

Sommaire des pages spéciales du n° 862
(Mars 2004)

AGRÉGATION DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours externe)

Option physique	
- Composition de physique	3
- Composition de chimie	17
- Problème de physique	27
Option chimie	
- Composition de chimie	39
- Composition de physique	63
- Problème de chimie	79
Option physique et électricité appliquées	
- Composition de physique	113
- Composition d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique	133
- Problème d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique	157

AGRÉGATION DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours interne)

Composition sur la physique et le traitement automatisé de l'information	175
Composition avec exercices d'application	
- Option physique et chimie	179
- Option physique appliquée	195

CAPES DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours externe)

Section physique et chimie	
- Composition de physique avec applications	227
- Composition de chimie avec applications	233
Section physique et électricité appliquée	
- Composition de physique avec applications	243
- Composition d'électronique - électrotechnique avec applications	253

CAPES DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours interne)

Section physique et chimie	
- Épreuve de physique et chimie	269
Section physique et électricité appliquée	
- Épreuve de physique et électricité appliquée	275

L'UNION DES PROFESSEURS DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE

Les bons de commande	285
Renseignements divers	I à XIV

Le sommaire du n° 862 est en deuxième et troisième de couverture.

ISSN 0366-3876

PAGES SPÉCIALES

du n° 862

Mars 2004

publication mensuelle

98^e année

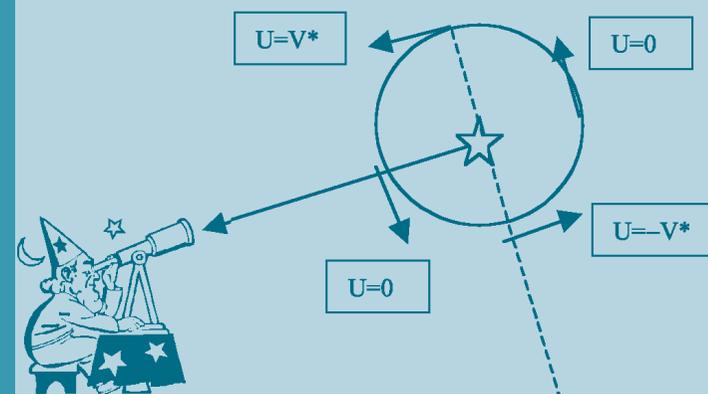
Mars 2004

PAGES SPÉCIALES DU N° 862 : Agrégations et Capes 2003 : les corrigés

Le Bup

Physique

Chimie



Agrégations et Capes 2003
Les corrigés



UNION DES PROFESSEURS DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE

44, bd Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06

<http://www.udppc.asso.fr/>

Sommaire du n° 862 (Mars 2004)

ARTICLES GÉNÉRAUX

De la théorie à un calendrier des marées océaniques (Bernard LAHAYE)	326
Prix Nobel de physique 2003 (Alfred MATHIS)	375
La datation des vins : une application des mesures des très faibles radioactivités (Philippe HUBERT, Françoise HUBERT et Véronique RAFFESTIN-TORT)	381

ACTUALITÉS PÉDAGOGIQUES

Enseignement expérimental	
– Une expérience de photoacoustique (Charles de IZARRA)	397
– Mesure de la célérité d'une onde sonore dans différents gaz (Jean-Marie BACCIOCHINI)	405
– Une expérience classique : la mesure de la vitesse d'une onde sonore (Guy BOUYRIE)	413
– Loi de décroissance radioactive (Guy BOUYRIE)	419
– Une variante de l'expérience des rails de Laplace (Jean-Christophe FILLoux)	433
Épistémologie	
– À trop vouloir en dire... (Stefan KARAGOZOSKI)	441
Olympiades de physique	
– Quand les lycéens deviennent chercheurs et exposent leurs travaux (Maryse FISCHER, Huguette GRIMAUD et Jacqueline TINNÈS)	443
– Olympiades 2004 : sujets et palmarès	446
Internet	
– Des souris et des profs... (Thibaut PLISSON)	449

Suite du sommaire en troisième de couverture

*Le sommaire des pages spéciales du n° 862
est en quatrième de couverture.*

VIE DE L'ASSOCIATION

Activités de l'UdPPC	
– L'UdPPC au fil des jours	453
– Compte-rendu du Conseil	455

INFORMATIONS - LIVRES ET LOGICIELS

Paru au B.O. (Jean WINTHER)	469
Informations	
– École d'été de physique : «Physique et art»	470
– L'Actualité Chimique	471
Parus ou à paraître	473
Les bons de commande	477

L'UNION DES PROFESSEURS DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE

Les responsables nationaux	I à IV
Le Bup	V
Les tarifs des cotisations et abonnements	VI à VII
Les bureaux académiques	VIII à XIV

Publicités	XV à XVIII
------------------	------------

Union des professeurs de physique et de chimie

MEMBRES D'HONNEUR

M. Michel BOYER

Professeur à l'Université Paris VI
Président des Olympiades nationales de la chimie.

M. Claude COHEN-TANNOUJJI

Membre de l'Académie des sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Jean-Marie LEHN

Membre de l'Académie des sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Georges CHARPAK

Membre de l'Académie des sciences
Chercheur au CERN
Prix Nobel.

M. Pierre-Gilles de GENNES

Membre de l'Académie des sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Pierre LÉNA

Membre de l'Académie des sciences
Professeur à l'Université Paris VII.

PRÉSIDENTS D'HONNEUR

F. BLAIN, A. DURUPHY, J.-P. FOULON, J. GATECEL, J. MAUREL, J. TINNÈS, A. TOUREN.

MEMBRES DU CONSEIL

Membres de droit

F. BLAIN, A. DURUPHY, J.-P. FOULON, J. GATECEL, J. MAUREL, J. TINNÈS, A. TOUREN.

Les présidents des sections académiques font, de droit, partie du Conseil de l'Union des professeurs de physique et de chimie (UdPPC) (voir pages ci-après).

Membres élus (renouvelable par tiers chaque année)

2001 : J. BOULOMIÉ (élu 2003), M. BOURGAREL, D. LAUNER (élue 2003), J. MARÉCHÉ, P. NÉEL (élu 2003), G. REYMANN, J.-L. RICHTER, A. SEFFAR, J. VINCE (élu 2003).

2002 : M. BASUYAUX (élu 2003), G. BAUDRANT, G. DUPUIS, S. GRUNEISEN, O. LEFEBVRE, M. RUFFENACH, G. TORCHET, J. WINTHER.

2003 : G. BOUYRIE, R. CARPENTIER, N. CHEYMOL, D. DUCOURANT, B. HEUZÉ, A. LEURIDAN, M.-A. MARTENS, G. SERRA.

Le bureau national

Siège social

Union des professeurs de physique et de chimie - 44, bd Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06.
Aucune permanence n'est assurée à cette adresse.

Secrétariat administratif (adhésions et abonnements)

Tél. : 01 43 25 61 53 (10 h - 12 h et 14 h - 16 h sauf mercredi après-midi)
Fax : 01 43 25 07 48 - Mél. : udp.bup@udp-bup.org
Serveur administratif (adhésions et abonnements) : <http://www.udp-bup.org>

Secrétariat général de l'association

Mél. : udppc@club-internet.fr - Serveur : <http://www.udppc.asso.fr/>

Secrétariat de la rédaction du bulletin

Mél. : bup.secretaire@club-internet.fr



Présidente

Madeleine SONNEVILLE - 29, rue Edmond About - 92350 LE PLESSIS-ROBINSON -
Tél. : 01 43 50 79 12 - madeleine.sonneville@planetis.com
Questions générales, relations internationales.

Vice-président(e)s

Bernard CIRoux - 2 bis, rue Paul Claudel - 71530 CHAMPFORGEUIL -
Tél. : 03 85 41 43 30 - bernard.ciroux@ac-dijon.fr
Laboratoires - Enseignement technique : baccalauréats technologiques STL - Lycées professionnels.

Rosine FANGUET - 13, allée de la Butte - 13500 MARTIGUES -
Tél. et Fax : 04 42 42 11 74 - rosine.fanguet@wanadoo.fr
Chimie.

Marie-Françoise KARATCHENTZEFF - 30 bis, rue Elisée-Reclus - 91120 PALAISEAU -
Tél. : 01 60 10 13 92 - mfkarat@club-internet.fr
Lycées.

Vincent MAS - 10, square du Vexin - L'orée du Lac - 78200 MANTES-LA-JOLIE -
Tél. : 01 30 94 64 43 - vincent.mas@ac-versailles.fr
Collèges - Relations avec le primaire.

Stéphane OLIVIER - 26, rue des Cordelières - 75013 PARIS -
Tél. : 01 45 35 75 53 - solivier@9online.fr
Physique - Liaisons secondaire supérieur.

Bulletin de l'Union des professeurs de physique et de chimie

Directeur de la publication

Madeleine SONNEVILLE - 29, rue Edmond About - 92350 LE PLESSIS-ROBINSON -
Tél. : 01 43 50 79 12 - madeleine.sonneville@planetis.com

Rédacteur en chef

André GILLES - Sauveterre - 31320 AUREVILLE -
Tél. : 05 61 76 76 25 - Fax : 05 61 76 76 24 - andre.gilles@infonie.fr

Rédacteur en chef adjoint

Jean-Pierre DAVAL - 5, rue Jean Jaurès - 92370 CHAVILLE -
Tél. : 01 47 50 34 46.

Trésorier

François VILLEDARY - 10, rue de la Bergerie - 91300 MASSY -
Tél. : 01 69 30 47 43 - villedary.Fy@wanadoo.fr

Secrétaire général

Gilles GALLIN-MARTEL - 24, rue Alfred de Musset - 74600 SEYNOD -
Tél. : 04 50 69 57 15 - gallin-martel.gilles@wanadoo.fr
Relations avec les sections académiques.

Secrétaires générales adjointes

Edith PIGANEAU - 58, rue du Rôle - 91800 BRUNOY -
Tél. et Fax : 01 69 43 72 81 - edith@club-internet.fr
Lycées.

Monique SCHWOB - 39, rue de la Prévôté - 57950 MONTIGNY-LÈS-METZ -
Tél. : 03 87 38 02 59 - schwob.m@wanadoo.fr
Secrétariat de l'association - Serveurs et bases de données - Relations avec les associations étrangères.

Membres

Serge BETTON - Lendrevie-Basse - 81600 BRENS -
Tél. : 05 63 57 36 07 - sbetton@wanadoo.fr
Collèges.

Jean-Marie BIAU - 3, allée Val Prévert - 69400 LIMAS -
Tél. : 04 74 65 37 50 - jean-marie.biau@ac-lyon.fr
Enseignement technique : baccalauréats technologiques STI - BTS.

Michèle GOUÉDARD - 34 bis, rue du Docteur Le Savoureux - 92290 CHATENAY-MALABRY -
Tél. : 01 46 60 08 33 - Gerard.GOUEDARD@wanadoo.fr
Relations extérieures chimie.

Micheline IZBICKI - 50, chemin de Buglise - 76290 MONTVILLIERS
Tél. : 02 35 30 50 27 - miizbicki@aol.com
Olympiades de chimie - Sécurité en chimie.

Jean-Charles JACQUEMIN - 2, boulevard Magenta - 75010 PARIS -
Tél. : 01 42 06 02 37 - jc.jacquemin@noos.fr
Enseignement technique : baccalauréats technologiques STI - Lycées.

Olivier KEMPF - 15, rue Louis Flamant - 02400 CHÂTEAU-THIERRY -
Tél. : 03 23 69 28 30 - okempf@club-internet.fr
Serveurs et bases de données.

Cathy PARIS - 11, rue Matabiau - 31000 TOULOUSE -
Tél. : 05 61 62 22 79 - cathy.paris@ac-toulouse.fr
Collèges.

Michel MÉTROT - 183, rue François Perrin - 87000 LIMOGES -
Tél. : 05 55 49 03 16 - michelmetrot@limousin.iufm.fr
IUFM - Lycées.

Chargé(e)s de mission auprès du bureau

Jacques BOULOUMIÉ - 17, hameau de la Caravelle - 91650 BREUILLET -
Tél. : 01 64 58 43 34 - Fax : 01 69 94 09 61 - bouloumi@club-internet.fr
Chargé de mission auprès du trésorier.

Huguette GRIMAUD - Aurore E - 134, rue Curat - 34090 MONTPELLIER
Tél. et Fax : 04 67 72 80 24 - huguette.grimaud@wanadoo.fr
Chargée de mission aux olympiades de physique.

Élyane YACINE - 4, rue des Bouleaux - 63100 CLERMONT-FERRAND
Tél. / Fax : 04 73 30 85 07 - yacine@wanadoo.fr
Chargée de mission à la publicité.

Les olympiades

Olympiades de physique

Huguette GRIMAUD - Aurore E - 134, rue Curat - 34090 MONTPELLIER

Tél. et Fax : 04 67 72 80 24 - huguette.grimaud@wanadoo.fr

Site des olympiades de physique : <http://olympiades-physique.in2p3.fr>

Olympiades nationales de la chimie

Micheline IZBICKI - 50, chemin de Buglise - 76290 MONTVILLIERS

Tél. : 02 35 30 50 27 - miizbicki@aol.com

Site des olympiades nationales de la chimie : <http://www.sfc.fr/Olympiades/olympiades.htm>

Les commissions de l'UdPPC

« *Base de données - BUPDOC* »

Responsable : **Monique SCHWOB**.

« *Formation des maîtres - IUFM* »

Responsable : **Michel MÉTROT**.

« *Réforme des lycées* »

Responsable : **Marie-Françoise KARATCHENTZEFF**.

« *Sécurité en chimie* »

Responsable : **Micheline IZBICKI**.

Le serveur de l'UdPPC

<http://www.udppc.asso.fr/>

Relations avec le serveur

Rosine FANGUET

rosine.fanguet@wanadoo.fr

Monique SCHWOB

schwob.m@wanadoo.fr

Administrateur

Olivier KEMPF

okempf@club-internet.fr

Le Bup

Comité de rédaction

Rédacteur en chef : André GILLES.

Rédacteur en chef adjoint : Jean-Pierre DAVAL.

Comité de rédaction : L. DETTWILLER, G. DUPUIS, A. GILLES, J. JOURDAIN, D. LAUNER, F. LAVERNHE,
E. PIGANEAU, F. ROGER, J. TINNÈS, B. VELAY, J. WINTHER.

Publicité

Elyane YACINE - 4, rue des Bouleaux - 63100 CLERMONT-FERRAND -

Tél. / Fax : 04 73 30 85 07 - yacine@wanadoo.fr

Secrétariat de la rédaction du bulletin

Mél. : bup.secretaire@club-internet.fr

Publication des articles

Tout article ou communication doit être adressé en **triple exemplaires** à : Union des professeurs de physique et de chimie - A l'attention du rédacteur en chef - 44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06. Dès réception l'expéditeur en est avisé (ne pas oublier de fournir une adresse postale complète, et si possible une adresse mél et un numéro de téléphone).

Les manuscrits sont ensuite soumis, par le comité de rédaction, au comité de lecture pour avis. L'avis du comité de lecture est strictement anonyme. Le comité de rédaction donne ou refuse son accord à la publication ou bien demande des modifications. L'auteur en est immédiatement avisé. En cas d'acceptation, **aucun engagement sur la date de publication ne peut être fourni** ; les manuscrits acceptés ne sont pas rendus. En cas de refus, les manuscrits sont renvoyés à l'auteur.

L'auteur reçoit les épreuves de son article (éventuellement par mél) aux fins de vérifier sa conformité à l'original et s'engage à renvoyer les épreuves corrigées dans les huit jours suivant leur réception. Après publication, il reçoit dix tirés à part sur demande et un fichier pdf de l'article sous sa forme définitive.

Recommandations aux auteurs

Tout article doit impérativement être accompagné d'un résumé de quelques lignes et de cinq à huit mots-clés.

Joindre le fichier informatique correspondant, sur disquette ou cédérom, dans un format usuel (indiquer le logiciel utilisé et le numéro de version).

Si l'article comporte **des figures** :

- ◆ Celles-ci seront insérées dans le texte ou leur position repérée clairement.
- ◆ Si les figures n'existent que sous forme papier, elles doivent être tracées avec soin sur feuille séparée (éviter le calque). Fournir des originaux, éviter les photocopies ; en cas de nécessité fournir des photocopies laser d'excellente qualité.
- ◆ Si les figures existent sous forme numérique :
 - l'épaisseur des traits, dans le cas de graphiques, doit être au minimum de 0,5 point ;
 - pour des images au trait, la définition doit être au minimum de 1200 dpi dans la dimension finale souhaitée ;
 - pour des images en niveau de gris ou en couleur, la définition doit être au minimum de 300 dpi dans la dimension finale souhaitée ;
 - **fournir impérativement les fichiers séparés de chaque image au format tif ou eps** ;
 - insérer éventuellement les images dans le texte pour en repérer la position.

Si l'article comporte **des photos**, fournir dans la mesure du possible les originaux papier ou diapositives. Ces originaux seront retournés à l'auteur dès la publication.

Les tarifs des cotisations et abonnements

Réadhésion par Internet

<http://www.udp-bup.org>

Réadhésion « papier » : Voir encart cartonné dans les bulletins de juillet/août/septembre, octobre, novembre et décembre.

Dans les deux cas :

- adressez-vous à votre correspondant d'établissement (s'il existe) ;
- envoyez votre chèque par voie postale à l'Union des professeurs de physique et de chimie.

1. COTISATIONS ANNUELLES : membres actifs ou adhérents

Le paiement de la cotisation seule ne donne pas droit au service du bulletin.

a - Tarif normal.....24 €

b - Tarif réduit : retraité ou étudiant.....21 €

Le tarif étudiant est accordé aux intéressés sur leur demande et après envoi d'une pièce justificative de leur qualité.

c - Tarif spécial : enseignant de collège

Un enseignant en collège peut opter pour l'une des deux possibilités ci-dessous :

- cotiser selon les tarifs du paragraphe 1a,
- verser une cotisation de.....25 €

Dans ce cas les trois numéros spécialement consacrés aux collèges seront envoyés gracieusement.

Moyennant paiement de la cotisation, la qualité de membre actif est réservée aux professeurs et aux membres du personnel de laboratoire de sciences physiques de l'enseignement public et de l'enseignement privé sous contrat d'association avec l'État, en activité ou en retraite ; celle de membre adhérent à toute autre personne. Le non-paiement de la cotisation entraîne la radiation de membre de l'Union des professeurs de physique et de chimie. La qualité de membre de l'Union des professeurs de physique et de chimie permet de participer aux activités nationales et académiques de l'Union des professeurs de physique et de chimie.

2. ABONNEMENT AU BULLETIN « LE BUP » (Année civile 2004)

	France métropolitaine et D.O.M. (dont TVA à 2,1 %)	Étranger	
		Abonnement (exonéré de la TVA)	Expédition*
a - Membres actifs ou adhérents (prix préférentiel réservé aux membres de l'association à jour de leur cotisation)			
Normal	36 €	35,26 €	13 €
Réduit (retraité, étudiant)	31 €	–	–
b - Collectivités (collège, autre établissement, personne morale, bibliothèque, laboratoire...)			
Collège	83 €	–	–
Autre que Collège	108 €	105,78 €	22 €
c - Individuel non membre de l'association			
Prix public	60 €	58,77 €	13 €

* Pour l'expédition par voie aérienne, consulter les tarifs ci-après, paragraphe 4.

L'abonnement est annuel et comprend :

- pour les individuels : les dix numéros du BUP de janvier à décembre.
- pour les collectivités **collèges** : les dix numéros du BUP, du 1^{er} mai 2004 au 30 avril 2005 plus les deux cahiers énoncés et corrigés des concours d'Agrégations et CAPES de 2004 ;
- pour les collectivités **sauf collèges** : les dix numéros du BUP, du 1^{er} mai 2004 au 30 avril 2005 plus les deux cahiers énoncés et corrigés des concours d'Agrégations et CAPES de 2004 plus **le cahier Enseignement Supérieur**.

L'abonnement individuel est à régler à compter du 1^{er} octobre 2003 et avant le 1^{er} décembre 2003. Pour tous règlements ultérieurs, les numéros du bulletin qui seront épuisés seront remplacés par des numéros des années antérieures.

3. CHANGEMENT D'ADRESSE

Toute demande de changement d'adresse d'expédition du bulletin peut être faite directement par Internet. Par courrier, précisez l'ancienne et de la nouvelle adresse.

4. TARIFS DES EXPÉDITIONS DU BULLETIN PAR VOIE AÉRIENNE (hors CEE)

Les membres de l'Union des professeurs de physique et de chimie qui en feront la demande lors du paiement de l'abonnement, pourront recevoir le bulletin par avion, à condition de rajouter les frais d'expédition indiqués ci-dessous au tarif d'abonnement : France pour le Régime intérieur et assimilé, Étranger (exonéré de TVA) pour le Régime international.

• Régime intérieur et régime assimilé

DÉPARTEMENTS D'OUTRE-MER : Guadeloupe, Martinique, Guyane Française, La Réunion, Saint-Pierre-et-Miquelon	20,5 €
TERRITOIRES D'OUTRE-MER : Nouvelle-Calédonie, Polynésie Française, Terres Australes et Antarctiques Françaises, Wallis et Futuna.....	42 €

• Régime international

Zone 1

EUROPE 1 : Allemagne, Belgique, Danemark, Italie, Luxembourg, Norvège, Pays-Bas, Portugal et Suède.....	26 €
--	------

Zone 2

EUROPE 2 : Autriche, Espagne, Finlande, Grande-Bretagne, Grèce, Irlande, Islande et Suisse	23 €
---	------

Zone 3

États-Unis et Canada	34 €
----------------------------	------

Zone 4

Afrique, Europe de l'Est, Proche et Moyen Orient.....	31 €
---	------

Zone 5 (reste du monde)

Autres : Amérique, Asie et Océanie	51 €
--	------

Les bureaux académiques

Aix - Marseille

Président et Courrier : Michel FANGUET - 13, allée de la Butte - 13500 Martigues - Tél. et Fax : 04 42 42 11 74 - michel.fanguet@wanadoo.fr

Vice-présidente : Magali GIACINO - 5, rue Renoir - Domaine de Calas - 13480 Calas - magali.giacino@wanadoo.fr

Trésorier : Pierre MARTIN - 10, rue Pierre de Coubertin - 13100 Aix-en-Provence - pierre.madeleine@wanadoo.fr

Chimie : André DURUPHY - Chemin des Baux - 13510 Eguilles - Andre.Duruphy@wanadoo.fr

Chimie (olympiades) : Nathalie BARDE - 8, rue Elzéard Rougié - 13004 Marseille - lesbarde@club-internet.fr

Collège : Michel BARDE - 8, rue Elzéard Rougié - 13004 Marseille - lesbarde@club-internet.fr

Informatique : Frédéric ALLARD - 19, lotissement « Le Petit Prince » - 84450 Saint Saturnin-lès-Avignon - f.allard@laposte.net

IUFM : Michèle CLEMENTE - Tour 9 Andalousie - Le Roy d'Espagne - 13009 Marseille - m.clemente@aix-mrs.iufm.fr

Physique : Hervé IDDA - Bâtiment F13 - 20, avenue Jean Giono - 13090 Aix-en-Provence - h.idda@caramail.com

Physique (olympiades) : Hervé IDDA - Bâtiment F13 - 20, avenue Jean Giono - 13090 Aix-en-Provence - h.idda@caramail.com

Relations enseignement supérieur : Jean-Marie DONNINI - 7, boulevard Chave - 13005 Marseille -

jean-marie.donnini@newsup.univ-mrs.fr

Technique : Marie-Line MILLON - Plan Redon d'Auriol - 13720 La Bouilladisse - m_millon@yahoo.fr

Amiens

Président et Courrier : Jan DUDA - 6, rue de Villeneuve - 60110 Lormaison - Tél. : 06 79 29 03 71 - jan.duda@ac-amiens.fr

Vice-président : Patrick PIERENS - 1, rue Jean de La Fontaine - 02100 Saint-Quentin - patrick.pierens@wanadoo.fr

Secrétaire : Savério CALLEA - 22, rue de Mulhouse - 02100 Saint-Quentin - callea@club-internet.fr

Trésorier : M. Dominique PAIN - 6, rue Boucher de Perthes - 80000 Amiens - dominique.pain@ac-amiens.fr

Chimie (olympiades) : Christophe DEBLANGY - 4, rue Bigaudet - 80290 Taisnil - cdeblangy@wanadoo.fr

Collège : Bertrand LEMASLE - 4, rue Porchez - 80000 Amiens - lemasle.bertrand@wanadoo.fr

Informatique : Laurent LARROCHE - 25, rue de la République - 60160 Montataire - larroche.laurent@free.fr

IUFM : Daniel GUEANT - 1, rue Gérard Philippe - 80330 Cagny.

Physique (olympiades) : Olivier GRAS - 33, résidence « La clé des Champs » - 80160 Plachy Buyon -

olivier.gras@ac-amiens.fr

Jean-Luc JUGUET

Technique : Jean-Philippe FOURNOU - Lycée Paul Langevin - 3, avenue Montaigne - 60009 Beauvais Cedex -

jean-philippe.fournou@ac-amiens.fr

Université : Daniel GUEANT - 1, rue Gérard Philippe - 80330 Cagny.

Antilles - Guyane

Présidente et Courrier pour les Antilles : Nady MONTRÉSOR - 8, lotissement Petit - Étang 2 - Gissac - 97180 Sainte-Anne.

Vice-président et Courrier pour la Guyane : Jean-Pierre OCTAVIA - BP 49 - 97372 Kourou Cedex.

Chimie et Physique (olympiades) : Jean-Pierre OCTAVIA - 8, rue Samuel Lubin - 97310 Kourou.

Besançon

Président et Courrier : Thierry GUILLOT - 32, rue Saint-Vincent - 25720 Avanne - Tél. : 03 81 41 04 02 - tguillot@wanadoo.fr

Vice-président : André BRUNETTA - 32, rue de Fevery - 90700 Châteinois-les-Forges - Andre.Brunetta@worldonline.fr

Secrétaire : Anne-Marie STUDER - 13 bis, rue du Rosaire - 90850 Essert - anne-marie.studer@ac-besancon.fr

Trésorier : Jean-Claude POINSARD - 5, rue du Bougney - 25000 Besançon - poinsard@noos.fr

Classes préparatoires : Jean-Noël BERNARD - 101, rue des Granges - 25000 Besançon - jnbernard@hotmail.com

Chimie (olympiades) : Françoise CHAGRIN - 8, rue de Franche-Comté - 25000 Besançon - Francoise.chagrins@wanadoo.fr

Collège : Christian THOMAS - 55, rue de Besançon - 25300 Pontarlier - annie.christian-thomas@wanadoo.fr

Commission Olympiades de physique : Maryse FISCHER - Hameau du Coteau - 25770 François -

christian-maryse.fischer@wanadoo.fr

Physique (olympiades) : Dominique OBERT - 5, rue Boudot - 25000 Besançon - dominique.obert@wanadoo.fr

Relations enseignement supérieur : Daniel VAN LABEKE - Domaine de Maupaillon - Chemin du Lièvre - 25000 Besançon -

daniel.vanlabeke@univ-fcomte.fr

Technique : Hervé L'HUILLIER - Route de Geneuille - 25870 Devecey - lhuillier.herve@wanadoo.fr

Correspondant Haute-Saône : Nicole PETTITOT - 113, avenue de la République - 70200 Lure -

phys.colomb.lure@ac-besancon.fr

Bordeaux

Président et Courrier : Philippe GOYER - Les Harmonies - Bâtiment D - Appartement 293 - 64, rue Lamartine - 33400 Talence - Tél. : 05 56 37 91 19 - philippe.goyer@iut.u-bordeaux1.fr

Secrétaire : Guy BOUYRIE - Lycée Victor Louis - 33400 Talence - guy.bouyrie@ac-bordeaux.fr
Trésorier : Jean-Pierre NADAL - Lycée Laure Gatet - BP 3085 - 24003 Périgueux Cedex - jipen2@wanadoo.fr
Chimie : Daniel MARSAN - Résidence Macedo - 3, place Toulouse Lautrec - 33600 Pessac - u.d.p.bordeaux@wanadoo.fr
Chimie (olympiades) : Daniel MARSAN - Résidence Macedo - 3, place Toulouse Lautrec - 33600 Pessac - u.d.p.bordeaux@wanadoo.fr
Informatique : INCERTI - incerti@cenbgin2p3.fr
IUFM : Jean-François PEYRELONGUE - 6, impasse du Pradas - 33640 Beautiran - jfp Peyrelongue@free.fr
Physique : Guy BOUYRIE - Lycée Victor Louis - 33400 Talence - guy.bouyrie@ac-bordeaux.fr
Physique (olympiades) : Guy BOUYRIE - Lycée Victor Louis - 33400 Talence - guy.bouyrie@ac-bordeaux.fr

Caen

Président et Courrier : Jacques MARIE - 14, chemin de Touques - 14910 Benerville-sur-Mer - Tél. : 02 31 87 22 85 - marie.j@club.francetelecom.fr
Vice-président : Bernard TAMAIN - 3, allée des Roses - 14610 Epron - tamain@in2p3.fr
Secrétaire : François MARVIN - 6, Longue Vue du Théâtre - 14111 Louvigny - françois.marvin@ac-caen.fr
Trésorier : François MARVIN - 6, Longue Vue du Théâtre - 14111 Louvigny - françois.marvin@ac-caen.fr
Chimie : Mohamed MAACHE - 2, impasse des Crocus - 14540 Rocquancourt.
Collège : Mireille GERVAIS - La Gatellerie - 61250 Colombiers - mireille.gervais@caramail.com
Informatique : Daniel GUÉRIN - Les Gigannières - 50140 Saint-Clément.
Physique : Thérèse LEVALOIS - 20, rue de l'Église - 14610 Épron.
Technique : Jacques BESNARD - Allée des Marronniers - 14610 Colomby-sur-Thaon.

Clermont-Ferrand

Président et Courrier : Roland FUSTIER - 4, rue Henri Pourrat - 63360 Gerzat - Tél. : 04 73 24 27 87 - roland.fustier@wanadoo.fr
Vice-présidente : Marie-Colette MORENAS - 1 bis, boulevard Fleury - 63000 Clermont-Ferrand - mcmorenas@auvergne.iufm.fr
Secrétaire : Éric GOURBEYRE - Olhat - 63990 Job - eric.gourbeyre@free.fr
Trésorière : Elyane YACINE - 4, rue des Bouleaux - 63100 Clermont-Ferrand - eyacine@auvergne.iufm.fr
Chimie (olympiades) : Stéphanie MORTIER - 5, allée du Capitaine Diederich - 63170 Aubière - smortier@free.fr
Collège : Daniel CHAMBENOIS - 18, rue du Docteur Teilhol - 63170 Aubière - chambenois.daniel@voila.fr
Informatique : Frédéric BROMONT - 7, rue Haute - 63670 Corent - frederic.bromont@wanadoo.fr
IUFM : Elyane YACINE - 4, rue des Bouleaux - 63100 Clermont-Ferrand - eyacine@auvergne.iufm.fr
Physique (olympiades) : Roland FUSTIER - 4, rue Henri Pourrat - 63360 Gerzat - roland.fustier@wanadoo.fr
Relations enseignement supérieur : Gilles BOUTEVILLE - 4, rue Victor Hugo - 63400 Chamalières - gbouteville@auvergne.iufm.fr

Corse

Présidente et Courrier : Valérie DENIS - 27, boulevard Paoli - 20200 Bastia - Tél. : 04 95 32 67 06 - simeoni.denis@laposte.net
Trésorier : Marcel BERNACCHI - 51, résidence Terra Corsa - Minelli - 20200 Bastia - marcel.bernacchi@wanadoo.fr
Collège : Antoine MURGIA - Route de Propriano - 20100 Sartene - antoine.murgia@ac-corse.fr
Informatique : Michèle L'HARIDON - Résidence Les Aloès - Bâtiment C - 20000 Ajaccio - michelle.lharidon@ac-corse.fr
Relations avec les CPGE : Marie-Françoise PALLIER - 21, cours Napoléon - 20000 Ajaccio.
Technique : Jacques LINALE - 20246 Pieve - jacques.linala@wanadoo.fr

Créteil

Courrier : Marcelle PLOTARD - 1, allée Clotilde - 77500 Chelles - plotardj@club-internet.fr
Trésorière : Marcelle PLOTARD - 1, allée Clotilde - 77500 Chelles - plotardj@club-internet.fr
IUFM : Madeleine MASLE - 33, avenue de la Sibelle - 75014 Paris - masle@wanadoo.fr

Dijon (Section académique de Bourgogne)

Secrétaire et Courrier : Christine FRIOUR - 7, rue Charles Dullin - 71100 Chalons-sur-Saône - udp.bourgogne@wanadoo.fr
Président d'honneur : Joseph ADAMSKI - joseph.adamski@free.fr
Trésorier : Alain PELVILLAIN - 10, rue de la Gare - 21270 Talnay - pelvillain.alain@wanadoo.fr
Chimie (olympiades) : Éliane SEMELET - Lycée Montchapet - 36, boulevard Pompon - 21000 Dijon.
Collège : Stéphanie ÉVRARD - 10, rue des Fleurs - 21000 Dijon - many_e@yahoo.fr
Concours collège « T's as vu ma manip ? » : Michel NOUVEL - 19, rue Chaudot - 89300 Joigny - michel.nouvel@wanadoo.fr
Diffusion du Trait d'Union : Florence CHARAU - 11, rue J.-B. Baudin - 21000 Dijon.
Physique (olympiades) : Gérard GOUTHIERE - 2, allée des Vergers - 21370 Plombières-lès-Dijon - gemo@ipac.fr
Relations enseignement supérieur : Marie-Thérèse DOUET-GIRARD - 9, impasse Gabriel Fauré - 21800 Chevigny-Saint-Sauveur - mt.ollagnier@wanadoo.fr
Site Internet : Michel NOUVEL - 19, rue Chaudot - 89300 Joigny - michel.nouvel@wanadoo.fr
Technique : Bernard CIRoux - 2 bis, rue Paul Claudel - 71530 Champforgeuil - bernard.ciroux@ac-dijon.fr

Grenoble

Président et Courrier : Gilles GALLIN-MARTEL - 24, rue Alfred de Musset - 74600 Seynod - Tél. : 04 50 69 57 15 - gallas-martel.gilles@wanadoo.fr
Vice-président : Gilles BAUDRANT - 7, rue Saint-Just - 38400 Saint-Martin d'Hères - g-Baudrant@wanadoo.fr
Trésorier adjoint : Daniel BIBOUD - 45, montée de l'Epallud - 38300 Domarin - hugues.desaintefoy@wanadoo.fr
Trésorier adjoint : Daniel BIBOUD - 9, chemin du Marais - 38100 Grenoble - Daniel.Biboud@ac-grenoble.fr
Collège : Josiane BOUVIER - Résidence du Château - 5, rue Guy Mocquet - 38130 Échirolles - josiane.bouvier@wanadoo.fr
Chimie (olympiades) : Stéphanie LARBAUD - 5, rue Jourdan Laforce - 38190 Brignoud - macquet.larbaud@wanadoo.fr
IUFM : Anne GOUBE - 10, avenue de l'Europe - 38120 Saint-Égrève - anne.goubes@grenoble.iufm.fr
Physique (olympiades) : Gilles BAUDRANT - 7, rue Saint-Just - 38400 Saint-Martin-d'Hères - g-Baudrant@wanadoo.fr
Post-bac : Philippe ODERMATT - 11, clos de Chapicolle - 38330 Montbonnot - podermat@ac-grenoble.fr
Responsable du secteur « 2 Savoies » : Didier PETITJEAN - Bâtiment Paroissial - 73590 Crest-Voland - didier.petitjean@ac-grenoble.fr
Technique : Didier PETITJEAN - Bâtiment Paroissial - 73590 Crest-Voland - didier.petitjean@ac-grenoble.fr

Lille

Président et Courrier : Jean-Christophe NAZE - 69, rue Leconte Baillon - 59100 Roubaix - Tél. : 03 20 81 01 44 - jc.naze@wanadoo.fr
Vice-présidente : Isabelle MULLER - 60, avenue du Quennelet - 59493 Villeneuve d'Ascq - imuller@nordnet.fr
Secrétaire général : Jean-Marc BOUGENIÈRE - 2, allée de la Forge - 59830 Louvil - jean-marc.bougeniere@ac-lille.fr
Secrétaire générale adjointe : Sabine DARTOIS - Résidence Gambetta-Leclerc - 6, rue Corbet - 59800 Lille - sabdar@wanadoo.fr
Trésorière : Nathalie GAINARD - 49, rue Delsaux - 59300 Valenciennes - ngainard@aol.com
Chimie : Isabelle MULLER - 60, avenue du Quennelet - 59493 Villeneuve d'Ascq - imuller@nordnet.fr
Chimie (olympiades) : Isabelle MULLER - 60, avenue du Quennelet - 59493 Villeneuve d'Ascq - imuller@nordnet.fr
Collège : Daniel TAVERNE - 25, rue Salvador Allende - 59280 Armentières - dtaverne@nordnet.fr
Marie-Dominique BASUYAUX-PORTIER - A54 Le Parc du Château Blanc - 135, rue Faubourg de Roubaix - 59800 Lille - mbasuyaux@nordnet
Enseignement privé : Marie-Dominique BASUYAUX-PORTIER - A54 Le Parc du Château Blanc - 135, rue Faubourg de Roubaix - 59800 Lille - mbasuyaux@nordnet
Informatique : Nathalie LEBRUN - 4, rue Pascal - 59650 Villeneuve d'Ascq - Nathalie.Lebrun@univ-lille1.fr
IUFM : Chantal DUPREZ - 24, allée Turgot - 59650 Villeneuve d'Ascq - chantal.duprez@univ-lille1.fr
Laboratoire : Michel BASUYAUX - A54 Le Parc du Château Blanc - 135, rue Faubourg de Roubaix - 59800 Lille - mbasuyaux@nordnet
Lycée : Michel BASUYAUX - A54 Le Parc du Château Blanc - 135, rue Faubourg de Roubaix - 59800 Lille - mbasuyaux@nordnet
Thérèse COUCKE - 71, rue Roland - 59800 Lille - tcoucke@nordnet.fr
Physique : Arnaud DURIEUX - 4, rue des Teinturiers - 59126 Linselles - durieux.arnaud@wanadoo.fr
Physique (olympiades) : Arnaud DURIEUX - 4, rue des Teinturiers - 59126 Linselles - durieux.arnaud@wanadoo.fr
Relations avec les CPGE : Gérard DUPUIS - 53, rue Alfonse Mercier - 59000 Lille - gerarddupuis@infonie.fr
Site Internet : Nathalie LEBRUN - 4, rue Pascal - 59650 Villeneuve d'Ascq - Nathalie.Lebrun@univ-lille1.fr
Isabelle MULLER - 60, avenue du Quennelet - 59493 Villeneuve d'Ascq - imuller@nordnet.fr
Technique : Arnaud DURIEUX - 4, rue des Teinturiers - 59126 Linselles - durieux.arnaud@wanadoo.fr
Université : Chantal DUPREZ - 24, allée Turgot - 59650 Villeneuve d'Ascq - chantal.duprez@univ-lille1.fr
Nathalie LEBRUN - 4, rue Pascal - 59650 Villeneuve d'Ascq - Nathalie.Lebrun@univ-lille1.fr
Visite d'entreprises : Marie-Dominique BASUYAUX-PORTIER - A54 Le Parc du Château Blanc - 135, rue Faubourg de Roubaix - 59800 Lille - mbasuyaux@nordnet

Limoges

Président et Courrier : Julien BARDET - 12, Les Grandes Loges - 23320 Fleurat - Tél. : 05 55 80 26 20 - julien.bardet@limousin.iufm.fr
Vice-présidents : Sophie RÉMY - 5, résidence d'Arliquet - 87700 Aix-sur-Vienne - sofremy@aol.com
Michel MÉTROT - 183, rue François Perrin - 87000 Limoges - michelmetrot@limousin.iufm.fr
Trésorier : Gérard ROGUES - 13, rue du Pérou - 87570 Rilhac Rancon.
Bar des sciences : Sophie RÉMY - 5, résidence d'Arliquet - 87700 Aix-sur-Vienne - sofremy@aol.com
Chimie : Jean-Christophe JOUVY - Lycée Guy-Lussac - 87036 Limoges - Jean-christophe.jouvy@ac-limoges.fr
Collège : Françoise FABRE - 245, rue du Mas Loge - 87100 Limoges - fabre.francoise@wanadoo.fr
Informatique : Patrick LASSIALLE - Lycée Raoul Dautry - 14, rue du Puy Imbert - 87000 Limoges.
Physique : Sophie RÉMY - 5, résidence d'Arliquet - 87700 Aix-sur-Vienne - sofremy@aol.com
Physique (olympiades) : Sophie RÉMY - 5, résidence d'Arliquet - 87700 Aix-sur-Vienne - sofremy@aol.com
Relations enseignement supérieur : Thérèse MERLE - 12, rue de l'Amphithéâtre - 87000 Limoges.
Relations extérieures : Michel MÉTROT - 183, rue François Perrin - 87000 Limoges - michelmetrot@limousin.iufm.fr

Lyon

Président et Courrier : Jean-Marie BIAU - 3, allée Val Prévert - 69400 Limas - Jean-Marie.Biau@ac-lyon.fr
Vice-présidente : Hélène PRUVOT - 21, domaine des Essarts - 69390 Vermaison - helene.pruvot@free.fr
Secrétaire : Françoise KHANTINE-LANGLAIS - 91, rue Duguesclin - 69006 Lyon - langlois@iuta.univ-lyon.fr

Trésorier : François-Jacques BACCHUS - 10, rue Sainte-Anne de Baraban - 69003 Lyon - fj.bacchus@free.fr
Chimie : Daniel SIMON - ENS Lyon - 46, allée d'Italie - 69364 Lyon Cedex 07 - dsimon@chimie.ens-lyon.fr
Chimie (olympiades) : Josette CARRETTO - 177 bis, avenue Félix Faure - 69003 Lyon - jo.carretto@wanadoo.fr
Collège : Gérard VACHER - 169, cours Lafayette - 69006 Lyon - Gerard.Vacher@ac-lyon.fr
Laboratoire : M. Dominique JANTON - 1, impasse de l'école - 42660 Jonzieux - Dominique.Janton@ac-lyon.fr
Physique : Bernadette HAGUENAUER - 765, route des Alpes - 01280 Prevessin - bernadette_haguenauer@yahoo.fr
Physique (olympiades) : Florence CHAVANEL - 25, rue de Montribloud - 69009 Lyon - florence_chavanel@yahoo.fr
Relations avec les CPGE : Sylvaine ALBRECHT - 14, rue de Pizay - 69001 Lyon - sylvaine.albrecht@free.fr
Relations extérieures : Annie LESTRADE - 177 bis, avenue Félix Faure - 69003 Lyon - jo.carretto@wanadoo.fr
Site Internet : Sylvaine ALBRECHT - 14, rue de Pizay - 69001 Lyon - sylvaine.albrecht@free.fr
Technique : Jean-Marie BIAU - 3, allée Val Prévert - 69400 Limas - Jean-Marie.Biau@ac-lyon.fr
Université : Roger DUFFAIT - 7, rue des Alouettes - 69890 La Tour de Salvagny - r.duffait@ipn1.in2p3.fr

Montpellier

Président et Courrier : Franck MILLOT - Lycée Mermoz - 717, avenue Mermoz - 34060 Montpellier Cedex 1 - Tél. / Fax : 04 67 73 98 76 - millotfrank@wanadoo.fr
Vice-présidents : Jean-Pierre PONSAS - 22, rue Edouard Vaillant - 66350 Toulouges - Raymonde.Ponsa@wanadoo.fr
René TORRA - Rue du Val de la Mosson - 34430 Saint-Jean-de-Vedas - rtorra@libertysurf.fr
Secrétaire : Marie BOURGAREL - 3, rue du Commerce - 34000 Montpellier - Marie.Bourgarel@wanadoo.fr
Secrétaires adjoints : Christophe REY - 14, rue Bourseul - 34500 Béziers - christophe.rey@ac-montpellier.fr
Martine JEANJEAN - Lycée Docteur Lacroix - Rue Gay Lussac - 11100 Narbonne - jeanmarjean@yahoo.fr
Trésorière : Sylvie BEAUFORT - Parc des Amandiers - 5, rue Yourcenar - 34430 Saint-Jean-de-Vedas - dbeaufor@club-internet.fr
BUP : Marie BOURGAREL - 3, rue du Commerce - 34000 Montpellier - Marie.Bourgarel@wanadoo.fr
Chimie : Jean-Pierre PONSAS - 22, rue Edouard Vaillant - 66350 Toulouges - Raymonde.Ponsa@wanadoo.fr
Chimie (olympiades) : Jean-Pierre PONSAS - 22, rue Edouard Vaillant - 66350 Toulouges - Raymonde.Ponsa@wanadoo.fr
Collège : Bernard FABRE - 11, rue Jean-Baptiste Perdraut - 34500 Béziers - fabre.bjam@wanadoo.fr
Mme Dominique DUCOURANT - 7, rue des Martres - 34090 Montpellier - dominique.ducourant@free.fr
Informatique : Martial CASANOVA - Lycée Mermoz - 717, avenue Mermoz - 34060 Montpellier Cedex 1 - mermoziesp@yahoo.com
Liaison lycée - post-bac : Sylvette ALMAIRAC - 37, rue Lacase Duthiers - 34090 Montpellier - salmairac@ac-montpellier.fr
Suzanne CAUSSIGNAC - Lycée Jean Lurçat - 25, avenue Albert Camus - 66000 Perpignan - alain.caussignac@wanadoo.fr
Henri ESCUDIER - 7, chemin des Prés - 34820 Teyran - henri.escudier@wanadoo.fr
Ferial TERKI - Université Montpellier II - Bâtiment 21 - Case courrier 074 - 34095 Montpellier Cedex 5 - terki@ges.univ-montp2.fr
Henri LAVIE - 8, impasse des Garrigues - 11110 Vinasson - lavie@iutmontp.univ-montp2.fr
Physique : Christophe REY - 14, rue Bourseul - 34500 Béziers - christophe.rey@ac-montpellier.fr
Relation avec les enseignants étrangers : Witold KUBEL - Lycée Jules Fil - 23, boulevard Joliot Curie - 11000 Carcassonne - dylewo@aol.com
Site Internet : Robert QUER - Lycée Mermoz - 717, avenue Mermoz - 34060 Montpellier Cedex 1 - r_quer@club-internet.fr
Technique : Franck MILLOT - Lycée Mermoz - 717, avenue Mermoz - 34060 Montpellier Cedex 1 - millotfrank@wanadoo.fr

Nancy - Metz (Section académique de Lorraine)

Président et Courrier : Frédéric CORDIER - 85 bis, rue Camp - 54700 Pont-à-Mousson - Tél. : 03 83 81 35 17 - f.cordier@ac-nancy-metz.fr
Trésorier : Chantal FRIES - 57, rue de la Pépinière - 57970 Yutz - chantal-fries@libertysurf.fr
Secrétaires : Chantal FRIES - 57, rue de la Pépinière - 57970 Yutz - chantal-fries@libertysurf.fr
Claire HUTTIN - 4, rue de Bure - 57650 Havange - claire.huttin@guideo.fr
Collège : Laurent PERTUY - Résidence « Les Sapins » - 2, rue des Bleuets - 54150 Avril - laurent.pertuy@wanadoo.fr
Liaison collège - lycée : Frédéric MARIUCCI - 6, rue de Verdun - 54270 Essey-lès-Nancy - f.mariucci@ac-nancy-metz.fr
Liaison secondaire université : Frédéric CORDIER - 85 bis, rue Camp - 54700 Pont-à-Mousson - f.cordier@ac-nancy-metz.fr
Monique SCHWOB - 39, rue de la Prévôté - 57950 Montigny-lès-Metz - schwob.m@wanadoo.fr
Lycée et lycée technique : Chantal FRIES - 57, rue de la Pépinière - 57970 Yutz - chantal-fries@libertysurf.fr

Nantes

Trésorier et Courrier : Alain LAFOND - 15, rue des Naudières - 44800 Saint-Herblain - alafond@wanadoo.fr
Chimie (olympiades) : Gaëlle JOBIC - 13, chemin Clos Saint-Julien - 44340 Bouguenais.
Collège : Claudine NIZOU - 23 bis, rue Charles Terront - 44300 Nantes - cnizou@aol.com
Informatique : Jean-Marie PUYSILOUX - Jmpuysil@club-internet.fr
Physique (olympiades) : Jean-Luc CANCOUET - 71, rue des Renardières - 44100 Nantes - j.cancouet@wanadoo.fr
Site Internet : Jean-Marie PUYSILOUX - Jmpuysil@club-internet.fr
Technique et professionnel : Philippe GUINEL - 85, boulevard de Charbonneau - 44470 Carquefou - philippe.guinel@wanadoo.fr

Nice - Toulon

Président (Alpes-Maritimes) et Courrier : Serge TRICOIRE - 557, route de la Colle de Revel - 06730 Saint-André - Tél. : 04 97 00 07 91- serge.tricoire@unice.fr

Vice-président (Var) : Francis BERTHOMIEU - Place de l'Église - 83111 Ampus - berthomi@ac-nice.fr

Secrétaire : Chantal OTTO - Les Maisons de Villeneuve - 33, chemin des Ferrayonnes - 06270 Villeneuve-Loubet.

Trésorier : Serge OLIVIER - 8, route de Sospel - 06500 Menton.

Collège : Marie-Hélène CANAVESIO - 220, avenue Sainte-Marguerite - Bâtiment C3 - 06200 Nice.

Informatique : Patrice GARNIER - Avenue Darié La Madone - 06230 Villefranche-sur-Mer.

Orléans - Tours

Président et Courrier : Jean JOURDAIN - 60, rue Carnot - 45400 Fleury-les-Aubrais - Tél. : 02 38 88 61 00 - ajj@club-internet.fr

Vice-président : Philippe CHEVALLIER - Lycée Rotrou - 28000 Dreux - philippe.che@wanadoo.fr

Trésorier : Jean JOURDAIN - 60, rue Carnot - 45400 Fleury-les-Aubrais - ajj@club-internet.fr

BTS : Christian MABILAT - 23, rue des templiers - 37400 Amboise - chrn.mabilat@oreka.com

Chimie (olympiades) : Chrystelle BLEROT - 1, rue du Moulin - 45170 Crottes-en-Pithiverais - jerome.blerot@wanadoo.fr

Collège : Jean JOURDAIN - 60, rue Carnot - 45400 Fleury-les-Aubrais - ajj@club-internet.fr

Informatique : Bruno DE MARTEL - 15, rue Sourderie - 41000 Blois - demartel@club-internet.fr

Physique (olympiades) : Arnaud SOULAS - Lycée Benjamin Franklin - 21 bis, rue Eugène Vignat - 45000 Orléans - asoulas@noos.fr

Technique : Christiane SELLIER - Lycée Durzy - 45700 Villemandeur - c_sellier@hotmail.com

Université : Caroline ANDRÉAZZA - CRMD UMR 6619 - Université d'Orléans - CNRS - 1 bis, rue de la Férollerie - 45071 Orléans Cedex 2 - caroline.andrezza@univ-orleans.fr

Autre membre du bureau : Michèle DEPRez - Lycée Pothier - 2 bis, rue Marcel Proust - 45000 Orléans - deprez.michele@wanadoo.fr

Paris

Secrétaire et Courrier : Jean-Charles JACQUEMIN - 2, boulevard Magenta - 75010 Paris - jc.jacquemin@noos.fr

Trésorière : Jacqueline CHAUSSADE - 11-13, rue Lasson - 75012 Paris - jacqueline.chaussade@paris.iufm.fr

Chimie (olympiades) : Jacqueline GUÉ - 11, rue de l'Industrie - 92400 Courbevoie - jg.sion@free.fr

Collège : Christian LARCHER - 19 bis, rue de Verdun - 94170 Le Perreux-sur-Marne - larcher2@wanadoo.fr

Informatique : Annick MACE - 6 bis, avenue des Tilleuls - 94140 Alfortville - annick.mace@wanadoo.fr

IUFM : Christian LARCHER - 19 bis, rue de Verdun - 94170 Le Perreux-sur-Marne - larcher2@wanadoo.fr

Lycées privés : Christian LARCHER - 19 bis, rue de Verdun - 94170 Le Perreux-sur-Marne - larcher2@wanadoo.fr

Technique : Jean-Charles JACQUEMIN - 2, boulevard Magenta - 75010 Paris - jc.jacquemin@noos.fr

Poitiers

Président et Courrier : Denis PICARD - 19, rue de l'Abreuvoir - 86440 Migné Auxances - denis.picard@ac-poitiers.fr

Vice-présidents : Jean-Luc FOUQUET - Collège Les Salières - 17410 Saint-Martin de Ré - jean-luc.fouquet@wanadoo.fr

Thomas MARSH - 8, rue des Amandiers - 17130 Puilboreau - tmarsh@univ-lr.fr

Secrétaire : Florence EDARD - 4, rue de la Grange - 86800 Saint-Julien l'Arç - florence.edard@wanadoo.fr

Trésorière : Françoise ARNAUD - 51, rue Rémy Belleau - 86000 Poitiers - francoise.arnaud@ac-poitiers.fr

Chimie : Catherine BRUNE - Chandigon - 86100 Antrains.

Collège : Jean-Luc FOUQUET - Collège Les Salières - 17410 Saint-Martin de Ré.

Technique : Francis VALLADE - 91, rue du Pré des Mottes - 86550 Mignaloux-Beauvoir.

Université : Thomas MARSH - 8, rue des Amandiers - 17130 Puilboreau - tmarsh@univ-lr.fr

Polynésie Française

Président et Courrier : Pierre LEYRAL - BP 51152 - Pirae - Tahiti.

Reims

Présidente et Courrier : Nicole HERMAN - 18, rue de Taissy - 51100 Reims - Tél. : 03 26 85 43 17 - nicole.herman@wanadoo.fr

Trésorière : Françoise SAINGERY - 11, rue Labori - 51100 Reims.

Chimie (olympiades) : Luc LEPICIER - Lycée Libergier - Rue Libergier - 51100 Reims.

Physique (olympiades) : Nicole HERMAN - 18, rue de Taissy - 51100 Reims - nicole.herman@wanadoo.fr

Technique : François SEVIN - 19, rue Follpeine - 51100 Reims.

Rennes

Président et Courrier : Loïc POUILLAIN - 39 A, avenue du Général de Gaulle - 22190 Plerin - Tél. : 02 96 74 42 60 - Loic.Pouillain@wanadoo.fr

Vice-président : Éric MARCADE - 6, avenue des Chevreuils - 22410 Lantic - emarcade@club-internet.fr

Secrétaire : Edith LE BUANEC - 2, route de Kerhervrec - 22300 Ploulech - edith.lebuane@wanadoo.fr
Trésorier : Louis GILLOIS - 3, allée du Haut-Moulin - 35760 Saint-Grégoire - gilloy@wanadoo.fr
Action culturelle et Collège : Laurence LE CALVEZ - L'horizon - 35135 Chantepie - family.lecalvez@wanadoo.fr
Collège : Jacques SALLAIS - 53, rue du Parc - 35135 Chantepie - Jacques.Sallais@wanadoo.fr
Informatique : Louis GILLOIS - 3, allée du Haut-Moulin - 35760 Saint-Grégoire - gilloy@wanadoo.fr
IUFM : Alain JAMEAU - 39, avenue de l'Étang - 35590 Saint-Gilles - alain.jameau@wanadoo.fr
Lycée : Claudine ROLLIN - 14, rue de la Tour d'Auvergne - 56000 Vannes - claudine.rollin@lesage-mail.net
Physique (olympiades) : Éric MARCADE - 6, avenue des Chevreuils - 22410 Lantic - emarcade@club-internet.fr
Post-bac : Marie-Annick MARÉCHAL - 4, rue Surcouf - 35740 Pace - Marie-Annick.Marechal@univ-rennes1.fr
Technique : Alain JAMEAU - 39, avenue de l'Étang - 35590 Saint-Gilles - alain.jameau@wanadoo.fr

Rouen

Trésorière et Courrier : Brigitte MARY - Appartement 20 - 6, rue Collins - 76120 Grand-Quevilly - Tél. : 02 35 67 07 74 - brigitte.mary@wanadoo.fr
Chimie (olympiades) : Annick GUILLOUX - 11, rue de Zurich - 76000 Rouen.
Collège : Jacques BOURRET - 12, rue Brisout de Barneville - 76100 Rouen - Jacques.bouret@ac-rouen.fr
Informatique : Colette ÉTASSE - 4, avenue René Coty - Appartement 448 - 76120 Grand-Quevilly.
Technique (STI) : Brigitte MARY - Appartement 20 - 6, rue Collins - 76120 Grand-Quevilly - brigitte.mary@wanadoo.fr
Technique (STL) : Micheline IZBICKI - 50, chemin de Buglise - 76290 Montivilliers - miizbicki@aol.com

Strasbourg

Président et Courrier : Alain SPRAUER - 79, rue Baldung-Grien - 67720 Weyersheim - Tél. : 03 88 51 76 83 - spraua@club-internet.fr -
Vice-présidente : Odile LEIBER - 58, rue de Verdun - 68100 Mulhouse - oleiber@yahoo.fr
Trésorier : Bernard GOERIG - 14, rue Principale - 67300 Schiltigheim - bernardgoerig@evc.net
Chimie (olympiades) : Jean-Michel TOLEDANO - 11, rue Victor Kessler - 67000 Strasbourg - jm.tole@wanadoo.fr
Collège : Michèle DOLLÉ - 2, rue du Landsberg - 67800 Hoenheim - micheledolle@wanadoo.fr
Contact extérieur : André ISEL - 15, rue Geiler - 67000 Strasbourg - andre.isel@wanadoo.fr
CPGE : Jean-François THIVENT - 15, rue Victor Schoelcher - 67300 Schiltigheim - THIVENTJF@aol.com
CPGE (technique) : Brigitte JUNCKER - 11, rue de Niederbourg - 67400 Illkirch Graffenstaden - brigitte.juncker@free.fr
Europe : Lucie CHAUMONT - 61 A, rue Himmerich - 67000 Strasbourg - Lechaum@wanadoo.fr
Informatique : François BOSSERT - 5, rue Claude Debussy - 67460 Reichstett - francois.bossert@evc.net
IUFM : Alain SPRAUER - 79, rue Baldung-Grien - 67720 Weyersheim - spraua@club-internet.fr
LP - TICE : Jean-Paul XUEREB - 19, rue Sainte-Marguerite - 67201 Eckbolsheim - jeanpaul.xuereb@free.fr
Lycée : Bernard GOERIG - 14, rue Principale - 67300 Schiltigheim - bernardgoerig@evc.net
Lycée (privé) : Marie-Noëlle EASTES - 15, rue des Frères Stoeffler - 67000 Strasbourg - mneastes@wanadoo.fr
Physique (olympiades) : François SCHLOSSER - 57, boulevard d'Anvers - 67000 Strasbourg - francoisschlosser@voila.fr
Rectorat : Alain SPRAUER - 79, rue Baldung-Grien - 67720 Weyersheim - spraua@club-internet.fr
Relations enseignement supérieur IUFM : Jean MEULLEMEESTRE - 20, rue d'Oslo - 67000 Strasbourg - Jean.MEULLEMEESTRE@chimie.u-strasbg.fr
Sécurité chimie : Alfred MATHIS - 18, rue des Pommes - 67200 Eckbolsheim - AlfredMathis@chez.com
Site Internet et webmestre : Jean-Luc RICHTER - 36, rue Rivoli - 67600 Hilsenheim - jean-luc.richter@wanadoo.fr
Technique : Nicolas ESQUENET - 4, rue Kirstein - 67000 Strasbourg - nicolas.esquenet@free.fr
Technique post-bac : Jean-Marc DIRRIG - 16 A, rue de la Brigade Alsace-Lorraine - 67114 Eschau - jmdirrig@wanadoo.fr
Bruno HERRBACH : 15, rue du Sport - 67130 Lutzelhouse - bruno.herrbach@laposte.net

Toulouse

Présidente et Courrier : Marie-Laure MIEGEVILLE - 3, rue B. de Ventadorn - 31750 Escalquens - miegeville@aol.com
Secrétaire : Anne BATAILLE - 302, route de Saint-Simon - 31100 Toulouse - anne.bataille@wanadoo.fr
Trésorier : Jean-Marc LEMAIRE - Route de Rosières - 81350 Valderies.
Chimie : Mireille GALLIAN - 4, place del Rei Petit - 31120 Lacroix-Falgarde - mireille.galian@ac-toulouse.fr et galian@club-internet.fr
André GILLES - Sauveterre - 31320 Aureville - agilles@ac-toulouse.fr
Chimie (olympiades) : Mireille GALLIAN - 4, place del Rei Petit - 31120 Lacroix-Falgarde - mireille.galian@ac-toulouse.fr et galian@club-internet.fr
André GILLES - Sauveterre - 31320 Aureville - agilles@ac-toulouse.fr
Collège : Cathy PARIS - 11, rue Matabiau - 31000 Toulouse - cathy.paris@ac-toulouse.fr
Serge BETTON - Lendrevie-Basse - 81600 Brens - sbetton@wanadoo.fr
Informatique : Thierry MARTIN - 3, lotissement Le Foulon - 31360 Saint-Marty - thierry.martin@ac-toulouse.fr
IUFM : Alain RABIER - 10, allée du Soulor - 31770 Colomiers - rabier@cict.fr et arabier@free.fr
Lycée : Dominique KAHRAMAN - Route des Crêtes - 31320 Merville - dominique.kahraman@ac-toulouse.fr
Technique : Jean-Marc LEMAIRE - Route de Rosières - 81350 Valderies.
TICE : Thierry MARTIN - 3, lotissement Le Foulon - 31360 Saint-Marty - thierry.martin@ac-toulouse.fr

Versailles

Présidente et Courrier : Françoise COUSSON - 31, allée Marcel Jouhandeau - 92500 Rueil-Malmaison -
Francoise.Cousson@ac-versailles.fr

Trésorière : Nicole GUIBÉ - 15, allée de Trévisse - 92330 Sceaux.

Chimie (olympiades) : Catherine RIPERT - 1, rue Félix Faure - 95880 Enghien-les-Bains -
Catherine.Ripert@ac-versailles.fr

Collège : André CALAS - 40, rue des Boulangers - 75005 Paris - andreocalas@voila.fr
Vincent MAS - 10, square du Vexin - L'Orée du Lac - 78200 Mantes-la-Jolie - vincent.Mas@ac-versailles.fr

Informatique : Bernard RENAUD - 9, ruelle du Douaire - 95270 Viarmes - Bernard.Renaud@ac-versailles.fr

IUFM : Pierre FONTES - 48, rue Jean Moulin - 92160 Antony - fontes@csnsm.in2p3.fr

Physique (olympiades) : Françoise COUSSON - 31, allée Marcel Jouhandeau - 92500 Rueil-Malmaison -
Francoise.Cousson@ac-versailles.fr

Jérôme BOHIN - 39, rue Gabriel Péri - 92300 Levallois-Perret - jerome.bohin@freesbee.fr

Technique : Olivier JALLU - 40 bis, rue Jules Larose - 92230 Gennevilliers - olivier.Jallu@ac-versailles.fr

Sur votre agenda...

Du 31 mars au 2 avril 2004

Olympiades nationales de la chimie
Paris.

Du 24 au 27 août 2004

École d'été e2phy : « Physique et art »
Université de Lille?

Du 23 au 26 octobre 2004

52^{es} Journées nationales de l'Union des professeurs de physique et de chimie
Grenoble.

Union des professeurs de physique et de chimie

Cahier des concours Agrégations et Capes 2003 :

Les corrigés

N° 862 (2) - Mars 2004

Administration et rédaction
44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06
<http://www.udppc.asso.fr/>

Avertissement

Ce recueil des solutions de la plupart des épreuves écrites des concours de recrutement de professeurs en physique et chimie est destiné à faciliter le travail de toutes les personnes intéressées par ces épreuves et notamment des candidats à ces concours.

Nous remercions les collègues qui ont accepté de se charger de la rédaction des solutions. Ces solutions peuvent être plus ou moins détaillées selon les épreuves. En aucun cas elles ne constituent un modèle des méthodes ni des rédactions que les jurys pourraient souhaiter mais une simple aide permettant en particulier de contrôler la validité des résultats.

Ces épreuves de concours peuvent fournir l'occasion de prolongements et d'approfondissements qu'il n'est généralement pas possible aux auteurs de signaler ici autrement que par une bibliographie sommaire. Les candidats aux concours doivent pouvoir trouver ces incitations à d'intéressantes études en participant aux préparations ouvertes dans les différentes académies.

Afin de faciliter l'utilisation de ce numéro spécial, son service est inclus dans l'abonnement collectivités, tout en demeurant hors abonnement individuel. Il en est de même pour le numéro spécial comportant les énoncés correspondants. Ces deux numéros des concours sont disponibles par correspondance au siège de l'Union des professeurs de physique et chimie et tous les renseignements à ce sujet peuvent être obtenus sur le site de l'UdPPC :

<http://www.udppc.asso.fr/>

André GILLES
Rédacteur en chef du bulletin

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE

Composition de physique ♦ Session : 2003

CHAMPS ELECTROMAGNETIQUES ET TELECOMMUNICATIONS

PARTIE A : Electromagnétisme et relativité.

1. Les équations de Maxwell.

1.1.

Référentiel Galiléen : référentiel dans lequel le mouvement d'une particule isolée est rectiligne et uniforme.

1.2. Passage aux potentiels.

1.2.1.

- De l'équation $\text{div}\mathbf{B} = 0$ on déduit l'existence d'un champ de vecteur \mathbf{A} tel que $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$.
- De l'équation $\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ on déduit $\text{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}$ il existe donc un champ scalaire V tel que

$$\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad}V \text{ soit } \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}V.$$

1.2.2.

- Avec l'équation de Maxwell-Gauss, on établit que $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div}\mathbf{A}$.
- A partir de celle de Maxwell-Ampère, on obtient $\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu_0\mathbf{j} = \text{grad}\left(\text{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}\right)$ avec $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$.

1.2.3.

- les équations de la question 1.2.2. s'écrivent : $\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ et $\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu_0\mathbf{j} = \mathbf{0}$.

2. Les lois de l'électromagnétisme en mécanique newtonienne.

2.1. Transformation « classique » des champs.

2.1.1. $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$

2.1.2. $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_e$

- 2.1.3. Dans le référentiel R : $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$ et dans R' $\mathbf{F}' = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \wedge \mathbf{B}')$ car la charge est invariante. En mécanique newtonienne la force est invariante ainsi $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = q(\mathbf{E}' + \mathbf{v}' \wedge \mathbf{B}')$ soit $(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = (\mathbf{E}' + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_e) \wedge \mathbf{B}')$. Cette égalité doit être satisfaite pour tout vecteur \mathbf{v} , on déduit les relations suivantes : $\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}'$ et $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$.

2.2.

2.2.1. Transformation de Galilée :

$$x' = x - v_e t \quad y' = y \quad z' = z \quad ct' = ct$$

2.2.2.

2.2.2.α. Dans R on a $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$. Sachant que $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$ on a bien $\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = 0$.

2.2.2.β. Dans R on a $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ car il n'y a pas de charge. De $\mathbf{E} = \mathbf{E}' - v_e \wedge \mathbf{B}'$ on déduit pour

les composantes : $E_x = E'_x$; $E_y = E'_y + v_e B'_z$ et $E_z = E'_z - v_e B'_y$. On montre que

$$\frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} + v_e \left(\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \right) = 0. \text{ En général, on a pas } \text{div}' \mathbf{E}' = 0.$$

2.2.2.γ. L'équation de Maxwell-Gauss n'est pas structurellement invariante par changement de référentiel galiléen dans le cadre de la mécanique newtonienne.

2.3.

2.3.1.

- En utilisant le théorème de Gauss, on établit que $\mathbf{E}' = \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o(y'^2 + z'^2)} (y' \mathbf{e}_y + z' \mathbf{e}_z)$.

- $\mathbf{B}' = \mathbf{0}$.

2.3.2.

- $\mathbf{E} = \mathbf{E}' = \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o(y^2 + z^2)} (y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z)$ et $\mathbf{B} = \mathbf{B}' = \mathbf{0}$.

2.3.3. On évalue directement le champ magnétique \mathbf{B} en utilisant le théorème d'Ampère sur un cercle orienté de rayon

$$r = \sqrt{(y^2 + z^2)} : \mathbf{B} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{\lambda_o v_e}{(y^2 + z^2)} (-z \mathbf{e}_y + y \mathbf{e}_z).$$

2.3.4. L'utilisation simultanée des lois de l'électromagnétisme et de la mécanique newtonienne conduit à des difficultés.

3. Les lois de l'électromagnétisme en mécanique relativiste.

3.1.

3.1.1. Les lois de la physique (dynamique et électromagnétisme) sont invariantes par changement de repère galiléen.

3.1.2. Transformation de Lorentz-Poincaré :

$$x' = \gamma_e (x - \beta_e ct) \quad y' = y \quad z' = z \quad ct' = \gamma_e (-\beta_e x + ct)$$

3.1.3.

3.1.3.α. Dans R on a $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$. En utilisant l'expression de la transformation einsteinienne des

champs $B_x = B'_x$; $B_y = \gamma_e \left(B'_y - \frac{\beta_e}{c} E'_{z'} \right)$; $B_z = \gamma_e \left(B'_z + \frac{\beta_e}{c} E'_{y'} \right)$, on montre que :

$$\gamma_e \left(\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} \right) - \gamma_e \frac{\beta_e}{c} \left(\frac{\partial B'_{z'}}{\partial t'} + \frac{\partial E'_{y'}}{\partial y'} - \frac{\partial E'_{y'}}{\partial z'} \right) = 0 ; \text{ l'équation de Maxwell-Faraday écrite}$$

dans R' donne $-\frac{\partial B'_{z'}}{\partial t'} = \frac{\partial E'_{y'}}{\partial y'} - \frac{\partial E'_{y'}}{\partial z'}$. On établit donc bien l'équation :

$$\frac{\partial B'_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial B'_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial B'_{z'}}{\partial z'} = 0$$

3.1.3.β. Dans R on a $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$. En utilisant l'expression de la transformation einsteinienne des

champs $E_x = E'_x$; $E_y = \gamma_e (E'_{y'} + v_e B'_{z'})$; $E_z = \gamma_e (E'_{z'} - v_e B'_{y'})$ on établit que :

$$\gamma_e \left(\frac{\partial E'_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E'_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E'_{z'}}{\partial z'} \right) - \gamma_e v_e \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_{x'}}{\partial t'} - \frac{\partial B'_{z'}}{\partial y'} + \frac{\partial B'_{y'}}{\partial z'} \right) = 0, \text{ l'équation de Maxwell-Ampère écrite}$$

dans R' donne $\frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_{x'}}{\partial t'} = \frac{\partial B'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial B'_{y'}}{\partial z'}$. On établit donc bien l'équation :

$$\frac{\partial E'_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E'_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E'_{z'}}{\partial z'} = 0$$

3.1.3.γ. Il y a donc cette fois invariance des deux équations de Maxwell.

3.2.

3.2.1. On a encore comme en 2.3.1.

$$\mathbf{E}' = \frac{\lambda_o}{2\pi\epsilon_o(y'^2 + z'^2)} (y' \mathbf{e}_y + z' \mathbf{e}_z) \text{ et } \mathbf{B}' = \mathbf{0}.$$

$$3.2.2. \mathbf{E} = \frac{\gamma_e \lambda_o}{2\pi\epsilon_o(y^2 + z^2)} (y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) \text{ et } \mathbf{B} = \frac{\gamma_e \lambda_o v_e}{2\pi\epsilon_o c^2 (y^2 + z^2)} (-z \mathbf{e}_y + y \mathbf{e}_z)$$

3.2.3.

3.2.3.α. Par application du théorème de Gauss dans le référentiel R , la charge portée par une hauteur h du fil est $\gamma_e \lambda_o h$.

3.2.3.β. On illustre ici la phénomène de contraction des longueurs : la densité linéique de charge dans R' est λ_o , dans R elle vaut $\gamma_e \lambda_o$.

3.2.3.γ. On retrouve 3.2.2. par l'application du théorème d'Ampère.

PARTIE B : Rayonnement dipolaire et applications.

1. Etude du rayonnement du dipôle électrique.

1.1. Potentiels

1.1.1.

1.1.1.α.

- $r \gg a$: approximation dipolaire, on étudie les potentiels à une distance grande devant la taille du dipôle.
- $\lambda \gg a$: approximation non relativiste : $\frac{a\omega}{c} \ll 2\pi$ ou bien A.R.Q.S. : $\frac{a}{c} \ll T$

$$1.1.1.β. \mathbf{p} = p(t) \mathbf{e}_z = qa \sin(\omega t) \mathbf{e}_z$$

1.1.2. Le terme en $t - \frac{r}{c}$ dans $\mathbf{A}(\mathbf{M}, t)$ exprime que l'état des champs en M à la date t dépend de l'état de la source à la

date $t - \frac{r}{c}$, $\frac{r}{c}$ représente le temps de propagation de l'onde de O à M .

1.1.3. On part de l'expression de la condition $\text{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$, ainsi $\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial A_z}{\partial z}$ et comme $\frac{\partial r}{\partial z} = \cos \theta$, on

$$\text{établit que } \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\mu_o c^2}{4\pi} \left(\frac{\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2} + \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc} \right) \cos \theta, \text{ on intègre par rapport au temps en ne retenant que les}$$

$$\text{termes qui contiennent } t - \frac{r}{c} \text{ et ainsi } V = \frac{\mu_o c^2}{4\pi} \left(\frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2} + \frac{\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc} \right) \cos \theta. \text{ On peut également utiliser une}$$

formule d'analyse vectorielle.

1.2. Champs.

1.2.1. On part de $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$, $\text{rot}\mathbf{A} = \text{grad}A_z \wedge \mathbf{e}_z$ et $\text{grad}A_z = \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{e}_r = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2} + \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc} \right) \mathbf{e}_r$.

Dans la zone de rayonnement $\frac{1}{r^2} \ll \frac{\omega}{rc} = \frac{2\pi}{\lambda r}$, on peut négliger le premier terme devant le second ainsi :

$$\text{grad}A_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc} \mathbf{e}_r \text{ et par suite } \mathbf{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc} \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r.$$

1.2.2. Dans la zone de rayonnement le potentiel s'écrit : $V = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \cos\theta$ car $\frac{1}{r^2} \ll \frac{\omega}{rc} = \frac{2\pi}{\lambda r}$. Le champ

électrique vaut $\mathbf{E}(M, t) = -\text{grad}V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$,

$$-\text{grad}V = \frac{\mu_0 c}{4\pi} \left(\frac{\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2} + \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc} \right) \cos\theta \mathbf{e}_r + \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{\dot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2} \sin\theta \mathbf{e}_\theta \text{ et}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \mathbf{e}_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} (\cos\theta \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_\theta) \text{ en tenant compte une nouvelle fois de}$$

l'approximation $\frac{1}{r^2} \ll \frac{\omega}{rc} = \frac{2\pi}{\lambda r}$ on obtient $\mathbf{E}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \sin\theta \mathbf{e}_\theta$ or $(\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r) \wedge \mathbf{e}_r = \sin\theta \mathbf{e}_\theta$,

on obtient ainsi l'expression demandée : $\mathbf{E}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r) \wedge \mathbf{e}_r$.

1.2.3. La structure locale de cette onde est celle d'une onde plane progressive polarisée rectilignement :

- transversalité électrique et magnétique
- $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$.
- $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{e}_r \wedge \mathbf{E}}{c}$.

1.3. aspect énergétique.

1.3.1. On utilise le flux du vecteur de Poynting à travers une surface élémentaire dS située sur une sphère de rayon r et

repérée par les angles θ et φ . $dP = \left(\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \right) dS \mathbf{e}_r = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left(\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right)^2 \sin^2 \theta \frac{dS}{r^2}$ sachant que

$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$ on établit la relation $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left(\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right)^2 \sin^2 \theta$.

1.3.2. Diagramme à deux lobes illustrant une anisotropie de l'émission.

1.3.3. La puissance totale rayonnée par ce dipôle à travers la sphère de centre O et de rayon r s'obtient par intégration sur toutes les directions :

$$P = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right)^2 \sin^3 \theta d\theta d\varphi = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left(\ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right)^2$$

2. Rayonnement par une antenne.

2.1. Antenne élémentaire.

2.1.1. En utilisant la notion d'élément de courant, on justifie $I(t) = \frac{1}{h} \frac{dp}{dt}$.

2.1.2. On utilise le résultat de la question 1.3.3. $P_r = \langle P \rangle_t = \frac{\mu_0 \omega^2 h^2}{6\pi c} I_0^2 \left\langle \left(\sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 \right\rangle_t = \frac{\mu_0 \omega^2 h^2}{12\pi c} I_0^2$

2.1.3. $R_r = \frac{2\pi\mu_0 c}{3} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2$. Elle permet par exemple d'étudier l'adaptation d'impédance de l'antenne dans le circuit d'alimentation.

2.1.4. Applications numériques.

2.1.4.α. $h = 2 \text{ cm}$ $\lambda = \frac{c}{f} = 33,3 \text{ cm}$. On a bien $a \ll \lambda$.

2.1.4.β. On doit avoir $r \gg \lambda$, à partir d'une distance de 3 mètres l'approximation est acceptable.

2.1.4.γ. $R_r = 2,8 \Omega$

2.1.4.δ. On utilise l'expression de 1.2.2., on estime $I_0 = \sqrt{\frac{2 P_r}{R_r}} = 1,2 \text{ A}$ et l'amplitude maximale du vecteur

champ électrique par $\frac{\mu_0 \omega h I_0}{4\pi r} = \frac{\mu_0 c}{2} \frac{h I_0}{r \lambda} = 4,5 \text{ V.m}^{-1}$.

2.2. Antenne demi-onde.

2.2.1. Onde stationnaire et existence de deux nœuds aux extrémités.

2.2.2. Structure des champs.

$$2.2.2.\alpha. \|\mathbf{PM}\| = \sqrt{(r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta)}$$

$$2.2.2.\beta. \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{M}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l}^{+l} \left(\frac{j\omega I_1 \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) e^{j\omega\left(t - \frac{\|\mathbf{PM}\|}{c}\right)}}{\|\mathbf{PM}\|^3} (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{PM}) \wedge \mathbf{PM} \right) dz$$

• pour le terme d'amplitude, on prend le terme d'ordre le plus bas :

$$\frac{(\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{PM}) \wedge \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} \approx \frac{(\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r) \wedge \mathbf{e}_r}{r} = \frac{\sin \theta}{r} \mathbf{e}_\theta$$

• pour le terme de phase, $\sqrt{(r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta)} \approx r - z \cos \theta$ en négligeant les termes d'ordre supérieur car

$$r \gg \lambda. \text{ On a : } e^{j\omega\left(t - \frac{\|\mathbf{PM}\|}{c}\right)} \approx e^{j\omega\left(t - \frac{r - z \cos \theta}{c}\right)} = e^{j(\omega t - kr + kz \cos \theta)}$$

- ainsi :

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{M}, \mathbf{t}) = j \frac{\mu_0 \omega \sin \theta}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \int_{-l}^{+l} I_1 \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) e^{jkz \cos \theta} dz \mathbf{e}_\theta \text{ avec } k = \frac{\omega}{c} \text{ et } l = \frac{\lambda}{4}.$$

$$2.2.2.\gamma. \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{M}, \mathbf{t}) = \frac{\mathbf{e}_r \wedge \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{M}, \mathbf{t})}{c} = j \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} e^{j(\omega t - kr)} \mathbf{e}_\varphi.$$

2.2.3. Etude énergétique.

2.2.3.α. On utilise la valeur moyenne dans le temps du flux du vecteur de Poynting :

$$P_r = \frac{\mu_0 c I_1^2}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta \approx 1,22 \frac{\mu_0 c I_1^2}{4\pi}$$

$$2.2.3.\beta. R_r = 1,22 \frac{\mu_0 c}{2\pi} = 73,2 \Omega$$

$$2.2.3.\gamma. -I_1 = \sqrt{\frac{2 P_r}{R_r}} = 0,74 \text{ A}$$

- l'amplitude du vecteur champ électrique de l'ordre de $\frac{\mu_0 c I_1}{2\pi r} = 8,9 \cdot 10^{-2} \text{ V.m}^{-1}$.

2.3. Réception d'un signal en téléphonie mobile.

2.3.1. Champ électrique résultant.

2.3.1.α. ϕ : déphasage éventuel à la réflexion et l'onde réfléchie se propage dans le sens de x négatifs..

$$2.3.1.\beta. \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{M}, \mathbf{t}) = 2E_0 e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi L}{\lambda} + \phi\right)} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-L) + \frac{\phi}{2}\right) \mathbf{e}_z.$$

2.3.1.γ. L'onde résultante est une onde stationnaire.

2.3.2. Etude énergétique.

2.3.2.α. On a $P = 10 P_s \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}(x-L) + \phi\right)\right)$ et on a coupure si $P \leq P_s$ soit par exemple

$$\varphi_0 \leq \frac{4\pi}{\lambda}(x-L) + \phi \leq 2\pi - \varphi_0 \text{ avec } \varphi_0 = \arccos(-0,9). \text{ Si l'on note } v \text{ la vitesse du téléphone, la durée}$$

$$\Delta t \text{ des coupures est : } \Delta t = \frac{\lambda}{2v} \left(1 - \frac{\varphi_0}{\pi}\right). \text{ Numériquement } \Delta t = 21 \text{ ms.}$$

$$2.3.2.\beta. \Delta t = 2,1 \text{ ms.}$$

2.3.2.γ. Coupures gênantes pour un piéton mais peu gênantes pour le passager d'une voiture.

2.3.3.

$$2.3.3.\alpha. L - x = \frac{c\Delta t}{2} = 150 \text{ m avec } \Delta t = 1 \mu\text{s.}$$

2.3.3.β. On suppose par exemple que $\frac{4\pi f}{c}(x-L) + \phi = \pi$, la valeur de δf est définie par la relation

$$\frac{4\pi(f + \delta f)}{c}(x-L) + \phi = \varphi_0 \text{ avec } \varphi_0 = \arccos(-0,9) \text{ ainsi } \delta f = \frac{c}{4(L-x)} \left(1 - \frac{\varphi_0}{\pi}\right) = 72 \text{ kHz.}$$

- 2.3.4. On peut
- multiplier les trajets possibles pour aller de la station au téléphone mobile.
 - utiliser plusieurs canaux de fréquence.

3. Diffusion d'une onde électromagnétique par un atome.**3.1. Onde électromagnétique rayonnée.****3.1.1.**

3.1.1.α. On suppose que le champ électrique de l'onde incidente est uniforme à l'échelle de l'atome

3.1.1.β. La force de rappel : électron élastiquement lié au noyau.

La force d'amortissement visqueux : modèle « classique » pour décrire les pertes d'énergie.

3.1.1.γ. On néglige l'action du champ magnétique sur l'électron car la vitesse de l'électron est très petite devant c .

$$3.1.2. \quad \underline{p}_o = \frac{e^2 E_o}{m_e \left((\omega_o^2 - \omega^2) + j \frac{\omega}{\tau} \right)}$$

$$3.1.3. \quad \frac{dP_r}{d\Omega} = \frac{\mu_o}{32\pi^2 cm_c^2} \frac{e^4 E_o^2 \omega^4}{\left((\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} \right)} \sin^2 \theta.$$

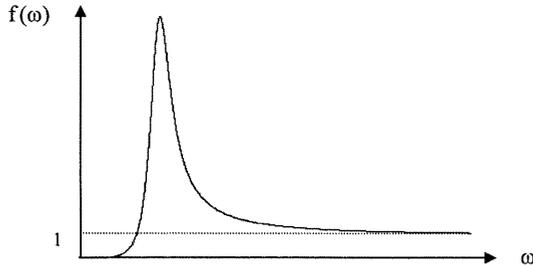
$$3.1.4. \quad I_{in} = \frac{E_o^2}{2\mu_o c}$$

3.1.5.

3.1.5.α.. $\sigma(\omega)$ est homogène à une surface, il représente (énergétiquement parlant) la surface fictive offerte par l'atome au rayonnement de l'onde incidente.

3.1.5.β. $\sigma_T = 6,61 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$.

$$3.1.5.γ. \quad \sigma_T = \frac{\omega^4}{\left((\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} \right)}$$

3.1.5.δ.**3.2. Polarisation par diffusion.**

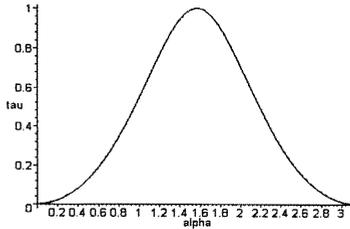
$$3.2.1. \quad \left(\frac{dP_r}{d\Omega} \right)_\perp = \frac{\mu_o}{32\pi^2 cm_c^2} \frac{e^4 E_o^2 \omega^4}{\left((\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} \right)}$$

$$3.2.2. \quad \left(\frac{dP_r}{d\Omega} \right)_\parallel = \frac{\mu_o}{32\pi^2 cm_c^2} \frac{e^4 E_o^2 \omega^4}{\left((\omega_o^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2} \right)} \cos^2 \alpha$$

3.2.3.

3.2.3.α. Ce coefficient varie a priori entre -1 et 1 et prend en compte le caractère incohérent de l'onde.

3.2.3.β. $\tau = \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$.



3.2.3.γ. $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$: onde non polarisée.

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ onde polarisée rectilignement parallèlement à Oz.

3.2.3.δ. Ciel au coucher du soleil ou diffusion par $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$.

3.3. Application à l'atmosphère terrestre.

3.3.1.

λ (nm)	400	750
ω (rad.s ⁻¹)	$4,7 \cdot 10^{15}$	$2,5 \cdot 10^{15}$
$\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$	0,14	0,04
$\frac{\omega^2}{\tau^2 \omega_0^4}$	$9 \cdot 10^{-16}$	$2,6 \cdot 10^{-16}$

On a bien $\sigma(\omega) \approx \sigma_T \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$.

3.3.2. Un bilan sur la portion de cylindre donne :

$SI_{in,\lambda}(x + dx) = SI_{in,\lambda}(x) - n_0 \sigma(\omega) I_{in,\lambda}(x) S dx$ ce qui donne $\frac{dI_{in,\lambda}(x)}{dx} = -n_0 \sigma(\omega) I_{in,\lambda}(x)$ donc

$I_{in,\lambda}(x) = I_{in,\lambda}(0) e^{-\frac{x}{D_\lambda}}$ avec $D_\lambda = \frac{1}{n_0 \sigma(\omega)} = \frac{\omega_0^4}{n_0 \sigma_T \omega^4}$

3.3.3.

λ (nm)	450	520	650
ω (rad.s ⁻¹)	$4,19 \cdot 10^{15}$	$3,62 \cdot 10^{15}$	$2,90 \cdot 10^{15}$
D_λ (km)	44	79	193

... soleil rouge du soir.

3.4. Cas d'un milieu dilué.

3.4.1. $\underline{E}_1(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{e^{j(\omega t - k|\mathbf{r} - \mathbf{R}_1|)}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{R}_1\|} (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_{r1}) \wedge \mathbf{e}_{r1}$ avec $\mathbf{e}_{r1} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}_1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{R}_1\|}$. On procède comme à la question

2.2.2. sachant que $r \gg \frac{L^2}{\lambda}$. Ainsi on obtient : $\underline{E}_1(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{e^{j(\omega t - kr + \mathbf{K} \cdot \mathbf{R}_1)}}{r} (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r) \wedge \mathbf{e}_r$ or

$$\underline{\mathbf{E}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r) \wedge \mathbf{e}_r \text{ et } \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_i = \mathbf{K} \cdot \mathbf{R}_i - kX_i \text{ donc } \underline{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, t) e^{j(Q \cdot \mathbf{R}_i)}.$$

3.4.2.

$$\begin{aligned} dP_{\text{tot}} &= \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\sum_{i=1}^N \underline{\mathbf{E}}_i(\mathbf{r}, t) \right) \left(\sum_{i=1}^N \underline{\mathbf{E}}_i^*(\mathbf{r}, t) \right) r^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c} \underline{\mathbf{E}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, t) \cdot \underline{\mathbf{E}}_{\text{ref}}^*(\mathbf{r}, t) \left(\sum_{i=1}^N e^{j(Q \cdot \mathbf{R}_i)} \right) \left(\sum_{i=1}^N e^{-j(Q \cdot \mathbf{R}_i)} \right) r^2 d\Omega \\ &\qquad\qquad\qquad S(\mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^N \exp(j\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}_i). \end{aligned} \quad \text{donc } \frac{dP_{\text{tot}}}{d\Omega} = \frac{dP_r}{d\Omega} |S(\mathbf{Q})|^2 \text{ avec}$$

3.4.3. $|S(\mathbf{Q})|^2 = N + 2 \sum_{i < p}^N \cos(\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_p)) \approx N$ si les déphasages sont aléatoires. On a donc une superposition incohérentes des ondes diffusées par les N atomes.

PARTIE C : Propagation guidée, fibres optiques.

1. Le phénomène de réflexion totale.

1.1. Structure des ondes.

1.1.1. On utilise l'équation de Maxwell-Faraday et on établit les relations suivantes :

- $\underline{\mathbf{B}}_i = \frac{\mathbf{k}_i \wedge \underline{\mathbf{E}}_i}{\omega} = (-k_{iz} \mathbf{e}_x + k_{ix} \mathbf{e}_z) \frac{E_0}{\omega} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})}$
- $\underline{\mathbf{B}}_t = \frac{\mathbf{k}_2 \wedge \underline{\mathbf{E}}_t}{\omega} = (-k_{2z} \mathbf{e}_x + k_{2x} \mathbf{e}_z) \frac{t_{\perp} E_0}{\omega} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})}$
- $\underline{\mathbf{B}}_r = \frac{\mathbf{k}'_1 \wedge \underline{\mathbf{E}}_r}{\omega} = (-k'_{1z} \mathbf{e}_x + k'_{1x} \mathbf{e}_z) \frac{r_{\perp} E_0}{\omega} e^{j(\omega t - \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r})}$.

1.1.2. On utilise l'équation de propagation pour le vecteur champ électrique :

$$\mathbf{k}_1^2 = \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2}, \quad \mathbf{k}_2^2 = \frac{\omega^2 n_2^2}{c^2} \text{ et } \mathbf{k}'_1^2 = \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2}.$$

1.1.3. $k_{1x} = -\frac{\omega n_1}{c} \cos \theta_1 ; k_{1z} = \frac{\omega n_1}{c} \sin \theta_1 .$

1.1.4.

1.1.4.α. On traduit en $x = 0$ la continuité de la composante tangentielle du vecteur champ électrique :

- $E_0 e^{-jk_{1z}z} + r_{\perp} E_0 e^{-jk'_{1z}z} = t_{\perp} E_0 e^{-jk_{2z}z}$

et la continuité du vecteur champ magnétique :

- $-k_{1z} E_0 e^{-jk_{1z}z} - k'_{1z} r_{\perp} E_0 e^{-jk'_{1z}z} = -k_{2z} t_{\perp} E_0 e^{-jk_{2z}z}$
- $k_{1x} E_0 e^{-jk_{1z}z} + k'_{1x} r_{\perp} E_0 e^{-jk'_{1z}z} = k_{2x} t_{\perp} E_0 e^{-jk_{2z}z}$

Ces relations doivent être satisfaites pour tout z ainsi :

$$k'_{1z} = k_{1z} = \frac{\omega n_1}{c} \sin \theta_1 \text{ et } k_{2z} = k_{1z} = \frac{\omega n_1}{c} \sin \theta_1 .$$

1.1.4.β. Après simplifications, les trois relations précédentes se résument à :

- $1 + r_{\perp} = t_{\perp}$
- $k_{1x} + k'_{1x} r_{\perp} = k_{2x} t_{\perp}$

de plus : $\mathbf{k}'_1{}^2 = \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2} = \mathbf{k}_1^2$ donc $k'_{1x} = -k_{1x}$, l'autre choix de signe conduisant à une contradiction.

$$\text{Finalement : } t_{\perp} = \frac{2k_{1x}}{k_{1x} + k_{2x}} \text{ et } r_{\perp} = \frac{k_{1x} - k_{2x}}{k_{1x} + k_{2x}} .$$

1.2. Etude de la réflexion totale

$$n_1 \sin \theta_1 > n_2$$

1.3. Etude de l'onde transmise.

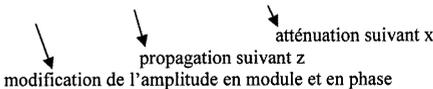
1.3.1. On sait que $k_z^2 = \frac{\omega^2 n_2^2}{c^2}$ et $k_{2z} = \frac{\omega n_1}{c} \sin \theta_1$ ainsi $k_{2x}^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} (n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2)$

donc $k_{2x} = \pm j \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2)}$. Pour déterminer le signe, on note que l'on désire avoir dans le milieu 2 une onde amortie suivant x. Sachant que x est négatif dans cette zone, il faut choisir le signe + :

$$k_{2x} = +j \frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2)}$$

1.3.2. En résumé, on a pour le vecteur champ électrique de l'onde transmise :

$$\underline{E}_t = \frac{2k_{1x}}{k_{1x} + k_{2x}} E_o e^{j(\omega t - \frac{\omega}{c} n_1 \sin \theta_1 z)} e^{-\frac{\omega}{c} \sqrt{(n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2)} x} \mathbf{e}_y$$



1.3.3. L'atténuation de l'onde suivant x se mesure à l'aide du coefficient δ :

$$\delta = \frac{c}{\omega \sqrt{(n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2)}} = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{(n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2)}} = 2,74 \mu\text{m}.$$

1.3.4. Expérience de réflexion frustrée.

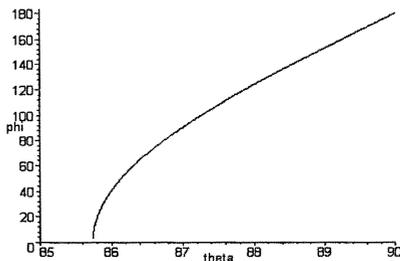
1.4. Etude de l'onde réfléchie.

1.4.1.
$$\underline{r}_\perp = \frac{n_1 \cos \theta_1 + j \sqrt{(n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2)}}{n_1 \cos \theta_1 - j \sqrt{(n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2)}}$$

1.4.2.

- $|\underline{r}_\perp| = 1$
- $\varphi = \arg(\underline{r}_\perp) = 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{(n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2)}}{n_1 \cos \theta_1} \right)$.

- Pour $|\underline{r}_\perp|$ on obtient une droite entre $85,74^\circ$ et 90° .
- Pour φ :



- Pour $n_1 \sin \theta_1 = 1,445$, $\varphi = 90^\circ$

2. Onde électromagnétique guidée dans une fibre optique.

2.1. Onde transverse électrique.

2.1.1.

- On utilise l'équation de Maxwell-Faraday : $\text{rot}(\mathbf{E}_s e^{j(\omega t - \beta z)}) = -j\omega(\mathbf{B}_s e^{j(\omega t - \beta z)} + \mathbf{B}_z e_z e^{j(\omega t - \beta z)})$
 $(\text{rot}\mathbf{E}_s) e^{j(\omega t - \beta z)} + \text{grad}(e^{j(\omega t - \beta z)}) \wedge \mathbf{E}_s = -j\omega(\mathbf{B}_s e^{j(\omega t - \beta z)} + \mathbf{B}_z e_z e^{j(\omega t - \beta z)})$ or
 $\text{grad}(e^{j(\omega t - \beta z)}) = -j\beta e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{e}_z$ donc $\text{rot}\mathbf{E}_s - j\beta \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{E}_s = -j\omega(\mathbf{B}_s + \mathbf{B}_z e_z)$ on analyse ensuite la direction des vecteurs et on établit les deux relations :
 $\text{rot}\mathbf{E}_s = -j\omega \mathbf{B}_z e_z$ et $\beta \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{E}_s = \omega \mathbf{B}_s$
- On utilise de même l'équation de Maxwell-Ampère : $\text{rot}(\mathbf{B}_s e^{j(\omega t - \beta z)} + \mathbf{B}_z e_z e^{j(\omega t - \beta z)}) = \mu_0 \epsilon_j \omega \mathbf{E}_s e^{j(\omega t - \beta z)}$
 et on utilise les mêmes techniques, on établit ainsi les deux relations : $\text{rot}\mathbf{B}_s = \mathbf{0}$ et

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_j \omega} (\text{grad} B_z \wedge \mathbf{e}_z - j\beta \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{B}_s)$$

- On combine les équations précédentes : $\mu_0 \epsilon_j \omega \mathbf{E}_s = \text{grad} B_z \wedge \mathbf{e}_z - j\beta \mathbf{e}_z \wedge \left(\frac{\beta}{\omega} \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{E}_s \right)$

$$\text{et on établit : } \mathbf{E}_s = j \frac{\omega \mathbf{e}_z \wedge \text{grad} B_z}{\mu_0 \epsilon \omega^2 - \beta^2}$$

- On utilise $\mathbf{B}_s = \frac{\beta}{\omega} \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{E}_s$ et on obtient $\mathbf{B}_s = -j \frac{\beta \text{grad} B_z}{\mu_0 \epsilon \omega^2 - \beta^2}$.

- 2.1.2. L'équation de propagation projetée sur z s'écrit : $\Delta(\mathbf{B}_z e^{j(\omega t - \beta z)}) - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 (\mathbf{B}_z e^{j(\omega t - \beta z)})}{\partial t^2} = 0$ comme $B_z(r, \varphi)$ ne dépend que de r et φ $\Delta(\mathbf{B}_z e^{j(\omega t - \beta z)}) = (\Delta_{\perp} B_z - \beta^2 B_z) e^{j(\omega t - \beta z)}$ donc $\Delta_{\perp} B_z - \beta^2 B_z + \omega^2 \epsilon \mu_0 B_z = 0$ ce qui conduit en utilisant le formulaire à l'équation souhaitée :

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \varphi^2} + \left(-\beta^2 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \right) B_z = 0.$$

- 2.1.3. On remplace $B_z = F(r)G(\varphi)$ dans l'équation précédente et on sépare les variables :

$$\frac{r^2}{F} \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{1}{F} \frac{dF}{dr} + \left(-\beta^2 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \right) r^2 = -\frac{1}{G(\varphi)} \frac{d^2 G(\varphi)}{d\varphi^2}. \text{ On en déduit que } \frac{1}{G(\varphi)} \frac{d^2 G(\varphi)}{d\varphi^2} = C^{\text{ste}}, \text{ il}$$

faut de plus que la fonction soit 2π -périodique ce qui impose une structure en

$$G(\varphi) = G_0 \cos(m\varphi) + G_1 \sin(m\varphi) \text{ avec } m \in \mathbb{N}. \text{ Donc } \frac{1}{G(\varphi)} \frac{d^2 G(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 \text{ et}$$

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \left(-\frac{m^2}{r^2} - \beta^2 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \right) F = 0 \text{ où } m \text{ est un entier naturel.}$$

2.2. Etude d'une fibre optique.

- 2.2.1. $\frac{\partial^2 B_{z1}}{\partial r^2} = \frac{u^2}{a^2} B_{01} J_m'' \left(u \frac{r}{a} \right) \cos(m\varphi)$; $\frac{\partial B_{z1}}{\partial r} = \frac{u}{a} B_{01} J_m' \left(u \frac{r}{a} \right) \cos(m\varphi)$; et

$$\frac{\partial^2 B_{z1}}{\partial \varphi^2} = -m^2 B_{01} J_m \left(u \frac{r}{a} \right) \cos(m\varphi) \text{ on remplace dans l'équation précédente et on obtient avec } x = u \frac{r}{a} :$$

$$\frac{u^2}{a^2} B_{01} \cos(m\varphi) \left(J_m''(x) + \frac{1}{x} J_m'(x) + \left(-\frac{m^2}{x^2} + 1 \right) J_m(x) \right) = 0 \text{ car } \frac{u^2}{a^2} = \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2} - \beta^2.$$

2.2.2. Analyse des relations de passage.

2.2.2.α. - continuité de la composante tangentielle du champ électrique en $r = a$,

- continuité de $n^2 \mathbf{E}_n$ en $r = a$ où \mathbf{E}_n représente la composante normale du champ électrique.

2.2.2.β. Le champ magnétique est continu en $r = a$.

2.2.3. Notion de mode.

2.2.3.α. $V = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ donc $a = \frac{\lambda V}{2\pi \sqrt{n_1^2 - n_2^2}} = 25 \mu\text{m}$.

2.2.3.β. Il y a 4 modes possibles.

2.2.3.γ. En utilisant la courbe, on note qu'il n'y pas de solution possible si $V < 2,405$ soit

$\lambda > \lambda_c = \frac{2\pi a}{2,405} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$, il y a donc bien une longueur d'onde de coupure λ_c .

2.2.3.δ. $\lambda_c = \frac{2\pi a}{2,405} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 1,264 \mu\text{m}$. Avec $\lambda = 1,31 \mu\text{m}$, $\lambda > \lambda_c$ et $V = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 2,32$, il n'y a donc pas de mode (T.E.) possible dans ces conditions.

3. Dispersion dans une fibre optique.

3.1. Définition de la dispersion.

3.1.1. Vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{\beta}$.

3.1.2. $v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$. Vitesse de propagation de « l'enveloppe » d'un paquet d'ondes s'il possède une faible largeur spectrale.

3.2. Dispersion due au matériau.

3.2.1. On a $\frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c}$ et $\frac{1}{v_g} = \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d\beta}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \left(n_1 - \lambda \frac{dn_1}{d\lambda} \right) - \frac{\lambda^2}{2\pi c}$ donc $v_g = \frac{c}{n_1 - \lambda \frac{dn_1}{d\lambda}}$.

3.2.2. $D_m = \frac{1}{L} \frac{d\tau_g}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n_1}{d\lambda^2}$.

3.2.3. $D_m = 3,3 \text{ ps.km}^{-1}.\text{nm}^{-1}$.

3.3. Dispersion due au guide.

3.3.1. $B = \frac{\beta^2 - \frac{\omega^2 n_2^2}{c^2}}{\frac{\omega^2}{c^2} (n_1^2 - n_2^2)} \approx \frac{\left(\beta - \frac{\omega n_2}{c} \right) \left(\beta + \frac{\omega n_2}{c} \right)}{\frac{\omega^2}{c^2} (n_1 + n_2) \Delta n_2}$ de plus : $\beta + \frac{\omega n_2}{c} \approx 2 \frac{\omega n_2}{c}$ et $(n_1 + n_2) \Delta \approx 2n_2 \Delta$ ainsi

$B \approx \frac{\left(\beta - \frac{\omega n_2}{c} \right)}{\frac{\omega}{c} \Delta n_2}$ et $\beta \approx \frac{2\pi}{\lambda} n_2 (1 + B\Delta)$ car $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$.

3.3.2. $\frac{1}{v_g} = \frac{d\beta}{d\omega} = 2\pi n_2 \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{\lambda} \right) (1 + B\Delta) + \frac{2\pi n_2}{\lambda} \Delta \frac{dB}{d\omega}$ de plus $\frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{2\pi c}$ et $\frac{dV}{V} = \frac{d\omega}{\omega}$ donc

$\frac{1}{\lambda} \frac{dB}{d\omega} = \frac{\omega}{2\pi c} \frac{dB}{d\omega} = \frac{V}{2\pi c} \frac{dB}{dV}$ on en déduit que $\frac{1}{v_g} \approx \frac{n_2}{c} \left(1 + B\Delta + \Delta V \frac{dB}{dV} \right)$ et

$\frac{1}{v_g} \approx \frac{n_2}{c} \left(1 + \Delta \frac{d(VB)}{dV} \right)$.

$$3.3.3. \quad D_G = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{V}{\lambda} \frac{d}{dV} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{Vn_2}{\lambda c} \Delta \frac{d^2}{dV^2} (VB) = -\frac{(n_1 - n_2)}{\lambda c} V \frac{d^2}{dV^2} (VB).$$

$$3.3.4. \quad D_G = -2,4 \text{ ps.km}^{-1}.\text{nm}^{-1}$$

3.4. Conclusion.

3.4.1. La dispersion du temps de propagation vaut $\Delta\tau_g = |D|L.\Delta\lambda$ soit environ 30 ps avec $|D| = 3 \text{ ps.km.nm}^{-1}$. Ce qui donne un débit de 30 Gbit/s environ.

3.4.2. On peut espérer une compensation de D_m et D_G qui ici ont des signes opposés.

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE

Composition de chimie ♦ Session : 2003

Partie A

I Le soufre

I.1. S : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$ Se : $[Ar] 3d^{10} 4s^2 4p^4$

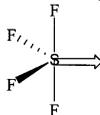
I.2. a) O est beaucoup plus électronégatif que S : les liaisons H sont plus fortes dans le cas de H_2O

b) Lorsque la taille des atomes augmente, les associations de type VW sont plus importantes :

C'est le facteur prépondérant.

I.3. Le soufre, contrairement à l'oxygène, peut dépasser la règle de l'octet (hypervalence) à cause de la proximité en énergie des orbitales d.

SF₄ : de type AX₄E en VSEPR. Structure dérivée d'une bipyramide trigonale :



Le doublet libre, plus volumineux, se met dans le plan équatorial car alors il n'a que deux voisins F à 90° alors que en position axiale il aurait 3 voisins F à 90°.

I.4. a) $G = H - TS$ $dG = VdP - SdT$ $S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P$ donc

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{G}{T} \right)_P = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_P - \frac{G}{T^2} = -\frac{TS+G}{T^2} = -\frac{H}{T^2}$$

b) $\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T,P,n_{j \neq i}}$ donc $s_i = -\frac{\partial \mu_i}{\partial T}$ et on retrouve l'expression voulue.

c) A(l) \rightleftharpoons A(g) il y a égalité des potentiels chimiques:

$$\mu(l) = \mu^\circ(l) + RT \ln x_i \quad \mu(g) = \mu^\circ(g) + RT \ln \frac{P_i}{P^\circ}$$

$$\Rightarrow RT \ln \frac{x_a P^\circ}{P_a} = \mu_a^\circ(g) - \mu_a^\circ(l)$$

$$\frac{d}{dT} \ln \frac{x_a P^\circ}{P_a} = \frac{d}{dT} \left(\frac{\mu_a^\circ(g) - \mu_a^\circ(l)}{RT} \right) \quad \text{or } P_a = P^\circ$$

$$\text{donc } \frac{d}{dT} \ln x_a = \frac{d}{dT} \left(\frac{\mu_a^\circ(g) - \mu_a^\circ(l)}{RT} \right) = -\frac{1}{RT^2} (h_a^\circ(g) - h_a^\circ(l)) = -\frac{\Delta H_{vap}^\circ}{RT^2}$$

$$\text{En intégrant entre } x_a = 1 \text{ et } x_a : \int_{x_a=1}^{x_a} d \ln x_a = \int_{T_a}^T -\frac{\Delta H_{vap}^\circ}{RT^2} dT \quad \Rightarrow \ln x_a = -\frac{\Delta_{vap} H^\circ}{R} \left(\frac{1}{T_a} - \frac{1}{T} \right)$$

$$\text{Or } x_a = (1 - x_b), \text{ avec } x_b \ll 1 \text{ donc } -x_b \ll -\frac{\Delta_{vap} H^\circ}{R} \left(\frac{T - T_a}{T T_a} \right) \text{ ou } x_b \ll \frac{\Delta_{vap} H^\circ}{R} \left(\frac{T - T_a}{T T_a} \right)$$

$$\text{I.5. AN : } x_b = \frac{25,08 \cdot 10^3 (46,66 - 46,30)}{8,314 \cdot (273,15 + 46,30)^2} = 1,064 \cdot 10^{-2} \quad \text{or } x_b = \frac{n_b}{n_a + n_b} \quad \text{et } n_a = \frac{100}{12 + 2,32,06}$$

$$\text{d'où } n_b = 0,0141 \text{ mol.} \quad \text{Or } n_b = \frac{3,795}{32,06x} \text{ on trouve } x = 8,39$$

La molécule de soufre est donc S₈.

II Les sulfures : structure de la chalcoppyrite.

II.1. Cu : [Ar] 3d¹⁰ 4s¹ (exception à la règle de Klechkowsky)

II.2. Fe²⁺ : [Ar] 3d⁶ et Fe³⁺ : [Ar] 3d⁵

II.3. Diffraction de rayons X (Bragg).

II.4. a) Chaque ion est entouré de 4 ions de signe contraire : coordinence 4 pour chaque ion.

b) En considérant la maille du texte on a :

Pour S²⁻ :

$$8 \times 1/8 \text{ (sommets)} + 2 \times 1/2 \text{ (faces sup et inf)} + 8 \times 1/2 \text{ (faces latérales)} + 4 \times 1/4 \text{ (arêtes)} + 1 \text{ (centre)} = 8$$

Pour Cu on compte de même 4, et 4 pour Fe : on peut envisager la formule (CuFeS₂)

c) On peut envisager S²⁻, Cu²⁺ et Fe²⁺ soit (FeS + CuS) ou S²⁻, Cu⁺ et Fe³⁺ soit $\frac{1}{2}$ (Fe₂S₃ + Cu₂S)

d) $\rho = \frac{4(55,85+63,55) + 8 \times 32,06}{6,02 \times 10^{23} \times (529.10^{-12})^2 \times 1042.10^{-12}} = 4,18.10^6 \text{ g. m}^{-3} = \mathbf{4,18. \text{ g. cm}^{-3}}$

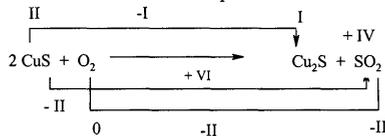
e) Si les anions sont en contact, on a $2r(\text{S}^{2-}) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ or $\frac{a\sqrt{2}}{2} = 374 \text{ pm} > 2r(\text{S}^{2-})$ donc les anions ne sont pas en contact.

f) Si le réseau est parfaitement cubique, on a $\frac{\sqrt{3}}{4} = r^+ + r^-$ d'où $r^+ = 49 \text{ pm}$

Remarque : c'est beaucoup plus petit que les rayons des ions du cuivre et du fer ; la liaison est à tendance nettement covalente.

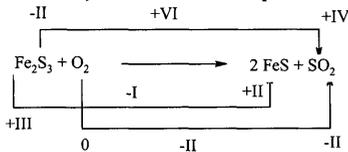
III Grillage des sulfures

III.1. Première hypothèse : CuS + FeS : la réaction se simplifie en :



Cu²⁺ et O sont réduits, S est oxydé et l'on a bien Δn.o (réduction) = - Δn.o(oxydation) car +VI = - (2×(-I) + 2×(-II))

Deuxième hypothèse: $\frac{1}{2}$ (Cu₂S + Fe₂S₃) : La réaction se simplifie en :



1 S est oxydé, Fe et O sont réduits. On a encore : VI = - (2×(-I) + 2×(-II)). Les deux hypothèses sont donc cohérentes.

III.2. a) $v = (C + 2 - \phi)$ (notations habituelles) $v = (4-1) + 2-3 = 2$ mais ici T est fixée, il reste un degré de liberté, donc P(SO₂) et P(O₂) sont liés.

b) $\Delta_r G^\circ_1 = -296 + 101 = -195 \text{ kJ/mol} \Rightarrow K^\circ = 2.10^{11}$ or $K^\circ = \frac{P(\text{SO}_2)}{P(\text{O}_2)}$ donc sur la droite correspondant à l'équilibre (1) on a :

$$\boxed{\log P(\text{SO}_2) = \log P(\text{O}_2) + 11,32}$$

$$c) A = RT \ln \frac{K^\circ}{Q} = RT \ln \frac{\left(\frac{P(SO_2)}{P(O_2)}\right)_{\text{éq}}}{\frac{P(SO_2)}{P(O_2)}} \text{ si on est au dessus de la droite alors } \frac{P(SO_2)}{P(O_2)} > \left(\frac{P(SO_2)}{P(O_2)}\right)_{\text{éq}}$$

et donc $A < 0$: la réaction est totale dans le sens \leftarrow , on est dans le domaine d'existence de Cu_2S .
(Rem : en dehors de la droite il ne peut pas y avoir d'équilibre puisque $A \neq 0$: il y a rupture d'équilibre et on est dans le domaine d'existence de Cu_2S ou Cu)

III.3. a)

- * (2) $\text{CuS}/\text{Cu}_2\text{S} : 2 \text{CuS} + \text{O}_2 \rightleftharpoons \text{Cu}_2\text{S} + \text{SO}_2$ pente 1
 $\log P(\text{SO}_2) = \log P(\text{O}_2) + \text{Cste}$
- * (3) $\text{Cu}/\text{Cu}_2\text{O} : 4 \text{Cu} + \text{O}_2 \rightleftharpoons 2 \text{Cu}_2\text{O}$ pente infinie
- * (4) $\text{Cu}_2\text{O}/\text{CuS} : \text{Cu}_2\text{S} + 3/2 \text{O}_2 \rightleftharpoons \text{Cu}_2\text{O} + \text{SO}_2$
 $\log P(\text{SO}_2) = 3/2 \log P(\text{O}_2) + \text{Cste}$ pente 3/2
- * (5) $\text{Cu}_2\text{S}/\text{CuSO}_4 : \text{Cu}_2\text{S} + 3\text{O}_2 + \text{SO}_2 \rightleftharpoons 2 \text{CuSO}_4$
 $\log P(\text{SO}_2) + 3 \log P(\text{O}_2) = \text{Cste}$ pente -3

b) On en déduit: **A: CuS B: CuSO₄ C: Cu₂S D: Cu E: Cu₂O F: CuO**

III.4. a)

Si $P(\text{O}_2) = 0,2 \text{ bar}$, $\log P(\text{O}_2) = -0,7$ il faut d'après le diagramme $\log P(\text{SO}_2) > -3,5$

Donc $P(\text{SO}_2) > 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ bar}$

b) On traite la solution par électrolyse.

III.5.

- a) $\text{Cu}_2\text{S} + 2 \text{Cu}_2\text{O} \rightleftharpoons 6 \text{Cu} + \text{SO}_2$
- b) On doit avoir coexistence de Cu , Cu_2S , Cu_2O le point représentatif est à l'intersection des trois domaines, soit $\log P(\text{SO}_2) = -0,6 \Rightarrow P(\text{SO}_2) = 0,25 \text{ bar}$
 (Remarque : le calcul donne $\Delta_r G^\circ = -296 + 2 \times 103 + 101 = 11 \text{ kJ/mol}$, soit $K^\circ = 0,229$, et $P(\text{SO}_2) = 0,23 \text{ bar}$)
- c) $\Delta_r H^\circ = -362 + 130 + 2 \times 168 = 104 \text{ kJ/mol}$. La réaction est endothermique, favorisée à haute température.
- d) On peut diminuer $P(\text{SO}_2)$ c.à.d. éliminer SO_2 au fur et à mesure de sa formation.
- e) 1356 K est la température de fusion du cuivre, il se sépare ainsi mieux du mélange réactionnel.

IV Dosage par le thiosulfate.

IV.1.

$$a) \text{I}_3^- + 2 \text{e}^- \rightleftharpoons 3 \text{I}^- \quad E = E^\circ + \frac{0,06}{2} \log \frac{[\text{I}_3^-]}{[\text{I}^-]^3} = 0,54 + 0,03 \log 0,01 = 0,48 \text{V}$$

b) A l'anode on peut avoir oxydation de I^- ou H_2O

A la cathode on peut avoir réduction de I_3^- ou H_2O .

c) $i > 0$: C'est I^- qui est oxydé et on ne voit pas de palier de diffusion car la concentration est trop grande.

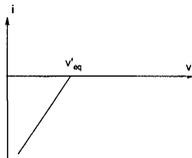
$i < 0$: On a d'abord réduction de I_3^- : le courant est limité par la diffusion de $\text{I}_3^- \Rightarrow$ on a un palier dont la hauteur est proportionnelle à la quantité de I_3^- présent. Puis on a réduction de l'eau : pas de palier.

Le système I_3^-/I^- est un système rapide sur électrode de platine.

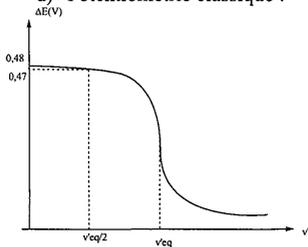
IV.2.a) La hauteur du palier est proportionnel à $[\text{I}_3^-]$ en solution

b) Après le point équivalent toutes les courbes sont confondues avec (c) puisque les espèces sulfurées ne réagissent pas aux électrodes.

c) i augmente jusqu'à l'équivalence, puis $i = 0$.

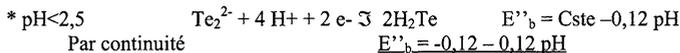
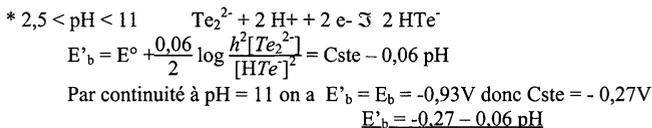
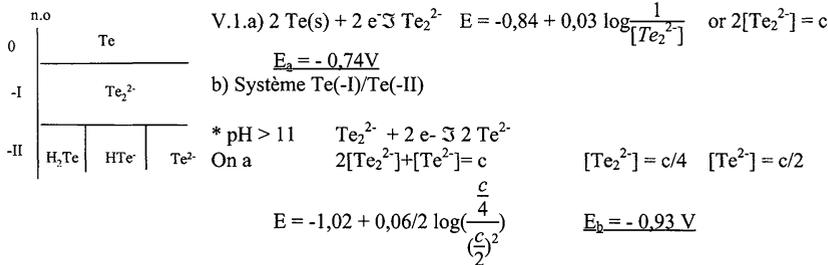


d) Potentiométrie classique :

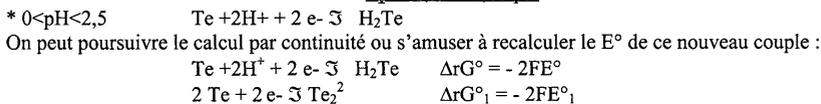
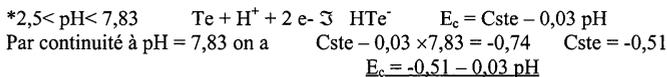


(Après l'équivalence on a un potentiel mixte I/H^+ , le saut de potentiel peut difficilement être prévu.)

V. Les Tellurures



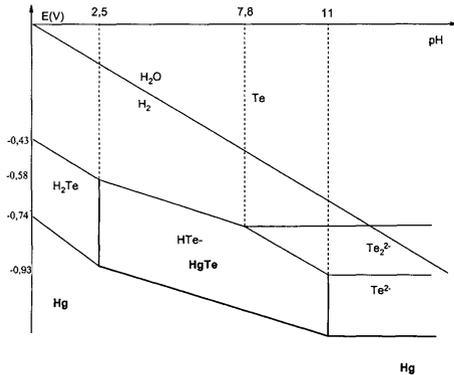
On constate que $E_a = E'_b$ lorsque $-0,74 = -0,27 - 0,06 \text{pH}$, c.à.d. pour $\text{pH} = 7,83$. Donc Si $\text{pH} < 7,83$, les ions Te_2^{2-} ne sont pas stables et se dismutent. Il faut donc alors envisager le système Te(s)/Te(-II) :



$$\begin{aligned} & \text{Te}_2^{2-} + 2 e^- \rightleftharpoons 2 \text{Te}^{2-} & \Delta rG^\circ_2 &= -2FE^\circ_2 \\ & \text{H}_2\text{Te} \rightleftharpoons 2\text{H}^+ + \text{Te}^{2-} & \Delta rG^\circ_3 &= -RT \ln K_1 K_2 \\ \Delta rG^\circ &= 1/2(\Delta rG^\circ_1 + \Delta rG^\circ_2) - \Delta rG^\circ_3 & E^\circ &= \frac{E^\circ_1 + E^\circ_2}{2} - \frac{RT}{2F} \ln K_1 K_2 \end{aligned}$$

$$E^\circ = \frac{E^\circ_1 + E^\circ_2}{2} + \frac{0,06}{2}(\text{p}K_1 + \text{p}K_2) = -0,525 \text{ V}$$

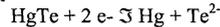
$$\text{Donc } E'_c = E^\circ + \frac{0,06}{2} \log \frac{h^2}{[\text{H}_2\text{Te}]} = -0,525 - 0,03 \log [\text{H}_2\text{Te}] - 0,06 \text{ pH} \quad \underline{E'_c = -0,43 - 0,06 \text{ pH}}$$



c) D'où le diagramme

d) Te_2^{2-} n'est stable qu'en milieu très basique. Il se dismute si le pH diminue et par ailleurs il réduit l'eau.

V.2 *pH > 11



$$\begin{aligned} E &= E^\circ(\text{Hg}^{2+}/\text{Hg}) + \frac{0,06}{2} \log [\text{Hg}^{2+}] \\ &= E^\circ(\text{Hg}^{2+}/\text{Hg}) + \frac{0,06}{2} \log \frac{K_S}{[\text{Te}^{2-}]} = -1,148 \text{ V} \end{aligned}$$

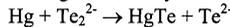
* 2,5 < pH < 11 $\text{HgTe} + \text{H}^+ + 2 e^- \rightleftharpoons \text{Hg} + \text{HTe}^-$ $E = \text{Cste} - 0,03 \text{ pH} = -1,148$ à pH=11

$$\underline{E = -0,818 - 0,03 \text{ pH}}$$

* pH < 2,5 $\text{HgTe} + 2\text{H}^+ + 2 e^- \rightleftharpoons \text{Hg} + \text{H}_2\text{Te}$ $\underline{E = -0,743 - 0,06 \text{ pH}}$

D'où les droites reportées sur le diagramme.

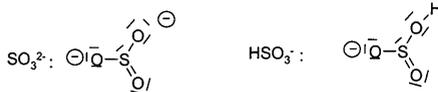
V.3. A pH très basique, on met en présence Hg et Te_2^{2-} . Il y a réaction rédox selon :



Partie B

Les ions sulfite et hydrogénosulfite

1.a.



1.b. Les équivalences ont lieu pour $c'v'_1 = cv$
 $c'(v'_2 - v'_1) = cv$

$$\underline{v'_1 = 1 \text{ mL}}$$

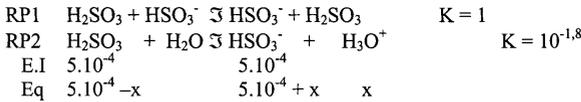
$$\underline{v'_2 = 2 \text{ mL}}$$

* $v' = 0 \text{ mL}$ On a une solution d'acide sulfureux 10^{-3} mol/L ; la RP s'écrit :



$$\text{Eq} \quad c - x \quad x \quad x \quad K_1 = \frac{x^2}{c-x} \Rightarrow x = 9,4 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \boxed{\text{pH} = 3,0}$$

* $v' = 0,5 \text{ mL}$ La solution est équivalente à un mélange équimolaire de H_2SO_3 et de HSO_3^- , tous deux à $5 \cdot 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$.



$$K = \frac{(5.10^{-4} + x) \cdot x}{(5.10^{-4} - x)} \Rightarrow x = 4,7.10^{-4} \quad \boxed{pH = 3,3}$$

* $v' = 1,5 \text{ mL}$ on est à la deuxième demi-équivalence, ici pas de problème d'approximation :

$$\boxed{pH = pK_2 = 7,2}$$

Allure de la courbe : classique (deux sauts de pH)

2. Seule la forme C présente une conjugaison entre les différents cycles et peut donc être colorée.

3. a. $pH_{\text{initial}} = pK_4 + \log \frac{c}{b} = 6,03$

b. Les espèces majoritaires à ce pH sont SO_3^{2-} et $\text{HOCH}_2\text{SO}_3^-$.

Ecrivons la conservation de la matière pour Na^+ , le soufre et l'électroneutralité :

- (1) $[\text{Na}^+] = b + 2c$
- (2) $b + c = [\text{HSO}_3^-] + [\text{SO}_3^{2-}] + [\text{HOCH}_2\text{SO}_3^-] + [\text{OCH}_2\text{SO}_3^-]$
- (3) $[\text{Na}^+] + h = [\text{HO}^-] + [\text{HOCH}_2\text{SO}_3^-] + 2[\text{OCH}_2\text{SO}_3^-] + 2[\text{SO}_3^{2-}] + [\text{HSO}_3^-]$
- soit (4) $b + 2c + h = [\text{HO}^-] + [\text{HOCH}_2\text{SO}_3^-] + 2[\text{OCH}_2\text{SO}_3^-] + 2[\text{SO}_3^{2-}] + [\text{HSO}_3^-]$

En faisant $2 \times (2) - (4)$ on a :

$$b - h = [\text{HSO}_3^-] + [\text{HOCH}_2\text{SO}_3^-] - [\text{HO}^-]$$

$$\text{vu le pH, on peut écrire } h, [\text{HO}^-] \ll b \Rightarrow b \ll [\text{HSO}_3^-] + [\text{HMS}^-]$$

La fin de la réaction correspond à la disparition de HSO_3^- (réactif en défaut) donc $\boxed{b \ll [\text{HMS}^-]}$

c. L'AEQS s'applique à un intermédiaire (n'intervenant pas dans le bilan), dont la concentration reste toujours très faible, disparaissant aussitôt qu'il est formé, c.à.d. si la constante de sa réaction de formation est très petite devant les constantes des réactions de disparition. (On ne peut l'appliquer bien sûr qu'au bout d'un certain temps, appelé temps d'induction).

C'est le cas de HCHO (concentration très faible et $k_{-1}, k_2 \gg k_1$)

$$d. \frac{d[\text{HCHO}]}{dt} = 0 = k_1 [\text{CH}_2(\text{OH})_2] - k_{-1} [\text{HCHO}] - k_2 [\text{HCHO}] \cdot [\text{SO}_3^{2-}]$$

$$\Rightarrow [\text{HCHO}] = \frac{k_1 [\text{CH}_2(\text{OH})_2]}{(k_{-1} + k_2 [\text{SO}_3^{2-}])}$$

La vitesse de formation de HMS^- est celle de MS^{2-} puisqu'il y a un équilibre instantané entre les deux espèces donc

$$v = k_2 [\text{HCHO}] \cdot [\text{SO}_3^{2-}] = \frac{k_1 k_2 [\text{CH}_2(\text{OH})_2] [\text{SO}_3^{2-}]}{(k_{-1} + k_2 [\text{SO}_3^{2-}])}$$

$$\text{ici } k_2 [\text{SO}_3^{2-}] \gg k_{-1} \quad v \ll k_1 [\text{CH}_2(\text{OH})_2]$$

L'étape qui détermine la formation de HMS^- est donc l'étape 1.

$$e. \frac{d[\text{HMS}^-]}{dt} = k_1 [\text{CH}_2(\text{OH})_2] \quad \text{ou} \quad -\frac{d[\text{CH}_2(\text{OH})_2]}{dt} = k_1 [\text{CH}_2(\text{OH})_2]$$

$$f. [\text{CH}_2(\text{OH})_2] = a \exp(-k_1 t) \Rightarrow [\text{HMS}^-] = a (1 - \exp(-k_1 t))$$

g. la couleur rose apparaît lorsque $[HMS^-] = b$ soit $t = \frac{1}{k_1} \ln \frac{a}{a-b} \Rightarrow t = 20,7 \text{ s.}$

Partie C

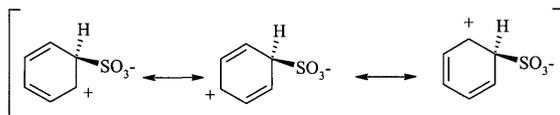
Quelques composés soufrés en chimie organique

I.S.E.A.

I.1. a) $C_6H_6 + SO_3 \rightleftharpoons C_6H_5-SO_3H$: on utilise un oléum ($H_2SO_4 + SO_3$) ou H_2SO_4 ccé.

b) Formation de l'intermédiaire de Wheland, puis élimination de H^+

c)



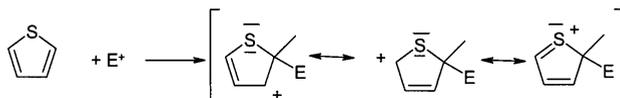
Seul le carbone porteur du substituant est tétraogonal, les autres sont trigonaux.

e) La sulfonation est une réaction réversible, le benzène peut être régénéré par action de l'eau à haute T (peut être utilisé pour la protection d'un site) : $C_6H_5-SO_3H + H_2O \rightleftharpoons C_6H_6 + H_2SO_4$.

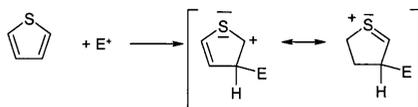
I.2. Le thiophène possède $(4n + 2)$ e- π délocalisés sur le cycle.

I.3. Le soufre est donneur d'électrons par effet + M et enrichit le cycle : la substitution est donc plus rapide que sur le benzène.

I.4. Si la substitution se fait en α de S, on a trois formules mésomères :

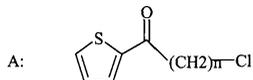


Si la substitution se fait en β :

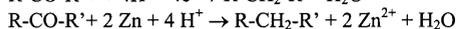
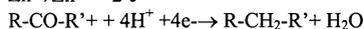
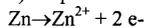


Il n'y a que deux formules mésomères. La substitution se fera en α de S.

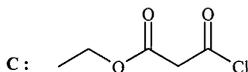
I.5. a)



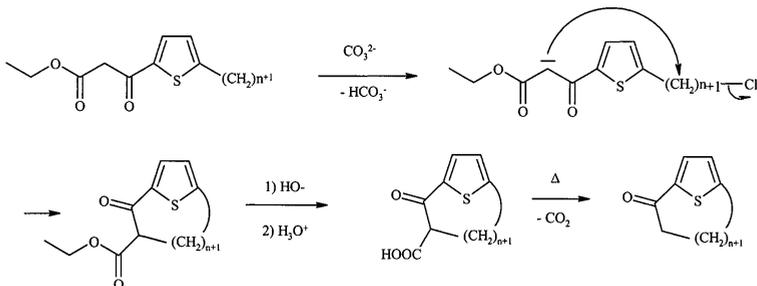
b) Couples Zn^{2+}/Zn et $R-CO-R'/R-CH_2-R'$:



I.6.a)



b) milieu basique: formation d'un carbanion. On n'utilise pas HO⁻ pour ne pas saponifier l'esther.
 c) d)



I.7. On obtient :



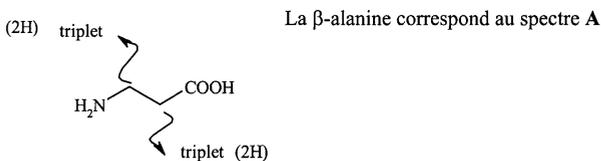
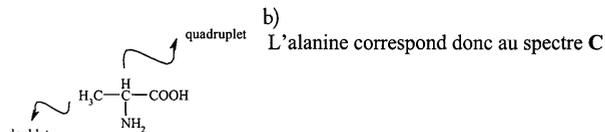
I.8. a) On effectue une SEA intra moléculaire en présence de SnCl₄ puis on traite par du nickel de Raney.
 b) La forte dilution permet de privilégier les réactions intramoléculaires par rapport aux intermoléculaires.

II. La pénicilline

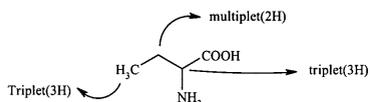
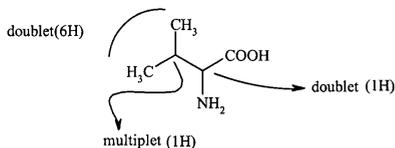
II.1.a) étheroxyde, amide, amide cyclique (lactame), acide carboxylique.

b) 3 C* ⇒ 2³ stéréoisomères (aucun plan de symétrie possible).

II.2.a) (±) mélange racémique.



La valine correspond au spectre B :



L'acide 2-aminobutanoïque correspond au spectre D :

II.3a). On a utilisé $\text{Cl-CO-CH}_2\text{-Cl}$. Mécanisme de l'acylation : $\text{AN} + \text{E}$ (cf cours.)

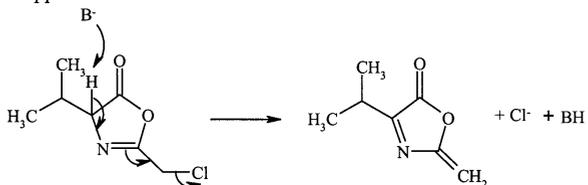


b) Les autres réactions envisageables sont (quoique moins favorables) :

- S.N de R-NH_2 sur R-Cl
- Acylation de l'acide carboxylique (formation d'un ester)

II.4. Le carbanion est stabilisé par conjugaison avec C=O .

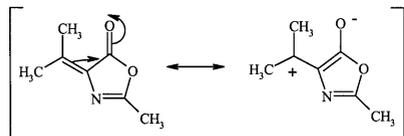
II.5. a) La réaction s'apparente à une élimination :



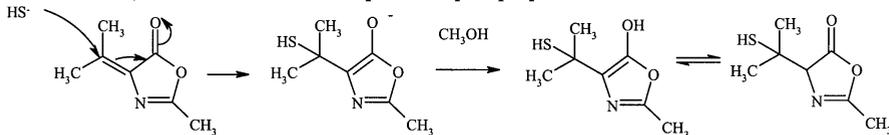
b) Dans le composé F les liaisons doubles sont plus substituées, donc F est plus stable.

II.6. a) HS^- est meilleur nucléophile, plus gros et moins solvaté.

b)



Le carbone en β de C=O est donc électrophile. On peut proposer le mécanisme :



c) H est à la fois ester et amide : une hydrolyse de ces deux fonctions redonne le composé A.

d) En partant du mélange racémique A, on fait réagir la fonction acide carboxylique avec une amine optiquement active, pour obtenir des sels diastéréoisomères que l'on peut séparer. Ou chromatographie sur support chiral, ...

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE

Problème de physique ♦ Session : 2003

Les planètes extra - solaires

Interaction gravitationnelle à deux corps

1.1 Mouvement dans un potentiel central

La force subie par M_2 est : $\vec{F}_2 = -E_p'(r) \frac{\vec{r}}{r}$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \vec{a}_1 = E_p'(r) \frac{\vec{r}}{r} \\ m_2 \vec{a}_2 = -E_p'(r) \frac{\vec{r}}{r} \end{array} \right. \quad \text{Somme et } m_1 \times (2) - m_2 \times (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = (m_1 + m_2) \vec{a}_G = \vec{0} \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = -E_p'(r) \frac{\vec{r}}{r} \end{array} \right.$$

Première relation : conservation de la quantité de mouvement du système isolé

Deuxième relation : mouvement d'un point matériel de masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ repéré par \vec{r} et

d'énergie potentielle : E_p .

Conditions initiales connues donc $\overline{OG(\vec{r})}$ et $\vec{r}(t)$ connus et donc on peut déterminer

$$\overline{GM}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{et} \quad \overline{GM}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

1.2 Première loi de Kepler

$\frac{d\vec{C}}{dt} = \vec{0}$ donc ce vecteur est constant

Cette relation exprime la conservation du moment cinétique par rapport à G dans le référentiel barycentrique.

Conséquences : le mouvement est plan et la vitesse aréolaire est constante.

1.3 Cas particulier du potentiel gravitationnel

$$\text{Formule de Binet : } -\mu \frac{C^2}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \quad \text{d'où : } \frac{1}{r} = \frac{G}{C^2} (m_1 + m_2) + A \cos(\theta - \theta_0)$$

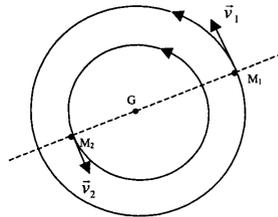
$$\text{Qui donne une ellipse pour laquelle : } p = \frac{C^2}{G(m_1 + m_2)}$$

$$\text{Avec } \frac{mb}{P} = \frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} \quad \text{il vient : } \frac{a^3}{P^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

1.4 Cas des orbites circulaires

$$a = r = cste = \left(P^2 \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \right)^{1/3} \text{ d'où : } \begin{cases} r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(P^2 \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \right)^{1/3} \\ r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(P^2 \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \right)^{1/3} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{2\pi G(m_1 + m_2)}{P} \right)^{1/3} \\ v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(\frac{2\pi G(m_1 + m_2)}{P} \right)^{1/3} \end{cases}$$



1.5 Applications numériques

Couple (indice 1 pour S)	r ₁ (m)	r ₂ (m)	v ₁ (m.s ⁻¹)	v ₂ (m.s ⁻¹)
S-T	4,45. 10 ⁵	1,48.10 ¹¹	8,85.10 ⁻²	2,94.10 ⁴
S-J	7,33.10 ⁸	7,72.10 ¹¹	12,3	1,3.10 ⁴

2. Détection des planètes extra – solaires par observation directe

2.1 Définition et valeur du parsec

tg θ = a/d ≈ θ car a << d donc d ≈ a / θ

A.N. : d = 3,1 10¹⁶ m = 2,1 10⁵ ua

2.2 Séparation angulaire entre l'étoile et sa planète

D >> a donc θ ≈ a/D

A.N. : système Terre – Soleil : a = 1 ua et D = 10 pc ⇒ θ = 0,1 arcsec

système Jupiter – Soleil : a = 5 ua et D = 10 pc ⇒ θ = 0,5 arcsec

2.3 Puissance rayonnée par l'étoile

D'après la loi de Stefan, la puissance rayonnée par unité de surface est σT⁴ donc

$$L^* = (4\pi R^2) \sigma T^{*4}$$

2.4 Puissance interceptée par la planète

A la distance a de l'étoile, la puissance par unité de surface est L*/(4πa²), la puissance interceptée est donc L = L* (πR²/4πa²) soit L = L* (R/2a)²

A.N. : planète type Jupiter : L/L* = 2,2 10⁻⁹ ; planète type Terre : L/L* = 5,3 10⁻¹⁰

2.5 Température d'équilibre de la planète

La puissance absorbée par la planète est $(1-A)L$; elle est égale à la puissance rayonnée, soit $4\pi R^2 \sigma T^4$. Donc $(1-A) (R/2a)^2 (4\pi R_*^2) \sigma T_*^4 = 4\pi R^2 \sigma T^4$;

la température d'équilibre de la planète est donc $T = (1-A)^{1/4} (R_*/2a)^{1/2} T_*$

A.N. : $T(\text{Terre}) = 265 \text{ K}$ et $T(\text{Jupiter}) = 119 \text{ K}$

(ce modèle très rudimentaire fournit donc des résultats raisonnables)

2.6 Maximum d'émission de la planète

D'après la loi de déplacement de Wien, la longueur d'onde du maximum d'émission d'un corps noir est inversement proportionnelle à sa température donc $\lambda T = \lambda_* T_*$

A.N. : $\lambda(\text{Terre}) = 11 \mu\text{m}$; $\lambda(\text{Jupiter}) = 25 \mu\text{m}$ (soit des rayonnements thermiques piqués dans l'infrarouge moyen).

2.7 Limitations observationnelles

La résolution spatiale (ou pouvoir séparateur) d'un instrument d'optique est la plus petite séparation angulaire entre deux points qu'il permet de distinguer.

La figure de diffraction à l'infini d'une pupille circulaire est décrite par une fonction d'Airy. Son premier minimum nul définit le rayon de la tache centrale de diffraction ; il est inversement proportionnel au rayon de la pupille. Pour une pupille de diamètre b , le diamètre de la tache d'Airy obtenue à la longueur d'onde λ est donc $\beta = 1,22 \lambda / b$.

Un télescope pointant sur une source ponctuelle fournit un signal (une image) dont la répartition spatiale est sa figure de diffraction (pour une source étendue, l'image est le produit de convolution de la distribution de brillance de la source avec la figure de diffraction) ; en utilisant un critère de type Rayleigh, on considère donc que deux sources ponctuelles seront résolues par le télescope si leur séparation angulaire est au moins égale à β , que l'on appelle résolution du télescope.

Remarque : les radio astronomes désignent la figure de diffraction sous le nom de « lobe », les opticiens parlent de Point Source Function, ou PSF.

A.N. : $\beta(8\text{m, visible}) = 7,6 \cdot 10^{-8} \text{ rd} = 0,016 \text{ arcsec} \triangle \theta(\text{Terre}), \theta(\text{Jupiter}),$

$\beta(8\text{m, IR}) = 40 \beta(8\text{m, visible}) = 0,64 \text{ arcsec} > \theta(\text{Terre}), \theta(\text{Jupiter}).$

En visible, du point de vue de la résolution spatiale, un télescope de 8m permettrait de résoudre les deux types de systèmes étoile – planète, situés à 10pc de la Terre. A $20\mu\text{m}$, cela devient plus délicat pour un système type Jupiter et très délicat (mais pas impossible si la PSF est assez bien connue) pour un système de type Terre. De toutes façons, comme nous le verrons ci-dessous, la limitation principale n'est pas là.

Les rapports de puissances rayonnées par l'étoile et la planète, L^*/L , sont, d'après la question 2.4 de quelques 10^8 à quelques 10^9 , donc considérablement plus élevés que la dynamique des détecteurs actuels. C'est actuellement la limitation la plus sévère pour l'observation directe des planètes extra-solaires. C'est dans l'infrarouge que la situation est la plus favorable

puisque le maximum d'émission de l'étoile se situe dans le visible (au moins pour des étoiles de type Soleil), alors que celui de la planète se situe dans l'infrarouge.

3. Détection indirecte des planètes via le déplacement de l'étoile

On suppose désormais que les planètes ont des orbites circulaires autour de leur étoile.

3.1 Orbite de l'étoile

En utilisant le résultat de la question 1.4 avec l'approximation $m \ll m^*$, on obtient immédiatement $a \approx (G/4\pi^2)^{1/3} m^{*1/3} P^{2/3}$

Toujours d'après la première partie, la trajectoire de l'étoile est homothétique de celle de la planète avec un rapport $-m/m^*$, le rayon de l'orbite de l'étoile, elle aussi circulaire, autour du centre de gravité du système est donné par $a^* = a (m/m^*)$.

3.2 Caractéristiques de la planète déduites par cette méthode

En suivant au cours du temps la position de l'étoile sur le ciel, on observe qu'elle décrit un mouvement périodique de période P ; c'est un cercle de rayon angulaire θ^* si le plan de l'orbite de l'étoile est perpendiculaire à la direction Terre – étoile ; sinon il s'agit d'une ellipse, projection de cette orbite sur le plan du ciel, dont le demi-grand axe est le rayon angulaire θ^* , si bien que cette méthode est applicable quelle que soit l'orientation de l'orbite par rapport à l'observateur.

Connaissant la distance D de l'étoile à la Terre, on en déduit le rayon linéaire a^* de son orbite, $a^* = \theta^* D$. On peut alors calculer le rayon a de l'orbite de la planète grâce à la 3^{ème} loi de Képler et en déduire ensuite la masse m de la planète par $m = m^*(a^*/a)$.

3.3 Planètes privilégiées par cette méthode

L'observation du mouvement périodique de l'étoile est évidemment d'autant plus aisée que son amplitude est plus grande. Comme $a^* = a (m/m^*)$, à masse m^* de l'étoile donnée, cette méthode de détection favorise les planètes massives et orbitant loin de leur étoile.

3.4 Limitations observationnelles

Pour détecter l'existence d'une planète de type Terre autour d'une étoile de type solaire, il faut évidemment effectuer des observations pendant une durée de l'ordre de quelques périodes, donc de quelques années. Pour une planète de type Jupiter, les observations doivent s'étendre sur plusieurs dizaines d'années puisque la période est de 12 ans. En vertu de la 3^{ème} loi de Képler ($a^3/P^2 = \text{cste}$), la détection de planètes très distantes de leur étoile est donc limitée par la durée des observations (qui ne sont effectuées de façon systématique que depuis à peine 10 ans).

Le rayon angulaire du mouvement de l'étoile est donné par $\theta^* = (a/D) (m/m^*)$

A.N. : pour un système type Terre – Soleil à $D = 10\text{pc}$, $\theta^* = 3 \cdot 10^{-7}$ arcsec (= 0,3 μas)

pour un système type Jupiter – Soleil à $D = 10\text{pc}$, $\theta^* = 5 \cdot 10^{-4}$ arcsec (= 0,5 mas)

Aucune de ces observations n'est accessible à un télescope de 8m de diamètre (cf. 2.7)

Avec des résolutions spatiales de l'ordre de 50 μs , qui seront accessibles au VLTI (VLT en mode interférométrique), il sera possible de détecter des systèmes type Jupiter – Soleil jusqu'à des distances de 100pc.

Les satellites interférométriques et astrométriques en projet (SIM, GAIA) devraient permettre d'atteindre des résolutions de l'ordre de la microseconde d'arc. Il sera alors possible de détecter des « Terres » à quelques parsec de la nôtre.

4. Détection indirecte des planètes via la vitesse de l'étoile

On suppose toujours que les planètes ont des orbites circulaires autour de leur étoile.

4.1 Vitesse orbitale de l'étoile

En utilisant le résultat de la question 1.4 avec l'approximation $m \ll m^*$, on obtient immédiatement $V \approx (2\pi G m^*)^{1/3} P^{-1/3}$.

En utilisant la troisième loi de Kepler sous sa forme approchée, $a^3 / P^2 = (G/4\pi^2) m^*$, on en déduit ensuite l'expression V en fonction de m^* et a , soit $V \approx (G m^*/a)^{1/2}$.

En raisonnant comme pour les orbites, la vitesse de l'étoile se déduit de celle de la planète par $V^* = (m/m^*) V$

A.N. : pour un système Soleil – Terre, $V = 30 \text{ km/s}$ et $V^* = 0,09 \text{ m/s}$

pour un système Soleil – Jupiter, $V = 13 \text{ km/s}$ et $V^* = 13 \text{ m/s}$

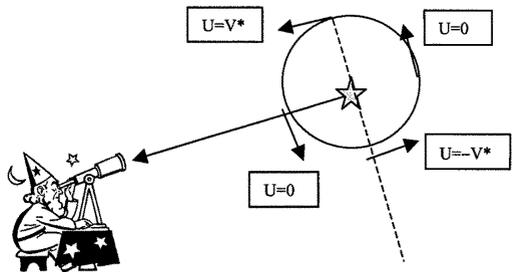
4.2 Vitesse longitudinale de l'étoile

4.2.1 Système vu par la tranche

La vitesse longitudinale varie sinusoidalement

$$U(t) = V^* \cos(2\pi t/P).$$

plan du ciel



4.2.2 Système vu sous une inclinaison i

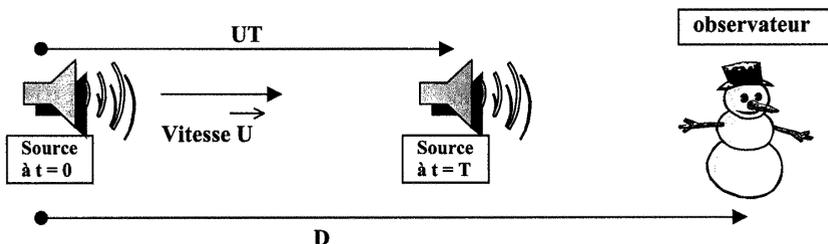
C'est la projection de la vitesse radiale sur un plan contenant la ligne de visée qu'il faut maintenant considérer, soit $V^* \cos(\pi/2-i) = V^* \sin i$; la loi de variation de la vitesse longitudinale est donc $U(t) = V^* \sin i \cos(2\pi t/P)$

(on doit évidemment trouver qu'une orbite vue de face, c'est à dire telle que $i = 0$, correspond à une vitesse longitudinale identiquement nulle).

4.3 Effet Doppler longitudinal

Le signal émis par la source en mouvement de vitesse U algébrique a une fréquence ν , soit une période $T = 1/\nu$. Le signal, de célérité c , émis à la date $t = 0$ atteint l'observateur à la date

$t_1 = D/c$. Le signal émis à la date $t = T$ atteint l'observateur à la date $t_2 = T + (D - UT)/c$. La période du signal perçu par l'observateur est donc $T' = t_2 - t_1 = T(1 - U/c)$, correspondant à une fréquence $\nu' = 1/T'$. En supposant que $U \Delta c$, $\nu' \approx \nu(1 + U/c)$ et le décalage Doppler s'écrit, en valeur algébrique, $\Delta\nu = \nu' - \nu \approx \nu U/c$



4.4 Caractéristiques de la planète déduites par cette méthode

Le décalage Doppler $\Delta\nu$ suit la même loi d'évolution temporelle que la vitesse longitudinale $\Delta\nu(t) = (V^*/c) \sin i \cos(2\pi t/P)$. Son suivi au cours du temps fournit donc la période P , ainsi qu'une limite inférieure, $V^* \sin i$, de la vitesse orbitale de l'étoile, puisque l'inclinaison i est en général inconnue. Connaissant la masse de l'étoile m^* , la 3^{ème} loi de Kepler fournit le rayon a de l'orbite de la planète et l'expression de V^* en fonction de m , m^* et a (cf. 4.1) permet ainsi d'accéder à une limite inférieure de la masse de la planète :

$$m \geq m \sin i = (V^* \sin i) (m^* a / G)^{1/2}$$

Cette méthode n'est bien sûr pas applicable quand $i = 0$ (système vu de face), car la vitesse longitudinale de l'étoile, et donc le décalage Doppler de ses raies sont nuls.

4.5 Planètes privilégiées par cette méthode

Des expressions de V et V^* données en 4.1 on tire $V^* = m (G/m^*a)^{1/2}$

Cette méthode favorise donc les planètes massives proches de leur étoile. En outre, plus la vitesse longitudinale est grande plus l'effet Doppler est facile à mesurer donc cette méthode est d'autant plus efficace que l'orbite est vue sous une inclinaison élevée (de plus, on sous-estime d'autant moins la masse de la planète).

5. Limitation des détections par mesure de l'effet Doppler du spectre stellaire

5.1 Résolution du spectrographe

5.1.1 Le pouvoir de résolution d'un spectrographe à la longueur d'onde λ est $\mathfrak{R} = \lambda / \Delta\lambda$, où $\Delta\lambda$ est le plus petit décalage en longueur d'onde qu'il permet de résoudre.

A.N. : $\mathfrak{R} = 50000$ à $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ permet d'atteindre un effet Doppler $\Delta\lambda = 0,1 \text{ \AA}$

On peut ainsi atteindre une amplitude de variation de vitesse longitudinale donnée par

$$V^* \sin i = c (\Delta v / v) = c (\Delta \lambda / \lambda) = c / \mathcal{R}$$

A.N. : $V^* \sin i = 6 \text{ km/s}$ ce qui ne permet pas de détecter une planète type Jupiter autour d'une étoile type Soleil, et de loin ! ($V^* = 13 \text{ m/s}$)

5.1.2 Si la comparaison d'un spectre stellaire comportant N raies avec un spectre de référence revient à effectuer N mesures indépendantes de l'effet Doppler. La précision de la mesure est alors améliorée par un facteur $N^{1/2}$ et on peut accéder à $V^* \sin i = c / (\mathcal{R} N^{1/2})$

A.N. : $N = c^2 / (\mathcal{R} V^* \sin i)^2$ donc $V^* \sin i = 10 \text{ m/s}$ requiert $N = 3,6 \cdot 10^5$

Remarque : en fait, les N raies ne sont pas indépendantes, car observées avec le même instrument ; en outre une même raie peut aussi être observée dans plusieurs ordres. La méthode d'analyse des données revient effectivement à augmenter la précision des mesures quand N augmente, mais la dépendance en N est plus complexe que celle indiquée ici.

5.2 Limitation intrinsèque à l'étoile

5.2.1 Le rayon d'une étoile pulsante varie selon la loi $R^*(t) = R^* + \delta R^* \cos(2\pi t / \tau)$;

la vitesse radiale résultante est $V_r(t) = dR^*(t)/dt = -(2\pi / \tau) \delta R^* \sin(2\pi t / \tau)$

5.2.2 Cette vitesse radiale périodique induit une variation périodique de la fréquence des raies observées, qui peut éventuellement se confondre avec une variation périodique de fréquence due au mouvement orbital de l'étoile.

A.N. : $\delta R^* = 0,01 R^* = 7,0 \cdot 10^6 \text{ m}$ et $\tau = 30 \text{ jours} = 2,6 \cdot 10^6 \text{ s}$; l'amplitude de variation de la vitesse radiale est donc $V_r = 17 \text{ m/s}$, valeur qui peut tout à fait évoquer un mouvement orbital.

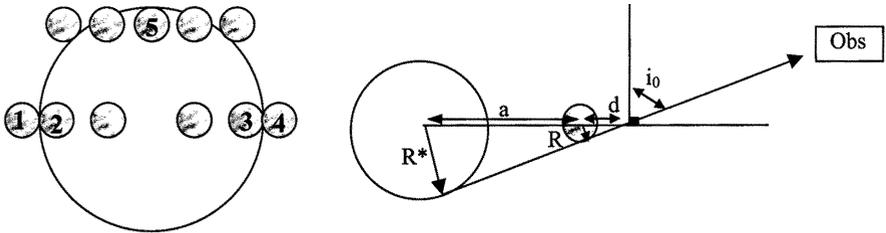
Remarque : la période de 30 jours semble, si l'on raisonne par analogie avec notre système solaire, exclure un effet de planète, mais en fait certains des systèmes planétaires observés présentent effectivement de telles périodes.

5.2.3 Bien que sa température varie peu, la puissance rayonnée par une étoile pulsante varie car son rayon et donc sa surface, varient (c'est d'ailleurs par cette variation de luminosité qu'on les repère). La variation relative de luminosité d'une étoile, dont le rayon varie de 1%, est de 2%, ce qui est relativement facile à observer. Il faut donc s'assurer, en effectuant un suivi photométrique des étoiles candidates à une recherche d'exo-planètes qu'elles ne sont pas variables avant d'interpréter les variations périodiques d'effet Doppler comme les manifestations de la présence d'une planète.

6. Transit de la planète devant son étoile

6.1 Condition de transit

Positions successives de la planète devant son étoile lors d'un transit telles que vues par l'observateur : sur la figure de gauche, les positions 1, 2, ... 3, 4 correspondent au cas d'un système vu par la tranche ($i = 90^\circ$) ; les positions ...5... correspondent à l'angle d'inclinaison limite i_0 en deçà duquel il n'y a plus transit car la planète ne passe plus que partiellement devant l'étoile. La figure de droite représente un système vu sous l'angle limite i_0 .

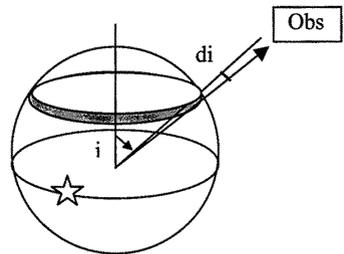


D'après la figure de droite, $\sin(\pi/2 - i_0) = \cos i_0 = R / d = R^* / (a+d)$
 donc $d = aR / (R^* - R)$ et $\cos i_0 = (R^* - R) / a$.

La condition permettant d'observer un transit est donc $i \geq i_0 = \arccos [(R^* - R) / a]$

6.2 Probabilité de transit

La probabilité d'une inclinaison comprise entre i et $i+di$ est égale au rapport de la surface de la tranche de calotte sphérique à la surface de l'hémisphère, soit $P(i, i+di) = (2\pi r \sin i)(r di) / 2\pi r^2 = \sin i di$

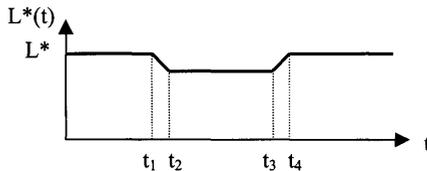


La probabilité d'une inclinaison supérieure à i_0 s'obtient en intégrant $P(i, i+di)$ de i_0 à $\pi/2$, soit $P(i \geq i_0) = \cos i_0$

A.N. Pour une planète comme Jupiter qui orbiterait à 0,05 ua de son étoile de type Soleil, l'angle minimum permettant d'observer un transit est $i_0 = 85,2^\circ$ et la probabilité d'observer un transit est $P(i \geq i_0) = 8,4 \%$.

6.3 Courbe de lumière de l'étoile lors d'un transit de la planète

En utilisant la numérotation des positions de la planète de la figure plus haut, l'allure de la courbe de lumière est la suivante (les variations de t_1 à t_2 et de t_3 à t_4 ne sont pas linéaires).



Lorsque la planète occupe les positions 2 à 3, l'observateur perçoit une diminution relative de luminosité stellaire qui correspond au rapport des surfaces des disques stellaires et planétaires, soit $\Delta L^* / L^* = (R/R^*)^2$.

Remarque : ce n'est pas tout à fait exact car le disque stellaire n'est pas uniformément lumineux.

La durée totale du transit est celle qui sépare le 1^{er} contact (position 1) du dernier contact (position 4) : $\tau_t = (t_4 - t_1) = 2(R^* + R) / V$; la vitesse orbitale V de la planète est donnée par $V = 2\pi a / P$ donc $\tau_t = (R^* + R)P / \pi a$.

De la même façon, la durée du minimum de la courbe de lumière, soit $\tau_m = (t_3 - t_2)$ est donnée par $\tau_m = (R^* - R)P / \pi a$

A partir de τ_t et τ_m , il est possible de déterminer le rayon de la planète (celui de l'étoile aussi, mais il est cependant plus précis de le déterminer par une modélisation de l'étoile). Il est également possible d'en déduire l'inclinaison i de l'orbite puisque la courbe de lumière fournit V et l'effet Doppler $V^* \sin i$ (mais ce n'est pas la réponse suggérée par l'énoncé puisque l'on suppose $i = 90^\circ$).

7. Propriétés des planètes détectées

7.1 La planète de l'étoile HD209458

7.1.1 La vitesse longitudinale (déterminée par l'effet Doppler) suit une variation sinusoïdale dont la valeur moyenne correspond à la vitesse du centre de gravité du système étoile – planète et dont l'amplitude fournit la vitesse longitudinale U du mouvement orbital de l'étoile. D'après les données expérimentales, on estime $P = 3,5$ jours
(les auteurs de l'article, qui ont effectué une analyse moins rudimentaire de la courbe, donnent $P = 3,52433 \pm 0,00027$ jours).

La vitesse du centre de gravité (non demandée dans l'énoncé) est de $-14,77$ km/s environ et la vitesse longitudinale de l'étoile est $U = V^* \sin i = 85$ m/s
(les auteurs donnent respectivement $-14,7652 \pm 0,0016$ km/s et $85,9 \pm 2,0$ m/s).

7.1.2 Le rayon orbital de la planète est donné par la troisième loi de Kepler (cf. question 3.1)
 $a = (G/4\pi^2)^{1/3} m^*^{1/3} P^{2/3}$.

A.N. : $a = (6,7 \cdot 10^{-11} / 4\pi^2)^{1/3} (1,1 \times 2 \cdot 10^{30})^{1/3} (3,5 \times 24 \times 3600)^{2/3}$, soit $a = 7,0 \cdot 10^9$ m = 0,047 ua.

La masse de la planète est donnée par $m \geq m \sin i = V^* \sin i (m^* a / G)^{1/2}$ (cf. 4.1)

A.N. : $m \geq 1,2 \cdot 10^{27}$ kg = 0,60 M_J .

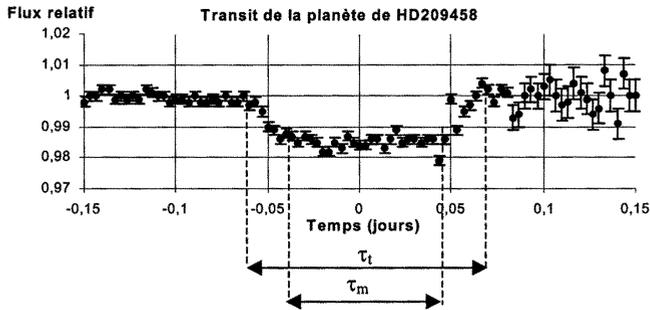
Les incertitudes relatives sur ces valeurs sont données par

$$(\Delta a / a)^2 = 1/9 (\Delta m^* / m^*)^2 + 4/9 (\Delta P / P)^2 \text{ soit } \Delta a / a \approx 3 \%$$

$$\text{et } (\Delta(m \sin i) / (m \sin i))^2 = (\Delta U / U)^2 + 4/9 (\Delta m^* / m^*)^2 + 1/9 (\Delta P / P)^2$$

soit $\Delta(m \sin i) / (m \sin i) \approx 8 \%$

7.1.3 La courbe de lumière permet de déterminer les durées $\tau_t = (R^* + R)P / \pi a$ et $\tau_m = (R^* - R)P / \pi a$ d'où l'on tire directement le rayon de la planète : $R = \pi a (\tau_t - \tau_m) / 2P$. Cependant, comme la détermination de $\tau_t - \tau_m$ est peu précise, il est a priori préférable, puisque R^* est donnée, de tirer R de la mesure de τ_t : $R = -R^* + (\pi a \tau_t / P)$ ou de celle, un peu plus incertaine, de τ_m : $R = R^* - (\pi a \tau_m / P)$. On peut aussi utiliser $\tau_t / \tau_m = (R^* + R) / (R^* - R)$



On mesure $\tau_t = 0,128$ jours (à 0,01 jour près) et $\tau_m = 0,084$ jours (à 0,01 jour près).

La première méthode fournit : $R = 1,4 \cdot 10^8 \text{ m} = 0,2 R_\odot (= 2 R_J)$, avec une incertitude $\Delta R/R \approx \Delta a/a + (\Delta\tau_t + \Delta\tau_m) / (\tau_t - \tau_m)$ de l'ordre de 50 % !

La deuxième méthode aboutit à une incohérence car avec les valeurs ci-dessus, $\pi a / P = 8,0 \cdot 10^8 \text{ m}$ et se trouve donc inférieur à la valeur de R^* donnée dans l'énoncé !

La troisième méthode fournit $R = 3,1 \cdot 10^8 \text{ m} = 0,45 R_\odot (= 4,5 R_J)$, avec une incertitude $\Delta R \approx 1,5 \cdot 10^8 \text{ m}$ soit de l'ordre de 40 %, ce qui n'est pas beaucoup mieux que la première méthode.

La dernière méthode fournit $R = 0,25 R_\odot (= 2,5 R_J)$.

Remarque : ces difficultés proviennent principalement de l'utilisation d'une méthode trop rudimentaire d'analyse de la courbe de lumière, ajoutée à l'hypothèse abusive de système vu par la tranche. Les modèles plus raffinés de courbe de lumière fournissent des valeurs de i de 86° à 87° et de R de $1,25$ à $1,4 R_J$ (avec des valeurs de R^ variant de $1,1$ à $1,2 R_\odot$).*

7.1.4 La masse volumique de la planète s'obtient en supposant que celle-ci est une sphère uniforme, donc $\rho = 3m / (4\pi R^3)$

A.N. : En supposant toujours que l'inclinaison vaut 90° et avec $R = 2 R_J$, $\rho \approx 104 \text{ kg/m}^3$. Il s'agit évidemment là d'une masse volumique de planète essentiellement gazeuse.

Remarque : La valeur publiée est de 380 kg/m^3 ; elle est notablement plus faible que celle de Saturne (700 kg/m^3) , qui est pourtant la moins dense des planètes gazeuses du système solaire.

7.1.5 La température d'équilibre de la planète, $T = (1-A)^{1/4} (R^*/2a)^{1/2} T^*$, vaut 1350K

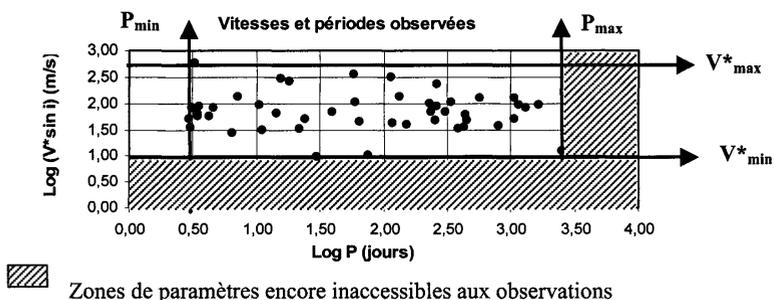
7.1.6 Ce type de planète a été baptisé « Jupiter » en raison de sa masse et de son rayon et « chaud » en raison de sa proximité à l'étoile, donc de sa température.

7.2 Etude statistique des propriétés des 50 premières planètes détectées.

7.2.1 Les planètes détectées ont des vitesses telles que $1,0 \leq \text{Log}(V^* \sin i) \leq 2,7$ soit $10 \text{ m/s} \leq V^* \sin i \leq 500 \text{ m/s}$ dont la limite inférieure est une limite observationnelle due à la résolution des spectrographes disponibles aujourd'hui.

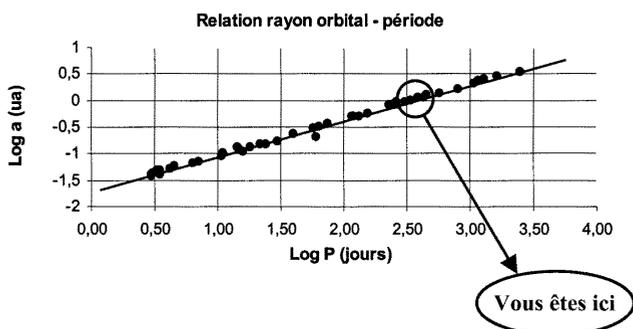
(Les nouvelles générations de spectrographes dédiés permettront d'atteindre des résolutions de l'ordre du m/s, mais demanderont alors une analyse encore plus fine des biais dus à l'étoile elle-même).

Les périodes observées sont telles que $0,5 \leq \text{Log } P \leq 3,4$ soit $3 \text{ j} \leq P \leq 2500 \text{ j} \approx 7 \text{ ans}$ dont la limite supérieure est une limite observationnelle due au fait que ce type de suivi Doppler systématique est encore très récent.



7.2.2 La corrélation entre les paramètres a et P n'est rien d'autre que la 3^{ème} loi de Kepler (on vérifie sans peine que la pente de la droite de corrélation est $2/3$), ce qui indique que les « étoiles à planètes » ont sensiblement toutes la même masse ($\approx 1 M_{\odot}$, puisque la droite de corrélation passe par $a = 1 \text{ ua}$ et $P = 365 \text{ j}$).

NB : C'est un effet de sélection des étoiles « de type solaire », autour desquelles ont été cherché les planètes. On cherche aussi des planètes autour d'étoiles moins massives (type « naines brunes ») mais ce sont des objets peu lumineux et les observations sont plus difficiles de ce point de vue (en revanche les vitesses orbitales sont plus grandes).

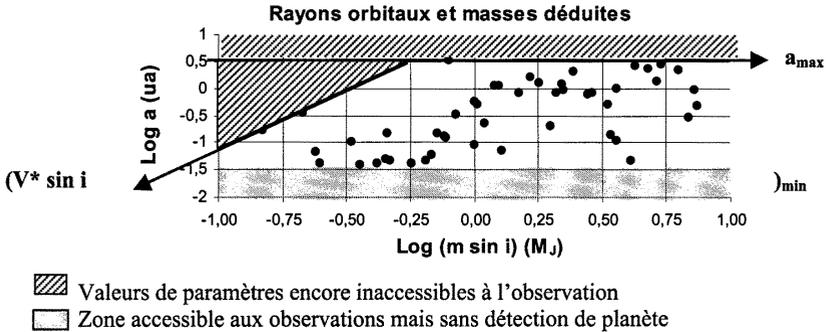


7.2.3 En raison de la 3^{ème} loi de Kepler, comme les étoiles ont toutes sensiblement la même masse m^* , les courbes de période constante se confondent dans le diagramme avec les droites horizontales $\log a = 2/3 \log P + 1/3 \log (4\pi^2 / Gm^*)$.

En supposant $m^* = 1 M_{\odot}$, la valeur de a qui correspond à la limite observationnelle $P_{\max} = 2500 \text{ j}$ est $a_{\max} = (2500 / 365)^{2/3} = 3,6 \text{ ua}$ (donc $\log a = 0,56$), ce qui est bien ce que l'on constate sur la figure).

De la relation $V^* = m (G/m^*a)^{1/2}$ (cf. 4.5), on déduit que les courbes de V^* constante (ou plus exactement de $V^* \sin i$) sont les droites $\log a = 2 \log m \sin i + \log (G/m^*) - 2 \log V^* \sin i$.

En supposant toujours $m^* = 1 M_\odot$, la limite observationnelle $(V^* \sin i)_{\min} = 10$ m/s fournit la droite limite $\log a = 2 \log m \sin i + 0,95$ (avec les unités ua et M_J), au dessus de laquelle il n'y a pas de point observé. C'est très précisément ce que l'on constate sur le diagramme.



7.2.4 On constate que l'on n'observe pas non plus de points correspondant à des valeurs de $\log a \leq -1,4$ c'est à dire $a \leq 0,04$ ua. Il ne s'agit pas là d'un biais observationnel.

Plusieurs hypothèses sont avancées pour expliquer l'absence de planètes aussi proches de l'étoile : toutes considèrent que de telles planètes gazeuses ne peuvent pas se former aussi près de l'étoile et qu'elles ont donc dû s'en approcher une fois formées, suite à des perturbations de leur orbite. Une fois la planète géante proche de l'étoile, on peut imaginer

- qu'il y a capture et chute de la planète sur l'étoile,
- ou évaporation de la planète,
- ou que la migration est stoppée par interaction de marée,
- voire par transfert de masse entre l'étoile et la planète ;
- certains évoquent l'existence d'une cavité magnéto-sphérique vide de matière autour de l'étoile ...

Nul doute que, dès la première détection d'une planète à moins de 0,04 ua de son étoile, les modèles justifiant son existence seront tout aussi nombreux !

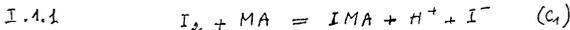
Agrégation de sciences physiques

Concours externe

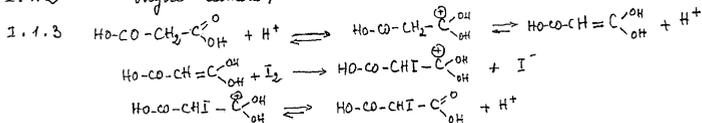
OPTION CHIMIE

Composition de chimie ♦ Session : 2003

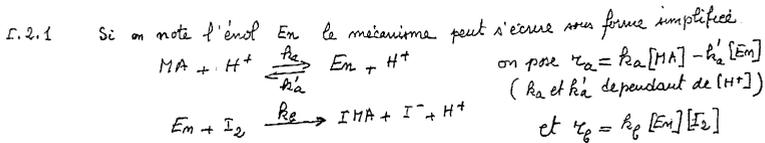
Oscillations du système dioxyde de chlore, diiode, acide malonique.



I.1.2 oxydo réduction



I.1.4 D'autres agents peuvent réduire l'iode et libérer I^- à une vitesse convervable.



on en déduit :

$$- \frac{d[MA]}{dt} = \tau_a, \quad - \frac{d[I_2]}{dt} = \tau_b, \quad \frac{d[IMA]}{dt} = \tau_b, \quad \frac{d[I^-]}{dt} = \tau_b$$

$$\text{et } \frac{d[E_n]}{dt} = \tau_a - \tau_b$$

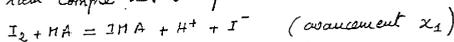
$$A \text{ E Q S } \rightarrow \tau_a = \tau_b = \text{vitesse de } (C_1) = \tau_1$$

$$\text{soit : } k_a[MA] = (k_a' + k_b[I_2])[E_n]$$

$$\text{d'où } \tau_1 = \tau_b = k_b \frac{k_a[MA]}{k_a' + k_b[I_2]} [I_2] = k_b \frac{[MA][I_2]}{\frac{k_a'}{k_a} + [I_2]}$$

\Rightarrow il suffit de poser $\left. \begin{array}{l} k_a = k_{1a} \\ k_a'/k_b = k_{1b} \end{array} \right\}$

I.2.2 si on tient compte des 2 équations :



l'absorbance au point isobestique s'écrit $A = \epsilon \epsilon ([I_3^-] + [I_2])$

$$\text{avec } \begin{cases} [I_3^-] = [I_3^-](0) + \xi \\ [I_2] = [I_2](0) - x_1 - \xi \end{cases} \rightarrow ([I_3^-] + [I_2]) = [I_2](0) + [I_3^-](0) - x_1$$

La mesure de l'absorbance est aussi une mesure de l'avancement de (C_1) comme si l'équilibre $I_2 + I^- \rightleftharpoons I_3^-$ n'existait pas.

I.2.3 Les courbes présentent une 1^{ère} partie linéaire (temps faibles) \Rightarrow
 $r_1 = C t$ traduit un ordre nul par rapport à I_2 en particulier

I.2.4 La loi $r_1 = k_{1a} \frac{[MA][I_2]}{k_{1b} + [I_2]}$ (R_1) traduit bien cette propriété
 pourvu que $[I_2]$ reste très supérieur à k_{1b} (temps faibles). Elle s'écrit
 alors $r_1 = k_{1a} [MA] \approx C t$ si $[MA]$ est en excès ($[MA] = 2 \cdot 10^{-3}$, $[I_2] = 5.3 \cdot 10^{-4}$)
 aux temps longs : $[I_2] \ll k_{1b} \Rightarrow r_1 \approx k_{1a} [MA][I_2]$: ordre 1 / I_2
 $r_1 \rightarrow 0$ comme $[I_2]$

I.2.5 Pour la courbe b) $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta (-\ell \epsilon x_1)}{\Delta t} = \frac{2,6 \cdot 10^{-3}}{120} = \ell \epsilon r_1 = \ell \epsilon [MA]_0 k_{1a}$
 $k_{1a} = \frac{0,43 - 0,14}{120 \times 740 \cdot 1 \times 2 \cdot 10^{-5}} = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

I.2.6 Quand pH décroît $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ augmente $\Rightarrow r_1$ augmente : r_1 favorisé par H⁺

I.3

I.3.1. a Les pentes des enveloppes inférieures sont sensiblement les mêmes.

I.3.1. b $A = \ell (\epsilon_{I_3^-} [I_3^-] + \epsilon_{I_2} [I_2] + \epsilon_{IHA} [IHA] + \epsilon_{O_2} [\text{ClO}_2])$
 \Rightarrow suppose que $[IHA]$ est la seule variable monotone (non oscillante)
 $\Rightarrow \alpha =$ pente de la composante monotone $= \ell \epsilon_{IHA} \frac{d[IHA]}{dt} = \ell \epsilon_{IHA} \frac{dx_1}{dt}$

$\alpha = \ell \epsilon_{IHA} k_{1a} [MA]_0$ (tant que $k_{1b} \ll [I_2]$)

I.3.1.c La pente mesurée sur c) est $\alpha = \frac{0,33}{480} = 6,87 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ d'où l'on

déduit $k_{1a} = \frac{6,87 \cdot 10^{-4}}{1 \times 300 \times 1,0 \cdot 10^{-3}} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

résultat du même ordre de grandeur que le 1^{er}; un peu plus élevé,
 ce qui correspondrait à un pH plus petit que 3,34

I.3.2.a $[IHA](t_2) = x_1(t_2)$ avec $\frac{dx_1}{dt} = r_1 \approx k_{1a} [MA] \Rightarrow x_1(t_1) = k_{1a} [MA]_0 t_1$

$[IHA](t_1) = 2,3 \cdot 10^{-3} \times 10^{-3} \times 110 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$

I.3.2.b La variation monotone de I_2 est due aux 2 réactions d'avancement
 x_1 et ξ . La 2^è est supprimée rapide $\Rightarrow \beta = \frac{[I_3^-]}{[I^-][I_2]} = \frac{\xi}{(x_1 - \xi)(I_{20} - x_1 - \xi)}$

avec $\beta = 725$, $I_2(0) = 5,2 \cdot 10^{-4}$ et $x_1(t_1) = 2,5 \cdot 10^{-4}$,

on trouve $\xi(t_1) = 0,36 \cdot 10^{-4}$

$$\text{d'où } I_2(t_1) = (5,2 - 2,5 - 0,36) 10^{-4} = \boxed{2,3 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}}$$

Rq: On pourra admettre le raisonnement plus simple qui néglige ξ devant x_2 et qui donne $I_2(t_1) = (5,2 - 2,5) 10^{-4} = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$

$$\text{On en déduit } \frac{[I_3^-]}{[I^-]} = 725 [I_2] = \boxed{0,17} \text{ ou } 0,19$$

$$\text{I.3.3.c : } \Delta A \approx 0,1 \text{ avec } \Delta A \approx \ell \varepsilon_{I_3^-} \cdot \Delta [I_3^-]$$

$$\Delta [I_3^-] = \frac{0,1}{1 \times 32000} = \boxed{3,1 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}}$$

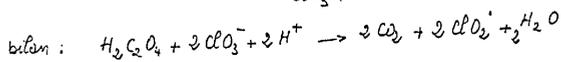
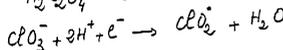
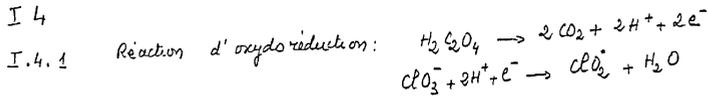
I.3.2.d: En admettant une variation ΔI_2 du même ordre, la variation relative $\Delta I_2 / I_2$ peut être négligée devant $\Delta I_3^- / I_3^-$ ce qui implique;

$$\text{d'après } \beta [I^-] [I_2] = [I_3^-] : \frac{\Delta [I^-]}{[I^-]} = \frac{\Delta [I_3^-]}{[I_3^-]} - \frac{\Delta [I_2]}{[I_2]} \approx \frac{\Delta [I_3^-]}{[I_3^-]}$$

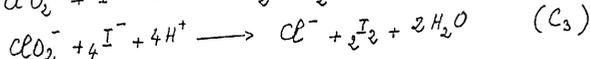
$$\text{soit } \Delta [I^-] = \frac{[I^-]}{[I_3^-]} \Delta [I_3^-] = \frac{3,1 \cdot 10^{-6}}{0,17} = \boxed{1,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}} \text{ ou } 1,6 \cdot 10^{-5}$$

(l'amplitude des variations de $[I^-]$ est plus importante)

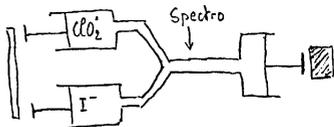
I 4



On élimine CO_2 et HCl



I.4.3



permet de suivre
des cinétiques rapides

I.4.4.a $[I_3^-] = \beta [I_2] [I^-]$

Valeur maximum : $[I_2]$ mille 5,2 10^{-4} , $[I^-]$ maximum : $2 \cdot 10^{-5}$
 $\Rightarrow [I_3^-]_{\max} = 725 \times 5,2 \cdot 10^{-4} \times 2 \cdot 10^{-5} = \boxed{7,5 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \ell^{-1}}$

Valeur minimum : $[I_2]$ minimum : $3 \cdot 10^{-4}$, $[I^-]$ minimum : 10^{-9}
 $\Rightarrow [I_3^-]_{\min} = 725 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 10^{-9} = \boxed{2,2 \cdot 10^{-10} \text{ mol} \cdot \ell^{-1}}$

I.4.4.b

$$r_3 = [ClO_2^-] [I^-] \left(k_{3a} [H^+] + k_{3b} \frac{[I_2]}{h + [I^-]^2} \right)$$

la plus grande valeur du 1er terme de la parenthèse est $4,6 \cdot 10^2 \times 10^{-2}$

la plus petite valeur du 2^d est $2,65 \cdot 10^3 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-4}}{10^{-14} + (2 \cdot 10^{-5})^2} \approx 2 \cdot 10^3$

\Rightarrow le 1er terme est toujours négligeable

I.4.5.a

Autocatalyse : vitesse de formation augmente avec la concentration de l'espèce
 Autoinhibition : vitesse de disparition diminue quand la concentration de l'espèce augmente

Si (C_3) a une vitesse donnée par $r_3 = k_{3b} [ClO_2^-] [I_2] \frac{[I^-]}{h + [I^-]^2}$

- la formation de I_2 est favorisée par une augmentation de $[I_2] \Rightarrow$ autocatalyse

- la disparition de I^- est ralentie par une augmentation de $[I^-]$

conclusion que la fonction $\frac{x}{h+x^2}$ soit décroissante c'est-à-dire pour $x > \sqrt{h}$ soit $\boxed{[I^-] > 10^{-7}}$

I.4.5.b La variation relative de $[I_2]$ étant faible, l'effet autocatalytique a peu d'influence sur la cinétique de l'oscillation. Au contraire la variation relative importante de $[I^-]$ fait jouer un rôle important à l'autoinhibition.

I.4.5.c. En ajoutant une espèce produite par la réaction dans le milieu on constate une augmentation de la vitesse si la réaction est autocatalytique (aucun effet dans le cas d'une réaction autoinhibitrice)

I. 5.

I. 5.1 On pose $u = [I^-]$, $v = [ClO_2^-]$. Les 3 réactions (R_1), (R_2), (R_3) de vitesses r_1 , r_2 , r_3 conduisent à écrire :

$$\frac{du}{dt} = r_1 - r_2 - 4r_3 \quad \text{avec} \quad r_1 = k_{1a} \frac{[MA][I_2]}{k_{1f} + [I_2]} \quad (R_1)$$

$$\frac{dv}{dt} = r_2 - r_3 \quad r_2 = k_2 [ClO_2^-] u \quad (R_2)$$

$$r_3 = k_{3f} [I_2] \frac{uv}{h + u^2} \quad (R_3)$$

sont $\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = g(u, v) \end{cases}$ où f et g ont bien les formes indiquées

I. 5.2 La forme $f(u, v) = k'_1 - k'_2 u - 4k'_3 \frac{uv}{h + u^2}$

suppose que $\boxed{\begin{aligned} k'_1 &= k_{1a} \frac{[MA][I_2]}{k_{1f} + [I_2]} \\ k'_2 &= k_2 [ClO_2^-] \\ k'_3 &= k_{3f} [I_2] \end{aligned}}$ (avec $k_{1f} \ll [I_2]$)

et $g(u, v)$ prend alors la forme $k'_2 u - k'_3 \frac{uv}{h + u^2}$

I. 6

On pose $u = \alpha X_1$, $v = \beta X_2$, $t = \gamma T$

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dT} = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{du}{dt} = \frac{\gamma}{\alpha} \left[k'_1 - k'_2 \alpha X_1 - 4k'_3 \alpha \beta \frac{X_1 X_2}{h + \alpha^2 X_1^2} \right] \\ \frac{dX_2}{dT} = \frac{\gamma}{\beta} \frac{dv}{dt} = \frac{\gamma}{\beta} \left[k'_2 \alpha X_1 - k'_3 \alpha \beta \frac{X_1 X_2}{h + \alpha^2 X_1^2} \right] \end{cases}$$

Pour obtenir la forme indiquée il faut poser :

$$\begin{cases} \gamma k'_1 = 1 \\ \gamma k'_2 \beta = 1 \\ \frac{h}{\alpha^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{1}{k'_1} \\ \beta = \frac{h k'_1}{k'_3} \\ \alpha = \sqrt{h} \end{cases}$$

et on a alors : $a = \frac{\gamma k'_1}{\alpha} = \frac{k'_1}{\frac{k'_1}{k'_3} \sqrt{h}} = \frac{k'_3}{k'_1 \sqrt{h}}$ et $b = \gamma k'_2 \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma k'_2}{\frac{k'_3}{h k'_1} \sqrt{h}} = \frac{k'_2 h k'_1}{k'_3 \sqrt{h}}$

II : $[I_2], [MA], [ClO_2^*]$ imposés

II.1

II.1.1 Les solutions de $V_1 = 0, V_2 = 0$ sont (en excluant $X_1 = 0$ car $a \neq 0$)

$$\begin{cases} X_2 = 1 + X_1^2 \\ a - X_2 - 4X_1 = 0 \end{cases} \text{ soit } \boxed{\begin{cases} X_1^{10} = \frac{a}{5} \\ X_2^{10} = \frac{a^2}{25} + 1 \end{cases}}$$

Application numérique

$$k_1' = \frac{k_{1a} [MA] [I_2]}{k_{1b} + [I_2]} = \frac{7,5 \cdot 10^{-6}}{1,1} \approx 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ mol l}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ (en négligeant } k_{1b} \text{ connue indégué)}$$

$$k_2' = k_2 [ClO_2^*] = 0,6 \text{ s}^{-1}$$

$$k_3' = k_{3g} [I_2] = 1,32 \cdot 10^{-6} \text{ mol l}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

$$a = \frac{k_1'}{k_2' \sqrt{h}} = 125$$

$$b = \frac{k_3'}{k_2' \sqrt{h}} = 22$$

⇒

$$\boxed{\begin{matrix} X_1^{10} = 25 \\ X_2^{10} = 626 \end{matrix}}$$

II.1.2 $[I]^{10} = u^{10} = \alpha X_1^{10} = \sqrt{h} X_1^{10} = \boxed{2,5 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}}$

$$[ClO_2^*]^{10} = v^{10} = \beta X_2^{10} = \frac{h k_2'}{k_3'} X_2^{10} = \boxed{2,8 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}}$$

II.2

II.2.1 Les variables (nombre d'espèces par unité de volume) sont des grandeurs fluctuantes. Les équations cinétiques ne rendent compte que de l'évolution de leurs moyennes. Les fluctuations autour de ces moyennes ont une réalité physique.

II.2.2 Le système linéarisé s'écrit

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [L] \vec{x} \text{ avec } L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = \left. \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \right|_{ss} = \left(-1 - \frac{4X_2}{1+X_1^2} + 8 \frac{X_1^2 X_2}{(1+X_1^2)^2} \right)_{11} = -5 + 8 \frac{a^2}{25(1+\frac{a^2}{25})}$$

$$\boxed{L_{11} = \frac{8a^2}{25+a^2} - 5}$$

$$L_{12} = \left. \frac{\partial V_1}{\partial X_2} \right|_{A_1} = \left(-\frac{4X_1}{1+X_1^2} \right)_{A_1} = -\frac{4a}{5(1+\frac{a^2}{25})} = \boxed{-\frac{20a}{25+a^2} = L_{12}}$$

$$L_{21} = \left. \frac{\partial V_2}{\partial X_1} \right|_{A_1} = b \left(1 - \frac{X_2}{1+X_1^2} + 2 \frac{X_1^2 X_2}{(1+X_1^2)^2} \right)_{A_1} = \boxed{\frac{2ba^2}{25+a^2} = L_{21}}$$

$$L_{22} = \left. \frac{\partial V_2}{\partial X_2} \right|_{A_1} = -b \frac{X_1}{1+X_1^2} = \boxed{-\frac{5ab}{25+a^2} = L_{22}}$$

II.2.3 En introduisant la forme $\vec{x} = \vec{w} e^{\lambda \tau}$ dans (S₂) on obtient
 $\lambda \vec{w} e^{\lambda \tau} = [L] \vec{w} e^{\lambda \tau}$ soit $[L] \vec{w} = \lambda \vec{w}$;
 équation aux valeurs propres

II.2.4 $\vec{x} = e^{\lambda' \tau} C' \vec{w}' + e^{\lambda'' \tau} C'' \vec{w}''$ solution générale
 \Rightarrow stable si $\text{Re } \lambda' = \text{Re } \lambda''$ négatif ou $\boxed{\lambda' + \lambda'' < 0}$

II.2.5 $\lambda' + \lambda''$ est la trace de l'opérateur L (indépendante de la base) : $\lambda' + \lambda'' = L_{11} + L_{22} = \boxed{\frac{8a^2 - 5ab}{25+a^2} - 5 = \lambda' + \lambda''}$

① De même $\lambda' \lambda'' = \det(L) = L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}$

$$= \frac{5ab}{25+a^2} \left(5 - \frac{8a^2}{25+a^2} \right) + \frac{40 a^3 b}{(25+a^2)^2} = \boxed{\frac{25ab}{25+a^2} = \lambda' \lambda''}$$

II.2.6 $\lambda' \lambda''$ est positif \Rightarrow Si les valeurs propres étaient réelles elles auraient toujours le même signe et leur somme ne pourrait jamais changer de signe (sans que le produit soit nul).
 \Rightarrow Lorsque la transition $\lambda' + \lambda'' = 0$ a lieu les 2 valeurs propres sont bien imaginaires.

II.2.7 L'état stationnaire devient instable quand $\lambda' + \lambda'' \geq 0$

$$\frac{8a^2 - 5ab}{25+a^2} \geq 5 \Rightarrow 8a^2 - 5(25+a^2) \geq 5ab$$

② ou $3a^2 - 125 \geq 5ab \Rightarrow \boxed{b \leq \frac{3a - 25}{5} = b_c}$

③  
 ④ $b < b_c$ $b > b_c$

II.2.8 Dans le cas étudié $b_c = \frac{3 \times 125}{5} - \frac{25}{125} = \boxed{74,8}$

$b = 22 < b_c$

l'état stationnaire est instable

II.2.9, a sans étape autocatalytique ou autoinhibitrice chaque processus a pour effet de diminuer la concentration de ses réactifs. L'augmentation de la concentration d'un réactif X ne peut avoir pour effet que d'augmenter (non diminuer) la vitesse du processus donc de diminuer V_x (la vitesse de formation de X) $\Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial X}$ est toujours négatif (ou nul)

II.2.9.b On aurait donc $\frac{\partial V_1}{\partial X_1} < 0$ et $\frac{\partial V_2}{\partial X_2} < 0$ et $L_{11} + L_{22} < 0$
 $\lambda' + \lambda'' < 0$

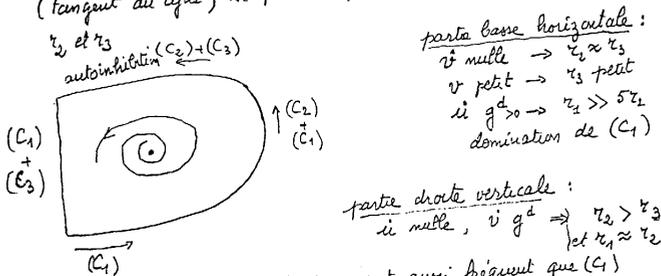
on ne pourrait observer de transition

II.3

II.3.1 Les variables X_1 et X_2 varient proportionnellement à u et v , dont les vitesses sont données par $\dot{u} = r_1 - r_2 - 4r_3$ avec $r_2 = C_1^2$
 $\dot{v} = r_2 - r_3$ $r_3 \propto \frac{uv}{\beta + u^2}$

r_1, r_2, r_3 sont positifs.

Le changement de signe de chaque composante du vecteur vitesse (tantôt au cycle) se produit par compensation r_1 et $r_2 + 4r_3$ ou entre



partie basse horizontale :
 v nulle $\rightarrow r_2 \approx r_3$
 v petit $\rightarrow r_3$ petit
 u grand $\rightarrow r_2 > 5r_3$
 domination de (C_1)

partie droite verticale :
 u nulle, v grand $\Rightarrow r_2 > r_3$
 et $r_1 \approx r_2$

$\Rightarrow (C_2)$ devient aussi fréquent que (C_1)
 partie horizontale haute : v nulle $\Rightarrow r_2 \approx r_3$
 u grand $\Rightarrow 5r_2 > r_3$
 domination de (C_2) et (C_3) sur (C_1)
 avec domination de C_3 (autoinhibition) qui a u devient faible.
 $(r_2 \propto u \text{ et } r_3 \propto \frac{v}{u})$

partie verticale gauche si null, $\dot{v} < 0 \Rightarrow z_3 > z_2$

(C_1) redoublet plus fréquent. (C_1) et (C_3) dominent sur (C_2)
 mais la fréquence de (C_3) diminue au fur et à mesure que v diminue
 $\kappa_1 \approx 4\kappa_3$

II.3.2 L'état stationnaire est relié à $x_1 = 25$, $x_2 = 626$ ce que correspond bien au point où le champ de vitesse est nul. Dans son voisinage, les trajectoires sont des spirales, elles s'approchent du cycle au bout d'un temps suffisamment grand (voir figure)

II.3.3 On lit sur l'une ou l'autre des figures : $\Delta T = 4$

$$\text{ou } \Delta T = 20 \times 0,2 = 4$$

$$\text{soit } \Delta t = \frac{1}{k_2} \Delta T = \frac{4}{0,6} = \boxed{6,7 \text{ s}}$$

$$\Delta x_1 = 63 \quad \text{soit } \Delta[I^-] = \sqrt{h} \Delta x_1 = \boxed{6,3 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}}$$

$$\Delta x_2 = 1520 - 40 = 1480 \quad \text{soit } \Delta[\text{ClO}_2^-] = \frac{h k_1}{k_2} \cdot 1480$$

$$\Rightarrow \Delta[\text{ClO}_2^-] = \boxed{6,7 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}}$$

II.3.4 Expérimentalement on trouvait $\Delta I^- \sim 18 \cdot 10^{-6}$ ou $16 \cdot 10^{-6}$ mais en tenant compte de la consommation de I_2 (qui est ignorée dans le modèle théorique). En oubliant la consommation de I_2 dans l'expérience on aurait eu : $\Delta[I^-] = \frac{1}{\beta} \frac{\Delta[I_2^-]}{[I_2]_0}$
 avec $[I_2]_0 = 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1} \Rightarrow \Delta[I^-] \approx 8,2 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$

III Structures de Turing

III.1

III.1.1 La loi de Fick modélisant la diffusion dans la direction x s'écrit $\frac{\partial [A]}{\partial t} = D_A \frac{\partial^2 [A]}{\partial x^2}$. A l'état stationnaire :

$$\frac{\partial^2 [A]}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow [A] = \alpha x + \beta \quad \text{avec } \begin{cases} [A]_0 = \beta \\ [A]_L = \alpha L + \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow [A] = [A]_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + [A]_L \frac{x}{L}$$

III.1.2 Application : $[MA]_0 = c_1$, $[MA]_L = 0 \Rightarrow [MA] = c_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right)$
 $[ClO_2^*]_0 = c_2$, $[ClO_2^*]_L = 0 \Rightarrow [ClO_2^*] = c_2 \left(1 - \frac{x}{L}\right)$
 $[I_2]_0 = 0$, $[I_2]_L = c_3 \Rightarrow [I_2] = c_3 \frac{x}{L}$

III.2

III.2.1 En tenant compte de $(C_1), (C_2), (C_3), (C_4)$ et de la diffusion les vitesses d'évolution de $[I^-] = u$ et $[ClO_2^-] = v$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = r_1 - r_2 - 4r_3 - r_4 + D_u \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = r_2 - r_3 + D_v \nabla^2 v \end{cases}$$

III.2.2 $\frac{\partial [SI_3^-]}{\partial t} = r_4 = k_4 [I_2] [S] \frac{\partial u}{\partial t}$

III.2.3 En remplaçant r_4 par son expression en fonction de $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$(1+K') \frac{\partial u}{\partial t} = r_1 - r_2 - 4r_3 + D_u \nabla^2 u = f(u, v) + D_u \nabla^2 u$$

D'où la forme indiquée :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{1+K'} (f(u, v) + D_u \nabla^2 u) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + D_v \nabla^2 v \end{cases}$$

avec $K' = k_4 [I_2] [S]$: dépend de x par $[I_2]$

III.3

III.3.1 En représentant $u(x \pm q, y, z)$ par son développement de Taylor tronqué à l'ordre 2 on obtient :

$$u(x \pm q, y, z) = u(x, y, z) \pm q \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{q^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Les conditions aux bords de la tranche s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \mu - q \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{q^2}{2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} = \mu_M \\ \mu + q \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{q^2}{2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} = \mu_M \end{cases}$$

En additionnant, on en déduit : $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} = \frac{2(\mu_M - \mu)}{q^2}$ et id^o pour $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

III.3.2 En remplaçant $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ par leurs expressions il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{1}{1+\kappa'} \left(f(\mu, v) + \frac{2D_u}{q^2} (\mu_M - \mu) + D_u \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \right) \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = g(\mu, v) + \frac{2D_v}{q^2} (v_M - v) + D_v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (S_4)$$

Les fonctions $\mu(x, y, z) = \mu_M(x) \forall y, z$ et $v(x, y, z) = v_M(x) \forall y, z$ constituent bien une solution stationnaire (rendent nuls tous les termes).

III.4

III.4.1 En linéarisant autour de μ_M, v_M on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = [M] \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + [D] \begin{pmatrix} \nabla^2 p_1 \\ \nabla^2 p_2 \end{pmatrix}$$

avec $[D] = \begin{bmatrix} \frac{D_u}{1+\kappa'} & 0 \\ 0 & D_v \end{bmatrix}$ et $[M]$ une matrice dont les éléments

$$\text{sont : } M_{11} = \frac{1}{1+\kappa'} \left(\left[\frac{\partial f}{\partial \mu} \right]_{M_1} - \frac{2D_u}{q^2} \right) ; \quad M_{12} = \frac{1}{1+\kappa'} \left[\frac{\partial f}{\partial v} \right]_{M_1}$$

$$M_{21} = \left[\frac{\partial g}{\partial \mu} \right]_{M_2} ; \quad M_{22} = \left[\frac{\partial g}{\partial v} \right]_{M_2} - \frac{2D_v}{q^2}$$

Il reste à calculer les dérivées de f et g :

$$f = k_1' - k_2' \mu - 4k_3' \frac{\mu v}{h + \mu^2} \quad (\text{donné page 5})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = -k_2' - 4k_3' \left(\frac{v}{h + \mu^2} - \frac{2\mu^2 v}{(h + \mu^2)^2} \right)$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \mu} \right]_{M_1} = -k_2' - 4k_3' \left(\frac{k_1'}{k_3'} - \frac{2\mu_M^2}{h + \mu_M^2} \cdot \frac{k_1'}{k_3'} \right) = k_2' \left(-5 + \frac{8\mu_M^2}{h + \mu_M^2} \right)$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial v} \right]_{M_1} = -\frac{4k_3' \mu_M}{h + \mu_M^2}$$

$$g = k'_2 u - k'_3 \frac{u v}{h + u^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = k'_2 - k'_3 \left(\frac{v}{h + u^2} - \frac{2u^2 v}{(h + u^2)^2} \right)$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial u} \right]_{A_1} = k'_2 - k'_3 \left(\frac{k'_2}{k'_3} - \frac{2u_{A_1}^2}{h + u_{A_1}^2} \cdot \frac{k'_2}{k'_3} \right) = 2k'_2 \frac{u_{A_1}^2}{h + u_{A_1}^2}$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial v} \right]_{A_1} = -k'_3 \frac{u_{A_1}}{h + u_{A_1}^2}$$

D'où l'expression des éléments de $[M]$:

$$M_{11} = \frac{1}{1+k} \left(k'_2 \left(\frac{2u_{A_1}^2}{h + u_{A_1}^2} - 5 \right) - \frac{2D_{11}}{q^2} \right); \quad M_{12} = -\frac{4}{1+k} k'_3 \frac{u_{A_1}}{h + u_{A_1}^2}$$

$$M_{21} = 2k'_2 \frac{u_{A_1}^2}{h + u_{A_1}^2}; \quad M_{22} = -k'_3 \frac{u_{A_1}}{h + u_{A_1}^2} - \frac{2D_{22}}{q^2}$$

III.4.2 En introduisant la forme proposée dans (S5) il vient.

$$\lambda \vec{p} = [M] \vec{p} - \kappa^2 [D] \vec{p} \text{ ou } ([M] - \kappa^2 [D] - \lambda [I]) \vec{p} = 0$$

équation linéaire homogène qui n'a de solution non banale que

$$\text{si : } \det([M] - \kappa^2 [D] - \lambda [I]) = 0$$

$$\text{soit } (M_{11} - \kappa^2 D_{11} - \lambda)(M_{22} - \kappa^2 D_{22} - \lambda) - M_{12} M_{21} = 0$$

III.4.3.a. Pour $\kappa = 0$

$$\lambda' + \lambda'' = M_{11} + M_{22}$$

$$\lambda' \lambda'' = M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21}$$

III.4.3.b. stabilité des perturbations homogènes si $(\lambda' + \lambda'') < 0$, que λ' et λ'' soient réelles ou complexes: $M_{11} + M_{22} < 0$ (I_1)

III.4.4.a. Si $D_{11} = D_{22} (=D)$ l'équation aux valeurs propres pour

$\kappa \neq 0$ se déduirait de l'équation pour $\kappa = 0$ en remplaçant

λ par $\lambda + \kappa^2 D$. On aurait toujours:

$$\lambda(\kappa) = \lambda(0) - \kappa^2 D$$

l'amortissement de toute perturbation inhomogène serait plus rapide que celui d'une perturbation homogène.

Il est donc nécessaire que D_{11} diffère de D_{22} pour qu'une perturbation inhomogène s'amplifie. Comme en général D_{11} est voisin de D_{22} , c'est le facteur $(1+K')$ qui permet de séparer les valeurs de D_{11} et de D_{22} . D'où l'importance de la réaction C_4 .

II. 4.4. b Pour $\chi \neq 0$

$$\lambda' + \lambda'' = M_{11} + M_{22} - \chi^2 (D_{11} + D_{22})$$

La condition (I1) implique donc que $(\lambda' + \lambda'')$ soit négatif. Si les deux valeurs propres étaient complexes conjuguées leur partie réelle serait donc négative. La seule possibilité d'instabilité est donc que les 2 valeurs propres soient réelles et de signe contraire.

III. 4.4. c Cette condition s'écrit $\lambda' \lambda'' < 0$ soit :

$$\det \begin{bmatrix} M_{11} - \chi^2 D_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \chi^2 D_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad \text{ou} \quad (M_{11} - \chi^2 D_{11})(M_{22} - \chi^2 D_{22}) - M_{12} M_{21} < 0$$

en divisant par χ^2 cette condition s'écrit

$$M_{11} D_{22} + M_{22} D_{11} > \frac{M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21}}{\chi^2} + \chi^2 D_{11} D_{22}$$

IV. 4.4. d Les deux termes du 2^e membre ont un produit indépendant de χ^2 . Leur somme est minimum quand ils sont égaux soit

$$\chi^2 = \sqrt{\frac{M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21}}{D_{11} D_{22}}}$$

V. 4.4. e La condition critique s'écrit

$$M_{11} D_{22} + M_{22} D_{11} > 2 \sqrt{D_{11} D_{22} (M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21})} \quad (I_2)$$

II. 5

III. 5.1

$$k'_1 = k_{1a} [MA] = \frac{k_{1a} C_1 (1-d)}{5}$$

$$k'_2 = k_{2a} [ClO_2] = \frac{k_{2a} C_2 (1-d)}{5}$$

$$k'_3 = k_{3g} [I_2] = \frac{k_{3g} C_3 d}{5}$$

$$u_M = \frac{k'_1}{5 k'_2} = \frac{k_{1a} C_1}{5 k_{2a} C_2}$$

$$K' = K_4 [I_2] [S] = \frac{k_{4g} [S] C_3 d}{5}$$

$$L_{11} = M_{11}(1+k') = k'_2 \left(\frac{8\mu_{11}^2}{A+\mu_{11}^2} - 5 \right) - \frac{2D_2}{q^2} \approx 3k'_2 - k_d = \boxed{3k_2 c_2 (1-d) - k_d}$$

$$L_{12} = M_{12}(1+k') = -4k'_3 \frac{\mu_{11}}{A+\mu_{11}^2} \approx -\frac{4k'_3}{\mu_{11}} = -20k_3 c_2 \frac{k_1 c_3}{k_{12} c_1} d = \boxed{-20k_3 c_2 \eta d}$$

$$M_{21} = 2k'_2 \frac{\mu_{11}^2}{A+\mu_{11}^2} \approx 2k'_2 = \boxed{2k_2 c_2 (1-d)}$$

$$M_{22} = -k'_3 \frac{\mu_{11}}{A+\mu_{11}^2} - \frac{2D_2}{q^2} \approx -\frac{k'_3}{\mu_{11}} - k_d = \boxed{-5k_3 c_2 \eta d - k_d}$$

III. 5.2 En reportant dans (I₂) on obtient

$$(L_{11} + M_{22}) D > 2D \sqrt{L_{11} M_{22} - L_{12} M_{21}}$$

ou $(L_{11} + M_{22})^2 > 4(L_{11} M_{22} - L_{12} M_{21})$

$$(L_{11} - M_{22})^2 + 4L_{12} M_{21} > 0$$

$$(3k_2 c_2 (1-d) + 5k_3 c_2 \eta d)^2 - 160(k_3 c_2)^2 \eta d(1-d) > 0$$

$$(3(1-d) + 5\eta d)^2 - 160\eta d(1-d) > 0$$

$$\boxed{9(1-d)^2 + 25\eta^2 d^2 - 130\eta d(1-d) > 0}$$

Seul η intervient et vaut $\frac{9 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 8 \cdot 10^{-4}}{5,8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}} = 0,012$ négligeable

devant 1. En négligeant $25\eta^2 d^2$ la condition s'écrit $9(1-d) - 130\eta d > 0$ soit $\boxed{d < \frac{9}{9+130\eta}} = d_2$

numérique : $\boxed{d_2 = 0,854}$

III. 5.3 (I₁) s'écrit :

$$L_{11} + (1+k') M_{22} < 0$$

$$3k_2 c_2 (1-d) - k_d + (1+k_4[S]c_3 d) (-5k_3 c_2 \eta d - k_d) < 0$$

$$\boxed{(5k_3 c_2 \eta) \frac{k_4[S]c_3}{k'_0} d^2 + \left(\frac{k_4[S]c_3 k_d}{k'_0} + k_3 c_2 (3+5\eta) \right) d + 2k_d - 3k_2 c_2 > 0} \quad (I_1)$$

III. 5.4 Les coefficients de ce trinôme dépendent de η , inconnue. Une estimation de $k_d = 2D/q^2$ montre que $(2k_d - 3k_2 c_2)$ est négatif et que les 2 racines du trinôme sont de signe contraire. Si d_2 est la racine positive (I₁) s'écrit donc $d > d_2$

En utilisant une méthode auto-cohérente on peut faire une 1^{ère} estimation de q , en déduire la racine d_1 du trinôme puis une 2^e estimation de q par $q = \frac{1}{2}(d_2 - d_1)$ et une 2^e estimation de d_1 etc...

Numériquement, on a $\begin{cases} \eta = 0,012 \text{ et, à partir d'une 1}^{ère} \text{ estimation} \\ k_2 c_2 = 0,9 & q = 0,15L \Rightarrow k_d = 0,0069 \\ K'_0 = 48 \end{cases}$

On en déduit la racine positive du trinôme: $d_1 = 0,586$

La 2^e estimation de q est donc $(d_2 - d_1) \frac{L}{2} = 0,134L \Rightarrow k_d = 0,00866$
ce qui conduit à $d_1 = 0,577$

On peut accepter $d_1 = 0,58$ ($d_2 = 0,85$)

III.5.5

La condition de déstabilisation de l'état (ψ_{11}, ψ_{11}) par une perturbation inhomogène de vecteur d'onde κ est écrite en III.4.4.c: Avec les notations adoptées, elle s'écrit:

$$L_{11} D + M_{22} D > \frac{L_{11} M_{22} - L_{12} M_{21}}{\kappa^2} + \kappa^2 D^2$$

En posant $z = \kappa^2 D$, cette condition s'écrit:

$$z^2 - (L_{11} + M_{22}) z + L_{11} M_{22} - L_{12} M_{21} < 0$$

Le module de κ doit donc se trouver dans un intervalle fini déterminé par: $z_{\min} < z < z_{\max}$

où z_{\min} et z_{\max} sont les racines du trinôme en z ci-dessus.

Application numérique: $d = 0,75$, $q = L \frac{0,85 - 0,58}{2} = 0,135L$

$$\Rightarrow k_d = 0,008535$$

$$L_{11} = 3 k_2 c_2 (1-d) - k_d = 0,6665 \text{ } \Lambda^{-1}$$

$$L_{12} = -30 k_2 c_2 \eta d \text{ avec } \eta = 0,01187 \Rightarrow L_{12} = -0,16024 \text{ } \Lambda^{-1}$$

$$M_{21} = 2 k_2 c_2 (1-d) = 0,45 \text{ } \Lambda^{-1}$$

$$M_{22} = -5 k_2 c_2 \eta d - k_d = -0,04860 \text{ } \Lambda^{-1}$$

Le trinôme s'écrit: $z^2 - 0,6179 z + 0,03972$ $\begin{cases} z_{\min} = 0,073 \text{ } \Lambda^{-1} \\ z_{\max} = 0,545 \text{ } \Lambda^{-1} \end{cases}$

$$\text{D'où } \kappa_{\min} = \sqrt{\frac{z_{\min}}{D}} = 102 \text{ cm}^{-1} \quad \lambda_{\max} = \frac{2\pi}{102} = 0,062 \text{ cm}$$

$$\kappa_{\max} = \sqrt{\frac{z_{\max}}{D}} = 279 \text{ cm}^{-1} \quad \lambda_{\min} = \frac{2\pi}{279} = 0,022 \text{ cm}$$

~ en accord avec une périodicité spatiale d'environ 0,2 mm dans 2 directions à 120°, observée sur la figure 4.

Partie II

I.1. a.

j : densité de courant

j_0 : densité de courant d'échange . valeur de j quand $E = E_{eq}$ ($\eta = 0$)

$$j_0 = n F k_0 \cdot C$$

α, β : coefficients de transfert de charge ($\Delta \tilde{G}^\ddagger = \alpha (nF) + \Delta \tilde{G}_{ox \rightarrow red}^\ddagger$)
(coefficients d'efficacité)

η : surtension $\eta = E - E_{eq}$

b. généralement $\alpha + \beta \approx 1$ (= 1 si le système vérifie la relation de Nerst)

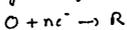
c. égalité des concentrations dans la masse de la solution et au contact de l'électrode

$$C_s(c_0, t) = C_0^* \quad C_R(c_0, t) = C_R^*$$

Pratiquement vérifiée si i faible . rôle négligeable des phénomènes de diffusion.

I.2. a.

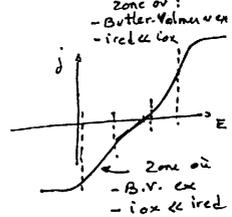
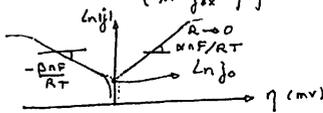
$j_{ox} \gg |j_{red}|$ ou $|j_{red}| \gg j_{ox}$ cas idéal : système irréversible.



(*) $i_{red} \gg i_{ox}$

Butler-Volmer : $j = j_0 e^{-\frac{\alpha n F \eta}{RT}} \Rightarrow \ln |j| = \ln j_0 - \frac{\alpha n F}{RT} \eta$

si j_{ox} négligeable



b.

I.3. a.

$$j_0 = n F k_a^0 = n F k_0 C_r^{a_r} C_o^{c_o} e^{\frac{\alpha (E^{eq} - E_0') F}{RT}}$$

$$= n F k_c^0 = n F k_0 C_r^{c_r} C_o^{c_o} e^{-\frac{\beta (E^{eq} - E_0') F}{RT}}$$

b.

$$\frac{\partial \ln j_0}{\partial E_{eq}} \Big|_{C_r} = a_o \frac{\partial \ln C_o}{\partial E_{eq}} + \frac{\alpha F}{RT} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \ln j_0}{\partial E_{eq}} \Big|_{C_r} = c_o \frac{\partial \ln C_o}{\partial E_{eq}} - \frac{\beta F}{RT} \quad (2)$$

c.

$$E_{eq} = E^0 + \frac{RT}{nF} \ln \frac{C_o \nu_o}{C_r \nu_r} \Rightarrow \frac{\partial \ln C_o}{\partial E_{eq}} \Big|_{C_r} = \frac{nF}{RT} + \frac{1}{\nu_o}$$

d.

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial \ln j_0}{\partial E_{eq}} \Big|_{C_r} = a_o \frac{nF}{RT} + \frac{1}{\nu_o} + \frac{\alpha F}{RT} \Rightarrow (c_o - a_o) \frac{nF}{RT} + \frac{1}{\nu_o} = (\alpha + \beta) \frac{F}{RT}$$

$$(2) \Rightarrow \nu = c_o \frac{nF}{RT} + \frac{1}{\nu_o} - \frac{\beta F}{RT} \Rightarrow \boxed{c_o - a_o = \frac{\nu_o}{n}}$$

Raisonnement symétrique :

$$\frac{\partial \ln j_0}{\partial E_{eq}} \Big|_{C_o} = a_r \frac{\partial \ln C_r}{\partial E_{eq}} + \frac{\alpha F}{RT} \Rightarrow -a_r \frac{nF}{RT} + \frac{\alpha F}{RT} = -c_r \frac{nF}{RT} + \frac{\beta F}{RT}$$

$$\frac{\partial \ln j_0}{\partial E_{eq}} \Big|_{C_o} = c_r \frac{\partial \ln C_r}{\partial E_{eq}} - \frac{\beta F}{RT} \Rightarrow \boxed{a_r - c_r = \frac{\nu_r}{n}}$$

I.3. e. droite (1) : $\left[\text{pente } 0,8 = \frac{RT}{F} \frac{\partial \ln j_0}{\partial E_{eq}} \right]_{C_r} = \frac{a_0 n}{\nu_0} + \alpha = \frac{C_0 n}{\nu_0} - \beta \quad (3)$

$\left. \begin{array}{l} \nu_0 = 1 \\ n = 2 \\ (3) \end{array} \right\} \Rightarrow 0,8 = C_0 \cdot 2 - \beta$
 et $C_0 - a_0 = \frac{\nu_0}{n} = \frac{1}{2} \quad (5)$

droite (2) : $\text{pente } 0,13 = \frac{RT}{F} \frac{\partial \ln j_0}{\partial E_{eq}} \Big|_{C_0} = -a_r \frac{n}{\nu_r} + \alpha = -C_r \frac{n}{\nu_r} - \beta \quad (4)$

$\left. \begin{array}{l} \nu_r = 3 \\ n = 2 \\ (4) \end{array} \right\} \Rightarrow 0,13 = -C_r \frac{2}{3} - \beta$
 et $a_r - C_r = \frac{3}{2} \quad (6)$

vue la forme de r_a , $1e^-$ échangé ($e^{\alpha \frac{nF}{RT} \eta}$ ici $n=1$)

$\Rightarrow \textcircled{H} \quad a_r = 1 \Rightarrow C_r = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 0,2 \Rightarrow C_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_0 = 0$

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} r_a = k_a C_r^1 C_0^0 = k_a [X^-] \\ r_c = k_c C_r^{-1/2} C_0^{1/2} = k_c \sqrt{\frac{[X_2]}{[X^-]}} \end{array} \right\}$

3. f. $r_a = k_a [X^{\ominus}]$
 $r_c = k_c [X^{\ominus}]$
 $[X^{\ominus}] = \sqrt{K_2^0 [X_2]} = \sqrt{K_2^0} \cdot \sqrt{K_1^0 \frac{[X_2]}{[X^-]}} \Rightarrow r_c = k_c \sqrt{K_1^0 K_2^0} \sqrt{\frac{[X_2]}{[X^-]}} = 0 \text{ ok}$

3. g. : $\alpha = 0,8$ quand (habituellement 0,3-0,5)

II.1 a. $O + ne^- \rightarrow R$

b. $E = E_i - \nu t = E^0 + \frac{RT}{nF} \ln \frac{C_0(x,t)}{C_r(x,t)} \Rightarrow \frac{C_0(x,t)}{C_r(x,t)} = e^{\frac{nF}{RT} (E_i - \nu t - E^0)}$

c. 1^e loi de Fick: $j' = -D \text{grad} \quad (\text{c} \hat{=} j' = \text{densité de courant de matière}).$

$\text{grad} = \frac{\partial C_0(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0}$

$j = -nF j'$

$\Rightarrow \left[j = +nF D_0 \frac{\partial C_0(x,t)}{\partial x} \right]_{x=0}$

d. 2^e loi de Fick: $\frac{\partial C_0(x,t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 C_0(x,t)}{\partial x^2}$

$\frac{\partial C_r(x,t)}{\partial t} = D_r \frac{\partial^2 C_r(x,t)}{\partial x^2}$

e. $0 = D_0 \frac{\partial C_0(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + D_r \frac{\partial C_r(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0}$

f. $\left. \begin{array}{l} C_0(x,0) = C_0^* \\ C_r(x,0) = C_r^* \end{array} \right\} \text{ concentrations dans la } \lim_{x \rightarrow \infty} C_0(x,t) = C_0^*$
 manq de la solution $\lim_{x \rightarrow \infty} C_r(x,t) = 0$

g.



$$|j_{pic}| = 0,446 n F C_0^* \sqrt{\frac{nF}{RT}} \sqrt{v} \sqrt{D_0}$$

$\Rightarrow j_{pic}$ dépend de n
 C_0^*
 v (\sqrt{v})
 D_0

h. E_p et $E_{V_{2P}}$ indep de v .

oui (cf) \downarrow

i. $E_p - E_{1/2} = \frac{56,5}{n} \text{ mV à } 27^\circ\text{C}.$

II. 2. a. E_R : système redox rapide. Nernstien
 C_i : système chimique lent.

b. système nernstien $\Rightarrow E = E^0 + \frac{RT}{nF} \ln \frac{Ox}{Red} \Rightarrow$

$$\frac{C_0(y,t)}{C_r(y,t)} = e^{\frac{nF}{RT} (E - E^0)}$$

c. z'loi de Fick. + réaction chimique consommant R \Rightarrow

$$\frac{\partial C_0(x,t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 C_0(x,t)}{\partial x^2}$$

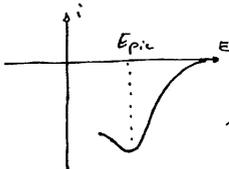
$$\frac{\partial C_r(x,t)}{\partial t} = D_r \frac{\partial^2 C_r(x,t)}{\partial x^2} - k C_r(x,t)$$

d. $D_0 \frac{\partial C_0(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + D_r \frac{\partial C_r(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$

$$C_0(x,0) = C_0^* \quad \lim_{x \rightarrow \infty} C_0(x,t) = C_0^*$$

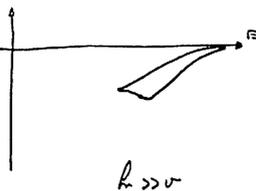
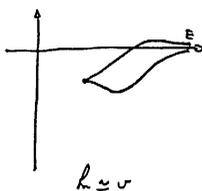
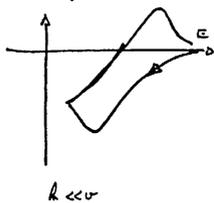
$$C_r(x,0) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} C_r(x,t) = 0$$

e.



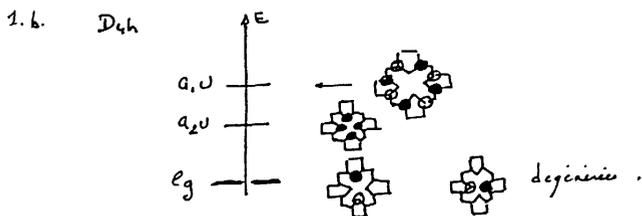
allure identique au cas précédent si la balayage est linéaire.
 le potentiel E_{pic} augmente quand k augmente.

f. balayage cyclique



- II.3.a. pic a: puisque $\Delta v \sqrt{v}$ et écart $\text{pic} / \frac{1}{2} \text{pic} = 56,5 \text{ mV} \Rightarrow 0,1 \text{ e}^-$
 $\Rightarrow \text{Cr}(\text{CO})_5 + \text{e}^- \rightarrow \text{Cr}(\text{CO})_5^- \rightarrow$ décomposition rapide.
- b. b et c correspondent à une oxydation (b) d'un produit de décomposition de $\text{Cr}(\text{CO})_5^-$
 et à une oxydation (c) du produit obtenu par (b)
 d correspond à une réduction du produit obtenu par (c) qui n'a pas réagi rapidement.
- c. non puisque pic c n'existant pas dans expérience 1
 par contre (c) correspond à une oxydation de $\text{Cr}(\text{CO})_5^{2-}$ produisant un produit oxydé en (c) et identique au produit oxydé en (c) dans l'expérience 1.
- d. $\text{pic c: } \text{Cr}(\text{CO})_5 \text{NCCH}_3 \rightarrow \text{Cr}(\text{CO})_5 \text{NCCH}_3^+ + \text{e}^-$
 $\text{d: } \text{Cr}(\text{CO})_5 \text{NCCH}_3^+ + \text{e}^- \rightarrow \text{Cr}(\text{CO})_5 \text{NCCH}_3$
- e. $1 \longleftrightarrow a$
 $2: \text{rapide}$
 $3: \text{lents}$ $5: \longleftrightarrow c$
 $4: \longleftrightarrow b$
 $6: \text{rapide (par de - b)}$
 $7: < = f$
 $8: \text{rapide}$
 $9: \longleftrightarrow c$
 $10: \longleftrightarrow d$

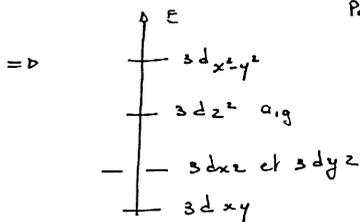
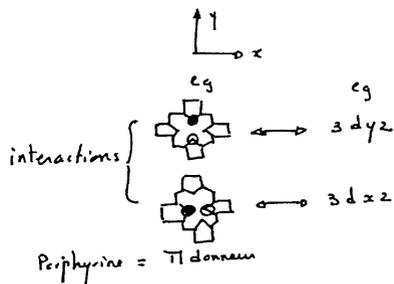
III.1. a. 24 on π
 26 electrons \Rightarrow 13 O π occupées



2. a. Co^{2+}

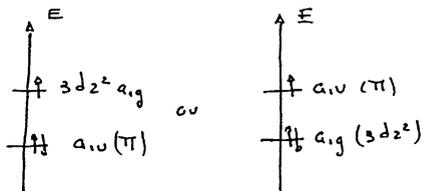
$3d_{z^2}$	A_{1g}
$3d_{x^2-y^2}$	B_{1g}
$3d_{xy}$	B_{2g}
$3d_{xz}$ $3d_{yz}$	E_g

2. b. Complexe plan carré +

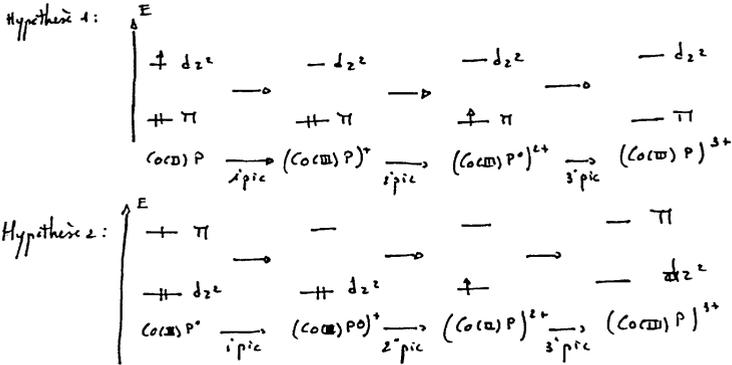


2. c. Pas d'interaction entre a_{1u} et a_{2u} de la porphyrine
 et A_{1g} B_{1g} B_{2g} du métal.

3. a. $Co^{2+} 3d^7 \Rightarrow$
 \Downarrow
 dernière OA métallique occupée = $(3d_{z^2})^1$



III.3.b. Oxydation : 3 pics \Leftrightarrow 3 départs successifs d'électrons
 chq pic a v la m hauteur \Rightarrow à chaque fin réduction

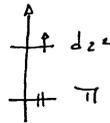


Dans l'hypothèse 1, le 1^{er} pic dépend du métal essentiellement (nature et niveau de l'ion)
 les 2 suivants dépendent de la porphyrine essentiellement.

Dans l'hypothèse 2, le 1^{er} pic dépend de la porphyrine essentiellement
 les 2 suivants du métal essentiellement (nature et niveau de l'ion)

Si on compare les voltammogrammes de Co(III)P et Fe(III)P, on voit que :
 - le 1^{er} pic est très différent ($\Delta E_p \approx 0,4V$)
 - les 2 suivants sont v semblables

3.c. \Rightarrow On retient l'hypothèse 1 :

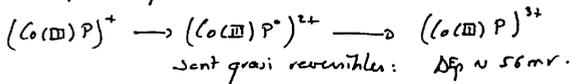


3.d. $Zn^{2+} 3d^{10}$ v inactif (pas d'oxydation possible)

\Rightarrow seule la porphyrine peut être oxydée

\Rightarrow 2 pics. (au lieu de 3)

3.e. $Co(II)P \rightarrow (Co(III)P)^+$ n'est pas réversible ($\Delta E_p \gg 56mV$)
 (en fait il y a une modification de conformation)



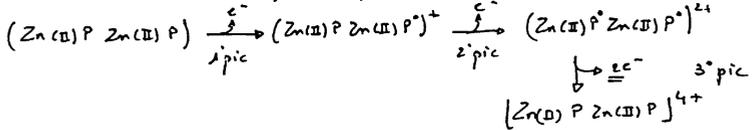
IV.1.

voltamogramme :

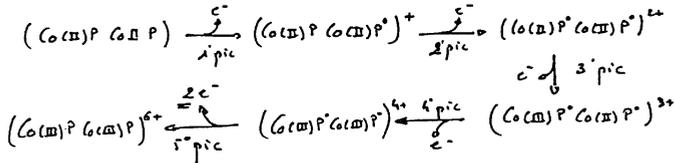
1 groupe de 2 pics intégrant chacun pour 1e

1 pic intégrant pour 2e⁻

Comme Zn²⁺ est inactif on peut conclure :



IV.2.

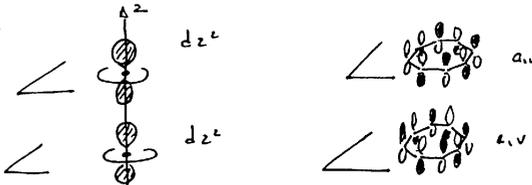


IV.3.

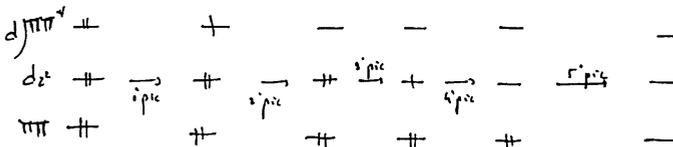
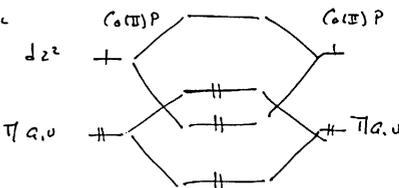
Pour Co(III)P, 1^{er} pic : oxydation du métal

(Co(II)P Co(III)P) 1^{er} et 2^e pics : oxydation de la porphyrine.

IV.4. a

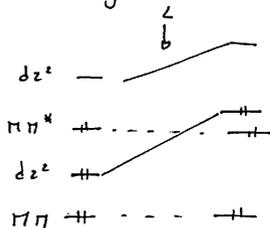


b-c



RPE : Co(III)P Co(III)P : Aucun e⁻ catodique
 (Co(III)P Co(III)P)²⁺ : 1 e⁻ "
 (Co(III)P⁺ Co(III)P⁺)⁴⁺ : Aucun e⁻ catodique.

Le ligand axial interagit avec d_{z^2} .



l'oxydation : $Co(II) \rightarrow Co(III)$.

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION CHIMIE

Composition de physique ♦ Session : 2003

PARTIE A- Éléments de microscopie

A1- Cadre

$$\text{A1-a- } \nu = 10^{14} \text{ Hz}$$

$$E \approx 1. \text{eV}$$

$$\lambda_{\text{bleu}} : 450 \text{ à } 500 \text{ nm}$$

A-1-b- Une fibre optique est un guide d'ondes composé notamment de silice (SiO_2).

A-1-c- AOG ; consiste à négliger la diffraction donc à supposer que la lumière se propage en ligne droite en milieu homogène. Elle est valable quand λ est très inférieur aux dimensions des objets et diaphragme.

$$n = \frac{c}{v} \text{ où } v \text{ est la vitesse de phase}$$

$$n_{\text{eau}} \approx 1,33$$

$$n_{\text{air}} - 1 = 2,93.10^{-4}$$

$L = \int n ds = ct =$ distance parcourue par la lumière dans le vide pendant le même temps.

A-1-d- Stigmatisme rigoureux : tout faisceau divergent d'un point lumineux A , converge en un même point A' .

Condition : $L = ct$

Stigmatisme approché : le faisceau divergent de A converge en une zone proche d'un point A' qui est la tâche image. $L \approx ct$ au 4^{ème} ordre près.

Condition de Gauss : rayons paraxiaux.

Objet réel : objet placé avant la face d'entrée du système optique.

Objet virtuel : objet placé après la face d'entrée du système optique.

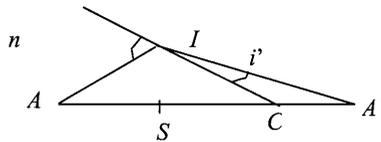
Image réelle : image placée après la face de sortie du système optique.

Image virtuelle : image placée avant la face de sortie du système optique.

A2- Dioptre sphérique

A-2-a- S et C sont leurs propres conjugués (points doubles). Stigmatisme rigoureux.

A-2-b- Les angles d'incidence (où d'émergence) sont définis par rapport à la normale donc par rapport à $C/$.



$$(CI, IA) = i$$

$$(IC, IA') = i'$$

La relation de Descartes donne : $n \sin i = n' \sin i' \quad i > i' \Rightarrow n < n'$

Dans les triangles AIC ET ICA' :

$$\frac{AI}{\sin \alpha} = \frac{CA}{\sin i} \quad \frac{CA'}{\sin i'} = \frac{IA'}{\sin \alpha}$$

D'où :

$$\sin \alpha = \frac{AI}{CA} \sin i = \frac{IA'}{CA} \sin i'$$

Avec :

$$\frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{n}{n'}. \text{ On obtient la relation demandée.}$$

A-2-c- W' dans le milieu objet est virtuel.

S est un point I particulier. L'invariant du dioptre donne :

$$n \frac{CW}{SW} = n' \frac{CW'}{SW'} \Rightarrow \frac{CW'}{CW} = \left(\frac{n}{n'} \right)^2$$

D'autre part W' étant virtuel, le chemin optique $L(WW')$ s'écrit :

$$L = nIW - n'IW' = n \frac{nCW}{n'CW'} IW' - n'IW'$$

$$L = nIW' \left[\frac{nCW}{n'CW'} - \frac{n'}{n} \right] = nIW' \left[\frac{n}{n'} \left(\frac{n'}{n} \right)^2 - \frac{n'}{n} \right] = 0$$

Donc $L = cte$ et (WW') forment un couple de points de stigmatisme rigoureux.

A3- Lentilles

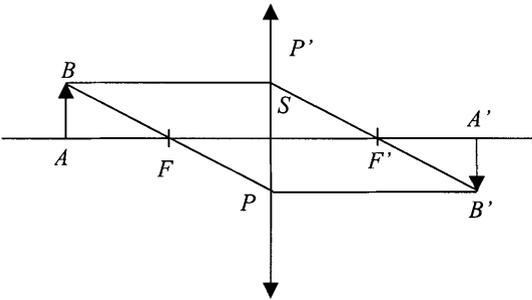
A-3-a- Une lentille est l'ensemble de 2 dioptries (plan ou sphériques) séparés par un milieu transparent homogène d'indice N .

La lentille est mince si l'épaisseur sur l'axe est très inférieure aux rayons de courbure et à leur différence (en valeur absolue).

Conventions : $\updownarrow = C.V$ $\updownarrow = D.V$

Tout rayon passant par le centre optique S ressort parallèle à lui-même. Si la lentille est mince, le centre optique est confondu avec les sommets des dioptries et le rayon incident sort sans déviation ni translation.

Construction : le rayon BP' parallèle à l'axe sort en P'F'
le rayon BF sort parallèle à l'axe : PB'



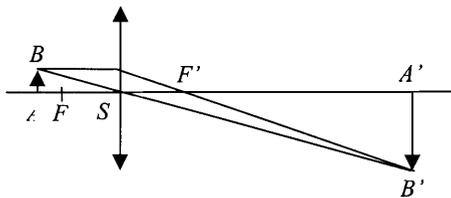
Triangles FAB, FSP semblables : $\frac{\overline{FA}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{SP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$ (1)

Triangles F'A'B', F'SP' semblables : $\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SP'}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \frac{\overline{FA}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{F'S}}{\overline{F'A'}}$ soit : $\overline{FA.F'A'} = \overline{ff'}$ et $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}}$

Formules de Descartes sans démonstration : $\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}$ et $\gamma = \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$

A-3-b-



L'image est réelle (à droite de S, renversée ($\gamma < 0$) et agrandie ($|\gamma| > 1$)).

$$\overline{F'A'} = -\frac{f'^2}{FA} = 90 \text{ mm}$$

$$\gamma = -30$$

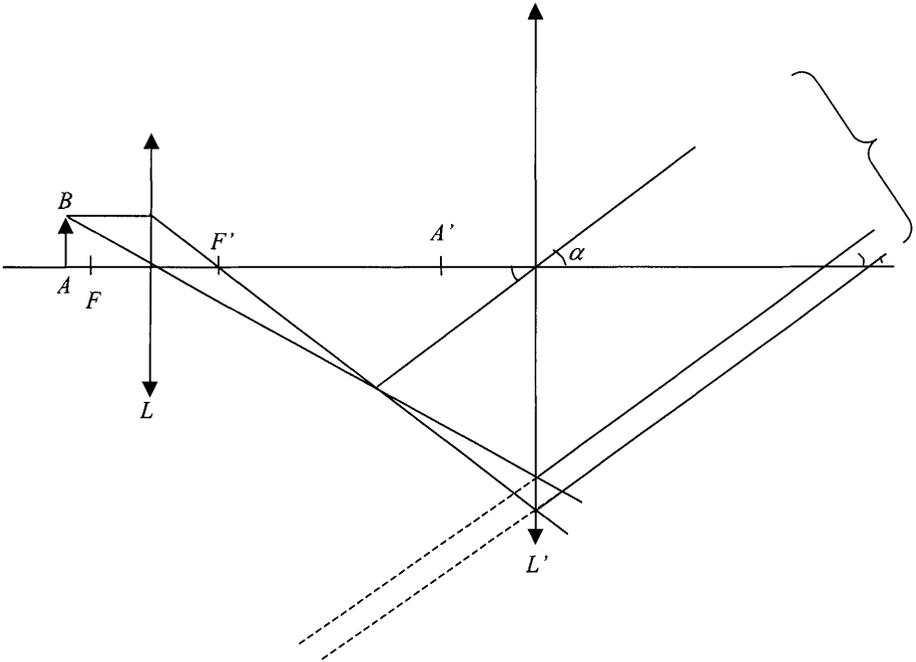
$$\overline{SA'} = \overline{SF'} + \overline{F'A'} = 93 \text{ mm}$$

Ce qui correspond bien à ce qu'on attend d'un objectif.

A-3-c- L'image est réelle si $\overline{SA'} > 0 \rightarrow \overline{AS} > f'$. Donc A doit être à gauche de F.

A-3-d- $A''B''$ est rejetée à l'infini, si $A'B'$ image intermédiaire est dans le plan focal objet de L' . La construction montre que l'image définitive est vue sous l'angle α tel

$$\text{que } \tan \alpha \approx \alpha = \frac{A'B'}{f'^2}.$$



A-3-e- L'objectif donne l'objet AB placé au voisinage de F une image réelle très agrandie que l'œil observe ensuite à travers l'oculaire. L'image est à l'infini donc l'œil n'accommode pas et observe sans fatigue. $\tan \alpha$ est proportionnel à $A'B'$ donc l'image est bien grossie.

A priori l'œil peut être placé n'importe où derrière l'oculaire mais plus il est proche de l'oculaire, plus il reçoit de rayons.

A4- Objectif de microscope à points stigmatiques

A-4-a- On a vu en **A-2-c-** que $\frac{CW_2}{CW_1} = \left(\frac{n}{n'}\right)^2$ et par définition $\frac{SW_2}{SW_1} = \frac{n}{n'}$

On est bien dans le cas de la figure 2 ou $n' < n$

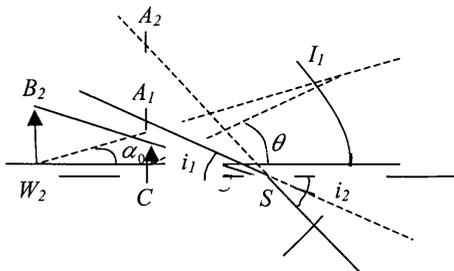
$$\frac{SW_2}{SW_1} = \frac{R + CW_2}{R + CW_1} = \frac{n}{n'}$$

D'où : $CW_1 = \frac{n'}{n}R = 2\text{cm}$ $CW_2 = \frac{n'}{n}R = 4,5\text{cm}$

Construction : il suffit d'utiliser le rayon passant par CB_1 sans déviation.

$$\text{Grandissement } \gamma = \frac{W_2 B_2}{W_1 B_1} = \frac{CW_2}{CW_1} = \left(\frac{n}{n'}\right)^2 = 2,25$$

Grandissement au centre C : un rayon $A_1 S$ d'incidence i_1 est réfracté suivant $A_2 S$ d'émergence i_2 et suivant les lois de Descartes.



$$n \sin i_1 = n' \sin i_2 \quad \frac{\sin i_2}{\sin i_1} = \frac{n}{n'} > 1 \quad \gamma_c = \frac{CA_2}{CA_1} = \frac{\tan i_2}{\tan i_1} \approx \frac{n}{n'} \quad \gamma_c = 1,5$$

dans les conditions de Gauss.

A-4-b- Soit $W_1 I$ le rayon issu de W_1 (cf. 1^{ère} figure du paragraphe A.4-a).

Dans le triangle $W_1 W_2 I$ on a : $\frac{\sin \alpha_0}{IW_1} = \frac{\sin \theta}{IW_2}$

Donc : $\frac{\sin \alpha_0}{\sin \theta} = \frac{IW_1}{IW_2} = \frac{n'}{n}$

car $L = 0 \Rightarrow n \sin \alpha_0 = n' \sin \theta$ (ou encore $\sin \alpha_0 = \frac{2}{3} \sin \theta$).

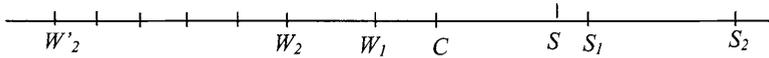
A-4-c- Notons D_1 et D_2 les dioptries d'entrée et de sortie de L . W_2 est le centre de D_1 donc point double.

$$W_2 \xrightarrow{D_1} W_2 \xrightarrow{D_2} W'_2$$

Le rayon de D_2 est le double de celui de D donc tout est doublé et le point de Weierstrass objet de D_2 est tel que :

$$S_2W_2' = 2 \times SW_1 = 10\text{cm} \Leftrightarrow W \equiv W_2$$

Donc W_2 est bien un point de Weierstrass de D_2 et $S_2W_2' = 2(SW_2) = 15\text{cm}$ d'où $W_2'W_2 = 5\text{cm}$



A-4-d- Le rayon traverse D sans déviation donc il s'agit d'un rayon qui arrive sur D_2 en faisant avec l'axe l'angle α_0 . On a alors comme en A-4-b- :

$$\sin \alpha = \frac{n'}{n} \sin \alpha_0 = \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \sin \theta = \frac{4}{9} \sin \theta$$

A-4-e- A travers D_1 , $\gamma_1 = \frac{n'}{n}$; A travers D_2 , $\gamma_2 = \left(\frac{n}{n'}\right)^2$

Donc pour l'ensemble D , D_1 , D_2 , on a :

$$\gamma = \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \left(\frac{n'}{n}\right) \left(\frac{n}{n'}\right)^2 = \left(\frac{n}{n'}\right)^3 \text{ (environ 3,38)}$$

A-4-f- Pour chaque lentille on a $\sin(\alpha_\gamma) = \frac{n'}{n} \sin(\alpha_{\gamma-1})$.

Soit pour k lentilles : $\sin \alpha_k = \left(\frac{n'}{n}\right)^{k+1} \sin \theta = \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \sin \theta$

Les rayons se rapprochent de l'axe optique. On peut admettre que l'angle maximum des rayons incidents pénétrant dans le dioptré D est θ_0 tel que :

$$\tan \theta_0 = \frac{R}{CW_1} = \frac{3}{2} \quad (\theta_0 \approx 56^\circ) \rightarrow \sin \theta_0 = 0,832 \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} = 0,35 \rightarrow k+1 = 2,59$$

→ On prendra $k=2 \Rightarrow 2$ lentilles au total.

A-4-g- Le grandissement de la seconde lentille est encore $\gamma_1\gamma_2 = \left(\frac{n}{n'}\right)$ soit :

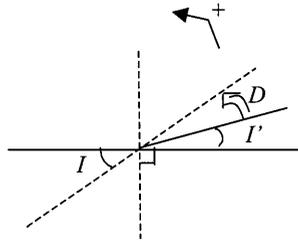
$$\gamma_{\text{total}} = \left(\frac{n}{n'}\right)^4 = 1,5^4$$

Le grandissement n'est pas très important mais le système permet de faire rentrer des rayons hors de l'optique de Gauss, donc d'avoir une grande ouverture numérique.

⇒ Grand pouvoir de résolution et luminosité importante.

A5- Réseau

A-5-a- Les maximums principaux sont obtenus quand les rayons diffractés par 2 traits consécutifs sont en phase, soit : $\delta = k\lambda$ (k entier)



Si le réseau est par réflexion : $\delta = Np(\sin i + \sin i')$. L'entier k définit l'ordre du maximum.

A-5-b- $D = i - i'$ Déviation minimale : $dD = 0$ Soit $di = di'$

Or $k\lambda = Np(\sin i' - \sin i)$

$0 = Np(\cos i' di' - \cos di)$ soit $\cos i' = \cos i \rightarrow i = \pm i'$

$i = -i'$ ne donne que l'ordre 0 sans intérêt. On a donc $i_m = -i'_m$

$D_m = 2i_m$ et $k\lambda = -Np2\sin i_m$

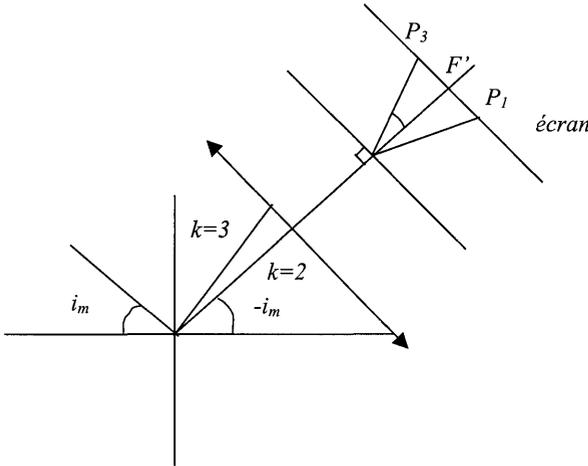
A-5-c- Ordre 2 : $|k| = 2 \rightarrow$ au minimum de déviation $2\lambda = \pm 2Np \sin i_m \Leftrightarrow \sin i_m = \pm \frac{\lambda}{Np}$

Ou encore $\sin \frac{D_m}{2} = \pm \frac{\lambda}{Np}$

Mesure : on cherche le minimum de déviation pour $k = 2$ on et pour $|k| = -2$. La différence des 2 positions vaut $2D_m$.

Intérêt : au minimum de déviation on a $k d\lambda = -2Np \cos i_m$ avec : $\cos i_m \approx ct \rightarrow$ la dispersion est linéaire.

A-5-d-



Pour $k = 2$ on a :

$$\sin i'_m = -\sin i_m = \frac{\lambda}{Np}$$

Soit pour $k = 3$: $3\lambda = Np(\sin i'_3 - \sin i)$ et $\sin i'_3 = \frac{3\lambda}{Np} + \sin i_m = \frac{3\lambda}{Np} - \frac{\lambda}{Np} = \frac{2\lambda}{Np}$

De même pour l'ordre 1 : $1 \cdot \lambda = Np(\sin i'_1 - \sin i_m)$

$$\sin i'_1 = \frac{\lambda}{Np} + \sin i_m = \frac{\lambda}{Np} - \frac{\lambda}{Np} = 0 \Rightarrow i'_1 = 0$$

Les images sur l'écran sont déterminées par les rayons parallèles passant par le centre optique.

Pour $k=3$ $\alpha_3 = i'_3 - (-i_m)$ et $F'P_3 = f' \tan \alpha_3$

Pour $k=1$ $\alpha_1 = i'_1 - (-i_m)$ et $F'P_1 = f' \tan \alpha_1$

A-5-e- $p = \frac{1}{5.10^5} = 2.10^{-6} m$ $\frac{\lambda}{Np} = 0,273$ $i_m = -15,8^\circ$

$i_3 = 33,09^\circ \rightarrow \alpha_3 = 17,25^\circ$ $F'P_3 = 15,5cm$

$i'_1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = -15,84^\circ$ $F''P_1 = -14,2cm$

A6- Ouverture numérique du microscope

A-6-a- Incidence normale $N \sin i' = \pm \lambda$ dans l'ordre 1.

A-6-b- La limite de résolution est la période p pour $i' = U \Rightarrow p = \frac{\lambda}{N \sin U}$. Pour avoir une bonne résolution il faut une grande ouverture numérique.

PARTIE B - Polarisation de la lumière

B.1 - Modèle de l'onde plane monochromatique

B.1 - a

- Polarisation rectiligne : \vec{E} (et / ou \vec{B}) garde une direction constante ou encore $\Delta\Phi$ entre la composante sur deux axes perpendiculaires de \vec{E} (ou \vec{B}) est constant et égale à 0 (π).
- La lumière solaire directe n'est que partiellement polarisée (par exemple par diffusion dans l'atmosphère).
- Un Polaroid est un matériau macromoléculaire étiré en feuilles dans lequel une direction de chaînes de molécules est privilégiée. L'arrivée d'une onde met en mouvement les électrons dans cette direction, donc absorbe de l'énergie. La composante perpendiculaire à cette direction est environ bien transmise.

B.1 - b

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega n}{c} \rightarrow \vec{E} = E_0 \vec{u}_x \exp j\omega \left(t - \frac{nz}{c} \right)$$

$$\vec{B} = \frac{k \vec{u}_z \wedge \vec{E}}{\omega} = n \frac{E_0}{c} \vec{u}_y \exp j\omega \left(t - \frac{nz}{c} \right)$$

B.1 - c Si α est l'angle entre la direction \vec{u}_x du champ électrique et la direction de polarisation, alors l'intensité transmise est $I = I_0 \cos^2 \alpha$.

Si on fait tourner le polariseur, la tache lumineuse sur l'écran passe par des maximums ($\alpha = 0$ ou π) et des minimums nuls ($\alpha = \pi/2$ et $3\pi/2$).

B.2 - Lames à retard

B.2 - a \vec{E} parallèle à \vec{u}_x donc l'indice est n_0 . Dans la lame

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_x \exp j\omega \left(t - \frac{n_0 z}{c} \right) \text{ et en } z = e$$

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_x \exp j\omega \left(t - \frac{n_0 e}{c} \right). \text{ Donc pour } z > e \text{ par continuité du champs}$$

électrique :

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_x \exp j\omega \left(t - \frac{n_0 e}{c} \right) \cdot \exp j\omega \left(t - \frac{z-e}{c} \right)$$

$$\text{soit } \vec{E} = E_0 \exp j \frac{\omega e}{c} (1 - n_0) \cdot \exp j\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \vec{u}_x$$

On peut poser $\Phi_x = \frac{\omega e}{c}(1 - n_0)$

B.2 - b De même si \vec{E} parallèle à \vec{u}_y donc l'indice est n_e .

$$\vec{E} = E_0 \exp j \frac{\omega e}{c}(1 - n_e) \cdot \exp j \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \vec{u}_y$$

On pose : $\Phi_y = \frac{\omega e}{c}(1 - n_e)$

B.2 - c Avant la lame le champ électrique s'écrit : $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x \cos \alpha + E_0 \vec{u}_y \sin \alpha$,

d'où pour $z > e$ $\vec{E} = E_0 \cos \alpha \exp j \frac{\omega e}{c}(1 - n_0) \cdot \exp j \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \vec{u}_x$

d'où $\Phi = \Phi_x - \Phi_y = \frac{\omega e}{c}(n_e - n_0)$

B.3 - d $\Phi = \pi(2p + 1) = \frac{\omega e}{c}(n_e - n_0) = \frac{2\pi e}{\lambda_0}(n_e - n_0)$ $e(n_e - n_0) = (2p + 1) \frac{\lambda_0}{2}$

La différence de trajet optique dans la lame vaut $\frac{\lambda_0}{2}$ (à λ_0 près). C'est bien une lame 1/2 onde. De même si $\Phi = \frac{\pi}{2}$ $e(n_e - n_0) = \frac{\lambda_0}{4}$ lame 1/4 d'onde.

B.2 - e $\Phi = \pi$ d'où $\frac{E_x}{E_y} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \exp j\pi = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = Cte$

L'onde reste polarisée rectilignement dans la direction symétrique / Oy.

Lame 1/4 d'onde $\Phi = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$ $\frac{E_x}{E_y} = \exp j \frac{\pi}{2}$. C'est une polarisation circulaire.

B.3 - Polarimètre de Laurent

B.3 - a D'après la loi de Malus $I_1 = I_0 \cos^2 \left(-\alpha + \frac{\pi}{2} + \beta \right)$ soit $I_1 = I_0 \sin^2(\alpha - \beta)$

B.3 - b La lame demi onde est symétrique par rapport à l'axe Oy alors α devient $-\alpha$ soit $I_2 = I_0 \sin^2(\alpha + \beta)$

B.3 - c $I_1 = I_2 \Rightarrow \sin^2(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha + \beta)$

Soit $\alpha - \beta = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = 0$ exclus

$\alpha - \beta = \pi - \alpha - \beta \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ possible

$$\alpha - \beta = -(\alpha + \beta) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad \text{possible}$$

$$\alpha - \beta = \pi + \alpha + \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{exclus}$$

B.3 - d Les 2 solutions possibles sont $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour } \alpha = \frac{\pi}{2} \quad I_1 = I_2 = I_0 \cos^2 \beta \approx I_0 \\ \text{Pour } \alpha = 0 \quad I_1 = I_2 = I_0 \sin^2 \beta \approx I_0 \end{array} \right\} \text{ car } \beta \text{ est faible}$$

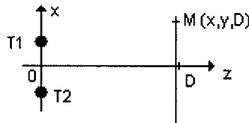
L'œil est plus sensible à une faible lumière qu'à une lumière intense. On choisit donc $\alpha = 0$, ce qui justifie l'appellation d'analyse à pénombre de ce dispositif.

PARTIE C - Interférences

C.1 - En lumière non polarisée

C.1 - a Il y a interférence entre 2 (ou plusieurs) ondes si l'intensité lumineuse résultant de leur superposition n'est pas la somme des intensités de chaque onde. Un tel phénomène se manifeste par une succession de maximum et de minimum d'intensité.

C.1 - b Trous d'Young. Diffracteur \rightarrow lumière en M $x, y, d \ll D$.
Franges rectilignes à peu près parallèles à 0y



$$\text{C.1 - c} \quad \delta = T_2 M - T_1 M \approx \frac{d x}{D} \quad \underline{s}_1 = \underline{s}_0 \quad \underline{s}_2 = \underline{s}_0 \quad e^{j \frac{d^2 \pi \delta}{\lambda_0}}$$

$$\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = \underline{s}_0 \left(1 + \exp.j \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right)$$

$$I = \underline{s} \cdot \underline{s}^* = s_0^2 \left(2 + 2 \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \quad I_0 = 4s_0^2$$

$$I = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{dx}{D} \right)$$

$$\text{Interfrange : période spatiale } i = \frac{\lambda_0 D}{d}$$

$$\text{AN} \quad i = \frac{546 \cdot 10^{-9} \cdot 2}{2 \cdot 10^{-3}} = 546 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 0,55 \text{ mm}$$

Les franges sont invisibles à l'œil nu. Il faut une loupe ou un oculaire.

C.1 - d Les trous laissent passer très peu de lumière.

C.1 - e Les fentes vont diffracter plus de lumière. Le calcul précédent montre que la coordonnée y n'intervient pas au premier ordre. Tout couple $T_1 T_2$ donne le même phénomène sur l'écran. Les différentes sources secondaires sont incohérentes mais les différents phénomènes d'interférences se superposent sur l'écran.

C.1 - f En déplaçant l'écran, on fait varier D mais on pourra toujours observer des franges. Elles ne sont pas localisées (source ponctuelle).

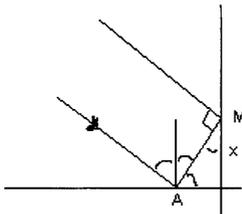
C.2 - Miroir de Llyod

C.2 - a Un rayon direct et un rayon réfléchi, sont cohérents et interfèrent sur l'écran.

$$\delta = AM + \frac{\lambda_0}{2} = x\sqrt{2} + \frac{\lambda_0}{2}$$

$$\text{donc } I = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(x\sqrt{2} + \frac{\lambda_0}{2} \right) \right)$$

$$\text{Soit } I = \frac{I_0}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x\sqrt{2}}{\lambda_0} \right)$$



$$\text{Interfrange} \quad i = \text{période spatiale} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}$$

$$\text{C.2 - b} \quad i = \frac{546 \cdot 10^{-9}}{1,414} = 0,386 \text{ pm}$$

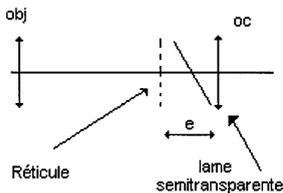
Les franges sont invisibles à l'œil nu. Il faut un oculaire.

C.2 - c Le plan d'incidence est le plan de figure. Le champ électrique est donc perpendiculaire au plan de figure avant réflexion et le reste après réflexion. Les champs incident et réfléchi sont parallèles et peuvent donc interférer. Il existe des interférences visibles avec un oculaire.

C.2 - d \vec{E} est dans le plan d'incidence et est perpendiculaire au rayon incident. Après réflexion, il aura tourné de $\frac{\pi}{2}$. Les champs incidents et réfléchis sont perpendiculaires entre eux et donc ne peuvent interférer.

C.3 - Expérience type Fresnel - Arago

C.3 - a La lunette autocollimatrice permet un réglage direct par une source latérale éclairée qui éclaire la réticule.



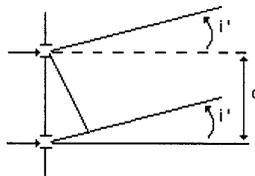
Réglage : On règle l'oculaire pour voir net le réticule. A l'aide d'un miroir placé devant l'objectif, on cherche le faisceau réfléchi par la lunette, du à la source latérale. On règle l'objectif pour voir apparaître un réticule net.

C.3 - b Collimateur = fente source + objectif

La fente source doit être placée au foyer de l'objectif.

On règle le tirage de l'objectif en observant à travers la lunette déjà réglée. Le but est de voir net la fente source.

C.3 - c On a un dispositif de fente d'Young éclairées en faisceau parallèle sous incidence normal. La lunette recueille aussi les faisceaux parallèle. Donc, il s'agit d'interférences à l'infini.



$$\delta = d \sin i' \quad G = 20 = \frac{i}{i'} \Rightarrow \delta = d \sin \left(\frac{i}{G} \right)$$

Le terme d'interférence s'écrit donc $I = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta \right)$

(En fait, si on tient compte du terme dû à la diffraction de chaque fente, il faut multiplier par $\text{sinc}^2(u)$ avec $u = \frac{\pi a}{\lambda} . i'$ et avec $d = 30a$. Ce terme reste voisin de 1 pour les premières franges d'interférences.)



Les franges brillantes d'interférences sont données par $\delta = k\lambda = d \sin\left(\frac{i}{G}\right)$.

$$\text{Soit } \sin\left(\frac{i}{G}\right) = k \cdot \frac{\lambda}{d}.$$

Pour les petits angles $i \approx k \cdot G \cdot \frac{\lambda}{d}$. Alors l'interfrange angulaire est :

$$G \cdot \frac{\lambda}{d} = \frac{20 \times 546 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-3}} = 3,64 \cdot 10^{-3} \text{ rd.}$$

Soit environ 12 minutes d'arc.

C.3 - d L'onde incidente sur les fentes d'Young est polarisée rectilignement, les vibrations sont parallèles donc elles peuvent toujours interférer.

C.3 - e La lame Y_2 onde donne d'une polarisation rectiligne, une polarisation rectiligne symétrique par rapport à l'axe de la demi onde. Donc, la vibration est de direction inchangée sur l'une des fentes d'Young et a tourné de 90° pour l'autre. Ainsi, les vibrations sont perpendiculaires et elles ne peuvent plus interférer.

C.3 - f Si l'analyseur fait un angle de 45° avec chacune des vibrations perpendiculaires alors on retrouve des franges avec un bon contraste. Si l'angle est nul ou de 90° alors on ne voit rien. Entre ces positions, le contraste varie et on voit plus ou moins bien les franges.

C.3 - g Par exemple la Pétrographie.

PARTIE D

D.1 - Contraste de phase

D.1 - a Les deux ondes, directe et diffractée sont issues d'une même source donc cohérentes et peuvent interférer.

D.1 - b Soit \underline{E}_s l'onde directe (en complexes) :

$$\underline{E}_1 = H \cdot e^{j \cdot \varphi_0} \text{ et } \underline{E} \text{ l'onde d'interférence} = H \cdot e^{j \cdot (\varphi_0 + \varphi)}$$

$$\underline{E}_2 \text{ onde diffractée : } \underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 \Rightarrow \underline{E}_2 = \underline{E} - \underline{E}_1 = H \cdot e^{j \cdot \varphi_0} [e^{j \varphi} - 1]$$

$$\text{avec } \varphi \ll 1 \Rightarrow \underline{E}_2 = H \cdot e^{j \cdot \varphi_0} [1 + j \cdot \varphi - 1] = j \times H \varphi \cdot e^{j \varphi_0} = j \cdot \varphi \cdot \underline{E}_1$$

$$\text{Soit } \underline{E}_2 = \varphi \cdot \underline{E}_1 \cdot e^{j \cdot \pi/2} \text{ cqfd}$$

D.1 - c La lame $\frac{1}{4}$ d'onde agit sur le faisceau direct qu'elle déphase de $\pm \frac{\pi}{2}$.
La lame reçoit les signaux en phase.

$$\underline{E}_1 = H.e^{j\left(\varphi_0 \pm \frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow \underline{E} = H.e^{j\varphi_0} \left[e^{\pm j\frac{\pi}{2}} + j.\varphi \right] \Rightarrow \underline{E} = j.H.e^{j\varphi_0} [\varphi \pm 1]$$

$$\text{or } I = \underline{E}.\underline{E} = H^2 [\varphi \pm 1]^2 \approx H^2 [1 \pm 2\varphi] \Rightarrow I_{\max} = H^2(1 + 2|\varphi|) \quad I_{\min} = H^2(1 - 2|\varphi|)$$

$$\Rightarrow \Gamma = 2|\varphi|$$

φ étant faible le contraste est faible et la méthode peu sensible.

D.1 - d t agit sur l'onde directe qui devient d'amplitude tH d'où :

$$\underline{E} = j.H.e^{j\varphi_0} [\varphi \pm t] \Rightarrow I \approx H^2(t^2 \pm 2\varphi t) \Rightarrow \Gamma = 2\frac{|\varphi|}{t} \Rightarrow \Gamma > 2|\varphi|$$

La méthode est en fait plus sensible.

D.2 - Contraste de phase variable

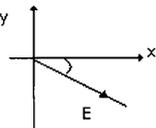
D.2 - a Après le polariseur $E_x = H \cos \theta \quad E_y = H \sin \theta$

Après la lame $\frac{1}{4}$ d'onde : $\Phi_x = \Phi_y + \frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{j\Phi_x} = j.e^{j\Phi_y}$

$$\Rightarrow E_x = H.\cos\theta. e^{j\Phi_x} \quad E_y = H.\sin\theta. e^{j\Phi_y}$$

Soit $E_x = j.H.\cos\theta. e^{j\Phi_y} \quad E_y = H.\sin\theta. e^{j\Phi_y}$

Après l'anneau de phase polarisé à $-\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'axe Ox .



$$E = E_x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - E_y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} . H . e^{j\Phi_y} . [j.\cos\theta - \sin\theta]$$

$$E = \frac{\sqrt{2}}{2} . H . e^{j\left[\Phi_y + \frac{\pi}{2} + \theta\right]}$$

Soit l'amplitude est $H.\frac{\sqrt{2}}{2}$ et la phase est $\Phi_y + \frac{\pi}{2} + \theta$.

D.2 - b Pour l'onde diffractée, on avait $\underline{E}_2 = H.(e^{j\varphi} - 1).e^{j\varphi_0}$ et φ n'est plus petit. Alors, on remplace dans les calculs précédents H par $H.(e^{j\varphi} - 1)$

Après $\frac{1}{4}$ onde : $E_x' = j.H \cos \theta (e^{j\varphi} - 1).e^{j\Phi_y}$

$$E_y' = j.H \sin \theta (e^{j\varphi} - 1).e^{j\Phi_y}$$

Puis, la pupille polarisée à $+\frac{1}{4}$ par rapport à l'axe Ox : $E' = E_x' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + E_y' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow E' &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot H \cdot (e^{j\cdot\Phi} - 1) \cdot e^{j\cdot\Phi_\gamma} \cdot [j \cdot \cos\theta + \sin\theta] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot H \cdot (e^{j\cdot\Phi} - 1) \cdot e^{j\cdot\Phi_\gamma} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{or } e^{j\cdot\Phi} - 1 &= (\cos\Phi - 1) + j \cdot \sin\Phi = -2\sin^2\frac{\Phi}{2} + j \cdot 2\sin\frac{\Phi}{2} \cos\frac{\Phi}{2} \\ &= 2\sin\frac{\Phi}{2} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Phi}{2}\right)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow E' = H \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\frac{\Phi}{2} \cdot e^{j\left[\Phi_\gamma + \pi + \frac{\Phi}{2} - \theta\right]}$$

Soit l'amplitude est $H \cdot \sqrt{2} \sin\frac{\Phi}{2}$ et la phase est $\Phi_\gamma + \pi + \frac{\Phi}{2} - \theta$

D.2 - c

$$\Delta\Phi = \Phi_{E'} - \Phi_E = \frac{\pi}{2} + \frac{\Phi}{2} - 2\theta$$

Les deux ondes sont perpendiculaires (à $\pm \frac{\pi}{4}$ de l'axe 0x).

Si l'analyseur fait un angle α avec E' par exemple l'onde qui sort de l'analyseur est d'amplitude :

$$\varepsilon = E' \cos\alpha + E \sin\alpha$$

Quelle que soit la position de l'analyseur le contraste est optimal quand les deux vibrations sont en phase (vecteur résultant maximal) ou en opposition de phase (vecteur résultant minimal).

$$\text{Soit : } \Delta\Phi = 0 \text{ ou } \pi \quad \rightarrow \theta = \frac{\Phi}{4} + \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\Phi}{4} - \frac{\pi}{4}$$

D.2 - d Pour une phase φ donnée, la rotation de l'analyseur fait varier le rapport entre les amplitudes des deux ondes, donc fait varier le contraste. La détection du contraste optimal permet la mesure du déphasage.

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION CHIMIE

Problème de chimie ♦ Session : 2003

par Cyril BARSU

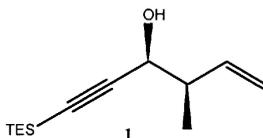
Agrégé préparateur - ENS Lyon

PREMIERE PARTIE

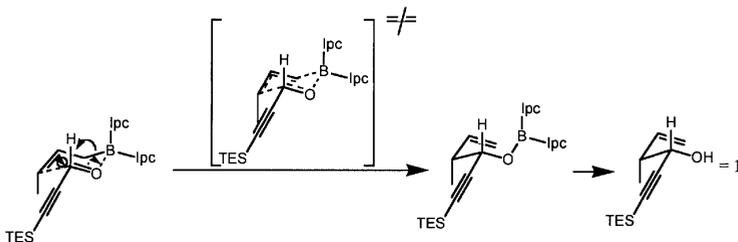
Synthèse de l'apoptolidine

1 Synthèse du fragment A

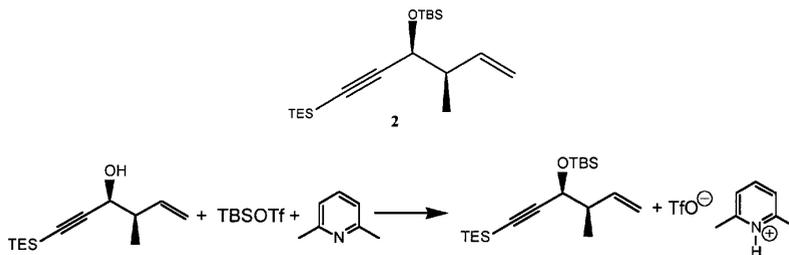
1.a Structure plane de 1



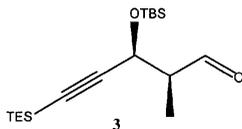
Etat de transition chaise : type Zimmerman-Traxler



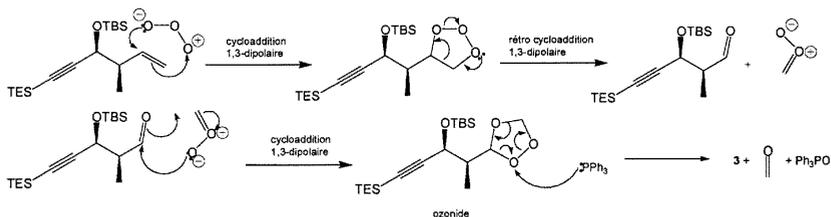
1.b Structure de 2 et équation-bilan de sa formation



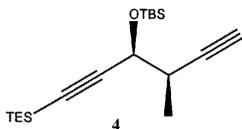
1.c Structure de **3** et mécanisme de sa formation



Mécanisme : ozonolyse



1.d Structure de **4** et mécanisme de sa formation

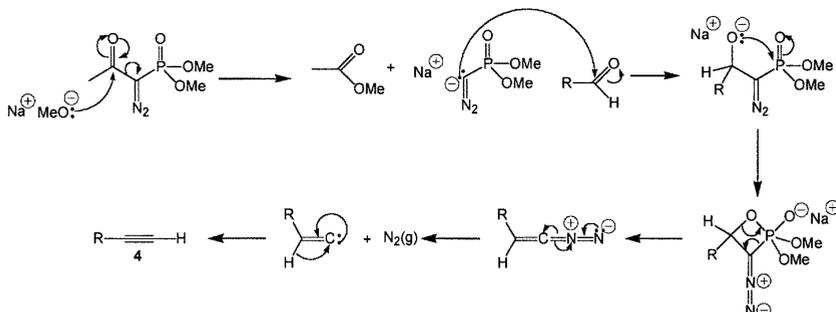


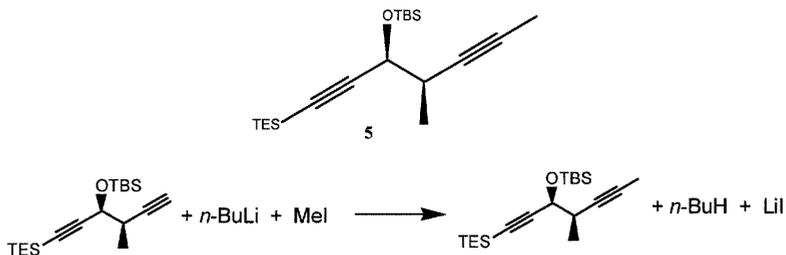
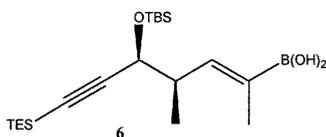
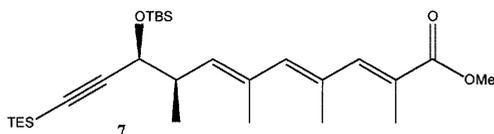
Nom : (3*S*,4*R*)-4-méthyl-1-triéthylsilyl-3-*tert*-butyldiméthylsilyloxyhex-1,5-diyne

Mécanisme de formation de **4** :

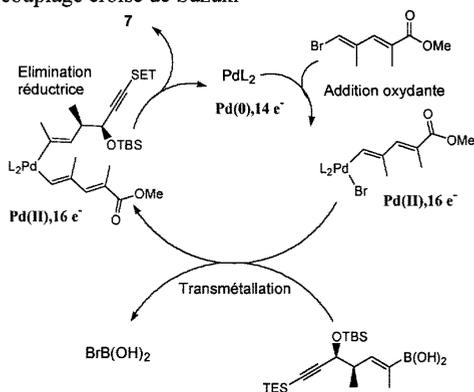
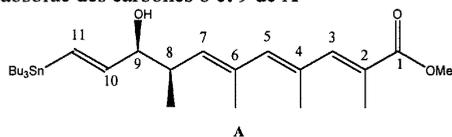
Le réactif de Bestmann (diméthylphosphonate de 1-diazo-2-oxopropyle) réagit d'abord avec le méthanolate de sodium pour pouvoir donner lieu à une réaction de Wadsworth-Emmons conduisant à un carbène vinylique qui se transpose spontanément en alcyne.

3 = RCHO

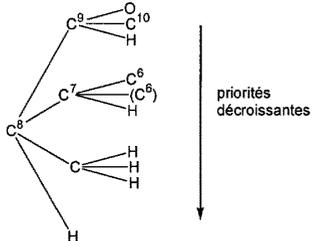


1.e Structure de **5** et équation-bilan de sa formation1.f Structure de **6**1.g Structure de **7** et mécanisme de sa formation

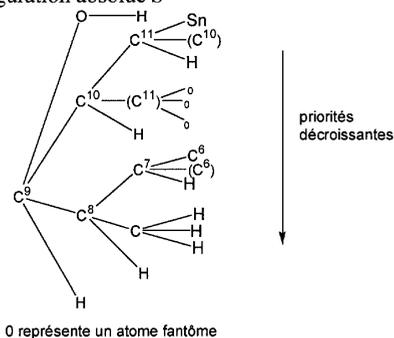
Mécanisme : couplage croisé de Suzuki

1.h Configuration absolue des carbones **8** et **9** de **A**

Carbone 8 : configuration absolue *R*

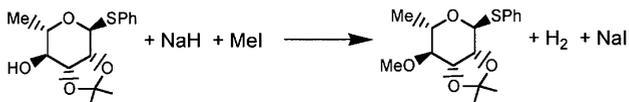
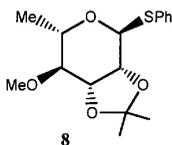


Carbone 9 : configuration absolue *S*

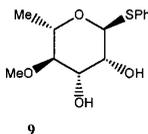


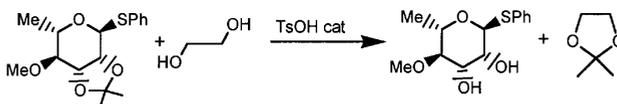
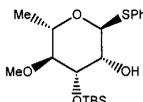
2 Synthèse du fragment D à partir du fragment F

2.a Structure de **8** et équation-bilan de sa formation



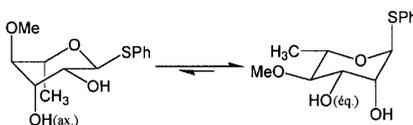
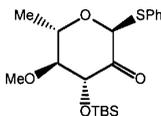
2.b Structure de **9** et équation-bilan de sa formation



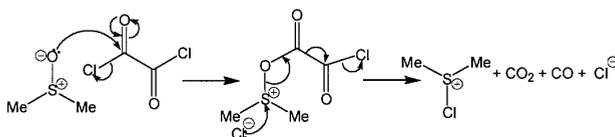
2.c Structure de **10****10**

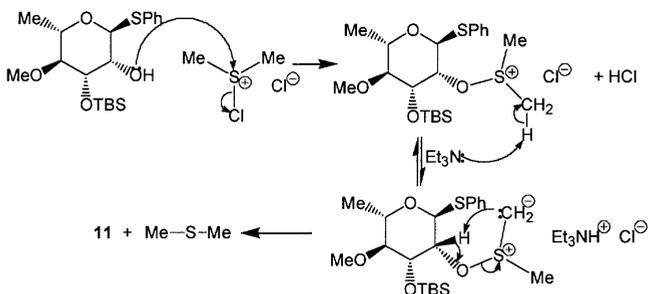
Sélectivité de la protection :

- 1- Le groupement TBS étant très volumineux, la régiosélectivité de la protection peut être déterminée par l'encombrement respectif autour des deux fonctions alcools. Celle en α du méthoxy étant moins encombrée que celle en β du phénylthio, c'est cette fonction alcool qui est sélectivement protégée.
- 1- Un deuxième argument qui va dans le même sens provient du fait que, en général, les groupements hydroxyles équatoriaux sont beaucoup plus réactifs que les axiaux. Or, il est prévisible que le conformère de droite soit prépondérant car les valeurs A des groupements méthyle, méthoxy et phénylthio sont respectivement de 7,5, 2,5 et 4,2 $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ (à 298 K), ainsi pour l'équilibre d'interconversion de chaise ci-dessous $\Delta rG^\circ \# -(7,5+2,5-4,2) = -5,8 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ (de plus le conformère de droite doit bénéficier d'un effet anomère dû à la présence du groupement phénylthio en position axiale du cycle pyranique). Etant donné que le seul groupement hydroxyle en position équatoriale du conformère majoritaire est celui qui est situé en α du groupement méthoxy, nous pouvons prévoir qu'il doit être le plus réactif.

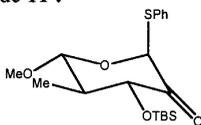
2.d Structure de **11** et mécanisme de sa formation**11**

Mécanisme : réaction de Swern



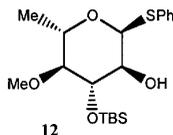


Conformation la plus stable de **11** :

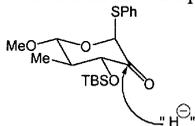


En effet ce conformère possède trois des quatre substituents du cycle en position équatoriale.

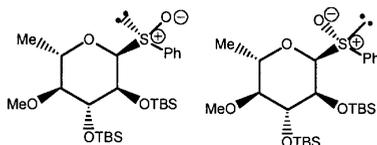
2.e Structure de **12**



Le nucléophile étant de petite taille, l'attaque de la fonction carbonyle s'effectue principalement par approche axiale (face la plus convexe), cela d'autant plus que le groupement phénylthio encombre l'autre face du carbonyle et qu'il n'y a pas d'interaction 1,3-diaxiale du côté de l'oxygène. On obtient donc l'unique diastéréoisomère **12**.



2.f Quelques signaux sont dédoublés en RMN pour le composé **D** car ce dernier est formé sous forme de deux diastéréoisomères à cause de la chiralité non maîtrisée au niveau du sulfoxyde.



2.g Rendement de la synthèse **D** à partir de **F**

$$\text{Rdt} = (0,92 \times 0,91 \times 0,95 \times 0,98 \times 0,70 \times 0,80) \times 10^2$$

$$\text{Rdt} \approx 44 \%$$

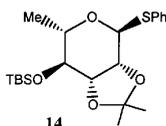
Rendement moyen par étape

$$\langle \text{Rdt} \rangle = (0,92 + 0,91 + 0,95 + 0,98 + 0,70 + 1,00 + 0,80) \times 10^2 / 7$$

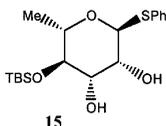
$$\langle \text{Rdt} \rangle \approx 89 \%$$

3 Synthèse du fragment **E** à partir du fragment **F**

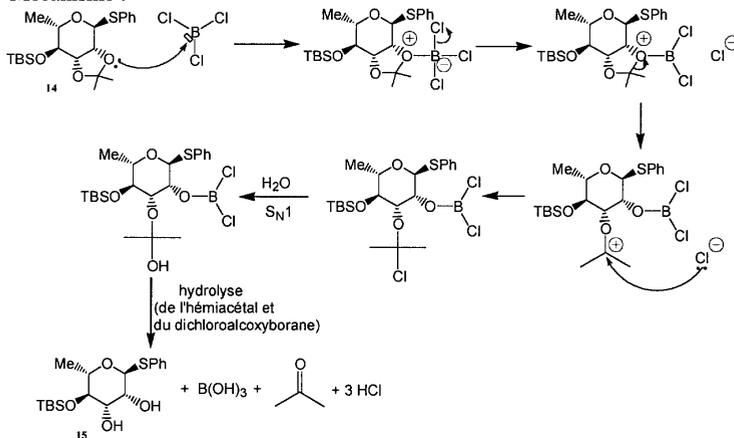
3.a Structure de **14**



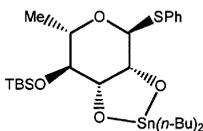
3.b Structure de **15** et mécanisme de sa formation



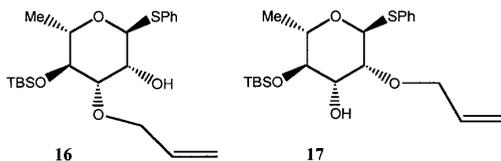
Mécanisme :



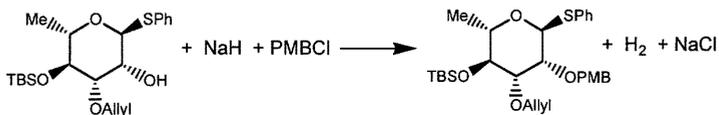
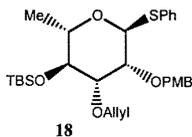
3.c Intermédiaire obtenu à partir de **15** : stannadioxolane



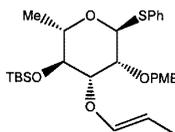
Structures de **16** et **17**



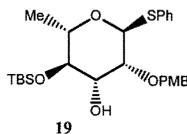
3.d Structure de **18** et équation-bilan de sa formation



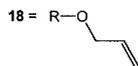
3.e Intermédiaire obtenu à partir de **18** :

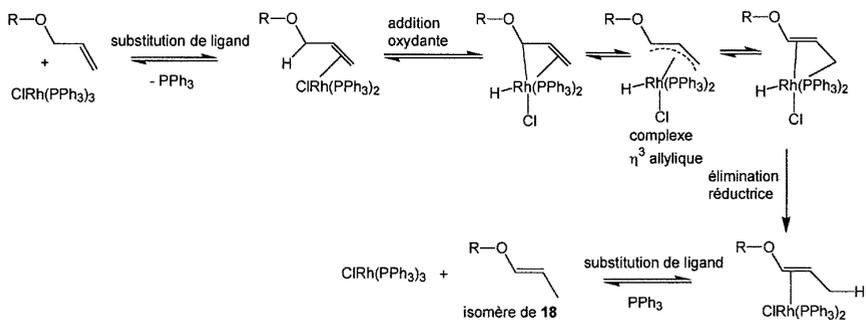


Structure de **19** et mécanisme de sa formation

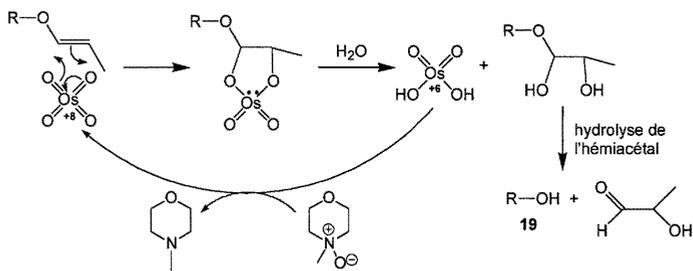


Mécanisme d'isomérisation de **18**

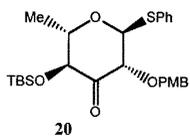




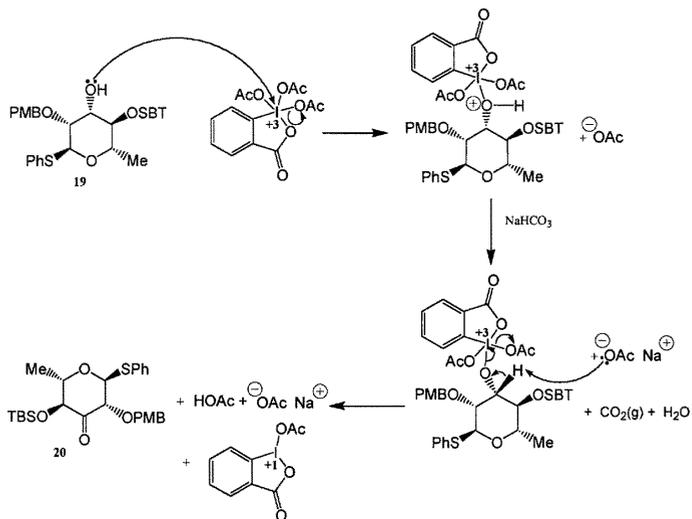
Mécanisme d'obtention de **19** à partir de l'isomère de **18** : dihydroxylation par OsO₄



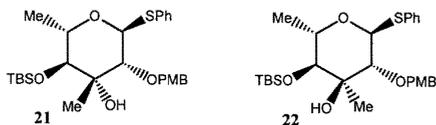
3.f Structure de **20** et mécanisme de sa formation



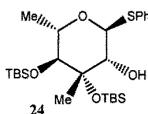
Mécanisme : oxydation de Dess-Martin



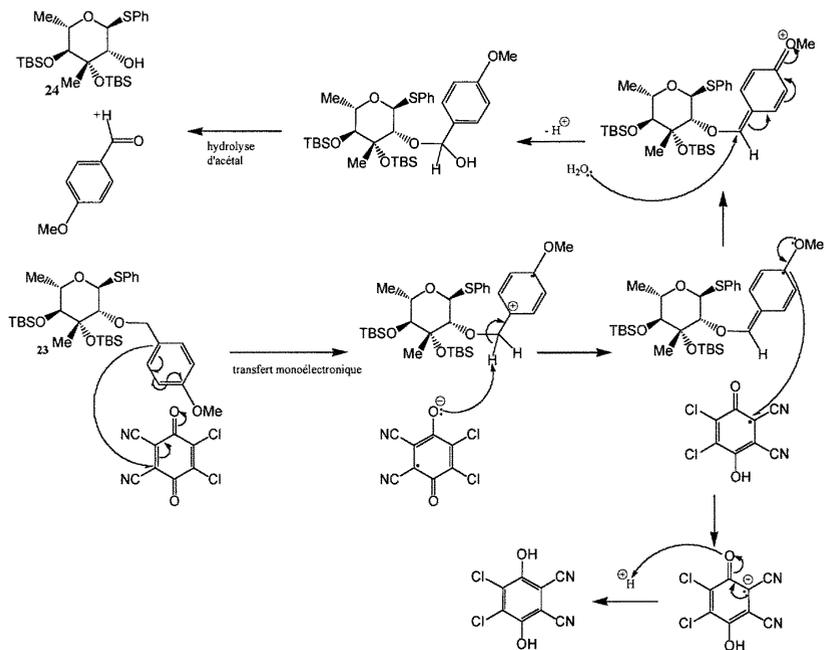
3.g Structures de **21** et **22**



3.h Structure de **24** et mécanisme de sa formation

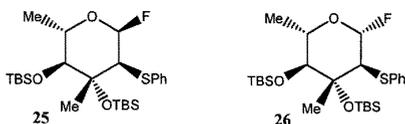


Mécanisme : déprotection sélective par le DDQ :

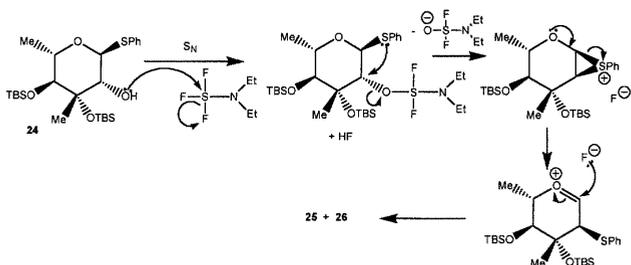


Remarque : certains auteurs proposent un mécanisme ionique de déprotection du groupement PMB par le DDQ impliquant un transfert d'hydrure de la position benzylique du PMB vers un atome d'oxygène du DDQ.

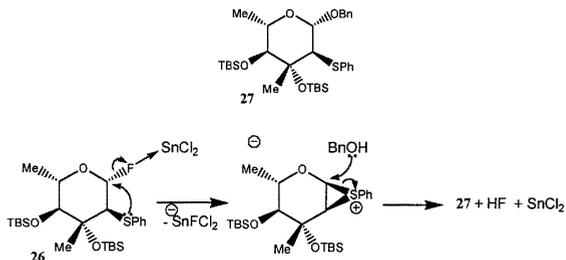
3.i Structures de 25 et 26



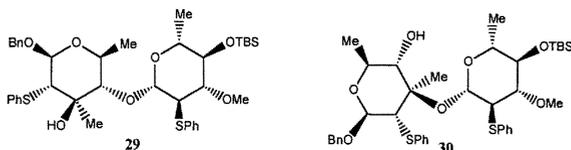
Justification de la présence de ces deux composés : mécanisme de migration-1,2



3.j Mécanisme de formation de 27



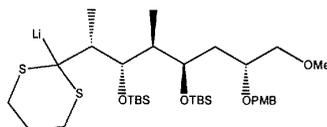
3.k Structures de 29 et 30



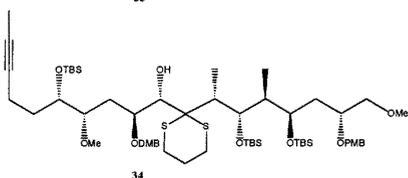
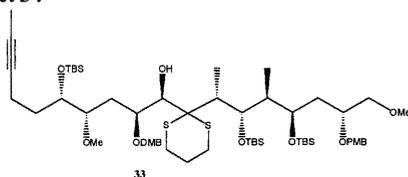
4 Couplages

Obtention du composé 47

4.a Intermédiaire obtenu à partir de C : organolithium

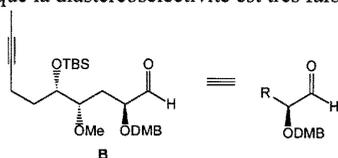


Structures de 33 et 34



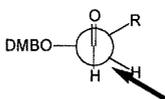
33 et 34 sont des diastéréoisomères

Le carbone en α du groupement aldéhyde étant stéréogénique, on peut utiliser le modèle de Felkin-Anh pour trouver la face du carbonyle qui est majoritairement attaquée. Dans ce modèle, il faut placer le plus gros groupement orthogonal à $O=C-H$ de l'aldéhyde, or, le carbone asymétrique possède ici deux substituants de tailles importantes qui sont peu différentes. C'est pour cela que la diastéréosélectivité est très faible.

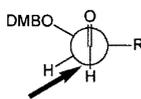


Si ODMB est considéré comme le plus gros groupement

Si R est considéré comme le plus gros groupement



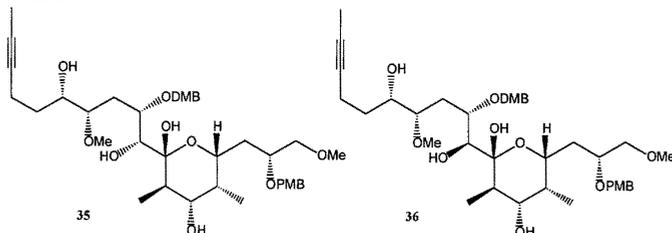
face Re majoritairement attaquée



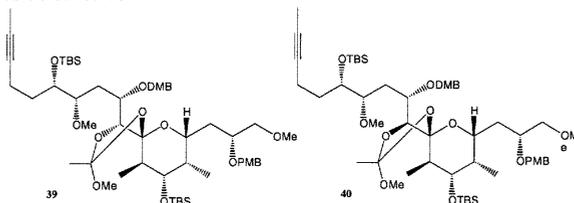
face Si majoritairement attaquée

Remarque : cette explication ne tient pas compte de l'effet de la chiralité de l'organolithium. Si on le prend en compte, on peut penser que les effets ne sont pas coopératifs, d'où la faible sélectivité.

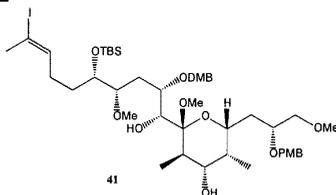
4.b Structures de **35** et **36**

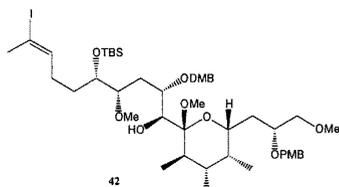


4.c Structures de **39** et **40**

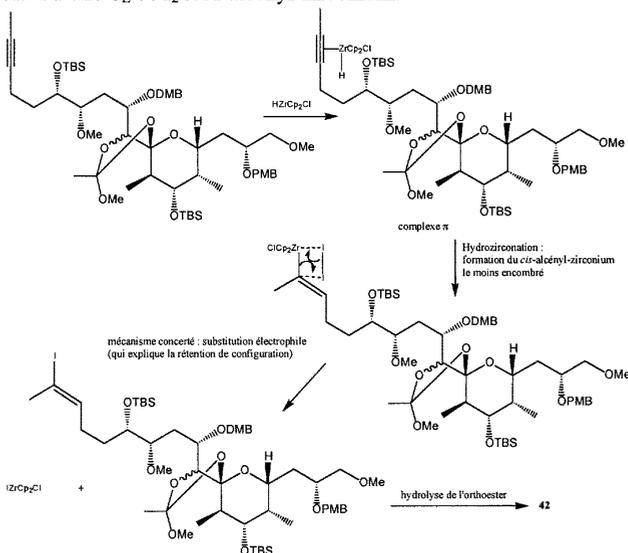


4.d Structures de **41** et **42**



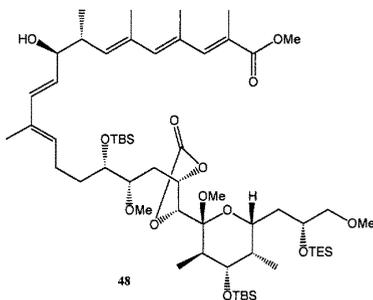


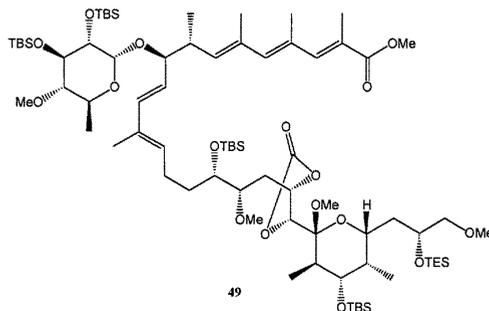
Mécanisme de leur formation : hydrozirconation par le réactif de Schwartz (Cp_2ZrHCl) suivi d'une S_E de I_2 sur l'alcényl-zirconium.



Obtention de l'apoptolidine

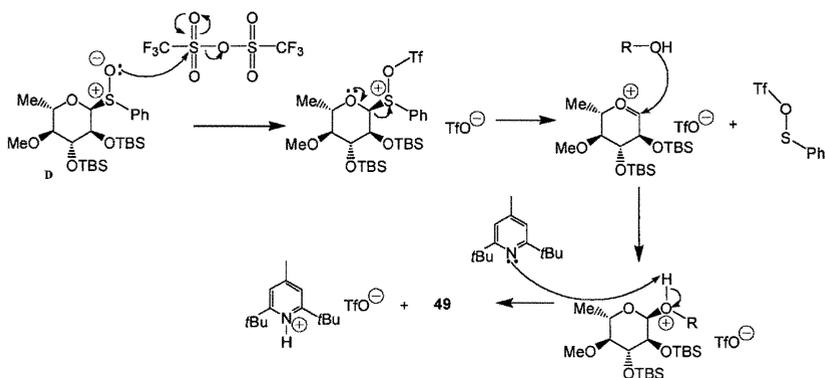
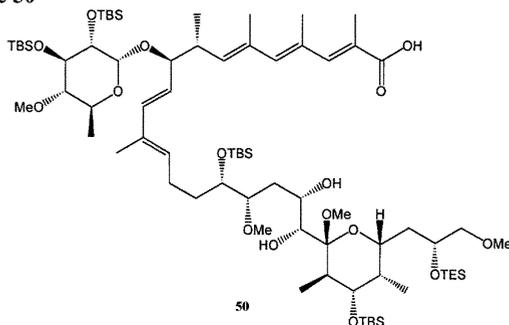
4.e Structure de 48



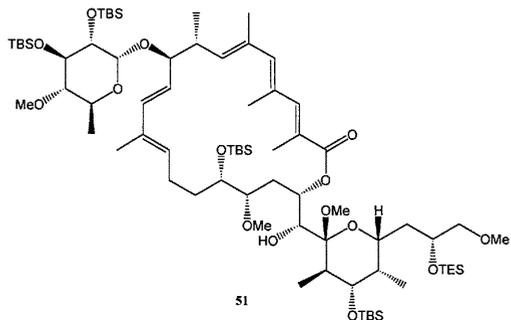
4.f Structure de **49** et mécanisme de sa formation

Mécanisme : le mécanisme de formation de **49** commence par l'élimination du groupement sulfoxyde activé par l'anhydride triflique puis l'alcool **48** s'additionne sur le carbocation précédemment formé

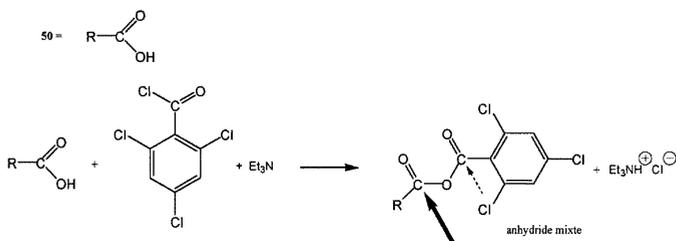
48 = ROH

4.g Structure de **50**

4.h Structure de **51**

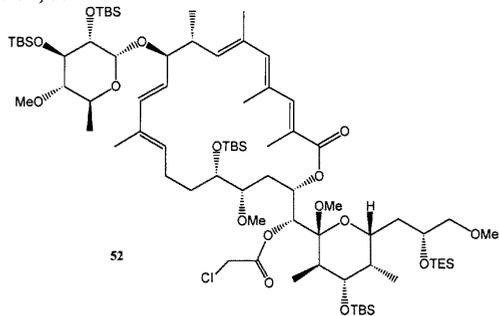


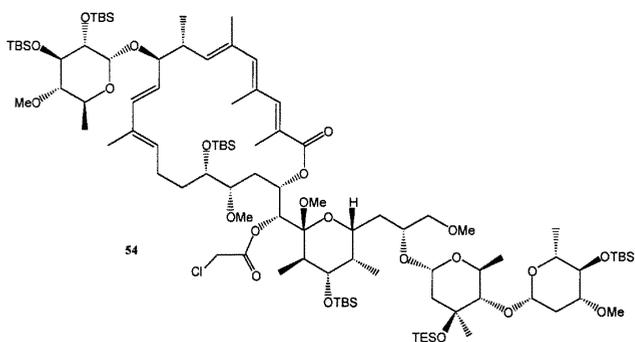
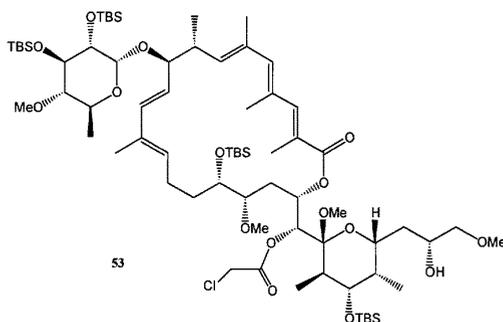
Le chlorure de 2,4,6-trichlorobenzoyle sert à activer *in situ* la fonction acide carboxylique de **50** en formant un anhydride mixte (macrolactonisation de Yamaguchi).



Le groupe acyle de l’anhydride mixte provenant de **50** subit sélectivement l’attaque du nucléophile car l’autre groupe acyle est encombré stériquement par les atomes de chlore en position *ortho*.

4.i Structures de **52**, **53** et **54**





- 4.j Rôle des trois derniers traitements : clivage des groupes protecteurs
 HF·py dans le THF : pour cliver les groupes silylés
 Et₃N dans MeOH : pour cliver le groupe chloroacétyle
 TsOH dans THF/H₂O : pour cliver le glycoside de méthyle

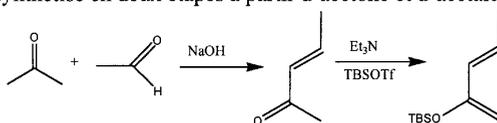
DEUXIEME PARTIE

Synthèse de la colombiasine et des hamigéranes

I.Synthèse de la colombiasine A

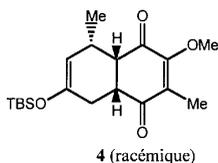
I.1.a Synthèse de 3

3 peut être synthétisé en deux étapes à partir d'acétone et d'acétaldéhyde.



Remarque : le produit intermédiaire est commercial

I.1.b Structure de 4

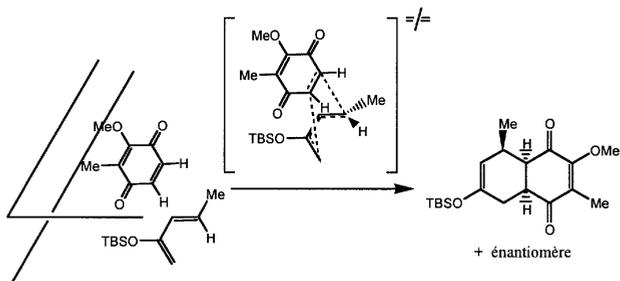


Régiosélectivité : 1- La cycloaddition au niveau du diénophile s'effectue sur la double liaison la moins riche en électrons (règle d'Alder).

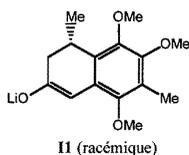
2- On déduit de la lecture de l'énoncé la régiosélectivité de l'addition du diène au niveau de cette double liaison du diénophile (car même si un moyen mnémotechnique utilisant la mésomérie permet dans la plupart des cas de prédire la régiosélectivité de l'addition, il nous faudrait la donnée des coefficients des orbitales HO du diène et BV du diénophile pour justifier correctement la régiosélectivité).

Stéréosélectivité : 1- Le produit à jonction de cycle *cis* est obtenu du fait de l'approche supra-supra du diène et du diénophile.

2- L'état de transition *endo* entraîne que le groupement méthyle d'une part et les atomes d'hydrogène en jonction de cycle d'autre part soient en position relative *trans*.

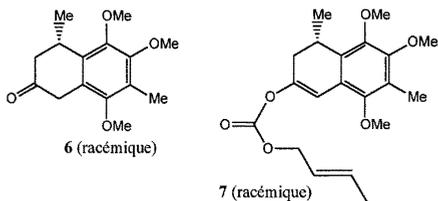


I.1.c Structure de l'intermédiaire II : énolate de lithium

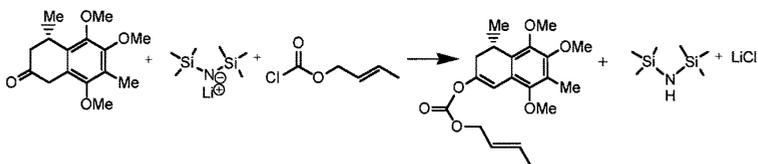


L'ajout de la base forte (LHMDS) en excès (1,2 équivalent) à basse température favorise le contrôle cinétique pour la déprotonation. Ce sont donc les protons les plus acides et les moins encombrés (ceux en α du cycle aromatique) qui sont arrachés sélectivement.

I.1.d Structures de 6 et 7



Equation-bilan de la formation de 7

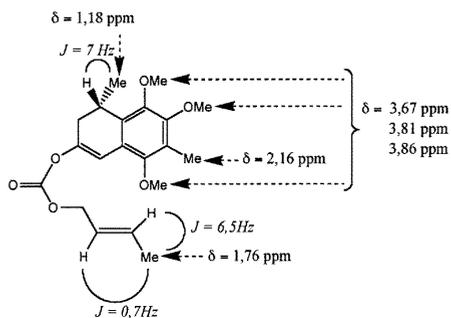


- I.1.e Autres produits :
- produits de C-alkylation
 - produits de poly C-alkylation

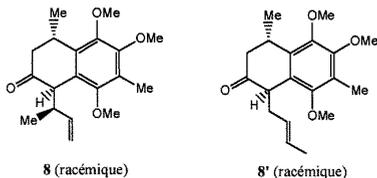
I.1.f Classement des différents types de carbones de 7

Hybridation	Classe	Déplacements chimiques
sp^3	Primaire	9,1 ; 17,8 ; 20,6 60,0 ; 60,7 ; 61,3 (CH ₃ O)
	Secondaire	27,6 ; 32,7
	Tertiaire	69,0
sp^2	Tertiaire	108,1 ; 130,1 ; 132,8
	Quaternaire	120,9 ; 123,3 ; 124,2 ; 146,2 ; 148,4 ; 150,8 ; 150,9 ; 152,9

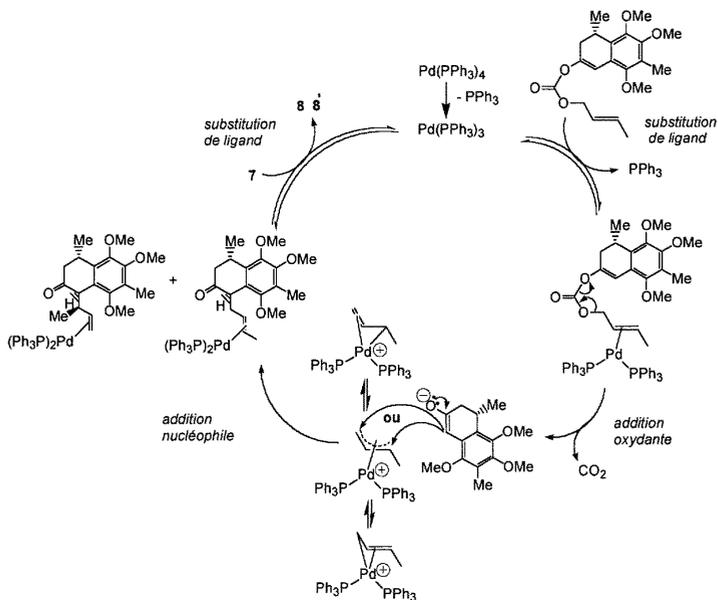
I.1.g Déplacements chimiques des protons des groupes méthyles et couplages :



I.2.a Structures de **8** et **8'**

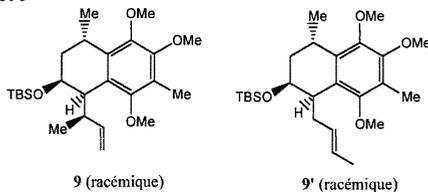


Mécanisme de formation : substitution allylique de Tsuji-Trost

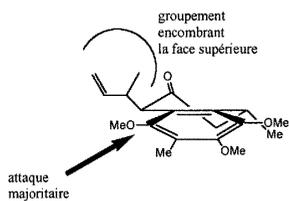


La raison qui contredit le fait que le passage de **7** à **8** n'est pas une transposition σ -tropic provient du fait que les configurations relatives des deux nouveaux centres stéréogéniques formés ne correspondent pas à ce qui est attendu pour une telle réaction (je ne vois pas d'autre raison évidente).

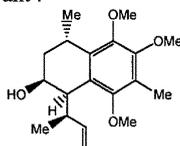
I.2.b Structures de **9** et **9'**



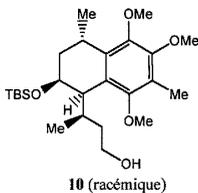
I.2.c Stéréochimie obtenue lors de la réduction :
la face inférieure de la pseudochaise est moins encombrée que la face supérieure.



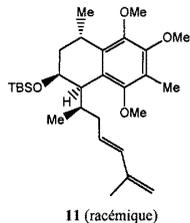
Donc, on obtient l'alcool suivant :



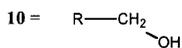
I.2.d Structure de **10**

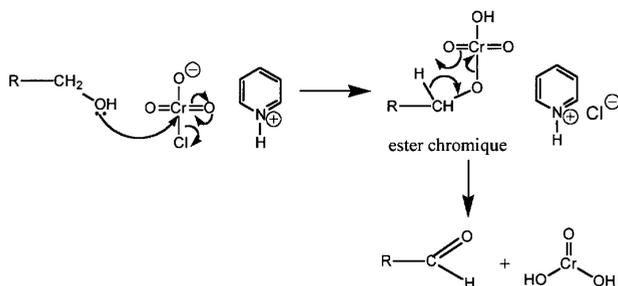


I.2.e Structure de **11**



Mécanisme d'oxydation de **10** par le PCC :





Remarque : un autre mécanisme a été proposé avec départ d'un hydrure de l'alcool et formation d'un carbocation qui évolue ensuite en aldéhyde

I.2.f Modifications

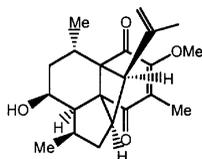
Tous les facteurs expérimentaux diminuant la durée de vie (stabilité) de la bétaine *cis* favorisent la formation de l'alcène *Z* :

- Augmentation du contrôle cinétique (température plus basse, temps de réaction moins long)
- Solution sans sel (on préférera comme base KHMDS au lieu de *n*-BuLi)
- Utilisation d'une phosphane possédant un atome de phosphore plus électro-négatif ($P(p\text{-C}_6\text{H}_4\text{Cl})_3$ au lieu de PPh_3)

Le stéréoisomère **11** (de configuration *E* au niveau de la nouvelle double liaison) est formé majoritairement car :

- l'utilisation d'un ylure semi-stabilisé favorise le contrôle thermodynamique (formation de l'alcène le plus stable)
- l'introduction de cations lithiums dans le milieu *via* la base utilisée favorise aussi le contrôle thermodynamique car ils facilitent l'ouverture de l'intermédiaire oxaphosphétane pour se coordiner fortement à l'atome d'oxygène de l'alcoolate

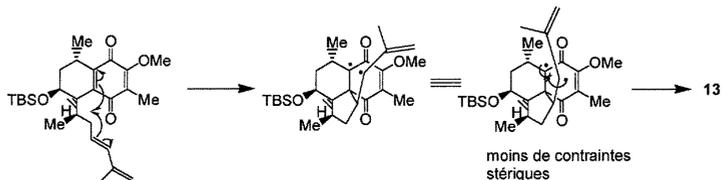
I.3.a Structure de **13**



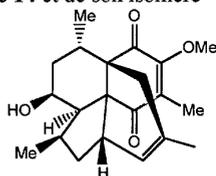
13 (racémique)

D'après les règles de Woodward-Hoffmann, une cycloaddition [2+2] photochimique à 4 électrons s'effectue selon une approche suprafaciale pour les deux alcènes en raison des symétries des orbitales mises en jeu. Comme l'alcène de départ était de configuration *E* cela conduirait à un cyclobutane *trans* ce qui n'est pas le cas.

Autre mécanisme :

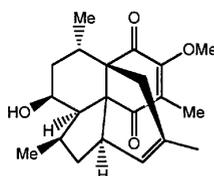


I.3.b Structure de **14** et de son isomère



14 (racémique)

formé via un état de transition de type *endo*



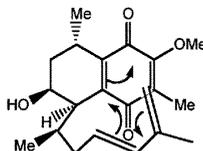
isomère de 14 (racémique)

formé via un état de transition de type *exo*

14 et son isomère sont des diastérisomères.

Le mécanisme de formation de **14** est celui de la réaction de Diels-Alder.

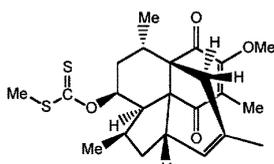
Mécanisme :



La **colombiasine A** et **14** ont même stéréochimie au niveau du carbone en position 9. **14** provient donc d'un état de transition *endo*, ce qui implique que les interactions de second ordre l'emportent sur les contraintes stériques (ce qui n'est pas a priori évident car l'inverse est fréquemment observé pour des réactions de Diels-Alder intramoléculaires).

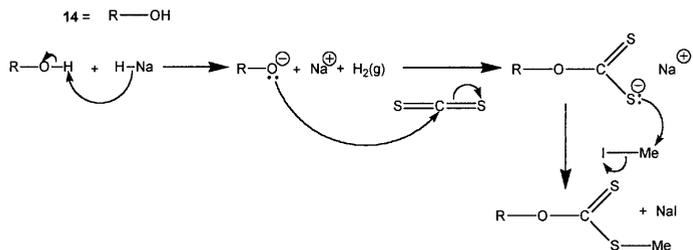
I.3.c La méthode RMN qui permet de déterminer les stéréochimies relatives est basée sur l'effet Overhauser nucléaire (effet NOE) : les types de procédures utilisés sont NOE différence (spectre 1D) ou NOESY (spectre 2D).

I.3.d Structure de **15** et mécanisme de sa formation

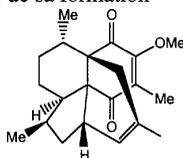


15 (racémique)

Mécanisme de formation du xanthate

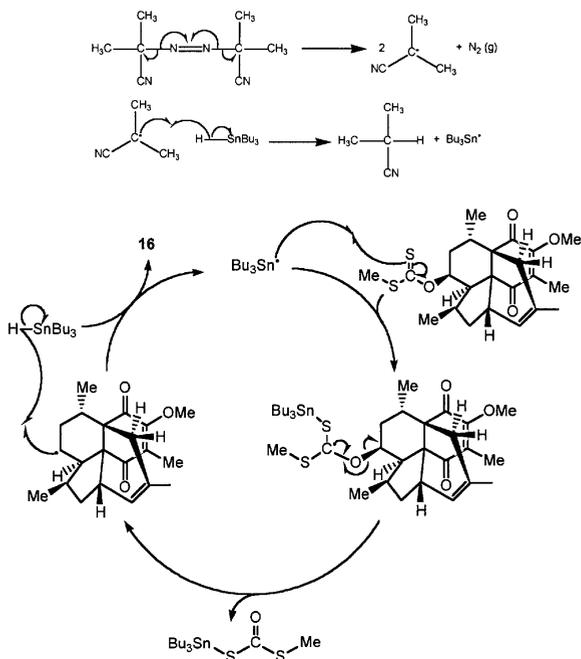


I.3.e Structure de 16 et mécanisme de sa formation



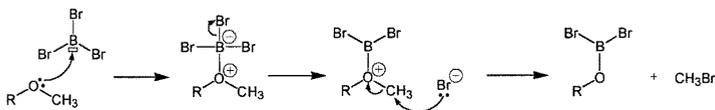
16 (racémique)

Mécanisme de la réaction de Barton-Mc Combie

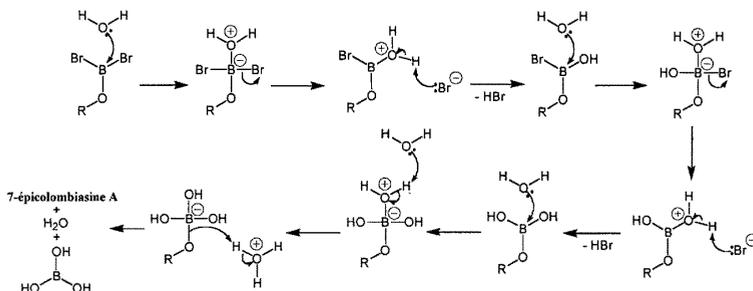


I.3.f Mécanisme de déprotection du groupement hydroxyle par BBr_3 :

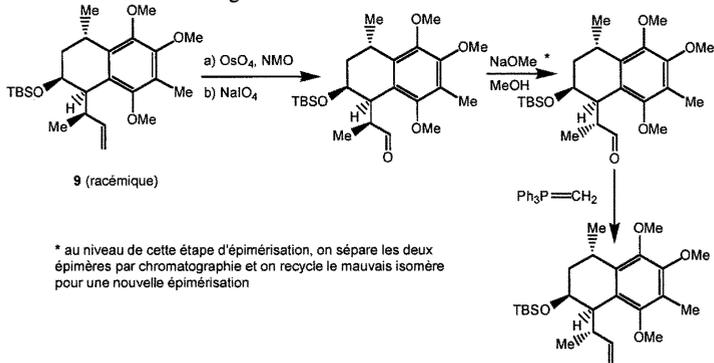
16 = ROME



suit l'hydrolyse avec le mécanisme suivant :



I.3.g Pour avoir la bonne configuration du carbone 7 :



Remarque : une autre possibilité, à partir de **9**, consisterait à effectuer une ozonolyse réductrice (1. 1 éq. O_3 , 2. Ph_3P) pour la première étape et une déprotonation/reprotonation à basse température (1. KH , -78°C , 2. MeOH) pour la deuxième étape.

II Synthèse des hamigéranes

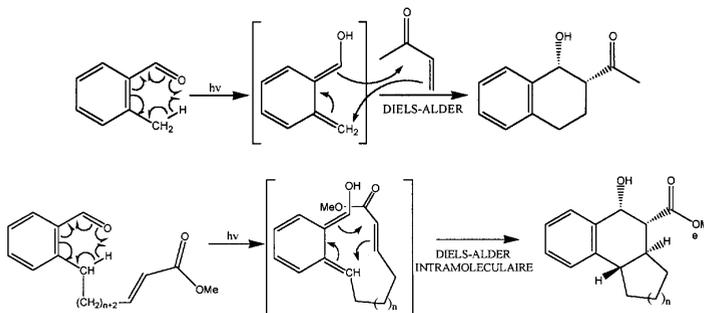
II.1.a Utilité de la verrerie en Pyrex :

Le pyrex est transparent dans l'UV proche, jusqu'à la longueur d'onde de 300 nm (partiellement seulement entre 300 et 320 nm), ce qui est mieux que le verre ordinaire au silicate (transparent jusqu'à 380 nm). Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser de la verrerie en

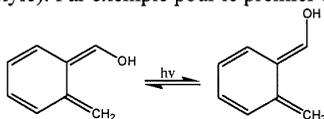
quartz, certes transparente dans toute la gamme de longueur d'onde UV (*i.e.* jusqu'à 200 nm), mais qui est beaucoup plus chère.

II.1.b Mécanisme des transformations

Mécanisme en deux étapes débutant par la génération photochimique d'un diène très réactif pour la réaction de Diels-Alder (deuxième étape).

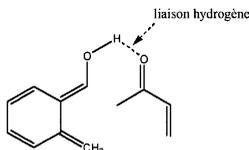


Remarque : ce mécanisme ne fait pas apparaître l'étape d'isomérisation photochimique de la double liaison de l'énol (Isomérisation nécessaire pour obtenir la stéréochimie voulue au niveau du groupement hydroxyle). Par exemple pour le premier cas :



II.1.c Régiochimie

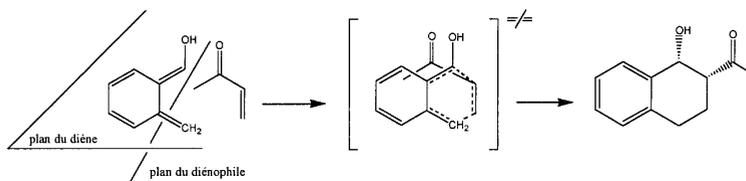
La régiosélectivité observée provient de la formation d'une liaison hydrogène entre l'hydrogène du groupement hydroxyle de l'intermédiaire non isolé et l'oxygène de la fonction carbonyle du diénophile.



Remarque : on peut penser que cette liaison hydrogène active la réaction et ne fait qu'augmenter la régiosélectivité. En effet, la régiochimie serait très probablement la même si elle n'existait pas car l'écriture de formules mésomères tendrait à montrer que le plus gros coefficient de l'orbitale HO du diène se trouverait sur le carbone méthylidénique et que le plus gros coefficient de la BV du diénophile serait sur le carbone méthylidénique.

II.1.d Stéréosélectivité

Elle est justifiée par le fait que le diène et le diénophile, lors de la cycloaddition, adoptent une approche relative *endo*.

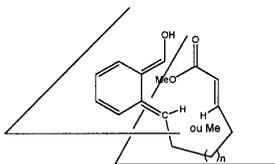


II.1.e Influence des substituants sur le noyau aromatique

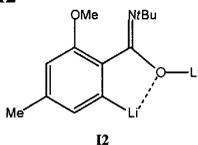
Plus le noyau aromatique est substitué, plus la réaction est efficace (réaction plus rapide avec un meilleur rendement). En effet, plus le noyau aromatique est substitué par des groupements donneurs d'électrons, plus l'orbitale HO du diène sera haute en énergie ce qui favorise la réaction (règle d'Alder).

II.1.f Stéréochimie des réactions intramoléculaires :

On s'aperçoit que les trois groupements, l'hydroxyle, le groupement ester et l'hydrogène (ou le méthyle) sont en position relative *cis*. Cela provient de l'approche *endo* du diénophile par rapport au diène.

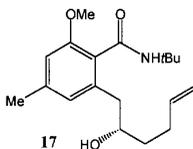


II.2.a Structure de l'intermédiaire **I2**

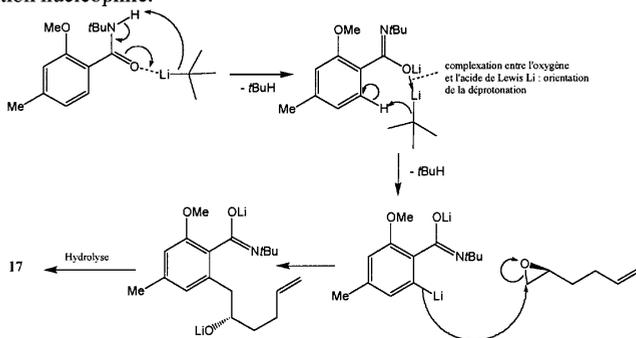


Conditions d'ortholithiation : c'est une déprotonation d'un proton du cycle aromatique en ortho d'un groupement orienteur (ici l'amide). Pour cela on utilise le *tert*-BuLi qui est plus basique (et moins nucléophile) que le *sec*-BuLi ou le *n*-BuLi. 2,2 équivalents de base sont utilisés car le proton de la fonction amide est plus acide ($pK_a \# 22$) que celui du cycle aromatique ($pK_a \# 43$). Notons aussi le rôle important du TMEDA qui permet de désagréger l'organolithium et d'augmenter sa basicité.

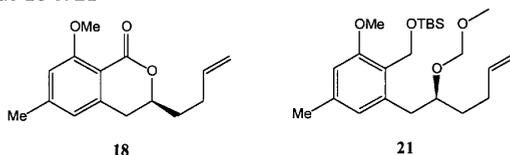
II.2.b Structure de **17** et mécanisme de sa formation



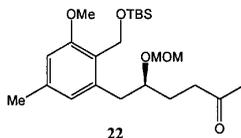
Le mécanisme comporte deux étapes : l'ortholithiation puis l'ouverture de l'époxyde par substitution nucléophile.



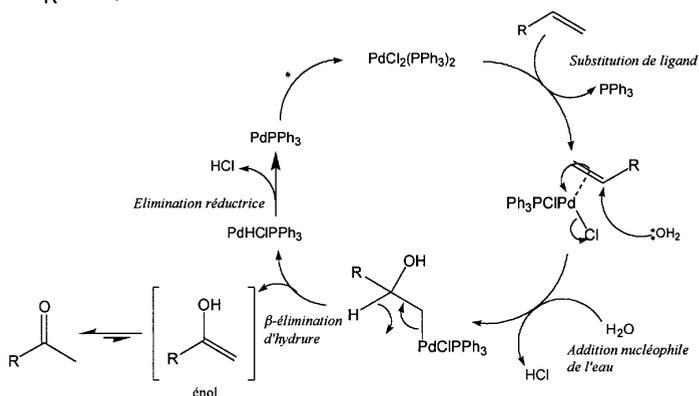
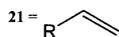
II.2.c Structures de **18** et **21**



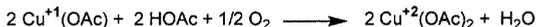
II.2.d Structure de **22** et mécanisme de sa formation



Mécanisme : oxydation de Wacker

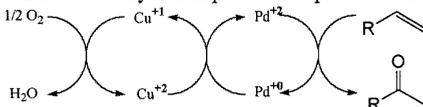


* Au niveau de cette étape, le catalyseur au degré d'oxydation +2 est régénéré par le processus suivant représenté sous forme simplifiée :

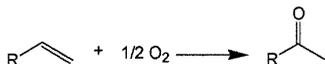


Ainsi, c'est l'espèce $\text{Pd}(\text{OAc})_2$ qui réamorce le cycle catalytique et entraîne l'élimination de deux molécules d'acide acétique au lieu de deux molécules d'acide chlorhydrique comme dans le cycle ci-dessus (même cycle catalytique, dans lequel il faut juste remplacer HCl par AcOH). C'est d'ailleurs pour cela que nous avons introduit AcOH pour la régénération du catalyseur.

Le processus global de cette oxydation peut être représenté ainsi :

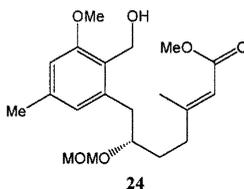


Soit un bilan global :

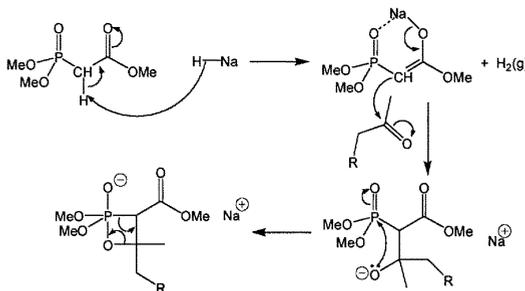
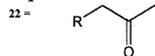


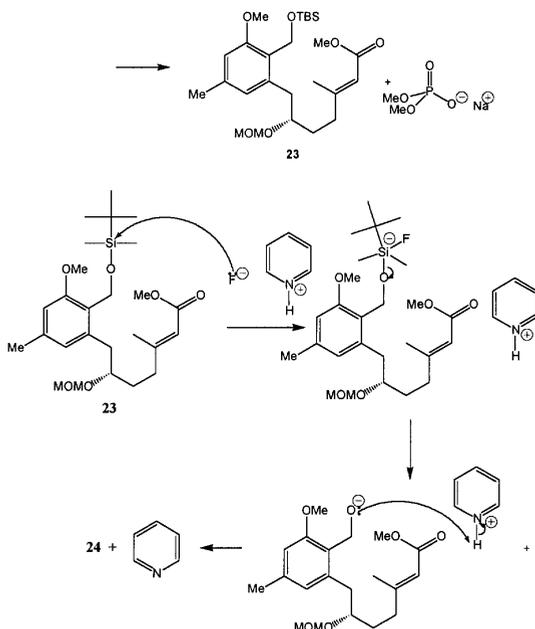
Remarque : les conditions classiques de la réaction de Wacker (Tsuji, Organic Synthesis : 10 mol % PdCl_2 , 2 équivalents CuCl , O_2 , DMF , H_2O) ont été remplacées avantageusement par l'utilisation du co-oxydant $\text{Cu}(\text{OAc})_2$. Ainsi, lors de la réaction, c'est seulement l'acide faible AcOH qui est libéré au lieu de HCl qui aurait pu participer à l'hydrolyse de l'acétal du groupement protecteur MOM.

II.2.e Structure de 24 et mécanisme de sa formation



Mécanisme : on a successivement une réaction de Wadsworth-Emmons suivie de la déprotection d'une fonction alcool.

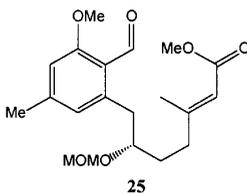




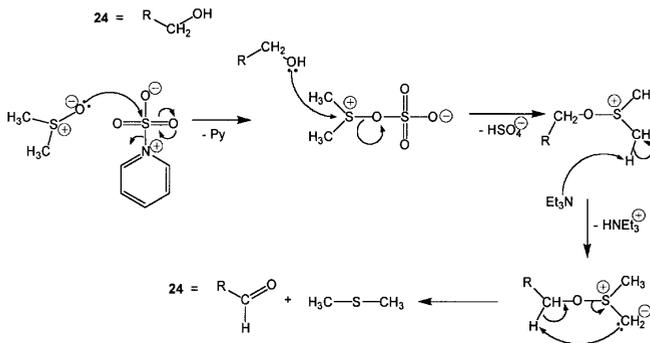
II.2.f Assignation des signaux IR de **24**

Signal (cm^{-1})	Assignment
3465	Vibration d'élongation O-H
1716	Vibration d'élongation C=O conjuguée
1646	Vibration d'élongation C=C

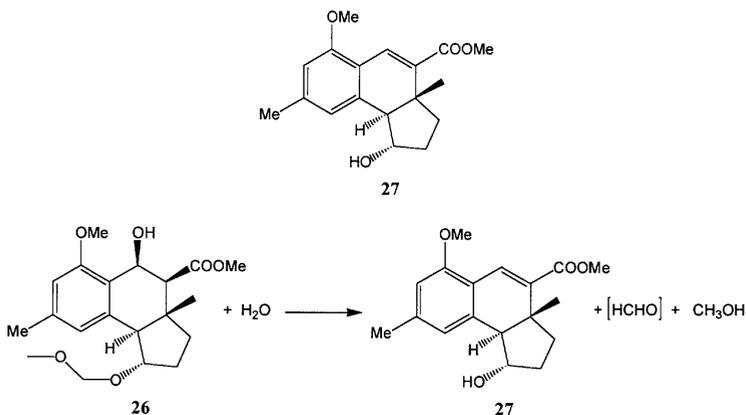
II.2.g Structure de **25** et mécanisme de sa formation



Mécanisme : réaction de Parikh-Doering

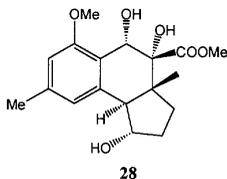


II.3.a Structure de 27 et équation-bilan de sa formation



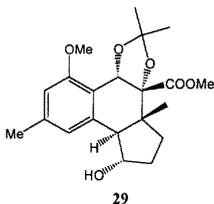
Remarque : le formaldéhyde, espèce très réactive, polymérise dans l'eau, d'où l'utilisation de la notation [HCHO].

II.3.b Structure de 28

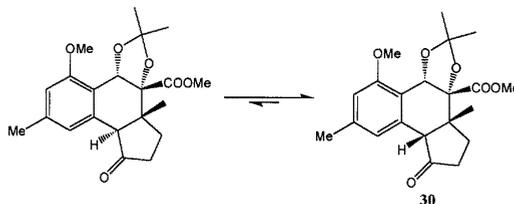
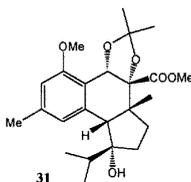


La dihydroxylation s'effectue du côté le moins encombré : celui opposé au groupement méthyle en tête de pont.

Le mécanisme cyclique implique, de plus, que les deux groupements hydroxyle sont en position relative *cis*.

II.3.c Structure de **29**

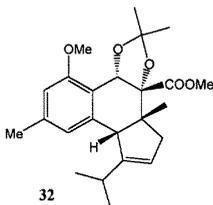
II.3.d Epimérisation catalysée par le DBU : elle est due au fait que l'on obtient un composé plus stable.

II.3.e Structure de **31**

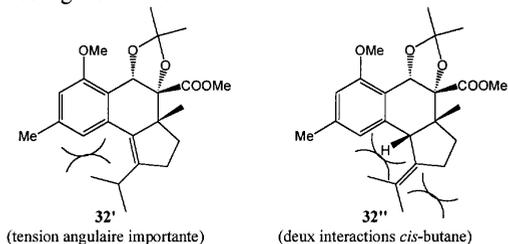
Le chlorure de cérium réagit avec le réactif de Grignard pour former un composé organocérium de formule $i\text{-PrCeCl}_2$. Ces organocériums présentent un rapport nucléophilie sur basicité bien supérieur aux organomagnésiums et aux organolithiums. Autrement dit, ce sont des composés organométalliques non émolisants et non réducteurs ce qui est important avec les cétones encombrées ou émolisables.

L'addition nucléophile s'effectue sur la face la plus dégagée de la fonction de **30**, c'est à dire sur la face inférieure du schéma précédant (la face supérieure étant encombrée par le dérivé cyclohexanique).

Une autre façon de voir est de remarquer que la molécule présente une forme concave. L'addition nucléophile s'effectuera donc sur la face extérieure de l'enveloppe.

II.3.f Structure de **32**

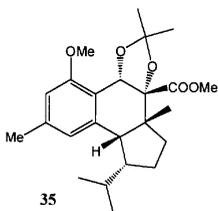
Les deux autres régioisomères étant les suivants :



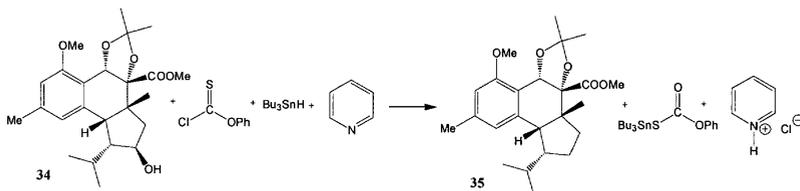
On obtient majoritairement le régioisomère **32** d'après la règle généralisée de Zaitsev (obtention de l'alcène le plus stable).

En effet, **32** est plus stable que **32'** et **32''** à cause de contraintes stériques plus importantes dans ces deux composés.

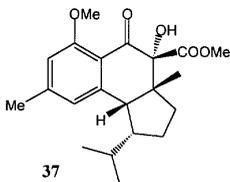
II.4.a Structure de **35** et équation-bilan de sa formation



Réaction de Barton-McCombie



II.4.b Structure de **37**



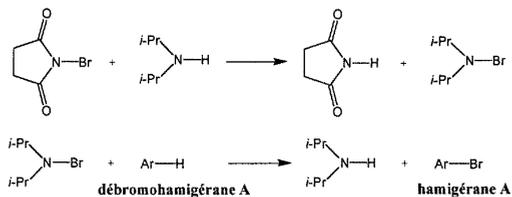
Le tamis moléculaire est un desséchant utilisé lors de la réaction.

Cependant, je ne vois pas d'intérêt à son utilisation dans ce cas précis.

II.4.c Rôle de la diisopropylamine

La diisopropylamine est probablement un catalyseur basique.

On peut proposer le mécanisme suivant, en deux étapes, pour la bromation du cycle aromatique :



Agrégation de sciences physiques

Concours externe

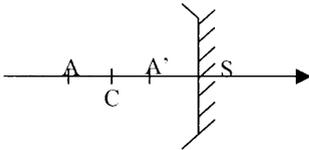
OPTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉES

Composition de physique ♦ Session : 2003

Composition de physique

Partie I : Etude des propriétés des télescopes

I.1 Etude d'un miroir sphérique



$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC}$$

I.1.1 **Foyer objet** : Point de l'axe optique dont l'image est à l'infini sur l'axe optique.

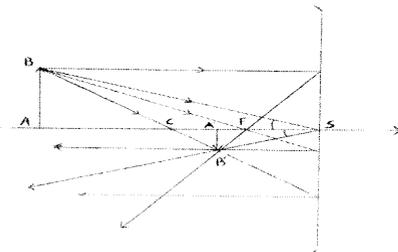
$$\frac{1}{SF} + 0 = \frac{2}{SC} \Rightarrow \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

Foyer image : Position de l'image d'un point objet situé à l'infini dans la direction de l'axe optique. $\overline{F'} = F$

Les distances focales objet et image sont égales :

$$f = \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

I.1.2 On définit le grandissement par $\gamma = \frac{A'B'}{AB}$

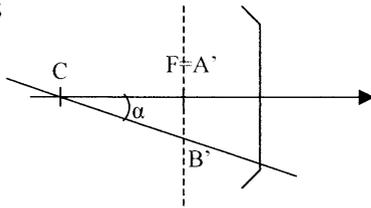


En utilisant les triangles ABS et A'B'S, on montre

$$\gamma = \frac{-\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

I.1.4 si les étoiles sont à l'infini, c'est l'angle qui sépare leur direction qui caractérise leurs positions relatives. On parle de distance angulaire.

I.1.5



A' et B' sont situés dans le plan focale image.
 $\Rightarrow \overline{A'B'} = F$

I.1.6 $\overline{A'B'} = +f\alpha$ car $f < 0$

$$\overline{A'B'} = -\frac{R}{2}\alpha$$

Il faut choisir R le plus grand possible.

I.1.7 Pas d'aberrations chromatiques, plus faciles à produire ; on peut réaliser de plus grand diamètre.

I.2 Etude d'un télescope du type Cassegrain du VLT

f_1 et f_2 sont négatifs.

I.2.1 On oriente toutes les valeurs algébriques suivant (Oz).

→ Pour le 1^{er} miroir, A est l'infini $\Rightarrow \overline{A'} = F_1$

→ Pour le 2nd miroir, $\frac{1}{S_2 A'} + \frac{1}{S_2 A''} = \frac{1}{f_2}$

$$\frac{1}{S_2 A''} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{S_2 S_1 + S_1 A'} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{e + f_1} = \frac{e + f_1 - f_2}{f_2(e + f_1)}$$

$$S_2 A'' = \frac{f_2(e + f_1)}{e + f_1 - f_2}$$

I.2.2 Cf feuille annexe

I.2.3 D'après la question I.1.6, on a directement $\overline{A'B'} = f_1 \alpha$

Rq : α non orienté > 0
 $f_1 < 0$ } $\Rightarrow \overline{A'B'}$ est bien < 0

Pour le second miroir, $\overline{A'' B''} = \gamma \overline{A' B'} = \alpha \gamma f_1$

I.2.4 A'' est le foyer principal image du télescope. On a donc $f = \gamma |f_1|$

I.2.5 Application numérique :

$$* \overline{S_2 A''} = \frac{-2,28(12,4 - 14,38)}{-14,38 + 2,28 + 12,4} = \underline{\underline{15,048m}}; \overline{S_1 A''} = \underline{\underline{2,65m}}$$

$$* \text{Pour } \gamma, \text{ on utilise I.1.3 Appliqué à } M_2 \Rightarrow \gamma = \frac{S_2 A''}{S_2 A'} = -\frac{15,48}{12,4 - 14,38} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 7,6}}$$

$$* \text{Distance focale du télescope : } f = \gamma |f_1| = 7,6 \times 14,38 = \underline{\underline{109m}}$$

$$* \text{ Si } \alpha = 1'' \text{ d'arc} \quad \overline{A'' B''} = \alpha \gamma f_1 = 7,6 \times (-14,38) \times \frac{1}{3600} \times \frac{\pi}{180} = \underline{\underline{-530\mu m}}$$

I.2.6 Avec un miroir unique, on a une séparation entre les images de $A' B' = \alpha |f_1|$.

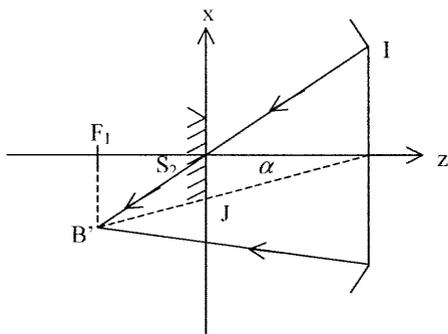
Ici cette séparation est multipliée par le facteur γ .

I.2.7 Pour résoudre un tel système, les deux images doivent au moins être séparées d'une distance supérieure à la taille d'un pixel δx

$$\gamma \delta \alpha |f_1| > \delta x \Rightarrow \delta \alpha > \frac{\delta x}{\gamma |f_1|} = \frac{\delta x}{f}$$

$$\text{AN : } \delta \alpha_{\min} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ rad} = 0,017'' \text{ d'arc}$$

I.2.8



Soit une étoile dans la direction α « au dessus » de l'axe optique. Lorsqu'on augmente α , parmi tous les rayons qui convergent en B' , celui passant par I sera le dernier à rencontrer le miroir M_2 .

Dans le cas $\alpha = \alpha_m$, ce rayon est tel que B', I et J sont alignés.

$$\text{Dans le repère } (S_2, z, x), (IJ) \text{ a pour équation : } x = -\frac{D_2}{2} + \frac{D_1 + D_2}{2e} z$$

$$\text{Le point } B' : \begin{cases} z_{B'} = e + f_1 \\ x_{B'} = +\alpha_m f_1 \end{cases} \text{ appartient à } (IJ)$$

donc

$$\alpha_m f_1 = -\frac{D_2}{2} + \frac{D_1 + D_2}{2e}(e + f_1) = \frac{-D_2 e + D_1 e + D_2 e + f_1 D_1 + D_2 f_1}{2e}$$

$$= \frac{D_1 e + f_1 (D_1 + D_2)}{2e}$$

$$\alpha_m = \frac{D_2 + D_1}{2e} + \frac{D_1}{2f_1}$$

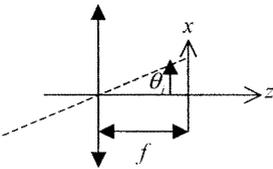
Application numérique :

$$\alpha_m = 91.10^{-3} \text{ rad} = \underline{5,2^\circ}$$

I.2.9 C'est en fait le trou du miroir M₁, qui limite le champ.

I.3 Prie en compte de la diffraction de Fraunhofer :

I.3.1 Les rayons convergent vers l'image géométrique de l'étoile E₁.



Soit $\underline{x_0 = f\theta_i}$

I.3.2 L'étoile est à l'infini, l'onde sphérique émise par elle peut être considérée comme localement plane sur toute la surface du télescope.

Avec les conventions sur les notations complexes imposées, on a, en un point P de la pupille :

$$\underline{A_1(X)} = A_0 \exp[-i\vec{k}_i \cdot \overrightarrow{OP}] = \underline{A_0 \exp[-\frac{2i\pi}{\lambda} \theta_i X]}$$

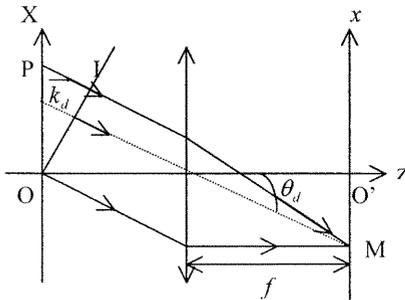
I.3.3 La lumière se propage de proche en proche. Chaque élément de surface atteint par elle se comporte comme une source secondaire qui émet des ondelettes sphériques. L'amplitude complexe de la vibration lumineuse en un point est la somme des amplitudes complexes des ondes issues de toutes les sources secondaires.

On considère, sur la pupille modélisée à 1D, un source secondaire en P(X) d'amplitude :

$$K \underline{A_1(X)} dX$$

L'amplitude dont elle est responsable en M est identique, au retard de propagation près, soit :

$$d\underline{A} = K \underline{A_1(X)} dX \times e^{-ikd(PM)}$$



$$\begin{aligned} \text{Or } (PM) &= \overrightarrow{PI} + (IM) = \overrightarrow{PI} + (OM) \\ &= -\overrightarrow{OP} \cdot \frac{k_d}{k_d} + (OM) \end{aligned}$$

Donc

$$d\underline{A} = Ke^{-ikd(OM)} \underline{A}_1(X) e^{i(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{k_d})} dX$$

→ Pour la suite le facteur de phase $e^{-ikd(OM)}$ est sans importance,

$$\rightarrow K \text{ homogène à } \frac{1}{L}; \rightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{k_d} = \frac{2\pi}{\lambda} X \times \theta_d = \frac{2\pi Xx}{\lambda f}$$

Finalement
$$\underline{A}(x) = \frac{1}{L} \int_{\text{puillie}} \underline{A}_1(X) \exp\left[2i\pi \frac{xX}{\lambda f}\right] dX$$

I.3.4 On remplace $\underline{A}_1(X) = A_0 \exp\left[-2i\pi \frac{\theta_1 f X}{\lambda f}\right]$ donc

$$\underline{A}(x) = \frac{A_0}{L} \int_{\frac{\theta_1}{2}}^{\frac{\theta_1}{2}} \exp\left[2i\pi \left(\frac{x - f\theta_1}{\lambda f}\right) X\right] dX$$

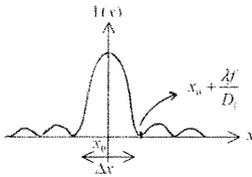
$$\underline{A}(x) = \frac{A_0}{L} D_1 \sin c\left(\pi D_1 \frac{x - x_0}{\lambda f}\right) \text{ avec } x_0 = f\theta_1$$

On retrouve donc la forme de l'énoncé pour I(x) :

$$\boxed{I(x) = |\underline{A}|^2 = \frac{A_0^2}{L^2} D_1^2 \sin^2 c^2\left(\pi \frac{x - x_0}{c}\right)} \text{ avec } \begin{cases} x_0 = f\theta_1 \\ c = \frac{\lambda f}{D_1} \end{cases}$$

$$I_0 = \frac{A_0^2}{L^2} D_1^2$$

I.3.5
$$\left\| I(x) = I_0 \sin^2 c^2\left(\pi D_1 \frac{x - x_0}{\lambda f}\right) \right.$$

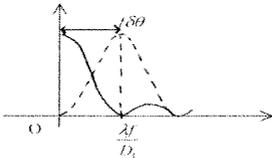


1^{ère} annulation : $x_1 = x_0 \pm \frac{\lambda f}{D_1}$

$$\Delta x = 2 \frac{\lambda f}{D_1}$$

La tache de diffraction est centrée autour de l'image géométrique.

1.3.6 Les deux taches correspondant à chaque étoile sont séparées de $f\theta$. D'après le critère de Rayleigh, les étoiles sont résolues si le maximum d'une des figures de diffraction correspond au 1^{er} zéro de la seconde



$$\Rightarrow f\delta\theta = \frac{\lambda f}{D_1} \quad \boxed{\delta\theta = \frac{\lambda}{D_1}}$$

La résolution est d'autant meilleure que le diamètre du télescope est grand.

1.3.7 Application numérique : $\delta\theta = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 0,025'' \text{ d'arc}$

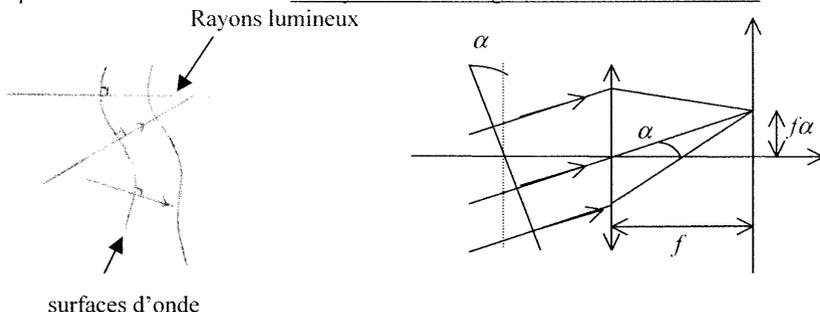
La résolution est indépendante de la focale du télescope. Ici elle est comparable à la résolution trouvée en 1.2.7, il est donc inutile de chercher à travailler avec de plus petits pixels sans augmenter le diamètre de télescope.

Partie II : Utilisation de l'optique adaptative

II.1 Effets de la turbulence atmosphérique

II.1.1 Etude qualitative

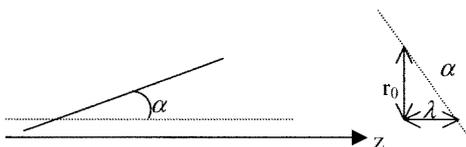
II.1.1.1 D'après le théorème de Mallus, les rayons sont orthogonaux aux surfaces d'onde.



II.1.1.2 Sans déformations l'image de l'étoile se situe dans le plan focale du télescope. Si la surface d'onde s'incline d'un angle α , l'image de l'étoile est alors centrée en $x = f.\alpha$.

Si α varie, la position de l'étoile évolue.

II.1.1.3



Au maximum, l'angle des rayons lumineux est de $\alpha_m = \frac{\lambda}{r_0}$

Or tout rayon lumineux d'angle α passe dans le plan focal image à une ordonnée $f.\alpha$. Tous les rayons lumineux provenant de l'étoile sont donc contenus dans une tache dont le diamètre est de l'ordre de $\Delta x = 2 \frac{\lambda f}{r_0}$.

II.1.1.4 Pour un télescope de diamètre de D_1 , on avait trouvé une tache de diamètre $2 \frac{\lambda f}{D_1}$. La perturbation atmosphérique caractérisée par r_0 , est donc responsable d'un élargissement de la tache image comparable à celui qui est dû à la diffraction dans un télescope de diamètre r_0 d'où le nom de diamètre de Fried.

II.1.2 Etude quantitative :

II.1.2.1 $\delta_i(t)$ n'a aucun effet. $\alpha_i(t)$ déplace le centre de la figure de diffraction en $x = f.\alpha_i(t)$.

II.1.2.2 Dans une fenêtre numéro n , $\delta_o(X, t) = \delta_i + \alpha_i n r_0 + \delta_n + (\alpha_i + \alpha_n)(X - n r_0)$

$$\delta_o(X, t) = \delta_i + \delta_n + \alpha_i X + \alpha_n X - \alpha_n n r_0$$

$\delta_o(X, t) = \delta_i + \alpha_i X + \delta_n + \alpha_n (X - n r_0)$ pour la cellule n , c'est à dire pour

$$n r_0 - \frac{r_0}{2} < X < n r_0 + \frac{r_0}{2}$$

II.1.2.3 On a remplacé $\delta(X, t)$ par $\delta_o(X, t)$

$$\text{Donc, } A_i(X) = A_0 \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda} \delta_o(X, t)\right]$$

Dans la cellule de numéro n , on a donc :

$$A_i(X) = A_0 \exp[-ik(\delta_i + \alpha_i X)] \exp[-ik(\delta_n + \alpha_n (X - n r_0))]$$

Pour exprimer que cette expression n'est valable qu'entre $n r_0 - \frac{r_0}{2}$ et $n r_0 + \frac{r_0}{2}$, on a multiplié par $\text{rect}\left[\frac{X - n r_0}{r_0}\right]$ qui vaut zéro en dehors de $[n r_0 - \frac{r_0}{2}; n r_0 + \frac{r_0}{2}]$. L'expression totale est donc la somme de toutes les expressions, valables dans chaque cellule.

$$A_i(X) = A_0 \exp[-ik(\delta_i + \alpha_i X)] \sum_{n=-N}^N \text{rect}\left[\frac{X - n r_0}{r_0}\right] \exp[-ik(\delta_n + \alpha_n (X - n r_0))]$$

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{L} \int_{\text{pupille}} A_i(X) \exp[ik \frac{xX}{f}] dX \\ &= \frac{A_0}{L} \exp[-ik\delta_i] \sum_{n=-N}^N \int_{\text{pupille}} \exp\left\{-ik[\alpha_i X + \delta_n + \alpha_n (X - n r_0) - \frac{xX}{f}]\right\} dX \\ &= \frac{A_0}{L} e^{-ik\delta_i} \sum_{n=-N}^N \exp[-ik(\delta_n - n\alpha_n r_0)] \int_{\text{pupille}} \exp\left\{\frac{2i\pi}{\lambda f} [x - (\alpha_i + \alpha_n) f] X\right\} dX \end{aligned}$$

$$\text{On calcul séparément } \int_{n r_0 - \frac{r_0}{2}}^{n r_0 + \frac{r_0}{2}} \exp\left\{\frac{2i\pi}{\lambda f} [x - (\alpha_i + \alpha_n) f] X\right\} dX$$

On fait un changement de variable : $X' = X - n r_0$

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{n r_0}{2}}^{\frac{n r_0}{2} + r_0} \exp\left\{\frac{2i\pi}{\lambda f} [x - (\alpha_i + \alpha_n) f] n r_0\right\} \exp\left\{\frac{2i\pi}{\lambda f} [x - (\alpha_i + \alpha_n) f] X'\right\} dX' \\ &= r_0 \sin c\left\{\frac{\pi r_0}{\lambda f} [x - \alpha_i f]\right\} \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda f} (x - \alpha_i f) n r_0\right] \end{aligned}$$

Donc

$$A(x) = \frac{A_0}{L} e^{-ik\delta_i} \sum_{n=-N}^N r_0 \sin c\left[\frac{\pi r_0}{\lambda f} (x - \alpha_i f)\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda f} (x - \alpha_i f) n r_0 - f\delta_n + \alpha_n n r_0\right]$$

$$A(x) = \frac{A_0}{L} e^{-ik\delta} \sum_{n=-N}^N r_0 \sin c \left[\frac{\pi r_0}{\lambda f} (x - \alpha_i f) \right] e^{i\Phi_n(x)}$$

Avec
$$\Phi_n(x) = \frac{k}{f} [(x - \alpha_i f) n r_0 - f \delta_n]$$

$$\text{II.1.2.4 } \sum_{n, m=-N}^N \exp[-i(\Phi_n - \Phi_m)] = 2N + 1 + \sum_{n \neq m} \exp[-i(\Phi_n - \Phi_m)]$$

Or $\Phi_n(x) = \frac{k}{f} [(x - \alpha_i f) n r_0 - f \delta_n]$ où δ_n est une variable aléatoire qui prend de nombreuses valeurs de sorte que Φ_n varie aléatoirement entre 0 et 2π . Il en va de même pour $\Phi_n - \Phi_m$, si bien que la somme des exponentielles complexes se brouille et tend vers 0 (dans le sens que pour $N \gg 1$, $\sum_{n \neq m} \exp[-i(\Phi_n - \Phi_m)] \ll 2N + 1$)

Donc
$$\sum_{n \neq m} \exp[-i(\Phi_n - \Phi_m)] \approx 2N + 1$$

$$\text{II.1.2.5 } I(x) = A(x) \cdot A^*(x)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{A_0^2}{L^2} r_0^2 \sin^2 c^2 \left[\frac{\pi r_0}{\lambda f} (x - \alpha_i f) \right] \sum_{n \neq m} \exp[-i(\Phi_n - \Phi_m)] \\ &= \frac{A_0^2}{L^2} r_0 (2N + 1) r_0 \sin^2 c^2 \left[\frac{\pi r_0}{\lambda f} (x - \alpha_i f) \right] \end{aligned}$$

$$I(x) = I_0 \frac{r_0}{D_1} \sin^2 c^2 \left[\frac{\pi r_0}{\lambda f} (x - \alpha_i f) \right]$$

On obtient la même forme de la tache de diffraction que pour un télescope de diamètre r_0 au lieu de D_1 .

Rq : En réalité, on observe du Speckle à l'intérieur de l'enveloppe en sinc^2 . Celui-ci évolue dans le temps et finit par se moyenner pour les temps de pose longs !

II.1.2.6 Même allure que la courbe I.3.5

Par analogie, $\delta\theta = \frac{\lambda}{r_0}$ à comparer à $\delta\theta = \frac{\lambda}{D_1}$

En ce qui concerne la résolution, il est donc inutile d'utiliser des télescopes de diamètres supérieurs à r_0 . Par contre, les grands télescopes ont toutefois l'intérêt de récolter plus de lumière et de voir ainsi des objet moins lumineux.

$$\text{II.1.2.7 Application Numérique : } \delta\theta = \frac{10^{-6}}{0,2} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 1'' \text{ d'arc}$$

Pour un télescope tel que le VLT, la perte est considérable. Comparer à $\delta\theta = 0,025''$ d'arc s'il est limité par la diffraction.

II.2 Système d'optique adaptative classique

II.2.1 Analyseur de surface d'onde de Shack-Hartmann.

II.2.1.1 On a vu que ce paramètre n'avait aucun effet sur la tache image.

II.2.1.2 Par construction $\alpha_i(t)$ est la pente moyenne de la surface d'onde. Or la pente de la cellule n est donnée par $\alpha_i + \alpha_n$, donc $\langle \alpha_i + \alpha_n \rangle = \alpha_i + \langle \alpha_n \rangle = \alpha_i \Rightarrow \langle \alpha_n(t) \rangle = 0$

II.2.1.3 Point lumineux sur chaque foyer image de chaque micro-lentille. (=cas particulier du II.2.1.4)

II.2.1.4 Sur chaque micro-lentille arrive une onde plane dont la direction fait un angle $\alpha_i(t)$ avec l'axe optique. Pour la fenêtre n. la lumière focalise donc en $x_n = nr_0 + f_2 \alpha_i$
De même que $\alpha_i(t)$, la position des points de focalisation $x_n(t)$ évolue dans le temps.

II.2.1.5 Comme la pente locale pour la fenêtre n est donnée par $\alpha_i(t) + \alpha_n(t)$. on a cette fois $x_n(t) = nr_0 + f_2[\alpha_i(t) + \alpha_n(t)]$

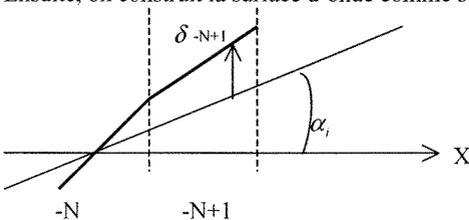
$$\Rightarrow \alpha_i(t) + \alpha_n(t) = \frac{x_n(t) - nr_0}{f_2}$$

II.2.1.6 On peut donc obtenir expérimentalement tous les $x_n(t)$. Pour découpler $\alpha_i + \alpha_n$, on calcule la moyenne de l'expression précédente.

$$\alpha_i(t) = \left\langle \frac{x_n - nr_0}{f_2} \right\rangle = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \frac{x_n(t) - nr_0}{f_2}$$

Puis on détermine tous les α_n par $\alpha_n(t) = \frac{x_n(t) - nr_0}{f_2} - \alpha_i(t)$

II.2.1.7 Une translation globale de la surface d'onde n'ayant aucun effet, on part de $\delta_{-N}(t) = 0$
Ensuite, on construit la surface d'onde comme sur le schéma :



$$\delta_{-N+1} = \alpha_{-N} \frac{r_0}{2} + \alpha_{-N+1} \frac{r_0}{2} - \alpha_i r_0$$

$$\delta_{-N+1} = \left(\frac{\alpha_{-N} + \alpha_{-N+1}}{2} - \alpha_i \right) r_0 \dots \text{etc.} \dots$$

Remarque : une fois la surface d'onde reconstruite, on peut reconstruire à posteriori la tache image que l'on aurait eu sans turbulences, la méthode de déconvolution.

B Modélisation des propriétés électromagnétiques des mélanges aléatoires diélectrique-conducteur

PARTIE I

LOIS GÉNÉRALES

I.1. Lois générales de l'électromagnétisme :

I.1.1. Equation locale de Maxwell-Gauss : $\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0}$.

I.1.2. Sens physique de cette équation : les lignes de champ électrique fuient les charges + et convergent vers les charges -.

I.1.3. Equation locale de Maxwell-Ampère : $\boxed{\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t)}$.

I.1.4. Sens physique de cette équation : \vec{B} tourne autour de \vec{j} . $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ est aussi une source de champ magnétique (par exemple entre les armatures d'un condensateur) : c'est le courant de déplacement.

I.1.5. $\|\vec{j}\|$ s'exprime en $\boxed{\text{A.m}^{-2}}$ dans le Système International.

I.2. Electromagnétisme dans les milieux matériels :

I.2.1. $\rho = \rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{liée}}$.

ρ_{libre} représente la densité des charges susceptibles de se déplacer sur des distances grandes par rapport à la distance interatomique.

$\rho_{\text{liée}}$ représente la densité des charges ne pouvant se déplacer que sur des distances microscopiques.

I.2.2. Le vecteur polarisation \vec{P} représente le moment dipolaire électrique par unité de volume. Tout volume $d\tau$ autour d'un point M est le siège d'un dipôle de moment $d\vec{p} = \vec{P}(M)d\tau$.

I.2.3. $\vec{j} = \vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_{\text{liée}} + \vec{j}_M$.

\vec{j}_M existe si $\operatorname{rot} \vec{M} \neq \vec{0}$, et $\vec{j}_{\text{liée}}$ existe si \vec{P} dépend du temps.

I.2.4. Le vecteur aimantation \vec{M} est l'analogue magnétique du vecteur polarisation \vec{P} : Tout volume $d\tau$ autour d'un point M est le siège d'un dipôle magnétique de moment $d\vec{m} = \vec{M}(M)d\tau$.

I.2.5. Premier cas particulier : diélectrique l.h.i. non magnétique.

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} \quad \operatorname{div}(\epsilon \vec{E}) = 0, \text{ d'où } \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = 0} \quad \boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega \vec{B}} \quad \boxed{\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon i\omega \vec{E}}$$

I.2.6. Second cas particulier : On considère un milieu ohmique, très bon conducteur, non magnétique, de conductivité électrique réelle σ et de perméabilité magnétique μ_0 .

I.2.6.a. Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

I.2.6.b. En admettant que l'on peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction, $\text{div} \vec{D} = 0$ $\text{rot} \vec{E} = -i\omega \vec{B}$ $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E}$.

I.2.6.c. Par analogie avec la question I.2.5, on peut dire qu'un milieu conducteur se comporte comme un diélectrique, de permittivité électrique complexe $\underline{\epsilon} = -i \frac{\sigma}{\omega}$. En écrivant $\vec{D} = \underline{\epsilon} \vec{E}$, les équations du I.2.6.b se ramènent à celles du I.2.5.

PARTIE II

PERMÉABILITÉ MAGNÉTIQUE EFFECTIVE D'UN MÉLANGE DIÉLECTRIQUE-CONDUCTEUR.

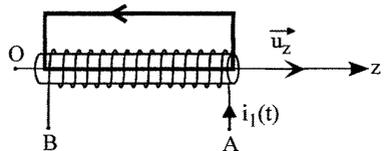
II.1. Signification physique des parties réelle et imaginaire de la perméabilité magnétique complexe d'un milieu linéaire, homogène et isotrope :

II.1.1. L'approximation des régimes quasi stationnaires (ou quasi permanents) consiste à négliger les phénomènes de propagation ; ceci est possible lorsque la dimension caractéristique du circuit est petite devant la longueur d'onde : $\ell \ll \lambda$.

II.1.2. Pour pouvoir utiliser cette approximation, il faut que $\omega \ll 2\pi c / \ell$.

II.1.3. Application numérique : $\ell = 30$ cm. $c / \ell = 1$ GHz. Il ne faut pas dépasser 10 MHz pour rester dans le cadre de cette approximation.

II.1.4. En appliquant le théorème d'Ampère sur le contour défini ci-contre, on obtient, avec les hypothèses simplificatrices de l'énoncé : $\vec{H} = (N i_1 / \ell) \vec{u}_z$.



II.1.5. On en déduit le champ magnétique complexe \vec{B} à l'intérieur : $\vec{B} = (\underline{\mu} N i_1 / \ell) \vec{u}_z$.

II.1.6. Le flux complexe φ de \vec{B} à travers une spire du solénoïde, dont la surface est orientée dans la direction et le sens de Oz s'écrit : $\varphi = \underline{\mu} S N i_1 / \ell$, avec $S = \pi a^2$.

II.1.7. La force électromotrice induite complexe e , orientée de A vers B, dans le solénoïde vaut : $e_{A \rightarrow B} = -\underline{\mu} S i \omega N^2 i_1 / \ell$.

II.1.8. $\underline{V}_A - \underline{V}_B = R_1 i_1 - e_{A \rightarrow B}$ identifié à $\underline{V}_A - \underline{V}_B = R_2 i_1 + i L \omega i_1$, permet d'écrire : $R_2 = R_1 + \mu^2 S \omega N^2 / \ell$ et $L = \mu' S N^2 / \ell$.

II.1.9. Conclusion : $\mu^{''}$ est lié aux "pertes fer". Son signe doit être positif.

II.2. Calcul de la perméabilité magnétique effective d'un mélange :

II.2.1. $\vec{A}_{op}(M,t) = \frac{1}{2} \vec{B}_{op}(M,t) \wedge \vec{OM}$ conduit à \vec{A}_{op} conduit à \vec{A}_{op} dans la base des coordonnées cartésiennes.

$$\begin{cases} -\frac{y}{2} B_0 e^{i\omega t} \\ \frac{x}{2} B_0 e^{i\omega t} \\ 0 \end{cases}$$

Si on en prend le rotationnel, on retrouve bien $B_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z$.

II.2.2. $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}_{op}}{\partial t}$ conduit à $\vec{E} = -\frac{i\omega}{2} B_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z \wedge r \vec{u}_r$, puis à $\vec{E} = -(i\omega/2) B_0 r \sin \theta e^{i\omega t} \vec{u}_\theta$.

II.2.3. On en déduit le vecteur densité complexe de courant \vec{j} dans la sphère : $\vec{j} = -\sigma(i\omega/2) B_0 r \sin \theta e^{i\omega t} \vec{u}_\theta$.

II.2.4. On découpe la sphère en petites spires élémentaires de surface $\pi r^2 \sin^2 \theta$, parcourues par un courant $j r dr d\theta$, ce qui donne le moment magnétique dipolaire de la sphère :

$$\vec{m} = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi j r dr d\theta \pi r^2 \sin^2 \theta \vec{u}_z. \text{ D'où : } \vec{m} = \frac{-2i\sigma\omega}{15} \pi R^5 B_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z.$$

II.2.5. On en déduit le vecteur aimantation complexe \vec{M} pour un mélange à l'intérieur duquel le taux volumique en sphères conductrices est ϕ_v : $\vec{M} = \frac{\phi_v}{\frac{4}{3}\pi R^3} \vec{m}$, ce qui donne : $\vec{M} = \frac{-i\sigma\omega}{10} \phi_v R^2 B_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z$.

II.2.6. Soit \vec{H} l'excitation magnétique complexe dans le mélange. Puisque $\vec{B}_{op} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ et du fait de la relation constitutive du matériau homogène équivalent : $\vec{B}_{op} = \underline{\mu}_{eff} \vec{H}$, il vient : $\underline{\mu}_{eff} = \frac{\mu_0}{1 + \frac{i\sigma\omega\mu_0\phi_v R^2}{10}}$.

II.2.7. Application numérique :

II.2.7.1. $\underline{\mu}_{eff} = 0,956 - 0,204i$.

II.2.7.2. On voit que $\Im m(\underline{\mu}_{eff}) < 0$, qui correspond bien à $\mu'' > 0$ comme au II.1.9.

PARTIE III

PERMITTIVITÉ ÉLECTRIQUE EFFECTIVE D'UN MÉLANGE DIÉLECTRIQUE-CONDUCTEUR.

III.1. Signification physique des parties réelle et imaginaire de la permittivité électrique complexe d'un milieu linéaire homogène et isotrope :

III.1.1. Compte tenu des hypothèses formulées, le théorème de Gauss donne $\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} (-\vec{u}_z)$ entre les deux

armatures. Puis $V_+ - V_- = \int_{e/2}^{-e/2} \frac{-Q}{\epsilon_0 S} \vec{u}_z \cdot d\vec{z} = \frac{Qe}{\epsilon_0 S}$. D'où la capacité : $C_0 = \frac{Q}{V_+ - V_-} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$, puis

l'impédance complexe : $Z = \frac{e}{i\omega \epsilon_0 S}$.

III.1.2. Si l'espace entre les deux armatures est rempli d'un milieu diélectrique linéaire homogène et isotrope, de permittivité complexe $\underline{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon''$, la nouvelle impédance complexe du dipôle AB s'écrit :

$$\underline{Z}' = \frac{e}{\omega S(\epsilon' + i\epsilon')}$$

III.1.3. Le dipôle AB peut se mettre sous la forme de deux branches en parallèle (les admittances s'ajoutant) : l'une correspondant à une résistance $R_s = \frac{e}{\omega S \epsilon''}$ et l'autre à un condensateur idéal, de

capacité $C = \frac{\epsilon' S}{e}$.

III.1.4. ϵ'' est lié aux pertes Joule (courant de fuite dans le condensateur).

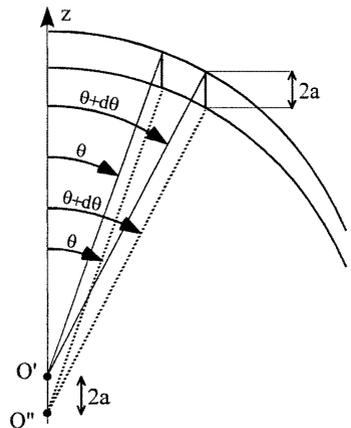
III.2. Calcul de la polarisabilité d'une molécule d'un diélectrique :

III.2.1. Calcul du champ \vec{E}_{ext} :

III.2.1.1. En tout point N de la surface de la sphère de Lorentz, repéré par ses coordonnées sphériques, la densité surfacique de charges est $\sigma_p = -P \cos \theta$.

III.2.1.2. On admet que cette distribution superficielle de charges électrostatiques est équivalente à un ensemble de deux sphères de rayon R_L chargées uniformément en volume : l'une de centre O' et de charge volumique $-\rho_0$, l'autre de centre O'' et de charge volumique $+\rho_0$.

L'aire de la section grisée est $dS = R_L d\theta 2a \cos \theta$. Le tore engendré par la rotation de cette section autour de Oz correspond à un volume $d\tau = 2\pi R_L \sin \theta dS$. Dans ce volume, il y a une charge non compensée (négative pour $\theta < \pi/2$) de valeur $dq = -\rho_0 d\tau$.



Pour la couronne circulaire de largeur angulaire $d\theta$, le modèle de distribution superficielle donne une charge $dq = \sigma_p 2\pi R_L \sin \theta R_L d\theta$.

En égalisant les deux charges élémentaires, on obtient : $P = 2a\rho_0$.

III.2.1.3. La symétrie sphérique permet d'écrire $\vec{E}'(M) = E' \frac{\vec{O'M}}{O'M}$. Le théorème de Gauss appliqué sur

une sphère de centre O' et de rayon $r < R_L$ donne : $4\pi r^2 E' = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{(-\rho_0)}{\epsilon_0}$. Ainsi, le champ électrique \vec{E}'

créé en O par la sphère de centre O' est $\boxed{\vec{E}' = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OO'}}$.

III.2.1.4. De même, le champ électrique \vec{E}'' créé en O par la sphère de centre O'' est $\boxed{\vec{E}'' = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OO''}}$.

III.2.1.5. Il vient donc $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}' + \vec{E}'' = \frac{\rho_0 \overrightarrow{OO''O'}}{3\epsilon_0} = \frac{\rho_0 2a\vec{u}_z}{3\epsilon_0} = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$.

III.2.2. $\vec{E}_L = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{ext}}$ conduit à $\boxed{\vec{E}_L = \vec{E}_0 + \vec{P}/(3\epsilon_0)}$.

III.2.3. Si N désigne le nombre de molécules (c'est-à-dire de sphères polarisables) par unité de volume et si α désigne la polarisabilité de ces molécules, on a, par définition de la polarisabilité : $\vec{P} = N\alpha\vec{E}_L$.

A l'aide de la question précédente, on a donc : $\vec{E}_L = \frac{\vec{E}_0}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}}$.

Or, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}$, et $\vec{D} = \epsilon \vec{E}_0$, ce qui permet d'écrire : $\epsilon \vec{E}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \frac{N\alpha \vec{E}_0}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}}$, puis $\boxed{\alpha = \frac{3\epsilon_0 (\epsilon - \epsilon_0)}{N (\epsilon + 2\epsilon_0)}}$.

III.3. Modèle de Clausius-Mossotti pour le calcul de la permittivité électrique effective d'un mélange :

III.3.1. Dans un volume V de mélange, contenant un grand nombre de sphères de milieu 1, le nombre de molécules est $n_1 = N_1 V$. Mais on peut aussi écrire $n_1 = N_1 (\phi_{v1} V)$. D'où $\boxed{N_1 = N_1 \phi_{v1}}$.

III.3.2. Comme au III.2.2, $\boxed{\vec{E}_L = \vec{E}_0 + \vec{P}/(3\epsilon_0)}$.

III.3.3. A l'aide de la relation générale dans le milieu diélectrique homogène, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0 + \vec{P}$, de la relation constitutive de ce milieu : $\vec{D} = \epsilon_{\text{CM}} \vec{E}_0$ et de la question précédente, on peut écrire :

$$\vec{E}_L = \vec{E}_0 + \frac{\epsilon_{\text{CM}} - \epsilon_0}{3\epsilon_0} \vec{E}_0, \text{ d'où } \boxed{\vec{E}_L = \frac{\epsilon_{\text{CM}} + 2\epsilon_0}{3\epsilon_0} \vec{E}_0}.$$

III.3.4. En utilisant le résultat du III.2.3, on peut écrire : $\boxed{\alpha_1 = \frac{3\epsilon_0 (\epsilon_1 - \epsilon_0)}{N_1 (\epsilon_1 + 2\epsilon_0)}}$.

III.3.5. Du fait que $\vec{P} = N_1 \alpha_1 \vec{E}_L$, et que $\vec{P} = (\epsilon_{\text{CM}} - \epsilon_0) \vec{E}_0$, les résultats des 2 questions précédentes

conduisent bien à : $\frac{\epsilon_{\text{CM}} - \epsilon_0}{\epsilon_{\text{CM}} + 2\epsilon_0} = \phi_{v1} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + 2\epsilon_0}$.

III.4. Modèle de Maxwell-Garnett pour le calcul de la permittivité électrique effective d'un mélange diélectrique-conducteur :

III.4.1. Par analogie avec le résultat du III.3.5, avec les correspondances suivantes :

$$\epsilon_0 \leftrightarrow \epsilon_2, \epsilon_{CM} \leftrightarrow \epsilon_{MG}, \phi_{v1} \leftrightarrow \phi_v, \epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_1$$

On établit directement l'expression de ϵ_{MG} :

$$\epsilon_{MG} = \epsilon_2 \frac{\epsilon_1 + 2\epsilon_2 + 2\phi_v(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2 - \phi_v(\epsilon_1 - \epsilon_2)}$$

III.4.2. Dans le premier cas limites $\phi_v = 0$, l'expression précédente conduit à $\epsilon_{MG} = \epsilon_2$, ce qui est logique puisqu'on est en présence du milieu 2 pur.

Dans le second cas limites $\phi_v = 1$, l'expression donne $\epsilon_{MG} = \epsilon_1$, ce qui n'est pas surprenant puisqu'on est en présence du milieu 1 pur.

III.4.3. On travaille à présent en régime harmonique, de pulsation ω . On admet que les résultats précédents restent valables, à condition d'utiliser les grandeurs complexes. Le milieu 1 est un milieu conducteur ohmique, de conductivité électrique réelle σ . D'après le I.2.6, on peut lui attribuer une permittivité électrique complexe effective $\epsilon_1 = -i\sigma/\omega$. Le milieu 2 est un diélectrique parfait : sa permittivité électrique complexe $\epsilon_2 = \epsilon_2$ est réelle. On reporte dans l'expression du III.4.1. Après séparation des parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$\Re(\epsilon_{MG}) = \epsilon_2(1 - \phi_v) \frac{2\epsilon_2^2(2 + \phi_v) + (\sigma^2/\omega^2)(1 + 2\phi_v)}{\epsilon_2^2(2 + \phi_v)^2 + (\sigma^2/\omega^2)(1 - \phi_v)^2} \quad \text{et} \quad \Im(\epsilon_{MG}) = \frac{-9\epsilon_2^2\sigma\phi_v}{\omega[\epsilon_2^2(2 + \phi_v)^2 + (\sigma^2/\omega^2)(1 - \phi_v)^2]}$$

PARTIE IV

APPLICATION À LA RÉALISATION D'UN REVÊTEMENT NON RÉFLÉCHISSANT

IV.1. A l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot}\vec{E} = -i\omega\vec{B}$, on a $-ik_x\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i = -i\omega\vec{B}_i$, d'où

$$\vec{B}_i = \frac{k_x\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{\omega}. \quad \text{Ce qui donne : } \vec{B}_i = \frac{k_x}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - k_x z)} \vec{u}_y.$$

IV.2. On obtient de même pour l'onde transmise : $\vec{B}_t = \frac{k_b}{\omega} E_{0t} e^{i(\omega t - k_b z)} \vec{u}_y.$

IV.3. Et pour l'onde réfléchie : $\vec{B}_r = \frac{-k_a}{\omega} E_{0r} e^{i(\omega t + k_a z)} \vec{u}_y.$

IV.4. $\vec{k}_i = k_x\vec{u}_z$, $\vec{k}_r = -k_x\vec{u}_z$, $\vec{k}_t = k_b\vec{u}_z$. Comme on l'a vu au IV.1, l'équation de Maxwell-Faraday donne, pour chaque onde plane progressive harmonique : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$. De plus, l'équation de Maxwell-Ampère

$$\text{rot}\vec{H} = i\omega\vec{D} \quad \text{donne} \quad \vec{E} = \frac{-\vec{k} \wedge \vec{B}}{\mu\epsilon\omega}. \quad \text{En combinant les 2 équations, on obtient : } k^2 = \omega^2\epsilon\mu.$$

$$\text{D'où } k_a^2 = \mu_0\epsilon_0\omega^2 \quad \text{et} \quad k_b^2 = \mu\epsilon\omega^2.$$

IV.5. La continuité de la composante tangentielle du champ électrique en $z = 0$ donne : $E_0 + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_{0t}$.

En l'absence de courants de surface en $z = 0$ (ce qui est le cas ici), on peut écrire la continuité de la composante tangentielle de l'excitation magnétique $\frac{k_a}{\omega \mu_0} (E_0 - E_{0r}) = \frac{k_b}{\omega \underline{\mu}} \underline{E}_{0t}$:

D'où finalement :
$$\underline{r} = \frac{k_a \underline{\mu} - k_b \mu_0}{k_a \underline{\mu} + k_b \mu_0}$$

IV.6. L'annulation de l'onde réfléchie correspond à $\underline{r} = 0$, d'où $k_a \underline{\mu} = k_b \mu_0$, puis $k_a^2 \underline{\mu}^2 = k_b^2 \mu_0^2$, et donc

$\mu_0 \varepsilon_0 \underline{\mu}^2 = \underline{\mu} \varepsilon \mu_0^2$, ce qui conduit à
$$\frac{\underline{\mu}_0}{\varepsilon_0} = \frac{\underline{\mu}}{\varepsilon}$$

IV.7. L'impédance caractéristique du milieu a est $Z_1 = \frac{\omega \mu_0}{k_a} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$. En effet, $\underline{H}_1 = \frac{k_a}{\mu_0 \omega} E_0 e^{i(\omega t - k_a z)} \underline{u}_y$, donc le rapport de l'amplitude complexe du champ électrique à celle de l'excitation magnétique est
$$\frac{E_0}{\frac{k_a}{\mu_0 \omega} E_0}$$
.

De même, ce rapport vaut $-Z_1$ pour l'onde réfléchie.

Pour l'onde transmise, on obtient
$$Z_2 = \frac{\omega \underline{\mu}}{k_b}$$

La relation obtenue à la question précédente correspond à $\underline{Z}_2 = Z_1$, donc à une « adaptation d'impédance ».

IV.8. On suppose que $\underline{\mu} = \mu_0$ et que la partie réelle de $\underline{\varepsilon}$ est positive. Donc $k_b^2 = \mu_0 (\varepsilon' - i\varepsilon'') \omega^2$.

Posons $k_b = k_b' - ik_b''$. L'onde transmise est donc en $e^{-k_b z} e^{i(\omega t - k_b z)}$. Pour qu'elle se propage selon z croissant, il faut $k_b' > 0$. Pour qu'elle soit absorbée, il faut $k_b'' > 0$. Donc il faut que l'argument de k_b soit dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Celui de k_b^2 doit ainsi se trouver dans l'intervalle $[-\pi, 0]$.

Par conséquent, il est nécessaire que $\varepsilon'' > 0$, c'est-à-dire $\Im m(\underline{\varepsilon}) < 0$.

IV.9. De manière plus générale, compte tenu des différents résultats obtenus dans cette partie IV, pour qu'un matériau absorbant (en supposant que les parties réelles de $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{\mu}$ sont positives) puisse jouer convenablement son rôle, il faut déjà qu'il y ait adaptation d'impédance :
$$\frac{\underline{\mu}_0}{\varepsilon_0} = \frac{\underline{\mu}}{\underline{\varepsilon}}$$

$\underline{\mu}' = \alpha \varepsilon'$ et $\underline{\mu}'' = \alpha \varepsilon''$, avec $\alpha = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0}$.

$k_b^2 = (\underline{\mu}' - i\underline{\mu}'')(\varepsilon' - i\varepsilon'') \omega^2$ peut encore s'écrire $k_b^2 = A - iB$, avec $A = \alpha(\varepsilon'^2 - \varepsilon''^2) \omega^2$ et $B = 2\alpha \varepsilon' \varepsilon'' \omega^2$.

Comme précédemment, on peut poser : $\underline{k}_b = k_b' - ik_b''$. Et il faut à nouveau que l'argument de \underline{k}_b^2 se trouve dans l'intervalle $[-\pi, 0]$, d'où $B > 0$. Puisque $\varepsilon' > 0$, on en déduit qu'il faut $\varepsilon'' > 0$, c'est-à-dire $\Im m(\underline{\varepsilon}) < 0$.

La relation $\mu'' = \alpha \varepsilon''$ conduit également à $\mu'' > 0$, donc à $\Im m(\underline{\mu}) < 0$.

En résumé, un bon matériau absorbant doit vérifier $\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} = \frac{\mu}{\varepsilon}$, $\Im m(\underline{\varepsilon}) < 0$ et $\Im m(\underline{\mu}) < 0$. Ceci doit être vrai à toute fréquence, ce qui rend très difficile l'élaboration de ce matériau.

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉES

Composition d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique ♦ Session : 2003

Première Partie : Echange d'énergie dans les réseaux

1. Source de tension continue, ligne résistive, débit sur R

$$1.1 \quad P = RI^2 = R \frac{E^2}{(R + R_l)^2} \Rightarrow P \text{ est maximale pour } \frac{(R + R_l)^2}{R} \text{ minimal}$$

$$\Rightarrow R + 2R_l + \frac{R_l^2}{R} \text{ mini} \Rightarrow 1 - \frac{R_l^2}{R^2} = 0 \Rightarrow \boxed{R = R_l}$$

$$1.2 \text{ d'où } P_{\max} = R_l \frac{E}{(R_l + R_l)^2} \Rightarrow \boxed{P_{\max} = \frac{E^2}{4R_l}}$$

$$1.3 \quad \boxed{V_p = P_{\max} = \frac{E}{2}} \text{ puisque } R = R_l$$

$$1.4 \quad P_{cc} = \frac{E^2}{R_l}, \text{ donc } \boxed{P_{\max} = \frac{P_{cc}}{4}}$$

2. Source de tension alternative, ligne résistive et inductive, débit sur (R,X)

$$2.1 \quad P = RI^2 = R \frac{E^2}{(R + R_l)^2 + (X + X_l)^2} \Rightarrow P \text{ est maximale pour } \boxed{X = -X_l} \text{ et donc idem 1.1 pour}$$

$$\boxed{R = R_l}$$

$$2.2 \text{ d'où } \boxed{P_{\max} = \frac{E^2}{4R_l}}$$

$$2.3 \quad P_{cc} = R_l I_{cc}^2 = R_l \frac{E^2}{R_l^2 + X_l^2}$$

$$\text{si } P_{\max} > P_{cc} \text{ alors } \frac{E^2}{4R_l} > R_l \frac{E^2}{R_l^2 + X_l^2} \Rightarrow 4R_l^2 < R_l^2 + X_l^2 \Rightarrow \boxed{X_l > \sqrt{3}R_l}$$

Condition très réaliste....

$$2.4 \quad S_{cc} = EI_c = \frac{E^2}{\sqrt{R_l^2 + X_l^2}}$$

$$\text{si } P_{\max} > S_{cc} \text{ alors } \frac{E^2}{4R_l} > \frac{E^2}{\sqrt{R_l^2 + X_l^2}} \Rightarrow 16R_l^2 < R_l^2 + X_l^2 \Rightarrow \boxed{X_l > \sqrt{15}R_l}$$

Condition toujours très réaliste....

3. Source de tension alternative, ligne inductive, débit sur (R,X)

$$3.1 \quad P = RI^2 = R \frac{E^2}{R^2 + (X + X_l)^2} \Rightarrow P \text{ est maximale à } R \text{ donnée, pour } \boxed{X = -X_l}$$

$$3.2 \quad \text{Dans ce cas } \boxed{P_{\max} = \frac{E^2}{R}}$$

$$3.3 \quad S_{cc} = \frac{E^2}{X_l} \text{ donc } \boxed{P_{\max} > S_{cc} \text{ si } R < X_l}$$

$$3.4 \quad \text{Pour } P_{\max} = S_{cc}, \text{ alors } R = X_l; \text{ et comme } X = -X_l, \text{ l'argument du récepteur est égal à } \boxed{-\frac{\pi}{4}}$$

$$3.5 \quad R_l \ll X_l; \text{ On peut prendre comme hypothèse } \underline{R_l = 0} \text{ si } \underline{R_l \ll R} \text{ également.}$$

4. Source de tension alternative, ligne inductive, débit sur (R, Rtan γ)

$$4.1 \quad P = RI^2 = R \frac{E^2}{R^2 + (X_l + R \tan \varphi)^2} \text{ est maximale pour } R + \frac{1}{R} (X_l + R \tan \varphi)^2 \text{ mini}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{X_l^2}{R^2} + \tan^2 \varphi = 0 \Rightarrow \boxed{R_{p_{\max}} = X_l \cos \varphi}$$

$$4.2 \quad X_{p_{\max}} = R_{p_{\max}} \tan \varphi = X_l \sin \varphi, \text{ donc } \boxed{Z_{p_{\max}} = X_l}$$

$$4.3 \quad \text{dans ces conditions, } P_{\max} = X_l \cos \varphi \frac{E^2}{X_l^2 \cos^2 \varphi + (X_l + X_l \sin \varphi)^2} = \frac{E^2 \cos \varphi}{2X_l (1 + \sin \varphi)}$$

$$\text{soit en fonction de } S_{cc}, \quad \boxed{P_{\max} = \frac{S_{cc} \cos \varphi}{2 (1 + \sin \varphi)}}$$

$$4.4 \quad Q_{p_{\max}} = P_{\max} \tan \varphi \Rightarrow \boxed{Q_{p_{\max}} = \frac{S_{cc} \sin \varphi}{2 (1 + \sin \varphi)}}$$

$$P_{\max} = VI \cos \varphi = R_{p_{\max}} I^2 = X_l \cos \varphi I^2 = \frac{E^2 \cos \varphi}{2X_l (1 + \sin \varphi)}$$

$$\text{d'où } I = \frac{E}{X_l \sqrt{2} \sqrt{1 + \sin \varphi}}$$

$$\text{et } V_{p_{\max}} = Z_{p_{\max}} \cdot I = X_l \cdot I \text{ d'où on tire } \boxed{V_{p_{\max}} = \frac{E}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \sin \varphi}}}$$

$$4.5 \quad Q_{gp_{\max}} = X_l \cdot I^2 + Q_{p_{\max}} = X_l \frac{E^2}{2X_l^2 (1 + \sin \varphi)} + \frac{S_{cc} \sin \varphi}{2 (1 + \sin \varphi)} \Rightarrow \boxed{Q_{gp_{\max}} = \frac{S_{cc}}{2}}$$

indépendante de φ

4.6

φ	$\frac{P_{\max}}{S_{cc}}$	$\frac{Q_{p,\max}}{S_{cc}}$	$\frac{V_{p,\max}}{S_{cc}}$
0°	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
30°	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
-30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1

5. $P < P_{\max}$

5.a Etude de la tension des bornes du récepteur.

$$5.a.1/P = RI^2 = R \frac{E^2}{R^2 + (X_l + R \tan \varphi)^2} \Rightarrow P = \frac{E^2}{R} \frac{1}{1 + \left(\frac{X_l}{R} + R \tan \varphi\right)^2}$$

$$P = VI \cos \varphi = RI^2 \Rightarrow V = \frac{RI}{\cos \varphi} \Rightarrow V = \frac{R}{\cos \varphi} \frac{E}{\sqrt{R^2 + (X_l + R \tan \varphi)^2}}$$

$$\text{ou } V = \frac{E}{\cos \varphi} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{X_l}{R} + \tan \varphi\right)^2}}$$

et $P = P_{\max}$ et $V = V_{\max}$ lorsque $R = X_l \cos \varphi$

$$5.a.2 \begin{cases} \text{si } R \downarrow 0 \text{ alors } P \downarrow 0 \text{ et } V \downarrow 0 \\ \text{si } R = X_l \cos \varphi \text{ alors } P = P_{\max}, V \text{ croissant} \\ \text{si } R \uparrow \infty \text{ alors } P \downarrow 0 \text{ et } V \uparrow E \end{cases}$$

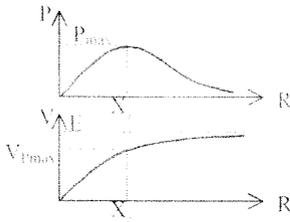
$$\text{donc } \begin{cases} P(R) \text{ croissante puis décroissante} \\ V(R) \text{ croissante} \end{cases}$$

\Rightarrow il existe deux valeur de R qui absorbent la même puissance sous deux tension autour de

$$V_{p,\max}$$

$$5.a.3 \text{ pour } \varphi = 0, P = R \frac{E^2}{R^2 + X_l^2}$$

$$\text{et } V = \frac{E}{\sqrt{1 + \frac{X_l^2}{R^2}}}$$



5a.4 Bilan de puissance apparente : $(EI)^2 = P^2 + (Q + X_l I^2)^2$ avec $I^2 = \frac{P^2 + Q^2}{V^2}$

$$\text{ou } I^2 = \frac{P^2}{V^2} (1 + \tan^2 \varphi) = \frac{P^2}{V^2 \cos^2 \varphi}$$

soit $(EI)^2 = P^2 + Q^2 + 2QX_l I^2 + X_l^2 I^4$

$$\Rightarrow E^2 = V^2 + 2P \tan \varphi X_l + X_l^2 \frac{P^2}{V^2 \cos^2 \varphi}, \text{ d'où l'éq. bicarrées recherchée :}$$

$$\Rightarrow 0 = V^4 + V^2 (2P \tan \varphi X_l - E^2) + \frac{X_l^2 P^2}{V^2 \cos^2 \varphi}$$

5a.5 admet deux solutions si le discriminant est positif

$$\text{soit : } (2P \tan \varphi X_l - E^2)^2 > \frac{4X_l^2 P^2}{\cos^2 \varphi}$$

$$\text{donc } 2P \tan \varphi X_l - E^2 > \frac{2X_l P}{\cos \varphi} \text{ ou } E^2 - 2P \tan \varphi X_l > \frac{2X_l P}{\cos \varphi}$$

$$2X_l P \left(\tan \varphi - \frac{1}{\cos \varphi} \right) > E^2$$

impossible

$$E^2 > 2PX_l \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\text{soit } P > \frac{S_{cc}}{2} \frac{\cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \text{ (déjà vu)}$$

$$\text{deux solutions : } V = \sqrt{\frac{E^2 - 2X_l P \tan \varphi \pm \sqrt{(2X_l P \tan \varphi - E^2)^2 - 4X_l^2 P^2 / \cos^2 \varphi}}{2}}$$

5a.6 En fonctionnement normal, on veut bien sûr V/E le plus proche de 1...

\Rightarrow partie supérieure des courbes

5a.7 En fonctionnement à vide, ($R \uparrow \infty$), alors $V=E$; il est souhaitable de ne pas descendre en dessous de $R = X_l \cos \varphi$

5a.8 Si la charge est compensée, alors $\tan \varphi$ décroît ; or, on voit que, à P donnée, la tension V augmente si $\tan \varphi$ diminue.

5b Compensation série

$$5b.1 \tan \varphi = 0,5 \text{ et } P = \frac{S_{cc}}{4} = \frac{E^2}{4X_l}; \frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \tan^2 \varphi = \frac{5}{4}$$

en reportant dans l'équation du second degré

$$0 = V^4 + V^2 \left(2 \frac{E^2}{4X_l} X_l - E^2 \right) + \frac{E^4}{16} \frac{5}{4} \Rightarrow 0 = \frac{V^4}{4} - \frac{3V^2}{4} + \frac{5}{64}$$

$$\Delta = \frac{9}{16} - 4 \frac{5}{64} = \frac{4}{16} = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \text{ d'où } \frac{V^2}{E^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{8} \Rightarrow \boxed{V = 0,79E}$$

valeur supérieure à la courbe....

5b.2 avec la compensation en série, P est inchangée

dans l'équation bicarrée, il faut remplacer X_l par $\frac{X_l}{2}$

$$0 = V^4 + V^2 \left(2 \frac{E^2}{4X_l} \frac{1}{2} X_l - E^2 \right) + \frac{E^4}{16} \frac{5}{4} \frac{X_l^2}{4}$$

$$0 = \frac{V^4}{E^4} + \frac{V^2}{E^2} \left(\frac{1}{8} - 1 \right) + \frac{5}{4 \times 4 \times 16} \Rightarrow \Delta = \frac{49}{64} - \frac{4 \times 5}{4 \times 4 \times 16} = \frac{44}{64}$$

$$\frac{V^2}{E^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{8} + \sqrt{\frac{44}{64}} \right) \Rightarrow \boxed{V = 0,923E} \text{ (idem)}$$

5b.3 tant que le récepteur reste inductif, sauf évidemment si le réactif de la ligne est totalement compensé (c'est à dire $X_c = -X_l$), on aura toujours $V < E$

5c Compensation parallèle

Sur le récepteur compensé : $P = \frac{S_{cc}}{4}$

$$Q = P \tan \varphi + Q_c \text{ donc } \varphi \text{ devient } \varphi' \text{ pour que } V=E \text{ et on reporte}$$

dans l'équation bicarrée

$$V^4 + V^2 \left(2 \frac{E^2}{4X_l} \tan \varphi' X_l - E^2 \right) + X_l^2 \frac{E^4}{16 X_l^2} (1 + \tan^2 \varphi') = 0 \text{ et } V=E$$

$$1 + \frac{1}{2} \tan \varphi' - 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \tan^2 \varphi' = 0 \quad \leftarrow \text{solution la plus économique}$$

$$\tan^2 \varphi' + 8 \tan \varphi' + 1 = 0 \Rightarrow \tan \varphi' = \frac{-8 + \sqrt{64 - 4}}{2} = -0,127$$

$$\tan \varphi' = \frac{0,5P + Q_c}{P} \Rightarrow \boxed{Q_c = -0,627P}$$

5d Introduction d'un transformateur

5d.1 En ramenant tout au secondaire, alors E devient mE

$$X_l \text{ devient } X_{l2} + m^2 X_{l1}$$

donc S_{cc} devient $S_{cc}' = \frac{(mE)^2}{X_{l2} + m^2 X_{l1}}$

5d.2 Si le transformateur est placé au milieu de la ligne, $X_{l2} = X_{l1} = \frac{X_l}{2}$

alors $S_{cc}' = \frac{(mE)^2}{\frac{X_l}{2}(1+m^2)} \Rightarrow S_{cc}' = S_{cc} \frac{2m^2}{1+m^2}$

5d.3 pour limiter la chute de tension, il faut limiter le courant, donc placer le transformateur au plus près de la source....

5d.4 Dans l'équation bicarrée, E devient mE, X_l devient $\frac{X_l}{2}(1+m^2)$ et $V=E$

d'où $E^4 + E^2(2 \frac{E^2}{4X_l} \frac{1}{2} X_l (1+m^2) - m^2 E^2) + \frac{X_l^2}{4} (1+m^2)^2 \frac{E^4}{16X_l^2} (1+\frac{1}{4})$

$1 + \frac{1+m^2}{8} - m^2 + \frac{(1+m^2)^2 \cdot 5}{256} = 0$
 $= \dots = 5m^4 - 214m^2 + 293 = 0 \Rightarrow m = 1,19$

Deuxième partie : Onduleur de tension connecté au réseau

1. Modélisation et commande d'un onduleur de tension en demi-port

1.1 Interrupteurs uni-directionnels en tension et bidirectionnels en courant.

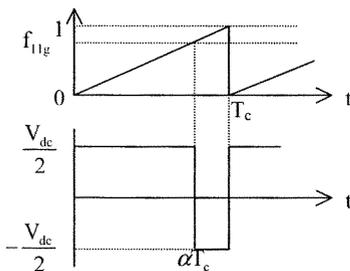
La commande MLI impose un commande à l'amorçage et une commande au blocage.

Exemple de réalisation : transistor et diode en anti-parallèle

1.2 $v_{ao} = \frac{V_{dc}}{2}$ ou $-\frac{V_{dc}}{2}$

1.3 $v_{ao} = \frac{V_{dc}}{2}$ si $f_{l1} = 1$ et $v_{ao} = -\frac{V_{dc}}{2}$ si $f_{l1} = 0 \Rightarrow v_{ao} = (f_{l1} - \frac{1}{2})V_{dc}$

1.4.1



1.4.2 équation de la dent de scie : $\frac{t}{T_c} = f(t)$; pour $t = \alpha T_c, f(t) = f_{l1g}$

d'où $\alpha = f_{l1g}$

1.4.3 valeur moyenne de $v_{ao} = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} v_{ao}(t) dt = \frac{V_{dc}}{2} \alpha + (-\frac{V_{dc}}{2})(1-\alpha)$

$$\Rightarrow v_{ao\text{moyen}} = (\alpha - \frac{1}{2})V_{dc}$$

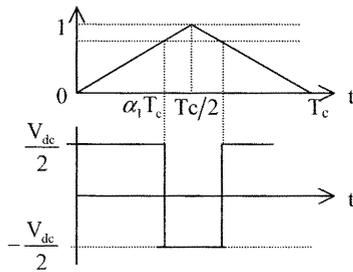
1.4.4 puisque $\alpha = f_{1lg}$, on en déduit : $v_{ao\text{moyen}} = (f_{1lg} - \frac{1}{2})V_{dc}$

1.4.5 Si on choisit : $f_{1lg} = \frac{1}{2} + \frac{v_{aog}}{V_{dc}}$ alors $\alpha = f_{1lg}$, et donc

$$v_{ao\text{moyen}} = (f_{1lg} - \frac{1}{2})V_{dc}, \text{ c'est à dire } v_{ao\text{moyen}} = v_{aog}$$

1.5

1.5.1



1.5.2 même chose que précédemment... $\frac{2t}{T_c} = f(t)$ pour $t = \alpha_1 T_c$, $f(t) = f_{1lg}$

$$\Rightarrow 2\alpha_1 = f_{1lg}$$

1.5.3 valeur moyenne de v_{ao} sur $[0; \frac{T_c}{2}] = \frac{1}{T_c/2} \left(\frac{V_{dc}}{2} \alpha_1 T_c + (-\frac{V_{dc}}{2})(\frac{T_c}{2} - \alpha_1 T_c) \right)$

$$= (2\alpha_1 - \frac{1}{2})V_{dc}$$

$$= (f_{1lg} - \frac{1}{2})V_{dc}$$

1.5.4 sur l'autre demi-période, on trouvera de la même façon que valeur moyenne de v_{ao} sur

$$\left[\frac{T_c}{2}; T_c \right] = (f_{1lg} - \frac{1}{2})V_{dc}$$

1.5.5 A fréquence de commutation donnée, une valeur moyenne est « reconstituée » deux fois plus rapidement avec une porteuse angulaire qu'avec une dent de scie.

1.5.6 Comme précédemment, on trouvera $v_{aog} =$ valeur moyenne de v_{ao} , mais sur $T_c/2$ cette fois.

1.5.7

$$1.5.7.1 f_{11g} = \frac{1}{2} + \frac{1}{V_{dc}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{dc}}{2} \sin \omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin \omega t$$

(cf annexe 3)

1.5.7.2 résultat classique de la modulation... En pratique, vrai si la fréquence de la porteuse est supérieure à au moins 10 fois celle de la tension de référence.

1.5.7.3 le modulateur sature si $f_{11g} < 0$ ou $f_{11g} > 1$; il faut donc $\boxed{r \leq 1}$

2 Modélisation du convertisseur triphasé

2.1 3 cellules de commutation à 2 états $\Rightarrow \boxed{2^3 = 8 \text{ configurations}}$

$$2.2 \quad \begin{cases} v_{ao} = (f_{11} - \frac{1}{2})V_{dc} \\ v_{bo} = (f_{12} - \frac{1}{2})V_{dc} \\ v_{co} = (f_{13} - \frac{1}{2})V_{dc} \end{cases}$$

$$2.3.1 \quad v_{ao} = v_{an} + v_{no}$$

$$v_{bo} = v_{bn} + v_{no}$$

$$v_{co} = v_{cn} + v_{no} ; \text{ En faisant la somme... } \boxed{v_{ao} + v_{bo} + v_{co} = 3v_{no}}$$

puisque $v_{an} + v_{bn} + v_{cn} = 0$

$$2.3.2 \quad v_{an} = v_{ao} + v_{on} = v_{ao} - v_{no} = v_{ao} - \frac{1}{3}(v_{ao} + v_{bo} + v_{co})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{an} = (\frac{2}{3}v_{ao} - \frac{1}{3}v_{bo} - \frac{1}{3}v_{co}) \\ v_{bn} = (-\frac{1}{3}v_{ao} + \frac{2}{3}v_{bo} - \frac{1}{3}v_{co}) \\ v_{cn} = (-\frac{1}{3}v_{ao} - \frac{1}{3}v_{bo} + \frac{2}{3}v_{co}) \end{cases}$$

2.3.3 En associant 2.3.2 et 2.2

$$v_{an} = (\frac{2}{3}(f_{11} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{3}(f_{12} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{3}(f_{13} - \frac{1}{2}))V_{dc} = \frac{V_{dc}}{3}(2f_{11} - f_{12} - f_{13})$$

même chose pour v_{bn} et v_{cn} (permutation circulaire)

$$d'où [F] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ telle que } \begin{pmatrix} v_{an} \\ v_{bn} \\ v_{cn} \end{pmatrix} = \frac{V_{dc}}{3} [F] \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \end{pmatrix}$$

2.4

2.4.1 somme des lignes et/ou des colonnes de la matrice $[F]=0$; la matrice $[F]n$ n'est donc pas inversible \Rightarrow infinité de solutions

2.4.2 à partir de 2.2, on tire :

$$\begin{cases} f_{11g} = \frac{1}{2} + \frac{v_{aog}}{V_{dc}} \\ f_{12g} = \frac{1}{2} + \frac{v_{bog}}{V_{dc}} \\ f_{13g} = \frac{1}{2} + \frac{v_{cog}}{V_{dc}} \end{cases}$$

2.4.3 En introduisant v_{no} (question 2.3.1), on a :

$$\begin{cases} f_{11g} = \frac{1}{2} + \frac{1}{V_{dc}}(v_{aog} + v_{nog}) \\ f_{12g} = \frac{1}{2} + \frac{1}{V_{dc}}(v_{bog} + v_{nog}) \\ f_{13g} = \frac{1}{2} + \frac{1}{V_{dc}}(v_{cog} + v_{nog}) \end{cases}$$

2.5 On voit que la connaissance de $v_{aog}, v_{bog}, v_{cog}$ ne suffit pas ; il faut de plus s'imposer v_{nog} pour déterminer $f_{11g}, f_{12g}, f_{13g}$ (c'est d'ailleurs la raison pour laquelle il existe une infinité de solutions)

2.6 $v_{nog} = \frac{1}{3}(v_{aog} + v_{bog} + v_{cog})$, vu dans la question 2.3.1, et qui justifie cette appellation de composante homopolaire.

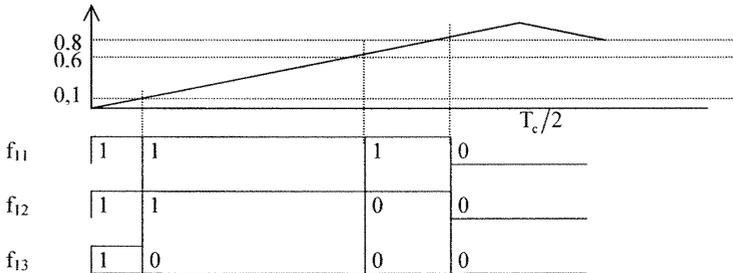
2.7

2.7.1 $v_{aog} = 0,3V_{dc}, v_{bog} = 0,1V_{dc}, v_{cog} = -0,4V_{dc} ; v_{nog} = 0$

$f_{11g} = 0,8$

d'où $f_{12g} = 0,6$

$f_{13g} = 0,1$



2.7.2 1^{er} intervalle : $f_{11} = f_{12} = f_{13} = 1$, de durée $f_{13g} \frac{T_c}{2} = \frac{T_c}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{V_{dc}} (v_{cng} + v_{nog}) \right)$

2^{ème} intervalle : $f_{11} = f_{12} = 1$ et $f_{13} = 0$, de durée $(f_{12g} - f_{13g}) \frac{T_c}{2}$

$$\text{donc durée} = \frac{T_c}{2} \left(\frac{v_{bng} - v_{cng}}{V_{dc}} \right)$$

3^{ème} intervalle : $f_{11} = 1$ et $f_{12} = f_{13} = 0$, de durée $(f_{11g} - f_{12g}) \frac{T_c}{2}$

$$\text{soit de durée} = \frac{T_c}{2} \left(\frac{v_{ang} - v_{bng}}{V_{dc}} \right)$$

4^{ème} intervalle : $f_{11} = 0 = f_{12} = f_{13}$, de durée $(1 - f_{11g}) \frac{T_c}{2} = \frac{T_c}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{V_{dc}} (v_{ang} + v_{nog}) \right)$

2.7.3 la durée du 2^o et du 3^o intervalle est indépendante de v_{nog} ; pendant ces deux intervalles de temps, la source de tension est liée (connectée) au récepteur : il y a échange d'énergie.

2.7.4 Le 1^o et le 4^o intervalle ont une durée liée aux choix de v_{nog} ; pendant ces deux intervalles de temps, le récepteur (de courant) est en court-circuit et la source de tension est déconnectée : il n'y a pas d'échange d'énergie.

2.7.5 Le choix de v_{nog} a une incidence sur :

- Le mode de roue libre du récepteur de courant qui peut s'établir par les interrupteurs du « haut » ($f_{11} = f_{12} = f_{13} = 1$) ou par les interrupteurs du « bas » ($f_{11} = f_{12} = f_{13} = 0$)
- La position dans la période de découpage des impulsions pendant lesquelles il y a échange d'énergie

2.7.6

2.7.6.1 Pour ne pas saturer le modulateur, il faut que les fonctions génératrices de connexion restent dans l'intervalle [0 ; 1].

La valeur maximum de v_{nog} est telle que $f_{11g} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{V_{dc}} (v_{ang} + v_{nog})$

$$\text{D'où } v_{nog(\max)} = \frac{V_{dc}}{2} - v_{ang}$$

2.7.6.2 La roue libre n'est alors obtenue que par la fermeture des trois interrupteurs du « haut » ($f_{11} = f_{12} = f_{13} = 1$)

2.7.6.3 La valeur maximale de v_{nog} est telle que $f_{13g} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{V_{dc}} (v_{cng} + v_{nog})$

$$\text{D'où } v_{nog(\min)} = -\frac{V_{dc}}{2} - v_{cng}$$

2.7.6.4 La roue n'est alors obtenue que par la fermeture des trois interrupteurs du « bas »
 ($f_{11} = f_{12} = f_{13} = 0$)

2.8

$$2.8.1 \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{11g} = \frac{1}{2} + \frac{r}{2} \sin(\omega t - \delta) \\ f_{12g} = \frac{1}{2} + \frac{r}{2} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \delta) \\ f_{13g} = \frac{1}{2} + \frac{r}{2} \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3} - \delta) \end{array} \right. \quad \text{si } v_{\text{nog}} = 0$$

2.8.2 pour ne pas saturer le modulateur, il faut que f_{11g}, f_{12g} et $f_{13g} \in [0;1] \Rightarrow r_{\text{max}} = 1$
 \Rightarrow les tensions étant données par (1), on en déduit que

la valeur crête maximale des tensions génératrices composées vaut $\frac{\sqrt{3}}{2} V_{\text{dc}}$.

2.9.1 si on augmente r, on gagne sur la puissance apparente commutée en augmentant la tension de sortie.

$$2.9.2 \quad \left. \begin{array}{l} f_{11g} = \frac{1}{2} + \frac{r}{2} (\sin \omega t + k \sin 3\omega t) \\ f_{12g} = \frac{1}{2} + \frac{r}{2} (\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + k \sin 3\omega t) \\ f_{13g} = \frac{1}{2} + \frac{r}{2} (\sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) + k \sin 3\omega t) \end{array} \right\} \text{ en prenant } \delta = 0 \text{ et les tensions données par (1)}$$

sont les fonctions génératrices de connexion correspondant à la commande suboptimale.

2.9.2 la dérivée par rapport à t de f_{11g} s'annule lorsque

$$\begin{aligned} \cos \omega t_m + 3k \cos 3\omega t_m &= 0 = \cos \omega t_m + 3k(\cos \omega t_m \cos 2\omega t_m - \sin \omega t_m \sin 2\omega t_m) \\ 0 &= \cos \omega t_m + 3k(\cos \omega t_m (\cos^2 \omega t_m - \sin^2 \omega t_m) - 2\sin^2 \omega t_m \cos \omega t_m) \\ 0 &= 1 + 3k(2\cos^2 \omega t_m - 1 - 2(1 - \cos^2 \omega t_m)) = 1 + 3k(4\cos^2 \omega t_m - 3) \\ &\Rightarrow \cos^2 \omega t_m = \frac{1}{4} \left(3 - \frac{1}{3k} \right) \end{aligned}$$

2.9.3 pour obtenir une valeur maximale pour r, il faut que pour la valeur de k recherchée : $\sin \omega t_m + k \sin 3\omega t_m$ soit minimale

$$d'où \cos \omega t_m \cdot \frac{d}{dk}(\omega t_m) + 3k \cos 3\omega t_m \frac{d}{dk}(\omega t_m) + \sin 3\omega t_m = 0$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_0$$

0

(cf question précédente), d'où $\sin 3\omega t_m = 0$

$$\begin{aligned} \sin 3\omega t_m &= \sin \omega t_m \cos 2\omega t_m + \sin 2\omega t_m \cos \omega t_m \\ &= \sin \omega t_m (\cos^2 \omega t_m - \sin^2 \omega t_m) + 2\sin \omega t_m \cos^2 \omega t_m = 0 \end{aligned}$$

$$0 = 4\cos^2\alpha t_m - 1 \Rightarrow 4\cos^2\alpha t_m = 1 \Rightarrow 3 - \frac{1}{3k} = 1 \Rightarrow \frac{1}{3k} = 2$$

$$\text{d'où } k = \frac{1}{6}$$

et, pour finir, pour $r = r_{\max}$, $f_{1ig}(t_m) = 1$, avec $k = \frac{1}{6}$

$$k = \frac{1}{6} \Rightarrow \cos^2\alpha t_m = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{1}{3k}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\alpha t_m = \frac{1}{2} \text{ et } \begin{cases} \sin\alpha t_m = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 3\alpha t_m = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } f_{1ig}(t_m) = \frac{1}{2} + \frac{r_{\max}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\Rightarrow r_{\max} \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow r_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

dans ces conditions, valeur crête maximale des tensions simples = $\frac{1}{\sqrt{3}} V_{dc}$

$$\Rightarrow \text{valeur crête maximale des tensions génératrices composées} = V_{dc}$$

3. Caractéristiques générales d'un redresseur de courant.

3.1

3.1.1 Les tensions de sortie de l'onduleur sont confondues avec leurs génératrices :

On a donc :

$$\begin{cases} v_{an} = r \frac{V_{dc}}{2} \sin(\alpha t - \delta) \\ v_{bn} = r \frac{V_{dc}}{2} \sin\left(\alpha t - \delta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_{cn} = r \frac{V_{dc}}{2} \sin\left(\alpha t - \delta - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases} \quad \text{avec } 0 < r < r_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

d'où en valeur efficace $V_{in} = r \frac{V_{dc}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow V_{dc} = \frac{2\sqrt{2}}{r} V_{in}$, $0 < r < r_{\max}$

$i = a, b, c$

3.1.2 Le montage est donc élévateur.

3.2 V_{dc} est maximale pour $r = r_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_{dc\text{mimi}} = \sqrt{6} V_{in}$ avec $i = a, b, c$

ou mieux

lorsque les transistors ne sont pas commandés, on retrouve un PD3 à diodes et

$$V_{dc\text{mimi}} = \frac{3\sqrt{6}}{\pi} E$$

3.3 Le schéma équivalent par phase devient :

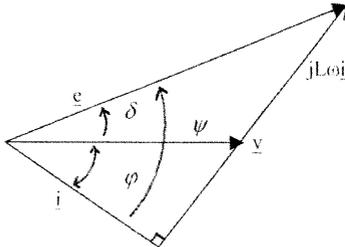
avec $e = E\sqrt{2}\sin\omega t$

et $v = r \frac{V_{dc}}{2} \sin(\omega t - \delta)$ (phase I par exemple)

On retrouve le schéma d'étude du transfert d'énergie entre un réseau et un récepteur (partie A) : c'est également le schéma d'étude d'une machine synchrone à pôles lisses en fonctionnement linéaire (modèle de B.E)

3.4 Diagramme vectoriel associé

$\underline{e} = \underline{v} + jL\omega i$



3.5 En projection sur un axe perpendiculaire à \underline{v} : $E \sin \delta = L\omega \cos \phi$ d'où $I \cos \phi$ et

$$P_e = 3VI \cos \phi = 3r \frac{V_{dc}}{2\sqrt{2}} I \cos \phi \Rightarrow P_e = \frac{3r}{2\sqrt{2}} \frac{V_{dc} E \sin \delta}{L\omega}$$

3.5 $Q_c = 3E I \sin \psi$, puissance réactive fournie par le réseau ;

en projetant sur \underline{e} : $E = V \cos \delta + L\omega I \sin \psi$, d'où $I \sin \psi$

$$\text{et } Q_c = \frac{3E^2}{L\omega} - \frac{3r}{2\sqrt{2}} \frac{V_{dc} E \cos \delta}{L\omega}$$

4. Caractéristiques d'un redresseur de courant à tension de sortie constante

4.1 On obtient $P_e = P_{max}$, $r = r_{max}$ et $\delta = \frac{\pi}{2}$

$$P_e = \frac{3r}{2\sqrt{2}} \frac{V_{dc} E \sin \delta}{L\omega} \Rightarrow P_{max} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{V_{dc} E}{L\omega} \text{ pour } r = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ et } \delta = \frac{\pi}{2}$$

4.2 P_{max} obtenue, $r = r_{max}$ et $\delta = \frac{\pi}{2}$

4.3 quand $P = P_{max}$, $Q_e = Q_{eo} = \frac{3E^2}{L\omega}$ puisque $\delta = \frac{\pi}{2}$

$$\left. \begin{aligned} P_e &= \frac{r}{r_{max}} P_{max} \sin \delta \\ Q_e - Q_{eo} &= \frac{r}{r_{max}} P_{max} \cos \delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_e^2 + (Q_e - Q_{eo})^2 = \frac{r^2}{r_{max}^2} P_{max}^2$$

⇒ Dans le plan (P,Q), à r donnée, le point de fonctionnement (P_e,Q_e) se trouve sur un cercle de centre (0,Q_{eo}), de rayon $\frac{r}{r_{\max}} P_{\max}$

4.5 Pour $r = r_{\max}$, le rayon est égale à P_{max} ; le centre du cercle est inchangé.

⇒ le centre du cercle (O, Q_e) et de rayon P_{max} contient tous les points de fonctionnement

4.6 Pour qu'un fonctionnement à facteur de déplacement unitaire, soit Q_e = 0, soit possible, il faut que Q_{eo} ≤ P_{max}

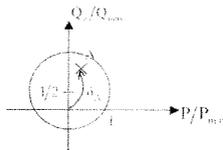
$$\Rightarrow \frac{3E^2}{L\omega} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{V_{dc} E}{L\omega} \Rightarrow V_{dc} \geq \sqrt{6}E$$

4.7

$$4.7.1 \quad \frac{P_{\max}}{Q_{eo}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{V_{dc}}{E} = 2 \Rightarrow V_{dc} = 2\sqrt{6}E$$

4.7.2 Le cercle contenant l'ensemble des points de fonctionnement a comme équation :

$$\left(\frac{P_e}{P_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{Q_e}{P_{\max}} - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$



4.7.3 P_e est fonction de sin δ, d'où l'angle δ_A

$r = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r_{\max}}{2} \Rightarrow$ le point A est sur le cercle de rayon 1/2 (voir figure ci dessus)

4.7.4 Le fonctionnement à Q_e = 0 est possible si $|P_e| < \sqrt{P_{\max}^2 - Q_{eo}^2}$

$$\text{soit } |P_e| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} P_{\max} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} P_{\max} \leq P_e \leq \frac{\sqrt{3}}{2} P_{\max}$$

4.7.5 a/ En compensateur statique, P_e = 0 ⇒ $-\frac{P_{\max}}{2} \leq Q_e \leq \frac{3}{2} P_{\max}$

b/ Ce compensateur statique peut absorber beaucoup plus d'énergie que ce qu'il ne peut fournir (normal, à cause des inductances). Il ne contribue donc pas trop à améliorer le transit d'énergie dans une ligne (cf partie A).

5. Caractéristiques d'un redresseur de courant alimentant une charge résistive.

$$5.1 \quad P_e = \frac{V_{dc}^2}{R} = \frac{3r}{2\sqrt{2}} \frac{V_{dc} E \sin \delta}{L\omega} \Rightarrow V_{dc} = \frac{3r}{2\sqrt{2}} E \sin \delta \frac{R}{L\omega}$$

5.2 $\delta \in [0, \pi]$, $P_e > 0$ (fonctionnement en redresseur)

$$5.3.1 \quad P_e = \frac{V_{dc}^2}{R} = \left(\frac{3r}{2\sqrt{2}} E \sin \delta \frac{R}{L\omega} \right)^2 / R \text{ est maximale pour } \delta = \frac{\pi}{2} \text{ et } r = r_{\max} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$5.3.2 \quad \text{d'où } P_{\max} = \frac{3 RE^2}{2 (L\omega)^2}$$

$$5.4 \quad P_e = \left(\frac{r}{r_{\max}} \right)^2 P_{\max} \sin^2 \delta \Rightarrow P_e = \left(\frac{r}{r_{\max}} \right)^2 P_{\max} \frac{1 - \cos 2\delta}{2}$$

$$Q_e = Q_{eo} - \frac{3r}{2\sqrt{2}} \frac{V_{dc} E \cos \delta}{L\omega} = Q_{eo} - \left(\frac{3r}{2\sqrt{2}} \right)^2 \frac{RE^2}{(L\omega)^2} \sin \delta \cos \delta$$

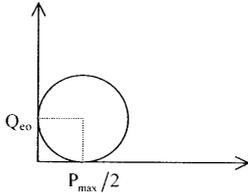
$$\Rightarrow Q_e = Q_{eo} - \left(\frac{r}{r_{\max}} \right)^2 P_{\max} \frac{\sin 2\delta}{2}$$

$$\text{d'où } \left[P_e - \frac{P_{\max}}{2} \left(\frac{r}{r_{\max}} \right)^2 \right] + (Q_e - Q_{eo})^2 = \left(\frac{r}{r_{\max}} \right)^2 \frac{P_{\max}^2}{4}$$

A r donné, l'ensemble des points de fonctionnement est un cercle de centre $\left(\frac{P_{\max}}{2} \frac{r^2}{r_{\max}^2}, Q_{eo} \right)$.

de rayon $\frac{r}{r_{\max}} \frac{P_{\max}}{2}$.

5.5 Un fonctionnement à puissance unitaire pour $r = r_{\max}$ est possible si

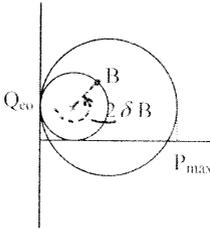


$\frac{P_{\max}}{2} \geq Q_{eo}$; cela se traduit par

$$\frac{1}{2} \frac{3 RE^2}{2 (L\omega)^2} \geq \frac{3E^2}{L\omega} \Rightarrow \boxed{R \geq 4L\omega}$$

$$5.6.1 \quad P_{\max} = 4Q_{eo} \Rightarrow \frac{3 RE^2}{2 (L\omega)^2} = 4 \frac{3E^2}{L\omega} \Rightarrow \boxed{R = 8L\omega}$$

5.6.2 d'où le cercle



$$5.6.3 \quad r_B = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r_{\max}}{2} : \text{cercle de rayon } \frac{P_{\max}}{2}, \text{ de centre } \left(\frac{P_{\max}}{4}, Q_{e0} \right)$$

voir les expressions de P_e et de Q_e , apparaît l'angle $2\delta_B$ (voir figure)

5.6.4 Un fonctionnement à facteur de déplacement unitaire, soit $Q_e = 0$, est possible si

$$\frac{P_{\max}}{2} - \sqrt{\left(\frac{P_{\max}}{2}\right)^2 - Q_{e0}^2} \leq P_e \leq \frac{P_{\max}}{2} + \sqrt{\left(\frac{P_{\max}}{2}\right)^2 - Q_{e0}^2}$$

$$\text{avec } Q_{e0} = \frac{P_{\max}}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P_{\max}}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \leq P_e \leq \frac{P_{\max}}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)}$$

5.6.5 a/ l'excursion en puissance réactive est maximale pour $P_e = P_{\max}/2$

$$\text{Dans ce cas, } \boxed{Q_{e0} \in \left[-\frac{P_{\max}}{4}; \frac{3}{4} P_{\max} \right]} \text{ (voir cercle...)}$$

5.6.5 b/ Même réponse que 4.7.5 b/

Troisième partie : Modélisation et commande de l'onduleur de tension par vecteur d'espace.

1. Propriétés du vecteur espace.

$$1.1 \quad \vec{x} = \sqrt{\frac{2}{3}}(x_1 + ax_2 + a^2x_3) = x_\alpha + jx_\beta \Rightarrow \begin{cases} x_\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3) \\ x_\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{3}}{2}(x_2 - x_3) \end{cases} \quad \boxed{= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} x_1 = x_\alpha}$$

$$1.2 \quad \boxed{[C] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$1.3 \text{ A l'inverse, } \boxed{x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} x_\alpha}$$

$$x_2 - x_3 = x_2 - (-x_1 - x_2) = 2x_2 - x_1 = \sqrt{2}x_\beta \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}x_\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}x_\beta$$

$$x_3 = x_2 - \sqrt{2}x_\beta \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}x_\alpha + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)x_\beta$$

Rq : on peut inverser la matrice.... On retrouve sa transposée.

$$1.4 \quad \vec{v} \cdot \vec{i}^* = \frac{2}{3}(v_1 + av_2 + a^2v_3)(i_1 + a^2i_2 + ai_3)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{i}^* = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}(v_1i_1 + v_2i_2 + v_3i_3) + j\left(i_1\frac{\sqrt{3}}{2}(v_2 - v_3) + i_2\frac{\sqrt{3}}{2}(v_3 - v_1) + i_3\frac{\sqrt{3}}{2}(v_1 - v_2)\right)\right)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{i}^* = v_1i_1 + v_2i_2 + v_3i_3 + j\left(\frac{i_1}{\sqrt{3}}(v_2 - v_3) + \frac{i_2}{\sqrt{3}}(v_3 - v_1) + \frac{i_3}{\sqrt{3}}(v_1 - v_2)\right)$$

$$1.4.1 \quad \text{Re}(\vec{v} \cdot \vec{i}^*) = p = v_1i_1 + v_2i_2 + v_3i_3$$

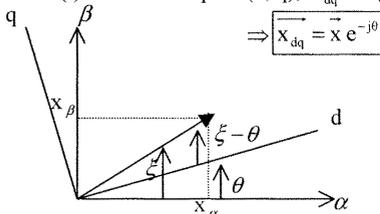
puissance instantanée, on retrouve en valeur moyenne la puissance active.

$$1.4.2 \quad \text{Im}(\vec{v} \cdot \vec{i}^*) = i_1\frac{v_2 - v_3}{\sqrt{3}} + i_2\frac{v_3 - v_1}{\sqrt{3}} + i_3\frac{v_1 - v_2}{\sqrt{3}}$$

en valeur moyenne, on retrouve la puissance réactive (si le système est directe) –type artifice de Boucherot-

$\text{Im}(\vec{v} \cdot \vec{i}^*) = q =$ la puissance réactive « instantanée »

$$1.5 \quad \vec{x} = x(t)e^{j\zeta} \text{ dans le repère } (d, q), \quad \vec{x}_{dq} = x(t)e^{j(\zeta-\theta)} = x(t)e^{j\zeta}e^{-j\theta}$$



2. Modélisation et commande de l'onduleur de tension.

$$2.1 \quad \vec{v}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(v_{a0} + av_{b0} + a^2v_{c0}) = \sqrt{\frac{2}{3}}(v_{a0} + av_{b0} + a^2v_{c0}) \left. \begin{array}{l} f_{11} = (v_{a0} - \frac{1}{2})V_{dc} \\ f_{12} = (v_{b0} - \frac{1}{2})V_{dc} \\ f_{13} = (v_{c0} - \frac{1}{2})V_{dc} \end{array} \right\} \vec{v}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}V_{dc}(f_{11} + af_{12} + a^2f_{13})$$

$$\begin{aligned}
 2.2 \quad \overline{v_{S100}} &= \sqrt{\frac{2}{3}} V_{dc} & ; \quad \overline{v_{S011}} &= -\sqrt{\frac{2}{3}} V_{dc} \\
 \overline{v_{S110}} &= \sqrt{\frac{2}{3}} V_{dc} (1+a) = \sqrt{\frac{2}{3}} V_{dc} (-a^2) & ; \quad \overline{v_{S001}} &= \sqrt{\frac{2}{3}} V_{dc} a^2 \quad (\text{annexe 5}) \\
 \overline{v_{S010}} &= \sqrt{\frac{2}{3}} V_{dc} a & ; \quad \overline{v_{S101}} &= -a \sqrt{\frac{2}{3}} V_{dc}
 \end{aligned}$$

$$2.3.1.1 \quad v_{ang} = r \frac{V_{dc}}{2} \sin \omega t \quad ; \quad v_{bng} = r \frac{V_{dc}}{2} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \quad ; \quad v_{cng} = r \frac{V_{dc}}{2} \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3})$$

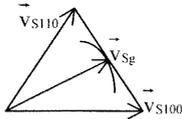
$$\overline{v_{Sg}} = \sqrt{\frac{2}{3}} r \frac{V_{dc}}{2} (\sin \omega t + a \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) + a^2 \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}))$$

$$\theta = \omega t \quad ; \quad \overline{v_{Sg}} = \sqrt{\frac{2}{3}} r \frac{V_{dc}}{2} \left(\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} + e^{2j\pi/3} \cdot \frac{e^{j(\theta - \frac{2\pi}{3})} - e^{-j(\theta - \frac{2\pi}{3})}}{2j} + e^{4j\pi/3} \frac{e^{j(\theta - \frac{4\pi}{3})} - e^{-j(\theta - \frac{4\pi}{3})}}{2j} \right)$$

$$\overline{v_{Sg}} = \sqrt{\frac{2}{3}} r \frac{V_{dc}}{2} \frac{3}{2} e^{j\theta} \Rightarrow \boxed{\overline{v_{Sg}} = \sqrt{\frac{2}{3}} r \frac{V_{dc}}{2} \frac{3}{2} e^{j(\theta - \frac{\pi}{2})}}$$

2.3.1.2 La trajectoire de l'affixe est un cercle, décrit à la vitesse ω , de rayon $\sqrt{\frac{2}{3}} r \frac{V_{dc}}{2} \frac{3}{2}$.

2.3.2 Le cercle doit être inscrit à l'intérieur de l'hexagone.



Rayon du cercle inscrit = longueur d'une « branche » $\times \cos 30^\circ = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{V_{dc}}{2} \frac{3}{2}$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} r_{max} \frac{V_{dc}}{2} \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} V_{dc} \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{r_{max} = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

et on retrouve la commande suboptimale....

2.4

$$2.4.1 \quad \overline{v_{Sg}} = \sqrt{\frac{2}{3}} (v_{an} + a v_{bn} + a^2 v_{cn}) = \sqrt{\frac{2}{3}} ((v_{ang} - v_{bng}) - a^2 (v_{bng} - v_{cng}))$$

$$\overline{v_{Sg}} = \alpha_{S100} \sqrt{\frac{2}{3}} V_{dc} + \alpha_{S110} (-a^2) \sqrt{\frac{2}{3}} V_{dc} = \alpha_{S100} \cdot \overline{v_{S100}} + \alpha_{S110} \cdot \overline{v_{S110}}$$

$$\boxed{\alpha_{S100} = \frac{v_{ang} - v_{bng}}{V_{dc}}} \quad ; \quad \boxed{\alpha_{S110} = \frac{v_{bng} - v_{cng}}{V_{dc}}} \quad ; \quad \text{condition : } v_{ang} > v_{bng} > v_{cng}$$

2.4.2

pendant $\alpha_{S100} \cdot T_c$, séquence $f_{11} = 1, f_{12} = 0, f_{13} = 0$

pendant $\alpha_{S110} \cdot T_c$, séquence $f_{11} = 1, f_{12} = 1, f_{13} = 0$

pendant le reste de la période T_c , 111 ou 000

on retrouve alors $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_{sg}}$ en valeur moyenne sur T_c

2.5 voir tableau, obtenu par permutation circulaire autour de $1 + a + a^2 = 0 \dots$

2.6 on connaît $v_{ang}, v_{bnq}, v_{cng}$; on les ordonne... d'où le secteur, d'où les projections dont on déduit les rapports cycliques.

3. Choix de la phase de roue libre.

3.1.1.1 d'après 2.4.2 la durée du court-circuit est $t_{cc} = T_c (1 - \alpha_{S100} - \alpha_{S110})$.

$$t_{cc} = T_c \left(1 - \frac{v_{ang} - v_{cng}}{V_{dc}}\right).$$

$$3.1.1.2 \begin{cases} f_{11g}^{\circ} = \alpha_{S100} + \alpha_{S110} = \frac{v_{ang} - v_{cng}}{V_{dc}} \\ f_{12g}^{\circ} = \alpha_{S110} = \frac{v_{bnq} - v_{cng}}{V_{dc}} \\ f_{13g}^{\circ} = 0 \end{cases}$$

$$3.1.2 \quad v_{ao} = v_{an} + v_{no} = \left(f_{11} - \frac{1}{2}\right)V_{dc}$$

$$v_{bo} = v_{bn} + v_{no} = \left(f_{12} - \frac{1}{2}\right)V_{dc} \quad \Rightarrow 3v_{nog} = (f_{11g} + f_{12g} + f_{13g} - \frac{3}{2})V_{dc}$$

$$v_{co} = v_{cn} + v_{no} = \left(f_{13} - \frac{1}{2}\right)V_{dc}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{nog}}{V_{dc}} = \frac{1}{3}(f_{11g} + f_{12g} + f_{13g}) - \frac{1}{2}$$

Le choix du court-circuit est lié au choix de la tension entre neutre récepteur et point milieu

source ; dans ce secteur, $v_{nog}^{\circ} = -v_{cng} - \frac{V_{dc}}{2}$

3.1.3 voir tableau ; même genre de calcul de valeur moyenne...

3.1.4 voir courbe

$$3.2.1 \begin{cases} f_{11g}^{\prime} = 1 \\ f_{12g}^{\prime} = 1 - \alpha_{S100} = 1 - \frac{v_{ang} - v_{bnq}}{V_{dc}} \\ f_{13g}^{\prime} = 1 - \alpha_{S100} - \alpha_{S110} = 1 - \frac{v_{ang} - v_{cng}}{V_{dc}} \end{cases}$$

$$3.2.2 \quad v_{nog}^I = \frac{1}{3} V_{dc} (f_{11g}^I + f_{12g}^I + f_{13g}^I) - \frac{V_{dc}}{2}; \quad v_{nog}^I = \frac{V_{dc}}{2} - v_{ang}$$

3.2.3 voir tableau

3.2.4 voir courbe

3.3.1 il faut évidemment $v_{nog}^o \leq v_{nog} \leq v_{nog}^I$

3.3.2 soit α ce taux de répartition ; α_{cc} : court-circuit en 000

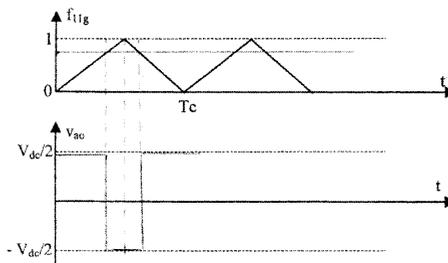
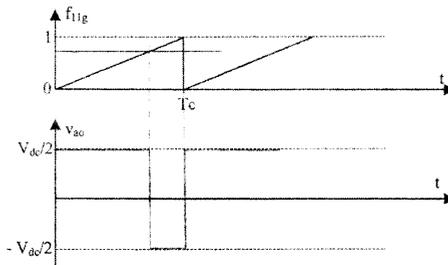
$(1-\alpha)t_{cc}$: court-circuit en 111

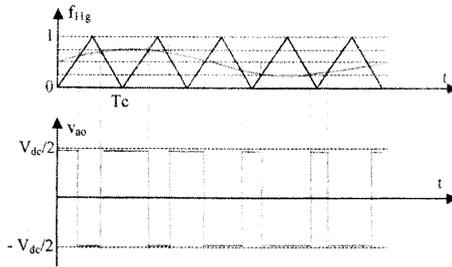
$$v_{nog} = \alpha v_{nog}^o + (1-\alpha)v_{nog}^I \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{v_{nog} - v_{nog}^I}{v_{nog}^o - v_{nog}^I}$$

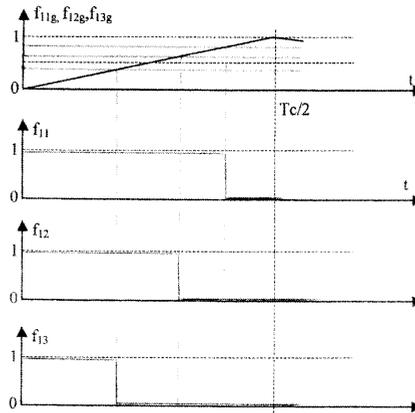
3.3.3.1 la répartition équitable des courts-circuits entraîne une équirépartition des courants dans les composants.

$$3.3.3.2 \quad v_{nog} = \frac{1}{2} (v_{nog}^o + v_{nog}^I)$$

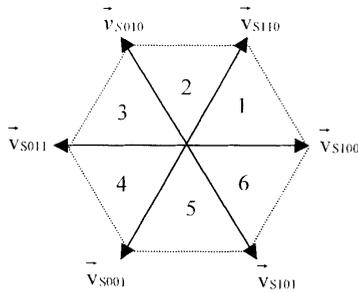




Annexe 3



Annexe 4



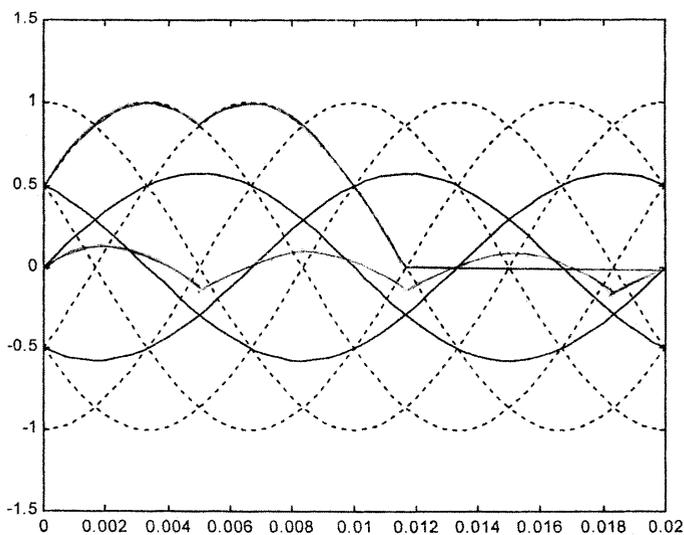
Annexe 5

secteur	Vecteur d'espace des tensions génératrices v_{ang} , v_{bng} et v_{cng}		Conditions sur
			v_{ang} , v_{bng} et v_{cng}
1	$\vec{v}_{sg} = \alpha_{S100} \cdot \underline{v}_{S100} + \alpha_{S110} \cdot \underline{v}_{S110}$;	$\alpha_{S100} = (v_{ang} - v_{bng})/V_{dc}$ $\alpha_{S110} = (v_{bng} - v_{cng})/V_{dc}$	$v_{ang} > v_{bng} > v_{cng}$
2	$\vec{v}_{sg} = \alpha_{S110} \cdot \underline{v}_{S110} + \alpha_{S010} \cdot \underline{v}_{S010}$;	$\alpha_{S110} = -(v_{cng} - v_{ang})/V_{dc}$ $\alpha_{S010} = -(v_{ang} - v_{bng})/V_{dc}$	$v_{bng} > v_{ang} > v_{cng}$
3	$\vec{v}_{sg} = \alpha_{S010} \cdot \underline{v}_{S010} + \alpha_{S011} \cdot \underline{v}_{S011}$;	$\alpha_{S010} = (v_{bng} - v_{cng})/V_{dc}$ $\alpha_{S011} = (v_{cng} - v_{ang})/V_{dc}$	$v_{bng} > v_{cng} > v_{ang}$
4	$\vec{v}_{sg} = \alpha_{S011} \cdot \underline{v}_{S011} + \alpha_{S001} \cdot \underline{v}_{S001}$;	$\alpha_{S011} = -(v_{ang} - v_{bng})/V_{dc}$ $\alpha_{S001} = -(v_{bng} - v_{cng})/V_{dc}$	$v_{cng} > v_{bng} > v_{ang}$
5	$\vec{v}_{sg} = \alpha_{S001} \cdot \underline{v}_{S001} + \alpha_{S101} \cdot \underline{v}_{S101}$;	$\alpha_{S001} = (v_{cng} - v_{ang})/V_{dc}$ $\alpha_{S101} = (v_{ang} - v_{bng})/V_{dc}$	$v_{cng} > v_{ang} > v_{bng}$
6	$\vec{v}_{sg} = \alpha_{S101} \cdot \underline{v}_{S101} + \alpha_{S100} \cdot \underline{v}_{S100}$;	$\alpha_{S101} = -(v_{bng} - v_{cng})/V_{dc}$ $\alpha_{S100} = -(v_{cng} - v_{ang})/V_{dc}$	$v_{ang} > v_{cng} > v_{bng}$

Annexe 6

Secteur	f_{11g}°	f_{12g}°	f_{13g}°	v_{nog}°
1	$(v_{ang} - v_{cng})/V_{dc}$	$(v_{bng} - v_{cng})/V_{dc}$	0	$-V_{dc}/2 - v_{cng}$
2	$(v_{ang} - v_{cng})/V_{dc}$	$(v_{bng} - v_{cng})/V_{dc}$	0	$-V_{dc}/2 - v_{cng}$
3	0	$-(v_{ang} - v_{bng})/V_{dc}$	$(v_{cng} - v_{ang})/V_{dc}$	$-V_{dc}/2 - v_{ang}$
4	0	$-(v_{ang} - v_{bng})/V_{dc}$	$(v_{cng} - v_{ang})/V_{dc}$	$-V_{dc}/2 - v_{ang}$
5	$(v_{ang} - v_{bng})/V_{dc}$	0	$-(v_{bng} - v_{cng})/V_{dc}$	$-V_{dc}/2 - v_{bng}$
6	$(v_{ang} - v_{bng})/V_{dc}$	0	$-(v_{bng} - v_{cng})/V_{dc}$	$-V_{dc}/2 - v_{bng}$

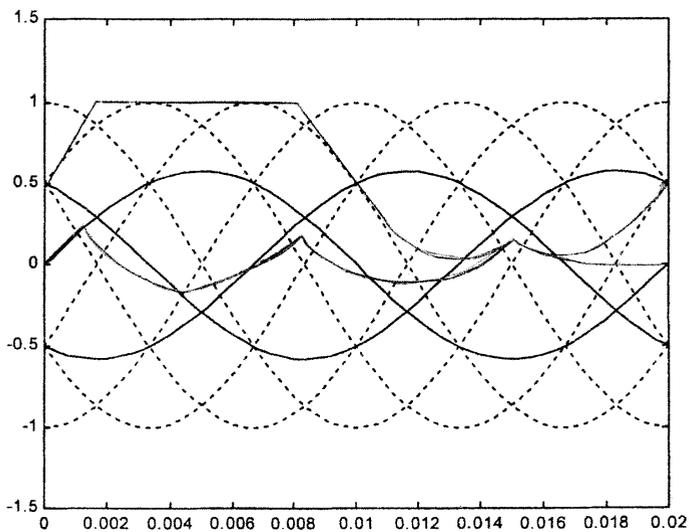
Annexe 7



Annexe 8

Secteur	f_{11g}^{-1}	f_{12g}^{-1}	f_{13g}^{-1}	v_{nog}^{-1}
1	1	$1 - (v_{ang} - v_{bng})/V_{dc}$	$1 - (v_{ang} - v_{cng})/V_{dc}$	$V_{dc}/2 - v_{ang}$
2	$1 + (v_{ang} - v_{bng})/V_{dc}$	1	$1 - (v_{bng} - v_{cng})/V_{dc}$	$V_{dc}/2 - v_{bng}$
3	$1 + (v_{ang} - v_{bng})/V_{dc}$	1	$1 - (v_{bng} - v_{cng})/V_{dc}$	$V_{dc}/2 - v_{bng}$
4	$1 - (v_{cng} - v_{ang})/V_{dc}$	$1 + (v_{bng} - v_{cng})/V_{dc}$	1	$V_{dc}/2 - v_{cng}$
5	$1 - (v_{cng} - v_{ang})/V_{dc}$	$1 + (v_{bng} - v_{cng})/V_{dc}$	1	$V_{dc}/2 - v_{cng}$
6	1	$1 - (v_{ang} - v_{bng})/V_{dc}$	$1 - (v_{ang} - v_{cng})/V_{dc}$	$V_{dc}/2 - v_{ang}$

Annexe 9



Annexe 10

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉES

Problème d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique ♦ Session : 2003

1 Amplificateur de puissance

1.1 Fonctionnement d'un transistor bipolaire en classe AB

1.1.1. En remplaçant l'expression de $V_{BE}(t) = V_{BE0} + E \cos \theta$ dans l'expression du courant, on obtient :

$$I_C = \begin{cases} 0 & \cos \theta < \frac{\Phi_{BE} - V_{BE0}}{E} \\ G_m \cdot (V_{BE0} - \Phi_{BE} + E \cos \theta) & \cos \theta \geq \frac{\Phi_{BE} - V_{BE0}}{E} \end{cases}$$

1.1.2. On a $G_m(V_{BE0} - \Phi_{BE} + E \cos \sigma) = 0$ d'où $\cos \sigma = \frac{\Phi_{BE} - V_{BE0}}{E}$ et comme I_C est maximum pour $\theta = 0$ on a : $I_M = G_m(V_{BE0} - \Phi_{BE} + E)$, enfin on a $\Phi_{BE} - V_{BE0} < 0$ donc finalement

$$I_C(\theta) = \begin{cases} \frac{I_M}{1 - \cos \sigma} (\cos \theta - \cos \sigma) & |\theta| \leq \sigma \\ 0 & |\theta| > \sigma \end{cases}$$

1.1.3.a. La valeur moyenne $I_{C\text{moy}}$ est donnée par

$$I_{C\text{moy}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{+\sigma} I_C(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\sigma} \frac{I_M}{1 - \cos(\sigma)} (\cos \theta - \cos \sigma) d\theta = \frac{I_M}{\pi(1 - \cos \sigma)} (\sin \sigma - \sigma \cos \sigma)$$

1.1.3.b. L'amplitude du fondamental est donnée par :

$$I_{C1} = \frac{2I_M}{\pi(1 - \cos \sigma)} \cdot \int_0^{\sigma} (\cos \theta - \cos \sigma) \cos \theta \cdot d\theta = \frac{I_M}{\pi} \frac{\sigma - \sin \sigma \cos \sigma}{1 - \cos \sigma}$$

1.1.4.a. $\sigma = 2\pi/3 \Rightarrow \cos \sigma = -\frac{1}{2}$ on a $I_{\text{max}} = G_m E(1 - \cos \sigma)$ et $G_m E = \frac{G_m(\Phi_{BE} - V_{BE0})}{\cos \sigma}$ d'où la relation

$$I_{\text{max}} = \frac{G_m(\Phi_{BE} - V_{BE0})(1 - \cos \sigma)}{\cos \sigma} = 3G_m(V_{BE0} - \Phi_{BE})$$

1.1.4.b. A.N. $V_{BE0} = \frac{1}{30} + \Phi_{BE} = 1,333 \text{ V}$ et $I_{C0} = 0,333 \text{ A}$

1.2 Calcul du fonctionnement optimal.

1.2.1.a. La puissance délivrée à la charge est : $P_s = -\frac{1}{2} \Re\{V_{CE1} I_{C1} e^{j\psi}\} = -\frac{V_{CE1} I_{C1} \cos \psi}{2}$.

1.2.1.b. Elle est maximum pour $\psi = \pi$ et vaut $P_s = \frac{1}{2} V_{CE1} I_{C1}$ L'impédance \underline{Z} doit être purement résistive pour qu'il en soit ainsi.

1.2.2.a. On a $\sigma = 2\pi/3$ d'où $I_{C1} = 0,536 A$ et $P_s = \frac{1}{2} V_{CE1} I_{C1} = 0,75 W$ et la résistance optimum est donnée

$$\text{par } R_{opt} = \frac{V_{CE1}}{I_{C1}} = 5,21 \Omega$$

1.2.2.b. Avec les mêmes données on trouve $I_{Cmoy} = 0,405 A$ et $\eta = \frac{P_s}{V_{CE0} I_{Cmoy}} = 56 \%$

1.3 Adaptation du transistor

1.3.1. La matrice T est donnée par

$$[T] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - LC\omega^2 & jL\omega \\ jC\omega(2 - LC\omega^2) & 1 - LC\omega^2 \end{bmatrix}$$

1.3.2. On se place à la résonance, caractérisée par $LC\omega_0^2 = 1$. On a donc $t_{11} = t_{22} = 0$ et

$$R_{opt} = -\frac{V_{CE1}}{I_{C1}} = \frac{t_{12} I_S}{t_{21} V_S} = \frac{L}{CR_0} = \frac{m}{R_0}$$

1.3.3. AN : On donne $R_0 = 50 \Omega$ et $f_0 = 1,95 GHz$

$$R_{opt} = 5,2 \Omega \Rightarrow m = R_0 R_{opt} = 260,5 = \frac{L\omega_0}{C\omega_0}$$

d'où finalement $L = 1,32 nH$ et $C = 5,06 pF$

1.3.4.a. Le courant dans la capacité C_μ est $I_\mu = j\omega C_\mu (V_{B'E} - V_{CE})$ avec $V_{CE} = \underline{A_v} V_{B'E}$ d'où

$$I_\mu = j\omega C_\mu (1 - \underline{A_v}) V_{B'E} \text{ et } I_\mu = j\omega C_\mu \left(\frac{1}{\underline{A_v}} - 1 \right) V_{CE} \text{ tout se passe donc comme si la capacité } C_\mu \text{ apparaissait}$$

en entrée avec la valeur $C_\mu (1 - \underline{A_v})$ et en sortie avec la valeur : $C_\mu \left(1 - \frac{1}{\underline{A_v}} \right)$.

1.3.4.b. On a donc :

$$C_e = C_\pi + C_\mu (1 - \underline{A_v})$$

$$C_s = C_\mu \left(1 - \frac{1}{\underline{A_v}} \right)$$

1.3.5.a. Lorsque le transistor est adapté l'impédance présentée à la source équivalente est R_{opt} d'où : $\underline{A_v} = -G_m R_{opt}$

1.3.5.b. On a $\underline{I_B} = \frac{E - V_{B'E}}{r_{BB'}}$ La puissance absorbée à l'entrée du transistor est donc :

$$P_e = \frac{1}{2} \Re[E \cdot I_B^*] = \frac{1}{2r_{BB'}} \left[\|E\|^2 - \Re[E V_{B'E}^*] \right]$$

Or $\underline{E} = \left[1 + \frac{r_{BB'}}{r_\pi} + j r_{BB'} C_e \omega \right] V_{B'E}$ en remplaçant \underline{E} par son expression en fonction de $V_{B'E}$ dans l'expression de la puissance d'entrée, on obtient :

$$P_e = \frac{\|V_{B'E}\|^2}{2r_{BB'}} \left[\left(1 + \frac{r_{BB'}}{r_\pi} \right)^2 + (r_{BB'} C_e \omega)^2 - \left(1 + \frac{r_{BB'}}{r_\pi} \right) \right] = \frac{\|V_{B'E}\|^2}{2r_{BB'}} \left[\frac{r_{BB'}}{r_\pi} \left(1 + \frac{r_{BB'}}{r_\pi} \right) + (r_{BB'} C_e \omega)^2 \right]$$

1.3.5.c.

$$A_p = \frac{1}{R_{opt}} \frac{|V_{CE1}|^2}{\Re[E \cdot I_B^*]} = \frac{G_m^2 R_{opt} r_{BB'}}{r_{BB'} \left(1 + \frac{r_{BB'}}{r_\pi} \right) + (r_{BB'} C_e \omega)^2}$$

1.3.5.d. AN : $C_e = C_\pi + 52C_\mu = 71,6pF$ et $C_s \approx C_\mu = 0,7pF$

1.3.5.e. $r_{BB'} = 0,3\Omega$ $A_p = 1041$ $G_p = 30,17dB$
 $r_{BB'} = 8,5\Omega$ $A_p = 73,88$ $G_p = 18,6dB$

1.4 Fonctionnement non linéaire de l'amplificateur.

1.4.1. La tension d'entrée est sinusoïdale de fréquence f_0 : $e(t) = E \cos(\omega_0 t)$

1.4.1.a. On a : $s(t) = a_1 E \cos \theta + a_3 E^3 \cos^3 \theta$ d'où :

$$S_1 = \left(a_1 + \frac{3a_3 E^2}{4} \right) E \quad S_3 = \frac{a_3 E^3}{4}$$

1.4.1.b. On en tire

$$P_s(f_0) = \frac{S_1^2}{2R_0} = \frac{1}{2R_0} \left(a_1 + \frac{3a_3 E^2}{4} \right)^2 E^2 \quad ; \quad P_s(3f_0) = \frac{S_3^2}{2R_0} = \frac{1}{2R_0} \left(\frac{a_3 E^3}{4} \right)^2$$

1.4.1.c. La puissance d'entrée est : $P_e = \frac{E^2}{2R_0}$

D'où $A_p = \frac{S_1^2}{E^2} = \left(a_1 + \frac{3a_3 E^2}{4} \right)^2$

1.4.2. En "petit signal" on a : $\frac{3a_3 E^2}{4} \ll a_1$ d'où $A_{p0} = 10^{G_{p0}/10} = 10^3 = a_1^2$ ce qui donne : $a_1 = \sqrt{10^3} = 31,62$

A 1db de compression on a $G_p = 29dB \Rightarrow \left(a_1 + \frac{3a_3 E^2}{4} \right) = 28,18$ Cette chute de gain se produit pour une puissance de sortie de 27dBm. Graphiquement on constate que cette puissance de sortie est obtenue pour $P_e = -2dBm$ soit encore $E = 0,251V$. Il en résulte $\frac{3a_3 E^2}{4} = 28,18 - 31,62 = -3,44$

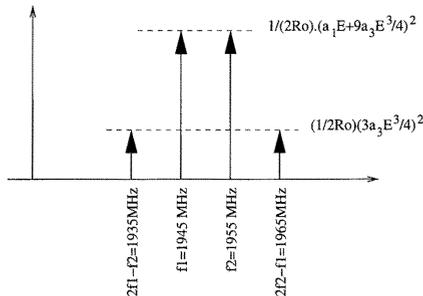
$$a_3 = \frac{-3,44 \times 4}{3E^2} = -72,6V^{-2}$$

1.4.3.a On pose $\theta_1 = 2\pi f_1 t$ et $\theta_2 = 2\pi f_2 t$ d'où $s(t) = a_1 E (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + a_3 E^3 (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)^3$. En développant $(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)^3$ on obtient :

$$s(t) = \left(a_1 E + \frac{9a_3 E^3}{4} \right) (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + \frac{a_3 E^3}{4} (\cos 3\theta_1 + \cos 3\theta_2) + \frac{3a_3 E^3}{4} (\cos(2\theta_1 - \theta_2) + \cos(2\theta_2 - \theta_1) + \cos(2\theta_1 + \theta_2) + \cos(2\theta_2 + \theta_1))$$

L'expression précédente fait apparaître deux termes aux fréquences $2f_1 - f_2$ et $2f_2 - f_1$ d'amplitude $\frac{3a_3 E^3}{4}$

1.4.3.b.



1.4.3.c. On a :

$$P_s(f_1) = \frac{1}{2R_0} \left(a_1 + \frac{9a_3 E^2}{4} \right)^2 E^2 \quad ; \quad P_s(2f_1 - f_2) = \frac{1}{2R_0} \left(\frac{3a_3 E^3}{4} \right)^2$$

1.4.3.d. $E = 0,2 V \Rightarrow P_s(f_1) = 0,25 W$; $P_s(2f_1 - f_2) = 1,9 mW$ d'où $C/I = 21 dB$

1.4.3.e. La distorsion d'intermodulation est très gênante pour un signal modulé numériquement. En effet celui-ci comprend un spectre continu. Toutes les fréquences présentes dans la bande passante vont donc interagir entre elles pour former un bruit dit bruit d'intermodulation. Par ailleurs l'intermodulation provoque un étalement du spectre et le signal distordu va donc "polluer" les canaux adjacents.

2 Transistor de puissance

2.1 Détermination de la tension collecteur maximum

2.1.1. La densité totale de charge dans la zone déplétée est : $\rho_T = qN_c - \frac{J_c}{v_{sat}}$ pour $0 \leq x \leq W$. Si la densité de courant est faible elle se réduit à $\rho_T = qN_c$

2.1.2. On a : $\frac{dE(x)}{dx} = \frac{qN_c}{\epsilon}$ pour $0 \leq x \leq W$. En intégrant la relation précédente on obtient

$$E(x) = E(0) + \frac{qN_c}{\epsilon} x = -E_{max} + \frac{qN_c}{\epsilon} x \quad 0 \leq x \leq W$$

2.1.3. Le champ électrique doit être nul dans la zone neutre, d'où $E(W) = 0 = -E_{max} + \frac{qN_c}{\epsilon} W$. D'autre part on a $\Psi(x) = \Psi(0) - \int_0^x E(x) dx$ et en intégrant cette relation entre 0 et W on obtient :

$$\Delta\Psi = \Psi(W) - \Psi(0) = V_{CB} + \Phi_{CB} = \frac{qN_c W^2}{2\epsilon} = \frac{\epsilon}{2qN_c} E_{max}^2$$

2.1.4. On pose $E_{max} = E_{av}$ et avec les données fournies on obtient : $BV_{CB0} = 43,8 V$ et $W = 1,78 \mu m$

2.1.5.a. Dans ce cas on intègre la relation entre le potentiel et le champ pour $0 \leq x \leq W_c$ et on obtient :

$$\Delta\Psi = \Psi(W_c) - \Psi(0) = BV_{CB0} + \Phi_{CB} = E_{max} W_c - \frac{qN_c W_c^2}{2\epsilon}$$

2.1.5.b. On a $W_c = 0,4 \mu m$. D'où $BV_{CB0} = 17 V$

2.2 Calcul du courant maximum.

2.2.1. Dans ce cas on tient compte de la densité de courant collecteur et on prend $\frac{dE(x)}{dx} = \frac{1}{\epsilon} \left[qN_c - \frac{J_c}{v_{sat}} \right]$ on

a alors $E(x) = E(0) + \frac{1}{\epsilon} \left(qN_c - \frac{J_c}{v_{sat}} \right) x$ et

$$\Delta\Psi = \Psi(W_c) - \Psi(0) = V_{CB} + \Phi_{CB} = -E(0)W_c - \left(\frac{qN_c - \frac{J_c}{v_{sat}}}{2\epsilon} \right) W_c^2$$

J_K est obtenue pour $E(0) = 0$, on a donc :

$$J_K = \frac{2\epsilon v_{sat}}{W_c^2} (V_{CB} + \Phi_{CB}) + qN_c v_{sat}$$

2.2.2. Pour $V_{CB} = 0$ on obtient $J_K = 54,2 10^3 A \cdot cm^{-2}$

2.2.3. On a $I_{max} = J_K A_E \Rightarrow A_E = 1850 \mu m^2$

2.3 Comportement thermique

2.3.1.a. L'énergie emmagasinée dans le volume $d\tau$ est : $dU = [P(x) - P(x + dx)]dt$ où $P(x) = A(x)F(x)$ est la puissance entrant dans le volume à l'abscisse x et $P(x + dx) = A(x + dx)F(x + dx)$ est la puissance qui sort à l'abscisse $x + dx$. En développant au premier ordre on a :

$$dU = -(A(x) \frac{dF(x)}{dx} + F(x) \frac{dA(x)}{dx}) dx \cdot dt = -\frac{d}{dx} [A(x)F(x)] dx \cdot dt \text{ et finalement } \boxed{\frac{dU}{dt} = -\frac{d}{dx} [A(x)F(x)] dx}$$

2.3.1.b. En régime stationnaire on a $\frac{dU}{dt} = 0$ et en tenant compte de la loi de Fourier on obtient :

$$\frac{d}{dx} \left(A(x) \cdot \kappa \cdot \frac{dT(x)}{dx} \right) = 0$$

2.3.2. On a : $A(x) = (Z_E + 2x \tan \alpha)(L_E + 2x \tan \alpha)$

2.3.3. On a : $\frac{d}{dx} \left(A(x) \cdot \kappa \cdot \frac{dT(x)}{dx} \right) = 0$ d'où $A(x) \cdot \kappa \cdot \frac{dT(x)}{dx} = cte = A(x) \cdot \kappa \cdot \frac{dT(x)}{dx} \Big|_{x=0} = -P_E$ On en déduit :

$$\int_{T(0)}^{T(e)} dT = -\frac{P_E}{\kappa} \int_0^e \frac{dx}{A(x)} = -\frac{P_E}{\kappa} \int_0^e \frac{1}{Z_E - L_E} \left[\frac{1}{L_E + 2x \tan \alpha} - \frac{1}{Z_E + 2x \tan \alpha} \right] dx$$

Les intégrales sont de la forme $\int_0^e \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{ae + b}{b} \right|$. On en déduit donc :

$$T_j - T_a = \frac{P_E}{\kappa(Z_E - L_E)2 \tan \alpha} \ln \left[\frac{Z_E}{L_E} \left(\frac{2e \tan \alpha + L_E}{2e \tan \alpha + Z_E} \right) \right]$$

2.3.4. $R_{TH} = (T_j - T_a) / P_E = 535 K \cdot W^{-1}$

2.4 Stabilité thermique, calcul d'une résistance de ballast.

2.4.1. $V_{BEx} = V_{BEi} + R_B I_B$ et en remplaçant V_{BEi} par son expression : $V_{BEi} = \frac{kT_j}{q} \ln \left[\frac{I_B}{I_{s0}} \right] + \frac{E_g(T_j)}{q}$ on obtient :

$$V_{BEx} = \frac{kT_j}{q} \ln \left[\frac{I_B}{I_{s0}} \right] + \frac{E_{g0}}{q} - \frac{\gamma T_j}{q} + R_B I_B$$

2.4.2. On a : $\frac{\partial V_{BEi}}{\partial T_j} \Big|_{I_B=cte} = \frac{k}{q} \ln \left[\frac{I_B}{I_{s0}} \right] - \frac{\gamma}{q} = -\lambda$

2.4.3. On a : $T_j = T_a + R_{TH} V_{CE} I_C = T_a + \beta R_{TH} V_{CE} I_B$

2.4.4. On utilise la règle de dérivation en chaîne soit : $\frac{\partial V_{BEx}}{\partial I_B} = \frac{\partial V_{BEx}}{\partial T_j} \cdot \frac{\partial T_j}{\partial I_B}$ avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{BEx}}{\partial T_j} &= \frac{k}{q} \ln \left[\frac{I_B}{I_{s0}} \right] + \frac{kT_j}{q I_B} \frac{\partial I_B}{\partial T_j} - \frac{\gamma}{q} + R_B \frac{\partial I_B}{\partial T_j} = -\lambda + \left(\frac{kT_j}{q I_B} + R_B \right) \frac{\partial I_B}{\partial T_j} \\ \frac{\partial T_j}{\partial I_B} &= \beta R_{TH} V_{CE} \end{aligned}$$

Finalement on obtient l'expression demandée soit :

$$\frac{\partial V_{BEx}}{\partial I_B} = \frac{kT_j}{q I_B} + R_B - \lambda \cdot \beta \cdot R_{TH} \cdot V_{CE}$$

2.4.5.a. En prenant $\frac{\partial V_{BE_x}}{\partial I_B} = 0$ et la relation liant la température au courant, à $V_{CE} = cte$ on obtient le système :

$$\begin{aligned} \frac{kT_j}{qI_{Bcr}} &= \lambda\beta R_{TH}V_{CE} - R_B \\ T_j &= T_a + \beta R_{TH}V_{CE}I_{Bcr} \end{aligned}$$

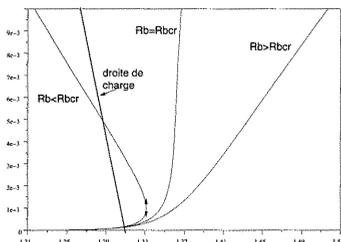
d'où on tire aisément :

$$I_{Bcr} = \frac{kT_a/q}{\lambda\beta R_{TH}V_{CE} \left(1 - \frac{k}{q\lambda}\right) - R_B}$$

2.4.5.b. A partir de la valeur du courant précédente on calcule T_{jcr} que l'on reporte dans l'expression de V_{BE_x}

$$V_{BE_x} = \frac{kT_{jcr}}{q} \ln \left[\frac{I_{Bcr}}{I_{s0}} \right] + \frac{E_g(T_{jcr})}{q} + R_B I_{Bcr}$$

2.4.6.



On constate que lorsque la résistance de ballast est inférieure à sa valeur minimum la présence du point de rebroussement de la caractéristique $I_B(V_{BE_x})$ implique l'existence de deux solutions pour le courant I_B si la droite de charge a une pente suffisante. Plus grave il peut ne pas exister de solution du tout, ce qui correspond à l'emballage thermique du transistor.

2.4.7.a On veut avoir $I_{Bcr} > 2.43 \cdot 10^{-3} \text{ A}$ et $R_B = 92,8 - \frac{26 \cdot 10^{-3}}{I_{Bcr}}$ on en déduit donc : $\boxed{R_B > 82\Omega}$

2.4.7.b. La résistance obtenue à la question précédente est donnée pour un doigt d'émetteur de $180 \mu\text{m}^2$ la surface totale d'émetteur doit être de $1850 \mu\text{m}^2$ et correspond donc approximativement à 10 doigts d'émetteur. La résistance équivalente sera donc de $8,2\Omega$ ce qui correspond à un gain de l'amplificateur de : $19dB$

3 Etude de l'oscillateur local de réception

3.1 Démarrage des oscillations

3.1.1. L'admittance du circuit constitué de L' en série avec r est $Y_L = \frac{1}{r + jL'\omega_0}$ comme $Q_L^2 = \left(\frac{L'\omega_0}{r}\right)^2 \gg 1$ on obtient $Y_L \approx \frac{r}{(L'\omega_0)^2} + \frac{1}{jL'\omega_0}$ De même pour les deux diodes placées en série on a : $Y_v = \frac{1}{2r_v + \frac{2}{jC_v\omega_0}}$

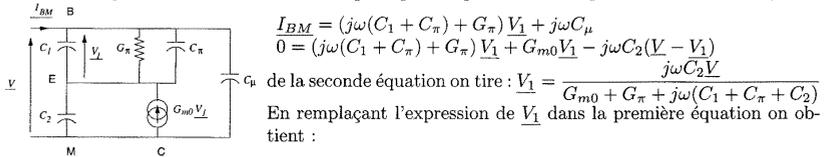
et en introduisant le coefficient de qualité $Q_v^2 = \left(\frac{1}{r_v C_v \omega_0}\right)^2 \gg 1$ on obtient $Y_v \approx \frac{1}{2r_v} \omega_0 + \frac{C_v}{2} \omega_0$.

L'admittance totale est alors $Y = Y_L + Y_v \approx \frac{1}{rQ_L^2} + \frac{1}{2r_v Q_v^2} + j\frac{C_v}{2}\omega_0 + \frac{1}{jL'\omega_0}$. Par identification on

trouve donc : $\boxed{L = L' ; C_0 = \frac{C_v}{2} ; \frac{1}{R} = \frac{1}{rQ_L^2} + \frac{1}{2r_v Q_v^2}}$

3.1.2. AN : On prend pour valeur de f_0 la valeur donnée au 3.1.7 soit $f_0 = 2.15 \text{ Ghz}$. On obtient alors $r = L\omega_0/Q_L = 0.135 \Omega$ et $r_v = 1/(Q_v C\omega_0) = 2.96\Omega$ [$C_0 = 0,25 \text{ pF}$; $L = 1,5 \text{ nF}$; $R = 2,52 \text{ k}\Omega$]

3.1.3. Le schéma équivalent du transistor en régime petit signal alternatif permet d'écrire les équations :



$$Y_{BM} = j\omega C_\mu + \frac{j\omega C_2 (G_\pi + j\omega(C_1 + C_\pi))}{G_{m0} + G_\pi + j\omega(C_1 + C_2 + C_\pi)}$$

3.1.4. En négligeant l'effet de la capacité C_μ la partie réelle de l'admittance Y_{BM} est donnée par

$$\Re[Y_{BM}] = \frac{-\omega^2 C_2 (C_1 + C_\pi) (G_{m0} + G_\pi) + \omega^2 C_2 (C_1 + C_2 + C_\pi) G_\pi}{(G_{m0} + G_\pi)^2 + \omega^2 (C_1 + C_2 + C_\pi)^2}$$

La condition $\Re[Y_{BM}] < 0 \Rightarrow (C_1 + C_\pi)(G_{m0} + G_\pi) > (C_1 + C_2 + C_\pi)G_\pi$ et finalement

$$\Re[Y_{BM}] < 0 \Rightarrow \frac{C_1 + C_\pi}{C_2} \cdot \frac{G_{m0}}{G_\pi} > 1$$

3.1.5.a On pose $n = \frac{C_2}{(C'_1 + C_2)}$ avec $C'_1 = C_1 + C_\pi$ les hypothèses $G_{m0}^2 / ((C'_1 + C_2)^2 \cdot \omega^2) \ll 1$, et $G_{m0} \gg G_\pi$ permettent de réduire le dénominateur de Y_{BM} à $\omega^2 (C'_1 + C_2)^2$. On a alors :

$$\Re[Y_{BM}] \approx \frac{-C_2 C'_1}{(C'_1 + C_2)^2} G_{m0}. \text{ D'autre part on a : } n = \frac{C_2}{(C'_1 + C_2)} \text{ et } 1 - n = \frac{C'_1}{(C'_1 + C_2)}, \text{ d'où finalement :}$$

$$\Re[Y_{BM}] \approx -n(1 - n)G_{m0}. \text{ De la même on peut calculer la partie imaginaire de } Y_{BM}. \text{ On a :}$$

$$\Im[Y_{BM}] = \frac{\omega C_2 [G_\pi (G_{m0} + G_\pi) + \omega^2 C'_1 (C'_1 + C_2)]}{(G_{m0} + G_\pi)^2 + \omega^2 (C_1 + C_2 + C_\pi)^2} \text{ qui, avec les hypothèses effectuées, se réduit à :}$$

$$\Im[Y_{BM}] \approx \frac{\omega C'_1 C_2}{C'_1 + C_2} \text{ et finalement : } Y_{BM} \approx -n(1 - n)G_{m0} + j\omega \frac{C'_1 C_2}{C'_1 + C_2}$$

3.1.5.b. Cette admittance vient en parallèle sur le résonateur constitué des diodes à capacité variable et de la bobine. On a donc : $Y + Y_{BM} = \frac{1}{R} - n(1 - n)G_{m0} + j\omega \left(C_0 + \frac{C'_1 C_2}{C'_1 + C_2} \right) + \frac{1}{jL\omega}$.

En posant : $Y_T = \frac{1}{Z_T} = \frac{1}{R} + j\omega \left(C_0 + \frac{C'_1 C_2}{C'_1 + C_2} \right) + \frac{1}{jL\omega}$, l'expression de l'admittance totale devient :

$Y + Y_{BM} = \frac{1}{Z_T} - n(1 - n)G_{m0} = \frac{1}{Z_T} [1 - Z_T n(1 - n)G_{m0}]$ Les conditions d'oscillation deviennent alors :

$$\Re[Y + Y_{BM}] < 0 \Rightarrow \Re\{n(1 - n) \cdot G_{m0} Z_T\} > 1$$

$$\Im[Y + Y_{BM}] = 0 \Rightarrow \Im\{n(1 - n) \cdot G_{m0} Z_T\} = 0$$

3.1.6. La condition d'oscillation sur la partie imaginaire fixe la fréquence. Comme $n(1 - n)G_{m0} \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L \left[C_0 + \frac{C'_1 C_2}{C'_1 + C_2} \right]}}$$

3.1.7.a. On a : $C_{eq} = C_0 + \frac{C'_1 C_2}{C'_1 + C_2} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L^2} = 3,65 \text{ pF}$ avec $C_0 = 0,135 \text{ pF}$

d'où finalement : $C'_1 = 10,54 \text{ pF}$ et $C_2 = 5,27 \text{ pF}$

3.1.7.b. On a $R = 2,52 \text{ k}\Omega$ d'où $G_{m0} = \frac{2}{R \cdot n(1-n)} = 3,56 \text{ mS}$

3.2 Fonctionnement non linéaire de l'oscillateur

3.2.1.a. On a : $i_c(t) = I_s \cdot \exp\left(\frac{V_{10} + V_{11} \cos \omega_0 t}{V_T}\right) = I_s \exp\left[\frac{V_{10}}{V_T}\right] \cdot \exp\left[\frac{V_{11} \cos \omega_0 t}{V_T}\right]$. Or $\left|\frac{V_{11} \cos \omega_0 t}{V_T}\right| \ll 1$ On a donc $\exp\left[\frac{V_{11} \cos \omega_0 t}{V_T}\right] \simeq 1 + \frac{V_{11} \cos \omega_0 t}{V_T}$

D'où $i_c(t) = I_s \exp\left[\frac{V_{10}}{V_T}\right] \left(1 + \frac{V_{11} \cos \omega_0 t}{V_T}\right) = I_{c0} + I_{c0} \frac{V_{11} \cos \omega_0 t}{V_T} = I_{c0} + G_{m0} V_{11} \cos \omega_0 t$ On en déduit

donc : $G_{m0} = \frac{I_{c0}}{V_T}$

3.2.1.b. Au 3.17.b on a déterminé $G_{m0} = 3,56 \text{ mS}$ et $V_T = 26 \text{ mV}$ d'où $I_{c0} = 0,092 \text{ mA}$

3.2.2. On pose $x = \frac{V_{11}}{V_T}$ et $\theta = \omega_0 t$

3.2.2.a. $I_{C0} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi I_s e^{\frac{V_{10}}{V_T}} e^{x \cos \theta} d\theta = I_{m0} B_0(x)$

et $I_{C1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi I_s e^{\frac{V_{10}}{V_T}} \cos \theta e^{x \cos \theta} d\theta = 2I_{m0} B_1(x)$

3.2.2.b. Le courant I_{C0} est fixé donc $I_{m0} = \frac{I_{c0}}{B_0(x)}$ et en reportant dans l'expression de I_{C1} on obtient :

$I_{C1} = I_{c0} \frac{2B_1(x)}{B_0(x)}$ d'où $G_m(x) = \frac{I_{C1}}{V_{11}} = G_{m0} \frac{2B_1(x)}{xB_0(x)}$

3.2.3.a. A l'oscillation on a : $n(1-n)G_{m0}R = 2$ d'où $\frac{2B_1(x)}{xB_0(x)} = \frac{1}{2}$ et à partir du graphe fourni on en déduit $x = 3,3$ et $V_{11} = 86 \text{ mV}$

3.2.3.b. On a : $V_{11} = \frac{j\omega C_2}{j\omega(C_1 + C_2) + g_m} A$ qui, compte tenu de l'approximation donnée au 3.1.5., donne $V_{11} \simeq \frac{C_2}{C_1 + C_2} A = n \cdot A$ D'où finalement $A = 258 \text{ mV}$

3.2.4.a. On a $g_{mk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi g_m(\theta) e^{-jk\theta} d\theta$ où $g_m(\theta) = \frac{\partial i_c}{\partial v_1} = G_{m0} e^{x \cos \theta}$ est une fonction paire d'où :

$g_{m0} = G_{m0} \frac{I_{c0}}{I_{c0}} B_0(x)$

$g_{m1} = G_{m0} \frac{I_{c0}}{I_{c0}} B_1(x)$

$g_{m2} = G_{m0} \frac{I_{c0}}{I_{c0}} B_2(x)$

3.2.4.b. A l'oscillation on a : $n(1-n)G_{m0}R \frac{2B_1(x)}{xB_0(x)} = 1$ or, $2B_1(x) = x(B_0(x) - B_2(x))$ soit en remplaçant $B_1(x)$

par son expression on obtient : $n(1-n)R \left(\frac{I_{c0}}{I_{m0}} g_{m0} - \frac{I_{c0}}{I_{m0}} g_{m2} \right) \frac{1}{B_0(x)} = 1$ Comme on a : $I_{c0} = I_{m0} B_0(x)$

on obtient $n(1-n)R(g_{m0} - g_{m2}) = 1$

3.3 Analyse du bruit de phase de l'oscillateur.

3.3.1.a. On a $v(t) = (A + \delta A(t)) \cos(\omega_0 t + \delta \Phi(t))$ qui donne, au premier ordre

$v(t) \simeq A \cos \omega_0 t + \delta A(t) \cos \omega_0 t - A \delta \Phi(t) \sin \omega_0 t$.

En posant : $\delta A(t) = \frac{1}{2} (\underline{\Delta A} e^{j\Omega t} + \underline{\Delta A}^* e^{-j\Omega t})$, $\delta\Phi(t) = \frac{1}{2} (\underline{\Delta\Phi} e^{j\Omega t} + \underline{\Delta\Phi}^* e^{-j\Omega t})$, $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$
 et $\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$ on obtient :

$$\delta A(t) \cos \omega_0 t = \frac{1}{4} [\underline{\Delta A} e^{j(\omega_0+\Omega)t} + \underline{\Delta A} e^{-j(\omega_0-\Omega)t} + \underline{\Delta A}^* e^{j(\omega_0-\Omega)t} + \underline{\Delta A}^* e^{-j(\omega_0+\Omega)t}] \text{ et}$$

$A\delta\Phi(t) \sin \omega_0 t = \frac{A}{4j} [\underline{\Delta\Phi} e^{j(\omega_0+\Omega)t} - \underline{\Delta\Phi} e^{-j(\omega_0-\Omega)t} + \underline{\Delta\Phi}^* e^{j(\omega_0-\Omega)t} - \underline{\Delta\Phi}^* e^{-j(\omega_0+\Omega)t}]$ en reportant ces valeurs dans l'expression de $v(t)$ et en regroupent les termes de pulsations ω_0 , $\omega_0 + \Omega$, et $\omega_0 - \Omega$ on obtient :

$$\begin{aligned} \delta A(t) \cos \omega_0 t - A\delta\Phi(t) \sin \omega_0 t &= \frac{1}{4} [(\underline{\Delta A} + jA\underline{\Delta\Phi})e^{j(\omega_0+\Omega)t} + (\underline{\Delta A}^* - jA\underline{\Delta\Phi}^*)e^{-j(\omega_0+\Omega)t}] \\ &+ \frac{1}{4} [(\underline{\Delta A}^* + jA\underline{\Delta\Phi}^*)e^{j(\omega_0-\Omega)t} + (\underline{\Delta A} - jA\underline{\Delta\Phi})e^{-j(\omega_0-\Omega)t}] \end{aligned}$$

3.3.1.b. On a $v(t) = \Re e [Ae^{j\omega_0 t} + \underline{V}_\Delta e^{j(\omega_0-\Omega)t} + \underline{V}_\Sigma e^{j(\omega_0+\Omega)t}]$ et par identification des termes à la même pulsation on obtient finalement :

$$\boxed{\underline{V}_\Delta = \frac{\underline{\Delta A}^* + jA\underline{\Delta\Phi}^*}{2} \quad \text{et} \quad \underline{V}_\Sigma = \frac{\underline{\Delta A} + jA\underline{\Delta\Phi}}{2}}$$

3.3.2. Des relations précédentes on tire : $\underline{\Delta A} = \underline{V}_\Sigma + \underline{V}_\Delta^*$ et $A\underline{\Delta\Phi} = \frac{\underline{V}_\Sigma - \underline{V}_\Delta^*}{j}$

Les densités unilatérales de puissance de bruit d'amplitude et de phase de l'oscillateur sont définies respectivement par :

$$S_A = \frac{\overline{\delta A^2(t)}}{A^2} = \left| \frac{\underline{\Delta A}}{A} \right|^2 = \frac{|\underline{V}_\Sigma + \underline{V}_\Delta^*|^2}{A^2} \quad \text{et} \quad S_{\Phi v} = \overline{\delta\phi^2(t)} = |\underline{\Delta\Phi}|^2 = \frac{|\underline{V}_\Sigma - \underline{V}_\Delta^*|^2}{A^2}$$

3.3.3. La variation, $\delta v_1(t) = n\delta v(t)$, de la tension de commande produit une variation $\delta i_1(t)$ du courant collecteur donnée par :

$$\delta i_1(t) = n \cdot g_m(t) \cdot \delta v(t) = \Re e \left[\underline{I}_{1\Delta} e^{j(\omega_0-\Omega)t} + \underline{I}_{1\Sigma} e^{j(\omega_0+\Omega)t} \right]$$

$g_m(t)$ étant une fonction paire on a : $g_m(t) = g_{m0} + g_{m1}e^{j\omega_0 t} + g_{m1}e^{-j\omega_0 t} + g_{m2}e^{2j\omega_0 t} + g_{m2}e^{-2j\omega_0 t}$ et $\delta v(t) = \underline{V}_\Delta e^{j(\omega_0-\Omega)t} + \underline{V}_\Sigma e^{j(\omega_0+\Omega)t} + \underline{V}_\Delta^* e^{-j(\omega_0-\Omega)t} + \underline{V}_\Sigma^* e^{-j(\omega_0+\Omega)t}$

En effectuant le produit $g_m(t)\delta v(t)$ et en identifiant les termes aux pulsations $\omega_0 - \Omega$ et $\omega_0 + \Omega$ on obtient

$$\begin{cases} \omega_0 - \Omega \rightarrow g_{m0} \cdot \underline{V}_\Delta + g_{m2} \cdot \underline{V}_\Sigma^* = \underline{I}_{1\Delta} \\ \omega_0 + \Omega \rightarrow g_{m2} \cdot \underline{V}_\Delta^* + g_{m0} \cdot \underline{V}_\Sigma = \underline{I}_{1\Sigma} \end{cases} = \frac{n}{n}$$

d'où la relation cherchée.

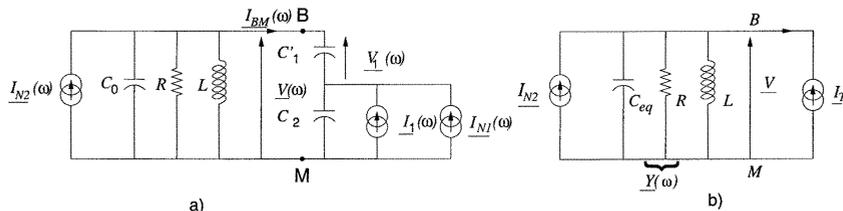


FIG. 1 - Circuit équivalent de l'oscillateur aux pulsations $\omega_0 - \Omega$ et $\omega_0 + \Omega$

3.3.4.a. En appliquant le théorème de Norton entre les bornes B et M on calcule le courant de court-

$$\text{circuit : } \underline{I_T} = \frac{j\omega C_1'}{j\omega(C_1' + C_2)}(\underline{I_1} + \underline{I_{N1}}) \text{ d'où } \underline{I_T} = \frac{C_1'}{C_1' + C_2}(\underline{I_1} + \underline{I_{N1}}) = (1-n)(\underline{I_1} + \underline{I_{N1}})$$

3.3.4.b. De même la capacité équivalente entre les bornes B et M est donnée par $\frac{C_1' C_2}{C_1' + C_2}$ d'où

$$C_{eq} = C_0 + \frac{C_1' C_2}{C_1' + C_2}$$

3.3.5. La source équivalente de bruit totale : $\underline{I_N}(\omega) = \underline{I_{N2}}(\omega) + (1-n)\underline{I_{N1}}(\omega)$

3.3.5.a. On pose : $\underline{Y}(\omega) = \frac{1}{R_{eq}} + jC_{eq}\omega - \frac{j}{L\omega}$. Aux pulsations $\omega_\Delta = \omega_0 - \Omega$ et $\omega_\Sigma = \omega_0 + \Omega$, les équations de Kirchoff s'écrivent

$$\begin{aligned} \omega_\Delta &\rightarrow \underline{I_N}(\omega_\Delta) + (1-n)\underline{I_{1\Delta}} - \underline{Y}(\omega_\Delta)\underline{V_\Delta} = 0 \\ \omega_\Sigma &\rightarrow \underline{I_N}(\omega_\Sigma) + (1-n)\underline{I_{1\Sigma}} - \underline{Y}(\omega_\Sigma)\underline{V_\Sigma} = 0 \end{aligned}$$

3.3.5.b. En prenant le conjugué de l'équation à la pulsation ω_Δ et en reportant les valeurs de $\underline{I_{1\Delta}}^*$ et de $\underline{I_{1\Sigma}}$ obtenues à la question 3.3.3 on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} (1-n)n \left[g_{m0} \cdot \underline{V_\Delta}^* + g_{m2} \cdot \underline{V_\Sigma} \right] - \underline{Y}^*(\omega_\Delta)\underline{V_\Delta}^* = -\underline{I_N}^*(\omega_\Delta) \\ (1-n)n \left[g_{m0} \cdot \underline{V_\Sigma} + g_{m2} \cdot \underline{V_\Delta} \right] - \underline{Y}(\omega_\Sigma)\underline{V_\Sigma} = -\underline{I_N}(\omega_\Sigma) \end{cases}$$

3.3.6. On pose $Q = R/(L\omega_0)$ avec $\Omega \ll \omega_0$.

3.3.6.a. On a $\underline{Y}^*(\omega_\Delta) = \frac{1}{R} - j(\omega_0 - \Omega)C_{eq} + \frac{j}{L(\omega_0 - \Omega)} \simeq \frac{1}{R} - jC_{eq}\omega_0 + jC_{eq}\Omega + \frac{j}{L\omega_0} \left(1 + \frac{\Omega}{\omega_0}\right)$ à la résonance cette relation se réduit à : $\underline{Y}^*(\omega_\Delta) = \frac{1}{R} + jC_{eq}\omega_0 \frac{\Omega}{\omega_0} + \frac{j}{L\omega_0} \frac{\Omega}{\omega_0}$ soit encore puisque $C_{eq}\omega_0 = \frac{1}{L\omega_0}$,

$$\underline{Y}^*(\omega_\Delta) = \frac{1}{R} \left(1 + 2jQ \frac{\Omega}{\omega_0} \right)$$

Un calcul identique conduit à $\underline{Y}(\omega_\Sigma) = \underline{Y}^*(\omega_\Delta) = \frac{1}{R} \left(1 + 2jQ \frac{\Omega}{\omega_0} \right)$

3.3.6.b. On pose $a = n(1-n)g_{m0} - \underline{Y}(\omega_0 + \Omega)$ et $b = n(1-n)g_{m2}$. Le système d'équations de la question 3.3.5.b s'écrit alors :

$$\begin{cases} a\underline{V_\Delta}^* + b\underline{V_\Sigma} = -\underline{I_N}^*(\omega_\Delta) \\ b\underline{V_\Delta}^* + a\underline{V_\Sigma} = -\underline{I_N}(\omega_\Sigma) \end{cases}$$

Ce système se résoud aisément en soustrayant la seconde équation de la première et on obtient :

$$\underline{V_\Delta}^* - \underline{V_\Sigma} = -\frac{\underline{I_N}^*(\omega_\Delta) - \underline{I_N}(\omega_\Sigma)}{a-b} \text{ avec } a-b = n(1-n)(g_{m0} - g_{m2}) - \frac{1}{R} - \frac{2jQ\Omega}{R\omega_0}$$

$$\text{et } \underline{V_\Delta}^* + \underline{V_\Sigma} = -\frac{\underline{I_N}^*(\omega_\Delta) + \underline{I_N}(\omega_\Sigma)}{a+b} \text{ avec } a+b = n(1-n)(g_{m0} + g_{m2}) - \frac{1}{R} - \frac{2jQ\Omega}{R\omega_0}$$

3.3.7. Les composantes spectrales de bruit $\underline{I_{N\Sigma}} = \underline{I_N}(\omega_\Sigma)$ et $\underline{I_{N\Delta}} = \underline{I_N}(\omega_\Delta)$ ne sont pas corrélées . On a donc

$$|\underline{I_{N\Sigma}} \pm \underline{I_{N\Delta}}|^2 = |\underline{I_{N\Sigma}}|^2 + |\underline{I_{N\Delta}}|^2 = 2S_{in}$$

où S_{in} est la densité spectrale de puissance de la source de bruit équivalente.

A la question **3.2.4.b.**, on a montré que la condition d'oscillation s'écrivait aussi : $n(1-n)R(g_{m0} - g_{m2}) = 1$

En reportant cette condition dans l'expression de $a-b$ on obtient : $a-b = -\frac{2jQ\Omega}{R\omega_0}$. La densité spectrale

$$\text{de puissance du bruit de phase est donc : } \frac{|\underline{V_\Delta}^* - \underline{V_\Sigma}|^2}{A^2} = \frac{|\underline{I_N}^*(\omega_\Delta) - \underline{I_N}(\omega_\Sigma)|^2}{A^2|a-b|^2} = \frac{|\underline{I_N}^*(\omega_\Delta)|^2 + |\underline{I_N}(\omega_\Sigma)|^2}{A^2 \frac{4Q^2\Omega^2}{R^2\omega_0^2}}$$

et finalement la densité spectrale de puissance de bruit de phase est donnée par :

$$S_{\phi v} = \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\omega_0^2 R^2}{2Q^2 \Omega^2} \cdot S_{in}$$

3.3.8. Application numérique : On rappelle que $n = 1/3$ et $A = 0,258 V$. On donne : $S_{in1} = 2qI_{C0}$ et $S_{in2} = 4kT/R$ avec $I_{C0} = 0,3 mA$, $R = 760 \Omega$, $T = 290 K$. q est la charge de l'électron et k la constante de Boltzmann. P_0 est la puissance de sortie de l'oscillateur. La densité spectrale de puissance de bruit thermique est donnée par $N_0 = kT$.

3.3.8.a. La puissance totale de l'oscillateur est donnée par $P_0 = \frac{A^2}{2R} = 0.0438 mW$ Le plancher de bruit est alors

par $S_{th} = \frac{N_0}{P_0} = \frac{kT}{P_0} = 9,14 \cdot 10^{-17}$ soit encore en dBc :

$$10 \log S_{th} = -160 dBc$$

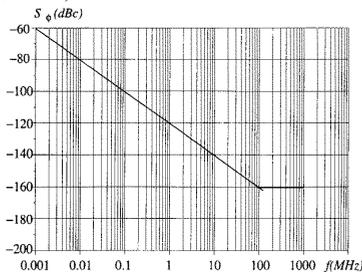
3.3.8.b. Les sources de bruit $i_{n1}(t)$ et $i_{n2}(t)$ sont décorréelées on a donc :

$$S_{in} = S_{in2} + (1 - n)^2 S_{in1} = \frac{4kT}{R} + (1 - n)^2 (2qI_{C0})$$

La densité de bruit de phase définie est donc

$$10 \log S_{\phi v} = 10 \log \left(\frac{1}{A^2} \cdot \frac{\omega_0^2 R^2}{2Q^2} \cdot S_{in} \right) - 20 \log \Omega = K - 20 \log \Omega$$

C'est une droite de pente -20dB/décade

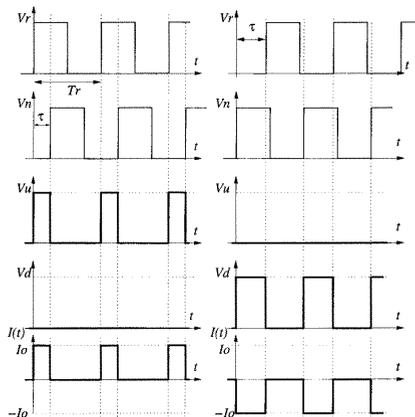


3.3.8.c. La fréquence f_c pour laquelle on a : $S_{\phi v} = S_{th}$ est donc $f_c = 100 MHz$

4 Synthétiseur de fréquence

4.1 Etude du comparateur de phase et de fréquence.

4.1.1.



4.1.2.a. Les bascules D changent d'état sur un front montant de l'horloge donc :

- si V_r est en avance sur V_n on a : $V_n(t) = V_r(t - \tau) \quad 0 \leq \tau \leq T_r \Rightarrow \varphi_n = \varphi_r - \frac{2\pi\tau}{T_r} \Rightarrow \frac{\tau}{T_r} = \frac{1}{2\pi}(\varphi_r - \varphi_n)$

- si V_n est en avance sur V_r on a : $V_r(t) = V_n(t - \tau) \quad 0 \leq \tau \leq T_r \Rightarrow \varphi_r = \varphi_n - \frac{2\pi\tau}{T_r} \Rightarrow \frac{\tau}{T_r} = -\frac{1}{2\pi}(\varphi_r - \varphi_n)$

Dans le premier cas on a : $I_{moy} = \frac{\tau}{T_r} I_0$ et dans le second cas : $I_{moy} = -\frac{\tau}{T_r} I_0$

4.1.2.b. En posant $\varphi = \varphi_r - \varphi_n$ les conditions d'avance ou de retard de phase sont définies par :

$$V_n(t) = V_r(t - \tau) \quad 0 \leq \tau \leq T_r \Rightarrow I_{moy} = \frac{\tau}{T_r} I_0 = \frac{I_0}{2\pi} \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$V_r(t) = V_n(t - \tau) \quad 0 \leq \tau \leq T_r \Rightarrow I_{moy} = -\frac{\tau}{T_r} I_0 = \frac{I_0}{2\pi} \varphi \quad -2\pi \leq \varphi \leq 0$$

On en déduit donc : $I_{moy} = \frac{I_0}{2\pi} \cdot \varphi \quad -2\pi \leq \varphi \leq 2\pi$

4.1.3. La tension en sortie du filtre est donnée par $V_a(p) = Z(p)I(p)$ où $Z(p)$ est l'impédance du filtre passe-bas constitué de R_2 , C_1 et C_2 . Ce filtre élimine la composante à la fréquence f_r du courant $I(t)$ on a donc :

$$V_a(p) = Z(p)I_{moy}(p) = Z(p) \frac{I_0}{2\pi} \phi(p) \text{ avec } Z(p) = \frac{1}{\frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p} + R_2} = \frac{1}{(C_1 + C_2)p} \frac{1 + R_2 C_2 p}{1 + \frac{R_2 C_1 C_2}{C_1 + C_2} p}$$

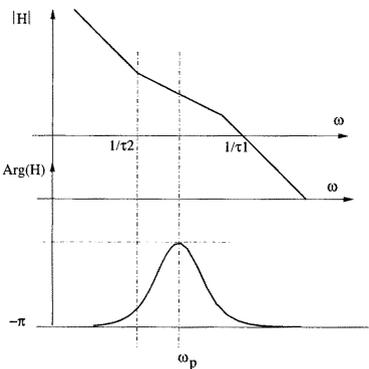
On a donc $F(p) = \frac{V_a(p)}{\phi(p)} = \frac{I_0}{2\pi(C_1 + C_2)p} \frac{1 + \tau_2 p}{1 + \tau_1 p}$

4.2 Calcul du filtre de boucle

4.2.1. La phase de sortie de l'OCT est telle que $\frac{d\varphi_s(t)}{dt} = 2\pi K_0 v_a(t)$ et compte tenu de la division de fréquence par N en sortie de l'OCT on a : $\phi_n(p) = \frac{2\pi K_0}{Np} V_a(p)$ La fonction de transfert de boucle ouverte s'écrit

donc : $H(p) = \frac{\phi_n(p)}{\phi(p)} = \frac{K_0 I_0}{N(C_1 + C_2)} \frac{1 + \tau_2 p}{p^2(1 + \tau_1 p)}$

4.2.2.



On a $\tau_2 > \tau_1$ l'allure des diagramme de Bode d'amplitude et de phase sont tels que $H(p) \approx \frac{K_0 I_0}{N(C_1 + C_2)p^2}$ au voisinage de $p = 0$ et $H(p) \approx \frac{\tau_2 K_0 I_0}{N\tau_1(C_1 + C_2)p^2}$ lorsque $p \rightarrow \infty$
On a donc

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Arg(H(j\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} Arg(H(j\omega)) = -\pi$$

4.2.3. On a $\arg(H(j\omega)) = -\pi + \arg\left(\frac{1 + j\omega\tau_2}{1 + j\omega\tau_1}\right) = -\pi + \arctan(\omega\tau_2) - \arctan(\omega\tau_1)$ En dérivant l'expression précédente on obtient $\frac{d}{d\omega} \{\arg[H(j\omega)]\} = \frac{\tau_2}{1 + \omega^2\tau_2^2} - \frac{\tau_1}{1 + \omega^2\tau_1^2}$. Cette dérivée est nulle pour la pulsa-

tion $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$ et la valeur du maximum est obtenue en reportant cette valeur dans l'expression de

$\arg(\underline{H}(j\omega))$. On a donc : $\arg[\underline{H}(j\omega_p)] = -\pi + \arctan\left(\frac{\omega_p(\tau_2 - \tau_1)}{1 + \omega_p^2\tau_1\tau_2}\right) = -\pi + \arctan\left(\frac{\omega_p(\tau_2 - \tau_1)}{2}\right)$

4.2.4.a. Pour obtenir une marge de phase de $\frac{\pi}{4}$ à la pulsation ω_p on doit avoir $\arg[\underline{H}(j\omega_p)] = \frac{\pi}{4}$ soit $\omega_p(\tau_2 - \tau_1) = 2$. On a donc un système de deux équations à résoudre :

$\begin{cases} \omega_p^2\tau_1\tau_2 = 1 \\ \omega_p(\tau_2 - \tau_1) = 2 \end{cases}$ dont les solutions sont : $\tau_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{\omega_p} = 1,92 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ et $\tau_1 = \frac{1 + \sqrt{2} - 2}{\omega_p} = 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ s}$

4.2.4.b. On a $N = \frac{f_0}{f_r} = 10750$ et $R = \frac{f_Q}{f_r} = 50$

4.2.4.c. On doit avoir $|\underline{H}(\omega_p)|^2 = 1$, soit : $\left(\frac{K_0 I_0}{N(C_1 + C_2)}\right)^2 \frac{1 + \tau_2^2 \omega_p^2}{\omega_p^4 (1 + \tau_1^2 \omega_p^2)} = 1$ avec $\omega_p^2 \tau_1 \tau_2 = 1$. En remarquant

que $C_1 + C_2 = C_1 \frac{\tau_2}{\tau_1}$ on obtient : $C_1 = \frac{K_0 I_0}{N \omega_p} \tau_1 = 670 \text{ pF}$ D'où : $C_2 = C_1 \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} - 1\right) = 3,23 \text{ nF}$ et

finalement $R_2 = \frac{\tau_2}{C_2} = 5,94 \text{ k}\Omega$

4.3 Étude du bruit de phase en sortie de la boucle.

4.3.1. La perturbation étant nulle à l'entrée, on pose $\phi_r(p) = 0$ on a alors les relations :

$\phi(p) = -\phi_n(p) = -\theta_n(p) - \frac{\phi_s(p)}{N} = -\theta_n(p) - \frac{\phi_v(p)}{N} - \frac{\theta_v(p)}{N}$ et $\phi_v(p) = NH(p)\phi(p)$

En reportant cette valeur on obtient : $\phi_v(p) = NH(p) \left(-\theta_n(p) - \frac{\phi_v(p)}{N} - \frac{\theta_v(p)}{N} \right)$ d'où on tire :

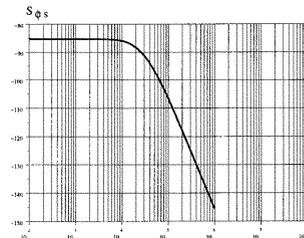
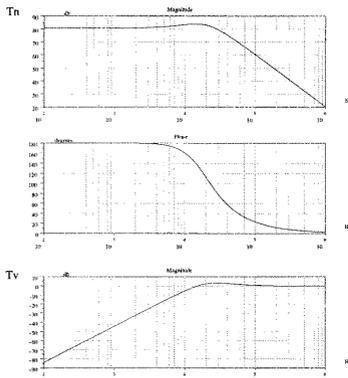
$\phi_v(p) = -\frac{NH(p)}{1 + H(p)} \theta_n(p) - \frac{H(p)}{1 + H(p)} \theta_v(p)$. La phase en sortie de l'OCT est donc :

$\phi_s(p) = \phi_v(p) + \theta_v(p) = \frac{1}{1 + H(p)} \theta_v(p) - \frac{H(p)}{1 + H(p)} N \theta_n(p)$

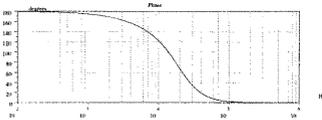
4.3.2. On a : $H(p) = \frac{K(p + \omega_2)}{p^2(p + \omega_1)}$ avec $K = \frac{K_0 I_0}{NC_1}$, $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$ On pose alors :

$T_v(p) = \frac{1}{1 + H(p)} = \frac{p^2(p + \omega_1)}{p^2(p + \omega_1) + K(p + \omega_2)}$ et $T_n(p) = -\frac{NH(p)}{1 + H(p)} = \frac{-K(p + \omega_2)}{p^2(p + \omega_1) + K(p + \omega_2)}$

4.3.2.a. Compte tenu de la décomposition du dénominateur commun on obtient les diagrammes suivants :



Bruit de Phase à la sortie de l'OCT

Diagrammes de Bode de T_v et T_n

4.3.2.b. T_v réalise un filtrage passe-haut alors que T_n réalise un filtrage passe-bas

4.3.3. Si les signaux de perturbation sont décorrélés on peut écrire le bruit de la phase de sortie de l'OCT est la somme quadratique des densités de puissance soit : $S_{\phi_s} = |T_v|^2 S_{\phi_v} + |T_n|^2 S_{\phi_n}$

4.3.4. On a : $S_{\phi_v} = \frac{S_0}{f^2}$ d'où : $S_{\phi_s} = \frac{\omega^4(\omega^2 + \omega_1^2)}{|D(\omega)|^2} \frac{4\pi^2 S_0}{\omega^2} + \frac{N^2 K^2(\omega^2 + \omega_2^2)}{|D(\omega)|^2} S_{\phi_n}$

On a : $S_{\phi_s}(0) = N^2 S_{\phi_n} = 7,94 \cdot 10^{-9}$ en dBc on a : $S_{\phi_s}(0) = -81$ dBc

4.3.5 La variance de phase $\sigma_{\phi_s}^2$ de l'oscillateur inclus est donnée par : $\sigma_{\phi_s}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\phi_s}(f) df$

4.3.6. Avec l'approximation donnée on a : $\sigma_{\phi_s} = \frac{180}{\pi} \sqrt{2 S_{\phi_s}(0) f_c} = 1,2^\circ$

5 Taux d'erreur du démodulateur

5.1 Décomposition du signal d'entrée

5.1.1. On a $s_k(t) = S \cdot \cos(\omega_d t + \psi_k(t))$. En développant le cosinus on obtient : $s_k(t) = S \cdot \cos \omega_d t \cos \psi_k(t) - S \cdot \sin \omega_d t \sin \psi_k(t)$ que l'on peut identifier à la forme cherchée :

$$s_k(t) = A_k \sqrt{\frac{2}{T_s}} (\cos \omega_d t \cos \varphi - \sin \omega_d t \sin \varphi) + B_k \sqrt{\frac{2}{T_s}} (\sin \omega_d t \cos \varphi + \cos \omega_d t \sin \varphi)$$

soit en regroupant les termes en $\cos \omega_d t$ et $\sin \omega_d t$

$$s_k(t) = \left(A_k \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos \varphi + B_k \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin \varphi \right) \cos \omega_d t + \left(-A_k \sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin \varphi + B_k \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos \varphi \right) \sin \omega_d t$$

On en déduit immédiatement le système

$$\begin{cases} S \cos \psi_k(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_s}} (A_k \cos \varphi + B_k \sin \varphi) \\ S \sin \psi_k(t) &= \sqrt{\frac{2}{T_s}} (A_k \sin \varphi - B_k \cos \varphi) \end{cases}$$

Pour résoudre ce système on multiplie tout d'abord la première équation par $\cos \varphi$ et la seconde par $\sin \varphi$ et on fait la somme ce qui nous donne A_k . Puis on multiplie la première par $\sin \varphi$ et la seconde par $\cos \varphi$ et on fait la différence ce qui donne B_k . On obtient alors :

$$\begin{cases} A_k &= S \sqrt{\frac{T_s}{2}} \cos(\psi_k(t) - \varphi) \\ B_k &= -S \sqrt{\frac{T_s}{2}} \sin(\psi_k(t) - \varphi) \end{cases}$$

5.1.2. Qui peut encore s'écrire en introduisant l'énergie par symbole $E_s = \frac{S^2 T_s}{2}$:

$$\begin{cases} A_k &= \sqrt{E_s} \cos(\psi_k(t) - \varphi) \\ B_k &= -\sqrt{E_s} \sin(\psi_k(t) - \varphi) \end{cases}$$

5.1.3.

5.2 Établissement d'un critère de décision

5.2.1. On a : $\mathbf{E}[y_1] = \mathbf{E} \left[\int_0^{T_s} (s_k(t) + \eta(t)) \cdot e_1(t) \cdot dt \right] = \mathbf{E} \left[\int_0^{T_s} s_k(t) e_1(t) \cdot dt \right] + \mathbf{E} \left[\int_0^{T_s} \eta(t) e_1(t) \cdot dt \right]$

On calcule séparément les deux espérances et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{T_s} s_k(t) e_1(t) \cdot dt &= \int_0^{T_s} \left(S \cos(\omega_d t + \psi_k) \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(\omega_d t + \varphi) \right) \\ &= S \sqrt{\frac{2}{T_s}} \left[\int_0^{T_s} \frac{\cos(\psi_k - \varphi)}{2} dt + \int_0^{T_s} \frac{\cos(2\omega_d t + \psi_k + \varphi)}{2} dt \right] = cte \\ &= \sqrt{\frac{S^2 T_s}{2}} \cos(\psi_k - \varphi) \end{aligned}$$

on en tire donc : $\mathbf{E} \left[\int_0^{T_s} s_k(t) e_1(t) \cdot dt \right] = \sqrt{E_s} \cos(\psi_k - \varphi) = A_k$

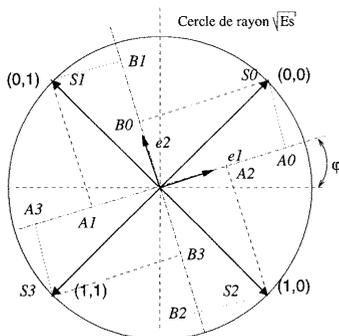


FIG. 2 – Diagramme de Fresnel des signaux émis

Par ailleurs $\mathbf{E} \left[\int_0^{T_s} \eta(t) e_1(t) \cdot dt \right] = \int_0^{T_s} \mathbf{E}[\eta(t)] e_1(t) dt = 0$ car $\mathbf{E}[\eta(t)] = 0$. On a donc finalement

$$\mathbf{E}[y_1] = A_k$$

De la même façon on peut calculer $\text{var}[y_1] = \mathbf{E}[y_1^2] - \mathbf{E}^2[y_1] = \mathbf{E}[y_1^2] - A_k^2$. On peut écrire

$$\mathbf{E}[y_1^2] = \mathbf{E} \left[\left(\int_0^{T_s} (s_k(t) + \eta(t)) e_1(t) dt \right) \cdot \left(\int_0^{T_s} (s_k(t') + \eta(t')) e_1(t') dt' \right) \right]$$

En développant les deux intégrales terme à terme, on obtient :

$$\mathbf{E}[y_1^2] = A_k^2 + 2A_k \mathbf{E} \left[\int_0^{T_s} \eta(t) e_1(t) dt \right] + \mathbf{E} \left[\int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \eta(t) \eta(t') e_1(t) e_1(t') dt dt' \right]$$
 On en déduit que

$$\text{var}[y_1] = \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \mathbf{E}[\eta(t) \eta(t')] e_1(t) e_1(t') dt dt' = \int_0^{T_s} \left(\int_0^{T_s} \frac{N_0}{2} \delta(t - t') e_1(t') dt' \right) e_1(t) dt$$

Compte tenu de la définition de la fonction de Dirac on obtient $\int_0^{T_s} \frac{N_0}{2} \delta(t - t') e_1(t') dt' = \frac{N_0}{2} e_1(t)$ et

$$\text{var}[y_1] = \int_0^{T_s} \frac{N_0}{2} e_1^2(t) dt \text{ or } \int_0^{T_s} e_1^2(t) dt = 1. \text{ On en déduit finalement :}$$

$$\text{var}[y_1] = \frac{N_0}{2}. \text{ Un calcul identique pour } y_2 \text{ montre que } \text{var}[y_2] = \frac{N_0}{2} \text{ et } \mathbf{E}[y_2] = B_k$$

5.2.2. Les variables aléatoires y_1 et y_2 étant indépendantes, on a : $P(y_1 \text{ et } y_2 / S_k) = P(y_1 / S_k) \cdot P(y_2 / S_k)$. Par ailleurs on sait que y_1 et y_2 sont des variables Gaussiennes dont on a déterminé l'espérance(0) et la variance ($\frac{N_0}{2}$). Leur densité de probabilité s'écrivent donc :

$$p(y_1/\mathbf{S}_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(y_1 - A_k)^2}{N_0}} \quad \text{et} \quad p(y_2/\mathbf{S}_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(y_2 - B_k)^2}{N_0}} \quad \text{on a donc :}$$

$$P(\mathbf{Y}/\mathbf{S}_k) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{(y_1 - A_k)^2 + (y_2 - B_k)^2}{N_0}} = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{\|\mathbf{Y} - \mathbf{S}_k\|^2}{N_0}}$$

La quantité $\|\mathbf{Y} - \mathbf{S}_k\|^2$ représente le carré de la distance du point reçu \mathbf{Y} et du point émis \mathbf{S}_k .

5.2.3. Afin de maximiser la probabilité précédente on doit minimiser le terme dans l'exponentielle, soit $\|\mathbf{Y} - \mathbf{S}_k\|^2$. On voit alors que cela revient à minimiser la distance entre le point reçu et le point émis qui est, à priori, inconnu. On décidera donc de choisir le signal émis le plus proche du signal reçu.

5.3 Calcul de la probabilité d'erreur.

5.3.1. \mathbf{S}_0 ayant été émis on constate que le signal reçu se trouve dans le cadran D_1 . On prendra alors la décision que le symbole \mathbf{S}_1 a été émis et on commet une seule erreur puisque qu'il n'y a qu'un seul bit de différence entre \mathbf{S}_0 et \mathbf{S}_1 .

5.3.2. Le symbole \mathbf{S}_0 étant émis on commettra une erreur si le point reçu appartient à D_1 , 2 erreurs s'il appartient à D_3 et une erreur s'il appartient à D_2 . Ces événements étant mutuellement exclusifs, la probabilité d'erreur binaire est donnée par :

$$P_e = \frac{1}{2} [P[(\mathbf{Y} \in D_1)/\mathbf{S}_0] + 2 \cdot P[(\mathbf{Y} \in D_3)/\mathbf{S}_0] + P[(\mathbf{Y} \in D_2)/\mathbf{S}_0]]$$

Le facteur $\frac{1}{2}$ intervient car deux bits sont transmis à chaque symbole.

5.3.3. On a : $P[(\mathbf{Y} \in D_1)/\mathbf{S}_0] = P[(y_1 \leq 0) \text{ et } (y_2 \geq 0)] = P[y_1 \leq 0] P[y_2 \geq 0]$ et :

$$P[y_1 \leq 0] P[y_2 \geq 0] = \frac{1}{\pi N_0} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(y_1 - A_0)^2}{N_0}} dy_1 \int_0^{\infty} e^{-\frac{(y_2 - B_0)^2}{N_0}} dy_2$$

On pose : $u = -\frac{y_1 - A_0}{\sqrt{N_0}}$ et $v = \frac{y_2 - B_0}{\sqrt{N_0}}$ l'expression précédente devient :

$$P[y_1 \leq 0] P[y_2 \geq 0] = -\frac{1}{\pi} \int_{\infty}^{-\frac{A_0}{\sqrt{N_0}}} e^{-u^2} du \int_{-\frac{B_0}{\sqrt{N_0}}}^{\infty} e^{-v^2} dv$$

En introduisant la fonction $\text{erfc}(x)$ on obtient :

$$P[(\mathbf{Y} \in D_1)/\mathbf{S}_0] = \frac{1}{4} \text{erfc}\left(\frac{A_0}{\sqrt{N_0}}\right) \text{erfc}\left(-\frac{B_0}{\sqrt{N_0}}\right)$$

De même on a :

$$P[(\mathbf{Y} \in D_3)/\mathbf{S}_0] = P[y_1 \leq 0] P[y_2 \leq 0] = \frac{1}{\pi N_0} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(y_1 - A_0)^2}{N_0}} dy_1 \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(y_2 - B_0)^2}{N_0}} dy_2$$

et en effectuant des changements de variable identiques on obtient :

$$P[(\mathbf{Y} \in D_3)/\mathbf{S}_0] = \frac{1}{4} \text{erfc}\left(\frac{A_0}{\sqrt{N_0}}\right) \text{erfc}\left(\frac{B_0}{\sqrt{N_0}}\right)$$

Enfin

$$P[(\mathbf{Y} \in D_2)/\mathbf{S}_0] = \frac{1}{4} \text{erfc}\left(-\frac{A_0}{\sqrt{N_0}}\right) \text{erfc}\left(\frac{B_0}{\sqrt{N_0}}\right)$$

5.3.4. En reportant les expressions précédentes dans la probabilité d'erreur binaire on obtient :

$$P_e = \frac{1}{8} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{A_0}{\sqrt{N_0}} \right) \operatorname{erfc} \left(-\frac{B_0}{\sqrt{N_0}} \right) + 2 \operatorname{erfc} \left(\frac{A_0}{\sqrt{N_0}} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{B_0}{\sqrt{N_0}} \right) + \operatorname{erfc} \left(-\frac{A_0}{\sqrt{N_0}} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{B_0}{\sqrt{N_0}} \right) \right]$$

En tenant compte de la relation $\operatorname{erfc}(x) + \operatorname{erfc}(-x) = 2$ on obtient :

$$P_e = \frac{1}{4} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{A_0}{\sqrt{N_0}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{B_0}{\sqrt{N_0}} \right) \right]$$

Et, avec les conventions de la figure, on a :

$$A_0 = \sqrt{E_s} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \text{ et } B_0 = \sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \sqrt{E_s} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$$

on obtient finalement

$$P_e(\varphi) = \frac{1}{4} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \cos(\pi/4 - \varphi) \right] + \frac{1}{4} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \cos(\pi/4 + \varphi) \right]$$

5.3.5. On a $10 \log \left(\frac{E_s}{N_0} \right) = 12 \text{ dB} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} = 3,98$. En utilisant les courbes Les courbes de la fonction d'erreur complémentaire fournies à l'annexe A-2. On peut tracer la courbe suivante :

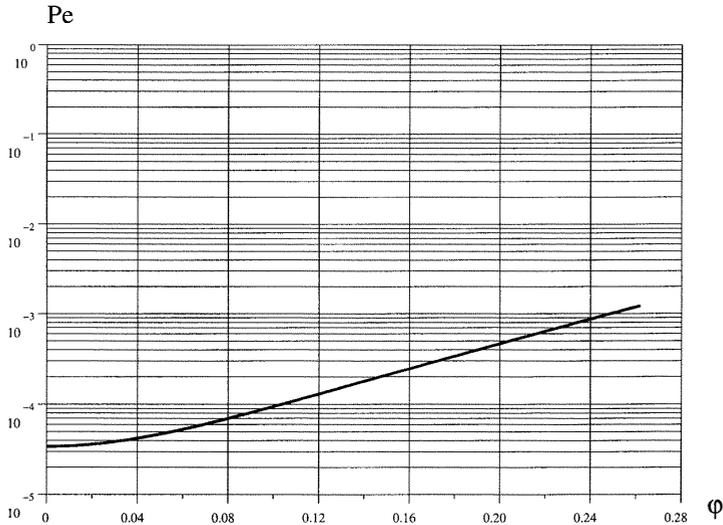


FIG. 3 – Probabilité d'erreur en fonction de φ

5.3.6.

- Si le synthétiseur de réception n'est pas verrouillé en phase sur le signal reçu, il existe une déviation de fréquence $\Delta\omega$ entre les deux signaux et le déphasage sera $\varphi = \Delta\omega t$. Cette déviation est inadmissible pour obtenir un taux d'erreur correct.
- Si le synthétiseur est verrouillé en phase sur le signal reçu, le déphasage φ est du au bruit de phase de l'oscillateur.

5.3.7. On peut considérer que pendant 99% l'erreur de phase est telle que $\varphi < \varphi_0 + \sigma_\varphi$ où σ_φ est l'écart type du bruit de phase du synthétiseur calculé dans la quatrième partie du problème. On aura donc intérêt à réduire ce bruit de phase à son minimum.

Si on utilisait une modulation à 8 états de phase on divise la zone de décision par 2. le bruit de phase restant identique la probabilité d'erreur augmente. On est alors amené à augmenter le rapport $\frac{E_s}{N_0}$

Agrégation de sciences physiques

Concours interne

COMPOSITION SUR LA PHYSIQUE ET LE TRAITEMENT AUTOMATISÉ DE L'INFORMATION ♦ Session : 2003

1. Mesure de g

1.1. Etude mécanique

$$1.1.1. \quad m\ddot{z} = -mg \rightarrow \dot{z}(t) = -gt + v_0 \text{ et } z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$$

$$1.1.2. \quad v_0 = gt_M$$

$$z_M - z = \frac{1}{2}g(t - t_M)^2$$

$$1.1.3. \quad T = 2\sqrt{\frac{2(z_M - z)}{g}}$$

$$1.1.4. \quad g = \frac{8H}{T_1^2 - T_2^2}$$

$$1.1.5. \quad g = 9,80 \text{ m.s}^{-2}$$

1.2. Mesure expérimentale des durées T_1 et T_2

1.2.1. Méthode d'auto-collimation.

1.2.2.

1.2.2.1. Division d'amplitude au niveau de la lame séparatrice LS : un des faisceaux est réfléchi par M_1 puis par LS et converge en F' ; l'autre est réfléchi par LS puis par M et converge également en F' . Il y a donc interférence en F' .

1.2.2.2. $\delta = 2e$; e : épaisseur de la lame virtuelle. Soit $\delta = -(z+x_1)$ pour le miroir M_1 et $\delta = -(z+x_2)$ pour M_2 .

1.2.2.3. Le repérage de la ddm nulle permet de repérer les instants de passage du miroir M aux cotes $z=-x_1$ et $z=-x_2$, c'est-à-dire les durées T_1 et T_2 .

1.2.2.4. $I = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta \right) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda} (z(t) + x_i) \right)$. Cette intensité est périodique, rien ne permet de distinguer la frange centrale des autres franges brillantes.

1.2.3.

1.2.3.1. $400\text{nm} \leq \lambda \leq 800\text{nm}$. D'où $3,7 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \leq \nu \leq 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

1.2.3.2. trains d'onde non synchrones \rightarrow ondes non cohérentes (du point de vue temporel).

Terme d'interférence nul, les sources ne peuvent interférer entre elles. Les intensités s'ajoutent.

$$1.2.3.3. \quad I(t) = 2A(\nu_2 - \nu_1) \left[1 + \text{sinc} \left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi\delta(\nu_1 + \nu_2)}{c} \right) \right]. \text{ La fonction } I(t) \text{ est cette fois}$$

pseudo périodique : la frange centrale correspond au maximum absolu d'intensité. On peut donc repérer sans ambiguïté le passage par les cotes cherchées.

2. Mesure de G

2.1. Moments : $-C\theta$ et $2 \times \frac{GMm}{d^2} \times l$

Equilibre : $C\theta = 2 \frac{GMm}{d^2} l$

2.2. Faire un schéma explicatif $\rightarrow \beta = 4\theta$

2.3. $\theta \approx \frac{a}{4b}$

2.4. $G = \frac{Cd^2a}{8bMml}$ $[G] = [M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}]$ $G = 6,6 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$

3. Mesures des masses d'une galaxie

3.1. Non, il n'est pas galiléen en règle générale. Ici, R* est galiléen.

3.2. a. Lois de Képler

3.2. b. $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$

3.3. Réduction canonique

3.4. $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$

3.5. $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}} ; a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a$ et $a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a$

3.6. $m_1 = \frac{1}{1+\alpha} \frac{\pi^2 (d_{\min} + d_{\max})^3}{2GT^2}$ et $m_2 = \frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{\pi^2 (d_{\min} + d_{\max})^3}{2GT^2}$

3.7. AN : $m_1 = 3,4 \cdot 10^{29} \text{ kg}$ et $m_2 = 6,8 \cdot 10^{29} \text{ kg}$

4. Mesure de la charge élémentaire e

4.1. Poids, force d'Archimède et force de frottement

4.2. $\bar{v}_0 = \frac{2r^2}{9\mu} (\rho - \rho_0) \bar{g}$

4.3. $q_0 = -18 \frac{\pi\mu\nu_0 d}{U_1} \sqrt{\frac{\mu\nu_0}{2(\rho - \rho_0)g}}$

4.4. $q_1 = -18 \frac{\pi\mu(\nu_0 + \nu_1) d}{U_1} \sqrt{\frac{\mu\nu_0}{2(\rho - \rho_0)g}}$

4.5. $q_0 = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $q_1 = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ $\rightarrow q = ne$, avec n entier et $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

5. Mesure de distance focale

5.1.1. $f = -f'$

- 5.1.2. B' est à l'intersection de deux des trois rayons suivants : celui qui passe par O, celui qui est parallèle à l'axe optique et celui qui passe par F
- 5.1.3. a) objet réel, image réelle b) objet réel, image virtuelle
 c) objet virtuel, image réelle d) Si A = F, alors A'B' est à l'infini
- 5.1.4. L'image A'B' de AB par un miroir plan est le symétrique de AB par rapport au miroir. Si AB est réel, alors A'B' est virtuelle.
- 5.2.1. Définitions de foyer objet et foyer image
- 5.2.2. Définition et réglage d'un collimateur
- 5.2.3. Mesure de f' : utilisation d'un collimateur
- 5.2.4. Mesure de f : utilisation d'un collimateur en utilisant le principe de retour inverse de la lumière
- 5.3.1. $A = F \xrightarrow{L} \infty \xrightarrow{M} \infty \xrightarrow{L} A' = F$, un rayon suffit pour trouver B', ainsi A' = A et $\overline{A'B'} = -\overline{AB}$
- 5.3.2. Résultats indépendants de la distance entre la lentille et le miroir plan
- 5.4.1. $f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$
- 5.4.2. $f' = \frac{D}{4}$
- 5.4.3. $f' = 24 \text{ cm}$ $\Delta f' = 4,5 \text{ mm}$ $\rightarrow f' = (240 \pm 5) \text{ mm}$
- 5.4.4. On accole deux lentilles et on utilise la formule des opticiens $\frac{1}{f'_e} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} \dots$

6. Mesure de champ magnétique

- 6.1.1. $\tan \theta = \frac{\mu_0 M}{2\pi d^3 B_H}$
- 6.1.2. Théorème du moment cinétique appliqué en O
 $J\ddot{\theta} = \Gamma = -M B_H \sin \theta$
 Pour de petits angles $J\ddot{\theta} = -M B_H \theta$
 $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M B_H}}$
- 6.1.3. $[J] = [M L^2]$. J est en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.
 Mesurer les dimensions caractéristiques de l'aimant et sa masse pour accéder à J
 $B_H = \sqrt{\frac{2\pi\mu_0 J}{d^3 T^2 \tan \theta}}$ A.N. $B_H = 2.3 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
- 6.2.1. $\vec{E}_H = -\vec{\nabla} \wedge \vec{B}$
 \vec{E}_H dirigé selon \vec{u}_z $E_H = \frac{IB}{neab}$
- 6.2.2. Existence de U_H
 $U_H = \frac{IB}{neb}$ $R_H = \frac{1}{ne}$
 R_H en $\text{m}^3 \text{C}^{-1}$

6.2.3. Cuivre : $R_H = 8,9 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ C}^{-1}$

Semi-conducteur $R_H = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ C}^{-1}$

Cuivre : $U_H = 0,45 \mu\text{V}$ Semi-conducteur : $U_H = 3,9 \text{ V}$

6.2.4. $\vec{E} = \frac{m}{ne^2 \tau} \vec{j} + \frac{\vec{j}}{ne} \wedge \vec{B}$ $\gamma = \frac{ne^2 \tau}{m}$

lignes de courant non parallèles aux lignes de champ B

$$\tan \alpha = \frac{j B R_H}{j / \gamma} = \gamma R_H B \quad \tan \alpha = \gamma R_H B$$

A.N. : Cuivre $\alpha = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ Semi-conducteur $\alpha = 3,9 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$

Angle très faible, erreur négligeable

7. Mesures de vitesse par effet Doppler

7.1. $T_R = \frac{c - v_S}{c - v_R} T$ $v_R = \frac{c - v_R}{c - v_S} v_S$

R immobile Si $v_R = 0$ $v_R = \frac{c}{c - v_S} v_S$ $v_R > v_S$ quand source se rapproche

$v_R < v_S$ quand sources s'éloignent

7.2.1. $v_R = \frac{c - v}{c} v_S$ $v' = \frac{c}{c + v} v_R$

7.2.2. $v' = \frac{c - v}{c + v} v = \frac{1 - v/c}{1 + v/c} v$ Si $v \ll c$ $v' = (1 - \frac{2v}{c}) v$

$$\delta v = -\frac{2v}{c} v$$

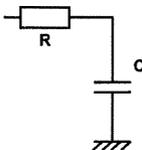
7.2.3. $|\delta v| = \frac{\delta v}{v} \times \frac{c}{2}$ A.N. : $v = 9,9 \text{ cm.s}^{-1}$

7.2.4. Non

7.3.1. Spectre de u_1 $u_1 = k \frac{U_0 U_R}{2} [\cos 2\pi(\nu + \nu')t + \cos 2\pi(\nu' - \nu)t]$

7.3.2. Filtre passe-bas

de fréquence de coupure $\nu_c = \frac{1}{2\pi RC}$



Agrégation de sciences physiques

Concours interne

COMPOSITION AVEC EXERCICES D'APPLICATION

Option physique et chimie ♦ Session : 2003

PARTIE A

Les documents annoncés sont à consulter en Annexe à la fin du corrigé.

LE COBALT, LE NICKEL, LE CUIVRE

1. Les métaux

1.1.1 Configuration électronique : ${}_{27}\text{Co} : [\text{Ar}] 3d^7 4s^2$; ${}_{28}\text{Ni} : [\text{Ar}] 3d^8 4s^2$; ${}_{29}\text{Cu} : [\text{Ar}] 3d^{10} 4s^1$

1.1.2 Ions les plus courants Co^{2+} ; Ni^{2+} ; Cu^+ (et Cu^{2+}).

1.1.3 $E_{\text{II}}(\text{Cu}) = E(\text{Cu}^+) - E(\text{Cu}) = -E_{4s}(\text{Cu}) = 13,6 (29 - (18 \times 0,85 + 10 \times 1))^2 / (3,7)^2 = 13,6 \text{ eV}$

1.2.1.1 Un atome en chacun des huit sommets et un au centre de chacune des faces (**doc.1**)

1.2.1.2 Sites octaédriques : un au centre du cube et un au centre de chaque arête soit 4 sites O
Sites tétraédriques : un au centre de chacun des huit cubes divisant la maille élémentaire.

1.2.1.3 Masse volumique : $\rho = M.Z / (N_A \cdot a^3)$ d'où $a = (M.Z / (N_A \cdot \rho))^{1/3}$ et $R = a \sqrt{2} / 4$
D'où **R = 125 pm.**

R_O = R(√2 - 1) = 52 pm

R_T = R(√3/2 - 1) = 28 pm.

1.2.1.4 Cu et Ni ont la même structure cristalline, des masses molaires et des masses atomiques voisines donc des rayons métalliques proches aussi aura-t-on une solution solide de substitution.

1.2.2.1 La maille élémentaire du cobalt est un prisme droit à base losange régulier qui s'inscrit dans un prisme régulier à base hexagonale (**doc.2**)

1.2.2.2 Si le système est hexagonal compact avec sphères tangentes : $c / a = \sqrt{8/3} \approx 1,633$

Avec les données de l'énoncé : $c / a = 412 / 252 = 1,635$ correct à 0,1 % près.

Alors **R_{Co} = a_{Co} / 2 = 126 pm**

1.2.3.1 Le cuivre a une faible énergie d'ionisation ce qui explique la bonne conductivité du métal.

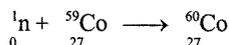
1.2.3.2 La conductivité électrique vaut $\sigma = n \cdot e \cdot \mu$, où n est le nombre de porteurs de charges
d'où $n = \sigma / e \cdot \mu = 5,93 \cdot 10^7 / (1,60 \cdot 10^{-19} \times 4,45 \cdot 10^{-3}) = 8,33 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$

Le nombre d'atomes de cuivre par unité de volume vaut :

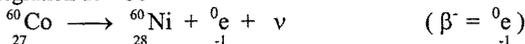
$$N = \rho(\text{Cu}) \cdot N_A / M(\text{Cu}) = 8,46 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$N \approx n$, la conductivité correspond à : $\text{Cu} \longrightarrow \text{Cu}^+ + e^-$

1.3.1 L'élément bombardé est un isotope du cobalt, le nombre de charge vaut donc 27 ; bombardé par des neutrons ${}^1_0\text{n}$ il donne le cobalt 60, ${}^{60}_{27}\text{Co}$, l'isotope bombardé a donc un nombre de masse égal à 59, d'où :



1.3.2 Désintégration de ^{60}Co



1.3.3 $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ avec $\lambda = (\ln 2) / T$ d'où $t = ((\ln N_0 / N) \cdot T) / (\ln 2) = 35,2$ ans en prenant $N_0 / N = 100$

2. Les oxydes : structure de CoO, réduction de NiO.

2.1.1.1 Les ions oxyde O^{2-} forment un réseau cubique à faces centrées les ions cobalt(II) Co^{2+} occupent tous les sites octaédriques de ce réseau (**doc.3**)

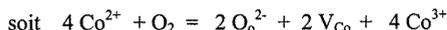
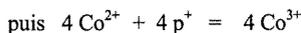
2.1.1.2 $\rho_{\text{th}} = Z \cdot M(\text{CoO}) / (N_A \cdot a^3)$
 $= (4 \times 74,9 \cdot 10^{-3}) / (6,02 \cdot 10^{23} \times (424 \cdot 10^{-12})^3) = 6, 53 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

2.1.2.1 $\rho_r = Z \cdot (M(\text{O}) + (1 - x) M_{\text{Co}}) / (N_A \cdot a^3)$

d'où $\rho_r / \rho_{\text{th}} = [(1 - x)M_{\text{Co}} + M_{\text{O}}] / [M_{\text{Co}} + M_{\text{O}}]$

soit $x = 0,013$.

2.1.2.2 Co_{1-x}O est un oxyde sur - stœchiométrique d'où :



La formule du cristal est alors $[\text{Co}^{2+}_{1-3x} \text{Co}^{3+}_{2x} \text{V}_{\text{Co}x}] \{\text{O}^{2-}\}$

[] : site cationique ; { } : site anionique.

2.1.2.3 La présence de trous positifs en fait un semi - conducteur de type p

2.1.2.4 La constante d'équilibre de l'équation de formation des lacunes s'écrit :

$$K = (a(\text{O}_0^{2-}))^2 \cdot (a(\text{V}_{\text{Co}}))^2 \cdot (a(\text{p}^+))^4 / a(\text{O}_2).$$

O^{2-} constituant avec Co^{2+} , le « solvant » du cristal : $a(\text{O}_0^{2-}) = 1,00$

$a(\text{V}_{\text{Co}}) = x$; $a(\text{p}^+) = a(\text{Co}^{3+}) = 2 \cdot x$; $a(\text{O}_2) = P(\text{O}_2) / P^\circ$

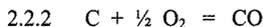
D'où $K = (16 \cdot x^6) / (P(\text{O}_2) / P^\circ)$ soit $x = k' \cdot (P(\text{O}_2))^{1/6}$ alors $\sigma = k \cdot (P(\text{O}_2))^{1/6}$

2.2.1 $\Delta_r G^\circ(T) = \Delta_r H^\circ(T) - T \cdot \Delta_r S^\circ(T)$

En l'absence de changement de phase, on admet que :

$\Delta_r H^\circ(T) \approx$ constante et $\Delta_r S^\circ(T) \approx$ constante c'est à dire $\Delta_r C_p^\circ(T) \approx 0$.

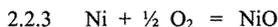
Alors $\Delta_r G^\circ(T) = \Delta_r H^\circ(T_0) - T \cdot \Delta_r S^\circ(T_0)$



$\Delta_r H^\circ(298 \text{ K}) = \Delta_f H^\circ(\text{CO}, 298\text{K}) = -110,5 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$.

$\Delta_r S^\circ(298 \text{ K}) = \sum \nu_i S_i^\circ(298\text{K}) = 88,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

D'où : $\Delta_r G_a^\circ(T) = -110,5 \cdot 10^3 - 88,5 T \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$.



$\Delta_r H^\circ(298 \text{ K}) = \Delta_f H^\circ(\text{NiO}, 298\text{K}) = -239,8 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$.

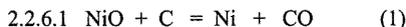
$\Delta_r S^\circ(298 \text{ K}) = \sum \nu_i S_i^\circ(298\text{K}) = -94,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

D'où : $\Delta_r G_b^\circ(T) = -239,8 \cdot 10^3 + 94,5 T \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$.

2.2.4 Voir **doc. 4.**

2.2.5 Pour le couple NiO / Ni, les deux espèces étant solides la droite est la limite d'existence stables des deux espèces.

Pour le couple CO / C, la droite est la limite de stabilité de C ; CO étant un gaz, il existe quelle que soit la température.



$$(1) = (a) - (b) \quad \text{soit} \quad \Delta rG_1^\circ(T) = \Delta rG_a^\circ(T) - \Delta rG_b^\circ(T)$$

$$\text{d'où} \quad \Delta rG_1^\circ(T) = 129,3 \cdot 10^3 - 183 \cdot T \quad \text{J} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

$$2.2.6.2 \quad \text{Pour } T = T_i, \quad \Delta rG_1^\circ(T_i) = 0 \quad \text{d'où} \quad T_i = 707 \text{ K}$$

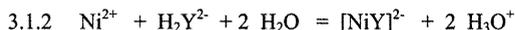
$$2.2.6.3 \quad \text{A } 1273 \text{ K}, \quad \Delta rG_1^\circ = -103,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \quad \text{et} \quad K_1^\circ = 1,79 \cdot 10^4; \quad \text{réaction très avancée.}$$

2.2.7 L'atome de nickel possède 28 électrons, selon la règle de Sidgwick il peut en accepter huit pour acquérir la structure du krypton.

Le complexe formé est le tétracarbonylnickel $[\text{Ni}(\text{CO})_4]$ de structure tétraédrique régulière (voir **doc.5**)

3. Titrages du nickel(II) en solution aqueuse

3.1.1 Une électrode de mesure et une électrode de référence sont nécessaires. L'électrode de mesure est une électrode de verre, l'électrode de référence peut-être une électrode AgCl / Ag (électrode combinée) ou une électrode au calomel ($\text{Hg}_2\text{Cl}_2 / \text{Hg}$).

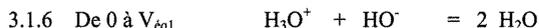


$$3.1.3 \quad K = ([[\text{NiY}]^{2-}] \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]^2) / ([\text{Ni}^{2+}] \cdot [\text{H}_2\text{Y}^{2-}]) = \beta_n \cdot K_{A3} \cdot K_{A4} = 10^{21}$$

3.1.4 Ni^{2+} et H_3O^+ sont les deux espèces susceptibles de réagir avec l'ion hydroxyde.

$$3.1.5 \quad n(\text{H}_3\text{O}^+) = 2 \cdot n_0(\text{H}_2\text{Y}^{2-}) = 2 \cdot V_{0,Y} \cdot C_Y$$

$$n(\text{Ni}^{2+}) = n_0(\text{Ni}^{2+}) - n([\text{NiY}]^{2-}) = V_{0,\text{Ni}} \cdot C_{\text{Ni}} - V_{0,Y} \cdot C_Y$$



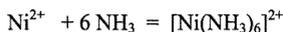
$$3.1.7 \quad \bullet C_Y = n(\text{H}_3\text{O}^+) / (2 \cdot V_{0,Y}) = n(\text{HO}^-)_{\text{éq1}} / (2 \cdot V_{0,Y}) = C_B \cdot V_{\text{éq1}} / (2 \cdot V_{0,Y}) = 0,116 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\bullet n(\text{HO}^-)_{1 \rightarrow 2} = 2 n(\text{Ni}^{2+})$$

$$C_B \cdot (V_{\text{éq2}} - V_{\text{éq1}}) = 2 (V_{0,\text{Ni}} \cdot C_{\text{Ni}} - V_{0,Y} \cdot C_Y)$$

$$\text{soit } C_{\text{Ni}} = C_B \cdot V_{\text{éq2}} / (2 \cdot V_{0,\text{Ni}}) = 0,094 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

3.2.1 Equations des réactions auxquelles participent les ions Ni^{2+} lors de la préparation de S :

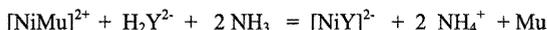


3.2.2 Equation de la réaction de dosage :



$$K = ([NiY]^{2-} \cdot [NH_4^+]^2 \cdot [NH_3]^4) / ([Ni(NH_3)_6]^{2+} \cdot [H_2Y^{2-}]) = (\beta_a \cdot K_{A3} \cdot K_{A4}) / (\beta_b \cdot K_A) = 10^{12,5}$$

3.2.3 Equation de la réaction justifiant le changement de teinte :



3.2.4 A l'équivalence :

$$n(H_2Y^{2-})_{\text{éq}} = n(Ni^{2+})_o$$

soit : $V_{\text{éq}} \cdot C_Y = V_{0,Ni} \cdot C_{Ni}$

d'où $V_{\text{éq}} = V_{0,Ni} \cdot C_{Ni} / V_{\text{éq}} = 10,0 \cdot 0,094 / 0,116 = 8,1 \text{ mL}$

3.2.5 En supposant qu'il n'y ait pas de précipité :

	Ni^{2+}	+	$6 NH_3$	=	$[Ni(NH_3)_6]^{2+}$
C initial mol /L	0,0188		1,800		0
C final mol /L	ε		1,487		0,0188

$$[Ni^{2+}] = \varepsilon = [Ni(NH_3)_6]^{2+} / (\beta_b \cdot [NH_3]^6) = 1,7 \cdot 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}$$

L'ammoniac étant une base faible : $pOH = \frac{1}{2} (pK_B + pc) = 2,3$ soit $[HO^-] = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$

d'où $Q = [Ni^{2+}] \cdot [HO^-]^2 = 4,3 \cdot 10^{-16}$

Q est inférieur à K_s , $Ni(OH)_2$ ne précipite pas.

4. Titrage d'une solution d'ions cobalt(II) en présence d'ion fer(II)

4.1.1 L'orthophénanthroline peut se lier à un cation métallique par les deux doublets non liants des atomes d'azote, c'est un ligand bidentate : l'E.D.T.A peut se lier par six doublets : ceux des atomes d'atome et un de chacun des quatre atomes d'oxygène : il est hexadentate.

4.1.2 Le complexe $[Co(phen)_3]^{2+}$ est octaédrique (voir doc.6) ; non superposable à son image dans un miroir, il est chiral.

4.1.3.1 Le nombre effectif de magnétons de Bohr est lié au nombre n d'électrons célibataires :

$$n_{\text{eff}} = (n(n+2))^{1/2}$$

Avec $n_{\text{eff}} = 3,87$, $[Co(phen)_3]^{2+}$ possède 3 électrons célibataires d'où : $t_{2g}^5 e_g^2$

Avec $n_{\text{eff}} = 1,74$, $[Co(H_2O)_6]^{2+}$ possède 1 électron célibataire d'où : $t_{2g}^6 e_g^1$

4.1.3.2 Les niveaux énergétiques des deux ions complexes sont alors :



$[Co(phen)_3]^{2+}$ est un complexe à champ faible et haut spin (H.S) alors que le complexe $[Co(H_2O)_6]^{2+}$ est à champ fort et spin faible (L.S).

4.2.1.1 Les complexes sont les espèces majoritaires pour les fortes valeurs de $[phen]$ donc les faibles valeurs de $pphen$; d'autre part le degré d'oxydation de l'élément métallique croît lorsque le potentiel E croît d'où :

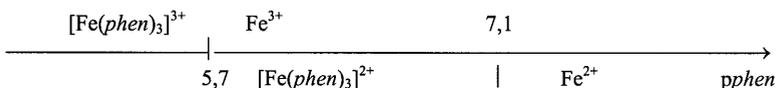


4.2.1.2 Sur la frontière entre C et D : $[[Fe(phen)_3]^{2+}] = [Fe^{2+}]$

$$\text{D'autre part} \quad : \beta_c = [[Fe(phen)_3]^{2+}] / ([Fe^{2+}] \cdot [phen]^3)$$

$$\text{Soit, sur la frontière} \quad : \beta_c = 1 / [phen]^3 \quad \text{et} \quad \mathbf{pphen} = (\log \beta_c) / 3 = \mathbf{7,1}$$

Par analogie , pour la frontière entre A et B $\mathbf{pphen} = (\log \beta_a) / 3 = \mathbf{5,7}$.



4.2.1.3 ♦ Pour $pphen \geq 7,1$: $Fe^{3+} + e^- = Fe^{2+}$

$$\text{Soit : } E_1 = E_1^\circ + 0,060 \log ([Fe^{3+}] / [Fe^{2+}])$$

$$\text{Sur la frontière } [Fe^{3+}] = [Fe^{2+}] \text{ d'où} \quad :$$

$$\mathbf{E_1 = 0,77V}$$

♦ Pour $5,7 \leq pphen \leq 7,1$: $Fe^{3+} + e^- + 3 phen = [Fe(phen)_3]^{2+}$

En remarquant que sur la frontière $[[Fe(phen)_3]^{2+}] = [Fe^{3+}]$, il vient :

$$E_2 = E_2^\circ + 0,060 \log ([phen]^3) = E_2^\circ - 0,18 pphen.$$

La continuité en $pphen = 7,1$ permet de trouver $E_2^\circ = 2,05 \text{ V}$ d'où

$$\mathbf{E_2 = 2,05 - 0,18 pphen}$$

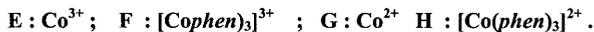
♦ Pour $pphen \leq 5,7$: $[Fe(phen)_3]^{3+} + e^- = [Fe(phen)_3]^{2+}$

Sur la frontière $[[Fe(phen)_3]^{3+}] = [[Fe(phen)_3]^{2+}]$ d'où : $E_3 = E_3^\circ$

La continuité en $pphen = 5,7$ permet de trouver $E_3^\circ = 1,02 \text{ V}$ d'où

$$\mathbf{E_3 = 1,02 V}$$

4.2.2.1 Par analogie avec la démarche du 4.2.1.1 :



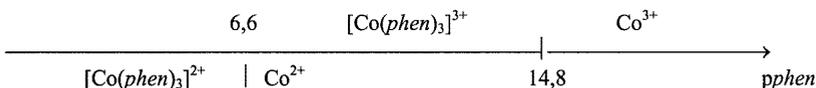
4.2.2.2 Par analogie avec la question 4.2.1.2

Sur la frontière entre Co^{2+} et $[Co(phen)_3]^{2+}$:

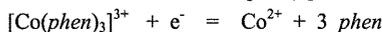
$$\beta_c = 1 / [phen]^3 \quad \text{et} \quad \mathbf{pphen} = (\log \beta_c) / 3 = \mathbf{6,6}$$

Sur la frontière entre Co^{3+} et $[Co(phen)_3]^{3+}$:

$$\beta_f = 1 / [phen]^3 \quad \text{et} \quad \mathbf{pphen} = (\log \beta_f) / 3 = \mathbf{14,8}$$



4.2.2.3 Sur la frontière entre Co^{2+} et $[Co(phen)_3]^{3+}$:



$$\text{et : } [Co(phen)_3]^{3+} = [Co]^{2+} \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} \text{soit } E_4 &= E_4^\circ + 0,060 \log (1 / [\text{phen}]^3) = E_4^\circ - 0,060 \log ([\text{phen}]^3) \\ &= E_4^\circ - 0,18 \log ([\text{phen}]) = E_4^\circ - 0,18 \text{ pphen} \end{aligned}$$

La pente de la frontière vaut **0,18 V**

4.3.1 Toutes les espèces Ox et Red étant en solution on peut utiliser une électrode de platine comme électrode de mesure . Une électrode au calomel peut servir d'électrode de référence.

4.3.2 Pour le couple $\text{Ce}^{4+} / \text{Ce}^{3+}$, $E = E^\circ = 1,44 \text{ V}$.

♦ En l'absence d'orthophénanthroline (partie droite des graphes) :

$$E(\text{Fe}^{3+} / \text{Fe}^{2+}) < E(\text{Ce}^{4+} / \text{Ce}^{3+}) < E(\text{Co}^{3+} / \text{Co}^{2+})$$

Les ions cérium(IV) Ce^{4+} peuvent oxyder les ions Fe^{2+} mais pas les ions Co^{2+} , seuls les ions Fe^{2+} sont dosés.

♦ En présence d'orthophénanthroline en excès ($\text{phen} \approx 1$) :

$$E([\text{Co}(\text{phen})_3]^{3+} / [\text{Co}(\text{phen})_3]^{2+}) < E([\text{Fe}(\text{phen})_3]^{3+} / [\text{Fe}(\text{phen})_3]^{2+}) < E(\text{Ce}^{4+} / \text{Ce}^{3+})$$

Les ions cérium(IV) Ce^{4+} peuvent oxyder les ions $[\text{Co}(\text{phen})_3]^{2+}$ et les ions $[\text{Fe}(\text{phen})_3]^{2+}$; en l'absence de blocage cinétique la première réaction qui se produit est celle qui est la plus quantitative, c'est à dire celle qui correspond au plus grand écart de potentiel.

Les ions $[\text{Co}(\text{phen})_3]^{2+}$ sont donc dosés en premier et les ions $[\text{Fe}(\text{phen})_3]^{2+}$ le sont en second. C'est la raison pour laquelle $V'_{E,2} - V'_{E,1} = V_{E,1}$

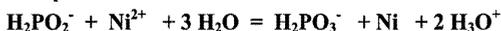
4.3.3 Avec les données de l'énoncé il est possible de tracer l'allure des graphes $U = f(V_{\text{Ce}^{4+}})$ (voir doc.7).

5. Nickelage de pièces métalliques

5.1.1 Comme $E^\circ(\text{Ni}^{2+} / \text{Ni}) \gg E^\circ(\text{Fe}^{2+} / \text{Fe})$, les ions Ni^{2+} peuvent être réduits par le métal fer, un dépôt de métal nickel est donc possible.

La constante d'équilibre de la réaction d'équation : $\text{Ni}^{2+} + \text{Fe} = \text{Fe}^{2+} + \text{Ni}$
vaut $K^\circ = 10^{2\Delta E^\circ / 0,060} = 10^{0,38 / 0,060} = 2,1 \cdot 10^6$.

5.1.2.1 Comme, à pH = 4 $E^\circ(\text{H}_2\text{PO}_3^- / \text{H}_2\text{PO}_2^-) < E^\circ(\text{Ni}^{2+} / \text{Ni})$, H_2PO_2^- peut réduire les ions Ni^{2+} selon la réaction d'équation :



5.1.2.2 Des raisons cinétiques sont sûrement la cause de cette inertie, vu que cette inertie cesse en présence de la lame de fer.

5.1.2.3 En présence de fer les ions Ni^{2+} sont réduits en métal nickel, ce qui amorce la cristallisation du nickel sur le fer, cristallisation qui se poursuit par la réaction vue au §5.1.2.1

5.2.1 A la cathode on peut avoir :



5.2.2 Par définition la surtension cathodique relative au nickel η_{Ni} vaut :

$$\eta_{\text{Ni}} = E(\text{Ni}^{2+} / \text{Ni})_{\text{réel}} - E(\text{Ni}^{2+} / \text{Ni})_{\text{th}}$$

Le document 8 donne le tracé du graphe $j_{\text{Ni}} = f(E_{\text{cath.}})$

$$E(\text{Ni}^{2+} / \text{Ni})_{\text{th}} = E^\circ(\text{Ni}^{2+} / \text{Ni}) + 0,030 \log [\text{Ni}^{2+}] = -0,25 \text{ V}$$

$$\eta_{\text{Ni}} = E(\text{Ni}^{2+} / \text{Ni})_{\text{réel}} - E(\text{Ni}^{2+} / \text{Ni})_{\text{th}}$$

$$\text{d'où } E(\text{Ni}^{2+} / \text{Ni})_{\text{réel}} = E(\text{Ni}^{2+} / \text{Ni})_{\text{th}} + \eta_{\text{Ni}} = -0,15 \log |j_{\text{Ni}}| - 0,56$$

5.2.3.1 Soit à l'aide du graphe, soit à l'aide de la formule, si $E_{\text{cath}} = E(\text{Ni}^{2+} / \text{Ni})_{\text{réel}} = -0,65 \text{ V}$,
 $j_{\text{Ni}} = 4,0 \text{ A.dm}^{-2}$

5.2.3.2 Le rendement cathodique r_c du dépôt de nickel est égal au quotient de la densité de dépôt du nickel par la densité cathodique :

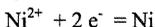
$$r_c = j_{\text{Ni}} / j = 4 / 5 = 80 \%$$

Il n'est pas de 100 % en raison de la formation simultanée, de dihydrogène, à la cathode

5.2.3.3 La quantité de nickel déposé vaut :

$$n(\text{Ni}) = m(\text{Ni}) / M(\text{Ni}) = V \cdot \rho(\text{Ni}) / M(\text{Ni}) = d \cdot S \cdot \rho(\text{Ni}) / M(\text{Ni})$$

La demi - équation électronique relative au dépôt s'écrit :



d'où : $n(\text{Ni}) = n(e^-) / 2 = Q / 2 \cdot \mathcal{F} = I \cdot t / (2 \cdot \mathcal{F}) = j_{\text{Ni}} \cdot S \cdot t / (2 \cdot \mathcal{F})$

$$j_{\text{Ni}} \cdot S \cdot t / (2 \cdot \mathcal{F}) = d \cdot S \cdot \rho(\text{Ni}) / M(\text{Ni})$$

La vitesse de dépôt du nickel v_d vaut :

$$v_d = d / t$$

soit $v_d = j_{\text{Ni}} \cdot M(\text{Ni}) / (2 \cdot \mathcal{F} \cdot \rho(\text{Ni}))$ avec $\mathcal{F} = N_A \cdot e$

Numériquement

$$v_d = (4,0 \cdot 10^2 \times 58,7 \cdot 10^{-3}) / (2 \times 1,60 \cdot 10^{-19} \times 6,02 \cdot 10^{23} \times 8900)$$

soit $v_d = 1,37 \cdot 10^{-8} \text{ m.s}^{-1} = 0,82 \mu\text{m.min}^{-1}$

PARTIE B

SYNTHESES ORGANIQUES

1. Synthèse d'une phéromone : le bombykol

1.1 Une bande vers 3500 cm^{-1} en infrarouge peut être attribuée à la vibration de valence d'une liaison O-H d'une fonction alcool.

1.2 Le nombre d'insaturations n_i peut se calculer à l'aide de la relation :

$$n_i = (2 n(\text{C}) - n(\text{H}) + 2) / 2 = (32 - 30 + 2) / 2 = 2$$

Ces deux insaturations peuvent être attribuées soit à une liaison $\text{C} \equiv \text{C}$ soit à deux liaisons $\text{C} = \text{C}$ (la présence d'un groupe alcool exclue, pour un seul atome d'hydrogène une insaturation due à une liaison $\text{C} = \text{O}$).

1.3.1 Un organomagnésien réagit très facilement avec l'eau, le dioxyde de carbone, le dioxygène d'où la nécessité de le préparer juste avant de l'utiliser.

1.3.2 Le solvant doit être aprotique afin de ne pas réagir avec l'organomagnésien qui est une base très forte. Ce doit être une base de Lewis afin de stabiliser, par réaction acido-basique de Lewis, l'organomagnésien formé. Un étheroxyde est souvent utilisé.

1.3.3 Deux méthodes utilisant la technique du dosage d'un excès peuvent être utilisées :

- dosage utilisant des réactions acido-basiques :



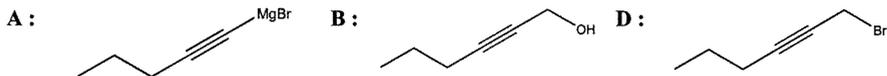
puis détermination de l'excès d'ion H_3O^+ par dosage avec de la soude

- dosage par réaction de substitution nucléophile avec le diiode



puis détermination de l'excès de I_2 par dosage avec le thiosulfate de sodium

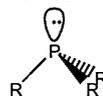
1.4 Formules des produits **A**, **B** et **D** :



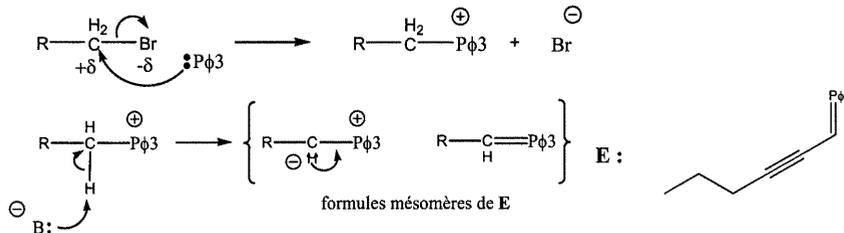
- (1) : synthèse d'un magnésien acétylénique par **réaction acido-basique**
 (2) : **addition** d'un organomagnésien sur un composé carbonyle
 (3) : **substitution nucléophile**

1.5.1 L'atome de phosphore possédant 5 électrons de valence, la formule de Lewis d'une phosphine

s'écrit : $R-P\left(\begin{smallmatrix} R \\ R \end{smallmatrix}\right)-R$, de formule AX_3E_1 sa structure est pyramidale régulière :

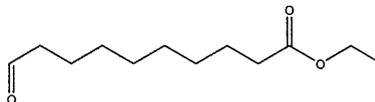


1.5.2 Pour l'écriture du mécanisme notons $R-CH_2-Br$ le composé **D** :

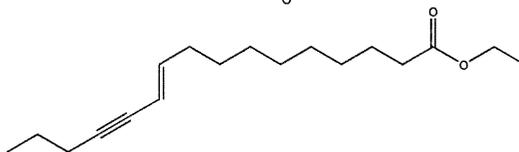


1.6.1 La réaction $E \rightarrow F$ est la **réaction de Wittig**.

1.6.2 La formule du 10-oxodécanoate d'éthyle s'écrit :



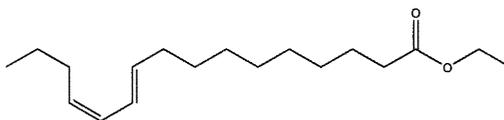
celle de **F** s'en déduit :



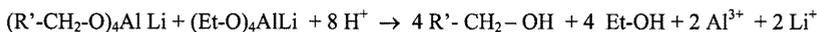
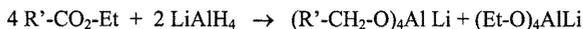
Si l'on ignore la stéréospécificité de la réaction de Wittig, il y a une ambiguïté sur le caractère *Z* ou *E* de la double liaison formée par la réaction de Wittig.

Sinon en remarquant que dans le cas présent, la charge $-$ de l'ylure **E** est stabilisée par un effet mésomère attracteur et qu'alors l'oxophosphétane formé est principalement en configuration *trans* on en déduit que l'alcène formé est de configuration *E*.

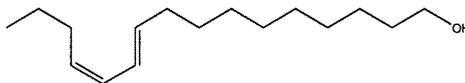
1.7 Le bombykol présentant deux insaturations $C=C$, l'hydrogénation de la fonction alcyne $C\equiv C$ doit être partielle. Le catalyseur alors utilisé est celui de Lindlar, c'est à dire du palladium désactivé. Il s'agit d'une synaddition, d'où la formule de **G** :



1.8 Notons $R^1\text{-CO}_2\text{-Et}$ l'espèce **G** :



1.9 Si l'on tient compte de la remarque du 1.6 la structure du bombykol ne peut être que :



soit le (10 *E*, 12 *Z*)-hexadéca-10,12-diène-1-ol.

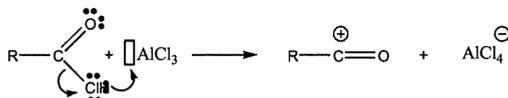
Sinon, sans connaître la stéréospécificité de la réaction de Wittig (ce qui est le cas au niveau des programmes de PC-PC*) on peut envisager comme formules possibles :

- celle du stéréo-isomère 10 *E*, 12 *Z*
- celle du stéréo-isomère 10 *Z*, 12 *Z*.

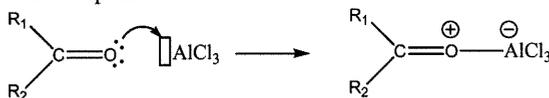
2. Synthèse du pyrène

2.1.1 La réaction **J** \rightarrow **K** est une **substitution électrophile**. \oplus

AlCl_3 est un acide de Lewis, il favorise la formation de l'électrophile $\text{R}-\text{C}=\text{O}$

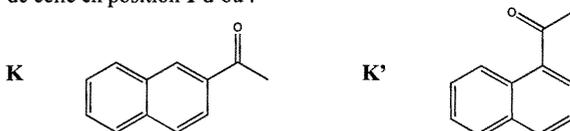


mais réagit aussi avec toute base de Lewis du milieu, en particulier la cétone qui se forme par substitution électrophile sur le naphthalène

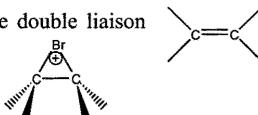


Aussi faut-il en introduire une quantité supérieure à celle de naphthalène initialement présente.

2.1.2 **K** et **K'** résultent de la substitution électrophile sur le naphthalène, **K** de celle en position 2, **K'** de celle en position 1 d'où :

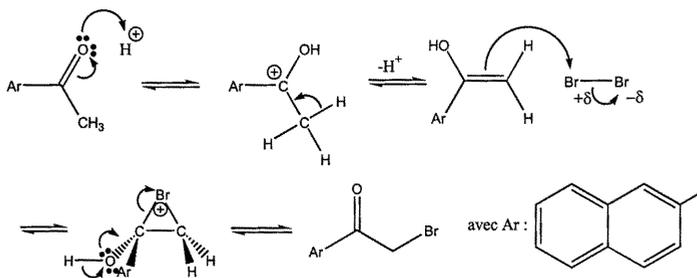


2.2.1 Lors de l'addition du dibrome sur une double liaison il se forme un pont bromonium :



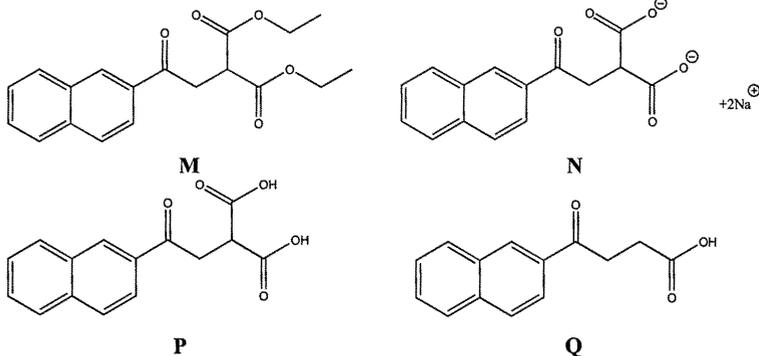
2.2.2 En milieu acide un énol est en équilibre avec une cétone possédant un H en α .

2.2.3 Pour la transformation de **K** en **L** le mécanisme suivant peut être proposé :

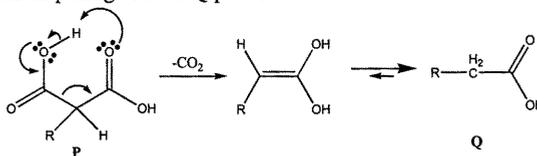


2.2.4 En milieu basique la polybromation est favorisée.

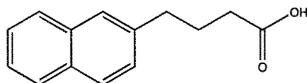
2.3 Une synthèse du type de celle permettant de passer de **L** à **Q** est la **synthèse malonique**. Les formules de **M**, **N**, **P** et **Q** sont alors



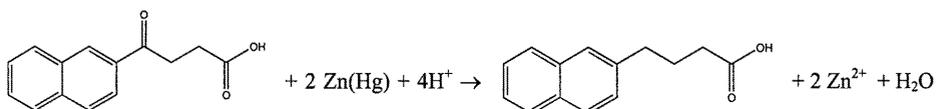
Le mécanisme de passage de **P** à **Q** peut s'écrire :



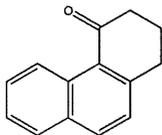
2.4 **R** a pour formule



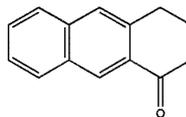
L'équation de son obtention, qui fait appel à la réaction de Clemmensen, peut s'écrire :



2.5.1 Pour **S** deux formules sont envisageables, cependant vu la formule du pyrène nous retiendrons :

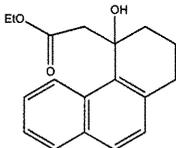


sachant qu'il se forme aussi :

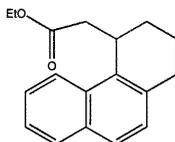


2.5.2 Une autre voie permettant de former **S** consiste à transformer l'acide **R** en son chlorure d'acyle puis à traiter celui-ci par du chlorure d'aluminium en excès afin de favoriser une substitution électrophile intramoléculaire.

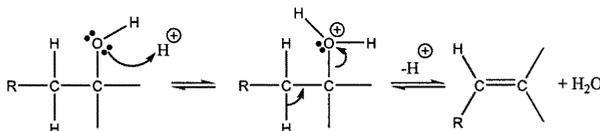
2.6 Un organomagnésien est plus réactif qu'un organozincique ainsi réagit-il avec un ester contrairement à un organozincique, il n'aurait alors pas été possible de préparer $\text{Br-Mg-CH}_2\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5$. La formule de **U** s'écrit :



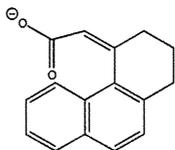
2.7.1 **V** admet pour formule :



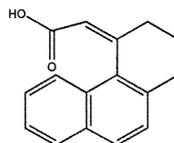
2.7.2 La réaction $\text{U} \rightarrow \text{V}$ est une **déshydratation** ; le mécanisme de cette réaction peut s'écrire :



2.8.1 Les composés **W** et **X** ont les formules suivantes :

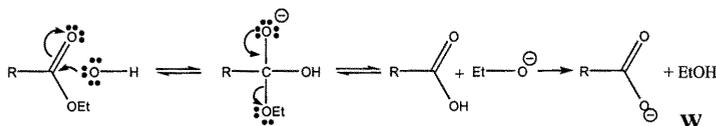


W

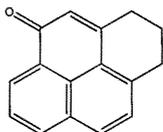


X

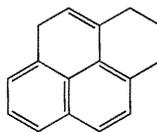
2.8.2 La réaction de formation de **W** est une **saponification**, dont le mécanisme est le suivant, en notant $\text{R-CO}_2\text{-Et}$ l'espèce **W** :



2.8 Les formules de **Y** et de **Z** sont alors :



Y



Z

2.10 Le pyrène possède seize électrons délocalisés et présente de nombreuses formules mésomères, il est donc particulièrement stable (en réalité quatorze électrons ($4 \times 3 + 2$) participent à chacune de ces formules).

3. Synthèse du zirconon :

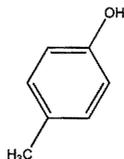
3.1.1 $-\text{CH}_3$ est un groupe **donneur** par **hyperconjugaison**

$-\text{OH}$ est un groupe **attracteur** par **effet inducteur** et **donneur** par **effet mésomère**, ce dernier étant prépondérant

$-\text{SO}_3\text{H}$ est un groupe **attracteur** par **effet inducteur** et par **effet mésomère**

3.1.2 Un groupe donneur oriente préférentiellement en *ortho* ou en *para* avec activation alors qu'un groupe attracteur oriente préférentiellement en *méta* avec désactivation.

3.2 L'effet donneur du groupe $-\text{OH}$ étant plus fort que l'effet donneur du groupe $-\text{CH}_3$, les deux synthons qu'il est nécessaire de coupler pour obtenir le zirconon sont alors :



S₁

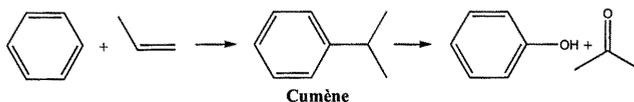


S₂

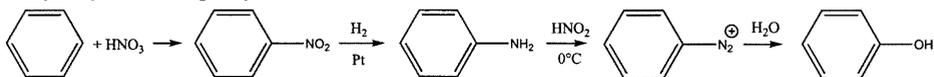
3.3 Synthèse de **S₁** :

♦ Synthèse du phénol : on peut envisager :

- l'oxydation du cumène :

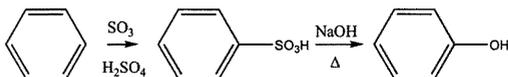


- l'hydrolyse de l'ion phényldiazonium :

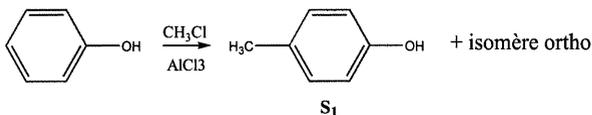


ion phényldiazonium

- la fusion alcaline de l'acide benzènesulfonique :



♦ Méthylation du phénol :

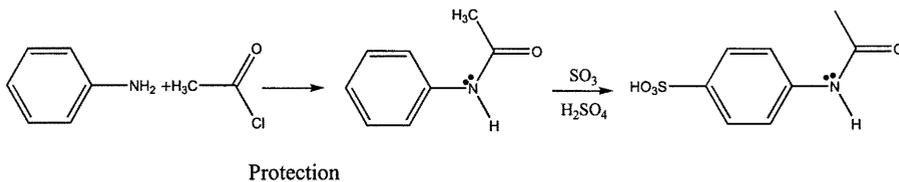


Synthèse de S_2 :

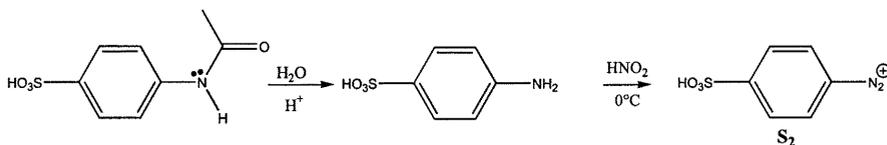
On part de l'aniline $C_6H_5-NH_2$ (obtenu ci-dessus dans la synthèse de S_1).

Pour fixer $-SO_3H$ on fait agir un oléum (SO_3 dissous dans H_2SO_4) qui est un milieu très acide, aussi afin d'obtenir une substitution électrophile en position *para* il est nécessaire de protéger le groupe amine $-NH_2$ afin qu'il ne soit pas protoné en $-NH_3^+$ qui orienterait en *méta*. Il suffit pour cela de passer à l'amide à l'aide d'un chlorure d'acyle ou d'un anhydride d'acide.

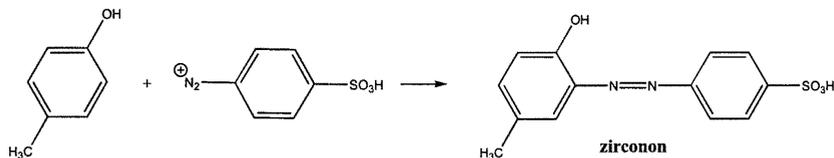
Les diverses étapes de la synthèse de S_2 sont alors :



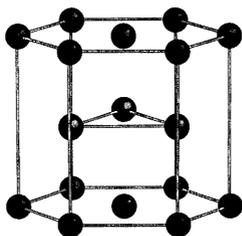
Protection



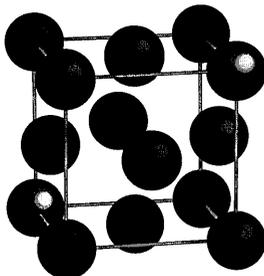
La réaction entre S_1 et S_2 assure le couplage diazoïque conduisant au zirconon :



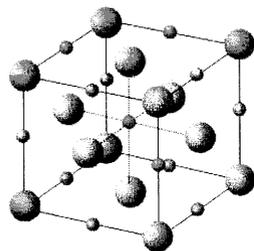
Annexes



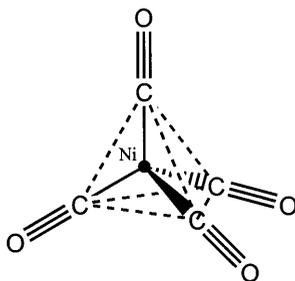
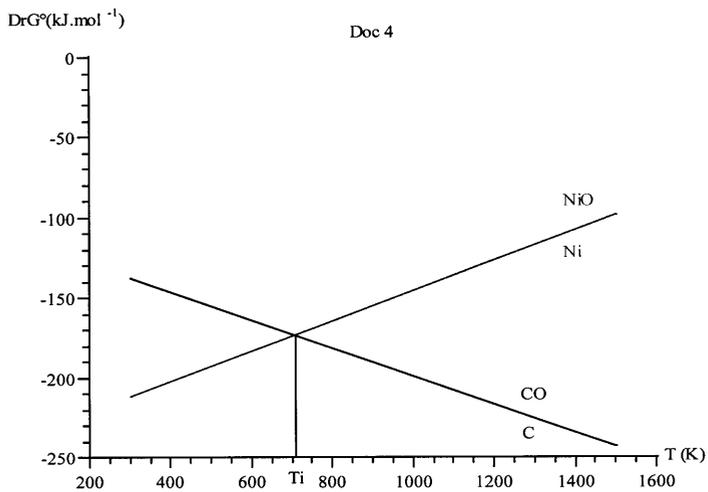
Doc 2



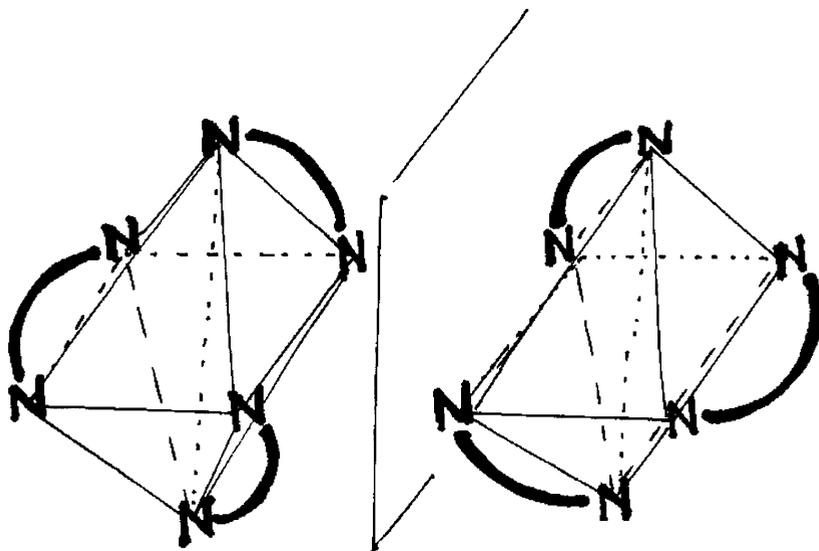
Doc 1



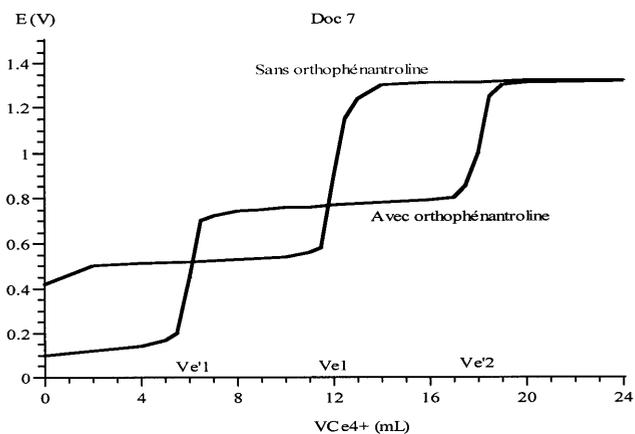
Doc 3

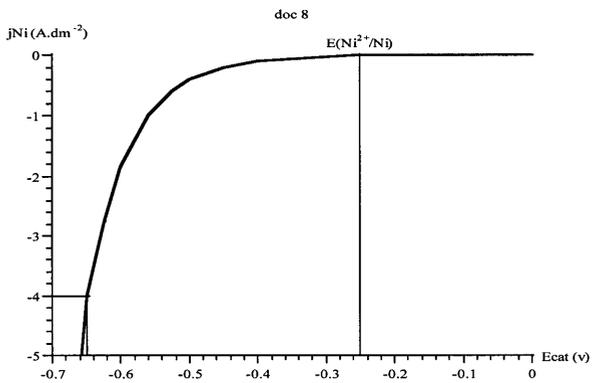


Doc 5



Doc 6





Agrégation de sciences physiques

Concours interne

COMPOSITION AVEC EXERCICES D'APPLICATION

Option physique appliquée ♦ Session : 2003

PREMIER PROBLÈME

1. Hacheur

1.1 La valeur moyenne U_{moy} de la tension u_M s'écrit : $U_{\text{moy}} = \alpha \cdot U_{\text{max}} + (1-\alpha) \cdot U_{\text{min}}$

1.2 En considérant que $U_{\text{max}} = V_s$ et $U_{\text{min}} = -V_s$ on obtient $U_{\text{moy}} = (2\alpha - 1) \cdot V_s$

On néglige dans ce cas les chutes de tension V_{CE} , V_D , $R_{S1} \cdot i_1$, $R_{S2} \cdot i_2$.

1.3 Expressions de α et U_{moy} en fonction de V_C :

α est une fonction affine de V_C : $\alpha = k_1 V_C + k_2$

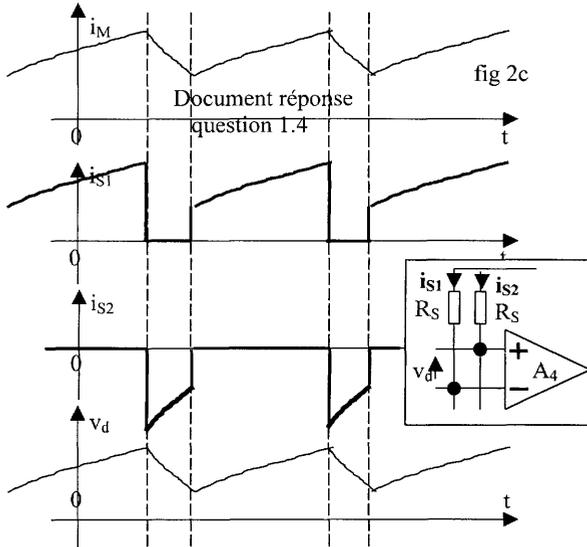
pour $V_C = V_{\text{ref}} / 2$ $\alpha = 0$ $0 = k_1 (V_{\text{ref}} / 2) + k_2$

pour $V_C = 3V_{\text{ref}} / 2$ $\alpha = 1$ $1 = k_1 (3V_{\text{ref}} / 2) + k_2$

d'où $k_1 \cdot V_{\text{ref}} = 1$ et $k_2 = -1/2$ $\alpha = (V_C / V_{\text{ref}}) - 1/2$ et $U_{\text{moy}} = 2(V_C / V_{\text{ref}} - 1) \cdot V_s$

1.4 Représentation des intensités des courants dans les résistances R_{S1} et R_{S2} , puis de v_d .

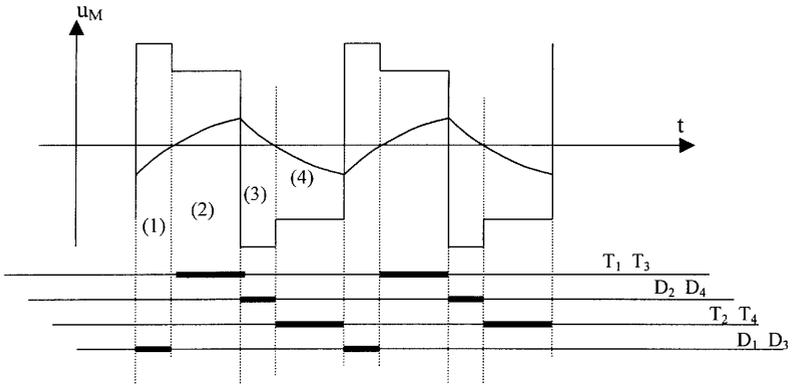
document réponse 1 : il est indispensable de flécher les courants sur le schéma.



$$R_{S1} \cdot i_{S1} - v_d - R_{S2} \cdot i_{S2} = 0$$

$$v_d = R_{S1} \cdot i_{S1} - R_{S2} \cdot i_{S2} = R_S \cdot i_M$$

1.5 Le courant i_M a une valeur moyenne nulle : intervalles de conduction des composants



(1) $u_M = V_S + 2 \cdot V_D$ avec $V_D = +0,7V$

(2) $u_M = V_S - 2 \cdot V_{CE}$

(3) $u_M = -(V_S + 2 \cdot V_D)$

(4) $u_M = -(V_S - 2 \cdot V_{CE})$

Le décrochement correspond à $(2 \cdot V_{CE} + 2 \cdot V_D)$ soit en pratique entre 1,6 et 2V

2. Régulateur de courant

2.1 Etude en statique : la tension de commande V_1 est continue.

2.1.1 $V_1 = 0$

$$V_{+(A1)} = V_{\text{ref}} * R_1 / (R_1 + R_2) \text{ et } V_{-(A1)} = V_3 * R_1 / (R_1 + R_2) ; \quad V_{+(A1)} = V_{-(A1)} \text{ donc } \mathbf{V_3 = V_{ref}}$$

$$V_{+(A2)} = V_{\text{ref}} = V_{-(A2)} \text{ le courant est nul dans } R_3 \text{ et dans } R_F, \text{ donc } \mathbf{V_F = V_{ref}}$$

$$I_{R_F \text{ moy}} = 0 = I_4 \text{ moy} \quad \mathbf{I_4 \text{ moy} = 0} \quad V_d \text{ moy} = R_4 \cdot I_4 \text{ moy} = 0 = R_S \cdot I_M \text{ moy} \quad \text{donc } \mathbf{I_M \text{ moy} = 0}$$

2.1.2 $V_1 \neq 0$

$$V_{+(A1)} = V_{\text{ref}} * R_1 / (R_1 + R_2) = V_{-(A1)} = V_3 * R_1 / (R_1 + R_2) + V_1 * R_2 / (R_1 + R_2)$$

$$\mathbf{V_3 = V_{ref} - V_1 * (R_2 / R_1)}$$

$$(V_3 - V_{\text{ref}}) / R_3 = -(V_F - V_{\text{ref}}) / R_F = -I_4 \text{ moy}$$

$$I_4 \text{ moy} = R_S \cdot I_M \text{ moy} / R_4 \quad I_{M \text{ moy}} = \frac{1}{R_S} \frac{R_4}{R_3} \frac{R_2}{R_1} V_1$$

2.1.3 Application numérique : $R_{S1} = R_{S2} = R_S = 0,18 \Omega ; R_4 = 400 \Omega .$

Le coefficient de transfert statique ($I_M \text{ moy} / V_1$), vaut $(I_M \text{ moy} / V_1) = 0,27 \text{ A/V}.$

2.2 Etude en dynamique : variations autour d'un point de repos.

2.2.1 Les relations de Laplace ne concernent que les variations

$$(A_1) \quad V_3(p) = -\frac{R_2}{R_1} V_1(p)$$

$$(A_2) \quad \frac{V_3(p)}{R_3} + \frac{V_F(p)}{R_F} + \frac{V_C(p)}{R + \frac{1}{C \cdot p}} = 0 \quad \text{d'où } V_C(p) = -(R + \frac{1}{C \cdot p}) \cdot \left[\frac{1}{R_3} V_3(p) + \frac{1}{R_F} V_F(p) \right]$$

$$V_C(p) = \left(\frac{1 + R \cdot C \cdot p}{R_F \cdot C \cdot p} \right) \cdot \left[-\frac{R_F}{R_3} V_3(p) - V_F(p) \right]$$

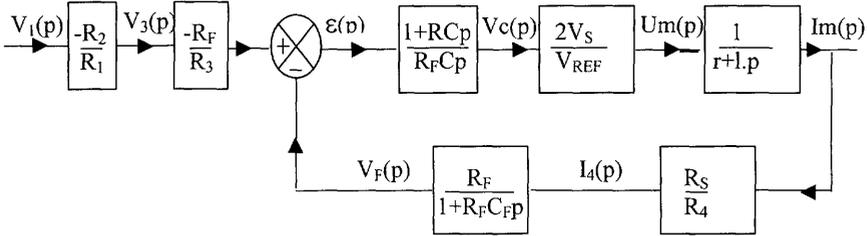
2.2.2

$$I_4(p) = \left(\frac{1}{R_F} + C_F \cdot p \right) V_F(p) \quad \text{et} \quad I_4(p) = \frac{R_S}{R_4} I_M(p) \quad V_F(p) = \left(\frac{R_F}{1 + R_F C_F \cdot p} \right) \frac{R_S}{R_4} I_M(p)$$

$$2.2.3 \quad U_m(p) = \frac{2 \cdot V_S}{V_{\text{ref}}} \cdot V_C(p)$$

$$2.2.4 \quad u_M(t) = e_M(t) + r \cdot i_M(t) + l \cdot (di_M / dt) \quad \text{avec } \mathbf{e_M = constante} \quad U_m(p) = (r + l \cdot p) \cdot I_m(p)$$

2.2.5 On complète le schéma de la figure 6 :



2.3 Réglage du régulateur de courant.

2.3.1 Expression de la fonction de transfert en boucle ouverte : $T(p) = \frac{V_F(p)}{\varepsilon(p)}$

$$T(p) = \frac{V_F(p)}{\varepsilon(p)} = \left(\frac{1 + R.C.p}{R_F.C.p} \right) \frac{2.V_S}{V_{REF}} \left(\frac{1}{r + lp} \right) \frac{R_S}{R_4} \left(\frac{R_F}{1 + R_F.C_F.p} \right) = \frac{2.V_S R_S (1 + RCp)}{V_{REF} R_4 (1 + \frac{l}{r} p)} \frac{1}{r.C.p(1 + \tau_F p)}$$

avec $\tau_F = R_F C_F$

2.3.2 Pour obtenir : $T(p) = \frac{K}{p(1 + \tau_F p)}$ on choisit $RC = (l/r) = 1 \text{ ms}$.

$$T(p) = \frac{K}{p(1 + \tau_F p)} \text{ avec } K = \frac{2.V_S R_S}{V_{REF} R_4 r C}$$

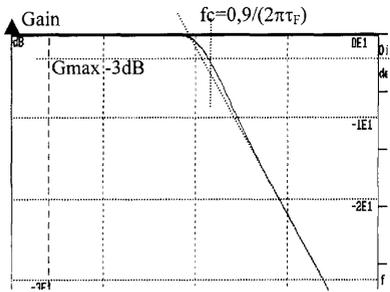
On obtient un système d'ordre 2 qui sera stable en boucle fermée, et sans erreur statique.

2.3.3 Fonction de transfert en boucle fermée : $G(p) = \frac{I_m(p)}{V_1(p)} = G_0 \frac{1 + \tau_F p}{1 + \frac{1}{K} p + \frac{\tau_F}{K} p^2}$

$$G(p) = \frac{I_m(p)}{V_1(p)} = \frac{R_2}{R_1} \frac{R_F}{R_3} T'(p) \frac{R_4}{R_S \cdot R_F} (1 + \tau_F p) \text{ avec } T'(p) = \frac{1}{\frac{1}{K} p + 1} = \frac{1}{1 + \frac{p}{K} + \frac{\tau_F}{K} p^2}$$

$G_0 = 0,27 \text{ A/V}$ (comme en 212)

2.3.4 Diagramme de Bode du gain de $\underline{G}(j\omega)$ avec $K=1/2\tau_F$. $G(p) = G_0 \frac{1 + \tau_F p}{1 + 2\tau_F p + 2\tau_F^2 p^2}$



On calcule la fréquence de coupure f_c à -3dB en posant $x = \tau_F \cdot \omega$:

$$\frac{1 + x^2}{(1 - 2x^2)^2 + (2x)^2} = \frac{1}{2}$$

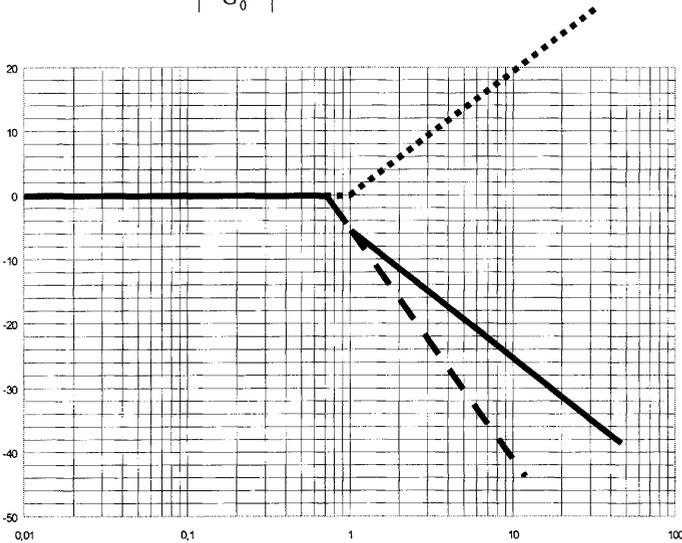
et on obtient $x=0,9$ soit $f_c=0,9/(2\pi\tau_F)$

pour $f_c = f_{osc}/10 = 2 \text{ kHz}$: $\tau_F=72\mu s$

pour $C_F = 100nF$, $R_F = 720 \Omega$

Sur le document réponse 4 , on trace la courbe de gain tracée à la calculatrice ou le diagramme

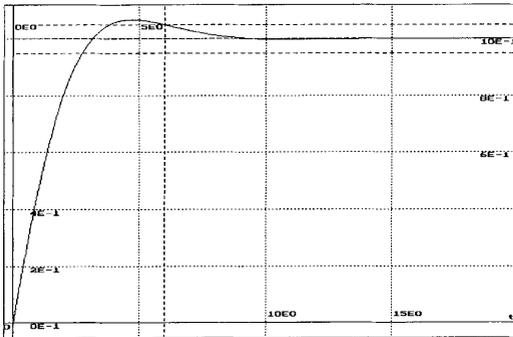
asymptotique : $20 \log \left| \frac{G(j\omega)}{G_0} \right|$ en fonction de $\log(\tau_F \cdot \omega)$



2.3.5 Réponse indicielle :

$$I_m(p) = G_0 \frac{1 + \tau_F p}{1 + 2\tau_F p + 2\tau_F^2 p^2} \left[\frac{V_1}{p} \right] = G_0 \cdot V_1 \left[\frac{1}{p} - \frac{p + \frac{1}{2\tau_F}}{\left[p + \frac{1}{2\tau_F} \right]^2 + \frac{1}{4\tau_F^2}} \right]$$

On en déduit $i_m(t) = G_0 V_1 \left[1 - \cos\left(\frac{t}{2\tau_F}\right) \exp\left(-\frac{t}{2\tau_F}\right) \right]$ pour $t > 0$.



On trace

$$y = 1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \text{ en posant } x = \frac{t}{\tau_F}$$

Le dépassement est inférieur à 7%.
tr5% vaut environ $6\tau_F$ soit 0,4ms.

La courbe représentée ne tient pas compte des fluctuations du hacheur, qui seraient visibles à cette échelle.

3. Etude des variations de vitesse du moteur commandé en courant

Le temps de réponse du régulateur de courant est négligé.

3.1 Réponse à un échelon de courant

311 Le moteur est initialement à l'arrêt; la consigne vaut $V_1=10V$ et correspond à $I_{moy} = 2A$.

L'évolution de $\omega(t)$ est régie par la relation :

$$J \frac{d\omega}{dt} = k.i_m - (C_0 + f.\omega) \quad \text{avec } i_m = 2A \text{ et } C_0 = 15 \text{ mNm}$$

$$\omega + \tau_m \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{k.i_m - C_0}{f} = \omega_{F1} \quad \text{où } \tau_m = J/f = 2 \text{ s}$$

$$\text{et } \omega_{F1} = (0,072 \cdot 2 - 0,015) / (3 \cdot 10^{-5}) \quad \omega_{F1} = 4300 \text{ rad/s}$$

312 On détermine le temps nécessaire t_{200} pour atteindre $\omega_1 = 200 \text{ rad/s}$.

$$\omega = K.e^{-\frac{t}{\tau}} + \omega_{F1} = -\omega_{F1}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \omega_{F1} \quad t = \tau.Ln\left(\frac{K}{\omega - \omega_{F1}}\right)$$

ω atteint $\omega_1 = 200 \text{ rad/s}$ à l'instant $t_1 = t_{200} = 95 \text{ ms}$

313 La valeur maximale de la fréquence de rotation ω qu'on peut obtenir avec $I_{moy} = 2A$ est liée à la tension $U_{max} = V_s = 20V = k.\omega_{max} + r.I_{moy} \quad \omega_{max} = 16/0,072 = 220 \text{ rad/s}$

Ensuite le moteur fonctionne à tension constante $U=U_{max}=20V$.

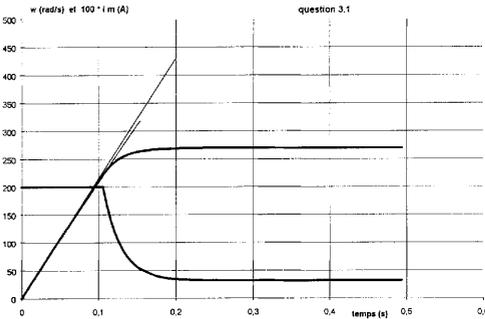
$$J \frac{d\omega}{dt} = k.i_m - (C_0 + f.\omega) = k.\frac{U_{max} - k.\omega}{r} - (C_0 + f.\omega)$$

ω obéit à l'équation : $\omega + \tau.\frac{d\omega}{dt} = \omega_F$ avec

$$\tau = \tau_2 = \frac{J}{\frac{k^2}{r} + f} = 23\text{ms} \quad \text{et} \quad \omega_F = \omega_{F2} = \frac{r}{\frac{k^2}{r} + f} \cdot U_{\max} - C_0 = 270\text{rad/s}$$

$\omega(t)$ évolue exponentiellement depuis **220 rad/s** vers $\omega_{F2} = 270 \text{ rad/s}$

$i_m(t)$ tend vers $(C_0 + f \cdot \omega) / k$ soit **0,32A** avec la même constante de temps $\tau_2 = 23 \text{ ms}$.



3.2 Inversion de consigne

On reprend l'essai précédent : le moteur est initialement à l'arrêt; la consigne initiale est $V_1 = +10V$.

Lorsque ω atteint $\omega_1 = 200 \text{ rad/s}$, on inverse la consigne : on affiche $V_1 = -10V$

Tant que ω est positif, la loi d'évolution est la même qu'en 31.

Pour ω négatif, on doit **changer le signe de C_0** .

2ème phase : ω diminue de **+200 rad/s** à **0**.

$$\omega + \tau \cdot \frac{d\omega}{dt} = \omega_F$$

$$\tau = \tau_m = 2s \quad \text{et} \quad \omega_F = \omega_{F22} = \frac{-k \cdot I_0 - C_0}{f} = \frac{-0.072 \cdot 2 - 0.015}{3.10^{-5}} = -5300\text{rad/s}$$

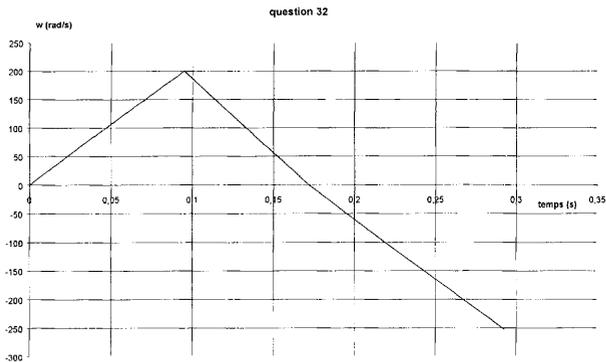
ω atteint **0** au bout de $t_3 = 74 \text{ ms}$

3ème phase : ω est négatif et tend vers

$$\omega_F = \omega_{F23} = \frac{-k \cdot I_0 + C_0}{f} = \frac{-0.072 \cdot 2 + 0.015}{3.10^{-5}} = -4300\text{rad/s}$$

ω atteint **-200rad/s** au bout de $t_4 = 95 \text{ ms}$

L'inversion de vitesse a donc duré : $t_3 + t_4 = 170\text{ms}$.



4. Asservissement de vitesse du moteur commandé par le régulateur de courant

4.1 Si ω ne change pas de signe, C_0 est invariant.

$J \frac{d\omega}{dt} = k.i_m - (C_0 + f.\omega)$ se traduit en Laplace par : $J.p.\Omega(p) = k.I_m(p) - f.\Omega(p)$

$$M(p) = \frac{\Omega(p)}{I_m(p)} = \frac{k}{J.p + f} = \frac{\frac{k}{f}}{1 + \tau_m.p} \quad \text{avec} \quad \tau_m = \frac{J}{f} = 2\text{s} \quad \text{et} \quad \frac{k}{f} = 2400 \text{ (rad/s)/A}$$

4.2 Fonction de transfert en boucle ouverte : $T_V(p) = \frac{V_6(p)}{\varepsilon(p)}$

En tenant compte de la rapidité du régulateur de courant, on admet que $G(p) = G_0$

$$T_V(p) = \frac{V_6(p)}{\varepsilon(p)} = A.G_0 \frac{\frac{k}{f}}{1 + \tau_m.p} . K_V = \frac{T_0}{1 + \tau_m.p} \quad T_0 = A.G_0 . \frac{k}{f} . K_V$$

$$\tau_m = 2\text{s}$$

Pour $G_0 = 0,2$ et $K_V = 0,05$, et $A = 1$, on obtient $T_0 = 24$.

4.3 Fonction de transfert en boucle fermée :

$$F(p) = \frac{\Omega(p)}{V_5(p)} = \frac{1}{\frac{1}{T_V(p)} + 1} . \frac{1}{K_V} = \frac{1}{1 + \frac{1 + \tau_m.p}{T_0}} . \frac{1}{K_V} = \frac{F_0}{1 + \tau_{43}.p}$$

avec $F_0 = \frac{1}{K_V(1 + \frac{1}{T_0})} = 19,2$ et $\tau_{43} = \frac{\tau_m}{1 + T_0} = 80ms$

4.4 La consigne de vitesse $v_5(t)$ est un échelon d'amplitude $V_5=10V$, appliqué au moteur initialement à l'arrêt.

La fréquence de rotation souhaitée à erreur nulle est $\omega_{cons} = V_5 / K_V = 200 \text{ rad/s}$

et $\omega_{95} = 0,95 \cdot \omega_{cons} = 190 \text{ rad/s}$

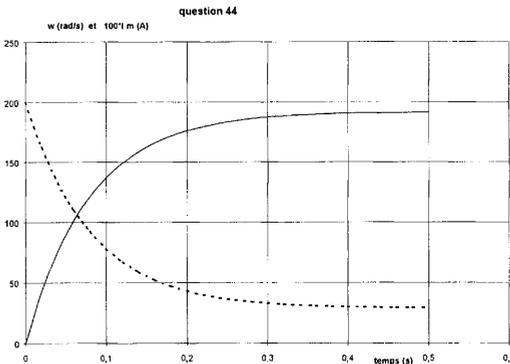
Pour $V_5 = 10V$ et $\omega(0)=0$ la saturation n'est pas effective :

$\omega(t)$ et $i_m(t)$ évoluent selon une loi 1^{er} ordre de constante de temps $\tau_{43} = 80ms$ pour $A=1$.

Valeurs initiales : $\omega(0)=0$ $i_M(0+) = 2A$

Valeurs finales : $\omega(\infty) = F_0 \cdot V_5 = 192rad/s$ $i_M(\infty) = (C_0 + f \cdot \omega) / k = 0,29 A$

On atteint $\omega_{95} = 190 \text{ rad/s}$ au bout de $t_{44} = 0,365s$



4.5 $A = 5$ et on reprend l'essai indiciel avec $V_5=10V$.

Pour $\varepsilon_V > 2V$ l'amplificateur d'erreur est saturé et le moteur fonctionne à courant constant $2A$.

$\varepsilon_V = 2V$ correspond à $K_V \cdot \omega = 8V$ soit $\omega = 160rad/s$,
cette valeur étant obtenue au bout de $t_{160} = 76ms$ selon la loi de la **question 31**

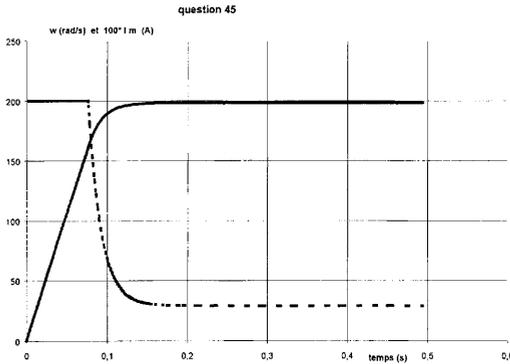
L'amplificateur cesse alors d'être saturé et la boucle de vitesse fonctionne :

$\tau = \tau_{45} = \tau_m / (1 + 24 \cdot 5) = 16.5 \text{ ms}$

Valeurs initiales (nouvelle origine des temps) : $\omega(0)=160\text{rad/s}$ $i_M(0^+)=2\text{A}$

Valeurs finales : $\omega(\infty) = F'_0 \cdot V_5 = 198\text{rad/s}$ avec $F'_0 = 19,83$
 $i_M(\infty) = (C_0 + f \cdot \omega) / k = 0,29\text{A}$ peu différent du précédent

On atteint $\omega_{95} = 190\text{ rad/s}$ au bout de $t_{45} = 25\text{ms}$, soit au total environ 100ms.



4.6 Le temps minimum pour atteindre ω_{95} est environ celui de la question 31, l'accélération du moteur reste maximum jusqu'à la vitesse souhaitée : c'est ce que permettent les valeurs de A élevées, car le régulateur de vitesse reste en saturation tant que l'erreur de vitesse n'est pas très faible.

Agrégation de sciences physiques

Concours interne

COMPOSITION AVEC EXERCICES D'APPLICATION

Option physique appliquée ♦ Session : 2003

SECOND PROBLÈME

PARTIE A: Correction d'un réseau triphasé déséquilibré

A.1.) Nous avons les relations suivantes :

$$\underline{E}_1 - jL\omega \underline{I}_1 - R\underline{I}_1 + jL\omega \underline{I}_2 - \underline{E}_2 = 0.$$

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_1 \text{ et } \underline{E}_2 = a^2 \underline{E}_1$$

qui donnent :

$$\underline{I}_1 = \frac{1 - a^2}{R + 2jL\omega} \underline{E}_1$$

$$\underline{I}_2 = -\frac{1 - a^2}{R + 2jL\omega} \underline{E}_1.$$

$$\underline{I}_3 = 0$$

$$\text{A.2.) } \underline{V}_1 = \underline{E}_1 - jL\omega \underline{I}_1 = \underline{E}_1 - jL\omega \frac{1 - a^2}{R + 2jL\omega} \underline{E}_1 = \frac{R + (1 + a^2)jL\omega}{R + 2jL\omega} \underline{E}_1 \rightarrow \underline{V}_1 = \frac{R - ajL\omega}{R + 2jL\omega} \underline{E}_1.$$

$$\text{De même } \underline{V}_2 = \underline{E}_2 - jL\omega \underline{I}_2 \rightarrow \underline{V}_2 = \frac{a^2 R - ajL\omega}{R + 2jL\omega} \underline{E}_1 \text{ et } \underline{V}_3 = a \underline{E}_1.$$

$$\text{A.3.) } \underline{V}_d = \frac{1}{3} (\underline{V}_1 + a \underline{V}_2 + a^2 \underline{V}_3) = \frac{1}{3} \left[\frac{R - ajL\omega}{R + 2jL\omega} + a \frac{a^2 R - ajL\omega}{R + 2jL\omega} + a^2 \cdot a \right] \underline{E}_1.$$

Après simplification, il vient :

$$\underline{V}_d = \frac{R + jL\omega}{R + 2jL\omega} \underline{E}_1.$$

Par un calcul identique,

$$\underline{V}_i = a^2 \frac{jL\omega}{R + 2jL\omega} \underline{E}_1 \text{ et } \underline{V}_0 = 0.$$

$$\text{A.4.) Le taux de déséquilibre est donné par : } TD = \left| \frac{\underline{V}_i}{\underline{V}_d} \right| = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}.$$

Application numérique : TD = 19,3 %.

A.5.) Compensation du déséquilibre

A.5.1.)

Les courants i_{R1} , i_{R2} et i_{R3} devant former un système équilibré en phase, respectivement, avec les tensions v_1 , v_2 et v_3 , la puissance active fournie par le réseau s'exprime par :

$$P = 3VI_R = \frac{U^2}{R} \rightarrow I_R = \frac{V}{R},$$

en notant I_R la valeur efficace des courants i_{R1} , i_{R2} et i_{R3} , et U la valeur efficace des tensions composées du système ($\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$).

Nous avons alors :

$$I_{R1} = \frac{V_1}{R}, I_{R2} = \frac{V_2}{R} \text{ et } I_{R3} = \frac{V_3}{R}.$$

A.5.2.) Sachant que $I_1 = \frac{U_{12}}{R}$, $I_2 = -I_1$ et $I_3 = 0$,

$$I_{C1} = I_{R1} - I_1 = \frac{V_1 - (V_1 - V_2)}{R} \rightarrow I_{C1} = \frac{V_2}{R} = I_{R2},$$

$$I_{C2} = I_{R2} - I_2 = \frac{V_2 + (V_1 - V_2)}{R} \rightarrow I_{C2} = \frac{V_1}{R} = I_{R1},$$

$$I_{C3} = I_{R3}.$$

A.5.3.) Voir le diagramme vectoriel des courants sur la **figure A.1**

A.5.4.) Le diagramme vectoriel associé au montage de la **figure A.2**, fait apparaître les relations suivantes :

$$I_{C1} + I_{C2} + I_{C3} = 0$$

$$(I_{C1}, \underline{U}_{31}) = -\frac{\pi}{2}$$

$$(I_{C2}, \underline{U}_{23}) = -\frac{\pi}{2}$$

En considérant le schéma de la **figure A.2**, on constate, avec les relations précédentes, que le dipôle D_{31} peut être réalisé par une bobine non résistive d'inductance L' , et pour le dipôle D_{23} d'un condensateur de capacité C' .

A.5.5.) $I_{C1} = \frac{V}{R} = \frac{U}{L'\omega} \rightarrow L' = \frac{\sqrt{3}R}{\omega} = 8,8 \text{ mH}.$

$$I_{C2} = \frac{V}{R} = C'\omega U \rightarrow C' = \frac{1}{\sqrt{3}RC\omega} = 1,15 \text{ mF}.$$

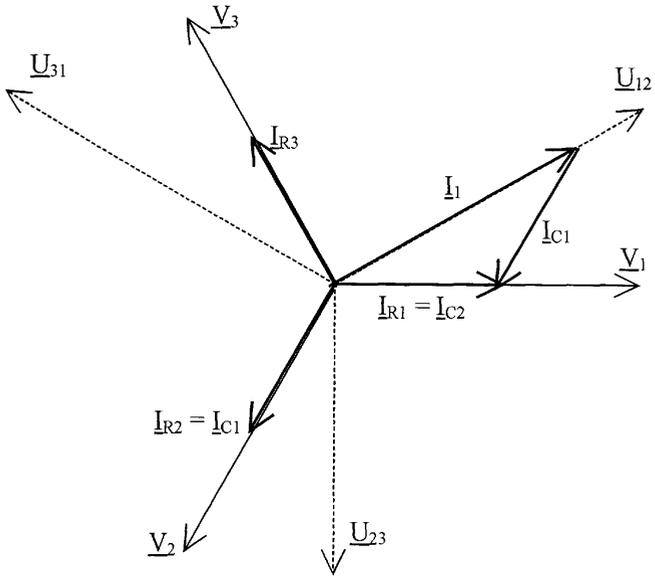


Figure A.1

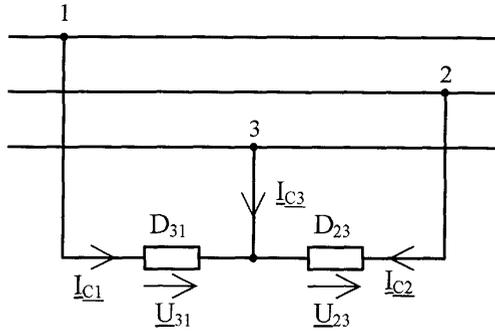


Figure A.2

PARTIE B: Influence d'une charge non linéaire

B.1.) Etude d'un montage redresseur triphasé

B.1.1.) Indice horaire : $I = 1$

B.1.2.) Etude simplifiée

B.1.2.1.) L'indice horaire étant de 1, les courants de ligne délivrés par le secondaire du transformateur sont décalés de 30° en arrière par rapport à ceux qui seraient fournis par une source en étoile.

De j_{12} , on déduit i_1 par le théorème d'Ampère. Le transformateur étant idéal, l'excitation magnétique est nulle, d'où :

$$n_1 \cdot i_1 - n_2 \cdot j_{12} = 0 \rightarrow i_1 = m \cdot j_{12}.$$

Voir le document réponse n°1

B.1.2.2.) En remarquant que :

$$i_1(\theta) = \frac{1}{3} \left[x(\theta, 0, 0) + x\left(\theta, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \right] \cdot m \cdot I_0,$$

on peut utiliser les résultats donnés en annexe pour le calcul des coefficients de la série de Fourier de i_1 .

$$\text{On calcule : } b_{2n+1} = 0 \text{ et } a_{2n+1} = \frac{4 \cdot m \cdot I_0}{3 \cdot (2n+1) \cdot \pi} \left[1 + \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{3}\right) \right].$$

Les intensités efficaces des harmoniques de i_1 sont données par :

$$I_{2n+1} = \frac{4 \cdot m \cdot I_0}{3 \cdot (2n+1) \cdot \pi \cdot \sqrt{2}} \left[1 + \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{3}\right) \right].$$

Les harmoniques de rang multiples de 3 sont nuls et on obtient une décroissance hyperbolique des harmoniques non nulles :

$$I_1 = \frac{m \cdot I_0 \cdot \sqrt{2}}{\pi}, \quad I_5 = \frac{m \cdot I_0 \cdot \sqrt{2}}{5 \cdot \pi}, \quad I_7 = \frac{m \cdot I_0 \cdot \sqrt{2}}{7 \cdot \pi}, \quad I_{11} = \frac{m \cdot I_0 \cdot \sqrt{2}}{11 \cdot \pi} \text{ et } I_{13} = \frac{m \cdot I_0 \cdot \sqrt{2}}{13 \cdot \pi}.$$

B.1.2.3.) Le déphasage entre les tensions simples et le fondamental des courants de ligne étant de θ_0 , et l'impédance des sources étant négligée, seuls les fondamentaux des courants transportent de la puissance active et de la puissance réactive.

$$P = 3 \cdot E \cdot I_1 \cdot \cos \theta_0 = \frac{3 \cdot m \cdot E \cdot I_0 \cdot \sqrt{2}}{\pi} \cos \theta_0$$

$$Q = 3 \cdot E \cdot I_1 \cdot \sin \theta_0 = \frac{3 \cdot m \cdot E \cdot I_0 \cdot \sqrt{2}}{\pi} \sin \theta_0$$

B.1.2.4.) La puissance apparente consommée s'exprime par :

$$S = 3 \cdot E \cdot I_{\text{eff}},$$

où I_{eff} représente l'intensité efficace des courants de ligne.

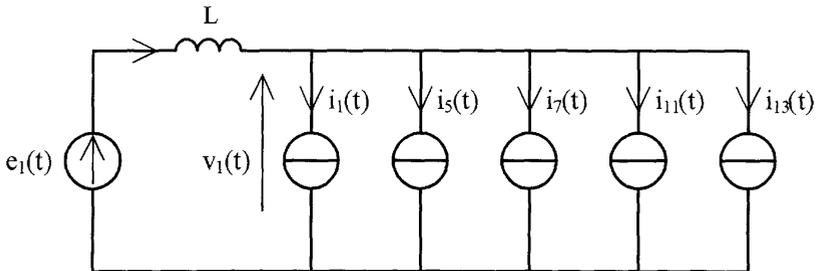
D'après le graphe de i_i , on calcule :

$$I_{\text{eff}} = m \cdot I_0 \frac{\sqrt{2}}{3},$$

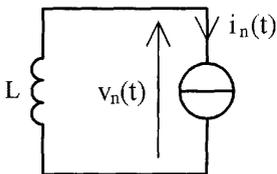
donnant un facteur de puissance $F_p = \frac{P}{S} = \frac{3}{\pi} \cos \theta_0$.

B.1.3.) On prend en compte l'impédance des sources de tension

B.1.3.1.) Vu du réseau, on peut modéliser la charge par le schéma suivant :



B.1.3.2.) Pour les harmoniques de rang $n \geq 5$, le schéma équivalent est ramené à :

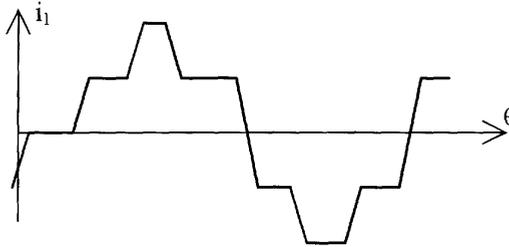


La valeur efficace de la tension harmonique de rang n est donnée par :

$$V_n = n \cdot L \cdot \omega \cdot I_n.$$

$$\text{Avec } I_n = \frac{m \cdot I_0 \cdot \sqrt{2}}{n \cdot \pi}, \quad V_n = \frac{m \cdot L \cdot \omega \cdot I_0 \cdot \sqrt{2}}{\pi}.$$

On constate que les harmoniques de tension sont, en théorie, de valeur efficace constante. En pratique, l'inductance des sources de tension empêche les discontinuités de courant, et les courants de ligne ont l'allure suivante :



Cela se traduit par des valeurs efficaces des harmoniques de courant, donc de tensions qui décroissent plus rapidement, avec le rang harmonique, que dans le cas idéal.

B.2.) Etude d'un montage dodécaphasé

B.2.1.) Etude simplifiée

B.2.1.1.) Pour le tracé de j_{12} , on utilise le résultat de la partie précédente ; et pour celui de i_{y1} , on obtient le graphe classique pour un redresseur PD3.

Le tracé de i_1 s'obtient en utilisant le théorème d'Ampère. Le transformateur étant idéal, l'excitation magnétique est nulle, d'où :

$$n_1 \cdot i_1 - n_d \cdot j_{12} + n_y \cdot i_{y1} = 0 \rightarrow i_1 = m_d \cdot j_{12} + m_y \cdot i_{y1},$$

avec $m_y = \frac{n_y}{n_1}$ et $m_d = \frac{n_d}{n_1}$.

Voir les tracés sur le **document réponse n° 2**, avec :

$$I_A = \frac{m_d}{3} I_0, I_B = \frac{m_d}{3} I_0 + m_y I_0 \text{ et } I_C = \frac{2m_d}{3} I_0 + m_y I_0,$$

en posant :

B.2.1.2.) En utilisant la fonction $x(\theta, \alpha_1, \alpha_2)$ donnée en annexe, on écrit :

$$i_1(\theta) = m_y \cdot x\left(\theta, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \cdot I_0 + m_d \left[x(\theta, 0, 0) + x\left(\theta, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \right] \cdot \frac{I_0}{3}.$$

Les amplitudes des harmoniques de i_1 sont données par :

$$I_{2n+1} = \frac{4 \cdot I_0}{(2n+1) \cdot \pi \cdot \sqrt{2}} \left[m_y \cdot \cos(2n+1) \frac{\pi}{6} + \frac{m_d}{3} + \frac{m_d}{3} \cos(2n+1) \frac{\pi}{3} \right].$$

B.2.1.3.) L'annulation de l'harmonique de rang 5 a lieu si :

$$m_y \cdot \cos \frac{5\pi}{6} + \frac{m_d}{3} + \frac{m_d}{3} \cos \frac{5\pi}{3} = 0 \rightarrow m_d = m_y \sqrt{3} \rightarrow n_d = n_y \sqrt{3}.$$

On peut vérifier que si cette condition est réalisée, alors on annule aussi l'harmonique de rang 7 de i_1 .

La relation d'annulation des harmoniques de rang 5 et 7 entraîne l'égalité des tensions efficaces délivrées par les deux secondaires du transformateur.

B.2.1.4.) Avec la relation précédente, les intensités efficaces des premières harmoniques non nulles de i_1 ont pour valeur :

$$I_1 = \frac{2\sqrt{6}}{\pi} m_y I_0, \quad I_{11} = \frac{2\sqrt{6}}{11 \cdot \pi} m_y I_0 \quad \text{et} \quad I_{13} = \frac{2\sqrt{6}}{13 \cdot \pi} m_y I_0.$$

B.2.1.5.) Le rapport n_y/n_d n'étant pas rationnel, il est impossible de réaliser un bobinage respectant cette condition. Aussi, on réalisera une valeur approchée de ce rapport aussi proche de la valeur théorique, mais cela entraînera une présence des harmoniques de rang 5 et 7 d'autant plus faible que l'on s'approche de la valeur calculée.

B.2.1.6.) Le déphasage du fondamental de $i_1(t)$ sur $e_1(t)$ correspond à la valeur θ_0 de l'angle de retard à l'amorçage.

B.2.1.7.) Seul le fondamental des courants transportant les puissances actives et réactives :

$$P = 3 \cdot E \cdot I_1 \cdot \cos \theta_0 = \frac{6 \cdot m_y \cdot E \cdot I_0 \cdot \sqrt{6}}{\pi} \cos \theta_0$$

$$Q = 3 \cdot E \cdot I_1 \cdot \sin \theta_0 = \frac{6 \cdot m_y \cdot E \cdot I_0 \cdot \sqrt{6}}{\pi} \sin \theta_0$$

B.2.1.8.) La puissance apparente consommée est donnée par :

$$S = 3 \cdot E \cdot I_{\text{eff}}$$

où I_{eff} représente l'intensité efficace des courants de ligne.

En utilisant les symétries de i_1 :

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2\pi} \left(I_A^2 + I_B^2 + I_C^2 \right) \frac{\pi}{6} \times 4 = \frac{1}{3} \left(I_A^2 + I_B^2 + I_C^2 \right).$$

I_A , I_B , et I_C étant les grandeurs définies en B.2.1.1.

On calcule :

$$I_{\text{eff}} = m_y \cdot I_0 \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{3}},$$

donnant un facteur de puissance :

$$F_p = \frac{P}{S} = \frac{6}{\pi} \sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \cos \theta_0 = 0,989 \cdot \cos \theta_0.$$

B.2.2.) Etude des perturbations

B.2.2.1.) Les amplitudes relatives théoriques des harmoniques de rang 11 et 13 sont :

$$I_{11} = \frac{100}{11} = 9,1\% \text{ et } I_{13} = \frac{100}{13} = 7,7\%.$$

Les écarts avec les valeurs relevées sont dues à la présence des inductances de source.

B.2.2.2.) La relation de Parseval donne : $I_{\text{eff}} = \sqrt{I_f^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_{11}^2 + I_{13}^2}$, en notant I_f l'intensité efficace du fondamental de $i_1(t)$.

On obtient alors : $I_f = 348 \text{ A}$, $I_5 = 9 \text{ A}$, $I_7 = 4,5 \text{ A}$, $I_{11} = 27,8 \text{ A}$ et $I_{13} = 22,6 \text{ A}$.

On détermine les valeurs des tensions harmoniques de $v_1(t)$ par la méthode utilisée à la question B.1.3.2.

En écrivant $V_n = n \cdot L \cdot \omega \cdot I_n$, on obtient :

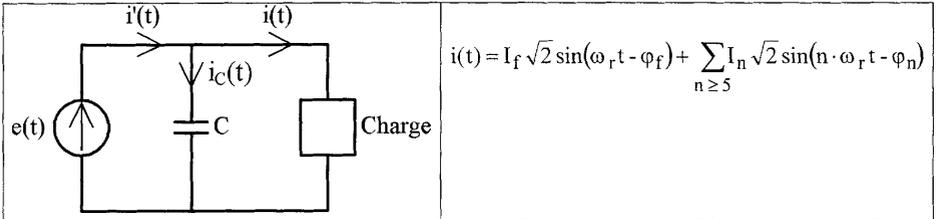
$$V_5 = 113,7 \text{ V}, V_7 = 79,6 \text{ V}, V_{11} = 770 \text{ V} \text{ et } V_{13} = 739 \text{ V}.$$

B.2.2.3.) Le facteur de puissance a pour valeur : $F_{p1} = \frac{P}{3E \cdot I_{\text{eff}}} = 0,825$.

B.2.3.) Amélioration du facteur de puissance par l'utilisation d'une batterie de condensateurs

B.2.3.1.) Etude approchée

B.2.3.1.1.) On se ramène au schéma monophasé suivant :



Seul le fondamental de $i(t)$ transporte de la puissance active :

$$\cos \varphi_f = \frac{P}{3 \cdot E \cdot I_f} \rightarrow \varphi_f = 33,95^\circ.$$

Puissance réactive consommée :

$$Q = 3 \cdot E \cdot I_f \cdot \sin \varphi_f = 6,7 \text{ Mvar}.$$

Le condensateur ne consommant qu'un courant de pulsation ω_r , les harmoniques de $i'(t)$, autres que le fondamental, sont les mêmes que ceux de $i(t)$:

$$i'(t) = I'_f \sqrt{2} \sin(\omega_r t - \varphi'_f) + \sum_{n \geq 5} I_n \sqrt{2} \sin(n \cdot \omega_r t - \varphi_n).$$

La puissance active consommée étant la même, pour rendre le facteur de puissance maximum, il faut minimiser I'_f , donc annuler la puissance réactive fournie par les sources de tension. Aussi, les condensateurs doivent fournir la puissance réactive consommée par le montage.

$$Q = 3C\omega_r E^2 \rightarrow C = \frac{Q}{3\omega_r E^2} = 53,6 \mu\text{F}.$$

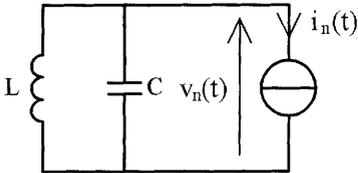
B.2.3.1.2.) Avec $\varphi'_f = 0$, $I'_f = \frac{P}{3 \cdot E} = 288,7 \text{ A}$ et l'intensité efficace des courants

de ligne : $I'_{\text{eff}} = \sqrt{I_f^2 + I_5^2 + I_7^2 + I_{11}^2 + I_{13}^2} = 291 \text{ A}$ on obtient :

$$F_{p2} = \frac{P}{3EI'_{\text{eff}}} = 0,992.$$

B.2.3.2.) On tient compte de l'impédance du réseau

En se ramenant au schéma monophasé, pour les harmoniques de rang $n > 1$,



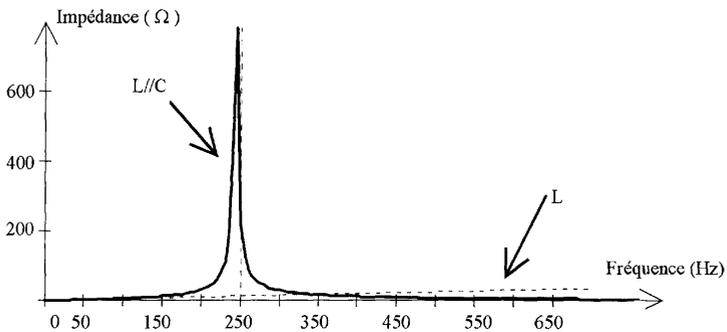
$$V_n = Z_n \cdot I_n,$$

$$\text{avec } Z_n = \frac{n \cdot L \cdot \omega_r}{|1 - L \cdot C \cdot n^2 \cdot \omega_r^2|}$$

$$V_5 = 1974 \text{ V}, V_7 = 74 \text{ V}, V_{11} = 187 \text{ V} \text{ et } V_{13} = 120 \text{ V}.$$

On remarque une atténuation des harmoniques de rang 11 et 13, mais une augmentation importante de celle de rang 5.

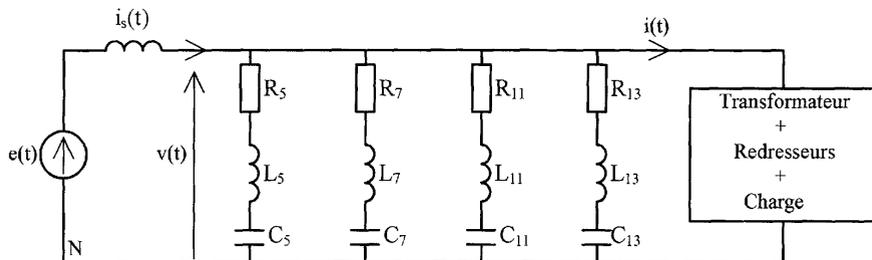
Ceci est dû à la modification de l'impédance vue des sources de tension comme le montre les graphes suivants :



On remarque que l'impédance, en présence du condensateur, est plus élevée pour les harmoniques de rang 5 et plus faibles pour celles de rang 11 et 13.

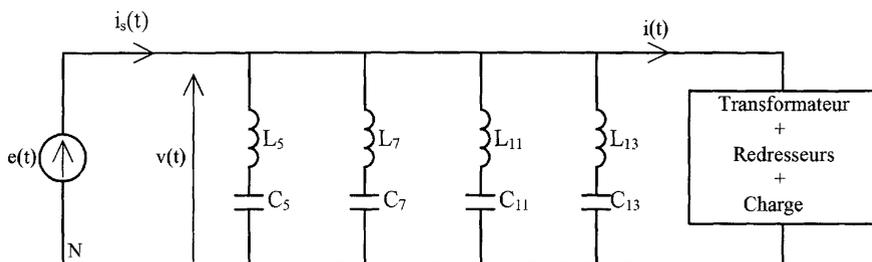
B.2.4.) Amélioration du facteur de puissance par utilisation de filtres passifs.

Pour l'étude qui suit, on utilisera le schéma monophasé suivant :

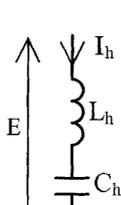


B.2.4.1.) Etude simplifiée

Avec les hypothèses, le schéma d'étude est le suivant :



B.2.4.1.1.) Considérons une cellule de rang h (h = 5, 7, 11, 13) :



La puissance réactive consommée est $Q_{1h} = L_h \omega_r I_h^2 - \frac{I_h^2}{C_h \omega_r}$,

avec $I_h = \frac{C_h \omega_r}{|1 - L_h C_h \omega_r^2|}$ et $L_h C_h \omega_r^2 = \frac{1}{h^2}$, on obtient :

$$Q_{1h} = \frac{C_h \omega_r}{\frac{1}{h^2} - 1} E^2.$$

Comme $h \geq 5$, on peut négliger $1/h^2$ et écrire $Q_{1h} = -C_h \omega_r E^2$.

Cette grandeur étant négative montre que chaque cellule fournit de la puissance réactive.

Pour l'ensemble de chaque cellule, la puissance réactive fournie est donnée par :

$$Q_h = 3 \cdot C_h \cdot \omega_r \cdot E^2.$$

B.2.4.1.2.) Les filtres étant accordés sur les fréquences harmoniques de $i_1(t)$, les courants délivrés par le réseau seront sinusoïdaux, de pulsation ω_r , et en phase avec les tensions si les filtres fournissent la puissance réactive consommée par la charge.

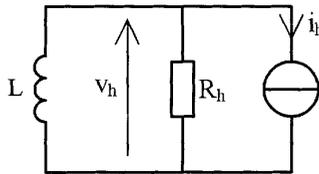
Avec $C_h = \frac{Q}{12 \cdot \omega_r \cdot E^2}$, $L_h = \frac{1}{h^2 \cdot C \cdot \omega_r^2}$ et $R_h = \frac{h \cdot L \cdot \omega_r}{q_h}$, on calcule :

$R_5 = 2,4 \Omega$	$R_7 = 1,7 \Omega$	$R_{11} = 1,0 \Omega$	$R_{13} = 0,91 \Omega$
$L_5 = 30,3 \text{ mH}$	$L_7 = 15,4 \text{ mH}$	$L_{11} = 6,3 \text{ mH}$	$L_{13} = 4,5 \text{ mH}$
$C_5 = 13,4 \mu\text{F}$	$C_7 = 13,4 \mu\text{F}$	$C_{11} = 13,4 \mu\text{F}$	$C_{13} = 13,4 \mu\text{F}$

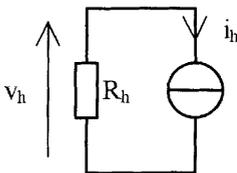
B.2.4.1.3.) D'après la question précédente : $F_{p3} = 1.$

B.2.4.2.) On tient compte de l'impédance du réseau

B.2.4.2.1.) Pour le calcul des valeurs efficaces des tensions harmoniques, on est ramené, avec la condition de résonance, au schéma équivalent monophasé suivant :



Numériquement, on constate que $R_h \ll h \cdot L \cdot \omega_r$, ce qui permet d'utiliser le modèle simplifié suivant :



$$V_h = R_h \cdot I_h.$$

On obtient :

$$V_5 = 21,5 \text{ V}, V_7 = 7,7 \text{ V}, V_{11} = 30 \text{ V}, \text{ et } V_{13} = 20,7 \text{ V}.$$

On a bien une réduction notable des harmoniques de tension.

B.2.4.2.2.) L'impédance du dipôle entre les points A et N est donné par :

$$Z_h(\omega) = jL\omega \frac{LC\omega^2 - 1}{(L + L_h)C_h\omega^2 - 1}.$$

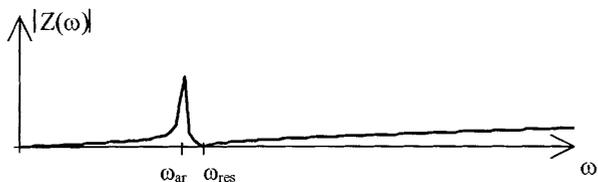
Cette impédance est nulle pour la pulsation de résonance :

$$\omega_{\text{res}} = \frac{1}{\sqrt{L_h C_h}}$$

et infinie pour une pulsation d'antirésonance :

$$\omega_{\text{ar}} = \frac{1}{\sqrt{(L_h + L)C_h}}.$$

Le tracé du module de cette impédance donne la courbe suivante :



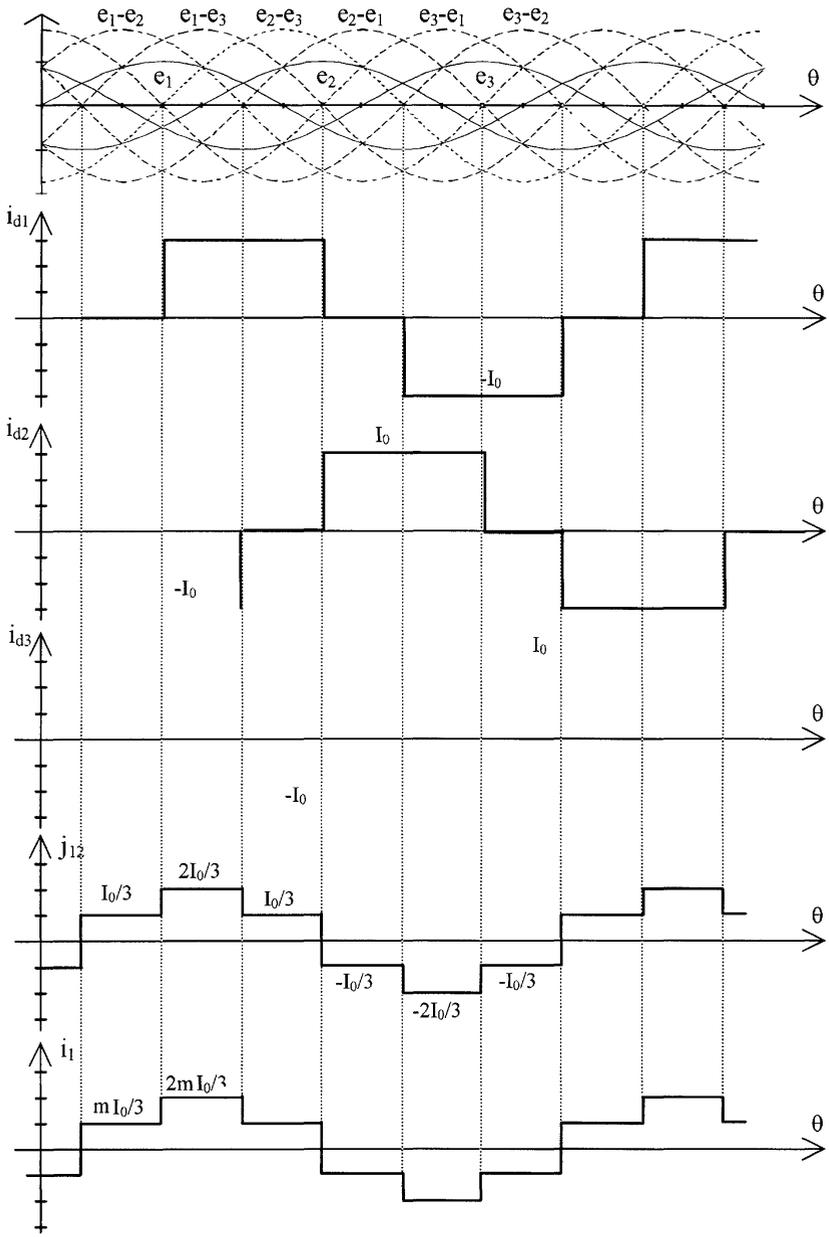
B.2.4.2.3.) Pour les différents filtres, le calcul donne, pour les fréquences de résonance f_{res} et d'antirésonance f_{ar} :

h	5	7	11	13
f_{res} (Hz)	250	350	550	750

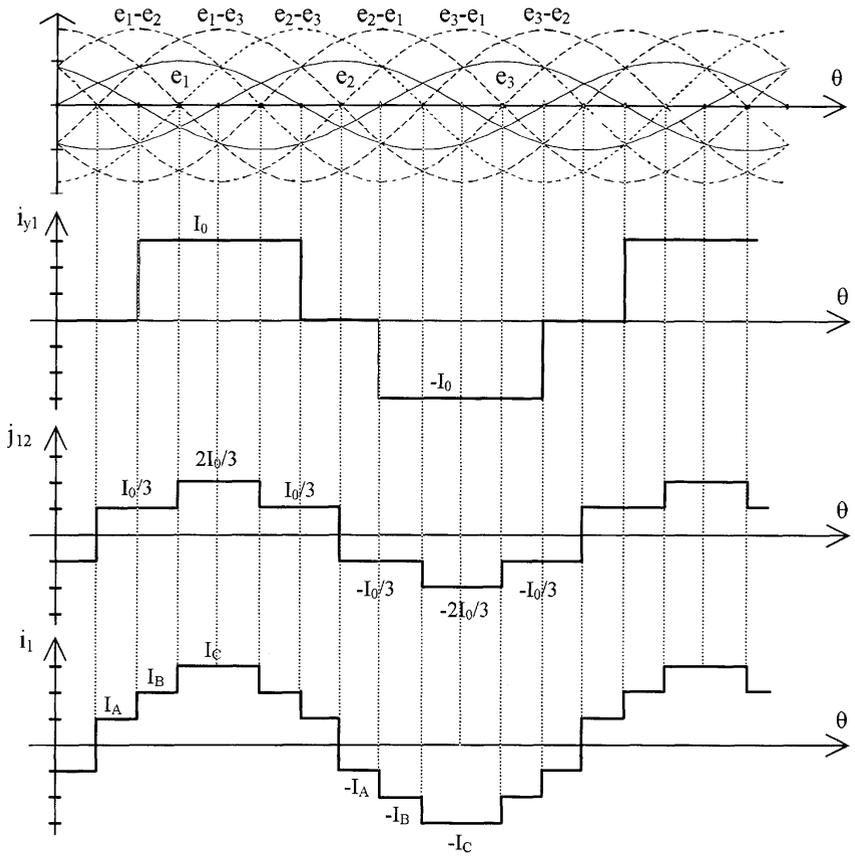
f_{ar} (Hz)	222	284	364	390
----------------------	-----	-----	-----	-----

B.2.4.2.4.) On retrouve sur le graphe les fréquences caractéristiques des différents filtres.

DOCUMENT REPONSE N°1



DOCUMENT REPOSE N°2



PARTIE C: Etude d'une machine asynchrone triphasée

C.1.) Etude de la plaque signalétique

- Puissance mécanique utile : 3 kW
- 220V/380V : la valeur 220 V correspond à la tension nominale d'un enroulement
- 14,7 A/8,5 A : la valeur 8,5 A correspond à l'intensité nominale du courant traversant un enroulement. Dans le cas d'une alimentation avec un couplage triangle, la valeur de 14,7 A correspond à l'intensité nominale du courant de ligne.
- 1430 tr.min⁻¹ : fréquence de rotation du rotor pour une tension nominale et la puissance mécanique nominale.

C.2.) Etablissement d'un schéma équivalent

C.2.1.) Au stator :

$$\underline{E}_s = jL_s\omega \underline{I}_s + jM\omega \underline{I}_r \rightarrow \underline{I}_s = \frac{\underline{E}_s}{\underbrace{jL_s\omega}_{\underline{I}_{sm}}} - \frac{M}{L_s} \underline{I}_r = \underline{I}_{sm} - \underline{I}'_r.$$

Le premier terme de cette expression représente le courant statorique \underline{I}_{sm} absorbé quand le rotor tourne à la vitesse de synchronisme, et le second terme comme étant le courant rotorique ramené au stator.

C.2.2.) Au rotor :

$$\frac{R_r}{g} \underline{I}_r + jL_r\omega \underline{I}_r + jM\omega \underline{I}_s = 0.$$

Avec $\underline{I}_s = \underline{I}_{sm} - \underline{I}'_r$ et $\underline{I}_r = \frac{L_s}{M} \underline{I}'_r$, il vient :

$$\frac{R_r}{g} \frac{L_s}{M} \underline{I}'_r + jL_r\omega \frac{L_s}{M} \underline{I}'_r + jM\omega \underline{I}_{sm} - jM\omega \underline{I}'_r = 0,$$

C.2.3.) La relation précédente donne :

$$jM\omega \underline{I}_{sm} = -\frac{R_r}{g} \frac{L_s}{M} \underline{I}'_r - j\sigma L_r \frac{L_s}{M} \underline{I}'_r \rightarrow \underbrace{jL_s\omega \underline{I}_{sm}}_{\underline{E}_s} = -\left[\frac{R}{g} + j\ell_f \right] \underline{I}'_r,$$

avec :

$$R = R_r \cdot \left(\frac{L_s}{M} \right)^2 \quad \text{et} \quad \ell_f = \sigma L_r \cdot \left(\frac{L_s}{M} \right)^2.$$

On a donc bien équivalence avec le schéma de la **figure C.2** en posant $L_m = L_s$.

C.3.) *Détermination des éléments du schéma équivalent*

C.3.1.) La machine étant alimentée par un système triphasé équilibré en tensions, nous pouvons utiliser le schéma de la **figure C.1**.

Alimentation au stator :

$$E_r = \frac{U_{1r}}{\sqrt{3}} = M\omega I_{1s} \rightarrow M = \frac{U_{1r}}{\sqrt{3}\omega I_{1s}} \rightarrow M = 51 \text{ mH}.$$

$$V_{1s} \approx E_s = L_s\omega I_{1s} \rightarrow L_s = \frac{V_{1s}}{\omega I_{1s}} \rightarrow L_s = 142,5 \text{ mH}.$$

Alimentation au rotor :

$$V_{2r} = L_r\omega I_{2r} = \frac{U_{2r}}{\sqrt{3}} \rightarrow L_r = \frac{U_{2r}}{\sqrt{3}\omega I_{2r}} \rightarrow L_r = 19,84 \text{ mH}.$$

On vérifie $L_s\omega = 44,8 \Omega \gg R_s$ et $L_r\omega = 6,22 \Omega \gg R_r$.

C.3.2.) Des valeurs précédentes, on détermine :

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r} = 0,08, \quad \ell_f = \left(\frac{L_s}{M}\right)^2 \sigma L_r = 12,4 \text{ mH}, \quad L_m = L_s = 142,5 \text{ mH} \text{ et}$$

$$R = \left(\frac{L_s}{M}\right)^2 R_r = 1,56 \Omega.$$

C.4.) *Etude en régime sinusoïdal triphasé équilibré*

Le schéma équivalent par phase est celui de la figure C.2.

C.4.1.) $C_e = 3 \frac{P_{tr}}{\Omega_s}$, où P_{tr} représente la puissance absorbée par le rotor et Ω_s la vitesse

de synchronisme.

$C_e = p \frac{P_{tr}}{\omega}$, p représentant le nombre de paires de pôles.

Avec $P_{tr} = 3 \frac{R}{g} I_r^2 = 3 \frac{R}{g} \frac{V_s^2}{\left(\frac{R}{g}\right)^2 + (\ell_f \omega)^2}$, on obtient :

C.4.3.3.) On obtient $I_r = \frac{V_s}{\sqrt{\left(\frac{R}{g}\right)^2 + (\ell_f \omega)^2}} = 4,7 \text{ A}$ et $I_m = \frac{V_s}{L_m \omega} = 4,9 \text{ A}$.

On effectue un bilan de puissances actives et réactives.

Puissance active absorbée par la machine : $P = 3 \frac{R}{g} I_r^2 = 3080 \text{ W}$.

Puissance réactive absorbée par la machine : $Q = 3 \ell_f \omega I_r^2 + \frac{V_s^2}{L_m \omega} = 3490 \text{ var}$.

Puissance apparente consommée : $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 4660 \text{ VA} = 3V_s I_s \rightarrow I_s = \frac{S}{3V_s} = 7,1 \text{ A}$.

C.5.) Etude en régime sinusoïdal déséquilibré

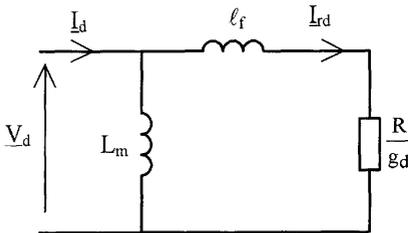
C.5.1.) Le calcul des composantes symétriques conduit à :

$$\underline{V}_d = 206,8 - +23,1 \cdot j$$

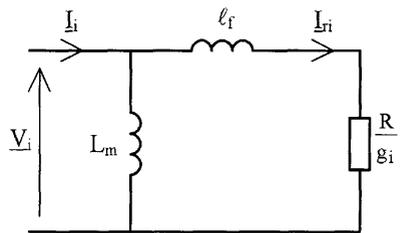
$$\underline{V}_i = 33,4 - 23 \cdot j$$

$$\underline{V}_0 = 0$$

C.5.2.)



Système direct



Système inverse

Pour le système direct, le glissement est $g_d = \frac{1500 - 1430}{1500} = 4,66\%$, et pour le système

inverse : $g_i = \frac{-1500 - 1430}{-1500} = 1,953$.

C.5.3.) Le calcul des composantes symétrique s'effectue à partir des relations suivantes :

$$Z_{sd} = \frac{Z_{rd} \cdot jL_m \omega}{Z_{rd} + jL_m \omega}$$

$Z_{rd} = \frac{R}{g_d} + j \cdot \ell_f \cdot \omega$ représente l'impédance du rotor et Z_{sd} l'impédance, entre deux bornes du schéma équivalent par phase, du stator.

On calcule : $Z_{sd} = 19,3 + 16,6 \cdot j$, $I_{sd} = \frac{V_d}{Z_{sd}} = 6,75 - 4,63 \cdot j$.

En substituant g_i à g_d , on calcule : $Z_{si} = 0,68 + 3,6 \cdot j$, $I_{si} = \frac{V_i}{Z_{si}} = -4,5 - 10 \cdot j$.

Bien évidemment, $I_{s0} = 0$.

C.5.4.) Par les relations de passage des composantes symétriques aux grandeurs physiques :

$$I_1 = -2,3 - 15 \cdot j \rightarrow I_1 = 14,8 \text{ A}$$

$$I_2 = -3,5 - 2,4 \cdot j \rightarrow I_2 = 4,3 \text{ A}$$

$$I_3 = -5,8 + 17,14 \cdot j \rightarrow I_2 = 18 \text{ A}$$

On remarque les valeurs efficaces élevées (nettement supérieures à l'intensité nominale par enroulement) absorbées par les enroulements du stator. Ces courants élevés conduisent à des pertes Joule pouvant amener la destruction thermique de la machine.

C.5.5.) On prend l'expression donnant le couple électromagnétique en fonction du glissement et de la tension :

$$C_d = 3 \frac{P}{\omega} V_d^2 \frac{\frac{R}{g_d}}{\left(\frac{R}{g_d}\right)^2 + (\ell_f \omega)^2} = 24,3 \text{ N.m}$$

$$C_i = 3 \frac{P}{\omega} V_i^2 \frac{\frac{R}{g_i}}{\left(\frac{R}{g_i}\right)^2 + (\ell_f \omega)^2} = 1,6 \text{ N.m}$$

C.5.6.) La composante inverse de courant entraîne l'apparition d'un couple inverse, de pulsation 100 Hz, pouvant amener des vibrations gênantes.

C.6.) *Etude en régime triphasé harmonique*

C.6.1.) Les harmoniques 5 et 7 de tensions vont imposer des harmoniques de courant de même rang qui vont créer des champs tournants de vitesse de synchronisme $5 \cdot \Omega_s$ et $7 \cdot \Omega_s$, en notant Ω_s la vitesse de synchronisme du champ tournant créé par les courants fondamentaux.

Le champ magnétique de rang 5, tournant dans le sens inverse du champ fondamental, le glissement pour cette harmonique vaut :

$$g_5 = \frac{-5 \cdot \Omega_s - \Omega_r}{-5 \cdot \Omega_s},$$

en notant Ω_r la vitesse de rotation du rotor.

$$g_5 = 1,2.$$

De même, Le champ magnétique de rang 7, tournant dans le même sens que le champ fondamental, le glissement pour cette harmonique vaut :

$$g_7 = \frac{7 \cdot \Omega_s - \Omega_r}{7 \cdot \Omega_s} = 0,86.$$

Les valeurs des éléments du schéma équivalent sont les suivantes:

Harmonique de rang 5

$$L_m \cdot (5\omega) = 224 \Omega$$

$$\frac{R}{g_5} = 1,3 \Omega$$

$$g_5$$

$$\ell_f \cdot (5\omega) = 19,5 \Omega$$

Harmonique de rang 7

$$L_m \cdot (7\omega) = 313 \Omega$$

$$\frac{R}{g_5} \approx 1,8 \Omega$$

$$g_5$$

$$\ell_f \cdot (5\omega) = 27,3 \Omega$$

C.6.2.) Ces résultats montrent que l'on peut négliger la résistance rotorique devant l'impédance de fuites et l'intensité du courant magnétisant. On se ramène au schéma de la **figure C.4**.

C.6.3.) On utilise le théorème de superposition pour déterminer les valeurs efficaces des harmoniques de courant.

Pour le fondamental, l'impédance, par phase, de la machine est $Z_{s1} = 25,4 \Omega$, donnant :

$$I_1 = \frac{V_1}{Z_{s1}} = 8,7 \text{ A}$$

Pour les harmoniques de rang 5 et 7, on utilise le schéma de la **figure C.4** et on calcule :

$$I_5 = 5,8 \text{ A} \text{ et } I_7 = 2,6 \text{ A}.$$

C.6.4.) On calcule :

$$\frac{V_5}{V_1} = 18 \% \text{ et } \frac{I_5}{I_1} = 24 \%.$$

$$\frac{V_7}{V_1} = 14 \% \text{ et } \frac{I_7}{I_1} = 13 \%.$$

On obtient des harmoniques de courant de valeurs efficaces élevées qui vont créer des pertes Joule, des champs magnétiques tournants créateurs de pertes ferromagnétiques non négligeables ainsi que des couples pulsatoires de fréquence 300 Hz.

Capes de sciences physiques

Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de physique avec applications ♦ Session : 2003

A Quelques caractéristiques d'une machine thermique.

A.1. Préliminaires.

A.1.1.a. Chaleur: En partant du premier principe de la thermodynamique: l'énergie totale d'un système ne peut varier que par transfert (pas de création) qu'on résume par $\Delta E = W + Q$.

W , le travail est le transfert des formes d'énergies macroscopiques: énergie mécanique, électromagnétique.

Q , la chaleur est le transfert des formes d'énergies microscopiques: énergie interne.

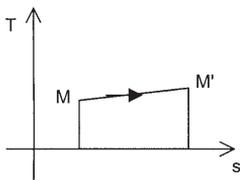
A.1.1.b. Entropie: Au niveau de terminale, on peut se contenter de dire que l'entropie est une mesure du désordre d'un système et ajouter quelques propriétés:

- Cette entropie ne peut qu'augmenter lorsqu'un système isolé subit une transformation. (l'entropie de l'univers augmente)

- On peut faire varier cette entropie par transfert thermique.

- On peut parler d'entropie en théorie de l'information.

A.1.1.c. Diagramme T,s



L'aire sous la courbe est mathématiquement: $\int_M^{M'} T \cdot ds$

Or dans le cas d'une transformation réversible (cf remarque) $\delta q_{\text{rév}} = T ds$.

On a donc $\int_M^{M'} T \cdot ds = q_{M \rightarrow M'}$ chaleur massique réversible reçue par le système lors d'une transformation réversible MM'

Remarque: Bilan entropique : $ds = \delta s^{\text{éch}} + \delta s^{\text{créée}}$ avec $\delta s^{\text{éch}} = \frac{\delta Q}{T_{\text{frontière}}}$ et $\delta s^{\text{créée}} \geq 0$.

Pour une transformation réversible: $\delta s^{\text{créée}} = 0$ et $T_{\text{frontière}} = T$. On retrouve $\delta q_{\text{rév}} = T ds$

A.1.1.d. Aire des cycles.

Pour une évolution réversible le travail élémentaire massique du aux forces de pression est $\delta w_{\text{rév}} = -P \cdot dv$.

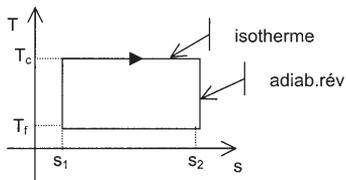
Pour un cycle réversible le travail massique reçu est donc: $w_{\text{cycle}} = \oint_{\text{cycle}} -P \cdot dv$, l'aire du cycle au signe près dans

un diagramme $P(v)$.

De même $q_{\text{cycle}} = \oint_{\text{cycle}} T \cdot ds$, l'aire du cycle dans un diagramme $T(s)$.

Comme pour un cycle $\Delta e = 0 = w_{\text{cycle}} + q_{\text{cycle}}$, on a bien égalité des deux aires.

A.1.2. Cycle de Carnot.
A.1.2.a. Allure du cycle.



Une adiabatique réversible vérifie $\delta q_{rév} = Tds = 0$ d'où $s = cte$.

Pour être moteur le système doit fournir du travail, soit $w_{cycle} < 0$, il faut donc $q_{cycle} > 0$ c'est à dire $\oint_{cycle} T \cdot ds > 0$

Le cycle est parcouru dans le sens horaire.

A.1.2.b: Rendement thermodynamique.

Dans un moteur thermique la "dépense" se fait au moment de la combustion du carburant, c'est donc q_c . On

recupère le travail cyclique $-w_{cycle}$. On a donc $\eta = \frac{-w_{cycle}}{q_c}$

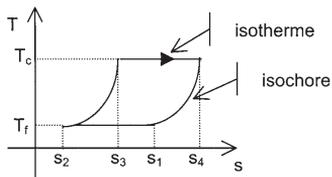
Dans le cas d'un cycle réversible, ces grandeurs sont mesurées par les aires dans le diagramme T,s (d'après 1c et 1d)

d'où $\eta_{carnot} = \frac{\text{aire du cycle}}{\text{aire sous isotherme } T_c} = \frac{(T_c - T_f)(s_2 - s_1)}{T_c(s_2 - s_1)}$; $\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$

A.1.3.a. Différentielle de l'entropie: Pour un gaz parfait du $c_v dT$ et $Pv = rT$ d'où $ds = c_v \frac{dT}{T} + r \frac{dv}{v}$

A.1.3.b. Isochore. Pour une isochore $ds = c_v \frac{dT}{T}$ en intégrant $s - s_0 = c_v \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$ d'où $T = T_0 e^{\frac{s-s_0}{c_v}}$

A.2. Le cycle de Stirling idéal.
A.2.1.



On a pour les isochores: $s_4 - s_1 = c_v \ln\left(\frac{T_4}{T_1}\right) = c_v \ln\left(\frac{T_c}{T_f}\right)$

$s_3 - s_2 = c_v \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = c_v \ln\left(\frac{T_c}{T_f}\right)$

d'où $s_3 - s_2 = s_4 - s_1$

A.2.2.(a?): Propriétés de l'accumulateur.

Il faut que l'accumulateur garde une grande quantité d'énergie interne, il lui faut donc une grande capacité thermique.

Il doit restituer rapidement cette énergie, il lui faut donc une grande conductivité thermique.

A.3. Rendement du cycle de Stirling réel.

A.3.1.

- Définition du rendement:

Pour ce moteur, si il n'y a pas de pertes on dépense $q_{3 \rightarrow 4 \text{ idéal}}$, car le chauffage $q_{1 \rightarrow 2}$ se fait par l'intermédiaire de l'accumulateur.

En fait compte-tenu du rendement de l'accumulateur on dépense: $q_{3 \rightarrow 4 \text{ idéal}} + (1-\alpha)q_E$

On recueille $w_{cycle \text{ réel}} = w_{cycle \text{ idéal}} = \text{aire du cycle}$ (inchangée d'après le texte)

On a donc $\eta_{réel} = \frac{-w_{cycle \text{ réel}}}{q_{3 \rightarrow 4 \text{ idéal}} + (1-\alpha)q_E} = \eta_{idéal} \frac{1}{1 + \frac{(1-\alpha)q_E}{q_{3 \rightarrow 4 \text{ idéal}}}}$ en posant $\eta_{idéal} = \frac{-w_{cycle \text{ idéal}}}{q_{3 \rightarrow 4 \text{ idéal}}}$

- Expression de $\eta_{\text{idéal}}$.

D'après **A.1.2.b** $\eta_{\text{idéal}} = \frac{\text{aire du cycle}}{\text{aire sous isotherme } T_c}$, or l'aire du cycle du moteur Stirling est la même que celle du

cycle de Carnot car la surface délimitée par s_2, s_3 est la même que celle délimitée par s_1, s_4 .

On a donc $\eta_{\text{idéal}} = \eta_{\text{carnot}}$

- Calcul des chaleurs:

$$q_E = -q_{4 \rightarrow 1} = -c_v(T_1 - T_4) = c_v(T_c - T_f)$$

$$q_{3 \rightarrow 4 \text{ idéal}} = \int_{T_3}^{T_4} T ds = T_c(s_4 - s_3) = rT_c \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) = rT_c \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \text{ en intégrant l'expression de } \Delta s \text{ pour une isotherme.}$$

Expression de f: On reporte les expressions des chaleurs et on triture.

$$f = \frac{(1-\alpha)q_E}{q_{3 \rightarrow 4 \text{ idéal}}} = (1-\alpha) \cdot \frac{c_v}{r} \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)} = \frac{(1-\alpha)(1-k)}{(\gamma-1)\ln a} \quad \text{en utilisant } c_v = \frac{r}{\gamma-1}$$

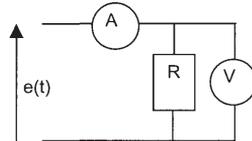
On arrive enfin à : $\eta_{\text{réel}} = \frac{\eta_{\text{carnot}}}{1 + \frac{(1-\alpha)(1-k)}{(\gamma-1)\ln a}}$ youpi!

A.3.2.

Pour se rapprocher de η_{carnot} , il faut prendre un grand γ , on prendra un gaz monoatomique ($\gamma=5/3$) plutôt qu'un gaz diatomique ($\gamma=7/5$), mais c'est peu courant.

A.3.3. Mesure du rendement.

A.3.3.a. La résistance du filament étant très faible, on ne pourra pas négliger celle de l'ampèremètre si on le met en série avec R, il faut donc prendre un montage courte dérivation.



On a alors $P_{\text{el}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = 142,74 \text{ W}$

A.3.3.b. La puissance du moteur est $P_{\text{mot}} = \frac{|w_{\text{cycle}}|}{t_{\text{cycle}}} = f \cdot |w_{\text{cycle}}|$ On a donc $\eta = \frac{f \cdot |w_{\text{cycle}}|}{P_{\text{el}}} = 26,9 \%$

On tire après trituration du **A.3.1.** $\alpha = 1 - \left(\frac{\eta_{\text{carnot}}}{\eta_{\text{réel}}} - 1\right) \left(\frac{\gamma-1}{1-k}\right) \cdot \ln a = 0,72$

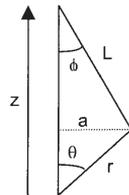
A.4. Etude du cinématique du système bielle-manivelle.

A.4.1. Les relations dans les triangles rectangles donnent $\sin \phi = \frac{a}{L}$; $\sin \theta = \frac{a}{r}$

d'où $L \cdot \sin \phi = r \cdot \sin \theta$

On a donc $z = L \cdot \cos \phi + r \cdot \cos \theta$

Avec $\cos \phi = \sqrt{1 - \sin^2 \phi}$, on trouve: $z(t) = L \sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2} \sin^2 \theta} + r \cdot \cos \theta$



A.4.2 Vitesse du piston.

si $r/L \approx 0,1$ on a toujours $\frac{r^2}{L^2} \sin^2 \theta < 10^{-2}$. On peut donc écrire $z \approx L \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{L^2} \sin^2 \theta\right) + r \cos \theta$

avec $\theta = \omega t$; $z \approx L \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{L^2} \sin^2 \omega t\right) + r \cos \omega t$ d'où $\dot{z} \approx -\frac{r^2}{L} \omega \sin \omega t \cdot \cos \omega t - r \omega \sin \omega t$

finalement $v_p = \dot{z} \approx -r\omega \sin \alpha t - \frac{r^2}{2L} \omega \sin 2\alpha t$ et $A_1 = -r\omega$; $A_2 = -\frac{r^2}{2L} \omega$.

On peut vérifier que pour $t = 0^+$, le piston descend.

A.4.3 Accélération.

Sur la courbe l'accélération est donnée par la pente de $v_p(t)$, elle sera donc maximale pour les vitesses nulles.

On lit alors 3 m.s^{-1} pour $1,75 \text{ rad}$.

1 tour correspond à $2\pi/\omega \text{ s}$; on a donc $1,75 \text{ rad}$ correspond à $1,75/\omega \text{ s} = 0,276 \text{ s}$.

L'accélération max est $a_{\text{max}} = 38,8 \text{ m.s}^{-2}$

Commentaires: a_{max} est de l'ordre de grandeur de $4g$ (g accélération de la pesanteur). Il faut donc prendre des précautions au niveau des attaches et bien lubrifier.

B Oscillateurs électriques.

B.1. Le circuit RLC série

B.1.1. Quelques régimes (l'été arrive)

La solution générale d'une équation différentielle linéaire est de la forme $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$.

- $x_H(t)$: solution de l'équation sans second membre (homogène) appelée régime libre en physique car il correspond à un système sans générateur en physique. Dans le cas de systèmes stables il devient négligeable au bout d'un certain temps.

- $x_p(t)$: solution particulière, appelée régime forcé en physique car il a la même forme mathématique que le générateur.

- $x(t)$: solution totale, appelée régime transitoire en physique car lorsque $x_H(t)$ est devenu négligeable, on a alors le régime forcé: $x(t) \approx x_p(t)$.

B.1.2. Bilan énergétique.

La puissance instantanée fournie par le générateur $p_{\text{gén}} = e i$ se répartit de la façon suivante, en convention récepteur.

- La résistance reçoit $p_{\text{rés}} = Ri^2 > 0$; elle est toujours réceptrice (elle dissipera cette énergie par effet Joule)

- L'inductance reçoit $p_{\text{ind}} = i.L \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$; elle est réceptrice lorsque $i(t)$ augmente, génératrice sinon.

- La capacité reçoit $p_{\text{capa}} = u.C \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right)$; elle est réceptrice lorsque $u(t)$ augmente, génératrice sinon.

B.1.3. Courant et puissance moyenne.

On pose $i(t) = I\sqrt{2} \cdot \cos(\alpha t + \Phi_i)$

On a alors en notation complexe: $\underline{e} = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{i}$.

On en déduit $I = \frac{E}{\left\{ R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right\}^{1/2}}$ et $\tan \Phi_i = - \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right)$ (car $\phi_u = 0$)

La puissance moyenne reçue par la résistance est $P(\omega) = \langle Ri^2(t) \rangle = RI^2$. On a donc

$$P(\omega) = \frac{RE^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

B.1.4. Forme canonique.

On aura $P(\omega) = P_{\text{max}} = \frac{E^2}{R}$ pour $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ (c'est à dire $\omega = \omega_0$).

On vérifie que $\frac{L}{R^2} \omega = Q_0^2 \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$

On a donc
$$P(\omega) = \frac{P_{\max}}{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

ω_0 est une pulsation en rad.s⁻¹ ; Q_0 , rapport d'impédance ($L\omega_0$ et R), est donc sans unité.

Lorsque $\omega = \omega_0$, la puissance reçue est maximale, on est donc à la résonance et le circuit se comporte comme une résistance pure.

B.1.5. Facteur de qualité.

ω_1 et ω_2 sont définies par $P(\omega) = P_{\max}/2 \Rightarrow 1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \pm \frac{1}{Q_0} \Rightarrow \omega^2 \mp Q_0 \omega \omega_0 - \omega_0^2 = 0$

ce qui donne 4 racines $\frac{\pm Q_0 \pm \sqrt{Q_0^2 \omega_0^2 + 4\omega_0^2}}{2}$

dont deux positives $\omega_2 = \frac{1}{2} \omega_0 \left(\frac{1}{Q_0} + \sqrt{1 + \frac{4}{Q_0^2}} \right)$ $\omega_1 = \frac{1}{2} \omega_0 \left(-\frac{1}{Q_0} + \sqrt{1 + \frac{4}{Q_0^2}} \right)$

On a bien $\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$ soit $Q = Q_0$

B.1.6. A.N. $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10,5 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$ et $Q_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 38$

B.2. Circuits couplés.

B.2.1. Equations du système.

Lois des mailles (orientées dans le sens inverse des courants i_1 et i_2)

- Maille 1: $u_{e1} + L \frac{di_1}{dt} + u_{\Gamma} = 0$ avec $i_1 = C \frac{du_{e1}}{dt}$ et $i_1 - i_2 = \Gamma \frac{du_{\Gamma}}{dt}$

On dérive cette relation: $\frac{i_1}{C} + L \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{\Gamma} (i_1 - i_2) = 0$

- Maille 2: $u_{e2} + L \frac{di_2}{dt} - u_{\Gamma} = 0$ avec $i_2 = C \frac{du_{e2}}{dt}$,

en dérivant: $\frac{i_2}{C} + L \frac{d^2 i_2}{dt^2} - \frac{1}{\Gamma} (i_1 - i_2) = 0$

On retrouve bien:
$$\begin{cases} L \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{\Gamma} \right) i_1 - \frac{i_2}{\Gamma} = 0 \\ L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{\Gamma} \right) i_2 - \frac{i_1}{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

B.2.2.a. Découplage.

En additionnant les deux équations $L \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{\Gamma} \right) \xi - \frac{1}{\Gamma} \xi = 0$ soit $\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{1}{LC} \xi = 0$

Equation différentielle dont la solution est $\xi(t) = A \cos(\omega' t + \Phi')$ avec $\omega' = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

En soustrayant les deux équations $L \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{\Gamma} \right) \eta + \frac{1}{\Gamma} \eta = 0$ soit $\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{\Gamma} \right) \eta = 0$

Equation différentielle dont la solution est $\eta(t) = B \cos(\omega'' t + \Phi'')$ avec $\omega'' = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{2}{L\Gamma}}$

B.2.2.b. On a $i_1 = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ et $i_2 = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$

d'où
$$\begin{cases} i_1(t) = \frac{1}{2} A \cos(\omega' t + \Phi') + \frac{1}{2} B \cos(\omega'' t + \Phi'') \\ i_2(t) = \frac{1}{2} A \cos(\omega' t + \Phi') - \frac{1}{2} B \cos(\omega'' t + \Phi'') \end{cases}$$
 superposition des modes propres ω' et ω'' .

B.2.2.c. Mode M'

En mode M' on a $i_1(t) = i_2(t)$, il n'y a donc pas de courant dans la capacité Γ , elle se comporte comme un circuit ouvert.

Le circuit est alors équivalent à 2 capacités C ($C_{\text{éq}} = \frac{1}{2}C$) et 2 inductances L ($L_{\text{éq}} = 2L$) en série.

Sa pulsation propre est alors
$$\frac{1}{\sqrt{L_{\text{éq}} C_{\text{éq}}}} = \omega'$$

B.2.3 Mesure des modes propres.

B.2.3.a Les deux courbes ne semblent contenir qu'une seule pulsation (Il n'y a pas de battements). On peut supposer qu'il s'agit des modes propres.

La décroissance est due à la dissipation d'énergie dans les résistances négligées (les fils de connexion et les résistances des bobines).

B.2.3.b Fréquences.

Valeurs expérimentales: figure 3a: 34 périodes pour 20 ms $\Rightarrow f_{\text{exp}} \approx 1,7 \text{ kHz}$
 figure 3b: 29 périodes pour 10 ms $\Rightarrow f_{\text{exp}} \approx 2,9 \text{ kHz}$

Valeurs théoriques: $f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1,68 \text{ kHz}$ et $f'' = \frac{\omega''}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{2}{L\Gamma}}} = 2,91 \text{ kHz}$.

La cohérence est remarquable.

B.2.4

B.2.4.a. Il y a un phénomène de battements dus à la somme des deux sinusoïdes de fréquences f et f' . On parle aussi, si le rapport des fréquences est suffisant, de modulation d'une fréquence par une autre.

B.2.4.b. On observe, sur la figure 5, deux fuseaux pour 13 ms, soit une période $T_B \approx 6,5 \text{ ms}$.

On compte $n_B \approx 11$ ou 12 oscillations dans un fuseau.

B.2.4.c.

En transformant $\cos \omega' t + \cos \omega'' t = 2 \cos\left(\frac{\omega' + \omega''}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega' - \omega''}{2}\right)$ et $\cos \omega' t - \cos \omega'' t = 2 \sin\left(\frac{\omega' + \omega''}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega' - \omega''}{2}\right)$

On voit apparaître une "petite" pulsation $\frac{\omega'' - \omega'}{2}$ modulant une "grande" pulsation $\frac{\omega' + \omega''}{2}$.

Un fuseau représente la $\frac{1}{2}$ période de la "petite" pulsation, on a donc $\frac{2\pi}{T_B} = \frac{\omega'' - \omega'}{2} \Rightarrow \frac{1}{T_B} = f'' - f'$

Dans une grande période il y a $2n_B$ petites périodes, n_B est le rapport des fréquences: $2n_B = \frac{f'' + f'}{f'' - f'}$

Valeurs théoriques: $f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1,68 \text{ kHz}$ et $f'' = \frac{\omega''}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{2}{L\Gamma}}} = 1,84 \text{ kHz}$.

d'où $T_B = 6,25 \text{ ms}$ et $n_B = 11$.

La cohérence est remarquable. Félicitation aux expérimentateurs.

Capès de sciences physiques

Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET CHIMIE

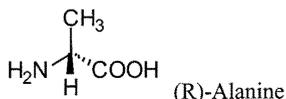
Composition de chimie avec applications ♦ Session : 2003

I – Les liants protéiniques

1 – Les acides aminés

1.1 Une substance chirale n'est pas superposable à son image dans un miroir. C'est le cas de l'alanine dont la chiralité est liée à la présence d'un carbone asymétrique.

1.2

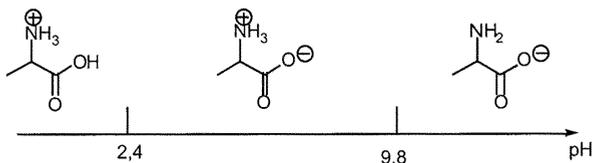


L'ordre de classement des substituants selon les règles de Cahn-Ingold-Prelog est :

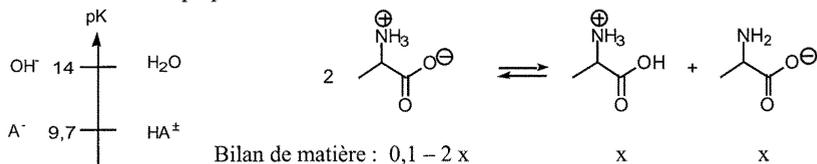


1.3 Une substance chirale est optiquement active ce qui signifie qu'elle fait tourner le plan de polarisation de la lumière polarisée.

1.4.1



1.4.2 La réaction prépondérante s'écrit :



L'avancement volumique x de la RP est donné par résolution de :

$$K^0 = \frac{K_{A2}}{K_{A1}} = \frac{x^2}{(0,1 - 2x)^2}$$

soit :

$$x = 10^{-4,7} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

L'espèce prédominante en solution est donc l'amphion.

De cette RP, on déduit les avancements des espèces négligées dans le calcul et donc le pH, soit ici :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \sqrt{K_{A1}K_{A2}} = 10^{-6,1} = 7,9 \cdot 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1} \quad [\text{OH}^-] = \frac{K_E}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = 10^{-7,9} = 1,3 \cdot 10^{-8} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_1 + \text{p}K_2) = 6,1$$

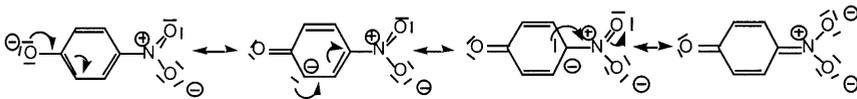
Le calcul effectué est valide puisque les concentrations $[\text{H}_3\text{O}^+]$ et $[\text{OH}^-]$, qui mesurent les avancements des réactions secondaires sont bien négligeables, au seuil des 10%, devant l'avancement de la RP.

2 Synthèse d'un dipeptide

2.1 On ne peut coupler directement l'alanine à la glycine car il existe quatre possibilités de couplage Ala-Gly, Gly-Ala, Ala-Ala et Gly-Gly. Par ailleurs, la réaction directe entre acide carboxylique et amine n'est pas la meilleure voie de couplage.

2.2 P est un groupe protecteur qui bloque le groupe NH_2 de l'alanine.

2.3



Le composé C est particulièrement stabilisé par la conjugaison du doublet de O^- avec la double liaison $\text{N}=\text{O}$ du groupe nitro, attracteur très fort.

L'intérêt de la transformation est de former un groupe très nucléofuge, puisqu'il s'agit d'une base faible, ce qui facilitera la coupure de la liaison C-O.

2.4.1 $A = \epsilon l C$ ou $A = \sum \epsilon_i l C_i$ L'absorbance A (ou densité optique) n'a pas d'unité, ϵ est le coefficient d'extinction molaire en $\text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$, l est la longueur de la cuve en m, C la concentration en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$.

2.4.2 On peut penser que la réaction suit la loi de Van't Hoff soit $v = k [\text{P-Ala-B}]^a [\text{Gly}]^b$

2.4.3 Si Gly est en fort excès, on peut appliquer la méthode de dégénérescence de l'ordre et considérer $[\text{Gly}]$ comme une constante. Alors $v = k' [\text{P-Ala-B}]^b$ avec $k' = k [\text{Gly}]^b_0$

2.4.4 On a :

$$v = -\frac{d[\text{P-Ala-B}]}{dt} = k' [\text{P-Ala-B}]$$

Soit par intégration :

$$c = c_0 \exp(-k't)$$

2.4.5 $[\text{C}] = c_0 (1 - \exp(-k't))$ d'après le bilan de matière, d'où :

$$A = \epsilon l [\text{C}] = \epsilon l c_0 (1 - \exp(-k't)) = A_\infty - A_\infty \exp(-k't) \text{ car } A_\infty = \epsilon l c_0$$

On a donc finalement

$$\ln \frac{c}{c_0} = \ln \frac{A_\infty - A}{A_\infty} = -k't$$

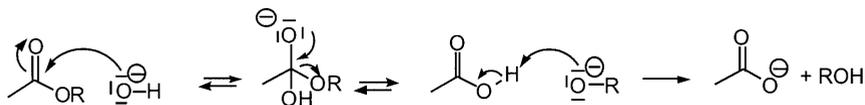
2.4.6 La pente de la droite précédente est $-k'$ donc donne accès à $k' = 0,1 \text{ min}^{-1}$

II - Alcool polyvinylique

1. L'alcool polyvinylique est soluble dans l'eau car les groupes hydroxyles OH permettent d'établir de nombreuses liaisons hydrogène avec l'eau.

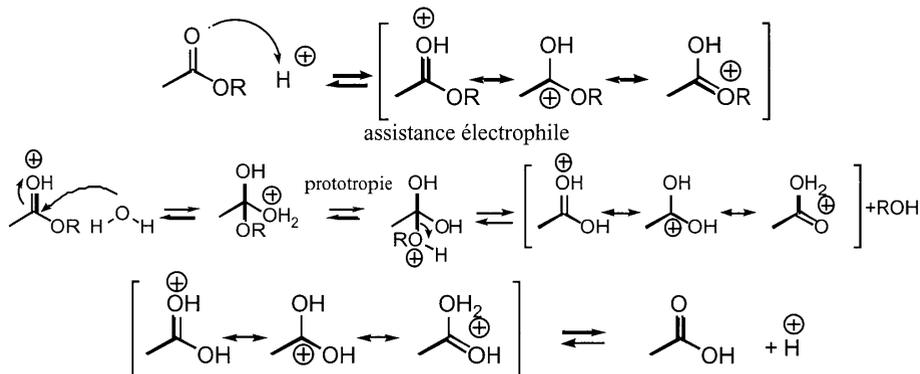
2. L'alcool vinylique est la forme énol de l'éthanal donc ultraminoritaire devant l'éthanal

3.1



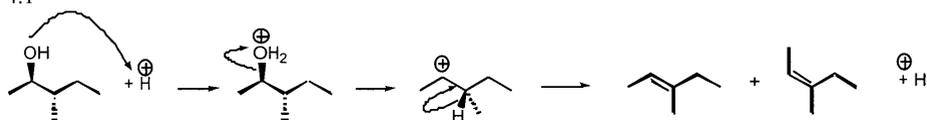
Les deux premières étapes sont réversibles. L'ion acétate est une base beaucoup plus faible que l'ion éthanolate, ce qui rend la troisième étape et donc la réaction de saponification quasi-totales.

3.2

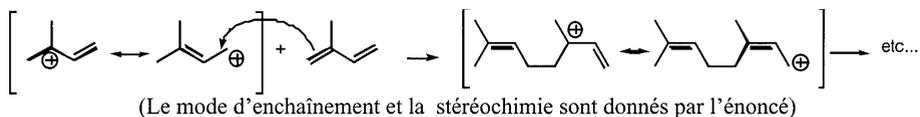


Dans ces conditions, l'hydrolyse de l'ester conduit à un équilibre. La précipitation de l'alcool polyvinylique déplace donc l'équilibre vers la droite et rend la réaction totale.

4.1



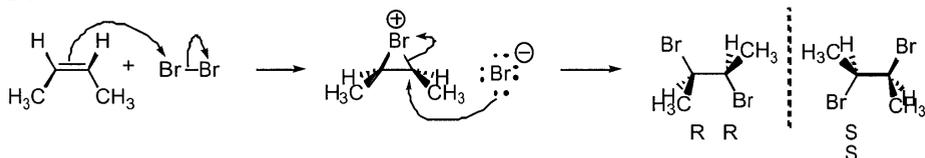
La réaction, régiosélective, conduit majoritairement à l'alcène le plus substitué (règle de Zaitsev).



1.3 Les doubles liaisons sont de configuration Z ($R > CH_3$ et $R' > H$ selon les règles de Cahn-Ingold-Prelog)

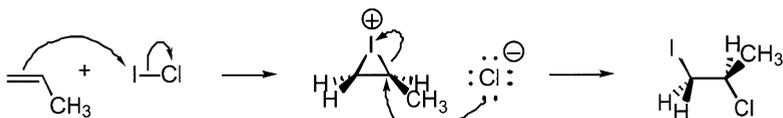
2-Les huiles insaturées

2.1



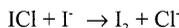
L'attaque électrophile forme un intermédiaire ponté, ion bromonium, ouvert par l'attaque nucléophile pour conduire à un couple d'énantiomères.

2.2

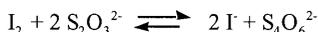


L'iode est le centre électrophile du chlorure d'iode car $\chi(Cl) > \chi(I)$. L'ion chlorure attaque le plus vite le carbone le plus électrophile pour conduire à un produit en accord avec la règle de Markownikov.

2.3



2.4.1



2.4.2



Pour la réaction globale :

$$A^0 = RT \ln K^0 = A_1^0 - A_2^0 = 2F(E_1^0 - E_2^0)$$

Soit :

$$\log K^0 = \frac{F}{2,3RT} (E_1^0 - E_2^0)$$

A.N : $\log K^0 = 15,3 \quad K^0 = 2 \cdot 10^{15}$

2.5 D'après 2.3, on a :

$$n(I_2) = n(ICl)_{\text{restant}} = n(ICl)_0 - n(C=C)$$

et d'après 2.4.1, on a :

$$n(I_2) = \frac{1}{2} n(S_2O_3^{2-})$$

A.N $n(S_2O_3^{2-}) = 6,8 \cdot 10^{-3}$ mole $n(I_2) = 3,4 \cdot 10^{-3}$ mole $n(ICI)_0 = 5,3 \cdot 10^{-3}$ mole $n(C=C) = 1,9 \cdot 10^{-3}$ mole

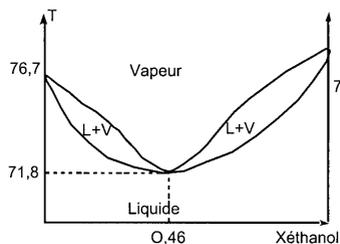
2.6 On raisonne ici sur une addition de I_2 sur $C=C$, qui se fait mole à mole. La masse de diiode fixée par l'huile de tung est donc $m(I_2) = n(C=C)M(I_2)$. Ramenée à 100g d'huile, cette masse devient :

$$m'(I_2) = 400.n(C=C)M(I_2)$$

A.N indice d'iode = 193

IV – Les solvants

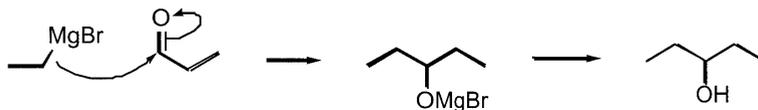
1.



Si l'on distille un mélange d'éthanol et d'acétate d'éthyle, on obtient en tête de colonne l'azéotrope à 46% d'éthanol et dans le bouilleur, un résidu dont la composition tend vers $x = 1$ donc vers l'éthanol pur. (si l'on part d'un mélange plus riche en éthanol que l'azéotrope).

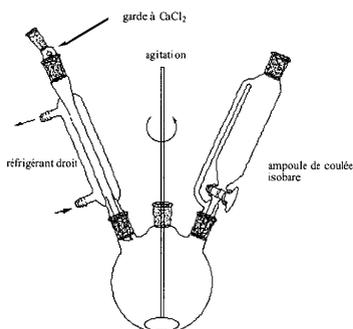


2.2



L'alcool obtenu est achiral donc ne possède pas d'activité optique.

2.3

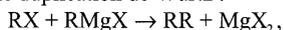


2.4

- La garde à chlorure de calcium permet de dessécher l'air contenu dans le ballon et limite l'hydrolyse du magnésien.

- Le magnésium doit être écrasé pour détruire autant que possible la couche d'oxyde protégeant le magnésien.

- On verse le bromoéthane goutte à goutte pour éviter une éventuelle duplication de Würtz :



et également éviter à la réaction de s'emballer.

2.5 Le solvant utilisé pour la synthèse doit être une base de Lewis pour stabiliser par complexation le magnésien formé. Par ailleurs le solvant doit être aprotique. L'éther diéthylique, le tétrahydrofuranne ou le dioxanne sont les solvants généralement utilisés.

2.6 L'alcool formé est légèrement soluble dans l'eau et très soluble dans l'éther. L'extraction à l'éther permet donc de récupérer presque totalement.

2.7 L'hydrogénocarbonate joue le rôle de base et élimine les traces d'acide encore présentes en phase éthérée avec dégagement de CO_2 qui s'élimine du milieu.

L'eau permet d'éliminer les impuretés minérales présentes.

Partie B : Le chrome

I. Le chrome sous différents degrés d'oxydation

1. Le chrome au degré d'oxydation 0

1.1 $^{52}_{24}\text{Cr}$

1.2 Deux noyaux isotopes sont deux noyaux d'un même élément, possédant des nombres de neutrons différents. Ex : $^1_1\text{H}, ^2_1\text{H}, ^3_1\text{H}$

1.3 D'après la règle de Klechkowski, la configuration électronique du chrome à l'état fondamental devrait être : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^4$

1.4 Le chrome se trouve dans la quatrième période et dans la sixième colonne de la classification.

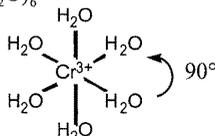
1.5 Le chrome a en fait la configuration : $[\text{Ar}]4s^1 3d^5$, plus favorable énergétiquement que la configuration prévue par la règle.

1.6 Le chrome a des orbitales d partiellement occupées. C'est donc un élément de transition.

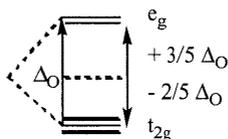
2. Le chrome aux degrés d'oxydation II et III

2.1.1 $\text{Cr}^{2+} : [\text{Ar}]4s^0 3d^4$ $\text{Cr}^{3+} : [\text{Ar}]4s^0 3d^3$

2.1.2 Ion hexaquaChrome (III) $\text{Cr}(\text{H}_2\text{O})_6^{3+}$



2.1.3

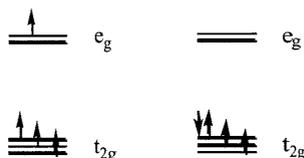


Par rapport à un champ sphérique, les orbitales $d_{x^2-y^2}$ et d_{z^2} sont déstabilisées, les orbitales d_{xy}, d_{xz}, d_{yz} sont stabilisées. La règle de conservation du barycentre des énergies conduit à une déstabilisation égale à $+3/5 \Delta_O$ pour les orbitales e_g et une stabilisation $-2/5 \Delta_O$ pour les orbitales t_{2g} , Δ_O étant la levée de dégénérescence en champ octaédrique.

2.1.4 On a $\lambda = \frac{1}{\sigma}$ soit $\lambda = 571 \text{ nm}$. Le complexe absorbe une radiation lumineuse située dans le domaine vert jaune du spectre. La couleur perçue est donc la couleur complémentaire, soit un violet pâle.

2.1.5 $h\nu = h \frac{c}{\lambda} = hc\sigma$ et $\Delta_O = N_A hc\sigma$ A.N : $\Delta_O = 167,4 \text{ kJ.mol}^{-1}$

2.1.6



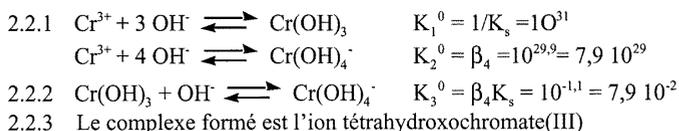
Deux configurations sont possibles : $(t_{2g})^3 e_g^3$ et $(t_{2g})^4$.

Pour la première, l'énergie de stabilisation de champ cristallin vaut : $E_1 = 3/5 \Delta_O - 6/5 \Delta_O = -3/5 \Delta_O$

Pour la seconde, $E_2 = -8/5 \Delta_O + P$

On a donc $E_2 - E_1 = P - \Delta_O$, donc la première configuration est la plus stable. On a donc un complexe à champ faible et haut spin, comportant quatre électrons célibataires. Le complexe est donc

paramagnétique.



2.2.3 Le complexe formé est l'ion tétrahydroxochromate(III)

2.2.4 L'hydroxyde peut réagir en tant qu'acide (réaction 3) ou en tant que base (réaction 1)

2.2.5 A la frontière, $[\text{Cr}^{3+}] = [\text{Cr}(\text{OH})_4^-]$ soit $[\text{OH}^-]^4 = 10^{-29,9}$ d'où $\text{pOH} = 7,47$ et $\text{pH} = 6,53$.

2.2.6.1 A la limite de précipitation, $[\text{OH}^-]^3 = K_s/[\text{Cr}^{3+}] = 10^{-28}$ soit $\text{pOH} = 9,33$ et $\text{pH} = 3,67$.

A ce pH, on a $[\text{Cr}(\text{OH})_4^-] / [\text{Cr}^{3+}] = \beta_4 [\text{OH}^-]^4 = 3,7 \cdot 10^{-8}$

2.2.6.2 A la limite de redissolution, $[\text{Cr}(\text{OH})_4^-] = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ d'où $[\text{OH}^-] = \beta_4 K_s / [\text{Cr}(\text{OH})_4^-]$

Soit : $[\text{OH}^-] = 10^{-1,9}$ donc $\text{pOH} = 1,9$ et $\text{pH} = 12,1$.

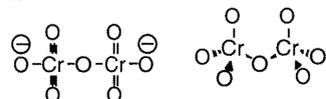
A ce pH, on a $[\text{Cr}(\text{OH})_4^-] / [\text{Cr}^{3+}] = \beta_4 [\text{OH}^-]^4 = 2 \cdot 10^{22}$

3. Le chrome au degré d'oxydation VI

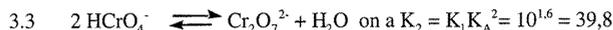
3.1 Le pictogramme (a) signifie composé toxique (T = toxique, T* = très toxique)

Le pictogramme (b) signifie dangereux pour l'environnement.

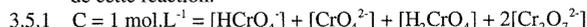
3.2



Le modèle VSEPR prévoit une géométrie de type AX_4 donc tétraédrique autour de chaque atome de chrome et AX_2E_2 donc coudée autour de l'oxygène lié aux deux Cr.



3.4 L'élément chrome et l'élément oxygène voient leurs degrés d'oxydation inchangés au cours de cette réaction.

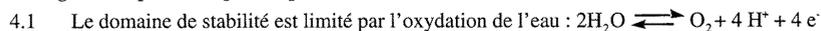


3.5.2 Entre $\text{pK}_{A1} + 1$ (1,75) et $\text{pK}_{A2} - 1$ (5,45), l'espèce prédominante est HCrO_4^- . On peut donc négliger les deux autres formes, CrO_4^{2-} et H_2CrO_4 . On a alors :

$$C = [\text{HCrO}_4^-] + 2[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] \quad \text{et } K_2 = [\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] / [\text{HCrO}_4^-]^2$$

$$\text{D'où : } [\text{HCrO}_4^-] = 0,1 \text{ mol.L}^{-1} \quad [\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] = 0,45 \text{ mol.L}^{-1}$$

4. Diagramme potentiel-pH simplifié du chrome



et par sa réduction : $2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \rightleftharpoons \text{H}_2$. Ceci correspond aux deux droites $E_1 = -0,06 \text{ pH}$ (réduction) et $E_2 = 1,23 - 0,06 \text{ pH}$ (oxydation) (aux frontières P_{O_2} ou $P_{\text{H}_2} = 1 \text{ bar}$). Le domaine de stabilité est donc l'espace compris entre ces deux droites.

4.2 Le chrome métallique n'est pas stable dans l'eau puisqu'à tout pH $E(\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2) > E(\text{Cr}^{2+}/\text{Cr})$ ou $E(\text{Cr}^{\text{III}}/\text{Cr})$. Le chrome réduit donc l'eau et se trouve oxydé au degré + III. On peut également dire que les domaines de stabilité de Cr et de l'eau sont disjoints.

4.3 Entre $\text{pH} = 4,3$ et $\text{pH} = 13$, l'oxydation du chrome par l'eau conduit au chrome au degré d'oxydation +III sous la forme de l'hydroxyde $\text{Cr}(\text{OH})_3$. Cet hydroxyde (qui évolue ensuite vers l'oxyde plus stable) joue un rôle protecteur. Il s'agit du phénomène de passivation.

4.4 On peut écrire $E(\text{Cr}(\text{OH})_3/\text{Cr}^{2+}) = E(\text{Cr}^{3+}/\text{Cr}^{2+})$ soit :

$$E = E^0(\text{Cr}^{3+}/\text{Cr}^{2+}) - 0,06\text{pK}_s + 0,18\text{pK}_E - 0,06\log[\text{Cr}^{2+}] \quad E = E^0(\text{Cr}^{3+}/\text{Cr}^{2+}) + 0,06\log\frac{K_s[\text{H}^+]^3}{K_E^3[\text{Cr}^{2+}]}$$

$$E = E^0(\text{Cr}^{3+}/\text{Cr}^{2+}) - 0,06\text{pK}_s + 0,18\text{pK}_E - 0,18\text{pH} - 0,06\log[\text{Cr}^{2+}]$$

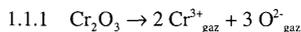
d'où, à $\text{vec } [\text{Cr}^{2+}] = 0,01 \text{ mol.L}^{-1}$, $E = 0,37 - 0,18\text{pH}$

On peut également écrire la loi de Nernst pour le couple $\text{Cr}(\text{OH})_3/\text{Cr}^{2+}$ et calculer le E^0 de ce couple à l'aide des données thermodynamiques (affinités standard de demi-réaction).

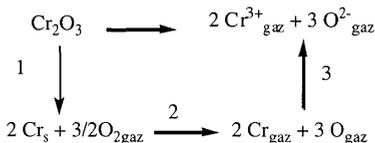
- 4.5 $E = E^0(\text{Cr}^{2+}/\text{Cr}) + 0,03 \log[\text{Cr}^{2+}]$ donc $E = -0,97 \text{ V}$.
- 4.6 Au-delà du point D, Cr^{2+} se dismute car $E(\text{Cr}^{2+}/\text{Cr}) > E(\text{Cr}(\text{OH})_3/\text{Cr}^{2+})$. On retrouve ce point par intersection des deux droites soit : $\text{pH} = (0,37+0,97)/0,18$ donc $\text{pH} = 7,44$.

II. Le chrome métal

1. Préparation du chrome par aluminothermie, diagramme d'Ellingham



1.1.2



$$\Delta_f H_1^0 = -\Delta_f H_f^0(\text{Cr}_2\text{O}_3) \quad \Delta_f H_2^0 = 2 \Delta_f H_{\text{vap}}^0 + 2 \Delta_f H_{\text{fus}}^0 + 3/2 D_{\text{O}_2} \quad \Delta_f H_3^0 = 2 \Delta_{\text{ion}} H^0 + 3 \Delta_{\text{at}} H^0$$

$$E_r = \Delta_f H_1^0 + \Delta_f H_2^0 + \Delta_f H_3^0 = 14791 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$$

- 1.2.1 $4/3 \text{Cr}_s + \text{O}_2 \rightarrow 2/3 \text{Cr}_2\text{O}_{3s}$ pour T compris entre 300 et 2130 K
 $4/3 \text{Cr}_l + \text{O}_2 \rightarrow 2/3 \text{Cr}_2\text{O}_{3s}$ pour T compris entre 2130 K et 2500 K

1.2.2 A l'équilibre $K^0 = Q$ soit : $K^0 = \frac{(a_{\text{Cr}_2\text{O}_3})^{2/3}}{(a_{\text{Cr}})^{4/3} \frac{P_{\text{O}_2}}{P^0}} = \frac{P^0}{P_{\text{O}_2}}$

1.2.3 De 300 à 2130 K : $\Delta_f H^0 = 2/3 \Delta_f H_f^0(\text{Cr}_2\text{O}_3) = -760 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$
 $\Delta_f S^0 = 2/3 S^0(\text{Cr}_2\text{O}_{3s}) - S^0(\text{O}_2) - 4/3 S^0(\text{Cr}_s) = -183 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
 $\Delta_f G^0 = -760 \cdot 10^3 + 183 \text{ T}$ en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

De 2130 à 2500 K : $\Delta_f H^0 = 2 \Delta_f H_f^0(\text{Cr}_2\text{O}_3) - 4/3 \Delta_f H_{\text{fus}}^0 = -780 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$
 $\Delta_f S^0 = \Delta_f S^0_{(l)} - \Delta_f S_{\text{fus}}^0 = \Delta_f S^0_{(l)} - 4/3 \Delta_f H_{\text{fus}}^0/T_{\text{fus}} = -192,4 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
 $\Delta_f G^0 = -780 \cdot 10^3 + 192,4 \text{ T}$ en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

1.2.4 $\Delta_f G^0 = -RT \ln K^0 = RT \ln \frac{(P_{\text{O}_2})_{\text{eq}}}{P^0}$

1.2.5 A 1000 K, on a $\Delta_f G^0 = -577 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ d'où $\ln(P_{\text{O}_2}/P^0) = -69,4$ donc $P_{\text{O}_2} = 7 \cdot 10^{-31} \text{ bar}$.

1.2.6 L'ordonnée du diagramme représente $RT \ln(P_{\text{O}_2}/P^0)$. Le point se place donc à l'abscisse 1000 K et à l'ordonnée $RT \ln(P_{\text{O}_2}/P^0) > RT \ln(P_{\text{corrosion}}/P^0)$ donc au dessus de la droite d'Ellingham.

La pression de O_2 est supérieure à la pression de corrosion donc l'affinité A est positive. En

effet : $A = A^0 - RT \ln Q = RT \ln \frac{K^0}{Q} = RT \ln \frac{P_{\text{O}_2}}{P_{\text{corrosion}}}$

La réaction évolue donc vers la droite, donc vers la formation de l'oxyde. Si l'on impose T et P_{O_2} , la réaction sera totale jusqu'à consommation du chrome. L'oxyde de chrome est donc la forme stable.

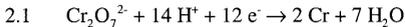
1.2.7 Le domaine situé au dessus de la droite correspond à $P_{\text{O}_2} > P_{\text{corrosion}}$ donc au domaine d'existence de l'oxyde, le domaine situé sous la droite correspond à $P_{\text{O}_2} < P_{\text{corrosion}}$ donc au domaine d'existence du chrome.



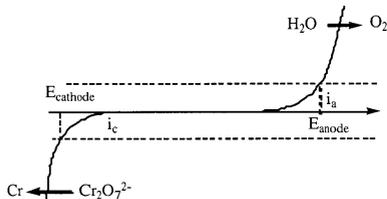
1.2.9 On voit sur le graphique que $\forall T$, la droite relative au couple $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Al}$ se trouve sous la droite relative au couple $\text{Cr}_2\text{O}_3/\text{Cr}$. On a donc $\Delta_f G^0 = \Delta_f G^0(\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Al}) - \Delta_f G^0(\text{Cr}_2\text{O}_3/\text{Cr}) < 0$. Puisque toutes les activités sont égales à 1 (solides), l'affinité, égale à l'affinité standard, est positive.

$A = A^0 > 0$. La réduction est donc totale à toute température.

2. Le chromage décoratif



2.2



Les deux branches représentent les courbes d'oxydation de H_2O et de réduction du dichromate. Les potentiels de l'anode et de la cathode se fixent de telle sorte que le courant anodique soit égal au courant cathodique (en valeur absolue).

2.3 Par unité de surface, la masse de chrome à former est : $\frac{m}{S} = \rho e$ soit un nombre de mole égal

à : $n_{\text{Cr}} = \frac{\rho e}{M}$ ce qui représente une charge $Q = 6F \frac{\rho e}{M}$ soit compte tenu du rendement égal à 75%,

une charge réelle $Q' = 6F \frac{\rho e}{0,75M}$ donc une durée d'électrolyse $t = \frac{6F\rho e}{0,75jM}$

A.N $t = 32 \text{ s}$

III. Synthèse d'un pigment pictural : le jaune d'or

1. L'utilisation d'un erlenmeyer permet d'agiter ou de chauffer en limitant les projections.
2. Dans le nitrate de chrome, Cr est sous forme d'ions Cr^{3+} , donc au degré + III.
3. On a d'abord, par augmentation du pH, précipitation de l'hydroxyde de chrome.
4. En se déplaçant vers les pH plus élevés (cf. diagramme E-pH), on forme le complexe soluble $\text{Cr}(\text{OH})_4^-$.
5. L'eau oxygénée oxyde le chrome III en milieu basique, donc sous forme de chromate CrO_4^{2-} .
6. La masse molaire du chromate de plomb est $M = 323,2 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, celle du nitrate de chrome hydraté est $M' = 400 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et celle du nitrate de plomb $M'' = 331,2 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$. Le chrome III est donc le réactif en défaut.

On a donc un rendement égal à $r = \frac{63 \cdot 10^{-3} \cdot 400}{323,2 \cdot 0,1}$ donc $r = 0,78$ (78%)

7. Si les impuretés ne sont pas miscibles à l'état solide au chromate de plomb, on aura formation d'un eutectique dont le point de fusion sera inférieur à celui du chromate.

Capes de sciences physiques

Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE
Composition de physique avec applications ♦ Session : 2003

PREMIER PROBLEME

Autour d'un disque métallique

$$I.1.1 \quad J = \iiint_{\text{disque}} r^2 \cdot dm \quad J \text{ en Kg.m}^2$$

$$I.1.2 \quad L = J \cdot \omega \quad L \text{ en Kg.m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \text{ ou m.N.s}$$

$$I.1.3 \quad \frac{dL}{dt} = \Sigma \Gamma \quad \Sigma \Gamma \text{ est la somme des moments par rapport à l'axe des forces extérieures appliquées sur le disque}$$

$$I.2.1 \quad \frac{dL}{dt} = J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma_r \quad \Gamma_r = -C \cdot \theta \text{ donc } J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta = 0$$

$$I.2.2 \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{C}{J} \quad \text{et} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}}$$

$$I.2.3 \quad \theta = \theta_0 \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T_0}$$

$$I.3.1 \quad \frac{dL}{dt} = J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma_r + \Gamma_f \quad \text{d'où} \quad J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \cdot \frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0$$

$$I.3.2 \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{C}{J} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{f} \cdot \sqrt{J \cdot C}$$

$$I.3.3 \quad T_1 = T_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \text{si} \quad \frac{1}{4Q^2} \ll 1 \quad T_1 \text{ est légèrement supérieur à } T_0$$

$$I.3.4 \quad \theta = \theta_M \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi) \cdot \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) \quad \text{avec} \quad \theta_0 = \theta_M \cdot \cos(\varphi)$$

$$\delta = \ln \frac{\theta(t)}{\theta(t + T_1)} = \frac{\omega_0 \cdot T_1}{2Q} \approx \frac{\pi}{Q} \quad \text{si } T_1 \approx T_0 \quad T_1 \cdot \omega_0 = 2\pi$$

$$I.4.1 \quad 2\delta = \ln 3 \quad Q = 5,72 \quad \frac{1}{4Q^2} = 7,6 \cdot 10^{-3} \ll 1 \quad \text{l'hypothèse } T_1 \approx T_0 \text{ est vérifiée}$$

$$I.4.2 \quad f \text{ est N.m.s} \quad J = 13,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2 \quad C = 6,1 \cdot 10^{-2} \text{ N.m.rd}^{-1}$$

$$II.1.1 \quad \mathbf{v} = r\omega \cdot \mathbf{u}_\theta$$

$$II.1.2 \quad \mathbf{E}_{em} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \text{ comme } \mathbf{B} = B \cdot \mathbf{u}_z \quad \mathbf{E}_{em} = r\omega B \cdot \mathbf{u}_r$$

$$II.1.3 \quad e \text{ est la f.e.m. de Lorentz } e = \int_{\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}} \mathbf{E}_{em} \cdot d\mathbf{l} \quad e = \int_{r=0}^R B\omega r \cdot dr \quad e = \frac{1}{2} B\omega a^2$$

$$II.1.4 \quad P_{el} = e \cdot i = \frac{1}{2} B\omega a^2 i$$

$$II.2.1 \quad d^2 \mathbf{f} = d\mathbf{i} \wedge \mathbf{A} \quad d^2 \mathbf{f} = B r d\mathbf{i} \cdot d\theta \cdot \mathbf{u}_r - B r d\mathbf{i} \cdot dr \cdot \mathbf{u}_\theta$$

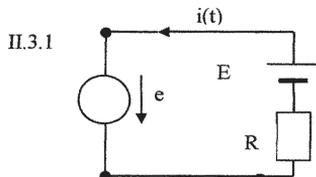
$$\text{II.2.2 } d^2M/O(d^2f) = \text{OMA } d^2f = -\text{Brdidr. } \mathbf{u}_x$$

$$\text{II.2.3 } d^2M/O_x(d^2f) = d^2M/O(d^2f) \cdot \mathbf{u}_x = -\text{Brdidr}$$

$$\text{II.2.4 } M/O_x = -\text{B} \cdot \int_{-a}^a r dr \cdot \int_0^1 di = -\frac{1}{2} \text{Bia}^2$$

$$\text{II.2.5 } P_{\text{lap}} = M/O_x \cdot \omega = -\frac{1}{2} \text{B}\omega a^2 i$$

II.2.6 $P_{\text{lap}} = -P_{\text{el}}$ donc $P_{\text{lap}} + P_{\text{el}} = 0$ la puissance de la fem de Lorentz est compensée par celle des actions de Laplace exercées sur le disque.



$$\text{II.3.2 } E + e = Ri \text{ avec } e = \frac{1}{2} \text{B}\omega a^2$$

$$\text{II.3.3 } \frac{dL}{dt} = J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_r + \Gamma_{\text{lap}} \text{ avec } \Gamma_{\text{lap}} = -\frac{1}{2} \text{Bia}^2 \text{ et } \Gamma_r = -\lambda\omega$$

$$\text{II.3.4 } J \cdot \frac{d\omega}{dt} + [\lambda + (\frac{\text{Ba}^2}{2})^2 \cdot \frac{1}{R}] \omega = -\frac{E}{2R} \text{Ba}^2$$

$$\text{II.3.5 } \text{La constante de temps } \tau \text{ est telle que } \tau \cdot [\lambda + (\frac{\text{Ba}^2}{2})^2 \cdot \frac{1}{R}] = J$$

$$\text{En régime permanent } \omega_p = -\frac{E}{2R} \text{Ba}^2 \cdot \frac{\tau}{J}$$

$$\text{II.3.6 } Ei + ei = Ri^2 \quad J \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \omega = \Gamma_r \cdot \omega + \Gamma_{\text{lap}} \cdot \omega \quad \text{or } -ei = \Gamma_{\text{lap}}$$

$$Ei = J \cdot \omega \frac{d\omega}{dt} + Ri^2 + \lambda\omega^2 = \frac{dE_c}{dt} + Ri^2 + \lambda\omega^2$$

Ei est la puissance fournie par le générateur, Ri^2 est la puissance dissipée par effet joule, $\lambda\omega^2$ est la puissance dissipée par le couple résistant.

II.3.7 Ce système fonctionne en moteur à courant continu.

$$\text{II.4.1 } \text{La roue prend un mouvement uniformément varié } J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \Gamma \quad \omega(t) \text{ est une fonction linéaire du temps}$$

II.4.2 A $t = t_1$, $\omega = \omega_1$ on ferme K. Le temps t_1 doit être suffisamment court pour que la vitesse ω_1 ne dépasse pas la vitesse nominale du disque (qu'il ne se soit pas emballé).

La fem induite crée un courant i , ce courant i crée des forces de Laplace dont le moment dont le moment par rapport à l'axe de rotation s'oppose à Γ (loi de Lenz).

$$\text{II.4.3 } e - Ri = 0 \text{ avec } e = \frac{1}{2} \text{B}\omega a^2$$

$$\text{II.4.4 } J \cdot \frac{d\omega}{dt} = \Gamma + \Gamma_{\text{lap}} \text{ avec } \Gamma_{\text{lap}} = -\frac{1}{2} \text{Bia}^2$$

$$\text{II.4.5 } \omega = \frac{2Ri}{\text{Ba}^2} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{2R}{\text{Ba}^2} \cdot \frac{di}{dt} \quad \frac{2RJ}{\text{Ba}^2} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{\text{Ba}^2}{2} \cdot i = \Gamma$$

$$\text{II.4.6 } \text{La constante de temps } \tau \text{ est telle que } \tau \cdot (\frac{\text{Ba}^2}{2})^2 = JR$$

$$\text{II.4.7 } \text{En régime permanent } i_p = \frac{2\Gamma}{\text{Ba}^2} \quad \omega_p = \frac{\Gamma\tau}{J}$$

II.4.8 Ce système fonctionne en générateur de courant commandé par Γ .

III.1.1 **B** uniforme peut être créée au milieu d'un solénoïde « très long » ou des bobines de Helmholtz

III.2.1 **B**(t) crée un flux $\Phi(t)$ à travers le disque. D'après la loi de Lenz-Faraday, la variation de $\Phi(t)$ crée une fem induite $e = - d \Phi(t)/dt$

III.2.2 **B** est uniforme donc $\Phi = B \cdot S$
 $0 < r < d \quad \Phi = B \cdot \pi r^2 \quad e = - \pi r^2 \cdot dB/dt$
 $d < r < a \quad \Phi = B \cdot \pi d^2 \quad e = - \pi d^2 \cdot dB/dt$
 avec $B = B_M \cdot \cos \omega t \quad dB/dt = - B_M \cdot \omega \sin \omega t \quad e$ est une fem de Neumann.

III.3.1 $\mathbf{E} = - \partial A / \partial t \quad - \text{grad } V$

III.3.2 $\mathbf{j} = \gamma \cdot \mathbf{E}$

III.3.3 $e = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\gamma} \oint_C \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} \quad C$ est un cercle centré sur l'axe du disque de rayon r

$e = j(r,t) \cdot 2\pi r / \gamma$
 $0 < r < d \quad j = \gamma B_M \cdot \omega \sin \omega t \cdot (r/2)$
 $d < r < a \quad j = \gamma B_M \cdot \omega \sin \omega t \cdot (d^2/2r)$

III.3.4 $I = \iint_{\text{disque}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{disque}} j \cdot dr = \frac{1}{2} \gamma \omega h B_M \sin \omega t \cdot \left[\int_0^d r \cdot dr + \int_d^a \frac{d^2}{r} \cdot dr \right]$
 $I = \frac{1}{2} \gamma \omega h B_M \sin \omega t \cdot \left[\frac{d^2}{2} + d^2 \ln \frac{a}{d} \right]$

III.4.1 Loi de joule locale : La puissance dissipée par unite de volume $P = j^2 / \gamma = \gamma E^2$

III.4.2 Démonstration : Pour un porteur de charge le travail de la force électrique est $\delta W = q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \mathbf{E} \cdot v dt$ avec $v = q\tau / m \cdot E$ (q est la charge du porteur, m sa masse, et τ le temps de libre parcours moyen entre 2 collisions)
 la puissance dissipée par unité de volume est $P = n_{\text{mob}} \cdot \delta W / dt = n_{\text{mob}} \cdot q^2 \cdot \tau / m \cdot E^2 = \gamma E^2$
 (n_{mob} est le nombre de porteurs de charges mobiles par unité de volume et γ est conductivité du matériau)

III.4.3 $0 < r < d \quad P = \gamma (B_M \cdot \omega \sin \omega t \cdot (r/2))^2$
 $d < r < a \quad P = \gamma (B_M \cdot \omega \sin \omega t \cdot (d^2/2r))^2$

III.4.4 La puissance totale dissipée dans le disque $P = \iint_{\text{disque}} P \cdot d\tau \quad d\tau = 2\pi h r dr$
 $P = \gamma (B_M \cdot \omega \sin \omega t)^2 \cdot 2\pi h \left[\int_0^d \frac{r^3}{4} \cdot dr + \int_d^a \frac{d^4}{4r} \cdot dr \right] = \gamma \pi h (B_M \cdot \omega \sin \omega t)^2 \cdot \frac{d^4}{2} \cdot \left[\frac{1}{4} + \ln \frac{a}{d} \right]$

III.4.5 La valeur moyenne du \sin^2 sur une période est $1/2$ donc la valeur moyenne de P

$P_{\text{moy}} = \gamma \pi h (B_M \cdot \omega)^2 \cdot \frac{d^4}{16} \cdot \left[1 + 4 \ln \frac{a}{d} \right]$

III.4.6 $I_{\text{eff}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \gamma \omega h B_M d^2 \left[1 + 2 \ln \frac{a}{d} \right] \quad R = \frac{P}{I_{\text{eff}}^2} = \frac{2\pi}{\gamma h} \frac{1 + 4 \ln \frac{a}{d}}{\left(1 + 2 \ln \frac{a}{d} \right)^2}$

III.4.7 Chauffage par induction.

DEUXIEME PROBLEME

Autour d'un cycliste

1.1 Notion de point matériel

On utilise la conservation de l'énergie mécanique.

Initialement l'énergie potentielle est prise nulle par convention, l'énergie cinétique vaut $\frac{1}{2} M.V_1^2$.

A l'arrivée, l'énergie potentielle vaut Mgh et l'énergie cinétique $\frac{1}{2} M.V^2$

Par conservation de l'énergie mécanique on obtient : $\frac{1}{2} M.V_1^2 = M.g.h + \frac{1}{2} M.V^2$ soit

$\frac{1}{2} M.V_1^2 - M.g.h = \frac{1}{2} M.V^2 \geq 0$ Pour que la masse M puisse arriver en haut il faut donc que $\frac{1}{2} M.V_1^2 \geq M.g.h$

$$\text{soit } \boxed{V_1 \geq \sqrt{2.g.h} = V_0}$$

1.2

1.2.1 :

Soit I le point de contact entre la roue et le sol, G le centre de masse de cette roue, $\vec{\omega}$ le vecteur rotation instantanée, I et G

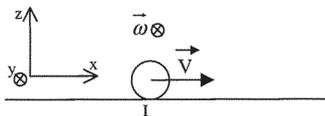
appartenant au même solide on a : $\vec{V}_G = \vec{V}_I + \vec{\omega} \wedge \vec{IG}$

La roue roulant sans glisser, la vitesse du point de contact est nulle,

$$\vec{V}_I = \vec{0}$$

D'où $\vec{V}_G = V \vec{u}_x = \vec{\omega} \wedge \vec{IG} = \omega \vec{u}_y \wedge a \vec{u}_z = \omega.a \vec{u}_x$ c'est à dire

$$\boxed{V = a.\omega}$$



1.2.2

$$E_c = \frac{1}{2} M.V_G^2 + \frac{1}{2} J.\omega^2 = \frac{1}{2} M.V^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} M.a^2 \omega^2 = \frac{1}{2} M.V^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} M.V^2 = \frac{7}{10} M.V^2$$

$$\text{d'où } \boxed{E_c = \frac{7}{10} M.V^2}$$

1.2.3

Le raisonnement est le même que pour la question 1.1

On utilise la conservation de l'énergie mécanique.

Initialement l'énergie potentielle est prise nulle par convention, l'énergie cinétique vaut $\frac{7}{10} M.V_1^2$.

A l'arrivée, l'énergie potentielle vaut Mgh et l'énergie cinétique $\frac{7}{10} M.V^2$

Par conservation de l'énergie mécanique on obtient : $\frac{7}{10} M.V_1^2 = M.g.h + \frac{7}{10} M.V^2$ soit

$\frac{7}{10} M.V_1^2 - M.g.h = \frac{7}{10} M.V^2 \geq 0$ Pour que la masse M puisse arriver en haut il faut donc que $\frac{7}{10} M.V_1^2 \geq M.g.h$

$$\text{soit } \boxed{V_1 \geq \sqrt{\frac{10}{7}.g.h} = V_0'}$$

1.3

1.3.1. $V_0' < V_0$; ce résultat est logique.

Imaginons l'opération inverse, on lâche la masse M sans vitesse initiale en haut de la pente, dans le premier cas la vitesse obtenue est V_0 dans le deuxième cas, c'est V_0' .

Dans le premier cas toute l'énergie potentielle est transformée en énergie cinétique de translation, dans le deuxième cas cette énergie potentielle est transformée en énergie cinétique de translation et en énergie de cinétique de rotation. L'énergie cinétique de translation est donc plus faible que dans le premier cas, donc la vitesse aussi. On a donc bien $V_0' < V_0$.

1.3.2

Les résultats précédents montrent que l'utilisation d'une bille sphérique pour représenter expérimentalement le mouvement d'une masse ponctuelle sans frottement est incorrecte.

2 Montée d'une côte en roue libre

2.1

On décompose l'énergie cinétique en quatre termes :

Le cadre du vélo en translation : $E_{Ccadre} = \frac{1}{2} M_V \cdot V_1^2$; le cycliste en translation : $E_{Ccycliste} = \frac{1}{2} M_C \cdot V_1^2$

La roue avant (arrière) roule sans glisser : la condition de roulement sans glissement se traduit par $a \cdot \omega_{roue} = V_1$

$$E_{Croue} = \frac{1}{2} J \cdot \omega_{roue}^2 + \frac{1}{2} m_R \cdot V_1^2 = \frac{1}{2} m_R \cdot a^2 \left(\frac{V_1}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} m_R \cdot V_1^2 = m_R \cdot V_1^2$$

En faisant le bilan, on arrive à $E_C = E_{Ccycliste} + E_{Ccadre} + 2 \cdot E_{Croue} = \frac{1}{2} (M_C + M_V + 4 \cdot m_R) \cdot V_1^2 = \frac{1}{2} (M + 2 \cdot m_R) \cdot V_1^2$

De façon raisonnable on peut négliger $4 \cdot m_R$ devant M , on obtient alors $E_C = \frac{1}{2} M \cdot V_1^2$

2.2 Montée en roue libre

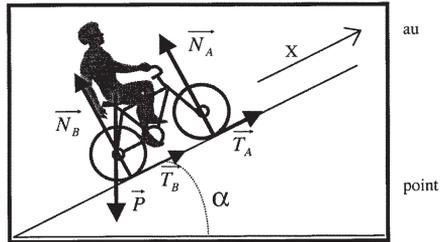
2.2.1. Comme le terme d'énergie cinétique se limite à un terme de translation, le calcul fait dans la première question reste valable, on a donc $V_1 \geq \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = V_0$,

l'application numérique donne : $V_1 \geq V_0 = 24,5 \text{ m/s} = 88,2 \text{ km/h}$

2.2.2

L'utilisation du théorème de la résultante cinétique appliqué vélo est ici délicate car les composantes tangentielles des réactions sur sol sur le vélo sont non nulles. Le théorème de l'énergie cinétique peut être appliqué, la puissance des actions de contact entre les solides cadre, roue avant et roue arrière, est nulle d'une part et le cycliste ne pédale pas, il ne fournit donc aucune énergie.

Le vélo roulant sans glisser, la puissance des actions de contact entre le sol et le vélo est nulle puisque la vitesse du de contact des roues est nulle.



Ce qui se traduit par : $\frac{dE_C}{dt} = P_{poids} = M \vec{g} \cdot \vec{V}_G$; en

appelant Ox l'axe dans la direction de la montée, on obtient : $M \cdot \ddot{x} \cdot \dot{x} = -M \cdot g \cdot \dot{x} \cdot \sin(\alpha)$ soit après intégration

$$x = -\frac{1}{2} g \cdot \sin(\alpha) \cdot t^2 + k \cdot V_0 \cdot t$$

Quand le cycliste arrive à la l'altitude, il a parcouru une distance $D=H/\sin(\alpha)$, d'où $\sin(\alpha)=H/D$. En remplaçant dans l'équation

on obtient : $D = -\frac{1}{2} g \cdot \frac{H}{D} \cdot t^2 + k \cdot V_0 \cdot t$ équation du second degré en t et dont les solutions sont : $t = \frac{2 \cdot D}{V_0} (k \pm \sqrt{k^2 - 1})$,

seul le signe - est ici acceptable, le temps de montée est obligatoirement plus court que celui obtenu pour $k=1$ ($V_{initial}=V_0$).

D'où $t = \frac{2 \cdot D}{V_0} (k - \sqrt{k^2 - 1}) = 49 \text{ s}$

3. Montée à puissance constante

3.1 On ne peut pas négliger les frottements entre la roue et le sol sinon on ne pourrait avoir de roulement sans glissement.

3.2.1 Soit Γ_C le moment du couple exercé par le cycliste on alors la puissance fournie par le cycliste égale à $P = \Gamma_C \cdot \omega_p$

3.2.2 En régime stationnaire, la vitesse angulaire du plateau est constante, donc la somme des moments s'exerçant sur le plateau est nulle. D'où $\vec{\Gamma}_{cycliste} + \vec{\Gamma}_{T1} + \vec{\Gamma}_{T2} = \vec{0}$, en projetant sur Oy, on arrive à :

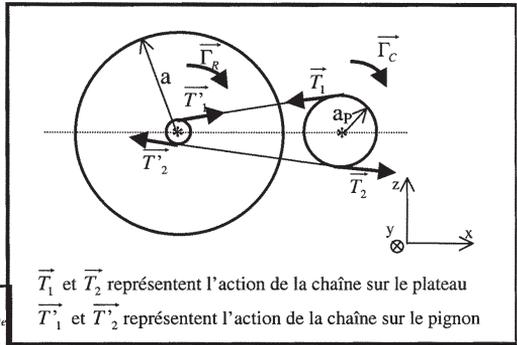
$\Gamma_C = a_p(T_1 + T_2)$; Le couple exercé sur le pignon de la roue arrière est $\vec{\Gamma}_R = a_R(T_1' + T_2')$, on peut négliger la masse de la chaîne d'où $\vec{T}_1 + \vec{T}_1' = \vec{0}$ et $\vec{T}_2 + \vec{T}_2' = \vec{0}$.

Ces équations conduisent à
$$\vec{\Gamma}_R = \frac{a_R}{a_p} \Gamma_C \cdot \vec{u}_y$$

3.2.3. La chaîne n'étant pas élastique, la vitesse du point p du plateau est égale à la vitesse du point Q du pignon, on a donc $a_p \cdot \omega_p = a_R \cdot \omega_R$.

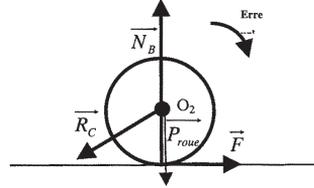
La puissance reçue par la roue arrière est

$$P_{\text{arrière}} = \Gamma_R \cdot \omega_R = \frac{a_R}{a_p} \Gamma_C \cdot \omega_R = \frac{a_R}{a_p} \frac{\omega_R}{\omega_R} \cdot P_{\text{cycliste}} = P_{\text{cycliste}}$$



La puissance fournie par le cycliste est donc intégralement transmise à la roue arrière.

3.3 On applique le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe passant par le centre de la roue arrière et orienté par \vec{u}_y . \vec{R}_C représente l'action du cadre sur la roue. Son moment par rapport à O_2 est nul comme le moment du poids de la roue. \vec{N}_B est la composante normale de l'action du sol sur la roue arrière, \vec{F} la force de frottement c'est à dire la composante tangentielle de l'action du sol sur la roue arrière.



On a alors : $J \frac{d\omega_R}{dt} = \Gamma_R - a \cdot F$ où F représente la force de frottement exercée

par le sol sur la roue. Le vélo roulant à vitesse constante, on a ω_R constant donc $\Gamma_R = a \cdot F$ or $P_{\text{cycliste}} = \Gamma_R \cdot \omega_R$ et

$V = a \cdot \omega_R$ ce qui donne :
$$P_{\text{cycliste}} = F \cdot V$$

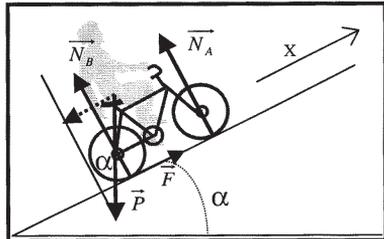
Le moment du couple exercé sur la roue avant étant nul, le même raisonnement conduit à une force de frottement nulle.

3.4

En projetant sur Ox le théorème de la résultante cinétique appliqué au vélo, on obtient : $M \cdot \ddot{x} = F - M \cdot g \cdot \sin(\alpha)$ or le vélo se roule à vitesse

constante
$$P_{\text{cycliste}} = F \cdot V = M \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot V$$

La puissance fournie par le cycliste compense exactement la puissance de la force de pesanteur.



3.5

La vitesse étant constante pendant la montée, on a $t = D/V$, D représentant la distance parcourue par le cycliste, soit H la variation

d'altitude, on a $D = H/\sin(\alpha)$. D'après la question précédente, $V = \frac{P}{M \cdot g \cdot \sin(\alpha)}$ en remplaçant, on obtient

$$t = \frac{M \cdot g \cdot H}{P}$$
 Le temps de parcours est donc indépendant de la pente.

3.6

$$P_{\text{cycliste}} = M \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot V = 125 \text{ W}$$

En développant une la même puissance sur une pente à 0,1%, la vitesse du cycliste serait de 450.km/h. Il faut tenir compte des forces de frottement dans l'air.

4. Influence des frottements de l'air

4.1 Dans les parties précédentes du problème, on a vu que les forces de frottements au niveau du point de contact des roues étaient nulles quand le cycliste était en roue libre. Le Cycliste de déplaçant à vitesse constante quant le régime permanent est

atteint, on a $M \cdot \ddot{x} = 0 = M \cdot g \cdot \sin(\alpha) - F_{air}$. Suivant le type de frottement, on aura :

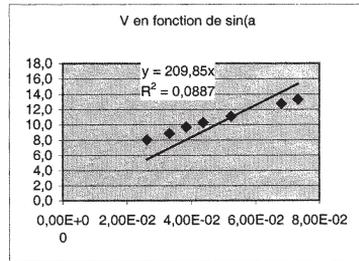
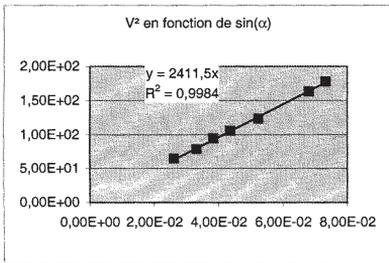
Soit $k \cdot V = M \cdot g \cdot \sin(\alpha)$, c'est à dire V proportionnel à $\sin(\alpha)$

Soit $k \cdot V^2 = M \cdot g \cdot \sin(\alpha)$, c'est à dire V^2 proportionnel à $\sin(\alpha)$

Le tableau suivant calcule $\sin(\alpha)/V$ et $\sin(\alpha)/V^2$ pour chacune des valeurs de α .

alpha en degré	V en km/h	alpha en rad	V en m/s	sin(alpha)	V en m/s	V ²	sin/V	sin/V ²	
2,5	37	4,36E-02	10,3	4,36E-02	10,3	1,06E+02	4,24E-03	4,13E-04	
3	40	5,24E-02	11,1	5,23E-02	11,1	1,23E+02	4,71E-03	4,24E-04	
2,2	35	3,84E-02	9,7	3,84E-02	9,7	9,45E+01	3,95E-03	4,06E-04	
1,9	32	3,32E-02	8,9	3,32E-02	8,9	7,90E+01	3,73E-03	4,20E-04	
4,2	48	7,33E-02	13,3	7,32E-02	13,3	1,78E+02	5,49E-03	4,12E-04	
3,9	46	6,81E-02	12,8	6,80E-02	12,8	1,63E+02	5,32E-03	4,17E-04	
1,5	29	2,62E-02	8,1	2,62E-02	8,1	6,49E+01	3,25E-03	4,03E-04	
							moyenne	4,39E-03	4,14E-04
							écart type	8,31E-04	7,24E-06

On a aussi représenté V en fonction de $\sin(\alpha)$ et V^2 en fonction de $\sin(\alpha)$ et cherché la droite de régression passant par l'origine dans chacun des deux cas.



Le tableau comme les figures permettent de conclure que la force est en V^2 et que $\frac{\sin(\alpha)}{V^2} \approx 0,41 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$ or

$$\frac{\sin(\alpha)}{V^2} = \frac{k}{M \cdot g} \text{ d'où } \boxed{F_{air} = -0,41 \cdot V^2 \cdot \vec{n}}$$

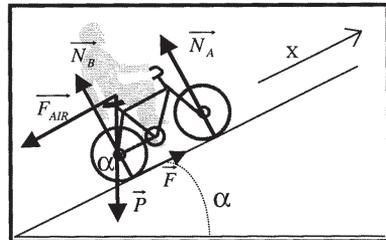
4.2

4.2.1

En reprenant l'étude du 3.4, on cette fois

$$M \cdot \ddot{x} = 0 = F - M \cdot g \cdot \sin(\alpha) - F_{air} \text{ or } F = P / V$$

$$\text{D'où } \boxed{P_{cycliste} = M \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot V + k \cdot V^3}$$



4.2.2

Pour $\alpha > 0,05$ rad soit environ 3° , le temps de montée est indépendant de α .

4.2.3

Quand les forces de frottement dues à l'air sont négligeables, on a $t = \frac{M \cdot g \cdot H}{P} = 5000 \cdot s$ ce qui correspond bien à la valeur de la simulation.

4.3.1

Si les frottements fluides sont prépondérants : $P_{cycliste} = M \cdot g \cdot \sin(\alpha) V + k \cdot V^3 \approx k \cdot V^3$ d'où $V = \left(\frac{P_{cycliste}}{k} \right)^{1/3}$, la

distance parcourue étant toujours, $D = H/\sin(\alpha)$,

on a :
$$t = \frac{D}{V} = \frac{H}{\sin(\alpha)} \left(\frac{k}{P_{cycliste}} \right)^{1/3}$$

4.3.2

Dans cette situation, quand alpha tend vers 0, le temps de montée devient infini. La distance à parcourir D tend aussi vers l'infini.

5 Etude du glissement sur route plane.

5.1 :
$$P_{cycliste} = F \cdot V$$

5.2. Le théorème de la résultante cinétique appliqué au système vélo+cycliste donne :

$$M \cdot \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \vec{F}_{air} + \vec{F} + \vec{N}_A + \vec{N}_B = \vec{0}$$

puisque ce cycliste se déplace à vitesse constante. En projetant sur \vec{u}_x

et sur \vec{u}_z on obtient :

$$F = F_{air} = k \cdot V^2 \text{ et}$$

$$N_A + N_B = M \cdot g.$$

Le cycliste de déplaçant à vitesse constante, le moment cinétique de l'ensemble est constant, le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Gy (passant par le centre de masse et suivant \vec{u}_y) permet

d'écrire que la somme des moments des forces par rapport à Gy est nulle : $L_1 \cdot N_B = L_2 \cdot N_A + (h+a)F$

La combinaison de ces trois dernière équations conduit à

$$N_B = \frac{L_2 \cdot M \cdot g + (h+a)k \cdot V^2}{L_1 + L_2} = \frac{L_2 \cdot M \cdot g + (h+a)F}{L_1 + L_2} \text{ et } N_A = \frac{L_1 \cdot M \cdot g - (h+a)k \cdot V^2}{L_1 + L_2} = \frac{L_1 \cdot M \cdot g - (h+a)F}{L_1 + L_2}$$

5.3

La condition de roulement sans glissement s'écrit sur la roue arrière : $F < \mu \cdot R_B$

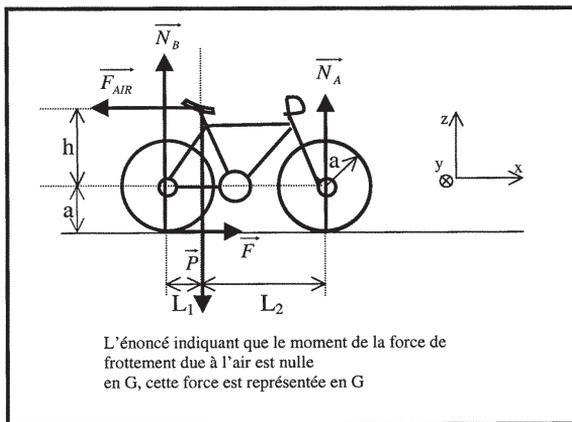
En remplaçant R_B par sa valeur, on obtient :
$$V \leq \sqrt{\frac{\mu}{k} \frac{L_2 \cdot M \cdot g}{L_1 + L_2 - \mu(h+a)}} = V_{limite}$$

5.4

Application numérique :

Sol sec : $\mu=0,45$ $V_{limite}=38,25 \text{ m/s} = 137,7 \text{ km/h}$

Sol humide : $\mu=0,27$ $V_{limite}=26 \text{ m/s} = 93,6 \text{ km/h}$



6. Etude de la stabilité en montée

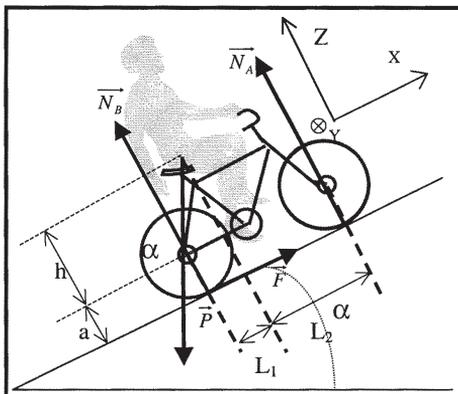
6.1 L'utilisation du théorème du moment cinétique en au centre de masse du système vélo + cycliste montre que le cycliste va basculer en arrière.

6.2 D'après la question 3.4, $F = M \cdot g \cdot \sin(\alpha)$

6.3. En utilisant le théorème de la résultante cinétique et le théorème du moment cinétique de la même manière que dans la question 5.2, on obtient $F = M \cdot g \cdot \sin(\alpha)$;

$N_A + N_B = M \cdot g \cdot \cos(\alpha)$ et $L_1 \cdot N_B = L_2 \cdot N_A + (h + a)F$

A partir de ces équations on peut calculer N_A et N_B :



$N_B = \frac{L_2 \cdot M \cdot g \cdot \cos(\alpha) + (h + a)F}{L_1 + L_2} = \frac{L_2 \cos(\alpha) + (h + a)\sin(\alpha)}{L_1 + L_2} M \cdot g$
$N_A = \frac{L_1 \cdot M \cdot g \cdot \cos(\alpha) - (h + a)F}{L_1 + L_2} = \frac{L_1 \cos(\alpha) - (h + a)\sin(\alpha)}{L_1 + L_2} M \cdot g$

6.4 Pour que le cycliste ne bascule pas vers l'arrière, il faut que N_A reste positif. Soit $L_1 \cos(\alpha) - (h + a)\sin(\alpha) > 0$ c'est à

dire $\tan(\alpha) < \frac{L_1}{h + a}$

Application numérique : $\alpha < 14^\circ$

Pour augmenter cette valeur de l'angle limite, il faut augmenter L_1 , donc le cycliste doit s'avancer sur son vélo.

6.5 La condition de roulement sans glissement s'écrit sur la roue arrière : $F < \mu \cdot N_B$

Par un calcul identique au 5.3, la condition qui se traduit par $M \cdot g \cdot \sin(\alpha) = F \leq \frac{\mu \cdot L_2 \cdot M \cdot g \cdot \cos(\alpha)}{L_1 + L_2 - \mu(h + a)}$ soit

$\tan(\alpha) \leq \frac{\mu \cdot L_2}{L_1 + L_2 - \mu(h + a)}$
--

Application numérique :

Sol sec : $\mu = 0,45$ $\alpha < 31^\circ$
 Sol humide : $\mu = 0,27$ $\alpha < 15^\circ$

Etant donné l'expression de la valeur limite de $\tan(\alpha)$, il faut augmenter L_2 pour augmenter cette valeur limite.

6.6

Si le cycliste est trop avancé, il y a un risque de glissement de la roue arrière
 Si le cycliste est trop reculé, il y a un risque de bascule vers l'arrière.

Capès de sciences physiques

Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition d'électronique - électrotechnique avec applications ♦ Session : 2003

PREMIER PROBLEME

TRANSFORMATEUR

A.1 - Vu de l'enroulement, le C.M. est formé de deux C.M. en parallèle de réductance $R = \frac{l_F}{\mu_0 \mu_r \frac{S_F}{2}}$.

La mise en parallèle donne une réductance moitié : $R_F = \frac{R}{2} = \frac{l_F}{2 \mu_0 \mu_r S_F}$ soit $R_F = 86300 \text{ USI}$ ou H^{-1} .

A.2 - $R_F = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \sum \frac{l}{S}$ soit numériquement $R_F = 85766 \text{ USI}$.

A.3 - Matériau isotrope $\rightarrow \mathbf{B}$ et \mathbf{H} colinéaires, $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$.

$\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B dB$. Sachant que la perméabilité est indépendante des coordonnées d'espace, on a

donc $W_{mF} = \frac{1}{2\mu_0 \mu_r} B_M^2 V_F$, soit numériquement $W_{mF} = 0,037 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.

A.4 - Hopkinson : $n_1 I_{1M} = R_F \phi_M = R_F S_F B_M$. La valeur numérique de I_{1M} est $39,4 \text{ mA}$.

A.5 - Entrefer :

Comme en A.1, on peut calculer la réductance d'un demi-circuit. On a deux réductances en série : R et R_E telle

que $R_E = \frac{2l_E}{\mu_0 \frac{S_F}{2}}$. La valeur numérique de R_E est : $8.502.798 \text{ USI}$.

La réductance d'une branche est $R + R_E = 8.675.398 \text{ USI}$, la réductance du circuit est la moitié de cette valeur, soit $R'_F = 4.337.700 \text{ USI}$.

A.6 - $n_1 I'_{1M} = R'_F S_F B_M$. D'où $I'_{1M} = 1,98 \text{ A}$

A.7 - A partir de la relation donnée en A.3 on a : $W_{mE} = \frac{1}{2\mu_0} B_M^2 V_E$ avec $V_E = 2l_E S_F$.

$W_{mE} = 1,812 \cdot 10^{-3} \text{ J}$.

On observe que $W_{mE} \gg W_{mF}$. Le matériau ferrite ne sert qu'à canaliser le flux dans la partie magnétique, réservoir d'énergie magnétique.

A.8 - Inductance $L_1 = \frac{n_1^2}{R'_F}$, valeur numérique : $L_1 = 944 \mu\text{H}$.

A.9 - Pour un demi-circuit on a $H_M = \frac{n_1 I'_{1M}}{l_F + 2l_E}$, on peut écrire pour le matériau composé, $B_M = \mu_0 \mu_{\text{app}} H_M$.

$\mu_{\text{app}} = 72$.

Un calcul littéral donne : $\mu_{\text{app}} = \frac{\mu_r}{1 + \frac{2l_E}{l_F} \mu_r}$.

B.1 - Q passant

$v_Q(t) = 0$ car supposé parfait

$v_1 = E$

$v_2 = -\frac{n_2}{n_1} v_1 = -\frac{n_2}{n_1} E$.

$$v_2 = v_D + V_S, \text{ soit } v_D = -\frac{n_2}{n_1} E - V_S < 0.$$

B.2 - $v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} = E$, d'où $i_1(t) = \frac{E}{L_1} t + 0$ (Cond. initiale nulle).

$$i_2 = 0 \text{ car D est bloquée}$$

$$n_1 \varphi = L_1 i_1 \text{ soit } \varphi = \frac{E}{n_1} t$$

$$i_S = \frac{V_S}{R_S} = I_S = Cte \text{ et } i_C(t) = -I_S.$$

B.3 – Tracé partiel

Q ouvert

B.4 – La non discontinuité de l'énergie magnétique impose une non discontinuité du flux, donc des f.m.m. :

$$n_1 i_1(\alpha T) = n_2 i_2(\alpha T + \varepsilon) \text{ ou } I_{2M} = \frac{n_1}{n_2} I_{1M}, \text{ soit } I_{2M} = \frac{n_1}{n_2} \frac{E}{L_1} \alpha T.$$

B.5 – La diode D conduit, $i_2 \neq 0$, il y a donc un flux variable dans le C.M. induisant une fém au primaire.

$$v_1 = -\frac{n_1}{n_2} V_S, \text{ ce qui a pour effet d'engendrer une tension } v_Q = E + \frac{n_1}{n_2} V_S, \text{ supérieure à } E.$$

$$v_D = 0 \text{ et } v_2 = V_S.$$

B.6 – Dès que D conduit ($i_2 > 0$), sachant qu'elle est parfaite, $v_2 = V_S$, avec $v_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt}$, soit :

$$i_2 = -\frac{V_S}{L_2} t + I_{2M} \text{ (origine des temps en } \alpha T \text{)}.$$

B.7 – Courants

$$i_1(t) = 0 \text{ (Q ouvert)}$$

$$i_S(t) = I_S = Cte$$

$$i_2(t) = i_C(t) + I_S, \text{ d'où } i_C = i_2 - I_S, \text{ en explicitant } i_2 \text{ on a : } i_C(t) = -\frac{V_S}{L_2} t + I_{2M} - I_S \text{ (origine des temps en } \alpha T \text{)}.$$

B.8 – Chronogrammes : $\varphi(t)$ non discontinu en αT , s'annule en même temps que $i_2(t)$.

B.9 – Chronogrammes pour $t \in [(\alpha + \beta)T, T)$.

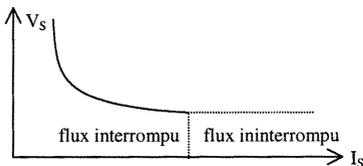
B.10 – Bilan énergétique : $W_m = \frac{1}{2} L_1 I_{1M}^2 = \frac{E^2 \alpha^2 T^2}{2L_1}$. La puissance fournie par la source continue est :

$$\frac{W_m}{T} = \frac{E^2 \alpha^2 T}{2L_1}.$$

B.11 – La puissance absorbée par le récepteur est $P_S = \frac{V_S^2}{R_S} = \eta \frac{E^2 \alpha^2 T}{2L_1}$ d'où on tire $V_S = \alpha E \sqrt{\eta \frac{R_S T}{2L_1}}$.

B.12 – V_S dépend de la résistance de charge, de la fréquence de découpage qui peut dériver (une régulation sera nécessaire).

B.13 – $V_S = f(I_S) : I_S = \frac{V_S}{R_S} \rightarrow R_S = \frac{V_S}{I_S}$, porté dans l'expression de $V_S : \rightarrow V_S = \left(\frac{\alpha^2 E^2 T \eta}{2L_1} \right) \frac{1}{I_S}$.



B.14 – Puissance constante :

$$P_S = V_S I_S, \text{ d'où } V_S I_S = \frac{\alpha^2 E^2 T \eta}{2L_1} = \text{Cte d'après B.13}$$

B.15 - $W_E = \frac{1}{2} L I_{1M}^2$, si E varie, la régulation doit assurer $V_S = \text{Cte} \rightarrow P_S = \eta P_E = \text{Cte}$, donc I_{1M} doit rester

constante. $I_{1M} = \frac{E}{L_1} \alpha T \rightarrow \Delta I_{1M} = \frac{T}{L_1} (\alpha \Delta E + E \Delta \alpha) = 0$, soit $\Delta \alpha = -\alpha \frac{\Delta E}{E}$. (Numériquement cela donne :

$$-0,3 \times (-0,1) = +0,03. \text{ D'où } \alpha' = 0,30 + 0,03 = 0,33).$$

B.16 – On souhaite que $i_2(\beta T) = 0$; en utilisant B.4 et B.6 :

$$\beta T = \frac{L_2 I_{2M}}{V_S} = \frac{L_2}{V_S} \frac{n_1}{n_2} \frac{E \alpha}{L_1} T, \text{ sachant que } \frac{L_2}{L_1} = \frac{n_2^2}{n_1^2}, \text{ on a } \beta T = \frac{n_2}{n_1} \frac{E}{V_S} \alpha T$$

En utilisant l'expression de V_S on a $\beta T = \frac{n_2}{n_1} \sqrt{\frac{2L_1 T}{\eta R_S}}$.

B.17 – L'intégrale A_1 est à $\frac{1}{T}$ près la valeur moyenne de la tension aux bornes d'une inductance parcourue par un courant périodique, donc $A_1 = 0$.

B.18 – Graphiquement $\int_0^T v_1(t) dt = E \alpha T - \frac{n_1}{n_2} V_S \beta T = 0$.

B.19 – $A_2 =$ charge stockée par le condensateur au cours d'une période. Celle-ci est forcément nulle, sinon on observerait une croissance infinie de la tension au cours du temps.

B.20 – R_S est enlevée :

- Le condensateur ne peut plus se décharger : V_S augmente indéfiniment
- V_D devient de plus en plus négative \rightarrow claquage
- La tension $v_Q = E + \frac{n_1}{n_2} V_S$ augmente indéfiniment.

\Rightarrow Trois composants sont voués à la destruction.

B.21 – Court-circuit

$V_S = 0 \rightarrow i_2$ ne s'annule plus. Quand Q est amorcé, i_1 démarre avec une condition initiale non nulle et croissante à chaque période. Il y a destruction du transistor. De plus, la saturation de L_1 aggrave la situation.

B.22 – On a les connexions suivantes : source de tension (E) connectée à un inductance ($L_1 =$ source instantanée de courant), puis une inductance ($L_2 = \text{id.}$) connectée à une source instantanée de tension (C).

C.1 – Intensité $i_1(t) = \frac{E}{L_1} t$

C.1.1 - $I_{1M} = \frac{E}{L_1} \alpha T$

C.1.2 – Valeur moyenne de $i_1(t)$: $T < i_1 > = \frac{1}{2} \alpha T I_{1M}$ (aire d'un triangle)

D'où $< i_1 > = \frac{1}{2} \alpha I_{1M}$

C.1.3 – Valeur efficace de $i_1(t)$:

$$I_1^2 = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} \left(\frac{E}{L_1} t \right)^2 dt \text{ qui donne } I_1 = I_{1M} \sqrt{\frac{\alpha}{3}}.$$

C.2 – Valeur efficace de $i_2(t)$:

$$i_2(t) \text{ a la même forme que } i_1(t), \text{ d'où : } I_2 = I_{2M} \sqrt{\frac{\beta}{3}} = \frac{n_1}{n_2} I_{1M} \sqrt{\frac{\beta}{3}}.$$

C.3 - $E = n_1 \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow E = n_1 S_F \frac{dB}{dt}$, soit $B(t) = \frac{E}{n_1 S_F} t$ (cond. initiale nulle), d'où $S_F = \frac{E}{n_1 B_M} \alpha T$.

L'objectif est d'éliminer E afin d'introduire la puissance P_E fournie par la source :

$$P_E = E \langle i_1 \rangle \Rightarrow E = \frac{P_E}{\langle i_1 \rangle}$$

$$S_F = \frac{P_E}{\langle i_1 \rangle n_1 B_M} = \frac{P_E}{\frac{1}{2} \alpha I_{1M}} = \frac{\alpha T}{n_1 B_M} = \frac{2 P_E T}{I_{1M} n_1 B_M}$$

C.4 - $S_{CU} = n_1 s_1 + n_2 s_2$

C.5 - $S_{CU} = n_1 \frac{I_1}{J} + n_2 \frac{I_2}{J}$

C.6 - $S_{CU} = \frac{n_1}{J} I_{1M} \sqrt{\frac{\alpha}{3}} + \frac{n_2}{J} I_{1M} \sqrt{\frac{\beta}{3}}$ en fonction de I_{1M} . Factorisons et en utilisant S_F issue de C.3, on a la

relation demandée : $S_{CU} \cdot S_F = \frac{2 P_E T}{J \sqrt{3} B_M} (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})$.

Application numérique : $S_{CU} S_F = 3260 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4$.

C.7 - Vérification de $C_b S_{CU} < 75 \text{ mm}^2$ ou $75 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$.

$$S_F = 146 \text{ mm}^2 \text{ ou } 146 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.$$

$$S_{CU} \times 146 \cdot 10^{-6} = 3260 \cdot 10^{-12} \rightarrow S_{CU} = 22,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ ou } 22,3 \text{ mm}^2.$$

$C_b S_{CU} = 3 \times 22,3 = 67 \text{ mm}^2$ < « winding area », le pot RM12 convient.

C.8 - Forte résistivité des ferrites (jusqu'à 10^7 fois celle du Fe-Si). Les pertes fer se réduisent aux pertes par hystérésis. La relation de C.6 montre comment intervient la fréquence dans le dimensionnement du transformateur.

C.9 - Les pertes fer dépendent de la fréquence f et de B_M , si on augmente f, il faut réduire la valeur max. de l'induction.

C.10 - Calcul de n_1 :

En C.3 on a donné $S_F = \frac{E \alpha T}{n_1 B_M}$, d'où $n_1 = \frac{E \alpha T}{S_F B_M}$. Application numérique : $n_1 = 63,7$ arrondi à 64 spires.

C.11 - Calcul de L_1 :

$P_E = E \langle i_1 \rangle = 90 \text{ W}$, sachant que $E = 310 \text{ V}$, $\langle i_1 \rangle = 0,29 \text{ A}$.

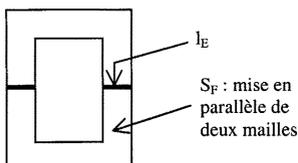
La relation C.1.2 donne $\langle i_1 \rangle = \frac{1}{2} \alpha I_{1M}$ d'où l'on tire $I_{1M} = 1,935 \text{ A}$.

D'après C.1.1 on a $I_{1M} = \frac{E}{L_1} \alpha T$, soit $L_1 = \frac{E \alpha T}{I_{1M}}$. L'application numérique donne $L_1 = 961 \mu\text{H}$.

C.12 - Calcul de n_2 :

D'après B.16 et les valeurs numériques données, le calcul donne $n_2 = 5,16$. Il est demandé d'arrondir à la valeur supérieure afin de compenser les inévitables chutes de tension, donc $n_2 = 6$ spires.

C.13 - Entrefer :



Le matériau ferrite est l'équivalent d'un court-circuit magnétique, la réluctance ne dépend donc que des entrefers.

$$R = \frac{2l_E}{\mu_0 S_F}, \text{ numériquement on a } l_E = 917,13 \cdot 10^{-13} \text{R. Sachant que } L_1 = \frac{n_1^2}{R} \text{ on tire } R = \frac{n_1^2}{L_1}.$$

L'application numérique donne $R = 4,26 \cdot 10^6$ USI et $l_E = 391 \mu\text{m}$.

D.1 – Blocage de Q : $i_1(t)$ diminue de I_{1M} à 0 pendant t_{off} , $i_2(t)$ croît de 0 à I_{2M} pendant le même temps.

$$E = l_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{n_1}{n_2} V_S + v_Q \text{ (le signe « - » vient de la position des points homologues) ce qui donne}$$

$$v_Q = E - l_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{n_1}{n_2} V_S. \text{ Soit numériquement } v_Q = 310 + 851,4 + 160 \equiv 1320 \text{ V.}$$

D.2 – Forte surtension

D.3 – Si le blocage de Q est instantané, alors l'écrêteur se met instantanément en conduction, la tension V_{BR} apparaît à ses bornes.

$$V_{BR} + l_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{n_1}{n_2} V_S = 0, \text{ d'où } i_1(t) = \frac{1}{l_1} \left(\frac{n_1}{n_2} V_S - V_{BR} \right) t + I_{1M}, \text{ origine des temps en } \alpha T.$$

D.4 – Annulation de $i_1(t)$: soit t_2 tel que $i_1(t_2) = 0$. D'après D.3 on a : $t_2 = \frac{l_1 I_{1M}}{V_{BR} - \frac{n_1}{n_2} V_S}$

D.5 – Sachant que $t_2 > 0$, il faut que $V_{BR} > \frac{n_1}{n_2} V_S$.

Supposons le fonctionnement hors commutation, il faut que la tension induite au primaire, à savoir $\frac{n_1}{n_2} V_S$ soit

inférieure à V_{BR} , sinon il y aurait débit du primaire dans l'écrêteur.

D.6 – Tension aux bornes du transistor : $v_Q = E + V_{BR}$

Numériquement $v_Q = 310 + 220 = 530 \text{ V}$. (comparer à D.1).

D.7 – Puissance perdue dans l'écrêteur :

$$P_0 = \frac{1}{T} V_{BR} I_{1M} \int_0^{t_2} \left(1 - \frac{t}{t_2}\right) dt = \frac{V_{BR} I_{1M}}{2T} t_2. \text{ Numériquement on a } P_0 = 7,56 \text{ W.}$$

D.8 – Energie stockée dans l'inductance l_1 :

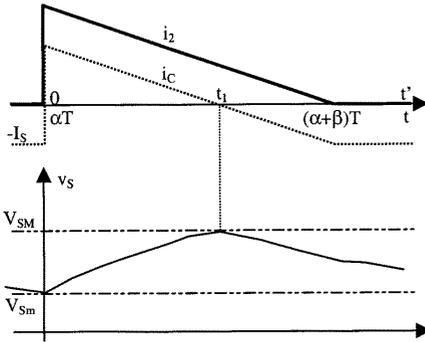
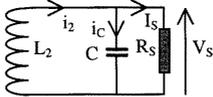
$$W_1 = \frac{1}{2} l_1 I_{1M}^2 \text{ soit } 41,18 \cdot 10^{-6} \text{ J. La puissance correspondante est } P_1 = \frac{W_1}{T} \text{ numériquement égale à } 2,06 \text{ W.}$$

D.9 – La source délivrant $\frac{n_1}{n_2} V_S$ contribue à la phase d'extinction, $i_1(t)$ traverse un dipôle ayant à ses bornes

$$\frac{n_1}{n_2} V_S = 160 \text{ V, la puissance ainsi fournie (en plus de } P_1) \text{ est absorbée par l'écrêteur.}$$

D.10 – Ce dispositif induit une chute notable du rendement.

E - Choix de C :



E.1 – $i_C(t) = I_{2M} - \frac{V_S}{L_2}t - I_S$. L'instant t_1 est tel que $i_C(t_1) = 0$, soit $t_1 = (I_{2M} - I_S) \frac{L_2}{V_S}$.

E. 2 – Charge apportée au condensateur : $\Delta Q^+ = \int_0^{t_1} i_C(t') dt'$

Tous calculs faits : $\Delta Q^+ = \frac{1}{2} (I_{2M} - I_S)^2 \frac{L_2}{V_S} = C \Delta V$

E. 3 – Si on souhaite limiter ΔV à 0,1 V, alors $C = 690 \mu\text{F}$. On choisira $820 \mu\text{F}$ ou $1000 \mu\text{F}$.

E. 4 – Equations différentielles régissant l'évolution de $v_S(t)$ en régime permanent :

a – Première phase, correspondant à Q passant : décharge de C dans R_S

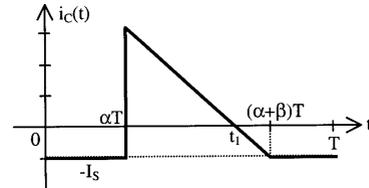
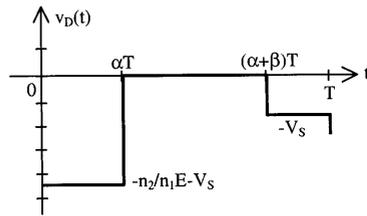
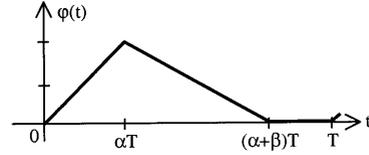
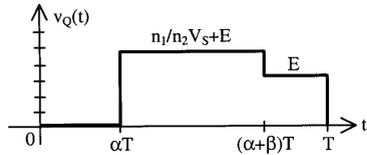
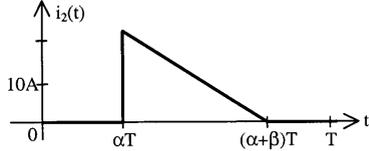
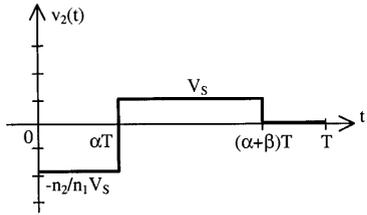
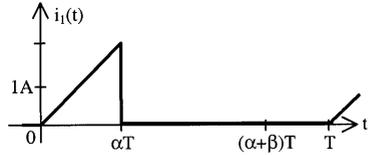
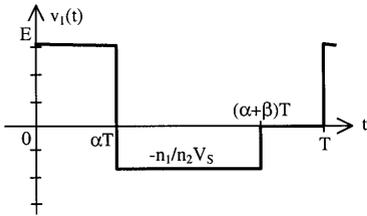
$i_C(t) + i_S(t) = 0$, ce qui se traduit par $\frac{dv_S}{dt} + \frac{1}{R_S C} v_S = 0$

b – Deuxième phase, correspondant à Q ouvert : transfert

$i_C(t) + i_S(t) = i_2(t)$ avec $i_2(t)$ donné par $-L_2 \frac{di_2}{dt} = v_S$, ce qui donne $\frac{d^2 v_S}{dt^2} + \frac{1}{R_S C} \frac{dv_S}{dt} + \frac{1}{L_2 C} v_S = 0$.

Note : Dans ces expressions, la résistance des enroulements et la chute de tension dans la diode ont été négligées.

DOCUMENT REPONSE



DEUXIEME PROBLEME

ETUDE D'UN CONDUCTIMETRE

A - Etude du schéma fonctionnel :

A-1- La tension doit être alternative pour éviter l'électrolyse de la solution .

A-2- Le diviseur modifie la fréquence en sortie de l'oscillateur.

A-3- Le multiplexage permet de diminuer le nombre de circuits.

A-4- Paramètres qui caractérisent un CNA :

- nombre de bits
- durée de conversion
- précision
- valeur maxi analogique.

A-5- Le microprocesseur traite des grandeurs numériques.

B - Conductance d'une solution :

B-1-1- Forces sur les ions :

- électrostatique $\vec{F}_1 = q\vec{E}$ pour l'ion >0 $\vec{F}_1 = be\vec{E}$

- frottement $\vec{F}_2 = -6\pi\eta r^+ \vec{V}^+$

B-1-2- Vitesses limites $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$

$$V^+ = \frac{be}{6\pi\eta r^+} E \text{ et } V^- = \frac{ae}{6\pi\eta r^-} E$$

B-1-3- Mobilités

$$\mu^+ = \frac{be}{6\pi\eta r^+} \text{ et } \mu^- = \frac{ae}{6\pi\eta r^-}$$

B-2-1- Expression de R

$$R = \rho \frac{L}{S} = \rho K_c$$

B-2-2- Expression de σ

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = G K_c$$

B-2-3- expression de σ

$$U = R I = E L \text{ donc } I = \frac{EL}{R} = \frac{EL}{\rho K_c} \text{ et } \sigma = \frac{K_c I}{EL} = \frac{I}{ES}$$

B-3-1- calcul de dq

$$dn^- = N_A [X^{a-}] S V dt$$

$$dq = e (b dn^+ + a dn^-) = N_A e (b [M^{b+}] S V^+ dt + a [X^{a-}] S V^- dt) =$$

B-3-2- Expression de i

$$i = dq / dt = N_A e (b [M^{b+}] S V^+ + a [X^{a-}] S V^-) = SFE (b [M^{b+}] \mu^+ + a [X^{a-}] \mu^-)$$

B-3-3-

$$\sigma = \frac{i}{ES} = F (b [M^{b+}] \mu^+ + a [X^{a-}] \mu^-)$$

B-3-4- La conductivité σ est donc proportionnelle aux concentrations.

C - Cellule de mesure de conductimétrie et principe de la mesure:

C-1- Modélisation électrique de la cellule.

C-1-1- Le modèle doit être un R C, car le courant est limité au changement d'état donc R et il tend vers zéro donc condensateur.

C-1-2- Il faut utiliser un modèle RC série.

C-2- Modèle électrique du système câble cellule.

C-2-1- Impédance câble cellule

$$\underline{Z}_{MN} = r_c + \frac{\frac{1}{jC_c\omega} \left(R + \frac{1}{jC\omega} \right)}{\frac{1}{jC_c\omega} + \frac{1}{jC\omega} + R} = r_c + \frac{\left(R + \frac{1}{jC\omega} \right)}{1 + \frac{C_c}{C} + jRC_c\omega}$$

avec $C_c/C = 65 \cdot 10^{-6}$ donc $\ll 1$

$$\underline{Z}_{MN} = r_c + R \left(1 + \frac{1}{jRC\omega} \right) \left(\frac{1}{1 + jRC_c\omega} \right)$$

C-2-2- Pour que \underline{Z}_{MN} soit une somme de deux résistances, il faut que les deux termes contenant des ω soient très inférieurs à 1.alors $\underline{Z}_{MN} = r_c + R = Z_{MN}$

C-3-1- Calculs de R

Calibre	1300mS/cm	130 mS/cm	13 mS/cm	1,3 mS/cm	130 μ S/cm	13 μ S/cm	1,3 μ S/cm
Fréquence	50 kHz	50 kHz	50 kHz	4,7 kHz	0,59 kHz	73 Hz	73 Hz
R	0,769 Ω	7,69 Ω	76,9 Ω	769 Ω	7,69k Ω	76,9k Ω	769k Ω

C-3-2- On peut écrire $\underline{Z}_{MN} = r_c + R \left(1 - \frac{j}{RC\omega} \right) (1 - jRC_c\omega)$ d'où ϵ_1 et ϵ_2

Calibre	1300mS/cm	130 mS/cm	13 mS/cm	1,3 mS/cm	130 μ S/cm	13 μ S/cm	1,3 μ S/cm
Fréquence	50 kHz	50 kHz	50 kHz	4,7 kHz	0,59 kHz	73 Hz	73 Hz
ϵ_1	2,07	0,207	0,02	0,02	0,017	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
ϵ_2	$3,14 \cdot 10^{-5}$	$3,14 \cdot 10^{-4}$	$3,14 \cdot 10^{-3}$	$2,95 \cdot 10^{-3}$	$3,7 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$4,5 \cdot 10^{-2}$

C-3-3- Le premier calibre et le deuxième vont poser un problème à cause de la valeur de ϵ_1

C-3-4- le programme du microprocesseur permettra de corriger ce problème, donc il sera nécessaire de toujours utiliser les mêmes câbles.

C-4-1- Calcul de \underline{Z}_{MN}

$$V_1 - V_0 = -(R_r + \underline{Z}_{MN}) I$$

$$V_2 - V_0 = -(\underline{Z}_{MN}) I$$

$$\text{donc } \left(\frac{V_1 - V_0}{V_2 - V_0} - 1 \right) = \frac{R_r}{\underline{Z}_{MN}} \text{ alors } \underline{Z}_{MN} = \frac{V_2 - V_0}{V_1 - V_2} R_r$$

$$C-4-2- \underline{Z}_{MN} = \frac{V_2 - V_0}{V_1 - V_2} R_r = R + r_c = R'$$

C-4-3- On calcule alors σ

$$\sigma = \frac{K_c}{\left(\left(\frac{V_2 - V_0}{V_1 - V_2} \right) R_r - r_c \right)}$$

C-4-4- A partir de la valeur du calibre donc de σ

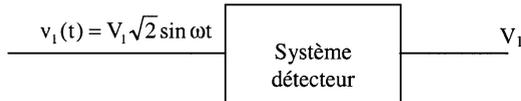
$V_{2maxi} = 1,78$ V obtenu pour le maxi du calibre en conductivité

$V_{2mini} = 0$ V lorsque la résistivité de la solution est nulle, alors il ne reste que la résistance du câble.

C-4-5- La mesure de V_0 permet d'éliminer les tensions de masse parasites

La connaissance de V_0 permet de faire des corrections si elles sont nécessaires.

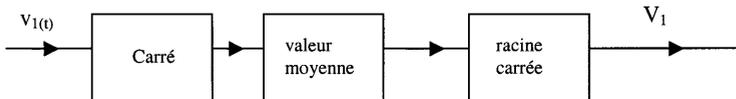
C-5- Détecteur



Le détecteur doit réaliser la fonction mathématique suivante :

$$V_1 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (v_1(t))^2 dt}$$

on aura donc le schéma bloc suivant :



La tension étant toujours sinusoïdale, on peut envisager un montage avec un détecteur de crête et une division par racine de deux.

D - Oscillateur :

D-1- Principe des oscillateurs

La chaîne directe amplifie et déphase.

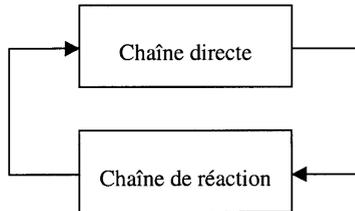
La chaîne de réaction atténue et déphase.

Si \underline{A} est la fonction de transfert de la CD

Si \underline{B} est la fonction de transfert de la CR

A la fréquence d'oscillation on aura :

$$\underline{A} \underline{B} = 1$$



D-2- Oscillateur de Wien

D-2-1- Chaîne directe

$$\underline{A} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

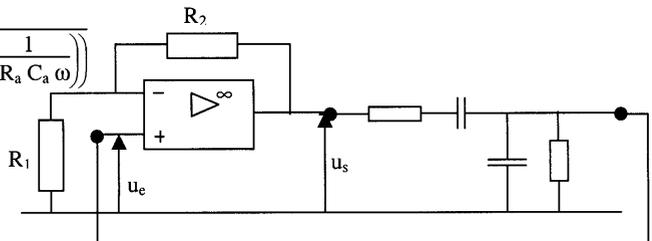
D-2-2- Chaîne de retour

Calcul classique

$$\underline{B} = \frac{Z_p}{(Z_p + Z_s)} = \frac{1}{\left(3 + j \left(R_a C_a \omega - \frac{1}{R_a C_a \omega} \right)\right)}$$

D-3- Oscillateur:

D-3-1- Association des quadripôles :



D-3-2-

Oscillations si $R_a C_a \omega - \frac{1}{R_a C_a \omega} = 0$ donc $(R_a C_a \omega)^2 = 1$ et $\omega_{os} = \frac{1}{R_a C_a}$

et $B = \frac{1}{3}$ alors $A = 3$ et $1 + \frac{R_2}{R_1} = 3$

D-3-3-

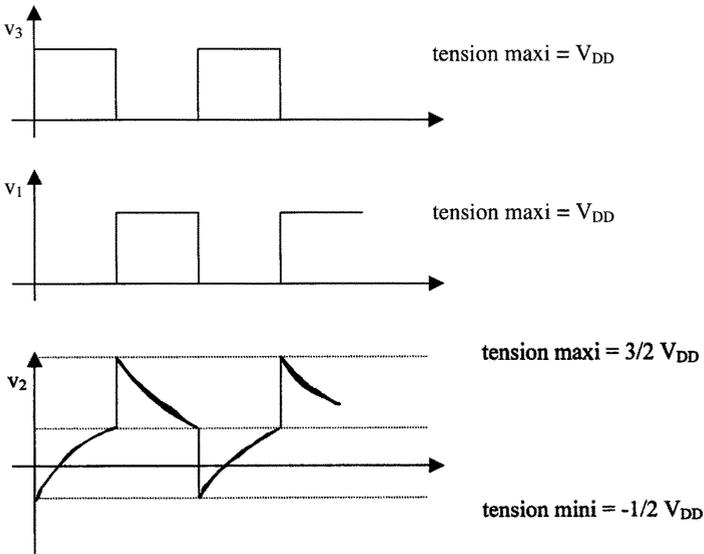
D-3-3-1- $R_a = 27159 \Omega$

D-3-3-2-

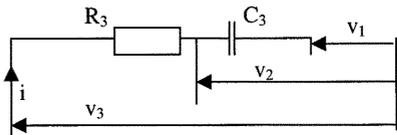
$R_2 = 2 R_1$ $R_1 = 10k\Omega$ $R_2 = 20k\Omega$ il est bon de prévoir un potentiomètre de réglage pour R_2

D-4- Oscillateur à portes logiques :

D-4-1- Tension $v_1, v_2, v_3,$



D-4-2- Equation différentielle

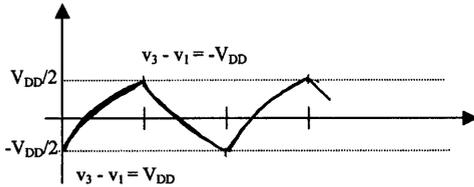


$$i = \frac{dq}{dt} = C_3 \frac{dU_{C3}}{dt} \text{ on écrit } v_3 = R_3 C_3 \frac{dU_{C3}}{dt} + U_{C3} + v_1 \text{ donc } v_3 - v_1 = R_3 C_3 \frac{dU_{C3}}{dt} + U_{C3}$$

la seule inconnue étant la valeur de $v_3 - v_1$ selon la phase où on se trouve.

D-4-3- Expression de U_{C3}

Allure de la tension U_{C3} en fonction du temps



$v_3 - v_1 = R_3 C_3 \frac{dU_{C3}}{dt} + U_{C3} = V_{DD}$ avec, à $t=0$ $U_{C3} = \frac{-V_{DD}}{2}$ donc

$U_{C3} = V_{DD} \left(1 - \frac{3}{2} e^{-t/\tau} \right)$ avec $\tau = R_3 C_3$

D-4-4- Calcul de la période

à $T/2$ on a $U_{C3} = \frac{V_{DD}}{2}$; après calcul $T = 2R_3 C_3 \ln 3$

D-4-5- Application numérique :

$C_3 = 9,68 \text{ nF}$

D-5- Le quartz :

D-5-1- Impédance du dipôle AB

On a deux impédances en parallèle.

$Z_1 = \frac{1}{jC_p \omega}$ et $Z_2 = r + j \left(L\omega - \frac{1}{C_s \omega} \right)$ $Z(j\omega) = \frac{\left(r + j \left(L\omega - \frac{1}{C_s \omega} \right) \right)}{\left(1 - C_p \omega \left(L\omega - \frac{1}{C_s \omega} \right) + jrC_p \omega \right)}$

$A_1 = r$

$A_2 = 1 - C_p \omega \left(L\omega - \frac{1}{C_s \omega} \right)$

$B_1 = \left(L\omega - \frac{1}{C_s \omega} \right)$

$B_2 = rC_p \omega$

D-5-2- Simplification :

on néglige r alors A_1 tend vers 0 et B_2 tend vers 0

$Z(j\omega) = jX(\omega)$ avec $X(\omega) = \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C_s \omega} \right)}{\left(1 - C_p \omega \left(L\omega - \frac{1}{C_s \omega} \right) \right)}$

D-5-3- Expression de $X(\omega)$ en fonction des pulsations de résonance

avec $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC_s}}$ et $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L\gamma}}$ avec $\gamma = \frac{C_s C_p}{C_s + C_p}$

après calcul on trouve

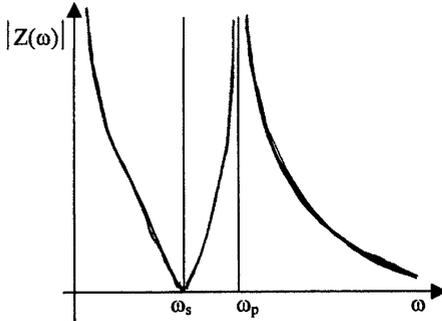
$X(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_s^2}{-C_p \omega (\omega^2 - \omega_p^2)}$

D-5-4- Comparaison de ω_s et de ω_p

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC_s}} \quad \omega_p = \frac{1}{\sqrt{L\gamma}} \quad \text{on calcule} \quad \left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^2 = \frac{C_s}{\gamma} = \frac{C_s + C_p}{C_p} = 1 + \frac{C_s}{C_p} \quad \text{donc} > 1 \quad \text{et} \quad \omega_p > \omega_s$$

mais $\frac{C_s}{C_p} \ll 1$ alors dans la réalité ω_p est peu différent de ω_s

D-5-5-



- si $\omega < \omega_s$ le dipôle est capacitif
- si $\omega_s < \omega < \omega_p$ le dipôle est inductif
- si $\omega > \omega_p$ le dipôle est capacitif

D-5-6- Application numérique

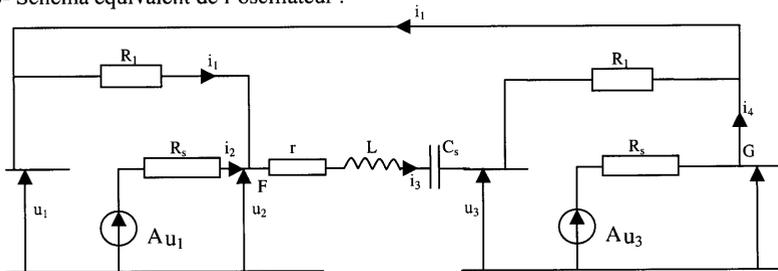
$L = 35,18 \text{ mH}$ et $f_p = 6,01498 \text{ MHz}$

D-6- Oscillateur à portes logiques et à quartz

D-6-1- La porte est polarisée dans sa zone linéaire de fonctionnement.

D-6-2- Les portes fonctionnent en amplificateur linéaire le modèle est bon.

D-6-3- Schéma équivalent de l'oscillateur :



D-6-4- Loi des nœuds en F

$$i_1 + i_2 = i_3 \quad \frac{U_1 - U_2}{R_1} + \frac{A U_1 - U_2}{R_s} = \frac{U_2 - U_1}{Z}$$

$$U_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{A}{R_s} + \frac{1}{Z} \right) - U_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_s} + \frac{1}{Z} \right) = 0 \quad U_1 \left(Y_0 + \frac{A-1}{R_s} \right) - U_2 Y_0 = 0$$

D-6-5- $Y_1 = \left(Y_0 + \frac{A-1}{R_s} \right)$ et $Y_2 = -Y_0$

D-6-6- Loi des nœuds en G

$$-i_1 + i_3 + i_4 = 0 \quad + \frac{AU_3 - U_1}{R_s} = 0 \quad - \frac{U_1 - U_2}{R_1} + \frac{U_2 - U_1}{Z} + \frac{AU_3 - U_1}{R_s} = 0$$

$$\underline{U}_1 \left(-\frac{1}{R_1} \frac{1}{Z} - \frac{1}{R_s} \right) + \underline{U}_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{Z} \right) + \underline{U}_3 \frac{A}{R_s} = 0$$

On élimine \underline{U}_3 $i_3 = \frac{\underline{U}_3 - \underline{U}_1}{R_1} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_1}{Z}$ donc $\underline{U}_3 = \underline{U}_2 \frac{R_1}{Z} + \underline{U}_1 \frac{Z - R_1}{Z}$ et on a

$$\underline{U}_1 \left(Y_0 - \frac{A}{R_s} \left(1 - \frac{R_1}{Z} \right) \right) - \underline{U}_2 \left(Y_0 + \frac{1}{R_s} \left(\frac{AR_1}{Z} - 1 \right) \right) = 0$$

D-6-7- $\underline{Y}_3 = \left(Y_0 - \frac{A}{R_s} \left(1 - \frac{R_1}{Z} \right) \right)$ et $\underline{Y}_4 = - \left(Y_0 + \frac{1}{R_s} \left(\frac{AR_1}{Z} - 1 \right) \right)$

D-6-8-On a donc

$$\underline{U}_1 \underline{Y}_1 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2 = 0$$

$$\underline{U}_1 \underline{Y}_3 + \underline{U}_2 \underline{Y}_4 = 0$$

Si l'oscillation est présente ces deux relations sont vraies pour toutes les tensions, on les élimine et on trouvera la relation d'oscillation.

$$\frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_3} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_4} \text{ ou encore } \underline{Y}_1 \underline{Y}_4 = \underline{Y}_2 \underline{Y}_3$$

$$\left(Y_0 + \frac{A-1}{R_s} \right) \left(Y_0 + \frac{1}{R_s} \left(\frac{AR_1}{Z} - 1 \right) \right) = Y_0 \left(-Y_0 + \frac{A}{R_s} \left(1 - \frac{R_1}{Z} \right) \right) \text{ donc } 2Y_0 R_s + \frac{AR_1}{Z} = 1$$

On développe en complexes et on identifie les réels et les imaginaires

en réels $-(1 - LC_s \omega^2) \left(1 + \frac{2R_s}{R_1} \right) = 0$ on a la pulsation $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC_s}}$ pulsation série du quartz

en imaginaires $(AR_1 + 2R_s) C_s \omega = -C_s \omega (r + R_1) \left(1 + \frac{2R_s}{R_1} \right)$ on calcule A

$$A = - \left(4 \frac{R_s}{R_1} + 1 + \frac{r}{R_1} + \frac{2rR_s}{R_1^2} \right)$$

D-6-9- Application numérique :

$$f_s = 6,000000 \text{ MHz} \quad \text{et} \quad A = -5,75$$

D-6-10- Oui car même câblage et même valeur des composants, de plus le condensateur de 10nF est équivalent à un court circuit.

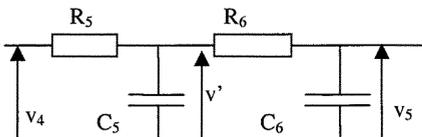
D-6-11- La troisième porte inverseuse est une porte de mise en forme, la tension au point S est en créneaux.

E - Filtre :

E-1- Le filtre est un passe bas. L'amplificateur opérationnel associé à R_7 et R_8 réalise un montage amplificateur inverseur.

E-2- Fonction de transfert du filtre

La présence de l'ampli en suiveur permet de dire que le filtre est à vide.



Z' association de C_5 en parallèle avec $(R_6$ série $C_6)$

$$\underline{V}_5 = \underline{V}' \frac{Z_6}{R_6 + Z_6} = \underline{V}_4 \frac{Z'}{R_5 + Z'} \frac{Z_6}{R_6 + Z_6} \text{ d'ou } \frac{\underline{V}_5}{\underline{V}_4} = \frac{1}{\left(1 + R_5 \frac{1}{Z_5} + \frac{1}{R_6 + Z_6} \right)} \frac{Z_6}{R_6 + Z_6}$$

on développe en introduisant ω et la notation complexe.

$$\frac{V_5}{V_4} = \frac{1}{1 + j R_6 C_6 \omega + j R_5 C_5 \omega + j R_5 C_5 \omega - R_6 C_6 R_5 C_5 \omega^2}$$

$$\frac{V_5}{V_4} = \frac{1}{(1 - R_5 R_6 C_5 C_6 \omega^2) + j\omega(R_5 C_5 + R_6 C_6 + R_5 C_6)}$$

$$\frac{V_6}{V_4} = -\frac{R_8}{R_7} \frac{1}{(1 - R_5 R_6 C_5 C_6 \omega^2) + j\omega(R_5 C_5 + R_6 C_6 + R_5 C_6)}$$

Le filtre est du deuxième ordre, la valeur maxi du module est de $\frac{R_8}{R_7}$. On calcule la fréquence

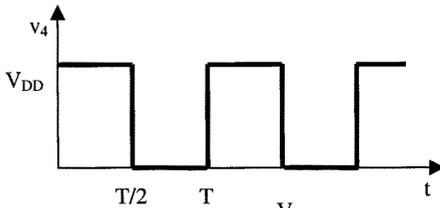
de coupure :

$$\omega_c \text{ est solution de : } (1 - 1,139 \cdot 10^{-10} \omega^2)^2 + (3,428 \cdot 10^{-5} \omega)^2 = 2$$

$$\omega_c = 3,226 \cdot 10^4 \text{ rad s}^{-1} \text{ et } f_c = 5135 \text{ Hz}$$

E-3-Fourier

E-3-1-



V_{40} est la valeur moyenne $V_{40} = \frac{V_{DD}}{2}$

Pas de termes en cos donc $A_n = 0$

Seuls les termes en sin restent B_n avec $B_n = \frac{2}{T} \int_0^T v_4(t) \sin n\omega t \, dt$

E-3-2-La décomposition est

$$v_4(t) = \frac{V_{DD}}{2} + \frac{2 V_{DD}}{\pi} \left(\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right)$$

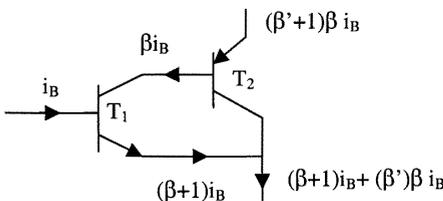
E-3-3- A la sortie du filtre on aura la composante continue et celle à ω_0 car la fréquence de coupure du filtre est de 5kHz et que le signal est à 4,7 kHz.

F - Amplificateur de puissance :

F-1- Rôle de C_{10} et R_{10}

C_{10} et R_{10} forment un filtre passe haut, on élimine ainsi la composante continue.

F-2- Association des transistors T_1 et T_2



L'association est équivalente à un transistor NPN de puissance.

De même l'association des transistors T_3 et T_4 réalise un transistor PNP de puissance.

F-3- L'association de D_1 , D_2 et R_{14} permet le réglage du point de repos de l'amplificateur. Si la tension $v_7(t)$ est nulle, la tension $v_s(t)$ doit être nulle. La résistance R_{14} permet de régler la valeur de la tension de sortie.

F-4- L'amplificateur fonctionne en classe AB.

F-5- Le montage est un suiveur de tension qui a une amplification unitaire.

$$A_v = \frac{V_s}{V_7} = 1$$

On parle d'amplificateur de puissance car le montage amplifie en courant donc l'amplification en puissance est supérieure à 1.

F-6-Rendement

Si la résistance de charge est notée R , $P_u = R \frac{I_m^2}{2}$; le courant qui alimente la charge est sinusoïdal de valeur maximale I_m .

Le courant qui est fourni par une alimentation est sinusoïdal redressé une alternance de valeur maximale I_m ; donc $P_a = 2 U \langle i(t) \rangle = 2 U \frac{I_m}{\pi}$ pour une pleine amplitude on aura

le rendement maximal qui sera $\eta = \frac{\pi}{4}$

Capes de sciences physiques

Concours interne

SECTION PHYSIQUE ET CHIMIE

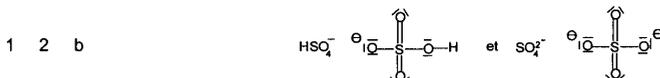
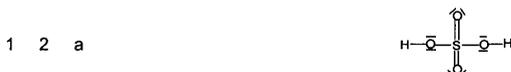
Épreuve de physique et chimie ♦ Session : 2003

CHIMIE

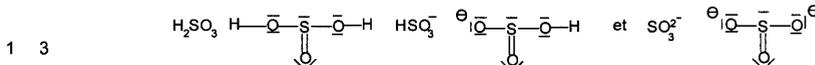
PARTIE A : Etude de quelques composés sulfurés

I Etude structurale

- 1 1 a O : 1s2 2s2 2p4 S : 1s2 2s2 2p6 3s2 3p4 ou Ne 3s2 3p4
 1 1 b O : 6 électrons de valence (n = 2) S : 6 électrons de valence (n = 3)
 1 1 c Même colonne XVI
 1 1 d $\chi_O > \chi_S$ L'oxygène est plus électronégatif que le soufre



- 1 2 c Nombre d'oxydation du soufre : VI



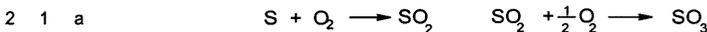
Nombre d'oxydation du soufre : IV



- 1 4 b Tétraédrique autour du soufre : AX4E0 ou AX4

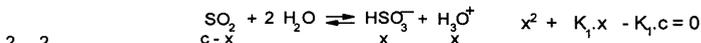
- 1 4 c Nombre d'oxydation du soufre central : IV - Nombre d'oxydation de l'autre soufre : 0

II Propriétés acido-basiques



- 2 1 b Il se transforme en acide sulfureux et en acide sulfurique par action du dioxygène et de l'eau

- 2 1 c Pluies acides et problèmes respiratoires



K2 << K1, seule la première acidité est considérée - Autoprotolyse de l'eau négligée - x non négligeable par rapport à c : pH = - log = - log 0,030 = + 1,53 = 1,5 << 6 hypothèses correctes

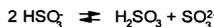
- 2 3 a Burette graduée contenant l'espèce titrante HO- décimolaire. Sur agitateur magnétique, becher contenant 10,0 mL de solution A (espèce à titrer : acide sulfureux) prélevés avec une pipette jaugée de 10 mL munie d'une propipette.

- 2 3 b La soude est corrosive, très caustique. Porter une blouse en coton et des lunettes de protection. Mettre des gants.

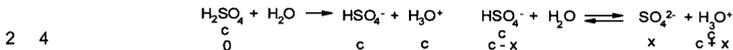
- 2 3 c Comme pH éq > pK2 = 7, pH éq est basique. Un indicateur coloré adapté à une zone de virage en milieu basique. Exemples : phénolphthaléine, rouge de crésol, bleu de thymol.

- 2 3 dα $v < v_1$: $H_2SO_3 + OH^- \rightarrow HSO_3^- + H_2O$ et $v_1 < v < v_2$: $HSO_3^- + HO^- \rightarrow SO_3^{2-} + H_2O$

- 2 3 dβ E1 : nHO- léq1 = nH2SO3 soit v1 = 10,0 mL et E2 : nHO- léq1 = 2 nH2SO3 soit v2 = 2 v1 = 20,0 mL



2 3 dy La R.P. , seule reaction a considerer, permet d'obtenir une solution aqueuse d'hydrogénosulfite de sodium contenant autant d'ions sulfite que de molécules d'acide sulfureux : $K_1.K_2 = h.h$ donc $pH1 = 1/2 (pK1 + pK2) = 4,45 = 4,5$



2 5 a La seconde acidité est négligeable si $x < c/10$, alors $K'2 = x = 0,010 \text{ mol/L}$. Hypothèse vraie. Donc $pH = -\log h = -\log c = 1,0$

$\Delta pK < 4$, alors les deux réactions de dosages se font simultanément et il n'y a qu'un seul saut de pH.

A l'équivalence du dosage, la solution est celle de la base faible : ion sulfite, à la concentration $C' = Ca/3$ (Vtotal = 3 Va) et de constante $K'2$: $pH = 1/2 (pKe + pK'2 + \log c) = 7,26$ (Hypothèses : autoprotolyse de l'eau négligeable non valable et avancement x à l'équilibre $< C/10$ correcte) ou $pH = 7,32$ (Hypothèse : $x < C/10$ correcte).

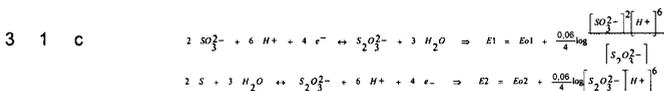
$$2 \quad 5 \quad b \quad \text{SO}_4^{2-} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{HSO}_4^- + \text{HO}^- \quad h = \sqrt{\frac{Kc}{1 + \frac{c}{K_2}}} = 4,8.10^{-8} \Rightarrow pH = 7,32$$

III Synthèse du thiosulfate de sodium

Réfrigérant à boules adapté verticalement au col d'un ballon monocol chauffé et contenant le milieu réactionnel. Ce montage permet d'élever la température et donc de diminuer la durée de la transformation sans perdre de matière (les vapeurs produites par le chauffage sont liquéfiées dans le réfrigérant et refluxent dans le ballon)

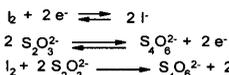


E ox - E red = 0,87 - 0,58 = 0,059/2 logK donc $K = 1.103$ - il s'agit d'une médiamutation.



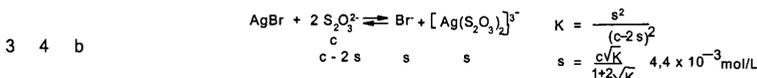
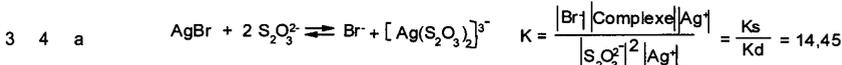
3 2 a $no(S) = n/M = 0,047 \text{ mol}$ et $no(\text{ion sulfite}) = cV = 0,025 \text{ mol}$. Le limitant est l'ion sulfite : $\xi_{\text{final}} = \xi_{\text{max}} = 0,025 \text{ mol}$

3 2 b $n(\text{thiosulfate de sodium}) = \xi_{\text{max}} = 0,025 \text{ mol}$ et $m(S) = nM = 32(0,047 - 0,025) = 0,70 \text{ g}$



ou justification avec les nombres d'oxydation

3 3 b A l'équivalence $n(\text{ions thiosulfate})_{\text{dosé}} = 2.n(\text{diode})_{\text{ijéq}} = 2 C_2.V_2 = 2,4 \text{ mmol}$. Alors $n(\text{ions thiosulfate})_{\text{filtré}} = n' = 10 n(\text{ions thiosulfate})_{\text{dosé}} = 24 \text{ mmol}$. n' très légèrement inférieure à n (écart relatif de 4 %) ce qui est normal car la réaction n'est par réellement quantitative mais il y a un large excès de soufre.



3 4 c $s' = M.s = 0,83 \text{ g/L}$ donc $n = Vs'/m' = 6$ films ou 7 films

IV Cinétique chimique

4 1 Les concentrations initiales en ions hydronium (donc le pH) et thiosulfate. La température.

4 2 a α est l'ordre partiel par rapport aux ions hydronium, β l'ordre partiel par rapport aux ions thiosulfate et $\alpha + \beta$ l'ordre global de la réaction.

$$4 \quad 2 \quad b \quad v = k [H^+]^\alpha [S_2O_3^{2-}]^\beta = - \frac{d[S_2O_3^{2-}]}{dt}$$

Dégénérescence de l'ordre par rapport aux ions hydronium

$$4 \quad 3 \quad a \quad v = k_{ap} [S_2O_3^{2-}] = - \frac{d[S_2O_3^{2-}]}{dt} \quad \text{avec } K_{ap} = K [H^+] = \text{constante} = K_c c_a$$

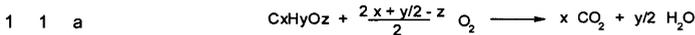
$$[S_2O_3^{2-}] = C_0 e^{-K_{ap} t}$$

Quelque soit C_a , à T, la concentration en ions thiosulfate est la même car il s'est formé la même quantité de matière de soufre, donc $K_{ap}.T = \text{constante}$

$$4 \quad 3 \quad b \quad K_{ap}.T = K [H^+]^\alpha T = K_c C_a^\alpha T \quad \text{or } C_a.T = \text{constante donc } \alpha = 1$$

PARTIE B : Chimie organique

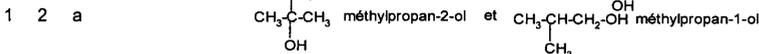
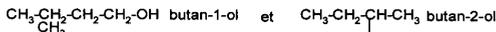
I Analyse d'un composé oxygéné



1 1 b $y = 2.m.M(\text{eau})/(m.M) = 10$, $x = m.M(\text{dioxyde de carbone})/(m.M) = 4$, $z = 1$: C₄H₁₀O

A est saturé

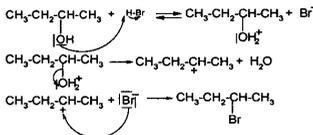
1 1 c $N_i = \frac{2.n(IV) + n(III) - n(I) + 2 + z}{2} = 0$



1 2 b A : butan-2-ol



1 2 c "R" peut être levogyre ou dextrogyre; le pouvoir rotatoire est indépendante de la configuration absolue



1 3 a

Substitution nucléophile monomoléculaire SN1 avec obtention d'un racémique (ou, et SN2)

1 3 bα H du carbone fonctionnel (indice de position 2) pour obtenir: le 2,2-dibromobutane

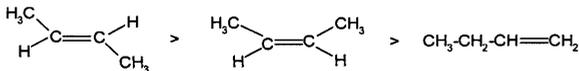
1 3 bβ Soit H du carbone 1 : on obtient le 1,2-dibromobutane, soit H du carbone 4 : on obtient le 1,3-dibromobutane (les deux molécules obtenues n'ont qu'un seul atome de carbone asymétrique). Relation d'énantiométrie.

1 3 bγ H du carbone 3 : on obtient 3 configurations du 2,3-dibromobutane ayant chacune 2 atomes de carbone asymétrique portant les mêmes atomes ou groupes d'atomes ; configurations RR, SS et RS (méso)

1 4 a β-élimination

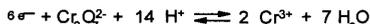
1 4 b Une réaction régiosélective est caractérisée par une modification chimique préférentielle de l'un des sites réactifs potentiels de l'entité chimique. La déshydrohalogénéation d'un halogénoalcane conduit majoritairement à l'alcène le plus stable, le plus substitué : règle de Zaïtev

1 4 c

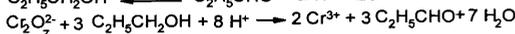


(E)-but-2-ène puis (Z)-but-2-ène et enfin but-1-ène

II Analyse de quelques étapes de protocoles



2 1 a



2 1 b Distillation du propanal pour ne pas qu'il s'oxyde en acide propanoïque

2 1 c L'ion permanganate

2 2 a Plaque chauffante et agitante. Ballon bicol avec une ampoule de coulée et une colonne de Vigreux. En tête de colonne : un thermomètre ainsi que l'extrémité supérieure d'un réfrigérant droit dans lequel l'eau circule de bas en haut

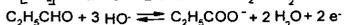
Température constante de 48,0 °C pendant que l'aldéhyde distille puis élévation de la température.

2 2 c Elimination de l'eau - Chlorure de calcium anhydre ou sulfate de sodium...

$n(\text{alcool}) = m/M = 0,833 \text{ mol}$; $m(\text{ion dichromate}) = m/M = 0,256 \text{ mol}$. $n(\text{alcool}) > 3 n(\text{ion dichromate})$ donc l'ion dichromate est le réactif limitant. $n(\text{aldéhyde})_{\text{max}} = 0,768 \text{ mol}$. $n(\text{aldéhyde})_f = m/M = 0,259 \text{ mol}$ Rendement $r = n_f/n_{\text{max}} = 0,34 = 34 \%$

Liquide de Fehling (sol. aq. basique contenant des ions ditartratecuprate(II)). Initialement, la sol. est bleue (présence d'ions cuivre (II) complexés) puis il apparaît un précipité rouge brique dû à l'oxyde de cuivre (I) formé (réduction des ions cuivre (II) et oxydation du propanal en ions propanoate)

2 2 e



PHYSIQUE

A. CLEPSYDRE

- 1 1 a Un fluide est parfait s'il n'existe pas de force s'opposant au glissement des entités chimiques les unes par rapport aux autres (ou le long des parois) ou s'il est sans viscosité.
- 1 1 b Pas de dépense d'énergie.
- 1 1 c Soit \vec{F} la force normale pressante exercée par le fluide sur une surface S : $P = F/S$
- 1 1 d Le pascal Pa - Le bar : 1 bar = 100000 Pa - 1 mm Hg = 133 Pa - 1 atm = 1013 hPa
- 1 2 Un écoulement fluide est stationnaire si le champ des vitesses du fluide ne dépend pas du temps (identité entre les trajectoires et les lignes de courant)
- 1 3 Un ligne de courant, à t donné, est une courbe à laquelle le vecteur vitesse est tangent en tout point. Un tube de courant est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.
- 1 4 $div \vec{v} = 0$ ou $div \vec{v} = 0$ car $\frac{\delta \rho}{\delta t} = 0$
- 2 1 Si l'écoulement est homogène, stationnaire et incompressible, la loi d'appliqué le long d'une ligne de courant. Pour s'appliquer dans tout le fluide, il faut de plus que l'écoulement soit irrotationnel.
- 2 2 L'expression représente l'énergie mécanique massique associée à une particule de fluide. $v^2/2$ est l'énergie cinétique massique. gz est l'énergie potentielle massique des forces autres que celles de pression. P/ρ représente l'enthalpie massique (énergie associée aux forces de pression)
- 2 3 $P : m \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$ $P : m \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$ $g : L \cdot T^{-2}$ $v : L \cdot T^{-1}$ $P/\rho, gz$ et $v^2/2 : L^2 \cdot T^{-2}$
- 3 1 $v_0^2 = v_L^2 + 2gz_S$ $v_0 = \sqrt{2gz_S}$ avec $v_L \ll v_0$
- Conservation du débit massique : $S \cdot V_L = s \cdot v_0$
- 3 2 $v_0^2 - v_L^2 = v_L^2 \left(\frac{s^2}{s^2} - 1 \right) = v_L^2 \frac{s^2}{s^2} = 2 \cdot g \cdot Z_S$ et $v_L = -\frac{dZ_S}{dt} \Rightarrow -\frac{dZ_S}{dt} = \frac{s}{S} \sqrt{2 \cdot g \cdot Z_S}$
- 3 3 $\int_{h}^{Z_S} Z_S^{-1/2} dZ_S = \int_0^t -\frac{s}{S} \sqrt{2 \cdot g} dt \Rightarrow Z_S = \left(-\frac{s}{S} \sqrt{\frac{g}{2}} (t + \sqrt{h}) \right)^2$
- 3 4 $A \text{ à } T \quad Z_S = 0 \Rightarrow T = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{\pi R^2}{s} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 800 \text{ s}$
- 3 5 $A \text{ à } 0, Z_0 = h = 40 \text{ cm}$; à $t = \tau, Z_1 = 34 \text{ cm}$ et à $t = 2 \tau, Z_2 = 29 \text{ cm}$
- 3 6 Z_s n'est pas proportionnel au temps écoulé, donc le cylindre vertical ne peut pas être gradué linéairement en temps (paraboloïde)

B. HORLOGE COMTOISE

- 1 1 Dimensions de S <<<< l. Masse du fil négligeable par rapport à celle de S (fil inextensible)
- 1 2 Mesurer la durée de n oscillations : $\Delta t = n \cdot T_0$ avec n compris entre 10 et 15
- 1 3 a S oscille librement et de manière non amortie.
- 1 3 b Amplitude angulaire ou élongation maximale angulaire
- 1 3 c1 Axes. Echelles. Graphe. $T_0^2 = A \cdot l$, $T_0^2(t)$ est une fonction linéaire. $A \approx 4S \cdot l$.
- 1 3 c2 $A = 4s^2 \cdot m^{-1}$
- 1 3 d1 $g = \frac{P}{m}$ s'exprime en $N \cdot kg^{-1}$ son équation aux dimensions est $L \cdot T^{-2}$
g est homogène à une accélération
- 1 3 d2 Exp 1 : T_0 est bien proportionnel à la racine carrée de l et les exp. 2 et 3 montrent que T_0 est indépendant de m et de θ_m
- 1 3 e $T_0^2 \left(\frac{l}{gm} \right)$ est une fonction linéaire de coefficient directeur $K = B^2 \cdot l = 11,9m \Rightarrow B = 6,3 \pm 0,1$
- Une oscillation correspond à deux battements : $T_0/2 = 1 \text{ s}$. Pendule simple suspendu à un point fixe et de longueur l à calculer (sur Terre l vaut environ 1 m). Il sert d'horloge : $l = \frac{T_0^2 \cdot g}{B^2}$
- 1 3 f
- 2 1 a Système la sphère étudiée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Bilan des forces: poids et tension du fils (schéma). Deuxième loi de Newton ou théorème du moment cinétique:
 $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ Projection sur \vec{t} : $-mg \sin \theta = m \frac{dv}{dt}$ avec $v = l\theta'$ et $\sin \theta = \theta \Rightarrow \theta'' + \frac{g}{l} \theta = 0$
 $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{OS} \wedge \vec{T} + \vec{OS} \wedge \vec{P} \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{OS} \wedge \vec{P} \Rightarrow \frac{d(2m\theta' \vec{k})}{dt} = -lmg \sin \theta \vec{k} \Rightarrow l^2 m \theta'' = -lmg \sin \theta \Rightarrow \theta'' + \frac{g}{l} \theta = 0$

2 1 b Oscillateur linéaire harmonique

2 1 c $\theta'' + \omega_0^2 \theta = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

2 1 d Il y a égalité des deux périodes si $B = 2\pi$. $\Delta B/B = 0,3\%$, écart relatif négligeable

2 1 e Axes. Amplitude. Période. $\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t)$

2 2 a Oscillations mécaniques amorties par frottement fluide

Schéma $\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$ Projection sur \vec{r} : $-mg \sin \theta - f = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow -g \sin \theta - \frac{k}{m} v = \frac{dv}{dt}$ avec $v = l\theta'$ et $\sin \theta \approx \theta$

2 2 b $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{OS} \wedge \vec{T} + \vec{OS} \wedge \vec{P} + \vec{OS} \wedge \vec{f} \Rightarrow \frac{d(\vec{OS} \wedge \vec{P})}{dt} = \vec{OS} \wedge \vec{P} + \vec{OS} \wedge \vec{f} \Rightarrow \frac{d(l^2 m \theta' \vec{k})}{dt} = -lmg \sin \theta \vec{k} - lkv \vec{k} \Rightarrow l^2 m \theta'' = -lmg \sin \theta - l^2 k \theta'$
 $\Rightarrow \theta'' + \frac{k}{m} \theta' + \frac{g}{l} \theta = 0$

2 2 c $\alpha = k/m$. Chaque terme de l'équation différentielle a pour dimension T^{-2} à pour dimension T^{-1} donc α est l'inverse d'un temps

2 2 d Le régime est aperiodique (retour immédiat à l'équilibre) ou le régime est pseudoperiodique (oscillations amorties ; θ_m décroît "lentement").

2 2 e1 Régime pseudoperiodique

2 2 e2 $\tau = \frac{2m}{k} \quad \omega = \left(\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}\right)^{1/2} \quad C = \theta_m$

2 2 e3 $\left(\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}\right) > 0 \Rightarrow k < 2m \sqrt{\frac{g}{l}} = 2m \cdot \omega_0$

2 2 e4 $\omega = \left(\omega_0^2 - \frac{k^2}{4m^2}\right)^{1/2} \Rightarrow \omega < \omega_0$ et $\left|\omega - \omega_0\right|$ augmente si les frottements augmentent et m diminue

2 2 e5 $\theta(t)$ est une pseudosinusoïdale dont l'amplitude décroît exponentiellement. Plus τ est petit, plus la pseudopériode, supérieure à T_0 , est grande et plus l'amplitude diminue rapidement.

C. MONTRE A QUARTZ

1 1 Ensemble de deux conducteurs métalliques séparés par un isolant

1 2 $Q = CU$ avec Q et U positifs

1 3 a $V_1 - V_2 = \frac{\sigma \cdot e}{\epsilon_0}$

1 3 b $C = \frac{Q \cdot \epsilon_0}{\sigma \cdot e} = \frac{S \cdot \epsilon_0}{e}$

1 3 c $C_0 = \frac{S \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0}{e} = 0,13 \text{ nF}$

1 3 d Augmenter la capacité donc la charge pour une tension U donnée et donc l'énergie emmagasinée $E = 1/2 CU^2$

2 1 La piézoélectricité fut découverte par Pierre Curie et son frère Jacques. Elle consiste en la formation de charges électriques quand un cristal, sans centre de symétrie, subit des actions mécaniques; couramment on comprime ou on étire le cristal selon un axe d'hémiédrie : ses extrémités se chargent alors d'électricité de signes contraires.

2 2 a $Z_m = \sqrt{R_1^2 + \left(L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega}\right)^2}$

2 2 b $Z_{m, \min} = R_1$ ou $\frac{dZ_m}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$

2 2 c $L_1 = \frac{(4\pi^2 N_0^2)^{-1}}{C_1} = 3,3 \times 10^{-3} \text{ H} \quad R_1 = \frac{1}{C_1 \omega_m Q_m} = 0,87 \Omega$

2 3 a
$$\frac{Z_m = j(L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega})}{Z_r = -\frac{j}{C_o \omega}} \quad Z = \frac{Z_m Z_r}{Z_m + Z_r} = \frac{-j}{C_o \omega} \frac{L_1 C_1 \omega^2 - 1}{L_1 C_1 \omega^2 - (1 + \frac{C_1}{C_o})} \Rightarrow Z = \frac{L_1 C_1 \omega^2 - 1}{C_o \omega [L_1 C_1 \omega^2 - (1 + \frac{C_1}{C_o})]}$$

2 3 b Pour $w = w_R$, $Z_m = 0$ et $Z = 0$. La branche m est en résonance pour la tension de pulsation égale à la pulsation propre w_m de cette branche. Tout se passe pratiquement comme si cette branche existait seule, l'intensité qui la parcourt étant très grande. Pour $w = w_A$, Z est infinie. L'intensité dans le circuit principal est nulle (les intensités dans les deux branches sont égales et en opposition) : le circuit est antirésonnant.

$$i = \infty \text{ si } Z=0 \Rightarrow L_1 C_1 \omega_R^2 - 1 = 0 \Rightarrow \omega_R = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \text{ et } i = 0 \text{ si } Z=\infty \Rightarrow L_1 C_1 \omega_A^2 - (1 + \frac{C_1}{C_o}) = 0$$

$$\omega_A^2 = \frac{C_o}{L_1 C_1} \Rightarrow \omega_A = \omega_R (1 + \frac{C_1}{C_o})^{1/2}$$

2 3 c
$$\omega_A = \omega_R (1 + \frac{1}{300})^{1/2} \Rightarrow \frac{\omega_A - \omega_R}{\omega_R} \approx \frac{C_1}{2C_o} = \frac{1}{600} \approx 2 \times 10^{-3} = 0,2 \%$$

Les deux pulsations sont quasi identiques donc le circuit est très sélectif pour w_R (résonance très aiguë)

D. DATATION

1 1 Elle fut découverte par H. Becquerel : des plaques photographiques enveloppées dans du papier noir donc protégées de la lumière et placées près d'un minerai d'uranium étaient impressionnées. Peu après Marie Curie montre que des composés du thorium ont un comportement analogue à celui des composés de l'uranium.

1 2 L'activité A d'un échantillon radioactif est le nombre de désintégrations qui s'y produisent par unité de temps. Unité : becquerel

1 3 T d'un élément radioactif est la durée nécessaire pour que la moitié de ses noyaux soit désintégrée (ou $A = A_o/2$).

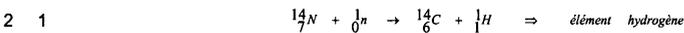
1 4
$$A = A_o e^{-\frac{\ln 2 \cdot t}{T}} \Rightarrow \text{pour } t = nT \quad A = A_o e^{-n \ln 2} \Rightarrow A = \frac{A_o}{2^n}$$

1 5 $A = f(t)$ est une exponentielle décroissante : à $t = 0$, $A = A_o$; à $t = T$, $A = A_o/2$; à $t = 2T$, $A = A_o/4$; à $t = nT$, $A = A_o/(2^n)$ (puissance n)

1 6 a Désintégrations α , noyaux d'hélium. Désintégrations β^- , électrons et antineutrinos. Désintégrations β^+ , positons et neutrinos. Des rayonnements γ accompagnent les émissions précédentes.

1 6 b Les particules émises sont plus ou moins pénétrantes, ionisantes et énergétiques. Elles provoquent des modifications cellulaires de la matière vivante. Chez l'homme, cela entraîne des lésions souvent très graves : brûlures, leucémies, cancers. Protection : murs de béton, boucliers d'acier.

1 7 Compteurs à gaz (Geiger-Müller) - Scintillateurs couplés à des photomultiplicateurs - Chambres d'ionisation



2 3 Dans un organisme vivant, un équilibre s'établit entre le carbone 14 absorbé et celui rejeté. Lorsque la vie cesse, il y a décroissance exponentielle en carbone 14. On détermine l'âge de l'organisme mort en évaluant l'activité de son carbone 14 et en comparant cette activité à celle d'un organisme vivant identique de même masse. Conditions d'utilisation de la méthode : l'âge de l'organisme doit être du même ordre de grandeur que T mais inférieur à 5τ (τ constante de temps); considérer comme invariante la teneur en carbone 14.

2 4
$$t = \frac{T}{\ln 2} \ln \left(\frac{A_o}{A} \right) = 5295 \text{ ans} \pm 37 \text{ ans} \quad (0,7\%)$$

Capes de sciences physiques

Concours interne

SECTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Épreuve de physique et électricité appliquée ♦ Session : 2003

PHYSIQUE

I.1

I.1.1 Réponse (c)

I.1.2 Application du théorème du moment cinétique

I.1.3

$$1 \quad \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} \quad \text{ou calculatrice } \theta_{\max} = 0,55 \text{ rad} = 31^\circ$$

$$2 \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$3 \quad \theta = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$$

I.1.4

$$1 \quad \theta = \frac{\Omega_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$2 \quad \theta_{\max} = \frac{\Omega_0}{\omega_0} = \Omega_0 \sqrt{\frac{L}{g}} = 0,45 \text{ rad} = 25,9^\circ$$

$$3 \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2,84 \text{ s}$$

I.2

I.2.1

$$1 \quad \Omega^2 = \Omega_0^2 - \frac{g}{L}(1 - \cos \theta)$$

$$2 \quad \Omega_{0\min} = \sqrt{\frac{2g}{L}} = 3,13 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

I.2.2

$$1 \quad a_r = -L\Omega_0^2 + g(1 - \cos \theta)$$

$$2 \quad T = mL\Omega_0^2 + mg(2 \cos \theta - 1)$$

$$3 \quad \Omega = 0 \text{ pour } \cos \theta = 1 - \frac{L\Omega_0^2}{g}$$

$$T = 0 \text{ pour } \cos \theta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{L\Omega_0^2}{g} \right)$$

d'où pour $\Omega_0 \leq \sqrt{\frac{L}{g}}$ oscillations

pour $\sqrt{\frac{L}{g}} \leq \Omega_0 \leq \sqrt{\frac{2L}{g}}$ corde non tendue

pour $\sqrt{\frac{2L}{g}} \leq \Omega_0$ révolution

I.3

I.3.1

$$1 \quad \theta = \theta_0 \cos \omega_0 t$$

$$2 \quad \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \Omega_{\max} = \omega_0 \theta_0$$

$$3 \quad t_0 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega_0}$$

I.3.2

1 $T = \frac{T_0}{2}$ période optimale ; $T = T_0$ période « enfantine »

2 la même $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0'^2 \theta = 0$ avec $\omega_0' = \sqrt{\frac{g}{L'}}$

3 conservation du moment cinétique entre les instants $t = t_0^-$ et $t = t_0^+$

$$\theta = A \sin \omega_0'(t - t_0) + B \cos \omega_0'(t - t_0)$$

$$-L^2 \omega_0 \theta_0 = L'^2 \omega_0' A'$$

$$\theta(t) = -\left(\frac{L}{L'}\right)^{\frac{3}{2}} \theta_0 \sin(\omega_0(t - t_0))$$

4 $t_1 - t_0 = \frac{T_0'}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L'}{g}} \quad \theta_{\max 1} = -\left(\frac{L}{L'}\right)^{\frac{3}{2}} \theta_0$

5 $\theta_{\max 2} = \left(\frac{L}{L'}\right)^{\frac{3}{2}} \theta_0 \quad \theta_{\max n} = (-1)^n \left(\frac{L}{L'}\right)^{\frac{3n}{2}} \theta_0$

6 Courbes

7 $\frac{\theta_{\max}}{\theta_0} = \left(\frac{L}{L'}\right)^{\frac{3n}{2}}$ d'où $n = \frac{2}{3} \cdot \frac{\ln\left(\frac{\theta_{\max}}{\theta_0}\right)}{\ln\left(\frac{L}{L'}\right)}$ soit $n = 11$

I.4

I.4.1

$$E_C = \frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

I.4.2

$$E_p = mgL(1 - \cos \theta)$$

I.4.3

$t = 0 \quad E_M = mgL(1 - \cos \theta_0)$

$t = t_0^- \quad E_M = mgL(1 - \cos \theta_0)$

1 $t = t_0^+ \quad E_M = mgL(1 - \cos \theta_1)$

$t = t_1^+ \quad E_M = mgL(1 - \cos \theta_1)$

$t = t_{(\theta_{\max n})}^+ \quad E_M = mgL(1 - \cos \theta_{\max n})$

2 courbes

3 Travail des forces intérieures

II.1

II.1.1

$$LC_0 \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$$

II.1.2

Rayonnement

$$u_C(t) = \frac{i_0}{C_0 \omega_0} \sin \omega_0 t = \sqrt{\frac{L}{C_0}} \sin \omega_0 t$$

$$i(t) = i_0 \cos \omega_0 t$$

Courbes

$$T_0 = 2\pi \sqrt{LC_0}$$

II.1.3

Courbes

II.2
II.2.1 Symétries

Signe des charges

II.2.2
$$U = - \int_0^{x_0} \text{grad}V \cdot d\vec{l} = \int_0^{x_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Qx_0}{S\epsilon_0}$$

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{x_0}$$

II.2.3 $x_0 \nearrow \Rightarrow C_0 \searrow \quad x_0 \searrow \Rightarrow C_0 \nearrow$

II.2.4
$$V_0 = -\frac{1-\beta}{\beta} V_e$$

II.2.5
$$V_0 = V_e - \frac{1}{jC\omega} i_e$$

II.2.6
$$Z_e = \frac{1}{j\frac{C}{\beta}\omega}$$

on a simulé un condensateur $C' = \frac{C}{\beta}$

on peut simuler de fortes valeurs de C' , on peut « piloter » la valeur de C par R

ÉLECTROTECHNIQUE

Q1 :

La tension vs(t) est nécessairement positive... D1 et D2 étant reliées par leurs cathodes, celle qui conduit est celle dont l'anode est au potentiel le plus haut :

D1 conduit de 0 à π

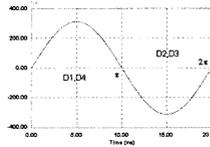
D2 conduit de π à 2π.

De la même manière, D3 et D4 étant reliées par leurs cathodes, celle qui conduit est celle dont le potentiel de cathode est le plus bas :

D3 conduit de π à 2π

D4 conduit de 0 à π.

De 0 à π D1 et D4 sont ON vs=ve
De π à 2π D2 et D3 sont ON vs=-ve.



Q2 :

Q3 :
$$\langle vs \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_{max} \sin \alpha t \cdot d\alpha t = \frac{V_{max}}{\pi} [-\cos \alpha t]_0^{\pi} = \frac{2V_{max}}{\pi}$$

$$\langle is \rangle = \frac{\langle vs \rangle}{R}$$

A.N. : $\langle vs \rangle = 198 \text{ V}$ $\langle is \rangle = 19,8 \text{ A}$

Q4 : Les intervalles de conduction sont inchangés.

Pour $0 < \omega t < \pi$

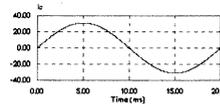
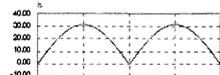
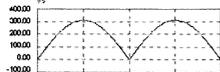
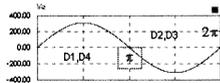
$$vs(t) = ve(t) = vs(t) = ve(t) = V_{max} \sin \alpha t = R \cdot is(t) + L \frac{dis}{dt}$$

• Solution générale sans second membre :

$$R \cdot is(t) + L \frac{dis}{dt} = 0$$

$$\frac{dis}{is} = -\frac{R}{L} dt$$

$$is = Ke^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$



- Solution particulière avec 2nd membre (plusieurs techniques possibles...) Cherchons la solution du régime établi. Comme l'excitation est sinusoïdale, on peut utiliser la notation complexe :

$$\underline{V} = R.I_s + jL\omega I_s$$

$$I_s = \frac{\underline{V}}{R + jL\omega} \quad \text{et donc} \quad |I_s| = \frac{|\underline{V}|}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \text{Arg}(I_s) = \text{Arg}(\underline{V}) - \arctg\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

On obtient la solution particulière sous la forme :
$$is(t) = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t - \arctg \frac{L\omega}{R})$$

Q5 : Pour $\pi < \omega t < 2\pi$
$$vs(t) = -ve(t) = -V_{max} \sin \omega t = R.is(t) + L \frac{dis}{dt}$$

Q6 : De 0 à π
$$is(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\omega t - \arctg \frac{L\omega}{R})$$

Or, vs(t) est périodique de période π ; la solution du régime établi pour is(t) sera, elle aussi, périodique de période π . On aura donc : $is(0) = -is(\pi/\omega)$

$$K + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(-\arctg \frac{L\omega}{R}) = Ke^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\pi - \arctg \frac{L\omega}{R})$$

d'où
$$K = \frac{2V_{max}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2} (1 - e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}})} \sin(\arctg \frac{L\omega}{R})$$
 A.N. $K = 28,43 \text{ A}$

On obtient la valeur du courant à l'instant $t=0$ $i(0) = 19,45 \text{ A}$

Q7 : La tension moyenne aux bornes d'une inductance est nulle.
Par conséquent $\langle vs \rangle = R \langle is \rangle$ d'où $\langle is \rangle = 19,8 \text{ A}$

Q8 : Si $L\omega \gg R$ on a un lissage parfait

Q9 :

Q10 :
$$I_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i_e^2(t) dt} = I_0$$

Q11 : La charge reçoit une puissance

$$P = RI_0^2 = \langle vs \rangle I_0 = \frac{2V_{max}}{\pi} I_0$$

La source délivre une puissance apparente

$$S = V_e I_e = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} I_0$$

D'où le facteur de puissance

$$F_p = \frac{P}{S} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0,9$$

La facteur de puissance renseigne de façon globale sur :

- la nature de la charge
- la présence d'harmoniques
- les déphasages
- les non-linéarités

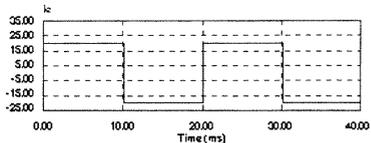
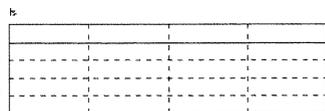
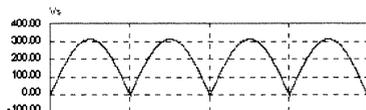
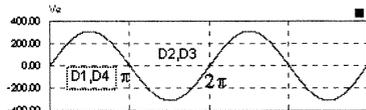
Pour délivrer $P=1 \text{ kW}$, la puissance apparente de l'installation doit être de $1,11 \text{ kVA}$.

Q12 : $ie(t)$ est une fonction périodique :

- Impaire \rightarrow Que des termes en sinus
- $ie(t) = -ie(t+T/2)$ \rightarrow Que des termes de rang impair.

$$ie(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\omega t \quad k \text{ impair}$$

avec
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i_e(\omega t) \sin(k\omega t) d\omega t = \frac{4I_0}{k\pi}$$



Comme la source est purement sinusoïdale, seul le fondamental de ie participe à l'échange de puissance active.

$$P = \frac{4I_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{2I_0V_{max}}{\pi} = \langle vs \rangle I_0$$

Q13 : $\langle i_{D1} \rangle = I_0/2$

Q14 : $I_{DI} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

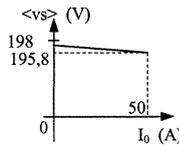
Q15 : $p(t) = \Delta v(t) i_{D1}(t) = 0,6 i_{D1}(t) + 0,01 i_{D1}^2(t)$
 $\langle p(t) \rangle = 0,6 \langle i_{D1} \rangle + 0,01 I_{D1}^2 = 0,6 I_0/2 + 0,01 I_0^2/2$

A.N. $\langle p(t) \rangle = 27,5 \text{ W}$

Pour évacuer cette puissance il est nécessaire de mettre un radiateur sur les diodes. Avec une différence de température maximale admissible, on obtient une résistance thermique maximale de :

$$R_{th} = \frac{\Delta\theta}{P} = 2,18^\circ\text{C/W}$$

Q16 : En notant que le courant traverse deux diodes, on obtient la caractéristique de sortie suivante :



Q17 :

Q18 : On a $L \frac{di_L}{dt} = ve(t) \quad (\omega > \alpha)$

$$di_L = \frac{V_{max}}{L} \sin(\alpha t) dt$$

$$i_L(\alpha t) = i_{L\alpha} + \frac{V_{max}}{L\omega} (\cos \alpha - \cos \alpha t)$$

Q19 : $L \frac{di_L}{dt} = ve(t) - V_S$

$$di_L = \left(\frac{V_{max}}{L} \sin(\alpha t) - \frac{V_S}{L} \right) dt$$

$$i_L(\alpha t) = i_{L\alpha} + \Delta\theta + \frac{V_{max}}{L\omega} (\cos(\alpha + \Delta\theta) - \cos \alpha t) - \frac{V_S}{L\omega} (\alpha t - (\alpha + \Delta\theta))$$

Ce courant est décroissant si $V_S > ve(t) \quad \forall t$

Q20 : $P = \frac{V_S^2}{R} = 90 \text{ W}$

Q21 : $P_{abs} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$

$$P_{abs} = \frac{90}{0.9} = 100 \text{ W}$$

Q22 : Avec un rendement de 90%, il vient :

$$I_{max} = \frac{200}{V_{max}} = 1 \text{ A}$$

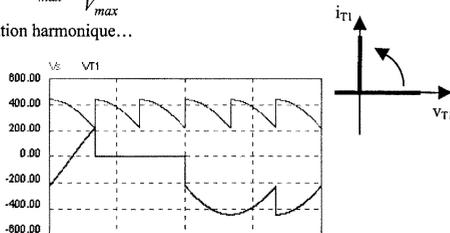
Q23 : Facteur de puissance unitaire ; pas de pollution harmonique...

Q24 :

Q25 : qq kA et qq kV.

Q26 :

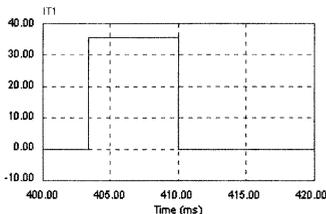
Q27 :



$$\langle vs \rangle = \frac{3}{\pi} \frac{\pi + \psi}{\sqrt{2} + \psi} \sqrt{3} V_{max} \sin\left(\alpha t + \frac{\pi}{6}\right) d\alpha t$$

$$\langle v_s \rangle = \frac{3V_{max}\sqrt{3}}{\pi} \cos \psi$$

Q28 : $I_f = I_L \sqrt{\frac{2}{3}}$ $F_p = \frac{P}{S} = \frac{3}{\pi} \cos \psi$



Q29 : Le montage est réversible en tension mais pas en courant. Il est donc réversible en puissance si la charge est susceptible de fournir elle-même de la puissance (charge active).

ÉLECTRONIQUE

A. Préliminaires

1. Puissances en régime sinusoïdal

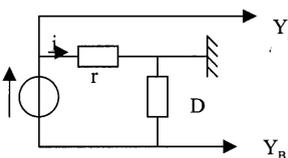
a) $p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} ((\cos \varphi) - \cos(2\omega t + 2\psi - \varphi))$

d'où $P = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos \varphi$ et $p_f(t) = -\frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(2\omega t + 2\psi - \varphi)$

b) $\cos(2\omega t + 2\psi - \varphi) = \cos(2\omega t + 2\psi) \cdot \cos \varphi + \sin(2\omega t + 2\psi) \cdot \sin \varphi$

d'où : $p_f(t) = -P \cos(2\omega t + 2\psi) - Q \sin(2\omega t + 2\psi)$ avec $Q = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \sin \varphi$

c)



Y_A voie 1 d'un oscilloscope à entrée différentielle
Visualisation de l'image de $i(t)$.

Y_B voie 2 de l'oscilloscope.
Inversée, visualisation de $u(t)$.

DR1 : $i(t)$ est en avance sur $u(t)$: Dipôle capacitif.

2. Puissance en régime périodique

a) $p(t) = U_0 I_0 + \sum_{i=1}^{\infty} U_{im} \sin(i\omega t + \psi_i) \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k)$

b) $\sin(i\omega t + \psi_i) \cdot \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) = \frac{1}{2} (\cos((i+k)\omega t + \psi_i + \psi_k - \varphi_k) + \cos((i-k)\omega t + \psi_i - \psi_k + \varphi_k))$

si $i \neq k$, la valeur moyenne de ce terme sur une période est nulle.

Si $i = k$, la valeur moyenne est égale à $\frac{1}{2} \cos \varphi_k$.

La valeur moyenne de $p(t)$ vérifie donc l'expression proposée.

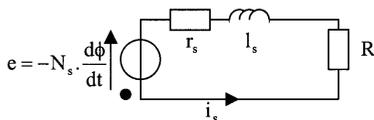
B. Mesure du courant.

1. Mesure avec un transformateur d'intensité.

1. $N_c i - N_s i_s = \mathcal{R} \cdot \phi$

2.

a)



b) loi des mailles

c) $N_s p \phi(p) = (r_s + R) I_s(p) + l_s p I_s(p)$ d'où, $H(p) = \frac{N_s p}{(r_s + R) + l_s p}$

3. D'après le schéma fonctionnel,

$\phi = \frac{N_e}{\mathcal{R}} (1 - \frac{N_s}{N_e} I_s)$ soit $\mathcal{R} \phi = N_e I_e - N_s I_s$ cf I.1.

et $I_s = H \phi$ cf I.2.c.

4. a) $H' = \frac{\frac{N_e}{\mathcal{R}} H}{1 + \frac{N_e}{\mathcal{R}} H \cdot \frac{N_s}{N_e}}$. En développant, on obtient les résultats proposés.

b) Réponse harmonique du système.

α . $H'(j\omega) = A \cdot \frac{j\omega}{j\omega + \omega_0} = A \cdot \frac{1}{1 - j \frac{\omega_0}{\omega}}$

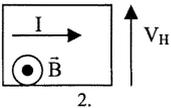
β . $H'(\omega) = \frac{A}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \cdot \lim_{\omega \rightarrow 0} H' = 0$ et $H' = A$. Filtre passe-haut. La composante continue est éliminée.

γ . $A = \frac{N_e}{N_s}$.

δ . La composante continue du courant $i(t)$ est éliminée. Si cette composante existe, elle n'est pas mesurée. La mesure de la puissance peut être incorrecte.

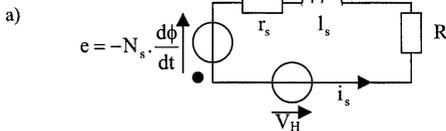
II. Utilisation d'un capteur à effet Hall.

1.



Conducteur parcouru par un courant I placé dans un champ magnétique : apparition d'une tension V_H proportionnelle à l'intensité du champ magnétique. La force de Lorentz permet d'expliquer ce phénomène.

2.



b) $N_s \frac{d\phi}{dt} + k\phi = (r + R_s) i_s + l_s \frac{di_s}{dt}$

c) $(N_s p + k)\phi = (r_s + R + l_s p) I_s$ d'où l'expression demandée.

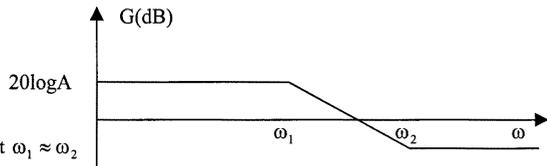
3. voir Document réponse.

4. Réponse du système

a) $A = \frac{N_e}{N_s}$, $\omega_2 = \frac{\mathcal{R}(r_s + R)}{N_s^2} + \frac{k}{N_s}$

b) $H''(j\omega) = A \cdot \frac{1 - j \frac{\omega_1}{\omega}}{1 - j \frac{\omega_2}{\omega}}$

$$c) G = 20 \log A + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2}$$



d) Pour que l'amplification soit constante, il faut $\omega_1 \approx \omega_2$

$$\text{or } \omega_1 = \frac{k}{N_s} \text{ et } \omega_2 = \omega_1 + \frac{\Re(r_s + R)}{N_s}$$

$$\omega_1 \approx \omega_2 \text{ si } k \gg \frac{\Re(r_s + R)}{N_s}$$

C. Multiplieurs

I. Multiplieur analogique

1. étage différentiel.

$$a) \frac{i_{C1}}{i_{C2}} = \exp\left(\frac{v_{BE1} - v_{BE2}}{V_T}\right) = \exp\left(\frac{v_1 - v_2}{V_T}\right)$$

$$b) i_{C1} + i_{C2} = I.$$

$$\text{On pose } x = \frac{(v_1 - v_2)}{2V_T}. \text{ On montre alors que } i_{C1} = \frac{I}{1 + \exp(-2x)} \text{ et } i_{C2} = \frac{I}{1 + \exp(2x)}$$

$$\text{On vérifie alors : } i_{C1} - i_{C2} = I \cdot \text{th}x = I \cdot \text{th}\left(\frac{v_1 - v_2}{2V_T}\right)$$

2. principe de réalisation

$$a) v = R_C(i_1 - i_2) \text{ soit } v = R_C((i_{C3} + i_{C5}) - (i_{C4} + i_{C6})) = R_C((i_{C3} - i_{C4}) - (i_{C6} - i_{C5}))$$

$$b) v_X = v_{BE6} - v_{BE5} = v_{BE3} - v_{BE4}$$

$$d'où i_{C3} - i_{C4} = i_{C1} \text{th} \frac{v_X}{2V_T} \text{ et } i_{C6} - i_{C5} = i_{C2} \text{th} \frac{v_X}{2V_T}$$

$$\text{On obtient : } v = R_C(i_{C1} - i_{C2}) \text{th} \frac{v_X}{2V_T}$$

$$c) i_{C1} - i_{C2} = I \cdot \text{th} \frac{v_Y}{2V_T} \text{ d'où } v = R_C \cdot \text{th} \frac{v_X}{2V_T} \cdot \text{th} \frac{v_Y}{2V_T}$$

$$d) v = \frac{R_C I}{4V_T^2} \cdot v_X \cdot v_Y \text{ soit } h = \frac{R_C I}{4V_T^2}$$

II. Multiplieur à modulation

1. Générateur de signaux triangulaires.

a) Etage 1 :

L'ampli opérationnel est bouclé sur l'entrée non inverseuse, il fonctionne en comparateur : $v_2 = \pm V_{CC}$

$$-v_2 = +V_{CC} \Rightarrow e_d \geq 0 \Rightarrow v_1 \geq -\frac{V_{CC}}{2}$$

$$-v_2 = -V_{CC} \Rightarrow e_d \leq 0 \Rightarrow v_1 \leq \frac{V_{CC}}{2}$$

Comparateur à hystérésis non inverseur.

b) Etage 2 :

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{v_2}{RC}$$

$$v_1(t) = -\frac{V_2}{RC} \cdot t + v_1(0)$$

c) Etude de l'oscillateur :

La tension évolue linéairement de $\frac{V_{CC}}{2}$ à $-\frac{V_{CC}}{2}$, seuil de commutation du trigger. v_2 bascule alors à $-V_{CC}$.

La tension évolue ensuite linéairement de $-\frac{V_{CC}}{2}$ à $\frac{V_{CC}}{2}$, seuil de commutation du trigger. v_2 bascule à V_{CC} .

Première demi-période : $v_1(t) = -\frac{V_{CC}}{RC} \cdot t + \frac{V_{CC}}{2}$

Deuxième demi-période : $v_1(t) = \frac{V_{CC}}{RC} \cdot t - \frac{V_{CC}}{2}$

$T = 2RC$.

2. Modulation du rapport cyclique

a) L'ampli opérationnel fonctionne en comparateur.

$v_1 > v_u$ alors $v_3 = V_{CC}$. $v_1 < v_u$ alors $v_3 = -V_{CC}$.

$$T_1 = T \left(\frac{E}{V_{CC}} + \frac{1}{2} \right) \text{ et } T_2 = T \left(\frac{1}{2} - \frac{E}{V_{CC}} \right)$$

3. Amplificateur commandé.

a) $v_3 = V_{CC}$, R_{DS} est infinie, $v_4 = v_i$.

$v_3 = -V_{CC}$, R_{DS} est nulle : $v_4 = -v_i$.

b) cas particulier :

$$v_4(t) = \frac{v_3(t) \cdot v_i(t)}{V_{CC}} = (2a - 1) \cdot K \cdot I_m \sin(2\pi f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \cdot K \cdot I_m}{V_{CC}} \sin(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi n f' t + \varphi_n)$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

Le second terme de l'expression ci-dessus peut s'écrire comme la somme de fonction sinusoïdales de fréquence $n f' \pm f_0 = (n \cdot 500 \pm 50)$ Hz.

Le premier terme a pour fréquence $f_0 = 50$ Hz.

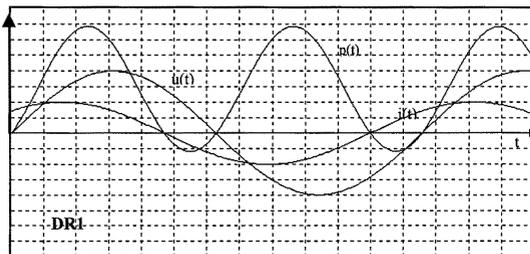
En remplaçant A par son expression en fonction de T_1 et T_2 on obtient le résultat demandé.

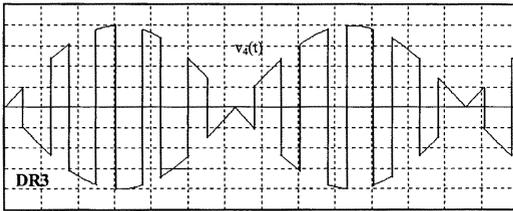
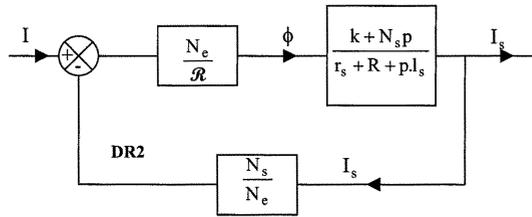
4. Etude du montage complet :

On sait que (question 2) $\frac{T_1 - T_2}{T} = \frac{2 \cdot v_u(t)}{V_{CC}}$, $v_u(t) = A \cdot u(t)$ et $v_i(t) = K \cdot i(t)$. On remplace dans l'expression de $v_4(t)$.

b) Filtre passe-bas de fréquence de coupure supérieure à 100 Hz mais inférieure à la fréquence de $F(t)$.

c) Puissance active est la valeur moyenne de $p(t)$: Filtre passe-bas de fréquence de coupure bien inférieure à 100 Hz.







Les bons de commande

Publications hors abonnement et numéros anciens

Serveur de l'UdPPC : http://www.udppc.asso.fr/					Année ou numéro	Prix unitaire	Nombre d'exem- plaires	Prix total
BROCHURES DOCUMENTAIRES ET PÉDAGOGIQUES								
◆ Nouveaux programmes de 3 ^e					1999	16,5 € × =
◆ Le collage : le moyen intelligent d'assembler (Michel BARQUINS)					2001	11 € × =
CONCOURS : CAPES ET AGRÉGATION								
	1995	1996	1997	1998				
◆ Énoncés	784 (2) 9,5 €		802 (2) 10 €	812 (2) 11 € × =
◆ Solutions	784 (3) 12 €	792 (3) 13 €	802 (3) 13,5 €	812 (3) 14 € × =
	1999	2000	2001	2002				
◆ Énoncés	817 (2) 12 €	824 (2) 12,5 €	834 (2) 12 €	845 (2) ^(*) 13 € × =
◆ Solutions	822 (2) 14,5 €	838 (2) 15 €	849 (2) 16 €	857 (2) 17€ × =
	2003							
◆ Énoncés	859 (2) 13 €			 × =
◆ Solutions	862 (2) 16,5 €			 × =
CONCOURS DES GRANDES ÉCOLES								
◆ 1998 (36 €), 1999 (36,5 €), 2000 (37 €), 2001 (38 €), 2002 (38,5 €), 2003 (42 €)				 × =
BREVETS DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR								
◆ 1997 (14,5 €), 1998 (12 €) <i>Sur le serveur : 1999</i>				 × =
BACCALURÉATS TECHNOLOGIQUES								
◆ <i>Sur le serveur : 1999, 2000</i>				 × =

(*) Épuisé, version polycopiée disponible.

	Année ou numéro	Prix unitaire	Nombre d'exem- plaires	Prix total
BULLETINS				
◆ Tables des matières quinquennales : 641 (jusqu'à 1980) - 795 (1) (1991-1995)	6,50 € × =
◆ Autres bulletins : 787, 788, 790-791*, 792 à 793, 795, 797*, 798 à 805, 807 à 820, 821*, 822 à 827, 829*, 830 à 839*, 840 à 843, 849 à 853, 853*, 854 à 862	6,50 € × = = =
NUMÉROS SPÉCIAUX				
◆ « Matériaux » (numéro double)	790-791	11 € × =
◆ « 90 ans »	797	12 € × =
◆ « Le génie des procédés »	821	6,50 € × =
◆ « La sécurité au laboratoire de chimie »	829	6,50 € × =
◆ « Regards européens »	839	6,50 € × =
◆ « Enseignement technologique »	853 (2)	6,50 € × =
◆ « Enseignement supérieur » : 1995 à 2003	6,50 € × =
		TOTAUX = €
Supplément pour expédition à l'étranger (le volume : 1 €)				+
MONTANT DE LA COMMANDE (Titre de paiement ci-joint à l'ordre de l'UdPPC)				=

* Numéro spécial (voir tarif dans la rubrique « Numéros spéciaux »).

SUR LE SERVEUR http://www.udppc.asso.fr/
--

Les énoncés des sujets des baccalauréats technologiques et des brevets de technicien et de technicien supérieur sont maintenant disponibles sur le serveur sous forme de « documents à coût partagé »⁽¹⁾. Il n'est plus proposé de version papier.

(1) Attention : il ne s'agit pas d'un abonnement à une édition électronique ; nous vous demandons seulement de participer aux frais en envoyant à l'UdPPC un chèque forfaitaire de 3 à 7,5 € selon le nombre de sujets que vous téléchargez (de 1 à 5 et plus) avec la mention « Téléchargement serveur ».

	Prix unitaire	Quantité	Prix total
BASE DE DONNÉES « BUPDOC »			
♦ Deux cédéroms (pour PC et Mac) comprenant : – BUPTXTE : 20 ans d'articles « plein texte » (1980-1999) – BUPINDEX : 6500 notices bibliographiques (1907-2001) – et le logiciel	<i>Licence 1 : Individuelle</i>		
	Adhérent UdPPC	Public	
	40 €	63 € = €
	<i>Licence 2 : Établissement</i>		
	Ets abonné au BUP	Public	
	80 €	126 € = €
COOPÉRATION EUROPÉENNE « EURENERG - EURWORK » (Projet Comenius)			
♦ Eurenerg : une base de documents pédagogiques de différents pays européens sur le thème de l'énergie	8 € × = €
♦ Eurwork : programme de mise à jour de la base Eurenerg	4 € × = €
♦ Eurenerg + Eurwork	10 € × = €

PAIEMENT

Envoyer le bon de commande et le titre de paiement à :

UNION DES PROFESSEURS DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE

44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06

Adresse d'expédition (à remplir en majuscules)

M. Mme Mlle NOM : Prénom :

Adresse :

.....

Code postal : Localité :

Pays :

Ci-joint mon règlement de € par chèque bancaire chèque postal

L'Union des professeurs de physique et de chimie - UdPPC -

Une association active
de professeurs
de l'enseignement secondaire,
de l'université, de chercheurs...



Des échanges au niveau régional
des journées nationales :
conférences, visites, formations...

Des partenariats :
olympiades nationales de la chimie,
olympiades de physique,
écoles d'été...

Contacts

Siège social et courrier :

44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06

Secrétariat administratif (adhésion et abonnement) :

☎ 01 43 25 61 53 ☎ 01 43 25 07 48

Adhésion et abonnement par internet : udp.bup@udp-bup.org

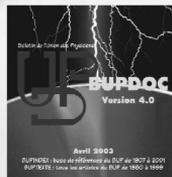
Secrétariat général de l'association : udppc@club-internet.fr

Un bulletin scientifique
Le Bup physique chimie...



Publication mensuelle
♦ articles scientifiques
♦ applications pratiques
♦ vie de l'association
♦ réflexion sur l'évolution de l'enseignement.

...et sa base documentaire et de textes
BUPDOC



Toutes les références
de tous les articles (1907-2001)
et 20 ans d'articles plein texte (1980-1999)

Vous êtes enseignant ? chercheur ?

Envoyez-nous des articles scientifiques, historiques, pédagogiques...
Secrétariat de la rédaction du bulletin : bup.secretaire@club-internet.fr

Venez découvrir notre association, nos activités, le bulletin...
<http://www.udppc.asso.fr/>

Rejoignez-nous

- ♦ en vous abonnant au bulletin
- ♦ en adhérant à l'association

Le Directeur de la publication : Madeleine Sonnevile

Réalisation : Union des professeurs de physique et de chimie
Imprimé en France par SPEI - 54425 Pulnoy

Numéro commission paritaire : 62628 - Dépôt légal : 1^{er} trimestre 2004