

SESSION 2014

**AGRÉGATION
CONCOURS EXTERNE**

**Section : PHYSIQUE-CHIMIE
Option : PHYSIQUE**

PROBLÈME DE PHYSIQUE

Durée : 6 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

A

Optique atomique guidée

Dans ce problème, nous proposons d'étudier deux exemples de situations physiques pour lesquelles les concepts d'optique ondulatoire sont transposés à l'optique atomique. Le problème comporte trois parties indépendantes. La première pose les bases du traitement semiclassique de la polarisabilité atomique. La deuxième s'attache à transposer le concept de miroir diélectrique aux ondes de matière. Elle est subdivisée en deux parties, l'une sur l'optique ondulatoire traditionnelle, l'autre sur le traitement quantique d'une situation analogue pour des ondes de matière. La dernière partie étudie les guides d'onde pour atomes. Elle aborde notamment la condensation de Bose-Einstein en dimension réduite.

Il sera tenu le plus grand compte de la clarté de la rédaction, des applications numériques et de l'homogénéité dans les formules. Les réponses aux questions qualitatives doivent être succinctes mais précises.

Valeurs numériques :

Masse de l'électron : $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg.

Masse de l'atome de rubidium (isotope 87) : $m = 1,45 \times 10^{-25}$ kg.

Charge élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C.

Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ kg⁻¹.m⁻³.A².s⁴.

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J.K⁻¹.

Vitesse de la lumière : $c = 3,00 \times 10^8$ m.s⁻¹.

Constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s ou encore $\hbar = h/(2\pi) = 1,06 \times 10^{-34}$ J.s.

Magnéton de Bohr : $\mu_B = e\hbar/(2m_e) = 9,27 \times 10^{-24}$ J.T⁻¹.

Rayon de Bohr : $a_B = \hbar^2\epsilon_0/(\pi m_e e^2) = 52,92 \times 10^{-12}$ m.

Energie de Rydberg : $R_y = m_e c^2 \alpha^2 / 2 = 13,61$ eV avec $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$.

Rappel :

- Les fonctions de Bose d'indice n (entier ou demi-entier) sont définies par

$$g_n(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{p^n}.$$

Ces fonctions sont monotones et croissantes dans l'intervalle $0 < x < 1$. Quelques valeurs et cas limites pour certaines de ces fonctions

$$g_{3/2}(1) \simeq 2,61, \quad g_{5/2}(1) \simeq 1,34, \quad g_3(1) \simeq 1,2, \quad g_1(x \rightarrow 1^-) \rightarrow \infty, \quad g_{1/2}(x \rightarrow 1^-) \rightarrow \infty.$$

- La fonction delta de Dirac vérifie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0), \quad \text{et par suite } \delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x).$$

- Quelques intégrales utiles

$$\int_0^{\infty} u^2 e^{-u} du = 2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

- Quelques séries utiles

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \text{avec } |x| < 1.$$

- Formule trigonométrique

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

- Pour une distribution de probabilité centrée de la variable x , la variance est définie par

$$\Delta x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x) dx,$$

et l'écart type σ par la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{\Delta x^2}$.

1 – Partie liminaire : Modèle semiclassique de polarisabilité

Nous considérerons dans la suite plusieurs situations d'interactions entre un atome et la lumière. Lorsque la lumière laser utilisée est proche d'une résonance atomique, elle induit une action mécanique sur l'atome qui résulte de l'interaction entre le champ électrique $\vec{E}$ du laser et le dipôle induit par ce champ électrique $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$, où α représente la polarisabilité de l'atome.

- 1 – Montrer que α est homogène à un volume.
- 2 – Le hamiltonien associé à cette interaction s'écrit $U_R = -\vec{p} \cdot \vec{E}/2$. Préciser l'origine du facteur 2.
- 3 – Montrer que U_R est proportionnel à l'intensité instantanée (*i.e.* la puissance surfacique) du laser assimilé à une onde localement plane dans le vide.

Pour estimer la valeur de α , nous nous appuyons sur le modèle de l'électron élastiquement lié. L'électron de la couche extérieure de l'alcalin considéré (ici le rubidium) est supposé lié au reste de l'édifice atomique par une force effective de rappel harmonique $\vec{F}_h = -m\omega_0^2 \vec{r}$. Pour tenir compte des effets dissipatifs, on introduit un terme de frottement fluide $\vec{F}_f = -m\vec{v}/\tau$. Pour l'atome de rubidium, $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ avec $\lambda_0 = 780,2$ nm et $\tau = 30$ ns.

- 4 – Que représente τ dans un modèle d'atome à deux niveaux d'énergie ?
- 5 – Nous supposons que l'atome est soumis à un champ laser polarisé linéairement de vecteur champ électrique $\vec{E} = E_L \cos(\omega t) \vec{u}_z$ et de fréquence angulaire ω proche de la résonance. Écrire l'équation différentielle qui pilote le mouvement de l'électron élastiquement lié, supposé non relativiste.
- 6 – En utilisant la notation complexe, résoudre cette équation et en déduire une expression de $\vec{p}$ en fonction de $E_L \vec{u}_z$.
- 7 – Donner l'expression de la polarisabilité complexe α en fonction de e , m , ω_0 , ω , τ et ϵ_0 . Préciser les expressions de sa partie réelle $\mathcal{R}e(\alpha)$ et de sa partie imaginaire $\mathcal{I}m(\alpha)$.
- 8 – Donner l'expression réelle de $\vec{p}$ en fonction de ϵ_0 , $\mathcal{R}e(\alpha)$, $\mathcal{I}m(\alpha)$ et de E_L .

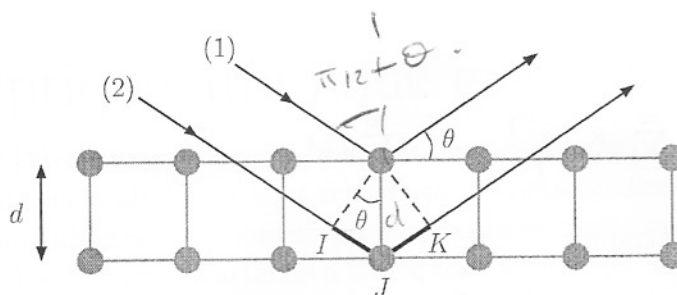


FIGURE 1 – Représentation schématique d'une diffusion de Bragg sur un cristal.

9 – En déduire l'expression de U_R en fonction des mêmes quantités.

10 – L'atome évolue sous l'action du potentiel moyen $U = \langle U_R \rangle$ où la moyenne est prise sur la période $2\pi/\omega$. Donner l'expression de U en fonction de l'intensité moyenne $I = \varepsilon_0 c E_L^2 / 2$, de $\mathcal{R}e(\alpha)$ et de c .

11 – Calculer $\mathcal{R}e(\alpha_1)$ pour $\lambda_1 = 2\pi c/\omega = 1064$ nm et $\mathcal{R}e(\alpha_2)$ pour $\lambda_2 = 2\pi c/\omega = 852$ nm.

12 – L'hypothèse de mouvement non relativiste pour l'électron de la couche externe est-elle justifiée pour une intensité de 10^{10} W/m² ?

13 – Le champ électromagnétique d'un laser peut s'écrire comme une superposition d'ondes électromagnétiques planes en $\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$. Toutefois, dans le traitement précédent, nous avons modélisé le laser par un champ sinusoïdal électrique $E_L \cos(\omega t)$. Expliquer les conditions sous lesquelles cette modélisation est valable.

Dans la suite du problème, le rubidium sera le seul atome considéré.

2 – Miroir de Bragg

Il existe en optique deux grandes catégories de miroirs : les miroirs métalliques et les miroirs diélectriques. L'objet de cette partie est d'étudier, après un rappel sur la diffraction de Bragg, les miroirs diélectriques utilisés en optique traditionnelle et leur pendant en optique atomique.

2.1. La diffraction de Bragg

14 – À quelle époque la diffraction de Bragg a-t-elle été observée pour la première fois ? On précisera le type de rayonnement et le type de matériau avec lesquels ces observations ont été effectuées.

15 – Une onde plane est envoyée sur un réseau cristallin sous incidence $\pi/2 - \theta$ et on observe l'onde rétrodiffusée dans la direction symétrique par rapport à la normale. En vous appuyant sur les notations de la figure 1, montrer que la différence de marche entre les rayons (1) et (2) vaut $\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 = 2d \sin \theta$.

16 – Montrer qu'il y a interférence constructive entre les rayons (1) et (2) si la condition suivante, dite de Bragg, est vérifiée

$$2d \sin \theta_n = n\lambda, \quad (1)$$

où λ est la longueur d'onde du rayonnement incident et n un entier non nul.

- 17 – Quel est l'intérêt de ces expériences de diffraction ?
- 18 – Rappeler l'expression de l'impulsion d'un photon associé à une onde électromagnétique plane de longueur d'onde λ .
- 19 – Montrer que la condition (1) revient à dire que la réflexion de Bragg est spéculaire et que le réseau communique à chaque photon n quanta d'impulsion $\hbar k_d$ selon la normale à la surface. Exprimer k_d en fonction de d .
- 20 – À quelle époque et par qui la diffraction de Bragg d'ondes électroniques a-t-elle été observée ?
- 21 – Estimer l'ordre de grandeur de l'énergie que doit avoir un électron d'un faisceau incident monocinétique pour que la diffraction de Bragg par un cristal soit observée.
- 22 – Peut-on observer la diffraction de Bragg d'atomes d'hélium ? Justifier votre réponse.
- 23 – Connaissez-vous des découvertes récentes redevables à cette technique ?

2.2. Miroir de Bragg optique

Dans cette partie, nous allons étudier une famille de miroirs optiques, les miroirs diélectriques, mis au point grâce aux progrès de l'épitaxie. Les seuls miroirs utilisés auparavant étaient des miroirs métalliques.

- 24 – Donner l'ordre de grandeur de la réflectivité (*i.e.* du coefficient de réflexion en puissance) maximale d'un miroir métallique en incidence normale. Pourquoi n'est-elle pas de 100 % ?
- 25 – Dans quel domaine spectral les miroirs métalliques sont-ils réfléchissants ?
- 26 – Vous paraît-il astucieux d'utiliser des miroirs métalliques dans des cavités lasers ?
- 27 – Donner un exemple d'utilisation des miroirs métalliques.

Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique

Dans ce paragraphe, nous introduisons les notations et conventions utiles pour la suite dans le cas d'ondes planes se propageant selon la direction z dans un milieu diélectrique non-absorbant, linéaire, isotrope et homogène d'indice n . La pulsation de l'onde électromagnétique est notée $\omega = 2\pi\nu$ et $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ désigne la longueur d'onde de cette onde dans le vide.

- 28 – On considère dans cette question une onde plane associée à un vecteur champ électrique complexe $\vec{E} = E_0 e^{-ikz + i\omega t} \vec{u}_x$ où $\vec{u}_x$ est le vecteur unitaire selon Ox . Préciser le sens de propagation de cette onde. Écrire sous forme vectorielle la relation liant le champ complexe $\vec{E}$ au champ complexe $\vec{B}$ associé à cette onde. En déduire l'expression de $\vec{B}$.

On considère désormais que le champ électrique est de la forme

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_- + \vec{E}_+ \quad \text{avec} \quad \vec{E}_\pm = E_\pm e^{\pm ikz} \vec{u}_x. \quad (2)$$

- 29 – Donner l'expression de k en fonction de n et λ_0 .
- 30 – Préciser le sens de propagation de l'onde plane d'amplitude E_- , puis celui de celle d'amplitude E_+ .
- 31 – Donner l'expression du champ magnétique $B_\pm(z)$ en fonction de k , $E_\pm$ et ω , puis de n , c et $E_\pm$.

Matrice d'interface diélectrique

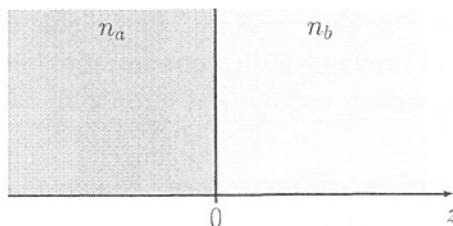


FIGURE 2 – Interface entre un milieu diélectrique d'indice n_a et un milieu diélectrique d'indice n_b .

Dans cette section, nous considérons que l'onde électromagnétique se propage dans deux milieux diélectriques d'indice respectif n_a et n_b présentant une interface commune en $z = 0$ (voir figure 2).

Les amplitudes des ondes électromagnétiques dans les deux milieux sont les parties réelles de

$$E_\ell(z) = E_{-, \ell} e^{-ikz} + E_{+, \ell} e^{+ikz} \quad (3)$$

où $\ell = a, b$ selon le milieu considéré. On introduit les notations suivantes

$$\tau_{ab} = \frac{2n_a}{n_a + n_b} \quad \text{et} \quad \rho_{ab} = \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b}.$$

Pour simplifier les calculs on donne également la relation d'inversion matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \eta & -\eta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1/\eta \\ 1 & -1/\eta \end{pmatrix}.$$

32 – Rappeler quelles sont les grandeurs vectorielles continues lorsqu'une onde électromagnétique franchit une interface diélectrique. On suppose pour la suite qu'il n'y a ni courant surfacique ni charge surfacique libre à l'interface.

33 – En déduire l'expression de la matrice d'interface I_{ab} qui relie les amplitudes du champ électrique de part et d'autre de l'interface

$$\begin{pmatrix} E_{-,a} \\ E_{+,a} \end{pmatrix} = I_{ab} \begin{pmatrix} E_{-,b} \\ E_{+,b} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

34 – Montrer que

$$I_{ab} = \frac{1}{\tau_{ab}} \begin{pmatrix} 1 & \rho_{ab} \\ \rho_{ab} & 1 \end{pmatrix}.$$

On démontre facilement que $(I_{ab})^{-1} = I_{ba}$. Interpréter cette dernière relation.

35 – Exprimer le déterminant $\det(I_{ab})$ de la matrice I_{ab} en fonction de n_a et n_b .

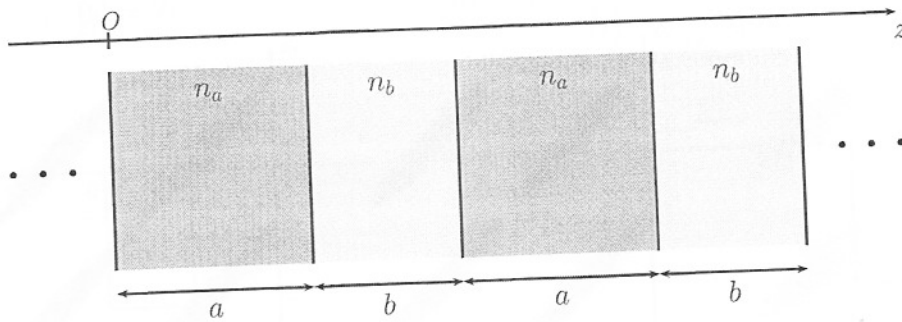


FIGURE 3 – Succession de milieux diélectriques

Matrice de propagation de l'onde électromagnétique

On note $(E_{+,b}, E_{-,b})$ les amplitudes du champ électrique juste *après* une interface a/b . On note $(\tilde{E}_{+,b}, \tilde{E}_{-,b})$ les amplitudes du champ électrique juste *avant* l'interface suivante b/a (figure 3).

36 – Établir la relation matricielle

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_{-,b} \\ \tilde{E}_{+,b} \end{pmatrix} = P_b \begin{pmatrix} E_{-,b} \\ E_{+,b} \end{pmatrix} \quad (5)$$

qui traduit la propagation dans le milieu d'indice b . On exprimera les coefficients de P_b en fonction de $\varphi_b = k_0 n_b b$.

37 – Calculer le déterminant de la matrice P_b .

La matrice du motif périodique du miroir de Bragg optique

On se place juste après une interface b/a . On introduit les notations suivantes : $\varphi_a = k_a a = k_0 n_a a$ et $\varphi_b = k_b b = k_0 n_b b$.

38 – Établir l'expression de la matrice Σ qui relie les amplitudes des champs électriques juste après deux interfaces b/a successives en fonction de I_{ab} , I_{ba} , P_a et P_b (figure 3) :

$$\begin{pmatrix} E_-(z = a + b + \epsilon) \\ E_+(z = a + b + \epsilon) \end{pmatrix} = \Sigma \begin{pmatrix} E_-(z = \epsilon) \\ E_+(z = \epsilon) \end{pmatrix},$$

où la distance ϵ vérifie $0 < \epsilon \ll a, b$.

39 – Calculer le déterminant de Σ sans faire le calcul explicite de Σ .

40 – Calculer explicitement les éléments diagonaux de la matrice Σ en fonction de $\rho = \rho_{ba}$, $\tau = (\tau_{ab}\tau_{ba})^{1/2}$ (on remarquera que $1 - \rho^2 = \tau^2$), φ_a et φ_b .

41 – On rappelle que pour trouver les valeurs propres d'une matrice 2×2 que nous noterons A , il suffit de résoudre le système du deuxième degré :

$$\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

où $\text{Tr}(A)$ désigne la trace de la matrice A et $\det(A)$ son déterminant.

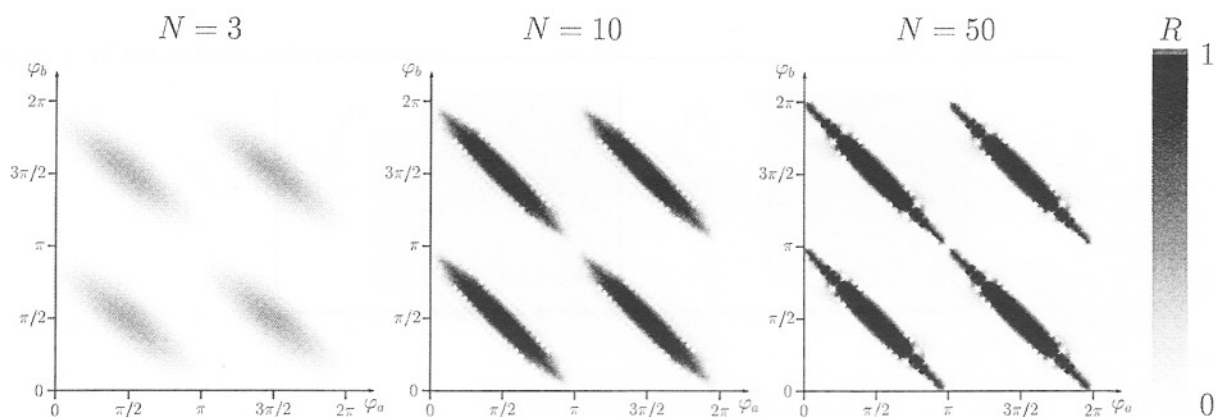


FIGURE 4 – Probabilité R_N de réflexion selon les valeurs de φ_a et φ_b pour $N = 3$, $N = 10$ et $N = 50$.

Montrer que les valeurs propres $X_{\pm}$ de la matrice Σ sont solutions de l'équation

$$X^2 - 2CX + 1 = 0 \quad (6)$$

avec

$$C = \frac{1}{\tau^2} [\cos(\varphi_a + \varphi_b) - \rho^2 \cos(\varphi_a - \varphi_b)] = \cos \varphi_a \cos \varphi_b - \frac{1}{2} \left(\frac{n_a}{n_b} + \frac{n_b}{n_a} \right) \sin \varphi_a \sin \varphi_b. \quad (7)$$

On ne cherchera pas à démontrer la dernière égalité de la relation (7).

42 – La matrice Σ peut facilement être diagonalisée : $\Sigma = T^{-1}DT$. Montrer qu'il en va de même pour la matrice $S_N = \Sigma^N$ traduisant la propagation à travers N bicouches.

43 – Montrer que la structure à N bicouches, caractérisée par la matrice de passage S_N , a un coefficient de réflexion en puissance donné par

$$R_N = \left| \frac{(S_N^{-1})_{12}}{(S_N^{-1})_{11}} \right|^2$$

où $(S_N^{-1})_{ij}$ désigne l'élément de matrice (i, j) de la matrice (S_N^{-1}) .

44 – La figure (4) représente sous la forme d'un graphe bi-dimensionnel $R_N(\varphi_a, \varphi_b)$ pour différentes valeurs de N . En déduire, dans le cas d'un N grand, les valeurs de $\tilde{\varphi}_a$ de φ_a et $\tilde{\varphi}_b$ de φ_b qui maximisent la réflexion et assurent une réflexion robuste vis-à-vis des petites imperfections éventuelles de la taille des couches successives. Donner dans ce cas la valeur de l'intégrale de phase

$$\int_0^{a+b} k(z) dz.$$

Commenter ce résultat à la lumière de la relation de Bragg. Justifier l'appellation « miroir de Bragg ».

45 – Pour les valeurs $\varphi_a = \tilde{\varphi}_a$ et $\varphi_b = \tilde{\varphi}_b$, les matrices D et T sont données par

$$D^{-1} = -\frac{1}{\tau^2} \begin{pmatrix} (1+\rho)^2 & 0 \\ 0 & (1-\rho)^2 \end{pmatrix}, T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

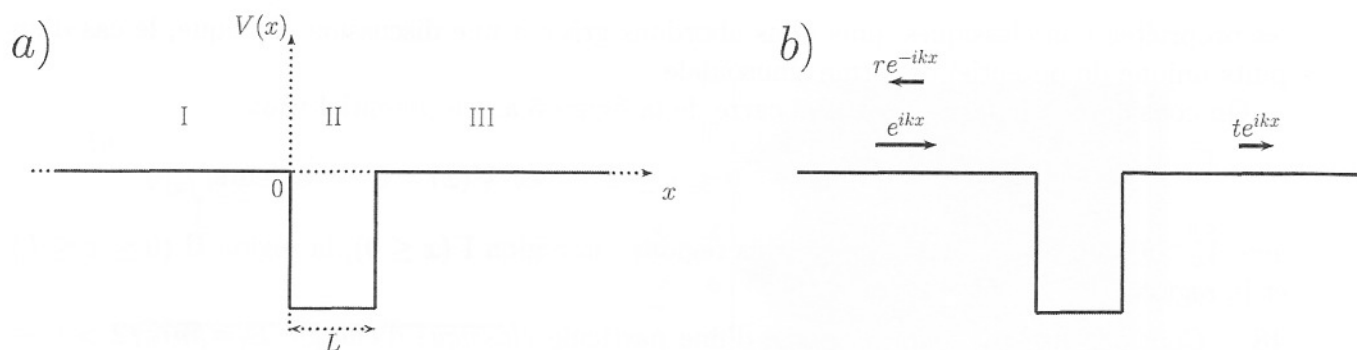


FIGURE 5 – Diffusion sur un puits de potentiel carré. a) les caractéristiques du potentiel. b) notations pour le cas quantique.

Montrer que

$$R_N = \left| \frac{1 - \left(\frac{n_a}{n_b}\right)^{2N}}{1 + \left(\frac{n_a}{n_b}\right)^{2N}} \right|^2.$$

46 – Application numérique. On souhaite réaliser un miroir diélectrique qui réfléchit la longueur d'onde $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$ grâce à $N = 40$ bicouches de GaAs/AlAs. On donne la valeur des indices de ces deux matériaux à cette longueur d'onde $n_{\text{GaAs}} = 3,3$ et $n_{\text{AlAs}} = 2,9$. Calculer la réflectivité du miroir. Quelles sont les épaisseurs minimum nécessaires pour chaque couche ?

47 – La symétrie de la figure 4 montre que la bande passante du miroir peut se calculer sur la ligne $\varphi_a = \varphi_b$. On pose $\tilde{\lambda} = 4n_a a = 4n_b b$. Exprimer la largeur en longueur d'onde $\Delta\lambda$ du miroir en exploitant l'équation (7) en fonction de n_a , n_b et $\tilde{\lambda}$ (on remarquera que $|C| \geq 1$ dans la zone de réflexion).

2.3. Réseau optique pour des atomes

Dans cette partie, les photons sont remplacés par des atomes, et nous allons montrer qu'il est possible de réaliser un miroir de Bragg pour des ondes de matière. Le motif d'indice périodique est ici réalisé à l'aide d'interférences lumineuses. Le nuage d'atomes de rubidium à très basse température utilisé pour l'expérience a été produit par une méthode qui combine successivement le refroidissement laser et le refroidissement par évaporation. Notons que la motivation en physique atomique est différente de celle de l'optique vue précédemment. Il existe en effet différentes méthodes pour produire des miroirs à atomes parfaits. C'est l'aspect filtre en vitesse ajustable qui présente ici un intérêt.

Diffusion quantique sur un puits de potentiel carré

Dans ce paragraphe préliminaire, il s'agit de retrouver un certain nombre de caractéristiques de la diffusion d'une onde de matière sur un potentiel. Pour ce faire nous procédons en deux étapes : nous posons les calculs pour le cas d'un puits de potentiel carré en mettant en exergue

les propriétés non classiques, puis nous abordons grâce à une discussion physique, le cas d'un puits unique de potentiel de forme sinusoïdale.

On considère le puits de potentiel carré de la figure 5.a. Ce potentiel vaut

$$V(x) = -V_0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{et} \quad V(x) = 0 \quad \text{ailleurs,}$$

avec $V_0 > 0$. On distingue par suite trois régions : la région I ($x \leq 0$), la région II ($0 \leq x \leq L$) et la région III ($x \geq L$).

48 – Considérons tout d'abord le cas d'une particule *classique* d'énergie $E = mv_0^2/2 > 0$ se propageant de gauche à droite (de $x = -\infty$ vers $x = +\infty$). Décrire le mouvement de cette particule dans les trois régions I, II et III.

Dans un problème de diffusion quantique (voir figure 5.b), on considère traditionnellement une onde plane incidente en e^{ikx} correspondant à une énergie $E > 0$ (dans la région I) et on souhaite calculer loin de la zone du potentiel l'amplitude r de l'onde réfléchie en re^{-ikx} (région I) et celle t de l'onde transmise te^{ikx} (région III).

49 – Justifier la recherche d'une solution en ondes planes.

50 – Établir la relation entre k et E dans la région I.

51 – Exprimer la forme de la fonction d'onde dans la région II en fonction de $\kappa = (2m(E + V_0))^{1/2}/\hbar$.

52 – Énumérer les deux conditions aux limites aux frontières entre régions et donner leur signification physique.

53 – En déduire quatre équations reliant les amplitudes des ondes planes dans les différentes régions.

54 – Donner sans calcul la relation reliant $|r|^2$ et $|t|^2$ ainsi que sa signification physique.

55 – Montrer que, dans la limite $E \rightarrow 0$, $r \rightarrow -1$ (on suppose $\sin(\kappa L) \neq 0$).

56 – Ce résultat dispose-t-il d'un équivalent en mécanique classique ? Commenter.

57 – Donner la condition pour laquelle ce phénomène de réflexion persiste lorsque le puits de potentiel a une dérivée continue.

Diffusion quantique sur des puits de potentiel sinusoïdaux

On considère dans un premier temps un seul puits de potentiel sinusoïdal :

$$V(x) = -U_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq d \quad \text{et} \quad V(x) = 0 \quad \text{ailleurs.}$$

L'échelle de longueur d permet d'introduire une échelle de vitesse $v_R = \hbar/md$ et une échelle d'énergie $E_R = mv_R^2/2$. La figure 6.a représente la probabilité de transmission lors d'une expérience de diffusion en fonction de la profondeur U_0 mesurée en unité de E_R et de la vitesse incidente v (énergie incidente $E = mv^2/2$) mesurée en unité de v_R .

58 – Commenter la présence de réflexion à basse vitesse ($v \ll v_R$) sur le graphe 6.a.

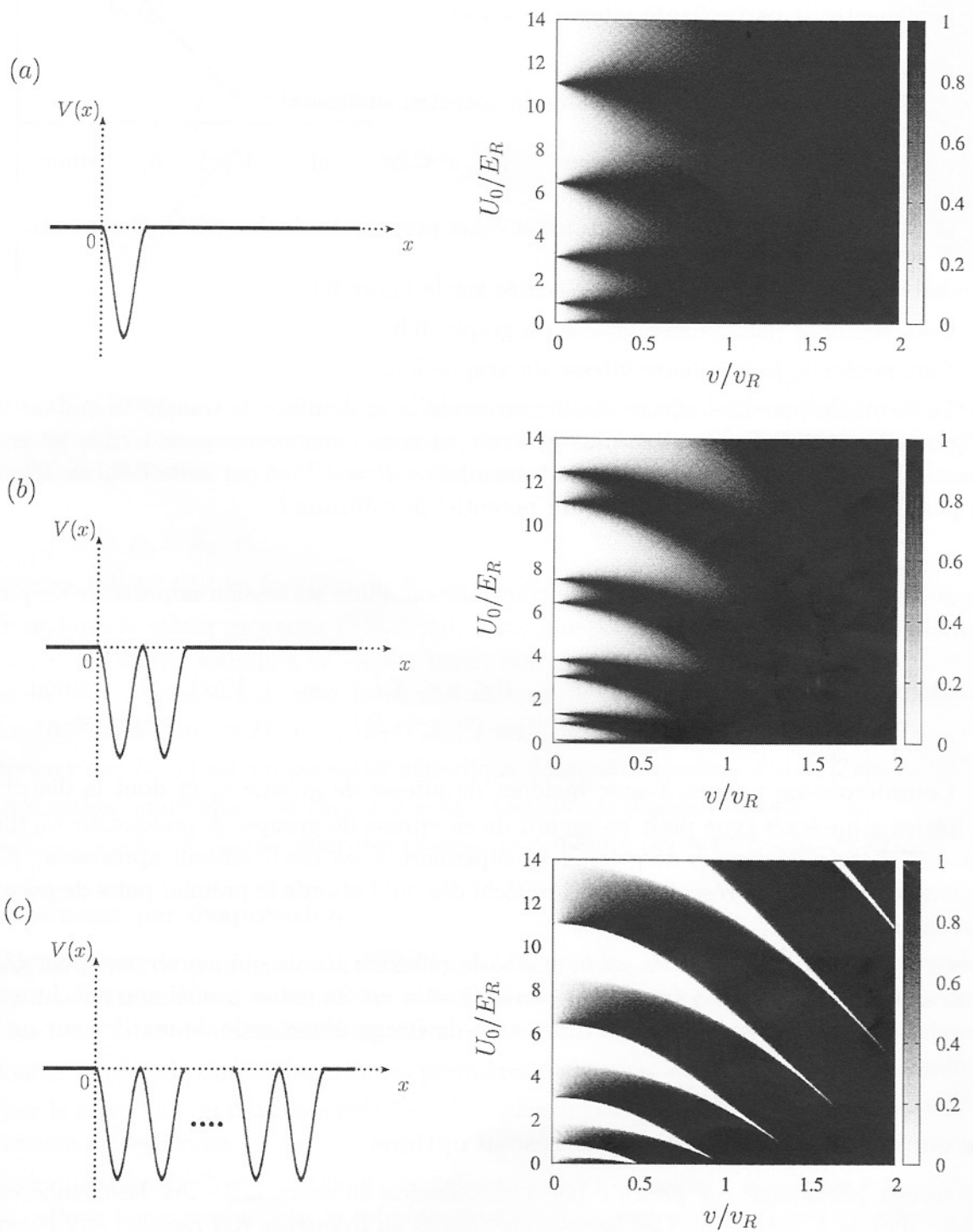


FIGURE 6 – Probabilité de transmission après diffusion sur a) un puits de potentiel sinusoïdal, b) un double puits de potentiel sinusoïdal, c) sur un très grand nombre de puits sinusoïdaux. L'échelle de gris va du blanc (réflexion parfaite) au noir (transmission parfaite).

- 59 – Pourquoi présente-t-il des zones discrètes de transmission parfaite à basse vitesse ?
 60 – Commenter la partie haute vitesse ($v > v_R$).

On considère maintenant un double puits de potentiel sinusoïdal :

$$V(x) = -U_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq 2d \quad \text{et} \quad V(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

- 61 – Rappeler les propriétés des énergies et états propres du double puits. Commenter.

La probabilité de transmission est représentée sur la figure 6.b.

- 62 – Commenter la partie basse vitesse du graphe 6.b.

- 63 – Commenter la partie haute vitesse du graphe 6.b.

- 64 – La forme du potentiel affecte significativement la probabilité de transmission dans les cas des figures 6.a et 6.b. De manière plus générale, si nous connaissons pour toutes les énergies incidentes le coefficient de probabilité de transmission $T = |t|^2$ (et par suite celui de réflexion), est-il possible de reconstruire la forme du potentiel de diffusion ?

La figure 6.c représente la probabilité de transmission d'une succession importante de puits de potentiels sinusoïdaux

$$V(x) = -U_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq Nd \quad \text{et} \quad V(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

avec $N \gg 1$.

- 65 – Considérons un paquet d'onde incident de vitesse de groupe v_g et dont la distribution des vitesses a un écart type petit en regard de sa vitesse de groupe. À profondeur U_0 donnée, un paquet d'onde de vitesse de groupe v_g supérieure à v_R est-il réfléchi après avoir pénétré significativement dans le réseau ou est-il réfléchi dès qu'il aborde le premier puits de potentiel ? Commenter.

- 66 – La figure 6.c comporte des « langues » de réflexion totale qui convergent pour $U_0 \rightarrow 0$ vers un ensemble discret de vitesses : $v_n = nv_R/2$ où n est un entier positif non nul. Interpréter cette relation comme résultant de la diffraction de Bragg d'une onde de matière sur un motif périodique de pas d .

Mise en oeuvre expérimentale : le réseau optique

Le réseau périodique est produit par l'interférence de deux faisceaux laser cohérents de longueur d'onde $\lambda = 852$ nm. Ces lasers sont décalés en fréquence par rapport aux résonances atomiques de l'atome utilisé dans l'expérience. Soient les vecteurs d'onde $\vec{k}_1 = k \cos(\theta/2) \vec{e}_z - k \sin(\theta/2) \vec{e}_x$ et $\vec{k}_2 = k \cos(\theta/2) \vec{e}_z + k \sin(\theta/2) \vec{e}_x$ associés aux ondes planes qui représentent les deux faisceaux lasers 1 et 2 (figure 7.a). Les champs électriques associés aux deux ondes planes ont même amplitude et sont polarisés linéairement selon l'axe $\vec{e}_y$. Le champ électrique total s'écrit

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = E_0 [\cos(\phi_1 - \omega t) + \cos(\phi_2 - \omega t)] \vec{e}_y. \quad (8)$$

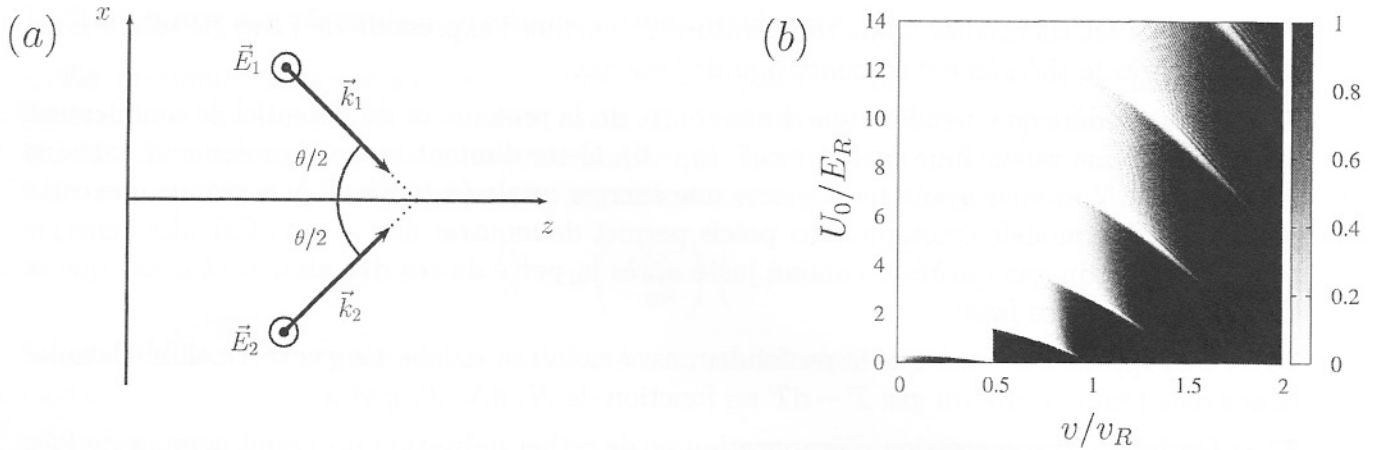


FIGURE 7 – (a) Configuration laser pour réaliser un réseau optique. (b) Probabilité de transmission après diffusion sur un réseau optique d'enveloppe gaussienne (voir texte). L'échelle de gris va du blanc (réflexion parfaite) au noir (transmission parfaite).

avec $\phi_1 = \vec{k}_1 \cdot \vec{r}$ et $\phi_2 = \vec{k}_2 \cdot \vec{r}$.

67 – Calculer $||\vec{E}_T(\vec{r}, t)||^2$ en fonction de E_0 , ϕ_1 , ϕ_2 et ωt .

68 – En déduire la valeur moyenne $\langle ||\vec{E}_T(\vec{r}, t)||^2 \rangle$ sur une période de temps $2\pi/\omega$.

On considère un atome soumis à ce champ laser. Son énergie potentielle, qui résulte de l'interaction de son dipôle induit avec le champ électrique total, s'écrit $U_0(x) = -\zeta I(x)$ où $\zeta = 5,6 \times 10^{-36} \text{ J} \cdot \text{W}^{-1} \text{m}^2$ et $I(x) \propto \langle ||\vec{E}_T(\vec{r}, t)||^2 \rangle$ est l'intensité lumineuse moyenne.

69 – Montrer que $U_0(x)$ est un potentiel périodique de période spatiale $d = \lambda/[2 \sin(\theta/2)]$.

70 – Application numérique : on choisit $\theta = 81^\circ$. Calculer le pas du réseau d .

71 – Calculer v_R , E_R et E_R/k_B pour des atomes de rubidium ($m = 1,45 \times 10^{-25} \text{ kg}$).

Refroidissement par évaporation

D'après les ordres de grandeur de la section précédente, il apparaît que la gamme de température doit être extrêmement basse. Pour atteindre de telles températures, on exploite tout d'abord les techniques de refroidissement laser.

72 – Donner la période durant laquelle les premières recherches sur ce sujet ont été menées.

73 – Citer le nom d'un ou plusieurs prix Nobel de physique ayant contribué au développement de ce domaine de recherche.

Ces techniques ne s'avèrent toutefois pas suffisantes pour atteindre l'échelle de température de E_R/k_B . Pour pousser plus loin le refroidissement, on utilise, après un pré-refroidissement par laser, le refroidissement par évaporation. Nous proposons dans cette section un modèle thermodynamique simple qui permet de comprendre l'intérêt de cette méthode.

Considérons un gaz dilué composé de N atomes de rubidium dans un potentiel harmonique isotrope à trois dimensions de pulsation angulaire ω

$$U(x, y, z) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

74 – Ce gaz est thermalisé à une température T . Donner l'expression de l'énergie totale E de ce gaz d'après le théorème d'équipartition de l'énergie.

75 – On considère que, pendant une durée courte dt , la profondeur du potentiel de confinement est amenée à une valeur finie égale à $\eta k_B T$ ($\eta \sim 6$). Cette diminution de la profondeur entraîne la perte des dN atomes ayant en moyenne une énergie totale $(\eta + \kappa)k_B T$ plus grande que cette profondeur. Un modèle cinétique plus précis permet de montrer que $\kappa \ll 1$. Calculer l'énergie totale $E - dE$ du gaz qui reste confiné juste après la perte de ces dN atomes et avant que la thermalisation ne se fasse.

76 – On suppose à présent que la profondeur est à nouveau infinie. Le gaz thermalise. Calculer la nouvelle température du gaz $T - dT$ en fonction de N , dN , T , η et κ .

77 – On itère cette succession d'évaporation et de rethermalisation un grand nombre de fois. Montrer que la relation liant la température initiale T_i , le nombre d'atomes N_i , la température finale T_f et le nombre d'atomes final N_f après un grand nombre de cycle est

$$\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = \left(\frac{N_f}{N_i}\right)^\alpha.$$

Exprimer α en fonction de η et κ .

78 – Estimer la valeur de α et interpréter physiquement le signe de cet exposant.

79 – Après refroidissement laser et une compression substantielle du confinement pour assurer un taux de collisions élevé, on mesure une température de typiquement $T_i = 200 \mu\text{K}$. Évaluer la température finale après évaporation de 99,9 % des atomes.

80 – Expliciter en fonction de N_f/N_i le facteur par lequel est diminué l'écart type de la distribution des vitesses des atomes du gaz.

81 – En abaissant la température du gaz qui reste confiné, on réalise de fait une opération qui diminue l'entropie. Expliquer pourquoi il n'y a pas de contradiction avec le second principe de la thermodynamique.

Mise en oeuvre expérimentale : lancement magnétique

Une fois le nuage froid obtenu, il est canalisé transversalement par un guide (similaire à celui étudié dans la partie suivante). Il s'agit de conférer au nuage d'atomes une vitesse donnée. Pour ce faire on exploite le fait que les atomes sont polarisés et disposent d'un moment magnétique permanent $\mu = \mu_B/2$ où μ_B est le magnéton de Bohr.

82 – Retrouver l'expression du magnéton de Bohr $\mu_B = e\hbar/(2m_e)$ par un raisonnement qualitatif.

83 – Citer une méthode expérimentale qui permet de polariser un ensemble d'atomes.

84 – On applique le long de l'axe du guide un gradient de champ magnétique $b = 0,3 \text{ T.m}^{-1}$ pendant un temps τ . Proposer une méthode pour réaliser un tel gradient. Est-il possible de ne réaliser un gradient de champ magnétique que dans une seule direction ?

85 – Estimer la valeur de τ pour laquelle un atome initialement au repos acquiert une vitesse de 7 mm.s^{-1} sous l'effet de l'impulsion du champ magnétique.

Diffusion sur un réseau en présence d'une enveloppe

En pratique, les faisceaux laser utilisés ne sont pas des ondes planes mais des faisceaux d'enveloppe gaussienne. Ils se croisent dans une chambre à vide où l'expérience est menée. Du fait de cette contrainte, l'ouverture numérique disponible pour amener ces faisceaux est relativement faible. Le potentiel vu par les atomes prend alors la forme,

$$U(x) = -\frac{U_0}{2} \exp\left(-\frac{2x^2}{w^2}\right) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right)\right).$$

La probabilité de transmission après diffusion sur un tel réseau optique est représentée sur la figure 7b.

86 – En considérant les contraintes expérimentales, comparer la valeur du col du faisceau w à celle du pas du réseau d (on rappelle que d est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ du laser).

87 – Expliquer l'origine physique des motifs de transmission en « dents de scie » visibles à basse vitesse $v \ll v_R$.

88 – Expliquer l'origine de zones de transmission pour différentes profondeurs dans la partie plus haute vitesse.

Pour les questions suivantes, on raisonnera sur le cas d'un paquet d'onde de vitesse de groupe v_g et d'écart type en vitesse Δv . On indiquera au besoin des exemples de valeurs numériques.

89 – Expliquer dans quelle mesure il est possible de réaliser grâce à ce dispositif un filtre en vitesse passe-bas.

90 – Expliquer dans quelle mesure il est possible de réaliser grâce à ce dispositif un filtre en vitesse passe-haut.

91 – Expliquer dans quelle mesure il est possible de réaliser grâce à ce dispositif un filtre en vitesse passe-bande.

92 – Proposer une autre méthode pour réaliser un filtre passe haut.

3 – Ondes de matière guidées

3.1. Gaz de Bose dans un potentiel harmonique isotrope

Dans ce paragraphe, nous établissons la condition d'existence d'un phénomène de condensation de Bose-Einstein à l'aide du concept de saturation des états individuels excités accessibles. Cette méthode nous permettra ensuite de traiter le cas de gaz d'atomes confinés.

93 – Comment sait-on si un atome est un boson ou un fermion ? L'atome d'hydrogène ^1H est-il un boson ? Qu'en est-il des deux isotopes de l'hélium ^3He et ^4He ?

Nous considérons ci-après un gaz de Bose dans un potentiel harmonique isotrope $U(x, y, z) = m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)/2$. L'hamiltonien associé à une particule s'écrit

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2). \quad (9)$$

94 – Les énergies propres de H s'écrivent

$$\varepsilon_{n_x, n_y, n_z} = \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \hbar \omega,$$

où n_x, n_y, n_z sont trois entiers positifs ou nuls. Commenter cette expression.

95 – Montrer que la dégénérescence $g(n)$ d'un niveau d'énergie $\varepsilon_n = \varepsilon_{0,0,0} + n\hbar\omega$ s'écrit :

$$g(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

96 – Pour un gaz de N bosons à l'équilibre thermodynamique à la température T , le nombre d'occupation du niveau microscopique $\{n\} = (n_x, n_y, n_z)$ d'énergie $\varepsilon_{n_x, n_y, n_z}$ est

$$\nu(\{n\}; T, \mu) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_{n_x, n_y, n_z} - \mu)/k_B T} - 1} \quad (10)$$

où μ est le potentiel chimique. Réécrire l'expression de $\nu(\{n\})$ à l'aide de la fugacité $\tilde{z}$ définie par $\tilde{z}^{-1} = e^{(\varepsilon_{0,0,0} - \mu)/k_B T}$.

97 – Déterminer l'expression de $N_0(T, \mu)$, nombre d'atomes dans l'état fondamental, en fonction de la fugacité $\tilde{z}$.

98 – Montrer que $0 < \tilde{z} < 1$.

99 – Que dire de la limite $\tilde{z} \ll 1$?

100 – La conservation du nombre total d'atomes s'écrit $N = N_0 + N'$ où N' correspond au nombre d'atomes dans les états excités et $N_0(T, \mu)$ à la population dans l'état fondamental. Exprimer N' à l'aide d'une série faisant apparaître $g(n)$.

101 – Pour calculer l'expression de N' , nous allons faire une approximation semiclassique qui consiste à remplacer la sommation discrète sur les niveaux d'énergie par une intégrale, et qui est valable pour $\tilde{x} = \hbar\omega/k_B T \ll 1$. Justifier la forme intégrale de $N'(T, \mu)$:

$$N'(T, \mu) = \int_0^\infty \frac{u^2}{2} \frac{1}{\tilde{z}^{-1} e^{u\tilde{x}} - 1} du. \quad (11)$$

Expliquer pourquoi la borne inférieure est prise égale à zéro.

102 – En déduire que

$$N'(T, \mu) = \frac{g_3(\tilde{z})}{\tilde{x}^3}. \quad (12)$$

103 – Donner la valeur $\tilde{z}^*$ de $\tilde{z}$ pour laquelle $g_3(\tilde{z})$ est maximum.

104 – En déduire la borne supérieure du nombre d'atomes dans les états excités

$$N'_{\max}(T) = \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_3(1).$$

105 – En déduire l'existence d'une température critique T_c en dessous de laquelle une fraction macroscopique d'atomes peuple l'état fondamental. Exprimer T_c en fonction de $\hbar, \omega, k_B, N$ et une constante numérique. On parle de saturation des états excités dans ce cas.

106 – Comparer les énergies $k_B T_c$ et $\hbar\omega$. Commenter.

107 – Montrer que pour $T < T_c$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3. \quad (13)$$

3.2. Gaz de Bose dans un confinement anisotrope

Nous considérons dans ce paragraphe un gaz de Bose confiné selon l'axe z par une boîte de taille L et confiné par un potentiel harmonique de fréquence angulaire ω selon les axes transverses x et y .

L'hamiltonien associé à une particule s'écrit désormais sous la forme $H = H_{\perp} + H_{\parallel}$ avec

$$H_{\perp} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) \quad \text{et} \quad H_{\parallel} = \frac{p_z^2}{2m}. \quad (14)$$

108 – Montrer que les énergies propres de H s'obtiennent comme la somme des énergies propres de $H_{\perp}$ et $H_{\parallel}$ pris séparément.

109 – Donner l'expression ε_{n_x, n_y} des niveaux d'énergie de $H_{\perp} = p_x^2/2m + p_y^2/2m + m\omega^2(x^2 + y^2)/2$. On introduira deux entiers positifs ou nuls n_x et n_y .

Pour obtenir l'expression des niveaux d'énergie dans la boîte selon l'axe z , nous devons déterminer les états stationnaires de l'équation de Schrödinger à une dimension en précisant les conditions aux limites choisies.

110 – Écrire l'équation de Schrödinger stationnaire associée à $H_{\parallel}$ pour une énergie $E_{\parallel} = \hbar^2 k^2/2m$. On notera $\psi_{\parallel}(z)$ la fonction d'onde correspondante.

111 – Nous supposons des conditions aux limites périodiques pour une boîte de longueur L entre $z = 0$ et $z = L$. On cherchera les fonctions propres sous la forme d'ondes planes

$$\psi_{\parallel}(z) = Ae^{ikz}.$$

Donner l'expression de A en fonction de L , et montrer que les états propres sont caractérisés par un ensemble discret infini de vecteurs d'ondes k_{n_z} .

112 – En déduire l'expression des énergies propres $\varepsilon(n_x, n_y, n_z)$ de H .

113 – On commence par considérer une situation purement unidimensionnelle pour laquelle $n_x = n_y = 0$.

(a) En utilisant la relation (10), Montrer que sous cette hypothèse, le nombre d'atomes dans les états excités du degré de liberté longitudinal (selon z) s'écrit sous la forme

$$N'(T, \mu) = \frac{L}{\lambda} g_{1/2}(\tilde{z})$$

où $\tilde{z}^{-1} = e^{(\hbar\omega - \mu)/k_B T}$ et $\lambda = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ est la longueur d'onde de de Broglie thermique. On utilisera la limite semiclassique pour laquelle

$$\sum_{\{n_z\}} (...) = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk (...).$$

(b) Déterminer, à température fixée, le domaine de variation de $N'(T, \mu)$ sur l'intervalle de variation de $\tilde{z}$.

(c) En déduire que, dans cette situation unidimensionnelle, le phénomène de condensation pour lequel une fraction macroscopique d'atomes peuple l'état fondamental en dessous d'une température critique ne peut se produire.

114 – On s'intéresse désormais au cas général pour lequel les valeurs de n_x et n_y ne sont pas prises égales à zéro. On introduit la quantité

$$N'_\perp(T, \mu) = \sum_{(n_x, n_y) \neq (0,0)} \sum_{n_z} \nu(\{n\}; T, \mu).$$

Donner la signification physique de cette quantité.

115 – Montrer que le nombre d'atomes N_p dans les états d'énergie transverse $\varepsilon_p = p\hbar\omega$ est donné par

$$N_p(T, \mu) = \frac{L}{\lambda} (p+1) g_{1/2} \left(\tilde{z} e^{-p\hbar\omega/k_B T} \right) \text{ avec } p = n_x + n_y.$$

116 – En déduire que

$$N'_\perp(T, \mu) = \frac{L}{\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\tilde{z}^p}{p^{1/2}} \left(\frac{1}{(1 - e^{-p\hbar\omega/k_B T})^2} - 1 \right).$$

117 – Montrer que la quantité $(\lambda/L)N'_\perp(T, \mu)$ est bornée par une expression indépendante de μ et qui varie quadratiquement avec la température.

On utilisera l'inégalité suivante

$$\frac{1}{(1 - e^{-y})^2} - 1 < \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}.$$

118 – Conclure sur le type de condensation susceptible de se produire dans ce système.

3.3. Mesures des dispersions de vitesse par temps de vol

Un gaz de Bose parfait dans une boîte à une dimension longitudinalement et confiné harmoniquement transversalement permet de modéliser une onde de matière guidée. Dans ce paragraphe, nous ne considérons qu'une seule dimension transverse afin de ne pas compliquer les raisonnements. La fréquence angulaire associée au confinement transverse est notée ω .

Pour caractériser les états transverses peuplés par le gaz, une méthode classique consiste à réaliser une expérience dite de « temps de vol » au cours de laquelle on observe l'évolution de la taille du gaz en fonction du temps après coupure du confinement transverse.

119 – Expliquer pourquoi, une fois le confinement coupé, la distribution des vitesses du gaz reste constante dans ce type d'expérience.

Cas d'un gaz quantique représenté par une fonction d'onde

Considérons tout d'abord le cas d'un gaz quantique à température nulle. Il est représenté par sa fonction d'onde macroscopique associée à l'état fondamental de la boîte longitudinale et du confinement transverse. On notera N le nombre d'atomes du gaz.

On rappelle l'expression de la fonction d'onde de l'état fondamental d'un oscillateur harmonique de pulsation angulaire ω à une dimension en représentation $\{|x\rangle\}$

$$\psi_0(x) = \langle x | \psi_0 \rangle = \mathcal{N}_0 e^{-x^2/(2a_0^2)},$$

où $a_0 = (\hbar/m\omega)^{1/2}$ est la longueur caractéristique de l'oscillateur harmonique et $\mathcal{N}_0$ le facteur de normalisation.

120 – On note $\Psi_0(x, z)$ la fonction d'onde associée au gaz avant suppression du confinement transverse. Exprimer $\Psi_0(x, z)$ à l'aide de la fonction dans l'état fondamental d'un oscillateur harmonique $\psi_0(x)$ et de L .

Pour décrire l'évolution de la fonction d'onde lorsque l'on coupe le confinement transverse, nous allons utiliser une approche dite en loi d'échelle. Pour ce faire nous procédons en deux étapes.

121 – Premièrement, nous utilisons les variables adimensionnées $\hat{t} = \omega t$, $\hat{x} = x/a_0$ avec $a_0 = (\hbar/m\omega)^{1/2}$ et $\hat{z} = z/L$. Montrer que, une fois le confinement coupé, la fonction d'onde $\hat{\Psi}(\hat{x}; \hat{t})$, exprimée en variables adimensionnées, obéit à l'équation différentielle

$$-2i \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \hat{x}^2}. \quad (15)$$

122 – Deuxièmement, montrer que la fonction d'onde $\hat{\Psi}$ de la forme

$$\hat{\Psi}(\hat{x}; \hat{t}) = \mathcal{N}(\hat{t}) \exp \left(\frac{i\beta \hat{x}^2}{2\beta} - \frac{\hat{x}^2}{2\beta^2} \right)$$

est une solution exacte de l'équation (15) si le coefficient de dilatation dépendant du temps $\beta(\hat{t})$ obéit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 \beta}{d\hat{t}^2} = \frac{1}{\beta^3}. \quad (16)$$

On ne cherchera pas à déterminer l'expression du facteur de normalisation $\mathcal{N}(\hat{t})$.

123 – Déterminer les conditions initiales vérifiées par le coefficient β et sa dérivée temporelle à $t = 0$, juste avant la suppression du confinement transverse.

124 – Montrer en résolvant l'équation différentielle (16) que $\beta(t) = (1 + \omega^2 t^2)^{1/2}$.

125 – Calculer la variance en position $\Delta x^2(t)$ au cours du temps de vol en fonction de la variance initiale Δx_0^2 , de t et de ω .

126 – Justifier que l'on parle d'un « effet loupe » induit par le temps de vol.

On rappelle que pour une distribution de probabilité centrée gaussienne, $P(x) = \mathcal{N} \exp(-x^2/(2\sigma^2))$ la variance vaut

$$\Delta x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x) dx = \sigma^2.$$

Le cas d'un gaz de Boltzmann

Considérons désormais que le gaz n'est pas condensé et est à suffisamment haute température pour suivre la statistique de Boltzmann.

Le gaz est caractérisé par une distribution transverse en position et vitesse $P_0(x_0, v_0) = P_x(x_0)P_v(v_0)$ avec

$$P_x(x_0) = \mathcal{N}_x e^{-m\omega^2 x_0^2/2k_B T} \quad \text{et} \quad P_v(v_0) = \mathcal{N}_v e^{-mv_0^2/2k_B T}.$$

et la normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_x(x_0) dx_0 = N \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} P_v(v_0) dv_0 = 1,$$

où N représente le nombre total d'atomes du gaz. Avec ces définitions, on trouve $\mathcal{N}_x = N(m\omega^2/2\pi k_B T)^{1/2}$ et $\mathcal{N}_v = (m/2\pi k_B T)^{1/2}$.

127 – Rappeler la définition de la variance de la distribution des vitesses à l'aide de P_v .

128 – Calculer la variance de cette distribution $(\Delta v_0)^2$ en fonction de k_B , T et m à l'aide du formulaire de début d'énoncé. Commenter ce résultat. À partir de quel théorème de physique statistique ce résultat peut-il s'obtenir ? En préciser les conditions d'application.

129 – Calculer l'expression de la variance de la distribution des positions initiales

$$(\Delta x_0)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_0^2 P_x(x_0) dx_0 \right) / \left(\int_{-\infty}^{\infty} P_x(x_0) dx_0 \right).$$

Commenter.

Après un vol libre de durée t , la distribution transverse s'écrit

$$P(x, v; t) = P_0(x - vt, v).$$

130 – Commenter cette expression.

131 – Calculer explicitement la densité linéique

$$n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dv P(x, v; t).$$

On donne la relation mathématique suivante

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(2a)} e^{-(x-u)^2/(2b)} dx = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{ab}{a+b}} e^{-u^2/(2(a+b))}.$$

132 – En déduire sans calcul et en vous appuyant sur les questions précédentes que $(\Delta x)^2(t) = (\Delta x_0)^2 + (\Delta v_0)^2 t^2$.

133 – Expliquer, à partir de ce résultat, comment une expérience de temps de vol permet de mesurer la température du gaz.

134 – Nous n'avons pas évoqué jusqu'à présent les collisions élastiques entre atomes. Pour autant, ce sont ces collisions qui permettent de converger vers la distribution de Boltzmann d'équilibre qui nous a servi de point de départ.

Soit γ le taux de collisions élastiques. Rappeler, à un facteur numérique près, son expression en fonction de la section efficace totale σ , de la densité atomique à 3 dimensions n et de la vitesse moyenne $\bar{v}$. Sous quelle condition relative aux deux échelles de temps γ^{-1} et ω^{-1} de ce problème les calculs précédents sont-ils valables ?

135 – Comparer les résultats du calcul quantique et du calcul classique sur l'évolution de $\Delta x(t)$ au cours du temps de vol. Commenter.

3.4. Caractère monomode ou multimode de l'onde de matière guidée

Le confinement transverse est modélisé par un oscillateur harmonique à une dimension dont l'Hamiltonien est la somme de deux termes, le terme cinétique $H_{\text{cin}} = p_x^2/2m$ et le terme d'énergie potentielle $H_{\text{pot}} = m\omega^2 x^2/2$: $H_{\perp} = H_{\text{cin}} + H_{\text{pot}}$.

On rappelle l'action des opérateurs a et $a^\dagger$ de l'algèbre de l'oscillateur harmonique à une dimension et leur action sur les états nombres : $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ et $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

On rappelle également l'expression des opérateurs impulsion p_x et position x en fonction des opérateurs a et $a^\dagger$, $p_x = (m\hbar\omega/2)^{1/2}i(a^\dagger - a)$ et $x = (\hbar/2m\omega)^{1/2}(a + a^\dagger)$.

136 – Établir l'expression de $H_\perp$ en fonction de l'opérateur nombre $\hat{n} = a^\dagger a$ et de $\hbar\omega$.

137 – Les états propres de $H_\perp$ sont les états propres de l'opérateur nombre $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$. Expliciter les énergies propres E_n .

138 – Montrer que $\langle n|p_x|n\rangle = 0$.

139 – L'état du système est représenté par une fonction d'onde $|\Psi\rangle$. Cette fonction d'onde se développe sur les états propres orthonormés de l'oscillateur harmonique

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle.$$

Calculer l'expression de la valeur moyenne $\langle n \rangle = \langle \Psi | \hat{n} | \Psi \rangle$ en fonction des coefficients c_n .

140 – Déterminer les conditions sur les corrélations entre états nombres de $|\Psi\rangle$ sous lesquelles l'égalité suivante est valable

$$\langle H_{\text{cin}} \rangle = \langle \Psi | H_{\text{cin}} | \Psi \rangle = \langle H_{\text{pot}} \rangle.$$

Commenter.

141 – Dans la mesure où l'on souhaite décrire un gaz quantique thermalisé, nous sommes amenés à prendre une moyenne thermique notée

$$\langle\langle A \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \langle n | A | n \rangle.$$

Commenter cette expression.

142 – Donner l'expression des π_n dans la limite d'une distribution thermique correspondant à un gaz non dégénéré, puis dans le cas général d'un gaz de Bose.

143 – La variance de la distribution des vitesses $(\Delta v)^2$ pour le gaz quantique thermalisé est donnée par

$$(\Delta v)^2 = \frac{\hbar\omega}{m} \left(\langle\langle n \rangle\rangle + \frac{1}{2} \right)$$

où $\langle\langle n \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n$. Commenter cette expression.

144 – Par quel type d'expériences peut-on mesurer $\langle\langle n \rangle\rangle$?

145 – Des expériences de ce type sur des lasers à atomes sont effectuées avec des atomes de rubidium de masse $1,45 \times 10^{-25}$ kg dans un confinement harmonique de pulsation angulaire $\omega/(2\pi) = 300$ Hz fourni par un laser puissant très désaccordé. On mesure l'écart type de la distribution des vitesses égale à $\Delta v = 0,9$ mm.s⁻¹. Estimer $\langle\langle n \rangle\rangle$.

146 – Ce type de mesure ne donne pas les populations dans les différents états nombres. Pour autant, on peut déduire une borne inférieure à la population $\pi_0 = |c_0|^2$ dans l'état fondamental. Montrer en effet que

$$\pi_0 \geq 1 - \langle\langle n \rangle\rangle.$$

Faire l'application numérique avec les valeurs de la question précédente. Peut-on parler dans ce cas d'un laser à atomes quasi-monomode transverse ?

- 147 – Proposer une analogie optique pour ce système.
- 148 – Préciser l'équivalent atomique de la polarisation de la lumière.
- 149 – Donner la dimension de l'espace associé à la polarisation dans les deux cas.