

**AGREGATION CONCOURS EXTERNE, problème de physique**  
**MICROMAGNETISME, corrections**

**Partie I. Magnétostatique dans la matière aimantée**

I.1. L'aimantation est le moment magnétique par unité de volume :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{M}}{dV}, \text{ unité : A/m, } \vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$$

I.2.  $rot\vec{H} = rot(\vec{H}_0 + \vec{H}_d) = \vec{j}_0 \Rightarrow rot\vec{H}_0 = \vec{j}_0$  et  $rot\vec{H}_d = \vec{0}$

D'autre part,  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_d = \mu_0(\vec{M} + \vec{H}_0 + \vec{H}_d)$  et comme  $div\vec{B} = div(\vec{B}_0 + \vec{B}_d) = \vec{0}$  et  $div\vec{B}_0 = div(\mu_0\vec{H}_0) = \vec{0}$ , on a  $div\vec{H}_d = -div\vec{M}$ .

I.3. Les relations  $rot\vec{H}_d = \vec{0}$  et  $div\vec{H}_d = -div\vec{M}$  sont analogues aux équations de l'électrostatique  $rot\vec{E} = \vec{0}$  et  $div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Le champ  $\vec{H}_d$  est donc analogue au champ  $\vec{E}$  et on peut écrire  $\rho_d = -div\vec{M}$

I.4. La conservation de la charge (électro neutralité) s'écrit :

$$\iiint_v \rho_d dV + \iint_S \sigma_d dS = 0 \Rightarrow \iiint_v -div\vec{M} dV = \iint_S -\vec{M} \cdot \vec{n} dS = - \iint_S \sigma_d dS$$

$$\Rightarrow \sigma_d = \vec{M} \cdot \vec{n}$$

I.5. Comme  $\vec{M} = ct\vec{e}$ ,  $\rho_d = 0$  et  $\sigma_d = \vec{M} \cdot \vec{n}$ , les charges magnétiques sont uniquement réparties sur la surface inférieure ( $\sigma_d = \vec{M} \cdot \vec{n} = -M$ ) et la surface supérieure ( $\sigma_d = \vec{M} \cdot \vec{n} = +M$ ) de la plaque mince. Ces dernières sont équivalentes aux armatures d'un condensateur plan. Comme  $\vec{H}_d = -gradV_d$ , le champ magnétique  $\vec{H}_d$  est dirigé des charges positives vers les charges négatives (du haut vers le bas) et pointe donc dans la direction opposée à celle de l'aimantation. Comme dans le condensateur, les relations  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H}_d + \vec{M})$  et  $div\vec{B} = \vec{0}$  conduisent à l'expression du champ démagnétisant  $\vec{H}_d = -\vec{M}$ . Comme  $\vec{H}_d$  est opposé à  $\vec{M}$ , on parle de champ dépolarisant. L'énergie du condensateur équivalent s'écrit  $e_d = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\sigma_d^2}{2\epsilon_0}$ . Par analogie ( $\sigma_d = \pm M$ ), la densité

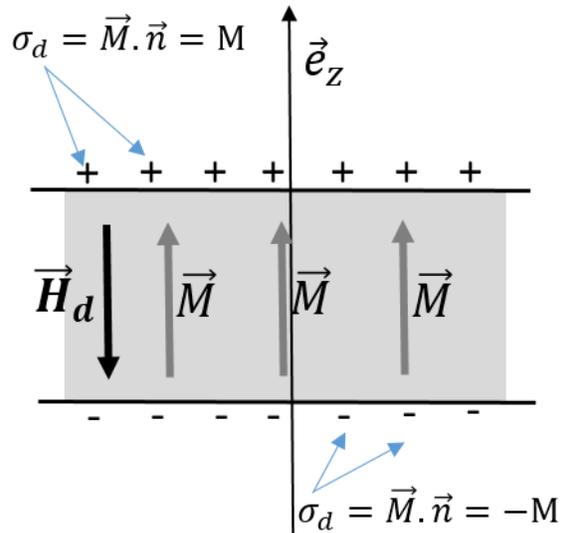


Fig. Equivalence entre un condensateur plan et une aimantation homogène dans une plaque mince infinie.

d'énergie magnétique s'écrit :  $e_d = \frac{\mu_0 M^2}{2}$ . Remarque. Le calcul direct de l'énergie magnétique donne  $e_d = -\frac{1}{2} \mu_0 \vec{M} \cdot \vec{H}_d = \frac{\mu_0 M^2}{2}$ .

I.6. La répartition en domaines correspond à des charges fictives opposées et donc à une charge du condensateur moins importante que celle correspondant à une aimantation uniforme.

I.7. Pour une aimantation inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à la direction normale au film  $\vec{e}_z$ , la densité de charge magnétique est donnée par  $\sigma_m (= \sigma_d) = \vec{M} \cdot \vec{e}_z = M \cos \theta$ . Comme  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H}_d + \vec{M})$  et  $\text{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{H}_d = -M \cos \theta \vec{e}_z$ , la densité d'énergie associée est  $e_d = -\frac{1}{2} \mu_0 \vec{M} \cdot \vec{H}_d = \frac{1}{2} \mu_0 M^2 \cos^2 \theta$ . L'énergie est minimum pour un alignement de l'aimantation dans le plan du film. Comme l'énergie varie avec la direction de l'aimantation par rapport à la normale au film, on peut parler d'anisotropie de forme.

Remarque pour la suite. L'énergie associée est nulle lorsque les charges disparaissent, c'est-à-dire pour une aimantation alignée dans le plan. La densité d'énergie associée  $e_d = -\frac{1}{2} \mu_0 \vec{M} \cdot \vec{H}_d = \frac{1}{2} \mu_0 M^2 \cos^2 \theta$ , est égale à  $-\frac{\mu_0}{2} M^2 \sin^2 \theta$  à une constante près, d'où en tenant compte de l'anisotropie uniaxiale, une anisotropie effective  $K_{eff} = K - \frac{\mu_0 M^2}{2}$ .

## Partie II. Aspects énergétiques et systèmes à aimantation uniforme

### A. Introduction

### B. Aspects énergétiques

II.1. C'est une interaction quantique entre spins voisins dont l'origine est l'antisymétrie des fonctions d'ondes des électrons imposée par le principe de Pauli.

II.2. L'énergie d'échange  $E_{ech}$  est minimum lorsque les gradients sont minima. L'échange favorise une aimantation uniforme.

II.3. Pour  $K > 0$ ,  $e_{ani}$  est minimum lorsque l'aimantation pointe dans la direction  $\vec{e}_z$  qui est l'axe de facile aimantation. Pour  $K < 0$ ,  $e_{ani}$  est minimum lorsque l'aimantation pointe dans une direction perpendiculaire à  $\vec{e}_z$ . Le plan  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  est le plan d'aimantation facile.

II.4. Le terme Zeeman favorise une aimantation dans la direction et le sens du champ magnétique appliqué.

II.5. La constante d'anisotropie est positive ( $K > 0$ ). Pour déplacer la paroi suivant la direction  $\vec{e}_y$ , il faut que le champ soit appliqué dans la même direction que l'aimantation du domaine clair.

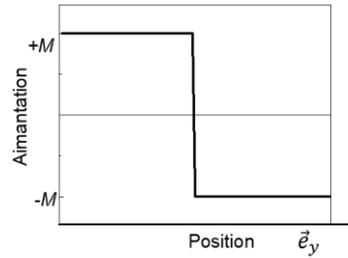


Fig. Profil de l'aimantation suivant la direction  $\vec{e}_y$  (coquille dans l'énoncé)

II.6. On envoie une lumière polarisée linéairement sur une surface aimantée, l'aimantation fait tourner le plan de polarisation de la lumière qui est réfléchi. Grâce à un analyseur, on peut mesurer l'angle de rotation du plan de polarisation qui est proportionnel au module de l'aimantation puis remonter à une mesure de l'aimantation.

### C. Longueurs caractéristiques

II.7. L'épaisseur d'une paroi de domaine varie comme  $\Delta \sim \sqrt{A/K}$  et la longueur d'échange comme  $L_e \sim \sqrt{\frac{A}{\mu_0 M^2}}$ .

II.8.  $\Delta$  et  $L_e$  sont respectivement les longueurs caractéristiques d'une paroi et d'un domaine. Pour  $R < \Delta$ , il n'est pas possible de former une paroi dans un échantillon. La contribution de l'échange (qui tend à augmenter la distance sur lesquels se produisent les variations de direction d'aimantation) domine la contribution de l'anisotropie (qui tend à réduire la distance sur lesquels se produisent les variations de direction d'aimantation). De manière similaire, pour  $R < L_e$ , il n'est pas possible de former un domaine dans un échantillon, l'aimantation peut être considérée comme uniforme. La contribution de l'échange domine la contribution de l'interaction dipolaire (qui tend à former des domaines les moins espacés possibles).

II.9.  $\Delta \sim \sqrt{A/K} \approx 6 - 7 \text{ nm}$  et  $L_e \sim \sqrt{\frac{A}{\mu_0 M^2}} \approx 3 - 4 \text{ nm}$

### D. Application du magnétisme aux disques durs magnétiques.

#### 1. Écriture d'une information

II.10. L'anisotropie uniaxiale ( $K > 0$ ) favorise un alignement de l'aimantation dans les directions  $+\vec{e}_z$  et  $-\vec{e}_z$ , qui sont énergétiquement équivalentes. L'anisotropie de forme favorise également un alignement suivant la direction de l'axe principal de l'ellipsoïde de révolution. Les directions  $+\vec{e}_z$  et  $-\vec{e}_z$  sont également dégénérées. Le champ magnétique appliqué favorise un alignement d'aimantation qui lui est parallèle.

II.11. Les contributions énergétiques sont les suivantes :  $E_{tot} = E_{ani} + E_{demag} + E_z$ , avec

$$E_{ani} = -KV \cos^2 \theta = -KV(1 - \sin^2 \theta),$$

$$\vec{M}_s = M_s \sin \theta \vec{e}_x + M_s \cos \theta \vec{e}_z \text{ et } \vec{H}_d = -N_d \vec{M}_s = -N_{\perp} M_s \sin \theta \vec{e}_x - N_{\parallel} M_s \cos \theta \vec{e}_z \Rightarrow$$

$$E_{demag} = -\frac{\mu_0}{2} \iiint_{Vol} \vec{M} \cdot \vec{H}_d dV = -\frac{\mu_0 V}{2} \vec{M}_s \cdot \vec{H}_d = \frac{\mu_0 V M_s^2}{2} (N_{\perp} \sin^2 \theta + N_{\parallel} \cos^2 \theta) = \frac{\mu_0 V M_s^2}{2} (N_{\parallel} + (N_{\perp} - N_{\parallel}) \sin^2 \theta) \text{ et}$$

$$E_z = -\mu_0 \iiint_{Vol} \vec{M} \cdot \vec{H}_a dV = -\mu_0 V \vec{M}_s \cdot \vec{H}_a = -\mu_0 V M_s H_a \cos(\beta - \theta).$$

Ainsi, on obtient  $e_{tot} = \frac{E_{tot}}{V} = -K + K \sin^2 \theta + \frac{\mu_0 M_s^2}{2} (N_{\parallel} + (N_{\perp} - N_{\parallel}) \sin^2 \theta) - \mu_0 M_s H_a \cos(\beta - \theta)$ ,

qui peut s'écrire sous la forme  $e_{tot} = e_0 + K_1 \sin^2 \theta - C_1 \cos(\beta - \theta)$ , avec

$$K_1 = K + \frac{\mu_0 M_s^2}{2} (N_{\perp} - N_{\parallel}) \quad C_1 = \mu_0 M_s H_a \quad \text{et} \quad e_0 = \frac{\mu_0 M_s^2}{2} N_{\parallel} - K.$$

II.12. Les équations précédentes deviennent

$$\frac{de_{tot}}{d\theta} = -C_1 \sin(\beta - \theta) + 2K_1 \sin \theta \cos \theta$$

Pour  $\beta = \pi$ , la condition  $\frac{de_{tot}}{d\theta} = -C_1 \sin \theta + 2K_1 \sin \theta \cos \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0$  ou  $\cos \theta = C_1/(2K_1)$ . On a donc trois solutions possibles :  $\theta = 0, \pi$  et  $\cos^{-1}[C_1/(2K_1)]$ .

L'analyse de la fonction  $e_{tot}$  montre que :

- pour  $H_a < H_K = \frac{2K_1}{\mu_0 M_s}$ ,  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  sont deux minima tels que  $e_{tot}(\theta = 0) > e_{tot}(\theta = \pi)$  séparés par un maximum à  $\theta(H_a) = \cos^{-1}[\mu_0 M_s H_a / (2K_1)]$ . La position  $\theta = 0$  est donc un état métastable.

- pour  $H_a > H_K = \frac{2K_1}{\mu_0 M_s}$ , les positions  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  sont respectivement un maximum et un minimum d'énergie.

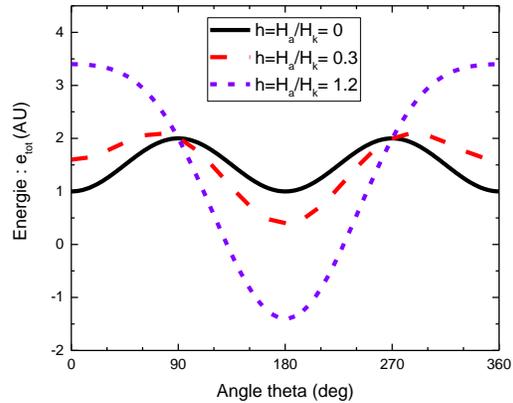
En conséquence, à température nulle, l'aimantation reste alignée suivant  $\theta = 0$  tant que  $H_a < H_K$  et elle se retourne ( $\theta = \pi$ ) dès que  $H_a > H_K$ .

II.13. En champ nul, l'énergie présente deux minima équivalents séparés par une barrière d'énergie. L'état  $\theta = 0$  est métastable pour  $0 < H_a < H_K$  et il devient instable pour  $H_a > H_K$ .

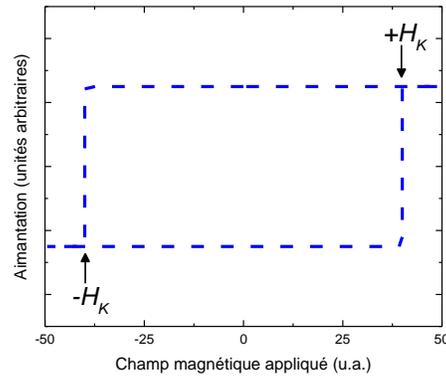
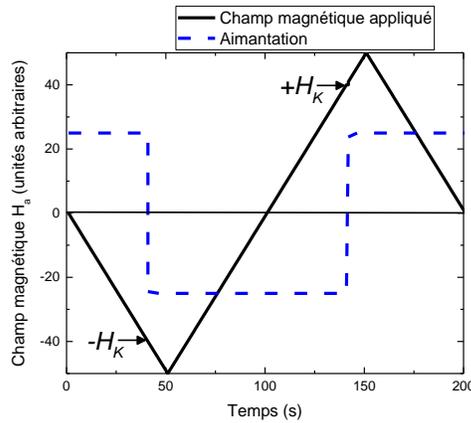
Fig. La fonction tracée est

$$e_{tot} = \frac{\mu_0 M_s^2}{2K_1} N_{\parallel} + \sin^2 \theta + 2h \cos \theta$$

avec  $\frac{\mu_0 M_s^2}{2K_1} N_{\parallel} = 1$  pour  $h = \frac{H_a}{H_K} = 0, 0.3$  et  $1.2$



II.14



Le phénomène s’appelle une hystérésis.

II.15. Pour FePt, dans « Wu\_review\_Hard\_disk\_drive” (slide 112) :  $K_1 = 7 \times 10^6 J/m^3$ ,  $M = 1140 kA/m$   
 $\mu_0 H_K = 2K_1/M = 2 \times 7 \times 10^6 / 1140 \times 10^3 = 12T$ . La valeur obtenue est très grande par rapport aux valeurs usuelles.

II.16. On utilise un électroaimant dont le noyau de fer doux est en forme de biseau pour augmenter le champ magnétique au voisinage du disque dur . L’écran P1 permet d’écarter les lignes de champ et donc de réduire le champ.

II.17. L’aimantation et le champ de retournement ( $\mu_0 H_K = 12T$  pour FePt à température ambiante) diminue lorsque la température s’approche de la température de Curie. Le champ magnétique nécessaire pour produire un retournement d’aimantation est donc plus petit.

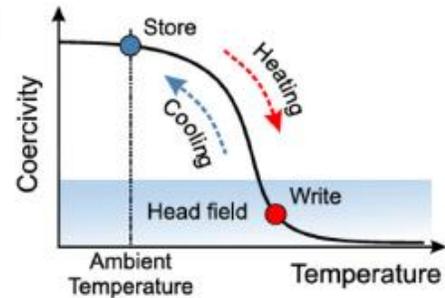


Fig.1.4 Variation en température du champ coercitif.

Source : D. Weller et al., J. Vac. Sci. Technol. B 34(6), 060801 (2016)

2. Lecture

II.18. Un capteur à magnétorésistance géante permet de mesurer des champs magnétiques comme par exemple un capteur à effet Hall. Il fonctionne de manière différente. Il est constitué d’une superposition de couches ultra-minces de matériaux ferromagnétiques dont les directions d’aimantation peuvent être modifiées par l’application d’un champ magnétique. La diffusion des électrons de conduction dans le plan des couches ou perpendiculairement aux couches dépend de l’orientation respective de leur spin et des moments magnétiques localisés. La résistance est plus faible lorsque les couches sont aimantées dans des

directions identiques. Elle est plus forte pour des orientations successivement antiparallèles de l'aimantation des couches.

### 3. Stabilité thermique

II.19. Avec  $K_1 \approx 7 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3$  et  $V \approx (10 \cdot 10^{-9})^3$ , on obtient  $K_1 V = 7 \cdot 10^{-18} \text{ J} \rightarrow 43 \text{ eV}$ . Comme cette barrière d'énergie est très supérieure à l'énergie d'activation thermique  $\sim 25 \text{ meV}$ , elle empêche le retournement spontané de l'aimantation.

II.20. Il s'agit de l'équation d'Arrhenius qui donne la probabilité de retournement d'aimantation par unité de temps.  $KV$  est la hauteur de barrière d'énergie à franchir pour que l'aimantation puisse se retourner,  $k_B T$  est l'énergie d'activation thermique et  $f_0$  est la fréquence d'essai. La direction d'aimantation est stable lorsque l'énergie d'anisotropie  $KV$  est grande devant l'énergie thermique ( $k_B T \approx 25 \text{ meV}$ , à température ambiante). L'énergie d'anisotropie diminue lorsque le volume diminue et la probabilité de retournement spontané de l'aimantation augmente.

Pour qu'une orientation d'aimantation soit stable pendant une durée  $\tau$  supérieure à 10 ans, ( $\tau = 10 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 3 \cdot 10^9 \text{ s}$ ), il faut que  $\frac{KV}{k_B T} > \ln(\tau f_0) = 40 - 47$ . C'est à dire  $r > r_c \approx \left(40 - 47 \frac{k_B T}{K}\right)^{\frac{1}{3}} = 3 - 4 \text{ nm}$ .

## Partie III. Statique des textures magnétiques

### A. Parois de domaines magnétiques

1. Structure et énergie d'une paroi de domaine magnétique.

III.1. Le système est invariant par translation suivant les directions  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_z$  et la normale à la paroi est alignée suivant la direction  $\vec{e}_y$ . Ainsi,  $\vec{M}$ ,  $\varphi$  et  $\theta$  sont indépendants de  $x$  et de  $z$ .

$$\begin{aligned} \text{III.2. } e_{ech} &= A \left[ (\nabla m_x)^2 + (\nabla m_y)^2 + (\nabla m_z)^2 \right] \\ &= A \left[ \left( \frac{d(\cos \varphi \sin \theta)}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d(\sin \varphi \sin \theta)}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d \cos \theta}{dy} \right)^2 \right] \\ &= A \left[ \left( -\sin \varphi \sin \theta \frac{d\varphi}{dy} + \cos \varphi \cos \theta \frac{d\theta}{dy} \right)^2 + \left( \cos \varphi \sin \theta \frac{d\varphi}{dy} + \sin \varphi \cos \theta \frac{d\theta}{dy} \right)^2 + \left( -\sin \theta \frac{d\theta}{dy} \right)^2 \right] \\ &= A \left[ \left( \sin \theta \frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\theta}{dy} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

III.3. On a  $e_{ani} = -K m_z^2 = -K \cos^2 \theta = K \sin^2 \theta - K$ . L'énergie est ainsi définie à une constante près, sans importance physique. On peut donc écrire

$$e = A \left[ \left( \sin \theta \frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\theta}{dy} \right)^2 \right] + K \sin^2 \theta$$

L'équilibre est atteint lorsque l'énergie totale de la paroi est minimum. C'est-à-dire que la somme des couples exercés sur l'ensemble des moments magnétiques de la paroi soit nul.

III.4. L'équilibre est atteint lorsque l'énergie totale par unité de surface de la paroi  $\sigma = \int e dy$  est stationnaire (minimal). Ces sont les équations d'Euler-Lagrange. Elles apparaissent dans le contexte de la mécanique Lagrangienne.

$$\text{III.5. } \frac{\delta e}{\delta \theta} = \frac{\partial e}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial e}{\partial \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)} \right] = 2A \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + 2K \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial}{\partial y} A \left[ 2 \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] \Rightarrow$$

$$\left[ K + A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \sin 2\theta - 2A \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\frac{\delta e}{\delta \varphi} = \frac{\partial e}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial e}{\partial \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)} \right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2A \sin^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \sin^2 \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta = 0$$

III.6. La seconde Eq. différentielle est vérifiée car  $\varphi(y) = \psi = \text{constante} \Rightarrow \frac{d\varphi(y)}{dy} = 0$ .

D'autre part, on a  $\frac{d\theta(y)}{dy} = \frac{\pm 2}{\Delta} \cdot \frac{\exp\left(\frac{y}{\Delta_0}\right)}{1 + \left[\exp\left(\frac{y}{\Delta_0}\right)\right]^2} = \frac{\pm 2}{\Delta} \frac{\tan\left(\pm \frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\pm \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\pm 2}{\Delta} \sin\left(\pm \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\pm \frac{\theta}{2}\right) = \pm \frac{\sin \theta}{\Delta}$ , avec  $\Delta =$

$\sqrt{A/K}$ . Seul le signe plus est compatible avec les conditions limites  $\theta(\pm\infty) = (\pi, 0)$ ,  $\frac{d\theta(y)}{dy} > 0$ .

Enfin,  $\frac{d^2 \theta}{dy^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\sin \theta}{\Delta} \right) = \frac{\cos \theta}{\Delta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{\Delta} \cdot \frac{\sin \theta}{\Delta} = \frac{\sin 2\theta}{2\Delta^2} = \frac{K \sin 2\theta}{A} \Rightarrow 2A \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - K \sin 2\theta = 0$ , ce qui correspond à la première Eq. différentielle avec  $\frac{d\varphi}{dy} = 0$ .

*Autre méthode* : on part de la première équation différentielle qu'on multiplie par  $\frac{d\theta}{dy}$ :

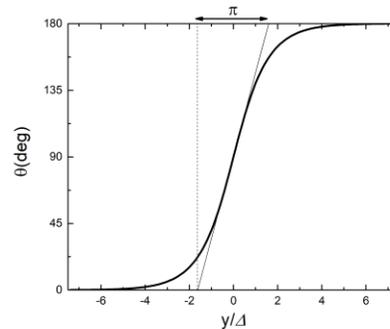
$K \sin 2\theta \frac{d\theta}{dy} - 2A \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \frac{d\theta}{dy} = 0 \Rightarrow K \frac{d}{dy} (\sin^2 \theta) = A \frac{d}{dy} \left( \frac{d\theta}{dy} \right)^2 \Rightarrow \sin^2 \theta = \Delta^2 \left( \frac{d\theta}{dy} \right)^2 + \text{cte}$  avec  $\Delta = \sqrt{A/K}$ . En prenant pour conditions limites  $\theta(\pm\infty) = (\pi, 0)$ , la constante s'annule et on obtient  $\frac{d\theta}{dy} = \pm \frac{\sin \theta}{\Delta}$ .

III.7. Avec  $\frac{d\theta}{dy} = \frac{\sin \theta}{\Delta}$  et  $\frac{d\varphi}{dy} = 0$ , la densité d'énergie  $e = A \left[ \left( \sin \theta \frac{d\varphi}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\theta}{dy} \right)^2 \right] + K \sin^2 \theta$  s'écrit

$e = A \left[ \left( \frac{\sin \theta}{\Delta} \right)^2 \right] + K \sin^2 \theta \Rightarrow e = 2K \sin^2 \theta$  (le facteur 2 indique que l'échange et l'anisotropie contribuent à parts égales à l'énergie de paroi.)

$$\sigma_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e dy = \int_0^\pi 2K \sin^2 \theta \frac{\Delta}{\sin \theta} d\theta \Rightarrow \sigma_0 = 4\sqrt{AK}.$$

III.8.  $\theta \left( \frac{y}{\Delta} \rightarrow -\infty \right) \rightarrow 0$ ;  $\theta \left( \frac{y}{\Delta} \rightarrow +\infty \right) \rightarrow 180^\circ$ ;  $\theta \left( \frac{y}{\Delta} = 0 \right) = 90^\circ$ . La variation de  $\theta$  s'effectue essentiellement sur la longueur réduite  $\frac{y}{\Delta} \approx \pi$ .



III.9.  $\Delta \approx 6nm$  et  $\sigma_0 \approx 12mJ/m^2$

III.10. Le retournement d'aimantation dans une paroi s'effectue sur une distance  $\pi\Delta(\approx 20nm)$  très inférieure à la limite de diffraction ( $\approx 1\mu m$ ). Il n'est donc pas possible de résoudre optiquement une paroi.

## 2. Contribution du champ démagnétisant

III.11.  $\sigma_d = \vec{M} \cdot \vec{e}_y = M \sin \theta \sin \psi$  ;  $\Rightarrow \vec{H}_d = -M \sin \theta \sin \psi \vec{e}_y$  et  $e_d = \frac{1}{2}\mu_0 M^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi$  ..

III.12.  $e_{ech} + e_d = K \sin^2 \theta + \frac{1}{2}\mu_0 M^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi = \left(K + \frac{1}{2}\mu_0 M^2 \sin^2 \psi\right) \sin^2 \theta = K_{eff} \sin^2 \theta$  qui donne  $K_{eff} = K + \frac{1}{2}\mu_0 M^2 \sin^2 \psi$  par identification. L'énergie de paroi, qui s'écrit alors  $\sigma = 4\sqrt{AK_{eff}}$ , est minimum pour  $\psi = 0$  ou  $\pi$  (paroi de type Bloch). Elle est maximum pour  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$  (paroi de type Néel).

## B. Domaines magnétiques

III.13. L'énergie totale de paroi ( $E_\sigma \sim \sigma \times \text{épaisseur du film} \times \text{longueur totale des parois}$ ) diminue lorsque la longueur des parois diminue. Elle serait donc minimum pour un seul domaine (grand et circulaire) fermé par une seule paroi. L'énergie de paroi tend donc à augmenter la taille et l'espacement de domaines.

L'énergie d'interaction dipolaire ( $E_d \sim \iiint \frac{\mu_0}{2} M^2 dV$ ) diminue lorsque la distance entre les domaines décroît. Elle est minimum lorsque la période des domaines tend vers zéro (car dans ce cas, l'aimantation moyenne tend vers zéro). L'énergie d'interaction dipolaire tend à diminuer la largeur et la période des domaines.

III.14. Le champ magnétique augmente la largeur des domaines dont l'aimantation pointe dans la même direction ( $E_z \sim - \iiint \frac{\mu_0}{2} \vec{M} \cdot \vec{H}_d dV$ ) et réduit la largeur des domaines d'aimantation opposée. Comme la largeur des domaines varie, la contribution des interactions dipolaires doit également modifier la période.

III.15.  $[\sigma] = E \cdot L^{-2}$ ,  $[\mu_0 M^2] = E \cdot L^{-3}$ ,  $[h] = L$  donc  $\lambda_c$  est sans dimension.

Dans la diagonale dont la longueur est  $\sqrt{120^2 + 95^2} \approx 150 \mu m$ , on compte  $15 \pm 2$  périodes. La période est donc d'environ  $10 \pm 3 \mu m$  et la période réduite  $p = 10 \pm 3 \mu m / 50nm = 200 \pm 60$ . D'après le graphe  $\lambda_c = 1,85 \pm 0,10$  ce qui conduit à  $\sigma = \lambda_c \mu_0 M_s^2 h = 180 \pm 0,15 \mu J/m^2$ .

$$\text{Car } \Delta\sigma = \sigma \sqrt{\left(\frac{0,10}{1,85}\right)^2 + \left(2 \frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{50}\right)^2} \approx 15 \mu J/m^2$$

## C. Nucléation du retournement d'aimantation

III.16. Pour les transitions de phase du premier ordre, l'état d'un système peut être métastable. Une barrière d'énergie s'oppose au changement de phase ce qui donne lieu à un phénomène de nucléation.

Exemples : transition liquide-solide, liquide-gaz sauf au point critique, transition entre l'état normal et l'état supraconducteur pour les supraconducteurs de type I.

III.17. L'énergie d'une bulle s'écrit  $E = A_1 r - A_2 r^2$ , avec  $A_1 = \sigma 2\pi h$  et  $A_2 = 2\mu_0 M H_a \pi h$ , où le premier terme (qui est positif) décrit l'augmentation de l'énergie de surface avec le rayon d'une bulle tandis que

le second terme (qui est négatif) correspond au gain en énergie associé au retournement d'aimantation dans le volume de la bulle .

$$\text{III.18. } \frac{dE}{dr} = \sigma \times 2\pi h - 4\mu_0 M H_a \pi r h = 0 \Rightarrow r = r_c = \frac{A_1}{2A_2} = \frac{\sigma}{2\mu_0 M H_a} \text{ d'où on déduit : } E(r_c) = \Delta E = \sigma \times 2\pi \frac{\sigma}{2\mu_0 M H_a} h - 2\mu_0 M H_a \pi \left(\frac{\sigma}{2\mu_0 M H_a}\right)^2 h \Rightarrow E(r_c) = \frac{A_1^2}{4A_2} = \frac{\pi \sigma^2 h}{2\mu_0 M H_a}$$

La fonction  $E(r)$  est nulle en  $r = 0$ , présente un maximum en  $r = r_c$  et devient négative pour  $r > \sigma/\mu_0 M H$ . L'état d'aimantation homogène ( $r = 0$ ) est donc un état métastable. La barrière d'énergie  $\Delta E = E(r_c)$  s'oppose au retournement spontané de l'aimantation et doit être franchie pour qu'une bulle soit nucléée.

III.19. L'énergie dipolaire s'écrit  $E_{dip} = \frac{\mu_0 M^2}{2} \left(1 + \frac{3r}{2h}\right) \pi r^2 h$  dont on peut déduire l'énergie de la bulle  $E = \sigma \times 2\pi r h - 2\mu_0 M H_a \pi r^2 h + \frac{3\mu_0 M^2}{4} \pi r^3$ . (Attention, le terme  $\frac{\mu_0 M^2}{2} \pi r^2 h$  de l'énergie dipolaire ne change pas avec la direction de l'aimantation dans la bulle et ne doit être pris en compte dans l'énergie totale de la bulle.) Pour un rayon suffisamment important, le terme  $\sigma \times 2\pi r h$  devient négligeable devant les deux autres. Le terme Zeeman ( $-2\mu_0 M H_a \pi r^2 h$ ) tend à augmenter le rayon de la bulle alors que le terme d'interaction dipolaire ( $\frac{3\mu_0 M^2}{4} \pi r^3$ ) tend à le réduire. La compétition entre ces deux termes conduit à un rayon de bulle à l'équilibre et donc le retournement complet de l'aimantation.

III.20. La probabilité de nucléation s'écrit :  $\frac{\Delta t}{\tau} = \frac{\Delta t}{\tau_0} e^{-\Delta E/k_B T}$ .

III.21.  $\tau = \tau_0 e^{\Delta E/k_B T}$  avec  $\Delta E = E(r_c) = \frac{\pi \sigma^2 h}{2\mu_0 M H_a}$  correspond à un champ de nucléation  $H_n = H_n$ .

$$E(r_c) = \Delta E = k_B T \ln\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) \text{ et } H_n = \frac{\pi \sigma^2 h}{2\mu_0 M k_B T \ln\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)}$$

$$\text{III.22. } \mu_0 H_n = \frac{\pi \sigma^2 h}{2M k_B T \ln\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)} = \frac{\pi(10 \cdot 10^{-3})^2 \times 0,6 \cdot 10^{-9}}{2 \times 1,1 \cdot 10^6 \times 1,38 \cdot 10^{-23} \times 293 \times \ln\left(\frac{100 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-9}}\right)} = \frac{0,6\pi}{2 \times 1,1 \times 1,38 \times 293 \times \ln(10^8)} 10^{-4-9-6+23}$$

$$\Rightarrow \mu_0 H_n = 1,3 \text{ Tesla}$$

Posons  $\sigma' = \epsilon \sigma$ . Comme  $\mu_0 H_n \propto \sigma^2$ ,  $\epsilon = \sqrt{20/1300} \Rightarrow \epsilon = 0,12$ .

## Partie IV. Dynamique de l'aimantation

### A. Introduction

1. Description classique de la dynamique d'aimantation, origine microscopique du rapport gyromagnétique.

IV.1. Le courant électrique est défini par  $i = \frac{dq}{dt}$  et s'écrit ici  $i = -\frac{e}{T} = -ef \Rightarrow i = -e \frac{\omega}{2\pi}$  Le moment magnétique est donné par magnétique  $\vec{\mu} = iS\vec{n} = i\pi r^2 \vec{n} \Rightarrow \vec{\mu} = -\frac{e}{2} r^2 \omega \vec{n}$ .

IV.2. Le moment cinétique s'écrit  $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \Rightarrow \vec{L} = mr^2 \omega \vec{n}$  (car  $v = r\omega$ ), l'égalité  $\vec{\mu} = -\gamma_e \vec{L}$  conduit au rapport gyromagnétique  $\gamma_e = \frac{e}{2m}$ .

$$IV.3. \gamma = \frac{g\mu_B}{\hbar} = \frac{2 \times 9,27 \cdot 10^{-24}}{1,05 \cdot 10^{-34}} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Hz} \cdot T^{-1}.$$

(Attention, une coquille dans l'énoncé : les moments cinétiques s'écrivent  $\hbar\vec{J}$ ,  $\hbar\vec{S}$ ,  $\hbar\vec{L}$  au lieu de  $\vec{J}$ ,  $\vec{S}$ ,  $\vec{L}$ , respectivement. Avec la coquille, on obtient  $\gamma = g\mu_B = 18,54 \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot T^{-1}$ , ou  $\gamma = g\gamma_e\hbar = 3,70 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot T^{-1}$ .)

IV.4. Le théorème du moment cinétique s'écrit  $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\Gamma}$ , avec  $\vec{\mu} = -\gamma\vec{J}$  et  $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \mu_0\vec{H}_{eff}$ .

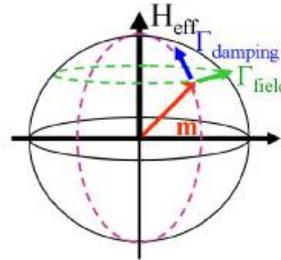
En posant  $\vec{M} = n_v\vec{\mu}$ , où  $n_v$  est le nombre d'atomes par unité de volume, on obtient  $\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma\vec{M} \wedge \mu_0\vec{H}_{eff}$

IV.5. L'aimantation précesse autour de la direction du champ effectif : l'extrémité du vecteur aimantation  $\vec{M}$  décrit un cercle autour du champ magnétique  $\mu_0\vec{H}_{eff}$ . L'énergie Zeeman par unité de volume  $e = -\mu_0\vec{H}_{eff} \cdot \vec{M}$  est conservée car  $\frac{d\vec{M}}{dt} \perp \vec{H}_{eff} \Rightarrow \frac{de}{dt} = -\mu_0 \frac{d\vec{M}}{dt} \cdot \vec{H}_{eff} = 0$ . Comme  $\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma\mu_0\vec{H}_{eff} \wedge \vec{M}$ , la pulsation de Larmor s'écrit  $\omega = \gamma\mu_0 H_{eff}$  et la fréquence de précession est  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\gamma\mu_0 H_{eff}}{2\pi} = \frac{1,76 \cdot 10^{11} \times 1}{2\pi} = 2,8 \cdot 10^{10} \Rightarrow f = 28 \text{ GHz}$ .

IV.6. On peut écrire  $\alpha\vec{M} \wedge \frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma\vec{M} \wedge \frac{-\alpha d\vec{M}}{\gamma dt} = -\gamma\vec{M} \wedge \mu_0\vec{H}_{dis} \Rightarrow \mu_0\vec{H}_{dis} = \frac{-\alpha d\vec{M}}{\gamma dt}$ .

Analogie avec le modèle de Drude dans lequel, on introduit de manière phénoménologique l'amortissement  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - m \frac{\vec{v}}{\tau}$  qui peut s'écrire  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{E}_{dis})$ , où  $\vec{E}_{dis} = -\frac{m}{q\tau} \frac{d\vec{v}}{dt}$  est un champ électrique s'opposant déplacement des charges électriques.

IV.7. le second terme de l'équation de LLG tend à aligner la direction de l'aimantation avec celle du champ magnétique effectif  $\vec{H}_{eff}$ .

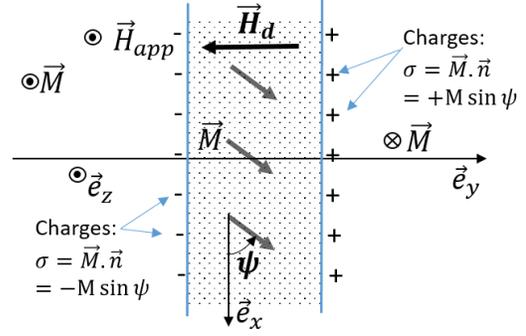


## B. Dynamique des parois magnétiques en l'absence de désordre

### 1. Approche qualitative

IV.8. Le champ magnétique  $\vec{H}_a$  exerce un couple sur l'aimantation  $\vec{\Gamma}_a = -\gamma\vec{M} \wedge \mu_0\vec{H}_a$  qui la fait tourner d'un angle  $\psi$  dans le sens trigonométrique à partir de la direction  $\vec{e}_x$ . Comme on a  $\sigma = \vec{M} \cdot \vec{n} = +M \sin \psi$  et  $\sigma = \vec{M} \cdot \vec{n} = -M \sin \psi$  respectivement sur les bords opposés de la paroi, le système est équivalent à un condensateur plan. Un champ magnétique  $\vec{H}_a$  est créé dans la direction

$-\vec{e}_y$ . L'utilisation du modèle des charges fictives et l'analogie avec un condensateur conduisent à  $\vec{H}_d = -M \sin \psi \vec{e}_y$ .



IV.9. Le couple exercé par  $\vec{H}_d$  s'écrit  $\vec{\Gamma}_d = -\gamma \vec{M} \wedge \mu_0 \vec{H}_d$  et pointe dans la direction  $+\vec{e}_z$ . Ce couple fait tourner l'aimantation suivant l'angle  $-\theta$  et tend à aligner l'aimantation dans la direction du champ extérieur  $\vec{H}_a$ . Cette rotation de l'aimantation produit un déplacement de la paroi dans la direction  $\vec{e}_y$ .

IV.10. Lorsque l'aimantation passe de la direction  $-\vec{e}_z$  à la direction  $+\vec{e}_z$ , le densité d'énergie de Zeeman passe de  $e_z = -\vec{M} \cdot \mu_0 \vec{H}_a = \mu_0 M H_a$ , à  $-\mu_0 M H_a$ . La variation de densité d'énergie est donc  $\Delta e_z = -2\mu_0 M H_a$ .  $\Delta e_z$  est une énergie par unité de volume et a donc la dimension d'une pression.

## 2. Approche quantitative

IV.11. Cette équation décrit la contribution de l'équation de LLG à la précession de l'aimantation au cours du mouvement. Le champ  $H_a$  exerce un couple sur l'aimantation produit une précession de l'aimantation. Le terme de gauche ( $M\dot{\psi}$ ) décrit la précession de l'aimantation au cours du mouvement. Le premier terme de droite ( $\sim \mu_0 M H_a$ ) est associé au couple exercé par le champ magnétique extérieur  $H_a$  sur l'aimantation. Le second terme de droite ( $\sim \frac{1}{2} \mu_0 \alpha M^2 \sin 2\psi$ ) est associé au couple exercé par le champ démagnétisant et s'oppose (signe -) au couple exercé par le champ  $H_a$ .

(Dans l'énoncé, le terme  $\frac{1}{2} \mu_0 M^2 \sin 2\psi$  doit être multiplié par  $\alpha$ .)

IV.12.  $\dot{\psi} = 0 \Rightarrow H_a = \frac{1}{2} \alpha M \sin 2\psi$ . L'angle  $\psi$  augmente avec le champ  $H_a$ .

Lorsque  $H_a > H_w = \frac{1}{2} \alpha M$ , l'équation différentielle indique que  $\dot{\psi} > 0$  est positif : l'aimantation précesse nécessairement.

IV.13. Pour  $\dot{\psi} = 0$ , la vitesse de déplacement de la paroi est constante  $\langle \dot{q} \rangle = \frac{\gamma \Delta_0}{\alpha} \mu_0 H_a$ .

IV.14.  $M\dot{q} = \frac{\Delta_0}{\alpha} \left( \gamma \mu_0 M H_a - \frac{1}{1+\alpha^2} \left( \gamma \mu_0 M H_a - \frac{1}{2} \gamma \alpha \mu_0 M^2 \sin 2\psi \right) \right) \Rightarrow M\dot{q} = \frac{\Delta_0 \gamma \mu_0 M}{\alpha} \left( \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} H_a + \left( \frac{1}{1+\alpha^2} \right) H_w \sin 2\psi \right)$ . Le terme  $H_a \left( \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \right)$  correspond à un mouvement de translation et le terme proportionnel à  $\sin 2\psi$  à une oscillation. Au cours de la précession,  $\sin 2\psi$  peut être négatif. En particulier pour  $H_a \gtrsim H_w$ , la vitesse minimale est  $\frac{\alpha^2 - 1}{1 + \alpha^2} \frac{\gamma \Delta_0}{\alpha} \mu_0 H_w < 0$  (obtenue pour le passage de  $\psi$  par  $\frac{3\pi}{4}$  [ $\pi$ ]) tandis que la vitesse maximale est proche de la vitesse prévue en régime stationnaire. La paroi ne

va pas plus vite et peut même reculer : il y a donc une nette réduction de la vitesse *moyenne* de la paroi.

Remarque : comme  $\dot{\psi} \neq \text{constante}$ , la moyenne temporelle de  $\sin 2\psi$  n'est pas nulle.

Remarque. Détails du calcul de la vitesse moyenne de la paroi (qui n'est pas demandé dans l'énoncé) : On

peut écrire  $\dot{\psi} = \frac{1}{1+\alpha^2} \left( \gamma\mu_0 H_a - \frac{1}{2} \gamma\alpha\mu_0 M \sin 2\psi \right)$ , sous la forme

$$\dot{\psi} = \omega(H_a) - \omega_c \sin 2\psi \text{ avec } \omega(H_a) = \frac{\gamma\mu_0 H_a}{1+\alpha^2} \text{ et } \omega_c = \frac{\gamma\alpha\mu_0 M}{2(1+\alpha^2)}.$$

La résolution de cette équation différentielle conduit à une période de précession  $T = \pi / \sqrt{\omega^2(H_a) - \omega_c^2}$ , ce qui conduit à  $\langle \dot{\psi} \rangle = \sqrt{\omega^2(H_a) - \omega_c^2}$ , pour  $\omega(H_a) > \omega_c$  et à  $\langle \dot{\psi} \rangle = 0$ , pour  $\omega(H_a) \leq \omega_c$ . Par suite, la vitesse moyenne est donnée par  $\langle \dot{q} \rangle = \frac{\Delta_0}{\alpha} (\gamma\mu_0 H_a - \langle \dot{\psi} \rangle) = \frac{\Delta_0}{\alpha} \left( \gamma\mu_0 H_a - \sqrt{\omega^2(H_a) - \omega_c^2} \right)$

$$\sqrt{\omega^2(H_a) - \omega_c^2} = \frac{\gamma\mu_0 \Delta_0}{\alpha} H_a \left( 1 - \frac{1}{1+\alpha^2} \sqrt{1 - \left( \frac{\frac{1}{2}\alpha\mu_0 M}{H_a} \right)^2} \right)$$

IV.15. Comme  $M\dot{q} = \frac{\Delta_0 \gamma \mu_0 M}{\alpha} \left( \frac{1}{1+\alpha^2} \right) (\alpha^2 H_a + H_w \sin 2\psi)$ , pour  $H_a \gg H_w$  on obtient  $\langle \dot{q} \rangle \rightarrow \frac{\gamma\alpha\Delta_0}{1+\alpha^2} \mu_0 H_a$

IV.16. Les prédictions théoriques délimitent les régimes suivants :

Pour  $\mu_0 H_a \leq \mu_0 H_w \approx 4,5mT$ , le régime est stationnaire .

Pour  $\mu_0 H_a \gtrsim \mu_0 H_w$  une diminution notable de la vitesse moyenne de parois associée à la précession de l'aimantation .

Pour  $\mu_0 H_a \gg \mu_0 H_w$ , on retrouve un régime precessionnel asymptotique .

Dans le régime stationnaire, on a  $\langle \dot{q} \rangle = \frac{\gamma\Delta_0}{\alpha} \mu_0 H_a$  : ici  $\frac{\langle \dot{q} \rangle}{\mu_0 H_a} = 2,11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{mT}^{-1} \Rightarrow \alpha = \frac{\gamma\Delta_0}{\langle \dot{q} \rangle} \mu_0 H_a = 1,76 \cdot 10^{11} \times \frac{2,5 \cdot 10^{-9}}{2,11 \cdot 10^3} \Rightarrow \alpha = 0,21$

IV.17. Le régime precessionnel asymptotique est bien décrit par le modèle. Pour le régime precessionnel, un creux de vitesse moyenne est observé vers  $50mT$  alors que le modèle prédit environ  $15mT$  . A faible champ magnétique, le régime stationnaire n'est pas observé. Les parois sont ancrées ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

### C. Contribution du désordre à la dynamique des parois

IV.18. Comme  $L'^2 = L^2 + u^2 \Rightarrow \Delta L = L' - L = \sqrt{L^2 + u^2} - L = L \sqrt{1 + \frac{u^2}{L^2}} - L \approx L \left( 1 + \frac{u^2}{2L^2} \right) - L = \frac{u^2}{2L'}$ ,

le premier terme peut donc s'écrire  $\delta F_{el} \approx \sigma_0 \Delta L h$ . Ce premier terme est associé à l'*allongement* élastique de la paroi. Le troisième terme correspond à l'énergie Zeeman par unité de volume qui est gagnée lorsqu'on retourne l'aimantation dans la direction du champ magnétique appliqué.  $hLu$  est le volume sur lequel l'aimantation est retournée lors de la déformation de la paroi.

IV.19.  $n_i \xi L$  est le nombre de sites interagissant avec le segment de longueur  $L$  . Lorsque  $L \gg \xi$ , le segment interagit avec un grand nombre de défauts et  $\sqrt{n_i \xi L}$  représente la fluctuation du nombre de centres d'ancrage.  $\delta F_{pin}$  décrit l'ancrage d'une ligne.

IV.20.  $\delta F_{pin}(\xi, L_c) = \delta F_z(\xi, L_c) \Rightarrow f_{pin} \xi \sqrt{n_i \xi L_c} = 2\mu_0 M H_c h L_c \xi \Rightarrow \mu_0 H_c = \frac{f_{pin}}{2Mh} \sqrt{\frac{n_i \xi}{L_c}}$ . Pour  $H_a < H_c$ , on a  $v = 0$  et  $v \neq 0$  pour  $H_a > H_c$ . D'après la figure de droite, le passage d'une vitesse nulle à une vitesse non-nulle produit pour  $\mu_0 H_c \approx 3mT$ .

IV.21.  $\delta F_{el}(\xi, L_c) = \delta F_{pin}(\xi, L_c) \Rightarrow \epsilon_{el} \frac{\xi^2}{L_c} = f_{pin} \xi \sqrt{n_i \xi L_c}$ , avec  $n_i \approx \xi^{-2} \Rightarrow L_c = \xi \left( \frac{\epsilon_{el}}{f_{pin}} \right)^{\frac{2}{3}}$ . Pour  $L < L_c$ , l'énergie élastique est dominante et la paroi ne peut pas se déformer suffisamment pour suivre le désordre d'ancrage aléatoire. Pour  $L > L_c$ , l'énergie d'ancrage est dominante. La paroi est rugueuse.

IV.22. Dans la partie linéaire de la courbe, la pente ( $= 2\zeta$ ) est comprise entre  $\frac{4,1-(-0,8)}{4-0}$  et  $\frac{4,2-(-1,2)}{4-0}$ . La valeur correspondante de  $\zeta = 0,61 - 0,67$  est en accord avec la prédiction théorique :  $\zeta = 2/3$ .

IV.23.  $\langle (u(x) - u(x+L))^2 \rangle \sim u_c^2 \left( \frac{L}{L_c} \right)^{2\zeta} \Rightarrow u(L) \sim cL^\zeta$

IV.24.  $\delta F_{el} = \epsilon_{el} \frac{u^2}{L} \sim \frac{L^{2\zeta}}{L} \Rightarrow \delta F_{el}(L) \approx c' L^{2\zeta-1}$

$\delta F_z = -\mu_0 M H_a h L u \sim -H_a L L^\zeta \Rightarrow \delta F_z = -c'' H_a L^{\zeta+1}$

IV.25.  $\frac{d\delta F(L)}{dL} = (2\zeta - 1) c' L^{2\zeta-2} - (\zeta + 1) c'' H_a L^\zeta = 0 \Rightarrow L_{opt} = \left( \frac{\zeta+1}{2\zeta-1} \frac{c''}{c'} H_a \right)^{\frac{1}{(-2+\zeta)}} \Rightarrow \delta F(L_{opt}) =$

$c' \left( \frac{\zeta+1}{2\zeta-1} \frac{c''}{c'} H_a \right)^{\frac{(2\zeta-1)}{(-2+\zeta)}} - c'' H_a \left( \frac{\zeta+1}{2\zeta-1} \frac{c''}{c'} H_a \right)^{\frac{(\zeta+1)}{(-2+\zeta)}} \Rightarrow \delta F(L_{opt}) = c''' H_a^{\frac{(2\zeta-1)}{(\zeta-2)}}$ . Par identification, on a  $\mu = -\frac{(2\zeta-1)}{(2-\zeta)}$ , ce qui conduit pour  $\zeta = 2/3$  à  $\mu = \frac{1}{4}$ . (Coquille énoncé :  $L_{opt}$  est la longueur qui maximise  $\delta F(L)$ .)

IV.26. L'activation thermique permet aux parois de franchir les barrières d'ancrage. La courbe de gauche décrit une loi du type  $\ln v \approx \ln v_0 - aH^{-\frac{1}{4}}$ , qui implique que  $\Delta E = \delta F(L_{opt}) = aH^{-1/4}$ , en accord avec la prédiction.