base est en excès ?
- II.1.4.b Donner les expressions pour A₀ et A_∞ en fonction des coefficients d'extinction molaire adaptés et de [CH]₀.
- II.1.4.c Donner la relation donnant r en fonction de A, A₀ et A_∞.

II.2 Exploitation des résultats

Dans la table 1, on donne les résultats d'une série d'expériences pour le complexe 1-Cr. Les paramètres sont les concentrations initiales en complexe carbénique [CH]₀ et en base [B]₀. Le résultat des mesures spectrophotométriques est le rapport r entre la concentration à l'équilibre en complexe carbénique [CH] et la concentration initiale [CH]₀. Ce rapport r est calculé grâce à la formule démontrée précédemment, une fois les mesures préalables de A₀ et A_∞ effectuées. Le rapport r donné dans la table 1 est la moyenne de deux mesures effectuées à 354 nm et à 372 nm respectivement.

- II.2.1. Pourquoi fait-on la moyenne entre les valeurs de r déterminées à 354 nm et à 372 nm ?

$[\text{CH}]_0 \text{ mol.L}^{-1}$	$[\text{B}]_0 \text{ mol.L}^{-1}$	r
$2,08 \cdot 10^{-4}$	$3,92 \cdot 10^{-5}$	0,82
$1,31 \cdot 10^{-4}$	$2,60 \cdot 10^{-5}$	0,81
$2,06 \cdot 10^{-4}$	$7,84 \cdot 10^{-5}$	0,65
$1,31 \cdot 10^{-4}$	$5,20 \cdot 10^{-5}$	0,62
$1,31 \cdot 10^{-4}$	$7,80 \cdot 10^{-5}$	0,44
$7,92 \cdot 10^{-5}$	$5,20 \cdot 10^{-5}$	0,40
$2,06 \cdot 10^{-4}$	$1,57 \cdot 10^{-4}$	0,33
$1,31 \cdot 10^{-4}$	$1,04 \cdot 10^{-4}$	0,29
$2,10 \cdot 10^{-4}$	$1,96 \cdot 10^{-4}$	0,23
$7,92 \cdot 10^{-5}$	$7,80 \cdot 10^{-5}$	0,23
$5,08 \cdot 10^{-5}$	$5,00 \cdot 10^{-5}$	0,19
$2,06 \cdot 10^{-4}$	$2,35 \cdot 10^{-4}$	0,16

TAB. 1 - Données expérimentales pour l'ionisation de **1-Cr** en présence de TMG dans l'acétonitrile à 25°C.

- II.2.2. Pour chacune des expériences, évaluer la valeur du pK_a pour le couple **1-Cr** / **1-Cr⁻**.
- II.2.3. A l'aide des résultats précédents, proposer une valeur pour le pK_a de ce couple ainsi qu'une estimation de l'incertitude sur la mesure.
- II.2.4. Quelle est la valeur du pK_a si l'on prend en compte la correction statistique due à la présence de protons équivalents sur l'acide **1-Cr** ?

II.3 Généralisation à d'autres complexes

Dans la table 2 sont résumés les résultats du même type de mesures pour toute une série de complexes carbéniques de Fischer.

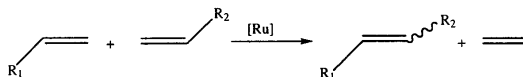
- II.3.1. On s'intéresse aux complexes **1-Cr**, **6-Cr**, **5-Cr** et **4-Cr**.
- II.3.1.a Pourquoi, *a priori*, les complexes **6-Cr** et **5-Cr** devraient-ils être plus acides que les complexes **1-Cr** et **4-Cr** respectivement ?
- II.3.1.b Quelle est l'explication généralement invoquée pour justifier la stabilité accrue des bases conjuguées de **6-Cr** et **5-Cr** ?
- II.3.1.c Quelle pourrait être l'influence du solvant ?
- II.3.1.d Expliquer les valeurs relatives des pK_a selon que le solvant est l'acétonitrile pur ou un mélange 50 % eau / 50 % acétonitrile.
- II.3.2. Expliquer l'origine de la plus faible acidité observée pour **9-Cr** et **12-Cr** ?
- II.3.3. L'effet de remplacer un groupe attracteur comme CO par un groupe donneur comme PR_3 est beaucoup moins marqué pour les carbènes de Fischer que pour les hydrures. Ainsi le pK_a dans l'acétonitrile de $\text{CpW}(\text{CO})_3\text{H}$ ($\text{Cp} = \text{C}_5\text{H}_5$) est de 16,1 alors que pour $\text{CpW}(\text{CO})_2(\text{PMe}_3)\text{H}$ on obtient 26,6.
- Proposer une explication pour l'influence *moins* marquée de la substitution de CO par PR_3 dans le cas des complexes carbéniques de Fischer.

Carbene Complex		K_1^a	pK_a^{CH}	$pK_a^{CH}(\text{corr})^b$	$pK_a^{CH}(\text{corr})^b$	$^{50}\Delta^d pK_a^d$
			(MeCN)	(MeCN)	(50% MeCN) ^c	
	(1-Cr)	11.8 ± 5.3	22.2 ± 0.2	22.7 ± 0.2	12.98	9.7
	(6-Cr)	2.62 ± 0.57	22.9 ± 0.1	23.2 ± 0.1	12.62	10.6
	(3-Cr)	1.13 ± 0.63	23.2 ± 0.3	23.7 ± 0.3	13.46	10.2
	(5-Cr)	0.369 ± 0.140	23.7 ± 0.2		13.4	10.5
	(4-Cr)	$(8.29 \pm 1.31) \times 10^{-2}$	24.4 ± 0.1	24.7 ± 0.1	14.77	9.9
	(9-Cr)	$(7.82 \pm 1.30) \times 10^{-3}$	25.4 ± 0.1	25.9 ± 0.1		
	(12-Cr)	$(6.44 \pm 1.21) \times 10^{-4}$	26.5 ± 0.1	27.0 ± 0.1		
	10-Cr	0.95 ± 0.45	27.6 ± 0.2	28.1 ± 0.2		
	(8-Cr)		≥ 32.5	≥ 33.0		

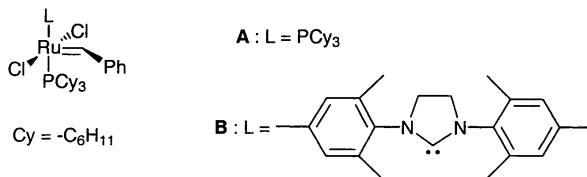
TAB. 2 - Ensemble des valeurs de K_1 et pK_a^{CH} à 25 °C. ^a : réaction avec la base TMG dont le pK_a vaut 23,3. ^b Valeur corrigée du nombre de protons équivalents. ^c pK_a^{CH} dans un mélange 50% eau- 50 % acétonitrile à 25 °. ^d : $\Delta^d pK_a^{CH} = pK_a^{CH}(\text{MeCN}) - pK_a^{CH}(50\% \text{ MeCN})$.

III CATALYSE DE METATHÈSE DES OLÉFINES

Ces dernières années, la réaction de métathèse des oléfines (alcènes), comme méthode de formation de liaison C=C, a connu un regain d'intérêt.



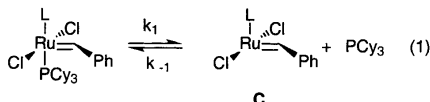
De nouveaux catalyseurs à base de ruthénium se sont montrés très efficaces. Ces derniers sont des complexes carbéniques de formule générale :



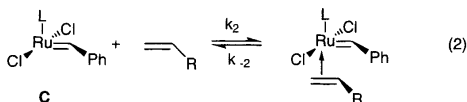
Dans le complexe **B**, un des ligands phosphine PCy₃ a été substitué par un carbène stabilisé appelé carbène d'Arduengo. Ces derniers existent à l'état libre. Le catalyseur **B** a été synthétisé très récemment et présente une activité catalytique bien plus importante que celle du catalyseur **A** plus ancien.

L'objet de cette partie est d'essayer de comprendre l'origine de la plus grande activité catalytique dont fait preuve **B**. Dans toute la suite nous ne considérerons pas la totalité du cycle catalytique, mais seulement les étapes de la phase d'initiation qui sont essentielles pour comprendre l'activité du catalyseur. Cette phase d'initiation conduit à la formation d'un intermédiaire métallacyclobutane **I** (c.f. étape 3) à partir duquel la réaction de métathèse se produit très rapidement.

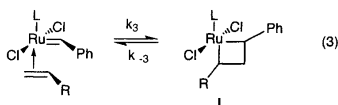
étape 1 : dissociation de la phosphine



étape 2 : coordination de l'oléfine



étape 3 : formation du métallacyclobutane



III.1 Dissociation de la phosphine

Pour expliquer la meilleure activité de **B**, on peut tout d'abord faire l'hypothèse que la dissociation de la phosphine est plus facile dans ce complexe. La première étape serait alors favorisée dans **B** par rapport à **A**.

Pour tester cette hypothèse, on envisage la réaction :



La vitesse d'échange entre la phosphine libre *PCy₃ et la phosphine coordonnée est mesurée par suivi du transfert de magnétisation observé en RMN du ³¹P. Les résultats des mesures sont

exprimés en équivalents (équiv.) de phosphine échangée par unité de temps et par équiv. de complexe **A** ou **B**. Ils sont reportés dans la table 3 (colonne v_B) à différentes températures et pour différentes concentrations initiales en phosphine libre (exprimée en équivalents de complexe **A** ou **B**).

Complexe	$v_B(s^{-1})$	équiv. PCy_3	$T(K)$
A	0,116	3	313
A	0,381	3	323
A	1,21	3	333
A	3,56	3	343
A	9,57	3	353
B	0,04	1,5	343
B	0,126	1,5	353
B	0,355	1,5	363
B	1,02	1,5	373
B	0,121	5	353
B	0,12	10	353

Tab. 3 – Vitesse pour la réaction d'échange entre la phosphine libre et la phosphine coordonnée pour les deux complexes **A** et **B** à différentes températures et pour différents rapports des concentrations initiales en réactifs.

- III.1.1. De combien d'électrons est entouré le ruthénium dans l'intermédiaire **C**? Quel est le degré d'oxydation de Ru?
- III.1.2. L'intermédiaire **C** est-il très réactif? En déduire que la vitesse v_B est assimilable à k_1 (eq. 1).
- III.1.3. Calculer l'enthalpie d'activation $\Delta_r H^\ddagger$ de la réaction de dissociation de PCy_3 pour les deux complexes **A** et **B**.
- III.1.4. Les valeurs des grandeurs des enthalpies d'activation permettent-elles d'expliquer la plus grande activité catalytique de **B** par rapport à **A**?
- III.1.5. Montrer que les résultats expérimentaux pour **B** sont en accord avec un mécanisme dissociatif et non pas avec un mécanisme associatif selon lequel la phosphine libre se coordonnerait *avant* que l'autre ne parte.

III.2 Compétition entre dissociation de PCy_3 et coordination de l'oléfine

Pour étudier la cinétique de la réaction d'initiation, on fait réagir les complexes **A** et **B** avec des oléfines substituées par des groupes alkoxy : $H_2C=CH(OR)$. Le produit de réaction, formé de manière quantitative et rapide, est un carbène de Fischer $L(PCy_3)(Cl)_2Ru=CHOR$.

- III.2.1. En présence d'un excès d'oléfine, on peut suivre la disparition du complexe **B** par la diminution de la hauteur de certains pics caractéristiques sur son spectre de RMN du proton. Dans la table 4, on donne les résultats pour la réaction de **B** avec 15 équivalents de $H_2C=CH(OEt)$ à 308 K.
- III.2.1.a Montrer que la disparition de **B** suit une cinétique du premier ordre.
- III.2.1.b Estimer la valeur de la constante de vitesse k_{obs} .

$t(s)$	0	250	500	750	1000	1250	1500	1750	2000
I	163,9	146.3	130.6	116.7	104.2	93.0	83.0	74.10	66.2

TAB. 4 – Evolution temporelle de l'intensité (unité arbitraire) d'un pic caractéristique de **B** en RMN du proton au cours de la réaction avec 15 équivalents de $H_2C=CH(OEt)$

III.2.1.c Comparer la valeur de k_{obs} à celle de k_1 à la même température. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

III.2.2. On suppose que toutes les étapes qui suivent la coordination de l'oléfine (étape 2) sont rapides. De plus, on se place en excès d'oléfine par rapport au complexe **A** ou **B**.

III.2.2.a Expliquer pourquoi on peut négliger la réaction retour de constante de vitesse k_{-2} dans l'équation (2).

III.2.2.b Exprimer la relation entre $1/k_{obs}$, $[PCy_3]$, [oléfine], k_1 , k_2 , et k_{-1} . $[PCy_3]$ désigne la concentration en phosphine libre et [oléfine] la concentration en alcène non coordonné.

III.2.2.c Expliquer en quoi $k_{-1}[PCy_3]$ et $k_2[oléfine]$ sont des grandeurs essentielles pour comprendre l'activité du catalyseur.

III.2.3. Pour différentes valeurs du rapport $[PCy_3]/[oléfine]$ on a pu mesurer la constante de vitesse k_{obs} pour les deux catalyseurs à une température donnée. Les résultats sont reportés dans la table 5.

Complexe	$[PCy_3]/[oléfine]$	$1/k_{obs}(s)$
A	0,0044	421
A	0,0085	800
A	0,017	1582
A	0,025	2398
B	0,112	353
B	0,391	534
B	0,733	629
B	1,59	959
B	2,29	1300

TAB. 5 – Variation de la constante de vitesse k_{obs} avec le rapport $[PCy_3]/[oléfine]$ à $T=310$ K pour **A** et à $T=323$ K pour **B**

III.2.3.a Montrer que l'expression déterminée précédemment est vérifiée.

III.2.3.b En déduire pour chacun des catalyseurs la valeur du rapport k_{-1}/k_2 .

III.2.3.c Conclure quant à l'activité catalytique supérieure de **B** par rapport à **A**.

légende

numéro atomique → masse atomique en g.mol⁻¹ (1) → symbole (2)

nom ←

notes : (1) basé sur le ¹²C
(2) état physique du corps pur simple à 25°C et 1,013 bar :
Fe = solide ; O = gaz ; Br = liquide ; Tl = préparé par synthèse

I	1	1,0	H	Hydrogène	1	4	9,0	Be	Béryllium	2	4,0	He	Hélium																																																											
II	3	6,9	Li	Lithium	4	9,0	Be	Béryllium	5	10,8	B	Bore	6	12,0	C	Carbone	7	14,0	N	Azote	8	16,0	O	Oxygène	9	19,0	F	Fluor	10	20,2	Ne	Néon																																								
III	11	23,0	Na	Sodium	12	24,3	Mg	Magnésium	13	27,0	Al	Aluminium	14	28,1	Si	Silicium	15	31,0	P	Phosphore	16	32,1	S	Soufre	17	35,5	Cl	Chlore	18	39,9	Ar	Argon																																								
IV	19	39,1	K	Potassium	20	40,1	Ca	Calcium	21	45,0	Sc	Scandium	22	47,9	Ti	Titane	23	50,9	V	Vanadium	24	52,0	Cr	Chrome	25	54,9	Mn	Manganèse	26	55,8	Fe	Fer	27	58,9	Co	Cobalt	28	58,7	Ni	Nickel	29	63,5	Cu	Cuivre	30	65,4	Zn	Zinc	31	69,7	Ga	Gallium	32	72,6	Ge	Germanium	33	74,9	As	Arsenic	34	79,0	Se	Sélénium	35	79,0	Br	Brome	36	83,8	Kr	Krypton
V	37	85,5	Rb	Rubidium	38	87,6	Sr	Strontium	39	89,9	Y	Yttrium	40	91,2	Zr	Zirconium	41	95,9	Nb	Niobium	42	95,9	Mo	Molybdène	43	95,9	Tc	Technétium	44	101,1	Ru	Ruthénium	45	102,9	Rh	Rhodium	46	106,4	Pd	Palladium	47	107,9	Ag	Argent	48	112,4	Cd	Cadmium	49	114,8	In	Indium	50	118,7	Sn	Étain	51	121,8	Sb	Antimoine	52	127,6	Te	Tellure	53	126,9	I	Iode	54	131,3	Xe	Xénon
VI	55	132,9	Cs	Césium	56	137,3	Ba	Barium	57	138,9	La	Lanthane	58	140,9	Ce	Cérium	59	140,9	Pr	Praseodyme	60	144,2	Nd	Néodyme	61	145	Pm	Prométhium	62	150,4	Sm	Samarium	63	152,0	Eu	Eurélium	64	157,3	Gd	Gadolinium	65	158,9	Tb	Terbium	66	162,5	Dy	Dysprosium	67	164,9	Ho	Holmium	68	167,3	Er	Erbium	69	168,9	Tm	Thulium	70	173,0	Yb	Ytterbium	71	175,0	Lu	Lutécium				
VII	87	223	Fr	Francium	88	226	Ra	Radium	89	227	Ac	Actinium	90	232,0	Th	Thorium	91	231,0	Pa	Protactinium	92	238,0	U	Uranium	93	237,0	Np	Néptunium	94	242	Pu	Plutonium	95	243	Am	Ameéricium	96	247	Cm	Curium	97	247	Bk	Berkélium	98	251	Cf	Californium	99	254	Es	Einsteinium	100	253	Fm	Fermium	101	256	Md	Méridérium	102	254	No	Nobélium	103	257	Lr	Lavendium				

C_{2v}	E	C_2	$\sigma_v(xz)$	$\sigma_v(yz)$		
A_1	1	1	1	1	z	x^2, y^2, z^2
A_2	1	1	-1	-1	R_z	xy
B_1	1	-1	1	-1	x, R_y	xz
B_2	1	-1	-1	1	y, R_x	yz

C_{3v}	E	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	z	x^2+y^2, z^2
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(x, y), (R_x, R_y)$	$(x^2-y^2, xy), (xz, yz)$

D_{3h}	E	$2C_3$	$3C_2$	σ_h	$2S_3$	$3\sigma_v$		
A'_1	1	1	1	1	1	1	R_z	$z^2, x^2 + y^2$
A'_2	1	1	-1	1	1	-1	(x, y)	$(xy, x^2 - y^2)$
E'	2	-1	0	2	-1	0		
A''_1	1	1	1	-1	-1	-1		
A''_2	1	1	-1	-1	-1	1	z	
E''	2	-1	0	-2	1	0	(R_x, R_y)	(xz, yz)

D_{4h}	E	C_2	$2C'_2$	$2C''_2$	$2C_4$	i	$2S_4$	σ_h	$2\sigma_v$	$2\sigma_d$		
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	R_z	$x^2 + y^2, z^2$
A_{2g}	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1		
A_{1u}	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	z	
A_{2u}	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1		
B_{1g}	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1		$x^2 - y^2$
B_{2g}	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1		xy
B_{1u}	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1		
B_{2u}	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1		
E_g	2	-2	0	0	0	2	0	-2	0	0	(R_x, R_y)	(xz, yz)
E_u	2	-2	0	0	0	-2	0	2	0	0	(x, y)	

T_d	E	$3C_2$	$8C_3$	$6S_4$	$6\sigma_d$		
A_1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_2	1	1	1	-1	-1		
E	2	2	-1	0	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
T_1	3	-1	0	1	-1	(R_x, R_y, R_z)	
T_2	3	-1	0	-1	1	(x, y, z)	(xy, xz, yz)

O_h	E	$8C_3$	$6C_2$	$6C_4$	$3C_2^1$	i	$6S_4$	$8S_6$	$3\sigma_h$	$6\sigma_v$		
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		$x^2 + y^2 + z^2$
A_{2g}	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1		
A_{1u}	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1		
A_{2u}	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1		
E_g	2	-1	0	0	2	2	0	-1	2	0		$(2z^2 - x^2 - y^2, x^2 - y^2)$
E_u	2	-1	0	0	2	-2	0	1	-2	0		
T_{1g}	3	0	-1	1	-1	3	1	0	-1	-1		
T_{2g}	3	0	1	-1	-1	3	-1	0	-1	1		(xy, yz, xz)
T_{1u}	3	0	-1	1	-1	-3	-1	0	1	1	(x, y, z)	
T_{2u}	3	0	1	-1	-1	-3	1	0	1	-1		

1475-A

23121

*repère à reporter sur la copie***SESSION DE 2002****concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques**

option : physique et électricité appliquées

composition de physique

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique interdits

Avertissement aux candidats :

- L'épreuve comporte deux parties :

— La partie A est consacrée aux machines frigorifiques. Elle est elle-même subdivisée en deux sous-parties traitant, l'une d'un réfrigérateur classique à condensation, l'autre d'un réfrigérateur thermoélectrique. La première de ces sous-parties nécessite l'utilisation d'une annexe que les candidats trouveront en deux exemplaires afin que leur travail soit facilité. Un seul de ces exemplaires doit être remis avec la copie.

— La partie B est consacrée à la mécanique de quelques sports ou jeux. Elle est elle-même subdivisée en trois sous-parties traitant, l'une du choc de deux points matériels appliqué à un jeu de balles, l'autre du mouvement simplifié d'un plongeur et la dernière de la mise en mouvement d'un enfant sur une balançoire.

- Il ne sera pas nécessaire de traiter l'ensemble des deux parties pour obtenir la note maximale.
- Pour les calculs numériques demandés on se limitera à la précision correspondant à celle donnée par les trois premiers chiffres significatifs. Les unités employées seront celles du système international, leurs multiples ou sous-multiples ; l'unité utilisée devra être précisée pour chacun des résultats numériques.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant la raison des initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Données numériques :

- constante molaire des gaz : $R = 8,315 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- masse molaire du Fréon : $M = 121 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
- accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

A. MACHINES FRIGORIFIQUES

Dans toute cette partie les températures exprimées en kelvins seront indiquées par le symbole T , celles en degrés Celsius par le symbole θ .

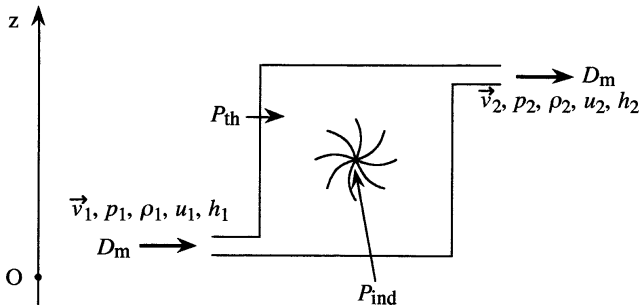
1. RÉFRIGÉRATEUR À CONDENSATION

1.1. PRÉLIMINAIRE : FLUIDE EN ÉCOULEMENT STATIONNAIRE

1.1.1. On considère un système ouvert, où circule un fluide en écoulement stationnaire (ou permanent), ne comportant qu'une seule entrée et une seule sortie. En un point donné, on désigne par :

- p la pression du fluide ;
- ρ la masse volumique du fluide ;
- u l'énergie interne massique du fluide ;
- h l'enthalpie massique du fluide ;
- v la vitesse d'une particule du fluide par rapport à un référentiel où les conduites d'entrée et de sortie sont fixes ;
- z la cote du point repérée sur un axe vertical orienté vers le haut.

On considère ces grandeurs, que l'on affecte de l'indice 1, uniformes sur toute la section d'entrée, supposée de petites dimensions ; on considère également ces grandeurs, que l'on affecte de l'indice 2, uniformes sur toute la section de sortie, supposée de petites dimensions (figure 1).



- Figure 1 -

On désigne par :

- g l'accélération de la pesanteur ;
- D_m le débit-masse entrant, ou sortant, quotient de la masse traversant la section d'entrée, ou de sortie, par l'intervalle de temps ;
- P_{ind} la puissance indiquée, puissance mécanique algébriquement reçue de l'extérieur par le fluide en mouvement au niveau des parties mobiles du système ouvert ;
- P_{th} la puissance thermique algébriquement reçue de l'extérieur par le fluide en mouvement à travers la paroi entourant le système ouvert.

Exprimer l'enthalpie massique h en fonction de p , ρ et u .

Montrer que l'application du premier principe se traduit, en écoulement stationnaire, par la relation :

$$D_m \left[(gz_2 + \frac{v_2^2}{2} + h_2) - (gz_1 + \frac{v_1^2}{2} + h_1) \right] = P_{\text{ind}} + P_{\text{th}}$$

On se place dans toute la suite du problème dans le cas d'un écoulement stationnaire où les énergies potentielle et cinétique massiques sont négligeables devant les enthalpies massiques.

1.1.2. On considère une vanne de détente où l'on opère une opération dite de laminage. Cette détente s'effectue en l'absence de travail indiqué et elle est supposée adiabatique. Montrer que dans ce cas la détente est isenthalpique.

Dans le cas particulier d'un gaz parfait comparer les températures T_1 et T_2 du fluide à l'entrée et à la sortie de la vanne.

1.1.3. On considère un compresseur dont les parois sont adiabatiques. On note P_{ind} la puissance indiquée reçue par le fluide en écoulement de l'arbre de rotation du compresseur. Exprimer P_{ind} en fonction du débit-masse D_m et des enthalpies massiques d'entrée h_1 et de sortie h_2 du fluide.

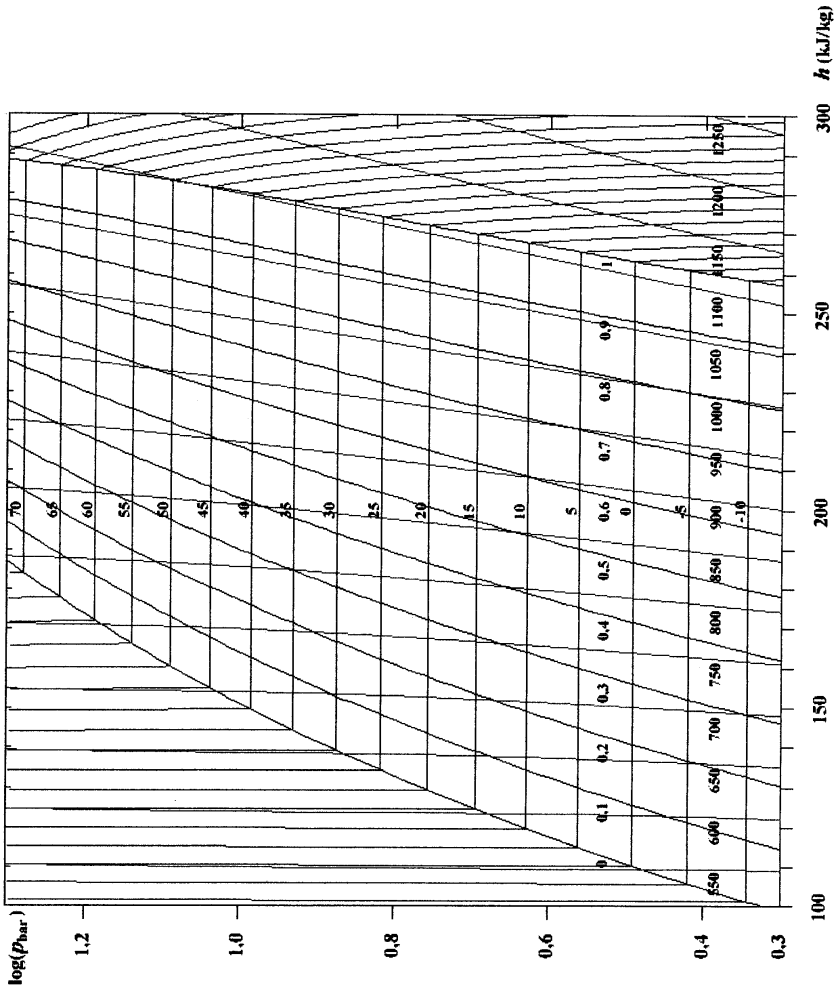
Pour un même taux de compression $r = p_2/p_1$ et les mêmes caractéristiques du fluide d'entrée, on désigne par η_{comp} le rendement isentropique du compresseur, défini comme le rapport $P_{\text{indS}}/P_{\text{ind}}$. P_{indS} est la puissance indiquée qui serait reçue par le fluide en écoulement de l'arbre de rotation du compresseur dans le cas idéal où la compression serait isentropique ; P_{ind} est la puissance indiquée reçue par le fluide dans le cas réel où la compression est adiabatique. Exprimer η_{comp} en fonction des enthalpies massiques du fluide d'entrée et de sortie et de l'enthalpie massique de sortie h_{2S} que l'on obtiendrait à la sortie du compresseur dans le cas d'une compression isentropique.

Dans le cas particulier où l'on peut considérer le fluide comme un gaz parfait dont le rapport des capacités thermiques massiques γ est indépendant de la température, exprimer la température du fluide T_{2S} que l'on obtiendrait à la sortie d'un compresseur isentropique en fonction de la température T_1 du fluide à l'entrée du compresseur et du taux de compression r . En déduire l'expression de la température du fluide T_2 que l'on obtient à la sortie d'un compresseur dont le rendement isentropique est η_{comp} .

Application numérique : $T_1 = 263 \text{ K}$; $r = 5,10$; $\eta_{\text{comp}} = 0,75$ et $\gamma \approx 1,15$ pour le Fréon (dichlorodifluorométhane). Calculer T_{2S} et T_2 .

1.2. DIAGRAMME ($\log p$, h) DU FRÉON

Le Fréon, de masse molaire $M = 121 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, est un agent thermique très utilisé dans les installations frigorifiques. Le diagramme ($\log p$, h) est donné en annexe pour le Fréon. Dans ce diagramme h représente l'enthalpie massique exprimée en $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ (en prenant pour origine l'enthalpie massique du Fréon liquide bouillant à la température de référence $T_{\text{réf}} = 135,00 \text{ K}$) et $\log p$ le logarithme en base 10 du rapport de la pression p à une valeur de référence p^0 égale à la pression standard $p^0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.



1475-B

Sur ce diagramme sont représentées la courbe de saturation, les isothermes (pour des températures θ exprimées en degrés Celsius, allant de -10°C à 70°C par pas de 5°C), les isentropes (pour des entropies massiques variant par pas de $50 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ de $550 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ à $1250 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$) et les isotitres en vapeur pour des titres en vapeur (ou fractions massiques vaporisées) x variant de 0 à 1 par pas de 0,1.

1.2.1. Reproduire sur la copie l'allure du diagramme fourni en annexe en le complétant vers les pressions plus élevées. Préciser où se situent la courbe de rosée, la courbe d'ébullition, le point critique, les domaines du liquide seul, des équilibres liquide-vapeur et de la vapeur sèche.

Justifier qu'à l'intérieur de la courbe de saturation une isotherme soit également une isobare. À l'aide du diagramme $(\log p, h)$ proposer deux méthodes pour déterminer la valeur de l'enthalpie massique de vaporisation $\Delta_{\text{vap}}h$ (ou chaleur latente massique de vaporisation l_{vap}) du Fréon à une température T donnée. Application numérique : déterminer la valeur de $\Delta_{\text{vap}}h$ du Fréon pour $\theta = -10^\circ\text{C}$ en utilisant les deux méthodes.

1.2.2. Si l'on poursuivait le diagramme vers les basses pressions, que pourrait-on dire de la pente des isothermes dans le domaine de la vapeur sèche ? À l'aide du diagramme $(\log p, h)$ proposer une méthode pour déterminer l'ordre de grandeur de la capacité thermique massique c_p du Fréon gazeux au voisinage d'un point du domaine de la vapeur sèche. Application numérique : déterminer la valeur de c_p pour la vapeur sèche à 40°C et 6,31 bar ; en assimilant la vapeur à un gaz parfait, en déduire la valeur du rapport γ des capacités thermiques massiques en ce point.

1.2.3. Montrer qu'en un point d'une isentrope, $\left(\frac{\partial p}{\partial h}\right)_s$ s'exprime uniquement en fonction de la masse volumique ρ du fluide en ce point. En déduire que les isentropes ne subissent pas de réfraction au passage de la courbe de saturation et qu'elles sont toujours croissantes. À l'aide du diagramme $(\log p, h)$ du Fréon donné, peut-on prévoir s'il est possible de liquéfier la vapeur sèche par compression isentropique ?

1.3. CYCLE DU FRÉON DANS UN RÉFRIGÉRATEUR À CONDENSATION

Une machine frigorifique fonctionne en régime permanent en échangeant de l'énergie par chaleur avec une source chaude, l'air extérieur à la température $\theta_c = 20^\circ\text{C}$ et une source froide à la température $\theta_f = 0^\circ\text{C}$ constituée par le local à réfrigérer. Cette machine ditherme contient un agent frigorifique, le Fréon. La figure 2 indique le fonctionnement de la machine et le sens de circulation du fluide frigorifique avec un débit-masse $D_m = 4,50 \text{ kg}\cdot\text{min}^{-1}$.

On désigne par :

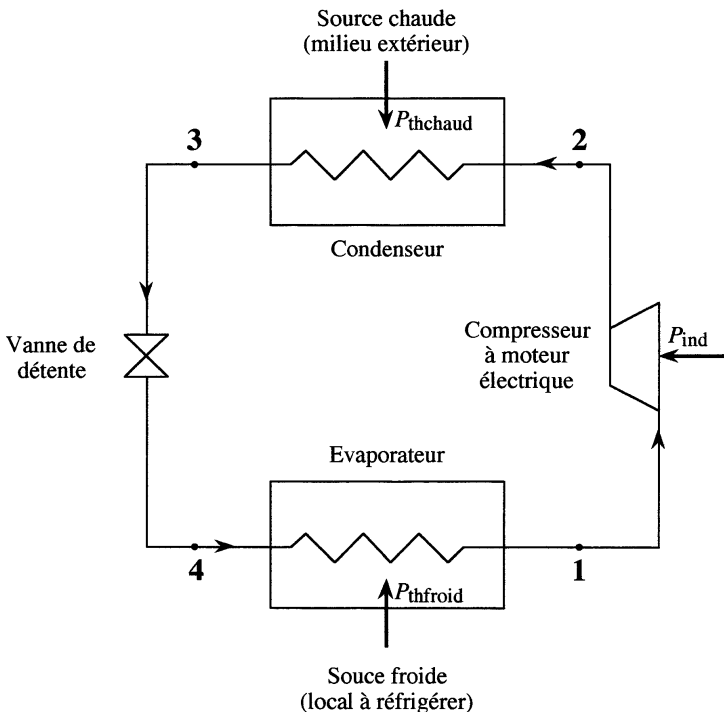
$P_{\text{th froid}}$ la puissance thermique reçue par le Fréon de la source froide au niveau de l'évaporateur ($P_{\text{th froid}} > 0$) ;

$P_{\text{th chaud}}$ la puissance thermique algébriquement reçue par le Fréon de la source chaude au niveau du condenseur ($P_{\text{th chaud}} < 0$) ;

P_{ind} la puissance mécanique indiquée reçue par le Fréon dans le compresseur du moteur qui le fait tourner ($P_{\text{ind}} > 0$).

Le cycle du Fréon présente les caractéristiques suivantes :

- La puissance thermique reçue par le Fréon dans l'évaporateur permet la vaporisation complète du Fréon venant de (4) et conduit à de la vapeur saturante à la température $\theta_1 = -10^\circ\text{C}$: point (1).
- Le compresseur aspire la vapeur saturante (1) et la comprime avec un taux de compression $r = p_2/p_1 = 5,10$. La température du Fréon en sortie du compresseur vaut $\theta_2 = 70^\circ\text{C}$: point (2). Les parois du compresseur sont supposées adiabatiques.
- Le Fréon sortant du compresseur entre dans le condenseur qui permet son refroidissement jusqu'à la température $\theta_3 = 35^\circ\text{C}$: point (3). On considère que le passage dans le condenseur est isobare.
- Le Fréon sortant du condenseur est détendu dans une vanne supposée adiabatique jusqu'à la pression de l'évaporateur : point (4).
- Le passage dans l'évaporateur est supposé isobare.



- Figure 2 -

On considère que dans tout le cycle les énergies potentielle et cinétique massiques sont négligeables devant les enthalpies massiques et que les pertes de charge sont négligeables dans les différentes conduites, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'entropie créée par frottement visqueux.

1.3.1. Placer sur le diagramme donné en annexe et qui sera rendu avec la copie le point (1). Déterminer la pression p_1 de la vapeur saturante au point (1), son titre en vapeur x_1 , son enthalpie massique h_1 et son entropie massique s_1 (on pourra utiliser une méthode d'interpolation linéaire).

1.3.2. Calculer la pression p_2 du Fréon en sortie du compresseur au point (2). Placer sur le diagramme donné en annexe le point (2). Préciser l'état physique du Fréon au point (2) et son titre en vapeur x_2 . Déterminer son enthalpie massique h_2 et son entropie massique s_2 .

1.3.3. Placer sur le diagramme le point (2') qui correspond à l'état du Fréon que l'on obtiendrait en sortie du compresseur dans le cas idéal où le fonctionnement du compresseur serait isentropique, pour un même taux de compression $r = p_2/p_1$ que précédemment. Déterminer la température θ_2' , le titre en vapeur x_2' , l'enthalpie massique h_2' et l'entropie massique s_2' du fluide en ce point (2'). En déduire le rendement isentropique du compresseur η_{comp} (défini au 1.1.3.).

1.3.4. Placer sur le diagramme donné en annexe le point (3). Préciser l'état physique du Fréon au point (3) et son titre en vapeur x_3 . Déterminer son enthalpie massique h_3 et son entropie massique s_3 .

1.3.5. La détente dans la vanne est supposée adiabatique. En utilisant le résultat de la question 1.1.2. placer sur le diagramme donné en annexe le point (4). Préciser l'état physique du Fréon au point (4), sa température θ_4 et son titre en vapeur x_4 . Déterminer son enthalpie massique h_4 et son entropie massique s_4 .

1.3.6. Tracer sur le diagramme le cycle décrit par le Fréon pour cette machine frigorifique. Calculer la puissance indiquée reçue par le Fréon de l'arbre de rotation du compresseur et la puissance thermique reçue par le Fréon de la source froide au niveau de l'évaporateur.

1.3.7. Définir l'efficacité, ou coefficient de performance, de ce réfrigérateur. Calculer sa valeur. Comparer cette valeur à celle d'un réfrigérateur de Carnot fonctionnant entre la température de l'évaporateur et la température de liquéfaction du Fréon sous la pression p_2 . Commenter le résultat obtenu.

2. RÉFRIGÉRATEUR THERMOÉLECTRIQUE

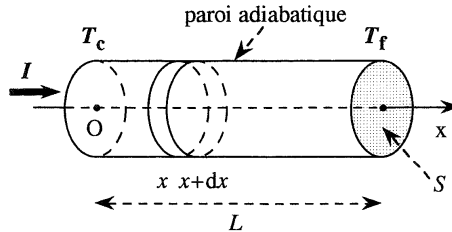
2.1. EFFETS THERMOÉLECTRIQUES

2.1.1. On considère un conducteur homogène, cylindrique, d'axe Ox, de section S et de longueur L (figure 3). Il est en contact avec deux sources idéales de chaleur, une source chaude de température constante T_c au niveau de la section d'abscisse $x = 0$ et une source froide de température constante T_f au niveau de la section d'abscisse $x = L$. Toute la surface latérale est recouverte d'une paroi parfaitement adiabatique. Ce conducteur est également parcouru dans la direction de l'axe Ox par un courant électrique d'intensité I , uniformément réparti sur la section du conducteur. On appelle R la résistance électrique du cylindre entre $x = 0$ et $x = L$.

On se place dans le cas particulier du régime stationnaire où la température T dans le conducteur ne dépend que de la variable x . Les conductivités thermique et

électrique sont supposées indépendantes de la température et donc uniformes au sein du conducteur dans toute cette question.

Rappeler la loi de Fourier donnant le vecteur densité de flux thermique \vec{J}_q pour ce conducteur de conductivité thermique λ . Effectuer un bilan enthalpique pour la portion de conducteur prise entre les abscisses x et $x + dx$ en prenant en compte la puissance électrique algébriquement reçue, à pression constante, par cette portion de conducteur (effet Joule). Donner l'équation différentielle dont $T(x)$ est solution. En déduire l'expression de $T(x)$ en fonction de x , T_c , T_f , λ , S , L , R et I .



- Figure 3 -

En déduire la puissance thermique P_c reçue par le conducteur de la source chaude et la puissance thermique P_f algébriquement reçue par le conducteur de la source froide. Calculer $P_c + P_f$ et commenter le résultat obtenu.

2.1.2. Outre l'effet Joule que l'on vient de considérer, il peut exister des effets thermoélectriques qui traduisent le couplage entre les conductions thermique et électrique dans un ou plusieurs conducteurs. Ils ont été mis en évidence dans trois situations particulières qui correspondent aux effets Seebeck, Peltier et Thomson, du nom des physiciens qui les ont découverts. Dans le cas où il y a couplage entre les conductions thermique et électrique, les vecteurs densité de courant thermique \vec{J}_q et électrique \vec{J}_e sont donnés par les relations d'Onsager :

$$\vec{J}_q = L_{11} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{T} \right) - L_{12} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T}$$

$$\vec{J}_e = L_{21} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{T} \right) - L_{22} \frac{\overrightarrow{\text{grad}} V}{T}$$

La théorie d'Onsager montre également que l'on $L_{21} = L_{12}$.

— Pour un conducteur à température uniforme, montrer que l'on retrouve la loi d'Ohm sous forme locale. En déduire l'expression de la conductivité électrique γ en fonction du coefficient phénoménologique L_{22} et de la température T .

— Pour un conducteur où ne circule aucun courant électrique et dont la température n'est pas uniforme, montrer que l'on retrouve la loi de Fourier sous forme locale. En déduire l'expression de la conductivité thermique λ en fonction des coefficients phénoménologiques L_{11} , L_{22} , L_{12} et de la température T .

Montrer qu'il existe alors au sein du conducteur un champ électrique \vec{E} tel que :

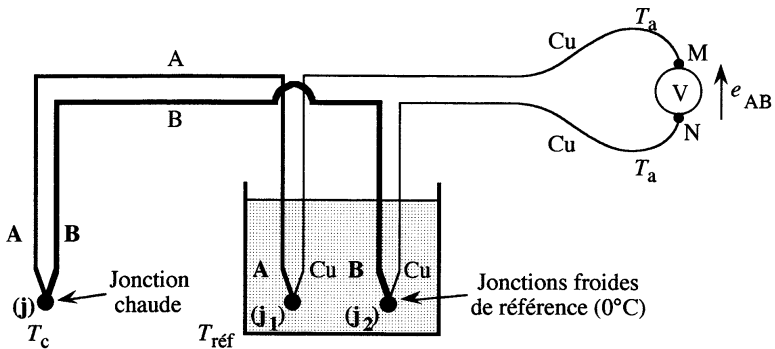
$$\vec{E} = \varepsilon \overrightarrow{\text{grad}} T$$

où ε est le coefficient Seebeck. Donner l'expression de ce coefficient ε en fonction des coefficients phénoménologiques L_{22} , L_{12} et de la température T .

2.1.3. L'effet Seebeck est à la base du fonctionnement des thermocouples. Le principe de mesure d'une température à l'aide d'un thermocouple est indiqué sur la figure 4. La jonction (ou soudure) chaude (j) de deux conducteurs A et B de nature différente est portée à la température T_c . Les jonctions de référence (j₁) et (j₂) sont maintenues à la même température de référence $T_{réf}$ prise usuellement à 0°C.

Entre les jonctions froides, il apparaît une force thermoélectromotrice e_{AB} fonction de la différence de température $T_c - T_{réf}$. Cette f.é.m. est comptée positivement si elle a tendance à faire circuler un courant dans le sens de A vers B comme indiqué sur la figure 4. Pour mesurer cette f.é.m. on réalise en (j₁) et (j₂) deux soudures avec des fils de connexion utilisant un même métal conducteur comme le cuivre.

On mesure la d.d.p. ($V_M - V_N$) aux extrémités M et N de ces deux fils pris à la température ambiante T_a à l'aide d'un microvoltmètre électronique de très grande impédance.



- Figure 4 -

— Comment peut-on réaliser au laboratoire, sous pression atmosphérique normale, une source idéale de chaleur à la température de référence de 0°C ?

— On désigne par ε_A et ε_B les coefficients Seebeck des conducteurs A et B. Pour l'ensemble des deux matériaux A et B, on pose $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_A - \varepsilon_B$. Montrer que si le voltmètre V est de résistance infinie on a :

$$V_M - V_N = \int_{T_{réf}}^{T_c} \varepsilon_{AB} dT = e_{AB}$$

dont la valeur ne dépend pas de la température ambiante T_a .

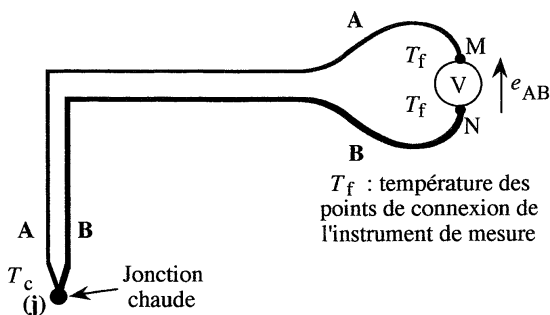
On peut en première approximation, et dans un intervalle restreint de température, considérer que e_{AB} est fonction affine de T_c . En réalité e_{AB} n'est en général pas fonction linéaire de l'écart de température. Pour quelle raison ?

Application numérique : pour le thermocouple au nickel-chrome/nickel-aluminium, dit de type K, que l'on peut utiliser de 0 à 1100°C, on relève, lorsque les jonctions de référence sont à 0°C, les valeurs des forces thermoélectromotrices, pour différentes valeurs de T_c :

$$e_{AB}(450^\circ\text{C}) = 18\,513 \mu\text{V}, e_{AB}(500^\circ\text{C}) = 20\,640 \mu\text{V}, e_{AB}(550^\circ\text{C}) = 22\,772 \mu\text{V}$$

En déduire la valeur de ε_{AB} pour ce couple à 500°C.

— Pour des mesures courantes de température on peut n'utiliser que la soudure chaude à la température T_c et connecter directement les extrémités aux points de connexion du microvoltmètre considérés comme une source froide à la température locale T_f (figure 5). Montrer qu'il est alors nécessaire de compenser cette température pour ramener la mesure à la référence 0°C . Les progrès réalisés en électronique permettent de disposer d'appareils à affichage numérique à compensation électronique intégrée et même d'afficher directement la température.

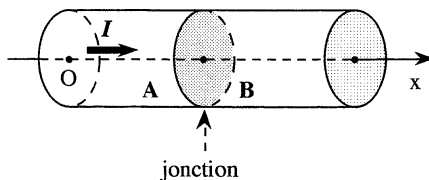


- Figure 5 -

2.1.4. L'effet Peltier est l'effet thermique, autre que l'effet Joule, qui résulte du passage d'un courant électrique à travers une jonction (ou soudure) entre deux métaux A et B à la même température.

Pour un conducteur à température uniforme montrer que l'on a : $\vec{J}_q = \varepsilon T \vec{J}_e$.

2.1.5. Une jonction entre deux conducteurs cylindriques A et B de nature différente est en contact par sa surface latérale avec une source idéale de chaleur. Elle est ainsi maintenue à la température T . Elle est traversée du conducteur A vers le conducteur B par un courant électrique d'intensité I (figure 6).



- Figure 6 -

Montrer que la puissance thermique P_p dégagée par effet Peltier à la jonction (égale à celle algébriquement reçue du circuit conducteur par les sections amont et aval de la jonction supposée de très faible épaisseur) vaut : $P_p = \Pi_{AB} I$, où Π_{AB} est le coefficient Peltier pour les deux conducteurs A et B. Exprimer Π_{AB} en fonction de la température T et du coefficient Seebeck ε_{AB} pour les deux conducteurs A et B.

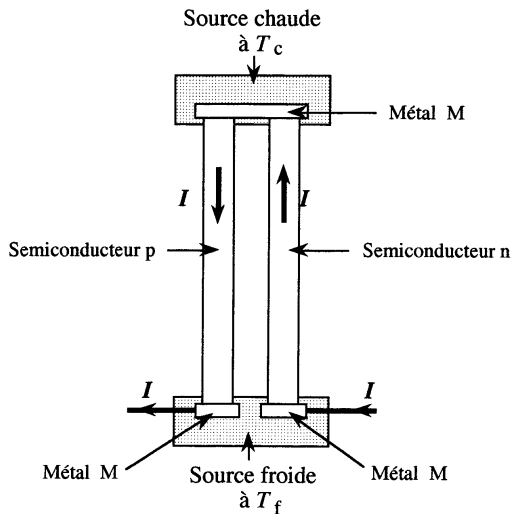
Conclure quant au signe de la puissance thermique P_p dégagée par effet Peltier au niveau d'une jonction parcourue par un courant électrique d'intensité I .

2.2. RÉFRIGÉRATEUR À EFFET PELTIER

2.2.1. On considère un élément de réfrigérateur à effet Peltier. En suivant le sens du courant d'intensité I on a (figure 7) :

- une jonction entre un métal M et un semi-conducteur de type n en contact avec la source froide à la température T_f ;
- deux jonctions, une entre le semi-conducteur de type n et le métal M , l'autre entre le métal M et un semi-conducteur de type p , toutes deux en contact avec la source chaude à la température T_c ;
- une jonction entre le semi-conducteur de type p et le métal M , en contact avec la source froide à la température T_f .

Les surfaces latérales des semi-conducteurs n et p qui ne sont pas en contact avec les sources sont recouvertes d'une paroi parfaitement adiabatique.



- Figure 7 -

On se place en régime stationnaire et l'on désigne par :

- ε_n , ε_p et ε les coefficients Seebeck des conducteurs n , p et M ;
- S la section des semi-conducteurs cylindriques n et p ;
- L la longueur des semi-conducteurs cylindriques, supposée très grande devant celles des jonctions en contact avec les sources de chaleur ;
- R_n et R_p les résistances électriques des semi-conducteurs cylindriques n et p , grandes devant celles des parties métalliques ;
- λ_n et λ_p les conductivités thermiques des semi-conducteurs cylindriques n et p ;
- $P_{th\text{ froid}}$ la puissance thermique reçue par l'élément de réfrigérateur de la source froide à la température T_f ;
- $P_{th\text{ chaud}}$ la puissance thermique algébriquement reçue par l'élément de réfrigérateur de la source chaude à la température T_c .

En utilisant les résultats établis au 2.1.1. et au 2.1.5., donner les expressions des puissances thermiques $P_{\text{th froid}}$ et $P_{\text{th chaud}}$ algébriquement reçues par l'élément de circuit électrique des sources froide et chaude en fonction de T_c , T_f , I , S , L , $R = R_n + R_p$, $\lambda = \lambda_n + \lambda_p$ et ε_{np} .

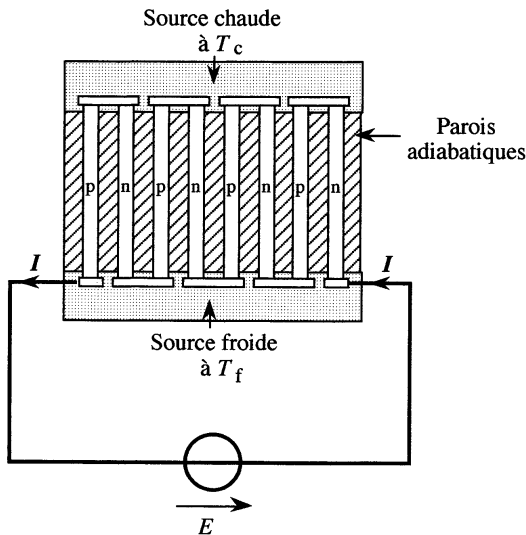
En déduire l'expression du travail électrique P_m reçu par unité de temps par l'élément de réfrigérateur du circuit extérieur auquel il est connecté.

2.2.2. Montrer que le dispositif peut fonctionner en réfrigérateur, avec $P_{\text{th froid}} > 0$ et $P_{\text{th chaud}} < 0$, si $|\varepsilon_{np}|$ reste supérieur à une certaine valeur.

2.2.3. Définir l'efficacité, ou coefficient de performance, de cet élément de réfrigérateur. Calculer sa valeur.

Application numérique : Pour un élément Peltier dont les dimensions sont de l'ordre de quelques centimètres, on donne : $T_c = 293 \text{ K}$, $T_f = 273 \text{ K}$, $I = 15 \text{ A}$, $\frac{\lambda S}{L} = 10 \text{ mW} \cdot \text{K}^{-1}$, $R = 5,0 \text{ m}\Omega$ et $|\varepsilon_{np}| = 650 \mu\text{V} \cdot \text{K}^{-1}$.

Calculer l'efficacité de cet élément Peltier. Comparer cette valeur à celle d'un réfrigérateur de Carnot fonctionnant entre les températures T_f et T_c .



- Figure 8 -

Combien d'éléments Peltier faut-il associer en série pour avoir $P_{\text{th froid}} = 50 \text{ W}$ selon le schéma de la figure 8 ?

B. MÉCANIQUE DE QUELQUES SPORTS OU JEUX

Dans toute cette partie de problème, le point O est l'origine d'un repère d'espace Oxyz orthogonal et direct du référentiel terrestre noté (R) de vecteurs unitaires \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z . Les axes Ox et Oy sont horizontaux et l'axe Oz est vertical, orienté positivement vers le haut. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g \vec{u}_z$.

On se place dans le cadre de la mécanique newtonienne.

1. JEU DE BALLE

1.1. PRÉLIMINAIRE : CHOC DE DEUX POINTS MATÉRIELS

On rappelle qu'un choc entre deux points matériels est une interaction brève et intense qui provoque une variation de leur vecteur vitesse sans modification de leur position.

1.1.1. Répondre en trois lignes au maximum à chacun des points suivants :

- Donner la définition d'un référentiel galiléen.
- Citer un exemple d'un très bon référentiel galiléen.
- Donner la définition du référentiel géocentrique.
- Le référentiel géocentrique est-il galiléen ? Justifier la réponse.
- Définir un référentiel terrestre.
- À quelle condition un référentiel terrestre peut-il être considéré comme galiléen ?
- À quelle condition une balle de petites dimensions peut-elle être assimilable à un point matériel ?

1.1.2. Un point matériel M_1 de masse m_1 et de vitesse \vec{v}_1 dans un référentiel supposé galiléen (R) heurte un second point matériel M_2 de masse m_2 et de vitesse \vec{v}_2 dans le même référentiel. On note respectivement \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 les vitesses des deux points matériels juste après le choc. On suppose le choc direct, les quatre vecteurs vitesses \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 sont donc colinéaires.

Montrer qu'on peut considérer que la quantité de mouvement de l'ensemble des deux points matériels se conserve au cours du choc, même si le système des deux points n'est pas isolé. En déduire une première relation (1) entre les quatre vecteurs vitesses précédents.

1.1.3. On suppose élastique le choc entre M_1 et M_2 . En déduire une seconde relation (2) liant les quatre vecteurs vitesses considérés que l'on peut mettre sous la forme : $v'_1 - v'_2 = -(v_1 - v_2)$.

1.1.4. Déterminer complètement les vitesses après le choc en fonction des vitesses avant le choc et des masses m_1 et m_2 .

1.1.5. Examiner les deux cas particuliers suivants et commenter les résultats :

- $\vec{v}_2 = \vec{0}$ et $m_1 = m_2$.
- $\vec{v}_2 = \vec{0}$ et $m_1 \ll m_2$.

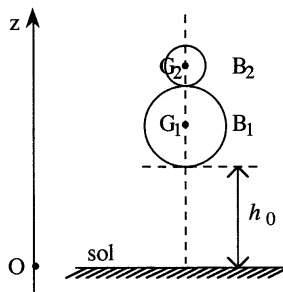
1.2. CHOC DE BALLE CONTRE LE SOL

1.2.1. Dans le référentiel (R), on lâche avec une vitesse initiale nulle une balle B_1 sphérique et homogène d'une hauteur h_0 au dessus du sol. En négligeant les frottements, exprimer le vecteur vitesse \vec{v}_0 du centre d'inertie G_1 de la balle quand elle frappe le sol.

En supposant élastique le choc contre le sol, exprimer le vecteur vitesse \vec{v}_1 du centre d'inertie G_1 de la balle quand elle repart. En déduire la hauteur h_1 à laquelle elle remonte en fonction de h_0 .

1.2.2. On dispose de deux balles B_1 et B_2 de masses très inégales. La plus lourde, B_1 , pourrait être, par exemple, une balle élastique pleine de masse m_1 voisine de 200 g tandis que B_2 serait une balle de ping-pong de masse m_2 voisine de 3 g ; l'expérience reste spectaculaire avec un ballon de basket de masse m_1 voisine de 600 g et une balle de tennis de masse m_2 voisine de 50 g. On considérera donc que la masse m_1 est très grande devant la masse m_2 .

On lâche sans vitesse les deux balles accolées comme le suggère le schéma de la figure 9.



- Figure 9 -

À l'instant t_0^- , la grosse balle B_1 heurte le sol sans que la petite balle B_2 n'entre en contact avec elle. Exprimer, en fonction de g et h_0 , les vecteurs vitesses \vec{v}_0 et \vec{v}_1 du centre d'inertie G_1 de la balle B_1 par rapport au référentiel (R) respectivement avant et après le choc contre le sol.

À l'instant ultérieur t_0^+ infiniment voisin de l'instant t_0^- , la petite balle B_2 heurte la grosse balle B_1 supposée encore en contact avec le sol. Déterminer, par rapport au référentiel (R), le vecteur vitesse \vec{v}_2 du centre d'inertie G_2 de la petite balle B_2 avant le choc avec B_1 .

En utilisant le résultat de la question 1.1.4. déterminer le vecteur vitesse \vec{v}_2 par rapport au référentiel (R) du centre d'inertie G_2 de la balle B_2 juste après ce choc avec B_1 .

En déduire la hauteur h_2 à laquelle remonte la balle B_2 en fonction de sa hauteur de chute h_0 . Commenter le résultat obtenu.

2. MODÉLISATION SIMPLIFIÉE D'UN PLONGEUR

On considère un plongeur passif dont les bras seraient initialement tendus et relevés selon la verticale et qui se laisserait tomber comme une planche rigide d'un plongeur horizontal, également rigide, en restant en contact par ses pieds avec le plongeur au début de son mouvement.

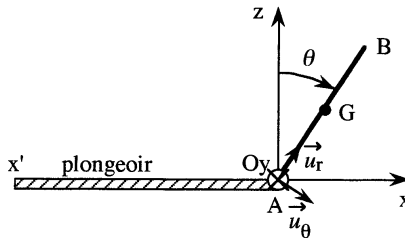
Dans tout le problème on néglige la résistance de l'air.

Ce plongeur est alors modélisé par une barre rigide homogène AB de masse m , de longueur 2ℓ et de centre d'inertie G, en mouvement de rotation autour de l'axe horizontal Oy du plongeur, le point A en contact avec le plongeur au point O ne glissant pas sur le plongeur tant qu'il reste en contact avec lui.

Sa position instantanée est repérée par l'angle $\theta = (Az, AB)$ de la figure 10. À l'instant $t = 0$, il est immobile et presque vertical : $\theta_0 = 0^+$.

On rappelle l'expression du moment d'inertie de la barre AB par rapport à l'axe horizontal Gy perpendiculaire à la barre : $J_{Gy} = \frac{m\ell^2}{3}$.

Pour les applications numériques, on prendra pour longueur du plongeur, des pieds à l'extrémité des bras tendus : $2\ell = 2,0$ m.



- Figure 10 -

2.1. Quelles sont les actions mécaniques s'exerçant sur le plongeur passif lors de son mouvement de rotation tant que ses pieds (extrémité A) reposent sur l'extrémité O du plongeur rigide horizontal x'O ? Représenter alors les différentes actions mécaniques sur un schéma clair.

Tant que l'extrémité A reste en contact avec le point O du plongeur donner l'expression des composantes normale a_n (selon AB de vecteur unitaire \vec{u}_r) et tangentielle a_t (selon la perpendiculaire directe à AB de vecteur unitaire \vec{u}_θ) de l'accélération \vec{a}_G du centre d'inertie G de la barre dans le référentiel terrestre en fonction de ℓ , θ et ses dérivées par rapport au temps t .

En considérant le référentiel terrestre d'étude (R) galiléen, appliquer le théorème de la résultante cinétique à la barre. En déduire les composantes normale R_n et tangentielle R_t de la force \vec{R} exercée par le plongeur sur le plongeur en fonction de m , g , ℓ , θ et ses dérivées par rapport au temps.

2.2. En appliquant le théorème de Huygens, donner l'expression du moment d'inertie J_{Ay} de la barre AB par rapport à l'axe de rotation Ay. Donner, en fonction de m , g , ℓ , θ et ses dérivées par rapport au temps, les expressions de l'énergie cinétique dans (R) et de l'énergie potentielle de pesanteur du plongeur avant que ses pieds ne se détachent du plongeur. On prendra l'énergie potentielle nulle lorsque le plongeur est vertical ($\theta = 0$).

En utilisant une méthode énergétique, déterminer l'expression de la vitesse angulaire du plongeur $\dot{\theta}$ en fonction de θ et des données du modèle. En déduire l'expression de l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ du plongeur pendant sa phase d'appui en fonction de θ et des données du modèle.

2.3. À partir des résultats des questions précédentes, donner, tant qu'il y a contact en O, l'expression des composantes R_n et R_t en fonction de m , g et θ exclusivement. Justifier le sens trouvé pour chaque composante. En considérant que le plongeur perd contact avec le plongeur lorsque R_n s'annule, déterminer la valeur θ_1 de l'angle θ pour lequel le plongeur perd contact avec le plongeur. Critiquer la modélisation proposée lors de cette première phase du mouvement du plongeur.

2.4. Le contact du plongeur avec le plongeur cesse à l'instant t_1 . Déterminer alors la vitesse angulaire du plongeur $\dot{\theta}_1$ en fonction de g et ℓ , les coordonnées x_1 et z_1 de son centre d'inertie en fonction de ℓ , ainsi que les composantes \dot{x}_1 et \dot{z}_1 du vecteur vitesse \vec{v}_G de son centre d'inertie en fonction de g et ℓ .

2.5. Faire le bilan des actions mécaniques qui s'exercent sur le plongeur dès que celui-ci a perdu contact avec le plongeur en négligeant toujours la résistance de l'air. Définir le référentiel barycentrique (R*) du plongeur pendant son plongeon. Est-il galiléen ? Justifier la réponse.

Énoncer le théorème du moment cinétique barycentrique. En déduire que le mouvement de rotation du plongeur est uniforme pendant toute la durée du plongeon et donner l'expression de sa vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction de g et ℓ .

Lors d'un plongeon réel, le plongeur se ramasse en boule pendant le plongeon. Quelle conséquence peut-on déduire quant à la vitesse angulaire de rotation du plongeur dans ce cas ?

2.6. On revient au modèle proposé du plongeur supposé rigide pendant le plongeon. On considère une nouvelle origine de l'échelle des temps : l'instant t' est repéré à partir du moment où le plongeur décolle du plongeur.

Déterminer les coordonnées x_G et z_G du centre d'inertie du plongeur pendant le plongeon en fonction de t' , g et ℓ .

On admet que, lorsqu'il pénètre dans l'eau, le corps du plongeur, dont la tête est dirigée vers l'eau, est vertical. Préciser la valeur numérique θ_2 correspondante de l'angle θ . En admettant désormais que cette condition est réalisée, donner l'expression littérale de la durée $\Delta t'$ du plongeon en fonction de θ_1 , g et ℓ et celle de la coordonnée z_{B2} de l'extrémité de la main au moment où elle rentre en contact avec l'eau.

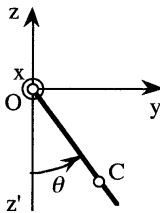
Application numérique : calculer $\Delta t'$ et z_{B2} . Commenter le résultat obtenu.

3. MOUVEMENT D'UNE BALANÇOIRE

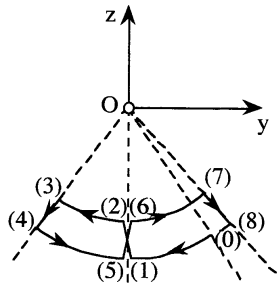
L'axe de rotation d'une balançoire occupée par un enfant est l'axe horizontal Ox , fixe par rapport au référentiel terrestre (R) supposé galiléen. Le système (S) comprend l'enfant et la partie mobile de la balançoire.

Pour simplifier, on le modélise par une tige sans masse sur laquelle se déplace un point matériel de masse m situé en un point C de la tige. L'élongation angulaire est repérée par $\theta = (Oz', OC)$ comme le montre la figure 11.

Au cours du mouvement, l'enfant se lève lorsqu'il passe par une position verticale et s'accroupit quand son élongation est extrémale. En fonction des mouvements de l'enfant, le point C se situe donc soit à une distance ℓ , soit à une distance L de l'axe de rotation, avec $\ell < L$. La trajectoire du point C est représentée sur le schéma de la figure 12. Les modifications de la distance OC entre ℓ et L ou entre L et ℓ sont supposées extrêmement rapides, c'est-à-dire que la longueur OC peut varier sans que θ ne varie.



- Figure 11 -



- Figure 12 -

On considère, dans tout le problème, que l'on néglige la résistance de l'air.

3.1. Le système (S) est-il un solide ? Justifier la réponse. On suppose que la liaison pivot le long de l'axe Ox est parfaite. Préciser les actions mécaniques extérieures auxquelles le système (S) est soumis.

Quelle est l'expression littérale du moment cinétique α_X par rapport à l'axe Ox du 17 système (S) en fonction de m , ℓ ou L et $\dot{\theta}$?

On choisit pour origine des énergies potentielles la position (1) pour laquelle $\theta = 0$ et $OC = L$. Quelle est l'expression littérale de l'énergie mécanique du système (S) en fonction de m , g , ℓ ou L , θ et $\dot{\theta}$? On rappelle que $\cos(2u) = 1 - 2\sin^2u$.

3.2. Initialement, le système (S) est immobile en position (0). L'élongation angulaire est θ_0 , avec $\theta_0 > 0$. Montrer que l'énergie mécanique se conserve entre la position (0) et la position (1) pour laquelle $\theta_1 = 0$.

En déduire la vitesse angulaire $\dot{\theta}_1$ en position (1) en fonction de θ_0 , g et des caractéristiques (ℓ ou L) du système.

3.3. Montrer que le moment cinétique par rapport à l'axe Ox se conserve entre les positions (1) et (2). En déduire $\dot{\theta}_2$ en fonction de $\dot{\theta}_1$ puis en fonction de θ_0 , g et des caractéristiques ℓ et L du système.

3.4. Exprimer littéralement $\dot{\theta}_3$ et θ_3 (ou une ligne trigonométrique liée à θ_3) en fonction de θ_0 et des caractéristiques du système.

Quelles sont les valeurs de $\dot{\theta}_4$ et θ_4 ?

3.5. Calculer $\dot{\theta}_5$ en fonction de θ_4 puis en fonction de θ_0 , g et des caractéristiques du système.

Des réponses précédentes, déduire $\dot{\theta}_6$ en fonction de θ_0 , g et des caractéristiques du système.

3.6. Par une méthode analogue, exprimer θ_7 ou θ_8 en fonction de θ_0 et des caractéristiques du système. Comparer θ_8 à θ_0 et commenter le résultat.

Le système (S) est qualifié d'oscillateur paramétrique. Justifier cette expression. Quel est le phénomène physique à l'origine de l'augmentation de l'énergie mécanique du système ?

3.7. Dans le plan de phase (θ en abscisses, $\dot{\theta}$ en ordonnées) quelle est l'équation de la trajectoire de phase entre le point (0) et le point (1) ? Représenter l'allure de cette courbe dans le plan de phase. Représenter la trajectoire de phase entre le point (1) et le point (2). Quelle est l'équation de la trajectoire de phase entre le point (2) et le point (3) ? Représenter l'allure de cette courbe dans le plan de phase.

Achever la construction de la trajectoire de phase. Commenter le résultat.

1476

23122

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques**

option : physique et électricité appliquées

composition d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique interdits

ASSERVISSEMENT DE VITESSE**Recommandations importantes.***Notations.*

Les conventions suivantes ont été adoptées dans l'énoncé concernant les grandeurs physiques et leurs transformées :

- Variables fonctions continues du temps : en minuscules ; *exemple* : $u_1(t)$;
- Leur valeur en régime continu établi : en majuscules ; *exemple* : U_1 ;
- Leur transformée de Laplace : en majuscules ; *exemple* : $U_1(p) = \mathcal{L}\{u_1(t)\}$;
- Leur grandeur complexe associée en régime harmonique : en majuscule soulignée : *exemple* : $\underline{U}_1(j\omega)$.

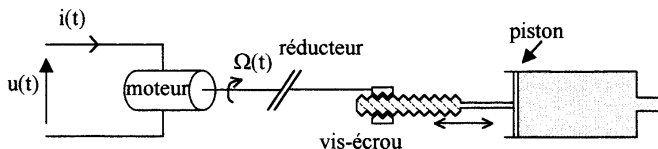
Les candidats veilleront à utiliser ces notations ; seule exception, la vitesse angulaire de rotation sera notée $\Omega(t)$ en régime variable pour éviter la confusion avec la pulsation ω du régime harmonique.

Les différentes parties du problème sont largement indépendantes.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en précisant les initiatives qu'il prend pour la rédaction de sa copie.

Présentation.

On étudie le dispositif de commande d'un moteur à courant continu de faible puissance chargé de régler la vitesse d'un piston (dans une pompe motorisée) à l'aide d'un réducteur de vitesse et d'un système vis-écrou.



La particularité de ce dispositif est de ramener sur l'arbre du moteur un couple de frottement constant C_f , mais dépendant des caractéristiques de la pompe.

Deux fonctionnements seront envisagés : l'un à avance rapide, à la vitesse nominale du moteur ($N_n = 7\,200 \text{ tr/min}$) avec deux sens de rotations possibles ; l'autre à vitesse lente ($N = 240 \text{ tr/min}$).

L'étude est divisée en quatre parties largement indépendantes :

- Étude d'un asservissement analogique.
- Étude d'une commande MLI.
- Identification des paramètres du moteur.
- Étude d'un asservissement numérique.

Contexte d'utilisation de la pompe (renseignements donnés à titre d'information mais non exploités dans le problème).

La pompe à piston est un élément d'une burette motorisée automatique. Celle-ci est elle-même un élément d'une chaîne de titrage volumétrique d'un laboratoire d'analyses chimiques. Son rôle consiste à ajouter un volume très précis d'un réactif dans un vase de réaction. Elle peut être couplée avec un appareil permettant de détecter l'équilibre d'une réaction chimique (mesure de pH, de potentiel Redox, ...).

La pompe à piston a un corps calibré en verre et un piston en téflon. Le piston est entraîné par le moteur à courant continu par l'intermédiaire d'un réducteur et d'un système vis-écrou. Le volume évacué, proportionnel au déplacement du piston, est mesuré avec précision.

Le fonctionnement peut se décomposer en deux phases :

- Une phase de remplissage de la burette à partir d'un réservoir contenant le réactif ; cette phase correspond à la descente du piston ; elle se fait à vitesse rapide.
- Une phase de dosage qui évacue le réactif vers le vase de réaction ; cette phase correspond à la montée du piston ; elle se fait à vitesse réglable. En effet, lorsqu'on est loin de l'équilibre de la réaction chimique, le dosage s'effectue à vitesse rapide ; lorsqu'on s'approche de l'équilibre, le dosage se fait à vitesse lente.

L'appareil doit mesurer le volume évacué (donc l'angle de déplacement du moteur) avec une très bonne précision ; la précision sur la vitesse de dosage n'est pas critique ; néanmoins, elle ne doit pas varier de plus de 10 % selon le corps de pompe utilisé.

Une vanne à 3 voies sans volume mort permet d'aiguiller le réactif pendant chaque phase.

Caractéristiques du moteur.

Moteur à courant continu à aimant permanent (données constructeur à utiliser dans les parties 1 et 2).

- Tension nominale : $U_n = 12 \text{ V}$.
- Courant nominal : $I_n = 0,3 \text{ A}$.
- Fréquence de rotation nominale : $N_n = 7\,200 \text{ tr/min}$.
- Résistance de l'induit : $R_m = 12 \Omega$.
- Inductance de l'induit : $L_m = 0,55 \text{ mH}$.
- Constante de vitesse (ou constante de couple) : $k = \frac{E}{\Omega} = \frac{C}{I} = 13.10^{-3} \text{ V.s.rad}^{-1}$.

Conditions d'utilisation du moteur.

- L'ensemble en mouvement a un moment d'inertie total ramené sur l'axe du moteur :

$$J = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ kg.m}^2.$$

- Couple résistant.

Les frottements fluides seront négligés ; l'ensemble des frottements est modélisable par un couple résistant ramené sur l'axe moteur, indépendant de la vitesse, mais pouvant varier selon le corps de pompe (tolérance sur le diamètre) entre deux valeurs C_{fm} et C_{fM} .

On posera :

$$C_{f\text{moy}} = \frac{C_{fm} + C_{fM}}{2}.$$

Cahier des charges.

La vitesse angulaire de rotation du moteur ne doit pas varier de plus de 10 % (par rapport à la valeur souhaitée) selon le corps de pompe utilisé.

La vitesse angulaire de rotation du moteur sera notée Ω et sera désignée de façon abrégée « vitesse du moteur ».

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE D'UN ASSERVISSEMENT ANALOGIQUE

I.1. Nécessité d'une régulation.

I.1.1. Calculer les valeurs souhaitées de la vitesse du moteur :

- en mode rapide Ω_{r0} ;
- en mode lent Ω_{l0} .

I.1.2. Une série de mesures sur des échantillons de pompe a permis de mesurer l'intensité absorbée par le moteur en régime établi dans différents cas :

L'intensité I peut varier entre deux valeurs $I_m = 0,1 \text{ A}$ et $I_M = 0,2 \text{ A}$. En déduire les valeurs de C_{fm} , C_{fM} et $C_{f\text{moy}}$.

Le moteur est soumis à une tension U continue réglable délivrée par un amplificateur de puissance linéaire.

I.1.3. Calculer les valeurs numériques U_r et U_l de la tension U permettant d'obtenir en régime établi les vitesses rapide et lente souhaitées dans le cas où le couple de frottement est égal à $C_{f\text{moy}}$.

I.1.4. Déterminer l'intervalle des vitesses prises par le moteur lorsque le couple de frottement varie entre C_{fm} et C_{fM} :

- en mode rapide (la tension U est égale à U_r);
- en mode lent (la tension U est égale à U_l).

I.1.5. Conclure : dans quel cas, une régulation est-elle nécessaire ?

L'asservissement étudié consiste en une régulation de vitesse par compensation de la chute de tension RI dans la résistance de l'induit ; le schéma est donné figure 1.

$$R_1 = 22 \text{ k}\Omega ; R_2 = 33 \text{ k}\Omega ; R_4 = 2,2 \Omega .$$

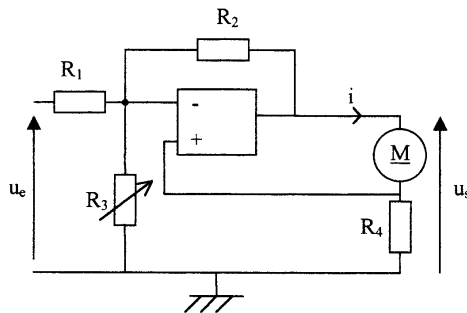


Figure 1

I.2. Étude des performances statiques.

L'amplificateur opérationnel est un amplificateur opérationnel de puissance supposé idéal, fonctionnant en régime linéaire. La tension u_e est une tension continue réglable négative.

I.2.1. Exprimer u_s en fonction de la tension u_e et de l'intensité i du courant dans le moteur.

I.2.2. En déduire l'expression de la vitesse Ω du moteur en régime établi en fonction de u_e et du couple de frottement C_f .

I.2.3. Pour quelle valeur R_{3a} de la résistance réglable R_3 , la vitesse est-elle indépendante du couple de frottement ?

Pour les trois questions suivantes, la résistance R_3 est réglée à la valeur $R_{3b} = 9 \text{ k}\Omega$.

I.2.4. Calculer la valeur de la tension u_c permettant d'obtenir la vitesse lente lorsque le couple de frottement est égal à $C_{f\text{moy}}$. Calculer également la valeur de la tension u_s .

I.2.5. Calculer alors les vitesses obtenues lorsque le couple de frottement varie entre $C_{f\text{m}}$ et $C_{f\text{M}}$. Calculer également les valeurs de la tension u_s .

I.2.6. Le cahier des charges est-il respecté ? Expliquer le principe de la régulation de vitesse.

I.3. Étude de la stabilité de l'asservissement.

On étudie le système de sortie $i(t)$ (intensité du courant dans l'induit du moteur), d'entrée $u_c(t)$, et d'entrée de perturbation $c_f(t)$ (couple de frottement). On utilisera la transformée de Laplace.

Le système bouclé peut être modélisé selon le schéma fonctionnel donné figure 2.

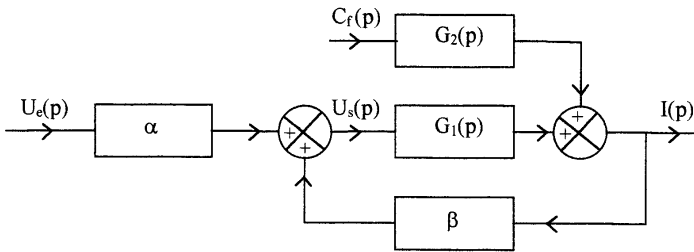


Figure 2

I.3.1. Exprimer α et β en fonction des résistances du montage.

I.3.2. Exprimer $G_1(p)$ et $G_2(p)$.

I.3.3. Montrer que $G_1(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$G_1(p) = \frac{G_{10} 2m \frac{p}{\omega_0}}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}.$$

Exprimer G_{10} , ω_0 et m en fonction de R_m , R_4 , J , k et L . Donner leur valeur numérique.

I.3.4. En déduire alors l'expression de $G_2(p)$ en fonction de ω_0 , m et d'un coefficient G_{20} .

I.3.5. Exprimer $I(p)$ en fonction de $U_c(p)$ et $C_f(p)$ sous la forme :

$$I(p) = G'_1(p) U_c(p) + G'_2(p) C_f(p).$$

Exprimer $G'_1(p)$ et $G'_2(p)$.

I.3.6. Montrer que $G'_1(p)$ peut se mettre sous la forme :

$$G'_1(p) = \frac{G'_{10} 2m' \frac{p}{\omega'_0}}{1 + 2m' \frac{p}{\omega'_0} + \left(\frac{p}{\omega'_0}\right)^2}.$$

Donner l'expression de G'_{10} , m' et ω'_0 en fonction de G_{10} , ω_0 , m , α et β .

I.3.7. En déduire l'expression de $G'_2(p)$.

I.3.8. Pour la valeur R_{3b} de R_3 donnée à la question I.2.3., calculer numériquement G'_{10} , m' et ω'_0 .

I.3.9.

- Montrer que ce système bouclé peut devenir un oscillateur; quelle est la valeur limite de R_3 conduisant à cette instabilité.
- Déterminer alors l'expression et la valeur numérique de la fréquence des oscillations.
- Pour quelles valeurs de R_3 , le système bouclé est-il stable? Conclure sur les limitations de cet asservissement.

I.3.10. Le système bouclé est initialement dans un état stable. Le couple de frottement est égal à $C_{f\text{moy}}$. La tension u_s est constante et égale à $U_{s0} = 2,46 \text{ V}$. On amène le système dans son état instable en agissant sur R_3 . Le système bouclé se comporte comme un oscillateur ainsi que la question précédente l'a prouvé. Le système est dans un état suffisamment proche de la limite de la stabilité pour que tous les signaux puissent être considérés sinusoïdaux (éventuellement avec une composante continue).

L'amplificateur opérationnel de puissance est limité en tension de sortie à $\pm U_{\text{smax}} = \pm 12 \text{ V}$ (lié à sa tension d'alimentation) et possède une limitation interne en courant à $\pm I_{\text{max}} = \pm 0,5 \text{ A}$.

- Déterminer la relation liant les amplitudes des composantes alternatives de $u_s(t)$ et $i(t)$.
- En déduire ce qui va fixer l'amplitude des oscillations en régime établi et déterminer les amplitudes en régime établi des composantes alternatives de $u_s(t)$, $i(t)$.
- Déterminer la relation liant les amplitudes des composantes alternatives de $i(t)$ et $\Omega(t)$; en déduire l'amplitude de la composante alternative de $\Omega(t)$.
- Représenter les formes d'ondes de $u_s(t)$, $i(t)$ et $\Omega(t)$ en concordance de temps.
- Déterminer alors la puissance totale fournie par l'amplificateur opérationnel.
- Déterminer la puissance dissipée par effet Joule dans le moteur; peut-elle entraîner une détérioration du moteur?

I.3.11. Le système bouclé étant dans un état stable, on applique un échelon de tension $\Delta u_c = -1 \text{ V}$ à partir d'une valeur initiale $U_{e0} = -2 \text{ V}$.

Le couple de frottement est constant et égal à $C_{f\text{moy}}$. Déterminer les valeurs initiale (à $t = 0^+$) et finale (lorsque $t \rightarrow \infty$) de la réponse $i(t)$.

I.3.12. Sans calculs, donner l'allure de la réponse $i(t)$ à l'échelon de tension Δu_c de la question précédente selon la valeur de R_3 ($R_3 \gg R_{3b}$; $R_3 \approx R_{3b}$; $R_{3a} < R_3 < R_{3b}$). En déduire une procédure de réglage de R_3 .

I.3.13. L'amplificateur opérationnel a un produit amplification-bande passante égal à 1 MHz ; déterminer s'il était justifié dans cette étude de le considérer comme idéal.

Après cette solution analogique, on propose d'étudier une solution alternative avec une régulation numérique de vitesse réalisée par un microcontrôleur possédant une sortie modulée en largeur d'impulsion.

DEUXIÈME PARTIE

ÉTUDE D'UN ÉTAGE DE « PUISSANCE »
À MODULATION DE LARGEUR D'IMPULSION

Le schéma de la commande moteur est donné figure 3. La tension d'alimentation est $V_{cc} = 12 \text{ V}$.

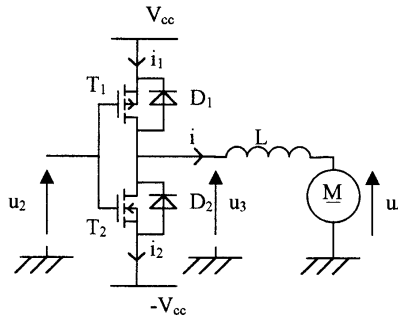


Figure 3

En fonctionnement à vitesse réglable (lente ou rapide), la tension u_4 est positive ainsi que la vitesse de rotation.

La tension de commande u_2 est donnée figure 4. Sa période est égale à $T = 256 \mu\text{s}$.

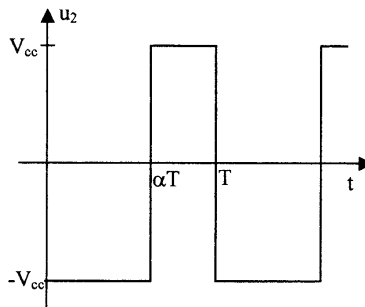


Figure 4

Les conditions d'étude de cette partie sont les suivantes :

- Vitesse lente ;
- Couple de frottement C_{froy} ;
- L'inductance de la bobine est choisie pour que le courant dans le moteur soit unidirectionnel.

Hypothèses simplificatrices :

- La chute de tension dans les transistors MOS est négligée (ils se comportent comme des interrupteurs parfaits).
- La bobine a une résistance nulle.
- La tension u_4 sera supposée continue et donc assimilée à sa valeur moyenne $\langle u_4 \rangle$.

- II.1. Indiquer en justifiant votre réponse si le montage proposé peut être considéré comme :
- un demi-pont en H ;
 - un amplificateur en classe B .
- II.2. Indiquer en justifiant si le transistor T_1 est à canal n ou p .
- II.3. Indiquer en justifiant si le transistor T_1 est à enrichissement ou à appauvrissement ; représenter la structure interne de T_1 en précisant le type de dopage de chaque zone.
- II.4. Préciser en justifiant l'influence de la résistance interne de la source fournissant la tension u_2 sur les durées de commutation de T_1 et T_2 .
- II.5. Exprimer la valeur moyenne $\langle u_3 \rangle$ de la tension $u_3(t)$ en fonction de α .
- II.6. Déterminer la valeur numérique du rapport cyclique α permettant d'obtenir la vitesse lente lorsque le couple de frottement est égal à $C_{f\text{moy}}$.
- II.7. Représenter l'allure du courant $i(t)$ en supposant que la valeur de l'inductance L de la bobine est la valeur minimale telle que le courant dans le moteur ne change pas de signe. En déduire les valeurs extrêmes prises par le courant $i(t)$.
- II.8. Déterminer cette valeur de l'inductance L de la bobine.
- II.9. Pour cette valeur de L (limite de la conduction unidirectionnelle), représenter en concordance de temps la tension u_3 , les intensités i du courant d'induit et des courants i_1 et i_2 fournis par les alimentations. On indiquera sur les axes les valeurs numériques remarquables. Indiquer également pour chaque phase, quels composants sont passants (parmi T_1, D_1, T_2, D_2) .
- II.10. Que se passerait-il au niveau du courant $i(t)$ si la valeur de L était plus faible ?
- II.11. Déterminer les puissances moyennes fournies par chacune des alimentations. En déduire la nécessité de la réversibilité d'une des deux alimentations.
- II.12. En pratique, les alimentations dans cette gamme de puissance ne sont pas réversibles : décrire qualitativement le problème généré par ce montage au niveau de l'alimentation négative dans l'hypothèse d'un schéma classique tel que celui donné figure 5 et en supposant que cette alimentation n'alimente pas d'autres circuits.

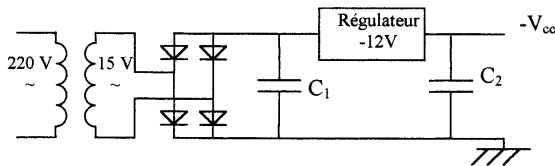


Figure 5

- II.13. En réalité, l'alimentation positive fournit une puissance moyenne au reste de l'appareil égale à $P_1 = 2 \text{ W}$ tandis que l'alimentation négative fournit une puissance moyenne $P_2 = 0,2 \text{ W}$; montrer que l'inversion des bornes du moteur permettrait de résoudre le problème de la réversibilité (on rappelle que l'utilisation dans le sens de rotation négatif se fait toujours à vitesse maximale).

TROISIÈME PARTIE

IDENTIFICATION DU PROCESSUS

Cette partie a pour but la détermination expérimentale des paramètres suivants de l'ensemble bobine + moteur du schéma de la figure 3 :

- k constante de vitesse ;
- J moment d'inertie de l'ensemble en mouvement ;
- L inductance totale (bobine + induit du moteur) ;
- R résistance totale (bobine + induit du moteur).

Pour cela, on applique au dipôle étudié un échelon de tension dynamique $\Delta u_3 = 2 \text{ V}$ superposé à une tension continue $U_{30} = 4 \text{ V}$.

L'ensemble bobine + moteur est ici alimenté par un amplificateur de puissance linéaire supposé idéal.

Les courbes relevées sont données figure 6 (au verso de cette page) ; l'identification s'appuiera uniquement sur les valeurs numériques encadrées (supposées mesurées avec une précision suffisante).

III.1. En comparant les valeurs du courant dans le moteur en régime établi, montrer que les relevés obtenus prouvent que le frottement fluide est négligeable.

III.2. À partir des équations du moteur en régime établi, et grâce aux relevés de la figure 6, déterminer les valeurs numériques des paramètres R et k ainsi que le couple de frottement C_f .

III.3. **Détermination de la constante de temps dominante τ_1 .**

On considère l'ensemble bobine + moteur (entrée u_3 , sortie Ω) comme un système d'ordre 1.

III.3.1. Montrer que cette hypothèse revient à négliger l'inductance de l'ensemble moteur + bobine.

III.3.2. Dans cette hypothèse, établir l'équation différentielle régissant $\Omega(t)$; on fera apparaître la constante de temps dominante notée τ_1 .

III.3.3. Déterminer à partir des relevés expérimentaux la valeur numérique de τ_1 .

III.4. **Détermination de la constante de temps secondaire τ_2 .**

III.4.1. Déterminer l'expression des transmittances opérationnelles :

$$H_1(p) = \frac{\Delta \Omega(p)}{\Delta U_3(p)} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{\Delta i(p)}{\Delta U_3(p)}$$

(avec $\Delta i(t) = i(t) - I_{\text{initial}}$; $\Delta \Omega(t) = \Omega(t) - \Omega_{\text{initial}}$).

III.4.2. Quelle condition doivent vérifier les paramètres de l'ensemble moteur + bobine pour pouvoir mettre les transmittances sous la forme suivante :

$$H_1(p) = \frac{\frac{1}{k}}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{1}{R} \frac{(\tau_1 + \tau_2) p}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

Exprimer le produit $\tau_1 \tau_2$ et la somme $(\tau_1 + \tau_2)$ en fonction des paramètres de l'ensemble moteur + bobine.

III.4.3. Montrer que la réponse de $\Delta i(t)$ à un échelon dynamique de tension a pour expression :

$$\Delta i(t) = \frac{\Delta u_3}{R} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$$

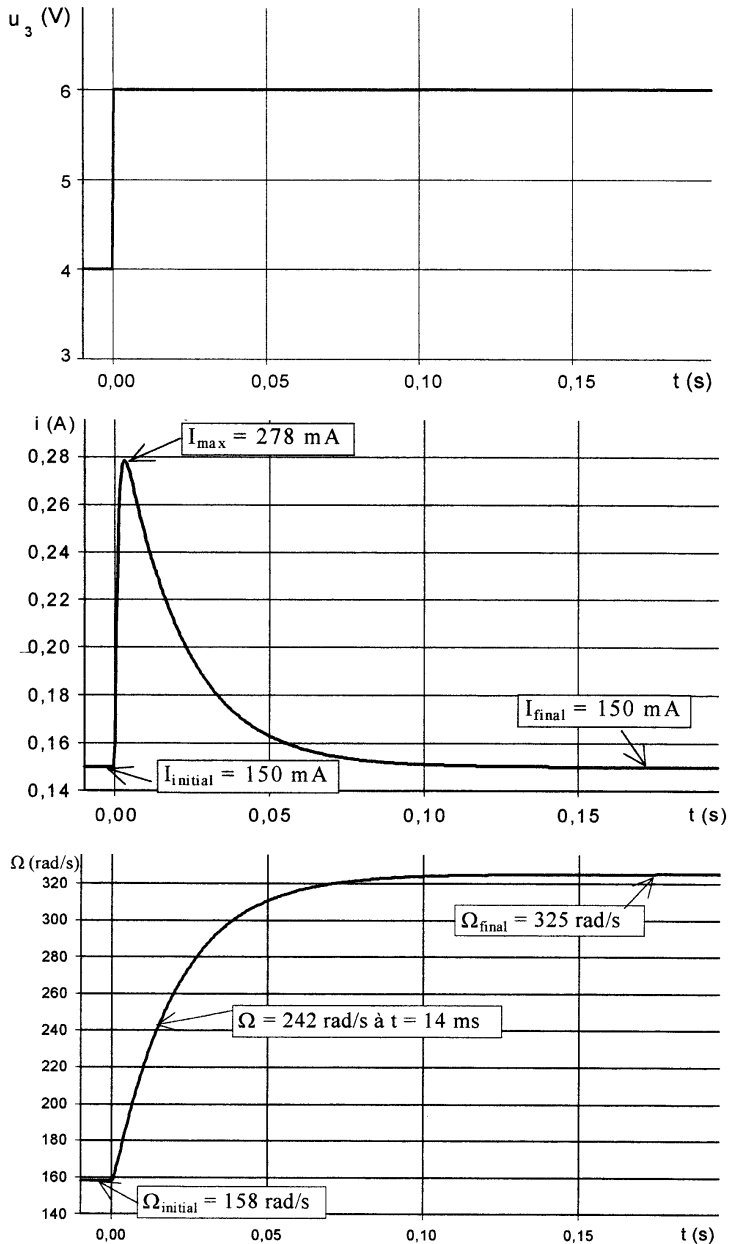


Figure 6

III.4.4. **Première méthode** : détermination de $x = \frac{\tau_1}{\tau_2}$ à partir de la mesure de I_{\max} .

a. Déterminer une équation liant I_{\max} , I_{initial} , $x = \frac{\tau_1}{\tau_2}$, Δu_3 et R .

b. Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\ln x}{x-1} = \ln A \quad \text{avec} \quad A = \frac{R(I_{\max} - I_{\text{initial}})}{\Delta u_3}$$

c. Montrer que $x = 20$ est solution de cette équation pour les relevés de la figure 6.

d. En déduire la valeur de τ_2 (la valeur de τ_1 déterminée dans la partie III.3. sera supposée valide).

e. On précise quelques valeurs prises par la fonction $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{\ln x}{x-1}$:

x	10	20	30	40	50	60
f(x)	-0,16	-0,11	-0,084	-0,07	-0,06	-0,053

En déduire l'influence d'une erreur de 2 % (par valeur positive) sur la mesure de I_{\max} sur la détermination de τ_2 .

III.4.5. **Deuxième méthode**.

La méthode précédente nous a donné l'ordre de grandeur de τ_2 et du rapport $\frac{\tau_1}{\tau_2}$.

a. Que peut-on dire des décroissances relatives de $e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ et de $e^{-\frac{t}{\tau_2}}$ pour $t > 3\tau_2$?
En déduire une simplification de l'expression de $\Delta i(t)$ (question III.4.3.) pour $t > 3\tau_2$.

b. Montrer que $\ln(\Delta i(t))$ est alors une fonction affine du temps : $\ln(\Delta i(t)) = B - Ct$; exprimer C en fonction de τ_1 et B en fonction de Δu_3 , R , τ_1 et τ_2 .

c. On donne un tableau de valeurs mesurées de $i(t)$:

t (ms)	1	2	5	10	20	30
i (mA)	242	271	272	246	208	185

Compte tenu de la valeur de τ_2 estimée par la première méthode, quelles sont les valeurs de ce tableau vérifiant l'approximation précédente?

En déduire les valeurs de τ_1 et τ_2 .

d. Déterminer l'influence d'une erreur de 2 % (par valeurs positives) sur les mesures de $i(t)$ sur la détermination de τ_2 .

III.4.6. Comparer la sensibilité aux erreurs de mesures des deux méthodes de détermination de τ_2 .

III.5. Déduire de l'étude les valeurs numériques de L et J .

QUATRIÈME PARTIE

ASSERVISSEMENT NUMÉRIQUE

On utilisera dans cette partie les séquences de nombres et le formalisme de la transformée en z :

- Une séquence de nombres sera notée sous la forme $\{e(n)\}$;
- Sa transformée en z sera $E(z) = Z\{e(n)\}$;
- L'échantillon de rang n sera noté $e(n)$.

On trouvera en annexe les transformées en z de quelques séquences de nombres.

Les variables continues du temps seront remplacées par des séquences de nombres : l'échantillon de rang n de la séquence $\{x(n)\}$ est égale à la valeur numérique de la grandeur $x(t)$ à l'instant $t = nT_c$ avec T_c , la période d'échantillonnage.

Le schéma fonctionnel de la boucle d'asservissement numérique est donné figure 7.

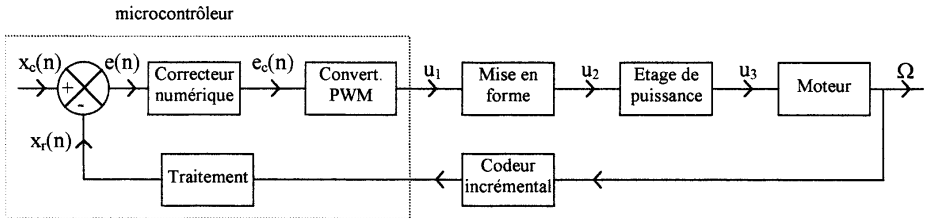


Figure 7

- La consigne de vitesse $x_c(n)$ est une consigne numérique élaborée par le microcontrôleur.
- La sortie PWM fournit une tension rectangulaire dont le rapport cyclique α varie entre 0 et 1 ; sa grandeur d'entrée **signée** $e_c(n)$ est codée sur 10 bits. (Une grandeur signée sur 4 bits peut prendre des valeurs entières entre -8 et $+7$).
- L'étage de mise en forme effectue une translation des niveaux de tension pour assurer une commande correcte de l'étage de puissance.
- La mesure de vitesse est effectuée par un codeur incrémental associé à un traitement logiciel ; $x_r(n)$ est une image numérique **signée** de la vitesse angulaire codée sur 12 bits ; la vitesse maximale mesurable sans dépassement est égale à $\Omega_m = 1\,000$ rad/s.
- La fréquence d'échantillonnage est notée F_c ; sa période est $T_c = 5$ ms.
- On supposera que le couple résistant dû aux frottements C_f varie très lentement par rapport aux constantes de temps caractéristiques du processus. On considérera dans cette partie que C_f varie entre $1,2 \cdot 10^{-3}$ et $2,4 \cdot 10^{-3}$ Nm selon le corps de pompe utilisé.
- On rappelle les valeurs des vitesses « rapide » $\Omega_r = 754$ rad.s⁻¹ et « lente » $\Omega_l = 25,1$ rad.s⁻¹.

IV.1. Réponse indicielle d'un système numérique.

Considérons un système numérique d'entrée $\{x(n)\}$ et de sortie $\{y(n)\}$, de transmittance $T(z)$ (fig. 8) avec :

$$T(z) = T_0 \frac{1 - A}{z - A}$$

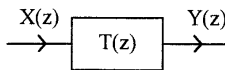


Figure 8

IV.1.1. Écrire l'équation aux différences liant les séquences $\{x(n)\}$ et $\{y(n)\}$.

IV.1.2. Quel est l'ordre de ce système ?

IV.1.3.

- a. On applique en entrée une séquence échelon unité. Exprimer la transformée en z de la réponse, $Y(z)$ et la décomposer en éléments simples.
- b. En déduire l'expression de la réponse indicielle $\{y(n)\}$ en fonction de réponses élémentaires.
- c. Donner l'allure de la représentation graphique de la séquence $\{y(n)\}$ avec $A = 0,78$ et $T_0 = 1$ (on pourra préciser les premières valeurs ainsi que la valeur asymptotique de $y(n)$).

IV.1.4. Montrer que ce système a une réponse indicielle analogue à celle d'un système analogique de transmittance $T(p) = \frac{T_0}{1 + p\tau}$ en considérant les valeurs de la sortie aux instants $t = nT_e$.

Quelle relation lie A , τ et T_e ?

IV.2. Modélisation du système bouclé.

L'asservissement numérique peut être modélisé sous la forme donnée figure 9 avec :

$$H(z) = H_0 \frac{1 - a}{z - a} \quad H_0 = 1,95 \text{ rad.s}^{-1} \quad a = 0,78 \quad K_2 = 2,05 \text{ s.rad}^{-1}$$

$$H'(z) = K_3 \frac{1 - a}{z - a} \quad K_3 = -9,72 \cdot 10^4 \text{ rad.N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

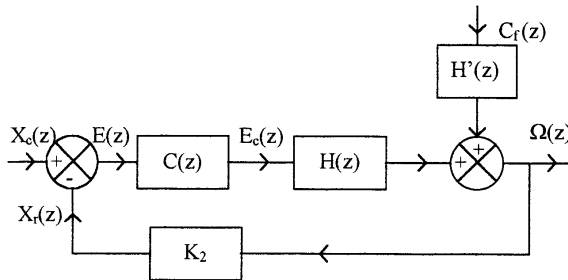


Figure 9

IV.2.1. Pour obtenir l'expression de $H(z)$ donnée, on a négligé l'influence de la constante de temps τ , déterminée dans la partie III. Justifier ce choix, compte tenu de la valeur de T_e et des conclusions de la question IV.1.4.

IV.2.2. En utilisant l'étude faite dans le IV.1. ainsi que les résultats obtenus dans la partie III., justifier les valeurs numériques de H_0 et a .

IV.2.3. En utilisant les résultats obtenus dans la partie III., justifier la valeur de K_3 .

IV.2.4. Justifier la valeur de K_2 .

IV.2.5. Donner la résolution de réglage de la vitesse (au niveau de la commande) ; est-ce compatible avec le cahier des charges ?

IV.3. Correction proportionnelle.

La transmittance du correcteur numérique est une constante $C(z) = C_0$.

- IV.3.1 Quelle valeur doit-on donner à C_0 pour que la variation de vitesse du moteur due à la variation du couple de frottements reste inférieure à $\Delta\Omega = \pm 2,5 \text{ rad.s}^{-1}$?
- IV.3.2. Pour cette valeur de C_0 , déterminer les valeurs x_{cr} et x_{cl} de la consigne numérique x_c pour obtenir les vitesses rapide et lente lorsque le couple résistant est égal à sa valeur moyenne $C_{f moy}$.
- IV.3.3. Exprimer la condition sur ses pôles pour qu'un système numérique de transmittance $T(z)$ soit stable.
- IV.3.4. Déterminer les valeurs de C_0 pour lesquelles ce système asservi est stable.
- IV.3.5. Conclure sur la possibilité d'avoir une erreur statique conforme au cahier des charges et une stabilité suffisante ; sur quel autre paramètre que C_0 pourrait-on agir pour améliorer la stabilité ?

IV.4. Correction proportionnelle-intégrale.

La transmittance du correcteur est $C(z) = \frac{z-b}{z-1}$ avec $b = 0,75$. Ce correcteur sera utilisé dans toute la suite du problème.

- IV.4.1. Donner l'équation aux différences liant les séquences de nombres $\{e(n)\}$ et $\{e_c(n)\}$.
- IV.4.2. Déterminer l'expression de l'erreur statique due au couple résistant.
- IV.4.3. Déterminer les valeurs x_{cr} et x_{cl} de la consigne numérique x_c pour obtenir les vitesses rapide et lente lorsque le couple résistant est égal à sa valeur moyenne $C_{f moy}$. Déterminer également les valeurs e_{cr} et e_{cl} de la sortie du correcteur e_c en régime établi.
- IV.4.4. Démontrer que le système asservi est stable.

IV.5. Influence de la troncature des grandeurs numériques.

Les nombres $e_c(n)$ et $x_r(n)$ sont des entiers. Le traitement logiciel et l'algorithme de calcul du correcteur ont pour conséquence un arrondi par troncature.

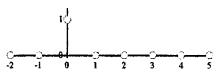

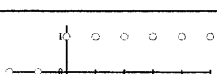
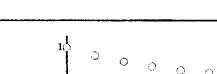
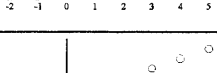
- IV.5.1. Déterminer l'erreur statique maximale sur la vitesse Ω liée à l'arrondi de x_r .
- IV.5.2. En utilisant l'équation aux différences du correcteur, montrer que l'asservissement peut présenter une erreur statique liée au coefficient b . Déterminer la valeur numérique maximale de l'erreur sur la vitesse du piston pour $b = 0,75$. Est-elle compatible avec le cahier des charges ?
Indiquer comment évolue cette erreur lorsqu'on modifie la valeur de b .
- IV.5.3. Le moteur étant initialement arrêté, le programme fixe la consigne $x_c(n)$ à la valeur $X_{c0} = 51$. Le couple de frottement est égal à $C_{f moy}$. Déterminer la durée au bout de laquelle le moteur commence à tourner.
- IV.5.4. Donner l'équation aux différences traduisant le comportement du processus $(x_r(n))$ en fonction de $e_c(n)$ et $c_r(n)$.
- IV.5.5. Le moteur étant initialement en régime établi avec une erreur supposée nulle, le programme fait passer la consigne de la valeur $X_{c0} = 51$ à la valeur $X_{c1} = 102$. Le couple de frottement est égal à $C_{f moy}$.
Déterminer les valeurs successives des 4 premiers échantillons des grandeurs $x_r(n)$ et $e_c(n)$.
En déduire la durée de la réponse indicielle.

ANNEXES

1. Tables de transformées de Laplace.

$f(t)$ (nulle pour $t < 0$)	$F(p)$
$u(t)$ échelon unité	$\frac{1}{p}$
$t.u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{p+a}$

2. Tables de transformées en z.

séquence de nombres $\{x(n)\}$			transformée en z $X(z)$
représentation	nom	notation	
	impulsion	$\{\delta(n)\}$	1
	impulsion retardée	$\{\delta(n-k)\}$	z^{-k}
	échelon unité	$\{u(n)\}$	$\frac{z}{z-1}$
	exponentielle	$\{a^n u(n)\}$	$\frac{z}{z-a}$
	rampe	$\{n u(n)\}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$

3. Théorème de la valeur finale.

La valeur finale d'une séquence de nombres $\{x(n)\}$ convergente est :

$$\lim_{(n \rightarrow \infty)} x(n) = \lim_{(z \rightarrow 1)} (z-1) X(z).$$

1477-A

23123

*repère à reporter sur la copie***SESSION DE 2002****concours externe
de recrutement de professeurs agrégés****section : sciences physiques**

option : physique et électricité appliquées

problème d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique interdits.

AVERTISSEMENT

Les trois parties de l'étude sont indépendantes.

Les grands chapitres de chaque partie sont eux-mêmes largement découplés les uns des autres, mais il est fortement conseillé de les analyser dans l'ordre de leur numérotation.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit son raisonnement en précisant les initiatives qu'il prend pour élaborer sa solution.

TRACTION (ET DÉMARRAGE) D'UNE RAME DU TGV ATLANTIQUE (TGV A)

Caractéristiques générales (fig. 1) :

- Une rame du TGV A comprend deux motrices et dix remorques ; longueur totale : 238 m ; masse totale en charge : 490 tonnes (dont 68 tonnes par motrice).
- Alimentation électrique : entre caténaire et rails, sous 25 kV, 50 Hz (ou 1 500 V, en « continu »).
- Vitesse de croisière : 300 km/h ; puissance nominale : 8 800 kW ; puissance maximale (1 h) : 10,4 MW.
- Traction : la rame est suspendue sur quinze boggies, onze porteurs et quatre boggies moteurs, soit huit essieux moteurs entraînés par huit moteurs synchrones triphasés autopilotés (quatre par motrice).
- Le freinage se fait par dissipation de l'énergie fournie par les machines synchrones (fonctionnant en alternateurs) dans des rhéostats (R_r), par freins à disques sur tous les essieux ; l'arrêt d'urgence, enclenché à vitesse nominale (300 km/h) et dans les pires conditions [plus de liaison caténaire (les circuits auxiliaires sont alimentés par batteries ou par l'énergie récupérée), un boggie (deux machines synchrones) hors service, déclivité maximale], doit être obtenu en moins de 3 500 mètres.

Équipement d'une motrice (fig 1) :

- La motrice arrière (en général) capte, par un pantographe, la tension de la caténaire, l'autre motrice étant alimentée par une ligne de toiture (en 1 500 V continu, les deux pantographes sont utilisés).
- Un transformateur alimente cinq ponts redresseurs mixtes : deux couples de ponts mixtes, en série, alimentent deux couples d'onduleurs triphasés en série, connectés aux moteurs synchrones d'un même boggie ; le cinquième pont mixte alimente les fonctions auxiliaires, dont les excitations des quatre moteurs synchrones, commandées deux à deux par des hacheurs.
- Des dispositifs supplémentaires assurent le filtrage (A) du courant appelé sur la caténaire (pour améliorer le facteur de puissance et réduire le parasitage des transmissions), ainsi que la commutation forcée (A') des onduleurs, aux basses vitesses.
- Des calculateurs élaborent en temps réel le pilotage des composants ou des fonctions, de façon à respecter les consignes d'allure du conducteur ou les consignes de signalisation captées sur la voie.

La première partie analyse le transfert d'énergie entre le sol (caténaire) et les chaînes d'action (onduleurs-moteurs).

La deuxième partie porte sur la modélisation de la chaîne de motorisation.

La dernière partie simule quelques services de la rame.

PREMIÈRE PARTIE

PONT MIXTE MONOPHASÉ

Le pont mixte monophasé de la figure 2, alimenté par une tension sinusoïdale d'expression : $v(t) = V\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t)$ {où $V > 0$ }, débité dans une charge qui impose un courant d'intensité constante : $i_s(t) = \text{Cte} = I_s > 0$ {dans les conventions de la figure 2}.

Les composants sont supposés parfaits et les thyristors sont pilotés avec un retard angulaire α (par rapport à leur amorçage naturel).

- 1.1. Au régime permanent établi, déterminer (en justifiant les réponses) sur une période $\{0 \leq t < T, \text{ où } T = \frac{2\pi}{\omega}\}$ de $v(t)$ et pour une valeur quelconque de α $\{0 \leq \alpha < \pi\}$:
 - 1.1.a. Les dates particulières de cette période où une cellule est susceptible de commuter ;
 - 1.1.b. Le schéma électrique (linéaire) équivalent au convertisseur pendant les intervalles limités par ces dates ;
 - 1.1.c. Les chronogrammes des grandeurs cinétiques d'état décrivant l'onde d'entrée $[v(t); i_s(t)]$ et l'onde de sortie $[v_s(t); i_s(t)]$ {dessinés, sur le document-réponse n° 1, pour : $\alpha = \frac{\pi}{6}$ }.
- 1.2. En déduire, dans le cas général où la valeur du retard α est quelconque {les solutions littérales étant exprimées en fonction de V, I_s, ω et α } :
 - 1.2.a. La valeur moyenne V_s et la valeur efficace V_{eff} de $v_s(t)$;
 - 1.2.b. La décomposition harmonique de $v_s(t)$; on cherche à l'exprimer sous la forme :

$$v_s(t) = V_s + \sum_{n=1}^{+\infty} \{V_{sn} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(n\omega_s t + \psi_{sn})\}$$

{où ω_s est la pulsation du terme fondamental de $v_s(t)$ et n le rang de la composante sinusoïdale}.
On montrera que les coefficients a_n et b_n de :

$$v_s(t) = V_s + \sum_{n=1}^{+\infty} \{a_n \cdot \cos(n\omega_s t) + b_n \cdot \sin(n\omega_s t)\}$$

s'expriment :

$$a_n = -\frac{2 \cdot V \cdot \sqrt{2}}{(4 \cdot n^2 - 1) \cdot \pi} \cdot (1 + \cos(\alpha) \cdot \cos(2 \cdot n \cdot \alpha) + 2 \cdot n \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(2 \cdot n \cdot \alpha))$$

et :

$$b_n = \frac{2 \cdot V \cdot \sqrt{2}}{(4 \cdot n^2 - 1) \cdot \pi} \cdot (2 \cdot n \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(2 \cdot n \cdot \alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(2 \cdot n \cdot \alpha))$$

Déterminer alors les expressions littérales de V_{sn} et ψ_{sn} et montrer que, si on note V_{s0} la valeur littérale de V_s lorsque : $\alpha = 0$, il vient :

$$V_{sn} = \frac{V_{s0}}{(4 \cdot n^2 - 1)} \cdot \sqrt{1 + \cos(\alpha) \cdot \cos(2 \cdot n \cdot \alpha) + 2 \cdot n \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(2 \cdot n \cdot \alpha) + \frac{(4 \cdot n^2 - 1)}{2} \cdot \sin^2(\alpha)}$$

- 1.2.c. Conclure quant à l'influence de la valeur du retard α {à : $V = \text{Cte}$ } sur celle de V_s et sur le spectre de $v_s(t)$ {on limitera cette dernière analyse aux faibles valeurs de α , par exemple la plage : $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{8}$, et on pourra s'appuyer sur les résultats de l'annexe 1, qui donne les treize premiers termes de la décomposition de $v_s(t)$ pour quatre valeurs du retard α $\{\alpha = 0, \frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{12} \text{ et } \frac{\pi}{8} \text{ (radian)}\}$. Y a-t-il intérêt à filtrer les effets de la tension $v_s(t)$ {l'onduleur de charge étant un onduleur courant-tension} ?

- 1.2. *Application* : la maille comprenant deux ponts mixtes {alimentés par des tensions sinusoïdales de fréquence : $f = 50$ Hz et de valeur efficace : $V = 1\,800$ V, commandés avec le même retard angulaire α }, la bobine de lissage {d'inductance L_B et de résistance : $R_B = 104$ m Ω } et deux groupes « onduleur-moteur-réducteur-essieu-roues » {chacun développant une puissance mécanique utile : $P_{mu} = 1\,100$ kW avec un rendement total [pertes d'excitation exclues] de valeur : $\eta = 96,5$ %, la moitié des pertes ainsi prises en compte étant dues à l'effet Joule}, est parcourue {contact K_F fermé} par le courant d'intensité $i_s(t)$, d'amplitude moyenne : $I_s = 750$ A, lissé de sorte que l'amplitude efficace de chaque composante sinusoïdale n'exécède pas 5 % de I_s .

On admettra que chaque chaîne « onduleur-moteur... » est énergétiquement équivalente, côté alimentation, à un dipôle $R_{OM} - E_{OM}$ (voir fig. 3) et on négligera les pertes fer des machines.

Établir :

- 1.2.A.a. la valeur numérique des éléments R_{OM} et E_{OM} lors de ce service ;
 1.2.A.b. la valeur du retard à l'amorçage (α) qui conduit à ce fonctionnement ;
 1.2.A.c. la valeur de l'inductance L_B qui permet d'avoir alors :

$$I_{s1ef} = \frac{I_s}{20};$$

- 1.2.A.d. les amplitudes efficaces I_{s2ef} et I_{s3ef} des composantes $i_{s2}(t)$ et $i_{s3}(t)$ {pour la valeur de L_B établie précédemment}.

- 1.3. Onde d'entrée d'un pont redresseur : $v(t)$; $i_c(t)$.

À partir des chronogrammes établis au 1.1.c. {et dans le cas général où la valeur du retard α est quelconque}, établir les expressions littérales {en fonction de V , I_s , ω et α } :

- 1.3.a. de la valeur efficace I_{cef} de $i_c(t)$;
 1.3.b. de la puissance apparente S_e développée à l'entrée du pont ;
 1.3.c. de la puissance moyenne P_e {comptée dans la convention de mesure de la figure 4} ;
 1.3.d. de la valeur efficace I_{e1} de la composante fondamentale $i_{e1}(t)$ de $i_c(t)$ {on pourra démontrer que le flux d'énergie mesuré par P_e ne peut être transporté que par cette composante dont on détermine facilement le déphasage φ_{e1} par rapport à $v(t)$ } ;
 1.3.e. de la puissance réactive Q_e {celle qui traduit un flux d'énergie « réactive » régi par le théorème de Boucherot} ;
 1.3.f. de la puissance déformante D_e ;
 1.3.g. du facteur de puissance de l'onde d'entrée du pont f_{pe} .

- 1.3. *Application* : soit le fonctionnement :

$$V = 1\,800 \text{ V}, f = 50 \text{ Hz}, \alpha = \frac{\pi}{8} \text{ rad}, I_s = 750 \text{ A}.$$

- 1.3.A.a. Calculer numériquement : I_{cef} , S_e , P_e , I_{e1} , Q_e , D_e et f_{pe} .

On souhaite améliorer le facteur de puissance de l'onde fournie par le secondaire du transformateur {pour réduire l'intensité du courant capté par le pantographe} en disposant un dipôle série $L_A - C_A$ en parallèle sur l'entrée du pont mixte (cf. fig. 4).

- 1.3.A.b. Quelle relation doit lier les valeurs L_A et C_A pour que la composante harmonique de rang 3 de $i_c(t)$ ne soit plus fournie par le transformateur ? {On montrerait que $i_c(t)$ ne comporte que des composantes harmoniques de rangs impairs et on admettra que l'amplitude efficace de la composante de rang k (k entier impair) s'exprime :

$$I_{ek} = \frac{2\sqrt{2}}{k\pi} \cdot \left| \cos\left(\frac{k\alpha}{2}\right) \right| \cdot I_s.$$

- 1.3.A.c. Comme il reste un degré de liberté dans le choix de L_A et C_A , montrer qu'on peut l'utiliser pour fournir l'énergie réactive reçue par le pont mixte {c'est-à-dire faire en sorte que la composante fondamentale $i_1(t)$ de $i(t)$ soit en phase avec $v(t)$ }.

- 1.3.A.d. Que valent alors L_A et C_A , ainsi que les valeurs efficaces des composantes de rangs 1 et 3 de $i(t)$?

1.3.A.e. En supposant (pour simplifier l'analyse) que le dipôle $L_A - C_A$ n'a aucune influence sur les autres composantes de l'intensité $i_s(t)$ {que l'on retrouve donc inchangées au niveau de $i(t)$ }, en déduire l'intensité efficace I_{er} de $i(t)$ et la valeur du facteur de puissance f_p de l'onde fournie par le secondaire du transformateur. Conclusion ?

1.3.A.f. En pratique, les deux ponts mixtes d'une maille ne sont pas commandés avec des retards de même valeur; la stratégie de pilotage est la suivante :

- pour produire une tension $u_s(t)$ de valeur moyenne U_s comprise entre 0 et V_{s0} , on ne commande qu'un pont mixte avec un retard réglable, l'autre étant privé de signaux d'amorçage;
- pour produire U_s telle que : $V_{s0} \leq U_s < 2.V_{s0}$, l'un des ponts est piloté à retard nul et on règle le retard angulaire du second.

Indiquer dans ces conditions :

- le comportement du pont non commandé quand : $0 \leq U_s < V_{s0}$;
- l'allure du chronogramme $u_s(t)$ dans les deux cas : $0 \leq U_s < V_{s0}$ et $V_{s0} \leq U_s < 2.V_{s0}$;
- la valeur des retards à générer, dans cette stratégie, pour obtenir la même valeur de U_s que lorsque les deux ponts sont commandés avec le même retard : $\alpha = \frac{\pi}{8}$ rad.

1.4. Pilotage et modélisation du pont redresseur.

1.4.a. Montrer que la commande des composants (thyristors) d'un pont redresseur ne peut être faite qu'au synchronisme de la tension $v(t)$ à redresser, c'est-à-dire rigoureusement à la même fréquence f {on pourra aborder le problème par l'absurde : que se passerait-il si la commande des thyristors était élaborée à partir d'un signal de référence $e_R(t)$, périodique mais de période :

$$T_R \neq T = \frac{1}{f} ?$$

1.4.b. Indiquer le principe général de la commande des thyristors d'un pont redresseur.

1.4.c. La commande du pont mixte est pilotée par un signal analogique $e(t)$ {avec : $e \geq 0$ } et génère le retard angulaire α de façon que :

- si : $0 \leq e < e_M$, alors : $\alpha = \text{Arc cos} \left(2 \cdot \frac{e}{e_M} - 1 \right)$;
- si : $e \geq e_M$, alors : $\alpha = 0$.

En déduire la relation liant la valeur moyenne V_s de $v_s(t)$ au signal de pilotage $e(t)$ {montrer qu'elle s'écrit sous la forme $V_s = A.e$, en précisant l'expression de A en fonction de V , e_M ...}.

1.4.d. À quelles conditions la chaîne d'action comprise entre le signal $e(t)$ et la tension « continue » V_s délivrée par le redresseur pourra-t-elle être assimilée à un dispositif linéaire de transmittance A ?

DEUXIÈME PARTIE

MOTEUR SYNCHRONE AUTOPILOTÉ

Remarque : la portion de ligne où est établie l'onde unidirectionnelle qui transporte l'énergie entre les ponts redresseurs et les onduleurs commandant les moteurs synchrones assure (du fait du théorème de Parseval) une désynchronisation entre l'onde redressée et celle qui alimente l'un des moteurs synchrones ; de ce fait, le choix d'une seconde origine des temps (arbitraire, comme la précédente) ne peut présenter d'inconvénient, dès lors que l'on s'interdit d'évaluer les phases relatives des tensions $v(t)$ et $v_M(t)$.

2.1. Onduleur de courant assisté, triphasé, à thyristors.

Soit à analyser l'onduleur de courant de la figure 5 où :

- la machine synchrone est assimilable à une source de tensions triphasées d'expressions (avec la nouvelle origine des temps choisie) :

$$v_{M1}(t) = V_M \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega_M \cdot t),$$

$$v_{M2}(t) = V_M \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega_M \cdot t - \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$v_{M3}(t) = V_M \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega_M \cdot t - \frac{4\pi}{3}\right),$$

{où ω_M est liée à la pulsation de rotation de la machine et avec : $V_M \geq 0$ };

- les thyristors sont supposés parfaits, commandés symétriquement et avec un même retard angulaire {noté β } par rapport à leur amorçage naturel ;
- la source de courant alimentant l'entrée de l'onduleur produit {au régime permanent} un courant ininterrompu $\{\forall t : i_s(t) > 0\}$ dont on supposera l'intensité constante : $i_s(t) = Cte = I_s > 0$.

On se propose, dans cette question, d'étudier rapidement le fonctionnement de ce convertisseur lors d'un régime permanent.

2.1.a. Que signifie l'expression « onduleur assisté » ? Quelle contrainte théorique impose le choix de ce type de convertisseur ? Quels éléments du schéma (fig. 5) traduisent la prise en compte de cette contrainte ?

2.1.b. Établir qu'à chaque instant il y a nécessairement un thyristor – au moins – en conduction dans chacun des deux commutateurs de trois thyristors, $[T_1 - T_2 - T_3]$ et $[T_1' - T_2' - T_3']$.

En supposant (hypothèse à vérifier ultérieurement) qu'avant l'amorçage d'un thyristor bloqué, c'est le dernier composant commandé du même commutateur qui est en conduction, établir pour un élément, par exemple T_1 (puis généraliser rapidement aux cinq autres) :

2.1.c. la date de son amorçage naturel {on désignera par t_{nk} la date à partir de laquelle le thyristor T_k est amorçable} et la durée pendant laquelle il est amorçable ; en déduire la plage des valeurs de β $\{0 \leq \beta \leq 2 \cdot \pi\}$ à générer par le dispositif de pilotage ;

2.1.d. la date {notée t_{nk} pour le composant T_k } à laquelle il reçoit la première impulsion de commande {générée avec le retard angulaire β } ;

2.1.e. que la commande du thyristor T_k à la date t_{nk} provoque son amorçage {si β satisfait à la condition établie en 2.1.c.}, lequel amorçage provoque l'ouverture forcée du composant T_{k-1} {composant conducteur avant l'amorçage de T_k et pour le même commutateur}, laquelle ouverture assure la fermeture de T_k {même après disparition éventuelle des impulsions de pilotage}, qui ne pourra être ouvert que de façon forcée.

2.1.f. En déduire, sur le document-réponse n° 2 {en prenant, pour ces constructions graphiques, un retard angulaire de valeur – arbitraire – : $\beta = \frac{3 \cdot \pi}{4}$ }, le diagramme de conduction des thyristors de l'onduleur (et vérifier l'hypothèse qui a permis de l'établir) ainsi que les chronogrammes de $i_{M1}(t)$ et $v_a(t)$.

2.1.g. Déterminer dans le cas général {i.e. quelle que soit la valeur du retard β } l'expression de la valeur moyenne V_a de $v_a(t)$ et fonction de V_M et de β .

- 2.1.h. Exprimer la puissance moyenne P_a développée à l'entrée de l'onduleur {dans les conventions «récepteur» de la figure}; en déduire la plage de variation de β qui correspond au fonctionnement du convertisseur en onduleur.
- 2.1.i. Exprimer en fonction de β , et par un raisonnement analysant les symétries de $i_{M1}(t)$, le déphasage {noté φ_{Mf} } de la composante fondamentale $i_{M1f}(t)$ de $i_{M1}(t)$ par rapport à $v_{M1}(t)$; montrer qu'il peut s'exprimer sous la forme {si on veut : $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_{Mf} \leq \frac{\pi}{2}$ }: $\varphi_{Mf} = \beta - \pi$.
- 2.1.j. En déduire {sans calculer la série de Fourier des $i_{Mk}(t)$ } la valeur efficace I_{Mf} des composantes fondamentales $i_{M1f}(t)$ des intensités $i_{Mk}(t)$.
- 2.1.k. Vérifier le résultat précédent en le comparant à celui que donne l'expression générale de la valeur efficace des composantes sinusoïdales de rang n {avec n impair; il n'y a pas de composantes de rang pair} d'un signal $g(t)$ périodique, formé de créneaux alternés d'amplitude $\pm G_{Max}$ décalés de a {avec : $0 \leq a \leq 1$ }, c'est-à-dire des créneaux de durée $(1-a) \cdot \frac{T}{2}$ distants de $a \cdot \frac{T}{2}$:

$$G_n = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot G_{Max}}{n \cdot \pi} \cdot \left| \cos \left(n \cdot a \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right|$$

{si on note : $|A| = \text{ABS}(A)$ }.

Exprimer, en fonction de I_{Mf} , l'amplitude efficace I_{Mn} des composantes de rangs :

$$n = 3, 5, 7 \text{ et } 9.$$

- 2.1.l. Déterminer l'expression de la valeur efficace I_M des intensités $I_{Mk}(t)$ et celle du rapport : $\frac{I_{Mf}}{I_M}$.
- 2.1.m. Conclure, à partir des résultats de 2.1.k. et 2.1.l., quant à l'importance des composantes harmoniques des intensités $i_{Mk}(t)$.
- 2.1.n. Déduire des résultats établis en 2.1.h. et 2.1.i. la plage des déphasages $\{\varphi_{Mf}\}$ possibles à l'entrée du moteur; quel est alors le comportement réactif de la machine synchrone? Comment obtiendra-t-on ce type de fonctionnement?

2.2. Moteur synchrone.

La machine triphasée est constituée comme l'indique la représentation bipolaire équivalente {les angles mécaniques ont été multipliés par le nombre p de paires de pôles} de la figure 6, où l'on a aussi indiqué les bornes homologues des différents enroulements {définition : lorsque les axes orientés de ces bobines sont alignés, des courants franchissant ces bornes homologues dans le même sens provoquent, dans le circuit magnétique commun, des flux d'induction magnétique de même signe, relativement à la même convention de mesure}.

Elle comporte trois enroulements statoriques {d'axes fixes Ox_1 , Ox_2 et Ox_3 , décalés électriquement de :

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ et } \theta_2 = \frac{4\pi}{3} \text{ par rapport à } Ox_1 \}$$

et un rotor {dont l'axe longitudinal Ox_r est repéré par l'angle α_x , toujours relativement à Ox_1 } portant un inducteur (e) longitudinal et un amortisseur assimilable à deux enroulements : l'un (a_r), longitudinal, l'autre (a_s) d'axe Ox_1 , repéré par l'angle : $\alpha_x + \frac{\pi}{2}$.

On note $v_{Mk}(t)$, $i_{Mk}(t)$, $e_{Mk}(t)$ et $\Phi_{Mk}(t)$ {avec : $k = 1, 2$ ou 3 } la d.d.p., l'intensité, la force électromotrice et le flux magnétique de chaque bobine {mesurés dans le système de conventions suivant : convention «récepteur» pour le couple $[v_{Mk}(t); i_{Mk}(t)]$, générateur pour le triplet $[e_{Mk}(t); i_{Mk}(t); \Phi_{Mk}(t)]$: $e > 0 \Rightarrow i > 0 \Rightarrow \Phi > 0$ }, i_e , i_{ar} et i_{as} les intensités des courants de l'inducteur et des enroulements qui représentent l'amortisseur, mesurées dans les conventions portées par la figure 6.

La machine est à pôles saillants mais on admettra que, quelle que soit sa position relativement à ces pôles, chaque enroulement (lorsqu'il est parcouru par un courant électrique) développe dans l'entrefer un champ de « vecteurs » champ magnétique (H) radiaux et dont l'amplitude est une fonction sinusoïdale des variables d'espace.

Dans ces conditions, et si on note :

L_0 : l'inductance – moyenne – de couplage entre enroulements statoriques – triphasés ;

ℓ : la variation maximale d'inductance due aux pôles saillants ;

λ : l'inductance de fuites de chaque enroulement statorique ;

M_{se} : la valeur maximale de l'inductance mutuelle stator-inducteur ;

M_{sa} : la valeur maximale de l'inductance mutuelle stator-amortisseur,

les inductances, propres et mutuelles, de ces enroulements s'expriment, compte tenu de la position du rotor :

$$L_1 = L_0 + \lambda + \ell \cdot \cos(2 \cdot \alpha_X), \quad L_2 = L_0 + \lambda + \ell \cdot \cos(2 \cdot \alpha_X - 2 \cdot \theta_1), \quad L_3 = L_0 + \lambda + \ell \cdot \cos(2 \cdot \alpha_X - 2 \cdot \theta_2)$$

et, pour les inductances mutuelles :

$$M_{12} = M_{21} = L_0 \cdot \cos(\theta_1) + \ell \cdot \cos(2 \cdot \alpha_X - 2 \cdot \theta_2) = -\frac{L_0}{2} + \ell \cdot \cos\left(2 \cdot \alpha_X - \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$M_{23} = M_{32} = L_0 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1) + \ell \cdot \cos(2 \cdot \alpha_X) = -\frac{L_0}{2} + \ell \cdot \cos(2 \cdot \alpha_X);$$

$$M_{31} = M_{13} = L_0 \cdot \cos(\theta_2) + \ell \cdot \cos(2 \cdot \alpha_X - 2 \cdot \theta_1) = -\frac{L_0}{2} + \ell \cdot \cos\left(2 \cdot \alpha_X - \frac{4\pi}{3}\right);$$

$$M_{1e} = M_{se} \cdot \cos(\alpha_X), \quad M_{2e} = M_{se} \cdot \cos\left(\alpha_X - \frac{2\pi}{3}\right), \quad M_{3e} = M_{se} \cdot \cos\left(\alpha_X - \frac{4\pi}{3}\right);$$

$$M_{1a\ell} = M_{sa} \cdot \cos(\alpha_X), \quad M_{2a\ell} = M_{sa} \cdot \cos\left(\alpha_X - \frac{2\pi}{3}\right), \quad M_{3a\ell} = M_{sa} \cdot \cos\left(\alpha_X - \frac{4\pi}{3}\right);$$

$$M_{1at} = M_{sa} \cdot \cos\left(\alpha_X + \frac{\pi}{2}\right), \quad M_{2at} = M_{sa} \cdot \cos\left(\alpha_X + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right), \quad M_{3at} = M_{sa} \cdot \cos\left(\alpha_X + \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}\right).$$

2.2.1. Si on note R_M la résistance des enroulements d'induit, rappeler la relation introduite par l'enroulement n^k entre la d.d.p. $v_{Mk}(t)$ entre ses bornes, l'intensité $i_{Mk}(t)$ du courant qui le traverse et le flux magnétique total $\Phi_{Mk}(t)$ qu'il embrasse (dans les conventions adoptées).

2.2.2. Exprimer le flux total embrassé par chaque enroulement d'induit $[\Phi_{M1}, \Phi_{M2}, \Phi_{M3}]$ en fonction des inductances $L_0, \ell, \lambda, M_{se}, M_{sa}$ et des intensités : $i_{M1}(t), i_{M2}(t), i_{M3}(t), i_e(t), i_{a\ell}(t)$ et $i_{at}(t)$.

2.2.3. Pour simplifier la combinaison des résultats de 2.2.1. et 2.2.2. on se propose de mettre en œuvre la transformation de Park {voir le rappel des définitions et propriétés principales en annexe n° 2} : l'image des trois enroulements d'induit est un autre triplet de bobines $[d, q, 0]$; deux sont d'axes situés dans le même plan que Ox_1, Ox_2 et Ox_3 : une bobine d'axe Ox_d repéré, à partir de Ox_1 ,

par un angle θ et une bobine d'axe Ox_q repéré par un angle $\theta + \frac{\pi}{2}$; la troisième bobine est

d'axe Ox_0 tel que Ox_d, Ox_q et Ox_0 forment un trièdre orthogonal {cf. annexe n° 2}.

On pourra exprimer les résultats sous forme matricielle dans toutes les questions de la sous-partie 2.2. où ce formalisme peut simplifier leur écriture.

2.2.3.a. Exprimer alors les flux $[\Phi_{Md}, \Phi_{Mq}, \Phi_{M0}]$ embrassés par ces bobines en fonction des intensités $i_e, i_{a\ell}, i_{at}$ et des images $[i_{Md}, i_{Mq}, i_{M0}]$ des intensités $[i_{M1}, i_{M2}, i_{M3}]$.

2.2.3.b. Montrer que ces relations se simplifient si on choisit les bobines $[d, q, 0]$ telles que l'angle θ satisfasse à la condition : $\theta = \alpha_X + Cte$. Quelle est la traduction « physique » de ce choix ?

Exprimer les flux $[\Phi_{Md}, \Phi_{Mq}, \Phi_{M0}]$ lorsque : $\theta = \alpha_X$.

2.2.3.c. Indépendamment du résultat précédent, exprimer les images $[v_{Md}, v_{Mq}, v_{M0}]$ des tensions $v_{Mk}(t)$, exprimées en 2.2.1., en fonction des images $[i_{Md}, i_{Mq}, i_{M0}]$ et $[\Phi_{Md}, \Phi_{Mq}, \Phi_{M0}]$.

2.2.3.d. Tirer de 2.2.3.b. et 2.2.3.c. les expressions de v_{Md}, v_{Mq} et v_{M0} en fonction des intensités $i_{Md}, i_{Mq}, i_{M0}, i_e, i_{a\ell}$ et i_{at} . Ce sont les équations de Park de cette machine.

2.2.4. Modélisons un régime permanent établi où les intensités $i_{Mk}(t)$ valent :

$$i_{M1}(t) = I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\alpha_X + \frac{\pi}{2} + \psi_M\right);$$

$$i_{M2}(t) = I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\alpha_X + \frac{\pi}{2} + \psi_M - \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$i_{M3}(t) = I_M \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\alpha_X + \frac{\pi}{2} + \psi_M - \frac{4\pi}{3}\right)$$

{où ψ_M est la phase de $i_{Mk}(t)$ relativement à la force contre-électromotrice $e'_{Mk}(t) = -e_{Mk}(t)$.

2.2.4.a. Exprimer les images $[i_{Md}, i_{Mq}, i_{M0}]$ des intensités $[i_{M1}, i_{M2}, i_{M3}]$ dans la transformation de Park définie au 2.2.3.

2.2.4.b. En déduire les expressions des images $[\Phi_{Md}, \Phi_{Mq}, \Phi_{M0}]$. Comment varient ces flux au cours du temps? Que peut-on en déduire concernant les flux embrassés par les enroulements rotoriques {inducteur et amortisseur} lors d'un régime permanent où : $i_c(t) = Cte = I_c$? Que valent alors les intensités $i_{Mk}(t)$ et $i_{st}(t)$?

2.2.4.c. Sachant que les intensités $i_{Mk}(t)$ doivent être de même pulsation ω_M que les tensions $v_{Mk}(t)$ {justifier cette affirmation}, quelle relation doit lier les grandeurs α_X et ω_M , ou θ et ω_M ?

2.2.4.d. Exprimer les images $[v_{Md}, v_{Mq}, v_{M0}]$ en fonction de ω_M, I_M, ψ_M et I_c {ainsi que des réactances et résistances}.

2.2.4.e. Établir, à partir des propriétés de la transformation de Park {annexe n° 2}, que tout système de trois grandeurs sinusoïdales, triphasées et équilibrées a pour image un vecteur du plan $[d, q]$ dont la norme est égale à l'amplitude maximale des grandeurs originales.

2.2.4.f. Pour exploiter le résultat obtenu en 2.2.4.d. on construit le plan de Fresnel dont l'axe des composantes actives {OX} est aligné avec Oq tandis que celui des composantes réactives {OY} est opposé à Od (fig. 6), et où les images ont pour norme la valeur efficace des originales.

Exprimer alors les composantes V_{MX} et V_{MY} de \underline{V}_M et en déduire que \underline{V}_M s'écrit aussi :

$$\underline{V}_M = R_M \cdot \underline{I}_M + j \cdot X_{ML} \cdot \underline{I}_M - j \cdot X'_{MT} \cdot \underline{I}_{MX} + \underline{E}'_{M0}$$

ou :

$$\underline{V}_M = R_M \cdot \underline{I}_M + j \cdot X_{ML} \cdot \underline{I}_{MY} + j \cdot X_{MT} \cdot \underline{I}_{MX} + \underline{E}'_{M0}$$

{où \underline{I}_{MX} et \underline{I}_{MY} sont les composantes de \underline{I}_M suivant OX et OY}.

2.2.4.g. Par identification, exprimer les réactances X_{ML} et X_{MT} en fonction de la pulsation ω_M et des inductances L_0, ℓ, λ .

La réactance synchrone longitudinale X_{ML} se décomposant en : $X_{ML} = (L_L + \lambda) \cdot \omega_M$, et la réactance transversale s'écrivant : $X_{MT} = (L_T + \lambda) \cdot \omega_M$, retrouver l'expression de l'inductance cyclique longitudinale L_L et de l'inductance cyclique transversale L_T en fonction de L_0 et ℓ .

2.2.4.h. Exprimer la valeur efficace E'_{M0} de la force (contre) électromotrice en fonction du flux total maximal (Φ_{se}) généré par la roue polaire et embrassé par les enroulements d'induit.

Chaque enroulement d'induit, de coefficient de bobinage K_{bs} et de nombre de conducteurs N_s , se comporte comme n_s spires {avec : $n_s = \frac{K_{bs} \cdot N_s}{2}$ } embrassant chacune

un flux d'inducteur de valeur maximale Φ_c . Retrouver la relation de Boucherot liant E'_{M0}

à K_{bs}, N_s, Φ_c et à la fréquence électrique f_M { $f_M = \frac{\omega_M}{2 \cdot \pi}$ }.

2.2.4.i. Construire sur le document-réponse n° 3 l'allure du diagramme de Fresnel liant \underline{V}_M à \underline{I}_M et \underline{E}'_{M0} dans les cas suivants :

- intensité \underline{I}_M en avance de ψ_M ($\psi_M > 0$) par rapport à \underline{E}'_{M0} ;
- intensité \underline{I}_M en phase avec \underline{E}'_{M0} ;
- intensité \underline{I}_M en quadrature avant par rapport à \underline{E}'_{M0} ($\psi_M = +\frac{\pi}{2}$);
- intensité \underline{I}_M en quadrature arrière par rapport à \underline{E}'_{M0} ($\psi_M = -\frac{\pi}{2}$);
- f.e.m. nulle et \underline{I}_M suivant OX;
- f.e.m. nulle et \underline{I}_M en opposition avec OY.

2.2.4.j. Indiquer, pour chacun des cas analysés précédemment (2.2.4.i.), la relation liant approximativement (en négligeant la chute de tension provoquée par la résistance des enroulements) les valeurs efficaces V_M , E'_{M0} et I_M (ainsi que X_{ML} et X_{MT} et, éventuellement, ψ_M).

2.2.4.k. En comparant la valeur de E'_{M0} à celle $\{E'_{Mf}\}$ de la f.c.e.m. provoquée par le flux résultant établi dans la machine $\{E'_{Mf} = \underline{V}_M - R_M \underline{I}_M - j\lambda \omega_M \underline{I}_M\}$, préciser quels sont les effets magnétiques des composantes active (suivant X) et réactive (suivant Y) des courants d'induit.

2.2.4. Application : les moteurs synchrones triphasés sont hexapolaires et leurs enroulements statoriques sont connectés en étoile ; on note $u_M(t)$ les tensions composées $\{et U_M$ leur valeur efficace $\}$, $v_M(t)$ les tensions simples et $i_M(t)$ l'intensité d'un courant en ligne ; on n'envisagera que des régimes électriques sinusoidaux, triphasés et équilibrés.

Chaque moteur est prévu pour le régime nominal suivant :

$$P_{un} = 1\,100 \text{ kW}, \quad U_{Mn} = 1\,246 \text{ V}, \quad I_{Mn} = 588 \text{ A}, \quad n'_n = 4\,000 \text{ tr/min.}$$

On effectue sur un moteur les essais suivants :

- mesure (à chaud) de la résistance d'un enroulement statorique : $R_M = 19 \text{ m}\Omega$;
- essai en moteur à vide, sous : $U_{Mv} = 310 \text{ V}$ ($f_{Mv} = 50 \text{ Hz}$) ; l'intensité du courant inducteur est réglée pour que l'intensité des courants d'induit soit minimale ; on mesure :

$$I_e = 160 \text{ A} \{I_{Mv} \ll I_{Mn}\};$$

- essai en moteur à vide, sous : $U_{Mv} = 310 \text{ V}$ ($f_{Mv} = 50 \text{ Hz}$) et à courant inducteur d'intensité : $I_e = 225 \text{ A}$; on mesure : $I_{Mv} = 200 \text{ A}$;
- essai désynchronisé ; le moteur est entraîné au voisinage de sa vitesse de synchronisme, sans excitation $\{I_e = 0 \text{ A}\}$ et son induit est alimenté sous tensions réduites (de valeur efficace constante) ; on observe, après démagnétisation du rotor, des courants statoriques dont l'intensité $i_{Mv}(t)$ est pseudo-sinusoidale et présente une amplitude maximale évoluant périodiquement entre une valeur minimale I_{Mvm} et une valeur maximale I_{MvM} telles que :

$$\frac{I_{MvM}}{I_{Mvm}} = 1,75.$$

2.2.4.A.a. Déterminer le coefficient de flux K_M de la machine, tel que : $E_{M0} = K_M \cdot f_M \cdot I_e$.

2.2.4.A.b. Calculer la valeur des réactances X_{ML} et X_{MT} , ainsi que celle des inductances \mathcal{L}_L et \mathcal{L}_T correspondantes $\{\text{définies par : } X_{ML} = \mathcal{L}_L \cdot \omega_M \text{ et } X_{MT} = \mathcal{L}_T \cdot \omega_M\}$.

2.2.4.A.c. En déduire la valeur des inductances L_0 et ℓ , en supposant que : $\lambda = 40 \mu\text{H}$.

2.2.4.A.d. On souhaite simuler le fonctionnement du moteur synchrone au régime nominal :

$$U_{Mn} = 1\,246 \text{ V}, \quad I_{Mn} = 588 \text{ A}, \quad n'_n = 4\,000 \text{ tr/min et } \cos(\varphi_M) = 0,7 \text{ AV}$$

{où φ_M est le déphasage de l'intensité $i_{Mk}(t)$ par rapport à la tension simple correspondante, $v_{Mk}(t)$ } ; quelle est la valeur de l'intensité I_e du courant d'excitation nécessaire lors de ce fonctionnement ?

2.2.5. Modélisation dynamique de la machine synchrone.

On se propose de déterminer les constantes de temps caractéristiques des réponses de cette machine à des variations de son alimentation électrique.

On suppose (hypothèse à vérifier par la suite) que ces constantes de temps ont des valeurs numériques très inférieures à celle de la constante de temps mécanique (liée à l'inertie de la rame). On analyse donc toujours la machine au moyen de la transformation de Park décrite et définie au 2.2.3., la machine tournant toujours au synchronisme des champs magnétiques glissants (on suppose donc la pulsation électrique ω_m constante); en revanche, on tient désormais compte des évolutions, au cours du temps, des flux magnétiques $[\Phi_{Md}, \Phi_{Mq}, \Phi_{M0}]$ et des intensités $[i_{Md}, i_{Mq}, i_{M0}]$, ainsi que des effets des bobines qui représentent l'amortisseur {parcourues par les courants d'intensité i_{ae} et i_{at} }.

On a établi en 2.2.3.b. que l'image $[\Phi_{Md}, \Phi_{Mq}, \Phi_{M0}]$ des flux magnétiques embrassés (en totalité) par les bobines $[d, q, 0]$, dans la transformation de Park définie par : $\theta = \alpha_X$, s'exprime :

$$\Phi_{Md} = \mathcal{L}_L \cdot i_{Md} + M_{se} \cdot i_c + M_{sat} \cdot i_{ae}; \quad \Phi_{Mq} = \mathcal{L}_T \cdot i_{Mq} + M_{sat} \cdot i_{at}; \quad \Phi_{M0} = \lambda \cdot i_{M0}$$

où :

$$\mathcal{L}_T = \frac{3}{2} \cdot L_{0T}, \quad \mathcal{L}_L = \frac{3}{2} \cdot L_{0L}, \quad M_{se}, \quad M_{sat}, \quad M_{eat} \quad \text{et} \quad \lambda \quad \text{sont des inductances constantes.}$$

2.2.5.1. Compte tenu du résultat établi en 2.2.3.c., quelle est la nouvelle forme des équations de Park de la machine, exprimant les tensions $[v_{Md}, v_{Mq}, v_{M0}]$ en fonction des intensités $[i_{Md}, i_{Mq}, i_{M0}, i_c, i_{ae}, i_{at}]$ et de leurs dérivées ?

2.2.5.2. En notant L_c, L_{ae} et L_{at} les inductances propres des enroulements de l'inducteur et de l'amortisseur {et R_c, R_{ae} et R_{at} leurs résistances respectives}, comme on a noté L_{0L} et L_{0T} les pseudo-inductances propres longitudinale et transversale d'un enroulement statorique, et en notant $M_{se}, M_{sat}, M_{eat}, M_{eat}$ et M_{eat} les valeurs maximales des inductances mutuelles, avec :

$$M_{1c} = M_{se} \cdot \cos(\alpha_X), \quad M_{2e} = M_{se} \cdot \cos\left(\alpha_X - \frac{2\pi}{3}\right), \quad M_{3e} = M_{se} \cdot \cos\left(\alpha_X - \frac{4\pi}{3}\right),$$

$$M_{1ae} = M_{sat} \cdot \cos(\alpha_X), \quad M_{2ae} = M_{sat} \cdot \cos\left(\alpha_X - \frac{2\pi}{3}\right), \quad M_{3ae} = M_{sat} \cdot \cos\left(\alpha_X - \frac{4\pi}{3}\right),$$

$$M_{1at} = M_{sat} \cdot \cos\left(\alpha_X + \frac{\pi}{2}\right), \quad M_{2at} = M_{sat} \cdot \cos\left(\alpha_X + \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right), \quad M_{3at} = M_{sat} \cdot \cos\left(\alpha_X + \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}\right),$$

$$M_{cae} = Cte, \quad M_{eat} = 0$$

établir l'expression du flux magnétique total embrassé par l'inducteur $\{\Phi_0\}$ et par les bobines simulant l'amortisseur $\{\Phi_{ae}$ et $\Phi_{at}\}$, soit :

$$[\Phi_0, \Phi_{ae}, \Phi_{at}] = f([i_{M1}, i_{M2}, i_{M3}, i_c, i_{ae}, i_{at}]).$$

2.2.5.3. En déduire les relations exprimant ces mêmes flux $[\Phi_0, \Phi_{ae}, \Phi_{at}]$ en fonction de l'image $[i_{Md}, i_{Mq}, i_{M0}, i_c, i_{ae}, i_{at}]$ des intensités.

2.2.5.4. Écrire le système total des relations :

$$[\Phi_{Md}, \Phi_{Mq}, \Phi_{M0}, \Phi_0, \Phi_{ae}, \Phi_{at}] = f([i_{Md}, i_{Mq}, i_{M0}, i_c, i_{ae}, i_{at}])$$

c'est-à-dire la matrice « inductance » $[L]$ telle que :

$$[\Phi] = [L] \cdot [i]$$

et en déduire l'indépendance magnétique des trois axes $[d, q, 0]$ de la machine.

Quelles sont les intensités qui participent à la magnétisation de l'axe longitudinal (axe de l'inducteur) ? Quelles sont celles qui magnétisent l'axe transversal ?

2.2.5.5. En appliquant aux bobines embrassant les flux $[\Phi_0, \Phi_{ae}, \Phi_{at}]$ les lois physiques (à préciser) appropriées, établir les relations liant les tensions $[v_c, v_{ae} = 0, v_{at} = 0]$ aux intensités $[i_{Md}, i_{Mq}, i_{M0}, i_c, i_{ae}, i_{at}]$ et à leurs dérivées.

2.2.5.6. Rassembler les six relations :

$$[V_{Md}, V_{Mq}, V_{M0}, V_e, v_{ae} = 0, v_{at} = 0] = f([i_{Md}, i_{Mq}, i_{M0}, i_e, i_{ae}, i_{at}])$$

et, pour simplifier leur traitement, donner leur traduction dans le formalisme opérationnel (en supposant le moteur initialement au repos), qui constitue la matrice « impédance » de la machine synchrone :

$$[V_{Md}(p), V_{Mq}(p), V_{M0}(p), V_e(p), 0, 0] = [Z(p)] \cdot [I_{Md}(p), I_{Mq}(p), I_{M0}(p), I_e(p), I_{ae}(p), I_{at}(p)].$$

2.2.5.7. Étude du comportement de la machine suivant l'axe longitudinal.

2.2.5.7.a. En négligeant les effets de l'amortisseur {pas d'amortisseur longitudinal} établir la relation liant $V_{Md}(p)$ à $I_{Md}(p)$ et à des f.e.m.; l'exprimer sous la forme :

$$V_{Md}(p) - E_{Md}(p) = Z_L''(p) \cdot I_{Md}(p) + F_L'(p) \cdot V_e(p).$$

2.2.5.7.b. Montrer que l'impédance opérationnelle $Z_L''(p)$ s'écrit aussi :

$$Z_L''(p) = R_M + \mathcal{Z}_L''(p) \cdot p \quad \text{avec : } \mathcal{Z}_L''(p) = \mathcal{Z}_L \cdot \frac{1 + \tau_{Lc}' \cdot p}{1 + \tau_{L0}' \cdot p}$$

et indiquer, en fonction des résistances et des inductances (propres, cycliques ou mutuelles) des enroulements, l'expression de τ_{Lc}' (constante de temps transitoire d'axe longitudinal en court-circuit) et celle de τ_{L0}' (constante de temps transitoire d'axe longitudinal en circuit ouvert).

2.2.5.7.c. Étendre rapidement (et simplement) ce résultat au cas où l'on prend en compte l'amortisseur (longitudinal) et montrer que l'impédance opérationnelle longitudinale est de la forme :

$$Z_L'(p) = R_M + \mathcal{Z}_L'(p) \cdot p$$

{ avec :

$$\mathcal{Z}_L'(p) = \mathcal{Z}_L \cdot \frac{(1 + \tau_{Lc}' \cdot p) \cdot (1 + \tau_{Lc}'' \cdot p)}{(1 + \tau_{L0}' \cdot p) \cdot (1 + \tau_{L0}'' \cdot p)}$$

où τ_{Lc}'' est la constante de temps sub-transitoire d'axe longitudinal en court-circuit et τ_{L0}'' la constante de temps sub-transitoire d'axe longitudinal en circuit ouvert.

2.2.5.8. Étude de l'axe transversal.

Établir la relation liant $V_{Mq}(p)$ à $I_{Mq}(p)$ et à des f.e.m.; l'exprimer sous la forme :

$$V_{Mq}(p) - E_{Mq}(p) = Z_T'(p) \cdot I_{Mq}(p)$$

et montrer que l'impédance opérationnelle $Z_T'(p)$ s'écrit aussi :

$$Z_T'(p) = R_M + \mathcal{Z}_T'(p) \cdot p \quad \text{avec : } \mathcal{Z}_T'(p) = \mathcal{Z}_T \cdot \frac{1 + \tau_{Tc}'' \cdot p}{1 + \tau_{T0}'' \cdot p}.$$

Indiquer, en fonction des résistances et des inductances (propres, cycliques ou mutuelles) des enroulements, l'expression de τ_{Tc}'' (constante de temps sub-transitoire d'axe transversal en court-circuit) et celle de τ_{T0}'' (constante de temps sub-transitoire d'axe transversal en circuit ouvert).

2.2.5. Application : on a mesuré ou estimé les valeurs ou rapports suivants pour les résistances et inductances (ou constantes de temps) des enroulements réels ou bobines « images » :

$$R_M = 19 \text{ m}\Omega; \mathcal{Z}_L = 1,2 \text{ mH}; \mathcal{Z}_T = 0,7 \text{ mH}; R_e = 80 \text{ m}\Omega; L_e = 0,52 \text{ H}; M_{se} = 17 \text{ mH};$$

$$R_{ae} = 15 \text{ m}\Omega; L_{ae} = 2,3 \text{ mH}; R_{at} = 23 \text{ m}\Omega; L_{at} = 1,2 \text{ mH}; M_{at} = 0,45 \text{ mH};$$

$$\tau_{L0}'' \approx \frac{\tau_{ae}'}{3,5}; \tau_{Lc}'' \approx \tau_{Tc}''.$$

Calculer la valeur numérique des constantes de temps transitoires et sub-transitoires de la machine synchrone (au synchronisme) :

$$\tau_{T0}'', \tau_{Tc}'', \tau_{L0}', \tau_{L0}'', \tau_{Lc}', \tau_{Lc}''.$$

2.2.6. Les moteurs synchrones d'un boggie sont commandés par la valeur (moyenne) de la tension U_s produite par les redresseurs.

2.2.6.1. Indiquer (si possible au moyen d'un schéma bloc, d'un diagramme fonctionnel ou informationnel) la chaîne des causalités qui régit l'évolution des grandeurs cinétiques qui décrivent l'état de la chaîne de traction $\{U_s, I_s, V_a, V_M, I_M, T_M, \Omega_M, \dots\}$, suite à une variation de la valeur de α .

2.2.6.2. Dédire des résultats de 2.2.5.7. et 2.2.5.8. que la matrice opérationnelle « impédance » d'un moteur s'exprime (dans le formalisme de Park) :

$$\begin{bmatrix} V_{Md}(p) - E'_{Md}(p) \\ V_{Mq}(p) - E'_{Mq}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_M + \mathcal{L}'_L(p) \cdot p & -\mathcal{L}'_T \cdot \omega_M \\ \mathcal{L}'_L \cdot \omega_M & R_M + \mathcal{L}'_T(p) \cdot p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{Md}(p) \\ I_{Mq}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_L(p) & -Z_T \\ Z_L & Z'_T(p) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{Md}(p) \\ I_{Mq}(p) \end{bmatrix}$$

avec :

$$\mathcal{L}'_T(p) = \mathcal{L}_T \cdot \frac{1 + \tau''_{Tc} \cdot p}{1 + \tau''_{T0} \cdot p}$$

et :

$$\mathcal{L}'_L(p) = \mathcal{L}_L \cdot \frac{(1 + \tau'_{Lc} \cdot p) \cdot (1 + \tau''_{Lc} \cdot p)}{(1 + \tau'_{L0} \cdot p) \cdot (1 + \tau''_{L0} \cdot p)}$$

2.2.6.3. En déduire (sans calculs) les constantes de temps des régimes transitoires provoqués, au niveau des tensions $v_{Mk}(t)$ (où : $k = 1, 2$ ou 3) par une variation rapide des intensités $i_{Mk}(t)$.

2.2.6. Application : on utilisera les valeurs déterminées en 2.2.5.A. (à défaut, on prendra :

$$\tau'_{L0} = 7 \text{ s}, \tau''_{L0} = 40 \text{ ms}, \tau''_{T0} = 50 \text{ ms}, \tau'_{Lc} = 2 \text{ s}, \tau''_{Lc} = \tau''_{Tc} = 30 \text{ ms} \}.$$

2.2.6.A.a. Estimer le temps de réponse des tensions $v_{Mk}(t)$ (toutes choses restant constantes par ailleurs, notamment la pulsation de rotation Ω_M et la tension d'excitation) à une évolution rapide des intensités.

Quels sont, au niveau de ces tensions, les autres effets prévisibles ?

2.2.6.A.b. En supposant la maille d'entrée des onduleurs correctement modélisée, en régime dynamique, par le schéma de la figure 3 {avec $L_B \approx 70 \text{ mH}$ et $R_{OM} \approx 30 \text{ m}\Omega$ }, quel est le temps de réponse de l'intensité $i_s(t)$ à une variation brutale de U_s (toutes choses constantes par ailleurs, notamment E_{OM}) ?

Cette durée est-elle physiquement compatible avec le mode de production de U_s ?

2.2.6.A.c. En comparant les résultats des deux questions précédentes, déterminer :

- le temps de réponse (électrique) de la machine synchrone à une variation de U_s ;
- les contraintes imposées à l'onduleur par les régimes sub-transitoires notés au niveau des tensions $v_M(t)$;
- les conséquences, au niveau de l'empiétement de conduction des thyristors de l'onduleur (phénomène non pris en compte dans cette étude mais néanmoins prévisible, puisque la machine synchrone réelle ne se réduit pas à une source de tensions), des variations brutales de l'intensité $i_s(t)$.

2.3. Modélisation électro-mécanique de la chaîne « onduleur triphasé-moteur synchrone ».

2.3.1. On a établi (question 2.2.4.f.) que chaque « phase » du moteur synchrone est représentée, en régime permanent quasi stationnaire sinusoïdal (triphase et équilibré), par le modèle de la double réactance traduisant la relation établie dans le formalisme complexe :

$$\underline{V}_M = R_M \cdot \underline{I}_M + j \cdot X_{ML} \cdot \underline{I}_M - j \cdot (X_{ML} - X_{MT}) \cdot \underline{I}_{M\lambda} + \underline{E}_{M0}$$

où :

$$X_{ML} = (L_L + \lambda) \cdot \omega_M$$

et :

$$X_{MT} = (L_T + \lambda) \cdot \omega_M.$$

- 2.3.1.a. En déduire la relation liant les images des f.c.e.m. à vide {notée \underline{E}'_{M0} } et résultante {ou en charge, notée \underline{E}'_{Mf} }, en fonction des inductances cycliques L_L et L_T et de I_M {ou de ses composantes}.
- 2.3.1.b. Vérifier que la traduction vectorielle de cette relation prend la forme des diagrammes de la figure 8 et préciser l'expression de l'affixe (complexe) des vecteurs $\underline{\Delta}_1, \underline{\Delta}_2, \underline{\Delta}_3, \underline{\Delta}_4, \underline{\Delta}_5, \underline{\Delta}_6$ et $\underline{\Delta}_7$.
- 2.3.1.c. On notera ψ_M et ψ_{Mf} les phases de I_M relativement à \underline{E}'_{M0} et \underline{E}'_{Mf} , et φ_M son déphasage par rapport à \underline{V}_M .
Exprimer, à partir de la figure 8, la valeur efficace V_M en fonction de \underline{E}'_{Mf} et I_M {ainsi que de R_M, φ_M et ψ_{Mf} }; en déduire, compte tenu des propriétés de l'onduleur (fig. 7), la valeur moyenne V_a en fonction de \underline{E}'_{Mf} et I_s .
- 2.3.1.d. En pratique, les composants électroniques (thyristors) de l'onduleur sont pilotés en fonction de la position du rotor (roue polaire) de la machine synchrone; ils sont donc enclenchés avec un retard angulaire électrique {noté β_c }, relativement aux amorçages naturels que produiraient les f.c.e.m. induites, à vide, dans les enroulements d'induit; de sorte que le résultat établi en 2.1.i. devient désormais : $-\psi_M = \beta_c - \pi$. On admettra de plus que : $\psi_{Mf} \approx \psi_M$.
Établir alors l'expression de V_a en fonction de \underline{E}'_{Mf}, I_s et β_c puis, après avoir déduit de la figure 8 une relation simple (approximative) entre \underline{E}'_{Mf} et $\underline{E}'_{M0}, I_M, L_L, \omega_M$ et ψ_M , exprimer finalement V_a sous la forme :
- $$V_a = E_0 + R_0 I_s, \text{ où : } E_0 = [K_{Me} I_c - K_{Ms} I_s] \Omega_M;$$
- préciser K_{Me}, K_{Ms} et R_0 en fonction des grandeurs caractéristiques du moteur, de l'onduleur et de son pilotage {on rappelle que : $\underline{E}'_{M0} = K_M f_M I_c$ }.
- 2.3.1. *Application* : $K_M = 22.10^{-3}$ U.S.I. ; $\beta_c = 2,26$ rad ; $L_L = 1,1$ mH ; $R_M = 19$ m Ω .
Déterminer la valeur numérique des coefficients : K_{Me} et K_{Ms} , ainsi que celle de R_0 .
- 2.3.2. Si l'on estime pour négligeables, relativement aux pertes par effet Joule des enroulements d'induit du moteur, toutes les autres pertes de la chaîne « onduleur triphasé-moteur synchrone », établir l'expression littérale du moment du couple électromagnétique {noté T_{Mem} et mesuré dans la convention « moteur »} développé sur l'arbre, en fonction de I_c et I_s .

TROISIÈME PARTIE

SIMULATION DES RÉGIMES DYNAMIQUES DE LA RAME

3.1. Démarrages.

3.1.1. L'inertie opposée par la rame au mouvement de translation étant très supérieure à celle qu'opposent les parties tournantes (moteurs, réducteurs, liaisons, roues et essieux) à leur mouvement de rotation, exprimer le moment d'inertie {noté J } ramené sur l'arbre d'un moteur {en répartissant équitablement les effets de l'inertie totale de la rame sur tous les moteurs}.

3.1.1. *Application* : la rame en charge présente une masse totale : $M = 490$ tonnes ; elle se déplace à la vitesse nominale : $v_n = 300$ km/h lorsque les moteurs tournent à : $n'_n = 4\,000$ tr/min.

3.1.1.A.a. Calculer la valeur numérique du moment d'inertie J ramené sur l'arbre d'un moteur.

3.1.1.A.b. Les essais de la rame ont montré qu'en service « normal » {voie rectiligne et sans déclivité, pas de vent, tous les moteurs fonctionnant en régime équilibré} la résistance à l'avancement de la rame {essentiellement due à l'opposition de l'air} se traduit, sur l'arbre de chaque moteur, par un couple résistant de moment : $T_r(\Omega_M) = T_{r0} + K_r \cdot \Omega_M$, et prenant les valeurs : $T_r(0) = 60$ N.m et $T_r(\Omega_{Mn}) = 1\,600$ N.m. Calculer la valeur de K_r .

3.1.1.A.c. Établir le mouvement de la rame lors d'un régime libre {rame abandonnée sans motorisation ni frein, sur une voie rectiligne sans déclivité, à une vitesse initiale égale à sa vitesse nominale} ; quelles sont les valeurs de la constante de temps de ce régime, de sa durée $\{t_s\}$ et de la distance $x(t_s)$ parcourue par la rame {on notera K

la longueur telle que la vitesse de la rame s'exprime : $v = \frac{dx}{dt} = K \cdot \Omega_M$?

3.1.1.A.d. Comparer les valeurs numériques de la constante de temps électrique de la chaîne de traction {estimée à la question 2.2.6.A.c.} et de la constante de temps mécanique {établie ci-dessus pour le régime libre}. Quelles conclusions peut-on en déduire ?

3.1.2. On se propose de simuler un démarrage de la rame ; elle oppose toujours au mouvement une force traduite, au niveau de l'arbre de chaque moteur de traction, par un couple résistant total de moment : $T_r(\Omega_M) = T_{r0} + K_r \cdot \Omega_M$ { Ω_M étant la pulsation de rotation de cet arbre} ; le pilotage gère la commande des ponts mixtes d'alimentation (et celle des hacheurs d'excitation) de façon à faire développer par chaque moteur {à partir d'une date prise pour origine des temps} un couple électromagnétique de moment constant (i.e. indépendant de la vitesse) :

$$T_{Mem} = Cte = T_{D1} > T_{r0} + K_r \cdot \Omega_{Mn}$$

3.1.2.a. Établir l'expression de la pulsation de rotation de l'arbre, $\Omega_M(t)$, pendant ce type de démarrage.

3.1.2.b. En déduire celle {notée t_{D1} } de la durée nécessaire pour atteindre le régime nominal.

3.1.2.c. Quelle est l'expression de la distance x_{D1} parcourue par la rame pendant cette durée ?

3.1.2. *Application* : avec les valeurs de J , T_{r0} , K_r et K données ou établies dans l'application de la question 3.1.1., et pour : $T_{D1} = 2\,500$ N.m, calculer les valeurs numériques :

3.1.2.A.a. de la durée t_{D1} et de la distance x_{D1} ;

3.1.2.A.b. de la valeur maximale de l'accélération linéaire de la rame {notée γ_{D1} } ;

3.1.2.A.c. de l'intensité moyenne I_s du courant d'entrée des onduleurs, sachant qu'on a établi (question 2.3.2.) que le moment du couple électromagnétique s'exprime :

$$T_{Mem} = [K_{Me} \cdot I_c - K_{Ms} \cdot I_s] \cdot I_s \quad \text{avec : } K_{Me} = 15,5 \text{ mH et } K_{Ms} = 3 \text{ mH}$$

et que, durant le démarrage, les hacheurs d'excitation produisent : $I_c = 450$ A.

Discuter les deux solutions offertes par le calcul et en déduire celle qui correspond au fonctionnement du moteur.

3.1.3. Dans le but d'améliorer le démarrage, on programme le calculateur de bord pour piloter les ponts mixtes de sorte que le moment du couple développé dans chaque moteur évolue, en fonction de la vitesse de la rame, comme : $T_{Mem} = T_{D2} - K_D \cdot \Omega_M$ {le moment du couple résistant total s'exprimant toujours : $T_r(\Omega_M) = T_{r0} + K_r \cdot \Omega_M$ }.

Que deviennent alors les expressions :

3.1.3.a. de la durée t_{D2} {jusqu'à la vitesse nominale} et de la distance parcourue x_{D2} ?

3.1.3.b. de la valeur maximale de l'accélération linéaire, γ_{D2} ?

3.1.3. *Application* : avec les mêmes données qu'aux applications précédentes (3.1.1. et 3.1.2.), et l'intensité I_s étant réglée de sorte que : $T_{Mem}(0) = 3\,500\text{ N.m}$ et $T_{Mem}(\Omega_{Mn}) = 2\,500\text{ N.m}$, calculer :

3.1.3.A.a. la valeur numérique des grandeurs : t_{D2} , x_{D2} et γ_{D2} ;

3.1.3.A.b. l'angle (mesuré en degrés) dont doit s'incliner (par rapport à la verticale terrestre) un passager debout et immobile pour s'assurer (au démarrage) le même équilibre qu'à l'arrêt.

3.1.3.A.c. Que deviennent les valeurs numériques de : t_{D2} , x_{D2} et γ_{D2} si, toutes choses égales par ailleurs, la voie monte de 5 mètres par kilomètre ?

3.2. Freinages.

3.2.1. On rappelle quelques résultats établis précédemment :

α) la machine synchrone triphasée fonctionnant en régime sinusoïdal, triphasé, équilibré et symétrique, est simulable, au niveau d'un enroulement et dans le système de conventions portées sur la figure 5, par le modèle de la double réactance traduit, dans le formalisme complexe, par la relation :

$$\underline{V}_M = \underline{E}'_{M0} + R_M \cdot \underline{I}_M + j \cdot X_{ML} \cdot \underline{I}_M - j \cdot (X_{ML} - X_{MT}) \cdot \underline{I}_M$$

{avec : $X_{ML} = \mathcal{L}_L \cdot \omega_M > X_{MT} = \mathcal{L}_T \cdot \omega_M$ et : $E'_{M0} = K_M \cdot f_M \cdot I_s$ } ;

β) le pilotage des thyristors avec un retard angulaire β_c , par rapport à la position de la roue polaire, provoque dans chaque enroulement de la machine synchrone un courant dont la composante fondamentale de l'intensité {notée I_M } présente une phase ψ_M , relativement à la f.c.e.m. à vide $\{E'_{M0}\}$, liée au pilotage par : $\psi_M = \beta_c \pm \pi$; de plus, la valeur moyenne de la tension d'entrée de l'onduleur (mesurée dans la convention de la figure 5) s'exprime en fonction de l'amplitude efficace V_M et de ψ_M :

$$V_a = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} \cdot V_M \cdot \cos(\psi_M);$$

γ) la valeur efficace I_M de l'intensité des courants d'induit est liée à la valeur moyenne de celle du courant d'entrée par :

$$I_M = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \cdot I_s.$$

3.2.1.a. Donner l'allure du diagramme vectoriel liant \underline{E}'_{M0} et \underline{V}_M lorsque : $\beta_c = 0$.

3.2.1.b. Montrer que, si on peut supposer que :

$$R_M \cdot I_M \ll V_M \text{ et } X_{ML} \cdot I_M \ll V_M,$$

on a :

$$V_M \approx E'_{M0} - R_M \cdot I_M.$$

3.2.1.c. Que devient alors l'expression de E_0 {f.c.e.m. du schéma équivalent de la figure 9} en fonction de K_M , I_s et Ω_M ?

3.2.1.d. Exprimer le moment T_{Mem} du couple électromagnétique « moteur » (par convention) de la machine synchrone {en négligeant toujours les pertes autres que celles dues à l'effet Joule}.

3.2.1.e. Montrer que, si la machine tourne avec une pulsation Ω_M ($\Omega_M > 0$), le fait de piloter les thyristors du pont triphasé avec un retard nul ($\beta_c \approx 0$) amène (en l'absence de pilotage des ponts mixtes) la machine synchrone à présenter un couple de freinage. Exprimer le moment de ce couple résistant {noté T_{MF} } en fonction de la pulsation de rotation Ω_M et de la résistance R_F du rhéostat de dissipation.

Quel est alors le comportement des ponts mixtes d'alimentation ?

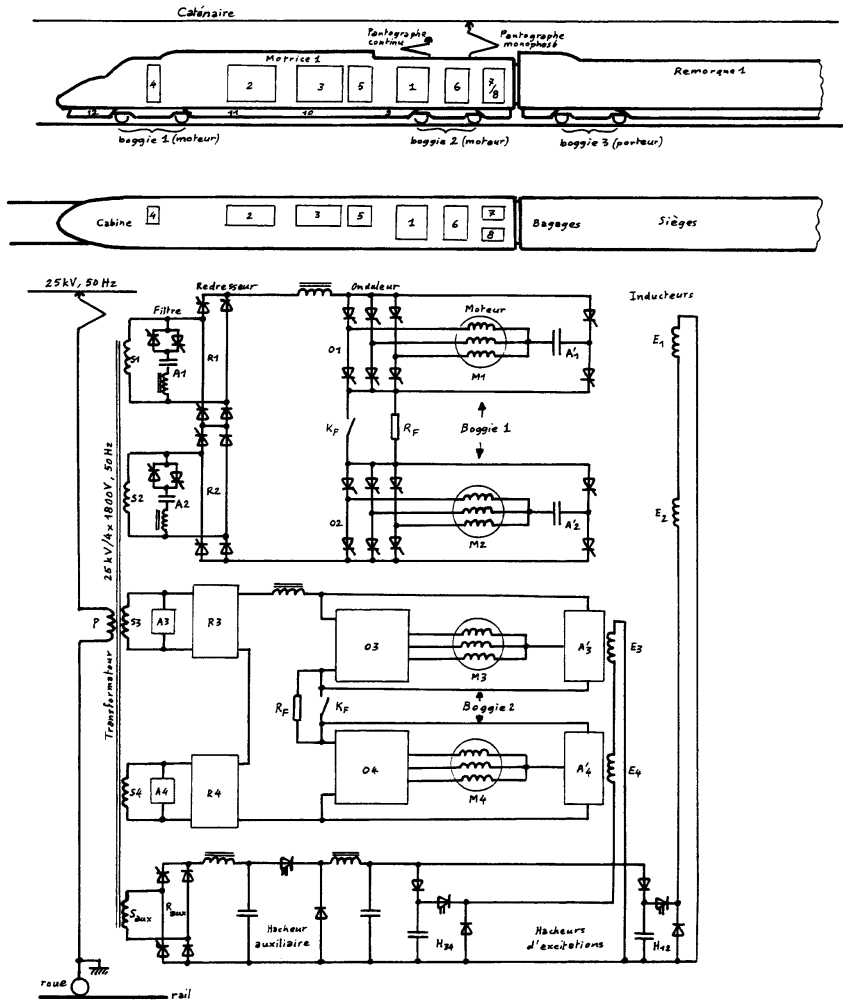
Que faudrait-il faire {à : $I_c = Cte$ et $R_F = Cte$ } pour maintenir constant le moment du couple de freinage T_{MF} pendant le ralentissement ? Quelles sont les limites de cette stratégie ?

3.2.1. *Application* : on suppose que :

$$K_M = 22.10^{-3} \text{ U.S.I.}, L_B = 75 \text{ mH}, R_B = 104 \text{ m}\Omega, R_0 = 35 \text{ m}\Omega.$$

- 3.2.1.A.a. Calculer la résistance R_F du rhéostat de dissipation pour que, à intensité du courant d'excitation : $I_e = 450 \text{ A}$ et vitesse nominale : $n_n = 4\,000 \text{ tr/min}$ (et : $\beta_c = 0$), chaque machine synchrone présente un couple « frein » de moment : $T_{MFh} = 3\,000 \text{ N.m}$.
- 3.2.1.A.b. Pour la valeur de R_F déterminée ci-dessus et à : $I_e = \text{Cte} = 450 \text{ A}$, donner l'expression de la caractéristique mécanique : $T_{MF} = f(\Omega_M)$ de la machine synchrone {on notera K_{MF} son coefficient directeur}.
- 3.2.1.A.c. La rame étant lancée à sa vitesse nominale sur une voie droite et horizontale et le freinage par dissipation de l'énergie fournie par les machines synchrones étant seul utilisé {à $\beta_c = 0$, $I_e = 450 \text{ A}$ et R_F prenant la valeur calculée au 3.2.1.A.a.}, déterminer la durée t_{F1} nécessaire pour parvenir à l'arrêt complet de la rame, ainsi que la distance x_{F1} parcourue {la rame étant par ailleurs caractérisée comme dans les applications de la sous-partie 3.1.}.
- 3.2.1.A.d. On associe au freinage « électrique » analysé ci-dessus le freinage « pneumatique » obtenu en serrant des mâchoires sur des disques installés (par paires) sur tous les essieux de la rame. Si on développe ainsi un couple de freinage de moment $T_{FDes} = 2\,350 \text{ N.m}$, indépendant de la vitesse, au niveau de chaque essieu (un dispositif de surveillance interdisant le blocage des roues), la bande de roulement de chaque roue ayant un diamètre de 70 cm, en déduire le moment T_{rFD} du couple résistant ramené sur l'arbre d'un moteur, ainsi que la durée $\{t_{F2}\}$ et la distance $\{x_{F2}\}$ de l'arrêt de la rame (lancée initialement à vitesse nominale sur une voie horizontale).
- 3.2.2. Freinage d'urgence. Le cahier des charges des rames du TGV A impose d'assurer un arrêt d'urgence en moins de 3 500 m {longueur des tronçons libres devant la rame en cas d'occupation inopinée de la voie}, dans les pires conditions d'usage et à vitesse initiale nominale.
- 3.2.2. *Application*.
- 3.2.2.A.a. Quel couple de freinage faut-il prévoir, sur chaque essieu, pour assurer cet arrêt d'urgence {à freinage électrique nominal, cf. 3.2.1.A.b.} sur voie horizontale ?
- 3.2.2.A.b. Comment sont modifiées les caractéristiques de la rame (J, T_{r0}, K_r, \dots), ramenées sur l'arbre d'une machine synchrone en état de service, si deux machines synchrones sont en défaut et si la rame est lancée dans une descente de pente 25/1 000 ?
- 3.2.2.A.c. Avec quelle valeur de l'intensité I_e faut-il alors exciter les machines synchrones (supposées linéaires) pour assurer le freinage d'urgence prescrit {si le moment du couple maximal de freinage pneumatique de chaque essieu (sans dérapage des roues porteuses) est limité à : $(T_{FDes})_{\text{Max}} = 5\,300 \text{ N.m}$ } ?
Quelle est l'accélération maximale de la rame et l'inclinaison du passager défini en 3.1.3.A.b. ?

Figures



Figures 1: équipement d'une motrice du TGV A.

Rame: 2 motrices et 10 remorques; longueur: 238 m; masse en charge: 490 t (68 t par motrice); capacité: 485 fauteuils et 37 strapontins; 4 boggies (8 essieux) moteurs, 11 boggies porteurs.

Équipements motrice: transformateur (1), commande boggie 1 (2), commande boggie 2 (3), cabine (4), hacheur auxiliaire (5), bloc commun (6), bloc auxiliaire (7), compresseur (8), condensateurs (9), batteries (10), climatisation (11), capteurs de signalisation (12).

Motisation: 8 moteurs synchrones triphasés (4 par motrice); caractéristiques d'un moteur: Puissance nominale: $P_{un} = 1100 \text{ kW}$ ($U_n = 1246 \text{ V}$, $I_n = 588 \text{ A}$, $n'_n = 4000 \text{ tr/min}$, $v = 300 \text{ km/h}$); alors, à l'entrée de l'onduleur de commande: $V_c = 1519 \text{ V}$, $I_c = 754 \text{ A}$; $P_{UMax} = 1300 \text{ kW}$; Masses; moteur: 1450 kg, onduleur: 80 kg, hacheur d'excitation: 30 kg, commutation: 30 kg.

Transformateur (1 par motrice): $S_n = 4050 \text{ kVA}$; masse: 9500 kg (avec bobine lissage-filtrage).

1477-B

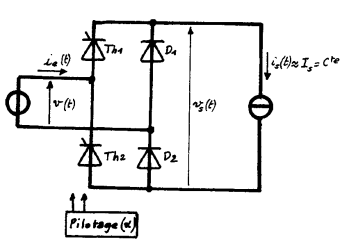


Figure 2.

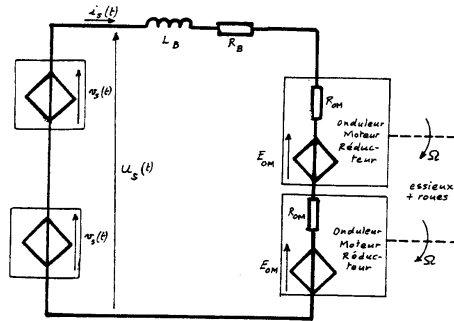


Figure 3.

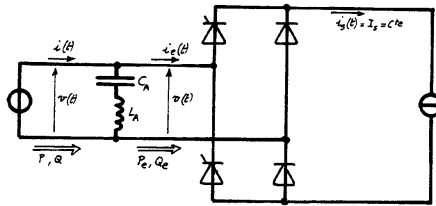


Figure 4.

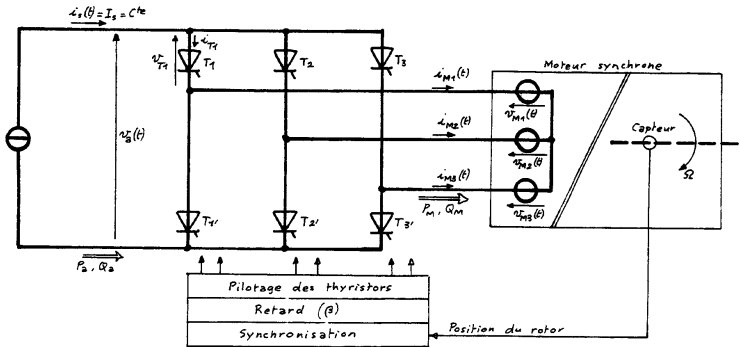


Figure 5.

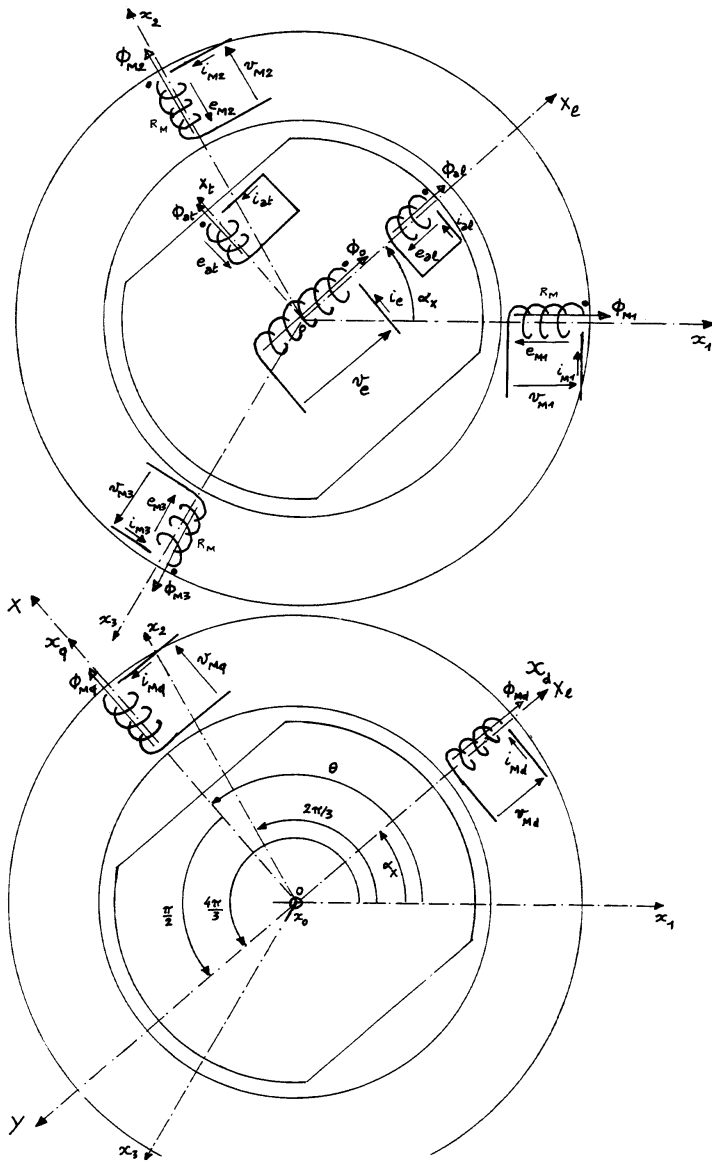


Figure 6.

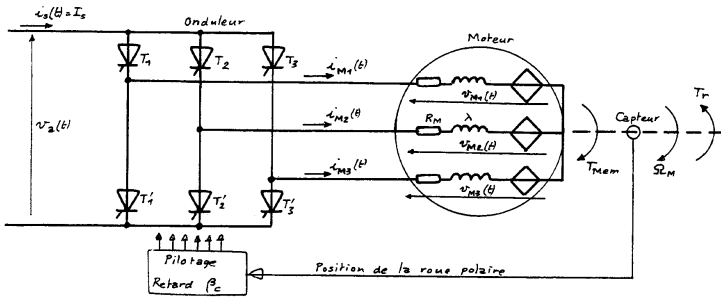


Figure 7.

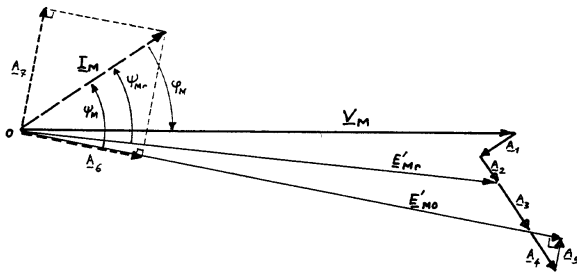


Figure 8.

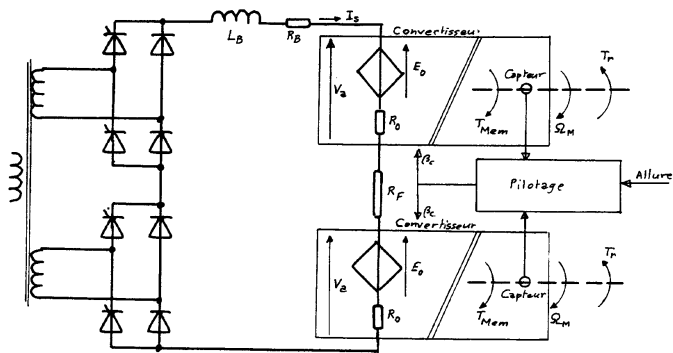


Figure 9.

Annexes

Annexe 1. Spectre de la tension de sortie d'un pont mixte monophasé.

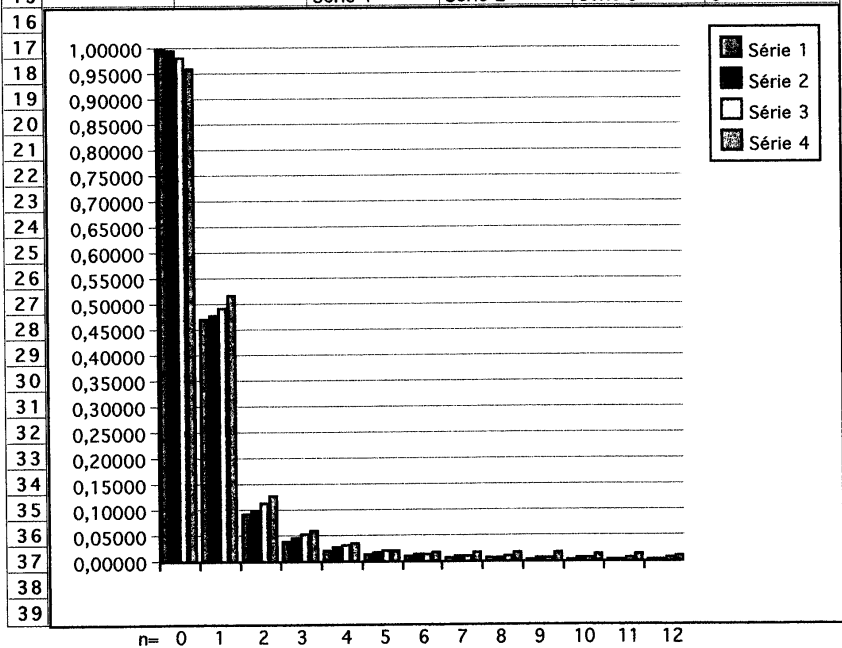
- Valeur moyenne: $V_s = V_{s0} \cdot (1 + \cos(\alpha)) / 2$

- Valeur efficace de la composante sinusoïdale de rang n (entier):

$$V_{sn} = V_{s0} \cdot [1 + \cos(\alpha) \cdot \cos(2 \cdot n \cdot \alpha) + 2 \cdot n \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(2 \cdot n \cdot \alpha) + \{(4 \cdot n^2 - 1) \cdot \sin^2(\alpha)\} / 2]^{1/2} / [4 \cdot n^2 - 1]$$

Spectre {pour: $n \in [0, 12]$ } et pour: $\alpha = 0$ $\alpha = \pi/24$ $\alpha = \pi/12$ $\alpha = \pi/8$

	A	B	C	D	E	F
1	α		0,00000	0,13090	0,26180	0,39270
2	V_s/V_{s0}	0	1,00000	0,99572	0,98296	0,96194
3	$V_{sn}/V_{s0} \ n =$	1	0,47140	0,47735	0,49394	0,51792
4		2	0,09428	0,09994	0,11318	0,12700
5		3	0,04041	0,04565	0,05515	0,06083
6		4	0,02245	0,02720	0,03337	0,03437
7		5	0,01428	0,01852	0,02207	0,02234
8		6	0,00989	0,01360	0,01536	0,01834
9		7	0,00725	0,01047	0,01133	0,01787
10		8	0,00555	0,00831	0,00917	0,01780
11		9	0,00438	0,00672	0,00828	0,01701
12		10	0,00354	0,00552	0,00807	0,01542
13		11	0,00293	0,00458	0,00806	0,01336
14		12	0,00246	0,00385	0,00801	0,01129
15			Série 1	Série 2	Série 3	Série 4



ANNEXE 2

TRANSFORMATION DE PARK

Si trois enroulements {notés a, b et c} identiques, dont les axes homologues { Ox_a, Ox_b et Ox_c } sont coplanaires et repérés par les abscisses angulaires – électriques – O (l'axe Ox_a est pris arbitrairement comme origine), θ_1 {pour Ox_b } et θ_2 {pour Ox_c }, produisent des effets magnétiques à répartition sinusoïdales (et de période $2.\pi$) dans l'espace alors on peut attribuer ces mêmes effets à trois autres bobines identiques aux précédentes : deux de ces bobines ont leurs axes dans le plan des axes originaux, repérés par les angles (toujours définis à partir de Ox_a) θ {pour l'axe Ox_d de la bobine « directe »} et $\theta + \frac{\pi}{2}$ {pour l'axe Ox_q de la bobine « transversale »}, l'axe Ox_0 de la troisième bobine formant avec Ox_d et Ox_q un trièdre orthogonal.

On passe des grandeurs cinétiques {forces magnéto-motrices et – par extension – flux magnétiques, forces électromotrices, tensions et intensités}, notées [$g_a(t), g_b(t), g_c(t)$], des enroulements « originaux » à celles, notées [$g_d(t), g_q(t), g_0(t)$] des bobines fictives « images » par la transformation :

$$\begin{aligned} g_a(t) & \quad g_d(t) = \frac{2}{3} \cdot \{ \cos(\theta) \cdot g_a(t) + \cos(\theta - \theta_1) \cdot g_b(t) + \cos(\theta - \theta_2) \cdot g_c(t) \}; \\ g_b(t) \rightarrow \rho & \quad g_q(t) = \frac{2}{3} \cdot \{ -\sin(\theta) \cdot g_a(t) - \sin(\theta - \theta_1) \cdot g_b(t) - \sin(\theta - \theta_2) \cdot g_c(t) \}; \\ g_c(t) & \quad g_0(t) = \frac{2}{3} \cdot \left\{ \frac{g_a(t)}{2} + \frac{g_b(t)}{2} + \frac{g_c(t)}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Réciproquement, l'originale [$g_a(t), g_b(t), g_c(t)$] se déduit de l'image [$g_d(t), g_q(t), g_0(t)$] par :

$$\begin{aligned} g_a(t) & = \cos(\theta) \cdot g_d(t) - \sin(\theta) \cdot g_q(t) + g_0(t); \\ g_b(t) & = \cos(\theta - \theta_1) \cdot g_d(t) - \sin(\theta - \theta_1) \cdot g_q(t) + g_0(t); \\ g_c(t) & = \cos(\theta - \theta_2) \cdot g_d(t) - \sin(\theta - \theta_2) \cdot g_q(t) + g_0(t). \end{aligned}$$

D'où les matrices :

$$\begin{bmatrix} g_d(t) \\ g_q(t) \\ g_0(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - \theta_1) & \cos(\theta - \theta_2) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta - \theta_1) & -\sin(\theta - \theta_2) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_a(t) \\ g_b(t) \\ g_c(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} g_a(t) \\ g_b(t) \\ g_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 1 \\ \cos(\theta - \theta_1) & -\sin(\theta - \theta_1) & 1 \\ \cos(\theta - \theta_2) & -\sin(\theta - \theta_2) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_d(t) \\ g_q(t) \\ g_0(t) \end{bmatrix}$$

Les propriétés principales de cette transformation sont {si : $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}, \theta_2 = \frac{4\pi}{3}$:

P1 (linéarité) si A et B sont des grandeurs de valeur constante :

$$\text{si : } [g'_a(t), g'_b(t), g'_c(t)] \rightarrow \rho [g'_d(t), g'_q(t), g'_0(t)] \text{ et } [g''_a(t), g''_b(t), g''_c(t)] \rightarrow \rho [g''_d(t), g''_q(t), g''_0(t)]$$

$$\begin{aligned} \text{alors : } \quad g_a(t) & = A \cdot g'_a(t) + B \cdot g''_a(t) & \quad g_d(t) & = A \cdot g'_d(t) + B \cdot g''_d(t) \\ g_b(t) & = A \cdot g'_b(t) + B \cdot g''_b(t) & \rightarrow \rho & \quad g_q(t) & = A \cdot g'_q(t) + B \cdot g''_q(t) \\ g_c(t) & = A \cdot g'_c(t) + B \cdot g''_c(t) & \quad g_0(t) & = A \cdot g'_0(t) + B \cdot g''_0(t) \end{aligned}$$

P2 (transformée d'une permutation) :

$$\text{si : } \{ [f_a(t), f_b(t), f_c(t)] \rightarrow \rho [f_d(t), f_q(t), f_0(t)] \}$$

$$\begin{aligned} \text{alors : } \quad g_a = f_a & \quad g_d = \cos(2\theta) \cdot f_d - \sin(2\theta) \cdot f_q \\ g_b = f_c & \rightarrow \rho \quad g_q = -\sin(2\theta) \cdot f_d - \cos(2\theta) \cdot f_q \\ g_c = f_b & \quad g_0 = f_0 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} g_d \\ g_q \\ g_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) & 0 \\ -\sin(2\theta) & -\cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_d \\ f_q \\ f_0 \end{bmatrix}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}
 g_a &= f_b & g_d &= \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) f_d - \sin\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) f_q \\
 g_b &= f_a \rightarrow \rho & g_q &= -\sin\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) f_d - \cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) f_q \\
 g_c &= f_c & g_o &= f_o
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 g_a &= f_c & g_d &= \cos\left(2\theta - \frac{4\pi}{3}\right) f_d - \sin\left(2\theta - \frac{4\pi}{3}\right) f_q \\
 g_b &= f_b \rightarrow \rho & g_q &= -\sin\left(2\theta - \frac{4\pi}{3}\right) f_d - \cos\left(2\theta - \frac{4\pi}{3}\right) f_q \\
 g_c &= f_a & g_o &= f_o
 \end{aligned}$$

P3 (dérivation) :

si : $\{[f_a(t), f_b(t), f_c(t)] \rightarrow \rho [f_d(t), f_q(t), f_o(t)]\}$

alors :

$$\begin{aligned}
 g_a(t) &= \frac{df_a(t)}{dt} & g_d &= \frac{df_d}{dt} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right) f_q \\
 g_b(t) &= \frac{df_b(t)}{dt} \rightarrow \rho & g_q &= \left(\frac{d\theta}{dt}\right) f_d + \frac{df_q}{dt} \\
 g_c(t) &= \frac{df_c(t)}{dt} & g_o &= \frac{df_o}{dt}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} g_d \\ g_q \\ g_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} & -\left(\frac{d\theta}{dt}\right) & 0 \\ \left(\frac{d\theta}{dt}\right) & \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_d \\ f_q \\ f_o \end{bmatrix}$$

P4 (expression d'une « puissance ») :

si : $\{[f_a(t), f_b(t), f_c(t)] \rightarrow \rho [f_d(t), f_q(t), f_o(t)]\}$

et : $[g_a(t), g_b(t), g_c(t)] \rightarrow \rho [g_d(t), g_q(t), g_o(t)]\}$

alors : $p(t) = f_a(t) \cdot g_a(t) + f_b(t) \cdot g_b(t) + f_c(t) \cdot g_c(t) = \frac{3}{2} f_d(t) \cdot g_d(t) + \frac{3}{2} f_q(t) \cdot g_q(t) + 3 f_o(t) \cdot g_o(t)$

Enfin, transformées de quelques originales particulières (quelle que soit la valeur de α) :

P5 :

$$\begin{aligned}
 g_a(t) &= f(t) & g_d &= 0 \\
 g_b(t) &= f(t) \rightarrow \rho & g_q &= 0 \\
 g_c(t) &= f(t) & g_o &= f(t)
 \end{aligned}$$

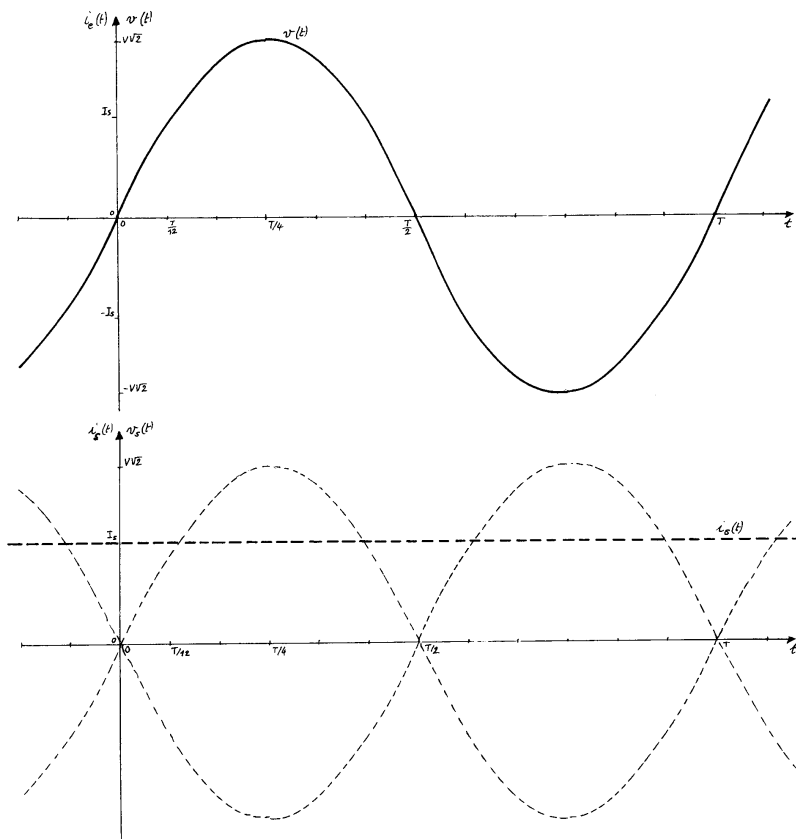
P6 :

$$\begin{aligned}
 g_a(t) &= f(t) \cdot \cos(\alpha) & g_d(t) &= \cos(\alpha - \theta) \cdot f(t) \\
 g_b(t) &= f(t) \cdot \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \rightarrow \rho & g_q(t) &= \sin(\alpha - \theta) \cdot f(t) \\
 g_c(t) &= f(t) \cdot \cos\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right) & g_o(t) &= 0
 \end{aligned}$$

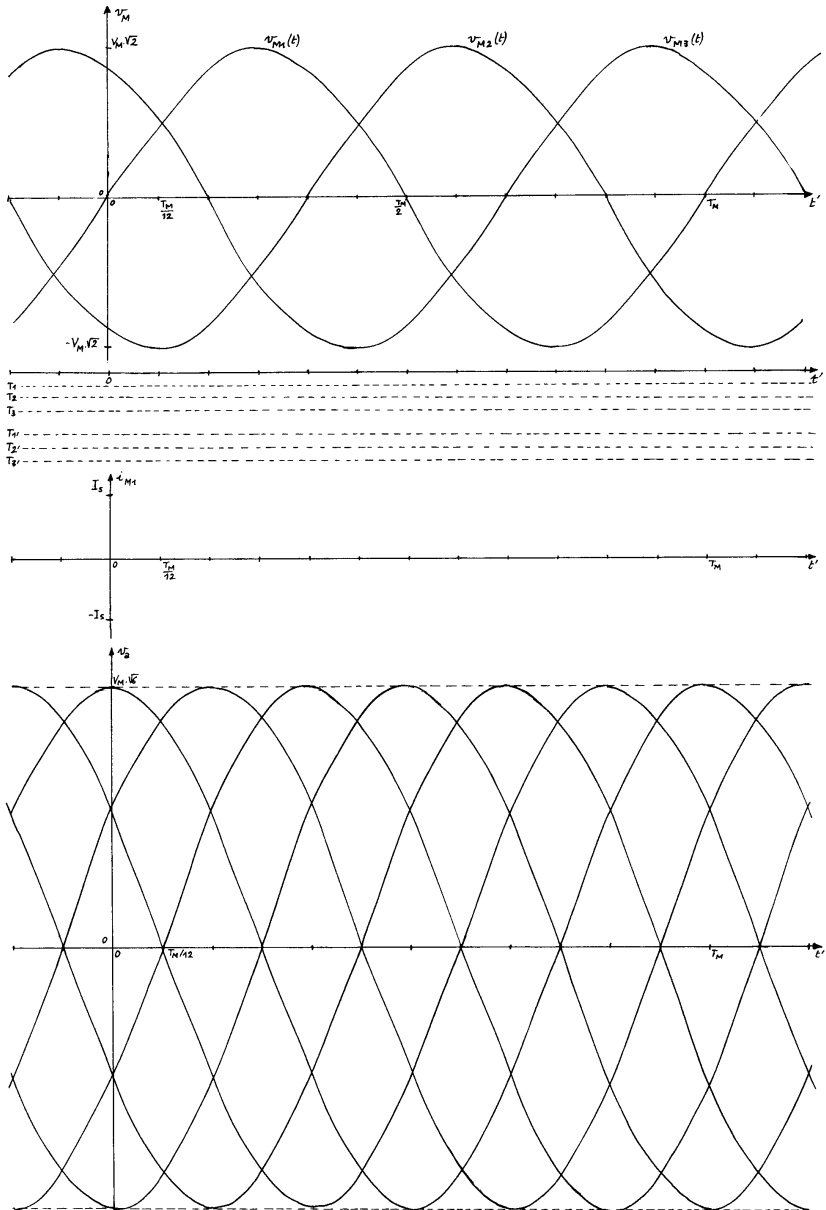
P7 :

$$\begin{aligned}
 g_a(t) &= G_M \cdot \cos(\omega t + \psi) & g_d(t) &= G_M \cdot \cos(\omega t + \psi - \theta) \\
 g_b(t) &= G_M \cdot \cos\left(\omega t + \psi - \frac{2\pi}{3}\right) \rightarrow \rho & g_q(t) &= G_M \cdot \sin(\omega t + \psi - \theta) \\
 g_c(t) &= G_M \cdot \cos\left(\omega t + \psi - \frac{4\pi}{3}\right) & g_o(t) &= 0
 \end{aligned}$$

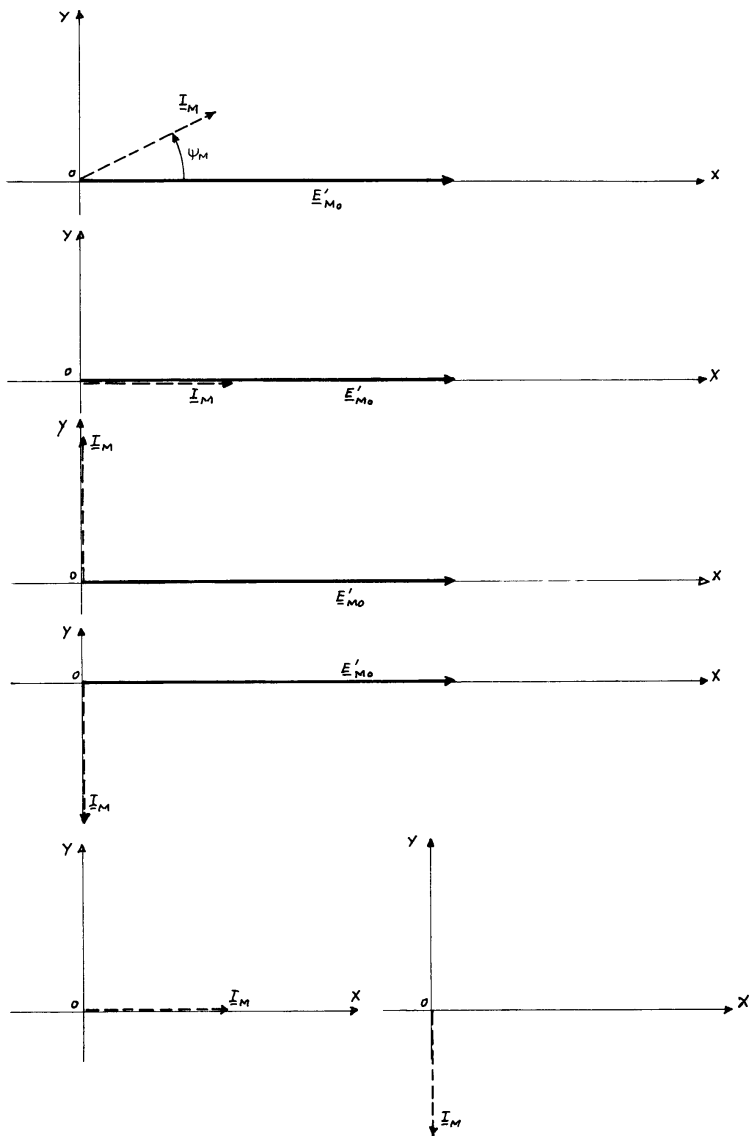
Document-Réponse n°1.



Document-Réponse n°2.



Document-Réponse n°3.



1478

23221

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés**

section : sciences physiques

option : procédés
physico-chimiques

composition de physique

Durée : 5 heures

Calculatrice de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.

EVOLUTION D'UN FILM LIQUIDE

La compréhension des mousses observées dans de nombreux procédés passe par celle d'objets plus simples, comme par exemple un film tendu sur un cadre rectangulaire. Le premier problème, aborde quelques aspects de l'évolution d'un tel film et de son suivi par interférométrie. Dans le deuxième, on essaie de comprendre la structure de films très minces à partir d'interactions microscopiques d'origine électrique. Les deux parties de l'épreuve sont indépendantes. Les sous-parties (I-1, I-2, II-1 etc...) sont également relativement indépendantes les unes des autres.

Des constantes physiques et des formules utiles sont données à la fin du texte.

I – DRAINAGE ET ECLATEMENT D'UN FILM LIQUIDE.

I-1 QUESTION PRELIMINAIRE : REFLEXION ET TRANSMISSION DE LA LUMIERE

I-1-1 Rappeler les équations gouvernant le champ électromagnétique dans un diélectrique linéaire homogène isotrope, non magnétique et non chargé, de permittivité diélectrique $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$.

I-1-2 On considère une onde électromagnétique plane polarisée rectilignement et se propageant suivant Oz dans ce milieu. On note Ox et Oy les deux autres axes, le trièdre Oxyz étant direct, $\mathbf{k} = k_z \mathbf{e}_z$ le vecteur d'onde et $\mathbf{E} = E_0 \exp[i(kz - \omega t)] \mathbf{e}_x$ le champ électrique complexe (\mathbf{e}_x vecteur unitaire dans la direction i). Calculer le champ magnétique \mathbf{B} correspondant ainsi que le vecteur de Poynting \mathbf{S} mesurant le transport d'énergie par propagation.

I-1-3 Quelle relation lie ω à k ? Comment s'écrit la vitesse de phase de cette onde v en fonction de c , vitesse de la lumière dans le vide et ϵ_r ? Comment définit-on l'indice optique du milieu diélectrique n et comment s'écrit-il? Réécrire \mathbf{B} et \mathbf{S} en ne faisant plus intervenir que μ_0 , c , n et le champ \mathbf{E} .

I-1-4 On suppose qu'un diélectrique (1) d'indice n_1 remplit le demi-espace $z < 0$, l'autre demi-espace ($z > 0$) étant rempli par un autre diélectrique (2) d'indice n_2 . Quelles conditions portant sur les composantes normales et tangentielles des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} doivent être satisfaites en $z = 0$? Dire qualitativement ce que devient l'onde de la question I-1-2 lors du passage en $z = 0$.

I-1-5 On note $\mathbf{E}_i = E_{i0} \exp[i(kz - \omega t)] \mathbf{e}_x$ l'onde incidente, $\mathbf{E}_r = E_{r0} \exp[-i(kz + \omega t)] \mathbf{e}_x$ l'onde réfléchie et $\mathbf{E}_t = E_{t0} \exp[i(kz - \omega t)] \mathbf{e}_x$ l'onde transmise. Calculer les rapports $r = E_{r0}/E_{i0}$ et $t = E_{t0}/E_{i0}$ ainsi que les coefficients R et T de réflexion et de transmission de l'énergie en fonction des indices optiques des deux milieux. Que peut-on dire de $R+T$? Qu'arrive-t-il au champ réfléchi quand $n_2 > n_1$? Qu'est-ce que cela implique pour la phase de l'onde réfléchie?

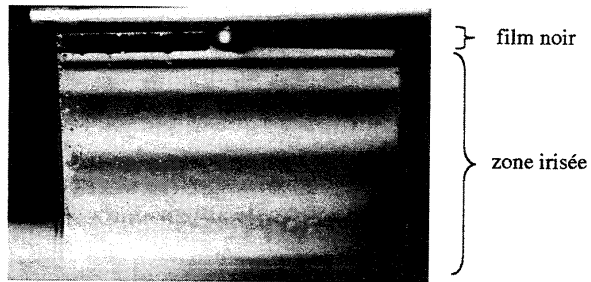


Figure 1: film d'eau savonneuse sur un cadre vertical (hauteur 2 cm)

I-2-OBSERVATION QUALITATIVE D'UN FILM LIQUIDE.

Lorsqu'on regarde un film d'eau savonneuse éclairé devant un fond noir, en incidence normale, on observe la structure reproduite sur la figure 1: une zone irisée surmontée par un domaine sombre appelé "film noir". La zone irisée est constituée de franges horizontales colorées. L'état du film évolue avec le temps: on observe une descente des franges et un agrandissement du film noir. La géométrie du problème, supposée bidimensionnelle est indiquée sur la figure 2-a, où l'axe Ox est normal au film.

I-2-1 Que représentent les franges? En se plaçant en lumière monochromatique, et en comptant le film noir comme ordre zéro, donner l'épaisseur h_k du film à la frange sombre d'ordre k . On notera n l'indice optique de l'eau et λ la longueur d'onde de la lumière. Quelle évolution du film traduit la descente des franges?

I-2-2 Donnez un ordre de grandeur de l'épaisseur du film à sa base, sachant que l'on observe quatre franges sombres en lumière rouge.

I-3 MODELISATION DU DRAINAGE.

I-3-1 Un film d'eau savonneuse est composé d'eau et de surfactant. Qu'est ce, en peu de mots, qu'un surfactant? Comment se comporte-t'il aux surfaces libres du film et quelle est son influence sur une propriété connue de ces surfaces?

On admet ici, ce qui est souvent le cas, que le surfactant forme à la surface du film l'équivalent d'une paroi solide du point de vue des frottements subis par le liquide, mais souple du point de vue des pressions, et qui reste à peu près fixe par rapport au cadre qui supporte le film. Pour simplifier l'étude, on fait abstraction de la croissance du film noir: on utilise le système d'axes $Oxyz$ de la figure 2-b, dont l'origine suit le déplacement très lent de la frontière séparant le film noir de la zone irisée.

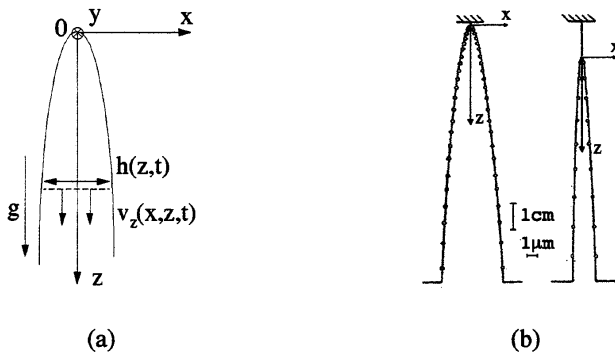


Figure 2: (a) Géométrie du drainage dans l'épaisseur du film. (b) Deux profils d'épaisseur d'un film pris après 15 minutes et une heure de drainage. Sur chacune des figures, les échelles horizontales et verticales sont différentes.

I-3-2 Rappeler les équations satisfaites par la vitesse \mathbf{v} et la pression P d'un liquide newtonien incompressible de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ , placé dans le champ de pesanteur terrestre. Donner le sens physique de chaque terme de l'équation de la dynamique et rappeler la définition du nombre de Reynolds noté Re , en utilisant la viscosité cinématique ν .

I-3-3 Expérimentalement, la vitesse de descente des franges est de l'ordre du millimètre par seconde. Estimer un ordre de grandeur de Re , le liquide étant ici de l'eau de viscosité dynamique $\eta=10^{-3}$ Pa.s. On utilisera l'estimation de l'épaisseur du film trouvée au I-2-3. Commenter la valeur obtenue. On admet également que l'on peut négliger le terme instationnaire $\rho \partial \mathbf{v} / \partial t$, les temps caractéristiques du drainage étant très grands. Que devient alors l'équation de la dynamique et quel nom lui donne-t-on?

I-3-4 On suppose également que l'on peut négliger les dépendances en z devant les dépendances en x ($\partial / \partial z \ll \partial / \partial x$), ainsi que la vitesse horizontale v_x . A quelle condition portant sur la quantité $\partial h / \partial z$ ces approximations vous paraissent-elles correctes? Etablir alors une équation liant la vitesse verticale du liquide $v_z(x,z,t)$ au gradient de pression vertical $\partial P / \partial z$ et à la gravité. Quelle valeur doit prendre approximativement $\partial P / \partial x$ si l'on néglige v_x ? Connaissez vous des situations techniques où ces simplifications sont appliquées et le nom qui leur est souvent donné?

I-3-5 Quelles conditions aux limites doit-on écrire en $x = \pm h(z,t)/2$ concernant la vitesse v_z et la pression P compte tenu des hypothèses du I-3-1 (On néglige la courbure des surfaces libres). Intégrer l'équation de la dynamique, et tracer l'allure de $v_z(x)$. Quel écoulement bien connu obtient-on?

I-3-6 Calculer le débit volumique J_z de liquide dans la direction Oz , par unité de largeur suivant Oy , en fonction de g , $h(z,t)$ et ν .

I-3-7 Effectuer un bilan de masse dans une tranche de fluide comprise entre z et $z+dz$. En déduire l'équation d'évolution de $h(z,t)$. Que vaut la vitesse de descente $U(z)$ d'une frange située à la cote z en fonction de g , v et $h(z,t)$?

I-3-8 Chercher une solution de cette équation par séparation des variables $h(z,t)=F(t)G(z)$. Montrer qu'un choix pertinent des constantes d'intégration conduit à une solution en $(z/t)^{1/2}$. On admettra qu'après un transitoire très bref, cette solution décrit bien l'épaisseur du film pour $z > 0$.

I-3-9 On a reproduit sur la figure 2-b des profils d'épaisseurs mesurés après 15 minutes puis une heure de drainage. Vous paraissent-ils en accord avec ce modèle? On pourra estimer l'amincissement du film défini comme $h(z,t_2)/h(z,t_1)$ avec $t_1=15$ minutes et $t_2=1$ heure.

I-4-SUIVI PAR INTERFEROMETRIE.

Afin d'étudier avec précision l'évolution temporelle de l'épaisseur du film en un point de cote z , on réalise l'expérience de la figure 3. La longueur d'onde dans le vide λ du laser vaut 632,8 nm, et l'indice n de l'eau environ 1,33.

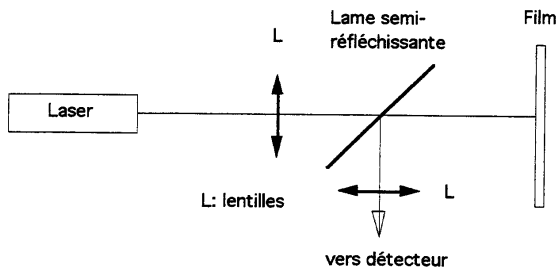


Figure 3

I-4-1 En utilisant les résultats obtenus au I-1, calculer le coefficient de réflexion du film R_F en énergie. On négligera les interférences multiples en ne considérant qu'une réflexion par face du film, et on utilisera le fait que le coefficient de transmission est proche de 1. Montrez que R_F se met sous la forme:

$$R_F = F(\alpha) \sin^2 \left[f\left(n, \frac{h}{\lambda}\right) \right]$$

où $\alpha=(n-1)/(n+1)$ est appelé coefficient de Fresnel, et où F et f sont à calculer.

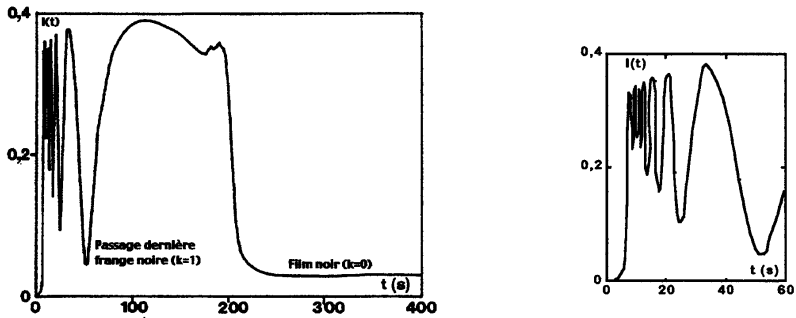


Figure 4: à gauche, intensité lumineuse réfléchie par le film (unités arbitraires) en fonction du temps; à droite, détail des 60 premières secondes.

I-4-2 En déduire l'allure attendue de l'évolution en fonction du temps de l'intensité lumineuse $I(t)$ mesurée par le détecteur à une hauteur z du film. On calculera les temps t_k correspondant aux minima d'intensité, où k désigne l'ordre de la frange noire passant devant le faisceau.

I-4-3 Le film est formé par tirage hors d'un bain d'un cadre qui monte très rapidement en coupant le faisceau laser, avant de s'immobiliser. On enregistre l'intensité lumineuse en fonction du temps, reproduite figure 4 en unités arbitraires. En déduire l'épaisseur initiale du film au point de mesure, juste à l'arrêt du cadre.

I-5 – ECLATEMENT D'UN FILM.

On considère maintenant un film tendu sur un cadre horizontal dont un coté AB , de longueur L , est susceptible de coulisser perpendiculairement à lui-même (figure 5). On rappelle que les surfaces libres de liquide se comportent comme des membranes sous tension mécanique et on note γ la tension superficielle air/liquide. On néglige tout effet lié à la gravité.

I-5-1 Rappeler l'expression de la force F qu'il faut exercer sur le coté mobile AB pour augmenter de façon quasi-statique l'aire du film en fonction de γ et L . On déplace AB d'une distance dz en $A'B'$. Donner l'énergie emmagasinée par le film en fonction de γ , L et dz .

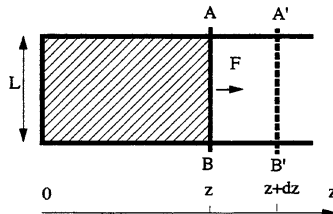


Figure 5

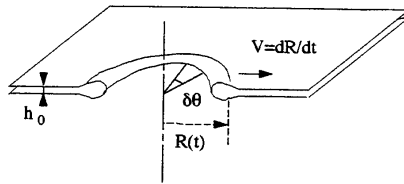


Figure 6

I-5-2 Un trou de rayon $R(t)$ s'est formé dans le film, supposé d'épaisseur uniforme h_0 (figure 6) et on essaie de prévoir son évolution. Le liquide balayé se rassemble en un anneau plus épais entourant l'ouverture, dont la largeur sera supposée faible devant $R(t)$. Montrez, qu'un élément de longueur $R\delta\theta$ de l'anneau est soumis à une force δf qui tend à ouvrir davantage le trou, force que l'on exprimera en fonction de $R\delta\theta$ et γ .

I-5-3 Exprimer la masse $\delta m(t)$ de liquide contenue dans la portion d'anneau correspondant à $\delta\theta$ sur la figure 6 en fonction de ρ_0 masse volumique du liquide, h_0 et $R(t)$.

I-5-4 En effectuant un bilan de quantité de mouvement sur un système clairement défini, trouver l'équation différentielle qui gouverne $R(t)$.

I-5-5 En déduire la vitesse d'ouverture du trou $V=dR/dt$, lorsqu'on atteint un régime permanent (V constante). Application numérique: calculer V pour un film d'eau savonneuse d'épaisseur $h_0=10^{-4}$ m. On donne $\gamma=10^{-2}$ J m⁻².

I-5-6 Historiquement, la première estimation de V fut obtenue en supposant qu'il y avait conservation de l'énergie durant l'ouverture du trou. Montrer que cette idée mène à une vitesse V' ayant le bon ordre de grandeur, mais plus grande que V d'environ 40%. Que devient l'énergie perdue?

II – ETUDE D'UN FILM ULTRA-MINCE.

Aux temps longs, l'épaisseur d'un film peut devenir si faible que son évolution dépend de forces d'origine microscopique, en particulier les forces de Van der Waals et les interactions électriques entre ions en solution. On propose ici une théorie simplifiée visant à estimer ces forces et l'épaisseur d'équilibre du film noir.

II-1 DIPOLES EN ELECTROSTATIQUE – POLARISABILITE D'ORIENTATION.

II-1-1 On considère un dipôle électrique rigide composé de deux charges $+q_1$ et $-q_1$ séparées d'une distance a_1 et placé à l'origine d'un repère $Oxyz$. On note $\mathbf{p}_1=p_1\mathbf{e}_x$ son moment dipolaire, avec $p_1=q_1a_1$ et \mathbf{e}_x vecteur unité porté par l'axe Ox . Retrouver le potentiel électrique

$V(r,\theta)$ engendré dans le plan Oxy, en fonction de la distance à l'origine r et l'angle θ fait par le rayon vecteur avec l'axe Ox, lorsque $r \gg a_1$. En déduire les composantes en coordonnées polaires du champ électrique ($E_{1r}, E_{1\theta}$).

II-1-2 On laisse maintenant tourner ce dipôle dans le plan Oxy, et on le soumet à un champ extérieur constant dirigé suivant Ox: $E=E_{ext}e_x$. Calculer ou donner l'énergie potentielle du dipôle en fonction de p_1 , E_{ext} et de l'angle ϕ entre les deux vecteurs e_x et p_1 . Quelle est l'orientation privilégiée du dipôle?

II-1-3 On suppose maintenant que le dipôle tournant est celui d'une molécule polaire dont l'orientation fluctue dans les trois directions de l'espace. On admet que la probabilité d'orientation est donnée par le facteur de Boltzmann (on notera T la température et k_B la constante de Boltzmann). Physiquement, quels effets antagonistes sont à l'origine de cette dépendance? Calculer la polarisation moyenne $\langle p_1 \rangle$ du dipôle (voir relations et intégrales utiles à la fin de l'énoncé).

II-1-4 Montrer, aux faibles champs, que l'on peut traiter la molécule comme une molécule polarisable et calculer la polarisabilité α_1 , définie par la relation $\langle p_1 \rangle = \alpha_1 E_{ext}$.

II-2 INTERACTION DIPOLE/DIPOLE INDUIT.

On reprend le dipôle de la question II-1-1, que l'on place à nouveau à l'origine avec une orientation fixe telle que $p_1 = p_1 e_x$. On considère maintenant une molécule polarisable, placée en un point M du plan Oxy, assimilable à deux charges $+q_2$ et $-q_2$ séparées d'un vecteur a_2 de module variable restant dans le même plan. Elle est soumise au champ $E_1(r,\theta)$ créé par le dipôle rigide p_1 du II-1-1 et acquiert alors un moment dipolaire $p_2 = q_2 a_2 = \alpha_2 E_1$ (cf. fig. 7-a).

II-2-1 Montrer que la force subie par le dipôle variable s'écrit $f = (p_2 \cdot \nabla) E_1$. En déduire l'énergie potentielle $w(r)$ du dipôle variable en fonction de α_2 et $E_1(r)$.

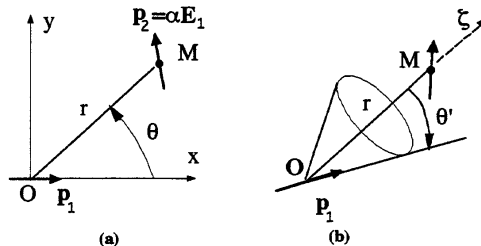


Figure 7: (a) Interaction entre un dipôle permanent p_1 placé en O et un dipôle induit placé au point M; (b) Même problème, mais avec p_1 susceptible de fluctuer autour de l'axe Oz défini par les deux points O et M.

II-2-2 Ecrire cette énergie potentielle en fonction de ϵ_0 , p_1 , α_2 , et des coordonnées polaires (r, θ) repérant le point M dans le plan Oxy. Qu'aurait-on trouvé en appliquant directement la formule donnant l'énergie d'un dipôle rigide placé dans le champ d'un autre dipôle rigide?

II-2-3 On considère maintenant que l'orientation du dipôle au point O fluctue par rapport au vecteur $\mathbf{r}=\mathbf{OM}$ en prenant toutes les orientations possibles dans l'espace à trois dimensions, supposées équiprobables, mais en conservant un module constant p_1 . Calculer l'énergie potentielle moyenne d'interaction $\langle w(\mathbf{r}) \rangle$ en fonction de ϵ_0 , p_1 , α_2 et r . On moyennera sur l'angle solide défini par l'angle θ' de la figure 7-b.

II-3 FORCES DE VAN DER WAALS.

II-3-1 On considère maintenant deux molécules présentant un moment dipolaire permanent de moment p_1 et p_2 , et soumise à l'agitation thermique. On admet que l'on peut traiter ce système comme dans la partie II-2-3, c'est à dire se ramener à une molécule tournant librement, l'autre s'ajustant en moyenne au mouvement de la précédente en respectant la statistique de Boltzman. En vous appuyant sur les résultats des parties II-1 et II-2, montrez que l'énergie d'interaction entre ces deux molécules va se mettre sous la forme:

$$\langle w(r) \rangle = -\beta \frac{\alpha_1 \alpha_2}{r^n}$$

où n est un entier, β un facteur que l'on exprimera en fonction de $k_B T$ et ϵ_0 , et où les α_i désignent les polarisabilités d'orientation que l'on exprimera en fonction de p_i , ϵ_0 et $k_B T$.

II-3-2 Le résultat du II-3-1 est en fait très général et s'applique à d'autres types de polarisabilité, comme celle du nuage électronique de molécules ou d'atomes ne présentant pas de dipôle permanent, sous réserve de modifier la constante β et les polarisabilités α_i . Expliquer rapidement et qualitativement le mécanisme physique très général de cette interaction, et dire pourquoi cette force est toujours attractive.

II-3-3 Application numérique: on considère deux molécules polaires dont le moment dipolaire est d'environ une charge élémentaire par une distance atomique (10^{-10} m). Calculer la distance en dessous de laquelle ce potentiel devient comparable à l'agitation thermique. Comparer avec un potentiel de type Coulomb. Que conclure sur la portée des forces de Van der Waals?

II-3-4 On peut se représenter le film d'eau savonneuse comme une lamelle d'épaisseur H contenant n molécules de polarisabilité α par unité de volume, et séparant deux demi-espaces vides. En intégrant dans tout l'espace les interactions de Van der Waals (calcul non demandé ici), on peut montrer qu'il apparaît aux faibles valeurs de H une interaction attractive entre les deux surfaces liquide/gaz, dont l'énergie par unité de surface s'écrit:

$$W_{vw}(H) = -\frac{A}{12\pi H^m} \quad \text{avec } A = \pi^2 \beta n^2 \alpha^2$$

où A s'appelle la constante de Hamaker. Trouver la valeur de m par analyse dimensionnelle.

II-3-5 Pour un film, une valeur typique est $A=3,7 \cdot 10^{-20}$ J. Calculer la force d'interaction par unité de surface entre les deux faces d'un film d'épaisseur nanométrique. La comparer à la pression atmosphérique. Même question pour un film micronique.

II-4 FORCES DE DOUBLE-COUCHE

Une autre force mise en jeu dans le film noir est liée aux charges portées par les têtes polaires des molécules de surfactants. Si l'on appelle Γ leur nombre par unité de surface et $-Ze$ la charge portée par chacune d'elles, où e est la charge électrique élémentaire, les surfaces libres vont se comporter comme deux murs chargés (charge par unité de surface $\sigma = -Ze\Gamma$) et se repousser. Cette interaction va être limitée par la formation au voisinage de chaque mur d'une couche chargée répartie en volume (figure 8, densité de charge $\rho(x)$), appelée couche de Debye. Cette couche est constituée du contre-ion du surfactant (par exemple Na^+) et d'autres ions présents en solution provenant éventuellement d'un sel (par exemple NaCl). On se propose ici de calculer la structure d'une de ces couches supposée isolée, puis d'estimer l'interaction entre les deux surfaces aux faibles épaisseurs de film lorsque les couches de Debye commencent à se recouvrir.

II-4-1 Rappeler les équations satisfaites par les vecteurs \mathbf{E} , \mathbf{D} et la densité de charges $\rho(\mathbf{r})$ en statique. On admettra que l'eau se comporte comme un diélectrique linéaire isotrope de permittivité ϵ . En déduire une équation liant $\rho(x)$ et le potentiel électrique noté $V(x)$.

II-4-2 Pour simplifier, on admet que la solution ne contient que deux types majoritaires de porteurs de charges, de charges respectives $+ze$ et $-ze$, dont les nombres respectifs par unité de volume sont donnés par: $n_+(x) = n_0 \exp[-zeV/(k_B T)]$ et $n_-(x) = n_0 \exp[zeV/(k_B T)]$.

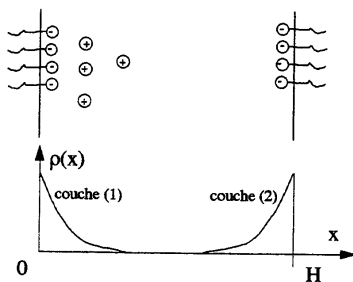


Figure 8: Schémas du film liquide et des répartitions de charge mises en jeu.

Quel est le sens physique de cette dépendance? Calculer la charge volumique $\rho(x)$ en fonction de la quantité $\sinh[zeV/(k_B T)]$ où \sinh désigne le sinus hyperbolique, et en déduire une équation liant d^2V/dx^2 à $\sinh[zeV/(k_B T)]$.

II-4-3 On s'intéresse au cas suggéré sur la figure 8, où les deux couches, notées respectivement (1) et (2), sont pratiquement sans recouvrement. On peut alors calculer le potentiel dans la couche (1) en ignorant la couche (2). Quelle valeur l'électroneutralité de la solution impose-t-elle à $V(x)$ à grande distance de l'interface? Que représente concrètement n_0 ?

II-4-4 On considère la limite $|zeV| \ll k_B T$ (approximation de Debye-Hückel). Montrer que le potentiel associé à la couche (1) se met sous la forme $V(x) = V_0 \exp(-\kappa x)$, et exprimer κ en fonction de n_0 , z , e , ϵ et $k_B T$. Que représente la quantité $1/\kappa$ et comment l'appelle-t-on en général?

II-4-5 A partir d'un bilan des charges en présence, écrire la condition intégrale qui doit relier la charge surfacique à la charge volumique? En déduire une relation liant $\sigma = -Ze\Gamma$ et dV/dx en $x=0$. Quelle relation portant sur le champ électrique en $x=0$ retrouve-t-on? En déduire V_0 en fonction de κ , ϵ , Γ , Z et e . Exprimer le potentiel $V(x)$ et la densité de charges $\rho(x)$ en fonction de κ , x , $\sigma = -Ze\Gamma$ et ϵ . Les tracer en fonction de x .

II-4-6 Application numérique: Calculer $1/\kappa$ pour un électrolyte composé d'ions monovalents et de concentration 0,07 mole par litre. On se placera à température ambiante avec $\epsilon_r = 80$ (permittivité relative de l'eau à fréquence nulle). Comparer à la portée des forces de Van der Waals de la partie précédente.

II-4-7 Dans la pratique, les rapports $eV/(k_B T)$ peuvent être assez grands près des surfaces libres. En multipliant chaque membre de cette équation par dV/dx , montrer que l'on peut se ramener à une équation liant dV/dx à $\sinh[zeV/2k_B T]$. Voyez-vous un analogue de cette démarche, rencontré en mécanique du point? Montrez qu'une solution décrivant une couche de Debye isolée peut encore être établie et se met sous la forme:

$$\tanh\left(\frac{zeV(x)}{4k_B T}\right) = \tanh\left(\frac{zeV_0}{4k_B T}\right) \exp(-\kappa x)$$

où \tanh désigne la tangente hyperbolique. On utilisera une des primitives données à la fin du sujet.

II-4-8 Montrez que pour x grand, on conserve encore une décroissance exponentielle en $V(x) = V_0^* \exp(-\kappa x)$ mais avec un préfacteur modifié V_0^* que l'on exprimera en fonction de $k_B T$, z , e et du facteur $\gamma_0 = \tanh[zeV_0/(4k_B T)]$, que l'on prendra proche de l'unité dans la suite.

II-4-9 On s'intéresse maintenant au cas où les deux couches de Debye se recouvrent légèrement vers $x \approx H/2$, et on se propose de calculer la répulsion entre les deux interfaces, en estimant la pression $P(x)$ dans le film. Pour cela, on considère une tranche de fluide placée entre x et $x+dx$, soumise aux forces de pression et aux forces électriques exercées sur la distribution de charge $\rho(x)$. En écrivant son équilibre mécanique, relier dP/dx à $\rho(x)dV/dx$. En utilisant la question II-4-2, montrer que la pression est liée au potentiel électrique V par la relation:

$$P(x) - P_0 = 2n_0 k_B T \left[\cosh \left(\frac{zeV(x)}{k_B T} \right) - 1 \right]$$

où P_0 est une pression de référence définie pour un potentiel nul. Simplifier cette expression dans la limite des faibles potentiels.

II-4-10 On admet que la force de répulsion Π entre les deux interfaces par unité de surface est donnée par la quantité $P(H/2) - P_0$. On admet également que l'on peut superposer au voisinage de $H/2$ les deux distributions de potentiel associées à chaque couche dans la limite étudiée au II-4-8. Exprimer Π en fonction de n_0 , $k_B T$, et $\exp(-\kappa H)$. Définir et exprimer l'énergie potentielle associée par unité de surface $W_a(H)$.

II-5 APPLICATION AU FILM NOIR

On suppose maintenant que l'énergie d'interaction par unité de surface entre les deux surfaces libres du film comporte trois termes: l'interaction de Van der Waals $W_{vw}(H)$, le potentiel de double couche $W_d(H)$ calculé ci-dessus et un potentiel de répulsion stérique $W_s(H)$ à très courte portée du type "sphères dures" entre molécules de savon ($W_s=0$ pour $H > H_m$ où H_m est une échelle moléculaire et $W_s = +\infty$ pour $H < H_m$).

II-5-1 Montrez qualitativement que l'énergie peut présenter deux minima, l'un pour H proche de H_m (film noir de Newton), l'autre pour une épaisseur plus grande (film noir "commun"). On commencera par étudier sommairement $W_s(H) + W_{vw}(H)$, et on imaginera les modifications apportées par $W_d(H)$.

II-5-2 Comment évolue avec κ la barrière de potentiel à franchir pour passer du film noir commun au film noir de Newton? Les films d'équilibre obtenus avec du dodécyl-sulfate de sodium en concentration de 0,07 mole par litre sont des films noirs communs d'une dizaine de nanomètres d'épaisseur. En ajoutant un sel (0,4 mole par litre de chlorure de sodium), l'épaisseur d'équilibre chute à 3 nanomètres. Expliquer qualitativement ce phénomène.

Données numériques.

- Constante de Boltzmann: $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
- Nombre d'Avogadro: $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Accélération de la pesanteur: $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$
- Charge électrique élémentaire: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- Permittivité du vide: $\epsilon_0 = 1/(36\pi \cdot 10^9)$ unités SI
- Pression atmosphérique $P_A = 10^5 \text{ Pa}$
- Indice optique de l'eau $n = 1,33$

Relations et intégrales utiles

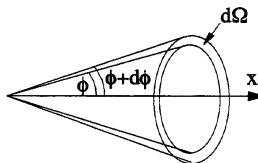
- On rappelle le laplacien scalaire: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- On donne les intégrales suivantes:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{\sinh(\xi)} = \ln \left| \frac{\tanh(\frac{\xi_2}{2})}{\tanh(\frac{\xi_1}{2})} \right| \quad \text{avec:} \quad \tanh(\xi) = \frac{\sinh(\xi)}{\cosh(\xi)}$$

$$\int_{-1}^1 u e^{\beta u} du = \frac{2}{\beta} \cosh(\beta) - \frac{2}{\beta^2} \sinh(\beta) \quad \int_{-1}^1 e^{\beta u} du = \frac{2}{\beta} \sinh(\beta)$$

- Variation d'angle solide autour d'un axe, comprise entre les deux cônes d'angles ϕ et $\phi+d\phi$:
 $d\Omega = 2\pi \sin\phi d\phi$.



- Développement limité de $1/\tanh(x)$: $1/\tanh(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^4)$

1479

23222

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés**

section : sciences physiques

option : procédés
physico-chimiquescomposition de modélisation
et commande de procédés

Durée : 5 heures

Calculatrice de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.

Traitement thermique d'un aliment

Le traitement thermique des aliments met en jeu des transferts de chaleur et de matière ainsi que diverses transformations mécaniques, chimiques, physiques et biologiques. Parmi les opérations concernées, on peut citer la cuisson, le séchage et la stérilisation. Des transformations multiples s'enchaînent concourant à rendre le produit consommable, digestif et agréable sur le plan organoleptique. De plus, les traitements thermiques stabilisent les aliments sur le plan microbiologique. Les différentes transformations sont compétitives : l'amélioration d'un paramètre lors d'un traitement donné peut s'accompagner d'une évolution négative d'une autre propriété, par exemple une coloration excessive donnant l'impression d'un produit brûlé. Il est donc important de contrôler le traitement thermique pour assurer la transformation juste nécessaire et garantir le meilleur compromis de toutes les propriétés attendues.

La transformation des aliments s'effectue dans des enceintes équipées de systèmes de chauffage utilisant des technologies variées. On s'intéresse ici à un four de cuisson pour lequel on veut développer un outil numérique de simulation. On cherche en particulier à déterminer les historiques thermiques et massiques de l'aliment en fonction du mode d'application du traitement thermique.

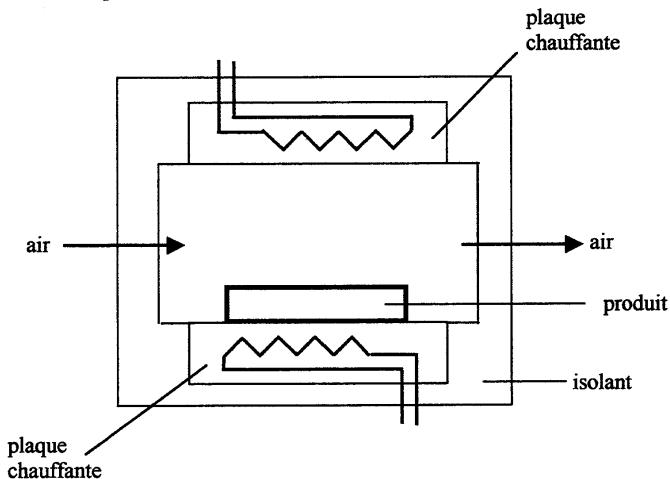


Figure 1 - Schéma du four

On considère le four représenté sur la figure ci-dessus. Différents aspects de son fonctionnement sont abordés dans cette composition au cours de quatre parties indépendantes.

Ce four est multifonctionnel et permet de traiter plusieurs types d'aliments (viande, biscuits, plats cuisinés, ...). Plusieurs modes de chauffage peuvent être mis en oeuvre, isolément ou en combinaison :

1°) Deux plaques chauffantes au sein desquelles sont noyées des résistances électriques sont placées en vis à vis, l'une dans la partie inférieure du four et l'autre dans la partie supérieure. Ces plaques sont isolées thermiquement du reste de l'enceinte : toute la chaleur produite est dissipée au cœur du four. Deux modes de fonctionnement sont possibles pour chacune des plaques. Dans le premier mode, on ajuste directement la puissance électrique fournie aux résistances. Dans le deuxième, un système de régulation agissant sur la puissance électrique permet d'opérer à température de plaque constante.

2°) Un flux d'air chaud dont le débit, la température et la teneur en eau sont ajustables est envoyé dans le four. Des capteurs associés à des boucles de régulation permettent de fixer la température et la teneur en eau dans le four. On supposera par la suite que ces propriétés sont homogènes dans l'enceinte du four.

Le produit à traiter est placé au centre de la plaque chauffante inférieure, sans déborder de celle-ci. Il pourra être considéré comme un produit sec (ou ne perdant pas d'eau au cours du traitement) ou bien comme un mélange de matière sèche et d'eau. On supposera dans la suite que l'épaisseur du produit traité reste faible devant ses dimensions horizontales.

Une caractérisation simple de l'état du four et du produit traité, à un temps donné, est donnée par le profil de température (ou de teneur en eau) le long d'un axe vertical Ox passant au cœur du produit : $T(x, t_0)$. Un tel profil décrit l'état du système depuis la plaque inférieure jusqu'à la plaque supérieure, en passant à travers le produit et l'air. On peut alors caractériser l'évolution en cours de traitement en prenant plusieurs profils à des temps différents, $T(x, t_0)$, $T(x, t_1)$, etc. ... On placera l'origine de l'axe Ox à l'interface du produit traité et de la plaque inférieure.

Partie A. Etude qualitative de la cuisson d'un produit épais

On s'intéresse au traitement d'un produit épais et sec dont les propriétés sont initialement homogènes. On vous demande de donner l'allure des profils de température caractérisant l'état du four, accompagnés d'un court commentaire, dans les différents cas suivants :

- 1 - Seule la plaque inférieure fonctionne, à température fixée. L'air ne circule pas.
- 2 - On rajoute au cas précédent une circulation d'air chaud à une température supérieure à celle du produit avec une vitesse significative (autour de 2 m/s).
- 3 - On fait fonctionner les deux plaques chauffantes à température constante, sans circulation d'air.

Décrivez les différents mécanismes intervenant quand les deux plaques et une circulation d'air chaud sont mises en oeuvre pour traiter un produit sec.

Quels sont les mécanismes qui s'ajoutent quand on traite un produit contenant de l'eau ? Indiquer sur un schéma simple les différents flux à prendre en compte.

Partie B. Etude de la cuisson d'un produit épais

On considère la cuisson d'un disque de viande de 15 cm de diamètre et d'épaisseur $E = 3$ cm, réalisée en utilisant seulement la plaque inférieure avec une circulation d'air à température constante. On négligera la perte d'eau résultant du traitement.

1°) Pour décrire le comportement de la plaque chauffante, on propose d'utiliser l'équation différentielle suivante :

$$m C_{pp} \frac{dT_p}{dt} = P + h_a (S - A) (T_a - T_p) + h_v A (T_0 - T_p) \quad (1)$$

Sachant que l'aire de la zone de contact entre la viande et la plaque est A et que la surface totale de la plaque est S , indiquer quelles sont les hypothèses qui conduisent à ce modèle. Donner la signification des variables et des paramètres et indiquer les unités correspondantes.

On supposera par la suite que la plaque fonctionne dans le mode "température régulée". Que devient la relation ci-dessus et que peut-on en tirer ?

2°) Le profil de température dans la viande noté $T(x, t)$ est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2)$$

On vous demande d'établir cette équation en précisant les hypothèses qu'elle implique. Donner la signification des variables et des paramètres et indiquer les unités correspondantes.

Donner les expressions des conditions aux limites qui accompagnent cette équation. Quelles sont les conditions initiales et les conditions aux limites qu'il faut connaître pour intégrer le modèle ?

3°) Pour résoudre l'équation (2), on discrétise l'espace et le temps avec des pas constants δx et δt . On a alors $x = i \delta x$ et $t = k \delta t$. A l'aide de la plus simple des méthodes de différence finie, on obtient une équation de la forme

$$T(i, k + 1) = a T(i - 1, k) + b T(i, k) + c T(i + 1, k) \quad (3)$$

Donner les expressions des constantes a , b et c . Quelles sont les valeurs de i et k pour lesquelles cette relation est valide ? Donner une expression discrétisée simple des conditions aux limites.

4°) Proposer un algorithme de résolution en précisant quelle est l'information nécessaire pour effectuer les calculs.

5°) La viande est retournée trois fois en cours de cuisson. Indiquer comment vous pouvez utiliser la technique de calcul développée ci-dessus pour simuler cette cuisson.

6°) On introduit la température réduite θ et la distance réduite X définies comme suit :

$$\theta = \frac{T - T_a}{T_s - T_a} \quad \text{et} \quad X = \frac{x}{E} \quad (4)$$

T_s étant la température réglée de la plaque et E l'épaisseur de la tranche de viande. Déterminer la nouvelle forme de l'équation et ses conditions aux limites. Quels sont les nombres adimensionnels qui apparaissent ? Cette formulation vous paraît-elle avantageuse pour résoudre l'équation différentielle ? Justifier votre réponse.

Partie C. Etude de la cuisson d'un produit fin

L'enceinte est maintenant utilisée pour cuire un produit de type biscuit posé sur la plaque inférieure. Les deux plaques chauffantes sont utilisées dans le mode "température imposée" avec une même température de consigne notée T_s . On utilise également un flux d'air de température T_a , de vitesse v_a et de teneur en eau Y_a , exprimée en masse d'eau / masse d'air sec. Ces trois caractéristiques sont supposées homogènes et constantes dans l'enceinte.

Les dimensions d'un biscuit sont : $12 \times 8 \times 3$ mm et sa température initiale est 25°C . On caractérise la cuisson par l'évolution de la température et la teneur en eau du biscuit exprimée en masse d'eau / masse de matière sèche.

1°) Peut-on considérer la température et la teneur en eau comme homogènes dans le biscuit ? Pourquoi ? On notera T et X ces deux grandeurs.

2°) Donner l'expression du flux de chaleur échangé entre la plaque et le biscuit. On notera A la surface du biscuit.

3°) Donner l'expression du flux de chaleur convectif à travers la face supérieure du biscuit. On notera h_a le coefficient de transfert correspondant.

4°) Le coefficient h_a est exprimé ci-dessous en fonction des propriétés de l'air et d'une dimension caractéristique de l'enceinte notée D . De quel type de corrélation provient cette relation ?

$$h_a = k C_{pa}^{\beta} \mu_a^{\beta-\alpha} \lambda_a^{1-\beta} \rho_a^{\alpha} v_a^{\alpha} D^{\alpha-1}$$

5°) La résistance supérieure est à une température élevée et rayonne de la chaleur. Le flux reçu par le biscuit s'exprime par l'équation suivante

$$Q_r = A \varepsilon \sigma (T_s^4 - T^4)$$

Que représentent ε et σ . Quel est l'ordre de grandeur de leur valeur. Quelles sont les hypothèses qui conduisent à cette relation.

6°) L'eau contenue dans le biscuit est distribuée de manière homogène dans toute sa masse. Que pouvez-vous dire de la pression partielle de l'eau dans l'air à l'interface air-biscuit ? Donner l'expression du flux d'eau à l'interface en indiquant son sens. Peut-on observer un transfert depuis l'air vers le biscuit ?

7°) Etablir une équation donnant l'évolution de la teneur en eau du biscuit. On supposera que les dimensions de celui-ci ne varient pas et on notera ρ_{ms} la masse volumique de la matière sèche.

8°) Etablir l'équation traduisant le flux d'énergie à l'interface air-biscuit associé à l'évaporation.

10°) Exprimer la masse du biscuit en fonction de sa teneur en eau. Proposer une expression simple de sa capacité thermique.

11°) Etablir le bilan d'énergie sur le biscuit.

12°) Quelles informations complémentaires faut-il ajouter pour disposer d'un modèle complet de la cuisson du biscuit ?

13°) Indiquer une méthode de résolution permettant d'intégrer ce modèle.

Partie D. Etude de la commande du four

On se propose d'examiner les dispositifs de commande du four. Les candidats sont priés d'apporter un soin particulier à la réalisation des schémas demandés.

1°) Proposer et commenter un schéma de principe du dispositif permettant d'envoyer dans le four un courant d'air dont le débit, la température et la teneur en eau sont commandables.

2°) Proposer et commenter un schéma de régulation permettant d'imposer la température et la teneur en eau de l'air dans le four.

3°) Proposer et commenter un schéma de principe des dispositifs utilisés pour réguler la température des plaques de chauffage.

4°) Quelles sont les variables d'action disponibles pour piloter le four lorsque les différentes boucles de régulation ont été mises en place ?

5°) On désire commander la température au cœur du produit traité. Examiner les différentes variables d'action possibles et faire un choix.

6°) Proposer et commenter un schéma de commande en boucle ouverte de la température du produit dans le cas où une mesure directe est impossible. Comment pouvez-vous utiliser le résultat de la question 11 - partie C dans le cas d'une régulation de la température du produit.

7°) Proposer et commenter un schéma de commande en boucle fermée de la température du produit.

8°) Indiquer le principe de fonctionnement des différents capteurs que vous avez retenus pour automatiser le fonctionnement du four.

1480

23223

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours externe
de recrutement de professeurs agrégés**

section : sciences physiques

option : procédés
physico-chimiquesproblème de chimie, génie chimique
et de procédés physico-chimiques

Durée : 6 heures

Calculatrice de poche - y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre pour cela.

Incinération catalytique de composés organiques volatils contenus dans l'air d'ateliers de peinture

Dans ce problème, on s'intéresse à l'épuration d'air chargé de Composés Organiques Volatils (COV). Jusqu'à récemment, l'incinération de ces COV était purement thermique et donc énergétiquement coûteuse. Nous allons voir que l'utilisation d'un échangeur thermique convenablement conçu, associé au réacteur permet de résoudre ce problème. Comme support, nous avons choisi l'incinération du xylène présent à l'état de trace dans l'air. Ce composé est représentatif des COV émis en atelier de peinture.

Les diverses données du problème sont définies au fil du texte. Un tableau final résume les données communes à diverses questions. *Dans tout le problème, la phase gazeuse est supposée parfaite et le xylène est dilué dans un excès d'air. L'énoncé comporte quelques brefs commentaires* qui résument les résultats obtenus et préparent aux questions suivantes.

1. Préliminaires

1.1. Dessiner les formules développées et nommer les divers isomères du xylène. Quelle est leur masse molaire M ? Dans toute la suite, on supposera que les isomères se comportent comme un composé unique. Écrire l'équation stoechiométrique (équation bilan) de combustion complète.

Les enthalpies de formation dans l'état standard gaz parfait sont :

$$\Delta H_{\text{Xylène}}^{\text{f}0} = 0,18 \cdot 10^5; \quad \Delta H_{\text{CO}_2}^{\text{f}0} = -3,935 \cdot 10^5; \quad \Delta H_{\text{H}_2\text{O}}^{\text{f}0} = -2,418 \cdot 10^5 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Estimer l'enthalpie de réaction, ΔH . Dans quelles conditions physiques cette enthalpie est-elle déterminée ? Donner la relation générale entre l'enthalpie de réaction d'un mélange de gaz parfaits à T_0 , $\Delta H(T_0)$, et l'enthalpie de réaction à une température quelconque T , $\Delta H(T)$. Comment se simplifie cette relation si les capacités calorifiques sont supposées constantes dans le domaine de température étudié ? À $T_0 = 298 \text{ K}$, en supposant les gaz parfaits, on a :

$$C_{\text{pH}_2\text{O}} = 33,57; \quad C_{\text{pCO}_2} = 37,24; \quad C_{\text{pO}_2} = 29,34; \quad C_{\text{pXylène}} = 125,3 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$$

Estimer la variation de l'enthalpie de réaction entre $T_0 = 298 \text{ K}$ et $T = 798 \text{ K}$. Que peut-on en conclure ? On prendra par la suite $\Delta H = -4,35 \cdot 10^6 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}$ quelle que soit T .

1.2. On considère les deux configurations de réacteur *adiabatique* de la figure 1. T_0 , T_s , ω_0 , et ω_s désignent respectivement les températures d'entrée et de sortie de l'air, et les fractions *massiques* correspondantes du xylène dans l'air. $c_{\text{pm}} = 1100 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ est la capacité calorifique massique du gaz qui sera supposée indépendante de la composition et de la température.

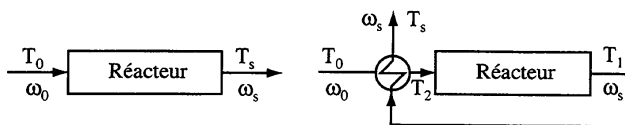


Figure 1 : Deux configurations de réacteur adiabatique. À gauche : réacteur simple. À droite : réacteur avec échangeur de préchauffage du fluide entrant par le fluide sortant. L'échangeur est symbolisé par le cercle.

Pour la configuration de gauche (sans échangeur), établir au moyen d'un bilan thermique global :

$$T_s - T_0 = \Delta T_{ad} \frac{\omega_0 - \omega_s}{\omega_0}, \quad \Delta T_{ad} = \frac{(-\Delta H)\omega_0}{Mc_{pm}} \quad (1)$$

où M est la masse molaire du xylène. Quelles sont les dimensions de ΔT_{ad} et quelle est sa signification physique ? Calculer la température *maximale* de l'air épuré sortant du réacteur pour $T_0 = 673 \text{ K}$, et $\omega_0 = 10^{-3}$.

1.3. Pour la configuration de droite (cf. figure 1), on suppose que les courants de gaz qui *sortent* de l'échangeur sont à la même température ($T_s = T_2$) et qu'il n'y a pas de perte thermique. En faisant un bilan sur un « volume de contrôle » bien choisi et en utilisant l'équation (1), établir une relation entre T_0 et T_1 . Calculer la valeur maximale de T_1 avec les données de la question précédente.

1.4. Chaque configuration comprend un réacteur catalytique. Laquelle nécessite le moins de catalyseur, T_0 , ω_0 , ω_s , le débit à traiter et la conversion étant fixés ? Discuter qualitativement les avantages techniques et économiques des deux configurations. Pourquoi préfère-t-on l'incinération catalytique à l'incinération thermique ?

Commentaire : l'emploi d'un échangeur thermique entre le fluide d'entrée et de sortie est propice à une épuration poussée. La suite du problème consiste à développer cette idée. L'étude détaillée de l'échangeur de chaleur est abordée dans la partie 3. Elle est pratiquement indépendante de l'étude du réacteur de la partie 2 qui suit.

2. Le réacteur monolithique

Un « monolithe » est constitué d'une matrice solide (céramique de type cordiérite) en nid d'abeille formant une multitude de canaux parallèles comme indiqué dans la figure 2. La matière ne peut pas franchir les parois des canaux. En revanche la chaleur peut se transmettre par conduction. Nous supposons par la suite que les canaux sont de section carrée de côté d_h (dit aussi diamètre hydraulique). L'avantage décisif de cette structure est de pouvoir être rendue catalytique par un enduit convenable de la paroi des canaux, et d'offrir une perte de charge nettement plus faible qu'un empilement de grains de catalyseur. L'épaisseur de la couche catalytique (environ $20 \mu\text{m}$) permet de supposer que le catalyseur *n'est pas* sujet à des résistances diffusionnelles *internes* aux transferts de matière et de chaleur. En revanche, il y a des résistances diffusionnelles *externes* ; les débits *spécifiques* de transfert de matière et de chaleur depuis le sein du gaz du canal vers la paroi sont donnés par :

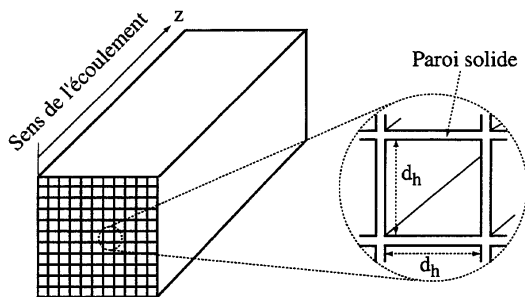


Figure 2 : Caractéristiques d'un monolithe.

$$\left. \begin{aligned} N_D &= k_D \rho_{su} (\omega_{ex} - \omega_{su}) \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-2} \text{ de paroi de canal} \\ \phi &= h(T_{ex} - T_{su}) \text{ W.m}^{-2} \text{ de paroi de canal} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

où l'indice « ex » (externe) repère la composition et la température au sein du gaz du canal, et l'indice « su » (surface) repère ces grandeurs à la paroi, c'est-à-dire dans le catalyseur ; T_{su} est aussi la température de ce catalyseur et de la paroi de canal. ω désigne toujours la fraction massique de polluant, ρ_{su} [kg.m^{-3}] la masse volumique du gaz à la température T_{su} , k_D [m.s^{-1}] le coefficient de transfert de matière gaz-solide, et h [$\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$] le coefficient de transfert de chaleur gaz-solide. Les variables ω_{ex} , ω_{su} , T_{ex} , T_{su} et ρ_{su} ne sont fonctions que de z .

Dans tout ce qui suit, la réaction d'incinération est supposée d'ordre 1 par rapport au xylène. La vitesse de la réaction *catalytique* est donnée par :

$$r(\omega_{su}, T_{su}) = k(T_{su}) \frac{\rho_{su}}{M} \omega_{su} \text{ mol.s}^{-1}.\text{m}^{-2} \text{ de paroi}, \quad k(T_{su}) = k_0 \exp\left[-\frac{E}{RT_{su}}\right] \quad (3)$$

On prendra garde au fait que cette vitesse de réaction *est rapportée à l'unité de surface de paroi de canal*. Il n'y a pas de réaction homogène au sein du fluide qui se comporte comme un gaz parfait.

Dans toute la suite, on suppose que l'écoulement est de type piston dans les canaux, que chacun d'eux est parcouru par *le même débit* de gaz, et que la pression est uniforme sur tout le monolithe et égale à une atmosphère. On admet de plus que le monolithe est parfaitement isolé thermiquement du milieu extérieur. De la sorte, *ce monolithe se comporte comme un canal unique et adiabatique* (pas de transfert de chaleur d'un canal à ses voisins ni vers l'extérieur). Enfin, on est en régime permanent.

On note Ω la surface totale (canaux + parois) de la section droite du monolithe, et ε la fraction de surface offerte à l'écoulement du fluide ($0 < \varepsilon < 1$). On note aussi ρ_0 et u_0 la masse volumique et la vitesse *en fût vide* du gaz à l'entrée de l'appareil.

2.1. Soit $\rho(z)$ la masse volumique du gaz (à la température $T_{ex}(z)$ et à la pression $p = 1 \text{ atm}$), $u_v(z)$ la vitesse en fût vide et $u(z)$ la vitesse réelle (ou interstitielle) du gaz dans un canal à la

distance z de l'entrée. Quelle loi fondamentale permet d'établir que $\rho(z)u_v(z)$ est indépendant de z ? En déduire :

$$\rho_0 u_{v0} = \rho(z) u_v(z) = \varepsilon \rho(z) u(z) \quad (4)$$

Pour l'ingénieur, quel avantage procure la notion de vitesse en fût vide, u_v , par rapport à celle de vitesse interstitielle, u ? La vitesse en fût vide d'un gaz est-elle mesurable par anémométrie à fil chaud et pourquoi ?

2.2. Il s'agit maintenant de formuler les bilans de matière et de chaleur dans le monolithe. On a trouvé dans une publication les bilans suivants pour un canal adiabatique (conduction thermique axiale ignorée) :

$$\rho_0 u_{v0} \frac{d\omega_{ex}}{dz} = \frac{4\varepsilon}{d_h} k_D \rho_{su} (\omega_{su} - \omega_{ex}) \quad \text{bilan de matière en xylène au sein du gaz} \quad (5)$$

$$\rho_0 u_{v0} c_{pm} \frac{dT_{ex}}{dz} = \frac{4\varepsilon}{d_h} h (T_{su} - T_{ex}) \quad \text{bilan d'enthalpie au sein du gaz} \quad (6)$$

$$k_D \rho_{su} (\omega_{su} - \omega_{ex}) = -r(T_{su}, \omega_{su}) M \quad \text{bilan de matière en xylène dans le catalyseur} \quad (7)$$

$$h(T_{su} - T_{ex}) = r(T_{su}, \omega_{su})(-\Delta H) \quad \text{bilan de d'enthalpie dans le catalyseur} \quad (8)$$

Les équations ci-dessus ont été obtenues à partir de bilans sur une tranche d'épaisseur δz prise sur un canal du monolithe perpendiculairement à son axe. On ne vous demande pas d'établir les bilans mais seulement de retrouver la signification physique des différents termes dans les quatre équations. Pour analyser les deux premières, il vous est suggéré de multiplier chaque membre par $d_h^2 \delta z / \varepsilon$. Vérifier que l'on a bien supposé un fonctionnement adiabatique de chaque canal. Sous quelles conditions cette hypothèse est-elle vérifiée ? Que devient cette hypothèse si la vitesse u_{v0} n'est pas la même dans chaque canal ?

Commentaire : la résolution des équations (5) à (8) n'est possible qu'au moyen d'une technique numérique du fait de la non-linéarité de la loi d'Arrhenius (cf. (3)). Nous allons toutefois établir les caractéristiques majeures de la solution dans un cas particulier représentatif de la réalité.

2.3. Pour les conditions usuelles rencontrées dans les monolithes, on montre que :

$$Nu \equiv \frac{hd_h}{\lambda} = \frac{k_D d_h}{D_m} \equiv Sh \quad (9)$$

où Nu et Sh sont respectivement les nombres de Nusselt et de Sherwood, λ la conductivité thermique du gaz, et D_m la diffusivité moléculaire du xylène dans l'air. Montrer que Nu et Sh sont sans dimension.

2.4. En combinant les bilans (5) à (8) montrer que :

$$\frac{dT_{ex}}{dz} = - \frac{d\omega_{ex}}{dz} \frac{(-\Delta H)}{Mc_{pm}} \quad (10)$$

Au moyen des hypothèses déjà posées (cf. préliminaires), en déduire :

$$T_{\text{ex}}(z) = T_0 + \Delta T_{\text{ad}} \frac{\omega_0 - \omega_{\text{ex}}(z)}{\omega_0}, \quad \Delta T_{\text{ad}} = \frac{(-\Delta H)\omega_0}{Mc_{\text{pm}}} \quad (11)$$

où ω_0 et T_0 sont la fraction massique de xylène et la température du gaz en entrée du monolithe. En déduire la température de sortie de l'air *totalemment* épuré pour $T_0 = 673 \text{ K}$, et $\omega_0 = 10^{-3}$ (cf. question 1.2 ou résumé des données en fin d'énoncé). Expliquer physiquement la similitude entre les relations (1) et (11).

2.5. En combinant convenablement les bilans avec (9), montrer que :

$$(\omega_{\text{su}}(z) - \omega_{\text{ex}}(z)) \frac{(-\Delta H)}{Mc_{\text{pm}}} = - \frac{\lambda}{D_m \rho_{\text{su}} c_{\text{pm}}} (T_{\text{su}}(z) - T_{\text{ex}}(z)) \quad (12)$$

Quelles sont les dimensions du rapport $\lambda/(\rho_{\text{su}} c_{\text{pm}} D_m)$? Dans sa forme la plus simple, la théorie cinétique des gaz fournit les expressions suivantes de D_m et λ :

$$D_m = \frac{l\bar{c}}{3}, \quad \lambda = \frac{l\bar{c}}{3} C_t C_v$$

où l (lettre « l ») est le libre parcours moyen, \bar{c} la vitesse quadratique moyenne d'agitation thermique, C_t la concentration totale et C_v la capacité calorifique molaire à volume constant. En déduire que $\lambda/(\rho_{\text{su}} c_{\text{pm}} D_m)$ est de l'ordre de l'unité. *On supposera par la suite que le rapport $\lambda/(\rho_{\text{su}} c_{\text{pm}} D_m)$ est égal à 1.* Déduire des résultats précédents que :

$$T_{\text{su}}(z) = T_0 + \Delta T_{\text{ad}} \frac{\omega_0 - \omega_{\text{su}}(z)}{\omega_0} \quad (13)$$

Quelle est la valeur maximale de la température du catalyseur T_{su} et quelle condition doit satisfaire ω_{su} pour que cette température soit atteinte ?

2.6. En utilisant le bilan (7), les relations (3) et (13) et en supposant k_D constant, exprimer $d\omega_{\text{su}}/dz$ en fonction de $d\omega_{\text{ex}}/dz$ et de diverses autres grandeurs caractéristiques du problème. Quel est le signe de $d\omega_{\text{ex}}/dz$? Le catalyseur employé a les paramètres cinétiques suivants : $k_D = 6000 \text{ m.s}^{-1}$, $E/R = 5500 \text{ K}$. En déduire que $d\omega_{\text{su}}/dz$ est négatif. Montrer que si T_{su} atteint sa valeur maximale *dès l'entrée du monolithe*, alors tout le catalyseur est à cette température maximale. Quel processus physique ou chimique constitue l'étape déterminant la vitesse de destruction du xylène si cette température est atteinte dès l'entrée du monolithe ?

Commentaire : Le réacteur étant de type piston adiabatique, la température du gaz n'y est pas uniforme. Toutefois, les questions précédentes suggèrent que la température du catalyseur, où se déroule la réaction, peut être uniforme et connue. Ceci devrait permettre de résoudre les bilans (5) à (8) sans trop de difficulté. C'est ce que nous allons examiner.

2.7. Tracer la courbe représentative de $f(\omega_{\text{su}}) = \text{Mr}(T_{\text{su}}, \omega_{\text{su}})/\rho_{\text{su}}$ en fonction de ω_{su} (rappel : $\omega_0 = 10^{-3}$). On pourra tracer cette courbe par pas de $2 \cdot 10^{-4}$ sur ω_{su} . Expliquer pourquoi le graphe de $\text{Mr}(T_{\text{su}}, \omega_{\text{su}})/\rho_{\text{su}}$ n'est pas une droite en fonction de ω_{su} alors que (3) suggère une croissance linéaire.

2.8. On peut montrer que $Nu = Sh = 2,98$. Calculer k_D pour $d_h = 1 \text{ mm}$ et $D_m = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Porter sur le graphe précédent la courbe illustrative de $g(\omega_{su}) = k_D(\omega_{ex} - \omega_{su})$ en prenant $\omega_{ex} = \omega_0 = 10^{-3}$, c'est-à-dire la composition à l'entrée du monolithe. Que représente le point d'intersection des deux courbes ? Donner les valeurs de ω_{su} et T_{su} à l'entrée du monolithe. Montrer que ω_{su} est toujours très petit devant ω_0 en tout point du monolithe. Quelle est alors la température du solide à $\pm 1 \text{ K}$ près ? En se référant à la loi cinétique, montrer que la température du solide peut être considérée comme uniforme sur le monolithe.

2.9. On se place à une abscisse $z > 0$. Comment le raisonnement de la question précédente est-il modifié ? Estimer ω_{su} et T_{su} au point où $\omega_{ex} = 5 \cdot 10^{-4}$. Que peut-on dire de $\omega_{su}(z)$ par rapport à $\omega_{ex}(z)$ sur tout le réacteur ?

2.10. Au moyen des résultats de la question précédente, simplifier puis intégrer le bilan (5). Pour $\rho_0 u_{v_0} = 1,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, $\varepsilon = 0,76$, quelle longueur de monolithe faut-il pour détruire 99 % du xylène ?

2.11. Dans la configuration de réacteur à échangeur de la question 1.3 (cf. figure 1, droite), à quelle température T_0 le gaz pollué doit-il entrer dans l'échangeur pour que la température à l'entrée du monolithe soit de 673 K quand le polluant est totalement converti ?

2.12. Chez un constructeur automobile, on doit traiter $20\,000 \text{ m}^3 \text{h}^{-1}$ TPN d'air pollué à la température de 293 K avec le réacteur à échangeur de la question précédente. Rappeler la définition de l'état TPN. Comparer-la à celle de l'état standard. Calculer l'énergie nécessaire pour préchauffer le gaz jusqu'à T_0 (cf. question précédente). Est-ce raisonnable ? Que pensez-vous du fonctionnement de l'unité de traitement sachant que l'air épuré est recyclé dans l'atelier ? Que pensez-vous du fonctionnement de l'échangeur de chaleur ?

Commentaire: si le point de fonctionnement du réacteur paraît satisfaisant, l'échangeur considéré à la question 1.3, ne conduit pas à un procédé d'épuration raisonnable. Nous allons voir comment un échangeur mieux conçu résout ce problème.

3. L'échangeur monolithique à contre-courant

3.1. L'échangeur est maintenant conçu de telle manière que $T_0 = 293 \text{ K}$ tandis que T_2 est fixé à 673 K, l'alimentation ayant toujours la même composition. S'agit-il d'un échangeur à co-courant ou à contre-courant et pourquoi ? Calculer T_s et T_1 à conversion totale. Le réacteur peut-il alors fonctionner dans les conditions de la question 2.10 ?

3.2. L'échangeur est un faisceau de tubes de section carrée comme le monolithe. Ces tubes sont obtenus par un empilement alterné de plaques planes et embouties comme indiqué sur la figure 3. Des soudures assurent l'étanchéité entre les plaques. Le système est muni de viroles d'extrémité qui permettent un écoulement des fluides à contre-courant dans les canaux adjacents (flèches pointillées de la figure). z représente l'abscisse le long d'un canal d'échange dans le sens d'écoulement du fluide qui se réchauffe (fluide à épurer). $T_f(z)$, $T_c(z)$ et $T(z)$ sont respectivement les températures du fluide froid (à réchauffer de T_0 à T_2 , cf. figure 1), du fluide chaud (à refroidir de T_1 à T_s , cf. figure 1) et de l'acier qui sépare les canaux, à une distance z de l'entrée de l'échangeur. On admet que la fraction de surface ouverte, ε , le diamètre hydraulique, d_h , et le débit spécifique, $\rho_0 u_{v_0}$, sont les mêmes que ceux du monolithe catalytique, et qu'il n'y a pas de perte thermique.

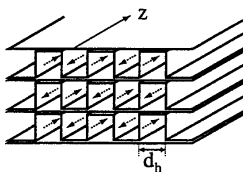


Figure 3 : Constitution de l'échangeur.

En s'appuyant sur (6), démontrer :

$$\rho_0 u_{v0} c_{pm} \frac{dT_f}{dz} = \frac{4\varepsilon}{d_h} h(T - T_f), \quad \rho_0 u_{v0} c_{pm} \frac{dT_c}{dz} = \frac{4\varepsilon}{d_h} h(T_c - T) \quad (14)$$

Exprimer $T(z)$ en fonction de $T_f(z)$ et $T_c(z)$. Que peut-on dire de $T_c(z) - T_f(z)$ en fonction de z ? En déduire les expressions littérales de $T_f(z)$ et $T_c(z)$.

3.3. Au moyen des résultats de la question 2.5, estimer un ordre de grandeur raisonnable de la conductivité thermique du gaz, λ . Pour ce faire, on supposera que le fluide a les propriétés de l'air à 293 K. En déduire le coefficient de transfert de chaleur, h , puis la longueur des canaux de l'échangeur (rappel : $\rho_0 u_{v0} = 1,5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$). Cette longueur est-elle estimée par défaut ou par excès et pourquoi ?

3.4. La forme simple de la théorie cinétique des gaz employée jusqu'à présent donne $\mu = l\bar{c}\rho / 3 = D_m\rho$. On admet toujours que D_m est constant et égal à $2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$. Estimer la viscosité du fluide à 293 K. Quelle serait la viscosité à la température maximale rencontrée dans l'échangeur ? Calculer le nombre de Reynolds dans les canaux du monolithe et de l'échangeur avec la viscosité à 293 K. Dans quel régime d'écoulement se trouve-t-on ? En déduire la perte de charge sur l'appareil (échangeur + réacteur) si le gaz était partout à 293 K ; pour cela, on supposera les canaux cylindriques et de diamètre d_h . Compte tenu de la non-uniformité de température, montrer que l'appareil fonctionne bien à pression uniforme.

3.5. Tracer *qualitativement* l'allure du profil de température du gaz en fonction de la distance qu'il parcourt dans l'appareil. On précisera les longueurs parcourues, les niveaux de température significatifs et la concavité des profils. Calculer la section droite totale du réacteur pour traiter un débit de $200 \text{ m}^3.\text{h}^{-1}$ TPN caractéristique d'un atelier de PME (rappel : $\rho_0 u_{v0} = 1,5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$). Commenter la capacité de l'appareil. Comment concevez-vous le démarrage de cette unité de traitement d'air ?

Commentaire : l'appareil ainsi conçu semble prometteur bien que les pertes thermiques par conduction en dégradent probablement les performances. Il possède aussi un handicap : les viroles d'extrémité de l'échangeur doivent assurer la séparation des fluides parmi des canaux millimétriques ; la réalisation de telles viroles est très coûteuse et peut condamner le procédé. C'est à ce dernier problème que nous allons nous attaquer.

4. Le « réacteur à inversion de flux »

Le « réacteur à inversion de flux » est conçu selon le schéma de la figure 4. Le monolithe catalytique (réacteur proprement dit) est flanqué de part et d'autre de monolithes inertes (non

catalytiques) destinés à *stocker* et à *restituer* alternativement la chaleur de réaction dégagée dans le catalyseur. Un jeu de vannes assure l'inversion *périodique* du sens d'écoulement, dans le sens des flèches continues pendant une demi-période θ , puis dans le sens des flèches tirées pendant la seconde demi-période. Pour un sens d'écoulement donné, le monolithe inerte aval récupère la chaleur transportée par le gaz, tandis que le monolithe amont réchauffe le gaz entrant en cédant la chaleur acquise au cours de la demi-période précédente. Après une phase de démarrage, l'expérience montre que s'établit dans l'appareil un profil de température à maximum qualitativement similaire à celui obtenu à la question 3.5. Ce profil oscille de droite à gauche en fonction de la période d'inversion (2θ) du sens d'écoulement. Nous allons voir comment ce profil peut être stabilisé (en moyenne sur une période) dans le réacteur.

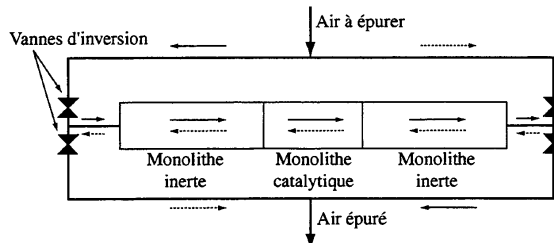


Figure 4 : Schéma du réacteur à inversion de flux.

4.1. Chaque inversion est à l'origine d'une perturbation de température à l'entrée des monolithes inertes. On s'intéresse donc en premier lieu à la propagation d'une perturbation *transitoire* de température dans un monolithe inerte parcouru par un écoulement *permanent de gaz dans un seul sens* (pas d'inversion). On admet que le gaz est en moyenne à 293 K et que la perturbation de température est de faible amplitude. Établir les bilans thermiques suivants :

$$\rho_0 u_{v0} c_{pm} \frac{\partial T_g}{\partial z} + \varepsilon \rho_0 c_{pm} \frac{\partial T_g}{\partial t} + \frac{4\varepsilon}{d_h} h(T_g - T) = 0 \tag{15-1}$$

$$\frac{4\varepsilon}{d_h} h(T_g - T) = (1 - \varepsilon) \rho_s c_{ps} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{15-2}$$

où l'axe z est orienté dans le sens de l'écoulement, T et T_g sont les températures du solide et du gaz, ρ_s la masse volumique du *squelette* solide et c_{ps} sa capacité calorifique massique supposée constante. On appelle T_{gp} et T_p les températures T_g et T en régime *permanent*, $T'_g = T_g - T_{gp}$, $T' = T - T_p$ les variables d'écart correspondantes après perturbation du régime permanent. Quelle relation y a-t-il entre les transformées de Laplace de T' (ou T'_g) et $\partial T'/\partial t$ (ou $\partial T'_g/\partial t$) ? Cette relation est-elle satisfaite entre les transformées de Laplace de T (ou T_g) et $\partial T/\partial t$ (ou $\partial T_g/\partial t$) ? Montrer que les bilans (15-1) et (15-2) sont satisfaits par les variables d'écart. Établir ensuite la fonction de transfert reliant les transformées de Laplace de T'_g en $z = L$ et en $z = 0$. En déduire que le temps de séjour moyen d'une perturbation de température du gaz, t_{T_g} , est donné par :

$$t_{T_g} = t_0(1 + K'); \quad t_0 = \frac{\varepsilon L}{u_{v0}}, \quad K' = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\rho_s c_{ps}}{\rho_0 c_{pm}} \tag{16}$$

Rappel : le moment d'ordre n d'une fonction $f(t)$ de transformée de Laplace $g(s)$ est donné par :

$$\mu_n = (-1)^n \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n g(s)}{ds^n}$$

4.2. On appelle vitesse de propagation de la température du gaz le rapport $v_{T_g} = L/t_{T_g}$. Pour un monolithe en céramique, on a typiquement $K' = 1500$. Estimer la vitesse de propagation v_{T_g} (rappel : $\rho_0 u_{v_0} = 1,5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, $T_0 = 293 \text{ K}$), puis la distance parcourue en 10 secondes par une perturbation de température.

4.3. En présence d'inversions, le profil de température du gaz oscille autour de sa position moyenne. Estimer la distance sur laquelle le profil se déplace pour des inversions du sens d'écoulement ayant lieu toutes les 10 secondes. Pour cette question, on ne demande pas une démonstration mathématique, mais un raisonnement simple et de bon sens reposant sur l'analyse faite à la question 4.2. Pour un monolithe inerte d'une dizaine de centimètres de long, peut-on admettre que le profil de température du gaz est pratiquement stationnaire sur une demi-période de 10 s ?

4.4. Constater que la fonction de transfert reliant la température du solide à celle du gaz est celle d'un système du premier ordre. Estimer la constante de temps correspondante (Rappel : $T = 293 \text{ K}$, $K' = 1500$). En conclure que le profil de température du solide est aussi pratiquement stationnaire pour une demi-période de 10 s.

4.5. On admet donc que les profils de température sont stationnaires *entre* les inversions du sens d'écoulement toutes les 10 secondes. Donner les nouvelles équations satisfaites par la température du gaz *pour chaque sens d'écoulement*. On conservera la même orientation de l'axe z pour les deux sens. Comparer aux bilans (14) et en conclure que le réacteur à inversion de flux est équivalent au réacteur muni d'un échangeur à contre-courant pour autant que la période d'inversion soit suffisamment petite devant t_{T_g} . Expliquer en mots simples l'origine physique de cette équivalence. Quelles seraient la longueur et la section de monolithes requis pour réaliser la configuration de réacteur à échangeur des questions 2.10, 3.3, et 3.5 ? Quel(s) avantage(s) procure le réacteur à inversion de flux par rapport au réacteur muni d'un échangeur à contre-courant ?

4.6. Au moyen des résultats des questions 2.10 et 3.3, on peut estimer que le temps de séjour moyen du fluide (ramené à 293 K) sur l'appareil de la figure 4 est de l'ordre de 0,3 s. Jusqu'à quelle valeur minimale peut descendre la période d'inversion du sens d'écoulement tout en assurant le renouvellement total du fluide qui se trouve dans l'appareil, et donc son épuration ? Cette condition est-elle réalisée pour une demi-période de 10 secondes ?

Épilogue :

Cet épilogue ne constitue pas une partie du problème. Il le résume ainsi que le travail effectué. Comment épurer « astucieusement » de l'air pollué par des traces de solvant ? Tel était le problème. Un échangeur thermique convenable récupérant la chaleur produite par la combustion constitue une piste. En examinant un cas concret, une solution analytique est même possible bien que le « réacteur » ne soit pas isotherme. Sa réalisation technologique est néanmoins coûteuse. En mettant à profit la dynamique d'une variante du procédé envisagé, le problème de

coût s'évanouit. À titre d'illustration, de l'air contenant $0,7 \text{ g.m}^{-3}$ ($\omega_0 = 6 \cdot 10^{-4}$) de xylène peut être épuré par 1 m de monolithe au total dont seuls 15 cm sont catalytiques ; pour $100 \text{ m}^3.\text{h}^{-1}$ à traiter, la section carrée de ces monolithes est de 15 cm de côté, soit un encombrement de 22,5 litres (hors isolant thermique et ventilateur d'extraction).

Résumé des données :

Enthalpies de formation standard gaz parfait :

$$\text{xylène} : \Delta H_{\text{xylène}}^{\text{f}0} = 0,18 \cdot 10^5 \text{ J.mol}^{-1}$$

$$\text{H}_2\text{O} : \Delta H_{\text{H}_2\text{O}}^{\text{f}0} = -2,418 \cdot 10^5 \text{ J.mol}^{-1}$$

$$\text{CO}_2 : \Delta H_{\text{CO}_2}^{\text{f}0} = -3,935 \cdot 10^5 \text{ J.mol}^{-1}$$

Capacité calorifique de l'air (pur ou pollué) : $c_{\text{pm}} = 1100 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ quelle que soit T

Titre massique en xylène de l'air pollué : $\omega_0 = 10^{-3}$

Fraction de surface ouverte du monolithe : $\varepsilon = 0,76$

Paramètres cinétiques : $k_0 = 6000 \text{ m.s}^{-1}$, $E/R = 5500 \text{ K}$

Nombres de Nusselt et de Sherwood : $\text{Nu} = \text{Sh} = 2,98$

Diamètre hydraulique de canal (côté) : $d_h = 1 \text{ mm}$

Diffusivité moléculaire du xylène dans l'air : $D_m = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ quelle que soit T

Débit spécifique à traiter : $\rho_0 u_{v,0} = 1,5 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$

1269

17221

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours interne
de recrutement de professeurs agrégés
et concours d'accès à l'échelle de rémunération**

section : sciences physiques

composition sur la physique
et le traitement automatisé de l'information

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche, y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout document et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives personnelles qu'il est amené à prendre pour cela.

Le problème aborde plusieurs domaines de la physique dans lesquels se manifestent les forces de pression.

On envisage, dans la première partie, la pression de radiation électromagnétique sous son double aspect ondulatoire et corpusculaire. On montre comment on peut grâce à elle manipuler ou encore ralentir des atomes.

La pression cinétique fait l'objet de la deuxième partie, qui propose un modèle simple unidimensionnel permettant de retrouver des résultats classiques de thermodynamique.

Enfin, dans la troisième partie, on étudie quelques aspects de la pression acoustique, puis le fonctionnement, en particulier électrique, d'un microphone à pression.

Ces trois parties sont indépendantes.

Il est rappelé aux candidats qu'ils doivent impérativement justifier leurs réponses, de manière claire, précise et concise. Un résultat non justifié sera considéré comme nul. Il en sera de même pour un résultat numérique donné sans son unité éventuelle, ou comportant un nombre de chiffres excessif.

Les candidats ne devront pas hésiter à commenter les résultats obtenus, même si l'énoncé ne le demande pas explicitement.

Il est demandé aux candidats de rappeler la référence complète d'une question avant la solution qu'ils en proposent.

Le barème de notation tiendra compte de la présentation et de la qualité de la rédaction.

Dans tout le problème, l'espace est rapporté à un système d'axes (Ox, Oy, Oz) auquel est associée la base orthonormée directe ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$).

CONSTANTES FONDAMENTALES ET VALEURS UTILES

Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Intensité normale du champ de pesanteur	$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

- A -

A.I. RÉFLEXION D'UNE ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE SUR UN CONDUCTEUR PARFAIT

Le demi-espace $x > 0$ est occupé par un métal non magnétique et conducteur parfait, c'est à dire de conductivité infinie. Dans le demi-espace $x < 0$ règne le vide.

Une onde électromagnétique plane, monochromatique, polarisée rectilignement selon Oy , se propage dans le vide dans le sens des x croissants et arrive sous incidence normale à la surface du métal. En tout point M du demi-espace $x < 0$, repéré par le vecteur $\vec{r} = \vec{OM}$, le champ électrique de l'onde incidente s'écrit :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_y .$$

A.I.1.a.

Exprimer le vecteur d'onde \vec{k} en fonction de la pulsation ω de l'onde.

A.I.1.b.

Rappeler les relations liant le champ électrique \vec{E} , le champ magnétique \vec{B} et le vecteur d'onde \vec{k} d'une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale dans le vide.

Donner alors l'expression du champ magnétique $\vec{B}_i(\vec{r}, t)$ de l'onde incidente.

A.I.1.c.

Rappeler l'expression dans le cas général de la densité volumique d'énergie électromagnétique e du vide et du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ en fonction du champ électrique \vec{E} et du champ magnétique \vec{B} . En déduire, en fonction de E_0 , ϵ_0 et c , les valeurs moyennes temporelles $\langle e_i \rangle$ et $\langle \Pi_i \rangle$ de la densité volumique d'énergie électromagnétique associée à l'onde incidente et du flux surfacique d'énergie électromagnétique incident sur la surface du conducteur.

A.I.2.a.

Que vaut le champ \vec{E} à l'intérieur du métal parfait ? Justifier la réponse.

A.I.2.b.

Montrer que, en l'absence de champ magnétique statique, le champ \vec{B} est nécessairement nul dans le conducteur.

A.I.3.a.

Comment s'écrit la relation de passage du champ \vec{E} à l'interface entre le vide et le métal ? Montrer que cette relation implique nécessairement l'existence d'une onde réfléchie. Quelle est l'origine physique de cette onde ?

On admet que l'onde réfléchie est plane, de pulsation ω , de champ électrique \vec{E}_r polarisé selon \vec{e}_y comme l'onde incidente, et se propageant selon Ox dans le sens des x négatifs.

Comment peut-on justifier chacune de ces hypothèses ?

Donner l'expression, en fonction de E_0 , ω et \vec{k} , des champs électrique $\vec{E}_r(\vec{r}, t)$ et magnétique $\vec{B}_r(\vec{r}, t)$ de l'onde réfléchie.

A.I.3.b.

En utilisant la relation de passage du champ \vec{B} à l'interface, montrer que la surface du métal est le siège d'un courant surfacique \vec{j}_s dont on donnera l'expression en fonction de E_0 , ϵ_0 et c .

Montrer alors que l'onde incidente exerce sur un élément dS de surface du métal une force $d\vec{F}$. S'agit-il d'une force de Laplace ou d'une force de Lorentz ? Donner l'expression de la valeur moyenne $\langle d\vec{F} \rangle$ de $d\vec{F}$ sur une période.

En déduire que l'onde exerce sur le métal une pression "de radiation" P_{rad} . Donner l'expression de P_{rad} en fonction de E_0 et ϵ_0 , puis de la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique incidente $\langle e_l \rangle$.

Pourquoi ne tient-on pas compte dans le calcul de $d\vec{F}$ de la force exercée par \vec{B}_r sur \vec{j}_s ?

A.I.4.

On peut retrouver le résultat précédent à l'aide d'un modèle corpusculaire du rayonnement : le rayonnement incident est maintenant considéré comme un flux de photons. Chaque photon se déplace dans le vide à la vitesse c et possède la même énergie \mathcal{E} et la même quantité de mouvement $\frac{\mathcal{E}}{c} \vec{e}_x$.

La relation de Planck $\mathcal{E} = \frac{h}{2\pi} \omega$ constitue le lien entre la description corpusculaire et la description ondulatoire.

Le flux incident comporte en moyenne n photons par unité de volume. On admet que la réflexion à la surface du conducteur parfait correspond pour chaque photon à un choc élastique.

A.I.4.a.

Calculer, en fonction de n et \mathcal{E} , la variation de quantité de mouvement $\delta^2 \vec{p}$ de l'ensemble des photons réfléchis pendant l'intervalle de temps dt sur un élément de surface dS de l'interface. En déduire la force moyenne $\langle d\vec{F} \rangle$ exercée par le rayonnement incident sur un élément de surface dS , et donner l'expression de la pression de radiation P_{rad} . Exprimer P_{rad} en fonction de la densité volumique d'énergie incidente. Comparer au résultat (A.I.3.b.) et conclure.

A.I.4.b.

Comment les résultats précédents seraient-ils modifiés dans le cas d'un métal dont la surface, noircie, absorberait totalement le rayonnement incident, c'est à dire sur laquelle les photons subirait un choc mou ?

A.II. PRESSION DE RADIATION ÉLECTROMAGNÉTIQUE SUR DES ATOMES

La force exercée par le rayonnement électromagnétique sur les atomes permet de les manipuler. On peut ainsi dévier ou freiner un faisceau atomique, ou encore ralentir les atomes d'un gaz de manière à obtenir de très basses températures.

A.II.1. INTERACTION ATOME-RAYONNEMENT

Un laser émet selon la direction Ox un faisceau parallèle monochromatique de fréquence ν_L . On considère le rayonnement du laser sous son aspect corpusculaire : il est constitué de photons, de vitesse $c \vec{e}_x$, d'énergie $h\nu_L$, de quantité de mouvement $\frac{h\nu_L}{c} \vec{e}_x$.

On considère par ailleurs un atome possédant deux niveaux d'énergie E_1 et E_2 ($E_2 > E_1$). On pose $h\nu_0 = E_2 - E_1$ où h est la constante de Planck. Dans la suite, l'atome considéré est un atome de sodium, de masse m , pour lequel la fréquence ν_0 correspond à la longueur d'onde $\lambda_0 = 589 \text{ nm}$. La masse molaire du sodium est $M = 23 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

A.II.1.a.

L'atome est susceptible de passer du niveau E_1 au niveau E_2 par absorption d'un photon quasi résonnant, c'est à dire correspondant à une fréquence ν proche de ν_0 . Ce processus peut être considéré comme un choc mou, au cours duquel la quantité de mouvement totale se conserve.

Calculer la variation de vitesse $\Delta \vec{v}_a$ de l'atome au cours d'un choc avec un photon du rayonnement laser.

Calculer numériquement le module Δv_a de $\Delta \vec{v}_a$, pour un laser accordé sur la fréquence de la transition atomique ($\nu_L = \nu_0$). Comparer Δv_a à la vitesse d'agitation thermique d'atomes de sodium à température ambiante $T = 300 \text{ K}$.

A.II.1.b.

L'atome excité au niveau E_2 se désexcite au niveau E_1 en émettant un photon *dans une direction aléatoire*. Quelle est, en moyenne sur un grand nombre de désexcitations, la variation de vitesse $\langle \Delta \vec{v}_e \rangle$ de l'atome produite par ce deuxième processus ?

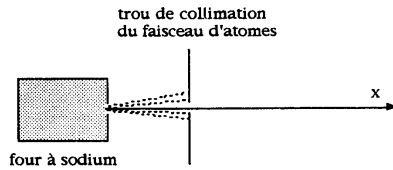
A.II.1.c.

L'atome subit A_0 cycles d'absorption-émission par unité de temps. On prendra pour les applications numériques $A_0 = 10^7 \text{ s}^{-1}$.

Exprimer l'accélération moyenne \vec{a} de l'atome et la force moyenne \vec{F} qu'il subit de la part du rayonnement. Comparer \vec{F} à la force de pesanteur s'exerçant sur l'atome.

A.II.2. MANIPULATION D'ATOMES À L'AIDE D'UN LASER

Un four contenant de la vapeur de sodium à la température T est percé d'un orifice et émet un jet effusif d'atomes de sodium. Une plaque percée d'un trou et placée devant le four permet d'obtenir un faisceau pratiquement parallèle, en sélectionnant parmi les atomes émergeant du four ceux dont la vitesse est quasi parallèle à Ox.

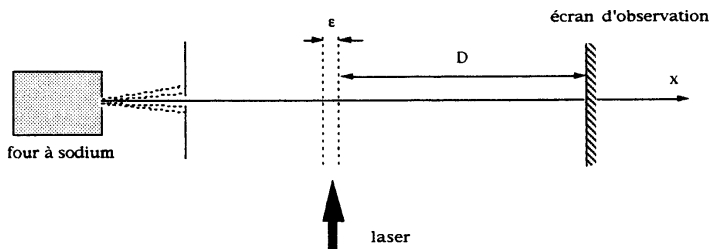


A.II.2.a.

On montre en théorie cinétique des gaz que, si la vitesse la plus probable des atomes de sodium *dans le four* vaut $\sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$, la vitesse la plus probable *dans le jet*, est plus grande (tout en étant du même ordre de grandeur) et vaut $v_m = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$. Expliquer en quelques mots l'origine de cet écart.

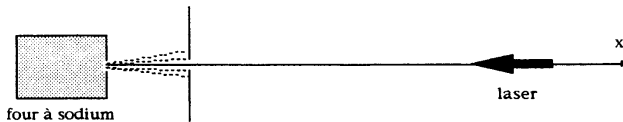
A.II.2.b.

Le four est à la température $T_{\text{four}} = 500 \text{ K}$. Le jet, dirigé selon Ox , est éclairé latéralement par le faisceau du laser, dirigé selon Oy . La zone d'interaction a une largeur selon Ox $\varepsilon = 5 \text{ mm}$. On place un écran orthogonalement à Ox , à une distance $D = 1 \text{ m}$ de la zone d'interaction. Déterminer, littéralement puis numériquement, la déviation d du point d'impact des atomes de vitesse v_m sur l'écran, provoquée par l'interaction avec le faisceau. On exprimera le résultat littéral en fonction du module F de la force moyenne subie par un atome dans la zone d'interaction avec le rayonnement.



A.II.2.c.

Le jet est maintenant éclairé frontalement par le rayonnement laser, dirigé selon Ox mais en sens inverse.



Evaluer la distance et le temps nécessaires pour arrêter les atomes.

Pourquoi cette technique n'est-elle pas en fait utilisable pour immobiliser totalement un ensemble d'atomes ?

A.II.3. RALENTISSEMENT D'ATOMES PIÉGÉS

En réalité, une étude plus approfondie de l'interaction atome-rayonnement montre qu'il est possible, à l'aide de plusieurs lasers convenablement accordés, de refroidir des atomes préalablement confinés dans un piège magnéto-optique. Steven Chu (prix Nobel 1997) a ainsi pu créer à l'aide de trois paires de lasers un domaine tridimensionnel dans lequel les atomes sont ralentis.

A.II.3.a.

Quel nom donne-t-on à ce domaine tridimensionnel dans lequel les atomes se trouvent englués par la lumière laser ?

A.II.3.b.

En 1997, le prix Nobel a aussi récompensé Claude Cohen-Tannoudji qui, avec son équipe, avait pu, entre autres, refroidir un ensemble d'atomes de césium jusqu'à la température de $0,18 \mu\text{K}$.

La masse molaire du césium est : $M_{\text{Cs}} = 133 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Quel est l'ordre de grandeur de la vitesse à laquelle il faut amener des atomes de césium pour obtenir une température de $3 \mu\text{K}$? Commenter.

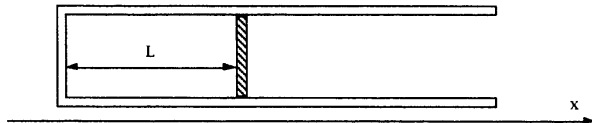
A.II.3.c.

Quelles peuvent être les applications pratiques de ce type de refroidissement ?

- B -

Dans toute cette partie, on considère une enceinte constituée d'un cylindre, de section S , fermé par un piston coulissant sans frottement.

On note L la distance entre le fond du cylindre et le piston : le volume intérieur de l'enceinte est ainsi $V = LS$. L'axe du cylindre est selon Ox et on néglige totalement l'effet du champ de pesanteur.



B.I. LOI DE LAPLACE

L'enceinte est supposée adiabatique. Elle contient n moles d'un gaz parfait monoatomique.

Le gaz étant à l'équilibre thermodynamique, à la température T et à la pression P , on déplace très lentement le piston, de façon à faire varier le volume de l'enceinte d'une quantité infinitésimale dV .

B.I.1.a.

Rappeler la valeur du rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ des capacités thermiques molaires à pression et volume constant pour un gaz parfait monoatomique.

B.I.1.b.

Quelle relation générale lie la variation d'énergie interne dU d'un gaz parfait à sa variation de température dT ?

B.I.1.c.

Pour la transformation envisagée, quelle relation lie dU à la variation de volume dV ?

B.I.1.d.

Déduire des relations précédentes une relation entre P et V au cours d'un déplacement fini du piston effectué très lentement.

B.I.2.

Le piston est maintenant libre. La pression à l'extérieur de l'enceinte est P_0 , supposée uniforme et stationnaire. Dans l'état initial, le gaz est à l'équilibre thermodynamique : sa pression vaut P_0 , sa température T_0 , son volume V_0 . A partir de cet état, on déplace légèrement le piston que l'on abandonne alors sans vitesse initiale. On repère la position du piston par son abscisse x par rapport à sa position d'équilibre.

On suppose que les seules forces s'appliquant sur le piston sont les forces de pression, et qu'à tout instant la relation établie en (B.I.1.d.) est valable. De plus, la variation relative de

pression du gaz $\frac{P - P_0}{P_0}$ est suffisamment faible pour être assimilée à un infiniment petit du 1^{er} ordre.

B.I.2.a.

Montrer que l'effet des forces de pression sur le piston est équivalent à celui d'un ressort de constante de raideur K dont on déterminera l'expression en fonction de γ , P_0 , V_0 et S .

B.I.2.b.

En déduire l'équation différentielle satisfaite par x , en fonction de K et de la masse m du piston.

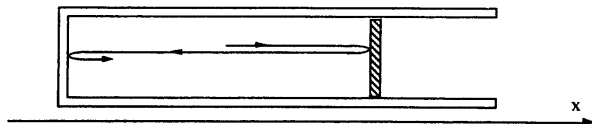
Application numérique :

$$P_0 = 10^5 \text{ Pa} ; S = 3,0 \text{ cm}^2 ; m = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg} ; V_0 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Calculer numériquement K ainsi que la pulsation ω et la période T des oscillations du piston.

B.II. PISTON FIXE

On se propose de retrouver et de préciser les résultats précédents à l'aide d'un modèle microscopique simple unidimensionnel. L'enceinte contient maintenant une ou plusieurs particules, assimilées à des points matériels de même masse μ ; par hypothèse, ces particules se déplacent uniquement parallèlement à l'axe du cylindre, c'est à dire ont une vitesse \vec{v} toujours portée par \vec{e}_x , et subissent des chocs élastiques sous incidence normale alternativement sur le fond du cylindre et sur le piston.



Dans la partie (B.II.), le piston est maintenu immobile.

B.II.1.

Le cylindre ne contient, pour commencer, qu'une seule particule

B.II.1.a.

Rappeler la définition d'un choc élastique.

Montrer que la norme v de la vitesse de la particule se conserve au cours d'un choc.

B.II.1.b.

Exprimer, en fonction de μ , L et v , la variation algébrique Δp_x de la quantité de mouvement de la particule au cours d'un choc sur le piston, et l'intervalle de temps Δt entre deux chocs successifs sur le piston.

B.II.1.c.

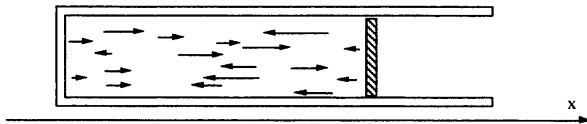
Représenter schématiquement les variations en fonction du temps de la force *instantanée* exercée par la particule sur le piston.

B.II.1.d.

Définir et calculer, en fonction de μ , v et L , la force exercée par la particule sur le piston en moyenne sur un intervalle de temps très grand devant Δt .

B.II.2.

L'enceinte contient maintenant N particules identiques, de même masse μ mais dont les vitesses ont des normes v_i ($1 \leq i \leq N$) a priori différentes. Ces particules se déplacent parallèlement à l'axe du cylindre, sur des trajectoires décalées les unes par rapport aux autres et n'interagissent pas les unes avec les autres.



On note $\bar{E}_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mu v_i^2$ l'énergie cinétique moyenne des particules .

B.II.2.a.

Calculer, en fonction de L et de \bar{E}_c , la force exercée en moyenne temporelle par les particules sur le piston.

B.II.2.b.

On définit la température T de l'ensemble des particules par la relation : $\bar{E}_c = \frac{1}{2} k_B T$ où k_B est la constante de Boltzmann.

Comparer cette définition de la température à celle donnée en théorie cinétique des gaz et commenter.

Montrer qu'avec cette définition, on retrouve pour le gaz de particules l'équation d'état du gaz parfait.

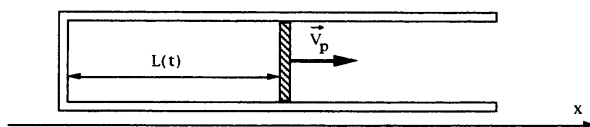
B.II.2.c.

Exprimer, pour ce modèle de gaz de particules, l'énergie interne U en fonction de N et T .

En déduire les capacités thermiques molaires C_p et C_v et le coefficient $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.

B.III. PISTON MOBILE

Un opérateur déplace maintenant le piston par rapport au cylindre avec une vitesse constante $v_p = \frac{dL}{dt}$.

**B.III.1.**

L'enceinte contient, comme en (B.II.1), une seule particule, subissant des chocs élastiques normaux sur le fond du cylindre et sur le piston. On note v_n la norme de la vitesse de la particule juste avant le $n^{\text{ème}}$ choc sur le piston et t_n l'instant où se produit ce choc.

B.III.1.a.

Etablir une relation entre v_{n+1} , v_n et V_p .

B.III.1.b

Exprimer, en fonction de v_n , V_p et $L(t_n)$, l'intervalle de temps $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ entre les chocs n et $n + 1$ sur le piston.

B.III.1.c.

On se place dans le cas où la norme de la vitesse de la particule est très grande devant celle du piston. La variation relative de v_n à v_{n+1} est ainsi assez faible pour que, à une échelle de temps suffisamment grande devant Δt_n , on puisse remplacer la suite discrète des v_n par une fonction continue du temps $v(t)$.

A l'aide des résultats (B.III.1.a.) et (B.III.1.b.), exprimer $\frac{dv}{dt}$ en fonction de V_p , L et v .

En déduire qu'au cours du déplacement du piston la vitesse v de la particule varie en fonction de L selon la loi : $v \cdot L^\beta = k$ où k est une constante dépendant des conditions initiales et β un exposant dont on donnera la valeur.

Ce résultat reste-t-il valable si le déplacement du piston, tout en restant très lent devant celui de la particule, n'est plus uniforme ?

B.III.2.

Comme en (B.II.2.), le cylindre contient maintenant N particules, d'énergie cinétique moyenne $\bar{E}_c = \frac{1}{2} k_B T$. On admet qu'à tout instant l'équation d'état établie en (B.II.2.) est valable.

A l'aide des résultats de la question (B.III.1.), montrer qu'au cours du déplacement du piston à la vitesse V_p , la pression P et le volume V de l'enceinte sont liés par une relation que l'on établira. Comparer cette relation à la relation (B.I.1.d.) et commenter.

- C -

C.I. PROPAGATION DU SON DANS LES FLUIDES

On étudie la propagation d'ondes sonores planes dans un tuyau cylindrique de section S , de génératrices parallèles à Ox , supposé de longueur infinie. Le tuyau est rempli d'un fluide parfait ; on néglige l'influence de la pesanteur et les seules forces s'exerçant sur un volume de fluide donné sont les forces de pression. En l'absence d'onde sonore, le fluide est au repos : sa pression P_0 , sa température T_0 et sa masse volumique ρ_0 sont uniformes.

Une section donnée de fluide est repérée par l'abscisse x de sa position au repos (représentation dite "lagrangienne"). Cette section se déplace selon Ox sous l'action de l'onde : à l'instant t , son abscisse est $x + s$, sa pression P , sa température T et sa masse volumique ρ .

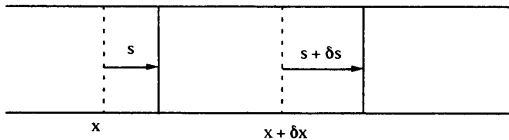
s , P , T et ρ sont considérées comme des fonctions de x et de t .

On définit pour la section de fluide : la vitesse vibratoire $u(x, t) = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_x$, la surpression

vibratoire $p(x, t) = P - P_0$ et la dilatation $\theta(x, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$.

C.I.1. ETABLISSEMENT DE L'ÉQUATION D'ONDE

On raisonne sur la tranche élémentaire de fluide comprise, au repos, entre les sections d'abscisses x et $x + \delta x$. A l'instant t , les déplacements de ces sections sont respectivement s et $s + \delta s$.



C.I.1.a.

Montrer que la conservation de la masse de la tranche de fluide impose une relation entre

θ et $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_t$.

On considère dans toute la suite que θ , $\frac{p}{P_0}$ et $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_t$ sont très petits devant l'unité (approximation "acoustique"), ce qui permet de linéariser les différentes expressions obtenues. Que devient dans ces conditions la relation exprimant la conservation de la masse ?

C.I.1.b.

On admet qu'au cours du mouvement de la tranche de fluide, la pression P et la masse volumique ρ sont liées par une relation que l'on met sous la forme $\rho = \varphi(P)$. On définit la

compressibilité χ_0 du fluide pour la transformation considérée par $\chi_0 = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{d\rho}{dP}\right)_0 = \frac{\varphi'(P_0)}{\rho_0}$.

En déduire une relation entre la surpression p et la dilatation θ .

C.I.1.c.

Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la tranche de fluide, en explicitant les différentes forces qui s'appliquent sur elle. En déduire une relation entre

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_t \text{ et } \left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\right)_x .$$

C.I.1.d.

Déduire des trois relations précédentes l'équation d'onde satisfaite par p et faisant intervenir ρ_0 et χ_0 .

Quelle est la forme des équations d'onde satisfaites par s , et θ ?

C.I.2. CÉLÉRITÉ DU SON

C.I.2.a.

Montrer qu'il existe des solutions à l'équation d'onde de la forme : $p = f\left(t - \frac{x}{c_s}\right)$ où c_s est une constante et f une fonction a priori quelconque de la variable composée $t - \frac{x}{c_s}$. Exprimer c_s en fonction de ρ_0 et χ_0 . Justifier le qualificatif d'onde progressive donné à ce type de solution.

C.I.2.b.

Montrer qu'il existe, pour une onde progressive, une relation simple entre la surpression p et la vitesse vibratoire u , relation que l'on exprimera en fonction de χ_0 et c_s .

C.I.2.c.

Le fluide contenu dans le tube est un gaz diatomique considéré comme parfait. Les transformations thermodynamiques de ce gaz sous l'action de l'onde sonore sont supposées isentropiques.

Quelle est la forme de la fonction $\varphi(p)$? Etablir l'expression de la célérité c_s des ondes en fonction de la température T_0 de repos, de la masse molaire M du gaz et du rapport $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ des capacités thermiques molaires à pression et à volume constant. La vitesse quadratique moyenne des molécules d'un gaz parfait de masse molaire M à la température T_0 est

$$\sqrt{\frac{3RT_0}{M}} ; \text{ comparer à } c_s \text{ et interpréter.}$$

C.I.3. INTENSITÉ SONORE

La propagation de l'onde dans le tube s'accompagne d'un flux d'énergie.

C.I.3.a.

Exprimer, en fonction de la surpression p et de la vitesse vibratoire u , la puissance surfacique Π_a associée aux forces de surpression acoustique.

C.I.3.b.

On considère une onde acoustique plane progressive sinusoïdale. La surpression se met alors sous la forme $p = p_m \cos[\omega(t - x/c_s)]$.

On définit l'intensité sonore I comme la valeur moyenne temporelle de Π_a . Donner l'expression de I en fonction de p_m , χ_0 et c_s , puis en fonction de p_m , P_0 , T_0 et des caractéristiques du gaz.

C.I.3.c.

L'intensité minimale perceptible par l'oreille humaine, pour la pulsation $\omega = 2000\pi \text{ rd.s}^{-1}$, est $I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$. Evaluer l'amplitude p_m de la surpression correspondante dans le cas de l'air à 300 K sous 0,1 MPa.

Un élève remarque la faiblesse de la valeur de p_m comparée à la valeur de P_0 et s'étonne qu'un tel signal sonore ne soit pas noyé dans les fluctuations de la pression de repos P_0 et puisse être distingué par l'oreille. Quelle réponse peut-on lui faire ?

C.I.3.d.

Le niveau sonore N (en décibels) correspondant à une intensité I donnée est défini par la relation :

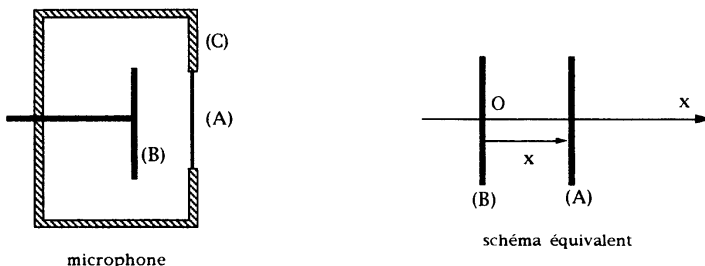
$$N = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où \log désigne le logarithme décimal et I_0 la valeur $I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$ précédente, prise comme référence.

Le seuil de douleur correspond approximativement à une intensité de 120 dB. Quelle est la valeur correspondante de p_m ? Un récipient contient de l'eau liquide à l'air libre, au repos dans le champ de pesanteur. A quelle profondeur faut-il approximativement s'enfoncer sous la surface libre pour obtenir une surpression hydrostatique égale à $p_m(120 \text{ dB})$?

C.II. MICROPHONE ELECTROSTATIQUE

La figure ci-dessous représente schématiquement un microphone électrostatique à pression :



Une capsule (C), contenant de l'air, est fermée par une membrane (A) susceptible d'être mise en mouvement par une onde sonore. Cette membrane est métallisée sur sa face intérieure et constitue l'une des armatures d'un condensateur, dont l'autre armature, (B),

est fixe. Des contacts électriques non figurés permettent de relier ce condensateur à un circuit électrique extérieur.

On modélise ce microphone par un condensateur plan, sans effets de bord, dont les armatures sont deux disques coaxiaux de même surface S . Le milieu entre les armatures est de l'air, dont la permittivité diélectrique relative ϵ_r sera prise égale à celle du vide : $\epsilon_r = 1$.

L'armature (B) est fixe. L'armature (A), de masse m , est susceptible de se translater le long de l'axe de symétrie Ox du système. On repère sa position par sa distance x par rapport à l'armature (B) dont le centre est pris comme origine O des abscisses.

C.II.1. MODÉLISATION DES FORCES

Lorsque le microphone est au repos, n'étant soumis à aucune tension électrique ni à aucune surpression, la distance entre les armatures du condensateur équivalent vaut x_e .

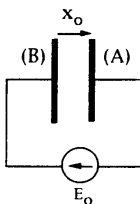
On admet que, lorsque l'armature (A) est déplacée de sa position de repos, elle est soumise à une force de rappel $\vec{F}_r = -K_r(x - x_e)\vec{e}_x$.

On suppose de plus que, lorsque (A) est en mouvement, elle est soumise à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse $\vec{F}_f = -f \frac{dx}{dt} \vec{e}_x$.

Quelles sont les origines physiques des forces prises en compte dans ces deux modélisations ?

C.II.2. ÉTUDE DU CONDENSATEUR À L'ÉQUILIBRE SOUS TENSION

L'armature (A) n'étant soumise à aucune surpression, on charge le condensateur sous une tension E_0 . On observe que les armatures se rapprochent et que la distance entre elles prend la valeur d'équilibre x_0 .



C.II.2.a.

Rappeler l'expression, en fonction de x_0 et S , de la capacité C_0 du condensateur dans cette position.

En déduire la charge q_0 algébrique portée par l'armature (A).

C.II.2.b.

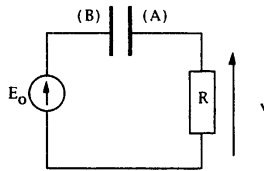
On isole le condensateur une fois chargé. L'armature (B) étant maintenue fixe, un opérateur déplace très lentement l'armature (A) de façon à faire varier x d'une quantité δx élémentaire algébrique.

Exprimer, en fonction de q_0 , S et δx , la variation d'énergie δU du condensateur au cours de cette opération. En déduire le travail δW_{op} de l'opérateur ainsi que la force \vec{F}_{op} qu'il doit exercer sur (A) pour effectuer le déplacement. Montrer que l'armature (A) est soumise de la part de l'armature (B) à une force électrostatique $\vec{F}_0 = F_0 \vec{e}_x$ dont on précisera le sens et dont on donnera l'expression en fonction de q_0 et S .

Cette force est parfois appelée force de "pression électrostatique". Commenter cette expression. Donner l'expression de la pression électrostatique P_{e1} en fonction de la densité surfacique σ de charge de l'armature (A).

C.II.3. ÉTUDE DU CONDENSATEUR EN MOUVEMENT

Le condensateur est inclus dans un circuit en série avec un générateur de tension de force électromotrice E_0 et un résistor de résistance R .



En plus des forces envisagées précédemment, la face externe de l'armature (A) est soumise à une surpression $p_1 = P_1 \cos(\omega t)$, correspondant à une onde sonore au niveau de la membrane de la capsule du microphone.

Pour simplifier, on admet que, bien que la charge des armatures du condensateur varie en fonction de la distance x qui les sépare, la force électrique que (B) exerce sur (A) conserve la valeur statique \vec{F}_0 déterminée en (C.II.2.b.).

C.II.3.a.

Établir l'équation différentielle satisfaite par x .

On définit l'écart x_1 à la distance d'équilibre x_0 par la relation : $x = x_0 + x_1$. Montrer que x_1 satisfait l'équation différentielle :

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + f \frac{dx_1}{dt} + K_r x_1 = -P_1 S \cos(\omega t)$$

On se place en régime sinusoïdal établi, de pulsation ω . On écrit x_1 sous la forme :

$$x_1 = X_m \cos(\omega t + \varphi) = \Re \{ i \tilde{X}_1 \exp(j\omega t) \}$$

où \Re désigne la partie réelle et \underline{X}_1 l'amplitude complexe de x_1 : $\underline{X}_1 = X_m \exp(j\varphi)$.

Exprimer l'amplitude complexe \underline{X}_1 de x_1 en fonction de ω et des caractéristiques du problème.

Pour quelle valeur ω_R de la pulsation de l'onde sonore peut-il y avoir résonance ? Cet effet de résonance vous semble-t-il devoir être recherché ?

Les paramètres du microphone et du montage électrique ont les valeurs suivantes :

$$R = 10^9 \Omega ; E_0 = 50 \text{ v} ; C_0 = 20 \text{ pF} ; K_r = 5 \cdot 10^4 \text{ N.m}^{-1} ; f = 0,4 \text{ kg.s}^{-1} ; m = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg.}$$

Calculer numériquement la fréquence ν_R de résonance et comparer au domaine de fréquences audibles qui s'étend approximativement, on le rappelle, de 20 Hz à 20.000 Hz.

C.II.3.b.

On note q la charge instantanée de l'armature (A) et C la quantité $\frac{\epsilon_0 S}{x}$.

Établir, en fonction de E_0 , R et C , l'équation différentielle satisfaite par q .

On pose $q = q_0 + q_1$, et on considère $\frac{q_1}{q_0}$ et $\frac{x_1}{x_0}$ comme très petits devant l'unité.

Établir, au premier ordre en $\frac{q_1}{q_0}$ et $\frac{x_1}{x_0}$, une relation entre q_1 , $\frac{dq_1}{dt}$ et x_1 .

Montrer alors que la tension v aux bornes de R satisfait la relation différentielle :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC_0}v = -\frac{E_0}{x_0} \frac{dx_1}{dt}$$

En régime sinusoïdal, on pose : $v = \Re\{\underline{V} \exp(j\omega t)\}$.

Exprimer l'amplitude complexe \underline{V} de v en fonction de \underline{X}_1 .

C.II.3.c.

On définit l'efficacité complexe du microphone par $e = \frac{\underline{V}}{P_1}$.

Montrer que e peut se mettre sous la forme :

$$e = A \frac{j \frac{\omega}{\omega_1}}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_2} - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right)}$$

et donner l'expression des paramètres A , ω_1 , ω_2 et Q en fonction de E_0 , R , C_0 , K_r , m , et f . Calculer numériquement ces paramètres.

Montrer que, si ω est comprise dans un domaine que l'on précisera en fonction de R , C_0 , K_r et m , l'efficacité e dépend peu de ω . Ceci constitue-t-il un avantage ou un inconvénient ?

Calculer numériquement les limites du domaine de pulsations précédent et commenter le choix des valeurs de R .

Dans la suite, on considère que ω est compris dans ce domaine de pulsations.

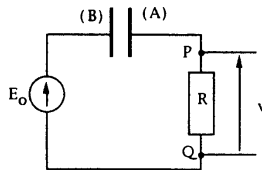
Pour P_1 variant entre 10^{-5} Pa et 10 Pa, entre quelles valeurs le module V_m de \underline{V} est-il compris ?

C.II.4. LIAISON À UN DISPOSITIF ENREGISTREUR

On souhaite appliquer la tension v à un dispositif enregistreur situé à une distance de l'ordre d'une dizaine de mètres.

C.II.4.a.

Calculer, en fonction de C_0 et ω , l'impédance Z_g du générateur de Thévenin équivalent, en régime sinusoïdal de pulsation ω , au circuit précédent entre les bornes P et Q du résistor.

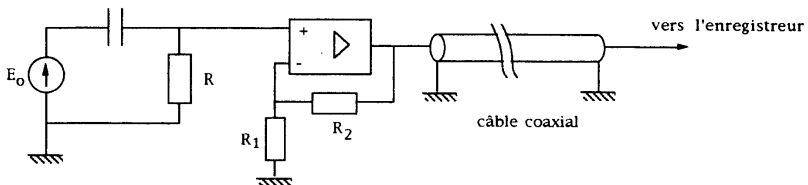


L'impédance d'entrée de l'enregistreur est $Z_e = 50 \Omega$. On utilise pour la liaison un câble coaxial d'impédance caractéristique 50Ω .

Expliquer pourquoi il n'est pas raisonnable de relier directement les bornes du résistor à l'enregistreur par le câble coaxial.

C.II.4.b.

Pour remédier à ce problème, on intercale entre la sortie du microphone et le câble coaxial un amplificateur opérationnel monté comme l'indique la figure :



L'amplificateur opérationnel est supposé parfait.

On adopte pour valeur des résistances $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 90 \text{ k}\Omega$.

Montrer que ce montage présente un double avantage et constitue bien une solution au problème précédent.

1266-A

17222

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours interne
de recrutement de professeurs agrégés
et concours d'accès à l'échelle de rémunération**

section : sciences physiques

options { physique et chimie
physique appliquée

composition avec exercices d'application

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alpha-numérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Aucun document n'est autorisé, notamment tableau périodique interdit.

*Les candidats doivent traiter le sujet
correspondant à l'option à laquelle ils sont inscrits*

Option : PHYSIQUE ET CHIMIE

Dans le cas où un candidat croit détecter une erreur dans l'énoncé, il le signale très lisiblement dans sa copie, propose la correction, et poursuit en conséquence sa composition. Il prend bien entendu l'entière responsabilité de la correction proposée.

Matériel : papier millimétré

DONNÉES

On assimile les activités a_i des espèces dissoutes au rapport de leur concentration à la concentration standard :

$$a_i = \frac{[i]}{C^0} \quad \text{avec } C^0 = 1 \text{ mol.L}^{-1}$$

Tous les gaz sont assimilés à des gaz parfaits.

Données :

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$

Constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Numéros atomiques :

Élément	C	N	O	Al	Si	Cl
Z	6	7	8	13	14	17

$$\frac{RT \ln 10}{F} = 0,059 \text{ V, à } 298 \text{ K}$$

Rayons des atomes : $r_{\text{Al}} = 0,143 \text{ nm}$ $r_{\text{Si}} = 0,118 \text{ nm}$

Masse molaire atomique : $M_{\text{Al}} = 27,0 \text{ g.mol}^{-1}$ $M_{\text{Si}} = 28,1 \text{ g.mol}^{-1}$

Correspondance entre les unités d'énergie : $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$

Les données suivantes sont supposées indépendantes de la température.

- Enthalpies standard de formation (kJ.mol^{-1}) :

HCl(g)	O ₂ (g)	O(g)	Cl ₂ (g)	Si(g)	H ₂ O(g)
-92	0	249	0	456	-242

- Entropies standard ($\text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$) :

HCl(g)	O ₂ (g)	Cl ₂ (g)	H ₂ O(g)
187	205	223	188

- Produits de solubilité (pK_s) :

AgCl : 9,8

Ag₂CrO₄ : 12,0

Ag₂O : 15,4, pour l'équilibre $\text{Ag}_2\text{O(s)} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons 2 \text{Ag}^+(\text{aq}) + 2 \text{HO}^-(\text{aq})$.

- Constantes de dissociation des acides (pK_A) :

HCrO₄⁻/CrO₄²⁻ : 6,5

H₂O/HO⁻ : 14,0

- Conductivités ioniques molaires à dilution infinie (λ° , en $\text{mS.m}^2.\text{mol}^{-1}$), pour les ions en solution aqueuse.

Ag ⁺	Na ⁺	Cl ⁻	NO ₃ ⁻
6,2	5,0	7,6	7,1

Le sujet comporte deux parties indépendantes :

- **partie A : autour de l'élément chlore**
- **partie B : vers les polymères semi-conducteurs**

A l'intérieur de chaque partie, de nombreux exercices sont indépendants.

PARTIE A

AUTOUR DE L'ÉLÉMENT CHLORE

I. Le chlore dans la stratosphère.

I.1. Donner la configuration électronique de l'atome de chlore dans son état fondamental, ainsi que celle de l'atome d'oxygène.

I.2. Structure de quelques espèces diatomiques.

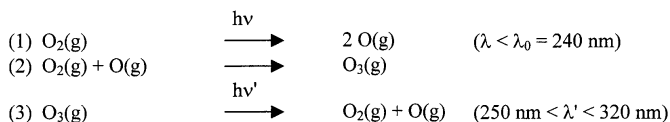
I.2.1. Représenter le diagramme des orbitales moléculaires du dioxygène, du dichlore et du monoxyde de chlore ClO (on rappelle que l'oxygène est plus électronégatif que le chlore). On admettra que l'ordre des énergies, pour les orbitales moléculaires, est $(\pi_x, \pi_y) < \sigma_z < (\pi_x, \pi_y)^* < \sigma_z^*$, avec les notations habituelles.

I.2.2. Définir et calculer l'indice de liaison pour chacune des trois espèces ; commenter le résultat dans chaque cas.

I.2.3. Préciser si les trois espèces considérées ici sont diamagnétiques ou paramagnétiques.

I.3. L'ozone stratosphérique.

I.3.1. Dans la stratosphère, le dioxygène peut former de l'ozone O_3 selon le cycle de Chapman, donné ci-dessous. L'étape (1) nécessite l'action d'un rayonnement de fréquence ν dont la longueur d'onde associée est λ .



I.3.1.1. Proposer une formule de Lewis pour l'ozone, sachant que l'ozone présente un moment dipolaire non nul.

I.3.1.2. Retrouver la valeur de λ_0 à partir des données.

I.3.1.3. Montrer que le cycle de Chapman permet d'expliquer la protection, par l'ozone présent dans la stratosphère, de l'homme contre les UV solaires.

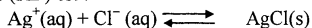
I.3.2. Depuis une trentaine d'années, on constate une diminution de la concentration d'ozone dans la stratosphère. Ce phénomène est attribué, entre autres, à l'apparition d'atomes de chlore dans la stratosphère. La photolyse des chlorofluorocarbures (CFC) issus de l'activité humaine est à l'origine de ce phénomène. Un mécanisme proposé est le suivant, sur l'exemple du trichlorofluorométhane ; k_5 , k_6 et k_7 désignent les constantes de vitesses respectives des étapes (5), (6) et (7).

III Dosages de l'ion chlorure.

On suppose, dans toute la suite, que l'on dose un volume v_0 d'une solution (S) de chlorure de sodium, à la concentration initiale c_0 . Le dosage se fait à l'aide d'une solution de nitrate d'argent à la concentration c ; le volume de solution de nitrate d'argent versé est noté v .

III.1. Étude de la réaction de dosage.

La réaction de dosage (RD) est :



III.1.1. Calculer la constante K_{RD} de cet équilibre à 25 °C.

III.1.2. Définir avec précision l'équivalence du dosage ; calculer alors la concentration en ions Ag^+ à l'équivalence.

III.1.3. On définit ici la précision théorique du dosage comme le rapport de la concentration en ions Ag^+ à l'équivalence à la concentration initiale en ions Cl^- , c_0 .

Déterminer la valeur minimale de c_0 pour que la précision théorique du dosage soit au moins égale à 2 %.

III.1.4. À la lumière de ce qui précède, expliquer en quoi la connaissance de la valeur de la constante K_{RD} est insuffisante pour conclure à la faisabilité d'un dosage.

III.2. Suivi potentiométrique du dosage des ions chlorure.

On prélève $v_0 = 100$ mL de solution (S). On appelle ΔE la différence de potentiel entre une électrode d'argent plongeant dans cette solution et une électrode au calomel saturé (ECS) munie d'une allonge qui l'isole chimiquement de la solution à doser.

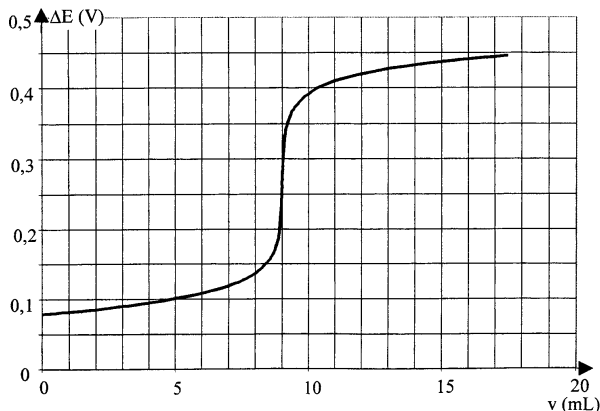
On mesure ΔE en fonction du volume v d'une solution de nitrate d'argent ($c = 0,200$ mol.L⁻¹) versé dans la solution (S).

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

v (mL)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	8,5	9,0	9,5
ΔE (mV)	79	82	86	90	95	101	108	119	137	155	265	375

v (mL)	10,0	10,5	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0	16,0	17,0
ΔE (mV)	392	403	410	420	427	433	437	441	444

La courbe obtenue est donnée ci-dessous :



III.2.1. Justifier l'utilisation d'une allonge.

III.2.2. Déterminer, d'après la courbe obtenue, la valeur de c_0 , concentration de la solution (S) en chlorure de sodium. Calculer la précision théorique du dosage.

III.2.3. On note ΔE° le potentiel standard du couple Ag^+/Ag par rapport à l'ECS. Donner les expressions de ΔE en fonction de v et de ΔE° , avant et après l'équivalence.

III.2.4. Montrer qu'il est possible de trouver numériquement les valeurs du produit de solubilité du chlorure d'argent et de ΔE° en utilisant les valeurs expérimentales données de ΔE et v . Calculer ces grandeurs.

III.3. Dosage conductimétrique.

III.3.1. Rappeler le principe d'une mesure en conductimétrie ; expliquer pourquoi la tension appliquée à la cellule de mesure est forcément alternative.

III.3.2. Il est habituel, en conductimétrie, d'ajouter un volume v_{eau} d'eau distillée à la prise d'essai v_0 de la solution (S), avec $v_{\text{eau}} \gg v_0$. Justifier cette précaution expérimentale.

III.3.3. Dans ces conditions, donner, en justifiant qualitativement, l'allure de la courbe de dosage conductimétrique d'une solution de chlorure de sodium par une solution de nitrate d'argent.

III.4. Méthode de Mohr.

Protocole

À $v_0 = 100$ mL d'une solution (S) de chlorure de sodium à environ $0,02 \text{ mol.L}^{-1}$, on ajoute 1 mL d'une solution de chromate de potassium (K_2CrO_4) à $2,5 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$. Puis on verse la solution titrante de nitrate d'argent à $0,200 \text{ mol.L}^{-1}$ jusqu'à apparition d'une coloration rouge orange.

III.4.1. Expliquer pourquoi la simple comparaison des valeurs numériques des produits de solubilité du chlorure d'argent et du chromate d'argent ne permet pas de comparer la solubilité des deux sels d'argent, puis indiquer le précipité qui apparaît le premier.

III.4.2. On constate que l'apparition de la couleur rouge orange se produit lorsque le volume versé est égal à 9,0 mL. Calculer la concentration de la solution (S) en ions chlorure.

III.4.3. Calculer la concentration en ions chlorure restant en solution lorsque le chromate d'argent commence juste à précipiter (*on ne tiendra pas compte de la dilution*). En déduire la précision théorique du dosage.

III.4.4. Dans la mise en œuvre du protocole expérimental, il est précisé que le pH de la solution doit être voisin de 7.

III.4.4.1. Calculer la valeur maximale acceptable pour le pH de la solution, pour que le précipité d'oxyde d'argent Ag_2O n'apparaisse pas avant l'équivalence.

III.4.4.2. Expliquer pourquoi le chromate d'argent peut se redissoudre en milieu acide.

III.4.4.3. On veut que la précision théorique du dosage soit au moins égale à 2 %. Calculer la valeur minimale acceptable du pH dans ces conditions.

IV. Les ions chlorure en tant que ligands : les chlorocomplexes du platine

Le platine est un métal appartenant à la colonne 11, celle du nickel. Sa configuration électronique dans l'état fondamental est $[\text{Xe}] 4f^{14} 5d^9 6s^1$ (Xe est le xénon).

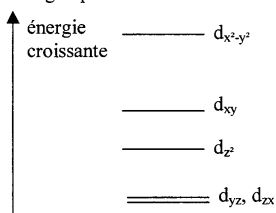
Il donne des chlorocomplexes assez stables comme $[\text{PtCl}_4]^{2-}$ (plan carré) ou $[\text{PtCl}_6]^{2-}$ (octaédrique).

IV.1.1. Nommer les deux complexes évoqués ci-dessus.

IV.1.2. Donner la configuration électronique de l'ion Pt^{2+} et celle de l'ion Pt^{4+} , dans leur état fondamental.

IV.1.3. En appliquant la théorie du champ cristallin, indiquer la répartition des électrons de valence de l'élément métallique dans le complexe $[\text{PtCl}_6]^{2-}$; les ions chlorure créent un champ faible.

IV.1.4. Pour construire le schéma énergétique correspondant au complexe plan carré $[\text{PtCl}_4]^{2-}$, il est possible de partir de la répartition obtenue pour un complexe octaédrique. On obtient alors le diagramme énergétique suivant :



IV.1.4.1. Justifier qualitativement ce diagramme en comparant à celui obtenu pour un complexe octaédrique.

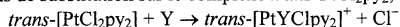
IV.1.4.2. Indiquer la répartition des électrons de valence dans $[\text{PtCl}_4]^{2-}$, sachant que le complexe est diamagnétique.

IV.2. Réactions de substitution

La pyridine, notée py, est un ligand monodentate de formule



On considère les réactions de substitution sur le complexe *trans*- PtCl_2py_2 , selon le bilan :

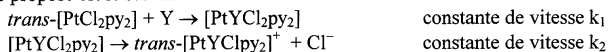


Y est un nucléophile, Cl^- est le groupe partant.

IV.2.1. Dessiner le complexe *trans*- $[\text{PtCl}_2\text{py}_2]$ et le complexe *cis*- $[\text{PtCl}_2\text{py}_2]$. Ces deux isomères sont-ils des diastéréoisomères ou des énantiomères ?

IV.2.2. La réaction de substitution est d'ordre 1 par rapport au complexe et d'ordre 1 par rapport au nucléophile Y ; la constante de vitesse est k_Y .

Le mécanisme proposé est le suivant :



En appliquant l'approximation de l'état quasi stationnaire à l'intermédiaire réactionnel, retrouver la loi de vitesse de la réaction de substitution ; exprimer k_Y en fonction de k_1 et k_2 .

IV.2.3. Nucléophilicité

Le tableau suivant donne la valeur de k_Y , pour quelques nucléophiles :

Y	NH ₃	MeOH (méthanol)	I ⁻
k_Y (L.mol ⁻¹ .s ⁻¹)	$4,7 \times 10^{-4}$	$4,1 \times 10^{-7}$	$1,1 \times 10^{-1}$

Le paramètre de nucléophilicité, pour un complexe du platine, est noté n_{Pt} et défini par :

$$n_{Pt} = \log \frac{k_Y}{k_{MeOH}}$$

IV.2.3.1. Calculer le paramètre de nucléophilicité pour l'ammoniac et l'ion iodure.

IV.2.3.2. Le tableau suivant donne la valeur de n_{Pt} pour quelques nucléophiles :

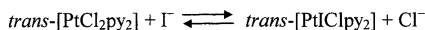
Y	Cl ⁻	Br ⁻	MeSH	PPh ₃
n_{Pt}	3,0	4,0	4,0	8,8

Commenter ce tableau de valeurs, en effectuant des comparaisons sur des séries de nucléophiles judicieusement choisis.

On indique que PPh₃ est la triphénylphosphine, Ph désignant le groupement phényle.

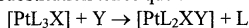
IV.2.3.3. On admet désormais que la vitesse de la réaction ne dépend pratiquement pas de la nature du groupe partant, pour un ion métallique central donné.

Évaluer la constante de l'équilibre :



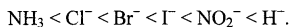
IV.2.4. L'effet trans.

On considère des réactions de substitution telles que :



où L et X désignent des ligands quelconques.

On constate que le groupe partant est celui qui se trouve en position trans par rapport au ligand de pouvoir directeur trans maximal. Le pouvoir directeur trans de quelques ligands est donné ci-dessous, par ordre croissant :



IV.2.4.1. Proposer une synthèse du *cis*-[PtCl₂(NH₃)₂] à partir du complexe [PtCl₄]²⁻. Ce complexe *cis* (appelé « *cis*-platine) est utilisé depuis 1965 dans le traitement de certains cancers, l'isomère *trans* n'ayant aucune action thérapeutique.

IV.2.4.2. Proposer une synthèse en deux étapes des *cis*- et *trans*-[PtCl₂(NO₂)(NH₃)]⁻ à partir de [PtCl₄]²⁻.

PARTIE B

VERS LES POLYMÈRES SEMI-CONDUCTEURS

I L'aluminium et le silicium : exemples de métal et de semi-conducteur

I.1 Structure de l'aluminium

L'aluminium cristallise dans un système cubique à faces centrées (c.f.c.)

I.1.1 Dessiner la maille conventionnelle pour l'aluminium.

I.1.2 Calculer la coordinence de l'aluminium.

I.1.3 Calculer la compacité C_{Al} de l'aluminium.

I.1.4 Calculer la masse volumique ρ_{Al} de l'aluminium.

I.2 Structure du silicium

I.2.1. Décrire puis dessiner la maille conventionnelle du silicium.

I.2.2. Calculer la coordinence du silicium.

I.2.3. Calculer la compacité C_{Si} du silicium.

I.2.4. Calculer la masse volumique ρ_{Si} du silicium.

I.2.5. Indiquer le type de liaison à l'origine de la cohésion du cristal. Préciser les différences notables avec la liaison métallique.

I.2.6. Calculer l'énergie E_{Si-Si} de la liaison Si-Si dans le cristal.

I.3 Théorie des bandes

I.3.1. Définir une bande d'énergie.

I.3.2. Dans un diagramme de bandes, définir la bande de conduction et la bande interdite.

I.3.3. Donner la configuration électronique de l'aluminium. En déduire l'allure du diagramme de bande de l'aluminium métal, en ne représentant pas les bandes issues des orbitales de cœur. Préciser le nombre de niveaux d'énergie contenus dans les bandes représentées et leur remplissage.

I.3.4. Reprendre la question I.3.3. pour le carbone diamant puis pour le silicium.

I.3.5. Indiquer la différence à l'origine du caractère isolant du diamant et du caractère semi-conducteur du silicium.

I.3.6 Donner une interprétation de l'augmentation de la conductivité intrinsèque du silicium avec la température.

II Le polyacétylène $\text{H}-(\text{CH}=\text{CH})_n-\text{H}$

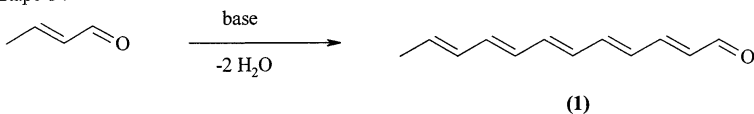
II.1. Représenter la structure spatiale du polyacétylène la plus stable.

II.2. Synthèses

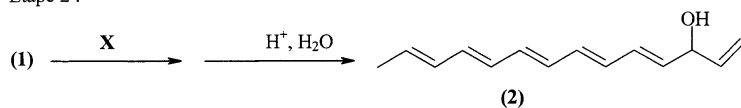
Les trois études conduites ci-dessous sont relatives d'une part à la synthèse de quelques polyènes à faible degré de polymérisation, d'autre part à celle du polyacétylène.

II.2.1. Synthèse de Christensen et al.

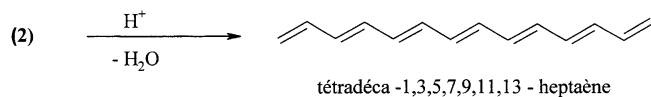
Étape 1 :



Étape 2 :



Étape 3 :



II.2.1.1. Étape 1

Écrire les formes mésomères de l'ion énolate associé à l'aldéhyde conjugué de départ. Nommer la réaction qui a lieu et donner son mécanisme. Expliquer pourquoi la réaction évolue jusqu'à l'obtention de (1).

II.2.1.2. Étape 2

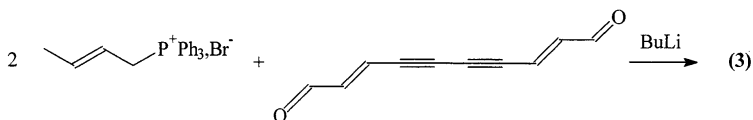
Indiquer la formule du réactif X nécessaire à cette réaction. Donner le mécanisme de la réaction.

II.2.1.3. Étape 3

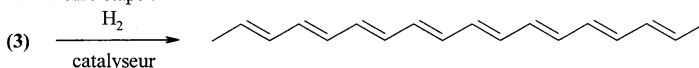
Donner le mécanisme de la réaction.

II.2.2. Synthèse de Bohlmann et Mannhardt

Première étape :



Deuxième étape :



II.2.2.1. Première étape

Préciser à quelle grande classe de composé appartient BuLi ; nommer la réaction.
Déterminer le produit de la première étape et préciser son mécanisme.

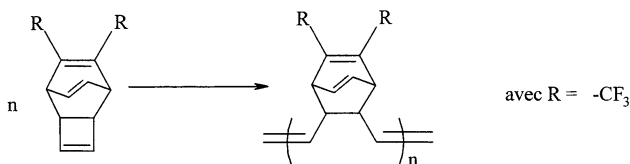
II.2.2.2. Deuxième étape

- Indiquer un catalyseur possible pour cette réaction. Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser le nickel de Raney.
- Préciser le type de catalyse mis en jeu. Dessiner l'allure du profil réactionnel correspondant en précisant les différentes étapes de cette catalyse.

II.2.3. Synthèse du polyacétylène

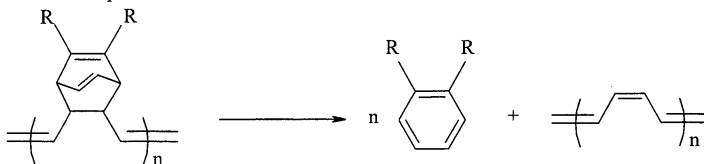
La synthèse la plus répandue est la polymérisation de l'acétylène (ou éthyne) en présence d'un catalyseur de type Ziegler-Natta. Cependant, pour minimiser les réactions parasites et obtenir ainsi un polymère de meilleure qualité, d'autres méthodes ont été expérimentées, utilisant des précurseurs du polyacétylène. C'est le cas du mécanisme étudié ci-dessous.

Première étape :

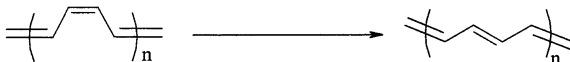


Cette première étape implique l'utilisation d'un métal de transition complexé par un ligand carbène.

Deuxième étape :



Troisième étape :



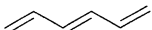
II.2.3.1. Deuxième étape

Donner le mécanisme de cette réaction, nommer cette réaction et indiquer les conditions opératoires.

II.2.3.2. Troisième étape

Donner et justifier les conditions opératoires.

II.3. Une approche de la conduction du polyacétylène

II.3.1. On considère l'hexa-1,3,5-triène  dans la théorie de Hückel.

II.3.1.1. Nommer et donner l'expression des termes α et β qui interviennent dans l'expression de l'énergie E des orbitales moléculaires, dans cette théorie de Hückel.

II.3.1.2. Donner l'expression du déterminant séculaire simplifié associé au système Π de l'hexa-1,3,5-triène. On utilisera la variable $x = \frac{\alpha - E}{\beta}$.

II.3.1.3. Les valeurs de x correspondant à l'annulation du déterminant simplifié sont :

-1,802	-1,247	-0,445	0,445	1,247	1,802
--------	--------	--------	-------	-------	-------

Placer sur un diagramme les niveaux énergétiques correspondant et déterminer la configuration électronique de ce polyène dans son état fondamental.

II.3.2. Pour un polyène comportant n atomes de carbone (C_nH_{n+2}), l'énergie de la $j^{\text{ème}}$ orbitale moléculaire ($1 \leq j \leq n$) peut être donnée par la relation :

$$E_j = \alpha + 2\beta \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$$

II.3.2.1. Calculer $E_{20} - E_1$ pour un polyacétylène à 20 atomes de carbone, $C_{20}H_{22}$. Déterminer les énergies de la plus haute orbitale moléculaire occupé (HO) et de la plus basse orbitale moléculaire vacante (BV).

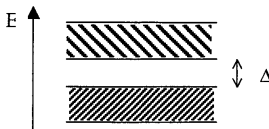
II.3.2.2. Pour un polyacétylène pour lequel n est très grand, indiquer ce que devient $E_n - E_1$.

Comment peut-on qualifier l'ensemble des niveaux d'énergie ? Pourquoi ?

Où se situe la HO ? Qu'en déduire sur le remplissage de l'ensemble des niveaux d'énergie ?

II.3.3. Le modèle ci-dessus implique l'égalité en terme de longueur des liaisons simples et des liaisons doubles. En réalité, il n'en est rien : la distorsion de Peierls conduit à l'éclatement de l'ensemble des niveaux d'énergie décrit ci-dessus, en deux bandes contenant toutes deux le même nombre de niveaux d'énergie. Dans l'état fondamental, la bande la plus basse en énergie est pleine ; la bande la plus haute en énergie est vide.

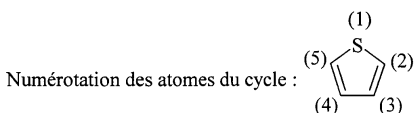
L'écart entre les deux bandes, ou "gap", est de $\Delta = 1,7$ eV



Sachant que le "gap" du silicium est voisin de 1,1 eV, indiquer quel sera le comportement électrique du polyacétylène.

III Le polythiophène

III.1. Étude du monomère, le thiophène :



On rappelle que le soufre est en dessous de l'oxygène dans la classification périodique des éléments.

III.1.1. Aromaticité

Dessiner les formes mésomères du thiophène. Le thiophène est-il aromatique ?

III.1.2. Le spectre RMN du proton pour le thiophène fait apparaître deux multiplets A et B.

$$\delta_A = 7,20 \text{ ppm} \quad \delta_B = 6,96 \text{ ppm}$$

Attribuer ces deux multiplets après justification.

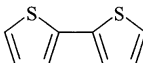
Donner une interprétation de la valeur relativement élevée des deux déplacements chimiques.

III.2. Le polythiophène électrochimique

Le polythiophène, $\text{H} \left(\text{C}_4\text{H}_3\text{S} \right)_n \text{H}$, peut être préparé par oxydation électrochimique :

le monomère (thiophène) est placé en solution dans l'acétonitrile CH_3CN en présence de perchlorate de tétrabutylammonium.

La première étape du mécanisme consiste en l'oxydation du monomère en son radical cation. La deuxième étape fait intervenir le couplage de deux radicaux cations et conduit au dimère :



La réaction se poursuit à l'identique et on arrive finalement à des polythiophènes de degré de polymérisation voisin de 50.

III.2.1. Indiquer sur quelle électrode a lieu cette oxydation.

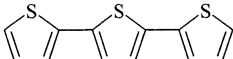
III.2.2. Écrire le mécanisme de la deuxième étape.

III.2.3. Sachant que le dimère est plus facilement oxydable que le monomère, écrire le mécanisme de l'étape suivante.

III.2.4. Indiquer les défauts structurels que peut présenter ce polymère. Donner un exemple de molécule comportant ces défauts.

III.2.5. Préciser le rôle du perchlorate de tétrabutylammonium.

III.3. Le terthiophène : synthèse chimique

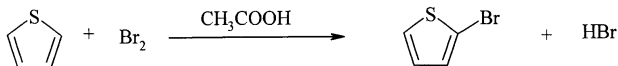
Le terthiophène, , présente l'intérêt de donner par polymérisation

électrochimique un polymère plus régulier que le précédent, et qui présente de ce fait des propriétés électriques plus intéressantes.

Un exemple de synthèse par voie chimique du terthiophène est proposé ci-dessous.

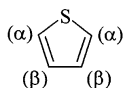
III.3.1. Étape préliminaire : synthèse de l' α -bromothiophène

Elle a lieu en solvant acide acétique :



III.3.1.1. Préciser le type de réaction mis en jeu.

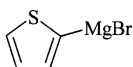
III.3.1.2. On note α les positions 2 et 5 et β les positions 3 et 4 dans le thiophène :



La réactivité du thiophène peut être interprétée de façon similaire à celle d'un benzène substitué.

- Donner l'allure du profil réactionnel de la réaction.
- Proposer une interprétation complète de l'obtention majoritaire du composé α -bromé par rapport au composé β -bromé.
- Indiquer pourquoi il n'est pas nécessaire d'utiliser un catalyseur comme dans la bromation du benzène. Justifier la réponse.

III.3.2. Synthèse du bromure de thiénylmagnésium :



Mode opératoire : 7,7 mL de bromothiophène en solution dans 50 mL d'éther diéthylique sont ajoutés goutte à goutte à température ambiante à une suspension de 2,0 g de magnésium dans l'éther diéthylique sous forte agitation. Un petit reflux est observé. À la fin de l'addition, l'agitation est poursuivie pendant 5 heures dont la dernière demi-heure au reflux.

III.3.2.1. Écrire l'équation de la réaction.

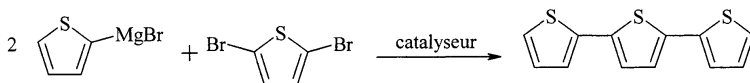
III.3.2.2. Faire un schéma du montage utilisé.

III.3.2.3. Préciser l'origine du petit reflux observé.

III.3.2.4. Indiquer les précautions à prendre lors de cette synthèse. Justifier.

III.3.3. Synthèse du terthiophène

La réaction est la suivante :



Donner un mécanisme pour cette réaction.

Option : PHYSIQUE APPLIQUEE

Cette composition comprend deux problèmes totalement indépendants.

Ces deux problèmes sont obligatoires.

Les deux problèmes seront traités sur des copies différentes, les candidats noteront de façon très visible, en haut de chaque feuille intercalaire, le numéro du problème abordé dans ledit intercalaire.

Dans le cas où un(e) candidat(e) croit détecter une erreur dans l'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement dans sa copie, propose la correction, et poursuit en conséquence le problème. Il (elle) prend bien entendu l'entière responsabilité de la correction proposée.

Avertissement :

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants :

Le premier sujet traite de l'électronique de commande d'une machine à courant continu alimentée par l'intermédiaire d'un pont redresseur, et de la compensation automatique de la puissance réactive qui en résulte.

Le deuxième sujet se rapporte à l'étude d'une machine asynchrone triphasée, l'étude de son schéma équivalent, du contrôle de la vitesse en V/F et de son fonctionnement sur réseau monophasé.

Chaque problème est divisé en parties elles-mêmes souvent indépendantes. A l'intérieur de chaque partie, de nombreuses questions sont aussi indépendantes. Une lecture de chaque sujet avant de composer est donc recommandée.

Dans chaque cas, le candidat devra utiliser les notations indiquées dans le texte ou sur les figures.

La présentation de la copie devra tenir compte des remarques suivantes :

- présenter clairement les calculs ;
- faire apparaître les références des questions telles qu'elles se présentent dans le sujet et bien indiquer la partie traitée ;
- dégager les résultats et les encadrer ;
- écrire lisiblement ;
- numéroter chaque copie.

Le candidat doit impérativement traiter les deux problèmes et chacun sur copies séparées.

Les candidats noteront de façon très lisible, en haut de chaque feuille intercalaire, le numéro du problème abordé dans ledit intercalaire. Dans le cas où un (e) candidat (e) croit détecter une erreur dans l'énoncé, il (elle) signale très lisiblement dans sa copie, propose la correction, et poursuit en conséquence le problème.

Il (elle) prend bien entendu l'entière responsabilité de la correction proposée.

Moyen de calcul autorisé : *calculatrice électronique de poche (y compris programmable et alphanumérique) à fonctionnement autonome, non imprimante.*

Recommandations générales :

Le candidat tracera toutes les formes d'ondes, chronogrammes, ..., qui permettent d'étayer ses raisonnements. Il notera et justifiera toutes les hypothèses qu'il estime nécessaire de formuler, en particulier dans la mesure où il lui semble qu'il existe une imprécision ou une absence de données dans le texte.

PREMIER PROBLEME
ELECTRONIQUE - AUTOMATIQUE

COMMANDE D'UNE MACHINE A COURANT CONTINU

L'alimentation et le réglage de la vitesse de rotation avec inversion de sens des machines à courant continu à partir d'un réseau alternatif industriel (tension et fréquence constantes) nécessitent l'utilisation de ponts redresseurs tout thyristor. Il résulte de l'emploi de tels systèmes un appel de puissance réactive ainsi que l'injection d'harmoniques de courant sur ce réseau.

L'objet de cette étude est:

- a) d'analyser les incidences d'une part de cet appel de puissance réactive et d'autre part de l'injection des harmoniques de courant sur la tension et le dimensionnement du réseau;
- b) de proposer et d'étudier un ensemble électronique destiné à assurer une compensation en temps réel des phénomènes.

Notations: selon les conventions habituelles:

- 1) Les valeurs instantanées sont représentées par des lettres minuscules: j, v, \dots
- 2) Les valeurs efficaces sont représentées par des lettres majuscules: J, V, \dots
- 3) Les valeurs complexes sont notées par des lettres majuscules soulignées: $\underline{J}, \underline{V}, \dots$

A) Incidence de l'appel de puissance réactive sur un réseau fixe.

A.I) Ensemble pont redresseur / machine à courant continu (Figure 1)

L'ensemble pont redresseur / machine à courant continu désigné par le terme "charge" est dans l'immédiat supposé alimenté par une tension alternative sinusoïdale: $v = V\sqrt{2} \sin \omega t$

La machine à courant continu du fait de l'inductance de ses enroulements sera assimilée à une source de courant instantané de valeur constante J_0 . (La résistance de l'enroulement est négligée) j_{ch} et v_m désignent respectivement l'intensité instantanée du courant appelée par la charge et la tension instantanée aux bornes de la machine à courant continu.

Les thyristors sont commandés avec un retard à l'amorçage, noté " α ", compté à partir de l'amorçage naturel.

A.I.1) Tracer j_{ch} et v_m pour un retard à l'amorçage $\alpha = \frac{\pi}{6}$ sur le document - réponse N° 1.

A.I.2) Expliciter le développement en série de Fourier du courant instantané j_{ch} appelé par la charge, pour une valeur α quelconque, et le mettre sous la forme: $j_{ch} = \sum_{k=1}^{\infty} J_k \sqrt{2} \sin[k\omega t - \varphi_k]$;

Rappels:

Toute fonction périodique $f(t)$ peut s'écrire: $f(t) = \langle f(t) \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t]$

avec $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$ (valeur moyenne de la fonction sur la période T)

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k \frac{2\pi}{T} t = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos k\theta d\theta$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k \frac{2\pi}{T} t = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin k\theta d\theta$$

A.I.3) Quelle relation lie φ_k et α ?

A.II) Etude de l'incidence d'un appel de puissance réactive sur la tension instantanée v du réseau

Le réseau sera assimilé à une source de tension parfaite de force électromotrice instantanée "e" ayant pour expression: $e = E\sqrt{2} \sin[\omega t + \beta]$, associée à une inductance constante "L_R" placée en série.

La charge (pont redresseur + M.C.C.) est connectée à ce réseau (Figure 2).

A.II.1) Le courant est (dans un premier temps) assimilé à son fondamental, et a pour expression

$$j_1 = J_1 \sqrt{2} \sin[\omega t - \varphi_1];$$

Nota: φ_1 est le déphasage de j_1 par rapport à v.

A.II.1.1) Exprimer la puissance active P_{ch} , appelée par la charge, en fonction de V, J_0 et α ;

A.II.1.2) Exprimer la puissance active P, fournie par la source de f.e.m. e du réseau, en fonction de E, J_0 et ψ_1 ;

Nota: ψ_1 est le déphasage de j_1 par rapport à e.

A.II.1.3) Exprimer la puissance réactive Q_{ch} , appelée par la charge en fonction de V, J_0 et α ;

A.II.1.4) Exprimer la puissance réactive Q fournie par la source de f.e.m. e du réseau en fonction de V, J_0 , α , ω et L_R ;

A.II.1.5) Quelle est la puissance apparente S fournie par la source e?

A.II.1.6) Etablir une relation entre V, E, L_R , J_1 et α ;

A.II.1.7) En pratique $L_R \omega J_1 \ll V$, montrer que l'on peut alors écrire: $E \approx V + L_R \omega J_1 \sin \alpha$;

Nota: L'hypothèse $L_R \omega J_1 \ll V$, sera conservée pour la question suivante [A.II.1.8)].

A.II.1.8) On appelle puissance apparente de court-circuit d'un réseau la grandeur $S_{cc} = E \times J_{cc}$; (J_{cc} désigne l'intensité efficace du courant de court-circuit).

Exprimer la chute de tension relative $\frac{\Delta V}{V} = \frac{E - V}{V}$ en fonction de S_{cc} et de Q appelée sur le réseau;

A.II.2) Le courant appelé sur le réseau n'est plus assimilé à son fondamental, son expression est donc de la forme $j_{ch} = \sum_{k=1}^{\infty} J_k \sqrt{2} \sin(k\omega t - \phi_k)$;

A.II.2.1) En donnant l'expression de v en fonction de e , L_R et j_{ch} , montrer que la tension délivrée par le réseau comporte alors des harmoniques;

A.II.2.2) Donner l'expression de v en fonction de E , J_0 et α ;

A.II.2.3) Exprimer la puissance active P_{ch}' appelée par la charge en fonction de E , J_0 , et ψ_1 ;

A.II.2.4) Exprimer P_{ch}' en fonction de P_{ch} ;

A.II.2.5) Exprimer la puissance réactive Q_{ch}' fournie par la source du réseau;

A.II.2.6) Quelle est la puissance apparente S' fournie par la source ?

A.II.2.7) Exprimer S' en fonction de S .

L'étude précédente montre que l'on a tout intérêt à compenser la puissance réactive appelée sur le réseau ainsi que si possible de supprimer les harmoniques de courant, pour ce faire nous allons interposer entre le réseau et la charge un compensateur statique.

B) Etude du compensateur statique

L'énergie réactive appelée sur le réseau dépend du point de fonctionnement de la machine à courant continu (couple, vitesse) c'est donc à priori une grandeur essentiellement variable; l'objectif est donc de créer un système permettant d'assurer la compensation à tout instant. Un tel compensateur peut-être réalisé à l'aide d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L associés à un gradateur (Th_3 , Th_4) selon le schéma de la [Figure 3](#). Le condensateur et la bobine mettent en jeu respectivement les puissances réactives Q_C et Q_L . La puissance Q_L est modulée par la gradateur afin d'obtenir à tout instant la relation $Q = Q_C + Q_L + Q_{ch} = 0$

B.1) Le compensateur est supposé être alimenté sous une tension sinusoïdale d'expression $e = E\sqrt{2} \sin(\omega t)$ (les harmoniques de courant ainsi que l'inductance " L_R " du réseau sont négligées). Les thyristors sont commandés avec un retard à l'amorçage noté γ par rapport à l'amorçage naturel; γ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π .

B.1.1) Le thyristor Th_3 étant supposé en conduction établir l'équation différentielle qui régit le courant i_L dans la bobine.

B.1.2) Le thyristor Th_3 ayant été amorcé avec le retard γ , exprimer l'angle d'extinction en fonction de γ .

B.1.3) Quelle est la durée de conduction du thyristor Th_3 ?

B.1.4) Quelle est l'expression du courant i_L , lorsque le thyristor Th_4 est en conduction ?

B.1.5) Tracer sur le document - réponse N°2 le courant i_L pour la valeur particulière $\gamma = \frac{3\pi}{4}$.

B.1.6) Calculer la valeur efficace I_L du fondamental du courant i_L .

B.1.7) Quelle est la puissance réactive mise en jeu ?

B.2) Les harmoniques de courant ainsi que l'inductance " L_R " du réseau sont maintenant pris en compte et par conséquent la tension d'alimentation du compensateur présente des harmoniques. Les harmoniques de courant étant sources de perturbations nous allons introduire des filtres entre le réseau et le compensateur. Ces filtres seront du type L,C série. Par ailleurs l'harmonique de courant de rang "k" sera modélisé par un générateur de courant fournissant le courant j_k (Figure 4).

B.2.1) Dans quelle condition la cellule (L_k, C_k) se comporte comme un court-circuit de la source de courant j_k ?

B.2.2) Quelle relation doit exister entre L_k, C_k, k et ω , pour réaliser ce court-circuit ?

B.2.3) Montrer que si l'on réalise la relation précédente pour chacune des cellules le courant débité par la source du réseau ne présente plus d'harmoniques.

B.2.4) Quelle est l'impédance de la cellule (L_k, C_k) à la pulsation ω ? Est-elle inductive ou capacitive ?

B.2.5) Quelle puissance réactive est mise en jeu par la cellule (L_k, C_k) ?

B.2.6) Montrer que le condensateur de capacité C peut être remplacé par l'ensemble des cellules (L_k, C_k).

C) Automatisation de la compensation

Afin d'annuler en permanence la puissance réactive au niveau du réseau, on mesurera à tout moment cette énergie et on la comparera à la valeur de référence souhaitée à savoir $Q = 0$ selon le schéma de principe Figure 5.

C.1) Mesure de la puissance réactive Q appelée au réseau

La présence du filtre permet de ne considérer que les grandeurs fondamentales, l'intensité du courant du réseau a donc pour expression $j = J\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi)$, par ailleurs on continuera à négliger l'inductance " L_R " du réseau.

Le schéma de principe est donné Figure 6.

Remarque: Les blocs déphaseurs réalisent la fonction ci-après,
 $v = V\sqrt{2} \sin(\omega t) \Rightarrow \pi/2 \Rightarrow v = V\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ (Figure 7).

C.1.1) Calculer l'expression temporelle de la sortie $s(t)$ (Figure 6), le coefficient du multiplieur étant m .

C.1.2) Calculer \underline{V}_3 en fonction de \underline{V}_5 et \underline{V}_6 dans le montage Figure 8 (l'Amplificateur Linéaire Intégré est parfait).

C.1.3) On réalise le montage Figure 9 (A.L.I. parfait)

Calculer la fonction de transfert du montage en régime harmonique: $\frac{\underline{V}_3}{\underline{V}_1}$.

C.1.4) Tracer le diagramme de Bode de cette fonction de transfert sur le document réponse N°3 (la constante de temps R_0C_0 sera prise égale à l'unité).

C.1.5) Quelle relation doit-on avoir entre R_0 , C_0 et ω pour obtenir un déphasage de $\pi/2$ entre v_3 et v_1 ?

On réalise le montage complet représenté Figure 10.

C.1.6) Exprimer v_s en fonction des valeurs efficaces du réseau E et J;

on prendra $\frac{R_2}{R_1} = 50$, $k_j = \frac{1}{100}$; $k_v = \frac{1}{100}$; $m = 0,1$.

D) Commande du gradateur

Cette commande est réalisée par le circuit de la Figure 11.

La tension d'entrée a pour expression $e = E\sqrt{2} \sin(\omega t)$

V_e désigne la tension d'entrée de commande du gradateur

Par ailleurs les conditions suivantes sont réalisées:

$$\text{Si } \begin{cases} v_0 = k_v \cdot e \geq 0 & v_3 = +V_{cc} \\ v_0 = k_v \cdot e < 0 & v_3 = 0 \end{cases}$$

Les A.I.L. A2 et A4 sont polarisés $[-V_{cc}, +V_{cc}]$.

Les A.I.L. A3 et A6 sont polarisés $[0, +V_{cc}]$.

D.1) L'interrupteur K est ouvert, calculer le rapport $\frac{V_2}{V_1}$

D.2) L'interrupteur K est fermé, calculer le rapport $\frac{V_2}{V_1}$

D.3) Tracer sur le document - réponse N°4 les tensions instantanées v_0 , v_1 , v_2 , v_3 et v_4 .

Nota: a) L'interrupteur K est fermé lorsque $v_3 = 0$ et ouvert lorsque $v_3 = +V_{cc}$.

b) Le transistor T_1 fonctionne en régime linéaire; son coefficient d'amplification en courant est $\beta \rightarrow I_C = \beta I_B$; $I_E = I_C + I_B \approx I_C$; $V_{be1} = Cte = 0,6 \text{ V}$.

D.4) Donner l'expression de I_C en fonction de V_z , V_{be1} et R_2 .

D.5) Donner l'état dans lequel se trouve le transistor T_2 en fonction du signe de v_4 (la valeur de R_1 est telle que le transistor T_2 est à l'état saturé quand $v_4 = V_{cc}$; on supposera $V_{CE \text{ sat}} = 0$)

D.6) Exprimer la tension $v_5(t)$ en fonction de I_C , C et t quand le transistor T_2 est bloqué.

D.7) On désire avoir $v_{s \text{ max}} = \frac{V_{cc}}{2}$, quelle doit être la relation entre V_z , V_{be1} , R_2 , C , ω et V_{cc} pour qu'il en soit ainsi ?

D.8) Tracer v_5 sur le document-réponse N°4.

D.9) La tension d'entrée de commande du gradateur est réglée de telle sorte que $V_e = \frac{V_{cc}}{4}$, tracer, sur le document - réponse N°4, les chronogrammes des tensions $v_6(t)$, $v_7(t)$ et $v_8(t)$.

D.10) Déduire de l'étude précédente la loi d'évolution des angles de commande des thyristors Th_3 et Th_4 , lorsque V_e varie de 0 à $\frac{V_{cc}}{2}$.

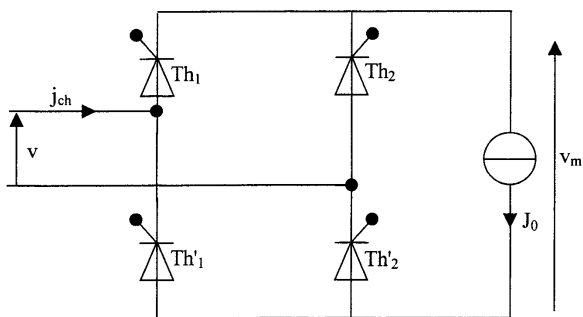


Figure 1

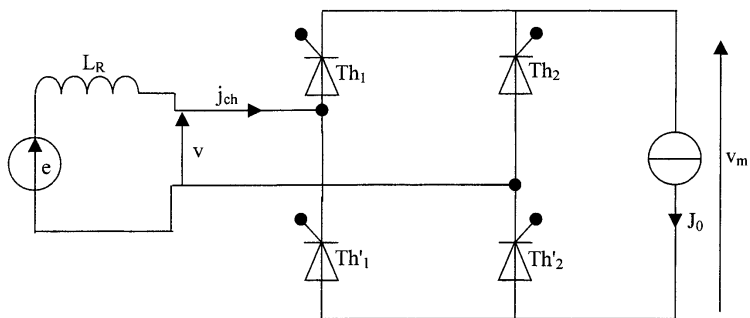


Figure 2

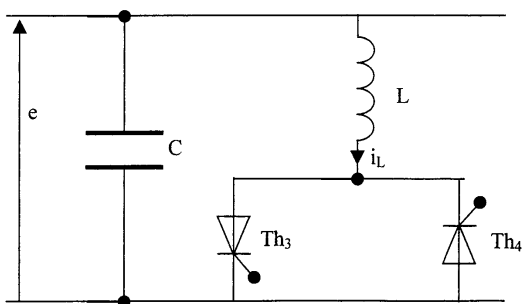


Figure 3

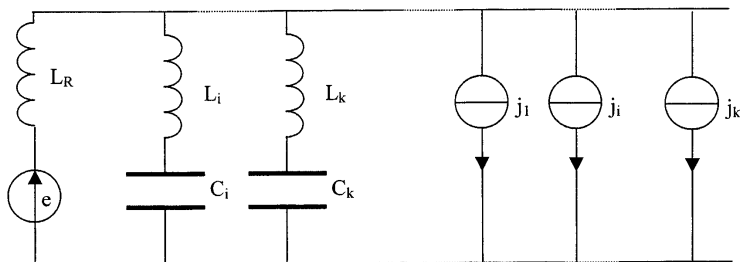


Figure 4

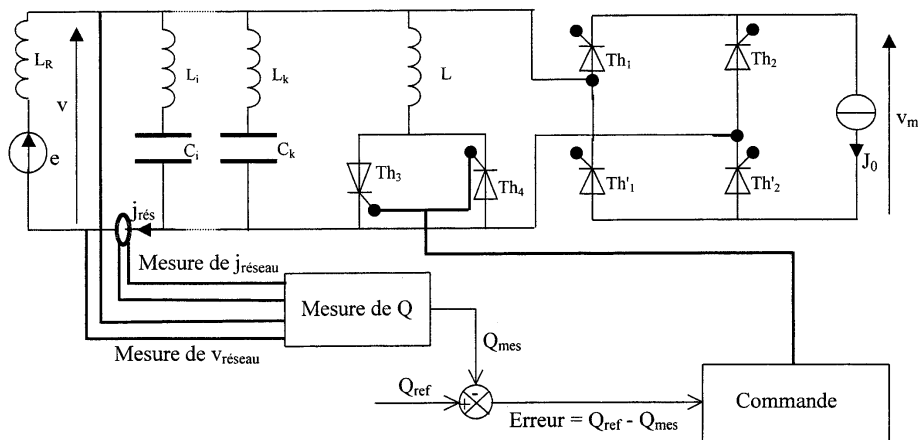


Figure 5

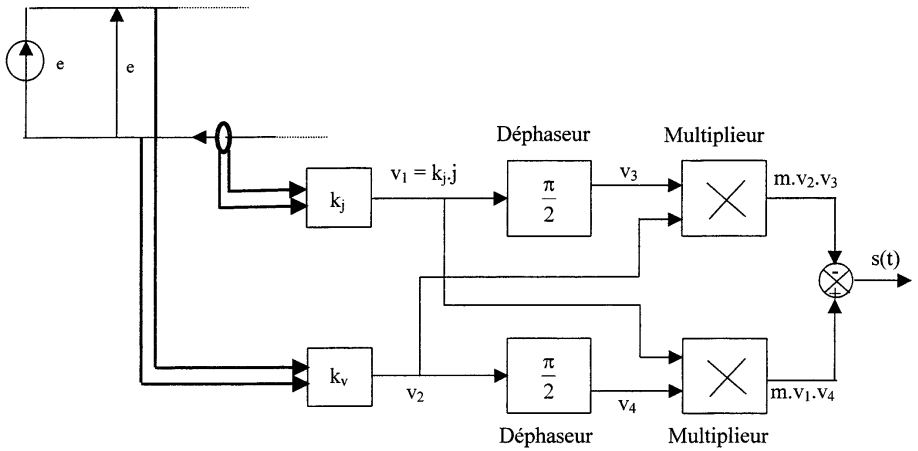


Figure 6

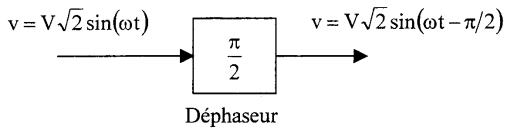


Figure 7

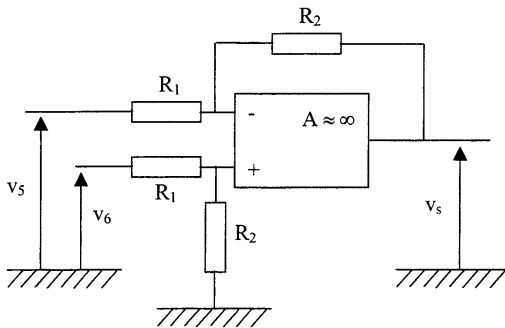


Figure 8

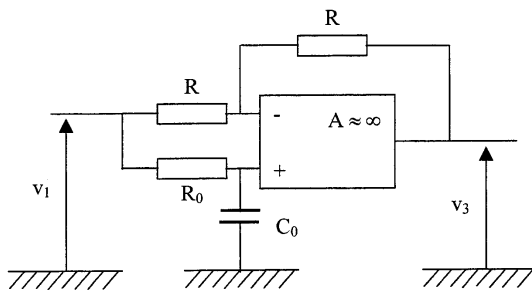


Figure 9

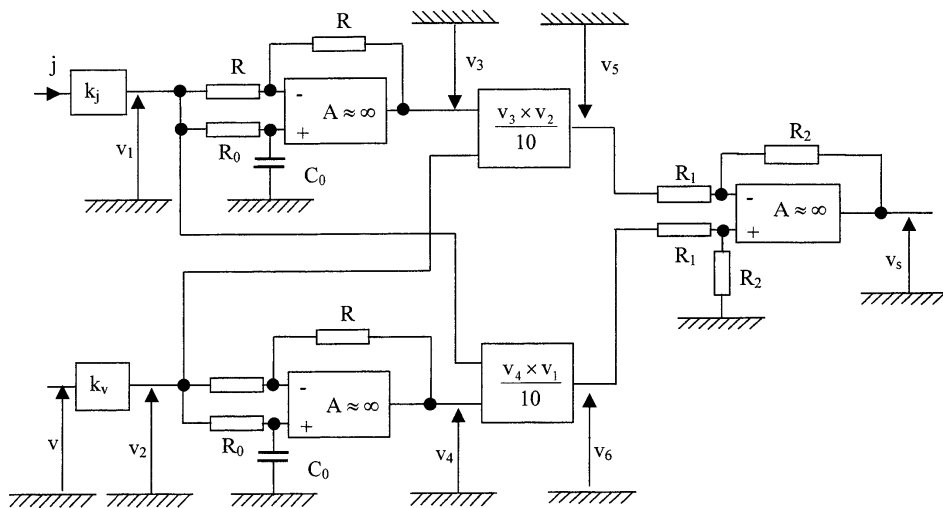


Figure 10

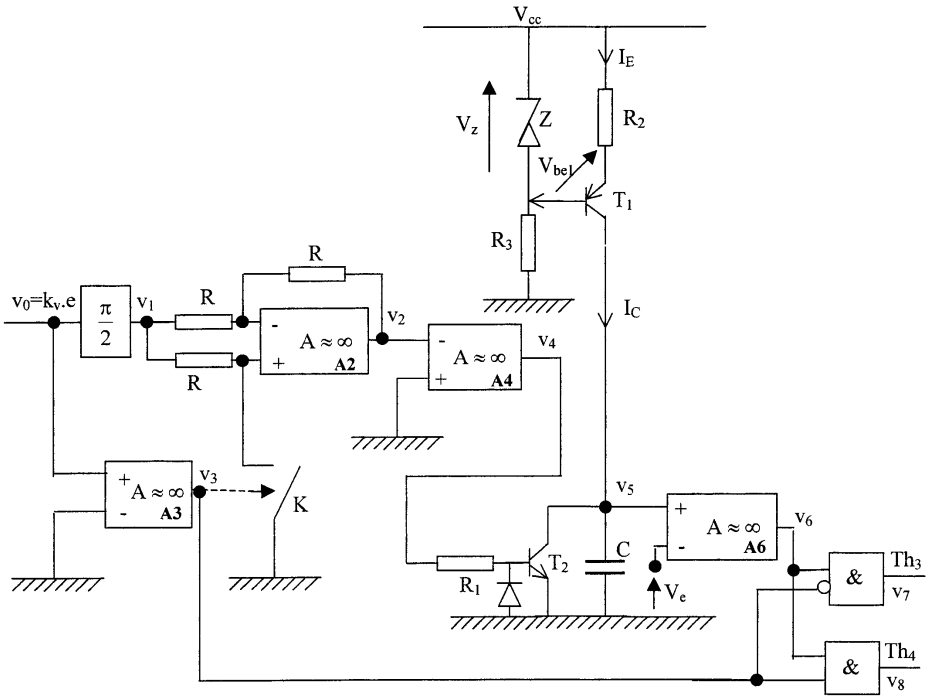


Figure 11

DEUXIEME PROBLEME

ELECTROTECHNIQUE

ETUDE D'UNE MACHINE ASYNCHRONE

Le problème est composé de trois parties qui concernent la même machine. Il s'agit d'une machine asynchrone triphasée à rotor bobiné. Sa plaque signalétique porte les indications suivantes :

$P_u = 70 \text{ kW}$ $240/416 \text{ Volts à } 50\text{Hz}$ $1425 \text{ tours/minute}$ $\cos\phi = 0,85$

A condition de justifier les hypothèses, les résultats de calculs peuvent être donnés à quelques pourcents près. Les pertes mécaniques et les pertes par effet Joule du stator sont négligées dans tout le problème.

Les enroulements sont supposés connectés en étoile et les tensions sont mesurées entre lignes.

I. SCHEMA EQUIVALENT:

Comme on le sait, il existe de nombreux schémas équivalents monophasés pour représenter la machine asynchrone fonctionnant en régime triphasé, sinusoïdal, équilibré. Dans cette partie nous adopterons celui de la figure 1.

Sur la plateforme d'essais (figure 2), la machine asynchrone est couplée mécaniquement à une machine synchrone à 2 paires de pôles reliée au réseau à travers un système de couplage. La machine asynchrone est reliée au réseau à travers le système de mesures et un autotransformateur. Elle est entraînée à la vitesse de synchronisme.

- On élève progressivement la tension aux bornes de la machine asynchrone. Lorsque la tension composée $U=10V$, le courant mesuré I est égal au courant nominal, la puissance active totale absorbée par la machine asynchrone vaut 1050 W .
- On redescend la tension à 0 et on croise deux fils aux bornes de la machine asynchrone toujours entraînée. On remonte la tension U' jusqu'à 416 V . On mesure $I'=5 \text{ A}$ et $P'=1580\text{W}$.

I.1) Expliquer en quelques lignes comment les essais précédents permettent de déterminer les éléments du schéma équivalent. Quels sont les avantages et inconvénients de la méthode ?

I.2) Calculer toutes les valeurs des éléments du schéma équivalent de la figure 1.

I.3) En s'appuyant sur le schéma équivalent, montrer que que le couple électromagnétique peut s'écrire sous la forme : $\Gamma = 3p \frac{V_s^2}{\omega_s} \frac{R_r' / g}{(N_r' \omega_s)^2 + (R_r' / g)^2}$, avec ω_s la pulsation du courant statorique et p le nombre de paires de pôles.

I.4) Montrer que l'expression du couple maximum $\hat{\Gamma}$ est indépendante de R_r' . Donner une expression simplifiée du couple en fonction du glissement quand celui-ci est faible.

II. CONTROLE DE LA VITESSE EN V_s/f_s

II.1) Connecté au réseau, sous une tension de 416 V, le moteur asynchrone entraîne un ventilateur qui impose un couple de charge $\Gamma_c = k\Omega_M^2$. La vitesse est alors de 1440 tours/mn.

Calculer le coefficient k puis la puissance active consommée par le moteur.

II.2) Dans le cas des glissements faibles, donner l'expression $\Gamma(V_s, \Omega_M, \Omega_s)$ où Ω_s est la vitesse synchrone.

Le moteur est alimenté par un onduleur qui délivre une tension U qui varie en amplitude et en fréquence. On néglige tous les harmoniques pour **ne retenir que le fondamental** de la tension dont l'amplitude varie entre 0 et 520 V en valeur efficace.

II.3) On règle l'onduleur de façon que la tension mesurée aux bornes de la machine soit de 416 V pour une fréquence de 50 Hz.

En notant V_s et f_s la valeur efficace et la fréquence du fondamental de la tension par phase, on maintient le rapport (V_s/f_s) constant.

Etablir la relation $\Omega_M(V_s)$.

Donner les valeurs de la vitesse (en rad/s et en tours/mn) pour les valeurs suivantes de V_s : 0 V, 120 V, 240 V et la valeur maximale.

II.4) La valeur de la tension délivrée par l'onduleur étant maximum on continue à augmenter la fréquence. Après avoir expliqué pourquoi il existe une limite de fonctionnement, calculer la fréquence limite que l'on ne peut dépasser ? Calculer dans ce cas la vitesse du ventilateur et la puissance utile et commenter les résultats en admettant que la puissance utile peut aller (au maximum) temporairement jusqu'à 1.5 fois la puissance nominale.

III. FONCTIONNEMENT AVEC UN RESEAU MONOPHASE

Dans cette partie on étudie les cas où la machine est alimentée par un réseau monophasé, soit à la suite d'un incident (phase déconnectée, tension plus faible sur une phase), soit par choix avec une adjonction d'impédance de démarrage.

Le réseau délivre une tension de 416 V de fréquence 50 Hz.

➤ On néglige la résistance R_f dans toute cette partie.

III.1) Montrer que dans le cas d'une alimentation triphasée équilibrée, la relation donnant le couple électromagnétique peut s'écrire sous la forme $\Gamma = 3p \frac{|\bar{V}_s|^2}{\omega_s} \Re[\bar{Y}(g)]$ avec

$\bar{Y}(g) = \alpha(g) - j\beta(g)$ l'admittance complexe du schéma monophasé dont on explicitera les parties réelles et imaginaires.

Un système déséquilibré de tensions se décompose en un système direct, un système inverse et un système homopolaire qui ne participe pas à la conversion électromécanique (Annexe 1).

A condition de se contenter de valeurs moyennes pour le couple et de prendre des hypothèses permettant la superposition des grandeurs électromagnétiques, on peut admettre qu'une machine asynchrone alimentée en régime déséquilibré de tension peut être assimilée à deux machines, que l'on nommera Md et Mi , qui lui sont identiques, couplées mécaniquement entre elles et avec la

charge. La première est alimentée par un système direct de tensions et la seconde par un système inverse de tensions.

III.2) L'une des deux machines, M_d ou M_i , fonctionne évidemment en moteur. Quel est le mode de fonctionnement de l'autre ? Le glissement de l'une étant g , quel est le glissement de l'autre ? Dessiner les deux schémas équivalents de M_d et M_i .

III.3) Voulant assurer le démarrage de la machine connectée à un réseau monophasé, on insère une impédance complexe $\bar{z} = a + jb$. La figure 3 comporte l'ensemble des éléments nécessaires pour la

suite des calculs. On pose $\bar{V}_d = \frac{\bar{I}_d}{\bar{V}_d}$ et $\bar{V}_i = \frac{\bar{I}_i}{\bar{V}_i}$ les réactances directe et inverse.

III.3.1) Calculer \bar{V}_d et \bar{V}_i en fonction de U , \bar{Y}_d , \bar{Y}_i et \bar{z} avec U comme origine des phases.

III.3.2) Justifier que pour la machine à l'arrêt $\bar{Y}_d = \bar{Y}_i = \bar{Y} = \alpha - j\beta$

III.3.3) Montrer que le couple de démarrage peut s'écrire sous la forme :

$$\Gamma_{\text{dem}} = 3 \frac{P\alpha}{\omega} [\bar{V}_d \bar{V}_d^* - \bar{V}_i \bar{V}_i^*]. \text{ avec } \bar{V}^* \text{ le complexe conjugué de } \bar{V}.$$

III.3.4) Montrer que pour \bar{z} nul et pour \bar{z} très grand le démarrage n'est pas possible.

III.3.5) Montrer que la machine démarre si l'impédance \bar{z} est telle que : $(a\beta - b\alpha) \neq 0$.

Pour cela on pourra écrire les tensions complexes directe et inverse sous la forme

$$\bar{V}_d = \frac{U}{D} \bar{N}_d \text{ et } \bar{V}_i = \frac{U}{D} \bar{N}_i.$$

On peut ainsi prendre comme impédance de démarrage une résistance, une inductance ou un condensateur. C'est ce dernier qui est choisi habituellement, peut-on justifier ce choix ?

III.3.6) On choisit le condensateur qui assure le couple de démarrage maximum. Trouver $C(\omega, \alpha, \beta)$.

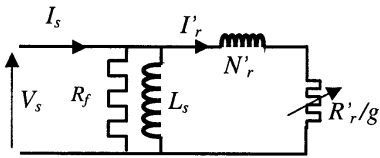


Figure 1

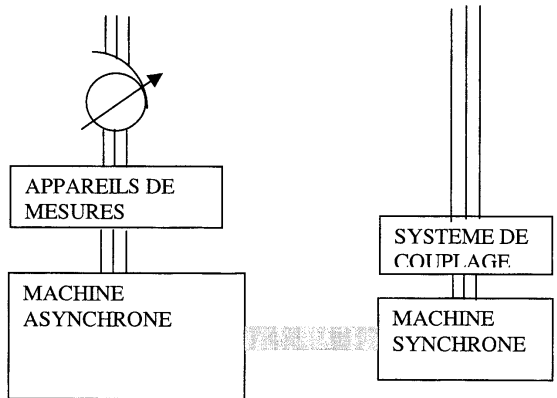


Figure 2

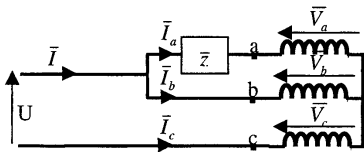


Figure 3

En appelant 1, a et a² les racines cubiques complexes de 1, la transformation de Fortescue permet le passage d'un système $[\bar{G}_a \ \bar{G}_b \ \bar{G}_c]^t$ déséquilibré de grandeurs triphasées à 3 systèmes équilibrés appelés : direct $[\bar{G}_d \ a^2\bar{G}_d \ a\bar{G}_d]^t$, inverse $[\bar{G}_i \ a\bar{G}_i \ a^2\bar{G}_i]^t$ et homopolaire $[\bar{G}_0 \ \bar{G}_0 \ \bar{G}_0]^t$

On a

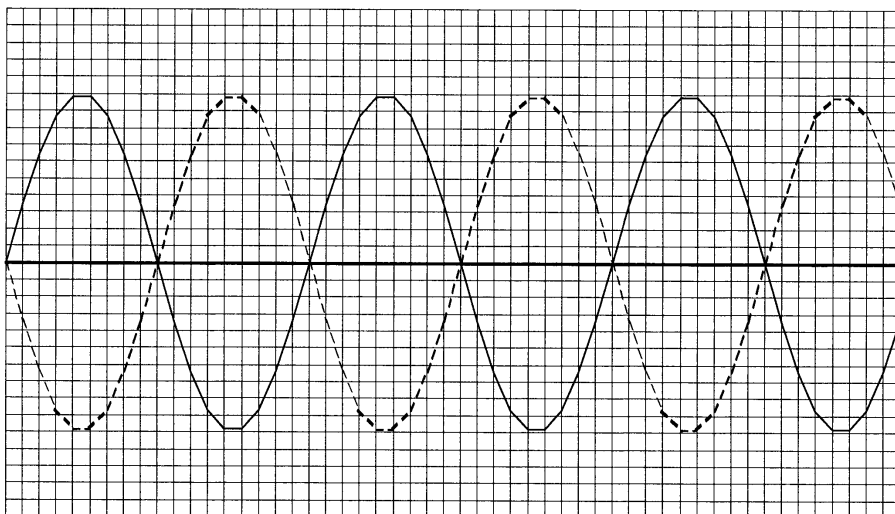
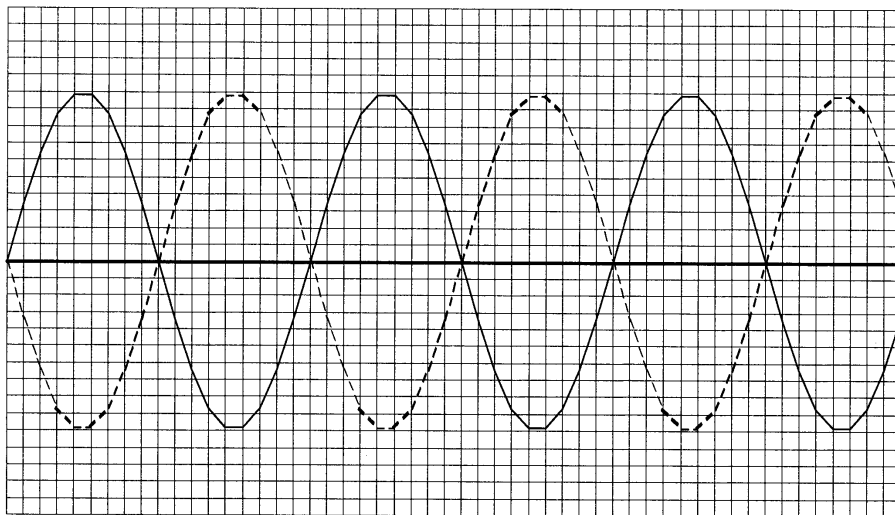
$$\begin{bmatrix} \bar{G}_a \\ \bar{G}_b \\ \bar{G}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{G}_0 \\ \bar{G}_d \\ \bar{G}_i \end{bmatrix} \text{ ou } [G_{abc}] = [F][G_{0di}]$$

et

$$\begin{bmatrix} \bar{G}_0 \\ \bar{G}_d \\ \bar{G}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{G}_a \\ \bar{G}_b \\ \bar{G}_c \end{bmatrix} \text{ ou } [G_{0di}] = [F]^{-1}[G_{abc}] = \frac{1}{3}[F]^*[G_{abc}]$$

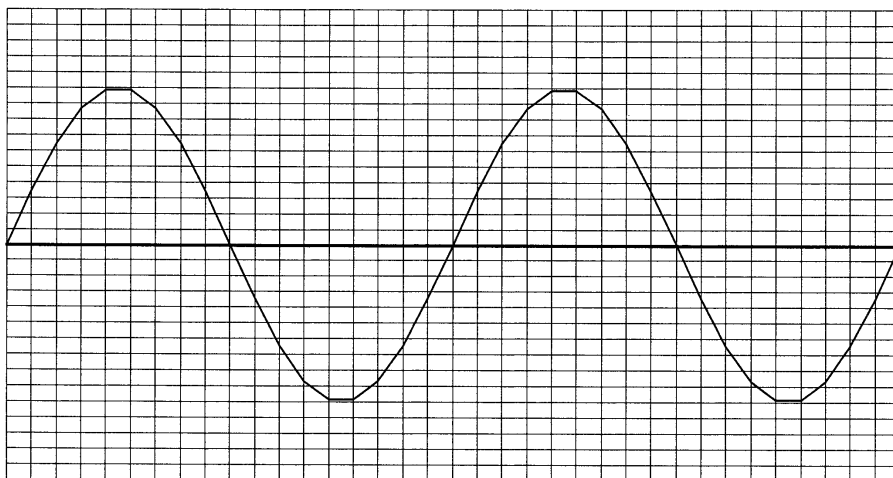
ANNEXE 1

$$a - a^2 = j\sqrt{3} \quad a^2 - 1 = j\sqrt{3}a \quad a - 1 = -j\sqrt{3}a^2$$

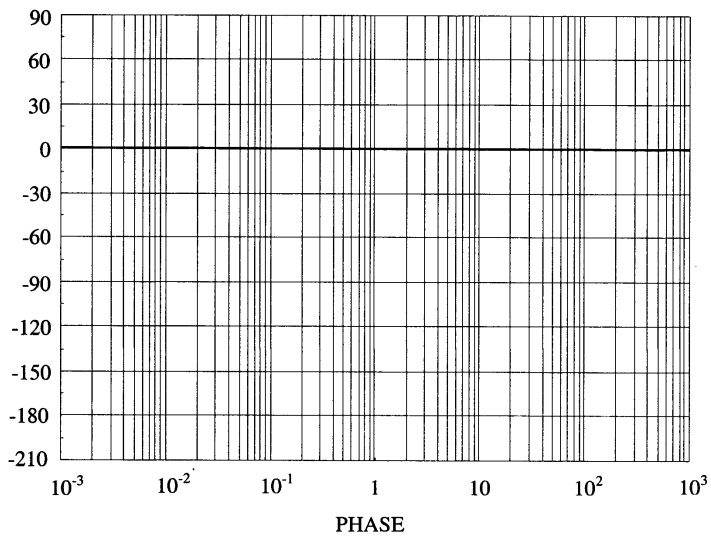
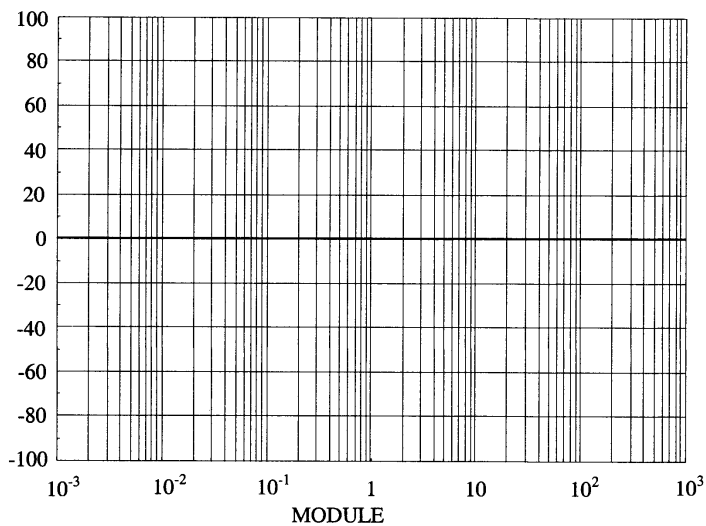


Document-réponse N°1

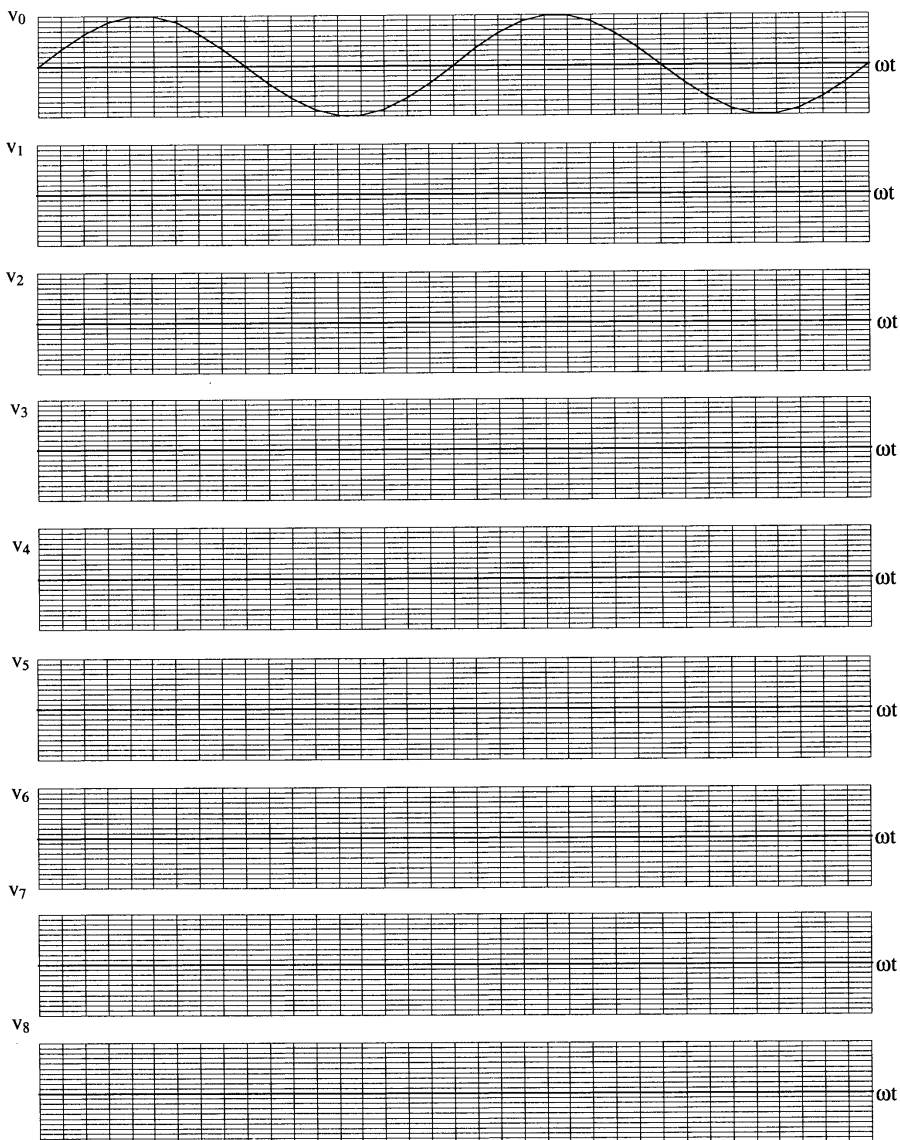
1266-Ca



Document-réponse N°2



Document-réponse N°3



Document-réponse N°4

1331

48621

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours externe
de recrutement de professeurs certifiés
et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)**

section : physique et chimie

composition de physique avec applications

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est interdit.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numération complète (chiffres et lettres) des questions de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant la raison des initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

L'indication de l'unité employée devra être précisée pour chacun des résultats numériques.

Les réponses aux questions qualitatives devront être justifiées. Les applications numériques et la discussion de la pertinence des résultats seront prises en compte.

Données numériques générales

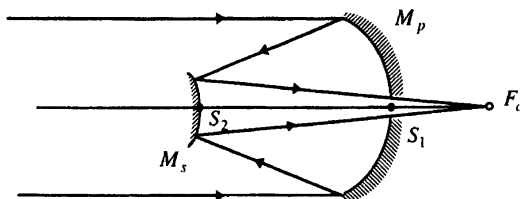
- Constante de la gravitation : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
 Masse de la Terre : $M_T = 5,976 \times 10^{24} \text{ kg}$
 Rayon équatorial de la Terre : $R_T = 6398 \text{ km}$
 Masse molaire atomique de l'hydrogène : $M_H = 1 \text{ g.mol}^{-1}$
 Masse molaire atomique de l'oxygène : $M_O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$
 Constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
 Constante de Boltzmann : $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
 Pouvoir séparateur de l'œil : $\alpha_{\text{im}} = 3 \times 10^{-4} \text{ rad}$

A. Interférométrie stellaire optique

Imaginée dès 1868 par Fizeau, qui en établit la théorie, l'interférométrie stellaire dans le domaine optique ne parvint à maturité qu'un siècle plus tard. Les premières tentatives expérimentales, dues à Fizeau et Stéphan, disposant d'un télescope d'un mètre de diamètre, et visant des étoiles parmi les plus lumineuses, se soldèrent par un échec. Dès 1890, Michelson parvient à valider la méthode en retrouvant les dimensions des satellites de Jupiter. Ce n'est qu'en 1920 que Michelson et Pease réussissent, pour la première fois, à l'aide du télescope de 2,5 mètres de diamètre du mont Wilson, à déterminer le diamètre angulaire d'une étoile (Bételgeuse dans la constellation d'Orion). Cette étoile est une géante rouge dont ils évaluent le diamètre à 400 fois celui du Soleil. L'idée d'utiliser deux télescopes pour faire ensuite interférer les deux faisceaux qui en sont issus a longtemps été considérée comme irréalisable dans le domaine optique ; opérationnelle dans le domaine des ondes radio dès la fin de la Seconde Guerre mondiale, elle n'est passée au domaine optique que sous l'impulsion d'Antoine Labeyrie en 1970, qui obtient les premiers résultats en 1974. Toutefois, cette technique, désormais opérationnelle, a l'inconvénient de délivrer une information monodimensionnelle (écart angulaire) et est sérieusement concurrencée par l'optique adaptative, qui fournit une information bidimensionnelle (images). Depuis 1996 (étoile double Capella), l'utilisation de 3 télescopes ouvre à l'interférométrie optique l'accès à la synthèse d'images bidimensionnelles.

A.1. Optique géométrique

L'objectif d'un télescope est constitué d'un miroir primaire sphérique M_p , concave, dont le rayon de courbure sur l'axe optique est de 30 m, et un petit miroir sphérique secondaire M_s , convexe, de rayon de courbure 32 m. La distance entre les sommets S_1 et S_2 des deux miroirs est 9 m.



A.I.1. Dans la suite, on assimile le télescope à une lentille mince convergente L_1 , de centre O et de distance focale image $f_1' = 24$ m et de diamètre d'ouverture $D = 3,5$ m.

A.I.1.a) Citer les inconvénients d'une telle lentille mince par rapport au système original.

A.I.1.b) Quelles sont les raisons qui amènent à construire des télescopes de grand diamètre ?

A.I.2. Afin de permettre une observation visuelle, on associe à la lentille L_1 un oculaire que l'on peut schématiser par une lentille mince convergente L_2 de même axe optique et de distance focale image $f_2' = 2,5$ cm. Le centre optique O_2 de L_2 est placé de telle sorte que le système soit afocal (image à l'infini d'un objet à l'infini).

A.I.2.a) Quel est l'intérêt de ce réglage ?

A.I.2.b) Quelle est alors la distance entre les centres optiques des deux lentilles ?

A.I.2.c) Faire, sans respecter l'échelle, un schéma représentant la position relative des deux lentilles. Tracer la marche d'un faisceau incident parallèle, incliné d'un angle α par rapport à l'axe optique, et limité par la monture de la lentille L_1 .

A.I.3. On observe à travers le système l'étoile double Sirius, dont les deux composantes sont écartées d'un angle $\varepsilon \approx 3,8 \times 10^{-5}$ rad.

A.I.3.a) Les deux composantes de Sirius sont-elles séparées à l'œil nu ?

A.I.3.b) Devraient-elles être séparées par observation visuelle à travers le système ? Commenter.

A.II. Limitation due à la diffraction

Oz désigne l'axe optique de la lentille L_1 . On accole un diaphragme D devant la lentille L_1 équivalente au télescope et on observe la répartition de l'éclairement dans son plan focal image $FX Y$, d'équation $z = f_1'$, au voisinage du foyer principal image F' .

A.II.1. Pour un diaphragme rectangulaire de côtés parallèles aux axes Ox et Oy , et de dimensions respectives a et b parallèlement à ces axes, on montre que, lorsque l'onde incidente est une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ , se propageant selon l'axe optique de L_1 , l'intensité lumineuse au point $P(X, Y)$ du plan focal image est de la forme

$$I(X, Y) = I_0 \sin_c^2 \left(\frac{\pi a X}{\lambda f_1'} \right) \sin_c^2 \left(\frac{\pi b Y}{\lambda f_1'} \right)$$

où l'on a introduit la fonction *sinus cardinal* définie par

$$\sin_c(x) = \frac{\sin x}{x}$$

A.II.1.a) Sans calcul préalable, représenter sur un schéma l'allure de la figure de diffraction lorsque le diaphragme est carré.

A.II.1.b) Donner l'inclinaison θ par rapport à l'axe optique d'un rayon qui parvient au point P de coordonnées $(X, 0)$ dans le plan focal image de la lentille. Donner l'expression de $I(\theta)$ pour le point $P(X, 0)$.

A.II.1.c) Tracer la courbe représentative de $I(\theta)$. On appelle demi-largeur angulaire de la tache centrale de diffraction la distance angulaire entre le centre de la figure de diffraction et le premier minimum de I . Déterminer la demi-largeur angulaire $\Delta\theta$ dans la direction $F'X$ en fonction de a et λ .

A.II.2. Que devient la figure de diffraction dans le cas où $b \gg a$ et $b \gg \lambda$?

A.II.3. Comment est modifiée la figure de diffraction si l'onde incidente est inclinée par rapport à l'axe optique ? On envisagera une direction de propagation de vecteur unitaire

$$\vec{u}_0 = \varepsilon \vec{e}_x + \vec{e}_z \text{ avec } \varepsilon \ll 1.$$

A.II.4. On remplace le diaphragme carré par un diaphragme circulaire de rayon R .

A.II.4.a) Donner sur un schéma l'aspect de la figure de diffraction observée dans le plan $F'XY$. On n'effectuera aucun calcul et on se contentera d'exploiter les propriétés de symétrie.

A.II.4.b) On montre que la largeur angulaire de la tache centrale se déduit de celle qui a été obtenue pour le diaphragme carré en effectuant le changement

$$a \rightarrow \frac{R}{0,61}.$$

Que devient la largeur angulaire de la tache centrale de diffraction ?

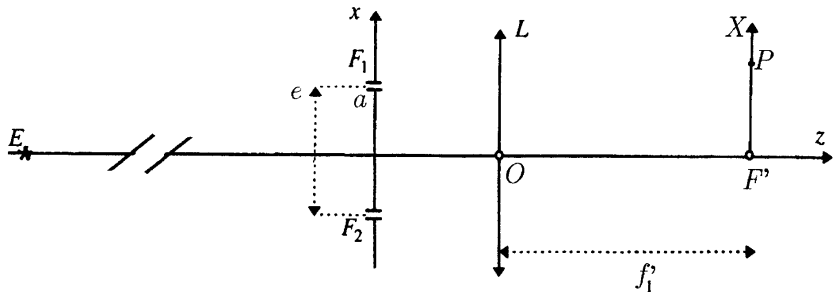
A.II.5. Le critère de Rayleigh indique que la limite de résolution d'un système optique est l'écart angulaire de deux objets mutuellement incohérents donnant des taches centrales de diffraction décalées de telle sorte que le maximum de l'une soit située sur le premier minimum nul de l'autre.

A.II.5.a) Le diaphragme étant la monture (circulaire) de la lentille équivalente de diamètre D , quelle est la limite de résolution du télescope pour une longueur d'onde λ ?

A.II.5.b) La résolution des composantes de Sirius est-elle remise en cause par la diffraction pour $\lambda = 635 \text{ nm}$?

A.III. Fentes de Young : méthode de Fizeau

Le diaphragme pupillaire est percé de deux fentes F_1 et F_2 (fentes de Young) de largeur a et de longueur b , et distantes de e .



A.III.1. a) Tracer la marche des rayons lumineux issus de l'étoile située sur l'axe de la lentille, qui interfèrent en P et mettre en évidence, en la justifiant, la différence de marche sur le schéma.

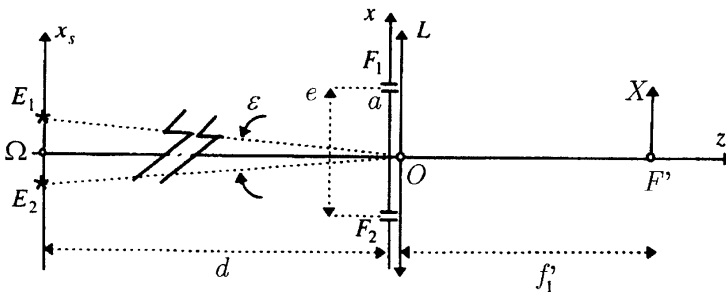
A.III.1.b) L'éclairement $I(X,0)$ dans le plan focal image de la lentille, peut se mettre, pour $Y = 0$, sous la forme

$$I(X,0) = I_0 \sin_c^2 \left(\frac{\pi a X}{\lambda f'_1} \right) (1 + \cos \phi)$$

Exprimer ϕ en fonction de X et des données.

A.III.1.c) Que deviennent ϕ et $I(X,Y)$ pour $Y \neq 0$?

A.III.2. On pointe, avec le dispositif précédent, le centre Ω d'une étoile double symétrique ; cette étoile est constituée de deux sources primaires incohérentes E_1 et E_2 , de contributions égales en intensité : $I_{s1} = I_{s2} = I_s$. On oriente la direction définie par les fentes de telle sorte que $F_1 F_2$ passant par O soit parallèle à $E_1 E_2$. La largeur a de chacune des fentes est négligeable devant la distance e qui les sépare. On désigne par d la distance ΩO , x_{s1} la position de E_1 selon un axe Ωx_s parallèle à l'axe pupillaire Ox et x_{s2} la position analogue de E_2 . On a ici : $x_{s2} = -x_{s1}$.



A.III.2.a) Justifier par un schéma commenté que la différence de phase entre les deux voies en amont des fentes est, pour l'étoile E_1 :

$$\phi_1 = \frac{\pi e \varepsilon}{\lambda}$$

En déduire l'expression de l'éclairement I_1 en $P(X, 0, f'_1)$ dû à l'étoile E_1 .

A.III.2.b) Donner sans calcul l'expression de l'éclairement I_2 en P dû à l'étoile E_2 .

Quelles sont, en fonction de I_s, λ, e, X, f'_1 , et ε , les contributions de E_1 et E_2 à l'éclairement total au point P ?

A.III.2.c) Montrer que la répartition de l'éclairement devient uniforme pour certaines valeurs de la distance e . Soit e_1 la plus petite de ces valeurs ; montrer que sa détermination permet d'accéder à la distance angulaire ε qui sépare E_1 et E_2 .

A.III.2.d) Dans le cas de Capella, supposée symétrique dans le visible, pour $\lambda = 635 \text{ nm}$, on a trouvé $e_1 = 116,5 \text{ cm}$. En déduire ε en seconde d'arc.

B Satellites artificiels

B.I. Orbites circulaires

B.I.1. Définir le référentiel géocentrique. Indiquer l'intérêt de ce référentiel pour étudier le mouvement d'un satellite terrestre.

B.I.2.a) Dans l'approximation d'une répartition des masses à symétrie sphérique, donner l'expression du module du champ gravitationnel terrestre $g(r)$ à une distance r ($r > R_T$) du centre C de la Terre. On posera $g_0 = g(R_T)$.

B.I.2.b) Exprimer en fonction de g_0 , r et R_T la vitesse $v(r)$, évaluée dans le référentiel géocentrique, d'un satellite terrestre en orbite circulaire de rayon r .

B.I.2.c) En déduire la période $T(r)$ du mouvement du satellite.

B.I.2.d) Comparer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de gravitation d'un satellite en orbite circulaire.

B.I.3. On désigne par orbite basse une orbite dont l'altitude est faible devant le rayon terrestre. Evaluer numériquement la période et la vitesse d'un satellite décrivant une telle orbite. Que peut-on penser de la durée de vie d'un tel satellite ?

B.I.4.a) Qu'appelle-t-on satellite géostationnaire ?

B.I.4.b) Dans quel domaine(s) d'application les satellites géostationnaires sont-ils particulièrement utiles ?

B.I.4.c) Déterminer le plan de l'orbite et calculer le rayon r_G de l'orbite d'un satellite géostationnaire.

B.I.4.d) Peut-on lancer un satellite géostationnaire de telle sorte qu'il reste à la verticale de Paris ?

B.I.4.e) Que peut-on répondre à un élève qui affirme :

- la période de révolution d'un satellite géostationnaire est nulle parce qu'il est immobile ;
- la période de révolution d'un satellite géostationnaire est infinie parce qu'il est immobile ;
- la période de révolution d'un satellite géostationnaire est égale à 1 jour, soit $24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$;
- j'ai lu dans un site Internet que la période de révolution d'un satellite géostationnaire vaut 86164 s , mais je ne comprends pas pourquoi.

B.II. Problème du transfert

On admettra que l'énergie mécanique d'un satellite en orbite elliptique est de la forme

$E = -\frac{K}{a}$, où a est le demi-grand axe de l'ellipse trajectoire et K une constante dépendant de la masse de la Terre, de la masse du satellite et de G .

B.II.1. En identifiant cette expression avec celle de l'énergie d'un satellite en orbite circulaire, déterminer K .

B.II.2. On désire faire passer un satellite d'une orbite circulaire basse ($r \approx R_T$) dans le plan équatorial de la Terre à une orbite géostationnaire. Pour cela, on communique une brusque variation de vitesse

$\Delta\vec{v}_B$ du satellite en un point B de l'orbite basse, afin que le satellite se trouve sur une orbite elliptique (orbite de transfert de Hohmann) tangente en B à l'orbite basse et tangente en un point H à l'orbite géostationnaire.

B.II.2.a) Faire un schéma soigné sur lequel on placera le centre C de la Terre, les trajectoires circulaires basse et géostationnaire et l'orbite de transfert.

B.II.2.b) Déterminer le demi-grand axe a de l'orbite de transfert.

B.II.2.c) Déterminer la variation de vitesse $\Delta\vec{v}_B$ (norme et direction) convenable.

B.II.2.d) Lorsque le satellite parvient au point H , on lui communique une nouvelle brusque variation de vitesse $\Delta\vec{v}_H$ afin qu'il passe de l'orbite de transfert à l'orbite géostationnaire. Déterminer la variation de vitesse $\Delta\vec{v}_H$ (norme et direction) convenable.

B.II.3. Les variations de vitesse Δv_B et Δv_H sont obtenues par la mise en action d'un moteur qui éjecte des produits de combustion avec une vitesse relative d'éjection u et un débit massique D (voir question C.II.1.). Si m_B et m_H sont respectivement la masse du satellite en orbite basse, et sur l'orbite de transfert, on montre que

$$\Delta v_B = u \ln \frac{m_B}{m_H} ; \Delta v_H = u \ln \frac{m_H}{m_G}$$

Déterminer le rapport m_G / m_B .

Application numérique : $m_G = 1000$ kg ; $u = 3000$ m/s. Quelle masse m_B faut-il satelliser en orbite basse ?

B.II.4. En pratique, l'orbite elliptique de transfert fait passer d'une orbite circulaire d'altitude 200 km à l'orbite géostationnaire. Pourquoi ne choisit-on pas une orbite circulaire basse d'altitude inférieure ?

B.III. Frottements

B.III.1.a) Pour un satellite en orbite basse elliptique, justifier que c'est au voisinage du périégée que les frottements sont les plus intenses.

B.III.1.b) On modélise les effets des frottements par une diminution de vitesse au passage au périégée. Montrer qualitativement que ce modèle conduit à une circularisation progressive de la trajectoire elliptique.

B.III.2.a) Pour un satellite en orbite quasi-circulaire, montrer par un bilan énergétique que les frottements aérodynamiques ont pour effet paradoxal d'accroître la vitesse.

B.III.2.b) N'y a-t-il pas contradiction entre ce résultat et celui de la question B.III.1.b ? Commenter.

C. Propulsion par réaction

C.I. Préambule

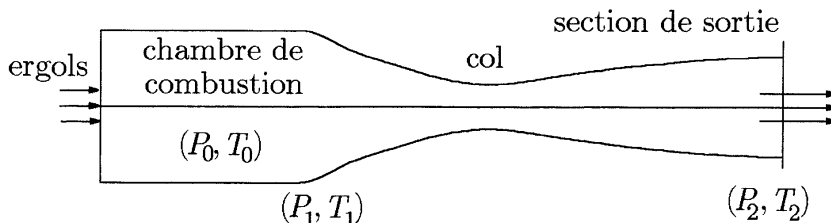
C.I.1. On réalise l'expérience suivante : on gonfle un ballon de baudruche, puis on le lâche. Expliquer l'origine du mouvement du ballon et le caractère désordonné de sa trajectoire.

C.I.2. On réalise une minifusée de la façon suivante : on prend une bouteille de plastique vide et on remplace le bouchon par un joint torique ; on introduit un gonfleur pour augmenter la pression de l'air à l'intérieur de la bouteille. Lorsque la pression dépasse 5 bars, la bouteille décolle. Expliquer pourquoi la fusée monte beaucoup plus haut lorsqu'elle contient partiellement de l'eau.

C.II. Etude du mouvement d'une fusée : ordres de grandeur

C.II.1. Une fusée de masse $m(t)$ éjecte avec un débit massique D supposé constant des gaz brûlés, avec une vitesse \bar{u} par rapport au référentiel de la fusée. En faisant un bilan de quantité de mouvement pour le système mécanique constitué par la fusée à l'instant t , montrer que l'éjection des gaz se traduit par une force de poussée $\vec{F} = -D\bar{u}$. Déterminer u pour un moteur cryotechnique hydrogène liquide-oxygène liquide de poussée 63 kN consommant 11,9 tonnes d'ergol en 780 s.

C.II.2. On se propose de déterminer l'ordre de grandeur de u en faisant une étude sommaire du moteur. On peut le considérer comme constitué d'une chambre de combustion suivie d'une tuyère (voir schéma).



C.II.2.a) On supposera que les turbo-pompes amènent l'oxygène et l'hydrogène dans la chambre de combustion à l'état gazeux et à une température de l'ordre de 298 K, dans les proportions stoechiométriques. Tous les constituants gazeux seront considérés comme parfaits et la combustion isobare et adiabatique. Déterminer la température de flamme dans ces conditions.

On donne

- l'enthalpie molaire de formation de l'eau à l'état vapeur à 298 K :

$$\Delta_{\text{formation}} H^0 = -246,1 \text{ kJ/mol}$$

- la capacité thermique molaire à pression constante de l'eau à l'état vapeur :

$$C_p = 30,54 + 10,29 \times 10^{-3} T \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}; (T \text{ en K})$$

En réalité, l'hydrogène est injecté en excès ; quelles en seront les principales conséquences ?

C.II.2.b) Les gaz brûlés sortant de la chambre de combustion sont évacués par une tuyère dans laquelle ils n'échangent aucun travail autre que celui des forces de pression, ni énergie thermique avec le milieu extérieur. On suppose l'écoulement permanent et unidimensionnel. Montrer qu'entre l'entrée et la sortie de la tuyère, une mole de gaz brûlé vérifie la relation

$$h_1 + \frac{1}{2} M u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} M u_2^2$$

où h est l'enthalpie molaire, M la masse molaire et u la vitesse moyenne.

C.II.2.c) Justifier que l'écoulement peut être considéré comme isentropique.

En négligeant u_1 , calculer u_2 en fonction de T_1, P_1, P_2, γ ($\gamma = C_p/C_v$), M .

A.N. : $T_1 = 3500 \text{ K}$, $M = 12 \text{ g/mol}$; $\gamma_{\text{moyen}} = 1,2$; $P_1 = 35 \text{ bar}$; $P_2 = 50 \text{ hPa}$.

C.II.2.d) Pour l'étage principal de ARIANE 5, la documentation technique du moteur VULCAIN indique les caractéristiques suivantes :

- masse d'oxygène liquide : LOX (125 tonnes) ;
- masse d'hydrogène liquide : LH2(25 tonnes) ;
- poussée 850 kN au décollage, 1150 kN en croisière, durée de fonctionnement 10 min.

Vérifier si ces indications sont en concordance avec le modèle simple utilisé.

Justifier la différence entre la poussée au décollage et la poussée en croisière.

Pourquoi la documentation technique indique-t-elle une masse molaire moyenne de 12 g/mol ?

C.III. Nécessité d'une fusée à plusieurs étages

Dans les questions suivantes, l'étude du mouvement de la fusée sera faite dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

La mission d'un lanceur de satellite géostationnaire est d'amener le satellite à avoir une vitesse d'environ 10,5 km/s à un périgée situé à une altitude de 200 km.

C.III.1. En négligeant les frottements de l'air et en supposant le vol horizontal, montrer que la vitesse de la fusée augmente d'une quantité ΔV appelée " ΔV propulsif " telle que

$$\Delta \vec{V} = -\ln(M_i / M_f) \vec{u}$$

avec :

\vec{u} vitesse d'éjection des gaz supposée constante

M_i masse initiale de la fusée

M_f masse finale de la fusée qui comprend

- la masse du satellite (masse utile)
- la masse " sèche " de la fusée, c'est-à-dire la masse de la fusée vide d'ergols, la masse des ergols et fluides résiduels.

Déterminer la distance parcourue par la fusée pendant la combustion des ergols.

On rappelle que

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

C.III.2. Montrer que la mission ne peut pas être assurée par une fusée à un seul étage ayant les caractéristiques du premier étage d'ARIANE 4 : masse d'ergols 229 tonnes, durée de fonctionnement 210 s, poussée 2700 kN, masse sèche 18 tonnes, masse utile 1 tonne.

Justifier qualitativement la nécessité d'une fusée à plusieurs étages, sachant que la satellisation nécessite une variation de vitesse de 8000 m/s.

1332

48622

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours externe
de recrutement de professeurs certifiés
et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)**

section : physique et chimie

composition de chimie avec applications

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence et de tout document est interdit.

Les candidats doivent indiquer sur leur copie, devant leurs réponses, la numération complète (chiffres et lettres) des questions de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant la raison des initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Pour les calculs numériques demandés, on se limitera aux trois premiers chiffres significatifs. L'indication de l'unité employée devra être précisée pour chacun des résultats numériques.

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Le problème, constitué de 6 parties indépendantes, traite de l'**OXYDOREDUCTION**.

Données numériques :

Constantes de formation de complexes :

entre 1 Fe^{3+} et 1 SO_4^{2-} $\log\beta_1=4,15$; 1 Fe^{3+} et 2 SO_4^{2-} $\log\beta_2=5,45$; 1 Fe^{2+} et 1 SO_4^{2-} $\log\beta_3=2,3$.

H_2SO_4 première acidité forte; seconde acidité $\text{pK}_a = 1,94$.

Potentiels standard à 25°C:

$E^\circ(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) = 0,77 \text{ V}$; $E^\circ(\text{Co}^{3+}/\text{Co}^{2+}) = 1,84 \text{ V}$; $E^\circ(\text{I}_{2(aq)}/\text{I}^-) = 0,54 \text{ V}$; $E^\circ(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = -0,44 \text{ V}$.

$E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+) = 0,15 \text{ V}$; $E^\circ(\text{Cu}^+/\text{Cu}) = 0,51 \text{ V}$; $E^\circ(\text{S}_2\text{O}_8^{2-}/\text{SO}_4^{2-}) = 2,01 \text{ V}$.

$E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = 0,08 \text{ V}$; $E^\circ(\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}) = 1,44 \text{ V}$; $E^\circ(\text{Cl}_{2(g)}/\text{Cl}^-) = 1,36 \text{ V}$; $E^\circ(\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$.

Electrode au calomel saturé : $E_{\text{ref}} = 0,25 \text{ V}$.

Numéros atomiques : Fe : 26 ; Co : 27 ; Cr : 24 ; Zn : 30 ; Al : 13 ; B : 5 .

Constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

Constante de Faraday $\mathcal{F} = 9,65 \times 10^4 \text{ C.mol}^{-1}$.

On pourra prendre $(RT/\mathcal{F}) \text{Ln}10 = 0,06 \text{ V}$.

données à 298K	O_2	$\text{Cu}_{(s)}$	$\text{Cu}_2\text{O}_{(s)}$	$\text{CuO}_{(s)}$	H^+	OH^-	Cl^-	$\text{Cl}_{2(g)}$	$\text{H}_2\text{O}_{(l)}$	$\text{H}_2_{(g)}$
Enthalpie standard de formation : $\Delta_f H^\circ (\text{kJ.mol}^{-1})$	0	0	-168,6	-157,3	0	-230	-167,2	0	-285,2	0
Entropie molaire standard : $S^\circ (\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1})$	205	33,2	93,1	42,6	0	-10,8	56,5	223	69,9	130,6

masse molaire atomique	H	O	Cl	Na
g.mol^{-1}	1,0	16,0	35,5	23,0

nombre d'onde d'absorption IR pour quelques liaisons :

liaison	O-H lié	C=O	C-H
$\sigma(\text{cm}^{-1})$	3300-3000	1720-1650	3050-2950

PARTIE A : Généralités

A.I. QUELQUES DEFINITIONS

A.I.1. Donner la définition d'un élément.

A.I.2. De quand date approximativement la classification périodique de Mendéléiev ? Sur quel(s) principe(s) repose-t-elle ?

A.I.3. Qu'appelle-t-on réaction d'oxydation ?

A.I.4. Comment définit-on l'état d'oxydation d'un élément en chimie inorganique ?

A.I.5. Qu'appelle-t-on réaction de dismutation ? Donner un exemple concret.

A.II. COUPLE REDOX EN PHASE AQUEUSE

A.II.1. Quelle est la grandeur standard usuellement associée à un couple rédox ?

A.II.2. Comment définit-on la variation d'enthalpie libre standard associée à une demi-réaction rédox ?

A.II.3. Quelle est la relation avec la grandeur vue à la question A.II.1 ?

A.II.4. Comment prévoir une réaction d'oxydoréduction entre les espèces chimiques de 2 couples (1) et (2) dans les conditions standard ? Dans d'autres conditions ?

A.II.5. Dans quel cas peut-on prédire l'évolution quantitative d'un système régi par une réaction rédox ? (donner des justifications courtes mais précises)

PARTIE B : Les réactions d'oxydation en phase sèche par le dioxygène gazeux**B.I. PRINCIPE DES DIAGRAMMES D'ELLINGHAM**

B.I.1. Donner brièvement le principe de la construction d'un diagramme d'Ellingham. Quelles sont les approximations faites ?

B.I.2. Pourquoi impose-t-on une stœchiométrie donnée pour le dioxygène ?

B.II. APPLICATION

[les équations-bilans seront écrites avec 1 mole de O_2]

B.II.1. En se plaçant dans le cadre de ces approximations et en sachant qu'entre 250 K et 1350 K le cuivre et ses oxydes Cu_2O et CuO sont des solides non miscibles, tracer les deux courbes représentant les équilibres Cu_2O/Cu (courbe 1) et CuO/Cu_2O (courbe 2) dans ce domaine de température. (on prendra $100 \text{ kJ.mol}^{-1} = 5 \text{ cm}$ et $100 \text{ K} = 1 \text{ cm}$)

B.II.2. Quels sont les domaines d'existence des différentes espèces chimiques sur le diagramme ?

B.II.3. La pression du dioxygène dans l'air vaut environ 0,2 bar. Déterminer graphiquement les températures éventuelles qui limitent l'existence du cuivre et de ses oxydes en présence d'air. Indiquer quelle(s) espèce(s) existe(nt) dans les domaines de température ainsi définis.

B.II.4. Ecrire l'équation-bilan de la réaction de dismutation de l'oxyde de cuivre(I). Dans quel sens peut-on prévoir l'évolution d'un système, à 1000 K, contenant un mélange de Cu , Cu_2O , CuO ?

B.II.5. Peut-on définir et calculer une constante d'équilibre ?

PARTIE C : La thermodynamique des réactions d'oxydoréduction en phase aqueuse**C.I. DOSAGES D'OXYDORÉDUCTION****C.I.1. Dosage d'une solution de fer(II)**

On effectue le dosage d'une solution d'ion fer(II), acidifiée par de l'acide sulfurique, par du permanganate de potassium.

C.I.1.1. Ecrire l'équation-bilan du dosage.

C.I.1.2. Pourquoi ne peut-on conserver une solution titrée de permanganate acidifiée ?

C.I.1.3. Comment repérera-t-on l'équivalence ?

C.I.1.4. Pourquoi faut-il mettre le permanganate dans la burette et la solution de fer(II) dans le becher, et non l'inverse ?

C.I.2. Dosage potentiométrique d'un mélange d'ions fer(II)-cobalt(II).

On cherche à contrôler la concentration en Fe^{2+} et en Co^{2+} d'une solution aqueuse réalisée dans l'acide sulfurique à $5 \times 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$. On place dans le becher 20 mL de la solution à doser et 30 mL d'acide sulfurique à $5 \times 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$. Le réactif titrant est une solution dans l'acide sulfurique de même concentration d'ions $Ce(IV)$ de concentration $1,00 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. On effectue un suivi potentiométrique à intensité nulle.

C.I.2.1. Faire un schéma du montage expérimental en précisant la nature des électrodes utilisées.

C.I.2.2. Décrire sommairement le principe électrochimique d'une électrode de référence couramment utilisée.

C.I.2.3. Avec quels instruments mesure-t-on les volumes de solution à doser et d'acide sulfurique ?

C.I.2.4. Pour quelle raison travaille-t-on en milieu fortement acide ?

C.I.2.5. La courbe expérimentale obtenue est donnée en annexe 1. La valeur expérimentale obtenue avant d'ajouter la solution d'ions $Ce(IV)$ est finie et stable. Ce résultat était-il prévisible d'après la formule de Nernst ? Que peut-on en conclure ?

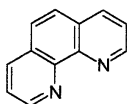
C.I.2.6. Pour cette première exploitation on ne tiendra pas compte d'une éventuelle complexation des ions en solution.

Ecrire la (ou les) réaction(s) qui se produi(en)t. Que peut-on en déduire quant à la composition de la solution à doser ? A-t-on atteint le but proposé ?

C.I.2.7. En réalité, les ions SO_4^{2-} forment avec les ions du fer des complexes. A l'aide d'un diagramme de prédominance, dire quelles sont les espèces du fer prédominantes dans les conditions de l'expérience au cours du dosage. Commenter la valeur obtenue pour le potentiel à la demi-équivalence.

C.I.2.8. Pour quel volume pourrait-on s'attendre à trouver le potentiel standard du couple Ce(IV)/Ce(III) ?

C.I.3. Dosage potentiométrique d'un mélange d'ions fer(II)-cobalt(II) en présence d'orthophénanthroline. On place dans le becher 20 mL de la solution à doser, 30 mL d'eau et 0,20 g d'orthophénanthroline solide. La solution devient rouge. Le dosage est effectué selon le même protocole. On précise que l'orthophénanthroline donne différents complexes avec les ions du cobalt et du fer ; on supposera qu'elle n'en donne pas avec les ions du cérium. On donne la formule de l'orthophénanthroline, que l'on notera ophen :



La courbe expérimentale obtenue est donnée en annexe 2.

C.I.3.1. Ecrire les réactions qui se produisent.

En exploitant les courbes expérimentales, préciser dans quel ordre ces réactions se produisent. Que peut-on en déduire quant à la composition de la solution à doser ? A-t-on atteint le but proposé ?

C.I.3.2. On suppose que le seul complexe formé est dans chaque cas le complexe maximum, comprenant 3 ligands par ion.

En exploitant les courbes expérimentales, déterminer les potentiels standard des nouveaux couples redox mis en jeu.

Quelle est, pour chaque élément, la forme la plus stabilisée par complexation ?

C.I.3.3. Calculer le rapport des constantes de stabilité des complexes de l'orthophénanthroline avec le fer(II) et le fer(III). Faire le même calcul pour le cobalt.

C.I.4. Aspects structuraux.

C.I.4.1. Le fer et ses ions.

C.I.4.1.1. Quelle est la configuration électronique de l'atome de fer, de l'ion Fe^{2+} , de l'ion Fe^{3+} ?

C.I.4.1.2. Placer l'élément fer dans la classification périodique. Pourquoi dit-on qu'il s'agit d'un élément de transition ? Est-ce également le cas du chrome, de l'aluminium, du zinc ?

C.I.4.2. Le cobalt et ses ions.

C.I.4.2.1. Le cobalt(III) forme avec l'orthophénanthroline un complexe octaédrique à bas spin alors que le cobalt(II) forme un complexe octaédrique à haut spin. Donner la structure électronique des orbitales d pour chacun de ces complexes.

C.I.4.2.2. Ces complexes sont-ils paramagnétiques ou diamagnétiques ?

C.I.4.2.3. Par quel(s) atome(s) l'orthophénanthroline intervient-elle dans ces réactions de complexation ?

C.I.4.2.4. Les complexes $\text{Co}(\text{ophen})_3^{n+}$ sont-ils chiraux ? Justifier la réponse par un schéma simple.

C.II. DIAGRAMME DE FROST

Soit une demi-réaction redox : $\text{ox} + n\text{e}^- = \text{red}$, réaction à laquelle est associée la variation d'enthalpie libre standard $\Delta_r G^\circ$. Dans le couple ox/red, l'élément qui change d'état d'oxydation a le nombre d'oxydation n_1 dans ox et n_2 dans red.

C.II.1. En supposant que $G^{\circ}_{\text{red}} = 0$, quelle est la valeur de $(G^{\circ}_{\text{ox}}/F)$ en fonction, entre autre, de $(n_1 - n_2)$? Le diagramme de Frost est relatif à un élément donné; cet élément est susceptible d'exister à divers degrés d'oxydation, négatifs, nul ou positifs. On note n_i le nombre d'oxydation de l'élément dans l'état d'oxydation i , et G°_i l'enthalpie libre du composé dans lequel se trouve une mole d'élément dans cet état d'oxydation i . On prend usuellement $G^{\circ} = 0$ pour l'élément à son degré d'oxydation minimal. On calcule ensuite les valeurs de G°_i/F , et l'on place les points de coordonnées $(G^{\circ}_i/F, n_i)$. Puis on relie par des segments les points à n_i croissant.

C.II.2. Montrer que quelle que soit l'origine n_j pour le calcul de G°_i , la valeur obtenue sera la même.

C.II.3. Que représente la pente du segment reliant deux points quelconques du diagramme?

C.II.4. Démontrer la règle de dismutation suivante: Pour qu'un élément présent dans une espèce chimique au degré d'oxydation n_i se dismute en deux autres espèces dans lequel il sera aux degrés d'oxydation $n_j < n_i$ et $n_k > n_i$, il suffit que le point représentatif pour n_i soit situé au dessus du segment qui relie les points représentatifs pour n_j et n_k .

C.II.5. Tracer le diagramme de Frost pour le fer, en faisant apparaître Fe , Fe^{2+} , Fe^{3+} . L'ion Fe^{2+} se dismute-t-il?

C.II.6. Tracer le diagramme de Frost pour le cuivre, en faisant apparaître Cu , Cu^+ , Cu^{2+} . L'ion Cu^+ se dismute-t-il?

C.II.7. Où placer sur le diagramme les ions complexes $\text{Cu}[(\text{NH}_3)_2]^+$ et $\text{Cu}[(\text{NH}_3)_4]^{2+}$? $\text{Cu}[(\text{NH}_3)_2]^+$ se dismute-t-il?

On donne $\text{Cu}^+ + 2 \text{NH}_3 = \text{Cu}[(\text{NH}_3)_2]^+ \beta_1 = 10^{10,8}$ et $\text{Cu}^{2+} + 4 \text{NH}_3 = \text{Cu}[(\text{NH}_3)_4]^{2+} \beta_2 = 10^{11,8}$

C.II.8. Comment pourrait-on résoudre la question **C.I.3.3.** en utilisant un diagramme de Frost?

PARTIE D : Etude cinétique d'une réaction d'oxydoréduction

D.I. Soit la réaction $\text{S}_2\text{O}_8^{2-} + 2 \Gamma^- = 2 \text{SO}_4^{2-} + \text{I}_{2\text{aq}}$ (R)

D.I.1. D'après les valeurs des potentiels standard, quelle évolution peut-on prévoir lors d'un mélange de peroxodisulfate de potassium et d'iode de potassium?

D.I.2. Cette évolution est lente. Pouvez-vous proposer une explication simple?

D.I.3. L'évolution est plus rapide en présence d'ions Fe^{2+} . Proposer une explication plausible pour justifier le rôle catalytique des ions Fe^{2+} .

D.I.4. En admettant que la réaction (R) admet un ordre a par rapport à $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ et b par rapport à Γ^- , écrire, après avoir défini la vitesse de réaction v , son expression.

D.II. On réalise à 303 K l'expérience suivante: On place dans un becher 20,0 mL d'iode de potassium de concentration $5,00 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$. Dans une burette au dessus du becher on met un mélange de thiosulfate de sodium de concentration $5,00 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ et d'iode de potassium de concentration $3,33 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

1,00 mL de ce mélange est versé dans le becher; on y ajoute quelques gouttes d'empois d'amidon.

On verse rapidement dans le becher, tout en déclenchant un chronomètre, 10,0 mL de peroxodisulfate de potassium de concentration $5,00 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Une coloration bleue apparaît au temps t_1 ; on ajoute alors rapidement 1,00 mL du mélange contenu dans la burette; la coloration bleue réapparaît au temps t_2 , on rajoute 1,00 mL du mélange et ainsi de suite...

On obtient les résultats suivants :

n (mL) versés de la burette	1	2	3	4	5
t_n (s)	314	645	1016	1384	1785

D.II.1. Pourquoi met-on de l'iode de potassium dans le becher et dans la burette?

D.II.2. A quoi est due la coloration bleue observée?

D.II.3. Ecrire les équations des différentes réactions chimiques qui se produisent dans le becher.

D.II.4. Montrer que la concentration en iode reste constante dans le becher.

D.II.5. Calculer en fonction de n la concentration en peroxodisulfate à l'instant t_n .

D.II.6. Montrer par une représentation graphique que ces résultats sont compatibles avec un ordre partiel $\underline{a} = 1$.

D.II.7. Déterminer, après les avoir définis, la constante de vitesse apparente k_1 et le temps de demi-réaction. Préciser l'unité de k_1 (les concentrations sont en mol.L^{-1} et le temps en s).

D.II.8. Une seconde série de mesures est réalisée à la même température en multipliant par 2 les concentrations en ions iode, les autres concentrations étant inchangées. On détermine une constante de vitesse apparente k_2 .

Sachant que $k_2 = 4,98 \times 10^{-4}$ (dans la même unité que k_1), calculer l'ordre partiel \underline{b} . En déduire la constante de vitesse k . Préciser son unité.

D.II.9. Une troisième série de mesures, avec les mêmes concentrations que pour la première série, à une température de 310 K, permet de calculer $k' = 1,21 \times 10^{-2}$ (dans la même unité que k).

Calculer l'énergie d'activation de la réaction (R).

PARTIE E : Electrolyse industrielle de la solution aqueuse de chlorure de sodium

On effectue l'électrolyse d'une solution aqueuse de chlorure de sodium. La tension appliquée aux électrodes est de 3,0 V, l'intensité de 140 000 A. On considère dans cette modélisation simple d'une cellule industrielle, que le système est d'assez grande dimension pour que les concentrations restent inchangées, qu'il est contraint d'évoluer de façon isotherme (25°C) et isobare et que tous les constituants sont dans l'état standard. On obtient, entre autres du dichlore gazeux et du dihydrogène gazeux.

E.I. ETUDE DE LA REACTION ELECTROCHIMIQUE

E.I.1. Aspect électrochimique.

E.I.1.1. Définir l'anode et la cathode.

E.I.1.2. Etablir les réactions électrochimiques ayant lieu à chaque électrode.

E.I.1.3. Commenter, en utilisant des courbes de polarisation (densité de courant – potentiel), l'obtention du dichlore gazeux et non du dioxygène.

E.I.1.4. Décrire un dispositif permettant de construire ces courbes de polarisation. Quelle est leur utilité ?

E.I.1.5. Qu'appelle-t-on palier de diffusion ? Sera-t-il observable pour le dégagement de dichlore ? Pour celui de dioxygène ?

E.I.1.6. Tracer qualitativement l'allure des courbes de polarisation et proposer un point de fonctionnement judicieux en anode et en cathode. Quel autre phénomène physique faudra-t-il considérer pour choisir la d.d.p. de la cellule industrielle ?

E.I.1.7. Quelle est l'équation-bilan globale de la réaction effectuée, équilibrée pour une mole de dichlore ? Quel autre produit commercialisable obtient-on en dehors du dihydrogène et du dichlore ?

E.I.2. Thermodynamique de la réaction.

E.I.2.1. Pourquoi l'enthalpie standard de formation du dichlore gazeux est-elle nulle ? Commenter les valeurs thermodynamiques fournies pour l'ion H^+ .

E.I.2.2. Calculer les enthalpies et entropies standard de réaction. Commenter leur signe.

E.I.2.3. Calculer l'enthalpie libre standard de réaction. En déduire la valeur de la constante d'équilibre K° associée.

E.I.2.4. Calculer le produit-quotient Q de la réaction. Que peut-on en déduire ?

E.I.2.5. Pendant combien de temps doit-on effectuer l'électrolyse pour obtenir 1,00 kg de chlore gazeux. A quelle variation de l'avancement de la réaction cette transformation correspond-elle ?

E.I.2.6. Calculer la variation d'enthalpie, d'enthalpie libre et d'entropie subies par le système pendant cette transformation.

E.I.2.7. Quelles seraient les quantités de travail électrique et d'énergie thermique échangées pendant cette transformation si elle s'effectuait de façon réversible ?

E.I.2.8. Quels sont les échanges de travail électrique et d'énergie thermique effectivement opérés ? Que peut-on en déduire ?

E.II. LA CELLULE D'ELECTROLYSE

E.II.1. Les cellules de conception récente utilisent une membrane poreuse aux cations et étanche aux anions pour séparer le compartiment cathodique et le compartiment anodique. Proposer un schéma simple illustrant le fonctionnement de la cellule. Les produits gazeux obtenus sont-ils séparés ou en mélange ?

E.II.2. Expliquer brièvement le fonctionnement de la membrane.

E.II.3. Pourquoi l'ancienne technique des cellules dites « à cathode de mercure » est-elle en voie d'abandon ?

E.III. ASPECTS INDUSTRIELS

E.III.1. Citer deux utilisations industrielles du chlore dans le domaine de la chimie organique, une dans le domaine de la chimie inorganique.

E.III.2. Citer une autre production industrielle de l'hydrogène.

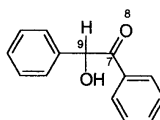
E.III.3. Citer une utilisation industrielle de l'hydrogène.

PARTIE F : Oxydoréduction en chimie organique

F.I. AUTOUR DE LA FONCTION CARBONYLE

F.I.1. La benzoïne.

$C_6H_5-CHOH-CO-C_6H_5$



F.I.1.1. Donner le nom de la benzoïne en nomenclature systématique.

F.I.1.2. Quels groupements caractéristiques (ou quelles fonctions chimiques) reconnaît-on sur cette structure ?

F.I.1.3. Quelle est la géométrie des atomes de carbone C_7 et C_9 ?

F.I.1.4. Combien y a-t-il de stéréo-isomères de configuration ? Donner une représentation de Cram (le groupement phényle sera symbolisé Ph) de l'un d'eux en précisant la configuration choisie.

F.I.2. Le tétrahydruroborate (ou borohydrure) de sodium : $NaBH_4$

F.I.2.1. Le tétrahydruroborate de sodium est un réducteur usuel en chimie organique. Proposer une structure de Lewis pour l'ion tétrahydruroborate.

F.I.2.2. Quelle est la polarité de la liaison B-H ?

F.I.2.3. Quelle est la géométrie de cet ion ?

F.I.3. Réduction de la benzoïne : obtention du produit A

F.I.3.1. Quelle est l'action du tétrahydruroborate de sodium sur la benzoïne racémique en solution dans l'éthanol ? Ecrire l'équation-bilan de la réaction.

F.I.3.2. Pour quelles raisons utilise-t-on en général un excès de réducteur ?

F.I.3.3. Combien de stéréoisomères du produit de réduction obtient-on ?

F.I.3.4. On trouve dans la littérature les températures de fusion des corps purs : $136^\circ C$ pour le *méso*, $119^\circ C$ pour le *dl*. Que signifient ces indications ?

F.I.4. Une autre préparation du produit A.

F.I.4.1. Première étape

F.I.4.1.1. On mélange 2×10^{-2} mol de benzoïne, 4×10^{-2} mol d'acétate de cuivre vert, 35 mL d'acide acétique (ou éthanóïque) et 12 mL d'eau. On porte à reflux 20 minutes. Proposer un schéma du montage à reflux.

F.I.4.1.2. Une filtration à chaud permet de séparer un solide rouge brique : l'oxyde de cuivre Cu_2O . Citer un test qualitatif classique au cours duquel on forme ce même oxyde .

F.I.4.1.3. Le refroidissement du filtrat permet de faire précipiter un solide jaune noté B dont le spectre I.R. est fourni en annexe 3 (spectre 1). Quelles informations le spectre donne-t-il sur la structure de B ? Comment ce spectre permet-il de contrôler l'absence de produit de départ ?

F.I.4.1.4. Ecrire l'équation-bilan de réaction de la benzoïne sur les ions Cu(II) . Commenter les quantités de matières utilisées.

F.I.4.1.5. Y a-t-il plusieurs stéréoisomères de configuration de B ?

F.I.4.2. Seconde étape

F.I.4.2.1. B est soumis à l'action du tétrahydroborate de sodium en milieu aqueux. On obtient A, solide gris clair de température de fusion très voisine de 136°C dont le spectre IR est fourni en annexe 4 (spectre 2). Commenter l'allure du spectre dans les zones $1650\text{-}1700\text{ cm}^{-1}$ et $3300\text{-}3600\text{ cm}^{-1}$.

F.I.4.2.2. Ecrire l'équation bilan de la réaction.

F.I.4.2.3. Quel est l'intérêt de cette méthode en deux étapes ?

F.I.4.2.4. Proposer une interprétation du déroulement stéréochimique de la réaction.

F.I.5. Formation d'un dérivé cyclique.

F.I.5.1. Formation du dérivé

Le produit obtenu au **F.I.4.2.** est mélangé à un excès d'acétone (propanone) en présence de chlorure de fer(III). Le système est porté à reflux. Il se forme un dérivé cyclique.

F.I.5.1.1. Ecrire l'équation bilan de la réaction. Quel est le rôle du chlorure de fer(III) ?

F.I.5.1.2. Proposer un mécanisme de réaction.

F.I.5.1.3. Pourquoi travaille-t-on en excès d'acétone ?

F.I.5.2. Analyse du spectre de R.M.N.

F.I.5.2.1. Le spectre présente deux singulets à 1,5 et 1,7 ppm, représentant 3 protons chacun, un singulet à 5,45 ppm représentant deux protons et un massif complexe à 6,8-7,1 ppm représentant 10 protons. Attribuer ces différents signaux.

F.I.5.2.2. Pourquoi obtient-on deux singulets à 1,5 et 1,7 ppm, alors que l'on n'en obtient qu'un à 5,45 ppm ?

F.II. DIMERISATION ET DISMUTATION DE LA FONCTION ALDEHYDE

F.II.1. Ethanal en milieu basique

F.II.1.1. Justifier la mobilité de l'hydrogène en α d'un aldéhyde.

F.II.1.2. Proposer un mécanisme pour la dimérisation de l'éthanal en milieu basique.

F.II.1.3. Nommer le produit obtenu.

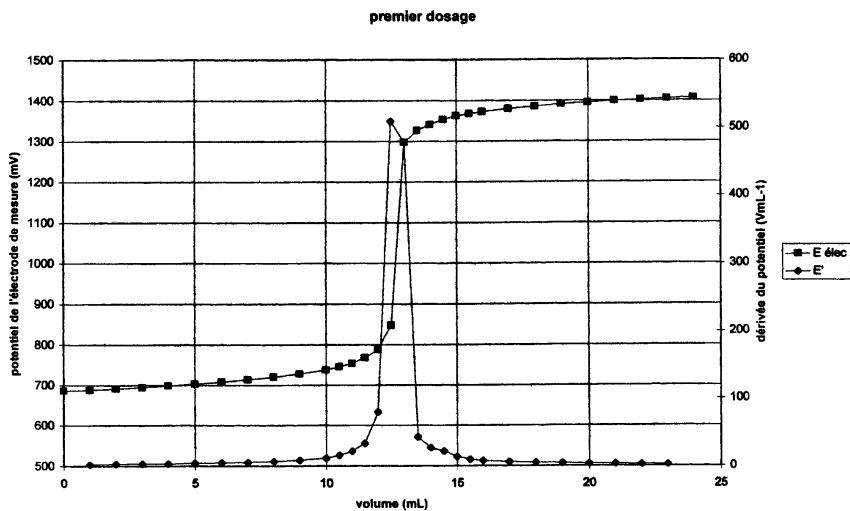
F.II.2. Méthanal en milieu basique

Le méthanal ne peut donner la même réaction. Pourquoi ? Qu'observera-t-on alors ?

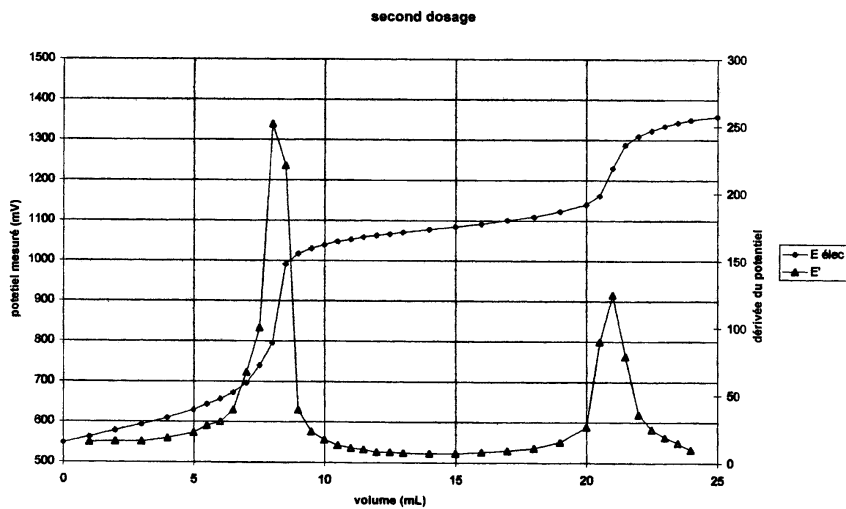
F.II.3. Mélange d'éthanal avec un large excès de méthanal

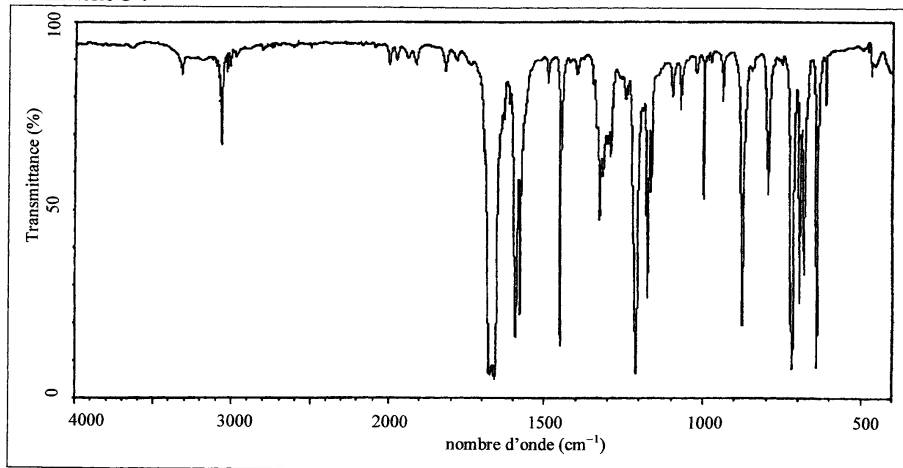
On mélange en milieu basique de l'éthanal avec une grande quantité de méthanal. Montrer que l'on peut obtenir entre autres le produit $\text{C}(\text{CH}_2\text{OH})_4$ en expliquant la suite de réactions. Donner le nom du produit final.

Annexe 1 :

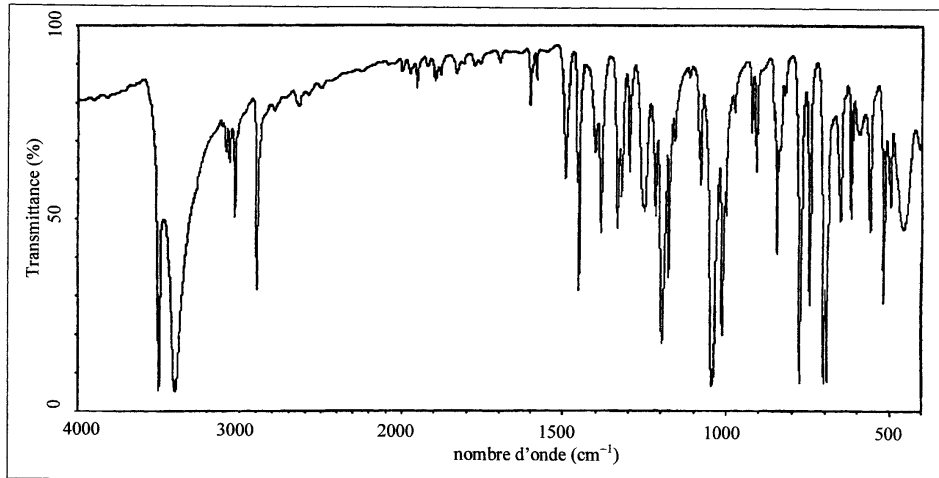


Annexe 2 :



Annexe 3 :

spectre 1

Annexe 4 :

spectre 2

1333-A

48721

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours externe
de recrutement de professeurs certifiés
et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)**

**section : physique
et électricité appliquée**

composition de physique avec applications

Durée : 5 heures

Calculatrice de poche – y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout ouvrage de référence et tout document sont interdits.

Cette composition comprend deux problèmes totalement indépendants.

Ces deux problèmes sont obligatoires.

Ils seront traités sur des copies différentes. Les candidats noteront de façon très visible, en haut de chaque feuille intercalaire, la référence du problème abordé dans ladite feuille intercalaire. Dans le cas où un(e) candidat(e) croit détecter une erreur dans l'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement dans sa copie, propose la correction, et poursuit l'épreuve en conséquence.

Il (elle) prend bien entendu l'entière responsabilité de la correction proposée.

PREMIER PROBLÈME
ÉCHANGEUR THERMIQUE
 PARTIE A. – THERMIQUE

Dans une unité de traitement de saumure, un échangeur thermique a été dimensionné pour un débit massique de fluide procédé (une saumure) de 5,4 tonnes par heure. On envisage de porter ce débit à 7 tonnes par heure. On se propose de déterminer les principaux paramètres de fonctionnement de l'installation dans ces nouvelles conditions.

L'échangeur est du type à faisceaux de tubes à contre-courant dont le schéma de principe est donné à la figure 1.

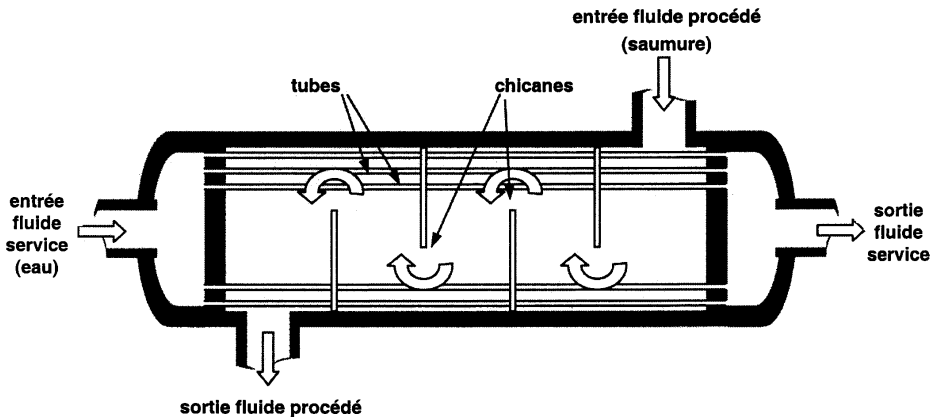


Figure 1

Données et notations :

Échangeur :

- tubes standard DN 1/2" : diamètre intérieur : $D_{\text{int}} = 16,1 \text{ mm}$
 diamètre extérieur : $D_{\text{ext}} = 21,3 \text{ mm}$
- longueur standard des tubes : $l = 3,05 \text{ m}$
- nombre de tubes : 30
- matériau : acier inox
- conductivité thermique de l'acier inox : $\lambda = 16,28 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Fluide service : eau

Notation : tout ce qui est relatif au fluide service est affecté de l'indice 1

- débit massique : qm_1 réglable
- température à l'entrée de l'échangeur : $Te_1 = 80 \text{ }^\circ\text{C}$
- température à la sortie de l'échangeur : Ts_1
- capacité thermique massique (à $70 \text{ }^\circ\text{C}$) : $c_1 = 4 277 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- débit thermique unitaire : $Q_1 = qm_1 \cdot c_1$

Fluide procédé : saumure.

Notation : tout ce qui est relatif au fluide procédé est affecté de l'indice 2

- débit massique : $qm_2 = 1,5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$
- température à l'entrée de l'échangeur : $Te_2 = 15 \pm 7 \text{ }^\circ\text{C}$

- température souhaitée à la sortie de l'échangeur : $T_{s2} = 60 \text{ °C}$;
- capacité thermique massique (à 40 °C) : $c_2 = 2\,965 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- débit thermique unitaire : $Q_2 = qm_2 \cdot c_2$.

Une campagne d'essais a permis de relever, en régimes permanents, les températures de la saumure en sortie de l'échangeur (T_{s2}), de l'eau en sortie de l'échangeur (T_{s1}) en fonction du débit massique d'eau (qm_1).

Au cours de ces essais les paramètres suivants sont restés constants :

$$T_{e2} = 8 \text{ °C}, \quad qm_2 = 1,5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}, \quad T_{e1} = 80 \text{ °C}.$$

Les courbes reproduites figure 2 regroupent l'ensemble des mesures réalisées.

Température en °C : □ : T_{s2} , + : T_{s1}

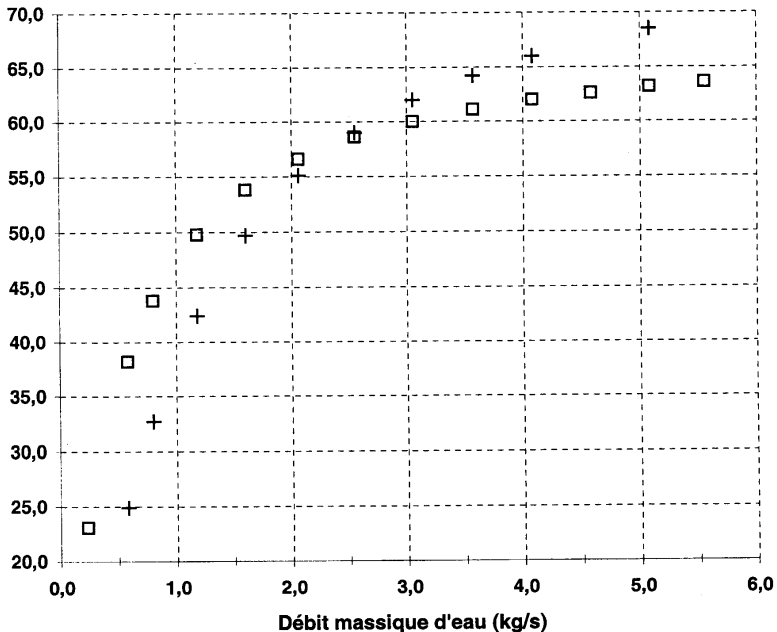


Figure 2

On se propose de modéliser le fonctionnement de l'échangeur, de valider ce modèle au regard des résultats obtenus lors de la campagne d'essais et enfin de prévoir les valeurs des principaux paramètres de fonctionnement dans les conditions de service recherchées.

1. Citer et définir les trois modes de transferts thermiques.

2. Loi de FOURIER.

2.1. La densité surfacique de flux thermique (φ) s'exprime par la loi de FOURIER qu'on peut écrire sous la forme :

$$\varphi = \frac{d\Phi}{dS} = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}.$$

2.1.a. Quel est le mode de transfert thermique décrit par cette loi ?

2.1.b. Définir tous les paramètres qui interviennent dans cette relation. Préciser les unités.

2.1.c. Justifier le signe « moins » dans cette relation et expliciter cette loi par une phrase en langage naturel.

2.2. Applications.

On s'intéresse aux transferts thermiques, en régime permanent, entre deux milieux homogènes et isotropes respectivement aux températures constantes T_1 et T_2 ($T_1 > T_2$).

2.2.a. Exprimer la densité surfacique de flux thermique entre les deux milieux séparés par une paroi plane d'épaisseur e .

2.2.b. Par analogie formelle avec l'électrocinétique, définir la résistance thermique R_{th} de cette paroi plane d'épaisseur e .

2.2.c. Dans la configuration de l'échangeur étudié, les transferts thermiques s'effectuent à travers des surfaces cylindriques définies par les caractéristiques géométriques des tubes dont une section est représentée sur la figure 3.

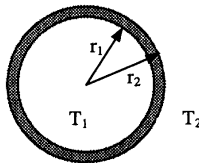


Figure 3

2.2.c.1. Montrer que le flux thermique radial (Φ) par mètre linéaire de tube s'exprime par la relation :

$$\Phi = k \cdot S_{ext} \cdot (T_1 - T_2)$$

où $k = \frac{\lambda}{r_2 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}}$ est le coefficient global d'échange rapporté à la surface extérieure

du tube et $S_{ext} = 2\pi \cdot r_2$ est la surface extérieure du tube par mètre linéaire.

2.2.c.2. Application numérique.

Pour l'échangeur étudié, calculer k et la surface extérieure totale des tubes qui sera notée Σ .

3. Calcul de la température de la saumure en sortie de l'échangeur (T_{s2}).

La figure 4 représente une coupe schématisée de l'échangeur où l'on retrouve les notations définies précédemment.

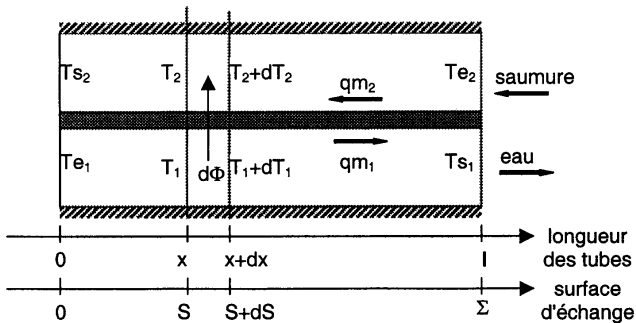


Figure 4

- 3.1. Donner le signe de dT_1 et celui de dT_2 quand x et S croissent. Exprimer le flux thermique élémentaire $d\Phi$ à travers l'élément de surface dS , schématisé à la figure 4, en fonction des caractéristiques connues des fluides et de la paroi.
- 3.2. Quelles hypothèses, non explicitées ici, doit-on, d'autre part, formuler pour établir les relations demandées à la question précédente ?
- 3.3. Les expressions établies en 3.1. conduisent à deux équations différentielles couplées que l'on ne résoudre pas directement. Dans un premier temps, on ne s'intéresse qu'aux variations de la différence de température $(T_1 - T_2)$ en fonction de la surface d'échange S . Établir l'équation différentielle correspondante et montrer que :

$$\frac{T_1 - T_2}{T_{e1} - T_{s2}} = \exp\left(a \frac{S}{\Sigma}\right) \quad \text{avec} \quad a = k \cdot \Sigma \cdot \left(\frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1}\right). \quad (1)$$

Q_1 et Q_2 sont les débits thermiques unitaires définis dans la présentation des fluides.

- 3.4. À partir de l'une des expressions établies en 3.1. et de la relation (1), exprimer T_2 en fonction de S et montrer que :

$$\frac{T_2 - T_{s2}}{T_{e1} - T_{s2}} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} \cdot \left[1 - \exp\left(a \frac{S}{\Sigma}\right)\right]. \quad (2)$$

- 3.5. Analyse des résultats.

Les températures (T_{e1} et T_{e2}) des fluides entrant dans l'échangeur sont supposées constantes.

- 3.5.a. Étudier et tracer l'allure des évolutions des températures T_1 et T_2 dans l'échangeur (S variant de 0 à Σ) pour $Q_1 > Q_2$, $Q_1 = Q_2$ et $Q_1 < Q_2$.
 - 3.5.b. Quand la surface d'échange tend vers l'infini ($\Sigma \rightarrow \infty$), exprimer T_{s2} en fonction de T_{e1} , T_{e2} , Q_1 et Q_2 pour $Q_1 > Q_2$, d'une part, puis pour $Q_1 < Q_2$ d'autre part. Conclure.
 - 3.5.c. Application numérique. En se référant aux données, calculer T_{s2} pour $qm_1 = 3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. La modélisation vous semble-t-elle satisfaisante ?
4. Évaluation du coefficient global d'échange (k) à partir des résultats expérimentaux.

- 4.1. À partir de l'expression de $d\Phi$ et de l'équation (1), montrer que le flux thermique total s'exprime par :

$$\Phi = k \cdot \Sigma \cdot \Delta T_{LM} \quad \text{avec} \quad \Delta T_{LM} = \frac{\Delta T_0 - \Delta T_\Sigma}{\ln \frac{\Delta T_0}{\Delta T_\Sigma}}.$$

$\Delta T_0 = T_{e1} - T_{s2}$ est l'écart de température entre les deux fluides à l'extrémité $S = 0$.

$\Delta T_\Sigma = T_{s1} - T_{e2}$ est le même type d'écart à l'extrémité $S = \Sigma$.

- 4.2. Pour $qm_1 = 3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, calculer k à partir des données et des relevés expérimentaux reproduits à la figure 2.
 - 4.3. Comparer la valeur trouvée à la valeur retenue dans la modélisation (question 2.2.c.2.).
5. Effets de la viscosité des fluides.

La vitesse d'un fluide visqueux en mouvement est nulle au voisinage d'une paroi solide. Le transfert thermique entre un solide et un liquide en mouvement se fait par conduction à travers un film liquide dont l'épaisseur varie avec le régime d'écoulement.

- 5.1. Définir le coefficient de viscosité d'un fluide.
- 5.2. On définit la densité surfacique de flux thermique conducto-convectif par :

$$\varphi_{cc} = h \cdot \Delta T$$

où ΔT est l'écart de température entre le fluide et la paroi et h est le coefficient de convection qui caractérise le transfert thermique.

- 5.2.a. Calculer la résistance thermique équivalente à l'association des résistances thermiques de la paroi des tubes et des deux films liquides en fonction de h_1 , h_2 (respectivement relatifs aux fluides 1 et 2), de r_1 et r_2 et de k défini à la question 2.2.c.1.

5.2.b. En déduire la nouvelle expression du coefficient global d'échange qui sera notée k' .

5.2.c. Application numérique.

Dans les conditions de fonctionnement de l'échangeur correspondant à $qm_1 = 3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, $qm_2 = 1,5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, $h_1 = 6\,360 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ et $h_2 = 1\,860 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, calculer k' et comparer aux résultats déjà trouvés. La modélisation vous semble-t-elle satisfaisante ?

5.3. La courbe reproduite figure 5 représente l'évolution du coefficient global d'échange (k), calculé à partir des données expérimentales, en fonction du débit massique d'eau.

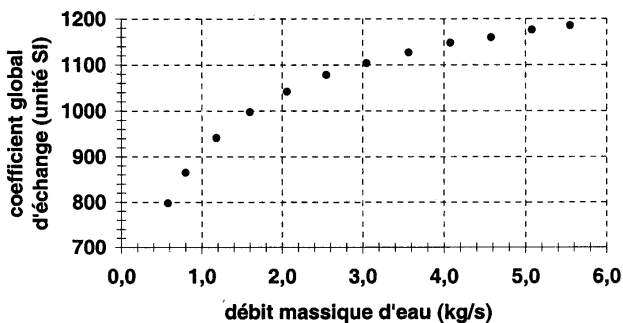


Figure 5

Expliciter une hypothèse susceptible de justifier qualitativement l'allure de cette courbe.

6. **Détermination des principaux paramètres de fonctionnement dans les nouvelles conditions de service (débit de fluide procédé porté à 7 tonnes par heure).**

6.1. Calculer la puissance à fournir au fluide procédé pour obtenir les conditions de fonctionnement souhaitées (température en sortie de l'échangeur $T_{s_2} = 60 \text{ }^\circ\text{C}$, température d'entrée dans l'échangeur $T_{e_2} = 8 \text{ }^\circ\text{C}$ et débit massique $qm_2 = 7 \text{ T} \cdot \text{h}^{-1}$).

6.2. Détermination du débit de fluide service.

6.2.a. Au vu des résultats obtenus, analyser la problématique de la détermination du débit de fluide service. La modélisation est-elle suffisante pour effectuer cette détermination ?

6.2.b. On estime que, dans les conditions de service souhaitées, le coefficient global d'échange $k = 1\,360 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Calculer la température T_{s_1} du fluide service en sortie de l'échangeur et son débit massique qm_1 .

PARTIE B. – FLUIDIQUE

La saumure est pompée depuis un bac de stockage jusqu'à l'unité de traitement. L'étude porte sur les conditions de fonctionnement de la pompe.

Sur la figure 6, on a schématisé le circuit hydraulique.

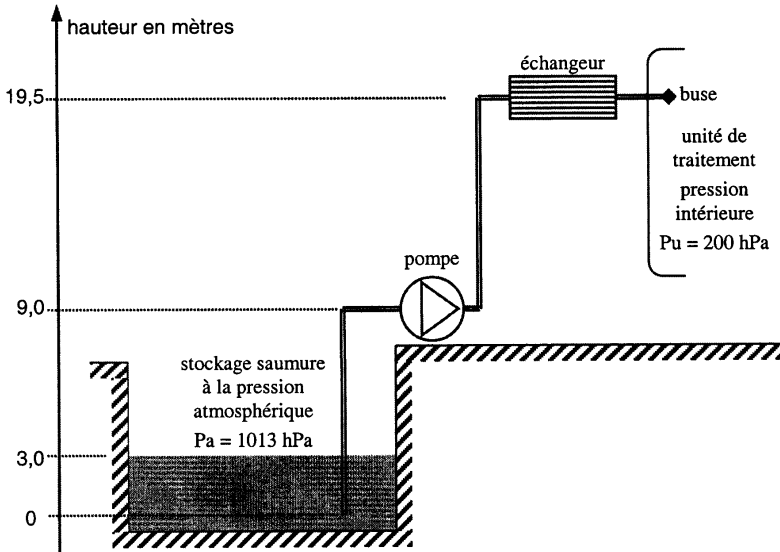


Figure 6

Données :

Installation :

- tuyauterie du circuit d'aspiration et de refoulement, tubes standard DN 3" : acier inox, diamètre intérieur : $D_{\text{int}} = 81 \text{ mm}$
- buse d'injection dans l'unité traitement : DN 1/2", $D_{\text{int}} = 16,1 \text{ mm}$
- longueur du circuit d'aspiration : 11 m
- longueur du circuit de refoulement : 20 m (hors échangeur)

Pertes de charge pour le débit de saumure égal à 7 T/h

- dans le circuit d'aspiration : $\Delta P_{\text{asp}} = 570 \text{ Pa}$
- dans le circuit de refoulement : $\Delta P_{\text{ref}} = 1\,040 \text{ Pa}$
- dans l'échangeur : $\Delta P_{\text{éch}} = 3\,700 \text{ Pa}$

Pression à l'intérieur de l'unité de traitement : $P_u = 200 \text{ hPa}$

- pompe : hauteur de charge nette positive requise à l'aspiration (Net Positive Suction Head) «NPSH» requis = 0,430 mètre colonne liquide

Fluide procédé : saumure :

- débit massique : $qm_2 = 1,95 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$
- température avant l'échangeur : $T_a = 20 \text{ }^\circ\text{C}$
- température à l'entrée de l'unité de traitement : $T_u = 60 \text{ }^\circ\text{C}$
- masse volumique (à $20 \text{ }^\circ\text{C}$) : $\rho_{20^\circ\text{C}} = 1\,280 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- masse volumique (à $60 \text{ }^\circ\text{C}$) : $\rho_{60^\circ\text{C}} = 1\,259 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- pression de vapeur saturante (à $20 \text{ }^\circ\text{C}$) : $P_{\text{vsat}} = 2\,375 \text{ Pa}$
- accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

1. Équation de BERNOULLI.

- 1.1. Dans un repère galiléen (O, x, y, z) , le mouvement d'un volume élémentaire de fluide parfait ($d\tau$) s'exprime localement par l'équation d'EULER :

$$\rho \cdot \left\{ \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \overline{\text{grad}}(v^2) - \vec{v} \wedge (\overline{\text{rot}} \vec{v}) \right\} = \vec{f} - \overline{\text{grad}} P \quad (1)$$

où ρ est la masse volumique de l'élément de fluide, \vec{v} est sa vitesse et P la pression au point où est localisé l'élément considéré. \vec{f} est la densité volumique des champs de forces extérieures $\vec{f} = \frac{d\vec{F}_{\text{ext}}}{d\tau}$.

1.1.a. Définir le fluide parfait.

1.1.b. À partir de l'analyse dimensionnelle de l'équation (1), montrer qu'elle s'identifie à la forme générale de l'équation d'un mouvement.

1.1.c. Comment se simplifie l'équation (1) si le fluide considéré est incompressible, en écoulement permanent dans le seul champ de pesanteur d'accélération $\vec{g} = -\overline{\text{grad}} g \cdot z$?

1.1.d. Montrer que dans ces conditions, en projetant sur une ligne de courant et en intégrant entre deux points de cette ligne, on obtient la relation de BERNOULLI :

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \quad (2)$$

2. Fluides réels.

Dans les applications industrielles, les fluides sont réels et la relation (2) prend la forme de la relation (3) pour un écoulement s'effectuant de l'état 1 vers l'état 2 :

$$P_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = P_2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 + \Delta P \quad (3)$$

où ΔP est la chute de pression correspondant aux pertes de charge.

Justifier qualitativement la relation (3) par une interprétation énergétique.

3. Performances de la pompe.

- 3.1. En se référant à la figure 6 et aux données, calculer la hauteur manométrique totale (HMT) de la pompe définie par la différence entre la pression de refoulement à la sortie de la pompe et la pression à l'aspiration à l'entrée de cette pompe.

Notations. Toutes les variables seront affectées de l'indice :

- 1 à l'entrée du circuit ;
- 2 à l'entrée de la pompe ;
- 3 à la sortie de la pompe ;
- 4 à l'entrée de la buse d'injection ;
- 5 à la sortie de la buse d'injection.

- 3.2. En déduire sa puissance utile.

4. Conditions de fonctionnement de la pompe.

On définit la hauteur de charge nette positive à l'aspiration par la différence entre la pression à l'aspiration à l'entrée de la pompe et la pression de vapeur saturante du fluide. Elle est notée «NPSH» (Net Positive Suction Head) disponible.

4.1. Calculer «NPSH» disponible.

Pour «NPSH» disponible inférieur ou égal à «NPSH» requis indiqué par le constructeur, la pompe risque d'être endommagée.

4.2. Quel phénomène serait alors responsable des dommages ?

4.3. Quel est le niveau minimal de saumure dans le bac de stockage en dessous duquel ce phénomène se produit ?

DEUXIÈME PROBLÈME

TÉLESCOPE

Les quatre parties du problème sont indépendantes quand on admet le résultat donné au 4.1.3.

Les documents-réponse sont à rendre avec la copie. Le candidat fera apprécier ses qualités pédagogiques au travers du soin apporté aux différents schémas et des explications qui les accompagneront.

Formulaire et données.

Distance focale d'une lentille mince convergente biconvexe :

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Relations vectorielles :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{V}) &= 0 ; & \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= 0 ; \\ \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) &= \Delta f ; & \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{V}) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{V}) - \Delta \vec{V}. \end{aligned}$$

Valeurs des constantes :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^9} \text{ SI} ; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}.$$

Fonctions de BESSEL utilisées pour simplifier l'écriture. Les calculs d'intégrales ne sont pas demandés, les résultats utiles sont donnés sous forme graphique dans l'annexe.

Fonction de BESSEL d'ordre 0 :

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-jx \cos(\theta - \alpha)) d\theta.$$

Relation entre les fonctions de BESSEL d'ordre 0 et 1 :

$$x_0 J_1(x_0) = \int_0^{x_0} x J_0(x) dx.$$

Critère de RAYLEIGH.

Par convention, on admet que deux images sont séparées si le maximum de la figure d'Airy de l'une est au moins au-delà du premier minimum de la figure d'Airy de l'autre.

L'exploration de l'Univers utilise des télescopes de plus en plus perfectionnés. Il en existe différents types mais leurs objectifs sont toujours réalisés à partir d'un miroir concave sphérique ou parabolique. C'est Isaac NEWTON qui construit en 1672 le premier télescope pour s'affranchir des aberrations chromatiques des lunettes. Il fut le premier à remplacer la lentille de l'objectif par un miroir.

Dans tout le problème, l'air sera assimilé au vide.

1. Miroir sphérique.

1.1. On considère un miroir sphérique (voir figure 1 du document-réponse n° 1 à rendre avec la copie) de centre C et de rayon R. Le point A₂ est l'image du point objet A₁.

1.1.1. Préciser, sur la figure 1, les angles d'incidence i₁ et de réflexion i₂ correspondant respectivement aux rayons A₁I et IA₂.

1.1.2. Énoncer les lois de la réflexion de SNELL-DESCARTES.

1.1.3. Exprimer les angles i₁ et i₂ en fonction des angles α₁ = $\widehat{SA_1I}$, α₂ = $\widehat{SA_2I}$ et θ = \widehat{SCI} .

1.1.4. On utilise le système optique dans les conditions de GAUSS. Préciser ces conditions.

1.1.5. En se plaçant dans les conditions de GAUSS, démontrer la relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine au sommet S.

1.1.6. En déduire la position des foyers objet et image.

- 1.2. Les aberrations géométriques d'une image sont liées au stigmatisme et à l'aplanétisme du système optique utilisé.
- 1.2.1. Donner la définition du stigmatisme rigoureux.
 - 1.2.2. Montrer que le miroir plan est un système optique rigoureusement stigmatique. Est-ce aussi vrai pour un miroir de salle de bain ?
 - 1.2.3. Pour quel couple de points un miroir parabolique est-il rigoureusement stigmatique ? Justifier leur emploi dans les télescopes.
 - 1.2.4. Pourquoi dit-on que le miroir sphérique est un système optique possédant un stigmatisme approché ? Préciser les conditions qui permettent de le réaliser.
 - 1.2.5. Définir la notion d'aplanétisme d'un système optique. Est-ce que le miroir sphérique est un système aplanétique ?
 - 1.2.6. Déterminer, sur la figure 2 du document-réponse n° 1 à rendre avec la copie, l'image A_2B_2 d'un objet réel A_1B_1 obtenue par le miroir convexe et par le miroir concave. Préciser les hypothèses sur les propriétés du miroir que vous supposez réalisées pour cette construction. Justifier le choix et la marche des rayons utilisés. Qualifier l'image obtenue dans chaque cas.

- 1.3. L'objectif du télescope de NEWTON est un miroir sphérique de rayon $R = 32$ cm et de diamètre d'ouverture 34 mm. L'image est renvoyée sur le côté par un miroir plan intermédiaire incliné à 45° . L'oculaire peut être modélisé par une lentille mince convergente de distance focale $f' = 10$ mm.

Le télescope est schématisé sur la figure 3 du document-réponse n° 2 ; il n'est pas à l'échelle pour permettre une meilleure lisibilité.

- 1.3.1. Indiquer les objets et images conjugués pour chacun des systèmes optiques du télescope. Préciser leur nature réelle ou virtuelle.
- 1.3.2. Justifier la position de l'oculaire pour que le télescope soit afocal.
- 1.3.3. Compléter la figure 3 du document-réponse n° 2 à rendre avec la copie en faisant apparaître les positions des différents foyers, des images intermédiaires, de l'image finale.
- 1.3.4. Définir le grossissement d'un système optique. En utilisant le schéma précédent, déterminer la valeur de celui du télescope de NEWTON.

2. Aberrations chromatiques des systèmes réfracteurs par rapport aux systèmes réflecteurs.

- 2.1. La distance focale d'une lentille L mince convergente biconvexe dépend de l'indice du milieu n et de ses rayons de courbure R_1 et R_2 comme le montre la relation donnée dans le formulaire.
- 2.1.1. L'indice du verre utilisé dépend de la longueur d'onde de la radiation lumineuse. On raisonnera sur les deux radiations suivantes :

Bleu	$\lambda_b = 480$ nm	$n_b = 1,521$
Rouge	$\lambda_r = 650$ nm	$n_r = 1,504$

Calculer la différence entre les distances focales pour les deux radiations ci-dessus : $\Delta f' = f'_r - f'_b$ pour une lentille biconvexe telle que $R_1 = R_2 = R = 40$ cm.

- 2.1.2. Comment s'appelle ce phénomène ? Quelle conséquence a-t-il sur la qualité des images ?
 - 2.1.3. Dans une collection de lentilles de laboratoire en verre, comment choisirez-vous la vergence de la lentille pour mettre en évidence expérimentalement ce phénomène du mieux possible ?
- 2.2. Sur la figure 4 qui n'est pas à l'échelle, on a placé les foyers F'_b et F'_r de la lentille correspondant respectivement aux radiations bleue et rouge ainsi que l'image $A'_bB'_b$ obtenue en lumière bleue d'un objet réel AB qui n'est pas représenté.
- 2.2.1. Sur la figure 4 du document-réponse n° 2 à rendre avec la copie, tracer les rayons lumineux nécessaires à la détermination de l'image $A'_rB'_r$ que l'on obtient de l'objet AB si on l'éclaire en lumière rouge. Justifier avec précision votre tracé.
 - 2.2.2. Un faisceau cylindrique de lumière blanche dont l'axe est parallèle à l'axe optique de la lentille L éclaire toute sa face d'entrée.
 - a. Représenter sur la figure 5 du document-réponse n° 2 à rendre avec la copie, le faisceau image du faisceau bleu et celui du faisceau rouge.
 - b. Indiquer, sur la figure 5, la position de l'écran qui permet d'obtenir l'image circulaire de meilleure qualité. Justifier votre réponse.

- 2.3. Pourquoi les systèmes optiques réflecteurs ne présentent-ils pas d'aberrations chromatiques ?
Quel intérêt a-t-on à les utiliser dans un télescope ?

3. Limite ondulatoire à la qualité de l'image.

- 3.1. On considère une radiation lumineuse assimilable à une onde électromagnétique plane sinusoïdale de longueur d'onde λ . Elle se propage dans le vide en l'absence de toute charge et de tout courant.

L'espace est rapporté à un trièdre direct $Oxyz$, l'axe Oz est la direction de propagation.

On notera \vec{k} le vecteur d'onde des ondes progressives d'expression générale $f(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})$.

- 3.1.1. Écrire les équations de MAXWELL auxquelles obéissent les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} dans ces conditions.

- 3.1.2. En déduire l'équation de propagation à laquelle obéit \vec{E} .

- 3.1.3. Vérifier qu'une onde progressive dans le sens des z croissants est une solution possible de cette équation. En déduire la valeur de la vitesse c de propagation.

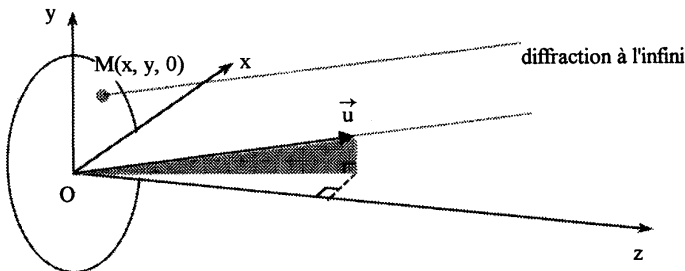
- 3.1.4. On considère une de ces ondes progressives.

a. Exprimer en notation complexe $\text{div} \vec{E}$ et $\text{rot} \vec{E}$.

b. En déduire que l'onde est transverse.

c. Montrer que les vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux et que le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ est direct.

- 3.2. L'onde précédente arrive sous incidence normale sur une ouverture circulaire Σ de diamètre D et de centre O . On observe l'onde diffractée à l'infini dans la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$.



ouverture diffractante
 Σ dans le plan (Ox, Oy)

Un point M de l'ouverture est repéré par ses coordonnées cartésiennes $(x, y, 0)$.

On prend pour origine des phases la vibration diffractée par le centre O de l'ouverture.

L'amplitude complexe de l'onde émise par l'élément de surface ds entourant le point $M(x, y, 0)$ de l'ouverture est notée :

$$dA = A_0 \exp(-j\varphi) ds$$

où φ représente le déphasage de l'onde correspondante reçue à l'infini par rapport à celle issue du point O .

- 3.2.1. Énoncer le principe d'HUYGENS FRESNEL de la diffraction.

- 3.2.2. Définir la différence de marche entre un rayon issu de M et de O dans la direction du vecteur \vec{u} .

- 3.2.3. Définir l'amplitude complexe A_{∞} résultante de l'onde diffractée à l'infini dans la direction du vecteur \vec{u} pour l'ouverture Σ .

3.3. Les coordonnées cylindriques du point M sont notées :

$$M(r = OM, \theta = (\text{Ox}, \vec{OM}), 0).$$

Le vecteur $\vec{\rho}$ étant la projection du vecteur \vec{u} dans le plan (Ox, Oy), en notant $\rho = \|\vec{\rho}\|$, les coordonnées cylindriques du vecteur \vec{u} sont alors :

$$\vec{u}(\rho, \alpha = (\text{Ox}, \vec{\rho}), u_z)$$

et on a $\|\vec{u}\| = 1 = \sqrt{\rho^2 + u_z^2}$.

3.3.1. Montrer qu'en coordonnées cylindriques, la différence de marche s'exprime par la relation $\delta = r\rho \cos(\theta - \alpha)$.

3.3.2. Vérifier que l'amplitude complexe s'exprime à l'aide de la fonction de BESSEL J_0 (définie dans le formulaire) par la relation suivante et donner l'expression de la variable t.

$$A_\infty = A_0 \int_0^{D/2} 2\pi r J_0(t) dr.$$

3.3.3. Dans l'expression précédente, exprimer $r \cdot dr$ en fonction de la variable t et montrer que l'on a :

$$A_\infty = A_0 S \left[\frac{2J_1\left(\frac{\pi\rho D}{\lambda}\right)}{\frac{\pi\rho D}{\lambda}} \right]$$

où S est l'aire de l'ouverture circulaire Σ et J_1 est la fonction de BESSEL d'ordre 1 (voir formulaire).

3.4. L'intensité diffractée est décrite par une fonction possédant une symétrie de révolution autour de l'axe optique Oz :

$$I = I_0 \left[\frac{2J_1(\pi t')}{\pi t'} \right]^2$$

avec $t' = \frac{\rho D}{\lambda}$. Le résultat de ce calcul est représenté graphiquement en annexe par la courbe $\frac{I}{I_0} = f(t')$.

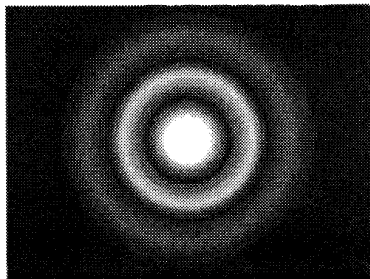
3.4.1. On note i l'angle entre la direction d'observation de l'onde diffractée et l'axe optique :

$i = (\text{Oz}, \vec{u})$. Déterminer $\sin(i)$ en fonction de ρ .

3.4.2. Donner les valeurs de t' correspondant aux deux premiers minima d'intensité lumineuse. En déduire, pour des angles d'observation i petits, les expressions des angles i correspondant aux deux premiers minima.

4. Résolution angulaire.

4.1. La figure ci-dessous est l'image d'une étoile obtenue avec un télescope équipé d'un miroir parabolique de focale f' et d'ouverture de diamètre D.



- 4.1.1. Justifier en quelques phrases l'image obtenue.
- 4.1.2. Quelle hypothèse faite précédemment n'est probablement pas réalisée lors de cette observation ?
- 4.1.3. Montrer que le rayon du premier anneau noir ou rayon de la tache centrale appelée tache d'AIROY vaut :

$$R_A \approx 1,22 \frac{\lambda F'}{D}$$

- 4.2. En utilisant le critère de RAYLEIGH (voir formulaire), comparer la résolution angulaire théorique du télescope de NEWTON avec celle du télescope du mont Palomar dont le diamètre d'ouverture est de 508 cm.
- 4.3. Le VLT (Very Large Telescope) est un ensemble de quatre télescopes qui vient d'être construit avec l'objectif d'améliorer encore la résolution angulaire comme l'explique l'extrait du site de l'Institut Astronomique de Paris.

« ...

Les images prises à partir des télescopes au sol sont entachées d'un défaut majeur : l'atmosphère brouille considérablement les détails. Sans l'atmosphère dont la turbulence modifie les images, la résolution angulaire ne serait limitée que par le diamètre du miroir primaire du télescope (limite de diffraction) : plus le télescope serait grand, plus grande serait la résolution. Hélas, dans le visible, la résolution des images prises avec un télescope au sol ne dépasse pas, au mieux, celle d'un télescope de 40 cm (dans les meilleurs sites) ...

Pour obtenir des résolutions angulaires encore plus grandes, il faudrait des miroirs de plus grand diamètre encore ! Ce sera peut-être techniquement possible dans les prochaines décennies, avec des miroirs non plus monolithiques, mais segmentés. Et la pleine résolution ne sera atteinte que si l'agitation atmosphérique est compensée...

En attendant, le VLT permet de reconstituer l'équivalent d'un très grand télescope dont la taille serait égale à la distance entre les télescopes. Cette technique – utilisée pour les radiotélescopes depuis des années – consiste à recombinaison de façon cohérente les faisceaux provenant de plusieurs télescopes.

La résolution attendue est de 0,001" à la longueur d'onde de 1 micron, résolution qui permettrait théoriquement de discerner un homme sur la Lune.

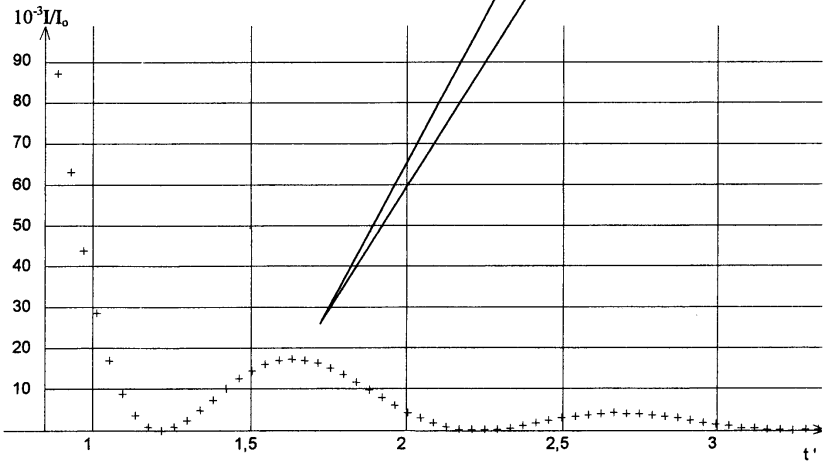
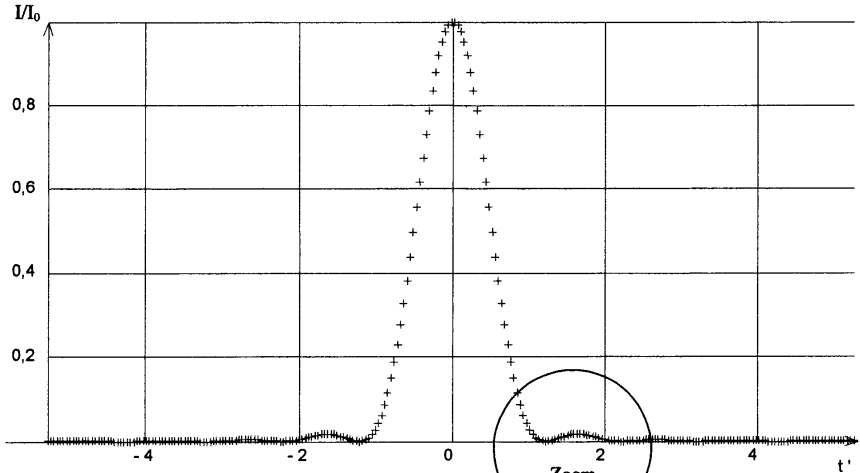
... »

- 4.3.1. Le VLT est un projet à l'échelle mondiale, dans quel pays est-il construit ?
- 4.3.2. Sur quel phénomène optique est basé le principe de fonctionnement du VLT ?
- 4.3.3. Pourquoi l'auteur précise-t-il la longueur d'onde quand il donne la valeur de la résolution angulaire attendue ?
- 4.3.4. Sachant que la distance Terre-Lune est d'environ quatre cent mille kilomètres, vérifier si l'ordre de grandeur donné dans le dernier paragraphe est correct.

ANNEXE

Résultats de l'intégration numérique de la fonction :

$$\frac{I}{I_0} = \left[\frac{2J_1(\pi t')}{\pi t'} \right]^2 \quad \text{avec} \quad t' = \frac{\rho D}{\lambda}$$



DEUXIÈME PROBLÈME

Document-réponse n° 1 à rendre avec la copie

À insérer à plat dans la copie, l'en-tête détachable en haut

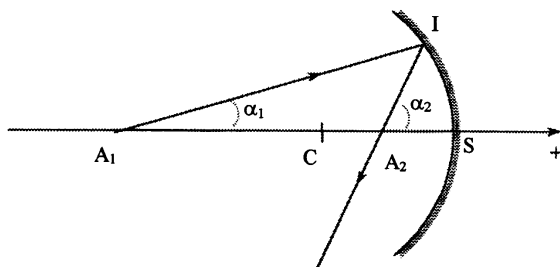


Figure 1 : Miroir sphérique.

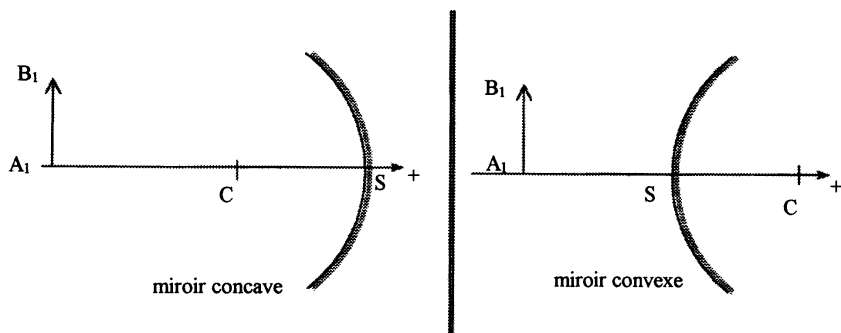


Figure 2 : Construction des images.

DEUXIÈME PROBLÈME

Document-réponse n° 2 à rendre avec la copie

À insérer à plat dans la copie, l'en-tête détachable en haut

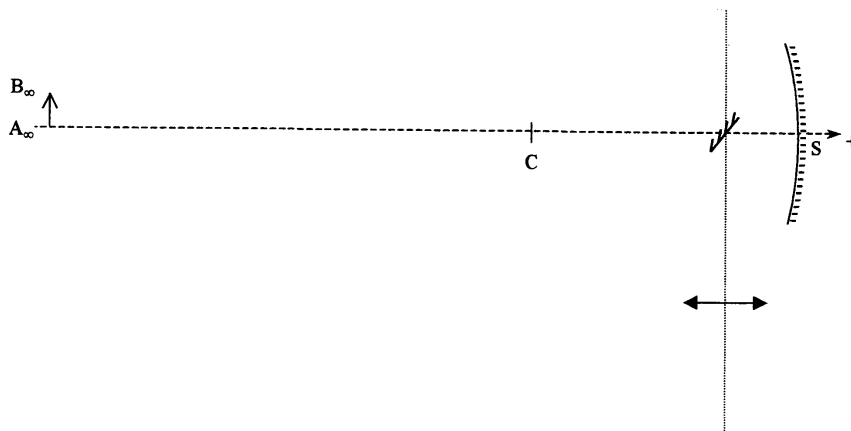


Figure 3 : Schéma du télescope.

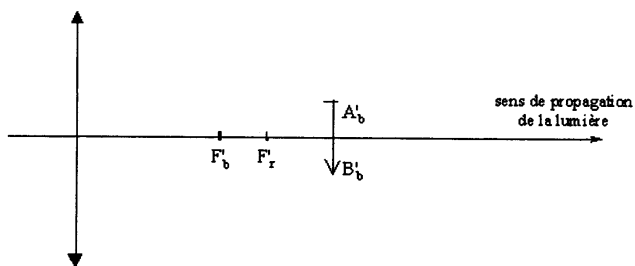


Figure 4 : Construction de l'image en lumière rouge.

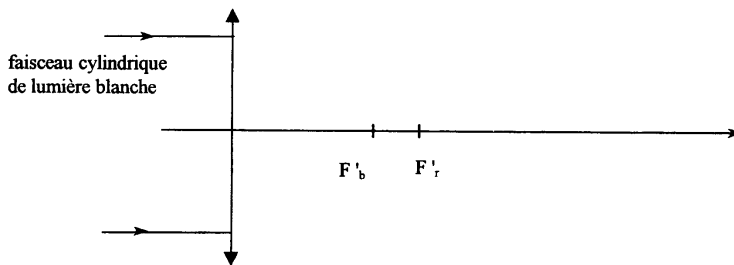


Figure 5 : Enveloppe des faisceaux images en lumière bleue et rouge.

1333-C

1334-A

48722
repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours externe
de recrutement de professeurs certifiés
et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)****section : physique
et électricité appliquée**

composition d'électronique — électrotechnique avec applications

Durée : 5 heures

Calculatrice de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout ouvrage de référence et tout document sont interdits.

Cette composition comprend deux problèmes totalement indépendants.

Ces deux problèmes sont obligatoires.

Ils seront traités sur des copies différentes. Les candidats noteront de façon très visible, en haut de chaque feuille intercalaire, la référence du problème abordé dans ladite feuille intercalaire. Dans le cas où un(e) candidat(e) croit détecter une erreur dans l'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement dans sa copie, propose la correction, et poursuit l'épreuve en conséquence.

Il (elle) prend bien entendu l'entière responsabilité de la correction proposée.

PREMIER PROBLÈME

VÉHICULE ÉLECTRIQUE

Le véhicule est entraîné par une machine à courant continu associée à un hacheur.

1. Fonctionnement du moto-variateur.

La machine à courant continu (M.C.C.) à flux constant, **parfaitement compensée**, possède les caractéristiques suivantes :

- résistance d'induit négligeable ;
- pour le fonctionnement nominal : $I_{\text{nom}} = 90 \text{ A}$, $U_{\text{nom}} = 260 \text{ V}$ et $n_{\text{nom}} = 1\,500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$;
- les pertes fer et mécaniques sont négligées.

1.1. *Fonctionnement en régime nominal.*

- a. Justifier le fait que la force électromotrice (f.e.m.) E soit proportionnelle à la vitesse angulaire Ω : $E = K \cdot \Omega$.
- b. Calculer K en $\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$.
- c. Calculer le moment Γ_{nom} du couple électromagnétique nominal.

1.2. *Le fonctionnement en moteur.*

La voiture roule à vitesse constante sur une route plane. Le moment du couple Γ opposé à la machine à courant continu est constant.

L'induit de la M.C.C. est alimenté par l'intermédiaire d'un hacheur en pont comme l'indique la figure 1.

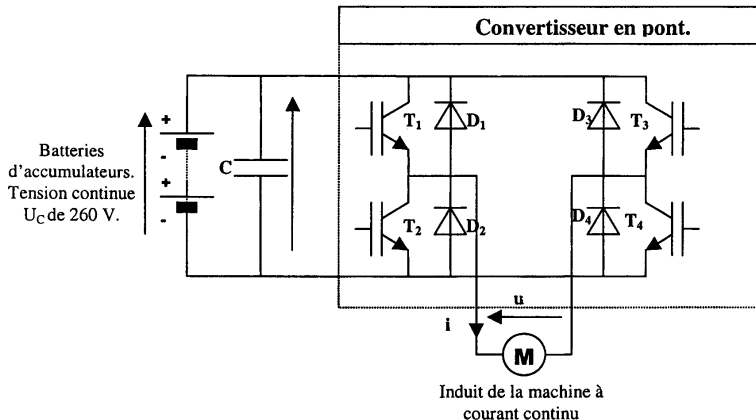


Figure 1. – Schéma du hacheur en pont. Ni la commande des transistors, ni les différents systèmes de protection du montage ne sont représentés.

Le pont est formé de quatre interrupteurs électroniques constitués d'un transistor IGBT associé à une diode placée en anti-parallèle.

Les composants électroniques sont considérés parfaits :

- à l'état passant, les IGBT et les diodes seront assimilés à des interrupteurs fermés,
- à l'état bloqué, ils seront assimilés à des interrupteurs ouverts.

Les transistors sont commandés à la fréquence de 10 kHz de la façon suivante :

- de 0 à αT : les interrupteurs 1 et 4 sont fermés ;
- de αT à T : les interrupteurs 2 et 3 sont fermés.

On règle $\alpha = 0,8$.

- a. Tracer l'allure de la tension u aux bornes de la machine. Préciser l'amplitude et la période de u .
- b. Établir l'expression de la valeur moyenne de la tension u : $\langle u \rangle = U_c \cdot (2\alpha - 1)$.
- c. En déduire la fréquence de rotation de l'induit en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.
- d. L'allure du courant est tracée sur le document-réponse 1. Indiquer sur ce document les composants du hacheur assurant la conduction du courant (D_1, T_1, D_2, \dots).
- e. Écrire l'équation différentielle liant $u(t)$ à $i(t)$, L et E .
- f. Justifier l'égalité entre la valeur moyenne $\langle u \rangle$ de u et la f.e.m. E .
- g. Justifier que l'intensité $i(t)$ du courant est représentée par une droite croissante pour l'intervalle de temps compris entre 0 et αT .
- h. Justifier que l'intensité $i(t)$ du courant est représentée par une droite décroissante pour l'intervalle de temps compris entre αT et T .
- i. Établir l'expression de l'ondulation du courant $\Delta i = (I_{\max} - I_{\min}) = \frac{2U_c}{L} (1 - \alpha) \alpha T$.
- j. À partir du graphe de $i(t)$, calculer l'inductance L de l'induit.

1.3. Étude du freinage électrique de la voiture.

La voiture roule en descente à vitesse constante, le moment du couple exercé sur l'arbre du moteur devient négatif :

$$\Gamma = -120 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ et } n = 900 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}.$$

1.3.1. Calcul des grandeurs.

- a. Calculer les valeurs moyennes $\langle u \rangle$ de la tension $u(t)$ et $\langle i \rangle$ de l'intensité $i(t)$ du courant d'induit.
- b. Déterminer le rapport cyclique α permettant l'obtention de cette valeur moyenne de la tension.
- c. Calculer la puissance active P reçue par la machine en considérant l'intensité du courant d'induit constant.
Justifier le signe négatif de cette puissance.

1.3.2. Étude du module de dissipation.

En cas de freinage de la voiture, l'énergie est convertie sous forme électrique par la M.C.C. qui la restitue par l'intermédiaire du hacheur aux batteries d'accumulateurs. Toutefois, l'intensité du courant de charge des batteries étant limitée, il est nécessaire d'utiliser un module de dissipation si cette intensité devient trop importante. Ce module est étudié dans le problème suivant. Le schéma de la figure 2 représente le module placé aux bornes du condensateur.

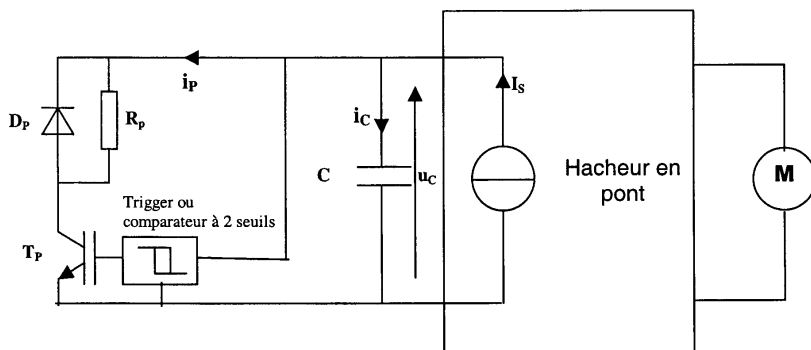


Figure 2. – Schéma de principe du module de dissipation.

Par souci de simplification, le hacheur est remplacé par une source débitant un courant constant d'intensité $I_s = -\langle i \rangle = 40 \text{ A}$ (on ne tient pas compte de l'ondulation de l'intensité i_s du courant car la période du hacheur est très petite vis-à-vis de la constante de temps du circuit de charge du condensateur).

Le module de dissipation permet de décharger le condensateur lorsque la tension aux bornes de celui-ci devient trop importante. La tension u_c aux bornes du condensateur conditionne l'état du transistor T_p : le cycle de fonctionnement est représenté sur le document-réponse 2.

On observe la tension u_c aux bornes du condensateur, le graphe est donné sur le document-réponse 2.

- Orienter le cycle du document-réponse 2 en plaçant les flèches correspondant aux déplacements du point de fonctionnement.
- Pour l'intervalle de temps compris entre 0 et t_1 : donner l'équation différentielle liant u_c à I_s et à C.
- Justifier le fait que $u_c(t)$ est une droite.
- Calculer la capacité C du condensateur.
- La puissance restituée par le hacheur est de 11,3 kW. Calculer la valeur efficace de l'intensité du courant traversant la résistance R_p de 5Ω .
- Tracer, sur le document-réponse 2, les graphes des intensités $i_p(t)$ et $i_c(t)$ des courants (en respectant la concordance de temps avec la tension $u_c(t)$). Préciser les valeurs significatives de ces intensités.

1.3.3. Comparaison des durées de freinage.

La M.C.C. tourne à $900 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$; la charge oppose sur l'arbre, quelle que soit la vitesse, un couple constant de moment Γ_c de valeur $40 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Le moment d'inertie de la charge et du moteur est : $J = 4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

• Le moteur n'est pas alimenté.

- Donner l'expression du moment du couple d'accélération $J \frac{d\Omega}{dt}$ en fonction de Γ_c .

b. Calculer la durée d'arrêt de l'induit.

- Le hacheur fonctionne en récupération, l'intensité du courant d'induit est réglée de telle sorte que sa valeur moyenne reste constante : $\langle i \rangle = -73 \text{ A}$.

c. Calculer la nouvelle durée d'arrêt de l'induit.

2. Charge de la batterie d'accumulateurs par le réseau.

La charge de la batterie est réalisée conformément au montage de la figure 3.

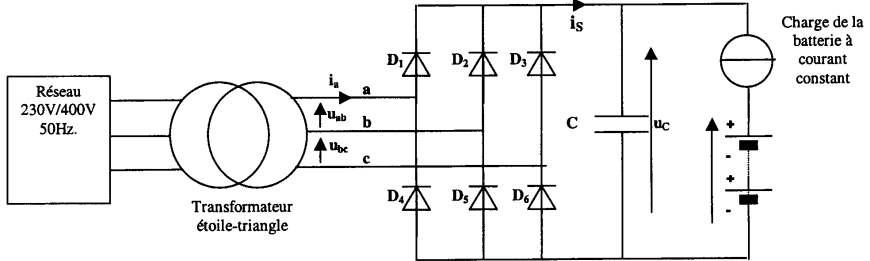


Figure 3. – Schéma du chargeur de batteries.

2.1. Le redressement triphasé.

Le document 3 donne :

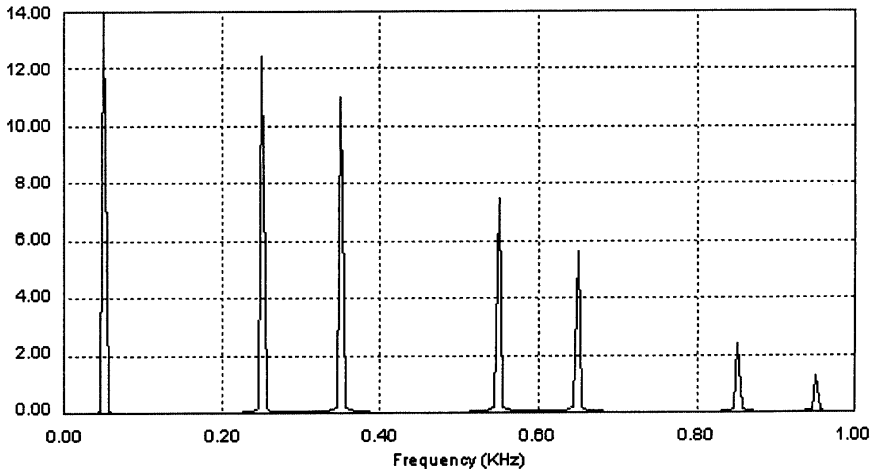
- les graphes des tensions composées u_{ab} , u_{bc} et u_{ca} ;
- la tension redressée u_c ;
- les intensités i_a et i_s des courants.

a. Indiquer, sur le document-réponse 3, les diodes assurant la conduction lors des différentes séquences de fonctionnement.

Le document 4 donne le spectre en fréquence de l'intensité i_a du courant, c'est-à-dire l'amplitude des différents harmoniques en fonction de la fréquence.

Document 4

Amplitude des composantes harmoniques de i_a en A.



Un essai du chargeur donne la valeur efficace I de i_a : 16,6 A ; la valeur efficace des tensions simples 116 V et la puissance active triphasée transférée à l'entrée du redresseur donne $P = 3\,430$ W.

On définit pour une phase (a, par exemple) :

- la tension simple $v_a(t) = V\sqrt{2} \sin \omega t$, prise comme référence des phases ;
- l'intensité non sinusoïdale du courant en ligne qui peut être décomposée en :

$$i_a(t) = i_1(t) + i_2(t) + \dots + i_k(t) + \dots$$

La composante de rang k a pour équation : $i_k(t) = I_k\sqrt{2} \sin(k\omega t - \varphi_k)$ où φ_k est la phase à l'origine de i_k .

On adopte la relation de définition suivante pour le taux de distorsion en courant « THD % » :

$$\text{THD \%} = 100 \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}}{I_1} = 100 \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots}}{I_1}$$

où I_k est la valeur efficace de la composante harmonique de rang k .

- b. À partir du spectre en courant, déterminer la fréquence et la valeur efficace I_1 du fondamental du courant.
- c. Établir la relation $\text{THD \%} = 100 \frac{\sqrt{I^2 - I_1^2}}{I_1}$ et calculer sa valeur.
- d. Justifier que le spectre ne comporte pas d'harmonique de rang pair.

Le redresseur est une charge triphasée non linéaire, il reçoit de la puissance déformante D telle que :

$$D = 3V \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}$$

- e. Établir la relation : $D = 3VI_1 \frac{\text{THD \%}}{100}$ puis calculer D .
- f. Rappeler l'expression donnant la puissance apparente S en fonction de P , Q et D , où Q est la puissance réactive.
- g. En déduire une conséquence sur la valeur du facteur de puissance $\cos \varphi_1$ du fondamental, où φ_1 est la différence de phase entre v_a et le fondamental de i_a .
- h. Calculer le facteur de puissance F_p du montage. Quelle est la cause de sa faible valeur ? Proposer une solution pour l'améliorer.

2.2. Le transformateur triphasé.

Ses caractéristiques sont les suivantes :

Couplage Yd, $S = 6,3$ kVA, la tension efficace composée au primaire $U_p = 400$ V et la tension efficace composée à vide au secondaire $U_{sv} = 208$ V.

- a. Calculer les valeurs efficaces nominales des intensités des courants en ligne primaire et secondaire.
- b. Calculer le rapport de transformation global m et le rapport du nombre de spires N_2/N_1 par colonne.

Le schéma d'une phase du transformateur est donné figure 4. L'impédance ramenée au secondaire est Z_s .

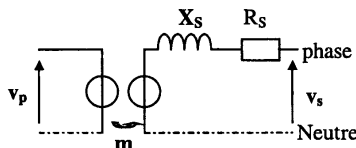


Figure 4. - Schéma d'une phase du transformateur.

c. Le secondaire est en court-circuit, la tension u_{Pcc} , de valeur efficace U_{Pcc} , appliquée au primaire permet de faire circuler les courants nominaux.

Démontrer que $U_{Pcc} = \sqrt{3}Z_s \frac{I_{Pnom}}{m^2}$, où I_{Pnom} est la valeur efficace nominale de l'intensité du courant primaire.

Le constructeur donne la tension de court-circuit en % : $U_{cc} \% = 4,8 \%$ telle que :

$$U_{cc} \% = 100 \frac{U_{Pcc}}{U_{Pnom}}$$

d. En déduire la valeur de Z_s .

Le constructeur donne, pour une charge nominale dont le facteur de puissance inductif est $\cos \varphi = 0,8$, la chute de tension composée relative $\Delta U \%$ et le rendement η .

e. On donne $\Delta U \% = 4 \%$, montrer que la tension composée en charge est de 200 V.

f. Calculer la puissance active nominale fournie par le transformateur à la charge précédente (I_{2nom} et $\cos \varphi = 0,8$).

g. Le constructeur donne $\eta = 0,92$, calculer la puissance active reçue au primaire.

h. En déduire la totalité des pertes du transformateur lors de l'essai en charge nominale. À vide, sous tension nominale, le transformateur consomme une puissance de 125 W. Calculer les pertes par effet Joule lorsque le transformateur alimente la charge nominale ; en déduire la valeur de R_s .

i. Déterminer la valeur de X_s .

Pour protéger le transformateur, on place un disjoncteur au secondaire du transformateur (voir fig. 5). Cet appareil doit être capable de couper le courant en cas de court-circuit lorsque la tension primaire est de 400 V : c'est le pouvoir de coupure.

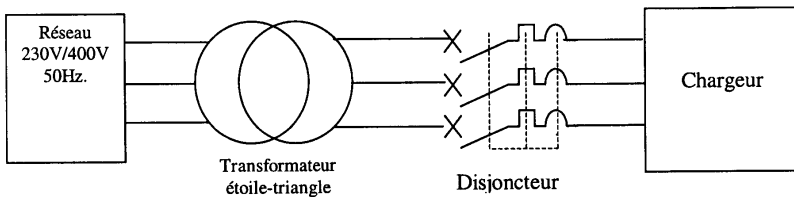


Figure 5. – Protection du transformateur.

j. Calculer la valeur efficace de l'intensité du courant traversant un court-circuit franc au secondaire (on néglige la résistance des fils).

DEUXIÈME PROBLÈME

RÉGULATION DE TEMPÉRATURE

Note aux candidats : dans tout le texte, les températures en *degrés Celsius* sont notées T .

On désire réguler la température d'une plaque de test (voir fig. 1) autour d'une température de consigne T_c , exprimée en degrés Celsius et réglable à volonté dans la plage $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ à $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Le capteur de température employé est une sonde au platine Pt_{100} .

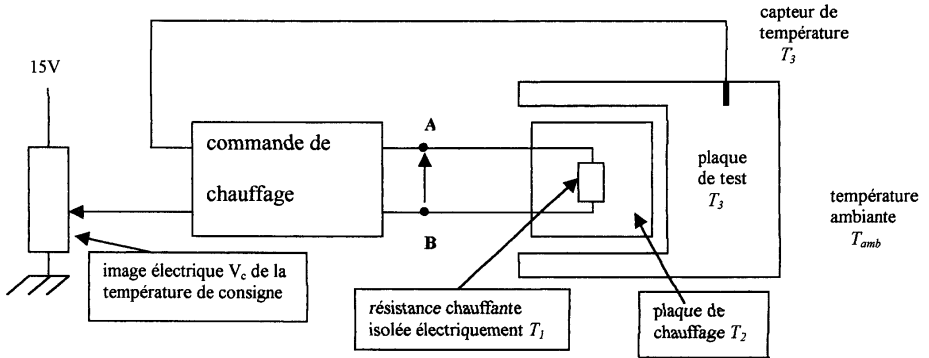


Figure 1

A. Première partie : Le capteur de température.

A.1. Réalisation technologique de la sonde.

A.1.1. La sonde Pt_{100} est réalisée en bobinant sur un mandrin, une longueur de 10 cm d'un fil cylindrique très fin de platine très pur, de résistivité $\rho = 10,6 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$, à la température de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. En utilisant la norme DIN 43760, donnée en annexe 1, calculer le diamètre du fil de platine à cette température.

A.1.2. Quel compromis préside au choix de la section et de la longueur ?

A.2. Résistance de platine.

A.2.1. Dans une plage de température de $-200\text{ }^{\circ}\text{C}$ à $650\text{ }^{\circ}\text{C}$, la valeur de la résistance d'un fil de platine très pur permet de définir sa température à moins de $0,1\text{ }^{\circ}\text{C}$ près, à partir de la formule de Calendar-Van Dusen :

$$\frac{R(T)}{R(0)} = 1 + \alpha \left[T - \delta \left[\frac{T-100}{100} \right] \frac{T}{100} - \beta \left[\frac{T-100}{100} \right] \left[\frac{T}{100} \right]^3 \right].$$

Développer cette expression à l'ordre deux pour l'identifier à :

$$\frac{R(T)}{R(0)} = 1 + AT + BT^2.$$

Expliciter les coefficients A et B.

A.2.2. En utilisant la norme DIN 43760, fournie en annexe 1, calculer les coefficients A et B, à l'aide des données relatives aux températures 20 °C et 100 °C.

A.2.3. Préciser les unités de ces coefficients.

A.2.4. Vu le domaine de température couvert par l'application envisagée, $T \in [0 \text{ °C}, 100 \text{ °C}]$, on utilisera par la suite une loi linéaire, vérifiée à mieux que 0,15 % près,

$$R(T) = R_{(0)}(1 + 3,85 \cdot 10^{-3} T).$$

En comparant cette expression à :

$$\frac{R(T)}{R_{(0)}} = 1 + AT + BT^2,$$

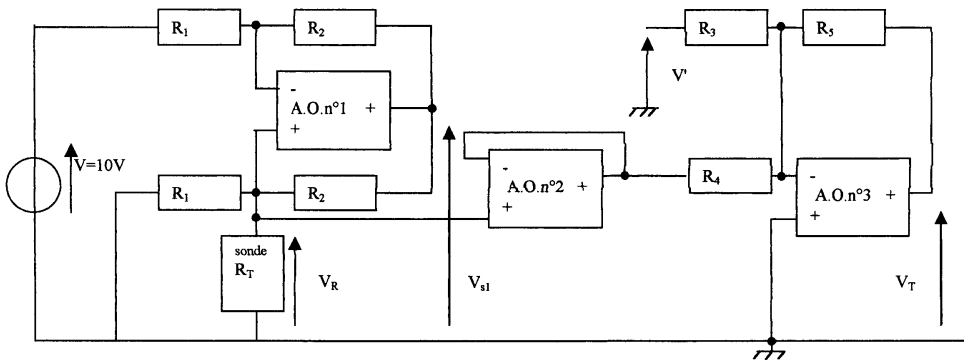
calculer le pourcentage d'écart entre les deux estimations. La précision de 0,15 % annoncée s'en trouve-t-elle justifiée ?

A.2.5. Citer une méthode de linéarisation utilisable pour ce capteur.

A.3. Mise en œuvre du capteur linéarisé.

Voir la figure 2 : la sonde est alimentée à courant d'intensité constante I et intégrée dans un dispositif électrique dont la tension de sortie V_T doit être proportionnelle à la température T, $V_T = kT$. Les amplificateurs opérationnels, alimentés entre - 15 V et 15 V, sont supposés idéaux.

A.3.1. Générateur de courant, voir figure 2.



$R_1=10k\Omega, R_2=1k\Omega, R_3=10k\Omega, R_4=1k\Omega, V=10V.$

Figure 2

A.3.1.1. Justifier que dans ce montage l'amplificateur opérationnel n° 1 fonctionne en régime linéaire.

A.3.1.2. Calculer en fonction de V et R_1 , la valeur de l'intensité du courant I parcourant la sonde. *Application numérique.*

A.3.1.3. Pourquoi a-t-on choisi de faire circuler un courant de faible intensité dans la sonde ?

A.3.1.4. La valeur de R_2 n'intervient pas dans le calcul de I; cependant, pourquoi est-il préférable, en général, de choisir $R_2 < R_1$ plutôt que $R_2 = R_1$?

A.3.1.5. Donner l'expression $V_r = f(T)$.

Applications numériques pour $T = 0 \text{ °C}$ et 100 °C .

A.3.2. Obtention de $V_T = kT$.

A.3.2.1. Quelle(s) fonction(s) l'amplificateur opérationnel n° 3 de la figure 2 réalise-t-il ?
Exprimer V_T en fonction de V_R et V' .

A.3.2.2. On souhaite qu'à $T = 0^\circ\text{C}$ la tension de sortie V_T soit nulle (condition n° 1).
Quelle relation existe-t-il alors entre V' , V_{R0} (valeur de V_R pour $T = 0^\circ\text{C}$),
 R_3 et R_4 ? *Application numérique* : calculer V' .

A.3.2.3. On veut réaliser la condition n° 2 : $V_T = 10\text{V}$ pour $T = 100^\circ\text{C}$. Quelle condition cela impose-t-il entre les deux résistances R_4 et R_5 ? Calculer la valeur de R_5 .

A.3.2.4. R_5 n'étant pas une valeur normalisée de la série E12, comment pourra-t-on la réaliser ?

A.3.2.5. Donner la sensibilité du capteur de température ainsi conditionné.

B. Deuxième partie : Commande de chauffage ; régulation de température en tout ou rien.

B.1. Étude du comparateur à hystérésis, amplificateur opérationnel n° 4 de la figure 3.

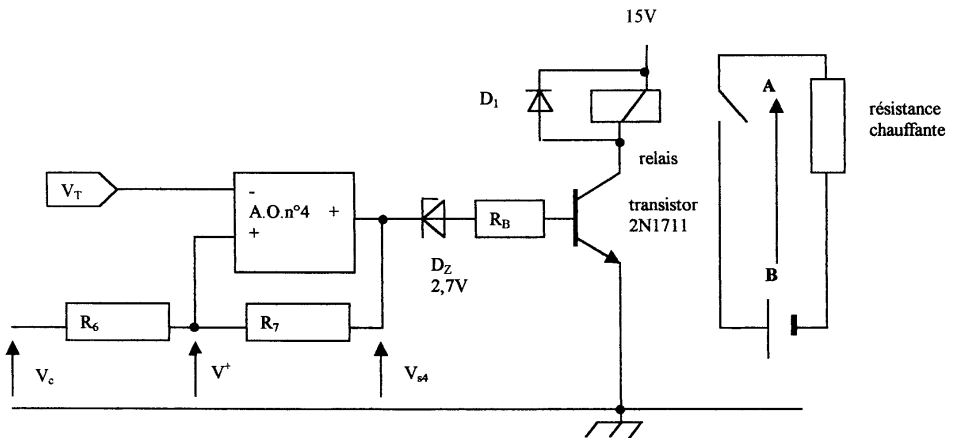


Figure 3

B.1.1. Expliquer pourquoi le dispositif de commande du transistor a été conçu autour d'un élément non linéaire (le comparateur à hystérésis), plutôt qu'à partir d'un élément linéaire.

B.1.2. Cet amplificateur opérationnel est **alimenté entre 0 et 15 V**. Les tensions de saturation obtenues en sortie sont $V_{sat1} = 1,5\text{V}$ et $V_{sat2} = 13,5\text{V}$. En faisant référence à la structure de l'étage de sortie du composant type TL081, justifier l'écart entre tensions d'alimentation et tensions de saturation.

B.1.3. La tension V_c est la tension de consigne ; calculer, en fonction de R_6 , R_7 , V_{sat1} , V_{sat2} et V_c la valeur des deux seuils de basculement V_b et V_h du comparateur à hystérésis. Comment sont situées ces valeurs de seuils par rapport à V_c quand $V_c \in [V_{sat1}, V_{sat2}]$?

B.1.4. Calculer l'écart entre les seuils $\Delta V = V_h - V_b$. Cet écart dépend-il de la consigne ?

B.1.5. On veut obtenir un écart $\Delta V = 0,3\text{V}$ avec une résistance $R_6 = 1\text{k}\Omega$: calculer R_7 .

B.1.6. Avec $V_c = 5\text{V}$, calculer les valeurs des seuils V_b et V_h . Tracer, dans ces conditions, la courbe donnant V_{s4} en fonction de V_T (tension de sortie de l'amplificateur opérationnel n° 3).

B.1.7. À quelles températures de consigne T_c extrêmes le dispositif peut-il faire face ?

B.2. Fonctionnement en boucle fermée.

B.2.1. La tension de consigne est fixée à $V_c = 5\text{ V}$. On suppose qu'à l'origine des temps le dispositif est à la température ambiante $T_{amb} = 20\text{ °C}$. Quelles sont alors les valeurs de V_T et V_{s4} ? Justifier l'état du transistor.

B.2.2. On donne ci-dessous quelques caractéristiques de deux relais et du transistor disponibles :

Relais	Tension nominale	Tension minimale	Tension maximale	Intensité nominale	Protection électrique
HE62	6 V	5,3 V	20 V	28 mA	IP40
HPJS112	12 V	8,4 V	18,8 V	30 mA	IP67

Transistor NPN	V_{ce} maximum	I_c maximum	h_{fe} minimum
2N1711	50 V	600 mA	100

Dimensionner la résistance R_g pour que le transistor fonctionne correctement en saturation. Quel est le meilleur choix de relais? Justifier la réponse.

B.2.3. À quoi fait référence l'indice de protection IPxx (voir dernière colonne du tableau des relais)? Quels sont les renseignements fournis par le premier et le second chiffre?

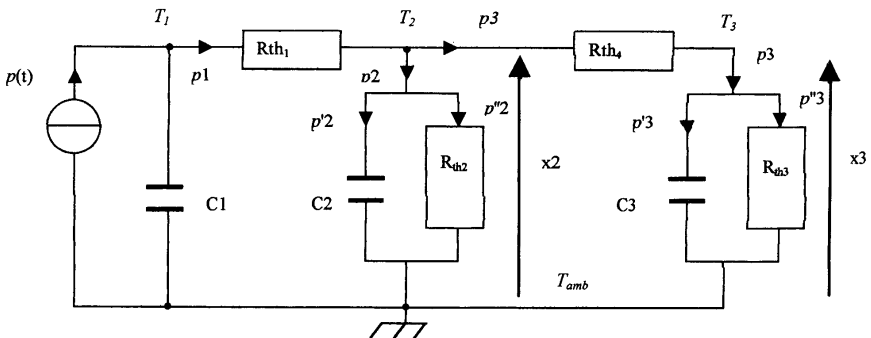
B.2.4. Quel est le rôle de la diode D_1 ?

B.2.5. Justifier la présence de la diode zéner.

B.2.6. On suppose $T_{amb} = 20\text{ °C}$ et $T_c = 50\text{ °C}$. Détailler le principe de fonctionnement de la régulation de température en boucle fermée.

C. Troisième partie : Élaboration d'un modèle thermique du processus de test.

Les températures des différents éléments sont notées sur la figure 1. L'alimentation fournit à la résistance chauffante la puissance électrique qui provoque son échauffement. On suppose que tous les points d'un même matériau sont, à un moment donné, à la même température. On propose un modèle à constantes localisées dont l'analogie électrique est donné figure 4.



$R_{th1} = 2\text{ K/W}$, $R_{th2} = 4\text{ K/W}$, $R_{th3} = 1\text{ K/W}$, $R_{th4} = 0,5\text{ K/W}$;
 $C1 = 50\text{ J/K}$, $C2 = 400\text{ J/K}$ et $C3 = 1000\text{ J/K}$.

Figure 4

C.1. Justification du modèle.

- C.1.1. Définir la grandeur thermique modélisée par R_{th3} . Donner son expression en fonction de T_{amb} , T_3 et p^{\prime}_3 .
- C.1.2. Définir la grandeur thermique modélisée par C_2 . Donner son expression en fonction de T_{amb} , T_2 et p^{\prime}_2 .
- C.1.3. Justifier l'homogénéité des unités fournies pour ces éléments (voir fig. 4); quelle sera l'unité des quantités $\tau_2 = R_{th2}C_2$ et $\tau_3 = R_{th3}C_3$? *Application numérique.*
- C.1.4. Reprendre et compléter le tableau des analogies entre grandeurs électriques et thermiques, fourni ci-dessous :

Grandeur électrique	Grandeur thermique
Différence de potentiel	
Intensité	
Résistance	
Capacité	

C.2. Établissement de la transmittante $H(p)$ du processus de test.

La température de la plaque de test T_3 , uniforme, varie en fonction du temps. La température ambiante, notée T_{amb} , est constante. On note $x_{2(t)}$ et $x_{3(t)}$, les différences de températures $(T_2 - T_{amb})$ et $(T_3 - T_{amb})$, dont les transformées de Laplace sont notées $X_{2(p)}$ et $X_{3(p)}$. La transformée de Laplace de la puissance reçue par la résistance de chauffage, $p_{(t)}$, est notée $P_{(p)}$. On cherche à établir la transmittance $H_{(p)} = \frac{X_{3(p)}}{P_{(p)}}$, représentant l'action de la puissance électrique sur la différence de températures $x_{3(t)}$.

- C.2.1. Écrire, en notation symbolique, les équations des branches et du nœud concernant les puissances thermiques p_1 , p_2 et p_3 .
- C.2.2. Exprimer $X_{2(p)}$ en fonction de $X_{3(p)}$, R_{th3} , R_{th4} et τ_3 .
- C.2.3. Vu son ordre de grandeur, on néglige dans un premier temps la capacité C_1 . Exprimer $P_{(p)}$ en fonction de $X_{2(p)}$, $X_{3(p)}$, τ_2 , τ_3 , R_{th2} et R_{th3} .
- C.2.4. En déduire la transmittance $H_{(p)}$ qu'on écrira sous la forme :

$$H_{(p)} = \frac{H_0}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Calculer les valeurs numériques de H_0 , m et ω_0 .

- C.2.5. Donner l'allure du diagramme de Bode de $\underline{H}(j\omega)$ (gain et argument).

C.3. Étude du système bouclé à l'aide de l'approximation du premier harmonique, voir figure 5.

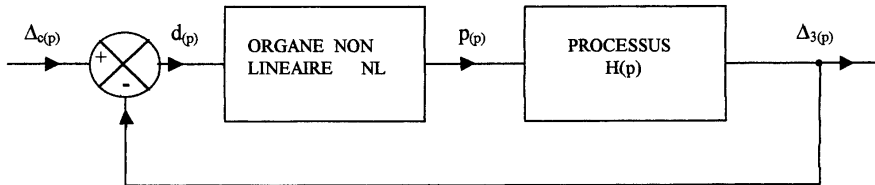


Figure 5

La commande de puissance est dépendante de la différence des températures $d = T_c - T_3$. Elle fonctionne en tout ou rien. Si la différence est positive, on fournit alors à la résistance chauffante P_{MAX} ; $p(t)$ est nulle dans le cas contraire.

C.3.1. On suppose une entrée sinusoïdale $d_{(t)} = D \cdot \sin \omega t$, au bloc NL. Représenter en correspondance temporelle $d_{(t)}$ et $p_{(t)}$. Calculer le fondamental $p_{1(t)}$ de $p_{(t)}$.

C.3.2. Qu'est-ce qui justifie, dans le montage, de ne garder que le fondamental de $p_{(t)}$?

C.3.3. Exprimer, en fonction de D et P_{MAX} , $NL_{1(j\omega)}$, transmittance du bloc d'entrée sinusoïdale $d_{(t)}$ et de sortie $p_{1(t)}$ ($p_{1(t)}$ étant le fondamental de $p_{(t)}$).

C.3.4. Stabilité du système bouclé simplifié, en ne tenant pas compte de C_1 .

C.3.4.1. À quelle condition le système bouclé de la figure 5, réduit à NL_1 et H , pourrait-il spontanément osciller, de manière sinusoïdale, indépendamment de la consigne?

C.3.4.2. Compte tenu des résultats des questions C.2.5. et C.3.2., la condition ci-dessus est-elle réalisable? Conclure sur la possibilité ou non d'oscillations spontanées.

C.3.5. Stabilité du système bouclé réel, en tenant compte de C_1 .

En annexe 2, on trouvera le diagramme de Bode du processus de test, tenant compte de C_1 .

C.3.5.1. Comment, à partir de ce document, peut-on obtenir l'ordre du processus :

a. à partir du gain seul ?

b. à partir de l'argument seul ?

C.3.5.2. Dédurre de ce document la valeur numérique de NL_1 amenant la condition définie à la question C.3.4.1.

C.3.6. Synthèse.

C.3.6.1. Avec $P_{MAX} = 300$ W, chiffrer D_{min} évitant toute oscillation sinusoïdale permanente.

C.3.6.2. Compte tenu de la définition de D (voir question C.3.1.), quelle excursion thermique crête à crête minimum faudra-t-il ?

C.3.6.3. En déduire le ΔV_1 minimum correspondant du dispositif non linéaire étudié partie B.

C.3.6.4. La valeur proposée à la question B.1.5., $\Delta V = 0,3$ V, risque-t-elle de provoquer l'oscillation ?

C.3.6.5. Quelle modification proposez-vous ?

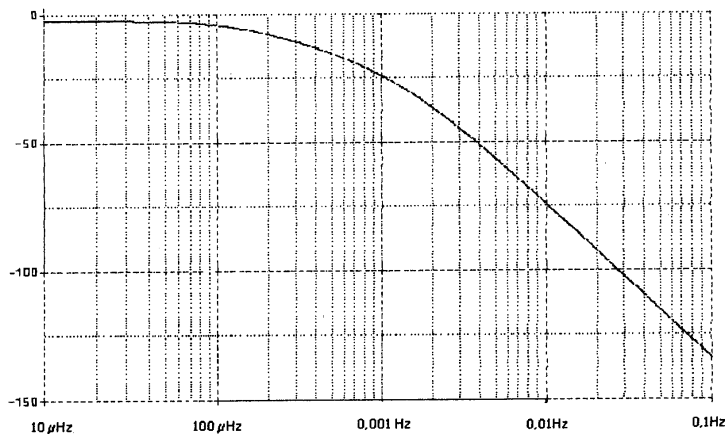
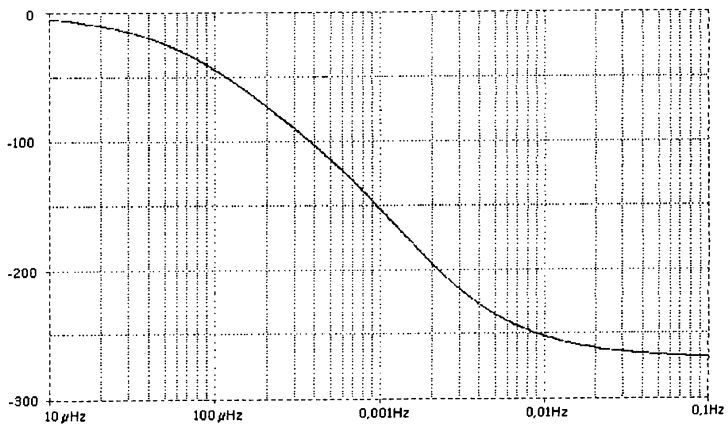
ANNEXE I

SONDE DE PLATINE

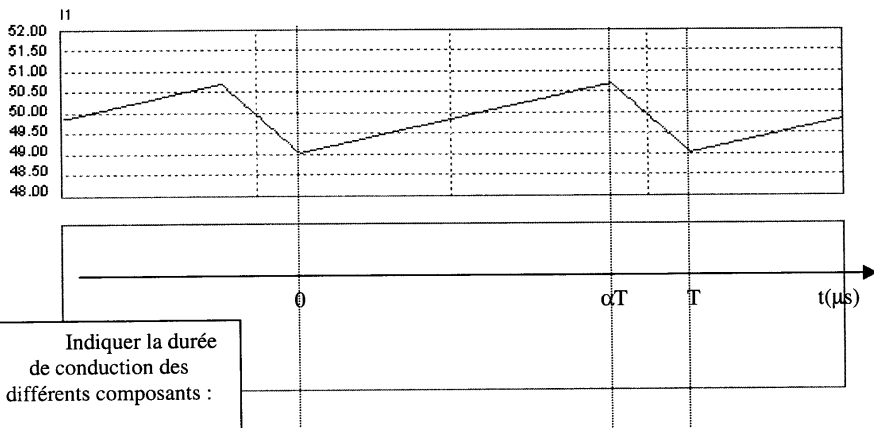
Résistance en fonction de la température, d'après la norme DIN 43760

°C	Ω	°C	Ω	°C	Ω
- 190	22,78	+ 60	123,24	+ 310	215,58
- 180	27,05	+ 70	127,07	+ 320	219,13
- 170	31,28	+ 80	130,89	+ 330	222,66
- 160	35,48	+ 90	134,70	+ 340	226,18
- 150	39,65	+ 100	138,50	+ 350	229,69
- 140	43,80	+ 110	142,28	+ 360	233,19
- 130	47,93	+ 120	146,06	+ 370	236,67
- 120	52,04	+ 130	149,82	+ 380	240,15
- 110	56,13	+ 140	153,57	+ 390	243,61
- 100	60,20	+ 150	157,32	+ 400	247,06
- 90	64,25	+ 160	161,05	+ 410	250,50
- 80	68,28	+ 170	164,76	+ 420	253,93
- 70	72,29	+ 180	168,47	+ 430	257,34
- 60	76,28	+ 190	172,16	+ 440	260,75
- 50	80,25	+ 200	175,84	+ 450	264,14
- 40	84,21	+ 210	179,51	+ 460	267,52
- 30	88,17	+ 220	183,17	+ 470	270,89
- 20	92,13	+ 230	186,82	+ 480	274,25
- 10	96,07	+ 240	190,46	+ 490	277,60
0	100,00	+ 250	194,08	+ 500	280,93
+ 10	103,90	+ 260	197,70	+ 510	284,25
+ 20	107,79	+ 270	201,30	+ 520	287,57
+ 30	111,67	+ 280	204,88	+ 530	290,87
+ 40	115,54	+ 290	208,46	+ 540	294,16
+ 50	119,40	+ 300	212,03	+ 550	297,43

ANNEXE 2

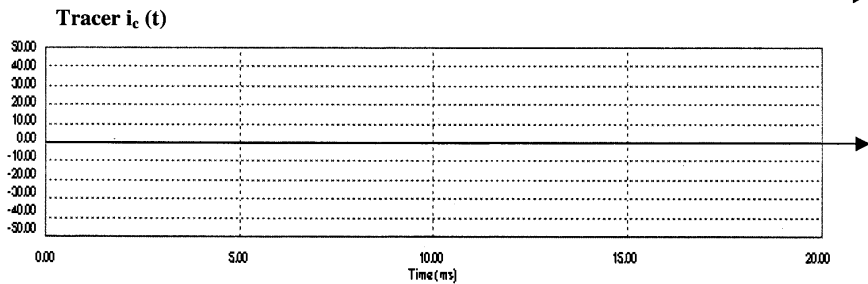
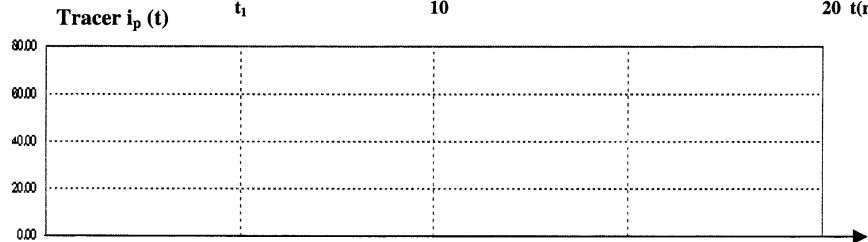
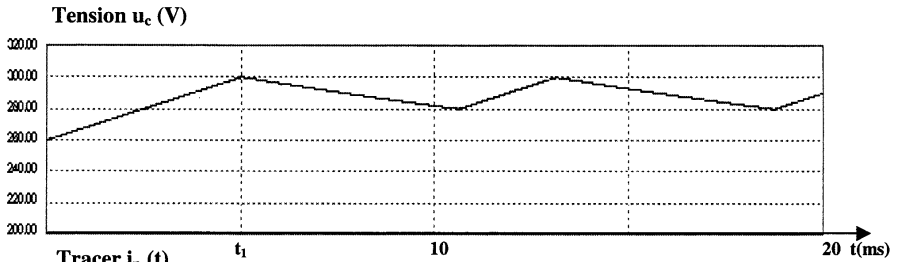
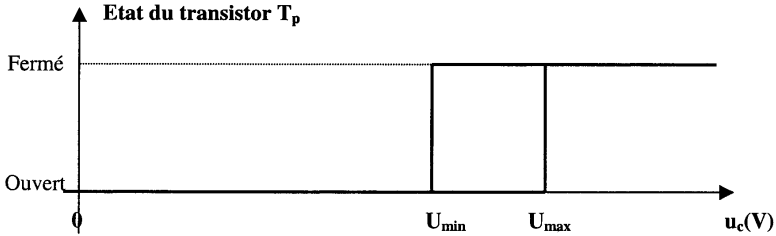
Courbe du gain en dB pour f variant de $10 \mu\text{Hz}$ à $0,1\text{Hz}$ Courbe de l'argument en degrés pour f variant de $10 \mu\text{Hz}$ à $0,1\text{Hz}$ 

Premier problème
Document réponse 1 (à rendre avec la copie)
à insérer à plat dans la copie, l'en-tête détachable en haut.

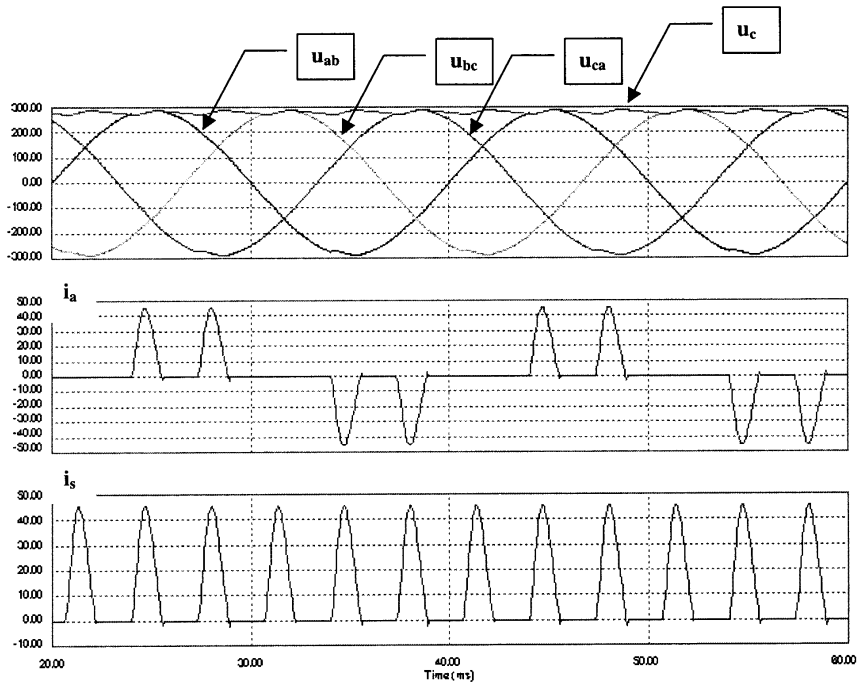


Indiquer la durée
de conduction des
différents composants :

Premier problème
Document réponse 2 (à rendre avec la copie)
à insérer à plat dans la copie, l'en-tête détachable en haut.



Premier problème
Document réponse 3 (à rendre avec la copie)
à insérer à plat dans la copie, l'en-tête détachable en haut.



**Indiquer
l'intervalle
de conduction
des 6 diodes**

1210-A

34921

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours interne
de recrutement de professeurs certifiés
et concours d'accès à l'échelle de rémunération**

section : physique et chimie

épreuve de physique et chimie

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Aucun document n'est autorisé.

Le sujet est constitué de deux parties indépendantes: **A (Physique)** et **B (Chimie)**

À l'intérieur de chaque partie, de nombreuses questions sont indépendantes les unes des autres.

Les données et les éléments d'informations sont en *italique*.

Le candidat est tenu d'indiquer clairement le numéro complet de chaque question devant sa réponse.

Avvertissement: Si, au cours de l'épreuve, un candidat repere ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Données concernant l'épreuve.

Physique

Constantes fondamentales :

- constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- charge élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

Données calorimétriques :

- chaleur massique de l'eau : $c_e = 4,18 \times 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- chaleur massique de la glace : $c_g = 2,10 \times 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- chaleur latente de fusion de la glace : $L_f = 335 \times 10^3 \text{ J.kg}^{-1}$
- masse volumique de l'eau : $\mu = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$

Données relatives au fer métallique :

- résistivité : $\rho_{Fe} = 9,80 \times 10^{-8} \text{ } \Omega.m$
- masse volumique : $\mu_{Fe} = 7,86 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
- masse molaire atomique : $M_{Fe} = 55,8 \times 10^{-3} \text{ kg.mol}^{-1}$

Chimie

TABLEAU 1 : conductivités ioniques molaires limites dans une solution aqueuse à 25°C

Ion (i) de charge (+e) ou (-e)	$\lambda_i^0 \text{ (S.m}^2.\text{mol}^{-1})$
H_3O^+	$3,498 \times 10^{-2}$
Ag^+	$6,19 \times 10^{-3}$
Na^+	$5,01 \times 10^{-3}$
HO^-	$1,986 \times 10^{-2}$
Cl^-	$7,63 \times 10^{-3}$
NO_3^-	$7,14 \times 10^{-3}$

TABLEAU 2 : pK_s à 25°C

Solide	pK_s
$AgCl$	9,75
Ag_2CrO_4	11,95

TABLEAU 3 : pK_A des couples acide / base étudiés, à 25°C

couples de la glycine	
$AH_2^{(+)} / AH^{(+,-)}$	$pK_{A1} = 2,4$
$AH^{(+,-)} / A^{(-)}$	$pK_{A2} = 9,7$

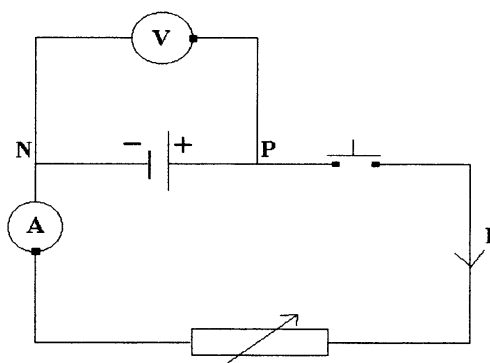
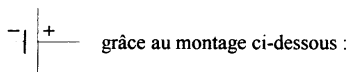
Partie A : PHYSIQUE

On se propose d'étudier quelques méthodes de mesures de la valeur de la résistance \mathcal{R} d'un conducteur ohmique noté R puis de s'intéresser à quelques considérations théoriques concernant la conduction électrique des métaux.

1. Réalisation d'un générateur idéal de tension.

1.1. Étude d'un pile électrochimique.

On réalise l'étude expérimentale d'une pile électrochimique, représentée par le symbole



On relève dans un tableau les valeurs de U_{PN} et de I :

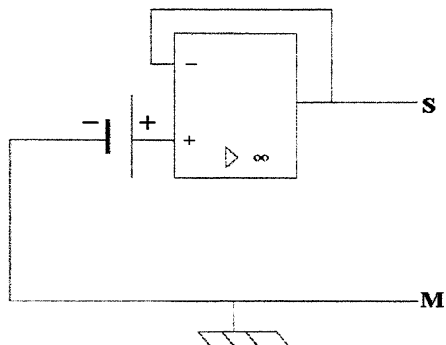
I (mA)	0,00	50,0	100	150	200	250	300	350
U_{PN} (V)	4,52	4,45	4,39	4,32	4,26	4,15	3,41	1,27

1.1.1. Quelle est l'utilité du bouton poussoir ?

1.1.2. Montrer que, lorsque l'intensité délivrée par le générateur est inférieure à une valeur maximale que l'on précisera, la pile peut être considérée comme un dipôle linéaire. Déterminer l'équation de sa caractéristique dans ce domaine, donner les valeurs numériques de sa force électromotrice « E » et de sa résistance interne « r ».

1.2. Montage avec amplificateur opérationnel.

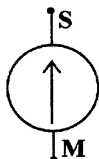
La pile précédente est insérée dans le montage ci-après :



L'amplificateur opérationnel est supposé idéal.

Montrer qu'on réalise ainsi entre S et M un générateur idéal de tension dont on précisera la valeur de la force électromotrice « E ».

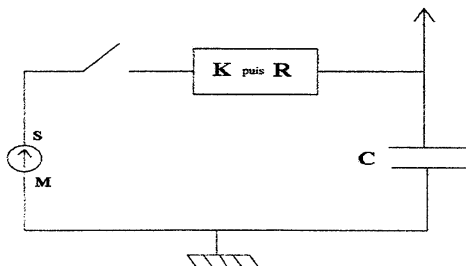
Dans toute la suite, ce générateur idéal sera représenté par le symbole ci-dessous :



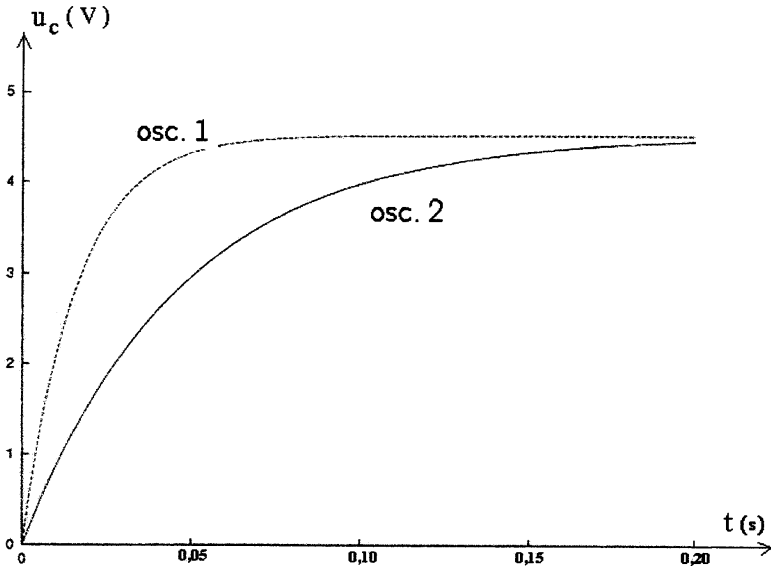
2. Mesure de la résistance \mathcal{R} d'un conducteur ohmique par une méthode électrocinétique.

Dans le circuit ci-dessous, C est un condensateur initialement déchargé de capacité C , K est un conducteur ohmique calibré de haute précision, de résistance $K = 220 \Omega$.

On branche aux bornes du condensateur C un oscilloscope à mémoire qui déclenche l'acquisition des mesures à la fermeture de l'interrupteur, c'est-à-dire à la date $t = 0$.



On obtient l'oscillogramme 1.



On ouvre ensuite le circuit, on décharge le condensateur, on remplace le conducteur ohmique K par le conducteur ohmique R de résistance \mathcal{R} , on ferme à nouveau l'interrupteur et on obtient l'oscillogramme 2.

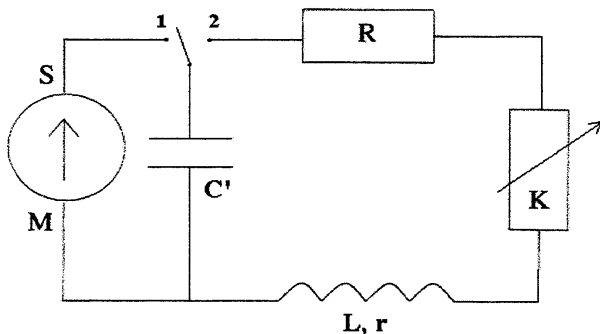
- 2.1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la tension u_c aux bornes du condensateur, que ce soit avec le conducteur ohmique K ou le conducteur ohmique R.
- 2.2. Dédire de l'équation précédente l'expression littérale de la fonction $u_c(t) = f(t)$; $t = 0$ correspondant à l'instant de fermeture de l'interrupteur.
- 2.3. On appelle τ la constante de temps du circuit. Donner son expression. Rappeler, en le démontrant, comment on peut lire la valeur de τ sur le graphique $u_c(t) = f(t)$
- 2.4. Dédire des deux oscillogrammes les valeurs de C et de \mathcal{R}

3. Mesure de la résistance \mathcal{R} d'un conducteur ohmique par recherche du régime critique.

Dans le montage suivant, formé de deux boucles ayant une branche commune comprenant un condensateur C' de capacité $C' = 2,2 \mu\text{F}$, on réalise d'abord la charge de ce dernier à l'aide du générateur idéal de tension (SM) en plaçant l'interrupteur à deux positions dans celle notée (1). Le condensateur étant chargé, on bascule ensuite cet interrupteur en position (2) afin de le décharger dans un circuit comprenant en série :

- le conducteur ohmique R de résistance inconnue \mathcal{R}
- un second conducteur ohmique K de résistance variable K permettant un réglage à l'ohm près.
- une bobine d'induction « L, r » dont on connaît les valeurs de l'inductance $L = 0,40\text{H}$ et de la résistance interne $r = 20 \Omega$

Un ordinateur permet de suivre l'évolution de la tension aux bornes du condensateur.



3.1. Lorsqu'on ferme le circuit de décharge du condensateur (interrupteur en position (2)), si la résistance K est suffisamment faible, on observe des oscillations d'un type particulier. Donner leur nom et tracer de façon succincte l'allure de la courbe donnant les évolutions de la tension $u_{C'}$ aux bornes du condensateur en fonction du temps.

3.2. Décrire brièvement dans ce cas les transferts d'énergie mis en jeu dans le circuit.

3.3. Si la valeur de la résistance K est forte, on se trouve en régime dit apériodique.

Il existe donc une valeur de la résistance K pour laquelle l'évolution de la tension aux bornes du condensateur est dite « critique », à la frontière entre les deux types de régimes évoqués précédemment.

L'acquisition des variations de la tension aux bornes du condensateur grâce à l'ordinateur disposant de logiciels de traitement informatique (édition de graphiques, obtention de dérivées mathématiques, de primitives, analyse spectrale, ...) permet une détermination très fine du régime critique.

Décrire comment l'utilisation de l'outil informatique permet cette très fine détermination du régime critique.

3.4. Le régime critique est obtenu pour la valeur $K=189\ \Omega$. L'étude théorique prévoit qu'il est atteint lorsque la résistance totale du circuit vaut :

$$R_{\text{tot}} = 2 \sqrt{\frac{L}{C'}}$$

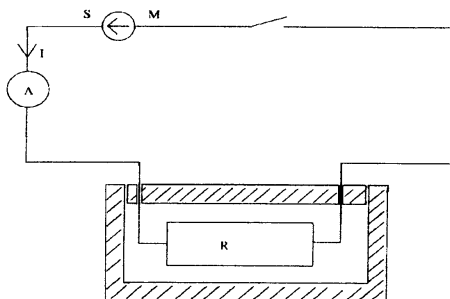
Vérifier l'homogénéité de cette expression et calculer la valeur de \mathcal{R}

4. Mesure de la résistance \mathcal{R} d'un conducteur ohmique par une méthode calorimétrique.

On dispose d'un calorimètre dont l'ensemble « cuve et accessoires » a une capacité thermique totale $C_{\text{th}}=120\ \text{J.K}^{-1}$. On verse dans le calorimètre un volume d'eau tiède de valeur $V=100,0\ \text{mL}$, et après quelques minutes, on mesure la température $\theta_1=17,0\ ^\circ\text{C}$.

On pèse un bloc de glace dont on relève avec précision la masse $m_g = 88,7\text{g}$ et la température $\theta_g = -20,0\ ^\circ\text{C}$ et on le plonge rapidement dans l'eau contenue dans le calorimètre.

- 4.1. Décrire brièvement le dispositif appelé calorimètre.
 4.2. Montrer qu'à l'équilibre thermique, la température à l'intérieur du calorimètre vaut $\theta_e = 0,0 \text{ }^\circ\text{C}$.
 Calculer la masse m' d'eau et la masse restante m'_g de glace dans le calorimètre à l'équilibre thermique.
 4.3. On plonge ensuite le conducteur ohmique R dans le liquide, et on réalise le circuit suivant :



A la date $t = 0$, on ferme le circuit, on mesure $I = 294 \text{ mA}$.

A la date $t = 7 \text{ min } 11 \text{ s}$, on constate la disparition totale de la glace.

En précisant les hypothèses faites pour le bilan énergétique, déterminer la valeur de la résistance \mathcal{R}

- 4.4. En justifiant soigneusement la réponse indiquer, parmi les trois méthodes de détermination de \mathcal{R} proposées, celle qui paraît la plus précise. Donner dans celle-ci une estimation numérique de l'incertitude relative sur la valeur de \mathcal{R} .

5. Etude de la conduction électrique des métaux.

- 5.1. Démontrer, par des arguments physiques simples, que la résistance d'un fil métallique cylindrique rectiligne homogène de longueur ℓ et de section S est proportionnelle à $\ell/S = \ell/\pi r^2$

- 5.2. On pose la relation $\mathcal{R} = \rho \ell/S$, ρ désignant la résistivité du métal.

On réalise une série de mesures de résistance pour de très longs fils cylindriques de fer, de structure homogène, tendus sur des pylônes et de rayons « r » différents.

Les résultats des mesures sont donnés en « ohms » dans le tableau ci-dessous :

r (mm)	5	2,2	1,5	1
ℓ (km)				
200	250	1285	2770	6250
150	185	960	2080	4680
100	125	640	1390	3120
10	12	65	140	310

Montrer par un ou plusieurs graphiques que les mesures sont en accord avec la relation proposée. Calculer ρ en précisant l'unité.

5.3. On admet que la conduction électrique d'un fil cylindrique peut être décrite de la manière suivante :

chaque atome du métal possède un électron libre ; le courant électrique est assimilé au mouvement d'ensemble d'un très grand nombre d'électrons, à une vitesse constante et uniforme v .

5.3.1. Soient μ la masse volumique du métal et M sa masse molaire exprimée, contrairement à l'habitude des chimistes, dans l'unité du système international $\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Déterminer l'expression littérale de la densité volumique δ des électrons libres, exprimée en m^{-3} .

5.3.2. Un courant d'intensité I traverse le fil cylindrique de section droite S .

Pendant la durée infinitésimale, dt , déterminer successivement :

- la distance dx dont a avancé le flot d'électrons libres
- le volume dV occupé par les électrons traversant la surface droite S du cylindre pendant cette durée
- le nombre dN d'électrons correspondant
- la valeur absolue de la charge $|dq|$ correspondante
- la valeur absolue de l'intensité $|I| = \frac{|dq|}{dt}$.

En déduire une relation liant I , e , δ , S et v .

5.3.3. Application numérique : calculer, dans le cas du fer, la valeur de δ .

En déduire celle de v pour une intensité de courant par section droite du fil

$$\frac{I}{S} = 10 \text{ A}\cdot\text{mm}^{-2}.$$

Quel commentaire peut-on faire concernant ce dernier résultat ?

PARTIE B : CHIMIE

Dans un métal, la conduction électrique est assurée par les électrons. En chimie, les réactions mettent souvent en jeu des solutions aqueuses ioniques conductrices du courant. Dans ce cas, les porteurs de charges mobiles sont les ions (cations et anions). On appelle conductimétrie l'étude de la conductivité des électrolytes, c'est à dire des solutions conductrices du courant. Si la réaction chimique s'accompagne d'une variation de la conductivité γ de la solution, on peut suivre cette réaction à l'aide d'un appareil appelé conductimètre. Un conductimètre est un ohmmètre qui donne la conductance G d'une portion de solution comprise entre deux plaques de platine de surface S et distantes de l : la conductance G est liée à la conductivité γ de la solution par la relation $G = \frac{\gamma}{K}$. On détermine la constante K à l'aide d'une solution étalon de conductivité connue.

On se propose d'étudier différents dosages et certaines réactions lentes à l'aide de cette méthode. On rappelle que la conductivité γ d'une solution aqueuse suffisamment diluée et contenant n espèces ioniques différentes, est donnée par la relation suivante : $\gamma = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^0 \cdot c_i)$, avec c_i concentration de l'ion (i) en solution et λ_i^0 conductivité ionique molaire limite (ou à concentration nulle) de l'ion (i).

1. Etude du solvant eau.

1.1. Structure de l'eau

Préciser la formule de Lewis de la molécule d'eau.

En déduire la géométrie de la molécule selon la méthode VSEPR.

1.2. L'eau, solvant polaire

1.2.1. Les liaisons chimiques qui existent dans la molécule d'eau sont polarisées ; quelle est l'origine de cette polarisation ?

1.2.2. Quelles sont les principales interactions entre les molécules d'eau ?

1.2.3. Si l'on approche une règle de plexiglas, électrisée par frottement, d'un mince filet d'eau s'écoulant d'un robinet, celui-ci est dévié. Interpréter cette expérience.

1.3. Conductivité de l'eau pure

Justifier le fait que la conductivité de l'eau pure n'est pas nulle.

Calculer la valeur théorique de la conductivité γ_0 de l'eau pure à l'aide des données extraites du tableau de données 1.

Comparer cette valeur théorique avec la mesure suivante réalisée sur une eau fraîchement distillée : $\gamma = 4,2 \times 10^{-4} \text{ S.m}^{-1}$.

Interpréter l'écart entre γ_0 et γ .

1.4. Electrolytes forts et électrolytes faibles.

On classe les électrolytes selon leur aptitude à se dissocier en solution aqueuse.

Rappeler ce qui distingue un électrolyte fort d'un électrolyte faible.

Dans quelle catégorie les acides suivants se classent - ils : acide chlorhydrique, acide éthanoïque (acétique) ? La réponse sera justifiée sommairement.

2. Application aux réactions autres que les réactions acide – base.

2.1. Réactions de précipitation

2.1.1. Solubilité du chlorure d'argent

On met en solution dans l'eau un composé peu soluble : le chlorure d'argent . On obtient une solution saturée en chlorure d'argent dont la conductivité est égale à $\gamma = 1,84 \times 10^{-4} \text{ S.m}^{-1}$.

2.1.1.1. Écrire l'équation de dissolution du chlorure d'argent .

Montrer que la mesure de la conductivité γ permet de déterminer la solubilité s du chlorure d'argent dans l'eau et de vérifier la valeur de pK_s donnée dans le tableau 2.

2.1.1.2. Quelle est la solubilité s' du chlorure d'argent dans une solution de nitrate d'argent de concentration $c = 2,0 \times 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$? Comparer s et s' .

2.1.2. Dosage conductimétrique d'une solution de sérum physiologique

Une solution de sérum physiologique est une solution aqueuse de chlorure de sodium. On prélève le volume $v_0 = 10,0 \text{ cm}^3$ de sérum physiologique que l'on place dans un becher et on ajoute $100,0 \text{ cm}^3$ d'eau distillée . On introduit la cellule conductimétrique et on verse une solution de nitrate d'argent de concentration connue $c = 1,00 \times 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ contenue dans une burette. On obtient la courbe de la figure N°1.

Ecrire l'équation de la réaction en faisant apparaître tous les ions présents.

Interpréter qualitativement l'allure de la courbe.

Déterminer le volume v_e versé à l'équivalence et en déduire c_0 la concentration en ions chlorure du sérum physiologique.

2.1.3. Comparaison avec le dosage par la méthode de Mohr

On peut déterminer la concentration en ions chlorure d'une solution de sérum physiologique en utilisant comme indicateur de fin de réaction les ions chromate CrO_4^{2-} . En effet, les ions chromate CrO_4^{2-} peuvent réagir avec les ions argent(I) pour donner un précipité de chromate d'argent de couleur rouge . Comme précédemment, on prélève le volume $v_0 = 10,0 \text{ cm}^3$ de sérum physiologique que l'on place dans un erlenmeyer et on ajoute 50 cm^3 d'eau distillée ainsi que 5 gouttes (soit $0,25 \text{ cm}^3$) d'une solution de chromate de potassium de concentration $c' = 2,0 \times 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$. On verse la solution de nitrate d'argent de concentration $c = 1,00 \times 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ contenue dans une burette. On obtient la coloration rouge pour le volume versé v'_e . Dans cette question, on se propose :

- de vérifier que tous les ions chlorure ont précipité lorsque la coloration rouge apparaît,
- de comparer les résultats des deux dosages .

2.1.3.1. Ecrire les équations des deux réactions de précipitation susceptibles de se produire lorsqu' on verse la solution de nitrate d'argent.

Exprimer les constantes de ces réactions ainsi que les concentrations initiales en ions chlorure $[\text{Cl}^-]_0$ et en ions chromate $[\text{CrO}_4^{2-}]_0$.

2.1.3.2. Le chromate d'argent est l'indicateur de fin de réaction ; la couleur rouge apparaît lorsqu' on a versé un volume $v'_e = 15,1 \text{ cm}^3$. En déduire c_0 , concentration en ions chlorure du sérum physiologique. Comparer avec le résultat de la question 2.1.2..

2.1.3.3. Montrer qu'il est légitime de considérer que pratiquement tous les ions chlorure ont réagi lorsque la couleur rouge apparaît, justifiant ainsi le rôle d'indicateur de fin de réaction pour le chromate d'argent.

2. 2. Réaction de saponification

On se propose de suivre par conductimétrie la cinétique de la réaction de saponification de l'éthanoate d'éthyle par l'hydroxyde de sodium.

2. 2. 1. Présentation de la réaction de saponification

Rappeler l'équation - bilan de la réaction de saponification de l'éthanoate d'éthyle par l'hydroxyde de sodium, ainsi que le mécanisme de cette réaction en mettant en évidence les sites électrophile et nucléophile des réactifs.

Quelles sont les caractéristiques principales de la réaction de saponification ?

2. 2. 2. Cinétique de la réaction de saponification

La cinétique de la réaction de saponification de l'éthanoate d'éthyle par l'hydroxyde de sodium est du second ordre : un par rapport à l'éthanoate d'éthyle et un par rapport à l'ion hydroxyde. Les réactifs sont initialement dans les proportions stoechiométriques.

On note :
 - c_0 la concentration initiale de chacun des réactifs,
 - x la concentration en ion éthanoate à la date t ,
 - k la constante de vitesse.

2. 2. 2. 1. Ecrire l'équation donnant la vitesse d'apparition de l'ion éthanoate .

Montrer que l'on peut en déduire la relation : $k \cdot t = \frac{1}{c_0} \cdot \left(\frac{x}{c_0 - x} \right)$.

2.2. 2. 2. On suit la réaction par conductimétrie .

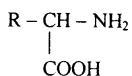
Etablir la relation entre γ_0 , γ_∞ , γ , x et c_0 , et en déduire que :
 $(\gamma - \gamma_\infty) / (\gamma_0 - \gamma) = 1 / k c_0 t$ avec γ_0 , γ_∞ , γ conductivités initiale, finale et à la date t .

2. 2. 2. 3. On mesure , à différentes dates, la conductivité γ d'une solution obtenue en mélangeant rapidement $V \text{ cm}^3$ d'éthanoate d'éthyle à $2,00 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ avec $V \text{ cm}^3$ d'hydroxyde de sodium de même concentration. Quelle courbe doit - on tracer pour déterminer la constante de vitesse k . En quelles unités peut - on exprimer cette constante k ?

3. Applications aux dosages acido - basiques

3. 1 . Cas d'une solution d' acide α - aminé

On se propose d'étudier quelques aspects de la chimie des acides α - aminés en solution aqueuse . On rappelle leur formule semi - développée plane :



3. 1. 1. Structure des acides α - aminés

Quelles sont les différentes fonctions chimiques présentes dans la molécule d'acide α - aminé ?

3. 1. 2. L'alanine est l'acide α - aminé le plus simple présentant un carbone asymétrique. Écrire sa formule semi développée et donner son nom en nomenclature systématique.

Représenter dans l'espace les différents stéréoisomères de l'alanine. Les nommer en utilisant la nomenclature officielle (R,S). Quelle relation stéréochimique y a - t - il entre eux?

En biochimie, on préfère utiliser la notation de Fischer pour ces molécules. Représenter les différentes molécules d'alanine à l'aide de cette notation. Préciser la correspondance entre les nomenclatures (L,D) et (R,S) pour l'alanine.

3. 1. 3. Dans les protéines naturelles, on rencontre la L-alanine. Après avoir rappelé la signification du mot lévogyre, préciser si l'on peut attribuer à cette molécule le caractère lévogyre.

3. 2. Étude d'une solution aqueuse de glycine

La glycine (ou acide-2-aminoéthanoïque) dissoute dans l'eau, se trouve essentiellement sous forme de zwitterion ou amphion $^+H_3N-CH_2-COO^-$ noté $AH^{(+,-)}$. On lui associe deux constantes d'acidité $pK_{A1} = 2,4$ (associée au groupe acide carboxylique) et $pK_{A2} = 9,7$ (associée au groupe amine).

3. 2. 1. Écrire les équilibres acido-basiques faisant intervenir l'eau et l'amphion.

3. 2. 2. Proposer un diagramme de prédominance des espèces intervenant dans les équilibres, en fonction du pH.

3. 2. 3. Établir la relation qui donne le pH d'une solution aqueuse de glycine de concentration égale à 0, 10 mol.L⁻¹; calculer la valeur de ce pH.

3. 3. Dosage d'une solution aqueuse de glycine en présence d'acide chlorhydrique

La glycine est dosée par l'hydroxyde de sodium, en présence d'acide chlorhydrique. On se propose de réaliser ce dosage en le suivant au conductimètre et au pHmètre. L'acide chlorhydrique est en excès par rapport à la glycine.

Dans un becher, on verse un volume $V_0 = 50,0 \text{ cm}^3$ de solution de glycine à environ 0, 1 mol.L⁻¹ et on ajoute un volume $V_a = 60,0 \text{ cm}^3$ d'acide chlorhydrique de concentration $c_a = 1,00 \times 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$.

On dose le mélange à l'aide d'une solution d'hydroxyde de sodium de concentration $c_b = 1,00 \text{ mol.L}^{-1}$ et on trace les courbes $\text{pH} = f(V)$ et $\gamma = f(V)$ où γ représente la conductivité de la solution et V le volume de la solution d'hydroxyde de sodium versé.

On obtient les courbes (qu'il sera utile d'identifier) de la figure N°2.

3. 3. 1. Indiquer quelles sont les espèces majoritaires dans la solution acidifiée de glycine avant l'ajout de la solution d'hydroxyde de sodium.

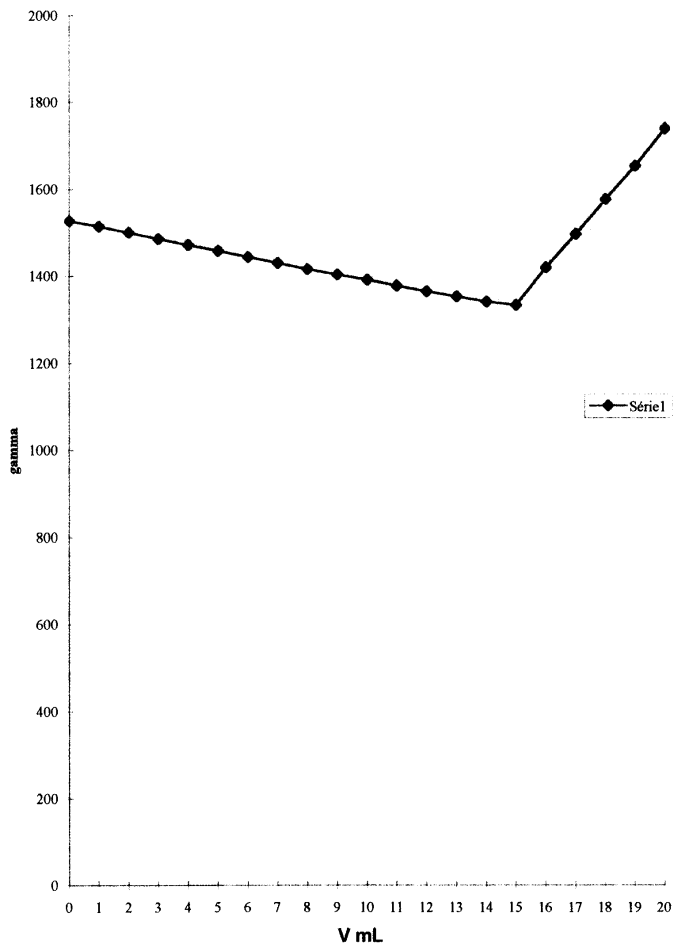
Écrire les équations des réactions qui se produisent si :

$0 < V < V_{e1}$ puis, si $V_{e1} < V < V_{e2}$ (V_{e1} et V_{e2} sont les points d'équivalence successifs repérés lors du dosage)

3. 3. 2. Montrer que la détermination des deux points d'équivalence permet de retrouver la quantité d'acide chlorhydrique introduite et de déterminer la concentration de la solution de glycine.

Figure N°1

dosage du sérum physiologique



1210-B

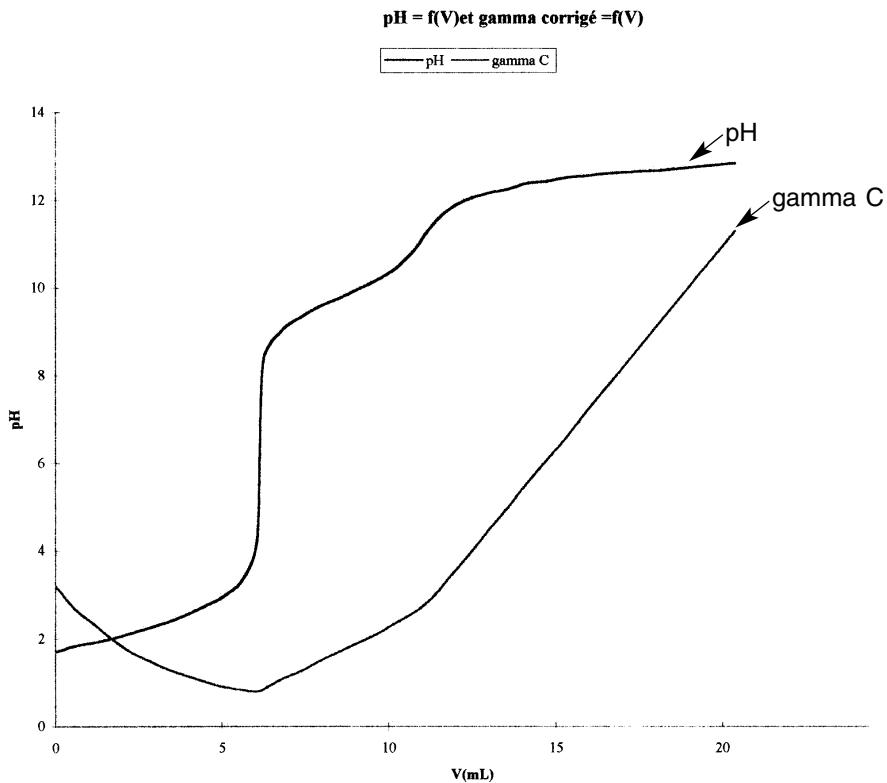


figure N°2

1211

35021

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2002

**concours interne
de recrutement de professeurs certifiés
et concours d'accès à l'échelle de rémunération**

**section : physique et
électricité appliquée**

épreuve de physique et électricité appliquée

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Aucun document n'est autorisé.

Avertissement aux candidats

Cette composition aborde trois thèmes : la physique, l'électrotechnique et l'électronique.

Les trois thèmes sont notés de façon similaire et il n'est pas nécessaire de traiter l'ensemble d'un thème pour y obtenir la note maximale.

Il sera accordé une importance significative aux qualités d'expression ainsi qu'à la présentation de la copie.

Le candidat est tenu d'indiquer clairement la numération complète de chaque question devant sa réponse.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

PHYSIQUE

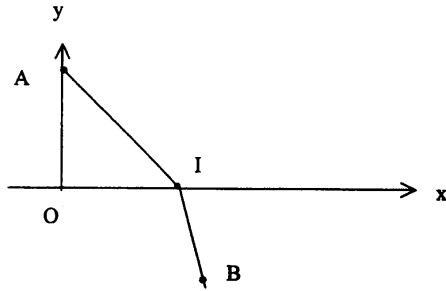
Ce sujet traite de divers aspects des fibres optiques. Aucune connaissance dans ce domaine n'est a priori nécessaire pour le traiter.

A. Autour de la loi de réfraction de la lumière.

1. Quelle est la trajectoire suivie par un rayon lumineux dans un milieu transparent homogène ? Citer l'analogie de cette loi en mécanique.
2. Définir la notion d'indice optique (ou de réfraction) d'un milieu transparent homogène. Donner l'ordre de grandeur de l'indice de l'air, de l'eau, du verre dans le domaine visible.
3. Énoncer les deux lois de Snell-Descartes pour la réflexion, et les deux lois correspondantes pour la réfraction des rayons lumineux.
4. On s'intéresse dans cette question au raisonnement qui amena Descartes aux lois qui portent son nom, publié dans le *Discours sur la Méthode* en 1637. Il fonde sa démonstration sur l'analogie avec le mouvement d'une balle de jeu de paume.
 - 4.1. *Lois de la réflexion* : considérons une balle qui frappe élastiquement une surface dure et impénétrable sous un angle d'incidence i , et faisons l'hypothèse que la seule interaction subie par celle-ci est une impulsion (force intense pendant une durée très brève) normale au mur au moment de l'impact. En déduire, à l'aide de théorèmes de la mécanique que l'on énoncera, la trajectoire après réflexion.
 - 4.2. *Lois de la réfraction* : considérons avec Descartes une balle qui pénètre dans un milieu mou (eau, sable...) et qui se trouve freinée tout en subissant une modification de trajectoire. On supposera là encore que la seule interaction subie par la balle a lieu au moment du franchissement de la surface de séparation et que l'impulsion correspondante est normale à celle-ci. En déduire la première et la deuxième loi de Descartes pour la réfraction, et montrer en particulier que le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction est égal à une constante que l'on exprimera en fonction des vitesses de la balle dans les deux milieux.
 - 4.3. *Commentaire* : toujours dans le cas du mouvement de la balle de l'air vers l'eau, faire un schéma mettant en évidence la réfraction de la trajectoire. Celle-ci s'écarte-t-elle ou se rapproche-t-elle de la normale au dioptré ? Montrer que, par analogie, Descartes est amené à considérer que la vitesse de la lumière (en transposant sa pensée en langage moderne) est plus grande dans un milieu matériel que dans l'air.
Soutenue par Newton, cette opinion prévaudra pendant tout le XVIII^e siècle, jusqu'à ce qu'elle soit démentie au XIX^e siècle par les expériences de Foucault et Fizeau.

5. Le principe de Fermat.

En désaccord avec le raisonnement de Descartes, et refusant en particulier son hypothèse sur le comportement de la vitesse de la lumière, Fermat propose de fonder la loi de la réfraction sur un énoncé simple : « la nature », dit-il en 1662, « suit toujours les voies les plus courtes ». Soit donc un rayon lumineux issu, dans un milieu transparent et homogène d'indice n_1 , d'un point A donné et se dirigeant vers un point B donné situé dans un milieu transparent et homogène d'indice n_2 . Soit I le point de contact du rayon sur le dioptré plan (xOy) séparant les deux milieux.

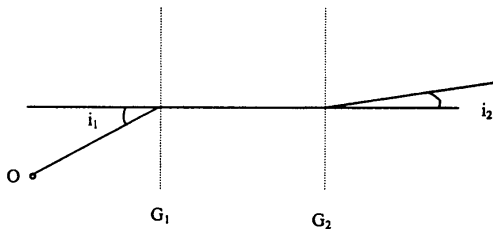


On introduit les coordonnées des points respectifs : $A(0, h_1)$, $B(l_2, h_2)$, $I(x, 0)$.

- 5.1. Déterminer la durée du trajet lumineux AIB , soit $t(x)$.
- 5.2. Déterminer l'équation dont est solution x_0 , abscisse du point I_0 , qui minimise ce temps de trajet conformément au principe de Fermat.
- 5.3. Montrer que cette équation est cohérente avec la relation de Snell-Descartes et avec l'hypothèse de Fermat concernant la vitesse de la lumière.

6. Application à l'optique électronique.

On considère une source à potentiel nul émettant des électrons au point O , avec une vitesse négligeable. Ces électrons pénètrent dans une région contenant deux grilles à mailles fines G_1 et G_2 respectivement portées aux potentiels V_1 et V_2 . On note i_1 l'angle d'incidence d'un électron sur G_1 et i_2 l'angle d'émergence sur G_2 .



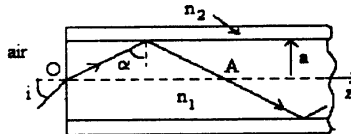
- 6.1. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.
- 6.2. Démontrer l'expression de l'énergie potentielle électrostatique d'un électron (charge $-e$, masse m) en un point où le potentiel est V .
- 6.3. En déduire l'expression des vitesses v_1 , v_2 sur les grilles G_1 et G_2 .
- 6.4. Déterminer alors la relation entre les angles i_1 , i_2 et les potentiels V_1 et V_2 . Quelle grandeur est l'analogue de l'indice optique ?
Application numérique : $i_1 = 10^\circ$; $V_1 = 1 \text{ kV}$; $V_2 = 2,5 \text{ kV}$. Calculer i_2 .
- 6.5. À votre connaissance, quelles applications découlent de ces propriétés et que recouvre le terme d'optique électronique ?

B. Application aux fibres optiques.

Avec plus de 10 millions de kilomètres fabriqués par an, les fibres optiques, dont les propriétés découlent en partie des lois de Descartes, constituent une technologie très répandue et performante de transmission de l'information dans le domaine des télécommunications, des vidéocommunications et des liaisons industrielles.

1. Fibre optique multimode à saut d'indice.

C'est le type le plus simple de fibre optique. Prenons le cas d'une fibre cylindrique, d'axe Oz, constituée d'un cœur transparent homogène généralement constitué de silice, de rayon a , d'indice de réfraction n_1 , entouré d'une gaine, elle aussi transparente homogène dont l'indice de réfraction est $n_2 < n_1$. On définit l'ouverture numérique (ON) de la fibre par $ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.



- 1.1. On considère un rayon émis dans l'air (indice optique égal à 1), et pénétrant dans la fibre en un point O situé sur l'axe. Montrer que l'angle α doit être supérieur à une valeur que l'on exprimera en fonction de n_1 et n_2 pour qu'il y ait réflexion totale des rayons sur la gaine, et non réfraction.
- 1.2. En déduire l'expression de l'angle d'incidence maximal, dit angle d'acceptance, à l'entrée de la fibre en fonction de l'ouverture numérique ON.

Application numérique : $n_1 = 1,5$; $ON = 0,17$. Calculer l'angle d'acceptance et la valeur minimale de α .

- 1.3. La diffusion et l'absorption de lumière induisent le long de la fibre une atténuation de la puissance du signal, que l'on calcule usuellement en dB/km.

Application : on dispose d'une fibre optique d'atténuation 1,75 dB/km à la longueur d'onde de 1300 nm. Le couplage de cette fibre avec une source lumineuse de 1 mW entraîne une perte de 1 dB. Sur quelle distance peut-on transmettre le signal si l'on dispose d'un récepteur nécessitant une puissance minimale de 0,1 mW ?

- 1.4. La fibre à saut d'indice est capable de guider un ensemble varié de rayons, tels que l'angle d'incidence soit compris entre 0 et l'angle d'acceptance. Ces différentes trajectoires engendrent des temps de parcours différents.

1.4.1. On envoie à l'entrée d'une fibre de longueur L une impulsion lumineuse quasi instantanée. Déterminer la largeur maximale τ de l'impulsion détectée en sortie, définie comme la différence de temps de propagation entre le trajet le plus long et celui le plus court, en fonction de L, des indices n_1 et n_2 , de la célérité c de la lumière dans le vide.

Application numérique : $n_1 = 1,5$; $ON = 0,17$; $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: calculer la dispersion modale $\delta = \tau/L$, en ns/km.

- 1.4.2. On envoie maintenant une salve d'impulsions brèves séparées par une période T. Déterminer la valeur minimale de T pour qu'il n'y ait pas brouillage du signal à la sortie de la fibre. On pourra prendre comme critère que deux impulsions sont résolues en sortie si elles sont distantes d'au moins le double de leur largeur.

On définit la bande passante d'une fibre $B = 1/T_{\min}$. Montrer que le produit longueur x bande passante est une constante caractéristique de la fibre. Calculer sa valeur pour les données numériques précédentes, en MHz · km.

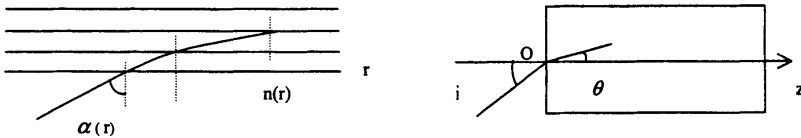
- 1.4.3. On assiste actuellement au développement de la modulation numérique, grande consommatrice de bande passante et donc particulièrement bien adaptée aux capacités de transmission considérables offertes par les fibres optiques. Exprimé en bits par seconde, il faut un débit minimal de :

- 64 kbit/s pour une liaison téléphonique de haute qualité ;
- 1 Mbit/s ou plus pour un canal son stéréophonique ;
- 70 à 140 Mbit/s pour un canal de télévision classique ;
- 140 Mbit/s pour une transmission d'images animées à très haute définition.

En supposant que la portée d'une liaison ne dépend que de la dispersion modale de la fibre, déterminer le type de transmission pour laquelle la fibre précédente est bien adaptée dans le cas d'une liaison courte (immeuble à immeuble) et d'une liaison locale (quelques kilomètres). Discuter.

2. **Fibre multimode à gradient d'indice.**

Les fibres à saut d'indice, du fait de leur faible bande passante et de leur assez forte atténuation, sont essentiellement réservées aux transmissions sur des courtes distances. Pour les télécommunications à moyenne distance ou les réseaux informatiques, on utilise préférentiellement les fibres à gradient d'indice. Dans le cœur, l'indice optique varie continûment en fonction de la distance r à l'axe de la fibre, suivant la loi $n(r) = n_1 (1 - \Delta r^2/a^2)$, où $\Delta = (n_1 - n_2)/n_1$.



On considère un rayon lumineux entrant dans la fibre par un point O situé sur l'axe de la fibre ($r = 0$). Soit θ l'angle initial de la trajectoire après pénétration dans la fibre.

- 2.1. Montrer que le rayon lumineux est contenu dans le plan radial formé par l'axe de la fibre et le rayon incident et que sa trajectoire obéit à la relation : $n(r) \sin \alpha(r) = K$, où K est une constante que l'on exprimera en fonction de n_1 et de θ .
- 2.2. Déterminer l'équation différentielle dont est solution la trajectoire $r(z)$ du rayon lumineux, en fonction de $n(r)$ et des constantes appropriées. On remarquera que $\tan \alpha = dz/dr$.
- 2.3. En utilisant le fait que $\Delta \ll 1$, simplifier l'équation précédente et en déduire que la trajectoire du rayon lumineux obéit à l'équation différentielle : $\frac{d^2r}{dz^2} + 2 \frac{\Delta}{\cos^2 \theta} \frac{r}{a^2} = 0$.
- 2.4. En déduire l'équation complète $r(z)$ de la trajectoire du rayon lumineux, en fonction de a , Δ et θ .
- 2.5. Montrer que le rayon lumineux coupe l'axe Oz en des points régulièrement espacés ; déterminer la distance d séparant deux points consécutifs en fonction de a , Δ et θ .
- 2.6. Montrer que l'angle i à l'entrée de la fibre doit rester inférieur à une valeur i_0 que l'on exprimera en fonction de n_1 et Δ pour qu'il y ait propagation.

Application numérique : calculer i_0 pour $n_1 = 1,46$ et $\Delta = 10^{-3}$.

Du fait de la bonne focalisation de cette fibre, on arrive à obtenir avec cette technologie des bandes passantes de l'ordre de $500 \text{ MHz} \cdot \text{km}$.

ÉLECTRONIQUE

Le problème proposé comporte deux parties totalement indépendantes.

Il concerne l'étude de quelques fonctions d'un récepteur FM.

La première partie s'intéresse à la transmission d'un signal stéréophonique.

La seconde partie concerne l'étude du contrôle automatique du volume.

Les figures se trouvent pages 10 à 13.

PARTIE A

La transmission de l'information stéréophonique nécessite d'une part un codage de l'information au niveau de l'émetteur puis un décodage au niveau du récepteur.

I. Étude générale de la transmission stéréophonique.

1.1. Codage de l'information.

Le schéma synoptique du système de codage est représenté figure 1.

Le signal stéréophonique à transmettre est constitué de $L(t)$ (left = gauche) et $R(t)$ (right = droit).

Ces deux signaux ont été filtrés de manière à limiter leur largeur spectrale à 15 kHz.

L'encombrement spectral de chacun de ces signaux est représenté figure 2.

L'oscillateur pilote fournit le signal : $u(t) = \cos 2\pi f_p t$. La fréquence pilote f_p est égale à 19 kHz.

Le doubleur de fréquence fournit le signal $u'(t) = \cos 2\pi 2 f_p t$.

Le coefficient du multiplieur est égale à $1 V^{-1}$.

I.1.1. Donner l'expression de chacun des signaux $e_1(t)$, $e_2(t)$ et $e_3(t)$ en fonction de $R(t)$ et $L(t)$.

I.1.2. Donner l'expression analytique de $m(t)$ en fonction de $L(t)$ et $R(t)$.

I.1.3. Justifier que l'encombrement spectral du signal $m(t)$ est celui représenté figure 4. (On justifiera les amplitudes ainsi que les fréquences représentées.)

$$\text{Rappel : } \sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot (\sin(a + b) + \sin(a - b)).$$

1.2. Décodage de l'information.

Le schéma synoptique du décodeur est représenté figure 3.

I.2.1. Q_1 est un filtre passe-bande idéal : $f_{i1} = 23$ kHz et $f_{s1} = 53$ kHz.

Q_2 est un filtre passe-bande idéal : fréquence d'accord $f_{o2} = 19$ kHz, $B_{p-3dB} = 4$ kHz.

Montrer que $s_1(t) = (L(t) - R(t)) \cos 2\pi 2 f_p t$ et $s_2(t) = \cos 2\pi f_p t$.

I.2.2. Q_3 est un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_{c3} = 15$ kHz.

Déterminer $s_3(t)$.

I.2.3. Le doubleur de fréquence est identique à celui de la partie I.1. $s_4(t) = \cos 2\pi 2 f_p t$.

Le schéma de principe du démodulateur synchrone est représenté figure 5.

I.2.3.1. Déterminer l'expression de $s_5(t)$.

I.2.3.2. Représenter l'encombrement spectral de $s_5(t)$.

$$\text{Rappel : } \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}.$$

I.2.3.3. On désire que $s_6(t) = \frac{1}{2} (L(t) - R(t))$. Préciser les caractéristiques du filtre utilisé dans le démodulateur synchrone.

I.2.4. Déterminer $s_7(t)$.

Montrer alors que $s_8(t) = L(t)$ et $s_9(t) = R(t)$.

II. Étude structurelle de quelques fonctions utilisées lors de la transmission.

II.1. Étude de l'oscillateur pilote de l'émetteur.

Le schéma de l'oscillateur est représenté figure 6.

L'amplificateur opérationnel est parfait.

On désire que la tension $v(t)$ fournie par l'oscillateur vérifie $v(t) = 2 \cos(2\pi 19\,000 t) = 2 u(t)$.
(Le signal $u(t)$ est obtenu par atténuation par 2 de $v(t)$).

La caractéristique de sortie du TEC utilisé est représenté figure 7.

Le régime de fonctionnement est tel que V_{DS} reste inférieure à la tension de pincement $V_p = 3 V$.

Le dipôle drain-source est alors équivalent à une résistance R_{DS} dont la valeur est fonction de la tension $U_G (= -V_{GS})$.

On admettra que R_{DS} est définie comme suit :

$$U_G < V_p, R_{DS} = \frac{R_0}{1 - \frac{U_G}{V_p}} \text{ avec } R_0 = 300 \Omega .$$

$$U_G \geq V_p, R_{DS} \text{ est infinie.}$$

II.1.1. Étude de l'amplificateur (fig. 8).

Établir l'expression de $A = \frac{v}{v_1}$ en fonction de R_1 , R_2 et R_{DS} lorsque $U_D < V_{DS}$.

Comment varie l'amplification en fonction de U_G ?

II.1.2. Étude de $v_1(t)$ (fig. 9).

II.1.2.1. Montrer que $i = \frac{C}{a} \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{aR}$.

II.1.2.2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $v_1(t)$.

II.1.2.3. Montrer que cette équation différentielle est du type : $\ddot{v}_1 + 2m'\omega_0' \dot{v}_1 + \omega_0'^2 v_1 = 0$.

Exprimer m' en fonction de A et a ainsi que ω_0' en fonction de R et C .

II.1.3. Étude de l'oscillateur.

Pour quelle valeur de m' , le signal $v_1(t)$ est-il sinusoïdal ?

Quelle est alors sa fréquence ?

Quelle est alors la relation vérifiée par a , R_1 , R_2 et R_{DS} ?

II.1.4. Étude de la tension de commande U_G (fig. 10).

On prendra la tension seuil de la diode égale à 0,6 V.

La constante de temps $R'C'$ est bien supérieure à la période de $v(t)$.

À l'instant $t = 0$, $U_G = 0 V$. On notera \hat{V} la valeur maximale de $v(t)$, $\hat{V} = 2 V$.

Étudier le fonctionnement du circuit.

Tracer sur la copie en concordance de temps les variations de $v(t)$ et $u_{C'}(t)$.

Montrer que $U_G = \hat{V} - 0,6 V$.

II.1.5. Étude de l'amplitude des oscillations.

$R_2 = 20 k\Omega$, $R_1 = 3,6 k\Omega$.

II.1.5.1. Déterminer la valeur de R_{DS} lorsque le signal $v(t)$ désiré est fourni par l'oscillateur.
À partir de la relation établie au II.1.3., déterminer la valeur de a .

II.1.5.2. On suppose que l'amplitude de $v(t)$ augmente.
Comment varient U_G ? R_{DS} ? A ? l'amplitude de $v(t)$?
Même question si l'amplitude de $v(t)$ diminue.
Conclusion.

II.1.6. Validité de l'étude.

II.1.6.1. Le système étant au repos, $v(t) = 0$ V.

Que valent alors R_{os} ? A ? m' ?

À partir de l'équation différentielle établie précédemment, justifier que le système est instable et que les oscillations peuvent effectivement apparaître.

II.1.6.2. Montrer que l'hypothèse $V_{os} < V_p$ est vérifiée lors du fonctionnement de l'oscillateur.

II.2. Étude des filtres passe-bande du récepteur.

Le schéma des filtres est représenté figure 11.

Les amplificateurs opérationnels sont parfaits.

On étudie le circuit en régime harmonique.

II.2.1. Fonction de transfert.

II.2.1.1. Exprimer \underline{V}_4 en fonction de \underline{V}_3 et \underline{V}_5 .

II.2.1.2. Exprimer \underline{V}_5 en fonction de \underline{V}_4 .

II.2.1.3. Montrer que la transmittance vérifie :
$$\underline{T} = \frac{\underline{V}_4}{\underline{V}_3} = \frac{-1}{1 + \frac{R_3}{Z_{C1}} + \frac{R_3}{R_4} \cdot Z_{C1}}$$

$$\text{Mettre } \underline{T} \text{ sous la forme } \underline{T} = \frac{-1}{1 + jQ_0 \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)}$$

Préciser l'expression de Q_0 et f_0 en fonction de R_3 , R_4 et C_1 .

II.2.2. Étude de l'amplification.

II.2.2.1. Exprimer T .

II.2.2.2. Établir l'expression des fréquences de coupure à -3 dB, f_i et f_s en fonction de f_0 et Q_0 .

En déduire que la largeur de la bande passante à -3 dB vérifie : $B_{p-3dB} = \frac{f_0}{Q_0}$ et que $f_0 = \sqrt{f_i \cdot f_s}$.

II.2.3. Application.

Les deux filtres passe-bande du récepteur sont réalisés suivant la même structure. (Partie A, II.2.1.).

Pour les deux filtres, la valeur de la capacité du condensateur C_1 est égale à $1nF$.

Déterminer pour chacun des deux filtres la valeur des résistances R_3 et R_4 permettant de répondre au cahier des charges. (On notera ces résistances R_{3i} et R_{4i} avec $i = 1$ à 2).

PARTIE B

Il est souhaitable que le niveau sonore de l'information reçue soit constant pour l'utilisateur quelle que soit la station sélectionnée. Aussi, le récepteur est équipé d'un système de contrôle automatique du volume CAV.

Le schéma synoptique du CAV est représenté figure 12.

I. Principe de fonctionnement.

L'amplification de l'amplificateur contrôlé vérifie $A_{v0} = \frac{K}{1 + \exp\left(\frac{V_{CAV}}{V_T}\right)}$ (voir Partie B, II.2.4).

À partir du schéma synoptique, analyser le principe de fonctionnement du CAV.

II. Étude structurelle du CAV.

II.1. Étude du redresseur.

Le schéma du redresseur est représenté figure 13.

En régime linéaire, l'amplificateur opérationnel peut être remplacé par son modèle équivalent représenté figure 14 de caractéristiques :

Impédance d'entrée différentielle infinie, impédance de sortie nulle et amplification différentielle Ad .

$R'_1 = 20 \text{ k}\Omega$, $R'_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $R'_3 = 30 \text{ k}\Omega$.

II.1.1. La tension v_6 est négative :

II.1.1.1. On suppose D_1 bloquée.

Quel est le mode de fonctionnement de l'amplificateur opérationnel ?

Exprimer v_7 puis e_d en fonction de v_6 .

Déterminer v'_7 . En déduire que l'hypothèse D_1 bloquée est fautive.

II.1.1.2. D_1 passante.

Donner le schéma équivalent au montage en remplaçant l'amplificateur opérationnel par son modèle.

Exprimer e_d en fonction de v_6 et v_7 .

Exprimer v_7 en fonction de e_d et u_d , tension seuil de la diode.

Déduire de ces résultats v_7 en fonction de v_6 et u_d .

Sachant que $Ad = 10^6$, déterminer V_7 en fonction de v_6 .

II.1.2. La tension v_6 est positive :

D_1 bloquée :

Déterminer v_7 en fonction de v_6 .

II.1.3. Tracer la caractéristique de transfert $v_7 = f(v_6)$.

II.2. Étude de l'amplificateur contrôlé.

Le schéma de principe de l'amplificateur contrôlé est représenté figure 15.

L'intensité du courant I_{c3} est constante.

Les trois transistors utilisés sont supposés identiques (même $\beta \gg 1$).

Le schéma équivalent d'un transistor pour les petits signaux est représenté figure 16.

On note I_{bi} , V_{BEi} les grandeurs de polarisation, i_{bi} , v_{BEi} les petites variations des grandeurs i_{bi} , v_{BEi} autour de leurs valeurs de repos : $i_{bi} = I_{bi} + i_{bi}$.

On admettra que pour chaque transistor, la tension V_{BEi} est liée au courant de collecteur I_{ci} par la

relation : $V_{BEi} = V_T \ln \frac{I_{ci}}{I_s}$ dans laquelle V_T et I_s sont des constantes pour une température donnée.

On rappelle aussi que $r_i = \beta \frac{V_T}{I_{ci}}$.

Aux fréquences d'utilisation, le schéma équivalent du montage pour les petites variations $v_e(t)$ est représenté figure 17.

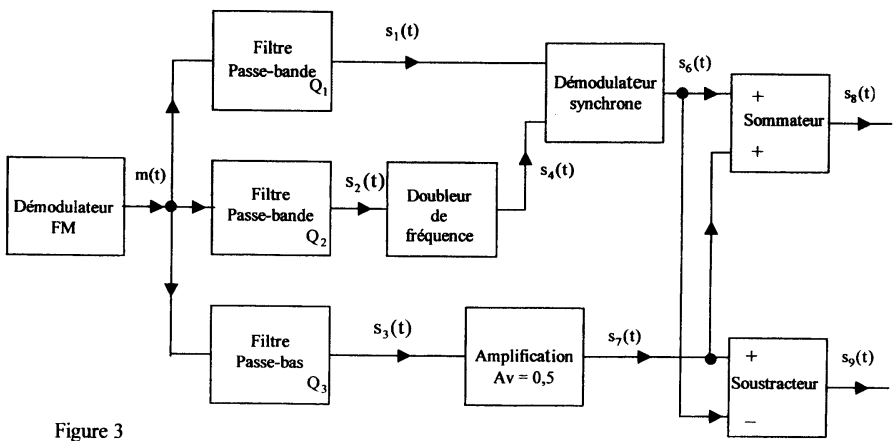
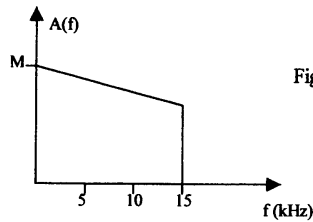
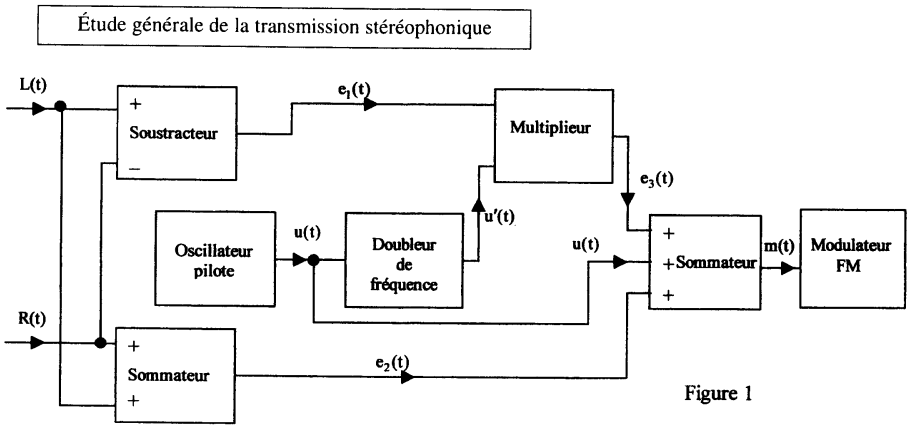
II.2.1. Montrer que l'amplification dynamique du montage vérifie : $A_v = \frac{v_s}{v_e} = \frac{-R_a \beta r_1}{r_3(r_1 + r_2)}$.

II.2.2. Exprimer I_{c3} en fonction de I_{c1} et I_{c2} . En déduire l'expression de r_3 en fonction de r_1 et r_2 .

Établir alors l'expression de A_v en fonction de I_{c2} .

II.2.3. Exprimer I_{c1} et I_{c2} en fonction de I_s , V_{CAV} et V_A potentiel du point A. En déduire l'expression de I_{c3} en fonction de I_{c2} et V_{CAV} .

II.2.4. Montrer que l'amplification du montage vérifie : $A_v = \frac{-R_a I_{c3}}{V_T \left(1 + \exp \frac{V_{CAV}}{V_T} \right)}$.



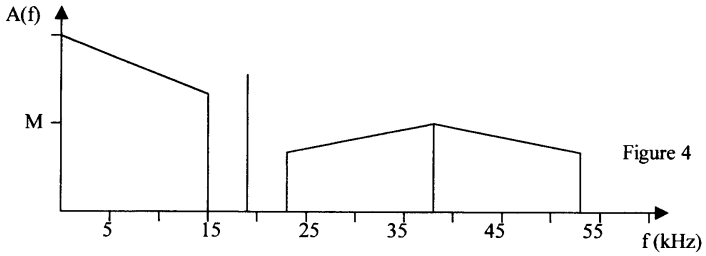


Figure 4

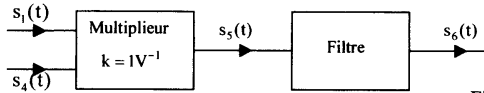


Figure 5

Etude de l'oscillateur pilote de l'émetteur

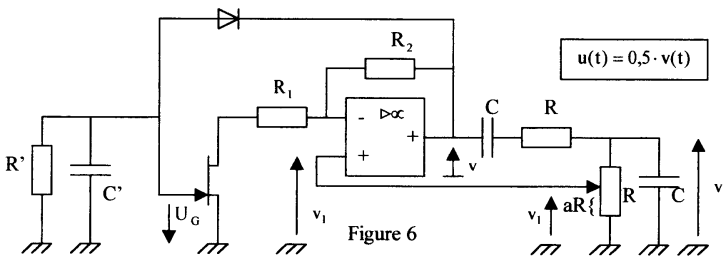


Figure 6

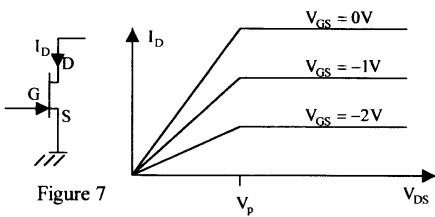


Figure 7

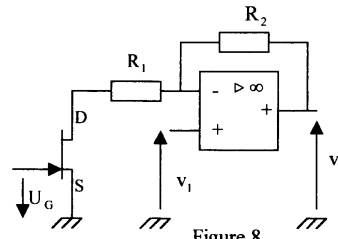


Figure 8

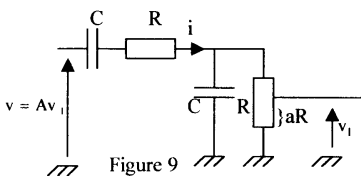


Figure 9

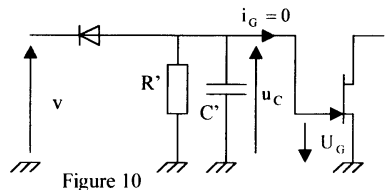


Figure 10

Étude des filtres passe-bande du récepteur

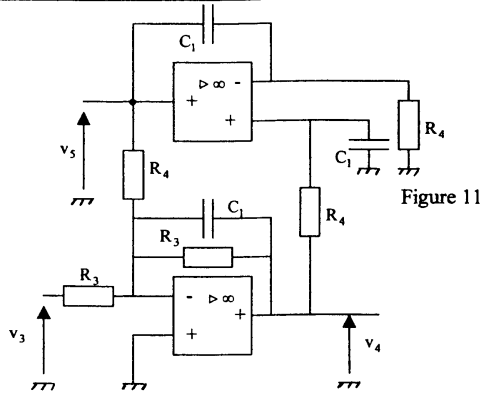


Figure 11

Étude du contrôleur automatique de volume

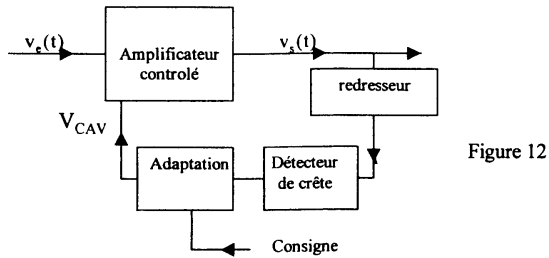


Figure 12

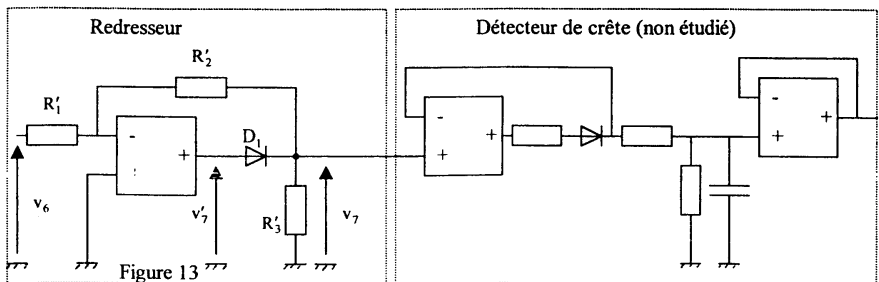


Figure 13

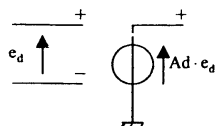


Figure 14

Étude de l'amplificateur contrôlé

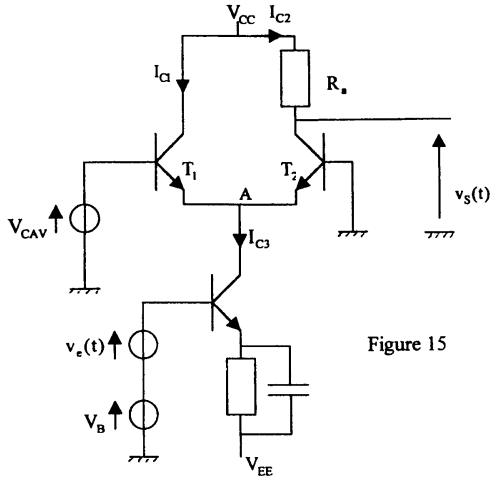


Figure 15

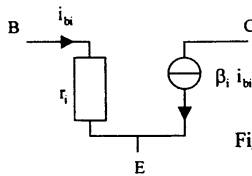


Figure 16

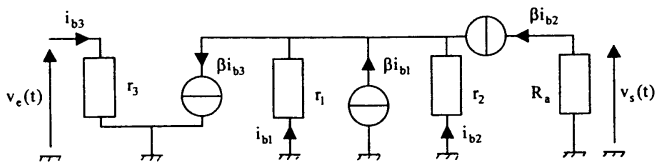


Figure 17

ÉLECTROTECHNIQUE

LA MACHINE À COURANT CONTINU ET SON ENVIRONNEMENT

D'une manière générale, un entraînement électrique à vitesse variable est constitué d'une machine électrique commandée par un convertisseur électronique de puissance, lui-même alimenté par le réseau d'énergie. Cette machine délivre une puissance réglable à un mécanisme qui en constitue la charge utile. Un système de commande complète l'ensemble, afin d'ajuster les grandeurs physiques aux consignes imposées par l'exploitation du système. Dans certains cas, le transfert d'énergie peut être réversible. On se propose d'étudier les éléments de la chaîne directe de transfert d'énergie.

Les données nécessaires aux applications numériques sont reportées à la fin du texte.

Les figures se trouvent page 19.

1. Modélisation de la machine à courant continu.

On utilise une machine à courant continu à aimants permanents. Le stator porte les aimants permanents qui créent un champ magnétique multipolaire de $2p$ pôles dont chacun impose un flux magnétique ϕ constant. Le rotor porte le bobinage d'induit qui absorbe un courant d'intensité i également réparti dans $2a$ voies d'enroulement. L'induit comporte N conducteurs actifs.

1.1. Modélisation mécanique.

1.1.1. Moment du couple électromagnétique.

Le moment du couple électromagnétique moyen T_{EM} s'écrit : $T_{EM} = k i$. Indiquer l'unité de la constante k dans le système international. Rappeler son expression pour une machine bipolaire puis pour une machine multipolaire.

1.1.2. Équation mécanique de la machine.

Soumis à l'action simultanée du moment du couple utile T_M et du moment du couple résistant T_{CH} , le rotor tourne à la vitesse angulaire Ω_M (fig. n° 1). On note J le moment d'inertie de l'ensemble des parties tournantes. Écrire le principe fondamental de la dynamique de rotation appliqué au rotor.

1.2. Modélisation électrique.

1.2.1. Force électromotrice de la machine (f.e.m.).

Rappeler l'expression de la f.e.m. moyenne E en fonction de k et Ω_M .

1.2.2. Modèle électrique de l'induit.

La tension d'induit, l'intensité du courant d'induit, la résistance et l'inductance d'induit sont notées respectivement $u(t)$, $i(t)$, R et L_M . On adopte la convention récepteur pour l'induit. Représenter le modèle électrique de l'induit de la machine en fonctionnement moteur. Écrire l'équation électrique de l'induit.

1.3. Modélisation énergétique.

1.3.1. Puissance instantanée électrique.

Exprimer la puissance instantanée électrique absorbée p_e en fonction de p_{EM} , p_i et W_{MAG} qui représentent respectivement la puissance électromagnétique, les pertes par effet Joule et l'énergie magnétique emmagasinée.

1.3.2. Puissance instantanée mécanique.

On appelle pertes collectives p_c , la somme des pertes mécaniques p_m et des pertes magnétiques p_f . Exprimer le moment du couple moteur utile T_M en fonction de T_{EM} et T_c qui représente le moment constant des pertes collectives. En utilisant l'équation mécanique (1.1.2.), exprimer la puissance instantanée mécanique utile $p_m = T_{CH}\Omega_M$ en fonction de p_{EM} , p_f , p_m et $W_{CIN} = 1/2 J\Omega_M^2$, l'énergie cinétique emmagasinée.

1.3.3. Bilan énergétique du rotor.

Exprimer la puissance électromagnétique à partir des résultats précédents (1.3.1. et 1.3.2.).

En déduire le bilan de puissance instantanée du rotor. Montrer que :

$$p_e(t) = p_m(t) + p_f(t) + p_i(t) + p_m(t) + d/dt(W_{MAG}) + d/dt(W_{CIN}).$$

1.3.4. Puissance moyenne et rendement.

Rappeler l'expression générale de la moyenne S d'un signal $s(t)$ sur un intervalle temporel $(0; \tau)$.

En déduire l'expression de la puissance moyenne magnétique P_{MAG} et de la puissance moyenne cinétique P_{CIN} .

Démontrer que ces quantités, P_{MAG} et P_{CIN} , sont nulles en régime permanent : $i(t) = C_1 e^t$ et $\Omega_M = C_2 e^t$.

Établir l'expression du rendement η du rotor en régime permanent.

1.4. Modélisation thermique.

La température du rotor, la température ambiante supposée constante et la puissance thermique évacuée à l'extérieur du moteur sont respectivement notées θ_r , θ_A et P_{TH} .

L'étude du transfert de chaleur conduit au modèle électrique équivalent présenté figure n° 2.

1.4.1. Équation thermique.

Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution de la quantité $x = \theta_r - \theta_A$.

En déduire l'expression de la constante de temps thermique τ_{TH} .

1.4.2. Régime transitoire thermique.

Un échelon de puissance thermique $p_{\text{TH}}(t)$ d'amplitude P_{TH} est appliqué au moteur.

Résoudre l'équation thermique avec pour condition initiale $x(0^-) = 0^\circ \text{C}$. Montrer que la réponse en température $\theta_r(t)$ s'écrit :

$$\theta_r(t) = \theta_A + R_{\text{TH}} P_{\text{TH}} [1 - \exp(-t/\tau_{\text{TH}})].$$

Tracer en concordance des temps l'allure des graphes $p_{\text{TH}}(t)$ et $\theta_r(t)$.

1.4.3. Régime permanent thermique.

L'intensité permanente d'induit et la température maximale admissible au rotor sont respectivement notées : I et θ_{RMAX} . On néglige les pertes collectives P_c . On rappelle que :

– la résistance de l'induit suit la loi thermique : $R(\theta) = R_0(1 + A\theta)$;

– la puissance thermique est égale à la somme des pertes de la machine.

Exprimer la température d'équilibre $\theta_r(\infty)$ en fonction de θ_A , R_{TH} , R_0 , A et I .

Établir l'expression de l'intensité maximale admissible par la machine I_{MAX} pour que $\theta_r \leq \theta_{\text{RMAX}}$.

Applications numériques :

Calculer la température d'équilibre $\theta_r(\infty)$ lorsque $I = 5 \text{ A}$ et l'intensité maximale admissible I_{MAX} .

2. Régimes de fonctionnement.

2.1. Régime transitoire.

On néglige le terme T_c , moment constant du couple des pertes collectives.

2.1.1. Régime transitoire électrique.

On bloque le rotor de la machine. L'induit est soumis à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude U_A .

Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'intensité d'induit $i(t)$.

En déduire l'expression de la constante de temps électrique τ_e .

Résoudre l'équation électrique avec pour condition initiale $i(0^-) = 0 \text{ A}$.

Tracer en concordance des temps l'allure des graphes $u(t)$ et $i(t)$.

2.1.2. Régime transitoire mécanique.

Le rotor de la machine est libre en rotation et initialement, à l'arrêt.

L'induit est soumis à un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude U_A . Le moment du couple résistant T_{cH} est constant. On néglige le terme T_c .

2.1.2.a. Équation du système.

Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution de la vitesse angulaire $\Omega_M(t)$.

Mettre le résultat sous la forme :

$$A_2 d^2\Omega_M/dt^2 + A_1 d\Omega_M/dt + \Omega_M = f_0(U_A, T_{cH}); t \geq 0.$$

2.1.2.b. Constantes de temps.

Le terme A_1 est la constante de temps mécanique τ_M . Établir la relation : $A_2 = \tau_E \tau_M$.

2.1.2.c. Types des réponses.

Écrire l'équation caractéristique de l'équation différentielle du second ordre en $\Omega_M(t)$.

Quelles relations doivent être vérifiées par les constantes de temps τ_E et τ_M pour avoir une solution apériodique ou une solution oscillatoire ?

2.1.2.d. Modélisation de première approximation.

Que devient l'équation différentielle de vitesse angulaire si la machine utilisée présente une inductance d'induit L_m négligeable ?

Résoudre cette équation avec pour condition initiale $\Omega_M(0^+) = 0$ rad/s.

Déterminer le temps de démarrage t_0 à 5 %.

Exprimer l'intensité $i(t)$ du courant absorbé par le moteur. Donner l'expression de l'intensité au démarrage notée I_0 .

Tracer en concordance des temps l'allure des graphes $u(t)$; $\Omega_M(t)$ et $i(t)$.

Applications numériques :

Calculer le temps de démarrage t_0 à 5 % et l'intensité de démarrage I_0 .

2.2. Régime permanent.

On ne néglige plus le terme T_c , moment constant du couple des pertes collectives.

2.2.1. Caractéristique de courant.

Montrer que la caractéristique de courant $I = f_1(T_M)$ s'écrit : $I = A_i T_M + I_0$; $u = U_A$.

Tracer l'allure de la caractéristique de courant.

2.2.2. Caractéristique mécanique.

Montrer que la caractéristique mécanique $\Omega_M = f_2(T_M)$ s'écrit : $\Omega_M = A_\Omega T_M + \Omega_{M0}$; $u = U_A$.

Tracer l'allure de la caractéristique mécanique.

2.2.3. Point de fonctionnement - Applications numériques.

Le moment du couple résistant T_{cH} est indépendant de la vitesse de rotation et vaut 0,6 Nm.

Déterminer successivement l'intensité, la puissance électrique, la vitesse de rotation, la puissance mécanique et le rendement notés respectivement $I(\infty)$, $P_E(\infty)$, $\Omega_M(\infty)$, $P_M(\infty)$, $\eta(\infty)$ pour le régime permanent.

Applications numériques :

Calculer $I(\infty)$, $P_E(\infty)$, $\Omega_M(\infty)$, $P_M(\infty)$, $\eta(\infty)$.

3. Convertisseur statique.

3.1. Circuit de puissance.

La figure n° 3 présente la structure du circuit de puissance d'un hacheur série.

L'interrupteur électronique K_1 , commandé périodiquement, est fermé sur l'intervalle $[0; \alpha T_H]$ et ouvert le reste de la période $T_H = 1/f_H$. Alimenté par la source de tension S_E , le hacheur fonctionne en régime permanent et en conduction continue. On suppose la diode D_2 idéale.

3.1.1. Tension de commande de l'induit.

Calculer la valeur moyenne U de $u(t)$.

3.1.2. Lissage du courant.

Le hacheur alimente un circuit R , L et E modélisant l'induit de la machine à courant continu en série avec une inductance de lissage L . Justifier la présence de l'inductance de lissage.

3.1.3. Intensité du courant dans l'induit.

En régime permanent, l'intensité du courant d'induit $i(t)$ est périodique, de période T_H .

Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'intensité d'induit $i(t)$.

En négligeant la chute de tension $Ri(t)$, résoudre cette équation sur l'intervalle d'une période T_H .

La valeur maximale et la valeur minimale de l'intensité $i(t)$ sont respectivement notées I_m et I_n .

Tracer l'allure du graphe $i(t)$.

3.1.4. Ondulation du courant dans l'induit.

Établir l'expression de l'ondulation de courant $\Delta I = I_m - I_n$.

Tracer l'allure du graphe $\Delta I(\alpha)$. Préciser la valeur maximale ΔI_{MAX} de l'ondulation, mettre le résultat sous la forme :

$$\Delta I_{MAX} = U' / 4Lf_H.$$

3.1.5. Inductance de lissage - Application numérique.

En déduire la valeur numérique L de l'inductance de lissage pour que l'ondulation relative maximale $(\Delta I_{MAX} / I)$ soit inférieure ou égale à x_1 avec $I = 5 \text{ A}$.

3.2. Circuit de commande.

L'interrupteur K_1 est commandé par la tension $u_s(t)$ délivrée par le circuit représenté figure n° 4.

3.2.1. Tension de modulation.

On suppose que l'interrupteur électronique K_0 est ouvert.

Déterminer l'évolution de la tension $u_m(t)$.

Le signal d'horloge $u_H(t)$ commande l'ouverture et la fermeture de l'interrupteur K_0 (fig. n° 5).

On suppose que le temps de fermeture t_f est, d'une part, suffisant pour assurer la décharge complète du condensateur de capacité C et, d'autre part, négligeable devant la période d'horloge T_H .

Déterminer l'évolution de la tension de modulation $u_m(t)$ en supposant que la phase de fermeture de K_0 est quasi instantanée.

Calculer numériquement la valeur maximale U_m de la tension de modulation $u_m(t)$.

3.2.2. Tension de commande de l'interrupteur de puissance.

Le comparateur analogique C_p est un amplificateur opérationnel idéal dont la caractéristique de transfert est définie par les relations suivantes :

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow u_s = +U_{SAT} \quad \text{et} \quad \varepsilon < 0 \Rightarrow u_s = 0.$$

L'amplificateur opérationnel est commandé par la tension de modulation $u_m(t)$ et la tension de référence constante U_R réglable entre 0 V et $+U_m$.

Sur un intervalle de deux périodes, tracer en concordance des temps, les signaux $u_m(t)$ et U_R sur le même graphe, $u_s(t)$ et le diagramme de conduction de l'interrupteur de puissance K_1 .

Exprimer le rapport cyclique α de la tension $u_s(t)$ en fonction des tensions U_R et U_m .

Tracer l'allure de la courbe $\alpha(U_R)$.

4. Transmission par réducteur.

La charge mécanique est accouplée au moteur électrique via un engrenage à denture droite (fig. n° 6). Les nombres de dents du pignon P_R et la roue R_R valent respectivement Z_p et Z_R .

4.1. Rapport de réduction - Rendement.

Exprimer, en fonction de Z_p et Z_R , le rapport de réduction $\rho = \Omega_M / \Omega_{CH}$.

Donner une expression du rendement η' du réducteur, en déduire l'expression : $T_1 = T_2 / \eta' \rho$.

4.2. Charge équivalente sur l'arbre moteur.

Écrire les équations fondamentales de la dynamique à l'entrée et à la sortie du réducteur. En déduire la relation suivante : $J' d\Omega_M / dt = T_M - T'_{CH}$. Expliciter les termes J' et T'_{CH} .

4.3. Applications numériques.

Le moment du couple résistant T_{CH} est indépendant de la vitesse de rotation et vaut 6 Nm.

Calculer *numériquement* les grandeurs physiques suivantes : ρ ; J' ; T'_{CH} ; Ω_M et Ω_{CH} pour le régime permanent.

5. Données numériques.

Caractéristiques du moteur :

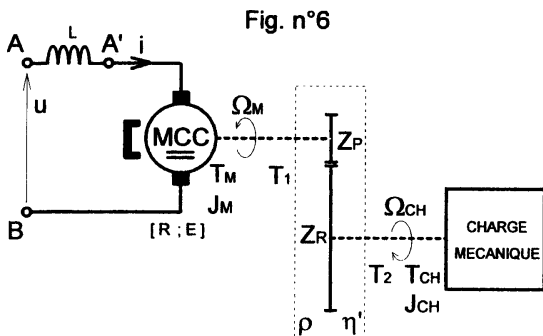
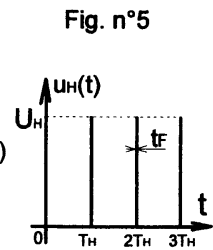
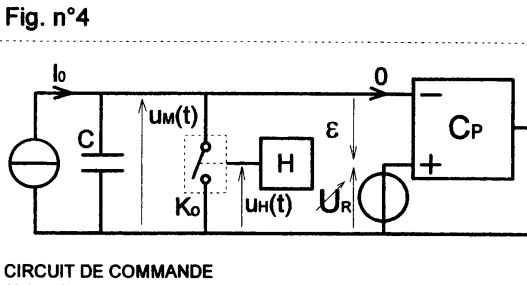
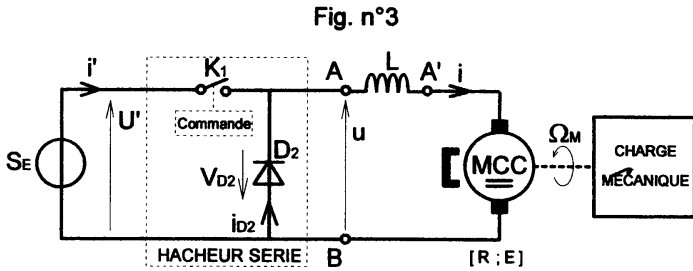
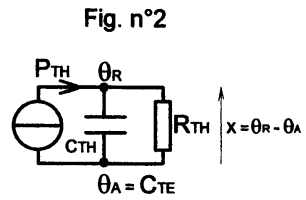
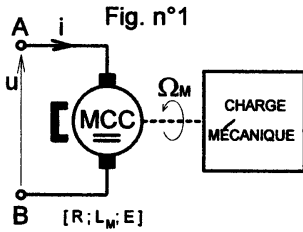
$A = 4,0 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$; $J_M = 0,142 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $J_{CH} = 36,6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $k = 0,116 \text{ S.I.}$; $L_M \approx 0 \text{ H}$;
 $R_o = 0,334 \text{ } \Omega$; $R_{TH} = 2,80 \text{ K/W}$; $T_c \approx 0 \text{ Nm}$; $U_A = 36 \text{ V}$; $\theta_A = 25 \text{ } ^\circ\text{C}$; $\theta_{RMAX} = 125 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Caractéristiques du hacheur :

$C = 100 \text{ nF}$; $f_H = 1/T_H = 2,0 \text{ kHz}$; $I_o = 1,0 \text{ mA}$; $U' = U_A = 36 \text{ V}$; $u_M(0^-) = 0 \text{ V}$; $x_1 = 5 \text{ } \%$.

Caractéristiques du réducteur :

$Z_p = 12$; $Z_R = 100$; $\eta' = 0,90$.



BONS DE COMMANDE – BONS DE COMMANDE – BONS DE COMMANDE

Publications hors abonnement et numéros anciens

Serveur de l'UdP : http://www.cnam.fr/hebergement/udp/	Année ou numéro	Prix unitaire	Nombre d'exem- plaires	Prix total
BROCHURES DOCUMENTAIRES ET PÉDAGOGIQUES				
◆ Nouveaux programmes de 3 ^e	1999	17 € × =
◆ Données sur les principaux produits chimiques... (Jean-Louis VIGNES et al.) :				
– L'ouvrage	1997	23 € × =
– La disquette		15 € × =
◆ Le collage : le moyen intelligent d'assembler (Michel BARQUINS)	2001	11 € × =
CONCOURS : CAPES ET AGRÉGATION				
	1995	1996	1997	1998
◆ Énoncés	784 (2) 9,5 €		802 (2) 10 €	812 (2) 11 €
◆ Solutions	784 (3) 12 €	792 (3) 13 €	802 (3) 13,5 €	812 (3) 14 €
	1999	2000	2001	2002
◆ Énoncés	817 (2) 12 €	824 (2) 12,5 €	834 (2) 12 €	845 (2) 13 €
◆ Solutions	822 (2) 14,5 €	838 (2) 15 €		
CONCOURS DES GRANDES ÉCOLES				
◆ 1998 (36 €), 1999 (36,5 €), 2000 (37 €), 2001 (38 €)		 × =
BREVETS DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR				
◆ 1997 (14,5 €), 1998 (12 €) <i>Sur le serveur : 1999</i>		 × =
BACCALAURÉATS TECHNOLOGIQUES				
◆ <i>Sur le serveur : 1999, 2000</i>		 × =

BONS DE COMMANDE – BONS DE COMMANDE – BONS DE COMMANDE

	Année ou numéro	Prix unitaire	Nombre d'exem- plaires	Prix total
BULLETINS				
◆ Tables des matières quinquennales : 641 (<i>jusqu'à 1980</i>) - 795 (1) (<i>1991-1995</i>)	6 € × =
◆ Autres bulletins : 787, 788, 790-791*, 792 à 795, 797*, 798 à 805, 806*, 807 à 820, 821*, 822 à 827, 829*, 830 à 839*, 840 à 844	6 € × = = =
NUMÉROS SPÉCIAUX				
◆ « Calculette »	789 (2)	6 € × =
◆ « Matériaux » (<i>numéro double</i>)	790-791	11 € × =
◆ « 90 ans »	797	12 € × =
◆ « La Main à la pâte »	806	6 € × =
◆ « Le génie des procédés »	821	6 € × =
◆ « La sécurité au laboratoire de chimie »	829	6 € × =
◆ « Regards européens »	839	6 € × =
◆ « Enseignement supérieur » : 1995 à 2001	6 € × =
TOTAUX		 = €
Supplément pour expédition à l'étranger (le volume : 1 €)				+
MONTANT DE LA COMMANDE (<i>Titre de paiement ci-joint à l'ordre de l'UdP</i>)				=

* Numéro spécial (voir tarif dans la rubrique « Numéros spéciaux »).

		Prix unitaire	Quantité	Prix total
BASE DE DONNÉES « BUPDOC »				
◆ Un cédérom comprenant logiciel d'interrogation base de références, base de textes (<i>1990-1999</i>)	code INF-L49	38 € × = €

Le Directeur de la publication : Monique Schwob

Réalisation : Union des Physiciens

Imprimé en France par SPEI - 54425 Pulnoy

Numéro commission paritaire : 62628 - Dépôt légal : 2^e trimestre 2002