

Sommaire des pages spéciales du n° 872
(Mars 2005)

AGRÉGATION DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours externe)	
Option physique	
- Composition de physique	3
- Composition de chimie	29
- Problème de physique	43
Option chimie	
- Composition de chimie	63
- Composition de physique	97
Option physique et électricité appliquées	
- Composition de physique	107
- Composition d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique	135
- Problème d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique	153
AGRÉGATION DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours interne)	
Composition sur la physique et le traitement automatisé de l'information	185
Composition avec exercices d'application	
- Option physique et chimie	195
- Option physique appliquée	211
CAPES DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours externe)	
Section physique et chimie	
- Composition de physique avec applications	237
- Composition de chimie avec applications	249
Section physique et électricité appliquée	
- Composition de physique avec applications	255
- Composition d'électronique - électrotechnique avec applications	267
CAPES DE SCIENCES PHYSIQUES (Concours interne)	
Section physique et chimie	
- Épreuve de physique et chimie	293
Section physique et électricité appliquée	
- Épreuve de physique et électricité appliquée	301
L'UNION DES PROFESSEURS DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE	
Les bons de commande	310
Renseignements divers	I à VIII

Le sommaire du n° 872 est en deuxième et troisième de couverture

ISSN 1770-1368

PAGES SPÉCIALES
du n° 872
Mars 2005

publication mensuelle
99^e année

Mars 2005

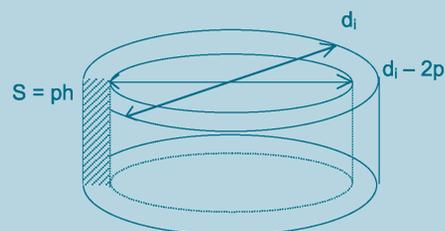
PAGES SPÉCIALES DU N° 872 : Agrégations et Capes 2004 : les corrigés



Le Dup

Physique

Chimie



Agrégations et Capes 2004
Les corrigés

UNION DES PROFESSEURS DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE
44, bd Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06

<http://www.udppc.asso.fr/>

**Sommaire du n° 872
(Mars 2005)**

Éditorial : Entre la loi d'orientation et le quotidien des professeurs :
les vraies questions sont-elles posées ?
(Madeleine SONNEVILLE).....313

Cryptage du son et traitement numérique
(Hervé IDDA)319

À propos de l'instrumentation en France
(Claude TERRIEN)355

Détermination expérimentale de grandeurs thermodynamiques
(Jean-Claude CANÉVET et Ben-Li ZHANG)361

Représentation complexe des opérateurs linéaires en électronique
(Roland BICHARD, Anne CAPDEVIELLE et Christophe FERRY)369

Prix Nobel de chimie 2004
(Alfred MATHIS)381

Réactions « totales » en solution aqueuse
(Ludovic LOPES).....385

Internet
- Des souris et des profs... (Thibaut PLISSON)397

VIE DE L'ASSOCIATION

Activités de l'UdPPC
- Sur votre agenda...400
- L'UdPPC au fil des jours...401
- Compte-rendu du Conseil403
- Fiches de synthèse : collège - formation initiale et continue419

INFORMATIONS - LIVRES ET LOGICIELS

Paru au B.O. (Jean WINTHER)426

Informations
- L'Observatoire de Paris se mobilise à l'occasion
de l'Année mondiale de la physique427
- Journées d'étude : « Histoire des sciences : formations et recherches en IUFM »428
- Cycle de conférences scientifiques à l'occasion du cinquantenaire
du Centre scientifique d'Orsay et de l'Année mondiale de la physique430
- L'Espace des sciences de Paris.....431

Les bons de commande433

Suite du sommaire en troisième de couverture

*Le sommaire des pages spéciales du n° 872
est en quatrième de couverture.*

L'UNION DES PROFESSEURS DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE

Les responsables nationaux.....I à III
Le Bup physique-chimie.....IV à V
Les tarifs des cotisations et abonnementsVI à VII
Les bureaux académiques.....VIII

PublicitésIX à XII

Union des professeurs de physique et de chimie

Siège social

Union des professeurs de physique et de chimie - 44, bd Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06.
Aucune permanence n'est assurée à cette adresse.

MEMBRES D'HONNEUR

M. Michel BOYER

Professeur émérite à l'Université Paris VI
Président des Olympiades nationales de la chimie.

M. Claude COHEN-TANNOUJJI

Membre de l'Académie des sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Jean-Marie LEHN

Membre de l'Académie des sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Georges CHARPAK

Membre de l'Académie des sciences
Prix Nobel.

M. Pierre-Gilles de GENNES

Membre de l'Académie des sciences
Professeur au Collège de France
Prix Nobel.

M. Pierre LÉNA

Membre de l'Académie des sciences
Professeur à l'Université Paris VII.

M. Yves QUÉRÉ

Membre de l'Académie des sciences.

PRÉSIDENTS D'HONNEUR

F. BLAIN, A. DURUPHY, J.-P. FOULON, J. GATECEL, J. MAUREL, J. TINNÈS, A. TOUREN.

POUR COMMUNIQUER AVEC L'ASSOCIATION

<http://www.udppc.asso.fr/>

1. Service des adhésions à l'UdPPC et des abonnements au BUP

Serveur administratif (adhésions et abonnements) : <http://www.udp-bup.org>

Tél. : 01 43 25 61 53 (10 h - 12 h et 14 h - 16 h sauf mercredi après-midi)

Fax : 01 43 25 07 48

Mél. : secretariat.national@udppc.asso.fr

2. Secrétariat général de l'association

Mél. : secretariat.national@udppc.asso.fr

3. Secrétariat de la rédaction du bulletin (relations avec les auteurs et les annonceurs) pour les questions relatives au service du bulletin, voir rubrique n° 1 ou n° 2

Mél. : lebup.secretaire@udppc.asso.fr

Le conseil

Membres de droit

F. BLAIN, A. DURUPHY, J.-P. FOULON, J. GATECEL, J. MAUREL, J. TINNÈS, A. TOUREN.

Les présidents des sections académiques font, de droit, partie du Conseil de l'Union des professeurs de physique et de chimie (UdPPC) (voir pages ci-après).

Membres élus (renouvelable par tiers chaque année)

2002 : M. BASUYAUX (élu 2003), G. BAUDRANT, G. DUPUIS, S. GRUNEISEN, E. LAVOISIER (élue 2004), O. LEFEBVRE, G. TORCHET, J. WINTHER.

2003 : G. BOUYRIE, R. CARPENTIER, N. CHEYMOL, D. DUCOURANT, B. HEUZÉ, A. LEURIDAN, M.-A. MARTENS, G. SERRA.

2004 : M. BIAU, J. BOULOUMIÉ, S. ÉVRARD, P. COUSANDIER, D. LAUNER, S. MERMIER, J.-L. RICHTER, J. VINCE.

Le bureau national

Présidente

Madeleine SONNEVILLE - 29, rue Edmond About - 92350 LE PLESSIS-ROBINSON -
Tél. : 01 43 50 79 12 - madeleine.sonneville@planetis.com
Questions générales, relations internationales.

Vice-président(e)s

Bernard CIROUX - 2 bis, rue Paul Claudel - 71530 CHAMPFORGEUIL -
Tél. : 03 85 41 43 30 - bernard.ciroux@ac-dijon.fr
Laboratoires - Voies technologiques - Lycées professionnels.

Micheline IZBICKI - 50, chemin de Buglise - 76290 MONTIVILLIERS
Tél. : 02 35 30 50 27 - miizbicki@aol.com
Chimie - Sécurité - Olympiades de la chimie.

Jean-Charles JACQUEMIN - 2, boulevard Magenta - 75010 PARIS -
Tél. : 01 42 06 02 37 - jc.jacquemin@noos.fr
Lycées.

Vincent MAS - 6, boulevard Foment de la Sardane - Le moulin à vent - 66000 PERPIGNAN -
Tél. : 04 68 22 15 67 - Vincent.Mas@ac-montpellier.fr
Collèges.

Stéphane OLIVIER - 26, rue des Cordelières - 75013 PARIS -
Tél. : 01 45 35 75 53 - st.olivier@club-internet.fr
Physique - Liaisons avec l'enseignement supérieur.

Bulletin de l'Union des professeurs de physique et de chimie

Rédacteur en chef

André GILLES - Sauveterre - 31320 AUREVILLE -
Tél. : 05 61 76 76 25 - Fax : 05 61 76 76 24 - lebup.redaction@udppc.asso.fr

Rédacteur en chef adjoint

Jean-Pierre DAVAL - 5, rue Jean Jaurès - 92370 CHAVILLE -
Tél. : 01 47 50 34 46.

Trésorier

François VILLEDARY - 10, rue de la Bergerie - 91300 MASSY -
Tél. : 01 69 30 47 43 - villedary.Fy@wanadoo.fr

Secrétaire général

Gilles GALLIN-MARTEL - 24, rue Alfred de Musset - 74600 SEYNOD -
Tél. : 04 50 69 57 15 - gallin-martel.gilles@wanadoo.fr
Relations avec les sections académiques.

Secrétaires générales adjointes

Edith PIGANEAU - 58, rue du Rôle - 91800 BRUNOY -
Tél. et Fax : 01 69 43 72 81 - edith.piganeau@club-internet.fr
Lycées.

Monique SCHWOB - 39, rue de la Prévôté - 57950 MONTIGNY-LÈS-METZ -
Tél. : 03 87 38 02 59 - schwob.m@wanadoo.fr
Secrétariat administratif - Serveurs et base documentaire - Relations avec les associations étrangères.

Membres

Jean-Marie BIAU - 3, allée Val Prévert - 69400 LIMAS -
Tél. : 04 74 65 37 50 - jean-marie.biau@ac-lyon.fr
Physique appliquée - Voie technologique STI.

Rosine FANGUET - 13, allée de la Butte - 13500 MARTIGUES -
Tél. et Fax : 04 42 42 11 74 - rosine.fanguet@wanadoo.fr
Lycées - Chimie.

Michèle GOUÉDARD - 34 bis, rue du Docteur Le Savoureux - 92290 CHATENAY-MALABRY -
Tél. : 01 46 60 08 33 - Gerard.GOUEDARD@wanadoo.fr
Relations extérieures chimie.

Marie-Françoise KARATCHENTZEFF - 30 bis, rue Elisée-Reclus - 91120 PALAISEAU -
Tél. : 01 60 10 13 92 - mfkarat@free.fr
Lycées - Physique.

Olivier KEMPF - 15, rue Louis Flamant - 02400 CHÂTEAU-THIERRY -
Tél. : 03 23 69 28 30 - okempf@club-internet.fr
Serveurs et base documentaire.

Michel MÉTROT - 183, rue François Perrin - 87000 LIMOGES -
Tél. : 05 55 49 03 16 - michelmetrot@limousin.iufm.fr
Formation IUFM.

Cathy PARIS - 11, rue Matabiau - 31000 TOULOUSE -
Tél. : 05 61 62 22 79 - cathy.paris@ac-toulouse.fr
Collèges.

Chargé(e)s de mission auprès du bureau

Jacques BOULOUMIÉ - 17, hameau de la Caravelle - 91650 BREUILLET -
Tél. : 01 64 58 43 34 - Fax : 01 69 94 09 61 - bouloumi@club-internet.fr
Trésorerie - Comptabilité.

Huguette GRIMAUD - Aurore E - 134, rue Curat - 34090 MONTPELLIER
Tél. et Fax : 04 67 72 80 24 - huguette.grimaud@wanadoo.fr
Olympiades de physique.

Élyane YACINE - 4, rue des Bouleaux - 63100 CLERMONT-FERRAND
Tél. / Fax : 04 73 30 85 07 - lebup.publicite@udppc.asso.fr
Publicité.

« Le Bup physique-chimie »

Rédacteur en chef

André GILLES - Sauveterre - 31320 AUREVILLE -

Tél. : 05 61 76 76 25 - Fax : 05 61 76 76 24 - lebup.redaction@udppc.asso.fr

Comité de rédaction

Rédacteur en chef : André GILLES.

Rédacteur en chef adjoint : Jean-Pierre DAVAL.

Comité de rédaction : L. DETTWILLER, G. DUPUIS, A. GILLES, J. JOURDAIN, D. LAUNER, F. LAVERNHE, E. PIGANEAU, F. ROGER, J. TINNÈS, B. VELAY, J. WINTHER.

Directeur de la publication

Madeleine SONNEVILLE - 29, rue Edmond About - 92350 LE PLESSIS-ROBINSON -

Tél. : 01 43 50 79 12 - madeleine.sonneville@planetis.com

Publicité

Elyane YACINE - 4, rue des Bouleaux - 63100 CLERMONT-FERRAND -

Tél. / Fax : 04 73 30 85 07 - lebup.publicite@udppc.asso.fr

Secrétariat de la rédaction du bulletin

Mél. : lebup.secretaire@udppc.asso.fr

Publication des articles

Tout article ou communication doit être adressé en **triple exemplaires** à :

Union des professeurs de physique et de chimie

A l'attention du rédacteur en chef

44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06.

Dès réception l'expéditeur en est avisé (ne pas oublier de fournir une adresse postale complète, et si possible une adresse électronique et un numéro de téléphone).

Les manuscrits sont ensuite soumis, par le comité de rédaction, au comité de lecture pour avis. L'avis du comité de lecture est strictement anonyme. Le comité de rédaction donne ou refuse son accord à la publication ou bien demande des modifications. L'auteur en est immédiatement avisé. En cas d'acceptation, **aucun engagement sur la date de publication ne peut être fourni**. Les manuscrits ne sont renvoyés à l'auteur qu'en cas de refus de publication.

L'auteur reçoit les épreuves de son article si possible par courrier électronique, aux fins de vérifier sa conformité à l'original et s'engage à renvoyer les épreuves corrigées dans les huit jours suivant leur réception. Après publication, il reçoit dix tirés à part sur demande et un fichier pdf de l'article sous sa forme définitive.

Recommandations aux auteurs

Un document récapitulatif des principales consignes typographiques concernant la présentation des articles est disponible sur le serveur de l'UdPPC à l'adresse :

<http://www.udppc.asso.fr/bup/auteurlebup.html>

Tout article doit impérativement être accompagné d'un résumé de quelques lignes.

Joindre le fichier informatique correspondant, sur disquette ou cédérom, dans un format usuel (indi-

quer le logiciel utilisé et le numéro de version).

Si l'article comporte **des figures** :

- ◆ Celles-ci seront insérées dans le texte ou leur position repérée clairement.
- ◆ Si les figures n'existent que sous forme papier, elles doivent être tracées avec soin sur feuille séparée (éviter le calque). Fournir des originaux, éviter les photocopies ; en cas de nécessité fournir des photocopies laser d'excellente qualité.
- ◆ Si les figures existent sous forme numérique :
 - l'épaisseur des traits, dans le cas de graphiques, doit être au minimum de 0,5 point ;
 - pour des images au trait, la définition doit être au minimum de 1200 dpi dans la dimension finale souhaitée ;
 - pour des images en niveau de gris ou en couleur, la définition doit être au minimum de 300 dpi dans la dimension finale souhaitée ;
 - **fournir impérativement les fichiers séparés de chaque image au format tif ou eps** ;
 - insérer éventuellement les images dans le texte pour en repérer la position.

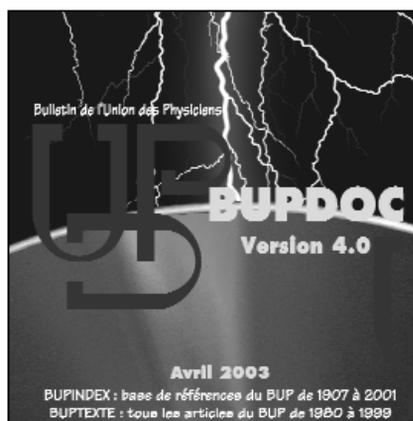
Si l'article comporte **des photos**, fournir dans la mesure du possible les originaux papier ou diapositives. Ces originaux seront retournés à l'auteur dès la publication.

Si l'article est accepté, une photo d'identité sera demandée aux auteurs.

Pour la bibliographie des articles du Bup, la base documentaire BUPDOC4 sur cédérom est en vente à l'UdPPC.

« BUPDOC4 »

Base documentaire du bulletin Le Bup physique-chimie



*Les références de tous les articles depuis 1907
20 ans d'articles plein texte (1980-1999)
Un logiciel d'interrogation documentaire*

Responsable : Monique SCHWOB.

schwob.m@wanadoo.fr

Les tarifs des cotisations et abonnements

Réadhésion par Internet

<http://www.udp-bup.org>

Réadhésion « papier » : Voir encart cartonné dans les bulletins de juillet/août/septembre, octobre, novembre et décembre.

Dans les deux cas :

- adressez-vous à votre correspondant d'établissement (s'il existe) ;
- envoyez votre chèque par voie postale à l'Union des professeurs de physique et de chimie.

1. COTISATIONS ANNUELLES : membres actifs ou adhérents

Le paiement de la cotisation seule ne donne pas droit au service du bulletin.

 **a - Tarif normal.....24 €**

b - Tarif réduit : retraité ou étudiant21 €

Le tarif étudiant est accordé aux intéressés sur leur demande et après envoi d'une pièce justificative de leur qualité.

c - Tarif spécial : enseignant de collègue

Un enseignant en collège peut opter pour l'une des deux possibilités ci-dessous :

- cotiser selon les tarifs du paragraphe 1a,
- verser une cotisation de25 €

Dans ce cas les trois numéros spécialement consacrés aux collèges seront envoyés gracieusement.

Moyennant paiement de la cotisation, la qualité de membre actif est réservée aux professeurs et aux membres du personnel de laboratoire de sciences physiques de l'enseignement public et de l'enseignement privé sous contrat d'association avec l'État, en activité ou en retraite et aux chercheurs des établissements publics ; celle de membre adhérent à toute autre personne. Le non-paiement de la cotisation entraîne la radiation de membre de l'Union des professeurs de physique et de chimie. La qualité de membre de l'Union des professeurs de physique et de chimie permet de participer aux activités nationales et académiques de l'association.

2. ABONNEMENT AU BULLETIN « LE BUP » (Année civile 2005)

	France métropolitaine et D.O.M. (dont TVA à 2,1 %)	Étranger	
		Abonnement (exonéré de la TVA)	Expédition*
a - Membres actifs ou adhérents (prix préférentiel réservé aux membres de l'association à jour de leur cotisation)			
 Normal	36 €	35,26 €	13 €
Réduit (retraité, étudiant)	31 €	-	-
b - Collectivités (collège, autre établissement, personne morale, bibliothèque, laboratoire...)			
Collège	85 €	-	-
Autre que Collège	110 €	107,74 €	22 €
c - Individuel non membre de l'association			
Prix public	60 €	58,77 €	13 €

* Pour l'expédition par voie aérienne, consulter les tarifs ci-après, paragraphe 4.

L'abonnement est annuel et comprend :

- pour les individuels : les dix numéros du BUP de janvier à décembre.
- pour les collectivités **collèges** : les dix numéros du BUP, du 1^{er} mai 2005 au 30 avril 2006 plus les deux cahiers énoncés et corrigés des concours d'Agrégations et CAPES de 2005 ;
- pour les collectivités **sauf** collèges : les dix numéros du BUP, du 1^{er} mai 2005 au 30 avril 2006 plus les deux cahiers énoncés et corrigés des concours d'Agrégations et CAPES de 2005 plus **le cahier Enseignement Supérieur**.

L'abonnement individuel est à régler à compter du 1^{er} octobre 2004 et avant le 1^{er} décembre 2004. Pour tous règlements ultérieurs, les numéros du bulletin qui seront épuisés seront remplacés par des numéros des années antérieures.

3. CHANGEMENT D'ADRESSE

Toute demande de changement d'adresse d'expédition du bulletin peut être faite directement par Internet. Par courrier, précisez l'ancienne et la nouvelle adresse.

4. TARIFS DES EXPÉDITIONS DU BULLETIN PAR VOIE AÉRIENNE (hors CEE)

Les membres de l'Union des professeurs de physique et de chimie qui en feront la demande lors du paiement de l'abonnement, pourront recevoir le bulletin par avion, à condition de rajouter les frais d'expédition indiqués ci-dessous au tarif d'abonnement : France pour le Régime intérieur et assimilé, Étranger (exonéré de TVA) pour le Régime international.

• Régime intérieur et régime assimilé

DÉPARTEMENTS D'OUTRE-MER : Guadeloupe, Martinique, Guyane Française, La Réunion, Saint-Pierre-et-Miquelon, Mayotte	20,5 €
TERRITOIRES D'OUTRE-MER : Nouvelle-Calédonie, Polynésie Française, Terres Australes et Antarctiques Françaises, Wallis et Futuna.....	42 €

• Régime international

Zone 1

EUROPE 1 : Allemagne, Belgique, Danemark, Italie, Luxembourg, Norvège, Pays-Bas, Portugal et Suède.....	26 €
--	------

Zone 2

EUROPE 2 : Autriche, Espagne, Finlande, Grande-Bretagne, Grèce, Irlande, Islande et Suisse	23 €
---	------

Zone 3

États-Unis et Canada	34 €
----------------------------	------

Zone 4

Afrique, Europe de l'Est, Proche et Moyen Orient.....	31 €
---	------

Zone 5 (reste du monde)

Autres : Amérique, Asie et Océanie	51 €
--	------

Les présidents académiques

ou les correspondants courrier (c)

Aix-Marseille : Michel FANGUET - 13, allée de la Butte - 13500 Martigues - Tél. et Fax : 04 42 42 11 74 - michel.fanguet@wanadoo.fr
Amiens : Jan DUDA - 341, rue des Fontaines - 60390 Auneuil - Tél. : 06 79 29 03 71 - jan.duda@ac-amiens.fr
Besançon : Thierry GUILLOT - 32, rue Saint-Vincent - 25720 Avanne - Tél. : 03 81 41 04 02 - tguillot@wanadoo.fr
Bordeaux : Philippe GOYER - Les Harmonies - Bâtiment D - Appartement 293 - 64, rue Lamartine - 33400 Talence - Tél. : 05 56 37 91 19 - philippe.goyer@iut.u-bordeaux1.fr
Caen : Jacques MARIE - 14, chemin de Touques - 14910 Benerville-sur-Mer - Tél. : 02 31 87 22 85 - mariejacques@minitel.net
Clermont-Ferrand : Roland FUSTIER - 4, rue Henri Pourrat - 63360 Gerzat - Tél. : 04 73 24 27 87 - roland.fustier@wanadoo.fr
Corse : Valérie DENIS - 27, boulevard Paoli - 20200 Bastia - Tél. : 04 95 32 67 06 - simeoni.denis@laposte.net
Créteil : Marcelle PLOTARD - 1, allée Clotilde - 77500 Chelles - plotardj@club-internet.fr
Dijon : Bernard CIRoux - 2 bis, rue Paul Claudel - 71530 Champforgeuil - bernard.ciroux@ac-dijon.fr
Grenoble : Gilles GALLIN-MARTEL - 24, rue Alfred de Musset - 74600 Seynod - Tél. : 04 50 69 57 15 - gallin-martel.gilles@wanadoo.fr
Guadeloupe (c) : Cathia DERNAULT - Résidence Les Goyaviers - Bâtiment G - Appartement 101 du gazon - 97139 Abymes - tikat@wanadoo.fr
Guyane (c) : Jean-Pierre OCTAVIA - BP 49 - 97372 Kourou Cedex.
Lille : Jean-Christophe NAZÉ - 73, avenue de Mossley - 59510 Hem - Tél. : 03 20 81 01 44 - jcnaze@numericable.fr
Limoges : Julien BARDET - 12, Les Grandes Loges - 23320 Fleurat - Tél. : 05 55 80 26 20 - julien.bardet@limousin.iufm.fr
Lyon : Jean-Marie BIAU - 3, allée Val Prévert - 69400 Limas - Jean-Marie.Biau@ac-lyon.fr
Martinique : Louis RICHER - Villa Marie - Route du Brin d'Amour - 97220 Trinité - Louis.Richer@wanadoo.fr
Montpellier : Franck MILLOT - Lycée Mermoz - 717, avenue Mermoz - 34060 Montpellier Cedex 1 - Tél. / Fax : 04 67 73 98 76 - millotfranck@wanadoo.fr
Nancy - Metz : Frédéric CORDIER - 85 bis, rue Camp - 54700 Pont-à-Mousson - Tél. : 03 83 81 35 17 - f.cordier@ac-nancy-metz.fr
Nantes : Jean-Baptiste PIVETEAU - 6, chemin du Puits - 44340 Bouguenais - pivjb@wanadoo.fr
Nice - Toulon : Silvio MERMIER - 10, avenue Walkanaer - 06100 Nice - Tél. : 04 93 51 40 11 - silvio.mermier@ac-nice.fr
Orléans - Tours : Christiane SELIER - 4, rue du Petit Saint-Fiacre - 45210 Ferrières-en-Gâtinais - Tél. : 02 38 96 53 93 - sellierchristiane@yahoo.fr
Paris : Jean-Charles JACQUEMIN - 2, boulevard Magenta - 75010 Paris - jc.jacquemin@noos.fr
Poitiers : Denis PICARD - 19, rue de l'Abreuvoir - 86440 Migné Auxances - denis.picard@ac-poitiers.fr
Polynésie Française (c) : Pierre LEYRAL - BP 51152 - Pirae - Tahiti.
Reims : Nicole HERMAN - 18, rue de Taissy - 51100 Reims - Tél. : 03 26 85 43 17 - nicole.herman@wanadoo.fr
Rennes : Loïc POUILLAIN - 39 A, avenue du Général de Gaulle - 22190 Plerin - Tél. : 02 96 74 42 60 - Loic.Poullain@wanadoo.fr
Rouen : Micheline IZBICKI - 50, chemin de Buglise - 76290 Montivilliers - Tél. : 02 35 30 53 95 - Miizbicki@aol.com
Strasbourg : Alain SPRAUER - 79, rue Baldung-Grien - 67720 Weyersheim - Tél. : 03 88 51 76 83 - spraua@club-internet.fr
Toulouse : Marie-Laure MIEGEVILLE - 3, rue B. de Ventadorn - 31750 Escalquens - miegeville@aol.com
Versailles : Françoise COUSSON - 31, allée Marcel Jouhandeau - 92500 Rueil-Malmaison - Francoise.Cousson@ac-versailles.fr

Toutes les coordonnées des bureaux académiques et les listes des correspondants collège, olympiades de physique et olympiades de chimie paraîtront dans les BUP de janvier, mai et juillet/août/septembre.

Elles sont aussi téléchargeables sur le site de l'UdPPC à l'adresse suivante :
<http://www.udppc.asso.fr/presentation/presenta.htm> (feuille F)

Union des professeurs de physique et de chimie

Cahier des concours Agrégations et Capes 2004 : *Les corrigés*

N° 872 (2) - Mars 2005

Administration et rédaction
44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06
<http://www.udppc.asso.fr/>

Avertissement

Ce recueil des solutions de la plupart des épreuves écrites des concours de recrutement de professeurs en physique et chimie est destiné à faciliter le travail de toutes les personnes intéressées par ces épreuves et notamment des candidats à ces concours.

Nous remercions les collègues qui ont accepté de se charger de la rédaction des solutions. Ces solutions peuvent être plus ou moins détaillées selon les épreuves. En aucun cas elles ne constituent un modèle des méthodes ni des rédactions que les jurys pourraient souhaiter mais une simple aide permettant en particulier de contrôler la validité des résultats.

Ces épreuves de concours peuvent fournir l'occasion de prolongements et d'approfondissements qu'il n'est généralement pas possible aux auteurs de signaler ici autrement que par une bibliographie sommaire. Les candidats aux concours doivent pouvoir trouver ces incitations à d'intéressantes études en participant aux préparations ouvertes dans les différentes académies.

Afin de faciliter l'utilisation de ce numéro spécial, son service est inclus dans l'abonnement collectivités, tout en demeurant hors abonnement individuel. Il en est de même pour le numéro spécial comportant les énoncés correspondants. Ces deux numéros des concours sont disponibles par correspondance au siège de l'Union des professeurs de physique et chimie et tous les renseignements à ce sujet peuvent être obtenus sur le site de l'UdPPC :

<http://www.udppc.asso.fr/>

André GILLES
Rédacteur en chef du bulletin

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE

Composition de physique ♦ Session : 2004

A Ondes et propagation

A1a Propagation : transmission d'une information liée à une perturbation d'une grandeur physique au sein d'un milieu. ` grandeur caractéristique : célérité

Exemples :

- Champs E électrique et B magnétique dans le vide, dans un diélectrique
- Propagation d'une « secousse » transversale le long d'une corde tendue
- Propagation d'une compression longitudinale dans un ressort, une chaîne d'atomes
- Propagation d'une impulsion (tension, courant) dans une ligne électrique
- Propagation d'un son

A1b $\Delta g - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$ scalaire ou vectorielle

A1c Célérité ou vitesse de propagation en m.s^{-1}

Exemples : $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ Ondes électromagnétiques dans le vide 3.10^8 m.s^{-1}

$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$ Ondes acoustiques son dans l'air 340 m.s^{-1}

$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ Ondes transversales dans une corde tendue

$c = \sqrt{\frac{k_l}{\mu}}$ Ondes longitudinales dans un ressort (m masse linéique,

$k_l = \frac{KL}{L}$ pour un ressort de longueur L et de raideur K

$c = \sqrt{\frac{1}{\Lambda \Gamma}}$ Ondes dans une ligne électrique (Λ et Γ inductance et capacité linéiques de la ligne).

A2 Diffusion liée à l'inhomogénéité d'une grandeur au sein d'un milieu, existence d'un courant tendant à homogénéiser cette grandeur. Phénomène essentiellement irréversible. Equation de diffusion (sans termes de source) :

$$-\frac{1}{D} \frac{\partial g}{\partial t} + \Delta g = 0$$

avec $\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}g}$

soit $-\frac{1}{D} \frac{\partial g}{\partial t} + \Delta g = 0$

Exemples : diffusion thermique ($g = T$) diffusion de particules ($g = n$)

Grandeur caractéristique diffusivité D en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Convection : transport d'une grandeur lié à un mouvement global de matière

Exemple : convection thermique dans un fluide caloporteur

Ne pas confondre : son et vent, houle et courant , propagation et vitesse des électrons dans une ligne

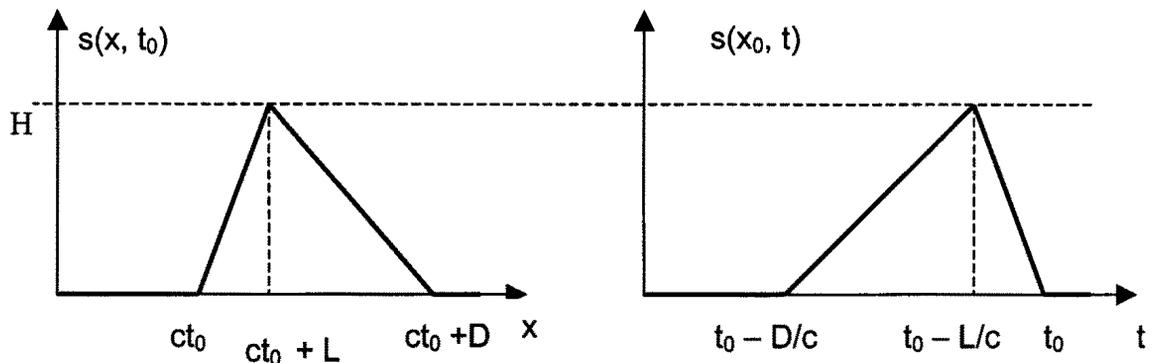
A3a La grandeur $s(x, t)$ associée à l'onde plane a même valeur à l'instant t dans des plans $x = \text{constante}$, orthogonaux à la direction de propagation.

La solution générale de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle est :

$$s(x, t) = f_1(ct - x) + f_2(ct + x)$$

qui correspondent respectivement à des propagations dans le sens des x croissants et décroissants

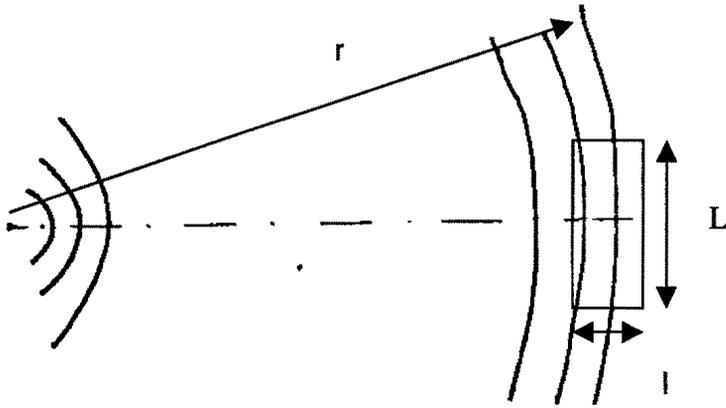
A3b



A3c
$$s(r, t) = \frac{1}{r} (f_1(ct - r) + f_2(ct + r))$$

La décroissance en $\frac{1}{r}$ est liée à un accroissement des surfaces d'onde et non à une absorption de l'onde par le milieu : la puissance totale transportée par l'onde est, dans ce modèle, conservée.

Le courant de puissance est proportionnel à g^2 (donc en $\frac{1}{r^2}$), mais son flux à travers une surface sphérique de rayon r fait disparaître la dépendance en r et conserve donc la puissance totale .



A grande distance de la source de l'onde sphérique, et sur une portion d'espace limitée ($l, L \ll r$), les surfaces d'onde sont assimilables à des plans et le facteur $\frac{1}{r}$ varie peu : l'onde est dite localement plane .

A3d Par analyse de Fourier, toute onde apparaît comme une « somme » d'ondes sinusoïdales.

A3e \vec{k} est appelé vecteur d'onde. Il est parallèle à la direction de propagation, dirigé dans le sens de propagation.

Si le milieu est non dispersif et transparent : $k = \frac{\omega}{c}$. $\lambda = \frac{2\pi}{k} = cT$ représente la période spatiale de l'onde.

A3f Dans le cas d'une onde plane progressive de la forme $f(ct - x)$ se propageant dans un milieu illimité, les deux grandeurs couplées associées à l'onde sont en fait proportionnelles ; Le facteur de proportionnalité, caractéristique du milieu de propagation est appelé impédance caractéristique.

L'exemple le plus immédiat est celui d'une onde dans une ligne électrique où la tension $U(x, t)$ et l'intensité $i(x, t)$ sont reliées par :

$$\frac{U(x,t)}{i(x,t)} = Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \text{ où } \Lambda \text{ et } \Gamma \text{ sont les inductance et capacité linéique de la ligne.}$$

Citons aussi :

$$\text{Ondes acoustiques} \quad Z_c = \frac{\delta P}{v} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_s}} \text{ impédance acoustique}$$

$$\text{Ondes électromagnétiques} \quad Z_c = \frac{E}{H}$$

Rq. Pour une onde de la forme $f(ct + x)$, Z_c est changée en $-Z_c$.

La notion d'impédance d'onde est très utile pour décrire le comportement d'une onde dans le cas d'un milieu limité :

- Quand l'onde est réfléchiée par la limite, celle-ci possède elle-même une impédance qui permet de calculer le coefficient de réflexion. En particulier, un milieu fermé sur son impédance caractéristique se comporte comme un milieu illimité (le coefficient de réflexion est nul).

- Quand l'onde passe d'un milieu d'impédance Z_{c1} à un milieu d'impédance Z_{c2} , ces valeurs permettent de calculer les coefficients de réflexion et de transmission de l'onde.

A3g Dans le vide $B = \frac{E}{c}$ et $H = \frac{B}{\mu_0}$. Avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, il vient : $Z_c = \frac{E}{H} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

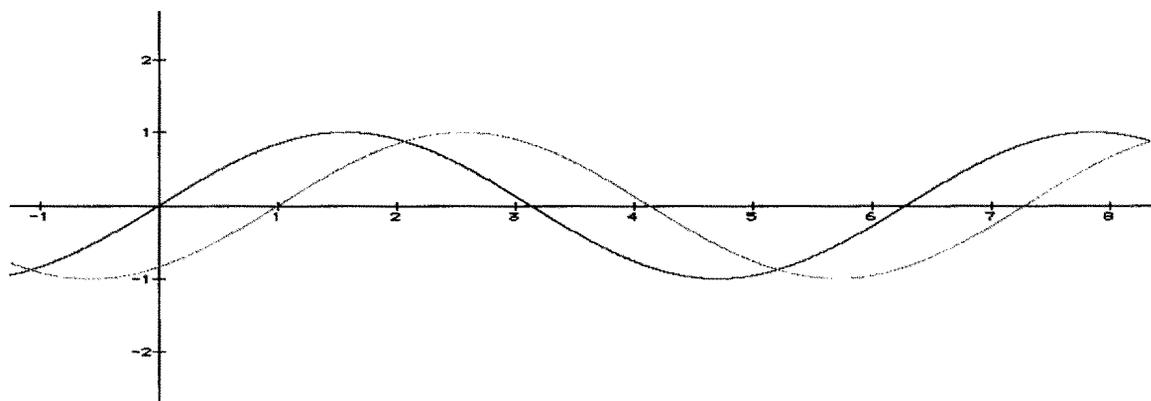
Au conducteur parfait est associé le modèle limite d'un conducteur de conductivité infinie. La loi d'Ohm implique alors que le champ électrique est nul, et par conséquent, le champ magnétique indépendant du temps (Maxwell-Faraday). L'impédance de ce milieu est alors nulle (on retrouve le coefficient de réflexion -1 pour le champ électrique d'une onde frappant un conducteur parfait en incidence normale) .

Rq. Un calcul plus poussé des champs E et B dans un conducteur réel confirme bien que Z_c tend vers 0 quand la conductivité tend vers l'infini...

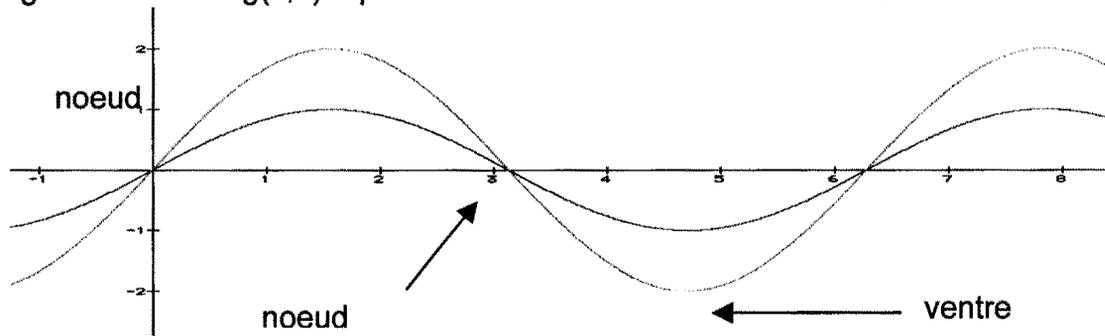
A4a Quand l'onde arrive sur une limite, elle y subit une réflexion et/ou une transmission suivant la nature de cette limite.

A4b L'onde stationnaire représente une solution à variables séparées de l'équation de d'Alembert, de la forme $s(x, t) = f(x).g(t)$.

Physiquement l'onde progressive se propage (et propage de l'énergie) si bien que la fonction $s(x, t)$ représentée en fonction de x à deux instants différents a la forme :



Au contraire l'onde stationnaire évolue « sur place » et ne propage pas en moyenne d'énergie. La fonction $g(x, t)$ représentée en fonction de x à différents instants a la forme :



Sur cette représentation, apparaissent les nœuds (points d'amplitude nulle) et les ventres (points d'amplitude maximale) .

A4c Une onde stationnaire peut être mathématiquement représentée par la somme de deux ondes progressives de même amplitude se propageant dans la même direction et des sens opposés.

Physiquement cette situation est provoquée par la réflexion totale sur une limite, c'est-à-dire une réflexion dont le coefficient r est de module 1. En particulier si l'onde est représentée par les grandeurs A et B , avec $Z_c = \frac{A}{B}$, une réflexion sur une limite d'impédance nulle donne $r = -1$ pour A (nœud) et $+1$ pour B (ventre), une réflexion sur une limite d'impédance infinie donne $r = 1$ pour A et -1 pour B ...

Exemples : - Onde électromagnétique se réfléchissant du vide sur un conducteur parfait : l'onde résultante dans le vide est stationnaire et présente un noeud de champ électrique E et un ventre de champ magnétique B sur le plan.

- Corde fixée à une extrémité : nœud de vitesse et ventre de la composante transverse de tension de la corde.

- Ligne électrique en circuit ouvert : nœud d'intensité et ventre de tension.

- Ligne électrique en court-circuit : nœud de tension et ventre d'intensité...

A4d Le système constitue une cavité résonante qui sélectionne les fréquences possibles pour des ondes stationnaires s'établissant dans la cavité . Ces fréquences obéissent à :

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} \text{ avec } D = n \frac{\lambda_n}{2} \text{ où } n \text{ est un entier.}$$

On peut citer bien sur la corde de Melde ou le tube de Kundt comme exemples classiques de cavités résonantes unidimensionnelles.

A5a Dans un milieu dispersif, la célérité de l'onde n'est pas une constante caractéristique du seul milieu mais dépend de l'onde et en particulier de sa fréquence. La relation liant k à ω n'est donc plus linéaire.

Dans un milieu absorbant, l'interaction entre le milieu et l'onde se traduit par un transfert d'énergie de l'onde vers le milieu, transfert qui conduit à un affaiblissement de cette onde.

A5b Un paquet d'onde représente en fait une onde réelle limitée dans le temps et l'espace, et conçue par analyse de Fourier comme un ensemble (discret ou continu) d'ondes harmoniques .

A chaque composante harmonique du paquet correspond une célérité différente dans le milieu dispersif qui déforme donc le paquet au cours de sa propagation dans le milieu.

A5c La relation de dispersion est la relation liant k et ω , généralement mise sous la forme

$$k = f(\omega).$$

La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ vitesse de propagation d'une composante harmonique du paquet

La vitesse de groupe est $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ qui représente souvent la vitesse de propagation de l'énergie du paquet.

A5d Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{B} = \mu_0(\gamma\vec{E} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) \quad \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \text{div}\vec{E} = 0.$$

Il vient alors : $\Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

Pour un champ harmonique de pulsation ω , on évalue les deux derniers termes respectivement à $\mu_0\gamma\omega\vec{E}$ et $\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}$. Or, aux fréquences où s'écrit la loi d'Ohm, et pour des bons conducteurs, $\mu_0\gamma\omega \gg \frac{\omega^2}{c^2}$, (soit en fait $\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \approx 10^{-18} \text{ s}^{-1}$) si bien que l'équation

précédente devient plutôt une équation « diffusive » d'expression : $\Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$

A5e Avec un champ $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$, il vient : $-k^2 + i\mu_0\gamma\omega = 0$ soit $k = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}(1+i) = \frac{1+i}{\delta}$ en ne retenant qu'une propagation vers les x croissants, d'où l'expression finale du champ : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-x/\delta} e^{i(x/\delta - \omega t)}$.

La grandeur δ est appelée épaisseur de peau et représente une distance caractéristique de pénétration de l'onde dans le conducteur ; Elle varie en $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ et $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$ et diminue donc aux hautes fréquences. Numériquement $\delta_{\text{Fe}, 50 \text{ Hz}} = 22,5 \text{ mm}$ et $\delta_{\text{Cu}, 1 \text{ kHz}} = 2,1 \text{ mm}$.

On peut citer des phénomènes analogues en diffusion thermique (effet de cave) et en dynamique des fluides (fluide visqueux surmontant un plan oscillant) ...

A5f Si $\omega > \omega_p$, k^2 est un réel positif, donc k aussi : le milieu n'est pas absorbant. En revanche, la relation de dispersion n'est pas linéaire et le milieu est donc bien dispersif. On a alors :

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad v_\phi v_g = c^2$$

Si $\omega < \omega_p$, k^2 est un réel négatif, k est imaginaire pure. L'onde n'est plus progressive mais est parfois qualifiée d'onde évanescente.

L'ionosphère est alors un filtre passe-haut qui réfléchit les ondes de basse fréquence venant de la Terre. Cette réflexion est notamment utilisée par les radio-amateurs....

A6a Un guide d'onde canalise une onde en limitant, par ses parois, les surfaces d'onde. L'onde se propage suivant la direction du guide qui permet ainsi de transmettre son énergie sur de longues distances.

Les limites imposées à l'extension de l'onde imposent elles-mêmes des conditions aux limites sur les grandeurs associées, ce qui a pour effet de rendre le guide dispersif. Les parois du guide, souvent idéalisées, peuvent être la cause d'une absorption de l'onde.

A6b Les guides d'onde électromagnétiques à section rectangulaire et à parois parfaitement conductrices en sont un exemple classique. Plus concrètement, les câbles coaxiaux, les fibres optiques, les tuyaux et pavillons sonores constituent des guides d'onde...

Dans cet exemple l'étendue de l'onde est limitée par l'espace entre les plans. Or celui-ci est largement supérieur à la longueur d'onde dans le vide illimité qui vaut 1 cm : on peut donc plutôt parler a priori de propagation libre.

B Elements de dynamique des fluides

B1a
$$\vec{a}(M,t) = \frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}(M,t)$$

Le premier terme représente l'accélération locale du fluide. Il traduit le fait que la vitesse des particules passant en un point donné de l'espace n'est pas toujours la même. Cette accélération s'annule en régime permanent.

Le deuxième terme représente l'accélération convective du fluide. Il traduit le fait que la vitesse des particules varie à un même instant d'un point à un autre de l'espace. L'accélération convective s'annule évidemment dans le cas d'un écoulement uniforme, mais aussi pour des écoulements laminaires où la vitesse ne varie qu'orthogonalement à sa direction (vitesses de la forme $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$ ou $\vec{v} = v(r,t)\vec{e}_z$ par exemple).

B1b Les lignes de courant sont les lignes de champ du champ des vitesses à un instant t_0 donné. Elles s'obtiennent à partir du champ des vitesses donné en coordonnées cartésiennes par exemple, par intégration en fonction des coordonnées d'espaces du système :

$$\frac{dx}{v_x(x,y,z,t_0)} = \frac{dy}{v_y(x,y,z,t_0)} = \frac{dz}{v_z(x,y,z,t_0)}$$

Les trajectoires représentent l'ensemble des points de l'espace atteints au cours du temps par les particules de fluide ; Elles s'obtiennent par intégration en fonction du temps du système :

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x,y,z,t) \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x,y,z,t) \quad \frac{dz}{dt} = v_z(x,y,z,t)$$

En régime permanent, trajectoires et lignes de courant sont identiques.

Expérimentalement on peut visualiser lignes de courant et trajectoires en ajoutant dans le fluide des particules solides et en prenant des photographies à faible temps de pose (lignes de courant) ou fort temps de pose (trajectoires).

On peut également injecter un colorant en un point donné de l'écoulement : on visualise ainsi une ligne d'émission, ensemble des points occupés au cours du temps par toutes les particules étant passées par un même point de l'espace. En régime permanent, cette ligne d'émission coïncide encore avec une trajectoire ou une ligne de courant.

B1c Les lignes de courant sont données par intégration de :

$$\frac{dx}{\cos \omega t_0} = \frac{dz}{\sin \omega t_0} \Rightarrow z = x \tan \omega t_0 + K$$

Famille de droites parallèles, de pente $\tan \omega t_0$ à la date t_0

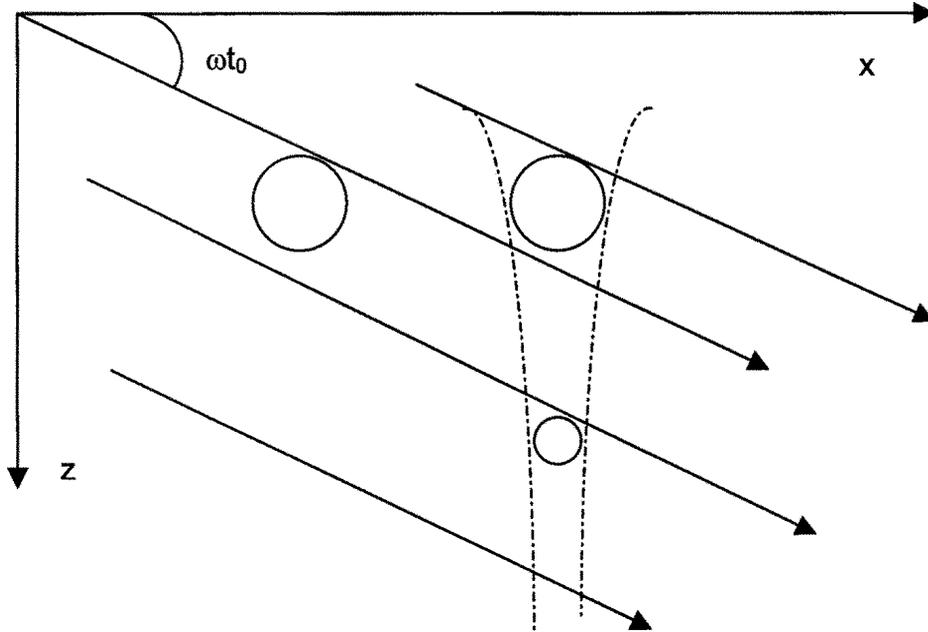
Au voisinage de $z = z_1$, les trajectoires s'obtiennent par intégration de :

$$\frac{dx}{dt} = V_0 e^{-\frac{z_1}{a}} \cos \omega t \Rightarrow x(t) = \frac{V_0}{\omega} e^{-\frac{z_1}{a}} \sin \omega t + x_0$$

$$\frac{dz}{dt} = V_0 e^{-\frac{z_1}{a}} \sin \omega t \Rightarrow z(t) = \frac{V_0}{\omega} e^{-\frac{z_1}{a}} (1 - \cos \omega t) + z_0$$

en posant $x = x_0$ et $z = z_0$ à $t = 0$. Finalement, au voisinage de la cote z , les trajectoires sont des cercles d'équation :

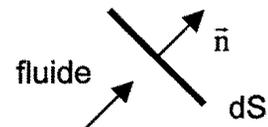
$$(x - x_0)^2 + (z - z_0 - R)^2 = R^2 \text{ avec } R = \frac{V_0}{\omega} e^{-\frac{z}{a}}$$



B2a La pression est d'origine est microscopique (vitesse microscopique des particules) et moléculaire (interaction entre les particules).

La pression en un point d'un fluide est matérialisée par l'existence d'une contrainte normale exercée sur une surface immergée dans le fluide en ce point, indépendante de sa direction (la pression est un scalaire) de sorte que :

$$\overline{dF} = P\overline{n}dS$$



La pression cinétique (positive) est associée à la variation de quantité de mouvement par unité de temps des particules qui frappent dS .

La pression moléculaire (négative) est associée aux interactions attractives moléculaires qui « retiennent » les particules.

B2b La pression s'exprime en pascals (Pa)

- Exemples :
- pression atmosphérique $P_{\text{atm}} \approx 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
 - la pression dans l'eau augmente avec la profondeur d'1 bar tous les 10 m.
 - pression artérielle $\approx 100 \text{ hPa}$
 - pression au centre de la Terre $\approx 300 \text{ GPa}$
 - vide extrême $P \leq 10^{-12} \text{ hPa}$
 - surpression acoustique $P \in [3 \cdot 10^{-5}, 30] \text{ Pa}$

B2c $\vec{f}_{v,p} = -\overrightarrow{\text{grad}P}$

B2d $\rho_0 \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}P} = \vec{0}$

B2e Dans le référentiel terrestre R_T , non galiléen existent deux forces d'inertie :

- La force d'inertie d'entraînement qui en fait est déjà incluse dans la définition de \vec{g}

- La force d'inertie de Coriolis, de densité volumique :

$$\vec{f}_{icv} = -2\rho_0 \vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}_{\text{dans}R_T}$$

Si le fluide est au repos, la force d'inertie de Coriolis est nulle : la relation du B2d est donc inchangée...

Si le fluide est en mouvement, outre qu'évidemment la somme des forces n'étant plus nulle l'équation d'équilibre devient l'équation d'Euler (voir plus loin question B5d), la force d'inertie de Coriolis intervient. Elle joue un rôle important dans la description des mouvements atmosphériques et océaniques par exemple...

B2f La résultante des forces de pression exercées par un fluide au repos sur un solide immergé est : $\vec{F}_A = -m_l \vec{g}$, où m_l est la masse de fluide déplacé par l'objet (masse du même volume de fluide).

Cette force est appliquée au centre de masse du fluide déplacé (centre de poussée).

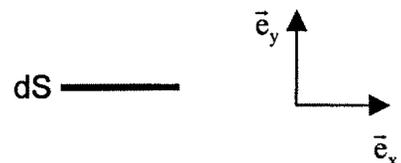
Ce théorème n'est rigoureusement valable que dans un fluide au repos (d'après B2d) mais peut être appliqué pour de faibles mouvements relatifs de l'objet et du fluide (chute d'une bille dans un fluide visqueux par exemple)...

B3a Macroscopiquement, le phénomène de viscosité se traduit par un effet d'entraînement mutuel des particules fluides animées de vitesses différentes.

C'est en fait un phénomène d'origine microscopique, lié à une diffusion de quantité de mouvement dissipative et irréversible au sein du fluide.

En adoptant le modèle simple d'une vitesse de la forme $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$ (couches de fluides parallèles glissant les unes sur les autres), on obtient :

$$\vec{dF} = -\eta \frac{dv(y)}{dy} dS \vec{e}_x$$



force tangentielle exercée sur la surface dS par la couche inférieure sur la couche supérieure

B3b La viscosité dynamique s'exprime en Pa.s (ou Poiseuille) :

- air $\eta \approx 10^{-5}$ Pa.s
- eau $\eta \approx 10^{-3}$ Pa.s
- huiles $\eta \approx 0,1$ à 10 Pa.s

B3c Viscosimètre à bille :

La mesure du temps de chute d'une bille dans un liquide visqueux, bille soumise à une force de frottement fluide proportionnelle à η , permet de remonter à la valeur de η .

Viscosimètre de Couette :

La mesure du couple proportionnel à η , exercé sur un cylindre placé dans un liquide visqueux en écoulement, et par exemple suspendu à un fil de torsion, permet de remonter à la valeur de η .

Viscosimètre à écoulement :

La mesure du débit, inversement proportionnel à η dans un écoulement de Poiseuille, permet encore de déterminer la valeur de la viscosité dynamique (voir questions B3g à B3k).

B3d $\vec{f}_v = \eta \vec{\Delta} \vec{v}$. La force massique correspondante est : $\vec{f}_m = \frac{\eta}{\rho} \vec{\Delta} \vec{v} = \nu \vec{\Delta} \vec{v}$ où ν est la viscosité cinématique qui tire son nom de son unité en $m^2.s^{-1}$ (viscosité qui représente une diffusivité de quantité de mouvement).

B3e ν s'exprime en $m^2.s^{-1}$, V en $m.s^{-1}$ et L en m. On peut donc écrire :

$$R_e = \frac{LV}{\nu}$$

B3f $R_e = \frac{\text{énergie volumique liée à la convection}}{\text{énergie volumique liée à la diffusion}} = \frac{\rho V^2}{\eta \frac{V}{L}} = \frac{LV}{\nu}$

Ou $R_e = \frac{\text{temps caractéristique diffusif}}{\text{temps caractéristique convectif}} = \frac{L^2/\nu}{L/V} = \frac{LV}{\nu}$

On pourrait encore citer : $R_e = \frac{\text{terme convectif de l'équation de Navier - Stokes}}{\text{terme visqueux de l'équation de Navier - Stokes}} = \frac{V \frac{V}{L}}{\nu \frac{V}{L^2}}$

Dans tous les cas, R_e permet d'évaluer l'importance relative de la convection et de la diffusion (c'est-à-dire de la viscosité) : plus le nombre de Reynolds est élevé, moins la viscosité intervient dans l'écoulement du fluide.

B3g L'écoulement est permanent, la photo visualise aussi bien les lignes de courant que les trajectoires, auxquelles on peut associer le modèle mathématique de l'écoulement potentiel d'un fluide parfait. Or, à l'écoulement d'un fluide parfait, c'est-à-dire sans viscosité, doit être associé un nombre de Reynolds a priori infini.

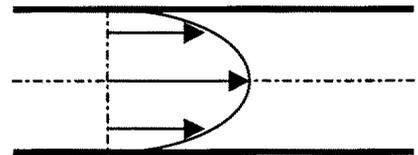
Dans cet écoulement au contraire, la petite valeur du nombre de Reynolds indique que la viscosité doit jouer un rôle essentiel dans l'écoulement, ce qui semble donc paradoxal.

En fait, la viscosité intervient bien et on a un écoulement de type Poiseuille entre les deux plaques : c'est la vitesse moyenne parallèle aux plaques qui dérive d'un potentiel d'ailleurs directement lié à la viscosité. La vitesse du fluide s'annule bien au contact de l'obstacle : il existe une couche limite d'épaisseur très faible en son voisinage.

B3h Le modèle de Poiseuille correspond à l'écoulement permanent et laminaire d'un fluide visqueux sous l'effet d'un gradient de pression.

En symétrie cylindrique, dans un tube de rayon R , le modèle conduit à un profil de vitesses parabolique, de la forme :

$$v = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$



B3i Dans cet écoulement laminaire, le terme convectif de l'équation de Navier-Stokes est structurellement nul : l'évaluation du nombre de Reynolds ne peut donc servir à décider de l'importance relative de la convection et de la viscosité. La encore, des nombres de Reynolds relativement importants peuvent être associés à des écoulements de visqueux de type Poiseuille.

Néanmoins, pour des valeurs plus élevées de R_e apparaissent des instabilités qui conduisent à des écoulements turbulents n'obéissant plus au modèle de Poiseuille. Le « seuil » d'instabilité est purement expérimental. C'est par rapport à lui que l'évaluation du nombre de Reynolds permet de valider le modèle de l'écoulement permanent de Poiseuille...

B3j Le temps caractéristique de diffusion est $\frac{d^2}{4\nu}$: il correspond à l'établissement d'une couche limite égale au rayon du tube. La longueur parcourue par le fluide dans le tube pendant ce temps est donc de l'ordre de :

$$\ell \approx \frac{v_0 d^2}{4\nu} = \frac{8Q}{\pi d^2} \frac{d^2}{4\nu} = \frac{ghd^4}{64\nu^2 L}$$

(la vitesse moyenne débitante est $\frac{v_0}{2}$)

$$\mathbf{B3k} \quad Q_i = \frac{m_i}{\rho t} \Rightarrow \ell_i = \frac{2m_i}{\pi \eta t} \quad \text{et} \quad \eta_i = \frac{\pi \rho g h d_i^2 \rho t}{128 L m_i}$$

- tube 1 : $\ell_1 = 0,13 \text{ mm}$ $\eta \approx 10^{-3} \text{ Pa.s}$

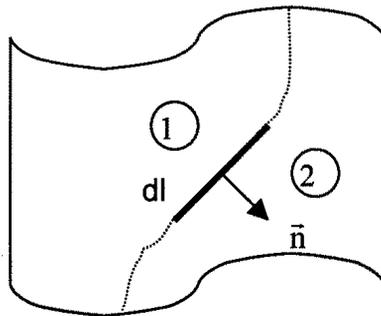
- tube 2 $\ell_2 = 2 \text{ mm}$ idem

Les résultats obtenus confirment la validité du modèle et sont cohérents avec les valeurs tabulées de la viscosité de l'eau...

B4a Il s'agit de phénomènes de surface se produisant à l'interface entre deux fluides ou entre un fluide et un solide. Le phénomène de capillarité tire son nom de l'ascension d'un liquide dans un tube « fin » alors dénommé tube capillaire.

Tous ces phénomènes sont dus aux interactions moléculaires entre molécules proches de la surface. Ils se modélisent par des forces de surface de la forme :

$d\vec{F} = A d\vec{l} \vec{n}$ force exercée sur l'élément dl par la partie 2 du fluide sur la partie 1 : A est appelée constante de tension superficielle du fluide.



B4b Le travail élémentaire reçu par le fluide lors d'une augmentation dS de sa surface est $\delta W = A dS$

Pour minimiser son énergie, le fluide tend donc à minimiser sa surface :

Forme sphérique d'une goutte de volume donné dans un espace isotrope

Formes des lames de fluide s'accrochant sur des objets tels qu'un cube en « fil de fer »...

B4c Quelques exemples :

- Méthode d'arrachement (utilisant une balance de même nom) :

La mesure de la force nécessaire pour « arracher » une lame métallique « retenue » par

la surface d'un liquide grâce aux forces de tension superficielle permet d'atteindre la valeur de la constante A de ce liquide.

- Méthode stalagmométrie :

La mesure de la masse d'un nombre donné de gouttes tombant d'une pipette par gravité permet, en comparant leur poids et la force de tension superficielle qui les retient à la pipette, de déterminer A ; Cette méthode est surtout utilisée pour comparer les constantes de liquides différents.

- Utilisation de la loi de Jurin :

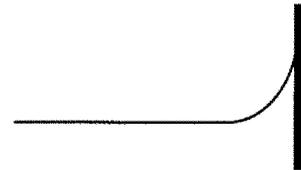
Celle-ci régit la hauteur d'ascension d'un liquide dans un tube capillaire de diamètre donné : la mesure de cette hauteur permet de revenir à la valeur de A.

B4d A s'exprime en N.m^{-1} (soit en kg.s^{-2}), g en m. s^{-2} , et ρ_0 en kg.m^{-3} . D'où :

$$l_c = \sqrt{\frac{A}{\rho_0 g}} = 2,7 \text{ mm pour l'eau}$$

Cette longueur capillaire représente une distance caractéristique permettant, par comparaison avec d'autres longueurs caractéristiques d'un problème, d'évaluer l'importance des phénomènes de tension superficielle.

Une grosse goutte de liquide posée sur une surface plane horizontale aura une épaisseur caractéristique de l'ordre de l_c . Un liquide se rattachant à une paroi verticale aura une hauteur d'ascension de l'ordre de l_c .



B4e

$$\Delta P_1 = \frac{2A}{R}$$

B4f

$$\Delta P_1 = \rho_0 g 2R$$

B4g

$$B_0 = \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} = \frac{\rho_0 g R^2}{A} = \left(\frac{R}{l_c} \right)^2$$

Ce nombre permet de comparer les effets de gravité et de capillarité. Lorsque B_0 est égal à 1, le rayon de la goutte est égal à la longueur capillaire l_c ...

B5a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{Equation de conservation de la masse}$$

B5b

Dans un écoulement incompressible une particule de fluide de masse donnée garde le même volume tout au long de son mouvement. D'où :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\rho = 0$$

Soit finalement : $\text{div}\vec{v} = 0$

Au resserrement des lignes de courant correspond une augmentation de la vitesse.

$$\mathbf{B5c} \quad dm \vec{a} = \sum d\vec{f} \Rightarrow \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} d\tau = \vec{f}_v d\tau$$

$$\rho \left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} \right] = \vec{f}_v' - \overrightarrow{\text{grad}}P$$

en particulierisant le rôle des forces de pression

B5d Les grandeurs à déterminer en tout point et à tout instant sont ρ , P et \vec{v} , soit 5 inconnues scalaires, pour 4 équations (conservation de la masse et trois projections de l'équation d'Euler).

Il manque donc a priori une équation qui sera une équation de « comportement » du fluide :

Pour un fluide homogène incompressible par exemple, $\rho = \text{cste}$, et les 4 équations précédentes sont suffisantes pour 4 inconnues.

Dans le cas d'écoulements compressibles, une équation d'état du fluide fournit une relation du type : $f(P, \rho, T) = 0$.

Apparaît alors une inconnue supplémentaire T , d'où la nécessité de supposer un comportement thermodynamique du fluide. Par exemple :

- comportement isotherme $T = T_0$ qui supprime l'inconnue T

-comportement isentropique qui fournit une équation supplémentaire.

Cette dernière hypothèse suppose évidemment des évolutions réversibles excluant entre autres les phénomènes de viscosité ou de diffusion thermique...

$$\mathbf{B5e} \quad \text{Pour un gaz parfait en évolution isentropique : } P\rho^{-\gamma} = \text{cste} \Rightarrow \frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Soit : $\chi_s = \frac{1}{\gamma P} = \frac{M}{\gamma \rho R T}$. Pour un gaz diatomique $\gamma = 1,4$. Numériquement, à P_0 :

$$\chi_s = 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$$

C Ondes acoustiques

C1a Dans l'approximation acoustique les grandeurs δP , $\delta \rho$ et v vitesse du fluide sont supposées « petites » de sorte que l'on puisse linéariser les équations au premier ordre.

Pour l'oreille humaine les surpressions acoustiques varient de $3 \cdot 10^{-5}$ Pa (seuil d'audition) à 30 Pa (seuil de douleur).

C1b
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\delta \rho)}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \vec{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = -\text{grad} P \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad}(\delta P) \quad (2)$$

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \Rightarrow \rho_0 \chi_s = \frac{\delta \rho}{\delta P} \quad (3)$$

(3) et (1) $\Rightarrow \chi_s \frac{\partial(\delta P)}{\partial t} + \text{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \chi_s \frac{\partial^2(\delta P)}{\partial t^2} + \text{div} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = 0$

Puis, en utilisant (2) :

$$\Delta(\delta P) - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2(\delta P)}{\partial t^2} = 0$$

soit une célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$.

Dans le modèle du gaz parfait, $\chi_s = \frac{1}{\gamma P} = \frac{M}{\gamma P RT}$ (voir question B5e). D'où $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$.

La célérité des ondes acoustiques dans les gaz (typiquement $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans l'air) est inférieure à celle trouvée dans les liquides (de l'ordre de $1500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans l'eau), elle-même inférieure à la célérité des ondes acoustiques dans les solides...

C1c La mise en équation des ondes acoustiques précédente suppose le fluide sans viscosité et ne prend pas en compte les phénomènes de diffusion thermique.

C1d
$$\chi_s \frac{\partial(\delta P)}{\partial t} + \text{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \chi_s \delta P \frac{\partial(\delta P)}{\partial t} + \delta P \text{div} \vec{v} = 0 \quad (4)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad}(\delta P) \Rightarrow \rho_0 \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\delta P) = 0 \quad (5)$$

$$(4) + (5) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \chi_s (\delta P)^2 + \frac{1}{2} \rho_0 v^2 \right) + \text{div}(\delta P \vec{v}) = 0$$

Il s'agit d'une équation locale de conservation de l'énergie. Le premier terme représente la variation temporelle locale d'énergie volumique, elle-même composée de énergie volumique des forces de pression et énergie volumique cinétique. Le second fait apparaître un « vecteur de Poynting » des ondes acoustiques dont le flux à travers une surface fermée représente la puissance acoustique traversant cette surface.

On retrouve évidemment une équation analogue en électromagnétisme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = 0$$

Mais on pourrait citer aussi :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} L_1 i^2 + \frac{1}{2} C_1 u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (ui) = 0$$

Equation locale de conservation de l'énergie dans un ligne électrique unidimensionnelle

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (T_y v) = 0$$

Equation locale de conservation de l'énergie dans une corde tendue etc, etc...

C1e Pour une onde plane progressive dans le sens des x croissants, surpression et vitesse sont de la forme : $\delta P(t - \frac{x}{c})$ et $\vec{v} = v(t - \frac{x}{c}) \vec{e}_x$

$$(2) \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial(\delta P)}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\delta P)}{\partial t} \Rightarrow \delta P = \rho_0 c v \text{ en excluant tout terme stationnaire.}$$

D'où $Z = \rho_0 c$

C1f L'intensité moyenne de l'onde acoustique est sa puissance surfacique moyenne $I = \langle \delta P v \rangle$ (Cf. C1d). Pour l'onde proposée :

$$\delta P v = \rho_0 c v^2 = \rho_0 c v_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad \text{soit} \quad I = \frac{1}{2} \rho_0 c v_0^2$$

C1g $I_0 = \frac{1}{2} \rho_0 c \omega^2 (\Delta x)^2 = 2\pi^2 f^2 \rho_0 c (\Delta x)^2$. D'où : $\Delta x = \frac{1}{\pi f} \sqrt{\frac{I_0}{2\rho_0 c}} \approx 24 \text{ pm}$

C1h $I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0}$ $I_s = 120 \text{ dB}$

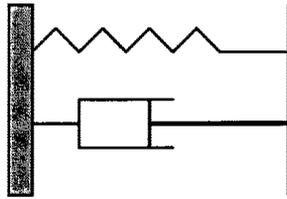
C1i Un gain de -11 dB correspond à une intensité réelle divisée par 12,5 ce qui semble justifier l'augmentation de prix. Encore faut il tenir compte de la courbe de réponse de l'oreille humaine qui est elle-même logarithmique !

C2a $Z = 0 \Rightarrow \delta P = 0$ tuyau ouvert sur un milieu extérieur de pression constante P_0

Z infinie $\Rightarrow v = 0$ tuyau fermé sur un fond rigide.

$Z = Z_C \Rightarrow$ tuyau fermé sur son impédance caractéristique.

Celle-ci pourrait être modélisée par un piston de masse m , associé à un ressort de raideur k et un amortisseur de constant h selon le schéma :



L'impédance mécanique de ce système est : $Z = h + j(m\omega - \frac{k}{\omega})$. $Z = Z_C$ implique donc

$$h = Z_C \text{ et } \frac{k}{m} = \omega^2$$

Avec $Z = 0$, $r = -1$ pour la suppression et $r' = 1$ pour la vitesse. Avec Z infinie c'est le contraire. Avec $Z = Z_C$ $r = r' = 0$.

$$\begin{aligned} \text{C2b} \quad \delta P_i + \delta P_r &= \delta P_t & \Rightarrow & & 1 + r &= t \\ v_i + v_r &= v_t & \Rightarrow & & 1 - r &= \frac{Z_1}{Z_2} t \end{aligned} \quad \text{avec } Z_i = \rho_0 c_i$$

$$\text{C2c} \quad r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \text{ et } t = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

$$\begin{aligned} \text{C2d} \quad I_i &= \left\langle \frac{1}{2} \frac{\delta P_i^2}{Z_1} \right\rangle \quad I_r = \left\langle \frac{1}{2} \frac{\delta P_r^2}{Z_1} \right\rangle \quad I_t = \left\langle \frac{1}{2} \frac{\delta P_t^2}{Z_2} \right\rangle \\ R &= \frac{I_r}{I_i} = r^2 = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \quad T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{Z_1}{Z_2} t^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2} \end{aligned}$$

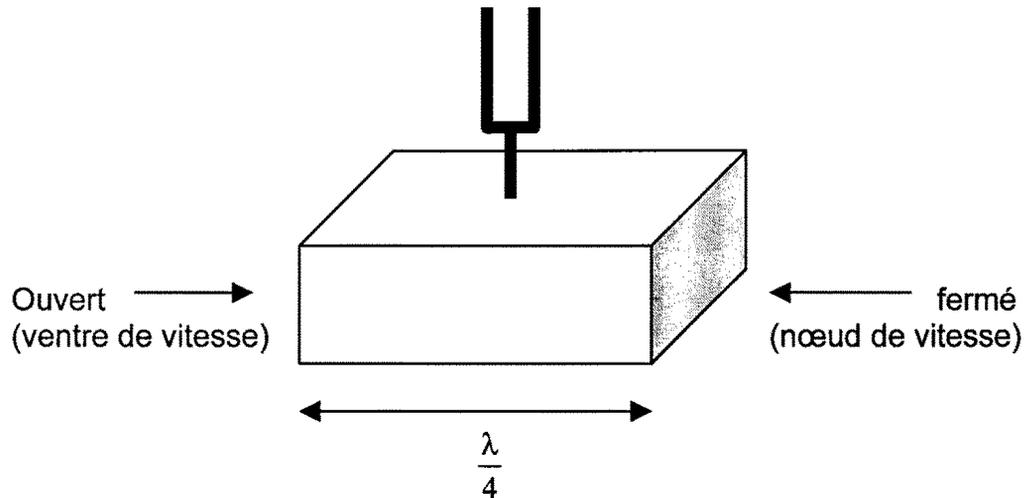
$R + T = 1$ correspond à la conservation de l'énergie transportée par l'onde incidente.

C2e $T \approx 1,8 \cdot 10^{-3}$ la transmission est mauvaise et nécessite une adaptation d'impédance : c'est le rôle du stéthoscope.

C2f C'est le principe de la couche anti-reflet : on intercale entre les deux milieux 1 et 2 une couche d'épaisseur e d'un milieu d'impédance caractéristique Z_0 , où se produisent des réflexions/transmissions multiples. En jouant sur e et Z_0 , on peut diminuer voire en théorie annuler r .

C'est le rôle de la couche de gel utilisée dans l'échographie par ultrasons. C'est bien sûr aussi celui de la couche anti-reflet des verres optiques.

C2g Il s'agit encore d'une adaptation d'impédance par cavité résonante accordée sur la fréquence propre du diapason selon le schéma :



$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f} = 19 \text{ cm}$. En réalité il y a des effets de bord au niveau de l'ouverture qui ne correspondent pas exactement à $Z = 0$, d'où une correction sur L ...

C2h Pour l'oreille le même modèle donne : $f = \frac{c}{4l} = 3400 \text{ Hz}$

C2i La salle constitue à nouveau une cavité résonante imposant à la suppression une forme d'onde stationnaire dans les 3 directions, avec un ventre sur chaque paroi. Soit :

$$\delta P = A \cos k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \cos k_z z \cdot \cos \omega t$$

avec $k_x L_x = m\pi$, $k_y L_y = n\pi$ et $k_z L_z = p\pi$. L'équation de propagation impose alors la relation :

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

D'où $f^2 = \frac{c^2}{4} \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} + \frac{p^2}{L_z^2} \right)$. Les valeurs permises de f peuvent être d'autant plus faibles

que les dimensions de la salle sont importantes : une cathédrale permet de faire résonner de plus basses fréquences.

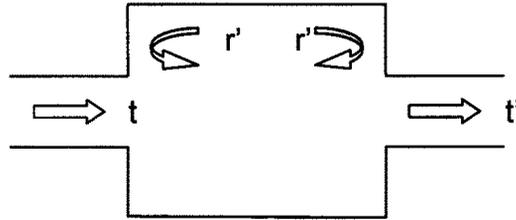
C3a Pour un changement de section les relations de continuité deviennent :

$$\begin{aligned} \delta P_i + \delta P_r &= \delta P_t & \Rightarrow & & 1 + r &= t \\ s(v_i + v_r) &= S v_t & \Rightarrow & & 1 - r &= \frac{S}{s} t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où :} & & \text{- passage } s \rightarrow S & r = \frac{s-S}{s+S} & t = \frac{2s}{s+S} \\ & & \text{- passage } S \rightarrow s & r' = -r & t' = \frac{S}{s} t \end{aligned}$$

C3b Le coefficient de transmission global est

$$T = tt'(1 + r'^2 e^{2ikL} + (r'^2 e^{2ikL})^2 + (r'^2 e^{2ikL})^3 + \dots)$$

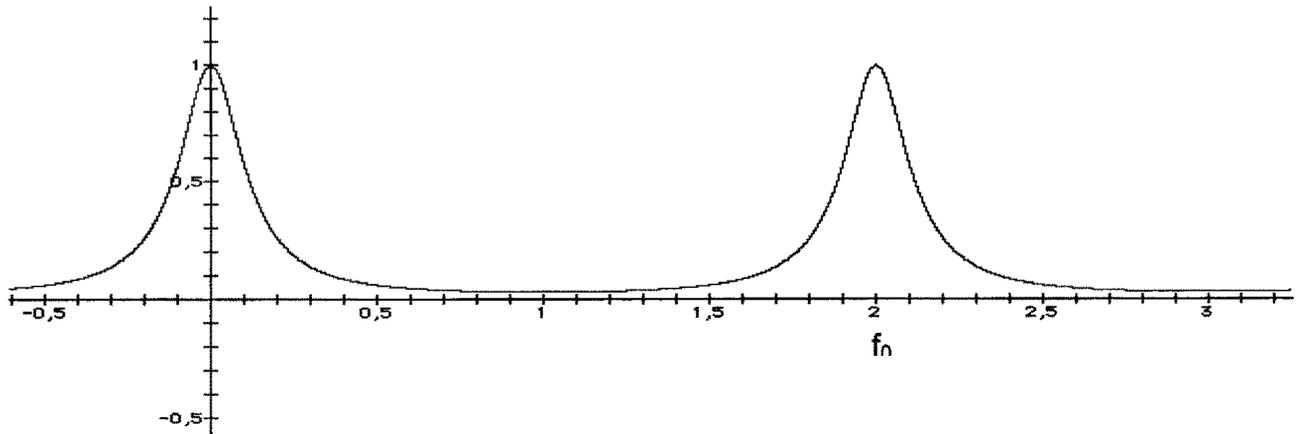


Soit $T = \frac{tt'}{1 - r'^2 e^{2ikL}}$ et enfin $T = T \cdot T^*$

Tous calculs faits, il vient : $T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{S}{s} - \frac{s}{S} \right)^2 \sin^2 \frac{2\pi fL}{c}}$ soit $f_0 = \frac{c}{2L}$

C3c $T_{\text{Max}} = 1$ pour $f = nf_0$ (ce qui correspond à $L = n \frac{\lambda}{2}$ cavité résonante)

$T_{\text{min}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{S}{s} - \frac{s}{S} \right)^2}$ pour $f = (n + \frac{1}{2}) f_0$. Si $S \gg s$ $T_{\text{min}} \approx 4 \left(\frac{s}{S} \right)^2 \ll 1$.



Ce système est analogue à l'interféromètre de Fabry-Pérot en optique...

C3d $T(f) = \frac{1}{2}$ pour f telle que $\frac{1}{2} \left(\frac{S}{s} - \frac{s}{S} \right) \sin \frac{2\pi fL}{c} = 1$ soit $f = \frac{f_0}{\pi} \text{Arcsin} \frac{2}{\frac{S}{s} - \frac{s}{S}} = \Delta f$

On définit alors $Q = \frac{f_0}{2\Delta f} = \frac{\pi}{2 \text{Arcsin} \frac{2}{\frac{S}{s} - \frac{s}{S}}}$ Si $S \gg s$ $Q \approx \frac{\pi S}{4s} \gg 1 \dots$

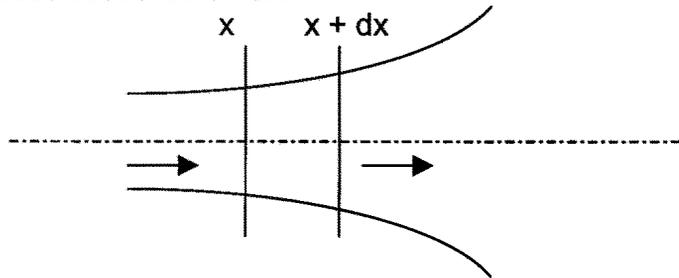
C3e L'idéal consiste à ne retenir que des fréquences basses audibles : on choisit f_0 (donc L) en dehors du spectre audible de l'oreille, et le rapport des sections de sorte à affiner le pic origine (on a en quelque sorte constitué un filtre passe-bas) .

C4a Le fluide ne peut avoir de composante de vitesse orthogonale aux parois du pavillon.

C4b La section du pavillon doit varier « lentement ». Plus précisément, la longueur d'onde doit vérifier :

$$\lambda_0 \ll a$$

C4c L'équation locale de conservation de la masse doit être ici remplacée par une équation bilan de masse sur une « tranche » de pavillon comprise entre les abscisses x et $x + dx$.



Pendant un temps élémentaire dt :

$$\begin{aligned} \delta m_e \text{ « entrante » :} & \quad \delta m_e = [\rho sv](x) dt \\ \delta m_s \text{ « sortante » :} & \quad \delta m_s = [\rho sv](x + dx) dt \\ \delta m_i \text{ « interne » :} & \quad \delta m_i = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt S dx \end{aligned}$$

$$\delta m_i = \delta m_e - \delta m_s \Rightarrow S \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho Sv). \text{ Soit, après linéarisation :}$$

$$S \frac{\partial(\delta \rho)}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x}(Sv) = 0 \Rightarrow \chi_s \frac{\partial(\delta P)}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x}(Sv) = 0$$

C4d Avec l'expression de vitesse proposée, l'équation précédente devient :

$$-i\omega\chi_s\delta P + ikv + \frac{v}{a} = 0$$

En outre, l'équation d'Euler linéarisée (équation (2) du C1b) donne ici : $i\omega\rho_0 v = ik\delta P$

D'où $-i\omega\chi_s \frac{\omega}{k} \rho_0 v + ikv + \frac{v}{a} = 0$, qui donne finalement la relation demandée : $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 - \frac{ik}{a}$

C4e Cette relation de dispersion se met sous la forme :

$$\left(k - \frac{i}{2a}\right)^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \text{ avec } \omega_c = \frac{c}{2a}$$

Si $\omega < \omega_c$, k est imaginaire pure et il ne peut y avoir propagation. Le pavillon permet donc la propagation d'ondes de fréquence supérieure à $f_c = \frac{c}{4\pi a}$

C4f A l'extrémité du pavillon, il y a transmission et réflexion de l'onde acoustique : la transmission sera d'autant meilleure que la section de sortie sera grande. Le pavillon réalise en fait une approche d'adaptation d'impédance au milieu extérieur et la voix est mieux transmise...

C4g La relation entre k et ω n'est pas linéaire, le pavillon est évidemment dispersif. Le fait que k comporte une partie imaginaire pourrait laisser penser qu'il est aussi absorbant. En fait, la puissance acoustique traversant une section S du pavillon s'écrit $\delta P S v$ avec $v = \frac{k}{\omega \rho_0} \delta P$.

Mais k est complexe : v comporte un terme en phase avec δP (par l'intermédiaire de $\text{Re}(k)$) et un terme en quadrature (par l'intermédiaire de $\text{Im}(k)$) donnant une valeur moyenne nulle. La puissance moyenne est alors :

$$\langle P \rangle = S \frac{\text{Re}(k)}{\omega \rho_0} \frac{\delta P_0^2}{2} \text{ où } \delta P_0 \text{ est l'amplitude de variation de } \delta P.$$

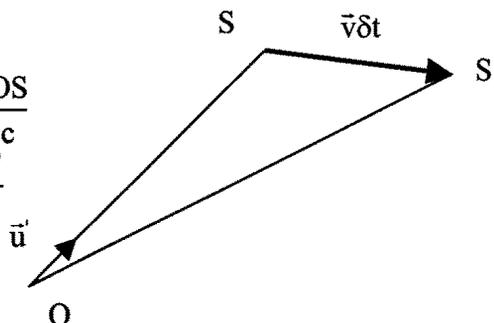
Cette amplitude comporte elle-même un terme d'atténuation en $e^{-\frac{x}{2a}}$, provenant de la partie imaginaire de k , donc δP_0^2 varie en $e^{-\frac{x}{a}}$. Cette atténuation est compensée par la variation de S en $e^{+\frac{x}{a}}$: La puissance moyenne à travers une section S est indépendante de x , le pavillon n'est pas absorbant...

C4h La dispersion entraîne une déformation de la voix transmise.

C5a L'effet Doppler consiste en une différence entre la fréquence d'une onde émise par une source dans son propre référentiel, et celle perçue dans un référentiel où elle est en mouvement.

C5b A $t = 0$, S émet un bip reçu en O à $t_1 = \frac{OS}{c}$

A $t = \delta t$, S (en S') émet un bip reçu en O à $t_2 = \delta t + \frac{OS'}{c}$



Or : $\overline{SS'} = \vec{v} \delta t = d(\overline{OS}) = d(OS \vec{u}') = \vec{u}' \cdot d(OS) + OS d(\vec{u}')$ ou \vec{u}' est un vecteur unitaire

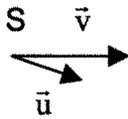
Soit $\vec{u}' \cdot d(\overline{OS}) = d(OS) = \vec{u}' \cdot \vec{v} \delta t$

Enfin $\delta t' = t_2 - t_1 = \delta t + \frac{OS' - OS}{c} = \delta t + \frac{d(OS)}{c} = \delta t + \frac{\vec{u}' \cdot \vec{v} \delta t}{c}$. Avec $\vec{u}' = -\vec{u}$, on obtient :

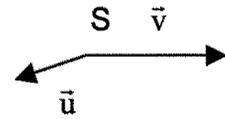
$$\delta t' = \delta t \left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c} \right)$$

Ce calcul suppose qu'on puisse traiter SS' comme un infiniment petit d'ordre 1 par rapport à OS , soit $v \delta t \ll OS$

C5c La fréquence joue ici le rôle de $\frac{1}{\delta t}$. D'où : $f' = \frac{f}{\left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c}\right)}$



. O



Quand la source se rapproche de O, $f' > f$ et au contraire $f' < f$ quand elle s'éloigne. La fréquence d'une sirène d'ambulance émet un son plus aigu si elle se rapproche et plus grave lorsqu'elle s'éloigne.

C5d Dans le cas limite où $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tend vers c , $\delta t'$ tend vers 0, des sons émis à des instants différents parviennent ensemble...

C5e On peut citer l'élargissement Doppler des raies d'une lampe à vapeur de mercure haute pression par exemple, ou le décalage vers le rouge du spectre des étoiles...

D1a Un écoulement potentiel est tel que $\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{v} = \vec{0}$. On peut alors associer au champ des vitesses un potentiel Φ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi$.

Si de plus l'écoulement est incompressible, $\text{div}\vec{v} = 0$ et le potentiel Φ vérifie : $\Delta\Phi = 0$

D1b Entre 2 points A et B quelconques, on peut écrire :

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{l} - \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{P}{\rho}\right) \cdot d\vec{l}$$

Compte tenu de $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi$, $\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(gy)$, et en négligeant les termes de second ordre :

$$\forall A, B \quad \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gy + \frac{P}{\rho_0}\right) \cdot d\vec{l} = 0$$

Soit
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gy + \frac{P}{\rho_0} = F(t)$$

D1c A $F(t)$ on peut associer la fonction $G(t)$ telle que $F(t) = \frac{dG(t)}{dt} + K$ et la

relation précédente devient : $\frac{\partial(\Phi - G(t))}{\partial t} + gy + \frac{P}{\rho_0} = K$ où K est une constante.

Le champ des vitesses associé au nouveau potentiel $\psi = \Phi - G(t)$ reste le même puisque $\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi - G(t)) = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi$.

D1d En maintenant l'appellation Φ pour le nouveau potentiel des vitesses, et en utilisant l'équation (1), il vient, en $y = h - h_0$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gh - A \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = K' \quad \text{soit encore} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gh - A \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = K'$$

Il est possible d'obtenir une équation ne faisant intervenir que Φ , en remarquant que $\frac{\partial h}{\partial t} = v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ en $y = h - h_0$ et en dérivant partiellement par rapport au temps l'équation précédente :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} - A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{en } y = h - h_0$$

D2a Le terme $f(x - ct)$ correspondrait à une onde plane se propageant à la célérité c dans la direction des x positifs.

Le terme $g(y)$ correspond à une amplitude dépendant de la profondeur y .

L'équation $\Delta \Phi = 0$ donne $\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} = 0$, où f'' et g'' désignent les dérivées secondes respectives de f et g par rapport à x et y .

Soit $\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = -k^2$ où k est une constante. Le signe moins vient du fait que la fonction $g(y)$ doit pouvoir tendre vers 0 quand y devient infini (fluide au repos à une profondeur « infinie »). Alors :

$$g(y) = Be^{ky} + Ce^{-ky}$$

et $f(x - ct) = f_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{avec } c = \frac{\omega}{k}$

D2b $v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ doit s'annuler en $y = -h_0$, soit :

$$kBe^{-kh_0} - kCe^{+kh_0} = 0 \Rightarrow B = Ce^{+2kh_0}$$

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0 \text{ch}[k(y + h_0)] e^{i(kx - \omega t)}$$

D2c Au niveau de la surface libre :

$$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = k\Phi_0 \text{sh}[k(y + h_0)] e^{i(kx - \omega t)} \approx k\Phi_0 \text{sh}[kh_0] e^{i(kx - \omega t)}$$

en assimilant h à sa valeur moyenne h_0 .

Enfin par intégration et retour à la notation réelle : $h(x, t) = h_0 - \frac{\Phi_0}{c} \text{sh}[kh_0] \sin(kx - \omega t)$. La surface libre présente un profil sinusoïdal autour de l'altitude de repos h_0 .

D2d En utilisant la relation trouvée sur F au D1d, il vient :

$$-\omega^2 \Phi_0 \text{ch}(kh_0) e^{i(kx - \omega t)} + k\Phi_0 \left(g + \frac{Ak^2}{\rho_0} \right) \text{sh}(kh_0) e^{i(kx - \omega t)} = 0$$

soit, avec $\omega^2 = k^2 c^2$ et tous calculs faits :

$$c^2 = gh_0 \frac{\tanh(kh_0)}{kh_0} \left(1 + \frac{Ak^2}{\rho_0 g} \right)$$

On retrouve bien la relation demandée en posant $l_c = \sqrt{\frac{A}{\rho_0 g}}$...

D3a la parenthèse $(1 + kl_c^2)$ fait intervenir deux termes :

- Si $kl_c \ll 1$ la gravité prédomine
- Si $kl_c \gg 1$ la capillarité prédomine.

La frontière entre les deux domaines est caractérisée par $kl_c = 1$, qui correspond à une longueur d'onde λ_m telle que :

$$\lambda_m = 2\pi l_c \approx 18 \text{ mm}$$

D3b Si $kl_c \ll 1$ $c^2 \approx \frac{g}{k} \tanh(kh_0)$

Si $kl_c \gg 1$ $c^2 \approx gkl_c^2 \tanh(kh_0)$

Dans ce dernier cas, la profondeur h_0 étant, en général, supérieure à la longueur capillaire l_c , la condition $kl_c \gg 1$ implique a fortiori que $kh_0 \gg 1$ et $\tanh(kh_0) \approx 1$. La formule prend alors la forme simplifiée :

$$c^2 \approx gkl_c^2$$

D3c Les rides fines sont des rides capillaires (petite longueur d'onde) :

$$c = l_c \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}} \approx 53 \text{ cm.s}^{-1}$$

Les rides plus espacées correspondent à des ondes de gravité de célérité :

$$c \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \approx 28 \text{ cm.s}^{-1}$$

D4a $kl_c = X \frac{l_c}{h_0} \leq 5 \frac{l_c}{h_0} \ll 1$ La capillarité peut être négligée...

D4b $X = 1$ sépare à nouveau deux domaines :

$$\begin{array}{lll} X < 1 & \lambda > h_0 & \text{eau peu profonde} \\ X > 1 & \lambda < h_0 & \text{eau profonde} \end{array}$$

D4c En eau profonde, on a très vite $\tanh(kh_0) \approx 1$ et c prend la valeur approchée :

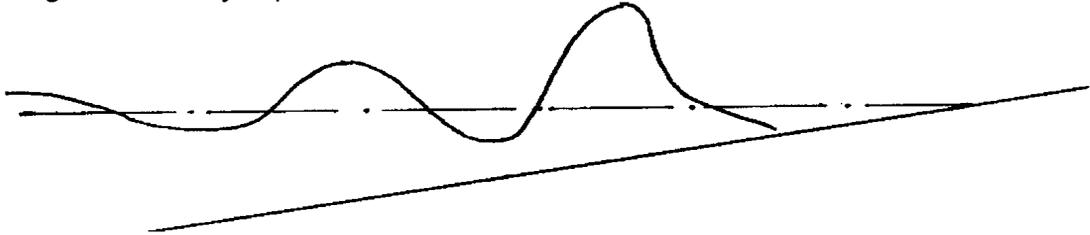
$$c \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \approx 2,8 \text{ m.s}^{-1}$$

D4d $k = \frac{\omega^2}{g}$ le milieu est bien dispersif.

$$dk = \frac{2\omega d\omega}{g} \Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} = \frac{v_\phi}{2}$$

D5a A faible profondeur, $\frac{\tanh(kh_0)}{kh_0} \rightarrow 1$ et $c \approx \sqrt{gh_0}$

La célérité ne dépend plus de la fréquence de l'onde mais seulement de la profondeur : au voisinage du rivage, quand celle-ci diminue, la célérité diminue également : le front de la vague se raidit jusqu'au déferlement :



D5b $\frac{dc}{dh_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h_0}} \Rightarrow \delta c_1 = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{h_0}}$ On observe là encore un raidissement du front de la vague .

D5c La dispersion étale au contraire la vague. A sa largeur L correspond une étendue « spectrale » $\Delta k \approx \frac{1}{L}$

On alors $\delta c_2 \approx \sqrt{gh_0} \frac{h_0^2}{6L^2}$

D5d Les deux effets se contrarient et peuvent se compenser si $\delta c_1 = \delta c_2$.

En raisonnant en ordres de grandeur , on obtient :

$$H \sqrt{\frac{g}{h_0}} \approx \sqrt{gh_0} \frac{h_0^2}{L^2} \Rightarrow H \approx \frac{h_0^3}{L^2}$$

D5e Numériquement $H \approx 1$ m et $c \approx 5,4$ m.s⁻¹ ≈ 20 km.h⁻¹

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE

Composition de chimie ♦ Session : 2004

Les solides en chimie

I. Cohésion dans les solides

I.1. Propriétés physiques des corps purs

I.1.1. Corps pur = une seule espèce chimique

I.1.2. Etat solide : molécules en interaction et en position fixe ; état liquide ; molécules en interaction mais en mouvement ; état gazeux : molécules en mouvement avec peu d'interactions autre que collisions.

I.1.3. Diagramme de phase $p = f(T)$ d'un corps pur.

a. Figure ci-contre

b. $v = c + 2 - \phi$

c. Variance :

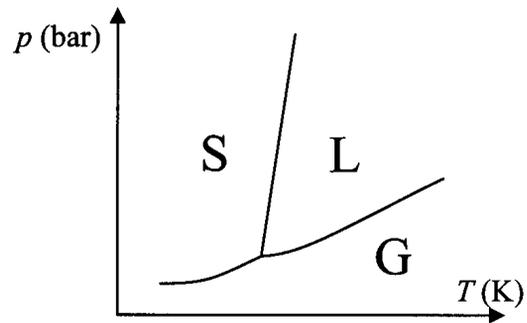
- Domaines : $v = 2$

- Frontières : $v = 1$

- au point t : $v = 0$

d. Frontières : équilibre entre deux phases ; au point t : équilibre entre les trois phases

e. Point c : fluide unique où la densité du gaz est égale à la densité du liquide.



I.1.4.

a. $dG = VdP - SdT$

b. $d\mu = V_m dP - S_m dT$

c. $\mu(\phi_1) = \mu(\phi_2)$

d. $\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta S_m}{\Delta V_m}$

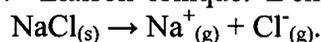
e. ΔV_m est plus petit dans le cas solide-liquide.

f. $\Delta V_m < 0$ Donc la pente est négative (car $\Delta S_m > 0$)

g. Structure lacunaire de la glace $\Rightarrow \Delta V_m < 0$.

I.2. Energie de liaison des cristaux ioniques

I.2.1. Liaison ionique. L'énergie réticulaire U est la variation d'énergie du processus :



$$I.2.2. \quad U = -\Delta_f H^\circ(\text{NaCl}) + \frac{1}{2} \Delta_{\text{diss}} H^\circ(\text{Cl}_2) + \Delta_{\text{sub}} H^\circ(\text{Na}) + EI(\text{Na}) - AE(\text{Cl}) = 726 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

Remarque : si l'on rectifie la valeur erronée de $\Delta_{\text{diss}} H^\circ(\text{Cl}_2)$ (= 244 et non 122 kJ.mol⁻¹) donnée dans le tableau de valeurs, on trouve 787 kJ.mol⁻¹

I.2.3.

a. La constante de Madelung représente un nombre moyen de charges électriques vues par un ion à la distance r ; elle est caractéristique du réseau ionique. On la calcule en prenant tous les ions du réseau, couche par couche, à partir d'un ion central. On obtient alors une série convergente vers l'expression donnée dans l'énoncé.

b. Terme de répulsion à courte distance.

$$c. \quad \left(\frac{dE}{dr} \right)_{r=r_0} = 0 \Rightarrow B = \frac{e^2 M r_0^7}{32 \pi \epsilon_0}$$

d. En remplaçant B et avec

$$r_0 = r(\text{Na}^+) + r(\text{Cl}^-) : E = -\frac{e^2 N M}{4 \pi \epsilon_0 r_0} \left(1 - \frac{1}{8}\right) = -750 \text{ kJ.mol}^{-1}, \text{ peu différent de } -U$$

I.3. Structure des métaux

I.3.1.

a. Maille conventionnelle du réseau hexagonal compact (base prisme ou base hexagonale)

b. Nombre d'atomes par maille : 2 (base prisme) ou 6 (base hexagonale)

c. Coordinence : 12

d. $c / a = 1.63$

e. $r_{\text{Zn}} = a/2 = 1.37 \times 10^{-10} \text{ m.}$

I.3.2.

a. Cu : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1 3d^{10}$; Zn : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10}$

b. $\frac{x+2y}{x+y}$ est égal à 3/2 pour $x=1, y=1 \Rightarrow \text{CuZn}$; 21/13 pour $x=5, y=8 \Rightarrow \text{Cu}_5\text{Zn}_8$;

7/4 pour $x=1, y=3 \Rightarrow \text{CuZn}_3$.

II. Réactions de précipitation

II.1. Solubilité de l'hydroxyde d'aluminium

II.1.1.

a. $\text{Al}(\text{OH})_3 + 3\text{H}_3\text{O}^+ = \text{Al}^{3+} + 6\text{H}_2\text{O}$

$\text{Al}(\text{OH})_3 + 2\text{H}_2\text{O} = \text{Al}(\text{OH})_4^- + \text{H}_3\text{O}^+$

b. Amphotère

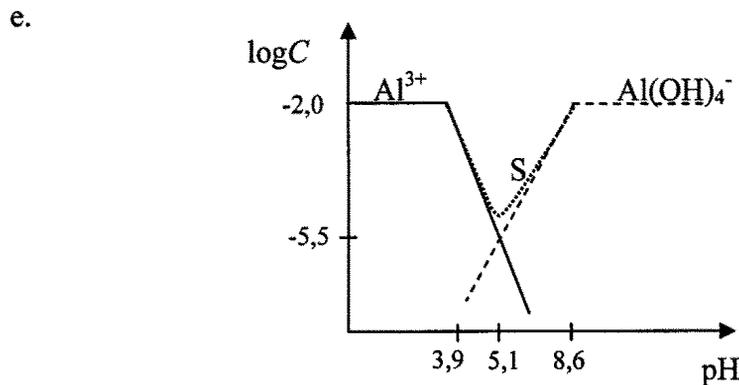
II.1.2.

a. $\text{Al}^{3+} + 3\text{OH}^- \rightarrow \text{Al}(\text{OH})_{3(s)}$; $\text{Al}(\text{OH})_{3(s)} + \text{OH}^- \rightarrow \text{Al}(\text{OH})_4^-$

b. $K = 1/K_s$; $K' = \beta_4 K_s = 2,5 \times 10^3$

- c. pH :
- à partir duquel $\text{Al}(\text{OH})_3$ précipite : $\text{pH}_1 = 3,9$
 - où les ions Al^{3+} et $\text{Al}(\text{OH})_4^-$ sont en concentration égale : $\text{pH}_2 = 5,1$
 - à partir duquel $\text{Al}(\text{OH})_3$ est complètement redissous en $\text{Al}(\text{OH})_4^-$: $\text{pH}_3 = 8,6$

- d. $\text{pH} < \text{pH}_1$: $[\text{Al}^{3+}] = c_0$ et $[\text{Al}(\text{OH})_4^-] = \beta_4 [\text{OH}^-]^4 c_0$ négligeable.
 $\text{pH}_1 < \text{pH} < \text{pH}_3$: $[\text{Al}^{3+}] = \frac{K_s}{[\text{OH}^-]^3}$ et $[\text{Al}(\text{OH})_4^-] = \beta_4 K_s [\text{OH}^-]$
 $\text{pH} > \text{pH}_3$: $[\text{Al}^{3+}] = \frac{c_0}{\beta_4 [\text{OH}^-]^4}$ négligeable et $[\text{Al}(\text{OH})_4^-] = c_0$

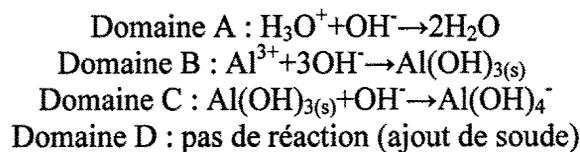


- f. $\log(S) = \log([\text{Al}^{3+}] + [\text{Al}(\text{OH})_4^-])$: voir courbe en pointillés sur la figure ci-dessus.

II.2. Suivi conductimétrique de la précipitation et de la redissolution de $\text{Al}(\text{OH})_3$

II.2.1. HNO_3 acide fort : $\text{pH}_0 = 1,3$

II.2.2.



II.2.3. $c_B V_1 = c_A V_0 - 10^{-\text{pH}} V_0 \Rightarrow V_1 = 5 \times 10^{-3} \text{ L}$

$$c_B (V_2 - V_1) \approx 3 c_0 V_0 \Rightarrow V_2 = 8 \times 10^{-3} \text{ L}$$

$$c_B (V_3 - V_2) \approx c_0 V_0 \Rightarrow V_3 = 9 \times 10^{-3} \text{ L}$$

II.2.4.	Al^{3+}	$\text{Al}(\text{OH})_4^-$	NO_3^-	Na^+	H_3O^+	OH^-
A	c_0	négligeable	$3c_0 + c_A$	$\frac{c_B V}{V_0}$	$c_A - \frac{c_B V}{V_0}$	négligeable
B	$c_0 - \frac{c_B(V - V_1)}{3V_0}$	négligeable	$3c_0 + c_A$	$\frac{c_B V}{V_0}$	négligeable	négligeable
C	négligeable	$\frac{c_B(V - V_2)}{V_0}$	$3c_0 + c_A$	$\frac{c_B V}{V_0}$	négligeable	négligeable
D	négligeable	c_0	$3c_0 + c_A$	$\frac{c_B V}{V_0}$	négligeable	$\frac{c_B(V - V_3)}{V_0}$

$$\begin{aligned} \text{II.2.5. } \sigma_A &= \lambda_m^0(\text{Al}^{3+})[\text{Al}^{3+}] + \lambda_m^0(\text{NO}_3^-)[\text{NO}_3^-] + \lambda_m^0(\text{Na}^+)[\text{Na}^+] + \lambda_m^0(\text{H}_3\text{O}^+)[\text{H}_3\text{O}^+] \\ \sigma_B &= \lambda_m^0(\text{Al}^{3+})[\text{Al}^{3+}] + \lambda_m^0(\text{NO}_3^-)[\text{NO}_3^-] + \lambda_m^0(\text{Na}^+)[\text{Na}^+] \\ \sigma_C &= \lambda_m^0(\text{Al}(\text{OH})_4^-)[\text{Al}(\text{OH})_4^-] + \lambda_m^0(\text{NO}_3^-)[\text{NO}_3^-] + \lambda_m^0(\text{Na}^+)[\text{Na}^+] \\ \sigma_D &= \lambda_m^0(\text{Al}(\text{OH})_4^-)[\text{Al}(\text{OH})_4^-] + \lambda_m^0(\text{NO}_3^-)[\text{NO}_3^-] + \lambda_m^0(\text{Na}^+)[\text{Na}^+] + \lambda_m^0(\text{OH}^-)[\text{OH}^-] \end{aligned}$$

II.2.6. En remplaçant, on obtient :

$$\bullet \quad \sigma_A = \lambda_m^0(\text{Al}^{3+})c_0 + \lambda_m^0(\text{NO}_3^-)(3c_0 + c_A) + \lambda_m^0(\text{Na}^+)\frac{c_B V}{V_0} + \lambda_m^0(\text{H}_3\text{O}^+)\left(c_0 - \frac{c_B V}{V_0}\right)$$

qui est une droite de pente $(\lambda_m^0(\text{Na}^+) - \lambda_m^0(\text{H}_3\text{O}^+))\frac{c_B}{V_0} < 0$

$$\bullet \quad \sigma_B = \lambda_m^0(\text{Al}^{3+})\left(c_0 - \frac{c_B(V - V_1)}{3V_0}\right) + \lambda_m^0(\text{NO}_3^-)(3c_0 + c_A) + \lambda_m^0(\text{Na}^+)\frac{c_B V}{V_0}$$

droite de pente $(\lambda_m^0(\text{Na}^+) - \frac{1}{3}\lambda_m^0(\text{Al}^{3+}))\frac{c_B}{V_0} < 0$

$$\bullet \quad \sigma_C = \lambda_m^0(\text{Al}(\text{OH})_4^-)\left(\frac{c_B(V - V_2)}{V_0}\right) + \lambda_m^0(\text{NO}_3^-)(3c_0 + c_A) + \lambda_m^0(\text{Na}^+)\frac{c_B V}{V_0}$$

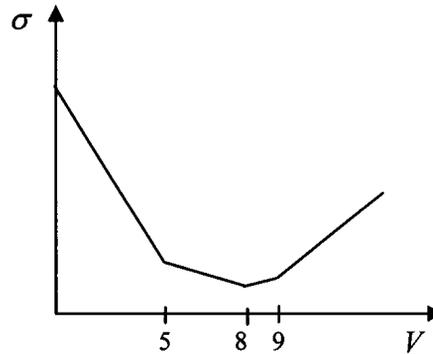
droite de pente $(\lambda_m^0(\text{Na}^+) + \lambda_m^0(\text{Al}(\text{OH})_4^-))\frac{c_B}{V_0} > 0$

$$\bullet \quad \sigma_D = \lambda_m^0(\text{Al}(\text{OH})_4^-)c_0 + \lambda_m^0(\text{NO}_3^-)(3c_0 + c_A) + \lambda_m^0(\text{Na}^+)\frac{c_B V}{V_0} + \lambda_m^0(\text{OH}^-)\frac{c_B(V - V_3)}{V_0}$$

qui est une droite de pente $(\lambda_m^0(\text{Na}^+) + \lambda_m^0(\text{OH}^-))\frac{c_B}{V_0} > 0$

II.2.7. Signe indiqué dans la question précédente.

Allure de la courbe :



$$\text{II.2.8. } C_0V_0 = \frac{V_3 - V_1}{4} C_B$$

II.3. Stabilisation d'un degré d'oxydation par précipitation

II.3.1. $E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+) = 2E_1^\circ - E_2^\circ = 0,16 \text{ V} < E_2^\circ \Rightarrow$ dismutation de Cu^+ en solution aqueuse :
 $2\text{Cu}^+ \rightarrow \text{Cu}^{2+} + \text{Cu}$

II.3.2.

a. espèces : Cu , CuI , Cu^{2+}

$$E(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) + 0,03 \log[\text{Cu}^{2+}]$$

$$E(\text{Cu}^{2+}/\text{CuI}) = E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+) + 0,06 \log([\text{Cu}^{2+}][\text{I}^-]/K_s)$$

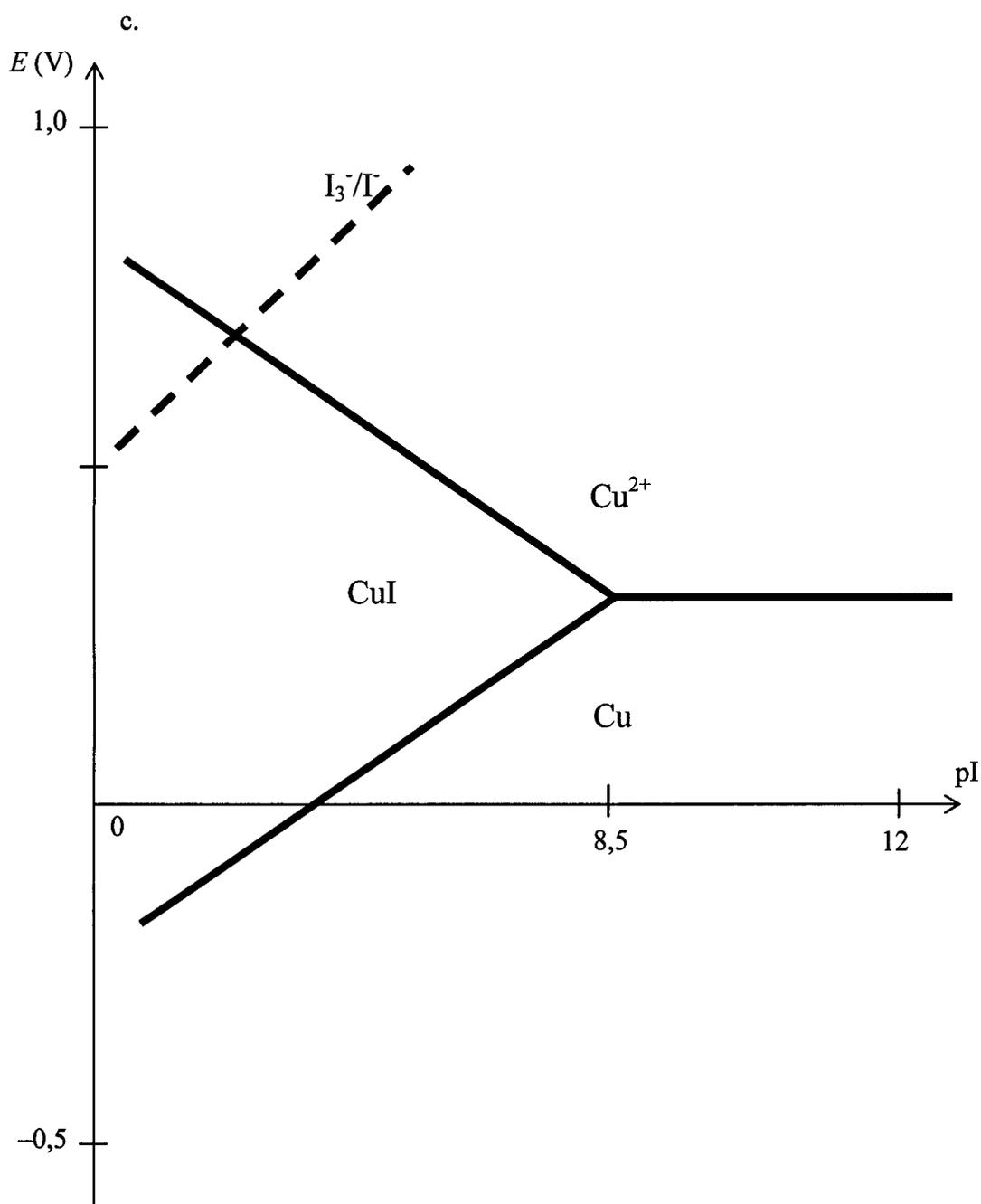
$$E(\text{CuI}/\text{Cu}) = E^\circ(\text{Cu}^+/\text{Cu}) + 0,06 \log(K_s/[\text{I}^-])$$

b.

$$E(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = 0,34 - 0,03 = 0,31 \text{ V}$$

$$E(\text{Cu}^{2+}/\text{CuI}) = 0,82 - 0,06\text{pI}$$

$$E(\text{CuI}/\text{Cu}) = -0,20 + 0,06\text{pI}$$



- d. Voir diagramme : domaines d'existence : CuI et Cu ; domaine de prédominance : Cu^{2+}
 e. Se placer dans le domaine de stabilité de CuI .

II.3.3.

- a. $E = 0,51 + 0,09pI$. Voir droite en pointillés.
 b. Croisement de la droite I_3^-/I^- avec Cu^{2+}/CuI pour $pI = 2,1$; on a la réaction $2Cu^{2+} + 5I^- \rightarrow 2CuI + I_3^-$ pour $pI < 2,1$.
 c. Couleur (ou mieux spectrophotométrie UV visible) ou empois d'amidon.

III. Catalyse hétérogène

III.1. Généralités

III.1.1. Espèce chimique qui accélère et/ou oriente une réaction chimique sans participer au bilan global de la réaction.

III.1.2. Catalyse homogène : le catalyseur est dans la même phase que les réactifs ; hétérogène : catalyseur et réactifs sont dans des phases différentes.

III.1.3. Adsorption sur la surface ; diffusion des réactifs ; réaction chimique ; désorption des produits. Remarque : certains réactifs peuvent ne pas être adsorbés.

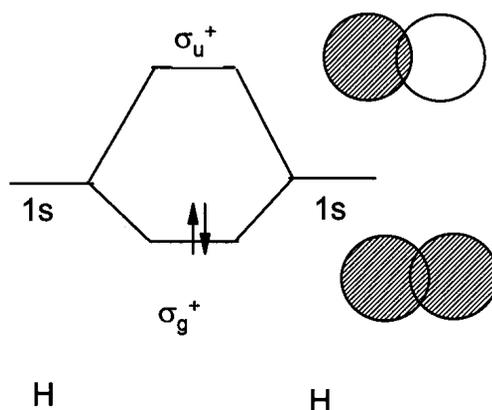
III.1.4. Métaux de transition : ex Ni pour l'hydrogénation.
Oxydes métalliques : ex. V_2O_5 pour l'oxydation de SO_2 .

III.2. Etude de l'adsorption

III.2.1.

a. H plus électronégatif que Ni : donc transfert d'électrons de Ni vers H : on peut donc parler d'ions hydrure adsorbés, même si le transfert correspond seulement à une fraction d'électron.

b.



c. $H_{2(g)} \rightarrow 2H_{(g)}$ $E_1 \approx \Delta_{\text{dis}}H^\circ(H_2) = 436 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

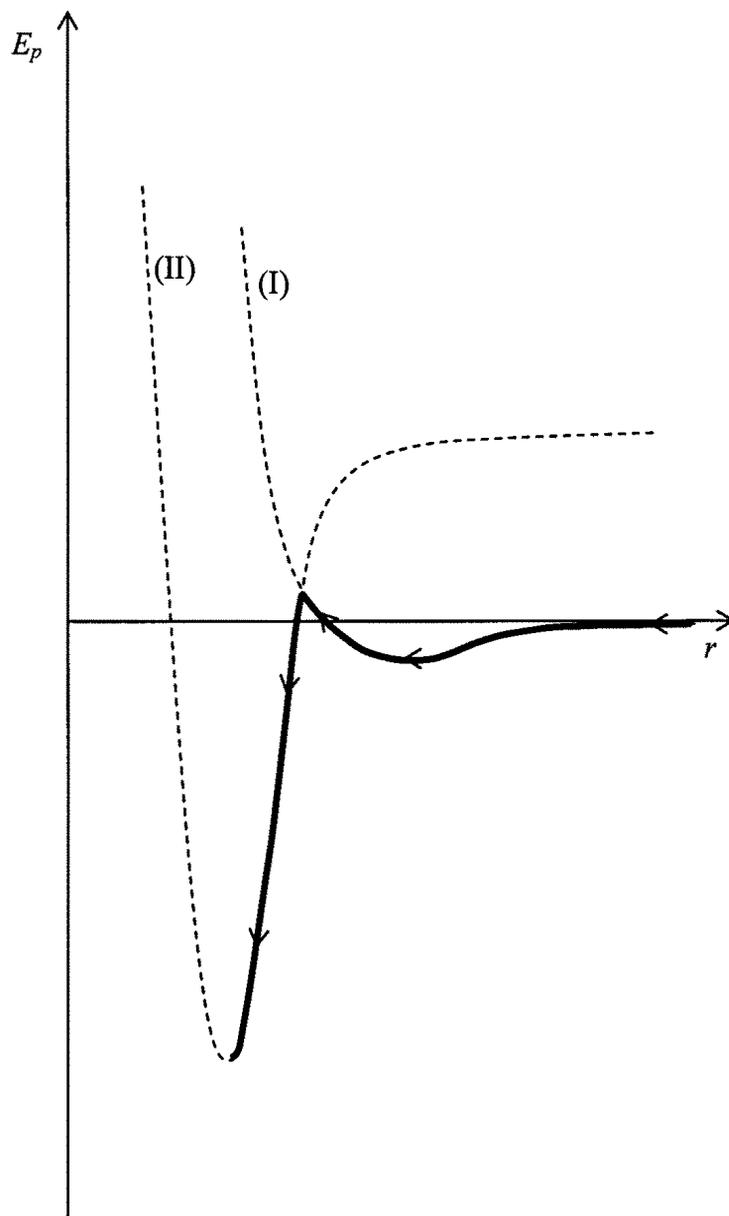
d.

(i) D_1 correspond à l'énergie de dissociation de H_2 ($\approx \Delta_{\text{dis}}H^\circ(H_2)$) et D_2 correspond à l'énergie d'adsorption de H_2 sous forme de deux H.

(ii) $E(H-Ni) = \frac{1}{2}(D_1 - D_2) = 280 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

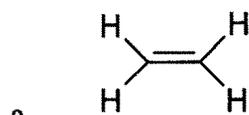
(iii) Il s'agit de physisorption, associée à une liaison de type Van der Waals.

e.

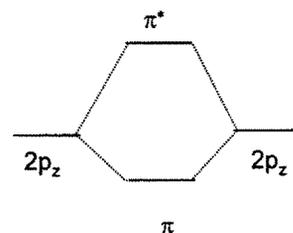


- (i) On passe de la courbe (I) à la courbe (II) \Rightarrow dissociation.
 (ii) Etat de transition au croisement des deux courbes.
 (iii) E_a est faible, de l'ordre de grandeur de D_3 ($\ll D_1$ ou D_2).

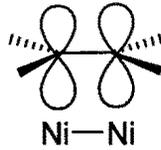
III.2.2.



b.
$$\begin{vmatrix} \alpha - E & \beta \\ \beta & \alpha - E \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow E(\pi) = \alpha + \beta; E(\pi^*) = \alpha - \beta$$



- c. Les orbitales $2p_z$ qui constituent la liaison π pointent en direction des atomes de Ni adjacents du site d'adsorption :



III.2.3.

a.
$$\frac{d\theta}{dt} = k_a p(1-\theta) - k_d \theta$$

b.
$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{Kp}{1+Kp} \text{ (isotherme de Langmuir).}$$

c.

(i) V est proportionnel au nombre de moles de CO adsorbé $\Rightarrow V = a\theta$

(ii) $V = \frac{aKp}{1+Kp} \Rightarrow \frac{p}{V} = \frac{1}{aK} + \frac{p}{a}$ est une fonction affine de pente $1/a$ et d'ordonnée à l'origine $1/aK$. A l'aide des données du tableau, par régression linéaire ou par graphique, on obtient : $1/a = 7,8 \times 10^{-3}$ et $1/aK = 11 \times 10^{-3}$, avec un coefficient de corrélation de 0.9917.

(iii) $K = 7,8 \times 10^{-3} / 11 \times 10^{-3} = 0,7$.

III.3. Mécanisme de réaction catalytique

III.3.1. Réaction bimoléculaire = deux molécules interviennent au cours de l'acte élémentaire cinétiquement déterminant.

III.3.2. $r_{AB} = k\theta_A\theta_B$.

III.3.3.
$$\frac{d\theta_A}{dt} = k_a p_A(1-\theta_A-\theta_B) - k_d \theta_A - k\theta_A\theta_B$$

$$\frac{d\theta_B}{dt} = k'_a p_B(1-\theta_A-\theta_B) - k'_d \theta_B - k\theta_A\theta_B$$

III.3.4.
$$\theta_A = \frac{Kp_A}{1+Kp_A+K'p_B} \text{ et } \theta_B = \frac{K'p_B}{1+Kp_A+K'p_B}$$

III.3.5.
$$r_{AB} = \frac{kKK'p_A p_B}{(1+Kp_A+K'p_B)^2}$$

III.3.6.

a. $\text{CO} + \frac{1}{2} \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2$ ce qui donne :
$$r_{\text{CO}_2} = \frac{kK_{\text{CO}}K_{\text{O}_2}p_{\text{CO}}p_{\text{O}_2}}{(1+K_{\text{CO}}p_{\text{CO}}+K_{\text{O}_2}p_{\text{O}_2})^2}$$

b.

(i) D'après l'équation précédente :

$$(1+K_{\text{CO}}p_{\text{CO}}+K_{\text{O}_2}p_{\text{O}_2})^2 = \frac{kK_{\text{CO}}K_{\text{O}_2}p_{\text{CO}}p_{\text{O}_2}}{r_{\text{CO}_2}}, \text{ d'où l'on tire :}$$

$$p_{O_2} = \frac{1}{K_{O_2}} \left(-1 - K_{CO} p_{CO} + (k K_{CO} K_{O_2} p_{CO})^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{p_{O_2}}{r_{CO_2}}} \right), \text{ soit,}$$

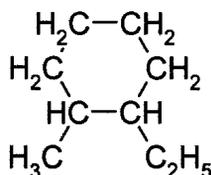
$$\text{numériquement : } p_{O_2} = 2,5 \times 10^{-4} (k)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{p_{O_2}}{r_{CO_2}}} - 6,2 \times 10^{-8} \text{ mbar}$$

- (ii) A l'aide des données du tableau, par régression linéaire ou par graphique, on obtient une pente de :
 $1,4 \times 10^3 \text{ (mbar.molécules.cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1})^{1/2}$
 avec un coefficient de corrélation de 0,9974.
- (iii) $k = 3 \times 10^{13} \text{ molécules.cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

III.4. Stéréochimie et catalyse hétérogène

III.4.1. Z, en utilisant les règles de Cahn-Ingold-Prelog.

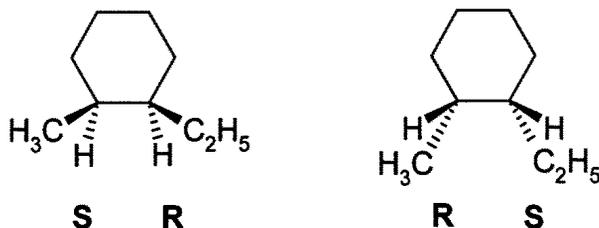
III.4.2.



III.4.3. Deux stéréoisomères, qui sont énantiomères. Le mélange est racémique.

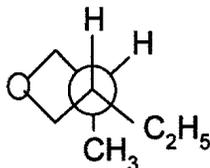
III.4.4. Deux centres stéréogènes, « carbones asymétriques ».

III.4.5.



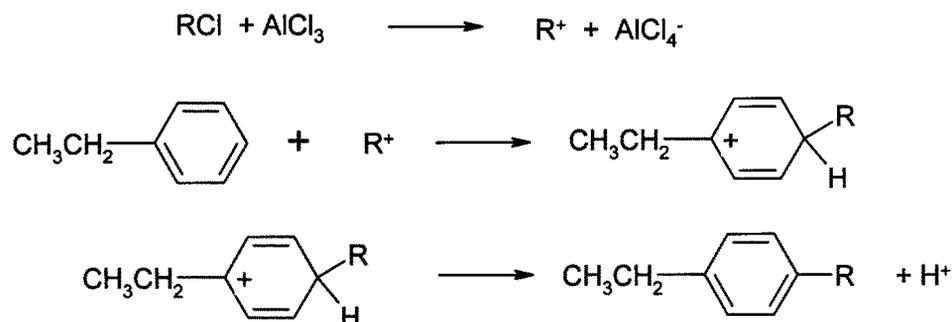
III.4.6. La réaction d'hydrogénation est stéréosélective et stéréospécifique.

III.4.7. Conformation gauche :



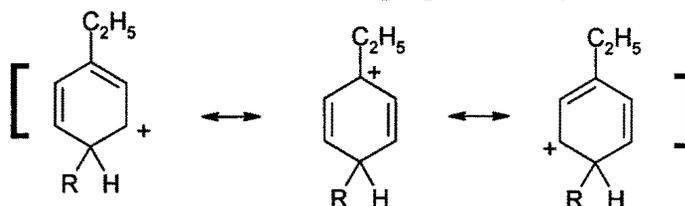
IV.1.4.

a.



AlCl_3 est un acide de Lewis et catalyseur de la réaction.

b. Stabilisation de l'intermédiaire, expliquée au moyen de formes mésomères :

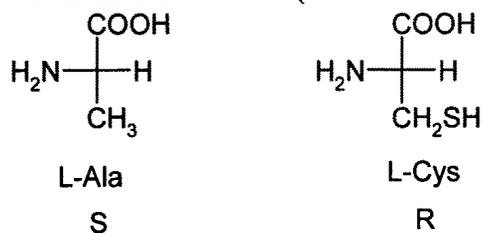


La forme centrale est la plus stable car la charge est portée par un carbone tertiaire.

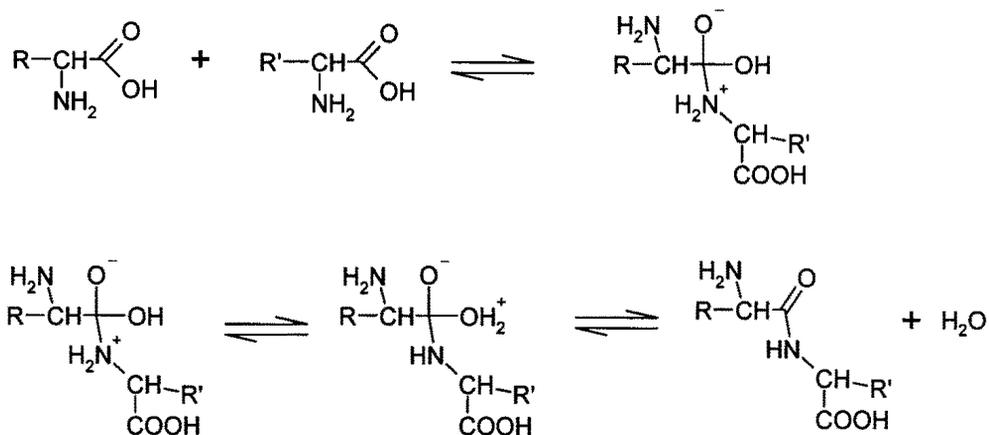
IV.2. La liaison peptidique

IV.2.1. L : NH_2 à gauche en projection de Fisher (voir ci-dessous)

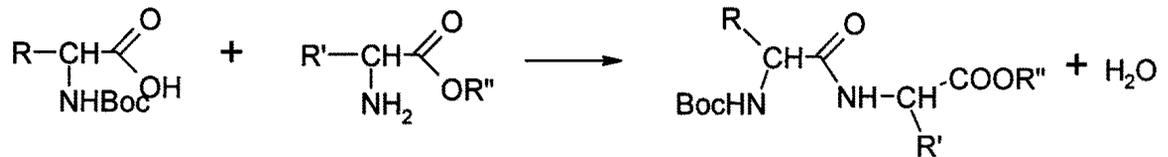
Pas de lien univoque avec la nomenclature R/S (convention différente)



IV.2.2. Mécanisme de type addition-élimination :



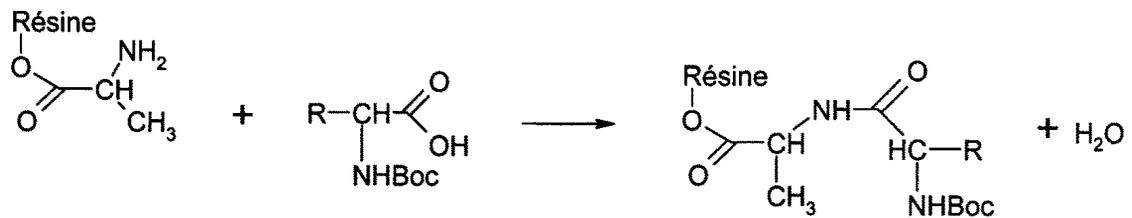
IV.2.3. 4 dipeptides : Ala-Ala ; Cys-Cys ; Ala-Cys ; Cys-Ala



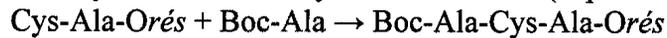
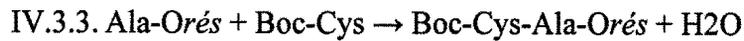
IV.2.4.

IV.3. La synthèse en phase solide de chaînes peptidiques

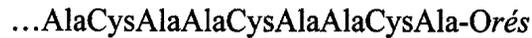
IV.3.1. Substitution nucléophile



IV.3.2.



... etc ...



IV.3.4. Purification aisée car on est en phase hétérogène et on n'effectue qu'une seule déprotection par étape (le peptide est en permanence O-protégé).

IV.3.5.

- La structure primaire d'un peptide est définie par l'enchaînement des acides aminés.
- Liaisons hydrogène entre N-H et C=O de deux acides aminés différents. Exemples de la structure secondaire en hélice α ou en feuillet β .

IV.3.6. $(0,98)^{49} = 0,37$ (ou $0,98^{50} = 0,36$ si on inclut l'étape de fixation sur la résine), donc le rendement est faible (37%). On peut améliorer le rendement en synthétisant des chaînes courtes et en les fixant les unes aux autres (principe de la synthèse convergente).

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE

Problème de physique ♦ Session : 2004

Conducteurs quantiques

PARTIE A

Conductivité d'un gaz d'électrons à 2 dimensions

I Niveaux d'énergie et statistique des électrons

I.1) L'équation de Schrödinger est séparable en x et y . On cherche donc de solutions de la forme $\varphi(x)\psi(y)$ où :

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) = \varepsilon_x \varphi(x) \quad \text{et} \quad -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(y) = \varepsilon_y \psi(y)$$

Si $\varepsilon_x < 0$, il vient $\varphi(x) = A \exp(\alpha x) + B \exp(-\alpha x)$ avec $\alpha^2 = -2m^* \varepsilon_x / \hbar^2$. Une telle solution ne peut satisfaire des conditions aux limites périodiques (fonction et dérivée). Le raisonnement est le même pour la direction y . On a donc $\varepsilon_x \geq 0$ et $\varepsilon_y \geq 0$. On écrit alors : $\varphi(x) = A \exp(ik_x x) + B \exp(-ik_x x)$ avec $k_x^2 = 2m^* \varepsilon_x / \hbar^2$. Il est immédiat de vérifier que φ et ses dérivées sont périodiques de période L si et seulement si $k_x = 2\pi n_x / L$ où $n_x \in \mathbb{Z}$. En faisant le même raisonnement pour y et en remarquant que 2 ondes planes de vecteurs différents sont orthogonales, on voit que l'on peut former une base orthogonale des solutions avec les fonctions $C \exp(ik_x x) \exp(ik_y y)$ où $k_x = 2\pi n_x / L$, $k_y = 2\pi n_y / L$ avec $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$. La normalisation de ces fonctions entraîne alors immédiatement $C = 1/L$. L'énergie ε est reliée à k_x et k_y par :

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2)$$

$$\text{I.2) } \vec{J}_p(k_x, k_y) = \frac{1}{m^*} \text{Re} \left\{ \frac{1}{L^2} \hbar \vec{k} \right\} = \frac{\hbar \vec{k}}{m^* L^2}$$

où \vec{k} est le vecteur de coordonnées k_x et k_y . \vec{J}_p a pour dimension $L^{-1} T^{-1}$.

La contribution d'un électron de vecteur d'onde \vec{k} à la densité surfacique de courant électrique est donc :

$$\vec{J}_e(k_x, k_y) = -e \vec{J}_p(k_x, k_y) = -\frac{e \hbar}{m^* L^2} \vec{k}$$

I.3) Le "volume" de l'espace des \vec{k} occupé par un état électronique est : $(1/2)(2\pi/L)^2$ (le facteur 1/2 vient du spin). Dans un "volume" $\Delta k_x \Delta k_y$ grand devant $2\pi^2/L^2$, il y a donc $L^2 \Delta k_x \Delta k_y / 2\pi^2$ états.

Dans l'espace des \vec{k} , la "surface" d'énergie constante égale à ε est un cercle de rayon $k = \sqrt{2m^* \varepsilon / \hbar^2}$. Le "volume" compris entre les surfaces d'énergie constante ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ est $2\pi k dk$. Comme $k = \sqrt{2m^* \varepsilon / \hbar^2}$, $dk = \sqrt{m^* / \hbar^2} d\varepsilon / \sqrt{2\varepsilon}$ et ce "volume" vaut $2\pi m^* d\varepsilon / \hbar^2$.

Le nombre d'états électroniques d'énergie comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ est donc $L^2 m^* d\varepsilon / \pi \hbar^2$ (à condition que ce nombre soit grand devant 1). La densité d'états en énergie est donc :

$$N(\varepsilon) = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} L^2$$

I.4) A température nulle, le nombre d'électrons N_{e^-} du gaz est obtenu par :

$$N_{e^-} = \int_0^{\varepsilon_F} N(\varepsilon) d\varepsilon$$

On en déduit $\varepsilon_F = N_{e^-} / N(\varepsilon)$ et comme $n_s = N_{e^-} / L^3$:

$$\varepsilon_F = \frac{n_s \pi \hbar^2}{m^*}$$

Pour $n_s = 10^{11} \text{ cm}^{-3}$, un échantillon de 1 mm^3 contient 10^9 électrons. Il y a donc 10^9 états d'énergie inférieure à ε_F . La notion de densité d'états est donc pertinente et le calcul ci-dessus est valable.

$$\text{I.5) } \varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*} \quad \text{et} \quad \lambda_F = \frac{2\pi}{k_F} \quad \Rightarrow \quad \lambda_F = \sqrt{\frac{2\pi}{n_s}}$$

$\sqrt{1/n_s}$ est la distance moyenne entre électrons du gaz, du même ordre de grandeur que λ_F .

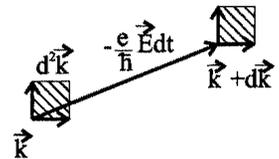
$$\varepsilon_F = \frac{1}{2} m^* v_F^2 \quad \Rightarrow \quad v_F = \frac{\hbar}{m^*} \sqrt{2\pi n_s}$$

II Equation de Boltzmann. Conductivité électrique

II.1) On suppose que le mouvement des électrons peut être décrit classiquement. En l'absence de collisions, on peut donc écrire $d\vec{p}/dt = -e\vec{E}$ avec $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. On en déduit :

$$\hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = -e\vec{E}$$

On considère un élément de volume $d^2\vec{k}$ centré autour du point \vec{k} de l'espace des vecteurs d'onde. Il contient $(L^2/2\pi^2)d^2\vec{k}$ états. Le nombre d'électrons qui s'y trouvent à l'instant t est donc $f(\vec{k}, t)(L^2/2\pi^2)d^2\vec{k}$. A l'instant $t + dt$, cet élément de volume s'est déplacé au point $\vec{k} + d\vec{k}$, $d\vec{k}$ se déduisant de $\hbar d\vec{k}/dt = -e\vec{E}$. Cette dernière relation prouve par ailleurs que l'élément de volume $d^2\vec{k}$ s'est déplacé sans déformation (voir figure 1).



- Figure 1 -

La conservation du nombre de particules impose :

$$f(\vec{k}, t) d^2\vec{k} = f(\vec{k} + d\vec{k}, t + dt) d^2\vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} dt + \vec{\nabla}_{\vec{k}} f \cdot d\vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{e}{\hbar} \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f = 0$$

Une autre façon de faire consiste à écrire directement une équation de conservation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\vec{k}} \left(f \frac{d\vec{k}}{dt} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\vec{k}} f \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} = 0 \quad \text{car} \quad \vec{\nabla}_{\vec{k}} \left(\frac{d\vec{k}}{dt} \right) = -\frac{e}{\hbar} \vec{\nabla}_{\vec{k}} \cdot \vec{E} = 0$$

II.2) La durée d'une collision est très courte devant les temps caractéristiques de l'évolution du système (temps de relaxation). Les collisions modifient donc "instantanément" le vecteur d'onde des électrons. Elles peuvent donc créer ou enlever "instantanément" des particules au point \vec{k} . Il est donc légitime de les traiter à l'aide d'un terme source dans le second membre de l'équation précédente qui s'écrit maintenant :

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$$

Par ailleurs, les collisions ont tendance à ramener la distribution électronique vers la distribution d'équilibre de Fermi-Dirac, d'où la forme choisie pour $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$

II.3) L'équation de Boltzmann s'écrit en régime stationnaire et en posant $f = f_0 + f_1$:

$$-\frac{e}{\hbar} \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} (f_0 + f_1) = -\frac{f_1}{\tau(\varepsilon)}$$

soit en négligeant $\vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_1$ par rapport à $\vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0$ (f s'écarte peu de sa valeur d'équilibre f_0) :

$$f_1 = \frac{e}{\hbar} \tau(\varepsilon) \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0$$

Par ailleurs $\vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0 = \vec{\nabla}_{\vec{k}} \varepsilon \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = \frac{\hbar^2 \vec{k}}{m^*} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}$, donc :

$$f_1(\vec{k}) = \frac{e\hbar}{m^*} \tau(\varepsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \vec{k} \cdot \vec{E}$$

f_1 est du premier ordre en \vec{E} , le terme négligé est donc du second ordre en \vec{E} . Pour \vec{E} suffisamment faible l'approximation ci-dessus est donc légitime (technique classique de linéarisation).

II.4) On obtient la densité surfacique de courant électrique en sommant, sur tous les états électroniques possibles, la contribution calculée au A.I.2, pondérée par la probabilité d'occupation de l'état :

$$\vec{j} = \int \underbrace{\frac{L^2}{2\pi^2}}_{\text{densité d'états}} \underbrace{f(\vec{k})}_{\text{probabilité d'occupation de l'état } \vec{k}} \underbrace{\frac{-e\hbar \vec{k}}{m^* L^2}}_{\text{contribution de l'état } \vec{k}} d^2 \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = -e \frac{L^2}{2\pi^2} \int (f_0 + f_1) \frac{\hbar \vec{k}}{m^* L^2} d^2 \vec{k}$$

Par parité, la contribution du terme en f_0 est nulle ($f_0 \vec{k}$ est une fonction impaire de \vec{k} , son intégrale sur tout l'espace est nulle). On a donc :

$$\vec{j} = -e \frac{L^2}{2\pi^2} \int f_1 \frac{\hbar \vec{k}}{m^* L^2} d^2 \vec{k}$$

II.5) On choisit d'abord \vec{E} parallèle à x . En utilisant l'expression de f_1 trouvée au A.II.3, on voit que l'intégrale donnant j_x contient des termes en k_x^2 et celle donnant j_y des termes en $k_x k_y$. Par symétrie, on a donc $j_y = 0$.

$$j_x = -e \frac{L^2}{2\pi^2} \int \frac{e\hbar}{m^*} \tau(\varepsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{\hbar}{m^* L^2} k_x^2 E_x d^2 \vec{k}$$

$$\Rightarrow j_x = -\frac{e^2}{m^* L^2} \frac{L^2}{2\pi^2} \int \tau(\varepsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2) E_x d^2 \vec{k}$$

car l'intégrale de k_x^2 et celle de k_y^2 sont égales par symétrie.

$$\Rightarrow j_x = -\frac{e^2 E_x}{m^* L^2} \frac{L^2}{2\pi^2} \int \tau(\varepsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \varepsilon d^2 \vec{k}$$

$$\Rightarrow j_x = -\frac{e^2 E_x}{m^* L^2} \int \tau(\varepsilon) N(\varepsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \varepsilon d\varepsilon$$

par définition de la densité d'états. D'où $j_x = \sigma E_x$ avec :

$$\sigma = -\frac{e^2}{m^* L^2} \int \varepsilon \tau(\varepsilon) N(\varepsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\varepsilon$$

Pour un champ \vec{E} parallèle à y , on trouve de même que \vec{j} est dans la direction y avec $j_y = \sigma E_y$. La relation entre \vec{j} et \vec{E} étant linéaire, on a $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ pour toutes les directions de \vec{E} .

II.6) A température nulle, $\partial f_0 / \partial \varepsilon$ tend vers la distribution $-\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$. On a donc :

$$\sigma = \frac{e^2}{m^* L^2} \varepsilon_F \tau(\varepsilon_F) N(\varepsilon_F)$$

soit, en utilisant les résultats des questions A.I.3 et A.I.4 :

$$\sigma = \frac{e^2}{m^* L^2} \frac{n_s \pi \hbar^2}{m^*} \tau(\varepsilon_F) \frac{m^* L^2}{\pi \hbar^2} = \frac{n_s e^2 \tau(\varepsilon_F)}{m^*}$$

On retrouve le même résultat que celui du modèle de Drude. Cependant, on a supposé un temps de relaxation dépendant de l'énergie et on a montré que la conductivité ne dépend que du temps de relaxation au niveau de Fermi (dans Drude, on suppose un temps de relaxation indépendant de l'énergie). Seuls les électrons au niveau de Fermi participent à la conduction (voir question II.7).

$$\vec{j} = \frac{n_s e^2 \tau(\varepsilon_F)}{m^*} \vec{E} = -n_s e \left\{ -\frac{e \tau(\varepsilon_F)}{m^*} \vec{E} \right\}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = -n_s e v_d \vec{v}_d \quad \text{avec} \quad \vec{v}_d = -\frac{e \tau(\varepsilon_F)}{m^*} \vec{E}$$

Tout se passe comme si on avait un mouvement de tous les électrons du gaz à la vitesse \vec{v}_d . La mobilité du gaz définie par $\vec{v}_d = -\eta \vec{E}$ vaut :

$$\eta = \frac{e \tau(\varepsilon_F)}{m^*}$$

II.7) $f_1 = \frac{e}{\hbar} \tau(\varepsilon) \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0$

On a vu qu'à température nulle, f_1 n'est non nulle que pour $\varepsilon = \varepsilon_F$. On peut donc écrire :

$$f_1 = \frac{e}{\hbar} \tau(\varepsilon_F) \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0$$

Comme $f(\vec{k}) = f_0(\vec{k}) + f_1(\vec{k})$, il vient :

$$f(\vec{k}) = f_0(\vec{k}) + \frac{e}{\hbar} \tau(\varepsilon_F) \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_0(\vec{k})$$

On reconnaît un développement de Taylor au premier ordre et on peut écrire :

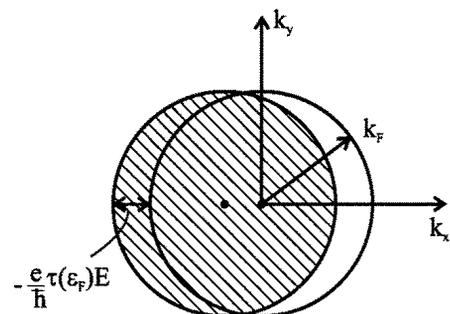
$$f(\vec{k}) \approx f_0 \left(\vec{k} + \frac{e \tau(\varepsilon_F)}{\hbar} \vec{E} \right)$$

La relation précédente montre que sous l'action du champ électrique, la *sphère* de Fermi est translatée de $-e \tau(\varepsilon_F) \vec{E} / \hbar$. La figure 2 présente les *sphères* de Fermi obtenues pour un champ électrique nul (*sphère* non hachurée) et pour un champ électrique E dans la direction x (*sphère* hachurée). On retrouve sur la figure que seuls vont contribuer à la conduction les points proches de la *sphère* de Fermi. En effet, pour un point \vec{k} proche du centre de la *sphère*, les états \vec{k} et $-\vec{k}$ sont peuplés et donnent des contributions opposées au courant électrique.

La relation $j = -n_s e v_d$ peut se réécrire :

$$j = -n_s e \frac{v_d}{v_F} v_F$$

Le traitement ci-dessus montre qu'on a une meilleure représentation du transport électronique en imaginant que seule une fraction v_d / v_F des électrons participent à la conduction en se déplaçant à la vitesse de Fermi.



- Figure 2 -

II.8) Le libre parcours moyen des électrons au niveau de Fermi est donné par $l = v_F \tau(\varepsilon_F)$. On a donc :

$$\sigma = \frac{n_s e^2 \tau(\varepsilon_F)}{m^*} = \frac{n_s e^2 l}{m^* v_F}$$

Par ailleurs, d'après la question A.I.5 :

$$n_s = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m^* v_F}{\hbar} \right)^2$$

On a donc :

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{(m^* v_F)^2}{\hbar^2} \frac{e^2 l}{m^* v_F} = \frac{e^2}{2\pi \hbar} \frac{m^* v_F}{\hbar} l = \frac{e^2}{h} k_F l$$

$k_F l$ est sans dimension. e^2/h a donc la dimension d'une conductivité à 2 dimensions. h/e^2 a donc la dimension d'une résistivité à 2 dimensions, soit celle d'une résistance.

III Données numériques

III.1) Avec les données numériques de l'énoncé, on trouve :

$$\varepsilon_F = 12,7 \text{ meV}, \lambda_F = 42,0 \text{ nm}, v_F = 2,58 \cdot 10^5 \text{ ms}^{-1}, \tau(\varepsilon_F) = 3,24 \cdot 10^{-11} \text{ s} \text{ et } l = 8,36 \text{ } \mu\text{m}.$$

Par rapport à un métal comme l'or, les électrons sont beaucoup plus éloignés les uns des autres (l'interaction coulombienne est donc beaucoup moins importante) et le libre parcours moyen est beaucoup plus grand : dans un métal, il est de l'ordre de la maille atomique alors que dans un gaz bidimensionnel d'électrons, il peut être de quelques microns, nettement supérieur à la taille des systèmes que l'on sait fabriquer par lithographie électronique. On a donc la possibilité de réaliser des échantillons où les électrons sont balistiques, c'est à dire qu'ils ne subissent aucune collision.

La conductivité du gaz bidimensionnel vaut avec les données de l'énoncé $\sigma = 4,84 \cdot 10^{-2} \Omega^{-1}$ ($k_F l = 1250$).

III.2) La valeur numérique de la résistance h/e^2 est $25,9 \text{ k}\Omega$. Celle de la conductance e^2/h est $3,87 \cdot 10^{-5} \Omega^{-1}$.

$$\text{III.3) } R_{\square} = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{n_s e \eta}$$

$$\Rightarrow R_{\square} = \frac{1}{\widetilde{n}_s \times 10^{15} \times \widetilde{\eta} \times 10^2 \times 1,6 \times 10^{-19}}$$

où \widetilde{n}_s est la densité électronique en unité 10^{11} cm^{-2} et $\widetilde{\eta}$ la mobilité en unité $10^{-} \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

$$\Rightarrow R_{\square} = \frac{62,5}{\widetilde{n}_s \widetilde{\eta}} \Omega$$

PARTIE B

Quantification de la conductance

1) L'hamiltonien est séparable en x et y et s'écrit :

$$H = H_x + H_y \quad \text{avec} \quad H_x = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad H_y = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \tilde{V}(y)$$

Ses fonctions propres s'écrivent donc $\Psi(x, y) = \varphi(x)\Phi(y)$ où $\varphi(x)$ est fonction propre de H_x et $\Phi(y)$ est fonction propre de H_y .

Pour H_x , le problème a déjà été résolu au A.I.1 : les fonctions propres sont $\varphi(x) = \exp(ik_x x)/\sqrt{L}$ et les conditions aux limites périodiques imposent $k_x = 2\pi n_x/L$ où $n_x \in \mathbb{Z}$. L'énergie associée au vecteur d'onde k_x est $\hbar^2 k_x^2 / 2m^*$.

Dans la direction y , $\Phi(y)$ s'annule pour $y \leq 0$ et pour $y \geq W$. Pour $0 \leq y \leq W$, on a donc : $\Phi(y) = A \sin(n\pi y/W)$ avec $n \in \mathbb{N}$. La normalisation $\int_0^W |\Phi(y)|^2 dy = 1$ entraîne $A = \sqrt{2/W}$. Les fonctions propres de H_y sont donc :

$$\Phi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{W}} \sin \frac{n\pi y}{W} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$$

L'énergie ε_n associée à $\Phi_n(y)$ est :

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m^* W^2}$$

L'énergie associée à un vecteur d'onde k_x et à un indice n est :

$$\varepsilon_{n,k_x} = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} + \varepsilon_n$$

- 2) Comme $\Phi_n(y)$ est une fonction réelle, la formule donnée à la question A.I.2 montre que la composante selon y du courant de probabilité associé à la fonction d'onde correspondant à k_x et n est nulle. Sa composante suivant x vaut :

$$J_{p_x} = \frac{\hbar k_x}{m^* L} |\Phi_n(y)|^2$$

Le flux de ce courant de probabilité à travers une section transverse du conducteur est donc :

$$\int_0^W J_{p_x} dy = \frac{\hbar k_x}{m^* L} \underbrace{\int_0^W |\Phi_n(y)|^2 dy}_{=1 \text{ car } \Phi_n(y) \text{ est normée}} = \frac{\hbar k_x}{m^* L}$$

- 3) Pour n donné, on doit sommer les contributions de tous les vecteurs d'onde $k_x > 0$ tels que $\varepsilon \leq \varepsilon_n + \hbar^2 k_x^2 / 2m^* \leq \varepsilon + \Delta\varepsilon$.

$$J_{\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon}^{n,+} = \underbrace{2}_{\text{spin}} \underbrace{\frac{L}{2\pi}}_{\text{densité d'états}} \int_{k_x(\varepsilon)}^{k_x(\varepsilon + \Delta\varepsilon)} \frac{\hbar k_x}{m^* L} dk_x$$

Comme dans la partie A, on souhaite remplacer l'intégrale sur k_x par une intégrale sur l'énergie. Il s'agit à nouveau d'un problème de densité d'états en énergie, cette fois-ci à une dimension.

Posons : $\varepsilon' = \varepsilon_n + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*}$. Comme $k_x > 0$, on a $\hbar k_x = \sqrt{2m^*} \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon_n}$ et $dk_x = \frac{\sqrt{2m^*}}{\hbar} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon' - \varepsilon_n}} d\varepsilon'$.

$$\Rightarrow J_{\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon}^{n,+} = 2 \frac{L}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + \Delta\varepsilon} \frac{\sqrt{2m^*}}{m^* L} \sqrt{\varepsilon' - \varepsilon_n} \frac{\sqrt{2m^*}}{\hbar} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon' - \varepsilon_n}} d\varepsilon'$$

$$\Rightarrow J_{\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon}^{n,+} = \frac{2}{2\pi\hbar} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + \Delta\varepsilon} d\varepsilon'$$

$$\Rightarrow J_{\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon}^{n,+} = \frac{2\Delta\varepsilon}{\hbar}$$

Le calcul ci-dessus vaut pour $\varepsilon_n \leq \varepsilon \leq \varepsilon + \Delta\varepsilon$. Si $\varepsilon + \Delta\varepsilon \leq \varepsilon_n$, il est clair que $J_{\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon}^{n,+} = 0$ (il n'y a aucun état électronique correspondant au mode n dans la tranche $\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon$). Si $\varepsilon \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon + \Delta\varepsilon$, il faut faire attention à la borne inférieure de l'intégrale et $J_{\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon}^{n,+} = 2(\varepsilon + \Delta\varepsilon - \varepsilon_n)/\hbar$.

Il est clair que la contribution des états de vecteurs d'onde $k_x < 0$ est l'opposée de celle des états de vecteurs d'onde $k_x > 0$. On a donc $J_{\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon}^{n,-} = -J_{\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon}^{n,+}$

- 4) Les réservoirs d'électrons définis dans cette question sont aux électrons ce que le corps noir est aux photons. Pour que la thermalisation de ces réservoirs soit possible, il faut qu'il existe des collisions inélastiques. Celles-ci sont en effet nécessaires pour ramener la distribution d'énergie vers celle de Fermi-Dirac.

- 5) $\mu_2 - \mu_1 = eV$

Si $\varepsilon_n \leq \mu_1 \leq \mu_2$, la définition des réservoirs montre qu'à température nulle, les états du mode n de vecteur d'onde $k_x > 0$ sont tous peuplés jusqu'à l'énergie μ_1 tandis que ceux de vecteur d'onde $k_x < 0$ sont tous peuplés jusqu'à l'énergie μ_2 . On a donc :

$$I_n = -e [J_{\varepsilon_n, \mu_1}^{n,+} + J_{\varepsilon_n, \mu_2}^{n,-}]$$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{2e}{\hbar} (\mu_1 - \varepsilon_n + \varepsilon_n - \mu_2)$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2e}{\hbar} (\mu_2 - \mu_1)$$

Si $V > 0$, les électrons vont du contact 2 vers le contact 1 (le champ électrique est dans le sens des potentiels décroissants) et l'intensité est positive (c'est à dire dans le sens des x croissants). C'est bien ce qu'on trouve, puisque $V > 0$ entraîne $(\mu_2 - \mu_1) > 0$.

Si $\varepsilon_n \leq \mu_2$, à suffisamment faible tension on a aussi $\varepsilon_n \leq \mu_1 = \mu_2 - eV$ et :

$$I_n = \frac{2e^2}{h} V$$

La conductance associée à un mode est donc $G = \frac{2e^2}{h}$.

- 6) D'après ce qui précède, la conductance à suffisamment faible tension et à température nulle est égale à $2e^2/h$ fois le nombre de modes d'énergie $\varepsilon_n \leq \mu_2$. La conductance est donc quantifiée en multiples de $2e^2/h$.

On a $\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m^* W^2}$ et $\mu_2 = \varepsilon_F = \frac{n_s \pi \hbar^2}{m^*}$

$$\varepsilon_n \leq \mu_2 \Leftrightarrow \frac{n^2 \pi}{2W^2} \leq n_s \Leftrightarrow n \leq \sqrt{\frac{2n_s}{\pi}} W \Leftrightarrow n \leq \frac{2W}{\lambda_F}$$

Le nombre de modes d'énergie $\varepsilon_n \leq \mu_2$ est donc $\text{Int} \left[\frac{2W}{\lambda_F} \right]$ et on a :

$$G = \frac{2e^2}{h} \text{Int} \left[\frac{2W}{\lambda_F} \right]$$

Les effets de quantification sont facilement observés si W est de l'ordre de λ_F . En utilisant les résultats numériques du A.III, on voit qu'il faut réaliser des conducteurs dont la largeur est de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres. On sait maintenant réaliser de tels conducteurs à l'aide de grilles électrostatiques disposées à la surface de l'échantillon (à typiquement une centaine d'Angstroems du gaz d'électrons) qui permettent, en chassant les électrons du gaz, de définir des conducteurs de géométrie bien contrôlée (voir question B.8).

Pour pouvoir observer la quantification de la conductance, il faut également que l'élargissement thermique des niveaux soit nettement inférieur à leur séparation, c'est à dire $k_B \theta \ll (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)$.

- 7) La différence de potentiel entre les 2 réservoirs est V et le courant qui circule dans le système est I . On a donc une dissipation d'énergie (effet Joule) associée à ce processus de conduction égale à VI .

La résistance du conducteur (inverse de sa conductance) est indépendante de sa longueur.

La dissipation mentionnée ci-dessus peut sembler paradoxale puisqu'on a supposé le conducteur en régime balistique, c'est à dire que les électrons n'y subissent aucune collision. Cette dissipation d'énergie a en fait lieu dans les contacts : les électrons injectés par le contact 2 à une énergie supérieure à μ_1 doivent perdre de l'énergie une fois parvenus dans le contact 1 pour que celui-ci garde sa distribution d'équilibre, de potentiel chimique μ_1 et de température θ . La dissipation d'énergie a donc lieu par l'intermédiaire des collisions inélastiques dans les réservoirs. On comprend donc que la résistance du système soit indépendante de la longueur du conducteur et qu'elle soit appelée résistance de contact.

Si l'on veut pouvoir supposer les réservoirs à l'équilibre thermodynamique à la température θ , il faut $eV \ll k_B \theta$. L'énergie amenée par un électron dans un réservoir est alors faible par rapport à l'énergie thermique caractéristique du réservoir et sa distribution d'équilibre est peu perturbée.

On doit avoir $k_B \theta \ll (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)$; on peut par exemple évaluer $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ pour $W = 5\lambda_F$ (10 modes). On a alors $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 3\pi^2 \hbar^2 / 2m^* (5\lambda_F)^2 = 0,38 \text{ meV} = 4,4 \text{ K}$. Pour observer clairement la quantification de la conductance, il faut donc des températures très inférieures au degré Kelvin (on peut obtenir de telles températures dans des cryostats à dilution He³- He⁴). Pour ne pas perturber l'équilibre thermique des réservoirs, on doit alors avoir $eV \ll k_B \theta$, donc V de l'ordre de 1 à 10 μV .

- 8) Sur la figure présentée, on observe la quantification de la conductance étudiée dans cette partie. Pour $V_G < -2V$, il y a un seul mode dans le conducteur qui participe à la conduction (sa largeur est très faible). Quand on augmente V_G , la largeur du conducteur augmente et le nombre de modes participant à la conduction augmente progressivement. D'après ce qui précède, entre 2 paliers de conductance, la largeur du conducteur a augmenté de $\lambda_F/2 \approx 20 \text{ nm}$. Pour une température de 0,3 K, les paliers sont très marqués. Au fur et à mesure qu'on augmente la température, ceux-ci s'arrondissent pour devenir peu visibles à 4,2 K. Ceci est en bon accord avec les estimations faites à la question précédente.

PARTIE C

Conducteur quantique et désordre

I Transmission et réflexion d'une barrière de potentiel

I.1) La particule de vecteur d'onde $k > 0$ est supposée arriver de la région G. On ne peut donc avoir de terme en $\exp(-ikx)$ dans la région D (un tel terme correspondrait à une particule arrivant de D). r et t sont respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de la barrière de potentiel.

I.2) Le courant de probabilité associé à la fonction d'onde donnée question C.I.1 est, d'après la question A.I.2:

- dans la région G:

$$J_p = \frac{1}{m^*} \operatorname{Re} \{ A^* (e^{-ikx} + r^* e^{ikx}) \hbar k (e^{ikx} - r e^{-ikx}) \}$$

$$\Rightarrow J_p = \frac{|A|^2 \hbar k}{m^*} (1 - |r|^2) + \frac{|A|^2 \hbar k}{m^*} \operatorname{Re} \left(\underbrace{r^* e^{2ikx} - r e^{-2ikx}}_{\text{imaginaire pur}} \right)$$

$$\Rightarrow J_p = \frac{|A|^2 \hbar k}{m^*} (1 - |r|^2)$$

- dans la région D:

$$J_p = \frac{|A|^2 \hbar k}{m^*} |t|^2$$

Comme la fonction d'onde considérée est indépendante du temps, l'équation de conservation locale de la probabilité s'écrit $\operatorname{div} J_p = dJ_p/dx = 0$. J_p est donc constant, ce qui entraîne $1 - |r|^2 = |t|^2$ d'où:

$$|r|^2 + |t|^2 = 1$$

I.3) Les relations $|r|^2 = |r'|^2$ et $|t|^2 = |t'|^2$ indiquent que les probabilités que la particule soit réfléchi ou transmise par la barrière de potentiel ne dépendent pas du sens dans lequel cette particule arrive sur la barrière.

II Conductance versus transmission

II.1) Le conducteur n'a qu'un seul mode transverse d'énergie ε_1 . Dans la région située à droite de la barrière, le flux du courant de probabilité dans le sens positif J_D^+ est dû aux particules émises par le contact 1 et transmises par la barrière mais aussi aux particules émises par le contact 2 et réfléchies par la barrière. En reprenant le raisonnement de la partie B et les résultats de C.I.2, on voit donc que:

$$J_D^+ = \frac{2}{h} (\mu_1 - \varepsilon_1) T + \frac{2}{h} (\mu_2 - \varepsilon_1) (1 - T)$$

À droite de la barrière, le flux du courant de probabilité dans le sens négatif J_D^- est dû aux particules émises par le contact 2 et vaut:

$$J_D^- = -\frac{2}{h} (\mu_2 - \varepsilon_1)$$

$$\text{On a donc } I = -e (J_D^+ + J_D^-) = \frac{2e}{h} (\mu_2 - \mu_1) T.$$

$$\text{À suffisamment faible tension on a donc } I = \frac{2e^2}{h} TV \quad \text{et} \quad G = \frac{2e^2}{h} T.$$

A gauche de la barrière, on a de même :

$$J_G^+ = \underbrace{\frac{2}{h}(\mu_1 - \varepsilon_1)}_{\text{particules émises par 1}}$$

$$J_G^- = \underbrace{-\frac{2}{h}(\mu_1 - \varepsilon_1)(1 - T)}_{\text{particules émises par 1 et réfléchies}} + \underbrace{-\frac{2}{h}(\mu_2 - \varepsilon_1)T}_{\text{particules émises par 2 et transmises}}$$

$$\Rightarrow J_G^+ + J_G^- = J_D^+ + J_D^-$$

On trouve bien sûr le même courant à gauche et à droite de la barrière.

La conductance d'un mode est la conductance en l'absence de désordre $2e^2/h$ multipliée par la transmission du conducteur.

$$\text{II.2)} \quad G = \frac{2e^2}{h}T \Rightarrow R = \frac{h}{2e^2} \frac{1}{T} \text{ ce que l'on peut aussi écrire :}$$

$$R = \frac{h}{2e^2} + \frac{h}{2e^2} \left(\frac{1}{T} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow R = \frac{h}{2e^2} + \frac{h}{2e^2} \frac{1 - T}{T}$$

Le premier terme est la résistance de contact déterminée partie B, indépendante du désordre dans le conducteur. Le second terme, nul en l'absence de désordre, est donc la résistance intrinsèque du conducteur.

- II.3) Dans le cas d'un conducteur possédant plusieurs modes transverses, il faut tenir compte du fait que la barrière peut coupler les modes les uns aux autres (en réfléchissant par exemple une particule incidente dans le mode 1 vers un état du mode 2 de même énergie...). Pour décrire correctement la barrière, on doit définir une matrice de diffusion qui précise ces couplages entre modes. La démarche utilisée est ensuite tout à fait similaire et les résultats sont qualitativement les mêmes.

III Conducteur incohérent. Loi d'Ohm

- III.1) Les 2 barrières constituent l'équivalent d'un interféromètre de Fabry-Pérot. La distance entre les 2 barrières étant plus grande que la longueur de cohérence de phase des ondes électroniques, il n'y a pas d'interférences et on doit sommer les "intensités" des ondes transmises après avoir effectué un certain nombre d'allers et retours dans la cavité formée par les 2 barrières. L'intensité (carré de l'amplitude) de l'onde directement transmise est T_1T_2 , celle de l'onde qui a effectué un aller et retour est $T_1T_2(1 - T_1)(1 - T_2)$, celle de l'onde qui a effectué 2 allers et retours est $T_1T_2(1 - T_1)^2(1 - T_2)^2 \dots$. La transmission (en intensité) du système formé par les 2 barrières est donc :

$$T(2) = T_1T_2 \{ 1 + (1 - T_1)(1 - T_2) + (1 - T_1)^2(1 - T_2)^2 + \dots \}$$

$$\Rightarrow T(2) = \frac{T_1T_2}{1 - (1 - T_1)(1 - T_2)}$$

$$\frac{1 - T(2)}{T(2)} = \frac{1 - (1 - T_1)(1 - T_2) - T_1T_2}{T_1T_2} = \frac{T_1 + T_2 - 2T_1T_2}{T_1T_2} = \frac{T_2(1 - T_1)}{T_1T_2} + \frac{T_1(1 - T_2)}{T_1T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - T(2)}{T(2)} = \frac{1 - T_1}{T_1} + \frac{1 - T_2}{T_2}$$

On a vu au C.II que $(h/2e^2)(1 - T)/T$ est la résistance intrinsèque d'un conducteur de transmission T . Le résultat ci-dessus montre que si il n'y a pas d'interférences entre les ondes électroniques, les résistances intrinsèques s'additionnent, comme on en a l'habitude dans les conducteurs classiques.

- III.2) Le nombre de diffuseurs dans une longueur L de conducteur qui en contient beaucoup est $N = \nu L$. D'après la question précédente, on a :

$$\frac{1 - T(N)}{T(N)} = N \frac{1 - T}{T}$$

$$\Rightarrow T(N) = \frac{T}{N(1-T) + T}$$

$$\Rightarrow T(L) = \frac{T}{\nu L(1-T) + T} = \frac{L_0}{L + L_0} \quad \text{où } L_0 = \frac{T}{\nu(1-T)}$$

III.3) Si $T \approx 1$, la relation ci-dessus montre immédiatement que $L_0\nu(1-T) \approx 1$. $(1-T)$ est la probabilité qu'un électron soit réfléchi par un diffuseur. L_0 est donc la distance au bout de laquelle un électron a une probabilité 1 d'avoir été réfléchi.

De C.II.2, on déduit :

$$R(L) = \frac{h}{2e^2} + \frac{h}{2e^2} \frac{1-T(L)}{T(L)} = \frac{h}{2e^2} + \frac{h}{2e^2} \frac{1 - \frac{L_0}{L+L_0}}{\frac{L_0}{L+L_0}}$$

$$\Rightarrow R(L) = \frac{h}{2e^2} + \frac{h}{2e^2} \frac{L}{L_0}$$

Le premier terme est la résistance de contact rencontrée partie B, le second terme est la résistance intrinsèque du conducteur qui domine dès que $L \gg L_0$. On obtient alors une résistance qui varie proportionnellement à la longueur. On retrouve donc la loi d'Ohm. C'est un régime classique de conduction (pas d'interférences entre les ondes électroniques). A partir de l'équation de Boltzmann, on obtiendrait :

$$R = \frac{1}{\sigma_{1D}} L \quad (\text{système unidimensionnel})$$

Comme $\lambda_F = \frac{4}{n_l}$, on déduit $v_F = \frac{\hbar k_F}{m^*} = \frac{\hbar n_l}{4m^*}$, d'où comme $\sigma_{1D} = \frac{n_l e^2 \tau(\varepsilon_F)}{m^*}$:

$$R = \frac{\hbar L}{4e^2 v_F \tau(\varepsilon_F)} = \frac{\hbar}{4e^2} \frac{L}{l} \quad \text{où } l \text{ est le libre parcours moyen défini au A}$$

L_0 est la distance au bout de laquelle un électron a une probabilité 1 d'avoir été réfléchi. L_0 est donc à peu près égal au libre parcours moyen l . Les 2 modèles donnent donc des résultats tout à fait comparables même quantitativement.

IV Conducteur cohérent. Localisation

IV.1) Le calcul est le même qu'au C.III.1 mais, puisque la distance entre les 2 barrières est plus courte que la longueur de cohérence de phase des ondes électroniques, il faut cette fois-ci tenir compte des interférences et commencer par sommer les amplitudes des différentes ondes transmises par la cavité formée par les 2 barrières. La transmission en amplitude du système s'écrit :

$$t(2) = t_1 t_2 \{ 1 + |r_1||r_2|e^{i\alpha} + |r_1|^2|r_2|^2e^{2i\alpha} + \dots \}$$

puisque α , déphasage total subi par une onde pendant un aller et retour dans la cavité, incorpore les déphasages se produisant aux réflexions sur les barrières.

$$\Rightarrow t(2) = \frac{t_1 t_2}{1 - |r_1||r_2|e^{i\alpha}}$$

$$\Rightarrow T(2) = t(2)t(2)^* = \frac{T_1 T_2}{1 + |r_1|^2|r_2|^2 - 2|r_1||r_2|\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow T(2) = \frac{T_1 T_2}{1 - 2\sqrt{(1-T_1)(1-T_2)}\cos\alpha + (1-T_1)(1-T_2)}$$

$$\text{IV.2) } R(\alpha) = \frac{1-T(2)}{T(2)} \frac{h}{2e^2} = \frac{h}{2e^2} \frac{1 - 2\sqrt{(1-T_1)(1-T_2)}\cos\alpha + (1-T_1)(1-T_2) - T_1 T_2}{T_1 T_2}$$

$$\Rightarrow R(\alpha) = \frac{h}{2e^2} \frac{(T_1 + T_2 - 2T_1 T_2) + (2 - 2T_1 - 2T_2 + 2T_1 T_2) - 2\sqrt{(1-T_1)(1-T_2)}\cos\alpha}{T_1 T_2}$$

$$\Rightarrow R(\alpha) = \frac{h}{2e^2} \left\{ \frac{1-T_1}{T_1} + \frac{1-T_2}{T_2} + 2 \frac{(1-T_1)(1-T_2)}{T_1 T_2} - 2 \frac{\sqrt{(1-T_1)(1-T_2)}}{T_1 T_2} \cos \alpha \right\}$$

$$\Rightarrow R(\alpha) = R_1 + R_2 + \frac{4e^2}{h} R_1 R_2 - \frac{h}{e^2} \frac{\sqrt{(1-T_1)(1-T_2)}}{T_1 T_2} \cos \alpha$$

$R(\alpha) \neq R_1 + R_2$. Il n'y a plus additivité des résistances à cause des effets d'interférences.

IV.3) Un morceau de conducteur qui ne contient qu'un seul diffuseur a en moyenne une longueur $\Delta L = 1/\nu$. La résistance intrinsèque de ce morceau de conducteur est $(h/2e^2)(1-T)/T \approx (h/2e^2)(1-T)$ car $T \approx 1$. Comme $1-T = 1/(L_0\nu) = \Delta L/L_0$, la résistance intrinsèque d'un morceau de conducteur ne contenant qu'un seul diffuseur est en moyenne $(h/2e^2)(\Delta L/L_0)$.

IV.4) La longueur moyenne du conducteur obtenu est $L + \Delta L$. Sa résistance est en moyenne, d'après C.IV.2 :

$$R(L) + R(\Delta L) + \frac{4e^2}{h} R(L)R(\Delta L) \quad \text{où} \quad R(\Delta L) = \frac{h}{2e^2} \frac{\Delta L}{L_0}$$

En effet, le diffuseur étant placé aléatoirement, l'opération de moyennage fait disparaître le terme en $\cos \alpha$. On a donc :

$$R(L + \Delta L) = R(L) + \frac{h}{2e^2} \left[1 + \frac{4e^2}{h} R(L) \right] \frac{\Delta L}{L_0}$$

IV.5) L'équation ci-dessus apparaît comme un développement de Taylor au premier ordre en ΔL . Pour lui trouver une solution, on peut chercher une solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dR}{dL} = \frac{h}{2e^2} \frac{1}{L_0} \left[1 + \frac{4e^2}{h} R(L) \right]$$

La solution de cette équation est :

$$R(L) = A e^{2\frac{L}{L_0}} - \frac{h}{4e^2}$$

Compte tenu de la condition aux limites $R(0) = 0$, on trouve :

$$R(L) = \frac{h}{4e^2} \left[e^{2\frac{L}{L_0}} - 1 \right]$$

On peut facilement vérifier que cette solution vérifie l'équation obtenue à la question C.IV.4 pour toute valeur de ΔL .

IV.6) Pour $L \gg L_0$, on trouve :

$$R(L) = \frac{h}{4e^2} e^{2\frac{L}{L_0}}$$

La résistance croît exponentiellement avec la longueur. L_0 étant de l'ordre de grandeur du libre parcours moyen l , on voit qu'un conducteur cohérent monomode devient isolant lorsqu'il devient grand devant le libre parcours moyen électronique. C'est le phénomène de localisation forte.

IV.7) a) La longueur L du conducteur étant supposée grande devant la distance entre diffuseurs, le conducteur contient beaucoup de diffuseurs. On suppose par ailleurs $L \ll L_0$, L_0 étant la longueur au bout de laquelle un électron a une probabilité 1 d'avoir été réfléchi (voir C.III.3). Ces 2 hypothèses ne sont compatibles que si la transmission d'un diffuseur est très voisine de 1 (la probabilité qu'un diffuseur réfléchisse un électron est alors très faible).

b) Pour $L \ll L_0$, on a d'après la question C.IV.5,

$$R(L) = \frac{h}{4e^2} \left[\frac{2L}{L_0} + \frac{2L^2}{L_0^2} \right] = \underbrace{\frac{h}{2e^2} \frac{L}{L_0}}_{R_{cl}(L)} \left[1 + \frac{2e^2}{h} \frac{h}{2e^2} \frac{L}{L_0} \right]$$

$$\Rightarrow R(L) = R_{cl}(L) \left[1 + \frac{2e^2}{h} R_{cl}(L) \right]$$

c) La résistance intrinsèque du conducteur est, avec les hypothèses faites, très petite devant $h/2e^2$. La conductance intrinsèque du conducteur est définie par $G = 1/R(L)$.

On a $R(L) = R_{cl}(L) + \Delta R$ avec $\Delta R = \frac{2e^2}{h} R_{cl}(L)^2 \ll R(L)$.

La correction à la conductance intrinsèque due aux effets d'interférences quantiques est donc :

$$\Delta G = -\frac{\Delta R}{R(L)^2} = -\frac{2e^2}{h}$$

Cet effet est appelé localisation faible.

PARTIE D

Electronique à un électron

I Blocage de Coulomb de l'effet tunnel

I.1) La charge électrique de l'îlot métallique est due aux électrons qui ont traversé la jonction par effet tunnel. A chaque événement tunnel, une charge égale à la charge de l'électron $-e$ passe à travers la jonction. La charge de l'îlot est donc quantifiée en un multiple entier de la charge élémentaire e . Ce n'est pas le cas de la charge présente sur l'une des armatures d'une capacité : ceci est dû au caractère non localisé des électrons qui forment un fluide quantique que l'on peut déplacer d'une quantité arbitrairement petite. Ainsi la charge de l'armature d'une capacité (capacité C , surface S) résulte du déplacement relatif de la densité électronique par rapport aux charges positives. Si ρ est la densité électronique dans le métal, un déplacement d'ensemble $\delta = e\rho/(\rho S)$ par rapport aux charges positives dans la direction perpendiculaire à l'armature produit une charge $Q = e\rho$ sur l'armature.

I.2) On a : $V = \frac{q}{C} + \frac{q'}{C}$ et $-q + q' = -ne$

$$\Rightarrow V = \frac{2q}{C} - \frac{ne}{C} \Rightarrow q = \frac{1}{2}(CV + ne)$$

I.3) L'énergie électrostatique U_e du système formé par les 2 capacités est :

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} \frac{q'^2}{C}$$

Comme $q = (CV + ne)/2$ et $q' = (CV - ne)/2$, on trouve :

$$U_e = \frac{CV^2}{4} + \frac{n^2 e^2}{4C}$$

Le premier terme correspond à l'énergie électrostatique de 2 capacités C en série. Le second est l'énergie électrostatique des charges en excès sur l'îlot.

I.4) Lors d'une transformation du système qui fait varier de Δn le nombre d'électrons en excès sur l'îlot, on a, d'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_e = W + Q$$

où W et Q sont respectivement le travail et la chaleur reçus par le système au cours de la transformation. Le système étant au contact d'un thermostat à la température θ , le second principe de la thermodynamique permet d'affirmer que sa variation d'entropie ΔS satisfait :

$$-\frac{Q}{\theta} + \Delta S \geq 0$$

$$\text{On a donc : } \Delta U_e - Q \geq \Delta U_e - \theta \Delta S$$

$$\Rightarrow W \geq \Delta U_e - \theta \Delta S$$

$$\Rightarrow \Delta U_e - W - \theta \Delta S \leq 0$$

W est le travail fourni par le générateur lors de la transformation. Il vaut $V\Delta q$ avec $\Delta q = -\Delta q' = e\Delta n/2$. On a donc :

$$\Delta \left[U_e - \frac{eVn}{2} - \theta S \right] \leq 0$$

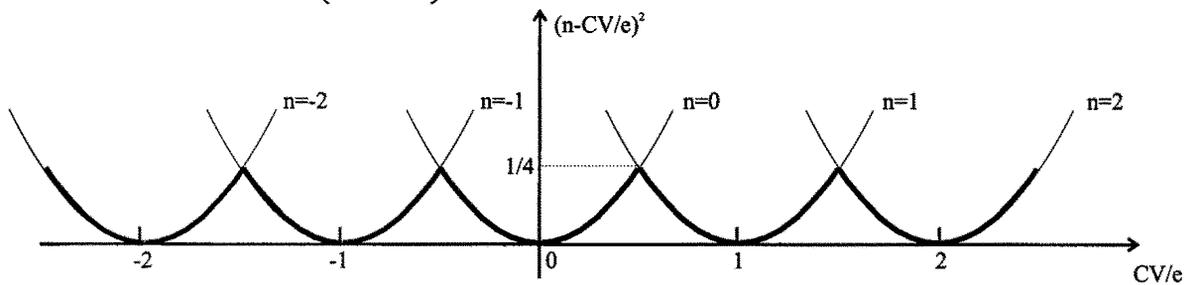
car V et θ sont des constantes. Le potentiel thermodynamique qui régit l'évolution du système à température θ est donc :

$$U_e - \frac{eVn}{2} - \theta S \quad (\Leftrightarrow \text{enthalpie libre})$$

A température nulle, il vaut $U_e - eVn/2$. L'équilibre est alors atteint pour la valeur \bar{n} de n qui rend minimum la fonction :

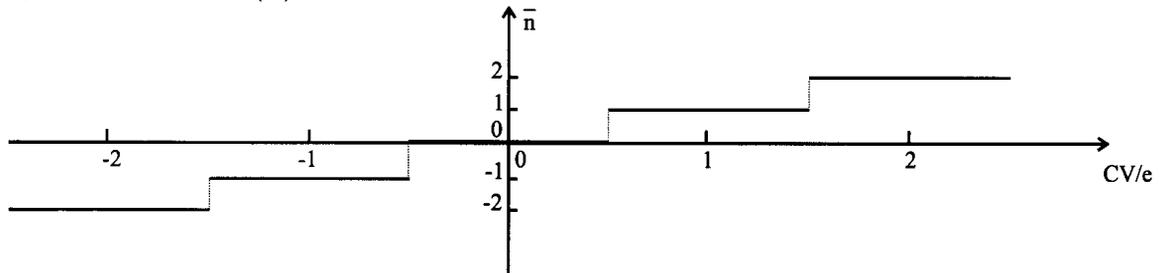
$$U_e - \frac{eVn}{2} = \frac{CV^2}{4} + \frac{n^2 e^2}{4C} - \frac{eVn}{2} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{2C} \left\{ n - \frac{CV}{e} \right\}^2$$

I.5) La figure 3 présente $\frac{1}{2} \frac{e^2}{2C} \left\{ n - \frac{CV}{e} \right\}^2$ en fonction de V pour les différentes valeurs de n .



- Figure 3 -

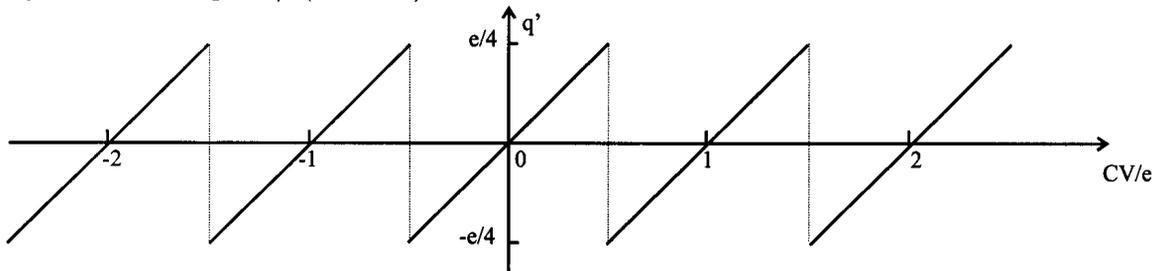
Pour obtenir \bar{n} , on doit, pour chaque valeur de V , chercher la parabole la plus basse. Le résultat est indiqué en gras sur la figure 3. On voit que $\bar{n} = n$ pour $(n - 1/2)e/C \leq V \leq (n + 1/2)e/C$. La figure 4 présente la courbe $\bar{n}(V)$ à $\theta = 0 K$.



- Figure 4 -

La valeur entière du nombre d'électrons en excès sur l'îlot peut être contrôlée au moyen de la tension V .

La figure 5 présente en fonction de V et à température nulle, la charge à l'équilibre de la capacité de la jonction tunnel $q' = 1/2(CV - \bar{n}e)$.



- Figure 5 -

Quand le nombre d'électrons en excès sur l'îlot augmente d'une unité, un électron traverse la jonction de la droite vers la gauche. Pour cela la charge $-q'$ de l'armature externe de la jonction augmente de $e/2$ et le générateur fait passer $-e/2$ du potentiel V au potentiel 0 (la charge q augmente de $e/2$).

- I.6)** A température nulle, lorsqu'on augmente V à partir de 0, n reste égal à 0 jusqu'à ce que V soit égal à $e/2C$. Il y a donc blocage de l'effet tunnel (blocage de Coulomb).

$$V = \frac{e}{2C} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{e^2}{2C} = e \frac{V}{2}$$

Dans cette dernière relation, le premier terme est l'énergie électrostatique de l'îlot avec un électron en excès (voir question D.I.3). Le second terme est l'énergie potentielle gagnée par un électron qui traverse la barrière par effet tunnel. Pour que l'effet tunnel puisse avoir lieu il faut donc que l'énergie potentielle gagnée par un électron qui traverse la barrière soit supérieure à l'énergie électrostatique nécessaire pour ajouter un électron sur l'îlot. Lorsqu'on passe de n à $n + 1$ électrons en excès sur l'îlot, la variation d'énergie électrostatique de l'îlot est :

$$\frac{(n+1)^2 e^2}{4C} - \frac{n^2 e^2}{4C} = (n + \frac{1}{2}) \frac{e^2}{2C}$$

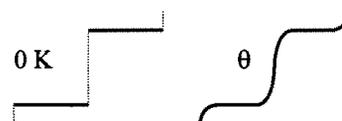
Le raisonnement ci-dessus permet de retrouver immédiatement que cela ne se produit que si $V \geq (n + 1/2)e/C$.

- I.7)** Si on reprend le raisonnement précédent, on voit qu'à $V = 0$ l'agitation thermique sera insuffisante pour permettre de passer sur les plateaux $n = 1$ ou $n = -1$ si $k_B \theta \ll 1/2(e^2/2C)$. De manière plus générale, pour discuter du passage du plateau n au plateau $n + 1$, il faut tenir compte du travail des générateurs (nul à $V = 0$) et raisonner sur le potentiel thermodynamique discuté à la question D.I.4. A V donné, la différence entre les potentiels thermodynamiques obtenus pour n et $n + 1$ s'écrit :

$$\frac{1}{2} \frac{e^2}{2C} \left\{ n + 1 - \frac{CV}{e} \right\}^2 - \frac{1}{2} \frac{e^2}{2C} \left\{ n - \frac{CV}{e} \right\}^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{2C} + \frac{e^2}{2C} \left\{ n - \frac{CV}{e} \right\}$$

Cette différence vaut $(1/2)(e^2/2C)$ au milieu du plateau n ($V = ne/C$) et évidemment 0 au bord supérieur de ce plateau ($V = (n + 1/2)e/C$). De même pour passer du plateau n au plateau $n - 1$, le saut de potentiel thermodynamique vaut $(1/2)(e^2/2C)$ au milieu du plateau n et 0 à son bord inférieur. On voit que le blocage de Coulomb associé au plateau n sera observable si $k_B \theta \ll 1/2(e^2/2C)$.

Les plateaux seront alors bien marqués en leur centre et arrondis sur les bords (voir figure 6). Si la condition ci-dessus est respectée, au milieu d'un plateau les fluctuations de n sont thermiquement bloquées (la valeur de n ne peut pas fluctuer car le saut de potentiel thermodynamique pour passer aux valeurs voisines est très supérieur à l'énergie thermique).



- Figure 6 -

Au contraire, lorsqu'on s'approche d'un bord du plateau, ce saut de potentiel tend vers 0 et n peut se mettre à fluctuer entre les valeurs n et $n + 1$ pour le bord supérieur, n et $n - 1$ pour le bord inférieur. Ces fluctuations pourraient être calculées facilement à l'aide de la thermodynamique statistique. Pour pouvoir observer des effets de blocage de Coulomb à température ambiante, il faut $C \ll e^2/(4k_B \theta)$ avec $\theta = 300$ K, soit $C \ll 1,5 \cdot 10^{-18}$ F. La capacité d'une sphère métallique de rayon R est $C = 4\pi\epsilon_0 R$. Pour avoir $C \approx 10^{-18}$ F, il faut $R \approx 10^{-8}$ m. Pour pouvoir observer des effets de blocage de Coulomb à température ambiante, il faut donc que le système ait une taille caractéristique de l'ordre du nanomètre. Ce type d'effets est effectivement observé dans des molécules conductrices, comme par exemple les nanotubes de carbone.

Pour une capacité de l'ordre de 10^{-15} F, le blocage de Coulomb peut être observé pour des températures très inférieures à quelques dixièmes de Kelvin. De telles températures sont couramment obtenues dans des cryostats à dilution.

Pour ajouter un électron sur l'îlot, on doit appliquer une différence de potentiel $e/2C = 80 \mu V$. Il s'agit d'une faible différence de potentiel, cependant aisément contrôlable et mesurable.

- I.8)** Pour une différence de potentiel égale à e/C , le courant tunnel qui traverse une barrière de conductance G est $I = eG/C$. Le nombre d'électrons qui traversent la barrière par seconde est donc

$I/e = G/C$ et le temps qui sépare 2 événements tunnel est $\tau = e/I = C/G$.

Les relations d'Heisenberg permettent d'affirmer que l'élargissement des niveaux de l'îlot dû à la possibilité qu'a l'électron de s'en échapper par effet tunnel est $\Delta E \simeq \hbar/\tau$. On voit alors que les effets de blocage de Coulomb ne sont observables que si cet élargissement est faible devant l'énergie caractéristique du phénomène e^2/C . On doit donc avoir :

$$\Delta E \ll \frac{e^2}{C} \Rightarrow G \ll \frac{e^2 \hbar}{h \tau} \ll \frac{e^2}{C} \Rightarrow G \ll \frac{e^2}{h}$$

Il faut donc que les barrières tunnels soient suffisamment "opaques" pour que les effets de blocage de Coulomb puissent être observés (de résistance grande devant $\hbar/e^2 \approx 25,8 \text{ k}\Omega$).

II Le transistor à un électron

II.1) La loi des mailles donne :

$$\frac{V}{2} = \frac{q_1}{C} - \frac{q}{C} + U \quad \text{et} \quad \frac{V}{2} = \frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{C} - \frac{V}{2}$$

et la charge de l'îlot est $-ne = -q + q_2 - q_1$.

On déduit aisément de ces 3 relations :

$$q_1 = \frac{CV}{2} - \frac{CU}{3} + \frac{ne}{3}$$

$$q_2 = \frac{CV}{2} + \frac{CU}{3} - \frac{ne}{3}$$

$$q = \frac{2CU}{3} + \frac{ne}{3}$$

L'énergie électrostatique globale des 3 capacités est :

$$U_e = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2C} + \frac{q^2}{2C}$$

$$\Rightarrow U_e = \frac{1}{2C} \left\{ \frac{C^2 V^2}{2} + \frac{2C^2 U^2}{3} + \frac{n^2 e^2}{3} \right\}$$

II.2) Lors de la transformation envisagée, le générateur de tension U a fourni le travail $U\Delta q$, le générateur de tension $V/2$ a fourni $(\Delta q_1 + \Delta n_1 e)V/2$ et le générateur de tension $-V/2$ a fourni $-(\Delta q_2 - \Delta n_2 e)V/2$. Le travail total fourni par les générateurs est donc, d'après la question précédente :

$$W = U \left[\frac{\Delta ne}{3} \right] + \frac{V}{2} \left[\frac{\Delta ne}{3} + \Delta n_1 e \right] + \frac{V}{2} \left[-\frac{\Delta ne}{3} + \Delta n_2 e \right]$$

Comme $\Delta n = \Delta n_2 - \Delta n_1$, on déduit :

$$W = -\Delta n_1 e \left[\frac{U}{3} - \frac{V}{2} \right] + \Delta n_2 e \left[\frac{U}{3} + \frac{V}{2} \right]$$

II.3) Par un raisonnement identique à celui de la question D.I.4, on montre que le potentiel thermodynamique qui régit l'évolution du système à température nulle est :

$$U_e + n_1 e \left[\frac{U}{3} - \frac{V}{2} \right] - n_2 e \left[\frac{U}{3} + \frac{V}{2} \right]$$

soit à une constante près :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{n^2 e^2}{3C} \right] - n_1 e \left[\frac{V}{2} - \frac{U}{3} \right] - n_2 e \left[\frac{V}{2} + \frac{U}{3} \right]$$

II.4) Puisqu'on néglige les événements où 2 électrons traversent simultanément une barrière, il y a 2 possibilités pour passer de n à $n+1$ électrons sur l'îlot :

- $n_2 \rightarrow n_2 + 1$ et $n_1 \rightarrow n_1$
- $n_2 \rightarrow n_2$ et $n_1 \rightarrow n_1 + 1$

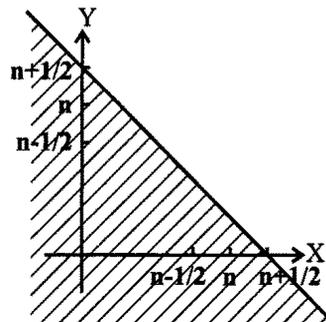
Pour que la première transition soit thermodynamiquement bloquée, il faut :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{(n+1)^2 e^2}{3C} \right] - n_1 e \left[\frac{V}{2} - \frac{U}{3} \right] - (n_2 + 1) e \left[\frac{V}{2} + \frac{U}{3} \right] > \frac{1}{2} \left[\frac{n^2 e^2}{3C} \right] - n_1 e \left[\frac{V}{2} - \frac{U}{3} \right] - n_2 e \left[\frac{V}{2} + \frac{U}{3} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[n + \frac{1}{2} \right] \frac{e^2}{3C} - e \left[\frac{V}{2} + \frac{U}{3} \right] > 0$$

$$\Leftrightarrow X + Y < n + \frac{1}{2} \quad \text{où } X = \frac{CU}{e} \quad \text{et } Y = \frac{3CV}{2e}$$

Sur le diagramme X,Y présenté figure 7, la zone où cette transition est thermodynamiquement bloquée est le demi-plan hachuré.

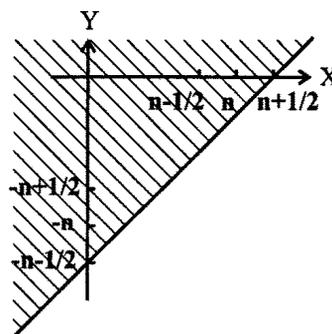


- Figure 7 -

De même on trouve que la transition $n \rightarrow n+1$ avec $n_2 \rightarrow n_2$ et $n_1 \rightarrow n_1 - 1$ est bloquée si :

$$X - Y < n + \frac{1}{2}$$

ce qui correspond au demi-plan hachuré sur la figure 8.



- Figure 8 -

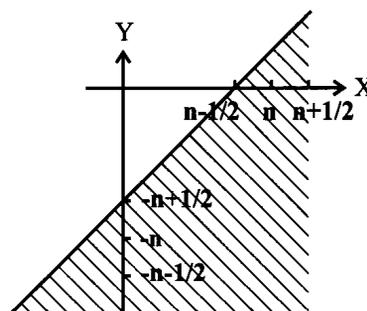
On considère ensuite le passage de n à $n-1$ électrons sur l'îlot. Il y a à nouveau 2 possibilités :

- $n_1 \rightarrow n_1 + 1$ et $n_2 \rightarrow n_2$
- $n_1 \rightarrow n_1$ et $n_2 \rightarrow n_2 - 1$

La première est thermodynamiquement bloquée si :

$$X - Y > n - \frac{1}{2}$$

ce qui correspond au demi-plan hachuré sur la figure 9.

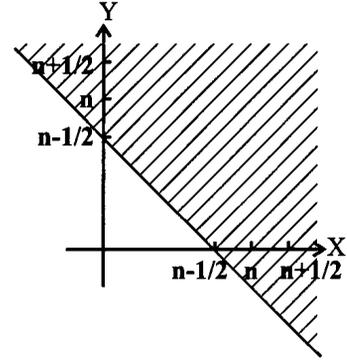


- Figure 9 -

Enfin la transition $n \rightarrow n - 1$ avec $n_1 \rightarrow n_1$ et $n_2 \rightarrow n_2 - 1$ est bloquée si :

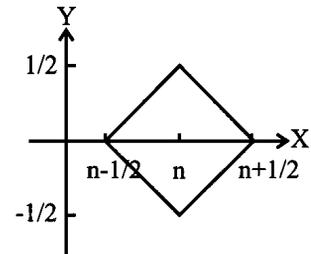
$$X + Y > n - \frac{1}{2}$$

ce qui correspond au demi-plan hachuré sur la figure 10.



- Figure 10 -

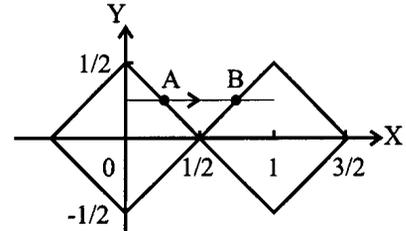
La zone de stabilité d'un îlot avec n électrons en excès est l'intersection des zones hachurées sur les 4 diagrammes précédents (toutes les transitions conduisant à $n+1$ ou $n-1$ électrons doivent être bloquées). Sur le diagramme X,Y il s'agit de l'intérieur du carré représenté sur la figure 11.



- Figure 11 -

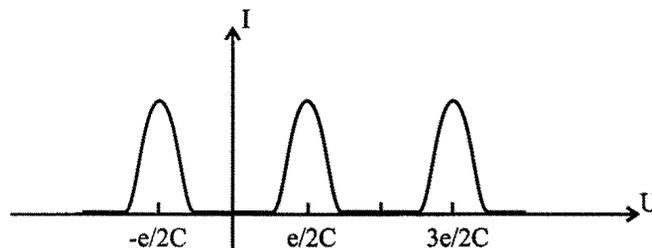
II.5) A $V < e/3C$, si on augmente progressivement la tension U , on se déplace sur une horizontale du diagramme X,Y telle que celle représentée figure 12.

Tant qu'on n'a pas atteint le bord du carré de stabilité de l'îlot avec 0 électrons (point A), aucun courant ne traverse la structure.



- Figure 12 -

Lorsqu'on arrive au point A (voir figure 12), la transition $n = 0 \rightarrow n = 1$ où un électron traverse la jonction 2 ($n_2 \rightarrow n_2 + 1$) devient possible. Mais la transition $n = 1 \rightarrow n = 0$ où un électron traverse la jonction 1 ($n_1 \rightarrow n_1 + 1$) est alors également possible. Il y a donc un courant qui traverse la structure (dans le sens opposé à celui des électrons, c'est à dire de la jonction 1 vers la jonction 2). Lorsqu'on augmente encore U et qu'on atteint le point B (voir figure 12), on rentre dans la zone de stabilité de l'îlot avec un électron en excès et le courant redevient nul...L'allure de la courbe $I(U)$ est présentée sur la figure 13.



- Figure 13 -

Plus V est proche de $e/3C$, plus le transistor se met à conduire rapidement lorsqu'on augmente U à partir de 0 et plus les pics de conductance sont larges. Le courant maximum qui traverse le conducteur est de l'ordre de :

$$I_{max} \approx \frac{VG}{2}$$

car il y a 2 jonctions de conductance G en série. Pour $V \approx e/3C$, on obtient :

$$I_{max} \approx \frac{eG}{6C}$$

Pour $G = 10^{-5} \Omega^{-1}$ et $C = 10^{-15} F$, on trouve $I_{max} \approx 0,27 \cdot 10^{-9} A$.

II.6) Il y a 2 façons de faire :

- La première consiste à reprendre le raisonnement des questions D.II.1 à D.II.4. A la question D.II.1, il faut remplacer $-ne = -q + q_2 - q_1$ par $-ne = -Q - q + q_2 - q_1$. Dans les expressions des charges q_1 , q_2 et q il faut donc remplacer n par $n - Q/e$. De même, à une constante près, l'énergie électrostatique s'écrit maintenant :

$$U_e = \frac{1}{2} \left\{ \frac{e^2}{3C} \left(n - \frac{Q}{e} \right)^2 \right\}$$

Le travail total fourni par les générateurs lors de la transformation envisagée n'est pas modifié et le potentiel thermodynamique à minimiser est donc :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\left(n - \frac{Q}{e} \right)^2 e^2}{3C} \right] - n_1 e \left[\frac{V}{2} - \frac{U}{3} \right] - n_2 e \left[\frac{V}{2} + \frac{U}{3} \right]$$

Les 4 droites qui entourent la zone de stabilité de l'îlot avec n électrons en excès ont maintenant pour équation :

$$X + Y < n - \frac{Q}{e} + \frac{1}{2} \quad X - Y < n - \frac{Q}{e} + \frac{1}{2} \quad X - Y > n - \frac{Q}{e} - \frac{1}{2} \quad X + Y > n - \frac{Q}{e} - \frac{1}{2}$$

En remplaçant X par $X + Q/e$, on voit que le diagramme des différentes configurations de l'îlot est inchangé. Cela revient à remplacer U par $U + Q/C$.

- On peut également considérer que sur les n électrons en excès présents sur l'îlot, Q/e sont figés sur l'armature interne de la capacité rajoutée et donc spectateurs du fonctionnement du transistor. On doit donc remplacer n par $n - Q/e$ ce qui revient à remplacer CU/e par $CU/e + Q/e$.

Pour passer d'un pic de conductance au suivant, il faut faire varier Q de \pm un électron.

La conductance du transistor est donc extrêmement sensible à la charge Q . On peut donc utiliser le transistor comme un électromètre extrêmement sensible (voir question suivante).

II.7) a) Lors d'une demi-période du signal triangulaire, la charge Q varie d'un peu plus de 5 électrons (en valeur absolue) : il y a en effet défilement d'un peu plus de 5 pics de conductance.

b) Si l'on veut que la sensibilité de l'électromètre soit maximale, il faut que la conductance varie le plus rapidement possible avec la charge Q . Il faut donc se placer à mi-pente d'un pic de conductance. Pour une fréquence ν séparée de ν_0 de plus de $\Delta\nu$:

$$A(\nu) = \int_{\nu - \Delta\nu/2}^{\nu + \Delta\nu/2} S(\nu) d\nu = b^2 \Delta\nu \quad \text{et} \quad B = B_1 = \log \frac{b\sqrt{\Delta\nu}}{A_0}$$

B n'est définie qu'à une constante près d'où l'introduction de la constante A_0 . A la fréquence ν_0 ,

$$A(\nu_0) = \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} a^2 \delta(\nu - \nu_0) d\nu + b^2 \Delta\nu \quad \text{et} \quad B = B_2 = \log \frac{\sqrt{a^2 + b^2 \Delta\nu}}{A_0}$$

On voit sur la figure 11 de l'énoncé que $b^2 \Delta\nu \ll a^2$. On a donc :

$$B_1 - B_2 = \log \frac{b\sqrt{\Delta\nu}}{a}$$

On mesure $B_1 - B_2 \approx -1,7$, on en déduit :

$$b = \frac{a}{\sqrt{\Delta\nu}} 10^{-1,7}$$

On sait par ailleurs que a correspond à une charge Q de 0,01 électrons. On en déduit $b \approx 5,2 \cdot 10^{-5} e^- / \sqrt{Hz}$. b représente la sensibilité de l'électromètre, notée S_q . Pour augmenter le rapport signal sur bruit de la mesure, il faut augmenter le temps de mesure (ce qui est équivalent à réduire la bande passante). Si la bande passante est de 1 Hz (temps de mesure de 1 s), on a un niveau de bruit de $5,2 \cdot 10^{-5} e^-$. Avec une bande passante de 1 MHz (temps de mesure de 1 μ s), le niveau de bruit est $5,2 \cdot 10^{-2} e^-$, toujours nettement inférieur à 1 électron.

$$\text{c) } \delta E = \frac{S_q^2}{2C}$$

δE a la dimension d'une énergie divisée par une fréquence (puisque S_q est en e^- / \sqrt{Hz}). Elle a donc la même unité que h . On trouve $\delta E/h \approx 116$. La sensibilité en énergie de l'électromètre n'est que 2 ordres de grandeur plus grande que la limite quantique ultime fixée par $\Delta E \Delta t \approx h$ (si on mesure un système pendant Δt , on ne peut pas connaître son énergie à mieux que $h/\Delta t$).

d) La bande passante du transistor est d'environ 100 MHz. Même si on utilise toute la bande passante, le bruit de charge est d'environ 0,5 électrons. Il reste donc toujours inférieur à un électron. Par ailleurs, un courant de 10 pA correspond à une fréquence moyenne de passage des électrons d'environ 60 MHz. L'électromètre étudié permet donc de mesurer les électrons individuellement pour un courant de 10 pA (puisque la bande passante est supérieure à la fréquence de passage des électrons et que le niveau de bruit est inférieur à un électron). Si on mesure pendant 10 s, on voit passer environ $600 \cdot 10^6 \sim 10^9$ électrons que l'on va compter à plus ou moins un électron près. On est donc capable de mesurer en une dizaine de secondes des courants de l'ordre de 10 pA avec une précision relative de l'ordre de 10^{-9} .

On peut envisager utiliser ce dispositif pour réaliser un étalon de courant électrique.

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION CHIMIE

Composition de chimie ♦ Session : 2004

par Cyril BARSU

Agrégé préparateur - ENS Lyon

PREMIERE PARTIE

Organométalliques : mécanismes et applications en synthèse

I Etude mécanistique.

I.1.a Noyaux donnant lieu à une résonance magnétique nucléaire

Les noyaux qui peuvent donner lieu à une résonance magnétique nucléaire sont ceux qui possèdent un spin nucléaire non nul.

Remarque : Un nucléide quelconque représenté par A_ZX a un nombre de spin I non nul si les nombres Z de protons et A de nucléons ne sont pas tous les deux pairs : ${}^1_1\text{H}$, ${}^{13}_6\text{C}$, ${}^{19}_9\text{F}$ ou ${}^{31}_{15}\text{P}$ ont par exemple un spin $I = 1/2$ tandis que ${}^2_1\text{D}$ ou ${}^{14}_7\text{N}$ possèdent un nombre de spin $I = 1$. Tous ces noyaux donneront un signal en RMN.

En revanche, les noyaux ${}^{12}_6\text{C}$, ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{28}_{14}\text{Si}$ ou ${}^{32}_{16}\text{S}$ ne pourront pas être étudiés en RMN car $I = 0$.

En fait, plus de la moitié des nucléides connus (au moins un isotope par élément) conduisent à un signal RMN, mais la sensibilité varie énormément suivant les noyaux. Ainsi, ${}^1\text{H}$ et ${}^{19}\text{F}$ sont plus faciles à détecter que ${}^{13}\text{C}$.

I.1.b Ordres de grandeur

Les fréquences mises en jeu en RMN ${}^1\text{H}$ appartiennent au domaine des radiofréquences, elles sont de quelques centaines de mégahertz. Elles varient de 60 MHz pour les premiers spectromètres RMN à 900 MHz pour le plus performant existant à ce jour. Les laboratoires de recherche sont usuellement équipés d'appareils à 400 ou 500 MHz.

Les champs associés sont reliés aux fréquences par la relation de Larmor (relation fondamentale de la résonance) : $\nu = \frac{\gamma}{2\pi} B_0$ où ν est la fréquence, γ le rapport gyromagnétique (ou magnétogyrique, il vaut $\gamma = 2,6752 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$ pour le proton) et B_0 le champs magnétique. On en déduit que les valeurs des champs sont de quelques Teslas. De 1,4 T (pour une fréquence de 60 MHz) à 21,1 T (pour une fréquence de 900 MHz).

I.1.c Conditions de couplage

Deux protons sont couplés si leurs moments magnétiques sont en interaction. En solution, le couplage est dit indirect car l'interaction est modulée par les électrons de valence de la molécule (par opposition au couplage direct qui représente une interaction entre deux dipôles magnétiques à travers l'espace et qui est très généralement nul en solution car ces dipôles peuvent prendre toutes les orientations possibles).

En pratique, le couplage entre les noyaux s'atténue très vite avec la distance et au-delà de 4 liaisons les couplages sont nuls.

Enfin, deux protons ne sont pas couplés s'ils sont chimiquement équivalents (voir plus loin).

Des noyaux sont magnétiquement équivalents si, tout en étant chimiquement équivalents (c'est-à-dire qu'ils sont corrélés par une opération de symétrie de la molécule et qu'ils ont le même déplacement chimique), ils ont également des couplages identiques avec tout autre noyau magnétique de la molécule.

I.1.d Facteurs dont dépend le déplacement chimique

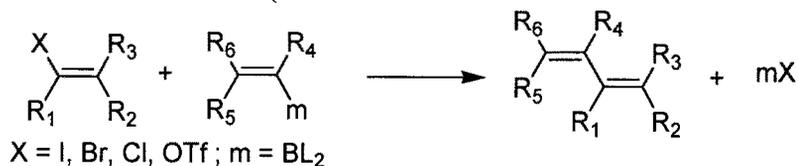
Le déplacement chimique dépend du champ magnétique local. Celui-ci est affecté par les divers effets suivants :

- Des effets de substitution et d'hybridation : ces effets sont dus à l'anisotropie de la densité électronique autour des atomes liés au sein d'une molécule auxquels s'ajoute la création de petits champs magnétiques induits par circulation des électrons.
- Des effets mésomères (ou de résonance) et des effets inductifs : les substituants ayant un effet $-I$ et/ou $-M$ ie attracteurs d'électrons (resp. $+I$ et/ou $+M$ ie donneurs d'électrons) auront un effet de déblindage (resp. de blindage).
- D'effets divers (solvants, liaisons hydrogène et matrice) : ces effets proviennent en principe des associations ou des échanges entre le solvant et le soluté.

I.1.e Solvant le plus utilisé en RMN

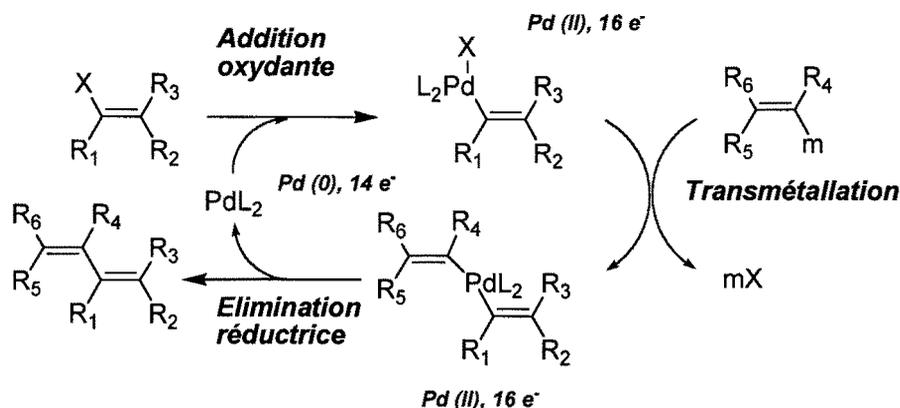
Le solvant le plus courant est le chloroforme deutérié ($CDCl_3$), il est suffisamment polaire pour dissoudre le plupart des composés.

I.2.a Bilan de la réaction de Suzuki (en se basant sur le schéma réactionnel donné)

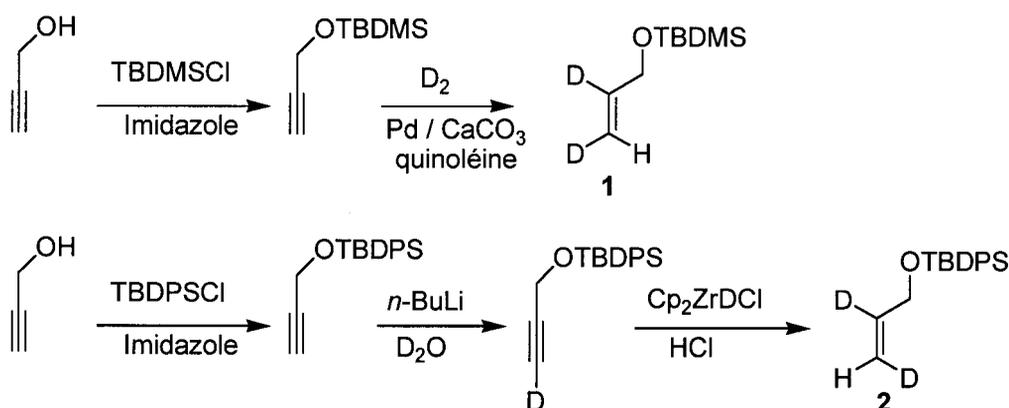


Remarque : le bilan d'un cycle catalytique s'obtient facilement : les composés qui entrent dans le cycle donnent les composés qui sortent du cycle.

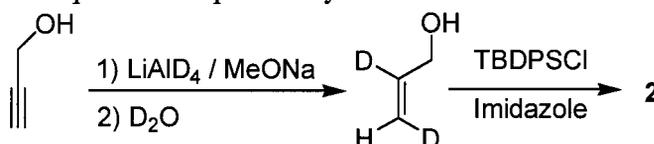
I.2.b Nom des étapes du schéma réactionnel simplifié



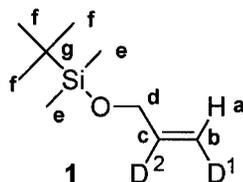
I.2.c Synthèse stéréospécifique de 1 et de 2



Remarque : une deuxième possibilité pour la synthèse de 2



I.2.d Attribution des signaux RMN

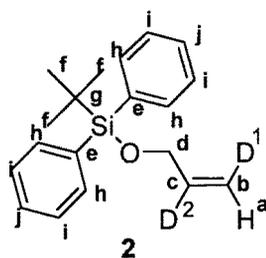


RMN ^1H :

δ (ppm)	Nombre H	Multiplicité	J (Hz)	Attribution	Justification
5,24	1	m	-	H^a	H éthylénique
4,17	2	m	-	H^d	O et C=C en α
0,92	9	s	-	H^f	9 H équivalents
0,07	6	s	-	H^e	6 H équivalents en α de Si

RMN ^{13}C :

δ (ppm)	Multiplicité	J (Hz)	Attribution	Justification
137,1	t	24,2	C^c	C (sp^2) en β de O couplé avec D^2
113,5	t	24,2	C^b	C (sp^2) couplé avec D^1
64,0	-	-	C^d	O et C=C en α
25,9	-	-	C^f	C primaire
18,4	-	-	C^g	C quaternaire, Si en α
- 5,3	-	-	C^e	C primaire, Si en α



RMN ^1H :

δ (ppm)	Nombre H	Multiplicité	J (Hz)	Attribution	Justification
7,69	4	m	-	H^h	H aromatiques, Si en <i>ortho</i>
7,38	6	m	-	$\text{H}^{i,j}$	H aromatiques
5,10	1	d	1,6	H^a	H éthylénique couplé avec H^d (4J donc faible)
4,21	2	d	1,6	H^d	O et C=C en α , couplé avec H^a (4J donc faible)
1,07	9	s	-	H^f	9 H équivalents

Remarque : le doublet à 5,10 ppm devrait être un triplet car il est couplé avec 2 protons H^d .

RMN ^{13}C :

δ (ppm)	Multiplicité	J (Hz)	Attribution	Justification
136,6	t	24,2	C^c	C (sp^2) en β de O couplé avec D^2
135,5 ; 135,3 ; 133,7 ; 127,6	-	-	$\text{C}^{e,h,i,j}$	C aromatiques
113,5	t	23,4	C^b	C (sp^2) couplé avec D^1
64,5	-	-	C^d	O et C=C en α
26,8	-	-	C^f	C primaire
19,3	-	-	C^g	C quaternaire, Si en α

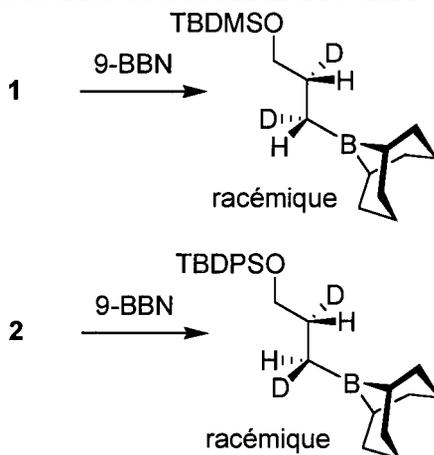
Justification des couplages en RMN ^{13}C :

Les atomes de ^{13}C sont couplés avec les atomes de deutérium, ces derniers possèdent un nombre de spin nucléaire $I = 1$. Il apparaît donc un triplet pour C^c et C^b couplés respectivement à D^2 et D^1 . De plus, les couplages ^{13}C - ^1H sont supprimés.

Remarque : cela n'a rien d'évident et pose le problème des noyaux ayant un nombre de spin nucléaire $I > 1/2$. Ces noyaux possèdent une distribution de charges électroniques nucléaires non sphérique, ce qui confère au noyau un moment quadripolaire électronique intrinsèque capable d'interagir avec tout gradient de champ électrique. Ce gradient de champ électrique ayant essentiellement pour origine la distribution des charges électriques, l'interaction « moment quadripolaire - gradient de champ électrique » a bien lieu, sauf si l'environnement électrique du noyau considéré est de symétrie sphérique. Il se trouve que cette interaction est à l'origine d'un mécanisme de relaxation (parfois appelé relaxation quadripolaire) qui est généralement assez puissant pour provoquer des transitions entre états de spin du noyau quadripolaire à une fréquence beaucoup plus importante que le couplage J . Cela conduit donc à un découplage.

Bilan : pour la plupart des noyaux de spin $I > 0$, le moment quadripolaire électrique est important ($\# 10^{-1} \cdot 10^{28} \text{ m}^2$), on ne voit alors pas les couplages avec les autres noyaux de spin non nuls (à par celles qui possèdent une symétrie sphérique (ex : NH_4^+) pour lesquelles le gradient de champ électrique est nul). Une exception notable, et qui nous intéresse ici, est le deutérium qui possède un moment quadripolaire électrique très faible ($\# 10^{-3} \cdot 10^{28} \text{ m}^2$), il n'y a donc pas de relaxation quadripolaire donc on voit les couplages avec ces noyaux.

I.3.a Structure des intermédiaires issus de l'addition du 9-BBN sur 1 et 2



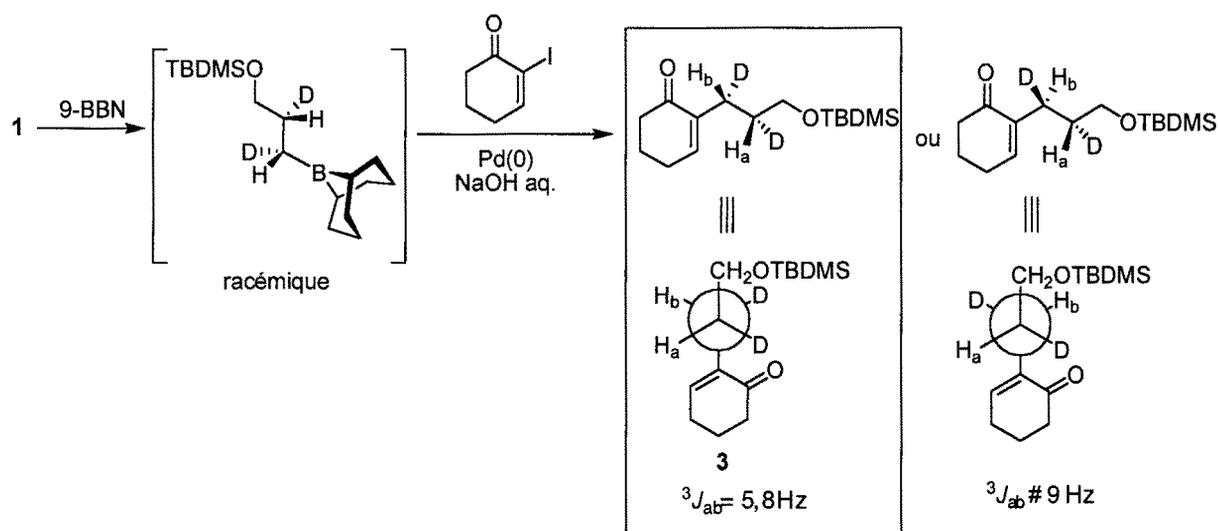
L'addition est régiosélective.

Régiosélectivité : une réaction régiosélective est caractérisée par une modification chimique au cours de laquelle la formation ou la rupture d'une liaison se fait préférentiellement à toutes les autres réactions possibles. (à l'origine, ce terme était restreint aux réactions d'addition de réactifs dissymétriques sur des alcènes dissymétriques).

Remarque : la définition IUPAC se complète de la manière suivante : une réaction est dite totalement régiosélective (100 %) si la discrimination est totale, ou partiellement (x %) régiosélective, si le produit de la réaction sur un site donné prédomine par rapport aux produits de la réaction sur d'autres sites. Dans un sens semi-quantitatif, les termes de « forte sélectivité » et de « faible sélectivité » sont aussi utilisés pour qualifier la distinction entre les sites.

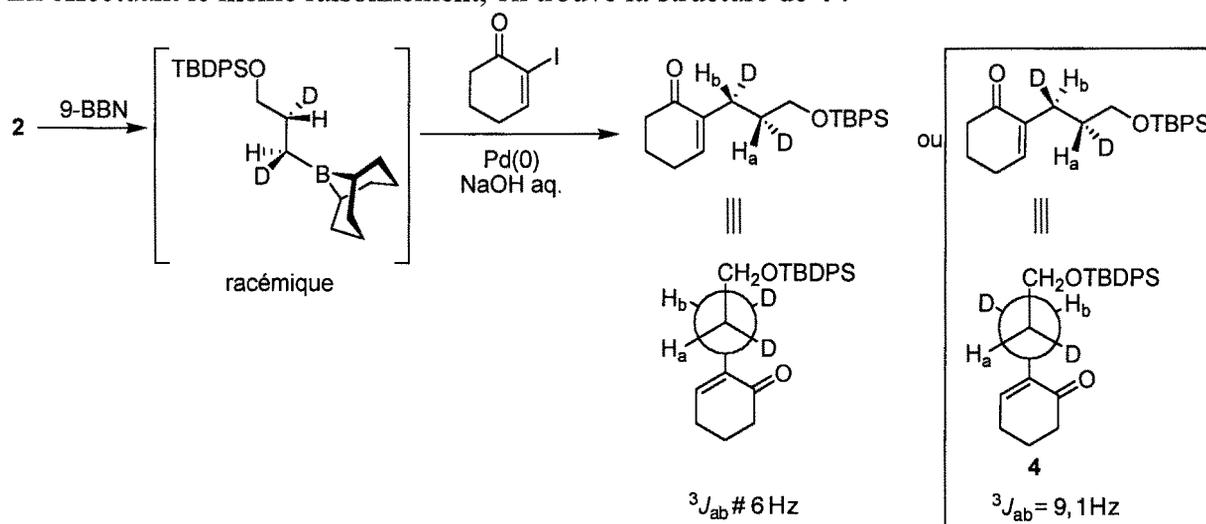
Antérieurement, le terme "régiospécificité" a été proposé pour décrire une réaction 100 % régiosélective. Cette terminologie n'est pas recommandée à cause de l'incohérence qui apparaît avec les termes stéréosélectivité et stéréospécificité.

I.3.b Structure des produits de couplage 3 et 4



La conformation majoritaire, en solution, des produits de couplage est la conformation *anti*. Nous avons représenté ci-dessus les deux stéréochimies possibles qu'il est possible d'obtenir après couplage (*ie* avec rétention et inversion de configuration au niveau du carbone relié à l'atome de bore). Or, les constantes de couplage 3J , pour deux protons a et b vicinaux, dépend de l'angle dièdre $H_a-C-C-H_b$ (*cf* courbe de Karplus). En particulier, 2 protons en position relative *anti* sont couplés avec une constante d'environ 9 Hz tandis que 2 protons en position relative *gauche* sont couplés avec une constante d'environ 6 Hz : c'est le cas ici avec $^3J_{ab} = 5,8\text{ Hz}$ d'où la structure de 3.

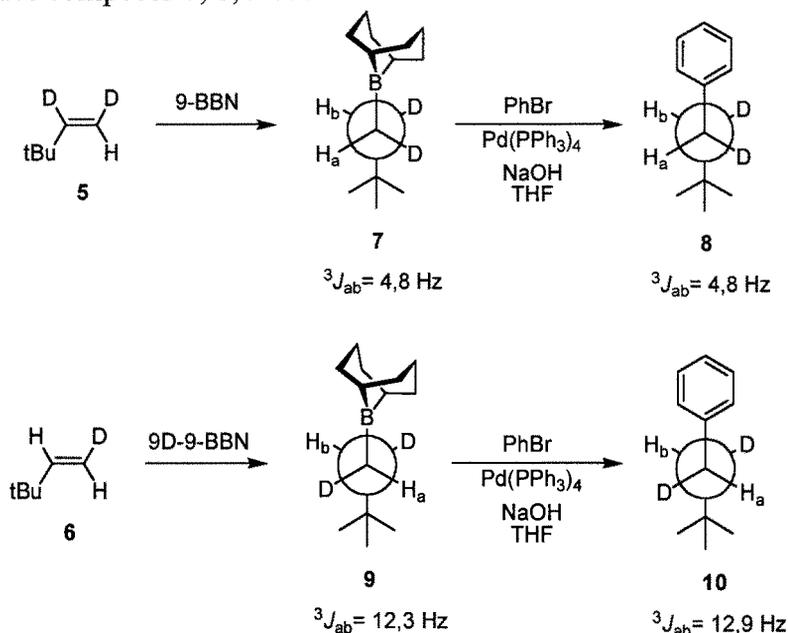
En effectuant le même raisonnement, on trouve la structure de 4 :



I.3.c Stéréochimie du couplage

Le couplage de Suzuki s'effectue avec **rétention** de configuration.

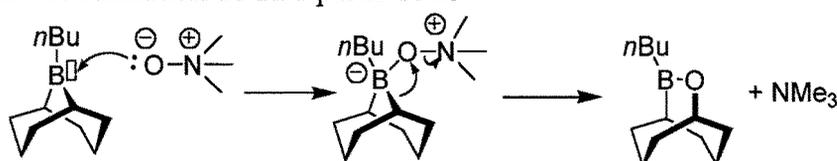
I.4.a Structures des composés 7, 8, 9 et 10



I.4.b Conclusion

Ces résultats confirment le fait qu'il y a réétention de configuration lors du couplage de Suzuki.

I.5.a Mécanisme de formation de 11 à partir de 13



I.5.b Conclusion sur les données du tableau

Les alkylborates sont beaucoup plus réactifs que les alkylborinates.

I.6.a Elargissement du signal et déplacement

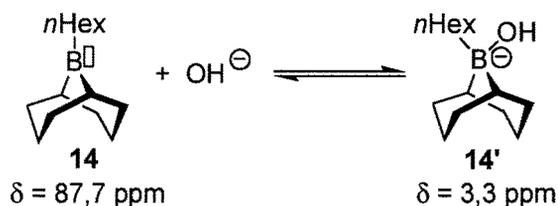
L'élargissement du signal RMN et son déplacement peut s'expliquer par la formation d'un nouveau composé **14'** par ajout de soude, composé qui est en équilibre avec **14** (*cf* équilibre à la question **I.6.b**).

Le déplacement du signal provient du fait que l'équilibre est rapide entre les composés **14** et **14'** ce qui entraîne l'apparition d'un seul signal dont le déplacement chimique est le barycentre des signaux des deux composés pondérés par leurs quantités relatives.

L'élargissement du signal est dû au fait que la vitesse d'échange du groupement hydroxyle n'est pas très rapide (devant la différence entre les fréquences de résonance des composés **14** et **14'**). En effet, si un ensemble de spins précesse à une certaine fréquence et que certains de ces spins changent brièvement d'environnement correspondant à une autre fréquence avant de retourner à leur environnement initial, ils ne vont plus être en phase avec les spins qui ne se sont pas échangés. L'accumulation de ces erreurs de phase avec le temps va entraîner des interférences destructives dans le signal de précession libre et une perte de signal. Le résultat est un élargissement du signal après transformée de Fourier.

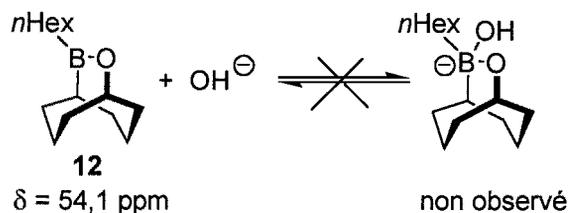
I.6.b Transformation chimique

L'ajout de soude provoque le passage de **14** à l'hydroxyborate ci-dessous par addition nucléophile.

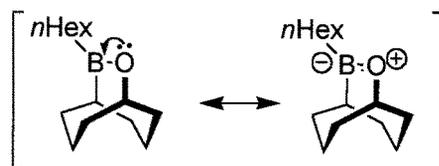


I.6.c Stabilité de 12

Dans le cas de 12, le fait que le déplacement chimique ne change pas montre qu'aucun hydroxyborinate ne se forme de manière significative par ajout de soude.



Cela peut être expliqué par le fait que les borinates sont beaucoup moins acides au sens de Lewis que les boranes à cause de l'effet donneur mésomère de l'oxygène en α .



I.6.d Lien avec ce qui précède

On peut corréliser ces résultats avec les études précédentes si le mécanisme de la réaction de Suzuki fait intervenir un borate (espèce du bore tétravalent). Dans ce cas, cela expliquerait la différence énorme de réactivité entre les alkylboranes et les alkylborinates. Cependant, le fait que les borinates réagissent aussi lors de la réaction de Suzuki laisse penser qu'il doit exister un autre mécanisme ne passant pas par un borate.

I.7.a Attribution des signaux RMN

Le signal à 18 ppm est celui de l'atome de phosphore des triphénylphosphines complexées au palladium dans le complexe $[\text{Pd}(\text{PPh}_3)_4]$.

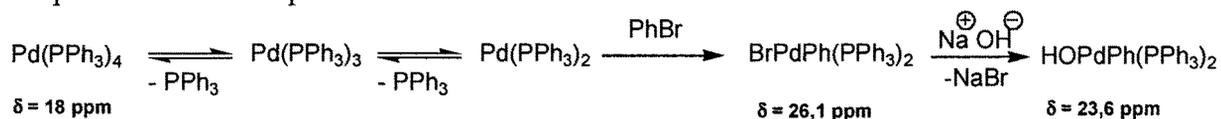
Le signal à 26,1 ppm est celui de l'atome de phosphore des triphénylphosphines complexées au palladium dans le complexe $[\text{BrPdPh}(\text{PPh}_3)_2]$ *ie* après addition oxydante.

Remarque : le fait que l'on observe qu'un seul signal pour ce complexe montre que les deux triphénylphosphines sont équivalentes *ie* que le complexe est *trans*.

Le signal à -3,2 ppm est celui de l'atome de phosphore des triphénylphosphines libres en solution.

Après réaction avec le bromobenzène, le rapport des signaux à 26,1 et -3,2 est de 1 pour 2 ce qui montre que l'addition oxydante a été quantitative. L'ajout de soude entraîne l'hydrolyse partielle du complexe obtenu après l'addition oxydante pour former le complexe $[\text{HOPdPh}(\text{PPh}_3)_2]$ dont les atomes de phosphore résonnent à 23,6 ppm. Cela entraîne une diminution du signal à 26,1 ppm en faveur de celui qui est à 23,6 ppm. La quantité relative de triphénylphosphine libre en solution restant constante, l'intensité du signal à -3,2 ppm ne varie pas.

On peut résumer cela par le schéma suivant :



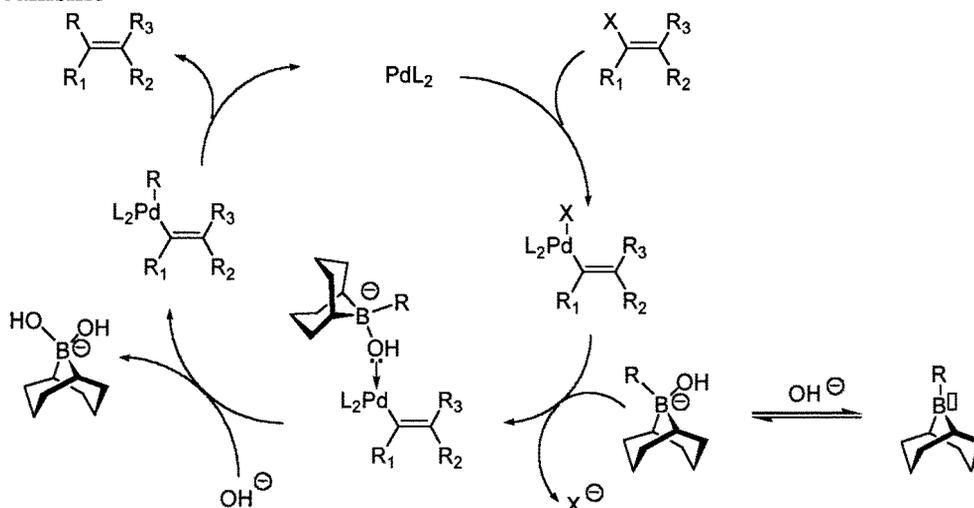
I.7.b Origine de l'élargissement du signal à 18 ppm

L'élargissement du signal à 18 ppm peut être expliqué par l'existence d'un équilibre (*cf* question I.6.a) conformationnel pour le complexe $\text{Pd(PPh}_3)_4$ entre les conformations plan-carré et tétraédrique. Dans ces deux conformations, les atomes de phosphore n'ont pas le même environnement.

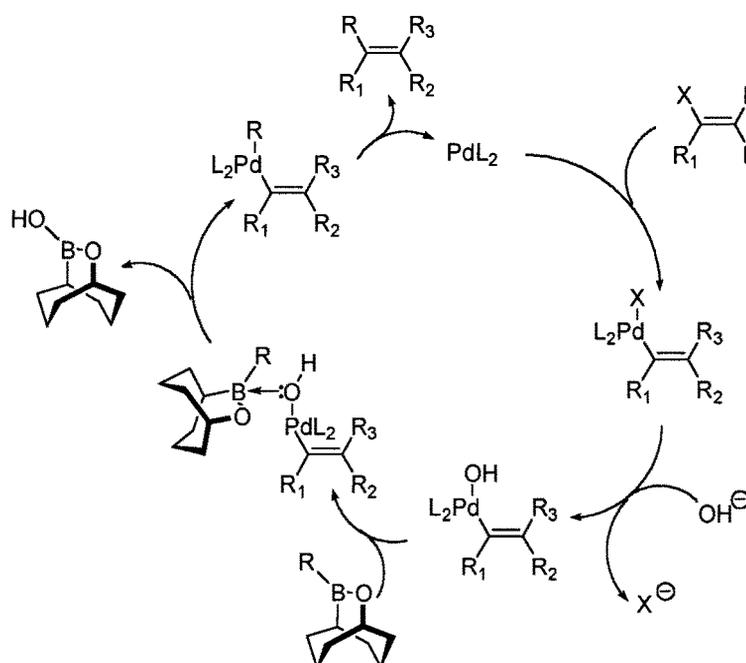
I.7.c Nature du précipité observé dans la phase aqueuse

C'est un précipité de AgBr(s) . Cela indique la présence de NaBr dans la phase aqueuse (libéré dans l'étape d'hydrolyse *cf* schéma ci-dessus).

I.8.a Mécanisme



I.8.b Mécanisme



II Application.

II.1.a Nombre d'électrons apportés par le groupe cyclopentadiényle

Le groupe cyclopentadiényle (ligand L_2X) apporte 5 électrons.

Remarque : on considère ici le modèle covalent. Dans le modèle ionique, le groupe cyclopentadiényle apporte 6 électrons.

II.1.b Nombre d'électrons de valence (NEV) et degré d'oxydation (DO)

Complexe	Formule	Type de complexe	Nombre d'électrons apportés par le métal	Nombre d'électrons apportés par les ligands	NEV	DO
Zirconocène	Cp_2Zr	ML_4X_2	4	$4 \times 2 + 2 \times 1 = 10$	$4 + 10 = 14$	+2
Dichlorodicyclopentadiényl-zirconium	Cp_2ZrCl_2	ML_4X_4	4	$4 \times 2 + 4 \times 1 = 12$	$4 + 12 = 16$	+4

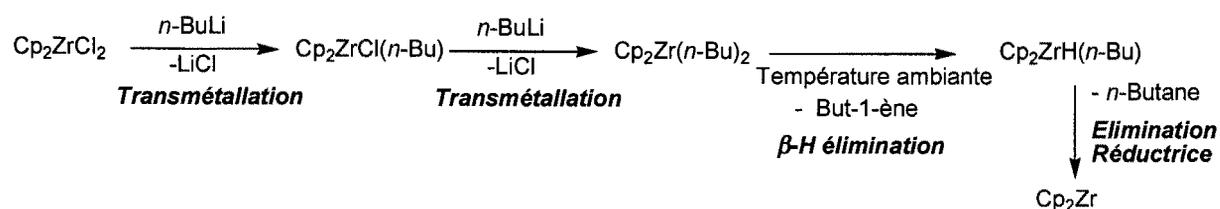
L'espèce zirconocène possède seulement 14 électrons et a un degré d'oxydation de +2, c'est donc une espèce très réactive.

Remarque : notons une petite erreur dans l'énoncé : le zirconium appartient à la colonne IVB et non IVA comme indiqué. De plus, il semble que cette nomenclature des colonnes du tableau périodique soit désuète et qu'il faille mieux numéroter simplement les colonnes de 1 à 18.

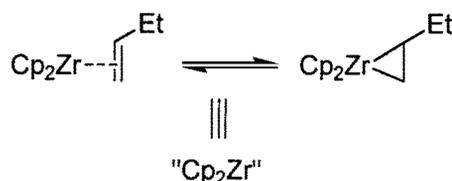
II.1.c Espèce formée

Il se forme le complexe $Cp_2Zr(n-Bu)_2$ par double transmétallation.

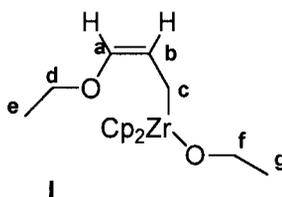
II.1.d Mécanisme du passage du dichlorodicyclopentadiénylzirconium au zirconocène



Remarque : on dit généralement que, par cette méthode, il se forme un équivalent de zirconocène noté « Cp_2Zr ». En effet, le zirconocène est en fait complexé au butène libéré lors de sa formation.



II.2.a Structure pour l'intermédiaire I et attribution des signaux RMN

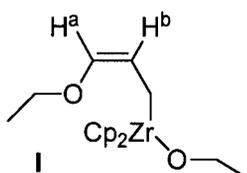
RMN ^1H :

δ (ppm)	Nombre H	Multiplicité	J (Hz)	Attribution	Justification
5,84	1	dt	6,1-1,2	H^a	H éthylénique couplé avec H^b (d , $^3J_{\text{cis}} = 6,1$ Hz) et 2H^c (t , $^4J = 1,2$ Hz)
4,99	1	dt	9,1-6,1	H^b	H éthylénique couplé avec H^a (d , $^3J_{\text{cis}} = 6,1$ Hz) et 2H^c (t , $^3J = 9,1$ Hz)
3,94	2	q	-	H^d	2 H équivalents, O en α couplé avec les 3 H^e
3,71	2	q	-	H^f	2 H équivalents, O en α couplés avec les 3 H^e
2,17	2	dd	9,1-1,2	H^c	2 H équivalents, C=C et Zr en α
1,29	3	t	-	H^e	3 H équivalents, couplés avec les 2 H^d
1,10	3	t	-	H^g	3 H équivalents, couplés avec les 2 H^f

RMN ^{13}C :

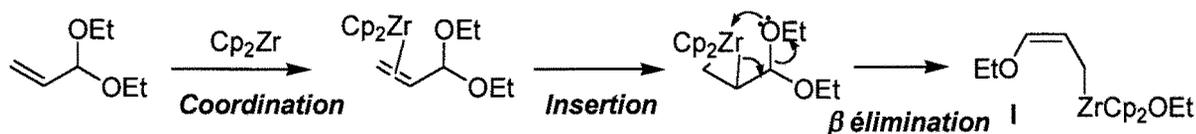
δ (ppm)	Multiplicité	Type de carbone	Attribution	Justification
136	d	tertiaire	C^a	C (sp^2) en α de O
116	d	tertiaire	C^b	C (sp^2)
69	t	secondaire	C^d	C (sp^3) en α de O
67	t	secondaire	C^f	C (sp^3) en α de O
36	t	secondaire	C^c	C avec C=C et Zr en α
20	q	primaire	C^e	C primaire
16	q	primaire	C^g	C primaire

II.2.b Stéréochimie de I



I possède une double liaison de configuration *Z* (déterminé par la constante de couplage $^3J_{\text{cis}} = 6,1$ Hz entre les protons éthyléniques H^a et H^b).

II.2.c Mécanisme de formation de I

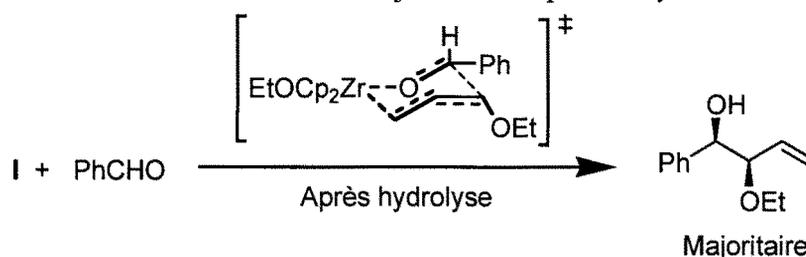


II.3.a Rôle du trifluoroborane

Le trifluoroborane est un acide de Lewis qui active l'aldéhyde vis-à-vis de l'addition nucléophile.

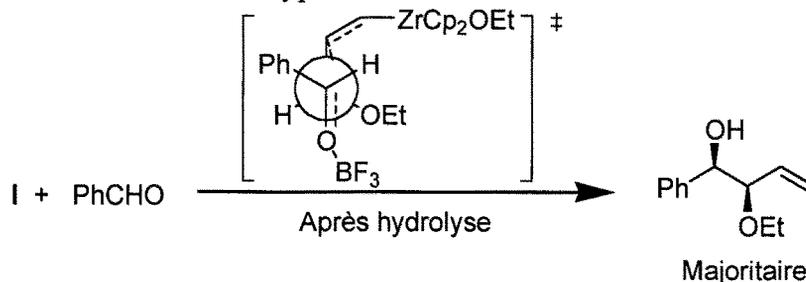
II.3.b Stéréosélectivité

- Le zirconium étant assez oxophile, l'intermédiaire I devrait réagir avec les aldéhydes via un état de transition chaise de type Zimmerman-Traxler. Le passage par un tel état de transition conduirait à l'obtention majoritaire du produit *syn*.

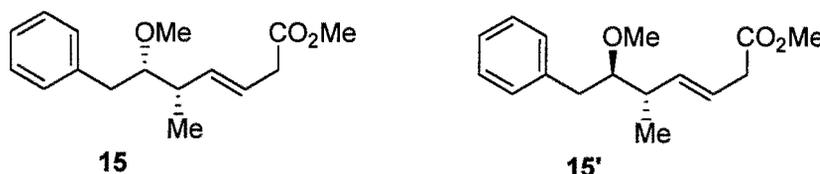


Or, la diastéréosélectivité étant nulle (ratio *syn/anti* 50/50), ce ne doit pas être le cas, probablement à cause de l'encombrement stérique autour du zirconium qui empêche un état de transition compact signe d'une bonne sélectivité.

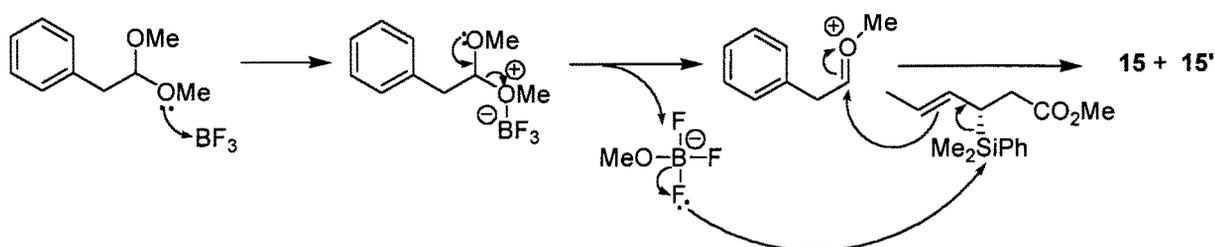
- Avec le trifluoroborane, la sélectivité en faveur de la paire d'énantiomères *syn* augmente. On peut expliquer cela par le fait que la réaction d'addition s'effectue selon un état de transition étendu de type Yamamoto.



II.4.a Structures de 15 et de 15'

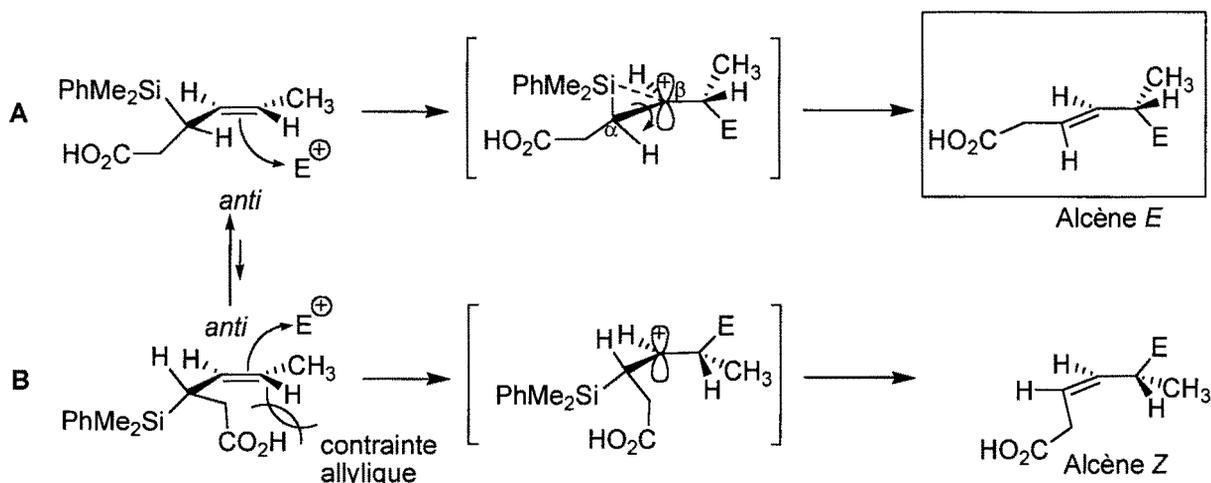


Le diastéréoisomère majoritaire est 15 (*syn*), cela peut être expliqué par le modèle d'état de transition ouvert *anti* S_{E}' de la substitution électrophile présentée lors du mécanisme suivant : Réaction de Hosomi-Sakurai



Stereochimie au niveau de la double liaison formée et du carbone stéréogénique en α de cette double liaison :

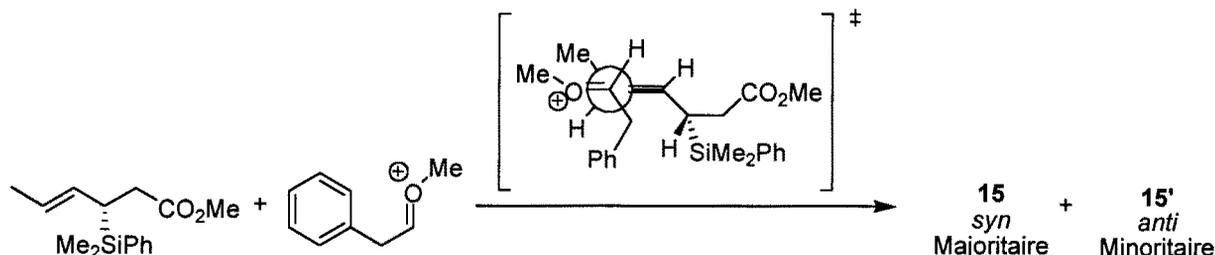
Dans la conformation la plus stable, **A**, du (*S,E*)-3-diméthylphénylsilylhéx-4-énoate de méthyle, l'hydrogène : le groupe le plus petit, éclipe la double liaison. Le volumineux groupement silylé favorise alors une attaque de l'électrophile en *anti*. Une légère rotation autour de la liaison $C_\alpha-C_\beta$ amène ensuite la liaison C-Si dans une position lui permettant de stabiliser par hyperconjugaison le carbocation ainsi formé (effet β). Cette stabilisation est suffisamment importante (environ $120 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$) pour empêcher une nouvelle rotation autour de la liaison $C_\alpha-C_\beta$ et garantir ainsi la stéréochimie *E* de l'alcène lors de l'élimination du groupement silylé. La réaction via la conformation **B** est défavorable à cause de la contrainte allylique (entre les groupements H et $\text{CH}_2\text{CO}_2\text{Me}$).



Conclusion : c'est l'alcène *E* qui est obtenu et la configuration absolue du carbone asymétrique en α est indiquée par la formule encadrée.

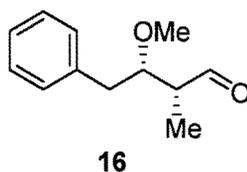
Stereochimie relative des deux centres stéréogéniques formés :

Celle-ci peut être interprétée par un modèle d'état de transition ouvert *antipériplanare C*, où les deux systèmes π de l'allylsilane et de l'aldéhyde sont à 180° l'un de l'autre. Dans ce modèle, la conformation favorisée est celle pour laquelle les interactions gauches entre le groupement méthyle vinylique et le groupement benzyle de l'électrophile sont minimisés. Ce modèle permet de prévoir le résultat de la réaction, c'est-à-dire une prédominance de l'isomère *syn*.



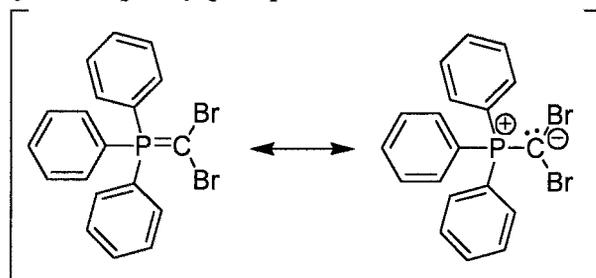
Conclusion : c'est le composé *syn* qui est majoritaire.

II.4.b Structure de 16

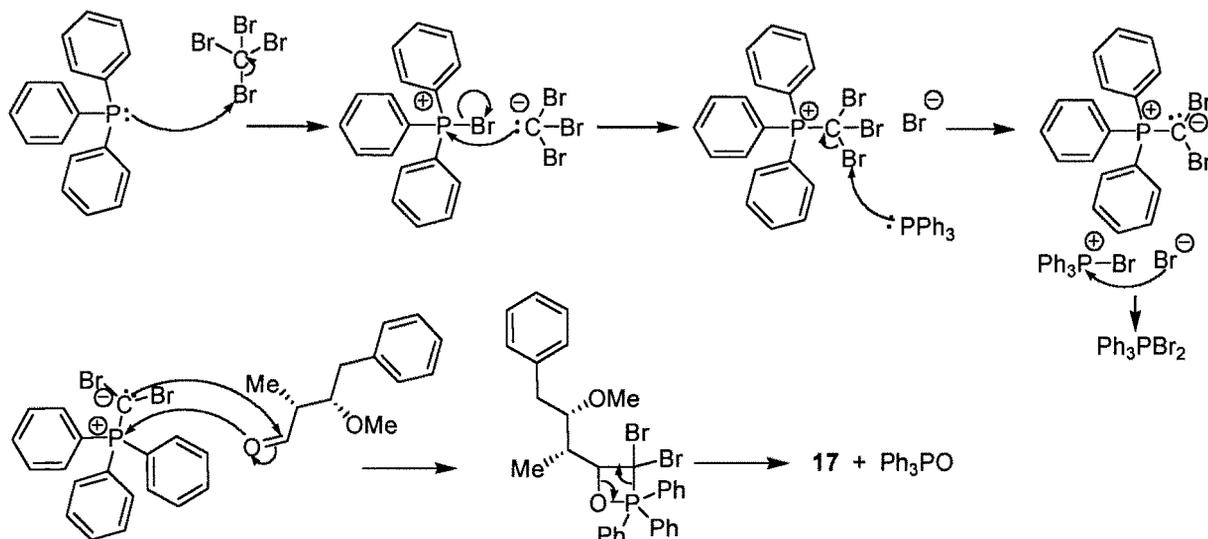
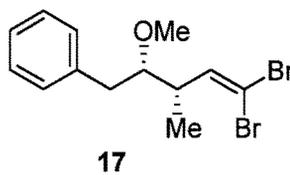


II.4.c Origine de la couleur

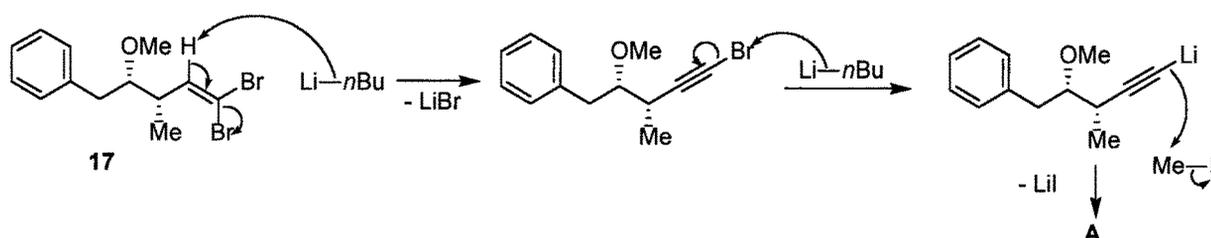
L'ylure de dibromométhylène triphénylphosphine est coloré.



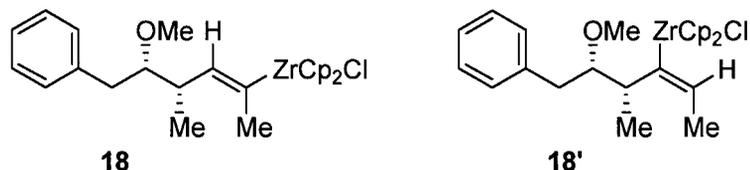
II.4.d Structure de 17 et mécanisme de sa formation



II.4.e Mécanisme de passage de 17 à A



II.5.a Structures de **18** et **18'**



II.5.b Isomère majoritaire

L'isomère majoritaire est **18** car il est plus stable que **18'** (moins de contraintes stériques).

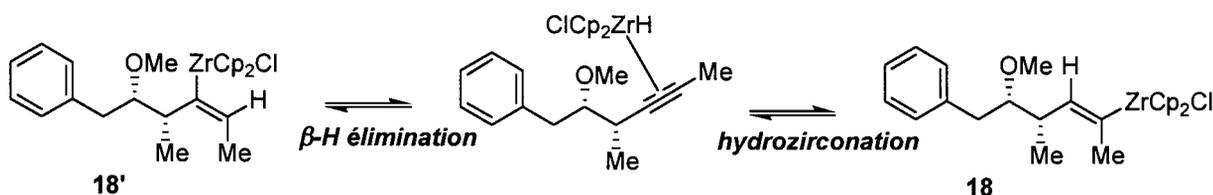
II.5.c Discussion sur les proportions obtenues

Lorsqu'un seul équivalent de réactif de Schwartz (Cp_2ZrHCl) est utilisé, le mélange cinétique est obtenu soit un mélange équimolaire des deux régioisomères **18** et **18'**.

Lorsqu'un excès de réactif est utilisé, le produit thermodynamique **18** est obtenu.

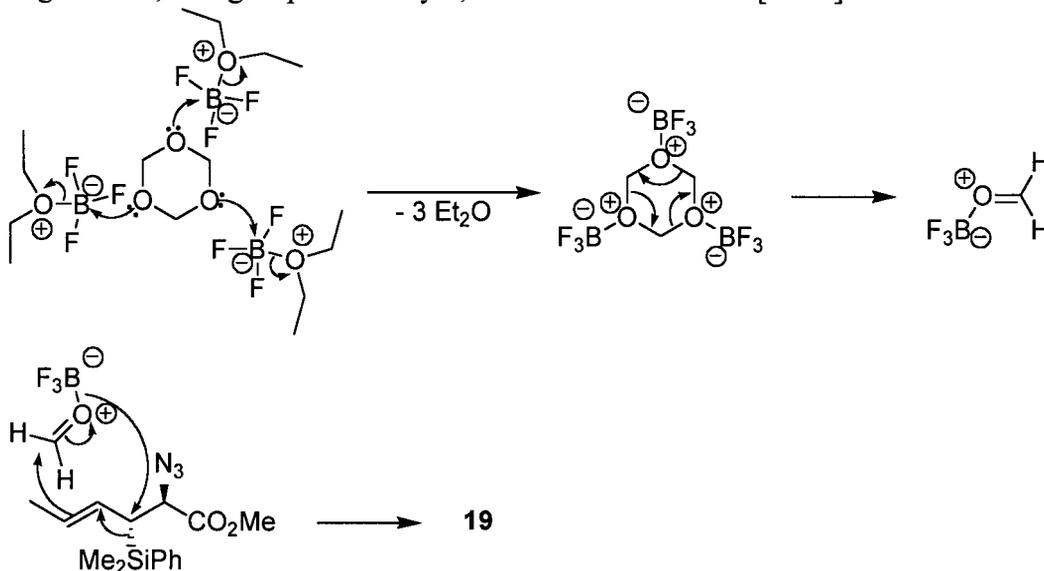
Cela peut être rationalisé par l'addition réversible d'un deuxième équivalent de réactif sur le dérivé de vinylzirconium initialement formé, et qui a pour effet d'accélérer l'équilibration entre les produits formés.

II.5.d Mécanisme d'isomérisation de l'organométallique



II.6.a Nom de C : 1,3,5-trioxane

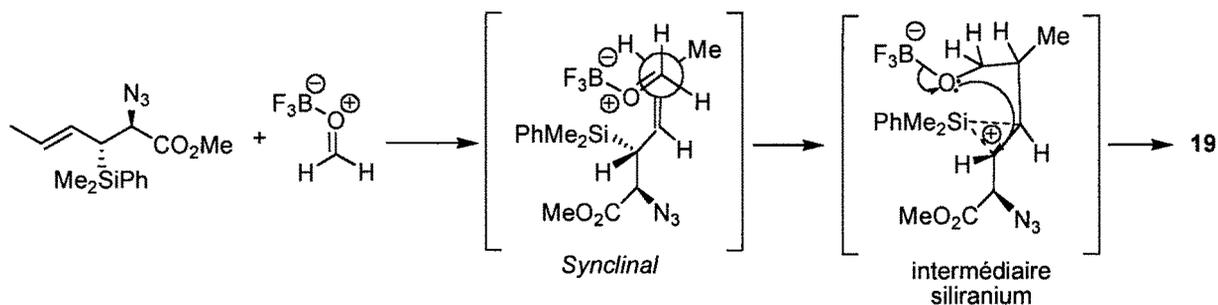
II.6.b Mécanisme justifiant la formation et la stéréochimie de **19** : réaction S_{E}' avec migration-1,2 du groupement silylé, réaction d'annélation [3 + 2]



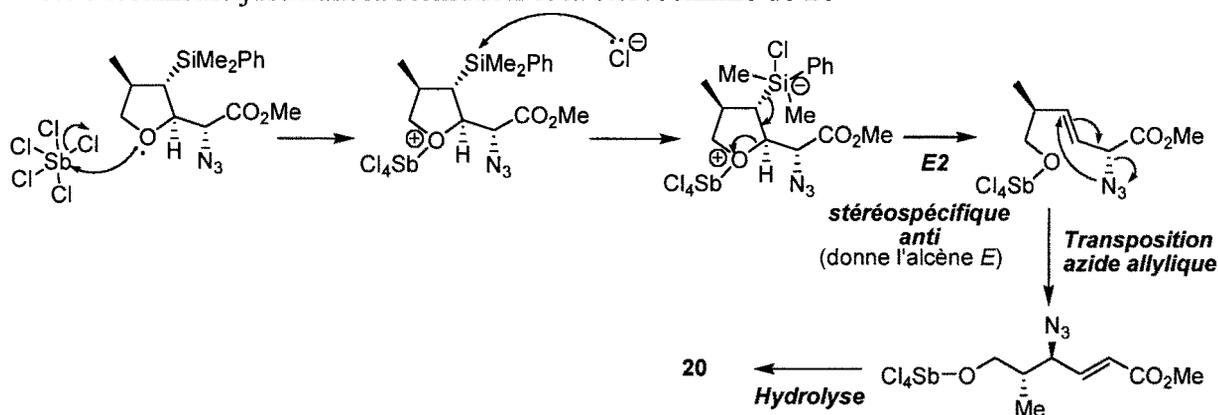
Stéréochimie de **19** :

L'addition *anti* de l'aldéhyde activé par BF_3 sur le (2*S*, 3*R*, *E*)-2-azido-3-diméthylphénylsilylhex-4-énoate de méthyle via un état de transition *synclinal* produit le

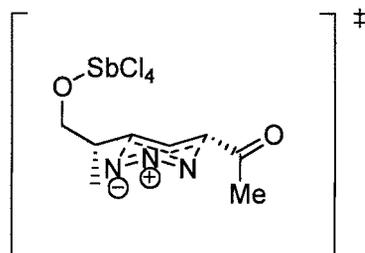
carbocation β -silylé qui se transpose (migration-1,2 du groupement PhMe_2Si) via la forme siliranium (stabilisation non verticale) pour donner le dérivé de tétrahydrofurane **19**.



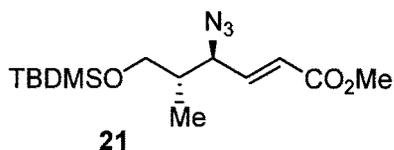
II.6.c Mécanisme justifiant la formation et la stéréochimie de **20**



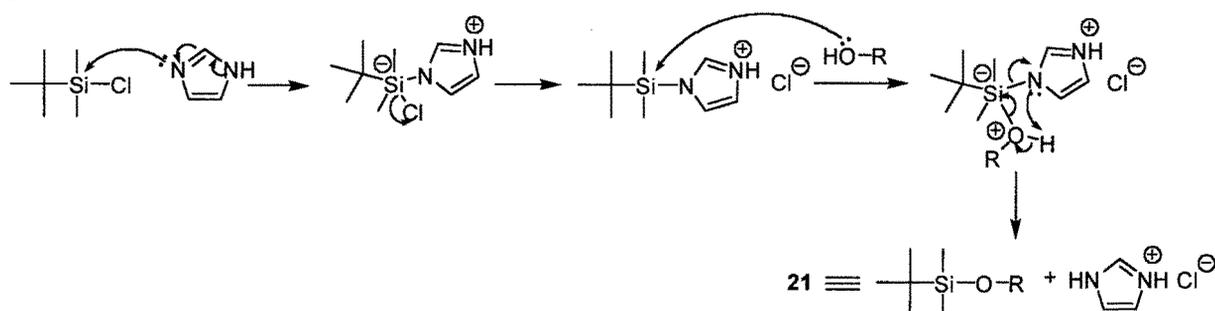
Etat de transition de la transposition azide allylique de type chaise qui permet d'expliquer la stéréochimie obtenue :

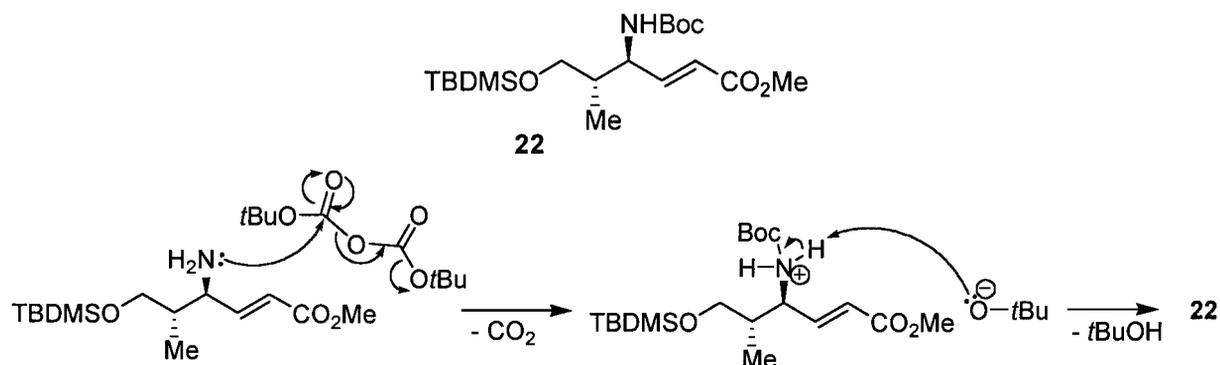
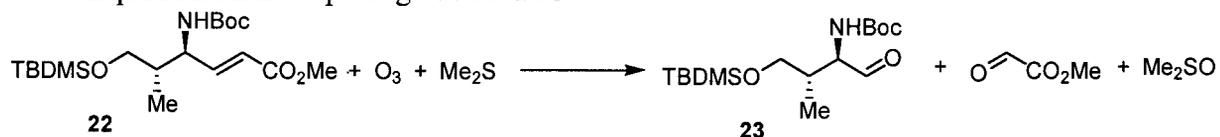


II.6.d Formule de **21** et mécanisme de sa formation

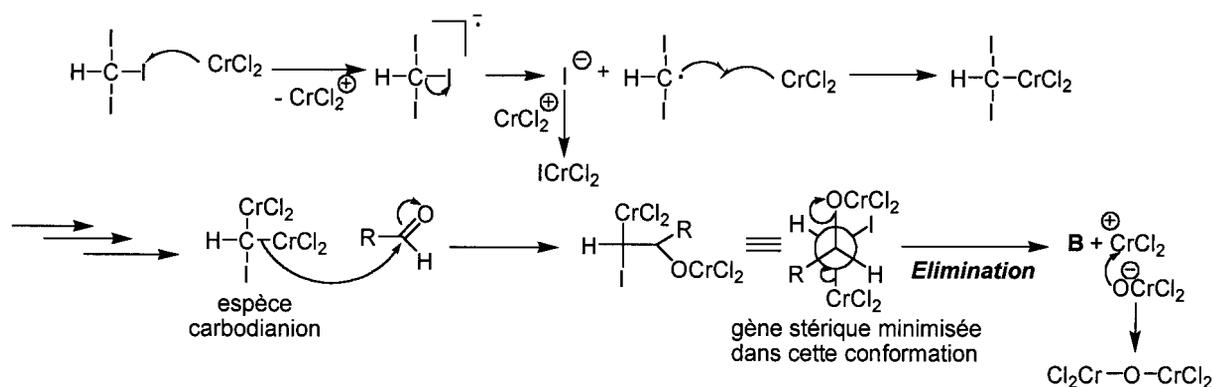
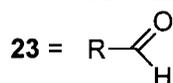
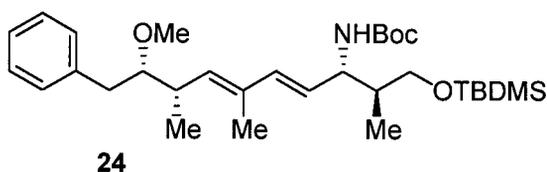
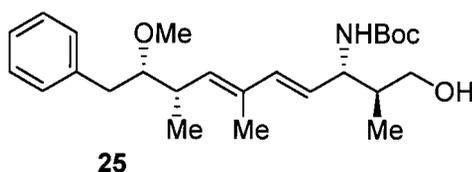


20 = R-OH



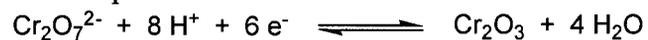
II.6.e Formule de **22** et mécanisme de sa formationII.7.a Equation bilan du passage de **22** à **23**II.7.b Equation bilan du passage de **23** à **B**

II.7.c Mécanisme de la réaction de Takai

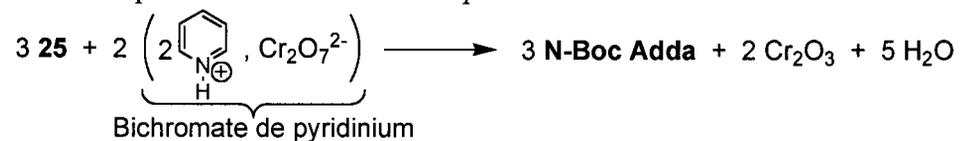
II.7.d Formule de **24**II.7.e Formule de **25**

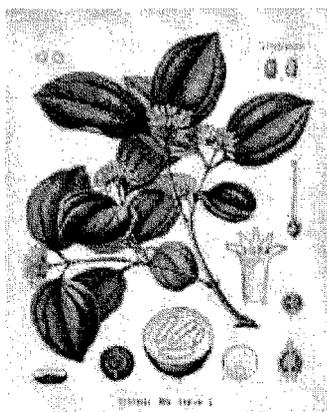
II.7.f Equation bilan du passage de **25** au **N-Boc Adda**

Demi-équations rédox :

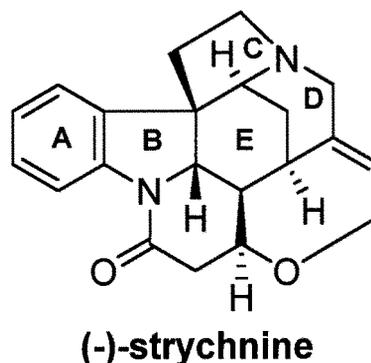
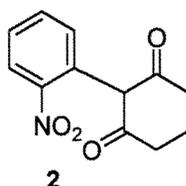


Bilan en tenant compte de la réelle source de protons :

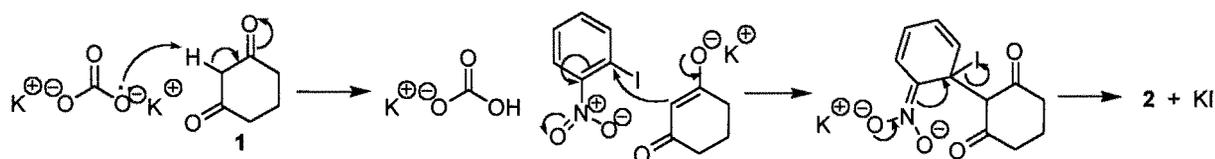


DEUXIEME PARTIE**Synthèse de la (-)-strychnine**

Arbre de la Strychnine
Strychnos nux vomica

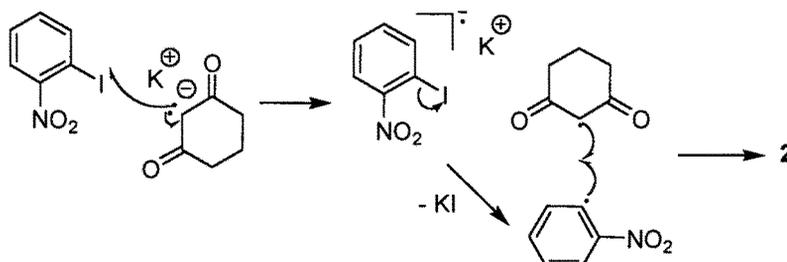
**I Synthèse de l'intermédiaire A.****I.1.a Structure de 2**

Le fait que la même réaction soit moins efficace avec le 1-fluoro-2-nitrobenzène n'est pas en accord avec le mécanisme de substitution nucléophile aromatique classique suivant :



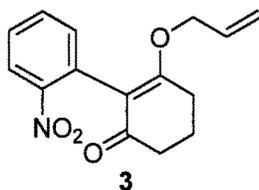
cela car le fluor ayant un effet inductif attracteur très important, il rend cette réaction plus aisée avec les composés fluorés que les composés iodés (car l'étape d'addition nucléophile sur le noyau aromatique est généralement cinétiquement déterminante et que le fluor stabilise mieux la charge négative).

On peut donc proposer un mécanisme de substitution nucléophile radicalaire (pas en chaîne) thermique suivant après formation de l'énolate :

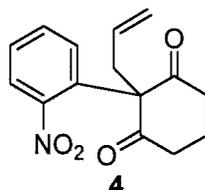


Le radical anion de l'*ortho*-fluoronitrobenzène est plus stable que celui de l'*ortho*-iodonitrobenzène à cause de la forte liaison carbone-fluor et du faible pouvoir nucléofuge de l'anion fluorure. La réaction est donc moins efficace avec l'*ortho*-fluoronitrobenzène.

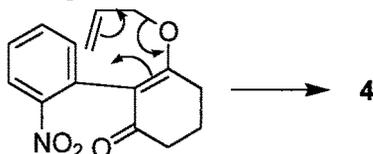
I.1.b Structure de 3



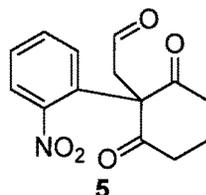
I.1.c Structure de 4



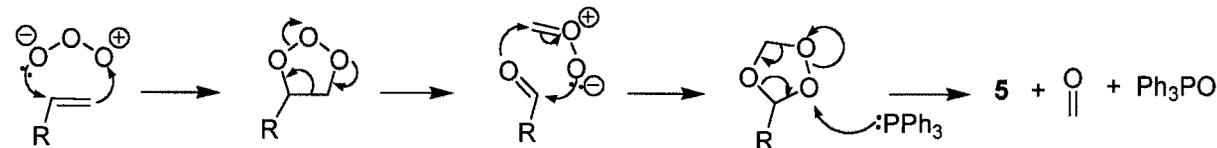
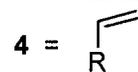
Mécanisme de formation de 4 : Transposition de Claisen.



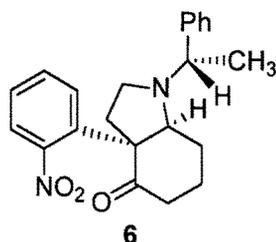
I.2.a Structure de 5



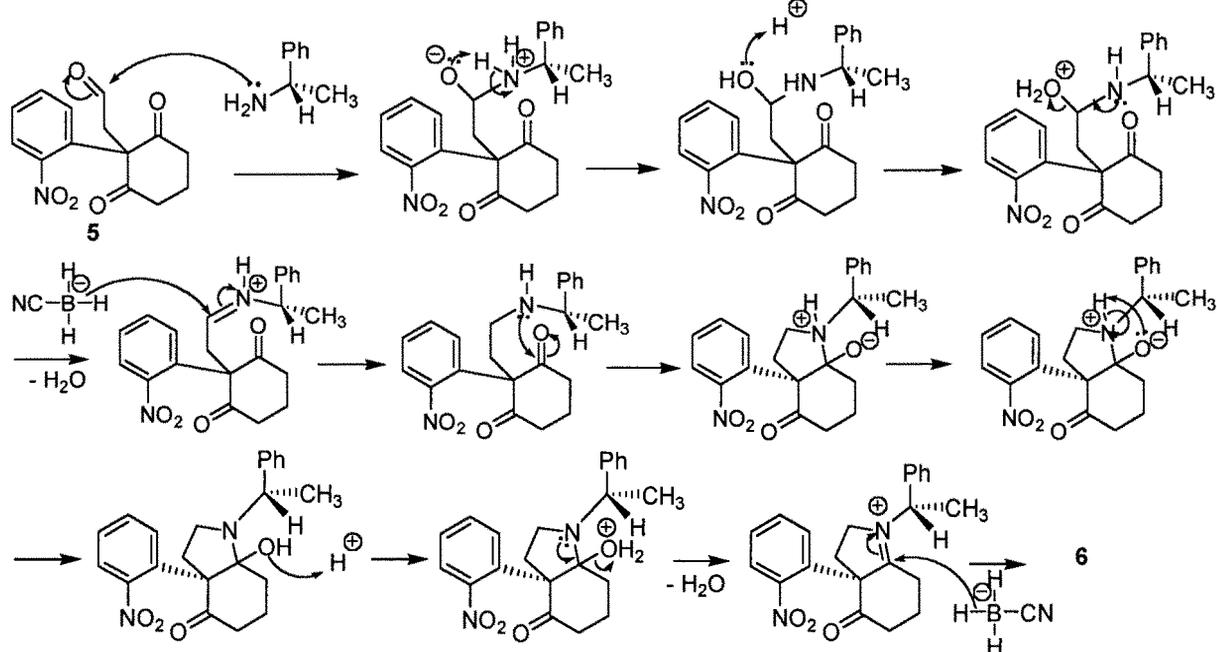
Mécanisme : réaction d'ozonolyse réductrice



I.2.b Structure de 6 (majoritaire)

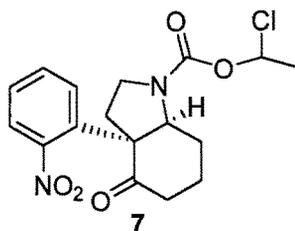


I.2.c Mécanisme de formation de 6 : double amination réductrice

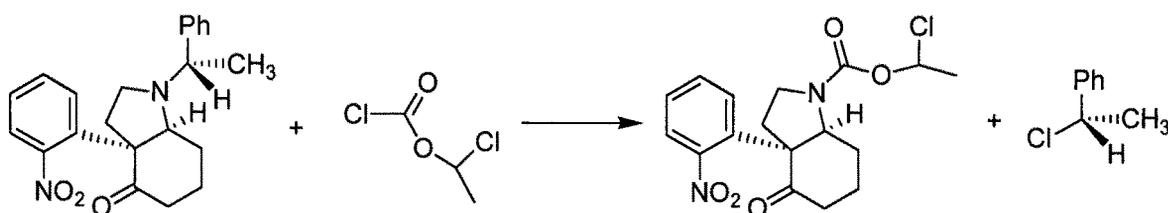


Une jonction de cycle *trans* est équatoriale-équatoriale par nécessité. Le substituant ArNO_2 est alors en position axiale. L'état de transition qui induit sa formation est donc haut en énergie. Avec la jonction de cycle *cis*, le substituant ArNO_2 est équatorial. Cependant, je ne vois pas comment justifier l'obtention majoritaire de l'un des composés *cis*.

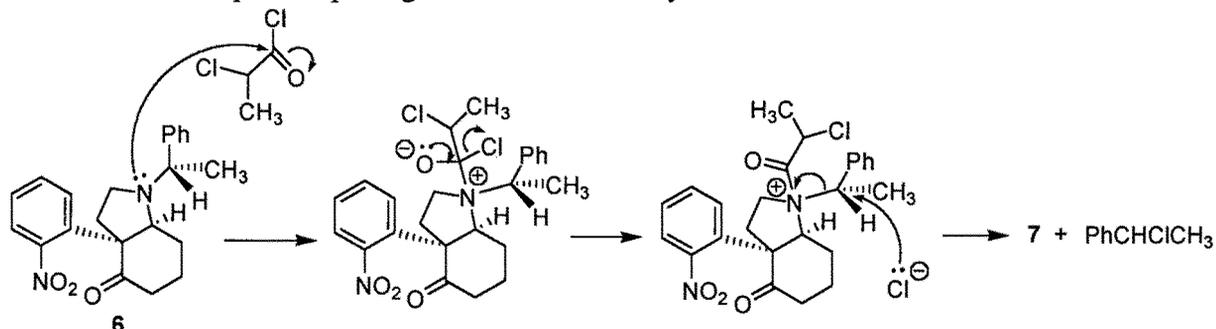
I.3.a Structure de 7

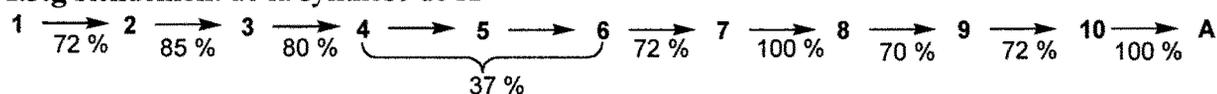


Equation bilan :



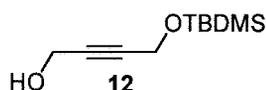
I.3.b Mécanisme pour le passage de 6 à 7 : N-déalkylation avec le réactif de Olofsen



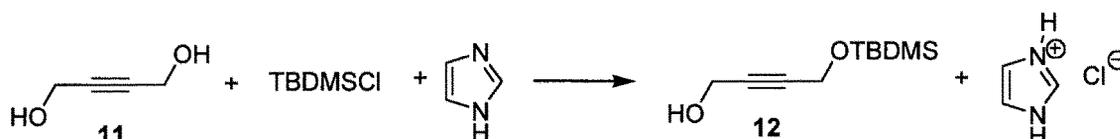
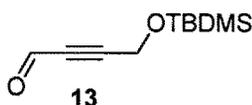
I.3.g Rendement de la synthèse de A

$$\text{Rdt} = (0,72 \times 0,85 \times 0,80 \times 0,37 \times 0,72 \times 1,00 \times 0,70 \times 0,72 \times 1,00) \times 100$$

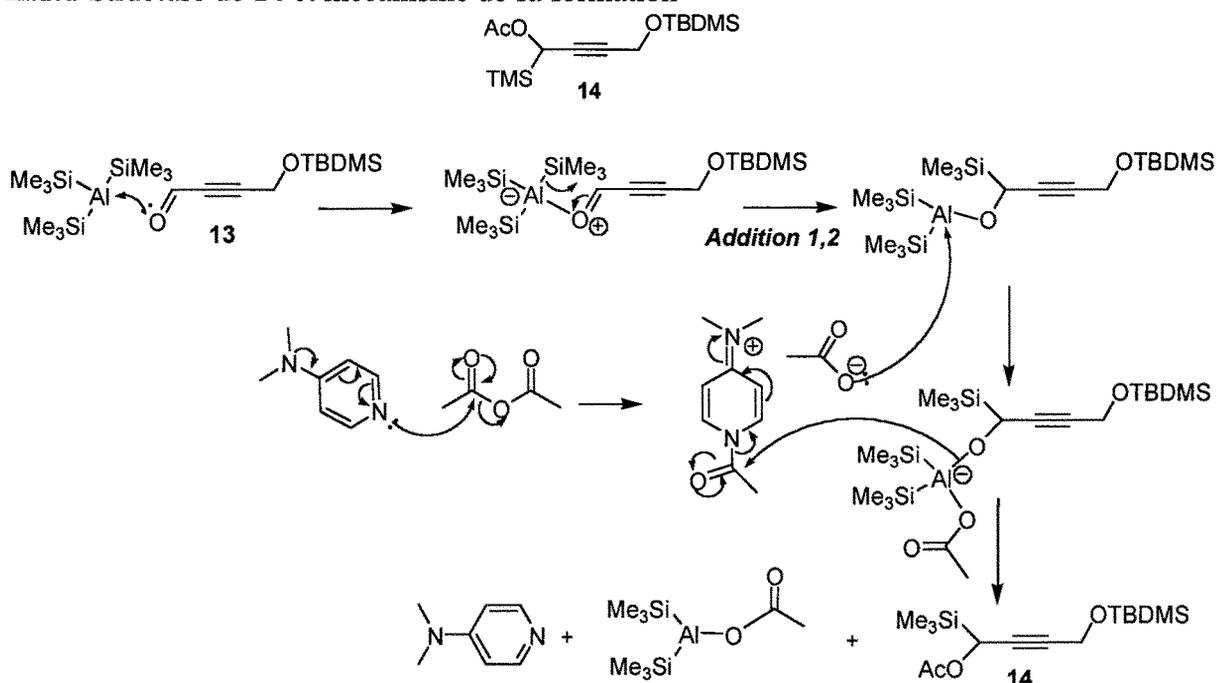
$$\text{Rdt} = 6,57\%$$

II Première voie : formation du cycle D par addition d'un propargylsilane B sur une énone.**1. Synthèse du propargylsilane B.****II.1.a Structure de 12**

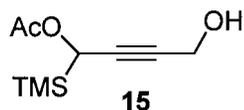
Equation bilan de sa formation

**II.1.b Structure de 13****II.1.c Méthode de préparation du dioxyde de manganèse**

Le dioxyde de manganèse (MnO_2 , Mn au degré d'oxydation + 4) peut être préparé par réaction de rétrodismutation entre le sulfate de manganèse (MnSO_4 , Mn au degré d'oxydation + 2) et le permanganate de potassium (KMnO_4 , Mn au degré d'oxydation + 7) en milieu basique, par chauffage et sous agitation.

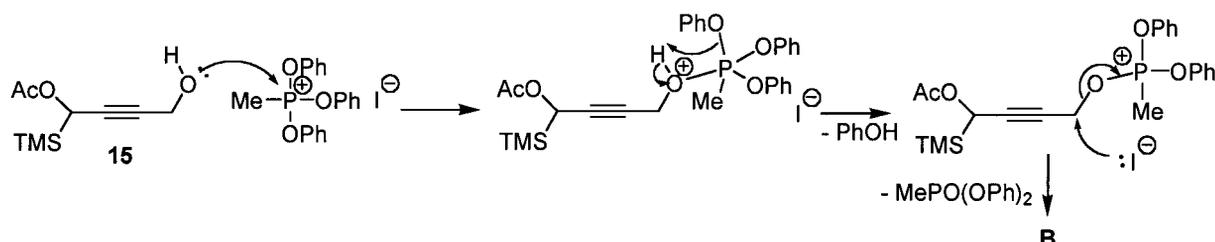
II.1.d Structure de 14 et mécanisme de sa formation

II.1.e Structure de 15

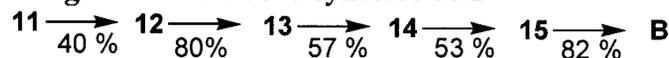


Remarque : « camphorsulfonique » est un anglicisme, il est préférable d'utiliser camphresulfonique qui est un terme français.

II.1.f Mécanisme de passage de 15 à B : iodation par le sel de Michaelis



II.1.g Rendement de la synthèse de B

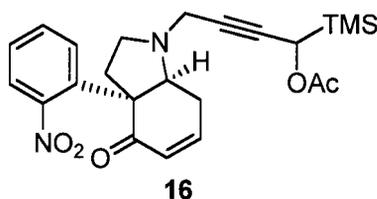


$$\text{Rdt} = (0,40 \times 0,80 \times 0,57 \times 0,53 \times 0,82) \times 100$$

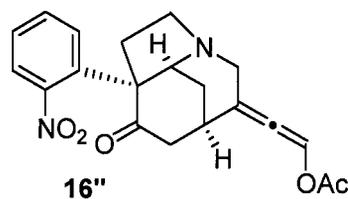
$$\text{Rdt} = 7,93\%$$

2. Approche *via* le propargylsilane B.

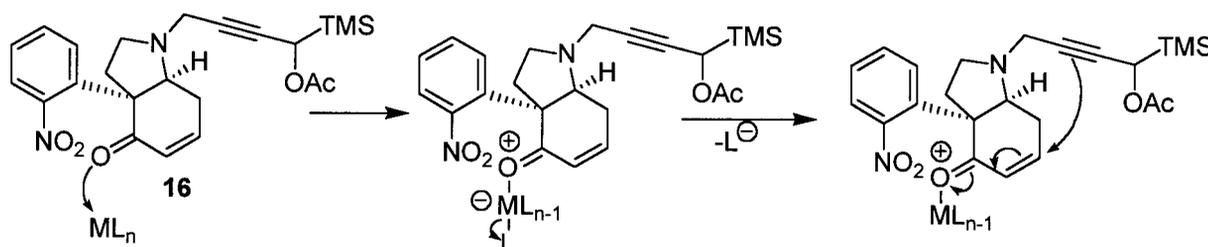
II.2.a Structure de 16

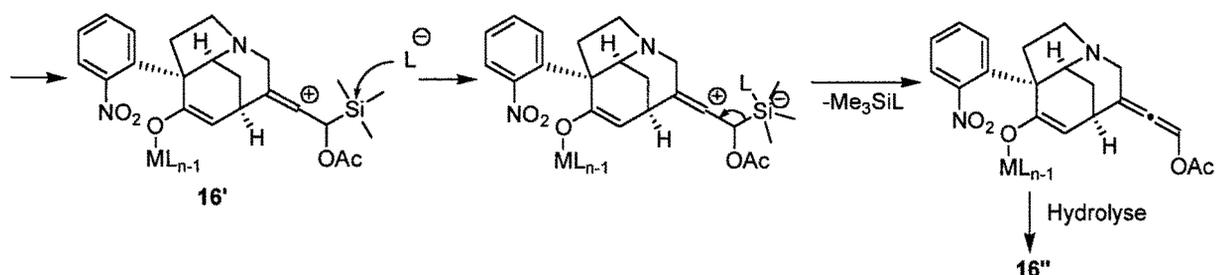


II.2.b Structure du composé attendu lors de la cyclisation de 16 : dérivé 20-vinylidène



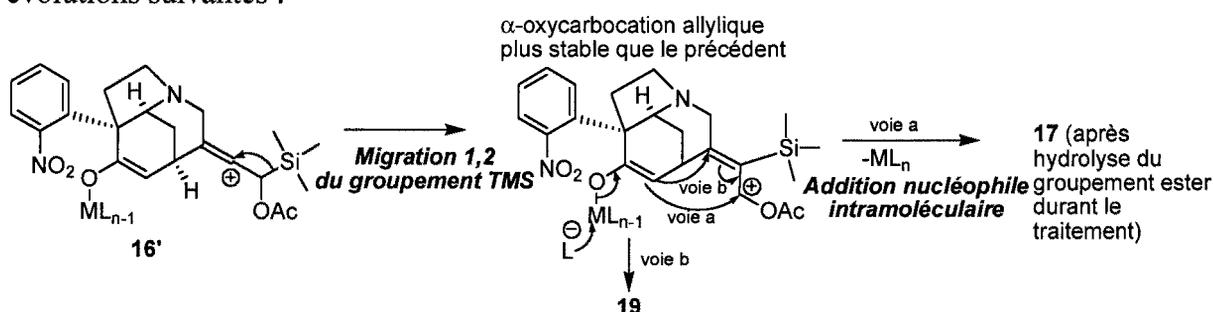
Mécanisme de la cyclisation en présence d'un acide de Lewis (ML_n)



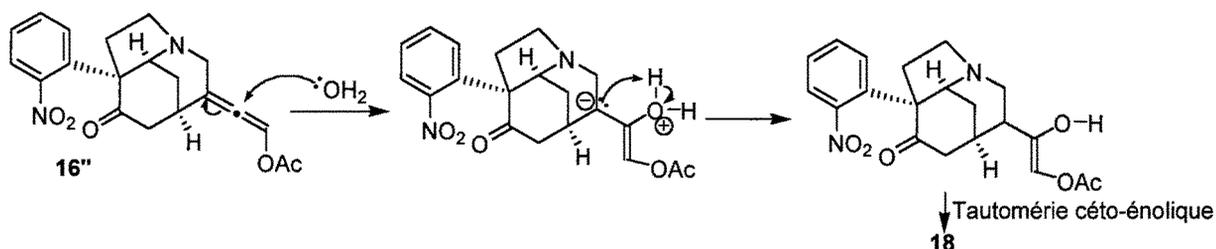


II.2.c Mécanisme du passage de **16** à **17**, **18** et **19**

Le mécanisme débute comme celui du passage de **16** à **16''**, à partir de **16'** on propose les évolutions suivantes :



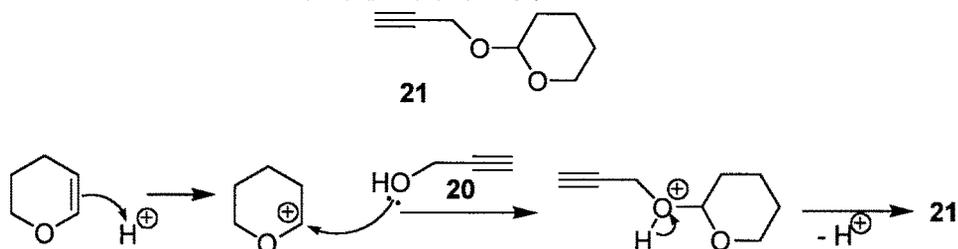
La formation de **18** peut être expliquée par la présence d'eau résiduelle dans le milieu



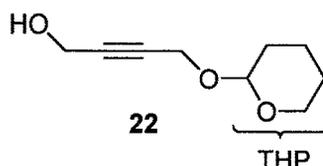
III Deuxième voie : formation du cycle D par cyclisation métallo-catalysée de l'iodure de vinyle C sur la double liaison C=C.

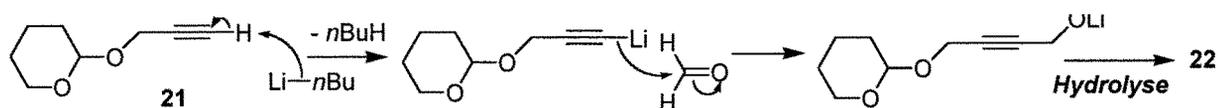
1. Synthèse du composé C.

III.1.a Structure de **21** et mécanisme de sa formation



III.1.b Structure de **22** et mécanisme de sa formation

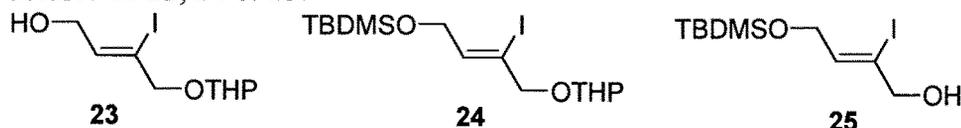




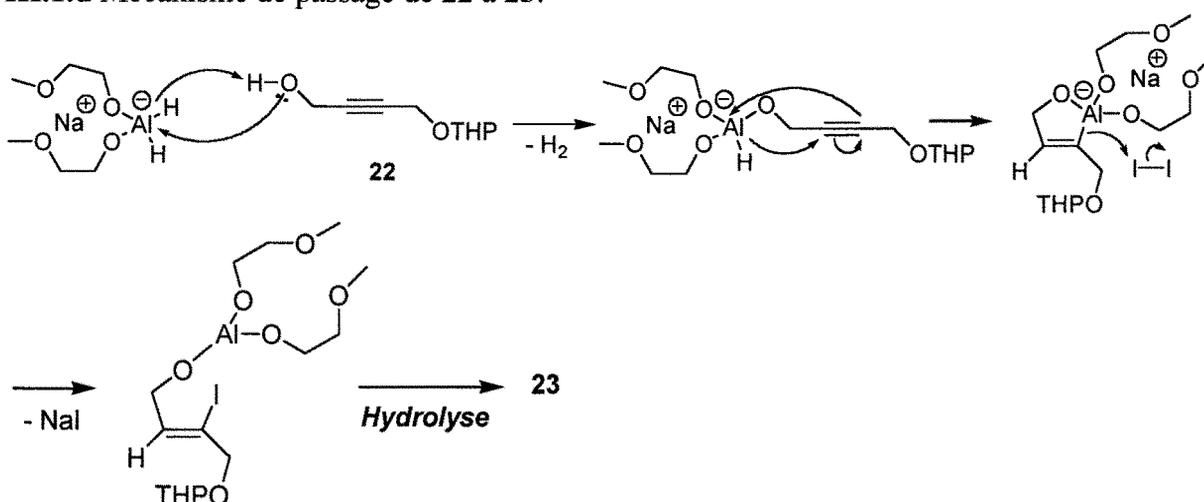
Le chauffage sert à « craquer » le paraformaldéhyde $((\text{CH}_2\text{O})_n)$ qui est un polymère ou oligomère en formaldéhyde.

Remarque : il ne faut pas dépasser 140-150 °C, sinon, il se forme aussi du méthanol.

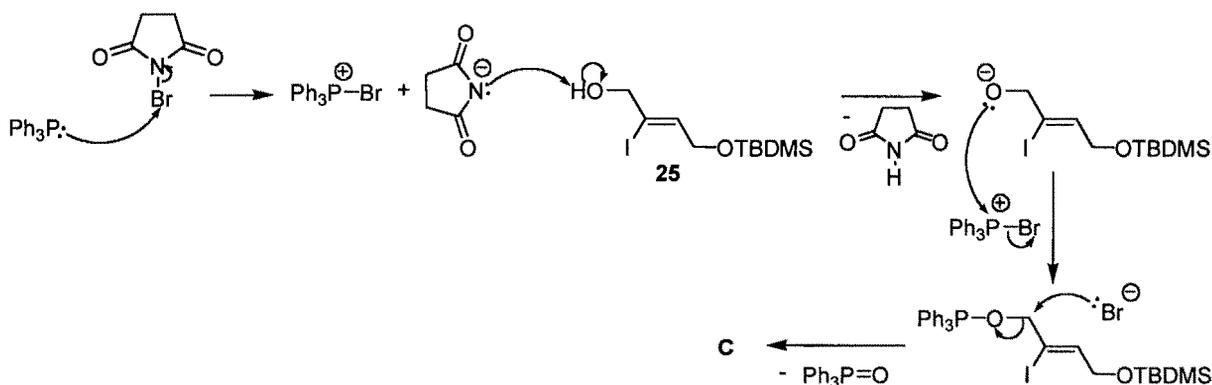
III.1.c Structures de 23, 24 et 25.



III.1.d Mécanisme de passage de 22 à 23.

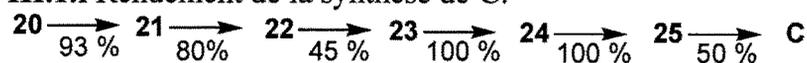


III.1.e Mécanisme de passage de 25 à C.



Le précipité filtré est l'oxyde de triphénylphosphine.

III.1.f Rendement de la synthèse de C.

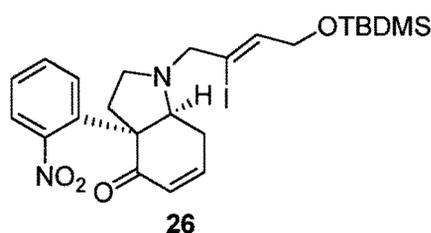


$$\text{Rdt} = (0,93 \times 0,80 \times 0,45 \times 1,00 \times 1,00 \times 0,50) \times 100$$

$$\text{Rdt} = 16,74\%$$

2. Approche *via* l'iodure de vinyle C.

III.2.a Structure de 26.



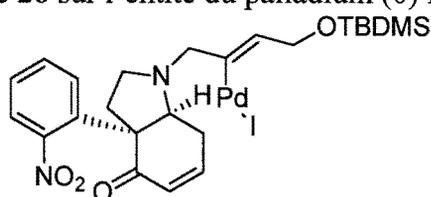
III.2.b Rôle du carbonate de potassium :

C'est une base qui sert à éliminer l'acide bromhydrique ou iodhydrique qui est produit lors de la réaction. Elle sert aussi à exalter la nucléophilie de A en déprotonant sa forme chlorhydrate qui a été introduite.

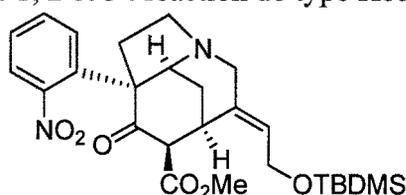
III.2.c Rôle de l'iodure de lithium :

C'est un catalyseur, l'iodure effectue une substitution nucléophile sur le bromure allylique C (réaction de Finkelstein). L'iodure allylique formé réagit plus vite que C avec A.

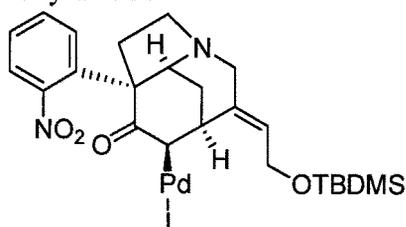
III.2.d Intermédiaire palladié formé : composé vinylpalladium (résultat de l'addition oxydante de l'iodure vinylique 26 sur l'entité du palladium (0) formé *in situ*).



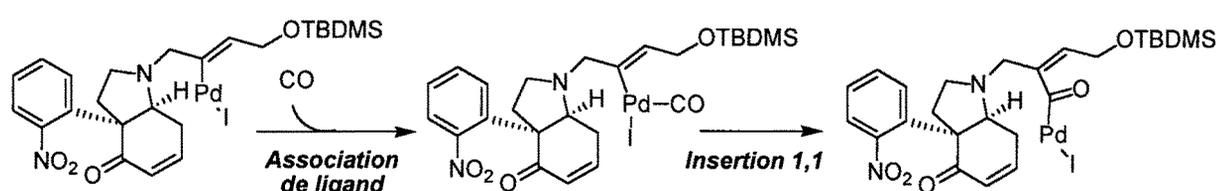
Produit attendu pour les entrées 1, 2 et 3 : réaction de type Heck

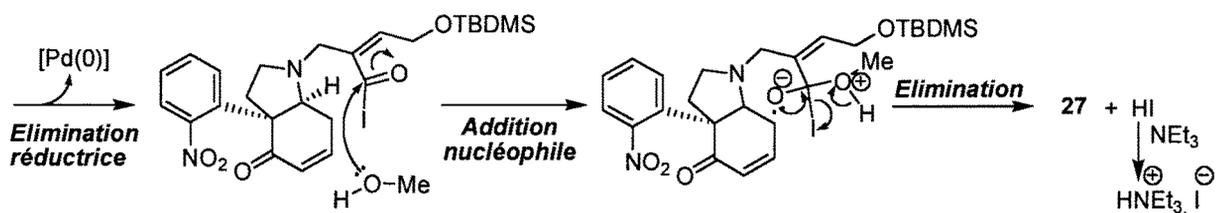


Intermédiaire attendu avant carbonylation :



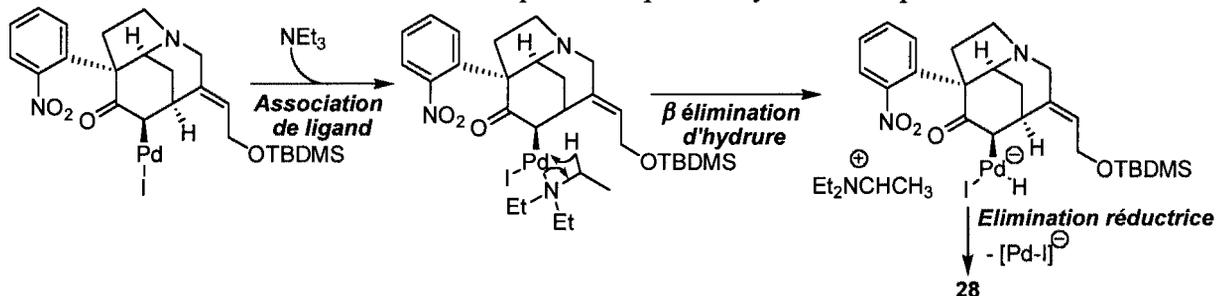
III.2.e Mécanisme de formation du composé 27 : méthoxycarbonylation de l'intermédiaire vinylpalladium initialement formé





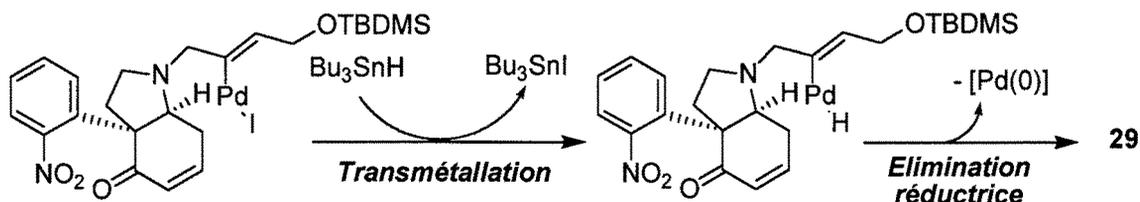
On peut conclure que l'intermédiaire est moins réactif vis-à-vis de la cyclisation que vis-à-vis de la méthyoxycarbonylation.

III.2.f Mécanisme de formation du composé **28** : protonolyse du complexe intermédiaire



III.2.g Mécanisme de formation du composé **29** : couplage croisé avec un hydrure d'étain ou de silicium

A partir du complexe vinylpalladium :



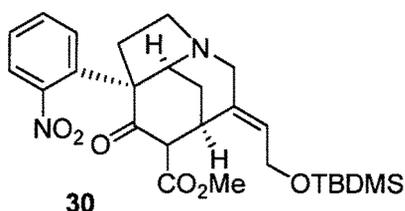
III.2.h Rôle des additifs (entrées 7 et 8)

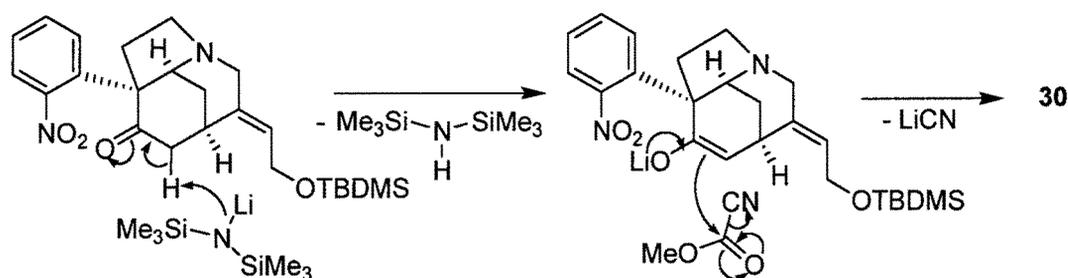
Les additifs (Bu_3SnH et Et_3SiH) sont des réducteurs, ce sont des donneurs d'hydrures.

Puisque le composé **29** est toujours majoritaire devant le composé **28**, cela met en évidence, une nouvelle fois, que la cyclisation est moins rapide que les autres évolutions possibles à partir de l'intermédiaire vinylpalladium.

IV Fin de la synthèse.

IV.1.a Structure de **30** et mécanisme de sa formation : méthyoxycarbonylation d'énolate





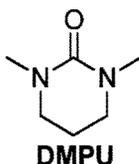
IV.1.b Rôle de l' « hexaméthylphosphoramide »

Cet additif exalte la nucléophilie de l'énolate : c'est un activateur nucléophile.

En effet, l' « hexaméthylphosphoramide » est un solvant aprotique polaire, c'est aussi un solvant fortement dissociant (constante diélectrique élevée ϵ_r 25°C = 29,6). Il possède un pouvoir donneur important, et solvate donc fortement le cation lithium ce qui contribue à diminuer l'énergie d'association avec l'énolate. Celui-ci forme alors des paires d'ions lâches ou dissociés.

Cependant, si ce solvant ou co-solvant se révèle très efficace, il présente de nombreux inconvénients dont les principaux sont le coût, la toxicité (cancérogène), la difficulté de récupération et son caractère hygroscopique.

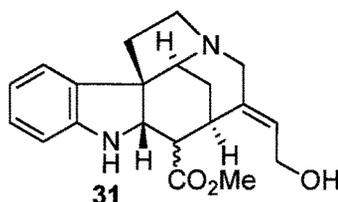
Il peut donc être remplacé par la diméthylpropylénurée (DMPU) qui possède sensiblement les mêmes propriétés, mais qui est beaucoup moins toxique.



Remarque : notons qu'il y a une erreur dans l'énoncé, le composé représenté ne se symbolise pas par HMPA mais HMPT... en français. La confusion, très courante, provient du fait malheureux que le HMPT en français correspond au HMPA en anglais et vice-versa.

Structure	Nom français	Nom anglais
	Hexaméthylphosphorotriamide HMPT	Hexamethylphosphoramide HMPA
	Hexaméthylphosphamide HMPA	Hexamethylphosphorous triamide HMPT

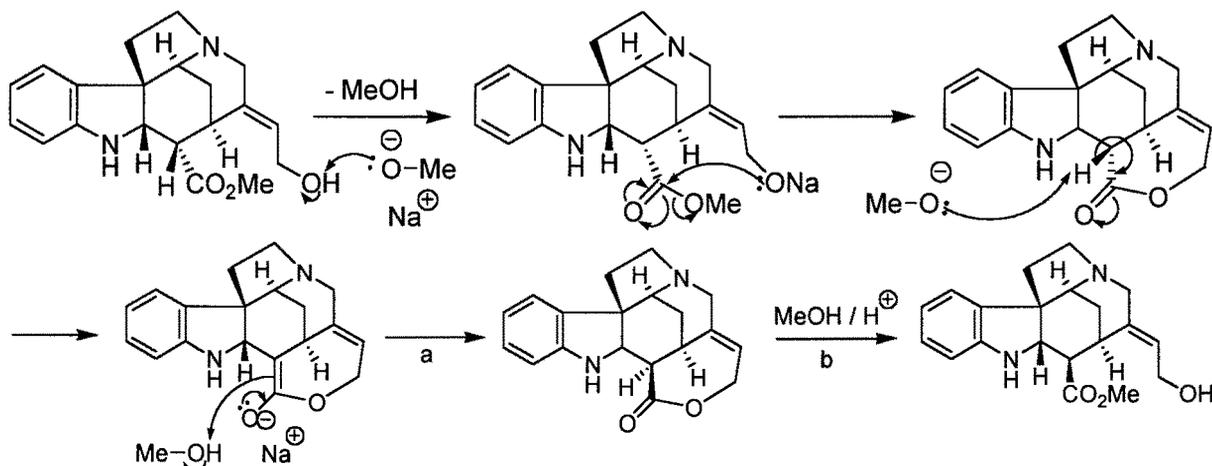
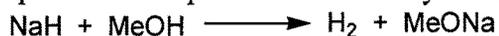
IV.1.c Structure de 31.



IV.1.d Mécanisme de l'épimérisation

On obtient un mélange d'épimères car, lors de la réaction, un dérivé énaminoester qui se forme est ensuite réduit. La stéréosélectivité partielle de cette dernière étape reflète les proportions relatives des deux épimères.

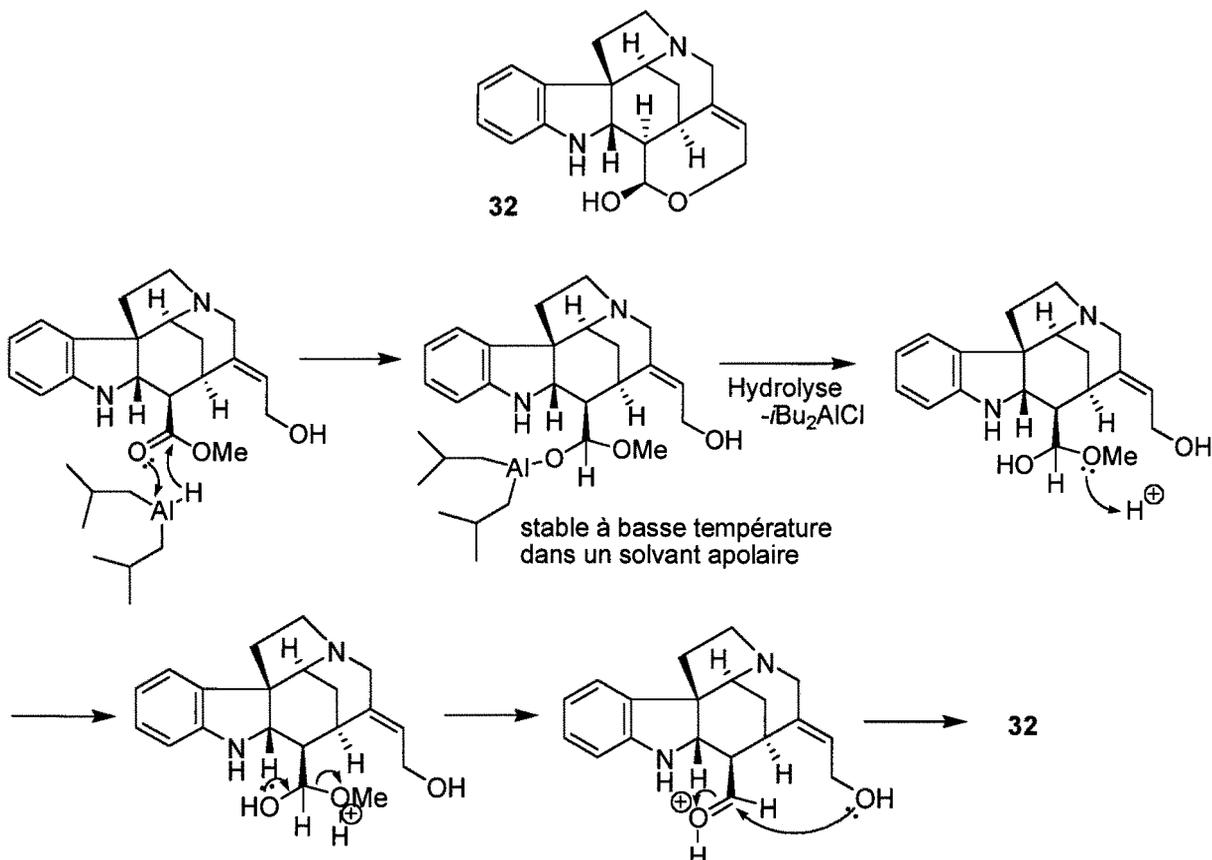
Epimérisation par la solution d'hydrure de sodium :



a : c'est l'étape déterminante de l'épimérisation, car la différence de tension de cycle entre les deux lactones épimères permet une bonne discrimination.

b : Trans-estérification en milieu acide (les épimérisations sont plus lentes en milieu acide qu'en milieu basique)

IV.2.a Structure de 32 et mécanisme de sa formation

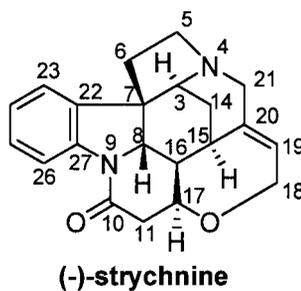


IV.2.b Intérêt de l'ajout d'acétate d'éthyle lors du traitement

L'acétate d'éthyle sert à éliminer l'excès de DIBAL-H qui n'a pas réagi.

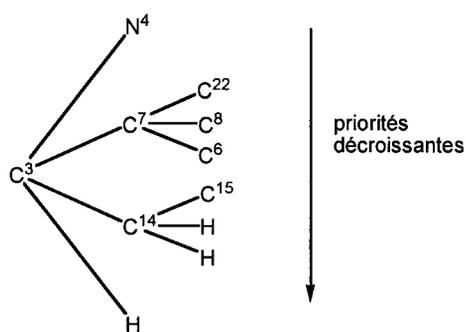
Remarque : cette étape est importante car le DIBAL-H peut réagir explosivement avec l'eau.

IV.2.c Configuration absolue des six centres stéréogènes

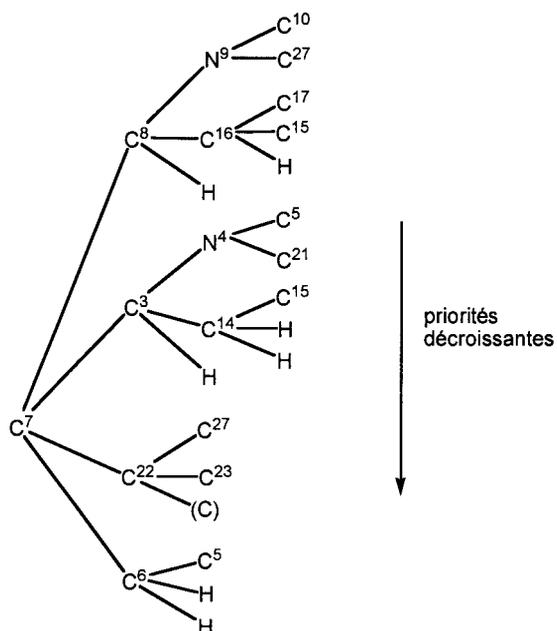


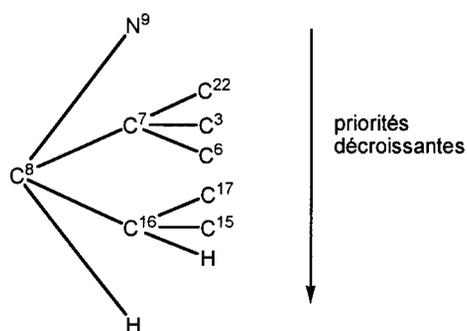
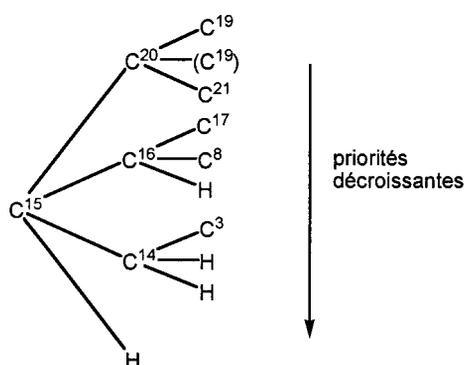
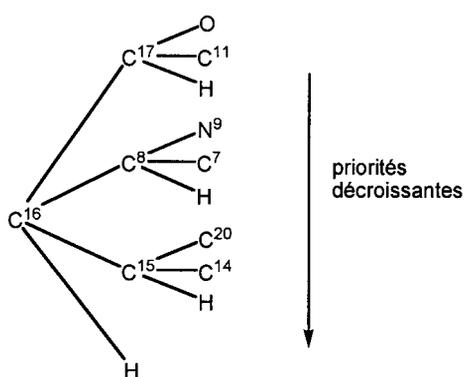
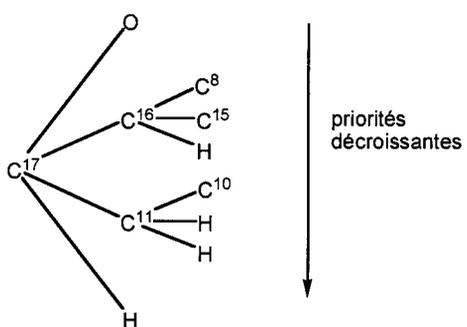
En utilisant la numérotation ci-dessus :

Carbone 3 : configuration absolue *S*

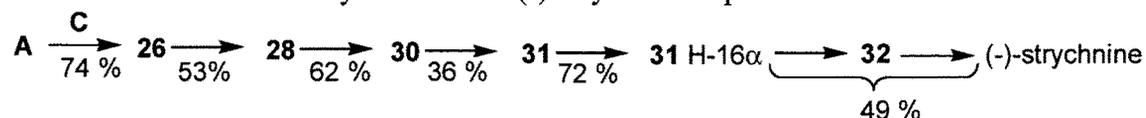


Carbone 7 : configuration absolue *R*



Carbone 8 : configuration absolue *S*Carbone 15 : configuration absolue *R*Carbone 16 : configuration absolue *R*Carbone 17 : configuration absolue *S*

IV.2.d Rendement de la synthèse de la (-)-strychnine à partir de A et C



$$\text{Rdt} = (0,74 \times 0,53 \times 0,62 \times 0,36 \times 0,72 \times 0,49) \times 100$$

$$\text{Rdt} = 3 \%$$

Rendement moyen par étape

$$\langle \text{Rdt} \rangle = \sqrt[3]{0,03} \times 100$$

$$\langle \text{Rdt} \rangle = 61 \%$$

Remarques :

- Pour l'étape du passage de **26** à **28**, les conditions expérimentales qui correspondent au rendement de 53 % en composé **28** ont été retenues car, pour ces conditions, le rapport rendement en composé **28** sur quantité de catalyseur utilisé est le plus important.
- Le rendement de la synthèse totale de la (-)-strychnine à partir de la cyclohexan-1,3-dione commerciale ainsi décrite en 17 étapes est de 0,21 % pour un rendement moyen par étape de 70 %.

Références :

La RMN, D. Canet, InterEditions, **1991**.

Effets du milieu en synthèse organique, Loupy A., Haudrechy A., Masson, **1996**.

Chimie organique avancée vol.1 et 2, Carey F. A., Sundberg R. J., DeBoeck université, 3^{ème} édition, **1997**.

Mécanismes réactionnels en chimie organique, Brückner R., DeBoeck Université, **1999**.

Méthodes et techniques de la chimie organique, Astruc D., PUG, **1999**.

Analyse chimique, Rouessac F., Rouessac A., Dunod, 5^{ème} édition, **2000**.

Chimie Physique, Atkins P. W., DeBoeck Université, 6^{ème} édition, **2000**.

MARCH'S Advanced Organic Chemistry, Smith M. B., March J., Wiley Inter-Science, 5^{ème} édition, **2001**.

Chimie Organique, Clayden J., Greeves N., Warren S., Wothers P., DeBoeck, **2003**.

Compendium de terminologie chimique (recommandations IUPAC), Richer J.-C., Tec&Doc, 2^{ème} édition, **1999**.

Hanzawa Y., Ito H., Taguchi T. *Synlett* **1995**, 299-305.

Solé D., Bosch J., Bonjoch J. *Tetrahedron* **1996**, 52, 11, 4013-4028.

Bonjoch J., Solé D., Garcia-Rubio S., Bosch J. *J. Am. Chem. Soc.* **1997**, 119, 7230-7240.

Ridgway B. H., Woerpel K. A. *J. Org. Chem.* **1998**, 63, 458-460.

Matos K., Soderquist J. A. *J. Org. Chem.* **1998**, 63, 461-470.

Suzuki A. *J. Organomet. Chem.* **1999**, 576, 147-168.

Solé D., Bonjoch J., Garcia-Rubio S., Peidro E., Bosch J. *Chem. Eur. J.* **2000**, 6, 4, 655-665.

Bonjoch J., Solé D. *Chem. Rev.* **2000**, 100, 3455-3482.

Chemler S. R., Traumer D., Danishefsky S. J. *Angew. Chem. Int. Ed.* **2001**, 40, 4544-4568.

Hu T., Panek J. S. *J. Am. Chem. Soc.* **2002**, 124, 11368-11378.

Image de *Strychnos nux vomica* : www.botanical.com/botanical/mgmh/n/nuxvom08.html

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION CHIMIE

Composition de physique ♦ Session : 2004

A La pression atmosphérique

A1. Sur un élément au repos, la contrainte est purement normale : $d\vec{f} = P d\vec{S}$

A2. Pour n moles de GP : $PV = nRT$

Van der Waals : $(P+an^2/V^2)(V-nb)=nRT$, b est la covolume occupé réellement par la matière, a/V^2 pression interne ou pression exercée par les molécules entre elles.

A3. $\vec{\nabla}P = \sum f\vec{v}$ - En référentiel galiléen, $f\vec{v} = \mu\vec{g}$

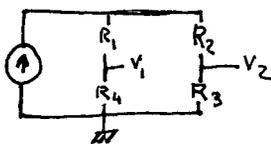
$\vec{\nabla}P = \mu\vec{g}$ expérience de Pascal (Périer) 1648

A4a 1 mbar = 100 Pa. Au maximum si la hauteur de la salle est 3 m, ou une variation de la pression de l'ordre de $\Delta P = \mu g \Delta h = 1,3 \times 10 \times 30 \approx 40$ Pa (infaisable).

Ou $\Delta h = 100/1,3 \times 10 \approx 7,7$ m (irréaliste).

A4b Équilibre du pont : $u = 0 = V_1 - V_2$

Par exemple par le théorème de Millmann :



$$V_1 = \frac{\frac{U_0}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}} = \frac{\frac{U_0}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = V_2$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}$$

A4c Si les résistances ont même valeur $R_4 = R$ à l'équilibre. La variation de volume $V = abc$ est $dV/V = 0 = da/a + db/b + dc/c$

Si le matériau est homogène $db/b = dc/c$, donc $db/b = dc/c = -da/2a$.

$R_4 = R$ à l'équilibre. En déséquilibre $\Delta R_4 / R_4 = k \Delta P$, $U = V_1 - V_2$

Toujours avec le théorème de Millmann : $R_2 = R_3$ donc $V_2 = U_0 / 2$

$$V_1 = \frac{U_0}{1 + \frac{R}{R_4}} = \frac{U_0}{1 + \frac{1}{1 + \frac{\Delta R_4}{R}}} \approx \frac{U_0}{1 + 1 \left(1 - \frac{\Delta R_4}{R}\right)} = \frac{U_0}{2} \left(1 + \frac{\Delta R_4}{2R}\right)$$

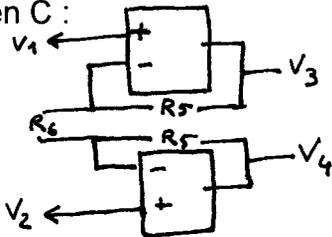
$$U = \frac{U_0 \Delta R_4}{4 R} = (U_0/4) k \cdot \Delta P.$$

AN : $u = 12/4 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 3 \cdot 10^{-2} V$

La résistance de la jauge est : $R_4 = \rho \frac{l}{A} = \rho \frac{a}{bc}$

$$\rightarrow \frac{dR_4}{R_4} = \frac{da}{a} - \frac{db}{b} - \frac{dc}{c} = \frac{2da}{a} \quad \frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{2} \frac{\Delta R_4}{R_4} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta P = \frac{0,5 \cdot 10^{-6} \times 100}{5 \cdot 10^{-3}}$$

A5 Il y a rétroaction sur la borne - : on peut supposer le fonctionnement linéaire. Théorème de Millmann en C :



$$V_1 = V_C = \frac{V_3/R_5 + V_2/R_6}{1/R_5 + 1/R_6}$$

de même en D :

$$V_2 = V_D = \frac{V_4/R_5 + V_1/R_6}{1/R_5 + 1/R_6}$$

D'où par différence $(V_1 - V_2) \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) = \frac{V_3 - V_4}{R_5} + \frac{V_2 - V_1}{R_6}$

$$\rightarrow (V_1 - V_2) \left(\frac{1}{R_5} + \frac{2}{R_6} \right) = \frac{V_3 - V_4}{R_5} \Rightarrow$$

$$V_3 - V_4 = (V_1 - V_2) \left(1 + \frac{2 R_5}{R_6} \right) = u \left(1 + \frac{2 R_5}{R_6} \right)$$

Puis pont diviseur : $V_F = V_4 \frac{R_8}{R_7 + R_8}$

Millmann en E :

$$V_E = \frac{\frac{V_3}{R_7} + \frac{V_5}{R_8}}{\frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8}} \quad \left. \vphantom{V_E} \right\} V_F = V_E$$

$$\Rightarrow V_5 = - \left(V_3 - V_4 \right) \frac{R_8}{R_7} \quad (\text{sommateur inverseur})$$

$$\Rightarrow V_5 = - u \frac{R_8}{R_7} \left(1 + \frac{2 R_5}{R_6} \right)$$

AN : $R_7 = - \frac{u R_8}{V_5} \left(1 + \frac{2 R_5}{R_6} \right) = + \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot 10^5}{10^{-1}} \left(1 + 2 \times 4,5 \right) = 300 k \Omega$

A6 $P = \frac{n m u^2}{3} = \frac{n m}{3} \langle v^2 \rangle$

AN : $u^2 = \frac{3P}{n m} = \frac{3 P V}{n V m} = \frac{3 P V}{n^\circ M} \quad u^2 = \frac{3 R T}{M}$

Si n° est la quantité de matière (moles) et M la masse molaire : $u = \sqrt{\frac{3 \times 8,314 \times 298}{32 \times 10^{-3}}} = 474 m \cdot s^{-1}$

A7a l'air est constitué d'environ de 1/5 O₂ et 4/5 N₂

$$M = \frac{1}{5} \times 32 + \frac{4}{5} \times 28 \approx 29 g \cdot mol^{-1} \quad (28,8)$$

A7b Soit g_0 la valeur de g au sol. En assimilant la champ de pesanteur au champ de gravitation terrestre, on a :

$$g \approx g_0 \left(\frac{R_T}{R_T + z} \right)^2 \quad R_T \approx 6400 km \quad z < 11 km$$

$$\frac{\Delta g}{g} \leq \frac{z_{\max}}{R_T + z_{\max}} = \frac{2 \times 11}{64 \times 11} \approx 3,4 \cdot 10^{-3}$$

L'approximation est bien vérifiée.

A7c n reste constante quand z varie \Leftrightarrow la masse volumique μ est constante.

$$\vec{\nabla} P = + \mu \vec{g} = - \mu g_0 \vec{u}_z = \frac{dP}{dz} \vec{u}_z \Rightarrow$$

$$P - P_0 = - \mu g_0 z$$

D'autre part le gaz est parfait : $PV = n^\circ RT$, soit

$$\mu = \frac{PM}{RT} \Leftrightarrow \frac{dT}{dz} = \frac{M}{R\mu} \cdot \frac{dP}{dz} = - \frac{M}{R\mu} \cdot \mu g_0 \text{ soit } \frac{dT}{dz} = - \frac{M}{R} g_0$$

$$\text{AN : } P = \frac{P_0}{2}, \mu = \frac{P_0 M}{RT_0} \rightarrow \frac{P_0}{2} = \frac{P_0 M}{RT_0} g_0 z \quad z = \frac{RT_0}{2 M g_0} = 4241,8 \text{ m}$$

A7d T = cte

$$\mu = \frac{PM}{RT_0} \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{dP}{P} \quad \frac{dP}{dz} = - \mu g_0 = - \frac{PM}{RT_0} g_0 \rightarrow \frac{dP}{P} = - \frac{M g_0}{RT_0} dz$$

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{M g_0 z}{RT_0}\right)$$

$$\text{AN } P = \frac{P_0}{2} \rightarrow \ln 2 = \frac{M g_0 z}{RT_0} \rightarrow z = \frac{RT_0 \ln 2}{M g_0} = 5880 \text{ m} \approx 5,9 \text{ km}$$

A7e Échanges adiabatiques, soit $P^{1-\gamma} T^\gamma = cte$

$$(1-\gamma) \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dT}{T} = 0 \text{ et } \frac{dP}{dz} = - \mu g_0 = - \frac{PM}{RT} g_0$$

$$\frac{dP}{P} = - \frac{M g_0}{RT} dz = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} \Leftrightarrow \frac{dT}{dz} = - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{M g_0}{R}$$

Il existe un gradient de température ! D'où en intégrant $T = - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{M g_0}{R} z + T_0$

$$\text{Et avec } \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^\gamma \rightarrow \frac{P}{P_0} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{M g_0}{RT_0} z\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\text{AN : } P = \frac{P_0}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{M g_0}{RT_0} z \rightarrow z \approx 5,3 \text{ km}$$

A8a On peut lire $\left(\frac{P}{P_0}\right) = \left(1 - \frac{z}{100 T_0}\right)^{1,019}$

Ce qui ne peut correspondre qu'au modèle adiabatique. Il faut vérifier $\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{M g_0}{R} = \frac{1}{100} \text{ S.I.}$

$$\text{or } \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{M g_0}{R} \approx 9,6 \cdot 10^{-3}$$

Ce qui est cohérent avec $\frac{1}{100} = 10^{-2} !$

A8b Sur le graphe figure 5, on lit $P \approx 850 \text{ hPa}$, soit $z = 100 \times 288 \left[1 - \left(\frac{860}{1000}\right)^{0,29}\right] = 1233 \text{ m}$

Altitude cabine ; la réglementation est respectée.

B La pression acoustique

B1a $\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s$ par définition isentropique $P V^\gamma = cte$
 soit $\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_s = -\gamma \frac{P}{V} = -\gamma \frac{nRT}{V^2} \rightarrow \chi_s = \frac{1}{\gamma P}$

B1b $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$
 Dérivée locale dérivée convective

traduit le caractère : non permanent non uniforme

on néglige les forces de pesanteur ; on ne tient compte que de $-\nabla P$
 $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P$ $\vec{v} = v_x \vec{u}_x$

En projection sur Ox : $\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x}$

Au 1^{er} ordre $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + 0 = -\frac{\partial P}{\partial x}$ (1)

B1c Conservation de la masse : $\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
 Soit : $\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ au 1^{er} ordre $\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (2)

B1d La transformation est adiabatique $\chi_s = cte = \frac{1}{\gamma P_0}$

$\chi_s = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \chi_s \rho_0 \frac{\partial P}{\partial t}$
 (2) $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} + \chi_s \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et (1) $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$
 On dérive (2) par rapport à x et (1) par rapport à t et on compare

D'où $\frac{1}{\chi_s} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right) = \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ avec $c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_s} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$
 AN $c^2 = \frac{1,4 \cdot 10^5}{\rho_0}$ $\rho_0 = \frac{\gamma P_0}{RT_0} \rightarrow c^2 = \frac{\gamma RT_0}{M}$ $c = 341 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

On obtient le même ordre de grandeur que la vitesse quadratique .

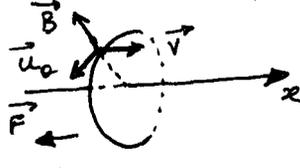
B2 Compression isotherme : il suffit de changer $\chi_s = \frac{1}{\gamma P}$ en $\chi_T = \frac{1}{P}$ pour un gaz parfait : $c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_T} = \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{RT_0}{M}$ $c = 288 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

L'hypothèse adiabatique est donc plus adaptée.

C L'Étude de quelques transducteurs

C1a La bobine se déplace à \vec{V} dans \vec{B} . Il apparaît un champ électromoteur $\vec{E}_M = \vec{v} \wedge \vec{B}$

Le sens du courant induit est celui de \vec{u}_θ (s'enroule dans le sens >0 autour de Ox si v_x est >0).



$$e = \oint_{N \text{ spire}} \vec{E}_M \cdot d\vec{l} = \oint v B \vec{u}_\theta \cdot d\vec{l} \vec{u}_\theta = v B l$$

C1b
$$d\vec{f} = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = i d\vec{l} \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_r = -i d\vec{l} B \vec{u}_r$$

$$\vec{F} = -i l B \vec{u}_r + P S \vec{u}_r + \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

Équation mécanique de la bobine : $m\vec{a} = \vec{F}' + \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \Rightarrow$

$$m \frac{dv}{dt} = -i l B + P S - k x - \beta v \text{ avec } v = \frac{dx}{dt}$$

En régime forcé de pulsation ω : $x = \frac{v}{j\omega}$ $\frac{dv}{dt} = j\omega v$

$$m j\omega v = -i l B + P S - \frac{k v}{j\omega} - \beta v$$

$$\text{soit } P S = \frac{i l B}{j\omega} + j\omega m \frac{v}{j\omega} + \beta v + \frac{k}{j\omega} v \text{ avec } \underline{Z}_m = \beta + j \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right)$$

C1c La fem $e = vBl$ fait passer le courant i dans l'impédance Z_e : $e = vBl = \underline{Z}_e i$

On a donc $\underline{u} = R_c i = R_c v$

et dans l'équation mécanique $P S = \frac{\beta^2 l^2}{Z_e} \frac{v}{S} + \underline{Z}_m \frac{v}{S}$

$$\text{d'où } \underline{\delta} = \frac{\underline{u}}{P} = \frac{R_c \cdot Bl}{\underline{Z}_e \left[\frac{\beta^2 l^2}{Z_e S} + \frac{Z_m}{S} \right]} = \frac{R_c B l S}{\beta^2 l^2 + Z_e Z_m}$$

C1d δ dépend de la fréquence par $\underline{Z}_e \underline{Z}_m$:

$$\underline{Z}_e \underline{Z}_m = \left[\beta + j \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) \right] \left[R_c + R_c + j L \omega \right]$$

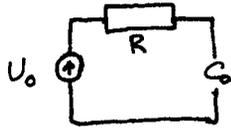
Pour limiter l'influence de la fréquence il faudra choisir $R_c + R \gg L \omega$

et $\beta \gg m\omega - \frac{k}{\omega}$ et ce quelque soit ω , ce qui implique une grande

valeur dans l'absolu de β et R_c , ce qui diminue δ et donc, l'efficacité et la linéarité se contrarient.

C2a
$$C = \epsilon \frac{S}{e} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{c} = C_0$$

C2b En régime établi $i = 0$ $Q = C_0 U_0$ et $E_0 = \frac{U_0}{d}$ $\vec{E}_0 = \pm \frac{U_0}{d} \vec{x}$



Suivant le sens de branchement

$$C = \epsilon \frac{S}{d-x} = \epsilon \frac{S}{d} \left(1 - \frac{x}{d}\right)^{-1} = \frac{C_0}{1 - \frac{x}{d}}$$

Pour x quelconque $C \approx C_0 \left(1 + \frac{x}{d}\right)$

Si x varie sinusoïdalement, on a en régime forcé $U_0 = R i + \frac{q+Q}{C}$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(q+Q)}{dt}$$

soit $U_0 C_0 \left(1 + \frac{x}{d}\right) = R C_0 \left(1 + \frac{x}{d}\right) i + q + Q$

$$U_0 C_0 \frac{x}{d} = R C_0 i \left(1 + \frac{x}{d}\right) + q$$

le terme en $i x$ est du deuxième ordre, donc négligeable.

En dérivant par rapport au temps : $j\omega \frac{U_0 C_0}{d} \underline{x} = R C_0 j\omega \underline{i} + \underline{i}$

$$\frac{U_0 \underline{x}}{d} = R \underline{i} + \underline{i} \frac{1}{j\omega C_0} \quad \frac{U_0}{d} \underline{x} = \underline{i} \left(R + \frac{1}{j\omega C_0} \right)$$

C2c La force est normale aux armatures et tend à les attirer l'une vers l'autre, donc

$$\vec{F} = \frac{Q^2}{2\epsilon S} \vec{u}_x \quad \text{sur l'armature mobile.}$$

Quand la charge est $Q + q$, on a $\vec{F} = \frac{(Q+q)^2}{2\epsilon S} \vec{u}_x$ au premier ordre:

C2d PFD en projection sur \vec{u}_x : $\vec{F} \approx \left(\frac{Q^2}{2\epsilon S} + \frac{Qq}{\epsilon S} \right) \vec{u}_x$

$$m \ddot{x} = (p_0 + p) S - kx - \beta \frac{dx}{dt} + \frac{Q^2}{2\epsilon S} + \frac{Qq}{\epsilon S}$$

À l'équilibre (sans signal acoustique) : $0 = \frac{p_0 S + \frac{Q^2}{2\epsilon S}}{>0}$

D'où par différence

$$m \ddot{x} = p S - kx - \beta \frac{dx}{dt} + \frac{qQ}{\epsilon S} \quad \text{avec} \quad \frac{Q}{\epsilon S} = \frac{Q}{d C_0} = \frac{U_0}{d}$$

$$\Rightarrow p S = m \ddot{x} + kx + \beta \frac{dx}{dt} - \frac{q U_0}{d}$$

en complexe et avec $i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow p S = m j\omega \underline{v} + \frac{k}{j\omega} \underline{v} + \beta \underline{v} - \frac{U_0 \underline{i}}{d j\omega}$

$$\underline{p} S = \underline{Z}_m \underline{v} + \frac{j U_0 \underline{i}}{\omega d}$$

C2e $\underline{u} = R \underline{i} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C_0}} \cdot \frac{U_0}{d} \cdot \frac{\underline{v}}{j\omega}$

D'après C2d : $\underline{i} = \frac{\omega d}{j U_0} \left(\underline{p} S - \underline{Z}_m \underline{v} \right) \Rightarrow \frac{\underline{v}}{\underline{p}} = \frac{R U_0}{d \left(R + \frac{1}{j\omega C_0} \right)} \frac{1}{j\omega} \frac{\underline{v}}{\underline{p}} = A \frac{\underline{v}}{\underline{p}}$

Avec $\frac{V}{P}$ par comparaison des deux premières lignes :

$$\frac{V}{P} = \frac{\omega d S}{U_0} \cdot \frac{1}{\frac{U_0}{d\omega \left(R + \frac{1}{j'c\omega} \right) + \frac{Z_m \omega d}{U_0}}$$

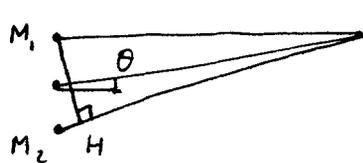
$$\delta = \frac{-j' R S}{\frac{U_0}{d\omega} + \frac{Z_m \omega d}{U_0} \left(R + \frac{1}{j'c\omega} \right)}$$

δ dépend de ω : donc le problème est le même que précédemment pour la linéarité.

C2f Le condensateur sert à couper les composantes continues.

D1 P. Curie (1880), Lippman (1881), puis de manière définitive Langevin.

D2 Il s'agit d'interférences observables pour θ petit.



$$\delta = M_2 H \approx d \theta$$

Maximum $\delta = k \lambda$, minimum $\delta = (k+1/2) \lambda$

1^{er} minimum pour $\theta = \pm \lambda / 2d$

D3a $n=c/v$

où v est la vitesse de phase dans le milieu.

D3b loi de Descartes $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ et dans le triangle A_1CI $\frac{\sin \gamma}{A_1 I} = \frac{\sin i_1}{CA_1}$

de même dans le triangle A_2CI $\frac{\sin \gamma}{A_2 I} = \frac{\sin i_2}{CA_2}$

d'où en égalant les deux valeurs de $\sin \gamma$:

$$\sin i_1 \frac{A_1 I}{CA_1} = \sin i_2 \frac{A_2 I}{CA_2} = \frac{n_1 \sin i_1}{n_2} \frac{A_2 I}{CA_2}$$

$$\text{soit } n_2 \frac{A_1 I}{CA_1} = n_1 \frac{A_2 I}{CA_2} \quad \text{ou encore } n_2 \frac{\overline{CA_2}}{\overline{A_2 I}} = n_1 \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1 I}}$$

Conditions de Gauss : stigmatisme approché : γ est petit.

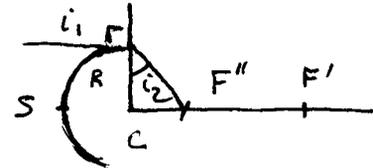
$$\overline{A_2 I} \approx \overline{A_2 S} \quad \overline{A_1 I} \approx \overline{A_1 S} \rightarrow n_2 \frac{\overline{CS} + \overline{SA_2}}{\overline{SA_2}} = n_1 \frac{\overline{CS} + \overline{SA_1}}{\overline{SA_1}}$$

$$\frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} = \frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}}$$

D3c Pour les rayons paraxiaux (optique de Gauss) le foyer est tel que $\overline{SA_1} \rightarrow \infty$.

$$\frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} = - \frac{n_2}{\overline{SF'}} \rightarrow \overline{SF'} = \overline{SC} \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2} \right)^{-1} = \overline{SC} \left(\frac{1,5 - 1}{1,5} \right)^{-1}$$

$$\overline{SF'} = 3 R$$



Pour les rayons marginaux, on a $i_1 = \pi / 2$

$\sin i_2 = n_1 / n_2 = 2/3 \quad i_2 = 41,8^\circ \quad CF'' = R \tan i_2 \quad CF'' = 0,894 R$

$\Gamma = F''F' = 1,1 R$

pour les rayons marginaux, i_2 correspond à l'angle limite si un diaphragme i_1 et i_2 diminuent et F'' se rapproche de F' , l'aberration diminue.

D3d Pour les rayons paraxiaux $SF' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \overline{SC}$. Si n_2 / n_1 augmente, $SF' \rightarrow SC$

F' se rapproche de C .

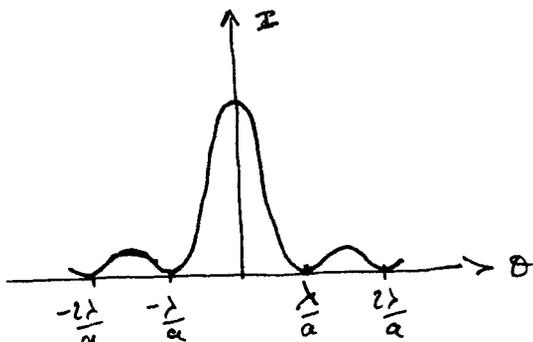
Pour les rayons marginaux F'' aussi se rapproche de C mais moins fortement.

Γ diminue quand n_2 / n_1 augmente.

On a en optique $n_2 / n_1 = 1,5$ et en acoustique $n_2 / n_1 = v_2 / v_1 = 0,1$

Le rapport des indices (dans l'autre sens) est beaucoup plus grand : il y a donc moins d'aberration.

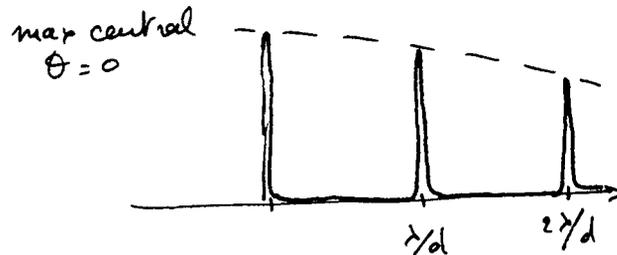
D4a Courbe de diffraction. $I = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \quad u = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \approx \frac{\pi a \theta}{\lambda}$



les minimums sont $u = 0$
 $\theta = \frac{\lambda}{a}$

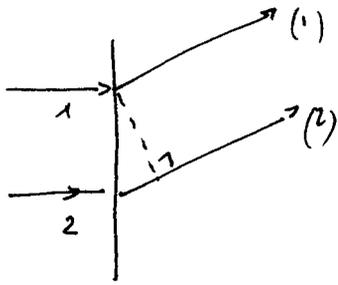
D4b N fenêtres identiques constituent un réseau de pas d . I_{\max} pour toutes les fentes en phase :

$d \sin \theta = k \lambda \rightarrow \sin \theta = k \frac{\lambda}{d}, k$ entier



Avec enveloppe par la diffraction d'une fente.

D4c



$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin \theta$$

Avec la différence de phase croissante

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin \theta + \varphi_1$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin \theta + \varphi_0$$

Maximum de lumière pour $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin \theta + \varphi_0$

$$\sin \theta = \frac{\lambda_0}{2\pi d} (2k\pi - \varphi_0) = \lambda_0 \left(\frac{k}{d} - \frac{\varphi_0}{2\pi d} \right)$$

Le maximum central ($k = 0$) $\sin \theta_0 = \frac{\lambda \varphi_0}{2\pi d}$ (au signe près)Application : en réglant (électriquement la valeur de φ_0) on déplace θ_0 (on balaye).

D5 Microscopie acoustique

D5a L'eau est un milieu très absorbant. La couche piézo-électrique doit avoir une épaisseur de l'ordre de grandeur de λ . La focalisation est réalisée par le dioptre à droite du dessin. $\lambda = c/v = 10^3/10^9 = 10^{-6} \text{ m}$

D5b C'est dû au rapport des longueurs d'onde :

L'aberration de sphéricité est 1000 fois plus faible en acoustique et la limitation par la diffraction à l'ouverture est 1000 fois plus grande, donc c'est celle qui domine en acoustique.

D6 Oscillateurs à quartz

D6a LC série

Avec le boîtier

résonance parallèle

$$\omega_s^2 = \frac{1}{LC} \quad f_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Y = \frac{1}{Z} = jC'\omega + \frac{1}{jL\omega + 1/jC\omega}$$

résonance parallèle

$$\varphi = 0 \quad \omega_p^2 = \frac{C+C'}{CC'L} \quad \text{Si } C' = 1000C$$

$$\omega_s \approx \omega_p$$

D6b Si le passe-bas est efficace, on ne voit que $|f_1 - f_2|$.

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉES

Composition de physique ♦ Session : 2004

PREMIER PROBLÈME

1.1 Durée des saisons

1.1.1

a Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe de l'inertie (ou première loi de Newton) est vérifié.

b Le référentiel de Copernic est centré au centre d'inertie du système solaire, ses axes pointent vers trois étoiles «fixes».

On peut le considérer comme galiléen si on néglige le mouvement du système solaire dans notre galaxie ! Désormais, on le considèrera comme galiléen.

c Le référentiel héliocentrique est centré au centre d'inertie du Soleil, ses axes pointent vers trois étoiles «fixes».

Il est galiléen si on peut négliger la masse des planètes du système solaire par rapport à la masse du Soleil (c'est-à-dire le mouvement du centre du Soleil dans le référentiel de Copernic).

d Le référentiel géocentrique est centré au centre de la Terre, ses axes pointent vers trois étoiles «fixes».

Il est considéré comme galiléen pour une expérience de durée courte par rapport à un an (période de la translation elliptique de ce référentiel par rapport au référentiel héliocentrique).

1.1.2

a La force est conservative si $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ ou $\delta W_{\vec{F}} = -dE_p$. Or

$$\delta W_{\vec{F}} = -\frac{G M_S m}{SO^3} \overrightarrow{SO} \cdot d\overrightarrow{SO} = -\frac{G M_S m}{SO^3} SO \cdot dSO = -d\left(-\frac{G M_S m}{SO} + C\right)$$

Avec le choix $E_p = 0$ quand $SO \rightarrow \infty$, la constante C est nulle et $E_p = -\frac{G M_S m}{SO}$

b L'énergie mécanique E_m est la somme de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle E_p . Le théorème de l'énergie cinétique pour le point matériel de masse m dans le référentiel héliocentrique galiléen donne $dE_c = \delta W_{\vec{F}} = -dE_p$ ou $d(E_c + E_p) = 0$ soit

$$E_c + E_p = \text{constante}$$

c Le théorème du moment cinétique appliqué au point S pour le point matériel de masse m dans le référentiel héliocentrique galiléen donne $\frac{d}{dt}(\vec{\Gamma}_S) = \overrightarrow{SO} \wedge \vec{F}_{S \rightarrow O} = \vec{0}$ donc $\vec{\Gamma}_S = \overrightarrow{\text{constante}}$

$$\vec{\Gamma}_S = \overrightarrow{SO} \wedge m \vec{v}(O) = \overrightarrow{\text{constante}} = \overrightarrow{SO}_0 \wedge m \vec{v}(O)_0$$

le vecteur $\overrightarrow{\text{constante}}$ est perpendiculaire au vecteur \overrightarrow{SO} donc S appartient au plan de la trajectoire de O.

d • $v_r = \frac{dr}{dt}$ et $v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$

• $\vec{\Gamma}_S = r \vec{u}_r \wedge m (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{u} = m C \vec{u}$

$$C = r^2 \dot{\theta}$$

$$e \quad dS = \frac{1}{2} r \cdot r \, d\theta = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \frac{1}{2} C \, dt$$

Ce dernier résultat traduit la loi des aires : l'aire dS balayée par le rayon-vecteur est proportionnelle au temps dt .

$$f \quad E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_S m}{r} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{G M_S m}{r}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -C \frac{du}{d\theta}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \left(C^2 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + C^2 u^2 \right) - G M_S m u$$

g Puisque E_m est constante, on a $\frac{dE_m}{d\theta} = 0$, soit

$$\frac{1}{2} m C^2 \left(2 \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d^2 u}{d\theta^2} + 2u \frac{du}{d\theta} \right) - G M_S m \frac{du}{d\theta} = 0$$

$$\frac{du}{d\theta} \cdot \left[C^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) - G M_S \right] = 0$$

- $\frac{du}{d\theta} = 0$, donc u est constant, donc r est constant, la trajectoire est un cercle ou
- $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{G M_S}{C^2}$

h La solution générale de cette dernière équation différentielle est $u = \frac{G M_S}{C^2} + A \cos(\theta - \phi) = \frac{1}{r}$

$$r \text{ est de la forme } r = \frac{1}{\frac{G M_S}{C^2} + A \cos(\theta - \phi)} = \frac{\frac{C^2}{G M_S}}{1 + \frac{C^2 A}{G M_S} \cos(\theta - \phi)}$$

La solution est bien de la forme proposée si on choisit $\phi = 0$, c'est-à-dire si l'origine des angles polaires est au périhélie de la trajectoire ($\cos \theta$ maximal ou r minimal) et si $p = \frac{C^2}{G M_S}$. C'est l'équation polaire d'une conique rapportée à un foyer (cercle, ellipse, parabole ou hyperbole). Si $0 < e < 1$, le dénominateur de r varie mais ne s'annule jamais, la conique n'a pas de branche infinie, c'est donc une ellipse.

$$i \quad r_m = \frac{p}{1+e} \text{ et } r_M = \frac{p}{1-e}$$

A l'origine des angles ($\theta = 0$), le point O se trouve au périhélie P de la trajectoire (point le plus proche du Soleil).

j-Application numérique $r_m = 147,3 \cdot 10^6$ km et $r_M = 152,7 \cdot 10^6$ km, d'où $\frac{r_M - r_m}{p} = 2e = 3,6 \%$

Commentaire : l'excentricité est faible (devant 1), la trajectoire ressemble à un cercle puisque r_M et r_m sont voisins.

Si on appelle S l'aire totale de l'ellipse, on a :

$$\frac{S}{D_a} = \frac{1}{2} C = \frac{\pi a b}{D_a} = \frac{\pi}{D_a} \frac{p}{1-e^2} \frac{p}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{D_a} \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2} \text{ d'où } a = \frac{p}{1-e^2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ donc } b^2 = a^2(1-e^2) = \frac{p^2}{(1-e^2)}$$

$$\frac{\pi^2}{D_a^2} = \frac{p^4}{(1-e^2)^3} = \frac{1}{4} p G M \text{ et } \frac{p^3}{(1-e^2)^3} \frac{1}{D_a^2} = \frac{G M_S}{4\pi^2}$$

$$\text{Ici, on retrouve la troisième loi de Képler et } D_a^2 = \frac{4\pi^2}{G M_S} \left(\frac{p}{1-e^2} \right)^3$$

$$D_a = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G M_S} \left(\frac{p}{1-e^2} \right)^3}$$

$$D_a = 31\,603\,766 \text{ s} = 365,25 \text{ jours, ce qui correspond bien à la valeur attendue.}$$

1.1.3

a La durée des saisons est proportionnelle à l'aire balayée. Dans l'hémisphère boréal, le printemps et l'été sont plus longs que l'automne et l'hiver.

$$b \quad \bullet \quad D_h = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2(\theta)}{C} d\theta \text{ car } r^2 \dot{\theta} = C$$

$$D_h = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p^2}{C(1+e \cos \theta)^2} d\theta \simeq \frac{p^2}{C} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2e \cos \theta) d\theta$$

$$D_h = \frac{p^2}{C} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2e \cos \theta) d\theta = \frac{p^2}{C} \left(\frac{\pi}{2} - 2e \right)$$

• de manière analogue, on obtient

$$D_p = \frac{p^2}{C} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - 2e \cos \theta) d\theta = \frac{p^2}{C} \left(\frac{\pi}{2} + 2e \right)$$

c-Application numérique • $\frac{D_h}{D_a} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2e \cos \theta) d\theta}{\int_0^{2\pi} (1 - 2e \cos \theta) d\theta} = \frac{\frac{\pi}{2} - 2e \sin \frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{1}{4} - \frac{e}{\pi}$

$$D_h = 365,25 \left(0,25 - \frac{0,018}{\pi} \right) = 89,2 \text{ jours}$$

• $\frac{D_p}{D_a} = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - 2e \cos \theta) d\theta}{\int_0^{2\pi} (1 - 2e \cos \theta) d\theta} = \frac{\frac{\pi}{2} - 2e(0-1)}{2\pi} = \frac{1}{4} + \frac{e}{\pi}$

$$D_p = 365,25 \left(0,25 + \frac{0,018}{\pi} \right) = 93,4 \text{ jours}$$

A partir du calendrier, on compte :

pour l'hiver : $D_h = 9 + 31 + 29 + 20 = 89$ jours (année bissextile)

et pour le printemps : $D_p = 11 + 30 + 31 + 21 = 93$ jours

La comparaison est convenable, à la précision des données près, aucune information n'étant donnée sur l'heure exacte du commencement de chaque saison.

1.2 Durée d'ensoleillement

1.2.1

A la surface de la Terre, la durée d'ensoleillement d'un lieu dépend de la date de l'année, de la latitude, de l'altitude, du relief du lieu, de la nébulosité et de la configuration environnante (ombres possibles).

1.2.2

a On peut considérer que la source lumineuse (le Soleil) est une source ponctuelle à l'infini $R_S \ll d_{SO}$ car $0,7 \cdot 10^9 \text{ m} \ll 150 \cdot 10^9 \text{ m}$, donc chaque point du Soleil émet un faisceau parallèle.

N.B. En réalité, le Soleil n'est pas une source ponctuelle à l'infini puisqu'il est vu sous un angle de 32 minutes depuis la Terre.

b Réponse évidente.

c Pour le tropique du Cancer, $\lambda_1 = \beta = 23,45^\circ$, le Soleil y est au zénith à midi.

Calcul de la durée d'ensoleillement D_e en fonction de la durée, $D_J = 24$ heures, du jour solaire, en notant R_T le rayon de la Terre :

$$OH = R_T \sin \lambda$$

$$\tan \lambda = \frac{HA}{OH}$$

$$HA = OH \tan \lambda = R_T \frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda}$$

$$HB = R_T \cos \lambda$$

$$\cos \beta = \frac{HA}{HB} = \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{R_T \frac{\sin^2 \lambda}{\cos \lambda}}{R_T \cos \lambda} = \tan^2 \lambda$$

$$D_e = D_J \frac{\pi + 2\alpha}{2\pi} = D_J \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(\tan^2 \lambda) \right]$$

application numérique :

$\alpha = 10,85^\circ$ et $D_e = 13,45$ heures = 13 heures 27 minutes.

d Pour le cercle polaire arctique, $\lambda_2 = 90^\circ - \beta = 66,55^\circ$. Pour des latitudes supérieures à $66,55^\circ$, l'ensoleillement est 24 heures (Soleil de minuit).

e Réponse évidente en reproduisant le schéma précédent sur lequel on fait venir les rayons parallèles de la droite.

1.2.3

a Au solstice d'hiver $\alpha' = \lambda + \beta$, d'où $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha' = \frac{\pi}{2} - \lambda - \beta = \alpha_1$

A l'équinoxe $\alpha' = \lambda$, d'où $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha' = \frac{\pi}{2} - \lambda = \alpha_2$

Au solstice d'été $\alpha' = \lambda - \beta$, d'où $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha' = \frac{\pi}{2} - \lambda + \beta = \alpha_3$

b $\alpha_1 = 90^\circ - 49^\circ - 23,45^\circ = 17,55^\circ$

$\alpha_2 = 90^\circ - 49^\circ = 41^\circ$

$\alpha_3 = 90^\circ - 49^\circ + 23,45^\circ = 64,45^\circ$

Evidemment, on trouve $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$

1.3 Transferts thermiques

1.3.1

Conduction dans un solide opaque, convection dans un fluide et rayonnement dans un milieu transparent et même dans le vide.

1.3.2

a $\delta Q = \vec{j} \cdot d\vec{S} dt$ donc $\vec{j} \cdot d\vec{S}$ (le flux élémentaire du vecteur \vec{j}) représente la puissance thermique traversant la surface $d\vec{S}$.

b $[j] = \frac{[W]}{[L^2]} = \frac{[P]}{[L^2]}$ donc j s'exprime en $W m^{-2}$ dans le système international. $[K] = \frac{[j]}{[T]}$ donc K s'exprime en $W m^{-1} K^{-1}$ dans le système international.

c Pour pouvoir utiliser la loi phénoménologique de Fourier, il faut que les variations de température T ou de flux thermique j ne soient pas trop importantes, ni trop rapides (pour qu'un modèle linéaire reste valable) et il faut que le milieu soit isotrope (pour qu'il n'y ait pas de direction privilégiée et que \vec{j} ait toujours la direction de $\overrightarrow{\text{grad}}T$).

d Dans la loi de Fourier, le signe - est la traduction du second principe de la thermodynamique : le flux thermique va toujours des zones chaudes vers les zones froides.

e Tableau d'analogies entre la loi de Fourier $\vec{j}_T = -K \overrightarrow{\text{grad}}T$ et la loi d'Ohm $\vec{j} = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}}V$:

K	T	\vec{j}_T	Q	\mathcal{P}
σ	V	\vec{j}	q	I

1.3.3

a Pour la tranche comprise entre les abscisses x et $x + dx$, le bilan d'enthalpie entre les dates t et $t + dt$ donne : $\vec{j}_T(x, t)S dt - \vec{j}_T(x + dx, t)S dt = \rho c S dx dT$ ou : $-S dt \left(\frac{\partial \vec{j}_T}{\partial x} \right) dx = \rho c S dx dT$

comme : $\vec{j}_T(x, t) = -K \frac{\partial T}{\partial x}$, on a : $\frac{\partial \vec{j}_T}{\partial x} = -K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ et la simplification par $S dx$ donne :

$$\frac{K}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$a = \frac{K}{\rho c}$ donc $[a] = L^2 T^{-1}$. Dans le système international, l'unité de diffusivité est $m^2 s^{-1}$.

b En dérivant partiellement par rapport à x chaque membre de l'équation aux dérivées partielles précédente et en permutant les bonnes dérivées partielles, on obtient facilement :

$$a \frac{\partial^2 \bar{j}_T}{\partial x^2} = \frac{\partial \bar{j}_T}{\partial t}$$

c Les deux équations aux dérivées partielles précédentes contiennent une dérivée première par rapport au temps et ne sont donc pas invariantes par «renversement» du temps, ceci signe l'irréversibilité du phénomène de diffusion.

1.3.4

a En régime stationnaire, les grandeurs sont indépendantes du temps et : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, on obtient : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$, la température T dans le mur est de la forme : $T = ax + b$.

En ajustant les conditions aux limites : $T = T_1$ en $x = 0$ et : $T = T_2$ en $x = L$, on obtient facilement :

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$$

b $\mathcal{P} = S \bar{j}_T = -SK \frac{\partial T}{\partial x} = -SK \frac{T_2 - T_1}{L} = SK \frac{T_1 - T_2}{L}$

c Par analogie avec la résistance électrique $R = \frac{U}{I} = \frac{\Delta V}{I}$, on définit la résistance thermique R_{th} par $R_{th} = \frac{\Delta T}{\mathcal{P}}$ et la conductance thermique par $G_{th} = \frac{1}{R_{th}}$.

d Pour une surface S du mur d'épaisseur L , on obtient $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\mathcal{P}} = \frac{L}{KS}$ et $G_{th} = \frac{KS}{L}$.

e Comme en électrocinétique, en régime stationnaire, les résistances thermiques se somment pour une association série et les conductances thermiques se somment pour une association parallèle. On peut aussi effectuer des associations mixtes et effectuer la bonne combinaison...

f Pour la vitre en simple vitrage, $R_s = \frac{e}{K_{verre} S}$ et pour la vitre en double vitrage, par une association série, $R_d = 2 \frac{e}{2K_{verre} S} + \frac{e_0}{K_{air} S} = R_s + \frac{e_0}{K_{air} S}$

g Clairement, on obtient $R_d > R_s$. A même épaisseur de verre, la résistance thermique est augmentée donc la puissance thermique perdue par fuite à travers les fenêtres est diminuée puisque $\mathcal{P} = \frac{\Delta T}{R_{th}}$ (mais les menuiseries sont plus épaisses pour le double vitrage donc plus onéreuses).

h La puissance perdue est $\mathcal{P} = \frac{T_i - T_e}{R_d}$

A.N. $R_d = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 0,78} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 0,026} = 16,6 \cdot 10^{-3} \text{ K W}^{-1}$ et $\mathcal{P} = \frac{19}{16,6 \cdot 10^{-3}} = 1147 \text{ W} = 1,15 \text{ kW}$

Il vaut mieux choisir une menuiserie en PVC qu'une menuiserie en aluminium car $K_{PVC} < K_{Al}$ donc $R_{th_{PVC}} > R_{th_{Al}}$ donc $\mathcal{P}_{PVC} < \mathcal{P}_{Al}$, l'isolation est meilleure avec la menuiserie en PVC.

i La résistance thermique de l'association série est $R_I = (\frac{e_1}{K_1} + \frac{e_2}{K_2} + \frac{e_3}{K_3} + \frac{e_4}{K_4}) \frac{1}{S}$

A.N. $R_I = (\frac{0,01}{1,25} + \frac{0,2}{0,5} + \frac{0,08}{0,04} + \frac{0,01}{0,33}) \frac{1}{72} = 33,9 \cdot 10^{-3} \text{ K W}^{-1}$ et $\mathcal{P}_I = \frac{19}{33,9 \cdot 10^{-3}} = 561 \text{ W} = 0,56 \text{ kW}$

1.3.5

a La mémoire de la condition initiale ayant été perdue, on cherche pour $\vec{j} = j \vec{u}_x$ une solution forcée de la forme $j = j_0 \cos \omega t = \Re(j_0 e^{i \omega t})$

b Avec $j = \underline{j}(x, t) = \underline{f}(x) \underline{g}(t)$ l'équation de diffusion donne :

$a \underline{g}''(x) \underline{f}(t) = \underline{f}'(t) \underline{g}(x)$, d'où $a \frac{\underline{g}''(x)}{\underline{g}(x)} = \frac{\underline{f}'(t)}{\underline{f}(t)} = \text{constante}$

on choisit $\frac{\underline{f}'(t)}{\underline{f}(t)} = i \alpha$ d'où $\underline{f}(t) = e^{i \alpha t}$ et $a \underline{g}''(x) = i \alpha \underline{g}(x)$ soit $\underline{g}''(x) - i \frac{\alpha}{a} \underline{g}(x) = 0$

l'équation caractéristique de cette équation différentielle du second ordre est $r^2 = \frac{i\alpha}{a}$ dont les solutions sont $r = \pm \sqrt{i} \sqrt{\frac{\alpha}{a}} = \pm(1+i) \sqrt{\frac{\alpha}{2a}}$

$$g(x) = Ae^{(1+i)\sqrt{\frac{\alpha}{2a}}x} + Be^{-(1+i)\sqrt{\frac{\alpha}{2a}}x}$$

$A = 0$ pour que $g(x)$ ne diverge pas quand $x \rightarrow +\infty$

$$\underline{j}(x, t) = Be^{i\alpha t} e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\alpha}{2a}}x} = B e^{i(\alpha t - \sqrt{\frac{\alpha}{2a}}x)} e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{2a}}x}$$

la condition aux limites $\underline{j}(0, t) = j_0 e^{i\omega t} \forall t$ en $x = 0$ impose $\alpha = \omega$ et $B = j_0$. Donc

$$\underline{j}(x, t) = j_0 e^{i\omega t} - \sqrt{\frac{\omega}{2a}x} e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x} \text{ et}$$

$$j(x, t) = \Re(\underline{j}(x, t)) = j_0 \cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}x) e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}$$

$j(x, t)$ est bien de la forme $j_0 \cos(\omega t - \frac{x}{\delta}) e^{-\frac{x}{\delta}}$

$$\text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}} \text{ A.N. } \delta = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-7} \cdot 86400}{2\pi}} = 0,157 \text{ m}$$

c La forme obtenue pour $j(x, t)$ traduit une propagation dans la direction de l'axe Ox et le sens des x croissants avec atténuation de l'amplitude et dispersion puisque la vitesse de phase $v_\phi = \omega \cdot \delta = \sqrt{2a\omega}$ dépend de la pulsation ω .

d Le déphasage $\Delta\phi = \frac{\Delta x}{\delta} = \pi$ pour $\Delta x = H = \pi \delta$

Intérêt : ce mur restitue la nuit à la maison l'énergie reçue pendant la journée de la part de l'atmosphère extérieure puisqu'un déphasage de π correspond à une demi-période temporelle.

e-Application numérique $H = 0,157 \pi = 0,494 \text{ m} \approx 0,5 \text{ m}$

$$\frac{j(H, t)}{j(0, t)} = -e^{-\frac{H}{\delta}} = -e^{-\pi} = -0,432$$

Commentaire : le signe - correspond au déphasage de π , le flux thermique transmis à l'intérieur est deux fois plus faible que celui reçu de l'extérieur.

1.3.6

a $h = \frac{j}{\Delta T}$ h s'exprime donc en $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$ dans le système international.

h dépend de la viscosité du fluide (ici, c'est de l'air) et de la vitesse du vent

h augmente quand la vitesse du vent augmente et si h augmente, j_T augmente et la puissance perdue \mathcal{P} augmente ; on préfère enterrer le mur du côté du vent dominant pour éviter une perte d'énergie.

b $\mathcal{P}l = \Delta T S l h$ d'où $R_p = \frac{\Delta T}{\mathcal{P}} = \frac{1}{S l h}$ et

$$R_{pe} = \frac{1}{S l h_e} \text{ et } R_{pi} = \frac{1}{S l h_i} \text{ et}$$

$$R_{lt} = R_l + \frac{1}{S l} \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_e} \right)$$

$$\text{c } R_{p_{fen\hat{e}tres}} = \frac{1}{S} \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_e} \right) = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{6} \right) = 22,2 \cdot 10^{-3} \text{ K W}^{-1}$$

$$R_{r_{fen\hat{e}tres}} = R_d + R_p = 38,8 \cdot 10^{-3} \text{ K W}^{-1}$$

$$\mathcal{P}_r = \frac{\Delta T}{R_r} = \frac{19}{38,8 \cdot 10^{-3}} = 489 \text{ W}$$

$$R_{p_{murs}} = \frac{1}{S l} \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_e} \right) = \frac{1}{72} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{6} \right) = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ K W}^{-1}$$

$$R_{r_{murs}} = R_l + R_p = 37,6 \cdot 10^{-3} \text{ K W}^{-1}$$

$$\mathcal{P}_{lr} = \frac{\Delta T}{R_r} = \frac{19}{37,6 \cdot 10^{-3}} = 505 \text{ W}$$

Commentaire : la déperdition est presque aussi forte à travers les fenêtres qu'à travers la surface totale des murs. Pour économiser l'énergie, il vaut mieux prévoir de petites fenêtres que de grandes baies vitrées.

1.3.7

a La masse m d'un système fermé en écoulement est constante, elle s'écrit

$$m = \rho_e c_e S_e dt + m_0(t) = m_0(t + dt) + \rho_s c_s S_s dt$$

en régime stationnaire, la masse m_0 du contenu du récipient ne dépend pas du temps

$$m_0(t) = m_0(t + dt), \text{ donc le débit massique } D_m \text{ vaut}$$

$$D_m = \rho_e c_e S_e = \rho_s c_s S_s$$

b Le premier principe de la thermodynamique appliqué à ce même système fermé subissant une transformation entre t et $t + dt$ donne

$$\Delta(U + \mathcal{E}_c \text{ macroscopique} + \mathcal{E}_p \text{ pesanteur}) = W_e + Q$$

ou $\Delta(E_{\text{totale}}) = W_e + Q$

soit $E_{\text{totale } s} + E_{\text{totale } 0}(t + dt) - E_{\text{totale } e} - E_{\text{totale } 0}(t) = W_e + Q$

en régime stationnaire, l'énergie totale $E_{\text{totale } 0}$ du contenu du récipient ne dépend pas du temps, $E_{\text{totale } 0}(t) = E_{\text{totale } 0}(t + dt)$,

il reste $E_{\text{totale } s} - E_{\text{totale } e} = W_e + Q$ soit

$$\rho_s c_s S_s dt (u_s + \frac{1}{2}c_s^2 + g z_s) - \rho_e c_e S_e dt (u_e + \frac{1}{2}c_e^2 + g z_e) = (\mathcal{P}l + \mathcal{P}_{th})D_m dt + p_e S_e c_e dt - p_s S_s c_s dt$$

soit, en simplifiant par $D_m dt$ et en utilisant l'expression de l'enthalpie massique $h_i = u_i + p_i v_i = u_i + \frac{p_i}{\rho_i}$

$$h_s + \frac{1}{2}c_s^2 + g z_s - (h_e + \frac{1}{2}c_e^2 + g z_e) = \mathcal{P}l + \mathcal{P}_{th}$$

l'enthalpie massique d'un gaz parfait s'écrit $h = C_{p,m} T$, d'où

$$C_{p,m}(T_s - T_e) + g(z_s - z_e) + \frac{1}{2}(c_s^2 - c_e^2) = \mathcal{P}l + \mathcal{P}_{th}$$

avec les simplifications proposées, il reste

$$C_{p,m}(T_s - T_e) + g(z_s - z_e) = \mathcal{P}_{th}$$

c $\Delta h = C_{p,m}(T_s - T_e) = 1000.(19 - 0) = 19000 \text{ J kg}^{-1} = 19 \text{ kJ kg}^{-1}$

$g \Delta z = 10.2, 5 = 25 \text{ J kg}^{-1} \ll \Delta h$

on négligera donc la variation de l'énergie potentielle de pesanteur par rapport à la variation d'enthalpie

d L'équation d'état d'un gaz parfait $pV = nRT$ donne $\rho = \frac{pM}{RT}$, d'où

$$\rho_e = \frac{p_0 M_a}{R T_e} = \frac{10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 273} = 1,28 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\rho_s = \frac{p_0 M_a}{R T_s} = \frac{10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 292} = 1,19 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\rho_e - \rho_s}{\rho_{moyen}} \approx 7\% \text{ et } \rho_{moyen} = 1,24 \text{ kg m}^{-3}$$

e Le volume total de la maison est $V_{\text{total}} = 180 \text{ m}^3$, le renouvellement d'air se fait avec un débit volumique

D_v égal à $D_v = 90 \text{ m}^3 \text{ heure}^{-1} = \frac{90}{3600} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} = 0,025 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$

le débit massique correspondant est $D_m = D_v \rho_{moyen} = 0,0308 \text{ kg s}^{-1}$

la puissance thermique perdue dans la ventilation est

$$\mathcal{P}_v = D_m C_{p,m} \Delta T = 0,0308 \cdot 1000 \cdot 19 = 587 \text{ W}$$

Commentaire : l'ordre de grandeur de cette perte est le même que celui des pertes à travers les murs ou les fenêtres, elle n'est pas du tout négligeable dans un bilan d'énergie (a fortiori lorsqu'il y a une VMC, ce qui est obligatoire à partir de deux étages).

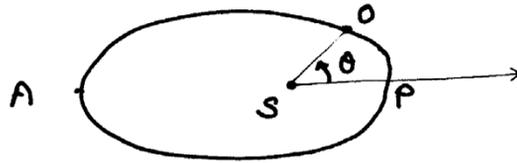
f Pour effectuer un bilan complet d'énergie, il faudrait tenir compte de la puissance perdue par le toit, par le sol, de la perte consécutive à l'ouverture des portes mais aussi de la puissance radiative reçue du Soleil et de celle rayonnée par la maison.

Remarque : en supposant que l'échange radiatif a lieu entre l'atmosphère à T_e et la maison à T_i et que ces deux objets rayonnent comme des corps noirs à des températures voisines, on peut linéariser l'échange radiatif obéissant à une loi de Stefan. La puissance surfacique algébriquement perdue serait

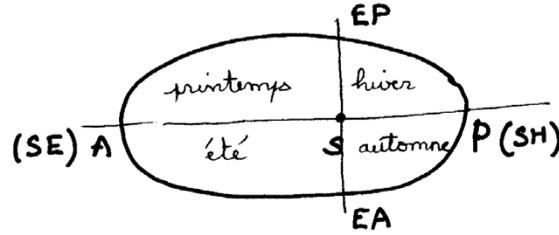
$$p = \sigma T_i^4 - \sigma T_e^4 \simeq 4\sigma T^3 \Delta T \approx 4,5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 280^3 \Delta T \approx 6\Delta T \text{ de la forme } h \Delta T.$$

On peut inclure ce transfert dans le transfert pariétal qui a été comptabilisé à la question III 6.

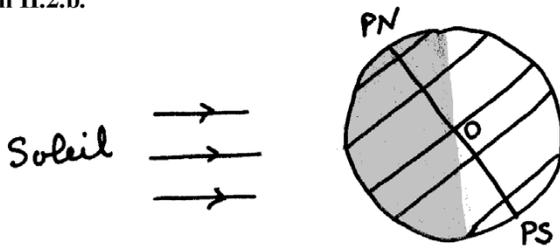
Question I.2.i.



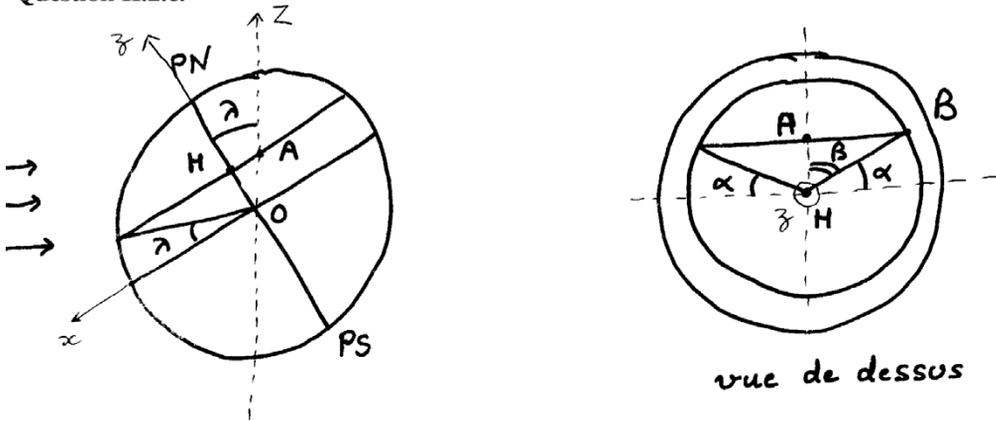
Question I.3.a.



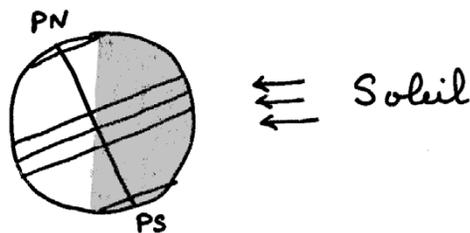
Question II.2.b.



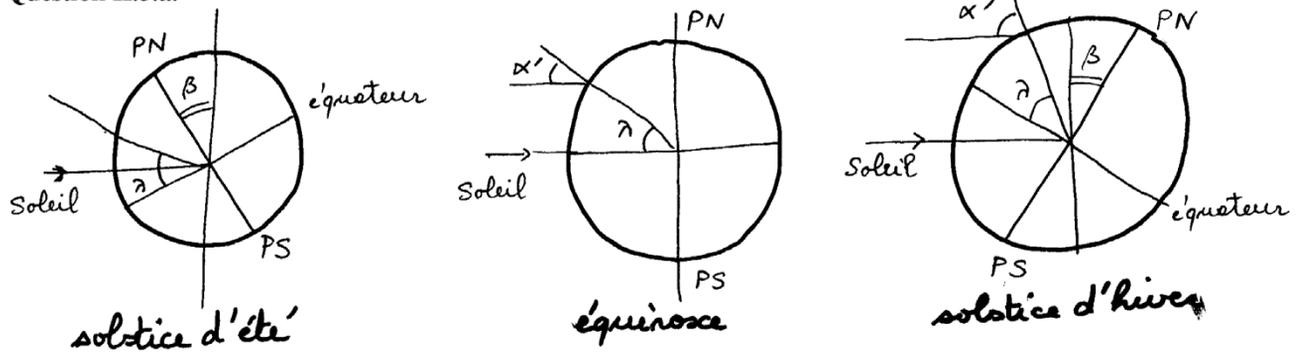
Question II.2.c.



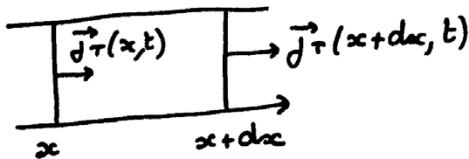
Question II.2.c.



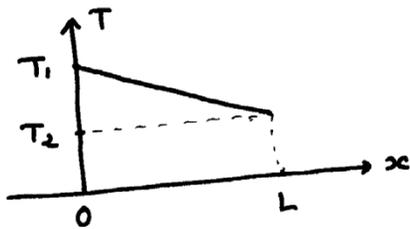
Question II.3.a.



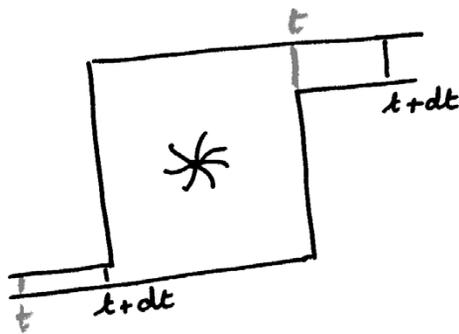
Question III.3.a.



Question III.4.a.



Question III.7.a.



SECOND PROBLÈME

Etude des aérostats

Première partie : Etude statique des premières couches de l'atmosphère ($0 < z < 20$ Km)

A : Préambule

1-a) Du fait de la symétrie sphérique de la Terre, l'accélération de la pesanteur varie comme l'inverse du carré de $R_T + z$ (théorème de Gauss). Si $g(z)$ représente le module de cette accélération à l'altitude z et g_0 son module au niveau du sol, on a donc :

$$\frac{g(z)}{g_0} = \frac{R_T^2}{(R_T + z)^2}$$

On obtient ainsi pour une altitude de 20 km :

$$\frac{g(z)}{g_0} = 0,993\ 78$$

1-b) On ne fera donc qu'une erreur minime (moins de 0,7 %) en considérant l'accélération de la pesanteur uniforme entre le sol et une altitude de 20 km.

2-a) Soit un domaine D de fluide limité par une surface fermée Σ .

La résultante des forces de pression s'exerçant sur ce système est :

$$\vec{R} = \oint_{\Sigma} -p(Q) d\vec{S}$$

D'après le théorème du gradient, cette intégrale peut aussi s'écrire :

$$\vec{R} = \iiint_D -\overrightarrow{\text{grad}} p(M) d\tau$$

Ce résultat ne dépendant pas du domaine D choisi dans le fluide montre que les forces de pression peuvent être décrites à travers une densité volumique $-\overrightarrow{\text{grad}} p$.

2-b) Supposons le fluide précédent uniquement soumis au champ de pesanteur et sans accélération dans le référentiel d'étude (équilibre mécanique) supposé galiléen. Le théorème de la résultante cinétique appliqué au domaine D s'écrira :

$$\vec{0} = \vec{R} + \iiint_D (\rho \vec{g})(M) d\tau = \iiint_D [(\rho \vec{g})(M) - \overrightarrow{\text{grad}} p(M)] d\tau$$

Ce résultat étant vrai quelque soit le domaine D choisi dans le fluide, on en déduit qu'en tout point M du fluide, on doit avoir :

$$\boxed{\vec{0} = (\rho \vec{g})(M) - \overrightarrow{\text{grad}} p(M)}$$

3-a) Oz étant l'axe repérant la verticale ascendante, on peut écrire en tout point :

$$\vec{g}(M) = -g(z)\vec{u}_z$$

Ainsi, d'après l'équation locale traduisant localement l'équilibre mécanique de la masse gazeuse dans le champ de pesanteur, seule la composante selon Oz du gradient de la pression est non nulle. On en déduit que la pression ne dépend que de z : $p(M) = p(z)$.

3-b) En projetant l'équation de l'équilibre mécanique sur Oz , on obtient alors :

$$\rho(M) = -\frac{dp/dz}{g(z)}$$

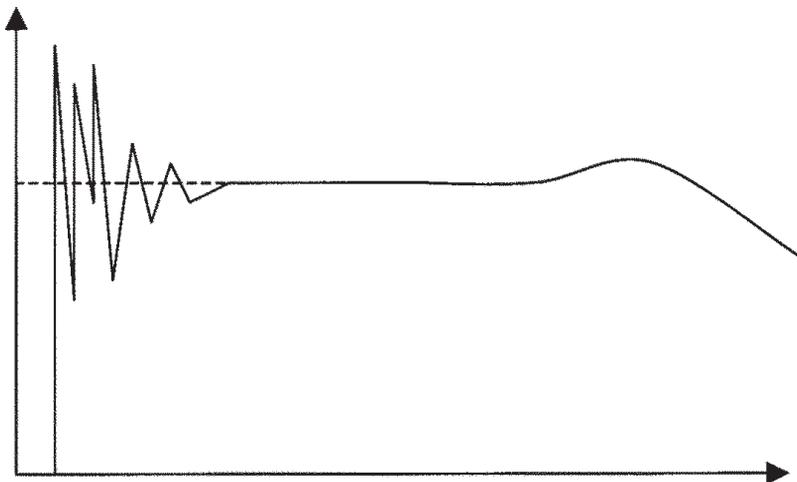
ce qui montre que le champ de masse volumique ne peut être lui aussi qu'une fonction de z . Enfin les champs de pression p , de masse volumique ρ et de température T étant liés par une équation d'état du type $f(T, P, \rho) = 0$, le fait que p et ρ ne dépendent que de z implique nécessairement la même propriété pour T .

B : Théorie cinétique des phénomènes de transport

4-a) L'échelle microscopique est celle des individus microscopiques composants le système étudié. La dimension caractéristique de cette échelle est donc celle de ces individus. Pour un gaz telle que l'atmosphère, les individus sont des molécules et l'échelle microscopique se situe au niveau de l'angström.

Pour pouvoir définir des grandeurs eulériennes telles que la masse volumique, la température, la pression, il faut raisonner à une échelle où l'on puisse faire une moyenne sur un grand nombre d'individus microscopiques, grand nombre devant être compris ici au sens statistique du terme. Cette échelle est l'échelle mésoscopique.

Par exemple, si on note Δm et ΔV la masse et le volume d'une sphère de fluide centrée en un point M , le rapport $\Delta m / \Delta V$ varie en fonction du volume de la sphère selon un schéma du type :



Pour des volumes au niveau de l'échelle microscopique, la sphère n'intègre qu'un petit nombre d'individus (voire pas d'individus du tout). Le rapport $\Delta m / \Delta V$ varie alors brutalement lorsqu'un individu supplémentaire rentre ou sort de la sphère. Lorsque le nombre d'individus devient assez grand, le rapport $\Delta m / \Delta V$ devient pratiquement constant et s'identifie alors à la masse volumique au point M où est centrée la sphère. Si l'on continue à augmenter le volume de la sphère, le rapport $\Delta m / \Delta V$ varie de nouveau, traduisant l'éventuelle non homogénéité du fluide.

L'échelle macroscopique correspond à l'échelle du problème étudié. Par exemple, si on étudie l'écoulement autour d'une aile d'avion, l'échelle macroscopique sera au niveau du mètre. Si on étudie l'écoulement d'eau dans une conduite de chauffage, l'échelle macroscopique sera au niveau du centimètre.

4-b) En considérant que 1 000 individus constitue un « grand nombre » et sachant que le volume molaire d'un gaz tel que l'atmosphère à 20°C et $p_0 = 1$ bar est de l'ordre de 24 L soit $24 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, on en déduit que le volume d'une sphère contenant 1 000 molécules sera de l'ordre de $24/N_A$ (en m^3) où N_A est le nombre d'Avogadro soit environ $4 \cdot 10^{-23} \text{ m}^3$ ce qui correspond à un rayon d'environ $2 \cdot 10^{-8} \text{ m}$. C'est le niveau de l'échelle mésoscopique pour l'atmosphère prise dans ces conditions.

4-c) Les échelles microscopiques et mésoscopiques sont toujours distinctes puisque ce qui les sépare est le nombre d'individus pris en compte. En revanche, les échelles mésoscopique et macroscopique peuvent se confondre. Par exemple, dans les très hautes couches de l'atmosphère, l'échelle mésoscopique se situe au niveau du mètre à cause de la pression qui est très faible. Le problème du vol d'un vaisseau spatial dans ces premières couches ne pourra donc plus être abordé à travers les lois classiques de la mécanique des fluides car l'approximation d'un milieu continu n'est plus valable.

5) Le libre parcours moyen est la distance moyenne que parcourt une molécule entre deux chocs successifs.

La vitesse quadratique moyenne se définit, dans le cas d'un gaz sans mouvement macroscopique, comme la moyenne quadratique du module des vitesses des individus microscopiques, c'est à dire comme la racine carrée de la moyenne du carré de ces vitesses.

6-a) L'équation d'état d'un gaz parfait peut s'écrire :

$$p = nk_B T$$

ou encore, en utilisant l'expression de l^* fournie par l'énoncé :

$$l^* \approx \frac{k_B T}{\sqrt{2} \sigma p}$$

6-b) En prenant une molécule d'un rayon de l'ordre de 10^{-10} m, on obtient une section efficace de collision de l'ordre de $\sigma \approx 12 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$. Pour une température de 20°C et la pression p_0 , on obtient alors :

$$l^* \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

6-c) C'est une dimension de l'échelle mésoscopique. Dans les conditions habituelles de température et de pression, le libre parcours moyen est donc très grand devant les dimensions d'une molécule ce qui correspond à la propriété d'un gaz d'être un milieu très dilué. On peut également remarquer que, dans ces conditions, une sphère ayant un rayon égal à l^* contiendrait environ 10^6 individus. Les chocs sont donc très peu probables.

7-a) En un point M de l'espace, le transfert thermique par conduction est caractérisé par un vecteur « densité de flux thermique » \vec{j}_{th} dont le module représente la puissance thermique par unité de surface transitant par ce point et dont la direction et le sens représente la direction et le sens de l'échange thermique. La cause des transferts thermiques conductifs est la non uniformité de la température c'est-à-dire l'existence locale d'un gradient de température. Dans certaine condition, l'effet (c'est-à-dire le vecteur \vec{j}_{th}) est proportionnel à la cause, le coefficient de proportionnalité étant, par définition, la conductibilité thermique K du matériau. C'est ce que traduit la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th} = -K \text{ grad} T$$

le signe « - » traduisant que le transfert doit se faire « du chaud vers le froid ».

7-b) Au niveau microscopique, une particule fluide n'est pas un système fermé. Elle échange constamment avec ses voisines des individus microscopiques. Au niveau macroscopique, ces échanges matériels sont interprétés comme des forces de pression et de viscosité (échange de quantité de mouvement microscopique) et des échanges thermiques (échange d'énergie microscopique).

8-a) D'après l'expression de K donnée par l'énoncé, le coefficient A s'écrit :

$$A = \frac{3}{v^* l^*}$$

Pour un gaz parfait monoatomique, l'énergie cinétique moyenne par particule est $\frac{3}{2} k_B T$. On en déduit que :

$$v^* = 3 \sqrt{\frac{k_B T}{M_a / N_A}} = 3 \sqrt{\frac{RT}{M_a}}$$

Le coefficient A vaut donc :

$$A = \frac{1}{l^*} \sqrt{\frac{M_a}{RT}}$$

8-b) L'expression

$$A = \frac{3}{v^* l^*}$$

montre que A s'exprime en $s.m^{-2}$.

9) Si on ne considère que les transferts conductifs dans l'atmosphère, la température obéit à l'équation de diffusion thermique :

$$A \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T$$

Cette équation montre que τ_{ther} et L sont liés par :

$$\tau_{ther} \approx AL^2 = \sqrt{\frac{M_a}{RT}} \frac{L^2}{l^*}$$

10-a)

$$\tau_{meca} \approx \frac{L}{c_s} = \frac{L}{\sqrt{\frac{\gamma RT}{M_a}}}$$

10-b) Pour que τ_{ther} et τ_{meca} soient du même ordre de grandeur, il faut que :

$$L \approx \frac{l^*}{\sqrt{\gamma}}$$

10-c) Dans les conditions de température et de pression correspondant aux basses couches de l'atmosphère, l'étude de celles-ci correspond à une échelle macroscopique très grande devant l'échelle mésoscopique ($L \approx 10^2$ m). Il en résulte que $\tau_{ther} \gg \tau_{meca}$: Le temps nécessaire à uniformiser la température dans une particule fluide est très grand devant celui nécessaire à uniformiser la pression. Dans ses mouvements verticaux au sein de la troposphère, une particule fluide sera ainsi constamment en équilibre mécanique avec son environnement (même pression) mais pas en équilibre thermique : son évolution sera adiabatique.

C : Etude de la stratosphère isotherme ($10 \text{ km} < z < 20 \text{ km}$)

11-a) L'équation locale traduisant l'équilibre hydrostatique s'écrit, en projection sur la verticale ascendante Oz :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g_0$$

11-b) L'air stratosphérique est considéré comme un gaz parfait à la température T_s .
Donc :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT_s}{M_a}$$

L'hypothèse d'un équilibre hydrostatique s'écrit donc :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M_a g_0 dz}{RT_s}$$

ce qui s'intègre en :

$$p(z) = p_{10} \exp\left[-\frac{M_a g_0 (z - z_{10})}{RT_s}\right]$$

L'équation d'état des gaz parfaits permet d'en déduire l'expression de $\rho(z)$:

$$\rho(z) = \rho_{10} \exp\left[-\frac{M_a g_0 (z - z_{10})}{RT_s}\right]$$

11-c) Ces deux expressions font apparaître le facteur de Boltzmann :

$$\exp\left[-\frac{M_a g_0 (z - z_{10})}{RT_s}\right]$$

qui traduit la compétition entre un facteur d'ordre lié à la pesanteur et représenté par l'énergie potentielle molaire $-M_a g_0 (z - z_{10})$ et un facteur de désordre lié à l'agitation thermique et représenté par l'énergie thermique molaire RT_s .

11-d) L'expression précédente montre que la hauteur caractéristique h_s est :

$$h_s = \frac{RT_s}{M_a g_0}$$

Application numérique : $h_s = 6,4$ km

12-a) La transformation envisagée étant adiabatique et réversible est isentropique. L'amplitude h du déplacement étant suffisamment faible pour que ses effets lui soient proportionnels, la variation δV du volume du système envisagé est lié à la variation δp de sa pression par :

$$\delta V = -V_i \chi_s \delta p = -V_i \chi_s \left(\frac{dp}{dz}\right)_{z=z_i} h$$

Or :

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_{z=z_i} = -\rho_i g_0$$

donc :

$$\delta V = V_i \chi_s \rho_i g_0 h$$

12-b) La résultante des forces de pression s'exerçant sur le système correspond à la poussée d'Archimède, c'est-à-dire à l'opposée du poids du volume de stratosphère déplacée. Son module est donc :

$$F_p = g_0 [V_i + \delta V] \rho(z_i + h) = g_0 [V_i + \delta V] \left[\rho_i + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)_{z=z_i} h \right]$$

En ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 1 en h , on obtient :

$$F_p = g_0 \left\{ m + h \left[\rho_i^2 V_i \chi_s g_0 + \left(\frac{d\rho}{dz} \right)_{z=z_i} V_i \right] \right\}$$

L'expression obtenue plus haut pour $\rho(z)$ permet alors d'écrire :

$$F_p = mg_0 \left\{ 1 + g_0 h \left[\rho_i \chi_s - \frac{M_a}{RT_s} \right] \right\} = mg_0 \left\{ 1 + \frac{h}{h_s} \left[\frac{\rho_i \chi_s RT_s}{M_a} - 1 \right] \right\}$$

Pour un gaz parfait évoluant de manière isentropique, on peut écrire :

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho}{p} = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_i}{p(z_i)}$$

et donc :

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{\rho p(z_i)} = \frac{M_a}{\gamma \rho_i RT_s}$$

L'expression de F_p s'écrit donc finalement :

$$F_p = mg_0 \left\{ 1 + \frac{h}{h_s} \left[\frac{1}{\gamma} - 1 \right] \right\} = mg_0 \left\{ 1 - \frac{h}{h_s} \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right] \right\}$$

12-c) La masse d'air considérée est soumise à son poids et à la poussée d'Archimède. L'équation de son mouvement, en projection sur la verticale ascendante, s'écrit donc :

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = -mg_0 + F_p = -m\omega_0^2 h \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{g_0}{h_s} \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$

12-d) Puisque $\gamma > 1$, il s'agit de l'équation d'un mouvement harmonique autour d'une position d'équilibre stable.

D : Etude de la troposphère ($0 < z < 10 \text{ Km}$)

13)

Equilibre hydrostatique :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g_0 \quad \text{(I)}$$

Gaz parfait (équation d'état) :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M_a} \quad \text{(II)}$$

Gaz parfait et transformations isentropiques :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \quad \text{(III)}$$

14-a) En éliminant ρ entre (I) et (III), on obtient :

$$dz = - \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0 g_0} \frac{dp}{p^{1/\gamma}}$$

ce qui s'intègre en :

$$z = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0 g_0} \left[p_0^{1-\frac{1}{\gamma}} - p^{1-\frac{1}{\gamma}} \right] = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0 g_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] = h_t \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

ce qui s'écrit aussi :

$$p = p_0 \left[1 - \frac{z}{h_t} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

On en déduit, grâce à (III) :

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \frac{z}{h_t} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

puis, grâce à (II) :

$$T = \frac{M_a}{R} \frac{p}{\rho} = \frac{M_a p_0}{R \rho_0} \left[1 - \frac{z}{h_t} \right] = T_0 \left[1 - \frac{z}{h_t} \right]$$

14-b) h_t est la distance caractéristique de variation pour la pression, la masse volumique et la température.

14-c) Numériquement, on obtient $h_t = 29,4$ km.

14-d) L'altitude pouvant atteindre une valeur supérieure à h_t et la température ne pouvant être négative, il n'est pas possible de faire l'hypothèse adiabatique pour l'ensemble de l'atmosphère.

15-a) D'après l'expression de la température obtenue à la question précédente, le gradient thermique vaut :

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{T_0}{h_t} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{M_a g_0}{R}$$

15-b) Numériquement, on obtient $-9,8 \text{ K.km}^{-1}$.

15-c) Les données du problème donnent $T(z=0) = 288 \text{ K}$ et

$T(z=10 \text{ km}) = 218 \text{ K}$ (-55°C) ce qui correspond à un gradient moyen de -7 K/km .

L'écart est notable.

15-d) Cet écart s'explique principalement par les phénomènes de condensation (air humide formant les nuages) se produisant dans la troposphère.

Deuxième partie : Etude des aérostats

A : Ballon sonde

16-a) L'hélium remplissant la totalité du ballon et se comportant comme un gaz parfait, la pression p_0 , la température T_0 et le volume initial V_0 du ballon sont liés par :

$$p_0 V_0 = \frac{m}{M_{He}} RT_0$$

ou encore :

$$m = \frac{4\pi r_0^3}{3} \frac{p_0 M_{He}}{RT_0}$$

Numériquement, on obtient $m = 299$ g.

16-b) Les forces s'exerçant sur l'ensemble {ballon + gaz} sont :

Le poids de l'ensemble : $-(m + m_0)g_0 \vec{u}_z$

La poussée d'Archimède : $\rho_0 V_0 g_0 \vec{u}_z = \frac{4\pi r_0^3}{3} \rho_0 g_0 \vec{u}_z$

Le module F_0 de la force ascensionnelle est donc :

$$F_0 = \left(\frac{4\pi r_0^3}{3} \rho_0 - (m + m_0) \right) g_0$$

16-c) La valeur maximale de m_0 est celle qui annule F_0 . Donc :

$$m_{0,\max} = \frac{4\pi r_0^3}{3} \rho_0 - m = \frac{4\pi r_0^3}{3} \frac{p_0}{RT_0} (M_a - M_{He})$$

Numériquement, on obtient $m_{0,\max} = 1,87$ kg.

17) L'énoncé permet d'écrire les relations suivantes :

Equilibre hydrostatique : $\frac{dp}{dz} = -\rho g_0$ (IV)

Gaz parfait : $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M_a}$ (V)

Variation affine de T : $T(z) = T_0 - az$ (VI)

En éliminant ρ entre (IV) et (V), on obtient :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M_a g_0}{RT} dz$$

puis, avec (VI) :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M_a g_0}{R(T_0 - az)} dz$$

ce qui s'intègre en :

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{M_a g_0}{aR} \ln \frac{T_0 - az}{T_0}$$

soit :

$$p(z) = p_0 \left[\frac{T(z)}{T_0} \right]^x \quad \text{avec} \quad x = \frac{M_a g_0}{aR}$$

Numériquement, on obtient $x = 3,49$.

18-a) A l'altitude z , la force ascensionnelle est :

$$F(z) = (m_a(z) - (m + m_0))g_0$$

où $m_a(z)$ est la masse d'air déplacée par le ballon à l'altitude z . L'air et l'hélium se comportant comme des gaz parfaits et étant constamment à la même pression et à la même température, le nombre de moles d'air déplacées est égal au nombre de moles d'hélium dans le ballon. m_a est donc constante de même que la force ascensionnelle :

$$F(z) = F_0$$

18-b) L'équation des gaz parfaits appliquée à l'hélium peut s'écrire :

$$\frac{p(z)r^3(z)}{T(z)} = \frac{p_0 r_0^3}{T_0}$$

et, en remplaçant $p(z)$ par l'expression établie à la question 0 :

$$\left[\frac{r(z)}{r_0} \right]^{3x-1} = \frac{T_0}{T(z)}$$

En prenant $r(z) = 2$ m et $x = 3,49$, on obtient $T(z) = 88,3$ K ce qui correspond à une altitude de $z = 20,4$ km.

18-c) Cette altitude ne se situe plus dans la troposphère. L'hypothèse d'un gradient de température uniforme n'est donc plus valable ce qui explique la différence avec l'altitude maximale indiquée dans le préambule de cette partie ($z = 30$ km).

B : Ballon à gaz

19-a) La poussée d'Archimède est égale à l'opposée du poids de l'air déplacé par le ballon. Elle est donc dirigée selon la verticale, dans le sens des altitudes croissantes.

19-b) h_t étant très grand devant les dimensions du ballon, on peut considérer que la masse volumique de l'air est uniforme au voisinage du ballon. Il en résulte que le poids de l'air déplacé est simplement :

$$\vec{P} = -\rho(z_b) V_b \vec{u}_z$$

ce qui correspond à :

$$F_a(z_b) = \rho(z_b) V_b g_0 = \frac{p_0 M_a}{RT_0} \left(1 - \frac{z_b}{h_t}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[\frac{4\pi r_b^3}{3} + \pi h r_m^2 \right] g_0$$

19-c) Application numérique :

Volume de l'aérostat : $V_b = 2\,145 \text{ m}^3$

Masse volumique de l'air au sol : $\rho_0 = \frac{p_0 M_a}{RT_0} = 1,228 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

z_b (m)	20	10^3	10^4
$1 - \frac{z_b}{h_t}$	0,999 3	0,966 7	0,666 7
F_a (kN)	25,8	23,7	9,38

20-a) Le gaz dans le ballon ayant partout la même température et le même coefficient γ que l'air se trouvant à la même altitude, la distance caractéristique de variation de ρ_g et de p_g se calcule avec la même formule que celle de ρ et p en remplaçant M_a par M_g . On obtient environ 54 km. Les dimensions du ballon étant très faibles devant cette distance, on peut considérer, d'une part que la masse volumique du méthane est uniforme dans l'aérostat, d'autre part que la pression dans le ballon au moment où l'on ferme la manche est égale à p_0 .

Le gaz du ballon et l'atmosphère étant considérés comme des gaz parfaits partout à la même température, ρ et ρ_g sont simplement dans le rapport des masses molaires :

$$\rho_g(z) = \frac{M_g}{M_a} \rho(z) = \frac{p_0 M_g}{RT_0} \left(1 - \frac{z}{h_t}\right)$$

et, en particulier, au niveau du sol :

$$\rho_{g,0} = \rho_g(z=0) = \frac{M_g}{M_a} \rho_0 = \frac{p_0 M_g}{RT_0}$$

La masse du méthane remplissant le ballon est donc :

$$m_g = \frac{p_0 M_g}{RT_0} V_b$$

et la masse totale de l'aérostat :

$$m_b + m_g = m_b + \frac{p_0 M_g}{RT_0} V_b$$

Numériquement, on obtient 2 353 kg.

20-b) L'altitude $z_{b,1}$ correspond à l'altitude où le poids de l'aérostat est exactement opposé à la poussée d'Archimède s'exerçant sur celui-ci, c'est-à-dire où la masse de l'air déplacée est égale à la masse $m_b + m_g$:

$$m_b + \frac{p_0 M_g}{RT_0} V_b = \rho(z_{b,1}) V_b = \frac{p_0 M_a}{RT_0} \left(1 - \frac{z_{b,1}}{h_t}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_b$$

et donc :

$$z_{b,1} = h_t \left[1 - \left(\frac{M_g}{M_a} + \frac{m_b}{V_b} \frac{RT_0}{p_0 M_a} \right)^{\gamma-1} \right]$$

20-c) Numériquement, on obtient $z_{b,1} = 1,3 \text{ km}$.

20-d) Le poids de l'aérostat est constant (manche fermée). La masse volumique de l'air étant une fonction décroissante de l'altitude, il en est de même du poids de l'air déplacée (le volume du ballon est constant). Ainsi, par rapport à la position d'équilibre précédente, une augmentation de l'altitude engendre une diminution de la poussée d'Archimède et donc une résultante des forces appliquées au ballon dirigée vers le bas : l'aérostat revient vers sa position initiale. De même, une diminution de l'altitude provoque une augmentation de la poussée d'Archimède amenant au même résultat. La position d'équilibre est donc stable.

20-e) Dans la troposphère, la décroissance de la température étant de $9,8 \text{ K.km}^{-1}$, la température à l'altitude $z_{b,1}$ sera $288 - 9,8 \times 1,32$ soit $T(z_{b,1}) = 275 \text{ K}$ (2°C).

20-f) La pression de l'air sera :

$$p(z_{b,1}) = p_0 \left(1 - \frac{z_{b,1}}{h_t}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 8,66 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Le ballon étant fermé, de volume constant et à la température $T(z_{b,1})$, la pression du méthane sera :

$$p_g(z_{b,1}) = p_g(z=0) \frac{T(z_{b,1})}{T_0} = p_0 \frac{T(z_{b,1})}{T_0} = 9,68 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

21-a & b) Cette fois-ci, la manche étant ouverte, la pression du méthane au bas de la manche est égale à la pression atmosphérique à la même altitude. Avec la même approximation qu'aux questions précédentes, on peut considérer que la pression et la température sont uniformes dans le ballon, égales à la pression et la température atmosphérique à l'altitude z_b . On en déduit que la masse m_g du gaz dans le ballon et la masse m_a de l'air déplacée sont liées par :

$$m_g = m_a \frac{M_g}{M_a}$$

L'altitude maximale sera atteinte lorsque $m_a = m_g + m_b$, c'est-à-dire pour :

$$\frac{m_b}{1 - \frac{M_g}{M_a}} = m_a = V_b \rho_0 \left(1 - \frac{z_{b,2}}{h_t} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

On en déduit la valeur de $z_{b,2}$:

$$z_{b,2} = h_t \left[1 - \frac{\left(\frac{m_b}{V_b \rho_0 \left(1 - \frac{M_g}{M_a} \right)} \right)^{\gamma-1}}{1 - \frac{M_g}{M_a}} \right] = 3,1 \text{ km}$$

21-c) L'altitude atteinte est plus grande que celle ballon fermé car, la manche étant ouverte, du gaz s'échappe au cours de la montée allégeant d'autant l'aérostat.

22-a) Comme dans la question précédente, la manche étant ouverte, les masses m_a et m_g sont liées par :

$$m_g = m_a \frac{M_g}{M_a}$$

La poussée d'Archimède est donc :

$$F_a = m_a g_0 = m_g g_0 \frac{M_a}{M_g}$$

et la force ascensionnelle :

$$F_0 = (m_a - m_b - m_g) g_0 = g_0 \left[m_a \left(1 - \frac{M_g}{M_a} \right) - m_b \right] = g_0 \left[m_g \left(\frac{M_a}{M_g} - 1 \right) - m_b \right]$$

Tant que l'aérostat est flasque, c'est-à-dire tant que le méthane ne remplit pas totalement le ballon et la manche, la masse m_g est constante et donc aussi la force ascensionnelle.

22-b) Lorsque le méthane remplit totalement le ballon et la manche, son volume est V_b . On a alors :

$$\rho(z_b) = \frac{m_a}{V_b} = \frac{\frac{F_0}{g_0} + m_b}{V_b \left(1 - \frac{M_g}{M_a} \right)} = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{h_t} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

et donc :

$$z_b = h_t \left[1 - \frac{\left(\frac{\frac{F_0}{g_0} + m_b}{\rho_0 V_b \left(1 - \frac{M_g}{M_a} \right)} \right)^{\gamma-1}}{1 - \frac{M_g}{M_a}} \right]$$

Pour $z_{b,3}$, le gaz remplit totalement l'aérostat et F_0 vaut 1 000 N.

22-c) On en déduit $z_{b,3} = 1,9$ km.

22-d)

Pour $z < z_{b,3}$, le ballon monte avec une masse constante de gaz mais un volume d'air déplacé augmentant avec z . La force ascensionnelle est constante.

Pour $z > z_{b,3}$, le ballon monte avec une masse de gaz diminuant avec z mais un volume d'air déplacé constant. La force ascensionnelle diminue au cours de la montée.

22-e) L'altitude maximale atteinte sera la même qu'à la question 0 : $z_{b,4} = z_{b,2}$.

23-a) Si on écarte le ballon vers le bas, on se retrouve dans le cas d'un ballon flasque fonctionnant à force ascensionnelle constante. Comme elle était nulle avant le déplacement, elle sera toujours nulle après et le ballon restera donc là où on l'a mis.

23-b) Si on écarte le ballon vers le haut, du gaz va s'échapper. La force ascensionnelle :

$$F_0 = g_0 \left[m_g \left(\frac{M_a}{M_g} - 1 \right) - m_b \right]$$

va donc diminuer. Comme elle était nulle, elle devient négative et le ballon redescend en devenant flasque. La force ascensionnelle reste donc constamment négative et le ballon redescend jusqu'au sol.

24-a) Si le ballon perd un peu de gaz, il est dans la même situation que précédemment. Il redescend donc jusqu'au sol.

24-b) En lâchant un peu de lest (m_b diminue), on peut retrouver une force ascensionnelle nulle, voire positive et ainsi prolonger le vol.

C : Voyage au pôle nord en ballon

25-a) L'air se comportant comme un gaz parfait de masse molaire M_a , on peut écrire :

$$\rho'_0 = \frac{p_0 M_a}{RT'_0}$$

25-b) La force ascensionnelle est donc :

$$F_0 = g_0 (\rho'_0 V - m_t) = g_0 \left(\frac{P_0 V}{RT'_0} M_a - m_t \right)$$

Numériquement, on obtient $F_0 = 3,58 \cdot 10^3 \text{ N}$.

25-c) Pour qu'il existe une position d'équilibre, il faut que la somme de l'action de la corde sur le ballon et de la force ascensionnelle soit nulle. En statique (position d'équilibre), l'action de la corde sur le ballon est égale au poids de la partie située entre le sol et le ballon. Cette action sera donc au maximum égale au poids total de la corde. La condition d'équilibre est donc que le module de ce poids total, c'est-à-dire $m_c g_0$ soit supérieur à F_0 :

$$\text{Condition d'équilibre : } m_c g_0 > F_0$$

Application numérique : $m_c g_0 = 8,8 \cdot 10^3 \text{ N} > F_0$. Il y aura donc bien une position d'équilibre dans le cas du ballon étudié.

25-d) A partir de la position d'équilibre, supposons que le système soit soumis à une perturbation quelconque :

- Si le ballon s'élève, la portion de corde située entre le ballon et le sol sera plus longue et donc plus lourde. La force ascensionnelle restant constante, le ballon sera soumis à une résultante des forces non nulle et dirigée vers le bas. Il reviendra donc vers sa position d'équilibre initiale.
- Si le ballon s'abaisse, la portion de corde située entre le ballon et le sol sera plus courte et donc moins lourde. La force ascensionnelle restant constante, le ballon sera soumis à une résultante des forces non nulle et dirigée vers le haut. Il reviendra donc vers sa position d'équilibre initiale.

La position d'équilibre est donc stable. La corde permet de réguler l'altitude du ballon.

26-a) Si $z_A > L$, toute la corde pend sous le ballon et l'extrémité B ne touche pas le sol. On a donc :

$$\vec{T}(B) = \vec{0}$$

26-b) Considérons le système formé par la corde complète. Il est soumis à son poids $-m_c g_0 \vec{u}_z$ et à l'action du ballon sur l'extrémité A soit $-\vec{T}(A)$ (principe de l'action et de la réaction en A). Ce système étant immobile par rapport au sol (lié au référentiel galiléen d'étude), la somme des forces exercées doit être nulle, ce qui s'écrit :

$$\vec{T}(A) = -m_c g_0 \vec{u}_z$$

26-c) Considérons cette fois-ci le système formé par la partie de la corde située entre M et A. Il est soumis à son poids soit $-m_c \frac{z_A - z_M}{L} g_0 \vec{u}_z$, à l'action du ballon sur l'extrémité A soit $-\vec{T}(A)$ (principe de l'action et de la réaction en A) et à l'action de la partie inférieure de la corde en M soit $\vec{T}(M)$. Ce système étant immobile par rapport au sol (lié au référentiel galiléen d'étude), la somme des forces exercées doit être nulle, ce qui s'écrit :

$$\vec{T}(M) = m_c \frac{z_A - z_M}{L} g_0 \vec{u}_z + \vec{T}(A) = m_c \left(\frac{z_A - z_M}{L} - 1 \right) g_0 \vec{u}_z$$

Remarque : En prenant $z_A - z_B = L$, on retrouve bien $\vec{T}(B) = \vec{0}$.

27-a) Ceci correspond au raisonnement fait à la question 25-c : en statique, l'action de la corde sur le ballon, c'est-à-dire $\vec{T}(A)$ est égale au poids de la partie située entre le sol et le ballon.

$$\vec{T}(A) = -m_c \frac{z_A}{L} g_0 \vec{u}_z$$

27-b) En reprenant le raisonnement de la question 26-c, on écrit :

$$\vec{T}(M) = m_c \frac{z_A - z_M}{L} g_0 \vec{u}_z + \vec{T}(A) = -m_c \frac{z_M}{L} g_0 \vec{u}_z$$

28-a) A l'instant t , seule la partie de la corde située entre le ballon et le sol est en mouvement. Donc :

$$\vec{P}(t) = m_c \frac{z_a}{L} \frac{dz_A}{dt} \vec{u}_z$$

28-b) Considérons le système fermé formé, à l'instant t , par la partie AC de la corde et la petite partie de longueur dz_A qui est posée au sol à t et sera verticale à $t + dt$. Sa quantité de mouvement à t est :

$$\vec{P}(t) = \frac{m_c}{L} \left(z_a \frac{dz_A}{dt} \right) (t) \vec{u}_z$$

et à $t + dt$:

$$\vec{P}(t + dt) = \frac{m_c}{L} \left(z_a \frac{dz_A}{dt} \right) (t + dt) \vec{u}_z$$

Donc, le taux de variation de la quantité de mouvement de ce système fermé est :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{m_c}{L} \left[\left(\frac{dz_A}{dt} \right)^2 + z_A \frac{d^2 z_A}{dt^2} \right] \vec{u}_z$$

Ce système est soumis à la tension en C (nulle d'après l'énoncé), l'opposé de la tension en A, $-\vec{T}(A)$ (principe de l'action et de la réaction) et à son poids, $-m_c \frac{z_A}{L} g_0 \vec{u}_z$. En remarquant que $\vec{T}(A)$ correspond à la force demandée, le théorème de la résultante cinétique appliqué à ce système fermé s'écrit :

$$\vec{T}(A) = -\frac{m_c}{L} \left\{ z_A g_0 + \left[\left(\frac{dz_A}{dt} \right)^2 + z_A \frac{d^2 z_A}{dt^2} \right] \right\} \vec{u}_z$$

29-a) Le nombre de Reynolds s'écrit ici :

$$R_e = \frac{R}{\nu} \frac{dz_A}{dt}$$

où R est le rayon du ballon supposé sphérique : $R = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3}$. On annonce donc :

$$R_e = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{1}{\nu} \frac{dz_A}{dt}$$

29-b) Numériquement, on a $\left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{1}{\nu} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ s} \cdot \text{m}^{-1}$. Pour atteindre un nombre de Reynolds de 1 000, il suffit donc d'une vitesse de translation de l'ordre du mm/s. On peut en conclure que l'écoulement sera toujours turbulent ce qui correspond à une force de traînée proportionnelle au carré de la vitesse.

29-c) Considérons le système formé par le ballon sans la corde traînant au sol. Il est soumis à l'action de cette corde $\vec{T}(A)$, à son poids et à la force de traînée. Le théorème de la résultante cinétique, en projection sur la verticale s'écrit donc :

$$m_t \frac{d^2 z_A}{dt^2} = F_0 - \frac{m_c}{L} \left\{ z_A g_0 + \left[\left(\frac{dz_A}{dt} \right)^2 + z_A \frac{d^2 z_A}{dt^2} \right] \right\} - m_t g_0 - \frac{1}{2} \rho_0 S C_x \left(\frac{dz_A}{dt} \right)^2$$

ou encore, en regroupant :

$$\left(m_t + \frac{m_c z_A}{L} \right) \frac{d^2 z_A}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} \rho_0 S C_x + \frac{m_c}{L} \right) \left(\frac{dz_A}{dt} \right)^2 + \frac{m_c}{L} g_0 z_A = F_0 - m_t g_0$$

$$\text{avec } S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{2/3} = 735 \text{ m}^2.$$

On peut simplifier un peu cette équation en prenant comme origine des déplacements du ballon sa position d'équilibre $z_{A,eq}$. Ainsi, en posant $u = z_A - z_{A,eq}$, l'équation précédente devient :

$$\left(m_t + \frac{m_c (u + z_{A,eq})}{L} \right) \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} \rho_0 S C_x + \frac{m_c}{L} \right) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{m_c}{L} g_0 u = 0$$

29-d) En plus de son action de rappel due à la pesanteur :

$$-\frac{m_c}{L} g_0 z_A$$

la corde a une action similaire à un frottement :

$$\boxed{-\frac{m_c}{L} \left(\frac{dz_A}{dt} \right)^2}$$

30-a) Pour que le ballon retrouve une position d'équilibre, il faut que la condition énoncée au 25-c reste vraie pour un ballon de masse $m_t - \delta m$; il faut donc que :

$$m_c g_0 > g_0 \left(\frac{p_0 V}{RT_0} M_a - (m_t - \delta m) \right)$$

soit :

$$\boxed{\delta m < m_c + m_t - \frac{p_0 V}{RT_0} M_a}$$

30-b) Si la variation d'altitude u reste toujours petite devant $z_{A,eq}$, l'équation différentielle obtenue au 29-c s'écrit :

$$\left(m_t + \frac{m_c z_{A,eq}}{L} \right) \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} \rho_0 S C_x + \frac{m_c}{L} \right) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{m_c}{L} g_0 u \approx 0$$

ou encore :

$$\frac{F_0}{g_0} \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} \rho_0 S C_x + \frac{m_c}{L} \right) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{m_c}{L} g_0 u \approx 0$$

soit :

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{a} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \omega_0^2 u = 0}$$

avec :

$$a = \frac{F_0 / g_0}{\frac{1}{2} \rho_0 S C_x + \frac{m_c}{L}} = 1,35 \text{ m} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\omega_0} = \tau = \sqrt{\frac{F_0 L}{m_c g_0^2}} = 1,7 \text{ s}$$

Agrégation de sciences physiques

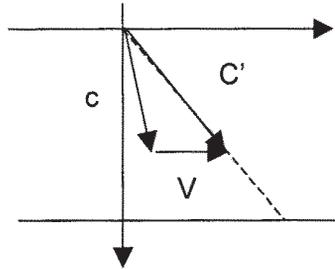
Concours externe

OPTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉES

Composition d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique ♦ Session : 2004

Partie A

1.1



DANS R FIXE :

$c^2 = c'^2 + V^2 - 2c'V \cos\alpha$ $c'^2 - 2V \cdot c' \cdot \cos\alpha + V^2 - c^2 = 0$ d'où $c' = V \cos\alpha + (c^2 - V^2 \sin^2\alpha)^{1/2}$
qui se simplifie si $V \ll c$ ou directement

$$1.2 \quad c'_{AB} = c + V \cos\alpha \quad ; \quad t_{AB} = L / c + V \cos\alpha$$

$$1.3 \quad c'_{BA} = c - V \cos\alpha \quad ; \quad t_{BA} = L / c - V \cos\alpha$$

$$1.4.1 \quad \Delta t = t_{BA} - t_{AB} = 2 L V \cos\alpha / (c^2 - V^2 \cos^2\alpha)$$

$$1.4.2 \quad \Delta t = 2 L V \cos\alpha / c^2$$

$$1.5 \quad V < 0.03 c$$

$$1.6 \quad V = c^2 \Delta t / 2 L \cos\alpha$$

$$2.1.1 \quad Q_v = (\pi R^2 \cdot c^2 \Delta t) / 2 L \cos\alpha \quad \text{AN: } Q_v = 4,56 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

2.1.1 Mesure de l'écart des fréquences $\Delta F(t) = F_1(t) - F_r(t)$; $\Delta F / \Theta = (F_2 - F_1) / T_0$ (pente)
 $\rightarrow \Theta = \Delta F(t) \cdot T_0 / (F_2 - F_1)$

$$2.1.2 \quad \Phi_1(t, F_1, F_2, T_0) = 2 \pi (F_1 t + (F_2 - F_1) t^2 / 2T_0 + K_1)$$

$$\Phi_r(t, F_1, F_2, T_0) = 2 \pi (F_1 (t - \Theta) + (F_2 - F_1) (t - \Theta)^2 / 2T_0 + K_r)$$

$$2.1.3 \quad s(t) = k A^2 \cos(\Phi_1) \cdot \cos(\Phi_r) = (1/2) k A^2 [\cos(\Phi_1 + \Phi_r) + \cos(\Phi_1 - \Phi_r)]$$

$$2.1.4.1 \quad d(t) = (1/2) k A^2 \cos 2 \pi \{ (F_2 - F_1) (\Theta / T_0) t + F_1 \cdot \Theta - (F_2 - F_1) \Theta^2 / 2 T_0 + K_r - K_1 \}$$

$$2.1.4.2 \quad F_{\text{mes}} = (F_2 - F_1) (\Theta / T_0)$$

$$2.1.5.1 \quad t_{AB} = 95 \, 165 \text{ ns} \quad t_{BA} = 96 \, 075 \text{ ns}$$

$$2.1.5.2 \quad \Delta t = 910 \text{ ns} \quad t_{AB} - t_{BA} = (F_{AB} - F_{BA}) T_0 / (F_2 - F_1)$$

$$\Delta(t_{AB} - t_{BA}) / (t_{AB} - t_{BA}) = \Delta(F_{AB} - F_{BA}) / (F_{AB} - F_{BA}) + \Delta T_0 / T_0 + \Delta(F_2 - F_1) / (F_2 - F_1) =$$

$$= \Delta T_0 / T_0 + 2 \Delta F_2 / (F_2 - F_1) + \Delta(F_{AB}) / (F_{AB} - F_{BA}) = 1/100 + 2/100 + 2/10^5$$

Précision 3 % (+/- 30 ns)

2.1.5.3

$$F_{mes} > 1/T_0$$

$$F_{mes\ min} = 1\text{kHz}$$

2.1.6

Linéarité de la rampe de modulation

2.2.1.1

$$C_{xy}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n+m-n_r) = C_{xx}(m-n_r) \quad C_{xx}(\alpha) \text{ est maximale pour } \alpha = 0 \text{ soit}$$

$$m = n_r \rightarrow \theta$$

2.2.1.2

2.2.1.2 a)

Méthode1 pour chaque valeur de m : N produits et N-1 sommes
 Pour N valeurs de m : **N (2N-1) T_h**

2.2.1.2 b)

Méthode 2 : 2 FFT + 1 IFFT +N produits= (3 N Log₂(N)+N T_h) = **(4,33N Ln(N)+N) T_h**

2.2.1.2 c)

N	METHODE1	METHODE 2	
128	32640	2690	X Th
256	1,3 . 10 ⁵	6402	X Th
1024	2,1 . 10 ⁶	3,18 10 ⁴	X Th
2048	8,4 . 10 ⁶	7 10 ⁴	X Th

2.2.1.3 a)

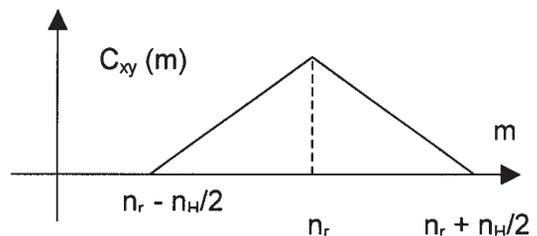
$$\underline{X}(k) = \sum_{n=0}^{n_H-1} 1 \cdot e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} = \frac{\sin(k\pi n_H/N)}{\sin(k\pi/N)} \cdot e^{-jk\pi(n_H-1)/N};$$

$$\underline{Y}(k) = \frac{\sin(k\pi n_H/N)}{\sin(k\pi/N)} \cdot e^{-jk\pi(n_H-1)/N} \cdot e^{-j2k\pi n_r/N}$$

$$S_{xy}(k) = \underline{X}^*(k) \underline{Y}(k) = \left[\frac{\sin(k\pi n_H/N)}{\sin(k\pi/N)} \right]^2 \cdot e^{-j2k\pi n_r/N}$$

2.2.13.b)

$$\underline{S}_{xy}(k) = \underline{R}(k) \cdot e^{-j2k\pi n_r/N} \text{ d'ou } C_{xy} = r(m - n_r)$$



2.2.2.1

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 &= \left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)^2 \sigma_c^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t_{AB}}\right)^2 \sigma_{t_{AB}}^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t_{BA}}\right)^2 \sigma_{t_{BA}}^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial D}\right)^2 \sigma_D^2 \\ \sigma_v^2 &= \left(\frac{2c(t_{AB} - t_{BA})}{2D}\right)^2 \sigma_c^2 + \left(\frac{c^2}{2D}\right)^2 \sigma_{t_{AB}}^2 + \left(\frac{-c^2}{2D}\right)^2 \sigma_{t_{BA}}^2 + \left(\frac{-c^2(t_{AB} - t_{BA})}{2D^2}\right)^2 \sigma_D^2 \\ \frac{\sigma_v^2}{v^2} &= 4 \frac{\sigma_c^2}{c^2} + \frac{\sigma_D^2}{D^2} + \frac{\sigma_{t_{BA}}^2}{(t_{AB} - t_{BA})^2} + \frac{\sigma_{t_{AB}}^2}{(t_{AB} - t_{BA})^2} \\ \varepsilon_v^2 &= 4 \cdot \varepsilon_c^2 + \varepsilon_D^2 + \frac{2\sigma_{t_{AB}}^2}{(t_{AB} - t_{BA})^2} \end{aligned}$$

2.2.2.2

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{t_{AB}}^2}{(t_{AB} - t_{BA})^2} &= \frac{\varepsilon_v^2 - (4 \cdot \varepsilon_c^2 + \varepsilon_D^2)}{2} \leq 10^{-3} \\ (t_{AB} - t_{BA}) &= \frac{2vD}{c^2} = 1,78 \cdot 10^{-7} \text{ s} ; \sigma_{t_{AB}} \leq 5,63 \cdot 10^{-9} \text{ s} \\ \varepsilon_{t_{AB}} &= \frac{\sigma_{t_{AB}}}{t_{AB}} \text{ avec } t_{AB} \neq \frac{D}{c} \quad t_{AB} \neq 6,67 \cdot 10^{-5} \text{ s} \quad \varepsilon_{t_{AB}} \neq 8,44 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

L'erreur maximale est de l'ordre de $T_e/2$; si on l'assimile à $\sigma_{t_{AB}}$:

$$\begin{aligned} T_e &= 2 \cdot \sigma_{t_{AB}} = 1,18 \cdot 10^{-8} \text{ s} \\ F_e &= 8,8 \cdot 10^7 \text{ Hz} \approx 90 \text{ MHz} \end{aligned}$$

2.2.2.3

$$\begin{aligned} \sigma_{t_{AB}}^2 \leq 10^{-3} (t_{AB} - t_{BA})^2 &= 10^{-3} \frac{2vD}{c^2} \text{ avec } t_{AB} \neq t_{BA} \neq \frac{D}{c} ; \sigma_{t_{AB}} = \frac{T_e}{2} \\ \frac{\sigma_{t_{AB}}^2}{(t_{AB} - t_{BA})^2} &= \frac{T_e^2}{4 \cdot 4v^2 D^2} c^4 \leq 10^{-3} \text{ d'ou } T_e \leq 2,2 \cdot 10^{-10} \text{ s} ; F_e \geq 4,44 \cdot 10^9 \text{ Hz} \quad (1^*) \end{aligned}$$

(Calcul effectué pour D_{\min} et v_{\min})

Le nombre de points d'acquisition doit permettre les mesures maximales de t_{AB} ou t_{BA}

$NT_e > t_{AB, \max} \sim D_{\max}/c$ d'ou $N > 5,92 \cdot 10^5$ (2*)

Conditions (1*) et (2*) difficilement réalisables avec DSP actuels

2.2.2.4 a)

Puissance de 2 : algorithme de calcul RAPIDE de la FFT

2.2.2.4.b)

$$t_{AB} = 11\ 305 \quad T_e = 94208 \text{ ns} \qquad t_{BA} = 11\ 321 \quad T_e = 94341 \text{ ns}$$

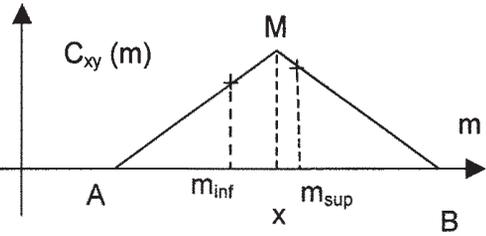
2.2.2.4.c)

$$t_{AB} - t_{BA} = 1,33 \cdot 10^{-7} \text{ s} \quad v = (t_{AB} - t_{BA}) \cdot c^2 / 2D = 1,5 \text{ m/s}$$

$$\varepsilon_v^2 = 4 \cdot \varepsilon_c^2 + \varepsilon_D^2 + \frac{2\sigma_{t_{AB}}^2}{(t_{AB} - t_{BA})^2} \quad \varepsilon_v = 5\%$$

2.2.2.5.1

pour AM $C_{xy}(m) = m + C_{xy}(m_{inf}) - m_{inf}$
 pour MB $C_{xy}(m) = -m + C_{xy}(m_{sup}) + m_{sup}$
 d'où $x = \frac{C_{xy}(m_{sup}) - C_{xy}(m_{inf}) + m_{sup} + m_{inf}}{2}$



2.2.2.5.2

Avec $\sigma_{C_{xy}(m)} = \sigma_{C_{xy}(m_{sup})} = \sigma_{C_{xy}(m_{inf})}$
 $\sigma_x^2 = \frac{\sigma_{C_{xy}(m)}^2}{2}$ donc $\sigma_x = \frac{\sigma_{C_{xy}(m)}}{\sqrt{2}}$; $\sigma_{t_{AB}} = \frac{\sigma_{C_{xy}(m)}}{\sqrt{2}} \cdot T_e$

PARTIE B

1.1

$$s_e^*(t) = \sum_k s(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

1.2

$$\underline{S}_e(f) = \text{TL}\{s(t) \times P_{T_e}(t)\} = \underline{S}(f) \otimes \text{TL}\{P_{T_e}(t)\}$$

$$\text{TL}\{P_{T_e}(t)\} = \frac{1}{T_e} P_{F_e}(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(f - kF_e)$$

$$\underline{S}_e(f) = \underline{S}(f) \otimes \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(f - kF_e) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \underline{S}(f - kF_e)$$

1.3 a



1.3 b



1.3.1

a) pas de superposition des « motifs » b) superposition

1.3.2

Fréquence de Nyquist $F_{e,min} = 2 F_{max}$

1.3.3

Effet de repliement de spectre

1.4.1

$$\underline{S}_{1,e}(f) = \underline{S}_e(f) \cdot \underline{H}(f)$$

$$s_{1,e}(t) = \text{TF}^{-1}(\underline{S}_e(f) \cdot \underline{H}(f)) = \text{TF}^{-1}(\underline{S}_e(f)) \otimes \text{TF}^{-1}(\underline{H}(f))$$

$$= s^*(t) \otimes 2F_{max} \text{sinc}(2\pi F_{max} t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} s(kT_e) \delta(t - kT_e) \otimes 2F_{max} \text{sinc}(2\pi F_{max} t)$$

$$= 2F_{Max} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} s(kT_e) \times \text{sinc}\{2\pi F_{max}(t - kT_e)\}$$

1.4.2

$F_{max} < F_e/2$ récupération du spectre

$F_{max} > F_e/2$ reconstitution impossible

1.4.3

Passé bas idéal : non causal ; approche : filtre interpolateur

2.1

$$\{y(n)\} = \sum_{p=0}^{N-1} x(p)\delta(Mn-p) = \sum_{p=0}^{N-1} x(p) \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{mp}{M}} \delta(Mn-p)$$

2.2

$$\underline{Y}(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{N-1} x(p) e^{j2\pi \frac{mp}{M}} e^{-j2\pi \frac{kn}{M}} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \underline{X}\left(k - \frac{mN}{M}\right)$$

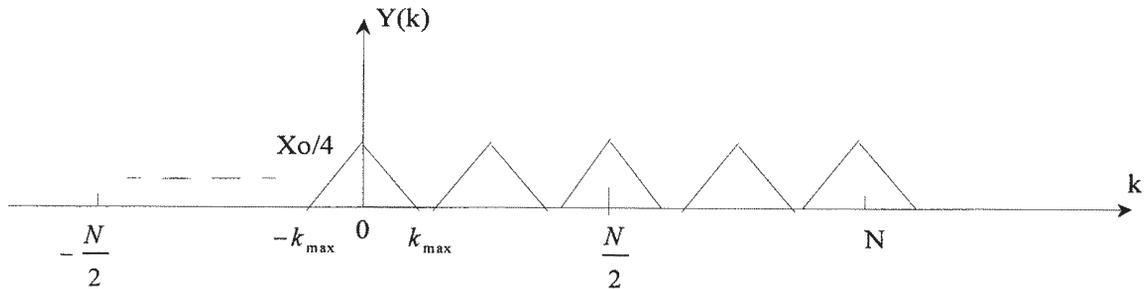
2.3.1

Pour $m = 0$, le terme sous le signe somme se ramène à $\underline{X}(k)$.

Cette bande spectrale, centrée sur $k = 0$, s'étend de $-k_{max}$ à k_{max}

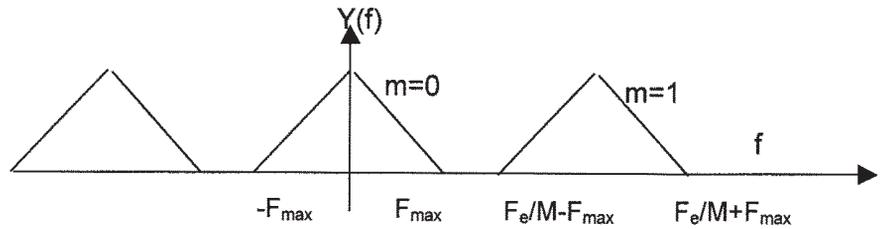
Pour $m = 1$, la bande est centrée sur $k = N/M$ et s'étend de $N/M - k_{max}$ à $N/M + k_{max}$.

Ces deux bandes sont disjointes si : $N/M - k_{max} > k_{max}$, soit $k_{max} < N/(2M)$, condition de l'énoncé



2.3.2

2.3.3



2.3.4

$k_{max} < N/(2M)$ donc $k_{max} \frac{Fe}{N} < \frac{Fe}{2M}$ soit $f_{max} < \frac{Fe}{2M}$, ce qui revient à appliquer la condition de Shannon à un signal échantillonné à Fe/M .

2.3.5

$$Y(f) = (1/M) \sum_k X(f - k Fe / M) \quad \{k=0,1,2,3\}$$

3.1

$$\tau_a = (R_s + R_{on})C \quad \text{CMOS : } R_{on} \sim 30 \text{ à } 40 \text{ Ohm}$$

3.2

Temps acq proportionnel à C : C faible // bruit (kT/C) : C élevée d'ou compromis

3.3

Temps acq T_a lié à :- R_s / - charge de C : I_o (courant max) et Slew rate : SR vitesse de

3.4

$\tau_a < T_a / (N+1) \ln(2)$ AN : $\tau_a < 34\text{ms}$

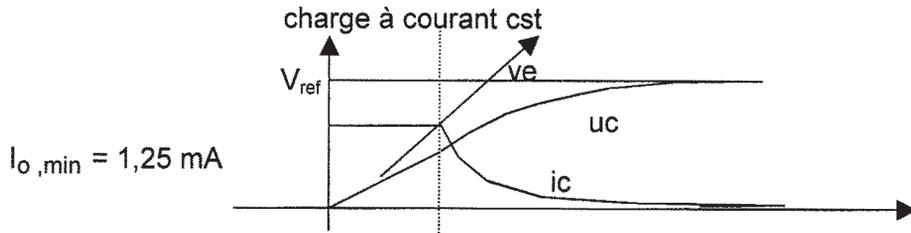
3.5.1

$SR > V_{ref} / (T_a / 4)$ AN : $50 \text{ V}/\mu\text{s}$

3.5.2

$I_{o, \min} = C.SR$

3.5.3



3.6.1

Charge capacitive; système d'ordre > 1 : réponse oscillatoire amortie

3.6.2

Mise en série de R avec R_{on} mais τ_a sera allongée

4.1.1

a) $Q_{c, (n+1/2)} = C V_e (n+1/2)$ b) $V_s (n+1/2) = 0$

4.1.2

a) $V_s (n+1) = V_e (n+1/2)$ Q_c se reporte sur V_s
 b) V_s passe « brusquement » de 0 à $V_e (n+1/2)$ Slew rate

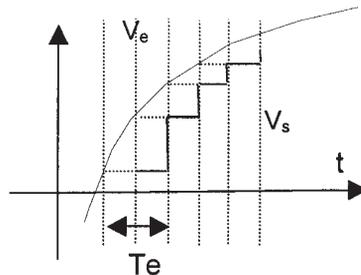
4.2.1

Phase 1: $V_{s1} (n+1/2) = 0$ $V_{s2} (n+1/2) = V_e (n)$ $V_s(n+1/2) = V_{s2} (n+1/2) = V_e (n)$

n)

Phase 2: $V_{s1} (n+1) = V_e (n+1/2)$ $V_{s2} (n+1) = 0$ $V_s(n+1) = V_{s1} (n+1) = V_e (n+1/2)$

4.2.2



tensions

4.2.3

échantillonnage bloquage+ Retard ($T_e/2$)

5.1

Chronogrammes

5.2

Retard typique ($C_L = 15\text{pf}$) $2 * 3,8 \text{ ns} = 7,6 \text{ ns}$ / ($C_L = 15\text{pf}$) $2 * 5,3 \text{ ns} = 10,6 \text{ ns}$

5.3.1

Oscillateur : $3\pi + 3 (t_{plh} + t_{phi}) \omega_o + 3 \arctan(\omega_o RC) = 2\pi (t_{plh} + t_{phi}) \omega_o + \arctan(\omega_o RC) = \pi/3$

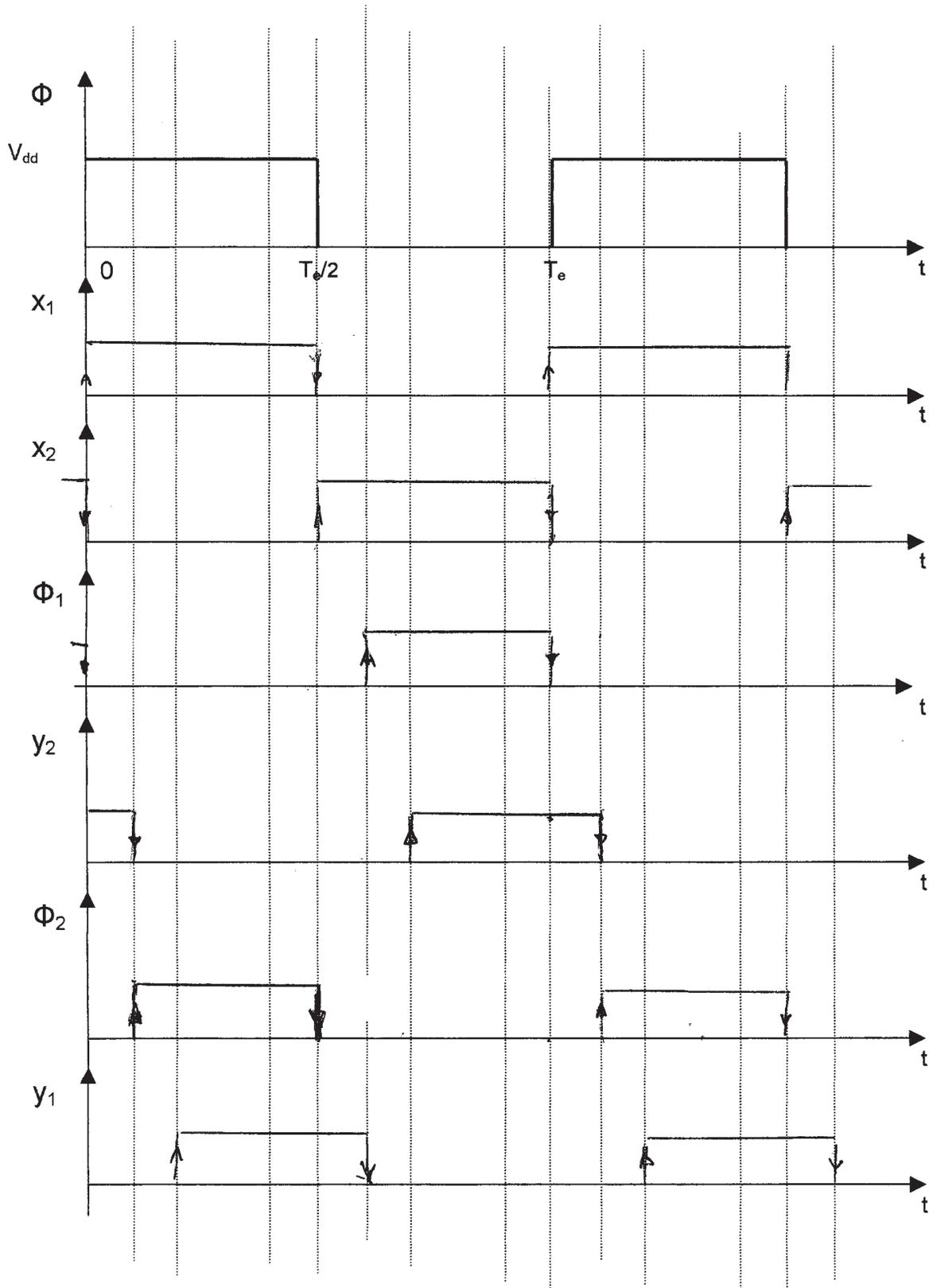
$\pi/3 = 20,3 X + \arctan(5X)$ $X = 10^{-9} \omega_o$

5.3.2

$X = 0,041$ $F_{osc} = 6,525 \text{ MHz}$

$F_{ech} = 2F_e$

Document réponse (partie B / question 5.1)



Partie C

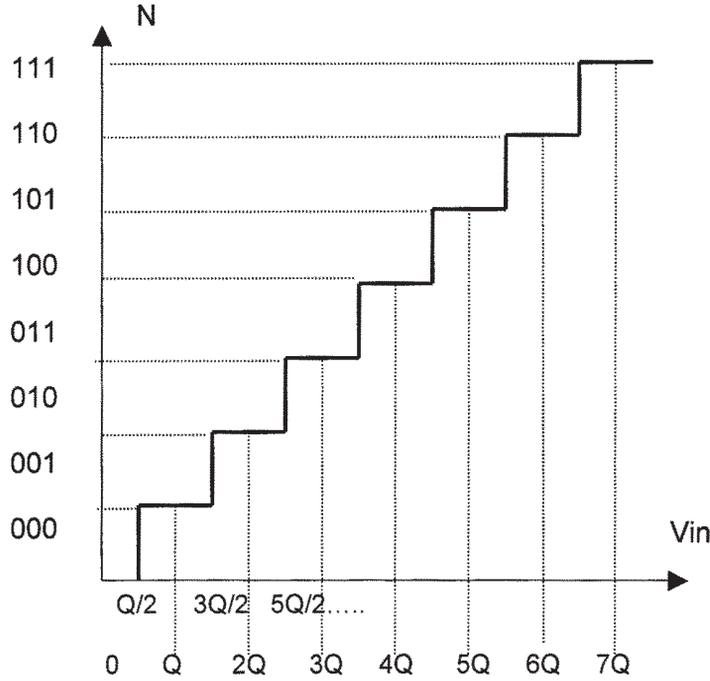
1.1 Mots de n bits 2^n valeurs entières distinctes

1.2.1 $q = V_{ref} / 2^n$

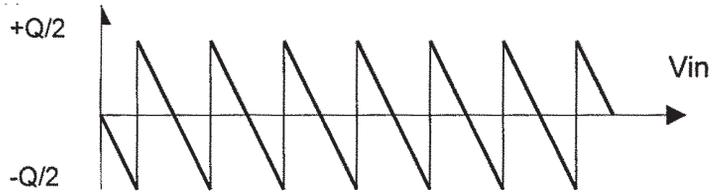
1.2.2 $V_{ref} = 10\text{ V}$ $n = 8$ $q = 39\text{ mV}$

1.2.3 $(\Delta V_{ref} / V_{ref}) / \Delta\theta = (V_{ref} / 512) / (50 \cdot V_{ref}) = 4 \cdot 10^{-5}\text{ V}^\circ\text{C} = 40 \cdot 10^{-6}\text{ V}^\circ\text{C} = 40\text{ ppm}^\circ\text{C}$

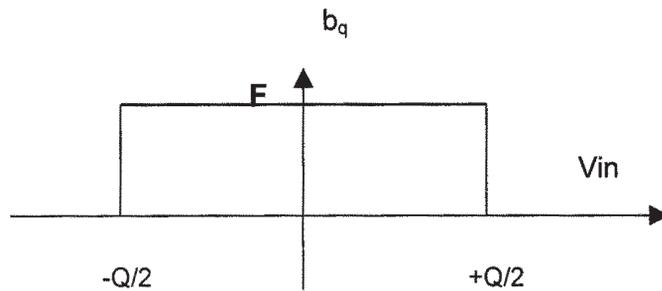
1.3 Caractéristique du CAN 3 BITS :



1.4 Caractéristique du bruit b_q



1.5.1 FONCTION Rect ($V_{in} : F, -q/2, +q/2$) = $\int_{-\infty}^{+\infty} F(v) dv = F \cdot q = 1$ d'ou $F = \frac{1}{q}$



1.5.2 $\langle b_q \rangle = \int_{-q/2}^{+q/2} \frac{1}{q} v dv = 0$

1.5.3 $B_{eff}^2 = \int_{-q/2}^{+q/2} \frac{1}{q} v^2 dv = \frac{q^2}{12}$; $B_{eff} = \frac{q}{\sqrt{12}}$

1.5.4.1 $SNR = 10 \log(P_e/P_q)$ $SNR_{max} = 20 \log \frac{V_{ref}/\sqrt{12}}{q/\sqrt{12}} = 20 \log(2^n) = 6,02 n$

1.5.4.2 $SNR_{max} = 20 \log \frac{V_{eff}}{q/\sqrt{12}} = 20 \log \frac{V_{in,M}/\sqrt{2}}{q/\sqrt{12}}$;
 pour $V_{in,M} = V_{ref}/2$ alors $SNR_{max} = 6,02 n + 1,76$

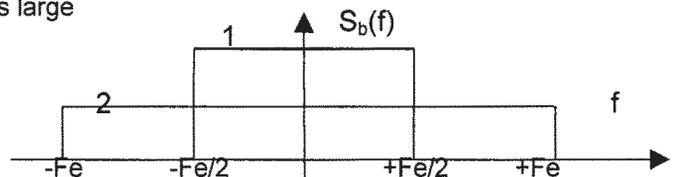
1.5.4.3 CAN 10 bits : $SNR_{max} = 60,2$ dB

CAN 12 bits : $SNR_{max} = 72,24$ dB : meilleur !

1.5.4.4 CAN 12 BITS avec signal sinus : $SNR_{max} = 74$ Db or $SNR = 63$ Db soit $n' = 10$ bits

1.6.1 $S_b(f) = S_b(f) = \frac{q^2}{12F_e}$ (équirépartition)

1.6.2 Le bruit se répartit sur une bande 2 fois plus large



1.7.1 $\Delta V_e / \Delta T_e = V_{ref} \cdot \pi \cdot f$

1.7.2.1 $\Delta T_e < 1 / 2^{(n+1)} \pi \cdot f$

1.7.2.2 $\Delta V_e > q/2$ on perd en résolution

1.7.3.1 $\Delta V_e = q/2 = V_{ref} / 2^{(n+1)} = V_{ref} \cdot \pi \cdot f \Delta T_e$ $2^{(n+1)} = 1 / \pi \cdot f \Delta T_e$ $(n+1) = -\log(\pi \cdot f \Delta T_e) / \log(2)$

1.7.3.2 $SNR_{max} = 6,02 n' + 1,76$

1.7.3.3 $\Delta T_{e,max} = 15,54$ ns $n' = 7.3 \dots n' = 7$

2.1.1 Puissance moyenne $P_e = 0,5 \cdot (V_{ref}/2)^2 = 2^{2n} q^2 / 8$

2.1.2 $P_b = 2 \cdot F_{max} \cdot q^2 / 12$ $F_e = q^2 / 12 \cdot OSR$

2.1.3 $SNR = 10 \log(P_e / P_b) = 6,02 n + 1,76 + 10 \log(OSR)$

2.1.4 On double : $SNR \rightarrow SNR + 3$ Db

On quadruple : $SNR \rightarrow SNR + 6$ Db

On X 2M : $SNR \rightarrow SNR + M \times 3$ Db

2.1.5.1 $SNR_{1,MAX} = 6,02 + 1,76 + 10 \log(OSR)$

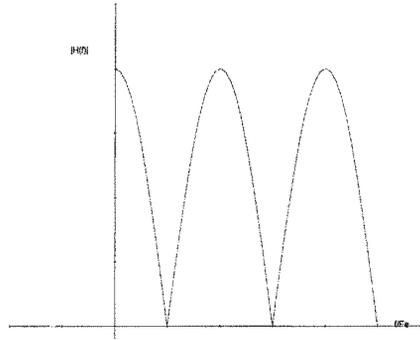
2.1.5.2 $\log(OSR) = 2.522$ $OSR = 332.6$ $F_e = 332,6$ kHz

2.1.5.3 $SNR_{max} = 6,02 n' + 1.76 = 33$ $n' = 5,2 \rightarrow 6$ bits

2.1.5.4 CAN 1 BIT : simplicité $q = V_{ref}/2$ comparateur non inv (seuil $V_{ref}/2$)

2.1.5.5 Le bruit de quantification se répartit sur une bande plus large ; la puissance de bruit dans la bande utile est moindre

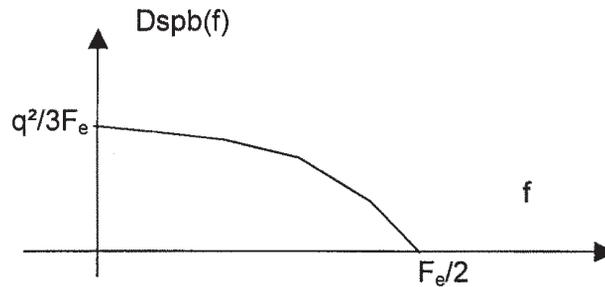
2.2.1 $H(z) = (1 + z^{-1})$



2.2.2 $|H(f)| = |2 \cos(\pi \cdot f / F_e)|$

2.2.3 $D_{sp,b,s}(f) = |H(f)|^2 \quad D_{sp,b,e}(f) = |2 \cos(\pi \cdot f / F_e)|^2 \cdot q^2 / (12 F_e)$

$$P_{bs} = 2 \int_0^{F_e/2} \frac{q^2}{12 F_e} \times 4 \left| \cos\left(\pi \frac{f}{F_e}\right) \right|^2 df = \frac{q^2}{6}$$



2.2.4 Le niveau crête de sortie est doublé car la sortie est sur 9 bits : $V_{max} = V_{ref}$ alors $V_{eff} = V_{ref} / 2^{0.5}$

$P_s = V_{ref}^2 / 2$ puissance signal en sortie de l'additionneur

$$SNR = 10 \log (P_s / P_b) = SNR = 10 \log ((V_{ref}^2 / 2) / (q^2 / 6)) = 6,02 n + 4,77$$

2.2.5 Si CAN seul $SNR = 6,02 + 1,76$ / on gagne 3 Db avec la nouvelle structure

3.1 $V_s(z) = T_s(z) V_e(z) + N(z) \cdot B_q(z)$

3.2 $T_s(z) = H(z) / (1 + H(z)) \quad N(z) = 1 / (1 + H(z))$

3.3 H passe bas : $|H|$ grand dans la BP

- dans la bande utile, $f < F_{max}$ $|T_s| \approx 1$ et $|N| \approx 0$
- hors la bande $f > F_{max}$ $|T_s| \approx 0$ et $|N| \approx 1$

3.4.1 $H(z) = 1 / (z - 1)$ intégrateur

3.4.2 $N(z) = 1 - z^{-1}$

3.4.3 $\underline{N}(f) = 2j \sin(\pi \cdot f / F_e) e^{-j(\pi \cdot f / F_e)}$; $|\underline{N}(f)| = 2 |\sin(\pi \cdot f / F_e)|$

3.4.4 $D_{sp,b,s}(f) = |N(f)|^2 \quad D_{sp,b,e}(f) = |2 \sin(\pi \cdot f / F_e)|^2 \cdot q^2 / 12 F_e$

3.4.5 $P_b = \int_{-F_{max}}^{+F_{max}} 4 \sin^2(\pi \cdot f / F_e) \frac{q^2}{12 F_e} dF = \frac{q^2}{36} \pi^2 \left(\frac{1}{OSR}\right)^3$

3.4.6 $SNR_{max} = 10 \log (P_e / P_b)$ avec $P_e = q^2 \cdot 2^{2n} / 8$

D'ou $SNR_{max} = 6,02 n + 10 \log (9/2 \pi^2) + 30 \log (OSR)$

$A1 = +3,47 \quad B1 = 30$

3.4.7 SNR augmente de 2,7 dB

3.5.1 $N(z) = (1-z^{-1})^2$

3.5.2 $|N(f)| = 4\sin^2(\pi f/F_e)$

3.5.3 $Dsp_{b,s}(f) = |N(f)| \quad Dsp_{be}(f) = 4^2 \sin^4(\pi f/F_e) \cdot q^2/12 F_e$

3.5.4 $P_b = \int_{-F_{max}}^{+F_{max}} 4^2 \sin^4(\pi f/F_e) \frac{q^2}{12 F_e} dF = \frac{q^2}{60} \pi^4 \left(\frac{1}{OSR}\right)^5$

3.5.5 $SNR_{max} = 6,02 n + 10 \log(60/8 \pi^4) + 50 \cdot \log(OSR)$
 $A2 = -11,13 \quad B2 = 50$

3.5.6 SNR_{max} augmente de 15 dB

3.5.7 CAN 8 bit : $SNR_{max} = 6,02 n + 1,76 = 50 \text{ Db}$

- a) CAN 1 BIT ordre 1 $30 \log(OSR) = 50 - 6 + 3,47 = 47,5 \text{ dB}$; $OSR = 38 \quad F_e = 38 \text{ kHz}$
- b) CAN 1 BIT ordre 2 $50 \log(OSR) = 50 - 6 + 11,13 = 55,13 \text{ dB}$; $OSR = 12,5 \quad F_e = 12,5 \text{ kHz}$

4.1.1.1 Filtre non récursif: réponse impulsionnelle finie : stable

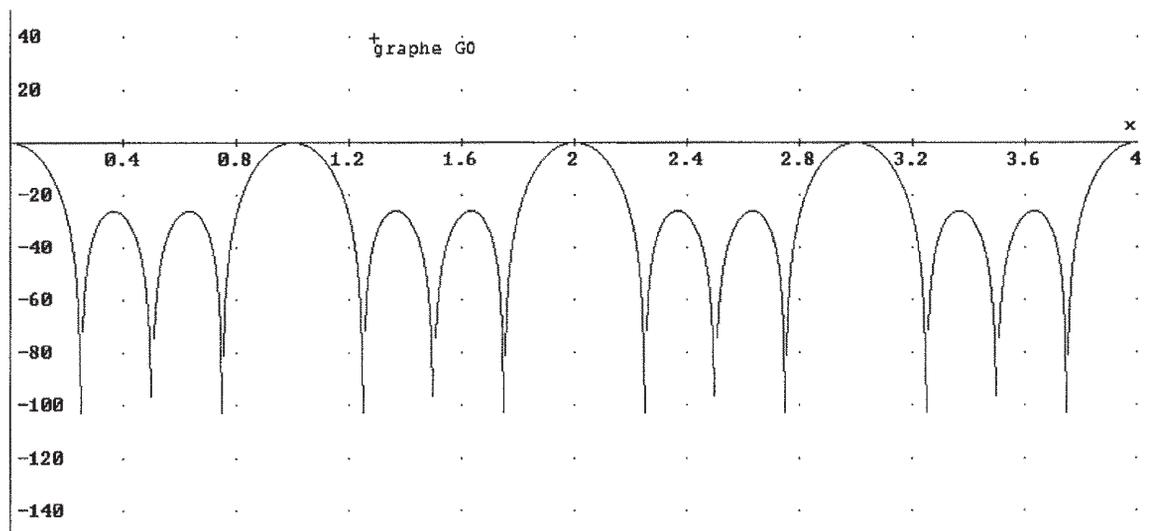
4.1.1.2 $Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} z^{-n} X(z)$

4.1.1.3 $T_0(z) = \frac{1}{M} \frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}}$

4.1.2.1 $H_0(j\omega) = \frac{1}{M} \frac{1-e^{-jM\omega T_e}}{1-e^{-j\omega T_e}} \quad |H_0(f)| = \frac{1}{M} \left| \frac{\sin(M\pi f/F_e)}{\sin(\pi f/F_e)} \right|$; $\arg(H_0(f)) = -(M-1)\pi f/F_e = \Phi(f)$

4.1.2.2 $\tau = \frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = -(M-1) \frac{1}{2 F_e} = \text{cste}$: temps de transit constant qq soit f

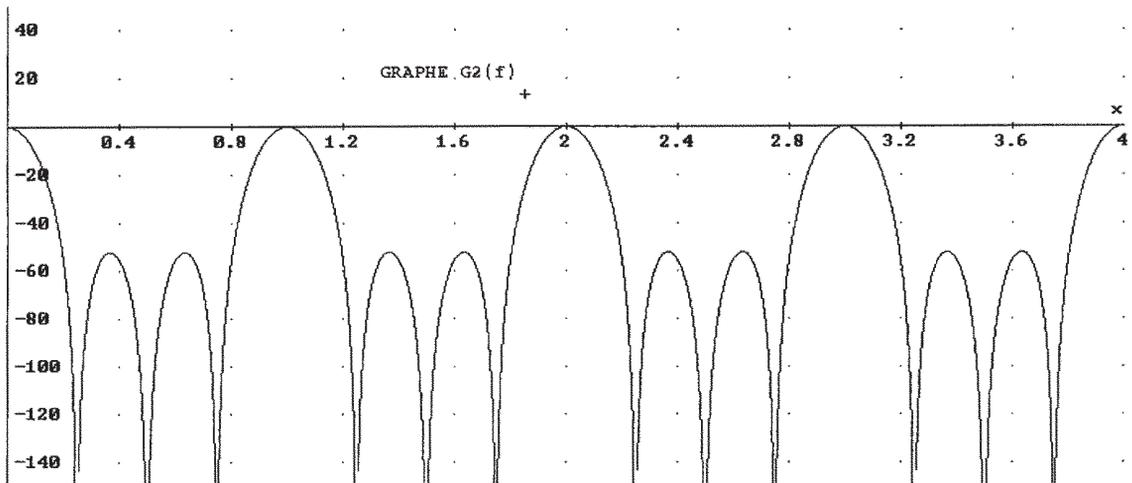
4.1.2.3 Courbe $G_0(f)$ -C1



4.2.2 $T_{L+1}(z) = \frac{1}{M^{L+1}} \left(\frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}} \right)^{L+1}$

4.2.3 $L=1$ et $M=4$: $T_2(z) = \frac{1}{M^2} \left(\frac{1-z^4}{1-z^{-1}} \right)^2$; $|T_2(f)| = \frac{1}{4^2} \left[\frac{\sin 4\pi f/F_e}{\sin \pi f/F_e} \right]^2 = \frac{\sin^2 \left[4\pi f/F_e \right]}{\sin^2 \left[\pi f/F_e \right]}$...

courbe $G_2(f)$ -C2



4.2.4 Facilité de l'algorithme : somme

4.3.1 Butterworth $|T_a(j\omega/\omega_0)| = \left[1 + (\omega/\omega_0)^{2m} \right]^{-1/2}$

4.3.2 $m \geq \frac{\log(10^{60/10} - 1)}{2 \log(2000/500)} = \frac{6}{1,2} = 5$

4.3.3 $z^{-1} = \exp(-T_e p)$; $z^{-1} \neq 1 - T_e p + \frac{(T_e p)^2}{2}$; $1 + z^{-1} \neq 2$ $1 - z^{-1} \neq T_e p$; $\frac{1 - z^{-1}}{z^{-1} + 1} = \frac{T_e p}{2}$

4.3.4 $T(s) = \frac{1}{1 + 3,236 s + 5,236 s^2 + 5,236 s^3 + 3,236 s^4 + s^5}$

$$T_n(z) = \frac{1}{1 + 3,236 \frac{2(1-z^{-1})}{1+z^{-1}} + 5,236 \left(\frac{2}{T} \right) \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 + 5,236 \left(\frac{2}{T} \right)^3 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^3 + 3,236 \left(\frac{2}{T} \right)^4 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^4 + \left(\frac{2}{T} \right)^5 \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^5}$$

$$T_n(z) = \frac{(1+z^{-1})^5}{(1+z^{-1})^5 + 3,236 \frac{2(1-z^{-1})}{T} (1+z^{-1})^4 + 5,236 \left(\frac{2}{T} \right)^2 \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^2 (1+z^{-1})^3 + 5,236 \left(\frac{2}{T} \right)^3 \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^3 (1+z^{-1})^2 + 3,236 \left(\frac{2}{T} \right)^4 \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^4 (1+z^{-1}) + \left(\frac{2}{T} \right)^5 \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^5}$$

4.3.5 Equation aux différences :

$$\begin{aligned} &125 \cdot T^5 \cdot [x_{(n-5)} + 5 \cdot x_{(n-4)} + 10 \cdot x_{(n-3)} + 10 \cdot x_{(n-2)} + 5 \cdot x_{(n-1)} + x_n] = \\ &(125 \cdot T^5 - 809 \cdot T^4 + 2618 \cdot T^3 - 5236 \cdot T^2 + 6472 \cdot T - 4000) \cdot y_{(n-5)} + \\ &(625 \cdot T^5 - 2427 \cdot T^4 + 2618 \cdot T^3 + 5236 \cdot T^2 - 19416 T + 20000) \cdot y_{(n-4)} + \\ &2 \cdot (625 \cdot T^5 - 809 T^4 - 2618 \cdot T^3 + 5236 \cdot T^2 + 6472 \cdot T - 20000) \cdot y_{(n-3)} + \end{aligned}$$

$$2 \cdot (625 T^5 + 809 T^4 - 2618 \cdot T^3 - 5236 \cdot T^2 + 6472 \cdot T + 20000) \cdot y_{(n-2)} +$$

$$(625 \cdot T^5 + 2427 T^4 + 2618 \cdot T^3 - 5236 T^2 - 19416 \cdot T - 20000) \cdot y_{(n-1)} +$$

$$(125 \cdot T^5 + 809 T^4 + 2618 T^3 + 5236 \cdot T^2 + 6472 T + 4000) \cdot y_n$$

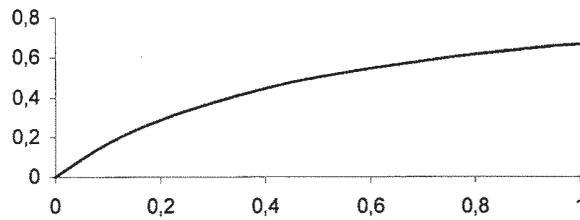
PARTIE D

1.1.1

$$M = Q_A / (Q_A + Q_B) = Y_{RA} / (Y_{RA} + Z)$$

1.1.2

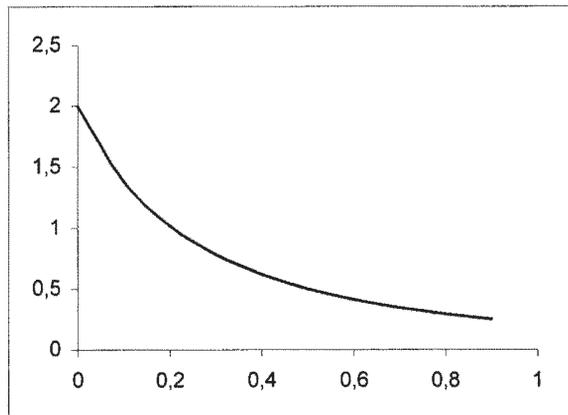
$$M(0)=0 \quad M(1)= 1/1.5 \quad M= Y_{RA} / (Y_{RA} +0.5)$$



1.2.1

$$K_s = Z / (Y_{RA} + Z)^2$$

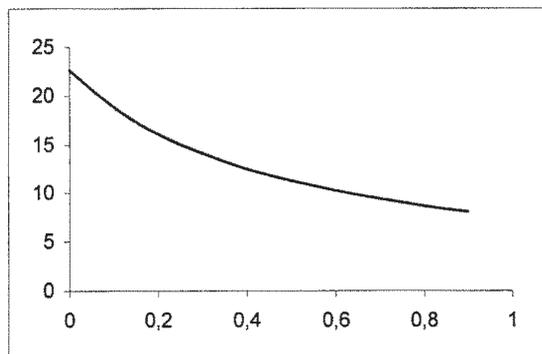
1.2.2



1.3.1

$$T_s = 11.3 / (Y_{RA} + Z)$$

1.3.2



2.1

$$M_0 = 0,5 \quad K_s = 0,5 \quad T_s = 11,3 \text{ s}$$

2.2.1

$$T = 2,8 t_1 - 1,8 t_2$$

$$\tau = 5,5(t_2 - t_1)$$

$$K = \Delta Y_{RA} / \Delta M_{00}$$

2.2.2

$$K = 0,5 \quad T = 11,56 \text{ s} \quad \tau = 9,9 \text{ s}$$

Constante de temps de l'analyseur

2.3

Valeurs différentes (peu) : système non linéaire

3.1

Régulateur PID

3.2.1

$$-\pi = -\arctan(\omega_1 T_d) - \frac{\pi}{2} - \omega_1 T \quad (1)$$

$$\frac{G_0 K}{\omega_1 \tau} \sqrt{1 + (\omega_1 T)^2} = 0,5 \quad (2)$$

$$\arctan(\omega_1 T_d) = \pi / 4 \quad \omega_1 T_d = 1$$

$$(1) \quad \omega_1 T = 3\pi / 4 \quad \text{d'où } T_d = \frac{4T}{3\pi}$$

$$G_0 = \frac{3\pi\tau}{8\sqrt{2} \cdot T \cdot K} \quad \text{et} \quad T_d = \frac{4T}{3\pi}$$

3.2.2

$$G_0 = 1,45; \quad T_d = 4,9 \text{ s} \quad \text{et} \quad T_i = \tau = 10 \text{ s}$$

3.2.3

$$\text{Echelon : } W_0 = 0,5$$

3.2.4

- Marge de gain $\Delta G = +6 \text{ dB}$ correcte

$$|T(j\omega_2)| = 1 \quad G_0 K = \frac{\tau \omega_2}{\sqrt{1 + (T_d \omega_2)^2}} \quad \omega_2 = 0,08 \text{ rad/s}$$

$$\arg(T(j\omega_2)) = \arctan(T_d \omega_2) - \frac{\pi}{2} - \tau \omega_2 \neq 120^\circ \quad \Delta\Phi \neq 60^\circ$$

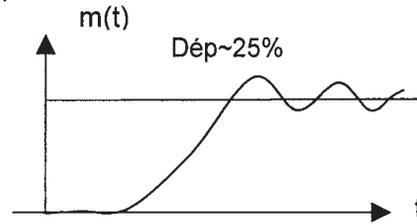
- Marge de phase $\Delta\phi = 60^\circ$ SYST STABLE

3.2.5

$$\text{Précision statique } \varepsilon_p(\infty) = 0 \quad (\text{intégrateur}) \quad T(p) = \frac{G_0 K}{\tau p} (1 + T_d p) e^{-T_p p}$$

3.2.6

Allure :



3.2.71.

L'action dérivée sur l'échelon ε produit une impulsion qui mène en saturation puis effet de l'action PI : intégration

3.2.7.2

$$C(p) = G_0 \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) \left(1 + \frac{T_d p}{1 + T_d' p}\right) \text{ avec } T_d \gg T_d'$$

On « supprime » l'action de saturation du correcteur

3.2.7.3

On place l'action dérivée sur $m(t)$ pour éviter les effets précédents pour des échelons de consigne W

3.3.1.1

$$M_{Qc} = (Y_{RA} + Z) / 2$$

3.3.1.2

$$K_s = Z / (Y_{RA} + Z)^2 = Z / 4 M_{Qc}^2$$

3.3.1.3

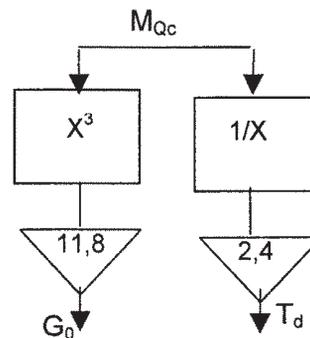
$$T_s = 4,65 / M_{Qc}$$

3.3.1.4

$$G_0 = 1,18 M_{Qc}^3 ; T_d = 2,4 / M_{Qc}$$

3.3.1.5

blocs de calcul :



3.3.2.1

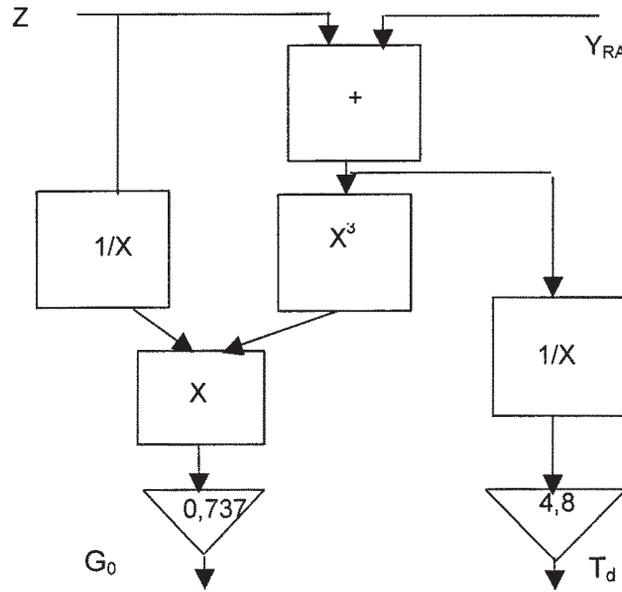
$$K_s = Z / (Y_{RA} + Z)^2 \quad T_s = 11,3 / (Y_{RA} + Z)$$

3.3.3.2

$$G_0 = 0,737 (Y_{RA} + Z)^3 / Z \quad T_d = 4,8 / (Y_{RA} + Z)$$

3.3.2.3

Schéma bloc commandes Y_{RA} et Z



3.3.2.5

Méthode 1 : plus précise (linéarité du capteur) mais exige un débitmètre

Méthode 2 : plus « directe » mais obtenue à partir des commandes de vannes : pas nécessairement linéarité. Meilleure rapidité. (action en amont)

4.1

$$T(p) = C_s(p) \cdot H(p) = \frac{F(p)}{1-F(p)} = \frac{e^{-Tp}}{(1+\tau_d p - e^{-Tp})}$$

$$C_s(p) = \frac{(1+\tau p)}{K(1+\tau_d p - e^{-Tp})}$$

4.2.1

$$C_s(p) = \frac{(1+\tau p)}{K(1+\tau_d p - e^{-Tp})} = \frac{A(p)}{1+A(p)B(p)}$$

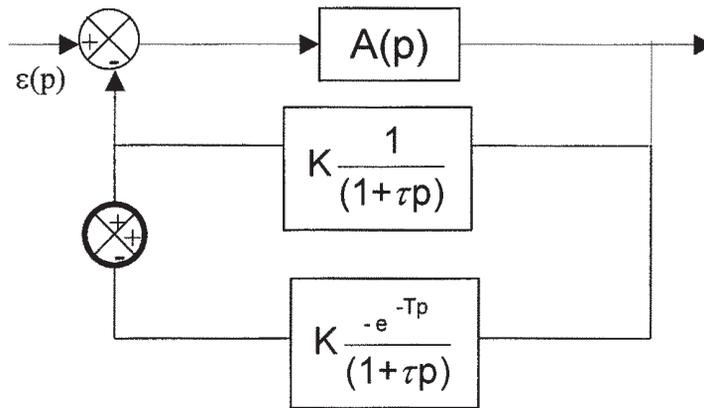
$$C_s(p) = \frac{(1+\tau p)}{\tau_d p} = \frac{\tau(1+\frac{1}{\tau p})}{K\tau_d \frac{1-e^{-Tp}}{\tau_d p}}$$

$$A_0 = \frac{\tau}{K\tau_d} \quad B(p) = K \frac{(1-e^{-Tp})}{(1+\tau p)} \quad T'_i = \tau$$

4.2.2

$B(p)$ compensateur de temps mort car terme : $K \frac{-e^{-Tp}}{(1+\tau p)}$

4.2.3



4.2.3

Modules bibliothèque $G = K \quad \Theta = \tau \quad \alpha = T \quad \Theta' = \tau$

4.3

Précision : (erreur de position) $\varepsilon_p = 0$

$$M(p) = F(p) \left(\frac{\Delta W}{p} \right) = \frac{e^{-Tp}}{1 + \tau p} \left(\frac{\Delta W}{p} \right) \rightarrow m(\infty) = \lim_{(p \rightarrow 0)} (p \cdot M(p)) = \Delta W$$

5

Réponses indicielles :

G1 Cor. SMITH -meilleur temps de réponse-pas de dépassement- très stable

G2: instabilité du PID – Smith plus stable (Marge phase >0) ;

G3: réglages “mous”; syst. stables

Black confirme : marge de phase toujours positive : Meilleure robustesse pour SMITH

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉES

Problème d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique ♦ Session : 2004

Chauffage par induction magnétique

Al. Répartition des lignes de champ et de courant

Al11a Le milieu est homogène et la symétrie est de révolution ; le vecteur \vec{H} est perpendiculaire au rayon de C. Le module est constant sur C et dépend de R. L'orientation est donnée par le bonhomme d'Ampère.

Al11b $\oint_C \vec{H} d\vec{l} = 2\pi R H$ car \vec{H} et $d\vec{l}$ sont colinéaires et $\|\vec{H}\|$ est constant sur C.

Al11c $2\pi R H = I$ d'après le théorème d'Ampère. $H = \frac{I}{2\pi R}$

Al12a voir document réponse.

Al12b $\oint_C \vec{H} d\vec{l} = 2\pi R H = NI$ $H = \frac{NI}{2\pi R}$

Al12c Le nombre de spires par mètre est $n = \frac{N}{2\pi R}$, donc $H = nI$ quelque soit R.

Al12d $B = 0,05 \text{ T}$ $H = \frac{B}{\mu_0}$ $I = \frac{B}{\mu_0 n} = 331 \text{ A}$

Al13a voir document réponse.

Al13b \vec{H} est le même pour toutes la valeurs de x $H = 39700 \text{ At/m}$

Al13c Dans l'air $B_a = \mu_0 H = 0,05 \text{ T}$

Dans le matériau ferromagnétique $B_f = \mu_0 \mu_r H = 1 \text{ T}$

Al14a $e(t) = - \frac{d\phi}{dt}$ le flux est compté suivant la normale orientée liée à l'orientation conventionnelle du courant. $E(t)$ et $i(t)$ forment une convention générateur.

Al14b $e(t) = -\mu_0 (\pi r_n^2) \frac{dH}{dt} = -\mu_0 (\pi r_n^2) n \frac{di}{dt}$ or $i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t)$ et $\frac{di}{dt} = I\sqrt{2}\omega \cos(\omega t)$

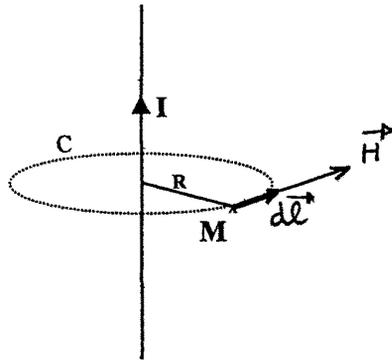
donc $e(t) = -\mu_0 (\pi r_n^2) n I\sqrt{2} \omega \cos(\omega t)$ et $E = \mu_0 \pi r_n^2 n I \omega$

Avec $r_n = 13,5 \text{ mm}$, $E = 6,35 \text{ mV}$.

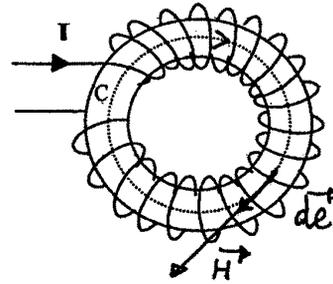
Al14c $R_c = \rho \frac{2\pi r_n}{h e_t} = 9,6 \mu\Omega$

Al14d $I_c = \frac{E}{R_c} = \frac{\mu_0 \pi r_n^2 n I \omega h e_t}{\rho 2\pi r_n} = \frac{\mu_0}{2} \sigma r_n n I \omega h e_t$ avec $\sigma = \frac{1}{\rho}$ $I_c = 661 \text{ A}$

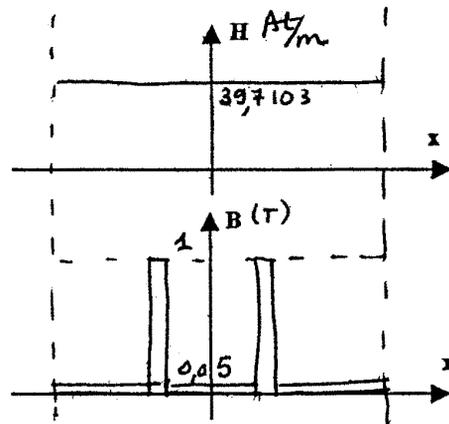
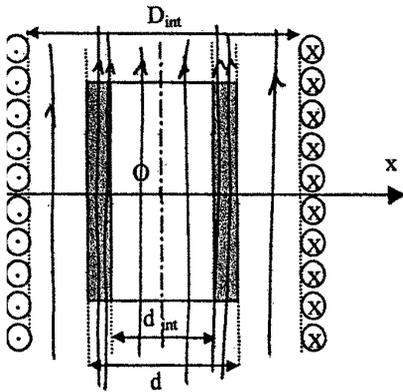
DOCUMENTS REPONSE



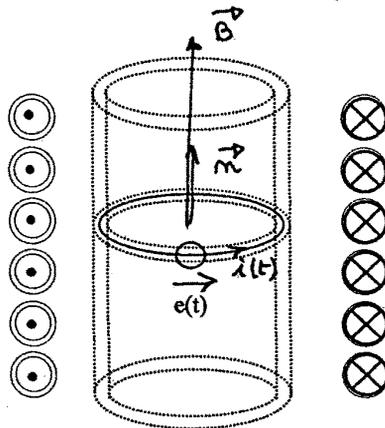
DOCUMENT REPONSE 1 (AI11)



DOCUMENT REPONSE 2 (AI12)



DOCUMENT REPONSE 3 (AI13)



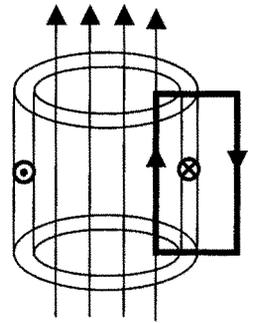
DOCUMENT REPONSE 4 (AI14)

Al14e $P = R_c I_c^2 = 4,2 \text{ W}$. Pour augmenter la puissance, il faut augmenter I et surtout augmenter ω .

Al14f On utilise les orientations précédemment définies pour le tube seul. $H_c h = I_c$. $H_c = 13,22 \cdot 10^3 \text{ A.m}^{-1}$ en valeur efficace.

En valeur maximale, $\hat{H}_c = 18,7 \cdot 10^3 \text{ At.m}^{-1}$

Si on compare au champ magnétique créé par l'inducteur (déjà calculé précédemment $39,7 \cdot 10^3 \text{ At.m}^{-1}$) on arrive à la conclusion que ce dernier n'est pas négligeable : l'hypothèse de départ n'est pas réaliste pour la fréquence adoptée et pour les fréquences supérieures.



Al2a Les lignes de champ étant parallèles à oz , $H_x = H_y = 0$. H_z ne dépend ni de z ni de y car la plaque de grandes dimensions conservent les mêmes propriétés par translation suivant z ou y . Par contre H_z dépend de x .

Al2b $\text{Rot } \vec{H} = \vec{J}$

$$\text{Rot } \vec{H} \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \vec{J} \begin{cases} J_x = 0 \\ J_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ J_z = 0 \end{cases}$$

Al2c Dans le milieu considéré $\vec{B} = \mu \vec{H}$ et $\frac{1}{\sigma} \text{Rot } \vec{J} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$$\text{Rot } \vec{J} \begin{cases} \frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y} = \frac{\partial J_y}{\partial x} \end{cases} \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial J_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad \text{d'où l'on tire} \quad \boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \mu \sigma \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 J_y}{\partial x^2} = \mu \sigma \frac{\partial J_y}{\partial t}}$$

Al2d $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = j\omega \vec{H}$ et $\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = j\omega \vec{J}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = j\mu\sigma\omega \vec{H} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 J_y}{\partial x^2} = j\mu\sigma\omega \vec{J}}$$

Al2e En posant $\underline{a}^2 = j\mu\sigma\omega$ $\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} = \underline{a}^2 \vec{H}$ et $\frac{\partial^2 \vec{J}}{\partial x^2} = \underline{a}^2 \vec{J}$

D'où $\vec{H} = A e^{ax} + B e^{-ax}$ et $\vec{J} = C e^{ax} + B e^{-ax}$

En $x = 0$ $\underline{H} = \underline{H}_0$ et quand $x \rightarrow \infty$, \underline{H} et \underline{J} ne peuvent prendre des valeurs infinies, donc A et $C = 0$. $\underline{H} = \underline{H}_0 e^{-ax}$ et $\underline{J} = \underline{J}_0 e^{-ax}$

AI2f $\underline{a}^2 = j\mu\sigma\omega$ donc

$$\underline{a} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu\sigma\omega} = \frac{1+j}{p}, \quad p = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu\sigma\omega}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{20.4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^6 \cdot 2\pi \cdot 2,82 \cdot 10^3}} = 2,12 \text{ mm}$$

AI2g $\underline{H} = \underline{H}_0 e^{-\frac{x}{p}}$ et $\underline{J} = \underline{J}_0 e^{-\frac{x}{p}}$ ont mêmes évolutions exponentielles.

AI2h On reprend $\underline{J} = -\frac{\partial \underline{H}}{\partial x} \Rightarrow -\frac{\partial \underline{H}}{\partial x} = \underline{a} \underline{H}_0 e^{-ax} = \underline{J}_0 e^{-ax}$ d'où $\underline{J}_0 = \underline{a} \underline{H}_0$

$$\underline{J}_0 = \frac{1+j}{p} \underline{H}_0 \text{ donc } \underline{J}_0 \text{ et } \underline{H}_0 \text{ sont déphasés de } \frac{\pi}{4}.$$

AI2i $\underline{J} = \underline{J}_0 \exp\left(\frac{1+j}{p}x\right)$ donc pour $\frac{x}{p} = (2k+1)\pi$ les points sont en opposition de phase, soit $x = (2k+1)p\pi$; pour $k = 0$ $x = 6,66 \text{ mm}$.

AI3a Mêmes symétries $H_x = H_y = 0$ $H_z(x)$.

AI3b Même étude que précédemment ; seules changent les conditions aux limites.

$$J_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

AI3c On obtient les mêmes équations $\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \mu\sigma \frac{\partial H_z}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 J_y}{\partial x^2} = \mu\sigma \frac{\partial J_y}{\partial t}$

AI3d Idem $\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial x^2} = \underline{a}^2 \underline{H}$ et $\frac{\partial^2 \underline{J}}{\partial x^2} = \underline{a}^2 \underline{J}$

AI3e Les solutions sont les mêmes : $\underline{H} = A e^{ax} + B e^{-ax}$ et $\underline{J} = -\frac{\partial \underline{H}}{\partial x} = -aA e^{ax} + aB e^{-ax}$

Exprimons les conditions aux limites :

$$\underline{H}(d) = A e^{ad} + B e^{-ad} = \underline{H}_0 \text{ et } \underline{H}(-d) = A e^{-ad} + B e^{ad} = \underline{H}_0$$

$$A = B = \underline{H}_0 \frac{e^{-ad} - e^{ad}}{e^{-2ad} - e^{2ad}} = \underline{H}_0 \frac{shad}{sh2ad} = \frac{\underline{H}_0}{chad}$$

$$\underline{H}(x) = \underline{H}_0 \frac{shad}{sh2ad} (e^{ax} + e^{-ax}) = \underline{H}_0 \frac{shad}{sh2ad} 2chax$$

$$\underline{H}(x) = \underline{H}_0 \frac{chax}{chad}$$

$$\underline{J}(x) = -a \underline{H}_0 \frac{shad}{sh2ad} shax$$

$$\underline{J}(x) = -a \underline{H}_0 \frac{shax}{chad}$$

AI3f $\underline{J}(d) = \underline{J}_0 = -a \underline{H}_0 thad$ pour $x = -d$ on trouverait $\underline{J}(-d) = a \underline{H}_0 thad$
 $\underline{J}(-d)$ et $\underline{J}(d)$ sont opposés.

AI3g voir document réponse.

AI41a $H_r = 0$ et $H_\theta = 0$. Solénoïde très long et symétrie. H_z dépend de r .

Al41b $\overline{\text{Rot}} \vec{H} = \vec{J}$ $\overline{\text{Rot}} \vec{H} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial H_z}{\partial r} \end{cases}$ $\vec{J} \begin{cases} J_z = 0 \\ J_r = 0 \\ J_\theta = -\frac{\partial H_z}{\partial r} \end{cases}$ $J_\theta = -\frac{\partial H_z}{\partial r}$

Al41c $\overline{\text{Rot}} \overline{\text{Rot}} \vec{H} = \overline{\text{Rot}} \vec{J} = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\overline{\text{grad}} (\text{div } \vec{H}) - \Delta \vec{H} = -\sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

Or $\text{div } \vec{B} = \text{div } \mu \vec{H} = 0$ d'où $\Delta \vec{H} = \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

Idem pour \vec{J} avec $\text{div } \vec{J} = \rho_c = 0 \Rightarrow \Delta \vec{J} = \sigma \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$

$\Delta \vec{H} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$ et $\Delta \vec{J} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial J_\theta}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} J_\theta = \frac{\partial^2 J_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} J_\theta$$

$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} = \sigma \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$

$\frac{\partial^2 J_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} J_\theta = \sigma \mu \frac{\partial J_\theta}{\partial t}$

Al41d Avec $\frac{\partial H}{\partial t} = j\omega \underline{H}$ et $\frac{\partial J}{\partial t} = j\omega \underline{J}$

Il vient : $\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} = j\sigma\mu\omega \underline{H}$ et $\frac{\partial^2 J}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J}{\partial r} - \frac{1}{r^2} J = j\sigma\mu\omega \underline{J}$

Al41e $\underline{x} = r \sqrt{-j\sigma\mu\omega} = j^{3/2} r \frac{\sqrt{2}}{\rho}$ $dx = j^{3/2} \frac{\sqrt{2}}{\rho} dr$ et $dx^2 = -j \frac{2}{\rho^2} dr^2$

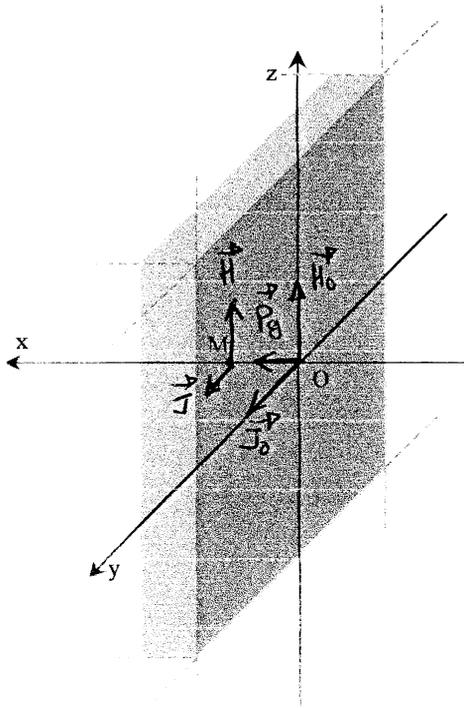
$\frac{d^2 J}{dr^2} = \frac{d^2 J}{dx^2} \frac{dx^2}{dr^2} = \frac{d^2 J}{dx^2} \left(-\frac{2j}{\rho^2} \right)$ et $\frac{dJ}{dr} = \frac{dJ}{dx} \frac{dx}{dr} = \frac{dJ}{dx} j^{3/2} \frac{\sqrt{2}}{\rho}$

d'où l'on tire : $\frac{d^2 J}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) J = 0$ et $\frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dH}{dx} + H = 0$

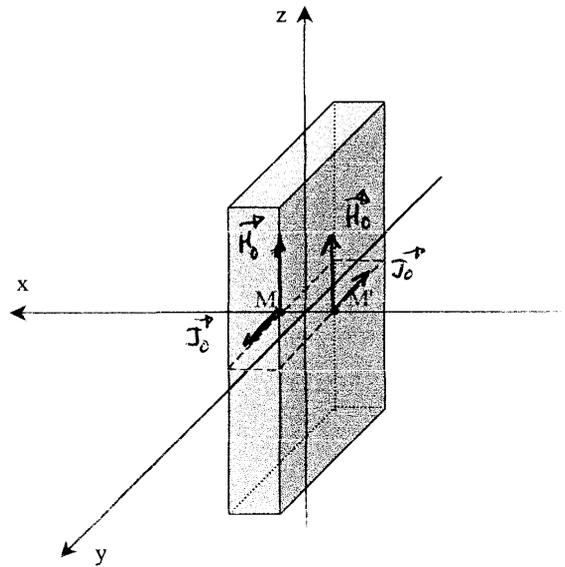
Ces équations ont pour solutions les équations de Kelvin (famille de fonction de Bessel) d'ordre 0 et 1.

x	r	J/J ₀ = M ₁ /M _{1(d)}	H/H ₀ = M ₀ /M _{0(d)}
0	0	0	0,0067
5	7,5	0,04	0,040
6	9,0	0,075	0,077
8	12	0,27	0,27
9	13,5	0,52	0,52
10	15	1,0	1,0

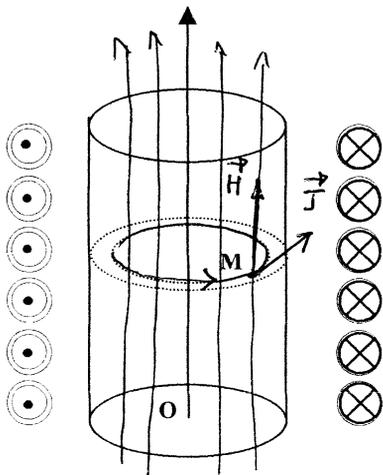
Al41g lorsque $d \gg \rho$, la densité de courant évolue comme si on avait une plaque infinie avec une loi proche de l'exponentielle.



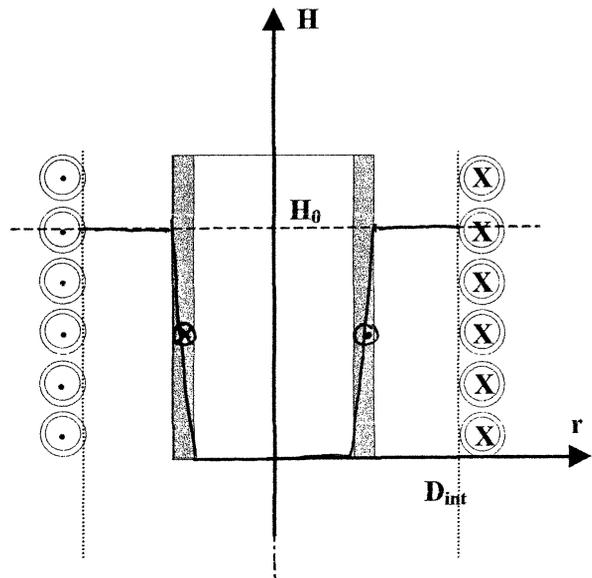
DOCUMENT REPONSE 5 (AI2b ; AII1a)



DOCUMENT REPONSE 6 (AI3g)



DOCUMENT REPONSE 7 (AI41b)

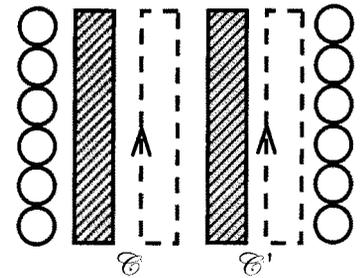


DOCUMENT REPONSE 8 (AI42c)

AI42a $f = 24 \text{ kHz}$ $\rho = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma\mu\omega}} = 0,726 \text{ mm.}$

AI42b L'épaisseur de peau étant très inférieure à l'épaisseur du tube – 3 mm – les courants induits restent localisés à la surface ; les équations aux limites sont les mêmes que pour une plaque infinie..

AI42c On considère que l'épaisseur est un peu plus faible que pour 5τ . H est nul à l'intérieur du cylindre. On



peut appliquer sur le contour \mathcal{C} et \mathcal{C}' $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$. Donc $\vec{H} = Cte$. Voir document réponse.

All1a Voir document réponse.

$$P+j Q = \frac{1}{2} \iint_S \left(\frac{\vec{J}_0}{\sigma} \wedge \vec{H}_0^* \right) \cdot d\vec{S} \quad d\vec{S} \text{ est orienté vers l'intérieur de la}$$

plaque. \vec{J}_0 et \vec{H}_0 sont perpendiculaires et de même valeur sur toute les

$$\text{surface S. } P+j Q = \frac{1}{2} \left(\frac{J_0}{\sigma} H_0^* \right) S.$$

All1b Or à la question All1h, on a montré que $J_0 = aH_0$,

$$P+j Q = \frac{1}{2} \frac{a}{\sigma} H_0 H_0^* S = \frac{1}{2} \frac{a}{\sigma} H_0^2 S$$

$$P+j Q = \frac{1+j}{\sigma p} \frac{H_0^2}{2} S = \frac{1+j}{\sigma \sqrt{2}} \sqrt{\mu\sigma\omega} \frac{H_0^2}{2} S \quad \text{d'où}$$

$$P = Q = \frac{1}{\sigma p} \frac{H_0^2}{2} S = \frac{H_0^2}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} S$$

All1c La puissance fournie à la charge dépend de :

- H_0^2 imposée par le courant de l'inducteur ;
- La fréquence et augmente avec elle ;
- La perméabilité : on chauffe plus facilement des matériaux ferromagnétiques.
- La conductivité : on chauffe plus facilement des matériaux résistants (σ faible)

All1d La puissance P totale a été calculée précédemment et la puissance dissipée dans l'épaisseur de peau est :

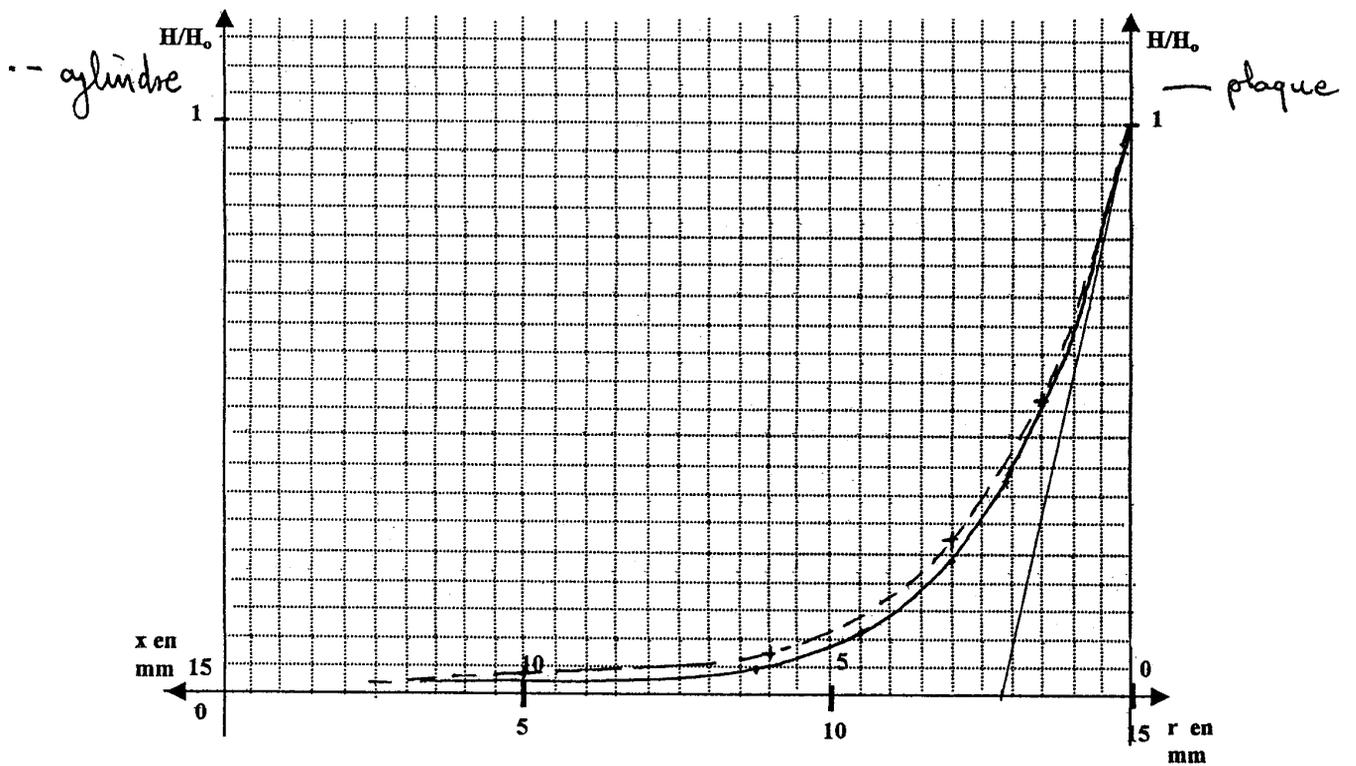
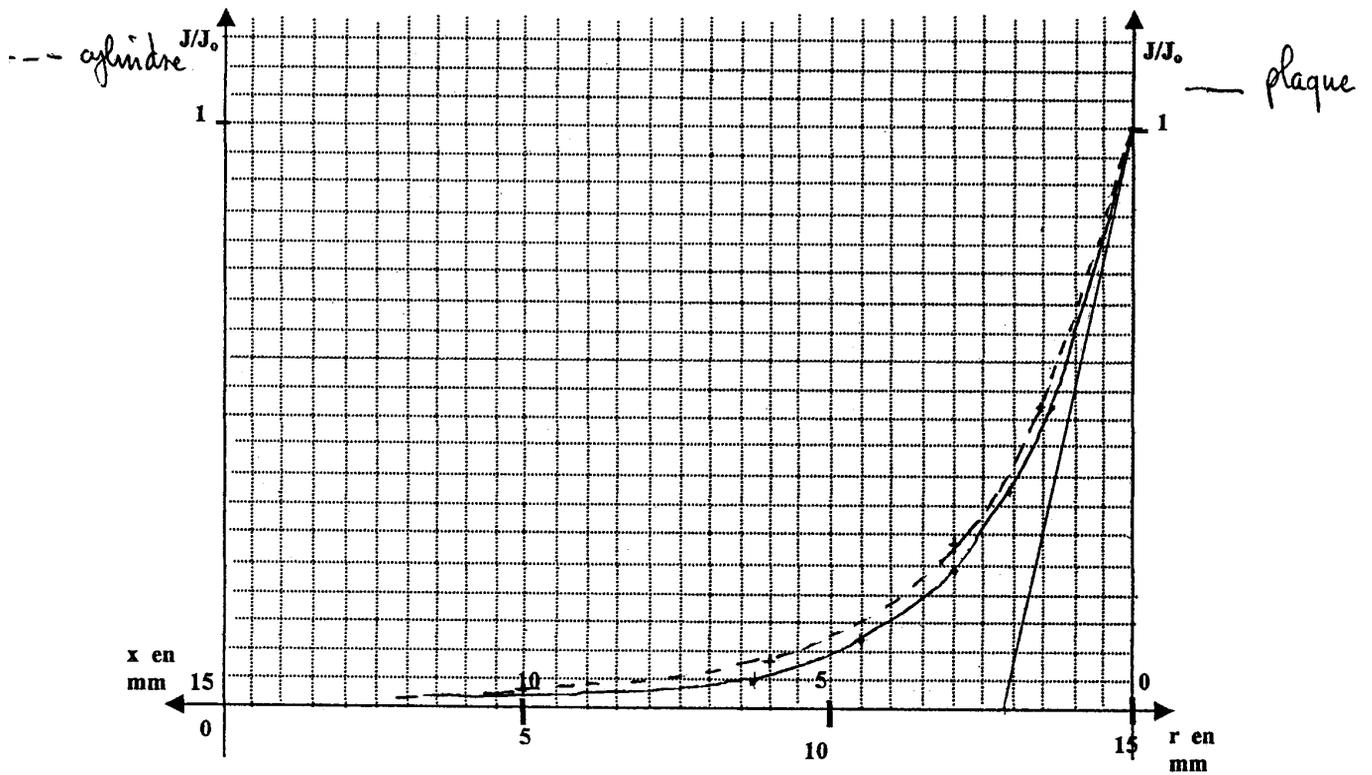
$$P_p = \int_0^p \frac{1}{\sigma} \frac{I}{L dx} J^2(x) (L dx)^2 = \int_0^p \frac{1}{\sigma} S J^2(x) dx = \frac{S}{\sigma} \int_0^p J^2(x) dx = \frac{S}{\sigma} \int_0^p J_0^2 e^{-\frac{2x}{p}} dx$$

$$P_p = \frac{S J_0^2 p}{\sigma} (1 - e^{-2}) = \frac{S H_0^2}{2p\sigma} (1 - e^{-2}) = 86,5\% P_{\text{totale}}$$

$$P_p = 86,5\% P_{\text{totale}}$$

Si la fréquence est faible, l'épaisseur de peau est grande : le matériau est chauffé à cœur.

Si la fréquence est élevée, l'épaisseur de peau est faible : le matériau est chauffé en surface.



DOCUMENT REPONSE 9 (AI2g , AI41f)

AI2a $P+j Q = \frac{1}{2} \frac{J_0}{\sigma} H_0^* 2S$ pour le parallélépipède

$$P+j Q = \frac{H_0^2 S}{\sigma} \operatorname{th} \frac{ad}{p} = H_0^2 S \frac{1+j}{p\sigma} \operatorname{th}(1+j) \frac{d}{p}$$

AI2b $P+j Q = H_0^2 S \frac{1+j}{p\sigma} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2d}{p}\right) + j \sin\left(\frac{2d}{p}\right)}{\cos\left(\frac{2d}{p}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{2d}{p}\right)}$ d'où

$$P = \frac{H_0^2 S}{p\sigma} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2d}{p}\right) - \sin\left(\frac{2d}{p}\right)}{\cos\left(\frac{2d}{p}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{2d}{p}\right)} \text{ et } Q = \frac{H_0^2 S}{p\sigma} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2d}{p}\right) + \sin\left(\frac{2d}{p}\right)}{\cos\left(\frac{2d}{p}\right) + \operatorname{ch}\left(\frac{2d}{p}\right)}$$

AI2c Lorsque d/p devient très grand on retrouve les valeurs correspondant à la plaque de dimensions infinies. La situation où Q est supérieur à P n'est pas avantageuse pour le dimensionnement de la source : il faut faire "trop de champ magnétique" pour la puissance transmise. Pour obtenir de fortes puissances, il faut que le rapport d/p soit supérieur à 3 à H_0 donné.

AI3a Les commentaires sont les mêmes. K'_P tend plus lentement vers 1. On retrouve les résultats de la plaque infinie pour d/p très grand.

AI3b $p = 0,726 \text{ mm}$ $d/p = 41 \Rightarrow K'_P = K'_Q = 1.$

AI3c et $P = \frac{H_0^2 S}{2p\sigma} = \frac{H_0^2 \pi d h}{2p\sigma} \Rightarrow H_0^2 = \frac{2p\sigma}{\pi d h} P$ $H_0 = 39,2 \text{ At/m}$

B Modélisation de l'ensemble <<inducteur et charge>>

BI1a $p_c = 0,726 \text{ mm}$

$$R_c = \frac{\pi d}{p\sigma h} \quad R_c = 2,6 \text{ m}\Omega$$

BI1b $p_i = 0,423 \text{ mm}$

$$R_i = \frac{6\pi D^4}{\sigma_i (d_i^2 - (d_i - 2p_i)^2) \pi}$$

$$d_i = D - D_{\text{intérieur}} = 63,5 - 57 = 6,5 \text{ mm}$$

$$d_i - 2p_i = 5,653 \text{ mm}$$

$$R_i = 2,52 \text{ m}\Omega$$

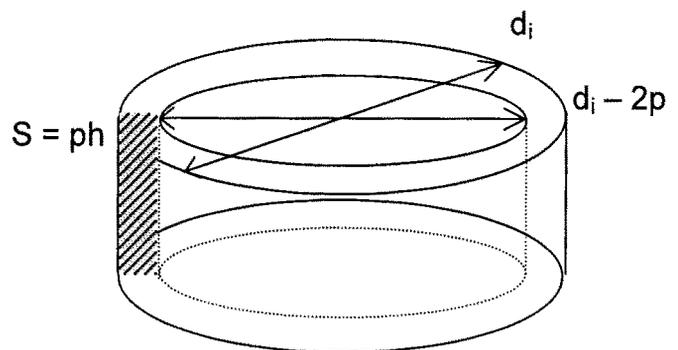
BI1c $L_i = \frac{1}{R_i} \frac{N^2}{K_i}$

$$K_i = 1 + 0,44 \frac{57}{50} = 1,502$$

$$N = 6$$

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_i} = \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{ent}}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_c} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{int}}}$$

$$\mathfrak{R}_{\text{ent}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{4h}{(D_{\text{int}}^2 - d^2)\pi} = 2,15 \cdot 10^7 \text{ H}^{-1}$$



$$\mathfrak{R}_c = \frac{1}{\mu_0} \frac{4h}{(d^2 - d_{in}^2)\pi} = 7,82 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}_{int} = \frac{1}{\mu_0} \frac{4h}{d_{int}^2\pi} = 8,79 \cdot 10^7 \text{ H}^{-1}$$

$$\mathfrak{R}_i = 5,38 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1} \quad \text{et} \quad L_i = 4,45 \mu\text{H}.$$

$$\text{BI1d} \quad L_c = \frac{1}{\mathfrak{R}_i} \frac{N^2}{K_i} \quad N = 1 \quad K_i = 1,21 \quad \frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{\mathfrak{R}_c} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{int}}$$

$$\mathfrak{R} = 7,18 \cdot 10^6 \text{ H}^{-1} \quad \text{et} \quad L_c = 0,115 \mu\text{H}.$$

$$\text{BI2a} \quad \underline{V}_i = R_i \underline{i}_i + jL_i \omega \underline{i}_i - jM\omega \underline{i}_c \quad \underline{i}_c = \frac{jM\omega}{R_c + jL_c\omega} \underline{i}_i$$

$$0 = -R_c \underline{i}_c + jL_c \omega \underline{i}_c + jM\omega \underline{i}_i$$

$$\text{BI2b} \quad \underline{V}_i = \left(R_i + \frac{(M\omega)^2 R_c}{R_c^2 + (L_c\omega)^2} \right) \underline{i}_i + j \left(L_i \omega - \frac{ML_c\omega^3}{R_c^2 + (L_c\omega)^2} \right) \underline{i}_i$$

$$\text{D'où} \quad \underline{Z}_e = \left(R_i + \frac{(M\omega)^2 R_c}{R_c^2 + (L_c\omega)^2} \right) + j \left(L_i \omega - \frac{ML_c\omega^3}{R_c^2 + (L_c\omega)^2} \right)$$

$$M = 0,544 \mu\text{H} \quad \frac{(M\omega)}{\sqrt{R_c^2 + (L_c\omega)^2}} = 4,68 \text{ "rapport de transformation".}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_e = 59,5 \text{ m}\Omega \quad L_e = 1,93 \mu\text{H}} \quad |Z_e| = 297 \text{ m}\Omega$$

$$\text{BI2d} \quad \underline{i}_i = \frac{V_i}{\sqrt{R_c^2 + (L_c\omega)^2}} = 296 \text{ A} \quad \underline{i}_c = 1387 \text{ A}$$

$$\text{BI2e} \quad \eta = \frac{R_c \underline{i}_c^2}{R_c \underline{i}_c^2 + R_i \underline{i}_i^2} = \frac{R_c}{R_c + R_i \frac{\underline{i}_i^2}{\underline{i}_c^2}} = 0,957$$

$$\text{BI2f} \quad P = R_c \underline{i}_c^2 = 5 \text{ kW} \quad S = V_i \underline{i}_i = 26 \text{ kVA} \quad \cos\varphi = \frac{R_e}{Z_e} = 0,2$$

Cette puissance apparente est très élevée (très mauvais $\cos\varphi$). On ne s'étonne pas car il faut créer un fort champ magnétique ; il y a nécessité absolue de compenser l'énergie réactive.

BI2g La maille de la charge n'existe plus. Il reste la bobine à air formée par le solénoïde sans circuit magnétique. On avait :

$$R_i \text{ inchangée} \quad \mathfrak{R}_i = \frac{1}{\mu_0} \frac{h}{\pi \frac{D_{int}^2}{4}} = 1,56 \cdot 10^7 \text{ H}^{-1} \quad L_i = 1,54 \mu\text{H}$$

$$Z_e = Z_i = \sqrt{R_i^2 + (L_i\omega)^2} = 232 \text{ m}\Omega$$

BI11a Solénoïde infiniment long : $H_0 h = N \underline{i}_i \sqrt{2}$

$$\boxed{H_0 = \frac{N}{h} \sqrt{2} \underline{i}_i}$$

BII1b Au centre de la pièce à chauffer $\vec{H} = \vec{0}$ sur la courbe \mathcal{C} .

$$H_0 h = \sqrt{2} I_c$$

BII1c $P = \frac{H_0^2 S}{2\rho\sigma}$ avec $H_0^2 = \left(\frac{N\sqrt{2}I_i}{h}\right)^2$

$$P = \frac{\pi d N^2 I_i^2}{\rho\sigma h} \Rightarrow R(\omega) = \frac{\pi d N^2}{\rho\sigma h}$$

$$R(\omega) = \frac{\pi d N^2}{h\sqrt{2}} \sqrt{\sigma\mu\omega} \quad \text{de même} \quad X(\omega) = \frac{\pi d N^2}{\sigma h\sqrt{2}} \sqrt{\sigma\mu\omega}$$

$$R(\omega) = X(\omega) = \frac{\pi d N^2}{\sigma h\sqrt{2}} \sqrt{\sigma\mu\omega}$$

BII1d $Z(\omega) = \frac{\pi d N^2(1+j)}{\sigma h\sqrt{2}} \sqrt{\sigma\mu\omega} = \frac{\pi d N^2}{\sigma h\sqrt{2}} \sqrt{j\sigma\mu\omega}$, posons $\omega_0 = \frac{1}{\mu\sigma\left(\frac{d}{2}\right)^2}$

$$Z(\omega) = \frac{2\pi N^2}{\sigma h} \sqrt{j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

donc

$$R_0 = \frac{2\pi N^2}{\sigma h}$$

BII1e $\omega_0 = 177 \text{ rd/s}$
 $R_0 = 4,52 \text{ m}\Omega$
 L'ordre du système ainsi modélisé est $\frac{1}{2}$; pente à $+10 \text{ dB/décade}$ et argument de $\pi/4$.

BII1f $f = 24 \text{ kHz}$ $R = X = 93,5 \text{ m}\Omega$
 $L = 0,62 \text{ }\mu\text{H}$

BII1g $Q_{\text{ent}} = \pi f \mu_0 H_0^2 V_e = \pi f \mu_0 \frac{n^2 2I_i^2}{h^2} V_e$

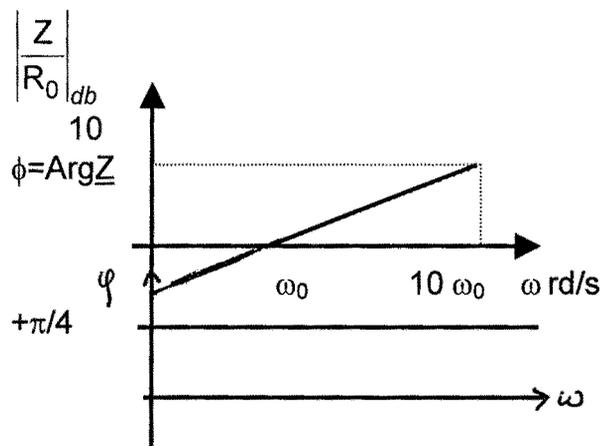
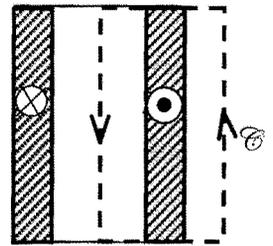
$$L_e \omega = \frac{Q_{\text{ent}}}{I_i^2} = 2\pi f \mu_0 \frac{1}{h^2} V_e = 2\pi f \mu_0 \frac{n^2}{h} \pi \frac{(D_{\text{int}}^2 - d^2)}{4} = 252 \text{ m}\Omega \quad L_e = 1,67 \text{ }\mu\text{H}$$

$$R_e = R + R_i = 96 \text{ m}\Omega \quad X_e = X + L_e \omega = 345 \text{ m}\Omega$$

BII1h A la question précédente on trouvait ($R_e = 59,5 \text{ m}\Omega$) $L_e = 1,93 \text{ }\mu\text{H}$
 Et donc $X_e = 291 \text{ m}\Omega$.

Dans le second cas, on considère le solénoïde infiniment long. Ceci revient à avoir un rapport de transformation $1/6$. Or dans l'étude des circuits couplés, on a plutôt $1/4,68$ ce qui explique la résistance plus élevée dans le second cas. Pour la réactance, elle est plus élevée dans le second cas, (solénoïde infini). La relation de Nagaoka essaye de tenir compte de la longueur du solénoïde.

BII2a $H_0 = n I_i \sqrt{2}$



$$\text{BII2b } \underline{Z} = \frac{P}{I_i^2} \quad \underline{Z} = \frac{P}{I_i^2} = \frac{n^2 2S}{\sigma} \underline{a} \text{ thad} \quad \underline{a} = \frac{1+j}{P}$$

BII2c pour ω faible, P grand, $\underline{a} \rightarrow 0$ $u \rightarrow 0$

$$\text{thad} \approx \frac{ad}{\sqrt{1+a^2d^2}} \quad \underline{Z} = \frac{n^2 2S (1+j)}{\sigma P} \frac{(1+j) \frac{d}{P}}{\sqrt{1+j\sigma\mu d^2 \omega}} = \frac{n^2 2S}{\sigma} \frac{j\sigma\mu\omega d}{\sqrt{1+j\sigma\mu\omega d^2}}$$

$$\text{d'où l'on tire : } \underline{Z} = j \frac{n^2 2S\mu\omega d}{\sqrt{1+j\sigma\mu\omega d^2}} = j \frac{N^2}{L^2} \frac{2L/\mu\omega d}{\sqrt{1+j\sigma\mu\omega d^2}} = j \frac{N^2}{L} \frac{2/\mu\omega d}{\sqrt{1+j\sigma\mu\omega d^2}}$$

$$\underline{Z} = j \frac{L_0 \omega}{\sqrt{1+j \frac{\omega}{\omega_0}}} \quad \text{avec } L_0 = \frac{N^2 2/\mu d}{L} \quad \text{et } \omega_0 = \frac{1}{\sigma\mu d^2}$$

BII2d A l'ordre 1, $u \rightarrow 0$ soit $\omega \rightarrow 0$

th $u \approx u$

$$\underline{Z} \approx \frac{n^2 2S}{\sigma} \underline{a}^2 d = n^2 j \omega \mu d = j \frac{N^2 2/\mu\omega d}{L} \quad \underline{Z} \approx jL_0\omega$$

L_0 est l'inductance en courant continu de la pièce

$$L_0 = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} = N^2 \mu \frac{2/d}{L}$$

BII2e Quand la fréquence devient très grande $p \rightarrow 0$ $u \rightarrow \infty$ et th $\underline{ad} \rightarrow 1$

$$\underline{Z}_e \approx \frac{n^2 2S}{\sigma} \underline{a} = \frac{n^2 2S}{\sigma} \sqrt{j\sigma\mu\omega} = \frac{n^2 2S}{\sigma d} \sqrt{j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sigma\mu d^2}$$

On retrouve le cas de la plaque infinie avec deux surfaces utiles.

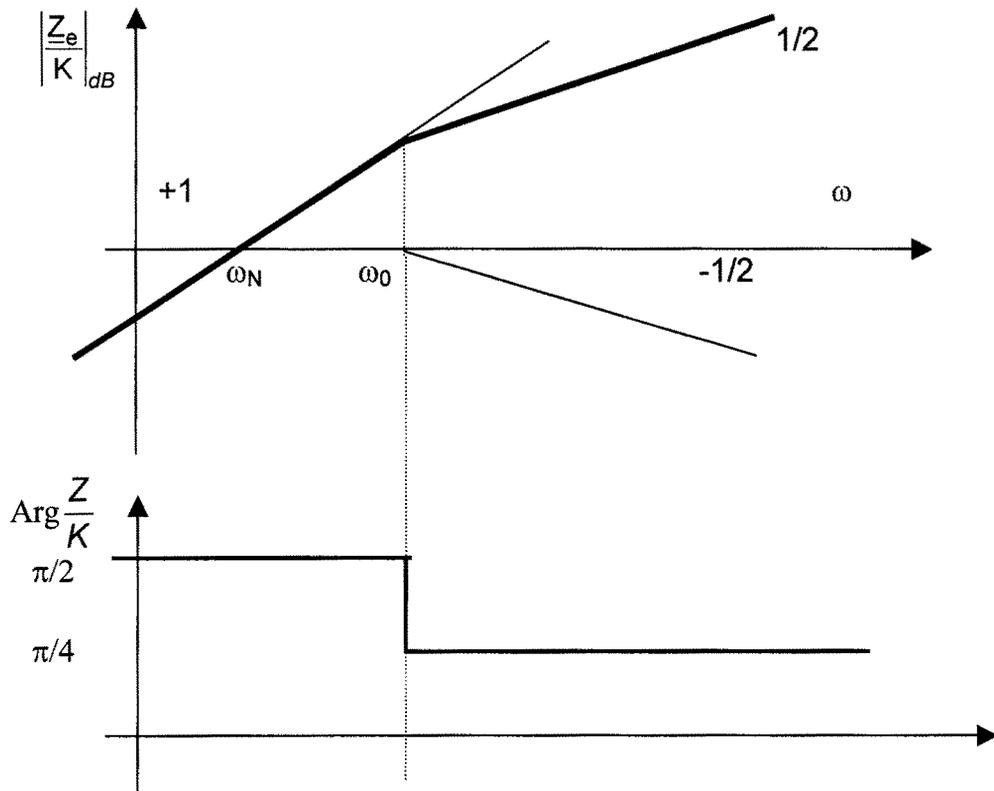
$$R_0 = \frac{N^2 2l}{L\sigma d} \quad \text{et } \omega_0 = \frac{1}{\sigma\mu d^2}$$

C'est la résistance en continu du parallélogramme

$$R_0 = \rho \frac{N^2 2l}{Ld}$$

$$\text{BII2f } K = \frac{N^2 2l}{L\sigma} \quad \text{et } L_0 = \frac{N^2 2dl}{L} \mu \Rightarrow \frac{\underline{Z}}{K} = j d \sigma \mu \frac{\omega}{\sqrt{1+j \frac{\omega}{\omega_0}}} \quad \text{avec } d\sigma\mu = 0,377$$

$$\omega_0 = 177 \text{ rd/s ; à } 2,65 \text{ rd/s } \left| j \frac{\omega}{\omega_N} \right| \text{ passe par 0dB}$$



BII2g La courbe réelle reste très proche du modèle analytique, c'est une bonne approximation.

Quand la fréquence est très faible la pièce se comporte comme une inductance, L_0 étant l'inductance en continu du parallépipède.

Quand la fréquence est élevée on retrouve les résultats obtenus pour la plaque où pour tout système pour lequel $p \ll d$, ce qui en fait est le cas du chauffage par induction car pour avoir de grandes puissances transmises, on travaille à f élevées.

BII2h Le système peut être modélisé par un système d'ordre $\frac{1}{2}$.

BII2i $\underline{H} = \underline{H}_0 e^{-ax}$

$$\frac{\partial \underline{H}}{\partial x} = -a \underline{H}_0 e^{-ax} = -a \underline{H}$$

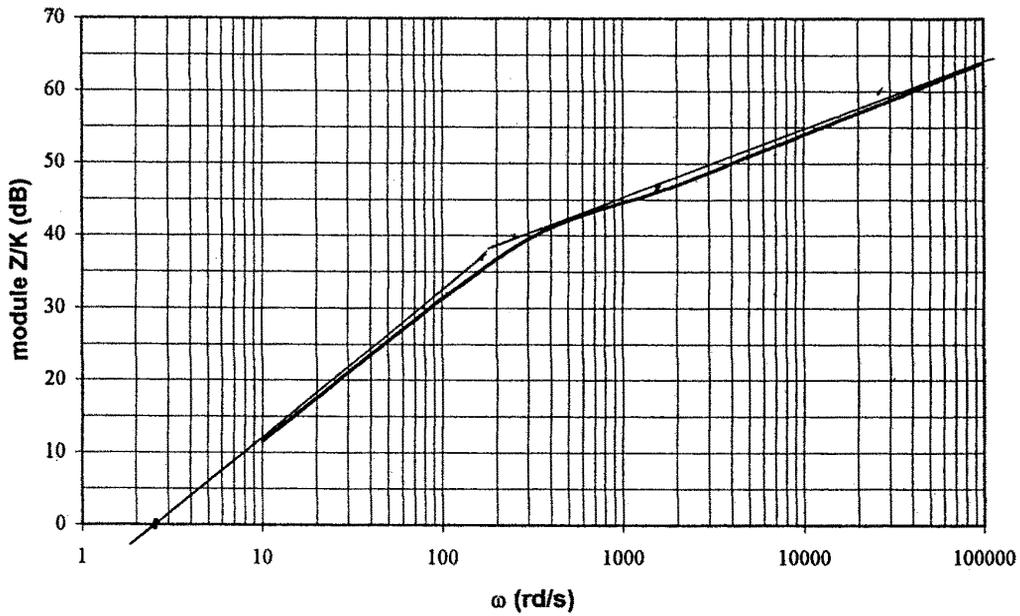
$$\frac{\partial \underline{H}}{\partial x} = -\sqrt{j\sigma\mu\omega} \underline{H} = -\sqrt{j\omega} \sqrt{\sigma\mu} \underline{H}$$

$$\frac{\partial \underline{H}}{\partial x} = -\sqrt{\sigma\mu} p^{1/2} \underline{H}$$

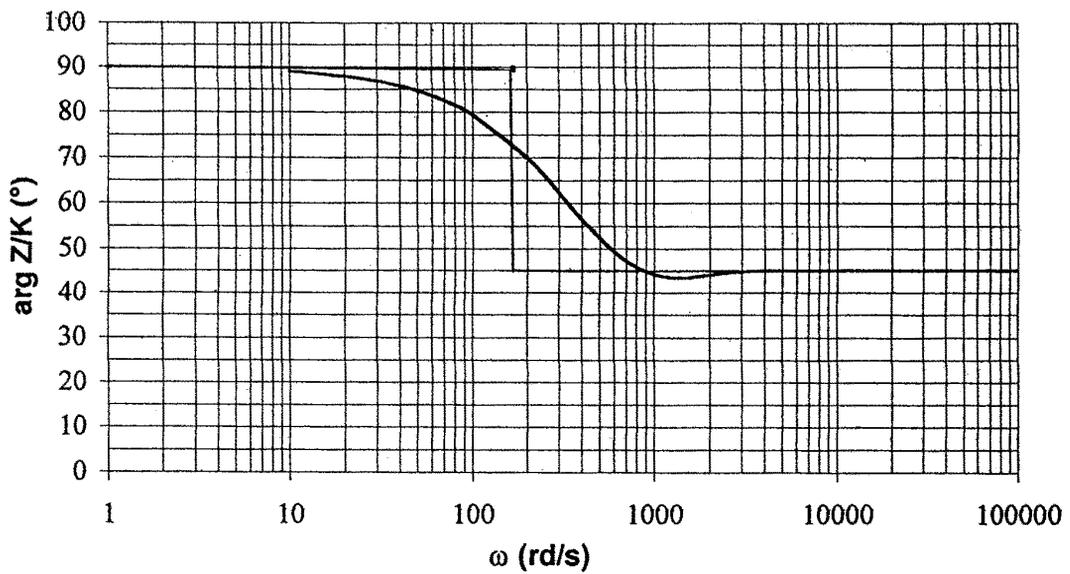
p : variable de Laplace.

$$\boxed{\frac{\partial \underline{H}(x,t)}{\partial x} = -\sqrt{\sigma\mu} \frac{\partial \underline{H}^{1/2}(x,t)}{\partial x}} \quad \text{L'ordre de la dérivation temporelle est } \frac{1}{2}.$$

Module de l'impédance



Argument de l'impédance



DOCUMENT REPONSE 10 (BI12)

C Alimentation de l'inducteur.

$$CI11 \quad Z_s = R_e + jL_e\omega - \frac{1}{jC\omega} = R_e \left(1 + j \frac{L_e\omega_0}{R_e} \frac{\omega}{\omega_0} - j \frac{\omega_0}{R_e C \omega_0 \omega} \right)$$

$$Z_s = R_e \left(1 + jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) \quad Q_0 = \frac{L_e\omega_0}{R_e} = \frac{1}{R_e C \omega_0}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_e C}} = 15,3 \cdot 10^4 \text{ rad/s} \quad f_0 = 24,4 \text{ kHz} \quad Q_0 = \frac{L_e\omega_0}{R_e} = 5,33$$

CI12a La puissance est maximale lorsque I_i est maximal car $P = R_e I_i^2$ et I_i est maximal lorsque $\omega = \omega_0$. Soit $f_0 = 24,4 \text{ kHz}$, alors $\underline{U} = R_e I_i$.

$$CI12b \quad P = 5 \text{ kW} \quad I_i = \sqrt{\frac{P}{R_e}} = \sqrt{\frac{5000}{61,3 \cdot 10^{-3}}} = 285 \text{ A}$$

$$CI12c \quad U = R_e I_i = 17,5 \text{ V} \quad S = UI = 5 \text{ kVA}$$

Car à la résonance $\cos \varphi = 1$; en utilisant un circuit résonnant on diminue la puissance apparente de la source nécessaire pour une même puissance dissipée dans R_e .

$$CI12d \quad U_i = \sqrt{R_e^2 + (L_e\omega_0)^2} I_i \quad \text{et} \quad U_c = \frac{U}{R_e C \omega_0} = Q_0 U$$

$$U_i = \sqrt{\frac{R_e^2 + (L_e\omega_0)^2}{R_e^2}} U = \sqrt{1 + Q_0^2} U$$

$$U_c = 93,2 \text{ V} \quad U_i = 94,8 \text{ V}$$

CI21 L'impédance de ce circuit a pour expression :

$$\underline{Z_p} = \frac{\frac{1}{jC\omega} (R_e + jL_e\omega)}{\frac{1}{jC\omega} + R_e + jL_e\omega} = \frac{(R_e + jL_e\omega)}{1 + jC\omega R_e - CL_e\omega^2}$$

$$\text{En utilisant } Q_0 = \frac{L_e\omega_0}{R_e} = \frac{1}{R_e C \omega_0} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\underline{Z_p} = \frac{R_e \left(1 + jQ_0 \frac{\omega}{\omega_0} \right)}{1 + j \frac{\omega}{Q_0 \omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$CI22 \quad I_i = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R_e + jL_e\omega} I = \frac{I}{1 + j \frac{\omega_0}{Q_0 \omega} - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}$$

$$\text{Pour information } I_c = \frac{R_e + jL_e\omega}{\frac{1}{jC\omega} + R_e + jL_e\omega} I = \frac{jC\omega R_e - L_e C \omega^2}{1 + jC\omega R_e - L_e C \omega^2} I = \frac{j \frac{\omega}{Q_0 \omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + j \frac{\omega}{Q_0 \omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} I$$

CI23a I étant imposé, I_i est maximal lorsque $\left| 1 + j \frac{\omega}{Q_0 \omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right|$ est minimal soit

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2)^2 + \frac{1}{Q_0^2} x^2 \right) = 0 \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \frac{dD}{dx} = -4x(1-x^2) + \frac{2x}{Q_0^2}$$

$$\frac{dD}{dx} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{2Q_0^2} \quad \boxed{\left(\frac{\omega_M}{\omega_0} \right)^2 = 1 - \frac{1}{2Q_0^2}}$$

$$\omega_M^2 = \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2Q_0^2} \Rightarrow f_M = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}} = 24,18 \text{ kHz}$$

$$\text{Pour cette fréquence } \underline{I_i} = \frac{I}{\frac{1}{2Q_0^2} + j \frac{1}{Q_0} \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}}} \Rightarrow \underline{I_i}^2 = \frac{I^2 4Q_0^4}{1 + 2(2Q_0^2 - 1)}$$

$$\underline{I_i}^2 = \frac{4Q_0^4}{4Q_0^2 - 1} I^2 \Rightarrow I_i = 5,35 I$$

CI23b Lorsque I_i est maximum, P est maximum. $\underline{I_i} = \sqrt{\frac{P}{R_c}} = 285 \text{ A}$ d'où $I = 53,4 \text{ A}$

CI23c $U_i = Z_{em} I \sqrt{R_e^2 + (L_e \omega)^2}$ $I_i = 0,329 \times 285,6 = 94 \text{ V}$

On peut calculer $|Z_{pm}| = R_c \times 28,78 = 1,765 \Omega$

$$\underline{Z_{pm}} = \frac{R_e \left(1 + j Q_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}} \right)}{\frac{1}{2Q_0^2} + j \frac{1}{Q_0} \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}}} \quad \text{tg Arg } \varphi_N = \sqrt{\frac{2Q_0^2 - 1}{2}}$$

$$\text{tg Arg } \varphi_D = 2 \sqrt{\frac{2Q_0^2 - 1}{2}}$$

$$\text{Arg } \underline{Z_m} = \text{Arg } \underline{N} - \text{Arg } \underline{D}$$

$$\varphi = -5,279^\circ \quad \cos \varphi = 0,996 \text{ AV}$$

CI24a Le facteur de puissance est égal à 1 quand la puissance réactive consommée est égale à 0. Dans ce cas, $Q_L = Q_C \Rightarrow U^2 C \omega_1 = L_e I_i^2 \omega_1$

$$I_i^2 = \frac{U^2}{R_e^2 + L_e \omega_1^2} \quad U^2 C \omega_1 = L_e \omega_1 \frac{U^2}{R_e^2 + L_e \omega_1^2} \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{1}{L_e C} - \frac{R_e^2}{L_e^2}$$

$$\boxed{\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{1}{Q_0^2}}$$

$$f_1 = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q_0^2}} = 24 \text{ kHz} \quad (\omega_1 = 15 \cdot 10^4 \text{ rd/s})$$

$$Z_{p1} = R_{p1}$$

L'impédance est réelle et telle que

$$P = \frac{U^2}{R_{e1}} = R_e^2 I_i^2 = \frac{R_e}{R_e^2 + (L_e \omega_1)^2} I^2 \quad \text{or } R_e^2 + (L_e \omega_1)^2 = \frac{L_e}{C} \quad P = \frac{R_e C}{L_e}$$

$$R_{e1} = \frac{L_e}{R_e C} = 1,74 \Omega$$

CI24b Dans ces conditions $U = R_{e1} I = 92,9V$ et $I_i = \frac{I}{\frac{1}{Q_0^2} + j \frac{1}{Q_0} \sqrt{1 - \frac{1}{Q_0^2}}} = \frac{Q_0^2}{1 + j \sqrt{Q_0^2 - 1}} I$

$$I_i^2 = Q_0^2 I^2 \Rightarrow I_i = Q_0 I = 284,4A$$

$$P = R_e I_i^2 = 4,96 \text{ kW} = S \text{ car } \cos \varphi = 1.$$

CI25a A la fréquence propre $\omega_0 = 15,3 \cdot 10^4 \text{ rd/s}$ et $f_0 = 24,4 \text{ kHz}$

$$\underline{Z}_0 = R_e \frac{1 + jQ_0}{j \frac{1}{Q_0}} = R_e Q_0^2 - jR_e Q_0 = Z_0 \quad \text{L'impédance est capacitive :}$$

$$\text{tg } \varphi_0 = -\frac{1}{Q_0} \Rightarrow \varphi_0 = -10,6^\circ \quad \cos \varphi_0 = 0,983 \quad \text{et } Z_0 = 1,77 \Omega$$

CI25b $U_0 = Z_0 I = 94,5 \text{ V}$ $S = U_0 I = 5,05 \text{ kVA}$ et $P = 4,96 \text{ kW}$.

CI26a $\underline{Z}_p = R_e \frac{(1 + jQ_0 x)}{1 - x^2 + j \frac{1}{Q_0}}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ $\underline{Z}_p^2 = R_e^2 Q_0^2 \frac{(1 + Q_0^2 x^2)}{x^2 + Q_0^2 (1 - x^2)^2}$

Cherchons l'extremum du module de cette impédance :

$$\frac{dZ_p^2}{dx} = R_e^2 Q_0^2 \frac{[x^2 + Q_0^2 (1 - x^2)^2] Q_0^2 2x - [2x - Q_0^2 4x(1 - x^2)] [1 + Q_0^2 x^2]}{D^2}$$

$$\frac{dZ_p^2}{dx} = 0 \Leftrightarrow Q_0^4 x^4 + 2Q_0^2 x^2 - (Q_0^4 + 2Q_0^2 - 1) = 0$$

avec pour seule solution :

$$X = x^2 = \frac{-1 + \sqrt{Q_0^4 + 2Q_0^2}}{Q_0^2} = -\frac{1}{Q_0^2} + \frac{1}{Q_0} \sqrt{Q_0^2 + 2} = 0,994$$

$$\frac{\omega_M}{\omega_0} = 0,9997 \quad \boxed{\omega_M \approx \omega_0}$$

Cette pulsation est pratiquement égale à la pulsation propre.

CI26b Alors $U_M \approx U_0$ et $S_M \approx S_0$ sont déjà calculées

$$U_M \approx 94,5V \quad \text{et} \quad S_M \approx 5,05 \text{ kVA}$$

CI37 Au vu de ces résultats on peut dire que les différentes pulsations ω_1 ω_r ω_M ω_0 , par ordre croissant, sont très peu différentes les unes des autres, dès que Q_0 est $\gg 1$.

CI28 Exprimons la puissance dissipée dans l'inducteur en fonction de f ou de ω :

$$P = R_e I_i^2 = \frac{R_e^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{1}{Q_0^2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} I_i^2 = \frac{174,1}{\left(1 - \left(\frac{f}{24,4 \cdot 10^3}\right)^2\right)^2 + 3,52 \cdot 10^{-2} \left(\frac{f}{24,4 \cdot 10^3}\right)^2}$$

f / kHz	20	22	23.5	24	24.2	25	27.5	30	35	
P / kW	1.32		2.74		4.96	4.99	4.41	1.48	0.553	0.146

Courbe : P présente un maximum vers 24,4 kHz $P_{\max} = 5 \text{ kW}$

CI3 Structure série : le courant nécessaire au transfert de puissance est important ; il y aura donc des chutes de tension possibles et un rayonnement électromagnétique important des conducteurs.

Cette structure convient lorsque la puissance qui détermine directement la valeur de I_i n'est pas trop élevée. D'autre part la tension U est généralement très inférieure à U_i ; U_i est élevée dès que la valeur de ω est élevée ; cette structure convient pour les hautes fréquences.

Structure parallèle : son avantage est de demander à la source un courant I beaucoup plus faible que celui qui passe dans l'inducteur. Ce courant étant déterminé par la puissance à transmettre, ce montage conviendra pour les fortes puissances. Par contre la source doit pouvoir délivrer une tension U importante, d'autant plus que la fréquence de travail est importante. On préférera cette structure pour les basses fréquences.

CII ONDULEUR RESONNANT

CII.1. la charge possède un condensateur en parallèle ; elle n'accepte donc pas les discontinuités de tension : vis à vis des commutations, elle se conduit comme une source de tension.

On ne peut connecter deux sources de tension de valeurs différentes, sans observer un courant de très forte valeur il faut donc que le convertisseur connecte une source de courant à la charge qui se conduit comme une source de tension (règle d'association des sources).

CII.2 voir document réponse = une cellule de commutation oriente le courant délivré par la source de courant deux points qui sont à des potentiels différents.

Cellule 1 $K_1 K_3$

Cellule 2 $K_2 K_4$

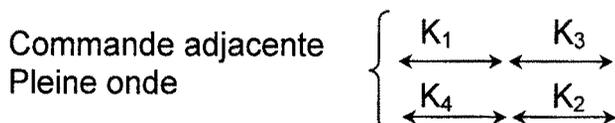
CII.3 On ne peut ouvrir le circuit dans lequel débite une source de courant (sans observer une surtension) donc, dans la cellule 1 au moins un interrupteur doit être fermé, K_1 ou K_3 fermé. Cellule 2 K_2 ou K_4 fermé.

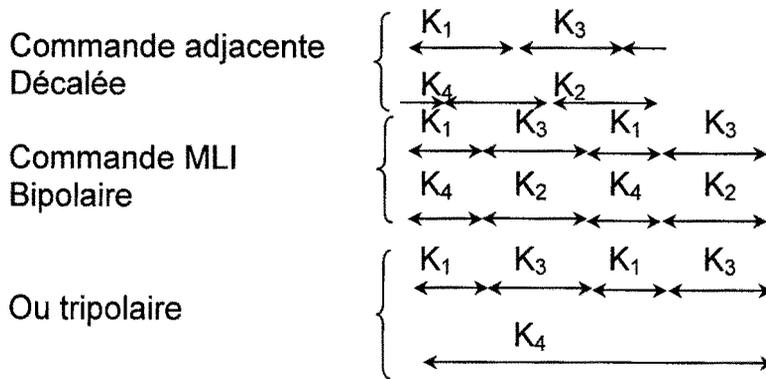
On ne peut court-circuiter une source de tension sans observer une intensité.

K_1 et K_3 ne peuvent être fermés simultanément.

K_2 et K_4 ne peuvent être fermés simultanément.

Par contre, on peut fermer K_1 et K_2 simultanément, ou K_3 et K_4 .





CII4a Si $f < f_0$
$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega}$$
 peu amorti $R \approx 0$

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega} = j(C\omega - \frac{1}{L\omega}) \quad L\omega < C\omega \Rightarrow Y \text{ négatif } X > 0$$

i en retard/ u_i (voir document réponse)

CII4b $V_{K1} = 0$ si K_1 passant ; $V_{K1} = -U_i$ si K_3 est passant

CII4c A l'état bloqué $V_{K1} > 0$ ou < 0

A l'état passant $i_{K1} > 0$.

CII4d A la mise en conduction, $V_{K1} < 0$ et $i > 0$ c'est une commutation spontanée.

Au blocage $V_{K1} > 0$ et $i > 0$ c'est une commutation commandée.

CII4e Tous les interrupteurs peuvent être réalisés par des composants bidirectionnels en tension, unidirectionnel en courant à blocage commandé et amorçage spontané.

CII5a Dans ce cas, i est en avance sur u_i

CII5b voir document réponse

CII5c idem

CII5d à la mise en conduction, $V_K > 0$ et $i_K > 0$ donc l'amorçage est commandé, au blocage $i_K > 0$ et $V_K < 0$: commutation spontanée.

CII5e On pourra dans ce cas utiliser des thyristors.

CII6 Dans ces convertisseurs, une des deux commutations est spontanée, donc pour celle-ci les pertes sont nulles. La commutation commandée d'un interrupteur provoque la commutation spontanée de l'autre A la résonance, les commutations se font au zéro de tension.

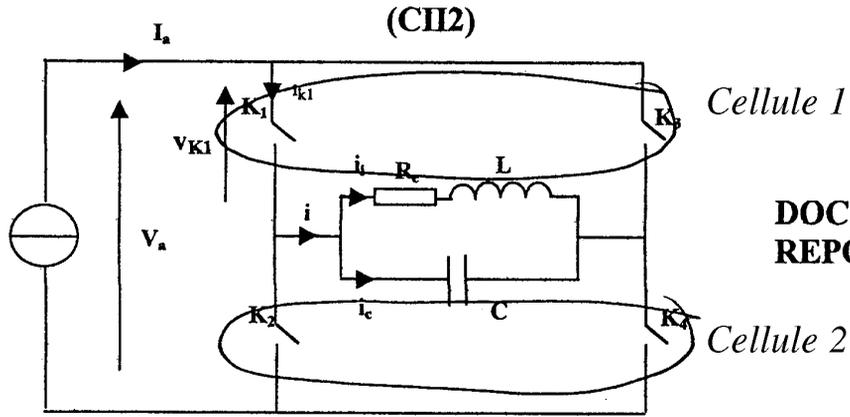
CII7a $i_{fa(t)} = \frac{4I_a}{\pi} \sin \omega t$ $I_{eff} = \frac{4I_a}{\pi\sqrt{2}}$ $I_a = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} I_{eff} = 59,4 \text{ A}$

CII7b A la résonance $R_{e1} = \frac{L_e}{R_e C} = \frac{2,13 \cdot 10^{-6}}{61,3 \cdot 10^{-3} \times 20 \cdot 10^{-6}} = 1,74 \Omega$

$U_{1f} = R_{e1} I_f = 1,74 \times 53 = 93,1 \text{ V}$ $\hat{U}_{1f} = \sqrt{2} U_{1f} = 131,6 \text{ V}$

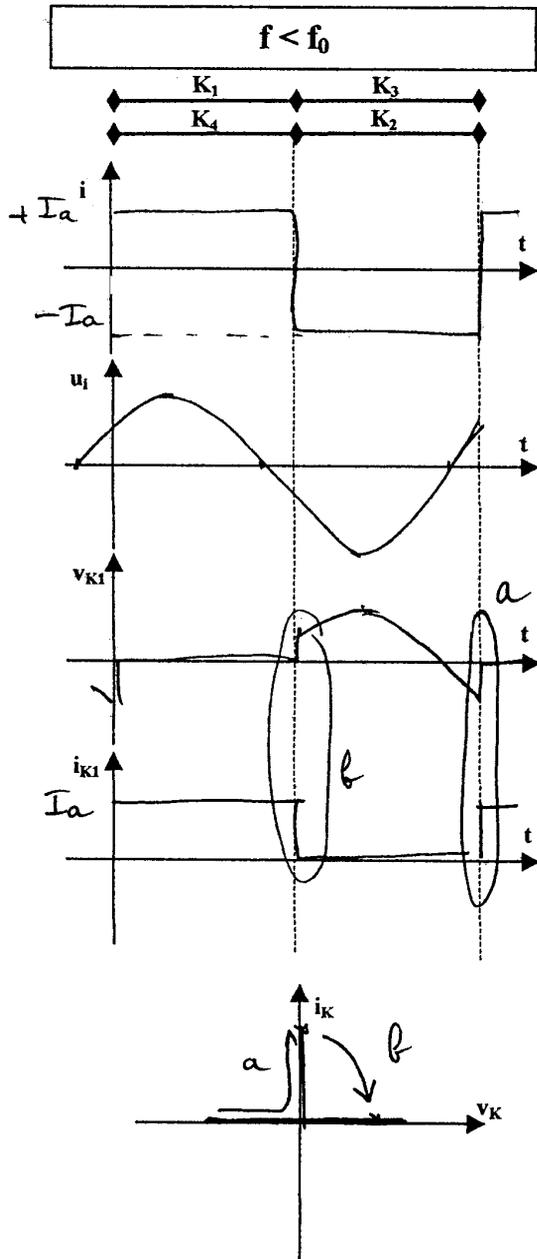
CII7c $\hat{I}_3 = 25,2 \text{ A}$ $\hat{I}_5 = 15,1 \text{ A}$ $\hat{U}_3 = |Z_3| \hat{I}_3$ et $\hat{U}_5 = |Z_5| \hat{I}_5$

Donc u est sinusoïdal.

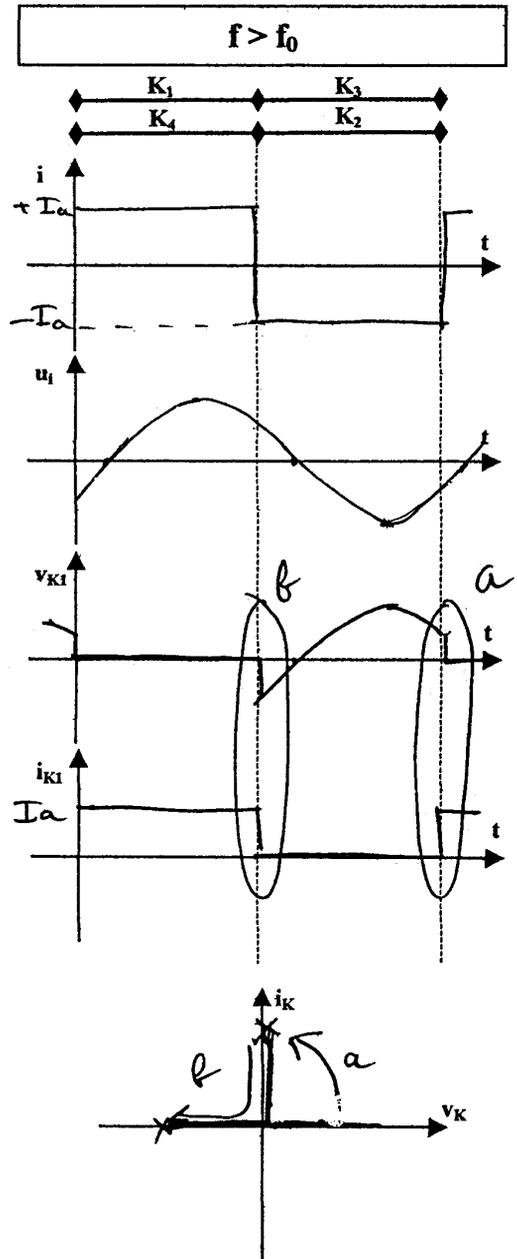


DOCUMENT
REPONSE 11

(CII4)



(CII5)



$$Z_p = R_e \frac{\left(1 + jQ_0 \frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 + jQ_0 \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad R_e = 61,3 \text{ m}\Omega \quad Q_0 = 5,33 \quad \omega_0 = 15,3 \cdot 10^4 \text{ rd/s}$$

en prenant $\omega_R = \omega_0 = \omega = 3\omega_R = 3\omega_0$

$$Z_3 = R_e \frac{(1 + j5,33 \times 3)}{1 + j5,33 \times 3 - 9} \Rightarrow |Z_3| = 61,3 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1 + 15,99^2}}{\sqrt{8^2 + 15,99^2}} = 54,9 \text{ m}\Omega$$

$$\hat{U}_3 = 1,38 \text{ V}$$

$$Z_5 = R_c \frac{(1 + j5,33 \times 5)}{1 + j5,33 \times 5 - 25} \Rightarrow |Z_5| = 61,3 \cdot 10^{-3} \frac{\sqrt{1 + 26,65^2}}{\sqrt{24^2 + 26,65^2}} = 45,6 \text{ m}\Omega$$

$$\hat{U}_5 = 0,69 \text{ V}$$

comparées à l'amplitude du fondamental, ces amplitudes sont faibles, donc $u_i(t)$ est sinusoïdal.

CII7d voir document réponse

CII7e
$$I_{if} = \frac{U_{if}}{\sqrt{R_e^2 + (L_e \omega)^2}} \quad I_{i3} = \frac{U_{i3}}{\sqrt{R_e^2 + (3L_e \omega)^2}} \quad I_{i5} = \frac{U_{i5}}{\sqrt{R_e^2 + (5L_e \omega)^2}}$$

L'impédance du circuit RL augmente avec le rang de l'harmonique, donc I_{i3} et I_{i5} ont un poids relativement moins important que U_{i3} et U_{i5} par rapport à leurs fondamentaux. On peut donc dire que i_i est sinusoïdal et son amplitude vaut : $I_{if} = 404 \text{ A}$; déphasage $\text{tg } \varphi_i = 5,24$, $\varphi_i = 79^\circ$.

CII7f $I_{cf} = U_{if} j C_f \omega$ $I_{c3} = U_{i3} j C_f 3\omega$ $I_{c5} = U_{i5} j C_f 5\omega$ L'impédance diminue avec le rang de l'harmonique $i_{c(t)}$ ne sera probablement pas sinusoïdal.

CII7g $i_{(t)}$ se décompose en $i_f + \Delta i_h$ $\Delta i_h = i - i_f$

i_f se partage en i_{fi} et i_{fc} et i_i étant sinusoïdal $\Delta i_h = \Delta i_{ch}$: $i_c = i_{fc} + \Delta i_h$

$$\hat{I}_{cf} = \hat{U}_f C \omega = 94 \times 20 \cdot 10^{-6} \times 2\pi \times 24 \cdot 10^3 = 285\sqrt{2} = 404 \text{ A}$$

on trace i_c en ajoutant à i_f , Δi_h

$$\hat{I}_c = 404 + 59 = 463 \text{ A}$$

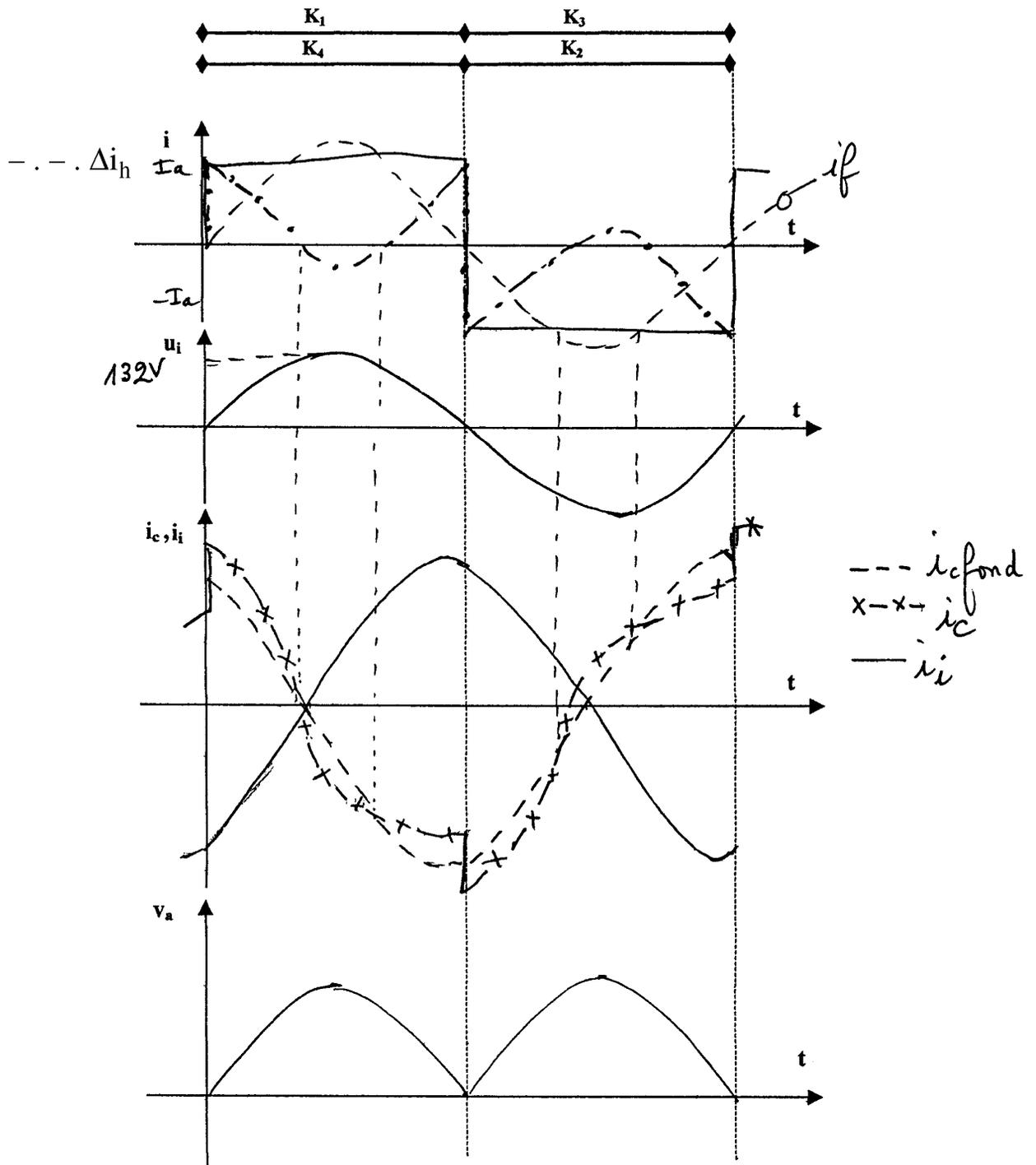
CII7h $I_{ieff} = 285 \text{ A}$ assimilé à son fondamental.

$$i_c = i_{cf} + i_3 + i_5 + \dots \quad I_{eff}^2 = I_{cf}^2 + (I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots)$$

$$i = i_f + i_3 + i_5 + \dots \quad I^2 = I_f^2 + (I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots)$$

$$I_{ceff}^2 = I_{cf}^2 + (I^2 - I_f^2) \quad I_a = 59,4 \text{ A} \quad I_f = 53,5 \text{ A} \quad I_{ceff} = 287 \text{ A}$$

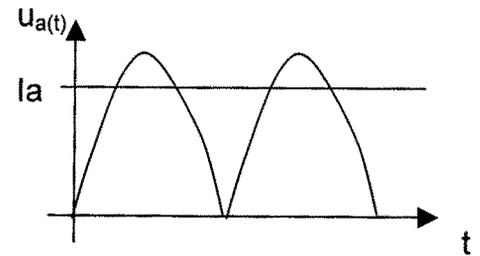
Les harmoniques modifient peu la valeur efficace.



DOCUMENT REPONSE 12 (CH7)

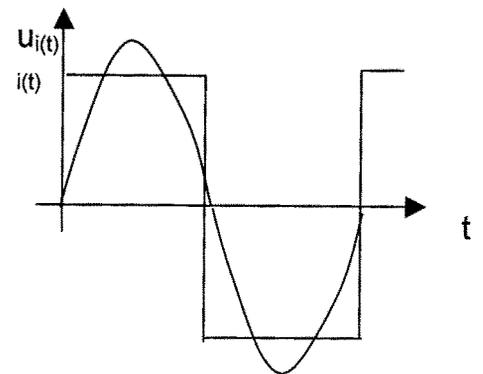
CII7i A l'entrée du convertisseur

$$P_a = I_a \frac{2\widehat{U}_i}{\pi} = 4,98 \text{ kW}$$



A la sortie du convertisseur

$$P = U_i I_f = 4,98 \text{ kW}$$



CII7j $K = V_{K\max} I_{K\max} / P$ dans ce cas $V_{K\max} = \widehat{V}_a = 132 \text{ V}$

Et $i_{K\max} = I_a = 59,4 \text{ V}$ $K = 1,57$

Lorsque f varie, I_a reste constant, U_i diminue par rapport à sa valeur à la

résonance. $K = \frac{I_a \widehat{U}_i}{I_a \frac{2\widehat{U}_i}{\pi}} = \frac{\pi}{2}$ indépendant de f .

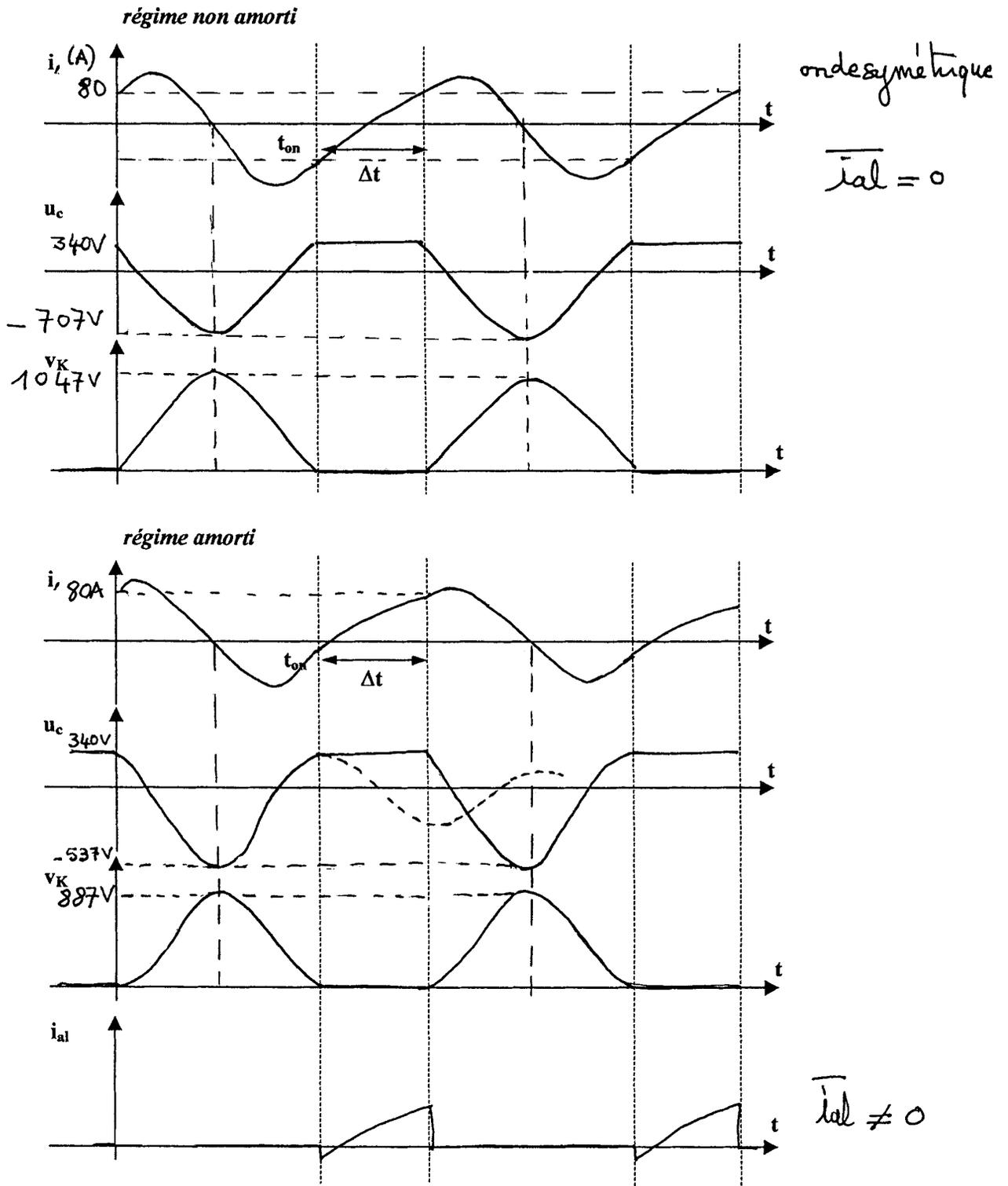
CIII1 Sur la caractéristique magnétique de l'inductance ϕ enlacé par L_1 en fonction de i_e . Si on ajoute des At continus aux ampères-tours correspondant à i_e l'excursion de la caractéristique magnétique par le point de fonctionnement se déplace. L'inductance dynamique de la bobine diminue lorsque la composante continue I_p augmente car les variations de flux sont plus faibles.

CIII2a $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_a C}}$, $L_a = \frac{1}{C\omega_0^2}$, $f_0 = 20 \text{ kHz}$, $\Rightarrow L_a = 90,5 \mu\text{F}$, $f_0 = 35 \text{ kHz}$, $\Rightarrow L_a = 29,5 \mu\text{F}$

CIII2b R_p est la résistance équivalente à l'ensemble bloc adaptateur, et inducteur qui est le circuit résonnant étudié au paragraphe précédent. Le transformateur de rapport de transformation 1 n'intervient pas. L_a est variable et permet de régler la fréquence de fonctionnement de l'onduleur, cette fréquence permet de régler la puissance transmise.

CIII3a Lorsque l'inducteur n'est pas chargé, il est équivalent à une inductance : il n'y a pas de puissance consommée donc $R_p = 0$.

$$\text{CIII3b K ouvert} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_c = L \frac{di_L}{dt} \\ i_L = -C \frac{du_c}{dt} \end{array} \right\} \begin{cases} u_c + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} = 0 \\ i_L + LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} = 0 \end{cases}$$



DOCUMENT REPONSE 13 (C III 3 et C III 4)

CIII3c $u_c(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ $i_L(t) = CA \omega_0 \sin \omega_0 t - BC \omega_0 \cos \omega_0 t$

À $t = 0$ $u_c = U_{al}$ et $i_L = I_0 \Rightarrow u_c(t) = U_{al} \cos \omega_0 t - \frac{I_0}{C \omega_0} \sin \omega_0 t$

$i_L(t) = CU_{al} \omega_0 \sin \omega_0 t + I_0 \cos \omega_0 t$

$u_c(t) = U_{al} \sqrt{1 + \left(\frac{I_0}{U_{al} C \omega_0}\right)^2} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

ou bien

$i_L(t) = -CU_{al} \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{I_0}{U_{al} C \omega_0}\right)^2} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

AN $\varphi = 61,25^\circ$ $\hat{U} = 707 \text{ V}$ $\hat{I} = 91,3 \text{ A}$ $\text{tg} \varphi = \frac{I_0}{U_{al} C \omega}$

CIII3d Énergie stockée dans C $W_C = \frac{1}{2} C U_{al}^2$

Énergie stockée dans L_a $W_L = \frac{1}{2} L_a I_a^2$

CIII3e u_c est maximum lorsque $i_L = 0$ il y a conservation des énergies donc

$\frac{1}{2} C \hat{U}_C^2 = \frac{1}{2} C U_{al}^2 + \frac{1}{2} L_a I_0^2 \Rightarrow \hat{U}_C = 707 \text{ V}$

i_c est maximum lorsque $u_c = 0$

$\frac{1}{2} L \hat{I}_L^2 = \frac{1}{2} C U_{al}^2 + \frac{1}{2} L_a I_0^2 \Rightarrow \hat{I}_L = 91,3 \text{ A}$

CIII3f K peut être refermé lorsque $u_c = U_{al}$ pour connecter les deux sources de tension lorsque celle-ci sont égales.

$t = t_{ON} \quad \omega t_{on} = \pi + \pi - 2\varphi = 2\pi - 2\varphi$

$t_{ON} = 22,48 \mu\text{s}$

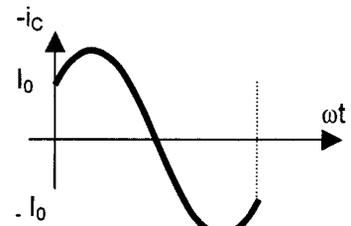
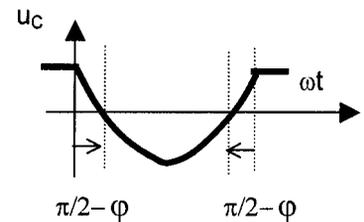
$i_c = 0$ or $i_c = -i_L$ de 0 à t_{ON} et 0 à l'extérieur.

$i_L(t_{ON}) = -I_0 = -80 \text{ A}$

CIII3g K fermé $u_c = U_{al} = \text{Cte} = L_a di_L / dt$

$i_L = U_{al} t / L_a - I_0$

$\Delta t = 2I_0 L_a / U_{al} = 19,8 \mu\text{s}$



CIII3h $T = 42,28 \mu\text{s} \Rightarrow f = 23,65 \text{ kHz}$

la fréquence dépend de I_0 , c'est-à-dire de Δt et L_a qui seront les deux paramètres de réglage de l'onduleur

CIII3i voir document réponse

CIII3j K est fermé à $t = t_{ON}$ $i_K < 0$ puis > 0

K est bloqué $v_K > 0$

Les commutations : à l'amorçage, commutations douce avec $v_K = 0$ au blocage une commutation commandée

Bidirectionnel \Rightarrow association en antiparallèle de deux composants.

Une commutation commandée au blocage \Rightarrow transistor une commutation douce \Rightarrow diode.

CIII4a $L_a C \frac{d^2 u_c}{dt^2} + R_p C \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$ $L_a C \frac{d^2 i_L}{dt^2} + R_p C \frac{di_L}{dt} + i_L = 0$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_a C}} = 18,44 \cdot 10^4 \text{ rd/s}$ $\frac{2m}{\omega_0} = R_p C \Rightarrow m = 0,1123$

CIII4b $u_c(t) = k e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega t + \varphi)$ avec $\omega^2 = \omega_0^2(1 - m^2) \Rightarrow \omega = 18,32 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$

$$i_c(t) = -C \frac{du_c}{dt} = -Ck e^{-m\omega_0 t} (\omega \cos(\omega t + \varphi) - m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi))$$

Exploisons les conditions initiales $u_c(0) = U_{al}$ et $i_L(0) = I_0$

$$\boxed{\text{tg}(\varphi) = \frac{C\omega U_{al}}{mC\omega_0 U_{al} - I_0} \quad \text{et} \quad k = \pm \sqrt{U_{al}^2 + \left(\frac{mC\omega_0 U_{al} - I_0}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\text{tg}(\varphi) = -0,5808 \quad \varphi = -30^\circ \quad \text{et} \quad k = 677$$

$$u_c(t) = -677 e^{-20600t} \sin(\omega t - 30^\circ)$$

$$i_L(t) = 86,82 (\cos(\omega t - 30^\circ) - 0,113 \sin(\omega_0 t - 30^\circ)) e^{-20600t}$$

modification de l'expression : $\text{tg}(\varphi') = 0,113 \quad \varphi' = 6,45^\circ$

$$\boxed{i_L(t) = 86,82 e^{-20600t} \cos(\omega t - 23,55^\circ) \quad \text{et} \quad u_c(t) = 677 e^{-20600t} \cos(\omega t - 60^\circ)}$$

Pour $I_0 = 77 \text{ A}$ $t_{0N} = 26 \mu\text{s}$ $\hat{U}_C = 520,3 \text{ V}$ $\hat{i}_{\text{max}} = 81,2 \text{ A}$ $i_{LON} = -18,3 \text{ A}$

À la calculatrice $\hat{U}_C = 537,3 \text{ V}$ $\hat{i}_I = 83,9 \text{ A}$

$u_c = U_{al}$ pour $t = t_{0N} = 25,6 \mu\text{s}$ $\hat{i}_I = -21,65 \text{ A}$

CIII4d Les oscillations étant amorties, le deuxième maximum de u_c pourrait être inférieur à U_{al} ceci pour de fortes valeurs d'amortissement c'est-à-dire pour une charge donnée à la fréquence de résonance du circuit inducteur en parallèle avec C la valeur de R_p étant maximale dans ces conditions.

CIII4e $t_{0N} = 25,6 \mu\text{s}$ $i_{LON} = -21,65 \text{ A}$

CIII4f $U_{al} = R_p i_L + L_a \frac{di_L}{dt}$ $Z = \frac{L_a}{R_p} = 24,14 \mu\text{s}$

$$i_L = \left(i_{LON} - \frac{U_{al}}{R_p} \right) e^{-\frac{t}{Z}} + \frac{U_{al}}{R_p} \quad u_c = U_{al} = \text{Cte} \quad \Delta t = i_L = \frac{L_a}{R_p} \text{Ln} \left(\frac{i_{LON} - \frac{U_{al}}{R_p}}{I_0 - \frac{U_{al}}{R_p}} \right)$$

On trouve $\Delta t = 15,25 \mu\text{s}$

CIII4g $T = 40,85 \mu\text{s}$ $f = 24,5 \text{ kHz}$

CIII4h voir document réponse

CIII4i $P = R I_{\text{eff}}^2 = 6,1 \text{ kW}$ voir document réponse

CIII4j $P = \overline{i_{al}} U_{al}$ $\overline{i_{al}} = 17,9 \text{ A}$

CIII4k $i_{k\text{max}} = 80 \text{ A}$ $v_{K\text{max}} = 877 \text{ V}$ $K = 80 \times 877 / 6100 = 11,5$

Le transistor utilisé subit des contraintes très élevées par rapport à la puissance contrôlée. Dans l'onduleur à 4 interrupteurs, ce coefficient est beaucoup plus petit 1,57.

Ce montage convient lorsque U_{al} n'est pas trop élevé. Il a d'autre part par un meilleur rendement car il y a des pertes par commutation dans un seul interrupteur : il convient donc pour des fréquences élevées.

CIII4l Cet onduleur à injection peut faire penser à une balançoire ou à un pendule. Fermer l'interrupteur K pendant un temps Δt revient à pousser la balançoire et fournir de l'énergie. Pendant la fermeture de K, le système effectue une

oscillation qui est d'autant plus amortie que l'inducteur est chargé, ou par analogie que la balançoire est chargée.

C-IV

CIV1a La tension à vide du réseau n'est pas rigoureusement sinusoïdale ; elle présente un harmonique 5 non négligeable.

CIV1b A la mise sous tension du montage 2, la conduction des diodes relie le réseau à un condensateur déchargé ce qui provoque un fort appel de courant uniquement limité par l'impédance du réseau. Pour éviter cela on peut mettre en série un rhéostat que l'on ramène à zéro après la mise sous tension.

CIV1c Exploitation des relevés

- phénomène d'empiètement : on néglige la

chute de tension $R_a i_a$ devant $l_a \frac{di_a}{dt} = v_{a0}(t)$

$$\Rightarrow \frac{di_a}{dt} = -\frac{v_{a0} \sqrt{2} \sin(\omega t)}{l_a}$$

à $t = 0$ $i_a(t) = I_{red}$ commutation de $v_{a0} > 0$

à $t = t_{emp}$ $i_a(t) = -I_{red}$ à $v_{a0} < 0$

$$\Rightarrow i_a(t) = \frac{v_{a0} \sqrt{2} \cos(\omega t)}{l_a \omega} + k \quad k = I_{red} - \frac{v_{a0} \sqrt{2}}{l_a \omega}$$

$$\Rightarrow i_a(t) = I_{red} - \frac{v_{a0} \sqrt{2}}{l_a \omega} (1 - \cos(\omega t))$$

$$\text{en fin de commutation : } -I_{red} = I_{red} - \frac{v_{a0} \sqrt{2}}{l_a \omega} (1 - \cos\beta)$$

$$l_a = \frac{v_{a0} \sqrt{2}}{2I_{red}\omega} (1 - \cos\beta)$$

$$t_{emp} = 310 \mu\text{s}$$

$$\beta = 0,00974 \text{ rd} = 5,58^\circ$$

$$l_a = 0,202 \text{ mH}$$

Pour éviter de négliger R_a on peut écrire la loi d'ohm lorsque $i_a = 0$, soit

$$l_a \frac{di_a}{dt}(t_0) = v_{a0}(t_0).$$

$$v_{a0} = -237 \sqrt{2} \sin(\omega t_0)$$

$$l_a = -\frac{\sqrt{2} 237 \sin(\omega t_0)}{\frac{di_a}{dt}(t_0)}$$

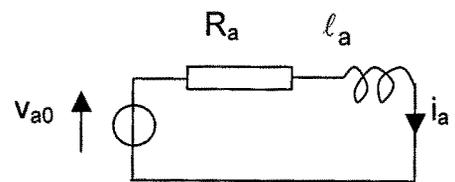
$$l_a = 0,214 \text{ mH}$$

On mesure $t_0 = 193 \mu\text{s}$

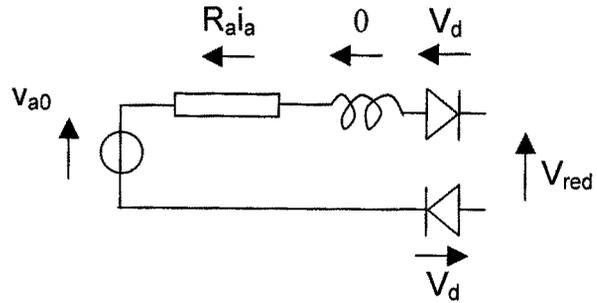
$$\frac{di_a}{dt}(t_0) = 9,48 \cdot 10^4 \text{ A/s}$$

Vue la précision des mesures, on adopte $l_a = 0,2 \text{ mH}$

- filtrage par condensateur : à l'instant où i_a est maximum $\frac{di_a}{dt} = 0$



$R_a i_a = V_{a0} - V_{red} - 2 V_d$
 V_d chute de tension dans une diode



À t_{max} $i_a = 32,7 A$

$V_{a0} = 292,8 V$

$V_{red} = 267,8 V$

$R_a = 0,73 \Omega$

Ce résultat est très imprécis, vues les conditions de mesure.

CIV2a $S = V_{a0} I_{a\text{eff}} = 3 \text{ kVA}$

$P = R I_{red\text{-eff}}^2$ avec $R = V_{red\text{-moy}} / I_{red\text{-moy}} = 44,6 A$ $P = 1884 W$

$f = P/S = 0,61$

CIV2b $TDH = \frac{\sqrt{I_{a3}^2 + I_{a5}^2 + \dots}}{I_{a1}} = \frac{\sqrt{I_{a\text{eff}}^2 - I_{1\text{eff}}^2}}{I_{a1}} = \frac{\sqrt{13^2 - 7,47^2}}{7,47} = 1,42$

CIV2c Les composantes de Fourier sont :

$I_{1\text{eff}} = 7,47 A$ $I_{3\text{eff}} = 5,48 A$ $I_{5\text{eff}} = 3,24 A$ $I_{7\text{eff}} = 2,74 A$

$I_{9\text{eff}} = 2,45 A$ $I_{11\text{eff}} = 1,49 A$ $I_{13\text{eff}} = 0,75 A$ $I_{21\text{eff}} = 0,622 A$

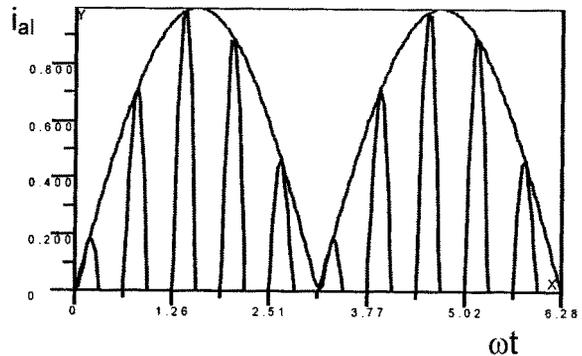
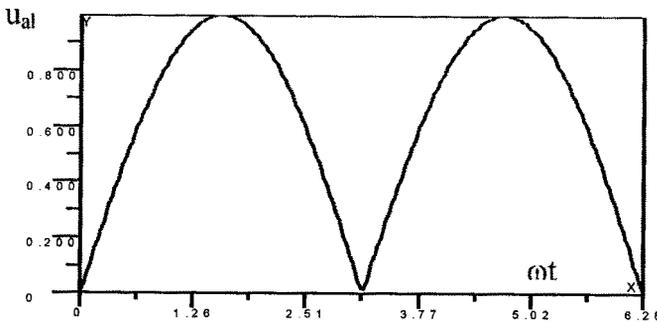
Elles ne respectent pas la norme et sont même très au-dessus. Pour

respecter la norme, il faut que $\sqrt{I_3^2 + I_5^2 + \dots} = 3,00$, or $TDH = 1,42$ d'où ($I_{a1} = 2,12 A$), $P_{max} = V I_{a1} \cos(\varphi_1)$.

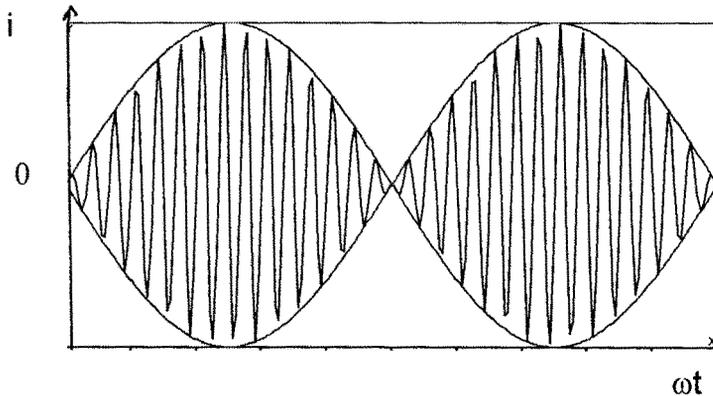
Si $\cos(\varphi_1) = 1$, ce qui n'est pas exactement le cas, $P_{max} = 488 W$.

CIV2d Ce type de filtrage pour obtenir une tension continue, conduit à un facteur de puissance insuffisant qui impose un surdimensionnement de la source et à un taux d'harmonique important hors norme. On ne pourra pas l'utiliser pour cette puissance.

CIV3a Les grandeurs i_{ai} et u_{ai} sont modulées par le secteur redressé (voir figures).



CIV3b En faisant l'approximation sinusoïdale on obtient : voir figures.



L'allure de la courbe $i_1(t)$ est la même.

CIV3c $u_i(t) = \hat{U}_i \cos(\omega_a t) \cos(\omega t)$ car la pulsation ω est très supérieure à ω_a .
 $\hat{i}_i(t) = \hat{I}_i \cos(\omega_a t) \cos(\omega t - \varphi_i)$

CIV3d $\rho(t) = u_i(t) \cdot i_i(t) = \hat{U}_i \hat{I}_i \cos^2(\omega_a t) \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi_i)$
 $= \hat{U}_i \hat{I}_i \left(\frac{1 + 2\cos(2\omega_a t)}{2} \right) \left(\frac{\cos(\varphi) + \cos(2\omega t - \varphi_i)}{2} \right)$

dont la valeur moyenne est $\bar{P} = \frac{\hat{U}_i \hat{I}_i}{4} \cos(\varphi_i) = \frac{U_i I_i}{2} \cos(\varphi_i)$

CIV3e A la résonance, lorsque la puissance est maximale, on a $I_i = 53,4$ A et ($U_i = 94$ V) et $U_i = R_i I_i$ avec $\varphi_i = 0$ et $R_i = 1,74 \Omega$. Pour obtenir $P = 5$ kW, il faut

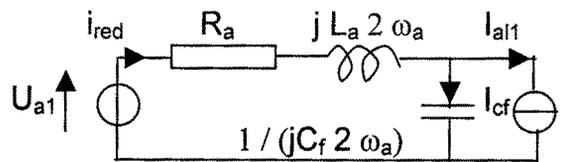
$\hat{I}_i = 2\sqrt{\frac{P}{R}} = 107$ A

CIV3f U_{a1} est la valeur efficace du fondamental de la tension redressée.

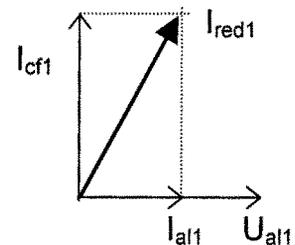
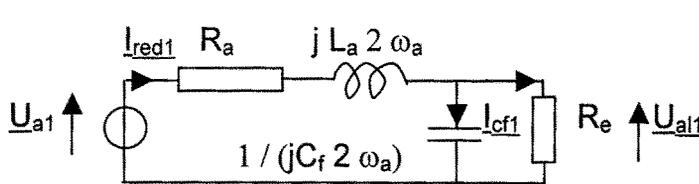
$R_a = 0,77 \Omega$ $L_a 2 \omega_a = 0,126 \Omega$

$U_{a1} = 4 V_{a0} / 3 \pi = 102$ V

$1 / (C_f 2 \omega_a) = 284 \Omega$



CIV3g



$R_e = 18,8 \Omega$ $I_{cf1} = 0,34$ A

$I_{red1} = (I_{al1}^2 + I_{cf1}^2)^{1/2}$

L'impédance du condensateur est grande devant l'impédance du montage : le courant qui le traverse est faible, donc celui-ci n'a pas de rôle de filtrage à cette fréquence.

CIV3h $I_{CHF} = \frac{(R_a + jL_a \omega_{HF}) j C_f \omega_{HF}}{1 + (R_a + jL_a \omega_{HF}) j C_f \omega_{HF}} I_{alHF}$

$I_{redHF} = \frac{1}{1 + (R_a + jL_a \omega_{HF}) j C_f \omega_{HF}} I_{alHF}$

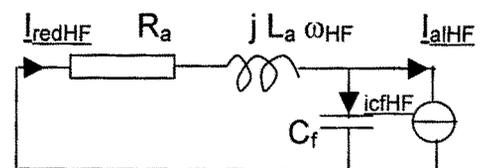


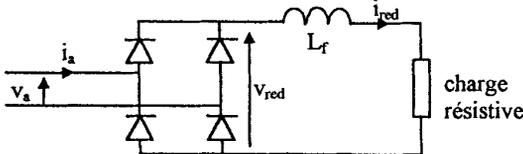
Figure 9

Remarque : Les tensions des décompositions en série de Fourier sont données en valeurs efficaces, sauf indication contraire.

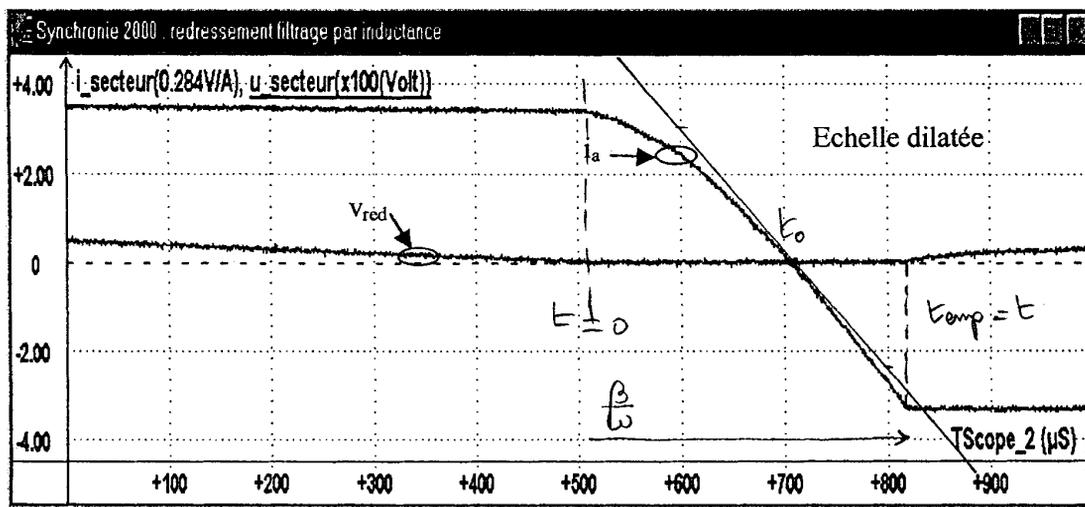
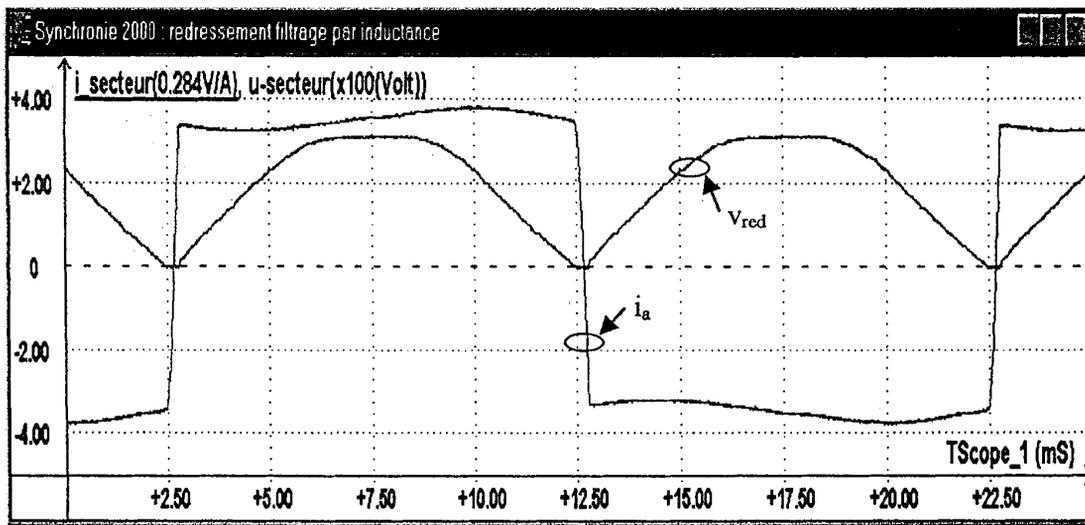
→ **Tension du réseau à vide:**

Valeur efficace	$V_a=237V$
Spectre:	
Fondamental:	$V_{a1}=237V$
Harmonique 5:	$V_{a5}=7,5V$

→ **Montage 1: alimentation d'un redresseur avec filtrage par inductance :**



i_{red} moyen	12,5A
i_a eff	12,6A
V_{red} moyen	204V
V_a eff	231,5V

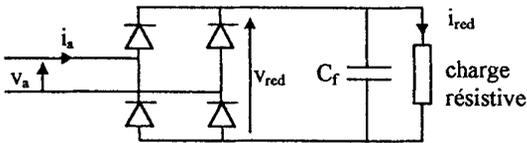


temp
 $4,65$ carreau
 $1,5$ $100\mu s$
 $\frac{1,5}{2,9}$ carreau
 $\Delta t = 200\mu s$
 $D_{ja} = 18,9A$

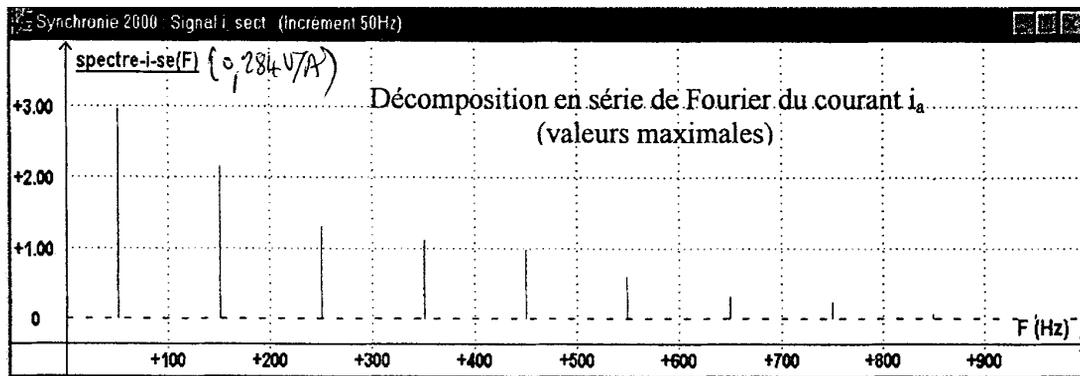
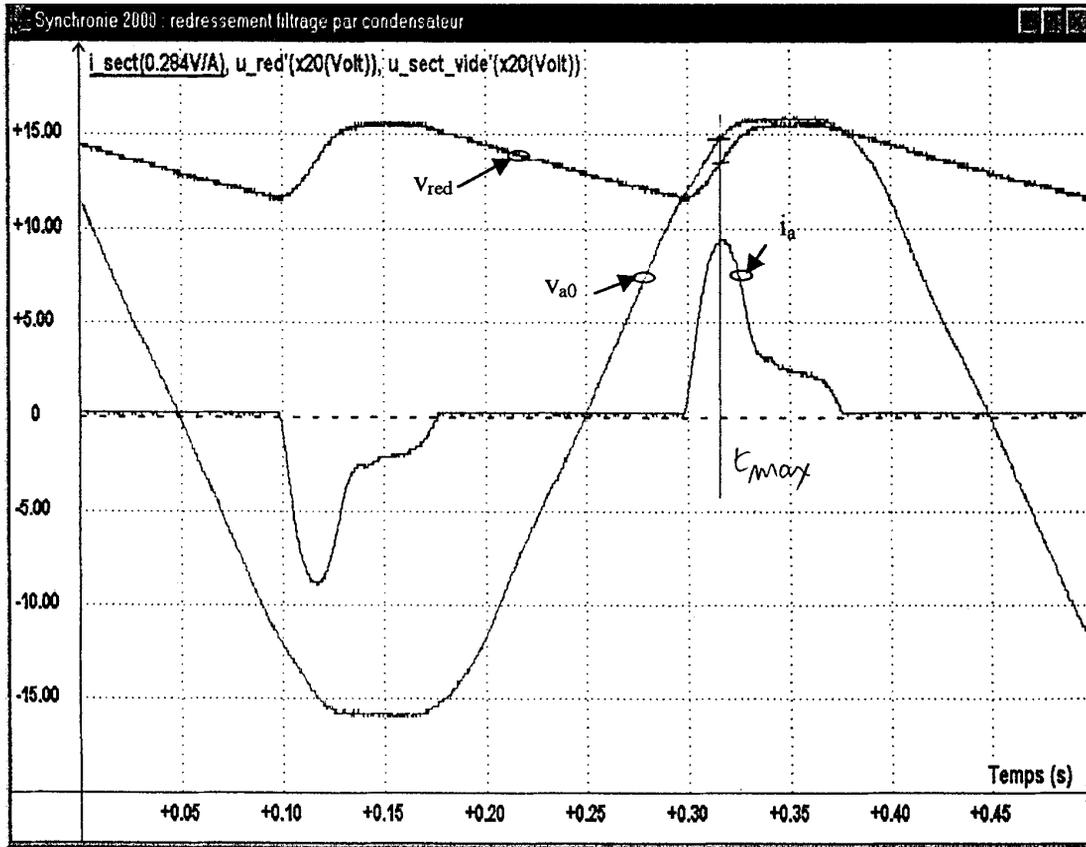
$3,5$ cm $5,38V \rightarrow 18,9$
 $1,3$ cm $2V$

Figure 10

→ Montage2 : alimentation d'un redresseur avec filtrage par condensateur :



i_{red} moyen	6,3A	i_{red} eff	x
i_a eff	13A		
v_{red} moyen	281V	V_{red} eff	x
V_a eff	231V		



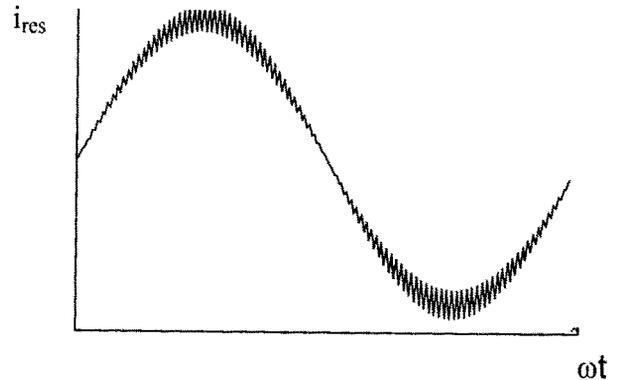
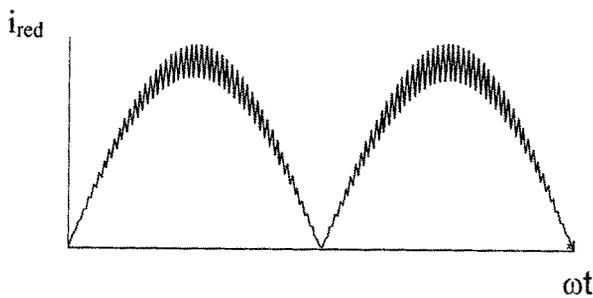
CIV3i $I_{CHF} = 1,05 I_{alHF} = 21 \text{ A}$

on a pratiquement $I_{redHF} = I_{alHF} / 20,9 = 0,957 \text{ A}$

$$1/C_f \omega_{HF} = 1,26 \Omega \quad L_a \omega_{HF} = 28,3 \Omega$$

$U_{alHF} = I_{CHF} / C_f \omega_{HF} = 26,5 \text{ V}$ Le condensateur présente une impédance faible devant celle du réseau à cette fréquence, et joue le rôle de filtre. Par contre la tension résiduelle U_{HF} n'est pas négligeable, ainsi que I_{redHF} . Sur le système on a rajouté à l'entrée du redresseur un filtre HF.

CIV3j



$$P = V_{a0} \text{ courant fondamental de } i_{res}. \quad \text{Or } i_{red1} = \frac{4 \hat{i}}{3\pi\sqrt{2}} \quad \hat{i} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} I_{red1}$$

$$I_{red \text{ fond}} = 12,3 \text{ A} \quad P = 2950 \text{ W} - R_{alres}^2 = 2832 \text{ W}$$

$$S = 231,5 \times 12,34 = 2856 \text{ VA}$$

$$\hat{V}_a = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} V_{al1} = 325,5 \text{ V}$$

$$V_{af} = 230 \text{ V}$$

$$V_{aHF} = V_{alHF} = 26,5 \text{ V}$$

$$I_{red \text{ eff}} = \sqrt{12,31^2 + 0,957^2} = 12,34 \text{ A} \quad V_{eff} = 231,5 \text{ V}$$

$$F = \frac{P}{S} \approx 1$$

On obtient donc un très bon facteur de puissance

Agrégation de sciences physiques

Concours interne

COMPOSITION SUR LA PHYSIQUE ET LE TRAITEMENT AUTOMATISÉ
DE L'INFORMATION ♦ Session : 2004

PRINCIPE D'UNE METHODE DE RECHERCHE DE PLANETES EXTRA-SOLAIRES.

A. Influence de la présence d'une planète sur le mouvement de l'étoile

A.I. Mouvement d'une planète autour d'une étoile.

1.a.

L'étoile est à répartition sphérique de masse donc tout plan passant par E est un plan de symétrie ; \vec{g} est donc porté par l'intersection de ces deux plans : $\vec{g}(P) = g \vec{e}_r$

L'invariance par rotation implique que $\vec{g}(P) = g(r) \vec{e}_r$. On utilise le théorème de Gauss pour la gravitation, la surface fermée est une sphère de centre E, de rayon r.

$$g(r) \times 4 \pi r^2 = - 4 \pi G \iiint_V \rho . d\tau = -4 \pi G M$$

$$\vec{g}(P) = - (GM/ r^2) \vec{e}_r$$

Tout se passe comme si la masse de l'étoile est concentrée au centre.

1.b.

$$\vec{F} = -(mM G /r^2) \vec{e}_r$$

1.c.

Théorème du moment cinétique en E dans R_E : $d \vec{\sigma}_E / dt = \vec{M}_E = \vec{0}$ (force centrale)

donc $\vec{\sigma}_E = m \vec{C}$ est un vecteur constant. La trajectoire se situe dans un plan perpendiculaire à \vec{C} et passant par E.

1.d.

$$v_P = 2 \pi a / T ; \quad v_P = (2 \pi G M / T)^{1/3} ; \quad a^3 = G M T^2 / 4 \pi^2$$

2.

$$AN : M_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg} ; \quad v_P = 3,0 \times 10^4 \text{ m.s}^{-1}$$

A.II. Référentiel barycentrique.

1. Le référentiel barycentrique est un référentiel dont le repère d'espace de centre I est en translation par rapport au référentiel galiléen (R_{gal}) avec la vitesse \vec{V} (I/R_{gal}). Ce référentiel est en général non-galiléen. Dans le cas où le système étoile- planète est isolé \vec{V} (I/R_{gal}) est constante ; le référentiel (R^*) est alors galiléen.

2.a. $\vec{v}_1^* = \vec{0}$ donc $M\vec{v}_E^* + m\vec{v}_P^* = \vec{0}$

2.b.

L'orbite de l'étoile est circulaire de centre I, homothétique, de rapport $-m/M$, de celle de la planète.

2.c.

Quand m devient très petit devant M , le mobile réduit de masse $\mu = mM/(m+M)$ tend vers la planète de masse m , le rayon de la trajectoire de l'étoile tend vers zéro, on revient au cas précédent où l'étoile est immobile.

$$v_P^* = v_P$$

$$v_E^* = (m/M) v_P^*$$

$$v_E^* = 2\pi \left(\frac{GM}{4\pi^2 T} \right)^{1/3} \times \frac{m}{M}$$

3.

$$m/M = 3,01 \times 10^{-3} ; m = 7,8 \times 10^{27} \text{ kg} ; m = 3,9 M_J$$

B. Obtention du spectre visible de l'étoile.

B.I. Interférences lumineuses à deux ondes.

1.a.

$$I_1 = k s_{10}^2/2$$

$$s^2 = s_{10}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_1) + s_{20}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_2) + 2s_{10} \cos(\omega t + \varphi_1) s_{20} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi) \rangle$$

1.b.

On obtient des interférences en M lorsque $\varphi = \text{constante}$ dans le temps.

1.c.

Pour des ondes incohérentes la moyenne temporelle de $\cos \varphi$ est nulle donc $I = I_1 + I_2$.

Les intensités des deux sources s'ajoutent en tout point du champ.

1.d

$$I(M) = 2I_0(1 + \cos\varphi)$$

$I(M)$ est une sinusoïde autour de la valeur moyenne $2I_0$ de période 2π .

Pour $\varphi = 2p\pi$ avec p entier on a : $I_{\text{Max}} = 4I_0$

2.

Définition de la différence de marche : $\delta = (S_2M - S_1M)$

$$\delta = [(x+a/2)^2 + y^2 + D^2]^{1/2} - [(x-a/2)^2 + y^2 + D^2]^{1/2} \text{ avec les approximations on obtient : } \delta = ax/D$$

$$\varphi = 2\pi \delta / \lambda ; I(M) = 2I_0 [1 + \cos(2\pi \delta / \lambda)]$$

Au voisinage de O on observe des franges rectilignes brillantes, parallèles à l'axe Oy.

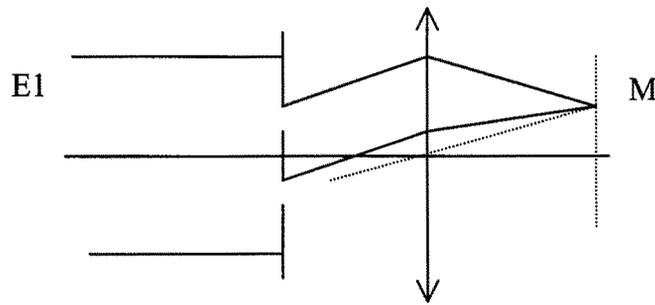
L'interfrange est l'intervalle entre deux points de même éclairement : $i = \lambda D/a$

Application numérique : on mesure $10i$ (quelques cm), on donne la longueur d'onde (visible) et D (ordre du mètre) puis par exemple on calcule a (quelques dixièmes de mm).

Dispositifs expérimentaux : miroirs de Fresnel éclairés par une source ponctuelle ; miroir de Lloyd ; bilentille de Billet ; Michelson éclairé par une source ponctuelle ; trous d'Young.

B.II. Mesure de la distance angulaire entre les deux composantes d'une étoile double.

1.



2.

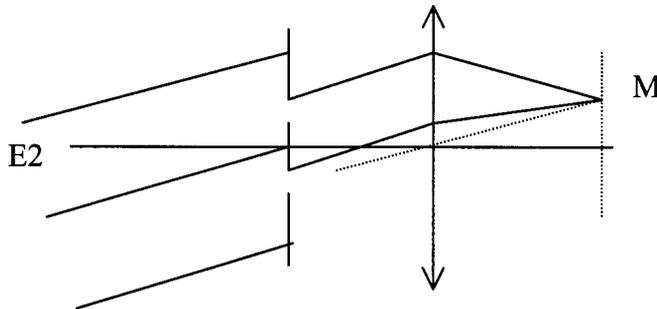
Dans les conditions de Gauss, la lentille est stigmatique pour des couples de points conjugués. Le chemin optique est identique pour tous rayons passant par un point A et son image A'.

3.

Dans les conditions de Gauss $\sin \theta = \tan \theta = \theta$ en radians d'où

$$\delta = a\theta = ax/f \quad I_1(x) = 2I_0(1 + \cos 2\pi x/i) \quad \text{avec } i = \lambda f^2/a$$

4.



Il y a une différence de marche avant les trous: $\delta' = \pm a \alpha$

$I_2(x) = 2I_0(1 + \cos 2\pi/\lambda(ax/f \pm a \alpha))$. On obtient la même figure d'interférence que précédemment mais décalée d'une quantité $x_0 = \pm \alpha f^2$.

5. $I = I_1(x) + I_2(x)$. La première disparition ou brouillage des franges s'effectue pour $x_0 = i/2$ soit $\alpha = \lambda/2a_1$

$$\text{AN } \alpha = 9,68 \cdot 10^{-7} \text{radian} = 0,20 \text{ seconde d'arc.}$$

B.III. Fentes de Young et influence de la diffraction.

1. Les fentes sont parallèles à O'Y donc on a une superposition des figures d'interférences. Les franges sont plus lumineuses. L'interfrange est inchangé.

2.a.

$$A = a_0 \int_{-b/2}^{+b/2} h \exp(-i2\pi x \sin \theta / \lambda) dx$$

$$A = a_0 h b \frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{(\pi b \sin \theta / \lambda)}$$

$$2.b. I = A A^* = I_0 \left[\frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{(\pi b \sin \theta / \lambda)} \right]^2$$

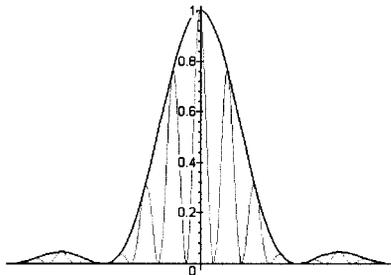
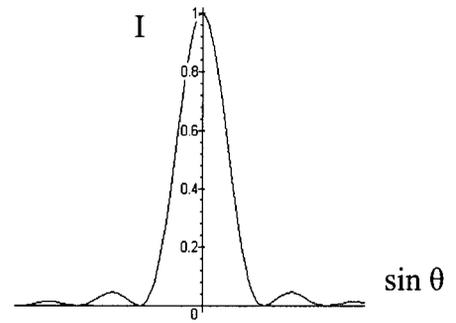
2.c.

Premier minimum : $(\pi b \sin \theta) / \lambda = \pi$; $\sin \theta = \lambda / b$

2d.

$$I = 2I_0 \left[\frac{\sin(\pi x / 3, 5i)}{(\pi x / 3, 5i)} \right]^2 (1 + \cos 2\pi x / i) \text{ on observe 7}$$

franges brillantes dans la tache centrale.



B.IV. Réseau

B.IV.1. Étude d'un réseau plan par transmission :

1.a. La différence de marche entre deux faisceaux successifs est $\delta = a(\sin \theta_k - \sin \theta_i)$

$\delta = k\lambda$ avec $a = 10^{-3}/n$

1.b. $\theta_1 = 0$; $\sin \theta_k = k\lambda/a$; $-1 < \sin \theta_k < 1$;

On observe complètement les ordres : -2, -1, 0, 1, 2

On observe un recouvrement à partir du deuxième ordre :

Pour le rouge de l'ordre 2 : $\theta_2 = 79,5^\circ$ et pour le violet de l'ordre 3 : $\theta_3 = 54^\circ$

B.IV.2. Pouvoir de résolution.

2.a.

$$a \cos \theta_k d\theta_k = k d\lambda$$

2.b.

La largeur du faisceau est $b = L \cos \theta_k = N a \cos \theta_k$

La demi largeur du faisceau de diffraction est $d\theta = \lambda/b = \lambda/N a \cos \theta_k$

2.c.

Critère de Rayleigh : $d\theta_k = d\theta$; $n k d\lambda = \lambda/N a \cos \theta_k$; $R = kN$

N est le nombre de traits utiles : $N = L/a = nL$

Pour avoir un bon pouvoir de résolution : k élevé et N le plus grand possible.

2.d.

Dans ce type de réseau les spectres sont dans la tache de diffraction d'un trait, le maximum d'intensité est pour l'ordre zéro, les ordres suivants sont moins lumineux. D'autres réseaux de type échelle permettent d'obtenir le maximum d'intensité dans un ordre élevé.

C. Déplacement Doppler des raies émises par l'étoile.

C.I. Effet Doppler.

1. $t_1 c = x_E - V_0 t_1$

2. La durée est $t_2 - t$; $c(t_2 - t) = x_E + t V_E - V_0 t_2$

$$(t_2 - t_1) = \frac{1 + \frac{V_E}{c}}{1 + \frac{V_0}{c}} t;$$

$$T' = \frac{1 + \frac{V_E}{c}}{1 + \frac{V_0}{c}} T; \text{ pour } V_E = V_0 \text{ on a } T = T'$$

4. $T' = (1 + \frac{V_E - V_0}{c}) T$; $\Delta T/T$ ne dépend que de la vitesse relative de l'étoile par rapport à l'observateur, ce résultat est lié à la relativité restreinte où la vitesse de la lumière est la même dans tout référentiel galiléen.

5. $\Delta T/T = \beta = \Delta\lambda/\lambda$ on a la même relation qu'à la question précédente.

6. $V = 1,1 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1}$. L'amas s'éloigne $\Delta\lambda > 0$
L'univers est en expansion.

C.II. Découverte d'une planète extra-solaire orbitant autour de τ Bootis.

1.a.

$\Delta\lambda/\lambda$ dépend du temps car :

- la vitesse de l'observateur par rapport au référentiel héliocentrique dépend du temps : mouvement diurne et annuel de la terre.
- $(\vec{V}_E)_R = (\vec{V}_I + \vec{V}_E^*)_R$ La vitesse radiale du centre d'inertie varie lentement, la vitesse radiale de l'étoile dans le référentiel barycentrique varie avec la période de rotation de la planète.

On les différencie par leur période.

1.b.

$$\Delta\lambda/\lambda = (v_E^*/c) \cos(2\pi t/T + \varphi)$$

1.c.

$$R = \lambda/\Delta\lambda = (1/10) (c/v_E^*) = 6,4 \times 10^4$$

Il faut un spectroscopie à très fort pouvoir de résolution, on utilise un système associant un réseau et un prisme dit à « dispersion croisée » où R peut atteindre 15×10^4

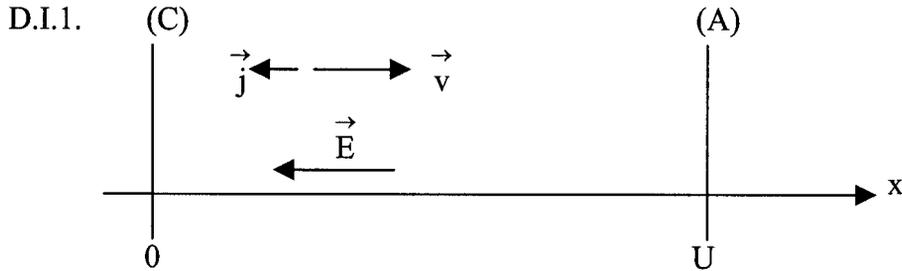
2.

$$v_{RM} = v_E^* \sin i$$

On peut obtenir la période de la planète, mais on mesure par cette méthode « $m \times \sin i$ » seulement.

ONDES GUIDEES DANS LE DOMAINE CENTIMETRIQUE

D. Production des ondes électromagnétiques dans le domaine des hyperfréquences



$$\left[\begin{array}{l} \vec{j} = -ne \vec{v} = \rho \vec{v} \\ \frac{1}{2} m \cdot v^2 = eV \\ \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \\ \vec{j} = -\frac{I}{S} \cdot \vec{e}_x \Rightarrow j = -\frac{I}{S} \end{array} \right.$$

$$D.I.2. v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad \text{et} \quad \rho = -\frac{I}{Sv} \Rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{I}{\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot V^{-1/2} = 0$$

$$V = Kx^p \Rightarrow p(p-1)Kx^{p-2} - \frac{I}{\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2e}} \times \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot x^{-p/2} = 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad K = \left(\frac{9}{4} \frac{I}{\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2e}} \right)^{2/3}$$

$$D.I.3. \text{ On fait } x = a \Rightarrow I = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{\epsilon_0 S}{a^2} \cdot U^{3/2}$$

$$\frac{4}{9} \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \epsilon_0 = 2,35 \times 10^{-6} \text{ SI} \Rightarrow I = 0,232 \text{ A}$$

$$D.I.4. v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad \text{or} \quad V \propto x^{4/3} \Rightarrow v \propto x^{2/3} \Rightarrow v = v_A \cdot \left(\frac{x}{a} \right)^{2/3}$$

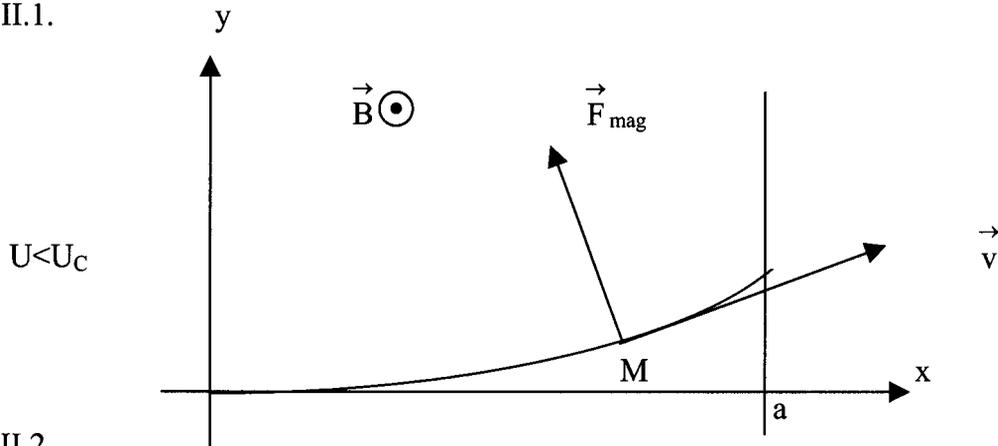
$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_A}{a^{2/3}} x^{2/3} \Rightarrow x^{2/3} dx = \frac{v_A}{a^{2/3}} dt \Rightarrow 3 x^{1/3} = \frac{v_A}{a^{2/3}} t$$

$$\Rightarrow 3a^{1/3} = \frac{v_A}{a^{2/3}} T \Rightarrow T = 3 \frac{a}{v_A} = 3a \sqrt{\frac{m}{2eU}} = 0,64 \times 10^{-9} \text{ s.}$$

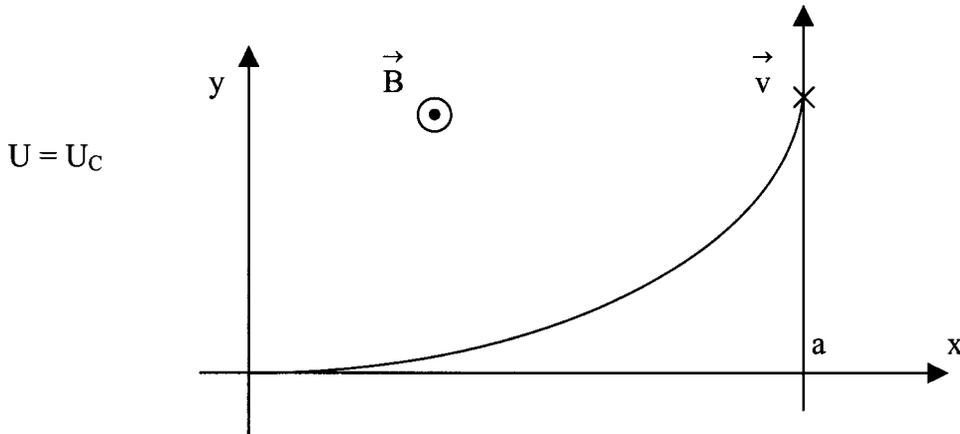
$$f = \frac{1}{T} \sim \text{GHz.}$$

D.I.5. Diode à vide : antique phanotron d'EDISON.

D.II.1.



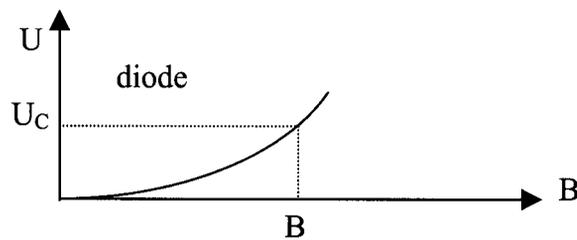
D II 2



$$m \vec{a} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{mag} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{eU}{ma} - e \frac{B}{m} \dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = e \frac{B}{m} \dot{x} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \dot{y} = e \frac{B}{m} x \quad ; \quad x = a, \dot{x} = 0 \Rightarrow v_A = \frac{eB}{m} a \quad \text{Or, } v_A = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

On égale les 2 expressions de v_A : $U_C = \frac{ea^2}{2m} B^2 = 8,89 \times 10^{11} B^2 . a^2$: parabole de coupure.

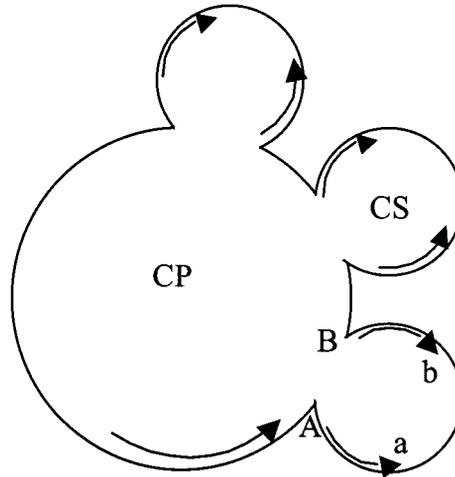


$U = 3 \text{ kV}$ donne $B = 0,015 \text{ T}$.
Un tel champ peut être créé par un aimant.

D.II.3. Oscillations à la fréquence $f \approx \frac{1}{T}$.

Naissance d'oscillations : c'est utile (c'est ce qu'on cherche à faire).

N.B. : (non demandé). Le mouvement des charges est évidemment très complexe : on admet en général le phénomène suivant. Le magnétron est en réalité constitué d'une cavité principale (CP) à laquelle sont adjacentes un certain nombre de cavités secondaires (CS) qui ne sont pas toutes représentées. Admettons que des électrons suivent la flèche dessinée dans CP ; quand ils s'approchent du point A, ils repoussent les électrons de CS (mouvement a) et, quand ils sont parvenus au voisinage de B, ils donnent aux électrons de CS le mouvement b. On comprend ainsi le mouvement oscillatoire qui peut naître.



E. Guide d'onde rectangulaire et cavité.

E.I.1. Aluminium très bon conducteur ; ce n'est pas le cas de l'alumine, la pellicule d'or évite l'oxydation de l'aluminium.

E.I.2. Conditions aux limites (champ nul en certains points quel que soit le temps) impossibles à satisfaire par une onde plane

E.I.3.a. Comme $\vec{E} = E_x \vec{e}_x$, $\text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \vec{E} = E(y) \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_x$

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow E''(y) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E(y) = 0$$

Solutions sinusoïdales puisque $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0 \Rightarrow E(y) = A_1 \cos \alpha y + A_2 \sin \alpha y$.

E.I.3.b. Voir cours : champ électrique normal. En $y = 0$ ou $y = b$: $\vec{E} = \vec{E}_{\text{tangential}} = 0 \Rightarrow E(0) = E(b) = 0$.

$E(0) = E(b) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$ et $\alpha \cdot b = n\pi$.

Modes : $\vec{E} = E_0^n \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \exp(i(\omega t - kz)) \vec{e}_x$ $\vec{E} = E_0^n \sin\left(n \frac{\pi}{b} y\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \left(n \frac{\pi}{b}\right)^2 \quad n = 1 \Rightarrow \omega = c \sqrt{k^2 + \frac{\pi^2}{b^2}}$$

E.I.3.c. $x = 0$ ou $x = a$, $\vec{E} \perp \text{parois} \Rightarrow \exists$ charges surfaciques.

$$E.I.4.a. \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} = kE_0 \sin \frac{\pi}{b} y \sin(\omega t - kz) \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\pi}{b} E_0 \cos \frac{\pi}{b} y \cos(\omega t - kz) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{B} \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = \frac{k}{\omega} E_0 \sin \frac{\pi}{b} y \cos(\omega t - kz) \\ B_z = \frac{\pi}{b\omega} E_0 \cos \frac{\pi}{b} y \sin(\omega t - kz) \end{cases}$$

E.I.4.b. Voir cours. $B_y(0) = B_y(b) = 0$ continuité ; $B_z \neq 0 \Rightarrow \exists$ courants surfaciques.

NB (non demandé) : l'onde est TE car le champ électrique est perpendiculaire à Oz, direction de propagation.

Ce n'est pas une TM car le champ magnétique ne l'est pas : $\Rightarrow \exists B_z \neq 0$

$$E.I.5. k^2 > 0 \Rightarrow \omega > \omega_c = \frac{\pi}{b} c$$

$$f_c = \frac{c}{2b} \Rightarrow b = \frac{c}{2f_c} \Rightarrow b = \frac{c}{2f_c} = 12,2 \text{ cm}$$

$$E.I.6.a. \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \vec{\Pi} \begin{cases} 0 \\ -\frac{\pi}{\mu_0 b \omega} (E_0)^2 \sin \frac{\pi y}{b} \cos \frac{\pi y}{b} \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz) \\ \frac{k}{\mu_0 \omega} (E_0)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{b} y \right) \cos^2(\omega t - kz) \end{cases}$$

$$E.I.6.b. \langle \vec{\Pi} \rangle \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{k}{2\mu_0 \omega} (E_0)^2 \sin^2 \frac{\pi y}{b} \end{cases} \quad \langle \Pi_z \rangle \neq 0 \Rightarrow \text{propagation de l'énergie selon Oz.}$$

$$E.I.6.c. P_m = \iint \langle \Pi_z \rangle dx dy = \frac{k}{2\mu_0 \omega} (E_0)^2 a \int_0^b \sin^2 \left(\frac{\pi}{b} y \right) dy = \frac{kab}{4\mu_0 \omega} (E_0)^2$$

$$E_0 = 14600 \text{ V.m}^{-1}$$

$$E.II.1. \text{De même, comme } \vec{E} = E_x \vec{e}_x, \text{ div } \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow E_x(y, z) = f(y) \times h(z)$$

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow f''(y)g(z) + f(y)g''(z) + \frac{\omega^2}{c^2} f(y)g(z) = 0$$

$$\left[\frac{f''}{f} \right](y) + \left[\frac{g''}{g} \right](z) = -\frac{\omega^2}{c^2} = \text{constante} \quad \text{donc} \quad \frac{f''(y)}{f(y)} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{g''(z)}{g(z)} = \beta.$$

f et g sont des exponentielles ou des fonctions sinusoïdales.

E.II.2. $\omega^2 > 0$. Par ailleurs, les conditions aux limites font qu'il ne peut s'agir que de fonctions sinusoïdales. Le champ électrique dans le métal conducteur supposé parfait est nul. Comme la composante tangentielle du champ électrique est continue, on en déduit :
 $f(0) = f(B) = g(0) = g(C) = 0$ donc f(y) de la forme $\sin k_2 y$ avec $k_2 B = \ell \pi$ et g(z) de la forme $\sin k_3 z$ avec $k_3 C = m \pi$:

$$\text{Modes } (\ell, m) : k_2 = \frac{\ell \pi}{B}, \quad k_3 = \frac{m \pi}{C} \quad \text{et} \quad \omega^2 = c^2 \left[\frac{\ell^2 \pi^2}{B^2} + \frac{m^2 \pi^2}{C^2} \right]$$

E.II.3. Un mode : il peut y avoir des nœuds où le champ est nul et où il n'y a pas de cuisson.

F. « Modélisation d'une substance à réchauffer »

$$\text{F.I. } q = -e \Rightarrow \vec{j} = nq \vec{v} \Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = n \vec{v} \cdot (q \cdot \vec{E}) = n (\vec{F}_{el} \cdot \vec{v}) = n P_{el} \quad \text{soit} \quad \frac{dP_{el}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\text{F.II. } \frac{dP_{el}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma \cdot E^2 + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E}. \quad \text{Si } \vec{P} \text{ est en phase avec } \vec{E}, \quad \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \text{ est en quadrature et}$$

$$\left\langle \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right\rangle = 0. \quad \text{Seul l'effet JOULE contribue à la dépense de puissance moyenne.}$$

$$\text{F.III.1. } \vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon' - 1 - i\epsilon'') \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 E_0 [(\epsilon' - 1) \cos \omega t + \epsilon'' \sin \omega t] \vec{e}$$

$$\text{F.III.2. } \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \omega \epsilon_0 E_0 [-(\epsilon' - 1) \sin \omega t + \epsilon'' \cos \omega t] \vec{e}$$

$$\Rightarrow \frac{dP_{el}}{d\tau} = \omega \epsilon_0 E_0^2 [-(\epsilon' - 1) \sin \omega t \times \cos \omega t + \epsilon'' \cos^2 \omega t] \Rightarrow \left\langle \frac{dP_{el}}{d\tau} \right\rangle = \frac{1}{2} \omega \epsilon_0 \epsilon'' E_0^2 \neq 0.$$

$$\text{F.III.3. } E_0 = 1880 \text{ V.m}^{-1}.$$

Agrégation de sciences physiques

Concours interne

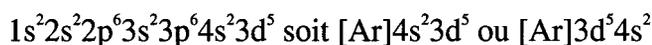
COMPOSITION AVEC EXERCICES D'APPLICATION
Option physique et chimie ♦ Session : 2004

Première partie : l'élément oxygène

I – Dosage du dioxygène dissous par la méthode de Winkler

I.1 Etude du diagramme potentiel-pH simplifié du manganèse

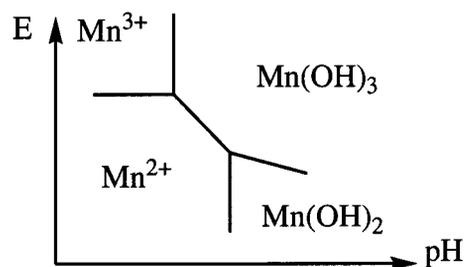
I.1.1 Le manganèse de numéro atomique $Z = 25$ a pour configuration électronique :



Le manganèse présente donc un degré maximal d'oxydation égal à VII, que l'on retrouve dans l'ion permanganate MnO_4^- .

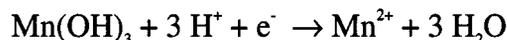
I.1.2 On attribue les différents domaines en classant les espèces selon leur degré d'oxydation et selon le pH, d'où :

+III	Mn^{3+}	$\text{Mn}(\text{OH})_3$
+II	Mn^{2+}	$\text{Mn}(\text{OH})_2$



Les domaines des solides sont des domaines d'existence alors que ceux des ions en solution sont des domaines de prédominance.

I.1.3 La frontière (2) sépare les domaines de $\text{Mn}(\text{OH})_3$ et de Mn^{2+} . La demi-équation redox s'écrit :



et la loi de Nernst conduit à :

$$E = E^0 + 0,060 \log \frac{[\text{H}_{\text{aq}}^+]^3}{[\text{Mn}^{2+}]} = \text{cste} - 0,18 \text{pH}$$

La pente vaut donc **- 0,18 V** par unité pH.

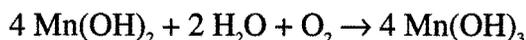
I.1.4 Le pH de précipitation est de 2,3 pour une concentration $[\text{Mn}^{3+}] = 0,10 \text{ mol.L}^{-1}$, soit : $K_s = [\text{Mn}^{3+}][\text{OH}^-]^3 = 8.10^{-37}$ donc **$\text{p}K_s = 36,1$** .

I.1.5 Si l'on change la concentration totale, seule la frontière (2) et les frontières verticales, correspondant à des frontières entre espèce soluble et espèce insoluble, sont modifiées puisque les expressions correspondantes de la loi de Nernst font intervenir C_0 .

I.2.1 Le diagramme E-pH montre que O₂ ne peut oxyder le manganèse du degré II au degré III qu'en milieu basique puisque la frontière correspondant au couple O₂/H₂O ne se trouve nettement au dessus de la frontière (3) qu'au delà de pH • 8. Le précipité brun formé est donc Mn(OH)₃

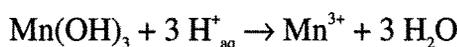


D'où :

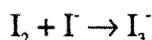


Cette réaction est lente d'où la nécessité d'attendre 30 minutes.

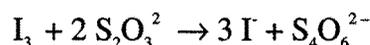
I.2.3 En milieu acide, on observe la dissolution de Mn(OH)₃ (et de Mn(OH)₂ en excès), puis l'oxydation des ions I⁻ par les ions Mn³⁺ formés :



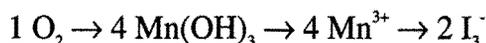
I.2.4 On rajoute I⁻ en gros excès pour permettre la solubilisation du diiode sous forme d'ions triiodure I₃⁻ :



I.2.5 On dose I₃⁻ (ce qui revient à doser I₂), par la réaction :



Si l'on reconstitue la chaîne des réactions :

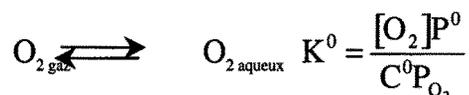


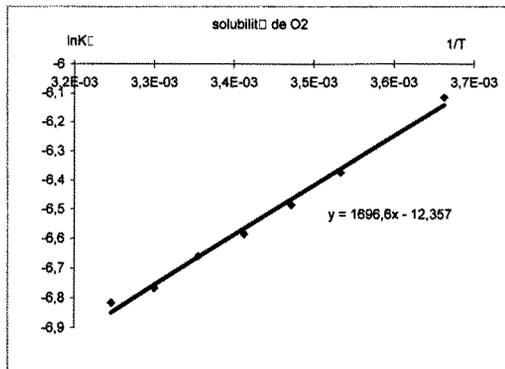
d'où :

$$(n_{O_2})_0 = \frac{1}{2} (n_{I_3^-})_{\text{formés}} = \frac{1}{4} (n_{S_2O_3^{2-}})_{\text{versés}}$$

Application numérique : (n_{O₂})₀ = 2,6.10⁻⁵ mol soit [O₂] = 2,6×10⁻⁴ mol.L⁻¹ ou 8,2 mg.L⁻¹

I.2.6 La concentration à saturation est donnée par la loi de Henry, correspondant à l'équilibre :





La constante d'équilibre K^0 est reliée au $\Delta_r H^0$ par la loi de Van't Hoff :

$$\frac{d \ln K^0}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2}$$

qui s'intègre en

$$\ln K^0(T) = \ln K^0(T_0) - \frac{\Delta_r H^0}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)$$

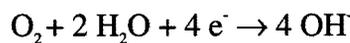
si l'on suppose $\Delta_r H^0$ constant sur l'intervalle de température $[T_0, T]$.

On peut donc accéder au $\Delta_r H^0$ en traçant $\ln K^0$ en fonction de $1/T$, On en déduit par régression linéaire :

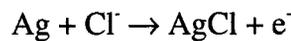
$$\Delta_r H^0 = - 14,1 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

II – L'électrode de Clark

II.1 À la cathode se produit la réduction de O_2 :



À l'anode se produit l'oxydation de l'argent, en présence d'ions chlorure :



La réduction de O_2 produit des ions OH^- . Le milieu devient donc basique au voisinage de la cathode.

II.2 La surtension est l'écart entre le potentiel de l'électrode pour un courant d'intensité i et le potentiel de repos pour un courant nul. L'allure des courbes intensité-potentiel montre que le système O_2/H_2O sur platine est lent (surtensions importantes) alors que le système $AgCl/Ag$ est rapide.

II.3.a Le potentiel de l'anode est donné par la courbe $i = f(E)$ du système $AgCl/Ag$ et se situe donc au voisinage de 0,2 V. Pour la réduction, il faut se situer sur le palier de la courbe $i = f(E)$ du système O_2/H_2O donc le potentiel de cathode doit se trouver vers - 0,5 V. On a donc une différence des potentiels d'électrodes de l'ordre de 700 mV entre anode et cathode donc une tension d'électrolyse $U = E + Ri$ du même ordre, le terme ohmique restant très faible.

II.3.b Le potentiel d'anode ne peut guère varier puisque la courbe $i = f(E)$ du système $AgCl/Ag$ est quasi-verticale (système rapide). Augmenter la tension d'électrolyse décale donc le potentiel de réduction vers des valeurs plus négatives. On risque alors d'atteindre le potentiel de réduction de l'eau et de réduire le solvant en dihydrogène.

II.4 La réaction se déroulant en surface, on peut définir v par :

$$v = \frac{1}{S} \frac{d\xi}{dt}$$

On a $\frac{d\xi}{dt} = \frac{i}{nF}$ donc $i = nFSv$ si v est la vitesse par unité de surface. On peut également introduire la densité de courant $j = \frac{i}{S} = nFv$.

II.5 L'intensité du courant tend vers une limite car la vitesse de la réaction électrochimique est limitée par le transport de matière vers l'électrode. Ce phénomène n'intervient que pour la réduction de O_2 . Pour ce qui concerne l'oxydation, l'anode est en argent : il n'y a donc pas transport de Ag. De plus, Cl^- est en large excès donc ne peut limiter en pratique la réaction d'oxydation. Pour les autres branches :

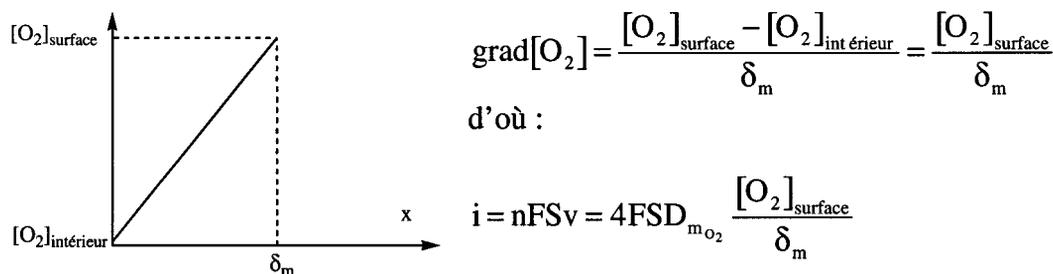
- oxydation de H_2O : l'eau est solvant donc ne peut limiter i ;
- réduction de $AgCl$: pas de transport car $AgCl$ est sur l'électrode.

II.6 L'intensité du courant ne dépend que des paramètres de la membrane, le phénomène limitant cette intensité est donc la diffusion de O_2 à travers cette membrane. On en déduit alors que O_2 ne peut s'accumuler à l'intérieur de la cellule, le transport à l'intérieur de la cellule et la réduction étant des phénomènes rapides devant la diffusion à l'intérieur de la membrane. En régime stationnaire, la concentration de O_2 à l'intérieur de la cellule est donc extrêmement faible.

II.7 Une démonstration simple peut être proposée dans l'hypothèse d'une diffusion à une dimension, qui suppose implicitement que membrane et électrode aient même surface et que les effets de bord soient négligeables (ce qui est loin d'être le cas pour les microélectrodes).

$\frac{SD_m K_m [O_2]}{\delta}$ représente la quantité de matière apportée à l'électrode par unité de

temps. S est la surface à travers laquelle s'effectue la diffusion et $J = \frac{D_m K_m [O_2]}{\delta}$, le flux de dioxygène. Ce flux se retrouve à partir de la loi de Fick en modélisant l'évolution de la concentration dans la membrane par un profil linéaire :

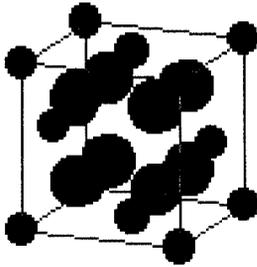


L'équilibre de dissolution de O_2 dans la membrane est rapide donc la concentration de O_2 à la surface est liée à la concentration extérieure par $[O_2]_{\text{surface}} = K_m [O_2]$ où K_m est la constante de solubilité de O_2 dans la membrane. On en déduit : $i = 4FSD_{m_{O_2}} \frac{K_m [O_2]}{\delta_m}$

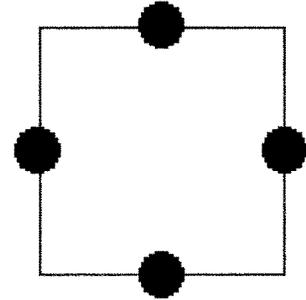
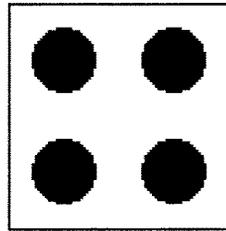
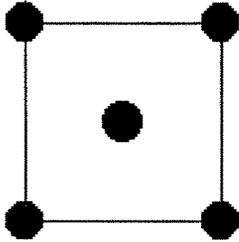
Expérimentalement, les courants mesurés sont de quelques μA .

III – La sonde zircone

III.1.1.a



On trouve les ions Zr^{4+} aux sommets et aux centres des faces.
Les ions O^{2-} occupent les centres des cubes d'arête $a/2$



Plans de cotes $z = 0$ et $z = 1$

Plans de cotes $z = 1/4$ et $3/4$

Plan de cote $z = 1/2$

III.1.1.b Chaque anion est placé au centre d'un tétraèdre dont les sommets sont occupés par des cations. La coordinence anion/cation vaut donc 4, $O^{2-} / Zr^{4+} = [4]$.

Chaque cation est au centre d'un cube dont les huit sommets sont occupés par des anions, d'où $Zr^{4+} / O^{2-} = [8]$.

III.1.1.c On observe que dans cette structure, les sites octaédriques, centres des arêtes et centre du cube, ne sont pas occupés.

III.1.2 La maille contient quatre motifs ZrO_2 , d'où : $\rho = \frac{4M_{ZrO_2}}{Na^3} = 6,2110^3 \text{ kg.m}^{-3}$

III.1.3 Dans le modèle du cristal ionique parfait, on considère que les ions sont des sphères dures, les ions les plus petits étant insérés dans les sites du réseau hôte formé par les plus gros. Cations et anions sont donc en contact mais deux ions de même signe ne le sont pas.

Si on applique ces deux conditions à la structure de ZrO_2 , on peut écrire :

$$r_{Zr^{4+}} + r_{O^{2-}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$2 r_{O^{2-}} \leq \frac{a}{2}$$

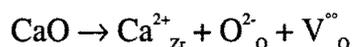
On en déduit :

$$\frac{r_{Zr^{4+}}}{r_{O^{2-}}} \geq \sqrt{3} - 1 = 0,732$$

Ici, on a : $\frac{r_{Zr^{4+}}}{r_{O^{2-}}} = \frac{84}{138} = 0,609$. La condition de non contact des anions n'est donc pas remplie

puisque $2 r_{O^{2-}} = 276 \text{ pm} \geq \frac{a}{2} = 254,5 \text{ pm}$. Le cristal ZrO_2 ne peut donc se décrire dans le modèle du cristal ionique parfait.

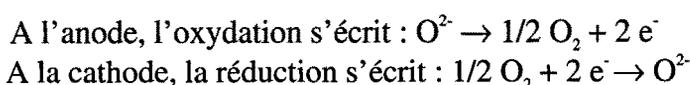
III.1.4 Le remplacement d'un Zr^{4+} , associé à deux O^{2-} , par un Ca^{2+} , associé à un seul O^{2-} , entraîne nécessairement la création d'une lacune en O^{2-} . On peut représenter l'incorporation de CaO au cristal par l'équation :



III.1.5 La conduction s'interprète par la migration des ions O^{2-} dans le cristal, facilitée par l'existence de très nombreuses lacunes. Le nombre de lacunes extrinsèques est en effet égal au nombre de Ca^{2+} , ce qui est considérable.

III.2 Étude de la sonde

III.2.1 Les échanges électroniques correspondent aux échanges entre le dioxygène et l'électrolyte solide, en l'occurrence l'ion O^{2-} .



III.2.2 On peut appliquer la loi de Nernst à ces échanges électroniques et exprimer ainsi le potentiel de chaque électrode :

$$E = E^0_{O_2/O^{2-}} + \frac{RT}{2F} \ln \frac{(P_{O_2})^{\frac{1}{2}}}{(P^0)^{\frac{1}{2}} a_{O^{2-}}}$$

L'activité des ions O^{2-} vaut 1 puisque le potentiel chimique de l'ion O^{2-} est constant. On en déduit alors :

$$E - E_{ref} = \frac{RT}{4F} \ln \frac{(P_{O_2})}{(P_{O_2})_{ref}}$$

Si l'une des deux pressions est connue $(P_{O_2})_{ref}$, la mesure de la différence de potentiel $E - E_{ref}$ donne donc accès à la pression inconnue.

Partie B Carbonates et silicates

IV Solubilité du carbonate de calcium

IV.1 La concentration de CO_2 est imposée par l'équilibre de dissolution :



À l'équilibre :

$$K^0 = \frac{[CO_{2aq}] P^0}{C^0 P_{CO_2}}$$

D'où :

$$[CO_{2aq}] = C^0 K^0 \frac{P_{CO_2}}{P^0}$$

L'application numérique conduit à :

$$[\text{CO}_{2\text{aq}}] = 1,10 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1} \text{ (pour une pression de 1 bar)}$$

Le pH de la solution est imposé par l'équilibre acido-basique :



	CO _{2aq}	HCO ₃ ⁻	H ₃ O ⁺
Etat final	[CO _{2aq}] = 1,19 × 10 ⁻⁵ mol.L ⁻¹	x	x

$$K_{A_1} = \frac{x^2}{[\text{CO}_{2\text{aq}}]c^0} \text{ d'où } \text{pH} = \frac{1}{2}(\text{p}K_{A_1} - \log[\text{CO}_{2\text{aq}}])$$

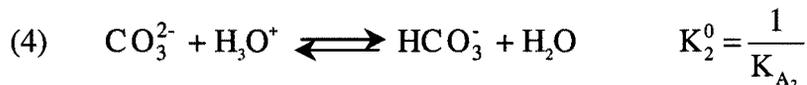
L'application numérique conduit à **pH = 5,6**

On vérifie, bien entendu, que ce pH se trouve dans la zone de prédominance de CO_{2aq}. Il n'est donc pas nécessaire de considérer le deuxième équilibre acido-basique, conduisant à CO₃²⁻.

IV.2 Dans une eau contenant CO₂, l'équation de dissolution de la calcite s'écrit :



Cette réaction se décompose en :



d'où la constante globale : $K_2^0 = K_3^0 K_4^0 K_5^0$.

L'application numérique conduit à $K_2^0 = 5 \times 10^{-5}$

IV.3 Le bilan de matière de la réaction prépondérante s'écrit : $[\text{HCO}_3^-] = 2 [\text{Ca}^{2+}]$, d'où :

$$4[\text{Ca}^{2+}]^3 = K_2^0 [\text{CO}_{2\text{aq}}]$$

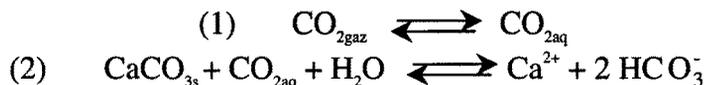
Application numérique : $[\text{Ca}^{2+}] = 5,2 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ d'où $s = 52 \text{ mg.L}^{-1}$

On en déduit, avec $[\text{HCO}_3^-] = 2 [\text{Ca}^{2+}] = 1,1 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$

$$\text{pH} = \text{p}K_{A_1} + \log \frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{CO}_{2\text{aq}}]} = 8,2$$

L'espèce négligée dans le calcul est CO_3^{2-} , on vérifie que sa concentration de $9,7 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$ est bien négligeable devant celle de HCO_3^- .

IV.4 On raisonne sur les deux réactions :



Initialement, la très forte pression maintient en solution une quantité de CO_2 supérieure à la valeur nécessaire pour rompre l'équilibre (2) de dissolution de la calcite. On a donc $Q_2 < K_2^0$ et $\text{CaCO}_{3\text{s}}$ ne peut apparaître. Lorsque l'eau remonte dans le tube de forage, la pression totale diminue. Dès que la pression imposée atteint la valeur $(P_{\text{CO}_2})_{\text{eq}}$ correspondant à la quantité de CO_2 initialement dissous, l'équilibre (1) peut être réalisé et l'eau minérale commence à dégazer. Ce dégazage qui diminue la quantité de $\text{CO}_{2\text{aq}}$ provoque une augmentation du pH et

une augmentation du quotient de réaction $Q_2 = \frac{[\text{Ca}^{2+}][\text{HCO}_3^-]^2}{[\text{CO}_{2\text{aq}}]}$. Ce quotient finit par atteindre

la valeur d'équilibre $K_2^0 = 5 \cdot 10^{-5}$ pour une pression totale de 3,5 bars. Il y a alors précipitation de CaCO_3 ce qui peut provoquer l'obturation du forage.

IV.5 La quantité de $\text{CO}_{2\text{aq}}$ est donnée par la pression de dégazage. Pour $P_{\text{CO}_2} = 5,5$ bars, on a donc $[\text{CO}_2] = K^0 C^0 \frac{P_{\text{CO}_2}}{P^0}$ soit $[\text{CO}_2] = 0,18 \text{ mol.L}^{-1}$. Cette concentration est celle correspondant au début du dégazage, donc celle existant initialement dans la nappe. La seconde pression correspondant à la précipitation permet d'atteindre les autres concentrations.

Pour $P_{\text{CO}_2} = 3,5$ bars, on a $[\text{CO}_2] = 0,11 \text{ mol.L}^{-1}$. Puisque l'équilibre de précipitation est juste

atteint, on peut écrire $\frac{[\text{Ca}^{2+}][\text{HCO}_3^-]^2}{[\text{CO}_2]} = K^0 = 5 \times 10^{-5}$ avec $[\text{HCO}_3^-] = 2 [\text{Ca}^{2+}]$.

On en déduit :

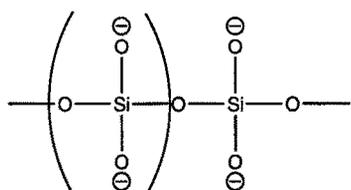
$$[\text{Ca}^{2+}] = 1,1 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \text{ et } [\text{HCO}_3^-] = 2,2 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}.$$

On peut vérifier que $[\text{CO}_3^{2-}] = 2,9 \times 10^{-7} \text{ mol.L}^{-1}$ est bien négligeable.

V – Silicates et aluminosilicates

V.1 Dans le composé tridimensionnel, chaque oxygène est commun à deux tétraèdres. La formule brute est donc SiO_2 . Il s'agit de la silice qu'on peut trouver, par exemple, sous forme de quartz.

V.2 La chaîne de tétraèdres correspond à la formule développée suivante :



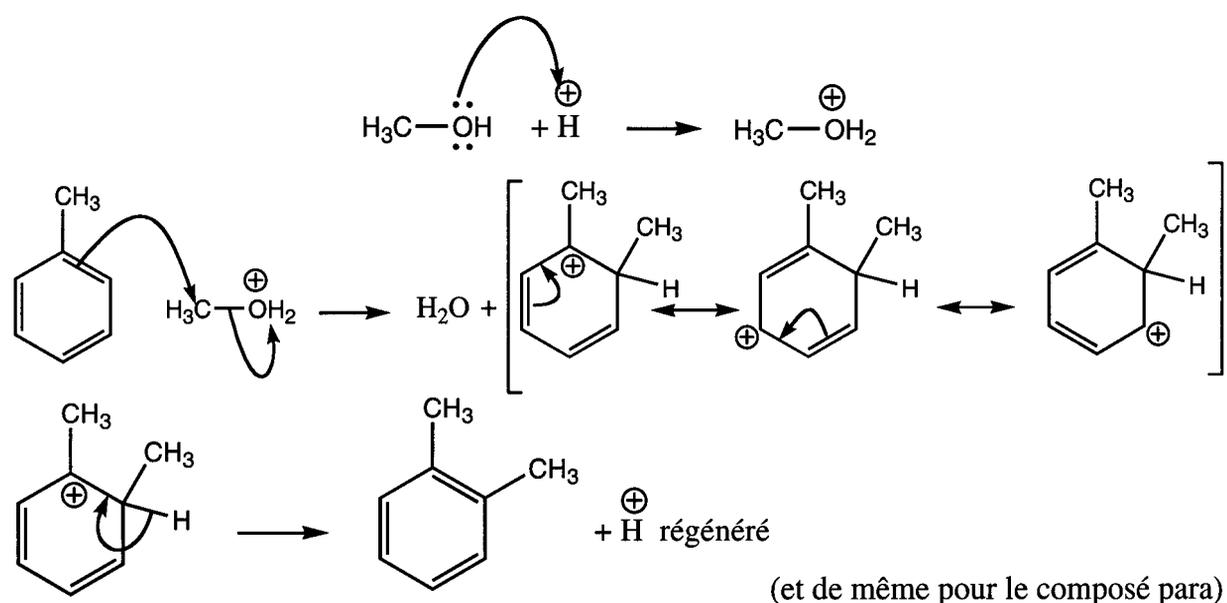
On identifie dans cette chaîne le motif SiO_3^{2-} , qui est donc associé à un ion Mg^{2+} . On peut aussi dire que sur les quatre O, deux sont communs donc comptent pour 1/2 et ne portent pas de charge.

V.3 Le remplacement d'un silicium ($Z=14$) par un aluminium ($Z=13$) introduit nécessairement une charge négative puisque l'aluminium n'a que trois électrons sur sa couche externe. L'introduction d'un atome d'aluminium entraîne donc celle d'une charge positive donc de cations.

V.4 La structure poreuse de la zéolithe lui permet d'absorber de l'eau qui solvate les cations de la structure.

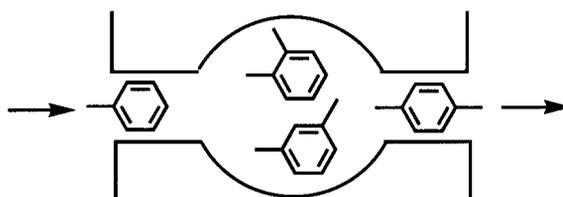
V.5 La présence d'aluminium, donc de cations supplémentaires, rend la zéolithe hydrophile. Dans l'industrie pétrolière, on recherche des zéolithes peu hydrophiles donc pauvres en aluminium.

V.6 Le groupe méthyle étant donneur, il oriente en ortho/para avec activation, d'après les règles de Hollemann. L'application de ces règles conduit donc à prévoir l'obtention majoritaire du paraxylène et de l'orthoxylène :



V.7 Les règles de Hollemann s'appliquent à une compétition sous contrôle cinétique où les produits majoritaires sont ceux qui se forment le plus vite. Ici, la compétition est sous contrôle thermodynamique puisque l'on atteint un état final où les différents xylènes sont en équilibre thermodynamique. Le produit formé majoritairement est donc le plus stable.

V.8 La réaction se déroule à l'intérieur des cavités acides de la zéolithe et forme un mélange des trois xylènes qui doivent diffuser à travers les pores pour sortir. La taille des canaux est choisie de telle sorte que seul le paraxylène puisse sortir de la zéolithe.



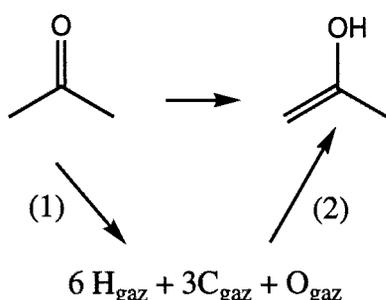
Deuxième partie -Synthèse d'une phéromone d'insecte

I – L'équilibre céto-énolique

I.1 Ce type d'équilibre est nommé équilibre de tautomérie.

I.2 $\Delta_r G^0 = -RT \ln K^0$ donc $K^0 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0}{RT}\right) = 8 \cdot 10^{-8}$. On en déduit, puisque $K^0 = \frac{[\text{énol}]}{[\text{cétone}]}$ que la proportion d'énol est de $8 \cdot 10^{-6} \%$.

I.3 L'énergie de liaison est, par définition, l'énergie interne de dissociation à 0 K. Toutefois, on peut l'assimiler à l'enthalpie de dissociation à la température T, réactifs et produits étant considérés à l'état gazeux. Pour la calculer, on peut décomposer la réaction :



D'où :

$$\begin{aligned} \bullet_r H^0 &= \bullet_r H^0 + \bullet_r H^0 = 6 D^0_{\text{C-H}} + 2 D^0_{\text{C-C}} + D^0_{\text{C=O}} - 5 D^0_{\text{C-H}} - D^0_{\text{C-O}} - D^0_{\text{O-H}} - D^0_{\text{C=C}} - D^0_{\text{C-C}} \\ \bullet_r H^0 &= D^0_{\text{C-H}} + D^0_{\text{C-C}} + D^0_{\text{C=O}} - D^0_{\text{C-O}} - D^0_{\text{O-H}} - D^0_{\text{C=C}} \end{aligned}$$

Application numérique : $\Delta_r H^0 = 50 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

II – Etude cinétique de l'iodation de la propanone

II.1 L'absorbance est définie par $A = \log \frac{I_0}{I}$ où I est l'intensité transmise par l'échantillon et I_0 , l'intensité transmise par la référence. La loi de Beer-Lambert s'écrit $A = \epsilon \cdot l \cdot C_i$ soit ici : $A = \epsilon l [I_2]$ puisque I_2 est la seule espèce absorbante.

II.2 Lorsque A passe de 1 à 2, $\frac{I_0}{I}$ passe de 10 à 100. Il y a donc plus que 1% de lumière transmise et l'imprécision des mesures devient très grande. Il faut bien sûr également vérifier que l'on se trouve toujours dans le domaine de linéarité de la loi, valide pour des solutions suffisamment diluées.

II.3 On remarque que les concentrations en acétone et acide sont très supérieures à celle du diiode. On peut donc les considérer comme constantes et supposer qu'il y a dégénérescence de l'ordre pour ces constituants, d'où $v = k_{\text{app}} [I_2]^\alpha$.

II.4 A, donc $[I_2]$, varie linéairement avec t donc la vitesse de disparition de I_2 est constante, ce qui prouve que l'ordre partiel α par rapport à I_2 est nul.

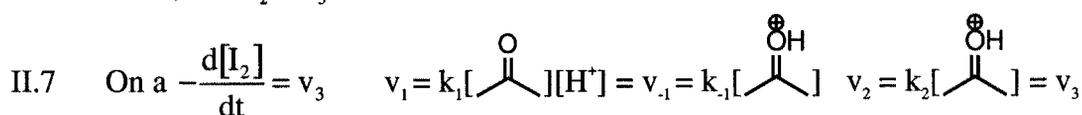
II.5 On calcule la vitesse par : $v = \frac{\Delta[I_2]}{\Delta t}$, avec $\Delta[I_2] = \frac{20}{50} \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1} = 4 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$

Expérience	1	2	3	4
•t (seconde)	150	280	280	580
v (mol.L ⁻¹ .s ⁻¹)	$2,7 \times 10^{-7}$	$1,4 \times 10^{-7}$	$1,4 \times 10^{-7}$	$6,9 \times 10^{-8}$

Sachant que $k_{app} = k([CH_3COCH_3]_0)^\beta ([H^+]_0)^\gamma$, on déduit $\beta = \gamma = 1$, puisque la vitesse double à chaque fois qu'une des deux concentrations initiales est multipliée par 2. On en déduit :

$$k = \frac{v}{[CH_3COCH_3]_0 [H^+]_0} = 1,7 \times 10^{-5} \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$$

II.6 On peut appliquer à l'équilibre (1), l'hypothèse du pré-équilibre rapide et donc considérer que $v_1 = v_{-1}$. L'énol étant consommé dans une étape rapide devant l'étape de formation, il ne s'accumule pas et on peut lui appliquer l'approximation des états quasi-stationnaires, soit $v_2 = v_3$.



On en déduit : $-\frac{d[I_2]}{dt} = v_3 = v_2 = \frac{k_2 k_1}{k_{-1}} [CH_3COCH_3][H^+]$

Le mécanisme proposé est donc en accord avec un ordre 0 pour I_2 , 1 pour l'acétone et un pour H^+ .

III – Composés β -dicarboxylés

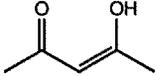
III.1.a L'abscisse δ du spectre s'appelle le déplacement chimique. Il est défini par :

$$\delta = \frac{\nu - \nu_{TMS}}{\nu_0} 10^6$$

La valeur $\delta = 0$ correspond au TMS, tétraméthylsilane, composé choisi

usuellement comme origine des déplacements chimiques, compte tenu du blindage très fort de ses protons.

III.1.b La surface d'un pic est proportionnelle au nombre de protons résonnant. Elle permet donc de dénombrer les protons équivalents d'une molécule résonnant pour un même δ .

III.2 La forme énol de l'acétylacétone a pour formule : . On peut alors attribuer les différents pics du spectre :

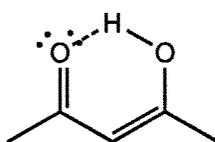
$\delta = 2$ Le groupe de pics mal résolu correspond aux deux CH_3 équivalents de l'acétylacétone et aux deux CH_3 , très peu différents de la forme énol. Tous ces protons ont, d'après la table, des déplacements chimiques semblables

$\delta = 3,5$ Le pic singulet correspond aux deux H du CH_2 de l'acétylacétone.

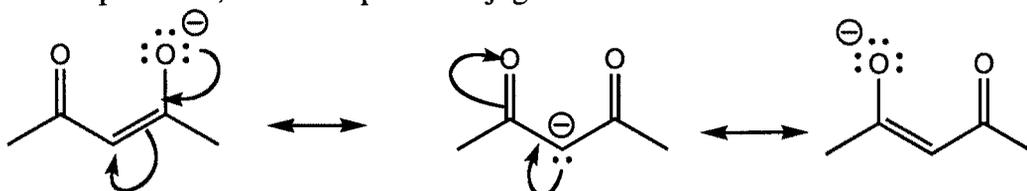
$\delta = 5,5$ Ce pic a un déplacement chimique caractéristique d'un proton fixé sur une double liaison. Il s'agit donc du H de la forme énol porté par la double liaison.

$\delta = 15$ Cette valeur exceptionnellement forte du déplacement est caractéristique du proton du groupe hydroxyle de l'énol.

III.3 Les deux pics à $\delta = 15$ et $\delta = 5,5$ correspondent tous deux à un proton de la forme énol. La surface moyenne de chaque pic est donc $\frac{1+0,79}{2}=0,895$. Le pic à $\delta = 3,5$ correspond à deux H de l'acétylacétone. Si N_1 et N_2 sont les pourcentages des deux formes, on peut donc écrire : $\frac{N_1}{2N_2} = \frac{0,895}{0,14}$ soit $N_1 = 93\%$ pour la forme énol et $N_2 = 7\%$ pour la forme cétone. On retrouve à peu près les mêmes pourcentages en ne considérant pour la forme énol que le pic à $\delta = 3,5$ (le pic situé à $\delta = 15$ est en effet très affecté par le phénomène d'échange). On observe donc que la forme énol est très nettement majoritaire dans le mélange en équilibre. Elle est donc plus stable ce qui s'explique par la conjugaison entre les deux doubles liaisons, d'une part, et par l'existence d'une liaison hydrogène intramoléculaire dans la forme énol.



III.4 L'acidité relativement forte de l'acétylacétone s'explique par la stabilité de la forme basique correspondante, stabilisée par la conjugaison :



III.5 La base conjuguée possède deux sites de coordination qui sont les deux atomes d'oxygène. Ces deux atomes portent l'essentiel de la charge négative et peuvent se lier simultanément à un même cation métallique (ligand bidentate).

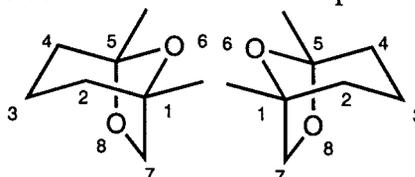
IV – Synthèse de la frontaline

IV.1 Il existe deux atomes de carbone asymétriques, C_1 et C_5 . Leurs configurations absolues sont données par les règles de Cahn-Ingold-Prelog.

Pour C_5 : $O_6 > O_8 > C_4 > CH_3$ donc ce carbone est de configuration R

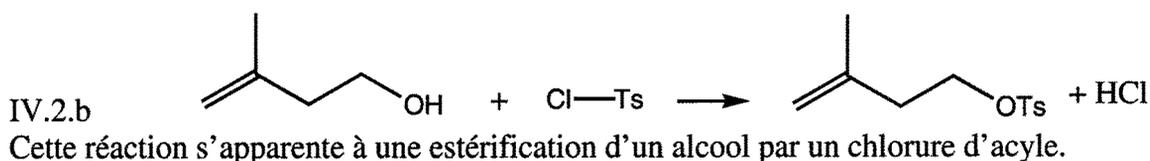
Pour C_1 : $O_6 > C_7 > C_2 > CH_3$ donc ce carbone est de configuration S

Les deux atomes de carbone asymétriques étant liés par un oxygène et insérés dans une structure bicyclique, cela impose aux deux configurations absolues d'être liées. Il n'y a donc que deux stéréoisomères (1S, 5R) et (1R, 5S) puisque les deux C^* doivent s'inverser simultanément. Ces deux stéréoisomères forment un couple d'énantiomères :



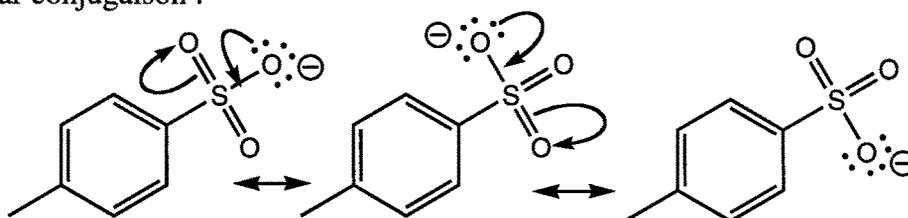
Le symbole (-) signifie lévogyre et fait référence à l'activité optique de la frontaline qui fait tourner vers la gauche le plan de polarisation d'une lumière polarisée.

IV.2.a L'alcool A est le 3-méthylbut-3-én-1-ol



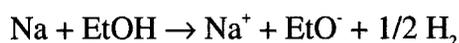
IV.2.c La pyridine est un solvant basique dont le rôle est ici de capter les protons libérés par la réaction (il s'agit du H porté initialement par OH et libéré après l'attaque sur l'électrophile).

IV.2.d L'ion paratoluènesulfonate est un bon nucléofuge car c'est une base très faible stabilisée par conjugaison :

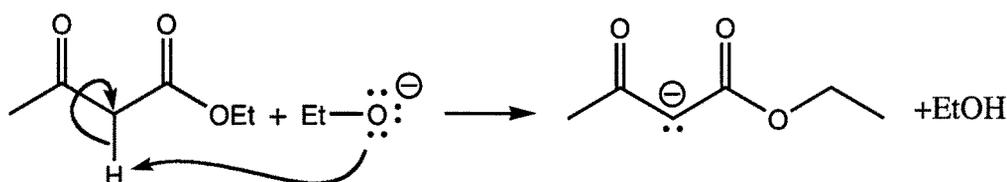


On aurait également pu remplacer le groupe hydroxyle OH par un atome d'halogène comme Br ou I, Br⁻ ou I⁻ étant d'excellents nucléofuges.

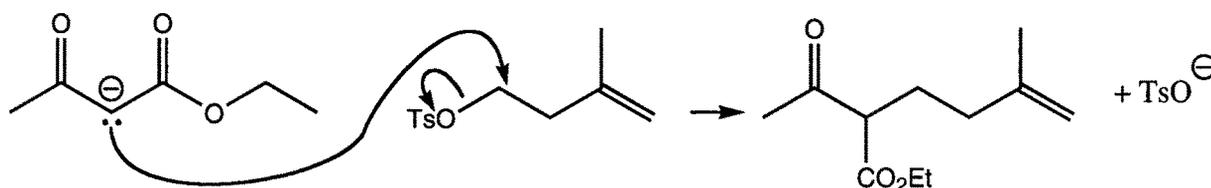
IV.3.a L'éthanolate de sodium se prépare simplement par réaction d'oxydo-réduction entre le sodium et l'éthanol :



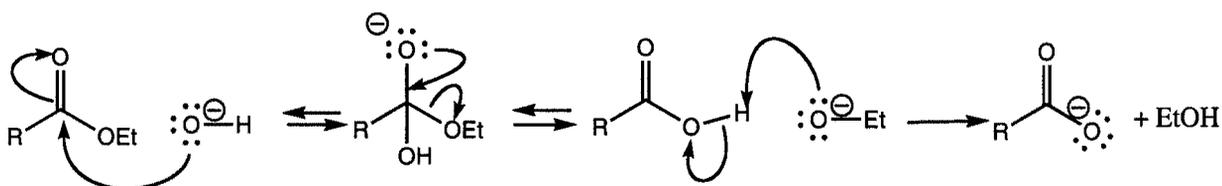
IV.3.b L'intérêt de l'éthanolate est d'être une base suffisamment forte pour former l'anion énolate, d'une part, sans attaquer le groupe ester comme l'aurait fait l'ion OH, d'autre part :



IV.3.c Une fois formé, l'énolate attaque le substrat électrophile. Le carbone portant OTs étant primaire, la substitution est bimoléculaire de type SN2 :

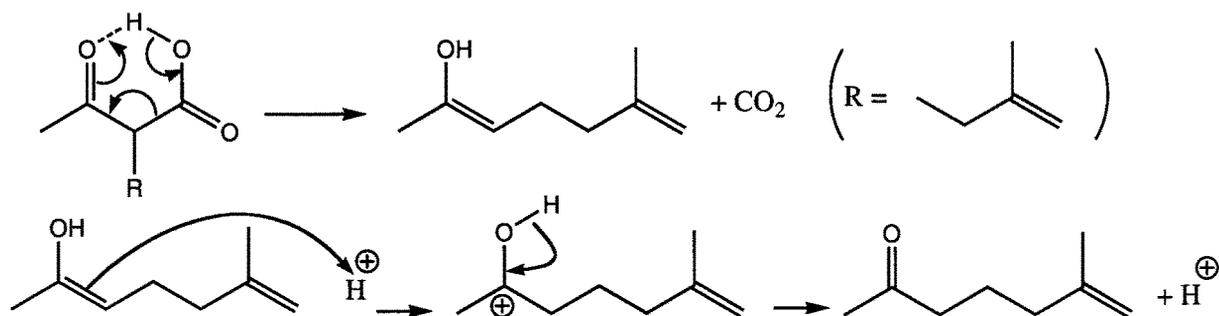


IV.4.a Il s'agit de la réaction de saponification des esters :



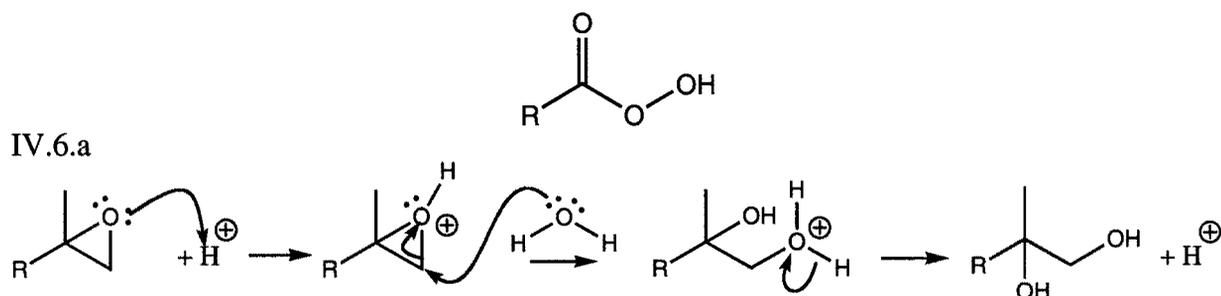
L'intérêt de la saponification, par rapport à l'hydrolyse acide, est d'être rendue quantitative par la dernière réaction acido-basique entre une base très forte, EtO^- et un acide faible RCOOH .

IV.b Le dégagement de CO_2 est dû à la décarboxylation du diacide, assistée par une liaison hydrogène intramoléculaire. Ce mécanisme à six centres est concerté, il est suivi par une étape de tautomérisation reformant le groupe carbonyle :

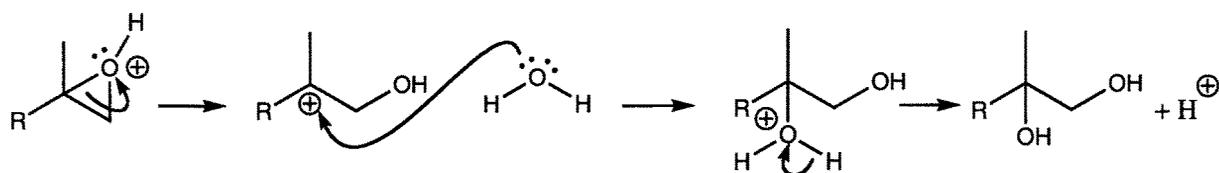


IV.5.a Le groupe fonctionnel créé est un groupe époxyde ou oxiranne.

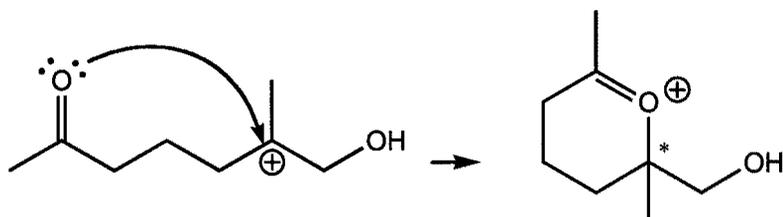
IV.5.b Le réactif utilisé traditionnellement pour réaliser une époxydation est un peroxyacide



Lorsque le carbocation formé est suffisamment stable, on peut envisager l'ouverture de l'époxyde avant l'attaque du nucléophile, donc un mécanisme de type $\text{S}_{\text{N}}1$ plutôt que $\text{S}_{\text{N}}2$. On peut envisager ce cas ici, puisque le carbocation formé est tertiaire :

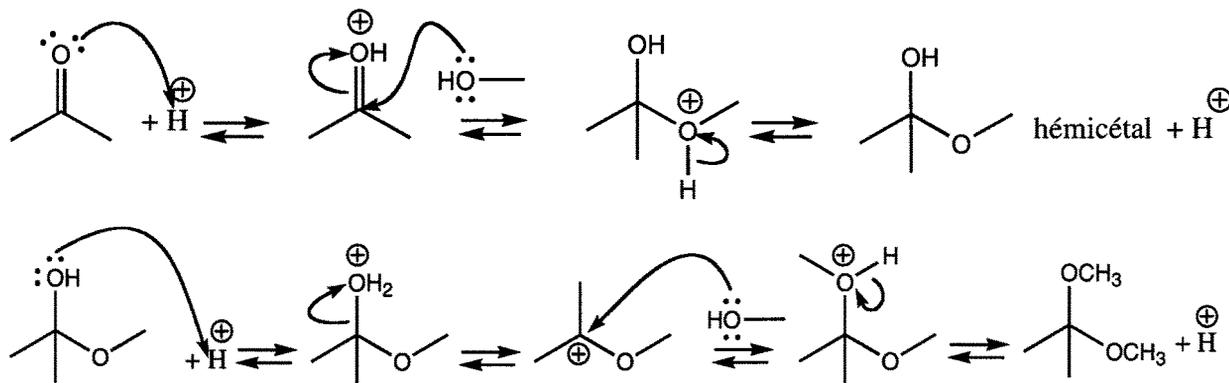


IV.6.b Le seul nucléophile disponible est le groupe carbonyle. La régiosélectivité de l'attaque peut s'interpréter par l'ouverture préalable de l'époxyde :

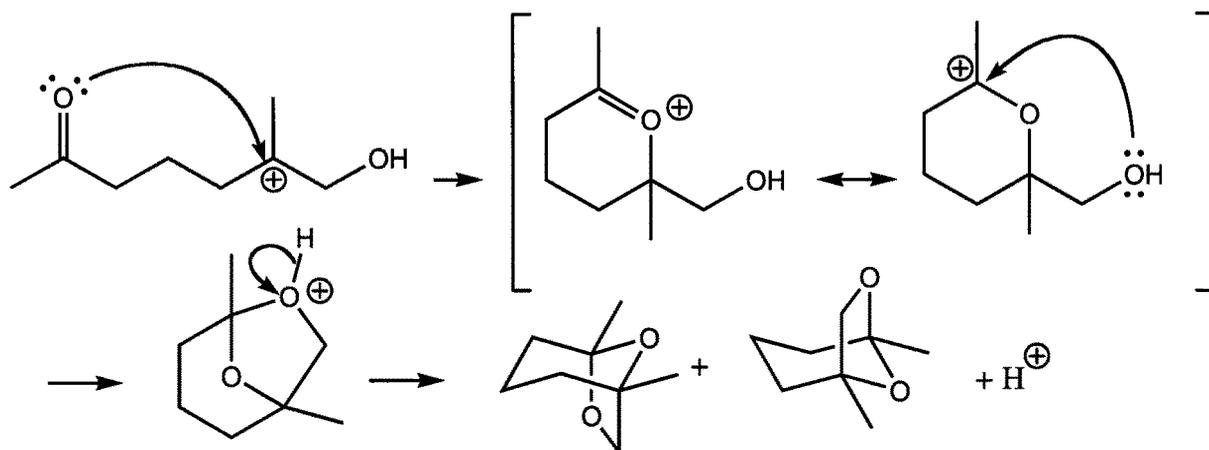


Le nucléophile ne peut attaquer que le carbone portant une lacune électronique si le mécanisme est de type SN_1 . L'attaque se ferait également sur ce carbone dans le cadre d'un mécanisme SN_2 puisque l'atome de carbone tertiaire est le plus électrophile et que, de surcroît, le cycle formé, à 6 atomes est plus favorable, thermodynamiquement ou cinétiquement, que le cycle à 7. On peut noter que la stéréochimie du carbone (*) n'est pas fixée, puisque même en cas de mécanisme concerté SN_2 , l'attaque se fait sur un époxyde formé sous forme racémique dans la réaction IV.5.b.

IV.6.c On a d'abord addition d'une molécule de CH_3OH sur la propanone pour former un hémicétal puis substitution du groupe OH par OCH_3 :



IV.6.d L'attaque du carbonyle sur l'époxyde crée un carbocation qui peut être attaqué de façon intramoléculaire par le groupe hydroxyle. On forme alors un cétal sous forme d'un couple d'énantiomères puisque le carbone portant CH_2OH est formé sous forme racémique :



Agrégation de sciences physiques

Concours interne

COMPOSITION AVEC EXERCICES D'APPLICATION
Option physique appliquée ♦ Session : 2004

PREMIER PROBLÈME

Électronique et automatique

I. Modélisation des pertes

I.1.

I.1.1. $I_C = \pi R_s^2 J_C$

I.1.2.
$$I_{\max} = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_s} J_C \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = J_C \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r_s}^{R_s}$$

$$= J_C \cdot \pi \cdot (R_s^2 - r_s^2) = I_C - \frac{I_C}{R_s^2} \cdot r_s^2$$

$$\Rightarrow r_s = R_s \sqrt{\frac{I_C - I_{\max}}{I_C}} = R_s \sqrt{1 - \frac{I_{\max}}{I_C}}$$

I.2.

I.2.1. $i(t) = \pi J_C \cdot [c^2 - r_s^2 - R_s^2 + c^2]$

$$= \pi \cdot [2c^2 - r_s^2 - R_s^2] J_C$$

$$\Rightarrow 2c^2 = \frac{i}{\pi J_C} + r_s^2 + R_s^2$$

$$c^2 = \frac{i}{2\pi J_C} + \frac{R_s^2}{2} + \frac{R_s^2}{2} \left(1 - \frac{I_{\max}}{I_C} \right)$$

$$= \frac{i}{2\pi J_C} + R_s^2 - R_s^2 \frac{I_{\max}}{2I_C}$$

$$\Rightarrow c = R_s \sqrt{1 - \frac{I_{\max}}{2I_C} + \frac{i}{2I_C}} ; \alpha = \frac{1}{2I_C}$$

I.2.2. Sur un cercle C de rayon r le champ magnétique B est constant et égal à $\mu_0 \cdot H$ et tangent au cercle.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \implies B = \frac{\mu_0 \cdot J_c}{2 \cdot r} \cdot [2c^2 - r_s^2 - r^2]$$

En remplaçant c par sa valeur, on obtient :

$$B = \frac{\mu_0 \cdot J_c}{2} \cdot \left[\frac{i}{\pi \cdot J_c \cdot r} + \frac{R_s^2}{r} - r \right] = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r} + \frac{\mu_0 \cdot J_c}{2} \cdot \left[\frac{R_s^2}{r} - r \right]$$

$$I.2.3. \quad \text{rot} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial E}{\partial r} \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial B}{\partial t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot \frac{di}{dt} \rightarrow E = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{di}{dt} \cdot \ln r + K$$

Condition à la frontière :

$$E = 0 \text{ pour } r = c \rightarrow E = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{di}{dt} \cdot \ln \frac{r}{c} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{di}{dt} \cdot \ln \left(\frac{r}{R_s \sqrt{1 - \frac{I_{\max}}{2I_C} + \frac{i}{2I_C}}} \right)$$

$$I.2.4. \quad p_s(t) = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \int_c^{R_s} E \cdot (-J_c) \cdot r \cdot dr = -h \cdot J_c \cdot \mu_0 \cdot \frac{di}{dt} \cdot \int_c^{R_s} r \cdot \ln \frac{r}{c} \cdot dr$$

$$\text{On a : } \int_c^{R_s} r \cdot \ln \frac{r}{c} \cdot dr = \left[\frac{r^2}{2} \cdot \ln r \right]_c^{R_s} - \int_c^{R_s} \frac{r}{2} \cdot dr - \int_c^{R_s} r \cdot \ln c \cdot dr$$

$$\int_c^{R_s} r \cdot \ln \frac{r}{c} \cdot dr = \left[\frac{R_s^2}{2} \cdot \ln R_s - \frac{c^2}{2} \cdot \ln c \right] - \frac{R_s^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{R_s^2}{4} \ln c + \frac{c^2}{4} \ln c$$

$$\rightarrow p_s(t) = -h \cdot J_c \cdot \mu_0 \cdot \frac{di}{dt} \cdot \left[\frac{R_s^2}{2} \ln \frac{R_s}{c} - \frac{R_s^2}{4} + \frac{c^2}{4} \right]$$

$$\text{Et donc : } k_1 = -h \cdot J_c \cdot \mu_0 \text{ et } F_1 = \left[\frac{R_s^2}{2} \ln \frac{R_s}{c} - \frac{R_s^2}{4} + \frac{c^2}{4} \right]$$

I.2.5. En remplaçant c par sa valeur en fonction de i, on obtient :

$$P_s(t) = -\frac{h \cdot J_C \cdot \mu_0 \cdot R_S^2}{4} \cdot \frac{di}{dt} \cdot \left[-\ln \left(1 - \frac{I_{\max}}{2 \cdot I_C} + \frac{i}{2 \cdot I_C} \right) - \frac{I_{\max}}{2 \cdot I_C} + \frac{i}{2 \cdot I_C} \right]$$

On a également :

$$\frac{dF_2}{dt} = \ln \left(1 - \frac{I_{\max}}{2 \cdot I_C} + \frac{i}{2 \cdot I_C} \right) \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \cdot \frac{1}{2 \cdot I_C} \text{ et } \frac{\partial(i^2)}{\partial t} = 2 \cdot i \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

Et donc :

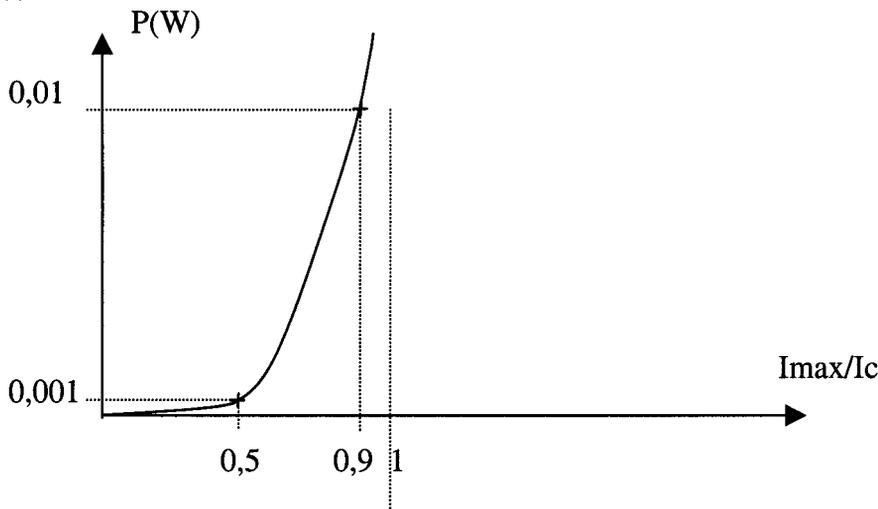
$$P_s = -\mu_0 \cdot \frac{J_C \cdot h \cdot R_S^2}{2} \cdot f_{Su} \cdot \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left[\frac{1}{4 \cdot I_C} \cdot \frac{d(i^2)}{dt} - \frac{I_{\max}}{2 \cdot I_C} \cdot \frac{di}{dt} - 2 \cdot I_C \cdot \frac{dF_2(t)}{dt} \right] \cdot dt$$

I.2.6. A $t = \frac{T}{4}$, $i = I_{\max}$ et à $t = \frac{3T}{4}$, $i = -I_{\max}$.

$$P_s = \mu_0 \cdot \frac{J_C \cdot h \cdot R_S^2}{2} \cdot f_{Su} \cdot \left[\frac{1}{4 \cdot I_C} \int_{I_{\max}^2}^{I_{\max}^2} d(i^2) - \frac{I_{\max}}{2 \cdot I_C} \cdot \int_{-I_{\max}}^{I_{\max}} di - 2 \cdot I_C \int_{F_2[-I_{\max}]}^{F_2[I_{\max}]} dF_2(t) \right]$$

$$\rightarrow P_s = \mu_0 \cdot \frac{h \cdot I_C^2}{\pi} \cdot f_{Su} \cdot \left[\left(1 - \frac{I_{\max}}{I_C} \right) \ln \left(1 - \frac{I_{\max}}{I_C} \right) + \frac{I_{\max}}{I_C} - \frac{I_{\max}^2}{2 \cdot I_C^2} \right]$$

I.2.7.



II. Mesure du courant par capteur à effet Hall

II.1.

II.1.1. $U_{MN} = \rho \cdot \frac{L_1}{L_2 \cdot d} \cdot I_H \rightarrow \rho = \frac{U_{MN} \cdot L_2 \cdot d}{L_1 \cdot I_H} = 0,25 \Omega \cdot m$

II.1.2. $F_L = |e| \cdot v \cdot B$

II.1.3. La force électrostatique est colinéaire et de sens opposé à la force de Lorentz.

$$F_E = |e| \cdot E_{PQ} = |e| \cdot \frac{U_{PQ}}{L_2}$$

II.1.4. Voir document réponse n°1

II.1.5. A l'équilibre les forces sont de même valeurs.

$$\rightarrow U_{PQ} = L_2 \cdot v \cdot B$$

$$II.1.6. J_H = \frac{I_H}{d \cdot L_2} = n \cdot |e| \cdot v \rightarrow n = \frac{I_H}{d \cdot L_2 \cdot |e| \cdot v} = \frac{I_H \cdot B}{d \cdot |e| \cdot U_{PQ}}$$

$$II.1.7. U_{PQ} = \frac{I_H \cdot B}{d \cdot |e| \cdot n} = 0,25V$$

II.2.

II.2.1. Sur un cercle C_1 de rayon R_1 le champ magnétique B est constant et tangent au cercle.

$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s} = i(t) \rightarrow H_{fer} (2\pi R_1 - L_e) + H_{entrefer} \cdot L_e = i(t) \text{ si } L_e \ll R_1$$

$$\rightarrow B = \frac{\mu_0 \cdot i(t)}{\frac{2 \cdot \pi \cdot R_1 - L_e}{\mu_r} + L_e} = 0,2T$$

$$II.2.2. U_{PQ} = \frac{I_H}{d \cdot |e| \cdot n} \frac{\mu_0 \cdot i(t)}{\frac{2 \cdot \pi \cdot R_1 - L_e}{\mu_r} + L_e}$$

III. Mesure de la tension et traitement du signal

III.1. Amplificateur de tension

III.1.1. Amplificateur différentiel

III.1.1.1. Soustracteur

$$III.1.1.1.1. u_{s4} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot e_1 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} \right) \cdot \frac{R_4}{R_1} \cdot e_2 = A_d \cdot (e_2 - e_1) + A_C \cdot \left(\frac{e_1 + e_2}{2} \right)$$

$$A_d = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} \right) \frac{R_4}{R_1} + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

→

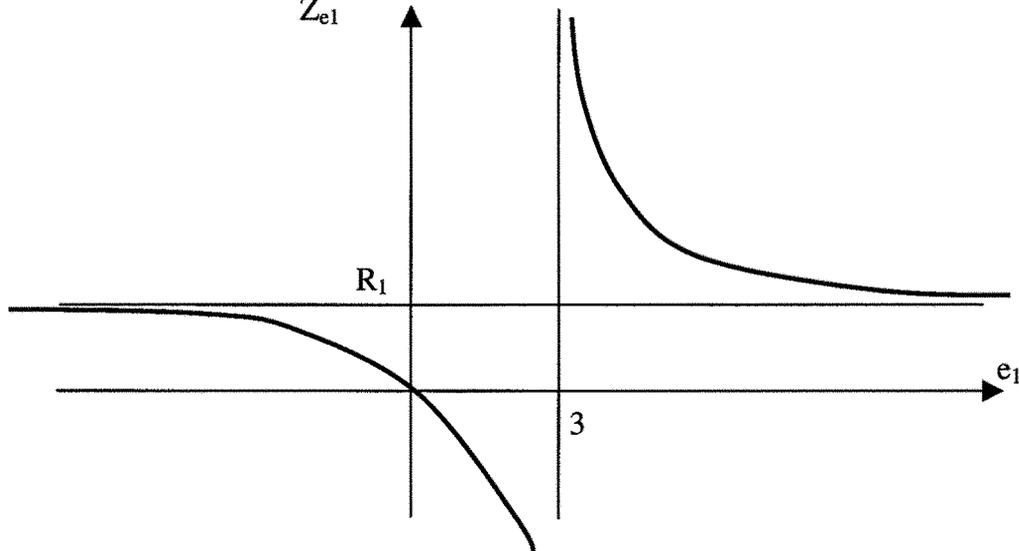
$$A_c = \left(\left(\frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} \right) \frac{R_4}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} \right)$$

III.1.1.1.2. $A_c = 0$ si $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$

III.1.1.1.3. Soient i_1 le courant dans R_1 et i_2 le courant dans R_3 .

$$Z_{e2} = \frac{e_2}{i_2} = R_3 + R_4 \quad \text{et} \quad Z_{e1} = \frac{e_1}{i_1} = \frac{e_1}{\frac{e_1 - V_{e-}}{R_1}} = \frac{e_1 \cdot R_1}{e_1 - \frac{e_2 R_4}{R_3 + R_4}}$$

III.1.1.1.4. $Z_{e1} = \frac{e_1}{i_1} = \frac{e_1 \cdot R_1}{e_1 - 3}$



III.1.1.1.5. Z_{e1} varie avec e_1 et e_2 ; Z_{e2} ne peut être très grande car si R_3 et R_4 sont trop grandes les défauts statiques entraînent un décalage important en sortie.

III.1.1.2. Amplificateur d'instrumentation

III.1.1.2.1. $U_{S5} = e_4 - e_3$

III.1.1.2.2. $V_{1-} = V_{1+} = e_1 = \frac{R_1 e_3 + R_2 e_2}{R_1 + R_2} \rightarrow e_3 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} e_1 - \frac{R_2}{R_1} e_2$

$$V_{2-} = V_{2+} = e_2 = \frac{R_1 e_4 + R_3 e_1}{R_1 + R_3} \rightarrow e_4 = \frac{R_1 + R_3}{R_1} e_2 - \frac{R_3}{R_1} e_1$$

$$\text{III.1.1.2.3. } U_{SS} = \left(1 + 2 \frac{R_2}{R_1}\right) (e_2 - e_1)$$

$$\text{III.1.1.2.4. } \frac{R_2}{R_1} = \frac{999}{2} \rightarrow R_1 = 20\Omega$$

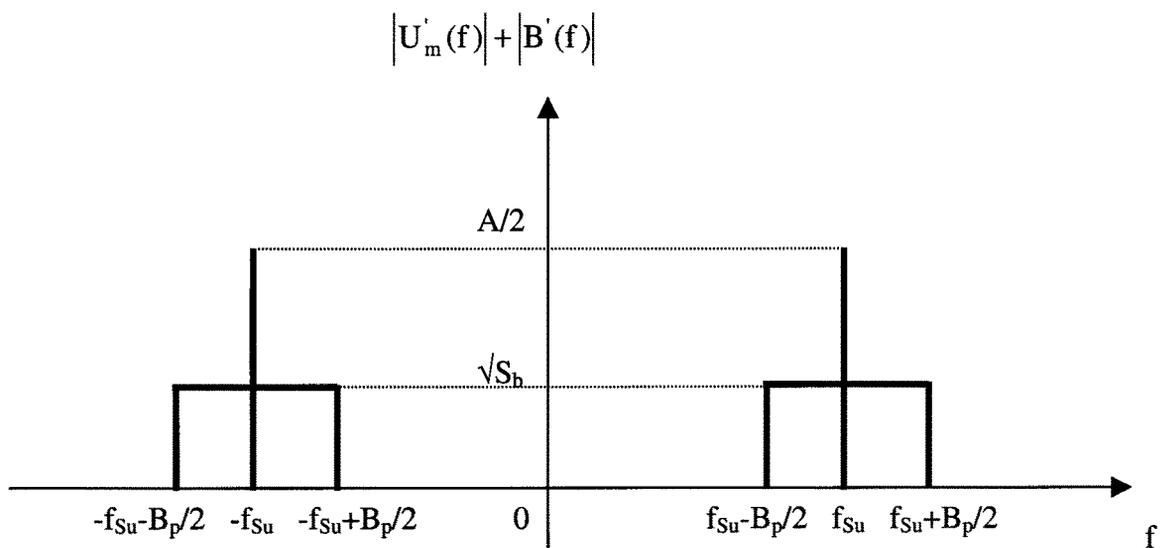
III.2. Détection synchrone

III.2.1.

III.2.1.1. A la sortie du filtre passe bande on a :

$$u'_m(t) = u_m(t) \rightarrow U'_m(f) = A \left(\frac{\delta(f - f_{Su}) + \delta(f + f_{Su})}{2} \right)$$

Le bruit $B'_f(f) = \sqrt{S_b}$ existe uniquement dans la bande passante du filtre.



$$\text{III.2.1.2. Puissance de } u'_m(t) : P'_u = \frac{A^2}{2}$$

$$\text{Puissance du bruit } b'(t) : P'_b = 2 \int_{f_{Su} - \frac{B_p}{2}}^{f_{Su} + \frac{B_p}{2}} S_b \cdot df = 2 \cdot S_b \cdot B_p$$

$$R_{SB1} = \frac{P'_u}{P'_b} = \frac{A^2}{4 \cdot S_b \cdot B_p} = 0,25$$

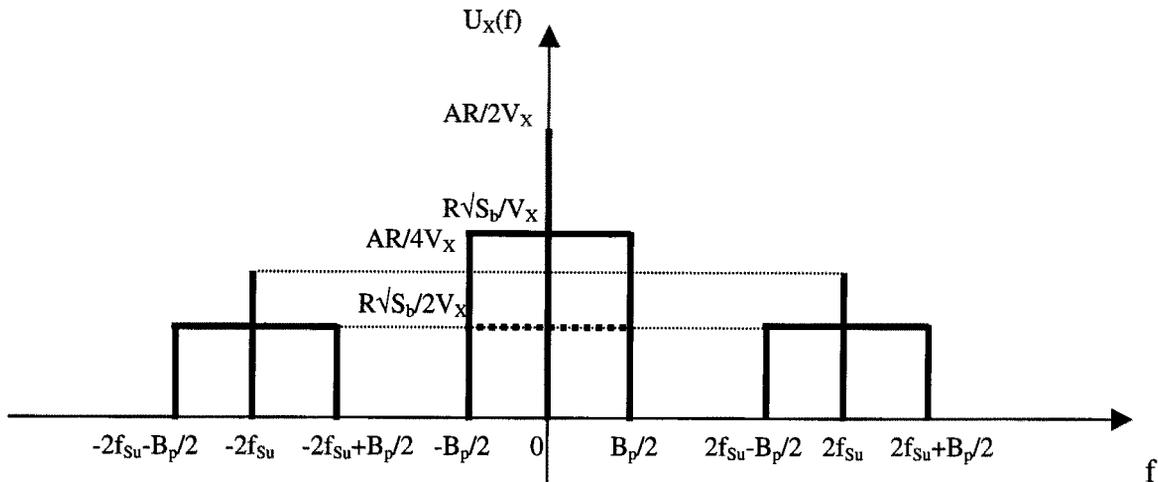
III.2.2.

$$\text{III.2.2.1. } u_X(t) = \frac{A \cdot R}{V_X} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos(2 \cdot 2 \cdot \pi f_{Su} \cdot t)}{2} \right] + \frac{R}{V_X} \cdot b'(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi f_{Su} \cdot t)$$

Et donc :

$$U_X(f) = \frac{A.R}{2.V_X} \left[\delta(f) + \left(\frac{\delta(f - 2.f_{Su}) + \delta(f + 2.f_{Su})}{2} \right) \right] + \frac{R}{V_X} \left(\frac{B'(f - f_{Su}) + B'(f + f_{Su})}{2} \right)$$

III.2.2.2.



III.2.2.3.

III.2.2.3.1.
$$\underline{H(j.2\pi f)} = \frac{1}{1 + \frac{jf}{f_C}} \text{ avec } f_C = \frac{1}{2.\pi.R.C}$$

III.2.2.3.2. A la sortie du filtre le bruit situé autour de $2f_{Su}$ est supposé négligeable et donc :

$$S_{bs}(f) = \frac{\left(\frac{R\sqrt{S_b}}{V_X} \right)^2}{|H(j2\pi f)|^2} = \frac{\left(\frac{R\sqrt{S_b}}{V_X} \right)^2}{1 + \frac{f^2}{f_C^2}}$$

III.2.2.3.3. A la sortie du filtre la composante due à $u_m(t)$ de fréquence $2f_{Su}$ est négligeable et donc il ne reste que la composante continue.

Ceci entraîne que :

$$P_m = \left(\frac{A.R}{2.V_X} \right)^2$$

III.2.2.3.4.

$$P_{br} = \int_{-\frac{B_p}{2}}^{\frac{B_p}{2}} \frac{\left(\frac{R\sqrt{S_b}}{V_X}\right)^2}{1 + \frac{f^2}{f_C^2}} df = \left(\frac{R\sqrt{S_b}}{V_X}\right)^2 \cdot f_C \cdot \left[\text{Arctg} \frac{f}{f_C} \right]_{-\frac{B_p}{2}}^{\frac{B_p}{2}} = \left(\frac{R\sqrt{S_b}}{V_X}\right)^2 \cdot 2 \cdot f_C \cdot \text{Arctg} \left(\frac{B_p}{2 \cdot f_C} \right)$$

$$\text{III.2.2.3.5. } R_{SB2} = \frac{P_m}{P_{br}} = \frac{A^2}{4 \cdot S_b} \cdot \frac{1}{2 \cdot f_C \cdot \text{Arctg} \left(\frac{B_p}{2 \cdot f_C} \right)}$$

$$\text{III.2.2.3.6. } R_{SB2} = \frac{P_m}{P_{br}} = 14$$

III.2.3.

$$\text{III.2.3.1. } u_m(t) = K_m \cdot U_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_{Su} \cdot t + \varphi_1) + \sum_{k=2}^{\infty} K_m \cdot U_k \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_{Su} \cdot t + \varphi_k)$$

$$\begin{aligned} u_X(t) &= \frac{u_m(t) \cdot u_{réf}(t)}{V_X} = \\ &= K_m \cdot \frac{R}{V_X} U_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_{Su} \cdot t + \varphi_1) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_{Su} \cdot t) + \frac{R}{V_X} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} K_m \cdot U_k \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_{Su} \cdot t + \varphi_k) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_{Su} \cdot t) \\ &= K_m \cdot \frac{R}{2V_X} U_1 \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos \varphi_1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot f_{Su} \cdot t + \varphi_1)) + \\ &\frac{R}{2V_X} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} K_m \cdot U_k \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos(2 \cdot \pi \cdot (k-1) \cdot f_{Su} \cdot t - \varphi_1) - \cos(2 \cdot \pi \cdot (k+1) \cdot f_{Su} \cdot t + \varphi_1)) \end{aligned}$$

A la sortie du filtre, seule subsiste la composante continue et elle est conservée totalement, donc :

$$U_{SF} = K_m \cdot \frac{R}{\sqrt{2} V_X} U_1 \cdot \cos \varphi_1$$

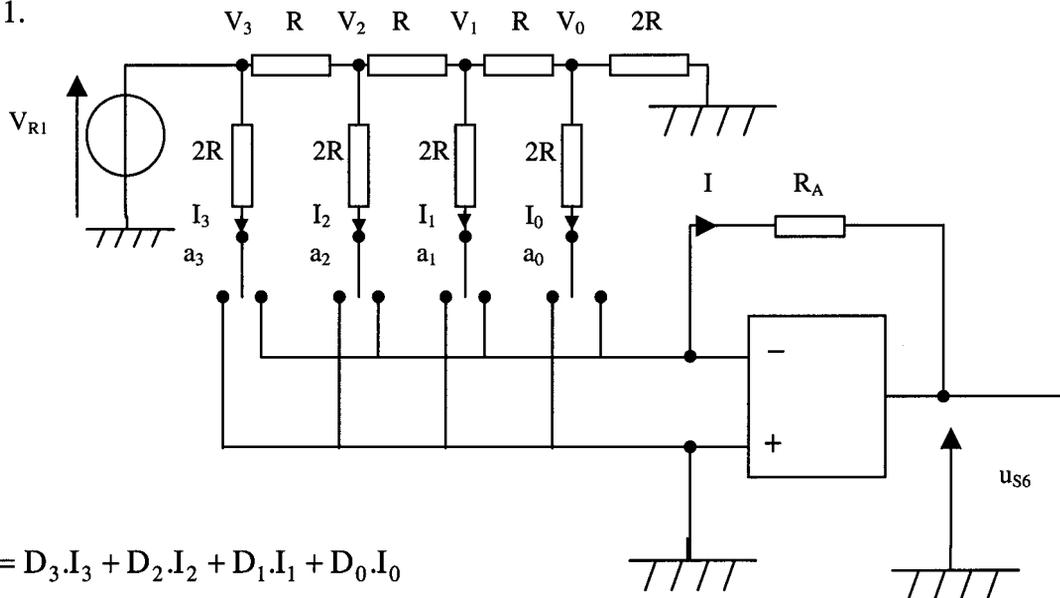
III.2.3.2. Comme le courant $i(t)$ est sinusoïdal, la puissance dissipée P dans le câble est égale à :

$$P = U_1 \cdot I \cdot \cos \varphi_1 = \frac{\sqrt{2} \cdot V_X}{K_m \cdot R} U_{SF} \cdot I$$

IV. Etude du C.A.N.

IV.1. Etude du CNA

IV.1.1.



$$I = D_3 \cdot I_3 + D_2 \cdot I_2 + D_1 \cdot I_1 + D_0 \cdot I_0$$

$$u_{S6} = R_A \cdot I$$

$$I_3 = \frac{V_3}{2R}; I_2 = \frac{V_2}{2R}; I_1 = \frac{V_1}{2R}; I_0 = \frac{V_0}{2R}$$

$$V_3 = V_{R1}; V_2 = \frac{V_3}{2} = \frac{V_{R1}}{2}; V_1 = \frac{V_2}{2} = \frac{V_{R1}}{4}; V_0 = \frac{V_1}{2} = \frac{V_{R1}}{8}$$

Et donc :

$$u_{S6} = -\frac{R_A}{2R} \cdot \frac{V_{R1}}{8} (D_3 \cdot V_3 + D_2 \cdot V_2 + D_1 \cdot V_1 + D_0 \cdot V_0) = -\frac{R_A}{R} \cdot \frac{V_{R1}}{16} \cdot N$$

IV.1.2. On calcule $\frac{R_A}{R}$ pour avoir $u_{S6max} = +V_{CC}$ pour $N=15$:

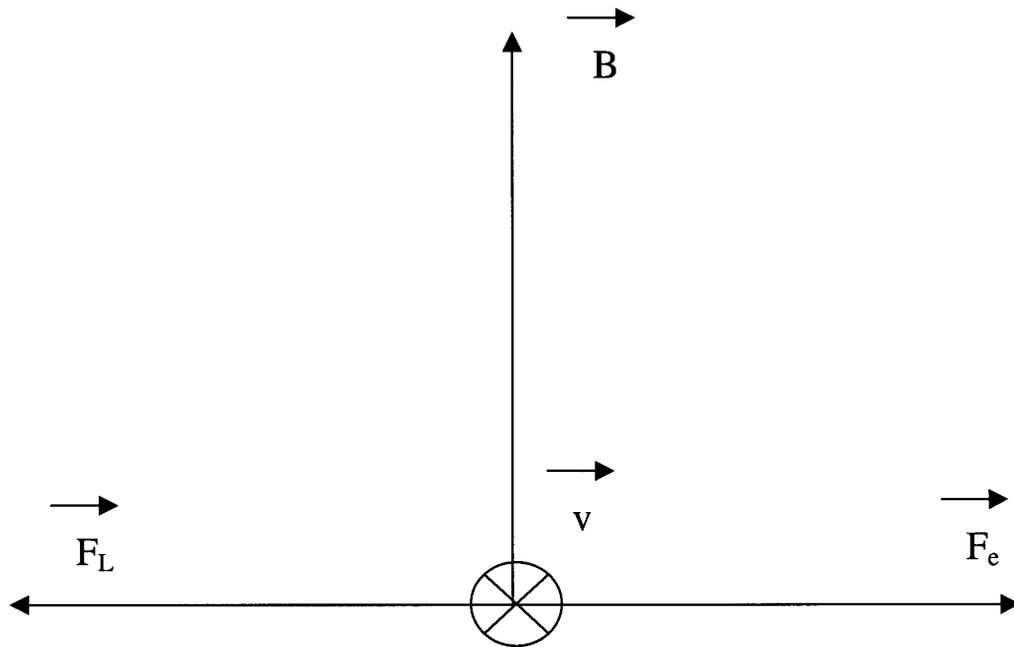
$$\frac{R_A}{R} = -\frac{V_{CC} \cdot 16}{V_{R1} \cdot 15} = \frac{16}{15}$$

IV.2. Voir document réponse n°2

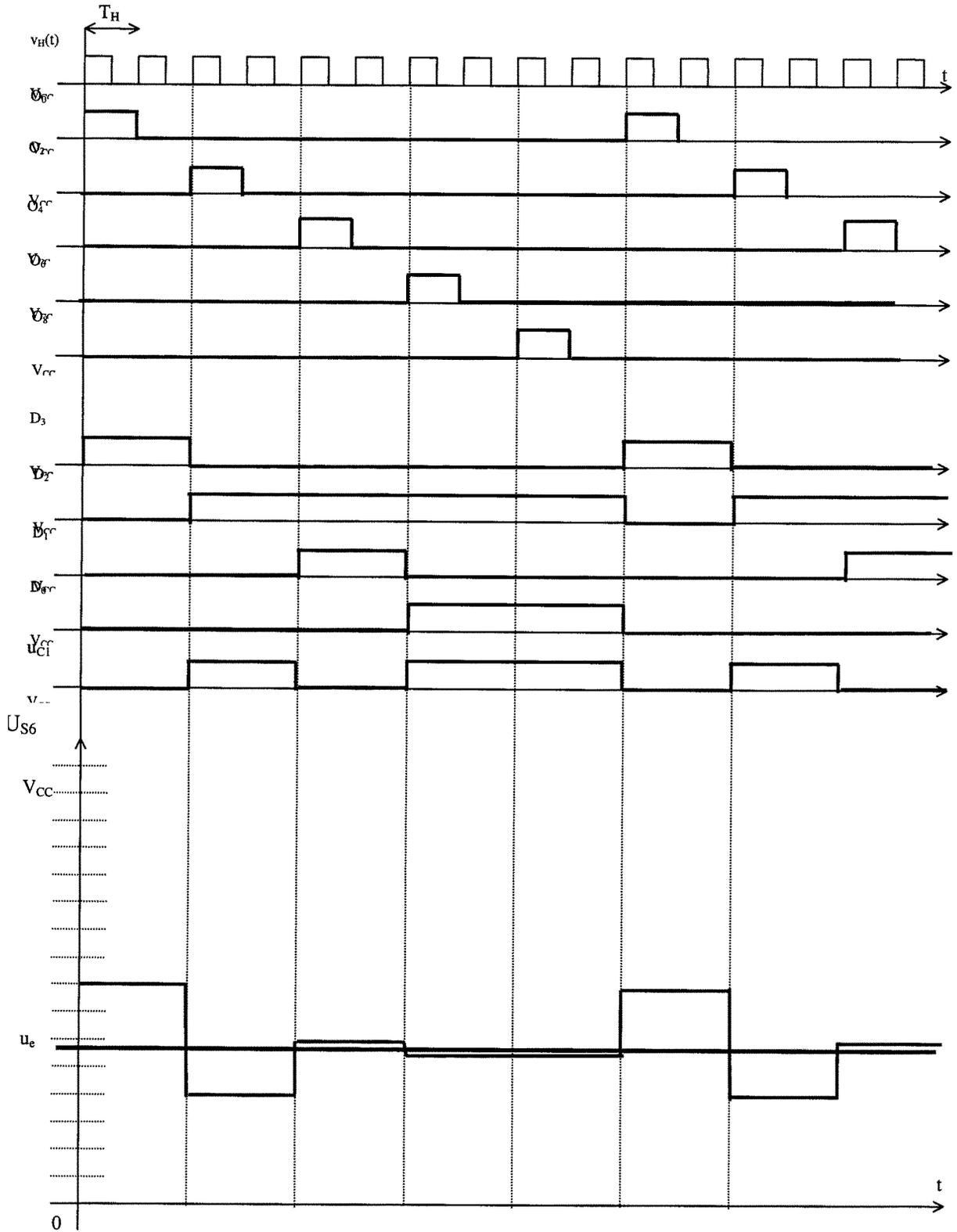
IV.3. Voir document réponse n°2

IV.4. $T_C = 10 \cdot T_H$

Document réponse n°1



Document réponse n°2



SECOND PROBLÈME

Électrotechnique

I-A.1

Le champ magnétique est perpendiculaire à tout plan de symétrie su système qui le crée or tout plan contenant l'axe z est plan de symétrie donc le champ est orthoradial en tout point.

I-A.2

Le système étant de révolution autour de l'axe z le champ ne dépend pas de la variable θ .

I-A.3

D'après le théorème d'Ampère en considérant un contour circulaire fermé le champ B n'existe que s'il y a des courants enlacés c'est à dire uniquement à l'intérieur du tore.

I-A.4

En appliquant théorème d'Ampère $\oint \vec{H}_M \cdot d\vec{l} = N_1 I_1$ la circulation est calculée sur un cercle de rayon ρ_M le long de ce parcours le module de H est constant du fait de la symétrie $\Rightarrow H_M \times 2\pi\rho_M = N_1 I_1 \Rightarrow H_M = \frac{N_1 I_1}{2\pi\rho_M} \Rightarrow B_M = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1}{2\pi\rho_M}$

$$B_M = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1}{2\pi\rho_M}$$

I-A.5

On a $\vec{B}_M = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1}{2\pi\rho_M} \vec{e}_M$, le module du champ ne dépend que de ρ_M , on considère

donc une surface élémentaire $d\vec{S}_M = a d\rho_M \vec{e}_M$

$$\Rightarrow d\Phi_1 = \vec{B}_M \cdot d\vec{S}_M = \left(\mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1}{2\pi\rho_M} \vec{e}_M \right) \cdot (a d\rho_M \vec{e}_M)$$

$$\Rightarrow d\Phi_1 = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1 a}{2\pi} \frac{d\rho_M}{\rho_M}$$

$$\Rightarrow \Phi_1 = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1 a}{2\pi} \int_{R_0}^{R_0+a} \frac{d\rho_M}{\rho_M} \Rightarrow \Phi_1 = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1 a}{2\pi} \left[\ln \rho_M \right]_{R_0}^{R_0+a} = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1 a}{2\pi} \ln \left[\frac{R_0 + a}{R_0} \right]$$

$$\Phi_1 = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1 a}{2\pi} \ln \left[1 + \frac{a}{R_0} \right]$$

I-A.6

$$N_1 I_1 = \frac{2\pi}{\mu_0 \mu_r \ln \left[1 + \frac{a}{R_0} \right]} \Phi_1 \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\mu_0 \mu_r \ln \left[1 + \frac{a}{R_0} \right]} \Rightarrow N_1 I_1 = k \Phi_1$$

$$N_1 I_1 = k \Phi$$

I-B.1

En appliquant le théorème d'Ampère, les enroulements étant identiques au nombre de spires près et compte tenu de la convention « récepteur » pour l'enroulement primaire et générateur pour l'enroulement « secondaire », on a $H_M \times 2\pi\rho_M = N_1I_1 - N_2I_2$,

l'ensemble du développement des calculs est inchangé $\Rightarrow \underline{\Phi} = \frac{N_1I_1 - N_2I_2}{k}$ avec

$$k = \frac{2\pi}{\mu_0\mu_r \ln\left[1 + \frac{a}{R_0}\right]}$$

I-B.2

D'après la loi d'Ohm généralisée et compte tenu de la convention « récepteur » pour l'enroulement primaire et générateur pour l'enroulement « secondaire », on peut écrire en grandeurs instantanées :

$$v_1 = R_1i_1 + N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$v_2 = -R_2i_2 + N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

les grandeurs étant sinusoïdales on peut utiliser les images complexes

$$\underline{V}_1 = R_1\underline{I}_1 + j\omega N_1\underline{\Phi}$$

$$\underline{V}_2 = -R_2\underline{I}_2 + j\omega N_2\underline{\Phi}$$

I-C.1

Secondaire ouvert donc $I_2 = 0$

$$\underline{V}_2 = j\omega N_2\underline{\Phi}$$

Par ailleurs $k\underline{\Phi} = N_1\underline{I}_{10} \Rightarrow \underline{I}_{10} = \frac{k\underline{\Phi}}{N_1}$

$$\underline{V}_1 = R_1\left(\frac{k\underline{\Phi}}{N_1}\right) + j\omega N_1\underline{\Phi} = \left[\frac{kR_1}{N_1} + j\omega N_1\right]\underline{\Phi}$$

$$\underline{V}_2 = j\omega N_2\underline{\Phi}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \left[\frac{j\omega N_2}{\frac{kR_1}{N_1} + j\omega N_1} \right] = \left[\frac{j\omega N_1 N_2}{kR_1 + j\omega N_1^2} \right]$$

$$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \left[\frac{j\omega N_1 N_2}{kR_1 + j\omega N_1^2} \right]$$

I-C.2

$\underline{V}_1 = R_1\underline{I}_{10} + j\omega N_1\underline{\Phi}$ et $\underline{\Phi} = \frac{N_1\underline{I}_{10}}{k} \Rightarrow \underline{V}_1 = R_1\underline{I}_{10} + j\omega N_1 \frac{N_1\underline{I}_{10}}{k}$

$$\underline{V}_1 = \left[\frac{kR_1 + j\omega N_1^2}{k} \right] \underline{I}_{10} \Rightarrow \underline{I}_{10} = \frac{kV_1}{[kR_1 + j\omega N_1^2]}$$

$$\underline{I}_{10} = \frac{V_1}{R_1} \times \frac{1}{\left[1 + j\omega \frac{N_1^2}{kR_1} \right]}$$

I-C.3

D'après l'expression complexe on a :

$$I_{10} = |\underline{I}_{10}| = \frac{V_1}{R_1} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega \frac{N_1^2}{kR_1} \right)^2}} = \frac{V_1}{R_1 \sqrt{1 + \frac{\omega^2 N_1^4}{k^2 R_1^2}}}$$

$$\beta = \text{Arg}(\underline{I}_{10}) = -\arctan \left[\omega \frac{N_1^2}{kR_1} \right]$$

$$i_{10} = \frac{V_1 \sqrt{2}}{R_1 \sqrt{1 + \frac{\omega^2 N_1^4}{k^2 R_1^2}}} \sin \left[\omega t - \arctan \left(\omega \frac{N_1^2}{kR_1} \right) \right]$$

I-C.4

$$\underline{I}_{10} = \frac{kV_1}{[kR_1 + j\omega N_1^2]} \Rightarrow \underline{V}_1 = \left[R_1 + j\omega \frac{N_1^2}{k} \right] \underline{I}_{10} \text{ expression de la forme } \underline{V}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_{10}$$

$$\text{avec } \underline{Z}_1 = [R_1 + j\omega L_{\text{equ}}] \Rightarrow L_{\text{equ}} = \frac{N_1^2}{k}$$

$$L_{\text{equ}} = \frac{N_1^2}{k}$$

I-D.1

$$\underline{0} = -R_2 \underline{I}_{2cc} + j\omega N_2 \underline{\Phi}_{cc} \Rightarrow \underline{I}_{2cc} = j\omega \frac{N_2 \underline{\Phi}_{cc}}{R_2}$$

$$N_1 \underline{I}_{1cc} - N_2 \underline{I}_{2cc} = k \underline{\Phi}_{cc} \Rightarrow N_1 \underline{I}_{1cc} - j\omega \frac{N_2^2}{R_2} \underline{\Phi}_{cc} = k \underline{\Phi}_{cc}$$

$$\underline{\Phi}_{cc} = \frac{N_1 \underline{I}_{1cc}}{k + j\omega \frac{N_2^2}{R_2}}$$

I-D.2

$$\underline{V}_{1cc} = R_1 \underline{I}_{1cc} + j\omega N_1 \underline{\Phi}_{cc}$$

⇒ d'après la question précédente

$$\underline{V}_{1cc} = R_1 \underline{I}_{1cc} + j\omega \frac{N_1^2 \underline{I}_{1cc}}{k + j\omega \frac{N_2^2}{R_2}} = \left[R_1 + j\omega \frac{N_1^2}{k + j\omega \frac{N_2^2}{R_2}} \right] \underline{I}_{1cc}$$

$$\underline{I}_{1cc} = \frac{\underline{V}_{1cc}}{\left[R_1 + j\omega \frac{N_1^2}{k + j\omega \frac{N_2^2}{R_2}} \right]}$$

$$\underline{0} = -R_2 \underline{I}_{2cc} + j\omega N_2 \underline{\Phi}_{cc} \Rightarrow \underline{I}_{2cc} = j\omega \frac{N_2 \underline{\Phi}_{cc}}{R_2} \Rightarrow \underline{I}_{2cc} = j\omega \frac{N_1 N_2}{k R_2 + j\omega N_2^2} \underline{I}_{1cc}$$

or $\underline{I}_{1cc} = \frac{\underline{V}_{1cc}}{\left[R_1 + j\omega \frac{N_1^2}{k + j\omega \frac{N_2^2}{R_2}} \right]} \Rightarrow \underline{I}_{2cc} = j\omega \frac{N_1 N_2 \underline{V}_{1cc}}{k R_1 R_2 + j\omega (R_1 N_2^2 + R_2 N_1^2)}$

$$\underline{I}_{2cc} = j\omega \frac{N_1 N_2 \underline{V}_{1cc}}{k R_1 R_2 + j\omega (R_1 N_2^2 + R_2 N_1^2)}$$

I-D.3

En court-circuit le transformateur peut être considéré comme parfait en courant c'est à dire que l'on peut écrire $\frac{\underline{I}_{2cc}}{\underline{I}_{1cc}} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow \underline{I}_{1cc} = \frac{N_2}{N_1} \underline{I}_{2cc}$ d'après la question précédente ⇒

$$\underline{I}_{1cc} = j\omega \frac{N_2^2 \underline{V}_{1cc}}{k R_1 R_2 + j\omega (R_1 N_2^2 + R_2 N_1^2)}$$

or dans un transformateur les résistance des

enroulements sont faibles et le nombre de spires important ⇒ $k R_1 R_2 \ll R_1 N_2^2$ et

$$k R_1 R_2 \ll R_2 N_1^2 \Rightarrow \underline{I}_{1cc} = \frac{N_2^2 \underline{V}_{1cc}}{(R_1 N_2^2 + R_2 N_1^2)} = \frac{1}{R_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_2} \underline{V}_{1cc}$$

$$R_{equ} = \left[R_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_2 \right]$$

I-E.1

$$\underline{V}_1 = j\omega N_1 \underline{\Phi}$$

$$\underline{V}_2 = j\omega N_2 \underline{\Phi} = R \underline{I}_2$$

par ailleurs $N_1 I_1 - N_2 I_2 = k \Phi \Rightarrow$

$$I_1 = \frac{k \Phi + N_2 I_2}{N_1} = \frac{\left(k + N_2 \frac{j\omega N_2}{R}\right) \Phi}{N_1} = \frac{kR + j\omega N_2^2}{N_1 R} \Phi = \frac{kR + j\omega N_2^2}{N_1 R} \times \frac{V_1}{j\omega N_1}$$

$$I_1 = \frac{kR + j\omega N_2^2}{j\omega N_1^2 R} V_1 = \left[\frac{k}{j\omega N_1^2} + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \frac{1}{R} \right] V_1 \Rightarrow I_1 = \left[\frac{1}{j\omega \left(\frac{N_1^2}{k}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R} \right] V_1$$

$$I_1 = \left[\frac{1}{j\omega L'_{\text{equ}}} + \frac{1}{R'_{\text{equ}}} \right] V_1 \text{ avec}$$

$$L'_{\text{equ}} = \frac{N_1^2}{k}$$

$$R'_{\text{equ}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R$$

Vu du réseau le transformateur est équivalent à un résistor pur et une bobine pure montés en parallèle.

II Etude du chargeur

II-1

Les batteries ont des capacités de 200 Ah, d'où un temps de charge de 8 heures sous courant nominal de 25 A

II-2

$P_n = NUI N$ étant le nombre ($N = 10$) de batteries de 12 V mises en série

$$P_n = 10 \times 12 \times 25 = 3000$$

$$P_n = 3 \text{ kW}$$

II-3

$$\frac{P_n}{P_{Rn}} = \eta \Rightarrow P_{Rn} = \frac{3000}{0,9} = 3333$$

$$P_{Rn} = 3,33 \text{ kW}$$

II-4

$$S = VI = 230 \times 16 = 3680$$

$$S = 3680 \text{ VA}$$

II-5

$$\text{On a } k = \frac{P_{Rn}}{S} = \frac{3333}{3680} = 0,906$$

$$k = 0,906$$

II-6

Sur l'intervalle $[0, \pi]$, $v_2 > 0$, les diodes D_1 et D'_2 peuvent être passantes $\Rightarrow v_c = v_2$

$$[\theta_{on}, \theta_{off}] \in [0, \pi]$$

$$v_c = v_2$$

II-7

Sur l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, $v_2 < 0$, les diodes D_2 et D'_1 peuvent être passantes $\Rightarrow v_c = -v_2$

$$[\theta'_{on}, \theta'_{off}] \in [\pi, 2\pi]$$

$$v_c = -v_2$$

II-8

$$i_p = i_c + I_0$$

II-9

A « l'instant » θ , on a :

$$v_c = v_2 = 175\sqrt{2} \sin \theta$$

par ailleurs $i_p = i_c + I_0 \geq 0$ et $i_c = C \frac{dv_c}{dt}$ or $\theta = \omega t \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow i_c = C\omega \frac{dv_c}{d\theta}$

A « l'instant » θ_{off} du blocage des diodes D_1 et D'_2 on a $i_p = 0 \Rightarrow i_c = -I_0$

$\Rightarrow C\omega \frac{dv_c}{d\theta} = -I_0$, or à cet instant $v_c = v_2 = \hat{V}_2 \sqrt{2} \sin \theta$ (continuité de la tension aux

bornes d'un condensateur) $\Rightarrow C\omega \frac{d(V_2 \sqrt{2} \sin \theta)}{d\theta} = -I_0 \Rightarrow C\omega V_2 \sqrt{2} \cos \theta_{off} = -I_0$

$$\theta_{off} = \arccos \left(-\frac{I_0}{C\omega V_2 \sqrt{2}} \right)$$

Application numérique :

$$\theta_{off} = \arccos \left(-\frac{20}{4700 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 50 \times 175\sqrt{2}} \right) = 93^\circ$$

$$\theta_{off} = 93^\circ = 1,62 \text{ rad}$$

II-10

Toutes les diodes étant bloquées, on a $i_c = -I_0$ le condensateur se décharge à courant

constant $I_0 \Rightarrow C\omega \frac{dv_c}{d\theta} = -I_0 \Rightarrow dv_c = -\frac{I_0}{C\omega} d\theta \quad \int_{v_c(\theta_{off})}^{v_c(\theta)} dv_c = -\frac{I_0}{C\omega} \int_{\theta_{off}}^{\theta} d\theta$

$$v_c(\theta) = v_c(\theta_{off}) - \frac{I_0}{C\omega} [\theta - \theta_{off}]$$

$$v_c(\theta) = \left(-\frac{I_0}{C\omega} \right) \theta + \left[v_c(\theta_{off}) + \frac{I_0}{C\omega} \theta_{off} \right]$$

$$v_c(\theta) = \left(-\frac{I_0}{C\omega} \right) \theta + \left[v_c(\theta_{off}) + \frac{I_0}{C\omega} \theta_{off} \right] \text{ est de la forme } v_c(\theta) = A\theta + B$$

$$\text{avec } A = \left(-\frac{I_0}{C\omega} \right) = \text{Cte et } B = \left[v_c(\theta_{\text{off}}) + \frac{I_0}{C\omega} \theta_{\text{off}} \right] = \text{Cte}$$

$$\text{loi de variation linéaire de pente négative } A = \left(-\frac{I_0}{C\omega} \right)$$

II-11

En traçant la droite de décharge, l'intersection avec la fonction $|V_2 \sqrt{2} \sin \theta|$ on obtient

« l'instant » θ'_{on} (document – réponse N°1) soit 238°

$$\Rightarrow \theta_{\text{on}} = 58^\circ, \theta_{\text{off}} = 93^\circ, \theta'_{\text{on}} = 238^\circ \text{ et } \theta'_{\text{off}} = 273^\circ.$$

II-12.a

Pour $\theta \in [\theta_{\text{on}}, \theta_{\text{off}}]$, on a $i_p = i_c + I_0$ or $i_c = C \frac{dv_c}{dt}$ avec $v_c = V_2 \sqrt{2} \sin \omega t \Rightarrow$

$$i_c = C\omega V_2 \sqrt{2} \cos \theta$$

$$i_p = C\omega V_2 \sqrt{2} \cos \theta + I_0$$

II-12.b

Pour $\theta \in [0, \theta_{\text{on}}]$ et $\theta \in [\theta_{\text{off}}, \pi]$, on a $i_p = 0$

$$i_p = 0$$

II-13

Voir document – réponse N°1.

II-14.a

Pour $\theta \in [\theta_{\text{on}}, \theta_{\text{off}}]$, $i_c = C \frac{dv_c}{dt}$ avec $v_c = V_2 \sqrt{2} \sin \omega t \Rightarrow i_c = C\omega V_2 \sqrt{2} \cos \theta$

$$i_p = C\omega V_2 \sqrt{2} \cos \theta$$

II-14.b

Pour $\theta \in [0, \theta_{\text{on}}]$ et $\theta \in [\theta_{\text{off}}, \pi]$, on a $i_c = -I_0$ puisque $i_p = 0$.

$$i_c = -I_0$$

II-15

Voir document – réponse N°1.

II-16

Voir document – réponse N°1.

II-17

On a par définition $I_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi i(\theta)_2^2 d\theta$ or $i_2 =$ sur l'intervalle $[60^\circ, 95^\circ]$ soit $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{95\pi}{180} \right] \Rightarrow$

$$I_2^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{95\pi}{180}} [C\omega V_2 \sqrt{2} \cos \theta + I_0]^2 d\theta$$

$$I_2^2 = \frac{1}{\pi} \left[I_0^2 \int_{\theta_{on}}^{\theta_{off}} d\theta + C^2 \omega^2 V_2^2 2 \int_{\theta_{on}}^{\theta_{off}} \cos^2 \theta d\theta + 2I_0 C\omega V_2 \sqrt{2} \int_{\theta_{on}}^{\theta_{off}} \cos \theta d\theta \right]$$

$$I_2^2 = \frac{1}{\pi} \left[I_0^2 \int_{\theta_{on}}^{\theta_{off}} d\theta + C^2 \omega^2 V_2^2 \left(\int_{\theta_{on}}^{\theta_{off}} d\theta + \int_{\theta_{on}}^{\theta_{off}} \cos 2\theta \right) + 2I_0 C\omega V_2 \sqrt{2} \int_{\theta_{on}}^{\theta_{off}} \cos \theta d\theta \right]$$

$$I_2^2 = \frac{1}{\pi} \left[(I_0^2 + C^2 \omega^2 V_2^2) [\theta]_{\theta_{on}}^{\theta_{off}} + 2I_0 C\omega V_2 \sqrt{2} [\sin \theta]_{\theta_{on}}^{\theta_{off}} + \frac{C^2 \omega^2 V_2^2}{2} [\sin 2\theta]_{\theta_{on}}^{\theta_{off}} \right]$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \left[(I_0^2 + C^2 \omega^2 V_2^2) (\theta_{off} - \theta_{on}) + 2I_0 C\omega V_2 \sqrt{2} (\sin \theta_{off} - \sin \theta_{on}) + \frac{C^2 \omega^2 V_2^2}{2} (\sin 2\theta_{off} - \sin 2\theta_{on}) \right]}$$

Application numérique

$$I_0^2 + C^2 \omega^2 V_2^2 = 20^2 + (47 \times 10^{-4})^2 \times (100\pi)^2 \times 175^2 = 67168,5$$

$$2I_0 C\omega V_2 \sqrt{2} = 2 \times 20 \times (47 \times 10^{-4}) \times 100\pi \times 175 \sqrt{2} = 14614,9$$

$$\frac{C^2 \omega^2 V_2^2}{2} = \frac{(47 \times 10^{-4})^2 \times (100\pi)^2 \times 175^2}{2} = 33384,2$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi} \left[67168,5 \left(\frac{95\pi}{180} - \frac{60\pi}{180} \right) + 14614,9 \left(\sin \frac{95\pi}{180} - \sin \frac{\pi}{3} \right) + 33384,2 \left(\sin \frac{190\pi}{180} - \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right]}$$

$$I_2 = \sqrt{67168,5 \times \left(\frac{35}{180} \right) + \frac{1}{\pi} [14614,9 \times (0,996 - 0,866) + 33384,2 \times (-0,174 - 0,866)]}$$

$$I_2 = 51$$

$$I_2 = 51 \text{ A}$$

II-18

Le facteur de puissance du hacheur est alors $k = \frac{3333}{230 \times 51} = 0,284 \ll 0,906$, ce

facteur de puissance est totalement incompatible avec le facteur de puissance nécessaire pour pouvoir alimenter par le réseau.

III Etude d'un étage à absorption sinusoïdale

III-A Etude préliminaire d'un hacheur parallèle

III-A.1

Lorsque K est fermé, on a $v_K = 0 \Rightarrow v_D + V_c = 0 \Rightarrow v_D = -V_c < 0$ la diode D est bloquée.

D est bloquée

$$V_0 - v_L = 0 \Rightarrow v_L = V_0$$

$$\text{on a } di_L = \frac{1}{L} v_L dt = \frac{V_0}{L} dt \Rightarrow \int_{i_L(0)}^{i_L(t)} di_L = \frac{V_0}{L} \int_0^t dt \Rightarrow i_L(t) = \frac{V_0}{L} t + i_L(0)$$

$$i_L(t) = \frac{V_0}{L} t + i_L(0) \Rightarrow i_L \text{ croit linéairement}$$

III-A.2

Lorsque K est ouvert la conduction étant continue la diode D est passante
D est passante

$$\text{La diode étant passante } v_K = V_c \Rightarrow V_0 - v_L - V_c = 0 \Rightarrow v_L = V_0 - V_c$$

$$\text{on a } di_L = \frac{1}{L} v_L dt = \frac{V_0 - V_c}{L} dt \Rightarrow \int_{i_L(\alpha T)}^{i_L(t)} di_L = \frac{V_0 - V_c}{L} \int_{\alpha T}^t dt$$

$$\Rightarrow i_L(t) - i(\alpha T) = \frac{V_0 - V_c}{L} (t - \alpha T) \Rightarrow i_L(t) = \frac{V_0 - V_c}{L} (t - \alpha T) + i_L(\alpha T)$$

$$i_L(t) = \frac{V_0 - V_c}{L} (t - \alpha T) + i(\alpha T) \Rightarrow i_L \text{ varie linéairement et décroît nécessairement}$$

III-A.3

Voir document – réponse N° 2

III-A.4

$$(1) i_L(t) = \frac{V_0}{L} t + i_L(0) \text{ pour } 0 < t < \alpha T$$

$$(2) i_L(t) = \frac{V_0 - V_c}{L} (t - \alpha T) + i_L(\alpha T) \text{ pour } \alpha T < t < T$$

$$(1) \text{ à l'instant } t = \alpha T \Rightarrow i_L(\alpha T) = \frac{V_0}{L} \alpha T + i_L(0)$$

$$(2) \text{ s'écrit } i_L(t) = \frac{V_0 - V_c}{L} (t - \alpha T) + \frac{V_0}{L} \alpha T + i_L(0)$$

à l'instant $t = T$, (2) s'écrit $i_L(T) = \frac{V_0 - V_c}{L} (T - \alpha T) + \frac{V_0}{L} \alpha T + i_L(0)$ d'après la continuité de l'intensité du courant i_L dans la bobine, on a $i_L(0) = i_L(T)$.

$$\Rightarrow 0 = \frac{V_0 - V_c}{L} (1 - \alpha) T + \frac{V_0}{L} \alpha T \Rightarrow (V_0 - V_c)(1 - \alpha) + \alpha V_0 = 0$$

$$\Rightarrow V_c = \frac{V_0}{1 - \alpha}$$

$$V_c = \frac{V_0}{1 - \alpha}$$

III-A.5

Voir document – réponse N° 3

III-A.6

D'après le tracé du document – réponse N° 2, on a graphiquement $V_K T = V_c(T - \alpha T)$

$$\Rightarrow V_K = V_c(1 - \alpha)$$

$$V_K = V_c(1 - \alpha)$$

III-B Etude d'un étage d'entrée à absorption sinusoïdale

III-B.1

Le hacheur étant parfait les puissances instantanées d'entrée et de sortie sont égales donc, nous avons $v_K i_L = v_c i_D$

$$v_K i_L = v_c i_D$$

III-B.2

Puisque $V_K = V_c(1 - \alpha)$ reste vraie en grandeurs instantanées $v_K = v_c(1 - \alpha)$

$$\Rightarrow v_c(1 - \alpha)i_L = v_c i_D \Rightarrow (1 - \alpha)i_L = i_D$$

$$i_L = \frac{i_D}{1 - \alpha}$$

III-B.3

Voir document – réponse N° 3.

III-B.4

On a $v_p = V_2 \sqrt{2} |\sin \theta|$ et $i_L = \hat{I}_L |\sin \theta|$

III-B.5

Le courant et la tension étant en phase par hypothèse on a $P = VI$ et le facteur de puissance est égale à 1.

III-B.6

On a $v_K = v_p - v_L \Rightarrow v_K = v_p - L \frac{di_L}{dt}$

$$v_p = \hat{V}_2 \sin \omega t \text{ et } i_L = \hat{I}_L \sin \omega t \Rightarrow v_K = \hat{V}_2 \sin \omega t - L\omega \hat{I}_L \cos \omega t$$

$$v_K = \hat{V}_2 \sin \omega t - L\omega \hat{I}_L \cos \omega t$$

III-B.7

Sur l'intervalle $0 < t < \frac{T}{2}$, $v_K = \hat{V}_2 \sin \omega t$

$$v_K = \hat{V}_2 \sin \omega t$$

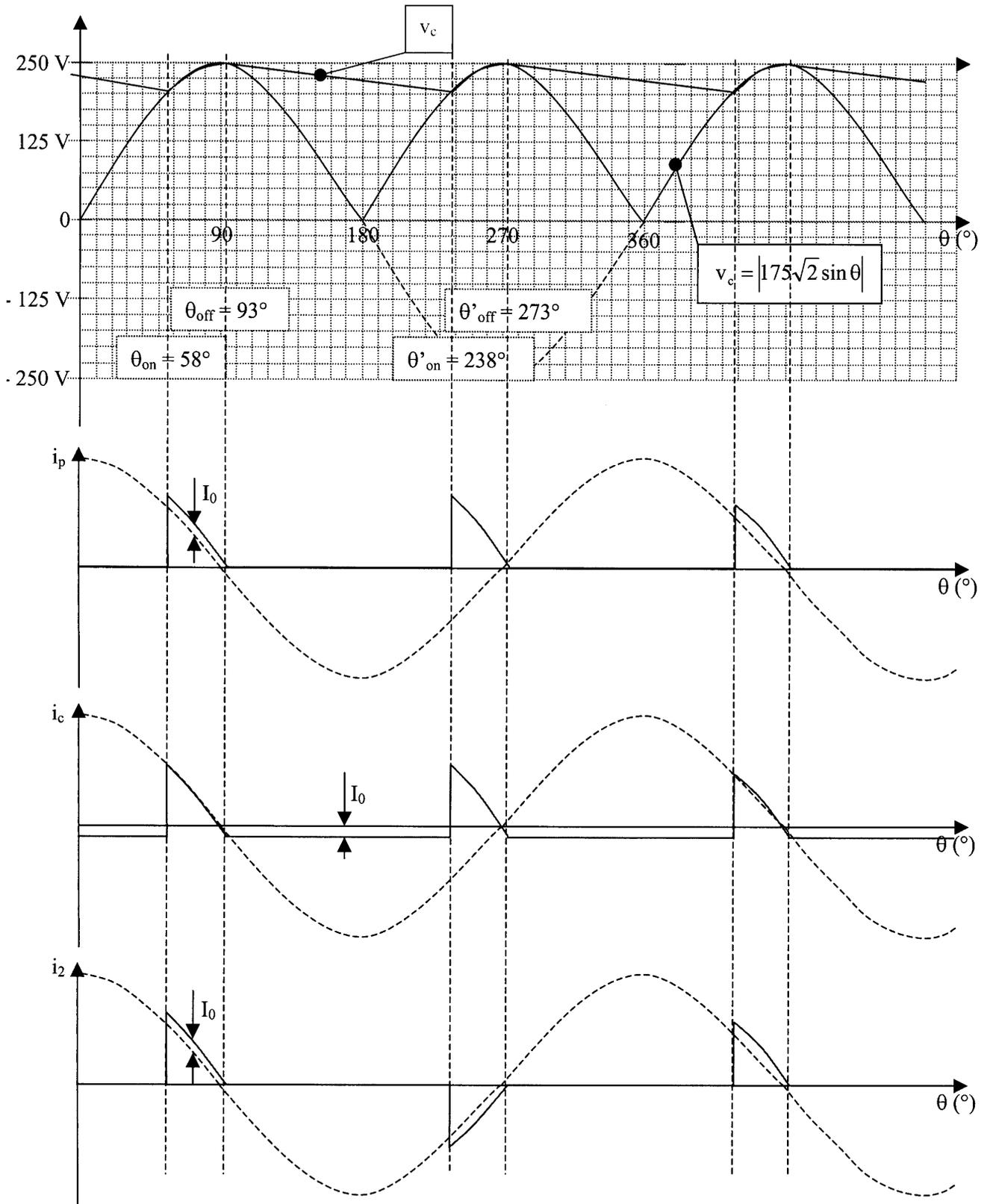
III-B.8

Toujours sur l'intervalle $0 < t < \frac{T}{2}$, on a $v_K = v_c(1-\alpha)$ mais $v_c = V_c$ par hypothèse \Rightarrow

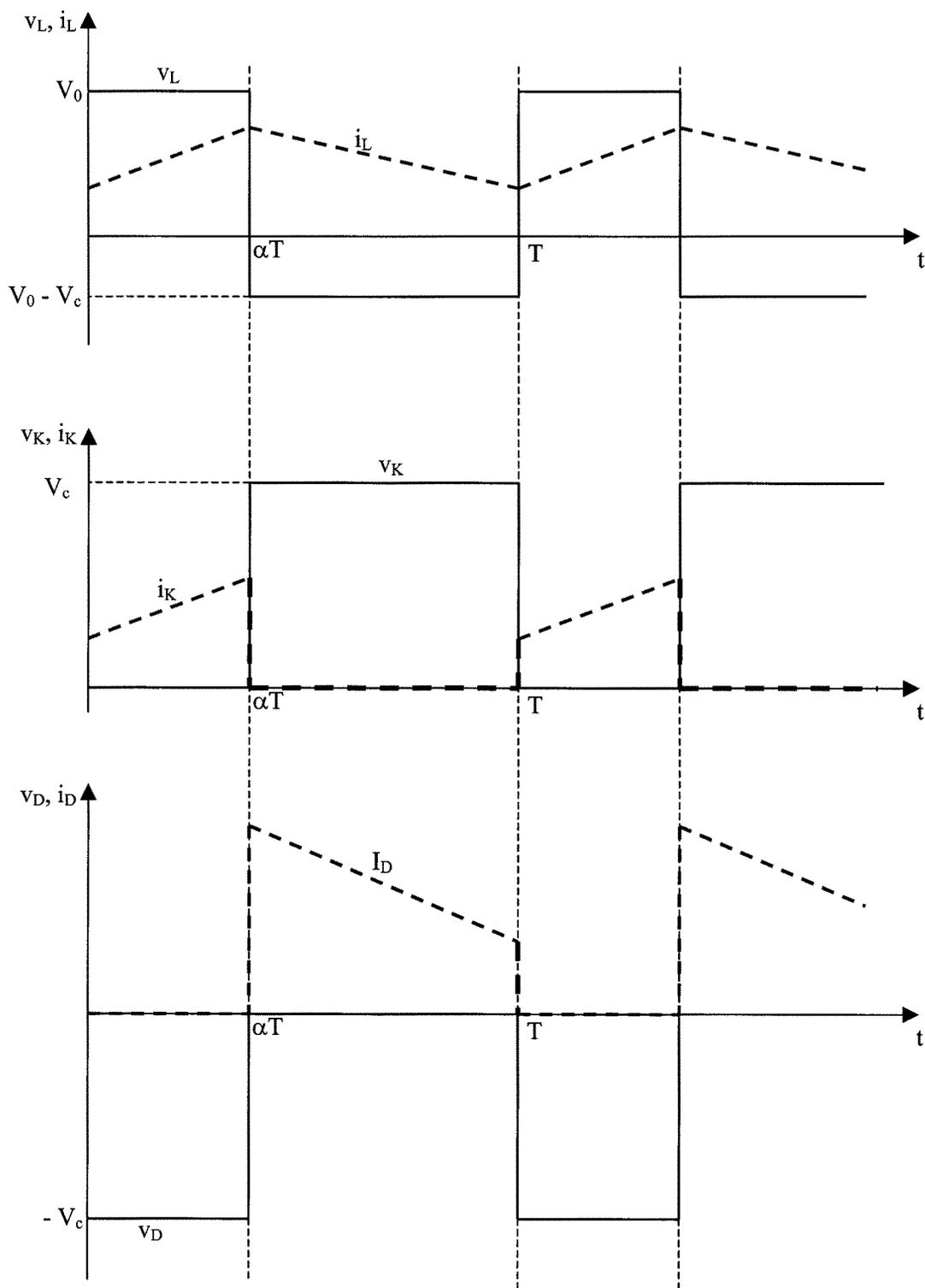
$$v_K = V_c(1-\alpha) \Rightarrow \alpha = \frac{V_c - v_K}{V_c} \Rightarrow \alpha = 1 - \frac{\hat{V}_2}{V_c} \sin \omega t$$

$$\alpha = 1 - \frac{\hat{V}_2}{V_c} \sin \omega t$$

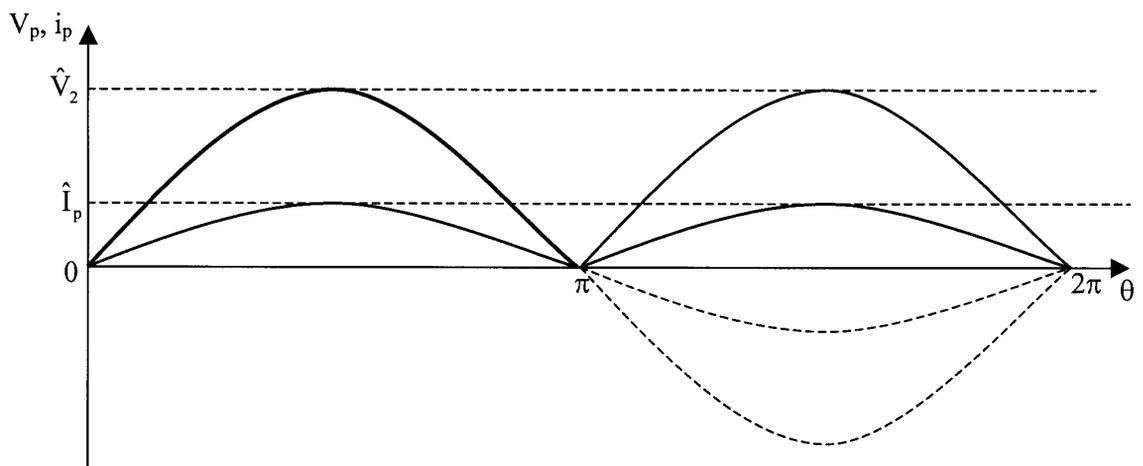
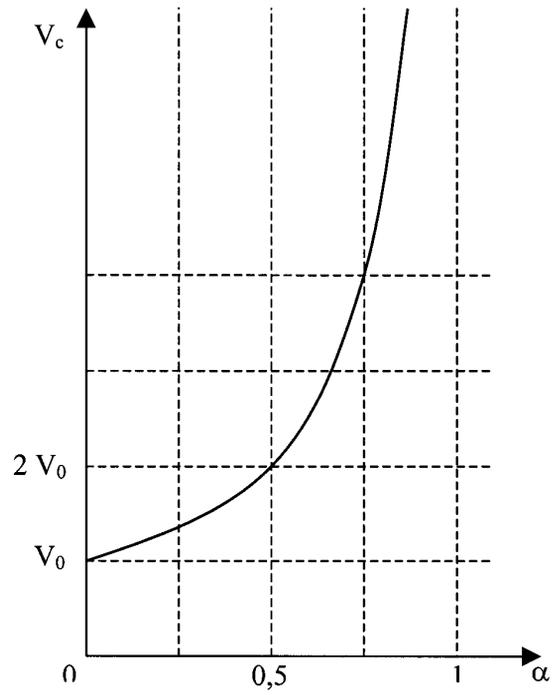
DOCUMENT – REPONSE N° 1



DOCUMENT – REPONSE N° 2



DOCUMENT – REPONSE N° 3



Capès de sciences physiques

Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de physique avec applications ♦ Session : 2004

Partie A : ASTRONOMIE POUR AMATEURS

A.I.1. C'est un ensemble rigide de points fixes pour l'observateur, associé à une horloge. On peut définir un référentiel par la donnée d'un point origine et trois directions fixes par rapport à l'ensemble rigide de points.

A.I.2. Le référentiel héliocentrique est centré au centre de masse du Soleil, les trois directions fixes sont celles qui pointent vers trois étoiles lointaines vues depuis le Soleil. Le référentiel géocentrique est défini par le centre de masse de la Terre comme origine et les trois directions fixes sont les mêmes que celles du référentiel héliocentrique.

A.I.3. Le référentiel géocentrique est en translation circulaire dans le référentiel héliocentrique.

A.I.4. La Terre est en rotation autour de son axe Nord Sud dans le référentiel géocentrique, en première approximation. Avec une période de rotation de 24h environ.

A.I.5. Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié. C'est donc un référentiel dans lequel un objet ponctuel qui ne serait soumis à aucune force d'interaction persisterait dans son état d'immobilisme ou de mouvement de translation rectiligne permanent. Le référentiel géocentrique n'est pas galiléen en général. Mais si le système étudié évolue pendant une durée très brève par rapport à la durée de révolution de la Terre autour du Soleil, alors, il peut être considéré comme galiléen.

A.I.6. Oui, les étoiles fixes dans le référentiel Héliocentrique le sont aussi dans le référentiel géocentrique, car les étoiles sont situées à une distance très grande par rapport au rayon du système solaire donc les vecteurs **SE** et **TE** où E désigne une étoile dite fixe, S et T les centres respectifs du Soleil et de la Terre sont pratiquement confondus.

A.II.1.a. Les étoiles, considérées comme fixes le temps de la prise de vue, décrivent des arcs de cercle dont le centre est la projection du pôle Nord sur le fond du ciel. Cela est dû en fait à la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

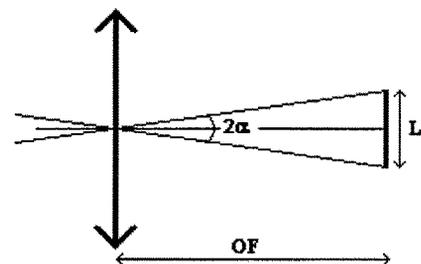
A.II.1.b. La Terre fait un tour en environ 24 h, donc en une heure les étoiles « ont décrit » un arc de cercle d'angle au centre $360/24$ soit 15° .

A.II.1.c. Un schéma serait le bienvenu. Le champ angulaire de l'objectif est l'angle 2α . L'appareil étant réglé pour un objet à l'infini la distance objectif - pellicule est de 50 mm. L'inconvénient réside dans le format de la pellicule (24 mm par 36 mm). On choisit à priori la longueur L, diagonale de la pellicule sensibilisée soit

$$L = \sqrt{24^2 + 36^2} \approx 43,3 \text{ mm}$$

Et le calcul donne $2\alpha = 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{L}{2f}\right) \approx 47^\circ$

En centrant la pellicule sur l'étoile polaire, on ne dispose que de $23,5^\circ$ or la différence des déclinaisons entre les deux étoiles est d'environ 30° , et l'étoile γ de Cassiopée ne sera pas visible.



A.II.1.d. D'où l'intérêt d'un grand angle pour « voir » un maximum d'étoiles dans le champ d'observation. Par exemple avec un grand angle de focale 28 mm le champ angulaire défini dans les mêmes conditions que précédemment est d'environ 75°.

A.II.2.a. Le diamètre apparent de la Lune est donné par la relation $2\alpha = 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{d}{2.D}\right)$

Formule dans laquelle d représente le diamètre de la Lune et D la distance Terre-Lune. En se référant au schéma précédent le diamètre d' de l'image de la Lune sur la pellicule est

obtenu à partir de l'égalité $\frac{d'}{2.f} = \frac{d}{2.D}$ d'où $d' = \frac{D.f}{d_{TL}}$

et l'application numérique donne $d' = 0,46$ mm

A.II.2.b. Non car on obtiendrait alors un magnifique bougé d'après ce qui précède (A.II.1.a))

A.II.3. Plus une étoile est éloignée, plus la lumière émise met du temps à nous parvenir. Les radiations émises par l'étoile polaire met 466 années pour nous atteindre et donc nous avons une information concernant l'étoile il y a 466 années.

A.III.1.a. Les travaux d'Isaac Newton en mécanique ; Dans « philosophiae naturalis principia mathematica » 1687 il pose les fondements de la mécanique classique, aussi dite newtonienne. Il explique le système solaire par l'existence d'une loi d'attraction en $1/r^2$ entre les masses du Soleil et des planètes.

A.III.1.b. L'intensité lumineuse reçue est proportionnelle à la surface du collecteur (diamètre de la lentille ou du miroir) et donc on peut calculer un rapport de ces surfaces.

$\frac{S_{\text{miroir}}}{S_{\text{lentille}}} = \frac{D_{\text{miroir}}^2}{d_{\text{lentille}}^2} = r$ et le calcul donne $r \approx 3,61$. Donc le texte donne une indication correcte

si ce n'est qu'il ne tient pas compte de l'occultation résultant de la présence de l'araignée et surtout du miroir secondaire !

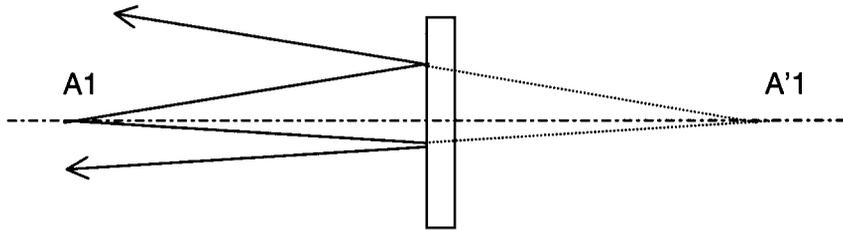
A.III.1.c. On peut citer le télescope de type Cassegrain(1625-1712) que ce chercheur a mis au point à la même période(Journal des savants 1672). Mais aussi les types Schmidt(1879-1935)(télescope aplanétique avec une lame correctrice des aberrations du miroir sphérique), Maksutov-Cassegrain (en 1941 Télescope de Cassegrain avec correction de aberrations au moyen d'une lame sphérique), ...

A.III.1.d. Une fois réglée l'ascension droite d'un astre, il ne faut plus que compenser la rotation de la Terre. En faisant tourner le télescope autour de l'axe d'ascension droite, on suit en permanence l'astre. Très souvent ce suivi est assuré par un moteur qui fait tourner le télescope au rythme de la rotation terrestre autour de l'axe des pôles.

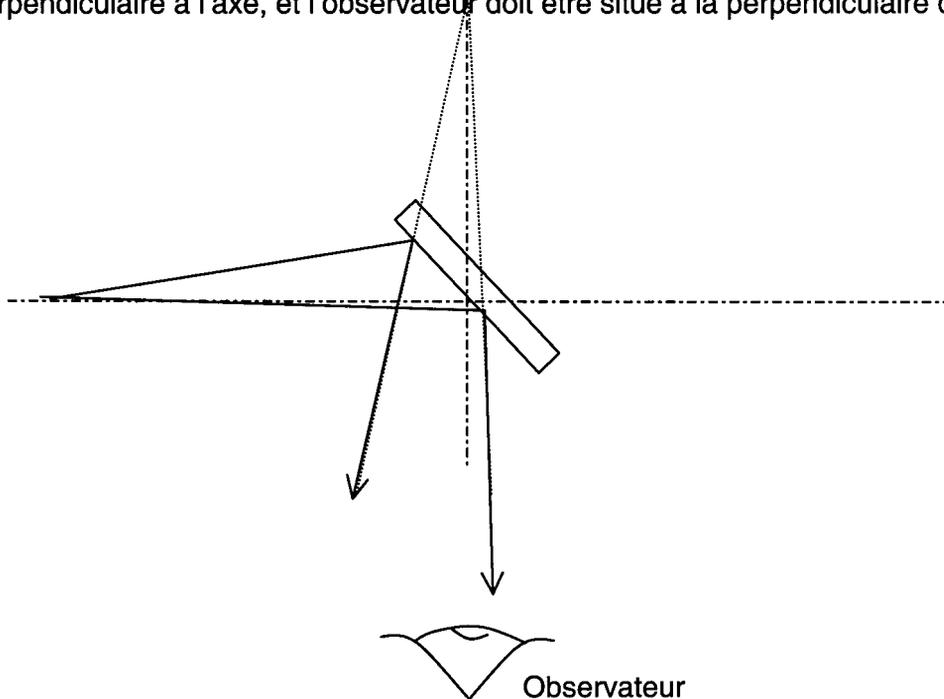
A.IV.1.a. Une première interprétation consiste à voir la lumière comme composée de particules microscopiques, c'est la théorie corpusculaire, on peut citer les noms de Newton et Einstein associés à cette interprétation. Une deuxième interprétation est de considérer la lumière comme une onde, on peut alors citer Fresnel, Huygens.

A.IV.1.b. Soit un système optique. Un objet ponctuel est le point de concours de rayons lumineux incidents, si l'on convient de désigner comme rayon incident les rayons qui ne sont pas encore passés par le système optique. Lorsque l'objet est réel, il émet de la lumière et les rayons lumineux émis proviennent tous de ce point objet. L'image ponctuelle d'un objet ponctuel par un système optique est le point d'intersection des rayons issus de l'objet ponctuel après qu'ils soient passés par le système optique.

A.IV.1.c. L'objet A_1 est réel, il peut être remplacé par une ampoule réelle. Pour construire l'image A'_1 de A_1 , traçons divers rayons issus de A_1 , ils frappent le miroir et se réfléchissent en obéissant à la loi de Descartes de la réflexion. Les rayons réfléchis semblent tous provenir du symétrique A'_1 de A_1 par le plan du miroir.



A.IV.d . L'image A'2 est le point symétrique de A2 par rapport au plan du miroir. Comme l'objet est situé loin du miroir, on sait que les dimensions du miroir sont petites par rapport à la distance entre l'objet et le miroir. Donc les rayons issus de A2 qui frappent le miroir sont peu inclinés par rapport à l'axe, ils sont donc réfléchis en faisant un angle petit par rapport à la perpendiculaire à l'axe, et l'observateur doit être situé à la perpendiculaire du miroir.



A.IV.2.a. Il y a stigmatisme rigoureux pour un système optique lorsque tous les rayons passant par un point objet A passent par un même point image A'. Ces deux points étant conjugués l'un de l'autre.

Soit un système optique possédant un axe de symétrie, que l'on qualifie alors d'axe optique. On parle d'aplanétisme si pour tout objet plan AB, perpendiculaire à l'axe optique, son image A'B', par le système optique, est plane et perpendiculaire à l'axe optique.

A.IV.2.b. Pour un miroir plan, il y a stigmatisme rigoureux pour tout couple de points symétriques par rapport au plan du miroir.

Le miroir sphérique n'est rigoureusement stigmatique que pour deux points : son centre C et le sommet S.

A.IV.2.c. Voir l'annexe

A.IV.2.d. Les conditions de Gauss sont celles pour lesquelles il y a stigmatisme approché. Les systèmes optiques (miroirs, lentilles, etc.) sont stigmatiques et aplanétiques que pour des rayons peu écartés et peu inclinés par rapport à l'axe optique.

A.IV.2.e. En prenant appui sur le schéma ci-contre et avec les notations choisies, on raisonne dans les triangles AIC et CIA'. La somme des angles dans ces triangles vaut en radians. D'où

immédiatement pour le premier :

$$i + \alpha + (\pi - \beta) = \pi \text{ soit donc } i = \beta - \alpha .$$

Et pour le second $\beta + i + (\pi - \gamma) = \pi$

$$\text{soit } i = \gamma - \beta .$$

En considérant les angles petits on peut confondre au premier ordre la tangente d'un angle avec sa valeur en radians, de plus les angles étant petits on peut confondre les points S et K.

$$\text{Donc } \alpha = \frac{\overline{IK}}{\overline{SA}} ; \beta = \frac{\overline{IK}}{\overline{SC}} \text{ et } \gamma = \frac{\overline{IK}}{\overline{SA'}} .$$

puis en égalant les deux expressions ci-dessus

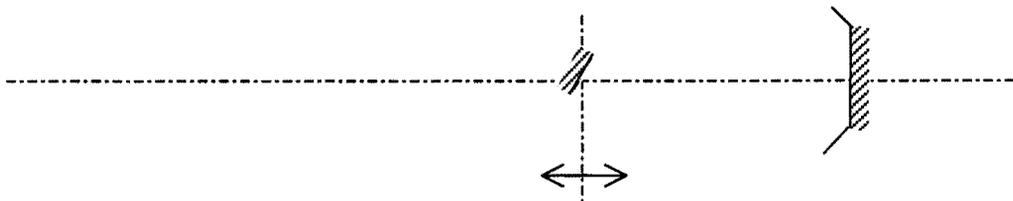
$$\frac{\overline{IK}}{\overline{SC}} - \frac{\overline{IK}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{IK}}{\overline{SA'}} - \frac{\overline{IK}}{\overline{SC}} \text{ enfin en simplifiant cette équation on retrouve rapidement la relation}$$

des Descartes indiquée dans l'énoncé.

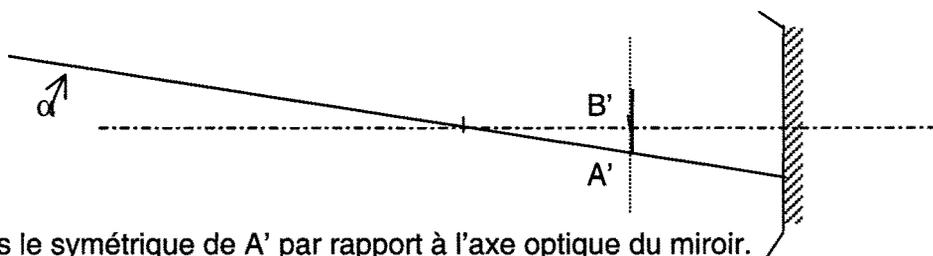
A.IV.2.f. Par exemple en prenant le point A à l'infini il vient immédiatement :

$$\overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

A.IV.3.a



A.IV.3.b. La Lune est un objet situé à l'infini, donc son image se forme dans le plan focal image du miroir. Pour construire l'image A'B' de la Lune, on peut construire A' à l'intersection du plan focal image du miroir et du rayon incliné d'un angle α par rapport à l'axe et qui passe par le centre du miroir.



B' est alors le symétrique de A' par rapport à l'axe optique du miroir.

D'après le schéma on a $\tan(\alpha) = \frac{A'B'}{2f}$ mais l'angle sous lequel on voit la lune est donné par

$$\tan(\alpha) = \frac{D_L}{2d_{TL}} \text{ et par conséquent la taille de l'image est } A'B' = \frac{f \cdot D_L}{d_{TL}}$$

L'a.n. donne $A'B' \approx 8,4 \text{ mm}$

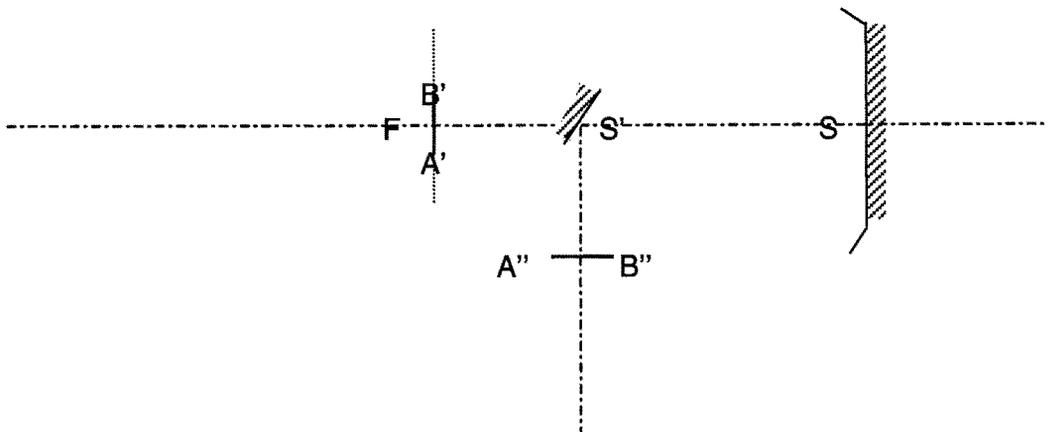
Rem le diamètre apparent de la lune est d'environ 31'

A.IV.3.c. L'observateur place son œil devant l'oculaire et observe donc l'image que l'oculaire donne de A "B". Si A''B'' est au foyer objet de l'oculaire, alors son image est à l'infini, et l'observateur n'a pas besoin d'accommoder et observe sans fatigue l'astre à travers le télescope.

A.IV.3.d. Le diamètre du miroir principal du télescope est 114 mm, donc le rayon du tube dans lequel se trouve le télescope est de 57mm, en choisissant une distance de 60mm entre l'axe optique du télescope et le foyer objet de l'oculaire il se donne une possibilité de réglage de position de l'oculaire qui s'adapte à la vision de l'observateur et assure que l'observateur se situe en dehors du tube principal.

Construction de la figure :

A''B'' est une image réelle pour le miroir plan. Donc A'B' doit être un objet virtuel pour ce miroir, puisque A''B'' est symétrique de A'B' par rapport au plan du miroir. Or A'B' est situé dans le plan focal image du miroir sphérique, on peut donc en déduire la distance entre les sommets respectifs de miroirs, qui sont les intersections des surfaces réfléchissantes de miroirs avec l'axe optique



Si le système est bien centré, le centre du miroir secondaire doit se trouver à la distance $|SF| - 60 \text{ mm}$ du sommet S du miroir primaire soit donc à 850 mm du point S

A.IV.3.e

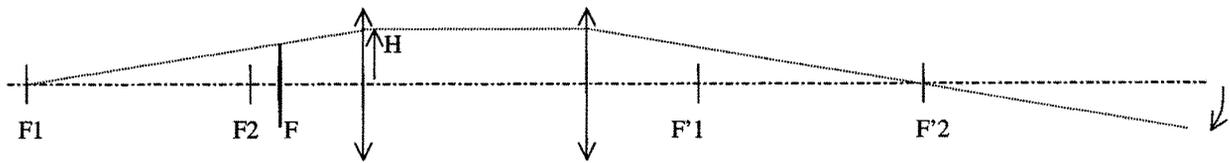
Le grossissement est défini comme étant le rapport de l'angle sous lequel l'œil, placé au foyer de l'oculaire, voit l'image définitive, sur l'angle sous lequel l'objet est vu à l'œil nu ; et

donc $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$. Les angles étant petits on a directement $G = \frac{f_{\text{miroir}}}{f_{\text{oculaire}}}$.

L'a.n. donne ici $G = 91$ qui est bien en accord avec l'annonce publicitaire.

A.V.1. F est l'objet dont l'image par l'oculaire est à l'infini. Donc F est l'objet dont l'image par L1 est F2, foyer objet de L2 dont l'image par L2 est à l'infini. En utilisant la formule de Newton à la première lentille et à ces deux points : $\overline{F_1F} \cdot \overline{F_1F_2} = -f_1^2$ et avec la définition de l'intervalle optique on trouve bien la relation demandée.

A.V.2. et 3.



En adoptant la définition du grossissement G' : $G' = \beta/\alpha$.

$$H/(A''B''/2) = f/(3f/4) = 4/3 \text{ et } A''B'' = 2f_{\text{miroit}} \cdot \alpha \text{ donc :}$$

$$\beta = (f_{\text{miroit}} \cdot \alpha)(4/3)(1/f) \text{ d'où } G = (\beta/\alpha) = (4/3)(f_{\text{miroit}}/f) = 120$$

A. V.4. La vergence d'une lentille est donnée par une relation $C = f(n, R_1, R_2)$

Où l'on voit qu'elle dépend de l'indice de réfraction n du milieu constituant la lentille ; mais l'indice de réfraction dépend lui-même de la longueur d'onde considérée (par exemple

suivant la relation de Cauchy (1789-1857). Donc les points foyers ne le sont pas rigoureusement pour des radiations de longueur d'onde différentes.

A.VI.1. Le phénomène de diffraction fait que d'un point objet à l'infini l'instrument d'optique en donne une image non ponctuelle. Il empêche donc de séparer deux points plus rapprochés qu'une certaine valeur fixée par les caractéristiques de l'instrument.

D'autres facteurs influencent ; on peut citer toutes les aberrations bien sûr mais également la présence de l'atmosphère avec ses turbulences. D'où la tendance à placer les observatoires en hauteur et dans des lieux d'une grande qualité atmosphérique. On peut parler également du télescope Hubble.

A.VI.2. D'après le schéma de l'énoncé

$$\rho = D \cdot \tan(\theta) \approx D \cdot \theta \approx 0,61 \cdot D \cdot \frac{\lambda}{r}$$

Et le calcul donne $\rho \approx 6,7 \text{ mm}$.

A.VI.3. On doit retrouver une allure de courbe $I(\theta)$ du style du schéma ci-contre en respectant les valeurs sur l'axe des abscisses.

A.VI.4.a. C'est une application numérique immédiate avec les

$$\text{valeurs de l'énoncé : } \Delta\theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D_{\text{miroit}}}$$

Et l'a.n. donne $\Delta\theta = 5,89 \cdot 10^{-6}$ radians soit $\Delta\theta \approx 1,2''$

En accord avec la valeur annoncée par le vendeur.

A.VI.4.b. La distance linéaire d_i est obtenue avec la relation

$$d_i = \tan(\Delta\theta) \cdot d_{TL}$$

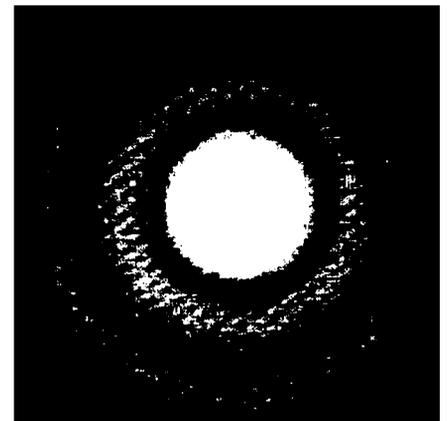
L'a.n. fournit $d_i \approx 2,2 \text{ km}$

On devrait pouvoir sans difficultés discerner des détails dans le cratère de Copernic.

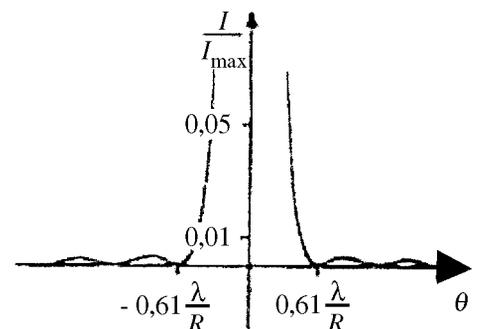
A.V.4.c. Il s'agit ici d'une simple application numérique avec

$$D = 8,20 \text{ m}$$

Et l'on trouve un pouvoir de résolution théorique de $0,017''$



Anneaux de diffraction pour une ouverture circulaire



Diffraction par une ouverture circulaire de rayon R : $I(\theta)$.

Extrait d'Optique Ondulatoire
Collection HPrépa

A.V.4.d. Domaine visible et ondes électromagnétiques

Un grand diamètre favorise une réception d'énergie importante pour ce collecteur, par contre il ne peut observer que les objets proches du zénith du lieu d'observation.

Partie B : LES ONDES RADIO**B.I. Préliminaires**

B.I.1.a Une onde est une perturbation qui se transmet de proche en proche.

Exemple :

- dans les milieux matériels : propagation de zones de compressions et détentes dans le cas des ondes sonores, déformation transmise le long d'une corde , propagation de vaguelettes à la surface de l'eau...
- dans le vide : propagation d'un signal électromagnétique.

B.I.1.b. Une onde monochromatique est une onde qui dépend sinusoidalement du temps, on peut alors notamment la caractériser par sa fréquence.

B.I.2

Son : ébranlement de surpression qui se propage dans la matière gazeuse, liquide ou solide. La célérité dépend du milieu, dans l'air on citera une célérité usuelle de $340\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et un domaine des fréquence audibles allant de 20Hz à 20kHz.

Le caractère ondulatoire du son peut être mis en œuvre dans une expérience de diffraction par une ouverture d'une porte par exemple (on attend un dessin qui représente l'expérience)

Lumière : ébranlement de champ électromagnétique qui se propage dans le vide ou dans les milieux « transparents ». La célérité dans le vide est de $3\cdot 10^8\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, le domaines des longueurs d'onde visibles est de 0,4 à 0,8 μm

B.I.3 L'existence des ondes électromagnétiques, et notamment dans le domaine des fréquences radio a été prédite par Maxwell (1831-1879), elles ont été produites, observées et étudiées par Hertz en 1887 ce qui constitue « l'apothéose de la théorie de Maxwell » Lodge.

La "gamme des ondes radio" est la gamme des ondes électromagnétiques dont la fréquence est inférieure à $3\cdot 10^{12}\text{Hz}$ ($\lambda > 0,1\text{mm}$).

$3\cdot 10^{12}\text{ Hz} < f < 3\cdot 10^{14}\text{ Hz}$: infrarouge

$3\cdot 10^{14}\text{ Hz} < f < 3\cdot 10^{16}\text{ Hz}$: U.V.

$3\cdot 10^{16}\text{ Hz} < f < 3\cdot 10^{18}\text{ Hz}$: rayons X

B.II. Propagation des ondes

B.II.1. $y(0,t)$ représente le déplacement de la main de l'expérimentateur au cours du temps.

B.II.2.a L'équation (I) est une équation de D'Alembert . Equation différentielle aux dérivées partielles linéaire d'ordre 2.

B.II.2.b. On montre par analyse dimensionnelle que c a la dimension d'une vitesse. C'est la célérité de l'onde.

B.II.2. c Soit $u=t-x/c$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{du^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial c^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{du^2} = \frac{\mu}{T} \frac{d^2 f}{du^2}$, donc

$$\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mu \frac{d^2 f}{du^2} - T \frac{\mu}{T} \frac{d^2 f}{du^2} = 0$$

La dépendance en $(t-x/c)$ caractérise la propagation d'un ébranlement à la célérité c dans la direction et le sens de x croissants. En effet elle traduit le fait que si à $t=0$ en $x=0$ la valeur de l'ébranlement est $f(0)$, alors cette même valeur se retrouvera à l'instant t_0 en x_0 tel que

$x_0=c\cdot t_0$ en effet : $f(x_0,t_0)=f(t_0-x_0/c)=f(0)$.

B.II.2.d. La démonstration est identique au 2.c.

B.II.3.a. La secousse est générée à l'origine de la corde entre $t=0$ et τ . Sur la corde les ondes de déformation se propagent à la célérité c . La corde a une longueur $L=5.c.\tau$, la date à laquelle arrive le début de la déformation est $t_1=L/c=5\tau$

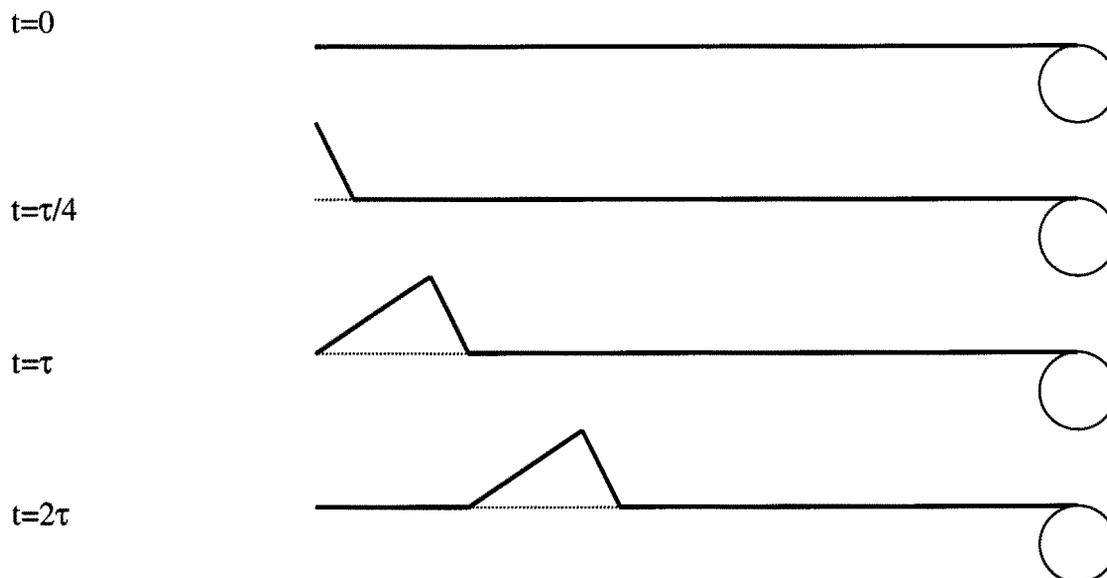
B.II.3.b. Pour $t > t_1$, une onde est réfléchiée sur la corde du fait de l'extrémité fixe.

B.II.3.c. Une solution de cette forme correspond à une onde qui se propage vers les x croissants. On a lors $y(0,t)=F(t)$ et $y(x,t)=F(t-x/c)$ en effet le déplacement de l'élément de corde qui se trouve à l'abscisse x à l'instant t est le même que l'élément de corde qui se trouve à l'origine à une date égale à « $t - \text{le temps de parcours entre } 0 \text{ et } x \text{ } \gg = \gg t-x/c \gg$.

B.II.3.d.

$t=0$

Représentons $y(x,0)=F(-x/c)$



B.II.4.a dans y , f représente l'onde incidente et g représente l'onde réfléchiée.

B.II.4.b. La condition limite à l'extrémité $x=L$ est $y(L,t)=0$. Soit $f(t-L/c)+g(t+L/c)=0$ On en déduit une relation entre g et f , en posant $X=t+L/c$, il vient $t=X-L/c$ et $g(X)=-f(X-2L/c)$. Par ailleurs l'onde incidente est déterminée par la forme de la fonction F définie précédemment, donc $g(t+x/c)=-F(t+x/c-2L/c)$

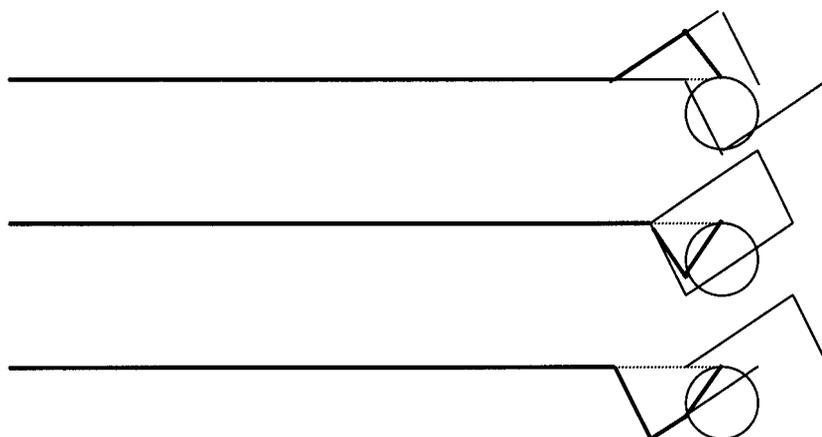
A l'instant t_2 l'ébranlement a fini de se réfléchir, or le signe « - » dans l'expression de g montre que l'onde réfléchiée est toujours négative. D'où la forme de la corde.

B.II.4.c. pour déterminer la forme de la corde aux instants demandés on peut superposer les ondes incidentes et réfléchiées en bout de corde, en envisageant ces ondes comme si elles existaient au-delà de L

$t=t_1+\tau/4$

$t=t_1+\tau/2$

$t=t_1+3\tau/4$



B.II.4.d. L'ébranlement revient à l'expérimentateur à 10τ .

B.III.1.a. Comme la corde est infinie à droite, il n'y a pas d'onde réfléchie. Alors $y(x,t)$ se déduit de $y(0,t)$ en remplaçant t par $(t-x/c)$ dans l'expression de $y(0,t)$.

$$Y(x,t) = Y_0 \cdot \cos(\omega(t-x/c))$$

$$Y(x,t) = Y_0 \cdot \cos(\omega t - (\omega/c)x) \text{ d'où l'identification de } A=Y_0 \text{ et } k=\omega/c$$

B.III.1.b. On a vu que pour une corde modélisée de la sorte, la célérité de ondes est reliée à

$$\mu \text{ et } T \text{ par } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Soit $c=22,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Donc la date à laquelle l'ébranlement parvient à une distance $d=1 \text{ m}$ de l'expérimentateur, est $t=d/c$, soit $t_0=45\text{ms}$

Le nombre de périodes d'oscillations du vibreur entre $t=0$ et t_0 est $N=t_0/T$ soit $N=13,4$ oscillations.

B.III.1.c Il s'agit ici de représenter en fonction de x successivement :

$$y(3T', x) = Y_0 \sin\left(6\pi - \frac{2\pi}{cT'} x\right) = Y_0 \sin\left(-\frac{2\pi}{cT'} x\right) \text{ pour } 0 < x < 3cT' \text{ } y=0 \text{ ailleurs}$$

$$\text{et } y\left(3T' + \frac{T'}{4}, x\right) = Y_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{cT'} x\right) = Y_0 \cos\left(\frac{2\pi}{cT'} x\right) \text{ pour } 0 < x < 3cT' + cT'/4 \text{ } y=0 \text{ ailleurs}$$

B.III.1.d. La longueur l'onde λ est la distance qui sépare deux maxima consécutifs de l'onde à un instant donné. C'est la période spatiale de l'onde, elle vaut $c\cdot T'$, soit $\lambda=7,4 \text{ cm}$.

BIV.1.a. Lorsque $\omega > \omega_p$ alors $k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$. Comme on s'intéresse aux ondes radios qui

traversent l'ionosphère, celles-ci progressent dans le sens de x croissants, on garde alors la solution positive pour k .

B.IV.1.b.

$$\vec{E}_1 = \vec{u}_y \cdot \frac{E_0}{2} \cdot \cos(\omega t - k \cdot x) \text{ et } \vec{E}_2 = \vec{u}_y \cdot \frac{E_0}{2} \cdot \cos((\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k) \cdot x)$$

BIV.1.c. Le champ total résultant est la somme de ces deux champs:

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{u}_y \cdot \frac{E_0}{2} \cdot \left[\cos(\omega t - k \cdot x) + \cos((\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k) \cdot x) \right]$$

BIV.1.d. La formule de trigonométrie adaptée ici est :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Soit :

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{u}_y \cdot E_0 \cdot \left[\cos\left(\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k + \frac{\Delta k}{2}\right)x\right) \times \cos\left(\frac{\Delta\omega t - \Delta k \cdot x}{2}\right) \right]$$

Que l'on peut simplifier en utilisant les inégalités fortes $\Delta\omega \ll \omega$ et $\Delta k \ll k$:

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{u}_y \cdot E_0 \cdot \left[\cos(\omega t - k \cdot x) \times \cos\left(\frac{\Delta\omega t - \Delta k \cdot x}{2}\right) \right]$$

Pris individuellement les cos de ces deux expressions sont progressent selon l'axe de x dans la direction de x croissants avec les célérités respectives $v_\phi = \omega/k$ et $v_g = \Delta\omega/\Delta k$.

Or, que ce soit par rapport au temps ou par rapport à la position $\cos\left(\frac{\Delta\omega.t - \Delta k.x}{2}\right)$ évolue beaucoup plus lentement que $\cos(\omega.t - k.x)$. On peut alors considérer le champ électrique total comme une onde sinusoïdale qui progresse avec une célérité égale à v_ϕ comme $\cos(\omega.t - k.x)$ dont l'amplitude $E_0 \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega.t - \Delta k.x}{2}\right)$ progresse aussi à la célérité v_g . On dit aussi que v_g est la vitesse de progression de la courbe enveloppe.

B.IV.1.e

Après calcul, on obtient :

$$v_\phi = c \frac{\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_p^2)}} \text{ et } v_g = \frac{c}{\omega} \sqrt{(\omega^2 - \omega_p^2)} \text{ et leur produit vaut } c^2.$$

B.IV.1.f

Le plasma est dit milieu dispersif car la célérité des ondes qui s'y déplacent est une fonction de leur fréquence. Donc si une onde qui contient plusieurs longueurs d'onde traverse le plasma, l'onde se déforme, se « disperse ».

L'espace interstellaire, par contre est un milieu non dispersif, car la célérité des ondes qui s'y déplacent est indépendante de leur fréquence.

B.IV.2.a

Pour $\omega < \omega_p$ k est un imaginaire pur : $k = \pm i \frac{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega^2)}}{c}$

B.IV.2.b.

Le champ complexe est alors :

$$\vec{E} = \vec{u}_y \cdot E_0 \cdot \exp(i(\omega.t - k.x))$$

$$\vec{E} = \vec{u}_y \cdot E_0 \cdot \exp\left(i\left(\omega.t - \pm i \frac{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega^2)}}{c} .x\right)\right)$$

$$\vec{E} = \vec{u}_y \cdot E_0 \cdot \exp\left(\pm \frac{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega^2)}}{c} .x\right) \exp(i\omega.t)$$

Le champ réel s'en déduit :

$$\vec{E} = \vec{u}_y \cdot E_0 \cdot \exp\left(\pm \frac{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega^2)}}{c} .x\right) \cos(\omega.t)$$

Par ailleurs la solution telle que l'amplitude du champ soit une fonction croissante de x étant physiquement impossible,

L'expression cherchée pour le champ électrique est :

$$\vec{E} = \vec{u}_y \cdot E_0 \cdot \exp\left(-\frac{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega^2)}}{c} .x\right) \cos(\omega.t)$$

On en déduit que les ondes radio ne peuvent traverser l'atmosphère, elles sont atténuées dans l'ionosphère.

B.IV.2.c.

La distance δ qui caractérise la profondeur de pénétration de onde radio dans l'ionosphère

est donnée par $\delta = \frac{c}{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega^2)}}$ en effet le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{u}_y \cdot E_0 \cdot \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \cos(\omega.t)$$

L'application numérique donne $\delta=7\text{m}$. Les onde radio ne pénètrent pratiquement pas dans l'atmosphère.

L'énergie contenue dans ces ondes excite les dipôles élémentaires présents dans l'ionosphère, qui à leur tour émettent un champ électrique qui repart dans l'espace interstellaire.

B.IV.3.a.

Donc $f = \Delta E / h$

$$f = 9,4 \cdot 10^{-25} / 6,626 \cdot 10^{-34}$$

$$f = 1420 \text{ MHz}$$

$$\lambda = 21 \text{ cm}$$

Or la fréquence de coupure dans l'ionosphère est égale à $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{56\sqrt{7 \cdot 10^{11}}}{2\pi} = 7,5 \text{ MHz}$

$$\lambda_c = 3 \cdot 10^8 / 7,5 \cdot 10^6 = 40 \text{ m}$$

La fréquence du rayonnement est donc supérieure à la fréquence de coupure du filtre passe-haut, le rayonnement se propage dans l'ionosphère.

$\omega \gg \omega_c$ donc $v_g \approx c$; l'énergie électromagnétique se propage donc à la vitesse de la lumière

c.

Le milieu est transparent pour l'onde. ω est trop élevé pour mettre les électrons en mouvement.

B.IV.3.b. Si la fréquence du rayonnement reçu f_r ne correspond pas exactement à la fréquence d'émission f_e de l'hydrogène, c'est en raison de l'effet Doppler.

La différence $\Delta f = f_r - f_e$ permet d'avoir des informations sur les mouvements du gaz par rapport à la Terre :

$\Delta f = f \times \frac{v}{c}$ avec v : vitesse d'éloignement ou de rapprochement de la source par rapport à la

Terre.

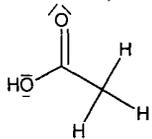
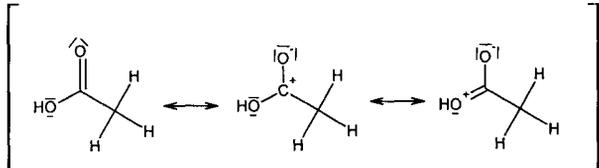
Si par exemple le nuage de gaz se rapproche le rayonnement reçu aura une fréquence $f_r > 1420 \text{ Hz}$.

Capès de sciences physiques

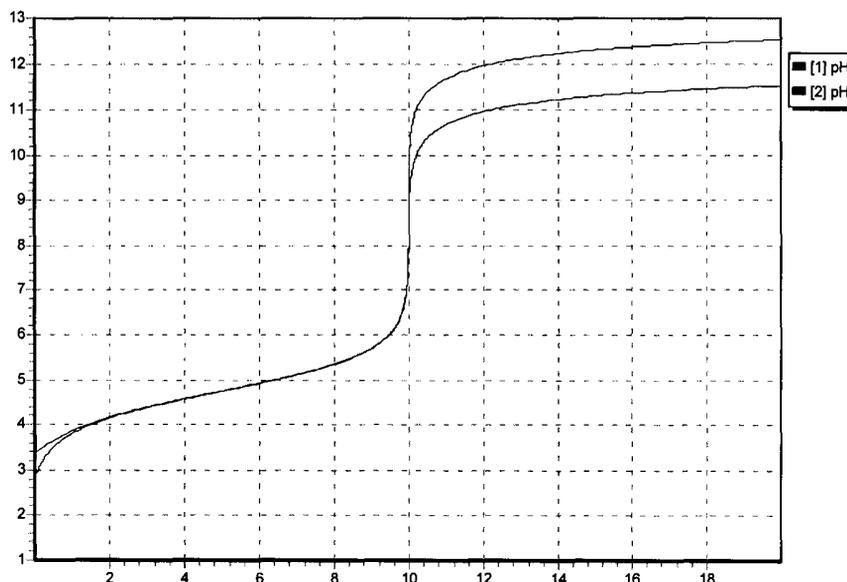
Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET CHIMIE

Composition de chimie avec applications ♦ Session : 2004

- A-prélim. Modèle de Lewis de la liaison covalente : mise en commun de deux électrons de valence.
Ce modèle n'explique pas le paramagnétisme de certaines molécules, nécessité de plusieurs représentations pour décrire une molécule...
Représentation de Lewis d'une molécule : schéma visualisant l'ensemble des électrons de valence sous forme de liaison, de doublet non liant ou d'électron célibataire.
- A.I.1.1 
- A.I.1.2 
- Acidité de l'hydrogène du groupe OH et électrophilie du carbone de la fonction acide carboxylique
- A.I.2.1. Masses molaires voisines : acide acétique, le butane et le propan-1-ol.
- A.I.2.2. $T_{\text{but}} < T_{\text{prop}} < T_{\text{acide}}$.
Lien interactions intermoléculaires/températures d'ébullition
- A.I.3.1. $2\text{C(s)} + \text{O}_2(\text{g}) + 2\text{H}_2(\text{g}) = \text{CH}_3\text{CO}_2\text{H(l)}$
- A.I.3.2. $\Delta_f H^\circ(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H(l)}) = -421,7 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$
- A.I.3.3. $\Delta_f H^\circ(\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H(l)}) = -484,5 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.
 $E_r = 62,8 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$
- A.I.3.4. Energie de résonance de l'acétate plus importante de $15,2 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.
- A.I.4.1. $\Delta_r H^\circ = -148,8 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$; $\Delta_r S^\circ = -155,1 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (<0 : diminution du nombre de moles gazeuses dans le sens 1)
- A.I.4.2. P, déplacement dans le sens 1
Une augmentation de température déplace l'équilibre dans le sens endothermique.
La pression est élevée et la température de 180°C : compromis thermodynamique/cinétique.
- A.I.5. l'acide acétique du vinaigre provient de l'oxydation de l'éthanol contenu dans les matières premières utilisées.
Le degré correspond à la masse d'acide éthanoïque pour 100 g de vinaigre.
- A.II prélim. solution acide : $\text{pH} < 7$ et solution basique $\text{pH} > 7$
Trois chimistes à l'origine de trois définitions successives dans le temps d'un acide et d'une base.
- A.II.1.1.1. On utilise une solution étalon de chlorure de potassium K^+Cl^- et les tables qui donnent la conductivité de ces solutions en fonction de la température.
- A.II.1.1.2. $G = \sigma / K_{\text{cell}} = \alpha c_0 (\lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} + \lambda_{\text{CH}_3\text{CO}_2^-}) / K_{\text{cell}}$
On obtient $\alpha = 3,88 \cdot 10^{-2}$.
 $[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}] = 9,61 \cdot 10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$; $[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{CH}_3\text{CO}_2^-] = 3,88 \cdot 10^{-4} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$
On en déduit le pKa du couple à l'aide de $K_a = (\alpha c_0)^2 / c_0(1-\alpha)$ soit $\text{pKa} = 4,8$
- A.II.1.2. Stabilisation de la forme basique du couple : le pKa de l'acide monochloroacétique est plus faible.
- A.II.2.1.1. corrosif/risque de brûlures : à manipuler avec gants et lunettes de protection.
R : risques chimiques ; S : conseils de sécurité
Précautions (gants, lunettes, hotte)
- A.II.2.1.2. A l'aide d'une balance de précision, peser 5,71 g soit 0,100 moles d'acide éthanoïque, l'introduire dans une fiole jaugée de 1 L et compléter jusqu'au trait de jauge avec de l'eau distillée.
- A.II.2.2. Bécher surmontée d'une burette, agitateur.
Reliées au pH-mètre, 2 électrodes : Electrode de verre et Electrode de référence
- A.II.2.3. $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H} + \text{HO}^- \longrightarrow \text{CH}_3\text{CO}_2^- + \text{H}_2\text{O}$. L'équivalence est obtenue lorsque les réactifs sont mélangés dans les proportions stœchiométrique.
- A.II.2.4. Les valeurs de pH sont :
- à $v=0\text{mL}$ $\text{pH}=2,9$, à $v=v_e/2$ $\text{pH} = \text{pKa} = 4,8$, à $v=v_e$ $\text{pH}=8,7$, à $v_e/2$ $\text{pH}=12,3$

A.II.2.5



A.II.6 Fiabilité de l'électrode de verre en milieu basique

A.II.2.7.1 Nouveaux pH : 3,4 / 4,8 / 8,2 / 11,3 .

Courbes sont quasiment confondues sur le domaine de Henderson, saut moins grand.

A.II.2.7.2 On obtient pH=5 .

A.II.2.8.1 Une solution tampon est une solution dont le pH varie peu par ajout modéré d'acide fort ou de base forte et par dilution.

On définit le pouvoir tampon par $\beta = |dC/dpH|$

A.II.2.8.2 On réalise un mélange équivalent à l'aide d'éprouvettes graduées.

Pour calculer le pouvoir tampon, on considère l'ajout d'une quantité dx mole de OH^- qui provoque une variation de pH de dpH dans la solution précédente on obtient $\beta = 2,3c/2 = 0,575 \text{ mol.L}^{-1} \cdot \text{upH}^{-1}$

A.II.2.8.3 On obtient $dpH = 2 \cdot 10^{-3}$

A un litre d'eau, on ajoute 10^{-3} mole de HO^- donne un pH de 11 soit un ΔpH de 4 .

A.II.2.8.4 Utilisation du tampon ammoniacal (NH_4^+/NH_3) pour le dosage de la dureté de l'eau.

A.II.3.1 Un indicateur coloré est un couple acide/base dont la forme acide et la forme basique ont des couleurs différentes : l'hélianthine, le bleu de bromothymol et la phénolphthaléine...

A.II.3.2 Le choix de l'indicateur coloré est déterminé par le pH à l'équivalence acido-basique vis à vis de la zone de virage de l'indicateur.

A.II.3.3.1 La loi de Beer-Lambert est $A = \epsilon l c$ où c est la concentration de l'espèce qui absorbe, l la longueur de la cuve et ϵ le coefficient d'extinction molaire de l'espèce.

A.II.3.3.2 430 nm correspond au violet soit une couleur complémentaire (celle de la solution) qui est le jaune.

620 nm correspond au jaune orangé soit une couleur complémentaire qui est le bleu.

A.II.3.3.3 La loi de Beer-Lambert est additive, en milieu très acide InH prédomine alors qu'en milieu très basique c'est In^- qui prédomine. On a :

$$A_1 = \epsilon_{(InH,\lambda)} \cdot l \cdot [InH]_0$$

$$A_1' = \epsilon_{(InH,\lambda)} \cdot l \cdot [InH] + \epsilon_{(In^-, \lambda)} \cdot l \cdot [In^-]$$

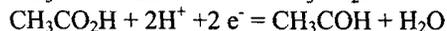
$$a_1 = \epsilon_{(In^-, \lambda)} \cdot l \cdot [In^-]_0$$

On calcule $A_1 - A_1'$, $A_1' - a_1$ puis on fait le rapport et on obtient la formule demandée

$$\frac{[In^-]}{[InH]} = \frac{(A_1 - A_1')}{(A_1' - a_1)}$$

A.II.3.4 On obtient $pK_i = 7,2$ qui donne un zone de virage vers 6,2-8,2 pour un pH à l'équivalence de 8,7 : un indicateur à zone de virage plus basique serait souhaitable.

A.III.1.1 $CH_3COH + 2H^+ + 2e^- = CH_3CH_2OH$



A.III.1.2.1 L'équation pour ce couple est $CH_3CO_2^- + 3H^+ + 2e^- = CH_3COH + H_2O$

$$E^{\circ}_1 = E^{\circ} + 0,03pK_a = 0,014V$$

A.III.1.2.2 Pour le couple éthanal/éthanol :

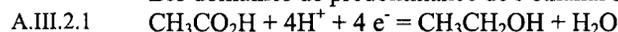
$$E_2 = E^{\circ}_2 - 0,06 \text{ pH}$$

Pour le couple acide éthanoïque / éthanal :

$$\text{à } pH < 4,8 \text{ on a } E_1 = E^{\circ}_1 - 0,06 \text{ pH}$$

$$\text{à } pH > 4,8 \text{ on a } E_1 = E^{\circ}_1' - 0,09 \text{ pH}$$

A.III.1.2.3 Les domaines de prédominance de l'éthanal sont disjoints : instable thermodynamiquement



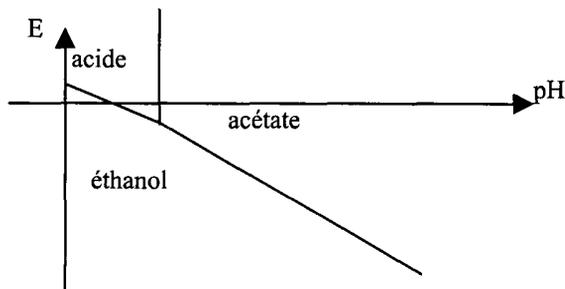
A.III.2.2.1 $E_3 = (E_1 + E_2)/2 = 0,03\text{V}$

A.II.2.2.2 Pour chaque couple on obtient :

à $\text{pH} < 4,8$: acide éthanoïque/éthanol : $E_3 = E_3^\circ - 0,06\text{pH}$

à $\text{pH} > 4,8$: $E_3 = 0,102 - 0,075\text{pH}$ (0,102 est obtenu par continuité à $\text{pH} = 4,8$).

A.II.2.2.3 Tracé :



B.I.1.1 Synthèse de l'aspirine par action de l'anhydride acétique sur acide acétyle salicylique

Synthèse de l'acétate d'éthyle par réaction de l'éthanol sur l'acide acétique.

B.I.1.2 Les esters sont utilisés comme arômes naturels ou artificiels, comme solvants (acétate d'éthyle ou de butyle) comme matière première de fabrication de polymères (polyesters)

B.I.2.1 éthanoate d'éthyle

B.I.2.2 La constante thermodynamique $K_1 = (x_{\text{H}_2\text{O}}x_{\text{ester}})/(x_{\text{ol}}x_{\text{acide}})$

B.I.2.3 $\Delta_r G^\circ = -3,5\text{ kJ.mol}^{-1}$ soit $K_1 = \exp(-\Delta_r G^\circ/RT) = 4,1$ à 298 K

B.I.2.4.1 On obtient $x_{\text{eq}} = 0,667$ mole = $n_{\text{ester}} = n_{\text{eau}}$ et $n_{\text{alcool}} = n_{\text{acide}} = 0,333$ mole

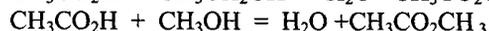
B.I.2.4.2 On trouve $r = 66,7\%$

En utilisant un alcool tertiaire, le rendement est beaucoup plus faible (de l'ordre de quelques %)

B.I.2.4.3 La température n'est pas facteur d'équilibre pour cette réaction. On peut donc prévoir une valeur nulle pour l'enthalpie standard de réaction.

B.I.2.4.4 On obtient $3,1\text{ kJ.mol}^{-1}$ (très faible pour une enthalpie standard de réaction).

B.I.2.5 Avec un excès de l'un des réactifs on déplace l'équilibre en faveur des produits : on améliore le rendement. Il est possible de retirer l'un des produits au fur et à mesure de sa formation.



B.I.2.6.2	espèce chimique	acide	méthanol	éthanol	eau	ester ₁	ester ₂
Qté à l'eq		3- ξ_1 - ξ_2	2- ξ_2	1- ξ_1	$\xi_1 + \xi_2$	ξ_1	ξ_2
avec taux		3- α -2 β	2(1- β)	1- α	$\alpha + 2\beta$	α	2 β

B.I.2.6.3 On obtient la composition finale suivante : $n_{\text{eau}} = 2,095$ mole

$n_{\text{acide}} = 0,905$ mole

$n_{\text{ester1}} = 0,639$ mole

$n_{\text{ester2}} = 1,456$ mole

$n_{\text{éthanol}} = 0,361$ mole

$n_{\text{méthanol}} = 0,544$ mole

B.I.2.6.4 $K_2 = 6,2$

B-prélim La vitesse d'une réaction chimique est définie comme la dérivée temporelle de l'avancement de la réaction.

Si $v = \Pi [R_i]^{a_i}$, a_i st l'ordre partiel par rapport au constituant R_i et l'ordre globale est donné par $p = \Sigma a_i$

B.II.1.1 A l'équilibre les vitesses directe et inverse sont égales, soit

$k_1[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}][\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}] = k_{-1}[\text{H}_2\text{O}][\text{CH}_3\text{CO}_2\text{CH}_2\text{CH}_3]$ d'où $K = k_1/k_{-1}$

B.II.1.2.1 On a $dx/dt = k_1[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}][\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}] - k_{-1}[\text{H}_2\text{O}][\text{CH}_3\text{CO}_2\text{CH}_2\text{CH}_3] = k_1(1-x)^2 - k_{-1}x^2$ or $k_1 = 4k_{-1}$

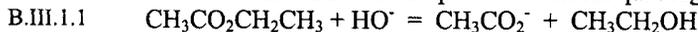
d'où $k_{-1}dt = dx / (4(1-x)^2 - x^2) = dx / (2-x)(2-3x)$.

Par décomposition en éléments simples puis intégration on obtient $\ln((2-x)/(2-3x)) = 4k_{-1}t$

B.II.1.2.2 A $t = 6\text{ h}$ $x = 0,3$ mole d'où $k_{-1} = 1,81 \cdot 10^{-2}\text{ mol}^{-1}.\text{L.h}^{-1}$ puis $k_1 = 7,26 \cdot 10^{-2}\text{ mol}^{-1}.\text{L.h}^{-1}$

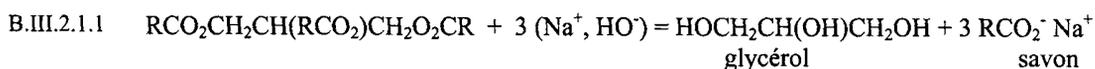
B.II.2.1 Protonation de l'oxygène (C=O), attaque nucléophile de l'alcool, prototropie, élimination d'eau, déprotonation. Toutes les étapes sont équilibrées.

B.II.2.2 Formation du carbocation à partir de l'alcool qui réagit avec l'oxygène de l'acide.



B.III.1.2 Addition nucléophile de OH^- sur l'ester puis élimination de l'alcoolate ;

La différence essentielle avec l'hydrolyse acide est la dernière étape **totale** qui déplace tous les équilibres

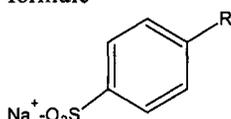


On peut utiliser de la potasse dans le but d'obtenir des savons mous.

B.III.2.1.2 action sur la tension superficielle

B.III.2.1.3 Ils précipitent dans les eaux dures et perdent leurs propriétés.

B.III.2.2.1 formule



La tête hydrophile du tensioactif est chargée négativement d'où le terme de tensioactif anionique

B.III.2.2.2 tensioactif cationique : alkylammonium

tensioactif neutre : alcanooamides ($\text{RCONHCH}_2\text{CH}_2\text{OH}$) ; polyoxyéthylènes $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_n(\text{OCH}_2\text{CH}_2)_x\text{OH}$

B.III.2.2.3 $2\text{HPO}_4\text{Na}_2 + \text{H}_2\text{PO}_4\text{Na} = \text{Na}_3\text{P}_3\text{O}_{10} + 2\text{H}_2\text{O}$

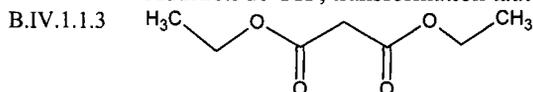
B.III.2.2.4 Il complexe les ions Ca^{2+}

B.III.2.2.5 Conséquences environnementales (eutrophisation)

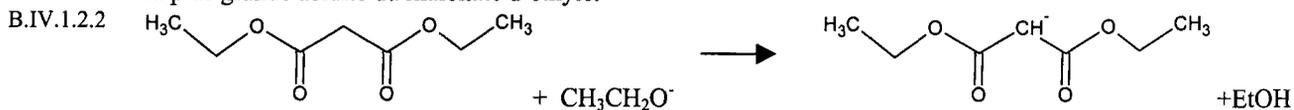
Les lessives sans phosphates contiennent plus de carbonates (milieu basique), des zéolithes (silicoaluminates de sodium) en combinaison avec des agents dispersants (polycarboxylates).

B.IV.1.1.1 Substitution nucléophile : $\text{ClCH}_2\text{CO}_2\text{Na} + ^-\text{CN} = \text{NC-CH}_2\text{CO}_2\text{Na} + \text{Cl}^-$

B.IV.1.1.2 Addition de OH^- , transformation tautomérique en amide puis hydrolyse basique de l'amide.

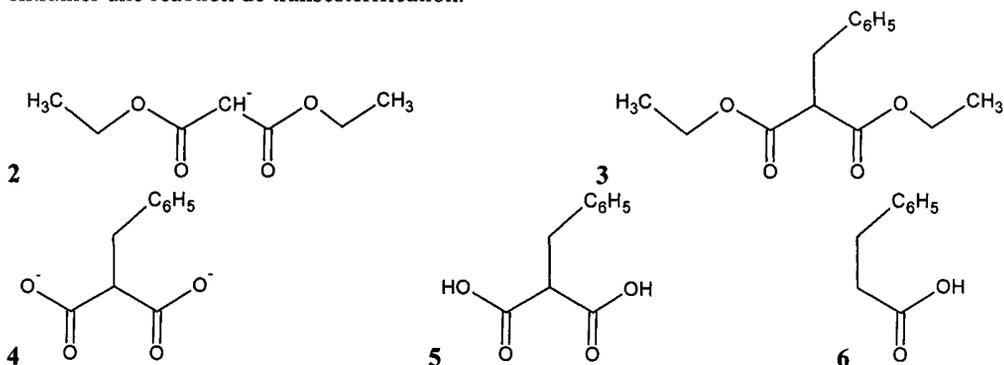


B.IV.1.2.1 Base conjugué du malonate plus stable (délocalisation de la charge sur les 2 atomes d'oxygène) ce qui explique la plus grande acidité du malonate d'éthyle.

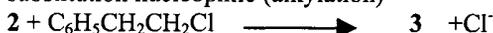


B.IV.1.2.3 L'utilisation de soude risque de provoquer la saponification des fonctions ester alors que le méthanolate peut entraîner une réaction de transestérification.

B.IV.2.1



B.IV.2.2.1 substitution nucléophile (alkylation)



B.IV.2.2.2 augmenter la vitesse de réaction sans pertes de produits, réactifs ou solvant.

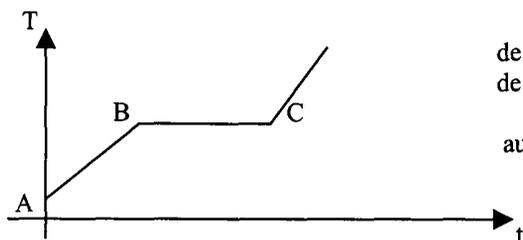


B.IV.2.3.2.1 La courbe inférieure est la courbe d'ébullition (apparition de la première bulle de vapeur lors du chauffage) et la courbe supérieure est la courbe de rosée (apparition de la première goutte de liquide lors du refroidissement).

B.IV.2.3.2.2.1 azéotrope

B.IV.2.3.2.2.2 Un mélange de composition égale à celle de l'azéotrope change d'état à température constante, vapeur et liquide ont même composition lors de ce changement d'état, ce mélange est azéotrope sous une pression donnée : il ne l'est plus si l'on change la pression.

B.IV.2.3.2.2.3



de A à B : 1 phase liquide, $v=3$ ($v'=2$ car P fixée)
de B à C : changement d'état $v=1$ ($v'=0$ car P fixée)

au delà de C : 1 phase gaz, $v=3$

B.IV.2.3.2.2.4 Par distillation du mélange eau-éthanol, on obtient le mélange azéotropique.

B.IV.2.4.1 Il est préférable d'utiliser 2 portions pour effectuer l'extraction.

+ de 80% de X récupéré avec deux extractions contre 71% avec une seule.

B.IV.2.4.2 On sature la phase aqueuse en ion afin de renvoyer en phase organique les molécules organiques qui ont en général plus d'affinité pour les phases moins ioniques.

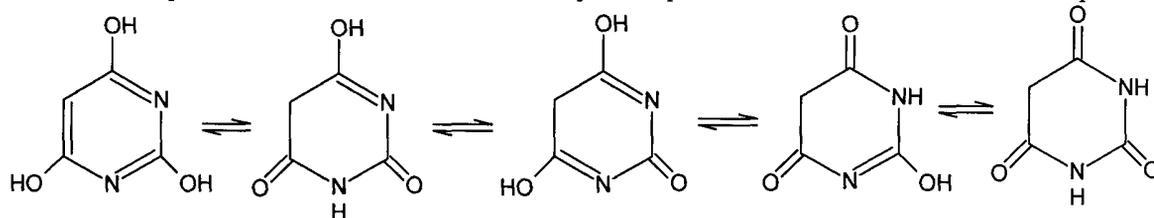
B.IV.2.5 mécanisme à 6 centres

B.IV.3.1.1 $\text{RCO}_2\text{R}' + \text{R}''\text{NH}_2 = \text{RCONHR}'' + \text{R}'\text{OH}$

On obtient un amide.

B.IV.3.1.2 2 étapes d'addition-élimination la seconde intramoléculaire.

B.IV.3.1.3 Tautomérie : équilibre entre deux isomères mettant en jeu le déplacement d'une double liaison et d'un proton.



B.IV.3.1.4 2 alkylations successives type synthèse malonique avec $\text{C}_2\text{H}_5\text{Cl}$

Capès de sciences physiques

Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE
Composition de physique avec applications ♦ Session : 2004

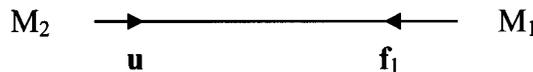
PREMIER PROBLÈME (corrigé succinct)

1. Le champ gravitationnel.

1.1. Définition.

f_1 : force gravitationnelle exercée par m_2 sur m_1 .

$f_1 = - (Gm_1m_2/r^2)\mathbf{u}$; \mathbf{u} vecteur unitaire dirigé de M_2 vers M_1 .

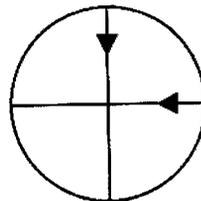


On a $f_2 = -f_1 = m_2 \cdot A(M_2)$. avec $A(M_2) = (Gm_1/r^2)\mathbf{u}$.

1.2. Champ gravitationnel terrestre.

1.2.1.

équateur



1.2.2. $A = GM/R^2 = 9,838 \text{ ms}^{-2}$.

1.3. Énergie potentielle.

1.3.1. Une force \mathbf{f} dérive d'une énergie potentielle E_p si son travail pour un déplacement élémentaire $d\mathbf{OM}$ de son point d'application peut s'écrire $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{OM} = -dE_p$.

Une telle force est dite conservative.

Par définition de l'opérateur gradient on a $dE_p = \text{grad}E_p \cdot d\mathbf{OM}$ d'où $\mathbf{f} = -\text{grad}E_p$.

1.3.2. Pour dériver d'une énergie potentielle, une force ne doit dépendre que de la position de son point d'application ce qui n'est pas le cas de toutes les forces. (il faut $\text{rot}(\mathbf{f}) = \mathbf{0}$).

Les forces de frottements sont non conservatives.

1.3.3. Posons $\mathbf{OM} = r \cdot \mathbf{u}$. On a $d\mathbf{OM} = dr \cdot \mathbf{u} + r \cdot d\mathbf{u}$. Or $d\mathbf{u}$ est perpendiculaire à \mathbf{u} car \mathbf{u} est un vecteur unitaire.

$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{OM} = - (GMm/r^2) \mathbf{u} \cdot d\mathbf{OM} = - GMm dr/r^2 = -dE_p$ soit en intégrant $E_p = -GMm/r + K$ (choisie nulle).

2. Dynamique dans différents référentiels.

2.1. Référentiels.

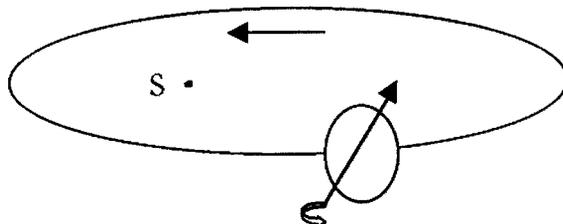
2.1.1. De Copernic : centre au centre de masse du système solaire avec des axes pointant dans les directions de trois étoiles très éloignées dites fixes.

2.1.2. Géocentrique : son centre est le centre d'inertie de la Terre et ses axes ont des directions fixes dans le référentiel de Copernic. Il effectue un mouvement de translation par rapport au référentiel de Copernic.

2.1.3. Terrestre : ses axes sont fixes par rapport à la Terre.

2.1.4. L'axe de rotation de la Terre sur elle-même décrit un cône : c'est le phénomène de précession des équinoxes. Le ralentissement de la rotation traduit une perte d'énergie résultant en partie de l'effet de marées.

2.1.5. Le centre de la Terre se déplace dans le plan de l'écliptique.



2.1.6. Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel s'applique la relation fondamentale de la dynamique soit pour une particule de masse m , de quantité de mouvement \mathbf{p} et soumise à la force \mathbf{f} on a $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$. ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ en mécanique classique).

2.1.7. Un référentiel est galiléen s'il est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic. Ce n'est pas le cas des référentiels géocentrique et terrestre qui ne sont donc pas galiléens.

2.2. Mouvement de la Terre dans le référentiel de Copernic.

2.2.1. Le mouvement du centre d'inertie d'un système de points matériels est identique à celui d'une masse ponctuelle égale à celle du système et à laquelle est appliquée la résultante des forces extérieures s'exerçant sur le système.

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = m_{\text{totale}} \cdot \mathbf{a}(\text{G}).$$

2.2.2. Le centre de la Terre effectue un mouvement circulaire uniforme de rayon D , son accélération vaut donc : $\mathbf{a}(\text{O}) = (v(\text{O})^2/D) \mathbf{u}$ avec $2\pi D = v(\text{O}) \cdot T$.

soit $\mathbf{a}(\text{O}) = (4\pi^2 D/T^2) \mathbf{u}$ où \mathbf{u} est le vecteur unitaire dirigé de O vers S.

2.2.3. Le rayon de la terre étant très petit devant les distances qui séparent la Terre des autres astres, on peut considérer que le champ gravitationnel créé par ces astres est quasiment uniforme au voisinage de la Terre, et va prendre comme valeur moyenne celle au centre O de la Terre.

2.2.4. La relation fondamentale de la dynamique donne : $GMM_S/D^2 = M \cdot v(\text{O})^2/D$

soit $v(\text{O}) = \sqrt{\frac{GM_S}{D}}$ A,N : $v(\text{O}) = 28875 \text{ m/s}$ soit environ 29 km/s.

2.3. Le poids.

2.3.1 Pour maintenir immobile dans le référentiel terrestre un corps de masse m soumis uniquement aux forces de gravitation, on doit exercer une force \mathbf{T} opposée au poids \mathbf{p} : on a $\mathbf{T} + \mathbf{p} = \mathbf{O}$.

Le vecteur \mathbf{g} est le champ de pesanteur.

2.3.2. Puisque \mathbf{a}_T et \mathbf{v}_T sont nuls, la relation de l'énoncé donne :

$$\mathbf{0} = \mathbf{T} + m\mathbf{A}_T(\text{P}) - m\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OP}) \text{ or } \mathbf{T} = -\mathbf{p} \text{ d'où } \mathbf{p} = m\mathbf{A}_T(\text{P}) - m\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OP}).$$

On a $-m\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OP}) = m\boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{HP}$.

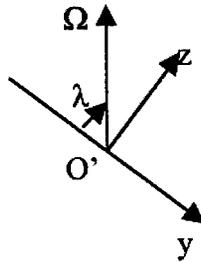
A l'équateur, $g = GM/R^2 - \Omega^2 R = 9,804 \text{ ms}^{-2}$.
 En un lieu de latitude 45° , $g = 9,814 \text{ ms}^{-2}$.

2.4. Mouvement d'un projectile dans le référentiel terrestre.

2.4.1. Equation du mouvement : $m \mathbf{a}_r = m \mathbf{g}$: mouvement uniformément accéléré si on considère g comme constant (z varie peu).

En intégrant : $x = Cte = 0$.
 $y = V_0.t$ $y_I = d = 100\text{m}$.
 $z = -(1/2)gt^2$. Avec $t = d/V_0 = 0,1\text{s}$, on a $z_I = -4,9 \text{ cm}$.

2.4.2. On tient compte de la rotation de la Terre.
 2.4.2.a Vitesse de rotation.



$$\Omega = -\Omega \cos\lambda \mathbf{u}_y + \Omega \sin\lambda \mathbf{u}_z.$$

2.4.2.b On a montré que $\mathbf{p} = m\mathbf{A}_T(P) - m\Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{OP})$.

On a donc $m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{p} - 2m \Omega \wedge \mathbf{v}_r$. Ici \mathbf{F} est nulle (on néglige tout frottement).

On en déduit $\mathbf{a}_r = \mathbf{g} - 2 \Omega \wedge \mathbf{v}_r$.

2.4.2.c On a $\mathbf{v}_r = V_0 \mathbf{u}_y - gt \mathbf{u}_z$.

d' où $\mathbf{a}_r = (-2\Omega g t \cos\lambda + 2\Omega V_0 \sin\lambda) \mathbf{u}_x - g \mathbf{u}_z$.

En intégrant compte-tenu des conditions initiales et sachant que la cible est atteinte à l'instant d/V_0 , on obtient les coordonnées du point d'impact :

$$x_I = - (1/3)\Omega g \cos\lambda \cdot (d/V_0)^3 + \Omega V_0 \sin\lambda \cdot (d/V_0)^2 = 0,52 \text{ mm. Déviation vers l'ouest.}$$

$$y_I = d = 100 \text{ m.}$$

$$z_I = -(1/2)g \cdot (V_0/d)^2 = -4,9 \text{ cm.}$$

Conclusion : on peut négliger la rotation de la terre .

3. Mouvement d'un satellite de la Terre.

3.1. Trajectoire circulaire plane.

3.1.1. Mouvement sans frottement.

3.1.1.a. L'accélération vaut $\mathbf{a} = (dv/dt)\mathbf{T} + (v^2/r)\mathbf{N} = \mathbf{F}/m = (GM/r^2)\mathbf{N}$

\mathbf{N} et \mathbf{T} étant les vecteurs de la base de Frénet. Par identification des composantes on en déduit que $(dv/dt) = 0$ soit v est constante avec $v^2 = GM/r$.

3.1.1.b. Un satellite géostationnaire est immobile dans le référentiel terrestre : sa trajectoire doit se trouver dans le plan équatorial.

2 $\pi r_s = v.T$ et $v = \sqrt{\frac{GM}{r_s}}$ on en déduit $r_s = (T^2 GM / 4 \pi^2)^{1/3}$ (3^e loi de Kepler).

3.1.1.c. $E = E_c + E_p = (1/2)m \cdot GM/r - GMm/r = -(1/2)GMm/r$.

3.1.2. Freinage du satellite dans l'atmosphère.

3.1.2.a. Pour une révolution, la force peut être considérée de module constant :

$$W_f = -2 \pi r \cdot \alpha \cdot m \cdot v^2.$$

3.1.2.b $W_G = -\Delta E_p = -(dE_p/dr)\Delta r = -(GMm/r^2)\Delta r$. (résultat immédiat en considérant la force de module constant).

$$3.1.2.c. E_c = (1/2)GMm/r.$$

$$\Delta E_c = (dE_c/dr) \cdot \Delta r = -(1/2)(GMm/r^2) \cdot \Delta r$$

$$3.1.2.d. \Delta E_c = W_f + W_G \text{ soit } -(1/2)(GMm/r^2) \cdot \Delta r = -2 \pi r \cdot \alpha \cdot m \cdot v^2 - (GMm/r^2) \Delta r.$$

$$d'où \quad -(1/2)(GMm/r^2) \cdot \Delta r = -2 \pi r \cdot \alpha \cdot m \cdot (GM/r) - (GMm/r^2) \Delta r.$$

$$\text{soit } -2 \pi \alpha = (1/2) \cdot \Delta r / r^2 \text{ et } \Delta r = -4 \pi \alpha r^2.$$

On a $\Delta r < 0$ donc r diminue et la vitesse $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ augmente.

Le travail moteur (positif) de la force de gravitation est supérieur au travail résistant (négatif) de la force de frottement : $\Delta E_c > 0$.

$$3.1.2.e. \frac{dr}{dt} \square \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{T_s} = -4\pi r^2 \alpha \frac{1}{\left(\frac{4\pi^2 r^3}{GM}\right)^{1/2}} = -2\alpha \sqrt{GM} \sqrt{r}.$$

$$\text{Soit } \frac{dr}{\sqrt{r}} = -2\alpha \sqrt{GM} dt ; \text{ En intégrant : } \sqrt{r} = -\alpha \sqrt{GM} t + \sqrt{r_0}.$$

$$K = -\alpha \sqrt{GM}.$$

3.2. Satellite en orbite elliptique.

3.2.1. On utilise le théorème du moment cinétique : la dérivée par rapport au temps du moment cinétique en O du satellite est égal au moment en O de la force de gravitation. Or celle-ci passe par O donc son moment en O est nul.

Sa dérivée par rapport au temps étant nulle, on en déduit que le moment cinétique est constant.

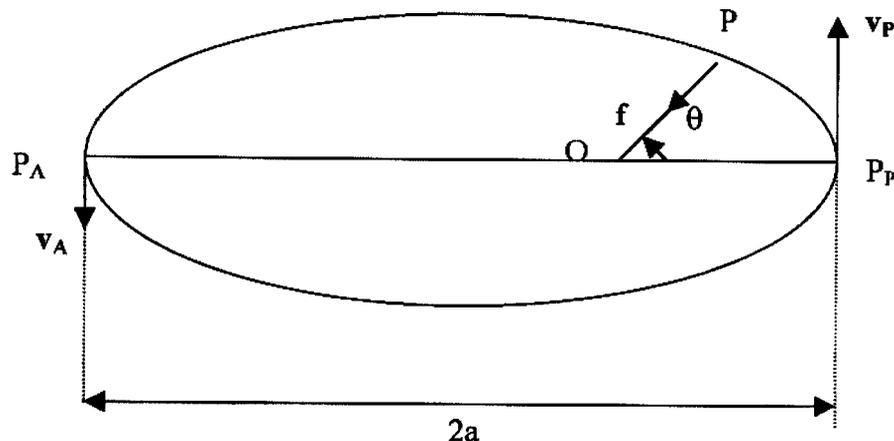
$\sigma_O = \mathbf{OP} \wedge m\mathbf{v}$: c'est un vecteur perpendiculaire au plan passant par O fixe et contenant les vecteurs \mathbf{OP} et \mathbf{v} . σ_O étant constant, ce plan qui est le plan du mouvement reste toujours le même : le mouvement est plan.

3.2.2.a. p est le paramètre de la conique et e son excentricité.

La trajectoire du satellite est une ellipse.

Pour une ellipse, l'excentricité e est inférieure à 1.

3.2.2.b. O est à l'un des foyers de l'ellipse.



La conservation du moment cinétique exprimé à l'apogée et au périégée donne :

$$mv_A r_A = mv_P r_P \text{ soit } v_A r_A = v_P r_P$$

3.2.3. Energie mécanique du satellite.

$$3.2.3.a. E = (1/2)mv^2 - GMm/r.$$

$$\text{A l'apogée : } E = (1/2)mv_A^2 - GMm/r_A. \quad (1)$$

$$\text{Au périégée : } E = (1/2)mv_P^2 - GMm/r_P. \quad (2)$$

En effectuant la différence (1). r_A^2 - (2). r_P^2 et sachant que $v_A r_A = v_P r_P$, on a :

$$E.(r_A^2 - r_P^2) = -GMm.(r_A - r_P) \text{ soit :}$$

$$E = -GMm/(r_A + r_P) = -GMm/2a.$$

3.3. Changement d'orbite du satellite.

3.3.1. En appliquant (dans le référentiel géocentrique supposé galiléen) la relation fondamentale de la dynamique au système constitué par le satellite (m) et le gaz éjecté (m_g) et en projetant sur la tangente à la trajectoire \mathbf{T} qui est, à l'apogée et au périégée, perpendiculaire à la force de gravitation, on voit qu'il y a conservation de la quantité de mouvement $\mathbf{P} = P.\mathbf{T}$. Notons \mathbf{T} et \mathbf{N} les vecteurs tangent et normal à la trajectoire.

$$\mathbf{F} = -GM(m+m_g)/r^2 \mathbf{N} = d(\mathbf{P}\mathbf{T})/dt = (dP/dt)\mathbf{T} + P(d\mathbf{T}/dt).$$

Or $d\mathbf{T}/dt$ est un vecteur perpendiculaire à \mathbf{T} . En effectuant $\mathbf{F}.\mathbf{T}$ on a $dP/dt = 0$.

Exprimons la conservation de P avant et après l'éjection de gaz :

$$(m+m_g).v_0 = m.v' + m_g.V_g$$

V_g est la vitesse des gaz dans le référentiel géocentrique et vaut d'après la loi de composition des vitesses : $V_g = v_0 - v_g$.

En remplaçant on obtient : $v' = v_0 + (m_g/m)v_g$.

3.3.2. En I, on a augmentation de la vitesse alors que l'énergie gravitationnelle est constante (on suppose l'éjection faite en une durée négligeable), on a donc augmentation de l'énergie mécanique $E = -GMm/2a$ et donc augmentation de a (qui valait r_0 pour le mouvement circulaire). Le point I doit se trouver soit à l'apogée, soit au périégée de l'ellipse car ce sont les deux seuls points où la vitesse est perpendiculaire au rayon vecteur.

Le demi grand-axe a étant supérieur à r_0 , on voit que I est le périégée.

$$\text{On a : } E = -GMm/2a = (1/2)mv'^2 - GMm/r_0$$

$$\text{d'où } a = \frac{1}{\frac{2}{r_0} - \frac{v'^2}{GM}}.$$

3.3.3. On peut à l'apogée éjecter pendant une durée très brève une certaine quantité de gaz en sens opposé à la vitesse du satellite. En effet, le rayon de la trajectoire est nécessairement égal à la distance r_A qui vaut $2a - r_0$, valeur supérieure à a car $r_0 < a$, ce qui impose d'augmenter l'énergie mécanique du satellite (donc son énergie cinétique).

3.3.4. Il est nécessaire de corriger les trajectoires des satellites :

- Pour ajuster les trajectoires juste après le lancement.
- Pour compenser des effets qui n'apparaissent pas dans ce problème, en particulier l'influence de la non sphéricité de la terre.
- Pour limiter l'influence des frottements.

La méthode est limitée par la quantité de gaz à éjecter que peut emporter le satellite.

DEUXIÈME PROBLÈME (corrigé succinct)

1. Généralités

1.1. On a $w_{\text{ext}} > 0$, $q_f > 0$ et $q_c < 0$.

1.2. Une pompe à chaleur correspond aux mêmes signes à savoir $w_{\text{ext}} > 0$, $q_f > 0$ et $q_c < 0$.

1.3. $e_{\text{réfrigérateur}} = \frac{q_f}{W_{\text{ext}}}$, $e_{\text{pompe à chaleur}} = \frac{-q_c}{W_{\text{ext}}}$.

2. Bilans énergétiques

2.1. $U = \sum$ des énergies cinétiques et potentielles microscopiques. S'exprime en Joule (J). C'est une grandeur extensive. Exemple : pour n moles de GPMA, $U = \frac{3}{2}nRT$

2.2. $\Delta U + \Delta E_c(\text{macro}) + \Delta E_p(\text{champs ext}) = W + Q$ où ΔU désigne la variation d'énergie interne du système (\sum des énergies cinétiques et potentielles microscopiques), $\Delta E_c(\text{macro})$ la variation d'énergie cinétique macroscopique correspondant à un mouvement d'ensemble du système, $\Delta E_p(\text{champs ext})$ la variation d'énergie potentielle dont dérive le champ de forces extérieur au système. C'est un principe de conservation, celui de l'énergie. Ici, on écrira $\Delta U = W + Q$.

2.3.

2.3.1. L'énergie est une grandeur extensive. Pour traduire sa conservation, il est nécessaire de se ramener à une quantité de matière constante c'est à dire à un système fermé.

2.3.2. La masse de fluide entre les sections B et B' et entre les sections A et A' est identique car la tranche AA' rentre en A pendant dt tandis que la tranche BB' sort en B pendant le même temps. Même remarque pour la tranche CC'.

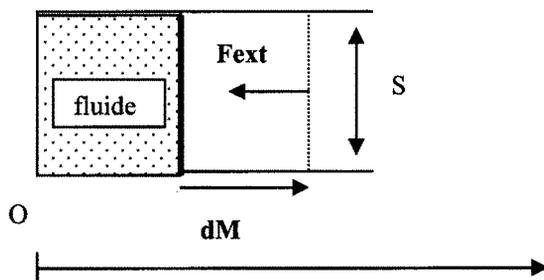
2.3.3. Calcul du travail des forces de pression reçu par le fluide en écoulement.

2.3.3.1. $d\mathbf{F} = P d\mathbf{S}$ avec P scalaire et $d\mathbf{S}$ vecteur surface porté par la normale (sortante si la surface est fermée).

2.3.3.2. $\delta W = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{M}$

2.3.3.3. En considérant le cas particulier (mais néanmoins généralisable) d'un fluide enfermé dans un cylindre fermé par un piston mobile, on peut écrire:

$$\delta W = -\mathbf{f} \cdot d\mathbf{M} = -P_{\text{ext}} dM = -P_{\text{ext}} dV$$



2.3.3.4. $W_{\text{amont}} = P_A V_{AA'}$, $W_{\text{aval}} = -P_B V_{BB'}$.

2.3.4. $U_{AB'}(t+dt) - U_{AB}(t) = \delta Q + \delta W + P_A V_{AA'} - P_B V_{BB'}$.

- 2.3.5. En régime permanent, $U_{A'B'}(t+dt) - U_{AB}(t) = U_{A'B'} - U_{AB}$, et, en utilisant l'extensivité de l'énergie interne, $U_{A'B'} - U_{AB} = (U_{A'B'} + U_{BB'}) - (U_{AA'} + U_{A'B'})$.
 Donc $(U_{BB'} + P_B V_{BB'}) - (U_{AA'} + P_A V_{AA'}) = \delta W + \delta Q$, soit $H_{BB'} - H_{AA'} = \delta W + \delta Q$.
- 2.3.6. Divisons alors par dm l'égalité obtenue au 2.2.5 et l'on obtient bien l'égalité demandée.
- 2.3.7. Dans ce cas, q et w sont nuls et $\Delta h = 0$.
- 2.3.8. Sur un cycle $\Delta h = 0$, l'enthalpie d'un kilogramme de fluide étant une fonction d'état, et $w_{ext} + q_f + q_c = 0$.
- 2.3.9. La chaleur q_f reçue par le fluide de l'armoire frigorifique est finalement fournie par la cuisine si la porte de l'armoire est ouverte ; au total, la chaleur reçue par le fluide est $q_c + q_f = -w_{ext} < 0$: le fluide fournit donc la quantité de chaleur $w_{ext} > 0$ avec $w_{ext} > q_f$: la cuisine se réchauffe. Si la porte du réfrigérateur est fermée, il y a (beaucoup) moins de fuites thermiques, la régulation automatique se met en route moins souvent et le réfrigérateur fonctionne moins souvent mais lorsqu'il fonctionne, le bilan est le même et la cuisine se réchauffe aussi.

3. Considérations entropiques

3.1. Autour du second principe.

- 3.1.1. Un système fermé n'échange pas de matière avec l'extérieur. Exemple : l'alcool situé dans le tube en verre d'un thermomètre.
 Un système calorifugé ne peut échanger d'énergie sous forme de chaleur avec le milieu extérieur. Exemple : le thermos (dans une assez bonne approximation).
 Un système fermé et calorifugé n'est pas nécessairement isolé : il peut recevoir du travail du milieu extérieur.
- 3.1.2. L'entropie d'un système fermé calorifugé ne peut qu'augmenter. C'est un principe d'évolution qui traduit que les transformations qui se produisent spontanément dans un système fermé calorifugé ne reviennent jamais en arrière : elles sont irréversibles.
- 3.1.3. Boltzmann a montré que pour un état d'équilibre résultant de Ω états microscopiques possibles équiprobables, $S = k_B \ln \Omega$ où k_B est la constante de Boltzmann; ainsi, une augmentation de S traduit celle de Ω : on dit alors que les évolutions spontanées des systèmes fermés calorifugés correspondent à une augmentation du désordre.
- 3.1.4. L'ensemble des deux corps qui échangent de la chaleur constituant un système isolé, on a $dS_f + dS_c \geq 0$. D'autre part, les corps n'échangeant que de la chaleur, on a pour une transformation infinitésimale $\delta Q_f/T_f + \delta Q_c/T_c \geq 0$. Les deux corps étant isolés, $\delta Q_f + \delta Q_c = 0$, soit $\delta Q_f (1/T_f - 1/T_c) \geq 0$ et comme $T_f < T_c$, $(1/T_f - 1/T_c) \geq 0$. On a donc nécessairement $\delta Q_f \geq 0$: le corps froid reçoit effectivement de la chaleur.
- 3.1.5. Pour que le fluide puisse effectivement recevoir de la chaleur dans l'évaporateur, d'après ce qui précède sa température doit être inférieure à celle de la source froide: on vérifie que $t_{fluide} = -10^\circ\text{C} < t_f \approx 5^\circ\text{C}$. Par un raisonnement analogue dans le condenseur, on vérifie que $t_{fluide} = 35^\circ\text{C} > t_c \approx 20^\circ\text{C}$.
- 3.1.6. Les transformations dans le condenseur et l'évaporateur sont irréversibles car le fluide n'y est pas en équilibre thermique avec l'extérieur.
 Comme la puissance du transfert thermique est proportionnelle au produit du pincement par la surface d'échange, pour conserver un transfert fini tout en faisant tendre le

pincement vers zéro (condition de la réversibilité) il faudrait avoir une surface d'échange infinie ce qui n'est pas réaliste.

3.2.

3.2.1. L'ensemble {source froide, source chaude, fluide} constitue un système fermé calorifugé pour lequel $\Delta S \geq 0$. En utilisant l'extensivité de l'entropie, on peut écrire:

$$\Delta S = \Delta S_{\text{sourcefroide}} + \Delta S_{\text{sourcechaude}} + \Delta S_{\text{fluide}} \text{ avec } \Delta S_{\text{sourcefroide}} = \frac{-q_f}{T_f}, \Delta S_{\text{sourcechaude}} = \frac{-q_c}{T_c} \text{ et enfin}$$

$\Delta S_{\text{fluide}} = 0$ puisque le fluide décrit un cycle et que l'entropie est une fonction d'état. On

obtient finalement $\Delta S = \frac{-q_f}{T_f} + \frac{-q_c}{T_c} \geq 0$ soit $\frac{q_f}{T_f} + \frac{q_c}{T_c} \leq 0$.

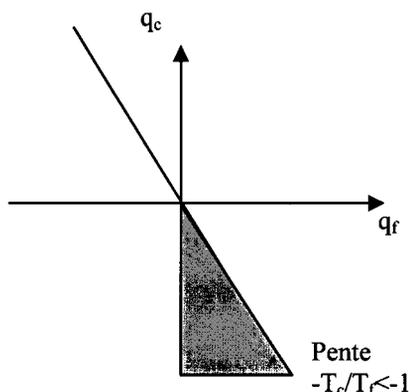
3.2.2. $e_{\text{réfrigérateur}} = \frac{q_f}{w_{\text{ext}}} = \frac{q_f}{-q_f - q_c} \leq \frac{T_f}{T_c - T_f}$, l'égalité correspondant à un fonctionnement réversible.

3.2.3. L'efficacité maximale est elle même maximale (infinie) quand $T_c = T_f$

3.2.4. On a (1) $q_c < 0$, $q_f > 0$ et $T_f < T_c$

Et (2) $\frac{q_c}{T_c} + \frac{q_f}{T_f} \leq 0$ ce qui permet d'établir que $\frac{q_c}{q_f} \leq \frac{-T_c}{T_f} < -1$. D'où le diagramme ci-

dessous dans lequel la partie grisée correspond au domaine autorisé pour un réfrigérateur:

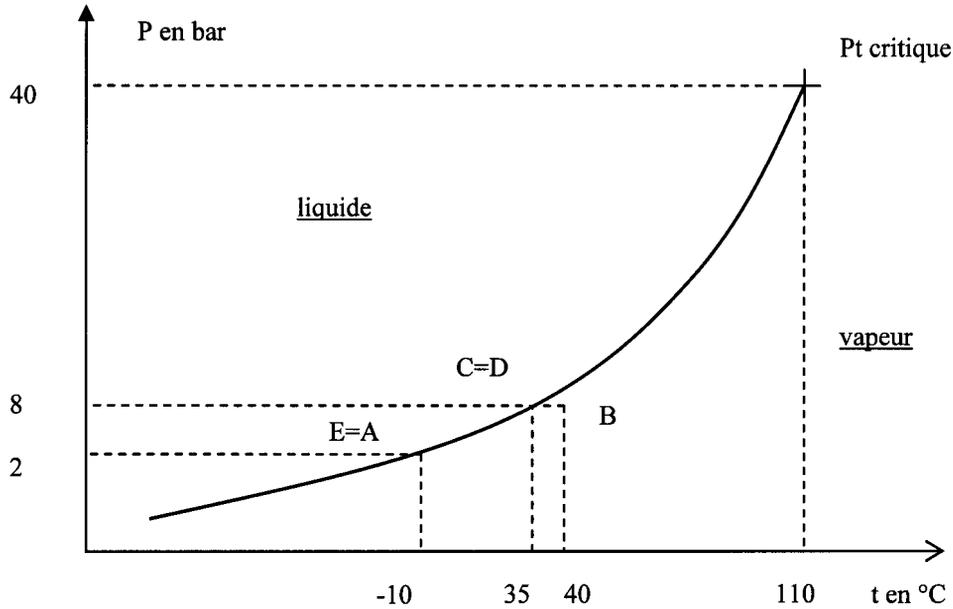


4. Représentation du cycle dans le plan (s,t)

4.1. dans le plan (t,P)

4.1.1. La variance d'un système fermé est le nombre de paramètres intensifs nécessaires à sa description. D'après la règle de Gibbs, $v = c + 2 - \phi$. Pour l'équilibre liquide-gaz du corps pur, $v = 1 + 2 - 2 = 1$: le système est dit monovariant: si la pression est fixée, il en va de même pour la température, les deux variables intensives P et T étant liées (on parle de pression de vapeur saturante $P_S(T)$). Ainsi, $t(D) = t(C) = 35^\circ\text{C}$ et $t(E) = t(A) = -10^\circ\text{C}$.

4.1.2. Remarque : Par souci de lisibilité, le graphe ci-dessous n'est pas à l'échelle.



4.2. dans le plan (s,t)

4.2.1. Questions préliminaires.

4.2.1.1. $\delta Q_p = mc_p dT$ ou $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p = mc_p$. c_p est donc la quantité de chaleur qu'il faut fournir à 1 kg d'un corps pur pour augmenter sa température de 1°C à pression constante.

4.2.1.2. $H=H(T)$ pour un GP. Ainsi, $dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT = mc_p dT$ puisque $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = 0$, et ce quelle que soit la transformation.

4.2.1.3. Considérons le changement d'état d'un corps pur $1 \rightarrow 2$: $\Delta h_{12} = l_{12}(T)$ à la température constante T. Or, le changement d'état étant **monovariant** (cf question 4.1.1), il est aussi isobare : on a alors, comme pour toute transformation isobare, $\Delta h_{12} = q_{12} = l_{12}(T)$ et $l_{12}(T)$ désigne finalement la quantité de chaleur qu'il faut fournir à 1 kg du corps pur pour le faire passer de l'état 1 à l'état 2, à la température T. $l_{12}(T)$ **ne dépend que de T** (ou de P qui est fonction de T).

4.2.2. Compression adiabatique réversible AB.

4.2.2.1. $s(B) = s(A)$.

4.2.2.2. $\Delta h_{AB} = h(B) - h(A) = c_p \Delta T_{AB} = c_p [T(B) - T(A)] = 500 \cdot [40 - (-10)] = 25 \text{ kJ/kg}$.

$h(B) = h(A) + 25 \text{ kJ} = 180 + 25 = 205 \text{ kJ/kg}$.

4.2.2.3. Les causes de l'irréversibilité sont les frottements et l'inhomogénéité des variables internes.

4.2.3. Refroidissement isobare BC.

4.2.3.1. $\Delta h_{BC} = h(C) - h(B) = c_p \Delta T_{BC} = c_p [T(C) - T(B)] = 500 \cdot [40 - (35)] = 2,5 \text{ kJ/kg}$.

$h(C) = h(B) - 2,5 \text{ kJ/kg} = 205 - 2,5 = 202,5 \text{ kJ/kg}$.

4.2.3.2. $\Delta s_{BC} = \int_B^C \frac{c_p dT}{T} = c_p \ln \frac{T_C}{T_B} = 500 \ln \left(\frac{273+35}{273+40} \right) = -8,05 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

d'où $s(C) = 692 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

4.2.3.3. A partir de ce qui précède, on établit que sur l'isobare

$$t(s) = T_B \exp\left(\frac{s-s(B)}{c_p}\right) - 273,15.$$

4.2.4. Condensation CD.

4.2.4.1. Si $l_c(35^\circ\text{C})$ désigne la chaleur latente de liquéfaction (appelée ici condensation), on a $\Delta h_{CD} = l_c(35^\circ\text{C}) = -l_v(35^\circ\text{C}) = -130 \text{ kJ.kg}^{-1}$ par définition de la chaleur latente de condensation.

$$h(D) = h(C) - 130 \text{ kJ.kg}^{-1} = 202,5 - 130 = 72,5 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

$$4.2.4.2. \quad \Delta s_{CD} = l_c(35^\circ\text{C})/T(C) = -130 \text{ kJ.kg}^{-1}/(273+35) = -422 \text{ J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$s(D) = s(C) - 422 = 692 - 422 = 270 \text{ J.kg}^{-1}\text{K}^{-1}$$

4.2.5. transformations DE et EA

$$4.2.5.1. \quad h(E) = h(D) = 72,5 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

$$4.2.5.2. \quad \Delta h_{EA} = h_A - h_E = [1 - x_V(E)] l_v(-10^\circ\text{C})$$

soit numériquement $180.10^3 - 72,5.10^3 = [1 - x_V(E)].155.10^3 \text{ J.kg}^{-1}$ d'où $x_V = 0.3$

$$4.2.5.3. \quad \Delta s_{EA} = s_A - s_E = [1 - x_V(E)] l_v(-10^\circ\text{C})/(273-10) \text{ et } s(E) = 288 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}.$$

$s(E) > s(D)$: on retrouve le caractère irréversible de la détente de Joule-Kelvin (le système étant bien fermé et calorifugé).

4.2.6. Cycle.

Etat	t(°C)	P(bars)	h(kJ.kg ⁻¹)	s(J.K ⁻¹ .kg ⁻¹)	x _V
A	-10	2	180	700	1
B	40	8	205	700	1
C	35	8	202.5	692	1
D	35	8	72.5	270	0
E	-10	2	72.5	288	0.3
E ₂	-10	2	Ne pas remplir	110.5	0
Point critique	110	40	Ne pas remplir	570	Ne pas remplir

4.2.6.1. cf feuille jointe page 6.

4.2.6.2. cf feuille jointe page 6. Sur BC, $s-s(B)/c_p \leq 10/500$,

et $\exp((s-s(B))/c_p) \approx (s-s(B))/c_p$. $t(s) \approx T_B \cdot ((s-s(B))/c_p) - 273,15$: on obtient bien l'équation d'une droite affine dans le plan (t,s).

4.2.6.3. Pour placer E₂, il faut calculer s(E₂): $s(E_2) = s(A) - \frac{l_v(-10^\circ\text{C})}{263} = 110,5 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

4.2.6.4. cf feuille jointe.

4.2.6.5. cf feuille jointe.

5. Efficacité

5.1. du réfrigérateur

$$5.1.1. \quad q_C = h(D) - h(B) = 72,5 - 205 = -132,5 \text{ kJ/kg. } q_f = h(A) - h(E) = 180 - 72,5 = 107,5 \text{ kJ/kg.}$$

AB est adiabatique d'où $W_{AB} = h(B) - h(A) = 205 - 180 = 25 \text{ kJ/kg.}$

$$5.1.2. \quad \text{on vérifie que } q_C + q_f + W_{AB} = 0.$$

$$5.1.3. \quad e = q_f / W_{AB} = 107,5/25 = 4,3$$

5.2. de la machine de Carnot correspondante

5.2.1. cf graphe. Justification de la construction : dans le diag. (t,s), les adiabatiques réversibles sont des verticales (puisque isentropiques) et les isothermes des horizontales. Ainsi, A' se trouve à l'intersection de l'isotherme -10°C et de la verticale passant par C. de même, E' se trouve à l'intersection de l'isotherme -10°C et de la verticale passant par D.

$$5.2.2. q_C = q_{CD} = h(D) - h(C) = 72,5 - 202,5 = -130 \text{ kJ/kg.}$$

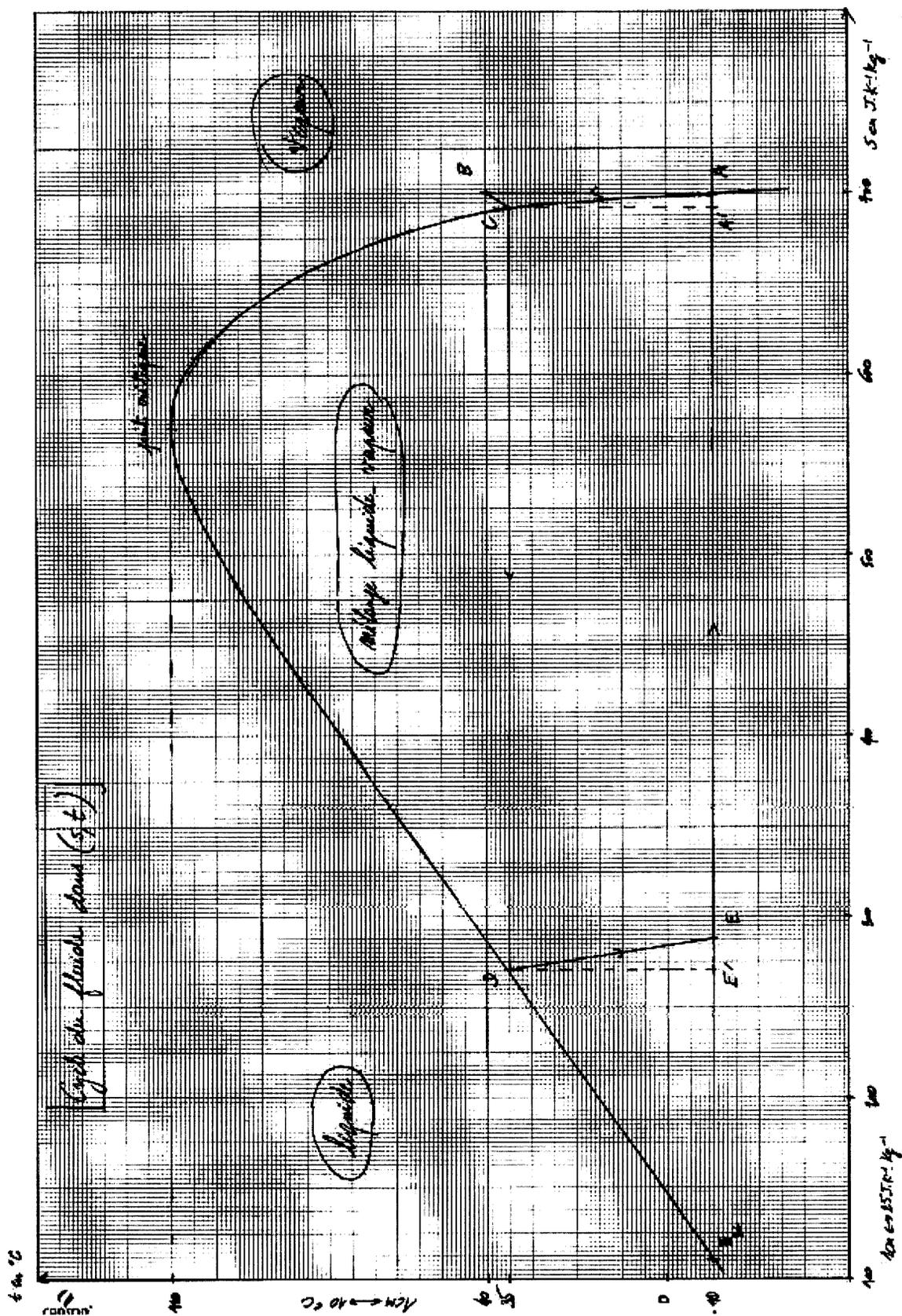
$$5.2.3. q_f = q_{E'A'} = T(A) \cdot \Delta s_{E'A'} = T(A) \Delta s_{DC} = 263 \cdot (692 - 270) = 111 \text{ kJ/kg.}$$

$$5.2.4. W_{A'C} = -q_{CD} - q_{E'A'} = 130 - 111 = 19 \text{ kJ/kg.}$$

$$5.2.5. e = q_f / W_{A'C} = 111 / 19 = 5,84$$

$$5.2.6. e = T_f / (T_C - T_f) = [273 - 10] / [35 - (-10)] = 263 / 45 = 5,84: \text{OK.}$$

5.2.7. On retrouve que $e_{\text{carnot}} > e_{\text{réfrigérateur}}$ ce qui avait été annoncé par la réponse à la question du 3.2.2.



Capès de sciences physiques

Concours externe

SECTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE

Composition d'électronique - électrotechnique avec applications ♦ Session : 2004

PREMIER PROBLÈME (corrigé succinct)

1 Plaque de cuisson à induction.

1.1 Etude de l'inducteur.

$$1.1.1 \quad R_1 = \rho_{\text{cu}} \frac{l}{s} \text{ avec } l = 2\pi \frac{r}{2} 20 \text{ et } s = \frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4} \text{ avec } d = 4\text{mm. } R_1 = 18\text{m}\Omega$$

$$1.1.2 \quad \text{La profondeur de pénétration dans le cuivre à 25 kHz vaut : } \delta_{\text{cu}} = \sqrt{\frac{\rho_{\text{cu}}}{\pi f \mu_0}}$$

$\delta_{\text{cu}} = 0.43\text{mm}$. Il faut que le rayon du conducteur soit inférieur à cette profondeur pour avoir une utilisation correcte de la section de cuivre, ce qui ne serait pas le cas si les conducteurs étaient massifs (4mm).

$$1.1.3 \quad L_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{V_1}{I_1}\right)^2 - R^2} \quad L_1 = 30\mu\text{H}$$

1.2. Etude de l'ensemble.

$$1.2.1 \quad \underline{V}_1 = (R_1 + jL_1\omega)\underline{I}_1 + jM\omega\underline{I}_2$$

$$1.2.2 \quad 0 = (R_2 + jL_2\omega)\underline{I}_2 + jM\omega\underline{I}_1$$

$$1.2.3 \quad 0 = (R_2 + jL_2\omega)\underline{I}_2 + jM\omega\underline{I}_1 \Rightarrow \underline{I}_2 = \frac{-jM\omega\underline{I}_1}{(R_2 + jL_2\omega)}$$

$$\underline{V}_1 = (R_1 + jL_1\omega)\underline{I}_1 + jM\omega\underline{I}_2 = (R_1 + jL_1\omega)\underline{I}_1 + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}\underline{I}_1$$

$$\underline{V}_1 = \left((R_1 + \frac{M^2\omega^2 R_2}{R_2^2 + (L_2\omega)^2}) + j\omega(L_1 - \frac{M^2\omega^2 L_2}{R_2^2 + (L_2\omega)^2}) \right) \underline{I}_1$$

$$\Delta R_1 = \frac{M^2\omega^2 R_2}{R_2^2 + (L_2\omega)^2} \quad \Delta R_1 = 0.55\Omega$$

$$\Delta L_1 = -\frac{M^2\omega^2 L_2}{R_2^2 + (L_2\omega)^2} \quad \Delta L_1 = -16\mu\text{H}$$

1.2.4 ΔR_1 permet de modéliser la puissance dissipée dans la plaque et ne peut donc qu'être positive. 1.2.5

1.2.5 ΔL_1 traduit la réaction de l'induit sur l'inducteur. D'après la loi de Lenz, cela doit se traduire par une diminution de l'inductance.

$$1.2.6 \quad \text{La puissance à dissiper est de } P_2 = 1500\text{W. On a donc } I_2 = \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} \cdot I_2 = 425\text{A.}$$

$$1.2.7 \quad \underline{I}_2 = \frac{-jM\omega \underline{I}_1}{(R_2 + jL_2\omega)} \Rightarrow I_1 = \frac{\sqrt{R_2^2 + (L_2\omega)^2}}{M\omega} I_2 \quad I_1=52A.$$

$$1.2.8 \quad V_1 = \sqrt{(\Delta R_1)^2 + (L_1 - \Delta L_1)^2} I_1; \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega(L_1 - \frac{M^2\omega^3 L_2}{R_2^2 + (L_2\omega)^2})}{\frac{M^2\omega^2 R_2}{R_2^2 + (L_2\omega)^2}} \quad V_1=119V; \varphi_1=1.33\text{rad}$$

$$1.2.9 \quad Q=V_1 I_1 \sin(\varphi_1) \quad Q=6 \text{ kVAR}$$

$$1.2.10 \quad Q_C = -Q = -V_1^2 C \omega. \text{ Donc } C = \frac{Q}{V_1^2 \omega} \quad C=2.7 \mu\text{F}.$$

$$1.2.11 \quad I_{in} = I_1 \cos(\varphi_1) \quad I_{in}=12.6A$$

1.3 L'éloignement de la plaque provoque une diminution du couplage entre l'inducteur et l'induit et donc une diminution de l'inductance mutuelle M. Pour avoir la même puissance dissipée, il faudra donc avoir des intensités plus importantes.

1.4

1.4.1 plaque 1 : acier magnétique.

plaque 2 : acier amagnétique 1.3

$$1.4.2 \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{\rho_1}{\pi f \mu_0 \mu_{r1}}} \quad \delta_1=0.076\text{mm}$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{\rho_2}{\pi f \mu_0 \mu_{r2}}} \quad \delta_2=3\text{mm}$$

1.4.3 Les ampères-tours étant identiques dans les deux cas, on peut considérer, en première approximation, que les excitations magnétiques seront identiques : $H_1=H_2$.

$$1.4.4 \quad P = \rho \frac{H^2}{\delta} S; \frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\delta_2}{\delta_1} = 8.4.$$

1.4.5 Il faut que le matériau à chauffer soit magnétique.

2 Etude d'une installation de chauffage HF (haute fréquence) pour le séchage d'un matériau isolant fibreux .

2.1 Modélisation du dispositif.

$$2.1.1 \quad C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}; \underline{Y} = j2\pi f C = j2\pi f \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

$$2.1.2 \quad \underline{Y}_r = j2\pi f \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} = j2\pi f \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r + j\epsilon_{ri}) S}{d}$$

$$2.1.3 \quad \underline{Y}_r = j2\pi f \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r + j\epsilon_{ri}) S}{e} = -2\pi f \frac{\epsilon_0 \epsilon_{ri} S}{e} + j2\pi f \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e} = \frac{1}{R} + jC\omega$$

$$\frac{1}{R} = -2\pi f \frac{\epsilon_0 \epsilon_{ri} S}{e}; C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e} \quad R=50\Omega; C=705\text{pF}$$

2.2 Modélisation de l'ensemble.

2.2.1 C_0 correspond à la capacité créée par la zone d'air : $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{h - e}$

2.2.2 $C_0 = 392 \text{ pF}$.

2.3 Dimensionnement de l'alimentation.

2.3.1 La tension aux bornes de R doit donc valoir : $V_R = \sqrt{PR} = 963 \text{ V}$.

Calcul avec les complexes :

$$\underline{V}_{HF} = \frac{\frac{1}{jC_0\omega} + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R}}}{1} \underline{V}_R \quad \underline{V}_{HF} = (2698 - 289.03*j) \text{ en prenant } V_R \text{ comme référence de phase.}$$

$V_{HF} = 2713 \text{ V}$.

2.3.2

$\underline{I}_{HF} = \left(jC\omega + \frac{1}{R} \right) \underline{V}_R = 19.306 + 115.836*j \quad I_{HF} = 117 \text{ A}$.

$S = \underline{V}_{HF} * \underline{I}_{HF}^* = P + jQ = 1.86E+4 - 3.181E+5*j \quad Q = -318 \text{ kVAR}$.

Calcul avec les puissances:

Puissance réactive dans C : $Q_C = -V_r^2 C\omega = -110 \text{ kvar}$

Puissance apparente de l'ensemble C/R : $S^2 = Q_c^2 + P_r^2 \rightarrow S = 113 \text{ kVA}$

$I_{HF} := \frac{S}{V_r} \quad I_{HF} = 117 \text{ A}$

Puissance réactive totale : $Q_t := Q_c - \frac{I_{HF}^2}{C_0 \cdot \omega}$

$Q_t = -318 \text{ kvar}$

2.3.3 Le courant I_{HF} ne change pas. Seule V_{HF} est modifiée, à puissance de chauffe identique : $\underline{V}_{HF} = \underline{V}_R$

2.3.4 La valeur de R dépend de la fréquence. A tension d'alimentation donnée, la puissance dissipée sera d'autant plus grande que R sera petite, donc que f sera grande. Dans le domaine des HF, la législation impose l'utilisation de fréquences bien déterminées (dont le 27,12 MHz).

3 Etude d'un onduleur de tension à résonance.

3.1 Onduleur de tension à commande pleine onde.

3.1.1 La source de tension ne doit jamais être en court-circuit. Donc K1 et K'1 d'une part, K2 et K'2 ne peuvent être fermés simultanément. La source de courant ne doit jamais être en circuit ouvert. Donc K1 et K'1 d'une part, K2 et K'2 ne peuvent être ouverts simultanément.

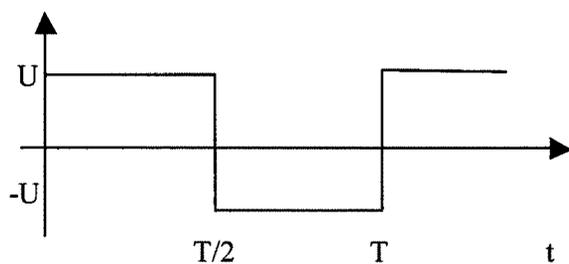
3.1.2 $u_A = m_1 U ; u_B = m_2 U$

3.1.3 $u_c = u_A - u_B = (m_1 - m_2) U$.

On souhaite avoir une tension de valeur moyenne nulle. Il faut donc que les valeurs moyennes de m_1 et m_2 soient identiques.

3.1.4 $U_c = (2m_1 - 1) U$

3.1.5



3.2 Etude d'une charge résonnante.

3.2.1 Régime sinusoïdal

3.2.1.1
$$\underline{Z} = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right)$$

3.2.1.2
$$\underline{Z} = R \left(1 + j \frac{1}{2k} \frac{\omega}{\omega_0} \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right) \right)$$

3.2.1.3
$$P = P_0 \frac{1}{1 + \frac{1}{4k^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right)^2}$$

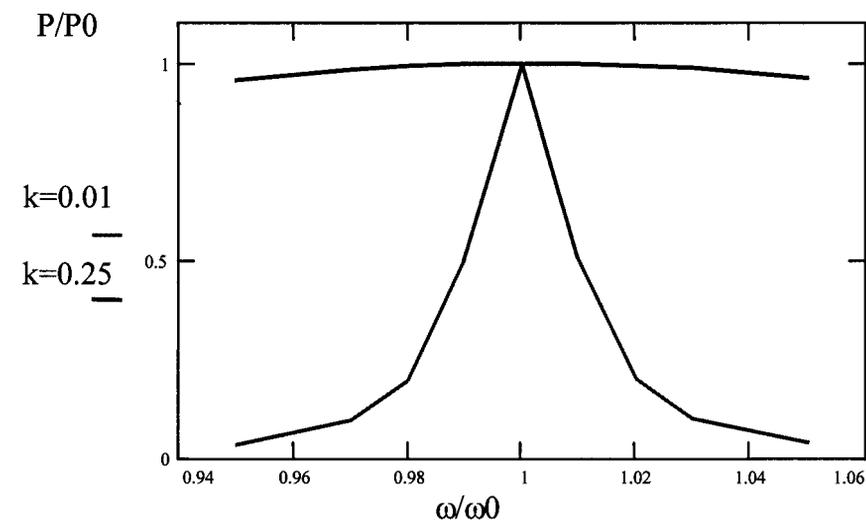
3.2.1.4

k=0,01

$\frac{\omega}{\omega_0}$	0,95	0,97	0,98	0,99	1	1,01	1,02	1,03	1,05
P/P ₀	0,04	0,1	0,2	0,5	1	0,5	0,2	0,1	0,04

k=0,25

$\frac{\omega}{\omega_0}$	0,95	0,97	0,98	0,99	1	1,01	1,02	1,03	1,05
P/P ₀	0,96	0,985	0,994	0,998	1	0,998	0,994	0,986	0,96



3.2.1.5 les variations sont d'autant plus importantes pour une même variation de fréquence que k est faible. On a donc intérêt à avoir k faible.

3.2.2 Etude en régime rectangulaire.

$$3.2.2.1 \quad \underline{Z}_p = R \left(1 + j \frac{1}{2k} \frac{p\omega}{\omega_0} \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{p\omega} \right)^2 \right) \right)$$

$$3.2.2.2 \quad I_{cp} = \frac{U_{cp}}{Z_p} = \frac{2\sqrt{2}U}{p\pi} \frac{1}{R \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4k^2} \left(\frac{p\omega}{\omega_0} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{p\omega} \right)^2 \right)^2 \right)}}$$

$$3.2.2.3 \quad I_{cp} = \frac{U_{cp}}{Z_p} = \frac{2\sqrt{2}U}{p\pi} \frac{1}{R \sqrt{\left(1 + \left(\frac{p}{2k} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{1}{p} \right)^2 \right)^2 \right)}}$$

P	1	2	3	4	5
$I_{cp}/(U/R)$	0.9	0	0.055	0	0.019

On peut considérer que i_c est sinusoïdal.

3.2.2.4 La puissance a alors pour expression $P=RI_{c1}^2 \quad P = \frac{8U^2}{\pi^2 R}$

3.3 Synthèse des interrupteurs de l'onduleur.

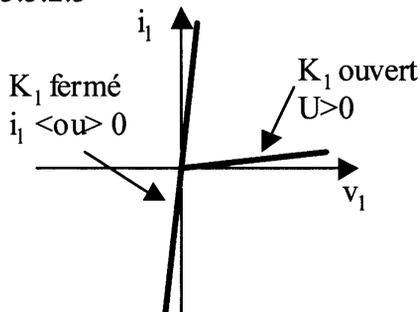
3.3.1 Le circuit RLC est globalement inductif.

3.3.2 Etude de l'état des interrupteurs.

3.3.2.1 $v_1=U>0$

3.3.2.2 i_1 peut être négatif ou positif.

3.3.2.3

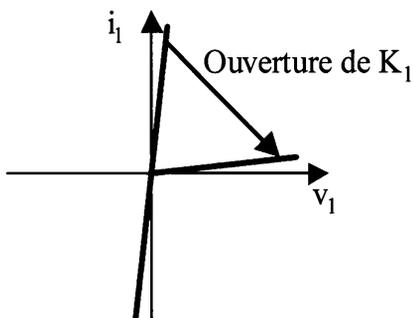


interrupteur bidirectionnel en courant, mono en tension.

3.3.3 Etude des transitions.

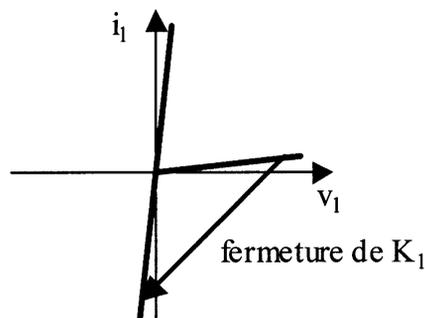
$i_1 > 0$ juste avant l'ouverture.

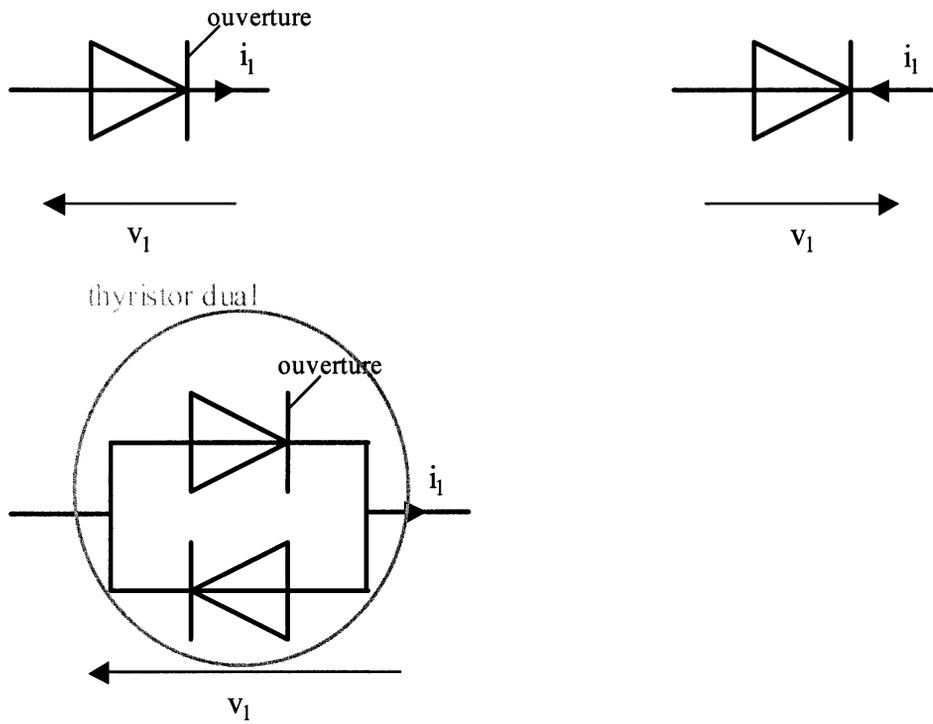
$v_1 > 0$ juste après l'ouverture.



$v_1 > 0$ juste avant la fermeture.

$i_1 < 0$ juste après la fermeture.





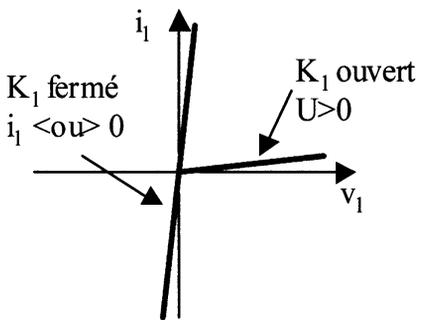
3.4 Le circuit RLC est globalement capacitif.

3.4.1 Etude de l'état des interrupteurs.

3.4.1.1 $v_1 = U > 0$

3.4.1.2 i_1 peut être négatif ou positif.

3.4.1.3



interrupteur bidirectionnel en courant, mono en tension.

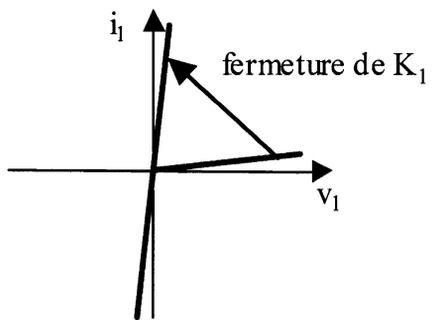
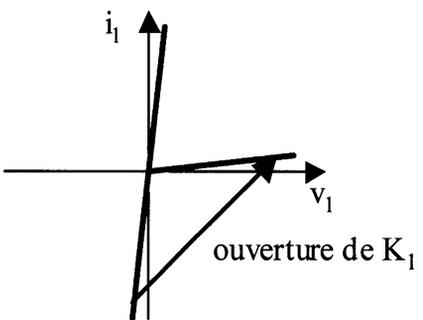
3.4.2 Etude des transitions.

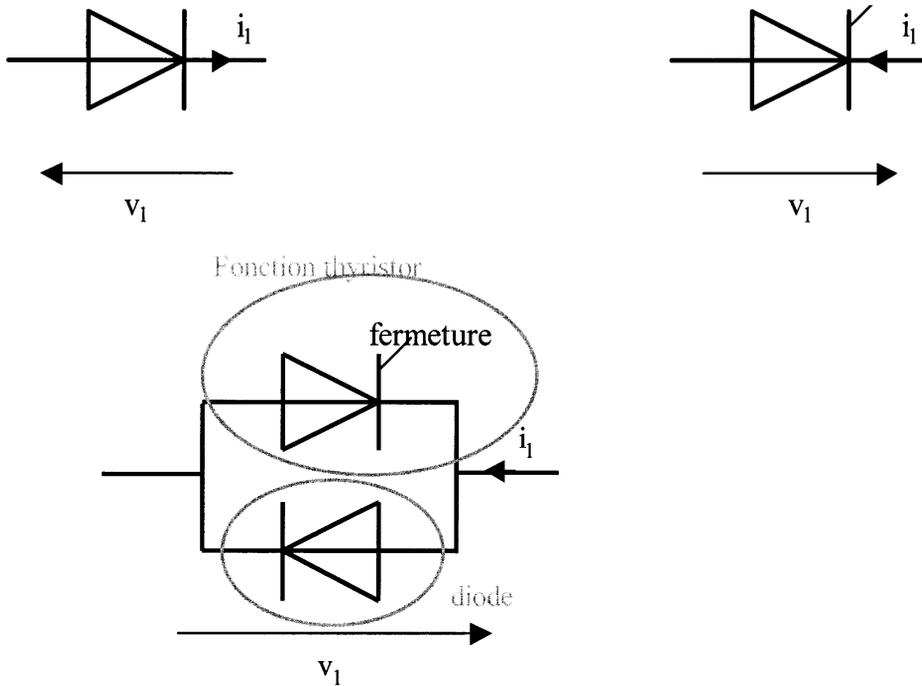
$i_1 < 0$ juste avant l'ouverture.

$v_1 > 0$ juste après l'ouverture.

$v_1 > 0$ juste avant la fermeture.

$i_1 > 0$ juste après la fermeture.





DEUXIÈME PROBLÈME (corrigé succinct)

I) Le fonctionnement quatre quadrants de la machine à courant continu

I.1.

L'équation électrique du dipôle M_1M_2 est :

$$u = e + Ri + (1+l') \frac{di}{dt}$$

en valeur moyenne $U = E + RI$ car $\langle (1+l') \frac{di}{dt} \rangle = (1+l') \langle \frac{di}{dt} \rangle = 0$, on néglige les pertes de la machine donc $U = E$ or $E = K\Omega$ donc $U = K\Omega$

$$\Omega = \frac{E}{K}$$

I.2.

On a l'expression de la puissance électromagnétique $C_{em}\Omega = EI$ or $C_{em} = C$ d'après les hypothèses $C\Omega = KI$

$$C = KI$$

I.3.

Oscillogrammes	I	C	U	Ω	Quadrants
a	> 0	> 0	> 0	> 0	I
b	> 0	> 0	< 0	< 0	IV
c	< 0	< 0	< 0	< 0	III
d	< 0	< 0	> 0	> 0	II

I.4.1.

L'équation de la dynamique appliquée au système en rotation s'écrit :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_{\text{moteur}} - C_{\text{résistant}} = C_{\text{moteur}} - f\Omega \text{ durant la phase A.2. la vitesse est constante,}$$

égale à Ω_N donc $0 = C_{A.2} - f\Omega_N$

$$C_{A.2} = f\Omega_N$$

$$n_N = 3000 \text{ tr.min}^{-1} \text{ d'où } \Omega_N = 100\pi \text{ rads}^{-1}$$

$$C_{A.2} = 20 \times 10^{-3} \times 100\pi = 6,28$$

$$C_{A.2} = 6,3 \text{ N.m}$$

Durant la phase A.4. on a $\Omega = 0$

$C_{A.4} = 0 \text{ N.m}$ car la cabine est verrouillée, il n'y a pas de traction sur le câble donc pas de moment sur la poulie ni de couple sur l'arbre moteur

Durant la phase B.2. on a $\Omega = -\Omega_N = C^{te}$ donc $0 = C_{B.2} - f(-\Omega_N) \Rightarrow C_{B.2} = -f\Omega_N$

$$C_{B.2} = -6,3 \text{ N.m}$$

 $C_{B.4} = 0$ pour les mêmes raisons que $C_{A.4} = 0$

$$C_{B.4} = 0 \text{ N.m}$$

I.4.2.

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_{\text{moteur}} - f\Omega = C_{A.1} - f\Omega$$

la solution générale de l'équation sans second membre est le régime libre $\Omega_L = \lambda e^{-\frac{f}{J}t}$ la solution particulière le régime forcé $\Omega_F = \frac{C_{A.1}}{f}$

$$\text{d'où } \Omega = \lambda e^{-\frac{f}{J}t} + \frac{C_{A.1}}{f}, \text{ pour } t = 0 \text{ on a } \Omega = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{C_{A.1}}{f}$$

$$\Omega = \frac{C_{A.1}}{f} \left[1 - e^{-\frac{f}{J}t} \right] \text{ pour } t = t_{A.1} = T \text{ on a } \Omega = \Omega_N \Rightarrow \Omega_N = \frac{C_{A.1}}{f} \left[1 - e^{-\frac{f}{J}T} \right]$$

$$T = \frac{J}{f} \text{Ln} \left[\frac{C_{A.1}}{C_{A.1} - f\Omega_N} \right]$$

$$T = \frac{0,5}{20 \times 10^{-3}} \text{Ln} \left[\frac{40}{40 - 20 \times 10^{-3} \times 100\pi} \right] = 4,27$$

$$t_{A.1} = T = 4,3 \text{ s}$$

I.4.3.

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_{\text{moteur}} - f\Omega = C_{A.3} - f\Omega$$

pour que le module de la décélération soit égale au module de l'accélération, il faut que la phase A.3 ait la même durée T que la phase A.1, puisque les vitesses extrémales sont identiques et que le couple reste constant.

$$\text{La solution particulière est } \Omega_F = \frac{C_{A.3}}{f} \Rightarrow \Omega = \lambda_2 e^{-\frac{f}{J}t} + \frac{C_{A.3}}{f}$$

Conditions initiales à $t = 0$ on a $\Omega = \Omega_N \Rightarrow \Omega_N = \lambda_2 + \frac{C_{A.3}}{f}$

$$\Omega = \left[\Omega_N - \frac{C_{A.3}}{f} \right] e^{\frac{f}{J}t} + \frac{C_{A.3}}{f}, \text{ pour } t = T \text{ on a } \Omega = 0$$

$$C_{A.3} = \frac{f\Omega_N e^{-\frac{f}{J}T}}{e^{-\frac{f}{J}T} - 1}$$

$$e^{-\frac{f}{J}T} = e^{-\frac{20 \times 10^{-3}}{0,5} \times 4,27} = 0,843$$

$$C_{A.3} = \frac{20 \times 10^{-3} \times 100\pi \times 0,843}{0,843 - 1} = -33,7$$

$$\mathbf{C_{A.3} = -33,7 \text{ N.m}}$$

I.4.4.

$$\Omega = \lambda_3 e^{\frac{f}{J}t} + \frac{C_{B.1}}{f}$$

La solution particulière est $\Omega_F = \frac{C_{B.1}}{f} \Rightarrow \Omega = \lambda_3 e^{\frac{f}{J}t} + \frac{C_{B.1}}{f}$

Conditions initiales pour $t = 0, \Omega = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -\frac{C_{B.1}}{f}$

$$\Omega = \frac{C_{B.1}}{f} \left[1 - e^{\frac{f}{J}t} \right], \text{ pour } t = T \text{ on a } \Omega = -\Omega_N$$

$$C_{B.1} = -\frac{f\Omega_N}{1 - e^{-\frac{f}{J}T}}$$

$$C_{B.1} = -\frac{20 \times 10^{-3} \times 100\pi}{1 - 0,843} = -40$$

$$\mathbf{C_{B.1} = -40 \text{ N.m}}$$

I.4.5.

$$J \frac{d\Omega}{dt} = C_{B.3} - f\Omega$$

la solution particulière est $\Omega_F = \frac{C_{B.3}}{f} \Rightarrow \Omega = \lambda_4 e^{\frac{f}{J}t} + \frac{C_{B.3}}{f}$

Conditions initiales pour $t = 0, \Omega = -\Omega_N \Rightarrow \lambda_4 = -\Omega_N - \frac{C_{B.3}}{f}$

$$\Omega = \left[-\Omega_N - \frac{C_{B.3}}{f} \right] e^{\frac{f}{J}t} + \frac{C_{B.3}}{f}, \text{ on } \Omega = 0 \text{ pour } t = T$$

$$C_{B.3} = \frac{f\Omega_N e^{-\frac{f}{J}T}}{1 - e^{-\frac{f}{J}T}}$$

$$C_{B.3} = \frac{20 \times 10^{-3} \times 100\pi \times 0,843}{1 - 0,843} = 33,7$$

$$C_{B,3} = 33,7 \text{ N.m}$$

Remarque : on peut apporter réponses en jouant sur la symétrie des différentes phases de déplacement qui implique que :

$$C_{B,1} = - C_{A,1} = - 40 \text{ N.m}$$

$$C_{B,2} = - C_{A,2} = - 6,3 \text{ N.m}$$

$$C_{B,3} = - C_{A,3} = + 37 \text{ N.m}$$

$$C_{B,4} = C_{A,4} = 0 \text{ N.m}$$

I.4.6.

DOCUMENT-REPONSE N° 1

I.4.7.

DOCUMENT-REPONSE N° 1

I.4.8.

DOCUMENT-REPONSE N° 1

Dans les phases d'accélération et à vitesse constante la machine fonctionne en « moteur » ($P > 0$), dans les phases de décélération, en « génératrice » ($P < 0$).

I.4.9.

Dans la phase A.1, le moment du couple est constant, égal à $C_{A,1} = 40 \text{ N.m}$, la loi de

$$\text{vitesse est } \Omega = \frac{C_{A,1}}{f} \left[1 - e^{-\frac{f}{J}t} \right]$$

La puissance instantanée a donc pour expression $p_{A,1} = \frac{C_{A,1}^2}{f} \left[1 - e^{-\frac{f}{J}t} \right]$

$$\Rightarrow W_{A,1} = \frac{C_{A,1}^2}{f} \int_0^T \left[1 - e^{-\frac{f}{J}t} \right] dt = \frac{C_{A,1}^2}{f} \left[t + \frac{J}{f} e^{-\frac{f}{J}t} \right]_0^T = \frac{C_{A,1}^2}{f} \left[T + \frac{J}{f} e^{-\frac{f}{J}T} - \frac{J}{f} \right]$$

$$\Rightarrow W_{A,1} = \frac{C_{A,1}^2}{f} \left[T - \frac{J}{f} \left(1 - e^{-\frac{f}{J}T} \right) \right]$$

Dans la phase A.2, le moment du couple est constant, égal à $C_{A,2} = 6,3 \text{ N.m}$, la vitesse constante est égale à $\Omega_N = 100\pi \Rightarrow P_{A,2} = C_{A,2}\Omega_N$

Cette phase a une durée $T' = 10 \text{ s} \Rightarrow$

$$W_{A,2} = C_{A,2}\Omega_N T'$$

L'énergie mise en jeu en mode « moteur » sur le déplacement total est :

$$W_{mt} = 2(W_{A,1} + W_{A,2})$$

Application numérique:

$$W_{A,1} = \frac{40^2}{20 \times 10^{-3}} \left[4,27 - \frac{0,5}{20 \times 10^{-3}} (1 - 0,843) \right] = 27580$$

$$W_{A,2} = 6,28 \times 100\pi \times 10 = 19729$$

$$W_{mt} = 2 \times (27580 + 19729) = 94618$$

$$W_{mt} = 94,6 \text{ kJ}$$

I.4.10

Durant la phase A.3, nous avons $C_{A.3} = -33,7 \text{ N.m}$ et la vitesse a pour expression

$$\Omega = \left[\Omega_N - \frac{C_{A.3}}{f} \right] e^{-\frac{f}{J}t} + \frac{C_{A.3}}{f} \text{ d'où l'expression de la puissance instantanée}$$

$$p_{A.3} = C_{A.3} \left[\left(\Omega_N - \frac{C_{A.3}}{f} \right) e^{-\frac{f}{J}t} + \frac{C_{A.3}}{f} \right] \text{ l'énergie est donc}$$

$$W_{A.3} = C_{A.3} \int_0^T \left[\left(\Omega_N - \frac{C_{A.3}}{f} \right) e^{-\frac{f}{J}t} + \frac{C_{A.3}}{f} \right] dt$$

$$W_{A.3} = C_{A.3} \left[-\frac{J}{f} \left(\Omega_N - \frac{C_{A.3}}{f} \right) e^{-\frac{f}{J}t} + \frac{C_{A.3}}{f} t \right]_0^T$$

$$W_{A.3} = C_{A.3} \left[\frac{C_{A.3}}{f} T - \frac{J}{f} \left(\Omega_N - \frac{C_{A.3}}{f} \right) e^{-\frac{f}{J}T} + \frac{J}{f} \left(\Omega_N - \frac{C_{A.3}}{f} \right) \right]$$

$$W_{A.3} = C_{A.3} \left[\frac{J}{f} \left(\Omega_N - \frac{C_{A.3}}{f} \right) \left(1 - e^{-\frac{f}{J}T} \right) + \frac{C_{A.3}}{f} T \right]$$

Application numérique :

$$W_{A.3} = -33,7 \left[\frac{0,5}{20 \times 10^{-3}} \left(100\pi - \frac{(-33,7)}{20 \times 10^{-3}} \right) (1 - 0,843) + \frac{(-33,7)}{20 \times 10^{-3}} \times 4,27 \right] = -21959$$

$$W_{gt} = 2W_{A.3} = 2 \times (-21959) = -43918$$

$$\mathbf{W_{gt} = -43,9 \text{ kJ}}$$

I.4.11.

En fonctionnement « moteur » l'énergie dépensée est $W_{mt} = 94,6 \text{ kJ}$, le pont étant considéré parfait, peut être récupérée $|W_{gt}| = 43,9 \text{ kJ}$ soit $\frac{43,9}{94,6} = ,0464$ soit un taux de récupération théorique de 46,4 %.

Taux d'énergie récupérable ou à dissiper 46,4 %

II) Le variateur

II.1.

DOCUMENT-REPONSE N° 2

II.2.

On a $\Omega = \frac{E}{K}$ et $E = \langle u(t) \rangle = U$, graphiquement $U = \frac{1}{T} [U_0 \alpha T_H - U_0 (T_H - \alpha T_H)]$

$$U = U_0(2\alpha - 1)$$

$$\mathbf{\Omega = \frac{U_0}{K} (2\alpha - 1)}$$

II.3.

L'équation électrique compte tenu des hypothèses s'écrit $u = E + L \frac{di}{dt}$ sur l'intervalle

$$(0, \alpha T_H) \text{ nous avons } u = U_0 \Rightarrow di = \frac{U_0 - E}{L} dt \text{ or } E = U = U_0(2\alpha - 1)$$

$$\Rightarrow di = \frac{U_0}{L} [1 - (2\alpha - 1)] dt = \frac{2U_0}{L} (1 - \alpha) dt \Rightarrow i(t) = \frac{2U_0}{L} [1 - \alpha] t + I_m$$

Pour $t = 0$ on a $i(t) = I_m$, pour $t = \alpha T$ on a $i = I_M$

$$I_M = \frac{2U_0}{L} [1 - \alpha] \alpha T_H + I_m \Rightarrow I_M - I_m = \Delta i = \frac{2U_0}{L} \alpha (1 - \alpha) T_H = \frac{2U_0}{f_H L} \alpha (1 - \alpha)$$

$$\Delta i = I_M - I_m = \frac{2U_0}{L} \alpha [1 - \alpha] T_H = \frac{2U_0}{f_H L} \alpha (1 - \alpha)$$

II.4.

L'ondulation dépend de α , elle est maximale pour $\frac{d(\Delta i)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow 1 - 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0,5$

$$\text{donc } (\Delta i)_{\max} = \frac{U_0 T_H}{2L} \Rightarrow L \geq \frac{U_0 T_H}{2(\Delta i)_{\max}} \quad L \geq \frac{630 \times 100 \times 10^{-6}}{2} = 31,5 \cdot 10^{-3}$$

$$L = 1 + l' \Rightarrow l' \geq L - 1 = 30,5 - 10 = 20,5$$

$$l' = 20,5 \text{ mH}$$

III) Signaux de commande du variateur

III.1.1.

La réaction est positive d'où un fonctionnement non linéaire $V_1 = \pm V_{\text{sat}}$

III.1.2.

$$\text{En appliquant le théorème de Millman } V_{\text{AOP1}}^+ = \frac{\frac{V_2}{R_1} + \frac{V_1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{V_1 R_1 + V_2 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_{\text{AOP1}}^+ = \frac{V_1 R_1 + V_2 R_2}{R_1 + R_2}$$

III.1.3.

On pose $\varepsilon = V_{\text{AOP1}}^+ - V_{\text{AOP1}}^-$ pour que $V_1 = +V_{\text{sat}}$, il faut $\varepsilon > 0$ or $V_{\text{AOP1}}^- = 0$

$$\Rightarrow V_{\text{AOP1}}^+ > 0 \Rightarrow V_1 R_1 + V_2 R_2 > 0$$

$$V_2 > -\frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$$

III.1.4.

Pour avoir $V_1 = -V_{sat}$ il faut $V_{AOP1}^+ < 0 \Rightarrow V_1 R_1 + V_2 R_2 < 0$

$$V_2 < \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$$

III.1.5.

DOCUMENT-REPONSE N°3

III.2.1.

Montage intégrateur

III.2.2.

L'amplificateur AOP2 est contre-réactionné, il fonctionne en régime linéaire

$$\Rightarrow V_{AOP2}^- = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\frac{V_1(p)}{R_3} + pC V_2(p)}{\frac{1}{R_3} + pC} \Rightarrow V_2(p) = -\frac{1}{R_3 C} \frac{V_1(p)}{p}$$

$$v_2(t) = -\frac{V_1}{R_3 C} t + V_2(0)$$

III.2.3.

DOCUMENT-REPONSE N°3

III.2.4.

Du fait de la symétrie du cycle le premier basculement se produit à $\frac{T_H}{4}$, on alors

$$v_2(t) = \frac{R_1}{R_2} V_{sat} \text{ d'où } \frac{R_1}{R_2} V_{sat} = \frac{V_{sat}}{R_3 C} \frac{T_H}{4} \Rightarrow T_H = \frac{4R_1 R_3 C}{R_2}$$

La valeur maximale est $\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$

$$\frac{4R_1 R_3 C}{R_2} = 100 \times 10^{-6} \text{ et } \frac{R_1}{R_2} V_{sat} = 6 \text{ avec } V_{sat} = 17 \text{ V}$$

$$R_2 = \frac{R_1 V_{sat}}{6} = \frac{10^4 \times 17}{6} = 28333$$

$$\mathbf{R_2 = 28,3 \text{ k}\Omega}$$

$$R_3 = \frac{R_2}{R_1} \times \frac{1}{4C} \times 10^{-4} \Rightarrow R_3 = \frac{17}{6} \times \frac{1}{4 \times 10^{-8}} \times 10^{-4} = 7083$$

$$\mathbf{R_3 = 7,1 \text{ k}\Omega}$$

III.3.1.

Deux hypothèses possibles :

- a) la diode D est bloquée ;
- b) la diode est passante.

Supposons la diode D bloquée :

$$V_D = \frac{R_6 + R_7}{R_6 + R_7 + R_8} (v_2(t) + 18) \text{ or } -6 \text{ V} < v_2(t) < +6 \text{ V} \Rightarrow 4,9 \text{ V} < V_D < 9,9 \text{ V, donc}$$

V_D est toujours supérieure à la tension de seuil, la diode ne peut être bloquée \Rightarrow elle est donc passante et l'on a $V_D = 0,7 \text{ V}$ quelque soit la valeur de $v_2(t)$.

$$V_D = 0,7 \text{ V quelle que soit la valeur de } v_2(t)$$

III.3.2.

AOP3 :

Potentiel de l'entrée inverseuse : $V_{AOP3}^- = V_2$

$$V_{AOP3}^- = V_2$$

Potentiel de l'entrée non inverseuse : $V_{AOP3}^+ = V_3 = \frac{R_5}{R_4 + R_5} V_{COM}$

$$V_{AOP3}^+ = V_3 = \frac{R_5}{R_4 + R_5} V_{COM}$$

AOP4

Potentiel de l'entrée inverseuse : $V_{AOP4}^- = V_3 = \frac{R_5}{R_4 + R_5} V_{COM}$

$$V_{AOP4}^- = V_3 = \frac{R_5}{R_4 + R_5} V_{COM}$$

on a $V_2 - \frac{R_6}{R_6 + R_7} \times 0,7 - V_{AOP4}^+ = 0$

Potentiel de l'entrée non inverseuse : $V_{AOP4}^+ = V_4 = V_2 - \frac{R_6}{R_6 + R_7} \times 0,7$

$$V_{AOP4}^+ = V_4 = V_2 - \frac{R_6}{R_6 + R_7} \times 0,7$$

AOP3 est un comparateur la sortie est à :

$+V_{sat}$ si $V_3 - V_2 > 0 \Rightarrow V_2 - V_3 < 0$

$-V_{sat}$ si $V_3 - V_2 < 0 \Rightarrow V_2 - V_3 > 0$

de même la sortie de AOP4 est à :

$+V_{sat}$ si $V_4 - V_3 > 0 \Rightarrow V_2 - \frac{R_6}{R_6 + R_7} \times 0,7 - V_3 > 0$

$-V_{sat}$ si $V_4 - V_3 < 0 \Rightarrow V_2 - \frac{R_6}{R_6 + R_7} \times 0,7 - V_3 < 0$

Application numérique :

$$V_4 = V_2 - \frac{2}{2+5} \times 0,7 \Rightarrow v_4(t) = v_2(t) - 0,2$$

AOP3 est un comparateur la sortie est à :

$+V_{sat}$ si $3 - V_2 > 0 \Rightarrow V_2 - 3 < 0 \Rightarrow v_2(t) < 3 \text{ V}$

$-V_{sat}$ si $3 - V_2 < 0 \Rightarrow V_2 - 3 > 0 \Rightarrow v_2(t) > 3 \text{ V}$

de même la sortie de AOP4 est à :

$$+V_{\text{sat}} \text{ si } V_4 - 3 > 0 \Rightarrow V_2 - \frac{2}{2+5} \times 0,7 - 3 > 0 \Rightarrow v_2(t) > 3,2 \text{ V}$$

$$-V_{\text{sat}} \text{ si } V_4 - 3 < 0 \Rightarrow V_2 - \frac{2}{2+5} \times 0,7 - 3 < 0 \Rightarrow v_2(t) < 3,2 \text{ V}$$

III.3.3.

DOCUMENT-REPONSE N°4

III.3.4.

Le temps mort τ correspond au temps que met la tension $v_2(t)$ pour augmenter de

0,2 V, on a $v_2(t) = -\frac{V_1}{R_3 C} t + V_2(0)$ avec $V_1 = -V_{\text{sat}} = -17 \text{ V}$; $V_2(0) = 0 \text{ V}$;

$$R_3 = 8820 \Omega \text{ et } C = 10 \text{ nF d'où } \tau = \frac{0,2 \times 8820 \times 10^{-8}}{17} = 103 \cdot 10^{-8}$$

$$\tau = 1 \mu\text{s}$$

III.3.5.

Les droites représentatives de $v_2(t)$ et $v_4(t)$, sont parallèles $\Rightarrow \frac{V_{2\text{max}}}{T_H} = \frac{V_{4\text{max}} - V_3}{\frac{t_{\text{conduction}}}{2}}$

$$\Rightarrow V_3 = V_{4\text{max}} - \frac{2V_{2\text{max}} t_{\text{conduction}}}{T_H}$$

or $V_{4\text{max}} = V_{2\text{max}} - 0,2$

$$V_3 = (V_{2\text{max}} - 0,2) - \frac{2V_{2\text{max}} t_{\text{conduction}}}{T_H}$$

on V_3 maximal pour le temps de conduction minimal donc

$$V_{3\text{max}} = (V_{2\text{max}} - 0,2) - \frac{2V_{2\text{max}} t_{\text{conduction-minimal}}}{T_H}$$

$$V_{3\text{max}} = (6 - 0,2) - \frac{2 \times 6 \times 5 \times 10^{-6}}{100 \times 10^{-6}} = 6,4$$

$$\mathbf{V_{3\text{max}} = 6,4 \text{ V}}$$

$$V_3 = \frac{R_5}{R_4 + R_5} V_{\text{COM}} \text{ et } V_3 < V_{3\text{max}} \Rightarrow R_4 > R_5 \left[\frac{V_{\text{COM}} - \hat{V}_3}{\hat{V}_3} \right]$$

$$R_4 > 10 \times 10^3 \left[\frac{18 - 6,4}{6,4} \right] = 18,1 \cdot 10^3$$

$$\mathbf{R_4 > 18,1 \text{ k}\Omega}$$

IV) L'asservissement en position

IV.1.

Les équations électromécaniques, l'équation de la dynamique et l'équation électrique de l'induit s'écrivent en transformée de Laplace

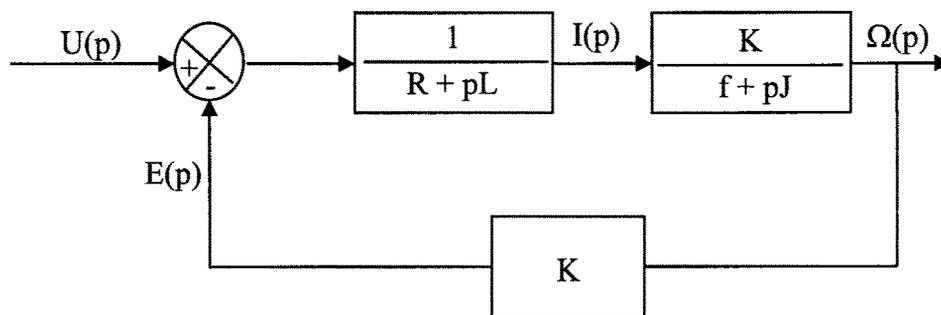
$$E(p) = K \Omega(p)$$

$$C(p) = K I(p) \Rightarrow I(p) = \frac{C(p)}{K}$$

$$Jp\Omega(p) = C(p) - f\Omega(p) \Rightarrow C(p) = (f + pJ)\Omega(p)$$

$$U(p) = E(p) + (R + pL)I(p)$$

IV.1.2.



$$IV.1.3. U(p) = K\Omega(p) + (R + pL)\frac{(f + pJ)\Omega(p)}{K}$$

$$\Rightarrow U(p) = \frac{1}{K} [K^2 + (R + pL)(f + pJ)]\Omega(p)$$

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{K^2 + (R + pL)(f + pJ)}$$

$$\underline{H}(p) = \frac{\underline{\Omega}(j\omega)}{\underline{U}(j\omega)} = \frac{K}{K^2 + (R + j\omega L)(f + j\omega J)}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{\Omega}(j\omega)}{\underline{U}(j\omega)} = \frac{K}{K^2 + Rf + (RJ + fL)j\omega + LJ(j\omega)^2}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{\Omega}(j\omega)}{\underline{U}(j\omega)} = \frac{K}{1 + \left(\frac{RJ + fL}{K^2 + Rf}\right)j\omega + \left(\frac{LJ}{K^2 + Rf}\right)(j\omega)^2}$$

IV.1.4.

$$A = \frac{K}{K^2 + Rf}$$

$$a_1 = \frac{RJ + fL}{K^2 + Rf}$$

$$a_2 = \frac{LJ}{K^2 + Rf}$$

IV.1.5.

$$A = \frac{2}{4 + 20 \times 10^{-3}} = 0,495$$

$$A = 0,495 \text{ V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{rad}$$

$$a_1 = \frac{1 \times 0,5 + 20 \times 10^{-3} \times 30 \times 10^{-3}}{4 + 20 \times 10^{-3}} = 0,125$$

$$a_1 = 0,125 \text{ rad}^{-1} \cdot \text{s}$$

$$a_2 = \frac{30 \times 10^{-3} \times 0,5}{4 + 20 \times 10^{-3}} = 0,00373$$

$$a_2 = 3,73 \cdot 10^{-3} \text{ rad}^{-2} \cdot \text{s}^2$$

IV.2.1.

La fonction réalisée est une intégration puisque la position θ est l'intégrale de la vitesse Ω , la fonction de transfert est : $\frac{1}{p}$.

IV.2.2.

La fonction en boucle ouverte est le produit des fonctions de transfert de la chaîne directe

$$Z(p) = \frac{\Theta(p)}{V_0(p)} = K_0 H(p) \frac{1}{p}$$

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{\underline{\theta}(j\omega)}{\underline{V}_0(j\omega)} = \frac{1}{j\omega} \frac{\frac{K_0 K}{K^2 + Rf}}{1 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2}$$

IV.2.3.

$$A_0 = \frac{K_0 K}{K^2 + Rf}$$

IV.2.4.

$$A_0 = 0,495 K_0$$

IV.3.1.

Les conditions de stabilité sont $\varphi_1(f_0) = \pm \pi$ et $A_0 Z_1(f_0) = 1$

La condition sur la phase donne $f_0 = 11,4$ Hz soit une amplitude pour Z_1 de $5 \cdot 10^{-3}$, le

système est donc juste stable si $Z(f_0) = A_0 Z_1(f_0) < 1 \Rightarrow A_0 < \frac{1}{Z_1(f_0)} \Rightarrow$

$$A_0 < \frac{1}{5 \times 10^{-3}} = 200$$

$$A_0 < 200 \text{ V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{rad}^2$$

IV.3.2.

$$K_0 < \frac{200}{0,495}$$

$$K_0 < 404$$

IV.3.3.

Pour obtenir une marge de phase de 65° la valeur limite doit être $-(180 - 65) = -115^\circ$.
Pour cette phase le tableau donne $f_1 = 1,85$ Hz, le système devient donc instable pour

$$A_1 = \frac{1}{Z_1(f_1)} = \frac{1}{0,8} = 12,5 \Rightarrow K_1 = \frac{12,5}{0,495} = 25,25$$

$$K_1 < 25$$

IV.4.1.

Le signal d'entrée est $U(p)$, le signal de sortie $I(p)$

$$\Rightarrow I(p) = H_1(p) U(p) \Rightarrow H_1(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$$

nous avons les relations instantanées

$$u(t) = E + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow U(p) = E(p) + (R + pL)I(p)$$

$$E = K\Omega(t) \Rightarrow E(p) = K\Omega(p)$$

$$C(t) = Ki(t) \Rightarrow C(p) = KI(p)$$

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} = C(t) - f\Omega(t) \Rightarrow C(p) = (f + pJ)\Omega(p)$$

$$E(p) = K\Omega(p) = K \frac{C(p)}{f + pJ} = \frac{K^2 I(p)}{f + pJ}$$

$$U(p) = \frac{K^2 I(p)}{f + pJ} + (R + pL)I(p) = \frac{K^2 + (R + pL)(f + pJ)}{f + pJ} I(p)$$

$$H_1(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{f + pJ}{K^2 + Rf + (RJ + fL)p + LJp^2}$$

IV.4.2.

Signal d'entrée $I(p)$, signal de sortie $\Omega(p) \Rightarrow \Omega(p) = H_2(p)I(p)$

$$H_2(p) = \frac{\Omega(p)}{I(p)} = \frac{K}{f + pJ}$$

IV.4.3.

$$H_1(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{f + pJ}{K^2 + Rf + (RJ + fL)p + LJp^2} \Rightarrow$$

$$H_1(p) = \frac{f + pJ}{(K^2 + Rf) \left(1 + \left(\frac{RJ + fL}{K^2 + Rf} \right) p + \left(\frac{LJ}{K^2 + Rf} \right) p^2 \right)}$$

d'après la question IV.1.4. $K^2 + Rf = \frac{K}{A}$, $\frac{RJ + fL}{K^2 + Rf} = a_1$ et $\frac{LJ}{K^2 + Rf} = a_2$

$$H_1(p) = \frac{A}{K} \times \frac{f + pJ}{1 + a_1 p + a_2 p^2}$$

IV.4.4. Posons : $a_1 = 2a_1'$

$$p_1 = \frac{-a_1' - \sqrt{(a_1')^2 - a_2}}{a_2} = \frac{-a_1' - \sqrt{(a_1')^2 \left(1 - \frac{a_2}{(a_1')^2} \right)}}{a_2} = \frac{-a_1' - a_1' \sqrt{1 - \frac{a_2}{(a_1')^2}}}{a_2}$$

$$p_2 = \frac{-a_1' + \sqrt{(a_1')^2 - a_2}}{a_2} = \frac{-a_1' + \sqrt{(a_1')^2 \left(1 - \frac{a_2}{(a_1')^2} \right)}}{a_2} = \frac{-a_1' + a_1' \sqrt{1 - \frac{a_2}{(a_1')^2}}}{a_2}$$

d'après l'hypothèse $(a_1')^2 \gg a_2 \Rightarrow 1 \gg \frac{a_2}{(a_1')^2} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{a_2}{(a_1')^2}} \approx 1 - \frac{a_2}{2(a_1')^2} \Rightarrow$

$$p_1 = \frac{-a_1' - a_1' \left(1 - \frac{a_2}{2(a_1')^2} \right)}{a_2} = \frac{-2a_1' + \frac{a_2}{2a_1'}}{a_2} = \frac{-a_1' + \frac{a_2}{a_1}}{a_2}$$

$$p_2 = \frac{-a_1' + a_1' \left(1 - \frac{a_2}{2(a_1')^2} \right)}{a_2} = \frac{-\frac{a_2}{2a_1'}}{a_2} = \frac{-\frac{a_2}{a_1}}{a_2} = \frac{-1}{a_1}$$

$$p_1 = \frac{-a_1' + \frac{a_2}{a_1}}{a_2}$$

$$p_2 = -\frac{1}{a_1}$$

IV.4.5.

$$p_1 = \frac{-125 \times 10^{-3} + \frac{3,73 \times 10^{-3}}{125 \times 10^{-3}}}{3,73 \times 10^{-3}} = \frac{-125 \times 10^{-3} + 29,84 \times 10^{-3}}{3,73 \times 10^{-3}} = -\frac{95,16}{3,73} = -25,51$$

$$p_2 = -\frac{1}{125 \times 10^{-3}} = -8$$

$$p_1 = -25,51$$

$$p_2 = -8$$

le pôle p_2 est dominant par rapport au pôle p_1 on peut donc écrire la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{A}{K} \times \frac{f+pJ}{1+a_1p+a_2p^2} \approx \frac{A}{K} \times \frac{f+pJ}{(p+p_2)} = \frac{A}{K} \times \frac{f+pJ}{p+\frac{1}{a_1}} = \frac{Aa_1}{K} \times \frac{f+pJ}{1+pa_1}$

$$H'_1(p) = \frac{Aa_1}{K} \times \frac{f+pJ}{1+pa_1} = \frac{A'}{K} \times \frac{f+pJ}{1+p\tau}$$

IV.4.6.

$$A' = Aa_1 \text{ et } \tau = a_1$$

$$A' = Aa_1 \\ \tau = a_1$$

IV.4.7.

$$X(p) = \frac{I(p)}{V_0(p)} = \frac{H'_1}{1+K_{Ri}H'_1} = \frac{\frac{A'}{K} \times \frac{f+pJ}{1+p\tau}}{1+K_{Ri} \frac{A'}{K} \times \frac{f+pJ}{1+p\tau}} = \frac{\frac{A'}{K} \times \frac{f+pJ}{1+p\tau}}{K(1+p\tau)+K_{Ri}A'(f+pJ)}$$

$$X(p) = \frac{I(p)}{V_0(p)} = \frac{A'(f+pJ)}{(K+K_{Ri}A'f)+p(K\tau+K_{Ri}A'J)}$$

$$X(p) = \frac{I(p)}{V_0(p)} = \frac{A'}{(K+K_{Ri}A'f)} \times \frac{f+pJ}{1+p \left(\frac{K\tau+K_{Ri}A'J}{K+K_{Ri}A'f} \right)} = A'' \frac{f+pJ}{1+p\tau'}$$

$$X(p) = \frac{I(p)}{V_0(p)} = A'' \frac{f+pJ}{1+p\tau'}$$

$$A'' = \frac{A'}{(K+K_{Ri}A'f)} \\ \text{avec } \tau' = \frac{K\tau+K_{Ri}A'J}{K+K_{Ri}A'f}$$

IV.4.8.

Le système étant du premier ordre il ne peut y avoir ni dépassement, ni oscillations.

L'entrée est un échelon de tension d'amplitude $V_0 \Rightarrow V_0(p) = \frac{V_0}{p}$

$$I_0(p) = X(p) \frac{V_0}{p} \Rightarrow I_0(p) = A'' \frac{f+pJ}{1+p\tau'} \frac{V_0}{p} \Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = I_0 = \lim_{p \rightarrow 0} pI(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pA'' \frac{f+pJ}{1+p\tau'} \frac{V_0}{p} = A''fV_0$$

$$I_0 \leq A''fV_0$$

IV.4.9.

Le correcteur est de type Proportionnel, Intégrateur, Dérivateur filtré.

Proportionnel, Intégrateur, Dérivateur filtré.

IV.4.10.

Après introduction du correcteur de fonction de transfert C(p), on a

$$X'(p) = \frac{C(p)H_1'(p)}{1 + K_{Ri}C(p)H_1'(p)} \Rightarrow Y(p) = X'(p)H_2(p)$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{C(p)H_1'(p)}{1 + K_{Ri}C(p)H_1'(p)} H_2(p) = \frac{K_0 \frac{(1+p\alpha) A' (f+pJ)}{p K (1+p\tau)} \frac{K}{(1+p\alpha) A' (f+pJ) (f+pJ)}}{1 + K_{Ri}K_0 \frac{(1+p\alpha) A' (f+pJ)}{p K (1+p\tau)} \frac{K}{(1+p\alpha) A' (f+pJ) (f+pJ)}}$$

$$Y(p) = \frac{K_0 \frac{(1+p\alpha) A' (f+pJ)}{p K (1+p\tau)} \frac{K}{(1+p\alpha) A' (f+pJ) (f+pJ)}}{1 + K_{Ri}K_0 \frac{(1+p\alpha) A' (f+pJ)}{p K (1+p\tau)} \frac{K}{(1+p\alpha) A' (f+pJ) (f+pJ)}}$$

IV.4.11.

On règle le correcteur de façon à avoir $\alpha = \tau$

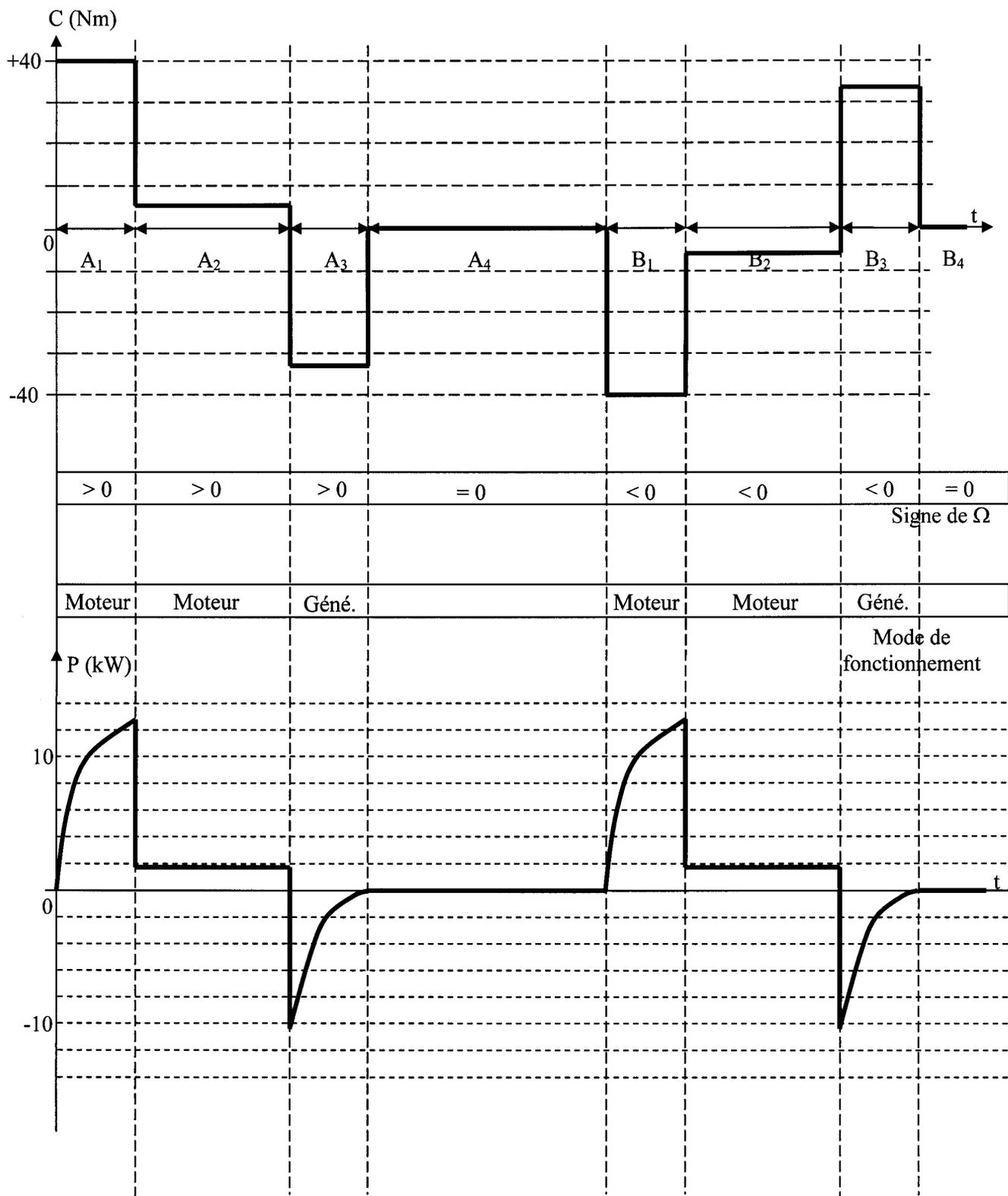
$$\Rightarrow Y'(p) = \frac{K_0 \frac{(1+p\tau) A' (f+pJ)}{p K (1+p\tau)} \frac{K}{(1+p\tau) A' (f+pJ) (f+pJ)}}{1 + K_{Ri}K_0 \frac{(1+p\tau) A' (f+pJ)}{p K (1+p\tau)} \frac{K}{(1+p\tau) A' (f+pJ) (f+pJ)}}$$

$$\Rightarrow Y'(p) = \frac{K_0 \frac{1}{p} \frac{A'}{K} (f+pJ) \frac{K}{f+pJ}}{1 + K_{Ri}K_0 \frac{1}{p} \frac{A'}{K} (f+pJ) \frac{K}{f+pJ}} = \frac{KK_0A'}{K_{Ri}K_0A'f + (K + K_{Ri}K_0A'J)p}$$

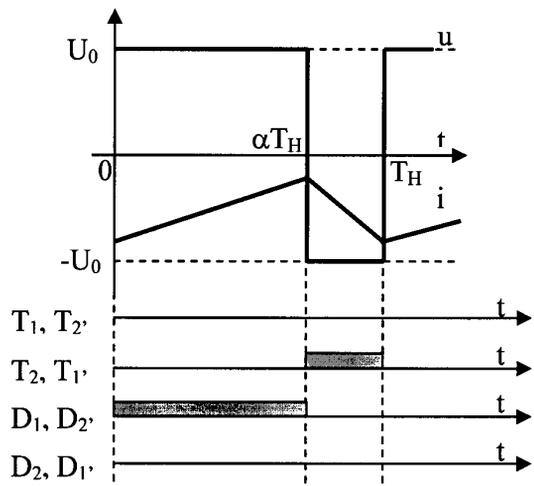
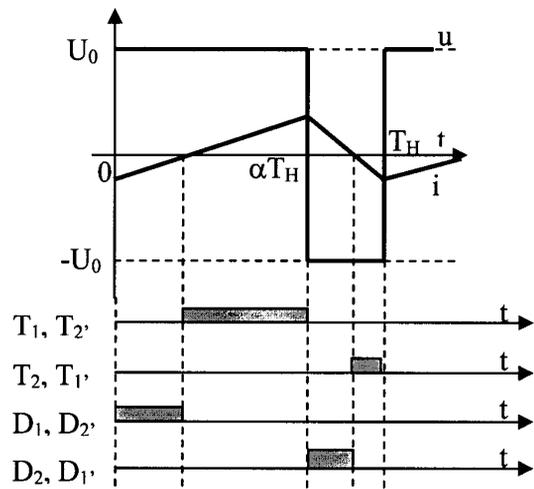
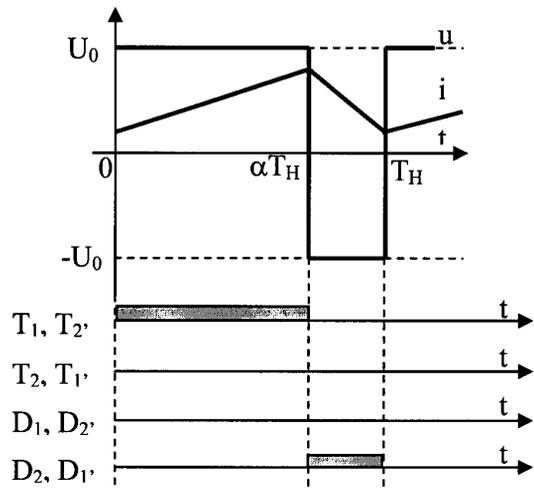
$$Y'(p) = \frac{\frac{K}{K_{Ri}f}}{1 + \left(\frac{K + K_{Ri}K_0A'J}{K_{Ri}K_0A'f} \right) p} \Rightarrow \tau' = \frac{K + K_{Ri}K_0A'J}{K_{Ri}K_0A'f}$$

$$\tau' = \frac{K + K_{Ri}K_0A'J}{K_{Ri}K_0A'f}$$

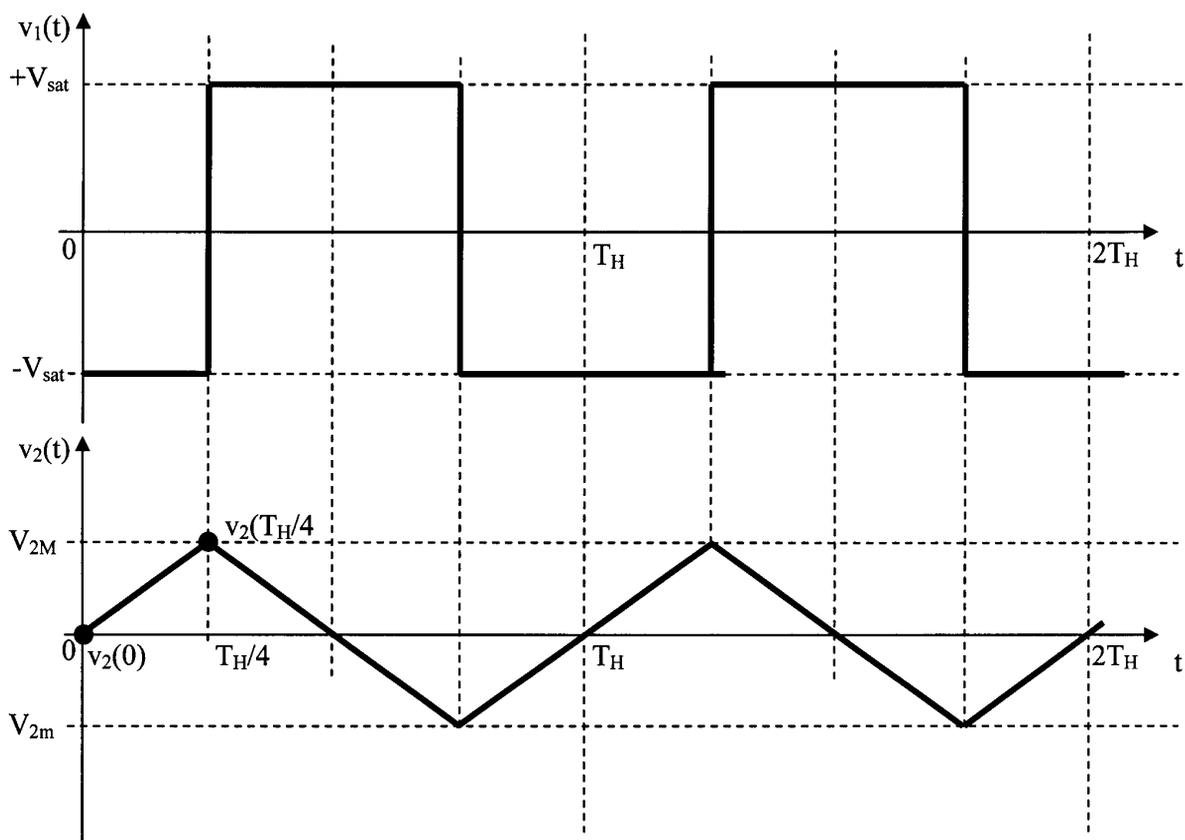
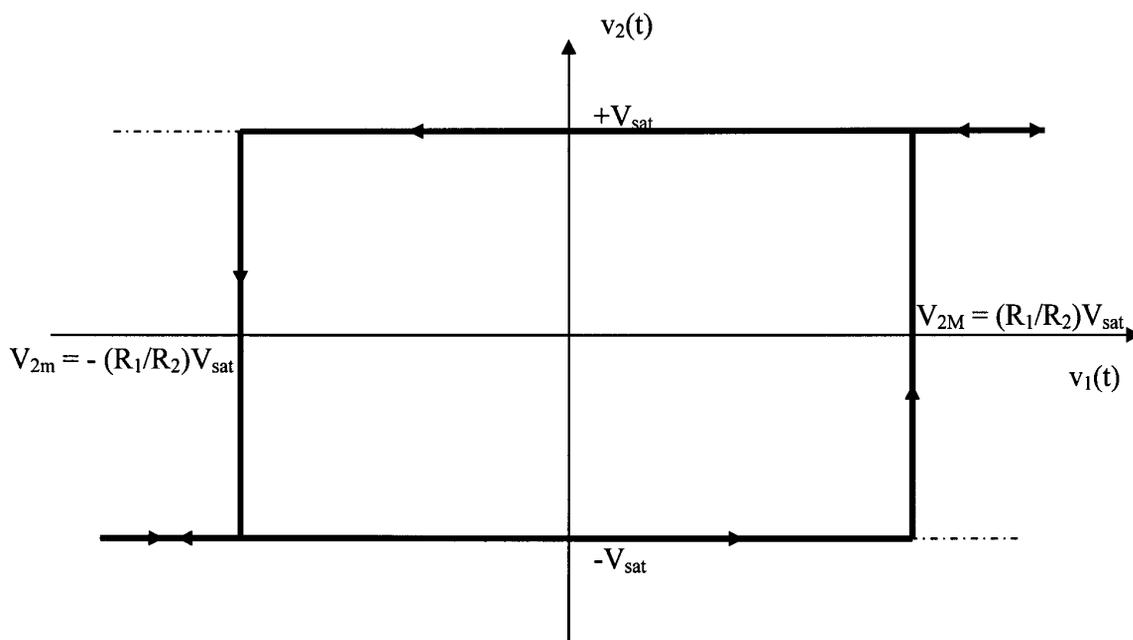
DOCUMENT-REPONSE N° 1



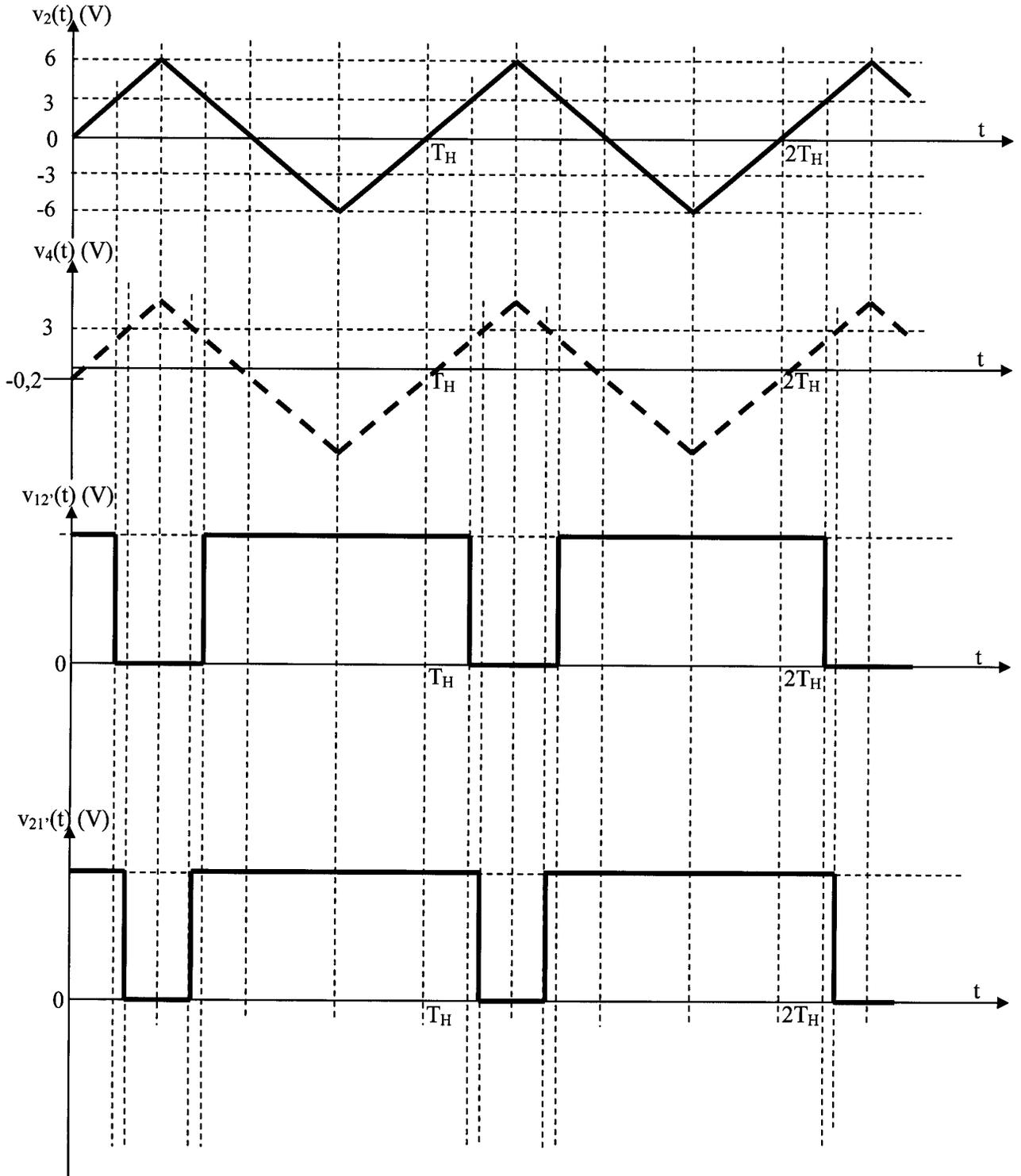
DOCUMENT-REPONSE N°2



DOCUMENT-REPONSE N°3



DOCUMENT-REPONSE N°4



Capès de sciences physiques

Concours interne

SECTION PHYSIQUE ET CHIMIE
Épreuve de physique et chimie ♦ Session : 2004

PHYSIQUE

A-1 Onde mécanique : propagation d'une perturbation (surpression acoustique, torsion, pincement) dans un milieu matériel **sans transport macroscopique de matière**. La vitesse de déplacement de l'ébranlement ou célérité de l'onde est très supérieure à la vitesse moyenne de déplacement de la matière. Il y a **transport d'énergie** sans mouvement macroscopique.
Les OEM se propagent dans le vide sans dispersion.

A-2 L'onde est progressive si la perturbation à une date t_1 , se retrouve identique à elle-même à une date t_2 correspondant à la propagation de l'onde dans une direction et à une vitesse donnée.

$$\text{OPP selon les } x > 0 : y_+(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

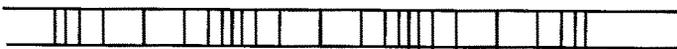
$$\text{OPP selon les } x < 0 : y_-(x, t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Où c est appelé célérité de l'onde.

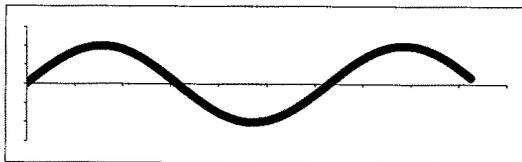
A-3 **Onde longitudinale** : la perturbation associée au passage de l'onde s'effectue dans la direction de propagation. C'est le cas des ondes sonores, des ondes sismiques de type P.

Onde transversale : la perturbation associée au passage de l'onde s'effectue orthogonalement à la direction de propagation. C'est le cas de l'ébranlement le long d'une corde tendue, des ondes sismiques S

onde longitudinale :



onde transversale :



A-4 La longueur d'onde ou période spatiale est telle que pour l'ébranlement, on puisse écrire:

$$f(t, x + \lambda) = f(t, x) \quad (1)$$

La période temporelle vérifie naturellement : $f(t + T, x) = f(t, x) \quad (1)$

A-5 On a $\lambda = cT$ où c est la célérité de l'onde.

A-6 Dans un milieu dispersif, la vitesse de groupe de l'onde dépend de la fréquence. C'est le cas des OEM dans

le verre (Loi de Cauchy : $n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$), la houle $v(\lambda) = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$

Un profil ondulatoire riche en fréquence, se déforme dans un milieu dispersif. Dans un milieu non absorbant, la vitesse de groupe s'identifie à la vitesse de propagation de l'énergie.

- A-7 Dans un milieu matériel où on impose des CL de vibration, des ondes stationnaires sont susceptibles de s'installer. Elles vérifient : $y(x, t) = \varphi(t)g(x)$ (absence de propagation). Les conditions aux limites imposent généralement une quantification entière, c'est-à-dire qu'un nombre dénombrable de fonctions vérifient l'équation d'onde et les conditions aux limites : $y_n(x, t)$. Ces fonctions sont appelées modes propres de vibration. Ces modes propres ne vérifient pas forcément les conditions initiales de vibrations mais constituent une base propre complète des solutions i.e. que la solution s'écrit sous la forme :

$$y(x, t) = \sum_n y_n(t, x)$$

Un mode propre est caractérisé par un entier n non nul qui quantifie la fréquence et la longueur d'onde.

Pour la corde de Melde, $L = n \frac{\lambda}{2}$, $\omega_n = n \frac{\pi c}{L}$ où, $n = 1$ correspond au fondamental de sorte que

$$\omega_n = n\omega_1 = n\omega_{\text{Fondamental}} \quad (\text{Pour un tuyau sonore ouvert, remplacer } \frac{\lambda}{2} \text{ par } \frac{\lambda}{4})$$

Dans un instrument de musique, le timbre correspond à la superposition du fondamental (hauteur du son) et des différents harmoniques.

- B-1-1 Onde sonore : onde de pression (compression dilatation d'une tranche de fluide mésoscopique). Il s'agit d'une onde longitudinale où une tranche comprimée tend à se dilater et à comprimer la tranche en contact ce qui entraîne une propagation de la surpression acoustique de proche en proche.
- B-1-2 L'onde sonore a besoin d'un milieu matériel pour se propager à la différence d'une onde EM. Expérience du réveil sous cloche où on fait le vide.
- B-1-3 L'onde sonore est une onde longitudinale.(1) L'ébranlement ou front de pression se propage dans la direction de l'onde.
- B-1-4 La bande passante de l'oreille humaine est située généralement entre 20Hz et 20kHz.
- B-1-5 On a les infrasons en deçà et les ultrasons au-delà de la bande passante.
- B-1-6 Pour l'air : $C_s = 330 \text{ m/s} \approx 1200 \text{ km/h}$ à 0°C
- Pour les liquides comme l'eau : $C_s = 1500 \text{ m/s}$
- Pour les solides (Crown) : $C_s = 5000 \text{ m/s}$
- La présence d'un ordre à courte distance et de phonons très énergétiques explique la vitesse plus élevée dans les solides. De la même façon, le diamant est un bon conducteur thermique et sonore et un piètre conducteur électrique.
- B-1-7-1 A 20°C, on trouve : $V=462 \text{ m/s}$, du même ordre de grandeur que la vitesse du son dans l'air sec.
- B-1-7-2 Gaz parfait (Idéal gaz ou gaz idéalisé) du grec $\kappa\alpha\omicron\zeta$, ensemble désordonné de particules classiques (longueur d'onde de de Broglie \ll lpm) subissant des chocs nombreux (en nombre pour assurer l'homogénéité et l'isotropie du système) et de courte durée (durée du choc \ll durée moyenne entre deux chocs). Hormis les chocs, il n'y a pas d'interaction entre les molécules de gaz.
- Limites du modèle : - Limite quantique, le gaz d'électrons libres est ainsi un gaz de Fermi.
 - Gaz sous faible pression mais suffisamment grande pour adopter un modèle statistique de fluide continu.
 - Les interactions de VDW ou dipôles -dipôles et l'effet de taille (covolume) sont les corrections majeures du gaz parfait (développement au premier ordre du Viriel).

B-1-7-3 $C_{S,air} = 343 \text{ m/s}$

$$C_{S,dihydrogène} = 1306 \text{ m/s}$$

La vitesse d'agitation thermique des molécules de dihydrogène est \gg à celles de l'air. La vitesse du son étant du même ordre de grandeur est par conséquent dans le rapport des vitesses i.e. 3,8.

B-1-7-4

La vitesse du son est en fait liée à la compressibilité adiabatique du gaz : $C_{S,air} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s}$.

Si la température augmente, le gaz moins dense est d'avantage compressible. Comme il s'agit d'une onde de dilatation-compression, la vitesse du son augmente.

B-1-8-1

On a un simple écho puisque l'émetteur s'arrête après réception de l'écho. Si c est la célérité de l'onde, la distance parcourue pour un aller retour est de $2h$ soit une durée $\Delta t = \frac{2h}{C} = nT = \frac{n}{\nu}$ d'où :

$$C = \frac{2h\nu}{n} = 1,45 \text{ km/s}$$

B-1-8-2

Entre l'émetteur et le fond du port, l'onde réalise 550 périodes ou encore 550 longueurs d'onde.

B1-8-3

On a de manière évidente : $\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta n}{n}$ (1) d'où : $\Delta h = \frac{20.1}{1100} \approx 2 \text{ cm}$

B-1-8-4

On a $h = 2000 \text{ m}$ puisque $n' = 100n$

B-1-8-5-1

La profondeur de pénétration de l'onde vaut : $H = \frac{1}{\mu} = 4 \text{ km}$ (Fall Length)

$$\frac{P_{\text{Récepteur}}}{P_0} = \exp(-2\mu L) \text{ (Aller-retour !)} \text{ (1) d'où : } P_{\text{Récepteur}} = \frac{P_0}{e} \approx 3,7 \text{ Pa (1)}$$

B1-8-5-2

De même, $\frac{P_{\text{Min}}}{P_0} = \exp(-2\mu L_{\text{Max}})$ (1) soit : $L_{\text{Max}} = \frac{1}{2\mu} \text{Ln}\left(\frac{P_0}{P_{\text{Min}}}\right) \approx 18,4 \text{ km}$ (1 pour l'AN)

Le résultat est supérieur à la fosse des Mariannes. Un émetteur de 10 Pa est-il réaliste même en ultrason ?

B-1-9-1

On a la figure classique de la diffraction par une fente dans l'approximation de Fraunhofer (diffraction à l'infini). L'allure est celle d'un sinus cardinal carré.

De manière évidente : $\frac{I(\theta=0)}{I_0} = 1$ et $\frac{I\left(\sin \theta = \frac{\lambda}{d}\right)}{I_0} = 0$

B-1-9-2

De manière évidente : $\frac{I\left(\sin \theta = \frac{\lambda}{2d}\right)}{I_0} = \frac{4}{\pi^2} \approx 0,41$

On a : $\sin \theta_0 = \frac{c}{2d\nu}$ soit : $\theta_0 = 24,5^\circ$ (1)

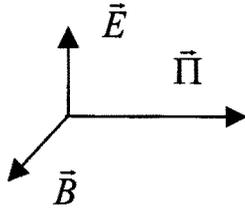
A 400Hz, on devrait avoir : $d' = \frac{c}{2\nu' \sin \theta_0} = \frac{c}{2\nu' \frac{c}{2\nu d}} = d \frac{\nu}{\nu'} = 1 \text{ mètre}$

Le phénomène de diffraction est d'autant plus sensible que la fréquence des ondes augmente. Les ultrasons sont plus puissants, moins gênants et plus directifs en expérimentation sur ondes sonores.

B-2-1

Une onde lumineuse dans le vide est une onde électromagnétique (Maxwell, Hertz)

(E,B,k) L'énergie se propage dans la direction du vecteur de Poynting : $\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$



B-2-2 Dans le vide, on a une onde transverse (Maxwell Gauss et Maxwell Flux).(1)
Polarisée rectilignement si \vec{E} ou \vec{B} garde une direction fixe lors de la propagation.(1)
Polariseur et analyseur croisés.

B-2-3 **Ondes lumineuses** : transverses dans les milieux TLHI (Ondes hélicons longitudinales !!), interaction matière rayonnement engendre une forte dispersion, fréquences élevées 10^{15} Hz , propagation dans le vide.
Ondes sonores : longitudinales, fréquences basses, très faible dispersion, pas de propagation dans le vide.

B-2-4 Visible : $0,4 \mu\text{m} < \lambda < 0,8 \mu\text{m}$ Milieu du spectre : raie D du sodium : $\lambda = 5893 \text{ \AA}$
Dispersion avec maxima principaux : $a(\sin i_p - \sin i_0) = p\lambda$. Pouvoir dispersif croît avec l'ordre mais éclairement diminue (diffraction des fentes).

B-2-5 $n(\lambda) = \frac{C_{\text{vide}}}{v(\lambda)} > 1$ dans un milieu TLHI loin des bandes d'absorption.

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0 \text{ soit } n_{\text{Bleu}} > n_{\text{Rouge}} \text{ Loi de Cauchy : } n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

Le verre est un milieu dispersif, le prisme décompose la lumière. Le bleu est plus dévié que le rouge contrairement au réseau. La nature du matériau fixe une limite au pouvoir dispersif (utilisation de verres traités Crown ou flint).

B-2-6 A la traversée d'un dioptre optique, rayon incident, réfléchis et réfractés sont dans un même plan, le plan défini par la normale au dioptre et le rayon incident. On a :
$$\begin{cases} \sin i = \sin i' \\ n_1 \sin i = n_2 \sin r \end{cases}$$

B-2-7
$$n = \frac{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}$$
 Indice d'un verre : angle d'extinction, incidence de Brewster, plexiglas demi-boule.

Indice d'un liquide : Réfractomètre d'Abbe $n = n' \sin l$ si $n < n'$

B-2-8-1 Le faisceau Gaussien ($4''$ d'arc typique d'ouverture), 0,35 J par impulsion), nombre de photons recueilli est très faible noyé dans le bruit de diffusion lunaire donc nécessité d'un grand nombre de miroirs trièdre déposé par les américains au début des années 70.

B-2-8-2 Lors d'une réflexion : $\hat{u}_i \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ pour l'incident et pour le réfléchi sur un miroir de normale $0x$: $\hat{u}_r \begin{bmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$.

Après trois réflexions sur un trièdre, on aura donc : $\hat{u}_{\text{Emergent}} \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ -\gamma \end{bmatrix} = -\hat{u}_i$

B-2-9 Si la taille typique est supérieure à la longueur d'onde (tache centrale de taille angulaire $\theta \sim \frac{\lambda}{d}$

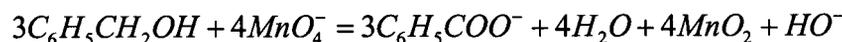
Approximation de l'optique géométrique : taille des objets diffractants (montures de lentilles) \gg à la longueur d'onde.

B-2-10 Figure identique à la fente (théorème de Babinet)

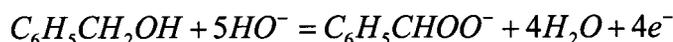
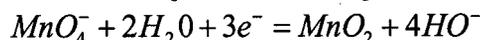
A une distance $D \gg r$ taille du cheveu, la largeur de la frange centrale vaut : $\theta \sim \frac{2\lambda}{r}$

CHIMIE

A-I-1 Le bilan de l'oxydation de l'alcool s'écrit :



On a les demi équations électroniques suivantes :



Le carbone fonctionnel passe de (-I) à (+III)

Le manganèse de (VII) à (IV)

A-I-2 Estérification

A-I-3 Schéma classique d'un appareil avec réfrigérant à reflux, ampoule de coulée et chauffe-ballon surélevé. Ne pas oublier les points de fixation du montage.

A-I-4 La cinétique lente suppose **chauffage** et **reflux** qui permet la récupération des produits volatils dans le bicol.

A-I-5 Calculons la masse molaire de l'alcool benzylique : $M_{Alcool} = 7.12 + 8.1 + 1.16 = 108 \text{ g/mol}$ soit une quantité de matière :

$$n_{Alcool} = \frac{1,04.2}{108} = 0,0192 \text{ moles}$$

De même : $n_{Permanganate} = 0,03 \text{ mole}$

$$\text{On a donc : } \frac{n_{Permanganate}}{n_{alcool}} = 1,56 > \frac{4}{3} \text{ (stoechiométrie)}$$

L'oxydant est donc en excès d'où la couleur violacée dans le ballon.

A-I-6 La disparition de la couleur violacée est due à l'oxydation de l'éthanol en acide éthanoïque (éthanoate en milieu basique aqueux) selon la réaction :



La demi équation électronique est : $CH_3CH_2OH + 5HO^- = CH_3COO^- + 4H_2O + 4e^-$

A-II-7 L'acide benzoïque précipite en milieu acide : $C_6H_5COO^- + H_3O^+ = C_6H_5COOH(s) + H_2O$

A-II-8 Formation de liaison H avec le solvant polaire eau.

La solubilité décroît quand la température diminue, on achève la précipitation.

A-II-9 $M_{Acide Benzoïque} = 7.12 + 6.1 + 2.16 = 122 \text{ g/mol}$

Si les réactions de précipitation et d'oxydation quasi-totale, on récupère 0,0192 mole d'acide soit une masse de : 2,34 g.

Le rendement de la synthèse est défini par : $r = 100 \frac{n(\text{acide benzoïque})}{n(\text{alcool benzylique})}$ en %

A-II-10 Banc Koffler avec gradient de température régulier de 50 à 250 °C

A-II-11 Recristallisation à froid.

B-I-1 Prendre garde aux projections cause de brûlures = lunettes et gants recommandés.

B-I-2 $HO^- + H_3O^+ = 2H_2O$

$K = \frac{1}{K_e} = 10^{14} \gg 1$ Réaction quasi totale.

B-I-3

$$n_A = n_B \Rightarrow C_A V_A = C_B V_B$$

A l'équivalence, soit : $C_B = \frac{C_A V_A}{V_B} = \frac{0,010.18,3}{10} = 0,0183 \text{ mol / L}$

$M_{\text{Soude}} = 40 \text{ g / mol}$ On a donc pesé 0,01 mole de soude soit $C_B = 0,02 \text{ mol / L}$ et il faut donc en théorie 20mL d'acide chlorhydrique : inclusion d'eau dans la soude déliquescente.

B-I-4 A l'équivalence, on a une solution neutre de chlorure de sodium de pH=7 dans la zone de virage du BBT. Solutions suffisamment concentrées pour un saut de pH notable autour de l'équivalence. Le BBT est adapté.

B-II-5 $RDosage : C_6H_5COOH + HO^- = C_6H_5COO^- + H_2O$

Couples : H_2O / HO^- et $C_6H_5COOH / C_6H_5COO^-$

B-II-6

$K = \frac{K_a}{K_e} = 10^{9,8} \gg 1$ La réaction peut être considérée comme totale.

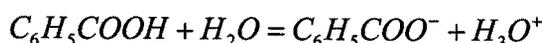
B-II-7

A l'équivalence et compte tenu de la stoechiométrie de la réaction de dosage :

$C_{\text{Acide Benzoïque}} V_a = C_B V_{E2}$ avec : $C_{\text{Acide Benzoïque}} = \frac{0,0183.12,8}{30} = 0,00781 \text{ mol / L}$ dans les 30mL

dosés. Compte tenu d'un facteur de dilution de 3, la concentration de l'acide benzoïque dans la solution mère S2 vaut : $C_a = 0,0234 \text{ mol / L}$.

B-II-8



Pour $V = 0$, on a la RP :

$\frac{C_a}{3}$	0	ϵ
$\frac{C_a}{3} - h$	h	h

A l'équilibre : $\frac{h^2}{\frac{C_a}{3} - h} = K_a$

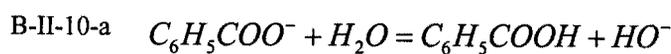
En négligeant la dissociation de l'acide : $pH = \frac{1}{2} \left[pK_a + p \left(\frac{C_a}{3} \right) \right] = 3,1$

On a un taux de dissociation de 9,1%.

B-II-9

Présence d'un dépôt solide après agitation de 15minutes assure une saturation de la solution.

La solubilité vaut donc en supposant la solution saturée : $s = \frac{0,0234.122}{1} = 2,9 \text{ g / L}$.



$$\begin{array}{ccc} C_0 & 0 & \varepsilon \\ C_0 - \omega \approx C_0 & \omega & \omega \end{array}$$

A l'équilibre : $\frac{\omega^2}{C_0} = \frac{K_e}{K_a} = 10^{-9,8}$ avec $C_0 = \frac{50}{144} = 0,347 \text{ mol/L}$ puisque :

$$M_{\text{Benzoate}} = 7.12 + 5.1 + 2.16 + 23 = 144 \text{ g/mol}$$

D'où $pOH = 5,1$ et $pH = 8,9$

B-II-10-b On a alors :
$$\frac{[Acide]}{[Base]} = 10^{pk_a - pH} = \frac{[Acide]}{0,347 - [Acide]}$$
 soit pour la « concentration » massique :

$$[Acide] = \frac{0,347 \cdot 10^{pk_a - pH} \cdot 122}{1 + 10^{pk_a - pH}} \approx 42,3 \text{ g/L}$$
 On aurait pu obtenir directement ce résultat en

remarquant que l'acide est l'espèce prédominante : $(Acide) \approx 0,347 \cdot 122 \approx 42,3 \text{ g/L}$, le taux de dissociation étant de 0,63%.

Compte tenu de la solubilité de l'acide à cette température, ce résultat n'a pas de sens et la solution est forcément saturée.

B-II-10-b La solution étant saturée, on a dans 100mL 0,29g d'acide en solution.

On a formé en tout (en solution + précipité) : $\frac{0,347}{10} \cdot 122 = 4,23 \text{ g}$ d'où la masse précipitée : $4,23 - 0,29 = 3,94 \text{ g}$

C-1 On choisira l'éther éthylique de faible densité et bonne solubilité et non miscibilité dans l'eau

C-2 Schéma d'une ampoule à décanter verticale sur son support. la phase étherée est au-dessus de la phase aqueuse. L'acide est principalement dissous dans l'éther après agitation vigoureuse.

 C-3 A l'équivalence, on a : $n_{aq} = C_1 V_E = 16,4 \cdot 10^{-6} \text{ moles}$ dans la phase aqueuse.

$$\text{On a : } R = \frac{n_{totale} - n_{aq}}{n_{totale}} = \frac{0,0234 \cdot 40 \cdot 10^{-3} - 16,4 \cdot 10^{-6}}{0,0234 \cdot 40 \cdot 10^{-3}} = 98\%$$

C-4
$$K = \frac{\frac{n_{totale} - n_{aq}}{V_{\text{solvant}}}}{\frac{n_{aq}}{V_{aq}}} = R \cdot \frac{40}{20} = 1,96 \approx 2$$

 C-5 **Calculs immédiats : 98% 99,4%**

C-6-a Tache en face de l'acide benzoïque donc en contient + autres produits.

C-6-b Présence d'alcool benzylique.

Capès de sciences physiques

Concours interne

SECTION PHYSIQUE ET ÉLECTRICITÉ APPLIQUÉE
Épreuve de physique et électricité appliquée ♦ Session : 2004

MECANIQUE.

Partie A.

1) écrivons le PFD pour la masse, $mx'' = -kx$; $x = a \cos \omega t$ avec $\omega^2 = k/m$.

2) écrivons le théorème de la puissance cinétique pour le système masse + ressort : $dE_c/dt = P_{\text{intérieure}} + P_{\text{extérieure}}$.
dans le cas présent $P_{\text{extérieure}} = 0$.

$$E_c = (1/2)mx'^2 = (1/2)ma^2\omega^2\sin^2\omega t.$$

$$P_{\text{intérieure}} = (1/2)ma^2\omega^3\sin(2\omega t).$$

3) $< P_{\text{intérieure}} > = 0$.

Ceci est la traduction de la non modification de la structure interne du ressort. Le ressort admet des déformations élastiques.

$$4) mu_n'' = -k(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}).$$

$$5) u_{n+1} = u + a\partial u/\partial x + (a^2/2)\partial^2 u/\partial x^2$$

$$u_{n-1} = u - a\partial u/\partial x + (a^2/2)\partial^2 u/\partial x^2$$

d'où l'équation de D'Alembert $\partial^2 u/\partial t^2 = v^2\partial^2 u/\partial x^2$

$$v^2 = ka^2/m; v = \text{célérité.}$$

Partie B :

$$1) \mathbf{V} = l\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

$$2) \mathbf{a} = l\ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta - l\dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r$$

$$3) m\mathbf{a} = \mathbf{L} + m\mathbf{g}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{\text{inertie d'entraînement}} + \mathbf{f}_{\text{inertie de Coriolis.}}$$

Dans le cas présent la force d'inertie de Coriolis est nulle. $m[-l\dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r + l\ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta] = \mathbf{L} + m\mathbf{g}\mathbf{x} + ma\omega^2 \cos(\omega t) \mathbf{y}$

On a $\mathbf{e}_r = \cos\theta \mathbf{x} + \sin\theta \mathbf{y}$; $\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta \mathbf{x} + \cos\theta \mathbf{y}$.

$$L_x = -mg - ml\ddot{\theta}\sin\theta - ml\dot{\theta}^2\cos\theta.$$

$$L_y = -ml\dot{\theta}^2\sin\theta + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ma\omega^2\cos(\omega t).$$

$$L_z = 0.$$

4) $d\sigma_{O'}/dt = \mathbf{Moment}$ de la liaison/O' + \mathbf{Moment} du poids/O' + \mathbf{Moment} de la force d'inertie d'entraînement/O' + \mathbf{Moment} de la force d'inertie de Coriolis/O'.

dans le cas présent le moment de la force d'inertie de Coriolis et le moment de la liaison sont nuls.

$$d\sigma_{O'}/dt = ml^2\ddot{\theta} \mathbf{z} = -mg\sin\theta \mathbf{z} + ml\omega^2\cos\theta.\cos(\omega t) \mathbf{z}.$$

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta + a\omega^2\cos\theta.\cos(\omega t).$$

5) en l'absence de vibreur $l\ddot{\theta} = -g\sin\theta$.

Ecrivons l'énergie mécanique totale $E = E_{\text{cinétique}} + E_{\text{potentielle}} = (1/2)ml^2\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta = \text{constante}$.

On dérive par rapport au temps et l'on retrouve l'équation précédente.

Partie C:

1) équilibre statique : le centre de masse est sur l'axe de rotation.

Équilibre dynamique : il faut, en plus de l'équilibre statique, que l'axe de rotation soit axe principal d'inertie.

Ceci implique que le moment cinétique du rotor, en un point quelconque de ce rotor, est colinéaire à l'axe de rotation.

Sinon, lors de la rotation, il s'exerce sur les paliers des effets tournants transversaux aux paliers; ce qui entraîne l'usure de ces paliers.

2) La partie de courbe à pente négative, pour le couple moteur, correspond à des points d'association stables.

Dans le cas général l'association, couple moteur + couple résistant, est stable si $dC_{\text{résistant}}/d\omega > dC_{\text{moteur}}/d\omega$, au point de fonctionnement; ω est la vitesse angulaire.

3) Ecrivons la statique de la masse, dans le référentiel tournant :

$$\mathbf{0} = \mathbf{R} + m\mathbf{g} + m\omega^2 x_c \sin\alpha \mathbf{X}; \mathbf{R} = \text{réaction de la tige sur } m.$$

$$\text{projection sur } \mathbf{x}; 0 = -mg\cos\alpha + m\omega^2 x_c \sin^2\alpha.$$

$$x_c = g \cos \alpha / \omega^2 \sin^2 \alpha .$$

4)écrivons le PFD pour m, dans le référentiel tournant : $\mathbf{m a} = \mathbf{R} + \mathbf{m g} + m\omega^2 x \sin \alpha \mathbf{x} - 2m\omega \mathbf{Z} . \mathbf{x}' \mathbf{x}$

projection sur \mathbf{x} : $x'' - x \omega^2 \sin^2 \alpha = - g \cos \alpha .$

A partir des conditions initiales ,on obtient $x = x_c + \text{ach}(\omega t \sin \alpha)$

5)Ecrivons le théorème de la puissance cinétique, pour le système moteur + tige + masse , dans le référentiel tournant : $dE_c/dt = P_{\text{intérieure}} + P_{\text{extérieure}} + P_{\text{force d'inertie d'entrainement}}$

$$P_{\text{intérieure}} = P(t).$$

$$P_{\text{extérieure}} = P(\text{poids}) + P(\text{réaction}) ; P(\text{réaction}) = 0.$$

$$P_{\text{extérieure}} = - mg \mathbf{Z} . \mathbf{x}' \mathbf{x} = - mgx' \cos \alpha = - m g a \omega \cos \alpha . \sin \alpha . \text{sh}(\omega t \sin \alpha).$$

$$P_{\text{force d'inertie d'entrainement}} = m\omega^2 x \sin \alpha \mathbf{X} . \mathbf{x}' \mathbf{x} = m\omega^2 \sin^2 \alpha x x'.$$

$$E_c = (1/2) m x'^2 ; dE_c/dt = m x' x'' = m a^2 \omega^3 \sin^3 \alpha \text{sh}(\omega t \sin \alpha) \text{ch}(\omega t \sin \alpha).$$

$$P(t) = dE_c/dt - P_{\text{extérieure}} - P_{\text{force d'inertie d'entrainement}}.$$

OPTIQUE:

1)position 1 : image virtuelle, droite.

Position 2 : image réelle , droite.

2)L'image A'B' est dans le plan focal objet de la lentille (autocolimation).

Grandissement = - 1.

3a)la différence de marche entre deux rayons consécutifs diffractés par le réseau = $\delta = a (\sin i' - \sin i) = p \lambda .$

$\delta = n \lambda ; n$ est un entier relatif.

3b) $i =$ angle d'incidence = 0 ; $\lambda =$ longueur d'onde ; $p =$ ordre d'interférence .

$$i'_{1v} = 13,88^\circ$$

$$i'_{1R} = 26,7^\circ$$

$$3c) i'_{2v} = 28,68^\circ$$

$$i'_{2R} = 64,15^\circ$$

$$4) \varphi = 2\pi a (\sin i') / \lambda$$

$$I = I_0 . \sin^2 (N\varphi/2) / \sin^2 (\varphi/2)$$

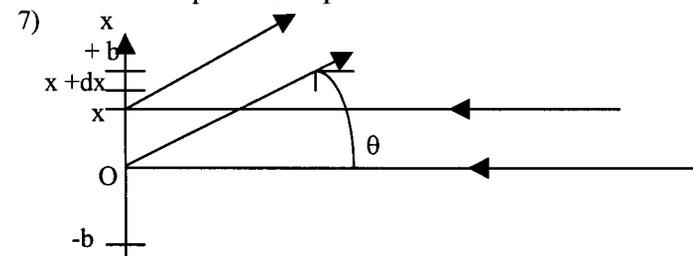
$$5a) R = Np$$

$$5b) R = 7200.$$

5c)les deux radiations sont séparées.

6)défauts occasionnés par la traversée du support : absorption de lumière , planéité

la lumière est dispersée dans plusieurs ordres.



O est l'origine des phases.

Appliquons le principe de Huyghens-Fresnel : la bande de largeur dx diffracte une onde d'amplitude complexe

$$d\mathbf{A} = k . e^{i\omega t} . e^{i2\pi x \sin \theta / \lambda} dx.$$

$$\mathbf{A} = K . \text{sinc}(2\pi b \sin \theta / \lambda) . e^{i\omega t} ; f(\theta) = \text{sinc}(2\pi b \sin \theta / \lambda).$$

8)la différence de marche entre deux rayons diffractés par les milieux de deux lames miroitantes consécutives est $\delta = 2a [\sin \alpha - \sin (\theta - \alpha)] .$

L'amplitude diffractée par l'ensemble du réseau est $\mathbf{A} = K e^{i\omega t} . \text{sinc}(2\pi b \sin \theta / \lambda) . \sin(N\varphi/2) / \sin (\varphi / 2) .$

$$\varphi = 2\pi \delta / \lambda .$$

$$\text{l'intensité diffractée est } I = \mathbf{A} . \mathbf{A}^* = I_0 . \text{sinc}^2 (2\pi b \sin \theta / \lambda) . \sin^2 (N\varphi/2) . \sin^2 (\varphi/2) .$$

9)Dans la direction incidente $\theta = 0 ; \delta = 4a \sin \alpha = 3\lambda .$

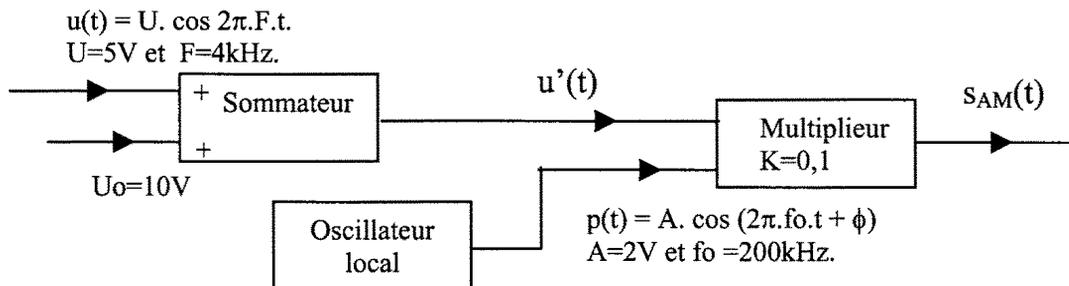
$$AN : \alpha = 9,43^\circ$$

La lumière diffractée dans les autres ordres entiers est quasi-nulle (intérêt du réseau échelle).

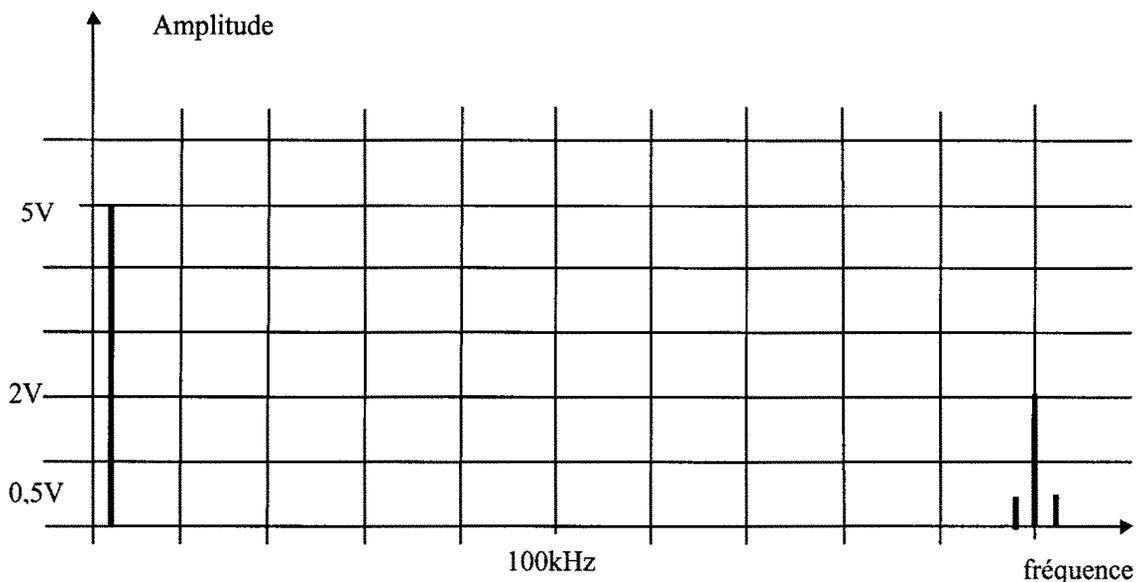
ELECTRONIQUE

PARTIE 1

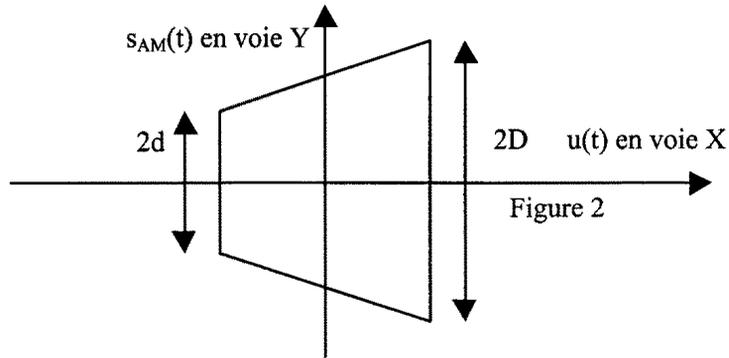
1. Transmission d'un signal $u(t)$ par modulation de l'amplitude d'une porteuse sinusoïdale.
 - Première approche



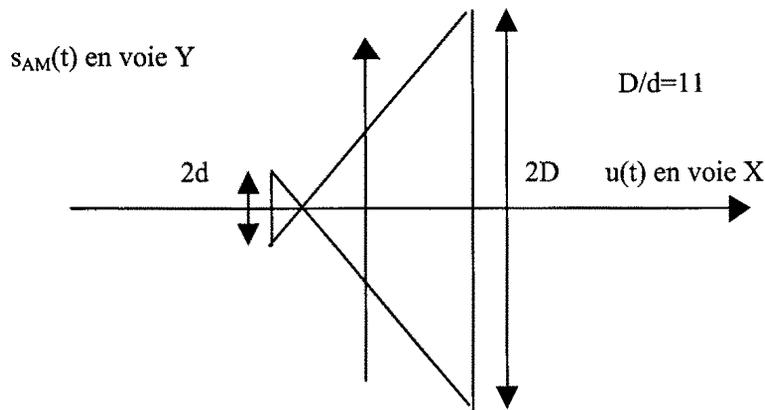
- 1.1. Expressions des signaux $u'(t)$ et $s_{AM}(t)$.
 $u'(t) = U_0 + U \cdot \cos 2\pi \cdot F \cdot t$; $s_{AM}(t) = K \cdot A \cdot (U_0 + U \cdot \cos 2\pi \cdot F \cdot t) \cos (2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi)$.
- 1.2. On peut mettre $s_{AM}(t)$ sous la forme : $s_{AM}(t) = S \cdot (1 + m \cdot \cos 2\pi \cdot F \cdot t) \cos (2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi)$ puisque :
 $s_{AM}(t) = K \cdot A \cdot U_0 (1 + (U/U_0) \cdot \cos 2\pi \cdot F \cdot t) \cos (2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi)$ avec : $m = U/U_0$ et $S = KAU_0$
- 1.3. Expression du taux de modulation m et expression de S . Calcul des valeurs numériques.
 $m = U/U_0 = 0,5$ et $S = KAU_0 = 2V$
- 1.4. Décomposition de $s_{AM}(t)$:
 $s_{AM}(t) = S(1 + m \cdot \cos 2\pi \cdot F \cdot t) \cos (2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi)$
 $s_{AM}(t) = S \cdot \cos (2\pi \cdot f_0 \cdot t + \phi) + 0,5 \cdot mS \cdot \cos (2\pi \cdot (f_0 + F)t + \phi) + 0,5 \cdot mS \cdot \cos (2\pi \cdot (f_0 - F)t + \phi)$
- 1.5. Expression de la puissance moyenne P dissipée dans R_{ant} .
 $P = 0,5 \cdot S^2 (1 + 0,5m^2) / R_{ant}$
- 1.6. Représentation de $U(f)$ et de $S_{AM}(f)$. Echelles : 20kHz/cm et 2V/cm.



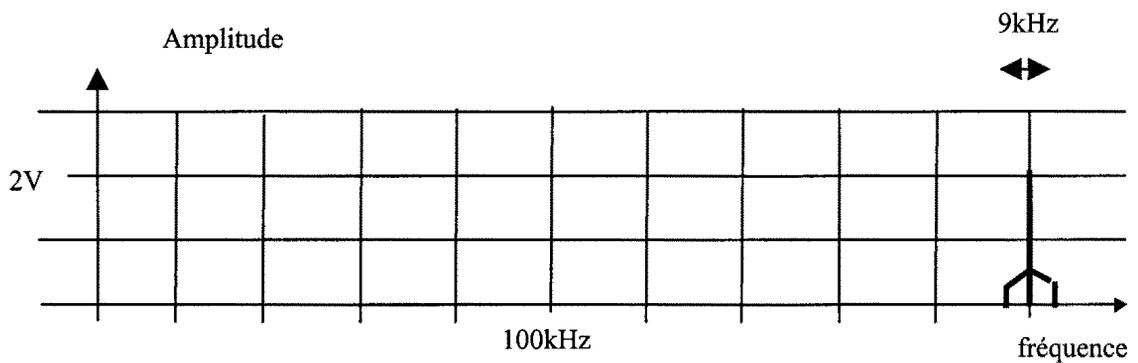
- 1.7. L'oscillogramme, en mode XY, $s_{AM}(u)$ a une enveloppe dont l'allure est représenté figure 2.



Les expressions des grandeurs D et d en fonction de S et m sont donc : $D=S(1+m)$; $d=S(1-m)$
 On en déduit l'expression du taux de modulation m en fonction de D/d : $m=((D/d)-1)/((D/d)+1)$
 1.8. Représentation de l'oscillogramme $s_{AM}(u)$ dans le cas d'une surmodulation : $m=1,2$.
 On a : $D/d= 1+m/1-m < 0$



- Dans une deuxième approche le signal $u(t)$ n'est plus sinusoïdal et son encombrement spectral, limité par filtrage, a l'allure représentée figure 3. On donne : $F_{max} = 4,5\text{kHz}$ et $M = 5\text{V}$, $M' = 4\text{V}$.
 1.9. Représentation de $S_{AM}(f)$. Echelles : 20kHz/cm et 2V/cm .



- 1.10. Les valeurs limites de la bande de fréquence réservée aux émissions grandes ondes (GO-AM) grand public : 160kHz à 250kHz
- 1.11. La limitation du domaine spectral autorisé pour le message à émettre permet l'utilisation de 10 canaux.

PARTIE 2

- 2. Transmission d'un signal $u(t)$ par modulation de la fréquence d'une porteuse sinusoïdale. La porteuse est notée $p(t) = A \cdot \cos(\phi(t))$. On a : $\omega_i(t) = d\phi(t)/dt$ et $\omega_i(t) = \omega_o + K \cdot u(t)$, $A=2\text{V}$ et $f_o = \omega_o / 2\pi = 100\text{MHz}$. Dans une première approche on prend $u(t) = U \cdot \cos 2\pi \cdot F \cdot t$. On a : $U = 5\text{V}$ et $F = \Omega / 2\pi = 4\text{kHz}$.
 2.1. L'unité du coefficient K : K est en rad/s.V

2.2. Expression de $\phi(t)$: $\phi(t) = \omega_0 t + (K.U/2\pi.F). \sin 2\pi.F.t + \phi_0$

2.3. On a : $\phi(t) = \omega_0 t + (K.U/2\pi.F). \sin 2\pi.F.t + \phi_0 = \omega_0 t + (\Delta\Omega/\Omega). \sin 2\pi.F.t + \phi_0$

Car : $\Delta\Omega = 2\pi.\Delta F = K.U$

L'excursion maximale en fréquence est : ΔF , l'indice de modulation est : $\Delta F/F = n$, et $\phi_0 = 0$.

Le signal modulé $s_{FM}(t)$ peut donc se mettre sous la forme : $s_{FM}(t) = A.\cos(\omega_0 t + n.\sin \Omega t + \phi_0)$.

$s_{FM}(t) = A.\cos \phi(t) = A.\cos(\omega_0 t + n.\sin \Omega t + \phi_0) = A.\cos(\omega_0 t + n.\sin \Omega t)$.

2.4. Dans le cas où l'indice de modulation n est petit devant 1.

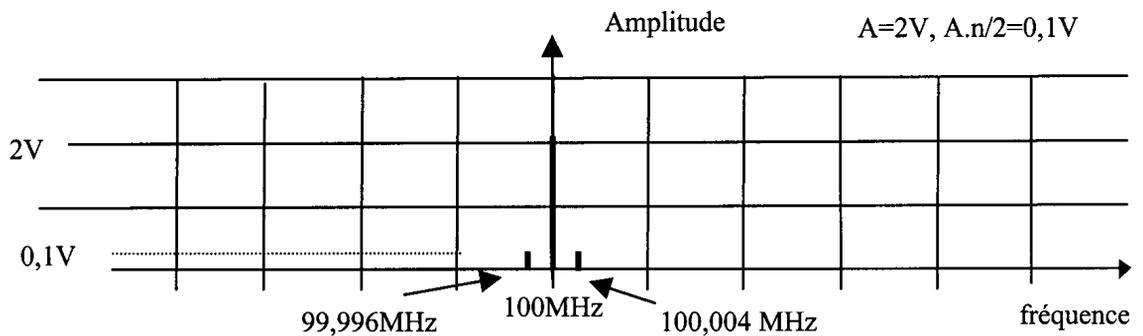
2.4.1. Décomposition de $s_{FM}(t)$:

$s_{FM}(t) = A.\cos(\omega_0 t + n.\sin \Omega t) = A \cos \omega_0 t \cos(n.\sin \Omega t) - A \sin \omega_0 t \sin(n.\sin \Omega t)$

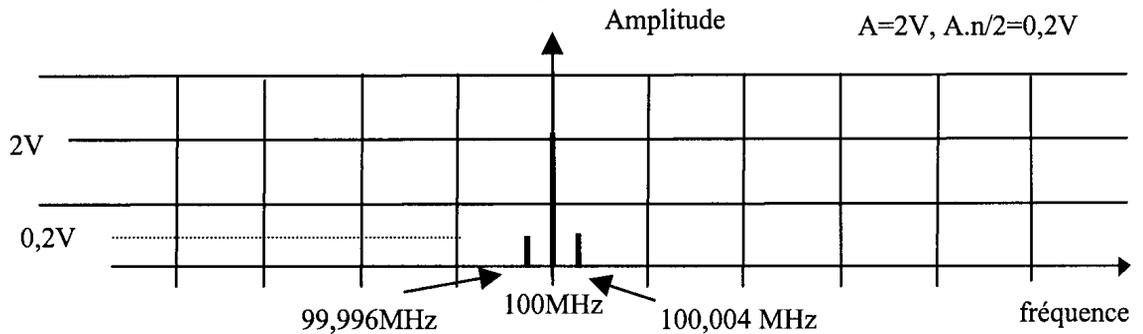
si n est petit $\sin \epsilon = \epsilon$ et $\cos \epsilon = 1$ donc : $s_{FM}(t) = A \cos \omega_0 t - A.n.\sin \omega_0 t . \sin \Omega t$

$s_{FM}(t) = A \cos \omega_0 t + (A.n/2) \cos(\omega_0 + \Omega)t - (A.n/2) \cos(\omega_0 - \Omega)t$

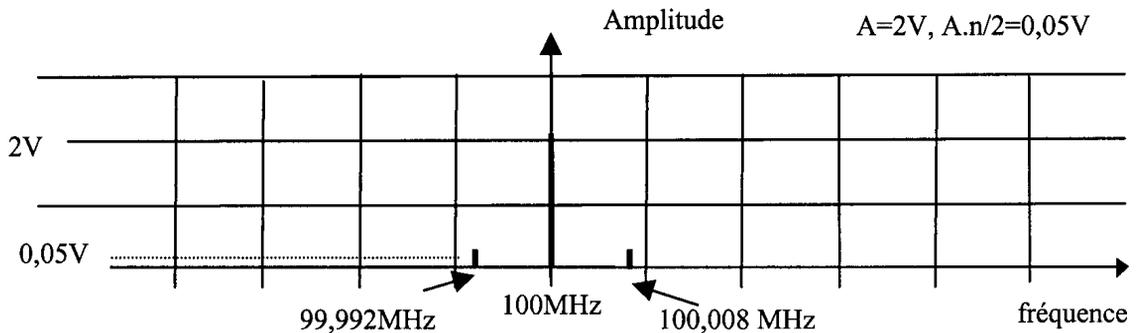
2.4.2. Représentation de $S_{FM}(f)$ autour de $f=f_0$ pour $n=0,2$. Echelles : 10kHz/cm et 2V/cm.



2.4.3. ΔF est multipliée par 2 et n est multipliée par 2



2.4.4. F est multipliée par 2 et n est divisée par 2



2.5. Dans le cas où l'indice de modulation n est très grand devant 1 la bande passante nécessaire à la transmission du signal $u(t)$ est donnée par la relation de Carson : $BP = 2.(1+n).F$.

2.5.1. Les valeurs limites de la bande II de fréquence réservée aux émissions FM grand public sont : 88MHz à 108MHz

2.5.2. La bande passante maximum autorisée pour un émetteur étant de 150kHz, calcul de l'indice de modulation n maximum autorisé pour un signal de fréquence F=200Hz,
 $n+1=BP/2F=75000/200=375 \quad n=374$

2.5.3. L'amplitude du signal u(t) précédent est Umax, détermination de l'excursion maximale en fréquence et de l'indice de modulation pour un signal u(t) de même fréquence mais atténué de 60dB

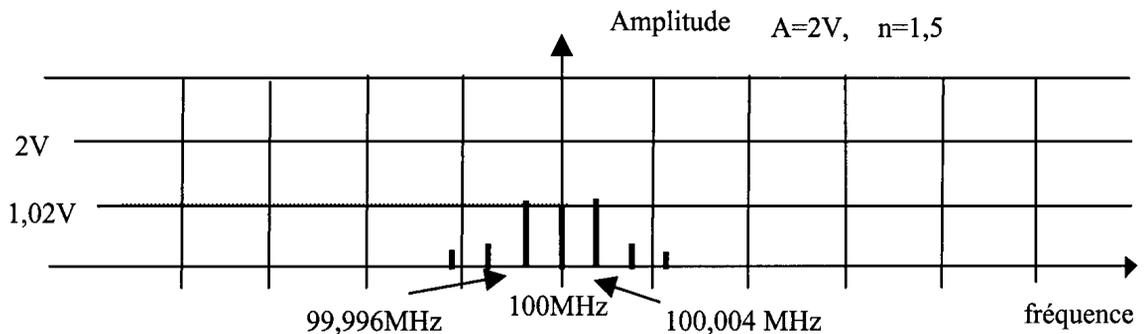
$U=U_{max}/1000$ donc $\Delta F/1000$ et $n/1000$ soit alors $n=0,374$.

2.6. $s_{FM}(t) = A.J_0(n).\cos \omega_0.t + A.J_1(n).[\cos (\omega_0+\Omega).t - \cos (\omega_0-\Omega).t] + A.J_2(n).[\cos (\omega_0+2\Omega).t + \cos (\omega_0-2\Omega).t] + A.J_3(n).[\cos (\omega_0+3\Omega).t - \cos (\omega_0-3\Omega).t] + \dots$

2.6.1. Les coefficients Jn (coefficients de Bessel) sont donnés dans le tableau ci-dessous .

n	J0	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7
0,5	0,94	0,24	0,03					
1	0,77	0,44	0,11	0,02				
1,5	0,51	0,56	0,23	0,06	0,01			
2	0,22	0,58	0,35	0,13	0,03			
2,5	-0,05	0,5	0,45	0,22	0,07	0,02		
3	-0,26	0,34	0,49	0,31	0,13	0,04	0,02	
4	-0,4	-0,07	0,36	0,43	0,28	0,13	0,05	0,02

Représentation de $S_{FM}(f)$ autour de $f=f_0$ dans le cas où la fréquence du signal u(t) est F= 4 kHz et son amplitude U=U1 telle que $\Delta F=6kHz$. Echelles : 10kHz/cm et 2V/cm.



2.6.2. On a relevé (à l'analyseur de spectre) le graphe $S_{FM}(f)$. 0dBm(50Ω) correspond à 0,224V

Détermination des amplitudes A0, A1, A2, A3 en V. (Ai = A.Ji)

$A.J_0=-14,2dBm = 43mV \quad A.J_1=4dBm = 355mV \quad A.J_2=3dBm= 316mV \quad A.J_3=-3dBm= 158mV$
 $A.J_4=-13dBm= 50mV$

2.6.3. On en déduit (voir tableau) l'indice de modulation n, la fréquence F et l'amplitude U du signal u(t) : $n=2,5 \quad F=3kHz \quad \Delta F=7,5kHz \quad J_0=0,05 \quad A.J_0= 43mV$ donc $A= 860mV$

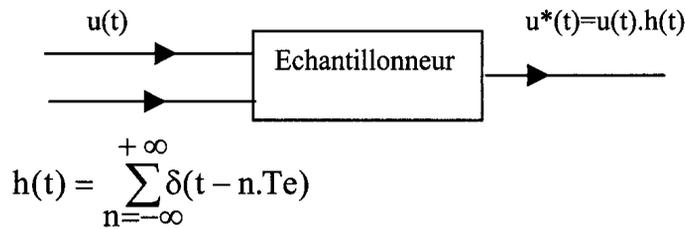
PARTIE 3

Transmission numérique d'un signal u(t).

3.

3.1. Passage du signal à transmettre u(t) au signal échantillonné u*(t)

Le signal à transmettre est noté u(t), sa représentation spectrale bilatérale est notée U(f). Le schéma de principe de l'échantillonneur est représenté ci-dessous. La fréquence d'échantillonnage est $f_e = 32kHz$.



- On considère la fonction $g(t)$ paire, périodique de période $Te=1/f_e$. Elle vérifie les conditions suivantes : $g(t)=G$ pour $-\tau/2 \leq t \leq \tau/2$, $g(t)=0$ pour le reste de la période, de plus : $\tau \ll Te$ et $G=Te/\tau$. Le peigne de Dirac est obtenu à partir de $g(t)$ en faisant tendre τ vers 0.

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_n \cdot \exp(j2\pi \cdot n \cdot f_e \cdot t) \quad \text{avec : } G_n = \frac{\tau \cdot G}{Te} \cdot \frac{\sin \frac{n \cdot \pi \cdot \tau}{Te}}{\frac{n \cdot \pi \cdot \tau}{Te}}$$

Les coefficients $|G_n|$ sont les amplitudes des composantes spectrales bilatérales aux fréquences : $f = n \cdot f_e$.

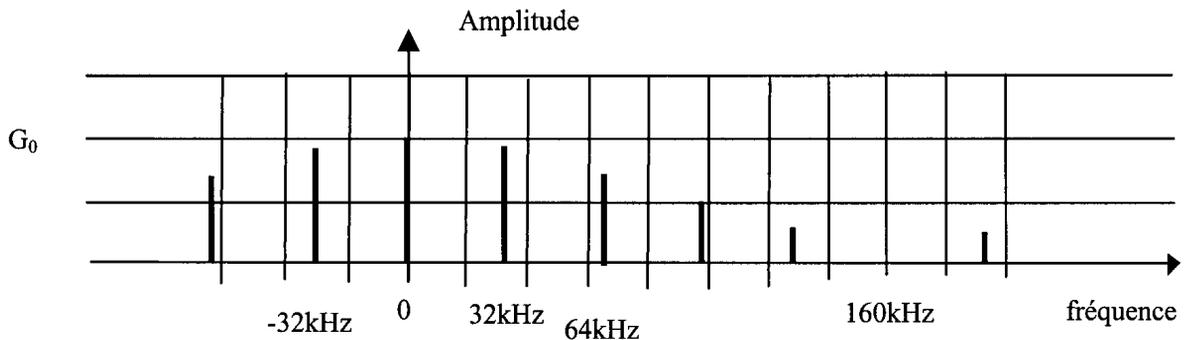
3.1.1. Calculs numériques de $G_0, G_1, G_{-1}, G_2, G_5$. On prend : $\tau=Te/5$ et $G=Te/\tau$

$$G_0=1 \quad G_1=G_{-1}=0,935 \quad G_2=0,757 \quad (G_3=0,504 \quad G_4=0,233) \quad G_5=0$$

3.1.2. G_0 est la valeur moyenne de la fonction $g(t)$. Représentation sur 2 périodes :

3.1.3. Représentation du spectre d'amplitude bilatéral $G(f)$ pour $-100\text{kHz} < f < 200\text{kHz}$.

Echelles : 20kHz/cm et 2cm pour G_0 .



3.1.4. Allure de cette représentation quand τ tend vers 0.

Un peigne fréquentiel de période fréquentielle $f_e=32\text{kHz}$

3.1.5. Expression de $h(t)$ sous la forme d'une série.

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(2\pi \cdot n \cdot F_e \cdot t)$$

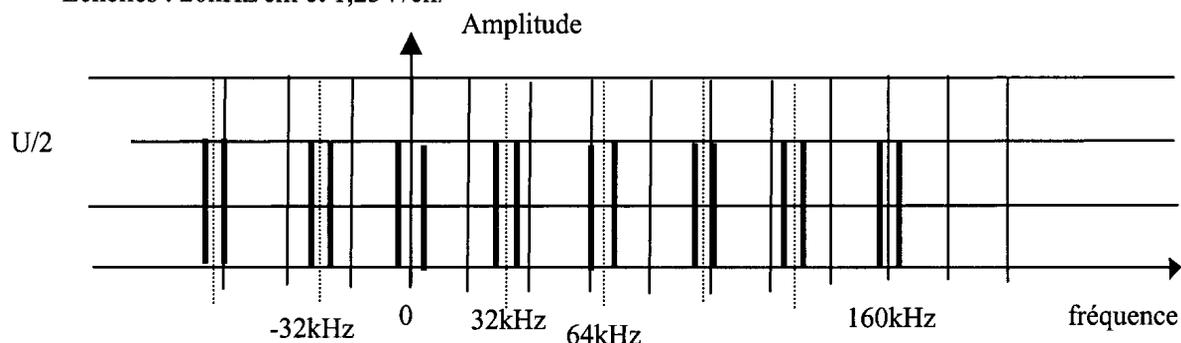
- Dans une première approche, on prend $u(t) = U \cdot \cos 2\pi \cdot F \cdot t = (U/2) \cdot \exp(+2\pi \cdot F \cdot t) + (U/2) \cdot \exp(-2\pi \cdot F \cdot t)$. On donne $U=5\text{V}$ et $F = \Omega/2\pi = 4\text{kHz}$.

3.1.6. Expression de $u^*(t)$ sous la forme d'une série.

$$h(t) = \frac{U}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\exp^{2\pi \cdot (nFe + F)t} + \exp^{2\pi \cdot (nFe - F)t})$$

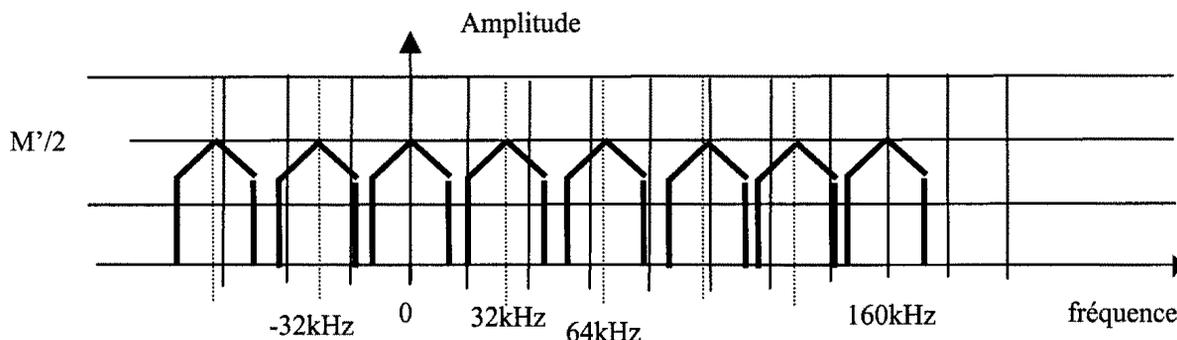
3.1.7. Représentation du spectre bilatéral $U^*(f)$ pour $-100\text{kHz} < f < 200\text{kHz}$.

Echelles : 20kHz/cm et 1,25V/cm



- Dans une deuxième approche le signal $u(t)$ n'est plus sinusoïdal et son encombrement spectral bilatéral, limité par filtrage, a l'allure représentée figure 6. On donne : $F_{\text{max}} = 15\text{kHz}$ et $M = 5\text{V}$.

3.1.8. Représentation du spectre bilatéral $U^*(f)$ pour $-100\text{kHz} < f < 200\text{kHz}$. Echelles : 20kHz/cm et 1V/cm.



3.1.9. Énoncé du théorème de Shannon :

La reconstitution d'un signal $f(t)$ à partir d'échantillons prélevés à la fréquence f_e , n'est possible que si la fréquence d'échantillonnage f_e est supérieure à 2 fois la fréquence maximale contenue dans $f(t)$.

3.1.10. Nom du filtre limitant la bande de fréquence utilisée par le signal : C'est un filtre anti repliement.

3.2. Transmission après numérisation.

- Les échantillons sont numérisés. Une milliseconde de son stéréophonique est transmise sous la forme d'une trame de 728bits.

3.2.1. Nombre de bits du convertisseur.

C'est un convertisseur 14 bits car $2^{14} = 16384$

3.2.2. Calculs du débit binaire réel, du débit binaire utile

Débit binaire réel : $D_r = 728\,000\text{bits/s}$ Débit binaire utile : $D_u = 2 \cdot 14 \cdot 32000 = 896\text{kbits/s}$

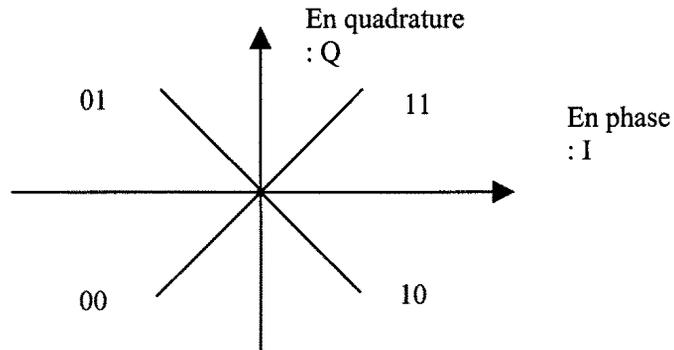
Rapidité de modulation : 364 000 bauds

3.2.3. Expression du signal $s_{\text{NICAM}}(t)$ en fonction de $I(t)$ et $Q(t)$:

$S_{\text{PSK4}}(t) = I(t) \cdot \cos(\omega t) - Q(t) \cdot \sin(\omega t)$

- 3.2.4. Expressions du signal $s_{\text{PSK4}}(t)$ pour les quatre possibilités des dîbits IQ.
 $I=0 \ Q=0 : I(t)=-1 \ Q(t)=-1 \quad : \quad s(t)=0,7\cos(\omega t - 3\pi/4)$
 $I=0 \ Q=1 : I(t)=-1 \ Q(t)=+1 \quad : \quad s(t)=0,7\cos(\omega t + 3\pi/4)$
 $I=1 \ Q=0 : I(t)=+1 \ Q(t)=-1 \quad : \quad s(t)=0,7\cos(\omega t - \pi/4)$
 $I=1 \ Q=1 : I(t)=+1 \ Q(t)=+1 \quad : \quad s(t)=0,7\cos(\omega t + \pi/4)$

- 3.2.5. Vitesse de transmission : $R = \text{Rapidité de modulation} = 364\ 000$ bauds
 3.2.6. Tracé du diagramme de constellation du modulateur.



- 3.2.7. PSK2 : $R'=R/2$
 3.2.8. Avantage : limitation de la bande passante nécessaire. Bruit = zone autour de chaque point sur le diagramme de constellation donc une ambiguïté à la démodulation.

Publications hors abonnement et numéros anciens

Serveur de l'UdPPC : http://www.udppc.asso.fr/	Année ou numéro	Prix unitaire	Nombre d'exem- plaires	Prix total
BROCHURES DOCUMENTAIRES ET PÉDAGOGIQUES				
♦ Nouveaux programmes de 3 ^e	1999	16,5 € × =
♦ Le collage : le moyen intelligent d'assembler (Michel BARQUINS)	2001	11 € × =
CONCOURS : CAPES ET AGRÉGATION				
	1995	1996	1997	1998
♦ Énoncés	784 (2) 9,5 €		802 (2) 10 €	812 (2) 11 €
♦ Solutions	784 (3) 12 €	792 (3) 13 €	802 (3) 13,5 €	812 (3) 14 €
	1999	2000	2001	2002
♦ Énoncés	817 (2) 12 €	824 (2) 12,5 €	834 (2) 12 €	845 (2) 13 € ^(*)
♦ Solutions	822 (2) 14,5 €	838 (2) 15 €	849 (2) 16 €	857 (2) 17 €
	2003	2004		
♦ Énoncés	859 (2) 13 €	867 (2) 13,5 €		
♦ Solutions	862 (2) 16,5 €	872 (2) 17,5 €		
CONCOURS DES GRANDES ÉCOLES				
♦ 1998 (36 €), 1999 (36,5 €), 2000 (37 €), 2001 (38 €), 2002 (38,5 €), 2003 (42 €), 2004 (41 €)		 × =
BREVETS DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR				
♦ 1997 (14,5 €), 1998 (12 €) <i>Sur le serveur : 1999</i>		 × =
BACCALAURÉATS TECHNOLOGIQUES				
♦ <i>Sur le serveur : 1999, 2000</i>		 × =

(*) Épuisé, version photocopiee disponible.

Les numéros épuisés en version papier des BUP de 1990 à 1999 peuvent être remplacés par le cédérom **BUPDOC version 3** au prix de 11 €.

Le cédérom (version 3 antérieure de la version 4 diffusée actuellement : voir ci-contre) contient tous les articles de 1990 à 1999.

	Année ou numéro	Prix unitaire	Nombre d'exem- plaires	Prix total
BULLETINS				
♦ Tables des matières quinquennales : 641 (jusqu'à 1980) - 795 (1) (1991-1995)	6,50 € × =
♦ Autres bulletins : 787, 788, 792 à 793, 795, 797*, 798 à 805, 807 à 820, 821*, 822 à 827, 829*, 830 à 835, 837 à 839*, 840 à 843, 849 à 865*, 866*, 867 à 872	6,50 € × = = =
NUMÉROS SPÉCIAUX				
♦ « 90 ans »	797	12 € × =
♦ « Le génie des procédés »	821	6,50 € × =
♦ « La sécurité au laboratoire de chimie »	829	6,50 € × =
♦ « Regards européens »	839	6,50 € × =
♦ « XX ^{es} Olympiades nationales de la chimie »	865	6,50 € × =
♦ « Regards didactiques »	866	6,50 € × =
♦ « Enseignement technologique »	853 (2)	6,50 € × =
♦ « Enseignement supérieur » : 1995 à 2004	6,50 € × =
TOTAUX		 = €
Supplément pour expédition à l'étranger (le volume : 1 €)				+
MONTANT DE LA COMMANDE (Titre de paiement ci-joint à l'ordre de l'UdPPC)				=

* Numéro spécial (voir tarif dans la rubrique « Numéros spéciaux »).

SUR LE SERVEUR
<http://www.udppc.asso.fr/>

Les énoncés des sujets des baccalauréats technologiques et des brevets de technicien et de technicien supérieur sont maintenant disponibles sur le serveur sous forme de « documents à coût partagé »⁽¹⁾. Il n'est plus proposé de version papier.

(1) Attention : il ne s'agit pas d'un abonnement à une édition électronique ; nous vous demandons seulement de participer aux frais en envoyant à l'UdPPC un chèque forfaitaire de 3 à 7,5 € selon le nombre de sujets que vous téléchargez (de 1 à 5 et plus) avec la mention « Téléchargement serveur ».

	Prix unitaire	Quantité	Prix total
BASE DE DONNÉES « BUPDOC »			
♦ Deux cédéroms (pour PC et Mac) comprenant : – BUPTEXTE : 20 ans d'articles « plein texte » (1980-1999) – BUPINDEX : 6500 notices bibliographiques (1907-2001) – et le logiciel	<i>Licence 1 : Individuelle</i>		
	Adhérent UdPPC	Public	
	40 €	63 € = €
	<i>Licence 2 : Établissement</i>		
	Ets abonné au BUP	Public	
	80 €	126 € = €
COOPÉRATION EUROPÉENNE « EURENERG - EURWORK » (Projet Comenius)			
♦ Eurenerg : une base de documents pédagogiques de différents pays européens sur le thème de l'énergie	8 € × = €
♦ Eurwork : programme de mise à jour de la base Eurenerg	4 € × = €
♦ Eurenerg + Eurwork	10 € × = €

PAIEMENT

Envoyer le bon de commande et le titre de paiement à :

UNION DES PROFESSEURS DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE
44, boulevard Saint-Michel - 75270 PARIS CEDEX 06

Adresse d'expédition (à remplir en majuscules)

M. Mme Mlle NOM : Prénom :

Adresse :

Code postal : Localité :

Pays :

Ci-joint mon règlement de € par chèque bancaire chèque postal

Le Directeur de la publication : Madeleine Sonnevile

Réalisation : Union des professeurs de physique et de chimie
Imprimé en France par SPEI - 54425 Pulnoy

Numéro commission paritaire : 0110 G 85898 - Dépôt légal : 1^{er} trimestre 2005