

# Interactions dans le système solaire

Proposition de corrigé

## Première partie

# Première approche

## 1 Mouvement d'une planète

### 1.1 Préliminaires

#### 1.1.1 Référentiel utilisé

**1** - Un référentiel correspond à la donnée d'un **solide** et d'une **horloge** attachée à ce solide. Il permet de définir une base d'espace et de temps.

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le **principe d'inertie** s'applique : dans un tel référentiel, le mouvement du **barycentre** d'un corps isolé est rectiligne uniforme.

#### 1.1.2 Champ de gravitation créé par le Soleil

**2** - Le théorème de Gauss pour la gravitation lie le flux du champ de gravitation à travers une surface fermée et orientée  $\Sigma$  vers l'extérieur à la masse contenue dans le volume à l'intérieur de cette surface  $\Sigma$ . Il s'écrit :

$$\oiint_{M \in \Sigma} \vec{g}(M) \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int, \Sigma}$$

On assimile le Soleil à une sphère de rayon  $R_S$  et de masse volumique uniforme  $\rho_S$ . Ainsi la distribution de masse étudiée est à

**symétrie sphérique**. Cela implique d'après le **principe de Curie** que le champ gravitationnel créé par cette distribution est aussi à symétrie sphérique. En particulier, tout plan contenant  $O$  est un plan de symétrie du champ et en un point  $M$  quelconque le champ appartient donc forcément à tout plan contenant  $O$  et  $M$ . Ainsi, le champ  $\vec{g}(M)$  appartient forcément à l'intersection de tous les plans contenant  $O$  et  $M$  et donc le champ  $\vec{g}(M)$  est forcément radial, porté par le vecteur unitaire sphérique  $\vec{e}_R$ .

De plus la distribution est invariante par rotation des angles sphériques  $\theta$  et  $\varphi$ , ce qui implique que le champ est indépendant de ces deux grandeurs et ne dépend donc que du rayon sphérique,  $R$ . Ainsi, on a :  $\vec{g}(M) = g(R)\vec{e}_R$ .

Dans le théorème de Gauss, pour pouvoir sortir un tel champ de l'intégrale, on se donne une surface de Gauss  $\Sigma$  sur laquelle la norme du champ est une constante. D'après ce qui précède, on choisit une sphère de rayon  $R$ . L'élément infinitésimal de surface pour une telle surface est de la forme :  $d\vec{S} = dS\vec{e}_R$ .

On a ainsi :

$$\oiint_{M \in \Sigma} \vec{g}(M) \cdot d\vec{S} = \oiint_{M \in \Sigma} g(R)\vec{e}_R \cdot dS\vec{e}_R$$

Puis :

$$\oiint_{M \in \Sigma} \vec{g}(M) \cdot d\vec{S} = \oiint_{M \in \Sigma} g(R) \cdot dS = g(R) \oiint_{M \in \Sigma} dS$$

Et connaissant la surface d'une sphère, on a :  $\oiint_{M \in \Sigma} \vec{g}(M) \cdot d\vec{S} = g(R)4\pi R^2$

Pour un point  $M$  à l'extérieur de l'étoile, la surface  $\Sigma$  contient toute la masse de l'étoile, donc  $M_{int, \Sigma} = M_S = \frac{4\pi}{3}\rho_S R_S^3$ .

En réinjectant ces deux expressions dans le théorème de Gauss,

on a :

$$g(R)4\pi R^2 = -4\pi GM_S$$

Et finalement :

$$\vec{g}_S(M) = -\frac{GM_S}{R^2} \vec{e}_R$$

Ce champ est le même que celui créé par une masse ponctuelle  $M_S$  placée au centre de la distribution, où :  $M_S = \frac{4\pi}{3} \rho_S R_S^3$ . Le raisonnement précédent ne tient pas compte de la répartition exacte de manière, tant que celle-ci est à symétrie sphérique, ainsi **on aurait eu le même résultat si la répartition avait été non-uniforme, mais à symétrie sphérique.**

### 1.1.3 Modèle simplifié du mouvement d'une planète

**3** - La force exercée par le Soleil sur la masse  $m$  est une force centrale, dirigée vers  $O$ . Ainsi, le moment de cette force par rapport à  $O$  est nul. D'après le théorème du moment cinétique appliqué à la masse  $m$ , cela implique que le moment cinétique de  $m$  par rapport à  $O$  est une constante. Or, par construction, le moment cinétique d'un point  $m$  par rapport à un autre point  $O$  est perpendiculaire à  $\vec{Om}$  (il s'écrit en effet  $\vec{L}_{/O} = \vec{Om} \wedge m \frac{d\vec{Om}}{dt}$ ).

Or, si  $\vec{L}_{/O}$  est une constante, sa direction l'est aussi. Cela signifie que  $\vec{Om}$  évolue dans un espace perpendiculaire à une direction constante : un plan.

Ainsi, le mouvement de  $m$  est forcément plan.

Ce plan dépend uniquement des conditions initiales. Le théorème du moment cinétique ne permet de déterminer ce plan.

**4** - Les expressions du vecteur vitesse et du vecteur accélération dans ce système de coordonnées sont :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\text{et } \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$$

Si l'on applique le théorème de la résultante dynamique à  $m$ , on a ainsi :

$$m \vec{a} = m \vec{g}(m) = -\frac{GM_S m}{r^2} \vec{u}_r$$

Ce qui donne les deux équations :

$$\text{en projetant sur } \vec{u}_r : \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM_S}{r^2}$$

$$\text{en projetant sur } \vec{u}_\theta : 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

**5** - Pour une trajectoire circulaire de rayon  $r_C$ , les équations précédentes se simplifient en :

$$\text{sur } \vec{u}_r : -r_C \dot{\theta}^2 = -\frac{GM_S}{r_C^2}$$

$$\text{sur } \vec{u}_\theta : r_C \ddot{\theta} = 0$$

La deuxième équation implique que la vitesse angulaire est constante : non seulement le mouvement est circulaire, mais il est forcément uniforme. On peut donc la noter  $\Omega$  et réinjecter cette notation dans la première équation, ce qui donne :

$$r_C \Omega^2 = \frac{GM_S}{r_C^2}$$

$$\text{Et donc : } \Omega = \pm \sqrt{\frac{GM_S}{r_C^3}}$$

Comme on s'intéresse uniquement à la norme de la vitesse angulaire et non au sens du mouvement, cela n'a pas de sens de garder la racine négative et on a donc une vitesse angulaire képlérienne :

$$\Omega(r_C) = \sqrt{\frac{GM_S}{r_C^3}}$$

**6** - La deuxième équation  $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$  peut se réécrire :  $\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0$ .

Ce qui implique que  $r^2 \dot{\theta} = C$  soit une constante du mouvement.

**7** - D'après le théorème de l'énergie mécanique, la variation par rapport au temps de l'énergie mécanique est liée uniquement à la puissance des forces non conservative qui s'appliquent sur le système. Ici, la seule force qui s'applique est conservative, donc le système est conservatif.

En prenant comme origine des énergies potentielles la situation où la planète est à une distance infinie du Soleil, l'énergie potentielle associée à la force de gravitation dans le plan étudié s'écrit :  $E_P = \frac{-GM_S m}{r}$ .

L'énergie mécanique  $E_m$  est donc :

$$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_S m}{r}$$

$$\text{Or } v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

$$\text{Donc : } E_m = \frac{1}{2}m \left( (\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2 \right) - \frac{GM_S m}{r}$$

De plus :  $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ , ce qui donne :

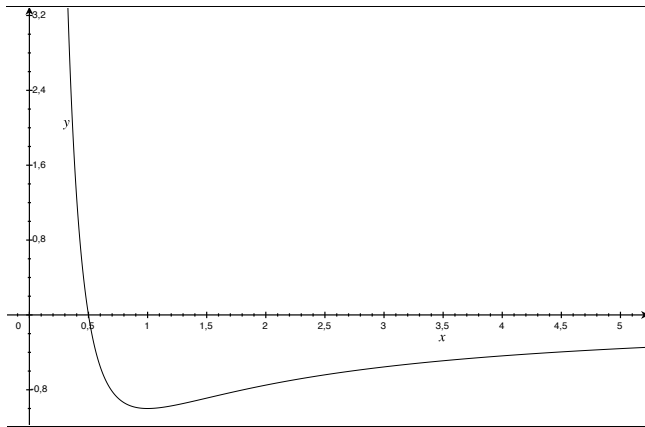
$$E_m = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) - \frac{GM_S m}{r}$$

qui peut se mettre sous la forme :  $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{P_{\text{eff}}}(r)$  où :

$$E_{P_{\text{eff}}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GM_S m}{r}$$

$E_{P_{\text{eff}}}(r)$  peut être comparée à  $E_m$  pour en déduire les valeurs extrêmes de  $r$  (celles-ci correspondant, si elles existent, à  $E_{P_{\text{eff}}}(r_{\text{ext}}) = E_m$ ).  $E_{P_{\text{eff}}}(r)$  est donc l'énergie potentielle effective du mouvement radial.

**8** - L'allure de  $E_{P_{\text{eff}}}(r)$  est :



On sait que  $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{P_{\text{eff}}}(r)$

comme  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$ , cela implique que l'ensemble des  $r$  accessibles vérifient :  $E_m \geq E_{P_{\text{eff}}}(r)$

— Si  $E_m = \min(E_{P_{\text{eff}}})$ , alors cela implique que  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = 0$  et qu'il n'y a qu'une seule valeur de  $r$  possible, celle qui correspond au minimum local de  $E_{P_{\text{eff}}}(r)$  : dans cette situation, il n'y a pas de mouvement radial, on a un mouvement circulaire.

— Si  $\min(E_{P_{\text{eff}}}) < E_m < 0$ , il y a deux intersections entre  $E_{P_{\text{eff}}}(r)$  et  $E_m$ . Notons  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$  les valeurs de  $r$  correspondant à ces deux intersections. Dans ce cas, le mouvement radial se déroule forcément entre  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$ , on a un état lié.

— Si  $E_m \geq 0$ , il y a une intersection entre  $E_{P_{\text{eff}}}(r)$  et  $E_m$ . Notons  $r_{\min}$  la valeur de  $r$  correspondant à cette intersection. Dans ce cas, le mouvement radial se déroule forcément entre  $r_{\min}$  et  $+\infty$ , on a un état de diffusion.

**9** - On a :  $r = 1/u$

Donc :

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

Donc :

$$\dot{r} = -r^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{du}{d\theta} = -C \frac{du}{d\theta}$$

$$\text{De même } \ddot{r} = -C \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{d\theta} \right) = -C \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -C^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

L'équation différentielle sur  $\vec{u}_r$  peut alors se réécrire :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -C^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - C^2 u^3 = -\frac{GM_S}{r^2} = -GM_S u^2$$

Ce qui donne bien :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM_S}{C^2}$$

**10** - Cette équation différentielle est linéaire d'ordre 2 ; la forme générale de sa solution est la somme

— d'une solution particulière, ici  $u_P = \frac{GM_S}{C^2}$

— de la solution de l'équation homogène associée  $u_H = A \cos(\theta - \theta_0)$ .

Ainsi :

$$u = \frac{GM_S}{C^2} + A \cos(\theta - \theta_0) = 1/r$$

$$\text{Donc : } r = \frac{1}{\frac{GM_S}{C^2} + A \cos(\theta - \theta_0)}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \text{ où } p = \frac{C^2}{GM_S}$$

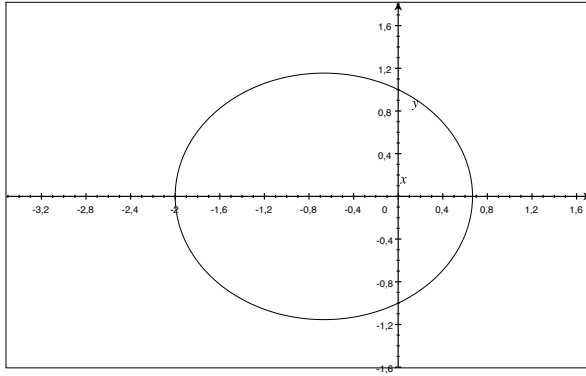
Si l'on choisit l'origine des angles de sorte que le cosinus soit simple on a la forme :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

L'excentricité  $e$  caractérise dans cette expression la déformation par rapport à la trajectoire circulaire. En effet, si  $e = 0$ , on retrouve le cas  $r = p = \text{constante}$ , qui est la trajectoire circulaire. Plus  $e$  sera différente de 0, plus la trajectoire s'éloignera du cercle :

- si  $e < 1$  on a une trajectoire elliptique et on passera ainsi, selon les valeurs de  $e$  d'une ellipse faiblement déformée, à une ellipse très déformée
- puis à une parabole ( $e = 1$ )
- puis à une hyperbole ( $e > 1$ ).

Dans le cas  $0 < e < 1$ , on a l'allure :



**11** - On a :

$$E_m = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) - \frac{GM_S m}{r} \text{ et d'après ce qui précède : } \dot{r} = -C \frac{du}{d\theta}$$

Donc :

$$E_m = \frac{1}{2}m \left( C^2 \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + C^2 u^2 \right) - GM_S m u$$

Or, on sait que :  $u = \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos\theta}{p}$  et donc  $\frac{du}{d\theta} = \frac{-e\sin\theta}{p}$

Donc, si l'on réinjecte dans cette dernière expression, cela donne :

$$E_m = \frac{1}{2}m \left( C^2 \frac{e^2 \sin^2\theta}{p^2} + C^2 \left( \frac{1+e\cos\theta}{p} \right)^2 \right) - GM_S m \left( \frac{1+e\cos\theta}{p} \right)$$

$$E_m = \frac{1}{2}m \left( C^2 \frac{e^2 \sin^2\theta}{p^2} + \frac{C^2}{p^2} (1 + e^2 \cos^2\theta + 2e\cos\theta) \right) -$$

$$GM_S m \left( \frac{1+e\cos\theta}{p} \right)$$

$$E_m = \frac{1}{2}m \left( \frac{C^2}{p^2} (1 + e^2) + 2e \frac{C^2}{p^2} \cos\theta \right) - GM_S m \left( \frac{1+e\cos\theta}{p} \right)$$

$$E_m = \frac{1}{2}m \left( \frac{C^2}{p^2} (1 + e^2) + 2e \frac{C^2}{p^2} \cos\theta \right) - GM_S m \left( \frac{1+e\cos\theta}{p} \right)$$

La conservation de  $E_m$  implique qu'elle ne doit pas être une fonction de  $\theta$ , cela implique que dans l'expression précédente les termes en  $\cos\theta$  ont forcément une somme nulle et que l'énergie mécanique est égale à la somme des autres termes, qui sont constants, ce qui donne :

$$E_m = \frac{1}{2}m \left( \frac{C^2}{p^2} (1 + e^2) \right) - \frac{GM_S m}{p}$$

Or  $p = \frac{C^2}{GM_S}$ , ce qui donne :

$$E_m = \frac{1}{2}m \left( \frac{pGM_S}{p^2} (1 + e^2) \right) - \frac{GM_S m}{p}$$

$$E_m = \frac{1}{2}m \frac{GM_S}{p} (e^2 - 1)$$

Et finalement :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E_m p}{GM_S m}}$$

## Analyse

- On voit sur cette expression que si  $E_m < 0$ , cela implique forcément  $e < 1$ . On fait ainsi le lien entre trajectoire bornée et trajectoire elliptique.
- Inversement, si  $E_m \geq 0$ , on a forcément  $e \geq 1$ , et on fait ainsi le lien entre état de diffusion et trajectoire hyperbolique ou parabolique. On fait donc bien le lien quantitatif entre la discussion de la question 8 et celle de la question 10.

## 1.2 Autour de la notion de référentiel galiléen

### 1.2.1 Passage d'un référentiel à un autre, composition des mouvements

**12** - Cette relation exprime le fait que si  $M$  ne se déplace pas par rapport à  $\mathcal{R}'$  (donc si  $\vec{v}(M)_{|\mathcal{R}'} = \vec{0}$ ),  $M$  est tout de même entraîné à la vitesse  $\vec{v}_e$  par le mouvement du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Cette vitesse dite d'entraînement correspond physiquement à la vitesse du point coïncidant à  $M$  appartenant à  $\mathcal{R}'$  ; on reconnaît ici la vitesse donnée par le champ des vitesses d'un solide :  $\vec{v}_e = \vec{v}(O')_{|\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$ , les deux termes correspondant respectivement à la translation et à la rotation du solide.

Enfin, si la vitesse relative  $\vec{v}'(M)_{/\mathcal{R}'} \neq \vec{0}$ , on a simplement composition vectorielle du champ de vitesse précédent et de la vitesse relative.

**13** - Cette relation illustre de même le fait que  $M$  est en partie entraîné par le référentiel  $\mathcal{R}'$  :

L'accélération d'entraînement  $\vec{a}_e$  correspond à l'accélération du point coïncidant à  $M$  appartenant à  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Dans la relation suivante, on reconnaît respectivement le terme de translation et un terme correspondant à une accélération centripète lors d'une rotation.

$$\vec{a}_e = \overline{a(O')_{\mathcal{R}'}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overline{O'M})$$

L'accélération de Coriolis correspond à l'existence d'une accélération supplémentaire pour un point qui s'éloigne d'un axe de rotation, son expression est :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}'_{/\mathcal{R}'}$$

On peut la retrouver dans l'expression de l'accélération en polaires : sous certaines conditions, il s'agit du terme :  $2\dot{r}\dot{\theta}$ .

Pour que le principe d'inertie puisse s'appliquer dans  $\mathcal{R}'$  s'il s'applique dans  $\mathcal{R}$ , il faut que :

- $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}'_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}$ , pour toute situation, ce qui implique que le vecteur rotation  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$ , donc  $R'$  doit être en translation.
- $\vec{a}_e = \overline{a(O')_{\mathcal{R}}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overline{O'M}) = \overline{a(O')_{\mathcal{R}}} = \vec{0}$  donc, cette translation doit être uniforme.

**Conclusion** La classe d'équivalence des référentiels galiléens est l'ensemble des référentiels en translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen.

### 1.2.2 Cas d'un référentiel en translation accéléré par gravité

**14** - Le principe fondamental de la dynamique appliqué à  $M$  dans  $\mathcal{R}$  donne :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}} = m\vec{G}_{\text{ext}}(M)$$

La loi de composition des accélérations permet formellement d'écrire une relation analogue au principe fondamental de la dynamique dans  $\mathcal{R}'$ , en effet :

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}} = m(\vec{a}'_{/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c) = m\vec{G}_{\text{ext}}(M)$$

Donc :

$$m\vec{a}'_{/R'} = m\vec{G}_{\text{ext}}(M) - m(\vec{a}_e + \vec{a}_c)$$

Si  $\mathcal{R}'$  est en translation, on a :

$$\vec{a}_c = \vec{0} \text{ et } \vec{a}_e = \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}}$$

Et donc :

$$m\vec{a}'_{/R'} = m\vec{G}_{\text{ext}}(M) - m\vec{a}(O')_{/\mathcal{R}}$$

**15** - Pour déterminer l'accélération d'entraînement, on applique le PFD à  $m_{\mathcal{R}'}$ , ce qui donne :

$$m_{\mathcal{R}'}\vec{a}(O')_{/\mathcal{R}} = m_{\mathcal{R}'}\vec{G}_{\text{ext}}(O')$$

$$\text{Donc : } \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}} = \vec{G}_{\text{ext}}(O')$$

et finalement :

$$m\vec{a}'_{/R'} = m(\vec{G}_{\text{ext}}(M) - \vec{G}_{\text{ext}}(O'))$$

Tout se passe comme si  $M$  subissait dans  $\mathcal{R}'$  une force effective  $m(\vec{G}_{\text{ext}}(M) - \vec{G}_{\text{ext}}(O'))$ .

Ce terme est appelé terme de marée. Si l'on considère en plus l'action d'autres forces que la gravitation, notées  $\vec{F}$ , on a l'équation :

$$m\vec{a}'_{/R'} = m(\vec{G}_{\text{ext}}(M) - \vec{G}_{\text{ext}}(O')) + \vec{F}$$

**16** - En pratique pour que l'on puisse considérer un référentiel en translation accélérée par gravité comme galiléen, il faut que le référentiel soit utilisé pour décrire une zone d'espace dont l'extension est faible, ce qui permet de négliger la non-uniformité des champs de gravité extérieurs et donc de négliger les termes de marée dans ce référentiel. Par exemple, pour le référentiel géocentrique, cela suppose de rester au voisinage de la surface terrestre, ce qui est souvent le cas.

Le mouvement du référentiel héliocentrique est un mouvement de translation circulaire autour du centre de la Voie Lactée. Il est

accélération par le champ gravitationnel galactique qui a une distance typique de variation de l'ordre de la taille de la galaxie, i.e.  $10^5 A.L.$

Il est utilisé pour décrire des mouvements à l'intérieur du système solaire, donc dans une zone de l'espace dont la taille typique est de l'ordre de  $10^{-2} A.L.$ . On peut donc considérer les champs extérieurs comme uniformes à l'échelle du système solaire et ainsi, d'après le critère précédent, le considérer comme galiléen avec une excellente approximation pour l'étude des mouvements dans le système solaire.

## 2 “Fonctionnement” d’une étoile

### 2.1 Température typique d’une étoile

**17** - Pour l'interaction entre deux corps ponctuels de masses  $m_1$  et  $m_2$ , l'énergie potentielle est :

$$E_P = -\frac{Gm_2m_1}{r}$$

Une estimation de l'énergie potentielle de gravitation propre d'une étoile de masse  $M_E$  et de rayon  $R_E$  est donc, dimensionnellement :

$$E_P \simeq -\frac{GM_E^2}{R_E}$$

**Remarque** on peut montrer que l'hypothèse  $\rho = cste$  conduit à :  $E_P = -\frac{3GM_E^2}{5R_E}$

**18** - Une estimation de l'énergie liée à l'agitation thermique microscopique pour une particule est  $\langle e_{c,m} \rangle \simeq k_B T$

Dans une étoile de masse  $M_E$ , on a donc typiquement  $n = \frac{M_E}{m_H}$  particules.

Ce qui donne une énergie totale d'agitation thermique de l'ordre de :

$$\langle E_C \rangle \simeq \frac{M_E k_B T}{m_H}$$

**19** - Si l'on suppose une conservation de l'énergie d'un tel nuage à partir d'une situation où son rayon est infini et sa température négligeable, on a donc une relation du type :

$$E_{P,i} + E_{C,i} = E_{P,f} + E_{C,f}$$

donc :

$$0 + 0 = -\frac{GM^2}{R} + \frac{Mk_B T}{m_H}$$

Ce qui donne :

$$T \simeq \frac{GMm_H}{Rk_B}$$

qui est bien de la forme  $T = \alpha M/R$ , où  $\alpha = \frac{Gm_H}{k_B}$ .

Numériquement, dans le cas du Soleil, cela donne :

$$T = \frac{GMm_H}{Rk_B} \simeq 2.10^7 K$$

Les critiques majeures que l'on peut faire à ce modèle simple sont :

- de considérer la température finale comme uniforme, ce qui est clairement faux.
- de négliger d'autres formes d'énergie (et notamment l'énergie de masse, qui est cruciale dans le fonctionnement des étoiles, la rotation propre,...)

**20** - Pour estimer la vitesse angulaire de rotation propre du Soleil, on peut suivre le mouvement des taches solaires. On voit que la tache principale parcourt un angle d'environ  $\Delta\theta \sim \frac{\pi}{2}$  en un temps de l'ordre de 7 jours, ce qui correspond à une durée de l'ordre de :  $\Delta t = 7.86.10^3 \sim 6.10^5 s$

Ce qui donne une vitesse angulaire moyenne de :

$$\omega_S \simeq \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{6.10^5} \sim 2.10^{-6} s^{-1}$$

Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe  $\Delta$  est  $J_\Delta = \int \int \int r_\Delta^2(P) dm$  où  $r_\Delta(P)$  est la distance du point courant  $P$  à l'axe  $\Delta$ .

Physiquement, cette grandeur quantifie l'inertie du corps vis-à-vis de la rotation autour de l'axe étudié.

Le moment d'inertie du Soleil est de l'ordre de :

$$J_S \simeq M_S R_S^2 \simeq 2.10^{30}.10^{18} \sim 10^{48} kg.m^2$$

L'énergie cinétique de rotation propre est par définition :

$$E_{C,rot} = \frac{1}{2} J_S \omega_S^2$$

Numériquement, cela donne :  $E_{C,rot} = 10^{48}.10^{-12} \simeq 10^{36} J$

Pour valider l'hypothèse qui consiste à négliger cette forme d'énergie dans le bilan précédent, il faut la comparer aux autres formes d'énergie. Comme celles-ci sont commensurables (elles sont mêmes égales), on peut comparer  $E_{C,rot}$  à l'une d'entre elles uniquement.

Prenons l'énergie potentielle de gravitation propre :

$$E_P \simeq -G \frac{M^2}{R}$$

Numériquement :  $|E_P| \sim \frac{10^{-10} \cdot 10^{60}}{10^9} \sim 10^{41} J$

Ce qui est très largement supérieur à l'énergie cinétique de rotation propre et qui valide l'hypothèse précédente.

## 2.2 Luminosité typique d'une étoile

**21** - La loi de Stefan relie la puissance surfacique émise par le corps noir à sa température de surface  $T$  :  $P = \sigma T^4$ .

Les restrictions habituelles pour son application sont :

- le corps doit être assimilable à un corps noir : le flux réfléchi doit être nul
- le corps doit être à l'équilibre thermodynamique : la température  $T$  doit pouvoir être définie.

Si l'on veut l'étendre à un corps qui n'est pas un corps noir, on corrige cette loi à l'aide de la notion d'émissivité  $\varepsilon$ .

Cette grandeur est comprise entre 0 et 1 et varie selon la nature de la surface (métal ou non,...)

La luminosité totale  $L$  d'une étoile est donc de l'ordre :

$$L = SP \sim R^2 \sigma T_E^4 \sim k R_E^2 \left( \frac{M_E}{R_E} \right)^4 \sim k \frac{M_E^4}{R_E^2}$$

Or  $M_E \sim \rho R_E^3$  donc  $R_E \sim k' M_E^{1/3}$

$$L \sim k \frac{M_E^4}{M_E^{2/3}}$$

Donc, on a bien :

$$L \sim k M_E^{3,3}$$

Pour comparer à la loi de puissance observée expérimentalement, on utilise une échelle logarithmique et on vérifie que l'on a bien une

penne de 3,3 environ. Sur le graphe, quand la masse est multipliée par 10, on voit que la luminosité est multipliée par  $10^3$  environ, ce qui confirme l'analyse qualitative précédente.

## Deuxième partie

# Etude du système solaire primordial

## 3 Structure verticale du disque primordial

**22** - Le champ  $\vec{g}_S$  du Soleil en  $M$  dans le système de coordonnées cylindriques est :

$$\vec{g}_S(R) = \frac{-GM_S}{(r^2+z^2)^{3/2}} (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z)$$

**23** - Le principe fondamental de la statique des fluides dans le référentiel tournant la vitesse angulaire  $\Omega(r)$  s'écrit :

$$-\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}_S + \rho \Omega^2 \vec{HM} = \vec{0}$$

- $-\vec{\nabla} P$  est l'équivalent volumique des forces de pression qui s'exercent sur une particule fluide.
- $\rho \vec{g}_S$  est la force de gravitation par unité de volume.
- $\rho \Omega^2 \vec{HM}$  est la force d'inertie d'entraînement par unité de volume

La projection dans la base cylindrique donne :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{-GM_S}{(r^2+z^2)^{3/2}} r + \rho \Omega^2 r$$

et

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho \frac{-GM_S}{(r^2+z^2)^{3/2}} z$$

**24** - Si le disque est assimilable à un gaz parfait d'hydrogène de température  $T(r)$ , on a l'équation d'état du gaz parfait qui donne :

$$P = \rho \frac{k_B T(r)}{m_H}$$

Et donc, dans la deuxième équation :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{k_B T(r)}{m_H} \frac{\partial \rho}{\partial z} = \rho \frac{-GM_S}{(r^2+z^2)^{3/2}} z$$

Et finalement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \rho \frac{-GM_S m_H}{(r^2+z^2)^{3/2} k_B T(r)} z$$

Si l'on considère le disque comme fin ( $z \ll r$  pour tout point du disque), on peut la mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \rho \frac{-GM_S m_H}{r^3 k_B T(r)} z$$

Et l'on reconnaît ici la vitesse angulaire de rotation Képlérienne, ce qui donne :

$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\rho m_H \Omega^2(r)}{k_B T(r)} z$  où  $\Omega(r)$  est la vitesse angulaire de rotation Képlérienne pour le rayon  $r$ .

**25** - L'intégration de cette équation donne :

$$\rho = \rho_0(r) e^{-\frac{m_H \Omega^2(r) z^2}{2k_B T(r)}} = \rho_0(r) e^{-\frac{z^2}{2H^2(r)}}$$

avec  $H(r) = \sqrt{\frac{k_B T(r)}{m_H \Omega^2(r)}}$

qui apparaît comme la hauteur typique du disque à une distance  $r$  de l'étoile.

## 4 Structure radiale du disque, profil de température

**26** - On a donc :  $\rho(r, z) = \rho_0(r) e^{-\frac{z^2}{2H^2(r)}}$

Donc :  $\Sigma(r) = \int_{z=-\infty}^{\infty} \rho_0(r) e^{-\frac{z^2}{2H^2(r)}} dz$

Ce qui donne, après changement de variables, en posant  $u = \frac{z}{H(r)}$

donc :

$$\Sigma(r) = \rho_0(r) H(r) \int_{z=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Donc :

$$\Sigma(r) = \sqrt{2\pi} \rho_0(r) H(r)$$

### 4.1 Bilan de masse

**27** - La masse  $\delta m(r, t)$  de cet anneau est donc :

$$\delta m(r, t) = 2\pi r \Sigma(r, t) dr$$

**28** - Entre  $t$  et  $t+dt$ , la variation de masse de l'anneau considéré,  $d(\delta m)$  est due :

à la masse entrant en  $r$  :  $2\pi r v_r(r) \Sigma(r) dt$

à la masse sortant en  $r+dr$  :  $2\pi(r+dr) v_r(r+dr) \Sigma(r+dr) dt$

On a ainsi :  $d(\delta m) = -2\pi(r+dr) v_r(r+dr) \Sigma(r+dr) dt + 2\pi(r) v_r(r) \Sigma(r) dt$

D'après l'expression de la masse de l'anneau, on a :

$d(2\pi r \Sigma(r) dr) = -2\pi(r+dr) v_r(r+dr) \Sigma(r+dr) dt + 2\pi(r) v_r(r) \Sigma(r) dt$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} (r \Sigma dr) = -\partial(r v_r \Sigma)$$

Et donc :

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r \Sigma) = 0$$

### 4.2 Bilan de moment cinétique

**29** - Le moment cinétique de l'anneau  $\delta \vec{L}_a$  par rapport au point  $S$  est par définition :

$$\delta \vec{L}_a = \delta m r^2 \Omega(r) \vec{e}_z$$

Donc :

$$\delta \vec{L}_a = 2\pi r \Sigma(r) r^2 \Omega(r) dr \vec{e}_z = 2\pi \Sigma(r) r^3 \Omega(r) dr \vec{e}_z$$

**30** - Le moment cinétique  $d\vec{L}(r)$  emporté par la matière qui traverse l'anneau de rayon  $r$  à la vitesse radiale  $v_r(r)$  est donc :

$d\vec{L}_e(r) = \delta m_e r^2 \Omega(r) \vec{e}_z$  avec une masse entrante  $\delta m_e$  qui est, comme précédemment :

$$\delta m_e = 2\pi r v_r(r) \Sigma(r) dt$$



Finalement :

$$\frac{d\vec{L}_e(r)}{dt} = 2\pi r^3 \nu_r(r) \Sigma(r) \Omega(r) \vec{e}_z$$

**31** - La force visqueuse  $\vec{f}_{int}$  linéique est d'après l'énoncé :  
 $\vec{f}_{int}(r) = \pm \nu \Sigma r \frac{d\Omega}{dr} \vec{u}_\theta$ .

On voit que celle-ci fait apparaître  $\frac{d\Omega}{dr}$  : on reconnaît un terme de rotation différentielle. C'est parce que le fluide ne tourne pas en bloc que les différents anneaux sont amenés à glisser les un contre les autres à des vitesses relatives locales non-nulles. Lors de ce glissement, si l'on fait un bilan de quantité de mouvement sur les particules microscopiques échangées par deux anneaux voisins, on constate que puisque la vitesse de glissement est non nulle, le bilan n'est pas équilibré : il y a forcément un transfert de quantité de mouvement d'un anneau à l'autre. Ce transfert peut être interprété comme l'existence d'une force d'un anneau sur l'autre : la force visqueuse.

Les autres termes font apparaître la surface effective de contact entre deux anneaux voisins, les masses à l'intérieur des anneaux (qui interviennent dans le bilan de quantité de mouvement).

Quant à la direction, selon  $\pm \vec{u}_\theta$ , c'est la direction de la vitesse relative des deux anneaux.

La force infinitésimale qui s'exerce à travers un élément de courbe de séparation de longueur  $r d\theta$  est de la forme :  $d\vec{F} = -r d\theta \nu \Sigma r \frac{d\Omega}{dr} \vec{u}_\theta$

Le moment infinitésimal de cette force est :

$$d\vec{\Gamma}_{int} = r \vec{u}_r \wedge d\vec{F} = -\nu \Sigma r^3 \frac{d\Omega}{dr} d\theta \vec{e}_z$$

Le moment par rapport à  $O$ ,  $\vec{\Gamma}_{int}$  de cette force visqueuse, est :

$$\vec{\Gamma}_{int} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\vec{\Gamma}_{int}$$

Ce qui donne :

$$\vec{\Gamma}_{int} = -2\pi \nu \Sigma r^3 \frac{d\Omega}{dr} \vec{e}_z$$

**32** - On retrouve une uniformisation typique des phénomènes de diffusion, avec, en plus, un maximum non-nul et non constant, qui est dû à la balance des forces de gravitation et des forces d'inertie (dans le référentiel tournant).

En régime permanent, on a :  $\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma \nu r^{1/2})) = 0$

donc :

$$\frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma \nu r^{1/2})) = 0$$

donc :

$$\frac{\partial}{\partial r} (\Sigma \nu r^{1/2}) = \frac{k}{\sqrt{r}} \text{ où } k \text{ est une constante.}$$

Donc :

$$\Sigma \nu r^{1/2} = 2k \sqrt{r}$$

Et finalement :  $\Sigma \nu = 2k$  donc si la viscosité est uniforme :

$$\Sigma = cste$$

Ce qui n'est pas tout à fait cohérent avec la simulation.

### 4.3 Bilan thermique, modèle du disque plat passif

**33** - On voit sur la figure que  $\varphi$  varie de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $\frac{\pi}{2}$  et que  $\theta$  varie de 0 à  $\theta_{max} = \arcsin\left(\frac{R_S}{r}\right)$

L'intégration sur  $\varphi$  donne un flux intermédiaire :

$$dF' = 2I_S \sin^2 \theta d\theta$$

$$\text{et donc : } dF' = I_S (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$\text{Dont l'intégration donne : } dF = I_S \int (1 - \cos 2\theta) d\theta = I_S (\theta_{max} - \frac{1}{2} \sin(2\theta_{max})) dS$$

$$\text{Et donc : } dF = I_S (\arcsin\left(\frac{R_S}{r}\right) - \frac{1}{2} \sin(2\theta_{max})) dS$$

$$dF = I_S (\arcsin\left(\frac{R_S}{r}\right) - \sin(\theta_{max}) \cos(\theta_{max})) dS$$

Avec la formule  $\theta_{max} = \arcsin\left(\frac{R_S}{r}\right)$ , on a directement :

$$dF_{tot} = I_S \left[ \arcsin\left(\frac{R_S}{r}\right) - \left(\frac{R_S}{r}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{R_S}{r}\right)^2} \right] dS$$

**34** - Si les échanges thermiques par rayonnement suivent la loi de Stefan, on a :  $I_S = \sigma T_S^4$

Et la luminosité de la surface  $dS$  considérée est  $dF_e = I_{disque} dS = \sigma T^4(r) dS$

L'équilibre thermique de l'élément considéré s'écrit :

$$dF = dF_e$$

et donc :

$$\sigma T^4(r) = \sigma T_S^4 \left[ \arcsin\left(\frac{R_S}{r}\right) - \left(\frac{R_S}{r}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{R_S}{r}\right)^2} \right]$$

Donc :

$$T(r) = T_S \left[ \arcsin\left(\frac{R_S}{r}\right) - \left(\frac{R_S}{r}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{R_S}{r}\right)^2} \right]^{1/4}$$

**35** - On peut faire un développement limité de cette expression et cela donne :

$$T(r) \sim T_S \left[ \frac{R_S}{r} + \frac{1}{6} \left(\frac{R_S}{r}\right)^3 - \left(\frac{R_S}{r}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{R_S}{r}\right)^2\right) \right]^{1/4}$$

$$T(r) \sim T_S \left[ +\frac{1}{6} \left(\frac{R_S}{r}\right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_S}{r}\right)^3 \right]^{1/4}$$

$$T(r) \sim T_S \left(\frac{2}{3}\right)^{1/4} \left(\frac{R_S}{r}\right)^{3/4}$$

donc :

$$T(r) \sim \kappa r^{-3/4}$$

**36** - D'après ce qui précède, on a alors :

$$H(r) = \sqrt{\frac{k_B T(r)}{m_H \Omega^2(r)}} = \sqrt{\frac{k_B \alpha r^{-3/4}}{m_H \frac{GM_E}{r^3}}} = \gamma r^{9/8}$$

On a bien un disque légèrement évasé, ce qui est cohérent avec les observations expérimentales. Pour ce qui est de la courbe suivante, on voit que quand le rayon est multiplié par 10, la hauteur l'est d'un facteur comparable. Ce qui correspond environ à une loi de puissance du type :

$$H(r) = \gamma r^{9/8}$$

## 5 Absorption du rayonnement stellaire par le disque

**37** - Dans le cas d'un milieu linéaire homogène non magnétique caractérisé par une polarisation volumique  $\vec{P}$  :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t})$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{-\text{div } \vec{P}}{\varepsilon_0}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

**38** - Les équations précédentes deviennent :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0(\varepsilon_0(1 + \chi) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{div}((1 + \chi) \vec{E}) = 0 \text{ donc } \text{div}(\vec{E}) = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Si l'on prend le rotationnel de la dernière équation, on a :

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \text{rot } \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0(\varepsilon_0(1 + \chi) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}))$$

$$\text{Donc : } \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

En utilisant les formules d'analyse vectorielle :

$$\text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{Or } \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{ce qui donne : } -\Delta \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{Or, on cherche un champ de la forme : } \vec{E} = \vec{E}_0(M) e^{-i\omega t}$$

$$\text{Donc : } -\Delta \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

Et finalement :

$$\Delta \vec{E}_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r \vec{E}_0 = \vec{0}$$

avec  $\varepsilon_r = 1 + \chi$ .

$$\text{39 - On a l'équation : } \Delta \vec{E}_0 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r \vec{E}_0 = \vec{0}$$

$$\text{et l'on réinjecte la forme de solution : } \vec{E}_0(M) = \vec{E}_m e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\text{Ce qui donne : } -k^2 \vec{E}_m e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r \vec{E}_m e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \vec{0}$$

Ce qui implique :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r$$

**40** - Ecrire  $k$  sous la forme  $k = k' + ik''$  implique que le champ s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_m e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Donc, si l'on envisage une propagation selon  $\vec{u}_z$ , on a :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_m e^{-i\omega t + ik'z - k''z}$$

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_m e^{-i\omega t + ik'z} e^{-k''z}$$

$k'$  est donc liée à la propagation de l'onde

$k''$  est liée à l'absorption de l'onde

**41** - On a :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_m e^{-i\omega t + ik'z} e^{-k''z}$$

l'indice du milieu est tel que :

$$v_\varphi = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k'}$$

donc  $n = \frac{ck'}{\omega}$

Et de plus, la distance typique d'atténuation en amplitude est  $d = \frac{1}{k''}$ . Comme sur la photographie de disque présentée en début de partie, celui-ci est opaque, on peut en déduire que la distance typique d'atténuation est plus petite que le disque : la lumière ne parvient pas à le traverser.

## Troisième partie

# Planètes : migration et résonances

## 6 Interaction disque-planète

### 6.1 Déviation d'un corps au voisinage d'une planète

**42** - Une constante est égale à sa valeur initiale. Or :

$C = r^2\dot{\theta} = |\vec{r} \wedge \vec{v}| = |\vec{r} \wedge \vec{v}|_i = \pm bv$ . A cause du sens d'évolution de  $\theta$  (décroissant), on choisit :

$$C = -bv$$

**43** - Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse-test  $\delta m$  donne :

$$\delta m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{Gm_p \delta m}{r^2} \vec{u}_r$$

Si l'on projette l'équation précédente sur le vecteur  $\vec{u}_y$ , on obtient :

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{Gm_p}{r^2} \sin\theta$$

On peut utiliser la conservation de  $C$  pour faire disparaître le temps, ce qui donne :

$$dv_y = -\frac{Gm_p}{r^2} \sin\theta dt \frac{d\theta}{d\theta} = -\frac{Gm_p}{r^2} \sin\theta d\theta \frac{dt}{d\theta} = -\frac{Gm_p}{C} \sin\theta d\theta$$

**44** - Il y a conservation de l'énergie mécanique. Or, dans les situations finale et initiale, l'énergie mécanique se résume à l'énergie cinétique, ce qui implique que la norme de la vitesse initiale et celle de la vitesse finale sont forcément égales.

On peut intégrer l'équation obtenue à la question entre la situation initiale et la situation finale, et cela donne :

$$v_{yf} - v_{yi} = \frac{GM}{C} (\cos\beta + 1)$$

Or, d'après ce qui précède, on a :  $v_{yi} = 0$  et  $v_{yf} = -v \sin\beta$

Ce qui donne :  $-v \sin\beta = \frac{GM}{C} (\cos\beta + 1)$

Et finalement, à l'aide des formules trigonométriques et de l'expression de  $C$  :

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{Gm_p}{bv^2}$$

Les dépendances de l'angle de déviation avec les divers paramètres sont cohérents :

- plus l'objet passe près, plus il est dévié
- plus la masse du déviateur est importante, plus il est dévié
- plus l'objet a une vitesse importante, moins il est dévié

**Remarque** Le résultat *a priori* surprenant de cette expression est l'indépendance de l'angle avec la masse du dévié. Ce résultat laisse présager la possibilité de mirages gravitationnels,

mirages dont l'étude rigoureuse procède de la relativité générale.

## 6.2 Couple exercé par la masse-test sur la planète

**45** - Le moment cinétique initial de  $\delta m$  est :  $\vec{L}_i = -\delta mrv\vec{e}_z$  car la vitesse initiale est orthoradiale.

Le moment cinétique final de  $\delta m$  est :  $\vec{L}_f = -\delta mrv\cos\beta\vec{e}_z$  car la vitesse finale n'est plus orthoradiale.

La variation de moment cinétique  $\delta L$  de  $\delta m$  est donc :

$$\delta\vec{L} = -\delta mrv(\cos\beta - 1)\vec{e}_z$$

Cette variation est la même dans le référentiel lié à  $S$  car on fait une différence de vitesse : la vitesse d'entraînement étant la même avant et après l'interaction si l'on suppose que la variation de position est négligeable, les deux vitesses d'entraînement qui interviennent se compensent.

Si l'angle de déviation est petit, on a :

$\delta\vec{L} = -\delta mrv(\cos\beta - 1)\vec{e}_z \sim \delta mrv\frac{\beta^2}{2}\vec{e}_z$ , ce qui, vue l'expression précédente, donne :

$$\delta\vec{L} \sim \delta mrv\frac{\beta^2}{2}\vec{e}_z = \delta mrv\frac{(\frac{2Gm_P}{bv^2})^2}{2}\vec{e}_z = 2\delta mr\frac{G^2m_P^2}{b^2v^3}\vec{e}_z$$

**46** -  $v$  est la différence entre les vitesses de deux points dont les rayons sont de l'ordre de  $r$  et qui tournent à des vitesses angulaires  $\Omega$  et  $\Omega_P$ . On a ainsi :  $v = r(\Omega - \Omega_P)$

Donc :

$$\delta\vec{L} = 2\delta m\frac{G^2m_P^2}{b^2r^2(\Omega - \Omega_P)^3}\vec{e}_z$$

**47** - Le temps  $\tau$  typique séparant deux rencontres entre la planète et la masse est :

$$\tau = \frac{2\pi}{(\Omega - \Omega_P)}$$

Ce qui donne une variation de moment cinétique par unité de temps de l'ordre de :

$$\frac{\delta\vec{L}}{\tau} = \delta m\frac{G^2m_P^2}{b^2r^2\pi(\Omega - \Omega_P)^2}\vec{e}_z$$

Ensuite, il faut prendre en compte le fait que l'ensemble (planète ; masse) est isolé et a donc un moment cinétique total qui est conservé. Ainsi, la variation du moment cinétique de la planète est égale à l'opposé de la variation de celui de la masse. On a donc :

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} \simeq -\delta m\frac{G^2m_P^2}{b^2r^2\pi(\Omega - \Omega_P)^2}\vec{e}_z$$

**48** - Si  $b \ll r_P$ , on a :  $\Omega - \Omega_P \sim b\frac{d\Omega_P}{dr}$  à l'ordre 1.

Pour une planète en rotation képlérienne,  $\Omega_P(r) = \sqrt{\frac{GM_E}{r^3}}$  ce qui donne :

$$\frac{d\Omega_P}{dr} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{GM_E}{r^5}} = \frac{-3\Omega_P}{2r}$$

Donc :

$$\Omega - \Omega_P \sim b\frac{d\Omega_P}{dr} = \frac{-3\Omega_P b}{2r}$$

## 7 Migration d'une planète

**49** - Le moment cinétique de la planète est :

$$L_P = m_P r_P v_P = m_P \sqrt{GM_S r_P}$$

**50** -

On a donc, d'après ce qui précède :

$$\dot{L}_P = \frac{m_P}{2}\sqrt{GM_S}r_P^{-1/2}\dot{r}_P$$

Et le TMC appliqué à la planète implique :

$$\dot{L}_P = \frac{m_P}{2}\sqrt{GM_S}r_P^{-1/2} = -\xi\left(\frac{m_P}{M_S}\right)^2\Sigma r_P^4\frac{GM_S}{\Delta^3}$$

L'équation d'évolution de  $r_P$  est donc :

$$\dot{r}_P = -Kr_P^{9/2}$$

On a donc, par séparation des variables :

$$\frac{dr_P}{r_P^{9/2}} = -Kdt$$

puis par intégration :

$$\frac{2}{7} \left( \frac{1}{r_P^{7/2}} - \frac{1}{r_0^{7/2}} \right) = Kt$$

Donc :

$$r_P = \frac{r_0}{\left( \frac{7}{2} r_0^{7/2} K t + 1 \right)^{2/7}}$$

Donc le temps typique de migration est tel que :  
 $\left( \frac{7}{2} r_0^{7/2} K \tau_m + 1 \right)^{2/7} = 2$   
ce qui donne :

$$\tau_m = \frac{2^{7/2} - 1}{\frac{7}{2} r_0^{7/2} K}$$

Numériquement, on trouve  $\tau_m \simeq 10 \text{ans}$ , ce qui est très différent du résultat donné par des modèles plus précis. Comme amélioration, on pourrait par exemple prendre en compte le fait que la planète agrège de la matière du disque lors de sa migration, matière qui modifie sa masse, son rayon, etc... , mais cela implique qu'elle creuse en sillon le long de son orbite dans le disque protoplanétaire. Ce sillon implique notamment que les valeurs de  $\Delta$  et de  $\Sigma$ , qui sont des moyennes dans le disque sont très différentes au voisinage de la planète, ce qui explique un allongement considérable de la durée de migration.

## 8 Résonances dans le système solaire

**51** - Le principe fondamental de la dynamique donne pour  $m$  :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -GM_S m \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} - GM_J m \frac{\vec{r} - \vec{r}_J}{\|\vec{r} - \vec{r}_J\|^3}$$

On divise par  $m$  et on obtient l'équation demandée :

$$\ddot{\vec{r}} + GM_S \frac{\vec{r}}{r^3} = -GM_J \frac{\vec{r} - \vec{r}_J}{\|\vec{r} - \vec{r}_J\|^3}$$

**52** - On a, d'après le schéma :

$$\vec{r} = (r_m + x) \vec{e}_{r_m} + y \vec{e}_{\theta_m}$$

$$\text{Donc } \dot{\vec{r}} = \dot{x} \vec{e}_{r_m} + (r_m + x) \Omega_m \vec{e}_{\theta_m} + \dot{y} \vec{e}_{\theta_m} - y \Omega_m \vec{e}_{r_m}$$

$$\text{Puis } \ddot{\vec{r}} = [\ddot{x} - (r_m + x) \Omega_m^2 - 2\dot{y} \Omega_m] \vec{e}_{r_m} + [2\dot{x} \Omega_m + \ddot{y} - y \Omega_m^2] \vec{e}_{\theta_m}$$

**53** - Avec les expressions précédentes, on a :

$$\vec{r} = (r_m + x) \vec{e}_{r_m} + y \vec{e}_{\theta_m}$$

donc :

$$r = [(r_m + x)^2 + y^2]^{1/2}$$

Donc

$$GM_S \frac{\vec{r}}{r^3} = GM_S \frac{[(r_m + x) \vec{e}_{r_m} + y \vec{e}_{\theta_m}]}{[(r_m + x)^2 + y^2]^{3/2}}$$

On peut ensuite simplifier cette grandeur à l'ordre 1 en  $x$  et  $y$ , ce qui donne :

$$GM_S \frac{[(r_m + x) \vec{e}_{r_m} + y \vec{e}_{\theta_m}]}{[(r_m + x)^2 + y^2]^{3/2}} \simeq GM_S \frac{[(r_m + x) \vec{e}_{r_m} + y \vec{e}_{\theta_m}]}{[r_m^2 + 2r_m x]^{3/2}}$$

$$GM_S \frac{[(r_m + x) \vec{e}_{r_m} + y \vec{e}_{\theta_m}]}{r_m^3 [1 + \frac{2x}{r_m}]^{3/2}} \simeq \Omega_m^2 [(r_m + x) \vec{e}_{r_m} + y \vec{e}_{\theta_m}] \left[ 1 + \frac{2x}{r_m} \right]^{-3/2}$$

Et donc :

$$\simeq \Omega_m^2 [(r_m + x) \vec{e}_{r_m} + y \vec{e}_{\theta_m}] \left[ 1 - \frac{3x}{r_m} \right] \simeq \Omega_m^2 [(r_m - 2x) \vec{e}_{r_m} + y \vec{e}_{\theta_m}]$$

**54** - Si l'on assemble les deux termes précédents, on tombe sur :

$$\ddot{x} - 2\Omega_m \dot{y} - 3\Omega_m^2 x \text{ selon } \vec{e}_{r_m}$$

$$\ddot{y} + 2\Omega_m \dot{x} \text{ selon } \vec{e}_{\theta_m}$$

**55** - La mise en place d'une méthode perturbative comporte plusieurs étapes :

- dans la première, on résout l'équation du mouvement en négligeant totalement les termes perturbatifs. On obtient alors le mouvement à l'ordre 0 en la perturbation.
- dans la deuxième, on estime le ou les termes perturbatifs en assimilant les valeurs exactes des coordonnées de position, de vitesse, etc... à leurs valeurs à l'ordre 0 déterminées à l'étape précédente. On a ainsi une estimation de l'ordre de grandeur de la perturbation.

- dans la troisième étape, on réinjecte cette estimation dans l'équation du mouvement, et on la résoud : on obtient alors le mouvement à l'ordre 1 en la perturbation.
- selon le courage et la nécessité, on peut ensuite se servir de cet ordre 1 pour estimer plus précisément la perturbation et recommencer à l'envi le cycle des réinjection.

On a :  $\vec{r}_J(t) = r_J \cos(\Omega t) \vec{e}_{rm} - r_J \sin(\Omega t) \vec{e}_\theta$

Ce qui implique que :

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_J(t) = (r - r_J \cos(\Omega t)) \vec{e}_{rm} + r_J \sin(\Omega t) \vec{e}_\theta$$

**56** - On a :  $\vec{f} = -GM_J \frac{\vec{r} - \vec{r}_J}{\|\vec{r} - \vec{r}_J\|^3}$

Qui peut être estimée par :

$$\vec{f} = -GM_J \frac{(r - r_J \cos(\Omega t)) \vec{e}_{rm} + r_J \sin(\Omega t) \vec{e}_\theta}{\|(r - r_J \cos(\Omega t)) \vec{e}_{rm} + r_J \sin(\Omega t) \vec{e}_\theta\|^3}$$

Et donc :

$$\vec{f} = -GM_J \frac{(r - r_J \cos(\Omega t)) \vec{e}_{rm} + r_J \sin(\Omega t) \vec{e}_\theta}{((r - r_J \cos(\Omega t))^2 + r_J^2 \sin^2(\Omega t))^{3/2}}$$

Ce qui donne, projeté sur  $\vec{e}_{rm}$  :

$$f_x = -GM_J \frac{(r - r_J \cos(\Omega t))}{((r - r_J \cos(\Omega t))^2 + r_J^2 \sin^2(\Omega t))^{3/2}}$$

et perpendiculairement :

$$f_y = -GM_J \frac{r_J \sin(\Omega t)}{((r - r_J \cos(\Omega t))^2 + r_J^2 \sin^2(\Omega t))^{3/2}}$$

Et par indentification :

$$f_x = \alpha \frac{\cos \Omega t - \beta}{(1 - 2\beta \cos \Omega t + \beta^2)^{3/2}}$$

et

$$f_y = \frac{-\alpha \sin \Omega t}{(1 - 2\beta \cos \Omega t + \beta^2)^{3/2}}$$

si l'on pose :  $\beta = \frac{r_m}{r_J}$  et  $\alpha = \frac{GM_J}{r_J^2}$

**57** - D'après ce qui précède, on a :

$$\ddot{x} - 2\Omega_m \dot{y} - 3\Omega_m^2 x = \alpha \frac{\cos \Omega t - \beta}{(1 - 2\beta \cos \Omega t + \beta^2)^{3/2}}$$

$$\ddot{y} + 2\Omega_m \dot{x} = -\alpha \frac{\sin \Omega t}{(1 - 2\beta \cos \Omega t + \beta^2)^{3/2}}$$

Si l'on considère uniquement l'excitation par la  $n^{\text{ème}}$  harmonique, et que l'on passe en complexes, on a :

$$-n^2 \Omega^2 \underline{x}_n - j2\Omega_m n \Omega \underline{y}_n - 3\Omega_m^2 \underline{x}_n = f_{x,n} \exp^{jn\Omega t}$$

De même, l'équation sur  $y$ ,  $\ddot{y} + 2\dot{x}\Omega_m = f_y$ , donne :

$$-n^2 \Omega^2 \underline{y}_n + j2\Omega_m n \Omega \underline{x}_n = f_{y,n} \exp^{jn\Omega t}$$

**58** - On peut utiliser ces deux équations pour en déduire l'équation algébrique vérifiée par  $\underline{x}_n$ , en effet la deuxième équation donne :

$\underline{y}_n = \frac{j2\Omega_m n \Omega \underline{x}_n - f_{y,n} \exp^{jn\Omega t}}{n^2 \Omega^2}$  dont la réinjection dans la première équation donne :

$$\underline{x}_n = \frac{n^2 \Omega^2 f_{x,n} - 2j\Omega_m n \Omega f_{y,n}}{[-(n^2 \Omega^2)^2 + 4\Omega_m^2 n^2 \Omega^2 - 3\Omega_m^2 n^2 \Omega^2]} \exp^{jn\Omega t}$$

Ce qui, mis en forme, donne :

$$\underline{x}_n = \frac{n^2 \Omega^2 f_{x,n} - 2j\Omega_m n \Omega f_{y,n}}{[-(n^2 \Omega^2)^2 + \Omega_m^2 n^2 \Omega^2]} \exp^{jn\Omega t}$$

**Remarque** il y avait une erreur dans l'énoncé. Il manquait un  $\Omega$  dans le deuxième terme du numérateur.

On voit que le dénominateur s'annule si :  $n^2 \Omega^2 = \Omega_m n \Omega$

Donc :

$$n\Omega = \Omega_m$$

Si la vitesse angulaire de  $m$  est un multiple rationnel de celle de battement, la force est toujours dans le même sens dans certaine configuration d'alignement, ce qui a tendance à déstabiliser ces orbites, ce qui explique qu'aucun astéroïde ne soit présent sur ces orbites. La Figure 14. illustre ce résultat, mais l'on ne retrouve pas exactement les valeurs des rapports.