

Dualité onde - particule du champ électromagnétique

Corrigé

A. Généralités

1. Equations de Maxwell.

a. Les équations de Maxwell sont :

$$\text{div}(\vec{B}(\vec{r},t)) = 0 ; \text{rot}(\vec{E}(\vec{r},t)) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\text{div}(\vec{E}(\vec{r},t)) = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\epsilon_0} ; \text{rot}(\vec{B}(\vec{r},t)) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r},t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}.$$

b. La force de Lorentz est : $\vec{F}_L = q(\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r},t))$.

Cette expression **reste valable dans le cadre relativiste**, lorsque la vitesse de la particule est comparable à c .

2. Energie associée au champ électromagnétique. Vecteur de Poynting.

a. Le champ électrique entre les plans conducteurs a pour norme $\|\vec{E}\| = \frac{|\sigma|}{\epsilon_0}$ et il est nul en dehors. Une aire A contient donc l'énergie $W_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} \times A \times a$, et l'énergie stockée par unité de surface est $W_{em,s} = \frac{W_{em}}{A} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 a}{\epsilon_0}$.

On sait que l'énergie d'un condensateur de surface unité (donc de charge σ) est $W_{em,s} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{C_S}$. En identifiant les

deux expressions, on retrouve : $C_S = \frac{\epsilon_0}{a}$.

b. Le champ magnétique d'un solénoïde infini a pour norme $\|\vec{B}\| = \mu_0 n |I_0|$ à l'intérieur du solénoïde et il est nul à l'extérieur. Une longueur ℓ de solénoïde contient donc l'énergie $W_{em} = \frac{1}{2\mu_0} \mu_0^2 n^2 I_0^2 \times \ell \times \pi a^2$. Par unité de longueur on a donc $W_{em,l} = \frac{W_{em}}{\ell} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi a^2 I_0^2$.

En identifiant avec l'expression connue $W_{em,l} = \frac{1}{2} \Lambda I_0^2$, il vient $\Lambda = \mu_0 n^2 \pi a^2$.

c. Le vecteur de Poynting \vec{S} s'exprime en $[\vec{W} \times m^{-2}]$, il représente une puissance par unité de surface.

d. L'intégration de l'équation locale de Poynting, étendue au volume intérieur à (Σ) , noté (V) , donne, compte

tenu du théorème de Green-Ostrogradski : $\iint_{(\Sigma)} \vec{S} \cdot \vec{n}_{ext} d\Sigma + \frac{d}{dt} \iiint_{(V)} w_{em} dV = - \iiint_{(V)} \vec{J} \cdot \vec{E} dV$, soit

$$\frac{dW_{em}}{dt} = - \iint_{(\Sigma)} \vec{S} \cdot \vec{n}_{ext} d\Sigma - \iiint_{(V)} \vec{J} \cdot \vec{E} dV.$$

On interprète ce résultat en identifiant, dans les deux termes du second membre, les deux causes susceptibles de faire varier l'énergie électromagnétique contenue à l'intérieur de (Σ) :

- le premier terme implique un transport de puissance électromagnétique à travers la surface limitant le système,
- le second terme correspond à la puissance $\iiint_{(V)} \vec{J} \cdot \vec{E} dV$ transférée aux charges par l'intermédiaire de la force de Lorentz.

3. Ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques.

a. Le champ électrique dans le vide est un champ transverse, donc $E_z = 0$. Les deux autres composantes sont, dans le cas le plus général, de la forme :

$$\boxed{E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi_x)} \text{ et } \boxed{E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi_y)}, \text{ où l'on a introduit :}$$

- les amplitudes des champs selon \vec{e}_x (resp. \vec{e}_y) : E_{0x} (resp. E_{0y}) ;
- les phases des composantes des champs en $t = 0$ et $z = 0$, selon \vec{e}_x (resp. \vec{e}_y) : φ_x (resp. φ_y).

b.

(i) Pour une onde polarisée selon \vec{e}_x :

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x}$$

(ii) Onde plane polarisée circulairement dans le sens droit :

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \times \left[\cos(\omega t - kz) \vec{e}_x - \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y \right]}$$

(iii) Onde plane polarisée circulairement dans le sens gauche :

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \times \left[\cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y \right]}$$

c. Les champs magnétiques sont déterminés par la relation de structure d'onde plane : $\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{k} \wedge \vec{E}$:

$$\text{Onde (r) : } \boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y}$$

$$\text{Onde (d) : } \boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c} \times \left[\sin(\omega t - kz) \vec{e}_x + \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y \right]}$$

$$\text{Onde (g) : } \boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c} \times \left[-\sin(\omega t - kz) \vec{e}_x + \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y \right]}$$

d. On obtient aisément, à partir des définitions de w_{em} et \vec{S} :

Onde (r) :

$$\boxed{w_{em}(z,t) = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)} \text{ et } \boxed{\vec{S}(z,t) = \varepsilon_0 E_0^2 c \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z}$$

Onde (d) et onde (g) :

$$\boxed{w_{em}(z,t) = \varepsilon_0 E_0^2} \text{ et } \boxed{\vec{S}(z,t) = \varepsilon_0 E_0^2 c \vec{e}_z}$$

e. En valeur moyenne :

Onde (r) :

$$\boxed{\langle w_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}} \text{ et } \boxed{\langle \vec{S} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 c}{2} \vec{e}_z}$$

Onde (d) et onde (g) :

$$\boxed{\langle w_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2} \text{ et } \boxed{\langle \vec{S} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 c \vec{e}_z}$$

Dans tous les cas, on a

$$\langle \vec{S} \rangle = \langle w_{em} \rangle \times c \vec{e}_z$$

Cette relation s'interprète par exemple par analogie avec la relation $\vec{j} = \rho \vec{v}$ qui relie la densité de courant à la charge volumique et à la vitesse de déplacement des charges dans un courant électrique. $\langle \vec{S} \rangle$ est analogue à \vec{j} , $\langle w_{em} \rangle$ à ρ .

On en déduit que l'énergie électromagnétique est transportée à la vitesse c dans la direction de propagation (\vec{e}_z).

f. Les lasers communément disponibles en lycée délivrent une puissance de l'ordre du mW sur une surface de l'ordre du mm^2 . On a donc :

$$\|\langle \vec{S} \rangle\| \sim 10^3 \text{ W.m}^{-2}, \quad \langle w_{em} \rangle \sim \frac{10^3}{3 \times 10^8} \sim 3 \times 10^{-6} \text{ J.m}^{-3}$$

$$E_0 \sim \sqrt{\frac{10^{-6}}{9 \times 10^{-12}}} \sim 300 \text{ V.m}^{-1} \quad \text{et} \quad B_0 \sim \frac{300}{3 \times 10^8} \sim 10^{-6} \text{ T}$$

B. Grandeurs mécaniques associées au champ électromagnétique.

I. Transfert de quantité de mouvement entre le champ électromagnétique et une charge ponctuelle

1. Champ magnétostatique

a. Pour un solénoïde infini, un plan $z = \text{Cste}$ est un plan de symétrie : le champ magnétostatique lui est perpendiculaire et on peut affirmer que $\vec{B}(\vec{r}) = B(\vec{r}) \vec{e}_z$.

b. Il est légitime de négliger les effets de bord dans la mesure où l'on a $a \ll \ell$ et si l'on se place en un point peu éloigné du centre du solénoïde : ρ et $|z| \ll \frac{\ell}{2}$.

Dans ce cas, on sait que le champ du solénoïde vérifie :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 n I_0 \vec{e}_z \quad \text{si } \rho < a \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{0} \quad \text{si } \rho > a.$$

2. Champ électrique induit

a. Le plan $\theta = \text{cste}$ passant par le point M est un plan d'antisymétrie des sources du champ électromagnétique (les courants parcourant le solénoïde) à chaque instant, donc le champ $\vec{E}(\vec{r}, t)$ lui est perpendiculaire et $\vec{E}(\vec{r}, t) = E(\vec{r}, t) \vec{e}_\theta$.

Remarque : comme, par ailleurs, le système est invariant par rotation autour de Oz , et que, les effets de bords étant négligés, il est également invariant par translation parallèle à Oz , $E(\vec{r}, t)$ ne peut dépendre que de ρ et on

a donc bien : $\vec{E}(\vec{r}, t) = E(\rho, t) \vec{e}_\theta$.

b. Intégrons la relation de Faraday le long d'un contour circulaire (Γ) de rayon ρ : $\oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS.$

On a toujours $\oint_{(r)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E(\rho, t) \times 2\pi\rho$.

Par ailleurs, pour $\rho < a$: $\iint_{(s)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 n I \pi \rho^2$ et pour $\rho > a$: $\iint_{(s)} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 n I \pi a^2$. On déduit :

- pour $\rho < a$: $E(\rho, t) = -\mu_0 n \frac{dI}{dt} \frac{\rho}{2}$;
- pour $\rho > a$: $E(\rho, t) = -\mu_0 n \frac{dI}{dt} \frac{a^2}{2\rho}$.

c. Pour que l'approximation quasi stationnaire soit, a priori, acceptable, on doit pouvoir négliger tous les retards de propagation des champs, vis-à-vis de toutes les distances considérées dans le problème.

C'est-à-dire qu'il faut : $\max(a, \rho, \ell) \ll c\tau$.

Compte tenu des conditions évoquées au B-I-1-a, ce critère se réduit à : $\ell \ll c\tau$

3. Transfert de quantité de mouvement à une particule chargée.

a. La relation fondamentale de la dynamique pour la particule s'écrit $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}(\vec{r}, t)$ (le champ magnétique est nul, dans l'ARQP, à l'extérieur du solénoïde). Comme la particule se déplace très peu pendant la phase transitoire, on peut écrire : $\vec{E}(\vec{r}, t) \cong \vec{E}(C, t) = -\mu_0 n \frac{dI}{dt} \frac{a^2}{2d} \vec{e}_y$, le deuxième membre étant un vecteur de direction constante.

On peut donc intégrer l'équation fondamentale de la dynamique entre 0 et τ :

$$m(\vec{v}(\tau) - \vec{v}(0)) = -\int_0^\tau \mu_0 q n \frac{dI}{dt} \frac{a^2}{2d} \vec{e}_y dt = -\mu_0 q n \frac{a^2}{2d} \vec{e}_y \times (I(\tau) - I(0)).$$

Comme, de plus, $I(\tau) = 0$ et $\vec{v}(0) = \vec{0}$, on obtient : $\vec{v}(\tau) = \mu_0 \frac{q}{m} n \frac{a^2 I_0}{2d} \vec{e}_y$.

b. Le déplacement pendant τ est au plus de l'ordre de $|\vec{v}(\tau)| \times \tau$. Il faut donc avoir $|\vec{v}(\tau)| \times \tau \ll d$ pour que l'on puisse négliger le déplacement de la charge, ce qui donne $\tau \ll \left| \frac{2m}{q\mu_0 n I_0} \right| \frac{d^2}{a^2}$. Numériquement, on trouve

$$\tau \ll 4 \times 10^{-9} \text{ s} \text{ soit } c\tau \ll 1 \text{ m.}$$

La condition de validité de l'ARQS du 2.c. et le fait de négliger les effets de bord nécessitent $a \ll \ell \ll c \times \tau \ll 1 \text{ m}$: en prenant un facteur 10 pour chaque inégalité, on conclut le solénoïde doit avoir un rayon maximal de l'ordre du mm.

c. La quantité de mouvement totale du champ électromagnétique est $\vec{P}_{em} = \iiint_{\text{Espace}} \vec{\pi}_{em} dV = \iiint_{\text{Espace}} \epsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B}) dV$.

Pour $t > \tau$, on a $\vec{B} = \vec{0}$, donc $\vec{P}_{em}(t > \tau) = \vec{0}$.

Pour $t < 0$, on a $\vec{B} = \mu_0 n I_0 \vec{e}_z$ dans le volume intérieur du solénoïde et le champ \vec{E} est le champ créé par une charge ponctuelle : $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{CM}}{CM^3}$.

$$\text{Donc } \vec{P}_{em}(t < 0) = \iiint_{\text{Volume intérieur}} \epsilon_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{CM}}{CM^3} \wedge \mu_0 n I_0 \vec{e}_z dV = \frac{q\mu_0 n I_0}{4\pi} \left(\iiint_{\text{Volume intérieur}} \frac{\vec{CM}}{CM^3} dV \right) \wedge \vec{e}_z$$

En utilisant le résultat donné, il vient :
$$\vec{P}_{em}(t < 0) = \iiint_{\text{Volume int\'erieur}} \epsilon_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{CM}}{CM^3} \wedge \mu_0 n I_0 \vec{e}_z dV = \frac{q\mu_0 n I_0}{4\pi} \times \frac{-2\pi a^2}{d} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_z$$

, et finalement :

$$\vec{P}_{em}(t < 0) = \mu_0 q n \frac{a^2 I_0}{2d} \vec{e}_y$$

d. On constate que $\vec{P}_{em}(t < 0) = m \times \vec{v}(\tau)$: la quantité de mouvement initiale du champ électromagnétique est identique à celle de la particule en fin d'expérience.

La somme des quantités de mouvement de la particule et du champ est la même avant et après l'expérience, qui correspond donc à un transfert total de quantité de mouvement entre le champ et la particule : la variation de quantité de mouvement de la particule s'accompagne d'une variation opposée de celle du champ.

II. Energie et moment cinétique dans un système électromécanique

1. Mise en équation mécanique

a. Le moment cinétique de (Σ) est la somme des moments cinétiques de la masse et du cylindre. On a donc simplement $L_{z,mec} = I_{Oz}\omega + mav$, où $\vec{v} = -v\vec{e}_y$ est la vitesse de la masse. La condition de non-glissement du fil permet d'écrire $v = a\omega$, donc finalement :

$$L_{z,mec} = (I_{Oz} + ma^2)\omega$$

De même :

$$E_{c,mec} = \frac{1}{2}I_{Oz}\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(I_{Oz} + ma^2)\omega^2$$

b. Les actions extérieures exercées sur (Σ) sont :

- les actions d'axe, de moment nul par rapport à l'axe (absence de frottement)
- le poids du cylindre et de la masse.

Seul le poids de la masse m a un moment non nul par rapport à l'axe Oz , et on a

$$M_z = (\vec{Om} \wedge m\vec{g}) \cdot \vec{e}_z = mga$$

c. On applique le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Oz au système total (Σ) pour obtenir :

$M_z = \frac{dL_{z,mec}}{dt}$, donc $(I_{Oz} + ma^2)\frac{d\omega}{dt} = mga$, qui s'intègre directement en

$$\omega(t) = \frac{mga}{I_{Oz} + ma^2} t$$

2. Champ électromagnétique et moment induit.

a. La densité surfacique de charges sur le cylindre est $\sigma = \frac{Q}{2\pi a\ell_0}$ et la vitesse de ces charges est orthoradiale, et

vaut $a\omega$, on a donc $\vec{J}_S = \sigma \times a\omega \vec{e}_\theta$, soit :

$$\vec{J}_S = \frac{Q\omega}{2\pi\ell_0} \vec{e}_\theta$$

b. Le champ magnétique est le même que celui d'un solénoïde de n spires par unité de longueur parcourues par I et vérifiant $nl = J_S$.

On a donc (dans l'ARQP) :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \frac{Q\omega(t)}{2\pi\ell_0} \vec{e}_z \quad \text{si } \rho < a \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad \text{si } \rho > a.$$

c. On obtient les expressions du champ à partir des résultats de la question B.1.2.b. en remplaçant $n \frac{dI}{dt}$ par

$$\frac{dJ_S}{dt} = \frac{Q}{2\pi\ell_0} \frac{d\omega}{dt}, \text{ soit}$$

- pour $\rho < a$: $E(\rho, t) = -\mu_0 \frac{Q}{2\pi\ell_0} \frac{\rho}{2} \frac{d\omega}{dt}$;
- pour $\rho > a$: $E(\rho, t) = -\mu_0 \frac{Q}{2\pi\ell_0} \frac{a^2}{2\rho} \frac{d\omega}{dt}$.

d. Un élément de surface dA du cylindre est soumis à la force $d\vec{F} = \sigma \vec{E} dA = -\mu_0 \frac{Q}{2\pi\ell_0} \frac{a}{2} \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_\theta \sigma dA$, qui donne un moment par rapport à Oz : $dM_{z,el} = -\mu_0 \frac{Q}{2\pi\ell_0} \frac{a^2}{2} \frac{d\omega}{dt} \sigma dA$. On a donc, en intégrant sur toute la surface latérale du cylindre et en remarquant que $\iint \sigma dA = Q$:

$$I_{em} = \mu_0 \frac{Q^2 a^2}{4\pi\ell_0}.$$

Ce couple tend toujours à freiner la rotation du cylindre en conformité avec la **loi de Lenz** de l'induction électromagnétique.

e. Il s'agit du champ créé par un cylindre infini. Pour un tel cylindre, l'invariance par rotation autour de l'axe Oz , ainsi que l'invariance par translation parallèle à Oz fait que le potentiel électrostatique en coordonnées cylindriques ne fait intervenir que la distance à l'axe : il s'écrit sous la forme $V(\rho)$. Par conséquent, en tout

point, on peut écrire $\vec{E} = -\frac{dV}{d\rho} \vec{e}_\rho = E(\rho) \vec{e}_\rho$. Le flux de \vec{E} à travers une surface cylindrique de hauteur h et de

rayon ρ est donc : $E(\rho) \times 2\pi\rho h$, et la charge intérieure à cette surface est nulle si $\rho < a$ et vaut $\frac{Qh}{\ell_0}$ si $\rho > a$. On

en déduit, en appliquant le théorème de Gauss :

- pour $\rho < a$: $E_{stat}(\rho) = 0$;
- pour $\rho > a$: $E_{stat}(\rho) = \frac{Q}{\ell_0} \times \frac{1}{2\pi\epsilon_0\rho}$.

Le champ associé étant radial, le moment de ses actions relativement à l'axe est nul et le champ statique ne contribue pas au moment des forces électriques relativement à Oz .

3. Grandeurs mécaniques associées au champ électromagnétique.

a. Le théorème du moment cinétique appliqué au système (Σ) devient : $\frac{dL_{z,mec}}{dt} = M_z + M_{z,elec}$, avec

$$M_{z,elec} = -I_{em} \frac{d\omega}{dt}. \text{ On peut donc bien écrire } \boxed{M_z = \frac{d}{dt}(L_{z,mec} + L_{z,em})}, \text{ avec } L_{z,em} = I_{em}\omega.$$

$L_{z,em}$ apparaît donc comme **un moment cinétique supplémentaire**, associé au champ électromagnétique. Le moment du poids a pour effet de modifier la *somme* des moments cinétiques du système matériel et du champ électromagnétique.

b. Le moment cinétique total est $\vec{L}_{em} = \iiint_{espace} \varepsilon_0 \vec{r} \wedge (\vec{E}_{total} \wedge \vec{B}) dV$. La contribution du champ induit orthoradial

est :

$$\vec{L}_{em}' = \iiint_{espace} \varepsilon_0 \vec{r} \wedge (E(\rho,t) \vec{e}_\theta \wedge B \vec{e}_z) dV = \iiint_{espace} \varepsilon_0 E(\rho,t) B \vec{r} \wedge \vec{e}_\rho dV = \iiint_{espace} \varepsilon_0 E(\rho,t) B z \vec{e}_\theta dV.$$

Mais, à ρ et z donnés, deux éléments de volumes diamétralement opposés ont des vecteurs \vec{e}_θ opposés : leurs contributions s'annulent et on peut affirmer

$$\boxed{\vec{L}_{em}' = \iiint_{espace} \varepsilon_0 \vec{r} \wedge (E(\rho,t) \vec{e}_\theta \wedge B \vec{e}_z) dV = \vec{0}.$$

c. La contribution du champ statique \vec{E}_{stat} est $\vec{L}_{em} = \iiint_{espace} \varepsilon_0 \vec{r} \wedge (\vec{E}_{stat} \wedge \vec{B}) dV$.

En négligeant les effets de bord pour tous les points intérieur au cylindre, on peut considérer le champ électrostatique est nul dans le cylindre et ne garder que la contribution à l'intégrale de la région extérieure au solénoïde, pour laquelle on a :

$$\vec{E}_{stat} = \frac{Q}{\ell_0 2\pi \varepsilon_0} \times \frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho.$$

$$\text{Il vient donc : } \vec{L}_{em} \cdot \vec{e}_z = \iiint_{extérieur} \varepsilon_0 \left[\vec{r} \wedge \left(\frac{Q}{\ell_0} \times \frac{1}{2\pi \varepsilon_0 \rho} \vec{e}_\rho \wedge \vec{B} \right) \right] \cdot \vec{e}_z dV = \frac{Q}{2\pi \ell_0} \vec{e}_z \cdot \mu_0 J_S \pi a^2 \ell_0 \vec{e}_z,$$

où l'on a utilisé le résultat donné en remplaçant nI par J_S .

(Bien que les effets de bord aient été négligés à l'intérieur du cylindre, la situation est différente à l'extérieur : l'intégrale portant sur l'ensemble des points de l'espace, le cylindre ne peut pas être considéré infini et le champ magnétique est non nul.)

$$\text{Finalement : } \boxed{\vec{L}_{em} \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{4\pi \ell_0} \omega.}$$

On retrouve bien $L_{z,em} = \vec{L}_{em} \cdot \vec{e}_z$, ce qui confirme l'interprétation qualitative du 3.a.

d. L'énergie magnétique stockée est : $W_{mag} = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{1}{2} \mu_0 J_S^2 \times \pi a^2 \ell_0 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 Q^2 a^2}{4\pi \ell_0} \omega^2$. On a donc bien :

$$\boxed{W_{mag} = \frac{1}{2} I_{em} \omega^2.}$$

e. Dérivons la quantité $E = mgy + E_{c,mec} + W_{mag}$ par rapport au temps :

$$\frac{dE}{dt} = mgv + (I_{Oz} + ma^2)\omega \frac{d\omega}{dt} + I_{em}\omega \frac{d\omega}{dt}.$$

Or, $v = -a\omega t$ $mgv = M_z$. Par conséquent, d'après 3.a., on a $\frac{dE}{dt} = 0$. La quantité $E = mgy + E_{c,mec} + W_{mag}$ est constante.

La quantité E peut évidemment être interprétée comme l'énergie totale du système, comprenant :

- l'énergie cinétique du système matériel $E_{c,mec}$;
- l'énergie potentielle du système matériel mgy ;
- l'énergie électromagnétique (ici essentiellement sous forme magnétique car on se place dans l'ARQP) W_{mag} .

L'expérience peut donc être interprétée comme un transfert d'énergie : l'énergie potentielle de (Σ) est transformée en énergie cinétique et en énergie électromagnétique mais la somme de ces trois énergies reste constante.

III. Transfert de quantité de mouvement par une onde électromagnétique.

1. Réflexion d'une onde plane sur un plan conducteur parfait.

a. Dans un conducteur parfait, les champs magnétique et électrique sont uniformément nuls.

On sait par ailleurs que la composante tangentielle de \vec{E} et la composante normale de \vec{B} sont continues au passage par une surface quelconque. Par conséquent, on aura, en $z = 0^-$:

$$\boxed{E_x(z = 0^-, t) = E_y(z = 0^-, t) = 0} \text{ et } \boxed{B_z(z = 0^-, t) = 0}.$$

b. Du côté $z = 0^-$, on obtient la somme de deux ondes, incidente et réfléchie dont les champs sont, en utilisant la relation de structure d'onde plane progressive :

- pour l'onde incidente : $\vec{E}_{inc} = E_0 \exp(j(\omega t - kz)) \vec{e}_x$; $\vec{B}_{inc} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}_{inc}}{c} = \frac{E_0}{c} \exp(j(\omega t - kz)) \vec{e}_y$;
- pour l'onde réfléchie : $\vec{E}_{ref} = E_{0r} \exp(j(\omega t + kz)) \vec{e}_x$; $\vec{B}_{ref} = \frac{-\vec{e}_z \wedge \vec{E}_{inc}}{c} = -\frac{E_{0r}}{c} \exp(j(\omega t + kz)) \vec{e}_y$.

La condition $E_x(z = 0^-, t) = 0$ conduit à $E_{0r} = -E_0$, et les champs résultants sont immédiatement

$$\vec{E} = -2jE_0 \sin(kz) e^{j\omega t} \vec{e}_x ; \vec{B} = 2\frac{E_0}{c} \cos(kz) e^{j\omega t} \vec{e}_y.$$

Les champs réels sont donc

$$\boxed{\vec{E} = 2E_0 \sin(kz) \sin(\omega t) \vec{e}_x ; \vec{B} = 2\frac{E_0}{c} \cos(kz) \cos(\omega t) \vec{e}_y}.$$

c. La densité de courant de surface est déterminée par la condition de passage du champ magnétique :

$$\vec{B}(z = 0^+, t) - \vec{B}(z = 0^-, t) = \mu_0 \vec{J}_S \wedge \vec{e}_z,$$

qui conduit par identification immédiate à

$$\boxed{\vec{J}_S(t) = 2\frac{E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{e}_x}.$$

2. Pression de radiation.

a. En ordre de grandeur $\frac{\|\vec{J}\|}{\left\|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\|} \sim \frac{\gamma \|\vec{E}\|}{\varepsilon_0 \omega \|\vec{E}\|} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega}$. Le courant de déplacement peut donc être négligé si la

conductivité vérifie $\frac{\gamma}{\varepsilon_0} \gg \omega$.

b. Dans le conducteur, on a $\vec{E} = E(z,t)\vec{e}_x$ (le métal étant isotrope, il ne peut y avoir de changement de polarisation au passage par l'interface vide-métal). L'équation de Maxwell-Faraday conduit donc à $j\omega\vec{B} = \text{rot}\vec{E} = \frac{\partial E}{\partial z}\vec{e}_y$, et le champ \vec{B} est bien de la forme

$$\vec{B} = B(z,t)\vec{e}_y.$$

c. La force volumique magnétique dans le conducteur est simplement la force de Laplace :

$$\vec{f}_{Lap} = \vec{J} \wedge \vec{B}.$$

Mais l'équation de Maxwell-Ampère dans laquelle on a négligé le terme de déplacement donne

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot}\vec{B} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_x \quad \text{et donc} \quad \vec{f}_{Lap} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial z} B \vec{e}_z.$$

La force totale qui s'exerce sur une surface S de conducteur est donc

$$\vec{F} = \int_{0^+}^{+\infty} -\frac{1}{\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial z} S dz \vec{e}_z = \int_{0^+}^{+\infty} -\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial z} S dz \vec{e}_z = -\frac{S}{2\mu_0} [0 - B^2(0^+, t)] \vec{e}_z.$$

Comme il n'y a pas, dans cette modélisation, de densité surfacique de courant, on a $B(0^-, t) = B(0^+, t)$ et la

force par unité de surface est $P_{rad} = \frac{\|\vec{F}\|}{S} = \frac{B^2(0^-, t)}{2\mu_0}$.

d. Il suffit d'appliquer la relation précédente, avec $B(0^-, t) = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t)$, donc $P_{rad} = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t)$. En valeur

moyenne : $\langle P_{rad} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0 E_0^2$.

Or on sait que $I_{inc} = \langle \|\vec{\Pi}_{inc}\| \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} c$, donc $\langle P_{rad} \rangle = \frac{2I_{inc}}{c}$.

e. La force moyenne subie est $\langle F_{rad} \rangle = \langle P_{rad} \rangle S = \frac{2I_{inc}}{c} \times S = \frac{2 \langle p_{Laser} \rangle}{c}$. Numériquement

$$\langle F_{rad} \rangle = 6,7 \times 10^{-12} \text{ N}.$$

Cette force est très faible, donc extrêmement difficile à mettre en évidence avec un laser délivrant une aussi petite puissance, du même ordre de grandeur que celle qui est délivrée par les lasers couramment disponibles en lycée.

3. Interprétation corpusculaire

a. Prenons comme système mécanique le système (Σ) fermé formé des particules qui frappent une surface S du plan $z = 0$ pendant dt . Ces particules se trouvent dans le cylindre de base S et de hauteur vdt : il y en a donc $dn = nvdtS$. Durant le choc, chacune de ces particules voit sa quantité de mouvement varier de $\Delta \vec{p} = -2p\vec{e}_z$. Pendant dt , la quantité de mouvement de (Σ) varie donc de $d\vec{P} = -nvdtS \times 2p\vec{e}_z$. Le théorème de la résultante cinétique appliqué à (Σ) s'écrit :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{S \rightarrow (\Sigma)} = -\vec{F}_{(\Sigma) \rightarrow S}.$$

Par conséquent, la force exercée par les particules sur la paroi est :

$$\vec{F}_{(\Sigma) \rightarrow S} = -\frac{d\vec{P}}{dt} = 2nvpS\vec{e}_z.$$

La pression cinétique est donc

$$P_{cin} = \frac{\|\vec{F}_{(\Sigma) \rightarrow Paroi}\|}{S} = 2nvp.$$

b. La puissance moyenne incidente par unité de surface est évidemment :

$$I_{cin} = nv\varepsilon.$$

En effet, il y a nv particules par unité de temps qui traversent une unité de surface et chacune transporte l'énergie ε .

c. L'identification de la pression de radiation entre les deux modèles donne

$$\varepsilon_0 E_0^2 = 2nvp ;$$

l'identification de la densité d'énergie moyenne conduit à

$$\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = n\varepsilon ;$$

enfin, l'identification de la puissance transportée conduit à

$$\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} c = nv\varepsilon.$$

On déduit aisément de ces trois équations :

$$v = c \quad \text{et} \quad \frac{p}{\varepsilon} = \frac{1}{c}.$$

d. En mécanique non relativiste, on a $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$ et donc $\frac{p}{\varepsilon} = \frac{2}{v}$ alors qu'ici il faut $\frac{p}{\varepsilon} = \frac{1}{v}$. Cela est donc impossible.

La masse de la particule est déterminée par la relation du triangle des énergies : $m^2c^4 = E^2 - p^2c^2 = 0$. Les photons ont **donc nécessairement une masse nulle**.

IV. Transfert de moment cinétique. Forces de diffusion.

1. Rayonnement dipolaire : dipôle de direction fixe.

a. Pour un doublet de charges porté par l'axe Oz , un plan $\varphi = Cste$ contenant le point M est un plan de symétrie des sources : le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ est perpendiculaire à ce plan, donc, selon \vec{e}_φ . Du fait de l'invariance par rotation autour de Oz , on peut donc écrire :

$$\vec{B}(M,t) = B(r,\theta,t) \vec{e}_\varphi.$$

Le champ en un point M à la distance r du dipôle dépend des valeurs des dérivées du dipôle à l'instant antérieur $t - \frac{r}{c}$, qui correspond à un **décalage de propagation à la vitesse c** .

b. En ordre de grandeur les deux termes sont

$$T_{-2} = \frac{1}{r^2} \frac{dp}{dt}(t-r/c) \sim \frac{p_0 \omega}{r^2}; T_{-1} = \frac{1}{rc} \frac{d^2p}{dt^2}(t-r/c) \sim \frac{p_0 \omega^2}{rc}.$$

On veut $T_{-2}/T_{-1} \leq 10^{-2}$, donc $\frac{c}{r\omega} \leq 10^{-2}$ et finalement, il faut : $r \geq 100 \frac{c}{\omega}$.

c. Le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ est déterminé par la relation de structure locale d'onde plane : $\vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{e}_r$, soit :

$$\vec{E}(M,t) = -\frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{4\pi} p_0 \omega^2 \frac{1}{r} \cos(\omega(t-r/c)) \vec{e}_\theta.$$

d. Le vecteur de Poynting moyen est alors simplement (en notant que $\langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle = \frac{1}{2}$:

$$\langle \vec{S}(M,t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{(4\pi)^2 cr^2} p_0^2 \omega^4 \vec{e}_r.$$

La puissance moyenne $\langle P_{ray} \rangle$ est : $\langle P_{ray} \rangle = \oint_{Sphère} \langle \vec{S}(M,t) \rangle \cdot \vec{e}_r = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{(4\pi)^2 c} p_0^2 \omega^4 \times 2\pi \sin \theta d\theta$. Le calcul

donne aisément : $\langle P_{ray} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$.

Le résultat obtenu pour $\langle P_{ray} \rangle$ est indépendant de R du fait de la **conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide** : la puissance moyenne qui traverse une sphère de rayon R est la même que celle qui traverse une sphère de rayon $R' > R$: aucune puissance n'est perdue dans la propagation de R à R' .

2. Rayonnement créé par un dipôle tournant.

a. Le dipôle constitué par les deux charges a pour expression $\vec{p} = -e\vec{OM} = -ea \cos(\omega t) \vec{e}_x - ea \sin(\omega t) \vec{e}_y$. C'est la somme des deux moments dipolaires :

$$\vec{p}_1(t) = -ea \cos(\omega t) \vec{e}_x \text{ et } \vec{p}_2(t) = -ea \sin(\omega t) \vec{e}_y.$$

Les équations de Maxwell étant linéaires, les champs créés par chacun de ces dipôles **se superposent** pour donner le champ recherché.

b. Chacun des dipôles définit son système d'axes et de coordonnées sphériques (r, θ_i, φ_i) .

(i) Au point A de coordonnées : $x = r, y = z = 0$, on a $\theta_1 = 0; \theta_2 = \frac{\pi}{2}; \vec{e}_{\theta_2} = -\vec{e}_y$, donc, en utilisant le résultat du 1.c en remplaçant p_0 par $-ea$:

$$\vec{E}(A,t) = -ea \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi} \frac{1}{r} \sin(\omega(t-r/c)) \vec{e}_y.$$

L'onde est alors **polarisée Rectilignement** selon \vec{e}_y .

(ii) Au Point D , de coordonnées $x = y = 0, z = r$, on a $r_1 = r_2 = r$; $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$; $\vec{e}_{\theta_1} = -\vec{e}_x$; $\vec{e}_{\theta_2} = -\vec{e}_y$, donc

$$\vec{E}(D, t) = -ea \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 \frac{1}{r} \left(\cos(\omega(t - r/c)) \vec{e}_x + \sin(\omega(t - r/c)) \vec{e}_y \right).$$

L'onde plane locale se propageant selon \vec{e}_z , il s'agit d'une

polarisation Circulaire Gauche.

(iii) Au point F , le champ a la même expression qu'en D :

$$\vec{E}(F, t) = -ea \frac{\mu_0}{4\pi} \omega^2 \frac{1}{r} \left(\cos(\omega(t - r/c)) \vec{e}_x + \sin(\omega(t - r/c)) \vec{e}_y \right).$$

Mais l'onde plane locale se propage en ce point dans la direction $-\vec{e}_z$: il s'agit d'une

polarisation Circulaire Droite

c. On peut écrire $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \rangle = \langle \vec{S}_1 \rangle + \langle \vec{S}_2 \rangle + \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E}_1 \wedge \vec{B}_2 \rangle + \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E}_2 \wedge \vec{B}_1 \rangle$.

Mais les ondes 1 et 2 sont en quadrature de phase en tout point, donc $\langle \vec{E}_1 \wedge \vec{B}_2 \rangle = \langle \vec{E}_2 \wedge \vec{B}_1 \rangle = \vec{0}$ et on a bien:

$$\langle \vec{S} \rangle = \langle \vec{S}_1 \rangle + \langle \vec{S}_2 \rangle.$$

d. La puissance moyenne totale rayonnée est donc la somme des deux puissances totales rayonnées, qui sont égales et on peut utiliser le résultat du 1.d, avec $p_0 = -ea$:

$$\langle P_t \rangle = 2 \times \frac{\mu_0 \omega^4 a^2 e^2}{12\pi c} = \frac{\mu_0 \omega^4 a^2 e^2}{6\pi c}$$

3. Force et couple de diffusion.

a. La composante selon \vec{e}_y est en quadrature retard par rapport à la composante selon x et possède la même norme, donc, il s'agit d'une **polarisation circulaire gauche**.

Le champ magnétique est donné par la relation de structure d'onde plane:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{e}_z \wedge \vec{E} = \frac{E_0}{c\sqrt{2}} (\vec{e}_y + j\vec{e}_x) e^{j(\omega t - kz)}$$

En ordre de grandeur, le rapport de la force électrique et de la force magnétique exercées par l'onde sur la charge

est: $\frac{\| -e\vec{v} \wedge \vec{B} \|}{\| -e\vec{E} \|} \sim \frac{v}{c}$. Dans l'approximation non relativiste, ce rapport est donc très inférieur à 1 et **on peut**

négliger la force magnétique devant la force électrique.

b. L'équation du mouvement de l'électron est: $m_e \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e\vec{E}(\vec{r}, t) - m_e \omega_0^2 \vec{r} + \alpha m_e \frac{d^3 \vec{r}}{dt^3}$.

Comme la longueur d'onde est beaucoup plus grande que les dimensions de l'atome, on peut considérer:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \cong \vec{E}(\vec{0}, t).$$

En passant à la représentation complexe, on obtient alors: $\vec{r}(\omega_0^2 - \omega^2 + j\alpha\omega^3) = -\frac{e}{m_e} \vec{E}$, soit:

$\vec{r} = -\frac{e}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\alpha\omega^3} \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x - j\vec{e}_y) e^{j\omega t}$ et, en tenant compte de la condition $\omega \ll \omega_0$ et, au premier ordre

en $\frac{\alpha\omega^3}{\omega_0^2}$:

$$\vec{r} = -\frac{e}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{j\alpha\omega^3}{\omega_0^2} \right) \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x - j\vec{e}_y) e^{j\omega t}$$

c. La puissance moyenne de la force d'Abraham-Lorentz est donnée par

$$\langle P_{AL} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\alpha m_e \frac{d^3 \vec{r}}{dt^3} \cdot \frac{d\vec{r}^*}{dt} \right) = -\frac{\alpha m_e \omega^4}{2} \operatorname{Re}(\vec{r} \cdot \vec{r}^*).$$

Comme on se contente du premier ordre en α , on peut prendre pour expression approchée :

$$\vec{r} = -\frac{e}{m_e} \frac{1}{\omega^2} \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x - j\vec{e}_y) e^{j\omega t} \text{ et finalement :}$$

$$\langle P_{AL} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\alpha m_e \frac{d^3 \vec{r}}{dt^3} \cdot \frac{d\vec{r}^*}{dt} \right) = -\frac{\alpha \omega^4 e^2}{2 m_e \omega_0^4} E_0^2.$$

La particule décrit un cercle de rayon $a = \|\vec{r}\| \cong \frac{eE_0}{m_e \omega_0^2 \sqrt{2}}$ et la puissance totale rayonnée est

$$\langle P_t \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 a^2 e^2}{6\pi c} = \frac{\mu_0 \omega^4 e^4 E_0^2}{12\pi c m_e^2 \omega_0^4}. \text{ En identifiant cette puissance à la puissance dissipée par la force d'Abraham-Lorentz : } \langle P_{AL} \rangle = -\langle P_t \rangle, \text{ il vient bien}$$

$$\alpha = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c m_e}.$$

d. La force magnétique moyenne est $\langle \vec{F}_{mag} \rangle = \langle -e\vec{v} \wedge \vec{B} \rangle = -e \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{v} \wedge \vec{B}^*)$. Il vient alors après un calcul

$$\text{simple : } \langle \vec{F}_{mag} \rangle = e^2 \frac{\alpha \omega^4}{2 m_e c \omega_0^4} E_0^2 \vec{e}_z, \text{ soit :}$$

$$\langle \vec{F}_{mag} \rangle = -\frac{\langle P_{AL} \rangle}{c} \vec{e}_z.$$

e. Le dipôle est soumis au couple électrique: $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$, soit ici $\vec{\Gamma} = -e\vec{r} \wedge \vec{E}$ et , en valeur moyenne :

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = \frac{1}{2} \times -e \operatorname{Re}(\vec{r} \wedge \vec{E}^*) = \frac{\alpha e^2 \omega^3}{2 m_e \omega_0^4} E_0^2 \vec{e}_z, \text{ qui s'écrit simplement}$$

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = -\frac{\langle P_{AL} \rangle}{\omega} \vec{e}_z.$$

f. (i) Si l'onde incidente était polarisée circulairement dans l'autre sens que le précédent , on aurait

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + j\vec{e}_y) e^{j(\omega t - kz)}. \text{ Le produit vectoriel } \vec{r} \wedge \vec{E}^* \text{ qui intervient dans le calcul de la valeur moyenne serait}$$

alors proportionnel à $(\vec{e}_x + j\vec{e}_y) \wedge (\vec{e}_x - j\vec{e}_y) = -2j\vec{e}_z$ (alors qu'il est proportionnel à $2j\vec{e}_z$ dans le cas précédent). On aurait donc un couple de même norme mais de sens opposé

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = +\frac{\langle P_{AL} \rangle}{\omega} \vec{e}_z.$$

(ii) Si l'onde incidente est polarisée rectilignement, le vecteur position de l'électron et le champ électrique de l'onde sont colinéaires en régime permanent, et le couple résultant est donc nul

$$\langle \vec{\Gamma} \rangle = \vec{0}.$$

4. Interprétation corpusculaire et moment cinétique intrinsèque du photon.

a. La puissance rayonnée est égale à la puissance absorbée, donc au nombre de photons absorbés par unité de temps, multiplié par l'énergie de chaque photon :

$$\langle P_t \rangle = N_{abs} \varepsilon.$$

b. Chaque photon absorbé transfère la quantité de mouvement $\vec{p} = p\vec{e}_z$. On a donc une quantité de mouvement transférée par unité de temps $N_{abs}p\vec{e}_z$. Ce transfert correspond à une force exercée qui est la force d'origine magnétique (dirigée selon \vec{e}_z)

$$\langle \vec{F}_{mag} \rangle = N_{abs}p\vec{e}_z.$$

On a alors $\langle \vec{F}_{mag} \rangle = \frac{p}{\varepsilon} \langle P_t \rangle \vec{e}_z = -\frac{p}{\varepsilon} \langle P_{AL} \rangle \vec{e}_z$. Or nous avons montré en 3.d que $\langle \vec{F}_{mag} \rangle = -\frac{1}{c} \langle P_{AL} \rangle \vec{e}_z$.

On retrouve donc bien $\frac{p}{\varepsilon} = \frac{1}{c}$.

c. De la même façon, en identifiant le transfert de moment cinétique par unité de temps au couple subi, on aura $\langle \vec{\Gamma} \rangle = N_{abs} \vec{\ell}$, donc :

$$\vec{\ell} = \frac{\langle \vec{\Gamma} \rangle}{N_{abs}}.$$

Nous avons vu par ailleurs que $\langle \vec{\Gamma} \rangle = \frac{\langle P_t \rangle}{\omega} \vec{e}_z = \frac{N_{abs}\varepsilon}{\omega} \vec{e}_z$. On a donc

$$\vec{\ell} = \frac{\varepsilon}{\omega} \vec{e}_z.$$

d. Pour une polarisation de sens opposé (circulaire droite) le moment est changé de sens, donc

$$\vec{\ell} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \vec{e}_z.$$

Pour une polarisation rectiligne, le couple est nul, donc

$$\vec{\ell} = \vec{0}.$$

5. Mise en rotation de particules biréfringentes par transfert de moment cinétique.

a. Un matériau biréfringent est un matériau diélectrique linéaire anisotrope dans lequel la relation entre le vecteur déplacement et le champ électrique dépend de la direction du champ électrique. Dans ces conditions, l'indice de réfraction dépend de la direction de propagation et de la polarisation de la lumière.

Une onde lumineuse traversant une lame biréfringente change, en général, d'état polarisation au cours de la propagation dans la lame. Cependant, si l'onde est polarisée rectilignement parallèlement à une des lignes neutres, elle se propage en restant polarisée rectilignement dans la même direction.

Pour obtenir une onde polarisée circulairement à partir d'une onde polarisée rectilignement, il faut utiliser une lame « quart d'onde » et placer la direction de polarisation incidente à 45° ou 135° relativement aux lignes neutres de la lame.

Le grain de calcite considéré dans l'expérience se comporte comme une lame demi - onde : un rayonnement polarisé circulairement est transformé, après traversée de la lame, en un rayonnement de polarisation circulaire en sens inverse.

b. Le grain de calcite change le sens de polarisation de la lumière ; il provoque donc un changement de moment cinétique de celle-ci : cette variation de moment cinétique s'accompagne d'un couple subi en retour par le grain de calcite.

Dans le modèle corpusculaire développé ci-dessus, le moment cinétique de chaque photon incident passe de $\vec{\ell}$ à $-\vec{\ell}$. Si N particules traversent le grain de calcite par unité de temps, le grain sera soumis à un couple opposé à celui reçu par les photons, c'est-à-dire

$$\vec{\Gamma} = -N\Delta\vec{\ell} = 2N\vec{\ell}$$

Le vecteur rotation des grains de calcite est dans le même sens que $\vec{\Gamma}$. Expérimentalement, on constate sur les photographies que la rotation s'effectue dans le sens de $-\vec{u}$. Donc $\vec{\ell}$ est de sens opposé à \vec{u} :

l'onde utilisée dans l'expérience est polarisée circulairement à droite

c. La puissance P_0 transportée par le laser exciteur est proportionnelle à N : si on la double, le couple est doublé, puisque chaque corpuscule transporte un moment cinétique indépendant de la puissance du faisceau.

d. L'eau exerce sur le grain un couple de frottement dont la norme augmente avec Ω . Si le grain est initialement immobile, il se met à tourner sous l'effet du couple de rayonnement. Au fur et à mesure que la vitesse de rotation augmente, le couple de frottement augmente également jusqu'à ce qu'il compense exactement le couple de rayonnement : la vitesse de rotation se stabilise alors à sa valeur de régime permanent.

En prenant une longueur caractéristique $d \sim 10\mu m$, la vitesse caractéristique est $U \sim \Omega d$ et le nombre de Reynolds adapté à la situation est $Re = \frac{Ud}{\nu} \sim \rho \frac{\Omega d^2}{\eta}$. On lit sur les photographies $\Omega \sim \frac{\pi}{400 \times 10^{-3}} \sim 10 \text{ rad.s}^{-1}$,

donc $Re \sim 1000 \frac{10 \times 10^{-10}}{10^{-3}} = 10^{-3} \ll 1$. On est donc dans un régime de très faible nombre de Reynolds.

Dans ce cas, on peut s'attendre à ce que le couple de frottement soit simplement proportionnel en norme à la vitesse angulaire (de même que la force de frottement est proportionnelle à la vitesse globale de déplacement dans la formule de Stokes).

La vitesse angulaire de régime permanent doit donc être approximativement proportionnelle au couple exercée par le rayonnement, qui lui-même est proportionnel à P_0 , donc

la vitesse angulaire doit être proportionnelle à P_0 .

De façon dimensionnelle, on peut prévoir que le couple de frottement sera de l'ordre de $\Gamma_{frott} \sim \eta d^3 \Omega$ et le

couple de rayonnement : $\Gamma = 2N\ell \sim \frac{2P_0\varepsilon}{\omega} = \frac{2P_0}{2\pi c} \lambda \sim \frac{P_0\lambda}{c}$. On aura donc : $\eta d^3 \Omega \sim \frac{P_0\lambda}{c}$, soit

$$P_0 \sim \frac{c\eta d^3 \Omega}{\lambda} = \frac{10^8 \times 10^{-3} \times 10^{-15} \times 10}{10^{-6}} \sim 10^{-3} \text{ W}.$$

L'ordre de grandeur est compatible avec l'expérience : il suffit qu'une petite fraction (de l'ordre du %) de la puissance totale émise par la diode parvienne sur le grain, ce qui semble raisonnable.

e. Une lame demi-onde modifie une onde polarisée rectilignement en une onde polarisée rectilignement dont le plan de polarisation est symétrique de celui de l'onde incidente par rapport aux lignes neutres de la lame.

Si le laser exciteur est polarisé rectilignement, une lame demi-onde n'effectue aucune variation de moment cinétique de l'onde, puisque ce dernier est nul pour l'onde incidente et également nul pour l'onde émergente. La particule est donc soumise à un couple nul.

f. Pour une lame d'épaisseur quelconque, le couple subi lorsque l'onde incidente est polarisée parallèlement à une ligne neutre est nul puisque l'onde reste polarisée rectilignement en sortie.

On peut comprendre les résultats proposés en admettant que le grain de calcite n'est pas exactement une lame demi-onde : lorsque le laser incident est polarisé rectilignement, le grain est soumis à un couple (puisque l'état de polarisation en sortie n'est en général pas rectiligne et possède un moment cinétique), tant que la direction de polarisation est différente de la direction de l'une des lignes neutres.

C. Les preuves expérimentales de l'existence du photon

I. Effet photoélectrique

1. Principe et interprétation corpusculaire

a. La conservation de l'énergie mécanique du système photon + électron donne, écrite avant et après extraction de l'électron (qui possède une énergie potentielle $-\Phi_{ext}$ à l'intérieur du métal et une énergie potentielle nulle lorsqu'il se trouve au voisinage extérieur immédiat de la cathode):

$$\varepsilon - \Phi_{ext} = E_c.$$

(i) La conservation de l'énergie mécanique d'un électron entre le moment où il est émis avec l'énergie cinétique E_c et celui où il parvient à l'anode avec l'énergie cinétique E'_c est :

$$E'_c - eU = E_c.$$

Pour que l'électron parvienne à l'anode, il faut donc $E_c \geq -eU$, soit

$$U \geq -\frac{E_c}{e} = \frac{\Phi_{ext} - \varepsilon}{e} = -U_0.$$

(ii) On en déduit $\varepsilon = eU_0 + \Phi_{ext} = ae(f - f_0) + \Phi_{ext}$. Cette relation devant être vérifiée à toute fréquence f et Φ_{ext} étant indépendant de f (c'est une caractéristique du métal), on a nécessairement : $\varepsilon = aef + K$ et $\Phi_{ext} = aef_0 + K$ où K est une constante indéterminée ; on obtient donc bien que l'énergie d'un photon peut être reliée à la fréquence par $\varepsilon = Hf$, cette expression correspondant à une constante K nulle. Le coefficient H est nécessairement :

$$H = a \times e$$

(iii) Dans ce cas, nous avons également : $\Phi_{ext} = aef_0$, soit numériquement : $\Phi_{ext} = 1,36 \text{ eV}$.

b. L'intensité est proportionnelle au nombre d'électrons photoémis effectivement captés par l'anode, par unité de temps. Aux grandes valeurs de U , tous les électrons photoémis sont captés par l'anode, ce qui donne une intensité indépendante de U .

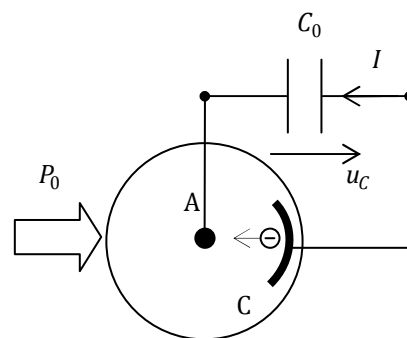
Le nombre d'électrons photoémis par unité de temps (et donc l'intensité du photocourant de saturation) est proportionnel au nombre de photons incidents sur la cathode, lui-même proportionnel à P_0 .

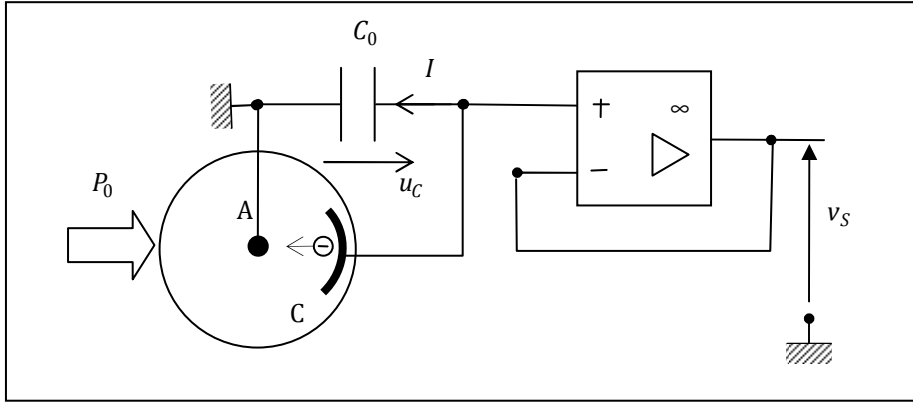
c. Cette interprétation est due à Einstein, dans une publication de 1905.

Elle a été testée expérimentalement par Millikan, qui ne croyait pas initialement à l'interprétation d'Einstein.

2. Réalisation expérimentale en travaux pratiques.

a. Initialement, la tension $u_c = -U$ aux bornes du condensateur est nulle : l'intensité I est donc positive, ce qui fait augmenter la tension u_c et diminuer U (car $\frac{du_c}{dt} = \frac{I}{C_0}$), donc également I (cf. Fig. 5b). Cela se poursuit jusqu'à ce que $I = 0$ et $U = -U_0$.





En assimilant la caractéristique $I(U)$ entre $U = -U_0$ et $U = 0$ à une droite de pente $\frac{1}{R_d} \cong \left(\frac{dI}{dU}\right)(-U_0)$, on est en présence de la charge d'un condensateur sous une tension U_0 à travers une résistance R_d , de constante de temps $\tau = R_d C_0$.
Numériquement, on a $\tau = 0,1\text{s}$.

b. Supposons que l'on branche un oscilloscope d'impédance d'entrée R_e aux bornes de la capacité (qui est donc en parallèle à celle-ci). En régime permanent, le voltmètre mesure en fait u_c , donnée par $u_c = \frac{R_e}{R_d + R_e} U_0$. On doit donc avoir $R_e \gg R_d$ si l'on veut effectivement mesurer U_0 .
C'est **impossible avec un oscilloscope usuel** dont la résistance d'entrée est de l'ordre du $M\Omega$.

c. On peut résoudre le problème à l'aide du montage suiveur indiqué ci-dessous. Ce montage convient car l'impédance d'entrée de l'A.O. est cent fois supérieure à R_d : la tension lue v_S est bien égale à U_0 , à 1% près.

3. Une interprétation sans photons

a. L'hamiltonien utilisé modélise l'interaction entre le champ et l'atome par une énergie potentielle d'interaction dipolaire

$$E_{\text{pint}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

avec $\vec{p} = -e\vec{r}$ et $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$, on a bien, pour $t > 0$, une énergie potentielle $E_{\text{pint}} = eE_0 \cos(\omega t)x$, associée à l'opérateur $\hat{V}_{\text{pert}} = eE_0 \hat{x} \cos(\omega t)$.

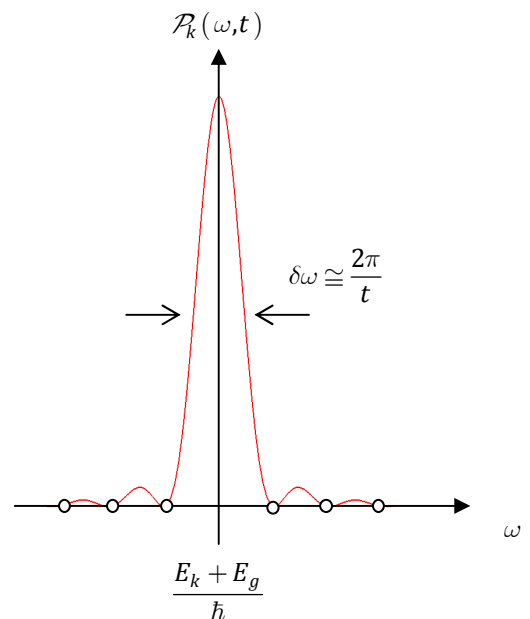
Pour $t < 0$, il n'y a pas de perturbation et $\hat{V}_{\text{pert}} = 0$.

b. La fonction $\mathcal{R}_k(\omega, t)$ est très classique (on la rencontre notamment en optique dans la théorie de la diffraction par une fente). Sa représentation graphique est donnée ci-contre. Il s'agit d'un pic centré en $\omega_{kg} = \frac{E_k + E_g}{\hbar}$, de largeur $\delta\omega$ de l'ordre de $\frac{2\pi}{t}$.

Pour avoir $\delta\omega / \omega_{kg} < 0,01$, il faut attendre

$$t_H = \frac{200\pi}{\omega_{kg}} \sim 10^{-12}\text{s},$$

en prenant une pulsation de transition de l'ordre de $10^{15}\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (ordre de grandeur des pulsations dans le domaine visible).



c. On voit donc que la probabilité $\mathcal{P}_k(\omega, t)$ est pratiquement nulle pour $\omega < \frac{E_g}{\hbar} - \delta\omega \cong \frac{E_g}{\hbar}$, après un temps supérieur à (ou de l'ordre de) t_H . On a donc bien un effet de seuil et on ne pourra exciter un photo-électron que si

$$f > f_0 = \frac{E_g}{h}.$$

d. La probabilité d'observer une ionisation de l'atome est la somme des probabilités d'exciter l'électron dans l'un des états ionisés k :

$$\mathcal{P}_d(\omega, t) = \sum_k \mathcal{P}_k(\omega, t) = \int_0^\infty \rho(E_k) \mathcal{P}_k(\omega, t) dE_k,$$

où l'on a tenu compte du fait que les états ionisés forment un quasi-continuum et remplacé la somme discrète sur les états par une intégrale sur les énergies de ces états.

$$\text{Mais on peut écrire } \mathcal{P}_k(\omega, t) = 4 \left| X_{kg} \frac{eE_0}{\hbar} \right|^2 \hbar \frac{\pi t}{2} \times \delta^{(t)}(E_k + E_g - \hbar\omega)$$

$$\text{et donc } \mathcal{P}_d(\omega, t) = \rho(\hbar\omega - E_g) \times 4 \left| X_{kg} \frac{eE_0}{\hbar} \right|^2 \hbar \frac{\pi t}{2},$$

où X_{kg} est un élément de matrice entre l'état g et l'état k vérifiant $E_k = -E_g + \hbar\omega$.

Cette relation est de la forme voulue, avec :

$$K = \frac{2\pi}{\hbar} e^2 |X_{kg}|^2.$$

e. **(o2)** : L'intensité du photocourant est proportionnelle à la probabilité de photoémission par unité de temps, $\pi_d = \mathcal{P}_d(\omega, t) / t$, qui est approximativement constante lorsque $t > t_H$. Mais π_d est proportionnelle à E_0^2 qui est une quantité proportionnelle à P_0 ,

donc l'intensité du photocourant est bien proportionnelle à P_0 .

(o3), (o4) et (o5) : Le raisonnement est similaire au raisonnement classique : $E_k = \hbar\omega - E_g$ est l'énergie cinétique de l'électron photo-émis. Cet électron n'est capté que si $U \geq -\frac{E_k}{e} = -\frac{\hbar\omega - E_g}{e}$. Donc,

- Il y a bien une tension de seuil $U_0 = \frac{1}{e}(\hbar\omega - E_g)$ **(o3)** ;
- Cette tension de seuil ne dépend pas de la puissance lumineuse **(o4)** ;
- Cette tension de seuil est une fonction affine de la fréquence $U = \frac{h}{e}(f - f_0)$. La pente en est $\frac{h}{e} = 4,14 \times 10^{-15} \text{ V.Hz}^{-1}$, en accord avec l'observation **(o5)** ; on a aussi $f_0 = \frac{E_g}{h}$.

Le modèle peut être considéré comme suffisant, même s'il se base sur une description simpliste des états de l'électron dans le métal (un traitement rigoureux à l'aide de la théorie des bandes conduit aux mêmes conclusions).

II. Effet Compton

1. Calcul corpusculaire

a. L'énergie de l'électron avant le choc est $E_i = m_e c^2$ et elle est notée E_e après le choc. La conservation de l'énergie s'écrit donc, dans le référentiel du laboratoire :

$$\frac{hc}{\lambda_0} + m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda} + E_e.$$

b. La quantité de mouvement du système « photon+électron » s'écrit de même, dans le référentiel du laboratoire:

$$\frac{h}{\lambda_0} \vec{e}_z = \frac{h}{\lambda} \vec{u} + \vec{P}_e.$$

c. En écrivant la relation $E_e^2 - P_e^2 c^2 = m_e^2 c^4$, il vient aisément $2hc \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) m_e c^2 + 2 \frac{h^2 c^2}{\lambda \lambda_0} (\cos \theta - 1) = 0$, qui conduit bien à $\lambda = \lambda_0 + \lambda_c \times (1 - \cos \theta)$, avec

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$$

Numériquement, on retrouve bien :

$$\lambda_c = 2,42 \times 10^{-12} \text{ m}$$

Il faut noter que cette longueur d'onde se trouve à la frontière des rayons X durs et des rayons gamma, ce qui explique le domaine spectral choisi pour l'expérience. Cet effet est tout à fait négligeable dans le visible, par exemple.

2. Interprétation quasi classique : l'effet Compton considéré comme un effet Doppler.

a. La relation de structure d'onde plane, valable dans (R') comme dans (R) s'écrit :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{1}{c} \underline{\vec{e}}_z \wedge \underline{\vec{E}} = \frac{E_0}{c} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{1/2} (\underline{\vec{e}}_y + j \underline{\vec{e}}_x) \exp(j\Phi)$$

b. La phase de l'onde, exprimée dans (R'), est $\Phi = \omega'_0 (t' - z'/c) = \omega_0 (t - z/c)$. En utilisant la transformation de Lorentz, en $z' = 0$ il vient $t = \gamma t'$; $z = \gamma v t'$. D'où $\omega'_0 t' = \omega_0 \gamma t' \times (1 - \beta)$ et enfin :

$$\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

c. La relation fondamentale de la dynamique, exprimée dans (R'), s'écrit

$$\frac{d\vec{P}'}{dt'} = -e (\underline{\vec{E}}' + \underline{\vec{v}}' \wedge \underline{\vec{B}}')$$

Si $\underline{\vec{r}}' = r'_0 \times (\underline{\vec{e}}_x - j \underline{\vec{e}}_y) \exp(j\omega'_0 t')$, on a bien, pour l'électron : $z' = 0$ et

$$\underline{\vec{E}}' = E_0 \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{1/2} (\underline{\vec{e}}_x - j \underline{\vec{e}}_y) \exp(j\omega'_0 t') \text{ et } \underline{\vec{B}}' = \frac{E_0}{c} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{1/2} (\underline{\vec{e}}_y + j \underline{\vec{e}}_x) \exp(j\omega'_0 t')$$

Par ailleurs, la vitesse de l'électron est

$$\underline{\vec{v}}' = j\omega'_0 r'_0 (\underline{\vec{e}}_x - j \underline{\vec{e}}_y) \exp(j\omega'_0 t') = \omega'_0 r'_0 (\underline{\vec{e}}_y + j \underline{\vec{e}}_x) \exp(j\omega'_0 t')$$

On constate que cette vitesse est parallèle à $\underline{\vec{B}}'$, donc la force magnétique est nulle.

De plus, on a $\underline{\vec{P}}' = \frac{m_e}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \underline{\vec{v}}'$ et, $\|\underline{\vec{v}}'\| = r'_0 \omega'_0$ étant constante, on a $\frac{d\vec{P}'}{dt'} = -\omega'^2_0 \frac{\underline{\vec{r}}'}{\sqrt{1-r'^2_0 \omega'^2_0 / c^2}}$. En

identifiant $\frac{d\vec{P}'}{dt'} = -e \underline{\vec{E}}'$, il vient :

$$m_e \frac{r'_0 \omega'^2_0}{\sqrt{1-r'^2_0 \omega'^2_0 / c^2}} = e E_0 \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{1/2}$$

Si le mouvement est non relativiste, on a $r'_0 \omega'_0 \ll c$ et

$$r'_0 = \frac{e E_0}{m_e \omega'^2_0} \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{1/2}$$

d. Reportons l'expression de ω'_0 déterminée au b. et exprimons, dans (4), $\cos \theta'$ en fonction de $\cos \theta$. Il vient :

$$\omega = \frac{\omega_0}{1+\beta} \left(1 + \beta \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \right) = \frac{\omega_0}{1+\beta} \left(\frac{1 - \beta^2}{1 - \beta \cos \theta} \right) = \omega_0 \left(\frac{1 - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \right)$$

On en déduit $\lambda = \lambda_0 \left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{\beta}{1-\beta} \cos\theta \right) = \lambda_0 \left(1 + \frac{\beta}{1-\beta} (1 - \cos\theta) \right)$, qui est de la forme voulue, avec

$$\xi = \frac{\beta}{1-\beta}.$$

e. Le modèle proposé conduit donc à $\lambda - \lambda_0 = \lambda_0 \frac{\zeta f_0}{m_e c^2} (1 - \cos\theta) = \frac{\zeta}{m_e c} (1 - \cos\theta)$, qui, par identification avec

la loi expérimentale donne $\zeta = \lambda_c m_e c = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J.s}$.

Le paramètre ζ n'est autre que la constante de Planck.

f. Si la polarisation de l'onde incidente n'est pas circulaire, l'équation du mouvement de l'électron n'a pas de solution évidente en régime permanent (car le champ magnétique de l'onde joue alors un rôle) et le résultat du présent modèle est à modifier. Cependant, dans le cas d'un électron non relativiste, le terme magnétique de la force de Lorentz est négligeable ; en régime permanent, l'électron suit la même équation du mouvement quelle que soit la polarisation. Le principe de superposition est alors utilisable : toute polarisation étant la somme de deux polarisations circulaires de sens opposés, le mouvement électronique permanent associé à cette polarisation est la somme de ceux associés à ces polarisations circulaires. Chaque mouvement est à l'origine du même effet Doppler, et le résultat du présent modèle est alors inchangé.

La répartition d'intensité de la lumière diffusée risque d'être affectée par l'état de polarisation de l'onde incidente, mais pas son décalage en longueur d'onde.

Note : La référence D. V. Redzic, Eur. J. Phys. 21 (2000) L9 apporte un point de vue complémentaire instructif sur ces questions, qui positionne bien l'effet Compton comme une preuve expérimentale de l'existence de quanta de lumière.

III. Enfin des photons !

1. Détecteurs photoélectriques.

a. (i) Chaque électron donne une intensité $-I_{d0}$ de durée τ_d . Pendant un intervalle de temps Δt , il y a donc une charge moyenne délivrée par le détecteur $Q = -\kappa N_d \Delta t \tau_d I_{d0}$ et

$$\langle I_d \rangle = -\kappa N_d \tau_d I_{d0}.$$

(ii) La probabilité qu'aucun photon ne soit reçu entre les instant t et $t + dt$ est égale au produit de la probabilité qu'aucun photon ne soit reçu jusqu'à t multipliée par la probabilité qu'aucun photon ne soit reçu pendant dt . On a donc $\pi(t + dt) = \pi(t) \times (1 - N_d dt)$, d'où $\frac{d\pi}{dt} = -N_d \pi$.

Cette relation s'intègre en $\pi(t) = \pi(0) \exp(-N_d t)$, avec $\pi(0) = 1$ (la probabilité de recevoir un photon sur un intervalle de durée nulle est elle-même nulle), on obtient :

$$\pi(t) = \exp(-N_d t).$$

(iii) N_d est la probabilité qu'un photon soit *reçu* par unité de temps ; celle qu'un photon soit *détecté* par unité de temps est κN_d . La probabilité qu'aucun photon ne soit détecté entre 0 et t se déduit donc de $\pi(t)$ en remplaçant N_d par κN_d .

On souhaite avoir $\exp(-\kappa N_d \tau_d) > 0,99$, donc $\kappa N_d \tau_d < -\ln(0,99) \cong 0,01$. Il faut donc $\kappa N_d \tau_d < 0,01$.

(iv) La puissance lumineuse reçue est $P_{inc} = N_d h \frac{c}{\lambda}$. Il faut donc $P_{inc} < \frac{0,01}{\kappa \tau_d} h \frac{c}{\lambda}$.

b. Le raisonnement est exactement le même en remplaçant κN_d par π_d . Il faut donc $\pi_d < \frac{0,01}{\tau_d}$, soit

$$P_{inc} < \frac{0,01}{\eta \tau_d}.$$

c. On ne peut pas distinguer les modèles corpusculaires et ondulatoires en utilisant simplement des sources de très faible intensité puisque dans les deux cas, à faible puissance incidente, on aboutit à des impulsions discrètes de photocourant.

2. Détecteur de coïncidences

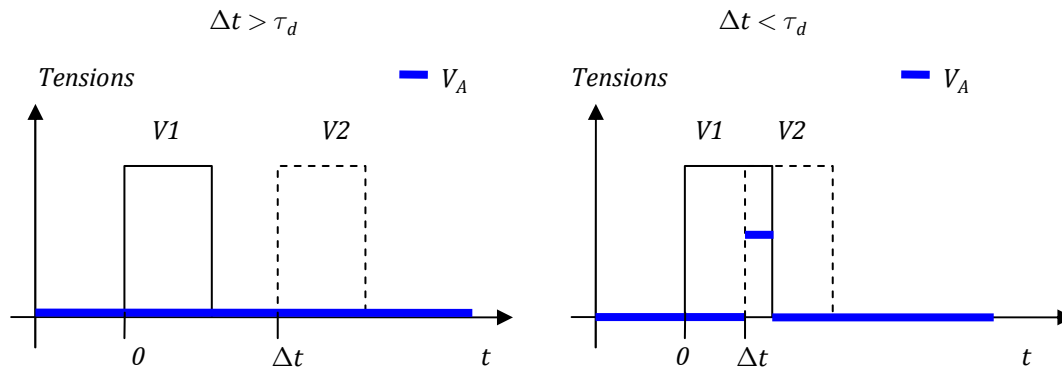
a. Lorsqu'un photomultiplicateur délivre une intensité $I = -I_{d0}$, l'amplificateur opérationnel auquel il est connecté délivre une tension de sortie $v_s = -RI = RI_{d0}$. Il faut donc

$$\boxed{RI_{d0} > V_{sat}}$$

b. La diode D_1 est bloquée lorsque l'amplificateur opérationnel auquel elle est connecté sature, c'est-à-dire lorsque le TPM1 délivre un photocourant $-I_{d0}$. Elle est passante lorsque le TPM1 ne délivre aucun courant. Dans ce cas, $V_A = 0$.

La situation est identique pour la diode 2 et la seule situation pour laquelle V_A est non nulle est obtenue lorsque les deux diodes sont bloquées (c'est-à-dire lorsque les deux photomultiplicateurs délivrent simultanément un courant). Lorsque c'est le cas, on a $V_A = V_c = \frac{V_{sat}}{2}$.

D'où le graphe suivant, où l'on voit que la tension délivrée par V_A est nulle, à moins que les deux impulsions de se superposent, auquel cas $V_A = \frac{V_{sat}}{2}$.



3. Une preuve de l'existence des photons.

a. $\frac{T_{exp}}{\tau_d}$ est le nombre d'intervalles de temps de durée τ_d pendant la durée de comptage T_{exp} . Le processus étant implicitement stationnaire, et donc la probabilité des différents événements par unité de temps étant constante, on a : $N_1 = \mathcal{P}_1 \frac{T_{exp}}{\tau_d}$, $N_2 = \mathcal{P}_2 \frac{T_{exp}}{\tau_d}$ et $N_c = \mathcal{P}_c \frac{T_{exp}}{\tau_d}$.

On obtient donc : $\mathcal{P}_1 = \frac{N_1}{T_{exp}} \tau_d$, $\mathcal{P}_2 = \frac{N_2}{T_{exp}} \tau_d$ et $\mathcal{P}_c = \frac{N_c}{T_{exp}} \tau_d$, dont on déduit : $\alpha_{12} = \frac{N_c}{N_1 N_2} \frac{T_{exp}}{\tau_d}$.

b. Dans le modèle semi-classique, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \pi_d \tau_d = \eta \frac{P_0}{2} \tau_d$.

La probabilité d'une coïncidence pendant τ_d est simplement le produit des probabilités d'émission d'un photoélectron sur chacun des détecteurs : $\mathcal{P}_c = \left(\eta \frac{P_0}{2} \tau_d \right)^2$. On s'attend donc à $\alpha_{12} = 1$.

c. Les probabilités moyennes de détection par l'un ou l'autre des détecteurs est maintenant :

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \eta \frac{\langle P_0 \rangle}{2} \tau_d.$$

En revanche, la probabilité conjointe est $\mathcal{P}_c = \left(\eta \frac{1}{2} \tau_d \right)^2 \times \langle P_0^2 \rangle$,

car même si la puissance du laser fluctue, elle est toujours égale sur les deux détecteurs lorsqu'une coïncidence est détectée (notons qu'il faut pour cela que les fluctuations de puissance ne soient pas trop rapides : elles doivent être négligeables à l'échelle de τ_d).

On aura donc $\alpha_{12} = \frac{\langle P_0^2 \rangle}{\langle P_0 \rangle^2}$.

Or on sait que $\langle (P_0 - \langle P_0 \rangle)^2 \rangle \geq 0$ et $\langle (P_0 - \langle P_0 \rangle)^2 \rangle = \langle P_0^2 \rangle - \langle P_0 \rangle^2$. Donc $\langle P_0^2 \rangle \geq \langle P_0 \rangle^2$ et $\alpha_{12} \geq 1$.

d. Si le rayonnement est considéré comme un ensemble de particules discrètes, on ne peut jamais observer de coïncidences : la source en émet une à la fois et la lame séparatrice l'envoie vers l'un ou l'autre des détecteurs (avec une probabilité égale), mais il ne peut pas y avoir deux particules frappant les deux détecteurs en même temps : $\mathcal{P}_c = 0$ et on s'attend à $\alpha_{12} = 0$.
